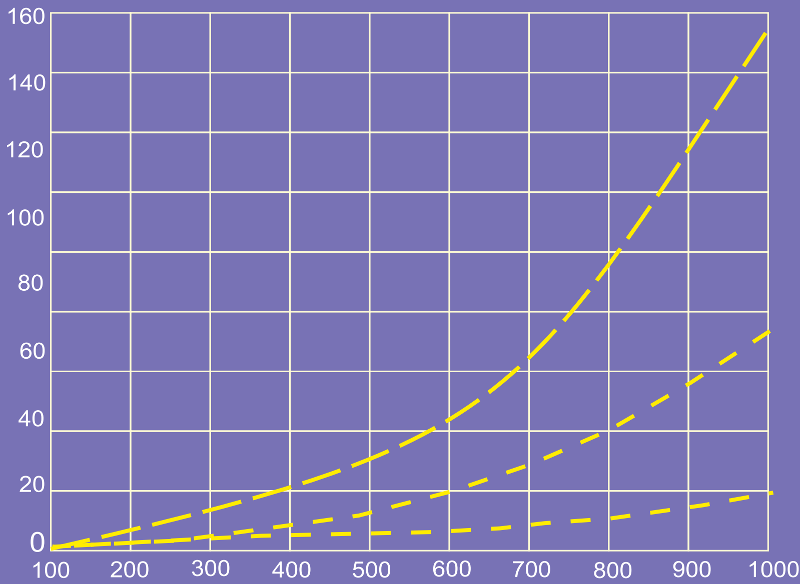
AFƏT HƏSƏNOVA

OPTİMALLAŞDIRMA ÜSULLARI



BAKI - 2024

AZƏRBAYCAN RESPUBLİKASI
ELM VƏ TƏHSİL NAZİRLİYİ

BAKI AVRASİYA UNİVERSİTETİ (BAAU)

AFƏT M. HƏSƏNOVA

OPTİMALLAŞDIRMA ÜSULLARI

Dərs vəsaiti

Bakı Avrasiya Universitetinin Elmi Şurasının keçirilmə tarixi- 29 noyabr 2024-cü il EŞ 03-10/24 nömrəli qərarı ilə çapa tövsiyə edilmişdir.

BAKI – 2024

Elmi redaktor: Az DİU-nun “Riyaziyyat və statistika” kafedrasının müəllimi i.e.n.,dos.A.İ.Cabbarova

Rəyçilər: Az DİU-nun “ Riyaziyyat və statistika” kafedrasının müdiri i.e.d.,prof. N.Q.Əhmədov

BAAU-nun “ Riyaziyyat və İKT” kafedrasının müəllimi tex.ü.f.d.,dos.B.H.Əsgərova

A.M.Həsənova: “Optimallaşdırma üsulları”. Dərs vəsaiti. MSV Nəşr: Bakı –2024, – 236 səh.

ISBN – 978-9952-39-305-7

9 789952 393057

Dərs vəsaiti Bakı Avrasiya Universitetində təhsil alan tələbələr üçün tərtib olunmuş “Optimallaşdırma üsulları” fənninin tədris proqramına müvafiq olaraq hazırlanmışdır.

GİRİŞ

İnsan fəaliyyətinin müxtəlif sahələrdə ekstremal problemlər yaranır. Hər bir ağlabatan hərəkət müəyyən mənada optimaldır, çünki o, bir qayda olaraq, digər variantlarla müqayisə edildikdən sonra seçilir. Ən yaxşı seçim problemlərinə maraq həmişə yüksək olmuşdur, lakin elm və texnologiyanın intensiv inkişafı ilə əlaqədar son illərdə bu maraq xüsusilə artmışdır.

Müasir dövrdə iqtisadi hadisə və proseslərin səmərəli şəkildə fəaliyyət göstərməsi üçün elmi və praktiki baxımdan əsaslandırılmış idarəetmə qərarlarının verilməsində optimallaşdırma üsullarından istifadə mühüm əhəmiyyətə malikdir.

Optimallaşdırma- müəyyən şərtlər altında çoxlu sayda alternativlərin mövcudluğunda ən yaxşı nəticələrin əldə edilməsinə yönəlmiş məqsədyönlü fəaliyyətdir.Daha geniş desək, optimallaşdırma, müxtəlif alternativlər arasından ən yaxşı variantları tapmağa və müəyyən etməyə yönəlmiş və mümkün variantların tam axtarışından və qiymətləndirilməsindən qaçmaga imkan verən fundamental riyazi nəticələri və ədədi üsulları əhatə edir.

"Optimallaşdırma üsulları" fənni Azərbaycan Respublikası Elm və Təhsil Nazirliyinin bakalavr səviyyəsinin (əsas(baza) ali təhsil) "İnformasiya texnologiyaları" ixtisası üzrə 2020-ci il Təhsil proqramının baza fənnidir.

Optimallaşdırma üsullarının öyrənilməsi bir çox sahələr üzrə (riyaziyyatçılar, iqtisadçılar, proqramçılar, mühəndislər) mütəxəssis hazırlığının təhsil proqramlarına daxildir. Müvafiq kursların məzmunu bir çox cəhətdən üst-üstə düşsə də, materialın *təqdim edilməsinə metodoloji yanaşma əhəmiyyətli dərəcədə fərqlənir.*

Dərs vəaiti Bakı Avrasiya Universitetinin Metodiki Şurasının № MŞ 23-01/01, 18.01.2023-cü il tarixli protokoluna əsasən təsdiq edilmiş "Optimallaşdırma üsulları" fənninin tədris proqramına müvafiq olaraq hazırlanmış və aşağıdakı əsas mövzuları əhatə edir:

— optimallaşdırma məsələsinin riyazi qoyuluşu;

— xətti proqramlaşdırma;

—tək dəyişənli funksiyanın optimallaşdırılması;

— tək dəyişənli funksiyasının minimuma endirməsinin ədədi üsulları;

— çox dəyişənli funksiyasının optimallaşdırılması;

— çox dəyişənli funksiyasının minimuma endirməsinin ədədi üsulları.

Dərs vəsaitinin hər bir fəsli iki hissədən ibarətdir: nəzəri (anlayışlar, təriflər, teoremlər, düsturlar) və praktiki (tipik məsələlərin həlli nümunələri) hissədən ibarətdir.

I FƏSİL. OPTİMALLAŞDIRMA ÜSULLARINA GİRİŞ. OPTİMALLAŞDIRMA (RİYAZİ PROQRAMLAŞDIRMA)

1.1 Optimallaşdırma nəzəriyyəsinin formalaşması və inkişafı tarixi

Optimallaşdırma termini latın sözü olan "optimus"dan götürülmüş və tərcümədə ən yaxşı deməkdir. Bəzi mənbələrdə bu sözün mənşəyi qədim roma mifologiyasının ilahəsi Opanın (məhsuldarlıq, məhsul və zənginlik ilahəsi) adı ilə əlaqələndirilir.

Bu termindən ilk dəfə Qotfrid Vilhelm Leybnitsin (1646-1716) fəlsəfə və teologiya aid müzakirələrində istifadə edilmişdir. Leybnits öz fəlsəfi nəzəriyyəsində mövcud dünya ilə bağlı mülahizələri optimal olaraq ortaya qoymuşdu. Bu, bütün mümkün dünyaların ən yaxşısı kimi tərcümə olunur. Lakin Leybnitsin fəlsəfi təlimində qəbuledilməzlik anlayışı yoxdur. Amma "ən yaxşı" da qəbuledilməz ola bilər. Sonralar onun ideyaları şüarlarından biri "Hər edilən hər şey yaxşılığa doğrudur".olan "fəlsəfi optimizm" fəlsəfi hərəkatı tərəfindən qəbul edildi.

Tarixən optimallaşdırma nəzəriyyəsi əsasında bir neçə riyazi qanunauygunluqlar müəyyən edilmişdir. XVII əsrdə fransız riyaziyytçısı Pier Ferma (1607-1665), maksimum və minimum nöqtələrə yaxınlaşdıqda, funksiyanın sürətinin sıfıra endiyi bir qanunauygunluq müəyyən etmişdir.

XVIII əsrdə elm adamları ən yaxşı həllərin yalnız idarə olunan dəyişəndən deyil, həm də bütövlükdə funksiyanın seçimindən asılı olduğu problemlərlə qarşılaşdılar. Sonralar, 1696-cı ildə İsveçrəli riyaziyyatçı, mexanik, həkim və klassik filoloq İ.Bernulli (1667-1748) bu qəbildən olan məsələlərin spesifikliyini görərək, riyaziyyatçılara braxistoxron(yunanca "ən qısa zaman) problemini (Leybnisin məsləhəti ilə müsabiqə əsasında) təklif etmişdi. Sonrakı illərdə bir çox riyaziyyatçılar variasiya məsələlərinin fərdi xüsusi hallarını həll etdilər, lakin variasiya problemlərinin həlli üçün ümumi bir üsul kəşf etmək şərəfi Leonard Eylerə(1707-1783)məxsusdur. Eyler metodu sonralar J.L.Laqranj (11736-1813) tərəfindən təkmilləşdirilmişdir. Variasiya hesablamasının inkişaf dövrünü davamlı optimallaşdırma üsullarının inkişafı dövrü də adlandırmaq olar.

Daha sonra XIX əsrdə Karl Teodor Vilhelm Veyerştrass (1815-1897) və Karl Q. Yacobi(1804-1851) bu problemlər üzərində işləmişdilər.

İlk ətraflı tədqiq edilən ekstremum axtarış problemləri xətti proqramlaşdırma problemləri idi. Hələ 1820-ci ildə əvvəlcə Jozef Furye (1768-1830), sonra isə Leonid Vitalievich Kantoroviç (1912-1986) və Corc Bernard Danziq (1914-2005) xətti proqramlaşdırma məsələlərini tərtib etdilər və onun həlli üçün üsullar təklif etdilər.

Optimallaşdırma nəzəriyyəsinin inkişafında Sovet riyaziyyatçısı Leonid Vitalievich Kantoroviç mühüm rol oynamışdır. 1938-ci ildə 26 yaşlı riyaziyyat professoru

L.V.Kantoroviç ilk dəfə məhdud istehsal resurslarından optimal (yəni müəyyən məhdudiyyətlər altında bütün mümkün variantlardan ən yaxşısı) istifadə problemini tərtib etdi və onun həlli üçün müvafiq riyazi üsul təklif etmişdi. O, istehsalın planlaşdırılmasında ən çox rast gələnən problemlərin modelləşdirilməsi və əldə edilə bilən ən yaxşı nəticələrin tapılması üsullarını təsvir etdiyi məqaləsi ilə müasir istehsal sistemlərində optimallaşdırmaya olan ehtiyacı ortaya qoymuşdu (1939).

L.V. Kantoroviç istehsal sistemlərinin məhsuldarlığını artırmaq üçün doqquz müxtəlif optimallaşdırma problemi müəyyən etdi və bu problemləri həll etmək üçün hər bir problem üçün fərqli həll alqoritmi işləyib hazırlamışdı. Kantoroviçin ciddi riyazi tədqiqatlar nəticəsində əldə etdiyi bu prinsipial əhəmiyyətli nəticə planlı iqtisadiyyatda uzun müddət gizli saxlanılmış və qabaqcıl elmi, mühəndis-texniki və iqtisadi ictimaiyyətə təqdim edilməmişdir. Bu tədqiqatların nəticələri yalnız uzun illər sonra layiqincə qiymətləndirilmişdir. 1975-ci ildə L.V. Kantoroviç Holland əsilli amerikalı iqtisadçı və riyaziyyatçı Tjalling C.Koopmansla (1910-1985) birgə "Resursların optimal bölüşdürülməsi nəzəriyyəsinin inkişafına verdiyi töhfələrə görə" iqtisadiyyat üzrə Nobel mükafatını almışdı.

Optimallaşdırma məsələlərinin həlli üçün Simpleks üsulunun tərtibi George Bernard Dantziqə (1914-2005) məxsusdur. Onun xidməti böyük ölçülü məsələlərin həlli üçün metodların ümumiləşdirilməsindən ibarət olmuşdur.

ABŞ müdafiə sektorunda planlaşdırma ilə məşğul olan amerikalı riyaziyyatçı D. Dantziq 1947-ci ildə optimallaşdırma problemini və "xətti proqramlaşdırma" adlandırdığı müvafiq riyazi aparatı yenidən və müstəqil şəkildə tərtib etdi və onun maşın həlli üçün səmərəli “simpleks metodundan” istifadə etməyi təklif etdi. 50-ci illərdə ABŞ-da ilk kompüterlərin meydana çıxması ilə bu üsuldan dərhal istifadə edildi və proqramlaşdırıldı. Bundan sonra xətti proqramlaşdırmanın müxtəlif sahələrdə: hərbi, sənaye, biznes və digər sənaye sahələrində sürətli tətbiqi prosesi başladı. Tjalling C.Koopmans Dantziqin işinin əhəmiyyətini vurgulayır və Nobel Mükafatı Komitəsinə Dantziqin aldıgı mükafatın ortağı olması lazım olduğunu bildirmişdir. Lakin o, çağırışına cavab ala bilməmiş və Nobel mükafatının üçdə birini Beynəlxalq Tətbiqi Sistemlərin Təhlili İnstitutunda (ILASA) George Dantziq adına yaradılmış təqaüd proqramına bağışlamışdı.

Bir çox elmlərdə olduğu kimi, optimallaşdırma sahəsində də XX əsr çox məhsuldar bir əsr olmuşdur. Bu dövrdə optimmalaşdırma üsullarının zənginliyinin artırılması C.Neymanın((1903-1957), L.Kantoroviçin, D.Danziqin ,R. Bellmanın (1920-1984), A. Kolmogorov (1903-1987), Klod Elvud Şennonun (1916-2001) və bir çox başqa alimlərin adları ilə baglıdır.

Beləliklə, XX əsrin ortalarında nəzəri inkişafla və praktik ehtiyacların ayrılması baş verdi. Bu uyğunsuzluq ötən əsrin 40-cı illərinin sonlarında kompüterlərin yaradılmasına qədər davam etdi. 1947-ci ildə D.Dantziq tərəfindən simpleks metodunun yaradılmasından və ilk kompüterlərin meydana çıxmasından sonra minlərlə tətbiqi məsələ tərtib edilmiş və həll edilmişdir. Bir qədər sonra R.Bellman dinamik proqramlaşdırma metodunu işləyib hazırladı ki, bu da xarakteristikaları zamandan asılı olan sistemlər üçün məsələləri həll etməyə imkan verdi. Həmçinin, riyazi proqramlaşdırmaya və optimal idarəetməyə əhəmiyyətli töhfələr L.S. Pontryagin (1908-1988) tərəfindən variasiyaların hesablanması bölməsini inkişaf etdirdirməklə verilmişdir.XX əsrin 70-ci illərində tətbiqi riyaziyyatın bölməsi - optimallaşdırma nəzəriyyəsi və üsulları formalaşdı. Bu dövrə qədər, yəni kompüterlərin yaranmasına qədər optimallaşdırma üsullarının tətbiqi fərdi xarakter daşıyırdı. Məsələlərin yüksək ölçülü olması və parametrik asılılıqların mürəkkəbliyi böyük hesablama işlərini tələb edirdi. Hal-hazırda optimallaşdırma üsulları istehsalın proyektləşdirilməsi üçün əsas avtomatlaş-dırılmış sistemlərə daxil edilmişdir.

1.2. Optimallaşdırma nəzəriyyəsinin əsas müddəaları

Optimallaşdırma məsələsinin həlli üçün riyazi modelin qurulması prosesini aşağıdakı əsas mərhələlərə bölmək olar:

1) Optimallaşdırma obyektinin sərhədlərinin müəyyən edilməsi. Bu mərhələyə ehtiyac, əksər real sistemlərin bütün aspektlərinin nəzərə alınması və hərtərəfli təsvir edilməsinin mümkünsüzlüyü ilə diktə olunur. Əsas dəyişənləri, parametrləri və məhdudiyyətləri müəyyən etdikdən sonra sistemi təxminən real dünyanın bəzi təcrid olunmuş hissəsi kimi təsəvvür etmək və onun daxili strukturunu sadələşdirmək lazımdır. Məsələn, bir

müəssisənin sexlərindən birinin fəaliyyətini optimallaşdırarkən, bəzi hallarda digər sexlərin iş xüsusiyyətlərinin, bütün müəssisənin təchizat və satış sistemlərinin, onun digər təşkilatlarla qarşılıqlı əlaqəsinin, bazarın konyukturasını və və bir çox başqa amillərin təsirini nəzərə almamaq olar. Belə halda sex təcrid olunmuş sistem hesab olunacaq və onun xarici aləmlə əlaqələri ya sabit sayılacaq, ya da heç nəzərə alınmayacaqdır.

Onu da qeyd edək ki, optimallaşdırma obyektinin ilkin sərhədlərinin ugursuz seçildiyi hallar da ortaya çıxa bilər. Bu, sistemin və onun riyazi modelinin sonrakı təhlili, optimal həllin axtarışının nəticələrinin şərhi, təcrübə ilə müqayisəsi və s. zamanı aydın olur. Belə halda sistemin sərhədlərini bəzən genişləndirmək, bəzən isə daraltmaq lazımdır.

2)xarakterik meyar adlanan ən yaxşı variantı müəyyən etməyə imkan verən kəmiyyət meyarının seçimi. Meyarlar konkret məsələdən asılı olaraq iqtisadi və ya texnoloji xarakterli ola bilər (minimum xərc, maksimum mənfəət və s.). Hansı meyarın xarakterik meyar kimi qəbul edilməsindən asılı olmayaraq, o, ən yaxşı seçim üçün maksimum (və ya minimum) qiymət almalıdır.

Mühəndislik təcrübəsində geniş çeşidli optimallaşdırma meyarlarından istifadə olunur. Məsələn, iqtisadi xarakterli meyarlar (maya dəyəri, mənfəət, əsaslı xərclər və s.), sistemin texniki və ya fiziki parametrləri (texnoloji prosesin müddəti, sərf olunan enerji, maksimum mexaniki yük, əldə edilən hərəkət sürəti) və s.

3) xarakterik meyarın ifadə olunduğu sistemdaxili dəyişənlərin seçilməsi. Yalnız xarakterik kriteriyaya ən çox təsir edən dəyişənləri seçmək lazımdır.Riyazi modelin qurulmasının bu mərhələsində ən yaxşı nəticə əldə etmək üçün dəyərləri seçilə və dəyişdirilə bilən kəmiyyətləri (idarə olunan dəyişənlər) və sabit və ya xarici amillərlə müəyyən edilən kəmiyyətləri ayırd etmək lazımdır. İdarə olunan dəyişənlərin bu dəyərlərinin müəyyən

edilməsi ən yaxşı (optimal) vəziyyətə uyğundur və optimallaşdırma məsələsini təmsil edir.

Seçilmiş sərhədlərdən asılı olaraq eyni dəyərlər optimallaşdırılan sistem və onun təsvirindəki təfərrüat səviyyəsi idarə olunan dəyişənlər ola bilər və ya olmaya da bilər. Məsələn, bir emalatxananın işinin optimallaşdırılması ilə bağlı qeyd olunan vəziyyətdə, başqa bir emalatxanadan bəzi xammalın tədarükünün həcmi bəzi hallarda sabit və ya seçimimizdən asılı olmayan və digər hallarda - tənzimlənən (yəni idarə olunan) dəyişən. hesab edilməlidir.

4)İdarə olunan dəyişənlərə məhdudiyyətlərin müəyyən edilməsi. Real şəraitdə idarə olunan dəyişənlərin qiymətlərinin seçimi, bir qayda olaraq, resursların, güclərin və digər imkanların məhdud olması ilə bağlı məhdudiyyətlərə məruz qalır. Riyazi model qurarkən bu məhdudiyyətlər adətən bərabərlik və bərabərsizliklər şəklində yazılır və ya idarə olunan dəyişənlərin dəyərlərinin aid olduğu çoxluqları göstərir. Nəzarət olunan dəyişənlərə dair bütün məhdudiyyətlər optimallaşdırma məsələsinin mümkün çoxlugunu müəyyən edir. Məsələn, emalatxana tərəfindən istehsal olunan müəyyən bir növ məhsulun illik həcmi idarə olunan dəyişəndirsə, onun dəyərləri, ilk növbədə, mənfi ola bilməz və ikincisi isə emalatxana avadanlığının maksimum məhsuldarlığı ilə yuxarıdan məhdudlaşır.

5) sistemdaxili dəyişənlər arasındakı əlaqəni təsvir edən modelin qurulması. Model dəyişənlər arasındakı əlaqəni təsvir edir və bu dəyişənlərin xarakterik kriteriyaya təsir dərəcəsini əks etdirir. Modelə material, istehsal və digər balansların əsas tənlikləri,sistemdəki iqtisadi prosesləri təsvir edən tənliklər, dəyişənlərin mümkün qiymətləriin diapazonunu müəyyən edən bərabərsizliklər daxil edilir.

Optimallaşdırma məsələsini qurarkən, optimallaşdırılan obyekti (sistemi) və optimallaşdırmanın məqsədini, yəni "nəyi və harada təkmilləşdirmək lazım olduğunu” düzğün başa düşmək lazımdır. Hər bir optimallaşdırma məsələsində obyektin yalnız bir xüsusiyyətinin ekstremal dəyərinin müəyyən edilməsinə nail olmaq lazımdır, çünki demək olar ki, həmişə optimallaşdırılmış xüsusiyyətlər müəyyən ziddiyyətdədir: "keyfiyyət"-"kəmiyyət", "operativlik"-"dəqiqlik" ” və s. Məsələn, "Minimum maya dəyəri ilə maksimum məhsuldarlıq əldə etmək" cümləsi optimallaşdırma məsələsinin səhv qoyuluşunu göstərir, çünki burada qoyulmuş məsələ obyektin iki xüsusiyyətinin ekstremumunun tapılmasını tələb edir. Belə vəziyyətdə optimallaşdırma məsələsinin aşagıdakı iki variantının nəzərdən keçiilməsi daha məqsədəuyğundur:

1)sabit maya dəyəri əsasında maksimum məhsuldarlığı nüəyyən etmək: Burada optimallaşdırma meyarı məhsuldarlıqdır ;

2)sabit məhsuldarlıq əsasında minimum maya dəyərini müəyyən etmək; Burada optimallaşdırma meyarı maya dəyəridir.

Daha sonra, optimallaşdırma meyarının nədən asılı olduğu müəyyən edilməlidir. Bu, optimallaşdırma məsələsinin dərk edilməsində çox vacib mərhələdir, çünki meyarın ədədi qiymətləndirilməsi üsulunu məhz o müəyyən edir. Eyni zamanda bu meyara təsir edən elementlərin hansı şərtlərə cavab verməli olduğunu da aydın şəkildə başa düşmək lazımdır.

Seçilmiş optimallaşdırma meyarına əsasən məqsəd funksiyası tərtib edilir. Optimallaşdırma meyarının növü və ya məqsəd funksiyası konkret optimallaşdırna məsələsinə uyğun müəyyən edilir.

1.3. Optimallaşdırma nəzəriyyəsinin əhəmiyyəti

Optimallaşdırma məsələlərinin həlli (optimallaşdırma prosesi) bütün mühəndislik fəaliyyətlərinin əsasını təşkil edir. Optimallaşdırma üsullarının səmərəliliyi, bir tərəfdən, riyazi analiz, xətti cəbr, riyazi məntiq və alqoritmlər nəzəriyyəsi, funksional analiz, diferensial hesablama kimi riyazi fənlərin əsas nəticələrindən məharətlə istifadə etməklə əlaqədardır.Digər tərəfdən, mühəndislik təcrübəsində optimallaşdırma məsələlərinin həcmi kifayət qədər böyükdür, uygun olaraq alqoritmlərin həyata keçirilməsi üçün tələb olunan vaxt da böyükdür. Buna görə də optimallaşdırma məsələlərinin həlli kompüter vasitəsilə həyata keçirililə bilər.

Optimallaşdırma nəzəriyyəsinin əhəmiyyəti və qiyməti ondan ibarətdir ki, o, çoxsaylı problemlərin təhlili və həlli üçün adekvat konseptual çərçivəni təmin edir:

–əməliyyatların tədqiqində: texniki-iqtisadi sistemlərin optimallaşdırılması, nəqliyyat məsələləri, ehtiyatların idarə edilməsi və s.;

–ədədi təhlildə: approksimasiya, reqressiya, xətti və qeyri-xətti sistemlərin həlli, ədədi üsullar, o cümlədən sonlu elementlər üsulları və s.;

–avtomatlaşdırmada: nümunənin tanınması, optimalidarə etmə, filtrasiya, istehsalın idarə edilməsi, robototexnika və s.;

–riyazi iqtisadiyyatda: böyük makroiqtisadi modellərin həlli, sahibkarlıq modelləri, qərar vermə nəzəriyyəsi və oyun nəzəriyyəsi.

Optimal nəticə, bir qayda olaraq, dərhal tapılmır, lakin optimallaşdırma prosesi adlanan prosesin nəticəsidir. Optimallaşdırma prosesində istifadə olunan üsullara optimallaşdırma metodları deyilir. Riyazi üsullarla optimal həllin tapılması məsələlərinə isə optimallaşdırma məsələləri deyilir.

Təcrübədə əksər hallarda "ən yaxşı" anlayışı kəmiyyət meyarları ilə ifadə edilə bilər - minimum xərclər, minimum vaxt, maksimum mənfəət və s. Buna görə də optimal (optimum - ən yaxşı) nəticənin tapılmasını riyazi məsələ şəklində qoymaq mümkündür.Optimal (optimum -ən yaxşı) nəticənin tapılmasında riyazi üsullardan istifadə:

1)İqtisadi hadisə və proseslər arasında mövcud olan daha mühüm əlaqələrin müəyyən edilməsinə imkan verir;

2)Mövcud şərtlər əsasında dəqiq ifadə edilmiş zəruri ilkin məlumatlar əsasında deduksiya üsulları vasitəsilə tədqiq olunan obyektə uygun nəticələrin əldə edilməsinə imkan verir;

3)Müxtəlif hadisələri təsvir etmək üçün rahat və səmərəli yollar təqdim edir, hadisə haqqında yeni biliklər əldə edilir;

4) Riyazi üsullardan istifadə edilməsi iqtisadi nəzəriyyənin əsas müdəalarını, anlayışlarını və nəticələrini dəqiq və daha yıgcam formada ifadə etməyə imkan verir.

ÖZÜNÜ YOXLAMAQ ÜÇÜN SUALLAR VƏ TAPŞIRIQLAR

1.Optimallaşdırma nədir?

2. Optimallaşdırma terminindən ilk dəfə kim istifadə etmişdir?

3. Optimallaşdırma nəzəriyyəsinin inkişafında hansı alimlərin rolu olmuşdur?

4. Optimallaşdırma məsələsinin həlli üçün riyazi modelin qurulması prosesinin əsas mərhələləri hansılardır?

Optimallaşdırma obyektinin sərhədlərinin müəyyən edilməsi nə ilə baglıdır?

6.Optimallaşdırma nəzəriyyəsinin inkişafında Sovet riyaziyyatçısı Leonid Vitalievich Kantoroviçin rolu nədən ibarət olmuşdur?

7.Optimallaşdırma məsələlərinin həlli üçün Simpleks üsulu kim tərəfindən tərtib edilmişdir?

8. Optimallıq meyarı nədir?

9. Optimallaşdırma nəzəriyyəsinin əhəmiyyətini izah edin.

10. Optimal nəticənin tapılmasında riyazi üsullardan istifadənin əhəmiyyəti nədən ibarətdir?

II FƏSİL. OPTİMALLAŞDIRMA MƏSƏLƏSİNİN RİYAZİ QOYULUŞU

2.1. Model və modelləşdirmə anlayışlarının mahiyyəti

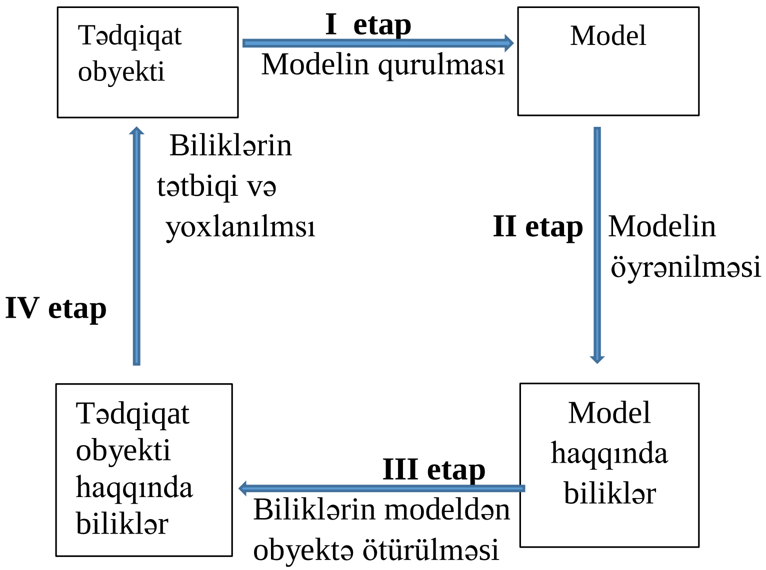
Optimallaşdırma nəzəriyyəsinin nəticələrindən və hesablama prosedurlarından istifadə etmək üçün ilk növbədə baxılan məsələni riyazi dildə formalaşdırmaq, yəni optimallaşdırma obyektinin riyazi modelini qurmaq lazımdır. Riyazi model- tədqiq olunan proses və yaxud hadisənin az və ya çox dərəcədə riyazi təsviridir. Yəni, optimal həlli tapmaq məqsədilə riyazi üsullardan istifadə etməklə modelləşdirmə obyektinin xüsusiyyətlərini və onlar arasındakı əlaqələri təsvir edən iqtisadi problemin funksiyalar, tənliklər, bərabərsizliklər, ədədlər və s. şəklində ifadəsidir.

Əksər real situasiyalarda hadisənin ayrı-ayrı hissələri arasında və xarici aləmlə qarşılıqlı əlaqəsini, onun fəaliyyətinin bütün məqsədlərini nəzərə almaqla optimallaşdırılan sistemin hərtərəfli riyazi təsvirini vermək çətin və ya qeyri-mümkün olur. Buna görə də, riyazi model qurarkən, bir qayda olaraq, tədqiq olunan obyektin yalnız ən vacib tərəflərini vurğulamaq və nəzərə almaq lazımdır ki, qoyulmuş məsələnin riyazi təsvirini, eləcə də sonrakı həllini həyata keçirmək mümkün olsun və riyazi modeldə nəzərə alınmayan amillər yekun optimallaşdırma nəticəsinə əhəmiyyətli dərəcədə təsir etməsin.

Qeyd etmək lazımdır ki, istənilən model modelləşdirmə prosesinin məhsulu hesab edilir. Modelləşdirmə dedikdə isə iqtisadi-riyazi modellərin qurulması, onun öyrənilməsi və tətbiq olunması prosesləri başa düşülür.

Modelləşdirmə prosesi tədqiqatın məqsədinin müəyyən edilməsi, real obyektin öyrənilməsi və onun haqqında məlumatların təhlili ilə başlayır. Bu məlumat əsasında tədqiqatçı real obyektin zehni obrazını yaradır. Sonra modelləşdirmə obyektinin mənalı təsviri həyata keçirilir. Onun fəaliyyətinin adi şəkildə təsviri modelləşdirmə obyektinə xas olan qanunauygunluqları təsvir etmək üçün verbal bir model hesab edilə bilər.

Riyazi modelləşdirmə real həyatda vəziyyətin fiziki, simvolik və ya mücərrəd modelinin yaradılması prosesidir.Riyazi modelləşdirmə prosesinin strukturunu aşağıdakı şəkildə göstərmək olar:



Şəkil 2.1. Modelləşdirmə prosesinin strukturu

Beləliklə, riyazi modelləşdirmə bir- birilə qarşılıqlı əlaqədə olan 4 etapdan ibarət prosesdir və tədqiqatçıdan müvafiq sahədə dərin biliyə, praktik təcrübəyə, intuisiyaya və əldə edilmiş nəticələrin tənqidi təhlilinə malik olmağı tələb edən mürəkkəb və məsuliyyətli yaradıcılıq işidir. Optimallaşdırma nəzəriyyəsini konkret məsələsinin həllinə tətbiq etmək üçün optimallaşdırma məsələsinin qoyuluşu adlanan müəyyən hərəkətlər ardıcıllığını həyata keçirmək lazımdır.

2.2.Ekstremal məsələlər. Təriflər

Məsələnin riyazi modelinin düzgün formalaşdırılması optimallaşdırma tədqiqatının uğurunun açarıdır.Hər bir optimallaşdırma məsələsinin riyazi qoyuluşu aşağıdakıları əhatə edir:
1)$f(x): R^n \rightarrow R$ məqsəd funksiyasının müəyyən edilməsi; Məqsəd funksiyası (səmərəlilik göstəricisi, optimallıq meyarı və s.)– seçilmiş optimallıq meyarı nöqteyi-nəzərindən məqsədi riyazi formada ifadə edən funksiya. Məqsəd funksiyası mənfəətin, istehsalın həcminin, istehsal xərclərinin və s. ifadəsi ola bilər. Məqsəd funksiyası adətən Z və ya f hərfləri ilə işarələnir:

$$Z = Z(X) \text{ və ya } f = f(X)$$

Məqsəd funksiyasının qiymətlərinə əsaslanaraq, mümkün variantlar çoxluğundan məqsəd funksiyasını ekstremala çatdıran ən yaxşı variant seçilir.
2)$f(x)$ funksiyası üçün $x \in R^n$ mümkün həllər coxlugunun müəyyən edilməsi;
3)optimallaşdırma meyarının müəyyən edilməsi ,$extr \in \{max, min\}$.
Beləliklə, yuxarıda sadalananlar ekstremal və ya optimallaşdırma məsələsini müəyyən edir və optimallaşdırma məsələsinin riyazi modeli aşağıdakı kimi təqdim oluna bilər:

$$f(x) \rightarrow \text{opt(extr)} \;\; \mathrm{x} \in \mathrm{X}$$

Optimallaşdırma məsələsini aşağıdakı kimi izah edək: X çoxluğunda $f(x)$ məqsəd funksiyasına ekstremal (minimum və ya maksimum) qiymət verən $\mathrm{x}_0 \in \mathrm{X}$ (əgər varsa) tapmaq tələb olunur, yəni x_0 üçün aşagıdakı şərtlərdən biri ödənməlidir:

$$\mathrm{x} \in \mathrm{X} \text{ üçün } f(\mathrm{x}_0) \le f(x), \quad (2.1)$$

$$\mathrm{x} \in \mathrm{X} \text{ üçün } f(\mathrm{x}_0) \ge f(x). \quad (2.2)$$

Əgər X çoxluğunda belə element yoxdursa, aşagıdakı

$$\lim_{k\rightarrow\infty} f(x_k) = \inf_{\mathrm{x}\in\mathrm{X}} f(x) \qquad (2.3)$$

$$\lim_{k\to\infty} f(x_k) = \sup_{x\in X} f(x) \qquad (2.4)$$

şərtlərindən birini ödəyən

$$\{x_k\}, k = 1,2,3,\dots, x_k \in X \ (2.5)$$

ardıcıllığını qurmaq lazımdır.

Tərif 2.1. $f(x_0) \le f(x)$, şərtini ödəyən $x_0 \in X$ nöqtəsi X çoxluğunda $f(x)$ funksiyasının qlobal minimum nöqtəsi adlanır, uygun olaraq $f(x_0) \ge f(x)$. şərtini ödəyən $x_0 \in X$ nöqtəsi X çoxluğunda $f(x)$ funksiyasının qlobal maksimum nöqtəsi adlanır.

$$\lim_{k\to\infty} f(x_k) = \sup_{x\in X} f(x)$$

bərabərliyini təmin edən

$$\lim_{k\to\infty} f(x_k) = \inf_{x\in X} f(x)$$

$\{x_k\}$ardıcıllığı X çoxluğunda $f(x)$ funksiyasını minimallaşdıran ardıcıllıqdır, uygun olaraq $\{x_k\}$, $k = 1,2,3,\dots, x_k \in X$

bərabərliyini təmin edən $\{x_k\}$ ardıcıllığı X çoxluğunda $f(x)$ funksiyasını maksimallaşdıran ardıcıllıqdır.

Əgər $X = R^n$ olarsa, onda optimallaşdırma məsələsi şərtsiz ekstremum ,əgər $X \neq R^n$ olarsa, onda optimallaşdırma məsələsi şərti ekstremum məsələsidir.

Tərif 2.2. $\forall x \in X$ üçün $m \le f(x)$ təmin edən m ədədi varsa, $f(x)$ funksiyası X çoxluğunda aşağıdan, $\forall x \in X$ üçün $M \le f(x)$ təmin edən M ədədi varsa, $f(x)$ funksiyası X çoxluğunda yuxarıdan məhdudlaşan adlanır.

Tərif 2.3. $m_0 = \inf_{x\in X} f(x)$ədədi X çoxluğunda $f(x)$ funksiyasının aşağı həddi adlanır:

1) Əgər $\forall x \in X$ üçün $m_0 \le f(x)$
2) $\forall \varepsilon > 0 \exists x_\varepsilon \in X$: $f(x_\varepsilon) \ge m_0 + \varepsilon$

Əgər $f(x)$ X çoxluğunda aşağıdan məhdud deyilsə, onda fərz edilir ki,

$$m_0 = \inf_{x \in X} f(x) = -\infty.$$

$M_0 = \sup\limits_{x \in X} f(x)$ədədi X çoxluğunda $f(x)$ funksiyasının yuxarı həddi adlanır:

1)Əgər $\forall x \in X$ üçün $M_0 \leq f(x)$

2) $\forall \varepsilon > 0 \exists x_\varepsilon \in X$: $f(x_\varepsilon) > M_0 - \varepsilon$

Əgər $f(x)$ X çoxluğunda yuxarıdan məhdud deyilsə, onda fərz edilir ki,

$$M_0 = \sup_{x \in X} f(x) = +\infty.$$

Məsələ 2.1. $f(x) = \frac{1}{x}$, $x = [1, +\infty)$məqsəd funksiyasını nəzər-dən keçirək:

Müəyyən edək ki, X çoxluğunda $f(x)$ funksiyasının minimum nöqtələr çoxluğu boşdur $m_0 = \inf\limits_{x \in X} f(x) = 0$ və X çoxluğunda $f(x)$ funksiyasının maksimumu mövcuddur və 1-ə bərabərdir.

Həlli: Fərz edək ki, X çoxluğunda $f(x)$funksiyasının minimum nöqtələri çoxluğu boş deyil, yəni $f(x)$ funksiyasının ən azı bir $x_0 \in X$ minimum nöqtəsi var. İxtiyari $x > x_0$ ədədini götürək. Onda

$$x \in X \text{ və } f(x_0) = \frac{1}{x_0} > \frac{1}{x},$$

yəni x_0 X çoxluğunda $f(x)$ -in minimum nöqtəsi deyil.Yaranan ziddiyyət X çoxluğunda $f(x)$ funksiyasının minimum nöqtələr çoxluğunun boş olduğunu sübut edir. Müəyyən edək ki,

$$m_0 = \inf_{x \in X} f(x) = 0.$$

Aydındır ki, ixtiyari $x \in X = [1, +\infty)$ üçün

$$f(x) = \frac{1}{x} > 0$$

bərabərliyi dogrudur. Daha sonra $\varepsilon > 0$ olsun. İxtiyari $x_\varepsilon > max\left(\frac{1}{\varepsilon}, 1\right)$ götürək. Onda

$$x \in X \text{ və } f(x_\varepsilon) < \varepsilon = 0 + \varepsilon$$

Buna görə də $m_0 = 0$

Burada:

$$f(x) = \frac{1}{x} \text{ üçün } \quad M_0 = \sup_{x \in X} f(x) = \max_{x \in X} f(x) = f(1) = 1.$$

Məsələ 2.2. $f(x) = e^{-|x|}$, $X = R$ məqsəd funksiyasını nəzərdən keçirək: Müəyyən edək ki, X çoxluğunda $f(x)$ funksiyasının minimum nöqtələr çoxluğu boşdur.

$m_0 = \inf_{x \in X} f(x) = 0$ və $M_0 = \sup_{x \in X} f(x)$ tapaq:

Həlli: Fərz edək ki, X çoxluğunda $f(x)$funksiyasının minimum nöqtələri çoxluğu boş deyil, yəni $f(x)$ funksiyasının ən azı bir $x_0 \in X$ minimum nöqtəsi var. İxtiyari $x > x_0$ ədədini götürək. Onda

$$x \in X \text{ və } f(x_0) = e^{-|x_0|} > e^{-|x|},$$

yəni x_0 X çoxluğunda $f(x)$ -in minimum nöqtəsi deyil. Yaranan ziddiyyət X çoxluğunda $f(x)$ funksiyasının minimum nöqtələr çoxluğunun boş olduğunu sübut edir.

Müəyyən edək ki,

$$m_0 = \inf_{x \in X} f(x) = 0.$$

Aydındır ki, ixtiyari $x \in X = [1, +\infty)$ üçün

$$f(x) = e^{-|x|} > 0$$

bərabərliyi dogrudur. Daha sonra $\varepsilon > 0$ olsun. İxtiyari $x_\varepsilon > max\left|ln\frac{1}{\varepsilon}\right|$ götürək. Onda

$$x \in X \text{ və } f(x_\varepsilon) < \varepsilon = 0 + \varepsilon .$$

Buna görə də $m_0 = 0$

Burada:

$$f(x) = e^{-|x|} \text{ üçün } \quad M_0 = \sup_{x \in X} f(x) = 1,$$

həmçinin

$$\sup_{x \in X} f(x) = \max_{x \in X} f(x) = f(0) = 1.$$

2.3. Optimallaşdırma məsələlərinin həllinin mümkünlüyü

X çoxluğunda $f(x)$funksiyasının qlobal minimum və ya maksimum nöqtələrinin mövcudluğunu təmin edən şərtlərdən, aşağıdakı teoremlər əmələ gəlir:

Teorem 2.1 (Veyerştrass). Əgər $X \subseteq R^n$ çoxluğu boş deyil və kompaktdırsa (məhdud və qapalı) və $f(x)$ funksiyasıonun üzərində kəsilməzdirsə, onda $f(x)$ funksiyasının qlobal minimum nöqtələr çoxluğu (və qlobal maksimum nöqtələr çoxluğu) boş deyil və kompaktdır.

