RİYAZİYYAT

II

Prof. Hüseyn Xəlilovun
redaktorluğu ilə

BAKI - 2021

Kitabı ilk hazırlayanlar:

Hüseyn Xəlilov, Rəşid Məmmədov, Musa Heydərov,
Bahadır İskəndərov, Şəmşəd Hüseynov

Kitabı yenidən çapa hazırlayanlar:

Hüseyn Xəlilov, Əli Cavadov,
Xanım Xudaverdiyeva, Fatma Cavadova,
Leyla Səmədova

Vəsait orta məktəblərin genişləndirilmiş riyaziyyat proqramına əsasən hazırlanmışdır. Burada orta məktəbin riyaziyyat kursunun ətraflı şəkildə verilməsi ilə yanaşı, riyaziyyat dərsliklərində nisbətən az işıqlandırılan bəzi mövzular da geniş şəkildə işıqlandırılmış və izah olunan materialın hər bölməsi sadədən mürəkkəbə doğru olmaqla, bir fəsildə verilmidir. Buna görə də, bəzən əvvəlki fəsildə sonrakı fəslə istinad olunur. Kitabda verilən nəzəri məlumatları möhkəmləndirmək üçün həll olunmuş çox saya məsələ və misallarla yanaşı, həm də sərbəst həll etmək üçün kifayət qədər çalışmalar və testlər verilmişdir.

Kitab, orta məktəblərin yuxarı sinif şagirdləri, müəllimləri, abitüriyentlər, riyaziyyat müəllimi hazırlayan universitetlərin “Elementar Riyaziyyat” fənni alan tələbələri, “Riyaziyyat” fənni alan qeyri texniki ixtisas tələbələri, eləcə də riyaziyyatı sərbəst öyrənənlər üçün nəzərdə tutulmuşdur.

BİR NEÇƏ SÖZ
(Üçüncü nəşr üçün)

Bilindiyi kimi hər bir ölkənin inkişaf səviyyəsi, onun texnologiyasına, texnologiyası elminin səviyyəsinə, elminin səviyyəsi də orta təhsilin səviyyəsinə bağlıdır. Orta təhsildə isə aparıcı rol əsasən riyaziyyatın payına düşür. Çünki, orta məktəbdə riyaziyyat şagirdlərə düşünməyi, fikir yürütməyi, nəticə çıxarmağı və çıxardığı nəticəni tətbiq etməyi öyrədərək onları həyata hazırlayır (Ali təhsil müəssisələrinə qəbul imtahanlarına hazırlıq isə sözü edilən həyata hazırlığın sadəcə bir parçasıdır. Ancaq təəssüflər olsun ki, çox vaxt sonuncu ön plana çıxarılır). Üstəlik riyaziyyatın meydana gəlməsi, insanların təbiətdə var olan prosesləri və baş verən hadisələri müşahidə edərək, onları əvvəlcə müəyyən işarələrin, daha sonra da düsturların köməyi ilə daş, lövhə, dəri, kağız və s üzərinə köçürərək, aralarındakı münasibətlərin araşdırılması və gərəkli ümumiləşdirmələrin aparılması, yəni bir növü sadə riyazi modellərin yaradılması ilə başlayır. Bir qayda olaraq bu araşdırmalarda əldə edilən nəticələr də ümumiyyətlə desək dəqiq olur. Bu səbəbdən də, düzgün ifadə edilmiş riyazi fikirlər və nəticələr heç zaman bir biriləri ilə ziddiyyət təşkil etmirlər. Üstəlik, ümumiyyətlə desək, riyaziyyatın nəticə olaraq söylədiyi təkliflər (teoremlər, düsturlar və s.) dəqiq olur və şərtlər dəyiştirilmədikcə dəyişməzlər.

Riyaziyyatın yuxarıda göstərilən xüsusiyyətlərini diqqətə alaraq, keçən əsrin 70-inci illərində, böyük alim və müəllim mərhum professor Rəşid Məmmədovun rəhbərliyi ilə, abituriyentlər və o zamanlar ali məktəblərdə mövcud olan Hazırlıq Şöbələrinin dinləyiciləril üçün öyrədici bir Riyaziyyat kitabının hazırlanmasına başlandı. Azərbaycan SSR Təhsil Nazirliyi tərəfindən təsdiq olunan Riyaziyyat kirabınn I hissəsi 1976-cı ildə çap olundu və böyük maraqla qarşılandı (Maarif Nəşriyyatı, 30000 tirajla). II hissə (Riyazi Analizin elementləri və Həndəsə) 1990-cı ildə çap olundu (Universitet Nəşriyyatı, 30000 tirajla). I hissə 1993-cü ildə təkrar çap olundu (Universitet Nəşriyyatı, 30000 tirajla).

Aradan uzun illər keçməsinə baxmayaraq, yuxarıda sözü edilən kitabların həm öyrədicilik və düşündürücülük, həm də içindəkilərin seçimi baxımından, müasir qəbul imtahanlarının və orta məktəblərin riyaziyyat proqramlarına uyğun olduğunu (bəzi istisnalar xaric) nəzərə alaraq, həm yaşlı nəsil, həm də gənc nəsil müəllimlərdən ibarət olan bir qrupla, sözü edilən kitabların yenidən çapa hazırlanmasına qərar verdik (Bu, həm də dünyasını dəyişmis çox hörmətil və dəyərli müəllif yoldaşlarım-dostlaım prof. Rəşid Məmmədov, dos. Musa Heydərov, dos. Bahadır İskəndərov və dos. Şəmşəd Hüseynovun əziz xatirəsinə bir töhvədir). Bunun üçün müasir qəbul və dərs proqramlarını nəzərə alaraq, 1993-cü il (I hissə) və 1990-cı il (II hissə) çaplarına lazım olan əlavələr və düzəlişlər edilmiş, misallarda, çalışmalarda və cavablarda olan texniki xatalar düzəldilmişdir. Ayrıca, bütün fəsillərə normal və açıq testlər əlavə olunmuşdur.

Burada testlərlə əlaqədar olaraq bəzi qeydlərə ehtiyac olduğu düşüncəsindəyik. Müasir şəraitdə qəbul imtahanlarının Test üsulu ilə aparılması qaçınılmazlığı aydındır. Lakin qapalı test dediyimiz və beş dənə cavab seçənəyi olan testlərin, riyaziyyatın əsas məqsədinin, yəni gənclərimizin həyata hazırlanmasının yerinə yetirilməsi üçün heç bir faydası yoxdur deyilə bilər. Çünki ki, insanların həyatda qarşılaşdığı heç bir problemin yanında beş dənə seçənəkli cavab açarı olmur və problem də düşünülərək həll olunur. Deməli, bu cür testlər gənclərimizi həm də düşünərək, fikir yürüdüb, nəticə çıxarmaqdan uzaqlaşdırır. Odur ki, gələcəkdə açıq testlər deyilən və göstərilməyən cavabları həll olunaraq və ya düşünülərək tapılan testlərə keçilməsi daha uyğundur. Üstəlik, sualların sayını azaldıb, düşündürücü suallara üstünlük verilməlidir. Bundan başqa, qənaətimizə görə qapalı testlər yalnız IX və XI sinif şagirtləri üçün tətbiq olunmalıdır. Çünki bu siniflər buraxılış imtahanları verirlər. Qalan heç bir sinifdə qapalı testlərdən istifadə olunmamalıdır. Bunun əvəzinə məntiqə əsaslanan riyaziyyat öyrədilməli və lazım gəldikdə açıq testlərdən istifadə edilməldir.

Yuxarıda adı çəkilən kitablar haqqında fikirlərini, münasibətlərini və iradlarını medya vasitəsilə, məktublarla, eləcə də ayrı ayrı söhbətlər zamanı bildirmiş olan hər kəsə, eləcə də bu kitabın kompüterdə yazılmasına və şəkillərinin çəkilməsinə görə Rauf Abaslı və Tamer Közləməyə öz səmimi təşəkkürlərimizi ifadə etməyi bir şərəf borcu hesab edirik.

Kitabdan istifadəni asanlaşdırmaq, eləcə də təkrarçılıqdan qaçmaq üçün teoremlərin isbatının başlanğıcı və sonu uyğun olaraq, □ və ■ işarələri, misal və məsələlərin həllinin başlanğıcı ○ , sonu isə ● işarəsi ilə göstərilmişdir.

Öyrədici və düşündürücü olduğundan əmin olduğumuz əlinizdəki kitabın, orta məktəblərin yuxarı sinif şagirdləri, müəllimləri, abitüriyentlər, riyaziyyat müəllimi hazırlayan universitetlərin "Elementar Riyaziyyat" fənni alan tələbələri, "Riyaziyyat" fənni alan qeyri texniki ixtisas tələbələri, eləcə də riyaziyyatı sərbəst öyrənənlər üçün faydalı olacağı düşüncəsilə.

Professor Hüseyn Xəlilov

KİTABDAKILAR

Məlumat üçün əsas düsturlar..14

II HİSSƏ

I Fəsil. Ədədi ardıcıllıq və onun limiti

§ 1. Ədədi ardıcıllıq haqqında anlayış 20

§ 2. Ardıcıllığın növləri 22

§ 3. Ardıcıllığın limiti.. .25

§ 4. Ardıcıllığın limiti haqqında teoremlər 30

§ 5. Ardıcıllığın limitinə aid misallar 32

§ 6. Sonsuz azalan həndəsi silsilə və onun hədləri cəmi 35

Çalışmalar 37

Testlər...38

II Fəsil. Funksiyanın limiti və kəsilməzliyi

§ 7. Ətraf anlayışı və toplama nöqtəsi 40

§ 8. Funksiya limitinin tərifi 43

§ 9. İkinci görkəmli limit, *e* ədədi 51

§ 10. Funksiyanın kəsilməzliyi 54

§ 11. Mürəkkəb funksiya və onun kəsilməzliyi 57

§ 12. Əsas elementar funksiyaların kəsilməzliyi 58

§ 13. Funksiya limitinin hesablanmasına aid misallar 60

Çalışmalar..65

Testlər...67

III Fəsil. Törəmə

§ 14. Törəmə anlayışına gətirən məsələlər 69

§ 15. Funksiyanın törəməsi...71

§ 16. Törəmənin fiziki və həndəsi mənası. Toxunan düz xəttin tənliyi 74
§ 17. Cəmin, hasilin və kəsrin törəməsi 76
§ 18. Əsas elementar funksiyaların törəməsi 79
§ 19. Mürəkkəb funksiyanın törəməsi 88
Çalışmalar 92
Testlər...94
IV Fəsil. Törəmənin köməyi ilə funksiyanın araşdırılması
§ 20. Funksiyanın sabitlik əlaməti..96
§ 21.Funksiyanın artma və azalması...97
§ 22. Funksiyanın ekstremumu 100
§ 23. Ekstremumun varlığı üçün kafi şərt 103
§ 24. Funksiyanın parçada ən böyük və ən kiçik qiymətinin tapılması 106
§ 25. Funksiya araşdırılması və qrafikinin qurulması 110
Çalışmalar 117
Testlər 119
V Fəsil. Qeyri-müəyyən inteqral
§ 26. İbtidai funksiya və onun xassələri 120
§ 27. Qeyri-müəyyən inteqral və onun xassələri 121
§ 28. Əsas inteqrallar cədvəli 124
§ 29. Qeyri-müəyyən inteqralın hesablanma üsulları.....................................127
Çalışmalar 134
Testlər...136
VI Fəsil. Müəyyən inteqral və onun tətbiqləri
§ 29. Müəyyən inteqral anlayışına gətirən məsələlər 137
§ 30. Müəyyən inteqralın tərifi və sadə xassələri 141
§ 31. Müəyyən inteqralın hesablanması. Nyuton-Leybnis düsturu 147

§ 32. Müəyyən inteqralın hesablanma üsulları 149
§ 33. Müəyyən inteqralın həndəsəyə tətbiqi 157
§ 34. Müəyyən inteqralın fizika məsələlərinə tətbiqi 166
Çalışmalar 168
Testlər...170

PLANİMETRİYA

VII Fəsil. Həndəsi fiqurlar və onların xassələri. Əsas anlayışlar

§ 35. İlk anlayışlar. Həndəsi fiqur 173
§ 36. Bucağın növləri 181
§ 37. Bucaqların dərəcə ölçüsü. Mərkəzi bucaq 183
§ 38. Riyazi təkliflər haqqında 184
Çalışmalar...... 198
Testlər...200

VIII Fəsil. Üçbucaqlar

§ 39. Çoxbucaqlı haqqında anlayış. Çoxbucaqlının perimetri 201
§ 40. Üçbucaq və onun elementləri 203
§ 41. Üçbucağın növləri. Üçbucaq bərabərsizliyi 205
§ 42. Düz xətlərin perpendikulyarlığı. Perpendikulyarın əsas xassəsi 208
§ 43. Bərabəryanlı üçbucağın xassəsi 210
§ 44. Üçbucaqların bərabərlik əlamətləri 211
§ 45. Düzbucaqlı üçbucaqların bərabərlik əlamətləri.....................................216
Çalışmalar...219
Testlər...221

IX Fəsil. Paralel düz xətlər

§ 46. Paralel düz xətt anlayışı. İki düz xəttin üçüncü düz xətlə kəsişməsindən alınan bucaqlar...223

§ 47. Düz xətlərin paralellik əlamətləri 225
§ 48. Üçbucağın daxili bucaqlarının cəmi 232
§ 49. Üçbucağın xarici bucağının xassəsi 233
§ 50. Düz bucaqlı üçbucaqda 30^0-li bucaq qarşısında duran katetin xassəsi....236
§ 51. Düz xəttə perpendikulyar və mail. Düz xətt parçasının proyeksiyası 237
§ 52. Üçbucağın tərəfləri və bucaqların arasındakı münasibətlər 239
§ 53. Perpendikulyar və mailin xassələri 240
§ 54. Düz xətt parçasının ortasından qaldırılmış perpendikulyarın xassəsi 243
§ 55. Uyğun tərəfləri paralel və perpendikulyar bucaqlar 244
§ 56. Qabarıq çoxbucaqlının daxili və xarici bucaqlarının cəmi 248
Çalışmalar 249
Testlər..251

X Fəsil. Dördbucaqlılar. Daxilə və xaricə çəkilmiş çoxbucaqlılar
§ 57. Paraleloqram və onun xassələri 253
§ 58. Paraleloqramın əlamətləri 255
§ 59. Paraleloqramın xüsusi növləri 257
§ 60. Fales teoremi...262
§ 61. Üçbucağın orta xətti və onun xassəsi 263
§ 62. Trapesiya. Trapesiyanın orta xətti və onun xassəsi 265
§ 63. Düz xətlə çevrənin qarşılıqlı vəziyyəti 269
§ 64. İki çevrənin qarşılıqlı vəziyyəti...271
§ 65. Çevrə ilə bağlı olan bucaqlar...273
§ 66. Çevrə daxilinə və xaricinə çəkilmiş üçbucaqlar 280
§ 67. Çevrə daxilinə və xaricinə çəkilmiş dördbucaqlılar 284
§ 68. Üçbucağın medianlarının xassəsi 286
Çalışmalar 288

Testlər..293

XI Fəsil. Fiqurların çevrilməsi. Oxşar fiqurlar

§ 69. Fiqurların çevrilməsi, mərkəzi simmetriya 295
§ 70. Düz xəttə nəzərən simmetriya. Simmetrik fiqurlar 298
§ 71. Hərəkət və onun xassələri...300
§ 72. Paralel köçürmə və onun xassələri 302
§ 73. Fiqurların dönməsi 302
§ 74. Homotetiya...304
§ 75. Fiqurların oxşarlığı. Mütənasib parçalar 307
§ 76. Üçbucaqların oxşarlıq əlamətləri 310
§ 77. Oxşar üçbucaqlar 315
§ 78. Üçbucağın daxili və xarici bucağının tənböləninin xassəsi 318
§ 79. Düzbucaqlı üçbucaqda metrik münasibətlər. Pifaqor teoremi 320
§ 80. Dairədə metrik münasibətlər 324
Çalışmalar 327
Testlər 331

XII Fəsil. Üçbucaqların həlli

§ 81. İti bucağın triqonometrik funksiyaları 333
§ 82. Bəzi bucaqların triqonometrik funksiyalarının qiymətləri 338
§ 83. Düzbucaqlı üçbucaqların həlli...340
§ 84. Sinuslar teoremi...342
§ 85. Kosinuslar eoremi..344
§ 86. Üçbucaqların həlli..350
§ 87. Düzgün çoxbucaqlılar..354
§ 88. Düzgün çoxbucaqlıların tərəfinin orta xaricinə və daxilinə çəkilmiş

çevrələrin radiusları vasitəsilə ifadəsi 356
§ 89. Üçbucaqların həllinə aid bəzi məsələlər 360
Çalışmalar...368
Testlər 372
XIII Fəsil. Qurma məsələləri
§ 90. Əsas qurma məsələləri.. 374
§ 91. Qurma məsələləri həllinin ümumi sxemi 377
§ 92. Həndəsi yerlər üsulu...379
§ 93. Qurma məsələlərinin həllinə nümunələr 380
Çalışmalar...384
XIV Fəsil. Fiqurların sahələri
§ 94. Sahə anlayışı..385
§ 95. Sahələrin paletka ilə ölçülməsi 386
§ 96. Düzbucaqlının və paraleloqramın sahəsi 387
§ 97. Üçbucağın sahəsi 390
§ 98. Trapesiyanın sahəsi.. 399
§ 99. İxtiyari dördbucaqlının sahəsi 402
§ 100. İxtiyari çoxbucaqlının sahəsi...404
§ 101. Oxşar fiqurların sahələri nisbəti 405
§ 102. Çevrənin uzunluğu...408
§ 103. Dairənin sahəsi..414
Çalışmalar...417
Testlər..419
XV Fəsil. Vektorlar
§ 104. Vektor anlayışı...420
§ 105. Vektorlar üzərində əməllər və onların xassələri 422

§ 106. Vektorun ox üzərində proyeksiyası və iki vektor arasındakı bucaq 428
§ 107. Vektorun proyeksiyasının xassələri 430
§ 108. Vektorların xətti asılılığı. Müstəvidə bazis 433
§ 109. Fəzada vektorun bazis üzrə ayrılışı 438
§ 110. Koordinatları ilə verilmiş vektorlar üzərində xətti əməllər 440
§ 111. Skalyar hasil və onunla bağlı məsələlər 441
§ 112. Skalyar hasilin tətbiqləri 448
§ 113. Çevrə 457
Çalışmalar...461
Testlər...463
XVI Fəsil. Düz xətt və müstəvi
§ 114. Stereometriyanın aksiomları və onlardan çıxan nəticələr 465
§ 115. Düz xətlərin və düz xətlə müstəvinin qarşılıqlı vəziyyəti 468
§ 116. Paralel düz xətlər haqqında teoremlər 471
§ 117. Müstəvilərin qarşılıqlı vəziyyəti 472
§ 118. Düz xətlərlə müstəvilərin perpendikulyarlığı 475
§ 119. Mail və onun müstəvi üzərindəki proyeksiyası 477
§ 120. Düz xətlə müstəvi arasındakı bucaq 480
§ 121. Üç perpendikulyar teoremi...482
§ 122. Müstəvilər arasında qalan bucaq 484
Çalışmalar............................. 487
Testlər...489
XVII Fəsil. Çoxüzlülər
§ 123. Çoxüzlü bucaqlar və onların xassələri 491
§ 124. Çoxüzlü anlayışı 495
§ 125. Prizma...496

§ 126. Paralelepiped..498
§ 127. Piramida 502
§ 128. Piramidada paralel kəsiklərin xassələri 504
§ 129. Prizmanın səthinin sahəsi...508
§ 130. Piramidanın səthinin sahəsi..510
§ 131. Həcm anlayışı...512
§ 132.Düzbucaqlı paralelepipedin həcmi 514
§ 133. Mail paralelepipedin həcmi...516
§ 134. Prizmanın həcmi...517
§ 135. Piramidanın həcmi.......... 519
§ 136. Kəsik piramidanın həcmi 521
Çalışmalar 523
Testlər 525
XVIII Fəsil. Fırlanma cisimləri
§ 137. Fırlanma səthi...526
§ 138. Silindr, konus və kəsik konusun səthi.. 529
§ 139. Silindr, konus və kəsik konusun açılışı...534
§ 140. Sfera və kürə...536
§ 141. Sferaya toxunan müstəvi..538
§ 142. Slindr, konus və kəsik konusun həcmi 539
§ 143. Kürə və onun hissələrinin həcmi 542
§ 144. Sfera və onun hissələrinin səthi 544
Çalışmalar..545
Testlər...546
Müxtəlif məsələlər..548
Çalışmaların cavabları.. 559

Məlumat üçün əsas düsturlar

1. Limit

1) Birinci görkəmli limit:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1.$$

2) İkinci görkəmli limit:

1. $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e;$ 2. $\lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^{x}=e.$

2. Törəmə

1) Törəmə qaydaları ($u=u(x)$, $v=v(x)$).

1. $(u\pm v)'=u'\pm v'$; 2. $(uv)'=u'v\pm uv$; 3. $\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'v-uv'}{v^2}$.

2) Törəmələr cədvəli $(u=u(x))$.

1. $y=u^{\alpha}$	$y'_x=\alpha u^{\alpha-1}\cdot u$
2. $y=a^{u}, a\in R, a>0, a\neq 1$	$y'_x=a^{u}\ln a\cdot u$
3. $y=e^{u}$	$y'_x=e^{u}\cdot u'$
4. $y=\log_a u, a\in R, a>0, a\neq 1$	$y'_x=\frac{I}{u}\log_a e\cdot u'=\frac{u'}{u\ln a}$
5. $y=\ln u$	$y'_x=\frac{u'}{u}$
6. y=sin$u$	$y'_x=\cos u\cdot u'$
7. y=cos u	$y'_x=-\sin u\cdot u'$
8. y=tg u	$y'_x=\frac{u'}{\cos^2 u}$
9. y=ctg u	$y'_x=\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$
10. y=arc sin u	$y'_x=\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$

11. y=arc cos *u*	$y'_x = -\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$
12. y=arc tg *u*	$y_x' = \frac{u'}{1+u^2}$
13. y=arc ctg *u*	$y_x' = -\frac{u'}{1+u^2}$

3. İnteqral

1) İnteqrallar cədvəli:

1. $\int x^a\,dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} + c (a \neq -1);$

2. $\int \frac{dx}{x} = lnx + c;$

3. $\int cos\,x\,dx = sin\,x + c;$

4. $\int cos\,x\,dx = sin\,x + c;$

5. $\int sin\,x\,dx = -cos\,x + c;$

6. $\int \frac{dx}{cos^2 x} = tgx + c;$

7. $\int \frac{dx}{sin^2 x} = -ctgx + c;$

8. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = arcsin\frac{x}{a} + c = -arccos\frac{x}{a} + c;$

9. $\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a}arctg\frac{x}{a} + c = -\frac{1}{a}arcctg\frac{x}{a} + c.$

2) Nyuton- Leybnis düsturu:

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a),$$

3) Sahələrin hesablanması:

$S = \int_a^b f(x)\,dx;$ $\qquad$ $S = \int_a^b [f(x) - \phi(x)]\,dx.$

4) Fırlanmadan alınan cismin həcmi

$$v = \pi \int_a^b f^2(x)dx.$$

4. Planimetriya

1) İxtiyari üçbucaq (a, b, c – tərəflər: α, β, γ - bunlar qarşısındakı bucaqlar, P-yarımperimetr, R, r uyğun olaraq xaricə və daxilə çəkilmiş çevrələrin radiusu, S-sahə; h_a, a-tərəfinə çəkilmiş hündürlük):

1. $S = \frac{1}{2} a h_a;$ 2. $S = \frac{1}{2} bc \sin\alpha;$

3. $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)};$ 4. $S = rp;$

5. $S = \frac{abc}{4R};$ 6. $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$

7. $\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2R.$

2) Düzbucaqlı üçbucaq (a, b – katetlər, c- hipotenuz, a_c, b_c- katetlərin hipotenuz üzərində proyeksiyaları) :

1. $S = \frac{1}{2} ab;$ 2. $S = \frac{1}{2} c h_c;$

3. $h_c = \frac{ab}{c};$ 4. $R = \frac{c}{2};$

5. $a^2 + b^2 = c^2;$ 6. $h_c^2 = a_c b_c;$

7. $\frac{a_c}{a} = \frac{a}{c}.$ 8. $\frac{b_c}{b} = \frac{b}{c}.$

3) Bərabər tərəfli üçbucaq:

1) $S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4};$ 2) $r = \frac{a\sqrt{3}}{6};$ 3) $R = \frac{a\sqrt{3}}{3}.$

4) İxtiyari qabarıq dördbucaqlı (d_1 və d_2-diaqonallar; ϕ –onlar arasındakı bucaq, S- sahə);

$$S = \frac{1}{2} d_1 d_2 \sin\phi.$$

5) Paraleloqram (a və b-qonşu tərəflər, α –onlar arasındakı bucaq, h_a-a tərəfinə çəkilmiş hündürlük):

$$S = ah_a = ab\sin\alpha = \frac{1}{2}d_1 d_2 \sin\phi.$$

6) Romb:

$$S = ah_a = a^2 \sin\alpha = \frac{1}{2}d_1 d_2.$$

7) Düzbucaqlı:

$$S = ab = \frac{1}{2}d_1 d_2 \sin\phi.$$

8) Kvadrat:

$$S = a^2 = \frac{d^2}{2}.$$

9) Trapesiya (*a* və *b* – oturacaqlar, *h* – hündürlük, *l*- orta xətt) :

1. $l = \frac{a+b}{2}$; 2. $S = \frac{a+b}{2} \cdot h = l \cdot h.$

10) Xaricə çəkilmiş çoxbucaqlı (*p*-yarımperimetr, *r*-daxilə çəkilmiş çevrənin radiusu):

$$S = r \cdot p$$

11) Düzgün çoxbucaqlı (*a*-düzgün *n*- bucaqların tərəfləri, *R*-xaricə, *r*-daxilə çəkilmiş çevrənin radiusu):

1. $a_3 = R \cdot \sqrt{3}$; $a_4 = R\sqrt{2}$; $a_6 = R$; 2. $S = \frac{P_n r}{2} = \frac{n a_n r}{2}.$

12) Çevrə, dairə (*r*-radius; *C*-çevrənin uzunluğu; *S*-sahə) :

1. $C = 2\pi r$; 2. $S = \pi r^2.$

13) Sektor, seqment (*l*-qövsün uzunluğu, n^o-mərkəzi bucağın dərəcə ölçüsü; *a*-mərkəzi bucağın radian ölçüsü, S_Δ –təpə bucağı mərkəzi bucaq olan bərabəryanlı üçbucağın sahəsi):

1. $l = \frac{\pi r n^o}{180^o} = r \cdot a$; 2. $S_{sekt.} = \frac{\pi r^2 n^o}{360^o} = \frac{1}{2}r^2 \cdot \alpha$;

3. $S_{seqm.} = \frac{\pi R^2 \cdot n^o}{360^o} - S_\Delta.$

5. Stereometriya

1) İxtiyari prizma (l-yan til; P-oturacağın perimetri; H-hündürlük; $P_{kəs.}$-perpendikulyar kəsiyin perimetri; $S_{yan.}$-yan səthinin sahəsi; V-həcm):

1. $S_{yan}=P_{kəs}\cdot l;$ 2. $V=SH.$

2) Düz prizma:

$$S_{yan}=Pl.$$

3) Düzbucaqlı paralelepiped (a, b, c-onun ölçüləri; d-diaqonal):

1. $S_{yan}=PH;$ 2. $V=abc;$ 3. $d^2=a^2+b^2+c^2;$

4) Kub (a-til);

1. $V=a^3;$ 2. $d=a\sqrt{3}.$

5) İxtiyari piramida (S_{ot}-oturacağın sahəsi; H-hündürlük; V-həcm):

$$V=\frac{1}{3}S_{ot}\cdot H,$$

6) Düzgün piramida (P-oturacağın perimetri; l-apofem; S_{yan}-yan səthin sahəsi, S_{tam}-tam səthin sahəsi);

1. $S_{yan}=\frac{1}{2}Pl;$ 2. $S_{tam}=S_{yan}+S_{ot};$ 3. $V=\frac{1}{3}SH.$

7) İxtiyari kəsik piramida (S_1 və S_2 oturacaqların sahəsi; H-hündürlük, V-həcm):

$$V=\frac{1}{3}H(S_1+S_2+\sqrt{S_1S_2}).$$

8) Düzgün kəsik piramida (P_1 və P_2-oturacaqların perimetri; l-apofemi; S_{yan}-yan səthinin sahəsi):

1. $S_{yan}=\frac{1}{2}(P_1+P_2)l:$ 2. $S_{Tam}=S_{yan}+S_1+S_2;$

3. $V=\frac{1}{3}H(S_1+S_2+\sqrt{S_1S_2}).$

9) Silindr (R-oturacağın radiusu; H-hündürlük; S_{yan}-yan səthin sahəsi; V-həcm):

1. $S_{yan} = 2\pi RH$;   2.$S_{Tam} = S_{yan} + 2S_{ot}$;   3.$V = \pi R^2 H$.

10) Konus (*R*-radius; *H*-hündürlük; S_{yan}-yan səthin sahəsi; *V*-həcm):

1. $S_{yan} = \pi Rl$;   2.$S_{Tam} = S_{yan} + S_{ot}$;   3.$V = \frac{1}{3}\pi R^2 H$.

11) Kürə (*R*-kürənin radiusu; *S*-səthin sahəsi; *V*-həcm):

1. $S = 4\pi R^2$;   2. $V = \frac{4}{3}\pi R^3$.

12) Kürə seqmenti (*R*-kürənin radiusu; *h*-seqmentin hündürlüyü; *S*-seqmentin sferik səthinin sahəsi; *V*-həcm):

1. $S = 2\pi Rh$;   2. $V = \pi h^2 (R - \frac{1}{3}h)$.

13) Kürə sektoru (*R*-kürənin radiusu; *h*-seqmentin hündürlüyü; *V*-həcm):

$$V = \frac{2}{3}\pi R^2 h.$$

I FƏSİL
ƏDƏDİ ARDICILLIQ VƏ ONUN LİMİTİ
§ 1. ƏDƏDİ ARDICILLIQ HAQQINDA ANLAYIŞ

Aşağıdakı şəkildə düzülmüş ədədlər çoxluğuna baxaq:

$$1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ n-1,\ n,\ \ldots \qquad (1)$$

$$1,\ 3,\ 5,\ \ldots,\ 2n-1,\ 2n+1,\ \ldots \qquad (2)$$

Bu çoxluqlardan hər birində, hər bir ədədə onun tutduğu yerə uyğun nömrə verək. Məsələn, (1) çoxluğunda 3 ədədinin nömrəsi 3, (2) çoxluğunda isə 3 ədədinin nömrəsi 2-dir. Tərsinə, (1) çoxluğunda üç nömrəli ədəd 3, (2) çoxluğunda isə üç nömrəli ədəd 5-dir. Ümumiyyətlə (1) çoxluğunda n nömrəli ədəd n, (2) çoxluğuna isə $2n-1$-dir.

Deməli, (1) və (2) çoxluqlarında hər bir ədədin müəyyən nömrəsi var və həmin ədəd öz nömrəsi ilə tamamilə təyin olunur.

Tərif. Natural ədədlərlə nömrələnmiş ədədlər çoxluğuna *ardıcıllıq*, həmin ədədlərə isə *ardıcıllığın hədləri* deyilir və

$$a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n,\ \ldots\ \textit{və ya}\ \{a_n\} \qquad (3)$$

kimi işarə olunur. Burada a_1-ə ardıcıllığın 1-ci, a_2-yə ikinci və s. a_n-ə isə n-ci və ya *ümumi həddi* deyilir. Ardıcıllığın ümumi həddini ifadə edən bərabərliyə, ardıcıllığın *ümumi həddinin düsturu* deyilir.

Birrəqəmli ədədlərin və natural ədədlərin kvadratlarından düzəldilmiş ədədi ardıcıllıqları nəzərdən keçirək:

$$1,\ 4,\ 9,\ 16,\ 25,\ 36,\ 49,\ 64,\ 81 \qquad (4)$$

$$1,\ 4,\ 9,\ 16,\ 25,\ \ldots,\ n^2,\ (n+1)^2,\ \ldots \qquad (5)$$

Hər iki ardıcıllığın ümumi həddinin düsturu $a_n = n^2$ şəklindədir. Lakin n nömrəsi, (4) ardıcıllığı üçün 1, 2, . . . , 9 qiymətlərini, (5) ardıcıllığı üçün isə 1, 2, 3 və s. kimi sonsuz sayda qiymətlər alır. Bu qiymətləri uyğun olaraq $n = \overline{1,9}$ və $n = \overline{1,\infty}$ kimi işarə edirlər.

Göründüyü kimi (4) ardıcıllığının 9 həddi, (5) ardıcıllığının isə sonsuz sayda həddi var.

Hədlərinin sayı sonlu olan ardıcıllığa *sonlu ardıcıllıq*, hədlərinin sayı sonlu olmayan ardıcıllığa isə *sonsuz ardıcıllıq* deyilir. Biz, ardıcıllıq dedikdə, sonsuz ardıcıllıqları başa düşəcəyik.

Aydındır ki, n-ə qiymətlər verməklə ümumi həddən ardıcıllığın bütün hədlərini almaq olar. Məsələn, ümumi həddi

$$a_n = \frac{2n}{2n+1}$$

olan ardıcıllığın hədləri $a_1 = \frac{2}{3}$, $a_2 = \frac{4}{5}$, $a_3 = \frac{6}{7}$ və s. olur və ardıcıllıq açıq şəkildə

$$\frac{2}{3}, \frac{4}{5}, \frac{6}{7}, \ldots, \frac{2n}{2n+1}, \ldots$$

şəklində yazıla bilir.

Yuxarıda deyilənlərdən aydındır ki, ardıcıllığı ümumi həddin düsturu vasitəsilə yazmaq daha əlverişlidir: $\{a_n\}$. Məsələn, ümumi həddi n^2-1, $(n-1)n$, $(-1)^n$, $(1+(-1)^n)n$, $\frac{n}{(n+1)(n+2)}$, 3^{n-1}, 1^n olan ardıcıllıqları yazaq:

1. $\{n^2-1\}$, yəni $0, 3, 8, \ldots, n^2-1, \ldots$
2. $\{(n-1)n\}$, yəni $0, 1\cdot2, 2\cdot3, \ldots, (n-1)\,n, \ldots$
3. $\{(-1)^n\}$, yəni $-1, 1, -1, \ldots, (-1)^n, \ldots$
4. $\{[1+(-1)^n]n\}$, yəni $0, 4, 0, \ldots, [1+(-1)^n]n, \ldots$
5. $\left\{\frac{n}{(n+1)(n+2)}\right\}$, yəni $\frac{1}{2\cdot3}, \frac{2}{3\cdot4}, \ldots, \frac{n}{(n+1)(n+2)}, \ldots$
6. $\{3^{n-1}\}$, yəni $1, 3, 3^2, \ldots, 3^{n-1}, \ldots$
7. $\{1^n\}$, yəni $1, 1, 1. \ldots, 1, \ldots$

Ola bilər ki, ardıcıllığın ümumi həddi özündən qabaqki hədlərin köməyi ilə verilmiş olsun. Belə ardıcıllıqlara misal olaraq *ədədi* və *həndəsi silsiləni*, eləcə də *Fibonaççi ədədlər ardıcıllığını* göstərmək olar. Belə ki, birinci həddi a_1 və hədlər fərqi d olan ədədi silsilənin ümumi həddi $a_n=a_{n-1}+d$ ($n\geq2$) kimi, birinci həddi b_1, ortaq vuruğu q olan həndəsi silsilənin ümumi həddi $b_n=b_{n-1}\cdot q$ ($n\geq2$) kimi, Fibonaççi ədədlər ardıcıllığının ümumi həddi isə $a_n=a_{n-1}+a_{n-2}$ ($n>2$, $a_1=a_2=1$) kimi verilir. Fibonaççi ardıcıllığının açıq şəkli

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, \ldots, a_n, \ldots$$

kimidir.

§ 2. ARDICILLIĞIN NÖVLƏRİ

Tərifdən göründüyü kimi, hər bir ardıcıllığa natural arqumentli funksiya kimi baxmaq olar. Məsələn, $\{a_n\} = \left\{\frac{n+1}{n(n+2)}\right\}$ ardıcıllığına təyin oblastı natural ədədlər çoxluğu olan $f(n) = \frac{n+1}{n(n+2)}$ funksiyasının qiymətlər çoxluğu, $b_n = \left\{\frac{1+(-1)^n}{n(n+1)}\right\}$ ardıcıllığına isə təyin oblastı natural ədədlər çoxluğu olan $\varphi(n) = \frac{1+(-1)^n}{n(n+1)}$ funksiyasının qiymətlər çoxluğu və s. kimi baxmaq olar. Ona görə də funksiyaların bütün xassələri, o cümlədən monotonluq və məhdudluq xassələri ardıcıllıqlara da köçürülür.

Tutaq ki, $\{a_n\}$ ardıcıllığı verilmişdir.

Tərif 1. Ardıcıllığın bütün hədləri üçün

a) $a_{n+1} > a_n$ bərabərsizliyi ödənildikdə ona *artan,*

b) $a_{n+1} < a_n$ bərabərsizliyi ödənildikdə ona *azalan.*

v) $a_{n+1} \ge a_n$ ($a_{n+1} \le a_n$) bərabərsizliyi ödənildikdə isə *azalmayan (artmayan) ardıcıllıq* deyilir.

Artan, azalan, azalmayan və artmayan ardıcıllıqlara birlikdə *monoton ardıcıllıqlar* deyilir. Məsələn,

$$\frac{1}{1\cdot 2}, \frac{1}{2\cdot 3}, \frac{1}{3\cdot 4}, \ldots, \frac{1}{n(n+1)}, \ldots$$

$$1, 2, 4, \ldots, 2^{n-1}, \ldots$$

$$1, 1, 2, 3, 3, \ldots . 2n-1, 2n-1, 2n, \ldots$$

ardıcıllıqlarının hər üçü monotondur (birinci azalan ikinci artan, üçüncü isə azalmayandır.)

Bütün elementləri eyni olan ardıcıllığa *stasionar* və ya *sabit ardıcıllıq* deyilir.

Məsələn, $\{0\}$, yəni 0, 0, 0, . . . , 0, . . . və $\{a\}$, yəni $a, a, a, \ldots, a, \ldots$ ardıcıllıqları stasionar ardıcıllıqlardır. Aydındır ki, stasionar ardıcıllıqlara artmayan, eləcə də azalmayan ardıcıllıq kimi də baxmaq olar.

Qeyd edək ki, bütün ədədi ardıcıllıqların monoton olduğunu söyləmək olmaz. Məsələn, ümumi həddi $a_n = \frac{(-1)^n}{n(n+1)}$ olan

$$-\frac{1}{1\cdot 2}, \frac{1}{2\cdot 3}, -\frac{1}{3\cdot 4}, \ldots, \frac{(-1)^n}{n(n+1)}, \ \ldots$$

ardıcıllığı monoton ardıcıllıq deyil. Belə ardıcıllıqlara *rəqs edən ardıcıllıqlar* deyilir.

Misallar.

1. Ümumi həddi $a_n = \frac{n}{n^2+1}$ olan ardıcıllığın azalan olduğunu göstərin.

○ Ardıcıllığın azalan olduğunu göstərmək üçün bütün n-lər üçün $a_{n+1} < a_n$ *yəni,* $a_{n+1} - a_n < 0$ olduğunu göstərmək lazımdır. $a_{n+1} = \frac{n+1}{(n+1)^2+1}$ olduğundan

$$a_{n+1} - a_n = \frac{n+1}{(n+1)^2+1} - \frac{n}{n^2+1} = \frac{n^3+n^2+n+1-n^3-2n^2-2n}{(n^2+1)(n^2+2n+2)} =$$

$$= -\frac{n^2+n-1}{(n^2+1)(n^2+2n+2)} < 0 \quad (n \geq 1)$$

olur. ●

2. Ümumi həddi $a_n = \frac{n^2}{n+1}$ olan ardıcıllığın artan olduğunu göstərin.

○ İsbat üçün $a_{n+1} - a_n > 0$ ($n \geq 1$) olduğunu göstərək.

$a_{n+1} = \frac{(n+1)^2}{n+2}$ olduğundan

$$a_{n+1}-a_n=\frac{(n+1)^2}{n+2}-\frac{n^2}{n+1}=\frac{n^3+3n^2+3n+1-n^3-2n^2}{(n+1)(n+2)}=$$
$$\frac{n^2+3n+1}{(n+1)(n+2)}>0$$
olur. ●

Tərif 2. Ardıcıllığının bütün hədləri, müəyyən bir sabit A ədədindən böyük deyilsə, yəni $a_n \le A$ ($n=\overline{1,\infty}$) isə, ona *yuxarıdan məhdud ardıcıllıq*, kiçik deyilsə yəni $a_n \ge A$ ($n=\overline{1,\infty}$) isə, ona *aşağıdan məhdud ardıcıllıq* deyilir.

Tərif 3. Eyni zamanda həm yuxarıdan, həm də aşağıdan məhdud olan ardıcıllıqlara *məhdud ardıcıllıq* deyilir.

Tutaq ki, $\{a_n\}$ardıcıllığı aşağıdan, A ədədi ilə, yuxarıdan isə B ədədi ilə məhduddur, yəni bütün n-lər üçün
$$A \le a_n \le B$$
münasibəti doğrudur. A və B ədədlərinin mütləq qiymətlərinin ən böyüyünü M ilə işarə etsək, onda bütün n-lər üçün $-M \le a_n \le M$ yaza bilərik. Odur ki, məhdud ardıcıllığa belə də tərif vermək olar.

Tərif 4. $\{a_n\}$ ardıcıllığının bütün hədləri mütləq qiymətcə eyni bir M > 0 ədədindən böyük deyilsə, onda ona *məhdud ardıcıllıq* deyilir.

Tərif 5. Məhdud olmayan ardıcıllığa *qeyri-məhdud ardıcıllıq* deyilir

Məsələn, $\left\{\frac{n^2}{n+1}\right\}$, $\left\{\frac{2^n}{n}\right\}$ ardıcıllıqları aşağıdan məhdud, yuxarıdan qeyri-məhdud, $\left\{-\frac{n^2}{n+1}\right\}$, $\left\{-\frac{2^n}{n}\right\}$ardıcıllıqları yuxarıdan məhdud, aşağıdan qeyri-məhdud, $\left\{\frac{n}{n+1}\right\}$, $\left\{\frac{n^2}{n^2+1}\right\}$, $\left\{\frac{(-1)^n\cdot n}{n+2}\right\}$ ardıcıllıqları həm aşağıdan, həm də yuxarıdan məhdud. $\{(-1)^n n^2\}$, $\left\{\frac{(-1)^n n^3}{n+1}\right\}$ ardıcıllıqları isə həm aşağıdan, həm də yuxarıdan qeyri-məhdud ardıcıllıqlardır.

§ 3. ARDICILLIĞIN LİMİTİ

Ümumi həddi $a_n = \dfrac{n}{n+1}$ olan ardıcıllığı nəzərdən keçirək:

$$\frac{1}{2},\ \frac{2}{3},\ \frac{3}{4},\ldots,\ \frac{n}{n+1},\ldots$$

Yazılışdan göründüyü kimi, *n* artdıqca ardıcıllığın hədlərinin qiyməti getdikcə artaraq vahidə yaxınlaşır. Doğrudan da

$|a_n - 1| = \left|\dfrac{n}{n+1} - 1\right| = \dfrac{1}{n+1}$ olması göstərir ki, *n* kifayət qədər böyük olduqda $|a_n - 1|$ fərqi sıfra yaxın olur. Məsələn, n=50 götürsək, 51-ci həddən başlayaraq sonrakı bütün hədlər üçün, $|a_n - 1| < 0{,}02$ münasibəti, *n*=100 götürdükdə isə 101-ci həddən başlayaraq sonrakı bütün hədlər üçün $|a_n - 1| < 0{,}01$ münasibəti ödənilir. Odur ki, ümumi şəkildə istənilən $\varepsilon > 0$ ədədi (ε =0,02; 0,01 və s.) və verilən ardıcıllıq üçün elə bir *N* nömrəsi tapmaq olar ki, (baxılan hal üçün *N* =50; 100 və s.) *n*>*N* şərtini ödəyən bütün *n*-lər üçün

$$|a_n - 1| < \varepsilon, \text{ yəni } -\varepsilon < a_n - 1 < \varepsilon$$

münasibəti ödənir. Bu halda deyəcəyik ki, $\left\{\dfrac{n}{n+1}\right\}$ ardıcıllığının limiti vahiddir.

İndi ümumi halda verilmiş hər hansı $\{a_n\}$ ardıcıllığına baxaq.

Tərif 1. İstənilən müsbət ε ədədi və $\{a_n\}$ ardıcıllığı üçün elə bir $N(\varepsilon)$ nömrəsi tapmaq mümkündürsə ki, bu nömrədən snra gələn bütün *n*-lər üçün (*n*>*N*)

$$|a_n - a| < \varepsilon$$

bərabərsizliyi ödənir, onda a ədədinə $\{a_n\}$ ardıcıllığının limiti deyilir və

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \quad \text{və ya} \quad a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} a$$

kimi yazılır. Burada lim işarəsi, latınca sərhəd mənası daşıyan limit sözündən götürülmüşdür.

Qeyd edək ki, ardıcıllığın limitinin tərifindəki N ədədi ε-dan asılıdır: $N=N(\varepsilon)$. Özü də ε ədədi kiçildikdə seçilən N ədədi, ümumiyyətlə desək böyüyür. Onu da qeyd etmək lazımdır ki, verilən ε-a qarşı seçilən N ədədi yeganə deyil. Tərifdə N ədədinin ancaq varlığı tələb olunur, yeganəliyi isə tələb olunmur.

Tərifdən aydındır ki, a ədədi $\{a_n\}$ ardıcıllığının limiti isə, N-dən sonra gələn bütün hədlər $(a-\varepsilon,\ a+\varepsilon)$ intervalında yerləşəcək və deməli, həmin intervaldan kənarda ardıcıllığın ancaq sonlu sayda həddi yerləşə bilər.

Misallar.

1. $\left\{\dfrac{2n}{3n+1}\right\}$ ardıcıllığının limitinin $\dfrac{2}{3}$ olduğunu göstərin.

○ ε istənilən müsbət ədəd olsun. Tərifə əsasən, $n>N$ bərabərsizliyini ödəyən bütün n-lər üçün

$$\left|\frac{2n}{3n+1}-\frac{2}{3}\right|<\varepsilon$$

olmalıdır.

Buradan N ədədini müəyyən edək:

$$\frac{2}{3(3n+1)}<\varepsilon, \text{ yaxud } \quad n>\frac{2-3\varepsilon}{9\varepsilon}.$$

Deməli, $N(\varepsilon)=\left[\dfrac{2-3\varepsilon}{9\varepsilon}\right]+1$ qəbul etsək (burada $\left[\dfrac{2-3\varepsilon}{9\varepsilon}\right]$ ilə $\dfrac{2-3\varepsilon}{9\varepsilon}$ ədədinin tam hissəsi ifadə olunub), $n>N$ münasibətini ödəyən bütün n-lər üçün

$$\left|\frac{2n}{3n+1}-\frac{2}{3}\right|<\varepsilon$$

bərabərsizliyi ödənəcək, yəni

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2n}{3n+1}=\frac{2}{3}. \text{ ●}$$

2. $\left\{\dfrac{1-n^2}{1+n^2}\right\}$ ardıcıllığının limitinin -1 olduğunu göstərin.

○ Yuxarıdaki misala bənzər olaraq,

$$\left|\frac{1-n^2}{1+n^2}-(-1)\right|<\varepsilon$$

yazıb, buradan

$$\frac{2}{1+n^2}<\varepsilon, \quad n^2>\frac{2-\varepsilon}{\varepsilon}, \quad n>\sqrt{\frac{2-\varepsilon}{\varepsilon}} \quad \text{(hesabi qiymət)}$$

tapırıq.

Deməli, $N=\left[\sqrt{\dfrac{2-\varepsilon}{\varepsilon}}\right]+1$ qəbul etsək, $n>N$ şərtini ödəyən bütün *n*-lər üçün

$$\left|\frac{1-n^2}{1+n^2}+1\right|<\varepsilon$$

bərabərsizliyi ödənəcək, yəni $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1-n^2}{1+n^2}=-1$. ●

Təbii olaraq yuxarıda söylənənlərdən qarşıya belə bir sual çıxır. Eyni bir ardıcıllığın neçə limiti ola bilər?

Teorem. *Ardıcıllığın ancaq bir limiti ola bilər.*

□ Əksini fərz edək. Tutaq ki, $\{a_n\}$ ardıcıllığının a və b (a$\neq$b) kimi iki limiti var. $\varepsilon=\dfrac{1}{2}\ |a-b|$ qəbul edək.

Limitin tərifinə əsasən verilən $\varepsilon>0$ ədədi üçün elə $N_1(\varepsilon)$ və $N_2(\varepsilon)$ ədədləri tapa bilərik ki, $n>N_1(\varepsilon)$ şərtini ödəyən bütün *n*-lər üçün

$$|a_n-a|<\varepsilon, \tag{1}$$

$n>N_2(\varepsilon)$ şərtini ödəyən bütün *n*-lər üçün isə

$$|b_n - a| < \varepsilon \qquad (2)$$

münasibətləri ödənir. $N_1(\varepsilon)$ və $N_2(\varepsilon)$ ədədlərinin ən böyüyünü N ilə işarə etsək, aydındr ki, $n > N$ şərtini ödəyən bütün n-lər üçün (1) və (2) bərabərsizliklərinin hər ikisi ödənəcək. Odur ki, $n > N$ olduqda

$$|a-b| = |a - a_n + a_n - b| \le |a_n - a| + |a_n - b| < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon =$$

$$2 \cdot \frac{|a-b|}{2} = |a-b|, \text{ yəni } |a-b| < |a-b|$$

alırıq. Bu ziddiyyət fərziyyəmizin doğru olmadığını, yəni teoremin hökmünün doğru olduğunu göstərir. ■

Tərif 2. İstənilən qədər böyük müsbət M ədədi üçün elə N nömrəsi tapmaq mümkündüsə ki, $n > N$ şərtini ödəyən bütün n-lər üçün

$$a_n > M$$

bərabərsizliyi ödənir, onda deyəcəyik ki, $\{a_n\}$ ardıcıllığının limiti $+\infty$-dur. Bu faktı

$$\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty, \text{ yaxud } a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty$$

kimi yazırlar.

Misallar. 1. $a_n = n^2$ olduqda $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$ olduğunu göstərin.

○ İstənilən qədər böyük M>0 ədədi verildikdə $n^2 > M$ olması üçün $n > \sqrt{M}$ (hesabi kök) olmalıdır. Deməli, $N = [M] + 1$ qəbul etsək, onda n>N şərtini ödəyən bütün n-lər üçün $n^2 > M$ olur, yəni $\lim\limits_{n\to\infty} n^2 = \infty$. ●

2. $a_n=3^n$ olduqda $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$ olduğunu göstərin.

○ $3^n > M$ və ya $n > \log_3 M$. Deməli, $N = [\log_3 M] + 1$ qəbul etsək, n>N şərtini ödəyən bütün n-lər üçün 3^n>N olur, yəni $\lim\limits_{n\to\infty} 3^n = \infty$. ●

Tərif 3. Mütləq qiyməti istənilən qədər böyük olan ixtiyari mənfi A ədədi üçün elə bir N ədədi tapmaq mümkündürsə ki, n>N şərtini ödəyən bütün n-lər üçün

$$a_n < A$$

bərabərsizliyi ödənir, onda deyəcəyik ki, $\{a_n\}$ ardıcıllığının limiti $-\infty$-dur. Bu faktı

$$\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty, \text{ yaxud } a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} -\infty$$

kimi yazacağıq.

Misallar. 1. $a_n = -2^n$ olduqda, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$ olduğunu göstərin.

○ A istənilən mənfi ədəd olsun. Onda $-2^n < A$ münasibətindən $n > \log_2|A|$ alınır. Deməli, $N = [\log_2|A|] + 1$ qəbul etsək, $n>N$ şərtini ödəyən bütün n-lər üçün $-2^n < A$ olacaq, yəni $\lim\limits_{n\to\infty}(-2^n) = -\infty$. ●

2. $a_n = \log_{\frac{1}{3}} n$ olduqda, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$ olduğunu göstərin.

○ $\log_{\frac{1}{3}} n < A$, yəni $n > \left(\frac{1}{3}\right)^A = 3^{-A}$ olsun, onda $n > 3^{|A|}$. Deməli, $N = \left[3^{|A|}\right] + 1$ qəbul etsək, $\log_{\frac{1}{3}} n < A$ olacaq, yəni $\lim\limits_{n\to\infty} \log_{\frac{1}{3}} n = -\infty$.

●

Qeyd etmək lazımdır ki, limiti olmayan ardıcıllıqlar da var. Məsələn, $a_n = (-1)^n$ olduqda $\{a_n\}$ ardıcıllığının limiti yoxdur (niyə?).

Tərif 4. Limiti olan ardıcıllığa *yığılan*, limiti sonsuzluq olan, yaxud limiti olmayan ardıcıllığa isə *dağılan ardıcıllıq* deyilir.

Məsələn,

$$1, \quad 0, \quad 1, \quad 0, \quad \ldots, \quad \frac{1+(-1)^n}{2}, \ldots$$

$$-1, \quad -2, \quad -3, \ldots, n, \ldots$$

$$1, \quad 8, \quad 27, \ldots, n^3, \ldots$$

dağılan ardıcıllıqlardır. Bunlardan birincinin limiti yoxdur, ikincinin limiti $-\infty$, üçüncünün limiti isə $+\infty$-dur.

§4. ARDICILLIĞIN LİMİTİ HAQQINDA TEOREMLƏR

Bu paraqrafda biz ancaq yığılan (yəni sonlu limiti olan) ardıcıllıqlara baxacağıq.

Teorem 1. *Yığılan ardıcıllıq məhduddur.*

□ Tutaq ki, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a.$ Göstərək ki, $\{a_n\}$ ardıcıllığı məhduddur, yəni elə M>0 ədədi var ki, bütün n-lər üçün $|a_n| \le M$ münasibəti doğrudur.

$\varepsilon = 1$ olsun. Limitin tərifinə görə bu ε ədədi üçün elə N nömrəsi tapmaq olar ki, $n>N$ şərtini ödəyən bütün n-lər üçün

$$|a_n - a| < 1$$

münasibəti ödənir. Buradan

$$|a_n| = |a_n - a + a| \le |a_n - a| + |a| < 1 + |a| \quad (n>N)$$

alınır. Bu isə $n>N$ olduqda bütün a_n-lərin $(-1-|a|,\ \ 1+|a|)$ intervalında yerləşdiyini göstərir. Onda sonlu $n+1$ sayda $|a_1|,\ |a_2|, \ldots,\ |a_n|,\ 1+|a|$ ədədlərinin ən böyüyünü M ilə işarə etsək, bütün n-lər üçün $|a_n| \le M$ alarıq. Yəni $\{a_n\}$ ardıcıllığı məhduddur. ■

Bu teoremin tərsi doğru deyil. Yəni məhdud ardıcıllıq yığılmaya da bilər. Məsələn, $\left\{\dfrac{1+(-1)^2}{2}\right\}$ ardıcıllığı məhduddur, lakin yığılan deyil.

Teorem 2. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ *isə, onda* $\lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = |a|$*-dır.*

□ Limitin tərifinə görə $\varepsilon > 0$ ədədi üçün elə N nömrəsi tapmaq olar ki,

$$|a_n - a| < \varepsilon \qquad (n > N).$$

Onda fərqin mütləq qiymətinin xassəsinə görə $\big||a_n| - |a|\big| \le |a_n - a| < \varepsilon,$ yəni $\big||a_n| - |a|\big| < \varepsilon,$ ($n>N$) olmasını alırıq. Bu isə

$$\lim_{n\to\infty}|a_n| = |a|$$

olmasını göstərir. ■

Teorem 3. *Stasionar ardıcıllığın limiti özünə bərabərdir, yəni bütün n-lər üçün*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} a = a.$$

$a_n = a$ isə,

Teorem 4. $\{a_n\}$ *a ədədinə yığılırsa, onda* $\{ca_n\}$ *ardıcıllığı ca ədədinə yığılır, yəni*

3-cü və 4-cü teoremlərin isbatı aşkardır.

Teorem 5. $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ *və* $\lim_{n\to\infty} b_n = b$ *isə, onda*

$$\lim_{n\to\infty}(a_n \pm b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n \pm \lim_{n\to\infty} b_n = a \pm b.$$

□ Teoremi cəm üçün isbat edək. Limitin tərifinə görə $\lim_{n\to\infty} a_n = a$, $\lim_{n\to\infty} b_n = b$ olmasından çıxır ki, verilən $\varepsilon > 0$ ədədinə qarşı elə $N_1(\varepsilon)$ və $N_2(\varepsilon)$ nömrələri tapmaq olar ki,

$$|a_n - a| < \varepsilon/2 \ (n > N_1(\varepsilon)) \text{ və } |b_n - b| < \varepsilon/2(n > N_2(\varepsilon)).$$

N_1 və N_2 ədədlərinin ən böyüyünü N ilə işarə etsək, $n>N$ olduqda hər iki bərabərsizlik ödənəcək:

$$-\frac{\varepsilon}{2} < a_n - a < \frac{\varepsilon}{2}, \quad -\frac{\varepsilon}{2} < b_n - b < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Bunları tərəf tərəfə toplasaq,

$$-\varepsilon < a_n + b_n - (a+b) < \varepsilon \text{ və ya}$$

$$|a_n + b_n - (a+b)| < \varepsilon \quad (n>N)$$

alırıq. Yəni

$$\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = a + b. \ ■$$

Teorem istənilən sonlu sayda toplanan üçün də doğrudur. Aşağıdakı teoremlər də doğrudur.

Teorem 6. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a, \quad \lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$ isə,

$$\lim_{n\to\infty} a_n b_n = \lim_{n\to\infty} a_n \cdot \lim_{n\to\infty} b_n = a\cdot b.$$

Teorem 7. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a, \quad \lim\limits_{n\to\infty} b_n = b \;\; (b_n \neq 0, \quad b\neq 0)$ isə,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n} = \frac{a}{b}.$$

Teorem 8. *Artan və yuxarıdan məhdud ardıcıllığın limiti var.*

Teorem 9. *Azalan və aşağıdan məhdud ardıcıllığın limiti var.*

Teorem 10. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a \neq 0$ *isə, onda elə N nömrəsi tapmaq olar ki, n>N şərtini ödəyən bütün n-lər üçün* $|a_n| > \dfrac{|a|}{2}$ *münasibəti doğrudur.*

Teorem 11. $\{a_n\}, \;\; \{b_n\}$ və $\{c_n\}$ ardıcıllıqları üçün $a_n \le b_n \le c_n$ və $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} c_n = a$ isə, onda $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = a.$

§ 5. ARDICILLIĞIN LİMİTİNƏ AİD MİSALLAR

Aşağıda verilən ardıcıllıqların limitini hesablayın.

1. $\left\{\dfrac{n(n+1)}{(n+2)(n+3)}\right\}.$

○ Əvvəlcə ümumi həddin sürət və məxrəcini n^2-na bölməklə onu $\dfrac{1+\frac{1}{n}}{\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{3}{n}\right)}$ şəklinə salaq. Sonra isə ardıcıl olaraq nisbətin, hasilin və cəmin limiti haqqındakı teoremləri tətbiq edək:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n(n+1)}{(n+2)(n+3)}=\lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{1}{n}}{\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{3}{n}\right)}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{3}{n}\right)}=$$

$$\frac{\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{2}{n}\right)\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{3}{n}\right)}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}1+\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}}{\left(\lim\limits_{n\leftarrow\infty}1+\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2}{n}\right)\left(\lim\limits_{n\leftarrow\infty}1+\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3}{n}\right)}=\frac{1+0}{(1+0)(1+0)}=1.$$

●

2. $\left\{\dfrac{a_1n^2+b_1n+c_1}{a_2n^2+b_2n+c_2}\right\}$ $(b^2-4a_2c_2<0$ şərtilə).

○ Əvvəlki misalda olduğu kimi hərəkət edək:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_1n^2+b_1n+c_1}{a_2n^2+b_2n+c_2}=\lim_{n\to\infty}\frac{a_1+\frac{b_1}{n}+\frac{c_1}{n^2}}{a_2+\frac{b_2}{n}+\frac{c_2}{n^2}}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}a_1+\lim\limits_{n\to\infty}\frac{b_1}{n}+\lim\limits_{n\to\infty}\frac{c_1}{n^2}}{\lim\limits_{n\to\infty}a_2+\lim\limits_{n\to\infty}\frac{b_2}{n}+\lim\limits_{n\to\infty}\frac{c_2}{n^2}}=$$

$$\frac{a_1+0+0}{a_2+0+0}=\frac{a_1}{a_2}.$$ ●

3. $\{2n^3-3n^2-5n+2\}$.

○ Əvvəlcə ümumi həddi çevirib $n^3\left(2-\dfrac{3}{n}-\dfrac{5}{n^2}+\dfrac{2}{n^3}\right)$ şəklində yazaq. Bu ifadədən aydındır ki, $n\to\infty$-da birinci vuruq $n^3\to\infty$, ikinci vuruq $2-\dfrac{3}{n}-\dfrac{5}{n^2}+\dfrac{2}{n^3}\to 2$ olur. Deməli,

$$\lim_{n\to\infty}(2n^3-3n^2-5n+2)=\lim_{n\to\infty}n^3\left(2-\frac{3}{n}-\frac{5}{n^2}+\frac{2}{n^3}\right)=$$

$$\lim_{n\to\infty} n^3 \lim_{n\to\infty}\left(2-\frac{3}{n}-\frac{5}{n^2}+\frac{2}{n^3}\right)=+\infty\cdot 2=+\infty. \bullet$$

4. $\left\{\sqrt[3]{n+3}-\sqrt[3]{n+2}\right\}$.

○ Verilən ardıcıllığın limitini hesablamaq üçün ümumi həddin $\sqrt[3]{n+3}-\sqrt[3]{n+2}$ ifadəsini kublar fərqinə çevirən $\sqrt[3]{(n+3)^2}+\sqrt[3]{(n+3)(n+2)}+\sqrt[3]{(n+2)^2}$ qoşmasına (tamamlayıcısına) vurub və bölüb, lazım olan əməlləri yerinə yetirək:

$$\lim_{n\to\infty}(\sqrt[3]{(n-3)}-\sqrt[3]{n+2})=$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(\sqrt[3]{n+3}-\sqrt[3]{n+2})(\sqrt[3]{(n+3)^2}+\sqrt[3]{(n+2)(n+2)}+\sqrt[3]{(n+2)^2}}{\sqrt[3]{(n+3)^2}+\sqrt[3]{(n+3)(n+2)}+\sqrt[3]{(n+2)^2}}=$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n+3-n-2}{\sqrt[3]{(n+3)^2}+\sqrt[3]{(n+3)(n+2)}+\sqrt[3]{(n+2)^2}}=$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{(n+3)^2}+\sqrt[3]{(n+3)(n+2)}+\sqrt[3]{(n+2)^2}}=\frac{1}{\infty}=0. \bullet$$

5. $\left\{\dfrac{n^2+3n-7}{n^3-2n^2+5n-1}\right\}$.

○

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+3n-7}{n^3-2n^2+5n-1}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n}+\frac{3}{n^2}-\frac{7}{n^3}}{1-\frac{2}{n}+\frac{5}{n^2}-\frac{1}{n^3}}=\frac{0+0+0}{1-0+0-0}=0.$$

●

6. $\left\{\dfrac{n^3+2n^2-2}{n^2+5n-1}\right\}$.

○ $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^3+2n^2-2}{n^2+5n-1}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+\dfrac{2}{n}-\dfrac{2}{n^3}}{\dfrac{1}{n}+\dfrac{5}{n^2}-\dfrac{1}{n^3}}=\dfrac{1}{0}=\infty.$ ●

§ 6. SONSUZ AZALAN HƏNDƏSİ SİLSİLƏ VƏ ONUN HƏDLƏRİNİN CƏMİ

Tərif. Sonsuz sayda həddi olan və ortaq vuruğu mütləq qiymətcə vahiddən kiçik $(|q|<1)$ olan həndəsi silsiləyə *sonsuz azalan həndəsi silsilə* deyilir.

Tutaq ki,

$$\div\!\div\; a,\ aq,\ aq^2, \dots, aq^n, \dots \tag{1}$$

sonsuz azalan həndəsi silsilədir $(|q|<1)$. Bildiyimiz kimi həndəsisilsilənin ilk n sayda həddinin cəmi üçün

$$S_n=\frac{a(q^n-1)}{q-1}$$

düsturu doğrudur. Buradan

$$S_n=a\left(\frac{1}{1-q}-\frac{q^n}{1-q}\right)$$

münasibəti alınır. $n\to\infty$-da bu ifadədə limitə keçək və $|q|<1$ olduqda $\lim\limits_{n\to\infty}q^n=0$ olmasını nəzərə alaq:

$$\lim_{n\to\infty}S_n=a\left(\frac{1}{1-q}-\frac{q^n}{1-q}\right)=a\left(\frac{1}{1-q}-\frac{\lim\limits_{n\to\infty}q^n}{1-q}\right)=\frac{a}{1-q},$$

yəni

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{a}{1-q}.$$

Bu limitə *sonsuz azalan həndəsi silsilənin cəmi* deyilir və

$$S = \frac{a}{1-q} \tag{2}$$

kimi işarə olunur.

Misallar. Aşağıda verilmiş sonsuz azalan həndəsi silsilələrin cəmini hesablayın:

1. $\div\div \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1},\ 1,\ \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1},\ \ldots$

○ Göründüyü kimi $a = \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1},\ |q| = \left|\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}\right| < 1$ olduğundan, (2) düsturuna görə

$$S = \frac{a}{1-q} = \frac{\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}}{1-\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}} = \frac{3+\sqrt[2]{2}}{2(\sqrt{2}-1)} =$$

$$\frac{(3+2\sqrt{2})(\sqrt{2}+1)}{2} = \frac{7+5\sqrt{2}}{2}$$

olur. ●

2. $\div\div 5,\ -1,\ \frac{1}{5},\ -\frac{1}{25},\ \ldots$

○ $a = 5,\ q = -\frac{1}{5}$, olduğundan $S = \frac{5}{1+\frac{1}{5}} = \frac{25}{6} = 4\frac{1}{6}$. ●

Qeyd. Sonsuz hədli həndəsi silsilədə $|q|>1$ halına baxaq. S_n-in ifadəsindən aydındır ki, $|q|>1$ olduqda $\dfrac{q^n}{q-1}\to\infty\ (n\to\infty)$ olur və deməli, $\lim\limits_{n\to\infty} S_n=\infty$ olur. $q=1$ olduqda $S_n=a(1+1+1+\ldots+1)=a\cdot n \underset{(n\to\infty)}{\longrightarrow}\infty$, $q=-1$ olduqda isə $S_1=a,\ S_2=0,\ S_3=a,\ S_4=0$ və s. olur. Deməli, $n\to\infty$-da S_n heç bir limitə yaxınlaşmır.

ÇALIŞMALAR

1. Verilən ardıcıllıqların məhdud olub-olmadığını müəyyən edin:

a) $\left\{\dfrac{n^2+1}{n^2}\right\}$; b) $\left\{\dfrac{n^2+1}{3n}\right\}$;

c) $\left\{\dfrac{3n^2+4}{(-1)^n n}\right\}$; d) $\left\{\dfrac{-n^2}{1+n}\right\}$.

2. Aşağıdakı ardıcıllıqların monoton olub olmadığını müəyyən edin:

a) $\left\{\dfrac{1}{1+n}\right\}$; b) $\left\{\dfrac{n+1}{n^2+1}\right\}$;

c) $\left\{\dfrac{n^2+2}{n+1}\right\}$; d) $\left\{\dfrac{n^2+2n+1}{n^2+1}\right\}$;

e) $\left\{\dfrac{1+(-2)^n}{n+1}\right\}$; f) $\left\{\dfrac{(-1)^n}{n+1}\right\}$.

3. Limitləri hesablayın:

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n+1}{n-1}$; b) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n^3-5n-2}{9n^3+7n^2-6}$;

c) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n^3+n}{2n^2-1}$; d) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n^3-5}{4n^3+5n^2+2}$;

e) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(3n-7)(9n^2-5)}{(5n+6)(0{,}3n^2+3)}$; f) $\lim\limits_{n\to\infty} (n^2-5n+1)$;

g) $\lim\limits_{n\to\infty} (5n^3-3n^2+2)$; h) $\lim\limits_{n\to\infty} (\sqrt{n+8}-\sqrt{n+1})$;

i) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{2n^2-2n+1}$;

j) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_0n^k+a_1n^{k-1}+a_2n^{k-2}+\ldots+a_{k-1}n+a_k}{b_0n^m+b_1n^{m-1}+b_2n^{m-2}+\ldots+b_{m-1}n+b_m}$;

k) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^2+5}{1+2+3+\ldots+n}$; l) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2+4+\ldots+2n}{1+3+5+\ldots+(2n-1)}$.

4. Aşağıdakı sonsuz azalan həndəsi silsilələrin cəmini tapın:

a) $\dfrac{\sqrt{3}+2}{\sqrt{3}-2},\ 1,\ \dfrac{\sqrt{3}-2}{\sqrt{3}+2},\ldots$

b) $2\sqrt{3}+1,\ 2\sqrt{3}-1,\ \dfrac{(2\sqrt{3}-1)^2}{2\sqrt{3}+1},\ldots$

TESTLƏR

1. Məhdud ardıcıllığı təyin edin.

A) $a_n=\dfrac{3n+1}{n}$ B) $a_n=\cos n$ C) $a_n=\dfrac{n}{2n+1}$

D) $a_n=2^n$ E) $a_n=tgn$

2. Fibonaççi ardıcıllığını təyin edin.

A) $a_n=2^{n-1}$ B) 2, 2, 2, . . . C) 1, 3, 4, 7, 11, . . . , a_n . . .

D) $a_n=n^3-1$ E) 1, $\dfrac{1}{4}$, $\dfrac{1}{9}$, . . . , a_n . . .

3. Verilən ardıcıllıqlardan neçəsi monoton ardıcıllığıdır?

A) $a_n = \frac{1}{n(n+1)}$ B) $a_n = \frac{(-1)^n}{2n}$ C) $a_n = \frac{2n}{2n+1}$

D) $a_n = \frac{2n+3}{7n-6}$ E) $a_n = (-1)^n$

4. Stasionar ardıcıllığı təyin edin.

A) $a_n = \frac{2n}{2n+1}$ B) $a_n = n^3 - 1$ C) $a_n = \frac{n-(n-1)}{1^n}$ D) $a_n = n^2$ E) $a_n = n+1$

5. Rəqs edən ardıcıllığı təyin edin.

A) $a_n = n-1$ B) $a_n = 2^n$ C) $a_n = \frac{(-1)^n}{2n-1}$ D) $a_n = n^2 + 1$ E) $n^2 - 1$

6. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{5n^2+n+2}{7n^2-2}$ -i hesablayın.

A) $\frac{7}{5}$ B) -1 C) 2 D) $\frac{5}{7}$ E) 0

7. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{6n^2+12n}{n^3+8}$ -i hesablayın.

A) -1 B) -2 C) 2 D) $\frac{3}{4}$ E) 0

8. $3,\ 1,\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{9}, \ldots$ silsiləsinin cəmini tapın.

A)2 B) $\frac{1}{3}$ C) 3 D)1 E) 4,5

9. İlk n həddinin cəmi S_n, ümumi həddi a_n olan ardıcıllıqlar üçün uyğunluğu təyin edin.

1. $S_n + S_{n-1} = 31$, a_n=17
2. $S_n + S_{n-1} = 34$, a_n=12
3. $S_n + S_{n-1} = 36$, a_n=14

a. $S_n = 24$
b. $S_{n-1} = 11$
c. $S_{n-1} = 7$
d. $S_n = 25$
e. $S_n = 23$

10. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt{4n^2 - 3n + 1}}{4n + 1}$ -i hesablayın.

II FƏSİL

FUNKSİYANIN LİMİTİ VƏ KƏSİLMƏZLİYİ

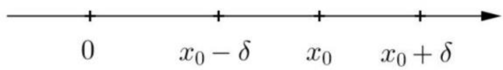
§ 7. ƏTRAF ANLAYIŞI VƏ TOPLAŞMA NÖQTƏSİ

Ədəd oxu üzərində hər hansı x_0 nöqtəsi götürək.

Tərif. x_0 nöqtəsini daxilinə alan hər bir intervala həmin *nöqtəni ətrafı* deyilir.

Tərifə əsasən (α, β) intervalı x_0 nöqtəsinin hər hansı ətrafı isə, onda $\alpha < x_0 < \beta$ münasibəti doğrudur.

Aydındır ki, hər bir nöqtənin istənilən sayda ətrafı var. Məsələn, (0, 2), (-1, 2), (0, 3), (-1, 3), (0, 3/2), (1/2,3/2)) və s. intervallarının hər biri $x_0 = 1$ nöqtəsinin ətrafıdır.



Şəkil 1

δ hər hansı müsbət ədəd olsun. Onda aydındır ki, $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ intervalı x_0 nöqtəsini daxilinə alır (şəkil 1). $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ intervalına x_0 nöqtəsinin δ *ətrafı* deyilir.

Tutaq ki, x nöqtəsi x_0 nöqtəsinin δ ətrafında yerləşən ixtiyari nöqtədir. Onda

$$x_0 - \delta < x < x_0 + \delta$$

münasibəti doğrudur. Bu ikiqat bərabərsizliyin hər tərəfinə $-x_0$ əlavə etsək, nəticədə

$$-\delta < |x - x_0| < \delta, \text{ yaxud } |x - x_0| < \delta$$

münasibətini alırıq. Deməli, x_0 nöqtənin δ ətrafında yerləşən bütün x nöqtələr çoxluğu $|x - x_0| < \delta$ bərabərsizliyini ödəyir. Məsələn, $x_0 = 2$ nöqtəsinin 0,01; 0,1; 0,5 və 1 ətrafında yerləşən x nöqtələr çoxluğu uyğun olaraq

$$|x-2| < 0{,}01; \ |x-2| < 0{,}1; \ |x-2| < 0{,}5; \ |x-2| < 1$$

bərabərsizliklərini ödəyəcək. Başqa sözlə

(1,99; 2,01), (1,9; 2,1), (1,5; 2,5); (1; 3)

intervalları uyğun olaraq $x_0 = 2$ nöqtəsinin 0,01; 0,1; 0,5 və 1 ətraflarıdır.

$(x_0, x_0 + \delta)$ intervalına x_0 nöqtəsinin *sağ* δ *ətrafı*, $(x_0 - \delta, x_0)$ intervalına isə *sol* δ *ətrafı* deyilir.

$y = f(x)$ verilmiş funksiya, x_0 isə ədəd oxunun hər hansı nöqtəsi olsun (x_0 nöqtəsi verilən funksiyanın təyin oblastına daxil ola da bilər, olmaya da).

Tərif. x_0 nöqtəsinin istənilən ətrafında $f(x)$ funksiyasının təyin oblastının x_0-dan fərqli heç olmasa bir nöqtəsi varsa, onda x_0 nöqtəsinə həmin təyin oblastının *toplaşma nöqtəsi* deyilir.

Misallar. Aşağıdakı funksiyaların toplaşma nöqtələri olub-olmadığını göstərin:

1. $y = x^2 + 1$.

○ Ədəd oxunun istənilən nöqtəsi bu funksiyanın təyin oblastının toplaşma nöqtəsidir həm də toplaşma nöqtələri təyin oblastına daxildir. ●

2. $y = \sqrt{x - 1}$.

○ $[1,\infty)$ yarım intervalının istənilən nöqtəsi verilən funksiyanın təyin oblastı üçün toplaşma nöqtəsidir, həm də təyin oblastına daxildir. ●

3. $y = \dfrac{x}{x^2 + 2x - 3}$.

○ Ədəd oxunun bütün nöqtələri, o cümlədən -3 və 1 nöqtələri funksiyanın təyin oblastı üçün toplaşma nöqtəsidir, lakin -3 və 1 nöqtələri təyin oblastına daxil deyil. ●

4. $y = \sqrt{\log\cos x}.$

○ Bu funksiyanın təyin oblastı $x = 2\pi k$ $(k = 0;\ \pm 1;\ \pm 2; \ldots)$ nöqtələrindən ibarətdir, özünün də toplaşma nöqtəsi yoxdur (niyə?). ●

Tərifdən çıxır ki, x_0 nöqtəsi verilən funksiyanın təyin oblastı üçün hər hansı toplaşma nöqtəsidirsə, onda təyin oblastında x_0 yığılan ardıcıllıq var. Özü də belə ardıcıllıqlar istənilən saydadır.

Misal üçün belə ardıcıllıqlardan birini quraq. Tutaq ki, x_0 nöqtəsi $y = f(x)$ funksiyasının təyin oblastının toplaşma nöqtəsidir. Göstərək ki, təyin oblastında x_0-a yığılan ardıcıllıq var. $\delta > 0$ hər hansı ədəd olsun. Tərifə görə x_0-ın δ_1 ətrafında heç olmasa bir x_1 nöqtəsi var. İndi $0 < \delta_2 < \delta_1$ və $\delta_2 < |x_1 - x_0|$ şərtlərini ödəyən hər hansı δ_2 ədədi götürək. Aydındır ki, x_0-ın δ_2 ətrafında heç olmasa bir x_2 $(x_2 \neq x_0)$ nöqtəsi var. Yenidən $0 < \delta_3 < \delta_2$ və $\delta_3 < |x_2 - x_0|$ şərtlərini ödəyən δ_3 ədədi götürək və prosesi bu qayda ilə davam etdirək. Nəticədə

$$x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n,\ \ldots \text{ və } \delta_1,\ \delta_1, \ldots,\ \delta_n, \ldots$$

ardıcıllıqlarını alarıq, özü də

$$|x_n - x_0| < \delta_n < |x_{n-1} - x_0| \quad (n{=}2,\ 3,\ \ldots). \qquad (1)$$

münasibətləri ödənir. Burada $\{\delta_n\}$ ardıcıllığını $\lim\limits_{n\to\infty} \delta_n = 0$ şərtilə təyin etsək, (1) münasibətindən çıxır ki, qurulan $\{x_n\}$ ardıcıllığı $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$ şərtini ödəyir, yəni x_0-a yığılır. Həmçinin x_n-lər ixtiyari qayda ilə seçildiyindən (x_0-ın δ_n ətrafında olmaq şərtilə), $\{x_n\}$ kimi ardıcıllıqların istənilən sayda olması alınır.

Misal üçün aşağıdakılara funksiyalara baxaq:

1. $y = x^2 + 1$. Aydındır ki, $\left\{\frac{1}{n}\right\}, \left\{\frac{n+1}{n^2}\right\}, \left\{\frac{1}{3^n}\right\}, \left\{\frac{1}{n^2+1}\right\}$ və s. ardıcıllıqlarının hər biri $x_0 = 0$ toplaşma nöqtəsinə yığılır.

2. $y = \frac{x}{x^2 + 2x - 3}$. Təyin oblastında $x_0 = 1$ toplaşma nöqtəsinə yığılan $\left\{1 + \frac{1}{n}\right\}$, $\left\{1 + \frac{(-1)^n}{n}\right\}$, $\left\{1 + \frac{(-1)^n}{2n}\right\}$, $\left\{1 - \frac{n+1}{n^2}\right\}$ və s. ardıcıllıqlarını göstərmək olar. ($x_0 = 1$ təyin oblastına daxil deyil).

§ 8. FUNKSİYA LİMİTİNİN TƏRİFİ

Tutaq ki, $y = f(x)$ funksiyası x_0 nöqtəsinin hər hansı ətrafında təyin olunmuşdur (x_0 nöqtəsində funksiya təyin olunmaya da bilər).

Yuxarıda gördük ki, x_0-a yığılan $\{x_n\}$ardıcıllığı var, həm də belə ardıcıllıqlar istənilən saydadır. Bu ardıcıllığa funksiyanın $f(x_1)$, $f(x_2)$, . . . , $f(x_n)$, . . . qiymətlər ardıcıllığı uyğun gəlir.

Tərif 1. $f(x)$ funksiyasının təyin oblastından götürürülmüş və x_0-a yığılan istənilən $\{x_n\}$ ardıcıllığına uyğun ($x_n \neq x_0$) funksiyasının $\{f(x_n)\}$ qiymətlər ardıcıllığı eyni bir A ədədinə yığılarsa, onda A ədədinə $x \to x_0$-da *funksiyanın limiti* deyilir və

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = A$$

kimi yazılır.

Ola bilər ki, göstərilən $\{f(x_n)\}$ ardıcıllıqlarının limiti $+\infty$, yaxud $-\infty$ olsun. Bu halda $x \to x_0$-da funksiyanın limiti uyğun olaraq $+\infty$, yaxud $-\infty$-dur deyirlər və $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = +\infty$, yaxud $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = -\infty$ kimi yazırlar. x_0-a yığılan müxtəlif $\{x_n\}$ ardıcıllıqlarına uyğun, funksiyanın $\{f(x_n)\}$ qiymətlər ardıcıllıqları müxtəlif ədədlərə yığılarsa, onda $x \to x_0$-da funksiyanın limiti yoxdur deyəcəyik.

Misallar. Limitin tərifindən istifadə edərək aşağıdakı funksiyaların verilən nöqtələrdə limitinin olub-olmadığını müəyyən edin:

1. $f(x) = x^2 + 1,\ \ x_0 = 1$.

○ Tutaq ki, $\{x_n\}$ ($x_n \neq 1$) ardıcıllığı $\lim\limits_{x \to x_0} x_n = 1$ şərtini ödəyən istənilən ardıcıllıqlardır. Onda ardıcıllığın limitinin tərifinə görə istənilən $\varepsilon > 0$ ədədi üçün elə N(ε) nömrəsi tapmaq olar ki, $n > N(\varepsilon)$ şərtini ödəyən bütün n-lər üçün $|x_n - 1| < \dfrac{\varepsilon}{3}$ münasibəti ödənər. Odur ki, $n > N(\varepsilon)$ şərtini ödəyən bütün n-lər üçün

$$|f(x_n) - 2| = |x_n^2 + 1 - 2| = |x_n^2 - 1| = |x_n - 1| \cdot |x_n + 1| < \frac{\varepsilon}{3} \cdot |x_n + 1| < \frac{\varepsilon}{3} \cdot 3 = \varepsilon$$

olur. Bu isə $\lim\limits_{n \to \infty} f(x_n) = 2$ olduğunu göstərir. $\{x_n\}$ ardıcıllığı 1-ə yığılan istənilən ardıcıllıq olduğundan $\lim\limits_{x \to x_0} f(x^2 + 1) = 2$ olur. ●

2. $f(x) = \dfrac{1}{x^2},\ \ x_0 = 0$.

○ $\{x_n\}$ ardıcıllığı $(x_n \neq 0)$ 0-a yığılan istənilən ardıcıllıq olsun. İxtiyari $M > 0$ ədədi götürüb, $\varepsilon = \dfrac{1}{M}$ qəbul etsək, ardıcıllığın limitinin tərifinə əsasən verilən $\varepsilon > 0$ ədədinə qarşı elə $N(\varepsilon)$ nömrəsi tapmaq olar ki, $n > N(\varepsilon)$ şərtini ödəyən bütün n-lər üçün $|x_n| < \varepsilon$ şərti ödənsin. Buradan $n > N(\varepsilon)$

olduqda $\dfrac{1}{x_n^2} > \dfrac{1}{\varepsilon_n^2}$, yəni $\dfrac{1}{x_n^2} > M^2$ olmasını alırıq. Bu isə $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1}{x_n^2} = \infty$ olması deməkdir. $\{x_n\}$ ardıcıllığı 0-a yığılan istənilən ardıcıllıq olduğundan

$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{x_n^2} = \infty$ olur. ●

3. $f(x) = \sin\dfrac{1}{x}$, $x_0 = 0$.

○ Göstərək ki, $\lim\limits_{x\to 0} \sin\dfrac{1}{x}$ yoxdur. Bunun üçün, 0-a yığılan və ümumi hədləri $x'_n = \dfrac{1}{n\pi}$ və $x''_n = \dfrac{1}{\frac{\pi}{2} + 2n\pi}$ ardıcıllıqlarına baxaq:

$$f(x'_n) = \sin\frac{1}{x_n'} = \sin \pi n = 0 \text{ və}$$

$$f(x''_n) = \sin\frac{1}{x_n''} = \sin\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi n\right) = 1$$

olur.

Beləliklə 0-a yığılan $\{x'_n\}$ və $\{x''_n\}$ ardıcıllıqlarına uyğun funksiya qiymətləri uyğun olaraq $\{0\}$ və $\{1\}$ stasionar ardıcıllıqlarını təşkil edir. Bunlardan birincinin limiti 0, ikincininki isə vahiddir (niyə?). Deməli, 0-a yığılan müxtəlif ardıcıllıqlara uyğun funksiya qiymətləri müxtəlif ədədlərə yığılır. Yəni $\lim\limits_{x\to 0} \sin\dfrac{1}{x}$ yoxdur. ●

Qeyd etmək lazımdır ki, yuxarıda verilən tərifdən istifadə etməklə funksiyanın limitini tapmaq çətindir. Buna görə də çox zaman „ε, δ“ dilində tərif adlanan və yuxarıdakı təriflə eynigüclü olan aşağıdakı tərifdən istifadə olunur.

Tərif 2. İstənilən $\varepsilon > 0$ ədədinə qarşı elə $\delta(\varepsilon) > 0$ ədədi tapmaq mümkündürsəki, $|x - x_0| < \delta(\varepsilon)$ şərtini ödəyən bütün x-lər üçün $|f(x) - A| < \varepsilon$ bərabərsizliyi ödənsin, onda A ədədinə $x \to x_0$-da $f(x)$ *funksiyasının limiti* deyilir və

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = A$$

kimi yazılır.

Analoji yolla $\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \to x_0} f(x) = -\infty$, $\lim_{x \to \infty} f(x) = A$, $\lim_{x \to -\infty} f(x) = A$, $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ limitləri də tərif olunur. Bunlardan axırıncısına tərif verək:

Tərif 3. İstənilən $M > 0$ ədədi üçün elə $\psi(M) > 0$ ədədi varsa ki, $x > \psi(M)$ şərtini ödəyən bütün x-lər üçün $f(x) > M$ bərabərsizlioyi ödənsin, onda $x \to +\infty$ da $f(x)$ funksiyasının limiti $+\infty$-dur deyilir və

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$

kimi yazılır.

Qeyd 1. Verilen $f(x)$ funksiyası x_0 nöqtəsinin hər iki tərəfində deyil, bir tətəfində təyin oluna bilir. Məsələn, $f(x) = \sqrt{x}$ funksiyası $x_0 = 0$ nöqtəsinin s0ağ tərəfində ($x > 0$), $f(x) = \sqrt{3 - x}$ funksiyası isə $x_0 = 3$ nöqtəsinin sol tərəfində ($x < 3$) təyin olunmuşdur. Belə hallarda soldan və sağdan olmaqla tək yönlü (bir tərəfli) limit anlayışı verilir.

Tərif 4. İstənilən $\varepsilon > 0$ ədədinə qarşı elə $\delta(\varepsilon) > 0$ ədədi tapmaq mümkündürsəki, $0 < x - x_0 < \delta(\varepsilon)$ şərtini ödəyən bütün x-lər üçün $|f(x) - A| < \varepsilon$ bərabərsizliyi ödənsin, onda A ədədinə $f(x)$ *funksiyasının* x_0 *nöqtəsində sağ limiti* deyilir və

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = A \quad \text{və ya} \quad \lim_{\substack{x \to x_0 \\ (x > x_0)}} f(x) = A$$

kimi yazılır.

Tərif 5. İstənilən $\varepsilon > 0$ ədədinə qarşı elə $\delta(\varepsilon) > 0$ ədədi tapmaq mümkündürsəki, $0 < x_0 - x < \delta(\varepsilon)$ şərtini ödəyən bütün x-lər üçün $\left| f(x) - A \right| < \varepsilon$ bərabərsizliyi ödənsin, onda A ədədinə $f(x)$ *funksiyasının* x_0 *nöqtəsində sol limiti* deyilir və

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = A \quad \text{və ya} \quad \lim_{\substack{x \to x_0 \\ (x < x_0)}} f(x) = A$$

Təriflərdən görünür ki,

$$\lim_{x \to 0^+} \sqrt{x} = 0 \quad \text{və} \quad \lim_{x \to 3^-} \sqrt{3 - x} = 0$$

bərabərlikləri doğrudur.

Misal. $f(x) = \dfrac{|x|}{x}$ funksiyasının $x_0 = 0$ nöqtəsində sol və sağ limitlərini hesablayın.

○ Verilən funksiyasının ancaq $x_0 = 0$ nöqtəsində təyin olunmadığı aydındır. Mütləq qiymətin tərifinə əsasən

$$|x| = \begin{cases} -x, \ x < 0 \ olduqda, \\ x, \ x \geq 0 \ olduqda \end{cases}$$

olmasını diqqətə alıb, verilən funksiyanın $x_0 = 0$ nöqtəsində sol və sağ limitlərini hesablayaq:

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} \frac{|x|}{x} = \lim_{x \to 0^-} \frac{-x}{x} = -1,$$

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} \frac{|x|}{x} = \lim_{x \to 0^+} \frac{x}{x} = 1.$$

Deməli, $x_0 = 0$ nöqtəsində verilən funksiyasının sol limiti -1-ə, sağ limit isə 1- ə bərabərdir. ●

Funksiyanın limitinin, sol və sağ limitlərinin tərifindən çıxır ki, *verilən nöqtədə funksiyanın sol və sağ limitləri varsa və bir birinə bərabərdirsə, onda həmin nöqtədə funksiyanın limti var. Eləcə də, verilən nöqtədə funksiyanın limiti varsa, onda həmin nöqtədə funksiyanın sol və sağ limitləri də var və bir birinə* *bərabərdir.sə, onda həmin nöqtədə funksiyanın limti var.* Söylənnəni riyazi olaraq daha açıq şəkildə aşağıdaki kimi yazmaq olar:

$$\lim_{x\to x_0^-} f(x) = \lim_{x\to x_0^+} f(x) = A \Rightarrow \lim_{x\to x_0} f(x) = A,$$

eləcə də

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = A \Rightarrow \lim_{x\to x_0^-} f(x) = \lim_{x\to x_0^+} f(x) = A.$$

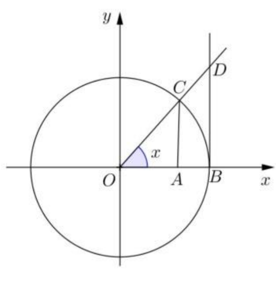
Qeyd 2. Funksiya limitinin tərifi, ardıcıllığın limiti vasitəsilə verildiyindən, ardıcıllığın limiti haqqında söylədiyimiz bütün teoremlər, uyğun dəyşikliklərlə funksiyanın limiti üçün də söylənə bilər. Onlardan bəzilərini söyləyək:

Teorem 1. *Hər hansı nöqtədə sonlu limiti olan funksiya həmin nöqtənin müəyyən ətrafında məhduddur.*

Teorem 2. *Hər hansı nöqtədə funksiyasının iki müxtəlif limiti ola bilməz. Başqa sözlə, hər hansı nöqtədə funksiyasının limiti varsa, yeganədir.*

Teorem 3. x_0 *nöqtəsində* $f(x)$ *və* $\varphi(x)$ *funksiyalarının sonlu limitləri varsa* $\left(\lim_{x\to x_0} f(x) = A, \lim_{x\to x_0} \varphi(x) = B\right)$ *, onda* $f(x)+\varphi(x)$, $f(x)-\varphi(x)$, $f(x)\cdot\varphi(x)$ *və* $f(x)/\varphi(x)$ *funksiyalarının da sözü edilən nöqtədə sonlu limiti var və uyğun olaraq A+B, A-B, A·B və A/B (kəsr halı üçün* $B \neq 0$*) ədədlərinə bərabərdir.*

Teorem 4. $\lim_{x\to x_0} f(x) = A$ və $A>0$ ($A<0$) *isə, onda* x_0 *nöqtəsinin elə bir* ($x_0-\delta$, $x_0+\delta$) *ətrafı var ki, həmin ətrafdakı bütün x-lər üçün* $f(x) > 0$ ($f(x) < 0$) *münasibəti doğrudur.*



Teorem 5. *x_0 nöqtəsinin müəyyən bir* Şəkil 2
$(x_0-\delta,\ \ x_0+\delta)$ ətrafında $f(x)\le g(x)\le \varphi(x)$ münasibətləri ödənir və $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)=A$ isə, onda $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=A$ olur.

Misal. Aşağıdaki bərabərliyin doğruluğunu isbat edin:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1. \qquad (1)$$

(1) limitinə *birinci görkəmli limit* deyilir.

○ Əvvəlcə $y=\dfrac{\sin x}{x}$ funksiyasına $(0,\pi/2)$ intervalında baxaq. 2-ci şəkildən görünür ki, həmin intervalda $|AC|<uz(BC)<|BD|$, buradan da $\sin x<x<tgx$ alınır (niyə?) ($|OB|=1$ qəbul edilmişdir). Bərabərsizliklərin xassələrini nəzərə nəzərə alıb, sonuncu bərabərsizliklərdən $1<\dfrac{x}{\sin x}<\dfrac{1}{\cos x}$, yaxud $\cos x<\dfrac{\sin x}{x}<1$ münasibətini alırıq. Burada $\lim\limits_{x\to 0}\cos x=1$ olduğunu nəzərə alsaq, Teorem 5-ə əsasən

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1\quad\left(x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)\right)$$

olur. cos x və $\dfrac{\sin x}{x}$ funksiyaları cüt olduğundan, $\cos x<\dfrac{\sin x}{x}<1$ ikiqat bərabərsizliyi $\left(-\dfrac{\pi}{2},0\right)$ intervalında da doğrudur. Odur ki,

$x\in\left(-\dfrac{\pi}{2},0\right)$ olduqda da $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$ münasibəti doğrudur. ●

Qeyd 3. (1) bərabərliyinin tətbiqi zamanı sinus işarəsi altındaki ifadə ilə məxrəcin eyni olub, sıfra yaxınlaşmasına diqqət etmək lazımdır. Əgər belə deyilsə, uyğun əməllərin köməyi ilə buna nail olunmalıdır. Məsələn,

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin kx}{x}=k\lim_{x\to 0}\frac{\sin kx}{kx}=k\cdot 1=k.$$

Birinci görkəmli limitin nəticələri deyilən aşağıdaki bərabərliklər misal həllində çox istifadə olunur:

1. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\arcsin x}{x}=1$. 2. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{tgx}{x}=1$. 3. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{arctgx}{x}=1$.

Onlardan birincisini isbat edək (geridə qalanlar oxuculara həvalə olunur): ○

$$\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin(\arcsin x)}{\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\frac{\sin x}{x}}=\frac{1}{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}}=\frac{1}{1}=1. \text{ ●}$$

Misallar. Aşağıdaki limitləri hesablayın:

1. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin\alpha x}{tg\beta x}$.

$$\text{○ } \lim_{x\to 0}\frac{\sin\alpha x}{tg\beta x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\alpha\sin\alpha x}{\alpha x}}{\frac{\beta tg\beta x}{\beta x}}=\frac{\alpha}{\beta}\frac{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin\alpha x}{\alpha x}}{\lim\limits_{x\to 0}\frac{tg\beta x}{\beta x}}=\frac{\alpha}{\beta}\cdot\frac{1}{1}=\frac{\alpha}{\beta}. \text{ ●}$$

2. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sin 3(x-1)}{x^2-1}$.

$$\text{○ } \lim_{x\to 1}\frac{\sin 3(x-1)}{x^2-1}=\lim_{x\to 1}\frac{\sin 3(x-1)}{(x-1)(x+1)}=\lim_{x\to 1}\frac{3\sin 3(x-1)}{3(x-1)}\cdot\frac{1}{x+1}=$$

$$3\lim_{x\to 1}\frac{\sin 3(x-1)}{3(x-1)}\cdot\lim_{x\to 1}\frac{1}{x+1}=3\cdot\frac{1}{2}=\frac{3}{2}. \text{ ●}$$

3. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{\sin x}$.

$$\text{○ } \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}}=\frac{\lim\limits_{x\to 0}\sin\frac{x}{2}}{\lim\limits_{x\to 0}\cos\frac{x}{2}}=\frac{0}{1}=0. \text{ ●}$$

§ 9. İKİNCİ GÖRKƏMLİ LİMİT. *e* ƏDƏDİ

Ümumi həddi $a_n = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$ olan ardıcıllığın yığılan olduğunu göstərək.

Əvvəlcə ümumi həddi $b_n = a_n \cdot \left(1+\dfrac{1}{n}\right)$ olan ardıcıllığa baxaq. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)=1$ olmasından aydındır ki, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n$ -dir. Odur ki, verilən ardıcıllığın yığılan olduğunu göstərmək üçün $\{b_n\} = \left\{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n+1}\right\}$ ardıcıllığının yığılan olduğunu göstərmək kifayətdir. Bunun üçün $\{b_n\}$ ardıcıllığının monoton azalan və aşağıdan məhdud olduğunu göstərək:

$$b_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1} \quad \text{və} \quad b_{n-1} = \left(1+\frac{1}{n-1}\right)^n = \left(\frac{n}{n-1}\right)^n$$

olmasına əsasən ($n>1$).

$$\frac{b_{n-1}}{b_n} = \left(\frac{n}{n-1}\right)^n : \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1} = \frac{n^{2n+1}}{(n-1)^n(n+1)^{n+1}} = \frac{\left(n^2\right)^n \cdot n}{(n^2-1)^n \cdot (n+1)} =$$

$$\left(\frac{n^2}{n^2-1}\right)^n \cdot \frac{n}{n+1} = \left(1+\frac{1}{n^2-1}\right)^n \cdot \frac{n}{n+1}.$$

Burada Nyuton binomu (bax: Riyaziyyat 1, § 168) düsturundan asanlıqla alınan

$$\left(1+\frac{1}{n^2-1}\right)^n > 1+\frac{n}{n^2-1} > 1+\frac{n}{n^2} = 1+\frac{1}{n} = \frac{n+1}{n}$$

bərabərsizliyini nəzərə alsaq.

$$\frac{b_{n-1}}{b_n} = \left(1+\frac{1}{n^2-1}\right)^n \cdot \frac{n}{n+1} > \frac{n+1}{n} \cdot \frac{n}{n+1} = 1,$$

yəni $b_{n-1} > b_n \, (n > 1)$ olmasını alırıq. Sonuncu bərabərsizlik $\{b_n\}$ ardıcıllığının monoton azalan olduğunu göstərir.

Yenə də Nyuton binomu düsturundan alınan

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} > 1+\frac{n+1}{n} = 2+\frac{1}{n} > 2$$

bərabərsizliyindən çıxır ki, $\{b_n\} = \left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}\right\}$ ardıcıllığı aşağıdan məhduddur.

Deməli, yığılan ardıcıllıqdır (bax § 4, Teorem 9). Yuxarıda deyilənlərə əsasən $\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\right\}$ ardıcıllığının da yığılan olmasını alırıq. Onun limiti *e*[1] ilə işarə olunur ve *ikinci görkəmli limit* deyə adlandırılır:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n} = e. \qquad (1)$$

e ədədi riyaziyyatda mühüm rol oynayır. İsbat olunmuşdur ki, o irrasional ədəddir və

$$e=2,718281828459045\ldots$$

Tərif. Əsası *e* ədədi olan loqarifmə *natural loqarifm* deyilir və ln ilə işarə olunur.

$$\log_e a = \ln a.$$

Adi loqarifmin bütün xassələri natural loqarifm üçün də doğrudur.

(1) münasibətində *n* natural ədəddir. Göstərmək olar ki,

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} = e \qquad (2)$$

---

[1] *e*-ədədi riyaziyyata L.Eyler (1707-1783) tərəfindən daxil edilmişdir.

münasibəti də doğrudur. Burada x istənilən qiymətlər almaqla ∞ -a yaxınlaşır ($x \to -\infty$ olduqda da (2) münasibəti doğrudur). (2) münasibətindən aydındır ki, $\frac{1}{x} = t$ əvəz etməklə onu

$$\lim_{t\to\infty}(1+t)^{\frac{1}{t}} = e \quad \text{və ya} \quad \lim_{x\to\infty}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e \qquad (3)$$

kimi də yazmaq olar.

Qeyd edək ki, e ədədi ilə bağlı olan bir çox limitləri hesablayarkən isbatsız qəbul edəcəyimiz aşağıdakı teoremdən çox istifadə olunur.

Teorem. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ və $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$ *isə, onda* $\lim\limits_{n\to\infty} a^{b_n}{}_n = a^b$ *münasibəti doğrudur* (a və b eyni zamanda 0 deyil).

Qeyd. (2) bərabərliyinin (deməк ki, eyni zamanda (1) və ya (3) bərabərliyinin) tətbiqi zamanı əsasdakı birinci toplananın 1, ikinci toplananınsa ustun tərsi olub, sıfra yaxınlaşan olmasına diqqət etmək lazımdır. Əgər belə deyilsə, uyğun əməllərin köməyi ilə buna nail olub, sonra bərabərliyi tətbiq etmək lazındır.

Misallar. Aşağıdaki limitləri hesablayın:

1. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2n}\right)^n$

○ $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2n}\right)^n = \lim\limits_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{2n}\right)^{2n}\right]^{\frac{1}{2}} = e^{\frac{1}{2}} = \sqrt{e}$. ●

2. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{3}{n^2+2}\right)^{n^2}$.

○ $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{3}{n^2+2}\right)^{n^2} = \lim\limits_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{3}{n^2+2}\right)^{\frac{n^2+2}{3}}\right]^{\frac{3n^2}{n^2+2}} = \lim\limits_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{3}{n^2+2}\right)^{\frac{n^2+2}{3}}\right]^{\frac{3}{1+\frac{2}{n^2}}} = e^3.$

●

3. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{1+x^2}{x^2}\right)^x$.

$$○\ \lim_{x\to\infty}\left(\frac{1+x^2}{x^2}\right)^x=\lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{x^2}\right)^{x^2}\right]^{\frac{1}{x}}=e^0=1\ ●$$

§ 10. FUNKSİYANIN KƏSİLMƏZLİYİ

Tutaq ki, $y=f(x)$ funksiyası x_0 nöqtəsində və onun hər hansı ətrafında təyin olunmuşdur.

Tərif 1. Əgər

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=f(x_0) \qquad (1)$$

isə, onda $f(x)$ funksiyasına x_0 *nöqtəsində kəsilməyən funksiya deyilir.*

Bu tərifdən çıxır ki, $f(x)$ funksiyası x_0 nöqtəsində kəsilməyəndirsə, onda: 1) funksiya x_0 nöqtəsində təyin olunub, yəni $f(x_0)$ var, 2) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ var, yəni x_0 nöqtəsində bir-birinə bərabər olan sol və sağ limitlər var, 3) funksiyanın limit qiyməti x_0 nöqtəsindəki xüsusi qiymətinə bərabərdir. Bu üç şərtə, funksiyanın *nöqtədə kəsilməzlik şərtləri* deyilir. Bu üç şərtdən hər hansı biri x_0 nöqtəsində pozularsa, onda funksiyaya bu *nöqtədə kəsilən funksiya* deyirlər.

$\lim\limits_{x\to x_0} x=x_0$ olduğundan (1) münasibətini.

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=f(\lim_{x\to x_0} x) \qquad (2)$$

kimi də yazmaq olar. Bu o deməkdir ki, *kəsilməyən funksiya işarəsi altında limitə keçmək olar, yəni limit işarəsi ilə funksiya işarəsinin yerləri dəyişdirilə bilər .*

Funksiya limitinin “ ε,δ ” dilində tərifindən, eləcə də ardıcıllıq dilində tərifindən çıxır ki, kəsilməzliyə yuxarıdakı təriflə eyni güclü olan aşağıdakı tərifləri də vermək olar.

Tərif 2. İstənilən $\varepsilon > 0$ ədədi üçün elə $\delta(\varepsilon) > 0$ ədədi tapmaq mümkündürsə ki, $|x - x_0| < \delta$ şərtini ödəyən bütün *x*-lər üçün $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ münasibəti ödənsin, onda $f(x)$ funksiyasına x_0 nöqtəsində *kəsilməyən* funksiya deyilir.

$x - x_0$ fərqinə arqumentin *x_0 nöqtəsindəki artımı* deyilir, və $x - x_0 = \Delta x$ ilə işarə olunur.

Aydındır ki, Δx mənfi və ya müsbət ola bilər. $f(x) - f(x_0)$ fərqinə *funksiyanın x_0 nöqtəsindəki artımı* deyilir və $f(x) - f(x_0) = \Delta f(x)$ (və ya Δy) ilə işarə olunur.

$x = x_0 + \Delta x$ olduğunu nəzərə alsaq, funksiyanın x_0 nöqtəsindəki artımını

$$\Delta f(x) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$$

kimi də yazmaq olar. Göründüyü kimi funksiyanın artımı arqumentin Δx artımından asılıdır.

Yuxarıda deyilənlərə əsasən kəsilməzliyin 2-ci tərifindən çıxır ki, funksiya x_0 nöqtəsində kəsilməyəndirsə, onda *həmin nöqtədə arqumentin kiçik artımına funksiyanın da kiçik artımı uyğun gəlir* $(|\Delta x| < \delta(\varepsilon)$ olduqda $|\Delta f(x)| < \varepsilon$ olur), yəni

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta f(x) = 0 .$$

Tərif 3. x_0 nöqtəsinin müəyyən ətrafından götürülmüş və x_0-a yığılan istənilən $\{f(x_n)\}$ qiymətlər ardıcıllığı $f(x_0)$-a yığılırsa, onda $f(x)$ funksiyasına x_0 nöqtəsində *kəsilməyən funksiya* deyilir.

Kəsilməzliyin tərifindən və limitlər haqqındakı uyğun teoremlərdən aşağıdakı hökmün doğruluğu çıxır.

Teorem. *Nöqtədə kəsilməyən funksiyaların cəmi, fərqi, hasili və nisbəti həmin nöqtədə kəsilməyən funksiyadır* (sonuncu halda bölən funksiya baxılan nöqtədə sıfırdan fərqli olmalıdır).

Misallar. Aşağıdaki funksiyaların istənilən $x_0 \in (-\infty, \infty)$ nöqtəsində kəsilməyən olduğunu göstərin:

1. $f(x) = kx + b$.

○ k=0 olduqda $|f(x) - f(x_0)| = b - b = 0$ olur və bu fərq həmişə istənilən ε-dan kiçikdir, yəni $f(x) = b$ (sabit funksiya) kəsilməzdir. İndi $k \neq 0$ olsun. Aydındır ki, verilən funksiya bütün həqiqi oxda təyin olunmuşdur. $\varepsilon > 0$ ixtiyari ədəd, x_0 isə həqiqi oxun istənilən nöqtəsi olsun. Elə $\delta(\varepsilon) > 0$ ədədi tapaq ki, $|x - x_0| < \delta$ şərtini ödəyən bütün *x*-lər üçün $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ bərabərsizliyi ödənsin.

$$|f(x) - f(x_0)| = |kx + b - kx_0 - b| = |k||x - x_0|$$

olmasından çıxır ki, $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ bərabərsizliyi $|k||x - x_0| < \varepsilon$, yəni $|x - x_0| < \frac{\varepsilon}{|k|}$ bərabərsizliyi ilə eyni güclüdür. Deməli, $\delta(\varepsilon) = \frac{\varepsilon}{|k|}$ qəbul etsək, $|x - x_0| < \delta$ şərtini ödəyən bütün *x*-lər üçün $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ bərabərsizliyi ödənəcək. Bu isə $y = kx + b$ xətti funksiyasının ixtiyari nöqtədə kəsilməzliyini göstərir. ●

2. $f(x) = x^2$.

○ Bu funksiya da bütün həqiqi oxda təyin olunmuşdur. $\varepsilon > 0$ ixtiyari ədəd, x_0 isə həqiqi oxun istənilən nöqtəsi olsun. Elə $\delta(\varepsilon) > 0$ ədədi tapaq ki, $|x - x_0| < \delta$ şərtini ödəyən bütün *x*-lər üçün $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ bərabərsizliyi ödənsin.

$$|f(x) - f(x_0)| = |x^2 - x_0^2| = |x + x_0||x - x_0| < M \cdot |x - x_0|$$

olmasından çıxır ki, $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ bərabərsizliyi $M \cdot |x - x_0| < \varepsilon$, yəni $|x - x_0| < \frac{\varepsilon}{M}$ bərabərsizliyi ilə eyni güclüdür (Burada, x_0 hər hansı sonlu nöqtə (ədəd), x də onun müəyyən ətrafından götürülmüş nöqtə (ədəd) olduğundan, $|x + x_0| < M$ bərabərsizliyi ödənəcək şəkildə bir $M > 0$ ədədinin varlığı şübhəsizdir). Deməli, $\delta(\varepsilon) = \dfrac{\varepsilon}{M}$ qəbul etsək, $|x - x_0| < \delta$ şərtini ödəyən bütün x-lər üçün $|f(x) - f(x_0)| = |x^2 - x_0^2| < \varepsilon$ bərabərsizliyi ödənəcək. Bu isə $y = x^2$ funksiyasının təyin oblastının ixtiyari nöqtəsində kəsilməzliyini göstərir. ●

Tərif 4. $f(x)$ funksiyası (a, b) intervalının bütün nöqtələrində kəsilməzdirsə, onda ona həmin *intervalda kəsilməyən funksiya* deyilir.

Tərif 5. Əgər

$$\lim_{x \to x_0 + 0} f(x) = f(x_0) \quad \left(\lim_{x \to x_0 - 0} f(x) = f(x_0) \right)$$

olarsa, onda $f(x)$ funksiyasına x_0 *nöqtəsində sağdan (soldan) kəsilməyən funksiya* deyilir.

Şəkil 3.

Tərif 6. $f(x)$ funksiyası $[a, b]$ parçasının bütün nöqtələrində kəsilməyən funksiya isə (a nöqtəsində sağdan, b nöqtəsində isə soldan kəsilməzlik başa düşülür), onda ona sözü edilən *parçada kəsilməyən funksiya* deyilir.

Qeyd etmək lazımdır ki, həndəsi olaraq funksiyanın parçada, yaxud intervalda kəsilməzliyi onun qrafikinin bütöv bir xətdən ibarət olması deməkdir. 2-ci tərifə əsasən funksiyanın nöqtədə kəsilməzliyini həndəsi olaraq aşağıdakı kimi izah etmək olar. Tutaq ki, $y = f(x)$ funksiyası x_0 nöqtəsində kəsilməzdir. Onda $M(x_0, f(x_0))$ nöqtəsi onun qrafiki üzərində olar (şəkil 3). Tərifdən aydındır ki, x_0-ın δ ətrafından götürülmüş ixtiyari x-ə uyğun funksiya qiymətləri ordinat oxu üzərindəki $f(x_0)$-ın ε ətrafında olacaq.

§ 11. MÜRƏKKƏB FUNKSİYA VƏ ONUN KƏSİLMƏZLİYİ

Tutaq ki, üç dənə x, u, y dəyişəni arasındakı asılılıq

$$y = f(u), \quad (\alpha \le u \le \beta)$$

$$u = \varphi(x), \quad (a \le x \le b)$$

kimi, yəni y dəyişəni u dəyişəninin, öz növbəsində u dəyişəni də x-in funksiyası kimi verilib. Özü də $\varphi(x)$ funksiyasının qiymətlər çoxluğu $[\alpha, \beta]$ parçasına daxildir. Bu halda, y dəyişəninə x dəyişəninin funksiyası kimi də baxmaq olar. Belə ki, x -in $[a, b]$ parçasından götürülmüş hər bir qiymətinə u-nun $[\alpha, \beta]$ parçasına daxil olan müəyyən bir qiyməti, sonuncuya isə y-in müəyyən bir qiyməti uyğun gəlir. Beləliklə, x-in $[a, b]$ parçasından götürülmüş hər bir qiymətinə y-in müəyyən bir qiyməti uyğun gəlir. Bu halda y dəyişəninə, u-nun vasitəsilə *x dəyişəninin mürəkkəb funsiyası* deyilir və

$$y = f[\varphi(x)]$$

kimi yazılır. u-ya *aralıq dəyişəni* və ya *aralıq arqumenti* deyilir.

Misal 1. $y = u^3$ və $u = 2x+1$ olduqda, $y = (2x+1)^3$ funksiyası x-in mürəkkəb funksiyasıdır.

Misal 2. $y = \cos u$ və $u = x^2 + 1$ olduqda $y = \cos(x^2 + 1)$ funksiyası x-in mürəkkəb funsiyasıdır.

Mürəkkəb funksiyanın kəsilməzliyi haqqında aşağıdakı teorem doğrudur.

Teorem. *Əgər $u = \varphi(x)$ funksiyası x_0 nöqtəsində, $y = f(u)$ funksiyası da $u_0 = \varphi(x_0)$ nöqtəsində kəsilməyəndirsə, onda $y = f[\varphi(x)]$ mürəkkəb funksiyası x_0 nöqtəsində kəsilməyəndir.*

Misal 3. $y = (3x+1)^2$ funksiyasının təyin oblastında kəsilməz olduğunu göstərin.

○ Göründüyü kimi, $y = u^2$ və $u = 3x+1$ kimi baxıldığında, ələ alınan funksiya x-in mürəkkəb funsiyasıdır, təyin oblastı da $(-\infty, \infty)$ aralığıdır. Bu funksiyaların hər ikisi öz təyin oblastıda kəsilməz funksiyalar olduğundan (bax: § 10**),** mürəkkəb funksiyanın kəsilməzliyi haqqında teoremə əsasən ələ alınan funksiya da təyin oblastında kəsilməzdir. ●

§ 12. ƏSAS ELEMENTAR FUNKSİYALARIN KƏSİLMƏZLİYİ

Bildiyimiz $y = x^\alpha$ (qüvvət), $y = a^x$ (üstlü), $y = \log_a x$ (loqarifmik), $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = tgx$, $y = ctgx$ (triqonometrik) və $y = \arcsin x$,

$y=\arccos x$, $y=arctgx$, $y=arcctgx$ (tərs triqonometrik) funksiyaları *əsas elementar funksiyalar* adlanır.

Bu funksiyalar Riyaziyyat 1 kitabında ətraflı şəkildə verilmişdir.

Əsas elementar funksiyaların kəsilməzliyi haqqında aşağıdakı teorem doğrudur:

Teorem 1. *Əsas elementar funksiyalar öz təyin oblastında kəsilməyəndir.*

Teoremi $y=\cos x$ funksiyası üçün isbat edək.

□ Aydındır $y=\cos x$ funksiyası bütün həqiqi oxda təyin olunub. x_0, həqiqi oxun ixtiyari nöqtəsi olsun. Arqumentə Δx artımı verib, funksiyanın uyğun artımını hesablayaq:

$$\Delta y=\cos(x_0+\Delta x)-\cos x_0=-2\sin(x_0+\frac{\Delta x}{2})\sin\frac{\Delta x}{2}.$$

Buradan

$$|\Delta y|=2\left|\sin\left(x_0+\frac{\Delta x}{2}\right)\right|\cdot\left|\sin\frac{\Delta x}{2}\right|\le 2\left|\sin\frac{\Delta x}{2}\right|<2\cdot\frac{|\Delta x|}{2}=|\Delta x|,$$

yəni $|\Delta y|<|\Delta x|$ olmasını alırıq. Bu isə təyin oblastının istənilən x_0 nöqtəsində arqumentin kiçik artımına funksiyanın kiçik artımının uyğun gəlməsini göstərir. Deməli, $y=\cos x$ funksiyası öz təyin oblastında kəsilməzdir. ■

Tərif. Əsas elementar funksiyalardan sonlu sayda hesab əməllərinin və mürəkkəb funksiya düzəltmənin köməyi ilə alınan və bir düsturla ifadə olunan funksiyalara *elementar funksiyalar* deyilir.

Misal 1. $y=x^2+1$, $y=x\sin x$, $y=(\log x)^3$, $y=x^2+3^x-\lg x$, $y=\log(x^2+1)$, $y=\sqrt{3+x\cos x}$, $y=\dfrac{x^2+x+2}{x^2+1}$, $y=\dfrac{\sin x+\cos x}{1+x}$

və s. funksiyaları elementar funksiyalardır.

Misal 2. $y=|x|$ funksiyası elementar deyil, çünki bu funksiya

$$y=\begin{cases}-x, & x<0 \ olduqda,\\ x, & x\ge 0 \ olduqda\end{cases}$$

kimi iki bərabərsizliklə (düsturla) verilib.

Əsas elementar funksiyaların və mürəkkəb funksiyanın kəsilməzliyi hakkında teoremlərdən,aşağıdakı teoremin doğruluğu alınır..

Teorem 2. *Bütün elementar funksiyalar öz təyin oblastında kəsilməyəndir.*

Bu teoremdən görünür ki, elementar funksiyaların kəsilməzlik oblastını tapmaq üçün, onun təyin oblastını tapmaq kifayətdir.

Misallar. Verilən funksiyaların kəsilməzlik oblastını tapın:

1. $y = x^2 + 1;$ 2. $y = \dfrac{x}{x+1};$ 3. $y = \lg(x^2 - 1);$

2. 4. $y = \dfrac{x}{x^2 - 4}.$

○ Verilən funksiyalar elementar olduğundan, onların təyin oblastı eyni zamanda kəsilməzlik oblastıdır. Odur ki, onların kəsilməzlik oblastları uyğun olaraq:

1. $x \in (-\infty + \infty);$ 2. $x \neq -1 \Rightarrow x \in (-\infty,-1) \cup (-1,+\infty);$

3. $x^2 - 1 > 0 \Rightarrow (x+1)(x-1) > 0 \Rightarrow x \in (-\infty,-1) \cup (1,\infty);$

$$x < -1 \text{ və ya } x > 1 \Rightarrow x \in (-\infty,-1) \cup (1,\infty);$$

4. $x^2 - 4 \neq 0 \Rightarrow (x+2)(x-2) \neq 0 \Rightarrow x \neq -2, x \neq 2 \Rightarrow$

$$x \in (-\infty,-2) \cup (-2,2) \cup (2,+\infty).$$ ●

§ 13. FUNKSİYA LİMİTİNİN HESABLANMASINA AİD MİSALLAR

Funksiya limitinin və kəsilməzliyinin təriflərindən eləcə də onlar haqqında olan teoremlərdən istifadə edərək bəzi funksiyaların limitini hesablayaq.

Misallar. Aşağıdaki limitləri hesablayın:

1. $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2 + 3x + 2}{x^2 + 1}.$

○ Göründüyü kimi elementar $f(x) = \dfrac{x^2 + 3x + 2}{x^2 + 1}$ funksiyası $x_0 = 1$ nöqtəsində təyin olunub, deməli kəsilməzdir (bax: § 12) və

$$f(1)=\frac{1^2+3\cdot 1+2}{1^2+1}=3.$$

Odur ki, $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+3x+2}{x^2+1}=f(1)=3$ olur (bax: § 10). ●

2. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}\dfrac{\sin x}{\cos^2 2x+ctg\frac{x}{2}}$.

○ $f(x)=\dfrac{\sin x}{\cos^2 2x+ctg\frac{x}{2}}$ funksiyası $x_0=\dfrac{\pi}{2}$ nöqtəsində təyin olunub, deməli kəsilməzdir. Odur ki,

$$\lim_{x\to \frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{\cos^2 2x+ctg\frac{x}{2}}=f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{1}{(-1)^2+1}=0{,}5. \quad ●$$

3. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{3x+2}{x^2-4}$.

○ $f(x)=\dfrac{3x+2}{x^2-4}$ funksiyası $x=2$ nöqtəsində təyin olunmadığından əvvəlki misallardakı kimi hərəkət etmək olmaz. Sözü edilən $x=2$ nöqtəsində $\dfrac{3x+2}{x^2-4}$ kəsirinin surəti sıfırdan fərqli, məxrəci isə sıfra bərabər olduğundan $\lim\limits_{x\to 2}f(x)=\infty$ olur. Odur ki,

$$\lim_{x\to 2}\frac{3x+2}{x^2-4}=\infty. \quad ●$$

4. $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{x^2+5x+6}{x^2-9}$.

○ $x=-3$ nöqtəsində $\dfrac{x^2+5x+6}{x^2-9}$ kəsrinin həm surəti, həm ə məxrəci sıfra çevrildiyindən, əvvəlki misallardakı kimi hərəkət etmək olmaz. Eyni çevirmələr aparmaqla, limit altındakı ifadəni

$$\frac{x^2+5x+6}{x^2-9}=\frac{(x+3)(x+2)}{(x+3)(x-3)}$$

şəklində yazıb, $x\to -3$ və $x\neq -3$ olduğundan kəsri (x+3)-ə ixtisar etsk, nəticədə

$$\lim_{x\to -3}\frac{x^2+5x+6}{x^2-9}=\lim_{x\to -3}\frac{(x+3)(x+2)}{(x+3)(x-3)}=\lim_{x\to -3}\frac{x+2}{x-3}=\frac{-3+2}{-3-3}=\frac{-1}{-6}=\frac{1}{6}$$

alarıq. ●

5. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2+x-6}{\sqrt{x^2+5}-3}$.

○ $x=2$ olduqda limit altındakı kəsrin surət və məxrəci sıfıra çevrilir. Onun surət və məxrəcini məxrəcin qoşmasına vurub, lazım olan çevirmələri aparaq:

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2+x-6}{\sqrt{x^2+5}-3}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x+3)\left(\sqrt{x^2+5}+3\right)}{\left(\sqrt{x^2+5}-3\right)\left(\sqrt{x^2+5}+3\right)}=$$

$$\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x+3)\left(\sqrt{x^2+5}+3\right)}{x^2+5-9}==\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x+3)\left(\sqrt{x^2+5}+3\right)}{(x-2)(x+2)}=$$

$$\lim_{x\to 2}\frac{(x+3)\left(\sqrt{x^2+5}+3\right)}{(x+2)}=\frac{(2+3)(\sqrt{4+5}+3}{2+2}=7{,}5.$$ ●

Qeyd 1. Dəyişən sonsuzluğa yaxınlaşdıqda rasional kəsrin limitini hesablamaq üçün, dəyişənin ən yüksək qüvvəti müəyyən olunaraq, kəsrin surət və məxrəci həmin qüvvətə bölündükdən sonra limitə keçilir. Nəticədə

$$\lim_{x\to\infty}\frac{a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_{n-1}x+a_n}{b_0x^m+b_1x^{m-1}+\ldots+b_{m-1}x+b_m}=\begin{cases}0, & n<m \ \ olduqda,\\ \dfrac{a_0}{b_0}, & n=m \ \ olduqda,\\ \infty, & n>m \ \ olduqda.\end{cases}$$

münasibəti alınır ($a_0\neq 0,\ b_0\neq 0$). Ümumiyyətlə isə bu üsul, dəyişənin qüvvətində kəsr olduqda da tətbiq olunur. Bunu misallarla izah edək.

Misallar. Aşağıdaki limitləri hesablayın:

1. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2+2x-5}{x^2+3x+2}$,

○ 1.Kəsrin surət və məxrəcini dəyişənin ən yüksək qüvvəti olan x^2-na bölməklə

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2+2x-5}{x^2+3x+2}=\lim_{x\to\infty}\frac{3+\frac{2}{x}-\frac{5}{x^2}}{1+\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}}$$

alırıq. Burada $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5}{x^2}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2}{x^2}=0$ olmasını nəzərə alsaq, kəsrin və cəbri cəmin limitinə əsasən

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3+\frac{2}{x}-\frac{5}{x^2}}{1+\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}}=\frac{3+0-0}{1+0-0}=3$$

olur. ●

2. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3\sqrt{x^5}+4x-2}{x^2+3\sqrt{x^3}+2}$.

○ Göründüyü kimi limit altında dəyişənin ən yüksək qüvvəti $x^{5/2}$-dir. Kəsrin surət və məxrəcini bu ifadəyə bölüb, limitə keçək:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3\sqrt{x^5}+4x-2}{x^2+3\sqrt{x^3}+2}=\lim_{x\to\infty}\frac{3+\dfrac{4}{x^{3/2}}-\dfrac{2}{x^{5/2}}}{\dfrac{1}{x^{1/2}}+\dfrac{3}{x}+\dfrac{2}{x^{5/2}}}=\frac{3+0-0}{0+0+0}=\frac{3}{0}=\infty.\ \bullet$$

3. $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+2x-1}-3x)$.

○ Göründüyü kimi limit altındakı azalan və çıxılan sonsuzluğa yaxınlaşır. Limit altındakı ifadəni öz qoşmasına vurub böldükdən sonra, lazım olan əməlləri yerinə yetirək:

$$\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+2x-1}-3x)=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+2x-1-9x^2}{\sqrt{x^2+2x-1}+3x}=\lim_{x\to\infty}\frac{-8x^2+2x-1}{\sqrt{x^2+2x-1}+3x},$$

Son limit altındakı ifadənin surət və məxrəcini dəyişənin ən yüksək qüvvəti olan x^2-na bölüb, limitə keçək:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{-8x^2+2x-1}{\sqrt{x^2+2x-1}+3x}=\lim_{x\to\infty}\frac{-8+\dfrac{2}{x}-\dfrac{1}{x^2}}{\sqrt{\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{2}{x^3}-\dfrac{1}{x^4}}+\dfrac{3}{x}}=\frac{-8+0-0}{\sqrt{0+0-0}+0}=\frac{-8}{0}=-\infty.$$

●

Qeyd 2. *İkinci görkəmli limitin nəticələri* deyilən,

1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x}=1$; 2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^x-1}{x}=\ln a$ $\left(\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{x}=1\right)$

bərabərliklərinin doğruluğunu göstərək.

□ 1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\ln(1+x)^{\frac{1}{x}}=\ln e=1;$

2. $a^x - 1 = t$ olsun. Onda $x = \dfrac{\ln(1+t)}{\ln a}$ və $x \to 0$-da $t \to 0$ olur. Odur ki,

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x} = \lim_{t\to 0}\frac{t\ln a}{\ln(1+t)} = \ln a\,\frac{1}{\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\ln(1+t)}{t}} = \ln a\cdot\frac{1}{1}. = \ln a. \ \blacksquare$$

Misallar. Aşağıdaki limitləri hesablayın:

1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1-5x)}{x}$; 2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x^2}-1}{x}$; 3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3^x-1}{\ln(2x+1)}$;

4. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+4x^2)}{e^{x^2}-1}$; 5. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+3x)}{\ln(1+2x)}$; 6. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x^2}-1}{2^{x^2}-1}$.

○ 1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1-5x)}{x} = -5\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1-5x)}{-5x} = -5\cdot 1 = -5;$

2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x^2}-1}{x} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x(e^{x^2}-1)}{x^2} = \lim\limits_{x\to 0}x\cdot\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x^2}-1}{x^2} = 0\cdot 1 = 0;$

3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3^x-1}{\ln(2x+1)} = \dfrac{1}{2}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3^x-1}{x}\cdot\dfrac{2x}{\ln(2x+1)} = \dfrac{1}{2}\cdot\ln 3\cdot 1 = \dfrac{\ln 3}{2};$

4. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+4x^2)}{e^{x^2}-1} = 4\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+4x^2)}{4x^2}\cdot\dfrac{x^2}{e^{x^2}-1} = 4\cdot 1\cdot 1 = 4;$

5. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+3x)}{\ln(1+2x)} = \dfrac{3}{2}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+3x)}{3x}\cdot\dfrac{2x}{\ln(1+2x)} = \dfrac{3}{2}\cdot 1\cdot 1 = \dfrac{3}{2};$

6. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x^2}-1}{2^{x^2}-1} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x^2}-1}{x^2}\cdot\dfrac{x^2}{2^{x^2}-1} = 1\cdot\dfrac{1}{\ln 2} = \dfrac{1}{\ln 2}.$ ●

Çalışmalar.

Limitləri hesablayın:

1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{5x}$; 2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tg\,2x}{x}$; 3. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sin 2(x-1)}{4(x-1)}$;

4. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{4x}{\sin 5x}$; 5. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$;

6. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(\cos x\sin 2x-3\cos 2x\sin x)$;

7. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x+1}{x^2+1}$; 8. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2+3x+5}{x^2+1}$; 9. $\lim\limits_{x\to -2}\frac{x^2-3x-10}{x^2-4}$;

10. $\lim\limits_{x\to 1}\sqrt{x^2+2x-2}$; 11. $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2+x-6}{x^2+6x-16}$; 12. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2-5x+4}{x^2+5x-6}$;

13. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2+5x-2}{3x^2-2x+1}$; 14. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x+1}{2x-1}\right)^x$; 15. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{x+1}{2x+1}\right)^{\frac{1}{3x}}$;

16. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x-1}{x+2}\right)^{x+3}$.

Verilən funksiyaların kəsilməz olduqları çoxluqları tapın.

17. $y=\sqrt{x^3+3x+5}$; 18. $y=\ln(x^2+1)$; 19. $y=\sqrt{x^3+x}$;

20. $y=\frac{x^2+1}{\sqrt{x}}$; 21. $y=\sqrt{4-x^2}$; 22. $y=\frac{x+1}{x^2-9}$;

23. $y=\sqrt{1-\log_3 x}$; 24. $y=\frac{2x+1}{x^2-5x+6}$.

Arqumentə Δx artımı verməklə funksiyanın Δy artımını tapın və kəsilməz olduğunu göstərin:

25. $y=5x+3$;26. $y=3-4x$; 27. $y=2x^2$;

28. $y=3x^2-1$; 29. $y=ax^2+bx+c$; 30. $y=x^3+2x^2-1$;

31. $y=\frac{2x+1}{x^2+1}$; 32. $y=\cos 2x$ 33. $y=\sin 3x$;

34. $y=x^2+\sin x$.

Aşağıdaki limitləri hesablayın:

35. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin 3x}{4x}$; 36. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{arctg3(x-1)}{x^2-1}$; 37. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{tg(x-2)}{x^2-4}$;

38. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\sin 2x}{1-\cos 4x}$; 39. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x-\sin 2x}{4x-\sin 3x}$; 40. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{5^{x^2}-1}{3^{x^2}-1}$;

41. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+3x)}{x}$; 42. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1-3x)}{\ln(1+2x)}$; 43. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3^{x^2}-1}{\ln(5x^2+1)}$.

TESTLƏR

1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x}{7x}$ -i hesablayın:

A) $\dfrac{5}{7}$ B) $\dfrac{7}{5}$ C) 5 D) 7 E) 1

2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^3 2x}{8x^3}$ -i hesablayın:

A) 0 B) $\dfrac{1}{4}$ C) 1 D) 4 E) $\dfrac{1}{2}$

3. Hesablayın: $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{9x+7}{\sqrt{9x^2-5x+6}}$

A) $\dfrac{1}{3}$ B) 0 C) 1 D) 3 E) -3

4. Hesablayın: $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^3-27}{x-3}$

A) 22 B) 23 C) 24 D) 25 E) 27

5. Hesablayın: $\lim\limits_{\frac{x}{y}\to 1}\dfrac{5x-2y}{2x+y}$

A) $\dfrac{7}{3}$ B) 1 C) $\dfrac{5}{2}$ D) $\dfrac{1}{3}$ E) 0

6. Verilən funksiyanın kəsilməz olduğu çoxluğu tapın.

$$y = \frac{2x+1}{x^2 - 7x + 10}$$

A) (0; 2) B) $[2;5)$ C) $(-\infty;2)\cup(2;5)\cup(5;+\infty)$

D) $(-\infty;2]$ E) (0; 5)

7. Limiti hesablayın: $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+(3n)^{-1}\right)^n$

A) 0 B) e C) ∞ D) $\sqrt[3]{e}$ E) $\sqrt{e}$

8. $y = \sqrt{x-2}$ funksiyasının toplaşma nöqtələrini tapın.

A) 1,5 B) $[2,\infty)$ C) -2 D) 0,5 E) -5

9. Uyğunluğu müəyyən edin.

1. $\lim\limits_{x\to m}\frac{(x+n)(x-m)}{x^2-m^2} = A$

2. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n-3n^2}{n+2n^2} = A$

3. $\lim\limits_{x\to n}\frac{(x-m)(x-n)}{x^2-n^2} = A$

a. $A = \frac{n-m}{2n}$

b. $A = -\frac{3}{2}$

c. n=3m olduqda $A = 2$

d. n=3m olduqda $A = \frac{1}{3}$

e. $A = \frac{m+n}{2m}$

10. Hesablayın:

$$\lim_{x\to 4}\frac{x^3-64}{x^2-4x}$$

III FƏSİL

TÖRƏMƏ

§ 14. TÖRƏMƏ ANLYIŞINA GƏTİRƏN MƏSƏLƏLƏR

1. Ani surət. Tutaq ki, maddi *M* nöqtəsi hər hansı *O* nöqtəsindən başlayaraq düz xətt boyunca müəyyən istiqamətdə hərəkət edir. Aydındır ki, *M* nöqtəsinin istənilən *t* anında başlanğıcdan olan məsafəsi (s) zamanın (t) funksiyasıdır. Onu

$$s = f(t)$$

ilə işarə edək. Əgər *t* anından $t + \Delta t$ anınadək keçən Δt zaman müddətində gedilən məsafəni Δs ilə işarə etsək,

$$\Delta s = f(t + \Delta t) - f(t) \quad (= \Delta f)$$

olar. $\dfrac{\Delta s}{\Delta t}$ nisbətinə, t anından başlayaraq keçən Δt zaman müddətində sözü edilən maddi *M* nöqtəsinin *orta sürəti* deyilir və

$$v_{op} = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{f(t + \Delta t) - f(t)}{\Delta t}$$

kimi işarə olunur.

Aydındır ki, Δt nə qədər kiçik olarsa, $v_{op.}$ maddi nöqtənin *t* anındakı sürətinə daha yaxın olar. Odur ki, Δt sıfra yaxınlaşdıqda orta surətin yaxınlaşdığı limitə *maddi M nöqtəsinin t anındakı surəti* deyilir və $v(t)$ kimi işarə olunur:

$$v(t) = \lim_{\Delta t \to 0} v_{op.} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{f(t + \Delta t) - f(t)}{\Delta t}. \quad (1)$$

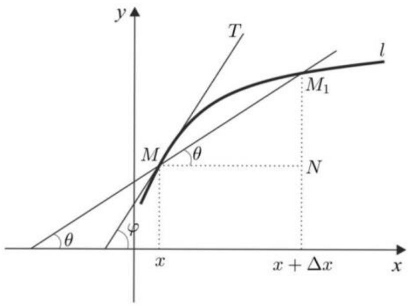
Misal. Maddi nöqtə $s = t^3$ qanunu üzrə hərəkət edirsə, onun iştənən *t* anındakı ani sürətini tapın.

○

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{(t + \Delta t)^3 - t^3}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{3t^2 \Delta t + 3t(\Delta t)^2 + (\Delta t)^2}{\Delta t} =$$

$$= \lim_{\Delta t \to 0} (3t^2 + 3t\,\Delta t + (\Delta t)^2) = 3t^2, \text{ yəni } \quad v = 3t^2. \bullet$$

2. Əyriyə toxunan düz xətt. Tutaq ki, kəsilməz l əyrisi $y = f(x)$ funksiyası vasitəsilə verilmişdir. Bu əyri üzərində absisləri uyğun olaraq x və $x + \Delta x$ olan $M\,(x, f(x))$ və $M_1\,(x + \Delta x, f(x + \Delta x))$ nöqtələri qeyd edib, bu nöqtələrdən kəsən keçirək (şəkil 4).



Şəkil 4

Tərif. M_1 nöqtəsi əyri boyunca M nöqtəsinə yaxınlaşdıqda (yəni $\Delta x \to 0$-da) kəsənin aldığı limit vəziyyətinə M nöqtəsində *əyriyə çəkilmiş toxunan* deyilir (əgər bu limit varsa). Şəkildən görünür ki, kəsənin absis oxunun müsbət istiqaməti ilə əmələ gətirdiyi θ bucağının tangensi üçün

$$tg\,\theta = \frac{NM_1}{MN} = \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

münasibəti doğrudur.

Aydındır ki, $M(x, y)$ nöqtəsindən keçən və əyriyə toxunan düz xəttin tənliyini yazmaq üçün onun bucaq əmsalını (k), yəni absis oxunun müsbət istiqaməti ilə əmələ gətirdiyi φ bucağının tangensini bilmək lazımdır. Bu söylənənlərdən çıxır ki, bucaq əmsalı üçün,

$$k = tg\,\varphi = \lim_{\Delta x \to 0} tg\,\theta = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

bərabərliyi doğrudur ($\Delta x \to 0$-da $\theta \to \varphi$ olduğundan).

Misal. $y = x^2$ parabolasına $M(1,1)$ nöqtəsində toxunan düz xəttin tənliyini yazın.

○ $$k = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(1+\Delta x)^2 - 1}{2x} =$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{2\Delta x+(\Delta x)^2}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}(2+\Delta x)=2$$

olduğundan, toxunanın tənliyi $y=kx+b$, yəni $y=2x+b$ olur.

Burada b-ni tapmaq üçün toxunanın $M\,(1{,}1)$ nöqtəsindən keçdiyini nəzərə alaq:

$$1=2\cdot 1+b,\qquad b=-1.$$

Beləliklə, toxunan üçün

$$y=2x-1$$

tənliyini alırıq. ●

§ 15. FUNKSİYANIN TÖRƏMƏSİ

Əvvəlki paraqrafda baxdığımız hər iki misalın müxtəlif xarakterli olmasna baxmayaraq, nəticə eyni şəkildə bir limitin, yəni arqument artımı sıfra yaxınlaşdıqda funksiya artımının arqument artımına olan nisbətinin limitinin hesablanmasına gətirilir. Bunu riyazi olaraq ümumiləşdirək.

Tutaq ki, $y=f(x)$ funksiyası $(a,\,b)$ intervalında təyin olunmuş funksiya, x isə bu intervalın ixtiyari nöqtəsidir. Arqumentə Δx artımı verib (bu şərtlə ki, $x+\Delta x\in(a,b)$ və $\Delta x\neq 0$ olsun) funksiyanın uyğun $\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)$ artımını tapaq və

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}\quad(\Delta x\neq 0)\qquad(1)$$

nisbətini düzəldək.

Tərif. Arqument artımı sıfra yaxınlaşdıqda, funksiya artımının arqument artımına olan nisbətinin limiti varsa, onda bu limitə funksiyanın törəməsi deyilir. $y=f(x)$ funksiyasının hər hansı x nöqtəsində törəməsi ($f'(x)$),

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=f'(x)\qquad(2)$$

kimi işarə olunur. Verilən x nöqtəsində törəməsi olan funksiyaya həmin *nöqtədə diferensiallanan funksiya* deyilir. $(a,\,b)$ intervalının bütün nöqtələrində törəməsi olan funksiyaya həmin *intervalda diferensiallanan funksiya* deyilir.

Funksiyanın törəməsi üçün $f'(x)$ işarəsi əvəzinə y', $\frac{dy}{dx}$, $\frac{df(x)}{dx}$, $\frac{d}{dx}$ $f(x)$ işarələri də işlənir.

Funksiyanın törəməsinin tapılma əməlinə onun diferensiallanması deyilir. x_0 nöqtəsi (a, b) intervalının qeyd olunmuş bir nöqtəsi olduqda (2) bərabərliyi

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=f'(x_0)$$

(2*)

kimi yazılır və $f(x)$-ə x_0 *nöqtəsində diferensiallanan funksiya,* $f'(x_0)$-a da *törəmə ədədi* deyilir (burada $\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$ kimi başa düşülür) . Funksiyanın nöqtdə soldan və sağdan limitinə, eləcə də kəsilməzliyi anlayışlarına oxşar olaraq, soldan və sağdan törəmə anlayışı da verilə bilər:

Tərif. (2) nisbətinin sağ (sol) limitinə $f(x)$ funksiyasının x nöqtəsində *sağ (sol) törəməsi* deyilir və $f'(x^+)[f'(x^-)]$ kimi işarə olunur:

$$\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=f'(x^+)\quad\left(\lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=f'(x^-)\right)$$

. (3)

Limitin və törəmənin, eləcə də sağ və sol limit və törəmənin tərifindən çıxır ki:

1) $f(x)$ funksiyasının x nöqtəsində törəməsi varsa, onda onun bu nöqtədə sağ və sol törəmələri də var və $f'(x)=f'(x^+)=f'(x^-)$-dir;

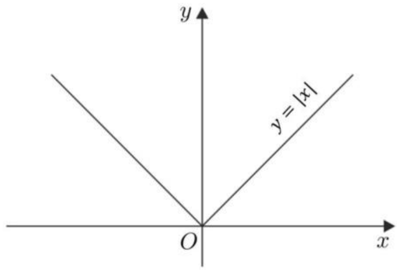
2) $f(x)$ funksiyasının x nöqtəsində bir birinə bərabər sağ və sol törəmələri varsa, onun bu nöqtədə törəməsi də var və $f'(x^+)=f'(x^-)=f'(x)$-dir.

Tərif. Qapalı $[a,b]$ parçasında təyin olunmuş $f(x)$ funksiyası bu parçanın bütün daxili nöqtələrində differensiallanan, eləcə də a nöqtəsində sağdan, b nöqtəsində isə soldan differensiallanan olduqda, onda ona sözü edilən *parçada differensiallanan funksiya* deyilir.

Diferensiallanan funksiya üçün aşağıdakı teorem doğrudur.

Teorem. *Əgər $f(x)$ funksiyası x_0 nöqtəsində diferensiallandırsa, onda o, həmin nöqtədə kəsilməyəndir.*

Qeyd etmək lazımdır ki, bu teoremin tərsi ümumiyyətlə doğru deyil, yəni x_0 nöqtəsində kəsilməyən funksiya həmin nöqtədə diferensiallanan olmaya da bilər. Məsələn, $y=|x|$ funksiyası bütün həqiqi oxda kəsilməyən funksiyadır, lakin onun qrafikinə absisi $x_0=0$ olan nöqtədə toxunan çəkmək olmaz (niyə?), yəni həmin nöqtədə funksiya diferensiallanan deyil (şəkil 5).



Şəkil 5

Misallar. Aşağıgaki funksiyaların təyin oblastında törəməsini tapın.

1. $y=c=sabit.$

○ $y=f(x)=c$ olduğundan $(x\in(-\infty,\infty))$,
$\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)=c-c=0$ olur və buradan

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{0}{\Delta x}=0,\quad \text{yəni } y'=c'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=0$$

alınır. Deməli, *sabitin törəməsi sıfra bərabərdir.* ●

2. $y=x.$

○ Bütün x-lər $(x\in(-\infty,\infty))$ üçün $\Delta y=x+\Delta x-x=\Delta x$ və

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\Delta x}{\Delta x}=1 \text{ olduğndan, } y'=x'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=1$$

olur. Deməli, *arqumentin (sərbəst dəyişənin) törəməsi sıfra bərabərdir* $(x'=1)$.. ●

3. $y=x^2.$

○ Bütün x-lər $(x \in (-\infty, \infty)$ üçün $\Delta y = (x+\Delta x)^2 - x^2 = 2x\Delta x + (\Delta x)^2$ və $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = 2x + \Delta x$ olduğndan,

$$y' = (x^2)' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} (2x + \Delta x) = 2x$$

olur. Yəni, $(x^2)' = 2x$-dir. ●

4. $y = \sin x$.

○ $y = \sin x$ funksiyası $(x \in (-\infty, \infty)$ üçün

$$\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x) = \sin(x+\Delta x) - \sin x = 2\sin\frac{\Delta x}{2}\cos(x + \frac{\Delta x}{2})$$

olduğunu ($\sin\alpha - \sin\beta = 2\sin\dfrac{\alpha-\beta}{2}\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}$ düsturuna görə) nəzərə alıb, buradan

$$y' = (\sin x)' = \lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = 2\lim_{\Delta x \to 0}\frac{\sin\dfrac{\Delta x}{2}\cos(x+\dfrac{\Delta x}{2})}{\Delta x} =$$

$$\lim_{\Delta x \to 0}\frac{\sin\dfrac{\Delta x}{2}}{\dfrac{\Delta x}{2}}\lim_{\Delta x \to 0}\cos(x+\frac{\Delta x}{2}) = 1\cdot\cos x = \cos x,$$

yəni $(\sin x)' = \cos x$ olması alınır. ●

§ 16. TÖRƏMƏNİN FİZİKİ VƏ HƏNDƏSİ MƏNASI. TOXUNAN DÜZ XƏTTİN TƏNLİYİ

Törəmənin tərifindən istifadə etməklə § 14-də söylədiklərimizi aşağıdakı kimi yekunlaşdırmaq olar.

1. Maddi M nöqtəsinin getdiyi yolun zamandan asılılığı $s = f(t)$ funksiyası ilə verilibcə, onda onun t anındakı surəti bu funksiyanın törəməsinə bərabərdir:

$$v = s' = f'(t).$$

Deməli, *törəmənin fiziki mənası sürətdir.*

Eyni qayda ilə göstərmək olar ki, maddi nöqtənin sürətinin zamandan asılılığı

$$v = v(t)$$

düsturu ilə verilibsə, onda onun t anındakı təcili

$$a = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = v'(t)$$

kimi olur.

Deməli, *təcil surətin zamana görə törəməsidir.*

2. $y = f(x)$ funksiyası ilə verilən əyriyə, yəni onun qrafikinə absisi x_0 olan nöqtədə çəkilən toxunan düz xəttin *bucaq əmsalı* bu funksiyanın x_0 nöqtəsindəki törəməsinə bərabərdir:

$$k = f'(x_0).$$

Deməli, *törəmənin həndəsi mənası əyriyə çəkilmiş toxunan düz xəttin bucaq əmsalıdır.*

İndi $M_0(x_0, y_0)$ nöqtəsində $y = f(x)$ funksiyasının qrafikinə çəkilmiş toxunan düz xəttin tənliyini çıxaraq.

Axtarılan tənlik $y = kx + b$, yəni

$$y = f'(x_0) \cdot x + b \tag{1}$$

olsun. Bu düz xətt M_0 nöqtəsindən keçdiyindən $(y_0 = f(x_0))$,

$$y_0 = f'(x_0) \cdot x_0 + b \tag{2}$$

yaza bilərik. (1) və (2) bərabərliklərini tərəf-tərəfə çıxsaq,

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0) \tag{3}$$

olur. Bu, axtarılan toxunan düz xəttin tənliyidir.

Yuxarıda deyilənlərdən çıxır ki, $y = f(x)$ funksiyası x_0 nöqtəsində diferensiallanandırsa, onda onun qrafikinə $M_0(x_0, y_0)$ nöqtəsində toxunan düz xətt çəkmək olar.

Bütün nöqtələrində toxunanı olan *əyriyə hamar əyri* deyilir.

§ 17. CƏMİN, HASİLİN VƏ KƏSRİN TÖRƏMƏSİ

Tutaq ki, $f(x)$ və $\varphi(x)$ funksiyaları hər hansı $(a,\ b)$ intervalında diferensiallanan funksiyalar, x həmin intervalın ixtiyari nöqtəsi, Δx isə onun artımıdır. Özü də Δx elədir ki, $x+\Delta x$ nöqtəsi bu intervaldan kənara çıxmır. Hər dəfə xüsusi qeyd etmədən bu şərtlərin ödəndiyini qəbul edəcəyik. İndi aşağıdakı teoremləri isbat edək.

Teorem 1. *İki funksiya cəminin törəməsi onlarn törəmələrinin cəminə bərabərdir.*

$$\left(f(x)+\varphi(x)\right)' = f'(x)+\varphi'(x). \qquad (1)$$

□ $y = f(x)+\varphi(x)$ funksiyası üçün x-ə Δx artımı verib, onun aldığı artımı hesablayaq:

$$\Delta y = \left(f(x+\Delta x)+\varphi(x+\Delta x)\right)-\left(f(x)+\varphi(x)\right) =$$
$$\left(f(x+\Delta x)-f(x)\right)+\left(\varphi(x+\Delta x)-\varphi(x)\right) = \Delta f(x)+\Delta\varphi(x),$$

yəni:

$$\Delta y = \Delta f(x)+\Delta\varphi(x). \qquad (2)$$

(2) bərabərliyinin hər iki tərəfini Δx-ə bölüb, $\Delta x \to 0$-da limitə keçsək (hər bir toplananın limiti olduğundan cəmin limiti limitlər cəminə bərabərdir)

$$y' = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{\Delta f(x)}{\Delta x}+\frac{\Delta\varphi(x)}{\Delta x}\right) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f(x)}{\Delta x}+\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta\varphi(x)}{\Delta x}$$

olar. Burada

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = f'(x),\ \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta\varphi(x)}{\Delta x} = \varphi'(x)$$

olmasını nəzərə alsaq, (1) münasibətinin doğruluğunu alarıq. ■

Misal. $(x^2+\sin x)' = (x^2)'+(\sin x)' = 2x+\cos x$ **(bax: § 15).**

Teoremin istənilən sonlu sayda toplanan üçün də doğruluğunu asanlıqla göstərmək olar:

$$\left(f_2(x)+f_2(x)+\ldots+f_n(x)\right)' = f_1'(x)+f_2'(x)+\ldots+f_n'(x).$$

Teorem 2. *İki funksiya hasilinin törəməsi üçün*

$$\left(f(x)\varphi(x)\right)' = f'(x)\varphi(x) + f(x)\varphi'(x) \qquad (3)$$

düsturu doğrudur.

□ $y = f(x)\varphi(x)$ funksiyası üçün x-ə Δx artımı verib, onun aldığı artımı hesablayaq:

$$\Delta y = f(x+\Delta x)\varphi(x+\Delta x) - f(x)\varphi(x) =$$

$$\left(f(x+\Delta x)\varphi(x+\Delta x) - f(x)\varphi(x+\Delta x)\right) + \left(f(x)\varphi(x+\Delta x) - f(x)\varphi(x)\right) =$$

$$\left(f(x+\Delta x) - f(x)\right)\varphi(x+\Delta x) + f(x)\left(\varphi(x+\Delta x) - \varphi(x)\right) =$$

$$\Delta f(x)\varphi(x+\Delta x) + f(x)\cdot\Delta\varphi(x),$$

yəni:

$$\Delta y = \Delta f(x)\varphi(x+\Delta x) + f(x)\Delta\varphi(x). \qquad (4)$$

(4) bərabərliyinin hər iki tərəfini Δx-ə bölüb $\Delta x \to 0$-da, limitə keçsək,

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f(x)}{\Delta x}\lim_{\Delta x\to 0}\varphi(x+\Delta x) + f(x)\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta\varphi(x)}{\Delta x},$$

yəni:

$$\left(f(x)\varphi(x)\right)' = f'(x)\varphi(x) + f(x)\varphi'(x). \ \blacksquare$$

Misal. $(x^2\sin x)' = (x^2)'\sin x + x^2(\sin x)' = 2x\sin x + x^2\cos x$ (bax: § 15).