Veyerştrass teoreminin şərtlərinə əsasən istənilən minimuma endirmə $\{x_k\}$ ardıcıllığı qlobal minimum nöqtələr çoxluğuna yaxınlaşır.

Teorem 2.2. Fərz edək ki, $X \subseteq R^n$çoxluğu boş deyil və qapalıdır və $f(x)$ funksiyası onun üzərində kəsilməzdir. Burada eyni zamanda aşağıdakı şərtlərdən ən azı biri təmin olunur:

1) $X_* \subseteq X$ nöqtəsi var ki,

$$X_* = \{\mathrm{x} \in \mathrm{X} : f(\mathrm{x}) \le f(x_*)\}$$

şəklində çoxluqda məhduddur.

2)istənilən $\{x_k\}$, k=1,2,3,......, $x_k \in$ X ardıcıllığı üçün $\lim\limits_{k\to\infty} \|x_k\| = +\infty$, və belə bir ardıcıllıq mövcuddursa,

$$\lim_{k\to\infty} f(x_k) = +\infty$$

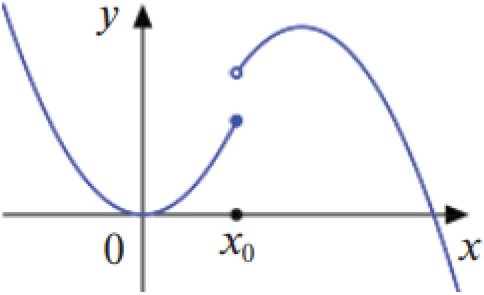
bərabərliyi doğrudur.

Onda X çoxluğunda $f(x)$ funksiyasının qlobal minimum nöqtələr çoxluğu boş deyil və kompaktdır. 2.1 və 2.2-ci teoremlərdə $f(x)$ məqsəd funksiyasının kəsilməzlik şərti zəiflədilə bilər.

Tərif 2.4. $f(x): X \subseteq R^n \to R$ funksiyası $x_0 \in$ X nöqtəsində aşağıdan yarı kəsilməz funksiya adlanır (əgər

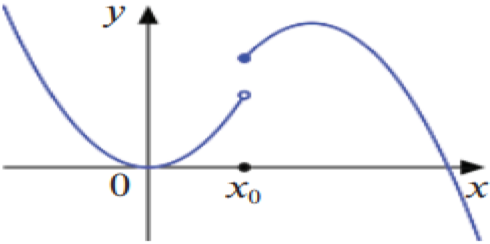
$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0$; $\forall x \in X$ üçün

$$\|x - x_0\| < \delta \to f(\mathrm{x}) \ge f(x_0) - \varepsilon \quad \text{təmin edilirsə).}$$



Şəkil 2.2 Aşagıdan yarıkəsilməz funksiya

$f(x)$funksiyası $x_0 \in$ X nöqtəsində yuxarıdan yarı kəsilməz funksiya adlanır (əgər
$\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0;\ \forall x \in X$ üçün
$\|x - x_0\| < \delta \to f(\mathrm{x}) \geq f(x_0) + \varepsilon$ təmin edilirsə).



Şəkil 2.3. Yuxarıdan yarıkəsilməz funksiya

$f(\mathrm{x})$ funksiyası $x_0 \in$ X nöqtəsində yalnız və yalnız o halda kəsilməz hesab olunur ki, bu nöqtədə həm aşağıdan, həm də yuxarıdan yarı kəsilməzdir.

Yarıkəsilməz funksiyaların xüsusiyyətlərini sadalayaq:

1. Əgər $f(\mathrm{x})$ yuxarıdan yarı kəsilməz funksiyadırsa, onda - $f(\mathrm{x})$ aşağıdan yarı kəsilməzdir.

2. Fərz edək ki, f(x) və g(x) iki aşağıdan (yuxarıdan) yarı kəsilməz. funksiyalardır, onda onların cəmi , f(x)+ g(x) də aşağıdan (yuxarıdan) yarı kəsilməzdir.
3. Əgər f(x) qapalı X çoxluğunda aşağıdan yarı kəsilməz funksiyadırsa, onda istənilən $c = const$ üçün

$$X_c = \{\mathrm{x} \in \mathrm{X} : f(\mathrm{x}) \leq c\}$$

çoxlugu qapalıdır (əgər boş deyilsə).
x_0 nöqtəsində aşağıdan (yuxarıdan) yarımkəsilməz funksiyaların monoton artan (azalan) ardıcıllığının sərhədi x_0 nöqtəsində aşağıdan (yuxarı) yarı kəsilməz funksiyadır.

Teorem 2.3 (ümumiləşdirilmiş Veyerştrass teoremi). Aşağıdan (yuxarıdan) yarı kəsilməz $f(x)$: $R^n \to R$ funksiyası istənilən $X \subseteq R^n$ kompaktında qlobal minimuma (maksimum) çatır.

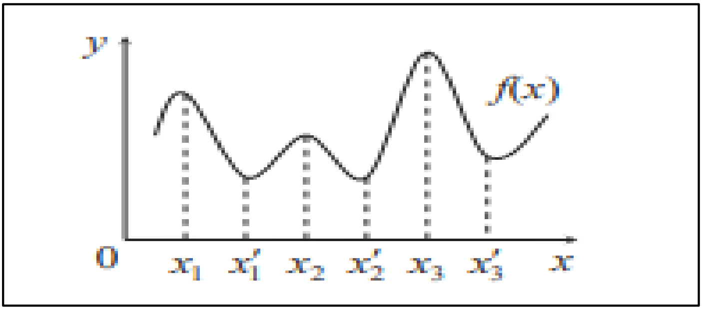
Teorem 2.4. $X_c = \{\mathrm{x} \in R^n : f(\mathrm{x}) \leq C\}$ (müvafiq olaraq $\{\mathrm{x} \in R^n : f(\mathrm{x}) \geq C\}$ çoxluğunun boş deyil və məhdud olmasını təmin edən C ədədinin oldugu halda, aşağıdan (yuxarıdan) yarı kəsilməz $f(x)$: $R^n \to R$ funksiyası bütün R^n fəzasında qlobal minimuma (maksimum) çatır.

Tərif 2.5. x_* nöqtəsinin kifayət qədər kiçik qonşulugundan istənilən

$$x_* + \Delta x \ (\Delta x > 0 \text{ və } \Delta x < 0) \text{ üçün}$$

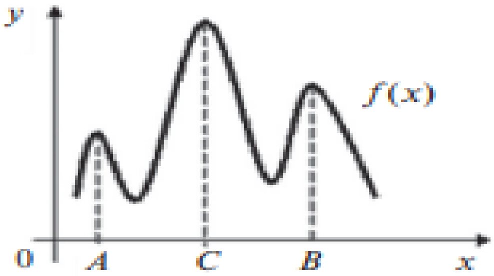
$$f(x_* + \Delta x) > f(x_*) \ (f(x_* + \Delta x) < f(x_*))$$

oldugu halda, $f(x)$ funksiyası $x_* \in \mathrm{X}$ nöqtəsində lokal minimuma (maksimum) malikdir.



Şəkil 2.4. Lokal maksimum ($x_{1,} x_{2,} x_{3,}$) və lokal minimum (x_1', x_2', x_3') ilə f(x) funksiyası

X çoxluğunda $f(x)$funksiyasının qlobal ekstremumunun hər bir nöqtəsi lokal ekstremum olduğu üçün qlobal ekstremumu tapmaq üçün $f(x)$funksiyasının lokal ekstremumunun bütün nöqtələrini təyin etmək lazımdır və sonra onlardan optimallaşdırma məsələsinin həllərini seçmək lazımdır (əgər onlardan biri varsa).



Şəkil 2.5. A və B lokal ekstremal nöqtələri və C qlobal ekstremum nöqtəsi ilə $f(x)$ funksiyası

ÖZÜNÜ YOXLAMAQ ÜÇÜN SUALLAR VƏ TAPŞIRIQLAR

1.Model və modelləşdirmə anlayışlarının mahiyyətini izah edin.

2.Modelləşdirmə prosesinin blok-sxemi hansı etaplardan ibarədir?

3.Optimallaşdırma məsələsinin qurulması mərhələlərini izah edin.

4.Optimallaşdırma məsələsinin riyazi modeli necədir?

5.Qlobal minimum və ya maksimum nöqtələrinin mövcudluğunu təmin edən şərtlərdən əmələ gələn teoremləri izah edin.

6.Veyerştrass teoremini izah edin**.**

7.X çoxluğunda $f(x)$funksiyasının minimum nöqtələri çoxluğunu tapın:

$$f(x) = |x - x^2|, X = [-1,2]$$

8.X çoxluğunda $f(x)$funksiyasının minimum nöqtələri çoxluğunu tapın:

$$f(x) = \cos\frac{\pi}{2}, X = [0,1]$$

9.X çoxluğunda $f(x)$ funksiyasının minimum nöqtələr çoxluğunun boş olduğunu göstərin və $m_0 = \inf\limits_{x \in X} f(x)$ tapın:

$$f(x) = \frac{1}{1 + x^2}, X = R$$

10.X çoxluğunda $f(x)$funksiyasının minimum nöqtələr çoxluğunun boş olduğunu göstərin və $m_0 = \inf\limits_{x \in X} f(x)$ tapın:

$$f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x + 5, X = (-\infty, 5)$$

III FƏSİL. OPTİMALLAŞDIRMA ÜSULLARININ TƏSNİFATI

3.1.Optimallaşdırma məsələlərinin həlli üsullarının xüsusiyyətləri

Məlumdur ki, bir çox optimallaşdırma məsələləri məqsəd funksiyasının və ya keyfiyyət göstəricisinin ən kiçik (və ya ən böyük) qiymətini tapmaq üçün ortaya çıxır. Məqsəd funksiyasının növündən və funksiyanın sahəsinə və parametrlərinə məhdudiyyətlərin növündən asılı olaraq, optimallaşdırma məsələlərinin bir neçə növü fərqləndirilir.

Riyazi nöqteyi-nəzərdən ən sadələri məqsəd funksiyasının məlum düsturla təyin olunduğu və eyni zamanda diferensiallanan funksiya olduğu optimallaşdırma məsələləridir. Bu zaman funksiyanın xassələrini öyrənmək üçün (onun dəyişmə istiqamətlərinin müəyyən edilməsi - artan və ya azalan, lokal ekstremum nöqtələrinin axtarılması) onun törəməsindən istifadə etmək olar. Belə məsələlər məqsəd funksiyası açıq şəkildə təyin olunmuş olan məsələlər sinfinə aiddir.

Son onilliklərdə elmi-texniki tərəqqi şəraitində təcrübənin irəli sürdüyü optimallaşdırma məsələlərinin dairəsi kəskin şəkildə genişlənmişdir. Onların bir çoxunda məqsəd funksiyası düsturla müəyyən edilmir, onun qiymətləri mürəkkəb hesablamalar nəticəsində əldə edilə bilər, təcrübədən götürülür və s. Belə məsələlər daha mürəkkəb olur, onların məqsəd funksiyasını törəmədən istifadə edərək öyrənmək mümkün deyildir və onlar məqsəd funksiyası açıq şəkildə təyin olunmayan məsələlər sinfinə aiddir.

Optimallaşdırma üsullarını iki sinifə ayırmaq olar:

1)həqiqi ədədlər çoxlugunda həlli yolları axtarılan şərtsiz optimallaşdırma üsulları;

2)mümkün həllər sahəsinə müəyyən məhdudiyyətlər qoyulmuş şərti optimallaşdırma üsulları.

Şərtsiz optimallaşdırma məsələlərini həll etmək üçün ekstremum axtarışının ədədi üsullarından və törəmələrdən istifadəyə əsaslanan axtarış metodlarından istifadə olunur. Onları aşağıdakı üsullara bölmək olar

1)yaxınlaşma nöqtələrində məqsəd funksiyasının yalnız hesablamalarını tələb edən birbaşa üsullar;

2)funksiyanın birinci tərtibdən törəmə hesablamalarından istifadə edilən birinci dərəcəli üsullar;

3)ikinci tərtibdən törəmə hesablamalarından istifadə edilən ikinci dərəcəli üsullar.

Əgər dəyişənlərə heç bir məhdudiyyət qoyulmursa və məqsəd funksiyası davamlı diferensiallanan funksiyadırsa, problem klassik ekstremum məsələsi (şərtsiz ekstremum) adlanır. Onun həlli diferensial hesablama nəzəriyyəsinə, xüsusən də ekstremum nəzəriyyəsinə və ona əsaslanan metodlara əsaslanır.

Optimallaşdırma məsələləri istənilən məqsədlərə çatmaq üçün məhdud resursların səmərəli istifadəsi və ya ayrılması ilə əlaqədardır. Optimallaşdırma məsələlərinin xarakterik xüsusiyyəti problemin şərtlərini təmin edən çoxlu sayda həll yollarıdır. Konkret həllin "ən yaxşı" kimi seçilməsi məqsəd funksiyasından (keyfiyyət göstəricisi, optimallıq meyarı, keyfiyyət funksiyası, səmərəlilik meyarı və s. - sinonimlər) asılıdır. Yalnız bir həllə malik məsələ optimallaşdırma tələb etmir.

Eyni zamanda nəzərə almaq lazımdır ki, problemin mürəkkəbliyi əhəmiyyətli dərəcədə onun ölçüsündən, yəni məqsəd funksiyasının arqumentlərinin sayından asılıdır.

Arqumentlərin sayından asılı olaraq tək ölçülü və çoxölçülü optimallaşdırma məsələləri fərqləndirilir.

Tək ölçülü optimallaşdırma məsələləri nisbətən sadə olur və məqsəd funksiyası bir arqumentdən asılı olur. Belə məsələlərdə məsələnin qoyuluşunu, həlli üsullarını və qarşıya çıxan çətinlikləri başa düşmək daha asandır. Bəzi hallarda (çox nadir hallarda olsa da) birölçülü məsələlər müstəqil praktik maraq doğurur. Bununla yanaşı ən əsası odur ki, çoxölçülü optimallaşdırma məsələlərinin həlli üçün alqoritmlər çox vaxt təkölçülü məsələlərin ardıcıl təkrar həlli şəkilində ortaya çıxır.

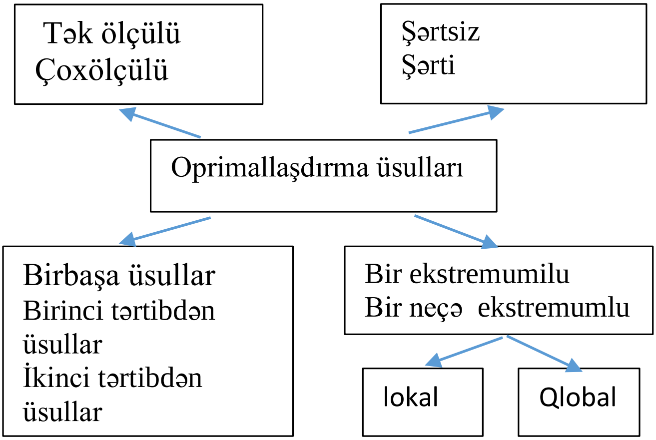
Tək ölçülü optimallaşdırma məsələlərin riyazi qoyuluşunun ümumi məsələlərini nəzərdən keçirək. Riyazi nöqteyi-nəzərdən belə bir məsələni aşağıdakı kimi formalaşdırmaq olar:

X çoxluğunda verilmiş $f(x)$ məqsəd funksiyasının ən kiçik (və ya ən böyük) qiymətini tapmaq və $x \in X$ dəyişəninin ekstremal qiymətini aldığı qiyməti təyin etmək. Tək ölçülü optimallaşdırma məsələlərinin riyazi modeli aşagıdakı formaya malikdir:

$$f(x) \to \max(\min), x \in X$$

Çoxölçülü optimallaşdırma məsələlərində məqsəd funksiyası bir neçə arqumentdən asılıdır və bəzən onların sayı çox böyük ola bilər. Bu cür məsələlərin riyazi qoyuluşu onların birölçülü halda tərtib edilməsinə bənzəyir: R^n çoxluğunda verilmiş $f(x)$məqsəd funksiyasının ən kiçik (və ya ən böyük) qiyməti axtarılır. Belə halda məqsəd funksiyası funksiyası fasiləsiz olmalıdır, R^n çoxluğu isə özlüyündə qapalı məhdud oblastı ifadə edir.qiyməti ilə deyil, həm də onun törəməsinin qiyməti ilə həyata keçirilə bilər. Bu baxımdan törəmələrdən istifadə edilmədən optimallaşdırma üsulları sıfır, birinci tərtib törəmələrdən istifadə edilən birinci və s. optimallaşdırma üsulları adlanır. Birinci törəmələrin vektoru qradyient adlandığı üçün birinci tərtibdən üsullara qradiyent üsulları da deyilir.

Optimallaşdırma üsullarının ümumi təsnifatı şəkil 3.1.- də göstərilmişdir:



Şəkil 3.1. Optimallaşdırma üsullarının ümumi təsnifatı

3.2. Riyazi proqramlaşdırma üsullarının təsnifatı

Riyazi proqramlaşdırma optimallaşdırma məsələlərinin həlli üçün alqoritmlərin qurulmasını nəzərdə tutur.

Əgər optimallaşdırma məsələsində məhdudiyyətlər sistemi və dəyişənlərin mənfi olmaması tələbi varsa, onda onun həlli üçün riyazi proqramlaşdırma metodlarından istifadə edilir.

Ən ümumi formada riyazi proqramlaşdırma məsələləri aşağıdakı əlamətlərə görə təsnifatlaşdırılır:

1) Dəyişənlər arasındakı əlaqənin xarakterinə görə riyazi proqramlaşdırma məsələləri 2 yerə ayrılır:

a) xətti;

b) qeyri-xətti.

Məhdudiyyətlər sistemində və məqsəd funksiyasında bütün funksional əlaqələr xətti funksiyalar şəklindədirsə belə məsələlər xətti, qeyd olunan elementlərin ən azı birində qeyri-xəttilik olan məsələlər isə qeyri-xətti məsələlər adanır.

2) Dəyişənlərdəki dəyişikliklərin xarakterinə görə riyazi proqramlaşdırma məsələləri 2 yerə ayrılır:

a) fasiləsiz;

b) diskret.

İdarə olunan dəyişənlərin hər birinin dəyəri həqiqi ədədlərin müəyyən bir bölgəsini tamamilə doldura bilirsə bu fasiləsiz,bütün və ya ən azı bir dəyişən müəyyən bir çoxluqdan təcrid olunmuş rəqəmli dəyərlər qəbul edə bilərsə bu, diskret məsələlər adanır.

3) Zaman amilin nəzərə alınmaqla riyazi proqramlaşdırma məsələləri 2 yerə ayrılır:

a) statik;

b) dinamik.

4) Dəyişənlər haqqında məlumatın mövcudluğuna görə riyazi proqramlaşdırma məsələləri 3 yerə ayrılır:

a)tam müəyyənlik şəraitində məsələlər;

b)tam olmayan informasiya şəraitində məsələlər;

c)qeyri-müəyyənlik şəraitində məsələlər.

Ümumiyyətlə, riyazi proqramlaşdırmanın mövcud üsulları analitik və ədədi olaraq iki yerə bölünür.

Analitik üsullara klassik diferensial üsullar və variasiyaların hesablanması daxildir. Bu üsullar f(x) funksiyasının x-ə (burada x n-ölçülü vektor) görə törəmələrini yox edən x-in qiymətlərini tapmaq yolu ilə f(x) funksiyasının ekstremumunu təyin etməkdən ibarətdir.

Məhdudiyyətlərin oldugu halda ekstremumun axtarılması zamanı Laqranj vuruqları və məhdud dəyişkənlik üsullarından istifadə olunur. Bununla belə, böyük məsələləri həll etmək üçün analitik metodların istifadəsi çox vaxt mümkün deyil.

Ədədi üsullar iterativ prosedurlardan istifadə edərək məsələnin təkmilləşdirilmiş həllərini qurmaq üçün əvvəlki məlumatlardan istifadə edir. Analitik yolla həlli mümkün olmayan məsələlərin həlli üçün ədədi üsullardan istifadə edilir. Ədədi üsullara müntəzəm və təsadüfi axtarış üsulları daxildir.Axtarış üsullarının vəzifəsi verilmiş məqsəd funksiyasının maksimum və ya minimumunu təmin edən təsirlərin ardıcıllığını müəyyən etməkdir.

Ədədi metodlardan istifadə etməklə optimallaşdırma məsələlərinin həlli iki mərhələdən ibarətdir:

Birinci mərhələ obyekt haqqında məlumat toplamaqdır; Məlumat toplama alqoritmi olmalıdır:

1) sadə;

2) həll prosedurunu obyekt haqqında ən dolğun məlumatla təmin etməlidir;

3) əvvəllər əldə edilmiş apriori məlumatları nəzərə almalıdır, yəni. öz-özünə öyrənmək imkanı olmalıdır.

İkinci mərhələdə təhlil edilmiş məlumat əsasında həll proseduru qurulur.

3.3.Optimallaşdırma məsələlərinin həlli üsullarının müqayisəli xüsusiyyətləri

Müəyyən bir optimallaşdırma məsələsini həll edərkən tədqiqatçı ilk növbədə ən az hesablama xərcləri ilə yekun nəticələrə gətirib çıxaracaq və ya arzu olunan həll haqqında ən çox məlumat əldə etməyə imkan verəcək riyazi üsul seçməlidir. Bu və ya digər üsulun seçimi əsasən optimal məsələnin tərtibi, həmçinin istifadə olunan optimallaşdırma obyektinin riyazi modeli ilə müəyyən edilir.

Hal-hazırda optimal məsələlərin həlli üçün əsasən aşağıdakı üsullardan istifadə olunur:

1) Klassik təhlil funksiyalarının tədqiqi üsulları. Buraya daxildir:

-Laqranj vuruqlarından istifadəyə əsaslanan üsullar;

-Variasiyaların hesablanması.

Klassik analizin funksiyalarının tədqiqi üsulları sadə optimal məsələlərin həllində ən məşhur üsullardır.Bu üsulların istifadə sahəsi, törəmələr üçün çox mürəkkəb olmayan, həm də analitik ifadə tapmağa imkan verən optimallıq meyarının analitik ifadəsi məsələləridir. Optimal məsələnin ekstremal həllərini təyin edən törəmələrin sıfıra bərabərləşdirilməsi ilə əldə edilən tənliklər nadir hallarda analitik yolla həll edilə bilər, ona görə də, bir qayda olaraq, kompüterlərdən istifadə olunur. Klassik analizin funksiyalarının öyrənilməsi metodlarından istifadə etməklə optimal məsələnin həllində əlavə çətinliklər, onların tətbiqi nəticəsində alınan tənliklər sisteminin optimallıq üçün yalnız zəruri şərtləri təmin etməsi ilə əlaqədar yaranır.Buna görə də, bu sistemin bütün həlləri (və onlardan bir neçəsi ola bilər) kifayət qədər yoxlanılmalıdır. Belə bir yoxlama nəticəsində optimallıq meyarının ekstremal qiymətlərini təyin etməyən həllər əvvəlcə atılır, sonra isə qalan ekstremal həllər arasından məsələnin optimallıq şərtlərinə cavab verən həll, yəni, məsələnin qoyuluşundan asılı olaraq optimallıq meyarının ən böyük və ya ən kiçik qiyməti seçilir.

Sərbəst dəyişənlərin dəyişmə oblastında məhdudiyyətlər olduqda tədqiqat metodları yalnız göstərilən oblastda ekstremal qiymətləri tapmaq üçün istifadə edilə bilər. Bu, xüsusilə dəyişənlərdə mümkün dəyişikliklər diapazonunun sərhədində optimallıq meyarının dəyərlərinin təhlilinin çox çətin olduğu çox sayda sərbəst dəyişənli (praktiki olaraq ikidən çox) məsələlərə aiddir.

Laqranj vuruqları üsulundan funksiyaların tədqiqində istifadə edilən ənənəvi üsullarla eyni mürəkkəblik dərəcəsinə, eyni zamanda sərbəst dəyişənlər üçün bərabərlik tipli məhdudiyyətlərə malik məsələləri həll etmək istifadə edilir. Optimallıq meyarının törəmələri üçün analitik ifadələrin alınmasının mümkünlüyü tələbinə əlavə olaraq, məhdudiyyət tənliklərinin analitik forması ilə bağlı oxşar tələb əlavə olunur. Əsasən, Laqranj vuruqları üsulundan istifadə edərkən, məhdudiyyətsiz məsələlərdə olan eyni məsələlər həll edilir. Bu vəziyyətdə bəzi mürəkkəblik yalnız əlavə qeyri-müəyyən amillərin tətbiqi nəticəsində yaranır, bunun nəticəsində optimallıq meyarının ekstremalını tapmaq üçün həll edilən tənliklər sisteminin sırası müvafiq olaraq məhdudiyyətlərin sayı ilə artır. Əks halda, həlli yollarının tapılması və onların optimallığının yoxlanılması proseduru məsələnin məhdudiyyətsiz həlli proseduruna uyğun gəlir.

Laqranj vuruqları paylanmış parametrləri olan obyektlər üçün optimallaşdırma məsələlərini və dinamik optimallaşdırma məsələlərini həll etmək üçün istifadə edilə bilər. Bu zaman optimalı tapmaq üçün sonlu tənliklər sistemini həll etmək əvəzinə, diferensial tənliklər sistemini inteqrasiya etmək lazımdır. Qeyd etmək lazımdır ki, Laqranj çarpanlarından yardımçı alət kimi bərabərlik tipli məhdudiyyətləri olan digər siniflərin məsələlərinin həlli zamanı, məsələn, variasiyaların hesablanmasında və xüsusi metodlardan istifadə etməklə dinamik proqramlaşdırmada istifadə olunur. Laqranj çarpanlarının dinamik proqramlaşdırma metodunda istifadəsi xüsusilə effektivdir, burada onların köməyi ilə bəzən həll olunan məsələnin ölçüsünü azaltmaq mümkündür.

Funksional formada olan bərabərliklər kimi məhdudiyyətlər olduqda, şərti məsələdən şərtsiz birinə keçməyə imkan verən Laqranj vuruqlarından istifadə olunur. Variasiya üsullarından istifadə zamanı ən böyük çətinliklər bərabərsizliklər şəklində məhdudiyyətlərın oldugu məsələlərin həlli zamanı yaranır.

Funksionalların optimallaşdırılması məsələlərinin həlli üçün birbaşa üsullar diqqətə layiqdir,adətən orijinal variasiya məsələsini qeyri-xətti proqramlaşdırma məsələsinə çevirməyə imkan verir və onu həll etmək bəzən Eyler tənlikləri üçün sərhəd məsələsindən daha asan olur.

Variasiyaların hesablanması üsullarından adətən optimallıq meyarlarının funksionallar şəklində təqdim olunduğu və həlli naməlum funksiyalar olan məsələlərin həlli üçün istifadə olunur. Belə problemlər adətən paylanmış parametrlərlə proseslərin statik optimallaşdırılmasında və ya dinamik optimallaşdırma məsələlərində yaranır. Bu halda, variasiya üsulları optimal məsələnin həllini hər biri inteqrasiya intervalının hər iki ucunda müəyyən edilmiş sərhəd şərtləri olan ikinci dərəcəli qeyri-xətti diferensial tənlik olan Eyler diferensial tənlikləri sisteminin inteqrasiyasına endirməyə imkan verir. . Bu sistemin tənliklərinin sayı optimal məsələnin həlli zamanı müəyyən edilən naməlum funksiyaların sayına bərabərdir. Hər bir funksiya ortaya çıxan sistemi inteqrasiya etməklə tapılır. Funksionalın ekstremumu üçün zəruri şərtlər kimi Eyler tənlikləri alınır. Buna görə də, diferensial tənliklər sistemini inteqrasiya etməklə əldə edilən funksiyalar funksionalın ekstremumuna görə yoxlanılmalıdır.

2)Ədədi təhlil funksiyalarının tədqiqi üsulları.Buraya xətti proqramlaşdırma, maksimum prinsip,qeyri-xətti proqramlaşdırma, dinamik proqramlaşdırma,həndəsi proqramlaşdırma daxildir.

Xətti proqramlaşdırma məsələlərini həll etmək üçün kombinatorika, qrafiklər və s. əsaslanan bir sıra effektiv üsullar mövcuddur: qrafik üsul, simpleks üsulu və onun modifikasiyası və s. Simpleks metodunun modifikasiyası hesablama vaxtını əhəmiyyətli dərəcədə azalda bilər, alqoritmi dayaq planlarının degenerasiyasına qarşı qeyri-həssas edə bilər, həll olunan problemlərin ölçüsünü artıra bilər, blok məsələlərini həll edə bilər və s. Bundan əlavə, xətti proqramlaşdırma məsələlərinin həlli üsullarının tətbiq dairəsini genişləndirməyə imkan verən yollar və üsullar da mövcuddur. Məsələn, bəzi qeyri-xətti məsələləri xətti proqramlaşdırma məsələlərini həll etmək üçün istifadə olunan üsullara çevrilə və həll edilə bilər.

Xətti proqramlaşdırma məsələləri sinfində dəyişənlərə tam ədəd şərtinin qoyulduğu tam ədədli proqramlaşdırma məsələləri mühüm rol oynayır. Bu, bir çox hesablama obyektlərinin fiziki bölünməzliyi ilə əlaqədardır. Burada tam ədədlərə sadə yuvarlaqlaşdırma kömək etmir, cünki, plan optimal olmaya bilər. Buna görə də xüsusi həll alqoritmlərindən istifadə etmək lazımdır ki, onlardan ən məşhuru kəsmə ideyasına əsaslanan Qomori alqoritmləridir. Tam ədədlərin proqramlaşdırılmasına maraq bir çox qeyri-xətti qeyri qabarıq məsələlərinin əlavə tamlıq tələbi ilə xətti proqramlaşdırma məsələlərinə gətirilməsi ilə baglıdır. Tam ədədli proqramlaşdırma nəzəriyyəsi kombinator problemlərin həlli üçün metodların işlənib hazırlanmasında da istifadə olunur.

Maksimum prinsip diferensial tənliklər sistemləri ilə təsvir olunan proseslərin optimallaşdırılması məsələlərini həll etmək üçün istifadə olunur. Maksimum prinsipin riyazi aparatının üstünlüyü ondan ibarətdir ki, həlli kəsikli funksiyalar şəklində təyin etmək olar; bu, bir çox optimallaşdırma məsələləri üçün xarakterikdir (məsələn, xətti diferensial tənliklərlə təsvir olunan obyektlərin optimal idarə edilməsi məsələləri). Maksimum prinsipdən istifadə etməklə optimal həllin tapılması prosesin diferensial tənliklər sisteminin inteqrasiyasına və inteqrasiya intervalının hər iki ucunda verilmiş sərhəd şərtləri altında köməkçi funksiyalar üçün bitişik sistemin inteqrasiyası məsələsinə gətirilir.

Dəyişənlərdəki dəyişikliklər oblastına məhdudiyyətlər qoyula bilər. Diferensial tənliklər sistemi rəqəmsal kompüterlərdə adi proqramlardan istifadə etməklə inteqrasiya olunur.

Əgər optimallaşdırma məsələsində məqsəd funksiyası və məhdudiyyətlər davamlı olaraq diferensiallana bilən qeyri-xətti skalyar funksiyalardırsa, onda qeyri-xətti proqramlaşdırma problemi mövcuddur. Qeyri-xətti proqramlaşdırma məsələlərinin həlli üçün universal və effektiv metod yoxdur. Cünki, onların sinfi kifayət qədər genişdir. Buraya ümumi halda oldugundan daha səmərəli alqoritmlər qurmağa imkan verən bu və ya digər spesifikliyə malik olan ayrı-ayrı kateqoriya məsələlər daxil edilir. Qeyri-xətti proqramlaşdırma məsələlərinə misal olaraq kvadrat, kəsr xətti proqramlaşdırma məsələlərini və s. göstərmək olar.

Kvadrat proqramlaşdırma məsələsində məqsəd funksiyası ikinci dərəcədən çoxhədlidir, məhdudiyyətlər sistemi isə xəttidir.

Kəsr-xətti proqramlaşdırma məsələsində məqsəd funksiyası kəsr-xətti funksiyadır, məhdudiyyətlər sistemi isə xətti olur.Bəzi hallarda problemlərin ilkin parametrləri müəyyən hüdudlarda dəyişə bilər, onların həlli üçün parametrik proqramlaşdırmadan istifadə edilir;

Dinamik proqramlaşdırma diskret çoxmərhələli proseslərin optimallaşdırılması məsələlərinin həlli üçün effektiv üsul kimi çıxış edir, burada optimallıq meyarı ayrı-ayrı mərhələlərin optimallıq meyarlarının əlavə funksiyası kimi müəyyən edilir.

Diskret proqramlaşdırma riyazi proqramlaşdırmanın bir sahəsidir ki, burada ekstremal məsələlərə mümkün dəyərlərin sonlu oblastında dəyişənlərin diskret olması şərti qoyulur. Dəyişənlərin bəzilərinin və ya hamısının tam ədədli olması məhdudiyyəti qoyulduğu halda, diskret proqramlaşdırmanın xüsusi halı olan tam ədədli proqramlaşdırma məsələlərinə keçilir.

Son zamanlar həndəsi proqramlaşdırma üsulu da işlənib hazırlanmış və müəyyən məsələlərin həlli üçün uğurla tətbiq edilmişdir. Həndəsi proqramlaşdırma məsələləri - verilmiş iki ölçülü və ya üçölçülü sahədə müəyyən obyektlərin ən sıx yerləşdirilməsi məsələləridir. Belə problemlərə bəzi məhsulların istehsalı üçün materialın kəsilməsi məsələlərində və s. rast gəlinir .Bu məsələlər mövcud alqoritmlərə əsasən lokal minimumları axtararkən variantların axtarışını azaltmağa istiqamətlənir.

Stoxastik xətti proqramlaşdırma məsələlərində məqsəd funksiyasının və məhdudiyyət şərtlərinin əmsalları təsadüfi dəyişənlərdir. Belə halda məqsəd funksiyasının özü təsadüfi kəmiyyətə çevrilir və bərabərsizliklər kimi məhdudiyyətlər yalnız müəyyən ehtimalla təmin oluna bilər. Bu zaman belə təsirləri nəzərə alaraq problemlərin özünün tərtibini dəyişdirmək və onların həlli üçün tamamilə yeni üsullar hazırlamaq lazımdır.

Cədvəl 3.1-də müxtəlif növ optimal məsələlərin həlli üçün hər bir üsuldan istifadənin effektivliyinin müqayisəli qiymətləndirilməsi əsasında müxtəlif optimallaşdırma üsullarının tətbiqi sahələrinin xüsusiyyətləri verilmişdir.

Cədvəl 3.1. “Optimallaşdırma üsullarının tətbiqi sahələri

Prosesin təsviri növü		Sonlu tənliklər						Diferensial tənliklər					
Dəyişənlərə məhdudiyyətlərin tipi		Yox		Bərabərlik		Bərabər-sizlik		yox		Bərabərlik		Bərabər-sizlik	
Dəyişənlərin sayı		≤3	>3	≤3	>3	≤3	>3	≤3	>3	≤3	>3	≤3	>3
Üsulun adı	Klassik təhlil üsulları	1	2	4	4	4	4	3	4	4	4	4	4
	Laqranj vuruqları	-	-	1	2	-	-	-	-	2	3	-	-
	Variasiyaların hesablanması	-	-	-	-	-	-	2	3	2; 7	3; 7	-	-
	Dinamik proqramlaşdırma	1; 5	3; 5	1;5;7	3;5;7	1;5	3;5	2	3	3	3	3	3
	Maksimum prinsip	2;5	1;5	2;5	2;5	2;5	2;5	1	1	2	2	2	2
	Xətti proqramlaşdırma	-	-	-	2;6	2;6	1;6	-	-	-	-	-	-
	Qeyri-xətti proqramlaşdırma	2	1	2	1	2	1	4	4	4	4	4	4
	Həndəsi proqramlaşdırma	2;8	2;8	-	-	2;8	2;8	-	-	-	-	-	-

Məsələlərin təsnifatı aşağıdakı meyarlara görə aparılır:

1) Prosesin riyazi təsvirinin növü;

2) Proses dəyişənləri üzrə məhdudiyyətlərin tipi;

3) Dəyişənlərin sayı.Cədvəldəki qeydlər:

1. Üsulun effektiv tətbiqi.
2. İstifadə olunur.
3. Mümkün tətbiq.
4. Köməkçi üsul kimi istifadə olunur.
5. Çoxmərhələli proseslər (ölçü ayrıca mərhələ üçün göstərilir).

6. Xətti optimallıq meyarları və xətti məhdudiyyətlərlə bağlı məsələlər.
7.Laqranj vuruqlarından istifadə olunur.
8. Mövqe formasında meyar və məhdudiyyətlərlə bağlı məsələlər.

Bir qayda olaraq, istisnasız olaraq praktikada yaranan bütün məsələləri həll etmək üçün istifadə edilə bilən hər hansı bir üsulu tövsiyə etmək mümkün deyil. Bəzi üsullar bu baxımdan daha ümumi, digərləri isə daha az ümumidir. Nəhayət, optimal məsələnin həllinin müəyyən mərhələlərində bütün metodlar qrupu (klassik analizin funksiyalarının öyrənilməsi üsulları, Laqranj çarpanları metodu, qeyri-xətti proqramlaşdırma metodları) digər metodlarla, məsələn, dinamik proqramlaşdırma və ya maksimum prinsip ilə birlikdə istifadə edilə bilər. Onu da qeyd edək ki, bəzi metodlar xüsusi olaraq hazırlanmış və ya müəyyən tipli riyazi modellərlə optimal məsələlərin həlli üçün ən uyğundur.

ÖZÜNÜ YOXLAMAQ ÜÇÜN SUALLAR VƏ TAPŞIRIQLAR

1. *Optimal məsələlərin həlli üçün hansı üsullardan istifadə olunur?*
2. *Laqranj vuruqları üsulunun ümumi mahiyyətini izah edin.*
3. *Variasiyaların hesablanması üsullarından nə zaman istifadə edilir?*
4. *Riyazi proqramlaşdırmanın hansı üsulları mövcuddur?*
5. *Maksimum prinsip üsulundan nə zaman istifadə edilir?*
6. *Xətti proqramlaşdırma proqramlaşdırmanın mahiyyətini izah edin.*
7. *Tam ədədli xətti proqramlaşdırmanın mahiyyətini izah edin.*
8. *Qeyri-xətti proqramlaşdırma məsələsinin mahiyyətini izah edin.*
9. *Kvadrat və kəsr xətti proqramlaşdırma məsələsinin mahiyyətini izah edin.*
10. *Həndəsi proqramlaşdırma məsələsinin mahiyyətini izah edin.*

IV FƏSİL. XƏTTİ PROQRAMLAŞDIRMANIN RİYAZİ MODELİ

4.1. Xətti proqramlaşdırmanın müxtəlif məsələləri

Xətti proqramlaşdırma riyazi proqramlaşdırmanın ən çox inkişaf etmiş və geniş istifadə olunan bölməsi olmaqla (əlavə olaraq bura daxildir: tam, dinamik, qeyri-xətti, parametrik proqramlaşdırma), optimallaşdırma məsələlərini həll etmək üçün istifadə edilən riyazi bir texnikadır. Onun əhəmiyyəti aşağıdakılarla izah olunur:
1)Çox sayda iqtisadi məsələlərin riyazi modelləri tələb olunan dəyişənlərə görə xətti olur;
2)Belə məsələlər hazırda ən çox öyrənilən məsəllərdirdir. Xətti proqramlaşdırma məsələlərinin həlli üçün xüsusi üsullar və müvafiq kompüter proqramları işlənib hazırlanmışdır;
3) Xətti proqramlaşdırma məsələləri həll edildikdən sonra geniş tətbiq tapdılar;
4)İlkin tərtibdə xətti olmayan bəzi məsələlər, bir sıra əlavə məhdudiyyətlər əlavə edildikdən sonra xətti ola bilər və ya xətti proqramlaşdırma üsulları ilə həll oluna biləcək forma gətirilə bilər.

Xətti proqramlaşdırma dəyişənlərə və məhdudiyyətlərə riayət etməklə məqsəd funksiyasını (maksimum və ya minimum) optimallaşdırmağa çalışır. Xətti proqramlaşdırmanın tətbiqi zamanı elə iqtisadi məsələlərə baxılır ki, orada hər hansı verilmiş xətti funksiya üçün mimimum və yaxud maksimum qiymətin müəyyən edilməsi tələb olunur. Belə məsələlərin məchulları isə hər hansı tənliklər və yaxud xətti bərabərsizliklər sistemindən, eyni zamanda həm xətti tənliklərdən, həm də xətti bərabərsizliklər sistemindən ibarət olan məhdudiyyət şərtlərini ödəyirlər.

Tərif 4.1. Məqsəd funksiyası

$\mathrm{Z} = \mathrm{F}(\mathrm{X}) = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots\ c_nx_n \rightarrow \max(min)$ (4.1)

məhdudyyət şərtləri:

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots a_{in}x_n = b_i \; ; (i = \overline{1,k}) \qquad (4.2)$$
$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots a_{in}x_n \leq (\geq) b_i ; (i = \overline{k+1, m}) \quad (4.3)$$

dəyişənlərin mənfi olmaması şərti:

$$x_1, x_2, \, ..x_n \geq 0 \qquad (4.4)$$

şəklində , yəni, verilmiş (4.2) və (4.3) məhdudiyyət şərtləri daxilində (4.1) məqsəd funksiyasının maksimum (və ya minimum) qiymətinin təyin edilməsi məsələsi xətti proqramlaşdırmanın ümumi məsələsi adlanır.

Burada:

x_j - qərar dəyişənlərini ($j = 1,2,3, \ldots .n$);

$Z = F(X)$ məqsəd funksiyasını;

c_j-məqsəd funksiyasında qərar dəyişənlərinin əmsallarını ($j = 1,2,3, \ldots .n$);

a_{ij}-məhdudiyyət şərtlərinin sol tərəfindəki əmsallarını ($i = 1,2,3, \ldots .m, \quad j = 1,2,3, \ldots .n$);

b_i -məhdudiyyət şərtlərinin sağ tərəfindəki sərbəst həddləri göstərir.

Qeyd etmək lazımdır ki, məhdudiyyət şərtlərindəki xətti məhdudiyyətlər bərabərsizliklər və/yaxud xətti tənliklər ($\leq, \geq, =$)şəklində verilə bilər. Bununla belə, lazım gələrsə, hər hansı bərabərsizliyin hər iki tərəfini (-1) vurmaqla onların hamısını vahid formaya gətirmək olar.