Nəticə 1. Sabit vuruğu törəmə işarəsi xaricinə çıxarmaq olar:

$$\left(cf(x)\right)' = cf'(x)$$

□ Doğrudan da (3) düsturuna əsasən

$$\left(cf(x)\right)' = c'f(x) + cf'(x) = cf'(x)$$

olur $(c' = 0)$. ■

Misal. $(5x^2)' = 5(x^2)' = 5\cdot 2x = 10x.$

Nəticə 2. Fərqin törəməsi törəmələr fərqinə bərabərdir:

$$\left(f(x) - \varphi(x)\right)' = f'(x) - \varphi'(x).$$

□ Doğrudan da teorem 1 və nəticə 1-ə əsasən

$$\left(f(x) - \varphi(x)\right)' = \left(f(x) + (-1)\varphi(x)\right)' = f'(x) + \left((-1)\varphi(x)\right)' = f'(x) - \varphi'(x)$$

olur. ■

Misal. $(x^2 - \sin x)' = (x^2)' - (\sin x)' = 2x - \cos x.$

Analoji üsulla (3) düsturunu istənilən sonlu sayda vuruğun hasili üçün ümumiləşdirmək olar. Məsələn, üç vuruq üçün

$$\left(f(x)\varphi(x)\psi(x)\right)' = f'(x)\varphi(x)\psi(x) + f(x)\varphi'(x)\psi(x) + f(x)\varphi(x)\psi'(x)$$

düsturu doğrudur.

Teorem 3. *$\varphi(x) \neq 0$ olduqda kəsrin törəməsi üçün*

$$\left(\frac{f(x)}{\varphi(x)}\right)' = \frac{f'(x)\varphi(x) - f(x)\varphi'(x)}{\varphi^2(x)} \tag{5}$$

düsturu doğrudur.

□ $y = \dfrac{f(x)}{\varphi(x)}$ funksiyası üçün x-ə Δx artımı verib, onun aldığı artımı aşağıdakı kimi çevirək:

$$\Delta y = \frac{f(x+\Delta x)}{\varphi(x+\Delta x)} - \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \frac{f(x+\Delta x)\varphi(x) - f(x)\varphi(x+\Delta x)}{\varphi(x+\Delta x)\varphi(x)} =$$

$$\frac{f(x+\Delta x)\varphi(x) - f(x)\varphi(x) + f(x)\varphi(x) - f(x)\varphi(x+\Delta x)}{\varphi(x+\Delta x)\varphi(x)} =$$

$$\frac{\left(f(x+\Delta x) - f(x)\right)\varphi(x) - f(x)\left(\varphi(x+\Delta x) - \varphi(x)\right)}{\varphi(x+\Delta x)\varphi(x)},$$

yəni

$$\Delta y = \frac{\Delta f(x)\varphi(x) - f(x)\Delta\varphi(x)}{\varphi(x+\Delta x)\varphi(x)}. \tag{6}$$

(6) münasibətinin hər tərəfini Δx-ə bölüb, $\Delta x \to 0$-da limitə keçək,

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\dfrac{\Delta f(x)}{\Delta x}\varphi(x) - f(x)\cdot\dfrac{\Delta\varphi(x)}{\Delta x}}{\varphi(x+\Delta x)\cdot\varphi(x)},$$

yəni

$$\left(\frac{f(x)}{\varphi(x)}\right)' = \frac{f'(x)\varphi(x) - f(x)\varphi'(x)}{\varphi^2(x)}. \blacksquare$$

Nəticə 3. $\left(\frac{f(x)}{c}\right)' = \frac{1}{c} f'(x).$

□ Doğrudan da

$$\left(\frac{f(x)}{c}\right)' = \left(\frac{1}{c} \cdot f(x)\right)' \frac{1}{c} f'(x). \ \blacksquare$$

Nəticə 4. $\left(\frac{c}{f(x)}\right)' = -\frac{c\varphi'(x)}{\varphi^2(x)}.$

□ Doğrudan da

$$\left(\frac{c}{f(x)}\right)' = -\frac{c'\varphi(x) - c\varphi'(x)}{\varphi^2(x)} = -\frac{c\varphi'(x)}{\varphi^2(x)}. \ \blacksquare$$

Misal. $\left(\frac{\sin x}{x^2+1}\right)' = \frac{(\sin x)'(x^2+1) - \sin x(x^2+1)'}{(x^2+1)^2} = \frac{(x^2+1)\cos x - 2x\sin x}{(x^2+1)^2}.$

§ 18. ƏSAS ELEMENTAR FUNKSİYALARIN TÖRƏMƏSİ

1. Qüvvət funksiyasının törəməsi. Əvvəlcə, sadəlik üçün

$$y = x^n \quad (n \in N)$$

funksiyasına baxaq.

Teorem 1. $y = x^n$ *funksiyasının törəməsi üçün*

$$(x^n)' = nx^{n-1} \tag{1}$$

düsturu ilə hesablanır.

○ İsbatı riyazi induksiya üsulu ilə aparaq. n=1 olduqda $x'=1$, yəni (1) düsturu doğrudur. Tutaq ki, n=k üçün (1) düsturu doğrudur:

$$(x^k)' = kx^{k-1}.$$

Göstərək ki, n=$k+1$ olduqda da (1) düsturu doğrudur. Doğrudan da

$$(x^{k+1})' = (x^k \cdot x)' = (x^k)' \cdot x + x^k \cdot x' = kx^{k-1} \cdot x + x^k = kx^k + x^k = (k+1)x^k,$$

yəni

$$(x^{k+1})' = (k+1) \cdot x^k$$

olur. Deməki ki, (1) düsturu istənilən $n \in N$ üçün doğrudur. ■

İndi $y = x^{-n}$, yəni $y = \frac{1}{x^n}$ funksiyasına baxaq ($n \in N$). Kəsrin törəməsi və (1) düsturuna əsasən

$$(x^{-n}) = \left(\frac{1}{x^n}\right)' = -\frac{nx^{n-1}}{x^{2n}} = -\frac{n}{x^{n+1}} = -nx^{-(n+1)},$$

yəni

$$(x^{-n})' = -nx^{-n-1} \qquad (2)$$

münasibətini alırıq. (1) və (2) düsturlarını birləşdirib

$$(x^n)' = nx^{n-1} \quad (n \in Z) \qquad (3)$$

düsturunu alırıq.

Beləliklə, bütün tam n-lər üçün (3) düsturunun doğruluğunu alırıq (n=0 olduqda (3) düsturu aşkardır).

Qeyd edək ki, (3) düsturu istənilən həqiqi qüvvət üçündə doğrudur:

$$(x^a)' = ax^{a-1}. \qquad (4)$$

Bunu isbatsız qəbul edək.

Qeyd. $a = \frac{m}{n}$ olduqda (4) düsturu

$$(x^{\frac{m}{n}})' = \frac{m}{n} x^{\frac{m-n}{n}}$$

şəklinə düşür. Bunu çevirib

$$(\sqrt[n]{x^m})' = \frac{m}{n\sqrt[n]{x^{n-m}}}$$

alırıq. Xüsusi halda n=2, m=1 olduqda

$$\left(\sqrt{x}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

olur.

Misal 1. $y=\frac{1}{x^3}+5x^2-3x+1$ funksiyasının törəməsini tapın.

○ $y=\left(\frac{1}{x^3}+5x^2-3x+1\right)'=(x^{-3}+5x^2-3x+1)'=-3x^{-4}+10x-3.$ ●

Misal 2. $y=\sqrt[3]{x^2}+3\sqrt{x}$ funksiyasının törəməsini tapın.

○ $y'=(\sqrt[3]{x^2}+3\sqrt{x})'=\frac{2}{3\sqrt[3]{x}}+\frac{3}{2\sqrt{x}}.$ ●

Misal 3. $y=x^3$ funksiyasının qrafikinə absisi x=1 olan nöqtədə toxunan düz xəttin tənliyini yazın.

○ Bildiyimiz kimi (bax § 16) $y=f(x)$ funksiyasının qrafikinə (x_0,y_0) nöqtəsində toxunan düz xəttin tənliyi

$$y-y_0=k(x-x_0)$$

kimidir.

$x_0=1$ olduqda $y_0=(1)^3=1$ olur. Digər tərəfdən $k=f'(x)\Big|_{x=x_0}=3x^2\Big|_{x_0=1}=3$ olduğundan, toxunanın tənliyi

$$y-1=3(x-1) \quad \text{və ya} \quad y=3x-2$$

olur. ●

Misal 4. Cisim $v_0=90$ m/san başlanğıc sürəti ilə yuxarı atılmışdır. Hərəkət qanununun $s(t)=v_0t-\frac{gt^2}{2}$ olduğunu bilərək, hərəkət sürətinin neçə saniyədən sonra başlanğıc sürətindən 6 dəfə kiçik olacağını tapın (g=10 m/san^2).

○ Törəmənin fiziki mənasına əsasən hərəkət sürətinin

$$v=s'(t)$$

düsturu ilə verildiyini bilirik (bax § 16). Şərtə görə $s'(t)=\frac{v_0}{6}$ olduğundan

$$\left(v_0 t - \frac{gt^2}{2}\right)' = \frac{v_0}{6}, \text{ yəni } v_0 - gt = \frac{v_0}{6}$$

yaza bilərik. Buradan $90 - 10t = \frac{90}{6}$, yəni $10t = 75$ və nəticədə $t = 7{,}5$ san. olmasını alırıq. ●

2. Üstlü funksiyanın törəməsi.

Teorem 2. *$y = a^x$ üstlü funksiyasının törəməsi üçün*

$$(a^x)' = a^x \ln a \qquad (5)$$

düsturu doğrudur.

□ Törəmənin tərifinə görə

$$(a^x)' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{a^{x+\Delta x} - a^x}{\Delta x} = a^x \lim_{\Delta x \to 0} \frac{a^{\Delta x} - I}{\Delta x} = a^x \ln a .$$

Burada $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{a^{\Delta x} - 1}{\Delta x} = \ln a$ olmasından istifadə etdik (bax § 13 misal 8). ■

Xüsusi halda $a=e$ olarsa, (5) düsturu

$$(e^x)' = e^x \qquad (6)$$

şəklinə düşər. *Sıfır xaric, törəməsi özünə bərabər olan tək funksiya $y = e^x$ -dir.*

Misal 5. $y = 3^x + 2x^2 - 1$ funksiyasının törəməsini tapın.

○ $(3^x + 2x^2 - 1)' = (3^x)' + (2x^2)' - (1)' = 3^x \ln 3 + 4x$.

●

3. Loqarifmik funksiyanın törəməsi.

Teorem 3. $y = \log_a x$ loqarifmik funksiyasının törəməsi üçün

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x}\log_a e \text{ və ya } (\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a} \qquad (7)$$

düsturu doğrudur.

□ Törəmənin tərifinə görə

$$(\log_a x)' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\log_a(x+\Delta x) - \log_a x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\Delta x} \log_a\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right) =$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{x} \cdot \frac{x}{\Delta x} \log_a\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right) = \frac{1}{x} \lim_{\Delta x \to 0} \log_a\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{x}{\Delta x}} = \frac{1}{x}\log_a e,$$

yəni

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x}\log_a e = \frac{1}{x\ln a}.$$

Burada $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \log_a\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{x}{\Delta x}} = \log_a e$ və $\log_a e = \frac{1}{\ln a}$ olması nəzərə alınıb. ■

Xüsusi halda $a=e$, yəni natural logarifm üçün (7) düsturu

$$(\ln x)' = \frac{1}{x} \qquad (7')$$

şəklinə düşər ($\ln e = 1$ olduğundan).

Misal 6. $y = \sqrt{x} + \log_3 x$ funksiyasının törəməsini tapın.

$$\bigcirc\ (\sqrt{x} + \log_3 x)' = (\sqrt{x})' + (\log_3 x)' = \frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{x\ln 3}. \ \bullet$$

4. Triqonometrik funksiyaların törəməsi.

Teorem 5. $y = \sin x$ *funksiyasının törəməsi üçün*

$$(\sin x)' = \cos x \qquad (8)$$

düsturu doğrudur(bax § 15 misal 4).

Teorem 6. $y = \cos x$ funksiyasının törəməsi üçün

$$(\cos x)' = -\sin x \qquad (9)$$

düsturu doğrudur.

(9) düsturunun çıxarılışı (8) düsturunun çıxarılışına bənzərdir.

Teorem 7. $y = tgx$ *funksiyasının törəməsi üçün*

$$(tgx)' = \frac{1}{\cos^2 x} \qquad (10)$$

düsturu doğrudur.

□

$$(tgx)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{(\sin x)' \cos x - (\cos x)' \sin x}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}. \quad \blacksquare$$

Eyni qayda ilə kotangens funksiyasının törəməsi üçün

$$(ctgx)' = -\frac{1}{\sin^2 x} \qquad (11)$$

düsturu alınır.

Misal 7. $y = 3\sin x - 3x\cos x - 5x^2 tgx + 2ctgx$ funksiyasının törəməsini tapın.

○ $$y' = (3\sin x - 3x\cos x - 5x^2 tgx + 2ctgx)' =$$

$$3\cos x - 3\cos x + 3x\sin x - 10xtgx - \frac{5x^2}{\cos^2 x} - \frac{2}{\sin^2 x} =$$

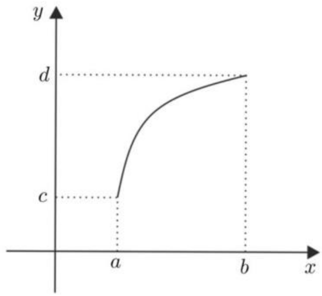
$$3x\sin x - 10xtgx - \frac{5x^2}{\cos^2 x} - \frac{2}{\sin^2 x}. \quad \bullet$$

5. Tərs-triqonometrik funksiyaların törəməsi. Tərs-triqonometrik funksiyaların törəməsi, tərs funksiya ilə əlaqədar olduğundan əvvəlcə tərs funksiya və onun törəməsini nəzərdən keçirək.

Tutaq ki, $y = f(x)$ funksiyası $[a,b]$ parçasında kəsilməyən və monoton funksiyadır, özü də $f(a) = c$, $f(b) = d$-dir. Müəyyənlik üçün artan funksiyaya baxaq. Bu halda arqumentin müxtəlif qiymətlərinə funksiyanın müxtəlif qiymətləri və tərsinə, funksiyanın müxtəlif qiymətlərinə arqumentin müxtəlif qiymətləri uyğun gələcək, özü də $x_1 < x_2$ isə $f(x_1) < f(x_2)$ olacaq (şəkil 6). Odur ki, $[c,d]$ parçasından götürülmüş hər bir y-ə $[a,b]$ parçasından yeganə bir x uyğun gələcək, özü də $y = f(x)$ münasibətini ödəyəcək. Beləliklə, $[c,d]$ parçasında

$x=\varphi(y)$ funksiyasını təyin etmiş oluruq.

$x=\varphi(y)$ funksiyasına $y=f(x)$ funksiyasının *tərs funksiyası* deyilir. Şəkildən görünür ki, $\varphi(y)$ funksiyası $[c,d]$ parçasında kəsilməyəndir.



Şəkil 6

$f(x)$ funksiyası monoton və kəsilməyən olduğundan $\Delta x\neq 0$ artımına $\Delta y\neq 0$ artımı uyğun gələcək və $\Delta x\to 0$ olduqda $\Delta y\to 0$ olacaq. Odur ki,

$$y_x'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{1}{\frac{\Delta x}{\Delta y}}=\frac{1}{\lim\limits_{\Delta y\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta y}}=\frac{1}{x'_y},$$

yəni

$$y_x'=\frac{1}{x'_y}\quad (x'_y\neq 0) \tag{12}$$

münasibətini alırıq.

(1) düsturu *tərs funksiyanın törəmə düsturudur.* Bu düsturdan istifadə edərək tərs triqonometrik funksiyaların törəmə düsturlarını çıxaraq.

1) $y=arc\sin x$ *funksiyasının törəməsi.* Bildiyimiz kimi $y=arc\sin x$ $(-1\leq x\leq 1)$ funksiyasının tərs funksiyası $x=\sin y$ funksiyasıdır $\left(-\frac{\pi}{2}\leq y\leq\frac{\pi}{2}\right)$. Odur ki, (12) düsturuna əsasən

$$y_x'=(arc\sin x)'=\frac{1}{x'_y}=\frac{1}{(\sin y)'_y}=\frac{1}{\cos y}=\frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}}=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}},$$

yəni

$$(\arcsin x)'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \tag{13}$$

olur. Bu düstur $-1 < x < 1$ olduqda doğrudur. $x = \pm 1$ olduqda isə sağ tərəf ∞ -a çevrilir. Bu isə o deməkdir ki, $y = arc\sin x$ funksiyası qrafikinə absisi $x = \pm 1$ olan nöqtələrdə çəkilmiş toxunan ordinat oxuna paralel olur.

2. $y = arc\cos x$ *funksiyasının törəməsi.*

$y = arc\cos x$ $(-1 \le x \le 1)$ funksiyasının tərsi $x = \cos y$ $(0 \le y \le \pi)$ olduğundan, yuxarıdakına analoji olaraq

$$(arc\cos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \tag{14}$$

alınır.

3. $y = arc\,tg\,x$ *funksiyasının törəməsi.* $y = arc\,tg\,x$ $(-\infty < x < +\infty)$ funksiyasının tərs funksiyası $x = tg\,y$ $\left(-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}\right)$ funksiyasıdır (bax R. 1. § 193). Odur ki, (12) düsturuna əsasən

$$y_x' = (arc\,tgx)' = \frac{1}{x'_y} = \frac{1}{(tg\,y)'_y} = \cos^2 y = \frac{1}{\sqrt{1+tg^2 y}} = \frac{1}{1+x^2}\ ,$$

yəni

$$(arc\,tg\,x)' = \frac{1}{1+x^2} \quad (-\infty < x < +\infty) \tag{15}$$

alınır.

4. $y = arc\,ctg\,x$ *funksiyasının törəməsi.* Analoji yolla

$$(arc\,ctg\,x)' = -\frac{1}{1+x^2} \quad (-\infty < x < +\infty) \tag{16}$$

düsturu alınır.

Misal 8. $y = \dfrac{arc\sin x}{arc\cos x}$ funksiyasnın törəməsini tapın.

○ $y' = \left(\dfrac{arc\sin x}{arc\cos x}\right)' = \dfrac{(arc\sin x)' arc\cos x - (arc\cos x)'(arc\sin x)}{(arc\cos x)^2} =$

$$\frac{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\arccos x+\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\arcsin x}{(arc\cos x)^2}=\frac{arc\cos x+arc\sin x}{\sqrt{1-x^2}\cdot(arc\cos x)^2}.$$

Burada $arc\cos x+arc\sin x=\frac{\pi}{2}$ münasibətini (bax. R. 1. § 195) nəzərə alsaq,

$$y'=\left(\frac{arc\sin x}{arc\cos x}\right)'=\frac{\pi}{2\sqrt{1-x^2}\,(arc\cos x)^2}.$$

alırıq. ●

Misal 9. $y=arc\,ctg\,x$ funksiyasının qrafikinə absisi $x_0=1$ olan nöqtədə toxunan düz xəttin tənliyini yazın.

○ $x_0=1$ olduqda, $y_0=arc\,ctg1=\frac{\pi}{4}$ və $k=(arc\,ctg\,x)'\big|_{x=1}=-\frac{1}{1+x^2}\big|_{x=1}=-\frac{1}{2}$ olmasını nəzərə alsaq, $\left(1,\frac{\pi}{4}\right)$ nöqtəsində $y=arc\,ctg\,x$ funksiyasının qrafikinə çəkilmiş toxunanın tənliyi üçün

$$y-\frac{\pi}{4}=-\frac{1}{2}(x-1)\text{, yəni } y=-\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}(2+\pi)$$

münasibətini alırıq. ●

Aldığımız düsturları *törəmə cədvəli* adlanan aşağıdakı şəkildə verək:

1.	$y=x^{\alpha}$	$y'=\alpha x^{\alpha-1}$
2.	$y=a^x,\ a\in R,\ a>0,\ a\neq 1$ $y=e^x$	$y'=a^x\ln a$ $y'=e^x$
3.	$y=\log_a x,\ a\in R,\ a>0,\ a\neq 1$ $y=\ln x$	$y'=\frac{\log_a e}{x}=\frac{1}{x\ln a}$ $y'=\frac{1}{x}$

4.	$y = \sin x$	$y' = \cos x$
5.	$y = \cos x$	$y' = -\sin x$
6.	$y = tgx$	$y' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$
7.	$y = ctgx$	$y' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$
8.	$y = arc\sin x$	$y' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
9.	$y = arc\cos x$	$y' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
10.	$y = arctgx$	$y' = \dfrac{1}{1+x^2}$
11	$y = arcctgx$	$y' = -\dfrac{1}{1+x^2}$

§ 19. MÜRƏKKƏB FUNKSİYANIN TÖRƏMƏSİ

Fərz edək ki, hər hansı intervalda

$$y = f[\varphi(x)] \qquad (1)$$

mürəkkəb funksiyası verilmişdir. Özü də $u = \varphi(x)$ funksiyasi x nöqtəsində, $y = f(u)$ funksiyası da sözü edilən u nöqtəsində diferensiallanandırlar. Onda $y = f[\varphi(x)]$ funksiyası da x nöqtəsində diferensiallanandır və onun törəməsi üçün

$$y'_x = y'_u \cdot u'_x \qquad (2)$$

münasibəti doğrudur. Burada y'_x ilə $f[\varphi(x)]$ funksiyasının x-ə nəzərən, y'_u ilə $f(u)$ funksiyasının u-ya nəzərən, u'_x ilə isə $\varphi(x)$ funksiyasının x-ə nəzərən törəməsi işarə edilmişdir.

Mürəkkəb funksiyanın törəmə düsturu deyilən (2) düsturunun doğruluğunu isbat etmək üçün $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ limitini aşağıdakı kimi çevirək:

$$y'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\(\Delta u\to 0)}}\frac{\Delta y}{\Delta u}\cdot\frac{\Delta u}{\Delta x}=\lim_{\Delta u\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta u}\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}.$$

Burada $\lim\limits_{\Delta u\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta u}=y'_u$, $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta u}{\Delta x}=u'_x$ olmasını nəzərə alsaq, (2) düsturu alınır.

Misallar. Aşağıdakı funksiyaların törəməsini tapın:

1. $y=\sin x^2$.

○ $y=\sin u,\ u=x^2$ olduğunu qəbul etsək, (2) düsturuna görə,

$$y'_x=y'_u\cdot u'_x=(\sin u)'_u\cdot(x^2)'_x=\cos u\cdot 2x,$$

yəni $(\sin x^2)'=2x\cos x$ olur. ●

2. $y=(2x+\cos x)^2$.

○ $y=u^2,\ u=2x+\cos x$ olduğunu qəbul etsək, (2) düsturuna görə,

$y'_x=y'_u\cdot u'_x=(u^2)'_u\cdot(2x+\cos x)'_x=2u(2-\sin x)=2(2x+\cos x)(2-\sin x)$, yəni $\left((2x+\cos x)^2\right)'=2(2x+\cos x)(2-\sin x)$ olur. ●

(2) düsturundan istifadə etməklə, § 18-də verdiyimiz törəmə cədvəlini, $y=f\left(u(x)\right)$ mürəkkəb funksiyası üçün aşağıdakı ümumi şəkildə vermək olar (burada f əsas elementar funksiyalardan uyğun olanıdır):

1.	$y=u^a$	$y'_x=au^{a-1}\cdot u'$
2.	$y=a^u,\ a\in R,\ a>0,\ a\neq 1$ $y=e^u$	$y'_x=a^u\ln a\cdot u'$ $y'_x=e^u\cdot u'$

3.	$y=\log_a u,\ a\in R,\ a>0,\ a\neq 1$ $y=\ln u$	$y'_x=\dfrac{\log_a e}{u}\cdot u'=\dfrac{u'}{u}\cdot\dfrac{1}{\ln a}$ $y'_x=\dfrac{1}{u}u'$
4.	$y=\sin u$	$y'_x=\cos u\cdot u'$
5.	$y=\cos u$	$y'_x=-\sin u\cdot u'$
6.	$y=tgu$	$y'_x=\dfrac{u'}{\cos^2 u}$
7.	$y=ctgu$	$y'_x=-\dfrac{u'}{\sin^2 u}$
8.	$y=arc\sin u$	$y'_x=\dfrac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$
9.	$y=arc\cos u$	$y'_x=-\dfrac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$
10.	$y=arc\,tgu$	$y'_x=\dfrac{u'}{1+u^2}$
11	$y=arc\,ctgu$	$y'_x=-\dfrac{u'}{1+u^2}$

Ola bilər ki, mürəkkəb funksiya bir neçə funksiyanın, məsələn $y=f(u)$, $u=\varphi(v)$, $v=\psi(x)$ funksiyalarının köməyi ilə verilsin. Bu halda onun törəməsi üçün

$$y'_x=y'_u\cdot u'_v\cdot v'_x \qquad (3)$$

düsturu doğrudur.

Qeyd. Törəmə düsturlarının tətbiqi ilə misal həlli zamanı aşağıdakılara fikir vermək lazımdır.

1) Törəməsi alınan funksiyanın növünü təyin etmək (Bildiyimiz kimi funksiyanın növü onun üzərində aparılan axırıncı əməllə müəyyən olunur).

2) Funksiya mürəkkəb şəkildə verilibsə, aralıq dəyişəni müəyyən etmək.

3) Bunları nəzərə almaqla müvafiq düsturu tətbiq etmək.

Misallar. Aşağıdakı funksiyaların törəməsini tapın:

1. $y=(2x^2+3x-1)^{\frac{1}{3}}$.

○ Funksiyanın yazılışından onun qüvvət funksiyası, aralıq dəyişəninsə $u=2x^2+3x-1$ olduğu aydındır. Ona görə də,

$$y'=\left((2x^2+3x-1)^{\frac{1}{3}}\right)'=\frac{1}{3}(2x^2+3x-1)^{\frac{1}{3}-1}(2x^2+3x-1)'=$$

$$\frac{1}{3}(2x^2+3x-1)^{-\frac{2}{3}}(4x+3)=\frac{4x+3}{3\sqrt[3]{(2x^2+3x-1)^2}}$$

olur. ●

2. $y=\ln(x+\sqrt{a^2+x^2})$.

○ Funksiya loqarifmik funksiya, aralıq dəyişən isə $u=x+\sqrt{a^2+x^2}$ -dır. Odur ki,

$$y'=\left(\ln(x+\sqrt{a^2+x^2})\right)'=\frac{1}{x+\sqrt{a^2+x^2}}\left(x+\sqrt{a^2+x^2}\right)'=$$

$$\frac{1}{x+\sqrt{a^2+x^2}}\left(1+\left(\sqrt{a^2+x^2}\right)'\right)=\frac{1}{x+\sqrt{a^2+x^2}}\left(1+\frac{\left(a^2+x^2\right)'}{2\sqrt{a^2+x^2}}\right)=$$

$$\frac{1}{x+\sqrt{a^2+x^2}}\left(1+\frac{2x}{2\sqrt{a^2+x^2}}\right)=\frac{1}{x+\sqrt{a^2+x^2}}\cdot\frac{\sqrt{a^2+x^2}+x}{\sqrt{a^2+x^2}}=\frac{1}{\sqrt{a^2+x^2}}$$

olur. ●

3. $y=tg^2\,x+arc\sin 3x$.

○ Verilən funksiya iki funksiyanın cəmidir, özü də birinci funksiya qüvvət funksiyası (aralıq dəyişən $u=tg\,x$), ikinci funksiya isə arksinus funksiyasıdır (aralıq dəyişən $u=3x$). Ona görə də,

$$y'=\left(tg^2\,x+arc\sin 3x\right)'=\left(tg^2\,x\right)'+\left(arc\sin 3x\right)'=$$

$$2tgx\cdot\left(tgx\right)'+\frac{1}{\sqrt{1-(3x)^2}}\cdot(3x)'=\frac{2\sin x}{\cos^3 x}+\frac{3}{\sqrt{1-9x^2}}$$

alırıq. ●

ÇALIŞMALAR.

1. Törəmənin tərifindən istifadə edərək verilən funksiyaların x_0 nöqtəsində törəməsini tapın:

a) $y=2x^2-3x+1;\quad x_0=1.$ b) $y=\frac{2}{x};\quad x_0=-1;$

c) $y=\frac{1}{x+1};\quad x_0=3.$ d) $y=\frac{1}{x+2};\quad x_0=-3.$

2. $y=f(x)$ funksiyası üçün $f'(x)$ və $f'(x_0)$-ı tapın:

a) $y=2x^3-5x+1;\quad x_0=1,$ b) $x=4x^3-6x^2-12x+5;\quad x_0=0.$

c) $y=3x^{-4}+x^{-2};\quad x_0=-1,$ d) $y=\sin(3x-1);\quad x_0=\frac{1}{3},$

e) $y=\sqrt{2x^3-3x+10;}\quad x_0=1,$ f) $y=\sqrt{\cos 2x};\quad x_0=\frac{\pi}{6}.$

3. Verilən funksiyaların törəməsini tapın:

1) $y=(1+x+2x^2)^3$; 2) $y=(2x+3)^5$;

3) $y=\sqrt{3x^2+6x+7}$; 4) $y=\sqrt[3]{x^2+x+5}$;

5) $y=(2x+3)(x^2+3)$; 6) $y=\frac{3x+2}{x+1}$;

7) $y=3^{2x^2+1};$ 8) $y=2^{3x^2+5x+3};$

9) $y=5^{x^2-x};$ 10) $y=\ln(3x^2+1);$

11) $y=\log_3(x^2+2);$ 12) $y=\lg(2x^2+x+1);$

13) $y=\sin^2(2x+1);$ 14) $y=\sin 2x\cos 2x\ (x+1);$

15) $y=\cos^2 x\sin x$; 16) $y=\frac{1+\sin x}{1-\cos}$;

17) $y = ctg\frac{x}{2} + ctg^2\frac{x}{2}$;

18) $y = \sin^2 2x$;

19) $y = \cos^2 3x$;

20) $y = \frac{1}{\sin^3 2x}$;

21) $y = tg\frac{1}{x}$;

22) $y = tg^2\sqrt{x}$;

23) $y = tgx - ctgx$;

24) $y = \cos x^2$;

25) $y = \sin ax \cos bx$;

26) $y = \arcsin 2x$;

27) $y = \arccos^2 3x$;

28) $y = arc\sin x \; arc\cos x$;

29) $y = \frac{1}{\arcsin^2 x}$;

30) $y = arc\,tg^3 x$;

31) $y = x \; arc\,ctgx^2$;

32) $y = x^2 \; arc\,tg2x$;

33) $y = \frac{arc\sin x}{arc\cos x}$;

34) $y = arc\,ctg^3 2x$.

4. Verilən funksiyaların qrafikinə absisi x_0 olan nöqtədə çəkilmiş toxunanın tənliyini yazın:

a) $y = \sin x + 1; \quad x_0 = \frac{\pi}{6}$,

b) $y = \frac{3}{x+1}; \quad x_0 = -2$.

c) $y = \sqrt{x^2+1}; \quad x_0 = \sqrt{3}$;

d) $y = x^2 + 1; \quad x_0 = 1$.

e) $y = \ln x; \quad x_0 = 2$;

f) $y = \ln(x+1); \quad x_0 = 1$.

5. Düz xətli hərəkət zamanı gedilən yolun zamandan asılılığı $s = s(t)$ münasibəti ilə verildikdə t_0 anındakı sürəti tapın (yol metrlə, zaman saniyə ilə ölçüldükdə):

a) $s = t^2 - 3t + 3; \quad t_0 = 2$.

b) $s = t^3 + 2t^2 - 4t + 2; \quad t_0 = 2$.

c) $s = \sqrt{t+1}; \quad t_0 = 3$.

d) $s = \frac{t^2+t+2}{t+2}; \quad t_0 = 2$.

6. Bir düz xətt boyunca hərəkət edən iki maddi nöqtənin getdiyi yolun zamandan asılılığı uyğun olaraq $s_1 = s_1(t)$ və $s_2 = s_2(t)$ düsturu ilə verildikdə gedilən məsafələrin bərabər olduğu anda sürətləri tapın:

a) $s_1 = 3t^2$; $s_2 = 2t^2 + 4t$, b) $s_1 = 3t^2 + 4t$; $s_2 = 4t^2 + 1$.

c) $s_1 = 2t^2 + t$; $s_2 = t^2 + 5t + 5$, d) $s_1 = 2t^2 + t + 6$; $s_2 = t^2 + 5t + 1$.

TESTLƏR

1. $f(x) = x^4 - 1$ funksiyası üçün $f'(2)$ – i tapın.

A) 15 B) 14 C) -32 D) -30 E) 32

2. $y = \sin 2x$ funksiyasının törəməsini tapın.

A) $\cos 2x$ B) $2\cos 2x$ C) $2\cos x$ D) $tg\, 2x$

E) $2\sin x$

3. $y = \dfrac{3x+2}{2x+1}$ funksiyasının törəməsini tapın.

A) $-\dfrac{1}{(2x+1)^2}$ B) $\dfrac{1}{(2x+1)^2}$ C) $\dfrac{3}{(2x+1)^2}$

D) $-\dfrac{3}{(2x+1)^2}$ E) $\dfrac{2}{(2x+1)^2}$

4. $y = \cos(arctg\, x)$ funksiyasının törəməsini tapın.

A) $\dfrac{x}{2\sqrt{1+x^2}}$ B) $\dfrac{1}{2\sqrt{1+x^2}}$ C) $\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ D) $\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$

E) $-\dfrac{x}{\left(\sqrt{1+x^2}\right)^3}$

5. $f(x) = x^3 - 2x^2 + 9$ funksiyasının qrafikinə x=2 nöqtəsində çəkilən toxunanın tənliyini tapın:

A) $y = 6x - 1$ B) $y = 4x - 1$ C) $y = 4x$ D) $y = 4x + 1$

E) $y = 5x - 1$

6. $f(x)=\dfrac{1+\cos x}{1-\cos x}$ isə $f'\left(\dfrac{\pi}{2}\right)-$i tapın:

A) 1 B) -2 C) 3 D) 4 E) $\sqrt{3}$

7. $y=\sin 5x\cdot\cos x-\cos 5x\cdot\sin x$ olarsa, $y'\left(\dfrac{\pi}{4}\right)-$ü tapın:

A) -1 B) -3 C) -4 D) 0 E) 4

8. $S=\sqrt{t+6}$ olduqda $t_0=3$ anındakı sürəti tapın:

A) $3\dfrac{m}{san}$ B) $5\dfrac{m}{san}$ C) 0 D) $\dfrac{1}{3}\dfrac{m}{san}$ E) $\dfrac{1}{6}\dfrac{m}{san}$

9. $y=e^{2x}+e^{3x}$ isə $y'(\ln 2)=?$

10. Uyğunluğu müəyyən edin.

1. $y=\sin 2x$ a. $y'=2\cos(2x+1)$
2. $y=\sin(2x+1)$ b. $y'=2\cos 2x$
3. $y=\cos^2 2x$ c. $y'\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=0$

d. $y'(0)=2$

e. $y'=-2\sin 4x$

IV FƏSİL
TÖRƏMƏNİN KÖMƏYİ İLƏ FUNKSİYANIN ARAŞDIRILMASI

Funksiya, istər riyaziyyatda, istərsə də həyatın bütün sahələrində çox böyk praktiki rola sahib olduğundan, onun hər tərəfli araştırılaraq, xassələrinin öyrənilməsi böyk əhəmiyyət kəsb edir. Bunları, törəmənin köməyi ilə ələ aldığımız fəsildə ətraflı şəkildə öyrənəcəyik.

*§ 20. FUNKSİYANIN SABİTLİK ƏLAMƏTİ

Bildiyimiz kimi, sabitin (sabit funksiyanın) törəməsi sıfra bərabərdir. Yəni $f(x)=sabit$ isə, onda $f'(x)=0$ olur. Bu təklifin tərsi də doğrudur. Söylənən aşağıdakı teorm şəklində ifadə edilə bilir:

Teorem. *$[a,b]$ parçasında kəsilməyən və* $(a,\ b)$ *intervalında differensiallanan funksiyasının həmin parçada sabit olması üçün onun* $(a,\ b)$ *intervalının bütün nöqtələrində törəməsinin sıfra bərabər olması zəruri və kafidir.*

□ Ş ə r t i n z ə r u r i l i y i: $y=f(x)$ funksiyası $[a,b]$ parçasının bütün nöqtələrində eyni qiymət alırsa, yəni $f(x)=c$ isə, onda həmin nöqtələrdə $f'(x)=c'=0$ olması aydındır.

Ş ə r t i n k a f i l i y i: Tutaq ki, $(a,\ b)$ intervalının bütün nöqtələrində $f'(x)=0$-dır. Onda törəmənin tərifinə

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=0$$

yazıla bilər. Sonuncu münasibət $(a,\ b)$ intervalındakı bütün x-lər üçün doğru olduğundan, $f(x+\Delta x)-f(x)=0$, buradan isə $f(x)=const$ olması alınır. ■

Misal. $y=arctg\,x+arcctg\,x$ funksiyasının sabit olduğunu göstərin və həmin sabiti tapın.

○ $y'=(arctg\ x+arcctg\ x)'=\dfrac{1}{1+x^2}-\dfrac{1}{1+x^2}=0$

bərabərliyinə görə $y'=0$, yəni $arctg\,x+arcctg\,x=c$ olur. Buradakı c sabitini tapaq. Alınan bərabərlik $(-\infty,\infty)$ intervalının bütün nöqtələrində doğru olduğundan, $x=1$ nöqtəsində də doğrudur:

$$arctg1+arc\cot 1=c\Rightarrow\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{4}=c\Rightarrow c=\frac{\pi}{2}.$$

Beləlikl verilən funksiyasının sabit olub, $\dfrac{\pi}{2}$-yə bərabər olduğu, yəni

$arctg\, x + arcctg\, x = \dfrac{\pi}{2}$ eyniliyi alınır. ●

Oxşar yolla,

$$\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$$

eyniliyinin doğruluğu da göstərilə bilər. Bunu oxuculara həvalə edirik.

*§ 21. FUNKSİYANIN ARTMA VƏ AZALMA ƏLAMƏTLƏRİ

Tutaq ki, hər hansı (a, b) intervalında (və ya $[a,b]$ parçasında) $y = f(x)$ funksiyası verilmişdir (xüsusi halda (a, b) intervalı yarımox və ya ədəd oxu da ola bilər).

Tərif 1. Funksiyanın təyin oblastından götürülmüş istənilən $x_1 < x_2$ üçün funksiyanın uyğun qiymətləri, $f(x_1) < f(x_2)$ bərabərsizliyini ödəyirsə, onda $f(x)$ funksiyasına həmin oblastda *artan* $(\uparrow)$, $f(x_1) > f(x_2)$ şərtini ödədikdə isə ona *azalan funksiya* $(\downarrow)$ deyilir.

Artan və azalan funksiyalara birlikdə *monoton funksiyalar* deyilir.

Misal 1. $y = 3x + 2$ funksiyasının artan və ya azalan olduğunu müəyyən edin. .

○ Verilən funksiyanın təyin oblastının ədəd oxu olduğu aydındır $(D(y) = (-\infty, \infty))$. Bu oblastın $x_1 < x_2$ şərtini ödəyən istənilən iki nöqtəsi üçün:

$$x_1 < x_2 \Rightarrow 3x_1 < 3x_2 \Rightarrow 3x_1 + 2 < 3x_2 + 2$$

olduğundan, təyin oblastında funksiya artandır $(\uparrow)$. ●

Misal 2. Ədəd oxunda təyin olunmuş $y = 5x^2$ funksiyasının $(-\infty, 0)$ intervalında azalan, $(0, \infty)$ intervalında isə artan olduğunu göstərin.

○ Doğrudan da istənilən $x_1 < x_2$ ($x_2 < 0$) üçün:

$$x_1 < x_2 \Rightarrow x_1^{\ 2} > x_2^{\ 2} \Rightarrow 5x_1^{\ 2} > 5x_2^{\ 2}$$

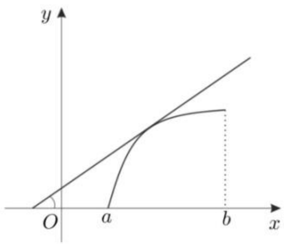
olduğundan, $(-\infty, 0)$ intervalında funksiyanın azalan $(\downarrow)$, eləcə də $x_1 < x_2$ ($x_1 > 0$) üçün:

$$x_1 < x_2 \Rightarrow x_1^{\ 2} < x_2^{\ 2} \Rightarrow 5x_1^{\ 2} < 5x_2^{\ 2}$$

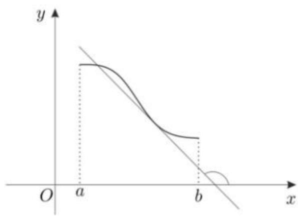
olduğundan, $(0, \infty)$ intervalında funksiyanın artan$(\uparrow)$ olması alınır. ●

Bu misaldan görünür ki, funksiya təin oblastının bir hissələrində azalan, bir hissələrində isə artan ola bilir.

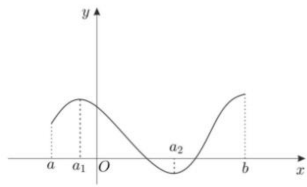
Tərif 2. Funksiyanın təyin oblastını sonlu sayda elə hissələrə bölmək mümkündürsə ki, bu hissələrin hər birində verilən funksiya monoton olsun, onda ona *hissə-hissə monoton funksiya* deyilir.



Şəkil 7a



Şəkil 7b



Şəkil 7c

7-ci şəkildə $[a, b]$ parçasında kəsilməyən və artan (*a*), kəsilməyən və azalan (*b*), kəsilməyən və hissə-hissə monoton (c) funksiyaların qrafikləri verilmişdir.

Funksiya baxılan oblastda diferensiallanan olduqda, törəmənin köməyi ilə onun artan və ya azalan olmasını təyin etmək olur. Bunu aşağıdakı teorem şəklində ifadə edək:

Teorem 1. $f(x)$ *funksiyası* $[a, b]$ *parçasında kəsilməz,* (*a*, *b*) *intervalında diferensiallanan isə onda:* 1) $f'(x) > 0$ *olduqda* $f(x)$ *funksiyası* $[a, b]$ *parçasında artan*$(\uparrow)$, 2) $f'(x) < 0$ *olduqda* isə $f(x)$ funksiyası $[a, b]$ *parçasında azalan*$(\downarrow)$ *funksiyadır.*

□ Doğrudanda törəmənin həndəsi mənasına əsasən $f'(x) = tg\,\alpha$ olduğundan, $(a,\ b)$ intervalında $f'(x) > 0$ isə onda onda toxunan absis oxunun müsbət istiqaməti ilə iti bucaq əmələ gətirir və şəkildən görünür ki, funksiya artır.

Eləcə də bütünlüklə $(a,\ b)$ intervalında $f'(x) < 0$ isə toxunan absis oxu ilə kor bucaq əmələ gətirir və şəkildən görünür ki, funksiya azalır (şəkil 7). ■

Praktiki olaraq teoremin şərtlərini ödəyən *funksiyanın artma və azalma intervallarını tapmaq üçün əvvəlcə onun törəməsini tapmaq, sonra isə törəmənin işarəsini saxladığı intervalları tapmaq lazımdır. Törəmənin müsbət olduğu intervalda funksiya artan, mənfi olduğu intervalda isə azalandır.*

Aşağıdakı teorem də doğrudur.

Teorem 2. $f(x)$ *funksiyası hər hansı intervalda artandırsa (azalandırsa),* onda onun həmin intervalda törəməsi mənfi (müsbət) deyil, yəni $f'(x) \geq 0$ ($f'(x) \leq 0$).

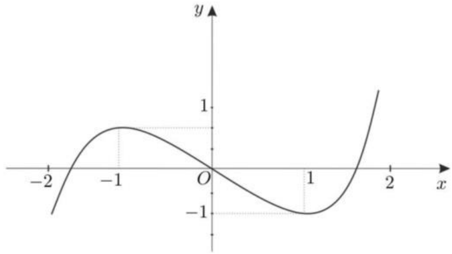
Misallar. Verilən funksiyaların artma və azalma intervallarını tapın.

1. $y = a^x \qquad (a > 0,\ a \neq 1)$

○ Aydındır ki, verilən funksiya $(-\infty, \infty)$ intervalında təyin olunub və $y' = (a^x)' = a^x \ln a$. Buradan görünür ki, $0 < a < 1$ üçün $\ln a < 0$, bunun nəticəsi olaraq da,təyin oblastında $y' = a^x \ln a < 0$ olur, yəni funksiya azalandır $(\downarrow)$. Eləcə də $a > 1$ olduqda $\ln a > 0$, yəni $y' = a^x \ln a > 0$ olur vəfunksiya artandır $(\uparrow)$. ●

2. $y = x^2 + 5x + 6$.

○ $D(y)=(-\infty,\ \infty)$ və $y'=\left(x^2+5x+6\right)'=2x+5$ olduğundan, $y'=2x+5>0$ münasibəti $\left(-\frac{5}{2},\ \infty\right)$ intervalında, $y'=2x+5<0$ münasibəti isə $\left(-\infty,\ -\frac{5}{2}\right)$ intervalında ödənir. Deməli, verilən funksiya $\left(-\infty,\ -\frac{5}{2}\right)$ intervalında azalan $(\downarrow)$, $\left(-\frac{5}{2},\ +\infty\right)$ intervalında isə artandır $(\uparrow)$. ●



Şəkil 8

3. $y=\frac{1}{3}x^3-x$.

○ $D(y)=(-\infty,\ \infty)$ və $y'=\left(\frac{1}{3}x^3-x\right)'=x^2-1=(x+1)(x-1)$ olduğundan çıxır ki, $(-\infty,-1)$ və $(1,+\infty)$ intervallarında $y'>0$, yəni verilən funksiya artan $(\uparrow)$, $(1,-1)$ intervalında isə $y'<0$, yəni azalandır $(\downarrow)$ (şəkil 8). ●

§ 22. FUNKSİYANIN EKSTREMUMU

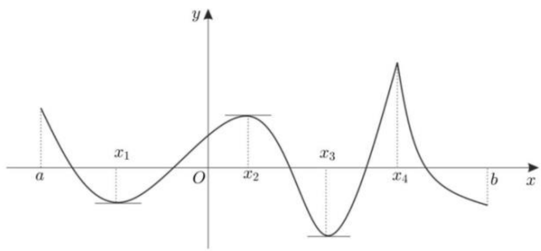
Tutaq ki, $y=f(x)$ funksiyası x_0 nöqtəsində və onun hər hansı ətrafında təyin olunmuş funksiyadır.

Tərif. Funksiyanın kəsilməz olduğu x_0 nöqtəsindəki qiyməti bu nöqtənin hər hansı ətrafındakı bütün qiymətlərindən böyük (kiçik) deyilsə, onda x_0 nöqtəsinə həmin ətrafda $f(x)$ *funksiyasının minimum (maksimum) nöqtəsi* deyilir.

Başqa sözlə, x_0 nöqtəsinin hər hansı ətrafındakı bütün x-lər üçün $f(x_0) \le f(x)$ $(f(x_0) \ge f(x))$ münasibəti ödənirsə, x_0 nöqtəsinə həmin ətrafda $y = f(x)$ funksiyasının minimum (maksimum) nöqtəsi deyilir. Funksiyanın $f(x_0)$ qiymətinə də onun həmin *ətrafdakı minimum (maksimum) qiyməti* deyilir.

Funksiyanın maksimum və minimum nöqtələrinə birlikdə onun *ekstremum nöqtələri,* bu nöqtələrdəki qiymətlərinə isə onun *ekstremum qiymətləri* deyilir.

Məsələn, Qrafiki 8-ci şəkildə göstərilən $y = \frac{1}{3}x^3 - x$ funksiyası üçün $x_0 = -1$ nöqtəsi maksimum, $x_1 = 1$ nöqtəsi isə minimum nöqtəsidir. Eləcə də $y = x^2 + 2$ funksiyası üçün $x_0 = 0$ nöqtəsi minimum nöqtəsi $(y(0) = 2 \le x^2 + 2$ olduğundan), $y = 1 - (3 - x)^2$ funksiyası üçün isə $x_0 = 3$ nöqtəsi maksimum nöqtəsidir $(y(3) = 1 \ge 1 - (3 - x)^2$ olduğundan) ($y = x^3$ funksiyası bütün həqiqi oxda artan olduğunda ($y' = 3x^2 \ge 0$), onun heç bir ekstremum nöqtəsi yoxdur.



Şəkil 9

Bu misallar göstərir ki, verilən funksiyanın təyin oblastında bir və ya bir neçə ekstremum nöqtəsi ola bilər, eləcə də heç bir ekstremum nöqtəsi olmaya bilər.

$[a, b]$ parçasında təyin olunmuş və qrafiki 9-cu şəkildə verilmiş $y = f(x)$ funksiyası üçün x_1 və x_3 nöqtələri minimum, x_2 və x_4 nöqtələri isə maksimum nöqtələridir.

Şəkildən görünür ki, funksiyanın a nöqtəsindəki qiyməti, bu nöqtənin hər hansı sağ ətrafındakı bütün qiymətlərindən kiçik deyil, lakin a nöqtəsindən solda funksiya təyin olunmadığından həmin nöqtəyə maksimum nöqtəsi demək olmaz. Bu halda deyəcəyik ki, a nöqtəsində funksiya *sərhəd maksimumu* alır. Eynilə funksiyanın b nöqtəsindəki qiyməti onun hər hansı sol ətrafındakı qiymətlərindən böyük olmadığından (b nöqtəsindən sağda funksiya təyin olunmayıb) deyəcəyik ki, $y = f(x)$ funksiyası b nöqtəsində *sərhəd minimumu* alır.

Yuxarıda deyilənlərdən çıxır ki, funksiya özünün ekstremum qiymətlərini təyin oblastının daxili nöqtələrində alır. 9-cu şəkildən görünür ki, funksiyanın ekstremum qiymət aldığı x_1, x_2 və x_3 nöqtələrində onun qrafikinə çəkilən toxunan absis oxuna paraleldir ($f'(x_1) = f'(x_2) = f'(x_3) = 0$), ekstremum aldığı x_4 nöqtəsində isə qrafikin toxunanı yoxdur, yəni bu nöqtədə törəmə yoxdur.

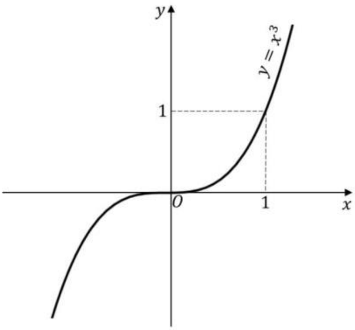
Beləliklə, həndəsi olaraq aşağıdakı teoremi almış oluruq.

Teorem. (ekstremum varlığı üçün zəruri şərt). *Ekstremum nöqtəsində funksiyanın törəməsi ya sıfra bərabərdir, ya da yoxdur.*

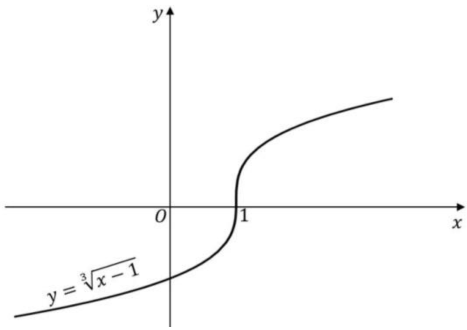
□ Tutaq ki, x_0 nöqtəsi $y = f(x)$ funksiyasının ekstremum (məsələn, maksimum) nöqtəsidir. Göstərək ki, bu nöqtədə törəmə ya sıfra bərabərdir, ya da yoxdur. Doğrudan da x_0 nöqtəsi maksimum nöqtəsi olduğundan onun elə bir $(x_0 + \delta)$ ətrafı var ki, oradakı bütün x-lər üçün $f(x) \le f(x_0)$ münasibəti ödənir. Sonuncu bərabərsizlikdən çıxır ki, $(x_0 - \delta, x_0)$ intervalında funksiya artır, yəni $f'(x) \ge 0$, $(x_0, x_0 + \delta)$ intervalında isə azalır, yəni $f'(x) \le 0$. Bu bərabərsizliklər göstərir ki, ya $f'(x_0) = 0$, ya da x_0 nöqtəsində törəmə yoxdur. ■

Qeyd edək ki, verilən nöqtədə funksiyanın törəməsinin sıfra bərabər olması və ya törəmənin olmaması ekstremumun varlığı üçün zəruridir, lakin kafi deyil. Yəni ola bilər ki, x_0 nöqtəsində funksiyanın törəməsi ya sıfra bərabərdir, ya da törəmə yoxdur, lakin x_0 nöqtəsi ekstremum nöqtəsi deyil. Məsələn,

$y = x^3$ funksiyasının törəməsi $x_0 = 0$ nöqtəsində sıfra çevrilir ($y' = 3x^2$), lakin bu funksiya bütün ədəd oxunda artan olduğundan onun ekstremum nöqtəsi yoxdur (şəkil 10). Eləcə də $x_0 = 1$ nöqtəsində $y = \sqrt[3]{x-1}$ funksiyasının törəməsi yoxdur ($y' = \dfrac{1}{3\sqrt[3]{(x-1)^2}}$ funksiyası $x_0 = 1$ nöqtəsində təyin olunmayıb), özü də bu nöqtə ekstremum nöqtəsi deyil (şəkil 11). Bu funksiya da bütün həqiqi oxda artan funksiyadır.



Şəkil 10



Şəkil 10

Yuxarıdakı teoremdən və baxılan misallardan çıxır ki, funksiyanın ekstremum nöqtəsini onun törəməsinin sıfra bərabər olduğu yaxud törəmənin olmadığı nöqtələr içərisində axtarmaq lazımdır. İndi, hansı şərtlər daxilində sözü edilən nöqtələrin ekstremum nöqtələri olduğunu araşdıraq.

§ 23. EKSTREMUMUN VARLIĞI ÜÇÜN KAFİ ŞƏRT

Tərif. Kəsilməyən funksiyanın törəməsinin sıfra bərabər olduğu və ya törəməsinin olmadığı nöqtələrə onun *böhran* (*kritik*) *nöqtələri* deyilir.

Əvvəlki paraqrafda deyilənlərdən ıxır ki, öfunksiyanın ekstremum nöqtələrini onun böhran nöqtələri içərisində axtarmaq lazımdır. İndi hansı şərtlər daxilində böhran nöqtəsinin ekstremum nöqtəsi olmasını müəyyən edən aşağıdakı teoremi isbat edək.

Teorem. (ekstremumun varlığı üçün kafi şərt). *$f(x)$ funksiyası x_0 böhran nöqtəsinin hər hansı ətrafında diferensiallanandırsa və bu nöqtədən soldan sağa keçdikdə onun törəməsi işarəsini-*

1) *müsbətdən mənfiyə dəyişirsə, onda x_0 nöqtəsi maksimum nöqtəsidir,*

2) *mənfidən müsbətə dəyişirsə, onda x_0 nöqtəsi minimum nöqtəsidir,*

3) *dəyişmirsə, onda x_0 ekstremum nöqtəsi deyildir.*

□ Tutaq ki, x_0 böhran nöqtəsinin hər hansı ətrafında x_0*-dan solda* $f'(x) > 0$, sağda isə $f'(x) < 0$-dır. Bu o deməkdir ki, x_0-dan solda funksiya artır, sağda isə azalır. Deməli, x_0 nöqtəsi maksimum nöqtəsidir. Eynilə x_0-dan solda $f'(x) < 0$ (azalır), sağda $f'(x) > 0$ (artır) isə onda x_0 nöqtəsi minimum nöqtəsidir.

Əgər x_0-dan hər iki tərəfdə $f'(x) > 0$ ($f'(x) < 0$) isə onda funksiya həmin ətrafda artır (azalır), yəni x_0 nöqtəsi ekstremum nöqtəsi deyildir bilməz.

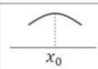
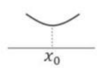
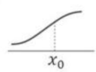
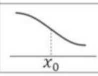
■

Bu teoremdən çıxır ki, verilən funksiyanın ekstremum nöqtələrini tapmaq üçün aşağıdakı kimi hərəkət etmək lazımdır:

1) funksiyanın kəsilməzlik oblastı tapılır;

2) bu oblasta daxil olan bütün böhran nöqtələri tapılır;

3) hər bir böhran nöqtəsinin elə ətrafı götürülür ki, orada başqa böhran nöqtəsi olmasın və bu ətrafda x_0-dan soldan sağa keçərkən $f'(x)$ işarəsinin necə dəyişməsi müəyyən edilir;

	$(x_0-\delta, x_0)$	$(x_0, x_0+\delta)$		
$f'(x)$	$+$	$-$		max
	$-$	$+$		min
	$+$	$+$		
	$-$	$-$		

Şəkil 12

4) ekstremumun varlığı üçün kafi şərtə əsaslanıb, hökm çıxarılır (şəkil 12),

Misallar. Verilən funksiyaların ekstremum nöqtələrinin varlığını incələyin və varsa ekstremumunu tapın.

1. $y = x^3 + 5$

○ 1) Verilen funksiya bütün həqiq oxda təyin olunub və kəsilməyəndir: $x \in (-\infty, \infty)$;

2) $y' = 3x^2$. Törəməni sıfra bərabər edib, $x_{1,2} = 0$ böhran nöqtəsini tapırıq. Başqa böhran nöqtəsinin olmadığı aydındır;

3) $y' = 3x^2$ ifadəsindən görünür ki, $x < 0$ olduqda, yəni $(-\infty, 0)$ intervalında, eləcə də $x > 0$ olduqda, yəni $(0, \infty)$ intervalında $y' > 0$ -dır. Deməli, böhran nöqtəsindən keçdikdə törəmə işarəsini dəyişmir, yəni funksiyanın ekstremum nöqtəsi yoxdur. Başqa sözlə, tapılan böhran nöqtəsi ekstremum nöqtəsi deyil. ●

2. $y = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x + 3$

○ 1) Verilen funksiya bütün həqiqi oxda təyin olunub və kəsilməyəndir: $x \in (-\infty, \infty)$;

2) $y' = x^2 - 4x + 3 = (x-1)(x-3)$. Törəməni sıfra bərabər edib, $x_1 = 1$ və $x_2 = 3$ böhran nöqtələrini tapırıq. Başqa böhran nöqtələrinin olmadığı aydındır.

3) $y' = (x-1)(x-3)$ ifadəsindən görünür ki, $x < 1$ olduqda, yəni $(-\infty, 1)$ intervalında $y' > 0\,(\uparrow)$; $1 < x < 3$ olduqda, yəni $(1,3)$ intervalında $y' < 0\,(\downarrow)$ və $(3, \infty)$ intervalında $y' > 0\,(\uparrow)$ -dır (Bu dəyişmə Cedvel 23.1-də verilmişdir). Buradan çıxır ki, $x_1 = 1$ nöqtəsi verilə funksiyanın maksimum, $x = 3$ nöqtəsi isə minimum nöqtəsidir və $y_{max} = y(1) = 4\frac{1}{3}$; $y_{min} = y(3) = 3$ olur. ●

Cədvəl 23.1

intervallar	$(-\infty,1)$	$(1,3)$	$(3,\infty)$
y'-in işarəsi	+	–	+

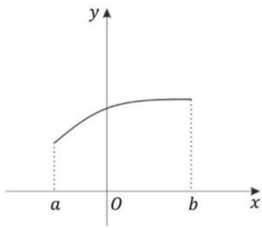
§ 24. FUNKSİYANIN PARÇADA ƏN BÖYÜK VƏ ƏN KİÇİK QİYMƏTİNİN TAPILMASI

Tutaq ki, $y = f(x)$ funksiyası $[a,b]$ parçasında kəsilməyəndir. Onda bu parçanın hər bir nöqtəsində funksiya müəyyən bir qiymət alır və aydındır ki, bu qiymətlərin içərisində ən böyüyü və ən kiçiyi var.

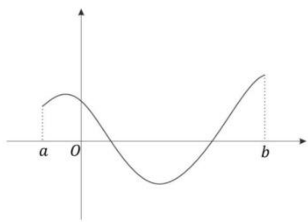
Funksiyanın parçada aldığı qiymətlərin böyüyünə onun parçada *ən böyük*, kiçiyinə isə *ən kiçik qiyməti* deyilir və uyğun olaraq M və m ilə işarə olunur:

$$M = \underset{x\in[a,b]}{EBQ} f(x), m = \underset{x\in[a,b]}{EKQ} f(x).$$

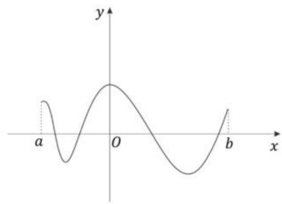
13, 14 və 15-ci şəkillərdən görünür ki, funksiya bu qiymətləri parçanın uclarında, eləcə də daxili nöqtələrində ala bilər. Özü də funksiya ən böyük (ən kiçik) qiymətini parçanın daxilində alarsa, onda bu qiymət funksiyanın maksimumlarının (minimumlarının) böyüyü (kiçiyi) ilə üst-üstə düşür (şəkil 15).



Şəkil 13

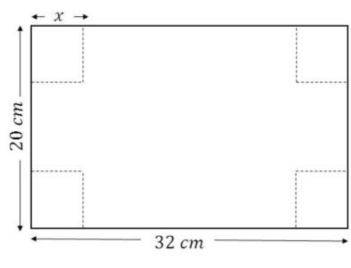


Şəkil 14



Şəkil 15

Bu deyilənlərdən aşağıdakı qayda alınır:



Qayda. Parçada kəsilməyən funksiyanın ən kiçik və ən böyük qiymətlərini tapmaq üçün:

Şəkil 16

1) parçanın uclarında funksiyanın qiymətlərini hesablamaq, yəni $f(a)$ və $f(b)$-ni tapmaq;,

2) parçaya daxil olan bütün böhran nöqtələrini və həmin nöqtələrdə funksiyanın qiymətlərini tapmaq;

3) tapılmış bütün qiymətləri müqayisə edib, onların ən kiçik və ən böyüyünü müəyyən etmək lazımdır.

Misal. $y = \dfrac{x^2 + x + 1}{x^2 + 1}$ funksiyasının $[0,2]$ parçasında ən kiçik və ən böyük qiymətini tapın.

○ Funksiya $[0,2]$ parçasında kəsilməyəndir.

1) parçanın uclarında funksiyanın qiymətlərini tapaq:

$$y(0) = 1, \quad y(2) = 1{,}4\,;$$

2) böhran nöqtələrini tapmaq üçün, əvvəlcə funksiyanın törəməsini tapaq:

$$y' = \left(\frac{x^2 + x + 1}{x^2 + 1}\right)' = \frac{(2x+1)(x^2+1) - 2x(x^2 + x + 1)}{\left(x^2+1\right)^2} = -\frac{x^2 - 1}{\left(x^2+1\right)^2}\,.$$

Göründüyü kimi törəmənin olmadığı nöqtə yoxdur. $x_1 = -1;\ x_2 = 1$ nöqtələrində isə $y' = 0$ olur. Lakin bu nöqtələrdən yalnız biri, yəni $x_2 = 1$ nöqtəsi $[0,2]$ parçasına daxildir. Həmin nöqtədə funksiyanın qiymətini tapaq: $f(1) = 1{,}5\,;$

3) tapılmış $y(0) = 1;\ y(1) = 1{,}5;\ y(2) = 1{,}4$ qiymətlərini müqayisə edib, verilən parçada funksiyanın ən kiçik və ən böyük qiymətlərini $m = \underset{x\in[0,2]}{EKQ}\, y(x) = 1$ və $M = \underset{x\in[0,2]}{EBQ}\, y(x) = 1.5$ olaraq tapırıq. ●

Məsələ 1. Ölçüləri 20 sm və 32 sm olan düzbucaqlı şəklində karton təbəqənin uclarından eyni ölçüdə kvadratlar kəsib, qapaqsız qutu düzəltmək lazımdır. Kvadratın tərəfinin uzunluğu neçə olmalıdır ki, alınan qutunun həcmi ən böyük olsun?

○ Uclardan kəsilmiş kvadratın tərəfi x olsun (şəkil 16). Onda qutu, ölçüləri $20-2x$, $32-2x$ və x olan düzbucaqlı paralelopiped olacaq. Onun həcmi üçün

$v = x(20-2x)(32-2x)$ və ya $v = 4(x^3 - 26x^2 + 160x$

$(0 \le x \le 10)$

alırıq.

Bu funksiyanın $[0,10]$ parçasında ən böyük qiymətini tapaq:

1) $v(0) = 0,\ v(10) = 0;$

2) $v'(x) = 4(3x^2 - 52x + 160) = 12(x-4)\left(x - \frac{40}{3}\right) = 0 \Rightarrow x_1 = 4,\ x_2 = \frac{40}{3}$.

x_2 qiyməti $[0,10]$ parçasına daxil olmadığından, böhran nöqtəsi yalnız $x_1 = 4$ olur: $v(4) = 576$;

3) $v(0) = 0, v(4) = 576, v(10) = 0$ ədədlərinin böyüyü, yəni 576, qutunun ən böyük həcmi olur. Deməli, kəsilən kvadratın tərəfi $x = 4\,sm$ olduqda, qutunun həcmi ən böyük olur. ●

Məsələ 2. $m > 0$ ədədini elə iki toplananın cəmi şəklində göstərin ki,

a) onların kvadratları cəmi ən kiçik olsun;

b) onların hasili ən böyük olsun.

○ Toplananları x və y olarak qəbul etsək, $m = x + y$ və ya $y = m - x$ olur $(0 \le x \le m)$.

a) şərtə görə $[0, m]$ parçasında

$$z = x^2 + (m-x)^2$$

funksiyasının ən kiçik qiymətini tapmaq lazımdır:

1) $[0, m]$ parçasının uclarında $z(0) = m^2$, $z(m) = m^2$ olduğu aydındır;

2) $[0, m]$ parçasına daxil olan böhran nöqtələrini tapaq:

$$z' = 2x - 2(m-x) = 2(2x-m) = 0 \Rightarrow x = \frac{m}{2}\ \left(\frac{m}{2} \in [0,m]\right).$$

Böhran nöqtəsində

$$z\left(\frac{m}{2}\right) = \frac{m^2}{4} + \frac{m^2}{4} = \frac{m^2}{2}$$

olur;

3) $z(0)$, $z\left(\frac{m}{2}\right)$, $z(m)$ qiymətlərini müqayisə etdikdə $\frac{m^2}{2}$ ədədinin $[0,m]$ parçasında $z = x^2 + (m-x)^2$ funksiyası üçün ən kiçik qiymət olduğu alınır. Deməli, $x = y = \frac{m}{2}$ olduqda $x^2 + y^2$ cəmi ($m = x + y$) ən kiçik qiymət alır;

b) şərtə əsasən $[0,m]$ parçasında

$$z = x(m-x)$$

funksiyasının ən böyük qiymətlərini tapmaq lazımdır:

1) $z(0) = z(m) = 0$ olduğu aydındır;

2) $z' = m - x - x = m - 2x = 0 \Rightarrow x = \frac{m}{2}.$

Böhran nöqtəsində

$$z\left(\frac{m}{2}\right) = \frac{m^2}{4} + \frac{m^2}{4} = \frac{m^2}{2}$$

olur;

3) Funksiyanın $z(0)$, $z\left(\frac{m}{2}\right)$, $z(m)$ qiymətlərini müqayisə etdikdə, onun ən böyük qiymətinin $\frac{m^2}{4}$ olduğunu alırıq. Deməli, $x = y = \frac{m}{2}$ olduqda $x \cdot y$ hasili $(x + y = m)$ ən böyük qiymət alır. ●

*§ 25. FUNKSİYANIN ARAŞDIRILMASI VƏ QRAFİKİNİN QURULMASI

Məlumdur ki, verilən $y = f(x)$ funksiyasının müəyyən koordinat sistemində qrafikini qurmaq üçün, arqumentə təyin oblastına daxil olan bir neçə məsələn, x_1, x_2, . . . , x_n qiymətləri verib, funksiyanın uyğun $y_1 = f(x_1), y_2 = f(x_2), ..., y_n = f(x_n)$ qiymətləri tapılır və $(x_1, y_1), (x_2, y_2), ..., (x_n, y_n)$ nöqtələri bu sistemdə qurulur. Daha sonra isə qurulmuş nöqtələr ardıcıl olaraq kəsilməz xətlə birləşdirilir. Lakin qrafikin bu üsulla qurulması dəqiq deyil, çünki bu zaman funksiyanın bir çox xarakterik xüsusiyyətləri məsələn, monotonluğu, ekstremum nöqtələri və s. nəzərə alınmır. Buna görə də alınan qrafik dəqiq olmaya da bilir.

Funksiyanın qrafikini daha dəqiq qurmaq üçün onu araşdırmaq lazımdır. Bunun üçün əvvəlcə funksiyanın təyin oblastını tapmaq, daha sonra onun cütlüyü və dövrülüyünü müəyyən etmək lazımdır. Bunları tapmaq çox vacibdir. Belə ki, funksiya cüt isə onun qrafiki ordinat oxuna nəzərən, tək olduqda isə koordinat başlanğıcına nəzərən simmetrik olur. Ona görə də belə hallarda qrafik arqumentin müsbət qiymətləri üçün qurulur və mənfi qiymətləri üçün simmetrik olaraq köçürülür (cüt və təklikdən asılı olaraq ordinat oxu və ya koordinat başlanğıcına nəzərən). Əgər funksiya dövrü isə, onda onun qrafiki bir dövr üçün qurulur və hər iki tərəfə dövrü olaraq köçürülür. Sonra isə funksiya qrafikinin koordinat oxları ilə kəsişmə nöqtələrini, funksiyanın işarəsini saxladığı intervalları, artma və azalma intervallarını, ekstremum nöqtələrini və ekstremum qiymətlərini, eləcə də kəsilmə nöqtələri (əgər varsa) ətrafında, həmçinin arqument sonsuzluğa yaxınlaşdıqda funksiyanın necə dəyişməsini müəyyən etmək lazımdır.

Yuxarıda deyilənlərə əsasən funksiyanın qrafikini qurmaq üçün aşağıdakı praktiki qayda söylənə bilər:

1) funksiyanın, təyin oblastı ($D(f)$), kəsilməzlik aralıkları, qrqfikinin koordinat oxlarını kəsdiyi nöqtələr və işarəsini qoruduğu intervallar tapılır, eləcə də cütlüyü və dövrülüyü müəyyən edilir;

2) funksiyanın kəsilmə nöqtələri (əgər varsa) və onların ətrafında funksiyanın necə dəyişməsi müəyyən edilir;

3) funksiyanın artma və azalma intervalları, ekstremum nöqtələri və ekstremum qiymətləri tapılır;

4) əvvəlki bəndləri nəzərə almaqla funksiya üçün qiymətlər cədvəli tərtib olunur (əgər vacibdirsə);

5) $x \to \infty$-da funksiyanın necə dəyişməsi müəyyən olunur (təyin oblastı sonsuzsa);

6) aparılan araşdırma əsasında funksiyanın qrafiki qurulur.

Misallar. Aşağıdakı funksiyaları araşdırın və qrafikini qurun:

1. $y = x^3 + x^2 - 5x + 3$.

○ 1) $D(f) = (-\infty, \infty)$. Funksiya elementar olduğundan, təyin oblastında kəsilməzdir. $x = 0$ olduqda, $y = 3$ olur. Yəni qrafik ordinat oxunu $A_1(0,3)$ nöqtəsində kəsir. Eləcə də $y = 0$ olduqda, $x^3 + x^2 - 5x + 3 = 0$, buradan $(x-1)^2(x+3) = 0$, yəni $x_1 = -3$: $x_{2,3} = 1$ alırıq. Deməli, qrafik absis oxunu $A_2(-3,0)$ və $A_3(1,0)$ nöqtələrində kəsir. $y = (x-1)^2(x+3) < 0$ olması üçün $x < -3$ olmalıdır. Yəni, $(-\infty, -3)$ intervalında funksiyanın işarəsi mənfidir. Funksiya bütün həqiqi oxda təyin olunduğundan, $(-3,1) \cup (1,\infty)$ çoxluğunda isə müsbətdiir ($x = 1$ funksiyanın sıfırıdır). $y(-x) = y(x)$ və $y(-x) = -y(x)$ münasibətlərinin heç biri ödənmədiyi üçün funksiya nə tək, nə də cütdür. Funksiya dövrü deyil, çünki $y(x+T) = y(x)$ bərabərliyini ödəyən T ədədi yoxdur;

2) funksiyanın kəsilmə nöqtələri yoxdur;

3) $y' = 3x^2 + 2x - 5 = 3\left(x + \frac{5}{3}\right)(x-1)$ münasibətindən görünür ki, $\left(-\infty, -\frac{5}{3}\right)$ və $(1,\infty)$ intervallarında $y' > 0$, yəni funksiya artan, $\left(-\frac{5}{3}, 1\right)$ intervallarında isə $y' < 0$, yəni azalandır. Deməli, $x_1 = -\frac{5}{3}$ nöqtəsi maksimum,

$x_2 = 1$ nöqtəsi isə minimum nöqtəsidir və $y_{max}\left(-\frac{5}{3}\right) = 9\frac{13}{27}$, $y_{min}(1) = 0$.

Bunlara $A_4\left(-\frac{5}{3}, 9\frac{13}{27}\right)$, $A_5(1,0)$ nöqtələri uyğun gəlir.

4) Əvvəlki bəndlərə görə, verilən funksiya üçün $A_1(0;3)$, $A_2(-3;0)$, $A_3(1;0)$ və $A_4\left(-\frac{5}{3}, 9\frac{13}{27}\right)$ kimi dörd müxtəlif xarakterik nöqtə tapmışıq. Bunlar aşağıdakı cədvəl şəkalində verilə bilər (olmasa da ola bilər);

Cədvəl 25.1

x	-3	$-\frac{5}{3}$	0	1
y	0	$9\frac{13}{27}$	3	0

5) funksiyanın şəklindən görünür ki,

$$\lim_{x\to-\infty} y(x) = -\infty, \quad \lim_{x\to+\infty} y(x) = +\infty;$$

6) Alınan nəticələrə əsasən Cədvəl 25.2 –ni tərtib edib, ona əsasən qrafiki quraq (şəkil 18). ●

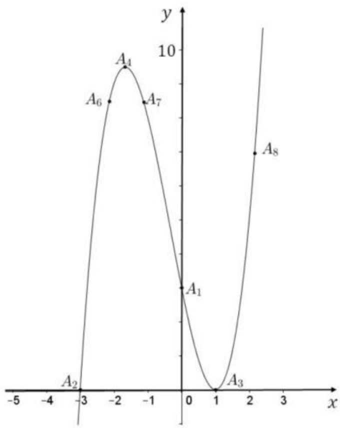
Cədvəl 25.2

x	$\left(-\infty; -\frac{5}{3}\right)$	$-\frac{5}{3}$	$\left(-\frac{5}{3}, 1\right)$	1	$(1, \infty)$
y'	$+$	0	$-$	0	$+$

y	$\uparrow$	$9\frac{13}{27}$	$\downarrow$	0	$\uparrow$
		max		min	

2. $y = \dfrac{x}{x^2 - 4}$.

○ 1) $D(f) = (-\infty, -2) \cup (-2,2) \cup (2, \infty)$. Funksiya elementar olduğundan, təyin oblastında kəsilməzdir. $x = 0$ olduqda $y = 0$, eləcə də $y = 0$ olduqda $x = 0$ olduğundan, qrafik koordinat oxlarını ancaq bir nöqtədə - $O(0,0)$ nöqtəsində kəsir.



Şəkil 18

$\dfrac{x}{x^2 - 4} < 0 \Rightarrow (x+2)x(x-2) < 0 \Rightarrow x \in (-\infty, -2) \cup (0,2)$ olduğundan, $(-\infty, -2) \cup (0,2)$ çoxluğunda funksiyanın işarəsi mənfi, $(-2,0) \cup (2, \infty)$ çoxluğunda isə müsbətdiir ($x = 0$ funksiyanın sıfırıdır). $y(-x) = -y(x)$ münasibəti ödəndiyindən, tək funksiyadır, yəni qrafik koordinat başlanğıcına nəzərən simmetrikdir. Funksiya dövrü deyil, çünki $y(x+T) = y(x)$ bərabərliyini ödəyən T ədədi yoxdur;

2) $x_1 = -2$ və $x_2 = 2$ nöqtələrində funksiya kəsiləndir və $\lim\limits_{x\to -2-0} \frac{x}{x^2-4} = -\infty$; $\lim\limits_{x\to -2+0} \frac{x}{x^2-4} = +\infty$; $\lim\limits_{x\to 2-0} \frac{x}{x^2-4} = -\infty$; $\lim\limits_{x\to 2+0} \frac{x}{x^2-4} = +\infty$.

3) $y' = \frac{x^2-4-2x^2}{(x^2-4)^2}$, yəni $y' = -\frac{x^2+4}{(x^2-4)^2}$ ifadəsindən görünür ki, bütünlüklə təyin oblastında $y' < 0$-dır, yəni funksiya azalandır. Deməli, ekstremum nöqtələri yoxdur.

4) Qiymətlər cədvəlini tərtib etmək üçün, tapdığımız $O(0,0)$ nöqtəsinə $A_1\left(1; -\frac{1}{3}\right)$ və $A_2\left(3; \frac{3}{5}\right)$ nöqtələrini əlavə edib, cədvəl tərtib edək:

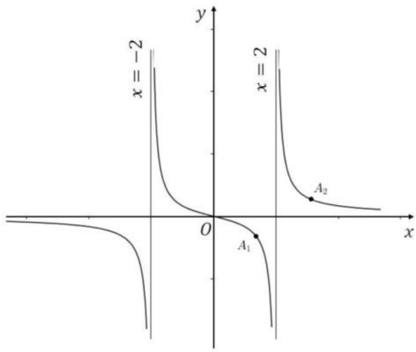
x	0	1	3
y	0	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{3}{5}$

5) $\lim\limits_{x\to -\infty} \frac{x}{x^2+4} = 0$; $\lim\limits_{x\to \infty} \frac{x}{x^2+4} = 0$ olduğu aydındır;

6) alınan nəticələrə əsasən qrafiki quraq (şəkil 19). ●

3. $y=\cos x+\frac{1}{2}\sin 2x.$

1) ○ $D(f)=(-\infty;+\infty)$. Funksiya elementar olduğundan, təyin oblastında kəsilməzdir. $x=0$ olduqda $y=1$ olur, yəni qrafik ordinat oxunu $A_1(0,1)$ nöqtəsində kəsir. Eləcə də $y=0$ olduqda $\cos x+\frac{1}{2}\sin 2x=0$, yəni $\cos x(1+\sin x)=0$ olur. Buradan, tənliyin $[0,2\pi]$ parçasına daxil olan $x_1=\frac{\pi}{2}$ və $x_2=\frac{3\pi}{2}$ həllərini alırıq. Deməli, arqument $[0,2\pi]$ parçasında dəyişdikdə, funksiyanın qrafiki absis oxunu $A_2\left(\frac{\pi}{2},0\right)$ və $A_3\left(\frac{3\pi}{2},0\right)$ nöqtələrində kəsir. Funksiyanın $y=\cos x(1+\sin x)$ şəklində yazılışından görünür ki, onun işarəsi $\cos x$-in işarəsi ilə eynidir ($1+\sin x\geq 0$ olduğundan). Odur ki, verilən funksiya $[0,2\pi]$ parçasının $\left[0,\frac{\pi}{2}\right)\cup\left(\frac{3\pi}{2},2\pi\right]$ hissəsində müsbət, $\left(\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right)$ hissəsində isə mənfidir. $y(-x)=y(x)$ və $y(-x)=-y(x)$ münasibətlərinin heç biri ödənilmədiyindən, funksiya nə cüt nə də təkdir. Funksiya dövrüdür, özünün də dövrü $T=2\pi$-dir ($y(x+2\pi)=y(x)$ olduğu aydındır). Deməli, $[0,2\pi]$ parçasında qrafiki qurub, dövrü olaraq sağa və sola köçürmək lazımdır;



Şəkil 19

2) funksiyanın kəsilmə nöqtələri yoxdur;

$y'=-\sin x+\cos 2x\Rightarrow y'=-2\sin^2 x-\sin x+1\Rightarrow y'=(1+\sin x)(1-2\sin x)$

ifadəsindən çıxır ki, $\left(\frac{\pi}{6},\frac{5\pi}{6}\right)$ intervalında $y'<0$, yəni funksiya azalan (↓),

$\left(0,\frac{\pi}{6}\right)$, $\left(\frac{5\pi}{6},\frac{3\pi}{2}\right)$, $\left(\frac{3\pi}{2},2\pi\right)$ intervalında isə $y'>0$ yəni funksiya artandır $y'<0(\uparrow)$. Həmçinin $\frac{\pi}{6}$, $\frac{5\pi}{6}$ və $\frac{3\pi}{2}$ nöqtələri böhran nöqtələridir $(y'=0)$, lakin bunlardan yalnız ikisi $\frac{\pi}{6}$ və $\frac{5\pi}{6}$ nöqtələri ekstremum nöqtəsidir. Özü də $x=\frac{\pi}{6}$ nöqtəsi maksimum, $x=\frac{5\pi}{6}$ isə minimum nöqtəsidir və $y_{\max}\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{3\sqrt{3}}{4}$, $y_{\min}\left(\frac{5\pi}{6}\right)=-\frac{3\sqrt{3}}{4}$.

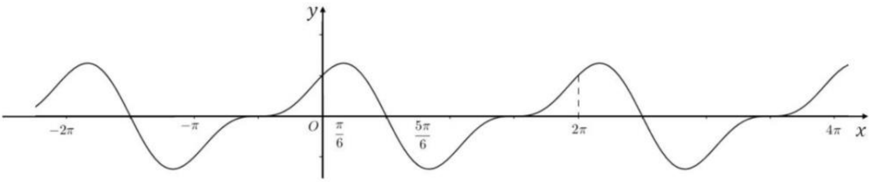
4) tapılmış $A_1\,(0,1)$, $A_2\left(\frac{\pi}{2},0\right)$, $A_3\left(\frac{3\pi}{2},0\right)$ nöqtələrinə $A_4\left(\frac{\pi}{6},\frac{3\sqrt{3}}{6}\right)$, $A_5\left(\frac{5\pi}{6},-\frac{3\sqrt{3}}{4}\right)$ və $A_6\,(2\pi,1)$ nöqtələrini də qoşub cədvəl quraq

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{3\pi}{2}$	2π
y	1	$\frac{3\sqrt{3}}{4}$	0	$-\frac{3\sqrt{3}}{4}$	0	1

5) funksiya dövrü olduğundan bu bəndə ehtiyac yoxdur,

6) alınan nəticələrə əsasən $[0,2\pi]$ parçasında qrafiki qurub, dövrü olaraq sola və sağa köçürək (şəkil 20).

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{3\pi}{2}$	2π
y	1	$\frac{3\sqrt{3}}{4}$	0	$-\frac{3\sqrt{3}}{4}$	0	1



Şəkil 20

Ç A L I Ş M A L A R.

Aşağıdakı funksiyanın monotonluq intervallarını tapın:

1. a) $y=5x-3$; b) $y=-2x+1$; c) $y=\dfrac{x}{2}+3$.

2. a) $y=1+\dfrac{2}{x}$; b) $y=\dfrac{x}{x+1}$; c) $y=\dfrac{x+1}{x}$.

3. a) $y=x^2+2x+1$; b) $y=-3x^2+6x-2$;

c) $y=\dfrac{1}{2}x^2+3x$;

4. a) $y=\dfrac{x}{x^2+1}$; b) $y=\dfrac{x+1}{2x^2}$; c) $y=\dfrac{x^2+3}{x+1}$.

5. a) $y=\dfrac{1}{3}x^3-4x$; b) $y=x^3-3x+1$; c) $y=2x^3-6x^2+5$.

6. a) $y=xe^x$; b) $y=x^2 2^x$; c) $y=xe^{2x+1}$.

7. a) $y=\ln(x^2+1)$; b) $y=\ln(x^3-x)$; c) $y=\ln^2(3x^2+1)$.

8. a) $y=\sqrt{x^2+1}$; b) $y=\dfrac{1}{\sqrt{2x^2+3}}$; c) $y=\sqrt[3]{2x^2-x+5}$.

Aşağıdakı funksiyaların böhran nöqtələrini tapın:

9. a) $y=x^3-3x^2+1$; b) $y=\sqrt{x^2+1}$; c) $y=\ln(x^2+4)$.

10. a) $y=\sqrt[3]{x-1}$; b) $y=\sin 2x$; c) $y=x^2e^{-x}$.

11. Aşağıdakı funksiyaların ekstremum nöqtələrini və ekstremum qiymətlərini tapın:

a) $y=x^2-4x+2$; b) $y=x^3-3x^2$; c) $y=\frac{1}{3}x^3+x^2-3x+1$.

12. a) $y=\sqrt{x^2+2}$; b) $y=\sqrt{x^2+2x+2}$; c) $y=\sqrt[3]{x^2-2x+3}$

13. a) $y=\frac{x}{x^2+2}$; b) $y=\frac{x-2}{x^2}$; c) $y=\frac{x^2+8}{x+1}$.

14. a) $y=xe^{2x}$; b) $y=x^2e^{-2x}$; c) $y=xe^{-x^2}$.

15.a) $y=\ln(x^2+e)$; b) $y=\ln^2(-x^2+2x+3)$; c) $y=\ln(x^2+4x+5)$.

16. a) $y=x\ln x$; b) $y=\sin x+\cos x$; c) $y=\cos 2x+4\cos x$.

17. a) $y=x\sqrt{x+1}$; b) $y=x\sqrt{x^2-1}$; c) $y=x^2\sqrt{x+3}$.

Verilən parçada funksiyanın ən kiçik və ən böyük qiymətini tapın:

18. a) $y=\frac{1}{3}x^3-2x^2+3x+1,\ x\in[-2;3]$;

b) $y=\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{3}x^3;\ x\in[-2;2]$.

19. a) $y=x+\frac{1}{x},\ \ x\in[1;6]$; b) $y=\frac{x^2}{2}+\frac{1}{x},\ \ x\in[0{,}5;2]$.

20. a) $y=xe^{-x^2},\ \ x\in[0{,}3]$; b) $y=x^2e^{-x},\ \ x\in[-2;2]$.

21. a) $y=\sqrt{5x+6}\ ,\ x\in[0;2]$; b) $y=\sqrt{x^2-2x+4}\ ,\ x\in[0;3]$.

22. a) $y=\ln x+\frac{1}{x},\ x\in[e^{-2},e]$; b) $y=\ln(x^2+e),\ x\in[0,e]$.

23. a) $y=2x-tgx,\ \ x\in\left[-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right]$; b) $y=x+ctgx,\ \ x\in\left[\frac{\pi}{6},\frac{7\pi}{12}\right]$.

24. Hansı ədədin kvadratı ilə iki mislinin fırqi ən kiçik qiymət alır?

25. Uzunluğu l olan məftillə bir tərəfi kanala söykənən elə düzbucaqlı torpaq sahəsi əhatə edin ki, sahəsi ən böyük olsun.

26. Həcmi V olan silindirik bakın oturacağının radiusu necə olmalıdır ki, tam səthin sahəsi ən kiçik olsun?

27. Sahələri eyni olan düzbucaqlı üçbucaqlar içərisində perimetri ən kiçik olanını tapın.

28. Oturacağı ilə hündürlüyünün cəmi a olan bütün üçbucaqlar içərisində sahəsi ən böyük olanın tapın.

29. Hipotenuzu 16 *sm* və bir bucağı 30^0 olan düzbucaqlı üçbucaq daxilinə oturacağı hipotenuz üzərində yerləşən düzbucaqlı çəkilmişdir. Düzbucaqlının ölçüləri neçə olmalıdır ki, sahəsi ən böyük olsun?

30. Doğuranı 20 *sm* olan konusun hündürlüyü neçə olmalıdır ki, həcmi ən böyük olsun?

31. Verilən funksiyaları araşdırın və qrafikini qurun:

a) $y = x^3 + 2x^2 - 4x$; b) $y = x^4 - 2x^2 - 3$;

v) $y = \dfrac{x}{x+1}$. q) $y = \dfrac{x^2}{x^2 - 1}$;

ğ) $y = \sin x + \cos x$; d) $y = xe^{-x^2}$.

TESTLƏR

1. $y = x^3 - 3x^2 + 3$ funksiyasının $[1;3]$ parçasında ən böyük qiymətini tapın:

A) 3 B) -3 C) 1 D) -1 E) 0

2. $y = -x(x-2)^2$ funksiyasının artma aralığını tapın:

A) $\left(-2;-\dfrac{2}{3}\right)$ B) $(2;+\infty)$ C) $\left(\dfrac{2}{3};2\right)$ D) $\left[\dfrac{2}{3};2\right]$ E) (-2; 2)

3. $y = \sqrt{x^3 - 3x^2}$ funksiyasının böhran nöqtələrini tapın:

A) 3 B) 0; 2 C) 3; 4 D) 2 E) 0; 2; 3

4. $y = 6 - 3x^2$ funksiyasının artma aralığını tapın:

A) $(-\infty;6)$ B) $(-\infty;0)$ C) $(-\infty;3)$ D) $(-\infty;2)$ E) $(0;\ \infty)$

5. $y=4x^3+x^4$ funksiyasının ekstremum qiymətlərinin cəmini tapın:

A) 30 B) -108 C) 64 D) -81 E) -27

6. $y=2x^3-6x$ funksiyasının azalma aralığını tapın:

A) $[-1;1]$ B) $[3;+\infty)$ C) $[0;3]$ D) $[0;\infty)$ E) $[-\infty;0]$

7. $y=x^2+2x-3$ funksiyasının $x_0=2$ nöqtəsində çəkilən toxunanın tənliyini yazın:

A) $y=6x+7$ B) $y=6x$ C) $y=2x-3$ D) $y=6x-7$

E) $y=6x+5$

8. a-nın hansı qiymətlərində $y=x^3-3x^2-ax-5$ funksiyasının böhran nöqtələri yoxdur?

A) $(3;\infty)$ B) $(-\infty;3)$ C) $(-\infty;-3)$ D) (2; 5) E) $(2;+\infty)$

9. $y=x^3-3x$ funksiyasının qrafikinə $x_0=3$ nöqtəsində çəkilmiş toxunanın bucaq əmsalını tapın.

10. $y=2x^2-6x+3$ funksiyasının qrafikinə $x=x_0$ nöqtəsində toxunan düz xətt çəkilmişdir. Uyğunluğu müəyyən edin.

1. $x_0=1$	a) Bucaq əmsalı 6-dır.
2. $x_0=2$	b) Toxunanın tənliyi $y=-2x+1$ olar.
3. $x_0=3$	c) Toxunma nöqtəsinin ordinatı 3-dür.
	d) Bucaq əmsalı 2-dir.
	e) Toxunanın tənliyi $y=2x-5$ olar.

V FƏSİL
QEYRİ-MÜƏYYƏN İNTEQRAL
§ 26. İBTİDAİ FUNKSİYA VƏ ONUN XASSƏLƏRİ

Funksiya verildikdə onun törəməsinin tapılması (diferensiallanması) əməlini bilirik. İndi bu əməlin tərsini, yəni törəməsi məlum olan funksiyanın özünün tapılması üsulunu müəyyən edək.

Tutaq ki, $y=f(x)$ hər hansı (a, b) intervalında verilmiş kəsilməyən funksiyadır.

Tərif. (a, b) intervalının bütün nöqtələrində

$$F'(x) = f(x)$$

münasibətini ödəyən $F(x)$ funksiyasına, $f(x)$ funksiyasının *ibtidai funksiyası* deyilir.

Məsələn, $(\sin x)' = \cos x$ olduğundan, $\sin x$ funksiyası həqiqi oxda $\cos x$ funksiyasının ibtidai funksiyasıdır. İbtidai funksiyanın aşağıdakı iki əsas xassəsi var.

Xassə 1. *$F(x)$ funksiyası* (a, b) *intervalında $f(x)$-in ibtidai funksiyası, C-də ixtiyari sabitdirsə, onda $F(x)+C$ - də onun ibtidai funksiyasıdır.*

□ $(F(x)+C)' = F'(x) + C' = f(x)$, yəni $(F(x)+c)' = f(x)$ ■

Xassə 2. *$F(x)$ və $\Phi(x)$ funksiyaları* (a, b) *intervalında eyni bir $f(x)$ funksiyasının ibtidai funksiyalardırsa, onda onlar bir-birindən sabit toplanan ilə fərqlənirlər, yəni $F(x) = \Phi(x) + C$.*

□ Tutaq ki, $F'(x) = f(x)$ və $\Phi'(x) = f(x)$ -dir. Bunları tərəf-tərəfə çıxaq:

$F'(x) - \Phi'(x) = 0 \Rightarrow (F(x) - \Phi(x))' = 0 \Rightarrow F(x) - \Phi(x) = C \Rightarrow F(x) = \Phi(x) + C$. ■

Bu iki xassədən aşağıdakı nəticə alınır:

Nəticə. *$F(x)$ funksiyası* (a, b) *intervalında $f(x)$ funksiyasının hər hansı ibtidai funksiyası isə, onda bu intervalda onun bütün ibtidai funksiyaları çoxluğu $F(x)+C$ kimi təyin olunur* (burada C ixtiyari sabitdir).

Məsələn, x^2 funksiyasının bir ibtidai funksiyası $\frac{1}{3}x^3$ olduğundan, onun bütün ibtidai funksiyalar çoxluğu $\frac{1}{3}x^2 + C$ şəklində olar.

§ 27. QEYRİ MÜƏYYƏN İNTEQRAL VƏ ONUN XASSƏLƏRİ

Tutaq ki, $y = f(x)$ funksiyası (a, b) intervalında təyin olunmuş kəsilməyən funksiyadır.

Tərif. (a, b) intervalında $f(x)$ funksiyasının bütün ibtidai funksiyaları çoxluğuna onun *qeyri müəyyən inteqralı* deyilir və

$$\int f(x)\,dx$$

Kimi yazılır. Burada, $\int$ – inteqral işarəsi, x - integrql dəyşəni, $f(x)$ - *inteqralaltı funksiya,* $f(x)\,dx$ isə *inteqralaltı ifadə* adlanır.

Aydındır ki, əgər $F(x)$ funksiyası (a, b) intervalında $f(x)$ -in hər hansı ibtidai funksiyası isə, onda onun qeyri müəyyən inteqralı üçün

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C \qquad (1)$$

münasibəti doğrudur.

Məsələn, $(\sin x)' = \cos x$ olduğundan, $\int \cos x\,dx = \sin x + C$ olur.

Qeyd. İnteqralla əlaqədar bütün məsələlərdə qarşımıza çıxacağından, yeni bir anlayış verək (diferensiallanan $y = f(x)$ funksiyası verilmiş olsun).

Tərif. $f'(x)dx$ hasilinə $f(x)$ *funksiyasının diferensialı* deyilir və $df(x)$ və ya df və ya dy işarə olunur (göründüyü kimi funksiyanın diferensialı, onun törəməsi ilə arqumentin diferensialı hasilinə bərabərdir):

$$df(x) = f'(x)dx \text{ və ya } df = f'(x)dx. \qquad (2)$$

Misallar. Aşağıdakı funksiyaların diferensialını tapın.

1. $y = x$; 2. $y = x^{\alpha}$ $(\alpha \neq -1)$; 3. $y = \ln x$; 4. $y = \sin x$; 5. $y = a^{2x}$;
6. $y = tg3x$.

○ 1. $dy = (x)'dx = 1 \cdot dx = dx \Rightarrow dy = dx.$ Deməli, arqumentin diferensialı özünə bərabərdir;

2. $dy = (x^{\alpha})'dx = \alpha x^{\alpha-1}dx$;

3. $dy = (\ln x)'dx = \dfrac{dx}{x}$;

4. $dy = (\sin x)'dx = \cos dx$;

5. $dy = (a^{2x})'dx = a^{2x}\ln a \cdot (2x)'dx = 2a^{2x}\ln a \cdot dx$;

6. $dy = (tg3x)'dx = \dfrac{1}{\cos^2 3x}(3x)'dx = \dfrac{3dx}{\cos^2 3x}$. ●

Cəbri cəmin, hasilin və nisbətin diferensialı üçün, doğruluğu (2) münasibətindən əldə edilən aşağıdakı bərabərliklər doğrudur ($u = u(x)$ və $v = v(x)$ ortaq təyin oblastında diferensiallanan funksiyalardır):

1. $d(u \pm v) = du \pm dv$; 2. $d(uv) = vdu + udv$; 3. $d\left(\dfrac{u}{v}\right) = \dfrac{vdu - udv}{v^2}$.

Qeyri müəyyən inteqralın aşağıdakı xassələri var.

Xassə 1. Qeyri müəyyən inteqralın törəməsi inteqralaltı funksiyaya bərabərdir.

$$\left(\int f(x)dx\right)' = f(x).$$

□ Tutaq ki, $F(x)$ funksiyası $f(x)$-in ibtidai funksiyasıdır. $F'(x) = f(x)$. Bunu nəzərə almaqla (1) münasibətinin hər iki tərəfindən törəmə alsaq,

$$\left(\int f(x)dx\right)' = (F(x)+C)' = F'(x) = f(x),$$

yəni

$$\left(\int f(x)dx\right)' = f(x)$$

olduğunu alırıq. ■

Bu xassədən çıxır ki, qeyri-müəyyən inteqral üçün hər hansı bir bərabərliyin doğruluğunu göstərmək üçün hər iki tərəfin törəmələrinin bərabər olduğunu göstərmək kifayətdir.

Xassə 2. Cəmin qeyri- müəyyən inteqralı toplananların qeyri- müəyyən inteqralları cəminə bərabərdir:

$$\int \big(f(x)+\varphi(x)\big)dx = \int f(x)\,dx + \int \varphi(x)\,dx \qquad (3)$$

□ (3) bərabərliyinin hər iki tərəfindən törəmə alsaq, 1-ci xassəyə əsasən

$$\left(\int \big(f(x)+\varphi(x)\big)dx\right)' = \left(\int f(x)dx\right)' + \left(\int \varphi(x)dx\right)', \text{ yəni}$$

$$f(x)+\varphi(x) = f(x)+\varphi(x)$$

eyniliyini alırıq. Bu isə (3) bərabərliyinin doğruluğu deməkdir. ■

Xassə 3. Sabit vuruğu qeyri-müəyyən inteqral işarəsi xaricinə çıxarmaq olar:

$$\int C\, f(x)\,dx = C\int f(x)\,dx. \qquad (4)$$

□ Doğrudan da, (4) bərabərliyinin hər tərəfindən törəmə alsaq, $Cf(x) = C\, f(x)$ eyniliyini, yəni onun doğruluğunu alırıq. ■

Xassə 4. $\int f(x)\,dx = F(x)+C$, yəni $F'(x) = f(x)$ isə onda

$$\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a}F(ax+b)+C \qquad (5)$$

düsturu doğrudur $(a \neq 0)$.

□ İsbat üçün (5) ifadəsinin sağ tərəfinin *x*-ə nəzərən törəməsinin $f(ax+b)$ olduğunu göstərmək kifyətrir:

$$\frac{1}{a}F'(ax+b)\cdot a = f(ax+b). \ ■$$

Misal. $\int \cos(5x+3)dx$ inteqralını hesablayın.

□ $\int \cos x dx = \sin x + C$ olduğundan,

$$\int \cos(5x+3)dx = \frac{1}{5}\sin(5x+3) + C$$

olur. ■

§ 28. ƏSAS İNTEQRALLAR CƏDVƏLİ

Əsas elementar funksiyaların törəmə düsturlarına uyğun olaraq, *əsas inteqrallar cədvəli* deyilən aşağıdakı düsturlar doğrudur.

1. $\int 0 \cdot dx = C$.

2. $\int x^{\alpha} dx = \dfrac{1}{\alpha+1} x^{\alpha+1} + C$

3. $\int \dfrac{dx}{x} = \ln|x| + C$.

4. $\int a^x dx = \dfrac{1}{\ln a} a^x + C$, $\left(\int e^x dx = e^x + C\right)$.

5. $\int \cos x dx = \sin x + C$.

6. $\int \sin x dx = -\cos x + C$.

7. $\int \dfrac{dx}{\cos^2 x} = tgx + C$,.

8. $\int \dfrac{dx}{\sin^2 x} = -ctgx + C$.

9. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = arc\sin\dfrac{x}{a} + C = -arc\cos\dfrac{x}{a} + C$.

10. $\int \dfrac{dx}{a^2 + x^2} = \dfrac{1}{a} arc\,tg\dfrac{x}{a} + C = -\dfrac{1}{a} arc\,ctg\dfrac{x}{a} + C$.

11. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right| + C$

12. $\int \dfrac{dx}{a^2 - x^2} = \dfrac{1}{2a}\ln\left|\dfrac{a+x}{a-x}\right| + C$.

Bu düsturlardan hər birinin doğruluğu qeyri müəyyən inteqralın 1-ci xassəsini tətbiq etməklə göstərilə bilər. Nümunə üçün 10-cucı düsturun doğruluğunu göstərək:

$$\left(\frac{1}{a}arc\,tg\frac{x}{a}+C\right)'=\left(\frac{1}{a}arc\,tg\frac{x}{a}\right)'=\frac{1}{a}\cdot\frac{1}{1+\left(\frac{x}{a}\right)^2}\left(\frac{x}{a}\right)'=\frac{1}{a}\cdot\frac{a^2}{a^2+x^2}\cdot\frac{1}{a}=\frac{1}{x^2+a^2}.$$

İndi bir başa cədvəl inteqrallarının köməyi ilə bəzi inteqralları hesablayaq.

Misallar. Aşağıdakı inteqralları hesablayın:

1. $\int x^2\sqrt[3]{x}dx$.

○ $\int x^2\sqrt[3]{x}dx=\int x^{\frac{7}{3}}dx$ olduğundan, birinci düstura əsasən $\left(\alpha=\frac{7}{3}\right)$

$$\int x^{\frac{7}{3}}dx=\frac{1}{\frac{7}{3}+1}x^{\frac{7}{3}+1}+C=\frac{3}{10}x^{\frac{10}{3}}+C$$

olur. ●

2. $\int\frac{dx}{3x-4}$.

○ 3-cü cədvəl inteqralını və (4) düsturunu nəzərə alsaq,

$$\int\frac{dx}{3x-4}=\frac{1}{3}\ln|3x-4|+C$$

olur. ●

3. $\int 5^{4x+7}dx$.

○ 4-cü cədvəl inteqralı və (4) düsturuna əsasən,

$$\int 5^{4x+7}dx=\frac{1}{4\ln 5}5^{4x+7}+C$$

olur. ●

4. $\int\frac{dx}{9+x^2}$.

○ $\int\frac{dx}{9+x^2}=\int\frac{dx}{3^2+x^2}$ olduğundan, 9-cu düstura əsasən,

$$\int \frac{dx}{9+x^2} = \frac{1}{3} arc\,tg \frac{x}{3} + C$$

olur. ●

5. $\int \frac{x^2 + 3x - 5}{\sqrt{x}} dx.$

○ $\int \frac{x^2+3x-5}{\sqrt{x}} dx = \int \frac{x^2+3x-5}{x^{\frac{1}{2}}} dx = \int \left(x^{\frac{3}{2}} + 3x^{\frac{1}{2}} 5x^{-\frac{1}{2}} \right) dx =$

$$\int x^{\frac{3}{2}} dx + 3\int x^{\frac{1}{2}} dx - 5\int x^{-\frac{1}{2}} dx = \frac{1}{\frac{3}{2}+1} x^{\frac{3}{2}+1} + \frac{3}{\frac{1}{2}+1} x^{\frac{1}{2}+1} - \frac{5}{-\frac{1}{2}+1} x^{-\frac{1}{2}+1} + C =$$

$$\frac{2}{5} x^{\frac{5}{2}} + 2x^{\frac{3}{2}} - 10x^{\frac{1}{2}} + C.$$ ●

6. $\int \frac{x^2}{x^2+16} dx.$

○ $\int \frac{x^2}{x^2+16} dx = \int \frac{x^2+16-16}{x^2+16} dx = \int \left(1 + \frac{16}{x^2+16} \right) dx =$

$$= \int dx - 16\int \frac{dx}{x^2+4^2} = x - 4arc\,tg \frac{x}{4} + C.$$ ●

7. $\int \frac{dx}{\sqrt{3x+2} - \sqrt{3x-1}}.$

○ İnteqralaltı funksiyanı məxrəcin qoşmasına vurub bölək və alınan ifadəni inteqrallayaq:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{3x+2} - \sqrt{3x-5}} = \int \frac{\sqrt{3x+2} + \sqrt{3x-5}}{\left(\sqrt{3x+2} - \sqrt{3x-5}\right)\left(\sqrt{3x+2} + \sqrt{3x-5}\right)} dx =$$

$$\int \frac{\sqrt{3x+2} + \sqrt{3x-5}}{3x+2-3x+5} dx = \frac{1}{7}\int (3x+2)^{\frac{1}{2}} dx + \frac{1}{7}\int (3x-5)^{\frac{1}{2}} dx =$$

$$\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{21}\left((3x+2)^{\frac{3}{2}}+(3x-5)^{\frac{3}{2}}\right)+C=\frac{2}{63}\left[\sqrt{(3x+2)^3}+\sqrt{(3x-5)^3}\right]+C. \bullet$$

8. $\int \sin 2x\cos 3x dx.$

○ $\sin\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}\left[\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)\right]$ düsturundan istifadə edək:

$$\int \sin 2x\ \cos 3x\,dx=\frac{1}{2}\left(\int \sin 5x dx-\int \sin x dx\right)=-\frac{1}{10}\cos 5x+\frac{1}{2}\cos x+c. \bullet$$

9. $\int \frac{dx}{100+9x^2}.$

○ 10-cu cədvəl inteqralı və (4) düsturuna əsasən,

$$\int \frac{dx}{100+9x^2}=\int \frac{dx}{10^2+(3x)^2}=\frac{1}{3}\frac{1}{10}arc\,tg\frac{3x}{10}+C=\frac{1}{30}arc\,tg\frac{3x}{10}+C=$$

$$-\frac{1}{30}arc\,ctg\frac{3x}{10}+C. \bullet$$

10. $\int \frac{dx}{\sqrt{4x^2\pm 9}}.$

○ 11-ci cədvəl inteqralı və (4) düsturuna əsasən,

$$\int \frac{dx}{\sqrt{4x^2\pm 9}}=\int \frac{dx}{\sqrt{(2x)^2\pm 3^2}}=\frac{1}{2}\ln\left|2x+\sqrt{(2x)^2\pm 3^2}\right|+C. \bullet$$

Qeyd. Yuxarıda qeyd olunduğu kimi kəsilməyən funksiya inteqrallanandır. Elemeentar funksiyalar da öz təyin oblastında kəsilməyən olduğundan, inteqrallanandır. Lakin elə elementar fuksiyalar var ki, onların ibtidai funksiyasıi yəni inteqralı, elementar funksiyalar içərisində yoxdur. Belə funksiyaların inteqralına, *açılmayan inteqral* deyilir. Məsələn,

$$\int e^{x^2}dx,\ \int e^{-x^2}dx,\int\sqrt{\sin x}dx,\int\frac{dx}{\ln x},\int\frac{e^x}{x}dx,\int\frac{\sin x}{x}dx,\int\sin x^2dx,\int\cos x^2dx,\int xtgxdx$$

inteqralları, açılmayan inteqrallaqdır.

*§ 29. QEYRİ MÜƏYYƏN İNTEQRALIN HESABLANMA ÜSULLARI

Əvvəlki paraqrafda bir başa başa cədvəl inteqrallarının köməyi ilə inteqralların hesablanmasını nəzərdən keçirdik. Aydındır ki, hesblanacaq inteqral həmişə cədvəl inteqralı şəklində olmur. Odur ki, bu növ inteqralları hesablamaq üçün inteqral içi funksiyaya uyğun çox sayda müxtəlif üsullar hazırlanmışdır. İndi həmin üsullardan, *əsas inteqrallama üsulları* deyilən və çox tətbiq olunan aşağıdakı üç üsulu verək: *1) Toplananlara ayırma üsulu; 2) Dəyişənin əvəz olunması üsulu; 3) Hissə hissə inteqrallama üsulu.*

29. 1. Toplananlara ayırma üsulu. Bu üsulun mahiyyəti, inteqralın əsas xassələrindən istifadə edib, hesablanacaq inteqralı mümkün olduqca sadə inteqralların cəbri cəmi şəklinə gətirib, cədvəl inteqrallarını tətbiq etməkdən ibarətdir (əvvəlki paraqrafda 5-ci misalda olduğu kimi). Bu inteqralların hər birinin hesablanmasından sonra sabit toplanan əlavə etmək yerinə, hesablamanın sonunda bir sabit əlavə etmək kifayətdir. Çünki, hər hesablamadan sonra əlavə olunacaq sabitlərin cəmi də bir sabitdir.

Misallar. Aşağıdakı inteqralları hesablayın.

1. $\int (1+2\sqrt{x})^2 dx$.

○ $\int (1+2\sqrt{x})^2 dx. = \int (1+4\sqrt{x}+4x)dx = \int dx + 4\int x^{\frac{1}{2}}dx + 4\int xdx =$

$$x + 4\cdot\frac{1}{\frac{1}{2}+1}x^{\frac{1}{2}+1} + 4\frac{x^2}{2} + C = x + \frac{8}{3}x^{\frac{3}{2}} + 2x^2 + C. \bullet$$

2. $\int (1-\sqrt[3]{x})^3 dx.$

$$\int (1-\sqrt[3]{x})^3 dx = \int (1-3x^{\frac{1}{3}}+3x^{\frac{2}{3}}-x)dx = \int dx - 3\int x^{\frac{1}{3}}dx + 3\int x^{\frac{2}{3}}dx - \int xdx =$$

$$x - 3\cdot\frac{1}{\frac{1}{3}+1}x^{\frac{1}{3}+1} + 3\cdot\frac{1}{\frac{2}{3}+1}x^{\frac{2}{3}+1} - \frac{x^2}{2} + C = x - \frac{9}{4}x^{\frac{4}{3}} + \frac{9}{5}x^{\frac{5}{3}} - \frac{x^2}{2} + C. \bullet$$

3. $\int \frac{x^2-2\sqrt{x}+3}{\sqrt[3]{x}}dx.$

○ $\int \frac{x^2-2\sqrt{x}+3}{\sqrt[3]{x}}dx. = \int \frac{x^2-2x^{\frac{1}{2}}+3}{x^{\frac{1}{3}}}dx = \int\left(x^{\frac{5}{3}} - 2x^{\frac{1}{6}} + 3x^{-\frac{1}{3}}\right)dx =$

$$\int x^{\frac{5}{3}}dx-2\int x^{\frac{1}{6}}dx+3\int x^{-\frac{1}{3}}dx=\frac{1}{\frac{5}{3}+1}x^{\frac{5}{3}+1}-\frac{2}{\frac{1}{6}+1}x^{\frac{1}{6}+1}+\frac{3}{-\frac{1}{3}+1}x^{-\frac{1}{3}+1}+C=$$

$$\frac{3}{8}x^{\frac{8}{3}}-\frac{12}{7}2x^{\frac{7}{6}}+\frac{9}{2}x^{\frac{2}{3}}+C. \bullet$$

4. $\int \sin 3x\cos 5x dx$.

○ Bu növ inteqralların hesablanması üçün, triqonometrik funksiyaların hasilini cəmə çevirmə düsturlarının köməyi ilə (bax. I hissə §177) inteqral içindəki hasil cəmə çevrilir və inteqral hesablanır. Verilən inteqral üçün,

$$\sin\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}\left(\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)\right)$$

düsturuna əsasən $\sin 3x\cos 5x=\frac{1}{2}\left(\sin 8x-\sin 2x\right)$ yazıb, inteqralı hesablayaq:

$$\int \sin 3x\cos 5x dx=\frac{1}{2}\int(\sin 8x-\sin 2x)dx=\frac{1}{2}\left(\int\sin 8x dx-\int\sin 2x dx\right)=$$

$$\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{8}\cos 8x+\frac{1}{2}\cos 2x\right)+C=\frac{1}{16}(4\cos 2x-\cos 8x)+C. \bullet$$

5. $\int \cos^2 4x dx$.

○ Bu növ inteqralların hesablanması üçün, arqumenti yarıya bölmə düsturlarının köməyi ilə (bax. I hissə §175) inteqral içindəki funksiya cəbri cəmə çevrilir və inteqral hesablanır. Verilən inteqral üçün,

$$\cos^2\alpha=\frac{1}{2}\left(1+\cos 2\alpha\right)$$

düsturuna əsasən $\cos^2 4x=\frac{1}{2}\left(1+\cos 8x\right)$ yazıb, inteqralı hesablayaq:

$$\int\cos^2 4x dx=\frac{1}{2}\int(1+\cos 8x)dx=\frac{1}{2}\left(\int dx+\int\cos 8x dx\right)=\frac{1}{2}\left(x+\frac{1}{8}\sin 8x\right)+C. \bullet$$

29.2. Dəyişənin əvəz olunması üsulu. Ola bilər ki, hesablanacaq inteqral cədvəl inteqralı şəklində olmasın, ancaq sadə çevirmələrlə cədvəl inteqralı şəklinə gətirilə bilsin. Belə hallarda, doğruluğu hər iki tərəfin törəməsinin alnması yolu ilə isbat olunan, *qeyri müəyyən inteqralda dəyişənin əvəz olunması üsulu* adlanan və

$$\int f(x)dx = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt \qquad (1)$$

şəklində yazılan usuldan istifadə olunur. Burada, $\varphi(t)$, diferensiallanan və monoton funksiya olub, elə seçilir ki, (1) bərabərliyinin sağ tərəfi cədvəl inteqralı şəklinə düşsün. Alınan inteqralı hesabladıqdan sonra nəticəni əvvəlki dəyişənlə ifadə etmək lazımdır.

Hesablanacaq inteqraldan asılı olaraq (1) düsturu,

$$\int f(\varphi(x))\varphi'(x)dx = \int f(t)dt \qquad (1a)$$

şəklində də istifadə oluna bilir. Bu halda $t = \varphi(x)$ əvəz etməsi tətbiq olunur ($dt = \varphi'(x)dx$) .

Misallar. Aşağıdakı inteqralları hesablayın.

1. $\int \frac{e^{\sqrt[3]{x}}}{\sqrt[3]{x^2}}dx$.

○ İnteqral içini irrasyonallıqdan qurtarmaq üçün, $x = t^3$ qəbul etsək, $dx = 3t^2dt$ olur. Bunları verilən ineqralda yerlərinə yazıb, lazım olan əməlləriyerinə yetirək:

$$\int \frac{e^{\sqrt[3]{x}}}{\sqrt[3]{x^2}}dx = \int \frac{e^{\sqrt[3]{t^3}}}{\sqrt[3]{t^6}}3t^2dt = 3\int \frac{e^t}{t^2}t^2dt = 3\int e^t dt = 3e^t + C.$$

Nəticəni x dəyişəni ilə ifadə etmək üçün əvəzləmədən,

$$x = \sqrt[3]{t} \Rightarrow t = x^3$$

tapıb, yerinə yazsaq,

$$\int \frac{e^{\sqrt[3]{x}}}{\sqrt[3]{x^2}}dx = 3e^{\sqrt[3]{x}} + C$$

alırıq. ●

2. $\int \sqrt{a^2 - x^2}dx$.

○ $x = a\sin t$ qəbul etsək (bu şəkildə əvəz etmə də inteqral içini irrasyonallıqdan qurtarır), $dx = a\cos t dt$ olur. Bunları verilən ineqralda yerlərinə yazıb, lazım olan əməlləriyerinə yetirək:

$$\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx = \int \sqrt{a^2-a^2\sin^2 t}\cdot a\cos t dt = a^2\int \sqrt{1-\sin^2 t}\cos t dt =$$

$$a^2\int \sqrt{\cos^2 t}\cos t dt = a^2\int \cos^2 t dt = \frac{a^2}{2}\int (1+\cos 2t)dt =$$

$$\frac{a^2}{2}\left(\int dt + \int \cos 2t dt\right) = \frac{a^2}{2}\left(t+\frac{1}{2}\sin 2t\right)+C.$$

Nəticəni x dəyişəni ilə ifadə etmək üçün əvəzləmədən,

$$x = a\sin t \Rightarrow \sin t = \frac{x}{a} \Rightarrow t = \arcsin\frac{x}{a}$$

tapıb, yerinə yazaq:

$$\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx = \frac{a^2}{2}\left(t+\frac{1}{2}\sin 2t\right)+C = \frac{a^2}{2}\left(\arcsin\frac{x}{a}+\frac{1}{2}\sin 2\arcsin\frac{x}{a}\right)+C =$$

$$\frac{a^2}{2}\left(\arcsin\frac{x}{a}+\sin\arcsin\frac{x}{a}\cos\arcsin\frac{x}{a}\right)+C = \frac{a^2}{2}\left(\arcsin\frac{x}{a}+\frac{x}{a}\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}\right)+C =$$

$$\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}+\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}+C.$$

Hesablama zamanı

$$\cos^2\alpha = \frac{1}{2}(1+\cos 2\alpha),\ \sin\arcsin\alpha = \alpha,\ \cos\arcsin\alpha = \sqrt{1-\alpha^2}$$

düsturlarından istifadə etdik. ●

3. $\int x\sqrt{1+x}\,dx$.

○ $\sqrt{1+x} = t$ qəbul etsək, $1+x = t^2 \Rightarrow x = t^2-1 \Rightarrow dx = 2tdt$ olur. Bunları verilən inteqralda yerlərinə yazıb, lazım olan əməlləri yerinə yetirək:

$$\int x\sqrt{1+x}\,dx = \int (t^2-1)t2tdt = 2\int (t^4-t^2)dt = 2\left(\int t^4 dt - \int t^2 dt\right) =$$

$$2\left(\frac{t^{4+1}}{4+1}-\frac{t^{2+1}}{2+1}\right)+C = 2\left(\frac{t^5}{5}-\frac{t^3}{3}\right)+C = \frac{2t^3(3t^2-5)}{15}+C.$$

Nəticəni əvvəlki dəyişənlə ifadə edək:

$$\int x\sqrt{1+x}\,dx = \frac{2(\sqrt{1+x})^3\left(3(\sqrt{1+x})^2-5\right)}{15} = \frac{2(3x-2)(\sqrt{1+x})^3}{15}+C. \text{●}$$

4. $\int \frac{dx}{a+e^{kx}} \quad (a>0).$

○ $a+e^{kx}=t$ qəbul etsək, $e^{kx}=t-a \Rightarrow x=\frac{1}{k}\ln(t-a) \Rightarrow dx=\frac{1}{k}\frac{dx}{t-a}$ olur

və

$$\int \frac{dx}{a+e^{kx}} = \frac{1}{k}\int \frac{dt}{t((t-a)} = \frac{1}{k}\int \frac{dt}{t((t-a)} = \frac{1}{ak}\int\left(\frac{1}{t-a}-\frac{1}{t}\right)dt =$$

$$\frac{1}{ak}\left(\ln(t-a)-\ln t\right)+C = \frac{1}{ak}\ln\frac{t-a}{t}+C$$

əldə edilir. $t=a+e^{kx}, t-a=e^{kx}$ olduğunu nəzərə alsaq,

$$\int \frac{dx}{a+e^{kx}} = \frac{1}{ak}\ln\frac{e^{kx}}{a+e^{kx}}+C$$

olur. ●

29.3. Hissə hissə inteqrallma üsulu. Bu üsulun mahiyyəti, müəyyən əməllərin köməyi ilə, hesablanacaq inteqralı cədvəl inteqrallarının köməyi ilə hesablana bilən daha sadə inteqrala çevirməkdən ibarətdir.

$u=u(x)$ və $v=v(x)$ funksiyaları ortaq təyin oblastında diferensiallanan funksiyalar isə, onda *hissə hissə inteqrallama düsturu* deyilən,

$$\int u(x)v'(x)dx = u(x)v(x) - \int u'(x)v(x)dx \qquad (1)$$

bərabərliyi doğrudur. (1) düsturu, daha sadə olan aşağıdakı kimi də yazılır:

$$\int udv = uv - \int vdu \qquad (1a)$$

Bu üsulun tətbiqi zamanı $u(x)$ olaraq, inteqral içi bir funksiya olduqda onu; iki funksiya olduqda isə ümumiyyətlə inteqrallamya mane olan (yəni cədvəl inteqrallarında olmayan) vuruğu qəbul etmək lazımdır. Vəziyyətdən asılı olaraq başqa cür də olabilər. İnteqral içindən asılı olaraq hissə hissə inteqrallama üsulu bir neçə dəfə tətbiq oluna bilər (bax. 3-cü misal). İnteqrallama sabiti də yalnız nəticəyə əlavə olunur.

Misallar. Aşağıdakı inteqralları hesablayın.

1. $\int \ln x dx.$

○ İnteqral içi bir funksiya olduğundan, $\ln x = u(x)$ qəbul etsək, $dx=dv(x)$ olur. Buradan, $du=\frac{dx}{x}, v=x$ alınır və (1a) düsturuna görə,

$$\int \ln x dx = x\ln x - \int x \cdot \frac{dx}{x} = x\ln x - \int dx = x\ln x - x + C = x(\ln x - 1) + C$$

tapılır. ●

2. $\int x arctgx dx.$

○ $arctgx$ - in inteqralı cədvəl inteqrallarında olmadığından, onu $u(x)$ olaraq qəbul edək: $arctgx = u$, onda $xdx = dv$ olur. Buradan, $du = \frac{dx}{1+x^2}$, $v = \frac{x^2}{2}$ alınır və yenə (1a) düsturuna görə,

$$\int x arctgdx = \frac{x^2}{2} arctgx - \frac{1}{2}\int \frac{x^2}{1+x^2}dx = \frac{x^2}{2} arctgx - \frac{1}{2}\int \frac{1+x^2-1}{1+x^2}dx =$$

$$\frac{x^2}{2} arctgx - \frac{1}{2}\left(\int dx - \int \frac{1}{1+x^2}dx\right) = \frac{x^2}{2} arctgx - \frac{1}{2}(x - arctgx) + C =$$

$$\frac{1}{2}\left((x^2+1) arctgx - x\right) + C$$

tapılır. ●

3. $\int x^2 \sin x dx.$

○ Burada x^2 vuruğundan azad olmaq üçün onu $u(x)$ olaraq qəbul etmək lazımdır ($\sin x$ - in törəməsi $\cos x$ olduğundan, ondan azad olmaq mümkün deyil):

$$x^2 = u, \sin x dx = dv \Rightarrow du = 2xdx, v = -\cos x.$$

Bunları düsturda yerlərinə yazaq:

$$\int x^2 \sin x dx = -x^2 \cos x + 2\int x\cos x dx .$$

Sağ tərəfdəki inteqrala yenidən hissə hissə inteqrallama üsulunu tətbiq edək:

$$x = u, \cos x dx = dv \Rightarrow du = dx, v = \sin x .$$

$$\int x^2 \sin x dx = -x^2 \cos x + 2\int x\cos x dx = -x^2 \cos x + 2\left(x\sin x - \int \sin x dx\right) =$$

$$-(x^2 - 2)\cos x + 2x\sin x + C . \bullet$$

4. $\int x^3 e^{-x^2} dx.$

○ Verilen inteqralı çevirib,

$$\int x^3 e^{-x^2}dx = \int x^2 e^{-x^2}xdx = -\frac{1}{2}\int x^2 e^{-x^2}d(-x^2)$$

şəklinə saldıqdan sonra hissə hissə inteqrallama üsulunu tətbiq edək:

$$x^2 = u, e^{-x^2}d(-x^2) = dv \Rightarrow du = 2xdx, v = e^{-x^2},$$

$$\int x^3 e^{-x^2}dx = -\frac{1}{2}\int x^2 e^{-x^2}d(-x^2) = -\frac{1}{2}\left(x^2 e^{-x^2} - 2\int xe^{-x^2}dx\right) =$$

$$-\frac{1}{2}\left(x^2 e^{-x^2} + \int e^{-x^2}d(-x)^2\right) = -\frac{1}{2}\left(x^2 e^{-x^2} + e^{-x^2}\right) + C = -\frac{1}{2}(1 + x^2)e^{-x^2} + C. \bullet$$

Ç A L I Ş M A L A R.

1. Verilmiş $F(x)$ funksiyası $f(x)$ funksiyasının ibtidai funksiyasıdırmı?

a) $F(x) = 5x^4 + 2x - 1$, $f(x) = 20x^3 + 2$; b) $F(x) = \sin 5x$, $f(x) = \cos 5x$;

c) $F(x) = 3\cos 2x + 1$, $f(x) = -6\sin 2x$; d) $F(x) = \sqrt{3x+1}$, $f(x) = \dfrac{15}{2\sqrt{3x+1}}$.

2. $f(x)$ funksiyasının elə ibtidai funksiyasını tapın ki, onun qrafiki $M(x_0, y_0)$ nöqtəsindən keçsin:

a) $f(x) = \sin 2x$, $M\left(\dfrac{\pi}{4}, 1\right)$; b) $f(x) = 3x^2 + 2x - 2$, $M_0(1;4)$.

c) $f(x) = (2x+3)^2$, $M(-1;7)$; d) $f(x) = \dfrac{1}{\cos^2 x}$, $M\left(\dfrac{\pi}{4}, 3\right)$.

3. Aşağıdakı inteqralları hesablayın.

a) $\displaystyle\int \frac{5x^2 + 4x - 3}{\sqrt{x}}dx$; b) $\displaystyle\int \frac{2 + 5\sqrt{x^3} + 4x^3}{x^5}dx$; c) $\displaystyle\int \frac{dx}{4 + x^2}$

d) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{1 - 4x^2}}$; e) $\displaystyle\int \frac{x^4}{x^2 + 4}dx$; f) $\displaystyle\int (3\sin 2x + 4\cos 3x)dx$;

g) $\displaystyle\int \frac{3x^2\cos^2 x + 4}{\cos^2 x}dx$; h) $\displaystyle\int \frac{x^2 + 3}{x^2 + 1}dx$; x) $\displaystyle\int (3x + 5)^6 dx$;

i) $\int \frac{dx}{\sqrt{3x+2}}$; j) $\int \sin(4x+3)dx$; k) $\int \frac{dx}{(3x+5)^3}$;

q) $\int \frac{dx}{\cos^2 5x}$; l) $\int \sin 2x \sin 3x\, dx$; m) $\int \cos 3x \cos 5x\, dx$;

n) $\int 3^{2x+1}dx$; o) $\int 4^{5x-2}dx$; p) $\int \frac{dx}{1+4x^2}$;

r) $\int \frac{dx}{\sin^2 3x}$; s) $\int \frac{dx}{4+9x^2}$; t) $\int \cos^2 x dx$;

u) $\int \cos^3 x \sin x dx$; v) $\int \sin^4 x \cos x dx$; y) $\int \frac{dx}{7x+2}$;

z) $\int \frac{xdx}{x^2+3}$.

4. Aşağıdakı inteqralları hesablayın.

a) $\int (x^2-3x+1)dx$; b) $\int \left(\frac{x-1}{x}\right)^2 dx$; c) $\int \frac{x-2\sqrt{x}+2}{x^2\sqrt[3]{x}}dx$

d) $\int (a^x+b^x)^2 dx$; e) $\int (\sin 3x + \cos 5x)dx$;

f) $\int \left(3tgx + 4\sqrt[3]{x}\right)dx$;

g) $\int x\sqrt{x-1}dx$; h) $\int \frac{dx}{1+\sqrt{x}}$; x) $\int \left(3\sqrt{x}+1\right)^2 dx$;

i) $\int x(3x^2-2)^7 dx$; j) $\int \frac{e^{-x}}{e^{-x}+5}dx$; k) $\int \frac{xdx}{\sqrt{x^2+5}}$;

q) $\int \frac{dx}{e^x+5}$; l) $\int \sin x\sqrt{\cos x+1}\, dx$;

m) $\int \sqrt{3\ln x+1}\frac{dx}{x}$; n) $\int x^3 \ln x dx$;

o) $\int x arcctg x dx$; p) $\int x \sin 2x dx$;

r) $\int xe^x dx$; s) $\int x arctg 2x dx$; t) $\int x^2 \cos x dx$.

TESTLƏR

1. $f(x)=\cos\frac{x}{5}$ funksiyasının ibtidai funksiyasını tapın.

A) $-5\sin\frac{x}{5}+C$ B) $5\sin\frac{x}{5}$ C) $\frac{1}{5}\sin\frac{x}{5}+C$ D) $\sin\frac{x}{5}+C$

E) $5\sin\frac{x}{5}+C$

2. $f(x)=3x^2-4x+4$ funksiyasının, qrafiki $A(1;4)$ nöqtəsindən keçən ibtidai funksiyasını tapın.

A) $3x^3-x^2+4x+1$ B) x^3-2x^2+4x-1

C) x^3-2x^2+4x+1 D) x^3+2x^2+3

E) x^3-x^2+4x+1

3. $f'(x)=15x^2-6x+4$ və $f(1)=4$ olarsa, $f(2)$-ni tapın.

A) 30 B) 40 C) 33 D) 31 E) 34

4. $\int\frac{12x^2}{3+4x^3}dx$-i tapın.

A) $\ln(3+4x^3)+C$ B) $3\ln(3+4x^3)$ C) $-\ln(3-4x^3)+C$

D) $2\ln(3+4x^3)+C$ E) $4x^3+C$

5. $\int tg^2 x dx$-i tapın.

A) $2tgx+C$ B) $tg2x+C$ C) $ctgx+x+C$ D) $tgx-x+C$

E) $2ctgx+C$

6. $\int 7^{2x+1}dx$ inteqralını hesablayın.

A) $\frac{7^{2x+1}}{2\ln 6}+C$ B) $\frac{7^{2x+1}}{2\ln 7}+C$ C) $\frac{7^{2x+1}}{\ln 7}+C$ D) $7^{2x+1}+C$ E) $\frac{7^{2x+1}}{7\ln 7}+C$

7. $\int\sin^2 x dx$ inteqralını hesablayın.

A) $\frac{2x-\sin 2x}{4}+c$ B) $\cos^2 x+c$ C) $1+\cos^2 x+c$

D) $\sin x+c$ E) $\cos 2x+c$

8. $f(x)=\sin 5x$ funksiyasının ibtidai funksiyalarının ümumi şəklini tapın.

A) $\cos 5x + C$ B) $-\cos 5x + C$ C) $-\frac{1}{5}\cos 5x + C$

D) $6\cos 5x + C$ E) $-5\cos 5x + C$

9. Uyğunluğu müəyyən edin.

1. $\int \frac{dx}{x-2}$ a. $\ln x - 2 + c$

2. $\int \frac{x-2}{x}dx$ b. $\ln|x-2| + c$

3. $\int \frac{1-\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx$ c. $x - 2\ln|x| + c$

d. $2\sqrt{x} - x + c$

e. $\ln \sqrt{x} - x + c$

10. $\int \frac{dx}{5x-3}$ inteqralını hesablayın.

VI FƏSİL

MÜƏYYƏN İNTEQRAL VƏ ONUN TƏTBİQLƏRİ

*§ 29. MÜƏYYƏN İNTEQRAL ANLAYIŞINA GƏTİRƏN MƏSƏLƏLƏR

1. Əyrixətli Trapesiyanın Sahəsi. Tutaq ki, $y = f(x)$ funksiyası $[a,b]$ parçasında $(a < b)$ kəsilməyən və mənfi olmayan funksiyadır ($f(x) \geq 0, x \in (a,b)$).

Yuxarıdan $y = f(x)$ funksiyasının qrafiki, aşağıdan absislər oxu, yanlardan isə *x=a* və *y=b* düz xətləri ilə əhatə olunmuş fiqura ($aABb$ -yə) *əyrixətli trapesiya* deyilir.

Bildiyimiz kimi, düz xət parçaları ilə əhatə olunmuş fiqurların (üçbucaq, kvadrat, paraleloqram, trapesiya, romb və s.) sahələrini hesablamaq üçün müəyyən düsturlar mövcuddur. Lakin, əyri xətlərlə əhatə olunmuş fiqurlar üçün bunu söyləmək olmaz (dairə xaric). Bu çatışmazlığı aradan qaldırmaq üçün əvvəlcə əyrixətli trapesiyanın sahəsinə münasib tərif verib, sonra da onun hesablanma qaydasını müəyyən edək. Bu məqsədlə $[a,b]$ parçasını

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_i < x_{i+1} < ... < x_{n-1} < ... < x_n = b \qquad (1)$$

nöqtələri ilə, uzunluqları $\Delta x_i = x_{i+1} - x_l$ olan $[x_i, x_{i+1}]$ kimi n sayda kiçik parçaya ayırıb, hər parçada ixtiyari bir ξ_i nöqtəsi qeyd edək və bölgü nöqtələrindən absislər oxuna perpendikulyarlar çəkib, onları AB əyrisini kəsənə qədər uzadaq ($i = \overline{0,n}$). Nəticədə $aABb$ əyrixətli trapesiyası $x_i A_i A_{i+1} x_{i+1}$ şəklində əyrixətli trapesiyalara (zolaqlara) bölünmüş olur ($i = \overline{0, n-1}$). Funksiyanın ξ_i nöktəsindəki dəyərininin ($f(\xi_i)$), $[x_i, x_{i+1}]$ parparçasının uzuluğuna (Δx_i) hasilinin, şəklində ştrixlənmiş $x_i A'_i A'_{i+1} x_{i+1}$ düzbucaqlısının sahəsi ($S_i \approx f(\xi_i)\Delta x_i$) olduğu aydındır. Bütün bölgü üzrə bu sahələri toplayıb,

$$S^{(n)} = \sum_{i=0}^{n-1} S_i = \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\Delta x_i \qquad (2)$$

cəmini düzəldək. Δx_i uzunluqlarının ən böyüyünün uzunluğunu λ ilə göstərək:

$$\lambda = \max \Delta x_i \quad (i = \overline{0, n-1}).$$

$\lambda \to 0$ -da (2) cəminin limiti verilən *əyri xətli trapesiyanın sahəsi* (S) olaraq qəbul edilir və

$$S = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=0}^{n-1} S_i \text{ və ya } S = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\Delta x_i \qquad (3)$$

kimi yazılır.

Beləliklə, biz əyri xətli trapesin sahəsinə tərif vermiş oluruq. Burada qarşıya iki əsas sual çıxır:

1) Yuxarıdakı şəkildə təyin olunmuş hər bir fiqurun sahəsi yəni göstərilən limit varmı? Bu suala müsbət cavab verilir:

$f(x)$ funksiyası $[a,b]$ parçasında kəsilməyən olduqda, ona uyğun əyrixətli trapesiyanın yuxarıda təyin olduğu mənada sahəsi var.

2) Fiqurun sahəsinə verilən bu tərif həqiqətə nə dərəcədə uyğundur? Qeyd edək ki, bu sualın cavabı, yəni verilən tərəfin təbiiliyi praktikada tamamilə təsdiq olunmuşdur.

2. Çubuğun kütləsi. Fizikadan bildiyimiz kimi, uzunluğu l, sıxlığı da sabit olan (ρ) bircinsli çubuğun kütləsi

$$m = \rho l \qquad (4)$$

düsturu ilə hesablanır. Lakin çubuk bircinsli olmadıqda, yəni onun sıxlığı dəyişən olub, kəsilməyən $\rho = \rho(x)$ $\left(0 \le x \le l\right)$ funksiyası ilə verildikdə, kütləsini bir başa (4) düsturu ilə hesablamaq olmaz. Sözü edilən düsturdan faydalanaraq, çubuğun kütləsini tapmaq üçün aşağıdakı kimi hərəkət edək:

$[0,l]$ parçasını $0 = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = l$ nöqtələrinin köməyi ilə, ixtiyari qaydada n sayda kiçik hissəyə ayırıb, *i*-ci hissədə ixtiyari ξ_i $(i = \overline{0,\, n-1})$ nöqtəsi qeyd edək. Hissələrin kiçikliyinə və verilən funksiyanın kəsilməzliyinə əsasən hər bir hissədə təqribi olaraq sıxlığın sabit olub, $\rho(\xi_i)$-yə bərabər olduğunu qəbul etmək olar. Onda, *i*-ci hissənin kütləsi üçün

$$\Delta m_1 \approx \rho(\xi_1)\Delta x_1 \;\; (i = \overline{0,\, n-1})$$

təqribi düsturunu yaza bilərik ($\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$). Bütün bölgü üzrə bu kütlələri toplayıb,

$$m^{(n)} = \sum_{i=0}^{n-1} \Delta m_i = \sum_{i=0}^{n-1} \rho(\xi_i)\,\Delta x_i \qquad (5)$$

cəmini düzəldək.

$\lambda \to 0$-da (5) cəminin limiti, verilən bircins olmayan l uzunluqlu *çubuğun kütləsi* (m) olaraq qəbul edilir və

$$m = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=0}^{n-1} \Delta m_i \quad \text{və ya} \quad m = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=0}^{n-1} \rho(\xi_i)\Delta m_i \tag{6}$$

kimi yazılır.

3. Maddi nöqtənin getdiyi yol. Bildiyimiz kimi düz xətt boyunca sabit v sürətilə hərəkət edən cismin t zaman müddətində getdiyi yol

$$s = vt \tag{7}$$

düsturu ilə hesablanır. Lakin sürət dəyişən olduqda (7) düsturu bir başa tətbiq oluna bilməz. Sürət dəyişən olduqda yuxarıdaki düsturdan aşağıdakı kimi faydalanaq. Tutaq ki, cisim düz xətt boyunca dəyişən

$$v = v(t)$$

ürətilə hərəkət edir. Bu cismin t_0 anından T anınadək getdiyi yolu hesablayaq.

Bunun üçün $[t_0, T]$ parçasını məlum qayda üzrə $t_0 < t_1 < t_2 < ... < t_n = T$ nöqtələri vasitəsilə n sayda kiçik hissəyə ayırıb, i-ci hissədə, yəni (t_i, t_{i+1}) intervalında ixtiyari τ_i nöqtəsi qeyd edək $(i = \overline{0, n-1})$. Hissələr kiçik olduğundan hər bir hissədə sürətin təqribi olaraq sabit olub, həmin hissədə götürülmüş τ_i nöqtəsindəki sürətə ($v(\tau_i)$) bərabər olduğunu qəbul etmək olar. Odur ki, maddi nöqtənin həmin zaman fasiləsində ($\Delta t_i = t_{i+1} - t_i$) getdiyi yol təqribi olaraq

$$v(\tau_i)\Delta t_i)$$

kimi, $[t_0, T]$ zaman fasiləsində isə

$$s \approx \sum_{i=0}^{n-1} v(\tau_i)\Delta t_i \tag{8}$$

kimi olar $\left(\Delta t_i = t_{i+1} - t_i\right)$. Burada $\lambda \to 0$-da $\left(\lambda = \max \Delta t_i\right)$ limitə keçsək, gedilən yolun dəqiq qiymətini alırıq:

$$s = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=0}^{n-1} v(\tau_i)\Delta t_i\,. \tag{9}$$

Yuxarıda baxdığımız məsələlərin müxtəlif sahələrdən götürülmüş olmasına baxmayaraq, uyğun olaraq onların həllini ifadə edən (3), (6) və (9) düsturları şəkilcə oxşar olub, eyni növ bir cəmin limitinin hesablanmasından ibarətdir. Bu oxşarlıqdan istifadə edərək yeni bir riyazi anlayışı - müəyyən inteqral anlayışını verək.

*§ 30. MÜƏYYƏN İNTEQRALIN TƏRİFİ VƏ SADƏ XASSƏLƏRİ

Fərz edək ki, $[a,b]$ parçasında kəsilməyən ixtiyari $f(x)$ funksiyası verilmişdir. Əvvəlki paraqrafdaki qayda ilə $[a,b]$ parçasını

$$a=x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_i < x_{i+1} < ... < x_{n-1} < ... < x_n = b$$

(1)

nöqtələri ilə, uzunluqları $\Delta x_i = x_{i+1} - x_l$ olan $[x_i , x_{i+1}]$ kimi n sayda ixtiyari kiçik parçaya bölüb (bu bölgü sistemini σ ilə göstərək), hər bir parçadada uyğun olaraq ixtiyari bir ξ_i $(i = \overline{0, n-1})$ nöqtəsi qeyd edək. Sonra isə funksiyanın bu nöqtədəki qiymətini uyğun parçanın Δx_i uzunluğuna vurub ($i = \overline{0, n-1}$), bütün bölgü üzərə

$$S_\sigma = \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\Delta x_i \qquad (2)$$

cəmini düzəldək. (2) cəminə, $f(x)$ funksiyasının $[a,b]$ parçası üzrə σ bölgü sisteminə uyğun *ineqral cəmi* deyilir. σ bölgü sistemi üçün Δx_i- lərin ən böyüyünün uzunluğu λ olsun:

$$\lambda = \max \Delta x_i \quad (i = \overline{0, n-1}).$$

Tərif. $[a,b]$ parçasının kiçik hissələrə bölünmə qaydasından və bu hissələrdə ξ_i nöqtələrinin seçilməsindən asılı olmayaraq, $\lambda \to 0$ -da (2) cəminin limiti varsa, onda bu limitə $f(x)$ funksiyasının $[a,b]$ parçasında *müəyyən inteqralı,* $f(x)$ -ə də

$[a,b]$ parçasında *inteqrallanan funksiya* deyilir və

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

kimi işarə olunur.
Tərifə görə

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\,\Delta x_i \,. \qquad (3)$$

$\int_a^b f(x)\,dx$ ifadəsi belə oxunur: *a*-dan *b*-dək inteqral ef iks de iks)

Burada, a və b uyğun olaraq müəyyən inteqralın aşağı və yuxarı sərhədləri, $f(x)\,dx$ -inteqralaltı ifadə, *x* isə inteqrallama dəyişəni adlanır.

Müəyyən inteqralın tərifindən görünür ki,

1) $$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(t)\,dt = \int_a^b f(\xi)\,d\xi \,,$$

yəni, integralın qiyməti inteqrallama dəyişəninin hansı hərflə işarə olunmasından asılı deyil;

2) $$\int_a^a f(x)\,dx = 0\,,$$

yəni, $a=b$ olduqda integralın qiyməti sıfra bərabərdir.

İnteqral hesabına aid müfəssəl kitablarda isbat olunur ki, $[a,b]$ *parçasında kəsilməyən ixtiyari* $f(x)$ *funksiyası üçün* (3) *limiti var, başqa sözlə* $f(x)$ *funksiyası* $[a,b]$ *parçasında inteqrallanandır.*

(2) münasibətində $f(x)\equiv 1$ götürsək, istənilən σ bölgü sistemi üçün

$$S_\sigma = \sum_{i=0}^{n-1} \Delta x_i = b - a$$

alırıq. Deməli,

$$\int_a^b dx = b - a.$$

Eləcə də $a = b$ olarsa, istənilən *i* üçün ($i = \overline{0, n-1}$) $\Delta x_i = 0$ olur və nəticədə $S_\sigma = 0$, yəni

$$\int_a^b f(x)\,dx = 0.$$

Müəyyən inteqralın tərifindən onun aşağıdakı əsas xassələri alınır (Bbaxılan funksiyaların verilən parçada inteqrallanan olduğu fərz olunur).

Xassə 1. İki funksiya cəminin müəyyən inteqralı onların müəyyən inteqralları cəminə bərabərdir:

$$\int_a^b [f(x) + \varphi(x)]dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b \varphi(x)\,dx.$$

□ $$\int_a^b [f(x) + \varphi(x)]dx = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=0}^{n-1} [f(\xi_i) + \varphi(\xi_i)]\Delta x_i =$$

$$= \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\Delta x_i + \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=0}^{n-1} \varphi(\xi_i)\Delta x_i = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b \varphi(x)\,dx.$$

Burada cəmin limiti haqqında teoremdən istifadə etdik. ■

Xassə istənilən sonlu sayda toplanan üçün də doğrudur.

Xassə 2. Sabit vuruğu müəyyən inteqral xaricinə çıxarmaq olar:

$$\int_a^b cf(x)\,dx = c\int_a^b f(x)\,dx.$$

□

$$\int_a^b cf(x)\,dx = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=0}^{n-1} cf(\xi_i)\Delta x_i = c\lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\Delta x_i = c\int_a^b f(x)\,dx. ■$$

Nəticə. İki funksiya fərqinin müəyyən inteqralı onların müəyyən inteqralları fərqinə bərabərdir.

$$\int_a^b [f(x)-\varphi(x)]dx = \int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b \varphi(x)\,dx .$$

□

$$\int_a^b [f(x)-\varphi(x)]dx = \int_a^b [f(x)\,dx + (-1)\,\varphi(x)]dx = \int_a^b f(x)\,dx + (-1)\int_a^b \varphi(x)\,dx =$$

$$= \int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b \varphi(x)\,dx . \blacksquare$$

Xassə 3. Müəyyən inteqralda aşağı və yuxarı sərhədlərin yerini dəyişsək, onda inteqralın işarəsi əksinə dəyişər:

$$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx .$$

□ Biz $[a,b]$ *parçası* üzrə inteqrala tərif verərkən $a < b$ götürmüşdük. İndi həmin bölgü üzrə $[a,b]$ parçası üçün inteqral cəmi düzəldib,

$$f(\xi_i)(x_{i+1}-x_i) = -f(\xi_i)(x_i - x_{i+1})$$

olmasını nəzərə alsaq, xassənin doğruluğunu alarıq ($[b,a]$ parçası üzrə bölgüyə baxarkən, x_i nöqtəsinin x_{i+1}-dən sonra gəlməsini nəzərə almaq lazımdır). ■

Xassə 4. İstənilən *a, b* və *c* ədədləri üçün

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

münasibəti doğrudur.

□ Əvvəlcə $a < c < b$ halına baxaq. Bu halda *c* nöqtəsini bölgü nöqtələrindən biri götürməklə $[a,b]$ üzrə inteqral cəmi, yəni

$\sum_a^b f(\xi_i)\,\Delta x_i$ cəmini $[a,b]$ və $[c,d]$ parçaları üzrə inteqral cəmləri ilə aşağıdakı kimi ifadə edək:

$$\sum_a^b f(\xi_i)\,\Delta x_i = \sum_a^{c\atop c} f(\xi_i)\,\Delta x_i + \sum_c^b f(\xi_i)\,\Delta x_i .$$

Burada $\lambda \to 0$-da limitə keçsək və limitin bölgüdən asılı olmadığını nəzərə alsaq, baxılan hal üçün xassənin doğruluğunu alarıq.

İndi $a < b < c$ halına baxaq (Baxılan funksiyanın $[a,c]$ parçasında inteqrallanan olduğu qəbul olunur) . Bu halda doğru olan

$$\int_a^c f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx$$

münasibətindən

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx - \int_b^c f(x)\,dx,$$

yaxud

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx,$$

Xassə $c < a < b$ halı üçün də analoji yolla isbat olunur. ■

Xassə 5. Əgər $a < b$ və $[a,b]$ parçasında $f(x) \geq 0$ isə, onda

$$\int_a^b f(x)\,dx \geq 0$$

münasibəti doğrudur.

□ Xassənin şərtləri daxilində

$$S_\sigma = \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\Delta x_i \geq 0$$

olduğu aydındır. Mənfi olmayan ədədlər ardıcıllığı limitinin mənfi olmaması haqqında teoremi nəzərə alıb, burada $\lambda \to 0$-da limitə keçsək $\int_a^b f(x)\,dx \geq 0$ alarıq. ■

Nəticə. $a < b$ və $[a,b]$ parçasında $\varphi(x) \leq f(x)$ isə, onda

$$\int_a^b \varphi(x)\,dx \leq \int_a^b f(x)\,dx$$

münasibəti doğrudur.

Nəticənin isbatı $[a,b]$ parçasında $f(x)-\varphi(x)\geq 0$ olmasından alınır.

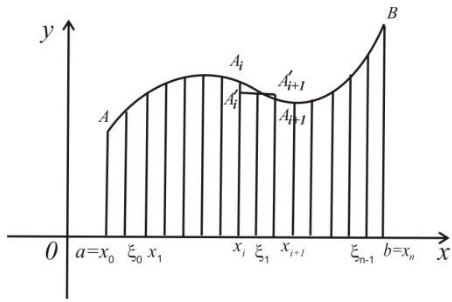
Qeyd. Müəyyən inteqralın tərifindən və əvvəlki paraqrafda baxılan məsələlərdən aşağıdakı nəticələr çıxır:

1. Müəyyən inteqralın həndəsi mənası. Yuxarıdan $[a,b]$ parçasında kəsilməyən $y=f(x)$ funksiyasının qrafiki,

aşağıdan absislər oxu, yanlardan isə $x=a$ və $y=b$ düz xətləri ilə əhatə olunmuş əyrixətli trapesiyanın sahəsi üçün

$$S=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\Delta x_i=\int_a^b f(x)\,dx, \text{ yəni } S=\int_a^b f(x)\,dx$$

düsturu doğrudur. Bü müəyyən inteqralın həndəsi mənası olaraq qəbul edilir (şəkil 21).



Şəkil 21

2. Müəyyən inteqralın mexaniki mənası. Uzunluğu l, sıxlığı da $\rho=\rho(x)$ olan $(0\leq x\leq l)$ çubuğun kütləsi üçün

$$m=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=0}^{n-1}\rho(\xi_i)\Delta x_i=\int_0^l \rho(x)\,dx,$$

$$\text{yəni } m=\int_0^l \rho(x)\,dx$$

düsturu doğrudur.

3. Müəyyən inteqralın fiziki mənası. Düz xətt boyunca dəyişən $v=v(t)$ sürətilə hərəkət edən cismin $[t_0,T]$ zaman fasiləsində getdiyi yol

$$s=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=0}^{n-1} v(\tau_i)\Delta t_i=\int_{t_0}^{T} v(\tau)d\tau, \text{ yəni } s=\int_{t_0}^{T} v(\tau)d\tau$$

düsturu ilə hesablanır.

§ 31. MÜƏYYƏN İNTEQRALIN HESABLANMASI NYUTON-LEYBNİS DÜSTURU

Müəyyən inteqralın tərifindən, yəni

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\,\Delta x_i$$

münasibətindən istifadə etməklə onu hesablamaq, ümumiyyətlə desək, çox çətindir, çünki bu zaman mürəkkəb limitləri hesablamaq lazım gəlir. Ona görə də müəyyən inteqralın hesablaması üçün münasib bir qaydanın tapılması zəruridir.

Belə bir əlverişli qayda Nyuton (1643-1727) və Leybnis (1646-1716). tərəfindən verilmişdir.

Teorem. *$[a,b]$ parçasında $f(t)$ kəsilməyən funksiya, $F(t)$ isə onun hər hansı ibtidai funksiyasıdırsa, onda*

$$\int_a^b f(t)\,dt = F(b) - F(a) \qquad (1)$$

düsturu doğrudur.

□ Teoremin isbatını mexaniki mülahizələr əsasında verək. Tutaq ki, hər hansı cisim $s = F(t)$ qanunu ilə düz xətt boyunca $t=a$ anında A nöqtəsindən hərəkətə başlayır və $t=b$ anında B nöqtəsinə çatır. Onda aydındır ki, cisim $b-a$ zaman fasiləsində

$$s = F(b) - F(a) \qquad (2)$$

qədər məsafə qət etmiş olur.

Törəmənin fiziki mənasından $(v = F'(t) = f(t))$ istifadə etməklə, gedilən yolu aşağıdakı kimi də tapmaq olar:
$a = t_0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_n = b$ nöqtələri vasitəsilə $[a,b]$ parçasının n sayda kiçik hissəyə ayırıb, hər bir $[t_i, t_{i+1}]$ hissəsində ixtiyari bir ξ_i nöqtəsi götürək. $f(t)$ funksiyası kəsilməz olduğundan i-ci hissədə sürətin sabit olub, təqribi olaraq $f(\xi_i)$ ədədinə bərabər olduğunu qəbul etmək olar. Onda $\Delta t_i = t_{i+1} - t_i$ zaman fasiləsində gedilən yol təqribi olaraq $f(\xi_i)\Delta t_i$, ümumiyyətlə isə

$b-a$ zaman fasiləsində gedilən yol təqribi olaraq $\sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\Delta t_i$ olar. Burada $\lambda \to 0$ ($\lambda = \max \Delta t_i$, $i = \overline{0, n-1}$) şərtində limitə keçsək, bir tərəfdən gedilən həqiqi yolun uzunluğunu, yəni $F(b) - F(a) = s$ məsafəsini, digər tərəfdən isə $\int_a^b f(t)\,dt$ inteqralını alarıq. Deməli (1) düsturu doğrudur. ■

İsbat etdiyimiz (1) düsturu *Nyuton-Leybnis düsturu* olaraq adlanır. Bu düsturdan görünür ki, $\int_a^b f(t)\,dt$ *müəyyən inteqralını hesablamaq üçün əvvəlcə qeyri müəyyən inteqralda olduğu kimi* $f(t)$ *funksiyasının hər hansı bir ibtidai funksiyasını tapıb, sonra da onun yuxarı və aşağı sərhədlərdəki qiymətləri fərqini yazmaq lazımdır.* Doğrudan da istənilən ibtidai funksiya üçün $\Phi(t) = F(t) + C$ olduğundan, $\Phi(b) - \Phi(a) = F(b) + C - F(a) - C = F(b) - F(a)$ olur.

(1) düsturunun sağ tərəfindəki fərqi çox vaxt

$$F(b) - F(a) = F(t)\Big|_a^b$$

kimi işarə edib, onu

$$\int_b^b f(t)\,dl = F(t)\Big|_a^b$$

şəklində də yazırlar.

Qeyd etmək lazımdır ki, ibtidai funksiyanın tapılması qeyri müəyyən integralda olduğu kimidir.

Misallar. Verilən inteqralları hesablayın:

1. $\int_0^1 x^3 dx$; 2. $\int_1^2 \frac{dx}{x}$; 3. $\int_0^1 5^X dx$; 4. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\cos^2 x}$:

5. $\int_0^2 \frac{dx}{4+x^2}$.

○ 1. $\int_0^1 x^3 dx = \frac{x^{3+1}}{3+1}\Big|_0^1 = \frac{x^4}{4}\Big|_0^1 = \frac{1}{4}$;

2. $\int_1^2 \frac{dx}{x} = \ln x\Big|_1^2 = \ln 2 - \ln 1 = \ln 2$;

3. $\int_0^1 5^X dx = \frac{5^x}{\ln 5}\Big|_0^1 = \frac{1}{\ln 5}(5-1) = \frac{4}{\ln 5}$;

4. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\cos^2 x} = tgx\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = tg\frac{\pi}{4} - tg0 = 1$;

5. $\int_0^2 \frac{dx}{4+x^2} = \frac{1}{2} arctg\frac{x}{2}\Big|_0^2 = \frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{8}$. ●

§ 32. MÜƏYYƏN İNTEQRALIN HESABLANMA ÜSULLARI

Yuxarıda qeyd etdiyimiz kimi, ibtidai funksiyanın tapılması qeyri müəyyən integraldakı kimi olduğundan, hesablanma üsulları da lazım olan dəyişiklikləri etmək şərtilə eynidir. İndi, bir başa cədvəl inteqrallarının tətbiq olunmadığı hallar üçün qeyri müəyyən inteqralda verdiyimiz üç əsas inteqrallama üsulunun müəyyən inteqral üçün necə tətbiq edilməsini qısa şəkildə aydınlaşdıraq.

32. 1. Toplananlara ayırma üsulu. Bu üsulun mahiyyəti, inteqralın əsas xassələrindən istifadə edib, hesablanacaq inteqralı mümkün olduqca sadə inteqralların cəbri cəmi şəklinə gətirib, cədvəl inteqrallarını və Nyuton-Leybnis düsturun tətbiq etməkdən ibarətdir.

Misallar. Aşağıdakı müəyyən inteqralları hesablayın.

1. $\int_1^3 (1+\sqrt{x})^2 dx$.

○ $\int_1^3 (1+\sqrt{x})^2 dx = \int_1^3 (1+2\sqrt{x}+x)dx = \int_1^3 dx + 2\int_1^3 x^{\frac{1}{2}}dx + \int_1^3 xdx = x\Big|_1^3 + 2\cdot\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\Big|_1^3 + \frac{1}{2}x^2\Big|_1^3 =$

$$(3-1)+\frac{4}{3}(3\sqrt{3}-1)+\frac{1}{2}(9-1) = 4\frac{2}{3}+4\sqrt{3}\,. \bullet$$

2. $\int_1^2 \frac{2x^2+3\sqrt{x}-1}{x}dx$.

○ Əvvəlcə inteqral içi funksiyanı cəbri cəm şəklinə gətirib, sonra da lazım gələn əməlləri yerinə yetirək:

$$\int_1^2 \frac{2x^2+3\sqrt{x}-1}{x}dx = \int_1^2 \left(2x+3x^{\frac{1}{2}}-\frac{1}{x}\right)dx = 2\int_1^2 xdx + 3\int_1^2 x^{\frac{1}{2}}dx - \int_1^2 \frac{1}{x}dx =$$

$$2\cdot\frac{x^2}{2}\Big|_1^2 + 3\cdot\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\Big|_1^2 - \ln\Big|_1^2 = 2^2-1^2+2\left(2^{\frac{3}{2}}-1^{\frac{3}{2}}\right)-\ln 2+\ln 1 = 1+4\sqrt{2}-\ln 2\cdot \bullet$$

3. $\int_0^{\pi/2} \sin^2 xdx$.

○ $\sin^2 x = \frac{1}{2}(1-\cos 2x)$ düsturuu nəzərə alıb inteqralı hesablayaq:

$$\int_0^{\pi/2} \sin^2 xdx = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}(1-\cos 2x)dx = \frac{1}{2}\left(x-\frac{1}{2}\sin 2x\right)\Big|_0^{\pi/2} = \frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{4}\,. \bullet$$

32.2. Dəyişənin Əvəz Olunması Üsulu. Müəyyən intqralların hesablanması üçün *dəyişənin əvəz edilməsi üsulu* deyilən aşağıdakı teoemin doğruluğu asanlıqla isbat oluna bilir.

Teorem. $f(x)$ funksiyası $[a,b]$ parçasında kəsilməz, $x=\varphi(t)$ funksiyası isə:

1) $[\alpha,\beta]$ parçasında kəsilməz törəməsi olan monoton;

2) t, $[\alpha,\beta]$ parçasında dəyişdikdə, onu qiymətləri $[a,b]$ parçasından kənara çıxmırsa;

3) $\varphi(\alpha) = a,\ \varphi(\beta) = b$ ödənirsə,

onda $[a, b]$ parçasında kəsilməz olan istənilən $\int_a^b f(x)\,dx$ inteqralı üçün

dəyişənin əvəz edilməsi üsulu ($x = \varphi(t)$) deyilən,

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f\big(\varphi(t)\big)\varphi'(t)dt \qquad (1)$$

düsturu doğrudur.

Qeyd 1. Hesablanması tələb olunan inteqral

$$\int_a^b f\big(\psi(x)\big)\psi'(x)\,dx$$

şəklində olduqda. $x = \varphi(t)$ əvəzinə, $t = \psi(x)$ ($dt = \psi'(x)dx$) əvəz etməsi istifadə olunur:

$$\int_a^b f\big(\psi(x)\big)\psi'(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f(t)dt\,. \qquad (2)$$

Burada $\psi(x)$, $[a, b]$ parçasında kəsilməz törəməsi olan funksiya olub,

$\psi(a) = \alpha$

və $\psi(b) = \beta$ şərtlərini ödəyir.

Əvəz etmə düzgün aparıldıqda, hesablanası inteqral cədvəl inteqralına gətiriir və hesablanır.

Qeyd 2. Müəyyən inteqralda əvəz etmə üsulunun tətbiqi zamanı yeni dəyişənin sərhədləri nəzərə alındığından, hesablamanın sonunda əvvəlki dəyişənə qayıtmağa ehtiyac qalmır. Yeni dəyişənə görə sərhəglər aşağıdakı cədvəllə də verilə bilər.

x	t
a	α
b	β

Misallar. Aşağıdakı inteqralları hesablayın.

1. $\int_0^2 \sqrt{4-x^2}\,dx$.

○ Göründüyü kimi, verilən inteqral üçün $x = 2\sin t$ əvəz etməsi ($x = 2\cos t$ də olablər) aparmaq uyğundur. Çünki bu əvəzləmə inteqral içini irrasionallıqdan qurtarır. Əvəzləmədən, $dx = 2\cos t\,dt$ və

$x = 0 \Rightarrow t = 0,\ x = 2 \Rightarrow t = \dfrac{\pi}{2}$ alınır. Bunları, (1) düsturuna əsasən verilən inteqralda nəzərə alıb, lazım olan əməlləri yerinə yetirək:13

$$\int_0^2 \sqrt{4-x^2}\,dx = \int_0^{\pi/2} \sqrt{4-4\sin^2 t}\cdot 2\cos t dt = \int_0^{\pi/2} 2\cos t\cdot 2\cos t dt = 4\int_0^{\pi/2} \cos^2 t dt =$$

$$4\cdot\frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}(1-\cos 2t)dt = 2\left(t-\frac{1}{2}\sin 2t\right)\Bigg\|_0^{\pi/2} = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi-1}{4}. \bullet$$

2. $\int_1^{\sqrt{2}} \sqrt{x^2-1}dx$.

○ Göründüyü kimi, verilən inteqral üçün $x = \sec t$ (və ya $x = 1/\cos t$) əvəz etməsi aparmaq uyğundur. Çünki bu əvəzləmə inteqral içini irrasionallıqdan qurtarır. Əvəzləmədən, $dx = \dfrac{\sin t}{\cos^2 t}dt$ və

$x = 1 \Rightarrow t = 0,\ x = \sqrt{2} \Rightarrow t = \dfrac{\pi}{4}$ alınır. Bunları, verilən inteqralda nəzərə alıb, lazım olan əməlləri yerinə yetirək:

$$\int_1^{\sqrt{2}} \frac{\sqrt{x^2-1}}{x}dx = \int_0^{\pi/4} \frac{\sqrt{\sec^2 t-1}}{\sec t}\cdot\frac{\sin t}{\cos^2 t}dt = \int_0^{\pi/4} \frac{tgt}{\sec t}\cdot\frac{\sin t}{\cos^2 t}dt = \int_0^{\pi/4} \frac{\sin^2 t}{\cos^2 t}dt =$$

$$\int_0^{\pi/4} \frac{\sin^2 t}{\cos^2 t}dt = \int_0^{\pi/4} \frac{1-\cos^2 t}{\cos^2 t}dt = \int_0^{\pi/4} \frac{dt}{\cos^2 t} - \int_0^{\pi/4} dt = tgt\Big|_0^{\pi/4} - t\Big|_0^{\pi/4} = 1-\frac{\pi}{4}$$

. ●

3. $\displaystyle\int_0^2 \frac{e^x}{3+e^x}dx$

○ İnteqral içi funksiyanın şəklindən görünür ki, $t = 3 + e^x$ əvəz etməsi aparmaq uyğundur. Onda, $dt = e^x dt$ və

$x = 0 \Rightarrow t = 4,\ x = 2 \Rightarrow t = 3 + e^2$ olur. Bunları, verilən inteqralda nəzərə alıb, lazım olan əməlləri yerinə yetirək:

$$\int_0^2 \frac{e^x}{3+e^x}dx = \int_4^{3+e^2} \frac{dt}{t} = \ln t\Big|_4^{3+e^2} = \ln(3+e^2) - \ln 4 = \ln\frac{3+e^2}{4}.$$ ●

4. $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{\sin x}{3+2\cos x}dx.$

○ $t = 3 + 2\cos x$ qəbul etsək, buradan

$dt = -2\sin x dx \Rightarrow \sin x dx = -\dfrac{1}{2}dt$ və $x = 0 \Rightarrow t = 5,\ x = \pi \Rightarrow t = 1$ olur.

Bunları, verilən inteqralda nəzərə alıb, lazım olan əməlləri yerinə yetirək:

$$\int_0^{\pi} \frac{\sin x}{2+3\cos x}dx = -\frac{1}{3}\int_5^1 \frac{dt}{t} = -\frac{1}{2}\ln t\Big|_5^1 = -\frac{1}{2}(\ln 1 - \ln 5) = \frac{\ln 5}{2}.$$ ●

5. $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^2}{1+x^6}dx.$

○ $t = x^3$ qəbul etsək, $dt = 3x^2dx \Rightarrow x^2dx = \dfrac{1}{3}dt$ və

$x = 0 \Rightarrow t = 0,\ x = 1 \Rightarrow t = 1$ olur.

Nəticədə,

$$\int_0^1 \frac{x^2}{1+x^6}dx = \frac{1}{3}\int_0^1 \frac{dt}{1+t^2} = \frac{1}{3}arctgt\Big|_0^1 = \frac{1}{3}(arctg1 - arctg0) = \frac{1}{3}\frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{12}$$

alırıq. ●

Qeyd 3. Müəyyən inteqralda əvəz etmə üsuludan istifadə etməklə aşağıdakı teorm asanlqla isbat oluna bilər.

Teorem. $[-a,a]$ simmetrik parçasında ineqrallanan $f(x)$ funksiyası:

a) cüt olduqda ($f(-x)=f(x)$),

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\int_{0}^{a} f(x)\,dx;$$

b) tək olduqda ($f(-x)=-f(x)$),

$$\int_{0}^{a} f(x)\,dx = 0$$

bərabərlikləri doğrudur.

Misallar. Aşağı dakı inteqralları hesablayın.

1. $\int_{-1}^{1}|x|dx$.

○ Mütləq qiymətin tərifinə görə $y=|x|$ funksiyası $[-1,1]$ parçasında cüt funksiya olduğundan,

$$\int_{-1}^{1}|x|dx = 2\int_{0}^{1} x dx = 2\cdot\frac{x^2}{2}\Big|_0^1 = 1$$

olur. ●

2. $\int_{-3}^{3}\frac{x}{1+x^2+3x^4}dx$.

○ İnteqral altındakı $y=\frac{x}{1+x^2+3x^4}$ funksiyası $[-3,3]$ parçasında tək funksiya olduğundan,

$$\int_{-3}^{3}\frac{x}{1+x^2+3x^4}dx = 0$$

olur. ●

32.3. Hissə Hissə İnteqrallama. Qeyri müəyyən inteqralda olduğuna bənzər olaraq, $u=u(x)$ və $v=v(x)$ funksiyaları $[a,b]$ parçasında diferensiallanan funksiyalar oluqda, *müəyyən inteqrallnda hissə-hissə inteqrallama düsturu* deyilən,

$$\int_a^b u(x)v'(x)dx = u(x)v(x)\Big|_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)dx \qquad (1)$$

bərabərliyi doğrudur.

(1) düsturunun doğruluğuna inanmaq üçün, $(u(x)v(x))'_x = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$ bərabərliyini $u(x)v'(x) = \left(u(x)v(x)\right)' - u'(x)v(x)$ kimi yazıb, hər iki tərəfi x-ə görə $[a,b]$ parçası üzrə inteqrallamaq kifayətdir.

Qeyd. $f'(x)dx$ hasilinə $f(x)$ *funksiyasının diferensialı* deyilir və $df(x)$ və ya df ilə işarə olunur (göründüyü kimi funksiyanın diferensialı, onun törəməsi ilə arqumentin diferensialı hasilinə bərabərdir):

$$f'(x)dx = df(x) \text{ və ya } f'(x)dx = df$$

Buna görə də, (1) düsturu bəzən

$$\int_a^b u(x)dv(x) = u(x)v(x)\Big|_a^b - \int_a^b v(x)du(x) \text{ və ya}$$

$$\int_a^b udv = uv\Big|_a^b - \int_a^b vdu \qquad (1a)$$

kimi də yazılır.

Hissə hissə inteqrallama qeyri müəyyən inteqraldakına bəzər olaraq aparılır.

Misallar. Aşağıdakı müəyyən inteqralları hesablayın.

1. $\int_1^2 x\ln x dx$.

○ $\ln x = u,\ xdx = dv$ qəbul etsək, $du = \frac{1}{x}dx, v = \frac{x^2}{2}$ olur və (1a) düsturuna əsasən

$$\int_1^2 x\ln x dx = \frac{x^2}{2}\ln x\Big|_1^2 - \int_1^2 \frac{x^2}{2}\cdot\frac{1}{x}dx = 2\ln 2 - \frac{1}{2}\int_1^2 xdx = 2\ln 2 - \frac{1}{2}\frac{x^2}{2}\Big|_1^2 = 2\ln 2 - 1 + \frac{1}{4} =$$

$= 2\ln 2 - \dfrac{3}{4}$ alırıq. ●

2. $\int_0^1 arctgxdx$.

○ $arctgx = u, dx = dv$ qəbul etsək, $du = \dfrac{dx}{x^2+1}, v = x$ olur və

$$\int_0^1 arctgxdx = xarctgx\Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{xdx}{x^2+1} = \frac{\pi}{4} - \int_0^1 \frac{xdx}{x^2+1}$$

alınır. Axırıncı inteqralın hesablanması

$$\int_0^1 \frac{xdx}{x^2+1} = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{d(x^2+1)}{x^2+1} = \frac{1}{2}\ln(x^2+1)\Big|_0^1 = \frac{1}{2}\ln 2$$

olduğundan, verilən inteqral üçün

$$\int_0^1 arctgxdx = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\ln 2 = \frac{1}{4}(\pi - 2\ln 2)$$

alırıq. ●

3. $\int_0^{\pi/2} x^2 \sin xdx$.

○ Bu növ integralların hesablanmasında x^2 vuruğundan qurtarmaq lazımdır. Bunun üçün $x^2 = u, \sin xdx = dv$ qəbul etsək, $du = 2xdx, v = -\cos x$ olur və (1a) düsturuna görə

$$\int_0^{\pi/2} x^2 \sin xdx = -x^2\cos x\Big|_0^{\pi/2} + 2\int_0^{\pi/2} x\cos xdx$$

olur. Burada, $x = u, \cos xdx = dv$ qəbul edib, yenidən hissə hissə inteqrallama düsturunu tətbiq edək ($du = dx, v = \sin x$):

$$\int_0^{\pi/2} x^2 \sin xdx = -x^2 \cos x\Big|_0^{\pi/2} + 2\left(x\sin x\Big|_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} \sin xdx \right) =$$

$$-0+0+2\left(\frac{\pi}{2}\sin\frac{\pi}{2} - 0 + \cos x\Big|_0^{\pi/2} \right) = \pi - 2 .$$

Beləliklə, $\int_0^{\pi/2} x^2 \sin xdx = \pi - 2$ olur. ●

4. $\int_0^1 xarcctgxdx$.

○ $arcctgx = u, xdx = dv$ qəbul etsək, $du = -\frac{dx}{1+x^2}dx, v = \frac{x^2}{2}$ olur və

$$\int_0^1 xarcctgxdx = \frac{x^2}{2}arcctgx\Big|_0^1 + \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{x^2}{1+x^2}dx = \frac{1}{2}\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{1+x^2-1}{1+x^2}dx =$$

$$\frac{\pi}{8} + \frac{1}{2}\int_0^1 \left(1 - \frac{1}{1+x^2}\right)dx = \frac{\pi}{8} + \frac{1}{2}(x - arctgx)\Big|_0^1 = \frac{\pi}{8} + \frac{1}{2}\left(1 - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2},$$

yəni

$$\int_0^1 xarcctgxdx = \frac{1}{2}$$

əldə edilir. ●

33. MÜƏYYƏN İNTEQRALIN HƏNDƏSƏYƏ TƏTBİQİ

1. **Sahələrin hesablanması.** Məlumdur ki, yuxarıdan $y = f(x)$ funksiyasının qrafiki, aşağıdan absis oxu, yanlardan isə $x=a$ və $x=b$ düz xətləri ilə əhatə olunmuş əyrixətli trapesin sahəsi (bax: § 29)

$$S = \int_a^b f(x)\,dx \qquad (1)$$

düsturu ilə hesablanır.

İndi (1) düsturundan istifadə etməklə bəzi fiqurların sahəsini hesablayaq.

Misal 1. x dəyişəni $[0,\pi]$ parçasında dəyişdikdə $y=\sin x$ sinusoidi ilə absis oxu arasında qalan fiqurun sahəsini hesablayın.

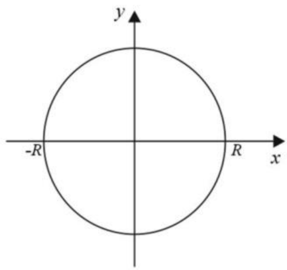
○ $S=\int\limits_0^{\pi}\sin x\,dx=-\cos x\Big|_0^{\pi}=-(-1-1)=2$ *kv. vahid.* ●

Misal 2. Radiusu R olan dairənin sahəsini hesablayın .

○ Bildiyimiz kimi mərkəzi koordinat başlanğıcında və radiusu R olan çevrənin tənliyi

$$x^2+y^2=R^2$$

kimidir. Buradan $y=\sqrt{R^2-x^2}$ və $y=-\sqrt{R^2-x^2}$ $(-R\le x\le R)$ alırıq ki, onlardan birincisi çevrənin absislər oxundan yuxarıda, ikincisi isə aşağıda yerləşən hissəsini ifadə edir (şəkil 22).
Həmin hissələrdən biri ilə absislər oxu arasında qalan sahənin iki misli istenən dairənin sahəsi olacaq:



Şəkil 22

$$S=2\int\limits_{-R}^{R}\sqrt{R^2-x^2}\,dx\,.$$

Burada, $\sqrt{R^2-x^2}=u, dx=dv$ qəbul etsək $du=-\frac{x}{\sqrt{R^2-x^2}}dx$, $v=x$ olur və inteqralaltı funksiyanın cüt olduğunu nəzərə almaqla, hissə-hissə inteqrallama düsturuna əsasən,

$$S=2\int\limits_{-R}^{R}\sqrt{R^2-x^2}\,dx=2\cdot2\int\limits_{0}^{R}\sqrt{R^2-x^2}\,dx=4\left(x\sqrt{R^2-x^2}\,dx\Big|_0^R-\int\limits_0^R\frac{-x}{\sqrt{R^2-x^2}}dx\right)=$$

$$-4\int_0^R \frac{R^2-x^2-R^2}{\sqrt{R^2-x^2}}dx == -4\int_0^R \frac{R^2-x^2}{\sqrt{R^2-x^2}}dx + 4R^2\int_0^R \frac{dx}{\sqrt{R^2-x^2}} =$$

$$-4\int_0^R \sqrt{R^2-x^2}\,dx + 4R^2 \arcsin \frac{x}{R}\Big|_0^R == -S + 4R^2 \cdot \frac{\pi}{2} = -S + 2\pi R^2$$

,

yəni $S = -S + 2\pi R^2$ alırıq. Buradan da R radiuslu dairənin sahəsi üçün

$$S = \pi R^2$$

düsturunu alırıq. ●

Müəyyən inteqralın köməyi ilə nəinki əyrixətli trapesin sahəsini, eləcə də aşağıdan və yuxarıdan müəyyən xətlər, yanlardan isə ordinatlar oxuna paralel olan düz xətlərlə əhatə olunmuş fiqurun sahəsini də hesablamaq olar.

Doğrudan da $[a,b]$ parçasında kəsilməyən $f(x)$ və $\varphi(x)$ funksiyaları $\varphi(x) \le f(x)$ münasibətini ödəyirsə, onda aşağıdan $y = \varphi(x)$, yuxarıdan $y = f(x)$ və yanlardan isə $x=a$, $x=b$ düzxətləri ilə əhatə olunmuş əyrixətli fiqurunsahəsi aA_2B_2b və $a\,A_1B_1b$ əyrixətli trapeslərinin sahələri fərqinə bərabərdir (şəkil 23).

$$S = S_{a\,A_2B_2b} - S_{a\,A_1B_1b} = \int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b \varphi(x)\,dx = \int_a^b [f)x(-\varphi(x)]dx,$$

yəni

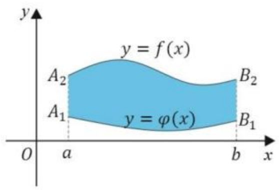
$$S = \int_a^b [f(x) - \varphi(x)]dx \qquad (2)$$

olur.

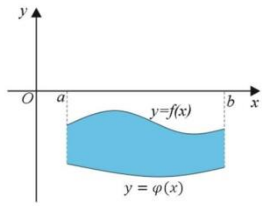
(2) düsturu $[a,b]$ parçasında $\varphi(x) \le f(x) \le 0$ olduqda da doğrudur (şəkil 24). Burada xüsusi halda $f(x) = 0$ olarsa, (2) düsturu

$$S = -\int_a^b \varphi(x)\,dx \qquad (3)$$

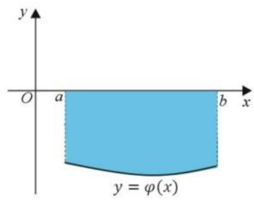
kimi olur (şəkil 25).



Şəkil 23



Şəkil 24



Şəkil 25

Misal 3. $y = 4 - x^2$ parabolası ilə $y = x + 2$ düz xəttinin kəsişməsindən alınan fiqurun sahəsini tapın.

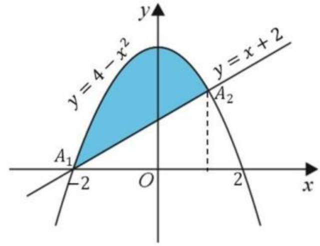
○ Əvvəlcə verilən xətlərin kəsişmə nöqtələrini tapaq. Bunun üçün onların tənliklərini birgə həll edək:

$$\left.\begin{array}{l} y = 4 - x^2 \\ y = x + 2 \end{array}\right\} \Rightarrow 4 - x^2 = x + 2 \Rightarrow (x+2)(x-1) = 0 \Rightarrow x_1 = -2,\ x_2 = 1 \Rightarrow y_1 = 0,\ y_2 = 3 \cdot$$

Deməli, verilən əyrilər $A_1(-2;0)$ və $A_2(1,3)$ nöqtələrində kəsişirlər. Onların kəsişərək təyin etdikləri sahəni quraq (şəkil 26).

$$S = \int_{-2}^{1} (4 - x^2 - x - 2)\,dx = \left(2x - \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_{-2}^{1} = 4\frac{1}{2} \text{ yəni}$$

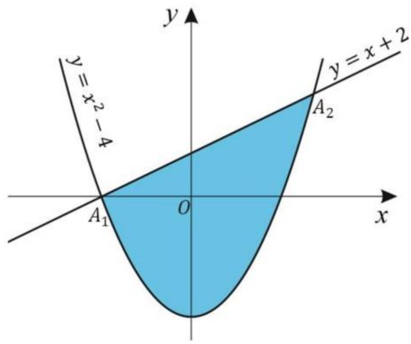
$$S = 4\frac{1}{2} \textit{ kv. vahid.} \ \bullet$$



Şəkil 26

Misal 4. $y = x^2 - 4$ parabolası ilə $y = x + 2$ düz xəttinin kəsişməsindən alınan fiqurun sahəsini tapın.

○ Əvvəlcə verilən xətlərin kəsişmə nöqtələrinin absislərini tapaq:



Şəkil 27

$$\left.\begin{aligned} y &= x^2 - 4 \\ y &= x + 2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow (x+2)(x-2) = x + 2 \Rightarrow x_1 = -2, x_2 = 3.$$

Sahəsi axtarılan fiqur 27-ci şəkildəki kimidir və (2) düsturuna əsasən,

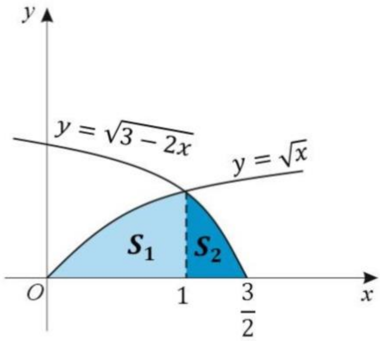
$$S = \int_{-2}^{3} \left[x + 2 - (x^2 - 4)\right] dx = \int_{-2}^{3} (-x^2 + x + 6)\, dx = \left(-\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 6x\right)\Bigg|_{-2}^{3} = 20\frac{5}{6},$$

yəni $S = 20\dfrac{5}{6}$ *kv. vahid* tapırıq. ●

Ola bilər ki, sahəsi hesablanacaq fiqur bir neçə əyri xətli trapesin birləşməsindən ibarət olsun.

Misal 5. $y = \sqrt{x}$, $y = \sqrt{3 - 2x}$ və y=0 xətləri ilə əhatə olunmuş fiqurun sahəsini tapın.

○ Verilən xətlərin kəsişmə nöqtələrinin absislərinin uyğun olaraq, $x_1 = 0, x_2 = 1,\ x_3 = -\dfrac{3}{2}$ olduğu asanlıqla tapıla bilər (şəkil 28). Sahəsi axtarılan fiqurun iki dənə əyrixətli trapesin birləşməsindən ibarət olduğu aydındır:



Şəkil 28

$$S = S_1 + S_2 .$$

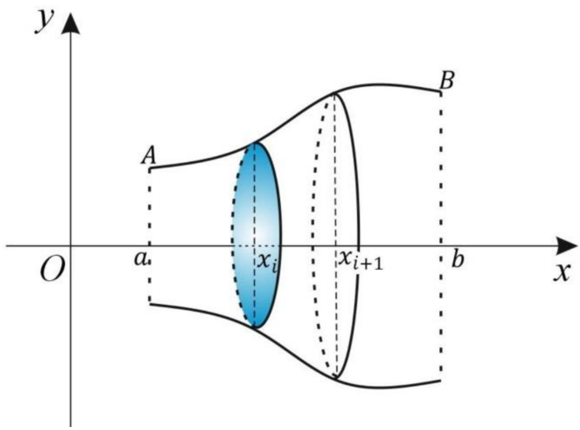
$$S_1 = \int_0^1 \sqrt{x}\,dx = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\Big|_0^1 = \frac{2}{3},$$

$$S_2 = \int_1^{\frac{3}{2}} \sqrt{3-2x}\,dx = -\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}(3-2x)^{\frac{3}{2}}\Big|_1^{\frac{2}{3}} = \frac{1}{3}\cdot 1 = \frac{1}{3}.$$

Beləliklə, axtarılan sahə $S = \frac{2}{3} + \frac{1}{3} = 1$ *kv. Vahid* olur. ●

2. Fırlanmadan alınan cismin həcmi. Tutaq ki, müstəvi üzərində *xoy* koordinat sistemində kəsilməz $y = f(x)$ $(a \le x \le b)$ funksiyası vasitəsilə *AB* əyrisi verilmişdir. (şəkil 29). Bu əyrinin *x* oxu ətrafında fırlanmasından alınan fiqurun (bax. XVIII fəsil) həcmini hesablayaq. Bunun üçün $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b$ nöqtələri vasitəsilə $[a,b]$ parçasını ixtiyari *n* hissəyə ayıraq və hər bir hissədə ixtiyari bir ξ_i nöqtəsi götürək $\left(x_i < \xi_i < x_{i+1},\ i = \overline{0,\ n-1}\right)$. Aydındır ki, fırlanmadan alınan fiqurun x_i və x_{i+1} nöqtələrindən keçməklə *x* oxuna perpendikulyar olan müstəvilər arasında qalan hissəsinin (layın) həcmi əvəzinə təqribi olaraq hündürlüyü Δx_i, radiusu $f(\xi_i)$ olan silindirin həcmini götürmək olar:

$$\Delta V_i \approx \pi\left[f(\xi_i)\right]^2 \Delta x_i \quad (\,i=\overline{0,\, n-1}).$$



Şəkil 29

Aydındır ki, fırlanmadan alınan fiqurun həcmini (V) yerinə təqribi olaraq, sözünü
etdiyimiz silindirlərin həcmlərinin cəmini qəbul etmək olar:

$$V \approx \pi\sum_{i=0}^{n-1}\left[f(\xi_i)\right]^2 \Delta x_i .$$

Sağ tərəfdəki cəmin $[a,b]$ parçasında $\pi f^2(x)$ funksiyası üçün inteqral cəm olduğu aydındır və $\lambda \to 0$-da ($\lambda = \max \Delta x_i$) limitə keçsək, axtarılan həcmin dəqiq qiymətini alarıq:

$$V \approx \lim_{\lambda\to 0}\pi\sum_{i=0}^{n-1}\left[f(\xi_i)\right]^2 \Delta x_i = \pi\int_a^b f^2(x)\,dx .$$

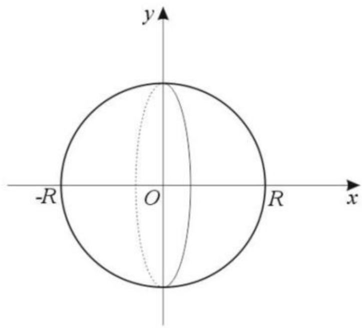
Beləliklə, fırlanmadan alınan fiqurun həcmi üçün

$$V = \pi \int_a^b f^2(x)\,dx \qquad (4)$$

düsturu alınır.

Məsələ 1. Radiusu R olan kürənin həcmini hesablamaq üçün düstur çıxarın.

○ Aydındır ki, $x^2 + y^2 = R^2$ çevrəsinin absislər oxundan yuxarıda yerləşən $y = \sqrt{R^2 - x^2}$ $(-R \le x \le R)$ hissəsini bu ox ətrafında fırlatsaq, nəticədə R radiuslu kürə alarıq (şəkil 30). Odur ki, (4) düsturuna əsasən,



Şəkil 30

$$V = \pi \int_{-R}^{R} \left(\sqrt{R^2 - x^2}\right)^2 dx = 2\pi \int_0^R (R^2 - x^2)\,dx = 2\pi \left(R^2 x - \frac{x^3}{3} \right)\Bigg|_0^R = 2\pi \left(R^3 - \frac{R^3}{3} \right) = \frac{4}{3}\pi R^3$$

olur (Hesablama zamanı inteqralaltı funksiyanın cüt olduğunu nəzərə aldıq). Beləliklə, R radiuslu kürənin həcmi üçün

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3 \qquad (5)$$

düsturunu almış oluruq. ●

Məsələ 2. Oturacağının radiusu R, hündürlüyü isə H olan silindirin həcmi (V_s) üçün düstur çıxarın.

○ Aydındır ki, $y = R\,(0 \le x \le H)$ düz xət parçasının absislər oxu ətrafında fırlanmasından, məsələdə sözü edilən silindir alınır (şəkil 31). Odur ki, (4) düsturuna əsasən,

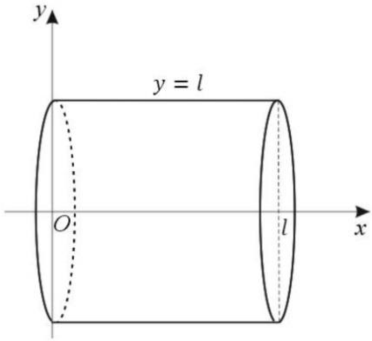
$$V_s = \pi \int_0^H R^2 dx = \pi R^2 x\Big|_0^H = \pi R^2 H\,.$$

Beləliklə, oturacağının radiusu R və hündürlüyü H olan silindirin həcmi üçün,

$$V_s = \pi R^2 H \qquad (6)$$

düsturunu almış oluruq. ●

Məsələ 3. Oturacağının radiusu R, hündürlüyü isə H olan konusun həcmi (V_k) üçün düstur çıxarın.



Şəkil 31

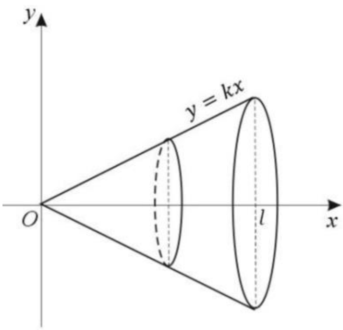
○ Aydındır ki, $y = \dfrac{R}{H}x\left(0 \le x \le H\right)$ düz xətt parçasının absislər oxu ətrafında fırlanmasından, məsələdə sözü edilən konus alınır. Yenə (4) düsturuna əsasən

$$V_k = \pi\int_0^H \left(\frac{R}{H}x\right)^2 dx = \frac{\pi R^2}{H^2}\int_0^H x^2 dx = \frac{\pi R^2}{H^2}\cdot\frac{x^3}{3}\Big|_0^H = \frac{\pi R^2 H}{3}$$

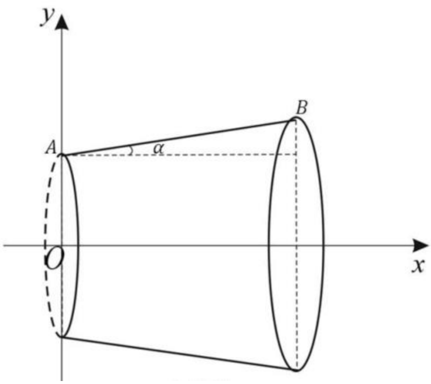
alınır. Beləliklə, oturacağının radiusu R və hündürlüyü H olan konusun həcmi üçün,

$$V_k = \frac{1}{3}\pi R^2 H \qquad (6)$$

düsturunu almış oluruq. ●



Şəkil 32



Şəkil 33

Məsələ 4. Oturacaqlarının radiusları uyğun olaraq r və R , hündürıüyü isə H olan kəsik konusun həcmini hesablamaq üçün düstur çıxarın.

○ Aydındır ki, $y=\frac{R-r}{H}x+r \quad (0\le x\le H)$ düz xətt parçasının absislər oxu ətrafında fırlanmasından, məsələdə sözü edilən kəsik konus alınır . Bu kəsik konusun həcmi (V_{kk}) üçün yenə də (4) düsturuna əsasən,

$$.V_{kk}=\pi\int_0^H\left(\frac{R-r}{H}x+r\right)^2dx=\pi\int_0^H\left(\left(\frac{R-r}{H}\right)^2x^2+2r\frac{R-r}{H}x+r^2\right)dx=$$

$$=\pi\left(\frac{(R-r)^2}{H^2}\cdot\frac{x^3}{3}+2r\cdot\frac{R-r}{H}\cdot\frac{x^2}{2}+r^2x\right)\Bigg|_0^H=\pi\left(\frac{(R-r)^2}{H^2}\cdot\frac{H^3}{3}+r\cdot\frac{R-r}{H}\cdot H^2+r^2H\right)=$$

$$=\frac{\pi H}{3}\left(R^2+Rr+r^2\right),$$

yəni

$$V_{kk}=\frac{1}{3}\pi H\left(R^2+Rr+r^2\right)$$

alırıq. ●

§ 34. MÜƏYYƏN İNTEQRALIN FİZİKA MƏSƏLƏLƏRƏ TƏTBİQİ

İndi, müəyyən inteqralın 29-cu və 30-cu paraqraflarda açıqlanan fiziki və mexaniki mənasına dayanaraq bəzi texniki məsələləri həll edək.

1. Maddi çubuğun kütləsi. Tutaq ki, uzunluğu l olan maddi çubuğun hər bir x nöqtəsində onun sıxlığı kəsilməz $f=f(x) \quad (0\le x\le l)$ funksiyası ilə təyin olunur. Onun kütləsini tapaq.

Fizikadan məlumdur ki, sıxlığı sabit olan çubuğun kütləsi onun uzunluğu ilə sıxlığı hasilinə bərabərdir. Baxılan məsələdə sıxlıq dəyişən olduğundan həmin qaydanı tətbiq etmək olmaz.

Kütləni tapmaq üçün çubuğu, yəni $[0,l]$ parçasını $0=x_0<x_1<x_2<\ldots<x_n=l$ nöqtələri vasitəsi ilə ixtiyari qayda n hissəyə ayıraq və i-ci hissədə ixtiyari ξ_i $\left(i=\overline{0,\ n}-1\right)$ nöqtəsi götürək. Hissələrin kiçikliyinə və verilən funksiyanın kəsilməzliyinə əsasən hər bir hissədə tətbiqi olaraq sıxlığın sabit olub $f(\xi_i)$ -yə bərabər olmasını qəbul etmək olar. Odur ki, i-ci hissənin kütləsi üçün

$$\Delta m_1 \approx f(\xi_1)\Delta x_1 \quad \left(i=\overline{0,n}-1\right)$$

yaza bilərik ($\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$). Buradan çubuğun kütləsi üçün

$$m \approx \sum_{i=0}^{n-1} \Delta m_1 \approx \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_1)\Delta x_i$$

təqribi münasibətini alarıq. Alınmış ifadədə $\lambda \to 0$ -da $\left(\lambda = \max \Delta x_i\right)$ limitə keçsək

$$m = \int_a^b f(x)\,dx \qquad (1)$$

düsturu alırıq.

Deməli, sıxlığı $f = f(x)$ olan maddi çubuğun kütləsi (1) düsturu ilə hesablanır.

2. Maddi nöqtənin getdiyi yol. Tutaq ki, maddi nöqtə düz xətt boyunca hərəkət edir və sürətinin t zamanından asılılığı

$$v = f(t)$$

düsturu ilə verilir. Maddi nöqtənin t_0 anından T anınadək getdiyi yolu hesablayaq.

Bunun üçün məlum qayda üzrə $t_0<t_1<t_2<\ldots<t_n=T$ nöqtələri vasitəsilə $[t_0,T]$ parçasını n sayda kiçik hissələrə ayıraq və hər bir (t_1, t_{i+1}) intervalında ixtiyari ξ_i nöqtəsi qeyd edək $\left(i=\overline{0,\ n}-1\right)$. Hissələr kiçik olduğundan hər bir hissədə sürətin tətbiqi olaraq sabit olub, həmin hissədə götürülmüş ξ_i nöqtəsindəki sürətə bərabər olduğunu qəbul etmək olar. Odur ki, maddi nöqtənin həmin zaman fasiləsində getdiyi yol təqribi olaraq

$$f(\xi_i)(t_{i+1}-t_i)$$

kimi, $[t_0, T]$ zaman fasiləsində isə

$$S \approx \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\Delta t_i$$

kimi olar $(\Delta t_i = t_{i+1} - t_i)$. Burada $\gamma \to 0$-da $(\lambda = \max \Delta t_i)$ limitə keçsək, gedilən yolun dəqiq qiymətini alırıq:

$$S = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\Delta t_i = \int_{t_0}^{T} f(t)\,dt.$$

Beləliklə, $S = \int_{t_0}^{T} f(t)\,dt$ (2) olur.

ÇALIŞMALAR

Aşağıdakı inteqralları hesablayın:

1. $\int_1^2 \left(x^2 + 5x - 2\right)dx$;
2. $\int_0^1 \left(3^x + 2 \cdot 2^x - 1\right)dx$;
3. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\cos 5x - 3\sin 2x\right)dx$;
4. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\cos 2x - 3\cos x + \sin 5x\right)dx$;
5. $\int_0^1 \left(x^2 + 2\right)^3 dx$;
6. $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{\sin^2 x} + \frac{1}{x} + 2x\right)dx$;

7. $\int_0^1 e^{3x}\,dx$;

8. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x\,dx$;

9. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\frac{x}{2}\,dx$;

10. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\sin 3x + 2e^x\right)dx$;

11. $\int_0^4 \left(\sqrt{x}+1\right)^3 dx$;

12. $\int_0^1 \left(\sqrt{x}+x+1\right)^2 dx$;

13. $\int_3^{-18} \sqrt[3]{2-\frac{x}{3}}\,dx$;

14. $\int_{-1}^1 x(x^2-1)^3 dx$;

15. $\int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{e+1}} \frac{2x}{x^2+1}dx$.

Hissə-hissə inteqrallamanın köməyi ilə aşağıdakı inteqralları hesablayın:

16. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin x\,dx$;

17. $\int_1^e \ln x dx$;

18. $\int_0^1 xe^x dx$;

19. $\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} arc\cos x\,dx$;

20. $\int_0^1 x\,arc\,tg\,xdx$;

20. $\int_1^e x^z \ln x\,dx$.

Verilən xətlərlə əhatə olunmuş fiqurun sahəsini hesablayın:

22. $y=x^2;\ y=0;\ x=2$,

23. $y=x+1;\ y=0;\ x=0;\ x=3$,

24. $y=\ln x;\ y=0;\ x=1;\ x=2$,

25. $y=x^3;\ y=0;\ x=3$,

26. $y=x+1;\ y=2-x;\ x=2$,

27. $y=\cos x;\ y=0;\ x=0;\ x=\frac{\pi}{3}$;

28. $x^2 + y^2 = R^2$; $x + y = R$,

29. $y = tgx$; $y = 0$; $x = \dfrac{\pi}{4}$;

30. $y = x^2 + 1$; $y = 0$; $x = -1$;

31. $y = x^2$; $y = 1$; $x = 1$

Verilən əyri qövslərinin absislər oxu ətrafında fırlanmasından alınan fiqurların həcmini hesablayın.

32. $y = \sin x$; $(0 \le x \le \pi)$;

33. $y = \sqrt{x}$; $(0 \le x \le 4)$;

34. $y = x^2$; $(0 \le x \le \pi)$;

35. $y = x^3$; $(0 \le x \le \pi)$;

36. $y = \sqrt{R^2 - x^2}$; $(0 < h \le x \le R)$;

37. $x = \sqrt{R^2 - x^2}$; $(0 < h_1 \le x \le h_2 \le R)$.

38. Uzunluğu l=100 sm olan maddi çubuğun hər hansı ucundan x sm məsafədə olan nöqtədə sıxlığı

$$f(x) = 2 + 0{,}001x^2 \text{ q/sm}$$

düsturu ilə verilir. Çubuğun kütləsini tapın.

39. Maddi nöqtənin sürətinin zamandan asılılığını $v = 0{,}01t^3$ m/san düsturu ilə verilirsə, 10 san müddətində o nə qədər məsafə gedər.

TESTLƏR

1. $\int\limits_1^2 (6x^2 - 6x + 3)dx$ -i hesablayın.

A) 12 B) 10 C) 14 D) -12 E) -10

2. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 3x\, dx$ -i hesablayın.

A) 0 B) $\dfrac{1}{3}$ C) $-\dfrac{1}{3}$ D) 1 E) $\dfrac{1}{2}$

3. $\int_0^1 arc\,ctg\,x\,dx$ -i hesablayın.

A) $\ln 2$ B) $\frac{\pi}{4}$ C) 0 D) $\frac{\pi+\ln 4}{4}$ E) 1

4. $y = x - x^2$ parabolası və y=0 düzxətti ilə hüdudlanan fiqurun sahəsinin altı mislini tapın.

A) $\frac{1}{6}$ B) 1 C) 6 D) 2 E) $\frac{1}{2}$

5. $y = e^x$ və $y = 2$ xətləri ilə hüdudlanmış fiqurun sahəsini tapın.

A) 1 B) $2e$ C) $\ln 4$ D) 4 E) $\ln 4 - 1$

6. $y = x^2 + 1$ və $y = x + 1$ xətləri ilə hüdudlanmış fiqurun sahəsini tapın.

A) $\frac{1}{6}$ B) 6 C) 2 D) 1 E) $-\frac{1}{6}$

7. $y = \sin 3x;\ \left(0 \le x \le \frac{\pi}{6}\right)$ əyri qövsünün absis oxu ətrafında fırlanmasından alınan fiqurun həcmini hesablayın.

A) $3\pi^2$ B) $\frac{\pi^2}{12}$ C) $\frac{\pi}{12}$ D) $\frac{\pi^2}{3}$ E) π^2

8. $y = 4\ \ (0 \le x \le 6)$ düz xətt parçasının absis oxu ətrafında fırlanmasından alınan fiqurun həcmini hesablayın.

A) $96\pi^2$ B) 16π C) 96π D) 6π E) π^3

9. $A = \int_0^m (2x-3)dx$ inteqralı üçün uyğunluğu müəyyən edin.

1. $A = 0$ a. $m = 3$ olduqda
2. $A = -2$ b. $m = 2$ olduqda
3. $A = 4$ c. $m = 5$ olduqda

d. $m = 1$ olduqda

e. $m = 4$ olduqda

10. $\int_{1}^{5} \frac{3}{3x+1} dx$ inteqralını hesablayın.

P l a n i m e t r i y a

VII FƏSİL

HƏNDƏSİ FİQURLAR və ONLARIN XASSƏLƏRİ. ƏSAS ANLAYIŞLAR

Həndəsə yunanca *geometriya* sözündən götürülüb "geo"-*yer*, "metriya"-*ölçmək* mənasındadır. Bu ad, həndəsənin yer ölçmə işləri ilə əlaqədar olaraq meydana gəlməsinin nəticəsidir. Həndəsə bir riyazi elm kimi həndəsi fiqur və cisimlərin fəza formaları, ölçüləri və bunlar arasındakı qarşılıqlı münasibətlərdən bəhs edir.

Əmək alətlərini hazırlayarkən, yaşayış yerlərini tikərkən adamlarda əşyaların forma və ölçülərini təyin etmək zəruriyyəti meydana gəlmişdir.

Bizə gəlib çatmış olan maddi mədəniyyət abidələri və çoxlu yazı sənədləri göstərir ki, artıq 4000 il bundan əvvəl Misir və Babilistan sakinlərinin xeyli həndəsi məlumatları var idi. Məsələn, misir piramidaları maraqlı düzgün formaları ilə fərqlənir.Aydındır ki, bu pramidaların tikintisinə yalnız həndəsi biliklərə malik adamlar rəhbərlik edə bilərdi.

Həndəsi faktların ilk isbatı Miletli Falesin (b.e.ə. 639-548) adı ilə bağlıdır. Lakin, Falesin hansı mühakimə qaydasını tətbiq etməsini biz yalnız güman edə bilərik.

Həndəsi inkişaf tarixi dörd dövrə bölünür.

Birinci dövr yeni eradan əvvəl VI əsrədək olan dövrdür. Bu dövr həndəsəyə aid faktların toplanması və onlar arasında sadə asılılıqların müəyyən edilməsi dövrüdür. Burada həndəsəyə aid ilk məlumatlar tədricən Misir və Babilistandan, Yunanıstana keçir, bəzi faktlar məntiqi üsulla əsaslandırılır.

İkinci dövr yeni eradan əvvəlki VI əsrdən, yeni eranın XVII əsrinədək davam edir. Yunan alimləri Arximed, Evklid, Apollon və Eratosfenin yaşadığı III əsr (y.e.ə.) riyaziyyatın inkişafı tarixinə qızıl əsr kimi daxil olmuşdur. Bu dövrün mühüm naliyyətlərindən biri əsas dünya dillərinə tərcümə edilmiş və dəfələrlə təkrar nəşr olunmuş "Başlanğıclar" əsərinin yaranmasıdır. Hələ indiyədək bəzi ölkələrdə bu kitab dərslik kimi istifadə olunur. Öyrəndiyimiz həndəsi faktların çoxu bu və ya digər şəkildə həmin əsərdə vardır. Evklid 13 kitabdan ibarət “Başlanğıclar” əsərini yazarkən, özünə qədər olan faktları sistemləşdirmiş və ümumiləşdirmişdir. Ötən illər ərzində Evklid həndəsəsi yeni faktlar və üsullarla zənginləşmişdir.

Üçüncü dövr fransız alimi Rene Dekartın (1596-1650) dəyişən kəmiyyətlər və koordinatlar üsulunu riyaziyyata daxil etməsi ilə (1637) başlanır. Bu dövrdə həndəsə çox sürətlə inkişaf etmiş və yeni, daha ümumi araşdırma üsulları müəyyən edilmişdir.

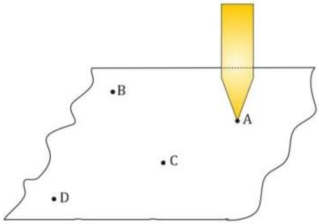
Dördüncü dövr 1826-cı ildə böyük rus alimi N.İ.Lobaçevskinin (1793-1856) yeni kəşf etdiyi həndəsə ilə başlanır. Ən mühüm elmi nailiyyətlər məhz, bu dövrə aiddir. Təkcə onu qeyd etmək kifayətdir ki, Evklid həndəsəsi, Lobaçevski həndəsəsinin xüsusi halıdır. Bu dövrdə Lobaçevskidən sonra alman riyaziyyatçısı Riman (1826-1866) Evklid və Lobaçevski həndəsəsindən fərqli yeni həndəsə yaratdı. Lobaçevski və Riman həndəsələri qeyri Evklid Həndəsə adlanır.

Həndəsənin bütün hissələri bir müstəvi üzərində yerləşən fiqurların xassələrini öyrənən bölməsinə *planimetriya*, bütün hissələri bir müstəvidə yerləşməyən fiqurların xassələrini öyrənən bölməsinə isə *stereometriya* deyilir.

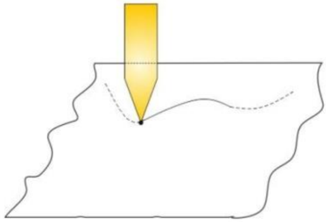
§ 31. İLK ANLAYIŞLAR. HƏNDƏSİ FİQUR

1. Nöqtə və düz xətt. Həndəsənin əsas anlayışları *nöqtə, düz xətt, müstəvi və iki nöqtə arasındakı məsafədir.* Bu anlayışlar ilkin olduğundan onlara tərif verilmir.

Karandaşın iti ucunun ağ kağızda buraxdığı iz nöqtə təsəvvürü verir. Nöqtə latın əlifbasının böyük hərfləri ilə işarə edilir. Məsələn, *A, B, C, D, . . . ,*



Şəkil 34



Şəkil 35

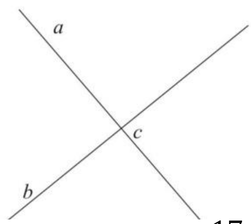
Xətt nöqtələr çoxluğu olub, sonsuzdur. Hərəkət edən nöqtənin izini xətt kimi təsəvvür etmək olar (şəkil 35).

İp, xətt təsəvvürü, möhkəm gərilmiş ip və ya kifayət qədər kiçik deşikdən çıxan işıq şüası düz xətt təsəvvürü verir. Düz xətt Latın əlifbasının iki böyük hərfi və ya bir kiçik hərfi ilə işarə olunur. Məsələn, *AB, DC, . . . ,* və ya *a, b, c, . . . ,* (şəkil 36).

Şəkil 36

Gələcəkdə "*A* nöqtəsi *a* düz xəttinə məxsusdur" əvəzinə "*A* nöqtəsi *a* düz xətti üzərindədir" və ya "*a* düz xətti *A* nqtəsindən keçir" kimi ifadələrdən də istifadə edəcəyik.

C nöqtəsi həm *a* düz xətti, həmdə *b* düz xətti üzərində yerləşirsə, bu halda *a* və *b* düz xətləri *C* nöqtəsində kəsişir deyəcəyik (şəkil 37). Nöqtə və düz xəttin qarşılıqlı vəziyyətini səciyyələndirən aşağıdakı xassələri qeyd etmək olar:



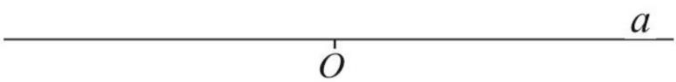
1. *İstənilən düz xətt üçün onun üzərində olan və olmayan nöqtə mövcuddur.* Şəkil 37

2. *İki müxtəlif nöqtədən ancaq bir düz xətt keçirmək olar.*

3. *İki müxtəlif düz xətt ya kəsişmir, ya da ancaq bir nöqtədə kəsişirlər.*

4. *Düz xətt üzərində yerləşən üç nöqtədən biri digər ikisinin arasındadır.*

2. **Şüa və parça.** *A* düz xətti üzərində ixtiyari *O* nöqtəsini qeyd edək. *O* nöqtəsi *a* düz xəttini iki hissəyə ayırır (şəkil 38). Bu hissələrin hər biri *yarım düz xətt* və ya *şüa, O* nöqtəsi isə bu şüaların *başlanğıc nöqtəsi* adlanır.



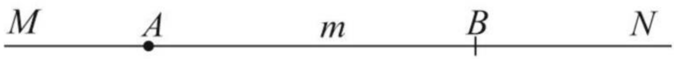
Şəkil 38

Düz xətt üzərində qeyd olunmuş *A* və *B* nöqtələri bu düz xətti üç hissəyə ayırır (şəkil 39). Bunlardan ikisi *AM* və *BN* ancaq bir tərəfdən hüdudlanmış olduğundan onlar şüadır. Qalan *AB* hissəsi isə hər iki tərəfdən hüdudlanmışdır. Düz xəttin hər iki tərəfdən hüdudlanmış hissəsi *düz xətt parçası* və ya sadəcə olaraq *parça, A* və *B* nöqtələri isə *parçanın ucları* adlanır. Parça, uclarından qoyulmuş iki hərflə və ya üzərində qoyulmuş bir kiçik hərflə işarə olunur. Məsələn, *AB* və ya *m* parçası.

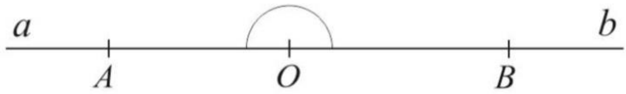
Parçanın ucları arasındakı məsafəyə onun *uzunluğu* deyilir və *AB* kimi işarə olunur.

Uzunluqları eyni olan iki parçaya *bərabər parçalar* deyilir. Belə parçaları bir-birinin üzərinə qoyulduqda onların başlanğıc və son nöqtələri uyğun olaraq üst-üstə düşür. Parçaların bərabərliyi $AB=CD$ kimi yazılır. Parçaların uzunluqları bərabər olmadıqda, onlar arasında $AB > CD$ və ya $AB < CD$ münasibətlərindən biri doğrudur.

Düz xətt parçası onun uclarını birləşdirən hər bir xətdən qısadır (şəkil 40).

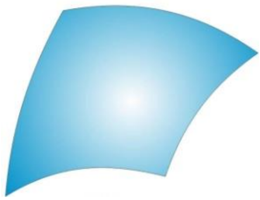


Şəkil 39



Şəkil 40

3. **Müstəvi və yarımmüstəvi.** Xəttin özü boyunca olmayan hərəkəti zamanı buraxdığı izi *səth*, düz xəttin onu kəsən düz xətt boyu hərəkəti zamanı buraxdığı izi isə *müstəvi* kimi təsəvvür etmək olar (şəkil 41, 42). Səthlərin ən sadəsi müstəvidir. Stolun səthi, sakit havada gölün səthi, pəncərə şüşəsi və s. müstəvi təsəvvürü verən sadə səthlərdir.



Şəkil 41

Şəkil 42

Müstəvilər adətən yunan əlifbasının hərfləri ilə işarə olunur; $\alpha, \beta, \gamma, \ldots,$

Gələcəkdə “*a* düz xətti α müstəvisinə məxsusdur” əvəzinə “*a* düz xətti α müstəvisi üzərində yerləşir” və ya “α müstəvisi *a* düz xəttindən keçir” kimi ifadələrdən də istifadə edəcəyik.

Müstəvi ilə düz xəttin qarşılıqlı vəziyyəti haqqında aşağıdakı xassələri qeyd edək:

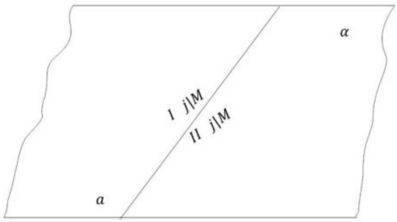
1. *İki nöqtəsi müstəvi üzərində olan düz xətt bütünlüklə həmin müstəvi üzərindədir.*

2. *Müstəvi üzərində yerləşən düz xətt, bu müstəvini yarımmüstəvi adlanan iki hissəyə ayırır* (şəkil 43).

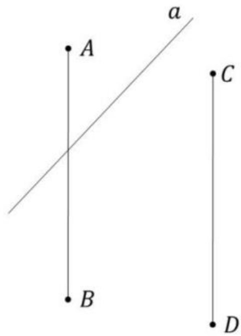
Burada yalnız düz xəttinin nöqtələri hər iki yarımmüstəvi üçün ortaqdır.

Əgər *A* bir yarımmüstəvinin, *B* isə digər yarımmüstəvinin nöqtəsidirsə, onda *A* və *B* nöqtələri *a* düz xəttinin müxtəlif tərəflərində olar. Başqa sözlə, *A* və *B* nöqtələrini birləşdirən *AB* parçası *a* düz xətti ilə kəsişir.

C və *D* nöqtələri bir yarımmüstəvidə yerləşdikdə, *CD* parçası *a* düz xətti ilə kəsişmir (şəkil 44).



Şəkil 43



Şəkil 44

4. **Həndəsi cism və fiqur.** Həndəsə yalnız əşyaların forma və ölçülərini öyrənir. Məsələn, ağacdan, kartondan, metaldan və s. hazırlanmış kublara eyni bir ad - kub adı verilir. Əgər əşyanın fiziki və başqa xassələrini nəzərə almayıb, ancaq onun forma və ölçülərini nəzərə alsaq, onda əşya *həndəsi cism* adlanır.

Hər tərəfdən hüdudlanmış fəza hissəsinə həndəsi cism deyilir.

Müəyyən qayda ilə düzülmüş nöqtə, xətt, səth ayrılıqda və ya birgə götürüldükdə *həndəsi fiqur* əmələ gətirir. Məsələn, nöqtə, düz xətt, şüa, müstəvisi və s. həndəsi fiqurlardır.

Həndəsi fiqur anlayışı əşyanın ölçü və formasından başqa, qalan bütün real xassələrini nəzərə almadığından mücərrəd anlayışdır.

İxtiyari həndəsi fiqurun hissəsi də həndəsi fiqurdur. Qeyd edək ki, həndəsi cism, fəzadan səthlə, səthin hissəsi qonşu hissədən xətlə, xəttin hissəsi isə qonşu hissədən nöqtə ilə ayrılır.

Ümumiyyətlə, həndəsi cism, səth, xətt və nöqtə ayrılıqda mövcud deyilir. Lakin biz bunları təcrid etməklə bir-birindən asılı olmadan öyrənəcəyik.

Hələlik bütün nöqtələri bir müstəvi üzərində olan fiqurların - *planimetrik fiqurların* öyrənilməsi ilə məşğul olaq.

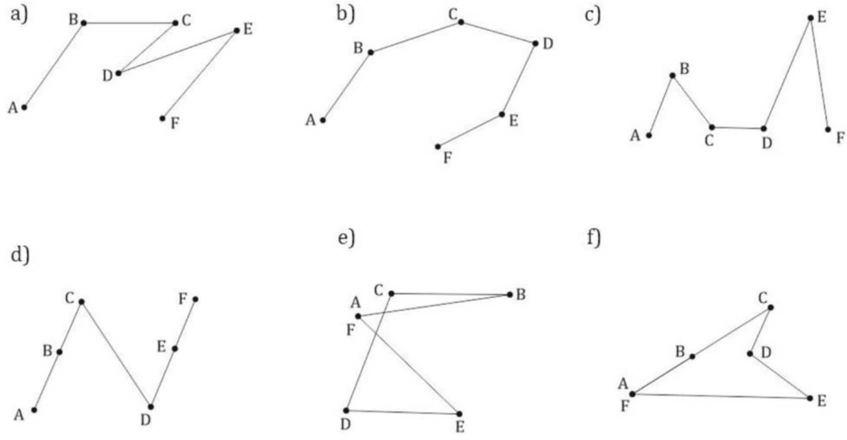
5. **Düz xətlər dəstəsi.** Verilən nöqtədən keçən düz xətlər çoxluğuna *düz xətlər dəstəsi*, həmin nöqtəyə isə *dəstənin təpəsi deyilir.*

Müxtəlif təpəi iki düz xətlər dəstəsinə baxaq (şəkil 45). Göründüyü kimi hər iki nöqtədən istənilən sayda düz xətt keçir, lakin tək bir düz xətt varki, hər iki dəstəyə məxsusdur. Bu A və B nöqtələrindən keçən düz xətdir (düz xəttin əsas xassəsi). Beləliklə, *iki nöqtədən yalnız bir, bir nöqtədən isə sonsuz sayda düz xətt keçir.*

Şəkil 45

6. **Sınıq xətt.** *A, B, C, D, E, F*- nöqtələrini 46-cı şəkildə göstərildiyi kimi müxtəlif vəziyyətlərdə birləşdirək. Bu zaman müxtəlif fiqurlar alınır.

Qonşu parçaları bir düz üzərində olmayan, birincinin sonu ikincinin başlanğıcı, ikincinin sonu üçüncünün başlanğıcı və s. bu qayda ilə birləşdirilmiş düz xətt parçalarının əmələ gətirdiyi fiqura *sınıq xətt* deyilir.



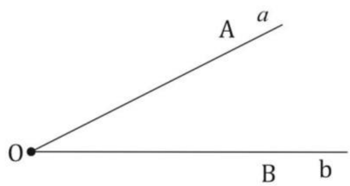
Şəkil 46.

Şəkildə göstərilən *a*), *b*), c) və e) sınıq xətlər, d) və f) isə qonşu parçaları bir düz xətt üzərində olduğundan sınıq xətt deyil. Göstərilən sınıq xətlərin *A*, *B*, *C*, *D*, *E*, *F* nöqtələri onun *təpə nöqtələri* adlanır. (şəkil 46 *a*, *b*, c, *d*).

Başlanğıc və son nöqtləri üst-üstə düşən sınıq xətt *qapalı* (şəkil 46, *e*), əks halda (şəkil 46 *a*, *b*, c) *qapalı olmayan sınıq xətt* adlanır. Sınıq xətt təpələrdə qoyulan hərflərin sırası ilə işarə olunur. Məsələn, $A\ B\ C\ D\ E\ F$ sınıq xətti. Sınıq xəttin istənilən parçasını hər iki tərəfə uzatdıqda o, bu düz xətdən bir tərəfdə yerləşərsə, ona *qabarıq sınıq xətt* deyilir (şəkil 46, *b*).

Sınıq xətti əmələ gətirən parçalara onun *tərəfləri*, bu tərəflərin uzunluqları cəminə isə onun *uzunluğu* və ya *perimetri* deyilir.

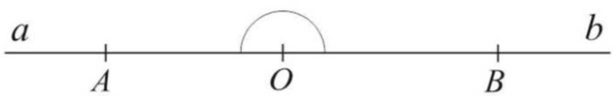
7. **Bucaq və onun ölçüsü.** Bir nöqtədən çıxan iki şüanın əmələ gətirdiyi fiqura *bucaq* deyilir. Şüaların ortaq nöqtəsinə *bucağın təpəsi*, onu əmələ gətirən şüalara isə *bucağın tərəfləri* deyilir. (şəkil 47).



Şəkil 47.

Bucaq, təpədə qoyulmuş bir hərflə və ya təpədə və tərəflərdə qoyulmuş üç hərflə oxunur. Yazıda “bucaq” sözü “ $\angle$ ” işarəsi ilə əvəz olunur. Məsələn “*O* bucağı” və ya “*AOB* bucağı əvəzinə” uyğun olaraq $\angle O$ və $\angle AOB$ yazılır.

Bucağın tərəfləri bir-birini düz xəttə tamamlayan şüalar olduqda, bu bucağa *açıq bucaq* deyiliir (şəkil 48).

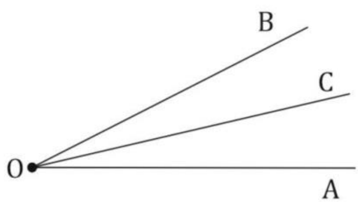


Şəkil 48

İki bucaq bir-birinin üzərinə qoyulduqda üst-üstə düşərsə, bu bucaqlar bərabər hesab olunur.

Bucağı yarı bölən şüaya onun *tənböləni* deyilir (şəkil 49). Tərifə görə

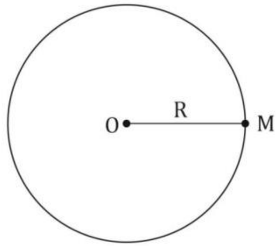
$$\angle BOC = \angle COA.$$



Şəkil 49

8. **Çevrə və dairə.** Müstəvi üzərində verilən nöqtədən eyni məsafədə yerləşən bütün nöqtələr çoxluğuna *çevrə* deyilir. Verilən nöqtəyə *çevrənin mərkəzi*, sabit məsafəyə isə *çevrənin radiusu* deyilir.

Mərkəzi O nöqtəsində və radiusu R olan çevrəni $O(R)$ kimi işarə edəcəyik (şəkil 50).

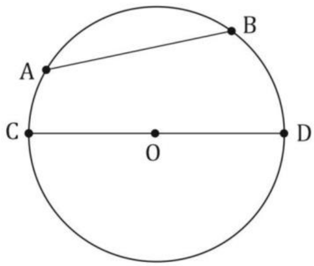


Şəkil 50

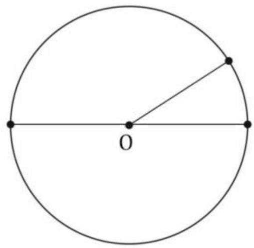
Çevrənin istənilən iki nöqtəsini birləşdirən düz xətt parçasına *vətər*, mərkəzdən keçən vətərə isə *diametr* deyilir (şəkil 51). Aydındır ki, diametr iki radiusa bərabərdir: $D = 2R$ (şəkil 52).

Çevrə ilə ancaq bir ortaq nöqtəsi olan düz xəttə bu çevrənin *toxunanı*, iki ortaq nöqtəsi olan düz xəttə isə onun *kəsəni* deyilir (şəkil 53).

Çevrə ilə əhatə olunmuş müstəvi hissəsinə *dairə* deyilir (şəkil 54). Çevrənin mərkəzi, radiusu, vətəri və diametri eyni zamanda onun dairəsinin də uyğun elementləri adlanır.

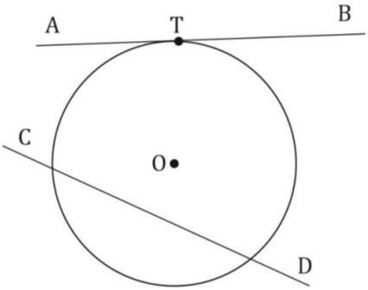


Şəkil 51

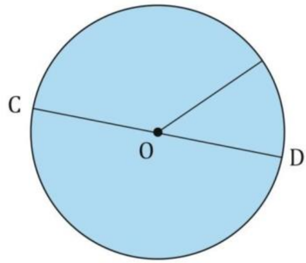


Şəkil 52

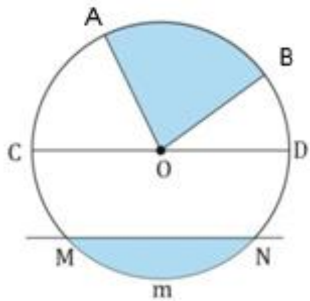
Çevrənin hər hansı hissəsinə *qövs* deyilir. Yazıda qövs sözü “$\cup$” ilə göstərilir. Məsələn $\overset{\cup}{AB}$ və ya $\overset{\cup}{MmN}$ kimi yazılır.



Şəkil 53



Şəkil 54



Şəkil 55

İki radius arasında qalan dairə hissəsinə *sektor*, hər hansı kəsənin dairədən ayırdığı hissəyə isə *seqment* deyilir (şəkil 55).

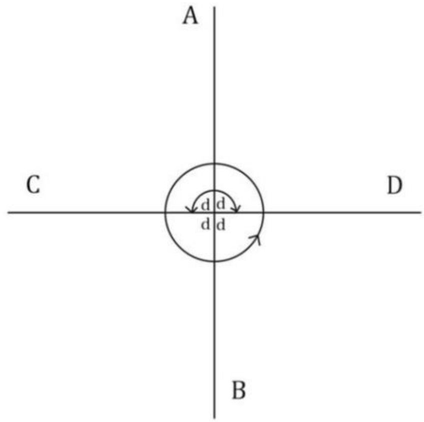
§ 36. BUCAĞIN NÖVLƏRİ

Açıq bucağın yarısına bərabər olan bucaq *düz bucaq* adlanır və *d* hərfi ilə işarə olunur (düz mənasında olan fransız sözü "droit"-in baş hərfi).

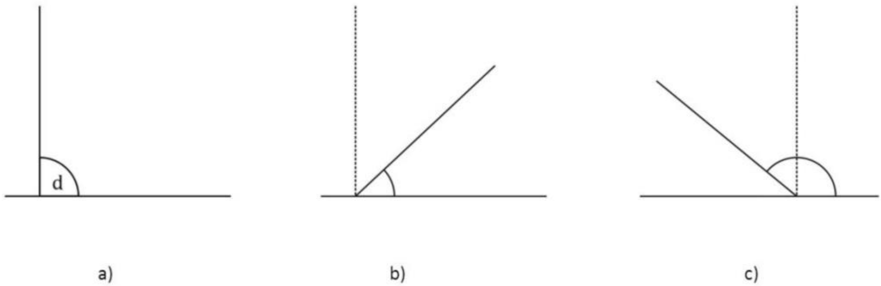
Tərifdən, açıq bucağın qiymətinin 2*d* olması alınır. Qiyməti 4*d* olan bucaq *tam bucaq* adlanır (şəkil 56).

Düz bucaqdan kiçik olan bucağa *iti*, böyük olan bucağa isə *kor bucaq* deyilir (şəkil 57).

İki bucağın bir tərəfi ortaq, digər iki tərəfi açıq bucaq əmələ gətirirsə, belə bucaqlara *qonşu bucaqlar* deyilir (şəkil 58, $\angle AOB$ və $\angle BOC$). Göründüyü kimi, qonşu bucaqların cəmi açıq bucaq verir. Başqa sözlə, qonşu bucaqların cəmi iki düz bucağa bərabərdir.



Şəkil 56.



Şəkil 57.

Birinin tərəfləri o birinin tərəflərinin uzantısı olan iki bucağa *qarşılıqlı bucaqlar* deyilir (şəkil 59).

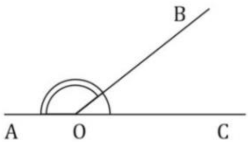
Şəkildən göründüyü kimi *AB* və *CD* düz xətləri kəsişdikdə iki cüt qarşılıqlı bucaq (*AOD* və *COB*; *AOC* və *DOB*) və dörd cüt qonşu bucaq (*DOA* və *AOC*; *AOC* və *COB*; *COB* və *BOD*; *BOD* və *DOA*) alınır.

Tərifdən aydındır ki, verilən bucağa qonşu olan bucağı qurmaq üçün onun tərəflərindən birini uzatmaq kifayətdir.

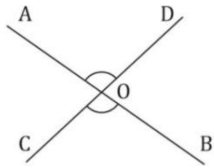
Məsələ. Fərqi $\frac{5}{9}d$ olan qonşu bucaqları tapın.

○ Qonşu bucaqlardan bir α digəri β olsun. Şərtə görə $\alpha - \beta = \frac{5}{9}d$, tərifə görə isə $\alpha + \beta = 2d$ yaza bilərik. Bu iki münasibətdən $\alpha = 1\frac{5}{18}d$, $\beta = \frac{13}{18}d$ tapılır. ●

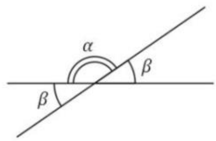
Tutaq ki, qarşılıqlı bucaqlardan biri α, digəri isə β-dır (şəkil 60). Bunlarla qonşu bucaqlardan biri γ olsun. Qonşu bucaqların tərifinə görə $\alpha + \gamma = 2d$ və



Şəkil 58



Şəkil 59



Şəkil 60

$\beta + \gamma = 2d$. Buradan $\alpha = \beta$ alınır. Deməli, qarşılıqlı bucaqlar bərabərdir.

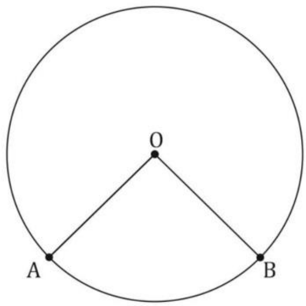
§ 37. BUCAQLARIN DƏRƏCƏ ÖLÇÜSÜ. MƏRKƏZİ BUCAQ

Çevrədə iki radiusun əmələ gətirdiyi bucağa *mərkəzi bucaq* deyilir (şəkil 61, $\angle AOB$). *AB* qövsü *AOB* mərkəzi bucağına *uyğun qövs* adlanır.

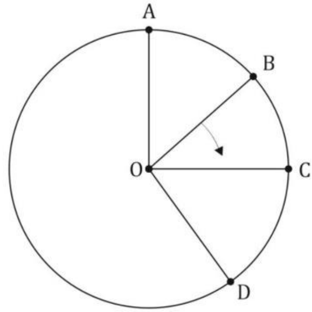
Buradan çıxır ki, tam bucaq bütün çevrəyə, açıq bucaq onun yarısına, düz bucaq isə dörddə birinə bərabər olan qövsə uyğundur.

Göstərmək olar ki, bir çevrədə və ya bərabər çevrələrdə mərkəzi bucaqlar bərabər olarsa, onlara uyğun qövslər də bərabərdir və tərsinə.

Doğrudan da, $\angle AOB = \angle COD$ qəbul edib, $\overset{\cup}{AB} = \overset{\cup}{CD}$ olduğunu göstərək (şəkil 62). Bu məqsədlə *AOB* bucağını *COD* bucağının üzərinə düşənədək *O* mərkəzi ətrafında fırladaq. Bu halda aydındır ki, *AB* və *CD* qövsləri bir-birinin üzərinə düşəcək, yəni $\overset{\cup}{AB} = \overset{\cup}{CD}$.



Şəkil 61.



Şəkil 62.

Fərz edək ki, çevrə 360 bərabər hissəyə bölünmüş və bölgü nöqtələri mərkəzlə birləşdirilmişdir. Bu zaman çevrənin mərkəzi ətrafında bir-birinə bərabər 360 mərkəzi bucaq alınacaqdır. Çevrə üzərində alınan qövslərdən hər birinə qövs dərəcəsi, mərkəzdə alınan bucaqlardan hər birinə isə bir bucaq dərəcəsi (1°) deyilir. Beləliklə, bir qövs dərəcəsi çevrənin $\frac{1}{360}$ hissəsi, bir bucaq dərəcəsi isə bir qövs dərəcəsinə uyğun olan mərkəzi bucaqdır. Deməli, mərkəzi bucaq ona uyğun qövs ilə ölçülür.

Bir dərəcənin (bucaq və ya qövs) $\frac{1}{60}$ hissəsi bir dəqiqə ($1'$) və bir dəqiqənin $\frac{1}{60}$ hissəsi bir saniyə ($1''$) adlanır. Məsələn, qiyməti 30 dərəcə 15 dəqiqə 20 saniyə olan bucaq $30^\circ 15' 20''$ kimi yazılır.

§ 38. RİYAZİ TƏKLİFLƏR HAQQINDA

İnsanların təfəkkürünü, qabiliyyətinin və hesablama bacarığının inkişafında riyaziyyat elminin böyük əhəmiyyəti vardır.

Amerika riyaziyyatçısı N.Viner demişdir: “Riyaziyyat incəsənətin bir növüdür. Riyaziyyat gənclərin elmidir. Riyaziyyatla məşğul olmaq əqlin elə gimnastikasıdır ki, bunun üçün cavanlığın çeviklik və dözümlülüyü tələb olunur.”

Riyaziyyat elmini öyrənmək, ona məxsus olan anlayışlar sistemini və həmin anlayışlar arasındakı əlaqələri öyrənmək deməkdir.

Riyaziyyatı öyrənməyə başlarkən təbii olaraq belə bir sual qarşıya çıxır: riyazi anlayışlar haradan alınmışdır?

Riyazi anlayışların mənşəyi içindəə olduğumuz maddi aləmdəki cisimlər və hadisələrdir. Anlayış, obyektiv aləmdəki şeylərin, hadisələrin və proseslərin daha ümumi və mühüm əlamətlərini ifadə edir.

Obyektiv varlıq olan maddi cisimlərin xassələrini öyrənmək üçün insanlar, dahilərin göstərdiyi kimi, canlı müşahidədən başlamalıdırlar. İnsan öz qarşısında duran xarici aləmi, təbiəti ən əvvəl öz hiss üzvləri vasitəsilə dərk edir. Obyektiv halda mövcud olan şeylər insana, onun hiss üzvlərinə təsir edərək, onda müəyyən duyğu və təsəvvürlər əmələ gətirir. Şeylərin obyektiv xassələrini əks etdirən bu təsəvvürlər təfəkkürdə dəqiqləşərək anlayışları əmələ gətirir.

Beləliklə insanın təfəkkürü vasitəsilə əmələ gələn riyazi anlayışlar obyektiv aləmin inikasından ibarətdir. Onlar insanların uzunmüddətli müşahidələrinin nəticəsində yaranmışdır.

Hər bir riyazi anlayışın mühüm əlamətləri vardır. Məsələn, hər bir düzgün (qabarıq) beşbucaqlının aşağıdakı əlamətlərini söyləmək olar:

1) Bütün bucaqları bərabərdir;

2) Bütün tərəfləri bərabərdir;

3) Bütün diaqonalları bərabərdir;

4) Simmetriya oxu vardır;

5) Xaricinə çevrə çəkmək olar;

6) Daxilinə çevrə çəkmək olar;

7) Hər bir dioqanalı uyğun tərəfinə paraleldir;

8) Təpələrini uyğun qarşı tərəflərinin orta nöqtəsi ilə birləşdirən düz xət parçaları bir nöqtədə kəsişirlər;

9) hər bir təpəni öz qarşısındakı tərəfin orta nöqtəsi ilə birləşdirən düz xət parçası həmin tərəfə perpendikulyardır;

10) Bütün təpələri öz qarşılarındakı tərəfin orta nöqtəsi ilə birləşdirən düz xət parçaları bərabərdir.

İki və daha çox anlayış arasında əlaqənin olması onların hamısına məxsus olan ümumi əlamətin mövcud olması deməkdir. Məsələn, qarşı tərəfləri cüt-cüt paralel olan çoxbucaqlıların hamısı aşağıdakı ortaq əlamətlərə malikdirlər:

1) Tərəflərin sayı cütdür;

2) Qarşı-qarşıya duran bucaqlar cüt-cüt bərabərdirlər.

Digər tərəfdən anlayışları bir-birindən fərqləndirən əlamətlər vardır. Məsələn, kəsişən düz xətlərdən bir müstəvi keçirmək olar, çarpaz düz xətlərdən isə olmaz.

Başqa bir misal. Daxili bucaqların cəminin $4d$ olması əlaməti bütün dördbucaqlılara aid olduğu halda, bütün tərəflərin bərabərliyi romba, bucaqlarının bərabərliyi düzbucaqlıya, həm tərəf və həm də bucaqların bərabərliyi isə yalnız kvadrata aid olan əlamətlərdir.

Anlayışın əlamətlərinin birisi (və ya bir neçəsi) həmin anlayışın əsil tətbiətini göstərir və bu əlamətlərdən başqa əlamətləri çıxarmaq olur. Bu əlamətə *anlayışın əsas əlaməti* deyilir.

Hər bir anlayışın əsas əlamətlərini onun digər əlamətlərindən ayırmağı bacarmaq lazımdır. Bunu bilmədikdə riyaziyyatın öyrənilməsi çətinləşir.

Anlayışın ifadə etdiyi əlamətlər heyəti həmin anlayışın məzmununu əmələ gətirir. Məsələn, "kvadrat" anlayışının məzmununu aşağıdakı əlamətlər təşkil edir:

1) Müstəvi dördbucaqlıdır;

2) Bütün tərəfləri bərabərdir;

3) Bütün bucaqları bərabərdir;

4) Diaqonalları bərabərdir;

5) Tərəfləri cüt-cüt paraleldir;

6) Diaqonalları bir-birinə perpendikulyardır;

7) Daxilinə və xaricinə çəkilmiş çevrələrin mərkəzləri üst-üstə düşür və s.

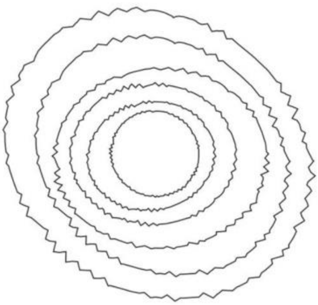
Anlayışı tam təsəvvür etmək üçün məzmununu bilmək kifayət deyildir, bu anlayışın əhatə etdiyi şeylər çoxluğunu, yəni anlayışın həcmini də bilmək lazımdır. Məsələn, yuxarıda söylədiyimiz əlamətlər yalnız bir kvadrat üçün olmayıb, bütün kvadratlara aiddir. Deməli, bütün kvadratlar "kvadrat" anlayışının həcmini təşkil edir.

Hər bir anlayışın məzmunu onun həcmini (və tərsinə) təyin etdiyindən, bunlardan birinin dəyişməsi, digərinin dəyişməsinə təsir göstərir. Doğrudan da, "piramida" anlayışına aid olan əlamətlərə, oturacağın düzgün çoxbucaqlı və hündürlüyün mərkəzdən keçməsi əlamətini əlavə etsək, "düzgün piramida" anlayışını alarıq və beləliklə də, daha ümumi olan "piramida" anlayışından, ondan az ümumi olan "düzgün piramida" anlayışına keçmiş oluruq.

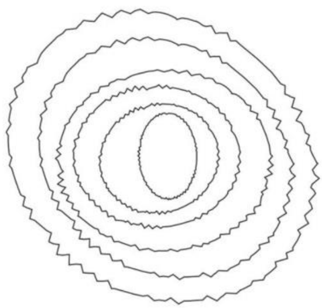
Deməli, bir anlayışın məzmununa bir və ya bir neçə yeni əlamət əlavə etdikdə birinciyə nisbətən az ümumi olan anlayış alınır. Əlamətlərin sayını artırmaqla ümumi anlayışı, ondan az ümumi olan anlayışla əvəz etməyə *məhdudlaşdırma*, tərsinə, əlamətlərin sayını azaltmaqla az ümumi anlayışdan daha ümumi anlayışa keçməyə isə *ümumiləşdirmə* deyilir. Məsələn, iki üzün bərabərliyi və yan tillərin paralelliyi şərtini atmaqla "prizma" anlayışından daha ümumi olan "çoxüzlü" anlayışı alınır.

63-cü şəkildə çoxbucaqlıların və 64-cü şəkildə ədədlərin ardıcıl ümumiləşdirilməsi ilə müxtəlif anlayışların alınması Eyler dairələri ilə göstərilmişdir.

Ümumi anlayış (həcmcə böyük olan) *cins*, az ümumi anlayış isə *növ* adlanır. İkinci, şəkildə ədəd cins, qalan ədədlər çoxluğu isə növ götürülmüşdür. Kompleks ədədlər çoxluğunu cins qəbul etməklə, qalan ədədlər çoxluğunu növ götürmək olar. Buradan görünür ki, bir anlayışın cins və növ olması nisbidir. Bir halda cins olan anlayış başqa bir halda növ ola bilər.



Şəkil 63



Şəkil 64.

Riyaziyyatda real aləmdən aldığımız anlayışlardan başqa həmin anlayışlar arasındakı rabitə və asılılıqlar haqqında olan hökmlər də vardır. Bir əlamətin hər hansı anlayışa mənsub olması haqqındakı fikrimizə *hökm* deyilir. Riyaziyyatda hökm istilahı əvəzinə çox zaman *təklif* istilahı da işlənir. Riyaziyyatı öyrənərkən onun başqa elmlərdən fərqli olan cəhətini nəzərə almaq lazım gəlir.

Riyaziyyatı, müstəqil mənası olan müxtəlif təkliflər yığımı hesab etmək olmaz. Riyazi təkliflər bir-birilə qırılmaz məntiqi tellərlə bağlıdır. Buna görə də hər bir riyazi təklifi məntiqi yolla başqa təkliflərdən çıxarmaq olar.

Riyazi təkliflərin *təriflər, aksiomlar* və *teoremlər* kimi növləri vardır.

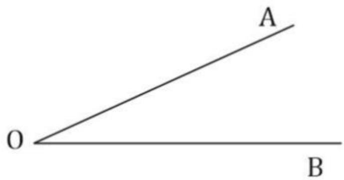
Bir anlayışın cinsini və bu cinsdən fərqləndirən növ əlamətini ifadə edən təklifə *tərif* deyilir. Buradan aydındır ki, tərif anlayışın məzmununu, onun əsas əlamətini ifadə edən təklifdir.

Deməli, bir anlayışa tərif vermək üçün onun əsas əlamətlərini göstərmək lazımdır. Yəni, tərif söylərkən bir anlayışı ondan əvvəl gələn daha ümumi və ya nisbətən daha sadə başqa anlayışlar vasitəsilə vermək lazımdır.

Məsələn, 1) tərəfləri bərabər olan paraleloqrama *romb* deyilir; 2) kvadrat, bütün bucaqları bərabər olan rombdur; 3) yalnız özünə və vahidə bölünən ədədə *sadə ədəd* deyilir.

Birinci tərifdə əsas əlamət tərəflərin bərabər olmasıdır. Burada biz "romb" anlayışını özündən sadə (və ya ümumi) olan "paraleloqram" anlayışı vasitəsilə təyin etmişik.

Riyaziyyatın elə anlayışları da vardır ki, onlardan əmələ gələn, daha ümumi və ya sadə olan anlayış yoxdur. Belə anlayışlara tərif vermək mümkün deyildir. Onlara ilk anlayışlar deyilir. Riyaziyyatda ilk anlayışa nöqtə, müstəvi, düz xətt, çoxluq və s. misal ola bilər.



Şəkil 65.

Riyaziyyatda cins və növ əlamətlərindən istifadə edilmədən verilən təriflər də vardır.

Bəzən bir anlayışın əmələ gəlməsini, alınmasını göstərən cümlə həmin anlayışın tərifi kimi qəbul edilir. Belə tərifə *təsviri tərif* və ya *genetik tərif* deyilir. "Bir nöqtədən çıxan iki şüanın əmələ gətirdiyi fiqura bucaq deyilir (şəkil 65) tərifi təsviri tərifdir. Belə təriflər əyani və konkret olsalar da onlar elmi cəhətdən az qiymətlədir. Yuxarıda söylədiyimiz tipli təriflər əsasən, həndəsədə verilir. Lakin hesab və cəbrdə də elə təriflər varki, onlar da cinsi fərq və növ vasitəsilə verilmir.

Məsələn,

$$a^0 = 1, \quad a^{-n} = \frac{1}{a^n}, \quad C_n^0 = 1, \quad \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd},$$

və s. təklifləri təriflərdir. Bunları isbat tələb edən teoremlərlə qarışdırmaq olmaz. Bəzən səhv olaraq, söylədiyimiz tipli tərifləri isbat etməyə çalışırlar. Belə təriflərin ancaq məntiqi mümkünlüyü haqqında mühakimə yürütmək olar. Riyaziyyatı öyrənərkən riyazi anlayışlara verilən tərifləri yaxşı bilmək və onlardan məlum əsas kimi mühakimələrdə düzgün istifadə etməyin böyük əhəmiyyəti vardır.

Riyaziyyatda ikinci növ təkliflər *aksiomlardır.* Bir təklifin doğruluğu (həqiqət olması) başqa təklifə əsaslanmadan isbatsız qəbul edilərsə, buna aksiom deyilir.

Aksiomlar isbatsız qəbul olunduğundan onların doğru olub-olmaması haqqında təbii olaraq sual qarşıya çıxır. Aksiomlar "aşkar olduğu üçün isbat tələb etmir" fikri səhvdir. Çünki, əvvələn, "aşkarlıq" subyektiv anlayışdır və ikincisi, bəzən aksiomlara əsasən isbat edilən təkliflər sırasında aksiomlardan da aşkarı, yəni sadəsi olur.

Aksiomlar bəşəriyyətin uzun müddət apardığı təcrübə və müşahidələrindən çıxardığı nəticələrdir. Buna görə də aksiomlar real varlığın inikası olub təbiətin obyüktiv qanunlarını ifadə edir. Buradan aksiomların həqiqət olması alınır.

Teoremlər aksiomlardan fərqli olaraq, doğruluğu özündən qabaq isbat olunmuş təkliflərə və qəbul edilmiş aksiomlara əsasən isbat edilən təkliflərdir.

Hər bir teorem iki hissədən ibarətdir: *şərt* və *nəticə (hökm)*. Teoremdə anlayışın verilən xassəsini ifadə edən hissəsinə şərt, isbatı tələb edilən xassəni ifadə edən hissəsinə isə nəticə deyilir. Beləliklə, hər bir teoremi ümumi şəkildə aşağıdakı kimi söyləmək olar: "Bir anlayışın "A" xassəsi varsa, onda o anlayışın "B" xassəsi var". Teoremlərə aid bir neçə misal göstərək:

1) Dördbucaqlı paraleloqram olarsa, onun diaqonalları kəsişərək, bir-birini yarıya bölər, 2) çoxbucaqlı düzgün olarsa, onun xaricinə çevrə çəkmək

olar, 3) *a* və *b* ədədlərinin hər biri *n* ədədinə bölünərsə, onların cəmi də *n*-ə bölünür.

Söylədiyimiz birinci təklifdə "dördbucaqlının paraleloqram olması" şərtdir, "diaqonalların kəsişərək bir-birini yarıya bölməsi" isə nəticədir. İkinci təklifdə "çoxbucaqlının düzgün olması", şərt, "xaricinə çevrə çəkməyin mümkün olması" isə nəticədir.

Teoremlər *düz teorem, tərs teorem, əks teorem* və *əks tərs teorem* kimi növlərə bölünür.

Düz və tərs teorem. Bir teoremin şərtini nəticəyə və nəticəsini də şərtə çevirdikdə, alınan teoremə, birinciyə görə tərs teorem deyilir. Bu halda birinci teorem düz teorem adlanır. Başqa sözlə, verilmiş teoremin nəticəsi, başqa teoremin şərti və verilmiş teoremin şərti o biri teoremin nəticəsi olarsa, onda ikinci teoremə birincinin tərsi deyilir. Məsələn, “dördbucaqlı paraleloqram olarsa, onun diaqonalları kəsişərək, bir-birini yarıya bölər”, teoreminin tərs teoremi belədir: “dördbucaqlının diaqonalları kəsişərək, bir-birini yarıya bölürsə, o paraleloqramdır”.

Aydındır ki, bu iki teoremdən hər hansı birini düz teorem hesab etsək o birisi, buna görə tərs teorem olar.

Qeyd edək ki, bir teorem doğru olduğu halda, onun tərsi olan teorem doğru olmaya bilər.

Əks teorem. Bir teoremin həm şərti və həm də nəticəsi inkaredici şəklə salındıqda, alınan teoremə, əvvəlkinə görə əks teorem deyilir. Məsələn, “dördbucaqlı paraleloqram olarsa, onun diaqonalları kəsişərək, bir-birini yarıya bölər”, teoreminin əks teoremi belədir: “dördbucaqlı paraleloqram deyilsə, onun diaqonalları kəsişərək, bir-birini yarıya bölməz”.

Əks tərs teorem. Əks teoremdə şərt və nəticənin yerini dəyişsək alınan təklifə, düz teoremə görə əks tərs teorem deyilir.

Yuxarıda söylədiyimiz teoremin əks tərs teoremi belə olur: “dördbucaqlının diaqonalları kəsişərək, bir-birini yarıya bölmürsə, o paraleloqram deyildir”.

Qeyd edək ki, düz və əks tərs teoremlərdə eyni fikir başqa şəkillərdə ifadə olunur. Ona görə də bu iki teorem eyni zamanda ya doğru, ya da yalan olmalıdır. Bunun kimi də tərs və əks teoremlər eyni zamanda ya doğru, ya da yalan olur.

Deməli, düz teorem (təklifin ilk şəkli) və onun tərsi doğru olduqda, əks və əks tərs teoremlərin doğru olmasını isbat etməyə ehtiyac yoxdur. Bu halda deyirlər ki, teoremin nəticəsinin doğru olması üçün onun şərtinin doğruluğu zəruri və kafidir.

Teoremi isbat etmək elə mühakimə yürütmək deməkdir ki, o, teoremin nəticəsinin doğru olmasını ondan əvvəlki teorem və aksiomlara əsasən şərtdən məntiqi olaraq çıxdığını göstərsin. Deməli, mahiyyətcə teoremi isbat etmək onun şərtindən nəticəsinə məntiqi keçid və ya şərt ilə nəticə arasında müəyyən məntiqi körpü yaratmaq deməkdir. Belə məntiqi körpü yaratmaq üçün isə, hər şeydən əvvəl, teoremin şərtini və nəticəsini dəqiq bilmək və aydın təsəvvür etmək lazımdır. Buradan aydın olur ki, isbatı şərh etməyin birinci tələbi teoremin şərtini və nəticəsini aydın və dəqiq bilməkdir.

***Teoremi isbat edərkən biz şərtin ödənildiyini, yəni şərtin doğruluğunu (həqiqiliyini) qəbul edirik. Teoremin nəticəsinin doğruluğunu isə ona görə əsaslandırırıq. Buradan aydındır ki, teoremin isbatı prosesində şərtdən tamamilə (yəni neçə şərt varsa, hamısindan) istifadə etmək lazımdır. Bu isbatı şərh etməyin ikinci tələbidir.

Hər bir teoremi isbat edərkən, doğruluğunu qəbul etdiyimiz və ya qabaqcadan isbat etdiyimiz bir çox təkliflərə əsaslanırıq. Bu təkliflər isbatda apardığımız mühakimənin məntiqi əsasını təşkil edir. Beləliklə, teoremin isbatını şərh etmək üçün üçüncü tələb əsaslandığımız və doğruluğu məlum olan lazımi təklifləri bilməkdir. Dördüncü tələb, isbatı şərh edərkən təyin ediləcək anlayışı onun tərifi ilə əvəz etməkdir.

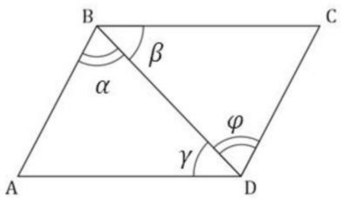
Məlumdur ki, hər bir anlayışın tərifini müxtəlif şəkillərdə söyləmək olar. İsbatı şərh edərkən işlətdiyimiz anlayışların apardığımız mühakimənin xarakterinə münasib və ya uyğun olan tərifindən istifadə etmək lazımdır. İsbatı şərh etməyin beşinci tələbi budur.

Bir sıra təkliflərin isbatını şərh edərkən bəzi anlayışların bilavasitə tərifindən deyil, onların xarakterk əlamətlərini ifadə edən təkliflərdən istifadə etmək lazım gəlir. Bu təkliflər anlayışın tərifini əvəz edir və tərifin köməkçisi rolunu oynayır. Məsələn, bir təklifi isbat edərkən, üçbucaqların bərabərliyini isabt etmək lazım gəlirsə, onda biz üçbucaqların bərabərliyi tərifinə deyil, üçbucaqların bərabərliyi əlamətlərindən birinə əsaslanırıq. Beləliklə, isbatı şərh etməyin altıncı tələbi, istifadə etdiyimiz anlayışın tərifini onun xarakterik və ya əsas əlamətini ifadə edən teoremlə əvəz etməkdir.

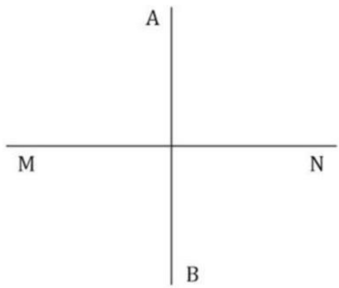
Söylədiklərimizi bir teoremin isbatında izah edək.

Teorem. *Qarşı tərəfləri bərabər olan qabarıq dördbucaqlı paraleloqramdır.*

□ Tutaq ki, *ABCD* fiquru (şəkil 66) dördbucaqlıdır və bunun qarşı tərəfləri bərabərdir: *AB=DC*, *BC=AD*. İsbat etməliyik ki, *ABCD* paraleloqramdır (bunları bilmək birinci tələbdir). Məlumdur ki, qarşı tərəfləri biri-birinə paralel olan dördbucaqlıya paraleloqram deyilir. Bu tərif göstərir ki, *ABCD*-nin paraleloqram olduğunu göstərmək üçün $AD // BC$ və $AB // DC$ olduğunu isbat etmək kifayətdir (bu söylədiyimiz dördüncü tələbə uyğundur),



Şəkil 66



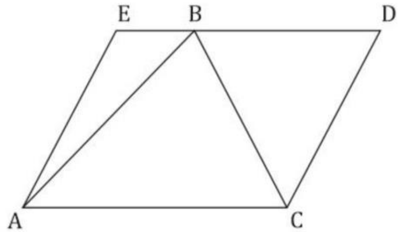
Şəkil 67

BD diaqonalını çəkdikdə iki üçbucaq alırıq, bu üçbucaqların *BD* tərəfi ortaq, *AB=DC* və *BC=AD* olduğu üçün bu üçbucaqlar bərabərdir (bu da söylədiyimiz altıncı tələbə uyğundur). Bu üçbucaqların bərabərliyindən $\alpha = \angle\varphi$ və $\beta = \angle\gamma$ olar (bu, ikinci tələbə uyğundur). Çarpaz bucaqlar bərabər olduğundan $AB // DC$ və $AD // BC$ alınır (altıncı tələb). ■

Teoremin isbatı göstərir ki, isbatı şərh edərkən söylədiyimiz tələblərə (qaydalara) əməl etdikdə isbatın mahiyyəti başa düşülür və daha yaxşı mənimsənilir.

Qeyd edək ki, bir təklifin doğru və ya yalan olması bilavasitə aşkar ola bilər. Məsələn, “paralel düz xətlərdən birinə perpendikulyar olan düz xətt, digərinə də perpendikulyardır”, “müstəvinin xaricindəki nöqtədən müstəviyə perpendikulyar və maillər çəkdikdə, perpendikulyar bütün maillərdən kiçikdir” və s. təkliflərinin doğruluğu hiss olunur. *MN* düz xəttini *AB* perpendikulyarları bir nöqtədə kəsdiyi (şəkil 67) aşkardır.

Təfəkkürün başqa bir vasitəyə əl atmadan həqiqəti dərhal aşkar etməsi bacarığına *intuisiya* deyilir. Bəziləri riyaziyyatı öyrənməyə başlarkən belə hesab edirlər ki, teoremlərin çoxu özlüyündə aşkardır və onların doğruluğuna müşahidə yolu ilə də inanmaq olar. Bu hallarda isbat nəyə lazımdır?



Şəkil 68

Belələrinə deməliyik ki, təcrübə və müşahidələr vasitəsilə çıxarılmış nəticələr bəzən səhv də ola bilər.

Məsələn, 68-ci şəkildəki kimi bərabəryanlı *ABC* üçbucağı götürsək (*AB*=*BC*) və onun üzərində göstərildiyi kimi paraleloqram qursaq, onda adama elə gəlir ki, *BC* parçası *AB*-dən uzundur.

Halbuki, belə deyildir. Deməli, müşahidə vasitəsilə çıxardığımız nəticə səhvdir.

Buradan aydındır ki, müşahidə vasitəsilə çıxarılmış hər bir nəticənin doğruluğunu mütləq yoxlamaq lazımdır. Bu isə hər bir teoremin doğruluğunu müəyyən əsaslar üzərində isbat etmək lazım olduğunu göstərir.

Qeyd edək ki, hər bir teoremi müxtəlif yollarla isbat etmək olar.

Müəyyən təklifi isbat etmə prosesi bir-birindən alınan və zəncir kimi bağlanan təkliflərdən ibadətdir. Müxtəlif ardıcıllıqla düzməklə riyaziyyatda bu təkliflərin müxtəlif isbat metodları alınır. Elementar riyaziyyatda əsasən, aşağıdakı isbat metodları işlənir: analiz, sintez, əksini fərz etmə və ya ziddiyyətə gətirmə metodu və riyazi induksiya metodu.

İndi bu isbat metodlarının hər biri ilə qısaca tanış olaq.

Analiz və sintez. Yuxarıda dedik ki, teoremi isbatetmək elə məntiqi mühakimə deməkdir ki, teoremin nəticəsinin olmasını əvvəlcədən məlum olan təkliflərə əsasən şərtdən məntiqi olaraq çıxdığını gstərsin. Burada iki cür hərəkət etmək olar:

1. İsbat ediləcək təklifdən (nəticədən) başlayıb, mühakimənin sonunda, doğruluğu əvvəldən məlum olan təklifə (və ya şərtə) gəlib çıxmaq olar. Bu halda məchul təklifdən məluma keçirik. Belə mühakiməyə *analiz* deyilir.

2. Doğruluğu əvvəldən məlum olan təkliflərdən başlayıb, mühakimənin sonunda ediləcək təklifə (nəticəyə) gəlib çıxmaq olar. Bu halda məlum təklifdən məchula keçirik. Bu mühakiməyə *sintez* deyilir.

Söylədiyimiz analiz və sintez isbat metodlarını aşağıdakı sadə misal üzərində izah edək.

Teorem. *Bir-birindən fərqli iki müsbət a və b ədədlərinin ədədi ortası onların həndəsi ortasından böyükdür.*

$$\frac{a+b}{2} > \sqrt{ab}\ ?$$

□ Əvvəlcə bu teoremi analiz metodu ilə isbat edək. Bu məqsədlə isbat ediləcək təklifdən başlayaq:

$$\frac{a+b}{2} > \sqrt{ab}.$$

Biz bu bərabərliyin doğruluğunu bilmirik. Buna görə də yanında sual işarəsi qoymuşuq. Bu bərabərsizliyin hər iki tərəfini müsbət 2 ədədinə vursaq

$$a+b > 2\sqrt{ab}$$

Bərabərsizliyi alınar. Biz bu bərabərsizliyin də doğru olduğunu bilmirik. Axırıncı bərabərsizliyi

$$a - 2\sqrt{ab} + b > 0$$

və ya

$$\left(\sqrt{a}\right)^2 - 2\sqrt{a}\cdot\sqrt{b} + \left(\sqrt{b}\right)^2 > 0$$

kimi yaza bilərik.

Buradan

$$\left(\sqrt{a} - \sqrt{b}\right)^2 > 0\,.$$

alınır. Nəticədə aldığımız $\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2>0$ bərabərsizliyi aşkardır, yəni doğruluğu məlumdur. Axırıncı bərabərsizliyin doğruluğundan çıxır ki, ondan əvvəl yazılmış bərabərsizlik də həqiqətdir. Bu qayda ilə hərəkət etsək isbat edəcəyimiz bərabərsizliyin doğru olduğuna inana bilərik. Beləliklə, analiz metodu ilə teoremi isbat etmiş oluruq.

İndi teoremi sintez yolu ilə isbat edək. Bu məqsədlə şərtə nəzər salaq: $a>0$, $b>0$ və $a\neq b$.

Bu şərtdən çıxır ki,

$$\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2>0$$

bərabərsizliyi doğrudur. Bu bərabərsizlikdən

$$a-2\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}+b>0$$

və eləcə də

$$a+b>2\sqrt{ab}$$

bərabərsizliyini alarıq. İndi aldığımız bərabərsizliklər də həqiqətdir. Çünki biz bu bərabərsizlikləri riyaziyyatın məlum qaydalarını tətbiq etməklə almışıq. Axırıncı bərabərsizlikdən isbatı tələb olunan

$$\frac{a+b}{2}>\sqrt{ab}.$$

təklifinin doğru olması çıxır. Beləliklə, sintez metodu ilə teorem isbat olunur. ■

Söylədiklərimizi sxem üzrə yazaq.

Analiz üsulu ilə isbat:

$$\frac{a+b}{2}>\sqrt{ab},$$

$$a+b>2\sqrt{ab},$$

$$a-2\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}+b>0,$$

$$\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2>0.$$

Sintez üsulu ilə isbat:

$$\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2>0,$$

$$a-2\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}+b>0,$$

$$a+b>2\sqrt{ab},$$

$$\frac{a+b}{2}>\sqrt{ab}.$$

Analiz və sintezin bir-birinin əksi kimi görünməsi tamamilə zahiridir. Əslində onlar bir vəhdət təşkil edirlər və isbat prosesində bir-birini tamamlayırlar.

Riyazi təklifləri isbat edərkən bu metodların ikisindən də eyni dərəcədə istifadə etmək olar.

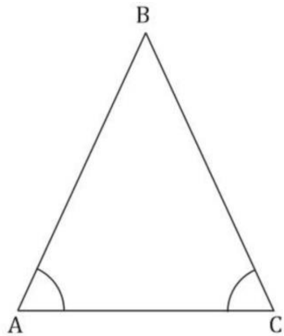
Əksini fərzetmə və ya ziddiyyətə gətirmə metodu. Tutaq ki, şərti A və nəticəsi B olan təklifi isbat etmək tələb olunur. $A \to B$ (A-nın doğruluğundan B alınır). Bu təklifi əksini fərzetmə üsulu ilə isbat etmək üçün B-nin doğru olmadığı fərz olunur və bu yeni təklifdən məntiqi mühakimə vasitəsilə yeni təkliflər alınır. Bu zaman alınan bir təklif A şərtinə və ya doğruluğu qabaqcadan məlum olan başqa bir təklifə zidd olarsa, fərziyəmizin mümkün olmadığı aşkar olur. Bu isə isbatı tələb olunan təklifin doğru olduğunu göstərir.

Söylədiklərimizi bir teoremin isbatında göstərək.

Teorem. *Hər hansı üçbucaqda bərabər bucaqlar qarşısındakı tərəflər bərabər olur.*

□ Bu teoremi əksini fərzetmə metodu vasitəsilə isbat edək.

Tutaq ki, ABC üçbucağında A və C bucaqları bərabərdir:



Şəkil 69

$$\angle A = \angle C$$

İsbat edək ki, $AB=BC$ olar (şəkil 69).

Bunun əksinə, fərz edək ki, AB və BC tərəfləri bərabər deyildir: $AB \neq BC$. Bu halda ya $AB > BC$ və ya $AB < BC$ olmalıdır.

$AB > BC$ olduqda, qabaqcadan məlum olan "hər hansı üçbucaqda böyük tərəf qarşısında böyük bucaq olur" teoreminə görə

$$\angle C > \angle A$$

olar. Bu isə teoremdə verilmiş $A = \angle C$ şərtinə ziddir.

Eyni qayda ilə də göstərmək olar ki, $AB < BC$ olması ziddiyyətə gətirir.

Deməli, $AB \neq BC$ olduğunu fərz etmək olmaz. Buradan da $AB = BC$ olduğu alınır. ■

Riyaziyyatda işlədilən "*tam olmayan induksiya*" və "*tam induksiya*" isbat metodlarını çoxları qarışdırır. Bunun üçün əvvəlcə onları izah edək.

Fərz edək ki, verilmiş $A_1, A_2, \ldots, A_n$ halları üçün hər hansı B təklifinin doğru olmasını isbat etmək tələb olunur. Bu zaman yalnız bir neçə xüsusi B

təklifinin doğru olduğunu yoxlamaqla bütün hallar üçün ümumi nəticə çıxarmağa “tam olmayan induksiya” metodu deyilir.

Belə bir sual qarşıya çıxır: tam olmayan induksiya vasitəsilə göstərdiyimiz kimi çıxarılan ümumi nəticə həmişə doğrudurmu? Əlbəttə, yox! Tam olmayan induksiya vasitəsilə çıxarılan ümumi hökm doğru olmaya da bilər. Bunu bəzən nəzərə almırlar və ona görə də səhv edirlər.

Tam olmayan indukksiyanın bu cəhətini nəzərə almayan böyük riyaziyyatçıların da, bəzən, səhv etdikləri tarixdə məlumdur.

Məsələn, XVII əsrin məşhur fransız riyaziyyatçısı Ferma tam olmayan induksiya vasitəsilə belə səhv bir nəticə çıxarmışdır: “*n*-in bütün qiymətlərində $2^{2^n}+1$ ifadəsinin qiymətləri sadə ədəddir”. *n*-in $n=1$, 2, 3 və 4 qiymətlərində $2^{2^n}+1$ ifadəsinin qiyməti doğrudan da sadə ədəddir. lakin eyler göstərmişdir ki, $n=5$ qiymətində $2^{2^5}+1$ ədədi 641 ədədinə bölünür, yəni $2^{2^5}+1$ ədədi mürəkkəb əddədir.

Tam induksiya vasitəsilə çıxarılan nəticə isə həmişə doğru olur. Tam induksiya metodu belədir: verilmiş $A_1, A_2, \ldots, A_n$ halları üçün *B* təklifinin doğruluğunu isbat etdikdə bütün hallarda *B*-nin doğruluğu ayrıca yoxlanılır. Beləliklə, çıxarılan ümumi nəticə həmişə həqiqət olur.

Tutaq ki, istənilən üçbucaq üçün bir təklifin (məsələn, kosinuslar teoreminin) doğruluğunu isbat etmək lazımdır. Məlumdur ki, bütün üçbucaqları üç qrupa bölmək olar: itibucaqlı, düzbucaqlı, korbucaqlı üçbucaqlar. Bu halların hər biri üçün tələb olunan təklifi isbat etsək, onda həmin təklifin bütün bucaqlar üçün doğru olmasını hökm edə bilərik. Belə hökm tam induksiya vasitəsilə çıxarılmış olur.

Lakin bu üç qrupun ikisi üçün doğruluğunu yoxladığımız və tam olmayan induksiya ilə çıxarılmış nəticə, bütün üçbucaqlar çoxluğu üçün doğru olmaya da bilər.

Bir çox riyazi təklifləri isbat etmək üçün işlədilən riyazi induksiya metodu (və ya tam riyazi induksiya metodu) tam riyazi induksiya prinsipi adlanan aşağıdakı aksioma əsaslanır:

“Hər hansı təklif *m* natural ədədi üçün doğrudursa və onun $n(n>m)$ natural ədədi üçün doğruluğunu fərz etdikdə, $n+1$ natural ədədi üçün doğruluğunu isbat etmək olursa, onda həmin təklif m-dən kiçik olmayan istənilən natural ədəd üçün doğrudur”

Xüsusi halda, bu aksiomda $m=1$ də ola bilər.

Misal olaraq aşağıdakı teoremi riyazi induksiya metodu ilə isbat edək.

Teorem. *Həndəsi silsilənin* a_n *həddi onun birinci* a_1 *həddi ilə silsilə üçün sabit olan q ədədinin (ortaq vuruğun)(n-1)dərəcədən qüvvətinin hasilinə bərabərdir,* yəni:

$$a_n = a_1 q^{n-1}$$

bərabərliyi doğrudur.

□ Bu təklifin $n=1$ üçün doğruluğu aşkardır:

$$a_1 = a_1 q^{1-1}.$$

İndi fərz edək ki, bu təklif n üçün doğrudur:

$$a_n = a_1 q^{n-1}$$

İsbat edək ki, buradan həmin təklifin $n+1$ üçün doğruluğu çıxır. Bu məqsədlə axırıncı bərabərliyin hər iki tərəfini q ədədinə vuraq:

$$a_n q = a_1 q^{n-1} \cdot q .$$

Buradan, həndəsi silsilənin tərifinə görə

$$a_{n+1} = a_n \cdot q$$

olduğundan

$$a_{n+1} = a_1 \cdot q^n$$

olar. Deməli, isbat edilən təklif $n+1$ üçün doğrudur.

Buradan riyazi induksiya prinsipinə görə, teoremin doğruluğu aşkardır. ■

ÇALIŞMALAR

1. Düz xətt üzərində ardıcıl olaraq $AB=3$ sm, $BC=5$ sm, $CD=4$ sm parçaları ayrılmışdır. AB və CD parçalarının orta nöqtələri arasındakı məsafəni tapın.

2. Düz xətt üzərində götürülmüş A nöqtəsindən bir tərəfdə $AB=60$ mm və $AC=100$ mm parçaları ayrılmışdır. a) BC parçasının uzunluğunu; *b*) A nöqtəsindən BC parçasının orta nöqtəsinə qədər olanməsafəni; v) AB və AC parçalarının orta nöqtələri arasındakı məsafəni tapın.

3. Düz xətt üzərində götürülmüş A nöqtəsindən əks istiqamətlərdə $AB=6$ sm. $AC=5$ sm parçaları ayrılmışdır: a) BC parçasının uzunluğunu; b) A nöqtəsindən BC parçasının orta nöqtəsinə qədər olan məsafəni; v) AB və AC parçalarının orta nöqtələri arasındakı məsafəni tapın.

4. AB parçası bərabər olmayan iki hissəyə bölünmüşdür. Bu hissələrin orta nöqtələri arasındakı məsafə a olarsa, AB parçasının uzunluğunu tapın.

5. Qonşu bucaqlardanbiri o birindən $1\frac{1}{3}d$ qədər böyükdür. Bu bucaqların hər birinin qiymətini tapın.

6. Qonşu bucaqlardan biri o birindən 3 dəfə böyükdür. Bu bucaqlardan hər birinin qiymətini tapın.

7. Qonşu bucaqlardan biri o birinin 20 %-ni təşkil edir. bu bucaqların hər birinin qiymətini tapın.

8. İki qonşu bucağın tənbölənlərinin əmələ gətirdiyi bucağın qiymətini tapın.

9. Qonşu bucağından n dəfə böyük olan bucağın qiymətini tapın.

10. Birinin $\frac{1}{3}$-i o birinin $\frac{1}{5}$-nə bərabər olan qonşu bucaqların hər birinin qiymətini tapın.

11. İki düz xəttin kəsişməsindən alınan bucaqlardan birinin 0,6 d-yə bərabər olduğunu bilərik, qalan bucaqları tapın.

12. İki düz xəttin əmələ gətirdiyi qarşılıqlı bucaqlardan ikisinin cəminin $\frac{8}{9}d -$yə bərabər olduğunu bilərək, alınan bucaqların hər birinin qiymətini tapın.

13. İki kəsişən düz xəttin əmələ gətirdiyi dörd bucaqdan üçünün cəmi $2{,}5d$ -yə bərabər olarsa, onların hər birinin qiymətini tapın.

14. Qiyməti 1,2d olan ABC bucağının təpəsindən onun tənbölləninə MN perpendikulyarı keçirilmişdir. MN düz xətti ilə ABC bucağı tərəflərinin əmələ gətirdiyi bucaqları tapın.

15. 27° -yə, 135° -yə bərabər olan qövslər çevrənin hansı hissələridir?

TESTLƏR

1. Şua 144°-li bucağı dərəcə ölçülərinin nisbəti $5:7$ olan bucaqlara bölür. Böyük bucağı tapın.

A) 74° B) 84° C) 102° D) 88° E) 92°

2. Qonşu bucaqlardan biri digərindən 3 dəfə kiçikdir. Böyük bucağı tapın.

A) 74° B) 84° C) 102° D) 88° E) 92°

3. *C* nöqtəsi *AB* parçasını 3:7 nisbətində bölür. *CB*=70 sm olarsa, *AB*-ni tapın.

A) 75 B) 95 C) 105 D) 80 E) 100

4. *M* nöqtəsi *AB* parçasını iki bərabər hissəy bölür. *C* isə *M* ilə *B*-nin arasında yerləşir, *AC*=12 sm, *BC*=6 sm olarsa, *MC*-ni tapın.

A) 3 sm B) 5 sm C) 4 sm D) 2 sm E) 1 sm

5. Çevrənin 0,35 hissəsinə bərabər olan qövsündərəcə ölçüsünü tapın.

A) 130° B) 120° C) 126° D) 125° E) 140°

6. Bucağa qonşu olan iki bucağın cəmi 270°-yə bərabərdir. Bu bucağı tapın.

A) 70° B) 84° C) 102° D) 88° E) 92°

7. İki düz xəttin kəsişməsindən əmələ gələn bucaqlardan ikisinin cəmi 100°-dir. Bu bucaqları tapın.

A) 40°, 60° B) $30^\circ, 70^\circ$ C) $45^\circ, 55^\circ$ D) $20^\circ, 80^\circ$ E) $50^\circ, 50^\circ$

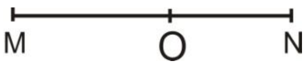
8. Şəkildə verilənlərə görə *x* bucağını tapın:

A) 145° B) 120° C) 80° D) 90° E) 100°

9. Uzunluğu 36 sm olan parça üç müxtəlif hissəyə bölünüb. Ortadakı parçanın uzunluğu 8 sm olarsa, kənarlardakı parçaların ortaları arasındakı məsafə neçə santimetrdir?

10. Uzunluğu 80 sm olan *MN* parçası üçün uyğunluğu müəyyən edin.

1. *MO*-nun uzunluğu *ON*-in uzunluğundan 50 % böyükdür.



a. *MO*=60 sm

b. *ON*=50

2. *MO*-nun uzunluğu *ON*-in uzunluğundan 3 dəfə böyükdür.
c. *MO*=20
3. *MO*-nun uzunluğu *ON*-in uzunluğundan 40 % kiçikdir.
d. *ON*=32 sm
e. *MO*=30

VIII FƏSİL

ÜÇBUCAQLAR

§ 39. ÇOXBUCAQLI HAQQINDA ANLAYIŞ. ÇOXBUCAQLININ PERİMETRİ

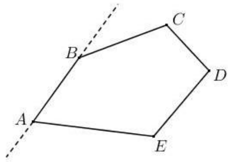
Qapalı sınıq xəttin əmələ gətirdiyi fiqura *çoxbucaqlı* deyilir (şəkil 70). Çoxbucaqlıyı əmələ gətirən sınıq xəttin tərəf və təpələri uyğun olaraq çoxbucaqlının *tərəf* və *təpələri* adlanır.

İki qonşu tərəfin əmələ gətirdiyi bucağa *çoxbucaqlının daxili bucağı* deyilir. Bundan sonra xüsusi qeyd edilmədikdə çoxbucaqlının bucağı dedikdə onun daxili bucağını başa düşəcəyik.

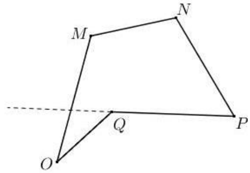
Çoxbucaqlının bütün tərəflərinin uzunluqlarının cəminə onun *perimetri* deyilir və adətən P hərfi ilə işarə olunur:

$$\cdot P = AB + BC + CD + DE + EA$$

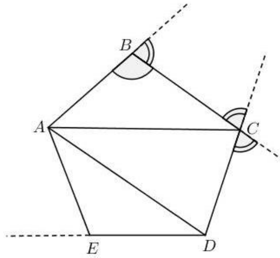
Çoxbucaqlının ixtiyari tərəfini uzatdıqda, çoxbucaqlı bu düz xəttin bir tərəfində yerləşərsə, ona *qabarıq çoxbucaqlı* deyilir (şəkil 70). Başqa sözlə, qabarıq sınıq xətlə hüdudlanmış çoxbucaqlıya qabarıq çoxbucaqlı deyilir. 71-ci şəkildəki çoxbucaqlı bu şərti ödəmədiyi üçün qabarıq çoxbucaqlı deyil. Xüsusi olaraq qeyd olunmadıqda yalnız qabarıq çoxbucaqlıları öyrənəcəyik.



Şəkil 70



Şəkil 71



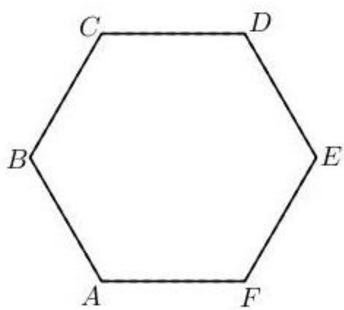
Şəkil 72

Qonşu olmayan istənilən iki təpəni birləşdirən düz xətt parçasına çoxbucaqlının *diaqonalı* deyilir (şəkil 72-də AC və AD).

Çoxbucaqlının daxili bucağı ilə qonşu olan bucağa onun *xarici bucağı* deyilir.

Tərəflərinin sayından asılı olaraq çoxbucaqlılara ad verilir. Məsələn, üçbucaqli, dördbucaqlı, beşbucaqlı və s.

Tərəfləri və bucaqları, bərabər olan çoxbucaqlıya *düzgün çoxbucaqlı* deyilir (şəkil 73). Şəkildə $AB = BC = CD = DE = EF = FA$ və $\angle A = \angle B = \angle C = \angle D = \angle E = \angle F$ olduğundan $ABCDEF$ çoxbucaqlısı düzgün altıbucaqlıdır.



Şəkil 71

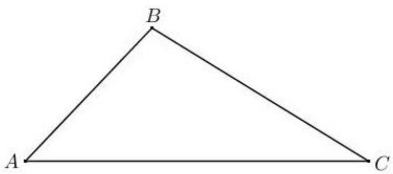
Qabarıq çoxbucaqlının hər bir təpəsində bir daxili bucaqla qonşu olan iki bərabər xarici bucaq yerləşir.

§ 40. ÜÇBUCAQ və ONUN ELEMENTLƏRİ

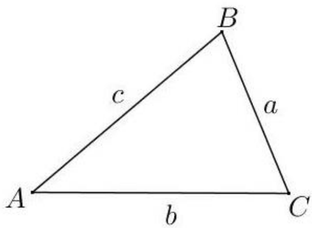
Çoxbucaqlının tərəflərinin sayı üç olduqda ona *üçbucaq* deyilir. Üçbucağa, bir düz xətt üzərində olmayan üç nöqtəni ardıcıl olaraq düz xətt parçaları ilə birləşdirildikdə alınan fiqur kimi də tərif vermək olar (şəkil 74).

Üçbucaq, onun təpələrində qoyulmuş üç hərflə oxunur. Yazıda "üçbucaq" sözü Δ işarəsi ilə göstərilir. Məsələn, ΔABC. Bəzən üçbucağın tərəflərini, onun qarşısında duran bucağa uyğun, kiçik hərflərlə də işarə edirlər (şəkil 75).

Üçbucağın hər hansı tərəfini uzatsaq, onun daxili bucağı ilə qonşu olan bucaq alarıq ki, bu bucağa üçbucağın *xarici bucağı* deyilir (şəkil 76). Üçbucağın hər bir təpəsində daxili bucaqla qonşu olan iki xarici bucaq var. Məsələn, A bucağının qonşu bucaqları 1 və 2 bucaqlarıdır.

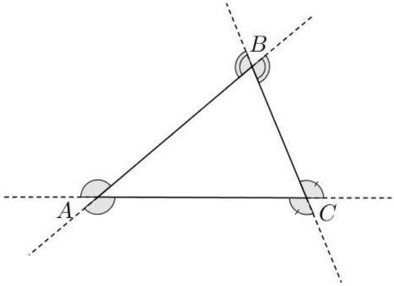


Şəkil 74

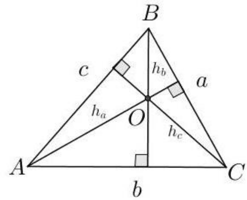


Şəkil 75

Üçbucağın hər hansı təpəsindən çıxan və bu təpənin qarşısındakı tərəfə perpendikulyar olan düz xətt parçasına *üçbucağın hündürlüyü* deyilir və uyğun olaraq h_a, h_b, h_c ilə işarə olunur (şəkil 77). Üçbucağın hündürlüyü onun xaricinə də düşə bilər (şəkil 78). Üçbucaqda hündürlük çəkilən tərəfə *oturacaq* deyəcəyik.



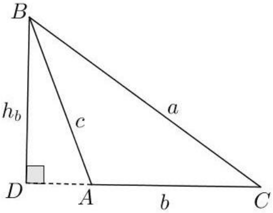
Şəkil 76



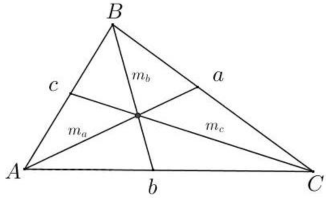
Şəkil 77

Üçbucağın hər hansı təpəsini qarşısındakı tərəfin orta nöqtəsini birləşdirən düz xətt parçasına *üçbucağın medianı* deyilir və uyuğun olaraq m_a, m_b və m_c ilə işarə olunur (şəkil 79).

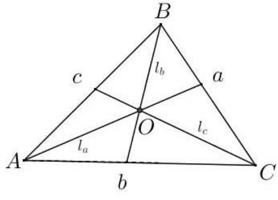
Üçbucağın hər hansı bucağını yarı bölüb, təpəni qarşıdakı tərəfilə birləşdirən düz xətt parçasına *üçbucağın tənböləni* deyilir və uyğun olaraq l_a, l_b, l_c ilə işarə olunur (şəkil 80).



Şəkil 78



Şəkil 79



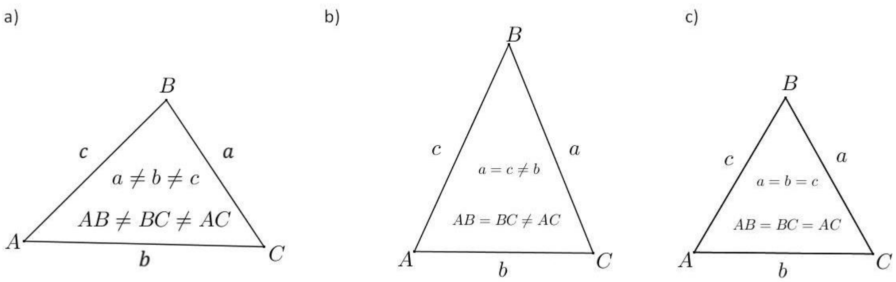
Şəkil 80

Üçbucağın bucaqları, tərəfləri, hündürlükləri, medianları və tənbölənləri onun *elementləri* adlanır. Bunlardan, altısı-üç tərəf və üç bucaq *əsas elementlərdir.*

§ 41. ÜÇBUCAĞIN NÖVLƏRİ. ÜÇBUCAQ BƏRABƏRSİZLİYİ

Tərəflərinin uzunluqları müxtəlif olan üçbucağa *müxtəlif tərəfli üçbucaq* deyilir (şəkil 81, *a*).

Iki tərəfinin uzunluğu bərabər olan üçbucağa *bərabəryanlı* (şəkil 81, *b*), hər üç tərəfinin uzunluğu bərabər olan üçbucağa isə *bərabərtərəfli* (və ya *düzgün*) *üçbucaq* deyilir (şəkil 81, c).

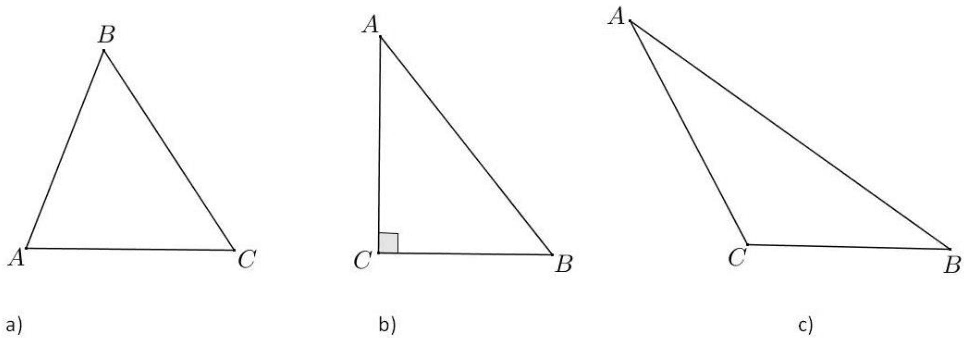


Şəkil 81

Bütün bucaqları iti olan üçbucağa *itibucaqlı üçbucaq* deyilir (şəkil 82, *a*).

Bucaqlarından biri düz olan üçbucağa *düzbucaqlı* (şəkil 82, *b*), bucaqlarından biri kor olan üçbucağa isə *korbucaqlı üçbucaq* deyilir (şəkil 82, c).

Düzbucaqlı üçbucaqda (şəkil 82, b) düz bucaq qarşısındakı tərəf *hipotenuz*, düzbucağa bitişik tərəflər isə *katet* adlanır. Üçbucağın tərəfləri arasında əlaqəni verməzdən əvvəl məsafənin aşağıdakı əsas xassələrini (aksiomlarını) qeyd edək.



Şəkil 82.

Xassə 1. *A və B nöqtələri arasındakı məsafə, bu nöqtələr müxtəlif olduqda müsbət ədədə, üst-üstə düşdükdə isə sıfra bərabərdir, yəni* $A \neq B$ *olduqda* $AB > 0$ *və A=B olduqda AB=0 olur.*

Xassə 2. *İstənilən A və B nöqtələri üçün A-dan B-yə qədər məsafə B-dən A-ya qədər məsafəyə bərabərdir:*

$$AB=BA$$

Xassə 3. *İstənilən A, B, C nöqtələri üçün AC məsafəsi AB və BC məsafələri cəmindən böyük deyil:*

$$AC \leq AB + BC$$

Məsafənin əsas xassələrindən istifadə edərək aşağıdakı təklifləri isbat edək.

Teorem 1. *İstənilən A, B, C nöqtələri üçün AC məsafəsi AB və BC məsafələri fərqindən kiçik deyil:*

$$AC \geq AB - BC$$

□ Məsafənin üçüncü xassəsinə görə:

$$AB \leq BC + AC.$$

Buradan da $AC \geq AB - BC$ alınır. ■

Tərif. *A, B* və *C* nöqtələri üçün $AC + CB = AB$ olarsa, *C* nöqtəsi *A* və *B* nöqtələri arasında yerləşir deyilir.

Teorem 2. (Üçbucaq bərabərsizliyi). *Bir düz xətt üzərində olmayan istənilən A, B və C nöqtələri üçün AC məsafəsi AB və BC məsafələrinin cəmindən kiçikdir:*

$$AC < AB + BC$$

(1)

□ Tutaq ki, *A, B və C* nöqtələri bir düz xətt üzərində yerləşmir, yəni bir üçbucaq təyin edir. (şəkil 81, *a*). Məsafənin üçüncü xassəsinə görə

$$AC \le AB + BC \, .$$

Bu o deməkdir ki, ya $AC < AB + BC$, ya da $AC = AB + BC$. Lakin $AC = AB + BC$ ola bilməz, çünki *A, B* və *C* nöqtələri bir düz xətt üzərində deyil. Deməli,

$$AC < AB + BC$$

olmalıdır. ■

İsbat etdiyimiz (1) bərabərsizliyi *üçbucaq bərabərsizliyi* adlanır.

Nəticə. *Üçbucağın bir tərəfi onun iki tərəfinin cəmindən kiçik, fərqindən isə böyükdür.*

Adətən məsələ həlli zamanı böyük tərəf kiçik tərəflərin cəmi ilə müqayisə olunur.

Məsələ. Tərəflərinin uzunluqları a) *AB*=20 sm, *BC*=20 sm, *AC*=1,5 dm olan üçbucaq ola bilərmi?

○ a) Verilmiş tərəflərin uzunluqlarına əsasən $BC < AB + AC$ yəni $25 < 20 + 15$ olduğundan tərəfləri *AB*=20 sm, *BC*=25 sm, *AC*=15 sm olan üçbucaq vardır.

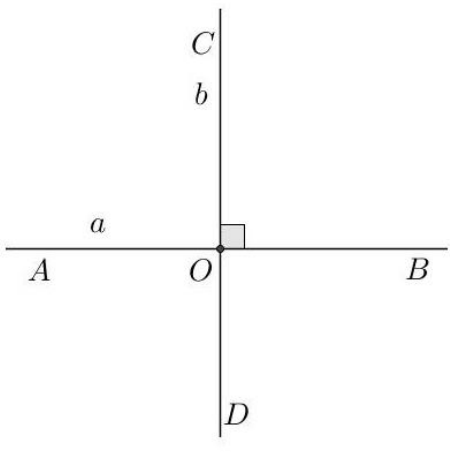
b) Əvvəlcə tərəflərin uzunluqlarını eyni ölçü vahidinə gətirək: AB=5 dm=50 sm, BC=20 sm, AC=1,5 dm=15 sm. $50 > 20 + 15$, yəni $AB < BC + AC$ şərti pozulduğundan tərəflərinin uzunluğu AB=5 dm, BC=20 sm, AC=1,5 dm olan üçbucaq yoxdur. ●

§ 42. DÜZXƏTLƏRİN PERPENDİKULYARLIĞI. PERPENDİKULYARIN ƏSAS XASSƏSİ

Tutaq ki, *a* və *b* düz xətləri kəsişir. Kəsişmədə alınan dörd bucaqdan birini α ilə işarə edək (şəkil 83). Aydındır ki, qalan bucaqlar α bucağı ilə ya qonşu, yaxud da qarşılıqlı bucaqlardır. α düz bucaq olarsa, o biri bucaqlar da düz bucaq olacaqdır. Bu halda deyilir ki, *a* və *b* düz xətləri düz bucaq altında kəsişir.

Tərif. Kəsişərək düz bucaq əmələ gətirən düz xətlərə *qarşılıqlı perpendikulyar düz xətlər* deyilir.

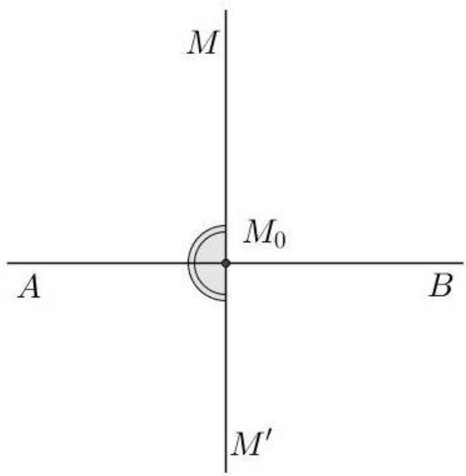
Düz xətlərin perpendikulyarlığı " $\perp$ " ilə işarə olunur. Məsələn, $a \perp b$ və ya $AB \perp CD$ (belə oxunur *a* düz xətti *b* düz xəttinə perpendikulyardır).



Şəkil 83

Teorem (perpendikulyarın xassəsi). *Düz xətt xaricindəki nöqtədən həmin düz xəttə ancaq bir perpendikulyar düz xətt çəkmək olar.*

□ AB düz xətti və onun üzərində olmayan M nöqtəsi götürüb (şəkil 84), şəkili AB düz xətti boyunca elə qatlayaq ki, M nöqtəsi M' vəziyyətini alsın. M nöqtəsini M' nöqtəsi ilə birləşdirək. MM' düz xətt parçasının AB düz xətti ilə kəsişdiyi nöqtə M_0 olsun. Göstərək ki, $AB \perp MM'$. Doğrudan da M_0 nöqtəsi tərpənməz qalmaqla şəkli ikinci dəfə elə qatlayaq ki, M nöqtəsi M' nöqtəsi üzərinə düşsün. Onda $\angle MM_0B = \angle BM_0M'$ olacaqdır. Bu bucaqlar isə qonşu bucaqlardır. Qonşu bucaqlar düz bucaq olduqda bir-birinə bərabər olduğundan MM' ilə AB düz bucaq altında kəsişirlər, yəni $AB \perp MM'$ olar. Qurmadan aydındır ki, bu perpendikulyar yeganədir. ■



Şəkil 84

Nöqtədən düz xəttə çəkilmiş perpendikulyar əvəzinə, bəzən nöqtədən bu düz xəttə perpendikulyar endirilmişdir də deyilir. *M* nöqtəsindən *AB* düz xəttinə endirilmiş perpendikulyarın bu düz xətti kəsdiyi M_0 nöqtəsinə perpendikulyarın oturacağı deyilir.

Oxşar qayda ilə isbat etmək olar ki, düz xətt və onun üzərindəki nöqtədən də bu düz xəttə ancaq bir perpendikulyar qaldırmaq olar.

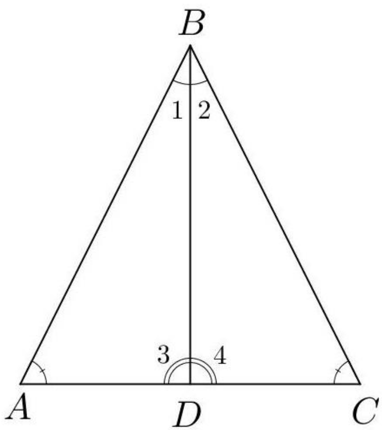
§ 43. BƏRABƏRYANLI ÜÇBUCAĞIN XASSƏSİ

Tutaq ki, *ABC* bərabəryanlı üçbucaq (*AB*=*BC*), *BD* isə tənböləndir (şəkil 85).

Teorem. *Bərabəryanlı üçbucaqda təpə bucağın tənböləni, eyni zamanda həm median, həm də hündürlükdür.*

□ Şərtə görə *BD* tənbölən olduğundan $\angle 1 = \angle 2$. Onda şəkil müstəvisini *BD* düz xətti boyunca qatlasaq, *BC* tərəfi *BA*, *C* nöqtəsi isə *A* üzərinə düşəcəkdir. (şərtə *BC*=*BA*). Nəticədə ΔBDC və ΔBDA üst-üstə düşəcəkdir. Odur ki,

$$DA = DC;\ \angle 3 = \angle 4;\ \angle A = \angle C$$



Şəkil 85

olur. *DA=DC* olmasından çıxır ki, *BD* parçası *ABC* üçbucağının medianıdır. $\angle 3 = \angle 4$ və bu bucaqların qonşu bucaqlar olduğunu nəzərə alsaq, $BD \perp AC$ olar, yəni *BD* parçası *ABC* üçbucağının hündürlüyüdür. ■

Nəticə 1. *Bərabəryanlı üçbucaqda oturacağa bitişik bucaqlar bir-birinə bərabərdir.*

Nəticə 2. *İki bucağı bərabər olan üçbucaq bərabəryanlıdır.*

Nəticə 3. *Bərabərtərəfli üçbucağın bütün daxili bucaqları bir-birinə bərabərdir.*

Məsələ. Bərabəryanlı üçbucağın perimetri 25 sm, oturacağı isə yan tərəfindən 5 *sm* qısadır. Üçbucağın tərəflərini tapın.

○ 85-ci şəklə əsasən $P = AB + BC + CA = 25$ sm yazmaq olar. Şərtə görə *AB=BC* və $CA = AB - 5$. Odur ki, $AB + AB + AB - 5 = 25$;

$$3AB = 30 \text{ və } AB = 10\,sm.$$

Digər tərəfdən

$$CA = AB - 5 = 10 - 5 = 5,$$

yəni $CA = 5\,sm$ alınır. ●

§ 44. ÜÇBUCAQLARIN BƏRABƏRLİK ƏLAMƏTLƏRİ

Tərif. Bir-birinin üzərinə qoyduqda üst-üstə düşən fiqurlara *bərabər fiqurlar* deyilir.

Fiqurların bərabərliyinin aşağıdakı xassələri vardır:

1. *Hər bir fiqur özünə bərabərdir:* $F = F$ (refleksivlik xassəsi).

2. F_1 *fiquru* F_2 *fiquruna bərabərdirsə, onda* F_2 *fiquru da* F_1 *fiquruna bərabərdir* (simmetriklik xassəsi): $F_1 = F_2$ *olarsa, onda* $F_2 = F_1$.

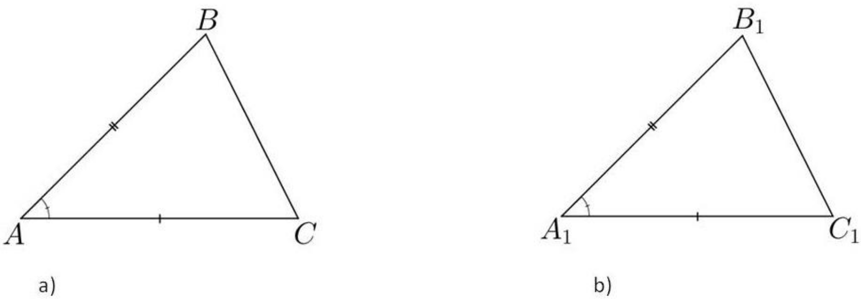
3. F_1 *fiquru* F_2 *fiquruna,* F_2 *fiquru da* F_3 *fiquruna bərabərdirsə, onda* F_1 *fiquru* F_3 *fiquruna bərabərdir* (tranzitivlik xassəsi).

Yuxarıdakı tərifdən çıxır ki, iki üçbucaq bərabərdirsə, onların uyğun bucaqları və uyğun tərəfləri bir-birinə bərabərdir.

İki üçbucağın bərabərliyini müəyyən etmək üçün, onların bütün tərəf və bucaqlarının bərabərliyini deyil, bəzi əsas elementlərinin bərabərliyini göstərmək kifayətdir. Bu baxımdan üçbucaqların bərabərliyinin aşağıdakı üç əlaməti vardır.

Teorem 1 (I əlamət). *Bir üçbucağın iki tərəfi və bu tərəflər arasındakı bucaq, uyğun olaraq o biri üçbucağın iki tərəfi və bu tərəflər arasındakı bucağa bərabərdirsə onda bu üçbucaqlar bərabərdir.*

□ Fərz edək ki, ΔABC və $\Delta A_1B_1C_1$ verilmişdir (şəkil 86) və $AB = A_1B_1$, $AC = A_1C_1$, $\angle A = \angle A_1$. İsbat edək ki, $\Delta ABC = \Delta A_1B_1C$. ABC üçbucağını, A təpə



Şəkil 86

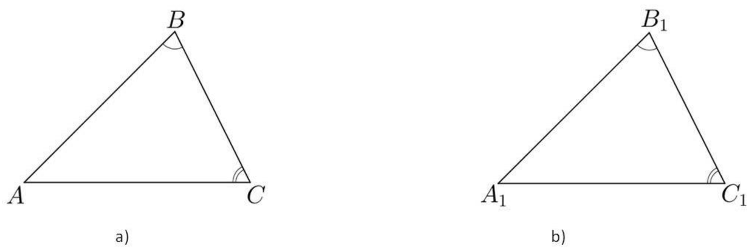
nöqtəsi A_1-in, AC tərəfi A_1C_1-in üzərinə düşmək şərtilə $A_1B_1C_1$ üçbucağı üzərinə qoyaq. Şərtə görə $AC = A_1C_1$ olduğu üçün C nöqtəsi C_1 -in üzərinə düşəcəkdir.

Digər tərəfdən $\angle A = \angle A_1$ olduğu üçün *AB* tərəfi *A₁B₁* tərəfi boyunca gedəcək və *AB*= A_1B_1 olduğundan, *B* nöqtəsi B_1 -in üzərinə düşəcəkdir. Onda *BC* tərəfi B_1C_1 tərəfinin üzərinə düşər (İki nöqtədən yalnız bir düz xətt keçirmək olar). Odur ki, üçbucaqlar bir-birinin üzərinə düşəcəkdir, yəni $\Delta ABC = \Delta A_1B_1C$ olur. ■

Teorem 2 (II əlamət). *Bir üçbucağın bir tərəfi və ona bitişik bucaqları uyğun olaraq o biri üçbucağın bir tərəfi və ona bitişik bucaqlara bərabər olarsa, bu üç bucaqlar bərabərdir.*

□ Fərz edək ki, ΔABC və $\Delta A_1B_1C_1$ verilmişdir (şəkil 87) və $\angle B = \angle B_0$; $\angle C = \angle C_1$; $BC = B_1C_1$.

İsbat edək ki, $\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$. Bu məqsədlə, ABC üçbucağını, *B* nöqtəsi B_1-in və *BC* tərəfi B_1C_1-in üzərinə düşmək şərtilə $A_1B_1C_1$ üçbucağının üzərinə qoyaq. Şərtə görə $BC = B_1C_1$ olduğu üçün *C* nöqtəsi C_1 üzərinə düşəcəkdir. Digər



Şəkil 87

tərəfdən $\angle B = \angle B_1$ və $\angle C = \angle C_1$ olduğu üçün *BA* tərəfi B_1A_1 – in, *CA* tərəfi isə C_1A_1 – in boyunca gedəcəkduir. Bu zaman *A* nöqtəsi A_1 nöqtəsi üzərinə düşəcəkdir (iki düz xətt ancaq bir nöqtədə kəsişir). Beləliklə, ABC üçbucağı $A_1B_1C_1$ üçbucağı üzərinə düşür, yəni $\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$.. ■

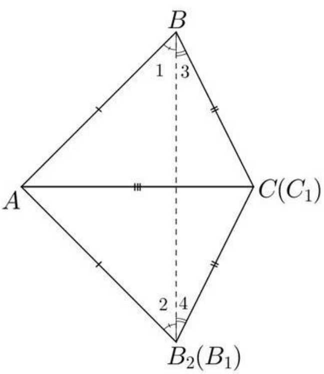
Teorem 3 (III əlamət). *Bir üçbucağın üç tərəfi, uyğun olaraq o biri üçbucağın üç tərəfinə bərabərdirsə, bu üçbucaqlar bərabərdir.*

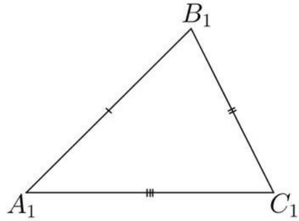
□ Tutaq ki, ΔABC və $\Delta A_1B_1C_1$ verilmişdir (şəkil 88) və $AB = A_1B_1$; $BC = B_1C_1$; $AC = A_1C_1$. İsbat edək ki, $\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$. Bu məqsədlə $A_1B_1C_1$ üçbucağının A_1C_1 tərəfini ABC üçbucağının AC tərəfi üzərinə elə qoyaq ki, o, ACB_2 vəziyyətini alsın. Bu halda $AB = AB_2$ və $BC = B_2C$ olur. B və B_2 nöqtələrini düz xətlə birləşdirsək BAB_2 və BCB_2 kimi iki bərabəryanlı üçbucaq alırıq. Buradan $\angle 1 = \angle 2$ və $\angle 3 = \angle 4$.

Deməli, $\angle B = \angle B_2$ olur. Nəticədə $\Delta ABC = \Delta AB_2C$, yəni $\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$. ■

Nəticə. *Bərabər üçbucaqlarda bərabər tərəflər qarşısında bərabər bucaqlar durur və tərsinə.*

Qeyd. Üçbucaqların bərabərliyi üçün isbat etdiyimiz hər üç əlamətdə verilmiş üç elementin heç olmasa biri tərəfdir.





Şəkil 88

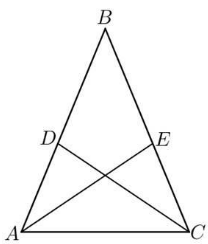
Məsələ 1. Bərabəryanlı üçbucaqda yan tərəflərə çəkilmiş medianların bərabər olduğunu isbat edin.