Xətti proqramlaşdırma məsələsinin həlli onun bütün optimal planlarını tapmaq və ya onların yoxluğunu sübut etmək deməkdir.

Onu da qeyd edək bir sıra ədəbiyyatlarda xətti məhdudiyyət şərtlərinin xarakterindən asılı olaraq belə məsələlər xətti proqramlaşdırmanın ümumi, əsas (kanonik) məsələsi, standart (simmetrik) məsələsi adları altında verilir.

Aşağıdakı cədvələ əsasən xətti proqramlaşdırma məsələlərinin üç əsas formasının xüsusuyyətlərini nəzərdən keçirək:

Cədvəl 4.1. Xətti proqramlaşdırma məsələlərinin formaları

	Modelin forması	Xüsusuyyətləri
1	Ümumi	Qarışıq məhdudiyyət şərtlərinə (bərabərliklər və bərabərsizliklər) malik olur.Burada bütün dəyişənlər, dəyişənlərin mənfi olmaması şərtinə tabe ola bilməz.
2	Əsas (kanonik)	Bərabərlik şəklində məhdudiyyət şərtlərinə və mənfi olmayan sərbəst həddlərə malik olur.Burada bütün dəyişənlər, dəyişənlərin mənfi olmaması şərtinə tabedir. $$Z = F(X) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to max$$ Məhdudiyyət şərtləri: $$\left\{\begin{matrix} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i \;\; (i = 1,2, \dots \dots . n) \\ x_j \geq 0 \qquad (j = 1,2, \dots \dots . n) \end{matrix}\right\}$$
3	Standart (simmetrik)	Xətti bərabərsizliklər şəklində məhdudiyyət şərtlərinə, eləcə də mövcud dəyişənlərin mənfi olmaması şərtinə malik olur: $$Z = F(X) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to max$$ Məhdudiyyət şərtləri: $$\left\{\begin{matrix} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \leq b_i \;\; (i = 1,2, \dots \dots . n) \\ x_j \geq 0 \qquad (j = 1,2, \dots \dots . n) \end{matrix}\right\}$$

Xətti proqramlaşdırmanın müxtəlif məsələləri arasında sıx əlaqə vardır və istənilən məsələnin hər birini mürəkkəb olmayan çevirmələr vasitəsilə digərinə- ümumi, standart və ya əsas məsələyə gətirmək olar.

Xətti proqramlaşdırma məsələsinin əsas (kanonik) formasına keçmək üçün lazımdır:

1. Bərabərsizlik məhdudiyyətlərindən bərabərlik məhdudiyyətlərinə keçmək;

2. Dəyişənlərin mənfi olmaması şərtinə tabe olmayan dəyişənləri mənfi olmayan dəyişənlərlə əvəz etmək.

Bərabərsizliklərin bərabərliyə çevrilməsi aşağıdakı lemmaya əsaslanır:

$$a_{\mathrm{i}1}x_1 + a_{\mathrm{i}2}x_2 + \cdots a_{in}x_n \le b_i$$

şəklində olan bərabərsizlik

$$a_{\mathrm{i}1}x_1 + a_{\mathrm{i}2}x_2 + \ldots a_{in}x_n + x_{n+1} = b_i$$

şəklində olan tənliyə ekvivalentdir və

$$x_{n+1} \ge 0.$$

Analoji olaraq

$$a_{\mathrm{i}1}x_1 + a_{\mathrm{i}2}x_2 + \cdots a_{in}x_n \ge b_i$$

şəklində olan bərabərsizlik

$$a_{\mathrm{i}1}x_1 + a_{\mathrm{i}2}x_2 + \ldots a_{in}x_n - x_{n+1} = b_i$$

şəklində olan tənliyə ekvivalentdir və

$$x_{n+1} \ge 0.$$

Beləliklə, “≤ ” tipli xətti proqramlaşdırma məsələsinin bərabərsizlik məhdudiyyətləri, onun sol tərəfinə əlavə qeyri-mənfi dəyişən əlavə etməklə bərabərlik məhdudiyyətinə çevrilə bilər və “≥” tipli bərabərsizlik məhdudiyyəti onun sol tərəfindən əlavə qeyri-mənfi dəyişən çıxmaqla bərabərlik məhdudiyyətinə çevrilə bilər. Bu dəyişənlərə balans (əlavə) dəyişənlər deyilir. Bərabərsizlik məhdudiyyətlərini bərabərlik məhdudiyyətlərinə çevirərkən əlavə qeyri-mənfi dəyişənlərin sayı çevrilmiş bərabərsizliklərin sayına bərabərdir.

Beləliklə, əgər adları çəkilən məsələlərdən hər hansının həlli üsulu varsa, onda onun köməyi ilə xətti proqramlaşdırmanın hər 3 məsələsi də həll olunur. Bunun üçün aşagıdakılar tələb olunur:
1)Minimallaşma xətti proqramlaşdırma məsələsini maximallaşma xətti proqramlaşdırma məsələsinə (və ya əksinə) çevirmək. Məqsəd funksiyasının minimumlaşdırılması məsələsini onun maksimumlaşdırılması məsələsinə çevirilməsi məqsəd funksiyasını sadəcə olaraq (-1) vurmaqla həyata keçirilir.

Yəni, xətti proqramlaşdırma məsələsində məqsəd funksiyası

$$\mathrm{L} = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n \to \min$$

şəklindədirsə,

$\tilde{L} = -L(x_1, x_2, x_3, \dots . x_n)$ oldugunu nəzərə alaraq, məqsəd funksiyasını

$$\mathrm{L} = -c_1x_1 - c_2x_2 - \cdots -c_nx_n \to \max$$

şəklində yazmaq olar.
2)bərabərsizlik şərtlərindən bərabərliklər şərtinə (və ya əksinə) keçmək;
3)Əgər istənilən x_k dəyişəni üçün mənfi olmama şərti ödənmirsə, (yəni $x_k \le 0$) $x_k = - y_k$ əvəzləməsini aparmaq. Burada $y_k \ge 0$. Əgər x_k dəyişənın işarəsi müəyyən deyilsə, bu zaman , onu 2 mənfi olmayan (müsbət) dəyişənin fərqi şəklində göstərmək.

Standart məsələdən əsas məsələyə keçid əlavə x_{n+i} $i = 1,2,\dots\dots, m$ dəyişənlərinin tətbiqi ilə bağlıdır. Bunu aşagıdakı nümunə ilə göstərək:

Məsələ 4.1. Tutaq ki, xətti proqramlaşdırma məsələsi aşagıdakı şəkildədir:

$$Z_{max} = 2x_1 + x_2 + 5x_3$$

$$\left\{\begin{matrix} x_1 - 7x_2 + 4x_3 \le 11 \\ 2x_1 + 9x_2 - x_3 \ge 7 \\ x_1 \ge 0, \qquad x_2 \ge 0, \qquad x_3 \ge 0 \end{matrix}\right\}$$

Bərabərsizliklərin birincisində sol tərəf sağ tərəfdən böyük deyil. Buna görə də, sol tərəfə hər hansı mənfi olmayan x_4

dəyişənini əlavə etsək, bu bərabərsizliyi bərabərliyə gətirmək olar. Eyni zamanda, ikinci bərabərsizlikdə sol tərəf sağdan kiçik deyil. Sol tərəfdən hər hansı mənfi olmayan x_5 dəyişənini çıxmaqla, bərabərsizliyi bərabərliyə gətirmək olar. Beləliklə, xətti proqramlaşdırma məsələsinin yeni bir formasını alırıq (əsas):

$$Z_{max} = 2x_1 + x_2 + 5x_3$$

$$\left\{\begin{matrix} x_1 - 7x_2 + 4x_3 + x_4 = 11 \\ 2x_1 + 9x_2 - x_3 - x_5 = 7 \\ x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0, \quad x_3 \geq 0, \quad x_4 \geq 0, \quad x_5 \geq 0 \end{matrix}\right\}$$

Beləliklə, xətti proqramlaşdırmanın (4.1)-(4.3) əsas məsələsini aşağıdakı şəkildə ifadə etmək mümkündür:

$x_{1,}x_{2,}x_{3,} \ldots \ldots \ldots x_n$ məchullarının mənfi olmayan (müsbət) elə qiymətlərini müəyyən etmək lazımdır ki, həmin qiymətlər (4.2) məhdudiyyət şərtlərini ödəsinlər və (4.1) məqsəd funksiyasına maksimum və yaxud minimum qiymət versinlər.

Tərif 4.2. $x_{1,}x_{2,}x_{3,} \ldots \ldots \ldots x_n$ məchullarının mənfi olmayan (müsbət) və (4.2) məhdudiyyət şərtlərini ödəyən qiymətlərinə məsələnin mümkün həlli və yaxud mümkün planı deyilir.

Tərif 4.3. $x_{1,}x_{2,}x_{3,} \ldots \ldots \ldots x_n$ məchullarının mənfi olmayan (müsbət), (4.2) məhdudiyyət şərtlərini ödəyən və (4.1) məqsəd funksiyasına maksimum və yaxud minimum qiymət verən kəmiyyətlərinə məsələnin optimal həlli və yaxud optimal planı deyilir.

Deməli, xətti proqramlaşdırmanın əsas məsələsinin həlli dedikdə məsələnin optimal həllinin və yaxud optimal planının tapılması nəzərdə tutulur.

4.2. Xətti proqramlaşdırmanın əsas məsələsinin yazılış formaları

Xətti proqramlaşdırmanın əsas məsələsi aşağıdakı yazılış formalarına malikdir:

1.Matris;
2.Vektor;
3. Cəm işarəsindən istifadə olunmaqla.

Modelin matris şəklində təsviri aşağıdakı kimidir:

Məqsəd funksiyası:

$$Max(\text{və } ya \min)\ Z = C\, X$$

Məhdudyyət şərtləri:

$$AX = \mathrm{b}$$

Mənfi olmama şərti: $X \geq 0$

Burada:

$C = (c_1, c_2, c_3, \ldots .\, c_n)$; - sətir matrisini;

$$X = \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots . \\ x_n \end{Bmatrix}$$ -sütun matrisini;

$$A = \begin{Bmatrix} a_{11} & a_{12} \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \ldots & a_{2n} \\ \ldots . & \ldots . & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} \ldots & a_{mn} \end{Bmatrix}$$ – (4.2.) məhdudyyət şərtlərinin əmsallarından ibarət matrisi;

$$b = \begin{Bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots . \\ b_n \end{Bmatrix}$$ -sərbəst həddlərdən ibarət olan sütun matrisinini göstərir.

Modelin vektor şəklində təsviri aşağıdakı kimidir:

Məqsəd funksiyası:

$$Max(\text{və } ya \min)\ Z = C\, X$$

Məhdudyyət şərtləri:

$$A_1x_1 + A_2x_2 + A_3x_3 \ldots \ldots A_nx_n = b$$

Mənfi olmama şərti: $X \geq 0$

Burada:

$C = (\ c_1, c_2, c_3, \dots . c_n)$; və $X = (\ \mathrm{x}, x_2, x_3, \dots . x_n)$; - sətir vektirlarını, CX – isə onların skalyar hasilini;

$A_1 = \begin{Bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \dots . \\ a_{m1} \end{Bmatrix}$, $A_2 = \begin{Bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \dots . \\ a_{m2} \end{Bmatrix}$.......... $A_3 = \begin{Bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \dots \\ a_{mn} \end{Bmatrix}$-məhdudyyət şərtlərindəki məhculların əmsallarından ibarət sütun-vektorlarını;

$b = \begin{Bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots . \\ b_n \end{Bmatrix}$--sərbəst həddlərdən ibarət olan sütun vektorunu göstərir.

Modelin cəm işarəsindən istifadə olunmaqla təsviri aşağıdakı kimidir:

Məqsəd funksiyası:

$$Max(v\partial\ ya \min)\ Z = F(X) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

Məhdudiyyət şərtləri:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j\ (\leq, \geq, =) b_i$$

$$(i = 1,2,3, \dots . m\ )$$

Dəyişənlərin mənfi olmaması şərtləri

$x_j \geq 0 \quad j = 1,2,3, \dots . n$

İndi isə xətti proqramlaşdırmanın məsələlərini müxtəlif yazılış formalarında ifadə edək:

Məsələ 4.2. Aşağıda verilmiş xətti proqramlaşdırma məsələsini matris yazılış formasında ifadə edin:

$$Z = x_1 + 3x_2 - 5x_4 \rightarrow max$$

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_3 \leq 35 \\ 7x_1 + 2x_2 - 5x_4 \leq 80 \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0, \qquad x_2 \geq 0, \qquad x_3 \geq 0, \qquad x_4 \geq 0$$

Həlli: $Z = (1\,, 3\,, 0, 5) \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \to max$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 7 & 2 & 0 & -5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} 35 \\ 80 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \geq 0$$

Məsələ 4.3. Aşağıdakı xətti proqramlaşdırma məsələsini matris formasında ifadə edin:

$Z = -x_1 + 5x_2 - 8x_4 \to max$

$$\begin{cases} -x_1 + 3x_3 + x_4 \leq 25 \\ 9x_1 + 2x_2 - 5x_3 \leq 70 \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0, \qquad x_2 \geq 0, \qquad x_3 \geq 0, \qquad x_4 \geq 0$$

Həlli: $Z = (-1\,, 5\,, 0, -8) \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \to max$

$$\begin{pmatrix} -1 & 3 & 0 & 1 \\ 9 & 2 & -5 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} 25 \\ 70 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \geq 0$$

Məsələ 4.4. Aşağıdakı matris formsında verilmiş xətti proqramlaşdırma məsələsinin məqsəd funksiyasını və məhdudiyyət şərtlərini geniş şəkildə ifadə edin:

$$Z = (2\,,3\,,4) \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \to max$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 6 & 3 & 5 \\ 4 & 7 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \le \begin{pmatrix} 30 \\ 20 \\ 70 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \ge 0$$

Həlli: $Z_{max} = 2x_1 + \ 3x_2 + 4x_3$

$$\begin{Bmatrix} 2x_1 + 4x_2 + x_3 \le 30 \\ 6x_1 + 3x_2 + 5x_3 \le 20 \\ 4x_1 + 7x_2 \le 70 \end{Bmatrix}$$

$$\mathrm{x}_1, \mathrm{x}_2, \mathrm{x}_3 \ge 0$$

Məsələ 4.5. Aşağıdakı matris formsında verilmiş xətti proqramlaşdırma məsələsinin məqsəd funksiyasını və məhdudiyyət şərtlərini geniş şəkildə ifadə edin:

$$Z = (2\,,5\,,4) \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \to max$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 5 & 2 & 0 \\ 4 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \le \begin{pmatrix} 50 \\ 40 \\ 60 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \ge 0$$

Həlli: $Z_{max} = 2x_1 + \ 5x_2 + 4x_3$

$$\begin{Bmatrix} 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 \le 50 \\ 5x_1 + 2x_2 \le 40 \\ 4x_1 + x_3 \le 60 \end{Bmatrix}$$

$$x_1, x_2, x_3 \ge 0$$

Məsələ 4.6.Aşağıdakı vektor formasında verilmiş xətti proqramlaşdırma məsələsinin məqsəd funksiyasını və məhdudiyyət şərtlərini geniş şəkildə ifadə edin:

$$Z = (2\,,1\,,6) \cdot (x_1, x_2, x_3) \to max$$

$$\begin{pmatrix}2\\5\\1\end{pmatrix} \cdot x_1 + \begin{pmatrix}3\\-5\\0\end{pmatrix} \cdot x_2 + \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} \cdot x_3 \leq \begin{pmatrix}130\\100\\70\end{pmatrix}$$

$$(x_1, x_2, x_3) \geq 0$$

Həlli: $Z_{max} = 2x_1 + x_2 + 6x_3$

$$\begin{Bmatrix} 2x_1 + 3x_2 + x_3 \leq 130 \\ 5x_1 - 5x_2 \leq 100 \\ x_1 + x_3 \leq 70 \end{Bmatrix}$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

4.3.Xətti proqramlaşdırma məsələsinin klassik nümunələri

Çox dəyişənli və məhdudiyyət tənlikləri olan xətti proqramlaşdırma məsələləri kompüter proqramlarının köməyi ilə tez həll oluna bildiyi üçün bir çox sahədə mühüm tətbiqləri qeyd etmək olar. Xətti proqramlaşdırma məsələsinin aşağıdakı klassik nümunələri mövcuddur:

1. İstehsalın planlaşdırılması və ehtiyatlardan optimal istifadə məsələsi
2. Materialların optimal biçilməsi məsələsi
3. Pəhriz məsələsi
4. Avadanlıqların optimal yüklənməsi məsələsi
5. Nəqliyyat məsələsi

İstehsalın planlaşdırılması və ehtiyatlardan optimal istifadə məsələsi. İstehsalın planlaşdırılması və ehtiyatlardan optimal istifadə məsələləri hər hnsı bir istehsal vahidi (müəssisə, sex, şöbə və s.) üzrə məhsul satışından əldə edəcəyi cəmi mənfəətin maksimal olması məqsədilə istehsal proqramını tərtibi edən zaman meydana çıxır.

Məsələnin ümumi qoyuluşu. Tutaq ki, müəssisədə ehtiyatları $b_1, b_2, \ldots\ldots b_n$ qiymətləri ilə məhdudlaşan m növ $R_1, R_2, \ldots\ldots R_m$ xammaldan istifadə etməklə n adda $G_1, G_2, \ldots\ldots G_n$ məhsul istehsal olunur. Məsələnin şərtinə uygun ilkin məlumatlar Cədvəl 4.2.-də göstərilmişdir:

Cədvəl 4.2. Məsələnin ilkin məlumatları

Ehtiyatlar	Məhsul vahidinin istehsalına sərf olunmuş xammalın həcmi				Ehtiyatların miqdarı
	G_1	G_2	....	G_n	
R_1	a_{11}	a_{12}	.....	a_{1n}	b_1
R_2	a_{21}	a_{22}		a_{2n}	b_2
....	....	......	....	....	
R_m	a_{m1}	a_{m2}	....	a_{mn}	b_n
Məhsul vahidinin satışından əldə olunan mənfəət	c_1	c_2	......	c_n	

Burada:

a_{ij} -ilə j-ci məhsul vahidinin istehsalına sərf olunmuş i- ci növ xammalın həcmini;

c_j- ilə j-ci məhsul vahidinin satışından əldə edilən mənfəəti göstərir.

Verilmiş şərtə əsasən müəssisə üzrə elə bir istehsal proqramının tərtib edilməsi tələb olunur ki, onun məhsul satışından əldə etdiyi cəmi mənfəət maksimal olsun.

Məsələnin riyazi modelini qurmaq üçün, fərz edək ki, müəssisə x_1 ədəd G_1 məhsulundan, x_2 ədəd G_2 məhsulundan, x_n ədəd G_n məhsulundan istehsal edəcəkdir. Yəni, müəssisə üzrə istehsal proqramı $x_{1,} x_{2,} \ldots \ldots \ldots x_n$ vektoru ilə ifadə olunacaqdır.

Bu məhsulları istehsalı üçün tələb olunan 1-ci xammalın cəmi miqdarını müəyyən edək:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots a_{1n}x_n$$

Müəssisə üzrə 1-ci xammalın miqdarı $b_{1,}$ -ə bərabər olmaqla məhdud saydadır. Ona görə də bu iqtisadi göstərici 1-ci xammalın məhdud miqdarından çox ola bilməz, yəni, burada

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots a_{1n}x_n \leq b_1$$

şərti ödənməlidir.

Digər xammal növləri üzrə də uygun bərabərsizlikləri tərtib edərək, aşağıdakı məhdudiyyət şərtlərini əldə edə bilərik:

$$\left\{\begin{array}{c} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots a_{1n}x_n \leq b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots a_{2n}x_n \leq b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{\mathrm{m}1}x_1 + a_{\mathrm{m}2}x_2 + \cdots a_{mn}x_n \leq b_n \end{array}\right\}$$

$x_{1,}x_{2,} \ldots x_n$ dəyişənləri müəssisədə istehsal olunacaq $G_1, G_2, \ldots\ldots G_n$ məhsullarının miqdarını göstərdikləri üçün, onların qiyməti mənfi ola bilməz, yəni

$$x_1 \geq 0, \qquad x_2 \geq 0, \ldots\ldots, x_n \geq 0$$

Müəssisədə istehsal edilən $G_1, G_2, \ldots\ldots G_n$ məhsullarının satışından əldə olunacaq cəmi mənfəətin

$$c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots \ldots + c_nx_n$$

bərabər oldugunu, məqsədin isə müəssisənin cəmi mənfəətinin maksimum olmasını nəzərə alaraq, məqsəd funksiyasını aşağıdakı kimi yaza bilərik:

$$\mathrm{Z(x)} = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots \ldots + c_nx_n \rightarrow \max$$

İndi isə yuxarıdakı məsələnin iqtisadi mənasını konkret misal üzərində izah edək.

Məsələ 4.7. Bir şirkətdə gildən küpə və güldan istehsal edilir. Bir küpənin istehsalına 2 saat vaxt və 5 kq gil, bir güldan istehsalına isə 3 saat vaxt və 4 kq gil istifadə edilir.Şirkət cəmi 50 saat vaxt və 130 kq gil ehtiyatına malikdir.Şirkətin bir ədəd küpənin satışından 50 manat , bir ədəd güldanın satışından isə 60 manat mənfəət əldə edir. Şirkət cəmi mənfəətin maksimum olması məqsədilə istehsal proqramını necə tərtib etməlidir?

Həlli: Məsələnin riyazi modelini qurmaq üçün, fərz edək ki, müəssisə x_1 ədəd küpə, x_2 ədəd güldan istehsal edəcəkdir. Yəni, şirkət üzrə istehsal proqramı $X = (x_{1,}x_2)$ vektoru ilə ifadə olunacaqdır. x_1 ədəd küpə, x_2 ədəd güldan istehsal istehsal etmək üçün tələb olunan cəmi vaxt sərfi $2x_1 + 3x_2$, gil sərfi isə $5x_1 + 4x_2$ kq təşkil edir. Burada nəzərə almaq lazımdır, vaxt sərfi 50 saatı, gil sərfi isə 130 kq aşa bilməz. Deyilənləri nəzərə alaraq aşagıdakı bərabərsizliklər sistemini əldə edə bilərik:

$$\begin{Bmatrix} 2x_1 + 3x_2 \leq 50 \\ 5x_1 + 4x_2 \leq 130 \end{Bmatrix}$$

$x_{1,}x_{2,}$ dəyişənləri şirkətdə istehsal olunacaq küpə və güldanın sayını göstərdikləri üçün, onların qiyməti mənfi ola bilməz, yəni

$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0$ şərti ödənməlidir.

Küpə satışından $50x_1$ manat, güldan satışından $60x_1$ manat mənfəət alınacagını nəzərə alaraq, şirkətin bütün məhsul satışından əldə edəcəyi cəmi mənfəət ikiməchullu funksiya şəklində ifadə olunacaqdır. İstehsal edilən küpə və güldanın satışından əldə olunacaq cəmi mənfəətin

$$50x_1 + 60x_2$$

bərabər oldugunu, məqsədin isə şirkətin cəmi mənfəətinin maksimum olmasını nəzərə alaraq, məqsəd funksiyasını aşağıdakı kimi yaza bilərik:

$$Z(x) = 50x_1 + 60x_2 \rightarrow \max$$

Beləliklə , məsələnin məqsəd funksiyası

$$Z(x) = 50x_1 + 60x_2 \rightarrow \max$$

məhdudiyyət şərtləri

$$\begin{Bmatrix} 2x_1 + 3x_2 \leq 50 \\ 5x_1 + 4x_2 \leq 130 \end{Bmatrix}$$

dəyişənlərin mənfi olmama şərti

$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0$ kimi olacaqdır.

Məsələ 4.8. Şirkət bir ədəd stulun istehsalına 5 kq taxta, 0.5 m^2 dəri, 100 qram yapışqan və 10 adam-saat, bir ədəd stolun istehsalına 400 kq taxta, 250 qram yapışqan və 15 adam-saat şərf edir. Şirkət cəmi 5 kq taxta, 15 m^2 dəri, 7,5 kq yapışqan və 450 adam-saat ehtiyatına malikdir.Şirkətin bir ədəd stulun satışından 50 manat , bir ədəd stolun satışından isə 100 manat mənfəət əldə edir. Şirkət cəmi mənfəətin maksimum olması məqsədilə istehsal proqramını necə tərtib etməlidir?

Verilmiş məlumatları cədvəldə yazaq:

Ehtiyatlar	Stul	Stol	Məhdudiyyət
Taxta (kq)	5	20	400
Dəri (m^2)	0,5	-	15
Yapışqan (qram)	100	250	7500
Əmək xərcləri(adam-saat)	10	15	450
Mənfəət	50	100	

Həlli: Məsələnin riyazi modelini qurmaq üçün, fərz edək ki, müəssisə x_1 ədəd stul, x_2 ədəd stol istehsal edəcəkdir. Bu zaman məsələnin məqsəd funksiyası

$$Z(x) = 50x_1 + 100x_2 \rightarrow \max$$

məhdudiyyət şərtləri

$$\left\{\begin{array}{c} 5x_1 + 20x_2 \leq 400 \\ 0{,}5x_1 \leq 15 \\ 100x_1 + 250x_2 \leq 7500 \\ 10x_1 + 15x_2 \leq 450 \end{array}\right\}$$

dəyişənlərin mənfi olmama şərti

$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0 \quad \text{kimi olacaqdır.}$$

Materialların optimal biçilməsi məsələsi. Məlumdur ki, sənaye müəssisələrinə çox vaxt standart ölçülərə malik materiallar (parça,dəmir, süşə, taxta və s.) daxil olur və istehsalın müxtəlif növ tədarüklərə olan zəruri təlabatlarını ödəmək məqsədilə bu materiallar biçilməlidir. Bu zaman müxtəlif biçmə üsullarından istifadə etmək mümkündür. Lakin biçmə üsullarının istənilən formasından istifadə etdikdə uygun istehsal tullantıları əmələ gəlir. Belə bir vəziyyətdə materialların optimal biçilməsi məsələsi xüsusi əhəmiyyət kəsb edir. Beləki, elə texnoloji biçmə üsullarından istifadə etmək lazımdır ki, materiallara qənaət edilsin, israfın həcmi azalsın,yəni, istehsal tullantılları minimum olsun və maksimal gəlir əldə edilsin. Deməli, məhsulun maya dəyəri düzgün biçilmədən asılıdır.

Məsələnin ümumi qoyuluşu. Tuatq ki, standart ölçüyə malik olan materialdan n növ $T_1, T_2, \ldots\ldots T_n$ müxtəlif tədarüklər hazırlamaq tələb olunur və bunun üçün m adda texnoloji $K_1, K_2, \ldots\ldots K_m$ biçmə üsullarından istifadə etmək mümkündür. Məsələnin şərtinə uygun ilkin məlumatlar Cədvəl 4.3.-də göstərilmişdir:

Cədvəl 4.3. Məsələnin ilkin məlumatları

Biçmə üsulları	Material vahidindən çıxan tədarüklərin normaları				Material vahidindən itkilərin dəyəri
	T_1	T_2	....	T_n	
K_1	a_{11}	a_{12}	.....	a_{1n}	k_1
K_2	a_{21}	a_{22}		a_{2n}	k_2
....	....	......	....	....	....
K_m	a_{m1}	a_{m2}	....	a_{mn}	k_n
Tədarük planı	c_1	c_2	......	c_n	-

Burada:

k_i - i biçmə üsulunun tətbiqi zamanı material vahidindən itkilərin dəyərini;

a_{ij} -ilə i biçmə üsulunun tətbiqi zamanı material vahidindən çıxan j növ tədarükün miqdarını ;

c_j- j növ tədarük planını göstərir.

Verilmiş şərtə əsasən müxtəlif üsullarla biçilən materiallrın elə bir miqdarlarını tapmaq tələb olunur ki, bütün növ tədarüklərin hazırlanması üçün plan tapşırıqları yerinə yetirilmiş olsun və kəsilmiş material vahidindən itkilərin dəyəri minimum olsun.

Məsələnin riyazi modelini qurmaq üçün, fərz edək ki, x_1 –lə K_1 texnoloji üsulunu, $x_2 -$ lə K_2 texnoloji üsulunu, x_m-lə K_m texnoloji üsulunu tətbiq etməklə biçilmiş materialların miqdarını işarə edək. Bu zaman bütün üsullarla biçilən materiallardan alınmış itkilərin cəmi dəyəri

$x_{1,}x_{2,}\dots\dots\dots x_m$məchullarının daxil oldugu məqsəd funksiyası ilə ifadə olunur və bu funksiya üçün minimum qiymət axtarılır:

$$Z(x) = k_1x_1 + k_2x_2 + \cdots \dots + k_nx_n \rightarrow \min$$

Bu məhsulları istehsalı üçün tələb olunan 1-ci xammalın cəmi miqdarını müəyyən edək:

$$a_{11}x_1 + a_{21}x_2 + \dots a_{m1}x_m$$

1-ci növ tədarük T_1 üçün aşagıdakı bərabərlik şərti ödənməlidir.

$$a_{11}x_1 + a_{21}x_2 + \dots a_{m1}x_m = c_1$$

Digər növ tədarük üzrə də aşagıdakı bərabərlik şərti ödənilir və aşağıdakı məhdudiyyət şərtlərini əldə edə edilir:

$$\left\{\begin{matrix} a_{11}x_1 + a_{21}x_2 + \dots a_{m1}x_m = c_1 \\ a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots a_{m2}x_m = c_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{1n}x_1 + a_{2n}x_2 + \cdots a_{mn}x_m = c_n \end{matrix}\right\}$$

$x_{1,}x_{2,}\dots x_n$müxtəlf üsullarla biçilən materialların miqdarını göstərdikləri üçün, onların qiyməti mənfi ola bilməz, yəni

$$x_1 \geq 0, \qquad x_2 \geq 0, \dots\dots, x_m \geq 0 \quad (j = \overline{1, m})$$

Əgər məsələnin həll edilməsi zamanı alınmış $x_i > 0$ olarsa, bu o deməkdir ki, K_i üsulla materialların biçilməsi itkiləri minimum olması baxımından daha şərfəlidir.

Beləliklə, bu məsələnin iqtisadi-riyazi modelini aşagıdakı şəkildə göstərmək olar:

Məqsəd funksiyası

$$Z(x) = k_1x_1 + k_2x_2 + \cdots \ldots + k_nx_n \to \min$$

məhdudiyyət şərtləri

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{21}x_2 + \ldots a_{m1}x_m = c_1 \\ a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots a_{m2}x_m = c_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{1n}x_1 + a_{2n}x_2 + \cdots a_{mn}x_m = c_n \end{cases}$$

dəyişənlərin mənfi olmama şərtləri

$$x_j \geq 0 \quad (j = \overline{1,m})$$

Pəhriz məsələsi.Pəhriz məsələsində heyvanların bəslənməsi üçün müəyyən tibbi tələbləri ödəyən ən qənaətcil (ən ucuz) pəhriz tərtib edilir.

Məsələnin ümumi qoyuluşu. Fərz edək ki, heyvanların bəslənməsi üçün onların hər birinin $Q_1, Q_2, \ldots\ldots Q_m$ qidalı maddələrə (vitaminlər, zülallar, karbohidratlar və s.) olan günlük tələbatları lazımi səviyyədə ödənilməlidir. Bu tələbatların ödənilməsi isə qiymətləri məlum olan $Y_1, Y_2, \ldots\ldots Y_n$ yemlərindən istifadə nəticəsində mümkündür. Məsələnin şərtinə uygun ilkin məlumatlar Cədvəl 4.4.-də göstərilmişdir:

Cədvəl 4.4. Pəhriz məsələsi üzrə ilkin məlumatlar

Qidalı maddələr	1 kiloqram yemin tərkibində olan qidalı maddələrin miqdarı				Günlük tələbat
	Y_1	Y_2	....	Y_n	
Q_1	a_{11}	a_{12}	.....	a_{1n}	k_1
Q_2	a_{21}	a_{22}		a_{2n}	k_2
....	....	......	....	....	....
Q_m	a_{m1}	a_{m2}	....	a_{mn}	k_n
1 kiloqram yemin qiyməti (man.)	p_1	p_2	......	p_n	-

Burada:

k_i - günlük yemləmədə i növ qidalı maddəyə tələbatı;

a_{ij} -ilə j yeminin 1 kiloqramında olan i növ qidalı maddənin miqdarını;
p_j- j növ yemin 1 kiloqramının dəyərini göstərir.

Verilmiş şərtə əsasən müxtəlif üsullarla biçilən materiallrın elə bir miqdarlarını tapmaq tələb olunur ki, bütün növ tədarüklərin hazırlanması üçün plan tapşırıqları yerinə yetirilmiş olsun və kəsilmiş material vahidindən itkilərin dəyəri minimum olsun.

Bu məsələdə verilmiş şərtlərə əsasən günlük yem rasionu və yemin miqdarını ele təyin etmək lazımdır ki, heyvanların qidalı maddələrə təlabatları tam ödənilsin və bu yemlər üçün xərclər az (minimal) olsun.

Məsələnin riyazi modelini qurmaq üçün, x_1 –lə Y_1 yeminin , $x_2 -$ lə Y_2 yeminin, x_n-lə Y_n yeminin miqdarını işarə edək. Bu zaman günlük yem rasionunda istifadə olunan bütün yemlərin cəmi dəyəri $x_{1,} x_{2,} \dots \dots \dots x_n$ məchullarının daxil oldugu məqsəd funksiyası ilə ifadə olunur və bu funksiya üçün minimum qiymət axtarılır:

$$Z(x) = p_1x_1 + p_2x_2 + \cdots \dots + p_nx_n \to \min$$

Nəzərə almaq lazımdır ki, istifadə edilən yemlərdəki hər bir qidalı maddələrin miqdarı rasionda müəyyən edilmiş təlabatdan az miqdarda ola bilməz. Bu şərtin ödənilməsi nəticəsində aşağıdakı məhdudiyyət şərtləri əldə edilir:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots a_{1n}x_n \geq k_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots a_{2n}x_n \geq k_2 \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots a_{mn}x_n \geq k_n \end{cases}$$

$x_{1,} x_{2,} \dots x_n$yemlərin miqdarını göstərdikləri üçün, onların qiyməti mənfi ola bilməz, yəni

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0, \dots \dots, x_n \geq 0 \quad (j = \overline{1, n})$$

Əgər məsələnin həll edilməsi zamanı alınmış $x_i > 0$ olarsa, bu o deməkdir ki, günlük yemləmədə Y_j yemindən istifadə edilməsi, yemlərinin cəmi dəyərinin azaldılması baxımından məqsədəuygundur.

Beləliklə, bu məsələnin iqtisadi-riyazi modelini aşagıdakı şəkildə göstərmək olar:

Məqsəd funksiyası

$$Z(x) = p_1x_1 + p_2x_2 + \cdots \ldots + p_nx_n \to \min$$

məhdudiyyət şərtləri

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots a_{1n}x_n \geq k_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots a_{2n}x_n \geq k_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots a_{mn}x_n \geq k_n \end{cases}$$

dəyişənlərin mənfi olmama şərtləri

$$x_j \geq 0 \quad (j = \overline{1,n})$$

Avadanlıqların optimal yüklənməsi məsələsi. Kifayət qədər sərt rəqabəti təmin edən müasir şərait nəinki hər bir sahə və ya ölkə miqyasında, həm də qlobal miqyasda istehsal müəssisələrinin qarşısında müəyyən tələbləri qoyur:

- öz məhsullarına daim artan həcmdə və çeşiddə tələbatın ödənilməsi;
- məhsul və xidmətlər üzrə sifarişlərin çatdırılma müddətlərinin azaldılması;
- məhsulların istehsalı və xidmətlərin göstərilməsi üçün xərclərin azaldılması;
- məhsul və xidmətlərin maya dəyərinin aşağı salınması, yerli istehsalçıların rəqabət qabiliyyətinin artırılması.

Müəssisələr həm texniki xüsusiyyətlərinə, həm də maya dəyərinə görə rəqabətədavamlı məhsul istehsal etmək yollarını axtarırlar. Və bu, istehsal fəaliyyətinin bütün mərhələlərində xərclərin əhəmiyyətli dərəcədə azaldılmasını tələb edir.

Hər bir müəsissədə bu və ya digər məhsulun istehsalı zamanı qarşılıqlı əvəz edilən avadanlıqlardan istifadə edilir və bu avadanlıqlar nadir hallarda eynicinsli olurlar.Yəni, müəssisədə mövcud olan eyni növ avadanlıqlar belə buraxılış illərinə, aşınma dərəcəsinə və s. görə bir-birindən fərqlənirlər.Eyni zamanda hər bir avadanlıqda müxtəlif növ məhsul istehsal edilir.Bununla bərabər, müəyyən dəzgah vasitəsilə bəzi detalların istehsalına nisbətən daha az vaxt sərf edildiyi halda, onlarda digər detalların istehsalı sərfəli olmur. Beləliklə avadanlıqların optimal yüklənməsi, daha dogrusu onlardan daha səmərəli şəkildə istifadə edilməsi məsələsi mühüm praktiki əhəmiyyətə malikdir.

Məsələnin ümumi qoyuluşu. Müəssisəyə vaxt və nomenklatura üzrə məhsul istehsalı planı verilir: T vaxt müddətində $p_1, p_2, \ldots\ldots p_k$ məhsullarından $n_1, n_2, \ldots\ldots n_k$ vahid istehsal etmək tələb olunur. . Məhsullar $S_1, S_2, \ldots\ldots S_m$ dəzgahlarında istehsal olunur. Hər bir dəzgahın məhsuldarlıgı a_{ij} (yəni S_idəzgahında istehsal oluna bilən məhsul vahidlərinin sayı) və vaxt vahidində S_i dəzgahında P_j məhsulu istehsalına b_{ij} xərclər məlumdur.

Dəzgahların işləməsi üçün elə bir plan tərtib etmək (yəni məhsul istehsalını dəzgahlar arasında elə bölüşdürmək) lazımdır ki, bütün məhsulların istehsalı üçün xərclər minimal olsun.

Məsələnin iqtisadi- riyazi modelini tərtib edək:

x_{ij} – dəzgahının P_j məhsullarının istehsalı ilə məşğul olacağı vaxtı işarə edək (i = $\overline{1,m}$; j = $\overline{1,k}$). Hər bir dəzgahın işləmə müddəti məhduddur və T-dən çox deyil. Buna görə də:

$$\left\{\begin{array}{c} x_{11} + x_{12} + \ldots x_{1k} \leq T_1 \\ x_{21} + x_{22} + \cdots x_{2k} \leq T_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_{m1} + x_{m2} + \cdots x_{mk} \leq T_n \end{array}\right\}$$

Nomenklatura üzrə planını yerinə yetirmək üçün aşağıdakı bərabərliklər təmin edilməlidir:

$$\begin{cases} a_{11}x_{11} + a_{21}x_{21} + \dots a_{m1}x_{m1} = n_1 \\ a_{12}x_{12} + a_{22}x_{22} + \cdots a_{m2}x_{m2} = n_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{1\mathrm{k}}x_{1\mathrm{k}} + a_{2\mathrm{k}}x_{2\mathrm{k}} + \cdots a_{mk}x_{mk} = n_k \end{cases}$$

Eyni zamanda

$$x_{ij} \geq 0 \quad (\mathrm{i} = \overline{1,m}\,;\ \mathrm{j} = \overline{1,k}\ )$$

Bütün məhsul istehsalına xərclər aşaıdakı məqsəd funksiyası ilə funksiya ilə ifadə olunacaqdır:

$$Z = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{k} x_{ij}b_{ij} \to min$$

Bu məsələnin həllində əsas məqsəd elə

$$X = (x_{11}, x_{12}, \dots\dots x_{mk})$$

planını müəyyən etməkdən ibarətdir ki, yuxarıdakı məhdudiyyət şərtləri və dəyişənlərin mənfi olmaması şərtlərini ödəsin və verilmiş məqsəd funksiyası minimum qiymət alsın.

Nəqliyyat məsələsi mövzu IX-da daha geniş izah ediləcəkdir.

4.4. Xətti proqramlaşdırma məsələsinin həndəsi şərhi

Məhdudiyyətlər sistemi bərabərsizliklər şəklində təyin olunan əsas xətti proqramlaşdırma məsələsini nəzərdən keçirək:

Məqsəd funksiyası

Z(x) = $c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots \dots\dots + c_{\mathrm{n}}x_{\mathrm{n}} \to$ max(min) (4.10)

məhdudiyyət şərtləri

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n + x_{n+1} \leq b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n + x_{n+2} \leq b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{\mathrm{m}1}x_1 + a_{\mathrm{m}2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n + x_{n+m} \leq b_m \end{cases} \quad (4.11)$$

dəyişənlərin mənfi olmama şərti

$$x_1, x_{2,\dots\dots\dots,}x_n \geq 0 \ (4.12)$$

ekstremumunu müəyyən edək.

Fərz edək ki, (4.11) məhdudiyyət şərtləri ziddiyyətli deyildir, yəni onun ən azı bir həlli vardır. (4.11) məhdudiyyət şərtlərinin hər bir bərabərsizliyi həndəsi olaraq müstəvinin üzərində bir yarımmüstəvini verir və həmin yarımmüstəvilər müstəvidən $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 = b_i; (i = \overline{1,m})$ sərhəd düz xətləri vasitəsilə ayrılırlar.
(4.11) məhdudiyyət şərtləri ziddiyyətli olmadığı üçün müstəvi üzərində bu yarımmüstəvilər $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$ yarımmüstəvilərlə kəsişməklə məsələnin mümkün həllər oblastını formalaşdırır. Buna eyni zamanda məsələnin həllər çoxbucaqlısı da deyilir. Bir daha xatırladaq ki, xətti proqramlaşdırma məsələsinin mümkün həlli (və ya mümkün plan) məhdudiyyətlər sistemini (4.11) və mənfi olmama şərtlərini (4.12) təmin edən istənilən $X = x_1, x_{2,\dots\dots,}x_n$ həllidir. Məsələnin mümkün həllərinin (planlarının) məcmusu mümkün həllər oblastını təşkil edir.

Deməli, xətti proqramlaşdırma məsələsinin həndəsi şərhi dedikdə məsələnin mümkün həllər oblastında elə bir nöqtənin axtarışı başa düşülür ki, həmin nöqtənin koordinatları əsas məsələnin məqsəd funksiyasına maksimum (mininimum) qiymət versinlər. Eyni zamanda çoxüzlünün hər bir nöqtəsinin koordinatları əsas məsələnin mümkün həlləri hesab olunur.

ÖZÜNÜ YOXLAMAQ ÜÇÜN SUALLAR VƏ TAPŞIRIQLAR

1.Xətti proqramlaşdırmanın ümumi məsələsi kanonik məsələdən nə ilə fərqlənir?
2. Xətti proqramlaşdırma məsələsinin mümkün və optimal həlli dedikdə nə başa düşülür?
3.İstənilən xətti proqramlaşdırma məsələsini əsas məsələyə gətirmək üçün nə etmək lazımdır?
4. Xətti proqramlaşdırma məsələsinin müxtəlif yazılış formaları hansı xüsusiyyətlərə malikdir?

5. Xətti proqramlaşdırma məsələsinin hansı klassik nümunələri mövcuddur?
6. Aşağıdakı xətti proqramlaşdırma məsələsini matris formasında ifadə edin:

$$Z = x_1 + 5x_2 - 8x_4 \rightarrow max$$
$$\begin{Bmatrix} x_1 + 5x_3 + x_4 \leq 50 \\ 9x_1 + 2x_2 - 5x_3 \leq 70 \end{Bmatrix}$$

7. Aşağıdakı xətti proqramlaşdırma məsələsini matris formasında ifadə edin:

$$Z = x_1 + 3x_2 - 5x_4 \rightarrow max$$
$$\begin{Bmatrix} 2x_1 + 3x_2 + x_3 \leq 40 \\ 7x_1 + 2x_2 - 5x_4 \leq 80 \end{Bmatrix}$$

8.Aşağıdakı xətti proqramlaşdırma məsələsini vektor formasında ifadə edin:

$$Z = 2x_1 + 4x_2 - 5x_4 \rightarrow max$$
$$\begin{Bmatrix} 4x_1 + 7x_2 + x_3 \leq 38 \\ 7x_1 + 5x_2 - 2x_4 \leq 70 \end{Bmatrix}$$

9. Sex iki növ yarımfabrikatdan istifadə etməklə iki növ məhsul istehsal edir. İstehsl edilən məhsul vahidinə hər növ yarımfabrikatların sərfi normaları, yarımfabrikatların ümumi həcmi və hər bir məhsul vahidindən əldə edilən mənfəətin həcmi aşağıdakı cədvəldə təqdim olunur:

Yarımfabrikatlar	Məhsul vahidinin istehsalına yarımfabrikatların sərfi norması		Yarımfabri-katların həcmi
	M_1	M_2	
1	1	3	150
2	6	2	240
Mənfəət	10	35	

Maksimum mənfəəti təmin edən istehsal planını müəyyən edin.
10. Üç növ (A, B, C) məhsulun istehsalı üçün üç müxtəlif növ xammal istifadə olunur. Hər bir xammal növü müvafiq olaraq 4; 5; 3-dən çox olmayan miqdarda istifadə edilə bilər. Müəyyən bir növ

məhsul vahidinə hər bir xammal növünün sərfi norması, xammalın həcmi və hər bir növ məhsul vahidinin qiyməti aşağıdakı cədvəldə göstərilmişdir:

Xammalın növləri	Məhsul vahidinə hər bir xammal növünün sərfi norması			Xammalın həcmi
	A	B	C	
I	2	2	1	4
II	3	4	2	5
III	1	2	4	3
Məhsul vahidinin qiyməti	2	3	5	

Maksimum mənfəəti təmin edən istehsal planını müəyyən edin.

11. İki növ məhsul istehsalı üzrə ixtisaslaşmış müəssisə 5600 iş saatı və 2100 kq xammal ehtiyatlarına malikdir. Birinci növ məhsul istehsal etmək üçün: 5 iş saatı və 2 kq xammal, ikinci növ məhsul istehsalı üçün 8 iş saatı və 3 kq xammal tələb olunur. Birinci növ məhsul vahidinin satışından əldə edilən mənfəət 5,00 p.v., ikinci növ məhsul vahidinin satışından əldə edilən mənfəət isə 4,00 p.v-dir. Maksimum mənfəəti təmin edəcək istehsal planı qurun.

12.İki avia xəttə xidmət göstərmək iki tip təyyarədən istifadə edilə bilər. 25 birinci tip və 30 ikinci tip təyyarə vardır. 1-ci aviaxətt 15 min, 2-cisi isə 20 min sərnişin daşımalıdır. Aşagıdakı cədvəldə bir təyyarənin istifadəsi ilə bağlı əməliyyat xərcləri və bir təyyarənin müəyyən bir dövrdə daşıya biləcəyi sərnişinlərin sayı göstərilmişdir:

Əməliyyat xərcləri			Şərnişinlərin sayı		
Təyyarənin tipi	Aviaxətt		Təyyarənin tipi	Aviaxətt	
	1	2		1	2
1	10	5	1	500	700
2	8	9	2	1000	1100

Ümumi xərclərin minimal olması üçün təyyarələrin aviaxəttlər arasında optimal yüklənməsini müəyyənləşdirin.

V FƏSİL. XƏTTİ PROQRAMLAŞDIRMA MƏSƏLƏSİNİN HƏLLİ ÜÇÜN QRAFİK ÜSULU

5.1. Qrafik üsulu ilə iki dəyişənli xətti proqramlaşdırma məsələsinin həlli

Xətti proqramlaşdırma məsələlərinin həlli üçün ən sadə və vizual üsul qrafik üsuludur. Qrafik üsulundan iki dəyişənli standart və ya ümumi formada verilmiş xətti proqramlaşdırma məsələlərinin, eyni zamanda məhdudiyyətlər sisteminin ranqı dəyişənlərin sayından iki vahid az ($n - r \leq 2$) olan kanonik formada verilmiş məsələlərin həllində istifadə edilir.

Qrafik üsul xətti proqrmlaşdırma məsələsinin mümkün həllər oblastının və məqsəd funksiyasının qrafik təsvirinə və onlar arasında optimal həllin tapılmasına əsaslanır

Xətti proqramlaşdırmanın əsas məsələsinin qrafik üsulu ilə həll etmək üçün iki dəyişənli xətti proqramlaşdırma məsələsini nəzərdən keçirək: Tutaq ki, məqsəd funksiyası

$$Z(x) = c_1x_1 + c_2x_2 \to \max \quad (5.1)$$

məhdudiyyət şərtləri

$$\begin{Bmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \leq b_1 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots. \\ a_{\mathrm{m}1}x_1 + a_{\mathrm{m}2}x_2 \leq b_n \end{Bmatrix} \qquad (5.2)$$

dəyişənlərin mənfi olmama şərtı

$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0 \qquad (5.3)$$

olan xətti proqramlaşdırma məsələsində $x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0$ elə qiymətlərini tapmaq tələb olunur ki, bu qiymətlər məhdudiyyətlər sistemini təmin etsin və bunun nəticəsində məqsəd funksiyası maksimum qiymət alsın.

Məhdudiyyətlər sistemi yalnız iki dəyişəndən ibarət olduğundan, mümkün həllər oblastı koordinat müstəvisində təsvir edilə bilər. Əvvəlcə birinci bərabərsizliyi nəzərdən keçirək:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \leq b_1$$

Bu bərabərsizliyin həlli xəttin bir tərəfində yerləşən yarımmüstəvi olacaqdır. Bu yarımmüstəvinin sərhədləri

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1$$

tənliyi ilə təyin edilən düz xəttdir.

$$a_{\text{m}1}x_1 + a_{\text{m}2}x_2 \leq b_n$$

bərabərsizliyi də həndəsi olaraq bir yarımmüstəvini müəyyən edir. Bu yarımmüstəvinin sərhədləri

$$a_{\text{m}1}x_1 + a_{\text{m}2}x_2 = b_n$$

tənliyi ilə təyin edilən düz xəttdir.

Məhdudiyyət sisteminin ziddiyyətli olmadıgı halda, bu yarımmüstəvilər koordinat müstəvisi üzərində $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$ yarımmüstəviləri ilə kəsişir və məsələnin mümkün həllər oblastını(çoxlugunu) formalaşdırır.

Mümkün həllər oblastı həmişə qabarıq bir fiqurdur, yəni, aşağıdakı xüsusiyyətə malikdir: əgər iki A və B nöqtəsi bu fiqura aiddirsə, onda bütün AB xətti də ona aiddir.

Deməli,məsələnin həlli mümkün həllər oblastının (çoxlugunun) qurulması ilə başlayır. Bu zaman aşağıdakı hallar mümkündür:

1)Mümkün həllər oblastı - boş çoxluqdur. Bu halda məhdudiyyətlər sisteminin ziddiyyətli olmasına görə xətti proqramlaşdırma məsələsinin optimal həlli yoxdur.

2)Mümkün həllər oblastı – yeganə nöqtədir. Onda xətti proqramlaşdırma məsələsinin yeganə və optimal həlli vardır.

3)Mümkün həllər oblastı - qabarıq çoxbucaqlıdır. Bu halda, məsələnin optimal həllini tapmaq üçün çoxbucaqlının bütün təpə nöqtələrinin koordinatlarını tapmaq, bütün təpə nöqtələrində məqsəd funksiyasının qiymətlərini hesablamaq və bu dəyərlərdən ən böyüyünü (və ya ən kiçiyini) seçmək lazımdır. Uygun təpə nöqtəsinin koordinatları məsələnin optimal həllidir.

Optimal həllə uyğun olan təpə nöqtəsini birbaşa qrafik olaraq tapmağa imkan verən başqa bir üsul vardır.

Tutaq ki, c_0- hər hansı bir ədəddir. $\mathrm{c}_1 x_1 + \mathrm{c}_2 x_2 = \mathrm{c}_0$ ilə təyin edilən düz xətt məqsəd funksiyasının səviyyə xəttidir. Bu xəttin hər bir nöqtəsində məqsəd funksiyası c_0 –a bərabər olan eyni qiyməti alır. Vektor – məqsəd funksiyasının qradiyenti

$$\bar{c} = \mathrm{gradL(X)} = (\frac{\partial L}{\partial x_1}, \frac{\partial L}{\partial x_2})$$

səviyyə xətlərinə perpendikulyardır və bu funksiyanın ən yüksək sürətlə artdığı istiqaməti göstərir. Mümkün həllər oblastından keçən səviyyə xətlərindən $\bar{c}$ vektoru istiqamətində daha uzağı seçərək (minimallaşma halında, əks istiqamətdə) məqsəd funksiyasının maksimum (minimum) qiymət aldığı təpə nöqtəsini təyin etmək olar.

Ekstremuma eyni anda iki bitişik təpə nöqtəsində çatılırsa, optimal həll bu nöqtələri birləşdirən kəsiyin istənilən nöqtəsi olacaqdır:

$$X_{opt} = tX_{1opt} + (1-t)X_{2opt}, \quad t\epsilon[0,1]$$

4)Mümkün həllər oblastı $-$ qabarıq sərhədsiz oblastdır.

Bu halda, ekstremum məqsəd funksiyasının qeyri-məhdud olması səbəbindən maksimum məsələdə (yəni,$Z(x) \to +\infty$) yuxarıdan, minimum məsələdə (yəni,$Z(x) \to -\infty$) aşağıdan mövcud olmaya bilər və ya mümkün həllər oblastının təpə nöqtələrinin birində ola bilər.

Qrafik metodun alqoritmi aşağıdakı kimidir:

1)Mümkün həllər oblastını qurmaq;

2)Məqsəd funksiyasının vektor-qradientini $\bar{c}$ =(c_1, c_2)qurmaq;

3)Mümkün həllər oblastından keçən $\bar{c}$ vektoruna perpendikulyar səviyyə xətlərini qurmaq;

4) Mümkün həllər oblastından keçən və $\bar{c}$ =(c_1, c_2) vektoru istiqamətində ən uzaq (minimum məsələdə $\bar{c}$ vektoruna əks istiqamətdə) olan səviyyə xəttini seçmək. Onun keçdiyi sahənin təpə nöqtələrini müəyyənləşdirmək və onların koordinatlarının tapmaq;

5)Ekstremum nöqtələrinin koordinatlarını və bu nöqtələrdə məqsəd funksiyasının qiymətini tapmaq.

Xətti proqramlaşdırma məsələsinin mümkün həllər oblastını taparkən aşagıdakı cədvəldə göstərilən dörd vəziyyətdən biri baş verə bilər:

Məsələ 5.1. Məhdudiyyət şərtləri

$$\begin{Bmatrix} 2x_1 + x_2 \geq 10 \\ x_1 + x_2 \leq 15 \\ x_1 - 3x_2 \leq -2 \\ 3x_1 - 2x_2 \geq -10 \end{Bmatrix}$$

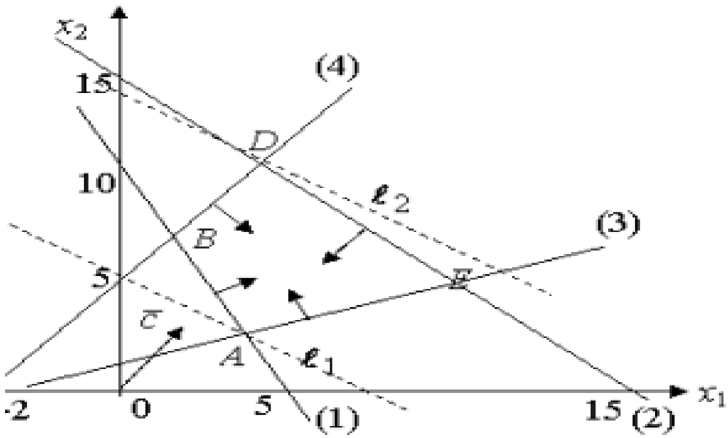
$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0 \text{ olan}$$

$$Z(X) = 3x_1 + 4x_2$$

məqsəd funksiyasının ən kiçik (minimum)və ən böyük (maksimum) qiymətlərini müəyyən edin:

Həlli:

1)İlk növbədə mümkün həllər oblastını quraq. Bu, ABDE qabarıq dördbucaqlıdır (şəkil 5.1).



Şəkil 5.1 Mümkün həllər oblastı

2) $\bar{c}$ (3;4) vektorunu və ona perpendikulyar olan oblastdan keçən səviyyə xətlərini quraq.
3) Şəkil 5.1-dən aydın olur ki, qradiyent istiqamətində ən uzaq təpə nöqtəsi D nöqtəsidir, çünki ondan ən uzaq l_2 səviyyə xətti keçir. Nəticədə, D nöqtəsində məqsəd funksiyası ən böyük qiyməti alır, yəni $L_{max}(X) = L(D)$
Ən yaxın l_1 səviyyə xətti A təpə nöqtəsindən keçir , buna görə də funksiya ən kiçik qiyməti A nöqtəsində alır, yəni, $L_{min}(X) = L(A)$

A və D nöqtələrinin koordinatlarını tapmaq üçün bu nöqtələrin kəsişməsində yerləşdiyi xətlərin tənliklər sistemini həll etmək lazımdır. A nöqtəsi birinci və üçüncü xətlərin kəsişməsində yerləşir. Bu xətlərin tənliklərindən ibarət sistemi həll edək:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 10 \\ x_1 - 3x_2 = -2 \end{cases}$$

Buradan $X_{min}(4;2)$ və $Z_{min}(X) = 3 \cdot 4 + 4 \cdot 2 = 20$ oldugunu alarıq.

A nöqtəsi ikinci və dördüncü xətlərin kəsişməsində yerləşir. Bu xətlərin tənliklərindən ibarət sistemi həll edək:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 15 \\ 3x_1 - 2x_2 = -10 \end{cases}$$

Buradan $X_{max}(4;11)$, $Z_{max}(X) = 3 \cdot 4 + 4 \cdot 11 = 56$ oldugunu alarıq.

Məsələ 5.2. Məhdudiyyət şərtləri

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 21 \\ 5x_1 - 11x_2 \le 0 \\ x_1 + 3x_2 \ge 15 \\ x_1 - x_2 \ge -6 \end{cases}$$

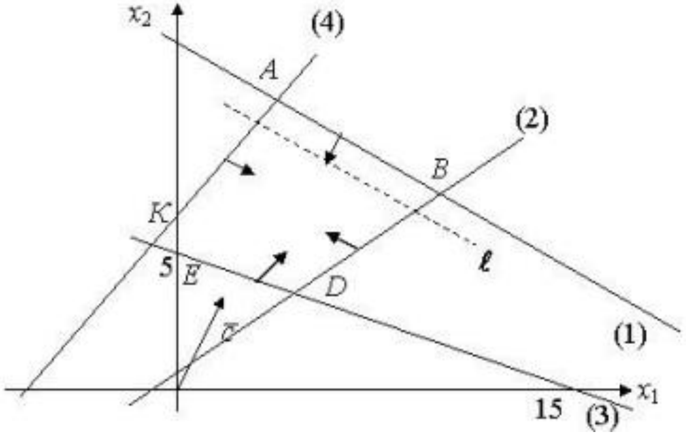
$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0$ olan

$$Z(X) = 2x_1 + 4x_2$$

məqsəd funksiyasının ən böyük (maksimum) qiymətini müəyyən edin:

Həlli:

1)Biz mümkün həllər oblastını quraq. Bu, ABDEK qabarıq beşbucaqlıdır (şəkil 5.2).



Şəkil 5.2. Mümkün həllər oblastı

2) $\bar{c}$ (2;4) vektorunu və ona perpendikulyar olan oblastdan keçən) l səviyyə xəttini quraq.

3)Bu halda səviyyə xətləri A və B nöqtələrindən keçən düz xəttə paraleldir. Məqsəd funksiyası AB seqmentinin istənilən nöqtəsində ən böyük qiyməti alır (alternativ optimal vəziyyət). A və B nöqtələrinin koordinatlarını tapaq.

A nöqtəsi birinci və dördüncü xətlərin kəsişməsində yerləşir.

Bu xətlərin tənliklərindən ibarət sistemi həll edək:

$$\begin{Bmatrix} x_1 + 2x_2 = 21 \\ x_1 - x_2 = -6 \end{Bmatrix}$$

Buradan $x_1 = 3, x_2 = 9$ A(3;9), $X_{1opt} = (3;9)$

$Z_{max}(X) = Z(X_{1opt}) = 2 \cdot 9 + 4 \cdot 9 = 42$ oldugunu alarıq.

B nöqtəsi birinci və ikinci xətlərin kəsişməsində yerləşir.

Bu xətlərin tənliklərindən ibarət sistemi həll edək:

$$\begin{Bmatrix} x_1 + 2x_2 \ = 21 \\ 5x_1 - 11x_2 = 0 \end{Bmatrix}$$

Buradan

$x_1 = 11;\ x_2 = 5;$ B(11;5); $X_{2opt} = (11; 5)$ və

$$Z_{max}(X) = Z\left(X_{2opt}\right) = 2 \cdot 11 + 4 \cdot 5 = 42$$

olduğunu alarıq.

Məqsəd funksiyası AB intervalının istənilən nöqtəsində ən böyük qiyməti aldığı üçün

$$X_{opt} = tX_{1opt} + (1-t)X_{2opt}, \quad t\epsilon[0,1]$$

və yaxud

$$X_{opt} = (t \cdot 3 + (1-t) \cdot 11;\ t \cdot 9 + (1-t) \cdot 5) = (11 - 8t; 5 + 4t).$$

5.2.Kanonik şəkildə verilmiş xətti proqramlaşdıma məsələsinin qrafik üsulu ilə həlli

Məhdudiyyətlər sistemi n məchul və m xətti asılı olmayan tənlikdən ibarət olan kanonik xətti proqramlaşdırma məsələsini (əgər $n - m = 2$ olarsa) qrafik üsulundan istifadə etməklə həll etmək olar. Bu məqsədlə onu aşağıdakı qaydada iki məchullu standart məsələyə çevirmək lazımdır.

Fərz edək ki, məhdudiyyət şərtləri

$$\begin{Bmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + .. a_{1,\mathrm{n}-1}x_{\mathrm{n}-1} + a_{1\mathrm{n}}x_{\mathrm{n}} = b_1 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots. \\ a_{\mathrm{m}1}x_1 + a_{\mathrm{m}2}x_2 + .. a_{\mathrm{m},\mathrm{n}-1}x_{\mathrm{n}-1} + a_{\mathrm{mn}}x_{\mathrm{n}} = b_m \end{Bmatrix} \qquad (5.4)$$

dəyişənlərin mənfi olmama şərtı

$$x_j \geq 0; \mathrm{j} = \overline{1, n}\ ; \ \ n - m = 2 \qquad \text{olan}$$

Z(x) = $c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots \ldots + c_{\mathrm{n}}x_{\mathrm{n}} \rightarrow$ max(min)

məqsəd funksiyasının optimal qiymətinin tapılması tələb olunur.

Jordan-Qauss üsulundan istifadə edərək (5.4) sistemini $x_1 + x_2 + \cdots \ldots + x_{\mathrm{m}}$ əsaslı m tənliklər sisteminə və $x_{m+1} = x_{n-1}$ və $x_{m+2} = x_n$ sərbəst məchullara çevirək. Bu zaman (5.4) məhdudyyətlər sistemi aşağıdakı şəkil alar:

$$\begin{cases} x_1 + a'_{1,n-1}x_{n-1} + a'_{1n}x_n = b'_1 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots . \\ x_m + a'_{m,n-1}x_{n-1} + a'_{mn}x_n = b'_m \end{cases} \quad (5.5)$$

$$x_j \geq 0; \mathrm{j} = \overline{1,n};$$

(5.5) dəyişdirilmiş məhdudiyyət sisteminin tənliklərindən istifadə edərək, məqsəd funksiyasını Z(x) yalnız x_{n-1}, x_n sərbəst məchullar baxımından ifadə edirik. Bütün əsas (bazis) məchulların $x_j \geq 0; \mathrm{j} = \overline{1,n}$ oldugunu nəzərə alaraq, onları atırıq və bərabərsizliklərlə ifadə olunan standart məsələnin məhdudiyyətlər sisteminə keçirik.

Beləliklə, iki məchullu standart xətti proqramlaşdırma məsələsini əldə edirik:Bu zaman, məqsəd funksiyası

$$\mathrm{Z(x)} = c'_{n-1}x_{n-1} + c'_n x_n \rightarrow \max(\min) \quad (5.6.)$$

məhdudiyyət şərtləri

$$\begin{cases} a'_{1,n-1}x_{n-1} + a'_{1n}x_n \leq b'_1 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots . \\ a'_{m,n-1}x_{n-1} + a'_{mn}x_n \leq b'_m \end{cases} \quad (5.7.)$$

$x_{n-1} \geq 0;\ x_n \geq 0$ olan

xətti proqramlaşdırma məsələsinin optimal qiymətini tapmaq lazımdır.

Çevrilmiş (5.6) – (5.7) xətti proqramlaşdırma məsələsi x_{n-1}, x_n olmaqla iki məchuldan ibarətdir. Onu qrafik üsulu ilə həll edərək,x_{n-1} və x_n məchullarının optimal qiymətlərini tapırıq, sonra onları (5.5) sisteminə qoyaraq, qalan $x_1,\ x_2, \dots . x_m$ məchullarının optimal qiymətlərini asanlıqla tapa bilərik.

Qeyd: Qrafik metod sadə, intuitivdir, tez və asanlıqla cavab almağa imkan verir, lakin praktiki iqtisadi məsələlərin həlli üçün uyğun deyil, çünki kəmiyyətlərin iqtisadi mənasını müəyyən etməyə imkan vermir. Eyni zamanda $n - m \neq 2$ üçün uyğun deyil.

Məsələ 5.3. Məqsəd funksiyası

$$Z(X) = 5x_1 + 3x_2 + x_3 - x_4 + x_5 \rightarrow max$$

məhdudiyyət şərtləri

$$\begin{cases} 5x_1 + 4x_2 - x_3 = 32 \\ -2x_1 + 4x_2 + x_4 = 10 \\ 7x_1 - 5x_2 + x_5 = 20 \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, \ \mathrm{j} = \overline{1,5} \ \text{olan}$$

kanonik məsələni standart məsələyə çevirin.

Həlli: Əsas dəyişənləri sərbəst olanlarla ifadə edək:

$$\begin{cases} x_3 = -32 + 5x_1 + 4x_2 \\ x_4 = 10 + 2x_1 - 4x_2 \\ x_5 = 20 - 7x_1 + 5x_2 \end{cases}$$

Əsas dəyişənləri məqsəd funksiyasından çıxaraq və bunun üçün məqsəd funksiyasında əsas dəyişənlərin yerinə sərbəst dəyişənlər vasitəsilə onların ifadələrini qoysaq aşagıdakıları alarıq:

$$Z(X) = 5x_1 + 3x_2 + (-32 + 5x_1 + 4x_2) - (10 + 2x_1 - 4x_2) + (20 - 7x_1 + 5x_2) = -22 + x_1 + 16x_2$$

$x_3 \geq 0, x_4 \geq 0, x_5 \geq 0$ oldugunu nəzərə alaraq aşağıdakı bərabərsizliklər sistemini alarıq:

$$\begin{cases} x_3 = -32 + 5x_1 + 4x_2 \geq 0 \\ x_4 = 10 + 2x_1 - 4x_2 \geq 0 \\ x_5 = 20 - 7x_1 + 5x_2 \geq 0 \end{cases} \text{və ya}$$

$$\begin{cases} 5x_1 + 4x_2 \geq 32 \\ 2x_1 - 4x_2 \geq -10 \\ -7x_1 + 5x_2 \geq -20 \end{cases}$$

İlkin kanonik məsələ qrafik üsulu ilə həll edilə bilən aşağıdakı yeni bir standart məsələyə çevrildi:

Məqsəd funksiyası

$$Z(X) = -22 + x_1 + 16x_2 \rightarrow max$$

məhdudiyyət şərtləri

$$\begin{cases} 5x_1 + 4x_2 \geq 32 \\ 2x_1 - 4x_2 \geq -10 \\ -7x_1 + 4x_2 \geq -20 \end{cases}$$

dəyişənlərin mənfi olmama şərti

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0.$$

Məsələ 5.4 Məqsəd funksiyası

$$Z(X) = 3x_1 + \ 2x_2 + x_3 \rightarrow max$$

məhdudiyyət şərtləri

$$\begin{Bmatrix} x_1 + 2x_2 \ \leq 12 \\ x_1 + x_3 = 4 \\ 2x_1 + 2x_2 \ \leq 14 \end{Bmatrix}$$

dəyişənlərin mənfi olmama şərti

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0$$

olan xətti proqramlaşdırma məsələsini qrafik üsulu ilə həll edin:

Həlli: Bu üç dəyişənli bir məsələdir. Kanonik formada sərbəst dəyişənlərin sayı ikidən çox olmadıgı halda, o qrafik üsulu ilə həll edilə bilər.

Məsələni kanonik formaya çevirək. Bunun üçün 2-ci tənlikdən x_3 əsas dəyişənini $x_3 \geq 4 - \ x_1$ ilə ifadə edirik və onun qiymətini məqsəd funksiyasında yerinə qoyuruq:

$$Z(X) = 3x_1 + \ 2x_2 + (4 - x_1) = 2x_1 + \ 2x_2 + 4 \rightarrow max$$

$x_3 \geq 0$ şərtindən

$$4 - x_1 \geq 0 \quad \text{və ya } x_1 \leq 4.$$

Uygun olaraq xətti proqramlaşdırma məsələsi aşagıdakı şəkil alacaqdır:

Məqsəd funksiyası

$$Z(X) = 2x_1 + \ 2x_2 + 4 \rightarrow max$$

məhdudiyyət şərtləri

$$\begin{Bmatrix} x_1 + 2x_2 \ \leq 12 \\ x_1 \leq 4 \\ 2x_1 + 2x_2 \ \leq 14 \end{Bmatrix}$$

dəyişənlərin mənfi olmama şərti

$$x_1 \geq 0, \, x_2 \geq 0.$$

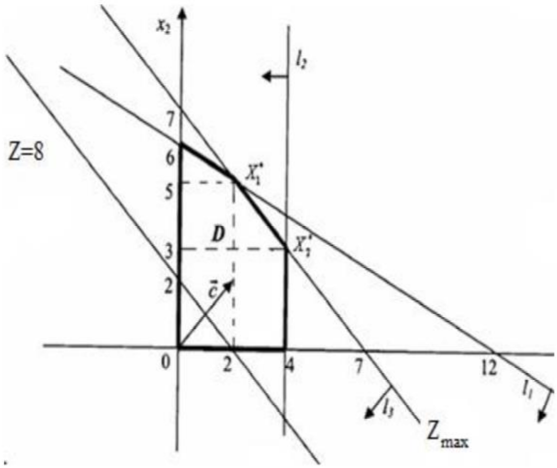
Yeni yaranmış məsələni adi qrafik üsulundan istifadə edərək həll edək.

İlkin olaraq məsələnin mümkün həllər oblastını quraq. Bunun üçün ayrı-ayrı məhdudiyyət şərtlərinin mümkün həllər oblastlarının kəsişməsini müəyyənləşdirmək lazımdır. $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$ şərtləri düzbucaqlı koordinat sistemində ordinat oxunun uygun olaraq sağ və yuxarı tərəfini əmələ gətirdiyindən onların kəsişməsi koordinat sisteminin birinci kvadrantına düşür və məsələnin şərtləri ziddiyyətli olmadığı halda, onun həlli koordinat sisteminin birinci kvadrantındadır. Ox_1,x_2 müstəvisində tənlikləri məhdudiyyətlər sistemində bərabərsizlik işarələrini bərabərlik işarələri ilə əvəz etmək nəticəsində alınan düz xətlər qururuq:

$$\left\{\begin{array}{c} x_1 + 2x_2 = 12 \\ x_1 = 4 \\ 2x_1 + 2x_2 = 14 \end{array}\right\} \rightarrow \left\{\begin{array}{c} \frac{x_1}{12} + \frac{x_2}{6} = 1 - \ l_1 düz\ xətti \\ x_1 = 4 \ - \ l_2\ düz\ xətti \\ \frac{x_1}{7} + \frac{x_2}{7} = 1 - \ l_3\ düz\ xətti \end{array}\right\}$$

Hər bir düz xəttə nisbətən ilkin bərabərsizliklərə uyğun olan yarım müstəvini təyin edirik (şəkil 5.3):

$$\left\{\begin{array}{c} x_1 + 2x_2 \leq 12 \\ x_1 \leq 4 \\ 2x_1 + 2x_2 \leq 14 \end{array}\right\}$$



Şəkil 5.3. Mümkün həllər oblastı

Məqsəd funksiyasının vektor-qradientini $\bar{c}$ =(2; 2) quraq. Ona perpendikulyar olaraq $Z(X) = 2x_1 + 2x_2 + 4 = const$ xəttlərindən birini quracağıq. Məsələn, $x_1 = x_2 = 1$ oldugu halda $Z(X) = 8$ olur və bu düz xətt

$$2x_1 + 2x_2 = 14$$

düz xəttinə paraleldir. Yaranan düz xətti $\bar{c}$ vektoru istiqamətində paralel olaraq D mümkün həllərin oblastı ilə kəsişmənin son nöqtəsinə qədər paralel sürüşdürək. Bizim misalda Z_{max} düz xətti l_3 düz xətti ilə üst-üstə düşür.

Beləliklə, X ekstremumunun başlanğıc nöqtələri $[X_{1opt}, X_{2opt}]$ parçasının bütün nöqtələri olacaqdır.

X_{1opt} və X_{2opt} koordinatlarını şəkil 5.5.-dən müəyyən etmək mümkündür: $X_{1opt}(2; 5), X_{2opt}$ (4; 3).Lakin ilkin məsələ üç dəyişənli olduğu üçün X_3 tapılmalıdır. Bunun üçün X_1 dəyişəninin qiymətini 2-ci məhdudiyyətdə yerinə yazaq:

$X_{1opt}(2; 5)$ oldugu halda:

$$x_3 \geq 4 - x_1 = 4 - 2 = 2 \rightarrow X_{1opt}(2; 5; 2);$$

$X_{2opt}(4; 3)$ oldugu halda:

$$x_3 \geq 4 - x_1 = 4 - 4 = 0 \rightarrow X_{2opt}(4; 3; 0).$$

İstənilən X optimal həllini analitik şəkildə yazmaq üçün X_{1opt} və X_{2opt} dayaq həllərinin qabarıq xətti kombinasiyasını tərtib etmək lazımdır:

$$X_{opt} = tX_{1opt} + (1 - t)X_{2opt}, \quad t\epsilon[0,1]$$

$$X_{opt} = t(2; 5; 2) + (1 - t)(4; 3; 0)$$
$$= (2t + (1 - t)4; 5t + (1 - t)3; 2t + (1 - t)0)$$
$$= (-2t + 4; 2t + 3; 2t)$$

$$Z(X) = Z_{max}\, X_{1opt} = 3 \cdot 2 + 2 \cdot 5 + 1 \cdot 2 = Z_{max}\, X_{2opt}$$
$$= 3 \cdot 4 + 2 \cdot 3 + 1 \cdot 0 = 18$$

Məsələ 5.5.

Məhdudiyyət şərtləri

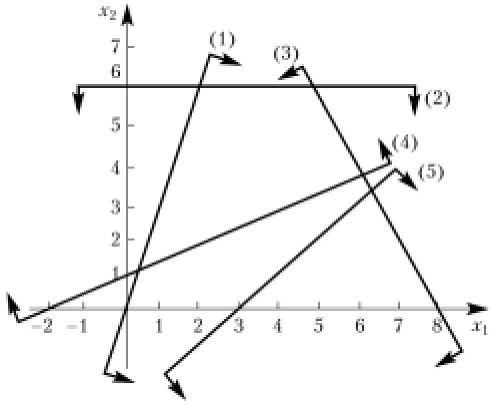
$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 \ \geq 12 \\ x_2 \leq 4 \\ 2x_1 + x_2 \ \leq 16 \\ -x_1 + 2x_2 \ \geq 2 \\ x_1 - x_2 \ \geq 3 \end{cases}$$

dəyişənlərin mənfi olmama şərti

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0$$

olan $Z(X) = 4x_1 + 5x_2$ funksiyasının maksimum qiymətini müəyyən edin:

Həlli: İlkin olaraq məsələnin mümkün həllər oblastını quraq:



Şəkil 5.4. Mümkün həllər oblastı

Şəkil 5.4-dən mümkün həllər oblastının boş çoxluq oldugunu görürüuk. Məhdudiyyətlər şərtlərinin uyğunsuzluğu səbəbindən məsələnin həlli yoxdur.

ÖZÜNÜ YOXLAMAQ ÜÇÜN SUALLAR VƏ TAPŞIRIQLAR

1.Aşağıdakı xətti proqramlaşdırma məsələsini qrafik üsulu ilə həll edin:

$$f(x) = 4x_1 + 3x_2 \rightarrow max$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \geq 4 \\ 2x_1 + 2x_2 \geq 3 \\ 5x_1 + 3x_2 \leq 32 \\ 4x_1 + 7x_2 \leq 27 \end{cases}$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

2.Aşağıdakı xətti proqramlaşdırma məsələsini qrafik üsulu ilə həll edin:

$$f(x) = 3x_1 + 4x_2 \to max$$

$$\begin{cases} -2x_1 + 4x_2 \leq 1 \\ 4x_1 + 6x_2 \leq 12 \\ 6x_1 + 3x_2 \leq 9 \\ 2x_1 + x_2 \geq 1{,}6 \\ 2x_1 - 4x_2 \geq 2 \end{cases}$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

3.Aşağıdakı xətti proqramlaşdırma məsələsini qrafik üsulu ilə həll edin:

$$f(x) = 1{,}4x_1 + 2x_2 \to max$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \leq 4 \\ 4x_1 + 2x_2 \geq 4 \\ 2{,}3x_1 + 5x_2 \geq 4 \\ x_1 \leq 3 \\ x_2 \leq 3 \end{cases}$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

4.Aşağıdakı xətti proqramlaşdırma məsələsini qrafik üsulu ilə həll edin:

$$f(x) = 3{,}5x_1 - 3x_2 \to max$$

$$\begin{cases} x_1 - 4x_2 \leq 4 \\ 3x_1 + 2x_2 \leq 6 \\ -x_1 + x_2 \geq 1 \\ x_1 + 2x_2 \leq 3 \end{cases}$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

5.Aşağıdakı xətti proqramlaşdırma məsələsini qrafik üsulu ilə həll edin:

$$f(x) = 2{,}7x_1 - 3{,}6x_2 \to min$$
$$\begin{Bmatrix} 3x_1 + 2x_2 \ \geq 4 \\ x_1 - 0{,}5x_2 \leq 2 \\ x_1 + 2{,}5x_2 \ \leq 5 \end{Bmatrix}$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

6.Aşağıdakı xətti proqramlaşdırma məsələsini qrafik üsulu ilə həll edin:

$$f(x) = -2{,}3x_1 - x_2 \to min$$
$$\begin{Bmatrix} 2x_1 + 4x_2 \ \leq 15 \\ 4x_1 + 2x_2 \leq 8 \\ x_1 + 3x_2 \ \geq 9 \\ 6x_1 + 5x_2 = 30 \end{Bmatrix}$$

7.Aşağıdakı xətti proqramlaşdırma məsələsini qrafik üsulu ilə həll edin:

$$f(x) = 3x_1 + x_2 \to max$$
$$\begin{Bmatrix} -1.6x_1 + x_2 \ \geq 1{,}9 \\ 2{,}2x_1 + 3x_2 \leq 15 \\ -2x_1 + x_2 \ \leq 4 \end{Bmatrix}$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

8.Aşağıdakı xətti proqramlaşdırma məsələsini qrafik üsulu ilə həll edin:

$$f(x) = x_1 + x_2 \to max$$
$$\begin{Bmatrix} -4x_1 + x_2 \ \leq 2{,}5 \\ 2x_1 - 3x_2 \leq 3{,}89 \\ 2x_1 + x_2 \ \leq 8{,}7 \\ 6x_1 - 4x_2 \ \leq 4{,}56 \end{Bmatrix}$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

9.Aşağıdakı xətti proqramlaşdırma məsələsini qrafik üsulu ilə həll edin:

$$f(x) = 5x_1 - 4x_2 \to min$$

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 \ \geq 6 \\ 2x_1 - 3x_2 \geq -4 \\ x_1 - x_2 \ \leq 3 \\ 4x_1 + 7x_2 \ = 14 \end{cases}$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

10.Aşağıdakı xətti proqramlaşdırma məsələsini qrafik üsulu ilə həll edin:

$$f(x) = 5x_1 + 3x_2 \rightarrow max$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 \ \geq 6 \\ 2x_1 - 2x_2 \geq -6 \\ x_1 + 2x_2 \ \leq 4 \\ 4x_1 + 3x_2 \ = 12 \end{cases}$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

VI FƏSİL. XƏTTİ PROQRAMLAŞDIRMA MƏSƏLƏSİNİN HƏLLİ ÜÇÜN SİMPLEKS ÜSULU

6.1 Mühüm nəzəri məlumatlar

Yuxarıda qeyd edildiyi kimi, qrafik üsuldan istifadə yalnız iki dəyişənli xətti proqramlaşdırma məsələlərinin həlli zamanı məqsəduygundur Daha çox sayda dəyişəni olan xətti proqramlaşdırma məsələlərini həll edərkən isə cəbri aparatdan istifadə etmək lazımdır. Xətti proqramlaşdırma məsələrinin həllinin ümumi üsulu - planın ardıcıl şəkildə təkmilləşdirilməsi üsulu ilk dəfə 1939-cu ildə sovet riyaziyyatçısı L.V. Kantoroviç tərəfindən irəli sürülmüşdür. Sonradan, simpleks metodu adlanan oxşar üsul 1947-ci ildə Amerika riyaziyyatçısı J. Danzig tərəfindən hazırlanmışdır. Bu üsulların ideyası məqsədyönlü şəkildə mümkün həllər oblastının təpələrini tapmaqdan ibarətdir.

Simpleks üsulu -bu, məqsəd funksiyası optimal qiymət (maksimum və ya minimum) alana qədər xətti proqramlaşdırma məsələsinin bir bazis həlldən digər bazis həllə ardıcıl keçid üsuludur.

Xətti proqramlaşdırma məsələlərinin həlli üçün simpleks üsulunu tətbiq etmək üçün məsələ kanonik formada olmalıdır. Əgər xətti proqramlaşdırma məsələsi kanonik formada təqdim edilmirsə, onda simpleks metodunu tətbiq etməzdən əvvəl ilkin məsələ kanonik formada yazılmalıdır.

Kanonik xətti proqramlaşdırma məsələsini nəzərdən keçirək:

$$Z(x) = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots \ldots\ldots + c_nx_n \to \max \quad (6.1)$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n + x_{n+1} = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n + x_{n+2} = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n + x_{n+m} = b_m \end{cases} \quad (6.2)$$

$$x_1, x_{2,\ldots\ldots}, x_n \geq 0 \quad (6.3)$$

Əgər (6.6) xətti tənliklər sistemində hər bir tənliyin ona +1 əmsalı ilə daxil olan və digər tənliklərdə olmayan dəyişəni varsa, bazisli (əsaslı) sistem adlanır. Belə dəyişənlər bazis(əsas), qalanları isə bazis olmayan (qeyri-əsas) adlanır.
Xətti proqramlaşdırma məsələsi kanonik xətti proqramlaşdırma məsələsi adlanır, əgər:
– tənliklər sistemi bazisli (əsaslı) sistemdir;
– Z(x) məqsəd funksiyası yalnız bazis olmayan (qeyri-əsas) dəyişənlər baxımından ifadə edilir.

6.2.Simpleks üsulunun alqoritmi

Addım 1. İlkin həllin əldə edilməsi.

Bazis (əsas) adlanan və aşağıdakı xüsusiyyətlərə malik olan m dəyişənləri seçilir: onlar yalnız bir tənlikdə 1 əmsalı ilə, sistemin qalan tənliklərində isə 0 əmsalı ilə daxil olurlar.Qalan $n-m$ dəyişənlərinə isə sərbəst dəyişənlər deyilir.

Bütün sərbəst dəyişənlərin 0-a bərabər olduğu qəbul edilir və bazis (əsas) dəyişənlər müvafiq sistem məhdudiyyətlərinin sağ tərəflərinə bərabərdir.