○ Tutaq ki, *ABC* bərabəryanlı üçbucaq (*AB*=*BC*), *CD* və *AE* yan tərəflərə çəkilmiş medianlardır (şəkil 89). İsbat edək ki, *AE*=*CD*. Bu məqsədlə *ADC* və *AEC* üçbucaqlarını nəzərdən keçirək. Bu üçbucaqlarda *AC* ortaq tərəf $\angle DAC = \angle ECA$ (bərabəryanlı *ABC* üçbucağının oturacağa bitişik bucaqları olduğu üçün) və *AD*=*CE* olduğundan, üçbucaqların bərabərliyinin birinci əlamətinə görə $\Delta ADC = \Delta AEC$. Odur ki, *AE*=*CD* olar. ●

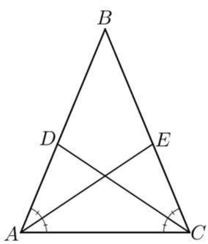
Məsələ 2. Bərabəryanlı üçbucağın yan tərəfinə çəkilmiş tənbölənlərin bərabər olduğunu isbat edin.

○ Fərz edək ki, *ABC* bərabəryanlı üçbucaq (*AB*=*BC*), *AE* və *CD* onun yan tərəflərinə çəkilmiş tənbölənlərdir (şəkil 90). İsbat edək ki *AE*=*CD*. Doğrudan da *AEC* və *ADC* üçbucaqlarında *AC* ortaq tərəf $\angle DAC = \angle ECA$ və $\angle EAC = \angle DCA$ olduğundan $\Delta ADC = \Delta AEC$ olur. Deməli, *AE*=*DC*. ●

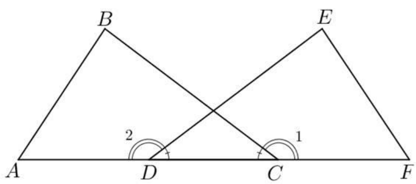
Məsələ 3. 91-ci şəkildə *AD*=*CF*, *AB*=*EF* və *BC*=*DE*-dir. $\angle 1 = \angle 2$ olduğunu isbat edin.



Şəkil 89



Şəkil 90



Şəkil 91

○ Şəkildən

$$\begin{cases} AC - DC = AD \\ DF - DC = CF \end{cases}$$

və şərtə görə $AD=CF$ olduğundan, $AC=DF$. Deməli, $\Delta ABC = \Delta FED$, buradan isə $\angle BCA = \angle EDF$ olur. Digər tərəfdən $\angle 1 + \angle BCA = 180^\circ$ və $\angle 2 + \angle EDF = 180^\circ$ olduğundan $\angle 1 = \angle 2$. ●

§ 45. DÜZBUCAQLI ÜÇBUCAQLARIN BƏRABƏRLİK ƏLAMƏTLƏRİ

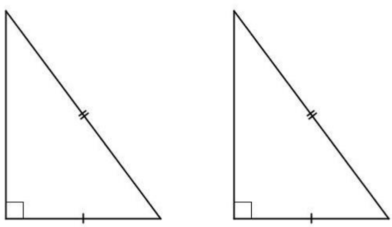
Üçbucaqların bərabərlik əlamətlərini öyrənərkən gördük ki, iki üçbucağın bərabər olması üçün onların uyğun üç elementinin bərabər olması kifayətdir.

Düzbucaqlı üçbucaqların bucaqlarından biri məlum olduğundan (düz bucaq), onların bərabərlik əlamətlərini aşağıdakı kimi söyləmək olar.

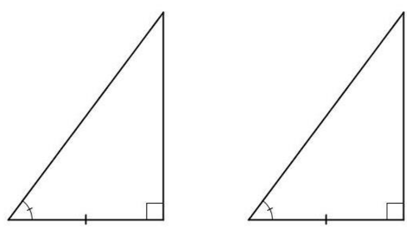
Teorem 1. *Katetləri uyğun olaraq bərabər olan düzbucaqlı üçbucaqlar bərabərdir* (şəkil 92).

Teorem 2. *Bir kateti və ona bitişik iti bucağı uyğun olaraq bərabər olan düzbucaqlı üçbucaqlar bərabərdir* (şəkil 93).

Teorem 3. *Hipotenuzu və bir iti bucağı, uyğun olaraq bərabər olan düzbucaqlı üçbucaqlar bərabərdir*.



Şəkil 92

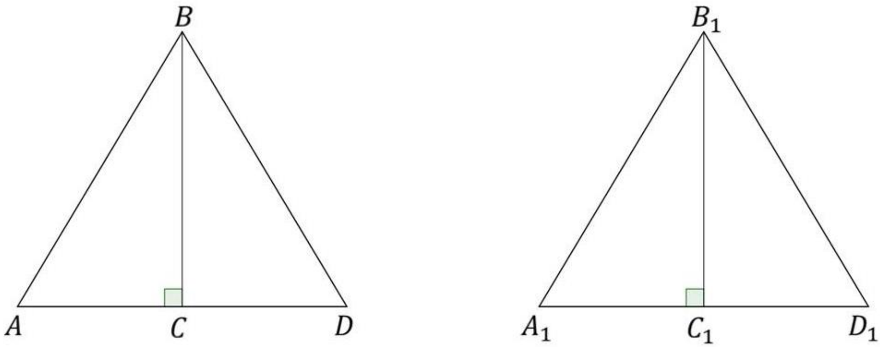


Şəkil 93

Hər üç teoremin isbatı, üçbucaqların bərabərlik əlamətlərindən alınır.

Teorem 4. *Hipotenuzu və bir kateti uyğun olaraq bərabər olan düzbucaqlı üçbucaqlar bərabərdir.*

■ ACB və $A_1C_1B_1$ iki düzbucaqlı üçbucaq, AC və A_1C_1 isə bərabər katetlər olsun (şəkil 94). Bundan başqa $\angle C = \angle C_1 = 90^\circ$.

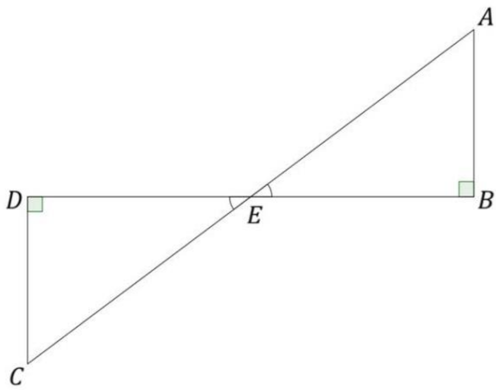


Şəkil 94

AC tərəfinin uzantısı üzərində AC parçasına bərabər olan CD parçasını ayıraq. Alınmış ACB və BCD üçbucaqlarında BC ortaq, $\angle BCD = \angle BCA = 90^\circ$ və $AC=CD$ (qurmaya görə) olduğundan, onlar bərabərdir: $\Delta ACB = \Delta BCD$. Odur ki, $AB=BD$ olur.

Eyni qayda ilə $\Delta A_1C_1B_1 = \Delta B_1C_1D_1$ olmasından, $A_1B_1 = B_1D_1$ alınır yəni $\Delta ABD = \Delta A_1B_1D_1$. Buradan isə $\Delta ACB = \Delta A_1C_1B_1$ alınır. ■

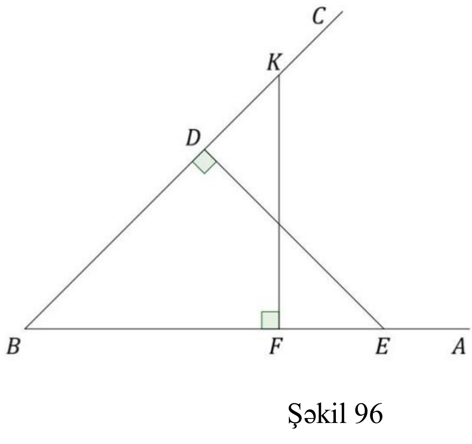
Məsələ 1. $AB \perp DB$, $DC \perp DB$ və $DE=EB$ olduqda, $AB=DC$ olduğunu isbat edin (şəkil 95).



Şəkil 95

○ *ABE* və *CDE* düzbucaqlı üçbucaqları *DE*=*EB* (şərtə görə) və $\angle AEB = \angle DEC$ (qarşılıqlı bucaqlar) olduğundan bərabərdir: $\Delta ABE = \Delta CDE$. Buradan da *AB*=*DC* alınır. ●

Məsələ 2. *BD*=*BF*, $DE \perp BC$, $FK \perp AB$ isə *DE*=*FK* olduğunu isbat edin (şəkil 96).



Şəkil 96

○ *BDE* və *BFK* düzbucaqlı üçbucaqları *B* bucağı ortaq və *BD*=*BF* (şərtə görə) olduğundan bərabərdir $\Delta BDE = \Delta BFK$. ●

Məsələ 3. Bərabəryanlı *ABC* üçbucağının (*AB*=*BC*) hündürlüyü üzərində götürülmüş *F* nöqtəsi oturacaqdakı təpələrlə birləşdirilmişdir. *AF*=*FC* olduğunu isbat edin.

Şəkil 97

○ *ABC* bərabəryanlı üçbucaq, *BD* isə onun hündürlüyü olsun (şəkil 97). *ADF* və *CDF* düzbucaqlı üçbucaqları bərabərdir (niyə?).odur ki, *AF*=*FC*. ●

Məsələ 4. *AB* düz xətt parçasının orta nöqtəsindən, ixtiyari düz xətt keçirilmişdir. Bu parçanın uclarının həmin düz xətdən eyni məsafədə olduğunu isbat edin.

○ *AB* düz xətt parçasının orta *O* nöqtəsindən *CD* düz xəttini keçirək və parçanın uclarından bu düz xəttə *AE* və *BF* perpendikulyarlarını çəkək (şəkil 98).

Şəkil 98

Göstərək ki, *AE*=*BF*. Şərtə görə *AO*=*OB*, $AE \perp CD$, $BF \perp CD$ və $\angle AOE = \angle BOF$ olduğundan, *AOE* və *OBF* düzbucaqlı üçbucaqları bərabərdir. Odur ki, *AE*=*BF* olur. ●

ÇALIŞMALAR

1. Oturacağı və yan tərəfi uyğun olaraq 10 sm və 13 sm olan bərabəryanlı üçbucağın təpə nöqtəsindən median çəkilmişdir. Alınan üçbucaqlardan birinin perimetri 30 sm olarsa, medianın uzunluğunu tapın.

2. *a* düz xəttinə nəzərən simmetrik olan *B* və B_1 nöqtələri həmin düz xətt üzərindəki *A* və *C* nöqtələri ilə birləşdirilmişdir. *ABC* üçbucağının AB_1C üçbucağına bərabər olduğunu isbat edin.

3. Çevrənin *AB* diametri və onunla bərabər bucaqlar əmələ gətirən *AC* və *AD* vətərləri çəkilmişdir. *C* və *D* nöqtələrinin *AB*-yə nəzərən simmetrik olduğunu isbat edin.

4. Bərabəryanlı üçbucağın medianı onun perimetrini 12 sm və 9 sm uzunluqda olan iki hissəyə bölür. Bu üçbucağın tərəflərini tapın.

5. Uzunluğu 20 sm olan məftildən bir tərəfi a) 12 sm; b) 8 sm; c) 10 sm olan üçbucaq düzəltmək olarmı?

6. İsbat ein ki, üçbucağın medianı, onun perimetrinin yarısından kiçikdir.

7. *AOB*-mərkəzi bucaq, C nöqtəsi isə *AB* qövsünün orta nöqtəsidir. İsbat edin ki, C nöqtəsi çevrənin *OA* və *OB* parçalarından eyni uzaqlıqdadır.

8. *ABC* üçbucağının *AD* medianı *AD* parçası qədər *E* nöqtəsinədək uzaldılmış və *EC* parçası çəkilmişdir. $< ACD = 56^\circ$ və $< ABD = 40^\circ$ olduqda, *ACE* bucağını tapın.

9. Bərabərtərəfli *ABC* üçbucağının tərəfləri üzərində *AD=CF=BF* parçaları ayrılmış və *D, E, F* nöqtələri düz xətt parçaları ilə birləşdirilmişdir. Alınan *DEF* üçbucağının da bərabərtərəfli olduğunu isbat edin.

10. Üçbucağın 24 sm və 40 sm olaqn iki tərəfi məlumdur. Üçüncü tərəf verilən tərəflərin birindən iki dəfə kiçik olarsa, həmin tərəfi və üçbucağın perimetrini tapın.

11. Bərabəryanlı üçbucağın iki tərəfinin nisbəti 3:8, perimetri isə 38 sm olarsa, onun tərəflərini tapın.

12. Bərabəryanlı üçbucağın perimetri 18 sm və tərəflərdən biri 7 sm olarsa, qalan tərəfləri tapın (iki hal).

13. Bərabəryanlı üçbucağın perimetri 20 sm və yan tərəf o biri tərəfdən iki dəfə böyükdür. Bu üçbucağın tərəflərini tapın.

14. Bərabəryanlı, düzbucaqlı üçbucaqda katet hipotenuzun yarısından böyük olduğunu isbat edin.

15. Bərabəryanlı üçbucağın perimetri 16 m, oturacaq isə yan tərəfdən 3,5 m kiçikdir. Tərəfləri tapın.

16. Bərabəryanlı üçbucağın tərəflərinin orta nöqtələri başqa bir bərabəryanlı üçbucağın təpə nöqtələri olduğunu isbat edin.

17. ABC və AB_1C üçbucaqları eyni AC oturacaqı bərabəryanlı üçbucaqlıdır. $\Delta ABB_1 = \Delta CBB_1$ olduğunu isbat edin.

18. AB və CD düz xətt parçaları O nöqtəsində kəsişərək yarıya bölünürlər. $\Delta ACD = \Delta DBC$ olduğunu isbat edin.

19. AB və CD düz xətt parçaları kəsişir. $AC=CB=BD=AD$ olduqda, $AB \perp CD$ olduğunu isbat edin.

20. Perimetri 50 sm olan bərabəryanlı üçbucağın təpə nöqtəsindən çəkilmiş hündürlüyün əmələ gətirdiyi üçbucaqlardan birinin perimetri 40 m olarsa, bu hündürlüyü tapın.

TESTLƏR

1. Üçbucağın iki tərəfi 6 və 8 sm olarsa, üçüncü tərəfin ala biləcəyi ən böyük tam qiyməti tapın.

A) 13 B) 14 C) 12 D) 10 E) 11

2. Üçbucağın tərəfləri 5:6:7 nisbətindədir. Üçbucağın perimetri 36 sm olarsa, böyük tərəfi tapın.

A) 15 B) 14 C) 13 D) 12 E) 11

3. Hipotenuzu 8 sm olan üçbucağın bir kateti və ona bitişik olan iti bucağı digər üçbucağın katetinə və ona bitişik olan iti bucağa bərabərdir. İkinci üçbucağın hipotenuzunu tapın.

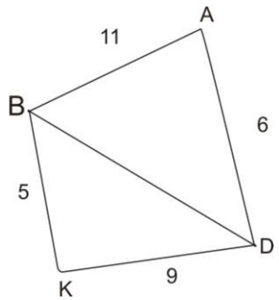
A) 5 sm B) 6 smC) 7 smD) 9 sm E) 8 sm

4. Bir bucağın tərəfləri üçün aşağıdakılardan hansı ola bilər?

A) 3, 4, 7B) 2, 6,9 C) 1, 2, 3 D) 5, 6,8 E) 2, 3, 5

5. *BD* hansı ola bilməz?

A) 6 B) 8 C) 5 D) 13 E) 12



6. İki tərəfi 12 və 7 olan üçbucağın üçüncü tərəfinin ən kiçik tam qiymətini tapın:

A) 5 B) 4 C) 8 D) 7 E) 6

7. Bir üçbucağın tərəfləri üçün aşağıdakılardan hansı ola bilməz?

A) 4, 7, 6 B) 11, 12, 30 C) 10, 20, 40 D) 60, 70, 100 E) 4, 3, 2

8. Bərabəryanlı üçbucağın perimetri 48 sm, oturacağı 20 sm, yan tərəfinin uzunluğunu tapın.

A) 14 sm B) 18 sm C) 16 sm D) 15 sm E) 22 sm

9. Üçbucağın iki tərəfi 32 sm və 48 sm üçüncü tərəf isə bu tərəflərdən birinin yarısına bərabərdir. Üçüncü tərəfi tapın.

10. *ABC* üçbucağı üçün uyğunluğu müəyyən edin.

1. *ABC* bərabər tərəfli üçbucaqdır.

a. Hündürlükləri bir təpə nöqtəsində kəsişir.

2. ABC düzbucaqlı üçbucaqdır.

3. ABC korbucaqlı üçbucaqdır.

b. İki hündürlüyü üçbucağın xaricində yerləşir.

c. Hündürlüklər bərabərdir.

d. İki hündürlüyü üçbucağın tərəfləridir.

e. Bütün daxili bucaqları bərabərdir.

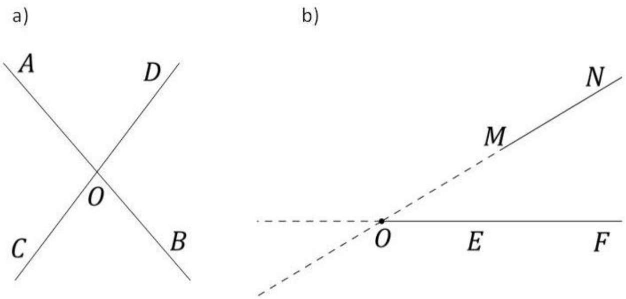
IX FƏSİL

PARALEL DÜZ XƏTLƏR

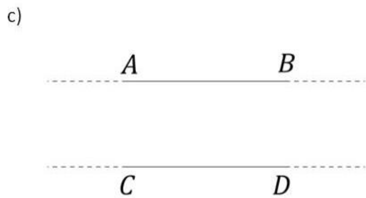
§ 46. PARALEL DÜZ XƏTT ANLAYIŞI. İKİ DÜZ XƏTTİN ÜÇÜNCÜ DÜZ XƏTLƏ KƏSİŞMƏSİNDƏN ALINAN BUCAQLAR

Ancaq bir ortaq nöqtəsi olan düz xətlərə *kəsişən düz xətlər*, həmin ortaq nöqtəyə isə onların *kəsişmə nöqtəsi* deyilir (şəkil 99; a, b)

Bir müstəvi üzərində yerləşən və kəsişməyən düz xətlərə *paralel düz xətlər* deyilir.



Şəkil 99

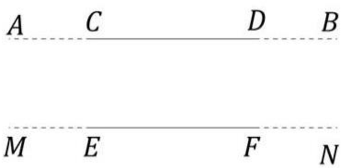


Şəkil 100

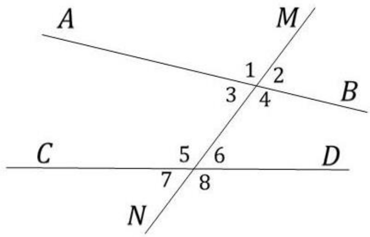
Üst-üstə düşən düz xətlər də paralel qəbul olunur. Məsələn, 100-cü şəkildə paralel düz xətlər göstərilmişdir. Yazıda düz xətlərin paralelliyi "||" kimi işarə edilir: $AB||CD$.

Paralel düz xətlər üzərində yerləşən parçalar *paralel parçalar* adlanır: $CD||EF$ (şəkil 101).

Tutaq ki, AB və CD düz xətləri MN düz xətti ilə kəsişir. Bu zaman alınan bucaqları 1, 2, . . . , 8 ilə işarə edək (şəkil 102). Bu bucaqlara onların düz xətlərə nəzərən yerləşməsindən asılı olaraq aşağıdakı kimi ad verilir:



Şəkil 101



Şəkil 102

1) 1 və 5; 2 və 6; 3 və 7; 4 və 8 uyğun bucaqlar,

2) 3 və 6; 4 və 5; daxili çarpaz bucaqlar,

3) 1 və 8; 2 və 7; xarici çarpaz bucaqlar,

4) 3 və 5; 4 və 6 daxili birtərəfli bucaqlar,

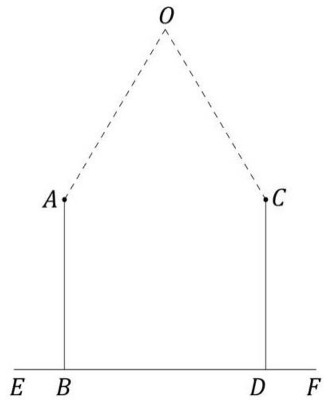
5) 1 və 7; 2 və 8 xarici birtərəfli bucaqlar.

Teorem. *Bir düz xəttə perpendikulyar olan iki düz xətt bir-birinə paraleldir.*

□ Fərz edək ki, AB və CD düz xətləri eyni bir EF düz xəttinə perpendikulyardır (şəkil 103): $AB \perp EF,\ CD \perp EF$.

İsbat edəki ki, $AB||CD$, əksini fərz edək. Tutaq ki, AB və CD düz xətləri bir-birinə paralel deyil. Onda bu düz xətlər hər hansı bir O nöqtəsində kəsişirlər.

Bu halda eyni bir *O* nöqtəsindən *EF* düz xəttinə iki perpendikulyar çəkilmiş olardı. Bu isə ola bilməz, yəni fərziyəmiz doğru deyil. Deməli $AB||CD$. ■



Şəkil 103

§ 47. DÜZ XƏTLƏRİN PARALELLİK ƏLAMƏTLƏRİ

Düz xətlərin paralelliyini müəyyən etməyə imkan verən aşağıdakı təklifləri nəzərdən keçirək.

Teorem 1 (I əlamət). *İki düz xətti üçüncü düz xətlə kəsdikdə daxili çarpaz bucaqlar bərabərdirsə, onda bu iki düz xətt bir-birinə paraleldir.*

□ Tutaq ki, *AB* və *CD* düz xətlərini üçüncü *MN* düz xətti ilə kəsdikdə alına daxili çarpaz bucaqlar bərabərdir: $\angle 1 = \angle 2$ (şəkil 104).

İsbat edək ki, $AB||CD$. Bu məqsədlə *MN* düz xəttinin *PQ* parçasının orta nöqtəsini *O* ilə işarə edək. Sonra $OE \perp AB$ çəkək və həmin perpendikulyarı *CD* düz xəttini kəsənə qədər uzadaq.

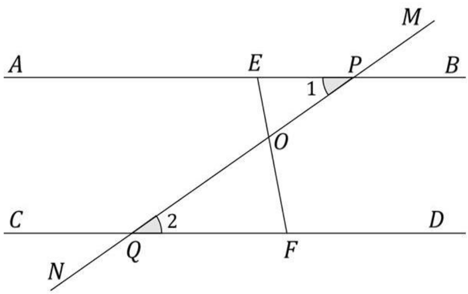
Əvvəlcə göstərək ki, $EF \perp CD$. Bunun üçün *OEP* və *OFQ* üçbucaqlarına baxaq. Bu üçbucaqlar $\angle 1 = \angle 2$ (şərtə görə), $OP=OQ$ (qurmaya görə) və $\angle EOP = \angle QOF$ (qarşılıqlı bucaqlar) olduğundan bərabərdir. Onda $\angle OFQ = \angle OEP = 90^\circ$ olar. Bu isə $EF \perp CD$ deməkdir. Beləliklə, *AB* və *CD* düz xətləri eyni bir *EF* düz xəttinə perpendikuyar olur, yəni onlar paraleldir: *AB*||*CD*. ■

Teorem 2. (II əlamət). *İki düz xətti üçüncü düz xətlə kəsdikdə uyğun bucaqlar bərabərdirsə, bu düz xətlər paraleldir.*

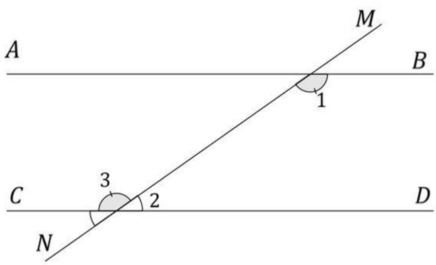
Teoremin isbatını oxuyuculara həvalə edirik.

Teorem 3. (III əlamət). *İki düz xətti üçüncü düz xətlə kəsdikdə,daxili birtərəfli bucaqların cəmi 180^0-yə bərabərdirsə, bu düz xətlər paraleldir.*

□ Tutaq ki, 1 və 2 daxili birtərəfli bucaqlarının cəmi 180^0-dir: $\angle 1 + \angle 2 = 180^\circ$ (şəkil 105). İsbat edək ki, *AB*||*CD*. $\angle 2 + \angle 3 = 180^\circ$ (qonşu bucaqlar) və $\angle 1 + \angle 2 = 180^\circ$



Şəkil 104



Şəkil 105

olduğundan $\angle 1 = \angle 3$ olur. Bu bucaqlar daxili çarpaz bucaqlar olduğu üçün, *AB*//*CD*. ■

Aşağıdakı təkliflərin də doğruluğunu asanlıqla isbat etmək olar.

Teorem 4. *İki düz xətti üçüncü düz xətlə kəsdikdə xarici çarpaz bucaqlar bərabərdirsə, bu düz xətlər paraleldir.*

Teorem 5. *İki düz xətti üçüncü düz xətlə kəsdikdə xarici birtərəfli bucaqların cəmi 180^0-yə bərabərdirsə, bu düz xətlər paraleldir.*

Yuxarıda söylədiyimiz təkliflərin tərsi də doğrudur.

İki paralel düz xətti üçüncü düz xətlə kəsdikdə:

1) *uyğun bucaqlar bərabərdir;*

2) *daxili çarpaz bucaqlar bərabərdir;*

3) *xarici çarpaz bucaqlar bərabərdir;*

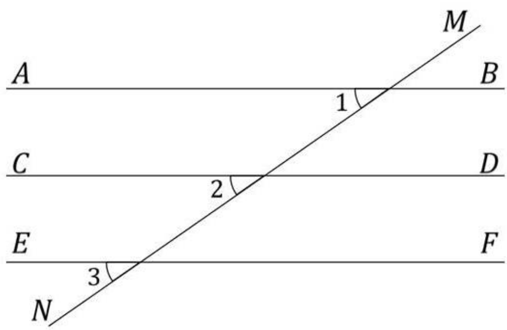
4) *daxili birtərəfli bucaqların cəmi 180^0-yə bərabərdir;*

5) *xarici birtərəfli bucaqların cəmi 180^0-yə bərabərdir.*

Söylədiklərimizdən aşağıdakı nəticələr çıxır:

Nəticə 1. *Bir düz xəttə paralel olan düz xətlər özləri də paraleldir.*

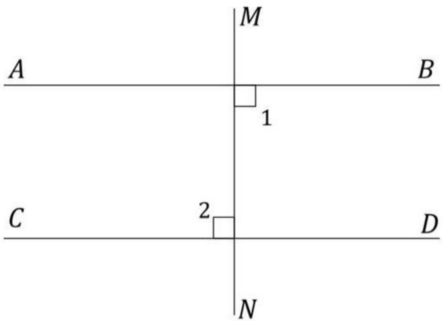
□ Tutaq ki, *AB* və *CD* düz xətləri eyni bir *EF* düz xəttinə paraleldir. Bu düz xətlərin hər üçünü kəsən *MN* düz xəttini çəksək (şəkil 106) $AB \| EF$ olduğundan $\angle 1 = \angle 3$ və $CD \| EF$ olduğundan isə $\angle 2 = \angle 3$ olur. Buradan da $\angle 1 = \angle 2$ alınır. 1 və 2 uyğun bucaqlar olduğundan $AB \| CD$. ■



Şəkil 106

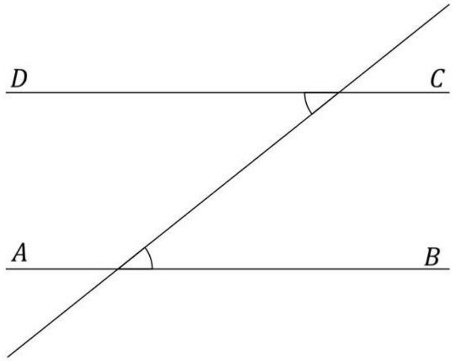
Nəticə 2. *Paralel düz xətlərdən birinə perpendikulyar olan düz xətt o birinə də perpendikulyardır.*

□ $MN \perp AB$ olsun, onda $\angle 1 = 90^\circ$ (şəkil 107). Şərtə görə $AB || CD$ olduğundan $\angle 1 = \angle 2$ (daxili çarpaz bucaqlar). Buradan $2 = 90^\circ$, yəni $MN \perp CD$ alınır. ■



Şəkil 107

İndi tutaq k, *AB* düz xətti və onun üzərinə olmayan *C* nöqtəsi verilmişdir (şəkil 108). Göstərək ki, *C* nöqtəsindən *AB* düz xəttinə paralel düz xətt keçirmək olar. *AC* düz xətti müstəvini iki yarımmüstəviyə ayırır. Bu düz xətt vasitəsilə bir-birinə bərabər olan *CAB* və *ACD* bucaqlarını quraq. Bu bucaqlar daxili çarpaz bucaqlar olduğundan $AB || CD$. Deməli, *AB* düz xətti və onun üzərində olmayan *C*



Şəkil 108

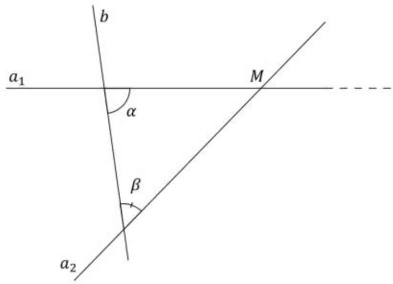
nöqtəsindən bu düz xəttə paralel düz xətt keçirmək olar. Təbii olaraq qarşıya belə bir sual çıxır: düz xətt üzərində olmayan nöqtədən bu düz xəttə paralel olan neçə düz xətt keçirmək olar? Bu suala evklidin paralellik aksiomu adlanan aşağıdakı təklif cavab verir.

Paralellik aksiomu: *Düz xətt üzərində olmayan nöqtədən bu düz xəttə yalnız bir paralel düz xətt keçirmək olar.*

Evkliddən sonra keçən 2000 ildən çox bir müddətdə riyaziyyatçılar bu təklifin isbatı üçün təşəbbüs göstərmişlər və hər dəfə də müvəffəqiyyətsizliyə uğramışlar.

Bir sıra riyaziyyatçılar məlum həndəsi təkliflərdən istifadə edərək, paralellik aksiomunu bu aksiomla eynigüclü olan başqa təkliflə əvəz etməyə çalışmışlar.

Evklidin özü paralellik aksiomunu belə izah etmişdir: “iki düz xətti üçüncü düz xətlə kəsdikdə onlar alınan birtərəfli bucaqların cəmi $2d$-dən kiçik olan tərəfdə kəsişirlər” (şəkil 109).



Şəkil 109

Evkliddən sonrakı riyaziyyatçıların bir çoxuna paralellik aksiomu, əyanilik baxımından kifayət qədər inandırıcı görünmürdü. Odur ki, onun isbatına çoxlu qüvvə sərf olunmuşdur. Lakin təklif olunmuş isbatların heç biri baş tutmamışdır.

Paralellik aksiomunu "əksini fərz etmə" ilə isbat etmək cəhdləri elmin sonrakı inkişafı üçün daha məhsuldar olmuşdur.

XIX əsrin birinci yarısında Qazan universitetinin professoru rus riyaziyyatçısı Nikolay İvanoviç Lobaçevski cəsarətlə belə bir fikir irəli sürdü: "Evklid postulatı həndəsənin başqa aksiomlarının məntiqi nəticəsi olmadığı üçün bunu isbat etmək olmaz. O həqiqətən aksiom şəklində qəbul edilməlidir".

N.İ.Lobaçevski öz fikrini təsdiq etmək üçün Evklidin postulatını başqa təklif ilə əvəz edərək, yeni həndəsə qurdu. Bu təklif müstəvi üzərində verilən bir nöqtədən, verilən düz xətlə kəsişməyən sonsuz sayda düz xətlərin çəkilməsinin mümkün olmasından ibarət idi.

Eləcə də Riman, Evklid və Lobaçevskinin paralellik aksiomlarını inkar etməklə öz həndəsəsini qurmuşdur. Bu həndəsədə paralel düz xətlər yoxdur.

Evklid həndəsəsindən fərqli olan həndəsələr *qeyri evklid həndəsələri* adlanır.

Məsələ 1. İki paralel düz xətti üçüncü düz xətlə kəsdikdə alınmış daxili birtərəfli bucaqlardan biri o birindən 3 dəfə böyükdür. Bu bucaqların hər birinin qiymətini tapın.

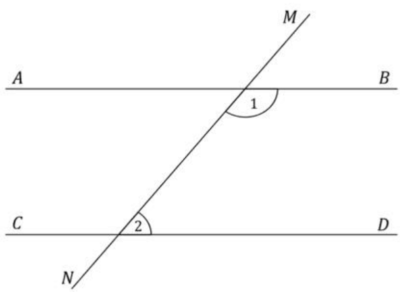
○ Tutaq ki, *AB* və *CD* iki paralel düz xətt, *MN* isə onları kəsən düz xətdir (şəkil 110). Məsələnin şərtinə görə $\angle 1 = 3\cdot\angle 2$. Digər tərəfdən daxili birtərəfli bucaqların xassəsinə görə:

$$\angle 1 + \angle 2 = 180^\circ$$

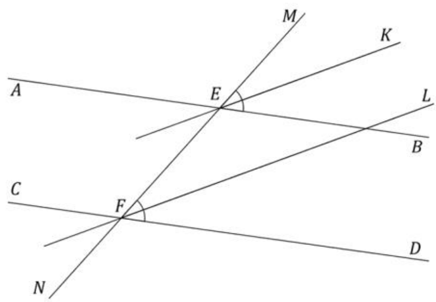
Onda $3\cdot\angle 2 + \angle 2 = 180^\circ$. Buradan isə $\angle 2 = 45^\circ$ və $\angle 1 = 135^\circ$ olur. ●

Məsələ 2. İki paralel düz xətti üçüncü düz xətlə kəsdikdə alınan uyğun bucaqların tənbölənlərinin paralel olduğun isbat edin.

○ Tutaq ki, *AB* və *CD* iki paralel düz xətt, *MEB* və *EFD* isə bu paralel düz xətləri *MN* düz xətti ilə kəsdikdə alınan uyğun bucaqlardır (şəkil 111). Onların *EK* və *FL* tənbölənlərini çəkək. Şərtə görə $AB||CD$ olduğundan $\angle MEB = \angle EFD$.



Şəkil 110



Şəkil 111

EK və *FL* tənbölən olduğundan $\frac{1}{2}\angle MEB = \frac{1}{2}\angle EFD$ və ya $\angle MEK = \angle EFL$ olar. Deməli, *EK* və *FL* düz xətləri *MN* düz xətti ilə kəsişdikdə alınan *MEK* və *EFL* uyğun bucaqları bərabərdir. Deməli, *EK*||*FL* ●

§ 48. ÜÇBUCAĞIN DAXİLİ BUCAQLARININ CƏMİ

Teorem. Üçbucağın daxili bucaqlarının cəmi 180^0-yə bərabərdir.

○ Tutaq ki, *ABC* hər hansı üçbucaq, 1, 2 və 3 isə onun daxili bucaqlarıdır (şəkil 112).

Üçbucağın *B* nöqtəsindən *AC* tərəfinə *EF* paralel düz xəttini çəkək. Bu zaman *B* nöqtəsində cəmi 180^0-yə bərabər 4,2 və 5 bucaqlarını alarıq: $\angle 4 + \angle 2 + \angle 5 = 180^\circ$. Digər tərəfdən *EF*||*AC* olduğundan $\angle 1 = \angle 5$ və $\angle 3 = \angle 4$ (daxili çarpaz bucaqlar) olur. Bunları axırıncı bərabərlikdən nəzərə alsaq, $\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 = 180^\circ$, yəni $\angle A + \angle B + \angle C = 180^\circ$ olur. ■

İsbat etdiyimiz teoremdən aşağıdakı nəticə çıxır:

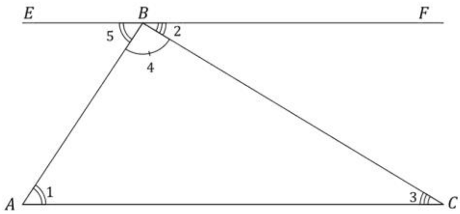
Nəticə. *İstənilən üçbucağın heç olmasa iki bucağı itidir.*

Məsələ 1. Bərabəryanlı üçbucağın təpə bucağı 68^0-yə bərabərdir. Onun oturacağına bitişik bucaqlarını tapın.

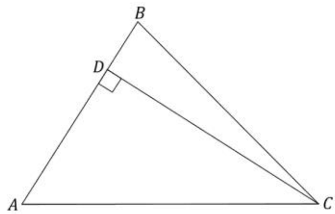
○ Bərabəryanlı üçbucağın oturacağına bitişik bucaqları bərabərdir: $\angle A = \angle C$. Onda $\angle A + \angle B + \angle A = 180^\circ$. Buradan $2 \cdot \angle A = 180^0 - \angle B$ və ya $2 \cdot \angle A = 180^0 - 68^0$, $\angle A = 56^0$. Deməli, $\angle A = \angle C = 56^0$. ●

Məsələ 2. *ABC* üçbucağında $\angle A = 62^0$, $\angle B = 70^0$ olduqda, *C* təpə nöqtəsindən çəkilmiş hündürlüyün *AC* və *EC* tərəfləri ilə əmələ gətirdiyi bucaqları tapın.

○ Tutaq ki, *ABC* verilmiş üçbucaq, *CD* isə *C*-təpə nöqtəsindən çəkilmiş hündürlükdür (şəkil 113). *BCD* və *DCA* bucaqlarını tapmaq tələb olunur. $\angle CDB = \angle CDA = 90^0$



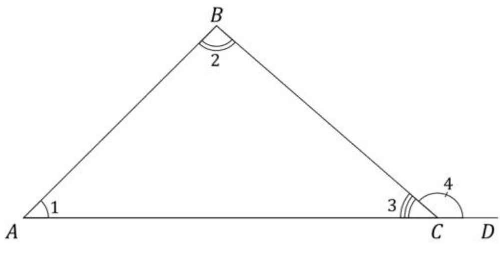
Şəkil 112



Şəkil 113

olduğundan *ADC* üçbucağında $\angle A + \angle ACD = 9Q^0$, *BDC* üçbucağında isə $\angle B + \angle BCD = 90^0$ olur. Buradan $\angle ACD = 28^0$, $\angle BCD = 20^0$ alınır. ●

§ 49. ÜÇBUCAĞIN XARİCİ BUCAĞININ XASSƏSİ



Şəkil 114.

Üçbucağın hər hansı daxili bucağı ilə qonşu olan bucağa onun *xarici bucağı* deyilir.

Məsələn, 4 bucağı 3 bucağına qonşu bucaqdır (şəkil 114).

Teorem. *Üçbucağın xarici bucağı özünə qonşu olmayan daxili bucaqların cəminə bərabərdir.*

□ Tutaq ki, ABC hər hansı üçbucaq, BCD isə onun xarici bucaqlarından biridir (şəkil 114).

$\angle A = 1$, $\angle B = 2$, $\angle C = 3$ və $\angle BCD = 4$

kimi işarə edib,

$$\angle BCD = \angle A + \angle B$$

olduğunu göstərək. Doğrudan da 3 bucağı 1 və 2 bucaqlarını, eləcə də 4 bucağını 180^0-yə tamamladığından, yəni $\angle 3 = 180^\circ - (\angle 1 + \angle 2)$ və $\angle 3 = 180^\circ - \angle 4$ olduğundan $\angle BCD = \angle A + \angle B$ olur. ■

Nəticə 1. *Üçbucağın xarici bucağı, özünə qonşu olmayan hər bir daxili bucaqdan böyükdür.*

Nəticə 2. *Bərabərtərəfli üçbucağın bucaqlarının hər biri 60^0-yə bərabərdir.*

Nəticə 3. *Düzbucaqlı üçbucağın iti bucaqlarının cəmi 90^0-yə bərabərdir.*

Nəticə 4. *Bərabəryanlı üçbucağın oturacağındakı xarici bucaqlar bir-birinə bərabərdir.*

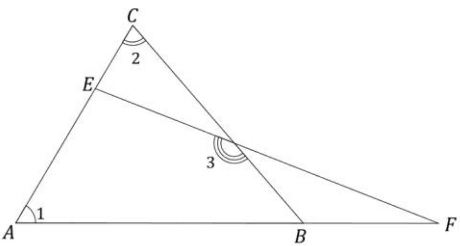
Nəticə 5. *Bərabəryanlı düzbucaqlı üçbucağın iti bucağının hər biri 45^0-dir.*

Məsələ 1. ABC üçbucağında (şəkil 115) $\angle 1 = 60^\circ$ $\angle 2 = 52^\circ$-dir. $\angle 3 = 140^\circ$ olmaq şərtilə DE düz xətti ABC, üçbucağını kəsir. Alınmış BDF üçbucağının bucaqlarını tapın.

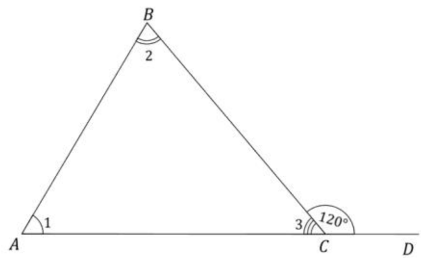
○ Üçbucağın xarici bucağının xassəsinə görə yazarıq: $\angle DBF = \angle 1 + \angle 2 = 112^\circ$. Digər tərəfdən $\angle BDF + \angle 3 = 180^0$ olduğundan (qonşu bucaqlar) $\angle BDF = 40^\circ$ olur. Beləliklə, BDF üçbucağının bucaqlarından ikisi məlum olur. Onda, $\angle F = 180^\circ - 112^\circ - 40^0 = 28^\circ$ olaraq. ●

Məsələ 2. Üçbucağın xarici bucaqlarından biri 120^0-dir. Bu bucağa qonşu olmayan daxili bucaqlar 1:3 nisbətində olarsa, üçbucağın bucaqlarını tapın.

○ Tutaq ki, ΔABC verilmişdir (şəkil 116). Əvvəlcə $\angle 3$-ü tapaq. $\angle 3 = 180^\circ - \angle BCD = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$. $\angle 1 = x$ olsun, onda $\angle 2 = 3x$ olar.



Şəkil 115



Şəkil 116

$\angle 1 + \angle 2 = 120^\circ$ olduğundan $x + 3x = 120^\circ$ olur. Buradan $x = 30^\circ$ alınır və $\angle 1 = 30^\circ$ olur. $\angle 2 = 3x = 3 \cdot 30^0 = 90^\circ$. Beləliklə, $\angle A = 30^\circ$, $\angle B = 90^\circ$, $\angle C = 60^\circ$. ●

§ 50. DÜZBUCAQLI ÜÇBUCAQDA 30^0-li BUCAQ QARŞISINDA DURAN KATETİN XASSƏSİ

Teorem. *Düzbucaqlı üçbucaqda 30^0-li bucaq qarşısındakı katet, hipotenuzun yarısına bərabərdir.*

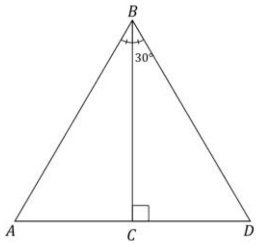
□ Tutaq ki, düzbucaqlı *ABC* üçbucağı verilmiş və $\angle ABC = 30^\circ$-dir. (şəkil 117). İsbat edək ki, $AC = \frac{1}{2}AB$. *AC* tərəfinin uzantısı üzərində *CD*=*AC* parçasını ayıraq və təpə nöqtəsini *D* ilə birləşdirək. Onda *ACB* və *DCB* düzbucaqlı üçbucaqları, *BC* ortaq tərəf və *AC*=*CD* olduğundan bərabərdir. Üçbucaqların bərabərliyindən $\angle A = \angle D = 60^\circ$, $\angle CBD = \angle CBA = 30^\circ$ olması çıxır. Deməli, $\angle ABD = 60^\circ$ olur. Bu halda *ABD* üçbucağı bərabərtərəfli üçbucaqdır: *AB*=*BD*=*AD*. Buradan isə $AC = CD = \frac{1}{2}AD = \frac{1}{2}AB$,

$AC = \frac{1}{2}AB$ olur. ■

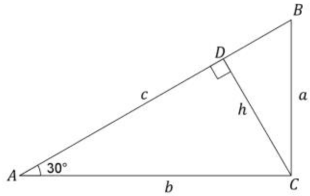
Məsələ 1. Düzbucaqlı üçbucağın iti bucaqlarından biri 30^0 və ona bitişik katetlə düz bucaq təpəsindən çəkilmiş hündürlüyün uzunluqlarının cəmi 30 sm olarsa, bu hündürlüyün uzunluğunu tapın.

○ *ABC* verilmiş düzbucaqlı üçbucaq, *CD*=*h* isə düz bucaq təpəsindən çəkilmiş hündürlük olsun (şəkil 118). Şərtə görə $\angle A = 30^\circ$, *b*+*h*=30 sm. *DC*=*h* hündürlüyünü tapaq. *ACD* düzbucaqlı üçbucağında $h = \frac{b}{2}$ olduğundan və *b*+*h*=30 olmasından 2*h*+*h*=30, buradan da *h*=10 sm alınır. ●

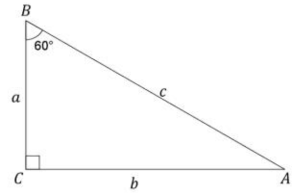
Məsələ 2. Düzbucaqlı üçbucağın bucaqlarından biri 60^0, hipotenuzu ilə kiçik katetin cəmi isə 45 sm-dir. Hipotenuzun uzunluğunu tapın.



Şəkil 117



Şəkil 118



Şəkil 119

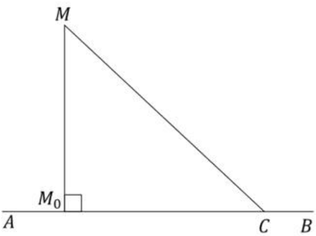
○ Tutaq ki, *ACB* düzbucaqlı üçbucağında $\angle B = 60^\circ$ və $a+c$=45-dir (şəkil 119). $\angle A = 30^\circ$ olduğundan $a = \frac{1}{2}c$ olar. Onda $\frac{1}{2}c + c = 45$, yəni c=30 sm olur. ●

§ 51. DÜZ XƏTTƏPERPENDİKULYAR və MAİL. DÜZ XƏTT PARÇASININ PROYEKSİYASI

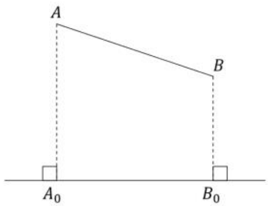
Fərz edək ki, *AB* düz xətti və onun üzərində olmayan *M* nöqtəsi verilmişdir. *M* nöqtəsindən *AB* düz xəttinə MM_0 perpendikulyarını endirək (şəkil 120). M_0 nöqtəsi bu perpendikulyarın oturacağı adlanır. *AB* düz xətti üzərində M_0 nöqtəsindən fərqli *C* nöqtəsi götürək və onu *M* nöqtəsi ilə birləşdirək. Aydındır ki, $\angle MM_0C = 90^\circ$, $\angle MCM_0 < 90^\circ$ olar. Bu halda *MC* düz xətti *AB* düz xəttinə çəkilmiş mail, *C* nöqtəsi isə onun oturacağı adlanır. M_0C parçasına *MC* mailinin *AB* düz xətti üzərinə proyeksiyası deyilir və $np_{AB}MC = M_0C$ kimi yazılır. Aydındır ki, verilən nöqtədən düz xəttə istənilən sayda mail çəkmək olar.

Tutaq ki, a düz xətti və onun üzərində olmayan AB düz xətt parçası verilmişdir (şəkil 121). AB parçasının uclarından a düz xəttinə AA_0 və BB_0 perpendikulyarlarını endirək. $A_0\ B_0$ parçasına AB parçasının a düz xətti üzərinə *proyeksiyası* deyilir və $np_0 AB = A_0 B_0$ kimi yazılır.

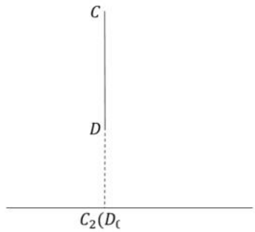
Parça düz xəttə perpendikulyardırsa, onda onun bu düz xətt üzərinə proyeksiyası nöqtə olacaqdır (şəkil 122).



Şəkil 120



Şəkil 121



Şəkil 122

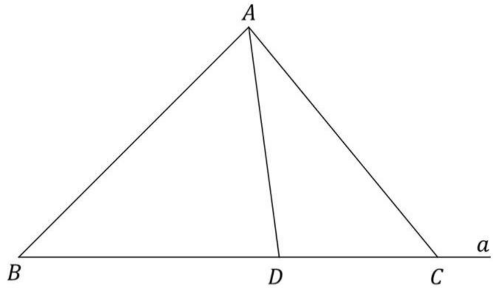
Aydındır ki, düz xətt üzərində olmayan nöqtənin bu düz xətt üzərində proyeksiyası həmin nöqtədən düz xəttə çəkilmiş perpendikulyarın oturacağıdır. Xüsusi halda nöqtə düz xətt üzərində olarsa, o proyeksiyası ilə üst-üstə düşər.

Qeyd. "Nöqtənin düz xətdən olan məsafəsi" dedikdə, həmin nöqtədən düz xəttə endirilən perpendikulyarın uzunluğu nəzərdə tutulur.

Məsələ. Düz xətdən 8 sm məsafədə olan nöqtədən həmin düz xəttə uzunluqları 9 sm və 11 sm olan iki mail və perpendikulyar çəkilmişdir. Alınmış düzbucaqlı üçbucaqlardan birinin perimetri isə 20 sm-dir. Maillərin düz xətt üzərinə proyeksiyalarını və oturacaqları arasındakı məsafəni tapın.

○ Tutaq ki, a düz xətti və ondan 8 sm məsafədə olan A nöqtəsi verilmişdir (şəkil 123). Bu nöqtədən a düz xəttinə AD perpendikulyarını və AB,

AC maillərini çəkək. Şərtə görə AB=11 sm, AC=9 sm, AD=8 sm, $P_{\Delta ADB} = 24$ sm, $P_{\Delta ADC} = 20$ sm olduqda BD, DC və BC məsafələrini tapaq. $AB + BD + AD = 24$ və



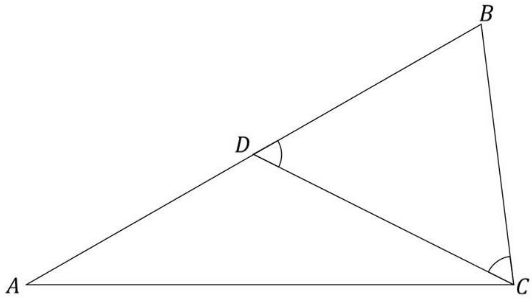
Şəkil 123

$AD + AC + DC = 20$ sm olduğundan BD=5 sm və DC=3 sm alınar. Digər tərəfdən $BC=BD+DC$ olduğundan BC=8 sm olar. ●

§ 52. ÜÇBUCAĞIN TƏRƏFLƏRİ və BUCAQLARI ARASINDAKI MÜNASİBƏTLƏR

Teorem. *Üçbucaqda böyük tərəf qarşısında böyük bucaq durur.*

□ Tutaq ki, ABC üçbucağında $AB > BC$ -dir (şəkil 124). İsbat edək ki, AB tərəfi qarşısında duran C bucağı BC tərəfi qarşısında duran A bucağından böyükdür. Bu məqsədlə B təpə nöqtəsindən başlayaraq AB tərəfi üzərində $BC=BD$ parçasını ayıraq. C və D nöqtələrini düz xətt parçası ilə birləşdirək. Onda BDC bərabəryanlı üçbucağını alarıq. BDC bucağı ADC üçbucağının xarici bucağıdır. Deməli, $\angle A < \angle BDC$. Digər tərəfdən BDC bucağı C bucağının hissəsidir. Buradan $\angle A < \angle C$ olur. ■



Şəkil 124

Bu teoremdən aşağıdakı nəticələr alınır:

Nəticə 1. *Üçbucaqda bərabər tərəflər qarşısında bərabər bucaqlar durur.*

Nəticə 2. *Üçbucaqda bərabər bucaqlar qarşçısında bərabər tərəflər durur.*

Nəticə 3. *Üçbucaqda böyük bucaq qarşsında böyük tərəf durur.*

Nəticə 4. *Düzbucaqlı üçbucaqda hipotenuz hər bir katetdən böyükdür.*

§ 53. PERPENDİKULYAR və MAİLİN XASSƏLƏRİ

Düz xəttə çəkilmiş perpendikulyar və mailin bəzi mühüm xasələrini qeyd edək.

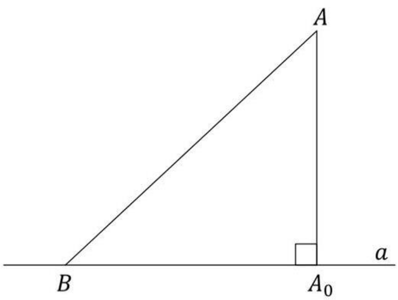
Teorem 1. *Verilmiş nöqtədən eyni bir düz xəttə çəkilmiş mailin uzunluğu, perpendikulyarın uzunluğundan böyükdür.*

□ A nöqtəsindən a düz xəttinə AA_0 perpendikulyarını və AB mailini çəkək (şəkil 125).İsbat edək ki, $AB > AA_0$ üçbucağında hipotenuz hər bir katetdən böyük olduğundan $AB > AA_0$ olar. ■

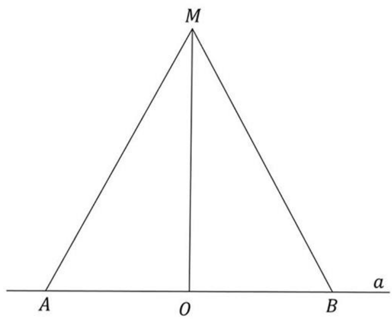
Bu teoremdən çıxır ki, verilmiş nöqtədən eyni bir düz xəttə çəkilmiş düz xətt parçalarından uzunluğu ən kiçik olanı həmin düz xəttə perpendikulyardır.

Teorem 2. *Verilmiş nöqtədən eyni bir düz xəttə çəkilmiş maillər bərabərdirsə, onda onların həmin düz xətt üzərindəki proyeksiyaları da bərabərdir.*

□ *MA* və *MB* düz xətt üzərində olmayan *M* nöqtəsindən *a* düz xəttinə çəkilmiş bərabər maillər olsun (şəkil 126). Onların proyeksiyalarının bərabər olduğunu isbat edək.



Şəkil 125



Şəkil 126

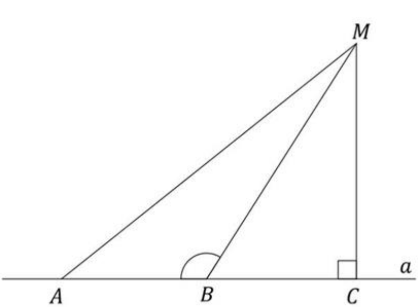
MA və *MB* maillərinin *a* düz xətti üzərindəki proyeksiyasını tapmaq üçün *M* nöqtsindən *a* düz xəttinə *MO* perpendikulyarını endirək. Onda *AO* düz xətt parçası *MA* mailinin, *OB* düz xətt parçası isə *MB* mailinin *a* düz xətti üzərindəki proyeksiyası olacaqdır. Şərtə görə *MA*=*MB* olduğundan *AMB* bərabəryanlı üçbucaq, *MO* isə onun hündürlüyüdür. Bərabəryanlı üçbucağın hündürlüyü eyni zamanda onun medianı olduğundan *AO*=*OB* olacaqdır. ■

Teorem 3. (tərs teorem). *Verilmiş nöqtədən eyni bir düz xəttə çəkilmiş maillərin proyeksiyaları bərabərdirsə, onda bu maillərin özləri də bərabərdir.*

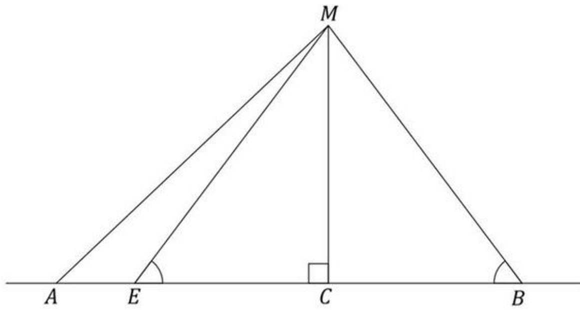
Teoremin isbatını oxuculara həvalə edirik.

Toerem 4. *Verilmiş nöqtədən eyni bir düz xəttə çəkilmiş iki maildən, proyeksiyası böyük olan mailin özü də böyükdür.*

□ *MA* və *MB* düz xətt parçaları *a* düz xəttinə çəkilmiş maillər, *MC* isə perpendikulyardır. (şəkil 127 və 128). $AC > BC$ olduqda $MA > MB$ olduğunu isbat edək. Burada aşağıdakı hallar mümkündür.



Şəkil 127



Şəkil 128

1. Hər iki mail perpendikulyardan bir tərəfdə yerləşir (şəkil 127). Şəkildən göründüyü kimi *MBA* bucağı *MBC* düzbucaqlı üçbucağının xarici bucağıdır. Ona görə də $\angle MBA > BCM$, yəni *MBA* kor bucaqdır. Buradan çıxır ki, $MA > MB$ (üçbucaqda böyük bucaq qarşısında böyük tərəf durur).

2. Maillər perpendikulyardan müxtəlif tərəflərdə yerləşir (şəkil 128) *AC* düz xətt parçası üzərində C nöqtəsindən başlayaraq *CE=CB* ayıraq. Onda 3-cü teoremə əsasən *MB=ME*. Teoremin birinci hissəsinə görə $MA > ME$ olduğnudan $MA > MB$ olur. ■

Teorem 5. (tərs teorem). *Verilmiş nöqtədən düz xəttə çəkilmiş iki maildən böyüyünün proyeksiyası da böyükdür.*

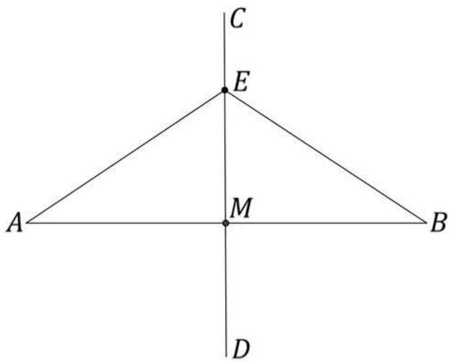
Teoremin isbatı oxuculara həvalə olunur.

§ 54. DÜZ XƏTT PARÇASININ ORTA NÖQTƏSİNDƏN QALDIRILMIŞ PERPENDİKULYARIN XASSƏSİ

Teorem 1. *Düz xətt parçasının ortasından qaldırılmış perpendikulyar üzərində götürülmüş nöqtə parçanın uclarından eyni məsafədədir.*

□ *AB* düz xətt parçasının *M* orta nöqtəsindən ona *CD* perpendikulyar düz xəttini keçirək (şəkil 129). Bu düz xətt üzərində ixtiyari *E* nöqtəsi üçün, *AE=BE* olduğunu isbat edək. *AME* və *EMB* düzbucaqlı üçbucaqlarının bərabərliyindən *AE=BE* olur. ■

E nöqtəsi *CD* düz xətti üzərində olmadıqda $AE \neq BE$ olduğunu isbat etməyi oxuculara həvalə edirik.



Şəkil 129

Teorem 2. (tərs teorem). *Düz xətt parçasının uclarından eyni məsafədə olan nöqtə, onun orta nöqtəsindən təpəsinə qaldırılmış perpendikulyar düz xəttin üzərindədir.*

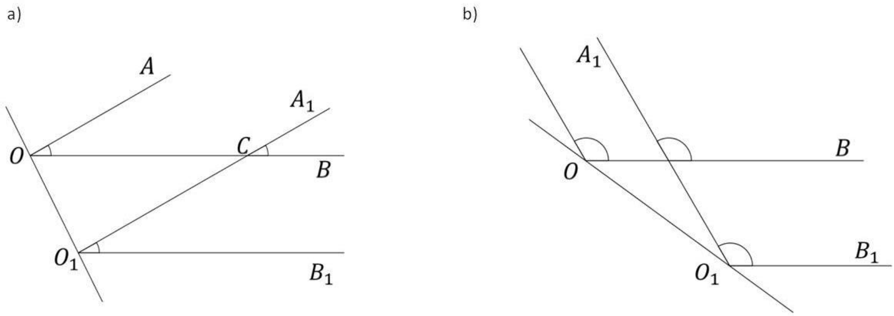
□ *E* nöqtəsindən *AB* düz xətt parçasına *EM* perpendikulyarını çəksək, onda *AME* və *EMB* bərabər düzbucaqlı üçbucaqlarını (bir katet və hipotenuza görə) alarıq (şəkil 129). Beləliklə, *AM=MB* alarıq. Bu da *E* nöqtəsinin *AB* parçasının orta nöqtəsindən çəkilən *CD* perpendikulyar düz xəttin üzərində olması deməkdir. ■

§ 55. UYĞUN TƏRƏFLƏRİ PARALEL və PERPENDİKULYAR BUCAQLAR

Hər ikisi iti bucaq, yaxud kor bucaq olan bucaqlar *eyni adlı bucaqlar* adlanır.

Teorem 1. *Uyğun tərəfləri paralel olan bucaqlar eyniadlı olduqda, bərabər, müxtəlif adlı olduqda isə cəmi 2d-yə bərabərdir.*

□ 1) Tutaq ki, uyğun tərəfləri paralel olan *AOB* və $A_1O_1B_1$ eyniadlı bucaqlardır: a) hər hansı iti bucaqdır (şəkil 130 a). İsbat edək ki, $\angle AOB = \angle A_1O_1B_1$.



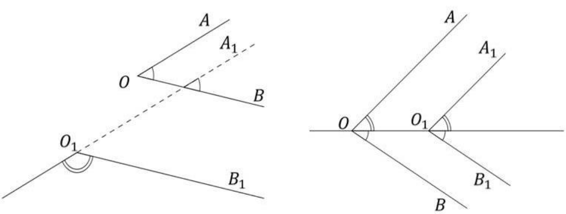
Şəkil 130

Şəkildən göründüyü kimi, $\angle AOB = \angle A_1CB$ və eləcə də $\angle A_1CB = \angle A_1O_1B_1$ (uyğun bucaqlar) olduğundan $\angle AOB = \angle A_1O_1B_1$ alınır.

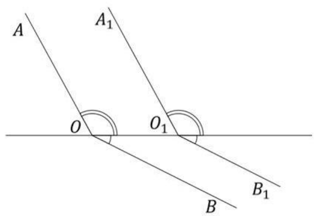
b) Hər ikisi kor bucaqdır (şəkil 130, b). Bu halda $\angle AOB = \angle A_1O_1B_1$ olması əvvəlki kimi göstərilir.

2) Tutaq ki, bucaqlar müxtəlif adlıdır (şəkil 131). Göstərək ki, $\angle AOB + \angle A_1O_1B_1 = 2d$. Bunun üçün O_1A_1 şüasını əks istiqamətə uzadaq. Onda $O_1A_1 || OA$ olar. Teoremin birinci hissəsinə əsasən $\angle AOB = \angle A_1O_1B_1$ olar. Digər tərəfdən $\angle A_1O_1B_1 = \angle A_2O_1B_1 = 2d$ olduğundan $\angle AOB + \angle A_1O_1B_1 = 2d$ olur. ■

Qeyd. Bucaqların tərəfləri kəsişmədiyi halda teoremin doğruluğu 132-ci şəkillərdən aydındır.



Şəkil 131

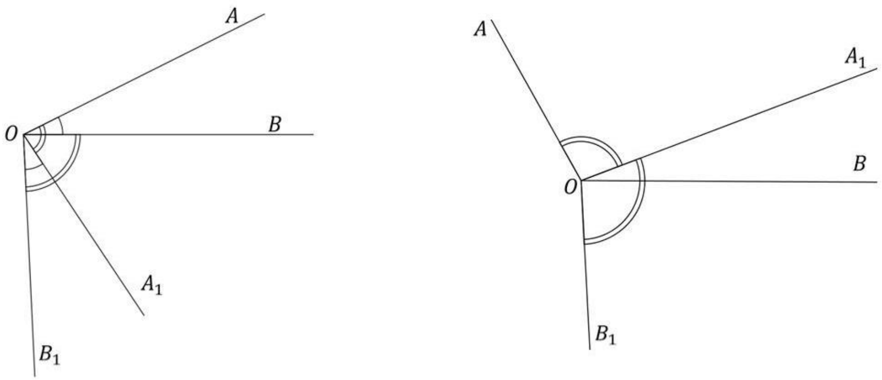


Şəkil 132

Teorem 2. *Uyğun tərəfləri perpendikulyar olan bucaqlar eyniadlı olduqda bərabər, müxtəlif adlı olduqda isə cəmi 2d—yə bərabərdir.*

□ 1) Tutaq ki, *AOB* və $A_1O_1B_1$ bucaqları eyniadlıdır:

a) hər iki bucaq itidir. (şəkil 133, a) $OA \perp O_1A_1$, $OB \perp O_1B_1$. Göstərək ki, $\angle AOB = \angle A_1O_1B_1$. Şəkildən görünür ki, BOA_1 bucağı həm *AOB*, həm də $A_1O_1B_1$ bucağının düz bucaq tamamlayır. Deməli, $\angle AOB = \angle A_1O_1B_1$, b) hər iki bucaq kor bucaqdır (şəkil 133, b). $OA \perp O_1A_1$, $OB \perp O_1B_1$. Şəkildən görünür ki, eyni bir A_1OB



Şəkil 133

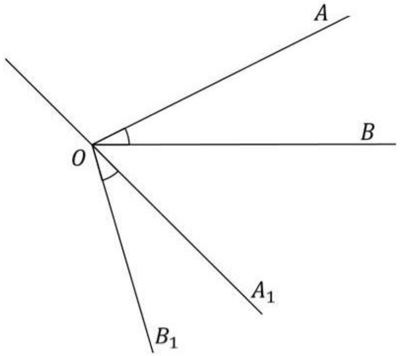
bucağından çıxdıqda düz bucaq alınır. Odur ki, $\angle AOB = \angle A_1O_1B_1$ olur.

Tutaq ki, AOB və $A_1O_1B_1$ bucaqları müxtəlif adlıdır (şəkil 134). $OA \perp O_1A_1$, $OB \perp O_1B_1$, göstərək ki, $\angle AOB + \angle A_1OB_1 = 2d$. İsbat üçün OA_1 şüasını əks istiqamətə uzatsaq $OA_1 \perp OA$ olar. Teoremin birinci hissəsinə əsasən $\angle AOB = \angle A_2OB_1$ olur. Buradan və $\angle A_2OB_1 + \angle A_1OB_1 = 2d$ olmasından $\angle AOB + \angle A_1OB_1 = 2d$ alınır. ■

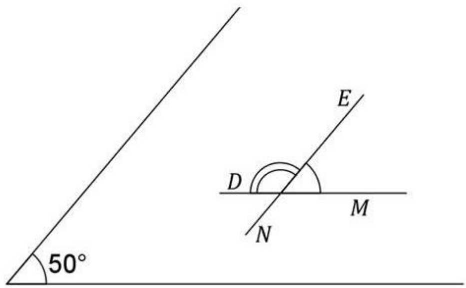
Qeyd. İsbat etdiyimiz teorem, uyğun tərəfləri perpendikulyar olan bucaqlar ortaq təpəli olmadıqda da doğrudur.

Məsələ 1. 50^0-li bucağın daxilindəki M nöqtəsindən onun tərəflərinə paralel düz xətlər çəkilmişdir. Düz xətlər arasındakı bucaqları tapın.

○ $\angle ABC = 50^0$, M isə onun daxilində götürülmüş nöqtə olsun (şəkil 135). $EN||AB$ və $DF||BC$ çəkək. Buradan $\angle ABC = \angle EMF = 50^0$ (uyğun tərəfləri paralel olan eyniadlı bucaqlar) $\angle ABC + \angle EMD = 2d$ (uyğun tərəfləri paralel olan müxtəlif



Şəkil 134

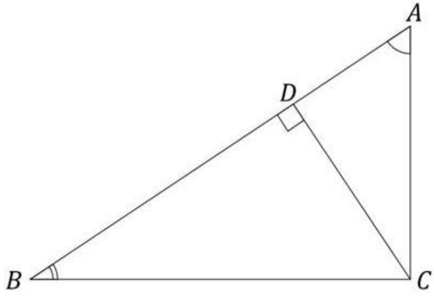


Şəkil 135

adlı bucaqlar) alınır. Axırıncı bərabərlikdən $\angle EMD = 130^0$ olar. ●

Məsələ 2. Düzbucaqlı üçbucaqda C düz bucaq təpəsindən hipotenuza CD perpendikulyarı endirilmişdir. Alınan üçbucaqlarda hansı buicaqlar bərabərdir?

○ ACB düzbucaqlı üçbucaq, CD isə hipotenuza çəkilmiş perpendikulyar olsun (şəkil 136). $CD \perp BD$ və $BC \perp CA$ olduğundan $\angle DCB = \angle DAC$ olur. ●



Şəkil 136

§ 56. QABARIQ ÇOXBUCAQLILARIN DAXİLİ və XARİCİ BUCAQLARININ CƏMİ

Qabarıq çoxbucaqlı üçün aşağıdakı teorem doğrudur.

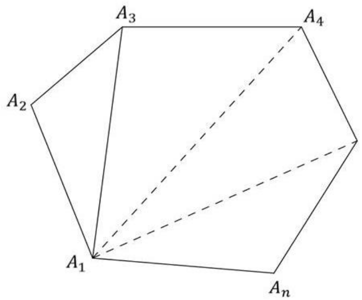
Teorem 1. *Qabarıq çoxbucaqlının daxili bucaqlarının cəmi 2d(n-2)-yə bərabərdir (n*-tərəflərin sayıdır*).*

□ Tutaq ki, hər hansı qabarıq çoxbucaqlı verilmişdir (şəkil 137). Onun təpə nöqtələrindən hər hansı birini qalan təpələrlə birləşdirsək, nəticədə (n-2) sayda üçbucaq alarıq ki, bunların da daxili bucaqlarının cəmi $2d(n\text{-}2)$ olar. Alınan üçbucaqların daxili bucaqlarının cəmi verilən çoxbucaqların daxili bucaqlarının cəminə bərabər olduğundan hökmün doğruluğu alınır, yəni

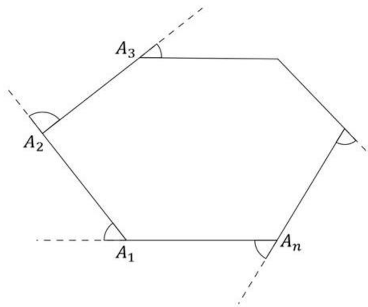
$$\sum_{i=1}^{n} A_1 = 2d(n-2)\,. \blacksquare$$

Teorem 2. *Qabarıq çoxbucaqlının xarici bucaqlarının cəmi 4d-yə bərabərdir.*

□ Qabarıq çoxbucaqlının 138-ci şəkildə göstərilən xarici bucaqlarını quraq. Aydındır ki, xarici bucaqlardan



Şəkil 137



Şəkil 138

hər biri özünə qonşu olan bucağı $2d$-yə tamamlayır. Ona görə də bütün daxili və xarici bucaqları cəmi $2dn$ olar. Bu cəmdən daxili bucaqların cəmini çıxsaq xarici bucaqların cəmini alarıq: $2dn - 2d(n-2) = 4d(=360^\circ)$. ■

ÇALIŞMALAR

1. İki paralel düz xətt üçüncü ilə kəsildikdə alınan daxili birtərəfli bucaqların tənbölənlərinin düz bucaq əmələ gətirdiyini isbat edin.

2. İki tərəfi paralel olan dördbucaqlının qarşı bucaqları 52^0 və 138^0-dir. Dördbucaqlının qalan bucaqlarını tapın.

3. *ABCD* dördbucaqlısında *BC* və *AD* tərəfləri paralel və bərabərdir. *AB* tərəfi 10 sm-ə bərabər və $\angle BAD = 65^0$-dir . *CD* tərəfini və qalan bucaqları tapın.

4. *ABC* üçbucağının daxilində götürülmüş *D* nöqtəsi *A* və *C* təpələri ilə birləşdirilmişdir. *ADC* bucağının *ABC* bucağından böyük olduğunu isbat edin.

5. İtibucaqlı *ABC* üçbucağında $\angle B = 70^0$-dir. *A* bucağının təpəsindən *AD* hündürlüyü çəkilmişdir. Alınan *ADB* üşbucağının bucaqlarını tapın.

6. *ABC* üçbucağında $\angle A = 65^0$, $\angle B = 73^0$-dir. *C* təpəsindən çəkilən hündürlüyün *AC* və *BC* tərəfləri ilə əmələ gətirdiyi bucaqları tapın.

7. Düz xətt xaricindəki nöqtədən, həmin düz xətt ilə 60^0-li bucaq əmələ gətirən iki mail çəkilmişdir. Maillərin oturacaqları arasındakı məsafə 26 sm-ə bərabərdir. Maillərin uzunluqlarını tapın.

8. *ABC* üçbucağının *CD* medianı çəkilmişdir. *DBC* və *DAC* üçbucağının *A* və *B* təpələrindən çəkilmiş hündürlüklərin bərabər olduğunu isbat edin.

9. *ABC* üçbucağında $\angle C = 35^0$ və *B* təpəsindən xarici bucaq 72^0-yə bərabərdir. Üçbucağın daxili bucaqlarını tapın.

10. Bərabəryanlı üçbucağın təpədəki xarici bucağının tənböləni, üçbucağın oturacağına paraleldir.Bunu isbat edin.

11. Bərabəryanlı üçbucağın təpədəki xarici bucağı 80^0 olarsa, daxili bucaqları tapın.

12. Bərabəryanlı üçbucağın təpədəki xarici bucağı 162^0 olarsa, üçbucağın oturacağındakı xarici bucaqları tapın.

13. *ABC* üçbucağında $\angle A = 48^0$, $\angle \mathbf{B} = 56^0$-dir. *AC* tərəfinin uzantısı üzərində *BC=CE* və *AD=AB* olmaq şərti ilə *CB* və *AD* parçaları ayrılmışdır. *DEB* üçbucağının bucaqlarını tapın.

14. Yan tərəfi 26 sm olan bərabəryanlı üçbucağın təpə bucağının tənböləni bunun tərəfi ilə 60^0-lik bucaq əmələ gətirir. Tənbölənin uzunluğunu tapın.

15. Uyğun tərəfləri paralel olan müxtəlif adlı iki bucağın nisbəti 2:7 kimidir. Bu bucaqları tapın.

16. Uyğun tərəfləri perpendikulyar olan müxtəlif adlı iki bucağın nisbəti 17:19 kimidir. Bu bucaqları tapın.

17. *AD* və *CD* düz xətləri *ABC* üçbucağının *BC* və *AB* tərəflərinə perpendikulyardır. $\angle ADC + \angle ABC = 180^0$ olduğunu isbat edin.

18. Bərabərtərəfli üçbucağın tərəfi üzərində götürülmüş ixtiyari nöqtədən o biri iki tərəfi perpendikulyar endirilmişdir.Perpendikulyarlar arasındakı bucağı tapın.
19. Düzbucaqlı üçbucaqda katet hipotenuzun yarısına bərabərdirsə bu katet qarşısındakı bucağın 30^0 olduğunu isbat edin.
20. Üçbucağın bucaqlarının nisbəti 1:2:3, kiçik və böyük tərəflərinin cəmi 7,2 sm olarsa, böyük tərəfin uzunluğunu tapın.
21. Düzbucaqlı üçbucaqda $\angle\mathbf{B} = 30^0$, AC=3,5 sm. Düz bucaq təpəsindən hipotenuza endirilmiş perpendikulyarın hipotenuzdan ayırdığı parçaların uzunluğunu tapın.
22. ABC üçbucağında $\angle\mathbf{B} = 105^0$ və BD hündürlüyü bu bucağı fərqi 15^0 olan iki bucağa ayırır. AD=2,75 sm olarsa, BC-ni tapın.
23. Bərabərtərəfli üçbucağın tərəfi üzərində götürülmüş nöqtə bu tərəfi 3 sm və 4 sm uzunluqda iki hissəyə ayırır. O biri iki tərəfə endirilmiş perpendikulyarların oturacaqlarının üçüncü təpədən olan məsafəsini tapın.
24. Üçbucağın eyni təpədən çəkilən medianı tənböləndən kiçik deyil. Bunu isbat edin.
25. Qabarıq çoxbucaqlının daxili bucaqlarının cəmi α olarsa, onun tərəflərinin sayı üçün düstur çıxarın və $\alpha = 10800^\circ$ olduqda tərəflərin sayını tapın.

TESTLƏR

1. Uyğun tərəfləri perpendikulyar olan iki bucağın fərqi 80^0-dir. Böyük bucağı tapın.

A) 100^0 B) 135^0 C) 130^0 D) 50^0 E) 55^0

2. Üçbucağın orta xətti m, oturacağı b və 5m-b=12 olarsa, b-ni tapın.

A) 6 B) 5 C) 8 D) 9 E) 7

3. Üçbucağın daxili bucaqları 2:3:7 nisbətindədir. Ən kiçik bucağı tapın.

A) 30^0 B) 25^0 C) 45^0 D) 60^0 E) 50^0

4. ABC üçbucağında $\angle A = x + 5^\circ$ $\angle B = 2x + 5^\circ$ $\angle C = x + 10^\circ$ olarsa, x-i tapın.

A) 30^0 B) 40^0 C) 50^0 D) 60^0 E) 70^0

5. Uyğun tərəfləri paralel olan bucaqların biri digərinin 80%-ni təşkil edir. Kiçik bucağı tapın.

A) 50^0 B) 60^0 C) 70^0 D) 80^0 E) 100^0

6. Bərabəryanlı üçbucağın oturacağa bitişik xarici bucağı 150^0-dir. Təpə bucağını tapın.

A) 30^0 B) 130^0 C) 120^0 D) 80^0 E) 100^0

7. Üçbucağın iki xarici bucağı 70^0 və 140^0-dir. Üçüncü xarici bucağı tapın:

A) 150^0 B) 210^0 C) 160^0 D) 70^0 E) 140^0

8. Üçbucağın bucaqlarının nisbəti 2:3:4 kimidir. Böyük bucaqla kiçik bucağın fərqini tapın.

A) 50^0 B) 30^0 C) 20^0 D) 60^0 E) 40^0

9. ABC üçbucağında $\angle BCD$ xarici bucaqdır. $\angle A + \angle B + \angle BCD = 280^\circ$ olarsa, $\angle BCA$-nı tapın.

10.Çoxbucaqlılar üçün uyğunluğu müəyyən edin.

1. Düzgün altıbucaqlı

a) 30^0-li bucaq qarşısındakı katet hipotenuzun yarısına bərabərdir.

2. Düzbucaqlı üçbucaq

b) Hər bir xarici bucağı 60^0-dir.

3. Düzgün üçbucaq

c) Daxili bucaqlarının cəmi 720^0-dir.

d) Bir xarici bucağı bir daxili bucağına bərabərdir.

e) Xarici bucağı daxili bucağından 2 dəfə böyükdür.

X FƏSİL

DÖRDBUCAQLILAR. DAXİLƏ və XARİCƏ ÇƏKİLMİŞ ÇOXBUCAQLAR

§ 57. PARALELOQRAM və ONUN XASSƏLƏRİ

Əvvəlki fəsildə qabarıq çoxbucaqlıları nəzərdən keçirdik. Tərəflərinin sayı dörd olan çoxbucaqlı, *dördbucaqlı* adlanır. Buna görə də çoxbucaqlılar üçün söylədiyimiz təkliflər dördbucaqlılar üçün də doğrudur. Lakin dördbucaqlıların elə xüsusi növləri var ki, onlara xas olan bəzi xassələr çoxbucxaqlılarda yoxdur. Odur ki, onları ayrıca öyrənək.

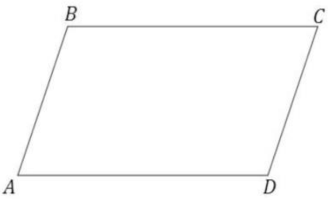
Tərif. Qarşı tərəfləri paralel olan dördbucaqlıya *paraleloqram* deyilir (şəkil 139). *ABCD* paraleloqramında *AB//CD* və *B//|AD.*

Teorem 1. *Dörbucaqlının dioqanalları kəsişmə nöqtəsində yarı bölünürsə, onda bu dördbucaqlı paraleloqramdır.*

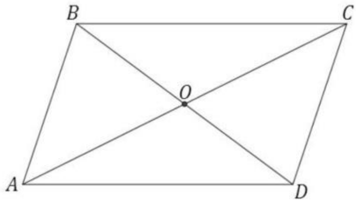
□ Fərz edək ki, *ABCD* dördbucaqlısının diaqonalları *O* nöqtəsində kəsişir və *AO=OC, BO=OD*-dir (şəkil 140). Göstərək ki, *ABCD* paraleloqramdır. Doğrudan da, *AOD* və *BOC* üçbucaqlarında $\angle AOD = \angle BOC$ (qarşılıqlı bucaqlar) və *AO=OC, BO=OD* (şərtə görə) olduğu üçün onlar bərabərdir (birinci əlamət). Odur ki, $\angle OAD = \angle OCB$ və *AD//BC* olur. Deməli, *BC* və *AD* xətləri üçüncü *AC* düz xətti ilə kəsişdikdə daxili çarpaz bucaqlar bərabərdir, yəni *BC//AD*. Oxşar qayda *AOB* və *COD* üçbucaqlarının bərabərliyindən *AB//CD* olduğu alınr. Beləliklə, *ABCD* dördbucaqlısının qarşı tərəfləri cüt-cüt paraleldir, yəni bu dördbucaqlı paraleloqramdır. ■

Teoremin tərsi də doğrudur.

Teorem 2 (tərs teorem). *Paraleloqramın diaqonalları kəsişmə nöqtəsində*



Şəkil 139



Şəkil 140

yarı bölünür.

Teorem 3. *Paraleloqramın bir tərəfinə bitişik bucaqlarının cəmi 180^0-yə bərabərdir.*

Son iki teoremin isbatını oxuyuculara həvalə edirik.

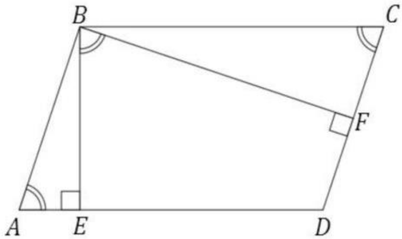
Məsələ 1. Paraleloqramın kor bucağı təpəsindən çəkilmiş hündürlüklər arasındakı bucağın onun iti bucağına bərabər olduğunu isbat edin.

○ Tutaq ki, *ABCD* verilmiş paraleloqram, *BE* və *BF* isə kor bucaq təpəsindən çəkilmiş hündürlüklərdir (şəkil 141). Şəkildən göründüyü kimi *EBF* və *BCD* bucaqlarının uyğun tərəfləri perpendikulyardır. ($BE \perp BC,\ BF \perp CD$). Ona görə də $\angle EBF = \angle BCD$ olur. ●

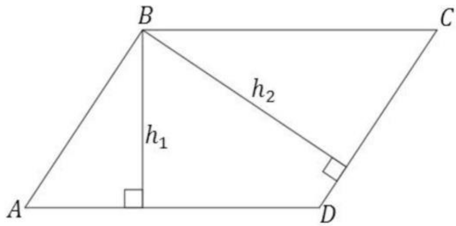
Məsələ 2. Paraleloqramın 150^0-yə bərabər olan kor bucaq təpəsindən uzunluqları h_1 və h_2 olan hündürlüklər çəkilmişdir. Paraleloqramın perimetrini tapın.

○ Tutaq ki, *ABCD* verilmiş paraleloqram, $\angle ABC = 150^\circ$ və $BE = h_1$, $BF = h_2$ isə kor bucaq təpəsindən çəkilmiş hündürlüklərdir (şəkil 142). Şərtə görə $\angle ABC = \angle ADC = 150^0$ olduğundan, $\angle A = \angle C = 30^\circ$ olur. *ABE* və *BCF* üçbucaqları düzbucaqlı üçbucaq olduğundan, $AB = 2h_1$, $BC = 2h_2$ olar.

Odur ki, axtarılan perimetr $P = 2(AB + BC) = 2(2h_1 + 2h_2)$, yəni $P = 4(h_1 + h_2)$ olur. ●



Şəkil 141



Şəkil 142

§ 58. PARALELOQRAMIN ƏLAMƏTLƏRİ

Teorem 1. *Dördbucaqlının qarşı tərəfləri bərabərdirsə, bu dördbucaqlı paraleloqramdır.*

□ Tutaq ki, *ABCD* dördbucaqlısında (şəkil 143) *AD=BC* və *AB=CD*. İsbat edək ki, bu dördbucaqlı paraleloqramdır. Bu məqsədlə dördbucaqlının *AC* diaqonalını çəkək. Bu zaman alınmış *ABC* və *CDA* üçbucaqları *AB=CD*, *AD=BC* və *AC* ortaq tərəf olduğundan bərabərdirlər:

$$\Delta ABC = \Delta CDA.$$

Buradan $\angle BAC = \angle DCA$ və $\angle BAC = \angle CAD$ alınır. Bu isə *AB//CD* və *BC//AD* olması deməkdir (düz xətlərin paralellik əlaməti), yəni dördbucaqlı paraleloqramdır. ■

Teorem 2. *Dördbucaqlının qarşı bucaqları bərabərdirsə, bu dördbucaqlı paraleloqramdır.*

Teorem 3. *İki qarşı tərəfi bərabər və paralel olan dördbucaqlı paraleloqramdır.*

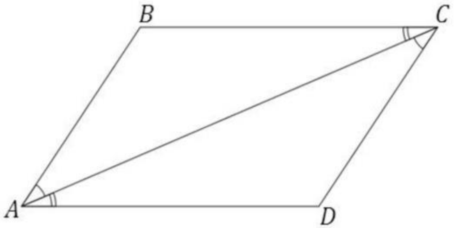
Bu teoremlərin isbatını oxuyuculara həvalə edirik.

Nəticə 1. *Paralel düz xətlər arasında qalan paralel düz xətt parçaları bərabərdir.*

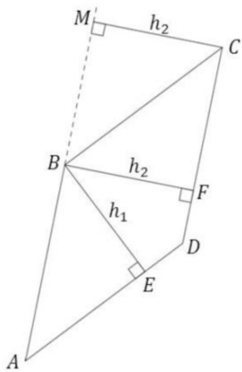
Nəticə 2. *Paralel düz xətlər arasındakı məsafə dəyişmir.*

Tərif. Paraleloqramın paralel tərəflərinə çəkilən perpendikulyarın onların arasında qalan hissəsinə onun *hündürlüyü* deyilir (şəkil 144).

BE və *BF* paraleloqramın hündürlükləridir.



Şəkil 143



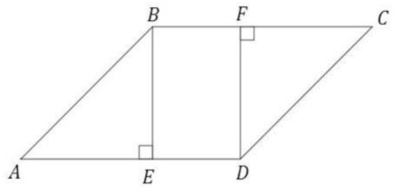
Şəkil 144

Məsələ 1. *ABCD* paraleloqramının *B* və *D* təpə nöqtəsindən bir-birinə paralel olan *BE* və *DF* hündürlükləri çəkilmişdir. $\Delta ABE = \Delta DCF$ olduğunu isbat edin (şəkil 145).

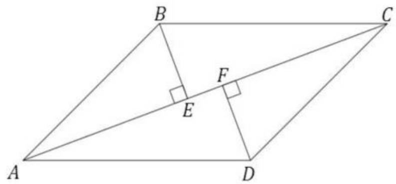
○ *ABE* və *CDF* düzbucaqlı üçbucaqlarında *AB=CD* (paraleloqramın qarşı tərəfləri) və *BE=FD* (paralel tərəflər arasında qalan parçalar) olduğundan üçbucaqların bərabərlik əlamətlərinə görə $\Delta ABE = \Delta DCF$ alınır. ●

Məsələ 2. Paraleloqramın kor bucaq təpəsindən onun diaqonalına perpendikulyar çəkilən parçaların bərabərliyini isbat edin.

○ İsbat üçün *AC* diaqonalına *BE* və *DF* perpendikulyarlarını çəkək (şəkil 146). Alınmış *ABE* və *CDF* düzbucaqlı üçbucaqlarında *AB=CD* (paraleloqramın qarşı tərəfləri), $\angle BAC = \angle ACD$ (daxili çarpaz bucaqlar) olduğundan $\Delta ABE = \Delta CDF$ olur. Buradan da *BE=FD* alınır. ●

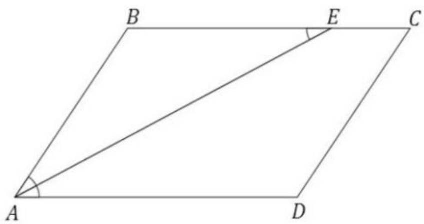


Şəkil 145



Şəkil 146

Məsələ 3. Paraleloqramın bucağının tənböləni onun tərəflərindən birini uzunluqları *a* və *b* olan iki parçaya ayırır. Paraleloqramın perimetrini tapın.



Şəkil 147

○ *ABCD* paraleloqramında *A* bucağının *AE* tənbölənini çəkək (şəkil 147). *BE=a, EC=b,* $\angle BAE = \angle EAD$ olduğunu bilərək, perimetri (*P*) tapaq. *BC=AD=BE+EC=a+b,* $\angle BEA = \angle EAD = \angle BAE$ olduğundan, *ABE* üçbucağı bərabəryanlıdır. Odur ki, *AB=BE=a* və $P = 2(AB + BC) = 2(a + a + b) = 2(2a + b)$. ●

§ 59. PARALELOQRAMIN XÜSUSİ NÖVLƏRİ

1. Düzbucaqlı. Bütün bucaqları düz olan paraleloqrama və ya qonşu tərəfləri qarşılıqlı perpendikulyar olan paraleloqrama *düzbucaqlı* deyilir (şəkil

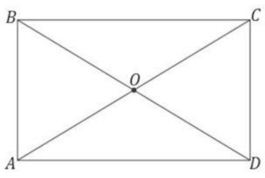
148). Düzbucaqlı paraleloqram olduğundan, paraleloqramın bütün xassələri düzbucaqlı üçün də doğrudur. Bundan əlavə düzbucaqlının aşağıdakı xassəsi var:

Xassə: *Düzbucaqlının diaqonalları bərabərdir.*

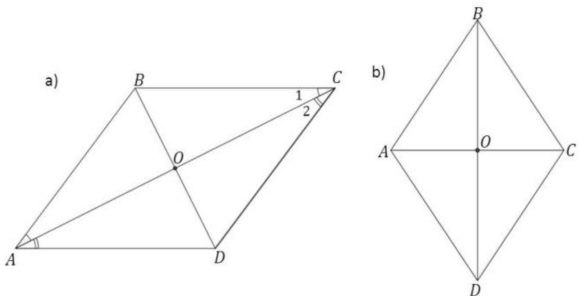
□ Tutaq ki, *ABCD* verilmiş düzbucaqlı, *AC* və *BD* isə onun diaqonallarıdır (şəkil 148). İsbat edək ki, *AC=BD*. Bu məqsədlə *BAD* və *ADC* üçbucağına baxaq. Bu üçbucaqlarda *AD* ortaq tərəf və *AB=DC* (düzbucaqlının qarşı tərəfləri) olduğundan onlar bərabərdir: $\Delta BAD = \Delta ADC$. Buradan da $AC = BD$ alınır. ■

Asanlıqla göstərmək olar ki, diaqonalları bərabər olan paraleloqram düzbucaqlıdır.

2. Romb. Bütün tərəfləri bərabər olan paraleloqrama *romb* deyilir (şəkil 149. a, b)



Şəkil 148



Şəkil 149

Romb paraleloqram olduğundan, paraleloqramın bütün xassələri romb üçün də doğrudur. Bundan əlavə rombun aşağıdakı xassəsi də var:

Xassə. *Rombun diaqonalları bir birinə perpendikulyar olub, onun bucaqlarını yarı bölür.*

□ *ABCD* rombunun *AC* və *BD* diaqonallarını çəkək (şəkil 149, a). İsbat edək ki, $AC \perp BD$ və *AC* diaqonalı *C* bucağını yarı bölür. *BCD* üçbucağı bərabəryanlıdır (*BC*=*CD* rombun tərifinə görə) və *CO* bu üçbucağın medianıdır. Bərabəryanlı üçbucaqda təpə bucağının medianı həm hündürlük, həm də tənbölən olduğundan, $AC \perp BD$ və $\angle 1 = \angle 2$ olar. Oxşar qayda ilə isbat etmək olar ki, *AC* diaqonalı *A* bucağını, *BD* diaqonalı *B* və *D* bucağını yarı bölür. ■

Aşağıdakı təklif də doğrudur:

Diaqonalları qarşılıqlı perpendikulyar olan paraleloqram rombdur.

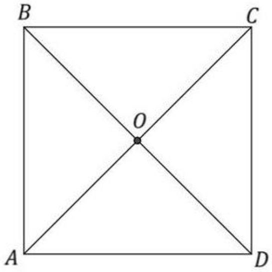
3. Kvadrat. Tərəfləri və bucaqları bərabər olan paraleloqrama *kvadrat* deyilir.

Tərifdən aydındır ki, bütün tərəfləri bərabər olan düzbucaqlı və bütün bucaqları düz olan romb kvadratdır (şəkil 150).

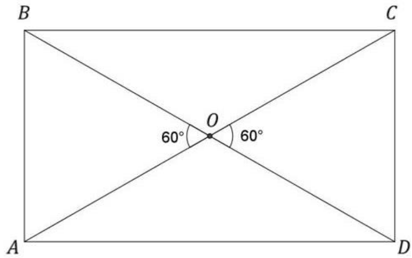
Kvadrat eyni zamanda paraleloqram, düzbucaqlı və romb olduğundan bu fiqurların bütün xassələri kvadrat üçün də doğrudur.

Məsələ 1. Diaqonalları 60^0-li bucaq altında kəsişən və diaqonal ilə kiçik tərəfin cəmi 1,8 *m* olan düzbucaqlının diaqonalı və kiçik tərəfinin uzunluğunu tapın.

○ *ABCD* düzbucaqlısında $\angle AOB = 60^\circ$ və *AB*+*AC*=1,8 *m* olsun (şəkil 151).



Şəkil 150



Şəkil 151

AB və *AC*-ni tapaq. *AO=OB* və $\angle AOB = 60^\circ$ olduğundan, *AOB* üçbucağı bərabərtərəfli üçbucaqdır. Onda $AB = AO = OB = \dfrac{1}{2}AC$. Şərtə görə *AB+AC*=1,8 olduğundan, *AB*=0,6 *m*, *AC*=1,2 *m* olur. ●

Məsələ 2. Düzbucaqlının bucağının tənböləni böyük tərəfi iki bərabər parçaya ayırır. Kiçik tərəfin 10,5 *sm* olduğunu bilərək, düzbucaqlının perimetrini tapın.

○ *ABCD* verilmiş düzbucaqlı, *AE* isə *A* bucağının tənböləni olsun (şəkil 152) *AB*=10,5 *sm, BE=EC* olduğunu bilərək düzbucaqlının perimetrini tapaq.

Şəkildən göründüyü kimi, *ABE* üçbucağı bərabəryanlı düzbucaqlı üçbucaqdır: *AB=BE*=10,5 *sm*, *BC=2BE*=21 *sm*.

$$P = 2AB + 2BC = 2\cdot 10{,}5 + 2\cdot 21 = 63, \quad P = 63\ sm.$$ ●

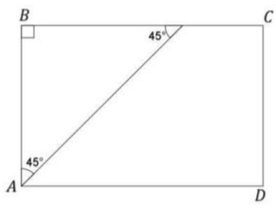
Məsələ 3. Rombun kiçik diaqonalı ilə tərəfi arasında qalan bucağın tənböləni, o biri tərəflə 72^0-li bucaq əmələ gətirir. Rombun bucaqlarını tapın.

○ *ABCD* verilmiş romb, *BM* isə tərəflə diaqonal arasında qalan bucağın tənböləni olsun (şəkil 153). Rombun bucaqlarını tapaq. $\angle ABM = x$ olsun. *ABD* üçbucağında $\angle BDA = 2x$ olar. *AMB* bucağı *BDM* üçbucağının xarici bucağı olduğundan $x+2x=72^\circ$, buradan $x=24^0$ olur. Onda, $\angle ABC=\angle ADC=4\cdot x=96^\circ$, $\angle A=\angle C=84^0$ olur. ●

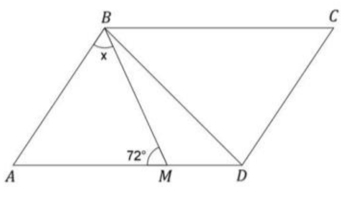
Məsələ 4. Kateti 4 *sm* olan bərabəryanlı düzbucaqlı üçbucaq daxilinə, bu üçbucaqla ortaq bucağı olan kvadrat çəkilmişdir. Kvadratın perimetrini tapın.

○ *ACB* verilmiş bərabəryanlı düzbucaqlı üçbucaq (*AC*=*CB*=4 *sm*, $\angle C=90^0$), *CEMN* isə onun daxilinə çəkilmiş kvadrat olsun (şəkil 154). Bu kvadratın perimetrini tapaq. Kvadratın tərəfi x olsun. Onda , *AE*=*EC*=*CN*=*NB*=*x* olar. $AE=EC=\frac{1}{2}\cdot 4=2\Rightarrow$ $x=2$ *sm*. Deməli, *P*=4 *x*, $P=4\cdot 2=8\Rightarrow P=8$ sm olur. ●

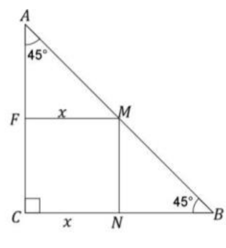
Məsələ 5. *ABCD* kvadratının *BD* diaqonalı *E* və *F* nöqtələri vasitəsilə üç bərabər hissəyə bölünmüş və bu nöqtələr kvadratın *A* və *C* təpələri ilə birləşdirilmişdir. Alınmış *AECF* dördbucaqlısının romb olduğunu isbat edin (şəkil 155).



Şəkil 152

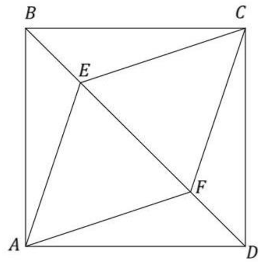


Şəkil 153



Şəkil 154

○ *ABCD* kvadrat olsun. Aydındır ki, *AEB*, *BEC*, *CFD* və *AFD* üçbucaqlı bir-birinə bərabərdir. Buradan *AE*=*EC*=*CF*=*FA* alınır. Yəni *AECF* rombdur. ●



Şəkil 155

§ 60. FALES TEOREMİ

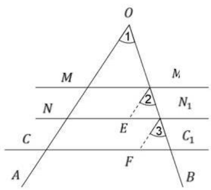
Teorem. *Bucağın tərəflərini kəsən paralel düz xətlər, onun bir tərəfi üzərində bərabər parçalar ayırarsa, onda o biri tərəfi üzərində də bərabər parçalar ayırar.*

□ *AOB* bucağının *OA* tərəfi üzərində *OM=MN=NC* parçaları ayıraq və *M*, *N*, *C* nöqtələrindn bucağın o biri tərəfini kəsən paralel düz xətlər çəkək (şəkil 156). İsbat edək ki, $OM_1 = M_1N_1 = N_1C_1$. Bu məqsədlə M_1 və N_1 nöqtələrindən bucağın *OA* tərəfinə paralel düz xətlər çəkək. Bu zaman alınan OMM_1, M_1EN_1 və N_1FC_1 üçbucaqları bərabərdir: ($OM = M_1E = N_1F$, $\angle 1 = \angle 2 = \angle 3$ və $\angle 4 = \angle 5 = \angle 6$ olduğundan). Odur ki, $OM_1 = M_1N_1 = N_1C_1$ olur. ■

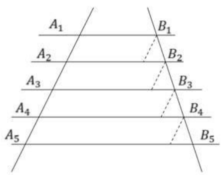
Teoremi isbat edərkən, bucağın bir tərəfi üzərində bərabər parçaları bucağın təpə nöqtəsindən başlayaraq ayırırdıq. Teorem, bərabər parçalar bucağın tərəfi üzərind istənilən nöqtədən başlayaraq ayrıldıqda da doğrudur (şəkil 157). Bu teoremdən parçanı istənilən sayda bərabər hissələrə bölmək üçün istifadə edilir.

Məsələ. Verilmiş *AB* parçasını 9 bərabər hissəyə bölün.

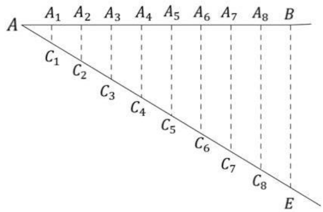
○ Tutaq ki, *AB* verilmiş parçadır (şəkil 158). Bu parçanı 9 bərabər hissəyə bölmək üçün *AB* parçası ilə hər hansı bucaq əmələ gətirən *AE* şüası keçirək və *A* nöqtəsindən başlayaraq həmin şüa üzərində ardıcıl olaraq 9 bərabər parça ayıraq.



Şəkil 156



Şəkil 157



Şəkil 158

Son bölgü nöqtəsini (C_9) B nöqtəsi ilə birləşdirək və digər bölgü nöqtələrindən buna paralellər çəkək. onda isbat etdiyimiz teoremə əsasən

$$AA_1 = A_1A_2 = ... = A_8B$$

olar. ●

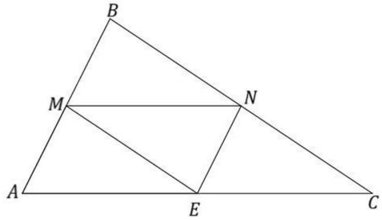
§ 61. ÜÇBUCAĞIN ORTA XƏTTİ və ONUN XASSƏSİ

Hər hansı *ABC* üçbucağının tərəflərinin orta *M, N* və *E* nöqtələrini qeyd edib, onları düz xət parçaları ilə bierləşdirək (şəkil 159)

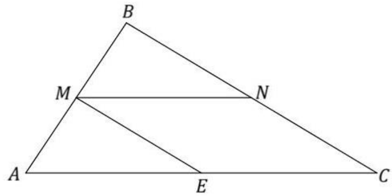
Tərif. Üçbucağın iki trəfinin orta nöqtəsini birləşdirən düz xətt parçasına onun *orta xətti* deyilir.

Teorem. *Üçbucağın orta xətti onun üçüncü tərəfinə paralel olub, həmin tərəfin uzunluğunun yarısına bərabərdir.*

□ *M* nöqtəsi *ABC* üçbucağının *AB* tərəfinin orta nöqtəsi olsun (şəkil 160). Bu nöqtədən *AC* və *BC* tərəflərinə uyğun olaraq *MN* və *ME* paralel düz xətt parçalarını çəkək. *AM=MB* olduğundan, Fales teoreminə görə *BN=NC* və *AE=EC* olur. Deməli, *N* nöqtəsi *BC* tərəfinin, *E* nöqtəsi isə *AC* tərəfinin orta nöqtəsidir. Başqa sözlə *MN* və *ME* orta xətlərdir. Onda *MN//NC* olduğundan, *MNCE* dördbucaqlısı paraleloqramdır. Odur ki, $MN = EC = \frac{1}{2}AC$ olur. ■



Şəkil 159



Şəkil 160

Məsələ 1. Perimetri $2p$ olan bərabəryanlı üçbucağın yan tərəflərinə çəkilmiş orta xətinin uzunluğu a-ya bərabər olarsa, onun yan tərəflərinin uzunluğunu tapın.

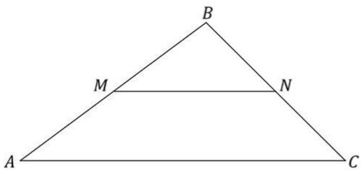
○ *ABC* verilmiş bərabəryanlı üçbucaq, $MN = a$ isə onun orta xətti olsun (şəkil 161). Şərtə görə $2AB + AC = 2p$. Digər tərəfdən $MN = \frac{1}{2} \cdot AC$, yəni *AC=2a*. Onda $2AB + 2a = 2p$, buradan isə *AB=p*-a olur. ●

Məsələ 2. Düzbucaqlı üçbucağın perimetri 30 *sm*-dir. Onun tərəflərindən biri o birindən 7 *sm* böyük, digərindən isə 1 *sm* kiçikdir. Hipotenuza paralel orta xəttin uzunluğunu tapın.

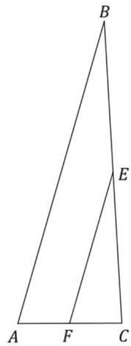
○ Şərtə görə *AB*+*BC*+*AC*=30, *BC*=*AC*+7, *BC*=*AB*-1 (şəkil 162). Buradan *AC*=*BC*-7, *AB*=*BC*+1. Nəticədə isə *BC*+*1*+*BC*+*BC*-7=30, yəni *BC*=12 sm olur.Digər tərəfdən *AB*=*BC*+1 olduğundan *AB*=13 *sm* olar və $EF = \frac{1}{2}AB$, yəni *EF*=6,5 *sm*. ●

§ 62. TRAPESİYA.TRAPESİYANIN ORTA XƏTTİ və ONUN XASSƏLƏRİ

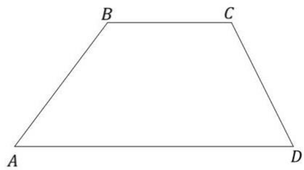
Tərif. İki tərəfi paralel, digər iki tərəfi paralel olmayan dördbucaqlıya *trapesiya* deyilir (şəkil 163).



Şəkil 161



Şəkil 162

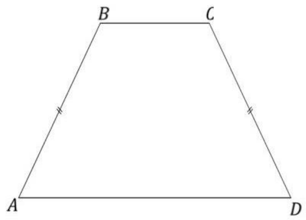


Şəkil 163

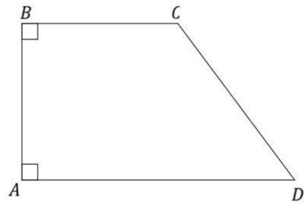
Trapesiyanın paralel tərəfləri, onun *oturacaqları*, paralel olmayan tərəfləri isə *yan tərəfləri* adlanır.

Yan tərəfləri bərabər olan trapesiyaya *bərabəryanlı trapesiya* deyilir (şəkil 164).

Yan tərəflərindən biri oturacağa perpendikulyar olan trapesiya *düzbucaqlı trapesiya* adlanır (şəkil 165).



Şəkil 164



Şəkil 165

Trapesiyanın yan tərəflərinin orta nöqtəsini birləşdirən düz xətt parçasına onun *orta xətti* deyilir.

Teorem. *Trapesiyanın orta xətti hər iki oturacağa paralel olub, onların uzunluqları cəminin yarısına bərabərdir.*

□ *ABCD* verilmiş trapesiya, *MN* isə onun orta xətti olsun (şəkil 166). İsbat edək ki,

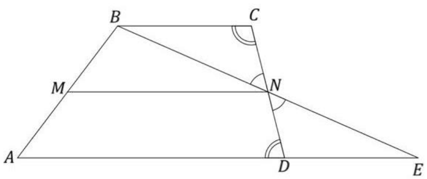
$$MN//BC,\ MN//AD,\ MN=\frac{1}{2}(BC+AD).$$

Bu məqsədlə *B* və *N* nöqtələrindən keçib, *AD*-nin uzantısını kəsən *BE* düz xətt parçasını çəkək. Alınmış *BCN* və *DNE* üçbucaqları *CN=ND* (şərtə görə), $\angle BNC=\angle END$ (qarşılıqlı bucaqlar) və $\angle BCN=\angle NDE$ (daxili çarpaz bucaqlar) olduğundan bərabərdir: $\Delta BCN=\Delta DNE$. Buradan *BN=NE* və *BC=DE*. Onda trapesiyanın *MN* orta xətti *ABE* üçbucağnın da orta xəttidir. Onda $MN=\frac{1}{2}AE$ olur. Buradan isə $MN=\frac{1}{2}(BC+AD)$ olması alınır. *MN*-orta xətt olduğundan *MN//AD* olması çıxır. ■

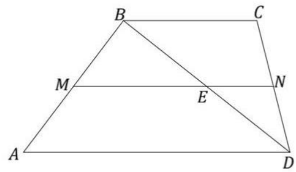
Məsələ 1. Trapesiyanın diaqonalı orta xətti biri o birinin 20 %-i olan iki hissəyə ayırır. Orta xəttin 48 *sm* olduğunu bilərək trapesiyanın oturacaqlarını tapın.

○ *ABCD* verilmiş trapesiya, *MN* isə onun orta xətti olsun (şəkil 167). *ME=x* qəbul etsək, *EN=0,2 x* olar. Odur ki, $x + 0{,}2x = 48$, buradan isə *x*=40 sm alınır. Deməli, *ME*=4 *sm*, *EN*=8 *sm* olur.

ME düz xətt parçası *ABD* üçbucağının, *EN* isə *BCD* üçbucağının orta xətti olduğundan *AD*=80 *sm* və *BC=16* sm olur. ●



Şəkil 166



Şəkil 167

Məsələ 2. Diaqonalları qarşılıqlı perpendikulyar olan trapesiyanın hündürlüyünün onun orta xəttinə bərabər olduğunu isbat edin.

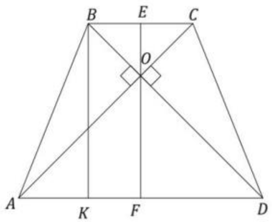
○ *ABCD* verilmiş trapesiya, *BK* (və ya *EF*) isə onun hündürlüyü olsun (şəkil 168). İsbat edək ki, $EF = \frac{1}{2}(BC + AD)$. Şərtə görə $AC \perp BD$ və *AB=CD* olduğundan *AOD* və *BOC* üçbucaqları bərabəryanlı düzbucaqlı üçbucaqlardır. Onda

$\angle ODA = \angle OAD = \angle OBC = \angle OCB = 45^\circ$ olur. Digər tərəfdən *AOF* və *BOE* üçbucaqları da bərabəryanlı düzbucaqlı üçbucaqlardır. Ona görə də

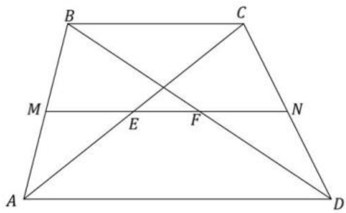
OF=AF və *OE=BE* olur. Bu bərabərlikləri tərəf-tərəfə toplasaq *OF+OE=AF=BE* və ya $EF = \frac{1}{2}(BC + AD)$ alarıq. ●

Məsələ 3. Trapesiyanın diaqonallarının orta nöqtələrini birləşdirən düz xət parçası oturacaqlara paralel olub, onların uzunluqları fərqinin yarısına bərabərdir. Bunu isbat edin.

○ *ABCD* verilmiş trapesiya, *E* və *F* isə onun diaqonallarının orta nöqtələri olsun (şəkil 169). Şəkildən göründüyü kimi *ME* düz xətt parçası *ABC*



Şəkil 168



Şəkil 169

üçbucağının, *MF* isə *ABD* üçbucağının orta xəttidir. Odur ki, *EF//AD*. Digər tərəfdən $ME = \frac{1}{2}BC$ və $ME = \frac{1}{2}AD$ olur.

$$EF = MF - ME = \frac{1}{2}AD - \frac{1}{2}BC$$

olduğundan,

$$EF = \frac{1}{2}(AD - BC)\,. \;●$$

Aşağıdakı təkliflərin doğruluğunu isbat etməyi oxuculara həvalə edirik.

1. *Bərabəryanlı trapesiyanın hər bir oturacağına bitişik olan bucaqlar bərabərdir.*

2. *Bərabəryanlı trapesiyanın diaqonalları bərabərdir.*

Bu iki təklifin tərsi də doğrudur.

§ 63. DÜZ XƏTLƏ ÇEVRƏNİN QARŞILIQLI VƏZİYYƏTİ

Düz xətlə çevrə aşağıdakı kimi qarşılıqlı vəziyyətlərdə ola bilər:

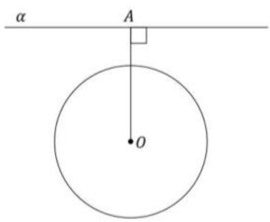
1. Düz xəttin çevrə ilə heç bir ortaq nöqtəsi yoxdur (şəkil 170).

2. Düz xəttin çevrə ilə ancaq bir ortaq nöqtəsi var (şəkil 171).

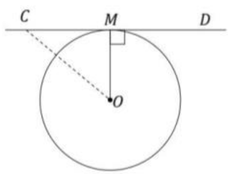
Bu halda düz xətt *çevrəyə toxunan*, ortaq nöqtə isə *toxunma nöqtəsi* adlanır.

3. Düz xəttin çevrə ilə iki ortaq nöqtəsi var (şəkil 172).

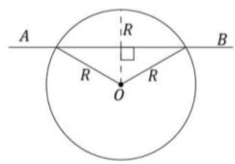
Bu düz xətt *çevrənin kəsəni* adlanır.



Şəkil 170



Şəkil 171



Şəkil 172

Çevrənin toxunanı haqqında aşağıdakı teoremləri isbat edək.

Teorem 1. *Radiusun çevrə üzərindəki ucunda ona perpendikulyar olan düz xətt həmin çevrəyə toxunandır.*

□ *OM* çevrənin radiusu və $CD \perp OM$ olsun (şəkil 171). İsbat edək ki, *CD* düz xətti çevrənin toxunanıdır. Doğrudan da $CD \perp OM$ olduğundan *CD* düz xəttinin *M* nöqtəsindən fərqli bütün nöqtələrindən mərkəzə qədər olan məsafə *OM*-dən böyük olacaqdır. Deməli, *CD* düz xəttinin *M* nöqtəsindən fərqli bütün nöqtələri çevrənin xaricində yerləşir. Buna görə də *M* nöqtəsi çevrə ilə *CD* düz xəttinin yeganə ortaq nöqtəsidir. Bu da *CD* düz xəttinin çevrəyə toxunan olması deməkdir. ■

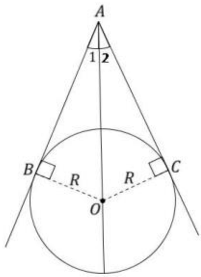
Teorem 2 (tərs teorem). *Toxunan, toxunma nöqtəsinə çəkilmiş radiusa perpendikulyardır.*

□ *CD* çevrənin toxunanı, *M* isə onun toxunma nöqtəsi olsun (şəkil 171). İsbat edək ki, $OM \perp CD$. *CD* düz xətti çevrəyə *M* nöqtəsində toxunduğundan onun bütün nöqtələri (*M* nöqtəsindən başqa) çevrənin xaricində yerləşəcəkdir. Odur ki, həmin nöqtələrin mərkəzdən olan məsafəsi *OM*-dən böyük olacaqdır. Deməli, *OM* radiusu *O* mərkəzini *CD* düz xətti ilə birləşdirən parçalardan ən kiçiyidir. Ona görə də $OM \perp CD$. ■

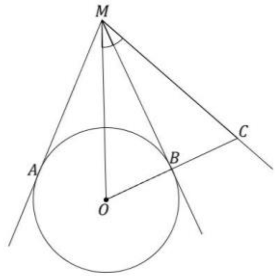
Teorem 3. *Çevrə xaricində götürülmüş nöqtədən bu çevrəyə çəkilmiş toxunanların toxunma nöqtəsinə qədər olan parçaları bərabərdir və çevrənin mərkəzi, toxunanların əmələ gətirdiyi bucağın tənböləni üzərindədir.*

□ *A* nöqtəsindən çevrəyə *AB* və *AC* toxunanlarını çəkək (şəkil 173). $OB \perp AB$ və $OC \perp AC$ olduğundan, *AOB* və *AOC* düzbucaqlı üçbucaqlardır və həm də $\Delta AOB = \Delta AOC$ (*OA*-ortaq hipotenuz və *OB*=*OC*=*R*). Odur ki, *AB*=*AC* və $\angle 1 = \angle 2$ olması göstərir ki, *OA* tənböləndir. ■

Məsələ. Çevrə xaricində götürülmüş *M* nöqtəsindən çıxan iki şüa bu çevrəyə uyğun olaraq *A* və *B* nöqtəsindən toxunur. Çevrənin *OB* radiusu çəkilmiş və *B* nöqtəsindən sonra *BC*=*OB* məsafəsi qədər uzadılmışdır (şəkil 174). $\angle AMC = 3$. olduğunu isbat edin.



Şəkil 173



şəkil 174

○ Çevrə mərkəzini M nöqtəsi ilə birləşdirsək $\angle AMO = \angle BMO$ olar. Digər tərəfdən $\Delta OMB = \Delta BMC$ MB ortaq hipotenuz və $OB=BC$. Olduğundan $\angle OMB = \angle BMC$ olur. Odur ki, $\angle AMO = \angle OMB = \angle BMC$. Deməli, $\angle AMC = 3\angle BMC$ alınır. ●

§ 64. İKİ ÇEVRƏNİN QARŞILIQLI VƏZİYYƏTİ

Mərkəzləri O_1 və O_2 nöqtələrində radiusları isə uyğun olaraq R_1 və R_2 olan iki çevrə götürək. Bu çevrələrin mərkəzləri arasındakı məsafə d olsun. İki çevrə aşağıdakı kimi qarşılıqlı vəziyyətlərdə ola bilər:

1. Çevrələrin ortaq nöqtəsi yoxdur. Burada iki hal ola bilər:

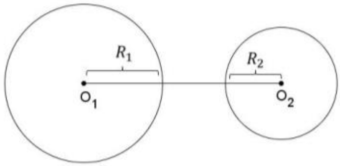
a) Çevrələr bir-birinin xaricindədir (şəkil 175). Bu halda

$$d > R_1 + R_2;$$

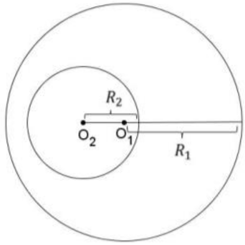
b) Çevrələrdən biri digərinin daxilindədir ($R_2 < R_1$, şəkil 176).

Bu halda,

$$0 \le d < R_1 - R_2.$$



Şəkil 175



Şəkil 176

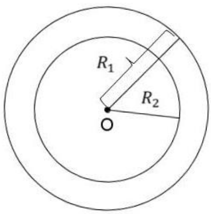
d=0 olduqda çevrələrin mərkəzləri üst-üstə düşür. Belə çevrələr *konsentrik çevrələr* adlanır (şəkil 177).

2. Çevrələrin ancaq bir ortaq nöqtəsi var, yəni çevrələr toxunur. Çevrələr xaricdən toxunduqda (şəkil 178),

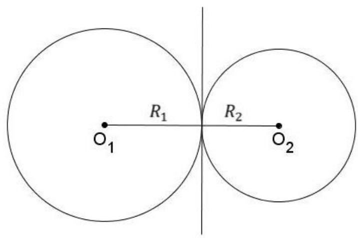
$$d = R_1 + R_2,$$

daxildən toxunduqda isə (şəkil 179)

$$d = R_1 - R_2.$$

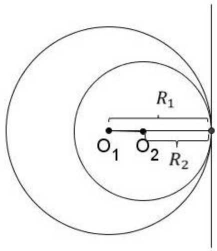


Şəkil 177

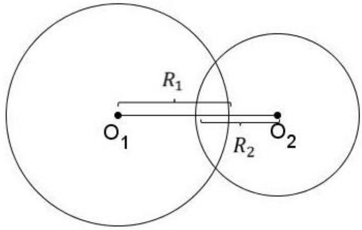


Şəkil 178

3. Çevrələrin iki ortaq nöqtəsi vardır, yəni çevrələr kəsişir (şəkil 180).



Şəkil 179



şəkil 180

Bu halda,

$$R_1 - R_2 < d < R_1 + R_2$$

olur.

§ 65. ÇEVRƏ İLƏ BAĞLI OLAN BUCAQLAR

1. Daxilə çəkilmiş bucaqlar. Çevrənin hər hansı nöqtəsindən çıxan iki vətərin əmələ gətirdiyi bucağa *daxilə çəkilmiş bucaq* deyilir.

Məsələn, *AMB* daxilə çəkilmiş bucaqdır (şəkil 181). Daxilə çəkilmiş bucaq tərəfləri arasında qalan qövsə söykənir, demək qəbul olunmuşdur. 181-ci şəkildəki *AMB* bucağı *AB* qövsünə söykənir.

Teorem. *Daxilinə çəkilmiş bucaq söykəndiyi qövsün yarısı ilə ölçülür.*

□ İsbat üçün aşağıdakı mümkün hallara baxaq:

1) Çevrənin mərkəzi, bucağın tərəflərindən biri üzərindədir (şəkil 181). *OB* radiusunu çəksək, *AB* qövsünə uyğun *AOB* mərkəzi bucağını alarıq.

MOB üçbucağı bərabəryanlı və *AOB* bucağı onun xarici bucağı olduğundan $\angle AOB = 2\angle AMB$ olar. Buradan

$$\angle AMB = \frac{1}{2}\angle AOB = \frac{1}{2}\overset{\cup}{AB};$$

2) Çevrənin mərkəzi bucağın tərəfləri arasındadır (şəkil 182). *MC* diametri, *AMB* bucağını *AMC* və *CMB* bucaqlarına ayırır. Birinci hala görə $\angle AMC = \frac{1}{2}\overset{\cup}{AC}$ və $\angle CMB = \frac{1}{2}\overset{\cup}{BC}$, buradan

$\angle AMC + \angle CMB = \frac{1}{2}(\overset{\cup}{AC} + \overset{\cup}{BC})$, yəni $\angle AMB = \frac{1}{2}\overset{\cup}{AB}$ olur;

3) Bucaq çevrənin mərkəzindən bir tərəfdədir (şəkil 183). *MC* diametrini çəksək, birinci hala görə

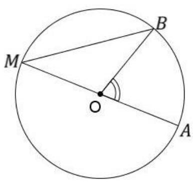
$$\angle CMA = \frac{1}{2}\overset{\cup}{CA},\ \angle CMB = \frac{1}{2}\overset{\cup}{CB}.$$

Odur ki,

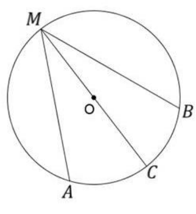
$$\angle AMB = \angle CMB - \angle CMA = \frac{1}{2}(\overset{\cup}{CB} - \overset{\cup}{CA}),$$

yəni

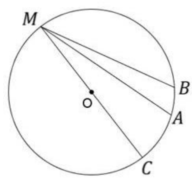
$$\angle AMB = \frac{1}{2}\overset{\cup}{AB}. \blacksquare$$



Şəkil 181



şəkil 182

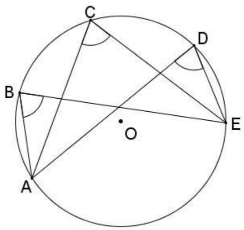


Şəkil 183

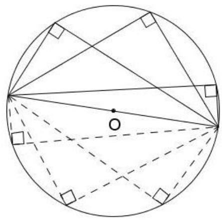
Nəticə 1. *Eyni bir qövsə söykənən bütün daxilə çəkilmiş bucaqlar bir-birinə bərabərdir* (şəkil 184).

Nəticə 2. *Diametrə söykənən daxilə çəkilmiş bucaq 90⁰-dir* (şəkil 185).

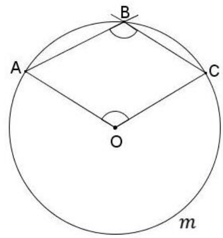
Məsələ 1. 186-cı şəkildə verilmiş $\angle AOC$ mərkəzi bucağının ABC bucağına bərabər olduğunu bilərək, bu bucağın qiymətini tapın.



Şəkil 184



Şəkil 185



Şəkil 186

○ ABC bucağı daxilə çəkilmiş bucaq olduğundan, $\angle ABC = \frac{1}{2}\overset{\cup}{AmC}$.

Digər tərəfdən AOC mərkəzi bucaq olduğundan, $\angle AOC = \overset{\cup}{ABC}$.

$\frac{1}{2}\overset{\cup}{AmC} = \overset{\cup}{ABC}$ və $\overset{\cup}{AmC} + \overset{\cup}{ABC} = 360^\circ$ olduğundan, $2\overset{\cup}{ABC} + \overset{\cup}{ABC} = 360^\circ$,

yəni $ABC = 120^\circ$ $\overset{\cup}{AmC} = 240^\circ$. ●

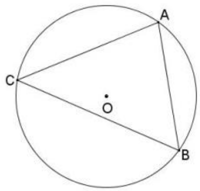
Məsələ 2. Çevrə 7:11:6 nisbətində bölünmüş və bölgü nöqtələri bir-biri ilə birləşdirilmişdir. Alınan üçbucağın bucaqlarını tapın.

○ Tutaq ki, *A, B, C* nöqtələri çevrəni $\overset{\cup}{AC} : \overset{\cup}{BC} : \overset{\cup}{AB} = 7 : 11 : 6$ nisbətində bölür.

$$\overset{\smile}{AC} = 7x, \ \overset{\smile}{BC} = 11x, \ \overset{\smile}{AB} = 6x$$

yaza bilərik (şəkil 187). Onda,

$$\overset{\smile}{AC} + \overset{\smile}{AB} + \overset{\smile}{BC} = 360^\circ \Rightarrow 6x + 7x + 11x = 360 \Rightarrow x = 15^\circ .$$



Şəkil 187

Tabılacaq bucaqlar üçün

$$\angle A = \frac{1}{2}\overset{\smile}{BC}, \ \angle B = \frac{1}{2}\overset{\smile}{AC} \quad \text{və} \quad \angle C = \frac{1}{2}\overset{\smile}{AB}$$

olduğundan,

$$\angle A = \frac{1}{2} \cdot 11 \cdot 15^\circ = 82^\circ 30', \ \angle B = \frac{1}{2} \cdot 7 \cdot 15^\circ = 52^\circ 30',,$$

$\angle C = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 15^\circ = 45^\circ$ olur. ●

2. Təpəsi çevrə daxilində olan bucaqlar. Təpəsi çevrə üzərində olan bucaqları öyrəndik. İndi isə *təpəsi çevrə daxilində olan bucaqlara* baxaq. 188-ci şəkildəki B bucağı təpəsi çevrə daxilində olan bucaqdır.

Teorem. *Təpəsi çevrə daxilində olan bucaq, bu bucağın və onun qarşılıqlı bucağının söykəndikləri qövslərin cəminin yarısı ilə ölçülür.*

$$\angle ABC = \frac{1}{2}\left(\overset{\smile}{AC} + \overset{\smile}{DM} \right).$$

□ *ABC* təpəsi çevrə daxilində olan bucaq olsun (şəkil 188). Bu bucaqla qarşılıqlı olan *DBM* bucağını quraq və *AD* vətərini çəkək.

ABC bucağı *ADB* üçbucağının xarici bucağı olduğundan

$$\angle ABC = \angle BAD + \angle ADB.$$

Burada, $\angle BAD = \angle MAD$ və $\angle ADB = \angle ADC$ daxilə çəkilmiş bucaqlar olduğundan, $\angle BAD = \frac{1}{2}\overset{\cup}{DM}$, $\angle ADB = \frac{1}{2}\overset{\cup}{AC}$ olar. Odur ki,

$$\angle ABC = \frac{1}{2}\left(\overset{\cup}{AC} + \overset{\cup}{DM}\right). \blacksquare$$

Aydındır ki, mərkəzi bucaq təpəsi çevrə daxilində olan bucağın xüsusi halıdır.

3. Təpəsi çevrə xaricində olan bucaqlar. Çevrə xaricində hər hansı *B* nöqtəsi qeyd edib, təpəsi həmin nöqtədə olan və tərəfləri çevrəni kəsən *ABC* bucağını quraq (şəkil 189). Bu bucaq *təpəsi çevrə xaricində olan bucaq* adlanır.

Teorem. *Təpəsi çevrə xaricində olan bucaq, onun tərəfləri arasında qalan qövslərin fərqinin yarısı ilə ölçülür.*

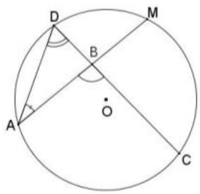
$$\angle ABC = \frac{1}{2}\left(\overset{\cup}{AC} - \overset{\cup}{MD}\right).$$

Teoremin isbatı oxuculara həvalə olunur.

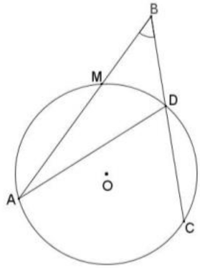
4**. Toxunan və vətərlə bağlı bucaqlar.**

Teorem 1. *Vətərə perpendikulyar olan diametr bu vətəri və onun gərdiyi qövsü yarıya bölür.*

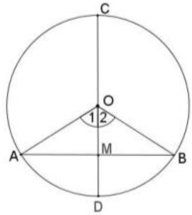
□ Tutaq ki, *AB* vətər, *CD* isə bu vətərə perpendikulyar olan diametrdir (şəkil 190). İsbat edək ki, *AM*=*MB* və $\overset{\cup}{AD} = \overset{\cup}{DB}$. Çevrənin mərkəzini *A* və *B* nöqtələri ilə birləşdirsək, bərabəryanlı *AOB* üçbucağını alarıq. Onda



Şəkil 188



Şəkil 189



Şəkil 190

OM düz xətt parçası bu üçbucağın hündürlüyü, medianı həm də tənböləni olar. Odur ki, *AM=MB* və $\angle 1 = \angle 2$, yəni $\overset{\cup}{AD} = \overset{\cup}{DB}$ olduğu alınır. ■

Teorem 2. (tərs teorem). *Vətəri və onun gərdiyi qövsü yarıya bölən diametr bu vətərə perpendikulyardır.*

Teorem 3. *Toxunan vətərə paraleldirsə, toxunma nöqtəsi vətərin gərdiyi qövsü yarıya bölür*. (şəkil 191).

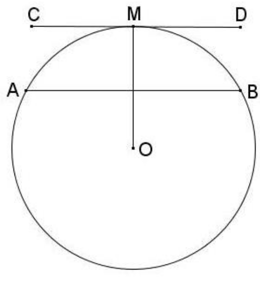
Bu iki teoremin isbatı oxuculara həvalə olunur.

Teorem 4. *Toxunanla vətərin əmələ gətirdiyi bucaq bu vətərin gərdiyi qövsün yarısı ilə ölçülür.*

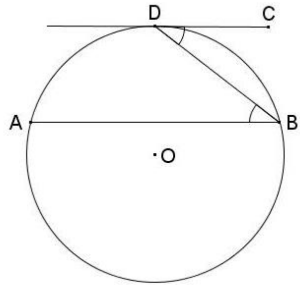
□ *BD* verilən vətər *DC* isə *D* nöqtəsində çevrəyə çəkilmiş toxunan olsun (şəkil 192). *B* nöqtəsindən *BA//DC* çəkək. Onda $\angle DBA = \frac{1}{2}\overset{\cup}{AD}$ olar. Burada, $\overset{\cup}{AD} = \overset{\cup}{DB}$ olduğundan, $\angle BDC = \frac{1}{2}\overset{\cup}{BD}$ alınır. ■

Yuxarıdakı teoremlərdən aşağıdakı nəticə alınır.

Nəticə. Eyni bir çevrədə:



Şəkil 191



Şəkil 192

a) Paralel vətərlər arasında qalan qövslər bərabərdir;

b) Mərkəzdən eyni uzaqlıqda olan vətərlər bərabərdir, uzaqda duran vətər isə qısadır.

Məsələ 1. Çevrə *A*, *B*, *C* və *D* nöqtələri ilə 2:3:5:6 nisbətində bölünmüşdür. *AC* və *BD* vətərləri arasında qalan *AMB* bucağını tapın (şəkil 193).

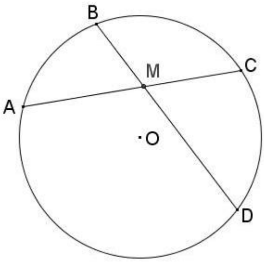
○ $AB:BC:CD:DA = 2:3:5:6$ olduğundan *AB*=2*x*, *BC*=3*x*, *CD*=5*x*, *DA*=6*x* yaza bilərik. Onda,

$$\angle AMB = \frac{1}{2}\left(\overset{\cup}{AB} + \overset{\cup}{CD}\right) = \frac{1}{2}(2x+5x) = \frac{1}{2}\cdot 7x = 3{,}5x\ .$$

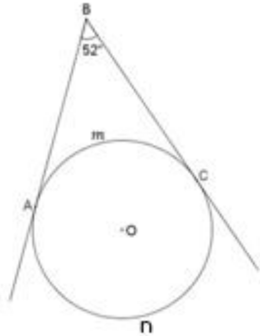
Digər tərəfdən $AB + BC + CD + DA = 360^0$ olduğundan $2x + 3x + 5x + 6x = 360^0$, $x = 22^\circ 30'$, yəni $\angle AMB = 78^\circ 45'$. ●

Məsələ 2. Çevrənin xaricində götürülmüş nöqtədən çəkilmiş toxunanların əmələ gətirdiyi bucaq 52^0-dir. Toxunanlar arasında qalan qövslər neçə dərəcə olar?

○ B nöqtəsindən çevrəyə BA və BC toxunanlarını çəkək (şəkil 194). Toxunanlar arasında qalan qövsləri uyğun olaraq AmC və AnC ilə işarə edək. Şərtə görə $\angle ABC = 52^\circ$ və təpəsi çevrə xaricində olan bucaq olduğundan,



Şəkil 193



Şəkil 194

$$\angle ABC = \frac{1}{2}(\overset{\cup}{AnC} - \overset{\cup}{AmC})$$

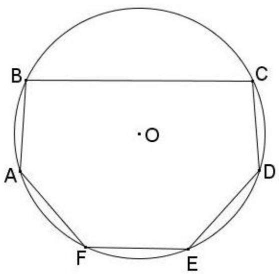
olur. $\overset{\cup}{AmC} = x$ qəbul etsək, $\overset{\cup}{AnC} = 360^\circ - x$ olar. Onda $52^\circ = \frac{1}{2}(360^\circ - x - x)$, buradan da, $x = 128^\circ$ alınır. Beləliklə $\overset{\cup}{AmC} = 128^\circ$ və $\overset{\cup}{AnC} = 232^\circ$ olur. ●

§ 66. ÇEVRƏ DAXİLİNƏ və XARİCİNƏ ÇƏKİLMİŞ BUCAQLAR

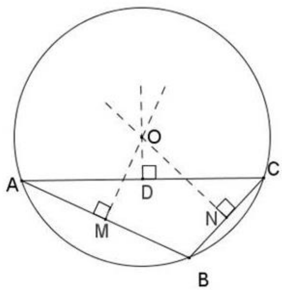
Təpə nöqtələri çevrə üzərində olan çoxbucaqlıya *çevrə daxilinə çəkilmiş çoxbucaqlı*, çevrənin özünə isə bu *çoxbucaqlının xaricinə çəkilmiş çevrə* deyilir (şəkil 195)

Teorem 1. *Bir düz xətt üzərində olmayan üç nöqtədən ancaq bir çevrə keçirmək olar.*

□ Bir düz xətt üzərində olmayan *A, B* və *C* nöqtələri verilmiş olsun. Bu nöqtələri *AB* və *BC* düz xətt parçaları vasitəsilə birləşdirib, onların orta perpendikulyarını çəkək (şəkil 196). Bu perpendikulyarların *O* kəsişmə nöqtəsi *A, B* və *C* nöqtələrindən eyni uzaqlıqda olacaqdır (*OA*=*OB*=*OC*). Mərkəzi *O* nöqtəsi, radiusu *OA* olan çevrə *A, B* və *C* nöqtələrindən keçəcəkdir. *AB*



Şəkil 195



Şəkil 196

və *BC* düz xətt parçalarının orta nöqtələrindən qaldırılmış iki perpendikulyar ancaq bir nöqtədə kəsişdiyindən, alınan çevrə yeganə olacaqdır. ■

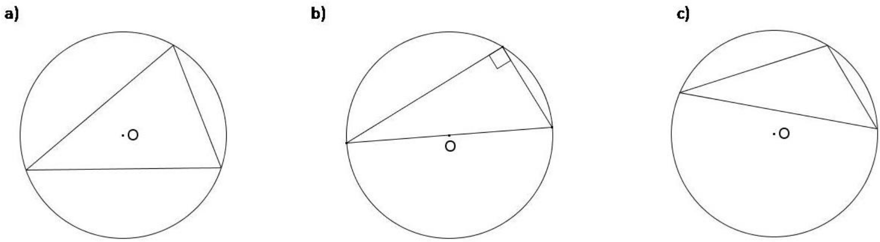
Çox vaxt bu teoremə *üçbucağın xaricinə çevrə çəkməyin mümkünlüyü teoremi* də deyilir.

Verilən düz xətlə çevrənin ikidən çox ortaq nöqtəsi ola bilmədiyindən, *bir düz xətt üzərində yerləşən üç nöqtədən çevrə keçirmək olmaz.*

Nəticə 1. *Üçbucağın tərəflərinin orta nöqtəsindən qaldırılmış perpendikulyarın hər üçü eyni nöqtədə kəsişir və bu nöqtə xaricə çəkilmiş çevrənin mərkəzidir.*

Nəticə 2. *İstənilən üçbucağın xaricinə ancaq bir çevrə çəkmək olar.*

Daxilə çəkilmişmiş bucaqların xassələrindən istifadə edərək, asanlıqla göstərmək olar ki, *itibucaqlı üçbucağın xaricinə çəkilmiş çevrənin mərkəzi üçbucağın daxilində,* düzbucaqlı üçbucağın xaricinə çəkilmiş çevrənin mərkəzi hipotenuzun *orta nöqtəsində*, *korbucaqlı üçbucağın xaricinə çəkilmiş çevrənin mərkəzi isə üçbucağın xaricində yerləşir* (şəkil 197 *a, b, v*).



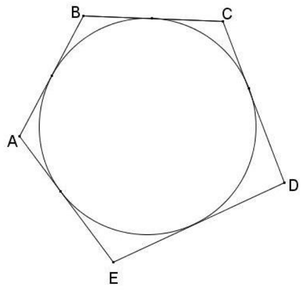
Şəkil 197

Bütün tərəfləri çevrəyə toxunan çoxbucaqlıya *çevrə xaricinə çəkilmiş çoxbucaqlı*, çevrənin özünə isə bu *çoxbucaqlı daxilinə çəkilmiş çevrə* deyilir (şəkil 198).

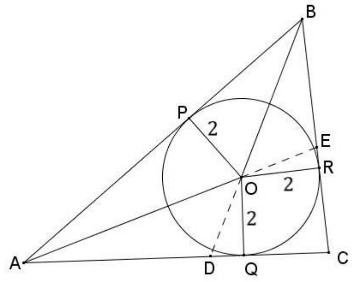
Teorem 2. *İstənilən üçbucağın daxilinə ancaq bir çevrə çəkmək olar.*

□ Verilən *ABC* üçbucağının *AE* və *BD* tənbölənlərini çəkək. Onların kəsişmə nöqtəsini *O* ilə işarə edək (şəkil 199). *O* nöqtəsi tənbölən üzərində olduğundan, bucağın tərəflərindən eyni uzaqlıqdadır. *OP=OR=OQ*. Buradan *O* nöqtəsinin üçbucağın tərəflərindən eyni uzaqlıqda olması alınır. Deməli, mərkəzi *O* nöqtəsində, radiusu *OP* olan çevrə tələb olunan çevrədir. Tənbölənlər bir nöqtədə kəsişdiyindən belə çevrə yeganədir. ■

Nəticə 3. *Üçbucağın daxilinə çəkilən çevrənin mərkəzi, tənbölənlərin kəsişmə nöqtəsidir.*



Şəkil 198



Şəkil 199

Məsələ 1. Bərabəryanlı üçbucağın yan tərəfi 2 *sm*, təpə bucağı isə 120^0-dir. Bu üçbucağın xaricinə çəkilmiş çevrənin diametrini tapın.

○ *ABC* çevrə daxilinə çəkilmiş bərabəryanlı üçbucaq olsun (şəkil 200, a). *AB*=*BC*=2 *sm*, $\angle B = 120^\circ$. Aydındır ki, $\angle A = \angle C = 30^\circ$ və $\angle ABC = \frac{1}{2}\overset{\cup}{AmC}$. Buradan da $\overset{\cup}{AmC} = 240^0$ olur. Çevrənin mərkəzini *A* və *C* nöqtələri ilə birləşdirək. Onda $\angle AOC = \overset{\cup}{ABC} = 120^\circ$ alınar. Deməli, *ABCO* dördbucaqlısı paraleloqramdır: *AB*=*BC*=*OA*=*OC*=2 *sm*, yəni $D = 2R = 2 \cdot OA = 4$ *sm*. ●

Məsələ 2. Hipotenuzu 30 *sm* olan düzbucaqlı üçbucaq daxilinə çəkilmiş çevrənin radiusu 5 *sm*-dir. Bu üçbucağın perimetrini tapın.

○ *ABC* düzbucaqlı üçbucaq, *M, N, Q* isə onun tərəflərinin, bu üçbucaq daxilinə çəkilmiş çevrəyə toxunma nöqtələri olsun (şəkil 200, *b*). Şərtə görə *AB*=30 *sm*, *OM*=*ON*=*OQ*=5 və $\angle C = 90^\circ$. Odur ki, *ONCQ* dördbucaqlısı kvadratdır. Digər tərəfdən *AM*=*AQ* və *BM*=*BN*, *CN*=*CQ* olduğundan,

$$P = AB + BC + AC = (AM + BM) + (BN + NC) + (AQ + QC) =$$
$$2(AM + BM + QC) == 2(AB + QC) = 2(30 + 5) = 70,$$

yəni p=70 *sm* olur. ●

Şəkil 200

§ 67. ÇEVRƏ DAXİLİNƏ və XARİCİNƏ ÇƏKİLMİŞ ÇOXBUCAQLILAR

Daxilə və xaricə çəkilmiş dördbucaqlılara aid olan bəzi təkliflərə baxaq.

Teorem 1. *Daxilə çəkilmiş dördbucaqlının qarşı bucaqlarının cəmi 180^0-dlr.*

□ *ABCD* daxilə çəkilmiş dördbucaqlı olsun (şəkil 201). İsbat edək ki,

$$\angle A+\angle C=\angle B+\angle D=180^\circ .$$

A və *C* bucaqları daxilə çəkilmiş bucaqlar olduğu üçün $\angle A=\frac{1}{2}\overset{\cup}{BCD}$ və $\angle C=\frac{1}{2}\overset{\cup}{BAD}$. Nəticədə *A* və *C* bucaqlarının cəmi *BCD* və *ABD* qövsləri cəminin (bütün çevrə) yarısına bərabərdir:

$$\angle A+\angle C=\frac{1}{2}(\overset{\cup}{BCD}+\overset{\cup}{BAD})=\frac{1}{2}\cdot 180^\circ, \text{ yəni } \angle A+\angle C=180^\circ .$$

Oxşar qayda ilə $\angle B+\angle D=180^\circ$ olduğu isbat olunur. ■

Teorem (tərs teorem). *Qabarıq dördbucaqlının qarşı bucaqlarının cəmi 180^0-yə bərabər olarsa, bu dördbucaqlının xaricinə çevrə çəkmək olar.*

Teoremin isbatı oxuculara həvalə olunur.

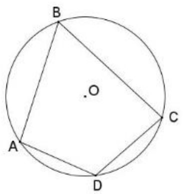
Teorem 3. *Xaricə çəkilmiş dördbucaqlının qarşı tərəflərinin cəmi bir-birinə bərabərdir.*

□ Tutaq ki, *ABCD* xaricə çəkilmiş dördbucaqlıdır. Toxunma nöqtələrini *M*, *N*, *E* və *F* ilə işarə edib (şəkil 202), $AB+CD=BC+AD$ olduğunu göstərək. Bir nöqtədən çevrəyə çəkilən toxunanların xassəsinə görə,

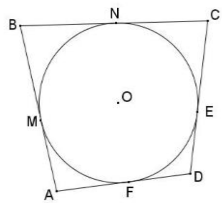
$$AM=AF,\ MB=BN,\ ED=DF,\ CE=CN$$

yazıb tərəf-tərəfə toplasaq,

$$AM+MB+ED+CE=AF+BN+DF+CN \text{ və ya } AB+CD=BC+AD$$



Şəkil 201



Şəkil 202

alarıq. ■

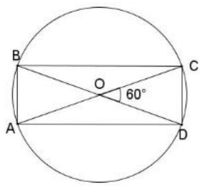
Bu teoremin tərsi də doğrudur.

Qeyd etmək lazımdır ki, ümumiyyətlə, paraleloqram və düzbucaqlının daxilinə çevrə çəkmək olmaz. Lakin, kvadrat və rombun daxilinə çevrə çəkmək olar. *Oturacaqlarının cəmi yan tərəflərinin cəminə bərabər olan trapesiyanın daxilinə çevrə çəkmək olar.*

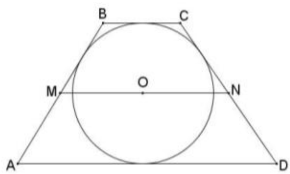
Məsələ 1. Düzbucaqlının kiçik tərəfinin uzunluğunun 4 *sm* və diaqonallar arasındakı bucağın 60^0 olduğunu bilərək, onun xaricinə çəkilmiş çevrənin diametrini tapın.

○ *ABCD* çevrə daxilinə çəkilmiş düzbucaqlı olsun (şəkil 203). Şərtə görə *AB*=*CD*=4 *sm*, $\angle COD = \angle BOA = 60^\circ$. Diametri tapaq. *OC*=*OD* olduğundan, $\angle OCD = \angle CDO = 60^\circ$ olar. Deməli, *OCD* bərabərtərəfli üçbucaqdır: *OC*=*OD*=*CD*=*4* sm. Onda $AC = BD = 2 \cdot OC$ olduğundan, *AC*=*BD*=8 *sm* olur. ●

Məsələ 2. Perimetri 24 *sm* olan trapesiya daxilinə çevrə çəkilmişdir. Bu trapesiyanın orta xəttinin uzunluğunu tapın.



Şəkil 203



Şəkil 204

○ *ABCD* çevrə daxilinə çəkilmiş trapesiya olsun (şəkil 204). Şərtə görə *AB*+*BC*+*CD*+*AD*=24*sm*, *MN* orta xəttini tapaq. Aydındır ki, *AD*+*BC*=*AB*+*CD*=12 *sm*.

Buradan orta xəttin xassəsinə əsasən *MN*=6 *sm* olur. ●

§ 68. ÜÇBUCAĞIN MEDİANLARININ XASSƏSİ

Teorem. *Üçbucağın medianları bir nöqtədə kəsişir və bu nöqtədə uyğun tərəfdən hər bir medianın üçdə bir hissəsini ayırır.*

□ Tutaq ki, *ABC* üçbucağında *AD* və *BE* medianları *O* nöqtəsində kəsişir (şəkil 205). İsbat edək ki, *O* nöqtəsindən keçən *CM* parçası da mediandır, yəni *AM*=*MB*. Bu məqsədlə *E* nöqtəsindən *EF*//*AD* çəkək. Onda *CF*=*FD* olar. *BD* parçasını *K* nöqtəsi ilə yarı bölsək, *CF*=*FD*=*DK*=*KB* olar. *K* nöqtəsindən *KN*//*AD* çəksək, *BN*=*NO*=*OE* alarıq. *N* və *E* nöqtələrindən *NP*//*OM* və *EQ*//*OM* çəkib, *BP*=*PM*=*MQ*=*QA* alarıq. Buradan *AM*=*MB* alınır, yəni *CM* düz xətt parçası mediandır. Beləliklə, üçbucağın hər üç medianı eyni bir O nöqtəsində kəsişir.

Şəkildən göründüyü kimi $OE=\frac{1}{3}BE$

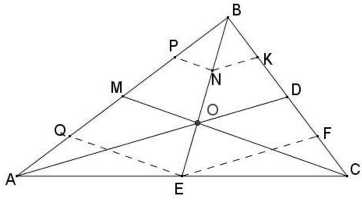
Oxşar qayda ilə göstərmək olar ki, $OD=\frac{1}{3}AD$ və $OM=\frac{1}{3}MC$. ■

Nəticə. *Üçbucağın medianları kəsişmə nöqtəsində təpədən başlayaraq 2:1 nisbətində bölünür, yəni*

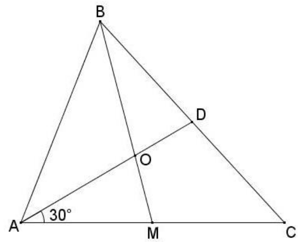
$$OB:OE=AO:OD=OC:OM=2:1.$$

Məsələ. Bərabəryanlı ABC ($AB=BC$) üçbucağının A təpəsindən çəkilən medianının uzunluğu 30 sm olub, üçbucağın AC oturacağı ilə 30^0-li bucaq əmələ gətirir. Üçbucağın B təpəsindən çəkilən hündürlüyün uzunluğunu tapın.

○ ABC verilmiş bərabəryanlı üçbucaq, AD isə A təpə nöqtəsindən çəkilmiş median olsun (şəkil 206). Şərtə görə AD=30 sm. $\angle DAC=30^\circ$. BD hündürlüyünü tapaq. AMO düzbucaqlı üçbucağında $OM=\frac{1}{2}AO$, digər tərəfdən $AO=\frac{1}{3}AD=\frac{2}{3}\cdot 30=20$ olmasından OM=10 *sm* alınır. Bərabəryanlı üçbucaqda hündürlük həm də median olduğundan $OM=\frac{1}{3}BM$, buradan da, $BM=3\cdot OM=3\cdot 10=30$, yəni BM=30 *sm* olur. ●



Şəkil 205



Şəkil 206

ÇALIŞMALAR

1. Paraleloqramın perimetrinin *P*, tərəflərindən birinin uzunluğunun da *a* olduğunu bilərək, o biri tərəfin uzunluğunu tapın.

2. Paraleloqramın diaqonalı onun tərəfləri ilə α və β bucaqları əmələ gətirir. Paraleloqramın bucaqlarını tapın.

3. Paraleloqramın diaqonalı tərəflərdən birinə perpendikulyar olub, digəri ilə α bucağı əmələ gətirir. Paraleloqramın bucaqlarını tapın.

4. Paraleloqramın iti bucağının tənböləni onun tərəfini 5 *sm* və 2 *sm* olan iki hissəyə ayırır. Paraleloqramın perimetrini tapın.

5. Paraleloqramın bütün bucaqlarının tənbölənlərinin kəsişərək düzbucaqlı əmələ gətirdiyini isbat edin.

6. Düzbucaqlının diaqonalları 60^0-li bucaq altında kəsişir. Onun diaqonalı ilə kiçik tərəfinin cəminin 42 *sm* olduğunu bilərək diaqonalın uzunluğunu tapın.

7. Katetləri 6 *sm* olan bərabəryanlı düzbucaqlı üçbucaq daxilində bir təpəsi düzbucaq təpəsi ilə üst-üstə düşən düzbucaqlı çəkilmişdir. Bu düzbucaqlının perimetrini tapın.

8. Hipotenuzu 45 *sm* olan bərabəryanlı üçbucaq daxilinə iki təpəsi hipotenuz, o biri iki təpəsi isə katetlər üzərində olan düzbucaqlı çəkilmişdir. Düzbucaqlının tərəfləri nisbətinin 5:2 olduğunu bilərək onun tərəflərini tapın.

9. Düzbucaqlının təpəsindən onun diaqonalına endirilən perpendikulyar həmin diaqonalı 1:3 nisbətində bölür. Diaqonalların kəsişmə nöqtəsinin böyük tərəfdən
2 *m* məsafə olduğunu bilərək, diaqonalın uzunluğunu tapın.

10. Rombun kor bucaq təpəsindən çəkilmiş hündürlükləri qarşıdakı tərəfləri yarı bölür. Bu hündürlüklər arasında qalan bucağı tapın.

11. Rombun perimetrinin 0,8 *dm,* hündürlüyünün 0,1 *dm* olduğunu bilərək onun kor bucağını tapın.

12. Rombun diaqonallarının kəsişmə nöqtəsinin onun tərəflərindən eyni uzaqlıqda yerləşdiyini isbat edin.

13. Rombun bir tərəfinin diaqonallarla əmələ gətirdiyi bucaqların nisbəti 5:4 kimidir. Rombun bucaqlarını tapın.

14. Rombun kor bucağının təpəsindən çəkilmiş hündürlüyü, qarşı tərəfi yarıya bölür. Rombun bucaqlarını tapın.

15. Kateti 2 m olan bərabəryanlı üçbucaq daxilinə bir təpəsi düzbucaq təpəsi ilə üst-üstə düşən kvadrat çəkilmişdir. Kvadratın perimetrini tapın.

16. Hipotenuzu 3 *m* olan bərabəryanlı düzbucaqlı üçbucaq daxilinə iki təpəsi üçbucağın hipotenuzu, o biri iki təpəsi isə katetlər üzərində olan kvadrat çəkilmişdir. Kvadratın tərəfini tapın.

17. Diaqonalı 4 *m* olan kvadratın tərəfi ikinci bir kvadratın diaqonalıdır. İkinci kvadratın tərəfini tapın.

18. Düzbucaqlının bucaqlarının tənbölənləri kəsişdikdə kvadrat alınır.Bunu isbat edin.

19. Tərəfləri 1 *sm* və 3 *sm* olan düzbucaqlının bucaqlarının tənbölənləri kəsişərək kvadrat əmələ gətirir. Onun diaqonalını tapın.

20. Bərabəryanlı üçbucağın oturacağı üzərində götürülmüş nöqtənin yan tərəflərdən olan məsafələri cəmi yan tərəfə endirilmiş hündürlüyə bərabərdir. Bunu isbat edin.

21. Bərabəryanlı üçbucağın oturacağının uzantısı üzərində götürülmüş nöqtənin yan tərəflərdən olan məsafələri fərqi, yan tərəfə endirilmiş hündürlüyə bərabərdir. Bunu isbat edin.

22. Trapesiyanın yan tərəfi 6 bərabər hissəyə bölünmüş və bölgü nöqtələrindən o biri yan tərəfi kəsənədək oturacağa paralel parçalar çəkilmişdir. Trapesiyanın oturacaqları 10 *sm* və 28 *sm* olarsa, bu parçaların uzunluğunu tapın.

23. Trapesiyanın orta xətti 20 *sm* olub, onun diaqonalını, biri digərinin 25 %-i olan iki hissəyə ayırır. Trapesiyanın oturacaqlarını tapın.

24. Düzbucaqlı trapesiyanın kiçik oturacağı a, böyük yan tərəfi isə b-dir. Onun iti bucağının 60^0 olduğunu bilərək, orta xəttinin uzunluğunu tapın.

25. Bərabəryanlı trapesiyanın yan tərəfi orta xəttinə bərabər, perimetri isə 24 *m*-dir. Trapesiyanın yan tərəfini tapın.

26. Bərabəryanlı trapesiyanın kiçik oturacağı yan tərəfinə bərabər, diaqonalı isə yan tərəfinə perpendikulyardır. Trapesiyanın bucaqlarını tapın.

27. Bərabəryanlı trapesiyanın iti bucağı 45^0, hündürlüyü 5 *m* və orta xətti 12 *m*-dir. Onun oturacaqlarını tapın.

28. Trapesiyanın hündürlüyünün 10 *sm* və diaqonallarının bir-birinə perpendikulyar olduğunu bilərək, onun orta xəttinin uzunluğunu tapın.

29. Bərabəryanlı trapesiyanın böyük oturacağı 3,7 *m*, yan tərəfi 1 *m* və bunlar arasındakı bucaq 60^0-dir. Trapesiyanın kiçik oturacağını tapın.

30. Düzbucaqlı trapesiyanın diaqonalı onu iki üçbucağa ayırır: bunlardan biri tərəfi a olan bərabərtərəfli, digəri isə düzbucaqlı üçbucaqdır. Trapesiyanın orta xəttini tapın.

31. Nöqtə, radiusu 10 *sm* olan çevrə mərkəzindən 15 *sm* məsafədədir. Bu nöqtənin çevrədən olan ən kiçik və ən böyük məsafəsini tapın.

32. Çevrə üzərində verilən nöqtədən diametr və radiusa bərabər vətərlər çəkilmişdir. Bunların arasında qalan bucağı tapın.

33. Çevrə üzərində verilən nöqtədən radiusa bərabər iki vətər çəkilmişdir. Bunların arasındakı bucağı tapın.

34. Çevrədə bir-birinə perpendikulyar iki vətər kəsişərək hər biri o birini 3 *sm* və 7 *sm* olan iki hissəyə bölür. Vətərlə mərkəz arasındakı məsafəni tapın.

35. Vətər diametri 30^0-li bucaq altında kəsməklə onu 2 *sm* və 6 *sm* uzunluqda iki parçaya bölür. Vətərin mərkəzdən olan məsafəsini tapın.

36. Çevrənin bir nöqtəsindən bir-birinə perpendikulyar olan iki vətəri keçirilmişdir. Bu vətərlərin mərkəzdən məsafəsi 6 *sm* və 10 *sm*-dir. Onların uzunluğunu tapın.

37. Diametrin ucları toxunan düz xətdən 1,6 *m* və 0,6 m məsafədədir. Diametrin uzunluğunu tapın.

38. Çevrə xaricindəki nöqtədən bu çevrəyə bir-birinə perpendikulyar iki toxunan çəkilmişdir. Çevrənin radisusunun 10 *sm* olduğunu bilərək, toxunanların uzunluqlarını tapın.

39. Düz bucaq daxilinə çevrə çəkilmişdir. Toxunma nöqtələrini birləşdirən vətərin 2 *dm* olduğunu bilərək onun çevrə mərkəzindən olan məsafəsini tapın.

40. Radiusları uyğun olaraq 2 *sm* və 4 *sm* olan çevrələrin ortaq daxili toxunanları bir-birinə perpendikulyardır. Toxunanların hər birinin uzunluğunu tapın.

41. Daxili toxunanları bir-birinə perpendikulyar olan çevrələrin toxunma nöqtələrini birləşdirən vətərlərin 3 *m* və 5 *m* olduğunu bilərək mərkəzlər arasındakı məsafəni tapın.

42. Radiusları *R* və *r* olan iki çevrənin ortaq xarici toxunanları düz bucaq əmələ gətirir. Bu toxunanların uzunluqlarını rtapın.

43. İki konsentrik çevrə arasındakı ən kiçik məsafə 2 sm, ən böyük məsafə isə 16 sm-dir. Bu çevrələrin radiuslarını tapın.

44. Radiusları *R* olan üç çevrə bir-birinə xaricdən toxunur. Təpələri toxunma nöqtələrində olan üçbucağın tərəfini və bucaqlarını tapın.

45. Aralarındakı məsafə 10 *km* olan iki zavoddan birinin fit səsi 6 *km*-dən, digərininki isə 5 km-dən eşidilir. Hər iki zavod fitinin eşidildiyi ərazi varmı?

46. Çevrənin vətəri onu, biri digərinin 125 %-i olan iki hissəyə ayırır. Bu, vətərə söykənən daxilə çəkilmiş bucaqların qiymətini tapın.

47. Diametrin uclarından bir-birnə paralel iki vətər çəkilmişdir. Bu vətərlərin bərabər olduğunu isbat edin.

48. *AB* çevrənin diametri, *CA* və *CB* isə vətərləridir. Çevrənin *O* mərkəzindən $OM \perp AC$ düz xətti çəkilmişdir. *OM//BC* olduğunu isbat edin.

49. Üçbucağın medianı uyğun tərəfin yarısına bərabər olduqda bu tərəfin qarşısındakı bucağın düz bucaq olduğunu isbat edin.

50. Çevrəni 3:5 nisbətində bölən vətərin ucundan toxunan çəkilmişdir. Vətərlə toxunan arasındakı iti bucağı tapın.

51. Vətər çevrəni 11:16 nisbətində bölür. Bu vətərin uclarından çəkilən toxunanlar arasındakı bucağı tapın.

52. *O* nöqtəsi *ABC* üçbucağının xaricinə çəkilmiş çevrənin mərkəzidir. $\angle B = 126^\circ$ olduqda *OAC* bucağını tapın.

53. Düzbucaqlı üçbucağın iti bucaqlarından biri 25^0-dir. Xaricə çəkilmiş çevrənin mərkəzindən bu üçbucağın katetləri hansı bucaq altında görünər?

54. Bərabəryanlı üçbucağın yan tərəfi daxilə çəkilmiş çevrəni toxunma nöqtəsi ilə 7:5 nisbətində (təpədən başlayaraq) bölünmüşdür. Yan tərəfin oturacağa olan nisbətini tapın.

55. Bərabəryanlı düzbucaqlı üçbucağın perimetri $2p$ daxilə çəkilmiş çevrənin radiusu isə r-dir. Hipotenuzu tapın.

56. Düzbucaqlının kiçik tərəfi 1 *m*, diaqonalları arasındakı iti bucaq isə 60^0-dir. Xaricə çəkilmiş çevrənin radiusunu tapın.

57. Rombun tərəfi 8 *sm* və iti bucağı 30^0-dir. Onun daxilinə çəkilmiş çevrənin radiusunu tapın.

58. Çevrə xaricinə perimetri 12 *sm* olan trapesiya çəkilmişdir. Onun orta xəttini tapın.

59. İti bucağı 30^0 olan bərabəryanlı trapesiya daxilinə çevrə çəkilmişdir. Trapesiyanın orta xəttinin 1 *m* olduğunu bilərək, çevrənin radiusunu tapın.

60. Çevrə xaricinə çəkilmiş bərabəryanlı trapesiyanın yan tərəfi 8 *sm*, iti bucağı isə 60^0-dir. Trapesiyanın oturacağını tapın.

TESTLƏR

1. Trapesiyanın orta xətti 14 *sm*, böyük oturacağı 17 *sm* olarsa kiçik oturacağı tapın.

A) 10 B) 11 C) 12 D) 13 E) 14

2. *ABC* üçbucağının medianlarının kəsişmə nöqtəsi *B* tərəsindən 4 *sm* məsafədədir. *B* təpəsindən çəkilən medianın uzunluğunu tapın.

A) 6 B) 5 C) 4 D) 8 E) 7

3. İti bucağı 30^0 olan paraleloqramın kor bucağı təpəsindən çəkilən hündürlükləri 5 *sm* və 7 *sm* olarsa, paraleloqramın perimetrini tapın.

A) 24 *sm* B) 36 *sm* C) 48 *sm* D) 40 *sm* E) 27 sm

4. *ABCD* paraleloqramında $\angle A = 4x - 12^\circ$, $\angle D = x - 32^\circ$ olarsa, x-i tapın.

A) 44^0 B) 40^0 C) 32^0 D) 12^0 E) 32^0

5. Çevrə xaricinə çəkilmiş trapesiyanın yan tərəfləri 7 *sm* və 8 *sm*-dirsə, onun orta xəttini tapın.

A) 8 *sm* B) 7,5 sm C) 7 sm D) 15 sm E) 9 sm

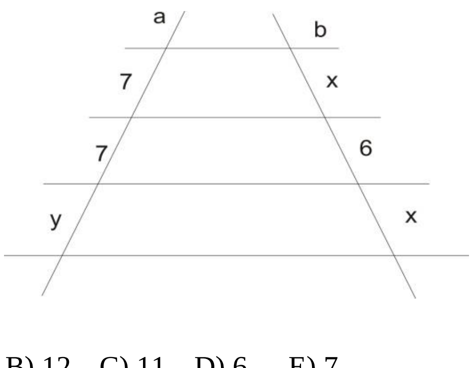
6. Rombun bucaqlarından biri 60^0-yə, kiçik diaqonalı isə 5 *sm*-ə bərabərdir. Rombun perimetrini tapın.

A) 18 *sm* B) 22 *sm* C) 25 *sm* D) 20 *sm* E) 30 *sm*

7. Daxilinə çevrə çəkilmiş trapesiyanın orta xətti 5,5 *sm*-dir. Trapesiyanın perimetrini tapın.

A) 19 *sm* B) 20 *sm* C) 22 *sm* D) 21 *sm* E) 18 *sm*

8. a və b düz xətləri və onları kəsən paralel düz xətlər verilmişdir; x+y



cəmini tapın.

A) 13 B) 12 C) 11 D) 6 E) 7

9. Düzbucaqlının bir bucağının tənböləni *b*öyük tərəfi 2:3 nisbətində bölür. Kiçik tərəfin 8 sm olduğunu bilərək böyük tərəfi tapın.

10. Radiusları 5 *sm* və 4 *sm* mərkəzləri arasındakı məsafə *d* olan iki çevrə üçün uyğunluğu təyin edin.

1. $d > R_1 + R_2, \quad d > 9$	a. Çevrələr xaricdə toxunur.
2. $d = R_1 + R_2, \quad d = 9$	b. Çevrələr bir-birinin xaricindədir.
3. $R_1 - R_2 < d < R_1 + R_2, \quad 1 < d < 9$	c. Daxildən toxunurlar.
	d. Biri digərinin daxilindədir.
	e. Çevrələr kəsişir.

XI FƏSİL

FİQURLARIN ÇEVRİLMƏSİ. OXŞAR FİQURLAR

§ 69. FİQURLARIN ÇEVRİLMƏSİ. MƏRKƏZİ SİMMETRİYA

Verilmiş fiqurun nöqtələrinin yerini müəyyən qayda ilə dəyişsək, onda yeni fiqur alınar. Bu fiqur verilən *fiqurun çevrilməsi* adlanır.

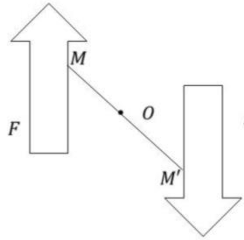
F fiqurun F' fiquruna çevrilməsində nöqtələr arasındakı məsafə dəyişmirsə, belə çevirməyə *yerdəyişmə* deyilir. Başqa sözlə, M', N' nöqtələri F' fiqurunda F fiqurunun *M, N* nöqtələrinə uyğundursa və $MN = M'N'$ şərti ödənirsə, onda çevirmə yerdəyişmədir.

Aydındır ki, yerdəyişmədə fiqur özünə bərabər olan fiqura çevrilir.

Yerdəyişmənin *simmetrial, paralel köçürmə, dönmə* və s. kimi növləri vardır.

Tərif. *O* nöqtəsindən keçən AA' düz xətt parçası bu nöqtədə yarıya bölünürsə ($AO = OA'$), onda A və A' nöqtələrinə *O* nöqtəsinə nəzərən *simmetrik nöqtələr*, *O* nöqtəsinə isə *simmetriya mərkəzi* deyilir (şəkil 207).

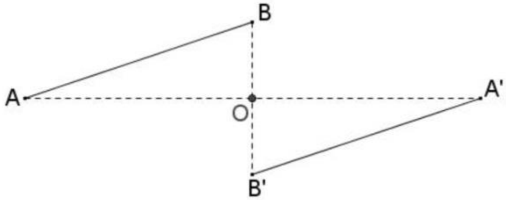
Şəkil 207



Şəkil 208

Tərifə əsasən istənilən nöqtəyə mərkəzi simmetrik olan nöqtəni qurmaq olar.

Fiqurun nöqtələr çoxluğu olduğunu nəzərə alaraq, ona simmetrik olan fiqurun qurulmasına baxaq. Fərz edək ki, F verilmiş fiqur, O isə müstəvinin qeyd olunmuş nöqtəsidir (şəkil 208). F fiqurunun ixtiyari nöqtəsi M olsun. MO parçasının uzantısı üzərində ona bərabər OM' parçasını ayıraq: $MO = OM'$. Beləliklə, M ilə mərkəzi simmetrik olan M' nöqtəsini alırıq. Bu qayda ilə qalan nöqtələrə simmetrik nöqtələr qurulur. Nəticədə alınan F' fiquru O nöqtəsinə nəzərən F fiquruna *simmetrik fiqur* adlanır. Nöqtəyə nəzərən simmetriyaya *mərkəzi simmetriya* deyilir.



Şəkil 209

Məsələn, verilmiş O nöqtəsinə nəzərən AB parçasına simmetrik parçanı quraq. Bu məqsədlə parçanın A və B uclarına simmetrik A' və B' nöqtələri qurulur (şəkil 209). Onları birləşdirən $A'B'$ parçası O nöqtəsinə nəzərən AB-yə simmetrik parça olur.

Özünün hər hansı nöqtəsinə nəzərən simmetrik olan fiqura *mərkəzi simmetrik fiqur*, həmin nöqtəyə isə *fiqurun simmetriya mərkəzi* deyilir.

OA' parçasını O simmetriya mərkəzi ətrafında 180^0 döndərsək, A' və A nöqtələri üst-üstə düşər. Odur ki, mərkəzi simmetrik fiqurlara aşağıdakı kimi də tərif vermək olar.

Tərif. İki fiqurdan birini O nöqtəsi ətrafında 180^0 döndərməklə o birinin üzərinə salmaq mümkündürsə, belə fiqurlara həmin nöqtəyə nəzərən *simmetrik fiqurlar* deyilir.

Məsələn çevrə, mərkəzinə, paraleloqram isə diaqonallarının kəsişmə nöqtəsinə nəzərən simmetrik fiqurlardır. (şəkil 210 *a*, *b*).

Şəkil 210

Düzbucaqlı, romb və kvadrat paraleloqramın xüsusi növləri olduğundan, onlar da diaqonallarının kəsişmə nöqtəsinə nəzərən simmetrik fiqurlardır.

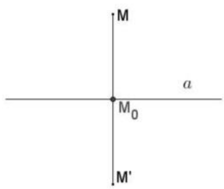
Simmetriya mərkəzi olmayan fiqurlar da vardır. Belə fiqurlara ən sadə misal üçbucağı göstərmək olar.

§ 70. DÜZ XƏTTƏ NƏZƏRƏN SİMMETRİYA. SİMMETRİK FİQURLAR

Fərz edək ki, a düz xətti və bunun üzərində olmayan M nöqtəsi verilmişdir (şəkil 211). M nöqtəsindən a düz xəttinə MM_0 perpendikulyarını endirək. M' nöqtəsi a düz xəttinin digər tərəfində olmaqla $MM_0 = M_0M'$ parçasını quraq. Bu halda M və M' nöqtələrinə *a düz xəttinə nəzərən simmetrik nöqtələr*, a düz xəttinə isə *simmetriya oxu* deyilir.

Düz xəttə nəzərən simmetriyaya *ox simmetriyası* da deyilir. Simmetriya oxunun hər bir nöqtəsi özü-özünə simmetrikdir.

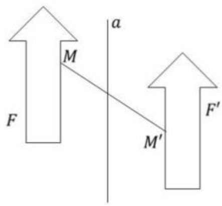
Yuxarıda deyilənlərə əsasən verilən düz xəttə nəzərən istənilən nöqtəyə simmetrik olan nöqtəni qurmaq olar. Fiqurun nöqtələr çoxluğu olduğunu nəzərə alaraq oxa nəzərən simmetrik fiqurların qurulmasına baxaq.



Şəkil 211

F verilmiş fiqur, a isə hər hansı düz xətt olsun (şəkil 212). F fiqurunun istənilən M nöqtəsinə a düz xəttinə nəzərən simmetrik olan M' nöqtəsini qurmaqla bu nöqtələrin əmələ gətirdiyi F' fiqurunu alırıq.

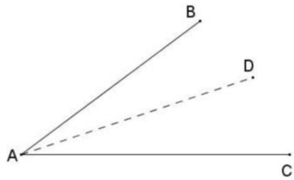
Bu halda F və F' fiqurları *a düz xəttinə nəzərən simmetrik fiqurlar* adlanır. Simmetrik fiqurlara aşağıdakı kimi də tərif vermək olar.



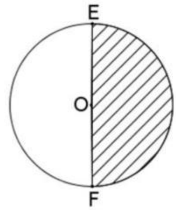
Şəkil 212

Tərif. Şəkil müstəvisini hər hansı düz xətt boyunca qatladıqda tamamilə bir-birinin üzərinə düşən iki fiqura həmin *düz xəttə nəzərən simmetrik fiqurlar* deyilir.

Elə fiqurlara rast gəlirik ki, onların özləri simmetrik yerləşir. Məsələn, bucaq öz tənböləninə nəzərən, dairə isə öz diametrinə, eləcə də mərkəzinə nəzərən simmetrik fiqurlardır (şəkil 213 və 214).



Şəkil 213



Şəkil 214

Fiqur hansı düz xəttə nəzərən simmetrikdirsə, həmin düz xəttə bu *fiqurun simmetriya oxu* deyilir. Bucağın tənböləni, dairənin diametri uyğun olaraq onların simmetriya oxudur.

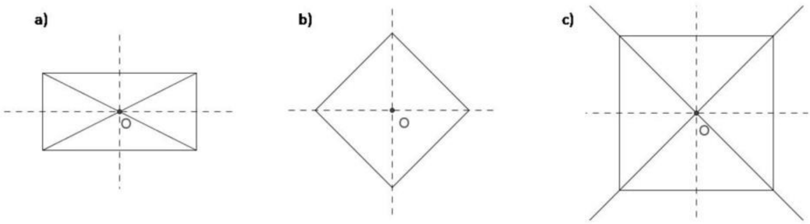
Simmetriyanın aşağıdakı xassələri vardır:

1. *Ox simmetriyası yerdəyişmədir.*

2. *Hər hansı oxa nəzərən simmetrik olan iki fiqur bərabərdir.*

Fiqurun bir və ya bir neçə simmetriya oxu ola bilər. Məsələn, bucağın ancaq bir simmetriya oxu var, özü də onun tənbölənidir. Düz xətt parçasının isə orta perpendikulyarı və üzərində yerləşdiyi düz xətt kimi iki simmetriya oxu vardır. Düzbucaqlının qarşı tərəflərinin orta nöqtələrindən keçən düz xətlər (şəkil 215, a), eləcə də rombun diaqonalları simmetriya oxlarıdır (şəkil 215, b).

Kvadratın dörd simmetriya oxu vardır (şəkil 215, b). Bunlardan ikisi onun qarşı tərəflərinin orta nöqtəsindən keçən düz xətlər, ikisi isə onun diaqonallarıdır.



Şəkil 215

Çevrənin sonsuz sayda simmetriya oxu vardır. Belə ki, çevrənin mərkəzindən keçən istənilən düz xətt onun simmetriya oxudur.

Simmetriya oxu olmayan fiqurlar da vardır. Məsələn, paraleloqramın (düzbucaqlı, kvadrat və romb istisna olmaqla) və müxtəlif tərəfli üçbucağın simmetriya oxu yoxdur.

Məişətdə, texnikada və incəsənətdə ox simmetriyası ilə tez-tez rastlaşırıq. Məsələn, naxışlı parçalar və eləcə də divar kağızındakı naxışlar, xalçadakı naxışlar, binalardakı arxitektura bəzəkləri və onların fasadları hər hansı oxa nəzərən simmetrik olur. Simmetrik fiqurlara təbiətdə də rast gəlmək olur. Məsələn, ağacların yarpaqları, çiçəklərin ləçəkləri, kəpənəyin qanadları və onların naxışları, arının qanadları və s. simmetrik formada olur.

§ 71. HƏRƏKƏT və ONUN XASSƏLƏRİ

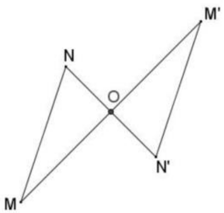
F verilmiş fiqur, M və N isə onun ixtiyari nöqtələri olsun. Tutaq ki, hər hansı çevirmə vasitəsilə F fiquru F' fiquruna çevrilir. Bu çevirmə zamanı F fiqurunun M və N nöqtələrinin uyğun olaraq M' və N' nöqtələrinə keçdiyini qəbul edək.

Məlumdur ki, F fiqurunun F' fiquruna çevrilməsində nöqtələr arasındakı məsafə dəyişməzsə, yəni $MN = M'N'$ olarsa, belə çevirmə hərəkət (yerdəyişmə) adlanır.

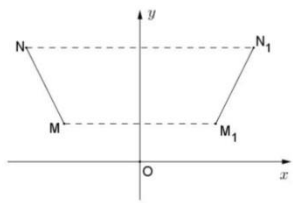
Teorem 1. *Nöqtə və düz xəttə nəzərən simmetriya hərəkətdir.*

□ Əvvəlcə nöqtəyə nəzərən simmetriyanın hərəkət olduğunu göstərək. Tutaq ki, mərkəzi simmetriyada F fiqurunun M, N nöqtələri uyğun olaraq, F' fiqurunun M', N' nöqtələrinə keçir (şəkil 216). Alınan MON və $M'ON'$ üçbucaqları bərabərdir, çünki, $\angle MON = \angle M'ON'$ (qarşılıqlı bucaqlar), $OM = OM'$, $ON = ON'$ (mərkəzi simmetriyanın tərifinə görə). Odur ki, $MN = M'N'$ olur. Deməli, mərkəzi simmetriya hərəkətdir.

İndi düz xəttə nəzərən simmetriyanın hərəkət olduğunu göstərək. Ordinatlar oxunu simmetriya oxu qəbul edək.



Şəkil 216



Şəkil 217

Tutaq ki, simmetriyada F fiqurunun $M(x_1; y_1)$ və $N(x_2; y_2)$ nöqtələri uyğun olaraq F' fiqurunun M_1 və N_1 nöqtələrinə keçir (şəkil 217). Oxa nəzərən simmetriyanın tərifinə görə bu nöqtələrin koordinatları uyğun olaraq $M_1(-x_1; y_1)$ və $N_1(-x_2; y_2)$ olacaqdır. İki nöqtə arasındakı məsafə düsturuna əsasən

$$MN = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}\ ,\ M_1N_1 = \sqrt{(-x_2 + x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

olar. Buradan da $MN = M'N'$ alınır. Deməli düz xəttə nəzərən simmetriya da hərəkətdir.

Hərəkətin aşağıdakı xassələri vardır:

1. *Hərəkət zamanı hər bir fiqur özü-özünə keçir.*

2. *Hərəkət zamanı şüalar arasındakı bucaqlar dəyişmir.*

3. *Ardıcıl aparılan iki hərəkətin nəticəsi də hərəkətdir.*

4. *Hərəkətin tərsi də hərəkətdir.*

§ 72. PARALEL KÖÇÜRMƏ və ONUN XASSƏLƏRİ

Hərəkətin xüsusi növlərindən biri də paralel köçürmədir.

Tərif. Hərəkət zamanı fiqurun bütün nöqtələri müəyyən istiqamətdə eyni məsafə qədər yerini dəyişərsə, belə hərəkətə *paralel köçürmə* deyilir.

Tərifdən aydındır ki, paralel köçürmədə *F* fiqurunun *M* və *N* nöqtələri uyğun olaraq F' fiqurunun M' və N' nöqtələrinə keçirsə, onda MM' və NN' parçaları bərabər, onların yerləşdiyi düz xətlər isə paraleldir (şəkil 218, *a*).

İki nöqtə arasındakı məsafənin və onlardan keçən düz xəttin yeganəliyindən aşağıdakı təklifin doğruluğu alınır:

İxtiyari A nöqtəsini A_1 *nöqtəsinə keçirən yeganə paralel köçürmə var.*

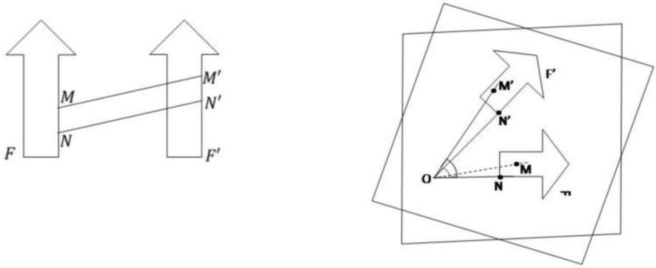
Paralel köçürmənin aşağıdakı iki xassəsini qeyd edək.

1. *Ardıcıl aparılan iki paralel köçürmənin nəticəsi də paralel köçürmədir.*

2. *Paralel köçürmənin tərsi də paralel köçürmədir.*

§ 73. FİQURLARIN DÖNMƏSİ

Vərəq üzərində hər hansı *F* fiquru çəkək və *O* nöqtəsini qeyd edək. Bu vərəqin üstünə *F* fiqurunu və *O* nöqtəsini örtən kalka vərəq qoyaq. Hər iki vərəqi *O* nöqtəsində sancaqlayaq. Kalka üzərində F fiqurunun surətini çəkib, kalkanı *O* nöqtəsi ətrafında döndərək (şəkil 218, b). Onda *F* fiqurunun surəti yeni F' vəziyyətini alır. Bu halda deyirlər ki, F' fiquru *F* fiqurunun *O* nöqtəsi ətrafında



Şəkil 218

dönməsindən alınmışdır. Bu dönmədə *F* fiqurunun ixtiyari *M* nöqtəsinə F' fiqurunun bir M' nöqtəsi uyğun gəlir, həm də F' fiqurunun hər bir nöqtəsi *F* fiqurunun müyyən bir nəticəsinin surəti (obrazı) olur.

Asanlıqla görmək olar ki, kalka *O* nöqtəsi ətrafında dönərkən *F* fiqurunun bütün nöqtələrinin surətləri eyni istiqamətdə (saat əqrəbi hərəkətinin əks istiqamətində və ya saat əqrəbinin hərəkəti istiqamətində) eyni bucaq qədər yerini dəyişir, yəni *F* fiqurunun ixtiyari iki *M* və *N* nöqtəsi və onların M' və N' surətləri üçün $\angle MOM' = \angle NON'$ münasibəti ödənməklə MOM' və NON' bucaqları uyğun olaraq *OM* və *ON* şüalarından eyni bir istiqamətdə ayrılmışdır.

Dönmə mərkəzi, dönmə bucağı və dönmə istiqaməti verildikdə dönmə verilmiş hesab olunur.

Mərkəzi simmetriyada simmetrik fiqurları üst-üstə salmaq üçün 180^0-lik dönmədən istifadə etmişik. Qeyd edək ki, 180^0-dən böyük bucaq qədər dönməni 180^0-dən kiçik bucaq qədər dönmə ilə əvəz etmək olar. Belə ki, müəyyən istiqamətdə α bucağı qədər dönmə onun əks istiqamətdə $360^\circ - \alpha$ bucağı qədər dönmə ilə eynidir. Aydındır ki, istənilən *O* mərkəzi üçün hər iki istiqamətdə 180^0 dönmə eyni olub, dönmə mərkəzinə nəzərən mərkəzi simmetriyadır.

Dönmənin hər hansı istiqamətini müsbət qəbul etsək, onun əks istiqamətini mənfi hesab edəcəyik. Adətən, saat əqrəbinin əks istiqamətindəki dönmə müsbət qəbul edilir.

Dönmənin aşağıdakı xassələri vardır:

1. *Dönmədə məsafə saxlanılır.*

2. *F fiqurunun O nöqtəsi ətrafında* α *bucağı qədər dönməsindən alınan* F' *fiquru F fquruna bərabərdir.*

§ 74. HOMOTETİYA

Yerdəyişmənin öyrəndiyimiz növlərinin (ox simmetriyası, dönmə, paralel köçürmə və s.) ümumi cəhəti ondan ibarətdir ki, bunların hər biri müstəvi üzərində istənilən *F* fiqurunu ona bərabər F' fiquruna çevirir. Belə xassələrə malik çevirmələrin, hərəkət olduğunu gördük. Beləliklə, hər bir hərəkət müstəvi üzərində fiqurların ölçüsünü deyil, yalnız onların vəziyyətini dəyişir. Elə çevirmələr də vardır ki, onlar fiqurların ölçülərini də dəyişir. Belə çevirmələrin bəzilərinə baxaq.

Müstəvinin qeyd olunmuş *O* nöqtəsi və $k > 0$ ədədi verilmiş olsun. Bu nöqtədən çıxan şüa üzərində hər hansı *M* nöqtəsi götürək və $OM' = k \cdot OM$ münasibətini ödəyən OM' parçasını ayıraq. Bu halda, “ *M* nöqtəsindən M' nöqtəsinə keçməyə mərkəzi *O* və əmsalı *k* olan *homotetiya* deyilir (şəkil

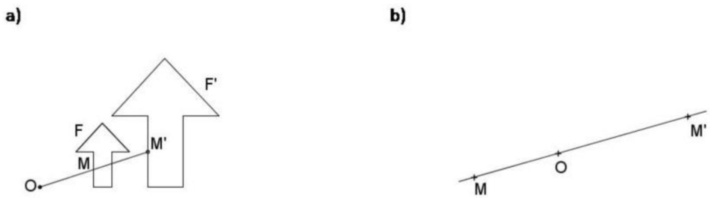
Şəkil 219

219). Homotetiyada *O* nöqtəsi özünə çevrilir.

F verilmiş fiqur, *O* müstəvinin qeyd olunmuş nöqtəsi, $k > 0$ isə hər hansı ədəd osun (şəkil 220, *a*). Fiqurun ixtiyari *M* nöqtəsindən *OM* şüası keçirək və onun üzərində $OM' = k \cdot OM$ münasibətini ödəyən OM' parçasını ayıraq. Eyni yolla *F* fiqurunun istənilən nöqtəsinə homotetik olan nöqtəni qurmaq olar. Bu qayda ilə qurulan nöqtələrin təşkil etdiyi F' fiquru, *F* fiquru ilə *homotetik fiqur* adlanır (homotetiya mərkəzi *O*, əmsalı *k* olan).

Qeyd edək ki, $k < 0$ olduqda da homotetiyadan danışmaq olar. Aydındır ki, bu zaman $OM' = k \cdot OM$ şərtini ödəyən *M* və M' nöqtələri *O* nöqtəsinin müxtəlif tərəflərində yerləşəcəkdir (şəkil 220, b).

Homotetiyada $|k| < 1$ olduqda homotetik fiqur "kiçilir", $|k| > 1$ olduqda isə "böyüyür". $k = 1$ olduqda homotetiya eynilik çevirməsi, $k = -1$olduqda isə *O* nöqtəsinə nəzərən mərkəzi simmetriya olur.



Şəkil 220

Homotetiyanın aşağıdakı xassələrini qeyd edək:

1. *Müsbət əmsallı* ($k > 0$) *homotetiyada hərbir şüa özü ilə eyni istiqamətli, mənfi əmsallı* ($k < 0$)*homotetiyada isə əks istiqamətli şüaya çevrilir.*

2. *Homotetiyada düz xətt özünə paralel düz xəttə, parça özünə paralel parçaya, bucaq özünə bərabər bucağa çevrilir.*

3. *O, M, və* M' *nöqtələri bir düz xətt üzərindədirsə, onda M nöqtəsini* M' *nöqtəsinə çevirən O mərkəzli homotetiya yeganədir.*

4. F' *fiquru* O *mərkəzinə nəzərən* F *-in* k *əmsallı homotetik fiquru isə, onda* F *fiquru həmin mərkəzə nəzərən* F' *-in* $\frac{1}{k}$ *əmsallı homotetik fiqurudur.*

Homotetiyanın verilməsi üçün onun mərkəzinin, ixtiyari *M* nöqtəsinin və bu nöqtənin çevrildiyi M' nöqtəsinin verilməsi də kifayətdir.

Homotetiyada fiqurun bütün ölçüləri mütənasib olaraq dəyişir, yəni $OM' : OM = |k|$ və ya $OM' := |k| \cdot OM$.

Tərif. F fiqurunun F' fiquruna çevrilməsi zamanı onların nöqtələri arasındakı məsafə eyni ədəd dəfə dəyişərsə (artarsa və ya azalarsa) belə çevirməyə *oxşar çevirmə* deyilir.

Tərifdən aydın olur ki, oxşar çevirmə zamanı F fiqurunun ixtiyari *M* və *N* nöqtələri F' fiqurunun M' və N' nöqtələrinə çevrilərsə, onda $M'N' = k \cdot MN$ olur. Burada k ədədi oxşarlıq əmsalı adlanır.

Oxşar çevirmənin aşağıdakı xassələrini qeyd edək:

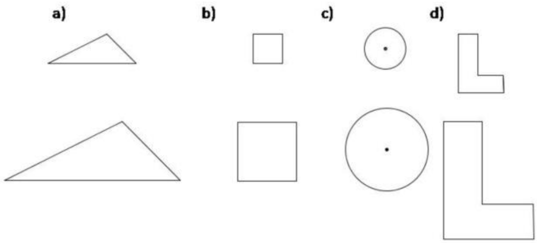
1. *Oxşar çevirmə düz xətti-düz xəttə, şüanı-şüaya, parçanı-parçaya çevirirş*

2. *Oxşar çevirmə bucağı özünə bərabər bucağa çevirir.*

3. $k(k > 0)$ *əmsallı oxşar çevirmənin tərs çevirməsi* $\frac{1}{k}$ *əmsallı oxşar çevirmədir.*

§ 75. FİQURLARIN OXŞARLIĞI. MÜTƏNASİB PARÇALAR

Ətraf mühitdə eyni formalı, lakin müxtəlif ölçülü əşyalar ilə rastlaşırıq. Məsələn, gəmi və onun modeli, müxtəlif ölçülərdə eyni bir adamın fotoşəkilləri və s. Həndəsədə də müxtəlif ölçülü eyni formalı fiqurlara rast gəlirik. 221-ci şəkildə belə fiqurlardan bir neçəsi göstərilmişdir.



Şəkil 221

Tərif. Oxşar çevirmə nəticəsində biri digərinə keçən fiqurlara *oxşar fiqurlar* deyilir.

Yazıda fiqurların oxşarlığı "$\backsim$" işarəsi ilə göstərilir. Məsələn, F və F' fiqurlarının oxşarlığı $F \backsim F'$ kimi yazılır və belə oxunur: "F fiquru F' fiquruna oxşardır".

Fiqurların oxşarlığı

a) refleksivlik: $F \backsim F$,

b) simmetriklik: $F \backsim F'$ isə $F' \backsim F$,

v) tranzitivlik: $F \backsim F'$ və $F' \backsim F''$ isə $F \backsim F''$ xassələrinə malikdir.

Oxşar çevirmənin tərifindən çıxır ki, oxşar fiqurların uyğun bucaqları bərabər, uyğun xətti elementləri isə mütənasibdir. Xüsusi halda ABC və $A_1B_1C_1$ üçbucaqları oxşardırsa,

$$\angle A = \angle A_1,\ \angle B = \angle B_1,\ \angle C = \angle C_1 \text{ və } \frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1} = \frac{AC}{A_1C_1} = k$$

münasibətləri doğrudur.

Verilmiş AB və CD; A_1B_1 və C_1D_1 parçaları üçün $AB : CD = A_1B_1 : C_1D_1$ olarsa, onda belə parçalara *mütənasib parçalar* deyilir.

Teorem. *Bucağın tərəflərini kəsən paralel düz xətlər bu tərəflər üzərində mütənasib parçalar ayırır.*

□ Verilmiş MON bucağının tərəflərini A və A_1, B və B_1 nöqtələrində kəsən AA_1 və BB_1 paralel düz xətlərini çəkək (şəkil 222). İsbat edək ki,

$$OA : OA_1 = OB : OB_1.$$

A nöqtəsini B nöqtəsinə çevirən O mərkəzli himotetiyaya baxaq. Bu himotetiyada AA_1 düz xətti B nöqtəsindən keçən və ona paralel olan BB_1 düz xətlərinə çevrilir. Eləcə də bu homotetiya zamanı bucağın tərəfləri öz-özünə keçdiyindən A_1 nöqtəsi B_1 nöqtəsinə keçir. k əmsallı homotetiyada nöqtələr arasındakı məsafələr $|k|$ nisbətində dəyişdiyindən,

$$OB = |k| \cdot OA; \; OB_1 = |k| \cdot OA_1,$$

buradan da

$$OB : OA = OB_1 : OA_1$$

və ya

$$OA : OA_1 = OB : OB_1$$

alınar. ■

Nəticə. $AA_1 // BB_1$ olarsa, onda $OA : OA_1 = AB : A_1B_1$ (şəkil 222)

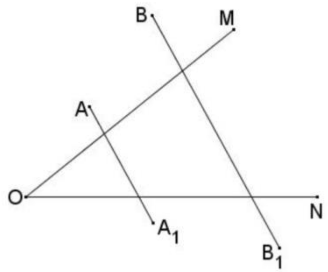
□ Yuxarıda aldığımız $OB : OA = OB_1 : OA_1$ bərabərliyinin hər iki tərəfinə (-1) əlavə edək:

$$\frac{OB}{OA}-1=\frac{OB_1}{OA_1}-1 \text{ və ya } \frac{OB-OA}{OA}=\frac{OB_1-OA_1}{OA_1},$$

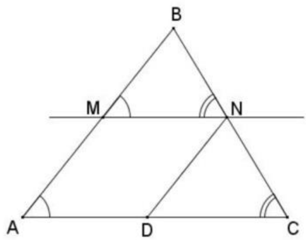
burada $OB-OA=AB$ və $OB_1-OA_1=A_1B_1$ olduğunu nəzərə alsaq, $\frac{AB}{OA}=\frac{A_1B_1}{OA_1}$ buradan da $OA:OA_1=AB:A_1B_1$ alınar. ■

Nəticə 2. *Üçbucağın iki tərəfini kəsən və üçüncü tərəfə paralel olan düz xətt, verilmiş üçbucaqdan ona oxşar üçbucaq ayırır.*

□ *ABC* verilmiş üçbucaq, *MN* isə onun *AC* tərəfinə paralel olub, qalan iki tərəfini kəsən düz xətt olsun (şəkil 223). İsbat edək ki, $\Delta MBN \backsim \Delta ABC$. Bunun üçün bu üçbucaqların bucaqlarının bərabərliyini və uyğun tərəflərin mütənasibliyini göstərmək lazımdır. Bu üçbucaqlarda *B* bucağı ortaq, $\angle BMN=\angle A$ və $\angle BNM=\angle C$ -



Şəkil 222



Şəkil 223

-dir (uyğun bucaqlar). Mütənasib parçalar haqqındakı teoremə görə isə

$$BM:BA=BN:BC \qquad (1)$$

olur. *N* nöqtəsindən *ND//AB* çəkək. Onda $DA:CA=NB:CB$ (niyə ?). Alınmış *AMND* dördbucaqlısı paraleloqram olduğundan, *AD=MN*, buna görə də $MN:AC=BN:BC$ olur. Bunu (1) bərabərliyində nəzərə alsaq,

$$\frac{BM}{AB} = \frac{BN}{BC} = \frac{MN}{AC}$$

olar. Deməli, $\Delta MAN \backsim \Delta ABC$. ■

§ 76. ÜÇBUCAQLARIN OXŞARLIQ ƏLAMƏTLƏRİ

Teorem 1 (birinci əlamət) *Bir üçbucağın iki bucağı uyğun olaraq o biri üçbucağın iki bucağına bərabərdirsə, üçbucaqlar oxşardır.*

□ ABC və $A_1B_1C_1$ üçbucaqlarında $\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$ olsun (aydındır ki, $\angle C = \angle C_1$). İsbat edək ki, $\Delta ABC \backsim \Delta A_1B_1C_1$ (şəkil 224). Bu məqsədlə ABC üçbucağının B təpə nöqtəsindən başlayaraq BA tərəfi üzərində $BA_2 = B_1A_1$ parçasını ayırıb, A_2 nöqtəsindən AC tərəfinə paralel düz xətt keçirək. Bu düz xətt BC tərəfini hər hansı C_2 nöqtəsində kəsəcəkdir. $A_1B_1C_1$ və A_2BC_2 üçbucaqları $A_1B_1 = A_2B$ (qurmaya görə), $\angle B = \angle B_1$ (şərtə görə) və $\angle A = \angle A_1 = \angle BA_2C_2$ olduğundan, bərabərdir: $\Delta A_1B_1C_1 = \Delta A_2BC_2$. Digər tərəfdən, $\Delta A_2BC_2 \backsim \Delta ABC$ (niyə?) olduğundan $\Delta ABC \backsim \Delta A_1B_1C_1$ olar. ■

Teorem 2 (ikinci əlamət). *Bir üçbucağın iki tərəfi, uyğun olaraq o biri üçbucağın iki tərəfinə mütənasib və bu tərəflər arasındakı bucaqlar bərabərdirsə, belə üçbucaqlar oxşardır.*

□ ABC və $A_1B_1C_1$ üçbucaqlarında $\dfrac{AB}{A_1B_1} = \dfrac{BC}{B_1C_1}$ və $\angle B = \angle B_1$ olsun (şəkil 224). İsbat edək ki, $\Delta ABC \backsim \Delta A_1B_1C_1$. ABC üçbucağının B təpə nöqtəsindən BA tərəfi üzərində $BA_2 = B_1A_1$ parçasını ayırıb, A_2 nöqtəsindən $A_2C_2 \,//\, AC$ çəkək. Onda $\Delta A_2BC_2 \backsim \Delta ABC$ (niyə?). Bu üçbucaqların oxşarlığından,

$$\frac{AB}{BA_2} = \frac{BC}{BC_2} \qquad (1)$$

alarıq. (1) tənasübündə $A_2B = A_1B_1$ olmasını nəzərə alıb, onu verilmiş $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1}$ tənasübü ilə müqayisə etsək,

$$\frac{BC}{BC_2} = \frac{BC}{BC_1} \qquad (2)$$

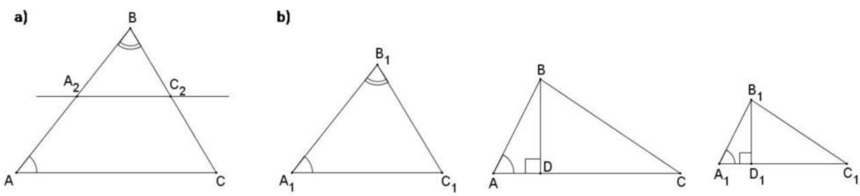
alarıq. Buradan $BC_2 = BC_1$ olur. Deməli $A_1B_1C_1$ və A_2BC üçbucaqları bərabərdir: $\Delta A_1B_1C_1 = \Delta A_2BC_2$. Onda $\Delta ABC \backsim \Delta A_1B_1C_1$ olur. ■

Teorem 3 (üçüncü əlamət). *Bir üçbucağın üç tərəfi, o biri üçbucağın üç tərəfi ilə mütənasibdirsə, bu üçbucaqlar oxşardır*.

□ ABC və $A_1B_1C_1$ üçbucaqlarından

$$\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1} = \frac{AC}{A_1C_1} \qquad (3)$$

olsun. İsbat edək ki, $\Delta ABC \backsim \Delta A_1B_1C_1$ (şəkil 224).



Şəkil 224 Şəkil 225

O biri əlamətlərdə olduğu kimi, qurmanı yerinə yetirib $\Delta A_2BC_2 = \Delta A_1B_1C_1$ olduğunu göstərək. ABC və A_2BC_2 üçbucaqlarının oxşarlıqlarından,

$$\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_2} = \frac{AC}{A_2C_2} \qquad (4)$$

alınar. (3) və (4) tənasüblərində $A_2B = A_1B_1$ olduğundan $BC_2 = B_1C_1$ olduğundan $BC_2 = B_1C_1$, $A_2C_2 = A_1C_1$ alınır. Buradan da $\Delta A_2BC_2 = \Delta A_1B_1C_1$ olur. Deməli, $\Delta ABC \backsim \Delta A_1B_1C_1$. ■

Teorem 4. *Oxşar üçbucaqların uyğun xətti elementləri mütənasibdir.*

□ Teoremin uyğun tərəf və hündürlüklər üçün isbat edək, yəni $\Delta ABC \backsim \Delta A_1B_1C_1$ qəbul edib.

$$AB : A_1B_1 = BD : B_1D_1$$

olduğunu göstərək (şəkil 225) ABD və $A_1B_1D_1$ düzbucaqlı üçbucaqları $\angle A = \angle A_1$ olduğundan, oxşardır: $\Delta ABD \backsim \Delta A_1B_1D_1$. Onda $AB : A_1B_1 = BD : B_1D_1$. ■

Qalan xətti elementlərin mütənasibliyi uyğun qayda ilə isbat olunur.

Üçbucaqların oxşarlıq əlamətlərindən aşağıdakı nəticələr alınır:

Nəticə 1. *Bərabərtərəfli üçbucaqlar oxşardır.*

Nəticə 2. *İti bucaqlarından biri bərabər olan düzbucaqlı üçbucaqlar oxşardır.*

Nəticə 3. *Təpə bucaqları bərabər olan bərabəryanlı üçbucaqlar oxşardır.*

Nəticə 4. *Katetləri mütənasib olan düzbucaqlı üçbucaqlar oxşardır.*

Məsələ 1. *AEC* üçbucağında *AB*=9 *sm*, *BC*=15 *sm*, *AC*=18 *sm*-dir. *D* nöqtəsi *AC* tərəfi, *E* nöqtəsi *BC* tərəfi üzərində olmaqla *DE* düz xətt parçası keçirilmiş və $\angle DEC = \angle A$ olmuşdur. *DE*=6 sm, olarsa, *DC* və *EC*-ni tapın (şəkil 226).

○ $\angle A = \angle DEC$ (şərtə görə) və *C* bucağı ortaq olduğundan $\Delta ABD \backsim \Delta EDC$. Onda

$$\frac{AB}{ED} = \frac{BC}{DC} = \frac{AC}{EC}$$

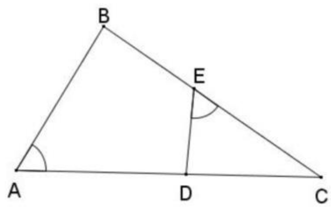
yaza bilərik. Buradan

$$\frac{AB}{ED} = \frac{BC}{DC}, \text{ yaxud } \frac{9}{6} = \frac{15}{DC}$$

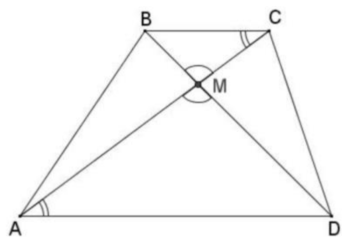
yəni *DC*=10 sm alınır. Eləcə də $\frac{BC}{DC} = \frac{AC}{EC}$ münasibətindən $\frac{15}{10} = \frac{18}{EC}$, yəni *EC*=12 *sm* tapılır. ●

Məsələ 2. Trapesiyanın oturacaqları *a* və *b*, diaqonalları isə *m* və *n*-dir. Onun diaqonallarının kəsişməsindən alınan diaqonal parçalarını tapın.

○ *ABCD* verilmiş trapes və *AD=a*, *BC=b*, *AC=m*, *BD=n* olsun. *AM*, *MC*, *BM* və *MD* parçalarını tapaq (şəkil 227).



Şəkil 226



Şəkil 227

AMD və BMC üçbucaqları $\angle AMD = \angle BMC$ (qarşılıqlı bucaqlar) və $\angle MAD = \angle MCB$ (daxili çarpaz bucaqlar) olduğundan oxşardır: $\Delta AMD \backsim \Delta BMC$. Odur ki,

$$\frac{AD}{BC} = \frac{AM}{MC} = \frac{DM}{MB}.$$

Buradan $\frac{AD}{BC} = \frac{AM}{MC}$ və $\frac{AD}{BC} = \frac{DM}{MB}$ yazmaq olar.

AD=a, *BC=b* olduğunu nəzərə alaq:

$$\frac{a}{b} = \frac{AM}{MC}, \tag{5}$$

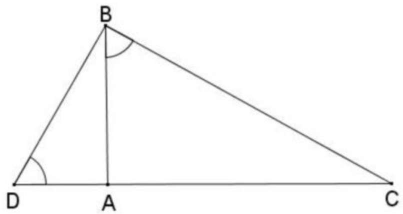
$$\frac{a}{b} = \frac{DM}{MB}. \tag{6}$$

(5) bərabərliyinə törəmə tənasübün xassəsini tətbiq etsək,

$$\frac{a+b}{b} = \frac{AM+MC}{MC} \text{ və ya } \frac{a+b}{b} = \frac{m}{MC},$$

buradan isə $MC = \frac{mb}{a+b}$ alırıq. *MC*-nin qiymətini (5) bərabərliyində yerinə yazsaq, $AM = \frac{n \cdot a}{a+b}$ olar.

Oxşar qayda ilə (6) münasibətindən $\frac{a+b}{b} = \frac{DM+MB}{MB}$ və ya $\frac{a+b}{b} = \frac{n}{MB}$, buradan isə $MB = \frac{n \cdot b}{a+b}$. *MB*-nin qiymətini (6) bərabərliyində yerinə yazsaq, $MD = \frac{n \cdot b}{a+b}$ olar. ●



Şəkil 228

Məsələ 3. Üçbucağın a, b və c tərəfləri arasında $a^2 = b^2 + bc$ münasibəti olduqda $\angle A = 2 \cdot \angle B$ -dir. Bunu isbat edin.

○ ABC verilən üçbucaq olsun. CA tərəfinin uzantısı üzərində $AD=c$ parçasını ayıraq (şəkil 228). $a^2 = b^2 + bc$ münasibətindən

$$\frac{a}{b} = \frac{b+c}{a} \qquad (7)$$

alınar. ABC və BDC üçbucaqlarında C bucağının ortaq olmasını və (7) münasibətini nəzərə alsaq, $\Delta ABC \backsim \Delta BDC$ olması alınar. Ona görə də $\angle BAC = \angle CBD$. Bundan başqa $\angle ABC = \angle ADB$. Beləliklə, $\angle BAC = \angle CBD = \angle ABC + \angle ADB = 2\angle ABC$, yəni $\angle A = 2 \cdot \angle B$. ●

§ 77. OXŞAR ÇOXBUCAQLILAR

Tərəfləri mütənasib və uyğun bucaqları bərabər olan eyni adlı çoxbucaqlılara *oxşar çoxbucaqlılar* deyilir, yəni $\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$, $\angle C = \angle C_1$, $\angle D = \angle D_1$, $\angle E = \angle E_1$ və $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1} = \frac{CD}{C_1D_1} = \frac{DE}{D_1E_1} = \frac{EA}{E_1A_1}$ isə onda $ABCDE \backsim A_1B_1C_1D_1E_1$ olur (şəkil 229).

Şəkil 229

Teorem 1. *Oxşar çoxbucaqlıların uyğun təpələrindən çəkilmiş diaqonalları onları oxşar üçbucaqlara ayırır.*

□ Oxşar $ABCDE$ və $A_1B_1C_1D_1E_1$ çoxbucaqlılarında AC və AD, A_1C_1 və A_1D_1 diaqonallarını çəkək. Alınan üçbucaqlarda $\Delta ABC \backsim \Delta A_1B_1C_1$; $\Delta ACD \backsim \Delta A_1C_1D_1$; $\Delta ADE \backsim \Delta A_1D_1E_1$ olduğunu göstərək. Doğrudan da $\angle B = \angle B_1$ və $\dfrac{AB}{A_1B_1} = \dfrac{BC}{B_1C_1}$ olduğundan $\Delta ABC \backsim \Delta A_1B_1C_1$.

Oxşar qayda ilə qalan üçbucaqların da oxşarlığı göstərilir. ■

Teorem 2. *Oxşar çoxbucaqlıların perimetrləri nisbəti, uyğun tərəflərin nisbətinə bərabərdir.*

□ Tutaq ki, $ABCDE \backsim A_1B_1C_1D_1E_1$, göstərək ki,

$$\frac{p}{p_1} = \frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1} = \frac{CD}{C_1D_1} = \frac{DE}{D_1E_1} = \frac{EA}{E_1A_1}.$$

Burada p və p_1 uyğun olaraq $ABCDE$ və $A_1B_1C_1D_1E_1$ çoxbucaqlılarının perimetrləridir (bax: şəkil 229). Çoxbucaqlıların oxşarlıqlarına əsasən doğru olan

$$\frac{AB}{A_1B_1}=\frac{BC}{B_1C_1}=\frac{CD}{C_1D_1}=\frac{DE}{D_1E_1}=\frac{EA}{E_1A_1}$$

münasibətinə bərabər nisbətlərin xassəsini tətbiq etsək,

$$\frac{AB+BC+CD+DE+EA}{A_1B_1+B_1C_1+C_1D_1+D_1E_1+E_1A_1}=\frac{AB}{A_1B_1}$$

buradan isə

$$\frac{p}{p_1}=\frac{AB}{A_1B_1}=\left(\frac{BC}{B_1C_1}=\frac{CD}{C_1D_1}=\frac{DE}{D_1E_1}=\frac{EA}{E_1A_1}\right)$$

olur. ■

Nəticə. Eyni adlı düzgün çoxbucaqlılar oxşardır.

Məsələ 1. Dördbucaqlının tərəfləri $3:5:8:10$ nisbətindədir. Ona oxşar olan dördbucaqlının böyük və kiçik tərəfləri cəminin 78 sm olduğunu bilərək, tərəflərini tapın.

○ $ABCD$ və $A_1B_1C_1D_1$ oxşar dördbucaqlılar olsun. Şərtə görə $AB:BC:CD:DA=3:5:8:10$ və $A_1B_1+D_1A_1=78$. Buradan, şərtə və dördbucaqlıların oxşarlığına əsasən $A_1B_1:D_1A_1=3:10$, yəni $D_1A_1=\frac{10}{3}A_1B_1$ və $A_1B_1+D_1A_1=78$ olmasını nəzərə alsaq, $A_1B_1=18$ sm, $D_1A_1=60$ sm alırıq. Yenə də oxşarlığa görə $A_1B_1:B_1C_1=3:5$ və ya $18:B_1C_1=3:5$. Buradan isə $B_1C_1=30$ sm alınır. Nəhayət, $A_1B_1:C_1D_1=3:8$ və ya $18:C_1D_1=3:8$ olmasından $C_1D_1=48$ sm alınar. ●

Məsələ 2. İki oxşar çoxbucaqlının böyük tərəfləri uyğun olaraq 45 *m* və 24 *m*, perimetrləri cəmi isə 138 *m*-dir. Perimetrləri tapın.

○ Çoxbucaqlının perimetrləri uyğun olaraq p və p_1 olsun. Onda $p:p_1=45:24$ və ya $p:p_1=15:8$. Buradan $\frac{p+p_1}{p_1}=\frac{15+8}{8}$ və ya $\frac{138}{p_1}=\frac{23}{8}$, buradan isə $p_1=48\,m$.

p_1-in qiymətini $p:p_1=15:8$ nisbətində nəzərə alsaq, $p=90\,m$ olar.
●

§ 78. ÜÇBUCAĞIN DAXİLİ və XARİCİ BUCAĞININ TƏNBÖLƏNİNİN XASSƏSİ

Teorem 1. *Üçbucağın daxili bucağının tənböləni qarşıdakı tərəfi qalan tərəflərlə mütənasib hissələrə ayırır.*

□ *BD* parçası *ABC* üçbucağında *B* bucağının tənböləni olsun (şəkil 230). İsbat edək ki,

AD:DC=AB:BC.

Bu məqsədlə *C* nöqtəsindən *BD*-yə paralel çəkib, *AB*-nin uzantısını kəsdiyi nöqtəni *M* ilə işarə edək. Onda Fales teoreminə görə

AD:DC=AB:BM. (1)

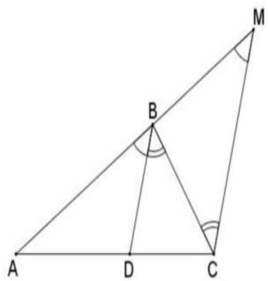
BCM üçbucağında $\angle M=\angle ABD$ (uyğun bucaqlar) və $\angle BCM=\angle DBC$ olmasını nəzərə alsaq, $\angle M=\angle BCM$, yəni *BCM* üçbucağının bərabəryanlı olmasını alarıq. Buradan *BC=BM* olur. Bunu (1) bərabərliyində nəzərə alsaq,

AD:DC=AB:BC

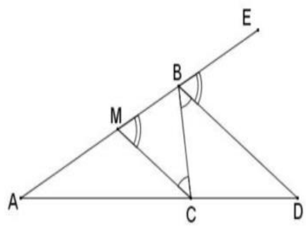
olar. ■

Teorem 2. *Üçbucağın xarici bucağının tənböləninin qarşıdakı tərəfi uzantısını kəsdiyi nöqtənin həmin tərəfin uclarından olan məsafələri qalan tərəflərlə mütənasibdir.*

□ Tutaq ki, *ABC* üçbucağının *CBE* xarici bucağını tənböləni qarşıdakı tərfin uzantısını *D* nöqtəsində kəsir (şəkil 231).



Şəkil 230



Şəkil 231

İsbat edək ki, *AD:CD=AB:BC*. Bu məqsədlə *CM//BD* çəkək, Fales teoreminə görə,

$$AD:CD=AB:MB. \qquad (2)$$

Digər tərəfdən $\angle BMC = \angle EBD$ (uyğun bucaqlar), $\angle BCM = \angle CBD$ (çarpaz bucaqlar) və $\angle EBD = \angle CBD$ (şərtə görə) olduğundan ΔBCM bərabəryanlıdır və *BC=BM.* (2) münasibətinə əsasən də

$$AD:CD=AB:BC$$

olur. ■

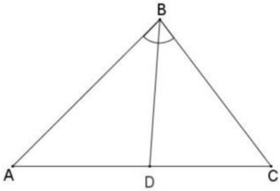
Məsələ 1. Üçbucağın tərəfləri 12 *sm*, 15 *sm* və 18 *sm*-dir. Böyük bucaq tənböləninin qarşıdakı tərəfdən ayırdığı parçaları tapın.

○ *ABC* üçbucağında *AB*=12 *sm*, *BC*=15 *sm*, *AC*=18 *sm*, *BD* isə tənbölən olsun (şəkil 232). *AD* və *DC* parçalarını tapaq.

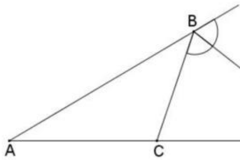
Tənbölənin xassəsinə görə: *AD*:*DC*=*AB*:*BC*, yəni *AD*:*DC*=12:15, nəticədə isə $AD = \frac{4}{5}DC$ olur.

Burada, *AC*=*AD*+*DC*=18, yəni $DC = 18 - AD$ olmasını nəzərə alsaq, *AD*=8 *sm*, *DC*=10 *sm* olur. ●

Məsələ 2. Üçbucağın xarici bucağının tənböləni qarşıdakı tərəfin uzantısını *AD*=24 *sm*, *CD*=16 *sm* olmaqla *D* nöqtəsində kəsir. Üçbucağın perimetrlərinin 33 *sm* olduğunu bilərək onun tərəflərini tapın (şəkil 233).



Şəkil 232



Şəkil 233

○ Verilmiş *ABC* üçbucağında *BD* xarici bucağın tənböləni, *AD*=24 *sm*, *CD*=16 *sm* və *p*=33 *sm* olsun. Üçbucağın tərəflərini tapaq. Əvvəlcə $AC = AD - CD$ olmasından *AC*=8*sm* alarıq. Şərtə görə, *AB*+*BC*+*AC*=33, eləcə də *AD*:*CD*=*AB*:*BC* olduğundan, *AB*+*BC*=25, *AB*:*BC*=3:2 alırıq. Buradan da *AB*=15 *sm*, *BC*=10 *sm* alınır. ●

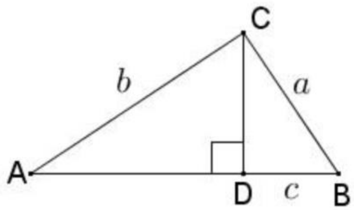
§ 79. DÜZBUCAQLI ÜÇBUCAQDA METRİK MÜNASİBƏTLƏR. PİFAQOR TEOREMİ

Fərz edək ki, *a*, *b* və *x* ədədlərinin hər biri müəyyən bir parçanın uzunluğunu ifadə edir.

Tərif. $x^2 = ab$ (*a*:*x*=*x*:*b*) bərabərliyi ödəndikdə *x* parçasına, *a* və *b* parçaları arasında *orta mütənasib* (və ya *həndəsi orta*) *parça* deyilir.

Teorem 1(düz bucaq təpəsindən hipotenuza endirilmiş perpendikulyarın xassəsi). *Düzbucaqlı üçbucağın:*

a) kateti, hipotenuzla bu katetin hipotenuz üzərindəki proyeksiyası arasında orta mütənasibdir;



Şəkil 234

b) düz bucaq təpəsindən endirilmiş hündürlüyü, katetlərin hipotenuz üzərində proyeksiyaları arasında orta mütənasibdir.

□ Tutaq ki, *ABC* düzbucaqlı üçbucaq, *CD* isə düz bucaq təpəsindən çəkilmiş hündürlükdür (şəkil 284). İsbat edək ki, a) $AC^2 = AB \cdot AD,\ BC^2 = AB \cdot DB,$ b) $CD^2 = AD \cdot DB.$ Şəkildən göründüyü kimi düzbucaqlı *ACB, ADC* və *BDC* üçbucaqları bərabər iti bucaqları olduğundan oxşardır.

a) $\Delta ACB \backsim \Delta ADC$ olduğundan, *AC:AD=AB:AC*, yəni $AC^2 = AB \cdot AD$ olar. Eynilə $\Delta ACB \backsim \Delta BDC$ olduğundan, *BC:AB=DB:BC*, yəni $BC^2 = AB \cdot DB$ alınır.

b) $\Delta ADC \backsim \Delta CDB$ olduğundan *AD:CD=CD:DB*, yəni $CD^2 = AD \cdot DB$ olar. ■

Teorem 2. *(Pifaqor teoremi) Düzbucaqlı üçbucaqda hipotenuzun kvadratı katetlərn kvadratları cəminə bərabərdir.*

□ Düzbucaqlı *ABC* üçbucağında (şəkil 234)

$$AB^2 = AC^2 + BC^2 \qquad (1)$$

olduğunu isbat edək. Əvvəlki teoremə görə

$$AC^2 = AB \cdot AD,\ \ BC^2 = AB \cdot DB$$

yazıb, onları tərəf-tərəfə toplayaq:

$$AB \cdot AD + AB \cdot DB = AC^2 + BC^2, \text{ yaxud } AB(AD + DB) = AC^2 + BC^2.$$

Burada, $AD+DB=AB$ olduğunu nəzərə alsaq, $AB^2 = AC^2 + BC^2$ olur. ■

Düzbucaqlı üçbucağın tərəfləri a, b, c olduqda (1) bərabərliyini $a^2 + b^2 = c^2$ kimi də yazırlar.

Qeyd 1. Tərəfləri uyğun olaraq a, b, c olan kvadratların sahələri a^2, b^2, c^2 olduğundan, Pifaqor teoremini həndəsi olaraq belə söyləmək olar:

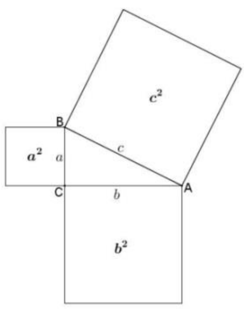
Düzbucaqlı üçbucaqda hipotenuz üzərində qurulmuş kvadratın sahəsi, katetlər üzərində qurulmuş kvadratların sahələri cəminə bərabərdir (şəkil 235)

Teorem 3 (tərs teorem). *Üçbucaqda bir tərəfin kvadratı o biri iki tərəfin kvadratları cəminə bərabər olarsa, onda bu üçbucaq düzbucaqlı üçbucaqdır.*

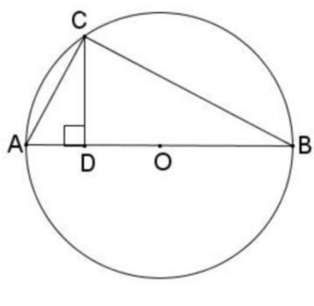
Teoremin isbatını oxuculara həvalə edirik.

Diametrə söykənən bucaq düz bucaq olduğundan Pifaqor teoremindən aşağıdakı nəticə alınır.

Nəticə. *Çevrənin hər hansı nöqtəsindən onun diametrinə endirilmiş perpendikulyar, diametr parçaları arasında orta mütənasibdir* (şəkil 236).



Şəkil 235



Şəkil 236

Qeyd 2. $a^2+b^2=c^2$ bərabərliyini ödəyən ədədlərə *Pifaqor ədədləri* deyilir. Məsələn, 3, 4, 5; 6, 8, 10; 9, 12, 15 və s. Pifaqor ədədləridir:

$$3^2+4^2=5^2;\ 6^2+8^2=10^2;\ 9^2+12^2=15^2$$

Göründüyü kimi *a*, *b* və *c* ədədləri Pifaqor ədədləridirsə, onda $n\cdot a$, $n\cdot b$ və $n\cdot c$ ədədləri də ($n\neq 0$ istənilən ədəddir) Pifaqor ədədləridir. Odur ki, Pifaqor ədədləri sonsuz saydadır.

Tərəflərinin uzunluqları 3, 4 və 5 olan düzbucaqlı üçbucaq *Misir üçbucağı* adlanır.

Məsələ 1. Düzbucaqlı üçbucağın bir kateti hipotenuzdan 8 *sm* kiçikdir. O biri katetin 20 *sm* olduğunu bilərək, üçbucağın perimetrini tapın.

○ Düzbucaqlı üçbucağın məchul kateti *x* olsun. Onda hipotenuz *x*+8 olar. Pifaqor teoreminə əsasən $(x+8)^2=x^2+20^2$ buradan da *x*=21 olar. Onda hipotenuz 29 *sm*, perimetr isə *p*=70 *sm* olur. ●

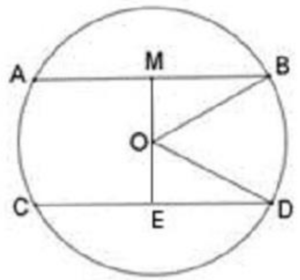
Məsələ 2. Çevrənin mərkəzindən müxtəlif tərəflərində uzunluqları 6 *sm* və 8 sm olan iki vətər çəkilmişdir. Vətərlər arasındakı məsafənin 7 sm olduğunu bilərək, çevrənin radiusunu tapın.

○ *AB*=6 *sm*, *CD*=8 *sm*, *AB//CD*, $ME\perp CD$, *ME*=7 *sm* olsun (şəkil 237). *OB*=*OD*=*R*?

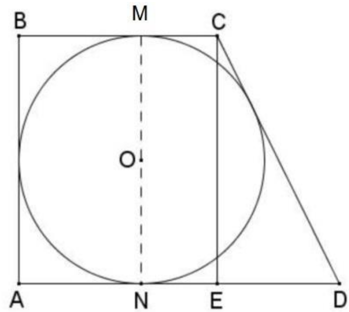
OM=*x* qəbul etsək, $OE=7-x$ olar. Eləcə də $MB=\frac{1}{2}AB=3,\ ED=\frac{1}{2}CD=4$ olması aydındır. *OMB* və *OED* düzbucaqlı üçbucaqlar olduğundan, Pifaqor teoreminə əsasən $R^2=x^2+3^2$ və $R^2=(7-x)^2+4^2$, buradan isə $(7-x)^2+4^2=x^2+3^2$, yıni $x=4$ alınır.

x-in qiymətini $R^2 = x^2 + 3^2$ bərabərliyində yerinə yazsaq, $R = 5$ *sm* alarıq. ●

Məsələ 3. Çevrə xaricinə çəkilmiş düzbucaqlı trapesiyanın oturacaqlarının 20 *sm* və 12 *sm* olduğunu bilərək, çevrənin radiusunu tapın.



Şəkil 237



Şəkil 238

○ Daxilə çəkilmiş çevrənin radiusunu r ilə işarə edək (şəkil 238). *ABCD* düzbucaqlı trapesiyasında *AD*=20 *sm*, *BC*=12 *sm* olsun. Trapesiya düzbucaqlı olduğundan *AB*=*MN*=*CE*=2*r* olar. Digər tərəfdən, bu trapesiya çevrə xaricinə çəkilmiş düzbucaqlı olduğundan *AB*+*CD*=*BC*+*AD* olur. Buradan $CD = 32 - 2r$.

Şəkildən göründüyü kimi $ED = AD - AE = AD - BC = 20 - 12 = 8$ olur. Pifaqor teoreminə əsasən *CED* üçbucağından, $CD^2 = CE^2 + ED^2$, yəni $(32 - 2r)^2 = 4r^2 + 8$, buradan da *r*=7,5 *sm* alınır. ●

§ 80. DAİRƏDƏ METRİK MÜNASİBƏTLƏR

Teorem 1. *Dairə daxilində götürülmüş bir nöqtədən vətər və diametr çəkdikdə, vətərin parçaları hasili diametrin parçaları hasilinə bərabərdir.*

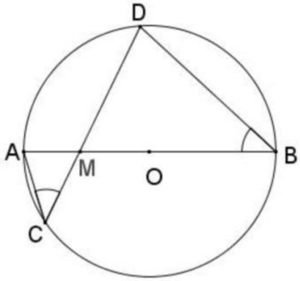
□ *M* nöqtəsindən keçən *CD* vətəri və *AB* diametrini çəkək (şəkil 239). İsbat edək ki, $CM \cdot MD = AM \cdot MB$.

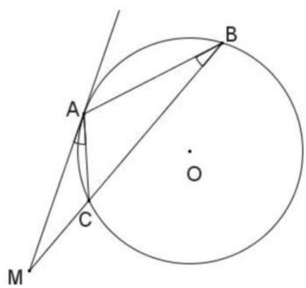
AC və *BD* vətərlərini çəksək alınan *AMC* və *DMB* üçbucaqlarında $\angle CMA = \angle DMB$ (qarşılıqlı bucaqlar) və $\angle ACM = \angle BMD$ (eyni qövsə söykənən bucaqlar) olduğundan, oxşardır. Odur ki, *AM:MD=CM:MB*, buradan da $CM \cdot MD = AM \cdot MB$ alınır. ■

Nəticə 1. *Dairə daxilində götürülmüş bir nöqtədən keçən bütün vətərlərin parçaları hasili eyni olub, həmin nöqtədən keçən diametrin parçaları hasilinə bərabərdir.*

Teorem 2. *Dairə xaricində götürülmüş nöqtədən bu dairəyə kəsən və toxunan çəkilərsə, toxunanın kvadratı kəsənin öz xarici hissəsinə hasilinə bərabərdir.*

□ *M* nöqtəsindən dairəyə *MB* kəsəni və *MA* toxunanı çəkib (şəkil 240), isbat edək ki, $MB \cdot MC = MA^2$. *A* toxunma nöqtəsini *B* və *C* nöqtələri ilə birləşdirsək, *ABM* və *CAM* üçbucaqlarını alarıq. Bu üçbucaqlarda $\angle MAC = \angle MBA$ (eyni bir *AC* qövsünün yarısı ilə ölçülən bucaqlar) və *M* ortaq bucaq olduğundan, onlar oxşardır. Odur ki, *MA:MC=MB:MA*, yəni $MC \cdot MB = MA^2$. ■





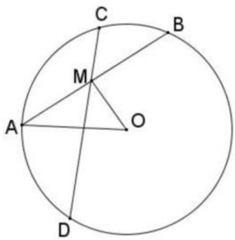
Şəkil 239 Şəkil 240

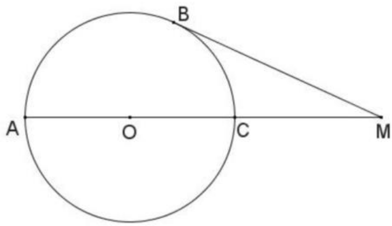
Nəticə 2. *Dairə xaricində götürülmüş nöqtədən bu dairəyə çəkilən hər bir kəsənin öz xarici hissəsinə hasili sabit olub, həmin nöqtədən çəkilən toxunanın kvadratına bərabərdir.*

Məsələ 1. Dairənin mərkəzindən 6 *sm* məsafədə olan nöqtədən iki vətər keçirilmişdir. Bunlardan biri həmin nöqtədə yarıya, digəri isə 4 *sm* və 16 *sm* uzunluqda parçalara ayrılır. Dairənin radiusunu tapın.

○ Şərtə görə *OM*=6 *sm*, *CM*=4 *sm*, *MD*=16 *sm*, *AM*=*MB*-dir. *OA*-nı tapaq (şəkil 241).

Məlumdur ki, $AM \cdot MB = CM \cdot MD$, yaxud $AM^2 = 64$, yəni *AM*=8 *sm*. *M* nöqtəsi *AB* parçasının orta nöqtəsi olduğu üçün $OM \perp AB$ olar, yəni *AMO* üçbucağı düzbucaqlı üçbucaqdır. Onda Pifaqor teoreminə görə $OA^2 = OM^2 + AM^2$, yəni *AO*=10 *sm* olur. ●





Şəkil 241 Şəkil 242

Məsələ 2. Dairə xaricində götürülmüş *M* nöqtəsindən dairəyə toxunan və mərkəzdən keçən kəsən çəkilmişdir (şəkil 242). *MA=2MB* və radiusun 12 *sm* olduğunu bilərək *OM* məsafəsini tapın.

○ $OM = x$ qəbul etsək, $MA = x+12$ və $MC = x-12$ olar. Şərtə görə $MB = \frac{1}{2}MA = \frac{1}{2}(x+12),$ digər tərəfdən $MB^2 = MC \cdot MA$ olduğundan, $\frac{1}{4}(x+12)^2 = (x-12)(x+12)$, buradan da $x = 20$ *sm*, yəni $OM = 20\,sm$ olur. ●

ÇALIŞMALAR

1. İki oxşar üçbucaqdan birinin bucaqları uyğun olaraq 83^0 və 67^0 -dir. O biri üçbucağın kiçik bucağını tapın.

2. Trapesiyanın diaqonallarının kəsişmə nöqtəsi onlardan birini 4,2 *sm* və 5,4 *sm* olan iki hissəyə ayırır. Trapesiyanın orta xətti 12 *sm* olarsa, onun oturacaqlarını tapın.

3. Paraleloqramın tərəfləri 12 *sm* və 18 *sm*-dir. Kiçik hündürlüyünün 9 *sm* olduğunu bilərək onun böyük hündürlüyünü tapın.

4. Bir düzbucaqlı üçbucağın katetləri 1,8 *sm* və 0,8 *sm*, o biri düzbucaqlı üçbucağın katetləri isə 2,7 *sm* və 1,2 *sm*-dir. Bu üçbucaqlar oxşardırmı?

5. Trapesiyanın orta xətti 9 *sm*-dir. Onun diaqonallarının kəsişmə nöqtəsinin oturacaqlardan məsafəsi uyğun olaraq 5 *sm* və 7 *sm* olarsa, oturacaqları tapın.

6. Trapesiyanın oturacaqları 8 *sm* və 1 *sm*-dir. Bu trapesiyanın oturacaqlarına paralel olan iki düz xətt onu üç oxşar trapesiyaya ayırır. Bu düz xətt parçalarının uzunluğunu tapın.

7. Düzbucaqlının perimetri 42 *sm*-dir. Onun hər bir diaqonalı üç bərabər hissəyə bölünmüş və bölgü nöqtələri ardıcıl birləşdirilmişdir. Alınan

dördbucaqlının verilən düzbucaqlı ilə oxşar olmasını isbat edin, oxşarlıq əmsalını və alınmış düzbucaqlının perimetrini tapın.

8. İki oxşar çoxbucaqlının perimetrləri cəmi 125 *sm*, oxşarlıq əmsalı isə 1,5-dir. Çoxbucaqlının perimetrini tapın.

9. Tərəfləri aşağıda verilmiş üçbucaqlar oxşardımı?

a) 1*m*, 1,5 *m* və 2 *m*; 15 *sm*, 20 *sm* və 10 *sm*;

b) 1*m*, 2 *m* və 15 *dm*; 12 *dm*, 8 *dm* və 16 *dm*;

c) 1m, 2 *m* və 1,2 *m*; 10 *sm*, 9 *sm* və 16 *işlkvi*.

10. Düzbucaqlı üçbucağın tərəflərini hansı üç ardıcıl ədədlə ifadə etmək mümkün olduğunu təyin edin.

11. Tərəfləri 60 *sm* və 91 *sm* olan düzbucaqlının diaqonalını tapın.

12. Diametri 12 *sm* olan çevrə daxilinə tərəfi 10 *sm* olan kvadrat çəkmək olarmı?

13. Katetləri 8 *dm* və 18 *sm* olan düzbucaqlı üçbucağın xaricinə çəkilmiş çevrənin radiusunu tapın.

14. Yan tərəfi 17 *sm*, oturacağı isə *16* sm olan bərabəryanlı üçbucağın hündürlüyünü tapın.

15. Hündürlüyü 35 *sm*, oturacağı yan tərəfə nisbəti isə 48:25 kimi olan bərabəryanlı üçbucağın tərəfini tapın.

16. Düz bucağın tənböləni düzbucaqlı üçbucağın hipotenuzunu $2\frac{1}{7}\,m$ və $2\frac{6}{7}\,m$ olan iki hissəyə bölür. Katetləri tapın.

17. Diaqonalları 24 *sm* və 70 *sm* olan rombun tərəfini tapın.

18. Yan tərəfi 25 *sm*, oturacaqları isə 10 *sm* və 24 *sm* olan bərabəryanlı trapesiyanın hündürlüyünü tapın.

19. Düzbucaqlı trapesiyada diaqonalların kvadratları fərqinin oturacaqların kvadratları fərqinə bərabər olduğunu isbat edin.

20.Verilən nöqtədən çevrəyə toxunan çəkilmişdir. Toxunanın uzunluğunun 60 *sm* və radiusun 11 *sm* olduğunu bilərək bu nöqtənin mərkəzdən olan məsafəsini tapın.

21.Mərkəzi düz bucaq təpəsində, radiusu katetə bərabər olan çevrə hipotenuzu 98 *sm* və 527 *sm*-lik parçalara (kiçik katetdən başlayaraq) ayırır. Katetləri təyin edin.

22. Üçbucağın tərəfləri 51 *sm*, 85 *sm* və 104 *sm*-dir. Mərkəzi böyük tərəfin üzərində olub, üçbucağın kiçik tərəflərinə toxunan çevrənin mərkəzi üçbucağın böyük tərəfini hansı hissələrə ayırır?

23. Bərabəryanlı üçbucağın hündürlüyü 20 *sm*, oturacağının yan tərəfə nisbəti isə 4:3 kimidir. Daxilə çəkilmiş çevrənin radiusunu tapın.

24. Bərabəryanlı üçbucağın daxilinə çəkilmiş çevrənin mərkəzi onun hündürlüyünü 12:5 nisbətində bölür. Üçbucağın yan tərəfləri 60 *sm* olarsa, onun oturacağını tapın.

25. Bərabəryanlı üçbucağın daxilinə çəkilmiş çevrənin radiusu onun hündürlüyünün $\frac{2}{7}$ hissəsini təşkil edir. Bu üçbucağın perimetrinin 56 *sm* olduğunu bilərək onun tərəflərini tapın.

26. Paraleloqramın iti bucağının tənböləni, onun diaqonalını 3,2 *sm* və 8,8 *sm* parçalara ayırır. Paraleloqramın perimetri 30 *sm* olarsa, onun tərəflərini tapın.

27. Oxşar üçbucaqlardan birinin tərəfləri 2:5:6 nisbətindədir. O biri üçbucağın böyük tərəfi 15 *sm* olarsa, onun qalan iki tərəfini tapın.

28. *ABC* və $A_1B_1C_1$ üçbucaqlarında $\angle A = \angle A_1$, $\angle C = \angle C_1$, BC=17,5 *sm*, $B_1C_1 = 7$ *sm* və *AB*=12,5 *sm* olarsa, A_1B_1 tərəfini tapın.

29. Trapesiyanın oturacaqları 5:9 nisbətindədir. Uzunluğu 16 *sm* olan yan tərəfi nə qədər uzatmaq lazımdır ki, o biri tərəfin uzantısı ilə kəsişsin?

30. Tərəfləri 35 *sm*, 14 *sm*, 28 *sm*, 21 *sm* və 42 *sm* olan beşbucaqlıya oxşar beşbucaqlının kiçik tərəfi 12 sm olarsa, onun qalan tərəflərini tapın.

31. İki oxşar çoxbucaqlının böyük tərəfləri uyğun olaraq 35 *m* və 14 *m*, perimetrləri fərqi isə 60 *m*-dir. Perimetrləri tapın.

32. Trapesiyanın kor bucaqlarının tənbölənləri böyük oturacağı kəsir. Bu tənbölənlərin uzunluqları 15 *sm* və 13 *sm*-dir. Trapesiyanın hündürlüyünün 12 *sm* olduğunu bilərək, onun tərəflərini tapın.

33. Tərəflərinin uzunluqları 10 *sm*, 20 *sm* və 26 *sm* olan üçbucağın kiçik tərəfləri çevrəyə toxunur. Çevrənin mərkəzinin böyük tərəf üzərində olduğunu bilərək onun radiusunu tapın.

34. Düzbucaqlı üçbucaqda katetlərə çəkilən medianlar uyğun olaraq $\sqrt{52}$ və $\sqrt{73}$-dür. Üçbucağın hipotenuzunu tapın.

35. Çevrənin kəsişən və bir-birinə perpendikulyar olan *AB* və *CD* vətərləri çəkilmişdir. $AC^2 + BD^2 = 4R^2$ olduğunu isbat edin.

36. Düzbucaqlı üçbucağın perimetri 60 *sm*-dir. Hipotenuza endirilmiş hündürlüyün 12 *sm* olduğunu bilərək üçbucağın tərəflərini tapın.

37. Bərabərtərəfli üçbucağın daxilində onun tərəflərindən *m*, *n* və *p* məsafədə olan *M* nöqtəsi götürülmüşdür. Bu üçbucağın hündürlüyünü tapın.

38. Üçbucağın hündürlüyü *24* sm, oturacağı 28 *sm* və yan tərəflərinin cəmi 56 *sm*-dir. Üçbucağın yan tərəflərini tapın.

39. *m, n* və *p* ədədləri hər hansı üçbucağın medianlarını ifadə edir. $m^2 + n^2 = 5p^2$ münasibəti ödəndikdə bu üçbucağın düzbucaqlı üçbucaq olduğunu isbat edin.

40. h_1, h_2, h_3 hər hansı üçbucağın hündürlüklərini ifadə edir. $h_1^2(h_2^{\ 2} + h_3^{\ 2}) = h_2^{\ 2} \cdot h_3^{\ 2}$ münasibəti ödəndikdə, bu üçbucağın düzbucaqlı üçbucaq olduğunu isbat edin.

41. Medianları uyğun olaraq 5 *sm*, $\sqrt{52}$ *sm* və $\sqrt{73}$ *sm* olan üçbucağın növünü təyin edin.

42. Üçbucaq daxilinə çəkilmiş çevrə mərkəzinin bu üçbucağın böyük bucağına daha yaxın olduğunu isbat edin.

43. Paraleloqramın tərəfləri və diaqonalları uyğun olaraq *a, b* və *p, q*-dir. $a^4 + b^4 = p^2q^2$ olduqda paraleloqramın bucaqlarını tapın.

44. Katetləri *a* və *b* olan düzbucaqlı üçbycağın düzbucaq təpəsindən çəkilmiş tənbölənini tapın.

TESTLƏR

1. Paralel köçürmə zamanı $A(-3,6)$ nöqtəsi $B(4,2)$ nöqtəsinə keçirsə, $C(-5,4)$ nöqtəsi hansı nöqtəyə keçər?

A) $(1,2)$ B) $(3,2)$ C) $(-2,1)$ D) $(0,-2)$ E) $(-2,0)$

2. İki oxşar üçbucaqdan birinin iki bucağı 68^0 və 72^0-dir. O biri üçbucağın kiçik bucağın tapın.

A) 50^0 B) 68^0 C) 72^0 D) 40^0 E) 30^0

3. Düzbucaqlı üçbucağın katetləri 8 *sm* və 15 *sm* olarsa, üçbucağın perimetrini tapın.

A) 40 B) 42 C) 35 D) 41 E) 38

4. Düzbucaqlı üçbucağın hipotenuzu 16 *sm*-dir. 60^0-li bucağın qarşısındakı kateti tapın.

A) 8 B) $8\sqrt{3}$ C) $8\sqrt{2}$ D) $9\sqrt{3}$ E) 9

5. Çevrənin *AB* və *CD* vətərləri *M* nöqtəsində kəsişir. *AM*=6 *sm*, *BM*=4 *sm*, *CM*=8 *sm* olarsa, *CD* vətərinin uzunluğunu tapın.

A) 10 *sm* B) 9 *sm* C) 11 *sm* D) 12 *sm* E) 13 *sm*

6. *ABC* üçbucağının *B* təpəsindən *BD* tənböləni çəkilmişdir. *AB*=8, *AD*=4, *DC*=3 isə *BC*-ni tapın.

A) 6 B) 7 C) 9 D) 5 E) 8

7. Uyğun hündürlükləri nisbəti 1:4 olan iki oxşar üçbucağın perimetrlərinin nisbətini tapın.

A) 1:9 B) 1:5 C) 1:3 D) 1:16 E) 1:4

8. *ABC* üçbucağında *AB*=15 *sm*, *AC*=8 *sm* və xarici bucağın *BD* tənböləni qarşıdakı tərəfin uzantısını *AD*=24 *sm* məsafədə kəsir. *BC* tərəfini tapın.

A) 9 B) 10 C) 11 D) 12 E) 13

9. *ABC* üçbucağında $AB = x-1, AC = x+2$, $BC = x+5$, $\angle A = 90^\circ$ olarsa, x-i tapın.

10. Koordinat başlanğıcı diaqonallarının kəsişmə nöqtəsində olan *ABCD* kvadratı üçün uyğunluğu təyin edin.

1. Absislər oxuna nəzərən simmetrikdir.
2. *y*=-*x* düz xəttinə nəzərən simmetrik.
3. Ordinatlar oxuna nəzərən simmetrikdir.

a. *A* və *C* nöqtələri
b. *A* və *B* nöqtələri
c. *A* və *D* nöqtələri
d. *C* və *D* nöqtələri
e. *B* və *C* nöqtələri

XII FƏSİL

ÜÇBUCAQLARIN HƏLLİ

§ 81. İTİ BUCAĞIN TRİQONOMETRİK FUNKSİYLARI

Tutaq ki, $\angle BAC = \alpha$ hər hansı iti bucaqdır (şəkil 243). AB tərəfi üzərində ixtiyari M nöqtəsi götürüb, bu nöqtədən AC tərəfinə MN perpendikulyarı endirək ($MN \perp AC$). Alınan düzbucaqlı ANM üçbucağında aşağıdakı kimi nisbətlərə baxaq:

$\frac{AN}{AM}$ (α -iti bucağına bitişik katetin hipotenuza nisbəti),

$\frac{MN}{AM}$ (α -iti bucağı qarşısındakı katetin hipotenuza nisbəti),

$\frac{MN}{AN}$ (α -iti bucağı qarşısındakı katetin bitişik katetə nisbəti),

$\frac{AN}{MN}$ (α -iti bucağına bitişik katetin qarşıdakı katetə nisbəti).

Göstərək ki, bu nisbətlər tərəflərin uzunluqlarından asılı olmayıb, yalnız α bucağından asılıdır.

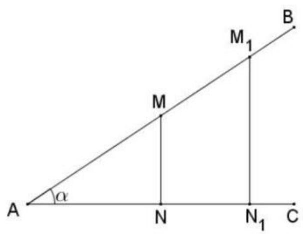
Doğrudan da bucağın AB tərəfi üzərində M nöqtəsi əvəzinə başqa bir M_1 nöqtəsi qeyd edib, həmin nöqtədən $M_1N_1 \perp AC$ çəksək, alınan AN_1M_1 üçbucağı ANM üçbucağına oxşar olar. Buna görə də yuxarıda yazdığımız nisbətlər dəyişməz:

$$\frac{AN}{AM} = \frac{AN_1}{AM_1},\ \frac{MN}{AM} = \frac{M_1N_1}{AM_1},\ \frac{MN}{AN} = \frac{M_1N_1}{AN_1},\ \frac{AN}{MN} = \frac{AN_1}{M_1N_1}.$$

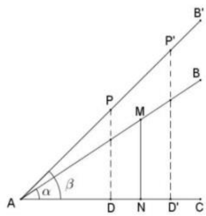
İndi $\angle B'AC = \beta$ ($\beta > \alpha$) kimi bucağa baxaq. AB' tərəfi üzərində *AP*=*AM* şərtini ödəyən *P* nöqtəsini qeyd edib, $PD \perp AC$ çəkək (şəkil 244). Alınan *ADP* düzbucaqlı üçbucağında aşağıdakı nisbətlərə baxaq:

$$\frac{AD}{AP}, \frac{PD}{AP}, \frac{PD}{AD}, \frac{AD}{PD}.$$

Aydındır ki, bu nisbətlər də tərəflərin uzunluqlarından asılı deyil. Lakin α və β iti bucaqlarına uyğun nisbətləri müqayisə etsək, onların müxtəlif olduqlarını görərik. Məsələn, *AP*=*AM*, $PD > MN$ olduğundan $\frac{PD}{AP} > \frac{MN}{AM}$, yəni $\frac{PD}{AP} \neq \frac{MN}{AM}$. Deməli, düzbucaqlı üçbucağın tərəflərinin müəyyən qayda ilə götürülmüş nisbətləri ancaq onun iti bucaqlarından asılıdır, yəni onun funksiyasıdır. Bu nisbətlərə xüsusi ad verilir və *iti bucağın triqonometrik funksiyaları* adlanır.



Şəkil 243



Şəkil 244

Fərz edək ki, *ACB* düzbucaqlı üçbucağı verilmişdir (şəkil 245). Bu üçbucağın *A* iti bucağnın triqonometrik funksiyalarına aşağıdakı kimi tərif vermək olar:

1. İti bucağa bitişik katetin hipotenuza olan nisbətinə həmin bucağın *kosinusu* deyilr və cos A ilə işarə olunur:

$$\cos A = \frac{AC}{AB}.$$

2. İti bucaq qarşısındakı katetin hipotenuza olan nisbətinə həmin bucağın *sinusu* deyilir və sin A ilə işarə olunur:

$$\sin A = \frac{BC}{AB}.$$

3. İti bucaq qarşısındakı katetin bitişik katetə olan nisbətinə həmin bucağın *tangensi* deyilir və tg A ilə işarə olunur:

$$tg\, A = \frac{BC}{AC}.$$

4. İti bucağa bitişik katetin qarşıdakı katetə olan nisbətinə həmin bucağın *kotangensi* deyilir və ct A ilə işarə olunur:

$$ctg\, A = \frac{AC}{BC}.$$

Oxşar qayda ilə B iti bucağının da triqonometrik funksiyalarını yazmaq olar:

$$\cos B = \frac{BC}{AB}, \qquad \sin B = \frac{AC}{AB},$$

$$tg\, B = \frac{AC}{BC}, \qquad ctg\, B = \frac{BC}{AC}.$$

İndi eyni bucağın triqonometrik funksiyaları arasında əlaqəyə baxaq. Əvvəlcə,

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1. \tag{1}$$

$$tg\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}. \qquad (2)$$

$$ctg\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}. \qquad (3)$$

$$1 + tg^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}. \qquad (4) \qquad 1 + ctg^2\alpha = \frac{1}{\sin^2\alpha}. \qquad (5)$$

eyniliklərinin doğruluğunu yoxlayaq.

Bunun üçün *ACB* düzbucaqlı üçbucağından Pifaqor teoreminə əsasən (şəkil 246)

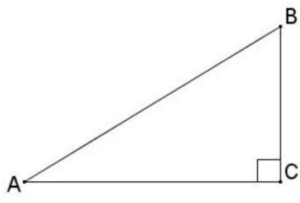
$$a^2 + b^2 = c^2$$

yazıb, onun hər tərəfini c^2-na bölək:

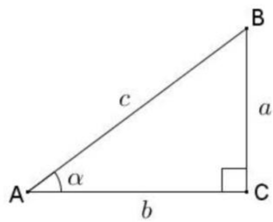
$$\frac{a^2}{c^2} + \frac{b^2}{c^2} = 1.$$

Digər tərəfdən $\frac{a}{c} = \sin\alpha$ və $\frac{b}{c} = \cos\alpha$ olduğunu nəzərə alsaq,

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1.$$



Şəkil 245



Şəkil 246

Tərifə görə $tg\alpha = \frac{a}{b} = \frac{\frac{a}{c}}{\frac{b}{c}} = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ və $ctg\alpha = \frac{b}{a} = \frac{\frac{b}{c}}{\frac{a}{c}} = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$ alarıq.

(1) eyniliyini hər iki tərəfini $\cos^2\alpha$ -ya bölsək, (4) eyniliyini, $\sin^2\alpha$ -ya bölsək, (4) eyniliyini, $\sin^2\alpha$ -ya böldükdə isə (5) eyniliyini alarıq.

Düzbucaqlı üçbucaqda $\angle A + \angle B = 90^\circ$ olduğundan, A və B iti bucaqları bir-birini 90° -yə (düz bucağa) tamamlayan bucaqlar adlanır.

Teorem. *İstənilən* α *bucağı üçün*

$$\cos(90^\circ - \alpha) = \sin\alpha, \quad \sin(90^\circ - \alpha) = \cos\alpha$$

münasibətləri doğrudur.

□ Doğrudan da $\angle A = \alpha$ qəbul etsək, onda $\angle B = 90^\circ - \alpha$ olar. Sinus və kosinus funksiyalarının tərifinə əsasən $\sin\alpha = \frac{BC}{AB}$, $\cos(90^\circ - \alpha) = \frac{BC}{AC}$ və $\cos\alpha = \frac{AC}{AB}$, $\sin(90^\circ - \alpha) = \frac{AC}{AB}$ olur. İlk iki bərabərlikdən $\cos(90^\circ - \alpha) = \sin\alpha$, son iki bərabərlikdən isə $\sin(90^\circ - \alpha) = \cos\alpha$ alınır.
■

Məsələ. $\cos\alpha = \frac{7}{25}$ və α iti bucaq olduqda, $\sin\alpha$ və $tg\alpha$ -nın qiymətini hesablayın.

○ Məlum

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$

eyniliyindən

$$\sin\alpha = \sqrt{1-\cos^2\alpha}$$

alınır. $\cos\alpha = \frac{7}{25}$ olduğunu nəzərə alsaq,

$$\sin\alpha = \sqrt{1-\frac{7^2}{25^2}} = \frac{24}{25} \text{ və } tg\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{24}{25} : \frac{7}{25} = \frac{24}{7}. \text{ ●}$$

§ 82. BƏZİ BUCAQLARIN TRİQONOMETRK FUNKSİYALARININ QİYMƏTLƏRİ

Məsələ həlli zamanı çox istifadə olunduğunu nəzərə alaraq 30^0, 45^0 və 60^0-li bucaqların triqonometrik funksiyalarının qiymətlərini müəyyən edək.

1. Düzbucaqlı *ABC* üçbucağında $\alpha = 30^\circ$ olsun (şəkil 247).

$$\sin 30^\circ = \frac{a}{c} = \frac{\frac{c}{2}}{c} = \frac{1}{2}.$$

$$\cos 30^0 = \sqrt{1-\sin^2 30^\circ} = \sqrt{1-\frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}; \quad \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

$$tg30^0 = \frac{\sin 30^0}{\cos 30^0} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}; \quad tg30^0 = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

$$ctg30^0 = \frac{\cos 30^0}{\sin 30^0} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}; \quad tg30^0 = \sqrt{3}.$$

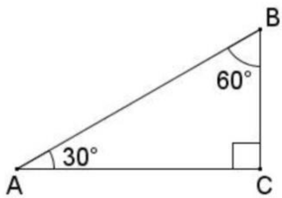
2. Düzbucaqlı üçbucağın bucaqlarından biri 45^0 olsun. Onda o biri iti bucaq da 45^0 olar, yəni bu üçbucaq bərabəryanlıdır (şəkil 248). Pifaqor teoreminə görə $BC^2 + AC^2 = AB^2$ və ya $AB = \sqrt{2}BC$ olur. Nəticədə isə

$$\sin 45^0 = \frac{BC}{AB} = \frac{BC}{\sqrt{2}BC} = \frac{1}{\sqrt{2}}; \quad \sin 45^0 = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

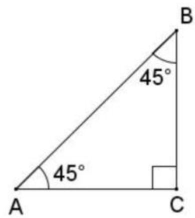
$$\cos 45^0 = \sin 45^0 = \frac{\sqrt{2}}{2}; \ \cos 45^0 = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$tg45^0 = 1; \ \ ctg45^0 = 1$$

alırıq.



Şəkil 247



Şəkil 248

3. Düzbucaqlı ABC üçbucağında $\angle B = 60^0$ olsun (bax: şəkil 247). Bu halda tamamlayıcı bucağın triqonometrik funksiyalarının xassələrinə görə:

$$\sin 60^0 = \cos 30^0 = \frac{\sqrt{3}}{2}; \ \cos 60^0 = \sin 30^0 = \frac{1}{2}.$$

$$tg60^0 = \frac{\sin 60^0}{\cos 60^0} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}, \ tg60^0 = \sqrt{3}.$$

$$ctg60^0 = \frac{\cos 60^0}{\sin 60^0} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3};\ ctg60^0 = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

§ 83. DÜZBUCAQLI ÜBUCAQLARIN HƏLLİ

Üçbucağı həll etmək, onun verilmiş elementlərinə görə qalan elementlərinin tapılması deməkdir. Məlumdur ki, üçbucağın altı əsas elementi vardır (tərəfləri və bucaqları). İxtiyari üçbucağı həll etmək üçün onun üç elementini bilmək lazıdımdır, həm də bu elementlərdən heç olmasa biri xətti element olmalıdır. Düzbucaqlı üçbucaqlarda əsas elementlərdən biri (düz bucaq) məlum olduğundan, onun həlli üçün iki əsas elementin verilməsi kifayətdir.

Düzbucaqlı üçbucaqların həllində dörd əsas məsələyə baxılır. Bunların hər birini ayrılıqda nəzərdən keçirək.

Tutaq ki, baxılan düzbucaqlı üçbucağın katetləri a, b, hipotenuzu c və bu tərəflər qarşısındakı bucaqlar uyğun olaraq *A, B, C*-dir.

Məsələ 1. Verilir *a* və *c*. Axtarılır *A, B* və *b*.

○ $\sin A = \frac{a}{c}$ münasibətindən cədvəlin köməyi ilə *A* bucağı və $B = 90^0 - A$ tapılır. Sonra Pifaqor teoreminə əsasən $b = \sqrt{c^2 - a^2}$ olur. ●

Bu məsələdə *a* əvəzinə b verilərsə, həll yuxarıdakına uyğun olur.

Məsələ 2. Verilir *a* və *b*. Axtarılır *A, B* və *c*.

○ $tgA = \frac{a}{b}$ münasibətindən cədvəlin köməyi ilə A bucağı və $B = 90^0 - A$ tapılır. Sonra Pifaqor teoreminə görə $c = \sqrt{a^2 + b^2}$ olur. ●

Məsələ 3. Verilir *c* və *A*. Axtarılır *a, b* və *B*.

○ $a = c\sin A$ və $b = c\cos A$ münasibətlərindən cədvəlin köməyi ilə a və b katetləri təyin olunur. Sonra isə $B = 90^0 - A$ olmasından B bucağı tapılır. Bu məsələdə A bucağı əvəzinə B bucağı da verilə bilərdi, ●

Məsələ 4. Verilir a və A. Axtarılır b, c və B.

○ $c = \dfrac{a}{\sin A}$ münasibətindən cədvəlin köməyi ilə c hipotenuzu, sonra isə Pifaqor teoreminə əsasən $b = \sqrt{c^2 - a^2}$ tapılır. B bucağı $B = 90^0 - A$ münasibətindən təyin olunur. Bu məqsədlə a və B, b və A, eləcə də b və B-də verilə bilərdi. ●

Ümumiyyətlə, həndəsə məsələlərinin həlli əsasən düzbucaqlı üçbucaqların həllinə gətirilir. Bu zaman yalnız əsas elementlərinə görə deyil, digər elementlərinə görə də düzbucaqlı üçbucaqları həll etmək lazım gəlir. Bu baxımdan aşağıdakı məsələləri nəzərdən keçirək.

Məsələ 5. Verilir A və h_c. axtarılır: B, a, b, c (şəkil 249).

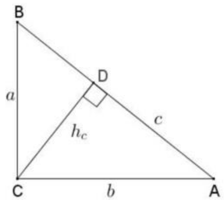
○ $OB = 90^\circ - A$ olduğu aydındır. Düzbucaqlı ADC üçbucağında $b = \dfrac{h_c}{\sin A}$ münasibətindən b-ni və onun vasitəsilə $a = btgA$, $c = \dfrac{b}{\cos A}$ tapılır.
●

Məsələ 6. Verilir A və m_c. Axtarılır: B, a, b, c (şəkil 250).

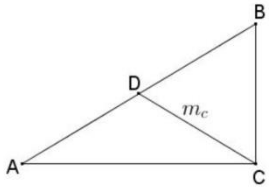
○ $B = 90^0 - A$ olması aydındır. Düzbucaqlı üçbucağın xaricinə çəkilmiş çevrənin mərkəzi, hipotenuzun ortaq nöqtəsi olduğundan, $AD=DB=m_c$ və $c = 2m_c$ alırıq. Sonra isə $a = c\sin A = 2m_c \sin A$ və $b = c\cos A = 2m_c \cos A$. ●

§ 84. SİNUSLAR TEOREMİ

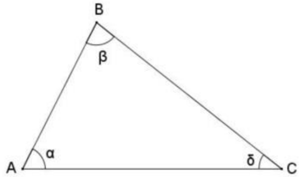
ABC istənilən üçbucaq və $\angle A = \alpha,\ \angle B = \beta,\ \angle C = \gamma$ olsun (şəkil 251).



Şəkil 249



Şəkil 250



Şəkil 251

Teorem. *Üçbucağın hər bir tərəfinin qarşısındakı bucağın sinusuna nisbəti sabit kəmiyyət olub, onun xaricinə çəkilmiş çevrənin diametrinə bərabərdir:*

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2R$$

□ *ABC* üçbucağının xaricinə çevrə çəkək, onun radiusu *R* olsun (şəkil 252, *a*). Bu çevrənin *BD* diametrini çəkib, *D* nöqtəsini üçbucağın *C* təpə nöqtəsi ilə birləşdirək.

DCB bucağı diametrə söykənən bucaq olduğundan *DCb* üçbucağı düzbucaqlıdır. Odur ki,

$$a = 2R\sin\alpha. \qquad (1)$$

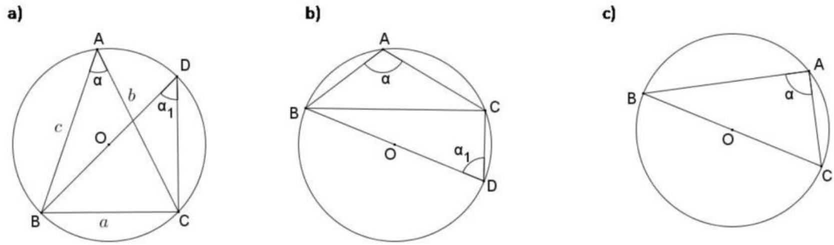
Mümkün olan üç hala baxaq:

1) α -iti bucaqdır. Bu halda *BAC* və *BDC* bucaqları eyni *BC* qövsünə söykəndiyindən bir-birinə bərabərdir, yəni $\alpha = \alpha_1$. Odur ki,, (1) münasibətindən

$$a = 2R\sin\alpha \qquad (2)$$

alınır.

2) α kor bucaqdır (şəkil 252, b). Onda $\alpha + \alpha_1 = 180^\circ$ (daxilə çəkilmiş bucaqlar) və ya $\alpha_1 = 180^\circ - \alpha$ olar. Odur ki, (1) münasibətindən,



Şəkil 252

$$a = 2R\sin(180^\circ - \alpha) = 2R\sin\alpha$$

alınır.

3) α -düz bucaqdır (şəkil 252, c). Bu halda a=2R və $\sin 90^0 = 1$ olmasından $a = 2R\sin\alpha$ alınır.

Oxşar qayda ilə

$b = 2R\sin\beta$, (3)

$c = 2R\sin\gamma$ (4)

alarıq.

(2), (3) və (4) münasibətlərindən

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2R$$

olması alınır. ■

Nəticə. *Üçbucaqda böyük tərəf qarşısında böyük bucaq durur və tərsinə.*

§ 85. KOSİNUSLAR TEOREMİ

Teorem 1 (kosinuslat teoremi). *Üçbucağın bir tərəfinin kvadratı bərabərdir: qalan iki tərəfin kvadratları cəmi, minus bu tərəflərlə, onlar arasındakı bucağın kosinusun hasilinin iki misli:*

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha \qquad (1)$$

□ Mümkün olan üç halı nəzərdən keçirək:

1) $\angle A = \alpha$ iti bucaqdır (şəkil 253, a). $BD \perp AC$ çəkək. *pr* $AB = b_1$ qəbul etsək, $DC = b - b_1$ olar.

Pifaqor teoreminə əsasən *BDC* və *ADB* üçbucaqlarından

$$a^2 = h^2 + (b - b_1)^2, \qquad (2)$$

$$h^2 = c^2 - b_1^2. \qquad (3)$$

(3) bərabərliyini (2)-də nəzərə alaq:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bb_1. \qquad (4)$$

ADB üçbucağında $b_1 = c\cos\alpha$ olmasını (4) bərabərliyində nəzərə alsaq,

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$$

olar.

2) $\angle A = \alpha$ kor bucaqdır (şəkil 253, b). $BD \perp CA$ çəkək və alınmış *BDC* və *ADB* düzbucaqlı üçbucaqlarına Pifaqor teoremini tətbiq edək:

$$a^2 = h^2 + (b + b_1)^2, \qquad (5)$$

$$h^2 = c^2 - b_1^2. \qquad (6)$$

(6) bərabərliyini (5)-də nəzərə alaq:

$$a^2 = b^2 + c^2 + 2bb_1. \qquad (7)$$

ABD üçbucağında $b_1 = c\cos(180^\circ - \alpha) = -c\cos\alpha$ olduğunu (7) bərabərliyində yazsaq,

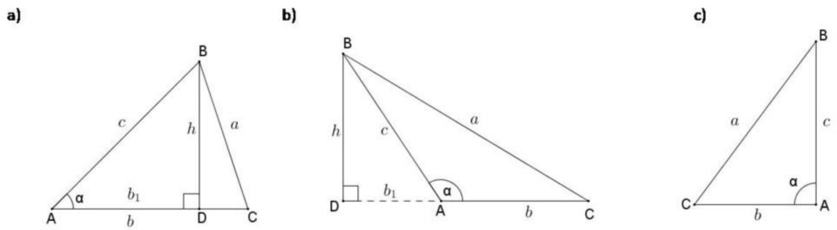
$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$$

olar.

3) $\angle A = \alpha$ düz bucaqdır (şəkil 253, c). Bu halda $\cos\alpha = \cos 90^\circ = 0$ olduğundan, Pifaqor teoremini

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$$

kimi yazmaq olar.



Şəkil 253

Deməli, hər üç halda bir tərəf üçün teorem isbat olundu. Üçbucağın qalan tərəfləri üçün də uyğun olaraq aşağıdakı münasibətləri almaq olar:

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta \quad (\angle B = \beta);$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma \quad (\angle C = \gamma). \blacksquare$$

Bu teoremdən praktikada çox istifadə olunan aşağıdakı nəticələr alınır:

1) $c^2 > a^2 + b^2$ olduqda *C* bucağı kor bucaqdır;

2) $c^2 = a^2 + b^2$ olduqda *C* bucağı düz bucaqdır (Pifaqor teoremi);

3) $c^2 < a^2 + b^2$ olduqda *C* bucağı iti bucaqdır.

Qeyd edək ki, $c\cos A$ ifadəsi c tərəfinin b tərəfi üzərində proyeksiyası olduğundan, (1) düsturunu

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bpr_b c \qquad (1)$$

kimi də yazmaq olar. Eyni ilə də,

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2apr_a c \qquad (2)$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2bpr_b a\,. \qquad (3)$$

Beləliklə, aşağıdakı təklifi alırıq:

Üçbucağın hər hansı tərəfinin kvadratı bərabərdir, qalan iki tərəfin kvadratları cəmi, minus bu tərəflərdən biri ilə digərinin bu tərəf üzərinə proyeksiyası hasilinin iki misli. Bu zaman nəzərə almaq lazımdır ki, bucağın iti, düz və ya kor bucaq olmasından asılı olaraq proyeksiya müsbət, sıfır və ya mənfi olar.

Teorem 2. *Paraleloqramın diaqonallarının kvadratları cəmi, onun tərəflərinin kvadratları cəminə bərabərdir:*

$$AC^2 + BD^2 = 2(AB^2 + BC^2) \qquad (8)$$

□ *ABCD* verilən paraleloqram, *AC* və *BD* onun diaqonalları olsun (şəkil 254).

$\angle DAB = \alpha$ qəbul etsək, $\angle ABC = 180^0 - \alpha$ olar. Onda, kosinuslar teoreminə görə *ABD* və *ABC* üçbucaqlarından

$$BD^2 = AD^2 + AB^2 - 2AB \cdot AD\cos\alpha$$

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB \cdot BC\cos(180^0 - \alpha) = AB^2 + BC^2 + 2AB \cdot BC\cos\alpha$$

yaza bilərik. Bu bərabərlikləri tərəf-tərəfə toplasaq,

$$AC^2 + BD^2 = 2AB^2 + 2BC^2 - 2AB \cdot AD\cos\alpha + 2AB \cdot BC \cdot \cos\alpha$$

alarıq. Buradan $AD=BC$ olmasını nəzərə alsaq,

$$AC^2 + BD^2 = 2(AB^2 + BC^2). \blacksquare$$

Məsələ 1. Tərəfləri *a, b* və *c* olan üçbucağın medianlarını tapın.

○ ABC üçbucağında m_c medianını çəkək (şəkil 255). $\angle CMA = \alpha$ işarə etsək, $\angle CMD = 180^0 - \alpha$ olar. ACM və CMB üçbucaqlarına kosinuslar teoremini tətbiq edək:

$$b^2 = m_c^2 + \frac{1}{4}c^2 - 2m_c \cdot \frac{1}{2}c\cos\alpha,$$

$$a^2 = m_c^2 + \frac{1}{4}c^2 - 2m_c \cdot \frac{1}{2}c \cdot \cos(180^\circ - \alpha).$$

Bu bərabərlikləri tərəf-tərəfə toplasaq və $\cos(180^\circ - \alpha) = -\cos\alpha$ olduğunu nəzərə alsaq,

$$a^2 + b_c^2 = 2m^2{}_c + \frac{1}{2}c^2,$$

Buradan da,

$$m_c = \frac{1}{2}\sqrt{2(a^2 + b^2) - c^2}\ .$$

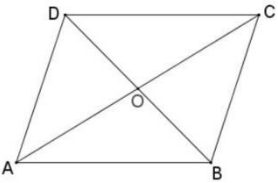
Oxşar qayda ilə m_a və m_b medianları üçün

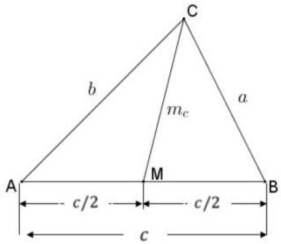
$$m_a = \frac{1}{2}\sqrt{2(b^2 + c^2) - a^2}\ ;\ m_b = \frac{1}{2}\sqrt{2(a^2 + c^2) - b^2}$$

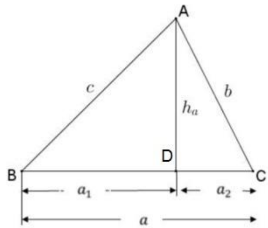
ifadələrini alarıq. ●

Məsələ 2. Tərəfləri a, b və c olan üçbucağın hündürlüklərini tapın.

○ ABC üçbucağında h_a hündürlüyünü çəkək (şəkil 256). $BD = a_1$ və $DC = a_2$ olsun. C tərəfinin a tərəfi üzərinə proyeksiyası a_1 olduğundan, kosinuslar teoreminə görə,







Şəkil 254 Şəkil 255 Şəkil 256

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2aa_1$$

olar. Buradan,

$$a_1 = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2a}$$

olur. *ADB* düzbucaqlı üçbucağından Pifaqor teoreminə görə

$$h_a = \sqrt{c^2 - a_1^{\ 2}}$$

olur. Burada a_1-in ifadəsini nəzərə alsaq,

$$h_a = \sqrt{c^2 - \left(\frac{a^2 + c^2 - b^2}{2a}\right)^2}.$$

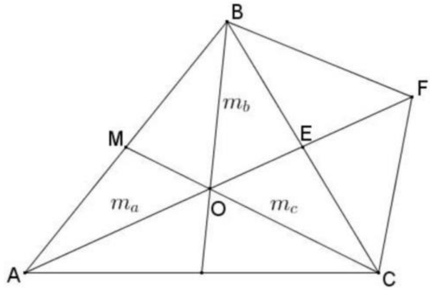
Oxşar qayda ilə digər hündürlüklər üçün

$$h_b = \sqrt{a^2 - \left(\frac{b^2 + a^2 - c^2}{2b}\right)^2}; \quad h_c = \sqrt{b^2 - \left(\frac{c^2 + b^2 - a^2}{2c}\right)^2}$$

tapılır. ●

Məsələ 3. Üçbucağın m_a, m_b və m_c medianları məlum olduqda onun tərəflərini tapın.

○ Tutaq ki, ABC verilmiş üçbucaq, m_a, m_b və m_c isə onun məlum medianlarıdır (şəkil 257).



Şəkil 257

Əvvəlcə a tərəfinin uzunluğunu tapaq. Bu məqsədlə AE medianın uzantısı üzərində $EF=OE$ parçası ayırıb F nöqtəsini B və C nöqtələri ilə birləşdirək. $BE=EC$ və $OE=EF$ olduğundan $OBFC$ dördbucaqlısı paraleloqramdır. Bu paraleloqramın tərəfləri və OF diaqonalı məlumdur:

$$FC = OB = \frac{2}{3}BD = \frac{2}{3}m_b;\ \ BF = OC = \frac{2}{3}CM = \frac{2}{3}m_c;$$

$$OF = 2\cdot OE = \frac{2}{3}m_a.$$

Odur ki, 2-ci teoremə görə

$$BC^2 + OF^2 = 2(OB^2 + OC^2);\ a^2 + \frac{4}{9}m_a^{\ 2} = 2\left(\frac{4}{9}m_b^{\ 2} + \frac{4}{9}m_c^{\ 2}\right),$$

buradan isə

$$a = \frac{2}{3}\sqrt{2(m_b^{\ 2} + m_c^{\ 2}) - m_a^{\ 2}}$$

olur. Oxşar qayda ilə o biri iki tərəf üçün

$$b = \frac{2}{3}\sqrt{2(m_a^{\ 2} + m_c^{\ 2}) - m_b^{\ 2}}\ ;\ \ c = \frac{2}{3}\sqrt{2(m_a^{\ 2} + m_b^{\ 2}) - m_c^{\ 2}}$$

tapılır. ●

§ 86. ÜÇBUCAQLARIN HƏLLİ

Düzbucaqlı üçbucaqların həllində olduğu kimi ixtiyari üçbucaqlıların həllində də, əsasən, dörd hala baxılır. Bunların hər birini ayrılıqda nəzərdən keçirək. Baxılan üçbucağın tərəflərini *a, b, c,* bucaqlarını isə *A, B, C* ilə işarə edək.

Məsələ 1. Verilir: *a, b* və *c*. Axtarılır: *A, B* və *C*.

○ Kosinuslar teoreminə əsasən

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos A,$$

nəticədə isə

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

olur. Eyni qayda ilə

$$\cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}, \ \cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$

tapılır. ●

Məsələ 2. Verilir: *a, b* və *C* ($a > b$). Axtarılır: *c, A* və *B*.

○ Kosinuslar teoreminə əsasən

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$$

münasibətindən

$$c = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos C}$$

tapılır. Üçbucağın *A* və *B* bucağını tapmaq üçün sinuslar teoremindən istifadə edək. $a > b$ şərtindən çıxır ki, *B* iti bucaqdır. Odur ki, $\dfrac{b}{\sin B} = \dfrac{c}{\sin c}$

münasibətindən $\sin B = \dfrac{b \sin C}{c}$ tapıb, B bucağını təyin edirik. A bucağı isə $A = 180^0 - (B + C)$ münasibətindən tapılır. Nəticənin doğruluğu

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}$$

münasibəti ilə yoxlanılır. ●

Məsələ 3. Verilir: *a, B* və *C*. Axtarılır: *b, c* və *A*.

○ B və C bucaqları məlum olduğundan A bucağı $A = 180^0 - (B + C)$ münasibətindən tapılır. Sinuslar teoreminə əsasən

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

yazıb, buradan

$$b = \frac{a \sin B}{\sin A}; \;\; c = \frac{a \sin C}{\sin A}$$

tapırıq. Nəticənin doğruluğu

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$

düsturu ilə yoxlanır. ●

Məsələ 4. Verilir: *a, b* və *A*. Axtarılır: *c, B* və *C*.

○ Sinuslar teoreminə əsasən

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}; \qquad \sin B = \frac{b}{a} \sin A$$

münasibətindən B bucağını, sonra isə $C = 180^0 - (A + B)$ tapırıq. Yenidən sinuslar teoremindən istifadə edərək,

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{c}{\sin C}, \quad c = \frac{a \sin C}{\sin A},$$

yəni c tərəfini tapırıq. Nəticənin doğruluğu

$$a = \sqrt{b^2 + c^2 - 2bc \cos A}$$

düsturu ilə yoxlanılır. ●

Üçbucaqların həllində bəzən onun əsas elementləri deyil, bu əsas elementlər ilə bağlı olan başqa elementlər verilir. Belə hallara aid olan aşağıdakı məsələləri də həll edək.

Məsələ 5. Üçbucaqda A, B və $\frac{p}{2}$ verilir. Axtarılır a, b, c və C.

○ A və B bucağı məlum olduğundan, $C = 180^0 - (A + B)$ tapılır. Sinuslar teoreminə görə

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$$

yazıb, bərabər nəticələrin xassəsini tətbiq etsək:

$$2R = \frac{a + b + c}{\sin A + \sin B + \sin C}$$

alarıq. Burada $a + b + c = 2p$ olduğunu nəzər alsaq,

$$R = \frac{p}{\sin A + \sin B + \sin C}$$

olar. Məlum

$$a = 2R \sin A; \;\; b = 2R \sin B; \;\; c = 2R \sin C$$

münasibətlərindən

$$a=\frac{2p\sin A}{\sin A+\sin B+\sin C},\qquad b=\frac{2p\sin B}{\sin A+\sin B+\sin C},$$

$$c=\frac{2p\sin C}{\sin A+\sin B+\sin C}$$

tapılır. ●

Məsələ 6. Üçbucaqda *A, B* və $a\cdot b$ hasili verilir. Axtarılır: *a, b, c* və *C.*

○ *A* və *B* bucaqları məlum olduğundan, $C=180^0-(A+B)$ olur. Sinuslar teoreminə görə

$$\frac{a}{b}=\frac{\sin A}{\sin B}$$

yazıb,

$$a^2=ab\cdot\frac{\sin A}{\sin B},$$

buradan da $a=\sqrt{ab\cdot\frac{\sin A}{\sin B}}$

tapılır. Eyni qayda ilə

$$b=\sqrt{ab\cdot\frac{\sin B}{\sin A}}$$

tapırıq. Nəhayət,

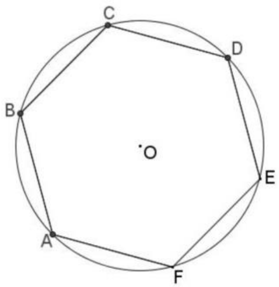
$$c=\sqrt{\frac{ab}{\sin A\cdot\sin B}}\cdot\sin C$$

olur. ●

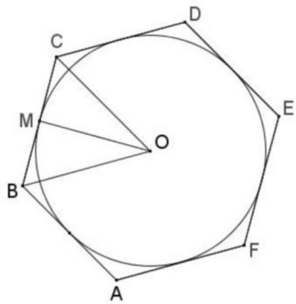
§ 87. DÜZGÜN ÇOXBUCAQLILAR

Çevrəni bərabər hissələrə bölüb, bölgü nöqtələrini ardıcıl olaraq vətərlərlə birləşdirsək, bu zaman düzgün çoxbucaqlı alarıq (niyə?). Belə çoxbucaqlıya *daxilə çəkilmiş düzgün çoxbucaqlı*, çevrəyə isə *düzgün çoxbucaqlı xaricinə çəkilmiş çevrə* deyilir (şəkil 258).

Çevrəni bərabər hissələrə bölüb, bölgü nöqtələrindən ardıcıl olaraq bu çevrəyə toxunanlar çəkək. Bu zaman, təpə nöqtələri qonşu toxunma nöqtələrindən çəkilmiş toxunanların kəsişmə nöqtələri olan düzgün çoxbucaqlı alınır (niyə?). Belə çoxbucaqlıya *xaricə çəkilmiş düzgün çoxbucaqlı*, çevrəyə isə *düzgün çoxbucaqlı daxilinə çəkilmiş çevrə* deyilir (şəkil 259).



Şəkil 258

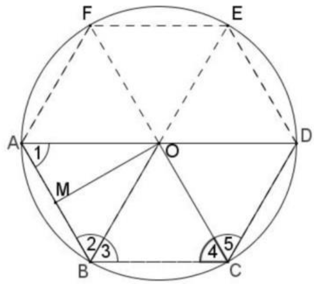


Şəkil 259

Teorem 1. *İstənilən düzgün çoxbucaqlının xaricinə çevrə çəkmək olar.*

□ *ABCDEF* hər hansı düzgün çoxbucaqlı olsun (şəkil 260). İsbat edək ki,onun xaricinə çevrə çəkmək olar.

Məlumdur ki, bir düz xətt üzərində olmayan üç nöqtədən çevrə çəkmək olar. Deməli, düzgün çoxbucaqlının üç təpə nöqtəsindən, məsələn, *A, B* və *C* təpə nöqtələrindən çevrə keçirmək olar. Tutaq ki, *O* nöqtəsi bu üç nöqtədən keçən çevrənin mərkəzidir. Göstərək ki, həmin çevrə çoxbucaqlının dördüncü *D* təpə nöqtəsindən də keçir.



Şəkil 260

Düzgün çoxbucaqlının daxili bucağını α ilə işarə edək. Aydındır ki, *OA*=*OB*=*OC*=*R*. Çevrənin mərkəzini *D* nöqtəsi ilə birləşdirək. *OAB* və *OBC* üçbucaqları bərabəryanlı üçbucaq olduğu üçün $\angle 1 = \angle 2 = \angle 3 = \angle 4 = \frac{\alpha}{2}$ olar. $\angle 4 = \frac{\alpha}{2}$ olmasından çıxır ki, $\angle 5 = \frac{\alpha}{2}$ (çünki $\angle 4 + \angle 5 = \alpha$ -dır), yəni $\angle 4 = \angle 5$. Deməli, $\Delta OBC = \Delta OCD$ (iki tərəf və bunlar arasındakı bucağa görə). Buradan *OC*=*OD*=*R* olur. Bu o deməkdir ki, çevrə çoxbucaqlının *D* təpə nöqtəsindən keçir. Bu qayda ilə göstərmək olar ki, çevrə düzgün çoxbucaqlının qalan bütün nöqtələrindən də keçir. ■

Teorem 2. *İstənilən düzgün çoxbucaqlının daxilinə çevrə çəkmək olar.*

Bu teoremin isbatını oxuculara həvalə edirik.

Nəticə. *Düzgün çoxbucaqlının xaricinə və daxilinə çəkilmiş çevrənin mərkəzləri eyni bir nöqtədir. Bu nöqtə düzgün çoxbucaqlının mərkəzi adlanır. Düzgün çoxbucaqlının daxilinə çəkilmiş çevrənin radiusuna onun anofemi deyilir*.

Aydındır ki, düzgün çoxbucaqlının mərkəzindən onun tərəfinə çəkilmiş perpendikulyar *apofem*dir (bax: şəkil 259).

§ 88. DÜZGÜN ÇOXBUCAQLININ TƏRƏFİNİN ONUN XARİCİNƏ və DAXİLİNƏ ÇtKİLMİŞ ÇEVRƏLƏRİN RADİUSLARI VASİTƏSİLƏ İFADƏSİ

Tərəfləri a_n olan düzgün n-bucaqlı xaricinə çəkilmiş çevrənin radiusu R olsun. Sadəlik üçün n-bucaqlının ancaq AB tərəfini və ona çəkilmiş OM apofemini çəkək (şəkil 261). Düzbucaqlı AMO üçbucağında

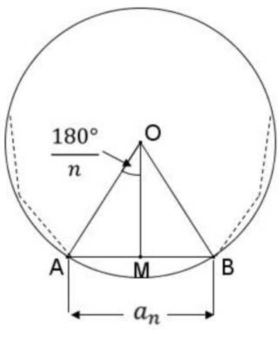
$$\angle AOM = \frac{1}{2}\angle AOB = \frac{1}{2}\cdot\frac{360^0}{n} = \frac{180^0}{n},$$

$$AM = OA\sin\angle AOM = R\sin\frac{180^0}{n};\quad a_n = AB = 2AM$$

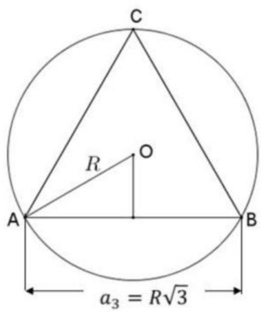
olduğundan,

$$a_n = 2R\sin\frac{180^0}{n} \qquad (1)$$

olar. Beləliklə, n-bucaqlının tərəfi ilə xaricinə çəkilmiş çevrənin radiusu arasında münasibət almış oluruq.



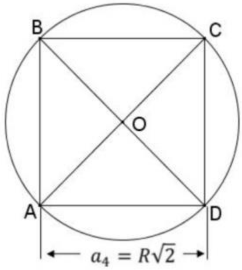
Şəkil 261



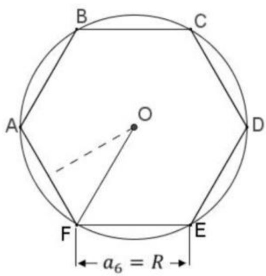
Şəkil 262

Nəticə 1. *Daxilə çəkilmiş düzgün üçbucağın tərəfi* $a_3 = R\sqrt{3}$*-dür* (şəkil 262).

Nəticə 2. *Daxilə çəkilmiş düzgün dördbucaqlının (kvadratın) tərəfi*



Şəkil 263



Şəkil 264

$a_4 = R\sqrt{2}$ *-dir* (şəkil 263).

Nəticə 3. *Daxilə çəkilmiş düzgün altıbucaqlının tərəfi* $a_6 = R$*-dir* (şəkil 264).

(1) düsturunda ardıcıl olaraq *n*=3, 4, 6 yazmaqla nəticələrin doğruluğunu alarıq.

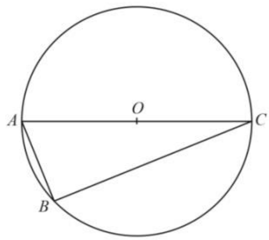
Məsələ 1. Radiusu *R* olan çevrə 1:2:3 nisbətində bölünmüş və bölgü nöqtələri vətərlərlə birləşdirilmişdir. Alınmış üçbucağın perimetrlərini tapın.

○ Tutaq ki, çevrə $\cup AB : \cup BC : \cup CA = 1:2:3$ nisbətində bölünmüşdür (şəkil 265). *AB* qövsü çevrənin $\frac{1}{6}$, *BC* qövsü $\frac{1}{3}$, *CA* qövsü isə

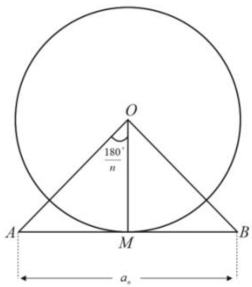
$\frac{1}{2}$ hissəsini təşkil edir. Ona görə də $AB = a_6 = R$, $BC = a_3 = R\sqrt{3}$, $CA = 2R$ olur.

Onda $P = AB + BC + CA = R + R\sqrt{3} + 2R$, yəni $P = (3 + \sqrt{3})R$ olur. ●

İndi düzgün *n*-bucaqlının tərəfini onun daxilinə çəkilmiş çevrənin radiusu ilə ifadə edək. Tərəfi a_n olan düzgün *n*-bucaqlının daxilinə çəkilmiş çevrənin radiusu *r* olsun (şəkil 266).



Şəkil 265



Şəkil 266

$AM = \frac{1}{2}a_n$ olduğundan AMO düzbucaqlı üçbucağından

$AM : OM = tg\angle AOM$, buradan $\frac{1}{2}a_n : r = tg\frac{180^0}{n}$, nəticədə isə

$$a_n = 2rtg\frac{180^0}{n} \qquad (2)$$

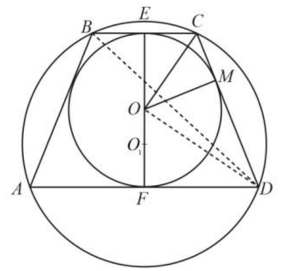
alınır. Burada *n*=3, 4, 6 götürməklə

$$a_3 = 2r\sqrt{3},\ \ a_4 = 2r,\ \ a_6 = \frac{2r\sqrt{3}}{3}$$

tapırıq.

Məsələ 2. Bərabəryanlı trapesiyanın daxilinə və xaricinə çevrə çəkilmişdir. Trapesiyanın hündürlüyünün onun xaricinə çəkilmiş çevrənin radiusuna nisbəti $\sqrt{\dfrac{2}{3}}$ -ə bərabərdir. Trapesiyanın bucaqlarını tapın.

○ Tutaq ki, *ABCD* verilmiş bərabəryanlı trapesiya, *R* xaricə, *r* isə daxilə çəkilmiş çevrənin radiusudur (şəkil 267).



Şəkil 267

$\angle BAD = \angle CDA = \alpha$ işarə edək. Onda $\angle ABC = \angle BCD = \pi - \alpha$ olar. *BAD* bucağı böyük çevrə daxilinə çəkildiyi və *BD* qövsünə söykəndiyi üçün sinuslar teoreminə görə

$$BD = 2R\sin\alpha .$$

Trapesiya daxilinə çəkilmiş çevrənin mərkəzini (yəni *O* nöqtəsini) toxunma nöqtələri ilə birləşdirək. $OE \perp BC$, $OF \perp AD$ və *BC//AD* olduğundan çıxır ki, *E, O* və *F* nöqtələri bir düz xətt üzərində yerləşir, həm də *EF=2r*-dir. Məsələnin şərtinə görə $2r : R = \sqrt{\dfrac{2}{3}}$, yəni $R = r\sqrt{6}$. Bunu *BD*-nin ifadəsində nəzərə alsaq, $BD = 2r\sqrt{6}\sin\alpha$ olar. Daxilə çəkilmiş çevrənin mərkəzini *C* və *D* təpələri ilə birləşdirək.

Aydındır ki, *OC* trapesiyanın *BCD* bucağının tənbğlənidir. Onda, ΔOEC -dən $EC = OEctg\angle ECO = rctg\left(\dfrac{\pi}{2} - \dfrac{\alpha}{2}\right) = rtg\dfrac{\alpha}{2}$ olur. Odur ki,

$BC = 2rtg\dfrac{\alpha}{2}$ alırıq. Eyni qayda ilə *ODM* düzbucaqlı üçbucağından $MD = rctg\dfrac{\alpha}{2}$ alınır. Odur ki, $CD = CM + MD = rtg\dfrac{\alpha}{2} + rctg\dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{2r}{\sin\alpha}$.

BCD üçbucağından kosinuslar teoreminə əsasən

$$BD^2 = BC^2 + CD^2 - 2BC \cdot CD\cos(\pi - \alpha)$$

olur. Burada *BC* və *CD*-nin qiymətlərini nəzərə alsaq,

$$BD^2 = 4r^2tg^2\frac{\alpha}{2} + \frac{4r^2}{\sin^2\alpha} + 8r^2 \cdot \frac{tg\frac{\alpha}{2}}{\sin\alpha} \cdot \cos\alpha = 4r^2\left(1 + \frac{1}{\sin^2\alpha}\right)$$

olar. *BD*-nin bu qiymətini yuxarıda tapdığımız $BD = 2r\sqrt{6}\sin\alpha$ qiymətinə bərabərləşdirsək,

$$1 + \frac{1}{\sin^2\alpha} = 6\sin^2\alpha, \text{ yəni } 6\sin^4\alpha - \sin^2\alpha - 1 = 0$$

tənliyini alarıq. Buradan $\sin^2\alpha = \dfrac{1}{2}$, nəticədə isə $\alpha = 45^\circ$ alarıq. O biri bucaq 135° olur. ●

§ 89. ÜÇBUCAQLARIN HƏLLİNƏ AİD BƏZİ MƏSƏLƏLƏR

Planimetriyanın, fizikanın və mexanikanın bir sıra məsələlərini həll edərkən triqonometrik funksiyalardan istifadə etmək lazım gəlir. Bir neçə məsələyə baxaq.

Məsələ 1. Bərabəryanlı üçbucağın təpə bucağı α, bərabər olmayan hündürlüklərinin cəmi isə l-dir. Bu üçbucağın yan tərəfini tapın.

○ ABC (AB=BC) verilmiş bərabəryanlı üçbucaq, $BD = h_b$ və $AM = h_a$ onun bərabər olmayan hündürlükləri olsun. (şəkil 268). Şərtə görə $h_a + h_b = l$, $\angle ABC = \alpha$. Yan tərəfi tapaq (AB=?):

$\angle ABD = \angle DBC = \dfrac{\alpha}{2}$ olduğundan, ΔABD-dən $h_b = AB\cos\dfrac{\alpha}{2}$ və ΔABM -dən $h_a = AB\sin\alpha$ alarıq. Bunları $h_a + h_b = l$ münasibətində nəzərə alsaq,

$$AB\sin\alpha + AB\cos\frac{\alpha}{2} = l \Rightarrow AB = \frac{l}{\sin\alpha + \cos\dfrac{\alpha}{2}}$$

alınır. Nəticəni

$$AB = BC = \frac{l}{2\sin\dfrac{\pi+\alpha}{4}\cos\dfrac{\pi-3\alpha}{4}}$$

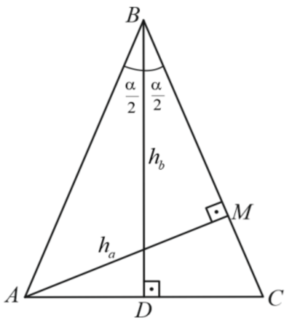
kimi də yazmaq olar. ●

Məsələ 2. Oturacağındakı iti bucağı α olan bərabəryanlı trapesiyanın daxilinə r-radiuslu çevrə çəkilmişdir. Trapesiyanın perimetrini tapın.

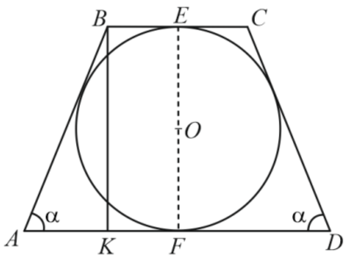
○ $ABCD$ verilmiş trapesiya, EF=2r, $\angle BAD = \angle CDA = \alpha$ olsun (şəkil 269). Trapesiyanın p perimetrini tapaq.

$BK \perp AD$ çəkək. Onda BK=EF=2r olar.

$$\Delta AKB\text{-dən } AB = \frac{2r}{\sin\alpha}.$$



Şəkil 268



Şəkil 269

Xaricə çəkilmiş dördbucaqlının qarşı tərəflərinin cəmi bərabər olduğundan $(AB + CD = CD + AD)$,

$$AB+CD+AD+BC=2(AB+CD)=4AB$$

olur. Nəticədə $p = \dfrac{8r}{\sin\alpha}$ alınır. ●

Məsələ 3. Düzbucaqlının diaqonalı *d* olub, onun bucağını *m:n* nisbətində bölür. Düzbucaqlının perimetrini tapın.

○ *ABCD* verilmiş düzbucaqlı, *AC* isə onun diaqonalı olsun (şəkil 270). Şərtə görə

$$AC = d, \quad \angle BAC : \angle CAD = m : n\,.$$

Düzbucaqlının *p*-perimetrini tapaq..

Tənasübün xassəsinə görə $\angle BAC : \angle CAD = m : n$ münasibətindən

$\angle BAC = \dfrac{90^0}{m+n} \cdot m$ tapıb,

$$\Delta ABC\text{-dən } AB = d\cos\angle BAC = d\cos\frac{90^0 m}{m+n}\,.$$

$$BC = d\sin\angle BAC = d\sin\frac{90^0 \cdot m}{m+n}$$

alırıq.

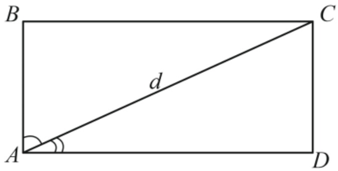
$$p = 2AB + 2BC = 2\left(d\cos\frac{90^0 \cdot m}{m+n} + d\sin\frac{90^0 \cdot m}{m+n}\right) =$$

$$2d\left(\cos\frac{90^0 \cdot m}{m+n} + \sin\frac{90^0 \cdot m}{m+n}\right) = 2\sqrt{2}\sin\frac{\pi(3m+n)}{4(m+n)}\,.$$

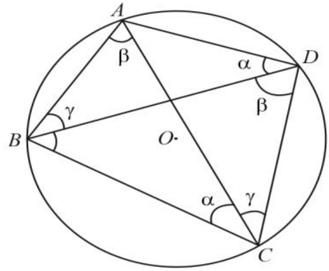
Beləliklə,

$$p = 2\sqrt{2}d\sin\frac{\pi(3m+n)}{4(m+n)}$$

olur. ●



Şəkil 270



Şəkil 271

Məsələ 4. Daxilə çəkilmiş dördbucaqlının diaqonalları hasili, qarşı tərəflərin cüt-cüt hasilləri cəminə bərabər olduğunu isbat edin.

○ Verilən çevrənin radiusu R olsun (şəkil 271). İsbat edək ki,

$$AC \cdot BD = AB \cdot DC + AD \cdot BC .$$

Bu məqsədlə

$\angle ADB = \angle ACB = \alpha$; $\angle BDC = \angle BAC = \beta$; $\angle ABD = \angle ACD = \gamma$ işarə edək. Sinuslar teoreminə görə $AB = 2R\sin\alpha$, $BC = 2R\sin\beta$, $AD = 2R\sin\gamma$ və eləcə də $\angle DBC = \pi - (\alpha + \beta + \gamma)$ və $DC = 2R\sin(\alpha + \beta + \gamma)$ alınır. Bunları nəzərə alsaq,

$$AB \cdot DC + AD \cdot BC = 2R\sin\alpha \cdot 2R\sin(\alpha + \beta + \gamma) + 2R\sin\gamma \cdot 2R\sin\beta =$$

$$4R^2\left(\sin\alpha \cdot \sin(\alpha + \beta + \gamma) + \sin\beta \cdot \sin\gamma\right) =$$

$$2R^2\left(\cos(\beta + \gamma) - \cos(2\alpha + \beta + \gamma) + \cos(\beta - \gamma) - \cos(\beta + \gamma)\right) = 2R^2\left(\cos(\beta - \gamma) - \cos(2\alpha + \beta + \gamma)\right)$$

olur. Digər tərəfdən

$$AC = 2R\sin(\alpha + \beta), \ BD = 2R\sin(\alpha + \gamma)$$

olduğuna görə

$$AB\cdot BD=4R^2\sin(\alpha+\beta)\cdot\sin(\alpha+\gamma)=2R^2\left[\cos(\beta-\gamma)-\cos(2\alpha+\beta+\gamma)\right]$$

alırıq. Deməli,

$$AC\cdot BD=AB\cdot DC+AD\cdot BC$$

olur. ●

Məsələ 5. Yanına getmək mümkün olmayan məntəqəyə qədər məsafəni təyin edin.

○ Tutaq ki, yanına getmək mümkün olmayan *B* məntəqəsi dayandığımız *A* məntəqəsdindən çay ilə ayrılmışdır (şəkil 272).

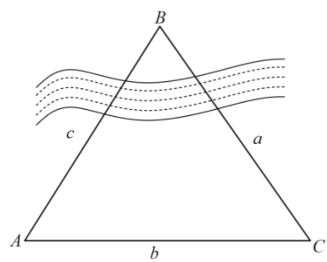
Dayandığımız tərəfdə üçüncü *C* məntəqəsi seçib, onun *A* məntəqəsindən olan məsafəsini ölçək.: *AC*=*b* olsun. Bucaq ölçən (astrolyabiya və ekker) cihazla *A* və *C* bucaqlarını ölçək. Axtarılan *AB*-ni sinuslar teoreminə əsasən

$$\frac{c}{\sin C}=\frac{b}{\sin B} \text{ və ya } \frac{c}{\sin C}=\frac{b}{\sin\left[180^0-(A+C)\right]}$$

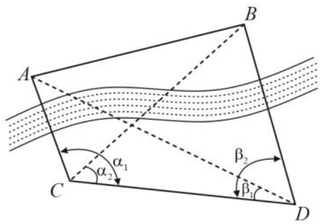
yazıb, buradan

$$AB=c=\frac{b\sin C}{\sin A+C)}$$

alırıq. ●



Şəkil 272



Şəkil 273

Məsələ 6. Yanına getmək mümkün olmayan iki məntəqə arasındakı məsafəni tapın.

○ Tutaq ki, yanına getmək mümkün olmayan *A* və *B* məntəqələri çayın o biri sahilində yerləşir (şəkil 273). Dayandığımız sahildə arasındakı məsafə *a* olan *C* və *D* məntəqələrini seçək. Bucaq ölçən cihaz vasitəsilə $\angle ACD = \alpha_1$, $\angle ADC = \beta_1$, $\angle BCD = \alpha_2$, $\angle CDB = \beta_2$ bucaqlarını ölçək. Sinuslar teoreminə əsasən *ACD* və *BCD* üçbucaqlarından uyğun olaraq *AC* və *BC* məsafəsini təyin edək:

$$AC = \frac{a \sin \beta_1}{\sin(\alpha_1 + \beta_1)}, \quad BC = \frac{a \sin \beta_2}{\sin(\alpha_2 + \beta_2)}.$$

ABC üçbucağında $\angle ACB = \alpha_1 - \alpha_2$ olduğundan, kosinuslar teoreminə görə

$$AB^2 = AC^2 + CB^2 - 2CB \cdot AC \cos(\alpha_1 - \alpha_2).$$

Burada *AC* və *BC*-nin qiymətlərini nəzərə alsaq,

$$AB = a\sqrt{\frac{\sin^2 \beta_1}{\sin^2(\alpha_1 + \beta_1)} + \frac{\sin^2 \beta_2}{\sin^2(\alpha_2 + \beta_2)} - 2\frac{\sin \beta_1 \sin \beta_2 \cos(\alpha_1 - \alpha_2)}{\sin(\alpha_1 + \beta_1) \cdot \sin(\alpha_2 + \beta_2)}}$$

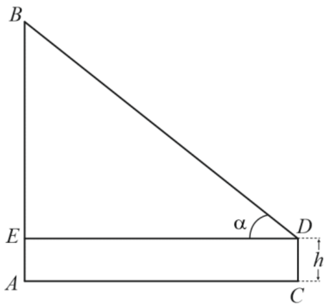
olar. ●

Məsələ 7. Oturacağına yaxınlaşmaq mümkün olan obyektin (məsələn, ağacın, binanın və s.) hündürlüyünü tapın.

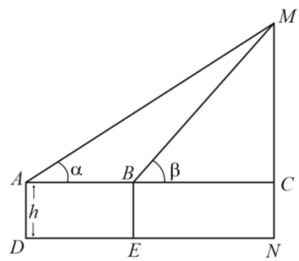
○ Tutaq ki, *AB* hündürlüyünü bilavasitə ölçmək mümkün deyil (şəkil 274). Bu hündürlüyü təyin etmək üçün üfiqi *AC* düz xətt parçasını çəkib, onun uzunluğunu ölçək: *AC=b*. Hündürlüyü *h* olan bucaq ölçən cihazı *C* nöqtəsinə qoyub *BDE* bucağını ölçək: $\angle BDE = \alpha$. Onda *DEB* düzbucaqlı üçbucağında, *ED=b*, $\angle BDE = \alpha$ məlum olduğundan $BE = btg\alpha$, $AB = btg\alpha + h$ olar. ●

Məsələ 8. Oturacağına yaxınlaşmaq mümkün olmayan obyektin hündürlüyünü təyin edin.

○ Tutaq ki, yanına getmək mümkün olmayan *MN* hündürlüyünü tapmaq lazımdır (şəkil 275). Bunun üçün hündürlüyü *h* olan bucaq ölçən cihazı *D*



Şəkil 274



Şəkil 275

nöqtəsinə qoyub, $\angle MAC = \alpha$ bucağını, sonra isə *E* nöqtəsinə qoyub $\angle MBC = \beta$ bucağını ölçək. *DE=AB=a* olsun. *ACM* və *BCM* düzbucalı üçbucaqlarından $AC = \dfrac{CM}{tg\alpha}$, $BC = \dfrac{CM}{tg\beta}$ tapıb, onları *AB*=*AC*-*BC* münasibətində nəzərə alaq:

$$AB = AC - BC = \frac{CM}{tg\alpha} - \frac{CM}{tg\beta}.$$

Buradan $CM = \dfrac{a}{ctg\alpha - ctg\beta}$ alarıq.

$MN = h + CM$ olduğundan,

$$MN = h + \frac{a}{ctg\alpha - ctg\beta}$$

olur. ●

ÇALIŞMALAR

Verilən əsas elementlərinə görə düzbucaqlı üçbucaqları həll edin.