Tutaq ki, m bazis dəyişənləri $x_1, x_2 \ldots\ldots, x_m$ dəyişənləri olsun (əks halda dəyişənlər həmişə yenidən nömrələnə bilər). Onda X_0 ilkin həll aşagıdakı şəkil alır:

$$X_0 = \{x_1 = b_1, x_2 = b_{2,\ldots\ldots,} x_m = b_m, x_{m+1} = 0, x_n = 0\}$$

Əgər bütün $b_i \geq 0, i = \overline{1,m}$ olarsa, onda ilkin həll etibarlıdır. 2-ci addıma keçilir. Əks halda, ilkin həlli tapmaq üçün alqoritmdən istifadə edilir.

Addım 2. f(x) funksiyasının yalnız sərbəst dəyişənlərlə ifadə edilməsi.

$$f(x) = \sum_{j=m+1}^{n} c_j x_j$$

3-cü addıma keçilir.

Addım 3. Həllin optimal olmasının yoxlanılması.
Optimallıq üçün dayaq planınının tədqiqi və hesablama prosesini xüsusi Simpleks cədvəllərin köməyi ilə həyata keçirmək də mümkündür.
Məqsəd funksiyası

$$Z(x) = c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3. + c_4x_{4\to}\ \max$$

Məhdudiyyət şərtləri

$$\begin{cases} x_1 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4 = b_1 \\ x_2 + a_{23}x_3 + a_{24}x_4 = b_2 \end{cases}$$

dəyişənlərin mənfi olmama şərti

$$x_1, x_{2,} x_{2,} x_3, x_4 \geq 0$$

olan xətti proqramlaşdırma məsələsini maksimallaşdıraq:

Fərz edək ki, $b_1 \geq 0$ və $b_2 \geq 0$, yəni, tənliklər sistemi dayaq həllinə gətirilir (b_1, b_2, 0, 0).Bu həll üçün məqsəd funksiyasının qiyməti

$$Z(x) = c_1x_1 + c_2x_2 \to \max$$

bərabərdir.

Simpleks cədvəlini dolduraq:

Bazis dəyişənlər	C_b	A_0	x_1	x_2	x_3	x_4	Simpleks münasibətlər
			c_1	c_2	c_3	c_4	
x_1	c_1	b_1	1	0	a_{13}	a_{14}	b_i/a_{ij}
x_2	c_2	b_2	0	1	a_{23}	a_{24}	
$Z_j - c_j$		Δ_0	Δ_1	Δ_2	Δ_3	Δ_4	

Cədvəl 6.1.Simpleks cədvəli

$Z_j - c_j$ sətrinin doldurulması ilə daha ətraflı nəzər salaq. Burada: x_0 ilkin dayaq planı üçün məqsəd funksiyasının dəyəri yerləşir.

Yəni, $Z(x_0) = \Delta_0 = C_b \cdot A_0$ və

$$\Delta_J = C_b \cdot A_j - C_jA_0 = Z_j - c_j$$

Simpleks cədvəli əvvəlki iterasiyada aparılan tədqiqatın nəticələrini aydın şəkildə göstərir:

1. Optimallıq meyarı.

Simpleks cədvəlinin indeks sətrində mənfi elementlər yoxdursa, əldə edilmiş dayaq həlli optimaldır.

2. Həllin mümkünsüzlüyü meyarı.

Simpleks cədvəlinin indeks sətrində mənfi element varsa, məsələn $\Delta_j < 0$ və müvafiq sütunda müsbət element yoxdursa, $a_{1j} < 0$ və $a_{2j} < 0$, onda xətti proqramlaşdırma məsələsinin həlli yoxdur.

3. Həllin təkmilləşdirilməsi meyarı.

Simpleks cədvəlinin indeks sətrində mənfi element varsa, məsələn $\Delta_j < 0$ və sütunda bu elementə uyğun müsbət elementlər varsa, simpleks çevrilmələrindən istifadə edərək yeni bazisə keçməklə başqa dayaq həllini əldə etmək olar. Bu zaman məqsəd funksiyası əvvəlki dayaq həlldən az olmayan qiymət alacaqdır**.**

Qeyd 1. Sistemin dayaq həllərinin sayı sonlu olduğundan xətti proqramlaşdırma məsələsinin həlli prosesi də sonlu olacaqdır.

Qeyd 2. Əgər xətti proqramlaşdırma məsələsində Z məqsəd funksiyasının minimumunu tapmaq lazımdırsa, onda $F\max = -Z\min$ funksiyası tətbiq edilir.Bərabərliyə görə $Z + F = 0$, $Z\min = -F\max$. Buna görə də, F maksimumlaşdırılma məsələsini həll etməklə, eyni zamanda Z-ni minimuma endirmək məsələsini həll edirik.

Məsələ 6.1. Şirkət üç istehsal resursuna (xammal, avadanlıq, elektrik enerjisi) malikdir və istehsalı iki fərqli şəkildə təşkil edə bilər.

Bir ay ərzində resurs istehlakı və hər bir istehsal üsulu üçün cəmi resurs aşağıdakı cədvəldə verilmişdir (şərti vahidlərdə):

İstehsal resursları	Bir ay ərzində resurs istehlakı		Cəmi resurs
	I üsul	II üsul	
Xammal	1	2	4
Avadanlıq	1	1	3
Elektrik enerjisi	2	1	8

Birinci istehsal üsulu ilə müəssisə bir ayda 3 min, ikincisi ilə 4 min məhsul istehsal edir. Mövcud resurslarla maksimum məhsul əldə etmək üçün müəssisə bu üsulların hər biri ilə neçə ay işləməlidir

Həlli:Məsələnin riyazi modelini yaradaq: x_1 − birinci üsulla müəssisənin iş vaxtını, x_2 – ikinci üsulla müəssisənin iş vaxtını işarə edək:
Məsələnin riyazi modeli aşağıdakı formaya malikdir:
Məqsəd funksiyası

$$Z = 3x_1 + 4x_2 \to max$$

Məhdudiyyət şərtləri

$$\begin{Bmatrix} x_1 + 2x_2 \le 4 \\ x_1 + x_2 \le 3 \\ 2x_1 + x_2 \le 8 \end{Bmatrix}$$

Dəyişənlərin mənfi olmama şərti

$$x_1 \ge 0, \qquad x_2 \ge 0$$

Məsələni kanonik şəklə gətirək:

$$Z - 3x_1 + 4x_2 = 0$$

$$\begin{Bmatrix} x_1 + 2x_2 + x_3 = 4 \\ x_1 + x_2 + x_4 = 3 \\ 2x_1 + x_2 + x_5 = 8 \end{Bmatrix}$$

$$x_j \ge 0, \qquad \mathrm{j} = \overline{1{,}5}$$

Məsələnin şərtlərini Simpleks cədvəlinə yerləşdirək:

Bazis dəy.	C_b	A_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
			3	4	0	0	0
x_3	0	4	1	2	1	0	0
x_4	0	3	1	1	0	1	0
x_5	0	8	2	1	0	0	1
Δ_j		0	-3	-4	0	0	0

Cədvəl 6.2. İlkin Simpleks cədvəl

Burada:

$$\Delta_0 = 0 \cdot 4 + 0 \cdot 3 + 0 \cdot 8 = 0$$
$$\Delta_1 = 0 \cdot 1 + 0 \cdot 1 + 0 \cdot 2 - 3 = -3$$
$$\Delta_2 = 0 \cdot 2 + 0 \cdot 1 + 0 \cdot 2 - 4 = -4$$
$$\Delta_3 = 0 \cdot 1 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 - 0 = 0$$
$$\Delta_4 = 0 \cdot 0 + 0 \cdot 1 + 0 \cdot 0 - 0 = 0$$
$$\Delta_5 = 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 1 - 0 = 0$$

Burada ilkin optimal həll $x_b^0 = (0,0,4,3,8)$ $Z(x_b^0) = 0$

Cədvəldən göründüyü kimi, Δ_j sətrində iki mənfi (-4; -3)qiymət var, bu o deməkdir ki, tapılan həll optimal deyil və təkmilləşdirilə bilər. Bunun üçün ilk növbədə aşagıdakıları müəyyənləşdirək:

1)Aparıcı sütunun seçilməsi. Burada aparıcı sütun x_2 dəyişənin yerləşdiyi sütun olacaqdır. Beləki, max $\{|-3|, |-4|\} = max\{3,4\} = 4$ yerləşdiyi sütun aparıcı sütun olacaqdır.

Bazis dəy.	C_b	A_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
			3	4	0	0	0
x_3	0	4	1	2	1	0	0
x_4	0	3	1	1	0	1	0
x_5	0	8	2	1	0	0	1
Δ_j		0	-3	-4	0	0	0

Cədvəl 6.3.Aparıcı sütunun seçilməsi

1) Aparıcı sətirin seçilməsi. Aparıcı sətiri müəyyən etmək üçün sərbəst dəyişənlər sütununun elementlərini aparıcı sütunun

müvafiq elementlərinə nisbətlərini (b_i/a_{ij})hesablayaq və əldə edilən nisbətlər arasında minimum olanı tapaq. Burada aparıcı sətir x_3 dəyişənin yerləşdiyi sətir olacaqdır. Beləki, $min\left\{\frac{4}{2},\frac{3}{1},\frac{8}{2}\right\} = min\{2,3,8\} = 2$ yerləşdiyi sətir aparıcı sütun olacaqdır:

Bazis dəy.	C_b	A_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
			3	4	0	0	0
x_3	0	4	1	2	1	0	0
x_4	0	3	1	1	0	1	0
x_5	0	8	2	1	0	0	1
Δ_j		0	-3	-4	0	0	0

Cədvəl 6.4. Aparıcı sətirin seçilməsi

Aparıcı sütunla aparıcı sətirin kəsişdiyi yerdə duran ədəd (2) həlledici elementdir. Yeni bir simpleks cədvəli quraq. Bazis dəyişənlər sütunundan x_3 bazis dəyişənini çıxarırıq və ora bazis olmayan x_2 dəyişənini daxil edirik Aparıcı sətirin elementlərini həlledici elementə (2-yə) bölürük.

Cədvəlin qalan elementləri aşagıdakı düsturu ilə hesablanır.

$$b'_i = b_i - a_{iq}\frac{b_p}{a_{pq}} = b_i - a_{iq}\cdot b'_p \quad (6.4),$$

$$a'_{ij} = a_{ij} - a_{iq}\frac{a_{pj}}{a_{pq}} = a_{ij} - a_{iq}\cdot a'_{pj} \quad (6.5),$$

$$i = \overline{1,m}\ ,\ i \neq p, j = \overline{1,n+m} \quad (6.6).$$

Bazis dəy.	C_b	A_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
			3	4	0	0	0
x_2	4	4/2=2	½	2/2=1	½	0/2=0	0/2=0
x_4	0	3	1	1	0	1	0
x_5	0	8	2	1	0	0	1
Δ_j		0	-3	-4	0	0	0

Cədvəl 6.5. Aparıcı sətirin elementlərinin yenidən hesablanması

Bazis dəy.	C_b	A_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
			3	4	0	0	0
x_2	4	2	½	1	½	0	0
x_4	0	3-1x2=1	1-1x½=½	1	0-1x½=-½	1-1x0=1	0-1x0=0
x_5	0	8-1x2=6	2-1x½=3/2	1	0-1x½=-½	0-1x0=0	1-1x0=1
Δ_j		0-(-4)x2=8	-3-(-4)x½=-1	-4	0-(-4)x½=2	0-(-4)x0=0	0-(-4)x0=0

Cədvəl 6.6. Digər elementlərin yenidən hesablanması

Beləliklə yeni Simpleks cədvəl aşagıdakı şəkil alacaqdır:

Bazis dəy.	C_b	A_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
			3	4	0	0	0
x_2	4	2	½	1	½	0	0
x_4	0	1	½	0	-½	1	0
x_5	0	6	3/2	0	-½	0	1
Δ_j		8	-1	0	2	0	0

Cədvəl 6.7. Yeni Simpleks cədvəl

Burada ilkin optimal həll

$$x_b^1 = (0,2,0,1,6)\ ,$$
$$Z(x_b^1) = 8$$

Cədvəldən göründüyü kimi, Δ_j indeks sətrində bir mənfi (-1)qiymət var, və o, təkmilləşdirilə bilər. Bunun üçün ilk növbədə aşagıdakıları müəyyənləşdirək:

1)Aparıcı sütunun seçilməsi. Burada aparıcı sütun x_1 d əyişənin yerləşdiyi sütun olacaqdır (yeganə mənfi qiymət bu sütunda yerləşdiyi üçün).

Burada aparıcı sətir x_4 dəyişənin yerləşdiyi sətir olacaqdır. Beləki, $min\left\{2/\frac{1}{2}, 1/\frac{1}{2}, 6/\frac{3}{2}\right\} = min\{4,2,4\} = 2$ yerləşdiyi sətir aparıcı sütun olacaqdır.

Aparıcı sütunla aparıcı sətirin kəsişdiyi yerdə duran ədəd (1/2) həlledici elementdir.

Yeni bir simpleks cədvəli quraq. Bazis dəyişənlər sütunundan x_4 bazis dəyişənini çıxarırıq və ora bazis olmayan x_1 dəyişənini daxil edirik Aparıcı sətirin elementlərini həlledici elementə (1/2-yə) bölürük.

Bazis dəy.	C_b	A_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
			3	4	0	0	0
x_2	4	2	½	1	½	0	0
x_1	3	2	1	0	-1	2	0
x_5	0	6	3/2	0	-½	0	1
Δ_j		**8**	**-1**	**0**	**2**	**0**	**0**

Cədvəl 6.8. Cədvəlin elementlərinin hesablanması

Cədvəlin digər elementləri (6.4-6.6) düsturu ilə hesablanır:

Bazis dəy.	C_b	A_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
			3	4	0	0	0
x_2	4	2-1/2x2=1	0	1	½-1/2(-1)=1	0-1/2x2=-1	0
x_1	3	2	1	0	-1	2	0
x_5	0	6-3/2x2=3	0	0	-½-3/2x(-1)=1	0-3/2x2=-3	1
Δ_j		8-(-1)x2=10	0	0	2-(-1)x(-1)=1	0-(-1)x2=2	0

Cədvəl 6.9. Digər elementlərin yenidən hesablanması

Beləliklə, aşagıdakı yekun Simpleks cədvəli əldə edirik:

Bazis dəy.	C_b	A_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
			3	4	0	0	0
x_2	4	1	0	1	1	-1	0
x_1	3	2	1	0	-1	2	0
x_5	0	3	0	0	1	-3	1
Δ_j		10	0	0	1	2	0

Cədvəl 6.10 Yekun Simpleks cədvəli

Bu cədvəlin sərbəst dəyişənlərinin bütün qiymətləri

$x_j \geq 0$, buna görə də tapılan dayaq həlli optimaldır:
$x_b^2 = (2,1,0,0,3)$, $Z(x_b^2) = 10$

Beləliklə, birinci üsula görə, müəssisə iki ay, ikinciyə görə bir ay fəaliyyət göstərməlidir, bu zaman maksimum istehsal həcmi isə 10 min ədəd olacaqdır.

6.3 Dəyişdirilmiş Jordan Əvəzetmələrindən istifadə etməklə xətti proqramlaşdırma məsələsinin Simpleks üsulu ilə həlli

Fərz edək ki,

$$\mathrm{Z(x)} = c_1x_1 + c_sx_s + \cdots \ldots + c_nx_n \to \max \quad (6.7)$$

$$\left.\begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots . + a_{1s}x_s + \cdots + a_{1n}x_n \leq a_1 \\ \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \\ a_{r1}x_1 + \cdots . a_{rs}x_s + \cdots + a_{rn}x_n \leq a_r \\ \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{ms}x_s + \cdots + a_{mn}x_n \leq a_m \end{cases}\right\} (6.8)$$

$$x_1, \ldots . x_{s,\ldots\ldots}, x_n \geq 0 \quad (6.9)$$

Məsələni Simpleks üsulla həll etmək üçün aşagıdakı addımlar atılmalıdır:

Addım 1 .Bazis (əsas) dəyişənləri seçmək və Simpleks cədvəlini formalaşdırmaq;

Addım 2. Məsələnin dayaq həllini tapmaq;

Addım 3 . Məsələnin optimal həllini tapmaq.

Addım 1. (6.8) tənliklər sisteminə balanslaşdırıcı $y_1, y_r \ldots \ldots, y_m \geq 0$ dəyişənlərini əlavə edərək, xətti proqramlaşdırma məsələsini kanonik şəklə gətirək:

$$\left.\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n + y_1 = a_1 \\ \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \\ a_{r1}x_1 + a_{rs}x_2 + \cdots + a_{rn}x_n + y_r = a_2 \\ \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n + y_m = a_m \end{cases}\right\} (6.10)$$

Daxil edilən $y_1, y_r \ldots \ldots, y_m$ dəyişənləri bazis (əsas) dəyişənlər, müvafiq olaraq tənliklər sisteminin bütün digər dəyişənləri bazis olmayan (qeyri-əsas) dəyişənlər olacaqdır.

(6.10) tənliklər sistemini bazis dəyişənləri ilə xarakterizə edək:

$$\left.\begin{cases} y_1 = -a_{11}x_1 - a_{1s}x_s - \cdots - a_{1n}x_n + a_1 \geq 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots.. \\ y_r = -a_{r1}x_1 - a_{rs}x_s - \cdots - a_{rn}x_n + a_2 \geq 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ y_m = -a_{m1}x_1 - a_{ms}x_s - \cdots - a_{mn}x_n + a_m \geq 0 \end{cases}\right\} (6.11)$$

Yuxarıdakı (6.7) məqsəd funksiyasına və (6.11) sisteminə əsaslanaraq ilkin Simpleks cədvəlini qurmaq olar:

	$-x_1$	$-x_s$	……..	$-x_n$	1
y_1	a_{11}	a_{1s}	………	a_{1n}	a_1
…………					
y_r	a_{r1}	a_{rs}	……….	a_{rn}	a_2
……….					
y_m	a_{m1}	a_{ms}		a_{mn}	a_m
$Z(x) =$	$-c_1$	$-c_2$		$-c_n$	0

Cədvəl 6.11. İlkin Simpleks cədvəli

Addım 2. Məsələnin dayaq həllini müəyyən etmək üçün fərz edək ki, $a_1, a_{2,\dots\dots,} a_m \geq 0$. Yəni,Simpleks cədvəldə sərbəst hədlərin yerləşdiyi sütunda mənfi element yoxdur.Onda $x_1, x_{s,\dots\dots,} x_n$ qeyri- bazis dəyişənlərin qiymətlərinin sıfıra bərabər oldugunu qəbul etsək və qiymətlərini tənlik sistemində yerinə yazsaq,

$$\begin{cases} a_{11} \cdot 0 + \cdots . + a_{1s} \cdot 0 + \cdots a_{1n} \cdot 0 + y_1 = a_1 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots. \\ a_{r1} \cdot 0 + \cdots . + a_{rs} \cdot 0 + \cdots a_{2s} \cdot 0 + y_2 = a_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1} \cdot 0 + a_{ms} \cdot 0 + \cdots a_{mn} \cdot 0 + y_m = a_m \end{cases}$$

$$\begin{cases} y_1 = a_1 \geq 0 \\ y_r = a_r \geq 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ y_m = a_m \geq 0 \end{cases}$$

alarıq.Beləliklə, məsələnin dayaq həlli

$x_b^0 = (0, \dots \dots .0, a_1, a_{2, \dots \dots ,} a_m)$ formasını alacaqdır.

Deməli, Simpleks cədvəldə sərbəst hədlərin yerləşdiyi sütunda mənfi element yoxdursa, bu zaman qeyri- bazis dəyişənlərinin sıfır qiymətlərində məsələnin dayaq həlli alınır.Xətti proqramlaşdırmanın "max" məsələsinin dayaq həllinin tapılması dedikdə Simpleks cədvəlin sərbəst hədlər sütununda mənfi həddin olmaması başa düşülür.

Fərz edək ki, Simpleks cədvəldə sərbəst hədlərin yerləşdiyi sütunda mənfi sərbəst hədd var və qeyri-bazis dəyişənlərinin sıfır qiymətləri məsələnin ilkin dayaq həllini vermir. Belə halda yeni bazisə keçməklə elə bir bazis formalaşdırmaq lazımdır ki, burada sərbəst hədlərin heç birinin qiyməti mənfi olmasın. Bu cür bazisin olmaması isə məsələnin şərtlərinin ziddiyyətli olmasını və onun həllinin olmamasını göstərir.

Sərbəst həddlərin yerləşdiyi sütunda mənfiliyi aradan qaldırmaq üçün aşagıdakı qaydalar əsasında əsas element müəyyən edilir:

1) Fərz edək ki, 6.11 cədvəlində ən kiçik mənfi sərbəst hədd a_r –dir($a_r < 0$). Bu zaman a_r elementinin yerləşdiyi r-ci sətirin elementlərinə baxılır və burada yerləşən hər hansı mənfi element axtarlır. Bu sətirdə yerləşən hər hansı bir mənfi elementin yerlədiyi sütun əsas sütun olacaqdır.
   Onu da qeyd edək ki, əgər bu sətirdə heç bir mənfi element yoxdursa, bu məsələnin şərtlərinin ziddiyyətli olmasını göstərir. Bu zaman məsələnin həlli yoxdur;
2) Əsas sətiri müəyyən etmək üçün sərbəst hədləri əsas sütunun elementlərinə bölmək və alınan nisbətlərin ən kiçik müsbətini seçmək lazımdır. Məsələn:

$$\min\left(\frac{a_1}{a_{12}} \geq 0, \dots .., \qquad \frac{a_r < 0}{a_{22} < 0} > 0, \dots .. \frac{a_m}{a_{m2}} \geq 0\right)$$

Burada ən kiçik müsbət nisbətin alındıgı sətir əsas sətirdir.

3)Əsas element isə əsas sətirlə əsas sütunun kəsişməsində yerləşən elementdir. Bundan sonra 6.11 cədvəlində dəyişdirilmiş Jordan Əvəzetmələrini tətbiq etməklə yeni bazisə keçmək mümkündür.

Nəticədə mənfi sərbəst hədd artıq müsbət olur. Belə ki:

$$b_r = \frac{a_r < 0}{a_{rs} < 0} > 0$$

Bu qayda ilə sərbəst həddlər sütunundakı digər mənfi həddlər də mənfilikdən azad edilir və məsələnin dayaq həlli tapılır.Deməli, Simpleks üsulun ikinci mərhələsində ya dayaq həll tapılır, yaxud da məsələnin şərtlərinin ziddiyyətli olması müəyyənləşdirilir.

Dayaq həll tapıldıqdan sonra Simpleks cədvəl aşagıdakı şəklə düşür:

	$-x_1$	$-y_r$	……..	$-x_n$	1
y_1	b_{11}	b_{12}	………	$b_{1\mathrm{n}}$	b_1
……….					
x_s	$b_{\mathrm{r}1}$	b_{rs}	……….	b_{rn}	b_2
………..					
y_m	$b_{\mathrm{m}1}$	b_{ms}		b_{mn}	b_m
$Z(x) =$	q_1	q_2		q_n	Q

Cədvəl 6.12.Dayaq həll tapıldiqdan sonra Simpleks cədvəl

Burada:

$$b_1 \geq 0, \dots \dots \dots . b_m \geq 0$$

və qeyri-bazis dəyişənlərin sıfır (x_1 =0, y_r=0, $x_n = 0$) qiymətlərində məsələnin dayaq həlli alınır. Burada məqsəd funksiyasının qiyməti isə $Z\left(x_{day}\right) = Q$ olur.

Addım 3. Məsələnin optimal həllini tapmaq üçün cədvəl 6.12.-nin $Z(x)$ sətir elementlərinə baxılır. Əgər bu elementlərindən heç biri mənfi deyilsə, yəni

$$q_1 \geq 0, \dots \dots \dots . q_n \geq 0$$

olarsa, yuxarıda tapılmış dayaq həlli eyni zamanda məsələnin optimal həllidir.

$$Zmax = Q$$

Cədvəl 6.12-yə əsasən məqsəd funksiyasını aşağıdakı kimi ifadə etmək olar:

$$Z(x) = -q_1x_1 - \cdots . -q_sy_r - \cdots .. -q_nx_n + Q$$

Z sətirindəki elementlərdən heç biri mənfi olmadıgı halda istənilən bazis dəyişikliyi bu funksiyanın qiymətini azaldır.

$$Z(x) = -[(q_s > 0, y_r > 0)] + Q < Q$$

Bu, o deməkdir ki, Q funksiyanın ən böyük (maksimum) qiymətidir.

Z sətirindəki elementlərdən hər hansı biri mənfi oldugu halda $(q_s < 0)$ $y_r \neq 0$ olur və funksiyanın qiyməti artır.

$$Z(x) = -[(q_s < 0, y_r > 0)] + Q < Q$$

Beləliklə, cədvəlin Z sətirində hər hansı bir mənfi element mövcuddursa, Q funksiyanın ən böyük (maksimum) qiyməti deyildir.

Simpleks üsulla xətti proqramlaşdırmanın "min" məsələsi iki üsulla həll edilə bilər:

1) "min" xətti proqramlaşdırma məsələsini "max" xətti proqramlaşdırma məsələsinə gətirməklə;
2) "min" xətti proqramlaşdırma məsələsini birbaşa Simpleks üsulla həll etməklə.

"min" xətti proqramlaşdırma məsələsini "max" xətti proqramlaşdırma məsələsinə gətirməklə məsələni həll etmək üçün $Z(x)$ məqsəd funksiyasını -1-ə vurmaqla yeni xətti funksiyanı qurmaq lazımdır:

$$F(x) = (-1)Z(x) \rightarrow max$$

Sonra yuxarıdakı max" xətti proqramlaşdırma məsələsinin həlli alqoritminə əsasən verilmiş şərtlər əsasında bu yeni funksiyanın ən böyük(maksimum) qiyməti tapılır. Bu zaman həll edilmiş max" xətti proqramlaşdırma məsələsinin tapılmış optimal həlli həm də min" xətti proqramlaşdırma məsələsinin də optimal həlli olacaqdır və aşagıdakı bərabərlik dogrudur:

$$Z_{min} = -F_{max} = -Q$$

"min" xətti proqramlaşdırma məsələsini birbaşa Simpleks üsulla həll etmək üçün "max" xətti proqramlaşdırma məsələsinin həllində oldugu kimi 3 addım atılmalıdır. Birinci və ikinci addımların məzmunu "max" xətti proqramlaşdırma məsələsinin məzmunu ilə eynidir. Üçüncü addımdakı optimal həllin tapılması əlaməti isə Z sətirində müsbət əmsalın olmamasından ibarətdir . Burada yeni bazisə keçid qaydası max" xətti proqramlaşdırma məsələsindəki kimidir.

Məsələ 6.2. Aşağıdakı "max" xətti proqramlaşdırma məsələsini Simpleks üsulla həll edin:

$$Z_{max} = 2x_1 - 4x_2 + 5x_3$$

$$\begin{cases} -x_1 + 3x_2 + 3x_3 \leq 3 \\ -4x_1 + 3x_2 + 2x_3 \geq -4 \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0, \quad x_3 \geq 0$$

"max" xətti proqramlaşdırma məsələsini Simpleks üsulla həll etmək üçün yuxarıda qeyd etdiyimiz 3 addımı ataq:

Addım 1. Məsələnin tənliklər sisteminə balanslaşdırıcı $y_1 \geq 0$ və $y_2 \geq 0$ dəyişənlərini əlavə edərək xətti proqramlaşdırma məsələsini kanonik şəklə gətirək. Eyni zamanda ikinci bərabərsizliyi mənfi 1-ə vurmaqla onu "$\leq$ " şəklində ifadə edək:

$$\begin{cases} -x_1 + 3x_2 + 3x_3 + y_1 = 3 \\ 4x_1 - 3x_2 - 2x_3 + y_2 = 4 \end{cases}$$

Burada y_1 və y_2 bazis dəyişənləridir və tənliklər sistemini bazis dəyişənlərinə bərabər edək:

$$\begin{cases} y_1 = x_1 - 3x_2 - 3x_3 + 3 \geq 0 \\ y_2 = -4x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 4 \geq 0 \end{cases}$$

Məsələnin məqsəd funksiyasına və bazis dəyişənlərlə ifadə edilmiş tənliklər sisteminə əsasən Simpleks cədvəli quraq:

	$-x_1$	$-x_2$	$-x_3$	1
y_1	-1	3	3	3
y_2	4	-3	-2	4
$Z_{(x)}$	-2	4	-5	0

Addım 2. Məsələnin dayaq həllinin tapılmasıdır. Bunun üçün birinci növbədə Simpleks cədvəlin sərbəst hədlər sütununa baxılır. Burada 2 sərbəst hədd var və hər ikisi müsbətdir. Dayaq həllinin tapılmasının əlamətinin sərbəst hədlər sütununda heç bir mənfi elementin olmamasının oldugunu nəzərə alaraq, cədvəlin yuxarısında yerləşən qeyri-bazis dəyişənlərin sıfır

$$x_1 = 0, \qquad x_2 = 0, \qquad x_3 = 0$$

qiymətlərində məsələnin dayaq həlli tapılır.

Addım 3. Bu addımda məsələnin optimal həlli tapılır. Yəni, məqsəd funksiyasına maksimum qiymət verəcək optimal həll axtarılır. Yuxarıda dediyimiz kimi, əgər "max" xətti proqramlaşdırma məsələsində məqsəd funksiyasının ən böyük (maksimum) qiyməti axtarılırsa, bu zaman optimal həllin tapılması üçün Simpleks cədvəlin məqsəd funksiyası sətirindəki mənfi elementləri yox etmək lazımdır. Cədvəldən göründüyü kimi, burada mənfi elementlər mövcuddur. Bu isə II addımda tapdığımız dayaq həllin optimal həll olmadıgını göstərir. Deməli, Dəyişdirilmiş Jordan Əvəzetmələrinin vasitəsilə bir bazisdən digərinə keçməklə optimal həlli tapmaq lazımdır.

Xatırladaq ki, Dəyişdirilmiş Jordan Əvəzetməsinin beş mərhələsi vardır:

1)əsas element vahidlə əvəz olunur;

2)əsas sətirin qalan digər elementləri olduğu kimi qalır;

3)əsas sütunun qalan digər elementləri öz işarələrini əksinə dəyişir;

4) çarpaz vurma qaydasında əsas sətirə, eləcə də əsas sütuna daxil olmayan digər elementlərin yeni qiymətləri müəyyən edilir, yəni

$$b_{ij} = a_{ij} \cdot a_{rs} - a_{is} \cdot a_{rj} \; (a \neq r;\; j \neq s)$$

Burada:
$a_{rs}-$ -əsas elementi göstərir.
5)yeni cədvəldəki bütün elementlər əsas elementə bölünür.
Əvvəlcə Simpleks cədvəlinin Z(x) sətirində yerləşən (-2) elementini yox edək. Bu elementin yerləşdiyi sütunda cəmi bir müsbət element (a_{21} =4) olduğu üçün o, əsas element olaraq qəbul ediləcəkdir.

	-x_1	-x_2	-x_3	1
y_1	-1	3	3	3
y_2	4	-3	-2	4
$Z_{(x)}$	-2	4	-5	0

	-y_2	-x_2	-x_3	1
y_1	1	9	10	16
x_1	1	-3	-2	4
$Z_{(x)}$	2	10	-24	8

Bu cədvəldəki bütün elementləri həlledici elementə (4) bölsək, alırıq:

	-y_2	-x_2	-x_3	1
y_1	¼	9/4	5/2	4
x_1	¼	-3/4	-1/2	1
$Z_{(x)}$	½	5/2	-6	2

Sonuncu cədvələ əsasən alınmış dayaq planı optimal hesab edilmir. Cünki, Simpleks cədvəlinin məqsəd funksiyası sətirindəki mənfi element (-6) vardır və yox edilməlidir. Simpleks cədvəlinin Z(x) sətirində yerləşən (-6) elementini yox edək. Bu elementin yerləşdiyi sütunda cəmi bir müsbət element ($a_{13}=5/2$) olduğu üçün o, əsas element olaraq qəbul ediləcəkdir.

	-y_2	-x_2	-y_1	1
x_3	¼	9/4	1	4
x_1				9/2
$Z_{(x)}$	11/4	79/4	6	29

Bu cədvəldəki bütün elementləri həlledici elementə (5/2) bölsək, alırıq:

	$-y_2$	$-x_2$	$-y_1$	1
x_3	1/10	9/10	2/5	8/5
x_1				9/5
$Z_{(x)}$	11/10	79/10	12/5	58/5

Sonuncu cədvələ əsasən alınmış dayaq planı optimal hesab edilir. Cünki, Simpleks cədvəlinin məqsəd funksiyası sətirindəki mənfi element qalmamışdır.

$y_2 = 0,\ x_1 = 0,\ y_1 = 0$ olaraq qəbul etsək, aşagıdakı optimal həlli alarıq:

$$x_1 = 9/5,\ x_2 = 0,\ x_3 = 8/5 \text{ olduqda}$$

$$Z_{max} = 2 \cdot \frac{9}{5} + 5\frac{8}{5} = \frac{58}{5}$$

ÖZÜNÜ YOXLAMAQ ÜÇÜN SUALLAR VƏ TAPŞIRIQLAR

1. Xətti proqramlaşdırma məsələsi üçün ilkin dayaq planını necə qurmaq olar?
2. Dayaq planının optimal olması üçün şərtləri sadalayın.
3. Xətti tənliklər sistemlərinin hansı həlli üsulu Simpleks metodunun əsasını təşkil edir?
4.Aşağıdakı xətti proqramlaşdırma məsələsini Simpleks üsulu ilə həll edin:

$$Z = 2x_1 + 6x_2 \to max$$
$$\begin{cases} x_1 + x_2 \le 4 \\ 2x_1 + 3x_2 \le 12 \\ 2x_1 - x_2 \le 2 \end{cases}$$
$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0$$

5.Aşağıdakı xətti proqramlaşdırma məsələsini Simpleks üsulu ilə həll edin:

$$Z = x_1 - x_2 \to max$$
$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 \le 2 \\ x_1 - 2x_2 \le 2 \\ x_1 + x_2 \le 5 \end{cases}$$
$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0$$

6.Aşağıdakı xətti proqramlaşdırma məsələsini Simpleks üsulu ilə həll edin:

$$Z = 3x_1 - 12x_2 + 4x_3 \to min$$
$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_3 \ge 2 \\ x_1 - 4x_2 + 4x_3 \ge 1 \end{cases}$$
$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0$$

7.Aşağıdakı xətti proqramlaşdırma məsələsini Simpleks üsulu ilə həll edin:

$$Z = 2x_1 - x_2 \to min$$

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 \ \geq 11 \\ x_1 + x_2 \geq 2 \\ x_1 - 3x_2 \ \geq 9 \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

8.Aşağıdakı xətti proqramlaşdırma məsələsini Simpleks üsulu ilə həll edin:

$$Z = -x_1 - 2x_2 - 3x_3 \rightarrow min$$

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 \ + 3x_3 \geq 1 \\ 2x_1 - x_2 - x_3 \leq 1 \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \ \geq 0, x_3 \leq 0$$

9.Aşağıdakı xətti proqramlaşdırma məsələsini Simpleks üsulu ilə həll edin:

$$Z = 2x_1 - x_2 + 3x_3 + x_4 \rightarrow max$$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \ + 3x_3 \leq 10 \\ x_1 + x_3 + x_4 \leq 7 \\ 3x_1 - 2x_1 \ + x_5 \leq 4 \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \ \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \ \geq 0, x_5 \geq 0$$

10.Aşağıdakı xətti proqramlaşdırma məsələsini Simpleks üsulu ilə həll edin:

$$Z = x_1 - 2x_2 \rightarrow max$$

$$\begin{cases} -x_1 + 2x_2 \ + x_3 \leq 5 \\ x_1 - x_2 + x_4 \leq 3 \\ x_1 + x_2 + x_5 \leq 1 \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \ \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \ \geq 0, x_5 \geq 0$$

VII FƏSİL. SÜNİ ƏSAS ÜSUL (M-METOD)

7.1 Süni əsas üsulun tətbiqinin əhəmiyyəti

Simpleks üsulundan istifadə etmək üçün zəruri şərt, dayaq planının, yəni kanonik tənliklər sisteminin mümkün əsas həllinin olmasıdır.Bunun üçün aşağıdakı şərtlər yerinə yetirilməlidir:
1)sistem kanonik struktura malik olmalıdır;
2)yalnız bərabərlik şəklində məhdudiyyətlər var;
3)məhdudiyyətlərin sağ tərəfləri müsbətdir;
4)məsələnin dəyişənləri müsbətdir.

Bu şərtlər olmadan dayaq planı əldə etmək mümkün deyil. Ancaq real məsəllərdə sadalanan şərtlər həmişə yerinə yetirilmir.

İstənilən xətti proqramlaşdırma məsələsində ilkin dayaq planını əldə etməyə imkan verən süni əsas üsul adlanan xüsusi bir üsul vardır.Simpleks metodundan istifadə etməklə xətti proqramlaşdırma məsələsini həll etmək üçün əsas dəyişənləri sərbəst olanlarla əvəz etmək lazımdır. Bundan əlavə, əsas dəyişənlərin mənfi olmayan əmsalları olmalıdır. Lakin bu şərt bütün xətti proqramlaşdırma məsələləri üçün yerinə yetirilmir. Bu halda problemi süni əsas üsuldan istifadə etməklə həll etmək olar.

Süni əsas üsuldan (M-METOD) məhdudyyət şərtləri bərabərlik və ya bərabərsizlik şəklində olan xətti proqramlaşdırma məsələsinin mümkün bazis həllini tapmaq üçün istifadə olunur.

7.2. Süni əsas üsul ilə xətti proqramlaşdırma məsələsinin həlli alqoritmi

Fərz edək ki, xətti proqramlaşdırma məsələsi aşağıdakı formaya malikdir:

$$f(x) = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots \ldots\ldots + c_n x_n \rightarrow \max(\min) \quad (7.1)$$

$$\left\{\begin{array}{ll} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \le b_i\,, & \mathrm{i} = \overline{1,k} \\ \sum_{j}^{n} a_{ij}x_j \ge b_i, & \mathrm{i} = \overline{k+1,m} \end{array}\right\} (7.2)$$

Məsələni kanonik şəklə gətirdikdən sonra tənliklər aşağıdakı şəkil alır:

$$\left\{\begin{array}{ll} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j + x_{n+i} = b_i\,, & \mathrm{i} = \overline{1,k} \\ \sum_{j}^{n} a_{ij}x_j - x_{n+i} = b_i, & \mathrm{i} = \overline{k+1,m} \end{array}\right\} (7.3)$$

(7.3) məhdudiyyətlərinin sol tərəflərinə $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_{m-k}$ müsbət dəyişənlərini əlavə edək,

$$\left\{\begin{array}{ll} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j + x_{n+i} = b_i\,, & \mathrm{i} = \overline{1,k} \\ \sum_{j}^{n} a_{ij}x_j - x_{n+i} + \omega_{i-k} = b_i, & \mathrm{i} = \overline{k+1,m} \end{array}\right\} (7.4) v\text{ə } (7.5)$$

Beləliklə, $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_{m-k}$ dəyişənləri vahid matris şəklində ilkin dayaq həllin əsasını təmsil edir.Məqsəd funksiyasına $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_{m-k}$ dəyişənləri ±M əmsalları ilə əlavə edilir. Yəni, məqsəd funksiyasına maksimumlaşdırma məsələlərində mənfi M əmsalları, minimumlaşdırma məsələlərində müsbət M əmsalları daxil edilir.Beləliklə, yeni M-məsələsi alınır(buna görə də süni əsas üsul M-metodu da adlanır).

$$f(x) = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_\mathrm{n}x_\mathrm{n} + M(\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_{m-k}) \to min \; (7.6)$$

$$f(x) = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_\mathrm{n}x_\mathrm{n} - M(\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_{m-k}) \to max \quad (7.7)$$

M kifayət qədər böyük sabit kəmiyyət hesab olunur, o qədər böyükdür ki, əgər dəyişənlərdən ən azı biri $\omega_i = 0$ (i = $\overline{1, m-k}$) olarsa, məqsəd funksiyasında $\sum_{j=1}^{n} c_j x_j$ şərtləri nəzərə alına bilər.

Buradan belə naticə çıxır ki, məsələnin məqbul həlli yalnız dəyişənlərin $\omega_i = 0$ (i = $\overline{1, m-k}$) olduğu halda baş verir.

Aşağıdakı şərtlərə nail olmaqla optimallığı əldə etmək olar:

$$f(x) = +M(\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_{m-k}) \to min \quad (7.8)$$

$$f(x) = -M(\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_{m-k}) \to max \quad (7.9)$$

Bundan sonra, ortaya çıxan məsələ adi Simpleks üsulundan istifadə etməklə həll edilir.

M-məsələnin optimal həllində süni dəyişənlər yoxdursa, bu həll ilkin məsələnin optimal həllidir.M-məsələnin optimal həllində süni dəyişənlərdən ən azı biri sıfırdan fərqlidirsə, onda ilkin məsələnin məhdudiyyətlər sistemi zidiyyətlidir və ilkin məsələ həll olunmazdır.

Süni əsas üsuldan istifadə etməklə həll prosesi zamanı tərtib edilən simpleks cədvəli genişləndirilmiş adlanır. O, süni dəyişənlər üçün əlavə sütunların olması ilə adi cədvəldən fərqlənir.Simpleks cədvəlləri tərtib edərkən ilkin dəyişənlərin sərbəst, əlavə və süni dəyişənlərin isə əsas olduğu qəbul edilir.