1. Hipotenuz və iti bucaq verilmişdir:

a) *c*=9,35; $A = 65^\circ 10'$.

b) *c*=0,7979; $A = 66^\circ 35'$

v) *c*=3,643; $A = 50^\circ 10'$.

2. Katet və iti bucaq verilmişdir:

a) *a*=4,32; $B = 58^\circ 30'$.

b) *b*=0,27; $B = 63^\circ 19'$.

v) *b*=0,48; $A = 48^\circ$.

3. Hipotenuz və katet verilmişdir:

a) c=697; $a = 528$.

b) a=3,8; $c = 4,8$.

v) c=1710; $b = 828$.

4. Katetlər verilmişdir:

a) a=59,68; b=27,93,

b) a=261; b=380,

v) a=12,01; b=6,92.

5. $B = 55^\circ 42'$; b-a=12 olduqda düzbucaqlı üçbucağı həll edin.

6. $A - B = 12^0$; $a+b$=23 olduqda düzbucaqlı üçbucağı həll edin.

7. a=c-yan tərəflər, b-oturacaq, A=C oturacağa bitişik bucaqlar, B-təpə bucaq və h_a isə a tərəfinə endirilən hündürlük olduqda üçbucağı həll edin:

a) a=797,9; $A = 66^\circ 35'$,

b) $A = 65^\circ$ h_a=20,

v) a=8,76 b=13,96,

q) b=925,2; h_a=721,4.

8. Verilən əsas elementlərinə görə üçbucaqları həll edin.

a) a=13; b=18; c=15,

b) a=19; b=34; c=49,

v) a=45,5;b=65; c=12,

q) a=20; b=35; c=50.

9. Bir tərəf və iki bucaq verilmişdir.

a) a=23,4; $A = 70^\circ 36'$; $B = 104^\circ 12'$.

b) a=370; $B = 86^\circ 30'$; $C = 50^\circ 50'$,

v) a=450; $A = 87^\circ 50'$; $B = 10^\circ 50'$,

q) b=951; $B=126^\circ 40$; $C=13^\circ 20'$.

10. İki tərəf və bunların arsındakı bucaq verilmişdir.

a) a=51,3; b=21,2; $C=13^\circ 30'$,

b) a=40,6; b=75; $C=32^\circ$,

v) a=2,296; c=1,687; $B=29^\circ 52'$,

q) b=28; c=42; $A=124^\circ$.

11.İki tərəf və bunların qarşısındakı bucaq verilmişdir.

a) a=460; b=654; $A=35^\circ 10$,

b) a=13; b=35; $A=71^\circ$,

v) b=360; c=309; $C=21^\circ 30'$,

q) a=199; b=88; $A=31^\circ$.

12. Çayın müxtəlif sahillərində olan A və B məntəqələri arasındakı məsafəni təyin etmək üçün, A məntəqəsi yerləşən sahildə C nöqtəsi götürüb ölçmək nəticəsində AC=100 *m*, $\angle CAB=74^\circ$ və $\angle ACB=44^\circ$ almışlar. AB məsafəsini təyin edin.

13. F=23 kq olan qüvvə, onun nisbəti ilə $\alpha=46^0 30'$ və $\beta=54^0 10'$ bucağı əmələ gətirən iki toplanana ayrılmışdır. Toplanan qüvvətlərin qiymətini tapın.

14. Bilavasitə ölçülməsi mümkün olmayan A ilə B nöqtələri arasındakı məsafəni təyin etmək üçün elə bir C məntəqəsi seçmişlər ki, buradan A və B nöqtəsinin hər ikisi görünür və onların yanına getmək mümkündür, BC=100 *m*, AC=80 *m* və $\angle ACB=48^0$ olduqda AB məsafəsini tapın.

15. Cisim sərbəst düşərkən birinci saniyədə 4,9 *m*, verilmiş mail müstəvidə sürüşdükdə isə 1,8 *m* gedir. Mail müstəvinin üfüqlə əmələ gətirdiyi meyl bucağını hesablayın (sürtünmə nəzərə alınmır).

16. Qatar 12 *m/san* sürətlə hərəkət edir. Bu zaman vaqondakı sərnişinə elə gəlir ki, yağış damcılarının istiqaməti şaquli istiqamətlə 30^0-lik bucaq əmələ gətirir. Yağış damcılarının orta sürətini tapın.

17. Verilən cismə, hərəkət istiqaməti ilə 40^0-lik bucaq əmələ gətirən 10 *kq*-lıq qüvvə təsir edərək, onu 20 *m* məsafədə aparır. Görülən işi hesablayın.

18. Oturacağına bitişik bucağı α olan bərabəryanlı üçbucağın daxilinə çevrə çəkilmişdir. Toxunma nöqtələrini birləşdirməklə alınan üçbucağın perimetri p-dir. Verilən üçbucağın perimetrini tapın.

19. Mərkəzi bucağı α olan *R* radiuslu dairə sektoru daxilinə çevrə çəkilmişdir. Onun radiusunu tapın.

20. Daxildən toxunan iki çevrənin mərkəzləri arasındakı məsafə *l*-dir. Böyük çevrənin mərkəzindən kiçik çevrəyə çəkilmiş toxunan mərkəzlər xətti ilə α bucağı əmələ gətirir. Böyük radiusunu tapın.

21. Radiusu R olan çevrə daxilinə çəkilmiş trapesiyanın dioqanalı onun yan tərəfləri ilə α və 2α bucaqlarının əmələ gətirir. Trapesiyanın sahəsini tapın.

22. Seqmentin daxilinə çəkilmiş kvadratın qövs üzərindəki iki təpəsi həmin qövsü 3 bərabər hissəyə bölür. Seqmentin qövsünü təyin edin.

23. İki çevrə bir-birindən 2α və 2β qövsləri ayırır (2α -böyük çevrənin qövsüdür). Ortaq xarici toxunanlar arasındakı bucağı təyin edin.

24. *ABCD* trapesiyanın oturacaqları *AD*=*a*, *BC*=*b* və $\angle BAD = \alpha$ -dır. *BD* diaqonalı *AD* tərəfi ilə 2α bucağı əmələ gətirir. Trapesiyanın yan tərəflərini tapın.

25. *ABC* üçbucağında $\angle C = 120^\circ$ və $BC : AC = (\sqrt{3} - 1) : 2$ olduqda $\angle B = 45^\circ$ olduğunu isbat edin.

26. Üçbucağın bucaqlarından biri 120^0-dir. Bu üçbucağın tərəfləri ədədi silsilə əmələ gətirirsə, tərəflərin nisbətini tapın.

27. Düzbucaqlı üçbucağın hipotenuzu *c*, iti bucaqlarından birinin tənböləni *l* olarsa, onun katetlərini tapın.

28. *ABCD* düzbucaqlısının *AD* oturacağı, onun *AB* hündürlüyündən 3 dəfə böyükdür. *AD* oturacağı *M* və *N* nöqtələri vasitəsilə üç bərabər hissəyə bölünmüşdür; $\angle AMB + \angle ANB + \angle ADB$ -ni tapın.

29. 60^0-li bucaq daxilində götürülmüş nöqtədən bucağın tərəflərinə qədər məsafə *m* və *n* olduqda, həmin nöqtədən bucağın təpə nöqtəsinə qədər olan məsafəni tapın.

30. Bərabərtərəli *ABC* üçbucağının xaricinə çevrə çəkilmiş və *BC* qövsü üzərində *M* nöqtəsi götürülmüşdür. *AM*=*BM*+*CM* olduğunu göstərin.

TESTLƏR

1. Düzbucaqlı üçbucağın katetləri 8 *sm* və 6 *sm* olarsa hipetonuza çəkilən medianın uzunluğunu tapın.

A) 7 B) 6 C) 5 D) 8 E) 9

2. *ABC* üçbucağında $\angle A = 30^0$, $\angle C = 45^0$ və *AB*=4 *sm* olarsa *BC* tərəfini tapın.

A) $\sqrt{2}$ B) $2\sqrt{2}$ C) 2 D) 4 E) 6

3. *ABC* üçbucağının xaricinə radiusu 8 *sm* olan çevrə çəkilmişdir. *BC*=6 *sm* olarsa, $\sin A$-nı tapın.

A) 0,25 B) 0,5 C) 0,2 D) 1 E) 0,375

4. Yan tərəfləri 13 *sm*, oturacağı 10 *sm* olan bərabəryanlı üçbucağın oturacağına çəkilmiş hündürlüyü tapın.

A) 12 *sm* B) 13 *sm* C) 11 *sm* D) 9 *sm* E) 10 *sm*

5. Tərəfləri 5 *sm*, 6 *sm*, 7 *sm* olan üçbucaqda böyük bucağın kosinusunu tapın.

A) $\frac{5}{6}$ B) $\frac{5}{7}$ C) $\frac{2}{7}$ D) $\frac{1}{5}$ E) $\frac{1}{6}$

6. Bərabərtərfli üçbucağın xaricinə çəkilən çevrənin radiusu $3\sqrt{3}$ olarsa, üçbucağın tərəfini tapın.

A) $6\sqrt{3}$ B) 9 C) 3 D) 6 E) $4\sqrt{3}$

7. Düzgün üçbucağın xaricinə və daxilinə çəkilmiş çevrələrin radiusları nisbətini tapın.

A) 2 B) $\frac{1}{2}$ C) $\frac{1}{3}$ D) 3 E) 4

8. *ABC* üçbucağında *AC*=1 *sm*, *BC*=2 *sm*, $\angle C = 60^\circ$ olarsa, *AB*-ni tapın.

A) 3 B) 2 C) $\sqrt{3}$ D) $\sqrt{2}$

9. Tərəfi $9\sqrt{2}$ *sm* olan kvadratın xaricinə çəkilən çevrənin uzunluğunu tapın.

10.Uyğunluğu müəyyən edin.

1. Düzgün altıbucaqlı	a. Daxili bucaqlarının cəmi xarici bucaqlarının cəminə bərabərdir.
2. Düzgün üçbucaqlı	b. Daxili bucaqlarının cəmi 720^0-dir.

3. Düzgün dördbucaqlı

c. Daxili bucaqlarının cəmindən iki dəfə çoxdur.

d. Daxili bucaqlarının cəmi xarici bucaqlarının cəmindən iki dəfə azdır.

e. Dörd simmetrik oxu var.

XIII FƏSİL

QURMA MƏSƏLƏLƏRİ
§ 90. ƏSAS QURMA MƏSƏLƏLƏRİ

Riyazi təklifin öyrənilməsi və məsələ həlli zamanı çertyoj alətlərində (pərgar, xətkeş, günyə, çertyoj üçbucağı və transportirdən) istifadə etməklə müxtəlif həndəsi fiqurların şəkli qurulur. Bütün bu hallara qurma əsas məqsəd olmayıb, köməkçi rol oynayır.

Elə məsələlər varki onların həlli yalnız qurma ilə yerinə yetirilir. Bu halda qurma köməkçi rol oynamır və əsas məqsəd kimi qarşıya qoyulur. Qurma məsələsi dedikdə bir qayda olaraq yalnız xətkeş və pərgarın köməyi ilə yerinə yetirilən məsələlər başa düşülür. İsbat, hesablama və s. məsələ növlərinin həllində də xətkeş və pərgardan istifadə etməklə çertyoj qurulmasına baxmayaraq onlar qurma məsələsi adlanmır.

Qurma məsələlərində xətkeşdən yalnız düz xətt çəkmək, pərgardan isə mərkəzi və radiusu məlum olan çevrə çəkmək olar. Bu çertyoj alətləri ilə əlavə heç bir əməliyyat aparmaq olmaz. Hətta üzərində bölgü olan xətkeşdən qurma zamanı bərabər parçaları qeyd etmək üçün istifadə etmək düzgün deyil.

Hər bir məsələdə olduğu kimi, qurma məsələlərində də verilənlər, axtarılanlar və bunlar arasında əlaqə yaradan şərt, qayda, üsul və s. olur.

Planimetriyada qurma məsələlərinin həlli aşağıdakı ən sadə məsələlərin həllinə gətirilir:

1. Verilən iki nöqtəni birləşdirən düz xətt və ya parçanın qurulması.
2. Mərkəzi və radiusu məlum olan çevrə və ya qövsün qurulması.

3. İki düz xəttin ümumi ortaq nöqtəsinin qurulması.

4. Verilən çevrə ilə düz xəttin ortaq nöqtəsinin qurulması.

5. İki çevrənin ortaq nöqtəsinin qurulması.

Qurma zamanı bu məsələlərin həlli hazır qəbul olunur. Göstərilən şərtlər pərgar və xətkeşdən sərbəst istifadə etmə şərtləridir. Məsələ həlli zamanı bəzən onu yuxarıda göstərilən beş sadə məsələyə gətirmək çox yorucu olur. Buna görə də əvvəlcə əsas qurma məsələləri adlanan məsələlər həll edilir və digər məsələlərin həlli buna gətirilir. İndi əsas qurma məsələlərini nəzərdən keçirək.

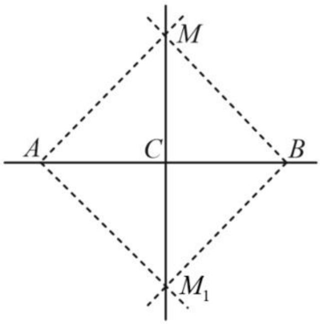
Məsələ 1. *AB* parçasını yarıya bölün:

○ Radiusu verilən parçanın yarısından böyük olmaqla *A* və *B* nöqtələrində olan çevrə qövsləri çəkək (şəkil 276). Bu qövslərin kəsişmə nöqtələrini *M* və M_1-lə işarə edək. MM_1 düz xəttini çəkək və onun *AB* ilə kəsişən nöqtəsini *S* adlandıraq. *C* nöqtəsi *AB* parçasının orta nöqtəsidir.

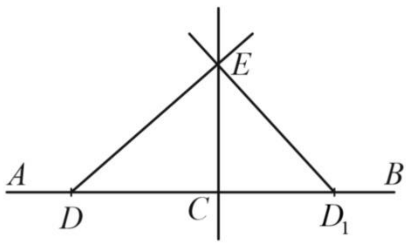
Doğrudan da $\Delta AMM_1 = \Delta BMM_1$ olduğundan (üç tərəfinin bərabərliyinə görə) $\angle AMM_1 = \angle BMM_1$ olur. Deməli, ΔAMB bərabəryanlıdır. Odur ki, MC həm tənbölən, həm də mediandır, yəni *AC*=*CB*. ●

Məsələ 2. *AB* düz xətti üzərindəki *C* nöqtəsindən ona perpendikulyar qaldırın:

○ *AB* düz xətti üzərində $CD=CD_1$ parçaları ayıraq (şəkil 277).



Şəkil 276



Şəkil 277

Radiusu $R > CD$ və mərkəzləri *D*, D_1 nöqtələrində olan kəsişən çevrə qövsləri çəkək. Bu qövslərin kəsişmə nöqtəsi E olsun. EC tələb edilən perpendikulyardır.

Doğrudan da $\Delta DCE = \Delta D_1CE$ (üç tərəfinə görə). Odur ki, $\angle DCE = \angle D_1CE$ olur. Bu bucaqlar qonşu olduğundan $EC \perp AB$. ●

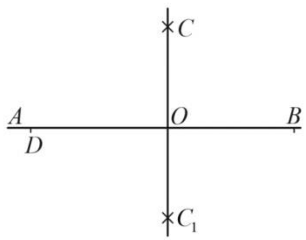
Məsələ 3. *AB* düz xəttinə onun xaricindəki *C* nöqtəsindən perpendikulyar endirin:

○ Mərkəzi *C* nöqtəsində olmaqla elə çevrə qövsü çəkək ki, o *AB* düz xəttini *D* və *E* nöqtələrində kəssin (şəkil 278). *DE* parçasının yarıya bölünmə qaydasına görə (məsələ 1) CC_1 axtarılan perpendikulyardır, yəni $CC_1 \perp AB$. ●

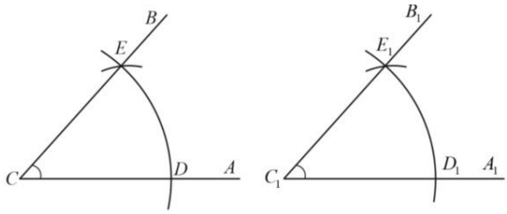
Məsələ 4. Verilmiş bucağa bərabər bucaq qurun:

○ $\angle ACB$ verilmiş bucaq olsun (şəkil 279), ona bərabər olan bucağı qurmaq üçün C_1A_1 şüasını çəkək. Radiusu eyni olmaqla, mərkəzləri *C* və C_1 nöqtələrində olan, *CA* və CA_1 şüalarını uyğun olaraq *D* və D_1 nöqtələrində kəsən iki qövs çəkək. Mərkəzi C_1 nöqtəsində olan qövs üzərində $D_1E_1=DE$ olmaq şərti ilə E_1 nöqtəsini qeyd edək. C_1 ilə E_1 nöqtələrindən keçən C_1B_1 şüasını çəkək. $\angle A_1B_1C_1$ axtarılan bucaqdır.

Doğrudan da $\Delta DCE = \Delta D_1C_1E_1$ (üç tərəfinə görə). Deməli $\angle C_1 = \angle C$. ●



Şəkil 278



Şəkil 279

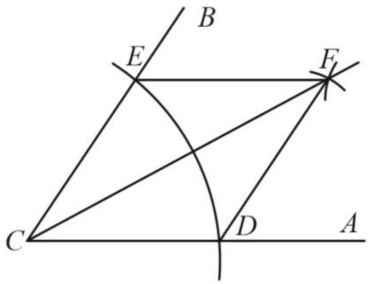
Məsələ 5.Bucağı yarıya bölün:

○ *ACB* verilmiş olsun (şəkil 280). Mərkəzi *C* nöqtəsində olmaqla, bucağın tərəflərini *D* və *E* nöqtələrində kəsən qövs çəkək. Radiusu $R > \frac{1}{2}ED$ olmaqla mərkəzləri *D* və *E* nöqtələrində olan qövslər çəkək. *C* nöqtəsini bu qövslərin kəsişmə nöqtəsi *F* ilə birləşdirək. *CF* düz xətti *ACB* bucağını yarıya bölür.

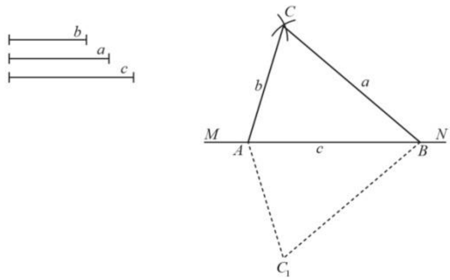
Doğrudan da, $\Delta CDF = \Delta CEF$ (üç tərəfinə görə). Buna görə də $\angle ACF = \angle BCF$ olur. *CF* düz xətti *ACB* bucağının tənbölənidir. ●

Məsələ 6. Verilmiş *a, b, c* tərəflərinə görə üçbucaq qurun:

○ *NM* xətti üzərində *AB*=*c* parçasını ayıraq (şəkil 281). Mərkəzi A nöqtəsində radiusu *b* və eləcə də mərkəzi *B* nöqtəsində radiusu *a* olan çevrələr çəkək. Bu çevrələr



Şəkil 280



Şəkil 281

C və C_1 nöqtələrində kəsişirlər. *C* nöqtəsini *A* və *B* nöqtələri ilə birləşdirək. ΔABC axtarılan üçbucaqdır. ●

Qeyd: məlumdur ki, istənilən üçbucaqda $c < a + b$ və $c > b - a$ bərabərsizlikləri doğrudur. Əgər *a, b, c* parçaları bu şərtləri ödəməsə üçbucağı qurmaq olmaz.

§ 91. Qurma məsələləri həllinin ümumi sxemi

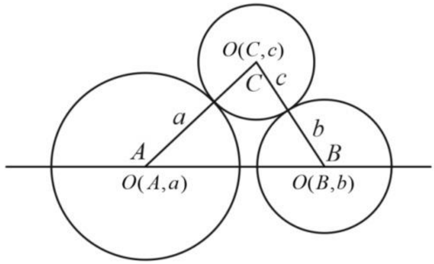
Hər bir qurma məsələsinin həllində qarşıya belə bir sual çıxır. Verilən şərtlər daxilində məsələnin həlli varmı, varsa neçədir və onları necə tapmaq olar? Bu suallara düzgün cavab vermək üçün qurma məsələsinin həlli zamanı müəyyən plana –həll sxeminə əməl edilməlidir. Əksər hallarda aşağıdakı dörd mərhələdən istifadə edilir.

1. Təhlil-qurma üsulunun axtarılması;
2. Qurma-çertyojun yerinə yetirilməsi;
3. İsbat alınan çertyojun məsələnin şərtini ödədiyini göstərmək.
4. **Araşdırma-**verilən şərt daxilində məsələnin neçə həlli olduğunu müəyyən etmək.

Nümunə üçün bir məsələnin tam həllini verək.

Məsələ. Mərkəzi *A* nöqtəsində, radiusu *a* və mərkəzi *B* nöqtəsində, radiusu *b* olan iki çevrə verilmişdir. Radiusu *c* olan elə çevrə qurun ki, verilən hər iki çevrəyə xaricdən toxunsun.

○ **1.Təhlil:** Tələb edilən fiqur çevrədir. Çevrə isə mərkəzi və radiusu ilə tamamilə təyin olunur. Məsələnin şərtində radius verildiyindən (c-yə bərabərdir), məsələnin həlli üçün bu çevrənin mərkəzini tapmaq lazımdır. Axtarılan nöqtəni *C*, çevrəni isə *O(C, c)* ilə işarə edək.



Şəkil 282

Fərz edək ki, O(A,a), O(B, b) çevrələrinə xaricdən toxunan O(C, c)çevrəsi qurulmçuşdur (şəkil 282). O(A, a) və O(B, b) çevrələri O(C, c)-yə xaricdən toxunduğundan *AC=a+c*, *BC=b+c* bərabərlikləri doğrudur. Bu bərabərliklərdən alınır ki, axtarılan *c* radiusulu çevrənin mərkəzi, yəni *C* nöqtəsi *O (A, a+c)* və *O(B, b+c)* çevrələrinin ortaq nöqtəsidir.

2**. Qurma:** a) *a+c* və *b+c* parçalarını quraq (şəkil 282), b) *O(A, a+c)* və *O(B, b+c)* çevrələrini quraq, v) bu çevrələrin ortaq nöqtələrinin C_1 və C_z ilə işarə edək, q) $O(C_1, c)$ və $O\ (C_2, c)$ çevrələrini quraq.

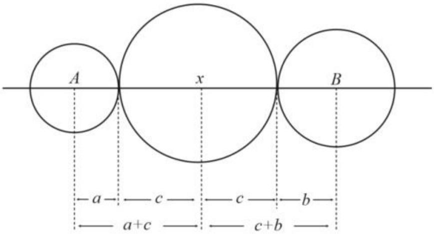
3**. İsbatı:** təhlildən göründüyü kimi, *C* o zaman tələb olunan çevrənin mərkəzi olar ki, *O(A, a+c)* və *O(B, b+c)* çevrələrinin hər ikisinin ortaq nöqtəsi olsun. Qurmadan məlumdur ki, *O(C, c)* çevrəsi xaricdən *O(A, a+c)* və *O(B, b+c)* çevrələrinə toxunur və radiusu *c*-yə bərabərdir. Deməli, tələb olunan nöqtədir.

4. **Araşdırma:** Verilənlərin hansı qiymətində yuxarıda göstərilən qurmanın mümkün olduğunu və məsələnin neçə həlli olduğunu müəyyənləşdirək.

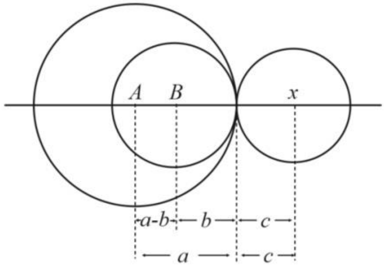
İxtiyari *A, B, a, b, c* üçün yuxarıdakı qurma yerinə yetiriləndir. Lakin *O(A, a+c)* və *O(B, b+c)* çevrələrinin aşağıdakı hallarda ortaq nöqtəsi olar:

$AB < (a+c)+(b+c)$ və ya $AB > a-b$.

Başqa sözlə, $a-b<AB<a+b+2c$ olduqda axtarılan çevrənin mərkəzini tapmaq olar. Bu mərkəzin sayı iki olduğundan məsələnin şərtini ödəyən iki çevrə çəkmək olar. *AB=a+b+2c* və ya *AB=a-b* olduqda isə, məsələnin yeganə həlli var (şəkil 283, 284). $AB>(a+c)+(b+c)$ və $AB<a-b$ olduqda isə həlli yoxdur. ●



Şəkil 283



Şəkil 284

§ 92. HƏNDƏSİ YERLƏR ÜSULU

Bildiyimiz kimi eyni xassəli bütün nöqtələr çoxluğu həndəsi yer adlanır. Qurma məsələlərinin həllində çox istifadə olunan həndəsi yerlər üsulunun əsasını belə bir qayda təşkil edir. Fərz edək ki, həlli axtarılan məsələ iki müxtəlif şərti ödəyən bir X nöqtəsinin qurulmasına gətirilir. Bu halda biz əvvəlcə birinci şərti ödəyən nöqtələrdən ibarət fiquru, sonra isə ikinci şərti ödəyən nöqtələrdən ibarət fiquru qururuq. Bu iki fiqurun kəsişmə nöqtəsi tələb edilən X nöqtəsi olacaq.

X nöqtəsinin tapılması üçün yuxarıda göstərilən iki fiqur xətkeş və pərgarın köməyi ilə qurula bilən olmalıdır, yəni həmin fiqurlar düz xətlər və çevrələrə aid məsələ həllində ən çox aşağıdakı təkliflərdən istifadə olunur:

1. Verilən nöqtədən eyni uzaqlıqda olan nöqtələrin həndəsi yeri, mərkəzi verilən nöqtə olan çevrədir.

2. Düz xətdən eyni uzaqlıqda olan nöqtələrin həndəsi yeri həmin düz xəttə paralel olan iki düz xətdir.

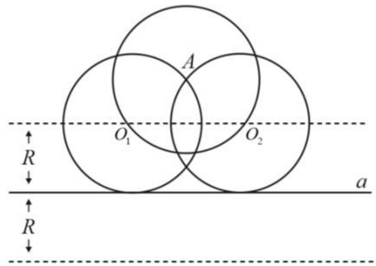
3. Parçanın uclarından eyni uzaqlıqda olan nöqtələrin həndəsi yeri, onun orta perpendikulyarıdır.

4. İki istənilən düz xətdən eyni uzaqlıqda olan nöqtələrin həndəsi yeri, bu düz xətlərin kəsişməsindən alınan bucaqların tənbölənidir.

Məsələ:verilən A nöqtəsindən keçən və a düz xəttinə toxunan R radiuslu çevrə qurun.

○ **Təhlil:** Məsələdə *R* radiuslu çevrə qurmaq tələb olunur. Deməli, çevrənin mərkəzini tapmaq lazımdır. Bu mərkəz (mərkəzlər) aşağıdakı şərti ödəməlidir:

A nöqtəsindən və a düz xəttindən *R* məsafədə olmalıdır. Deməli, mərkəz *a* düz xəttindən eyni uzaqlıqda olan iki düz xəttin və mərkəzi *A* nöqtəsində olan *R* radiuslu çevrənin üzərində axtarılmışdır.



Şəkil 285

Qurma: 1. *a* düz xəttindən *R* məsafədə olan iki düz xətt quraq (şəkil 285).

2. Mərkəzi *A* nöqtəsində olan *R* radiuslu çevrə quraq.

3. Düz xətlə çevrənin hər iki kəsişmə nöqtəsi axtarılan mərkəzdir.

İsbat: Mərkəzi O_1, O_2 nöqtələrində olan *R* radiuslu çevrələrdən hər biri məsələnin şərtini ödəyir (*a* düz xəttinə toxunur və *A* nöqtəsindən keçir).

Araşdırma: Biz burada iki həll aldıq. *A* nöqtəsinin *a* düz xəttindən olan məsafəsindən asılı olaraq müxtəlif hallar ola bilər. Bu məsafəni *d*, həllərin sayını *n*-lə işarə etsək,

$$n = \begin{cases} 2, & 0 \le d < 2R \quad \text{olduqda}, \\ 1, & d = 2R \quad \text{olduqda}, \\ 0, & d > 2R \quad \text{olduqda}, \end{cases}$$

alarıq. ●

§ 93. QURMA MƏSƏLƏLƏRİNİN HƏLLİNƏ NÜMUNƏLƏR

1. Məsələ. Verilən *O* nöqtəsindən verilən a düz xəttinə paralel çəkin.

○ *a* düz xətti üzərində (şəkil 286) ixtiyari *B* nöqtəsini qeyd edək ($OB > d$). *O* və *B* nöqtələrini mərkəz qəbul edib, radiusu *OB* olan qövslər çəkək. Sonra, mərkəzi *B* nöqtəsində və radiusu *OA* olan çevrə qövsü çəkib, onun

B nöqtəsindən keçən qövslə kəsişdiyi *C* nöqtəsini tapaq. *O* və *C* nöqtələrindən keçən düz xətt axtarılan düz xətdir. Çünki, *OABC* paraleloqramdır. ●

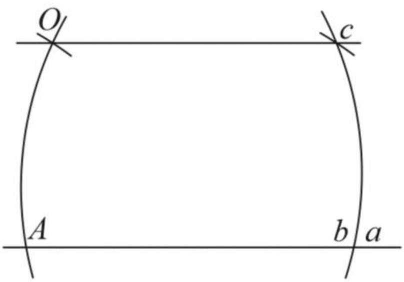
Məsəl 2. Verilən α təpə bucağına və oturacağı ilə hündürlüyünün cəmi *l*-ə görə bərabəryanlı üçbucaq qurun.

○ **Təhlil:** Təpə bucağı α oturacaqla hündürlüyün cəmi l verilmiş olsun. Axtarılan üçbucaq aşağıdakı şərtləri ödəməlidir:

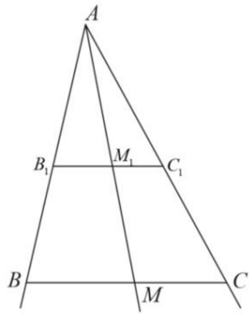
1) bərabəryanlı olmalıdır, 2) təpə bucağı verilən α bucağına bərabər olmalıdır, 3) oturacaq ilə hündürlüyün cəmi verilən l parçasına bərabər olmalıdır.

İlk iki şərti ödəyən üçbucağı qurmaq asandır. Lakin bu şərtləri ödəyən üçbucaqlar sonsuz saydadır.

Verilən α bucağına bərabər bucaq qurmağı və bucağın tənböləninin qurulmasını əsas qurma məsələlərindən bilirik. *AM* tənböləni (şəkil 287) üzərindəki istənilən nöqtədən ona perpendikulyar keçirsək, bucağın tərəflərini



Şəkil 286



Şəkil 287

kəsməklə bərabəryanlı üçbucaq əmələ gətirəcək. Fərz edək ki, bu bərabəryanlı üçbucaqlardan biri, B_1AC_1 qurulmuşdur. Məsələnin şərtini ödəyən üçbucağı oxşarlıq mərkəzi *A* olan və ΔB_1AC_1 ilə homototik (oxşar olan) üçbucaqlar içərisində axtaracağıq. ΔBAC axtarılan üçbucaq olsun. Aydındır ki, $BC||B_1C_1$ ilə kəsişmə nöqtəsini M_1, *BC* ilə kəsişmə nöqtəsini *M* ilə işarə edək. *BAC*

üçbucağının hündürlüyü *AM*-dir. B_1 nöqtəsini *B*-yə, M_1 nöqtəsini isə *M*-ə, C_1 nöqtəsini *C*-yə çevirən homotetiya əmsalını tapaq.
Şərtə görə *AM*+*BC*=*l*-dir. Buna uyğun olaraq $AM_1 + BC_1 = l_1$ olsun. Onda axtarılan homototiya əmsalı

$$k = \frac{BC + AM}{B_1C_1 + AM_1} = \frac{l}{l_1}$$

olar. $k = \frac{l}{l_1}$ məlum olduqdan sonra axtarılan *ABC* üçbucağını asanlıqla qurmaq olar.

Qurma: 1. İlk iki şərti ödəyən B_1AC_1 üçbucağını quraq

$$AB_1 = AC_1 \text{ və } \angle B_1AC_1 = \alpha .$$

2. Bu üçbucağın hündürlüyü AM_1-i quraq və $AM_1 + B_1C_1$ parçasının uzunluğunu l_1 -lə işarə edək.

3. $k = \frac{l}{l_1}$ olmaqla B_1AC_1 üçbucağına homototik qurulan BAC üçbucağı axtarılan üçbucaqdır.

İsbatı: $\Delta BAC \backsim \Delta B_1AC_1$ oxşar olduğundan

$$\frac{AM}{AM_1} = \frac{BC}{B_1C_1} = \frac{AB}{AB_1} = \frac{l}{l_1}$$

olar. Buradan

$$\frac{AM + BC}{AM_1 + B_1C_1} = \frac{l}{l_1}$$

alınar. Qurmaya görə $AM_1 + B_1C_1 = l_1$ olduğundan *AM*+*BC*=*l* olur. Beləliklə, alınan *ABC* üçbucağı məsələdə verilən hər üç şərti ödəyir.

Araşdırma: Buradakı qurmalar birqiymətli yerinə yetiriləndir. Ona görə də həll yeganədir. ●

Məsələ 3. *a, b, c* parçaları ilə mütənasib olan dördüncü parçanı qurun.

○ İxtiyari *O* bucağını quraq. *O* nöqtəsindən başlayaraq bir tərəf üzərində *a, b* parçalarını ardıcıl ayıraq. Bucağın ikinci tərəfi üzərində *O* nöqtəsindən başlayaraq üçüncü c parçasını ayıraq. *AC* düz xəttini və *B* nöqtəsindən ona paralel *BD* düz xəttini çəkək. Alınan $BD=x$ tələb olunan parçadır. Mütənasib parçalar haqqında teoremə əsasən

$$a:b=c:x$$

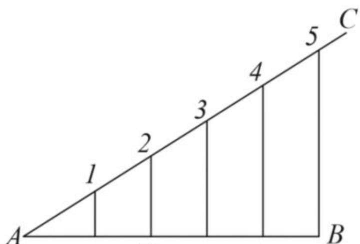
olar ki, bu da qurmanın doğru olduğunu göstərir. ●

Məsələ 4. Verilən *AB* parçasını 2:3 nisbətində hissələrə ayırın.

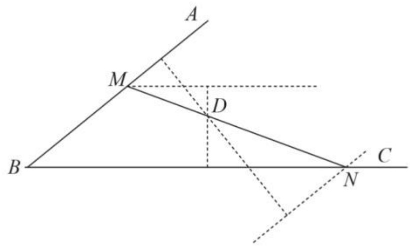
○ Verilən *AB* parçasının *A* nöqtəsindən, müəyyən bucaq altında bir şüa keçirək (şəkil 288). Bu şüa üzərində beş (2+3) bərabər parça ayıraq. Alınan *C* nöqtəsini *B* ilə birləşdirək. Şüa üzərindəki 2 bölgü nöqtəsindən *CB* düz xəttinə paralel çəkək. Bu düz xəttin *AB* ilə kəsişmə nöqtəsi *X*, *AB* parçasını 2:3 nisbətində iki hissəyə ayırır. Qurmanın doğruluğu mütənasib parçalar haqqındakı teoremdən alınır. ●

Məsələ 5. *ABC* bucağı və bunun daxilində *D* nöqtəsi verilmişdir. Üç nöqtələri bucağın tərəfləri üzərində, orta nöqtəsi isə *D* nöqtəsində olan düz xətt parçasını qurun.

○ *ABC* bucağı və *D* nöqtəsi verilmiş olsun (şəkil 289). *D* nöqtəsinə nəzərən bucağın tərəfləri ilə simmetrik olan düz xətlərin bu tərəflərlə kəsişmə nöqtələri *M* və *N* nöqtələri qeyd edək. Alınan bu nöqtələri birləşdirsək, tələb olunan parçanı qurmuş oluruq.



Şəkil 288



Şəkil 289

M və *N* nöqtələri *D* nöqtəsinə nəzərən simmetrik olduqlarından $MD=DN$ olar. Deməli, *D* nöqtəsi qurulan parçanın orta nöqtəsidir. ●

ÇALIŞMALAR

1. Parçanı verilən sayda bərabər hissələrə bölün.

2. 30^0, 45^0, 60^0 və 90^0-li bucaq qurun.

3. İki nöqtədən keçən R radiuslu çevrə qurun.

4. Verilən üçbucağın daxilinə çevrə çəkin.

5. Verilən nöqtədən çevrəyə çəkilən toxunanı qurun.

6. Diaqonallarına görə kvadrat qurun.

7. a, b və h_a verildikdə üçbucağı qurun.

8. Katet və iti bucağına görə düzbucaqlı üçbucaq qurun.

9. a tərəfinə, $m_b \cdot m_c$ medianlarına görə üçbucaq qurun.

10. $a+b$ və c verildikdə düzbucaqlı üçbucaq qurun.

11. c oturacağına və r daxilinə çəkilmiş çevrənin radiusuna görə üçbucaq qurun.

12. Verilənlərə görə düzbucaqlı üçbucaq qurun:

a) $a:b=3:4$ və $h_c = 3$ sm.

b) $\angle A = 40^0$ və $r=2$ sm.

13.Verilənlərə görə $ABCD$ paraleloqramını qurun:

a) $AB:AD=1:2$, $\angle A = 45^0$ və $BD=4$ sm;

b) $AB:AD:BD=3:5:6$ və $AC=4$ sm.

14. Verilənlərə görə üçbucaq qurun:

a) $a:b=1:4$, $\angle C = 35^0$ və $c=3$ sm;

b) $a:b:c=2:3:4$ və $R=3{,}5$ sm.

15. Verilənlərə görə $ABCD$ trapesiyasını ($AD||BC$) qurun:

a) $AB:AD=3:5$, $\angle A = 50^0$, $\angle D = 70^0$ və $h=3$ sm,

b) $AB:AC:CD:DA=5:7:4:8$ və $h=3$ sm.

16. a, b oturacaqlarına, c-yan tərəfinə və h hündürlüyünə görə trapesiya qurun.

17. İti bucağın tərəfinə elə perpendikulyar keçirin ki, onun daxilində qalan hissəsi a olsun.

18. $\angle ABC$-nin daxilində verilmiş nöqtədən elə düz xətt keçirin ki, verilən bucağın verilən perimetrli üçbucaq ayırsın.

19. Dairə daxilində verilmiş *A* nöqtəsindən elə düz xətt keçirin ki, bu düz xətt çevrədən a vətəri ayırsın.

20. *A* və *B* nöqtələrindən eyni uzaqlıqda, *C* nöqtəsindən verilən məsafədə olan x nöqtəsini qurun.

21. Verilən yarımçevrə daxilinə bir kvadrat çəkin.

22. Tərəfi *a* olan kvadrat daxilinə tərəfi b olan başqa bir kvadrat çəkin.

23. *R* radiuslu çevrəyə və verilən düz xəttə bunun üzərindəki nöqtədə toxunan bir çevrə çəkin.

24. *A* və *B* nöqtələrindən elə bir çevrə keçirin ki, bu çevrə verilən düz xəttdən m uzunluğunda bir vətər ayırsın.

XIV FƏSİL

FİQURLARIN SAHƏLƏRİ

§ 94. SAHƏ ANLAYIŞI

Sahə anlayışı gündəlik həyatda çox rast gələn anlayışlardan biridir.Son vaxtlaradək sahəni ilk anlayış hesab edirdilər.Lakin sahəyə özundən daha sadə anlayışların vasitəsi ilə dəqiq tərif verilir.Kifayət qədər məntiqi çətinlik üzündən bu tərif ixtisaslı riyaziyyatçılardan başqalarına məlum deyil.

Bir neçə yüz illiklərdə sahəni müəyyən ədədlə ifadə etməyi əsas vəzifə hesab edir və bu zaman heç bir tərifə əsaslanmırdılar.Lakin sahələrin ölçülməsində bir neçə prinsipə əməl edirdilərki,buda müəyyən dərəcədə tərifi əvəz edirdi.Bu prinsiplər sahələrin əsas xassələri vəya sahə aksiomları adlanmaqla indi də sahələr nəzəriyyəsinin bütün tətbiqlərinin əsasını təşkil edir.Tarixi ənənəni pozmayaraq biz də sahəyə tərif vermədən sahənin ölçülməsində aşağida göstərilən sahə aksiomlarına əsaslanacağıq:

1.*Sahə mənfi olmayan ədəddir.*

2.*Ortaq daxili nöqtələri olmayan bir neçə fiqurdan əmələ gələn fiqurun sahəsi, bu fiqurların sahələri cəminə bərabərdir.*

3. *Bərabər fiqurların sahələridə bərabərdir.*

4. *Tərəfinin uzunluğu vahid olan kvadratın sahəsi vahidə bərabərdir.*

Bu aksiomlar uyğun olaraq *müsbətlik, additivlik, invariantliq (dəyişməzlik), normalliq* xassələri adlanır.

Sahələrin ölçülməsində bəzən başqa xassələrdəndə istifadə edirlər.Lakin bütün xəssələr göstərilən dördxassədən nəticə kimi alınır.Məsələn,fiqurun hissəsinin sahəsi onun sahəsini aşmır (böyük deyil) kimi ifadə olunan monotonluq xassəsi çox geniş yayılmışdır.Lakin,bu xassə müsbətlik və additivlik xassələrindən alınır.

§ 95. SAHƏLƏRIN PALETKA İLƏ ÖLÇÜLMƏSİ

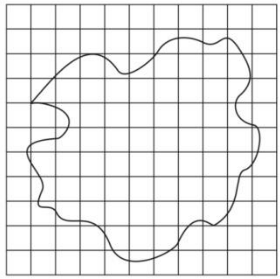
Ölçmə zamanı ölçülən kəmiyyəti müqayisə etmək üçün qabaqcadan verilmiş ölçü vahidi olmalıdır.Parçanın uzunluğunu ölçərkən onu santimetr,metr və s. ilə muqayisə edirlər.Eləcədə çəkini təyin etmək üçün qram,kiloqram,ton və s.,zamanı təyin etmək üçün saniyə,dəqiqə,saat və s.ölçü vahidlərindən istifadə olunur.

Həndəsi fiqurlarin sahələrini ölçərkəndə xüsusi ölçülər(bunlara *sahə ölçü vahidləri* deyilir) seçilir.Hər hansı sahəni təyin etmək istədikdə bundan istifadə olunur.Sahəni bir vahidlə ölçmək lazım gəlsə idi,bəlkədə onun adını sahəni ifadə edən ədədin yanında qeyd etmək lazım gəlməzdi.Lakin bir sıra cətinliklərlə əlaqədər olaraq,bir-biri ilə ifadə olunan bir neçə ölçü vahidi qəbul edilir və bütün hallarda sahənin ədədi qiymətinin yanında yazılır.Çox istifadə olunan sahə ölçü vahidləri aşağıdakılardır.

1*ha*=10000 *kv.m;*   1*kv.m*=100 *kv.dm;*

$1 kv.dm = 100\ kv.sm \qquad 1 kv.sm = 100\ kv.mm.$

Hər hans bir həndəsi fiqurun sahəsini ölçmək,sahəsi ölçülən fiqurda bu və ya digər kvadrat vahiddən neçəsinin olduğunu tapmaq deməkdir.Düzxətli həndəsi fiqurların sahəsi haqqında aşağıda məlumat veriləcək.İndi isə elementar üsulla eyni xətlə əhatə olunan sahələrin ölçülməsini nəzərdən keçirək.Bunun üçün *palet* adlanan və üzərində tərəfinin uzunluğu bir uzunluq vahidi olan kvadratlar çəkilmiş şəffaf lövhədən istifadə olunur.



Şəkil 290

Palet, sahəsi təyin ediləcək fiqurun üzərinə qoyulur (şəkil 290).Əvvəlcə,verilən fiqurda yerləşən tam kvadratlarının sayı hesablanır.Şəkildə belə kvadratların sayı 30-dur.Natamam kvadratların ikisi bir kvadrat qəbul edilir.Bu qayda ilə alınan ədəd, ölçülən fiqurun sahəsi olur.Kiçik kvadlatların sahəsi 1*kv.sm* olarsa,ümumi sahə 47*kv.sm*-ə bərabər qötürülür.

Bu üsul kifayət qədər dəqiq deyil və yorucudur.Buna görədə sahələrin ölçülməsi üçün daha mükəmməl və dəqiq ölçmə üsullarından istifadə olunur.Bunun üçün fiqurun sahəsini onun xətti ölçüləri ilə ifadə edən düsturlardan istifadə edilir.

§ 96. DÜZBUCAQLININ vəPARALELOQRAMIN SAHƏSİ.

Teorem1.*Düzbucaqlının sahəsi, onun oturacağı ilə hündürlüyünün hasilinə bərabərdir.*

□ *ABCD* düzbucaqlısının sahəsini *S*, oturacağını *a*,hündürlüyünü *h* ilə işarə edək. *S* sahəsini təyin etmək üçün *a* və *h* tərəfləri üzərində kvadratlar qurub

291-ci şəkildə göstərildiyi kimi böyük kvadrata (tərəfinin uzunluğu $a+h$ olan)tamamlayaq.Böyük kvadratın sahəsi bir tərəfdən $(a+h)^2$,digər tərəfdən isə a^2+h^2+2S olduğundan,

$$a^2+h^2+2S=(a+h)^2$$

olar.Buradan,

$$S=ah$$

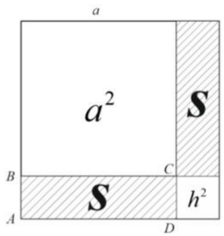
alırıq.■

Məsələ 1. Düzbucağlının perimetri 28 *sm*,tərəfləri fərqinin *2sm* olduğunu bilərək sahəsini tapin.

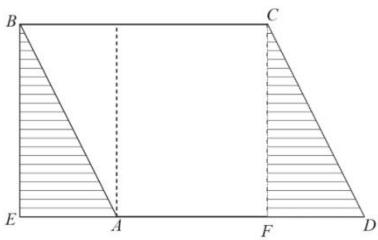
○ Şərtə görə $2a+2b=28$ və $a-b=2$ olduğundan,$a=8$ və $b=6$ tapılır.Nəticədə $S=a\cdot b=48sm^2$ olur. ●

Teorem 2. *Paraleloqramın sahəsi onun oturacağı ilə hündürlüyünün hasilinə bərabərdir.*

□*ABCD* paraleloqramı verilmiş olsun (şəkil 292) Paraleloqram düzbucaqlı olarsa, $S=ah$ oldugu aydındır.



Şəkil 291.



Şəkil 292.

Əgər paraleloqram düzbucaqlı deyilsə,onda *AD* oturacağına *BE* və *CF* hündürlüklərini çəkək.Bu zaman alınan *ABE* və *DCF* uçbucaqları bərabərdir.Sahə aksiomlarına görə $S_{ABE}=S_{DCF}$ və$S_{ABCD}=S_{ABCF}+$ $S_{\Delta DCF}$ doğrudur.Birinci bərabərliyi ikincidə nəzərə alsaq,

$$S_{ABCD}=S_{ABCF}+S_{\Delta ABE}=S_{BCFE}$$

olar.Buradan, $EF=BC=AD$ olduğu üçün

$$S_{BCFE}=EF\cdot CF=AD\cdot CF,$$

yəni

$$S_{Par.}=ah$$

alınar.■

Məsələ 2. Paraleloqramın hündürlüklərinin h və h_1, perimetrinin $2p$ olduğunu bilərək,sahəsini tapın.

○ Şərtə görə $2a+2b=2p$ olduğundan, $b=p-a$, eləcə də $S=ah=bh_1$

olduğundan $b=\frac{h}{h_1}\cdot a$ tapılır.Buradan $p-a=\frac{h}{h_1}\cdot a$ alınır. Beləliklə,

$a=\frac{ph_1}{h+h_1}$, nəticədə isə

$$S=ah=\frac{ph\cdot h_1}{h+h_1}$$

yəni

$$S=\frac{ph\cdot h_1}{h+h_1}$$

alınır. ●

§ 97. ÜÇBUCAĞIN SAHƏSİ

Teorem 1. *Üçbucağın sahəsi onun oturacağı ilə hündürlüyü hasilinin yarısına bərabərdir.*

□*ABC* üçbucağın paraleloqrama tamamlayaq (şəkil 293). Paraleloqramın

dioqanalı onu iki bərabər üçbucağa ayırdığından,

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} S_{Par.ABMC} = \frac{1}{2} AC \cdot BD$$

yəni,

$$S_{\Delta} = \frac{1}{2} bh_b$$

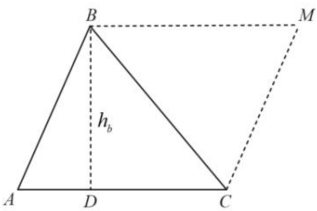
hündürlüyün hansı tərəfə çəkilməsindən asılı olaraq,

$$S_{\Delta} = \frac{1}{2} ah_a = \frac{1}{2} ch_c$$

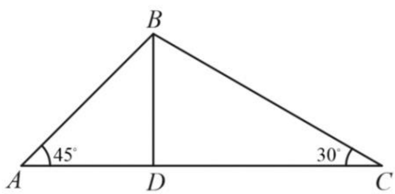
düsturları da doğrudur. ■

Məsələ 1.Üçbucagin oturacağı *a*, oturacağa bitişik bucaqları 30^0və 45^0-dir.Bu üçbucağın sahəsini tapın .

○ *ABC* üçbucağında *AC=a*, $\angle BAD = 45^0$ və $\angle BCD = 30^0$ olsun (şəkil 294).*BD* hündürlüyünü çəkək.



Şəkil 293



şəkil 294

ΔABD -də $\angle ABD = \angle BAD = 45^0$ olduğundan,*h*=*BD*=*AD* olar.Buradan $DC = a - h$, ΔBDC -də

$$BD = DCtg30^0 = \frac{DC}{\sqrt{3}};\ DC = \sqrt{3}BD = \sqrt{3}h$$

alınar.Beləliklə,

$$a - h = \sqrt{3}h; \quad h = \frac{a}{1+\sqrt{3}}$$

olur. $S = \frac{1}{2}ah_a$ düsturuna görə, üçbucağın sahəsi

$$S = \frac{1}{2}AC \cdot BD = \frac{1}{2}a \cdot \frac{a}{1+\sqrt{3}} = \frac{a^2}{2(\sqrt{3}+1)} = \frac{\sqrt{3}-1}{4}a^2$$

olar. ●

Teorem2. *Üçbucağın sahəsi, onun iki tərəfi ilə aralarındakı bucağın sinusu hasilinin yarısına bərabərdir* (şəkil 295).

$$S = \frac{1}{2}AB \cdot AC \sin A$$

□ $S_\Delta = \frac{1}{2}AC \cdot BD$ olduğunu bilirik. ΔABD -dən $BD = AB\sin A$ olduğundan,

$$S = \frac{1}{2}AB \cdot AC \cdot \sin A$$

Bu qayda ilə $S = \frac{1}{2}CA \cdot CB \cdot \sin C$ və $S = \frac{1}{2}AB \cdot BC \cdot \sin B$ olduğunu da göstərmək olar.■

Nəticə 1._Düzbucaqlı üçbucaqda sin C_=1 _olduğunu nəzərə alsaq,onun sahəsinin katetləri hasilinin yarısına bərabər olduğunu alarıq.Yəni, düzbucaqlı üçbucaq üçün_ $S=\frac{1}{2}ab$ _düsturu doğrudur._

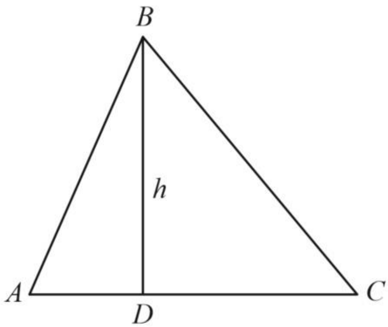
Nəticə2. _Bərabərtərəfli üçbucaqda hər bir bucaq_ 60^0_olduğundan,onun sahəsi üçün_ $\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$ _düsturu doğrudur._

Məsələ 2. Düzbucaqlıüçbucağın katetləri a və b-dır. Bu üçbucağın xaricində tərəflər üzərində qurulmuş kvadratların mərkəzləri birləşdirilmişdir. Alınan üçbucağın sahəsini tapin.

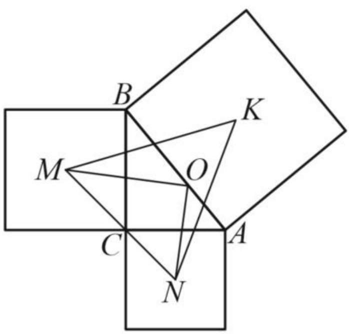
○ M, N və K düzbucaqlı üçbucağın tərəfləri üzərində qurulmuş kvadratların

mərkəzləri olsun(şəkil 296). Hipotenuzun orta nöqtəsini O ilə işarə edək.

$AB=c$, $\angle BAC=\alpha$ olsun. Onda $\angle KON=180^0-\alpha$, $\angle MON=\frac{\pi}{2}$ və $\angle KOM=90^0+\alpha$ olar.



Şəkil 295



Şəkil 296

Sahə aksiomuna əsasən

$$S_{MNK} = S_{KON} + S_{KOM} + S_{MON}$$

doğrudur.Burada,

$$S_{KON} = \frac{1}{2}\cdot\frac{c}{2}\cdot\frac{a+b}{2}\sin(180^0 - \alpha),\ \ S_{KOM} = \frac{1}{2}\cdot\frac{c}{2}\cdot\frac{a+b}{2}\sin(90^0 + \alpha),$$

$$S_{MON} = \frac{1}{2}\left(\frac{a+b}{2}\right)^2$$

olduğunu nəzərə alsaq,

$$S = \frac{1}{2}\cdot\frac{c}{2}\cdot\frac{a+b}{2}\sin\alpha + \frac{1}{2}\cdot\frac{c}{2}\cdot\frac{a+b}{2}\cos\alpha + \frac{1}{2}\left(\frac{a+b}{2}\right)^2,$$

$c\sin\alpha = a$ və $c\cos\alpha = b$ olduğu üçün də

$$S = \frac{a}{8}(a+b) + \frac{b}{8}(a+b) + \frac{1}{8}(a+b)^2 = \frac{1}{8}(a+b)^2 + \frac{1}{8}(a+b)^2 = \frac{1}{4}(a+b)^2 = (\frac{a+b}{2})^2.$$

alınar. Beləliklə,

$$S = (\frac{a+b}{2})^2$$

olar. ●

Teorem 3. *Üçbucağın sahəsi üçün* $S = \dfrac{abc}{4R}$ *düsturu doğrudur.*

Burada *a,b,c* üçbucağın tərəfləri,*R* onun xaricinə çəkilmiş çevrənin radiusudur.

□Sinuslar teoreminə görə $\sin A = \dfrac{BC}{2R}$ olduğundan,2-ci teoremə əsasən

$$S = \frac{1}{4R} AB \cdot AC \cdot BC \text{, yəni } S = \frac{abc}{4R}$$

alırıq. ■

Teorem 4. *Üçbucağın sahəsi üçün $S = rp$ düsturu doğrudur.*

Burada r-üçbucagın daxilinə çəkilmiş çevrənin radiusu və $p = \dfrac{a+b+c}{2}$ isəperimetrin yarısıdır.

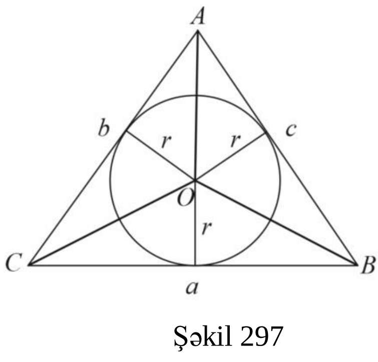
□ ABC üçbucağın daxilinə çevrə çəkib,üçbucağın təpə nöqtələrini onun mərkəzi ilə birləşdirsək (şəkil297), alınan üçbucaqlar üçün sahə aksiomuna görə

$$S_{ABC} = S_{OAB} + S_{OBC} + S_{OCA}$$

olar.Bu üçbucaqlar eyni bir hündürlüyə sahib olduğundan, buradanradan

$$S = \frac{1}{2}ar + \frac{1}{2}br + \frac{1}{2}cr = \frac{a+b+c}{2} \cdot r = rp$$

alınır.■



Şəkil 297

Məsələ 3. Düzbucağlı üçbucağın xaricinə çəkilmiş çevrənin radiusu 15 *sm*,daxilinə çəkilmiş çevrənin radiusu isə 6 *sm*-dir. Üçbucağın sahəsini tapln.

○ Düzbucağlı üçbucağda $c=2R$ olduğundan hipotenuz 30 *sm* olar.Bunu $S=\dfrac{abc}{4R}$(teorem 3)bərabərliyində nəzərə alsaq, $S=\dfrac{ab}{2}$ alınar.Digər tərəfdən dörduncü teoremə görə

$$S=rp=6.\frac{a+b+c}{2}=3(a+b+30)$$

dogrudur.Beləliklə,

$$\frac{ab}{2}=3(a+b+30),$$

Buradan da,

$$\frac{ab}{6}-30=a+b$$

alınar.Hər tərəfi kvadrata yüksəldib,$a^2+b^2=900$olduğunu nəzərə alaq:

$$\frac{(ab)^2}{36}-10ab+900=a^2+b^2+2ab\Rightarrow(ab)^2=12\cdot 36ab\Rightarrow ab=216.$$

Nəticədə $S=\dfrac{1}{2}ab=216\ kv.sm$ alınır ki, bu da verilən düzbucaqlı üçbucağın sahəsidir. ●

Teorem 5(Heron dusturu).*Üçbucağın sahəsi üçün*

$$S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

*düsturu doğrudur.*Burada $p=\dfrac{a+b+c}{2}$, yəni perimetrin yarısıdır.

$\square\ S_\Delta = \frac{1}{2}ab\sin C = \frac{1}{2}ab\sqrt{1-\cos^2 C}$

düsturunda kosinuslar teoreminə görə

$$\cos C = \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$$

olduğunu nəzərə alsaq,

$$S_\Delta = \frac{1}{2}ab\sqrt{1-\frac{(a^2+b^2-c^2)^2}{4a^2b^2}} = \frac{1}{4}\sqrt{4a^2b^2-(a^2+b^2-c^2)^2} =$$

$$\frac{1}{4}\sqrt{(2ab+a^2+b^2-c^2)(2ab-a^2-b^2+c^2)} = \frac{1}{4}\sqrt{((a+b)^2-c^2(c^2-(a-b)^2)} =$$

$$\frac{1}{4}\sqrt{(a+b+c)(a+b-c)(a+c-b)(b+c-a)}$$

alınar. Burada, $a+b+c=2p$, $a+b-c=2(p-c)$. $a+c-b=2(p-b)$ və $b+c-a=2(p-a)$. olduğu üçün

$$S = \frac{1}{2}\sqrt{2p\cdot 2(p-a)(p-b)(p-c)}$$

olur. Nəticədə

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

alınır. ■

Məsələ 4. Üçbucagin iki tərəfinin uzunlugu 25 *sm* və 41 *sm*,üçüncü tərəfinə çəkilmiş medianın uzunluğu 17 *sm*-dir.Üçbucagin sahəsini tapın.

○ ΔABC-də AC=25 *sm*, BC=41 *sm* və OC=17 *sm* olsun (şəkil 298). Medianı özü qədər uzadıb, *D* nöqtəsini *A* və *B* nöqtələri ilə birləşdirək. Alınan *ABCD* paraleloqramdır.Onda

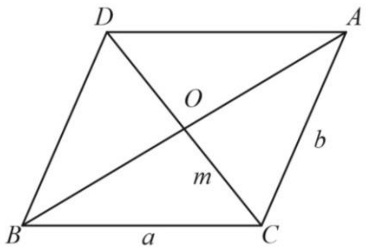
$$S_{ABC} = S_{BCD}$$

olar. *BCD* üçbucağının tərəfləri məlumdur. Heron düsturuna görə üçbucağın sahəsini tapaq:

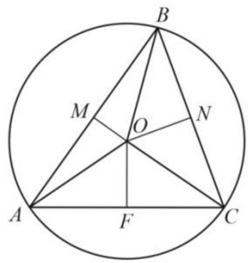
$$CD=34\ sm, AC=25\ sm,\ CB=41\ sm,\quad p=\frac{25+41+34}{2}=50\,sm \Rightarrow$$

$$S=\sqrt{50\cdot 16\cdot 25\cdot 9}=300\sqrt{2}\ ,\ S=300\sqrt{2}sm^2\ . \ ●$$

Məsələ 5. Üçbucağın tərəfləri 50 *sm*, 78 *sm* və 112 *sm*-dir.Xaricinə çəkilmiş çevrənin mərkəzindən üçbucağın tərəflərinə qədər olan məsafələri tapin.



Şəkil 298



Şəkil 299

○ Tərəfləri məlum olan üçbucağın sahəsini Heron düsturuna əsasən tapaq (şəkil 299):

$$p=\frac{50+78+112}{2}=120,\ p-AB=70 \Rightarrow\ p-BC=42,\ p-AC=8 \Rightarrow$$

$$S=\sqrt{120\cdot 70\cdot 42\cdot 8}=1680\,(sm^2)\ .$$

Üçüncü teoremə görə $R = \frac{a \cdot b \cdot c}{4S} = \frac{50 \cdot 78 \cdot 112}{4 \cdot 1680} = 65\,(sm)$ alınar.

ΔAOF -dən

$$OF = \sqrt{AO^2 - AF^2} = \sqrt{65^2 - 56^2} = 33\,(sm).$$

ΔCON -dən

$$ON = \sqrt{R^2 - NC^2} = \sqrt{65^2 - 39^2} = 52\,(sm).$$

ΔMAO -dan

$$OM = \sqrt{R^2 - MA^2} = \sqrt{65^2 - 25^2} = 60\,(sm). \bullet$$

Məsələ 6. Üçbucağın sahəsi üçün

$$S_\Delta = \frac{a^2 \sin B \sin C}{2 \sin A}$$

düsturunun doğru olduğunu göstərin.

○ Sinuslar teoreminə əsasən $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}$ bərabərliyindən $b = \frac{a \sin B}{\sin A}$ tapıb, üçbucağın sahəsi üçün $S_\Delta = \frac{1}{2} ab \sin C$ ifadəsində yerinə yazaq:

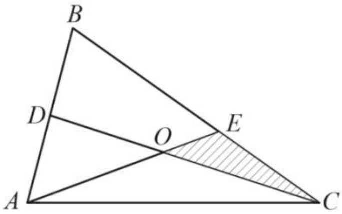
$$S_\Delta = \frac{a^2 \sin B \sin C}{2 \sin A}.$$

Eyni qayda ilə

$$S_\Delta = \frac{b^2 \sin A \sin C}{2 \sin B} \text{ və } S_\Delta = \frac{c^2 \sin A \sin B}{2 \sin C}$$

düsturları alınır. ●

Məsələ 7. *ABC* üçbucağında verilən *AC=a* və *BC=b* tərəfləri arasındaki *C* bucağının hansı qiymətində üçbucağın sahəsi ən böyük olar?



Şəkil 300

○ İki tərəf və aralarındakı bucaq məlum olduqda üçbucağın sahəsi $S=\frac{1}{2}ab\sin C$ ilə tapılır. Burada $C=90^0$ olduqda *sinC=1* olmaqla ən böyük qiymət aldığı üçün üçbucağın sahəsi ən böyük olar. ●

Məsələ 8. *ABC* üçbucağının sahəsi *S*-dir. Yan tərəflərə medianlar çəkilmişdir. Alınan *COE* üçbucağının sahəsini tapın (şəkil 300)

○ Hər bir median, üçbucağı iki bərabər sahəli üçbucağa ayırır:

$$S_{ABE}=S_{AEC}=\frac{S}{2}.$$

DC medianı *AE* parçasını *AO:OE=2:1* nisbətində hissələrə böldüyündən,

$$S_{COE}=\frac{1}{3}S_{AEC}=\frac{S}{6}.$$ ●

§ 98. TRAPESİYANIN SAHƏSİ

Teorem. *Trapesiyanın sahəsi oturacaqları cəminin yarısı ilə hündürlüyü hasilinə bərabərdir* (şəkil 301):

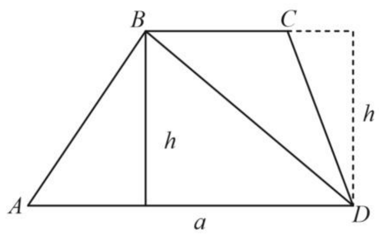
$$S=\frac{a+b}{2}\cdot h.$$

□ Trapesiyanın diaqonalı onu, oturacaqları *a* və *b*, hündürlükləri isə eyni olan iki üçbucağa ayırır. Odurki, sahə aksiomuna görə

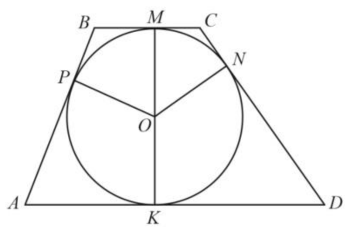
$$S = \frac{1}{2}ah + \frac{1}{2}bh = \frac{a+b}{2} \cdot h . \blacksquare$$

Məsələ 1. Çevrənin xaricinə çəkilmiş düzbucaqlı trapesiyanın sahəsinin oturacaqları hasilinə bərabər olduğunu isbat edin.

○ *AECD* xaricə çəkilmiş düzbucaqlı trapesiya olsun (şəkil 302). Şəkildən göründüyü kimi, $CD \perp AD$, $AP = AK = AD - r$ və $PB = BM = BC - r$ .Bu bərabərlikləri $AP \cdot PB = r^2$ bərabərliyində nəzərə alsaq,



Şəkil 301



Şəkil 302

$$(AD - r)(BC - r) = r^2 \Rightarrow AD \cdot BC - r(AD + BC) + r^2 = r^2 \Rightarrow$$

$$AD \cdot BC = r(AD + BC) \Rightarrow AD \cdot BC = \frac{AD + BC}{2} \cdot 2r \Rightarrow AD \cdot BC = S,$$

yəni $S = AD \cdot BC$ alınır. ●

Məsələ 2. Diaqonalları perpendikular olan bərabəryanlı trapesiyanın sahəsi, onun hündürlüyünün kvadratına bərabər olduğunu isbat edin.

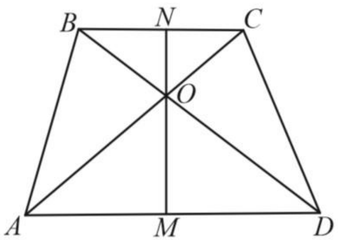
○ $MN=h$ olsun (şəkil 303). Trapesiya bərabəryanlı olduğundan, h hündürlüyü onun simmetriya oxudur. $\angle AOM = \angle MAO$ və $\angle BON = \angle NBO$ olduğu üçün $AM=MO$ və $BN=NO$ olar. Deməli, $AM+BN=MO+ON=MN=h$. Trapesiyanın sahəsi üçün

$$S = \frac{AD+BC}{2}\cdot MN = \left(\frac{AD}{2}+\frac{BC}{2}\right)\cdot MN = (AM+BN)\cdot MN = MN\cdot MN = (MN)^2 = H^2$$

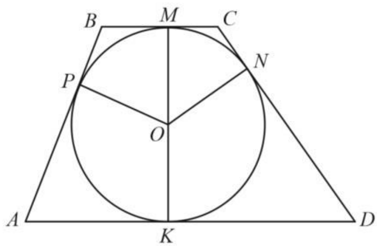
və beləliklə də $S=h^2$ alırıq. ●

Məsələ 3. Bərabəryanlı trapesiyanın diaqonalı l olub, böyük oturacaqla 45^olik bucaq əmələ gətirir. Trapesiyanın sahəsinin tapın.

○ $ABCD$ bərabəryanlı trapesiyası verilmiş olsun (şəkil 304)



Şəkil 303



Şəkil 304

BE hündürlüyüüü və $BD_1 // CD$ çəkək. ΔBDE -dən $\angle BDE = \angle DBE = 45^0$ olduğu üçün $BE=ED$. Pifaqor teoreminə görə

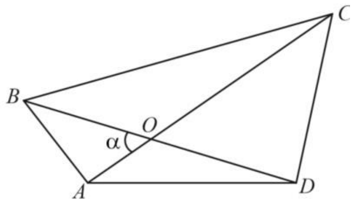
$$l^2 = BE^2 + ED^2,$$

$$BE = ED = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

olur. $AE = ED_1$ olduğundan $\dfrac{AD+BC}{2} \cdot BE = BD \cdot BE = BE^2 = \dfrac{l^2}{2}$,

yəni $S = \dfrac{l^2}{2}$ alınır. ●

§ 99. İXTİYARİ DÖRDBUCAQLININ SAHƏSİ



Şəkil 305

Teorem. *İxtiyarı dördbucaqlının sahəsi onun diaqonalları ilə aralarındakı bucağın sinusu hasilinin yarısına bərabərdir.*

□ $ABCD$ dördbucaqlısı verilmiş olsun (şəkil 305). AC və BD diaqonalları onu dörd üçbucağa ayırır:

$$S_{ABCD} = S_{AOB} + S_{BOC} + S_{COD} + S_{AOD}$$

$\angle AOB = \alpha$ olsun, onda

$$S_{AOB} = \frac{1}{2} AO \cdot BO \cdot \sin\alpha,$$

$$S_{BOC} = \frac{1}{2} BO \cdot OC \cdot \sin(180^0 - \alpha) = \frac{1}{2} BO \cdot OC \cdot \sin\alpha,$$

$$S_{COD} = \frac{1}{2} CO \cdot OD \cdot \sin\alpha$$

$$S_{DOA} = \frac{1}{2} DO \cdot OA \cdot \sin(180^0 - \alpha) = \frac{1}{2} DO \cdot AO \cdot \sin\alpha.$$

Bu bərabırlikləri tərəf-tərəfə toplasaq,

$$S_{ABCD} = \frac{1}{2}(BO(AO + OC) + OD(CO + OA))\sin\alpha = \frac{1}{2}(BO \cdot AC + OD \cdot AC)\sin\alpha =$$

$$\frac{1}{2}AC(BO+OD)\sin\alpha=\frac{1}{2}AC\cdot BD\sin\alpha$$

alırıq. Deməli,

$$S=\frac{1}{2}AC\cdot BD\sin\alpha.\blacksquare$$

Rombun və kvadratın diaqonalları perpendikulyar olduğundan $\sin\alpha=1$ olur. Bunu son bərabərlikdə nəzərə alsaq,aşağıdakı nəticələr alınır.

Nəticə1. Rombun sahəsi onun diaqonalları hasilinin yarısına bərabərdir.

Nəticə 2. Kvadratın sahəsi onun diaqonalları hasilinin yarısına bərabərdir.

Məsələ. Rombun perimetri 48, diaqonallarının cəmi 26-dır. Onun sahəsini tapın.

○ Rombun tərəfi a, diaqonalları d_1 və d_2 olsun. Şərtə görə $4a=48$ olduğundan, $a=12$ olur. Həmçinin $d_1+d_2=26$ olduğundan, $\frac{d_1}{2}+\frac{d_2}{2}=13$ yaza bilərik. Hər tərəfi kvadrata yüksəldək:

$$\left(\frac{d_1}{2}+\frac{d_2}{2}\right)^2=169,$$

$$(\frac{d_1}{2})^2+(\frac{d_2}{2})^2+2\cdot\frac{d_1}{2}\cdot\frac{d_2}{2}=169.$$

Burada,

$$(\frac{d_1}{2})^2+(\frac{d_2}{2})^2=a^2, 2\cdot\frac{d_1}{2}\cdot\frac{d_2}{2}=S$$

olduğunu nəzərə alsaq, $a^2+S=169$, nəticədə isə $S=25kv.vahid$ olur. ●

§ 100. İXTİYARİ ÇOXBUCAQLININ SAHƏSİ.

İxtiyarı çoxbucaqlının sahəsini tapmaq üçün əvvəlcə onu bir təpədən çıxan diaqonalların köməyi ilə üçbucağlara ayırmaq lazımdır (şəkil 306). Sonra üçbucağların sahələrini hesablamaq və alınan nəticələri toplamaq lazımdır. Beləliklə, verilən çoxbucaqların sahəsini tapmış oluruq. İxtiyarı n-bucaqlının bir təpəsindən çıxan diaqonalları onu $n-2$ sayda uçbucağa ayırır, buna görə də sahəsi həmin $n-2$ sayda üçbucağın sahələri cəminə bərabər olar.

Qeyd edək ki, çoxbucaqlını başqa üsulla da üçbucaqlara ayırmaq olar. Məsələn, onun daxilində götürülmüş ixtiyarı nöqtəni n-bucaqlının təpə nöqtələri ilə birləşdirsək, n sayda üçbucaq almış oluruq. Bu üsul çoxbucaqlı düzgün olduqda daha faydalıdır. Belə ki, onun mərkəzini təpə nöqtələri ilə birləşdirsək, bir-birinə bərabər olan n sayda bərabəryanlı üçbucaq almış oluruq ki, bunlardan hər birinin oturacağı çoxbucaqlının tərəfi (a), hündürlüyü isə çoxbucaqlının apofemi (h_a) olur. Beləliklə,duzgün n-bucaglının sahəsi üçün

$$S_n = \frac{1}{2} a \cdot h_a \cdot n = \frac{P_n}{2} \cdot h_a$$

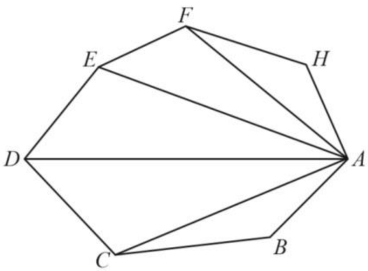
alınar. Deməli, *düzgün çoxbucaqlının sahəsi onun perimetri ilə apofemi hasilinin yarısına bərabərdir*.

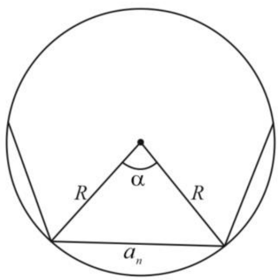
Məsələ.Düzgün çoxbucaqlının sahəsi üçün

$$S_n = \frac{1}{2} nR^2 \sin \frac{360^0}{n}$$

düsturunun doğru olduğunu isbat edin, burada S_n, verilən n-bucaqlının sahəsi, R-çoxbucaqlının xaricinə çəkilmiş çevrənin radiusudur.

○ Çevrənin daxilinə çəkilmiş düzgün n-bucaqlının mərkəzini təpə nöqtələri ilə birləşdirsək, hər birinin təpə bucağı $\alpha = \frac{360^0}{n}$ olan n sayda bərabəryanlı üçbucaq alınır (şəkil 307).Hər bir üçbucağın sahəsi $S_\Delta = \frac{1}{2}R^2 \sin\frac{360^0}{n}$, çoxbucaqlının sahəsi isə $S_n = \frac{1}{2}nR^2 \sin\frac{360^0}{n}$ olar. ●





Şəkil 306 Şəkil 307

§ 101.OXŞAR FİQURLARIN SAHƏLƏRİ NİSBƏTİ

Teorem. *Oxşar fiqurların sahələri nisbəti, onların uyğun xətti ölçülərinin kvadratları nisbətinə bərabərdir.*

□ Əvvəlcə teoremi oxşar üçbucaqlar üçün isbat edək. $\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$ olsun (şəkil 308). Göstərək ki,

$$\frac{S_{ABC}}{S_{A_1B_1C_1}} = \frac{AB^2}{A_1B_1^{\,2}} \qquad (1)$$

doğrudur.

Verilən üçbucaqların sahələri üçün

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot AC \cdot \sin A,$$

$$S_{A_1B_1C_1} = \frac{1}{2} A_1B_1 \cdot A_1C_1 \cdot \sin A_1$$

düsturlarını yazıb, $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{AC}{A_1C_1}$ və $\sin A = \sin A_1$ olduğunu nəzərə almaqla tərəf-tərəfə bölsək,

$$\frac{S_{ABC}}{S_{A_1B_1C_1}} = \frac{AB^2}{A_1B_1^{\ 2}}$$

alınar. Oxşar üçbucaqlar üçün

$$k = \frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1} = \frac{h}{h_1} = \frac{m}{m_1}$$

olduğundan, sahələrin nisbəti üçün aşağıdakı bərabərliklər alımır:

$$\frac{S_{ABC}}{S_{A_1B_1C_1}} = \frac{AB^2}{A_1B_1^{\ 2}} = \frac{h^2}{h_1^2} = \frac{m^2}{m_1^2} = \frac{n^2}{n_1^2} = \ldots = k^2 .$$

İndi fərz edək ki, F_1 və F_2oxşarlıq əmsalı k olan ixtiyarı iki oxşar fiqurdur. F_1 fiqurunu n sayda üçbucağa ayıraq və bu üçbucaqların sahələrini $S_1, S_2, ..., S_n$ ilə işarə edək. Uyğun qayda ilə F_2fiqurunu sahələri $\sigma_1, \sigma_2, ..., \sigma_n$ olan üçbucaqlara ayıraq, Bu üçbucaqlar üçün $\frac{S_i}{\sigma_i} = k^2$ münasibəti ($i = \overline{1, n}$) doğrudur. Bubərabərliyi

$$\frac{S_1}{\sigma_1} = \frac{S_2}{\sigma_2} = \cdots = \frac{S_n}{\sigma_{n1}} = k^2$$

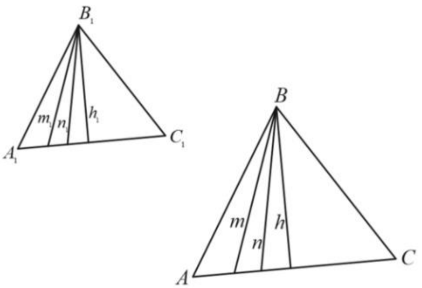
kimi açıq yazıb, bərabər nisbətlərin xassələrinə görə,

$$\frac{S_1 + S_2 + \cdots + S_n}{\sigma_1 + \sigma_2 + \cdots + \sigma_n} = k^2 \qquad (3)$$

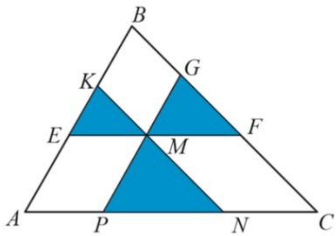
alırıq. Burada $S = S_1 + S_2 + ... + S_n$ və $\sigma = \sigma_1 + \sigma_2 + \cdots \sigma_n$ uyğun olaraq F_1 və F_2fiqurlarının sahələri olduğunu nəzərə alsaq, (3) bərabərliyini

$$\frac{S(F_1)}{S(F_2)} = k^2$$

kimi yaza bilərik. Yəni teorem doğrudur. ■



Şəkil 308



şəkil 309

Məsələ.Üçbucağın daxilindəki *M* nöqtəsindən onun tərəflərinə paralel olan üç düz xətt çəkilmişdir. Bu zaman alınan üçbucagların sahələri$S_{EMK} = S_1$, $S_{MFQ} = S_2$ və $S_{PNM} = S_3$ isə,*ABC* üçbucağının sahəsini tapın (şəkil 309)

○ *M* üçbucağın daxilində verilən nöqtə, *EF, PQ,, KN* isə həmin nöqtədən üçbucağın tərəflərinə çəkilən paraleller olsun. Alınan *EMK, MFQ* və *PNM* üçbucaqları *ABC* üçbucağına oxşardır. Bu üçbucağın sahəsi *S*isə,onda

$$\frac{S_1}{S} = \frac{EM^2}{AC^2}; \quad \frac{S_2}{S} = \frac{MF^2}{AC^2}; \quad \frac{S_3}{S} = \frac{PN^2}{AC^2}$$

olar. Buradan,

$$EM = \sqrt{\frac{S_1}{S}}AC \;;\quad MF = \sqrt{\frac{S_2}{S}}AC \;;\quad PN = \sqrt{\frac{S_3}{S}}AC$$

alırıq. $EM=AP$, $MF=NC$ olduğundan, $EM+PN+MF=AC$ olur. Yuxarıdakı bərabərlikləri burada nəzərə alsaq,

$$\left(\sqrt{\frac{S_1}{S}} + \sqrt{\frac{S_2}{S}} + \sqrt{\frac{S_3}{S}}\right)AC = AC. \Rightarrow S = \left(\sqrt{S_1} + \sqrt{S_2} + \sqrt{S_3}\right)^2$$

alınar. ●

§ 102.ÇEVRƏNİN UZUNLUĞU

1. Çevrənin uzunluğu. Radiusu R olan çevrənin uzanmayan sapdan oldugunu təsəvvür edək (şəkil 310). Bu çevrəni A nöqtəsində kəsərək düzləndirək. Alınan AB parçasının uzunluğu çevrənin uzunluğu olacaqdır.Çevrənin uzunluğunu C ilə işarə edib,onu radiusla ifadə edək.

Şəkil 310

Radiusu R olan çevrə verilmiş olsun. Onun daxilinə düzgün n-bucaqlı çəkib, onun tərəflərinin sayını iki qat artıraq.(şəkil 311). Bunun üçün mərkəzdən n-bucaqlının tərəflərinə endirilmiş perpendikulyarların çevrə ilə kəsişdiyi nöqtələr tapılır. Bu nöqtələri yanındakı əvvəlki təpə nöqtələri ilə birləşdikdə alınan çoxbucaqlının tərəflərinin sayı əvvəlkindən iki dəfə çox olacaqdır.

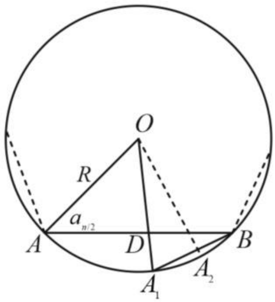
Verilən n-bucaqlının tərəfi və perimetri uyğun olaraq $AB = a_n$ və p_1, ikiqat artırmadan alınanınkılar isə uyğun olaraq $AA_1 = a_{2n}$ və

p_2; $A_1A_2 = a_{4n}$ və p_3 və s. olsun.. ΔABA_1-dən $AB < AA_1 + A_1B$ və ya $a_n < 2a_{2n}$, buradan da $p_1 < p_2$ alınır. Eyni qayda ilə. ΔA_1A_2B -dən $p_2 < p_3$ olduğu alınırvə s. .

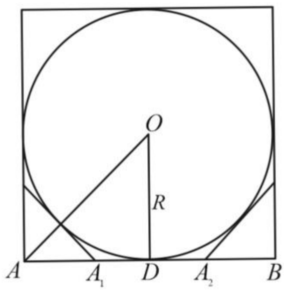
Beləliklə, ikiqat artırmada alınan düzgün çoxbucaqlıların perimetirləri üçün

$$p_1 < p_2 < p_3 < \cdots < p_n < \cdots \qquad (1)$$

münasibətini almış olarıq.



Şəkil 311



şəkil 312

İndi verilən çevrənin xaricinə düzgün *n*-bucaqlı çəkək (şəkil 312) və onun tərəflərinin sayını ikiqat artıraq. Göstərmək olar ki, bu halda alınan düzgün çoxbucaqlıların perimetrləri ardıcıllığı üçün

$$P_1 > P_2 > P_3 > \cdots > P_n > \cdots \qquad (2)$$

münasibəti doğrudur. Aydındır ki, $p_1 < P_n$. (1) və (2) münasibətlərindən $\{p_n\}$ ardıcıllığının artan, $\{P_n\}$ ardıcıllığının isə azalan olması çıxır. Özü də $\{p_n\}$ ardıcıllığı yuxarıdan, $\{P_n\}$ ardıcıllığı isə aşağıdan məhduddur.

Eyniadli düzgün çoxbucaqlıların oxşarlığından

$$\frac{p_n}{P_n} = \frac{k_n}{K_n}$$

münasibəti alınır. Burada k_n və K_n uyüun olaraqdaxilə və xaricə çəkilmiş çoxbucaqlıların apofemləridir.

Tərəflərinin sayını ikiqat artırdıqda daxilə və xaricə çəkilmiş çoxbucaqlların apofemləri, çevrənin radiusuna yaxınlaşdığından, $\frac{k_n}{K_N}$ və deməli $\frac{p_n}{P_n}$ nisbətləri vahidə yaxınlaşır.Odur ki, p_n və P_n perimetrləri eyni bir ədədə yaxınlaşır.

Tərif.Çevrənin daxilinə və xaricinə çəkilmişdüzgün çoxbucaqlıların tərəflərinin sayını ikiqat artırdıqda, onlardan birinin perimetri artaraq digərinin perimetri isə azalaraq eyni bir ədədə yaxınlaşır ki,bu ədədə həmin çevrənin uzunluğu deyilir və *c* ilə işarə olunur, yəni $p_n \to c$ və $P_n \to c$.

c ədədini tapmaq üçün əvvəlcə aşağıdakı teoremi isbat edək.

Teorem.*İki çevrənin uzunluqları nisbəti onların diametirlərinin nisbətinə bərabərdir:*

$$.\frac{c}{c'} = \frac{2R}{2R'} . \qquad (1)$$

Burada R və R' uyğun çevrələrin radiuslarıdır.

□Uzunluğu *c* olan çevrə daxilinə çəkilmiş *n*-bucaqlının perimetri p_n,uzunluğu c' olan çevrə daxilinə çəkilmiş *n*-bucaqlının perimetri isə p_n' olsun . Daxilə çəkilmiş düzgün çoxbucaqlı üçün

$$\frac{a_n}{2} = R\sin\frac{180^0}{n}$$

olduğundan

$$a_n = 2R\sin\frac{180^0}{n}, \quad p_n = na_n = 2Rn\sin\frac{180^0}{n}$$

olur. Eyni qayda ilə

$$p_n^{'} == 2R^{'}n\sin\frac{180^0}{n}.$$

Son bərabərlikləri tərəf-tərəfə bölüb $p_n \to c$, $p^{'}{}_n \to c^{'}$ şərtlərini nəzərə alsaq $(n \to \infty)$:

$$\frac{p_n}{p_n^{'}} = \frac{2R}{2R^{'}} \Rightarrow \frac{c}{c^{'}} = \frac{2R}{2R^{'}} \qquad (2)$$

alınar.■

(2) bərabərliyini

$$\frac{c}{2R} = \frac{c^{'}}{2R^{'}}$$

şəklində yazmaqla, aşağıdakı nəticəni alarıq.

Nəticə.*Çevrə uzunluğunun,öz diametrinə nisbəti sabit kəmiyyətdir***.***Bu sabit kəmiyyəti* π *(pi) hərfi ilə işarə edirlər,yəni*

$$\frac{C}{2R} = \pi,$$

Hələ yeni eradan əvvəl III əsrdə yaşamış Yunan alimi Arximed π ədəddi üçün $\frac{22}{7} \approx 3{,}14$ qiymətini təklif etmişdir. Bu, π ədədinin*0,002*-yə qədər dəqiqliklə qiymətdir. İsbat olunmuşdur ki, π irrasional ədəddir, yəni sonsuz onluq kəsrdir. Dəqiqlikdən asılı olaraq, hesablamalarda $\pi \approx 3{,}14$ və ya $\pi \approx 3{,}1416$ götürülür.

Teoremə görə $\frac{c}{2R} = \pi$ olduğundan çevrənin uzunluğu üçün

$$c = 2\pi R \qquad (3)$$

düsturunu alırıq.

2. Çevrə qövsünün uzunluğu. Təpəsi çevrənin mərkəzində olan β bucağı verilmiş olsun (şəkil 313). Çevrənin bu bucaq daxilində olan hissəsi, həmin mərkəzi bucağa uyğun *çevrə qövsüdur*. İndi həmin qövsün uzunluğunu tapaq. Bir dərəcəli bucağa uyğun qövs $\frac{\pi R}{180^0}$ olduğundan, β dərəcəli bucağa uyğun çevrə qövsü

$$l = \frac{\pi R}{180^0} \cdot \beta .$$

Əgər bucağın ölçüsü, radianla verilərsə, yəni $l = \frac{\pi R}{180^0} \cdot \beta = \alpha$ olarsa, onda qövsun uzunluğu $l = \alpha R$ olar. Burada α bucağın radian ölçüsüdür.

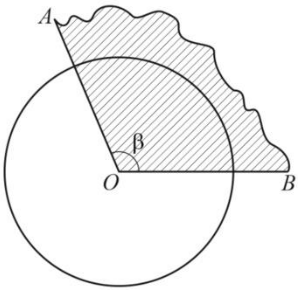
Məsələ 1. Radiusu *2m* olan *120*^{0}-li mərkəzi bucağa uyğun qövsün uzunluğunu tapın.

○ $\beta = 120^0$ və *R=2m* olduğunu nəzərə alsaq,

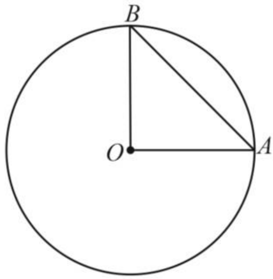
$$l = \frac{\pi R}{180^0} \cdot \beta = \frac{2\pi}{180^0} \cdot 120^0 = \frac{4}{3}\pi$$

alarıq, yəni $l = \frac{4\pi}{3} m.$ ●

Məsələ 2. *60^0*-li mərkəzi bucağa uyğun qövsü gərən vətər *5m*-dir.Bu qövsun uzunluğunu tapın.



Şəkil 313



şəkil 314

○ Vətər *60^0*-li qövsü gərirsə, onda vətər radiusa bərabərdir: *R=5m*və

$$l = \frac{5\pi}{180^0} 60^0 \Rightarrow l = \frac{5\pi}{3}(m)\,.$$●

Məsələ 3. Qövsünün uzunluğu $\frac{3\pi}{2}$ olan *90^0*-li qövsu gərən vətərin uzunluğunu tapın. (şəkil 314)

○ Əvvəlcə radiusu tapaq. Bunun üçün

$$l = \frac{\pi R}{180^0} \cdot \beta$$

düsturunda verilənləri nəzərə alsaq:

$$\frac{3}{2}\pi = \frac{\pi R}{180^0} \cdot 90^0;$$

buradan isə *R=3* alarıq. Katetləri *R=3* olan düzbucaqlı üçbucağın hipotenuzu axtarılan vətərdir. Deməli, $a = 3\sqrt{2}$ olar. ●

§ 103 DAİRƏNİN SAHƏSi

1. Dairənin sahəsi. Dairənin sahəsi olaraq, onun daxilinə və xaricinə çəkilmiş düzgün çoxbucaqlıların tərəflərinin sayını ikiqat artırdıqda, onların sahələrinin yaxınlaşdığı ədəd götürülür.

Dairənin daxilinə çəkilmiş düzgün *n*-bucaqlının sahəsi S_n, perimetri P_n, apofemi isə k_n olsun. Onda

$$S_n = \frac{1}{2} P_n \cdot k_n .$$

Daxilə çəkilmiş düzgün çoxbucaqlının tərəflərinin sayını ikiqat artırdıqda $P_n \to 2\pi R$ və $k_n \to R$ olmasını nəzərə alsaq, $S_n = \pi R^2$ alarıq. Bu ədəd dairənin sahəsi qəbul olunur və *S* ilə işarə olunur.

$$S = \pi R^2$$

Alınan düsturu $S = \frac{1}{2} cR$ kimi də yazmaq olar. Beləliklə, alırıq ki, *dairənin sahəsi onun çevrəsinin uzunluğu ilə radiusu hasilinin yarısına bərabərdir.*

2. **Dairə sektoru və seqmentinin sahəsi.** Mərkəzi bucağın dairədən ayırdığı hissəsinin dairə sektoru olduğunu bilirik (şəkil 315)

Teorem. *Radiusu R olan və α^0-li qövslə hüdudlanan sektorun sahəsi*

$$S = \frac{\pi R^2}{360^0} \alpha^0$$

düsturu ilə hesablanır.

□Dairənin sahəsi πR^2 olduğundan, 1^0-li qövsə uyğun sektorun sahəsi $\frac{\pi R^2}{360^0}$ olar. Buradan α^0-li qövs üçün

$$S_c = \frac{\pi R^2}{360^0} \cdot \alpha^0$$

alınar.■

Vətərin dairədən ayırdığı hissəsinin seqment olmasını nəzərə alsaq (şəkil 316), onun sahəsi üçün $\alpha^0 < 180^0$ olduqda

$$S = \frac{\pi R^2}{360^0}\alpha^0 - S_{\Delta AOB}$$

$\alpha > 180^0$ olduqda isə

$$S = \frac{\pi R^2}{360^0}\alpha^0 + S_{\Delta AOB}$$

olar.

Məsələ 1. Diametri 2 dəfə artdıqda, dairənin sahəsi neçə dəfə artar?

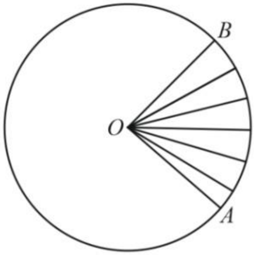
○ Şərtə görə $D_1=2R$ verilmişdir. Onda $S_1 = \pi R^2$. Diametri iki dəfə böyütsək , $D_2=4R$ olar. Beləliklə,

$$S_2 = \pi(2R)^2 = 4\pi R^2$$

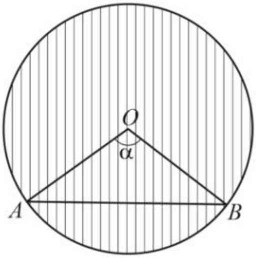
alınar. Deməli,

$$\frac{S_2}{S_1} = \frac{4\pi R^2}{\pi R^2} = 4$$

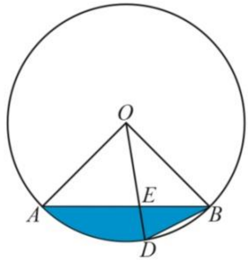
yəni dairənin sahəsi 4 dəfə artır. ●



Şəkil 315



şəkil 316



şəkil 317

Məsələ 2. Oturacağı $a\sqrt{3}$, hündürlüyü $\frac{a}{2}$ olan dairə seqmentinin sahəsini tapın.

○ Əvvəlcə sektorun sahəsini tapaq (şəkil 317). Bunun üçün AOB bucağını və radiusunu tapmaq lazımdır.

ΔBED -də şərtə görə $EB = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ və $ED = \frac{a}{2}$ olduğundan,

$BD = \sqrt{\frac{3a^2}{4} + \frac{a^2}{4}} = a$ olar. Deməli, $\angle EBD = 30^0$ olur, onda $\angle BOD = 60^0$ və buradan OB=OD=BD=a, yəni R=a tapılar. $\angle AOB = 120^0$ və R=a olduğundan,

$$S_{sek} = \frac{\pi R^2}{360^0} \cdot \alpha^0 = \frac{\pi a^2}{360^0} \cdot 120^0 = \frac{\pi a^2}{3}$$

olar.

$$S_{\Delta AOB} = EB \cdot OE = \frac{a\sqrt{3}}{2}(a - \frac{a}{2}) = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$$

Olduğundan,

$$S_{seqm.} = S_{sek} - S_{\Delta AOB} = \frac{\pi a^2}{3} - \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = a^2(\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4})$$

olar. Beləliklə,

$$S_{seqm.} = a^2(\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4}) \bullet$$

ÇALIŞMALAR

1. *ABC* üçbucağının sahəsi 84 sm^2və *AC*-*AB*=11 *sm*-dır,*sin A*=0,8 olduğunu bilərək *C* bucağının triqonometrikfunksiyalarının qiymətlərini tapın.

2. Paraleloqramın perimetri 90 *sm*, diaqonallarından biri25 *sm* sahəsi 420 sm^2-dır.Paraleloqramın ikinci diaqonalını tapın.

3. Diaqonalları 50 *sm* və *78 sm* olan paraleloqramın sahəsi 168sm^2-dır.Tərəflərinitapın.

4. Düzbucaqlının sahəsinin bir tərəfinin kvadratı ilə bu tərəflə diaqonal arasındakı bucağın tangensi hasilinə bərabər olduğunu isbat edin.

5. Düzbucaqlı üçbucağın sahəsi 150 sm^2,perimetri 6 *dm*-dır. Düzbucaq təpəsindən hipotenuza endirilən perpendikulyarın uzunluğunu tapın.

6. Düzbucaqlı üçbucağın sahəsi 84 sm^2,daxilinə çəkilmiş çevrənin radiusu 3 *sm*-dır.Katetlərini tapın

7. Üçbucağın daxilinə çəkilmiş çevrənin radiusu 4 *sm* olub,tərəflərdən birini toxunma nöqtəsində 6 *sm*,8 *sm* uzunluqluu hissələrə ayırır.Üçbucağın sahəsini tapın.

8. Üçbucağın iki tərəfi 25 *sm*, 63 *sm*,sahəsi 630 sm^2-dır.Xaricinə çəkilmiş çevrənin radiusunu tapın.

9. İsbat edin ki, üçbucağın medianları onu6 bərabər sahəli üçbucaqlara ayırır.

10. Medianları 9, 12, 15 olan üçbucağın sahəsini tapın.

11. Hündürlükləri 60, 28, 21 olan üçbucağın sahəsini tapın.

12. Bərabəryanlı üçbucagın perimetri *2p*, oturacağına bitişik bucağı α -dır. Üçbucağın sahəsini tapın.

13. *X* nöqtəsi *ABCD* paraleloqramın daxilində yerləşir. İsbat edin ki, $S_{ABX}+S_{CDX}+S_{BCX}+S_{ADX}$ doğrudur.

14. Bir tərəfi 28 *sm*, qalan iki tərəfinə çəkilmiş medianları 39 *sm*, 45 *sm* olan üçbucağın sahəsini tapın.

15. Sahəsi *Q* olan dairə xaricinə iti bucağı30^0 olan romb çəkilmişdir. Rombun sahəsini tapın.

16. Üçbucağın bir tərəfi 44 *sm*, daxilinə çəkilmiş çevrənin diametri 11 *sm*, sahəsi 264 sm^2-dır. Üçbucağın xaricinə çəkilmiş çevrənin radiusunu tapın.

17. Yan tərəfləri 25 *sm*, 40 *sm*, diaqonalları 74 *sm*, 51 *sm* olan trapesiyanın sahəsini tapın.

18. Oturacaqları 1 *dm* və 7 *dm* olan trapesiyanın sahəsi oturacaqlarına paralel olan düz xətlə yarıya bölünmüsdür. Bu düz xəttin yan tərəflər arasındaki hissəsini tapın

19. Çevrə daxilinə yan tərəfi 15 *sm*, orta xətti 16 *sm* və böyük oturacağı çevrənin diametri olan trapesiya çəkilmişdir. Bu trapesiyanın sahəsini tapın.

20. Bərabəryanlı trapesiyanın kiçik oturacagı 7*sm*, yan tərəfinə perpendikulyar olan diagonalı 20 *sm*-dır.Trapesiyanın sahəsini tapın.

21. İki oxşar rombun sahələri $600sm^2$ və $1536sm^2$-dır. Kiçik rombun böyük diaqonalı, böyük rombun tərəfinə bərabər olduğuna bilərək bu tərəfi tapın.

22. Çevrənin xaricinə yan tərəfləri 20 *sm* və 25 *sm* olan düzbucaqlı trapesiya çəkilmişdir.Təpə nöqtələri trapesiyanın çevrəyə toxunma nöqtələri olan dördbucaqlının sahəsini tapın

23. Bərabəryanlı üçbucağın oturacağına bitişik bucağı α, daxilinə çəkilmiş çevrənin radiusu *r*-dır. Üçbucağın sahəsini tapın.

24. Diaqonalları qarışılıqlı perpendekulyar olan trapesiyanın hündürlüyü 4-ə bərabərdir. Diaqonallarından biri 5olduğunu bilərək trapesiyanın sahəsini tapın.

25. *R* radiuslu dairə daxilinə çəkilmiş düzgün səkkizbucağlı və onikibucağlının sahələrini tapın.

26. Radiusu *a* olan dairələrin mərkəzləri, tərəfi $a\sqrt{2}$ olan düzgün üçbucağın təpələrində yerləşdir.Bu dairələrin hər üçünün ortaq hissəsinin sahəsini tapın.

TESTLƏR

1. İki tərəfi uyğun olaraq 4 *smvə* 8 *sm* və bu tərəflər arasındakı bucağı

2. İki oxşar üçbucağın uyğun tərəflərinin nisbəti 2:3 kimidir. Böyük uçbucağın sahəsi 27 sm^2 olarsa, kiçik üçbucağın sahəsini tapın.

A) 12 sm^2 B)9 sm^2 C)10 sm^2 D)15 sm^2 E)8 sm^2

3. Perimetri 20 sm^2, sahəsi 40 sm^2 olan üçbucağın daxilinə çəkilən çevrənin radiusunu tapın.

A) 3 *sm* B)5 *sm* C)6 *sm* D)4 *sm* E)2 *sm*

4.Oturacaqları 14 *sm* və 8 *sm*, hündürlüyü 7 *sm* olan trapesiyanın sahəsini tapın.

A) 70 sm^2 B)68 sm^2 C)56 sm^2 D)77 sm^2 E)22 sm^2

5.Perimetri 32*sm* olan kvadratın sahəsini tapın.

A) 100 sm^2 B)36 sm^2 C)256 sm^2 D)48 sm^2 E)64 sm^2

6.Orta xətti 6 *sm*, hündürlüyü 7 *sm* olan trapesiyanın sahəsini tapın.

7. Uyğunluğu müəyyən edin.

1. Rombun sahəsi

2. Üçbucağın sahəsi

3. Paraleloqramın sahəsi

a. İki tərəfi ilə onlar arasında qalan bucağın sinusu hasilinin yarısına bərabərdir.

b. Bir tərəfinin kvadratı ilə iki tərəfi arasında qalan bucağın sinusu hasilinə bərabərdir.

c. Diaqonalları hasilinin yarısına bərabərdir.

d. Tərəfi ilə bu tərəfə çəkilmiş hündürlüyün hasilinə bərabərdir.

e. İki tərəfi ilə onlar arasında qalan bucağın sinusu hasilinə bərabərdir.

XV FƏSİL
VEKTORLAR və TƏTBİQLƏRİ
§ 104 VEKTOR ANLAYIŞI

Riyaziyyatın vektor və onunla bağlı bəzi məsələləri öyrənən hissəsi *vektorlar cəbri* adlanır. Bu fəsildə biz vektorlar cəbrinin bir sıra əsas məsələlərini nəzərdən keçirəcəyik.

Gündəlik həyatda *skalyar* və *vektor kəmiyyətlər* adlanan iki növ kəmiyyət istifadə olunur.

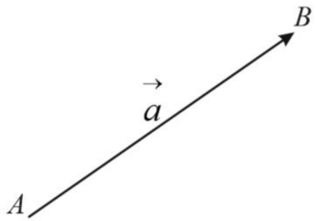
Tərif 1. Yalnız ədədi qiyməti ilə xarakterizə olunan kəmiyyətə *skalyar kəmiyyət* və ya sadəcə olaraq *skalyar* deyilir

Məsələn, uzunluq, sahə, həcm, kütlə, tempratur və s. skalyar kəmiyyətlərdir.

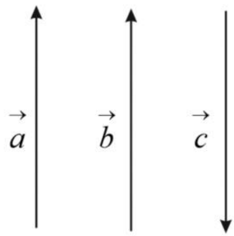
Tərif 2. Qiymət və istiqaməti ilə xarakterizə olunan kəmiyyətə *vektor kəmiyyət* və ya sadəcə *vektor* olaraq deyilir.

Məsələn, qüvvə, hərəkətin sürəti və təcili və s. vektor kəmiyyətlərdir. Vektor kəmiyyətlər həndəsi olaraq istiqamətləndirilmiş düz xətt parçası ilə göstərilir. Vektor ox işarəsi ilə göstərilir (şəkil 318). *A* nöqtəsi vektorun *başlanğıcı, B* nöqtəsi *sonu* adlanır. Bu vektor $\overrightarrow{AB}$ və ya $\bar{a}$ kimi işarə olunur.

Vektorun uc nöqtələri arasındakı məsafəyə, onun *uzunluğu* və ya *modulu* deyilir və $|\overrightarrow{AB}|$ və ya $|\overline{a}|$ kimi işarə olunur. Uzunluğu vahidə bərabər olan vektora *vahid vektor* deyilir. $\overline{a}$ vektoru istiqamətindəki vahid vektor $\overline{a^0}$ ilə işarə olunur.



Şəkil 318.



Şəkil 319.

Uzunluqları bərabər, istiqamətləri eyni olan vektorlara bərabər vektorlar deyilir (şəkil 319-da $\overline{a}$ və $\overline{b}$). Belə vektorları paralel köçürmə ilə tamamilə bir-birinin üzərinə gətirmək olur.

Uzunluqları bərabər, istiqamətləri əks oloan vektorlara *əks vektorlar* deyilir (şəkil 319-da $\overline{a}$ və $\overline{c}$).

Tətbiq (başlanğıc) nöqtəsi dəyişməyən vektora *bağlı vektor* deyilir. Yalnız öz istiqamətində yeri dəyiştirilə bilən vektora *sürüşən vektor* deyilir. Məsələn, cismə hərəkət istiqamətində təsir edən qüvvə sürüşən vektora misal ola bilər. İstiqmətini dəyişmədən fəzanın istənilən nöqtəsinə köçürülə bilən vektora *sərbəst vektor* deyilir. İrəliləmə hərəkətində cismə təsir edən qüvvə vektoru sərbəst vektora misal ola bilər. Biz yalnı sərbəst vektorları öyrənəcəyik.

Tərif 3. Bir düz xətt və ya paralel düz xətlər üzərində yerləşən vektorlara *kollienar vektorlar* deyilir.

Tərif 4. Bir müstəvi və ya paralel müstəvilər üzərində yerləşən vektorlara *komplanor vektorlar* deyilir.

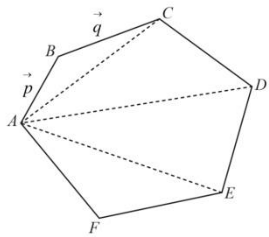
Başlanğıc və son nöqtələri üst-üstə düşən vektora *sıfır vektor* deyilir və $\overline{0}$ ilə işarə olunur. Sıfır vektorun uzunluğu sıfır, istiqaməti isə qeyri-müəyyəndir. Sıfır vektor istənilən vektorla kollinear, iki vektorla isə komplanardır.

Aydındır ki, iki vektor həmişə komplanardır. Odur ki, vektorların komplanarlığından danışarkən onların sayının üç və daha çox olmasını nəzərdə tutacağıq.

Məsələ. *ABCDEF* düzgün altıbucaqlısında $\overline{AB} = \overline{p}$, $\overline{BC} = \overline{q}$ olduğunu bilərək aşağıdakıları müəyyən edin. (şəkil 320)

a) altıbucaqlının tərəfləri üzərinə düşən vektorlardan kollinear və komplanar olan vektorlara nümunələr göstərin.

b) $\overline{DE}$ və $\overline{FE}$ vektorlarını $\overline{p}$ və $\overline{q}$ ilə ifadə edin.



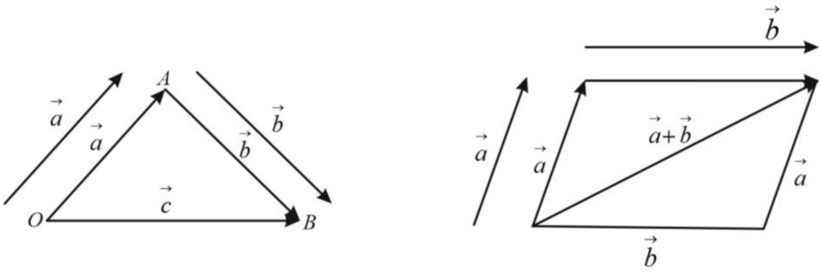
Şəkil 320

○ a) Kollinear vektorlar: $\overline{AB}$ ilə $\overline{ED}$, $\overline{BC}$ ilə $\overline{FE}$, $\overline{CD}$ ilə $\overline{FA}$, $\overline{AB}$ ilə $\overline{DE}$ və s., komplanar vektorlar: $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ və $\overline{CD}$; $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ və $\overline{DE}$ və s.

b) $\overline{DE}$ və $\overline{AB}$ əks vektorlar olduğundan, $\overline{AB} = \overline{p}$ isə, $\overline{DE} = -\overline{p}$-dir. Eləcə də $\overline{BC} = \overline{FE}$ olduğundan (uzunluqları və istiqamətləri eyni), $\overline{BC} = \overline{FE} = \overline{q}$ olur. ●

§ 105. VEKTORLAR ÜZƏRİNDƏ ƏMƏLLƏR və ONLARIN XASSƏLƏRİ.

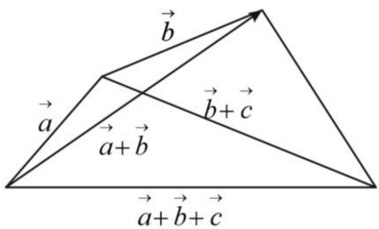
1.Vektorların toplanması. $\overline{a}$ və $\overline{b}$ vektorları verilmiş olsun (şəkil 321 a). İxtiyari *O* nöqtəsi qeyd edib, əvvəlcə $\overline{OA} = \overline{a}$ vektorunu, sonra isə $\overline{AB} = \overline{b}$ vektorunu ayıraq. Birinci vektorun başlanğıcını ikinci vektorun sonu ilə birləşdirən $\overline{OB} = \overline{c}$ vektoruna $\overline{a}$ və $\overline{b}$ vektorlarının cəmi deyilir və $\overline{a} + \overline{b} = \overline{c}$ kimi yzılır. Cəm vektorunu başqa usulla da almaq olar. Bunun üçün *O* nöqtəsindən başlayaraq $\overline{a}$ və $\overline{b}$ vektorları ayrılır. Tərəfləri bu vektorlar olan paraleloqram qurulur (şəkil 321b). Paraleloqramın *O* təpə nöqtəsindən çıxan diaqonalı $\overline{OB} = \overline{a} + \overline{b}$ olacaqdır.



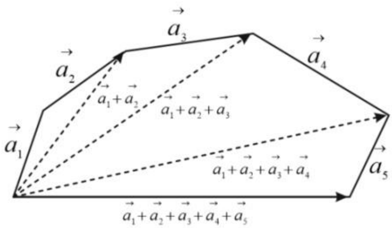
Şəkil 321

Şəkil 321 b-dən görünür ki, $\overline{a}+\overline{b}=\overline{b}+\overline{a}$, yəni vektorların cəmi üçün yerdəyişmə qanunu doğrudur. Vektorların cəmi üçün $(\overline{a}+\overline{b})+\overline{c} = \overline{a}+(\overline{b}+\overline{c})$, yəni, toplamada qruplaşdırma qanunu doğrudur (şəkil 322). Buna görə də üç vektorun cəmi sadəcə olaraq $\overline{a}+\overline{b}+\overline{c}$ kimi yazılır.

Sonlu sayda vektorun cəmini tapmaq üçün aşağıdakı qaydadan da istifadə olunur (şəkil 323).



Şəkil 322



Şəkil 323

Qayda. Birinci vektorun sonu ikincinin başlanğıcı, ikincinin sonu üçüncünün başlanğıcı və s. olmaqla bütün toplanan vektorlar qurulur. Birinci vektorun başalnğıcını axırıncı vektorun sonu ilə birləşdirən vektor verilən vektorların cəmi olacaq:

$$\overline{a_1}+\overline{a_2}+\overline{a_3}+\overline{a_4}+\overline{a_5}=f.$$

Toplama zamanı axırıncı vektorun sonu, birinci vektorun başlanğıcı ilə üst-üstə düşərsə, vektorların cəmi sıfır olur. Aydındır ki, əks vektorların cəmi sıfır vektordur.

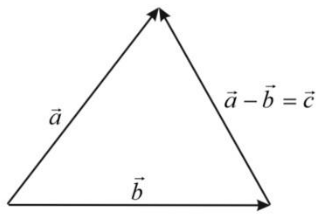
2.Vektorların çıxılması. $\overline{a}$ və $\overline{b}$ vektorlarının fərqi elə $\overline{c}$ vektoruna deyilir ki, onu $\overline{b}$ vektoru ilə topladıqda $\overline{a}$ vektoru alınsın (şəkil 324):

$$\overline{c} = \overline{a} - \overline{b}.$$

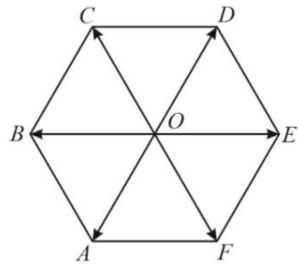
Buradan vektorların çıxılması üçün qayda alınır: $\overline{a}$ və $\overline{b}$ vektorları bir başlanğıca gətirilir, $\overline{a}$ vektorunun sonundan $\overline{b}$ vektorunun sonuna doğru yönələn vektor $\overline{a} - \overline{b}$ olur.

Məsələ 1. *O* nöqtəsi düzgün altıbucaqlının mərkəzi olduqda aşağıdakı cəmi tapın (şəkil 325):

$$\overline{OA} + \overline{OB} + \overline{OC} + \overline{OD} + \overline{OE} + \overline{OF}.$$



Şəkil 324



Şəkil 325

○ Altıbucaqlının diaqnolları kəsişmə nöqtəsində yarıya bölünür. Deməli, $\overline{OA}$ ilə $\overline{OD}$, $\overline{OB}$ ilə $\overline{OE}$ və $\overline{OC}$ ilə $\overline{OF}$ əks vektorlardır. Əks vektorların cəmi sıfır vektor olduğunu və qruplaşdırma qanununu nəzərə alsaq,

$$\overline{OA} + \overline{OB} + \overline{OC} + \overline{OD} + \overline{OE} + \overline{OF} =$$

$$=(\overline{OA} + \overline{OD}) + (\overline{OB} + \overline{OE}) + (\overline{OC} + \overline{OF}) = \overline{0} + \overline{0} + \overline{0} = \overline{0}$$

alınar. ●

Məsələ 2. *ABCDEF* düzgün altıbucaqlısında $\overline{AB} = \overline{p}$, $\overline{BC} = \overline{q}$ qəbul edərək, $\overline{AC}$, $\overline{AD}$, $\overline{AE}$, $\overline{AF}$ vektorlarını $\overline{p}$ və $\overline{q}$ ilə ifadə edin:

○ $\overline{AC}=\overline{AB}+\overline{BC}=\overline{p}+\overline{q}$,

$\overline{AD}=\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{CD}=\overline{p}+\overline{q}+(\overline{q}-\overline{p})=2\overline{q}$,

$\overline{AE}=\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{CD}+\overline{DE}=\overline{p}+\overline{q}+(\overline{q}-\overline{p})-\overline{p}=2\overline{q}-\overline{p}$,

$\overline{AF}=\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{CD}+\overline{DE}+\overline{EF}=\overline{p}+\overline{q}+(\overline{p}-\overline{q})+(-\overline{p})+(-\overline{q})=\overline{q}-\overline{p}$.

●

3. Vektorun ədədə vurulması. $\overline{a}$ vektorunun m ədədinə hasili elə $\overline{b}=m\overline{a}$ vektoruna deyilir ki, onun modulu $|m|\cdot|a|$, istiqaməti isə $m>0$ olduqda $\overline{a}$ vektorunun istiqaməti ilə eyni, $m<0$ olduqda isə əksinə olsun. $m=0$, yaxud $\overline{a}=0$ olduqda hasil sıfır vektor olur. Buradan aydındır ki, $\overline{a}$ vektorunu $m=-1$ ədədinə vurduqda onunla əks olan vektor alınır.

Teorem. *$\overline{a}$ $(a\neq 0)$ və $\overline{b}$ vektorları kollienar olduqda $\overline{b}=m\overline{a}$ münasibətini ödəyən yeganə m ədədi var.*

□ Doğurdan da kollienar $\overline{a}$ və $\overline{b}$ vektorları eyni istiqamətli olarsa, $m=|\overline{b}|/|\overline{a}|$, müxtəlif istiqamətli olduqda isə $m=-|\overline{b}|/|\overline{a}|$ olar, $\overline{b}=0$ olduqda $m=0$ olması aydındır.

Verilən $\overline{b}=m\overline{a}$ şərtini ödəyən m ədədinin yeganəliyi onun tapılma qaydasından alınır. ■

Vektorun ədədə hasili üçün

$$(m+n)\overline{a}=m\overline{a}+n\overline{a} \qquad (1)$$

$$m(\overline{a}+\overline{b})=m\overline{a}+m\overline{b} \qquad (2)$$

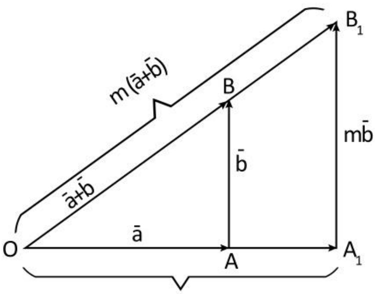
qanunları doğrudur. (1) bərabərliyi aşkardır. (2) bərabərliyini isbat etmək üçün $\overline{OA}=\overline{a}$, $\overline{AB}=\overline{b}$, $\overline{OB}=\overline{a}+\overline{b}$ olan OAB üçbucağını quraq (şəkil 326). Fərz edək ki, $m>0$-dır. $\overline{OA_1}=m\overline{OA}=m\overline{a}$ və $\overline{OB_1}=m\overline{OB}=m(\overline{a}+\overline{b})$ quraq, alınan A_1 və B_1 nöqtələrini birləşdirək. İki tərəfi mütənasib, aralarındakı bucağı bərabər olduğu üçün OA_1B_1 üçbucağı OAB üçbucağı ilə oxşardır. Buradan A_1B_1

və *AB* paraleldir. $A_1B_1=AB\cdot m$, yəni, $\overline{A_1B} = m\,\overline{AB} = m\overline{b}$; $\overline{OB_1} = \overline{OA_1} + \overline{A_1B_1}$, onda

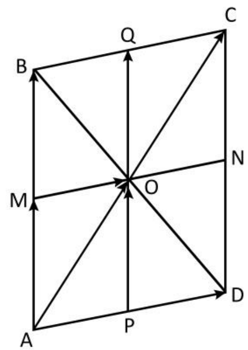
$m\,(\overline{a}+\overline{b}) = m\overline{a} + m\overline{b}$ olar. $m<0$ olduqda bütün vektorların istiqaməti əksinə dəyişəcək, uzunluqların nisbəti isə dəyişməyəcək,yəni

$$-m(\overline{a}+\overline{b}) = -m\overline{a} - m\overline{b}$$

olacaq (müəyyənlik üçün $m>1$ götürülmüşdür).



Şəkil 326



Şəkil 327

Bu xassələrdən aydın olur ki, vektorların cəmində, cəbri ifadələrin cəmində olduğu kimi, ortaq vuruğu mötərizə xaricinə çıxarmaq, mötərizəni açıb oxşar hədləri islah etmək, bərabərliyin bir tərəfindən həddi əks işarə ilə digər tərəfinə keçirmək və s. əməliyyatları aparmaq olar.

Məsələ 3. $\overline{AB} = \overline{a}$ və $\overline{AD} = \overline{b}$ vektorları üzərində qurulmuş paraleloqramdan istifadə edərək, şəkil üzərində (şəkil 327) aşağıdakı eynilikləri yoxlayın:

a) $\dfrac{\overline{a}}{2} + \dfrac{\overline{b}}{2} = \dfrac{\overline{a}+\overline{b}}{2}$;

b) $\dfrac{\overline{a}-\overline{b}}{2} + \overline{b} = \dfrac{\overline{a}+\overline{b}}{2}$;

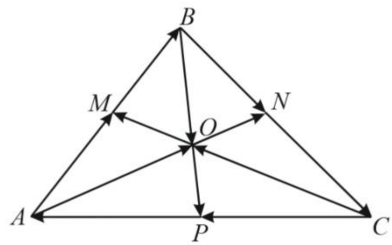
c) $\left(\overline{a} + \dfrac{\overline{b}}{2}\right) - \left(\overline{b} - \dfrac{\overline{a}}{2}\right) = \dfrac{1}{2}(\overline{a}+\overline{b})$.

○ **a)** Şəkildən göründüyü kimi $\overline{AM}=\dfrac{\overline{a}}{2}$, $\overline{MO}=\dfrac{\overline{b}}{2}$ olduğundan, $\overline{AM}+\overline{MO}=\dfrac{\overline{a}}{2}+\dfrac{\overline{b}}{2}=\overline{AO}$, $\overline{a}+\overline{b}=\overline{AC}$, $\dfrac{\overline{a}+\overline{b}}{2}=\dfrac{\overline{AC}}{2}=\overline{AO}$, deməli, $\dfrac{\overline{a}}{2}+\dfrac{\overline{b}}{2}=\dfrac{\overline{a}+\overline{b}}{2}$;

b) $\dfrac{\overline{a}-\overline{b}}{2}=\dfrac{\overline{DB}}{2}$, $\dfrac{\overline{a}-\overline{b}}{2}+\overline{b}=\dfrac{\overline{DB}}{2}+\overline{AD}=\overline{AD}+\overline{DO}=\overline{AO}$, $\dfrac{\overline{a}+\overline{b}}{2}=\overline{AO}$ olduğundan, $\dfrac{\overline{a}-\overline{b}}{2}+\overline{b}=\dfrac{\overline{a}+\overline{b}}{2}$ olar;

c) $\left(\overline{a}+\dfrac{\overline{b}}{2}\right)-\left(\overline{b}-\dfrac{\overline{a}}{2}\right)=\overline{AQ}-\overline{AN}=\overline{NQ}$, $\dfrac{1}{2}(\overline{a}-\overline{b})=\dfrac{1}{2}\overline{DB}=\overline{OB}$, $\overline{NQ}=\overline{OB}$. ●

Məsələ 4. $\overline{AB}=\overline{c}$, $\overline{BC}=\overline{a}$ və $\overline{CA}=\overline{b}$ vektorları üçbucağın tərəfləri üzərinə düşən vektorlardır. Bu üçbucağın medianları üzərinə düşən $\overline{AN}$, $\overline{BP}$, $\overline{CM}$ vektorlarını $\overline{a}$ və $\overline{b}$ vektorları ilə ifadə edin (şəkil 328).

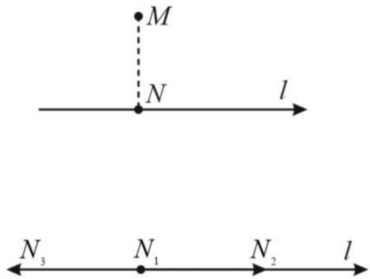


Şəkil 328

○ Şəkildən göründüyü kimi $\overline{AN}+\overline{NC}=\overline{AC}$, buradan isə $\overline{AN}=\overline{AC}-\overline{NC}=-\overline{b}-\dfrac{\overline{a}}{2}=-\left(\dfrac{\overline{a}}{2}+\overline{b}\right)$ yəni, $\overline{AN}=-\left(\dfrac{\overline{a}}{2}+\overline{b}\right)$ olur. $\overline{BP}=\overline{BC}+\overline{CP}$ olduğundan, $\overline{BP}=\overline{a}+\dfrac{\overline{b}}{2}$ alırıq. $\overline{CM}=\overline{CA}+\overline{AM}=\dfrac{\overline{b}}{2}+\overline{c}$ və $\overline{c}=-(\overline{a}+\overline{b})$

olduğundan $\overline{CM} = -\dfrac{\overline{a} - \overline{b}}{2}$

alınır. ●



§ 106. VEKTORUN OX ÜZƏRİNDƏ PROYEKSİYASI və İKİ VEKTOR ARASINDAKI BUCAQ

Şəkil 329

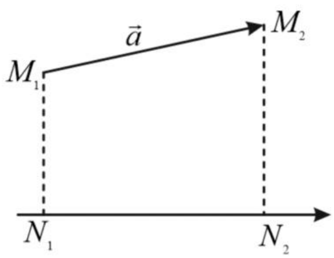
İxtiyari l oxu və onun xaricində bir M nöqtəsi götürək (şəkil 329). M nöqtəsindən l oxuna perpendikulyar endirək və bu perpendikulyarın l oxunu kəsdiyi nöqtəni N ilə işarə edək. N nöqtəsinə *M nöqtəsinin l oxu üzərində proyeksiyası* deyilir. Bu qayda ilə tapılan proyeksiya *ortoqonal proyeksiya* adlanır.

İndi l oxu üzərində $\overline{N_1N_2}$ vektorunu götürək (şəkil 329 b). Bu vektorun istiqaməti oxun istiqamətinin eyni və ya onun əksinə ola bilər. Məsələn, şəkildəki $\overline{N_1N_2}$ vektorunun istiqaməti l oxunun istiqamətinin eyni , $\overline{N_1N_3}$ vektorunun istiqaməti isə onun əksinədir.

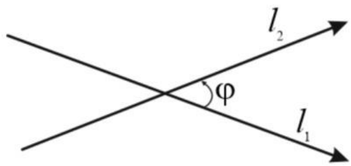
Uzunluğu $d = \left|\overline{N_1N_2}\right|$ olan $\overline{N_1N_2}$ vektorunun qiyməti aşağıdakı kimi təyin olunur: $\overline{N_1N_2}$ vektorunun istiqaməti oxun istiqamətinin eyni olduqda müsbət d ədədi $\overline{N_1N_2}$ -nin istiqaməti oxun istiqamətinin əksinə olduqda isə mənfi d ədədi həmin vektorun qiyməti hesab olunur.

Tutaq ki, müstəvi üzərində yerləşən $\overline{M_1M_2}$ vektorunun M_1 və M_2 nöqtələrindən l oxuna endirilmiş perpendikulyarlar bu oxu uyğun olaraq N_1 və N_2 nöqtələrində kəsir (şəkil 330). $\overline{N_1N_2}$ vektorunun qiymətinə $\overline{M_1M_2}$ vektorunun l oxu üzərində proyeksiyası deyilir və $\Pr_l \overline{M_1M_2}$ kimi yazılır. $\overline{b}$ vektoru l oxu istiqamətində verilmiş vektor olsun. $\overline{a}$ vektorunun $\overline{b}$ vektoru üzərinə proyeksiyası onun l oxu üzrə proyeksiyası kimi təyin olunur və $\Pr_b \bar{a} = \Pr_l \bar{a}$ kimi yazılır.

Aydındır ki, vektorun ox üzərində proyeksiyası həqiqi ədəddir. Vektor,



şəkil 330



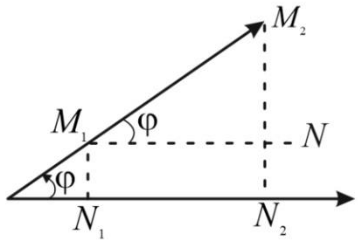
şəkil 331

proyeksiya oxuna perpendikulyar olduqda, onun həmin ox üzərində proyeksiyası sıfıra bərabərdir.

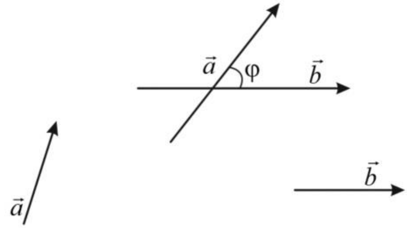
Müstəvi üzərində yerləşən hər hansı *M* nöqtəsində kəsişən l_1 və l_2 oxları verilmiş olsun (şəkil 331).

l_1 oxunun ən qısa yolla l_2 oxu üzərinə düşməsi (istiqamətləri üst-üstə düşmək şərti ilə) üçün onu müəyyən φ bucağı qədər döndərmək lazımdır. Həmin bucağa l_1 və l_2 *oxları arasındakı bucaq* deyilir və $\varphi = (l_1 \hat{\ } l_2)$ kimi yazılır. Bir-birinə paralel və istiqamətləri eyni olan oxlar arasındakı bucaq sıfıra, bir-birinə paralel və istiqamətləri əks olan oxlar arasındakı bucaq isə π-yə bərabərdir. l_1 oxunun l_2 oxu üzərinə düşməsi üçün onu saat əqrəbi hərəkətinin *əksi istiqamətində fırlatdıqda alınan bucaq müsbət*, əks halda isə mənfi qəbul olunur. l oxu ilə $\bar{a} = \overline{M_1M_2}$ vektoru arasındakı bucaq dedikdə həmin oxla M_1 və M_2 nöqtələrindən keçən və istiqaməti M_1-dən M_2-yə doğru yönələn ox arasındakı bucaq başa düşülür (şəkil 332).

l oxu ilə $\overline{M_1M_2}$ vektoru arasındakı bucağa həmin *vektorun l oxuna meyl bucağı* deyilir. $\bar{a}$ və $\bar{b}$ vektorları arasındakı bucaq olaraq bu vektorlar istiqamətində olub, kəsişən iki ox arasındakı bucaq götürülür və $\varphi = (\bar{a} \hat{\ } \bar{b})$ kimi işarə olunur ($0 \le \varphi \le \pi$, şəkil 333).



Şəkil 332



şəkil 333

§ 107. VEKTORUN PROYEKSİYASININ XASSƏLƏRİ.

Teorem 1. *Sabit vuruğu proyeksiya işarəsi xaricinə çıxarmaq olar. Yəni* $\Pr_l(\lambda\overline{a}) = \lambda \Pr_l \overline{a}$.

□ AB vektorunun l oxu ilə əmələ gətirdiyi bucaq φ olsun (şəkil 334). Fərz edək ki, λ >0-dır. Onda $\lambda\overline{AB}$ vektoru l oxu ilə həmin φ bucağını, ($-\lambda\ \overline{AB}$) vektoru isə l oxu ilə $\pi-\varphi$ bucağı əmələ gətirər. Şəkilə əsasən.

1. $\Pr_l(\lambda\overline{AB}) = \left|\lambda\overline{AB}\right|\cos\varphi = \lambda\left|\overline{AB}\right|\cos\varphi = \lambda \Pr_l \overline{AB}$.

2. $\Pr_l(-\lambda\overline{AB}) = \left|-\lambda\overline{AB}\right|\cos(\pi-\varphi) = -\left|\lambda\overline{AB}\right|\cos\varphi =$

$-\lambda\left|\overline{AB}\right|\cos\varphi = -\lambda \Pr_l \overline{AB}$

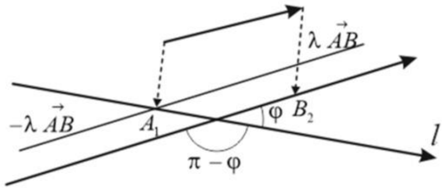
alarıq. ■

Teorem 2. *Vektorlar cəminin proyeksiyası, toplananların proyeksiyaları cəminə bərabərdir.*

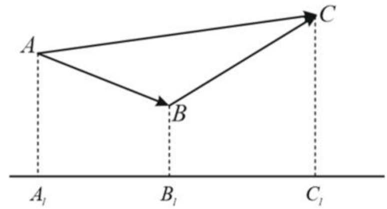
□ $\overline{AB}+\overline{BC}=\overline{AC}$ cəminə baxaq. A, B, C nöqtələrinin l oxu üzərindəki proyeksiyaları A_l , B_l, C_l olsun. Bu nöqtələr l oxu üzərində aşağıdakı vəziyyətlərdə yerləşə bilər:

1) A_l, B_l, C_l; 2) A_l, C_l, B_l; 3) B_l, C_l, A_l ;

4) $B_l,\ A_l,\ C_l;$ 5) $C_l,\ A_l,\ B_l;$ 6) $C_l,\ B_l,\ A_l.$



Şəkil 334



Şəkil 335

Birinci halda (şəkil 335)

$$\Pr_l(\overline{AB}+\overline{BC}) = \Pr_l \overline{AC} = \left|\overline{A_lC_l}\right|,$$

$$\Pr_l \overline{AB} + \Pr_l \overline{BC} = \left|\overline{A_lB_l}\right| + \left|\overline{B_lC_l}\right| = \left|\overline{A_lC_l}\right|$$

olar. Sağ tərəflər bərabər olduğundan, sol tərəflər də bərabərdir.

$$\Pr_l(\overline{AB}+\overline{BC}) = \Pr_l \overline{AB} + \Pr_l \overline{BC}.$$

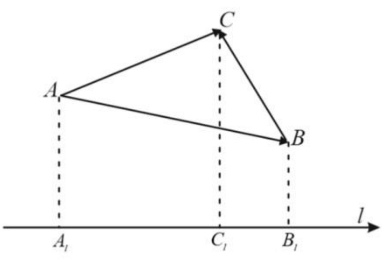
İkinci halda (şəkil 336).

$$\Pr_l(\overline{AB}+\overline{BC}) = \Pr_l \overline{AC} = \left|\overline{A_lC_l}\right|,$$

$$\Pr_l \overline{AB} + \Pr_l \overline{BC} = \left|\overline{A_lB_l}\right| + (-\left|\overline{B_lC_l}\right|) = \left|\overline{A_lC_l}\right|,$$

buradan da

$$\Pr_l(\overline{AB}+\overline{BC}) = \Pr_l \overline{AB} + \Pr_l \overline{BC}$$



Şəkil 336 alınar.

Qalan halların da doğruluğu bu qayda ilə göstərilir. ■

Bu teoremlərdən alınır ki, vektorlar üzərində xətti əməllər onların ixtiyari ox üzərindəki proyeksiyaları üçün də doğrudur.

Məsələ 1. $\Pr_l \bar{a} = -3, \Pr_l \bar{b} = 1$ olduqda aşağıdakıları tapın:

a) $\Pr_l (2\bar{a} + 3\bar{b})$; b) $\Pr_l (3\bar{a} - \bar{b})$; c) $\Pr_l (\frac{1}{2}\bar{a} + \bar{b})$.

○

a) $\Pr_l (2\bar{a} + 3\bar{b}) = \Pr_l 2\bar{a} + \Pr_l 3\bar{b} = 2\Pr_l \bar{a} + 3\Pr_l \bar{b} = 2\cdot(-3) + 3\cdot 1 = -6 + 3 = -3$;

b) $\Pr_l (3\bar{a} - \bar{b}) = \Pr_l 3\bar{a} - \Pr_l \bar{b} = 3\Pr_l \bar{a} - \Pr_l \bar{b} = -9 - 1 = -10$

c) $\Pr_l (\frac{1}{2}\bar{a} + \bar{b}) = \Pr_l (\frac{1}{2}\bar{a}) + \Pr_l \bar{b} = \frac{1}{2}\Pr_l \bar{a} + \Pr_l \bar{b} = -\frac{3}{2} + 1 = -\frac{1}{2}$. ●

Məsələ 2. Hansı halda $\Pr_l \bar{a} = \Pr_l \bar{b}$ doğru olar?

○ $\Pr_l \bar{a} = \Pr_l \bar{b}$ olduqda $\Pr_l \bar{a} - \Pr_l \bar{b}$, yəni $\Pr_l (\bar{a} - \bar{b}) = 0$ olur. Buradan görünür ki, $\bar{a} - \bar{b}$ fərqi l oxuna perpendikulyar, yəni, $\bar{a} - \bar{b} \perp l$ olduqda $\Pr_l \bar{a} = \Pr_l \bar{b}$ doğru olacaq. Həmçinin $\bar{a} = \bar{b}$ olarsa, $\bar{a} - \bar{b} = 0$ olur. Sıfır vektor isə istənilən vektora perpendikulyar götürülə bilər. ●

Məsələ 3. $\Pr_l (\bar{a} - \bar{b}) = \Pr_l \bar{a} - \Pr_l \bar{b}$ olduğunu isbat edin.

○ $\Pr_l (\bar{a} - \bar{b}) = \Pr_l (\bar{a} + (-\bar{b})) = \Pr_l \bar{a} + \Pr_l (-\bar{b}) = \Pr_l \bar{a} - \Pr_l \bar{b}$ ●

Məsələ 4. $\bar{a}$ vektoru l oxu ilə 150^0-li bucaq əmələ gətirir. Onun l oxu üzərindəki proyeksiyasını tapın:.

○ $\Pr_l \bar{a} = |\bar{a}| \cos\varphi$ olduğundan

$\Pr_l \bar{a} = |\bar{a}| \cos 150^0 = -|\bar{a}| \cos 30^0 = -\frac{\sqrt{3}}{2} |\bar{a}|$ olar. ●

§ 108. VEKTORLARIN XƏTTİ ASILLIĞI. MÜSTƏVİDƏ BAZİS.

Vektorlar cəminin mühüm anlayışlarından biri *bazisdir*. Bazis anlayışı vektorların xətti asıllığı ilə bağlıdır.

$\overline{a_1}, \overline{a_2}, ...\overline{a_n}$ vektorları və $\lambda_1, \lambda_2, ...\lambda_n$ ədədləri verilmiş olsun.

Tərif 1. $\lambda_1 \overline{a_1} + \lambda_2 \overline{a_2} + \cdots + \lambda_n \overline{a_n}$ cəminə $\overline{a_1}, \overline{a_2}, ...\overline{a_n}$ vektorlarının *xətti kombinasiyası* deyilir.

Tərif 2. Heç olmazsa biri sıfırdan fərqli olan $\lambda_1, \lambda_2, ...\lambda_n$ ədədləri üçün

$$\lambda_1 \overline{a_1} + \lambda_2 \overline{a_2} + \cdots + \lambda_n \overline{a_n} = \overline{0} \qquad (1)$$

münasibəti ödənilərsə, onda $\overline{a_1}, \overline{a_2}, ...\overline{a_n}$ vektorlarına *xətti asılı vektorlar* deyilir. (1) münasibəti yalnız $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_n = 0$ olduqda ödənilərsə, onda $\overline{a_1}, \overline{a_2}, ...\overline{a_n}$ vektorlarına *xətti asılı olmayan vektorlar* deyilir.

Aydındır ki, $\overline{a_1}, \overline{a_2}, ...\overline{a_n}$ vektorlarından hər hansı biri sıfır vektor isə, onda onlar xətti asılıdır. Doğurdan da vektorlardan hər hansı biri, məsələn $\overline{a_1} = 0$ vektor isə, onda

$$3\overline{a_1} + 0 \cdot \overline{a_2} + 0 \cdot \overline{a_3} + \cdots + 0 \cdot \overline{a_n} = 0$$

münasibəti doğrudur ($\lambda_1 = 3 \neq 0, \lambda_2 = \lambda_3 = \cdots = 0$), yəni vektorlar xətti asılıdır. Odur ki, vektorların xətti asılılığından danışarkən həmin vektorlar arasında sıfır vektor olmadığını qəbul edəcəyik.

Tutaq ki, $\overline{a}$ və $\overline{b}$ vektorları xətti asılıdır. Onda tərifə görə $\lambda_1 \overline{a} + \lambda_2 \overline{b} = 0$ münasibəti doğrudur və λ_1, λ_2 ədədlərindən heç olmasa biri sıfırdan fərqlidir. $\lambda_1 \neq 0$ olsa, onda $\overline{a} = -\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\overline{b}$ alarıq. Bu münasibət göstərir ki, $\overline{a}$ və $\overline{b}$ vektorları kollineardır. Deməli, xətti asılı istənilən iki vektor kollineardır. Bu təklifin tərsi də doğrudur, yəni kolleniar vektorlar xətti asılıdır. Doğurdan da koleniar vektorlar üçün $\overline{a} = m\overline{b}$ münasibəti doğrudur. Buradan $\overline{a} + (-m)\overline{b} = 0$, yəni xətti asılılıq alınar. Deyilənlərdən çıxır ki, müstəvi üzərində kollinear olmayan iki vektor xətti asılı deyil.

Əgər $\overline{a} = \lambda_1\overline{a_2} + \lambda_2\overline{a_2} + \cdots + \lambda_n\overline{a_n}$ isə onda deyirlər ki, $\overline{a}$ vektoru $\overline{a_1}, \overline{a_2}, \ldots . \overline{a_n}$ vektorlarının xətti kombinasiyasıdır və ya $\overline{a}$ vektoru $\overline{a_1}, \overline{a_2}, \ldots . \overline{a_n}$ vektorları üzrə ayrılmışdır.

Teorem 1. *Xətti asılı olan vektorlardan hər hansı biri qalanlarının xətti kombinasiyasıdır.*

□ Tutaq ki, $\lambda_1\overline{a_1} + \lambda_2\overline{a_2} + \cdots + \lambda_n\overline{a_n} = 0$ və λ_i ədədlərindən heç olmasa biri, məsələn, $\lambda_1 \neq 0$-dır. Buradan $\overline{a} = -\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\overline{a_2} - \cdots - \frac{\lambda_n}{\lambda_1}\overline{a_n}$ olmasını alırıq. Bu isə $\overline{a_1}$ vektorunun qalan vektorların xətti kombinasiyası olduğunu göstərir. ■

Teorem 2. $\overline{a}$, $\overline{b}$ *və* $\overline{c}$ *vektorları xətti asılıdırsa, onlar komplanardırlar.*

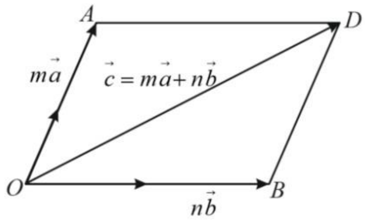
□ $\overline{a}$, $\overline{b}$ və $\overline{c}$ vektorları xətti asılı vektorlar olsun:

$$\lambda\overline{a} + \mu\overline{b} + \beta\overline{c} = 0.$$

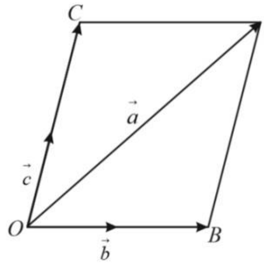
Burada λ, μ, γ ədədlərindən heç olmasa biri, məsələn, $\gamma \neq 0$-dır. Yuxarıdakı bərabərliyi

$$\overline{c} = -\frac{\lambda}{\gamma}\overline{a} - \frac{\mu}{\gamma}\overline{b} \text{ və ya } \overline{c} = m\overline{a} + n\overline{b} \quad \left(m = -\frac{\lambda}{\gamma}, n = \frac{\mu}{\gamma}\right)$$

şəklində yazmaq olar. Beləliklə, $\overline{c}$ vektoru $m\overline{a}$ və $n\overline{b}$ vektorlarının cəmi olur, yəni, $\overline{a}$, $\overline{b}$ *və* $\overline{c}$ vektorları komplanardırlar (şəkil 337). Bu teoremin tərsi də doğrudur. ■



Şəkil 337



Şəkil 338

Teorem 3. *Komplanar olan üç vektor xətti asılıdır.*

□ $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ komplanar vektorlar olsun. Göstərək ki, onlar xətti asılıdır. Bunun üçün vektorlardan birinin qalan iki vektorun xətti kombinasiyası olduğunu göstərmək kifayətdir. İki hala baxaq:

1.Verilən vektorlardan ikisi, məsələn $\bar{a}$ və $\bar{b}$ kollinear olsun. Onda $\bar{a} = m\bar{b}$ və ya $\bar{a} = m\bar{b} + 0\bar{c}$ kimi yazmaq olar ki, bu da $\bar{a}$ vektorunun $\bar{b}$ və $\bar{c}$ vektorlarının xətti kombinasiyası olduğunu göstərir.

2.Vektorlar arasında kollinear olanlar yoxdur: tutaq ki, hər üç vektorun başlanğıcı bir nöqtəyə gətirilmişdir (şəkil 338). Aydındır ki, bu vektorlardan biri (şəkildə $\bar{a}$ vektoru) qalan iki vektorun arasındadır. $\bar{a}$ vektorunun *A* uc nöqtəsindən $\bar{b}$ və $\bar{c}$ vektorlarına paralellər çəkək. Bu paralellərin $\bar{a}$ və $\bar{c}$ vektorları yerləşən düz xətləri kəsdiyi nöqtələr *B* və *C* olsun. Aydındır ki, $\overline{OA} = \overline{OB} + \overline{OC}$. $\overline{OB}$ və $\overline{OC}$ vektorları uyğun olaraq $\bar{b}$ və $\bar{c}$ vektorları ilə kollinear olduğundan, $\overline{OB} = \lambda_1 \bar{b}$, $\overline{OC} = \lambda_2 \bar{c}$ olur. Beləliklə, $\bar{a}$ vektoru üçün

$$\bar{a} = \lambda_1 \bar{b} + \lambda_2 \bar{c} \tag{1}$$

münasibətini alırıq, yəni bu vektor $\bar{b}$ və $\bar{c}$ vektorlarının xətti kombinasiyasıdır. ■

Bu teoremdən çıxır ki, *müstəvi üzərində xətti asılı olmayan vektorların sayı ikidir və istənilən üçüncü vektor bu vektorların xətti kombinasiyasıdır.*

Tərif 3. Xətti asılı olmayan və müəyyən ardıcıllıqla götürülmüş istənilən iki vektora, onların yerləşdiyi müstəvidə *bazis vektorlar* və ya *bazis* deyilir.

Bu tərifə görə, müstəvi üzərində kollinear olmayan ixtiyari iki vektor bazis əmələ gətirir. Müstəvi üzərində istənilən üç vektor xətti asılı olduğundan, onlardan xətti asılı olmayan ikinci bazis qəbul edib, üçüncünü bunlar üzrə yeganə qaydada (1) şəklində göstərmək olar. Bu halda deyilir ki, $\overline{a}$ vektoru $\overline{b}$ və $\overline{c}$ vektorlarının əmələ gətirdiyi bazis üzrə ayrılmışlar. Bu ayrılmışdakı λ_1, λ_2 ədədlərinə həmin bazis üzrə $\overline{a}$ *vektorunun kordinatları* və ya *proyeksiyaları* deyilir və $\overline{a} = \{\lambda_1, \lambda_2\}$ kimi yazılır.

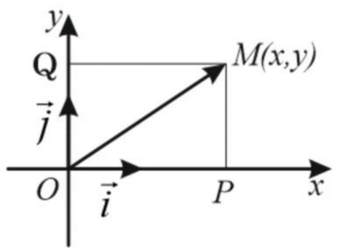
Müstəvi üzərində düzbucaqlı *xOy* koordinat sisteminə baxaq (şəkil 339). Tutaq ki, $\overline{i}$ və $\overline{j}$ vahid vektorlar olub, uyğun olaraq oxların müsbət istiqaməti üzrə yönəlmişdir. Onlara *ort vektorlar* deyəcəyik. Koordinat müstəvisi üzərində ixtiyari *M(x,y)* nöqtəsinə baxaq. Koordinat başlanğıcını *M* nöqtəsi ilə birləşdirən $\overline{OM}$ vektoru bu nöqtənin *radius-vektoru* adlanır. Aydındır ki, $\overline{OM}$ vektorunun koordinat oxları üzrə proyeksiyaları uyğun olaraq *M* nöqtəsinin koordinatlarıdır: $\Pr_{ox}\overline{OM} = x$, $\Pr_{oy}\overline{OM} = y$.

Şəkildən göründüyü kimi $\overline{OM} = \overline{OP} + \overline{OQ} = x\overline{i} + y\overline{j}$ ayrılışı doğrudur. Beləliklə,

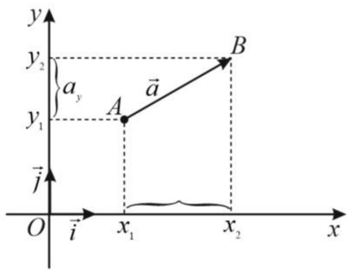
$$\overline{OM} = x\overline{i} + y\overline{j} \tag{2}$$

olur.

İndi *Oxy* düzbucaqlı koordinat sistemi və $\overline{a}$ vektoru verilmiş olsun (şəkil 340). $\overline{a}$ vektorunun uc nöqtələrini $A(x_1, y_1)$ və $B(x_2, y_2)$) qəbul edib oxlar üzrə proyeksiyalarını uyğun olaraq, a_x, a_y ilə işarə edək. $x_2 - x_1 = a_x$ və $y_2 - y_1 = a_y$ olduğu aydındır. Şəkildən göründüyü kimi,



Şəkil 339



Şəkil 340

$$\overline{a} = (x_2 - x_1)\overline{i} + (y_2 - y_1)\overline{j} \quad \text{və ya} \quad \overline{a} = a_x\overline{i} + a_y\overline{j} \qquad (3)$$

münasibəti doğrudur. (3) münasibəti $\overline{a}$ *vektorunun* $\overline{i}$, $\overline{j}$ *bazisi üzrə ayrılışı* adlanır. a_x və a_y -ə $\overline{a}$ *vektorunun koordinatları,* $a_x\overline{i}$ və $a_y\overline{j}$ vektorlarına isə onun *komponentləri* (təşkil ediciləri) deyilir. Bəzən (3) yazılışını $\overline{a} = \{a_x, a_y\}$ kimi də yazırlar.

Məsələ 1. $M(2,-7)$, $N(-1,3)$ və $P(4,1)$ üçbucağın təpə nöqtələri olduqda, $\overline{MN}$ $\overline{NP}$ və $\overline{PM}$ vektorlarının kordinatlarını tapın.

○ Vektorun və onun üç nöqtələrinin kordinatları arasında $a_x = x_2 - x_1$ və $a_y = y_2 - y_1$ münasibətinə əsasən $\overline{MN} = \{-1-2;3-(-7)\}$, yəni $\overline{MN} = \{-3;10\}$. Eyni qayda ilə $\overline{NP} = \{5;-2\}$ və $\overline{PM} = \{-2;-3\}$. ●

Məsələ 2. $\overline{MN} = \{-4,5\}$ və $M(3,-1)$ olduğunu bilərək vektorun son nöqtəsini təyin edin.

○ $x_2 - x_1 = -4$ və $y_2 - y_1 = 5$, həmçinin $x_1=3$, $y_1=-1$ verildiyindən, $x_2=x_1-4=3-4=-1$, $y_2=y_1+5=-1+5=4$ tapılır. Beləliklə, son nöqtə $N(-1;4)$ olur. ●

Məsələ 3. Aşağıdakı vektorları $\overline{i}, \overline{j}$ ort vektorları ilə ifadə edin.

1. $\overline{a} = \{-3;2\}$; 2. $\overline{b} = \overline{AB}$. $A(4;-3), B(-2;1)$.

○ 1. $\bar{a} = -3\bar{i} + 2\bar{j};$

2. $\bar{b} = \{-2-4;1-(-3)\} = \{-6;4\} \Rightarrow \bar{b} = -6\bar{i} + 4\bar{j}$. ●

§ 109. FƏZADA VEKTORUN BAZİS ÜZRƏ ANLAYIŞI

Əvvəlki paraqrafdakı üçüncü teoremə analoji olaraq, aşağıdakı teoremin doğruluğunu isbat etmək olar.

Teorem. *Fəzada komplanar olmayan istənilən dörd vektor xətti aslıdır.*

Bu teoremden çıxır ki, fəzada xətti aslı olmayan vektorların sayı üçdür və istənilən dördüncü vertor bu vektorların xətti kombinanasiyasıdır.

Tərif 1. Xətti asılı olmayan və müəyyən ardıcıllıqla götürülmüş istənilnə üç vektora *fəzada bazis* deyilir.