7.3. Süni əsas üsul ilə xətti proqramlaşdırma məsələsinin həlli

Məsələ 7.1. Məqsəd funksiyası

$$f(x) = 2x_1 + x_2 \to min$$

məhdudiyyət şərtləri

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \geq 6 \\ x_1 + 3x_2 \geq 12 \end{cases}$$

dəyişənlərin mənfi olmama şərti

$$x_1 \geq 0, \qquad x_2 \geq 0$$

olan “min” xətti proqramlaşdırma məsələsini süni əsas üsulla həll edin:

Həlli:

Məsələni kanonik şəklə gətirək. Bunun üçün bərabərsizliklərin sol tərəfindən x_3və x_4 əlavə dəyişənlərini çıxaq.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 6 \\ x_1 + 3x_2 - x_4 = 12 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0 \end{cases}$$

Dəyişdirilmə nəticəsində əldə edilən məhdudiyyətlər daha yaxşı formaya malik deyil. M-metodundan istifadə edək. Məhdudiyyət tənliklərinin sol tərəflərinə ω_1 və ω_2dəyişənlərini əlavə edək:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + \omega_1 = 6 \\ x_1 + 3x_2 - x_4 + \omega_2 = 12 \\ x_i \geq 0, \mathrm{i} = \overline{1,4}, \omega_i \geq 0, \mathrm{i} = 1,2 \end{cases}$$

Burada məqsəd funksiyası aşağıdakı formanı alacaq:

$$f(x) = M(\omega_1 + \omega_2) \to min$$

Məqsəd funksiyasını kanonik formaya gətirək:

$$f'(x) = -M(\omega_1 + \omega_2) \to max$$

yəni,

$$f'(x) = -M\omega_1 - M\omega_2 \to max$$

Beləliklə, kanonik formaya salınmış məsələ aşağıdakı formaya malikdir:

$$f'(x) = -M\omega_1 - M\omega_2 \to max$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + \omega_1 = 6 \\ x_1 + 3x_2 - x_4 + \omega_2 = 12 \\ x_i \geq 0, \mathrm{i} = \overline{1,4}, \omega_i \geq 0, \mathrm{i} = 1,2 \end{cases}$$

Yaranan məsələni Simpleks üsulu ilə həll edək. İlkin Simpleks cədvəli quraq:

Bazis dəyişənlər	Dəyişənlərin əmsalları						Şərbəst dəyi-şənlər
	0	0	0	0	-M	-M	
	x_1	x_2	x_3	x_4	ω_1	ω_2	

-M	ω_1	1	1	-1	0	1	0	6
-M	ω_2	1	3	0	-1	0	1	12
D		-2M	-4M	M	M	0	0	

Cədvəl 7.1.İlkin Simpleks cədvəl

İlkin həll:

$X_0 = \{x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 0, x_1 = 0, x_4 = 0, \omega_1 = 6, \omega_2 = 12\ \}$ optimal deyil, çünki d sətrində mənfi olanlar var, yəni həll təkmilləşdirilə bilər.

Bazislər siyahısına daxil ediləcək dəyişəni təyin edək. Bunun üçün d sətrində mənfi olanlar arasında maksimum mütləq qiyməti tapaq:

$$max\{|-2M|, |-4M|\} = 4M$$

Bu o deməkdir ki, ikinci sütun aparıcı sütun olacaqdır və bazisə x_2 dəyişəni girəcəkdir (Cədvəl 7.2).

Bazis dəyişənlər		Dəyişənlərin əmsalları						Şərbəst dəyi-şənlər
		0	0	0	0	-M	-M	
		x_1	x_2	x_3	x_4	ω_1	ω_2	
-M	ω_1	1	1	-1	0	1	0	6
-M	ω_2	1	3	0	-1	0	1	12
D		-2M	-4M	M	M	0	0	

Cədvəl 7.2. Aparıcı sütunun seçilməsi

İndi biz bazisdən çıxacaq dəyişəni təyin edək, bunun üçün sərbəst dəyişənlər sütununun elementlərini aparıcı sütunun müvafiq elementlərinə nisbətlərini hesablayaq və əldə edilən nisbətlər arasında minimum olanı tapaq:

$$min\left\{\frac{6}{1}, \frac{12}{3}\right\} = min\{6.4\} = 4$$

Bu o deməkdir ki, həlledici sətir ikinci olacaq, ω_2 dəyişəni bazisdən çıxacaq və həlledici element $a_{22} = 3$-dür. (Cədvəl 7.3).

Bazis dəyişənlər		Dəyişənlərin əmsalları						Şərbəst dəyişənlər
		0	0	0	0	-M	-M	
		x_1	x_2	x_3	x_4	ω_1	ω_2	
-M	ω_1	1	1	-1	0	1	0	6
-M	ω_2	1	3	0	-1	0	1	12
D		-2M	-4M	M	M	0	0	

Cədvəl 7.3. Aparıcı sətirin seçilməsi

İndi isə yeni simpleks cədvəlinə keçək. Yenidən hesablandıqda həlledici element bir, aparıcı sütunda qalan elementlər isə sıfıra çevrilməlidir.

Bunun üçün aparıcı sətirin elementlərini həlledici elementə (3-ə) bölürük (Cədvəl 7.4):

Bazis dəyişənlər		Dəyişənlərin əmsalları						Şərbəst dəyişənlər
		0	0	0	0	-M	-M	
		x_1	x_2	x_3	x_4	ω_1	ω_2	
-M	ω_1	1	1	-1	0	1	0	6
-M	ω_2	1/3	1	0	-1/3	0	1/3	4

Cədvəl 7.4. Aparıcı sətirin elementlərinin yenidən hesablanması

Birinci sətirin aparıcı sütundakı duran elementinin sıfır olması üçün aparıcı sətiri (-1-ə) vurub, birinci sətirə əlavə edək (Cədvəl 7.5.):

Bazis dəyişənlər		Dəyişənlərin əmsalları						Şərbəst dəyişənlər
		0	0	0	0	-M	-M	
		x_1	x_2	x_3	x_4	ω_1	ω_2	
-M	ω_1	2/3	0	-1	1/3	1	-1/3	2
-M	ω_2	1/3	1	0	-1/3	0	1/3	4

Cədvəl 7.5. Digər elementlərin yenidən hesablanması

İndi bazisdə ω_2 dəyişəninin əvəzinə x_2 dəyişəni yazaq və d sətrinin qiymətlərini yenidən hesablayaq (Cədvəl 7.6.):

Bazis dəyişən-lər		Dəyişənlərin əmsalları						Şərbəst dəyi-şənlər
		0	0	0	0	-M	-M	
		x_1	x_2	x_3	x_4	ω_1	ω_2	
-M	ω_1	2/3	0	-1	1/3	1	-1/3	2
0	x_2	1/3	1	0	-1/3	0	1/3	4
D		-2M/3	0	M	-M/3	0	M/3	

Cədvəl 7.6. Yeni Simpleks cədvəl

Əldə edilmiş həll

$$X_0 = \{x_1 = 0, x_2 = 4, x_3 = 0, x_1 = 0, x_4 = 0, \omega_1 = 2, \omega_2 = 0\}$$

optimal deyil, çünki d sətrində mənfi olanlar var, yəni həll təkmilləşdirilə bilər.

Bazisləriin siyahısına daxil ediləcək dəyişəni təyin edək. Bunun üçün d sətrində mənfi olanlar arasında maksimum mütləq qiyməti tapaq:

$$max\left\{\left|\frac{-2M}{3}\right|, \left|\frac{-M}{3}\right|\right\} = \frac{2M}{3}$$

Bu o deməkdir ki, birinci sütun aparıcı sütun olacaqdır və bazisə x_1 dəyişənini girəcəkdir(Cədvəl 7.7):

Bazis dəyişən-lər		Dəyişənlərin əmsalları						Şərbəst dəyi-şənlər
		0	0	0	0	-M	-M	
		x_1	x_2	x_3	x_4	ω_1	ω_2	
-M	ω_1	2/3	0	-1	1/3	1	-1/3	2
0	x_2	1/3	1	0	-1/3	0	1/3	4
D		-2M/3	0	M	-M/3	0	M/3	

Cədvəl 7.7. Aparıcı sütunun seçilməsi

İndi biz bazisdən çıxacaq dəyişəni təyin edək, bunun üçün sərbəst dəyişənlər sütununun elementlərini aparıcı sütunun müvafiq elementlərinə nisbətlərini hesablayaq və əldə edilən nisbətlər arasında minimum olanı tapaq:

$$min\left\{\frac{2}{2/3}, \frac{4}{1/3}\right\} = min\{3.12\} = 3$$

Bu o deməkdir ki, aparıcı sətir birinci olacaq, ω_1 dəyişəni bazisdən çıxacaq və həlledici element $a_{11} = 2/3$-dür (Cədvəl 7.8):

Bazis dəyişənlər		Dəyişənlərin əmsalları						Şərbəst dəyişənlər
		0	0	0	0	-M	-M	
		x_1	x_2	x_3	x_4	ω_1	ω_2	
-M	ω_1	2/3	0	-1	1/3	1	-1/3	2
0	x_2	1/3	1	0	-1/3	0	1/3	4
D		-2M/3	0	M	-M/3	0	M/3	

Cədvəl 7.8. Aparıcı sətirin seçilməsi

İndi isə yeni simpleks cədvəlinə keçək.

Yenidən hesablandıqda həlledici element bir, aparıcı sütunda qalan elementlər isə sıfıra çevrilməlidir.

Bunun üçün aparıcı sətirin elementlərini həlledici elementə (2/3-ə) bölürük (Cədvəl 7.9):

Bazis dəyişənlər		Dəyişənlərin əmsalları						Şərbəst dəyişənlər
		0	0	0	0	-M	-M	
		x_1	x_2	x_3	x_4	ω_1	ω_2	
-M	ω_1	1	0	-1,5	0,5	1,5	-0,5	3
0	x_2	1/3	1	0	-1/3	0	1/3	4

Cədvəl 7.9. Aparıcı sətirin elementlərinin yenidən hesablanması

Sonra, aparıcı sətirin elementlərini –1/ 3-ə vururuq və ikinci sətirin müvafiq elementlərinə əlavə edirik, beləliklə, ikinci sətirdəki aparıcı sütunda sıfır alırıq(Cədvəl 7.1.):

Bazis dəyişənlər		Dəyişənlərin əmsalları						Şərbəst dəyişənlər
		0	0	0	0	-M	-M	
		x_1	x_2	x_3	x_4	ω_1	ω_2	
-M	ω_1	1	0	-1,5	0,5	1,5	-0,5	3
0	x_2	0	1	0,5	-0,5	-0.5	0,5	2

Cədvəl 7.10. Digər elementlərin yenidən hesablanması

İndi bazisdə ω_1 dəyişəninin əvəzinə x_1 dəyişəni yazaq və d sətrinin qiymətlərini yenidən hesablayaq(Cədvəl 7.11):

Bazis dəyişənlər		Dəyişənlərin əmsalları						Şərbəst dəyişənlər
		0	0	0	0	-M	-M	
		x_1	x_2	x_3	x_4	ω_1	ω_2	
0	x_1	1	0	-1,5	0,5	1,5	-0,5	3
0	x_2	0	1	0,5	-0,5	-0.5	0,5	2
D		0	0	0	0	M	M	

Cədvəl 7.11. Yeni Simpleks cədvəl

Əldə edilmiş həll

$X_0 = \{x_1 = 3, x_2 = 2, x_3 = 0, x_1 = 0, x_4 = 0, \omega_1 = 0, \omega_2 = 0\}$

optimaldır, çünki d sətrində mənfi kəmiyyət yoxdur.

Dəyişənlərin alınan qiymətlərini ilkin məqsəd funksiyasında yerinə yazaq:

$$f(x) = 2 \cdot 3 + 2 = 8$$

Deməli, məqsəd funksiyası minimum qiymətə

$f(x) = 8)$ $x_1 = 3, x_2 = 2$ olduqda çatır.

ÖZÜNÜ YOXLAMAQ ÜÇÜN SUALLAR VƏ TAPŞIRIQLAR

1.Süni əsas üsulun tətbiqinin əhəmiyyəti nədən ibarətdir?
2.Süni əsas üsul ilə xətti proqramlaşdırma məsələsinin həlli alqoritmini izah edin.
3.Məqsəd funksiyası

$$f(x) = 3x_1 + 2x_2 + 3x_3 \rightarrow min$$

məhdudiyyət şərtləri

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 \leq 2 \\ 3x_1 + 8x_2 + 2x_3 \geq 4 \\ x_3 \geq 1 \end{cases}$$

dəyişənlərin mənfi olmama şərti

$$x_1 \geq 0, \qquad x_2 \geq 0$$

olan *xətti proqramlaşdırma məsələsini suni əsas üsulla həll edin.*
4.Məqsəd funksiyası

$$f(x) = 4x_1 + x_2 \rightarrow min$$

məhdudiyyət şərtləri

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 = 3 \\ 4x_1 + 3x_2 \geq 6 \\ x_1 + 2x_2 \leq 4 \end{cases}$$

dəyişənlərin mənfi olmama şərti

$$x_1 \geq 0, \qquad x_2 \geq 0$$

olan xətti proqramlaşdırma məsələsini süni əsas üsulla həll edin
5.Məqsəd funksiyası

$$f(x) = -2x_1 + 3x_2 - 6x_3 - x_4 \rightarrow min$$

məhdudiyyət şərtləri

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 24 \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 \leq 22 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 \geq 10 \end{cases}$$

dəyişənlərin mənfi olmama şərti

$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0,\ x_4 \geq 0$

olan xətti proqramlaşdırma məsələsini süni əsas üsulla həll edin.
6.Məqsəd funksiyası

$$f(x) = x_1 + 2x_2 - x_3 \rightarrow max$$

məhdudiyyət şərtləri

$$\begin{cases} -x_1 + 4x_2 + 2x_3 \leq 3 \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 \geq 3 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 2 \end{cases}$$

dəyişənlərin mənfi olmama şərti

$$x_1 \geq 0, \qquad x_2 \geq 0, \qquad x_3 \geq 0$$

olan xətti proqramlaşdırma məsələsini süni əsas üsulla həll edin.

7.Məqsəd funksiyası

$$f(x) = 4x_1 + 5x_2 + x_3 \rightarrow max$$

məhdudiyyət şərtləri

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_4 = 10 \\ x_1 + 4x_2 + 4x_5 = 11 \\ 3x_1 + 3x_2 + x_3 = 13 \end{cases}$$

dəyişənlərin mənfi olmama şərti

$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0,\ x_4 \geq 0,\ x_5 \geq 0$

olan xətti proqramlaşdırma məsələsini süni əsas üsulla həll edin.

8.Məqsəd funksiyası

$$f(x) = 2x_1 + 4x_2 + 6x_3 \rightarrow min$$

məhdudiyyət şərtləri

$$\begin{cases} -x_1 + 2x_2 + x_3 \geq 1 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 \geq 1 \end{cases}$$

dəyişənlərin mənfi olmama şərti

$$x_1 \geq 0, \qquad x_2 \geq 0, \qquad x_3 \geq 0$$

olan xətti proqramlaşdırma məsələsini süni əsas üsulla həll edin.

9.Məqsəd funksiyası

$$f(x) = x_1 - 24x_2 + 12x_3 \rightarrow max$$

məhdudiyyət şərtləri

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 + 2x_3 \leq 1 \\ -x_1 + 4x_2 - x_3 \geq 2 \end{cases}$$

dəyişənlərin mənfi olmama şərti

$$x_1 \geq 0, \qquad x_2 \geq 0, \qquad x_3 \geq 0$$

olan *xətti proqramlaşdırma məsələsini süni əsas üsulla həll edin.*

10. Məqsəd funksiyası

$$f(x) = 12x_1 + 5x_2 + 2x_3 \rightarrow max$$

məhdudiyyət şərtləri

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 3 \\ 2x_1 - 5x_2 = 4 \end{cases}$$

dəyişənlərin mənfi olmama şərti

$$x_1 \geq 0, \qquad x_2 \geq 0, \qquad x_3 \geq 0$$

olan *xətti proqramlaşdırma məsələsini süni əsas üsulla həll edin.*

VIII FƏSİL. XƏTTİ PROQRAMLAŞDIRMADA İKİLİ MƏSƏLƏLƏR

8.1. İlkin və ikili məsələlərin tərtibndə ümumi qaydalar

Xətti proqramlaşdırmada, xüsusilə istehsalın planlaşdırılması və resursların bölüşdürülməsi ilə bağlı problemlərin həllində ikili məsələlər mühüm rol oynayır.

İkilik ideyası ondan ibarətdir ki, xərcləri minimuma endirmədən mənfəəti artırmaq mümkün deyildir.

Hər bir xətti proqramlaşdırma məsələsi müəyyən şəkildə standart qaydalara uyğun tərtib edilmiş ilkin məsələyə münasibətdə ikili adlanan başqa bir xətti proqramlaşdırma məsələsi ilə əlaqələndirilə bilər.

Bu məsələlərin hər biri müstəqil şəkildə həll edilə bilər, lakin eyni zamanda, onların mümkün həll yolları bir-biri ilə birbaşa bağlıdır, bu da onlardan birinin optimal həllini bilməklə digərinin optimal həllini müəyyən etməyə imkan verir və çox vaxt ilkin məsələnin həllindən daha çox ikili məsələnin həllini tapmaq daha asan olur.

Nümunə olaraq istehsalın planlaşdırma məsələsini nəzərdən keçirək:

Fərz edək ki, 1 saylı müəssisədə hər bir resurs növündən $b_i, \overline{1,m}$ vahidi həcmində m növ resurs var ki, onlardan n növ məhsul istehsal olunur. j –ci növ məhsul vahidini istehsal etmək üçün a_{ij} vahid i-ci növ resursdan istifadə edilir və məhsul vahidinin maya dəyəri c_j -dir. Maksimum maya dəyərini təmin edən məhsul istehsalı planını tərtib etmək lazımdır (nə qədər və hansı növdə məhsul istehsal olunmalı olduğunu göstərməklə).Bu, ikin məsələdir.

Beləliklə, standart formada ilkin (birbaşa) xətti proqramlaşdırma məsələsi aşağıdakı kimidir:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \le b_i\,, \qquad \mathrm{i} = \overline{1,m}$$

$$x_j \ge 0, \qquad \mathrm{j} = \overline{1,n}$$

məhdudiyyət şərtini qane edən və

$$Z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \ \rightarrow \ \max,$$

məqsəd funksiyasının maksimumunu təmin edən

$$X = x_1, x_2, x_3 \dots \dots \dots, x_n$$

vektorunu müəyyən etmək lazımdır.

Fərz edək ki, 2 saylı müəssisə 1 saylı müəssisənin malik olduğu bütün resursları almaq qərarına gəlmişdir. Bu zaman 2 saylı müəssisə bu resurslara optimal qiymətlər təyin etməlidir.

İlkin məsələnin hər bir məhdudiyyətinə xammal növlərinin qiymətlərinin vektoru kimi ikili dəyişən $Y = (y_1, y_2, y_3 \dots \dots \dots, y_m)$ təyin edək, Burada y_i - i −ci resurs vahidinin dəyərinin qiymətidir.

$$\left\{\begin{array}{c} \displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \le b_i \leftrightarrow y_i\,, \qquad \mathrm{i} = \overline{1,m} \\ x_j \ge 0, \qquad \mathrm{j} = \overline{1,n} \end{array}\right\}$$

Resursun qiymətləndirilməsi aşağıdakı şərtlərə əsaslanır:

− 2 saylı müəssisə üçün resursların ümumi dəyəri (ümumi xərclər) minimal olmalıdır:

$$\sum_{i=1}^{m} b_i y_i \ \rightarrow min$$

- j-ci məhsulun vahidinin satışına xərclənmiş bütün resursların dəyəri j-ci məhsulun vahidinin satışından əldə edilən gəlirdən az olmamalıdır. (hər bir resurs növü üçün 1 №-li müəssisəyə bu növ resursu hazır məhsula emal etməklə əldə edə biləcəyi dəyərdən, yəni, son məhsulun dəyərindən az olmayan məbləği ödəməlidir):

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_j \geq c_j, \qquad j = \overline{1,n}$$

Beləliklə, ilkin istehsalın planlaşdırılması məsələsi ilə bağlı ikili məsələ formal olaraq aşağıdakı kimi yazılır:
Məhdudiyyətləri

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_j \geq c_j, \qquad j = \overline{1,n}$$

$$y_i \geq 0, \qquad \mathrm{i} = \overline{1,m}$$

şəklində olan funksiyanın minimumunu

$$F = \sum_{i=1}^{m} b_i y_i \ \rightarrow min$$

təmin edən $Y = (y_1, y_2, y_3 \dots \dots \dots, y_m)$ vektorunu təyin etmək lazımdır.

Qeyd:

Resursun dəyər ifadəsi onun qiyməti deyil, yəni, $(y_1, y_2, y_3 \dots \dots \dots, y_m)$ aşkar olmayan və ya uçot qiymətləridir.
İqtisadi cəhətdən ikili məsələlər aşağıdakı kimi şərh edilə bilər:

İlkin məsələ:

Məhsul vahidlərinin dəyəri $c_j \geq 0,\ j = \overline{1,n}$, mövcud resursların həcmi $b_i \geq 0,\ j = \overline{1,m}$ və xərclərin norması $a_{ij} \geq 0,\ j = \overline{1,m}$ oldugu halda, istehsal olunmuş məhsulların satışından maksimum mənfəət əldə etmək üçün nə qədər və hansı növ məhsul istehsal etmək lazımdır?

İkili məsələ:

Mövcud resursların həcmi $b_i \geq 0,\ j = \overline{1,m}$,məhsul vahidlərinin dəyəri $c_j \geq 0,\ j = \overline{1,n}$ və xərclərin norması $a_{ij} \geq 0$, $j = \overline{1,m}$ oldugu halda, $y_i \geq 0,\ \ j = \overline{1,m}$ resursların hər vahidinin qiyməti nə qədər olmalıdır ki, ümumi istehsal xərclər minimal olsun?

8.2. İkili məsələlərin tərtibi

İkili məsələlər adətən simmetrik və asimmetrik olur. Məhdudiyyətləri bərabərsizliklərlə verilən ikili məsələlər simmetrik adlanır, biri ilkin, digəri isə ikili məsələ adlanır. Beləliklə, bir cüt simmetrik ikili məsələ aşağıdakı formaya malikdir:

İlkin məsələ	İkili məsələ
$Z=\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \rightarrow \max,$ $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i \quad \mathrm{i}=\overline{1,m}$ $x_j \ge 0, \qquad \mathrm{j}=\overline{1,n}$	$F=\sum_{i=1}^{m} b_i y_i \rightarrow min$ $\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_j \ge c_j \quad j=\overline{1,n}$ $y_i \ge 0, \qquad \mathrm{i}=\overline{1,m}$
$Z=\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \rightarrow \min,$ $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \ge b_i \quad \mathrm{i}=\overline{1,m}$ $x_j \ge 0, \qquad \mathrm{j}=\overline{1,n}$	$F=\sum_{i=1}^{m} b_i y_i \rightarrow max$ $\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_j \le c_j \quad j=\overline{1,n}$ $y_i \ge 0, \qquad \mathrm{i}=\overline{1,m}$

Məhdudiyyətləri tənliklərlə verilmiş iki məsələyə asimmetrik deyilir. Bu o deməkdir ki, asimmetrik halda , $y_i, \mathrm{i}=\overline{1,m}$ ikili dəyişənin işarəsi sərbəstdir.

İlkin məsələ	İkili məsələ
$Z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$ ® min, $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i \quad \mathrm{i} = \overline{1,m}$ $x_j \geq 0, \qquad \mathrm{j} = \overline{1,n}$	$F = \sum_{i=1}^{m} b_i y_i \ \rightarrow max$ $\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_j \leq c_j \ \ j = \overline{1,n}$ y_i-istənilən $\mathrm{i} = \overline{1,m}$
$Z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \ \rightarrow \ \mathrm{max},$ $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i \ \mathrm{i} = \overline{1,m}$ $x_j \geq 0, \qquad \mathrm{j} = \overline{1,n}$	$F = \sum_{i=1}^{m} b_i y_i \ \rightarrow min$ $\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_j \geq c_j \ \ j = \overline{1,n}$ y_i-istənilən $\mathrm{i} = \overline{1,m}$

Məsələlərdən birinin məhdudiyyətlər sistemi həm tənlikləri, həm də bərabərsizlikləri ehtiva etdikdə və bəzi dəyişənlər mənfi olduqda, ikili məsələlər cütü qarışıq adlanır.

İlkin məsələ
$\mathrm{Z} = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \cdots + \ c_n x_n \rightarrow \mathrm{max}$ $\begin{bmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \leq b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \leq b_2 \\ \ldots\ldots\ldots \\ a_{\mathrm{k}1}x_1 + a_{\mathrm{k}2}x_2 + \cdots + a_{kn}x_n \leq b_k \\ a_{\mathrm{k+1,1}}x_1 + a_{\mathrm{k+1,2}}x_2 + \cdots + a_{k+1,n}x_n = b_{k+1} \\ \ldots\ldots\ldots \\ a_{\mathrm{m}1}x_1 + a_{\mathrm{m}2}x_2 + \ldots a_{mn}x_n = b_m \end{bmatrix}$ $x_j \geq 0, \ \mathrm{j} = \overline{1,p}, \ \ \mathrm{p} \leq \ \ \mathrm{n}$

İkili məsələ
$\mathrm{F} = b_1y_1 + b_2y_2 + \dots + \; b_ny_n \to \min$ $\begin{bmatrix} a_{11}y_1 + a_{21}y_2 + \dots + a_{m1}y_m \geq c_1 \\ a_{12}y_1 + a_{22}y_2 + \dots + a_{m2}y_m \geq c_2 \\ \dots\dots\dots \\ a_{1\mathrm{p}}y_1 + a_{2\mathrm{p}}y_2 + \dots + a_{mp}y_m \geq c_p \\ a_{1,\mathrm{p}+1}y_1 + a_{2,\mathrm{p}+1}y_2 + \dots + a_{m,p+1}y_m = c_{p+1} \\ \dots\dots\dots \\ a_{1\mathrm{n}}y_1 + a_{2\mathrm{n}}y_2 + \dots a_{mn}y_m = c_n \end{bmatrix}$ $y_i \geq 0, \; \mathrm{i} = \overline{1,m}$

Qarışıq cütlükdə ikili məsələ qurarkən aşağıdakı qaydaya əməl edilir:

Əgər ikili dəyişən bərabərsizlik məhdudiyyətinə malikdirsə, onda o, mənfi deyil, əgər tənlik məhdudiyyətinə malikdirsə, onun işarəsi ixtiyaridir. İlkin dəyişən mənfi deyilsə, ona bərabərsizlik məhdudiyyəti təyin edilir; əgər dəyişən işarə baxımından ixtiyaridirsə, müvafiq məhdudiyyət tənlikdir.Daha sonra simmetrik cüt üçün olan eyni qaydadan istifadə edilir.

Əgər

$A_{mxn} = \begin{Bmatrix} a_{11} & a_{12} \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \dots & a_{2n} \\ \dots. & \dots. & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} \dots & a_{mn} \end{Bmatrix}$ – məhdudyyət şərtlərinin əmsallarının matrisi;

$C_{1xn} = (\quad c_1, c_2, c_3, \dots . c_n)$ - məhdudyyət şərtlərinin sətir əmsallarının matrisi;

$$B_{mx1} = \left\{\begin{matrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots. \\ b_n \end{matrix}\right\}$$ - sərbəst həddlərinin sütun matrisi;

$$X_{nx1} = \left\{\begin{matrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots. \\ x_n \end{matrix}\right\}$$ - məchulların sütun matrisi oldugunu qəbul etsək,onda ikili məsələlərin tərtibi sxemi aşağıdakı formaya malikdir:

İlkin məsələ		İkili məsələ	
$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \dots & a_{2n} \\ \dots. & \dots. & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} \dots & a_{mn} \end{matrix}$	$\begin{matrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots. \\ b_m \end{matrix}$	$\begin{matrix} a_{11} & a_{21} \dots & a_{1n} \\ a_{12} & a_{22} \dots & a_{m2} \\ \dots. & \dots. & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} \dots & a_{mn} \end{matrix}$	$\begin{matrix} c_1 \\ c_2 \\ \dots. \\ c_n \end{matrix}$
$c_1 \quad c_2 \ \dots. \quad c_n$	Z(X)	$b_1 \quad b_2 \ \dots. b_m$	F(Y)
$Z = CX \rightarrow max,$ $AX \leq B,$ $X \geq 0$		$F = BY \rightarrow min,$ $A^T Y \geq C,$ $Y \geq 0$	

Formallaşdırılmış iki məsələni müqayisə etdikdə aydın olur ki, ikili məsələ aşağıdakı qaydalara uyğun tərtib olunur.

1) Əgər məsələnin məqsəd funksiyası “max-da öyrənilirsə, onda məhdudiyyətlər “≤” və ya “=” işarəsinə malik olmalıdır və əgər məsələnin məqsəd funksiyası “min” –də öyrənilirsə, onda məhdudiyyətlər “≥” və ya “=” işarəsinə malik olmalıdır;

2) İlkin məsələnin hər bir məhdudiyyəti ikili dəyişən $y_i \geq 0,$ i $= \overline{1, m}$ ilə əlaqələndirilir və əksinə, yəni ikili məsələdə dəyişənlərin sayı ilkin məsələdəki məhdudiyyətlərin sayına, ikili məsələdəki məhdudiyyətlərin sayı isə ilkin məsələdəki dəyişənlərin sayına bərabərdir;

3) İlkin məsələnin məqsəd funksiyası max-da öyrənilirsə, ikili məsələnin məqsəd funksiyası min-də öyrənilir və ya əksinə

($Z \to max \Leftrightarrow F \to min$ və ya $Z \to min \Leftrightarrow F \to max$);

4) İlkin məsələnin məqsəd funksiyasının əmsalları

$C = (c_1, c_2, c_3, \dots . c_n)$ ikili məsələnin məhdudiyyətlər sisteminin sərbəst həddləridir;

5) İlkin məsələnin məhdudiyyət sisteminin sərbəst həddləri ikili məsələnin məqsəd funksiyasının sərbəst əmsallarıdır.

6) İlkin və ikili məsələlərin məhdudiyyət sisteminin əmsal matrisləri bir-birinə köçürülür.

7) İlkin məsələnin x_j, $j = \overline{1, p}$ dəyişəninə işarə məhdudiyyəti ($x_j \geq 0$, $j = \overline{1, p,}$) qoyulursa, ikili məsələnin j-ci məhdudiyyəti bərabərsizlik kimi yazılır və ya əksinə.

8) Əgər ilkin məsələnin $x_j \geq 0$, $j = \overline{p + 1, n}$ dəyişəninin işarəsi ixtiyaridirsə, onda ikili məsələnin j-ci məhdudiyyəti bərabərlik formasına malikdir və əksinə.

9) İlkin məsələdə bərabərlik məhdudiyyətləri varsa, onda ikili məsələnin uyğun dəyişənlərinə mənfi olmama şərti qoyulmur;

10) Əgər ikili məsələnin $y_i \geq 0$, $i = \overline{1, m}$ dəyişəninə mənfi olmama şərti qoyulubsa, onda ilkin məsələdə ikili məsələnin müvafiq məhdudiyyəti bərabərsizlik şəklində yazılır.

Məsələ 8.1. Aşağıdakı ilkin xətti proqramlaşdırma məsələsi üçün ikili məsələni qurun:

Məqsəd funksiyası $Z(x) = 3x_1 + 2x_2 + x_3 \to max$

məhdudiyyət şərtləri

$$\begin{Bmatrix} -x_1 - 2x_2 \geq -12 \\ x_1 + x_3 = 4 \\ 2x_1 + 2x_2 \leq 14 \end{Bmatrix}$$

dəyişənlərin mənfi olmama şərti $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$, $x_3 \geq 0$

Həlli:

1) Birinci məhdudyyəti (-1)-ə vuraq:

$$Z = 3x_1 + 2x_2 + x_3 \to max$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 12 \\ x_1 + x_3 = 4 \\ 2x_1 + 2x_2 \le 14 \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0, \qquad x_2 \ge 0\,, x_3 \ge 0$$

2)İlkin məsələnin hər bir məhdudiyyəti üçün biz ikili dəyişən $y_{i,}$, i = $\overline{1,m}$ təyin edilir:

$$Z = 3x_1 + 2x_2 + x_3 \rightarrow \max$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 12 \; Û \; y_1 \ge 0 \\ x_1 + x_3 = 4 \; Û \; y_2 - \text{istənilən} \\ 2x_1 + 2x_2 \le 14 \; Û \; y_3 \ge 0 \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0, \qquad x_2 \ge 0\,, x_3 \ge 0$$

Beləliklə, ilkin məsələdəki dəyişənlərin sayı ikili məsələdəki məhdudiyyətlərin sayına bərabərdir, yəni,m=3.

3)İlkin məsələnin məqsəd funksiyası max-da öyrənildiyi üçün ikili məsələnin məqsəd funksiyası min-də öyrəniləcəkdir:

$$Z \rightarrow \max \Leftrightarrow F \rightarrow \min$$

4)İlkin məsələnin məhdudiyyətlər sisteminin sərbəst həddləri $B = \begin{Bmatrix} 12 \\ 4 \\ \dots . \\ 14 \end{Bmatrix}$ ikili məqsəd funksiyasının sərbəst əmsallarına çevriləcəkdir, yəni:

$$F = 12y_1 + 4y_2 + 14y_3 \rightarrow \min$$

5)İlkin məsələsinin məqsəd funksiyasının əmsalları $C = (3; 2; 1)$) ikili məsələnin məhdudiyyətlər sisteminin sərbəst hədlərinə çevriləcəkdir;

6)İlkin və ikili məsələlərin məhdudiyyətlər sisteminin əmsalları matrisi bir-birinə köçürülür, yəni

$$A = \begin{Bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \end{Bmatrix} \rightarrow A^T = \begin{Bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{Bmatrix}$$

7) İlkin məsələnin hər üç dəyişəni yalnız mənfi olmayan qiymətlər aldıgına görə, ikili məsələnin məhdudiyyətlər sistemində üç bərabərsizlik olmalıdır. Bərabərsizliyin növü məqsəd funksiyasına görə seçilir. F min-də araşdırıldığından bərabərsizliklər "≥" işarəsi ilə olmalıdır. Beləliklə, ikili məsələnin məhdudiyyətlər sistemi aşağıdakı formanı alacaq:

$$\left\{\begin{matrix} y_1 + y_2 + 2y_3\ {}^{3}3 \\ 2y_1 + 2y_3 = 2 \\ y_2 \geq 1 \end{matrix}\right\}$$

8) İlkin məsələdə ikinci məhdudiyyət bərabərlik formasında olduğundan, ikili məsələnin uyğun dəyişəninə mənfi olmama şərti qoyulmayacaq.
Beləliklə, ikili məsələ aşağıdakı formaya malikdir:
Məqsəd funksiyası

$$\mathrm{F} = 12y_1 + 4y_2 + 14y_3 \ \rightarrow \mathrm{min},$$

məhdudyyət şərtləri

$$\left\{\begin{matrix} y_1 + y_2 + 2y_3\ {}^{3}3 \\ 2y_1 + 2y_3 = 2 \\ y_2 \geq 1 \end{matrix}\right\}$$

$$y_1 \geq 0, \ \ y_3 \geq 0, y_2 - \text{istənilən.}$$

8.3. Əsas ikilik teoremləri və onların iqtisadi məzmunu

Fərz edək ki, simmetrik cüt ikili məsələ mövcuddur:

İlkin məsələ	İkili məsələ
$Z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$ ® max, $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i \quad \mathrm{i} = \overline{1,m}$ $x_j \geq 0, \qquad \mathrm{j} = \overline{1,n}$	$F = \sum_{i=1}^{m} b_i y_i \ \rightarrow min$ $\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_j \geq c_j \ \ j = \overline{1,n}$ $y_i \geq 0, \qquad \mathrm{i} = \overline{1,m}$

İlkin və ikili məsələlərin həlli arasında əlaqə aşağıdakı lemma və ikilik teoremləri ilə tərtib edilə bilər.

Lemma 8.1 (ikilik nəzəriyyəsinin əsas bərabərsizliyi). Əgər X ilkin məsələnin planı, Y isə ikili məsələnin planıdırsa, onda X planı ilə ilkin məsələnin məqsəd funksiyasının qiyməti həmişə planlı ikili məsələnin Y məqsəd funksiyasının qiymətini keçmir, yəni

$$Z(X) \leq F(Y)$$

və ya

$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \leq \sum_{i=1}^{m} b_i y_i$$

Bərabərsizliyin iqtisadi məzmunu o deməkdir ki, hər hansı mümkün X və Y planları üçün istehsalın ümumi dəyəri resursların cəmi qiymətindən çox olmamalıdır.

İkili məsələlərin optimal həlli arasında əlaqə ikilik teoremləri ilə qurulur.

Teorem 8.1 (Birinci ikilik teoremi).

Bu teorem iki hissəlidir:

1)Əgər ikili məsələlərdən birinin optimal həlli varsa, digərinin də optimal həlli var. Bu halda, $X^* = (x_1^*, x_1^*, \dots\dots x_n^*)$ və $Y^* = (y_1^*, y_1^*, \dots\dots y_m^*)$ optimal planları üçün məqsəd funksiyalarının ekstremum qiymətləri bir-birinə bərabərdir, yəni,

$$Z(X^*) = F(Y^*)$$

2)Əgər ikili cütün məsələlərindən birinin məqsəd funksiyası qeyri-məhduddursa, ikili cütün digər məsələsinin şərtləri ziddiyyətlidir.

Teorem 8.2 (İkinci ikilik teoremi). İlkin və ikili məsələlərin mümkün həllərinin optimal olması $X^* = (x_1^*, x_1^*, \dots\dots x_n^*)$ və $Y^* = (y_1^*, y_1^*, \dots\dots y_m^*)$ üçün aşağıdakı şərtləri təmin etmək zəruri və kafidir:

$$y_i^*(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x^*{}_j - b_i) = 0,$$

$$\mathrm{i} = \overline{1, m}$$

$$x_j^*(\sum_{i=1}^{m} a_{ij}y^*{}_i - c_j) = 0,$$

$$\mathrm{j} = \overline{1, n}$$

Birinci şərtin iqtisadi mənası odur ki, i-ci növ resursun qiymətləndirilməsi optimal planda $y_i^* > 0$ müsbət olarsa, onda optimal planda bu resurs tam

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x^*{}_j = b_i$$

istifadə olunur. Əgər optimal planda bu resurs tam istifadə olunmursa

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x^*{}_j < b_i$$

o zaman optimal planda qiymətləndirmə sıfıra bərabərdir:

$$y_i^* = 0$$

Birinci şərtin iqtisadi mənası odur ki, j-ci məhsulun istehsalı optimal planına $x_i^* > 0$ daxil edilirsə, o optimal qiymətləndirmələrdə zərərli deyildir:

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij}y^*{}_i = c_j$$

Əgər istehsal ziyanlıdırsa (onun xərci satış qiymətindən artıqdır)

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij}y^*{}_i > c_j$$

onda bu məhsul optimal planda istehsal olunmur:

$$x_j^* = 0$$

8.4. İkili məsələlərin həllinin tapılması yolları

Simmetrik cütlükdə ikili məsələnin həllini tapmağın birinci yolu əsas ikililik teoremlərinin tətbiqinə əsaslanır.

Məsələ 8.2. Aşagıdakı qeyri-kanonik formada verilmiş xətti proqramlaşdırma məsələsinin ikili məsələsini qurun və onun optimal həllini tapın:

$$Z(X) = 2x_1 + 3x_2 \to max$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \leq 8 \\ 4x_1 + 3x_2 \leq 15 \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0, \qquad x_2 \geq 0$$

Qeyd edək ki bu ilkin məsələnin optimal həlli vardır: $X^* = (1{,}2; 3{,}4)$, $Z(X) = 12{,}6$

Həlli: İkili məsələni formalaşdıraq:

$$F(Y) = 8y_1 + 15y_2 \to min$$

$$\begin{cases} y_1 + 4y_2 \geq 2 \\ 2y_1 + 3y_2 \geq 3 \end{cases}$$

$$y_1 \geq 0, \qquad y_2 \geq 0$$

Birinci ikilik teoremindən belə çıxır ki:

$$Z_{max}(X^*) = F_{min}(Y^*) = 12{,}6$$

İkinci ikilik teoremini tətbiq edək: ilkin məsələnin optimal həllində $x_1 = 1{,}2 \neq 0$, $x_2 = 3{,}4 \neq 0$ olduğundan, ikili məsələnin optimal həllində ikili məsələnin birinci və ikinci məhdudiyyətləri

$$\begin{cases} y_1{}^* + 4y_2{}^* = 2 \\ 2y_1{}^* + 3y_2{}^* = 3 \end{cases}$$

bərabərlik şəklində veriliir.

Sistemi həll edək. Birinci tənliyi 2-yə vuraq:

$$\begin{cases} 2y_1{}^* + 8y_2{}^* = 4 \\ 2y_1{}^* + 3y_2{}^* = 3 \end{cases}$$

Birinci tənlikdən ikincini çıxaraq:

$5y_2{}^* = 1$, $y_2{}^* = \frac{1}{5} = 0{,}2$

Onda;

$$y_1{}^* = 2 - 4y_2{}^* = 2 - 4\frac{1}{5} = \frac{10}{5} - \frac{4}{5} = \frac{6}{5} = 1,2$$

Cavab: $Y^* = (1,2; 0,2)$, $F_{min}\,(Y^*) = 12,6$

Məsələ 8.3. Aşagıdakı qeyri-kanonik formada verilmiş xətti proqramlaşdırma məsələsinin ikili məsələsini qurun və onun optimal həllini tapın:

$$Z(X) = 2x_1 + 3x_2 \to max$$

$$\begin{cases} 3x_1 + 8x_2 \leq 240 \\ 4x_1 + 5x_2 \leq 200 \\ 9x_1 + 4x_2 \leq 360 \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0, \qquad x_2 \geq 0$$

Qeyd edək ki bu ilkin məsələnin optimal həlli vardır: $X^* = (23,53; 21,18)$, $Z(X) = 110,6$

İkili məsələni formalaşdıraq:

$$F(Y) = 240y_1 + 200y_2 + \ 360y_3 \to min$$

$$\begin{cases} 3y_1 + 4y_2 + 9y_4 \geq 2 \\ 8y_1 + 5y_2 + \ 4y_3 \geq 3 \end{cases}$$

$$y_1 \geq 0, \qquad y_2 \geq 0$$

Birinci ikilik teoremindən belə çıxır ki:

$$Z_{max}(X^*) = \ F_{min}(Y^*) = 110,6$$

İkinci ikilik teoremini tətbiq edək: ilkin məsələnin optimal həllində $x_1 = 23,53 \neq 0,\ x_2 = 21,18 \neq 0$ olduğundan, ikili məsələnin optimal həllində ikili məsələnin birinci və ikinci məhdudiyyətləri

$$\begin{cases} 3y_1 + 4y_2 + 9y_3 = 2 \\ 8y_1 + 5y_2 + \ 4y_3 = 3 \end{cases}$$

bərabərlik şəklində veriliir.