Tutaq ki, $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$ vektorları fəzada bazis, $\bar{a}$ vektoru isə hər hansı vektordur. Onda $\bar{a}$ vektorunu $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$ bazisi üzrə yeganə qaydada ayırmaq olar:

$$\bar{a} = \lambda_1 \bar{e}_1 + \lambda_2 \bar{e}_2 + \lambda_3 \bar{e}_3 \qquad (1)$$

Bu halda deyəcəyik ki, $\bar{a}$ *vektoru* e_1, e_2, e_3 *bazisi üzrə ayrılmışdır.* $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ ədədlərinə $\bar{a}$ *vektorunu bu bazis üzrə kordinatları (proyeksiyaları)* deyecəyik. (1) münasibətini $\bar{a} = \{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3\}$ kimi də yazırlar.

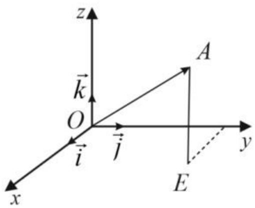
Oxyz düzbucaqlı koordinat sistemi və oxların müsbət istiqamətində uyğun olaraq $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ vahid (ort) vektorları götürək (şəkil 341). *A* nöqtəsi ixtiyari nöqtə, *OA* isə onun radius vektoru olsun. Koordinat başlanğıcını fəzanın verilən nöqtəsi ilə birləşdirən vektora həmin nöqtənin *radius vektoru* deyəcəyik. Aydındır ki, verilmiş koordinat sistemində, fəzanın nöqtələri ilə koorinat başlanğıcından çıxan vektorlar arasında qarşılıqlı birqiymətli uyğunluq var. *OA* vektorunun koordinat oxları üzrə proyeksiyalarını (yəni *A* nöqtəsinin koordinatlarını) uyğun olaraq a_x, a_y,a_z ilə işarə etsək,

$$\overline{OA} = a_x \bar{i} + a_y \bar{j} + a_2 \bar{k} \quad \text{yaxud} \quad \bar{a} = a_x \bar{i} + a_y j + a_z \bar{k} . \qquad (1')$$

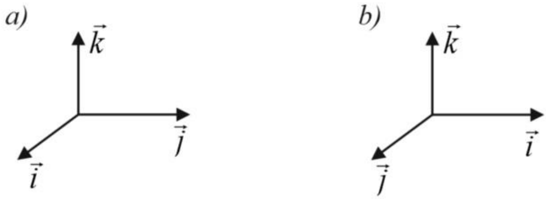
Burada $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ - *ortanormal* (ortoqonal və uzunluqları vahid olan) *bazis* adlanır.

(1') bərabərliyinə $\bar{a}$ *vektorunun ortonormal bazis üzrə ayrılışı* deyilir. Onu $\bar{a} = \{a_x, a_y, a_z\}$ kimi də yazmaq olar. Aydındır ki, bazis vektorları koordinatlarla $\bar{i} = \{1,0,0\}$, $\bar{j} = \{0,1,0\}$, $\bar{k} = \{0,0,1\}$ kimi yazılır.

Düzbucaqlı bazis təşkil edən $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ vektorları, $\bar{k}$ vektorunun ucundan baxdıqda $\bar{j}$ vektorunu almaq üçün $\bar{i}$ vektoru saat əqrəbinin əksi istiqamətində hərəkət etdirilərsə, *sağ bazis* (üçlük) , saat əqrəbinin istiqamətində hərəkət edilərsə, *sol bazis* (üçlük) əmələ gətirir deyirlər (şəkil 342, a,b).



Şəkil 341



şəkil 342

Biz, əsasən, sağ bazisdən istifadə edəcəyik.

Məsələ. Üçbucağın təpə nöqtələri *A(-1,-3,2), B(2,1,-4)* və *C(1,0,2)* olduqda, $\overline{AB}, \overline{AC}, \overline{BC}$ vektorlarını $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ ort vektorları üzrə ayırın.

○ $\overline{AB}$ vektoru üçün $\overline{a_x} = 2-(-1) = 3$, $\overline{a_y} = 1-(-3) = 4$, $\overline{a_z} = -4-2 = -6$ olduğundan , $\overline{AB} = \{3;4;-6\}$ və ya $\overline{AB} = 3\bar{i} + 4\bar{j} - 6\bar{k}$ olar.

Eyni qayda ilə $\overline{AC}$ və $\overline{BC}$ vektorları üçün $\overline{AC} = \{2,3,0\}$, yəni $\overline{AC} = 2\bar{i} + 3\bar{j}$ və $\overline{BC} = \{-1,-1,6\}$, yəni $\overline{BC} = -\bar{i} - \bar{j} + 6\bar{k}$ alınır. ●

§ 110. KOORDİNATLARI İLƏ VERİLMİŞ VEKTORLAR ÜZƏRİNDƏ XƏTTİ ƏMƏLLƏR.

Fərz edək ki, $\overline{a} = a_x\overline{i} + a_y\overline{j} + a_z\overline{k}$ və $\overline{b} = b_x\overline{i} + b_y\overline{j} + b_z\overline{k}$ vektorları verilmişdir. Vektorun ox üzərində proyeksiyasının xassəsinə əsasən vektorlar üzərində əməlləri, onların proyeksiyaları üzərində aparılan hesab əməlləri ilə əvəz etmək olar. Bu məqsədlə bir sıra sadə məsələləri nəzərdən keçirək.

1. Vektorun ədədə vurulması. λ ədədi və $\overline{a} = a_x\overline{i} + a_y\overline{j} + a_z\overline{k}$ vektoru verilmişsə, onda vektorun ox üzərinə proyeksiyasının xassələrinə əsasən, $\overline{a}$ vektorunun λ ədədinə hasili üçün

$$\lambda\overline{a} = (\lambda a_x)\overline{i} + (\lambda a_y)\overline{j} + (\lambda a_z)\overline{k}$$

alarıq. Beləliklə, $\overline{a}$ vektorunun λ ədədinə vurmaq, onun hər bir koordinatını həmin ədədə vurmaq deməkdir.

2. Vektorların bərabərliyi. Verilmiş $\overline{a}$ və $\overline{b}$ vektorları bərabərdirsə, yəni $\overline{a} = \overline{b}$ isə, onda

$$a_x = b_x\ ,\ a_y = b_y\ ,\ a_z = b_z \qquad (1)$$

doğrudur. Tərsinə, (1) şərti ödənildikdə $\overline{a} = \overline{b}$ olar.

3. Vektorların toplanılması və çıxılması. $\overline{a} = a_x\overline{i} + a_y\overline{j} + a_z\overline{k}$ və $\overline{b} = b_x\overline{i} + b_y\overline{j} + b_z\overline{k}$ olarsa,

$$\overline{a} + \overline{b} = (a_x\overline{i} + a_y\overline{j} + a_z\overline{k}) + (b_x\overline{i} + b_y\overline{j} + b_z\overline{k}) =$$

$$(a_x + b_x)\overline{i} + (a_y + b_y)\overline{j} + (a_z + b_z)\overline{k}$$

olar. Deməli, vektorlari toplamaq, onların uyğun koordinatlarını toplamaq deməkdir. Eyni qayda ilə $\overline{a} - \overline{b} = (a_x - b_x)\overline{i} + (a_y - b_y)\overline{j} + (a_z - b_z)\overline{k}$ alınır.

4. Vektorların kollinearlıq şərti. Sıfırdan fərqli $\overline{a}$ və $\overline{b}$ vektorları kolleniar olarsa, $\overline{b} = \lambda\overline{a}$ olduğunu bilirik. Onda

$$b_x\overline{i} + b_y\overline{j} + b_z\overline{k} = (\lambda a_x)\overline{i} + (\lambda a_y)\overline{j} + (\lambda a_z)\overline{k}\ ,$$

buradan da $b_x = \lambda a_x$, $b_y = \lambda a_y$, $b_z = \lambda a_z$ və ya

$$\frac{a_x}{b_x} = \frac{a_y}{b_y} = \frac{a_z}{b_z} \qquad (2)$$

alınar. Bu, *koordinatları ilə verlmiş vektorların kollinearlıq şərtidir*.

§ 111. SKALYAR HASİL və ONUNLA BAĞLI MƏSƏLƏLƏR

1. Skalyar hsil və onun xassələri. Tutaq ki, $\overline{a}$, $\overline{b}$ hər hansı ikivektor, φ isə bunlar arasındakı bucaqdır ($(\overline{a}\,\hat{}\,\overline{b}) = \varphi$).

Tərif. $\overline{a}$ və $\overline{b}$ vektorlarının uzunluqları ilə aralarındakı bucağın kosinusu hasilinə onların *skalyar hasili* deyilir və $(\overline{a},\overline{b})$ və ya $\overline{a}\overline{b}$ və ya $\overline{a}\cdot\overline{b}$ işarələrinin hər hansı biri ilə göstərilir:

$$(\overline{a},\overline{b}) = |\overline{a}|\cdot|\overline{b}|\cos\varphi \qquad (1)$$

Bu bərabərlikdən aydındır ki, iki vektorun skalyar hasili həqiqi ədəddir (skalyardır).

$$|\overline{a}|\cos\varphi = \Pr_{\overline{b}}\overline{a} \quad \text{və} \quad |\overline{b}|\cos\varphi = \Pr_{\overline{a}}\overline{b}$$

olduğunu nəzərə alsaq, (1) bərabərliyini

$$(\overline{a},\overline{b}) = |\overline{b}|\Pr_{\overline{b}}\overline{a} \quad \text{və ya} \quad (\overline{a},\overline{b}) = |\overline{a}|\Pr_{\overline{a}}\overline{b} \qquad (2)$$

kimi də yazmaq olar.

Vektorların skalyar hasilinin tərifindən onun aşağıdakı xassələri alınır.

1. *Skalyar hasil yerdəyişmə (komutativlik) qanununa tabedir:*

$$(\overline{a},\overline{b}) = (\overline{b},\overline{a})$$

□ Doğurdan da, (1) bərabərliyinə görə

$$(\overline{a},\overline{b}) = |\overline{a}|\cdot|\overline{b}|\cos\varphi = |\overline{b}|\cdot|\overline{a}|\cos\varphi = (\overline{b},\overline{a}). \qquad \blacksquare$$

2. *Ədədi vuruğu skalyar hasil işarəsi xaricinə çıxarmaq olar:*

$$(\lambda\overline{a}\cdot\overline{b}) = (\overline{a},\lambda\overline{b}) = \lambda(\overline{a}\cdot\overline{b})$$

□ Doğurdan da, vektorun ox üzərində proyeksiyasının 2-ci xassəsinə görə

$$(\lambda\overline{a}\cdot\overline{b}) = \left|\overline{b}\right| \Pr_{\overline{b}} \lambda\overline{a} = \lambda\left|\overline{b}\right| \Pr_{\overline{b}} \overline{a} = \lambda(\overline{a},\overline{b}) \qquad \blacksquare$$

3. *Skalyar hasil paylanma (distributivlik) qanununa tabedir:*

$$(\overline{a}+\overline{b},\overline{c}) = (\overline{a},\overline{c}) + (\overline{b},\overline{c})$$

□ Skalyar hasilin tərifi və vektorun ox üzərində proyeksiyasının xassəsinə əsasən

$$(\overline{a}+\overline{b},\overline{c}) = \left|c\right| \Pr_{\overline{c}}(\overline{a}+\overline{b}) = \left|\overline{c}\right| \Pr_{\overline{c}} \overline{a} + \left|\overline{c}\right| \Pr_{\overline{c}} \overline{b} = (\overline{a},\overline{c}) + (\overline{b},\overline{c})$$

olur. ■

4. *Qarşılıqlı perpendikulyar iki vektorun hasili sıfıra bərabərdir.*

□ Doğurdan da $\overline{a}\perp\overline{b}$ olduqda, $\varphi = 90^0$ olur və $(\overline{a},\overline{b}) = 0$ alınır.Vektorlardan biri sıfır vektor olduqda da teorem doğrudur (sıfır vektor istənilən vektora perpendikulyardır). ■

Bu xassənin tərsi də doğrudur.

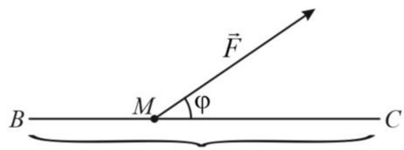
5. *Vektorun özünə skalyar hasili onun uzunluğunun kvadratına bərabərdir:*

$$(\overline{a},\overline{a}) = \left|\overline{a}\right|^2.$$

□ $(\overline{a}\,\hat{}\,\overline{a}) = 0^0$ olduğundan, $(\overline{a},\overline{a}) = \left|\overline{a}\right|\cdot\left|\overline{a}\right|\cdot\cos 0^0 = \left|\overline{a}\right|^2$ alınır. $(\overline{a},\overline{a})$ hasilinə $\overline{a}$ vektorunun *skalyar kvadratı* deyilir. Skalyar kvadratı $(\overline{a},\overline{a}) = \overline{a}^2 = \left|\overline{a}\right|^2 = a^2$ kimi də yazılır. ■

Bu xassələri $a = \sqrt{(\overline{a},\overline{a})}$ alınır. Deməli, *vektorun uzunluğu onun skalyar kvadratının kvadrat kökünə bərabərdir.*

Qeyd Tutaq ki, maddi M nöqtəsi sabit F qüvvəsinin təsiri ilə B vəziyyətindən C vəziyyətinə keçir (şəkil 343).



şəkil 343

Bu zaman görülən iş $A=FScos\varphi$ olduğunu bilirik. ($\varphi = (\overline{F}\,^\wedge\,\overline{BC})$ S= $\left|\overline{BC}\right|$). Digər tərəfdən $\overline{F}$ və $\overline{BC}$ vektorlarının skalyar hasili üçün

$$(\overline{F}, \overline{BC}) = \left|\overline{F}\right| \cdot \left|\overline{BC}\right| \cos\varphi = FS\cos\varphi$$

münasibəti doğrudur. Buradan $A = (\overline{F}, \overline{BC})$ alırıq. Deməli, skalyar hasilin mexaniki mənası qüvvənin təsiri ilə yerdəyişmədə görülən işdir.

Skalyar hasilin köməyi ilə aşağıdakı təklifləri isbat edək:

1. *Üçbucağın bir tərəfinin kvadratı bərabərdir: qalan iki tərəfinin kvadratları cəmi, minus bu tərəflərlə onlar arasında qalan bucağın kosinusu hasilinin iki misli:*

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$$

□ Verilmiş *ABC* üçbucağında $\overline{BC} = \overline{a}$, $\overline{AC} = \overline{b}$, $\overline{AB} = \overline{c}$ işarə edək. Onda $\overline{a} = \overline{b} - \overline{c}$ yaza bilərik (şəkil 344). Hər tərəfi kvadrata yüksəldək:

$$(\overline{a})^2 = (\overline{b} - \overline{c})^2 \Rightarrow (\overline{a})^2 = (\overline{b})^2 - 2(\overline{b}, \overline{c}) + (\overline{c})^2.$$

Buradan

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$$

lınar. Eyni qayda ilə

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos B$$

$$c^2 = b^2 + a^2 - 2ba\cos C$$

almaq olar. ■

2. *Paraleloqramın diaqonallarının kvadratları cəmi onun tərəflərinin kvadratları cəminə bərabərdir.*

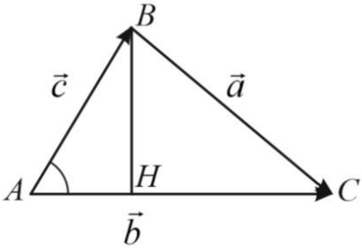
□ *OACB* paraleloqramında $\overline{OC} = \overline{m}$, $\overline{BA} = \overline{n}$ ilə işarə edək (şəkil 345).

$$\overline{m} = \overline{a} + \overline{b}, \quad \overline{n} = \overline{a} - \overline{b},$$

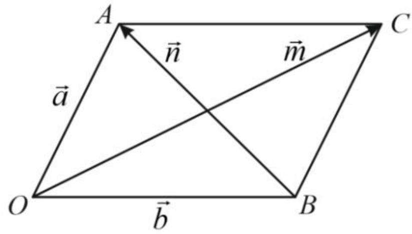
olduğu aydındır. Bu bərabərlikləri kvadrata yüksəldib, tərəf tərəfə toplasaq,

$$\overline{m}^2 = \overline{a}^2 + \overline{b}^2 + 2(\overline{a}, \overline{b}),$$

$$\overline{n}^2 = \overline{a}^2 + \overline{b}^2 - 2(\overline{a}, \overline{b}).$$



Şəkil 344



Şəkil 345

$$m^2 + n^2 = 2a^2 + 2b^2$$

alarıq. ■

2. Skalyar hsilin koordinatlarla ifadəsi. Tutaq ki, $\overline{a}$ və $\overline{b}$ vektorları koordinatları ilə verilmişdir: $\overline{a} = a_x\overline{i} + a_y\overline{j} + a_z\overline{k}$ və $\overline{b} = b_x\overline{i} + b_y\overline{j} + b_z\overline{k}$.

Teorem. *Koordinatları ilə verilmiş iki vektorun skalyar hasili, onların eyni adlı koordinatları hasillərinin cəminə bərabərdir:*

$$(\overline{a}, \overline{b}) = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z \qquad (2)$$

□ Skalyar hasilin tərifinə görə doğru olan $(\overline{i}, \overline{i}) = (\overline{j}, \overline{j}) = (\overline{k}, \overline{k}) = 1$ və $(\overline{i}, \overline{j}) = (\overline{i}, \overline{k}) = (\overline{j}, \overline{k}) = 0$ bərabərliklərini nəzərə alsaq, skalyar hasilin xassələrinə görə

$$(\overline{a}, \overline{b}) = (a_x\overline{i} + a_y\overline{j} + a_z\overline{k})(b_x\overline{i} + b_y\overline{j} + b_z\overline{k}) = a_x b_x(\overline{i}, \overline{i}) + a_x b_y(\overline{i}, \overline{j}) + a_x b_z(\overline{i}, \overline{k}) +$$

$$a_y b_x(\overline{j}, \overline{i}) + a_y b_y(\overline{j}, \overline{j}) + a_y b_z(\overline{j}, \overline{k}) + a_z b_x(\overline{k}, \overline{i}) + a_z b_y(\overline{k}, \overline{j}) + a_z b_z(\overline{k}, \overline{k}) =$$

$$a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$$

olur. ■

Xüsusi halda, $\overline{a} = \overline{b}$ olarsa, onda (1) bərabərliyindən

$$|\overline{a}|^2 = a_x^2 + a_y^2 + a_z^2$$

alınır. Buradan $\overline{a}$ vektorunun uzunluğu üçün

$$|\overline{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \tag{3}$$

dusturunu alırıq. Deməli, *vektorun uzunluğu onun koordinatlarının kvadratları cəminin kvadrat kökünə bərabərdir*.

Misallar

1. $\overline{a} = 2\overline{i} + 3\overline{j} - 5\overline{k}$, $\overline{b} = 3\overline{i} - 2\overline{j} + 4\overline{k}$ olduqda, skalyar hasili hesablayın.

○ (1) dusturuna görə,

$$(\overline{a}, \overline{b}) = 2 \cdot 3 + 3 \cdot (-2) + (-5) \cdot 4 \Rightarrow (\overline{a}, \overline{b}) = -20$$

olur. ●

2. $\overline{a} = \{1,2,3\}$, $\overline{b} = \{-1,2,-3\}$ olarsa, $2\overline{a} - 3\overline{b}$ vektorunun uzunluğunu hesablayın.

○ Vektorlar üzərində əməllərə əsasən $2\overline{a} = \{2,4,6\}$, $3\overline{b} = \{-3,6,-9\}$, buradan da

$$2\overline{a} - 3\overline{b} = \{5;-2;15\} \Rightarrow |2\overline{a} - 3\overline{b}| = \sqrt{5^2 + (-2)^2 + 15^2} \Rightarrow |2\overline{a} - 3\overline{b}| = \sqrt{254}.$$

●

3. $M_1(x_1, y_1, z_1)$ və $M_2(x_2, y_2, z_2)$ nöqtələri arasındakı məsafəni tapın

○ Aydındır ki, axtarılan məsafə $\overline{M_1M_2} = \{x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1\}$ vektorunun uzunluğudur (d). Odur ki,

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2} \tag{4}$$

olar. Bu, *iki nöqtə arasındakı məsafə dusturudur*.

Xüsusi halda $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$ nöqtələri *xOy* müstəvisi üzərində verildikdə ($z_1 = z_2 = 0$), məsafə düsturu

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

şəklinə düşür. Bu düsturlara əsasən müstəvi ($M(x, y)$) və ya fəzada ($M(x, y, z)$) verilmiş nöqtənin koordinat başlanğıcından məsafəsi uyğun olaraq

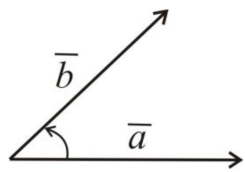
$$d_0 = \sqrt{x^2 + y^2} \text{ və } d_0 = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \qquad (5)$$

olar. ●

Məsələ. $A(1,-1,2)$, $B(2,0,3)$, $C(-1,-2,3)$ nöqtələrindən hansı koordinat başlanğıcından daha uzaqdadır?

○ (5) dusturuna əsasən A nöqtəsinin koordinat başlanğıcından məsafəsi $d_A = \sqrt{6}$, B nöqtəsinin məsafəsi $d_B = \sqrt{13}$ və C nöqtəsinin məsafəsi $d_C = \sqrt{14}$ olar. Beləliklə, C nöqtəsinin koordinat başlanğıcından ən uzaqda olduğu müəyyən edilir. ●

3. İki vektor arasındakı bucaq. Tutaq ki, $\overline{a} = \{a_x, a_y, a_z\}$, $\overline{b} = \{b_x, b_y, b_z\}$ vektorları verilib və $\varphi = (\overline{a} \,\hat{}\, \overline{b})$-dir (şəkil 343a). Skalyar hasilin tərəfindən



Şəkil 343a

$$\cos\varphi = \frac{(\overline{a}, \overline{b})}{|\overline{a}| \cdot |\overline{b}|} \qquad (6)$$

münasibəti, buradan da

$$\cos\varphi = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}\sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}} \qquad (7)$$

alınır. $\overline{a}$ və $\overline{b}$ vektorları ortoqonal olduqda $\varphi = 90^0$ və $\cos 90^0 = 0$ olur. Onda (7) münasibətindən,

$$a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z = 0 \qquad (8)$$

alınar. Bu münasibət iki *vektorun ortoqonallıq şərti* adlanır.

$\overline{a}$ və $\overline{b}$ vektorları kollinear olduqda, $\overline{b} = \lambda\overline{a}$ olur. Bu bərabərlikdən uyğun koordinatların bərabərliyi alınır, yəni

$$b_x = \lambda a_x \ , \ b_y = \lambda a_y \ , \ b_z = \lambda a_z \, .$$

Buradan da

$$\frac{b_x}{a_x} = \frac{b_y}{a_y} = \frac{b_z}{a_z} \tag{9}$$

olur. (9) münasibəti *iki vektorun kollinearlıq şərti* adlanır.

(7) münasibətindən, istənilən $\bar{a} = \{a_x, a_y, a_z\}$ vektorunun $\bar{i} = (1,0,0)$, $\bar{j} = (0,1,0)$, $\bar{k} = (0,0,1)$ vahid vektorları, yəni uyğun olaraq koordinat oxları ilə əmələ gətirdiyi α, β, γ bucaqları üçün

$$\cos\alpha = \frac{a_x}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}}, \quad \cos\beta = \frac{a_y}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}},$$

$$\cos\gamma = \frac{a_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}}$$

dusturları alınır. Burada $\cos\alpha$, $\cos\beta$ və $\cos\gamma$ verilən $\bar{a}$ vektorunun yönəldici kosinusları adlanır. Bu bərabərlikləri kvadrata yüksəldib tərəf-tərəfə toplasaq,

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$$

dusturunu alarıq.

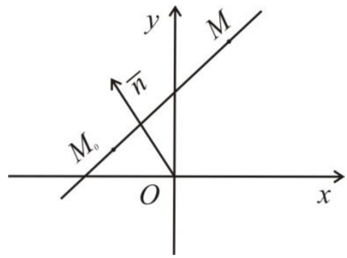
Məsələlər 1. $A(2,1,1), B(2,2,2), C(1,1,0)$ nöqtələri verilmişdir. BAC bucağını (α) bucağını tapın.

○ $\overline{AB} = \{0; 1; -1\}$, $\overline{AC} = \{-1; 0; -1\}$ olduğundan, $\left|\overline{AB}\right| = \sqrt{2}$, $\left|\overline{AC}\right| = \sqrt{2}$, eləcə də $(\overline{AB}, \overline{AC}) = 0 \cdot (-1) + 1 \cdot 0 + (-1) \cdot (-1) = 1$ tapılır və (2) düsturuna əsasən

$$\cos\alpha = \frac{(\overline{AB}, \overline{AC})}{\left|\overline{AB}\right| \cdot \left|\overline{AC}\right|} \Rightarrow \cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} \Rightarrow \cos\alpha = \frac{1}{2} \Rightarrow \alpha = 60^0 . \ \bullet$$

2. Trapesiyanın qarşı tərəflərinin kvadratları cəmi bir-birinə bərabər olduqda, onun diaqonallarının perpendikulyar olduğunu isbat edin.

○ $ABCD$ trapesiyasında (bax: şəkil 303) $\overline{DA}=\overline{a}$, $\overline{DB}=\overline{b}$, $\overline{DC}=\overline{c}$ qəbul etsək, $\overline{AB}=\overline{DB}-\overline{DA}=\overline{b}-\overline{a}$, $\overline{BC}=\overline{DC}-\overline{DB}=\overline{c}-\overline{b}$ və $\overline{AC}=\overline{DC}-\overline{DA}=\overline{c}-\overline{a}$ olar. İndi $\overline{DB}\perp\overline{AC}$ olduğunu göstərək. Şərtə görə,



$$(AB)^2+(DC)^2=(DA)^2+(BC)^2 \text{ və ya } (\overline{b}-\overline{a})^2+\overline{c}^2=(\overline{c}-\overline{b})^2+\overline{a}^2$$

yazıb, son bərabərliyi açıb sadələşdirək:

$$\overline{b}^2-2\overline{b}\overline{a}+\overline{a}^2+\overline{c}^2=\overline{c}^2-2\overline{c}\overline{b}+\overline{b}^2+\overline{a}^2 \Rightarrow -2\overline{b}\overline{a}=-2\overline{c}\overline{b}\Rightarrow$$

$$\overline{b}(\overline{c}-\overline{a})=0\Rightarrow(\overline{DB},\overline{AC})=0\Rightarrow DB\perp AC\,.$$ ●

3. Uzunluğu 5 vahid olan $\overline{a}$ vektoru $\overline{b}$ vektoru ilə 60 dərəcəli bucaq əmələ gətirir. Onların skalyar hasilinin 20 olduğunu bilərək, $\overline{b}$ vektorunun uzunluğunu tapın.

○ Skalyar hasilin dusturundan və verilənlərdən istifadə etsək,

$$(\overline{a},\overline{b})=|\overline{a}|\cdot|\overline{b}|\cos\varphi\Rightarrow|\overline{b}|=\frac{(\overline{a},\overline{b})}{|\overline{a}|\cos\varphi}\Rightarrow|\overline{b}|=\frac{20}{5\cdot\cos 60^0}=\frac{20}{5\cdot(1/2)}=8, \text{ yəni}$$

$|\overline{b}|=8$ alınır. ●

§ 112. SKALYAR HASİLİN TƏTBİQLƏRİ

1. Müstəvi üzərində düz xətt tənliyi.

a) Düz xəttin ümumi tənliyi. Düzbucaqlı Oxy koordinat sistemində verilen $M_0(x_0,y_0)$ nöqtəsindən keçən və verilen $\overline{n}=\{A,B\}$ vektoruna ($A^2+B^2\neq 0$, şəkil 343b) perpendikulyar olan düz xəttin tənliyini çıxaraq (belə düz xəttin yeganə olduğu aydındır). Aydındır ki, $M(x,y)$ bu düz xəttin ixtiyari nöqtəsi (ona düz xəttin cari koordinatı da deyilir) isə, onda

$\overline{M_0M} = \{x - x_0, y - y_0\}$ vektoru şəkil 343b

$\bar{n} = \{A, B\}$ vektoruna perpendikulyar dır.

Odur ki, iki vektorun perpendikulyarlıq şərtinə və skalyar hasilin koordinatlarla ifadəsi düsturuna görə,

$$(\bar{n}, \overline{M_0M}) = 0 \Rightarrow A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0 \Rightarrow Ax + By - (Ax_0 + By_0) = 0$$

olur. Burada, $-(Ax_0 + By_0) = C$ qəbul etsək (C-nin müəyyən bir sabit ədəd olacağı aydındır), axırıncı tənlik

$$Ax + By + C = 0 \qquad (1)$$

şəklini alar. Bu, yəni alınan bir dərəcəli iki məchullu tənlik,yuxarıda adı keçən düz xəttin tənliyidir. Göstərmək olar ki, bu təklifin tərsi də doğrudur. yəni hər bir bir dərəcəli iki məchullu tənlik, düzbucaqlı Oxy koordinat sistemində müəyyən bir düz xətti ifadə edir. Odur ki, (1) tənliyinə müstəvi üzərində *düz xəttin ümumi tənliyi,* $\bar{n} = \{A, B\}$ vektoruna *düz xəttin normal vektoru,* A, B-yə *əmsallar,* C-yə isə *sərbəst həd* deyilir. Aydındır ki, $\bar{n} = \{A, B\}$ vektoru ilə kollinear olan istənilən vektor da (1) tənliyinin ifadə etdiyiyalnız düz xəttin üzərində yerləşən nöqtələrin koordinatları onun tənliyini ödəyir.

Məsələ 1. Normal vektoru $\bar{n} = \{2;5\}$ olan və $M_0(3;-1)$ nöqtəsindən keçən düz xəttin tənliyini yazıb, $M_1(-3;1)$, $M_2(8;-3)$ və $M_3(0;0,2)$ nöqtələrinin bu düz xətt üzərində olub olmadığını müəyyən edin.

○ $M(x, y)$, tənliyi axtarılan düz xəttin cari nöqtəsi olsun. Onda, $\overline{M_0M} = \{x - 3; y + 1\}$ vektoru ilə $\bar{n} = \{2;5\}$ vektoru bir birinə perpendikulyardır:

$$(\bar{n}, \overline{M_0M}) = 0 \Rightarrow 2(x - 3) + 5(y + 1) = 0 \Rightarrow 2x + 5y - (2 \cdot 3 + 5 \cdot (-1)) = 0 \Rightarrow$$

$$2x + 5y - 1 = 0.$$

Bu axtarılan tənlikdir.

İndi, verilən nöqtələrin bu düz xətt üzərində olub olmadığını müəyyən edək:

$M_1(-3;1)$: $2\cdot(-3)+5\cdot1-1=-6+4=-2\neq0$, yəni bu bu düz xətt üzərində deyil;

$M_2(8;-3)$: $2\cdot8+5\cdot(-3)-1=16-15-1=0$, yəni bu bu düz xətt üzərindədir;

$M_3(0;0{,}2)$: $2\cdot0+5\cdot0{,}2-1=0+1-1=0$, yəni bu bu düz xətt üzərindədir. ●

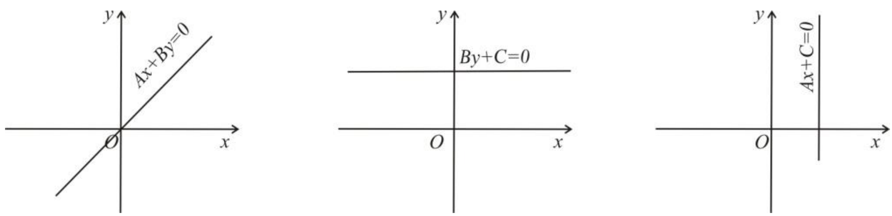
İndi əmsallar və sərbəst həddən asılı olaraq düz xəttin tənliyini araşdıraq:

1. $C=0$ olarsa, tənlik $Ax+By=0$ şəklini alır. Bu halda $x=0,\ y=0$ tənliyi

ödədiyindən, düz xətt koordinat başlanğıcından keçir (şekil 343c 1));

2. $A=0$ olarsa, tənlik $By+C=0$, yaxud $y=-\dfrac{C}{B}\ (B\neq0)$ şəklini alır. Bu halda

düz xətt, y oxundan uzunluğu $\left|\dfrac{C}{B}\right|$ olan parça ayırır ($\dfrac{C}{B}>0$ olduqda



Şəkil 343c

altdan, $\dfrac{C}{B}<0$ olduqda isə üstdən) və x oxuna paraleldir (şəkil 343c 2).

Eyni qayda ilə, $B=0$ olarsa, tənlik $Ax+C=0$, yaxud $x=-\dfrac{C}{A}\ (A\neq0)$ şəklini alır. Bu halda düz xətt, x oxundan uzunluğu $\left|\dfrac{C}{A}\right|$ olan parça ayırır ($\frac{C}{A} > 0$ olduqda soldan, $\frac{C}{A} < 0$ olduqda isə sağdan) və y oxuna paraleldir (şəkil 343c 3));

3. $A = C = 0$ olarsa, tənlik $By = 0$, yaxud $y = 0\,(B \neq 0)$ şəklini alır. Bu da x oxunun tənliyidir.

Eyni qayda ilə, $B = C = 0$ olarsa, tənlik $Ax = 0$, yaxud $x = 0\,(A \neq 0)$ şəklini alır. Bu da y oxunun tənliyidir.

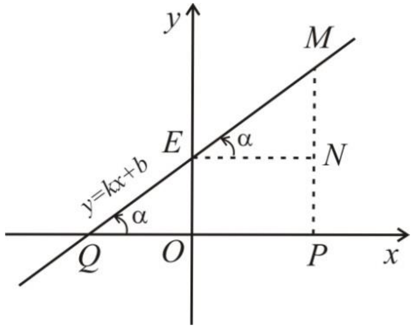
b) Düz xəttin bucaq əmsallı tətnliyi. (1) tənliyində $B \neq 0$ (yəni düz xəttin x oxuna perpendikulyar olmadığını) qəbul edib, onu aşağıdakı kimi çevirək:

$$Ax + By + C = 0 \Rightarrow y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B}.$$

Burada $-\frac{A}{B} = k,\ -\frac{C}{B} = b$ qəbul etsək,

$$y = kx + b \qquad (2)$$

tənliyini alırıq. Göründüyü kimi, bu düz xətt y oxunu $E(0, b)$ nöqtəsində kəsir. Başqa sözlə, (2) tənliyinin ifadə etdiyi düz xətt, y oxundan uzunluğu $|b|$ olan parça ayırır ($-\frac{C}{B} = b > 0$ olduqda üstdən, $-\frac{C}{B} = b < 0$ olduqda isə altdan). Bu düz xəttin x oxunun müsbət istiqaməti ilə əmələ gətirdiyi bucaq α, ixtiyari nöqtəsi də $M(x, y)$ olsun (şəkil 343 d). Onda şəkildən, $EN = x, NM = y - b$ və $tg\alpha = \frac{NM}{EN} = \frac{y-b}{x}$ olduğu, eləcə də tənlikdən $k = \frac{y-b}{x}$ olduğu görünür. Son iki bərabərlikdən $k = tg\alpha$ alınır. Deməli, k əmsalı düz xəttin x oxunun müsbət istiqaməti ilə əmələ gətirdiyi bucağın tangensinə bərabərdir. Buna görə də k ədədinə *düz xəttin bucaq əmsalı*, (2) tənliyinə də *düz xəttin bucaq əmsallı tənliyi* deyilir. Göründüyü kimi, düz xəttin bucaq əmsallı tənliyi, k və b-nin verilməsi ilə birqiymətli olaraq təyin olunur. Məsələn, x oxu ilə 30^0-li bucaq əmələ gətirib, y oxunu $E(0,-2)$ nöqtəsində kəsən düz xəttin tənliyini yazmaq üçün, $k = tg\alpha = tg30^0 = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$ və $b = -2$ olduğunu (2) düsturunda nəzərə alsaq,



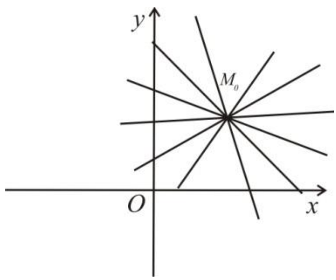
Şəkil 343d

$$y = kx + b \Rightarrow y = \frac{\sqrt{3}}{3}x + (-2) \Rightarrow y = \frac{\sqrt{3}}{3}x - 2$$

tənliyi alınır.

Yuxarıda izah olunanlardan görünür ki, x oxuna perpendikulyar olan düz xəttin bucaq əmsallı tənliyi yoxdur ($tg90^0 = \infty$).

(1) və (2) tənliklərindən görünür ki, *düz xəttin tənliyi bir dərəcədən tənlikdir.* Bu təklifin tərsi də doğrudur. Yəni, *istənilən bir dərəcəli tənlik (bir vəya iki məchullu) müstəvi üzərində müəyyən bir düz xətti ifadə edir.*



Şəkil 343e

c) Verilən nöqtədən keçən düz xətlər dəstəsi. Tərif. Müstəvi üzərində verilən nöqtədən keçən bütün düz xətlər çoxluğuna, *düz xətlər dəstəsi*, verilən nöqtəyə də *dəstənin mərkəzi* deyilir. İndi mərkəzi $M_0(x_0, y_0)$ nöqtəsində olan düz xətlər dəstəsinin tənliyini çıxaraq (şəkil 343e) . Axtarılan dəstə tənliyinin

$$y = kx + b$$

olduğunu fərz edək($k, b \in (-\infty, \infty)$). Dəstənin bütün düz xətləri $M_0(x_0, y_0)$ nüqtəsindən keçdiyinə görə,

$$y_0 = kx_0 + b$$

yaza bilərik. Son iki tənliyi tərəf tərəfə çxsaq,

$$y - y_0 = k(x - x_0) \qquad (3)$$

tənliyini alarıq. Bu, mərkəzi $M_0(x_0, y_0)$ nöqtəsində olan düz xətlər dəstəsinin tənliyidir. Məsələn, mərkəzi $M_0(2;-3)$ nöqtəsində olan düz xətlər dəstəsinin tənliyi $y + 3 = k(x - 2)$, mərkəzi $O(0;0)$-koordinat başlanğıcında olan düz xətlər dəstəsinin tənliyi isə,

$$y = kx,$$

olur.

Aydındır ki, $x = x_0$, yəni $M_0(x_0, y_0)$ nöqtəsindən keçən və x oxuna perpendikulyar olan düz xətt (3) tənliyinin ifadə etdiyi dəstənin içərisində yoxdur.

d) Verilən iki nöqtədən keçən düz xət tənliyi. Verilən $M_1(x_1, y_1)$ və $M_2(x_2, y_2)$ nöqtələrindən keçən $(x_1 \neq x_2)$ düz xəttin tənliyini çıxaraq (belə düz xəttin yeganə olacağı aydındır). Bunun üçün əvvəlcə, mərkəzi $M_1(x_1, y_1)$ nöqtəsində olan düz xətlər dəstəsinin tənliyi yazaq:

$$y - y_1 = k(x - x_1).$$

Aydındır ki, bu düz xətlərdən yalnız biri $M_2(x_2, y_2)$ nöqtəsindən keçir, yəni $y_2 - y_1 = k(x_2 - x_1)$

bərabərliyi doğrudur. Son iki bərabərliyi tərəf tərəfə bölək $(y_1 \neq y_2)$:

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} \qquad (4)$$

Alınan (4) tənliyi bir dərəcəli olduğundan, düz xət tənliyidir. $M_1(x_1, y_1)$ və $M_2(x_2, y_2)$ nöqtələrinin koordinatları bu təliyi ödəyir. Yəni, *verilən iki nöqtədən keçən düz xət tənliyidir*.

Qeyd 1. $M_1(x_1, y_1)$ və $M_2(x_1, y_2)$ nöqtələri ($x_1 = x_2$) üçün axtarılan tənlik,

$$x = x_1$$

olmaqla, y oxuna paralel, $M_1(x_1, y_1)$ və $M_2(x_2, y_1)$ nöqtələri ($y_1 = y_2$) üçünsə,

$$y = y_1$$

olmaqla, x oxuna paralel düz xətti ifadə edir.

Misal. Verilən iki nöqtədən keçən düz xət tənliyini yazın.

a) $(3;5)$ və $(-1;2)$; b) $(0;4)$ və $(1;-5)$; c) $(2;1)$ və $(3;0)$;

d) $(3;5)$ və $(3;2)$; e) $(3;5)$ və $(-1;5)$.

○a) $\dfrac{y-5}{2-5} = \dfrac{x-3}{-1-3} \Rightarrow \dfrac{y-5}{-3} = \dfrac{x-3}{-4} \Rightarrow 4y-20 = 3x-9 \Rightarrow 3x-4y+11=0;$

b) $\dfrac{y-4}{-5-4} = \dfrac{x-0}{1-0} \Rightarrow \dfrac{y-4}{-9} = \dfrac{x}{1} \Rightarrow y-4 = -9x \Rightarrow 9x+y-4=0;$

c) $\dfrac{y-1}{0-1} = \dfrac{x-2}{3-2} \Rightarrow \dfrac{y-1}{-1} = \dfrac{x-2}{1} \Rightarrow y-1 = -x+2 \Rightarrow x+y-3=0;$

d) $x_1 = x_2 = 3$ olduğundan, $x = 3$;

e) $y_1 = y_2 = 5$ olduğundan, $y = 5$. ●

e) İki düz xət atasındakı bucaq. İndi verilən iki düz xət arasındakı bucağın (φ) düsturunu çıxaraq.

1) Düz xətlər ümumi tənlikləri ilə verilmiş olsun:

$$A_1x + B_1y + C_1 = 0 \text{ və } A_2x + B_2y + C_2 = 0$$

Aydındır ki, bu düz xətlər arasındakı bucaq, uyğun olaraq onların $\overline{n_1}\{A_1, B_1\}$ və $\overline{n_2}\{A_2, B_2\}$ normal vektorları arasındaki bucağa bərabərdir (bax **§** 111) :

$$\cos\varphi = \frac{(\overline{n_1}, \overline{n_2})}{|\overline{n_1}| \cdot |\overline{n_2}|}.$$

Burada, $(\overline{n_1}, \overline{n_2}) = A_1A_2 + B_1B_2$, $|\overline{n_1}| = \sqrt{A_1^2 + B_1^2}$ və $|\overline{n_2}| = \sqrt{A_2^2 + B_2^2}$ olduğunu nəzərə alsaq,

$$\cos\varphi = \frac{A_1A_2 + B_1B_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}\sqrt{A_2^2 + B_2^2}} \qquad (5)$$

alınır. Bu, *ümumi tənlikləri ilə verilmiş iki düz xət arasındakı bucaq düsturudur*.

Buradan, *iki düz xəttin perpendikulyarlq*
($\varphi = 90^0 \Rightarrow \cos\varphi = \cos 90^0 = 0$)

$$A_1A_2 + B_1B_2 = 0 \qquad (6)$$

və *paralellik* ($\varphi = 0$, yəni $\overline{n_1}$ və $\overline{n_2}$ vektorları kollinear olduqda)

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} \qquad (7)$$

şərti alınır.

Misal. Verilən düz xətlər arasındakı bucağı tapın.

a) $4x + y - 5 = 0$ və $5x - 3y + 4 = 0$;

b) $3x - 4y + 11 = 0$ və $4x + 3y - 5 = 0$;

c) $2x - 3y + 11 = 0$ və $4x - 6y - 5 = 0$.

○ Bir başa (5) düsturunu tətbiq edək.

a) $\cos\varphi = \frac{4\cdot 5 + 1\cdot(-3)}{\sqrt{4^2+1^2}\sqrt{5^2+(-3)^2}} = \frac{17}{\sqrt{17}\sqrt{34}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \varphi = 45^0$;

b) $\cos\varphi = \frac{3\cdot 4 + (-4)\cdot 3}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}\sqrt{4^2 + 3^2}} = 0 \Rightarrow \varphi = 90^0$, yəni düz xətlər perpendikulyardır;

c) $\cos\varphi = \frac{2\cdot 4 + (-3)\cdot(-6)}{\sqrt{2^2 + (-3)^2}\sqrt{4^2 + (-6)^2}} = \frac{26}{\sqrt{13}\sqrt{52}} = 1 \Rightarrow \varphi = 0^0$, yəni düz xətlər paraleldir. Bunu əmsalların mütənasibliyündən də söyləmək olardı ($2/4 = (-3)/(-6) = 1/2$). ●

2) Düz xətlər bucaq əmsallı tənlikləri ilə verilmiş olsun (şəkil 343f):

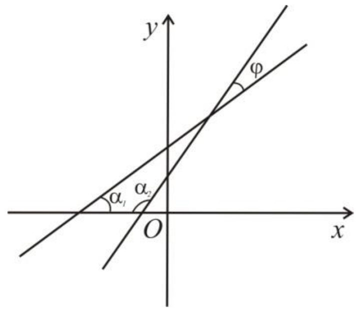
$$y = k_1x + b_1 \text{ və } y = k_2x + b_2.$$

Şəkildən göründüyü kimi $\varphi = \alpha_2 - \alpha_1$ (üçbucağın xarici bucağının xassəsinə görə), buradan da,

$$tg\varphi = tg(\alpha_2 - \alpha_1) \Rightarrow tg\varphi = \frac{tg\alpha_2 - tg\alpha_1}{1 + tg\alpha_1 g\alpha_2}$$

və ya

$$tg\varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2} \qquad (8)$$



Şəkil 343f

Bu, *bucaq əmsallı tənlikləri ilə verilmiş iki düz xət arasındakı bucaq düsturudur*.

Buradan, *bucaq əmsallı tənlikləri ilə verilmiş iki düz xəttin paralellik* ($\varphi = 0^0 \Rightarrow tg\varphi = 0$)

$$k_2 - k_1 = 0 \Rightarrow k_1 = k_2$$

(9)

və *perpendikulyarlq* ($\varphi = 90^0 \Rightarrow tg\varphi = tg90^0 = \infty$)

$$1 + k_1 k_2 = 0 \qquad (8)$$

şərti alınır.

Misal. Verilən düz xətlər arasındakı bucağı tapın.

a) $y = -3x + 5$ və $y = 2x + 4$;

b) $y = 4x + 11$ və $y = -0,25x - 3$;

c) $y = 5x - 3$ və $y = 5x + 9$.

○ a) (8) düsturuna görə,

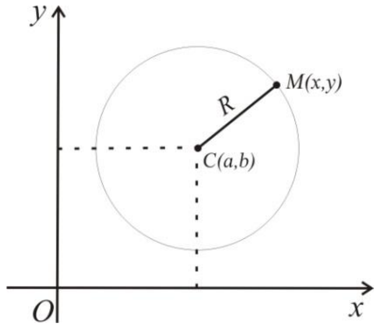
$$tg\varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2} \Rightarrow tg\varphi = \frac{2 - (-3)}{1 + (-3) \cdot 2} \Rightarrow tg\varphi == -1 \Rightarrow \varphi = 135^0;$$

b) $k_1 k_2 = 4 \cdot (0,25) \Rightarrow k_1 k_2 = -1 \Rightarrow \varphi = 90^0$ (perpendikulyardırlar);

c) $k_1 = k_2 = 5$ olduğundan, düz xətlər paraleldirlər. ●

§ 113. ÇEVRƏ

Bildiyimiz kimi, müstəvi üzərində sabit bir nöqtədən eyni məsafədə olan nöqtələrin həndəsi yerinə *çevrə* deyilir. Tərifdə sözü edilən sabit nöqtə *çevrənin mərkəzi*, eyni məsafə isə *çevrənin radiusu* adlanır (şəkil 343g).



Şəkil 343g

İndi yuxarıda açıqladığımız məsafə düsturundan istifadə edərək, Oxy düzbucaqlı koordinat sistemində mərkəzi $C(a,b)$ nöqtəsində, radiusu R və üzərindki ixtiyari nöqrtə $M(x,y)$ olan (bu nöqtəyə *cari nöqtə* də deyilir) çevtənin tənliyini çıxaraq:

$$\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}=R \Rightarrow (x-a)^2+(y-b)^2=R^2. \qquad (1)$$

Çevrənin mərkəzi koordinat başlanğıcında olduqda, onun tənliyi

$$x^2+y^2=R^2 \qquad (1^*)$$

şəklini alır. (1), eləcə də (1*) tənliyi *çevrənin sadə (kanonik) tənliyi* adlanır.

(1) tənliyində mötərizələri açsaq, çevrənin tənliyi,

$$x^2+y^2-2ax-2by+a^2+b^2-R^2=0 \qquad (2)$$

şəklini alır. Göründüyü kimi, çevrə tənliyi iki dərəcəlidir, dəyişənlərin hasil olan xy həddi yoxdur və ikinci dərəcəli hədlərinin əmsalları bərabərdir. Bunları ümumiləşdirib, çevrənin tənliyini,

$$Ax^2+Ay^2+2Dx+2Ey+F=0 \quad /(A\neq 0) \qquad (3)$$

kimi də yazmaq olar. (3) tənliyinə *çevrənin ümumi tənliyi* deyilir. Aydındır ki, (3) təliyi hər zaman (1) şəklinə gətirilə bilir. Doğrudan da,sadə çevirmələrlə,

$$Ax^2+Ay^2+2Dx+2Ey+F=0 \Rightarrow x^2+y^2+2\frac{D}{A}x+2\frac{E}{A}y+\frac{F}{A}=0 \Rightarrow$$

$$\left(x+\frac{D}{A}\right)^2+\left(y+\frac{E}{A}\right)^2-\left(\frac{D}{A}\right)^2-\left(\frac{E}{A}\right)^2+\frac{F}{A}=0 \Rightarrow$$

$$\left(x+\frac{D}{A}\right)^2+\left(y+\frac{E}{A}\right)^2+\frac{AF-D^2-E^2}{A^2}=0 \qquad (4)$$

alınır.

(4) tənlyində $P=\dfrac{AF-D^2-E^2}{A^2}$ həddinin işarəsi ilə bağlı, aşağıdakı üç hal mümkündür:

1. $P<0\,(-P>0)$. Bu halda tənlik,

$$\left(x-\frac{D}{A}\right)^2+\left(y-\frac{E}{A}\right)^2=R^2 \qquad (5)$$

şəklini alır ($-P=R^2$) və mərkəzi $\left(\dfrac{D}{A},\dfrac{E}{A}\right)$ nöqtəsində, radiusu da R olan çevrəni ifadə edir;

2. $P=0\ (R=0)$. Bu halda tənlik,

$$\left(x-\frac{D}{A}\right)^2+\left(y-\frac{E}{A}\right)^2=0 \qquad (5)$$

şəklini alır və yalnız bir nöqtəni - $\left(\dfrac{D}{A},\dfrac{E}{A}\right)$ mərkəzini ifadə edir. Başqa sözlə, çevrə bir nöqtəyə çevrilir;

3. $P>0$. Bu halda (4) bərabərliyinin sol tərəfindəki ifadələrinin heç biri məni olmadğından, onların cəmi sıfır ola bilməz. Başqa sözlə, həgiqi ədədlər çoxluğunda (4) bərabərliyini ödəyən ədədlər yoxdur. Ona görə də (4) bərabərliyinin təyin etdiyi "çevrəyə" *xəyali çevrə* deyilir.

Misallar. Aşağıda tənlikləri verilən çevrələrin növünü təyin edib, sadə şəklə gətirərək mərkəzini və radiusunu yazın.

1. $3x^2+3y^2-6x+12y+19=0$;

2. $x^2+y^2-10x+5y+25=0$;

3. $-2x^2-2y^2+4x+14y-\dfrac{53}{2}=0$;

4. $4x^2+4y^2-24x-12y-R=0$.

○ Əvvəlcə veilən tənliyi sadə şəklə salıb, sonra suallara cavab verək.

1. $3x^2+3y^2-6x+12y+2=0 \Rightarrow x^2+y^2-2x+4y+\dfrac{2}{3}=0 \Rightarrow$

$$(x-1)^2-1+(y+2)^2-4+\frac{2}{3}=0 \Rightarrow (x-1)^2+(y+2)^2+\frac{-3-12+2}{3}=0 \Rightarrow$$

$$(x-1)^2+(y+2)^2=\frac{13}{3}.$$

Deməli, verilən tənlik həqiqi çevrə tənliyidir. Mərkəzi $C(1;2)$ nöqtəsində, radiusu da $R=\sqrt{13/3}$ -dür;

2.

$$x^2+y^2-10x+5y+25=0 \Rightarrow (x-5)^2-25+\left(y+\frac{5}{2}\right)^2-\frac{25}{4}+25=0 \Rightarrow$$

$$(x-5)^2+\left(y+\frac{5}{2}\right)^2=\frac{25}{4}.$$

Deməli, verilən tənlik həqiqi çevrə tənliyidir. Mərkəzi $C(5;-5/2)$ nöqtəsində, radiusu da $R=5/2$ -dir;

3. $-2x^2-2y^2+4x+14y-\dfrac{53}{2}=0 \Rightarrow x^2+y^2-2x-7y+\dfrac{53}{4}=0 \Rightarrow$

$$(x-1)^2-1+\left(y-\frac{7}{2}\right)^2-\frac{49}{4}+\frac{53}{4}=0 \Rightarrow (x-1)^2+\left(y-\frac{7}{2}\right)^2=0.$$

Deməli, verilən tənlik, mərkəzi $C(1;7/2)$ nöqtəsində, radiusu da $R=0$ olan çevrəni (yəni nöqtəni) ifadə edir;

4. $4x^2+4y^2-24x-12y+R=0 \Rightarrow x^2+y^2-6x-3y-R=0 \Rightarrow$.

$$(x-3)^2-9+\left(y-\frac{3}{2}\right)^2-\frac{9}{4}+\frac{51}{4}=0 \Rightarrow (x-3)^2+\left(y-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{3}{2}=0.$$

Göründüyü kimi verilən tənlik, mərkəzi $C(3;3/2)$ nöqtəsində, radiusu da $R=-i\sqrt{3/2}$ olan xəyali çevrəni ifadə edir. ●

Misal. Mrkəzi $C(-3;1)$ nöqtəsində olub, $M(1;3)$ nöqtəsindən keçən çevrənin tənliyini yazın.

○ Əvvəlcə axtarılan çevrə tənliyini

$$(x+3)^2+(y-1)^2=R^2$$

olmaqla sadə şəkildə yazıb, R-ni tapaq. Çevrə $M(1;3)$ nöqtəsindən keçdiyindən,

$$(1+3)^2+(3-1)^2=R^2$$

yazıb, buradan $R=2\sqrt{5}$ tapılır. Deməli, axtarılan çevrə tənliyi

$$(x+3)^2+(y-1)^2=20$$

şəklindədir. ●

Çevrənin Oxy koordinat müstəvisində yerləşməsinin aşağıdakı xüsusi hallarını bilmək faydalıdır:

1. Mərkəzi x oxu üzərində olub, radiusu R olan çevrə tənliyi:

$$(x-a)^2+y^2=R^2.$$

2. Mərkəzi y oxu üzərində olub, radiusu R olan çevrə tənliyi:

$$x^2+(y-b)^2=R^2.$$

3. x oxuna toxunan çevrə tənliyi:

$$(x-a)^2+(y-b)^2=b^2.$$

4. y oxuna toxunan çevrəi tənliyi:

$$(x-a)^2+(y-b)^2=a^2.$$

5. Hər iki oxa toxunan çevrə tənliyi:

$$(x\pm R)^2+(y\pm R)^2=R^2.$$

ÇALIŞMALAR

1. *ABC* üçbucağının AA_1 medianı üçün $\overline{AA_1} = (\overline{AB} + \overline{AC})/2$ olduğunu göstərin

2. *M* və *N* nöqtələri *AB* və *CD* parçalarının orta nöqtələri olduqda, $\overline{MN} = (\overline{AC} + \overline{BD})/2$ olduğunu göstərin.

3. *A(2,3); B(1,0); C(-2,2), D(-3,5)* nöqtələri verilmişdir. $\overline{AB}$ və $\overline{CD}$ vektorlarının bərabər olduğunu göstərin.

4. *A(0,0); B(3,3); C(1,2)* nöqtələri verildikdə elə *D(x,y)* nöqtəsi tapın ki, $\overline{AD} = \overline{CD} = \overline{BD}$ olsun.

5. *A(0,1); B(1,1)* nöqtələri verildikdə elə *C(x,y)* nöqtəsi tapın ki, *ABC* üçbucağı bərabərtərəfli olsun.

6. $\overline{a} = \{m,4\}$ vektoprunun modulu 5-ə bərabərdir. *m*-i tapın.

7. Vektorların cəmini tapın:

1) $\overline{a} = \{2,-1\}$; $\overline{b} = \{-1,2\}$, 2) $\overline{a} = \{-3,-4\}$; $\overline{b} = \{3,4\}$,

3) $\overline{a} = \{1,2\}$; $\overline{b} = \{3,6\}$, 4) $\overline{a} = \{-2,-4\}$; $\overline{b} = \{5,3\}$,

8. Vektorların fərqini tapın:

1) $\overline{a} = \{1,0\}$; $\overline{b} = \{-1,-2\}$, 3) $\overline{a} = \{2,3\}$; $\overline{b} = \{1,2\}$,

2) $\overline{a} = \{22,-11\}$; $\overline{b} = \{11,-22\}$, 4) $\overline{a} = \{2,2\}$; $\overline{b} = \{0,0\}$,

9. $\overline{a} = \{2,5,3\}$; $\overline{b} = \{0,-2,1\}$; $\overline{c} = \{-5,1,8\}$ vektorları verilmişdir. $\overline{a} + \overline{b} + \overline{c}$ -nin uzunluğunu tapın.

10. $\overline{a} = \{5,-12\}$ vektoru verildikdə, elə $\overline{b} = \{m,n\}$ vektoru tapın ki, uzunluğu bundan 5 dəfə kiçik, istiqaməti isə $\overline{a}$ vektorunun istiqaməti ilə a) eyni, b) əks olsun.

11. $\overline{a} = \{-2,3\}$; $\overline{b} = \{-1,2\}$ vektorları verilmişdir. Aşağıdakıları tapın:

1) $2\overline{a} + 3\overline{b}$, 2) $5\overline{a} - 2\overline{b}$, 3) $2\overline{a} + (\overline{b} - \overline{a})$, 4) $5\overline{a} - (\overline{a} - 2\overline{b})$,

12. $\overline{a}=\{4,-3\}$ və $\overline{b}=\{2,n\}$ vektorları kollineardır. n-i tapın.

13. $\overline{a}=\{6,8\}$ vektoruna kollinear vahid vektoru tapın.

14. $\overline{a}=\{1,-2\}$; $\overline{b}=\{1,2\}$ və $\overline{c}=\{-1,2\}$ vektorları verilmişdir. $\overline{c}=\lambda\overline{a}+\mu\overline{b}$ şərtini ödəyən λ və μ ədədlərini tapın.

15. Verilən vektorların hansının vahid vektor olduğunu müəyyən edin:

$\overline{a}=\{1/3;2/3\}$; $\overline{b}=\{3/5;4/5\}$; $\overline{c}=\{1,0\}$; $\overline{d}=\{5/13;-12/13\}$.

16. $\overline{a}=\{1;2\}$ və $\overline{b}=\{1;-1/2\}$ vektorları arasındakı bucağı tapın.

17. Üçbucağın təpə nöqtələri *A(-3,5,6); B(1,-5,7); C(8,-3,-1)* verilmişdir.Onun bucaqlarının kosinusunu tapın.

18. $\overline{a}=\{2,3\}$ və $\overline{b}=\{2,n\}$ verilmişdir.n-in hans qiymətində $\overline{a}\perp\overline{b}$ olar?

19. $\varphi=(\overline{a}\,\hat{}\,\overline{b})=60^0$ olarsa, $2\overline{b}-\overline{a}\perp\overline{a}$ olduğunu göstərin.

20. $|\overline{a}|=8$, $|\overline{b}|=5$ və 1) $\varphi=60^0$, 2) $\varphi=90^0$, 3) $\varphi=120^0$, $\varphi=180^0$ olduqda $(\overline{a},\overline{b})$ skalyar hasilini tapın.

21. $\overline{a}=\{1;-1;2\}$, $\overline{b}=\{2;-2;-1\}$ verilmişdir. $(\overline{a},\overline{b})$ skalyar hasilini və $2\overline{a}^2-4\overline{a}\overline{b}+5\overline{b}^2$ -nı tapın.

22. Təpə nöqtələri *A(-5, 3,4), B(-1,-7,5), C(6,-5,-3), D(2,5,-4)* olan fiqurun kvadrat olduğunu isbat edin.

23. $\overline{a}=\{1;2;3\}$ vektoruna kollinear olan və $(\overline{b},\overline{a})=28$ şərtini ödəyən $\underline{b}$ vektorunu tapın.

24. $\overline{a}=\{1;-2;2\}$, $\overline{b}=\{2;1;-2\}$, $\overline{c}=\{10;4;2\}$ vektorları verilmişdir. $\mathrm{Pr}_{\overline{a}}\,\overline{b}$, $\mathrm{Pr}_{\overline{a}}(\overline{b}+\overline{c})$, $\mathrm{Pr}_{\overline{a}+\overline{b}}\,\overline{c}$, $\mathrm{Pr}_{\overline{b}}(2\overline{a}-3\overline{c})$ tapın.

25. Üçbucağın medianlarının bir nöqtədə kəsişdiyini və kəsişmə nöqtəsində tərəfdən başlayaraq 1:2 nisbətində bölündüyünü vektorların köməyi ilə isbat edin.

26. $\mathrm{Pr}_l\,\overline{a}=-3$, $\mathrm{Pr}_l\,\overline{b}=5$ olduğunu bilərək $\mathrm{Pr}_l(\overline{a}+2\overline{b})$ -ni tapın.

27. Skalyar hasilin köməyi ilə Pifaqor teoremini isbat edin.

28. Skalyar hasilin köməyi ilə isbat edin ki, düzbucaqlı üçbucaqda katet, hipotenuzla bu katetin hipetonuz üzərindəki proyeksiyası arasında orta münasibdir.

29. Skalyar hasilin köməyi ilə isbat edin ki, bucağın tənböləni qarşıdakı tərəfi, yan tərəflərlə mütənasib hissələ bölür.

30. *ABC* üçbucağında *D* nöqtəsi *AB* tərəfini *AD:DB=2:7* nisbətində hissələrə bölür. $\overline{CD}$ vektorunu $\overline{CA}=\overline{b}$, $\overline{CB}=\overline{a}$ vektorları üzrə ayırın.

31. Mərkəzi koordinat başlanğıcında olan çevrə *A(5;12)* nöqtəsindən keçir. Çevrənin radiusunu tapın.

32. . $x^2-2x+y^2+8y-8=0$ tənliyi ilə verilən çevrənin mərkəzinin koordinatlarını tapın.

33. Mərkəzi *O(-3; 3)* nöqtəsində olub, *A(1;0)* nöqtəsindən keçən çevrənin tənliyini yazın.

34. *M(2; 1)* nöqtəsindən keçən $(x-2)^2+(y-4)^2=R^2$ çevrəsinin radiusunu tapın.

35. Mərkəzi $x^2-6x+4+y^2-4y=0$ çevrəsinin mərkəzi ilə eyni olub, *M(3;4)* nöqtəsindən keçən çevrənin radiusunu tapın.

36. *A(3;6)* və *B(5;4)* nöqtələrsindən keçən düzxəttinin tənliyini yazın.

37. $y=2x+3$ düzxəttinə perpendikulyar olan düzxətlərin tənliyini yazın.

38. $y=14x-3$ və $y=14x+3$ düzxətlərinin qarşılıqlı vəziyyətini təyin edin.

39. *M(2; 3)* nöqtəsindən keçən düzxəttin tənliyini yazın.

40. $y=2x-4$ düz xəttinə paralel olub *A(5; 2)* nöqtəsindən keçən düzxəttin tənliyini yazın.

41. Verilən düz xətlər arasındakı bucağı tapın

a) $3x-2y+7=0$ və $2x+3y-9=0$; b) $3x+4y+3=0$ və $5y+6=0$;

c) $y=0{,}5x-3$ və $y=3x-5$; d) $y=3x-4$ və $y=3x+7$.

TESTLƏR

1. $\overline{a}(3,4)$, $\overline{b}(1,-3)$ vektorlarının skalyar hasilini tapın.

A) -9 B) 9 C) -8 D) 5 E) 6

2. $\overline{a}(-2,-1,k)$ və $\overline{b}(-4,-3,1)$ vektorların skalyar hasili 14 olarsa, k-nı tapın.

A) 1 B) 2 C) 3 D) -2 E) 5

3. x-in hansı qiymətində $\overline{a}(3,4)$ və $\overline{b}(4,x)$ vektorları perpendikulyar olar?

A) 0 B) 3 C) 2 D) -3 E) -2

4. $\overline{a}(x,8,6)$ vektorunun uzunluğu 10 olarsa, x-i tapın

A) -2 B) 2 C) 3 D) 1 E) 0

5. $\overline{b}(0,3,4)$ vektoru verilmişdir. $4\overline{b}$ vektorunun uzunluğunu tapın

A) 15 B) 16 C) 14 D) 20 E) 18

6. $\overline{a}(4,2,4)$, $\overline{b}(0,2,2)$ vektorları arasındakı bucağı tapın

A) 60^0 B) 45^0 C) 30^0 D) 90^0 E) 35^0

7. $\overline{a}(-2,n,4)$ və $\overline{b}(6,-9,m)$ vektorları kollinear olarsa, m+n cəmini tapın.

A) 13 B) 14 C) 15 D) 10 E) 9

8. $|\overline{a}| = 4$, $|\overline{b}| = 10$ və $\overline{a}$ ilə $\overline{b}$ arasındakı bucaq 60^0 olarsa, $\overline{a} \cdot \overline{b}$-ni tapın

A) 40 B) 14 C) 4 D) 20 E) -4

9. $\overline{a}(12,-9,0)$ və $\overline{b}(4,-3,0)$ vektorları verilib $|\overline{a}| + |\overline{b}|$ -ni tapın.

10. $\overline{a}(-2,1)$ və $\overline{b}$ vektorları üçün uyğunluğu təyin edin.

1. $\overline{b}(-3,-6)$	**a.** $|\overline{b}| = 13$
2. $\overline{b}(4,-2)$	**b.** $\overline{a} \cdot \overline{b} = -10$
3. $\overline{b}(-5,12)$	**c.** $\overline{a} \cdot \overline{b} = 0$
	d. $\overline{b}$ və $\overline{a}$ vektorları əks istiqamətli
	e. $|\overline{b}| = 15$

XVI FƏSİL

DÜZ XƏTT VƏ MÜSTƏVİ

§ 114. STEREOMETRİYANIN AKSİOMLARI VƏ ONLARDAN ÇIXAN NƏTİCƏLƏR.

Kitabın planimetriya hissəsində bütün nöqtələri bir müstəvi üzərində olan fiqurlar, yəni müstəvi fiqurlar və onların xassələri öyrənilir. Stereometriyada isə fəza fiqurları və\ onların xassələri öyrənilir. Qeyd edək ki, burada da ilk anlayış olaraq nöqtə, düz xətt, müstəvi və məsafə qəbul edilir. Stereometriyanın aksiomlar sistemi planimetriyanın aksiomlarından və aşağıdakı üç aksiomdan ibarətdir:

1. *İxtiyari müstəviyə aid olan və ona aid olmayan nöqtələr var.*
2. *İki müxtəlif müstəvinin bir ortaq nöqtəsi varsa, onlar bu nöqtədən keçən düz xətt boyunca kəsişir.*
3. *Kəsişən iki düz xətdən yalnız bir müstəvi keçirmək olar.*

Aksiomlardan aşağıdakı nəticələr çıxır:

Nəticə 1. *Bir düz xətt üzərində olmayan üç nöqtədən yalnız bir müstəvi keçirmək olar.*

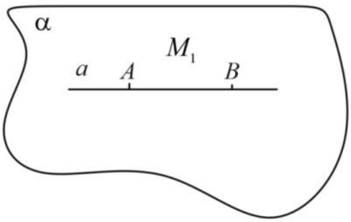
□ *A, B* və *C* bir düz xətt üzərində olmayan üç nöqtə olsun. *A* və *B,* eləcə də *A* və *C* nöqtələrindən düz xəttlər keçirsək, *A* nöqtəsində kəsişən iki düz xətt alarıq ki, bu da 3-cü aksioma görə bir müstəvini təyin edir. ■

Nəticə 2. *Düz xətt və onun xaricindəki nöqtədən yalnız bir müstəvi keçirmək olar (şəkil 346).*

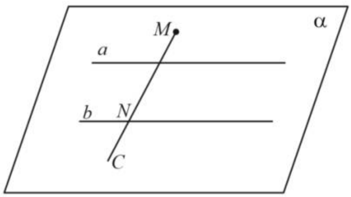
□ Tutaq ki, *a* düz xətti və onun üzərində olmayan *M* nöqtəsi verilmişdir. *a* düz xətti üzərində ixtiyari iki müxtəlif *A* və *B* nöqtələrini qeyd etsək, bir düz xətt üzərində olmayan *A, B, M* kimi üç nöqtə alırıq ki, onlar da bir müstəvini təyin edir. ■

Nəticə 3. *Müxtəlif iki paralel düz xəttdən yalnız bir müstəvi keçirmək olar.*

□ *a* və *b* paralel düz xəttləri verilmiş olsun (şəkil 347). Bu düz xətlərdən hər biri üzərində bir nöqtə qeyd edib, bu nöqtələrdən bir düz xətt keçirsək, kəsişən iki düz xətt alırıq ki, onlar da bir müstəvi təyin edir. ■



Şəkil 346



Şəkil 347

Nəticə 4. *Düz xəttin iki nöqtəsi müstəvi üzərindədirsə, onda bu düz xətt bütünlüklə həmin müstəvi üzərindədir.*

□ *a* düz xəttinin iki nöqtəsi müstəvi üzərində olsun. Bu düz xəttin xaricində *A* nöqtəsi qeyd edək (şəkil 348)

A nöqtəsi və *a* düz xəttindən β müstəvisi keçirək. Əgər bu müstəvi α ilə üst-üstə düşərsə təklif doğrudur. α və β müstəviləri üst-üstə düşmürsə, onda onlar bir *b* düz xətti boyunca kəsişərlər ki, o da *a* düz xətti ilə üst-üstə düşür.(iki nöqtədən yalnız bir düz xətt keçirmək olar). Deməli *a* düz xətti α müstəvisi üzərindədir. ■

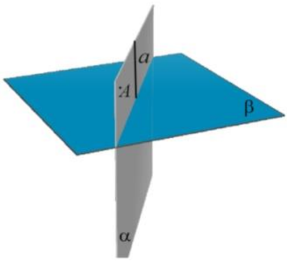
Tərif. Fəzanın müstəvidən bir tərəfdə qalan hissəsinə *açıq yarımfəza* deyilir.

Aydındır ki, müstəvi fəzanı iki açıq yarımfəzaya ayırır.

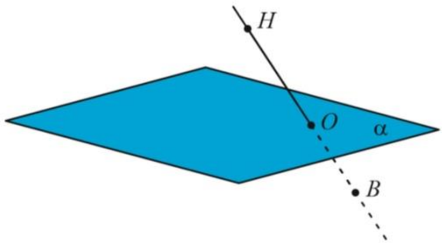
Açıq yarımfəzaların aşağıdakı xassələri var.

Xassə 1. *Açıq yarımfəzanın ixtiyari iki nöqtəsini birləşdirən parça onun sərhəddini kəsmir.*

Xassə 2. *Müstəvisinin təyin etdiyi müxtəlif açıq yarımfəzaların istənilən iki nöqtəsini birləşdirən parça həmin sərhəddi kəsir. (*şəkil 349*).*



Şəkil 348



Şəkil 349

Açıq yarımfəza ilə onun sərhəddinin, yəni, onu təyin edən müstəvisinin birləşməsinə *qapalı yarımfəza* deyilir (və ya sadəcə *yarımfəza*).

Məsələ. İstənilən üçü bir müstəvi üzərində olmayan ortaq təpəli şualar çoxluğu verilmişdir. İki şuadan bir müstəvi keçirməklə a) 5 şuadan, b) *n* şuadan neçə müstəvi keçirmək olar?

○ Bu şuaları 1, 2, 3, 4, 5 rəqəmləri ilə nömrələyək.Aşağıdakı hallar mümkündür: 12, 13, 14, 15, 23, 24, 25, 34, 35, 45. Yəni 10 müstəvi. Aydındır ki, bu say 5 elementdən hər birində iki element olmaqla düzəldilmiş kombinizonlardır. Bunların sayı isə

$$C_5^2 = \frac{5 \cdot 4}{1 \cdot 2} = 10$$

kimi təyin olunur.

b) Eyni qayda ilə n sayda şua üçün müstəvilərin sayı

$$C_n^2 = \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2}$$

kimi təyin olunur. ●

§ 115 DÜZ XƏTLƏRİN VƏ DÜZ XƏTLƏ MÜSTƏVİNİN QARŞILIQLI VƏZİYYƏTİ.

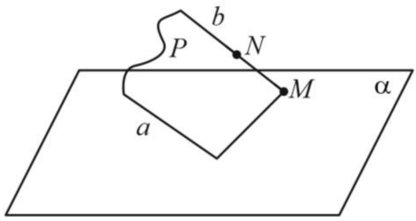
Məlumdur ki, a və b düz xətləri kəsişirsə və ya paraleldirsə, onda onlar bir müstəvi üzərindədirlər. Bu iki hal planimetriyada düz xətlərin kəsişməsi və paralelliyinə uyğundur. Lakin, fəzada paralel olmayan iki düz xət kəsişməyə də bilər.

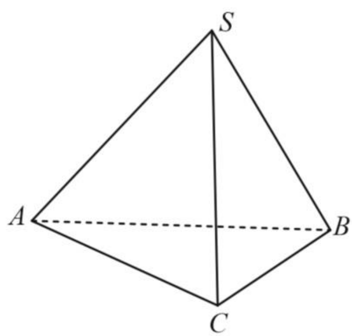
Tərif. Paralel olmayan və kəsişməyən iki düz xəttə *çarpaz düz xətlər* deyilir.

Tərifdən çıxır ki, çarpaz düz xətlərdən müstəvi keçirmək olmaz. Çarpaz düz xətlərin varlığını göstərən aşağıdakı əlamətə baxaq.

Teorem. *İki düz xətdən biri digərinin yerləşdiyi müstəvini bu düz xəttə aid olmayan nöqtədə kəsərsə, onda bu iki düz xətt çarpazdılar.*

□ α müstəvisi üzərində a düz xətti qeyd edək. Bu düz xəttə aid olmayan M nöqtəsini götürək.(şəkil 350).





Şəkil 350 şəkil 351

M nöqtəsindən və α müstəvisi xaricində götürülmüş ixtiyari N nöqtəsindən b düz xəttini keçirək. Göstərək ki, a və b çarpaz düz xətlərdir. İsbat üçün əksini fərz edək.Tutaq ki, bu düz xətlər kəsişir və ya paraleldir. Onda bunların hər ikisi hər hansı β müstəvisi üzərində olar. α və β müstəviləri a düz xəttindən və onun xaricindəki M nöqtəsindən keçdiklərindən üst-üstə düşərlər. Odur ki, N nöqtəsi β müstəvisi üzərində olduğundan, α müstəvisinə də aid olmalıdır. Bu isə şərtə ziddir. Deməli, fərziyyəmiz doğru deyil. Yəni, a və b çarpaz düz xətlərdir. ■

Məsələn, piramidanın yan tilinin üzərində yerləşdiyi düz xətt oturacağın bu til qarşısındakı tərəfinin yerləşdiyi düz xətlə çarpazdır.(şəkil 351). Uyğun olaraq SA və BC, SB və AC, SC və AB çarpaz düz xətlərdir.

Çarpaz düz xətlər arasında qalan bucaq dedikdə fəzanın bir nöqtəsindən çıxan və uyğun olaraq bu düz xətlərə paralel olan iki şua arasındakı bucaq başa düşülür.(şəkil 352) AB və CD çarpaz düz xətləri arasındakı bucaq MON bucağıdır.

Indi düz xətlə müstəvinin qarşılıqlı vəziyyətinə baxaq. Düz xətt müstəvi ilə üç cür qarşılıqlı vəziyyətdə ola bilər:

1. Düz xətlə müstəvinin ortaq nöqtəsi yoxdur. Bu halda deyirlər ki, düz xətt müstəviyə paraleldir.

2. Düz xətlə müstəvinin yeganə ortaq nöqtəsi var. Bu halda deyirlər ki, düz xətt müstəvini kəsir.

3. Düz xətlə müstəvinin iki ortaq nöqtəsi var. Onda aydındır ki, düz xətt müstəvinin üzərindədir. Bu halda da deyirlər ki, düz xətt müstəviyə paraleldir.

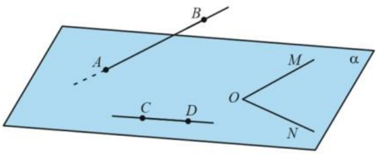
Tərif 1. Düz xətlə müstəvinin ortaq nöqtəsi yoxdursa və ya düz xətt müstəvinin üzərindədirsə, düz xətt müstəviyə *paraleldir* deyilir.

Düz xətt və müstəvinin paralellik əlamətlərinə baxaq.

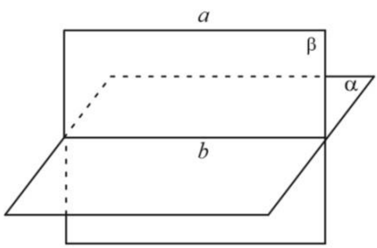
Teorem 1. *Düz xətt müstəvi üzərindəki hər hansı düz xəttə paraleldirsə, düz xətt müstəvinin özünə də paraleldir.*

□ Düz xətt müstəvinin üzərində olarsa, onda düz xəttin müstəviyə paralel olması aydındır.

İndi α müstəvisi üzərində olmayan a düz xətti həmin müstəvi üzərindəki hər hansı b düz xəttinə paralel olsun.(şəkil 353). a və b düz xəttlərindən β müstəvisi keçirək. Bu zaman α və β müstəviləri b düz xətti boyunca kəsişəcəkdir. Aydındır ki, a düz xətti α müstəvisini kəsərsə, kəsişmə nöqtəsi b düz xətti üzərində olmalıdır. Bu isə $a \parallel b$ olduğundan mümkün deyil. Deməli,



Şəkil 352



Şəkil 353

a düz xətti α müstəvisinə paraleldir. ■

Teorem 2. *Bir müstəvi ikinci müstəviyə paralel olan düz xətdən keçib onu kəsirsə, onda bu müstəvilərin kəsişmə xətti verilən düz xəttə paraleldir.*

□ Tutaq ki, a düz xətti α müstəvisinə paraleldir və β müstəvisi bu düz xətdən keçib α müstəvisini b düz xətti boyunca kəsir. (şəkil 353). Aydındır ki, a və b düz xətləri bir müstəvi üzərindədir və a düz xətti b düz xəttini kəsə bilməz, çünki, bu halda a düz xətti α müstəvisi ilə kəsişərdi. Deməli $a \parallel b$ olur. ■

Nəticə. *Kəsişən iki müstəvinin hər birinə paralel olan düz xətt bu müstəvilərin kəsişmə xəttinə paraleldir.*

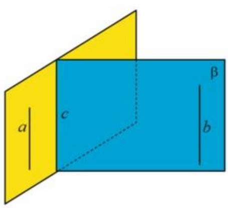
§ 116. PARALEL DÜZ XƏTLƏR HAQQINDA TEOREMLƏR.

Teorem 1. *İki paralel düz xəttin hər birindən keçən müstəvilər kəsişirsə, onda onların kəsişmə xətti bu düz xətlərə paraleldir.*

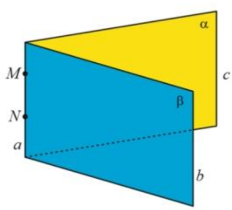
□ Tutaq ki $a \parallel b$-dir.(şəkil 354) a düz xəttindən α müstəvisi və b düz xəttindən β müstəvisi keçirək, eyni zamanda fərz edək ki, onlar c düz xətti boyunca kəsişirlər. $a \parallel c$ və $b \parallel c$ olduğunu isbat edək. Düz xətlə müstəvinin paralellik əlamətinə əsasən $a \parallel \beta$ olar. Buradan alınır ki, $a \parallel c$. Həmin qaydada $b \parallel \alpha$ olmasından $c \parallel b$ alınır. ■

Teorem 2. *İki düz xətt üçüncü düz xəttə paraleldirsə, onda həmin düz xətlər bir-birinə paraleldir.*

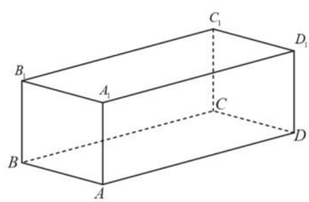
□ Düz xətlər bir müstəvi üzərində olduqda təklifin doğruluğunu planimetriyadan bilirik. İndi tutaq ki, a, b, c düz xətləri bir müstəvi üzərində deyil və $a \parallel c$, $b \parallel c$-dir(şəkil 355). Aydındır ki, a və c düz xətlərindən bir α müstəvisini keçirmək olar. $b \parallel c$ olduğuna görə $b \parallel \alpha$ olacaqdır. a düz xətti üzərində ixtiyari M nöqtəsi qeyd edib, bu



Şəkil 354



şəkil 355



şəkil 356

nöqtədən və b düz xəttindən bir β müstəvisi keçirək. α və β müstəvilərinin kəsişmə xətti olan MN düz xətti b və c düz xətlərinə paraleldir. M nöqtəsindən c düz xəttinə yalnız bir paralel düz xətt çəkmək mümkün olmasından çıxır ki, MN və a düz xətləri üst-üstə düşür. $MN \parallel b$ olduğundan, $a \parallel b$ olacaqdır. ■

İsbat etdiyimiz bu təklif, fəzada düz xətlərin paralelliyi üçün tranzitivlik xassəsi adlanır($a \parallel \beta$ və $\beta \parallel$ c isə $a \parallel$ c-dir). Bu xassəyə əsasən paralelepipedin yan tilləri paraleldilər (şəkil 356).

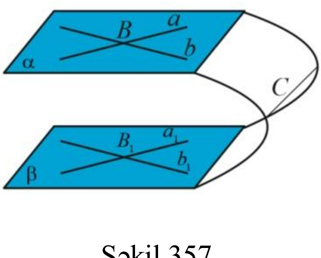
§ 117 MÜSTƏVİLƏRİN QARŞILIQLI VƏZİYYƏTİ

İki müstəvinin qarşılıqlı vəziyyəti üçün üç hal mümkündür:

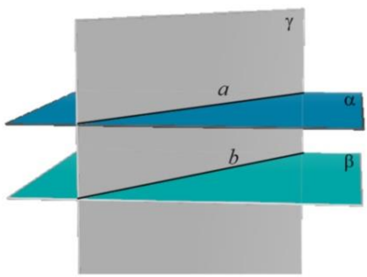
1. Müstəvilər kəsişirlər.
2. Müstəvilər kəsişmirlər. Bu halda deyirlər ki, müstəvilər paraleldir.
3. Müstəvilər üst-üstə düşür. Bu halda da deyirlər ki, müstəvilər paraleldir.

Tərif. Kəsişməyən və ya üst-üstə düşən müstəvilərə *paralel müstəvilər* deyilir və $\alpha \parallel \beta$ kimi işarə olunur.

Teorem 1(İki müstəvinin paralellik əlaməti). *Bir müstəvinin kəsişən iki düz xətti uyğun olaraq o biri müstəvinin kəsişən iki düz xəttinə paralel olarsa, bu müstəvilər bir-birinə*



Şəkil 357



şəkil 358

paraleldir.

□ Bir müstəvinin kəsişən iki düz xətti uyğun olaraq o biri müstəvinin kəsişən iki düz xətti ilə üst-üstə düşərsə, onda həmin müstəvilər də üst-üstə düşür. Bu halda müstəvilər paraleldir.

İndi tutaq ki, kəsişən a və b düz xətləri α müstəvisi, a_1 və b_1 düz xətləri isə β müstəvisi üzərindədirlər və $a \parallel a_1$, $b \parallel b_1$-dir (şəkil 357). Göstərək ki, $\alpha \parallel \beta$.

Əksini fərz edək. Tutaq ki, α və β müstəviləri bir c düz xətti boyunca kəsişirlər. Onda düz xətlə müstəvinin paralellik əlamətinə (teorem 2) əsasən $a \parallel c$ və $b \parallel c$ olur. Belə çıxır ki, c düz xətti kəsişən a və b düz xətlərinə paraleldir. Bu isə mümkün deyil. Deməli, fərziyyəmiz düz deyil yəni $\alpha \parallel \beta$ ■

Teorem 2. *Iki paralel müstəvi üçüncü müstəvi ilə kəsişərsə, onda onların kəsişmə xətləri bir-birinə paraleldir.*

□ Tutaq ki, paralel olan α və β müstəviləri γ müstəvisi ilə uyğun olaraq a və b düz xətləri boyunca kəsişərlər (şəkil 358). $a \parallel b$ olduğunu göstərək.

Doğurdan da a və b düz xətləri paralel α və β müstəviləri üzərində yerləşdiyindən kəsişmirlər, digər tərəfdən isə γ müstəvisi üzərində yerləşirlər. Yəni, paraleldirlər. ■

Teorem 3. *Verilmiş nöqtədən, verilmiş müstəviyə ancaq bir paralel müstəvi keçirmək olar.*

Bu teoremin isbatı oxuculara həvalə olunur.

Teorem 4. *Paralel düz xətlərin paralel müstəvilər arasında qalan parçaları bərabərdir.*

□ $a \parallel b$, $\alpha \parallel \beta$ olsun.(şəkil 359). İsbat edək ki, $AA_1 = BB_1$. a və b düz xətlərindən γ müstəvisini keçirək və onun verilən müstəvilərlə kəsişmə xətlərini uyğun olaraq AB və A_1B_1 ilə işarə edək. İkinci teoremə əsasən $AB \parallel A_1B_1$.

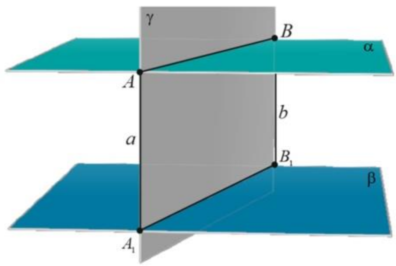
Digər tərəfdən , $a \parallel b$ olduğundan AA_1BB_1 paraleloqramdır, yəni $AA_1=BB_1$.

■

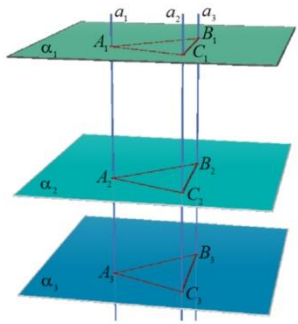
Məsələ. Üç paralel düz xətt üç paralel müstəvi ilə kəsişir. Kəsişmə nöqtələri hər bir müstəvi üzərində bir uçbucaq təyin edir. Bu üçbucaqların bərabər olduğunu isbat edin.

○ a_1, a_2 və a_3 paralel düz xətlər , α_1, α_2, α_3 isə onları kəsən paralel müstəvilər olsun.(şəkil 360). Kəsişmə nöqtələrini uyğun olaraq A_1, B_1 və C_1 ; A_2, B_2 və C_2 ; A_3, B_3 və C_3 ilə işarə edək. $a_1 \parallel a_2$ və $\alpha_1 \parallel \alpha_2$ olduğundan,

$A_1B_1A_2B_2$ paraleloqramdır, yəni $A_1B_1 = A_2B_2$. Eyni qayda ilə $B_1C_1=B_2C_2$; $C_1A_1=C_2A_2$ olması göstərilir. Onda üçbucaqların bərabərliyinin üçüncü əlamətinə əsasən $\Delta A_1B_1C_1 = \Delta A_2B_2C_2$. Eyni qayda ilə $\Delta A_1B_1C_1 = \Delta A_3B_3C_3$ olması alınır. ●



Şəkil 359



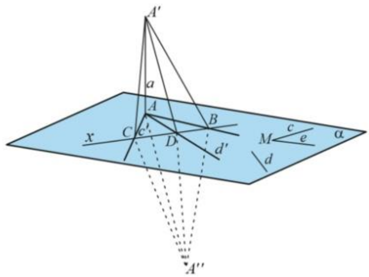
şəkil 360

§ 118. DÜZ XƏTLƏRLƏ MÜSTƏVİLƏRİN PERPENDİKULYARLIĞI.

Tərif. Düz xətt (a), müstəvi (α) üzərindəki hər bir düz xəttə perpendikulyardırsa, onda ona *müstəviyə perpendikulyar düz xətt* deyilir. və $a \perp \alpha$ və ya $\alpha \perp a$ kimi yazılır.

Teorem 1. *Düz xətt, müstəvi üzərindəki kəsişən iki düz xəttin hər birinə perpendikulyardırsa, onda həmin düz xətt müstəvinin üçüncü düz xəttinə də perpendikulyardır.*

□ Tutaq ki, a düz xətti M nöqtəsində kəsişən və α müstəvisi üzərində yerləşən b və c düz xətlərinə perpendikulyardır (şəkil 361) Göstərək ki, a düz xətti müstəvinin ixtiyari d düz xəttinə də perpendikulyardır. a düz xətti ilə α müstəvisinin kəsişmə nöqtəsi A olsun. A nöqtəsindən b , c və d düz xətlərinə



Şəkil 361

$b^{'} \parallel b$, $c^{'} \parallel c$ və $d^{'} \parallel d$ düz xətlərini çəkək. Aydındır ki, a və $b^{'}$, a və $c^{'}$ düz xətləri arasında qalan bucaq düzbucaqdır, yəni $a \perp b'$ və $a \perp c^{'}$.

a düz xətti üzərində olmaqla α müstəvisinin müxtəlif tərəflərində $AA' = AA''$ şərtini ödəyən A' və A'' nöqtələrini qeyd edək. b' , c' və d' düz xətlərini uyğun olaraq B, C və D nöqtələrində kəsən x düz xəttini keçirib, A' və A''nöqtələrini bu nöqtələrlə birləşdirək. Alınan $A'AC$ və $A''AC$düzbucaqlı üçbucaqlarının katetləri bərabər olduğundan bərabərdir. Odur ki, $A'C = A''C$ olur. Həmin qayda ilə $A'B = A''B$ alınır. Bunlara və CB ortaq olmasına əsasən $\Delta A'BC = \Delta A''BC$ olur. .Bu üçbucaqların bərabərliyindən $\angle A^{'}BC = \angle A^{''}BC$ alınır.

İndi $A'DB$ və $A''DB$ üçbucaqlarına baxaq. Bu üçbucaqlar bərabərdirlər (*DB*-ortaq tərəf, $A'B = A''B$ və $\angle A'BD = \angle A''BD$olduğundan). Buradan $A'D = A''D$ olur.

Nəhayət, $A'AD$ və $A''AD$ üçbucaqlarına baxaq. Bu üçbucaqların uyğun tərəfləri bərabər olduğuna görə onlar bərabərdir. Odur ki, $\angle A'AD = \angle A''AD$ alırıq. Bu bucaqlar qonşu olduğundan, $\angle A'AD = \angle A''AD = 90^0$, yəni $A'A \perp AD$ olur. Deməli, $a \perp d'$ ($a \perp d$). ■

Nəticə (düz xətlə müstəvinin perpendikulyarlıq əlaməti). *Düz xətt müstəvi üzərindəki kəsişən iki düz xəttin hər birinə perpendikulyardırsa, onda həmin düz xətt müstəviyə perpendikulyardır.*

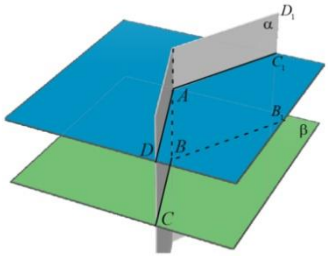
Teorem 2. *İki paralel müstəvidən birinə perpendikulyar olan düz xətt o birinə də perpendikulyardır.*

□ α və β verilən paralel müstəvilər, *a* isə α müstəvisinə perpendikulyar düz xətt olsun. Tutaq ki, *a* düz xətti α və β müstəvilərini uyğun olaraq *A* və *B* nöqtələrində kəsir (şəkil 362). *a* düz xəttindən α_1 və β_1 kimi ixtiyari iki müstəvi keçirək: bunların hər biri α və β müstəvilərini $AD \parallel BC$ və $AD_1 \parallel BC_1$ düz xətləri boyunca kəsəcək. $a \perp \alpha$ olduğundan, $a \perp AD$ və $a \perp AD_1$ olar. $AD \parallel BC$ və $AD_1 \parallel BC_1$ olduğundan, $a \perp BC$ və $a \perp BC_1$ olacaq. Düz xətt və müstəvinin perpendikulyarlıq əlamətinə əsasən $a \perp \beta$ olar. ■

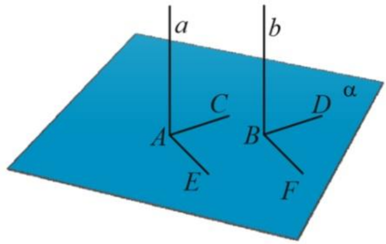
Teorem 3 (tərs teorem). *Bir düz xəttə perpendikulyar olan iki müstəvi bir-birinə paraleldir.*

Teoremi əksini fərz etməklə asanlıqla isbat etmək olar.

Teorem 4. *Paralel düz xətlərdən birinə perpendikulyar olan müstəvi o birinə də perpendikulyardır.*



Şəkil 362



Şəkil 363

□ a və b verilmiş paralel düz xətlər, α isə a düz xəttinə perpendikulyar müstəvi olsun.(şəkil 363). $\alpha \perp b$ olduğunu isbat edək. a və b düz xətlərinin α müstəvisini kəsdiyi nöqtələr uyğun olaraq A və B olsun. α müstəvisi üzərində olmaqla AC və AE düz xətlərini çəkək, onda $a \perp AC$ və $a \perp AE$ olacaq. İndi α müstəvisinin B nöqtəsindən uyğun olaraq AC və AE düz xətlərinə paralel olan BD və BF düz xətlərini çəkək. Şərtlərə görə $a \parallel b$ olduğundan $b \perp BD$ və $b \perp BA$ alınır, onda $\alpha \perp b$ olur. ■

Teorem 5 (tərs teorem). *Bir müstəviyə perpendikulyar olan iki düz xətt bir-birinə paraleldir.*

Teoremin isbatı oxuculara həvalə olunur.

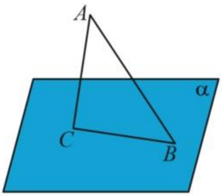
§.119. MAİL və ONUN MÜSTƏVİ ÜZƏRİNDƏ PROYEKSİYASI.

Tərif. Müstəvini kəsən, lakin ona perpendikulyar olmayan düz xəttə *mail* deyilir.

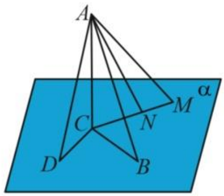
α müstəvisi və onun üzərində olmayan A nöqtəsinə baxaq. A nöqtəsindən α müstəvisinə AC perpendikulyarı və AB mailini çəkək (şəkil 364). C nöqtəsinə perpendikulyarın, B nöqtəsinə isə mailin *oturacağı* deyilir. CB parçasına AB mailinin α *müstəvisi üzərindəki proyeksiyası* deyilir.

Teorem 1. *Müstəvinin xaricindəki nöqtədən ona perpendikulyar və maillər çəkilərsə: 1) perpendikulyar maillərdən qısadır; 2) proyeksiyaları bərabər olan maillər bərabərdir; 3) proyeksiyası böyük olan mail böyükdür.*

□ 1. Tutaq ki, $AC \perp \alpha$, *AB*-mail və *BC* onun α müstəvisi üzərindəki proyeksiyasıdır.(şəkil 365) $AC \perp \alpha$ olduğundan, $AC \perp CB$ olacaq (düz xətlə müstəvinin perpendikulyarlıq əlaməti), yəni *ABC* düzbucaqlı üçbucaqdır. ($\angle ACB = 90^0$) odur ki, $AC \angle AB$.



Şəkil 364



şəkil 365

2. α müstəvisi üzərində *CD*=*CB* şərti ilə *D* nöqtəsini qeyd edək və onu *A* nöqtəsi ilə birləşdirək. Aydındır ki, $AC \perp CD$ olacaq. Bu halda *ACB* və *ACD* düzbucaqlı üçbucaqları iki katetinə görə bərabər olacaq. Odur ki, *AB*=*AD*.

3. α müstəvisi üzərində *CB*<*CM* şərti ilə *M* nöqtəsi seçib onu *A* nöqtəsi ilə birləşdirək. *CM* parçası üzərində *CN*=*CB* parçasını ayırıb *N* nöqtəsini *A* nöqtəsi ilə birləşdirsək, *AN*=*AB* alırıq (teoremin ikinci hissəsinə əsasən). *ANM* üçbucağında *AM* kor bucaq qarşısında duran tərəf olduğundan, *AM*>*AN*, yəni *AM*>*AB* olur. ■

Teorem 2. *Müstəvinin xaricindəki nöqtədən ona perpendikulyar və maillər çəkilərsə, onda : 1) bərabər maillərin proyeksiyaları da bərabərdir; 2) böyük mailin proyeksiyası böyükdür.*

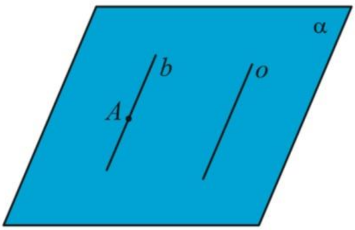
Teoremi analoji qayda ilə isbat etmək olar.

Məsələ 1. Fəzada verilmiş düz xəttin xaricindəki nöqtədən bu düz xəttə paralel düz xətt keçirin.

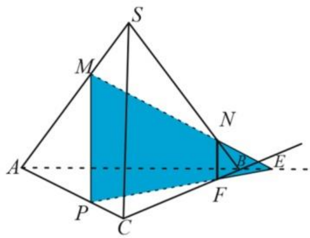
○ *a* düz xətti və ona aid olmayan *A* nöqtəsindən yalnız bir müstəvi keçirmək olar.(şəkil 366) Bu müstəvi α olsun. α müstəvisi üzərində *A* nöqtəsindən *a* düz xəttinə paralel *b* düz xəttini çəkək (planimetriyada olduğu kimi). Bu tələb olunan düz xətdir. ●

Məsələ 2. Üçbucaqlı piramidanın yan tillərindən ikisinə və oturacağının bir tərəfinə aid olan üç nöqtə verilib. Həmin nöqtələrdən keçən müstəvi ilə kəsiyi quirun.

○ Məsələnin şərtinə uyğun olaraq üçbucaqlı piramidanın *M, N* və *P* nöqtələrini qeyd edib (şəkil 367), mümkün olan aşağıdakı hallara baxaq:



Şəkil 366



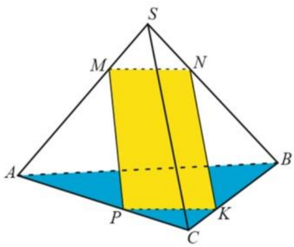
şəkil 367

1. *M, N* və *P* nöqtələri bir üzün tilləri üzərində olarsa, həmin üz tələb olunan kəsikdir.

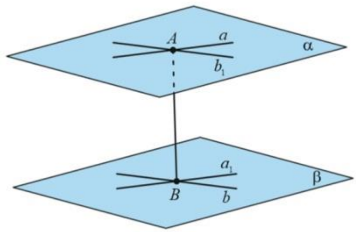
2. *MP* və *MN* parçalarını çəkək. *MN* və *AB* düz xətlərinin kəsişmə nöqtəsini *E* ilə işarə edib, onu *P* nöqtəsi ilə birləşdirək. *EP* və *BC* düz xətlərinin kəsişmə nöqtəsi *F* olsun. Beləliklə, tələb olunan *MNFP* kəsiyini qurmuş oluruq.

3. $MN \parallel AB$ və $MP \parallel SC$ olan hala baxaq (şəkil 368). M, N və P nöqtələrindən keçən müstəvi, ABC üzünü $PK \parallel MN$ düz xətti boyunca kəsəcək. Beləliklə, tələb olunan $MNKP$ kəsiyini qurmuş oluruq. ●

Məsələ 3. İki çarpaz düz xəttin paralel müstəvilər üzərində olduğunu isbat edin.



Şəkil 368



şəkil 369

○ Tutaq ki, a və b çarpaz düz xətlərdir (şəkil 369). a düz xəttinin A nöqtəsindən $b_1 \parallel b$ və b düz xəttinin B nöqtəsindən $a_1 \parallel a$ düz xətlərini keçirək. a və b_1, eləcə də b və a_1 düz xətlərinin təyin etdikləri müstəvilər tələb olunan paralel müstəvilərdir. ●

§ 120. DÜZ XƏTLƏ MÜSTƏVİ ARASINDAKI BUCAQ.

Düz xətlə müstəvi arasındakı bucaq, onun bu müstəvi üzərinə ortoqonal proyeksiyası ilə əmələ gətirdiyi bucaqdır. Düz xətt müstəviyə paraleldirsə, onda onlar arasındakı bucaq sıfır, perpendikulyardırsa, onda onlar arasındakı bucaq 90^0 qəbul olunur. Qalan hallarda düz xətlə müstəvi arasındakı bucaq 0^0 ilə 90^0 arasında olur (şəkil 370)

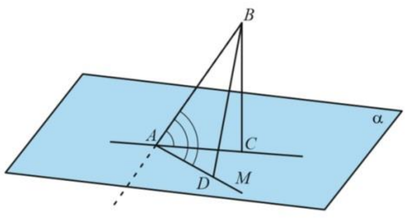
Teorem. *Düz xətlə müstəvi arasındakı bucaq, onun müstəvi üzərindəki düz xətlərlə əmələ gətirdiyi bucaqlardan ən kiçiyidir.*

□ Tutaq ki, AB düz xətti α müstəvisini A nöqtəsində kəsir və AC onun proyeksiyasıdır (şəkil 370). α müstəvisi üzərində A nöqtəsindən ixtiyari AM düz xəttini çəkək və göstərək ki, $\angle BAC < \angle BAM$.

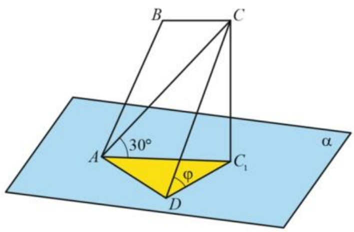
İndi, AM düz xətti üzərində $AD=AC$ parçasını ayırıb D nöqtəsini B nöqtəsi ilə birləşdirək. ABD və ABC üçbucaqlarında AB ortaq və $AD=AC$-dir. Onların üçüncü tərəfləri, yəni BC, α müstəvisinə perpendikul, BD isə maildir. Deməli, $BC<BD$. Məlumdur ki, iki tərəfi bərabər olan üçbucaqlardan üçüncü tərəfi böyük olan üçbucağın uyğun bucağı da böyükdür, yəni $\angle BAD > \angle BAC$. AM düz xətti ixtiyari seçildiyindən teorem doğrudur. ■

Məsələ. Kvadratın bir tərəfi müstəvi üzərindədir. Onun diaqonalının müstəvi ilə 30^0-li bucaq əmələ gətirdiyini bilərək, digər tərəfinin müstəvi ilə əmələ gətirdiyi bucağı tapın.

○ Tutaq ki, $ABCD$ kvadratının AD tərəfi α müstəvisi üzərindədir və onun AC diaqonalı həmin müstəvi ilə 30^0-li bucaq əmələ gətirir (şəkil 371). C nöqtəsindən α müstəvisinə CC_1 perpendikulyarını çəkib C_1



Şəkil 370



şəkil 371

nöqtəsini D nöqtəsi ilə birləşdirək. $\angle CDC_1 = \phi$ olsun. Aydındır ki, $AC = DC\sqrt{2}$ (kvadratın diaqonalı və tərəfi arasındakı asıllıq). ACC_1 düzbucaqlı üçbucağında 30^0-li bucaq qarşısındakı katet üçün

$$CC_1 = \frac{AC}{2}, \quad \text{yəni} \quad CC_1 = DC \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

DCC_1 düzbucaqlı üçbucağından:

$$\sin \phi = \frac{CC_1}{DC} = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

yəni $\phi = 45^0$ olur. ●

§ 121. ÜÇ PERPENDİKULYAR TEOREMİ.

Teorem (üç perpendikulyar teoremi). *Müstəvi üzərində:*

1) mailin proyeksiyasına çəkilən perpendikulyar mailin özünə də perpendikulyardır;

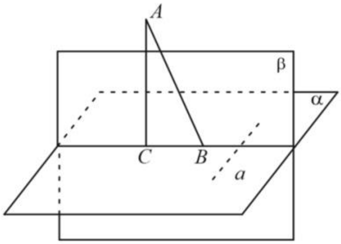
2) mailin özünə perpendikulyar düz xətt onun proyeksiyasına da perpendikulyardır.

□ 1. Tutaq ki, α müstəvisi, *AB* maili, onun α müstəvisi üzərində *CB* proyeksiyası və *CB*-yə perpendikulyar *a* düz xətti verilib (şəkil 372). *AB* və *AC* düz xətlərindən β müstəvisini keçirək. α müstəvisinin *a* düz xətti, β müstəvisinin kəsişən *CB* və *CA* düz xətlərinə perpendikulyar olduğundan, onun özünə də perpendikulyardır. Deməli, *a* düz xətti β müstəvisi üzərində istənilən düz xəttə, o cümlədən *AB* mailinə perpendikulyar olacaq.

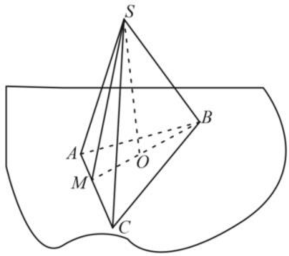
2. α müstəvisinin *a* düz xətti, β müstəvisinin kəsişən *AC* və *AB* düz xətlərinə perpendikulyar olduğundan, onun *BC* düz xəttinə də perpendikulyar olacaq. ■

Məsələ. Tərəfi *8 sm* olan düzgün üçbucağın ağırlıq mərkəzindən, ona uzunluğu *5 sm* olan perpendikulyar qaldırılıb. Bu perpendikulyarın uclarından üçbucağın tərəflərinə qədər olan məsafələri tapın.

○ *ABC* verilmiş düzgün üçbucaq (*AB*=*BC*=*CA*=*8 sm*), *O* nöqtəsi də onun ağırlıq mərkəzi olsun (şəkil 373).



Şəkil 372



şəkil 373

O nöqtəsindən üçbucağın müstəvisinə qaldırılmış perpendikulyar üzərində uzunluğu *5 sm* olan *SO* parçasını ayırıb, *S* nöqtəsini üçbucağın təpə nöqtələri ilə birləşdirsək, onda *SABC* piramidasını alarıq. *SAC* üzünün *SM* hündürlüyünü çəkək ($SM \perp AC$) və *M* nöqtəsini *O* nöqtəsi ilə birləşdirək. Üç perpendikulyar teoreminə əsasən $OM \perp AC$ olacaq. *SM* və *OM*-i tapmaq üçün, əvvəlcə *ABC* üçbucağının sahəsini tapaq. Düzgün üçbucağın sahə düsturuna əsasən:

$$S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \Rightarrow S = \frac{64\sqrt{3}}{4} = 16\sqrt{3}\ sm^2,$$

həmçinin $p = \frac{24}{2} = 12$ və $S = pr$ düsturuna əsasən, $r = \frac{4\sqrt{3}}{3}$ *sm*

alırıq.

SOM üçbucağından Pifaqor teoreminə əsasən,

$$SM = \sqrt{(SO)^2 + (OM)^2} = \frac{1}{3}\sqrt{273}\ sm$$

alırıq. ●

§ 122. MÜSTƏVİLƏR ARASINDA QALAN BUCAQ.

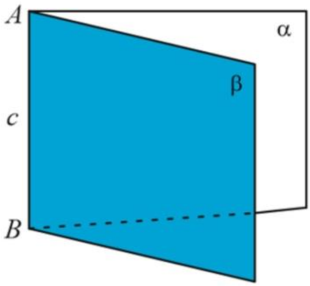
Müstəvilər paralel olduqda onlar arasındakı bucaq 0^0 qəbul olunur. Əgər müstəvilər paralel deyilsə, onlar bir düz xətt boyunca kəsişirlər. Kəsişən α və β müstəvilərinin xətti bucağı 90^0 olduqda onlar *qarşılıqlı perpendikulyar müstəvilər* adlanır.

Tutaq ki, α və β müstəviləri *c* düz xətti boyunca kəsişir. (şəkil 374) Bu halda *c* düz xətti həmin müstəviləri iki *yarımmüstəviyə* ayırır.

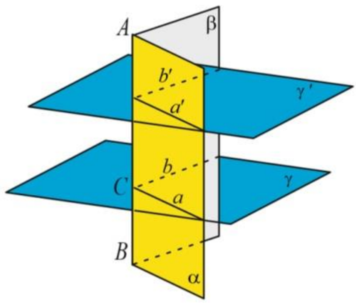
Tərif 1. Bir düz xətdən çıxan iki yarımmüstəvinin əmələ gətirdiyi fiqura *ikiüzlü bucaq* deyilir. (şəkil 374)

α və β yarımmüstəvilərinə ikiüzlü bucağın *üzləri*, c düz xəttinə isə onun *tili* deyilir. İkiüzlü bucaq $\alpha c\beta$ kimi işarə olunur.

$\alpha c\beta$ ikiüzlü bucağını *c* tilinə perpendikulyar olan γ müstəvisi ilə kəsək (şəkil 375). γ və α müstəviləri *a* düz xətti, γ və β müstəviləri isə *b* düz xətti boyunca kəsişirlər. *a* və *b* düz xətləri



Şəkil 374



şəkil 375

arasında qalan bucaq $\alpha c\beta$ ikiüzlü bucağının *xətti bucağı* adlanır. Hər bir ikiüzlü bucaq özünün xətti bucağı ilə ölçülür. Göstərək ki, xətti bucağın qiyməti onun təpə nöqtəsinin vəziyyətindən asılı deyil. Doğurdan da yuxarıdakı qayda ilə γ'

müstəvisini c düz xəttinə perpendikulyar keçirib, uyğun kəsişmə xətlərini a' və b' ilə işarə etsək $c \perp \gamma$ və $c \perp \gamma'$ olduğundan γ və γ' müstəvilərinin paralel olduğunu deyə bilərik (şəkil 375). Onda $a \parallel a'$ və $b \parallel b'$ olmasından, a və b düz xətləri arasında qalan bucağın a' və b' düz xətləri arasında qalan bucağa bərabər olması alınır.

Planimetriyadakı bucaqlar haqqında olan təklif və teoremlər ikiüzlü bucağın xətti bucaqları üçün də doğrudur.

Məsələ. İki müstəvi 60^0 bucaq altında kəsişir. Bu müstəvilərdən birinin üzərindəki A nöqtəsindən digərinə qədər olan məsafə 99 *sm*-dir. Həmin nöqtədən müstəvilərin kəsişmə xəttinə qədər olan məsafəni tapın.

○ Tutaq ki, α və β müstəviləri c düz xətti boyunca kəsişir. A nöqtəsi α müstəvisinin üzərindədir və AB bu nöqtədən β müstəvisinə çəkilmiş perpendikulyardır (şəkil 376). $\angle ACB = 60^0$, $AB = 9$ *sm*, AC parçasının uzunluğunu tapaq. ABC düzbucaqlı üçbucağında ($\angle ABC = 90^0$)

$$\sin\angle ACB = \frac{AB}{AC} \Rightarrow \sin 60^0 = \frac{AB}{AC},$$

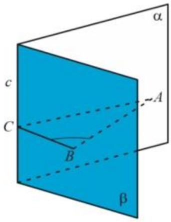
buradan da

$$AC = 9 : \frac{\sqrt{3}}{2}$$

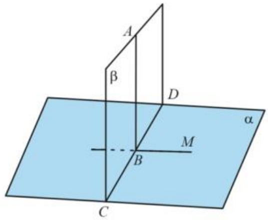
yəni, $AC = 6\sqrt{3}$ *sm* olur. ●

Teorem 1. *Bir müstəvi digər bir müstəviyə perpendikulyar olan düz xətdən keçərsə, o, həmin müstəviyə perpendikuyardır.*

□ Tutaq ki, AB düz xətti α müstəvisinə perpendikulyar və β müstəvisi həmin düz xətdən keçir (şəkil 377). Göstərək ki, β müstəvisi αmüstəvisinə perpendikulyardır.



Şəkil 376



şəkil 377

β və α müstəvilərinin kəsişmə xəttini *CD* ilə işarə edək. α müstəvisinin *B* nöqtəsində onun *CD* düz xəttinə $MB \perp CD$ çəkək. *AB* düz xətti α müstəvisinə perpendikulyar olduğundan, onun *MB* və *CD* kəsişmə xətlərinə də perpendikulyar olacaq, onda $\alpha CD\beta$ ikiüzlü bucağın xətti bucağı $\angle ABM$ düz bucaqdır, yəni β və α müstəviləri qarşılıqlı perpendikulyardırlar. ■

Teorem 2. *Qarşılıqlı perpendikulyar olan iki müstəvidən birinin üzərindəki hər hansı düz xətt onların kəsişmə xəttinə perpendikulyardırsa, o digər müstəviyə də perpendikulyardır.*

□ Tutaq ki, $\beta \perp \alpha$, *CD* onların kəsişmə xəttidir. *AB* düz xətti β müstəvisi üzərində olmaqla *CD* düz xəttinə perpendikulyardır (şəkil 377). Göstərək ki, *AB* düz xətti α müstəvisinə də perpendikulyardır. α müstəvisinin *B* nöqtəsində onun *CD* düz xəttinə $MB \perp CD$ çəkək. α və β müstəviləri arasında qalan ikiüzlü bucaq şərtə görə düz bucaq olduğundan, onların xətti bucağı $\angle ABM$ -də düz bucaqdır, yəni $AB \perp BM$. Digər tərəfdən, şərtə görə $AB \perp CD$. Beləliklə, *AB* düz xətti α müstəvisinin kəsişən *CD* və *BM* düz xətlərinə perpendikulyar olduğundan onun özünə də perpendikulyardır. ■

Teorem 3. *Qarşılıqlı perpendikulyar olan iki müstəvinin birinə o biri müstəvi ilə ortaq nöqtəsi olan perpendikulyar çəkilərsə, bu perpendikulyar digər müstəvinin üzərindədir.*

□ Tutaq ki, $\beta \perp \alpha$, $AB \perp \alpha$ və A nöqtəsi βmüstəvisinin üzərindədir (şəkil 377). İsbat edək ki, AB düz xətti β müstəvisinin üzərindədir.

α və β müstəvilərinin kəsişmə xəttini CD ilə işarə edək. β müstəvisinin A nöqtəsindən CD düz xəttinə perpendikulyar endirsək, həmin perpendikulyar yuxarıdakı teoremə görə α müstəvisinə də perpendikulyar olacaq, yəni AB ilə üst-üstə düşəcək. Deməli, AB düz xətti β müstəvisinin üzərindədir. ■

ÇALIŞMALAR.

1. Fəzanın bir nöqtəsindən verilmiş müstəviyə *6 sm* uzunluğunda perpendikulyar və ixtiyari mail çəkilmişdir. Perpendikulyarların mail üzərindəki proyeksiyasının maili qalan hissəsinə nisbəti *4:5* nisbətindədir. Mailin uzunluğunu tapın.

2. Düzgün üçbucağın tərəfi *3 sm*-dir.Bunun xaricindəki nöqtədən təpə nöqtələrinə qədər məsafələrin *2 sm* olduğunu bilərək həmin nöqtədən üçbucaq müstəvisinə qədər olan məsafəni tapın

3. Üçbucağın tərəfləri *10 sm, 17 sm* və *21 sm*-dir. Böyük bucağın təpəsindən üçbucaq müstəvisinə *15 sm* uzunluğunda perpendikulyar çəkilmişdir. Bu perpendikulyarın ucları ilə üçbucağın böyük tərəfi arasındakı məsafəni tapın

4. α müstəvisi üzərində bir birindən *6 sm* məsafədə olan AB və CD kimi iki paralel düz xətt verilmişdir. S nöqtəsinin α müstəvisinin xaricində olub, AB və CD düz xətlərindən uyğun olaraq. *25 sm* və *29 sm* məsafədə olduğunu bilərək onun α müstəvisindən olan məsafəsini tapın.

5. Uzunluğu *8 sm* olan parça müstəvini kəsir. Bunun ucları müstəvidən *1 sm* və *3 sm* məsafədədir. Verilmiş parça ilə müstəvi arasındakı bucağı tapın.

6. Müstəvini kəsən parçanın ucları ondan *12 sm* və *4 sm* məsafədədir. Parçanın ortasının müstəvidən olan məsafəsini tapın.

7. Düzgün üçbucağın təpə nöqtələrindən biri müstəvi üzərindədir, digər ikisi isə ondan *5 sm* və *7 sm* məsafədədir. Üçbucağın mərkəzi ilə müstəvi arasındakı məsafəni tapın.

8. Düz piramidanın oturacağı bərabəryanlı üçbucaq olub, tərəfləri *4 sm, 4 sm* və $\sqrt{10}$ *sm*-dir. Prizmanın hündürlüyünün *6 sm* olduğunu bilərək, onun tilindən və oturacağının yan tərəfinə çəkilmiş medianından keçən kəsiyin sahəsini tapın.

9. Düzgün dördbucaqlı piramidada oturacağın diaqonalından yan tilə paralel bir müstəvi keçirilib. Oturacağının tərəfinin *4 sm* və yan tilin $\sqrt{3}$ *sm* olduğunu bilərək kəsiyin sahəsini tapın.

10. Piramidanın oturacağı bərabəryanlı üçbucaqdır. Oturacağın yan tərəfi *4 sm* və buna çəkilmiş median isə *3 sm*-dir.Piramidanın hündürlüyünün *4 sm* və onun yan tərəflərin kəsişdiyi nöqtəyə düşdüyünü bilərək, hündürlükdən və üçbucağın medianından keçən kəsiyin sahəsini tapın.

11. Düzbucaqlı üçbucağın katetləri *12 sm* və *16 sm,* onların kəsişmə nöqtəsindən qaldırılmış perpendikulyarın uzunluğu *48 sm*-dir. Perpendikulyarın uclarından hipetonuza qədər olan məsafəni tapın.

12. Tərəfləri *15 sm, 37 sm* və *44 sm* olan üçbucağın böyük bucağının təpə nöqtəsindən üçbucaq müstəvisinə uzunluğu *16 sm* olan perpendikulyar qaldırılıb.Perpendikulyarın uclarından üçbucağın böyük tərəfinə qədər olan məsafəni tapın.

13. Uznluğu *26 sm* olan düz xətt parçasının uclarından müstəviyə qədər olan məsafə *22 sm* və *36 sm*-dir. Onun proyeksiyasının uzunluğunu tapın.

14. İki paralel müstəvi arasında qalan düz xətt parçalarının fərqi *4m,* proyeksiyaları isə uyğun olaraq 1m və *7m*-dir. Bu parçaların uzunluğunu tapın.

15. Düz ikiüzlü bucağın daxilindəki nöqtədən üzlərə qədər olan məsafənin *5m* və *12*m olduğunu bilərək, həmin nöqtədən tilə qədər olan məsafəni tapın.

16. Üçbucağın tərəfləri *25 sm, 29 sm* və *36 sm*-dir. Onun müstəvisi böyük tərəfindən keçirilmiş müstəvi ilə 30^0-li bucaq əmələ gətirir. Üçbucağın digər tərəflərinin həmin müstəvi ilə əmələ gətirdiyi bucaqlarını müstəvi ilə təpə nöqtəsindən müstəviyə qədər olan məsafəni tapın.

17. Verilmiş nöqtədən üçbucaq müstəvisinə qədər olan məsafə *1,1 m*-ə, onun bir tərəfinə qədər olan məsafə isə *6,1 m*-ə bərabərdir. Bu üçbucağın daxilinə çəkilmiş çevrənin radiusunu tapın.

18. Düzgün üçbucağın tərəfi *3 sm*-ə bərabərdir. Onun hər bir təpəsindən *2 sm* məsafədə olan nöqtədən üçbucaq müstəvisinə qədər məsafəni hesablayın.

19. Müstəviyə paralel olan düz xətt parçasının uclarından həmin müstəviyə uzunluğu *b* olan perpendikulyar və düz xətt parçasına perpendikulyar olan mail çəkilmişdir. Mailin və parçanın uzunluğunun *c* və *a* olduğunu bilərək, onun oturacağı ilə perpendikulyarın oturacağı arasındakı məsafəni tapın.

20. Verilmiş nöqtədən iki kəsişən müstəvinin hər birinə paralel olan düz xətt keçirin.

TESTLƏR

1. Nöqtə iki perpendikulyar müstəvidən 4 *sm* və 3 *sm* məsafədədir. Həmin nöqtədən kəsişmə xəttinə qədər məsafəni tapın.

A) 4 B) 5 C) 8 D) 3 E) 6

2. İkiüzlü bucağın bir üzündə götürülmüş nöqtədən tilinə qədər məsafə 6*sm* və o biri üzə qədər məsafə 3 *sm*-dir. İkiüzlü bucağı tapın.

A) 60^0 B) 150^0 C) 45^0 D) 15^0 E) 30^0

3. Düz xətt üzərində olmayan iki nöqtədən həmin düz xəttə 10 *sm* və 8 *sm* uzunluğunda iki perpendikulyar endirilmişdir. Ucları həmin nöqtələr olan parçanın ortasından düz xəttə qədər olan məsafəni tapın.

A) 9 B) 10 C) 7 D) 6 E) 5

4. Düz xətt parçası müstəvini kəsir. Onun ucları müstəvidən 10 *sm* və 4 *sm* məsafədədir. Parçanın ortasının müstəvidən olan məsafəsini tapın.

A) 2 B) 1 C) 3 D) 2,5 E) 4

5. *A* nöqtəsindən αmüstəvisinə qədər olan məsafə 6*sm*-dir. *AB* maili proyeksiyasından 2 *sm* uzundur. Mailin uzunluğunu tapın.

A) 5 B) 6 C) 9 D) 8 E) 10

6. Uzunluğu 6 *sm*-ə bərabər mail müstəvisi ilə 60^0-li bucaq əmələ gətirir.Mailin müstəvi üzərindəki proyeksiyasının uzunluğunu tapın.

A) 2 B) 4 C) 3 D) 5 E) 6

7. Müstəvini kəsməyən parçanın bir ucu müstəvidən 13 *sm* məsafədə, orta nöqtəsi isə 11 *sm* məsafədədir, o biri ucun müstəvidən məsafəsini tapın.

A) 6 B) 7 C) 8 D) 9 E) 10

8. *MN* parçası müstəvini *O* nöqtəsində kəsir. Parçanın ucları müstəvidən 5 *sm* və 8 *sm* məsafədədir. *NO* parçası *MO* parçasından 3*sm* uzun olarsa, *MN* parçasının uzunluğunu tap.

A) 12 B) 13 C) 14 D) 5 E)16

9. Müstəvini kəsməyən düz xətt parçasının ucları ondan 5 *sm* və 2 *sm* məsafədədir. Parçanın uzunluğu 5 *sm*-dir.Parçanın müstəvi üzərindəki proyeksiyasını tapın.

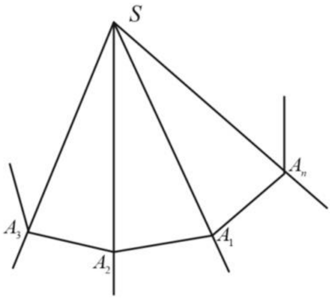
10. α müstəvisini O nöqtəsində kəsən AB parçasının uclarından müstəviyə qədər məsafələri uyğun olaraq AA_1 və BB_1-dir. Parçanın C ortaq nöqtəsindən müstəviyə qədər olan məsafə CC_1 olarsa, uyğunluğu müəyyən edin.

1. AA_1 =12 *sm*; BB_1=20 *sm*; B_1O=15 *sm*	a. CC_1=2 *sm*
2 . AA_1 =15 *sm*; BB_1=45 *sm*; A_1O=8 *sm*	b. AB=40 *sm*
3. AA_1 =4 *sm*; BB_1=5*sm*; B_1O=15 *sm*	c. AB=15 *sm*
	d. CC_1= 4 *sm*
	e. AB=68 *sm*

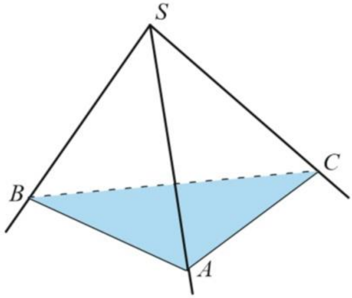
XVII FƏSİL
ÇOXÜZLÜLƏR
§ 123. ÇOXÜZLÜ BUCAQLAR VƏ ONLARIN XASSƏLƏRİ.

Müstəvi üzərindəki $A_1,A_2,....A_n$ çoxbucaqlısını və onun müstəvisi xaricində S nöqtəsini götürüb $SA_1,SA_2,...SA_n$ şualarını çəkək (şəkil 378). Nəticədə ortaq təpəli $A_1SA_2,A_2SA_3....A_nSA_1$ bucaqlarını alarıq. Belə fiqura *çoxüzlü bucaq* deyilir. A_1SA_2,A_2SA_3 və s. bucaqları *ikiüzlü bucağın üzləri* və ya *müstəvi bucaqları* adlanır.

Üzləri əmələ gətirən SA_1,SA_2 və s. şualarına *çoxüzlü bucağın tilləri,* ortaq S nöqtəsinə isə onun *təpəsi* deyilir. Hər til eyni zamanda bir ikiüzlü bucağın tilidir; ona görə çoxüzlü bucağın neçə tili varsa, o qədər də ikiüzlü bucağı və müstəvi bucağı vardır. Çoxüzlü bucağı onun tillərinin və ya müstəvi bucaqlarının sayı ilə adlandırırlar. Çoxüzlü bucaqda ən azı üç üz olur və bu cür bucağa üçüzlü bucaq deyilir (şəkil 379).



Şəkil 378



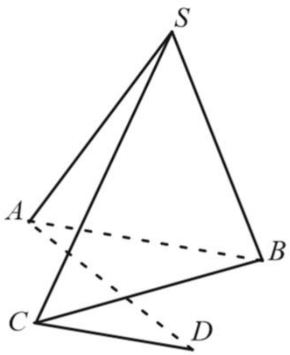
şəkil 379

Çoxüzlü bucaq, ya təpəsində qoyulmuş bir *S* hərfi və ya bir neçə hərf ilə (*SABC*) işarə olunur ki, bunlardan birincisi təpəni, qalanları isə düzülüşünə görə tilləri göstərir.

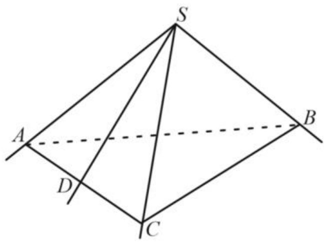
Çoüzlü bucaq onun istənilən üzünün yerləşdiyi müstəvidən bir tərəfdə yerləşərsə, ona *qabarıq çoxüzlü bucaq* deyilir. Məsələn, 379-cu şəkildəki çoxüzlü bucaq qabarıq, 380-ci şəkildə göstərilən çoxüzlü bucaq isə qabarıq deyil, çünki bu bucaq *BCS* və ya *CSD* üzünün hər iki tərəfindəndir. Biz yalnız qabarıq çoxüzlü bucaqları öyrənəcəyik. Çoxüzlü bucaqların xassələrini ifadə edən aşağıdakı teoremləri isbat edək.

Teorem 1. *Üçüzlü bucağın hər bir müstəvi bucağı o biri iki müstəvi bucağın cəmindən kiçikdir.*

□ Üçüzlü *SABC* bucağının ən böyük müstəvi bucağı *ASC* olsun (şəkil 381).



Şəkil 380



şəkil 381

Bu bucaqdan *ASB* bucağına bərabər olan *ASD* bucağını ayıraq və *SD*-ni *D* nöqtəsində kəsən hər hansı *AC* düz xəttini çəkək. *SB*=*SD* ayıraq. *B* nöqtəsini *A* və *C* nöqtələri ilə birləşdirdikdə *ABC* üçbucağını alırıq: buradan *AC*<*AB*+*BC* və ya *AD*+*DC*<*AB*+*BC* olar. $\Delta ASD = \Delta ASB$ olduğundan (iki tərəf və arasındakı bucaq), *AD*=*AB* alınır. Odur ki, yuxarıdakı bərabərsizlikdən *DC*<*BC* alırıq.

ΔSDC və ΔSCB -də; *SD*=*SB*, *SC*-ortaq tərəf və *DC*<*BC* olduğundan,

$$\angle CSD < \angle CSB.$$

Bu bərabərsizliyin sol tərəfinə *ASD* bucağını, sağ tərəfinə isə ona bərabər olan *ASB* bucağın əlavə etsək,

$\angle ASD + \angle CSD < \angle CSB + \angle ASB$, yəni $\angle ASC < \angle ASB + \angle BSC$

olar. ■

Nəticə. *Üçüzlü bucağın hər bir müstəvi bucağı, qalan iki bucağın fərqindən böyükdür:*

$$\angle BSC > \angle ASC - \angle ASB; \;\; \angle ASB > \angle ASC - \angle BSC.$$

İsbat etdiyimiz teorem istənilən qabarıq çoxüzlü bucaqlar üçün aşağıdakı şəkildə doğrudur:

Qabarıq çoxüzlü bucağın hər bir müstəvi bucağı onun qalan müstəvi bucaqlarının cəmindən kiçikdir.

Teorem 2. *Qabarıq çoxüzlü bucağın müstəvi bucaqlarının cəmi 4d-dən kiçikdir.*

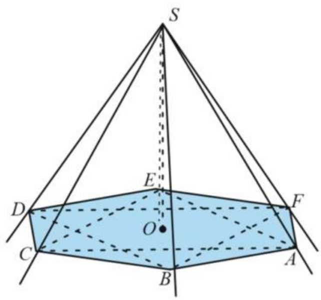
□ Tutaq ki, *SABCDEF* çoxüzlü bucağı verilmişdir. Onun təpə bucaqlarının cəmini ϕ ilə işarə edib,

$$\phi < 4d$$

olduğunu isbat edək (müəyyənlik üçün üzlərin sayı $n=6$ götürülmüşdür (şəkil 382)). Qabarıq *SABCDEF* çoxüzlü bucağının üzlərini hər hansı müstəvi ilə kəssək, *ABCDEF* qabarıq çoxbucaqlısını alarıq. *AC, BD, CE, DF, FB* və *EA* xətlərini çəkib, *SABC,SBCD, SCDE, SDEF, SFAB* və *SEFA* üçüzlü bucaqlarını alaq.

Əvvəlki teoremə əsasən:

$$\angle ABC < \angle SBA + \angle SBC;$$
$$\angle BCD < \angle SCB + \angle SCD;$$
$$\angle CDE < \angle SDC + \angle SDE;$$
$$\angle DEF < \angle SED + \angle SEF;$$
$$\angle EFA < \angle SFE + \angle SFA;$$
$$\angle FAB < \angle SAF + \angle SAB.$$



şəkil 382

doğrudur. Bu bərabərsizlikləri tərəf-tərəfə toplasaq, onların sol tərəflərinin cəmi *ABCDEF* çoxbucaqlısının daxili bucaqlarının cəmini, yəni *2d(n-2)*-ni, sağ tərəflərinin cəmini isə *ASB, BSC,...* və s. üçbucaqlarının *S* təpəsindəki bucağından başqa, qalan bucaqlarının cəmidir, yəni *2dn-*ϕ -yə bərabərdir. Odur ki,

$$2dn - 4d < 2dn - \phi \Rightarrow \phi < 4d$$

olur. ■

Məsələ. Aşağıdakı bucaqlar çoxüzlü bucağın müstəvi bucaqlarıdırmı?:

1) 150^0, 120^0, 110^0,

2) 110^0, 100^0, 35^0, 5^0,

3) 100^0, 90^0, 85^0, 85^0.

○ 1) deyil, çünki $150^0+120^0+110^0=380^0>4d$,

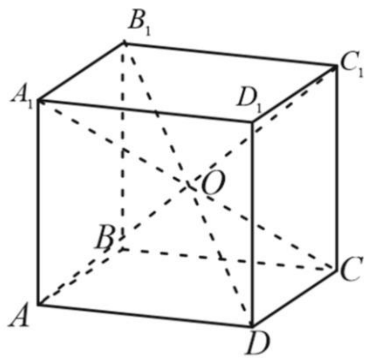
2) hə, çünki $110^0+100^0+35^0+5^0=250^0<4d$

3) deyil, çünki $100^0+90^0+85^0+85^0=360^0$. ●

§ 129. ÇOXÜZLÜ ANLAYIŞI.

Tərif. Sonlu sayda müstəvi çoxbucaqlılarla hüdudlanmış çismə *çoxüzlü* deyilir.

Çoxüzlünü hüdudlandıran çoxbucaqlılara onun *üzləri* deyilir.Çoxüzlünün ən azı dörd üzü vardır. Çoxüzlü istənilən üzünün yerləşdiyi müstəvidən bir tərəfdə qalarsa ona *qabarıq çoxüzlü* deyilir. Qonşu üzlərinin ortaq tərəflərinə çoxüzlünün *tilləri* deyilir. Üç və daha çox sayda üzlərin ortaq nöqtələrinə çoxüzlünün *təpə* *nöqtələri* deyilir.



Şəkil 383

Bir üz üzərində olmayan iki təpəni birləşdirən düz xətt parçasına çoxüzlünün *diaqonalı* deyilir.

Biz yalnız qabarıq çoxüzlüləri öyrənəcəyik.

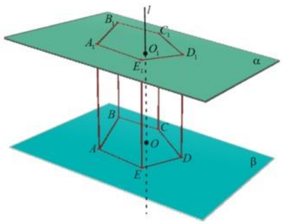
Yuxarıdakı tərifləri kub üzərində izah edək (şəkil 383). Kub $ABCD$, $A_1B_1C_1D_1$, ABA_1B_1 ,.... kimi altı kvadratla hüdudlanmış çoxüzlüdür. Bu kvadratlar onun üzləri, AB, BC, CD, DA, AA_1, BB_1 , CC_1, DD_1,.... tilləri, A, B, C, D, A_1, B_1, C_1, D_1 təpə nöqtələri, AC_1, BD_1, A_1C, B_1D diaqonallarıdır. Beləliklə, kubuin altı üzü, on iki tili, səkkiz təpə nöqtəsi və dörd diaqonalı var.

§ 125 PRİZMA.

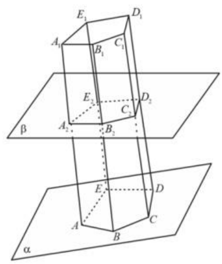
Tutaq ki, α və β - iki paralel müstəvi, l isə onları kəsən düz xətdir (şəkil 384). α müstəvisi üzərində qabarıq $ABCDE$ çoxbucaqlısını götürüb onun təpə nöqtələrindən l düz xəttinə paralellər çəkək. Həmin düz xətlərin β müstəvisini kəsdiyi nöqtələri uyğun olaraq A_1, B_1, C_1, D_1, E_1 ilə işarə edib, onları ardıcıl olaraq birləşdirək. Nəticədə A_1, B_1, C_1, D_1, E_1 qabarıq çoxbucaqlısını alırıq. Aydındır ki, $ABCDE$ və $A_1B_1C_1D_1E_1$ çoxbucaqlıları bərabərdir və AA_1, BB_1, CC_1 , DD_1 və EE_1 l düz xəttinə paralel olduqları üçün paraleldirlər. Odur ki , ABB_1A_1, BCC_1B_1, ... EAA_1E_1 dördbucaqlıları paraleloqramdır. Verilən tərifə əsasən $ABCDE$ - $A_1B_1C_1D_1E_1$ çoxüzlüldür.

İki üzü bərabər çoxbucaqlı, qalan üzləri paraleloqram olan çoxüzlüyə *prizma* deyilir. Bərabər çoxbucaqlılar prizmanın *oturacaqları,* paraleloqramlar isə *yan üzləri* adlanır. Deməli, $ABCDE$ və $A_1B_1C_1D_1E_1$ çoxbucaqlıları prizmanın oturacaqları, ABB_1A_1, BCC_1B_1, ... paraleloqramları isə yan üzləridir. Prizma oturacaqdakı çoxbucaqlının adı ilə adlanır. Məsələn, üçbucaqlı prizma, dördbucaqlı prizma və s. Qonşu yan üzlərin ortaq tərəflərinə çoxüzlünün *yan tilləri* deyilir. Məsələn AA_1, BB_1 və s. yan tillərdir. Bir üzün üzərində olmayan hər hansı iki təpəni birləşdirən düz xətt parçası prizmanın *diaqonalı* adlanır. Prizmanın bir üz üzərində olmayan iki yan tilindən keçən müstəviyə *diaqonal müstəvisi,* bu müstəvinin prizma daxilində qalan hissəsinə isə *diaqonal kəsiyi* deyilir. Prizmanın oturacaq müstəviləri arasındakı məsafəyə onun *hündürlüyü* deyilir.

Prizmanın yan tillərinə perpendikulyar keçirilmiş müstəvi ilə kəsişməsindən alınmış $A_2B_2C_2D_2E_2$ (bax: şəkil 385) çoxbucaqlısına perpendikulyar kəsik deyilir. Bu çoxbucaqlının tərəfləri prizmanın tillərinə perpendikulyardır. Yan til oturacaq müstəvisinə perpendikulyar olduqda prizmaya *düz,* əks halda isə *mail prizma* deyilir (şəkil 385).



Şəkil 384

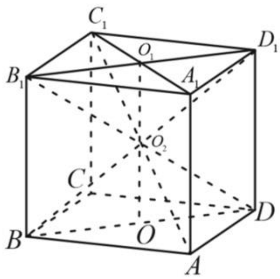


şəkil 385

Oturacaqları düzgün çoxbucaqlı olan düz prizmaya sadəcə olaraq *düzgün prizma* deyilir. Məsələn, düzgün düzbucaqlı prizma dedikdə, oturacaqları kvadrat olan düz prizma başa düşülür.

Məsələ. Oturacağı romb olan düz prizmanın yan tili *12 sm,* diaqonal kəsiklərinin sahəsi isə *96* sm^2 və *72* sm^2 –dır. Oturacağın tərəfini tapın.

○ $ABCDA_1B_1C_1D_1$ oturacağı romb olan düz prizma olsun (şəkil 386). Şərtə görə $AA_1=12$ *sm*, $S_{AA_1C_1C} = 96sm^2$, $S_{BB_1D_1D} = 72sm^2$. *AB*-ni tapmaq tələb olunur.



Şəkil 386

$S_{AA_1C_1C} = AA_1 \cdot AC$ olduğundan $12 \cdot AC = 96$, yəni $AC = 8sm$. Eləcə də $S_{BB_1D_1D}AA_1 \cdot BD$ olduğundan $12 \cdot BD = 72$, yəni $BD = 6sm$ olur.

ΔABO −dan Pifaqor teoreminə əsasən $AB = 5sm$ alırıq. ●

§126 PARALELEPİPED.

Oturacaqları paraleloqram olan prizmaya *paralelepiped* deyilir (şəkil 387). Paralelepipedin yan tili oturacağına perpendikulyar olduqda ona *düz,* əks halda isə *mail paralelepiped* deyilir. Düz paralelepipedin oturacağı düzbucaqlı olduqda ona *düzbucaqlı paralelepiped* , kvadrat olduqda isə ona *düzgün paralelepiped* deyilir.

Deyilənlərdən aşağıdakı nəticələr çıxır:

1. *Paralelepipedin altı üzü var və onların hamısı paraleloqramdır;*
2. *Düz paralelepipedin yan üzləri düzucaqlı, oturacaqları isə paraleloqramdır;*
3. *Düzbucaqlı paralelepipedin üzlərinin hamısı düzbucaqlıdır;*
4. *Düzgün paralelepipedin yan üzləri düzbucaqlı, oturacaqları isə kvadratdır.*

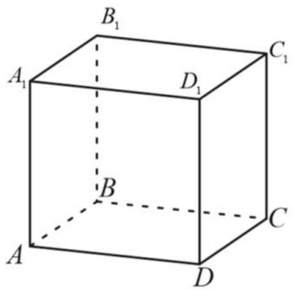
Düzbucaqlı paralelepipedin bir təpədən çıxan üç tili onun *ölçüləri* adlanır. Bu ölçülərə uyğun olaraq *en, uzunluq* və *hündürlük* deyilir (şəkil 387).

Ölçüləri bərabər olan düzbucaqlı paralelepipedə *kub* deyilir.

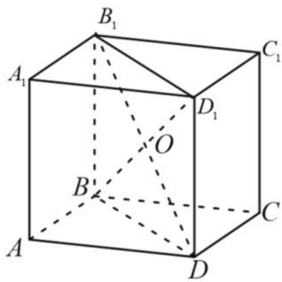
Teorem 1. *Paralelepipedin qarşı-qarşıya duran üzləri paralel və bərabərdir.*

□ $ABCDA_1B_1C_1D_1$ paralelepipedində AA_1B_1B və CC_1D_1D üzlərinin paralel müstəvilər üzərində olduğunu və bərabərliyini göstərək (şəkil 388).

Paralelepipedin üzlərinin hamısı paraleloqram olduğundan $AA_1 = DD_1$, $A_1B_1 = C_1D_1$, $AA_1 \parallel DD_1$ və $A_1B_1 \parallel C_1D_1$ olar. AA_1 və AB kəsişən düz xətlərindən keçən müstəvi α, DD_1 və DC kəsişən düz xətlərindən keçən müstəvi isə β olsun. Məlum teoremə görə $\alpha \parallel \beta$ olur. AA_1B_1B və DD_1C_1C paraleloqramlarında: $AA_1 = DD_1$, $A_1B_1 = D_1C_1$ və $\angle AA_1B_1 = \angle DD_1C_1 (\alpha \parallel \beta, AA_1 \parallel DD_1, A_1B_1 \parallel D_1C_1)$ olduğundan, onlar bərabərdir. ■



Şəkil 387



şəkil 388

Teorem 2. *Paralelepipedin diaqonallarının dördü də bir nöqtədə kəsişir və bu nöqtədə yarıya bölünür.*

□ Paralelepipedin ixtiyari iki diaqonalı, məsələn, BD_1 və DB_1 diaqonallarını götürək (şəkil 388). Eyni zamanda köməkçi BD və B_1D_1 düz xətlərini çəkək. $BB_1=DD_1$ və $BD=B_1D_1$ olduğundan, BDD_1B_1 paraleloqram,

BD_1 və DB isə onun diaqonallarıdır. Deməli, onlar bir O nöqtəsində kəsişir və həmin nöqtədə yarıya bölünür.

Həmin qayda ilə isbat etmək olar ki, digər diaqonallar da O nöqtəsində kəsişir və bu nöqtədə yarıya bölünürlər. ■

Nəticə. *Paralelepipedin diaqonallarının kəsişmə nöqtəsi onun simmetriya mərkəzidir.*

Teorem 2. *Düzbucaqlı paralelepipedin istənilən diaqonalının kvadratı onun üç ölçüsünün kvadratları cəminə bərabərdir.*

□ $ABCDA_1B_1C_1D_1$ verilən düzbucaqlı paralelepiped, a,b,c onun ölçüləri, d isə diaqonalı olsun ($AB=b$, $AD=a$, $AA_1=c$, $B_1D=d$, şəkil 389).

ABD düzbucaqlı üçbucağında Pifaqor teoreminə əsasən

$$BD^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow BD^2 = AB^2 + AD^2$$

yaza bilərik. DB_1B düzbucaqlı üçbucağından yenidən Pifaqor teoreminə əsasən

$$DB_1^2 = BD^2 + BB_1^2 = AA_1^2 + AB^2 + AD^2,$$

yəni

$$d^2 = a^2 + b^2 + c^2$$

alırıq. ■

Məsələ1. Düzbucaqlı paralelepipedin hündürlüyünün 12 *sm*, eninin 6 *sm* və uzunluğunun 8 *sm* olduğunu bilərək diaqonal kəsiyinin sahəsini tapın.

○ $ABCDA_1B_1C_1D_1$ düzbucaqlı paralelepiped, $AA_1=12$ *sm*, $AB=8$ *sm* və $AD=6$ *sm* onun ölçüləri olsun (şəkil 390). Oturacaqların BD və B_1D_1 diaqonallarını çəkək. BB_1D_1D düzbucaqlısı diaqonal kəsiyi olacaq, onun sahəsini hesablayaq. ABD düzbucaqlı üçbucağından:

$$BD = \sqrt{64 + 36} = 10sm,$$

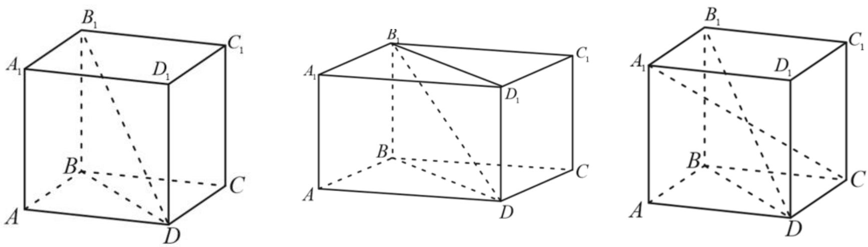
alırıq.Düzbucaqlının sahəsi üçün:

$$S_{BB_1D_1D} = BD \cdot BB_1 = 10 \cdot 12 = 120sm^2$$

olar. ●

Məsələ 2. Düz paralelepipedin oturacağının tərəfləri 10 *sm* və *6 sm*, diaqonallarından kiçiyi isə 8 *sm*-dir. Paralelepipedin kiçik diaqonalının oturacaqla 60^0-li bucaq əmələ gətirdiyini bilərək digər diaqonalını tapın.

○ $ABCDA_1B_1C_1D_1$ düz paralelepiped, $AB=10$ *sm*, $AD=6$ *sm*, $\angle B_1DB = 60^0$, $B_1D=8$ *sm* olsun (şəkil 391). A_1C diaqonalını tapmaq üçün əvvəlcə DBD_1 düzbucaqlı üçbucağında $\angle BB_1D = 30^0$ $(\angle B_1DB = 60^0)$ olduğundan, $BD=4$ *sm* və $BB_1=4\sqrt{3}$*sm* olar.



Şəkil 389 şəkil 390 şəkil 391

ABCD paraleloqramından (tərəflər və diaqonalların kvadratları haqqında teorem):

$$(AC)^2 + (BD)^2 = 2(AB)^2 + 2(AD)^2,$$

yəni $AC=16$ *sm*, AA_1C düzbucaqlı üçbucağından $(BB_1 = AA_1)$

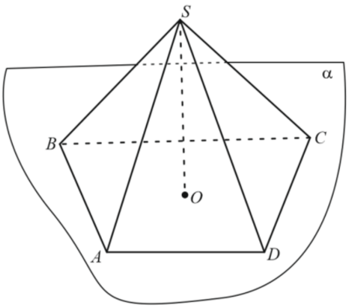
$$CA_1 = \sqrt{AA_1^2 + AC^2} = \sqrt{256 + 48},$$

yəni

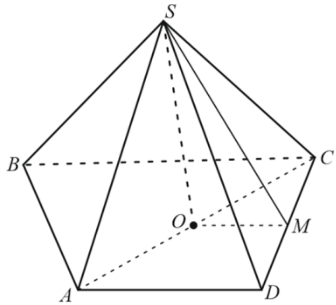
$$CA_1 = 4\sqrt{19}\ sm$$ ●

§ 127. PİRAMİDA.

Tutaq ki, α müstəvisi üzərində hər hansı çoxbucaqlı məsələn, *ABCD* dördbucaqlısı verilib. Bu müstəvinin xaricində hər hansı *S* nöqtəsini qeyd edib, onu *ABCD* dördbucaqlısının təpə nöqtələri ilə birləşdirək (şəkil 392). Nəticədə bir üzü çoxbucaqlı (dörbucaqlı), qalan üzləri ortaq təpəli



Şəkil 392



şəkil 393

üçbucaqlar olan çoxüzlü alırıq.

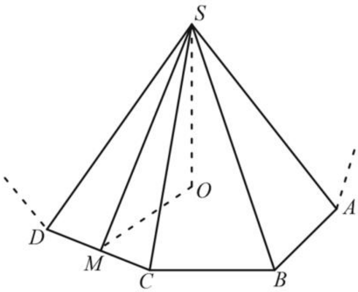
Tərif. Bir üzü hər hansı çoxbucaqlı, qalan üzləri ortaq təpəli üçbucaqlar olan çoxüzlüyə *piramida* deyilir.

Piramida *SABCD* kimi oxunur (üçbucaqlı, dördbucaqlı və s.) və oturacaq çoxbucaqlısının adı ilə adlanır. Məsələn, 393-cü şəkildə dördbucaqlı piramida göstərilib. Çoxbucaqlıya piramidanın *oturacağı,* üçbucaqlara onun *yan üzləri,* bütün yan üzlərin ortaq nöqtəsinə (*S*) piramidanın *təpə nöqtəsi*, onların kəsişmə xətlərinə isə piramidanın *yan tilləri* deyilir. Təpə nöqtəsindən oturacaq müstəvisinə endirilən perpendikulyara (*SO*) piramidanın *hündürlüyü* deyilir. Piramidanın təpə nöqtəsindən və onun oturacağının hər hansı diaqonalından keçən müstəvinin piramida ilə kəsişməsindən alınan üçbucağa *piramidanın diaqonal kəsiyi* deyilir.

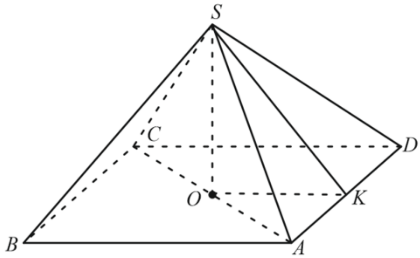
Aydındır ki, piramidanın üzlərinin sayı dörddən az ola bilməz. Oturacağı düzgün çoxbucaqlı, hündürlüyü isə bu çoxbucaqlının mərkəzindən keçən piramidaya *düzgün piramida* deyilir. Düzgün piramidanın yan üzünün hündürlüyünə onun *apofemi* deyilir (şəkil 394).

Düzgün piramidanın, yan üzləri, yan tilləri, apofemləri, oturacağındakı ikiüzlü bucaqları, yan üzlərdəki ikiüzlü bucaqları uyğun olaraq bərabərdir.

Məsələ 1. Piramidanın oturacağı, tərəfi 6 *sm* və iti bucağı 60^0 olan rombdur. Oturacaqdakı hər bir ikiüzlü bucağın otuz dərəcə olduğunu bilərək, piramidanın hündürlüyünü tapın.



Şəkil 394



şəkil 395

○ Verilmiş piramida *SABCD* olsun (şəkil 395). Şərtə görə *ABCD* rombdur. *AB*=6 *sm*, $\angle BAD = 60^0$ və oturacaqdakı ikiüzlü bucaqların xətti bucaqları $\angle SKO = 30^0$-dir. *SO* hündürlüyü tapmaq tələb olunur. *ABD* düzgün üçbucaqdır ($\angle A = 60^0$), onda $AO = 3\sqrt{3}sm$ olar. ΔAOK -dan; $OK = \frac{3\sqrt{3}}{2}$ sm, ΔSOK -dan; $SO = OK \cdot tg30^0 \Rightarrow SO = \frac{3\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow SO = 1{,}5sm.$ ●

Məsələ 2. Hündürlüyü 14 *m*, oturacağının tərəfi 16 *m* olan düzgün dördbucaqlı piramidanın yan tilini tapın.

○ Verilmiş düzgün dördbucaqlı piramida *SABCD* olsun (şəkil 393). *ABCD* kvadratdır; *AB*=16 *m*, *SO*=14 *m; SA*-nı tapmaq tələb olunur.

ABCD kvadratından $AC = 16\sqrt{2}m$, $AO = 8\sqrt{2}m$ olur. ΔSAO -dan

$$AS = \sqrt{AO^2 + SO^2} = \sqrt{128 + 196} \Rightarrow AS = 18m. \text{ ●}$$

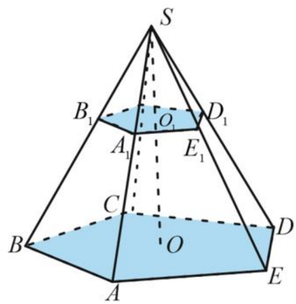
§ 128. PİRAMİDADA PARALEL KƏSİKLƏRİN XASSƏLƏRİ.

Teorem 1. *Piramidanı oturacağına paralel müstəvi ilə kəsdikdə, müstəvi:*

1) *piramidanın yan tillərini və hündürlüyünü mütənasib hissələrə bölür;*

2) *kəsikdə alınan çoxbucağlı oturacağa oxşar olur;*

3) *kəsiyin və oturacağın sahələri nisbəti, onların təpədən olan məsafələrinin kvadratları nisbətinə bərabərdir.*



şəkil 396

□ Tutaq ki, α müstəvisi *SABCDE* piramidasının β oturacaq müstəvisinə paralel olmaqla onu $A_1B_1C_1D_1E_1$ çoxbucaqlısı boyunca kəsir. Piramidanın hündürlüyü *SO* olsun (şəkil 396).

1. *SAB* üzünün yerləşdiyi müstəvi α və β müstəvilərini *AB* və A_1B_1 düz xətləri boyunca kəsir. $\alpha||\beta$ olduğundan, $AB||A_1B_1$ və $\Delta SAB \sim \Delta SA_1B_1$ olacaq. Eyni qayda ilə $BC||B_1C_1$, $CD||C_1D_1$, $DE||D_1E_1$ və $DA||D_1A_1$ olduğunu və uyğun üçbucaqlıların oxşarlığını alırıq. *SA* və *SO* kəsişən düz xətlərdən keçən müstəvi α və β müstəvilərini *AO* və A_1O_1 boyunca kəsir ($AO||A_1O_1$), onda

$\Delta SAO \sim \Delta SA_1O_1$ olur. Bucağın tərəflərini kəsən paralel düz xətlər haqqındakı teoremə əsasən,

$$\frac{SA_1}{AA_1} = \frac{SB_1}{BB_1}, \ \frac{SB_1}{BB_1} = \frac{SC_1}{CC_1}, \dots, \frac{SO_1}{OO_1} = \frac{SA_1}{AA_1}$$

və bu bərabərliklərdən,

$$\frac{SA_1}{AA_1} = \frac{SB_1}{BB_1} = \frac{SC_1}{CC_1} = \frac{SD_1}{DD_1} = \frac{SE_1}{EE_1} = \frac{SO_1}{OO_1}$$

yaza bilərik.

2. $A_1B_1 \| AB$, $B_1C_1 \| BC$, $C_1D_1 \| CD$, . . . olduğundan, $\angle A_1B_1C_1 = \angle ABC$; $\angle B_1C_1D_1 = \angle BCD$; $\angle C_1D_1E_1 = \angle CDE$, . . . olur. Üçbucaqların oxşarlığından,

$$\frac{AB_1}{AB} = \frac{SB_1}{SB}; \frac{B_1C_1}{BC} = \frac{SC_1}{SC}; \frac{C_1D_1}{CD} = \frac{SD_1}{SD}, \dots$$

yazıb, nəticdə isə

$$\frac{A_1B_1}{AB} = \frac{B_1C_1}{BC} = \frac{C_1D_1}{CD} = \frac{D_1E_1}{DE} = \frac{E_1A_1}{EA}$$

yaza bilərik. Beləliklə $A_1B_1C_1D_1E_1$ və *ABCDE* çoxbucaqlılarının oxşarlığı alınır (uyğun bucaqların bərabərliyi və tərəflərin mütənasibliyi).

3. Oxşar çozbucaqlıların sahələri nisbəti, uyğun tərəflərinin kvadratları nisbətinə bərabər olduğundan,

$$S_{A_1B_1C_1D_1E_1} : S_{ABCDE} = A_1B_1^2 : AB^2.$$

Digər tərəfdən isə

$$\frac{A_1B_1}{AB} = \frac{SA_1}{SA} = \frac{SO_1}{SO}$$

olduğunu nəzərə alsaq,

$$S_{A_1B_1C_1D_1E_1} : S_{ABCDE} = SO_1^2 : SO^2$$

alarıq. ■

Teorem 2. *Hündürlükləri bərabər olan iki piramida, təpələrindən bərabər məsafədə olmaqla oturacaqlarına paralel müstəvilərlə kəsilərsə, kəsiklərin sahələri oturacaqlarının sahələri ilə mütənasib olar.*

□ Tutaq ki, *SABCD* və *S₁MNP* piramidalarının oturacaqları α müstəvisinin üzərindədir və onların hündürlükləri *H*-dır. Bu piramidaları təpələrdən *h* məsafədə olmaqla α müstəvisinə paralel β müstəvisi ilə kəsək. Alınmış kəsikləri uyğun olaraq $A_1B_1C_1D_1$ və $M_1N_1P_1$ ilə işarə edək (şəkil 397). İsbat edək ki,

$$S_{M_1N_1P_1} : S_{D_1B_1C_1A_1} = S_{MNP} : S_{ABCD}$$

Bundan əvvəlki teroemə əsasən

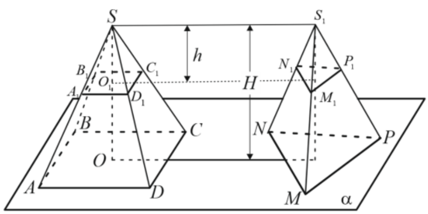
$$\frac{S_{A_1B_1C_1D_1}}{S_{ABCD}} = \frac{h^2}{H^2} \text{ və } \frac{S_{M_1N_1P_1}}{S_{MNP}} = \frac{h^2}{H^2}$$

olmasından

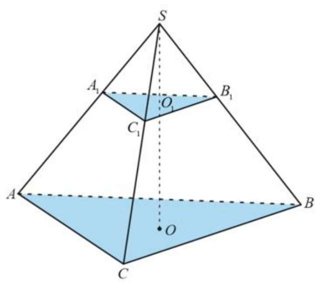
$$\frac{S_{A_1B_1C_1D_1}}{S_{ABCD}} = \frac{S_{M_1N_1P_1}}{S_{MNP}} \text{ və ya } \frac{S_{M_1N_1P_1}}{S_{MNP}} = \frac{S_{MNP}}{S_{ABCD}}$$

olur. ■

Piramidanın oturacağı ilə oturacağa paralel keçirilmiş kəsən müstəvi arasında qalan hissəsinə *kəsik piramida* deyilir və $ABCA_1B_1C_1$ kimi işarə olunur (şəkil 398).



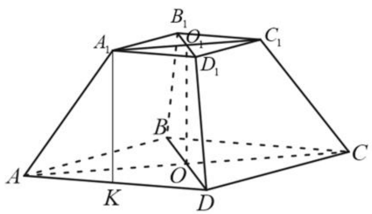
Şəkil 397



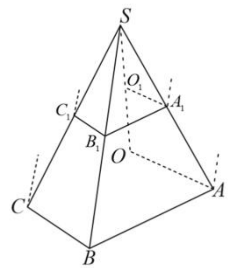
Şəkil 398

Paralel üzlərə *kəsik piramidanın oturacaqları*, onlar arasında qalan məsafəyə isə *kəsik piramidanın hündürlüyü* deyilir (OO_1). Kəsik piramida düzgün piramidanın hissəsi olduqda ona *düzgün kəsik piramida* deyilir. Düzgün kəsik piramidanın yan üzləri bir-birinə bərabər olan bərabəryanlı trapesiyalardır (şəkil 399). Bu trapesiyalardan hər hansı birinin hündürlüyünə *düzgün kəsik piramidanın apofemi* deyilir. (A_1K).

Məsələ. Piramidanın oturacağına paralel keçirilmiş kəsən müstəvi, onun hündürlüyünü təpədən oturacağa doğru 3:4 nisbətində bölür. Kəsiyin sahəsinin oturacağın sahəsindən 200 sm^2 az olduğunu bilərək piramidanın oturacağının sahəsini tapın.



Şəkil 399



Şəkil 400

○ Tutaq ki, *SABC* . . . piramidası oturacağa paralel müstəvi ilə kəsilib və kəsik $A_1B_1C_1$ . . . çoxbucaqlısıdır (şəkil 400). *SO*, SO_1 və OO_1 uyğun olaraq tam piramidaların və kəsik piramidanın hündürlükləri olsun.

Məsələnin şərtinə görə,

$$\frac{SO_1}{O_1O} = \frac{3}{4}$$

olduğundan $SO_1 = 3x, CO_1 = 4x$ qəbul etsək, $SO_1 = 7x$olar. Piramidanın oturacağının sahəsini Q ilə işarə etsək, onda şərtə görə kəsiyin sahəsi (Q-200) sm^2 olar. Paralel kəsiklərin xassəsinə əsasən,

$$(Q-200):Q = (3x)^2:(7x)^2$$

yaza bilərik. Buradan $Q = 245sm^2$ alarıq. ●

§ 129. PRİZMANIN SƏTHİNİN SAHƏSİ

Prizmanın yan üzərinin sahələri cəminə onun *yan səthi,* yan səthin sahəsi ilə oturacaqlarının sahələri cəminə isə onun *tam səthi* deyilir. Sadəlik üçün yan və tam səthin sahəsi əvəzinə uyğun olaraq *yan* və *tam səth* deyəcəyik.

Teorem. *Prizamnın yan səthi onun perpendikulyar kəsiyinin perimetri ilə yan tilinin hasilinə bərabərdir.*

□ Mümkün iki halı nəzərdən keçirək.

1. Prizma mail olsun. Prizmanın yan tillərinə perpendikulyar keçirilmiş müstəvi ilə kəsilməsindən alınan $A_2B_2C_2D_2E_2$ (şəkil 401) çoxbucaqlısı *perpendikulyar kəsik* adlanır. Aydındır ki, perpendikulyar kəsiyin tərəfləri prizmanın yan tillərinə perpendikulyardır. Odur ki, hər bir yan üzün sahəsi yan til ilə perpendikulyar kəsiyin uyğun tərəfinin hasilinə bərabər olar. Nəticədə yan səth üçün,

$$S_y = A_2B_2 \cdot AA_1 + B_2C_2 \cdot AA_1 + C_2D_2 \cdot AA_1 + D_2E_2 \cdot AA_1 + E_2A_2 \cdot AA_1 =$$
$$(AB_2 + B_2C_2 + C_2D_2 + D_2E_2 + E_2A_2) \cdot AA_1,$$

yəni

$$S_y = P_{A_2B_2C_2D_2E_2} \cdot AA_1$$

olur. Burada P perpendikulyar kəsiyin perimetridir.

2. Prizma düz olsun. Bu halda perpendikulyar kəsiyin perimetri, oturacağın perimetri ilə eyni olur və teoremin doğruluğu aydındır. ■

Düz prizmanın yan tili onun hündürlüyü olduğundan düz prizmanın yan səthi üçün teoremi aşağıdakı kimi də söyləmək olar.

Düz prizmanın yan səthi oturacağının perimetri ilə hündürlüyü hasilinə bərabərdir.

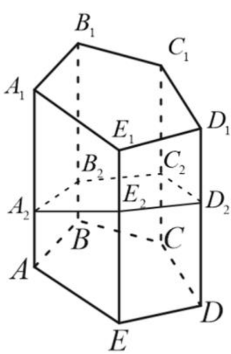
Prizmanın tam səthi üçün aşağıdakı düsturun doğruluğu aydındır:

$$S_T = S_y + 2S_o.$$

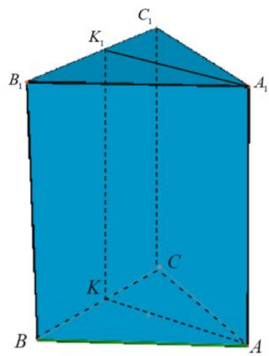
Burada S_o ilə oturacağın sahəsi işarə edilmişdir.

Məsələ. Düzgün üçbucaqlı prizmanın hündürlüyü $17sm$ və oturacağının tərəfi 9 *sm* –dir. Piramidanın tam səthini tapın.

○ $ABCA_1B_1C_1$ verilmiş prizma olsun (şəkil 402). $AB = BC = CA = 9sm$,



Şəkil 401.



Şəkil 402.

$AA_1 = 17sm$. Tam səthi tapmaq tələb olunur.

Tərəfi 9 *sm* olan düzgün üçbucağın sahəsi,

$$S_o = S_{\Delta ABC} = \frac{81\sqrt{3}}{4}\ sm^2,$$

prizmanın yan səthi isə

$$S_y = 17 \cdot 27 = 459\ sm^2$$

olduğundan,

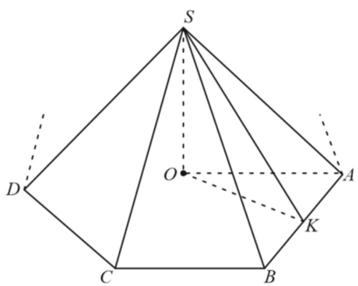
$$S_T = S_y + 2S_o = 459 + 2 \cdot \frac{81\sqrt{3}}{4},$$

yəni $S_T = \left(459 + \frac{81}{2}\sqrt{3}\right) sm^2$ alırıq. ●

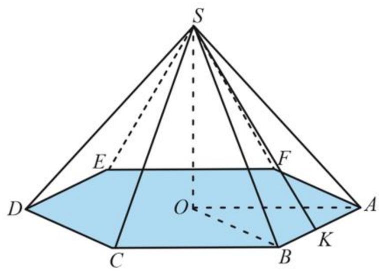
§ 130. PİRAMİDANIN SƏTHİNİN SAHƏSİ

Piramdanın yan səthinin sahəsi, onun yan üzlərinin (üçbucaqların) sahələri cəminə bərabərdir. Düzgün piramidanın yan səthi üçün aşağıdakı teorem doğrudur.

Teorem 1. *Düzgün piramidanın yan səthi, oturacağının perimetri ilə apofemi hasilinin yarısına bərabərdir* (şəkil 403);



Şəkil 403



Şəkil 404

$$S_y = \frac{1}{2} a \cdot P_o,$$

burada a-apofem, P_o isə oturacağın perimetridir.

□ Düzgün piramidanın yan üzləri bərabər üçbucaqlar olduğundan onun yan səthi üçün

$$S_y = \left(\frac{1}{2}a \cdot AB\right) \cdot n, \text{ yəni } S_y = \frac{1}{2}aP_o$$

alırıq. Burada n çoxbucaqlının tərəflərinin sayını göstərir. ■

Piramidanın tam səthi onun, yan səthi ilə oturacağın sahəsinin cəmindən ibarət olduğundan,

$$S_T = S_y + S_o$$

alınır.

Teorem 2. *Düzgün kəsik piramidanın yan səthi hər iki oturacağın perimetrləri cəminni yarısı ilə apofemi hasilinə bərabərdir.*

□ Tutaq ki, düzgün n bucaqlı kəsik piramidanın oturacaqlarının tərəfləri a və b, apofemi isə l ilə işarə olunur. Aydındır ki, düzgün kəsik piramidanın yan səthi n sayda eyni bərabər trapesiyanın sahələri cəminə bərabərdir. Trapesiyanın sahəsi $\frac{1}{2}(a+b)l$olduğundan, yan səth üçün,

$$S_y = \frac{1}{2}(a+b)l \cdot n$$

düsturu alınır (şəkil 401). ■

Məsələ. Düzgün altıbucaqlı piramidanın hündürlüyü 8 *sm* və oturacağının tərəfi $4\sqrt{3}$ *sm*-dir. Bu piramidanın tam səthini tapın.

○ *SABCDEF* verilmiş düzgün piramida olsun (şəkil 404). *ABCDEF* düzgün altıbucaqlı, $AB = 4\sqrt{3}$ *sm*, *SO*=8 *sm*. Tam səthi tapmaq tələb olunur. Düzgün *AOB* üçbucağından,

$$OK = \sqrt{BO^2 - BK^2} \Rightarrow OK = \sqrt{48-16} \Rightarrow OK = 6sm,$$

ΔSOK -dan da

$$SK = \sqrt{SO^2 + KO^2} \Rightarrow SK = \sqrt{64+36} \Rightarrow SK = 10\ sm.$$

alınır. Onda, piramidanın oturacağının və yan səthinin sahəsi üçün uyğun olaraq,

$$S_0 = \frac{3a^2\sqrt{3}}{2} \Rightarrow S_0 = 72\sqrt{3}sm^2$$ və

$$S_y = \frac{1}{2}P_{ABCDEF} \cdot SK \Rightarrow S_y = 120\sqrt{3}sm^2$$

alındığından,

$$S_T = S_j + S_o = 120\sqrt{3} + 72\sqrt{3} = 192\sqrt{3},$$

yəni $S_T = 192\sqrt{3}sm^2$ olur. ●

§ 131. HƏCM ANLAYIŞI

Hər bir cisim fəzanı daxili və xarici olmaqla iki hissəyə ayırır. Cismin tutduğu fəza hissəsi onun *həcmi* adlanır.

Həcmi ölçmək, yəni onu hər hansı bir ədədlə ifadə etmək məsələsinə baxaq. Hər bir cismə onun həcmi adlanan müsbət, adlı ədəd uyğundur. Bu halda aşağıdakı iki şərt ödənilməlidir:

1. Cisim hissələrdən təşkil olunubsa, bu cismin həcmi hissələrin həcmləri cəminə bərabərdir.

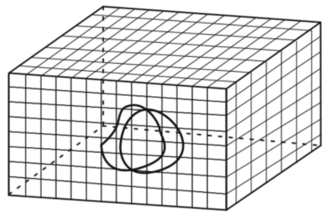
2. Bərabər cisimlərin həcmləri də bərabərdir.

Bu tərif həcmin aksiomatik tərifi adlanır. Həcmləri bərabər olan cisimlərə *müadil cisimlər* deyilir.

Tərif. Tili vahidə bərabər olan kubun həcminə *həcm vahidi* deyilir.

1 m^3, 1 dm^3, 1 sm^3 və s. həcm vahidləridir. Qeyd edək ki, uzunluq vahidi n dəfə artdıqda, həcm vahidi n dəfə artır. Məsələn, 1 m=100 sm olduğundan, $1m^3=100^3\ sm^3 = 1000000\ sm^3$ olar. Həcmin tərifini və həcm vahidini bilərək, istənilən cismin həcmini tapmaq olar.

Tutaq ki, P cisminin həcmini tapmaq tələb olunur (şəkil 405). Bunun üçün planimetriyada sahələrin paletka ilə ölçülməsinə uyğun bir üsuldan istifadə edək. P cisminin yerləşdiyi fəzanı qarşılıqlı perpendikulyar olan üç növ paralel müstəvilər vasitəsilə vahid kublara ayıraq (paralel müstəvilər arasındakı məsafə vahid qəbul olunur). Beləliklə, həcmini (V) təyin etmək istədiyimiz P cismi hissələrə ayrılmış olur.



Şəkil 405

Əvvəlcə P cisminin daxilində tam yerləşən kubların sayını (V_0') müəyyən edək. Alınan V_0' ədədi P cisminin həcminin əksiyi ilə təqribi qiyməti hesab olunur. Sonra isə P cisminin daxilində tam yerləşən, bir də onun ilə ortaq nöqtəsi olan kubların sayını V_0''-ı müəyyən edək. Alınan V_0''ədədi P cisminin həcminin artıqlığı ilə təqribi qiyməti hesab olunur. Beləliklə, $V_0' < V < V_0''$ olur.

İndi paralel müstəvilri elə sıxlaşdıraq ki, alınan hər bir kubun tili əvvəlkinin 1/10-nə bərabər olsun. Birinci halda olduğu kimi, alınan kiçik kubları sayıb, onların sayını uyğun olaraq V_1', V_1''ilə işarə edək. Bu halda da $V_1' < V < V_2''$ olacağı aydındır.

Paralel müstəviləri sıxlaşdırmaqla, hər bir kubun tilini, əvvəlki kubun tilininin $^1/_{100}$-nə bərabər etməklə $V_2' < V < V_2''$ münbasibətini alırıq. Kubların tilinin kiçildilməsini bu qayda ilə davam etdirsək, nəticədə V üçün $V_n' < V < V_n''$ $(n = 0,12, \dots)$ şərtini ödəyən iki növ təqribi qiymətlər ardıcıllığı alarıq. Bunlardan birincisi, yəni $\{V_n'\}$ ardıcıllığı artan və yuxarıdan məhdud, ikincisi, yəni $\{V_n''\}$ isə azalan və aşağıdan məhdud ardıcıllıqdır. Aydındır ki, hər iki ardıcıllıq eyni bir ədədə, yəni V ədədinə yığılır ki, bu da cismin həcmi olaraq qəbul olunur.

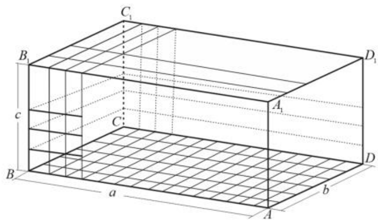
§ 132. DÜZBUCAQLI PARALELEPİPEDİN HƏCMİ

Teorem. *Düzbucaqlı paralelepipedin həcmi, onun üç ölçüsünün hasilinə bərabərdir:*

$$V = abc$$

□ İsbat üçün aşağıdakı mümkün halları nəzərdən keçirək.

1. Paralelepipedin a, b və c ölçüləri rasional ədədlərdir.



Şəkil 406

Tutaq ki, düzbucaqlı paralelepipedin a, b və c ölçüləri natural ədədlərdir (şəkil 406). Göstərək ki, $V = abc$ münasibəti doğrudur.

a və b natural ədədlər olduğundan, paralelepipedin oturacağında tərəfi vahid olan ab sayda kvadrat var. Kvadratların hər biri üzərində vahid ölçülü kublar yerləşdirsək, onda oturacaq üzərində ab sayda, bir cərgə kublar alırıq. Belə cərgələrin sayı c olduğundan, paralelepipied abc sayda kublara ayrılmış olur. Odur ki,

$$V = abc.$$

Paralelepipedin a, b və c ölçüləri içərisində kəsr olanı vardır:

$$a = \frac{p_1}{m}, b = \frac{q_1}{i}, c = \frac{r_1}{s}.$$

Bu ədədləri ortaq məxrəcə gətirək və $a = \frac{p}{n}, b = \frac{q}{n}$ və $c = \frac{r}{n}$ kimi işarə edək. Əvvəlki ölçü vahidinin $1/n$ hissəsini ölçü vahidi qəbul edək. p və q

natural ədədlər olduğundan paralelepipedin oturacağında pq sayda kvadrat yerləşəcəkdir. Bu halda da düzbucaqlı paralelepipedin həcmi pqr sayda kublara ayrılacaq (bir kubun həcmi $1/n^3$-dur). Verilən düzbucaqlı paralelepipedin həcmini əvvəlki ölçülərlə ifadə edək:

$$V = \frac{pqr}{n^3} = \frac{p}{n} \cdot \frac{q}{n} \cdot \frac{r}{n} = abc.$$

2. Düzbucaqlı paralelepipedin a, b, c ölçüləri içərisində irrasional olanı vardır. Bu ədədlərin dəqiqliyi $1/10^n$ olmaqla əksiyi və artığı ilə götürülmüş rasional qiymətləri üçün $a_n^- \le a \le a_n^+$, $b_n^- \le b \le b_n^+$, $c_n^- \le c \le c_n^+$ münasibətlərininj ödənəcəyi aydındır. Aydındır ki, verilən paralelepiped ölçüləri a_n^-, b_n^-, c_n^- və a_n^+, b_n^+, c_n^+ olan paralelepipedlərin arasındadır. Odur ki,

$$a_n^- b_n^- c_n^- \le V \le a_n^+ b_n^+ c_n^+$$

olacaq. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n^- = \lim\limits_{n\to\infty} a_n^+ = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n^- = \lim\limits_{n\to\infty} b_n^+ = b$, $\lim\limits_{n\to\infty} c_n^- = \lim\limits_{n\to\infty} c_n^+ = c$ olmasını nəzərə alsaq, bu halda da,

$$V = abc$$

alarıq. ■

Həcm düsturunda ab hasili oturacağın sahəsi(S_0), c isə hündürlük(H) olduğundan, onu belə də ifadə etmək olar.

Düzbucaqlı paralelepipedin həcmi oturacağının sahəsi ilə hündürlüyü hasilinə bərabərdir:

$$V = S_0 H.$$

Nəticə. *Tilinin uzunluğu a olan kubun həcmi üçün*

$$V = a^3$$

düsturu doğrudur.

§ 133. MAİL PARALELEPİPEDİN HƏCMİ

Teorem. *Mail paralelepipedin həcmi oturacağın sahəsi ilə hündürlüyü hasilinə bərabərdiur:*

$$V = S_0 H$$

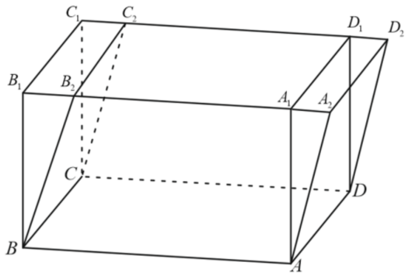
□ Verilən paralelepipedin *AD* və *BC* tilindən *ABCD* oturacaq müstəvisinə perpendikulyar müstəvilər keçirib, $AA_2A_1DD_2D_1$ və $BB_2B_1CC_2C_1$ üçbucaqlı prizmalarını quraq (şəkil 407). Bu prizmalar biri digərinin *AB* məsafəsi qədər sürüşməsi nəticəsində alındığından müadildirlər. Beləliklə, həcmi verilən paralelepipedin həcminə bərabər olan $ABCDA_2B_2C_2D_2$ paralelepipedini alırıq. Bu paralelepipedin oturacağı və hündürlüyü verilən paalelepipedin oturacağı və hündürlüyü ilə eynidir. Alınmış paralelepipedin *AB* və *CD* tillərindən yenə oturacaq müstəvisinə perpendikulyar müstəvilər keçirib yuxarıdakına uyğun üçbucaqlı prizmaları quraq. Bu zaman yan üzləri oturacaq müstəvisinə perpendikulyar olmaqla verilən paralelepipedə müadil olan düz parelilepiped alırıq. Onu $ABCDA_2B_2C_3D_3$ ilə işarə edək. Yenidən bu paralelepipedi AA_2 və BB_2 tillərindən keçib, onların müstəvisinə perpendikulyar olan müstəvilər çəksək, əvvəlkinə müadil olan düzbucaqlı $ABB_4A_4B_2A_2C_4D_4$paralelepipedini alırıq (şəkil 408). Onun həcmi

$$V = S_{ABB_4A_4} \cdot AA_2$$

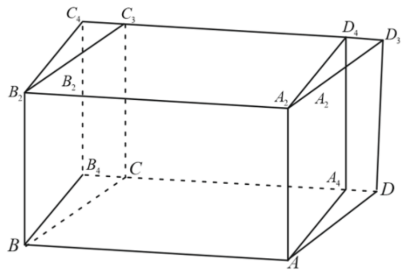
kimidir. Buradakı ABB_4A_4 düzbucaqlısının sahəsi verilən paralelepipedin *ABCD* oturcaqlarınnı sahəsinə, AA_2 isə onun *H* hündürlüyünə bərabər olduğundan,

$$V = S_0 \cdot H$$

alırıq. ■



Şəkil 407



Şəkil 408

§ 134. PRİZMANIN HƏCMİ

Teorem. *Prizmanın həcmi onun oturacağının sahəsi ilə hündürlüyü hasilinə bərabərdir:*

$$V = S_0 H$$

□ Teoremi əvvəlcə üçbucaqlı prizma üçün isbat edək. Üçbucaqlı prizmanın oturacağı *ABC* üçbucağı olsun (şəkil 409). Verilmiş prizmanı $ABMCA_1B_1M_1C_1$ paralelepipedinə tamamlayaq. Diaqonalların kəsişmə nöqtəsi paralelepipedin simmetriya mərkəzi olduğundan, $ABCA_1B_1C_1$ və $BMCB_1M_1C_1$ üçbucaqlı prizmaları müadildir. Deməli, $ABCA_1B_1C_1$ prizmasının həcmi alınmış paralelepipedin həcminin yarısına bərabərdir:

$$V = \frac{1}{2}V_{par.} = \frac{1}{2}S_{ABMC} \cdot H = S_0 H.$$

İndi isə ixtiyari prizmaya baxaq ($n > 3$) (şəkil 410). Onun ixtiyari bir yan tilindən keçən bütün diaqonal kəsiklərini çəksək, hündürlüyü verilmiş prizmanın hündürlüyü ilə eyni olan $(n-2)$ sayda üçbucaqlı prizma alarıq. Onların ,oturacaqlarının sahələrini $S_1, S_2; \dots S_{n-2}$ ilə işarə etsək:

$$V = S_1 \cdot H + S_2 \cdot H + \ldots + S_{n-2} \cdot H = (S_1 + S_2 + \ldots S_{n-2})H, \text{ və ya}$$

$$V = S_0 H$$

alırıq. ■

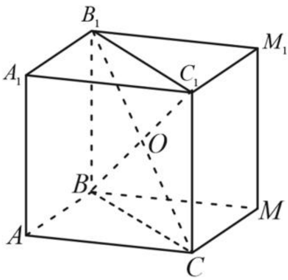
Məsələ. Düz prizmanın oturacağı tərəfi 12 *sm* və bu tərəfə bitişik bucaqları 30^0 olan bərabəryanlı üçbucaqdır. Alt oturacağın xaricinə çəkilmiş çevrənin mərkəzini, üst oturacağın təpə nöqtəsi ilə birləşdirən düz xətt parçası alt oturacaqla 45^0-li bucaq əmələ gətirir. Prizmanın həcmini tapın.

○ $ABCA_1B_1C_1$ tələb olunan prizma olsun (şəkil 411).

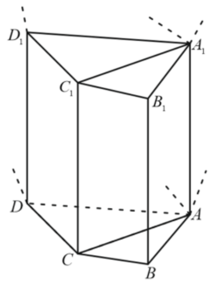
$$AC=12 \; sm, \; \angle A = \angle C = 30^0, \; \angle B_1OB = 45^0.$$

ABC üçbucağına sinuslar teoremi tətbiq edək:

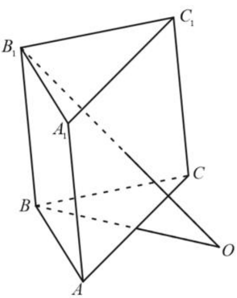
$$\frac{AC}{\sin B} = \frac{AB}{\sin 30^0}, (\angle B = 120^0), AB = 4\sqrt{3}\text{sm}.$$



Şəkil 409



Şəkil 410



Şəkil 411

Prizmanın oturacağının sahəsi üçün:

$$S_0 = S_{\Delta ABC} = 12\sqrt{3} \; sm^2$$

Olduğundan, xaricə çəkilmiş çevrənin radiusu düsturuna əsasən:

$$BO = \frac{4\sqrt{3} \cdot 4\sqrt{3} \cdot 12}{4 \cdot 12 \cdot \sqrt{3}} \Rightarrow BO = 4\sqrt{3} \text{ və ya } AA_1 = BO = 4\sqrt{3}$$

sm

tapırıq. Onda prizmanın həcmi,:

$$V = S_{\Delta ABC} \cdot AA_1 = 12 \cdot \sqrt{3} \cdot 4\sqrt{3},$$

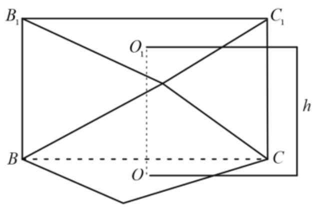
yəni V=144 sm^3 olur. ●

§ 135. PİRAMİDANIN HƏCMİ

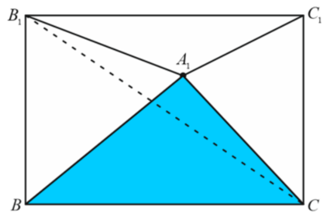
Teorem. *Piramidaının həcmi, oturacağının sahəsi ilə hündürlüyü hasilinin üçdə birinə bərabərdir:*

$$V = \frac{1}{3} S_{o.} \cdot H.$$

□ Teoremi əvvəlcə üçbucaqlı piramida üçün isbat edək. Bunun üçün A_1ABC üçbucaqlı piramidasını, oturacağı və hündürlüyü ilə eyni olan üçbucaqlı prizmaya qədər tamamlayaq (şəkil 412). Aydındır ki, bu prizmanın yan tili piramidanın A_1A yan tilinə bərabərdir. Prizmadan əvvəlki piramidanı ayırsaq, $A_1BCC_1B_1$dördbucaqlı piramidası qalır (şəkil 413). Bu piramidanı A_1, B_1 və C nöqtələrindən keçən müstəvi ilə kəssək,



Şəkil 412



Şəkil 413

$CA_1B_1C_1$ və BA_1B_1C kimi iki müadil piramida alırıq.

İndi göstərək ki, A_1ABC və $CA_1B_1C_1$ piramidaları da müadildir. Doğrudan da, hər iki piramidanın hündürlüyü prizmanın hündürlüyünün eyni, oturacaqları isə bərabər *ABC* və $A_1B_1C_1$ üçbucaqlı olduğundan, onlar müadildir.

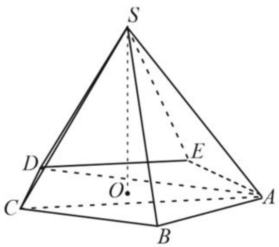
Deməli, A_1ABC piramidasının həcmi, $ABCA_1B_1C_1$ prizmasının həcminin üçdə birinə bərabərdir. Yəni üçbucaqlı piramida üçün teorem doğrudur.

İndi ümumi hala baxaq. Çoxbucaqlı *SABCDE* piramidasının *S*, *A*, *C* və *S*, *A*, *D* nöqtələrindən uyğun müstəvilər keçirməklə onu *SABC*, *SACD* və *SADE* kimi üç üçbucaqlı piramidaya ayıraq (şəkil 414). Bu piramidaların hündürlükləri verilmiş piramidanın hündürlüyü ilə eynidir. Verilmiş piramidanın həcmi onu təşkil edən piramidaların (üçbucaqlı piramidaların) həcmləri cəminə bərabərdir:

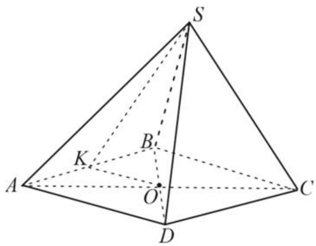
$$V = V_{SABC} + V_{SACD} + V_{SADE} \Rightarrow V = \frac{1}{3} \cdot H(S_{\Delta ABC} + S_{\Delta ACD} + S_{\Delta ADE}) \Rightarrow ;$$

$$V = \frac{1}{3} \cdot H \cdot S_{ABCDE}. \blacksquare$$

Məsələ. Düzgün dördbucaqlı piramidanın həcminin 12 sm^3 və yan üzünün oturacaqla 60^0-li bucaq əmələ gətirdiyini bilərək, tam səthinin sahəsini tapın.



Şəkil 414



Şəkil 415

○ *SABCD* verilmiş düzgün dördbucaqlı piramida olsun (şəkil 415). $\angle SKO = 60^0, V = 12sm^3, S_T = ?$

ABCD kvadrat olduğundan $KO = \frac{1}{2}AB; \angle KSO = 30°$ olar. (*SOK*-düzbucaqlı üçbucaq və $\angle SKO = 60^0$ olduğundan) 30^0-li bucaq qarşısındakı katet haqqındakı teoremə əsasən: $SK = 2 \cdot KO = AB$ olar. ΔSKO -dan

$$H = SO = \sqrt{AB^2 - \frac{AB^2}{4}} = \frac{AB\sqrt{3}}{2}.$$

Piramidanın oturacağının sahəsi $Q = AB^2$ olduğundan, həcm düsturuna əsasən:

$$V = \frac{1}{3}Q \cdot H \Rightarrow 12 = \frac{1}{3}AB^2 \cdot \frac{AB\sqrt{3}}{2} \Rightarrow AB = 2\sqrt{3}\ sm.$$

Piramidanın tam səthi:

$$S_T = Q + S_y = AB^2 + 2AB^2 = 3AB^2 = 36 \Rightarrow S_T = 36\ sm^2$$

olar. ●

§ 136. KƏSİK PİRAMİDANIN HƏCMİ

Teorem. *Kəsik piramidanın həcmi elə üç piramidanın həcmləri cəminə bərabərdir ki, bu piramidaların hündürlüyü kəsik piramidanın hündürlüyünün eynidir, birincinin oturacağı verilən kəsik piramidanın alt oturacağı, ikincinin oturacağı verilən kəsik piramidanın üst oturacağı, üçüncü piramidanın oturacağının sahəsi isə üst və alt oturacaqlarının sahələri arasında həndəsi orta kəmiyyətdir.*

□ Tutaq ki, hündürlüyü H, oturacağının sahələri Q_1 və Q_2 olan kəsik iramida verilmişdir (şəkil 416). Bu piramidanı tam piramidaya qədər tamamlayaq. $SA_1B_1C_1D_1$ piramidasının hündürlüyü x olsun. Aydındır ki, verilən kəsik piramidanın həcmi, hündürlüyü $x+H$, oturacağının sahəsi Q_2 olan $SABCD$ və hündürlüyü x, oturcağının sahəsi Q_1 olan $SA_1B_1C_1D_1$ tam piramidalarının həcmləri fərqinə bərabərdir:

$$V_{k.p.} = V_{SABCD} - V_{SA_1B_1C_1D_1} = \frac{1}{3}(x+H) \cdot Q_2 - \frac{1}{3}x \cdot Q_1.$$

Burada, piramidada paralel kəsiklərin xassəsinə əsasən:

$$Q_1 : Q_2 = x^2 : (x+H)^2,$$

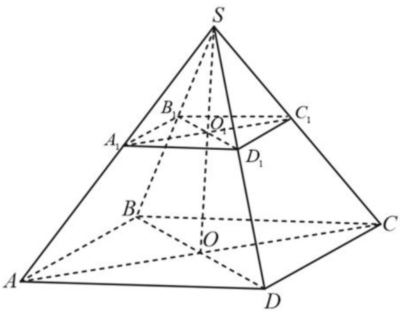
yəni

$$x = \frac{H\sqrt{Q_1}}{\sqrt{Q_2} - \sqrt{Q_1}}$$

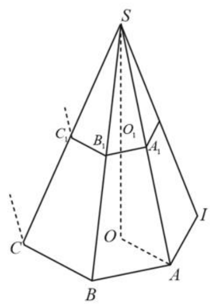
olmasını nəzərə alsaq,

$$V_{k.p.} = \frac{1}{3}\left(\left(\frac{H\sqrt{Q_1}}{\sqrt{Q_2}-\sqrt{Q_1}} + H\right)Q_2 - \frac{H\sqrt{Q_1}\cdot Q_1}{\sqrt{Q_2}-\sqrt{Q_1}}\right)$$

münasibətini, nəticədə isə



Şəkil 416



Şəkil 417

$$V_{k.p.} = \frac{1}{3}H\left(Q_1 + \sqrt{Q_1Q_2} + Q_2\right)$$

alarıq. ■

Axırıncı münasibət kəsik piramidanın həcm düsturu adlanır.

Məsələ. Kəsik piramidanın oturacaqları sahələrinin 98 sm^2, 32 sm^2 və uyğun tam piramidanın hündürlüyününün 14 *sm* olduğunu bilərək, həcmini tapın.

○ Tutaq ki, $ABC\ldots A_1B_1C_1\ldots$ tələb olunan kəsik piramidadır (şəkil 417). Onu tam piramidaya qədər tamamlayaq. Q_2=98 sm^2, Q_1=32 sm^2, $OO_1=x$ qəbul etsək, onda $SO_1 = 14 - x$ olar. Piramidada paralel kəsiklərin xassəsinə əsasən:

$$98:32 = 14^2:(14-x)^2$$

olar. Buradan,

$$14:(14-x) = 7:4, x = 6$$

alırıq.

Kəsik piramidanın həcm düsturuna əsasən,

$V = \frac{1}{3}H\left(Q_1 + \sqrt{Q_1Q_2} + Q_2\right) = \frac{1}{3} \cdot 6\left(32 + \sqrt{32 \cdot 98} + 98\right),$

yəni $V = 372\ sm^3$. ●

ÇALIŞMALAR

1. Düzgün tetraedrin üzünün xaricinə çəkilmiş çevrənin radiusunun 2 sm olduğunu bilərək onun həcmini tapın.

2. Düzgün dördbucaqlı prizmanın alt oturacağının tərəflərinin orta nöqtələri və üst oturacağının mərkəzi piramidanın təpə nöqtələridir. Piramidanın həcminin 9 sm^3 olduğunu bilərək prizmanın həcmini tapın.

3.Düzgün üçbucaqlı piramidanın hündürlüyü 4 *sm* və yan tili 5 *sm*-dir. Piramidanın həcmini tapın.

4. Oturacağının tərəfi 45 *sm* olan düzgün dördbucaqlı prizmanın diaqonalı yan üzlə 30^0-li bucaq əmələ gətirir. Prizmanın həcmini tapın.

5. Üçbucaqlı piramidanın oturacağının tərəfləri 5 *sm*, 5 *sm* və 6 *sm*-dir. Yan üzlərin oturacaq müstəvisi ilə əmələ gətirdiyi bucaqların 45^0 olduğunu bilərək, piramidanın həcmini tapın.

6. Üçbucaqlı piramidanın oturacağının tərəfləri 4 *sm*, 7 *sm* və 9 *sm*-dir. Yan tillərin bərabər və 8 *sm* olduğunu bilərək, piramidanın həcmini tapın.

7. Üçbucaqlı düz prizmanın yan tili 2 *m*, yan üzlərinin sahələri 12 m^2, 14 m^2 və 18 m^2-dır. Prizmanın həcmini tapın.

8. Düzgün dördbucaqlı kəsik piramidanın hündürlüyü 3 *sm*, ouracağının tərəfləri isə 2 *sm* və 1 *sm*-dir. Onun diaqonallarının kəsişmə nöqtəsindən oturacağına paralel müstəvi keçirilib. Bu müstəvinin piramidadan ayırdığı hissələrin həcmini tapın.

9. Kəsik piramidanın oturacaqlarının sahələri 9 sm^2 və 25 sm^2, həcmi isə 98 sm^3-dir. Tam piramidanın həcmini tapın.

10. Üçbucaqlı prizmanın oturacağının tərəfləri 2 *sm*, yan üzlərindən biri isə diaqonalı 4 *sm* olub, oturacağa perpendikulyar olan rombdur. Prizmanın həcmini tapın.

11. Düzbucaqlı paralelepipedin ölçüləri 1:2:3 nisbətindədir. Paralelepipedin tam səthinin 352 sm^2 olduğunu bilərək, ölçülərini tapın.

12. Düz paralelepipedin oturacağının tərəfləri 8 *sm* və 12 *sm* olub 30^0-lik bucaq əmələ gətirirlər. Paralelepipedin yan tilinin 6 *sm* olduğunu bilərək tam səthini tapın.

13. Üçbucaqlı mail prizmanın yan tili 80 *sm*-dir. Perpendikulyar kəsiyin sahəsinin 384 sm^2 və kəsiyin tərəflərinin 4:13:15 nisbətində olduğunu bilərək, prizmanın yan səthini tapın.

14. Düzgün dördbucaqlı piramidanın oturacağının tərəfi 42 *sm* və hündürlüyü 20 *sm* -dir. Piramidanın tam səthini tapın.

15. Düzgün dördbucaqlı kəsik piramidanın oturacaqlarının tərəfləri 8 *sm* və 18 *sm*, hündürlüyü isə 12 *sm* -dir. Piramidanın tam səthini tapın.

16. Düzgün altıbucaqlı piramidanın oturacağının tərəfi 2 *m*, yan tili isə 14 *m* -dir. Bu piramidanın həcmini tapın.

17. Düzgün dördbucaqlı kəsik piramidanın oturacaqlarının tərəfləri 4 *sm* və 1 *sm* -dir, alt oturacağın tilindəki ikiüzlü bucaq isə 45^0-yə bərabərdir. Piramidanın həcmini tapın.

18. Düzgün üçbucaqlı kəsik piramidanın oturacaqlarının tərəfləri 3 *m* və 2 *m* -dir. Piramidanın yan səthinin, onun oturacaqlkarının sahələri cəminə bərabər olduğunu bilərək, həcmini tapın.

19. Kəsik piramidanın oturacaqlarının sahələri S_1 və $S_2 (S_1 < S_2)$, həcmi isə V-dir. Tam piramidanın həcmini tapın.

20. Düzgün tetraedrin tilini 1:4 nisbətində bölən nöqtədən, həmin tilə perpendikulyar müstəvi keçirilib. Müstəvinin tetraedrdən ayırdığı hissələrin nisbətini tapın.

TESTLƏR

1. Ölçüləri *a*, *b*, *c* olan paralelepipeddə $a^2 + b^2 + c^2 = 96$ və $a + b + c = 14$ olarsa, paralelepipedin tam səthinin sahəsini tapın.

A) 120 B) 150 C) 100 D) 130 E) 90

2. Düzgün dördbucaqlı piramidanın oturacağının sahəsi 144 sm^2, yan tili 10 *sm* olarsa, yan səthinin sahəsini tapın.

A) 120 sm^2 B) 420 sm^2 C) 180 sm^2
D) 192 sm^2 E) 504 sm^2

3. Hündürlüyü 8 *sm*, apofemi isə 10 *sm* olan düzgün dördbucaqlı piramidanın həcmini tapın.

A) 324 sm^3 B) 334 sm^3 C) 480 sm^3 D)374 sm^3 E) 384 sm^3

4. İki oxşar piramidanın hündürlükləri nisbətii 2:3 kimidir. Böyük piramidanın həcmi 27 sm^3-dur. Kiçik piramidanın həcmini tapıın.

A) 8 sm^3 B) 9 sm^3 C) 12 sm^3 D) 10 sm^3 E) 15 sm^3

5. Oturacaqları və hündürlüyü eyni olan prizma və piramidanın həcmləri nisbətini tapın.

A) 2 B) 4 C) 3 D) 9 E) 5

6. Apofemi 8 *sm*, hündürlüyü 4 *sm* olan düzgün üçbucaqlı piramidanın yan səthini tapın.

A) 92 sm^2 B) 288 sm^2 C) 244 sm^2 D) 504 sm^2 E) 192 sm^2

7. Tam səthinin sahəsi 54 sm^2 olan kubun həcmini tapın.

A) 27 sm^3 B) 16 sm^3 C) 24 sm^3 D)8 sm^3 E) 21 sm^3

8. Oturacaqlarının tərəfləri 32 *sm* və 16 *sm* olan düzgün dördbucaqlı kəsik piramidanın hündürlüyü 4 *sm*-dir. Kəsik piramidanın yan tilini tapın.

A) 8 *sm* B) 10 *sm* C) 12 *sm* D)9*sm* E) 13 *sm*

9. Yan tili 9 *sm* və oturacağının tərəfi 12 *sm* olan düzgün dördbucaqlı piramidanın həcmini tapın.

10. Verilmiş çoxüzlülər üçün uyğunluğu təyin edin.

1. 8 bucaqlı prizma	a. 8 təpə nöqtəsi var
2. Dördbucaqlı paralelepiped	b. 9 üzü var.
3. 8 bucaqlı piramida	c. Diaqonal kəsiyi üçbucaqdır.
	d. 10 üzü var.
	e. 24 tili var.

XVIII FƏSİL

FIRLANMA CİSİMLƏRİ

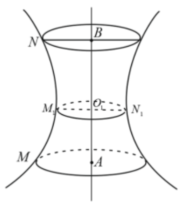
§ 137. FIRLANMA SƏTHİ

Tərif. *Doğuran* deyilən hər hansı bir xəttin (*MN*), ox deyilən tərpənməz düz xətt (*AB*) ətrafında fırlanmasından əmələ gələn səthə *firlanma səthi* deyilir (şəkil 418)

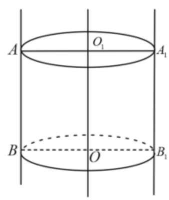
Fırlanma səthinin oxa perpendikulyar olan iki paralel müstəvi arasında qalan hissəsinə *fırlanma cismi* deyilir. Fırlanma zamanı xəttin hər bir nöqtəsinin fırlanma oxundan olan məsafəsi sabit qalır. Doğuran üzərində hər hansı M_1 nöqtəsini götürək və bu nöqtədən $M_1O_1 \perp AB$ çəkək. Aydındır ki, fırlanma zamanı M_1O_1 parçasının uzunluğu, AO_1M_1 bucağının qiyməti və O_1 nöqtəsi dəyişmir. Odur ki, fırlanma səthinin oxa perpendikulyar müstəvi ilə kəsiyi mərkəzi fırlanma oxu üzərində olan *çevrə* verir.

Fırlanma oxundan keçən hər bir müstəviyə *meridional müstəvi* və bunun fırlanma səthi ilə kəsişmə xəttinə *meridian* deyilir.

1. **Silindr.** Doğuranı fırlanma oxuna paralel düz xətt olan fırlanma səthinə *silindrik səth* (şəkil 419) deyilir (əslində, silindrik səth - hər hansı düz xəttin (*doğuran*), tərpənməz bir düz xəttə paralel qalmaq şərtilə hərəkəti zamanı cızdığı səth kimi tərif edilir. Biz isə fırlanmadan alınan silindrik səthlə kifayətlənəcəyik. Hərəkət zamnı doğudanın hər bir nöqtəsinin cızdığı əyri *silindrin isiqamətləndiricisi* adlanır).



Şəkil 418



Şəkil 419

Tərif. Silindrik səth və iki paralel müstəvi ilə hüdudlanan cismə *silindr* deyilir (şəkil 419). Silindrik səthin iki paralel müstəvi arasında qalan hissəsinə *silindrin yan səthi*, bu səthin kəsdiyi müstəvi hissələrinə isə onun *oturacaqları* deyilir (şəkil 419). Oturacaq müstəviləri arasındakı məsafəyə *silindrin hündürlüyü* deyilir. Silindrin doğuranının oturacaqlara perpendikulyar və ya mail olmasından asılı olaraq, ona *düz* və ya *mail silindr* deyilir. Düz silindrin oturacaqları dairə olduğundan ona *düz dairəvi silindr* deyilir. Doğuranı oturacağının diametrinə bərabər olan düz dairəvi silindrə *düzgün silindr* deyilir.

Biz yalnız dairəvi və düzgün silindrləri öyrənəcəyik. Odur ki, qısa olmaq üçün onları, sadəcə silindr olaraq adlandıracağıq.

Silindrin oturacaqlarına paralel müstəvi ilə kəsiyi dairə, doğuranından keçən müstəvi ilə kəsiyi isə düzbucaqlıdır. Silindrin, oxundan keçən müstəvi ilə kəsiyinə onun *ox kəsiyi* deyilir.

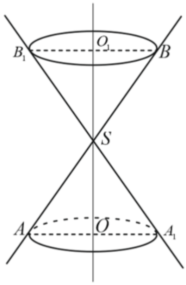
2. **Konus.** Biz, doğuran düz xəttin ona paralel olmaqla fırlanmasından alınan səthə baxdıq. İndi doğuran düz xəttin fırlanma oxu ilə kəsişdiyi halda alınan səthə baxaq.

Tutaq ki, AB doğuran, OO_1 fırlanma oxu, S isə onların kəsişmə nöqtəsidir (şəkil 420).

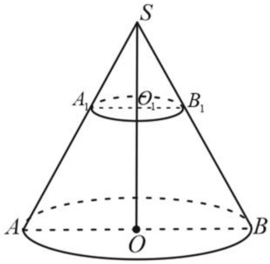
Tərif. Doğuranı fırlanma oxunu kəsən düz xətt olan fırlanma səthinə *konik səth* deyilir.

Doğuranla fırlanma oxunun kəsişmə nöqtəsi *S konik səthin təpəsi* adlanır.

Tərif. Təpədən bir tərəfdə olan konik səth və bütün doğuranları həmin tərəfdə kəsən müstəvi ilə hüdudlanan cismə *konus* deyilir. Konik səthin təpəsi ilə bütün doğuranları kəsən müstəvi arasında qalan hissəsinə *konusun yan səthi*, bu səthin kəsdiyi müstəvi hissəsinə isə *konusun oturacağı* deyilir. Kəsən müstəvi oxa perpendikulyar olduqda oturacaq dairə olur. Konusun təpəsindən oturacaq müstəvisinə endirilmiş perpendikulyara onun *hündürlüyü* deyilir. Oturacağı dairə olub, hündürlüyü bu dairənin mərkəzindən keçən konus *düz dairəvi konus* adlanır (şəkil 421). Biz ancaq düz dairəvi konusları öyrənəcəyik.



Şəkil 420



Şəkil 421

Konusun oturacağına paralel müstəvi ilə kəsiyi dairədir. Konusun oxundan keçən müstəvi ilə kəsiyi dairədir. Konusun oxundan keçən müstəvi ilə kəsiyinə konusun *ox kəsiyi* deyilir. Aydındır ki, konusun ox kəsiyi bərabəryanlı üçbucaqdır. Ox kəsiyi düzgün üçbucaq olan konusa *düzgün konus* deyilir.

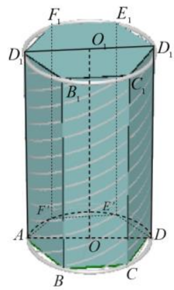
Tam konusun oturacağı ilə buna paralel keçirilmiş kəsən müstəvi arasında qalan hissəsinə *kəsik konus* deyilir.

Paralel müstəvilər konusu kəsdikdə alınan dairələrə kəsik konusun *oturacaqları* deyilir. Aydındır ki, kəsik konusun ox kəsiyi bərabəryanlı trapesiyadır.

§ 133. SİLİNDR. KONUS VƏ KƏSİK KONUSUN SƏTHİ

1. Silindrin səthinin sahəsi. Çevrə uzunluğunun hesablanması onun daxilinə çəkilmiş düzgün çoxbucaqlı ilə bağlı olduğu kimi, silindrin səthinin sahəsinin hesablanması da bu silindr daxilinə çəkilmiş düzgün prizma ilə bağlıdır. Silindr daxilinə çəkilmiş prizma dedikdə oturacaqları silindrin oturacaq çevrələri daxilinə çəkilmiş bərabər çoxbucaqlılar olan düz prizma başa düşülür (şəkil 422). Aydındır ki, daxilə çəkilmiş prizmanın hündürlüyü, silindrin H hündürlüyünə bərabərdir.

Tərif. Silindr daxilinə çəkilmiş düzgün prizmanın yan üzlərinin sayını qeyri-məhdud olaraq iki qat artırdıqda onun yan səthinin yaxınlaşdığı limitə silindrin *yan səthinin sahəsi* deyilir:



Şəkil 422

$$S_y = \lim_{n\to\infty}(p_n \cdot H),$$

p_n-silindrin oturacaq çevrəsi daxilinə çəkilmiş düzgün n bucaqlının perimetridir. $\lim_{n\to\infty} p_n = c = 2\pi R$ olduğunu nəzərə alsaq:

$$S_y = 2\pi RH$$

düsturunu alırıq.

Deməli, *silindrin yan səthi oturacaq çevrəsinin uzunluğu ilə hündürlüyü hasilinə bərabərdir.*

Silindrin *tam səthi* dedikdə, onun yan səthi ilə oturacaqlarının sahələri cəmi başa düşülür. Odur ki,

$$S_T = S_y + 2S_0.$$

Burada $S_0 = \pi R^2$ olduğunu nəzərə alsaq,

$$S_T = 2\pi RH + 2\pi R^2,$$

nəticədə isə

$$S_T = 2\pi R(R + H)$$

alırıq.

Məsələ. Düzgün silindrin yan səthinin 80 sm^2 olduğunu bilərək, onun tam səthini tapın.

○ Düzgün silindrin ox kəsiyinin kvadrat olduğunu nəzərə alsaq, $H = 2R$ yaza bilərik. Odur ki, yan səthin düsturuna əsasən:

$$S_y = 2\pi RH \text{ və ya } \pi H^2 = 80,$$

buradan da

$$H = 4\sqrt{\frac{5}{\pi}}, \left(R = 2\sqrt{\frac{5}{\pi}}\right)$$

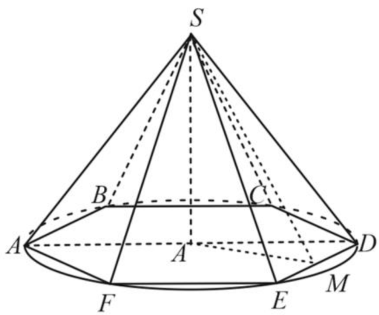
alırıq.

Tam səthin düsturuna əsasən,

$$S_T = 2\pi RH + 2\pi R^2 = 2\pi \cdot 2\sqrt{\frac{5}{\pi}}\left(4\sqrt{\frac{5}{\pi}} + 2\sqrt{\frac{5}{\pi}}\right)$$ və ya

$S_T = 120\ m^2$ alınır. ●

2. Konusun səthinin sahəsi. Konusun səthinin sahəsinin hesablanması da onun daxilinə çəkilmiş düzgün piramidanın səthi ilə bağlıdır. Konusun daxilinə çəkilmiş piramida dedikdə oturacağı konusun oturacaq çevrəsi daxilinə çəkilmiş çoxbucaqlı, təpə nöqtəsi isə onun təpə nöqtəsi ilə eyni olan piramida başa düşülür (şəkil 423).



Şəkil 423

Tərif. Konus daxilinə çəkilmiş düzgün piramidanın yan üzlərinin sayını qeyri-məhdud olaraq ikiqat artırdıqda onun yan səthinin yaxınlaşdığı limitə konusun *yan səthi* deyilir:

$$S = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}p_n L_n\right),$$

burada p_n-oturacaq çevrəsi daxilinə çəkilmiş düzgün n bucaqlının perimetri, L_n isə daxilə çəkilmiş düzgün n bucaqlı piramidanın apofemidir. $\lim_{n\to\infty} p_n = 2\pi R$ olduğu məlumdur. İndi $\lim_{n\to\infty} L_n = L$ olduğunu göstərək (L-konusun doğuranıdır).

ΔSDM -də $SD - SM < DM$ və $DM = a_n{:}2$ (a_n-daxilə çəkilmiş düzgün *n* bucaqlı piramidanın oturacağının tərəfidir) olduğundan,

$$0 < L - L_n < \frac{a_n}{2}$$

olar. Buradan $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ olmasına əsasən $\lim\limits_{n\to\infty}(L - L_n) = 0$, yəni $\lim\limits_{n\to\infty} L_n = L$ alınır. Beləliklə, $a_n/2 \to 0$ olduğundan:

$$S_y = \frac{1}{2}\lim_{n\to\infty} p_n \cdot \lim_{n\to\infty} L_n = \frac{1}{2} \cdot 2\pi R \cdot L \Rightarrow S_y = \pi R L,$$

olur. Deməli, *konusun yan səthi oturacaq çevrəsinin uzunluğu ilə doğuranı hasilinin yarısına bərabərdir.*

Konusun tam səthi onun yan səthi ilə oturacağının sahəsi cəminə bərabər olduğundan,

$$S_T = S_y + S_0 \Rightarrow S_T = \pi R L + \pi R^2,$$ yəni

$S_T = \pi R(L + R)$

alırıq.

Məsələ. Doğuranı 17 *sm*, yan səthi 136 π sm^2 olan konusun hündürlüyünü tapın.

○ Tutaq ki, verilmiş konus şəkildəki kimidir (şəkil 424):

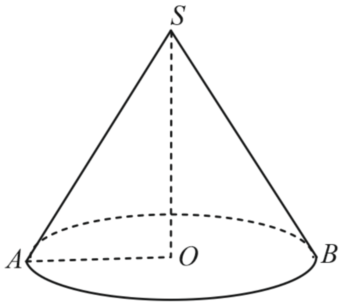
$$SA = 17\ sm,\ S_y = 136\pi sm^2,\ SO = ?$$

Yan səthin düsturunu nəzərəalsaq,

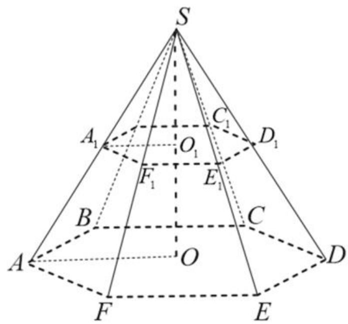
$$S_y = \pi R L \Rightarrow \pi R \cdot 17 = 136\pi \Rightarrow R = 8sm.$$

ΔSAO -dan:

$$SO = \sqrt{AS^2 - AO^2} = \sqrt{289 - 64} = 15 \Rightarrow SO = 15sm.$$ ●



Şəkil 424



Şəkil 425

3. Kəsik konusun səthinin sahəsi. Kəsik konusun oturacaqlarının radiusları *R* və *r*, doğuranı isə *L* olsun. Onu *SAB* tam konusuna tamamlayıb, $SA_1 = l$ qəbul edək (şəkil 425). Onda kəsik konusun yan səthi *SAB* və SA_1B_1, tam konuslarının yan səthləri fərqinə bərabər olacaq:

$$S_y = \pi R(L + l) - \pi r l.$$

İndi *l*-i verilmiş kəsik konusun xətti elementləri ilə ifadə edib, son bərabərlikdə yerinəə yazaq. Bunun üçün $\Delta SAB \backsim \Delta SA_1B_1$ olduğundan,

$$\frac{SA}{SA_1} = \frac{OA}{O_1A_1}$$

yazıb, $SA = l + L, SA_1 = l, OA = R, C_1A_1 = r$ olduğunu nəzərə alsaq,

$$\frac{L + l}{l} = \frac{R}{r} \Rightarrow l = \frac{rL}{R - r}$$

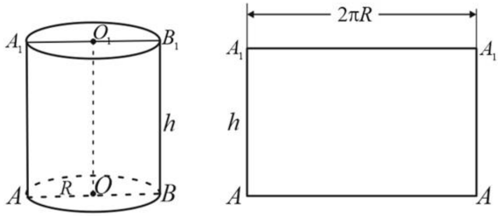
olur və kəsik konusun yan səthi üçün

$$S_y = \pi(R + r)L$$

düsturu alınır.

Kəsik konusun tam səthi, onun yan səthi ilə oturacaqlarının sahələri cəminə bərabər olduğundan,

$S_T = S_y + \pi R^2 + \pi r^2 \Rightarrow S_T = \pi(R$



Şəkil 426

$S_T = \pi(R + r) \cdot L + \pi(R^2 +$

$S_T = \pi((R + r)L + R^2 + r^2)$

olur.

Məsələ. Ox kəsiyinin sahəsi 24 sm^2, doğuranı 5 *sm* və hündürlüyü 4 *sm* olan kəsik konusun tam səthinin sahəsini tapın.

○ AA_1B_1B kəsik konusunda (şəkil 426), $S_{ABB_1A_1} = 24$ sm^2, $AA_1 = 5sm$, $OO_1 = 4$ *sm*-dir, S_T-yi tapmaq tələb olunur. ΔAA_1K -dan: $AK = 3sm$ və

$$AB = A_1B_1 + 6$$

olduğunu nəzərə alıb, trapesiyanın sahə düsturuna əsasən,

$$S_{ABA_1B_1} = \frac{AB + A_1B_1}{2} \cdot OO_1 \Rightarrow 24 = \frac{2A_1B_1 + 6}{2} \cdot 4 \Rightarrow 6 = A_1B_1 + 3 \Rightarrow A_1B_1 = 3sm$$

tapırıq. Onda, $AB = 9sm, r = 1{,}5sm, R = 4{,}5sm$ olur və tam səth üçün

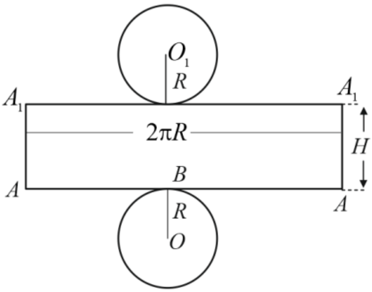
$S_T = \pi \cdot 5(4{,}5 + 1{,}5) + \pi \cdot (4{,}5^2 + 1{,}5^2) \Rightarrow S_T = 52{,}5\pi sm^2$ alırıq, ●

§ 139. SİLİNDR, KONUS VƏ KƏSİK KONUSUN AÇILIŞI

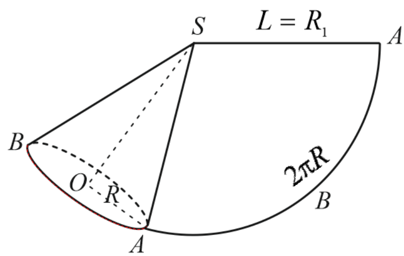
1. Silindrin açılışı. Bildiyimiz kimi silindrin yan səthi müstəvi səth deyil. Lakin onu “düzəltmə” (açma) yolu ilə müstəvi səthə çevirmək olar (yəni, müstəvi üzərinə qoyub açmaq olar). Əgər silindrin yan səthini doğuranı boyunca kəsib açsaq, oturacağının uzunluğu silindrin oturacaq çevrəsinin uzunluğuna, hündürlüyü isə onun hündürlüyünə bərabər olan düzbucaqlı alarıq

Yan səthinin açılışından alınan düzbucaqlının sahəsi $S = 2\pi RH$ olur ki, bunun da silindrin yan səthi olduğunu bilirik. Aydındır ki, silindrin tam səthinin açılışı düzbucaqlıdan və silindrin oturacaqları olan iki dairədən ibarətdir (şəkil 428).

2. Konusun açılışı. Konusun yan səthini onun doğuranı boyunca kəsib, açsaq, radiusu konusun doğuranına, qövsünün uzunluğu isə konusun oturacaq çevrəsinin uzunluğuna bərabər olan dairə sektoru alırıq (şəkil 429).



Şəkil 428



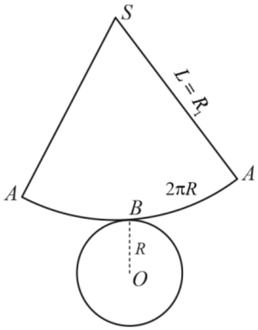
Şəkil 429

Konusun yan səthinin açılışından alınan sektorun sahəsi $S = \pi L^2\alpha : 360$ konusun yan səthi olacaqdır. Doğrudan da, *ABA* qövsünün uzunluğu $\pi L\alpha : 180$ olduğundan:

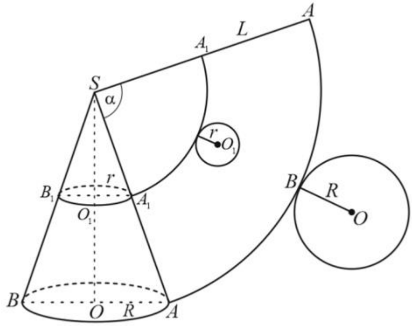
$$S = \frac{\pi L^2 \alpha}{360} = \frac{\pi L\alpha}{180} \cdot \frac{L}{2} = 2\pi R \cdot \frac{L}{2} = \pi RL.$$

Bu isə konusun yan səthidir. Aydındır ki, konusun tam səthinni açılışı dairə sektorundan və konusun oturacağı olan dairədən ibarətdir (şəkil 430).

3.Kəsik konusun açılışı. Kəsik konusun yan səthini onun doğuranı boyunca kəsib açsaq, uzunluqları $2\pi r$və $2\pi R$ olan (*r* və *R* konusun oturacaqlarının radiuslarıdır) qövslərin əmələ gətirdiyi AA_1A_1A halqa zolağını alırıq (şəkil 431). Aydındır ki, kəsik konusun tam səthinin açılışı AA_1A_1A halqa zolağı ilə alt və üst oturacaq dairələrindən ibarətdir (şəkil 431).



Şəkil 430.



Şəkil 431.

§ 140. SFERA VƏ KÜRƏ

Tutaq ki, O fəzanın hər hansı nöqtəsi, R isə hər hansı müsbət ədəddir.

Tərif. Fəzanın verilmiş O nöqtəsindən məsafəsi R -dən böyük olmayan bütün nöqtələrdən ibarət olan cismə *kürə* deyilir.

Burada Onöqtəsi kürənin *mərkəzi*, R isə *radiusu* adlanır.

Kürənin sərhəddinə *kürənin səthi* və ya *sfera* deyilir. Deyilənlərdən çıxır ki, sfera fəzada verilmiş O nöqtəsindən eyni uzaqlıqda yerləşən nöqtələr çoxluğudur. Kürə və sferaya belə də tərif vermək olar.

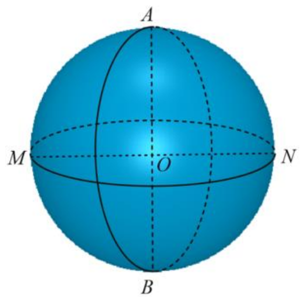
Tərif. Yarımdairənin diametri ətrafında fırlanmasından alınan cismə *kürə*, yarımçevrənin diametri ətrafında fırlanmasından alınan səthə isə *sfera* deyilir (şəkil 432).

Məlumdur ki, kürənin mərkəzini, onun səthinin hər hansı nöqtəsi ilə birləşdirən düz xətt parçasına onun *radiusu* deyilir.

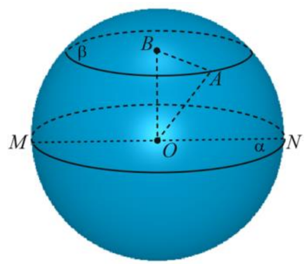
Kürənin mərkəzindən keçərək, səthinin ixtiyari iki nöqtəsini birləşdirən düz xətt parçasına onun *diametri* deyilir. Kürənin bütün diametrləri bərabər olub, radiusunun iki mislinə bərabərdir.

Teorem. *Sfera ilə müstəvinin kəsiyi çevrə, kürə ilə müstəvinin kəsiyi isə dairədir.*

□ Əvvəlcə tutaq ki, α kəsən müstəvisi kürənin O mərkəzindən keçir (şəkil 433). Kəsişmə xəttinin bütün nöqtələr sferanın üzərində olduğundan, həmin nöqtələr kəsən müstəvidə olan O nöqtəsindən eyni uzaqlıqda olacaq. Deməli, sfera üçün kəsik, mərkəzi O nöqtəsində olan çevrə, kürə üçün isə dairədir.



Şəkil 432.



Şəkil 433.

İndi tutaq ki, kəsən β müstəvisi mərkəzdən keçmir (şəkil 433). Kürənin mərkəzindən bu müstəviyə OBperpendikulyarını endirək və kəsişmə xətti üzərində bir *A* nöqtəsi götürək. *A* nöqtəsini O və *B* nöqtələri ilə birləşdirib, ABO düzbucaqlı üçbucağını alırıq. Bu üçbucaqdan,:

$$AB = \sqrt{OA^2 - OB^2}.$$

yaza bilərik. Kəsişmə xətti üzərində A nöqtəsinin vəziyyəti dəyişdikdə OAvə OB parçalarının uzunluğu dəyişmədiyinə görə alınan kəsik üçün AB məsafəsi sabit kəmiyyətdir. Deməli, kəsik, mərkəzi B nöqtəsində olan, Omərkəzli sfera üzərində çevrə, kürə üçünsə dairədir. ■

Tutaq ki, $OA = R$, $OB = d$ və $AB = r$ -dir. Onda,

$$r = \sqrt{R^2 - d^2}$$

yaza bilərik.

Bu bərabərlikdən, aşağıdakı nəticələr çıxır:

1. $d = 0$*olduqda, yəni kəsən müstəvi kürənin (sferanın) mərkəzindən keçəndə ən böyük radiuslu kəsik alınır.* Bu halda $r = R$ olur və alınan dairəyə (çevrəyə) *böyük dairə (çevrə)* deyilir.

2. $d = R$ *olduqda, ən kiçik radiuslu kəsik alınır(*$r = 0$*).* Bu halda kəsikdə alınan dairə (çevrə) *nöqtəyə* çevrilir.

3. *Kürənin (sferanın) mərkəzindən eyni uzaqlıqda olan kəsiklər-dairələr (çevrələr) bərabərdir.*

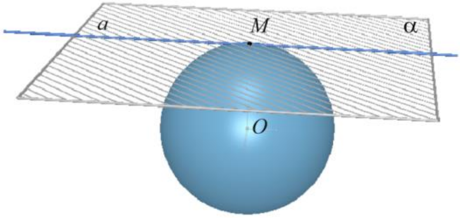
4. *Kürənin (sferanın) mərkəzindən müxtəlif uzaqlıqda olan iki kəsikdən, mərkəzə yaxın olanın radiusu böyükdür.*

§ 141. SFERAYA TOXUNAN MÜSTƏVİ

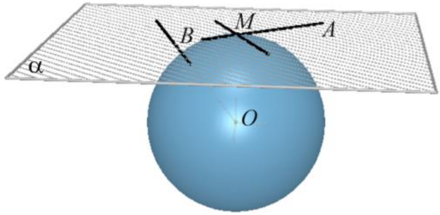
Tərif. Sfera ilə yalnız bir ortaq nöqtəsi olan müstəviyə *toxunan müstəvi,* ortaq nöqtəyə isə *toxunma nöqtəsi* deyilir (şəkil 434).

Teorem 1. *Müstəvinin sferaya toxunan olması üçün, bu müstəvinin sferanın radiusuna perpendikulyar olub və onun sfera üzərindəki ucundan keçməsi zəruri və kafidir.*

□ **Kafilik.** Tutaq ki, α müstəvisi sferanın *OM* radisuna perpendikulyar olub, *M* nöqtəsindən keçir (şəkil 435). Şərtə görə $OM \perp \alpha$ olduğundan, α müstəvisinin



Şəkil 434



Şəkil 435

M-dən fərqli istənilən nöqtəsinin kürənin mərkəzindən olan məsafəsi OM -dən böyük olacağı aydındır. Deməli α müstəvisinin kürə ilə yalnız bir ortaq nöqtəsi var, yəni ona toxunur.

Zərurilik. Tutaq ki, sfera α müstəvisinə *M* nöqtəsində toxunur (şəkil 435). İsbat edək ki, $OM \perp \alpha$. Fərz edək ki, OM parçası α müstəvisinə maildir. Onda *O* nöqtəsindən α müstəvisinə qədər olan məsafə OM -dən, yəni sfera radiusundan kiçik olmalıdır. Deməli, α müstəvisi sferanı kəsir. Bu isə şərtə ziddir, yəni fərziyyəmiz doğru deyildir, onda $OM \perp \alpha$. ■

Sfera ilə yeganə ortaq nöqtəsi olan düz xəttə, *sferaya toxunan düz xətt* deyilir.

Teorem 2. *Sferanın istənilən nöqtəsindən sonsuz sayda toxunan düz xətt keçir və bu düz xətlər toxunan müstəvi üzərindədir.*

□α müstəvisi sferaya *M* nöqtəsində toxunan müstəvi olsun (şəkil 435). Onda bu müstəvinin *M* nöqtəsindən keçən hər bir düz xətt sferaya toxunan olub *OM* radiusuna perpendikulyar olacaq, yəni sferaya toxunan düz xətlərdir. ■

§ 142. SİLİNDR, KONUS VƏ KƏSİK KONUSUN HƏCMİ

1. Silindrin həcmi. Silindrin səthinin sahəsinin hesablanması onun daxilinə çəkilmiş düzgün çoxbucaqlı prizma ilə bağlı olduğu kimi, onun həcminin hesablanması da bu silindrin daxilinə çəkilmiş düzgün prizma ilə bağlıdır. Aydındır ki, daxilə çəkilmiş prizmanın hündürlüyü, silindrin H hündürlüyünə bərabərdir. Silindrin oturacağının radiusunu R qəbul edək.

Tərif. Silindrin daxilinə çəkilmiş düzgün prizmanın yan üzlərinin sayını qeyri-məhdud olaraq ikiqat artırdıqda onun həcminin yaxınlaşdığı limitə *silindrin həcmi* deyilir:

$$V_s = \lim_{n\to\infty}(S_n \cdot H),$$

S_n-silindrin oturacaq çevrəsinin daxilinə çəkilmiş düzgün n bucaqlının sahəsidir;

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \pi R^2$$

olduğunu nəzərə alsaq,

$$V_s = \pi R^2 H$$

düsturunu alırıq.

Deməli, *silindrin həcmi, oturacağın sahəsi ilə hündürlüyü hasilinə bərabərdir.*

2. Konusun həcmi. Konusun həcminin hesablanması da onun yan səthinin hesablanması kimidir.

Tərif. Konusun daxilinə çəkilmiş düzgün piramidanın yan üzlərinin sayını qeyri-məhdud olaraq ikiqat artırdıqda onun həcminin yaxınlaşdığı limitə *konusun həcmi* deyilir:

$$V_k = \frac{1}{3}\lim_{n\to\infty}(S_n \cdot H).$$

S_n-konusun oturacağı daxilinə çəkilmiş düzgün n bucaqlının sahəsidir. Burada

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \pi R^2$$

olduğunu nəzərə alsaq (R -konusun oturacağının radiusudur),

$$V_k = \frac{1}{3}\pi R^2 H$$

düsturunu alırıq.

Deməli, *konusun həcmi, oturacağın sahəsi ilə hündürlüyü hasilinin üçdə birinə bərabərdir.*

3. Kəsik konusun həcmi. Kəsik konusun oturacaqlarının radiusları r və R, hündürlüyü isə HH olsun. Kəsik konusun daxilinə çəkilmiş düzgün kəsik piramidanın yan üzlərinin sayını qeyri-məhdud olaraq ikiqat artırdıqda, onun həcminin yaxınlaşdığı limitə, *kəsik konusun həcmi* deyilir:

$$V_{kk} = \frac{1}{3}\lim_{n\to\infty}(s_n + \sqrt{s_n + S_n} + S_n)H,$$

s_n və S_n -kəsikkonusun oturacaqları daxilinə çəkilmiş düzgün *n* bucaqlıların sahələridir.

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \pi r^2, \lim_{n\to\infty} S_n = \pi R^2$$

olduğunu nəzərə alsaq

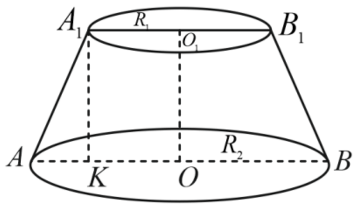
$$V_{kk} = \frac{1}{3}\pi H(r^2 + rR + R^2)$$

düsturunu alırıq.

Deməli, kəsik konusun həcmi elə üç konusun həcmləri cəminə bərabərdir ki, bu konusların hündürlüyü kəsik konusun hündürlüyünün eynidir, birincinin oturacağı, verilən kəsik konusun üstt oturacağıdır, ikincininki sahəsi üst və alt oturacaqların sahələri arasında orta həndəsi kəmiyyət olan dairədir, üçüncününkü isə.kəsik konusun alt oturacağıdır,

Məsələ. Kəsik konusun doğuranı 12 *sm*, hündürlüyü 6 *sm* və yan səthinin sahəsi $72\pi\sqrt{3}$ sm^2-dir. Kəsik konusun həcmini tapın.

○AA_1B_1B kəsik konusunda (şəkil 436) $AA_1 = 12$ *sm*, $H = A_1K = 6$ *sm*, $S_j = 72\pi\sqrt{3}$ *sm*^{2}. V_{kk}-nı tapmaq tələb olunur, ΔAA_1K −dan $AK = \sqrt{AA^2{}_1 - A_1K^2} = 6\sqrt{3}$ *sm*. $S_y = \pi H(r+R)$ və $R = r + 6\sqrt{3}$ olduğundan $6\pi(2r + 6\sqrt{3}) = 72\pi\sqrt{3}$, $r = 3\sqrt{3}$ *sm*, $R = 9\sqrt{3}$ *sm* alırıq.



Şəkil 436.

Həcm düsturuna əsasən:

$V_{kk} = \frac{1}{3}\pi \cdot 6(243 + 81 + 27) \Rightarrow V_{kk} = 702\pi sm^3$. ●

§ 143. KÜRƏ VƏ ONUN HİSSƏLƏRİNİN HƏCMİ

Teorem. *Radiusu R olan kürənin həcmi*

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3$$

düsturu ilə hesablanır.

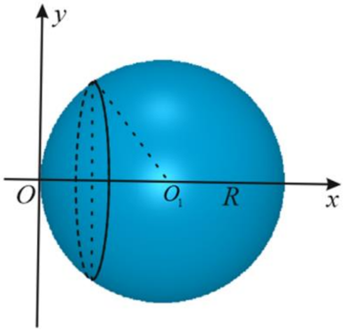
□ Mərkəzi O_1 nöqtəsində, radiusu R olan və xOy müstəvisi üzərində yerləşən $y = \sqrt{R^2 - (x-R)^2}$ yarımçevrəsi verilmiş olsun (şəkil 437). Aydındır ki, bu yarımçevrənin absislər oxu ətrafında fırlanmasından R radiuslu sfera alınır və bu sfera ilə məhdudlanan R radiuslu kürənin həcmi

$$V = \pi \int_0^{2R} y^2\, dx$$

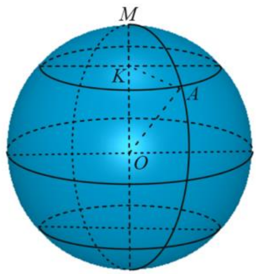
düsturu ilə hesablanır (bax § 33**)**. Burada, $y^2 = 2Rx - x^2$ olmasını nəzərə alaq:

$$V = \pi \int_0^{2\pi} (2Rx - x^2)dx \Rightarrow V = \frac{4}{3}\pi R^3. \blacksquare$$

Tərif 1. Kürənin hər hansı bir müstəvi ilə kəsilməsindən ayrılan hissəsinə *kürə seqmenti* deyilir (şəkil 438).



Şəkil 437



Şəkil 438

Kəsikdə alınan dairəyə *seqmentin oturacağı,* kəsən müstəviyə perpendikulyar olan radiusun *KM* parçasına isə *seqmentin hündürlüyü* deyilir.

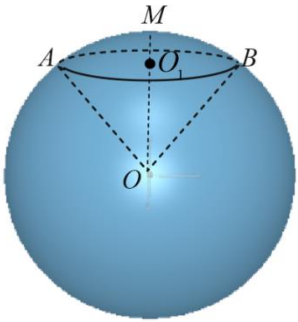
Tərif 2. Kürənin, onu kəsən iki paralel müstəvi arasında qalan hissəsinə *kürə zolağı* deyilir (şəkil 439).

Kəsikdə alınan dairələr *kürə zolağının oturacaqları*, onlar arasındakı məsafə isə *hündürlük* adlanır.

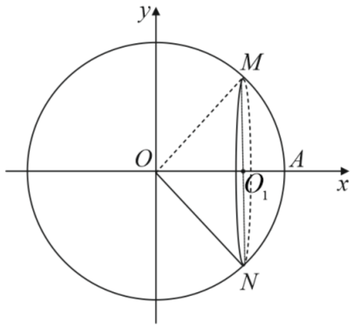
Tərif 3. Təpə nöqtəsi kürənin mərkəzində yerləşən konusun kürədən ayırdığı hissəyə *kürə sektoru* deyilir (şəkil 439). Kürə sektoru, oturacaqları üst-üstə düşən konus və kürə seqmentindən ibarətdir.

İndi radiusu R olan kürə seqmentin hündürlüyünü H qəbul edib onun həcmini hesablayaq.

Tutaq ki, verilən kürənin mərkəzi koordinat başlanğıcındadır (şəkil 440): $OA=R$, $O_1A=H$, $OO_1=R-H$. Həcm düsturuna əsasən, *MNA* seqmentinin həcmi üçün



Şəkil 439



Şəkil 440

$$V_{seq} = \pi \int_{R-H}^{R} y^2 dx = \pi \int (R^2 - x^2)\, dx \Rightarrow V_{seq.} = \pi H^2 \left(R - \frac{1}{3} H\right)$$

alınır (bax § 33**).**

Hündürlüyü H olan kürə sektorun həcmi üçün

$$V_{sek.} = \frac{2}{3} \pi R^2 H$$

düsturu doğrudur. Bu düsturun çıxarılmasını oxuculara həvalə edirik.

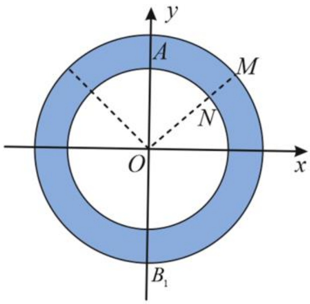
§ 144. SFERA VƏ ONUN HİSSƏLƏRİNİN SƏTHİ

Tutaq ki, mərkəzi koordinat başlanğıcında və radiusu R olan sfera verilib (şəkil 441). R radiusuna ΔR artımı versək, onda sferanı məhdudlandırdığı kürənin həcmi ΔV artımını alar. Aydındır ki, bu artım $R + \Delta R$ və R radiuslu kürələrin həcmlərinin fərqidir:

$$\Delta V = \frac{4}{3}\pi (R + \Delta R)^3 - \frac{4}{3}\pi R^3 \Rightarrow \Delta V = \frac{4}{3}\pi \cdot \Delta R (3R^2 + 3R \cdot \Delta R + (\Delta R)^2).$$

Sferanın səthinin sahəsi, radiusun artımı sıfra yaxınlaşdıqda kürənin həcm artımının radiusun artımına nisbətinin limiti qəbul olunur:

$$S = \lim_{\Delta R \to 0} \frac{\Delta V}{\Delta R},$$



burada ΔV -nin ifadəsini nəzərə alsaq:

$$S = \lim_{\Delta R \to 0} \frac{4}{3}\pi \cdot \frac{(3R^2 + 3R \cdot \Delta R + (\Delta R)^2) \cdot \Delta R}{\Delta R} = 4\pi$$

alınır. Beləliklə, aşağıdakı teorem doğrudur.

Teorem. *Radiusu R olan sferanın səthinin sahəsi üçün*

$$S = 4\pi R^2$$

Şəkil 441

düsturu doğrudur, yəni sferanın səthinin sahəsi böyük dairə sahəsinin dörd mislinə bərabərdir.

Seqmentinin səthinin sahəsi, onun hündürlüyü ilə böyük dairə çevrəsinin uzunluğu hasilinə bərabərdir:

$$S_{seq.} = 2\pi RH.$$

ÇALIŞMALAR

1. Konusun hündürlüyü 4 *sm*, oturacağının radiusu 3 *sm*-dir. Konusun tam səthinin sahəsini tapın.

2. Konusun hündürlüyü 10 *sm*, oturacağının radiusu 15 *sm*-dir. Konus hündürlüyə paralel müstəvi ilə kəsilib. Kəsiyin hündürlüyünün 8 *sm* olduğunu bilərək, sahəsini tapın.

3. Kəsik konusun oturacaqlarının radiusları 3 *sm* və 7 *sm*, doğuranı isə 5 *sm*-dir. Kəsik konusun tam səthinin sahəsini tapın.

4. Silindrin hünbdürlüyü 6 *dm*, oturacağının radiusu 5 *dm*-dir. Uzunluğu 10 *dm* olan parçanın ucları hər iki oturacağın çevrələri üzərindədir. Bu parçadan silindrin oxuna qədər olan məsafəni tapın.

5. Hündürlüyü oturacağının radiusuna bərabər olan silindrin daxilinə düzgün altıbucaqlı prizma çəkilib. Prizmanın yan üzünün diaqonalı ilə silindrin oxu arasında qalan bucağı tapın.

6. Ox kəsiyinin sahəsi 12 sm^2, oxuna perpendikulyar kəsiyin sahəsi isə 8 sm^2 olan silindrin həcmini tapın.

7. Konusun yan səthinin açılışının təpə bucağı 90^0-dir. Onun oturacağının radiusunun 3 *sm* olduğunu bilərək həcmini tapın.

8. Bərabəryanlı trapesiyanın oturacaqları 2 *sm* və 3 *sm*-dir. Onun iti bucağının 60^0 olduğunu bilərək kiçik oturacağı ətrafında fırlanmasından əmələ gələn fiqurun həcmini tapın.

9. Radiusu 40 *m* olan kürə, mərkəzindən 19 *m* məsafədə müstəvi ilə kəsilib. Kürənin hissələrinin həcmlərini tapın.

10. Düzgün dördbucaqlı kəsik piramidanın daxilinə kürə çəkilib. Piramidanın oturacaqlarının 3:4 nisbətində olduğunu bilərək, onun həcminin kürənin həcminə olan nisbətini tapın.

TESTLƏR

1. Silindrin ox kəsiyinin sahəsi $\frac{12}{\pi}$ sm^2-dır. Onun yan səthinin sahəsini tapın.

A) 8 sm^2 B) 9 sm^2 C) 10 sm^2 D) 20 sm^2 E) 12 sm^2

2. Silindrin hündürlüyü və oturacağın diametri 2 dəfə azalarsa, onun həcmi neçə dəfə azalar?

A) 4 B) 8 C) 6 D) 9 E) 10

3. Konusun yan səthinin və oturacağının sahələri uyğun olaraq $20\pi sm^2$ və $16\pi sm^2$-dir. Konusun həcmini tapın.

A) 20 π *sm*^{3} B) 8 *sm*^{3} C) 16 π *sm*^{3} D) 10 π *sm*^{3} E) 8 π *sm*^{3}

4. Səthlərinin nisbəti 9:16 kimi olan kürələrin həcmləri nisbətini tapın.

A) 9:16 B) 16:9 C) 3:4 D) 27:64 E) 3:8

5. Oturacaqlarının radiusları 9 *sm* və 6 *sm* olan kəsik konusun doğuranı oturacaq müstəvisi ilə 45^0-lik bucaq əmələ gətirir. Bu kəsik konusun həcmini tapın.

A) 171 π *sm*^{3} B) 116 π *sm*^{2} C) 117 π *sm*^{3} D) 110 π *sm*^{3}

E) 152 π *sm* m^3

6. Həcmi 36 π *sm*^{3} olan kürənin səthinin sahəsini tapın.

A) 30 π *sm*^{2} B) 34 *sm*^{2} C) 18 π *sm*^{2} D) 9 π *sm*^{2}

E) 36 π *sm*^{2}

7. Konusun hündürlüyü 6 *sm*, oturacağının radiusu 8 *sm* -dir. Konusun tam səthini tapın.

A) 48 π *sm*^{2} B) 144 *sm*^{3} C) 120π *sm*^{2} D) 92 π *sm*^{2} E) 102 π *sm*^{2}

8. Katetləri 6 *sm* və 8 *sm* olan düzbucaqlı üçbucağın böyük kateti ətrafında fırlanmasından alınan fiqurun həcmini tapın.

A) 96 π *sm*^{3} B) 48 π *sm*^{3} C) 108 π *sm*^{3} D) 144 π *sm*^{3} E) 36 π *sm*^{3}

9. Otuacağının sahəsi 36 π *sm*^{2} olan konusun doğranı 10 *sm* -dir. Konusun həcmini hesablayın ($\pi = 3$)

10. Radiusu r olan $n$sayda kürə əridilərək, R radiuslu böyük kürə düzəldilir. Uyğunluğu müəyyən edin.

1. $r = 9; n = 8$	a. $R = 6$
2. $r = 1; n = 64$	b. $R = 18$
3. $r = 2; n = 27$	c. $R = 4$

d. $R = 5$

e. $R = 7$

MÜXTƏLİF MƏSƏLƏLƏR

1. Radiusları uyğun olaraq 1 *sm*, 2 *sm* və 3 *sm* olan çevrələr xaricindən bir-birinə toxunur. Bu çevrələrin toxunma nöqtələrindən keçən çevrənin radiusunu tapın.

2. Bərabərtərəfli *ABC* üçbucağının tərəfi *a*-dır. Bu üçbucağın *BC* tərəfi üzərində *D* nöqtəsi, *AB* tərəfi üzərində *E* nöqtəsi elə götürülmüşdür ki, $BD = \frac{1}{3}a,\ AE = DE$ -dir. *CE*-nin uzunluğunu tapın.

3. *ABC* üçbucağının tərəfləri məlumdur; *AB*=12 *sm*, *BC*=13 *sm*, *CA*=15 *sm*. *AC* tərəfi üzərində elə *M* nöqtəsi götürülmüşdür ki, *ABM* və *BCM* üçbucağının daxilinə çəkilmiş çevrələrin radiusları bərabərdir. *AM:MC* nisbətini tapın.

4. *ABC* üçbucağının iki bucağının fərqi məlumdur: $\angle A - \angle B = 60^\circ$. *C* təpə nöqtəsindən *AB* tərəfinə endirilmiş hündürlük *BC*-*AC* fərqinə bərabər olduqda bu üçbucağın bucaqlarını tapın.

5. *ABC* üçbucağının *A* və *B* təpə nöqtələrindən çəkilmiş hündürlüklər h_a və h_b, *C* təpə nöqtəsindən çəkilmiş tənbölən isə *l* -dir. *C*-bucağını tapın.

6. Paraleloqramın tərəfləri *a* və *b* ($a \neq b$)-dir. Kor bucaqların təpələrindən onun tərəflərinə perpendikulyar düz xətlər çəkilmiş və onların kəsişməsindən verilmiş paraleloqrama oxşar paraleloqram alınmışdır. Verilmiş paraleloqramın iti bucağının kosinusunu tapın.

7.Müxtəlif tərəfli üçbucağın A bucağının tənbölənin BC tərəfini D nöqtəsində kəsir. AB - BD=16, AC+CD=25 olduğunu bilərək, AD-nin uzunluğunu tapın.

8. $ABCD$ kvadratının daxilində M nöqtəsi götürülmüş və $\angle MAB$|=60^0, $\angle MCD = 15^\circ$ olmuşdur. MBC bucağını tapın.

9. ABC üçbucağında AB=AC və $\angle BAC = 80^0$. Bu üçbucağın daxilində M nöqtəsi götürülmüş və $\angle MBC = 30^0$ və $\angle MCB = 10^0$ olmuşdur. AMC bucağını tapın.

10. Radiusu R olan dairənin bir-birinə perpendikulyar olan iki kəsişən vətəri çəkilmişdir. Kəsişmə nöqtəsi ilə ayrılmış dörd vətər parçalarının kvadratları cəmini tapın.

11. Düzbucaqlı ABC üçbucağının C düz bucağının təpəsindən $CD=a$ tənböləni və $CM=b$ medianı çəkilmişdir. ABC üçbucağının sahəsini tapın.

12. Trapesiyanın diaqonalları 3 *sm* və 5 *sm*. Oturacaqlarının orta nöqtəsini birləşdirən düz xətt parçası isə 2 *sm*-dir. Trapesiyanın sahəsini tapın.

13. Radiusları R və r olan iki çevrə daxildən bir-birinə toxunur. Bir təpəsi çevrələrin toxunma nöqtəsində, digər iki təpəsi isə verilmiş çevrələr üzərində yerləşən düzgün bucağın tərəfini tapın.

14. ABC üçbucağının daxilinə çəkilmiş çevrə onun BM medianını üç bərabər hissəyə ayırır. Bu üçbucağın tərəflərinin $BC:CA:AB$ nisbətini tapın.

15. ABC üçbucağının xaricinə və daxilinə çəkilmiş çevrələrin radiusları R və r-dir. ABC üçbucağının daxili bucaqlarının tənbölənləri onun xaricinə çəkilmiş çevrə ilə A_1, B_1, C_1 nöqtələrində kəsişir. ABC və $A_1B_1C_1$ üçbucaqlarının sahələri nisbətini tapın.

16. *ABCD* trapesiyanın *AB* yan tərəfi *AD* və *BC*-yə perpendikulyardır və həm də $AB^2 = AD \cdot BC$. Trapesiyanın paralel olmayan tərəfləri *E* nöqtəsində, onun dioqanalları isə *O* nöqtəsində kəsişir. *M* nöqtəsi *AB* tərəfinin orta nöqtəsidirsə, *EOM*-bucağını tapın.

17. *ABC* üçbucağında $\angle ABC = 70^0$. Üçbucağın *AB* tərəfi üzərində *M*, *AC* tərəfi üzərində *N* nöqtəsi götürülmüş və $\angle MCB = 40^0$, $\angle NBC = 50^0$ olmuşdur. *NMC* bucağını tapın.

18. *ABCD* dördbucaqlısında $\angle DAB = 150^0$, $\angle DAC + \angle ABD = 120^0$, $\angle DBC - \angle ABD = 60^0$ olduqda $\angle BDC$ -ni tapın.

19. Vahid radiuslu çevrə daxilinə çəkilmiş düzgün n bucaqlının mərkəzindən düz xətt keçirilmişdir. *N*-bucaqlının təpə nöqtələrindən həmin düz xəttə qədər olan məsafələrin kvadratları cəmini tapın.

20. Dördbucaqlının xaricinə və daxilinə uyğun olariaq *R* və *r* radiuslu çevrə çəkilmişdir. Bu çevrələrin mərkəzləri arasındakı məsafə *d*-dir. Onda $2r^2(R^2 + d^2) = (R^2 - d^2)^2$ olduğunu göstərin.

21. *ABC* üçbucağında *B* və *C* bucaqlarının nisbəti 1:3 kimidir. *A* bucağının tənböləni üçbucağın sahəsinin 2:1 nisbətində bölür. Üçbucağın bucaqlarını tapın.

22. *ABC* üçbucağının sahəsi $S = a^2 - (b - c)^2$-ı münasibəti ilə təyin olunur. Üçbucağın *A* bucağını tapın.

23. Çevrə daxilinə çəkilmiş kvadrat və düzgün üçbucağın bir təpəsi ortaqdır. Çevrənin radiusu çəkilmiş kvadrat və düzgün üçbucağın bir təpəsi ortaqdır. Çevrənin radiusu *R*=1 olarsa, kvadrat və üçbucağın ortaq hissəsinin sahəsini tapın.

24. *O* nöqtəsi *ABCD* trapesiyanın dioqanallarının kəsişmə nöqtəsidir və *BC:AD=p*-dir. *ABCD* trapesinin sahəsinin *AOD* üçbucağının sahəsinə olan nisbətini tapın.

25. *ABCD* dördbucaqlısının *AC* və *BD* diaqonallarının orta nöqtələrindən keçən düz xətt onun *AB* və *CD* tərəflərini *M* və *N* nöqtələrində kəsir. $S_{\Delta DCM} = S_{\Delta ANB}$ olduğunu isbat edin.

26. *ABCD* paraleloqramının *A, B, C* və *D* təpə nöqtələri *CD*, *BD*, *AB* və *BC* tərəflərinin orta nöqtələri ilə birləşdirilmişdir. Bu zaman alınan dördbucaqlının sahəsinin verilmiş paraleloqramın sahəsindən 5 dəfə kiçik olduğunu isbat edin.

27. Tutaq ki, *a*, *b*, *c*, *d* ardıcıl olaraq dördbucaqlının tərəfləridir. Bu dördbucaqlının diaqonalları m və n, iki qarşı bucağı *A* və *C*-dir. Onda

$$m^2n^2 = a^2c^2 + b^2d^2 - 2abcd\cos(A+C)$$

münasibəti ödənilir. Bunu isbat edin.

28. Tutaq ki, *a*, *b*, *c*, *d*-ardıcıl olaraq daxilə çəkilmiş dördbucaqlının tərəfləridir. Bu dördbucaqlının dioqanallarının *m* və *n* olduğunu bilərək *mn=ac+bd* olduğunu isbat edin.

29. Tutaq ki, *M*-müstəvinin ixtiyari nöqtəsi, *O* isə *ABC* üçbucağının ağırlıq mərkəzidir (medianların kəsişmə nöqtəsi). Onda

$$3\cdot OM^2 = MA^2 + MB^2 + MC^2 - \frac{1}{3}(AB^2 + BC^2 + CA^2)$$

münasibəti doğrudur. Bunu isbat edin.

30. Üçbucağın xaricinə və daxilinə *R* və *r* radiuslu çevrələr çəkilmişdir. Bu çevrələrin mərkəzləri arasındakı məsafə *d* olarsa, $d^2 = R^2 - 2Rr$ olduğunu isbat edin.

31. Tərəfləri *a, b, c* olan üçbucağın xaricinə *R* radiuslu çevrə çəkilmişdir. Üçbucağın ağırlıq mərkəzindən onun xaricinə çəkilmiş çevrənin mərkəzinə qədər olan məsafənin kvadratının $R^2 - \frac{1}{9}(a^2 + b^2 + c^2)$-na bərabər olduğunu isbat edin.

32. Üçbucağın tərəfləri *a, b, c*, xaricinə çəkilmiş çevrənin radiusu *R*, daxilə çəkilmiş çevrənin radiusu isə *r*-dir. $p = \frac{1}{2}(a + b + c)$ olduqda $a^2 + b^2 + c^2 = 2p^2 - 2r^2 - 8Rr$ olduğunu isbat edin.

33. Üçbucağın tərəfləri *a, b, c*, xaricə və daxilə çəkilmiş çevrələrin radiusları uyğun olaraq *R* və *r*-dir. $p = \frac{1}{2}(a + b + c)$ olduqda, üçbucağın ağırlıq mərkəzi ilə onun daxilinə çəkilmiş dairənin mərkəzinə qədər olan məsafənin kvadratı $\frac{1}{9} = (p^2 + 5r^2 - 16Rr)$ ifadəsinə bərabərdir. Bunu isbat edin.

34. İsbat edin ki, üçbucağın daxilində yerləşən kvadratın sahəsi üçbucağın sahəsinin yarısından böyük deyildir.

36. Trapesiyanın yan tərəfləri 3 *sm* və 5 *sm*-dir. Trapesiyanın daxilinə çevrə çəkmək mümkündür. Trapesiyanın orta xətti onu sahələri nisbəti 5:11 olan iki hissəyə bölür. Trapesiyanın oturacaqlarının uzunluqlarını tapın.

37. Əgər *ABC* üçbucağında *B* bucağı kor bucaqdırsa və $AB = \frac{1}{2}AC$ olarsa, onda $\angle C > \frac{1}{2}\angle A$ olur. Bunu isbat edin.

38. Əgər üçbucağın tərəfləri arasında $a^2 + b^2 > 5c^2$ münasibəti ödənirsə, c bu üçbucağın kiçik tərəfidir. Bunu isbat edin.

39. Üçbucağın tərəfləri a, b, c və onun xaricinə çəkilmiş çevrənin radiusu R-dir. $a^2 + b^2 + c^2 - 8R^2$ ifadəsi müsbət olduqda üçbucaq itibucaqlı, sıfra bərabər olduqda düzbucaqlı, mənfi olduqda isə korbucaqlı üçbucaqdır. Bunu isbat edin.

40. Diametri *1* olan çevrənin bir neçə vətəri çəkilmişdir. Əgər hər bir diametr *k*-dan çox olmayaraq vətərləri kəsirsə, onda bütün vətərlərin uzunluqları cəmi 3,15 *k*-dan kiçikdir. Bunu isbat edin.

41. İtibucaqlı üçbucağın tərəfləri 19 *sm* və $\sqrt{139}$ *sm*-dir. Bu tərəflərə çəkilən medianlar düz bucaq altında kəsişərsə, üçbucağın üçüncü tərəfini tapın.

42. Düzbucaqlı üçbucağın katetləri $10\sqrt{2}$ *sm* və $6\sqrt{2}$ *sm* olduqda onun düzbucaq təpəsindən çəkilmiş tənbölənin uzunluğunu tapın.

43. Bərabərtərəfli üçbucağın daxilinə onun tərəflərindən 8 *sm*, 6 *sm* və 4 *sm* məsafədə olan *M* nöqtəsi götürülmüşdür. Üçbucağın hündürlüyünü tapın.

44. Düzbucaqlı üçbucaqda hipotenuza çəkilmiş hündürlük 12 *sm*, daxilə çəkilmiş çevrənin radiusu 5 *sm* olduqda, hipotenuzun uzunluğunu tapın.

45. Trapesiyanın diaqonallarının kəsişmə nöqtəsindən hər iki oturacağa paralel olan və onun yan tərəflərini uyğun olaraq *M* və *N* nöqtələrindən kəsən düz xətt keçirilmişdir. Trapesiyanın oturacaqları 18 *sm* və 6 *sm* olarsa, *MN* parçasının uzunluğunu tapın.

46. Paraleloqramın daxili bucaqlarının tənbölənlərinin kəsişərək diaqonalı paraleloqramın bərabər olmayan tərəfləri fərqinə bərabər olan düzbucaqlı əmələ gətirdiyini isbat edin.

47. Hər hansı üçbucaqda $a:b:c = h_a : h_b : h_c$ olduğunu isbat edin. Burada *a*, *b*, *c* üçbucağın tərəfləri h_a, h_b, h_c isə uyğun tərəfləri çəkilmiş hündürlüklərdir.

48. Hündürlükləri uyğun olaraq $h_a = 5, h_b = 4, h_c = 3$ olan üçbucaq varmı?

49. *ABC* üçbucağını hündürlükləri *O* nöqtəsində kəsişir və *OC*=*AB* olur. Üçbucağın *C* bucağını tapın.

50. Üçbucağın tərəfləri həndəsi silsilə əmələ gətirdikdə onun, tərəfləri bu üçbucağın hündürlükləri olan üçbucaqla oxşar olduğunu isbat edin.

51. Perimetri 74 *dm*, sahəsi isə 3 m^2 olan düzbucaqlının tərəflərini tapın.

52. Tərəfləri 72 *m* və 8 *m* düzbucaqlı ilə bir böyüklükdə (müadil) olan kvadratın sahəsini tapın.

53. Hündürlükləri h_1 və h_2, perimetri isə 2*p* olan paraleloqramın sahəsini tapın.

54. Oturacağı 30 *sm* və hündürlüyü 10 *sm* olan üçbucaq daxilinə sahəsi 63 m^2 olan düzbucaqlı çəkilmişdir. Düzbucaqlının tərəflərini tapın.

55. Düzbucaqlı üçbucağın hipotenuzu üzərində götürülmüş nöqtədən onun katetlərinə perpendikulyar endirilmişdir. Katetlərin hipotenuza bitişik parçaları a və b olarsa, perpendikulyarın əmələ gətirdiyi düzbucaqlının sahəsini tapın.

56. Tərəfləri 26:25:3 nisbətində və sahəsi 9 m^2 olan üçbucağın tərəflərini tapın.

57. Tərəflərindən biri 51 *sm*, diaqonalları isə 40 *sm* və 74 *sm* olan paraleloqramın sahəsini tapın.

58. Paralel tərəfləri 60 *sm* və 20 *sm*, paralel olmayan tərəfləri 13 *sm* və 37 *sm* olan trapesiyanın sahəsini tapın.

59. Yan tərəfi *a* olan bərabəryanlı trapesiya daxilinə çevrə çəkilmişdir. Trapesiyanın oturacağına bitişik iti bucağı 30^0 olarsa, onun sahəsini tapın.

60. Radiusu *R* olan dairə daxilinə çəkilmiş düzgün səkkizbucaqlı və onikibucaqlının sahələrini tapın.

61. Çevrə daxilinə çəkilmiş düzgün onikibucaqlının sahəsi *S* olduqda, bu çevrə daxilinə çəkilmiş düzgün altıbucaqlının sahəsini tapın.

62. Daxilə çəkilmiş kvadratın sahəsi 20 *sm* olduqda dairənin sahəsini tapın.

63. İki konsentrik çevrənin əmələ gətirdiyi halqada böyük çevrənin kiçik çevrəyə toxunan vətərinin uzunluğu *m*-dir, halqanın sahəsini tapın.

64. Radiusu *R* olan yarımçevrə üç bərabər hissəyə bölünmüş və bölgü nöqtələri diametrin ucları ilə birləşdirilmişdir. Yarımdairənin orta hissəsinin sahəsini tapın.

65. Radiusu *R* olan dairədə mərkəzin bir tərəfindən iki paralel vətər çəkilmişdir. Bu vətərlərdən biri 120^0-li, digəri isə 60^0-li qövsü gərir. Vətərlər arasında olan dairə hissəsinin sahəsini tapın.

66. Sahəsi *S* olan dairə daxilinə çəkilmiş düzbucaqlının tərəfləri *m*:*n* nisbətindədir. Düzbucaqlının sahəsini tapın.

67. Uzunluqları 14 *m* və 40 *m* olan iki paralel vətərin arasındakı məsafə 39 *m* olarsa, dairənin sahəsini tapın.

68. Radiusu 12 *sm*, qövsü isə 90^0 olan seqmentin sahəsini tapın.

69. Sektorun radiusu *R*, sahəsi isə *S*-dir. Mərkəzi bucağın qiymətini tapın.

70. Vətərinin uzunluğu 20 *sm*, qövsü isə 60^0 olan seqmentin sahəsini tapın.

71. Rombun perimetri $2p$, diaqonalları cəmi isə a olduqda onun sahəsini tapın.

72. Rombun perimetri 2 *sm* olan çevrə xaricinə sahəsi 20 sm^2 olan bərabəryanlı trapesiya çəkilmişdir. Trapesiyanın tərəflərini tapın.

73. Çevrə xaricin çəkilmiş bərabəryanlı trapesiyanın sahəsi S-dir. Yan tərəfin oturacaqla əmələ gətirdiyi bucağın 30^0 olduğunu bilərək, trapesiyanın tərəfini tapın.

74. Düzbucaqlı üçbucağın sahəsi 720 sm^2, katetlərinin nisbəti isə 9:4 kimidir. Hipotenuzu tapın.

75. Rombun perimetri 48 *sm*, diaqonallarının cəmi isə 26 *sm* olarsa onun sahəsini tapın.

76. Trapesiyanın orta xətti 10 *sm* olub, onun sahəsini 3:5 nisbətində bölür. Trapesiyanın oturacaqlarını tapın.

77. Düzbucaqlı üçbucağın daxilinə çevrə çəkilmişdir. Katetlərin biri toxunma nöqtəsi ilə düz bucaq təpəsindən başlayaraq 6 *sm* və 10 *sm* uzunluqda parçalara ayrılmışdır. Üçbucağın sahəsini tapın.

78. Bərabəryanlı trapesiyanın oturacaqları 10 *sm* və 26 *sm*, diaqonalları isə yan tərəflərinə perpendikulyardır. Trapesiyanın sahəsini tapın.

79. Düzbucaqlı trapesyanın oturacaqları 8 *sm* və 18 *sm*, iti bucağı isə 60^0-dir. Trapesiyanın sahəsini tapın.

80. İki tərəfinin uzunluğu a və c olan üçbucağın sahəsi $S=\frac{2}{5}bc$ olarsa, onun üçüncü tərəfinin uzunluğunu tapın.

81. Eyni bir nöqtədən çevrəyə uzunluqları 12 *sm* olan iki toxunan çəkilmişdir. Toxunma nöqtələri arasındakı məsafə 14,4 *sm* olarsa, dairənin sahəsini tapın.

82. İtibucaqlı üçbucağın iki hündürlüyü 30 *sm* və $2\sqrt{2}$ *sm* olmaqla üçüncü hündürlük kəsişmə nöqtəsində təpədən başlayaraq 5:1 nisbətində bölünür. Üçbucağın sahəsini tapın.

83. Bərabəryanlı trapesiyanın sahəsi 72 m^2, hündürlüyü isə yan tərəfindən iki dəfə kiçikdir. Trapesiyanın daxilinə çəkilmiş çevrənin radiusunu tapın.

84. Yan tərəfi 13 *sm*, oturacağı isə 24 sm olan bərabəryanlı üçbucaq xaricinə çəkilmiş çevrənin radiusunu tapın.

85. Oturacağı 20 *sm* olan üçbucağın yan tərəflərinə çəkilmiş medianları 18 *sm* və 24 *sm* olarsa, onun sahəsini tapın.

86. $A_1(1;2;4)$, $A_2(0;1;2)$, $B_1(1;0;0)$, $B_2(-1;-1;3)$ nöqtələri verildikdə A_1B_1 və A_2B_2 parçalarının orta nöqtələrinin koordinatlarını tapın.

87. $|\overline{b}|=3$ olduqda, α və β-nın hansı qiymətində $\overline{a}(3;-1;\alpha)$ vektoru $\overline{b}(2;\beta;1)$ vektoruna perpendikulyar olar?

88. Üç $\overline{a}(2;-3;5)$, $\overline{b}(-1;1;-3)$ və $\overline{c}(3;7;1)$ vektorları verilmişdir. $\overline{d}\cdot\overline{a}=12$, $\overline{db}=-6$ və $\overline{d}\perp\overline{c}$ olduqda $\overline{d}(x;y;z)$ vektorunun koordinatlarını tapın.

89. $\overline{OA}$ vektoru koordinat oxları ilə uyğun olaraq $\alpha=60^\circ$, $\beta=60^\circ$ və $\gamma=45^\circ$ bucaq əmələ gətirir. *B* nöqtəsinin koordinatları $B\left(-2;-2;-2\sqrt{2}\right)$ olduqda, $\overline{OA}$ və $\overline{OB}$ vektorları arasındakı bucağı tapın.

90. $\overline{i},\overline{j},\overline{k}$ ort vektorlar olduqda, $\overline{a}=\overline{3i}-\overline{2j}+\overline{k}$ və $\overline{b}=-2\overline{i}-\overline{j}-\overline{k}$ vektorlarının skalyar hasilini tapın.

91. $\overline{m}, \overline{n}, \overline{p}$ vektorları vahid vektorlar olmaqla, $\overline{m} \perp \overline{n}, \overline{n} \perp \overline{p}$ və $\overline{m}$ ilə $\overline{p}$ arasında qaln bucaq 60^0-dir. $\overline{a} = \overline{3m} - \overline{2n} + \overline{p}$ və $\overline{b} = -2\overline{m} + \overline{n} - \overline{p}$ vektorların skalyar hasilini tapın.

92. $\overline{a} = \{1; 2; 1\}$ və $\overline{b} = \{2; -1; 0\}$ olduqda, $\overline{a} - \overline{b}$ və $\overline{a} + \overline{b}$ vektorları arasında qalan bucağın kosinusunu tapın.

93. α-nın hansı qiymətində $\overline{a} = \{\alpha; 3; 4\}$ və $\overline{b} = \{5; 6; 3\}$ vektorları perpendikulyardırlar?

94. $\overline{a} = \overline{2i} + \overline{3j} - 5\overline{k}$, $\overline{b} = 3\overline{i} + \overline{k}$ və $\overline{c} = 4\overline{i} - 3\overline{j} + 2\overline{k}$ ($\overline{i}, \overline{j}, \overline{k}$ -ort vektorlardır) vektorları verildikdə $\overline{x} = 3\overline{a} + \overline{b} - \overline{c}$ vektorunun koordinatlarını və uzunluğunu tapın.

95. $\overline{a} = \{1; -1; 3\}$, $\overline{b} = \{3; -5; 6\}$ vektorları verildikdə $pr_{(\overline{a}+\overline{b})}(2\overline{a} - \overline{b})$ -ni hesablayın.

96. Verilmiş elementlərinə görə üçbucağı qurun.

a) *a, b* tərəfləri və *A* bucağı,

b) *a* tərəfi və h_a, h_b hündürlükləri,

c) *a* tərəfi, *A* bucağı və m_a medianı.

97.Ağırlıq mərkəzinə və iki orta xəttinin orta nöqtələrinə görə üçbucağı qurun.

98. Iki çevrə verildikdə, onların ümumi toxunanlarını qurun.

100. a) Pərgar və xətkeş vasitəsilə 66^0-li bucağı üç bərabər hisəyə bölün.

b) Yalnız pərgar vasitəsilə 19^0-li bucaq verildikdə 7^0-li qövs qurun.

v) İki tərəfli xətkəşin köməyi ilə, verilmiş bucağı yarı bölün.

ÇALIŞMALARIN CAVABLARI

II HİSSSƏ

I FƏSİL

1. a) məhdud; b) aşağıdan məhdud; yuxarıdan qeyri-məhdud; c) qeyri-məhdud; d) aşağıdan qeyri-məhdud; yuxarıdan məhdud. **2.** a) monoton azalan; b) monoton azalan; c) monoton artan; d) monoton artan; e) monoton deyil; f) monoton deyil**.** **3.** a) 3; b) 1/3; c) ∞; d) ¾; e) 18; f) ∞; g) ∞; h) 0; i) 0; j) k=m olduqdaa_0/b_0; $k < m$ olduqda 0; $k > m$ olduqda ∞; k) 2; l) 1. **4.** a) $-(26 + 15\sqrt{3})/4$; b) $(13 + 4\sqrt{3}): 2$.

II FƏSİL

1. 3/5. **2.** 2. **3.** 1/2. **4.** 4/5. **5.** $\sqrt{2/2}$; **6.** 3. **7.** 1. **8.** 3. **9.** 7/4. **10.** 1. **11.** 1/2. **12.** 3/7. **13.** 1/3. **14.** e. **15.** $e^{-1/3}$. **16.** e^{-3}. **17.** $(-\infty, \infty)$; **18.** $(-\infty, \infty)$. **19.** $[0; \infty)$. **20.** $(0; \infty)$. **21.** $[-2; 2]$. **22.** $(-\infty, -3) \cup (-3; 3) \cup (3; +\infty)$. **23.** (0; 3). **24.** $(-\infty, 2) \cup (2{,}3) \cup (3, \infty)$.

35. ¾. **36.** 3/2. **37.** ¼. **38.** ¼. **39.** 1. **40.** ln5/ln3. **41.** 3. **42.** $-2/3$. **43.** ln3.

III FƏSİL

1. a) 1; b) -2; c) -1/16; d) 2. **2.** a) 1; b) -12; c) 14; d) 3; e)$\frac{1}{2}$. f) $\sqrt{6/2}$. **3.** 1)$3(1 + x + 2x^2)^2(1 + 4x)$; 2) $10(2x + 3)^4$. 3) 1) $\frac{3(x+1)}{\sqrt{3x^2+6x+7}}$; 4) $\frac{2x+1}{3\sqrt[3]{(x^2+x+5)^2}}$; 5) $6(x^2 + x + 1)$. 6) $\frac{1}{(1+x)^2}$. 7) $4x \cdot 3^{2x^2+1}\, ln\, 3$. 8) $(6x + 5)\, ln \cdot 2^{3x^2+5x+3}$. 9) $(2x - 1)5^{x^2-x}\, ln\, 5$. 10) $\frac{6x}{3x^2+1}$. 11) $\frac{2x}{(x^2+2)\, ln\, 3}$. 12) $\frac{4x+1}{2x^2+x+1} \cdot \frac{1}{ln\, 10}$. 13) 2sln2(2$x$+1). 14) $2\, cos\, 2\,(2x + 1)$. 15)

$\cos x \cdot (1 - 3\sin^2 x)$. 16) $-\frac{\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{6}+\frac{x}{2}\right)}{2\sin^3\frac{x}{2}}$. 17) $-\frac{1}{2\sin^2\frac{x}{2}}\left(1 + 2ctg\frac{x}{2}\right)$. 18) 2sin 4*x*. 19) -3 sin 6 *x*. 20) $-\frac{6\cos 2x}{\sin^4 x}$. 21) $-\frac{1}{x^2\cos^2\frac{1}{x}}$. 22) $\frac{tg\sqrt{x}}{\sqrt{x}\cos^2\sqrt{x}}$. 23) $\frac{4}{\sin^2 2x}$. 24) $-2x\sin x^2$. 25) $a\cos a \times \cos b\,x - b\sin a\,x\sin b\,x$. 26) $\frac{2}{\sqrt{1-4x^2}}$. 27) $-\frac{6\arccos 3x}{\sqrt{1-9x^2}}$. 28) 0. 29) $-\frac{2}{\sqrt{1-x^2}\arcsin^3 x}$. 31) $arcctgx^2 - \frac{2x^2}{1+x^4}$. 32) $2x\left(arctg2x + \frac{x}{1+4x^2}\right)$. 33) $\frac{\pi}{2\sqrt{1-x^2}\arccos^2 x}$. 34) $-\frac{6}{1+4x^2}arcctg^2 2x$. **4.** a) $y = \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\left(x - \frac{11}{6}\right)$; b) $y = -3(x+3)$. v) $y = \frac{1}{2}\left(\sqrt{3x} + 1\right)$. q) *y*=2*x*. ğ) $y = \frac{x}{2} + \ln\frac{2}{e}$. d) $y = \frac{1}{2}(x-1)$. **5.** a) 1 m/san; b) 16 m/san; c) 0,5 m/san; d) 0,75 m/san. **6.** a) (0; 0); (24; 20); b) (10; 8); (22; 24); c) (21; 15); d) (4; 6); (12; 10).

IV FƏSİL

1. a) $(-\infty, +\infty)$ artır, b) $(-\infty, +\infty)$ azalır, v) $(-\infty, +\infty)$ artır. **2.** a) $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ azalır, b) $(-\infty, -1) \cup (-1, +\infty)$ artır, v) $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ azalır. **3.** a) $(-\infty, -1)$ azalır; $(-1, +\infty)$ artır; b) $(-\infty, +1)$ artır; $(1, \infty)$ azalır; v) $(-\infty, -3)$ azalır; $(-3, +\infty)$ artır. **4.** a) $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$ azalır, (-1, 1) artır, b) $(-\infty, -2) \cup (0, +\infty)$ azalır, (-2, 0) artır, v) $(-\infty, -3) \cup (1, +\infty)$ artır, $(-3, -1) \cup (-1, 1)$ **5.** a) $(-\infty, -2) \cup (2, \infty)$ artır; (-2, 2) azalır, b) $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$ artır; (-1, 1) azalır, v) $(-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$ artır; (0, 2) azalır**.** **6.** a) $(-\infty, -1)$ azalır; $(-1, +\infty)$ artır. b) $\left(-\infty, -\frac{2}{\ln 2}\right) \cup (0, +\infty)$ artır; $\left(-\frac{2}{\ln 2}, 0\right)$ azalır; v)$\left(-\infty, -\frac{1}{2}\right)$ azalır; $\left(-\frac{1}{2}; +\infty\right)$

artır. **7.** a) $(-\infty,0)$ azalır; $(0,+\infty)$ artır; b) $\left(-1,-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\cup(1,+\infty)$ artır; $\left(-\frac{1}{\sqrt{3}},0\right)$ azalır; v) $(-\infty,0)$ azalır; $(0,+\infty)$ artır. **8.** a) $(-\infty,0)$ azalır; $(0,\infty)$ artır. b) $(-\infty,0)$ artır; $(0,+\infty)$ azalır. **9.** a) 0; 2; b) 0, v) 0. **10.** a) 1, b) $\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2}; k=0,\pm1,\pm2,..$ v) 0; 2. **11.** a) x=2 minimum nöqtəsi, $y_{min}(2)=-2$. b) x_1=0 maksimum nöqtəsi, x_2=2 minimum nöqtəsi, $y_{max}(2)=0$; $y_{min}(2)=-4$. v) $x_1=-3$ maksimum nöqtəsi, x_2=1 minimum nöqtəsi, $y_{max}(-3)=10$, $y\frac{2}{3}_{min}$. **12.** a) x=0 minimum nöqtəsi, $y\sqrt{2}_{min}$; b) x=-1 minimum nöqtəsi, $y\sqrt{2}_{min}$. **13.** i) $x_1=-\sqrt{2}$ minimum nöqtəsi, $x_2=\sqrt{2}$ maksimum nöqtəsi. $y\sqrt{2}\frac{\sqrt{2}}{4}_{min}$. $y\sqrt{2}\frac{\sqrt{2}}{4}_{max}$. b) x=4 maksimum nöqtəsi, $y\frac{1}{8}_{max}$; v) x=-4 maksimum nöqtəsi, x_2=2 minimum nöqtəsi, y_{max}; y_{min}. **14.** a) $x=-\frac{1}{2}$ minimum nöqtəsi, $y\frac{1}{2}\frac{1}{2e}_{min}$. b) x_1=0 minimum nöqtəsi, x_2=1 maksimum nöqtəsi, y_{min}; $y\frac{1}{e^2}_{max}$; v) $x_1=-\frac{1}{\sqrt{2}}$ minimum nöqtəsi, $x_2=\frac{1}{\sqrt{2}}$ maksimum nöqtəsi, $y\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt{2e}}_{min}$; $y\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\frac{1}{\sqrt{2e}}_{max}$. **15.** a) x=0 nöqtəsi, $y_{min}(0)=1$; b) x=1 maksimum nöqtəsi, $y\,ln^2 4_{max}$; x=-2 minimum nöqtəsi, $y_{min}(-2)=0$. **16.** a) $x=e^{-1}$; b) $x_{2k}=\frac{\pi}{4}+2\pi k$ maksimum nöqtəsi, $x_{2k+1}=\frac{\pi}{4}+(2k+1)\pi$ minimum nöqtəsi, $y2k\sqrt{2}_{max}$; $y2k+1\sqrt{2}_{min}$; v) $x_{2k}=2\pi k$ maksimum nöqtəsi, $x_{2k+1}=(2k+1)\pi$ minimum nöqtəsi, y_{max}; $y[(2k+1)\pi]_{min}$. **17.** a) $x=-\frac{2}{3}$ minimum nöqtəsi, $y\left(-\frac{2}{3}\right)\frac{2\sqrt{3}}{9}_{min}$; ekstremum nöqtəsi yoxdur; v) $x_1=-\frac{12}{5}$ maksimum nöqtəsi, x_2=0 minimum nöqtəsi, $y\left(-\frac{12}{5}\right)\frac{144}{125}\sqrt{15}_{max}$; y_{min} **18.** a) $y\frac{47}{3}_{min}$, $y\frac{7}{3}_{max}$; b)

$y\frac{1}{12}_{min}$; $y\frac{20}{3}_{max}$. **19.** a) y_{min}; $y\frac{37}{6}_{max}$; b) $y\frac{3}{2}_{min}$; $y\frac{5}{2}_{max}$. **20.** a) y_{min}; $y2_{max}$. **21.** a) $y\sqrt{6}_{min}$; y_{max}; b) $y\sqrt{3}_{min}$; $y\sqrt{7}_{max}$. **22.** a) y_{min}; $y2_{max}$; b) y_{min}; $y\, ln(^2{}_{max}$. **23.** a) $y\frac{2-\pi}{2}_{min}$; b) $y\frac{5\pi}{6}\sqrt{3}_{min}$; $y\frac{\pi}{6}\sqrt{3}_{max}$. **24.** 1. **25.** $\frac{e^2}{8}$. **26.** $\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$. **27.** bərabəryanlı üçbucaq. **28.** Tərəf və bu tərəfə endirilən hündürlük $\frac{a}{2}$-dir. **29.** 8 sm və $2\sqrt{3}$ sm. **30.** $20\sqrt{3}/3$.

V FƏSİL

1. a) hə, b) yox, c) hə, d) yox. **2.** a) $1-\frac{1}{2}\cos 2x$, b)x^3+x^2-2x+4, c) $\frac{1}{6}(2x+3)^3+7\frac{1}{6}$; d) $tgx+2$. **3.** a) $2\sqrt{x^5}+\frac{8}{3}\sqrt{x^3}-6\sqrt{x}+C$; b) $-2\sqrt{x^{-5}}-\frac{1}{2}x^{-4}-4x^{-1}+C$; c) $\frac{1}{2}arctg\frac{x}{2}+C$; d) $\frac{1}{2}\arcsin 2x+C$; e) $\frac{1}{3}x^3-4x+8arctg\frac{x}{2}+C$; f) $-\frac{3}{2}\cos 2x+\frac{3}{4}\sin 3x+C$; g) $x^3+4tgx+C$; h) $x+2arctgx+C$; x)$\frac{1}{21}(3x+5)^7+C$i) $\frac{2}{3}\sqrt{3x+5}+C$; j) $-\frac{1}{4}\cos(4x+3)+C$; k) $-\frac{1}{6}(3x+5)^{-2}+C$; q) $\frac{1}{5}tg5x+C$; l) $\frac{1}{10}(5\sin x-\sin 5x)+C$; m) $\frac{1}{16}(\sin 8x-4\sin 2x)+C$; n) $\frac{1}{2\ln 3}3^{2x+1}+C$; o) $\frac{1}{5\ln 4}4^{5x-2}+C$; p) $\frac{1}{2}arctg2x+C$; r) $-\frac{1}{3}ctg3x+C$; s) $\frac{1}{6}arctg\frac{3x}{2}+C$; t) $\frac{x}{2}+\frac{1}{4}\sin 2x+C$; u) $-\frac{1}{4}\cos^4 x+C$; v) $\frac{1}{5}\sin^5 x+C$; y) $\frac{1}{7}\ln|7x+2|+C$; z) $\frac{1}{2}\ln(x^2+3)+C$. **4.** a) $\frac{1}{3}x^3-\frac{3}{2}x^2+x+C$; b) $x-2\ln|x|-\frac{1}{x}+C$;

c) $-\frac{3}{\sqrt[4]{x}}\left(1-\frac{4}{5\sqrt{x}}+\frac{1}{2x}\right)+C$; d) $\frac{a^{2x}}{\ln a^2}+\frac{b^{2x}}{\ln b^2}+\frac{2(ab)^x}{\ln ab}+C$; e) $-\frac{1}{3}\cos 3x+\frac{1}{5}\sin 5+C$;

f) $-3\ln|\cos x| + 3x^{4/3} + C$; g) $\frac{2}{5}(x-1)^{5/2} + \frac{2}{3}(x-1)^{3/2} + C$; h) $2\sqrt{x} - 2\ln(1+\sqrt{x}) + C$;

x) $\frac{9}{2}x^2 + 4x^{3/2} + x + C$; i) $\frac{1}{48}(3x^2-2)^8 + C$; j) $-\ln(e^{-x}+5) + C$; k) $\sqrt{x^2+5} + C$;

q) $\frac{1}{5}\ln\frac{e^x}{e^x+5} + C$; l) $-\frac{2}{3}(\cos x + 1)^{3/2} + C$; m) $\frac{2}{9}(3\ln x + 1)^{3/2} + C$; n) $\frac{x^4}{4}\ln x - \frac{1}{16}x^4 + C$;

o) $\frac{1}{2}((x^2+1)arcctgx + x) + C$; p) $-\frac{1}{2}x\cos 2 + \frac{1}{4}\sin 2x + C$; r) $(x-1)e^x + C$; s) $\frac{1}{8}(4x^2-1)arctg2x - \frac{1}{4}x + C$; t) $(x^2-2)\sin x + 2x\cos x + C$.

VI FƏSİL

1. 47/6. **2.** $2(\log_3 e - \log_2 e) - 1$. **3.** -2,8. **4.** $0{,}7(1-2\sqrt{2})$. **5.** $13\frac{12}{35}$. **6.** $\ln 2e + \frac{3\pi^2}{16}$. **7.** $\frac{1}{3}(e^3-1)$. **8.** $\frac{\pi}{4}$. **9.** $\sqrt{2}$. **10.** $2e^{\frac{\pi}{2}} - \frac{5}{3}$. **11.** 56,8. **12.** $2\frac{1}{6}$. **13.** -33,75. **14.** 0. **15.** 1. **16.** 1. **17.** 1. **18.** 1. **19.** $1 - \frac{\sqrt{2}}{8}(\pi-4)$. **20.** $\frac{1}{8}(3\pi-32)$. **21.** $\frac{1}{9}(1-2e^3)$. **22.** $2\frac{2}{3}$. **23.** 7,5. **24.** $2\ln 2 - 1$. **25.** 2, 25. **26.** 2,25. **27.** $\frac{\sqrt{3}}{2}$. **28.** $\frac{R^2}{4}(\pi-2)$; $\frac{R^2}{4}(3\pi+2)$. **29.** $\ln\sqrt{2}$. **30.** $2\frac{2}{3}$. **31.** $1\frac{1}{3}$. **32.** $\frac{1}{2}\pi^2$. **33.** 8π. **34.** $\frac{\pi}{5}$. **35.** $\frac{\pi}{7}$. **36.** $\frac{\pi}{3}\left[h_2\left(3R^2-{h_2}^2\right) - h_1(3R^2-h_1^2)\right]$. **38.** 1,2 kq. **39.** 25 m.

VII FƏSİL

1. 8,5 sm. **2.** a) 40 mm; b) 80 mm. v) 20 mm. **3.** a) 11 sm; b) 0,5 sm; v) 5,5 sm. **4.** 2 *a*. **5.** $\frac{1}{3}d$; $1\frac{2}{3}d$. **6.** 0,5 *d*; 1,5 *d*. **7.** (5/3)*d*; (1/3)*d*. **8.** *d*. **9.** $\frac{2dn}{n+1} = \frac{180^0\cdot n}{n+1}$.

10. $67^0 30'$; $112^0 30'$. **11.** 0,6 *d*; 1,4 *d*; **12.** (4/9) *d*. **13.** 0,5 *d*; 1,5 *d*. **14.** 0,4 *d*; 1,6 *d*. **15.** 3/40; 3/8.

VIII FƏSİL

1. 12 sm. **4.** 6 sm; 9 sm və ya 8 sm; 8 sm; 5 sm. **5.** a) yox; b) hə; v) yox. **8.** 96^0. **10**. 20 sm və 84 sm. **11**. 16 sm; 16 sm; 6 sm. **12.** 7 sm; 7 sm; 4 sm və ya 5,5 sm; 5,5 sm; 7 sm. **13.** 8 sm; 4 sm. **15.** 6,5 sm; 3 sm. **20.** 15 m.

IX FƏSİL

2. 42^0; 128^0. **3.** 10sm; 65^0; 115^0. **5.** 70^0; 20^0; 90^0. **6**. 25^0;17^0 **7.** 26sm. **11.** 40^0; 40^0; 100^0. **12**. 99^0; 99^0. **13.** 24^0; 38^0; 118^0. **14.** 13sm. **15.** 40^0; 140^0. **16.** 85^0; 95^0. **18.** 120^0. **20.** 4,8sm. **21.** 1.75sm, 5.25sm. **22.** 5.5sm **25.** $\frac{a+4d}{2d}$**;** *n=62.*

X FƏSİL

1. 0,5 *p-a*. **2.** $\alpha+\beta$; $180^0-(\alpha+\beta)$. **3.** $90^0-\alpha$; $90^0+\alpha$. **4.** 24 sm. **6.** 28 sm. **7.** 12 sm. **8.** 25 sm; 10 sm. **9.** 8 m. **10.** 60^0. **11.** 150^0. **13.** 80^0; 100^0. **14.** 60^0; 120^0. **15.** 4 m. **16.** 1 m. **17.** 2 sm. **19.** $\sqrt{2}$ m. **22.** 13 sm; 16 sm; 19 sm; 22 sm; 25 sm. **23.** 8 sm; 32 sm. **24.** *a*+0,25 *b*. **25.** 6 m. **26.** 60^0; 120^0. **27**. 7 m; 17 m. **28.** 10 sm. **29.** 2,7 m. **30.** 0,75. **31.** 5 sm və 25 sm. **32**. 60^0. **33**. 120^0. **34.** 2 sm. **35.** 1 sm. **36**. 20 sm və 12 sm. **37**. 2,2 m. **38**. 10 sm. **39.** 1 dm. **40.** 6 sm. **41.** 28 m. **42.** *R-r*. **43.** 9 sm; 7 sm. **44.** 2*R* və 60^0. **45.** var. **46.** 100^0; 80^0. **50**. $67^0 30'$. **51.** $33^0 20'$. **52.** 36^0. **53.** 50^0 və 130^0. **54.** 6. 5. **55.** *p-r*. **56.** 1m. **57.** 2 sm. **58**. 3 sm. **59.** 25 sm. **60.** 12 sm; 4 sm.

XI FƏSİL

1. 30^0. **2.** 10,5 sm; 13,5 sm. **3.** 13,5 sm. **4.** Oxşarlar. **5.** 7,5 sm; 10,5 sm. **6**. 2 sm; 4 sm. **7.** *K*=3; *P*=14 sm. **8.** 75 sm; 50 sm. **9.** a) hə, b) hə, v) yox. **10.** 3, 4, 5. **11.** 109 sm. **12.** yox. **13.** 41 sm. **14.** 15 sm. **15.** 125; 125 sm. **16.** 3m; 4 m. **17.** 37 sm. **18.** 24 sm. **20.** 61 sm. **21**. 175 sm; 600 sm. **22.** 39 sm; 65 sm. **23.** 8 sm.

24. 50 sm. **25.** 16 sm; 20 sm; 20 sm. **26.** 4 sm; 11 sm. **27.** 5 sm; 12,5 sm. **28.** 5 sm. **29.** 20 sm. **30.** 30 sm; 24 sm; 18 sm; 36 sm. **31.** 100 m; 40 m. **32**. 14 sm; 12,5 sm; 29,4 sm; 16,9 sm. **33.** 83/8 sm. **34.** 10. **36**. 15 sm; 20 sm: 25 sm. **37.** *m*+*n*+*p*. **38.** 26 sm; 30 sm. **41.** Düzbucaqlı üçbucaq. **43.** 45^0; 135^0. **44.** $\frac{ab\sqrt{2}}{a+b}$.

XII FƏSİL

1. a) *a*=8,49; *b*=3,93; $B = 24^0 50'$; b) *a*=0,7321; $B = 23^0 25$. v) *a*=2,798; *b*=2,34; $B = 39^0 50'$. **2.** a) *b*=7,05; *c*=8,27; $A = 31^0 30'$. b) *b*=0,54; *c*=0,60; $A = 26^0 41'$. v) *a*=0,533; *c*=0,717; $B = 42^0$. **3.** a) *b*=455; $A = 40^0 45'$; b) *b*=2,93; $A = 52^0 20'$; $B = 37^0 40'$; v) *a*=1499. $A = 61^0 14'$; $B = 28^0 46'$. **4.** a) *c*=65,89; $A = 64^0 55'$; $B = 25^0 5'$. b) *c*=461; $A = 34^0 29'$; $B = 55^0 31'$. v) *c*=13,86; $A = 60^0 3'$; $B = 29^0 57'$. **5.** *a*=25,75; *b*=37,75; *c*=45,70. **6.** *a*=12,71; *b*=10,29; *c*=16,35; $A = 51^0$; $B = 39^0$. **7.** a) *b*=634,4; $B = 46^0 50'$. b) *a*=*c*=26; *b*=22; $B = 50^0$. v) $A = C = 37^0 10'$; $B = 105^0 40'$. q) *a*=*c*-856,7; $A = C = 57^0 19'$; $B = 65^0 22'$. **8.** a) $A = 45^0 16'$; $B = 79^0 40'$; $C = 133^0 10'$. v) həlli yoxdur. q) $A = 18^0 12'$; $B = 33^0 8'$; $C = 128^0 40'$. **9.** a) *b*=24,04; *c*=2,249; $C = 5^0 12'$. b) *b*=545, *c*=423,4; $A = 42^0 40'$. v) *b*=84,66: *c*=445,1; $C = 81^0 20'$. q) *b*=1187; *c*=341; $A = 40^0$. **10.** a) c=31,08; $A = 157^0 20'$; $B = 9^0 10'$. b) *c*=45,9; $A = 27^0 57'$; $B = 54^0 58'$; $C = 45^0 14'$. q) *a*=62; $B = 21^0 56'; C = 34^0 4'$. **11.** a) c=798,4; $B = 54^0 58'$; $C = 89^0 52'$. b) həlli yoxdur. v) *a*=614,4; $A = 133^0 3'$; $B = 25^0 17'$. q) həlli yoxdur. **12.** 79 m. **13.** 19 kq; 17 kq. **14.** 75 m. **15.** $21^0 30'$. **16.** 21 m/san. **17.** 150 kqm. **18.** $\frac{rp\cos^3\frac{\alpha}{2}}{\sin 2\alpha \cos^2(45^0 - \frac{\alpha}{4})}$. **19.** $\frac{R\mathrm{stn}\frac{\alpha}{2}}{2\cos^2\left(45^0 - \frac{\alpha}{2}\right)}$. **20.** $2l\cos^2\left(45^0 - \frac{\alpha}{2}\right)$. **21.** $2R^2 \sin 3\alpha \cos^2\frac{\alpha}{2}$. **22.** 270^0. **23.** $2\arcsin\frac{\sin\frac{\beta-\alpha}{2}}{\sin\frac{\beta+\alpha}{2}}$. **24.**

$\frac{a\sin 3\alpha}{\sin 2\alpha}\cdot\sqrt{b^2+\frac{a^2}{4\cos^2\alpha}+\frac{ab\cos 3\alpha}{\cos\alpha}}$. **26.** *a*:*b*:*c*=3:5:7. 27. $a=\frac{l(l+\sqrt{l^2-8c^2})}{4c}$,

$b=\frac{1}{4c}\sqrt{16c^4-2l^4-8c^2l^2-2l^3\sqrt{l^2+8l^2}}$. **28.** 90^0. **29.**

$\frac{2\sqrt{3}}{3}\sqrt{m^2+mn+n^2}$.

XIV FƏSİL

1. $\frac{8}{17},\frac{15}{17},\frac{8}{17},\frac{15}{8}$. **2.** 39 sm. **3.** 34 sm; 56 sm. **5.** 12 sm. **6.** 7 sm; 24 sm. **7.** 84 sm^2. **8.** 32,5 sm. **10**. 72 kv.v. **11.** 1050 kv. v. **12.** $\frac{p^2\sin\alpha\cos\alpha}{(1+\cos\alpha)^2}$. **14.** 1008 sm^2. **15.** $\frac{8Q}{\pi}$ kv.v. **16.** 46,25 sm. **17.** 1380 sm^2. **18.** 5 dm. **19.** 192 sm^2. **20.** 192 sm^2. **21.** 25 sm. **22.** 180 sm^2. **23.** $r^2ctg^2\frac{\alpha}{2}tg\alpha$. **24.** $\frac{50}{3}$. **25.** $2\sqrt{2}R^2; 3R^2$. **26.**

$\frac{a^2}{4}(\pi+\sqrt{3}-6)$.

XV FƏSİL

4. $D(0{,}5;1)$. **5.** $C_1(1;1)C_2\left(-\frac{1}{2};\frac{5}{2}\right)$. **6.** *m*=3. **9.** 13. **10.** $\bar{b}\left\{1;\frac{12}{5}\right\}$, $\bar{b}_1\left\{-1;-\frac{12}{5}\right\}$. **12.** *n*= -1,5. **13.** $\left\{\frac{3}{5};\frac{4}{5}\right\}$. **14.** -1; 0. **15.** $\bar{b},\bar{c},\bar{d}$. **16.** $\phi=90^0$. **18.** $n=-\frac{4}{3}$. **26.** 7.

XVI FƏSİL

1. 9 sm. **2.** 1 sm. **3.** 8 sm, 17 sm. **4.** 21 sm. **5.** 30^0. **6.** 4 sm. **7.** 4 sm. **8.** 18 sm. **9.** 6 sm^2. **10.** $3\sqrt{6}$ sm^2. **11.** 29,6 sm; 9,6 sm. **12.** 12 sm, 20 sm. **13.** 24 sm. **14.** 4 m, 8 m. **15.** 13 m. **16.** $\frac{2}{5}$ sm, $\frac{10}{29}$ sm. **17.** 6 m. **18.** 1 sm. **19.** $\sqrt{a^2+c^2-b^2}$.

XVII FƏSİL

1. $2\sqrt{6}$ sm^3. **2.** 54 sm^3. **3.** $9\sqrt{3}$ sm^3. **4.** $125\sqrt{2}$sm^3. **5.** 6 sm^3. **6.** $\sqrt{839}$sm^3. **7.** $4\sqrt{110}$ m^3. **8.** $\frac{37}{27}$ sm^3, $\frac{152}{27}$ sm^3. **9.** 125 sm^3. **10.** $24\sqrt{2}$ sm^3. **11.** 4 sm, 8 sm, 12 sm. **12.** 336 sm^2. **13.** 102,3 dm^2. **14.** 42 dm^2. **15.** 1064 sm^2. **16.** 48 m^3. **17.** 10,5 sm^3. **18.** 1,9 m^3. **19.** $\frac{V\cdot S_2\cdot\sqrt{S_2}}{S_2\sqrt{S_2}-S_1\sqrt{S_1}}$. **20.** 12: 113.

XVIII FƏSİL

1. 24π sm^2. **2.** 96 sm^2. **3.** 108π sm^2. **4.** 3 dm. **5.** 45. **6.** 24π sm^3. **7.** $9\sqrt{15}\pi$sm^3. **8.** 2π sm^3. **9.** 14553πm^3. **10.** $37: 6\pi$.

FƏSİLLƏRDƏKİ TESTLƏRİN CAVABI

TESTLƏR / FƏSİLLƏR	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
I FƏSİL	B	C	B	C	C	D	A	E	1-*a, c;* 2-*b,* e; 3-*d*	0,5
II FƏSİL	A	C	D	E	B	C	D	B	1-*c*, *e*; 2-*b*; 3-*a*, *d*	12
III FƏSİL	C	B	A	E	D	B	C	E	32	1-*b*, *d*; 2-*a*; 3-*c*,

										e
IV FƏSİL	A	C	D	B	E	A	D	C	24	1-*b*; 2-*d*, *e*; 3-*a*, *e*
V FƏSİL	B	C	E	A	D	B	A	C	1-*b*; 2-*c*; 3-*d*	$\frac{1}{5}\ln(5x - 3$
VI FƏSİL	A	C	D	B	E	A	B	C	1-*a*; 2-*c*, *d*; 3-*e*	$\ln 4$
VII FƏSİL	B	D	E	A	C	B	E	A	20	1-*d*; 2-*a*, *c*; 3-*b*, *e*
VIII FƏSİL	A	B	E	D	C	E	B	A	24	1-*c*, *e*; 2-*a*, *d*; 3-*b*
IX FƏSİL	C	C	A	B	D	C	A	E	40^0	1-*b*,*c*; 2-*a*, *d*; 3-*e*
X FƏSİL	B	A	C	E	B	D	C	A	20 sm	1-*b*; 2-*a*; 3-*e*
XI FƏSİL	E	D	A	B	C	A	E	B	10	1-*b*, *d*; 2-*a*; 3-*c*, *e*
XII FƏSİL	C	B	E	A	D	B	A	C	16π	1-*b*, *c*; 2-*d*; 3-*a*, *e*
XIV FƏSİL	D	A	B	C	A	E	D	E	42 sm^2	1-*b*, *c*; 2-*a*; 3-*d*, *e*

XV FƏSİL	A	C	D	E	D	B	C	D	20	1-*c*; 2-*b*, *d*; 3-*a*
XVI FƏSİL	B	E	A	C	E	C	D	B	4 sm	1-*b*, *d*; 2-*e*; 3-*a*, *c*
XVII FƏSİL	C	D	E	A	C	B	A	C	144 sm^2	1-*d*, *e*; 2-*a*; 3-*b*, *c*
XVIII FƏSİL	E	B	C	D	A	E	B	A	288 sm^3	1-*b*; 2-*c*; 3-*a*

MÜXTƏLİF MƏSƏLƏLƏR

1. 1 sm. **2.** $\frac{15}{13}a$. **3.** $\frac{22}{23}$. **4.** 90^0; 30^0; 60^0. **5.** $\sin\frac{C}{2} = \frac{h_a h_b}{l(h_a+h_b)}$. **6.** $\cos\alpha = \frac{2ab}{a^2+b^2}$. **7.** 20. **8.** 30^0. **9.** 70^0. **11.** $\frac{a^2+\sqrt{a^4+8a^2b^2}}{4}$. **12.** 6 sm^2. **13.** $\frac{Rr\sqrt{3}}{\sqrt{R^2=Rr+r}}$. **14.** 10:5:3. **15.** $S:S_1 = 2r:R$. **16.** 90^0. **17.** 30^0. **18.** 30^0. **19.** $\frac{\pi}{2}$. **21.** 60^0; 30^0; 90^0. **22.** $A = 2arctg\frac{1}{4}$. **23.** $2\sqrt{3} - 2{,}25$. **24.** $(p+1)^2$. **36.** 1 sm; 7 sm. **41.** 10 sm. **42.** 7,5 sm. **43.** 18 sm. **44.** 25 sm. **45.** 9 sm; **48.** hə. **49.** 45^0. **51**. 12 dm; 25 dm. **52.** 576 m^2. **53.** $\frac{Ph_1h_2}{h_1+h_2}$. **54.** 7 sm; 9 sm və ya 21 sm; 38 sm. **55.** $a \cdot b$. **56.** 130 dm; 125 dm; 15 dm. **57.** 1224 sm^2. **58**. 480 sm^2. **59.** $\frac{1}{2}a^2$. **60.** $2\sqrt{2}R^2; 3R^2$. **61.** $\frac{S\sqrt{3}}{2}$. **62.** $10\pi sm^2$. **63.** $\frac{1}{4}\pi m^2$. **64.** $\frac{1}{6}\pi R^2$. **65.** $\frac{1}{6}\pi R^2$. **66.** $\frac{4Smn}{\pi(m^2+n^2)}$. **67.** $725\pi m^2$. **68.** 36

$(\pi$-2)sm^2. **69.** $\frac{360^0 \cdot S}{\pi R^2}$. **70.** $\frac{100}{3}(2\pi - 3\sqrt{3})$. **71.** $\frac{1}{4}(a^2 - p^2)$. **72.** 2 sm; 5 sm; 8 sm. **73.** $\sqrt{2S}$. **74.** 82 sm. **75.** 25 sm^2. **76.** 5 sm; 15 sm. **77.** 240 sm^2. **78.** 216 sm^2. **79.** $130\sqrt{3}$. **80.** $\sqrt{b^2 + c^2 \pm \frac{6}{5} bc}$. **81.** 81πsm^2. **82.** 6 sm^2. **83.** 3 m. **84.** 16,9 sm. **85.** 288 sm^2. **86.** $M_1(1; 1; 2)$; $M_2(-0{,}5; 0; 2{,}5)$. **87.** $\alpha = -4$; $\beta = 2$ və ya $\alpha = -8$; $\beta = -2$. **88.** $\overline{d}(2; -1; 1)$. **89.** 180^0. **90.** -9. **91.** -11,5. **92.** $cos\,\phi = \frac{1}{11}$. **93.** -6. **94.** $\overline{x}(5; 12; -16)$; $|\overline{x}| = 5\sqrt{17}$. **95.** $-\frac{22}{\sqrt{733}}$.