$X^* = (23,53; 21,18)$ ilkin məsələnin məhdudiyyətlərinə daxil edirik və üçüncü məhdudiyyətin ciddi bərabərsizlik kimi ödənildiyini görürük:

$$\begin{cases} 3 \cdot 23{,}53 + 8 \cdot 21{,}18 = 240 = 240 \\ 4 \cdot 23{,}53 + 5 \cdot 21{,}18 = 200 = 200 \\ 9 \cdot 23{,}53 + 4 \cdot 21{,}18 = 296{,}49 < 360 \end{cases}$$

Uygun olaraq ${y_3}^* = 0$.

Üç məchulu olan tənliklər sistemi əldə edirik:

$$\begin{cases} 3{y_1}^* + 4{y_2}^* + 9{y_3}^* = 2 \\ 8{y_1}^* + 5{y_2}^* + 4{y_3}^* = 3 \\ {y_3}^* = 0 \end{cases} \to \begin{cases} 3{y_1}^* + 4{y_2}^* = 2 \\ 8{y_1}^* + 5{y_2}^* = 3 \\ {y_3}^* = 0 \end{cases}$$

Sistemi həll edərək

$Y^* = \left(\frac{2}{17};\ \frac{7}{17};\ 0\right)$ oldugunu müəyyən edirik.

Cavab: $Y^* = \left(\frac{2}{17};\ \frac{7}{17};\ 0\right)$, $F_{min}\,(Y^*) = 110{,}6$.

ÖZÜNÜ YOXLAMAQ ÜÇÜN SUALLAR VƏ TAPŞIRIQLAR

1.İkili məsələlərin iqtisadi mənası nədən ibarətdir?
2.İkili məsələlərin tərtibi qaydalarını izah edin.
3.Əsas ikilik teoremləri hansılardır və onların iqtisadi məzmunu nədən ibarətdir?
4. Aşagıdakı qeyri-kanonik formada verilmiş ilkin xətti proqramlaşdırma məsələsinin ikili məsələsini qurun və onun optimal həllini tapın:

$$Z = 2x_1 - x_2 \rightarrow min$$
$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 \geq 11 \\ x_1 + x_2 \geq 2 \\ x_1 - 3x_2 \geq 9 \end{cases}$$
$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

5.Aşagıdakı qeyri-kanonik formada verilmiş ilkin xətti proqramlaşdırma məsələsinin ikili məsələsini qurun və onun optimal həllini tapın:

$$Z = 2x_1 + 6x_2 \rightarrow max$$
$$\begin{cases} x_1 + x_2 \leq 4 \\ 2x_1 + 3x_2 \leq 12 \\ 2x_1 - x_2 \leq 2 \end{cases}$$
$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

6.Aşagıdakı qeyri-kanonik formada verilmiş ilkin xətti proqramlaşdırma məsələsinin ikili məsələsini qurun və onun optimal həllini tapın:

$$Z = 11x_1 + 44x_2 \rightarrow min$$
$$\begin{cases} 3x_1 + 5x_2 \geq 18 \\ x_1 + 9x_2 \geq 30 \\ 2x_1 + 7x_2 \geq 27 \end{cases}$$
$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

7.Aşagıdakı qeyri-kanonik formada verilmiş ilkin xətti proqramlaşdırma məsələsinin ikili məsələsini qurun və onun optimal həllini tapın:

$$Z = 11x_1 + 14x_2 + 15x_3 \to min$$
$$\begin{cases} 3x_1 + 3x_2 + x_3 \geq 7 \\ x_1 + 2x_2 + 5x_3 \geq 9 \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 \geq 14 \end{cases}$$
$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0$$

8.Aşagıdakı qeyri-kanonik formada verilmiş ilkin xətti proqramlaşdırma məsələsinin ikili məsələsini qurun və onun optimal həllini tapın:

$$Z = 7x_1 + 4x_2 + 11x_3 \to min$$
$$\begin{cases} x_1 + 5x_2 + x_3 \geq 27 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 \geq 9 \\ 3x_1 + 2x_2 + 5x_3 \geq 14 \end{cases}$$
$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0, \; x_3 \geq 0$$

9.Aşagıdakı qeyri-kanonik formada verilmiş ilkin xətti proqramlaşdırma məsələsinin ikili məsələsini qurun və onun optimal həllini tapın:

$$Z = 5x_1 + 7x_2 + 13x_3 \to min$$
$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 4x_3 \geq 22 \\ x_1 + x_2 + x_3 \geq 9 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 \geq 18 \end{cases}$$
$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0, \; x_3 \geq 0$$

10.Aşagıdakı qeyri-kanonik formada verilmiş ilkin xətti proqramlaşdırma məsələsinin ikili məsələsini qurun və onun optimal həllini tapın:

$$Z = x_1 - x_2 \to max$$
$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 \leq 2 \\ x_1 - 2x_2 \leq 2 \\ x_1 + x_2 \leq 5 \end{cases}$$
$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

11.Aşagıdakı qeyri-kanonik formada verilmiş ilkin xətti proqramlaşdırma məsələsinin ikili məsələsini qurun və onun optimal həllini tapın:

$$Z = 3x_1 - 12x_2 + 4x_3 \to min$$

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_3 \geq 2 \\ x_1 - 4x_2 + 4x_3 \geq 1 \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0, \qquad x_2 \geq 0$$

12.Aşagıdakı qeyri-kanonik formada verilmiş ilkin xətti proqramlaşdırma məsələsinin ikili məsələsini qurun və onun optimal həllini tapın:

$$Z = 4x_1 + x_2 \to max$$

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 \leq 3 \\ 4x_1 + 3x_2 \leq 6 \\ x_1 + 2x_2 \leq 4 \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0, \qquad x_2 \geq 0$$

13.Verilmiş ilkin məsələyə uygun olaraq ikili məsələni edin:

$$f(x) = 4x_1 + 3x_2 \to max$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \geq 4 \\ 2x_1 + 2x_2 \geq 3 \\ 5x_1 + 3x_2 \leq 32 \\ 4x_1 + 7x_2 \leq 27 \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0, \qquad x_2 \geq 0$$

14. Verilmiş ilkin məsələyə uygun olaraq ikili məsələni edin:

$$f(x) = 3x_1 + 4x_2 \to max$$

$$\begin{cases} -2x_1 + 4x_2 \leq 1 \\ 4x_1 + 6x_2 \leq 12 \\ 6x_1 + 3x_2 \leq 9 \\ 2x_1 + x_2 \geq 1{,}6 \\ 2x_1 - 4x_2 \geq 2 \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0, \qquad x_2 \geq 0$$

9.1.Nəqliyyat məsələsinin iqtisadi əhəmiyyəti

Nəqliyyat məsələsi - xətti proqramlaşdırmanın ən çox yayılmış məsələlərindən biridir. Onun məqsədi həddən artıq uzun, qarşı və təkrar daşımaları aradan qaldırmaqla, yük daşınmalarının ən rasional marşrutlarını və üsullarını inkişaf etdirməkdir. Bütün bunlar malların hərəkəti üçün vaxtı azaldır, xammal, material, yanacaq, avadanlıq və s. təchizatı proseslərinin həyata keçirilməsi ilə əlaqədar müəssisə və firmaların xərclərini azaldır.

İki növ nəqliyyat məsələsini bir –birindən ayırırlar:

1) xərc meyarı (minimum daşıma xərclərinə nail olmaq) və ya məsafə üzrə;

2) vaxt meyarı (daşıma üçün sərf olunan minimum vaxt).

Nəqliyyat məsələsi ən çox yayılmış xüsusi xətti proqramlaşdırma problemlərindən biridir.

Nəqliyyat məsələləri aşağıdakı xüsusiyyətlərə malikdir:

-eyni növlü ehtiyatlar bölüşdürülməyə məruz qalır;

-məsələnin şərtləri yalnız tənliklərlə təsvir edilir;

-bütün dəyişənlər eyni ölçü vahidləri ilə ifadə edilir;

-bütün tənliklərdə məchul olan əmsallar vahidə bərabərdir;

-hər bir məchula məhdudiyyətlər sisteminin yalnız iki tənliyində rast gəlinir.

Bu məsələlər xətti proqramlaşdırma məsələlərinə aiddir və simpleks metodundan istifadə etməklə həll edilə bilər. Bununla belə, tipik bir nəqliyyat məsələsi çoxlu sayda dəyişənlərə malikdir və onu simpleks metodundan istifadə etməklə həll etmək çətin olur.Digər tərəfdən, nəqliyyat məsələsinin məhdudiyyətlər sisteminin matrisi çox unikaldır, ona görə də onun həlli üçün xüsusi üsullar hazırlanmışdır. Bu üsullar, simpleks metodu kimi, ilkin dayaq həlli tapmağa və sonra onu təkmilləşdirməklə optimal həlli əldə etməyə imkan verir.

9.2. Nəqliyyat məsələlərinin riyazi qoyuluşu

Nəqliyyat məsələlərinin qoyuluşu aşağıdakı kimidir. Tutaq ki, m sayda istehsal məntəqəsində (təçhizatçıda) bir növ məhsul ehtiyatı vardır və bu məntəqələrdə olan məhsulun həcmi müvafiq olaraq $a_1, a_{2,,\dots\dots,}a_m$ vahiddir. Bu məhsula (yükə) olan tələbat $b_1, b_{2,,\dots\dots,}b_n$ n təyinat məntəqəsinin (istehlakçıların) hər biri üçün məlumdur.

Yük daşıma planını elə tərtib etmək lazımdır ki, bütün istehlakçıları maksimum dərəcədə qane etsin, yükləri təchizatçılardan istehlakçılara daşınsın və ümumi daşınma xərcləri minimal olsun.

Nəqliyyat məsələlərinin bütün şərtlərini aşagıdakı cədvəl şəklində təqdim etmək olar:

Təchizatçılar	İstehlakçılar				Təchizatçıların təklifi
	1	2	…	n	
1	c_{11} x_{11}	c_{12} x_{12}	…	c_{1n} x_{1n}	a_1
2	c_{21} x_{21}	c_{22} x_{22}	…	c_{2n} x_{2n}	a_2
……	....	....	…	....	....
m	c_{m1} x_{m1}	c_{m2} x_{m2}	…	c_{mn} x_{mn}	a_m
İstehlak-çıların tələbi	b_1	b_2	…	b_n	Cəm / Cəm

Cədvəl 9.1. Nəqliyyat məsələsinin paylama cədvəli

Bu cədvəl nəqliyyat məsələsinin paylama cədvəli adlanır. Burada:

x_{ij} - i təchizatçısından j istehlakçısına daşınan yükün miqdarını;

$c_{ij} - i$ təchizatçısından j istehlakçısına yükün daşınması xərclərini göstərir.
Bütün planlaşdırılan daşımaların dəyəri minimal olmalıdır:
F = $c_{11}x_{11} + c_{12}x_{12} + \cdots \ldots + c_{mn}x_{mn}$ → min (9.1)

Məsələnin məhdudiyyət sistemi iki tənliklər sistemindən ibarətdir.

Hər bir təçhizatçıdan istehlakçıya bütün yükləri elə daşımaq lazımdır ki, aşagıda bərabərliklər təmin edilsin,

$$\left\{\begin{array}{c} x_{11} + x_{12} + \ldots x +_{1n} = a_1 \\ x_{21} + x_{22} + \cdots + x_{2n} = a_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_{\mathrm{m}1} + x_{\mathrm{m}2} + \cdots + x_{mn} = a_n \end{array}\right\} \quad (9.2)$$

və buna görə də bütün tələb olunan yüklər hər bir təyinat məntəqəsinə çatdırılmalıdır:

$$\left\{\begin{array}{c} x_{11} + x_{21} + \ldots + x_{m1} = b_1 \\ x_{12} + x_{22} + \cdots + x_{m2} = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_{1\mathrm{n}} + x_{2\mathrm{n}} + \cdots + x_{mn} = b_m \end{array}\right\} \quad (9.3)$$

Daşınan yükün həcmi mənfi olmayan rəqəmlə ifadə edilməlidir:

$$x_{ij} \geq 0\,, \quad \mathrm{i} = \overline{1,m}\,,\ j = \overline{1,n} \quad (9.4)$$

Burada məqsəd funksiyası bütün istehlakçı məntəqələr arasında yüklərinn daşınması ilə əlaqədar əmələ gələn cəmi nəqliyyat xərclərini xarakterizə edir və buna görə onun üçünən kiçik (minimum) qiymət axtarılır.

$$X = X_{ij_{mxn}} = \left\{\begin{array}{ccc} x_{11} & x_{12} & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & x_{2n} \\ \ldots & \ldots\ldots\ldots & \ldots \\ x_{\mathrm{m}1} & x_{\mathrm{m}2} & x_{mn} \end{array}\right\}$$

matrisl ilə müəyyən edilmiş xətti tənliklər sisteminin bütün mənfi olmayan həlli nəqliyyat məsələsinin planı adlanır.

Məqsəd funksiyası özünün minimum qiymətini aldıgı $X^* = X^*{}_{ij_{mxn}}$ planı nəqliyyat məsələsinin optimal planı adlanır.

$$C = C_{ij_{mxn}} = \begin{Bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & c_{2n} \\ \dots & \dots & \dots \\ c_{m1} & c_{m2} & c_{mn} \end{Bmatrix}$$ matrisi tarif matrisi adlanır.

Ümumi halda nəqliyyat məsələsinin riyazi modeli aşağıdakı formaya malikdir:

$$Z = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} \to \min \quad (9.5)$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i\,, \qquad i = \overline{1,m} \quad (9.6)$$

$$\sum_{j=1}^{m} x_{ij} = b_j\,, \qquad j = \overline{1,n} \quad (9.7)$$

$$x_{ij} \geq 0\,, \quad i = \overline{1,m}\,, \; j = \overline{1,n} \qquad (9.8)$$

9.3.Nəqliyyat məsələsinin həllində zəruri və kafi şərt

(9.1)-(9.4) nəqliyyat məsələsinin həll olunması məqsədilə zəruri və kafi şərt aşağıdakı teorem əsasında müəyyən edilir.

Teorem 9.1. Nəqliyyat məsələsinin həll oluna bilməsi üçün təchizat məntəqələrindəki məhsul (yük) ehtiyatları istehlak məntəqələrindəki məhsula (yükə) olan tələbata bərabər olmalıdır:

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$$

Bu o deməkdir ki, məsələ qapalı olmlıdır.

Bu teoremin zərurilik şərti üçün isbatı aşağıdakı kimidir:

Fərz edək ki, $X' = X'_{ij_{mxn}}$ nəqliyyat məsələsinin optimal həllidir və isbat edək ki,

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$$

Əgər (9.6) və (9.7) məhdudiyyət sistemlərinə daxil olan tənliklərdə X^* həllini yerinə yazsaq aşagıdakı bərabərliyi əldə etmiş olarıq:

$$\sum_{j=1}^{n} x^*_{ij} = a_i\,, \qquad \mathrm{i} = \overline{1,m}$$

$$\sum_{j=1}^{m} x^*_{ij} = b_j\,, \qquad \mathrm{j} = \overline{1,n}$$

Əldə edilmiş tənliklər sistemini uygun olaraq i və j indekslərinə görə cəmləyək:

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} x^*_{ij} = \sum_{i=1}^{m} a_i$$

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} x^*_{ij} = \sum_{j=1}^{n} b_j$$

Bu ifadələrin sol tərəfləri bərabər oldugu üçün , onların sağ tərəfləri də bir-birinə bərabərdir. Beləliklə, zərurilik şərti isbat olundu.

Nəqliyyat məsələsində aşağıdakı şərt təmin edildikdə, bu, qapalı (düzgün balansla) nəqliyyat məsələsi adlanır:

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j \quad (9.9)$$

(9.9) bərabərliyi təmin edilmədikdə, yəni:

$$\sum_{i=1}^{m} a_i \neq \sum_{j=1}^{n} b_j$$

bu, açıq (düzgün olmayan balansla) nəqliyyat məsələsi adlanır.

Əgər məsələnin ilkin şərtlərində açıq məsələ verilirsə, bu zaman o,qapalı formaya gətirilməlidir və bunun üçün aşağıdakılar həyata keçirilməlidir:

a)məhsul çatışmazlıgı vəziyyətində (cəmi istehlak cəmi ehtiyatlardan ciddi şəkildə çoxdur).

$$\sum_{j=1}^{n} b_j > \sum_{i=1}^{m} a_i \ (9.10)$$

Belə açıq nəqliyyat məsələsinin məqsəd funksiyası

$$Z = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} \rightarrow min$$

məhdudiyyət şərtləri

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} \leq a_i\,, \qquad \mathrm{i} = \overline{1,m}$$

$$\sum_{j=1}^{m} x_{ij} = b_j\,, \qquad \mathrm{j} = \overline{1,n}$$

dəyişənlərin mənfi olmama şərti

$x_{ij} \geq 0\,,\quad \mathrm{i} = \overline{1,m}\,,\ j = \overline{1,n}$

şəklindədir.

Belə halda fiktiv istehsalçılardan bütün istehlak məntəqələrinə sıfır daşıma tarifi ilə

$$a'_{m+1} = \sum_{j=1}^{n} b_j - \sum_{i=1}^{m} a_i$$

yük ehtiyatına malik A'_{m+1} fiktiv istehsalçı daxil edilməlidir.
b)artıq məhsul vəziyyətində(cəmi ehtiyatlar cəmi istehlakdan ciddi şəkildə çoxdur).

$$\sum_{i=1}^{m} a_i > \sum_{j=1}^{n} b_j \ (9.11.)$$

Belə açıq nəqliyyat məsələsinin məqsəd funksiyası

$$Z = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} \to min \ (9.12.)$$

məhdudiyyət şərtləri

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i ; \ \ i = \overline{1,m} \ \ (9.13.)$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} \le b_j , \qquad j = \overline{1,n} \ (9.14.)$$

dəyişənlərin mənfi olmama şərti

$$x_{ij} \ge 0; \quad i = \overline{1,m} \ , \ j = \overline{1,n} \qquad (9.15)$$

şəklindədir.

Belə nəqliyyat məsələsini qapalı nəqliyyat məsələsinə gətirmək üçün məhsul (yük) ehtiyaclarının həcmi

$$b'_{n+1} = \sum_{i=1}^{m} a_i - \sum_{j=1}^{n} b_j$$

olan fiktiv istehlak məntəqəsi daxil edilir və bütün istehlak məntəqələrindən fiktiv istehlak məntəqəsinə daşınma xərcləri sıfır tariflə həyata keçirilir.Bu halda C nəqliyyat xərcləri matrisinə, eyni zamanda X daşınmalar matrisinə yeni (n+1)-ci sütun əlavə olunur.

Beləliklə də, açıq məsələ qapalı məsələyə gətirilir və qapalı məsələnin optimal planından ilkin açıq nəqliyyat məsələsinin optimal planı alınır. Belə halda fiktiv istehlakçıya daşınmış yüklərin miqdarı nəzərə alınmamalıdır.

İndi isə teorem 9.1-in kafilik şərtinin isbatını həyata keçirək.

Fərz edək ki, verilmiş nəqliyyat məsələsi qapalı nəqliyyat məsələsidir.Yəni

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j = L$$

və belə vəziyyətdə nəqliyyat məsələsinin mümkün həlli, eləcə də optimal həlli vardır.

İlkin olaraq onu qeyd edək ki, nəqliyyat məsələsinin mümkün həllər çoxlugu boş deyil və istehsalçı və istehlakçı məntəqələr arasında daşınan yükün həcmlərini

$$X'_{ij} = \frac{a_i b_j}{L};$$

$i = \overline{1,m}$; $j = \overline{1,n}$ düsturu vasitəsilə müəyyən edək və isbat edək ki,

$$X' = (X'_{ij})_{n,m} = (\frac{a_i b_j}{L})_{n,m};$$

$$= \overline{1,m} \;;\; j = \overline{1,n}$$

(9.12)- (9.15) nəqliyyat məsələsinin mümkün həllidir. (9.13)- (9.15) şərtlərində X'-ni yerinə yazsaq uygun olaraq aşagıdakıları əldə edərik:

$$\sum_{j=1}^{n} X'_{ij} = \sum_{j=1}^{n} \frac{a_i b_j}{L} = \frac{a_i}{L} \sum_{j=1}^{n} b_j = \frac{a_i}{L} \cdot L = a_i; \;\; i = \overline{1,m}$$

$$\sum_{i=1}^{m} X'_{ij} = \sum_{i=1}^{m} \frac{a_i b_j}{L} = \frac{b_j}{L} \sum_{i=1}^{m} a_i = \frac{b_j}{L} \cdot L = b_j; \;\; j = \overline{1,n}$$

$$X'_{ij} = \frac{a_i b_j}{L} \geq 0; \quad i = \overline{1,m} \;;\; j = \overline{1,n}$$

Göründüyü kimi, məsələnin məhdudiyyət və dəyişənlərin mənfi olmaması şərtləri ödənilir və X'_{ij} (9.12)- (9.15) nəqliyyat məsələsinin mümkün həllidir.

Nəqliyyat məsələsinin bir sıra xüsusiyyətləri vardır:

Xüsusiyyət 1. (həlli mümkün olan). Balanslaşdırılmış nəqliyyat məsələsinin həmişə həlli var.

Xüsusiyyət 2. (ölçü). Nəqliyyat məsələsinin məhdudiyyətlər sisteminin məlum olmayan əmsallar matrisasının ranqı $m+n-1$ -ə bərabərdir, burada m və n müvafiq olaraq təchizatçıların və istehlakçıların sayıdır.

9.4.Nəqliyyat məsələsinin ilkin dayaq planın tapılmasında istifadə edilən üsullar

Nəqliyyat məsələsinin ilkin dayaq planının tapılması aşagıdakı üsullarının köməyi ilə həyata keçirilir:
1)Simal-qərb bucagı üsulu;
2)Munumum dəyər (ən kiçik element) üsulu;
3) İki dəfə nəzərəalma üsulu;
4) Fogelin approksimasiya üsulu.

Qeyd edilən üsulların mahiyyəti odur ki, hər bir nəqliyyat məsələsinin ilkin dayaq planı $m+n-1$ sayda ardıcıl şəkildə tətbiq olunan addımlar nəticəsində əldə edilir. Atılan addımlar zamanı nəqliyyat məsələsinin şərtləri verilmiş cədvəlin hər hansı bir xanasına yükdaşımaların həcmi müəyyən edilir ki, bu isə dolu xana adlanır. Beləliklə də istehlak məntəqələrinin məhsula olan tələbatının tamamilə ödənilməsi, yaxud da istehsal məntəqələrinin məhsul ehtiyatının tamamilə daşınması təmin olunur.

Şimal – qərb bucağı üsulu. Bu üsul çox sadə üsuldur və burada nəqliyyat xərcləri nəzərə alınmır. Nəqliyyat məsələsinin ilkin dayaq planını müəyyən edərkən cədvəldəki xanaların doldurulması x_{11} xanasından(yuxarı sol xana) başlanır və x_{mn} xanasında qurtarır. Atılan hər növbəti addım zamanı yerdə qalmış istehsalçı məntəqələrinin birincisinə və yerdə qalmış istehlakçı məntəqələrinin birincisinə baxılır. Belə halda istehsalçı məntəqədə olan məhsul ehtiyatları o zamana kimi istifadə edilir ki, o,tam qurtarmış olsun.

Daha sonra növbəti istehsalçı məntəqəsində olan məhsul ehtiyatlarından istifadə olunur və s.

Şimal - qərb bucagı üsulunun vasitəsilə ilkin dayaq planına daxil olan yükdaşımaların həcmlərinin təyin edilməsi alqoritminə nəzər salaq və ilkin olaraq x_{11}- in qiymətinin müəyyən edilməsinə baxaq:

1) $a_1 < b_1$ oldugu halda $x_{11} = \min\{a_1, b_1\} = a_1$ olur və birinci sətirin digər boş xanalarındakı yükdaşımaların həcmləri isə $x_{12} = x_{13} = \cdots .. x_{1n} = 0$ bərabər olur. Belə halda birinci istehsalçı məntəqəsində qalan məhsul ehtiyatı sıfıra bərabərdir və ona bir daha baxılmır. Eyni zamanda birinci istehlakçı məntəqəsində qalan tələbat $\Delta b_1 = b_1 - a_1$ kimi hesablanır və onun ikinci, üçüncü və s. istehsal məntəqələrindən daşınmış məhsullarla ödənilməsi mümkündür, yəni, $x_{21} = \min\{a_2, \Delta b_1\}$və s.

2)$a_1 > b_1$ oldugu halda $x_{11} = \min\{a_1, b_1\} = b$ olur və birinci sütunun digər boş xanalarındakı yükdaşımaların həcmləri isə $x_{21} = x_{31} = \cdots .. x_{n1} = 0$ bərabər olur.Beləliklə birinci istehlak məntəqəsinin tələbatı tam şəkildə ödənilir və ona bir daha baxılmır. Eyni zamanda birinci istehsalçı məntəqədə qalan məhsul ehtiyatı $\Delta a_1 = a_1 - b_1$ kimi hesablanır.Qalmış ehtiyat isə ikinci, üçüncü və s. istehlakçı məntəqələrə göndərilə bilər, yəni, $x_{12} = \min\{\Delta a_1, b_2\}$ və s.

3)$a_1 = b_1$ oldugu halda $x_{11} = a_1 = b_1$ olur. Belə halda ya birinci istehsalçı məntəqəyə baxılmır, yəni $\Delta a_1 = 0$ və $x_{12} = x_{13} = \cdots .. x_{1n} = 0$ bərabər olur.Ya da birinci istehlakçı məntəqəyə baxılmır, yəni $\Delta b_1 = 0$ və $x_{21} = x_{31} = \cdots .. x_{n1} = 0$ bərabər olur.

Məsələ 9.1. Tutaq ki, 3 istehsalçı məntəqəsində uyğun olaraq 340, 200, 160 məhsul var və bu məhsulları tələbləri uyğun olaraq, 120, 170, 150 və 260 vahid olan 4 istehlakçı məntəqəyə daşımaq tələb olunur. hər bir istehsalçı məntəqəsindən hər bir istehlakçı məntəqəsinə malların daşınması xərcləri

$$C = \begin{pmatrix} 7 & 2 & 4 & 8 \\ 8 & 9 & 6 & 5 \\ 3 & 5 & 7 & 2 \end{pmatrix} \text{ kimidir.}$$

Şimal-qərb bucağı üsulundan istifadə edərək ilkin daşımalar planını tərtib edin:

Həlli: Məsələnin şərtlərini cədvələ yazaq:

İstehsalçılar	İstehlakçılar				Təklif
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	7	2	4	8	340
A_2	8	9	6	5	200
A_3	3	5	7	2	160
Tələb	120	170	150	260	$\sum a_i = 700$ $\sum b_j = 700$

Məsələnin həll etməyə şimal-qərb buçaqdan başlayırıq, yəni, $x_{12} = \min\{340{,}120\} = 120$Onda B_1 istehlakçı məntəqəsinin ehtiyaclar ödənilir və uygun olaraq $x_{21} = x_{31} = 0$ olur.

Birinci sütun baxışdan çıxarılır (boş xanalara ulduz (*) işarəsi qoyulur).

İstehsalçılar	İstehlakçılar				Təklif	Qalıq
	B_1	B_2	B_3	B_4		
A_1	7 120	2	4	8	340	220
A_2	8 *	9	6	5	200	
A_3	3 *	5	7	2	160	
Tələb	120	170	150	260		
Qalıq	0					

Yenə də Şimal-qərb buçagından davam edirik, yəni

$$x_{12} = \min\{340 - 120{,}170\} = \min\{220{,}170\} = 170$$

Onda B_2 istehlakçı məntəqəsinin ehtiyaclar ödənilir və uygun olaraq $x_{22} = x_{32} = 0$ olur.

İkinci sütun baxışdan çıxarılır.

İstehsalçılar	İstehlakçılar				Təklif	Qalıq
	B_1	B_2	B_3	B_4		
A_1	7 120	2 170	4	8	340	50
A_2	8 *	9 *	6	5	200	
A_3	3 *	5 *	7	2	160	
Tələb	120	170	150	260		
Qalıq	0	0				

Yenə də Şimal-qərb buçagından davam edirik, yəni,

$$x_{13} = \min\{220 - 170, 150\} = \min\{50, 150\} = 50$$

Onda A_1 –də məhsul bitmişdir və buna görə də $x_{14} = 0$. Birinci sətir nəzərə alınmır.

İstehsalçılar	İstehlakçılar				Təklif	Qalıq
	B_1	B_2	B_3	B_4		
A_1	7 120	2 170	4 50	8 *	340	50-50=0
A_2	8 *	9 *	6	5	200	
A_3	3 *	5 *	7	2	160	
Tələb	120	170	150	260		
Qalıq	0	0	100			

Yenə də Şimal-qərb buçagından davam edirik, yəni,

$$x_{13} = \min\{200, 150 - 50\} = \min\{200, 100\} = 100$$

Onda B_3 istehlakçı məntəqəsinin ehtiyaclar ödənilir və uygun olaraq $x_{33} = 0$ olur.

Üçüncü sütun baxışdan çıxarılır.

İstehsalçılar	İstehlakçılar				Tək-lif	Qalıq
	B_1	B_2	B_3	B_4		
A_1	7 120	2 170	4 50	8 *	340	0
A_2	8 *	9 *	6 100	5	200	100
A_3	3 *	5 *	7 *	2	160	
Tələb	120	170	150	260		
Qalıq	0	0	0			

Yenə də Şimal-qərb buçagından davam edirik, yəni,

$$x_{13} = \min\{200 - 100, 260\} = \min\{100, 260\} = 100$$

Onda A_2 –də məhsul bitmişdir və buna görə də ikinci sətir nəzərə alınmır.

İsteh-salçılar	İstehlakçılar				Tək-lif	Qalıq
	B_1	B_2	B_3	B_4		
A_1	7 120	2 170	4 50	8 *	340	0
A_2	8 *	9 *	6 100	5 100	200	0
A_3	3 *	5 *	7 *	2	160	160
Tələb	120	170	150	260		
Qalıq	0	0	0	160		

Yenə də Şimal-qərb buçagından davam edirik, yəni,

$$x_{13} = \min\{160, 260 - 100\} = \min\{160, 160\} = 160$$

Onda B_4 istehlakçı məntəqəsinin ehtiyaclar ödənilir və dördüncü sütun baxışdan çıxarılır.

İsteh-salçılar	İstehlakçılar				Tək-lif	Qalıq
	B_1	B_2	B_3	B_4		
A_1	7 120	2 170	4 50	8 *	340	0
A_2	8 *	9 *	6 100	5 100	200	0
A_3	3 *	5 *	7 *	2 160	160	0
Tələb	120	170	150	260		
Qalıq	0	0	0	0		

Beləliklə ilkin daşımalar planı

$$X = \begin{pmatrix} 120 & 170 & 50 & 0 \\ 0 & 0 & 100 & 100 \\ 0 & 0 & 0 & 160 \end{pmatrix},$$

cəmi nəqliyyat xərcləri isə

$F = 7 \cdot 120 + 2 \cdot 170 + 4 \cdot 50 + 6 \cdot 100 + 5 \cdot 100 + 2 \cdot 160 = 2800$ olacaqdır

Doldurulmuş xanaların sayı $m + n - 1$ =3+4-1=6.

Mumumum dəyər (ən kiçik element) üsulu: Şimal-qərb küncü üsulu ilə əldə edilən ilkin daşıma planı onların daşıma qiymətindən asılı deyil və buna görə də, ümumi halda, optimaldan uzaqdır. Minimum dəyər (ən kiçik element) üsulu isə nəqliyyat xərclərini nəzərə alır.

Minimum dəyər (ən kiçik element) üsulunun mahiyyəti cədvəldə olan ən az daşınma xərci olan xanaların ardıcıl olaraq seçilməsindən və onların doldurulmasından ibarətdir. Ən aşağı qiymətə malik bir neçə xana varsa, onlardan hər hansı biri seçilir. Buna görə də, minimum dəyər (ən kiçik element) üsulu ilə tapılan ilkin dayaq plan əsasında hesablanan ümumi nəqliyyat xərcləri çox vaxt Simal-qərb bucağı üsulu ilə tapılan ilkin dayaq plan əsasında hesablanan ümumi nəqliyyat xərclərindən az olur və əsasən optimal plana yaxın olur. Şimal-qərb bucağı üsulunda olduğu kimi, ilkin dayaq planının minimum dəyər(ən kiçik element) üsulu ilə müəyyən edilməsi alqoritmi də eyni addımların ardıcıl olaraq tətbiq edilməsindən ibarətdir və hər addımda cədvəlin ən az nəqliyyat xərcinə malik bir xanasına yükdaşımanın həcmi müəyyən edilir. Nəticədə cədvəldə olan ya bir sətir (yəni,istehsal məntəqəsi), yaxud da bir sütun (yəni,istehlak məntəqəsi) nəzərə alınmır.

Məsələ.9.2. Məsələ 9.1 şərtləri əsasında munumum dəyər (ən kiçik element) **üsulu**ndan istifadə edərək ilkin daşıma planını tərtib edin:

Həlli: Məsələnin şərtlərini cədvələ yazaq və munumum dəyər (ən kiçik element) üsulundan istifadə edərək onun həllini tapaq:

İsteh-salçılar	İstehlakçılar				Təklif	Qalıq
	B_1	B_2	B_3	B_4		
A_1	7	2 170	4	8	340	170
A_2	8	9 *	6	5	200	
A_3	3	5 *	7	2	160	
Tələb	120	170	150	260		
Qalıq		0				

Beləliklə, nəzərdən keçirilən məsələnin həllinə daşıma xərci 2 (minimum daşıma xərci) olan (A_1, B_2) xanasından başlayacağıq . Birinci istehsalçıdan ikinci istehlakçıya maksimum mümkün miqdarda yük, yəni $x_{12} = \min\{340,170\} = 170$ çatdıracağıq. İkinci istehlakçının ehtiyacları tamamilə ödənilir və ikinci sütundakı bütün xamalar daha sonra nəzərə alınmır.

Paylanmanın ikinci addımında daşıma xərci 2 olan (A_3, B_4) xanasını seçirik və ona $x_{34} = \min\{160,260\} = 160$ çatdırılma edirik. İndi üçüncü istehsalçının ehtiyatı tamamilə istifadə olunur və üçüncü sətrin bütün xanaları daha sonra nəzərə alınmır.

İsteh-salçılar	İstehlakçılar				Tək-lif	Qalıq
	B_1	B_2	B_3	B_4		
A_1	7	2 170	4	8	340	170
A_2	8	9 *	6	5	200	
A_3	3 *	5 *	7 *	2 160	160	0
Tələb	120	170	150	260		
Qalıq		0		100		

Daha sonra minimum daşıma xərcinə (4) malik olan (A_1, B_3) xanasını seçirik və ona $x_{13} = \min\{340 - 170{,}150\} = \min\{170{,}150\} = 150$ çatdırılma edirik.

İsteh-salçılar	İstehlakçılar				Tək-lif	Qalıq
	B_1	B_2	B_3	B_4		
A_1	7	2 170	4 150	8	340	20
A_2	8	9 *	6 *	5	200	
A_3	3 *	5 *	7 *	2 160	160	0
Tələb	120	170	150	260		
Qalıq		0	0	100		

Daha sonra minimum daşıma xərcinə (5) malik olan (A_2, B_4) xanasını seçirik və ona $x_{24} = \min\{200{,}260 - 160\} = \min\{200{,}100\} = 100$ çatdırılma edirik:

İstehsal çılar	İstehlakçılar				Tək-lif	Qalıq
	B_1	B_2	B_3	B_4		
A_1	7	2 170	4 150	8 *	340	20
A_2	8	9 *	6 *	5 100	200	100
A_3	3 *	5 *	7 *	2 160	160	0
Tələb	120	170	150	260		
Qalıq		0	0	100		

Daha sonra daşıma xərci 7 olan (A_1, B_1) xanasını seçirik və ona $x_{11} = \min\{340 - 150 - 170{,}120\} = \min\{20{,}120\} = 20$ çatdırılma edirik.

İsteh-salçılar	İstehlakçılar				Tək-lif	Qalıq
	B_1	B_2	B_3	B_4		
A_1	7 20	2 170	4 150	8 *	340	0
A_2	8	9 *	6 *	5 100	200	100
A_3	3 *	5 *	7 *	2 160	160	0
Tələb	120	170	150	260		
Qalıq	100	0	0	0		

Daha sonra daşıma xərci 8 olan (A_2, B_1) xanasını seçirik və ona $x_{21} = \min\{200 - 100{,}120 - 20\} = \min\{100{,}100\} = 100$ çatdırılma edirik:

İsteh-salçılar	İstehlakçılar				Tək-lif	Qalıq
	B_1	B_2	B_3	B_4		
A_1	7 20	2 170	4 150	8 *	340	0
A_2	8 100	9 *	6 *	5 100	200	0
A_3	3 *	5 *	7 *	2 160	160	0
Tələb	120	170	150	260		
Qalıq	0	0	0	0		

Son çatdırılma avtomatik olaraq əldə edilir, çünki doldurulacaq yalnız bir xana qalır və qalan məhsulvə tələblər orada yerləşdirilir. Onlar bərabərdirlər, çünki bütün təchizatların cəmi və bütün tələblərin cəmi bərabərdir.

Beləliklə ilkin daşımalar planı

$$X = \begin{pmatrix} 20 & 170 & 150 & 0 \\ 100 & 0 & 0 & 100 \\ 0 & 0 & 0 & 160 \end{pmatrix},$$

cəmi nəqliyyat xərcləri isə

$F = 7 \cdot 20 + 2 \cdot 170 + 4 \cdot 150 + 8 \cdot 100 + 5 \cdot 100 + 2 \cdot 160 = 2700$ olacaqdır.

Doldurulmuş xanaların sayı $m + n - 1$ =3+4-1=6.
Munumum dəyər (ən kiçik element) üsulundanistifadə etməklə, daha yaxşı dayaq planı alındı , çünki bu üsulla hesablanmış nəqliyyat xərcləri, Şimal-qərb bucagı üsulu ilə hesablanmış nəqliyyat xərclərindən 100 vahid azdır. Ancaq bu plan da optimal olmaya bilər.

İki dəfə nəzərəalma üsulu. Bəzi hallarda böyük ölçülü nəqliyyat məsələsini həll etmək tələb edilir və verilən ilkin məlumatlardan ibarət cədvəl olkin dayaq planın müəyyən edilməsi prosesində elementlərin seçilməsi və mühüm hesablamaların həyata keçirilməsi ilə əlaqədar bir sıra çətinliklərə səbəb olur. Bu zaman iki dəfə nəzərəalma üsulunu tətbiq etmək daha əlverişlidir ki, bu üsulun da mahiyyəti aşağıdakılardan ibarətdir:

1)Əvvəlcə ilkin məlumatlar cədvəlinin bütün sətirlərində ən az nəqliyyat xərcinə malik xana tapılır və həmin xanaya * işarəsi qoyulur.Yəni, $\min_j\{c_{ij}\} = c_{il}$ (burada $i = \overline{1,m}, j = l$) olarsa, bu zaman (i, l) xanasına * işarəsi yazılır.

2)Daha sonra cədvəlin bütün sütunlarında ən az nəqliyyat xərcinə malik xana tapılır və həmin xanaya * işarəsi qoyulur. Yəni, $\min_i\{c_{ij}\} = c_{kj}$ (burada $i = k, j = \overline{1,n}$) olarsa, bu zaman (k, j) xanasına * işarəsi yazılır.

Nəticədə cədvəldəki bəzi xanalarda iki dəfə qeyd aparıldıgı məlum olur və həmin xanalar ** işarələrinə malik olurlar. Yəni, $\min_j\{c_{ij}\} = \min_i\{c_{ij}\} = c_{kl}$ (burada $i = k, j = l$) olarsa, bu zaman (k, l) xanasına ** işarəsi yazılır.Bu o deməkdir ki, cədvəldəki bu xanalar həm sətir, eləcə də sütun üzrə ən az nəqliyyat xərclərinə malikdir və bu xanalara maksimum mümkün olan yükdaşımalar edilir. Atılan hər addımdan sonra məhsul ehtiyatları tamamilə istifadə edildikdə müvafiq istehsal məntəqəsinə, tələbat tamamilə ödənildikdə isə müvafiq istehlak məntəqəsinə daha baxılmır.

** işarəsinə malik xanalar bitdikdən sonra * işarəsi yazılmış xanalara eyni qayda ilə yükdaşımalar edilir. Bu zaman həm **, eyni zamanda * işarələri yazılan xanalarda yükdaşımaların həcmləri, qalan məhsul ehtiyatları və tələbatların həcmi şimal-qərb bucağı üsulunda olduğu kimi müəyyən edilir. Cədvəlin digər boş xanalarındakı yükdaşımaların həcmləri isə minimum dəyər (ən kliçik element) üsulu ilə təyin edilir.

Fogelin approksimasiya üsulu.Yuxarıda adları çəkilən üsullar ilə müqayisədə bu üsuldan istifadə, elə ilkin dayaq planını qurmağa imkan verir ki, bu plan ya nəqliyyat məsələsinin optimal planına çox yaxın olur, yaxud da üst-üstə düşür.

Fogelin approksimasiya üsulu ilə ilkin dayaq planını taparkən hər bir addımda məsələnin ilkin məlümatları yazılan cədvəlin hər bir sətir və sütunlarında ən az nəqliyyat xərcləri arasında olan fərqlər hesablanır.Əgər bir sıra/sütunda eyni və minimum tarif dəyərlərinə malik iki xana varsa, onda biz onları götürürük.Onda fərq 0-a bərabər olacaqdır. Tapılan fərqləri əlavə sütunda (Δi) və əlavə sətirdə (Δj) yazırıq.

Məsələ 9.3. Tutaq ki, 3 istehsalçı məntəqəsində uyğun olaraq 15, 20, 25 məhsul var və bu məhsulları tələbləri uyğun olaraq, 10, 20 və 30 vahid olan 3 istehlakçı məntəqəyə daşımaq tələb olunur. Hər bir istehsalçı məntəqəsindən hər bir istehlakçı məntəqəsinə malların daşınması xərcləri

$$C = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 4 \\ 4 & 1 & 2 \end{pmatrix} \text{kimidir.}$$

Fogelin approksimasiya üsulundan istifadə edərək ilkin daşımalar planını tərtib etmək üçün əvvəlcə məsələnin şərtlərini cədvələ yazaq:

İstehsalçılar	İstehlakçılar			Təklif
	B_1	B_2	B_3	
A_1	5	3	1	10
A_2	3	2	4	20
A_3	4	1	2	30
Tələb	15	20	25	$\sum a_i = 60$ $\sum b_j = 60$

Məsələnin həll etməyə hər bir sətir və sütunlarında ən az nəqliyyat xərcləri arasında olan fərqləri tapmaqla başlayırıq:

İstehsalçılar	İstehlakçılar			Təklif	Δi
	B_1	B_2	B_3		
A_1	5	3	1	10	2
A_2	3	2	4	20	1
A_3	4	1	2	30	1
Tələb	15	20	25		
Δj	1	1	1		

Sonra alınmış fərqlərin arasından ən böyüyü müəyyən edilir. Alınmış fərq hansı sətir ya da sütunda qeydə alınmışsa, orada olan ən az nəqliyyat xərcinə malik xananı müəyyən edirik və həmin xanaya maksimum mümkün yükdaşımalar edirik.Onu da qeyd edək ki, minimum nəqliyyat xərcinə malik bir neçə xana varsa, onda biz ən böyük fərqə uyğun olana yükdaşımalar edirik.

İstehsalçılar	İstehlakçılar			Təklif	Δi
	B_1	B_2	B_3		
A_1	5	3	1	10	2
A_2	3	2	4	20	1
A_3	4	1	2	30	1
Tələb	15	20	25		
Δj	1	1	1		

Deməli, burada ən böyük fərq birinci sətirə düşdüyü üçün daşıma xərci 1 olan (A_1, B_3) xanasını seçirik və ona $x_{13} = \min\{10{,}25\} = 10$ çatdırılma edirik:

İstehsalçılar	İstehlakçılar			Təklif	Δi
	B_1	B_2	B_3		
A_1	5 *	3 *	1 10	10	2
A_2	3	2	4	20	1
A_3	4	1	2	30	1
Tələb	15	20	15		
Δj	1	1	1		

Sonra dayaq planı tamamilə tapılana qədər yuxarıda göstərilən bütün addımları təkrar edirik (yalnız doldurulmuş xanaları və əvvəllər seçilmiş fərqləri (Δi və Δj) nəzərə almadan).Yəni, hər bir sətir və sütunlarında ən az nəqliyyat xərcləri arasında olan fərqləri tapırıq və alınmış fərqlərin arasından ən böyüyünü müəyyən edirik. Alınmış fərq hansı sətir ya da sütunda qeydə alınmışsa, orada olan ən az nəqliyyat xərcinə malik xananı müəyyən edirik və həmin xanaya maksimum mümkün yükdaşımalar edirik.

Deməli, burada ən böyük fərq üçüncü sütuna düşdüyü üçün daşıma xərci 2 olan (A_3, B_3) xanasını seçirik və ona $x_{33} = \min\{30,15\} = 15$ çatdırılma edirik:

İstehsalçılar	İstehlakçılar			Təklif	Δi
	B_1	B_2	B_3		
A_1	5 *	3 *	1 10	10	X
A_2	3	2	4 *	20	1
A_3	4	1	2 15	15	1
Tələb	15	20	0		
Δj	1	1	2		

Sonra dayaq planı tamamilə tapılana qədər yuxarıda göstərilən bütün addımları təkrar edirik Yəni, hər bir sətir və sütunlarında ən az nəqliyyat xərcləri arasında olan fərqləri tapırıq və alınmış fərq hansı sətir ya da sütunda qeydə alınmışsa, orada olan ən az nəqliyyat xərcinə malik xananı müəyyən edirik və həmin xanaya maksimum mümkün yükdaşımalar edirik.

Deməli, burada ən böyük fərq üçüncü sətirə düşdüyü üçün daşıma xərci 1 olan (A_3, B_2) xanasını seçirik və ona $x_{32} = \min\{30 - 15{,}20\} = 15$ çatdırılma edirik:

İstehsalçılar	İstehlakçılar			Təklif	Δi
	B_1	B_2	B_3		
A_1	5 *	3 *	1 10	0	X
A_2	3	2	4 *	20	1
A_3	4	1	2 15	0	3
Tələb	15	5	0		

İstehsalçılar	İstehlakçılar			Təklif	Δi
	B_1	B_2	B_3		
A_1	5 *	3 *	1 10	0	X
A_2	3	2	4 *	20	1
A_3	4 *	1 15	2 15	0	X
Tələb	15	5	0		
Δj	1	1	X		

Eyni qayda ilə qalan xanalar doldurulur:

İstehsalçılar	İstehlakçılar			Təklif	Δi
	B_1	B_2	B_3		
A_1	5 *	3 *	1 10	0	X
A_2	3 15	2 5	4 *	0	
A_3	4 *	1 15	2 15	0	X
Tələb	0	0	0		
Δj			X		

Nəticədə aşagıdakı dayaq planını əldə edirik:

İstehsalçılar	İstehlakçılar			Təklif
	B_1	B_2	B_3	
A_1	5 *	3 *	1 10	0
A_2	3 15	2 5	4 *	0
A_3	4 *	1 15	2 15	0
Tələb	0	0	0	

Beləliklə, ilkin daşımalar planı

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 10 \\ 15 & 5 & 0 \\ 0 & 15 & 15 \end{pmatrix},$$

cəmi nəqliyyat xərcləri isə

$$F = 1 \cdot 10 + 3 \cdot 15 + 2 \cdot 5 + 1 \cdot 15 + 2 \cdot 15 = 110$$

olacaqdır.

Doldurulmuş xanaların sayı $m + n - 1$ =3+3-1=5.

ÖZÜNÜ YOXLAMAQ ÜÇÜN SUALLAR VƏ TAPŞIRIQLAR

1.Nəqliyyat məsələsinin iqtisadi mahiyyətini izah edin.
2.Nəqliyyat məsələsinin iqtisadi-riyazi modeli necədir?
3.Açıq nəqliyyat məsələsi qapalı məsələyə necə gətirilir?
4.Nəqliyyat məsələsinin ilkin dayaq planın tapılmasında istifadə edilən üsullar hansılardır?
5.Aşagıdakı cədvəldə 3 müxtəlif fabrikdən 4 müxtəlif depoya daşıma xərcləri,fabriklərın ehtiyatları və depoların tələbinin miqdarı verilmişdir. Bu məlumatlara əsasən ilkin daşınmalar planını şimal-qərb bucağı üsulu ilə tərtib edin:

Fabrik-lər	Depolar				Təklif
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	9	2	5	3	60
A_2	5	6	5	5	120
A_3	8	3	7	4	100
Tələb	20	110	40	110	$\sum a_i = 280$ $\sum b_j = 280$

6.Şəhərin 4 deposunda eyni adlı məhsul vardır. Birinci depoda olan məhsulun miqdarı 50 vahidə, ikinci depoda 40 vahidə, üçüncü depoda 90 vahidə, dördüncü depoda isə 70 vahidə bərabərdir. Bu məhsulları 3 mağazaya daşımaq tələb olunur. Mağazaların tələbləri isə uyğun olaraq 100 vahidə, 30 vahidə və 50 vahidə bərabərdir. Birinci depodan mağazalara bir vahid məhsulun daşınması xərci uyğun olaraq 3, 9, 10 manata, ikinci depodan 6, 1, 8 manata, üçüncü depodan 2, 4, 7 manata, dördüncü depodan isə 5, 11, 13 manata bərabərdir. Əgər ilkin daşınmalar planını *şimal-qərb bucağı üsulunun köməyi ilə tərtib etsək, bu zaman 3-cü depodan 2-ci mağazaya neçə vahid məhsul daşınacaqdır?*

7.Birinci istehsal müəssisəsində 150 ton, ikinci istehsal müəssisəsində 180 ton,üçüncü istehsal müəssisəsində 120 ton eyni adlı məhsul vardır və onları 4 istehlak məntəqələrinə daşımaq tələb olunur. Bu istehlakçıların tələbləri isə uyğun olaraq, 100 tona, 200 tona, 75 tona və 75 tona bərabərdir. Birinci istehsal müəssisəsindən istehlakçılara 1 ton məhsulun daşınmasına uyğun olaraq 7,9,2,6 manat, ikinci istehsal müəssisəsindən 4,3,1,8 manat, üçüncü istehsal müəssisəsindən isə 8,2,9,4 manat nəqliyyat xərclərinin tələb olunduğunu bilərək, bu nəqliyyat məsələsi üçün Fogelin approksimasiya üsulu ilə ilkin daşınmalar planını tərtib edin.

8.Aşağıdakı nəqliyyat məsələsinin ilkin daşınmalar planını mumumum dəyər (ən kiçik element) üsulu ilə tərtib edin və cəmi nəqliyyat xərclərini hesablayın:

Malgöndərənlərin gücləri	İstehlakçıların tələbi		
	1	2	3
	60	60	60
50	4	3	2
70	3	4	5
60	6	5	7

9.Birinci istehsal müəssisəsində 60 ton, ikinci istehsal müəssisəsində 120 ton,üçüncü istehsal müəssisəsində 100 ton eyni adlı məhsul vardır və onları 4 istehlak məntəqələrinə daşımaq tələb olunur. Bu istehlakçıların tələbləri isə uyğun olaraq, 20 tona, 110 tona, 40 tona və 110 tona bərabərdir. Birinci istehsal müəssisəsindən istehlakçılara 1 ton məhsulun daşınmasına uyğun olaraq 1,2,5,3 manat, ikinci istehsal müəssisəsindən 1,6,5,2 manat, üçüncü istehsal müəssisəsindən isə 6,3,7,4 manat nəqliyyat xərclərinin tələb olunduğunu bilərək, bu nəqliyyat məsələsi üçün *mumumum dəyər (ən kiçik element) üsulu ilə ilkin daşınmalar planını tərtib edin. Tərtib edilmiş plana əsasən cəmi nəqliyyat xərclərini hesablayın.*

10.Birinci istehsal müəssisəsində 60 ton, ikinci istehsal müəssisəsində 120 ton,üçüncü istehsal müəssisəsində 100 ton eyni adlı məhsul vardır və onları 4 istehlak məntəqələrinə daşımaq tələb olunur. Bu istehlakçıların tələbləri isə uyğun olaraq, 20 tona, 110 tona, 40 tona və 110 tona bərabərdir. Birinci istehsal müəssisəsindən istehlakçılara 1 ton məhsulun daşınmasına uyğun olaraq 1,2,5,3 manat, ikinci istehsal müəssisəsindən 1,6,5,2 manat, üçüncü istehsal müəssisəsindən isə 6,3,7,4 manat nəqliyyat xərclərinin tələb olunduğunu bilərək, bu nəqliyyat məsələsi üçün iki dəfə nəzərə alma üsulu ilə ilkin daşınmalar planını tərtib edin. Tərtib edilmiş plana əsasən cəmi nəqliyyat xərclərini hesablayın.

11.A və B məntəqələrində müvafiq olaraq 150 və 90 ton yanacaq var.1, 2, 3-cü istehlakçılar müvafiq olaraq 60, 70, 110 ton yanacaq tələb edir. 1 ton yanacağın A məntəqəsindən 1, 2, 3-cü istehlakçılara daşınması xərci 60, 10, 40 manat təşkil edir. Müvafiq olaraq 1 ton yanacağın B məntəqəsindən 1, 2, 3-cü istehlakçılara daşınması xərci 120, 20, 80 manat təşkil edir. Verilmiş məlumatlara əsasən nəqliyyat məsələsinin ilkin daşınmalar planını mumumum dəyər (ən kiçik element) üsulu ilə tərtib edin və cəmi nəqliyyat xərclərini hesablayın.

12.A və B məntəqələrində müvafiq olaraq 150 və 90 ton yanacaq var.1, 2, 3-cü istehlakçılar müvafiq olaraq 60, 70, 110 ton yanacaq tələb edir. 1 ton yanacağın A məntəqəsindən 1, 2, 3-cü istehlakçılara daşınması xərci 60, 10, 40 manat təşkil edir. Müvafiq olaraq 1 ton yanacağın B məntəqəsindən 1, 2, 3-cü istehlakçılara daşınması xərci 120, 20, 80 manat təşkil edir. Verilmiş məlumatlara əsasən nəqliyyat məsələsinin ilkin daşınmalar planını şimal-qərb bucağı üsulu ilə tərtib edin və cəmi nəqliyyat xərclərini hesablayın.

13. A iqtisadi rayonunda üç müəssisə müvafiq olaraq 180, 350 və 20 vahid həcmində eyni adlı məhsul istehsal edir. Bu məhsullar tələbləri müvafiq olaraq 110, 90, 120, 80 və 150 vahid olan beş istehlakçıya çatdırılmalıdır Hər bir istehsalçı məntəqəsindən hər bir istehlakçı məntəqəsinə malların daşınması xərcləri

$$C = \begin{pmatrix} 7 & 12 & 4 & 6 & 5 \\ 1 & 8 & 6 & 5 & 3 \\ 6 & 13 & 8 & 7 & 4 \end{pmatrix} \textit{kimidir.}$$

Fogelin approksimasiya üsulundan istifadə edərək ilkin daşımalar planını tərtib edin.

14. Üç çörək kombinatı gündə 110, 190 və 90 ton un istehsal edir. Bu unu gündəlik tələbatı müvafiq olaraq 80, 60, 170 və 80 ton olan dörd çörək zavodu istehlak edir.

Çörək kombinatından an hər bir çörək zavoduna 1 ton unun daşınması xərcləri

$$C = \begin{pmatrix} 8 & 1 & 9 & 7 \\ 4 & 6 & 2 & 12 \\ 3 & 5 & 8 & 9 \end{pmatrix} \textit{kimidir.}$$

Verilmiş məlumatlara əsasən nəqliyyat məsələsinin ilkin daşınmalar planını şimal-qərb bucağı üsulu ilə tərtib edin və cəmi nəqliyyat xərclərini hesablayın.

15..Birinci istehsal müəssisəsində 150 ton, ikinci istehsal müəssisəsində 180 ton,üçüncü istehsal müəssisəsində 120 ton eyni adlı məhsul vardır və onları 4 istehlak məntəqələrinə daşımaq tələb olunur. Bu istehlakçıların tələbləri isə uyğun olaraq, 100 tona, 200 tona, 75 tona və 75 tona bərabərdir. Birinci istehsal müəssisəsindən istehlakçılara 1 ton məhsulun daşınmasına uyğun olaraq 7,9,2,6 manat, ikinci istehsal müəssisəsindən 4,3,1,8 manat, üçüncü istehsal müəssisəsindən isə 8,2,9,4 manat nəqliyyat xərclərinin tələb olunduğunu bilərək, bu nəqliyyat məsələsi üçün şimal-qərb bucağı üsulu ilə ilkin daşınmalar planını tərtib edin.

X FƏSİL. TƏK DƏYİŞƏNLİ FUNKSİYALARIN KLASSİK MİNİMALLAŞDIRILMASI

10.1.Unimodal funksiyalar

$f(x)$ məqsəd funksiyasının R mümkün çoxluğunda müəyyən edilmiş bir dəyişəndən asılı olduğu ən sadə riyazi optimallaşdırma modelini nəzərdən keçirək. Məqsəd funksiyasının maksimuma çatdırılması ($f(x) \rightarrow$ max) minimuma endirilmənin əksi oldugu üçün ($- f(x) \rightarrow$ min), ümumiliyi itirmədən yalnız minimumlaşdırma məsələlərini nəzərdən keçirəcəyik:

$$f(x) \rightarrow min \qquad (10.1)$$
$$x\epsilon[a;b]$$

Əgər R çoxluğunda müəyyən edilmiş $f(x)$ funksiyası qlobal, ondan əlavə fərqli lokal minimumlara malikdirsə, bir qayda olaraq, $f(x)$-in minimalllaşması çox çətin olur. $f(x)$-in minimumunu tapmaq üçün istifadə olunan əksər üsullar yalnız hər bir lokal minimumun qlobal olduğu funksiyalar üçün uyğundur. Unimodal funksiyalar bu xüsusiyyətə malikdir.

Tərif 10.1. Funksiya $[a;b]$ parçasında kəsilməzdirsə və α və $\beta, a \leq \alpha \leq \beta \leq b$ ədədləri varsa,onda $f(x)$ funksiyası $[a;b]$ parçasında unimodal adlanır.Belə ki:

1) əgər $[a;\alpha]$ parçasında $[a < \alpha]$ olarsa, onda $f(x)$ funksiyası monoton şəkildə azalır;

2) əgər $[\beta;b]$ parçasında $[\beta < b]$ olarsa, onda $f(x)$ funksiyası monoton şəkildə artır;

3) $x \in [\alpha,\beta]$ oldugu halda $f(x) = f_* = \min\limits_{[a;b]} f(x)$.

Yuxarıdakı tərifdən unimodal funksiyaların aşağıdakı xassələri irəli gəlir:

1) Unimodal funksiyanın lokal minimum nöqtələrindən hər hansı biri $[a;b]$ parçasında onun qlobal minimum nöqtəsidir.

2) $[a;b]$ parçasında unimodal olan funksiya, hər hansı kiçik $[c;d]$Ì $[a;b]$ parçasında da unimodaldır.

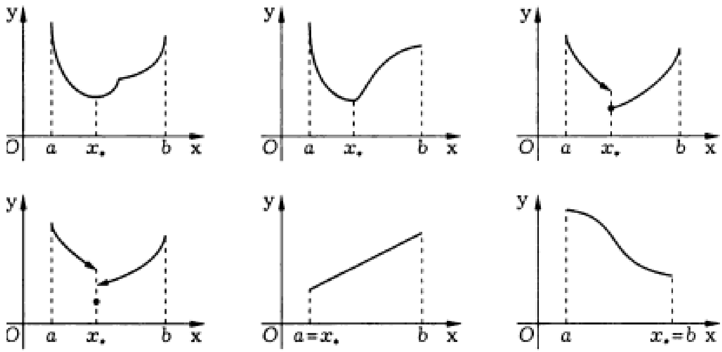
3)$f(x)$ funksiyası $[a;b]$ parçasında unimodal olsun və $a \leq x_1 < x_2 \leq b.$

Onda

$$\text{əgər } f(x_1) \leq f(x_2) \text{ olarsa, } x^* \in [a;x_2] \, ,$$
$$\text{əgər } f(x_1) > f(x_2) \text{ olarsa, } x^* \in [x_1;b].$$

Burada:

x^* - $f(x)$ funksiyası $[a;b]$ parçasındakı minimum nöqtələrdən biridir.



Şəkil10.1. Unimodal funksiyanın qrafikləri

Teorem 10.1. Əgər $f(x)$ funksiyası [a,b] parçasında diferensiallanırsa və $f'(x)$ törəməsi bu intervalda azalmırsa, $f(x)$ funksiyası [a,b] parçasında unimodaldır.

Teorem 10.2. $f(x)$ funksiyası [a,b] parçasında iki dəfə diferensiallanarsa və $x \in [\mathrm{a;b}]$ −də $f'(x) \geq 0$ olarsa $f(x)$ funksiyası [a,b] parçasında unimodaldır.

Məsələ 10.1. $f(x) = x^3 + \ 12x^2 + 87x + 25$ funksiyasının [4;7] parçasında unimodal oldugunu müəyyən edin:

Həlli: $f(x)$funksiyasının ikinci törəməsi

$$f'(x) = 6x - 4$$

formasına malikdir. $6x - 4$=0 tənliyinin kökü $x = 4$-dür.

Əgər $x \geq 4$ və xüsusilə $x \in [4;7]$ olarsa,

$$f'(x) \geq 0$$

Unimodallıq kriteriyasından (teorem 10.2) istifadə edərək $f(x)$ fiunksiyasının [4;7] parçasında unimodal oldugunu müəyyən edirik.

Məsələ 10.2 $f(x) = x^4 + 3$ funksiyasının [-1;1] parçasında unimodal oldugunu müəyyən edin:

Həlli: $f(x)$ funksiyasının törəməsi $f'(x) = 4x^3$ formasına malikdir.

$f'(x)$ funksiyası bütövlükdə $x \in R$ və xüsusilə $x \in [-1;1]$ olduqda azalmır.

Unimodallıq kriteriyasından (teorem 10.1) istifadə edərək, $f(x)$ funksiyasının [-1;1] parçasında unimodal oldugunu müəyyən edirik.

10.2. Qabarıq funksiyalar

Əgər bütün $x', x'' \in [a;b]$ parçasında və ixtiyarı $\alpha \in [0;1]$ ədədində

$$f(\alpha x' + (1-\alpha)x'') \leq \alpha f(x') + (1-\alpha) f(x'') \quad (10.2)$$

bərasizliyi təmin olunursa, $[a;b]$ parçasında verilmiş $f(x)$ funksiyası bu parçada qabarıq adlanır.

Xassə 1. Əgər $f(x)$ funksiyası $[a;b]$ parçasında qabarıqdırsa, onda hər hansı $[x', x''] \subset [a;b]$ üzərində onun qrafiki x' və x'' absisləri olan qrafik nöqtələri vasitəsilə çəkilmiş əyri xəttin iki nöqtəsinin birləşdirən düz xəttdən yüksək olmayan yerdə yerləşir.

Xassə 2. $[a;b]$ parçasında hər hansı qabarıq kəsilməz funksiya həm də bu intervalda unimodaldır. Əksinə, ümumiyyətlə, doğru deyil.

Riyazi analiz kursundan funksiyanın qabarıqlığı üçün aşağıdakı şərtlər məlumdur:

a) $[a;b]$ parçasında diferensiallanan $f(x)$ funksiyanın bu parçada qabarıq olması üçün onun $f^{\cdot}(x)$ törəməsinin $[a;b]$ azaltmaması zəruri və kafi şərtdir

(məsələn, $y = x^2, x \in R; y = cosx, x \in \left[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$);

b)$[a;b]$ parçasında iki dəfə diferensiallanan $f(x)$ funksiyanın bu parçada qabarıq olması üçün bütün $x \in [a;b]$ üçün $f''(x) \geq 0$ bərabərsizliyinin təmin olunması zəruri və kafi şərtdir

(məsələn, $y = x^2, x \in R; y = cosx, x \in \left[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$).

Praktikada funksiyaların qabarıqlığını öyrənərkən (10.2) bərabərsizliyindən nadir hallarda istifadə edilə bilər.Buna görə də, kifayət qədər sayda diferensiallana bilən funksiyalar üçün adətən yuxarıdakı diferensial qabarıqlıq meyarlarından istifadə olunur.Bu anlayışın tərifindən istifadə etməklə unimodallığın birbaşa yoxlanılması da əksər hallarda çətinliklər yaradır. Buna görə də, kifayət qədər hamar funksiyaların unimodallığını əsaslandırmaq üçün eyni qabarıqlıq meyarlarından istifadə olunur. Əgər funksiya qabarıq olarsa, onun unimodal olduğunu deyə bilərik. Lakin, funksiyanın qabarıqlığının yoxlanılmasının nəticəsi mənfi olarsa, onun unimodal olmadığı qənaətinə gəlmək olmaz.

Məsələ 10.3. $f(x) = x^4 - 10x^3 + 36x^2 + 5x$ funksiyanın $[3;5]$ parçasında unimodal oldugunu göstərin:

$f(x)$ funksiyanın ikinci törəməsi

$$f''(x) = 12x^2 - 60x + 72\text{-yə}$$

bərabərdir. Alınan tənliyin kökləri $x_1 = 2$ və $x_2 = 3$. Buna görə də, əgər $x \geq 3$ olarsa (xüsusilə də $x \epsilon [3;5]$), $f''(x) \geq 0$ olar. Yuxarıdakı "b" diferensial meyarına görə $f(x)$ qabarıqdır və buna görə də bu parçada unimodaldır.

Məsələ 10.4 $a > 3$ oldugu halda

$f(x) = ax^3 - 3x^2 - 10$ funksiyanın $[1;2]$ parçasında unimodal oldugunu göstərin:

$f(x)$ funksiyanın birinci törəməsi

$$f'(x) = 3ax^2 - 6x,$$

ikinci törəməsi

$$f''(x) = 6a(x - \frac{1}{a})\text{-ya bərabərdir.}$$

Əgər $x \in [1; 2]$ və $a > 3$ (yəni $0 < \frac{1}{a} < \frac{1}{3}$) olarsa, $f''(x) > 0$ olar və yuxarıdakı funksiyaların qabarıqlığı üçün "b" diferensial meyarına görə $f(x)$ funksiyası unimodaldır.

10.3. Lipşis şərti

Bəzi tək ölçülü minimallaşdırma üsullarından istifadə yalnız $[a; b]$ parçasının istənilən hissəsində $f(x)$ məqsəd funksiyasının dəyişmə sürəti müəyyən ədədlə məhdudlaşdıqda mümkündür, bu bütün bölmələr üçün eynidir. Bu halda $f(x)$ [a;b] intervalında Lipşits şərtini ödəyir. Ən praktiki optimallaşdırma məsələlərinin məqsəd funksiyaları bu xüsusiyyətə malikdir.

Tərif 10.2. Əgər $L > 0$ (Lipşits sabiti) kimi ədəd varsa, $f(x)$ funksiyası [a;b] parçasında Lipşis şərtini ödəyir.
Burada:
$[a; b]$ parçasına məxsus bütün x' və x'' üçün

$$|f(x') - f(x'')| \leq L|x' - x''| \text{ (10.3.)}$$

Burada aşağıdakılara diqqət yetirmək lazımdır:
1)Sabit L üçün (10.3) bərabərsizliyi yerinə yetirilirsə, bu, bütün L′ > L üçün də doğrudur. Buna görə də Lipşis şərtini ödəyən funksiya üçün (10.3)-dən sonsuz L sabitləri çoxluğu mövcuddur. L-i parametr kimi daxil edən minimallaşdırma alqoritmlərindən istifadə edərkən ən yaxşı nəticələrə adətən L kimi Lipşis sabitinin minimumu qəbul edildiyi halda əldə edilir.
2) (10.3.) şərtindən $f(x)$ funksiyasının [a;b] parçasında kəsilməz oldugu izlənir. Bu baxımdan Veyerştrass teoreminə görə, Lipşis

şərtini [a;b] parçasında ödəyən $f(x)$ funksiyası, ümumiyyətlə, unimodal olmasa da, ən azı bir minimum nöqtəsinə malikdir.
3) (10.3) şərti göstərir ki, $f(x)$ qrafikinin istənilən əyri xəttin iki nöqtəsinin birləşdirən düz xəttin bucaq əmsalının modulu L -dən çox deyil. (10.3)-dən

$$L|x' - x''| \to 0$$

kimi keçid alaraq əmin oluruq ki, əgər hansısa nöqtədə $f(x)$ qrafiinkə toxunan olarsa, onun bucaq əmsalının modulu da L-dən çox ola bilməz. Beləliklə, [1;2] parçasındakı $f(x) = \sqrt{x}$ funksiyası Lipşis şərtini ödəməyəcək, çünki $x \to +\infty$ olduqda. onun k qrafikinə toxunan bucaq əmsalı sonsuz olaraq artır.
4)Əgər $f(x)$ funksiyasının [a;b] parçasında kəsilməz törəməsi varsa, onda bu parça üzrə Lipşitz şərtini

$$L = \max_{[a;b]}|f'(x)|$$

sabiti ilə ödəyir.

Məsələ 10.5.
$f(x) = \frac{1}{3}x^3 + 2x^2 - 5x + 6$ funksiyasının
a)$x \in [0; 1]$ parçasında;
b))$x \in [0; 10]$ parçasında Lipşits sabitlərindən ən kiçiyini tapın:
Funksiyanın törəməsi

$$f'(x) = x^2 + 4x - 5 = (x + 5)(x - 1)$$

Ona görə də
a) üzrə

$$L = \max_{[0;1]}|f'(x)| = |f'(0)| = 5\,;$$

b) üzrə

$$L = \max_{[0;10]}|f'(x)| = |f'(10)| = 135$$

olacaqdır.

10.4. Tək dəyişənli funksiyanın klassik minimallaşması

Riyazi təhlildən kifayət qədər sayda diferensiallandırıla bilən f(x) funksiyasının lokal ekstremumu üçün aşağıdakı şərtlər məlumdur:

Şərt 1.Əgər $f(x)$ funksiyası $\tilde{x}$ nöqtəsində diferensiallana bilirsə və bu nöqtədə lokal ekstremuma çatırsa, onda $f^{\cdot}(\tilde{x}) = 0$ (ekstremum üçün zəruri şərt);

Şərt 2.Əgər $f(x)$ funksiyası $\tilde{x}$ nöqtəsində n dəfə diferensiallaşa bilirsə və bu nöqtədə $f(x)$ –in n–1 dərəcəyə qədər bütün törəmələri sıfıra bərabərdirsə, onda $f^{n}(\tilde{x}) \neq 0$ .Onda, əgər n tək ədəddirsə , onda $\tilde{x}$ $f(x)$ funksiyasının lokal ekstremum nöqtəsi deyil.

Əgər n cüt ədəddirsə:

a) .$f^{n}(\tilde{x}) > 0$ oldugu halda $\tilde{x}$ $f(x)$-in lokal minimum nöqtəsidir:

b) .$f^{n}(\tilde{x}) < 0$ oldugu halda $\tilde{x}$ $f(x)$-in lokal maksimum nöqtəsidir (ekstremum üçün kifayətşərt).

Sadalanan şərtlər (10.1) minimallaşdırma məsələlərinin həlli üçün aşağıdakı üsulları təklif etməyə imkan verir:

1) Birinci şərtdən istifadə edərək, (a;b) parçasında $f(x)$ funksiyasının bütün mümkün ekstremum nöqtələri, yəni, (a;b) parçasına aid stasionar nöqtələri olan

$$f^{\cdot}(\tilde{x}) = 0 \quad (10.4.)$$

tənliyinin kökləri tapılır;

2) İkinci şərtə uyğun olaraq tapılmış stasionar nöqtələr öyrənilir və onlardan yalnız $f(x)$ -in lokal minimum nöqtələri seçilir;

3) lokal minimum nöqtələrində və [a;b] parçasının uclarında $f(x)$ -in qiymətləri bir-biri müqayisə edilir. Bu dəyərlərin ən kiçiyi [a;b] üzərindəki qlobal minimum $f(x)$ nöqtəsinə uyğundur.

İkinci şərtin tətbiqi $f(x)$ funksiyasının daha yüksək törəmələrin hesablanmasını tələb edir, buna görə də əksər hallarda onların xarakteri ilə maraqlanmadan bütün stasionar nöqtələrdə $f(x)$ qiymətlərini müqayisə etmək daha asandır.

Deyilənləri nəzərə alaraq [a;b] parçasında $f(x)$-in minimuma endirilməsi alqoritmini nəzərdən keçirək (klassik metod):

1) (10.2) tənliyini x ∈ (a;b) parçasında həlli, yəni, x1,..,xk–1∈ (a;b) bütün stasionar nöqtələrinin tapılması.

Fərz edək ki, x_0=a, x_k=b.

2)$f(x)$ funksiyasının x_i $(i = 1,2,3 \dots . n)$nöqtələrində $f^*(x)$ qiymətlərinin hesablanması;

3) $f^* = \min((x_\mathrm{i}) = f(x_\mathrm{m})\ x^* = x_m$

Məsələ 10.6. $f(x) = x^3 - 3x + 1 \rightarrow min$ məsələsini həll edək: $x[-2{,}2]$

Addım 1. $[-2{,}2]$ parçasında $f^*(x) = 3x^3 - 3$ tənliyinin köklərini tapaq:

$$3x^3 - 3 = 0$$
$$x_1 = -1,$$
$$x_2 = 1.$$

İntervalın uc nöqtələri

$$x_0 = -2,$$
$$x_3 = 2$$

Addım 2. x_i $(i = 1,2,3 \dots . n)$ nöqtələrində $f(x)$ qiymətlrini hesablayaq:

$$f(x_0) = -17,$$
$$f(x_1) = 3,$$
$$f(x_2) = -1,$$
$$f(x_3) = 1$$

Addım 3. $f^* = \min(-17, 3. -1{,}1) = -17 = f(x_0)$

Buna görə də

$$x^* = x_0 = -2\,,$$
$$f^* = -17.$$

Məsələ 10.7. $f(x) = x^3 - 3x + 1 \rightarrow min$ məsələsini həll edək, $x[-3{,}3]$

Addım 1. $[-2,2]$ intervalında $f^*(x) = 3x^3 - 3$ tənliyinin köklərini tapaq:

$$3x^3 - 3 = 0$$
$$x_1 = -1,$$
$$x_2 = 1.$$

İntervalın uc nöqtələri

$$x_0 = -3,$$
$$x_3 = 3$$

Addım 2. x_i $(i = 1,2,3 \dots . n)$ nöqtələrində $f(x)$ qiymətlrini hesablayaq:

$$f(x_0) = -17,$$
$$f(x_1) = 3,$$
$$f(x_2) = -1,$$
$$f(x_3) = 19$$

Addım 3. $f^* = \min(-17, 3, -1,19) = -17 = f(x_0)$

Buna görə də

$$x^* = x_0 = -3\,,$$
$$f^* = -17.$$

Qeyd. Verilmiş məsələnin lokal minimum nöqtəsini ikinci törəmənin $f^{**}(x) = 6x$ işarəsinə əsasən də təyin etmək olar. İkinci törəmənin stasionar nöqtələrdə işarəsini təyin edək:

$f^{**}(-1) = -6 < 0$ - maksimum nöqtə;

$f^{**}(1) = 6 > 0$ - minimum nöqtə.

Minimum nöqtə ilə intervalın sonunda funksiyanın qiymətlərini müqayisə edirik və x = -3 nöqtəsində ən kiçik qiyməti

$$f_{min} = -17$$

müəyyən edirik.

Praktik optimallaşdırma məsələlərini həllində klassik metodun tətbiqi imkanları bir qədər məhduddur. Bu aşagıdakılarla izah olunur:

1) $f(x)$ məqsəd funksiyasının qiymətlərinin bir çox hallarda ölçmələr və ya təcrübələrdən tapılması və $f^*(x)$ törəməsinin hesablanmasının çətin və ya qeyri-mümkün olması;
2) $f^*(x)$ törəməsi analitik olaraq verilmiş və ya ölçülə bilən olsa belə, çox vaxt (10.4) tənliyinin həllinin çətinliyi.

ÖZÜNÜ YOXLAMAQ ÜÇÜN SUALLAR VƏ TAPŞIRIQLAR

1.$f(x) = \frac{1}{4}x^4 + x^2 - 8x + 12$ *funksiyasının [0;2] parçasında unimodal oldugunu müəyyən edin.*
2.$f(x) = x^2 - 3x + xlnx$ *funksiyasının [1;2] parçasında unimodal oldugunu müəyyən edin.*
3.$f(x) = ln(1 + x^2) - sinx$ *funksiyasının* $[0; \frac{\pi}{4}]$ *parçasında unimodal oldugunu müəyyən edin.*
4.$f(x) = \frac{1}{2}x^2 - sinx$ *funksiyasının [0;1] parçasında unimodal oldugunu müəyyən edin.*
5.[a ,b] parçasında unimodal olan $f(x)$ *funksiyasının lokal minimum nöqtələrindən hər hansı birinin onun həm də qlobal minimum nöqtəsi oldugunu göstərin.*
6.$f(x)$ *funksiyasının [a ,b] parçasında unimodal və* $a \leq c \leq d \leq b$ *oldugu halda,* $f(x)$ *–in [c ,d] parçasında unimodal oldugunu göstərin.*
7.$f(x) = -x^2 + 5x - 6$ *funksiyasının [-5;b] parçasında unimodal oldugu halda b-nin maksimal qiymətini müəyyən edin.*
8 $a > 3$ *oldugu halda* $f(x) = ax^3 - 3x^2 - 10$ *[1 ,1] parçasında unimodal olarmı?*
9. Unimodal funksiyaların xassələri hansılardır?
10. Qabarıq funksiyaların xassələri hansılardır?
11.Lipşis şərtinin mahiyyətini izah edin.

XI FƏSİL. TƏK DƏYİŞƏNLİ FUNKSİYALARIN BİRBAŞA ŞƏRTSİZ OPTİMALLAŞDIRMA ÜSULU

11.1. Tək dəyişənli məsələlərin üsullarının təsnifatı

Tək dəyişənli funksiyalarının optimallaşdırılması məsələləri optimallaşdırma məsələlərinin ən sadə sinfinə aiddir. Buna baxmayaraq, optimallaşdırma tədqiqatlarında bu tip problemlərin təhlili mərkəzi yer tutur. Eyni zamanda, çoxölçülü optimallaşdırma məsələlərinin həlli zamanı yaranan alt problemlərin təhlili üçün çox vaxt bir ölçülü optimallaşdırma metodlarından istifadə olunur. Tək dəyişənli məsələlərin həlli üçün çoxlu sayda alqoritmlər mövcuddur. Belə məsələlərin üsullarının təsnifatı $f(x)$ funksiyasının təbiəti və xassələri ilə bağlı müxtəlif fərziyyələrə əsaslanır.

$f(x)$ funksiyasının [a;b] intervalında minimuma endirilməsi məsələsini həll etmək üçün praktikada, bir qayda olaraq, təqribi üsullardan istifadə edilir. Onlar [a;b] intervalının bəzi nöqtələrində f(x) funksiyasının və onun törəmələrinin sonlu sayda qiymətlərini təyin etməklə, bu məsələnin həllini tələb olunan dəqiqliklə tapmağa imkan verirlər.

Yalnız məqsəd funksiyasının qiymətlərindən istifadə edən və onun törəmələrinin hesablanmasını tələb etməyən üsullara minimallaşmanın birbaşa üsulları deyilir. Birbaşa üsulların böyük üstünlüyü ondan ibarətdir ki burada məqsəd funksiyasının diferensiallandırılması tələb olunmur, üstəlik, o, analitik formada göstərilməyə də bilər. Birbaşa minimumlaşdırma üsulları alqoritmləri yalnız $\boldsymbol{f(x)}$ $-$in verilmiş nöqtələrdə qiymətlərini təyin etmək imkanına malik olmasına əsaslanır.

Təcrübədə minimum nöqtəni tapmaq üçün ən çox yayılmış birbaşa minimumlaşdırma üsullarından $f(x)$ funksiyası [a;b] intervalında unimodal olduqda istifadə edilir. Birölçülü axtarış üsullarına parçanın aradan qaldırılması üsulları, kvadratik approksimasiyadan istifadə üsulları və törəmələrdən istifadə üsulları daxildir.

11.2.Parçanın aradan qaldırılması üsulları

Tutaq ki, $a < x_1 < x_2 < b$. x_1və x_2 (sınaq nöqtələri) nöqtələrində $f(x)$ qiymətlərini müqayisə edərək,

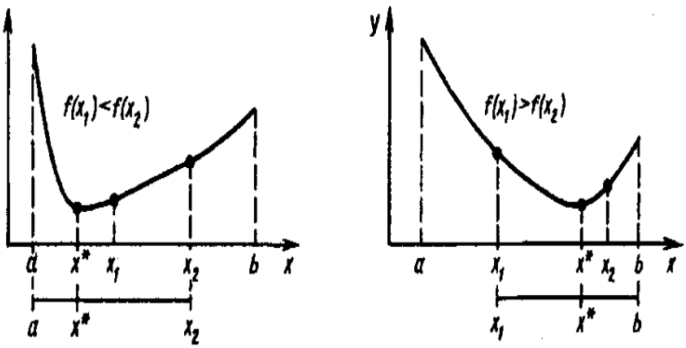
$$f(x_1) \le f(x_2)$$

olarsa $[\,a; x_2]$ parçasına və ya

$$f(x_1) > f(x_2)$$

olarsa $[\,x_;; b]$ parçasına keçməklə x* nöqtəsi üçün axtarış intervalını azaltmaq olar.

Təsvir edilən prosedur lazım olduğu qədər təkrarlana bilər, bu isə minimum nöqtəni ehtiva edən intervalı azaldır. Tapılan intervalın sonuncusunun uzunluğu kifayət qədər kiçik olduqda, $\boldsymbol{x}^* \approx \overline{\boldsymbol{x}}$ olur. (burada $\overline{\boldsymbol{x}}$ - bu intervalın nöqtələrindən biri, məsələn, onun ortasıdır). Bu prinsipə əsaslanan minimallaşdırma üsulları parçanın aradan qaldırılması üsulları adlanır.



Şəkil 11.1. Parçanın aradan qaldırılması üsullarından istifadə edərək minimum nöqtənin axtarış intervalının azaldılması

Hər iterasiyada intervalla nisbi azalması onun hansı hissələrinin daha sonra nəzərdən keçirilməsindən asılı olmaması üçün sınaq nöqtələri, ilkin parçanın ortasına nisbətən simmetrik olaraq yerləşdirilməlidir. Sınaq nöqtələrinin seçilməsi üsulundan asılı olaraq, parçanı aradan qaldırmaq üçün müxtəlif üsullar əldə edilir.

11.3. Parçanın yarıya bölünməsi üsulu (dixotomiya)

Bu üsulda $\boldsymbol{x_1}$ və $\boldsymbol{x_2}$ nöqtələri növbəti [a; b] parçanın ortasına yaxın yerləşdirilir.

$$x_1 = \frac{b+a-\delta}{2} \quad , x_2 = \frac{b+a+\delta}{2} \quad (11.1)$$

burada $\delta > 0$ - kiçik ədəddir. Bu halda yeni və ilkin intevalın uzunluqlarının nisbəti

$$\tau = \frac{b - x_1}{b - a} = \frac{x_2 - a}{b - a}$$

1/2-ə yaxın olur və bununla metodun adı izah edilir.

Qeyd edək ki, istənilən $\boldsymbol{x_1}$ və $\boldsymbol{x_2}$ nöqtələri üçün τ dəyəri $\tau > 1/2$ olur. Buna görə də, göstərilən sınaq nöqtələrinin seçimi x* axtarışının hər iterasiyası zamanı intervalda maksimal mümkün nisbi azalmanı təmin etmək istəyi ilə izah olunur. Dixotomiya metodundan istifadə edilən hesablamaların sonunda $\frac{b-a}{2} \leq \varepsilon$ bərabərsizliyinə nail olunduğuna əmin olaraq x*-in təxmini qiyməti kimi sonuncu tapılan [a; b] parçasının ortası götürülür.

Parçanın yarıya bölünməsi üsulunun alqoritmini təsvir edək:

1)(11.1) düsturlarından istifadə edərək x_1 və x_2 nöqtələrini müəyyən etmək. $f(x_1)$ və $f(x_2)$ hesablamaq;

2)$f(x_1)$ və $f(x_2)$ müqayisə etmək. Əgər $f(x_1) \leq f(x_2)$ olarsa, onda $b = x_2$ qoyaraq $[a;\ x_2]$ parçasına, əks halda $a = x_1$ qoyaraq $[\,x_1; b]$ parçasına, keçmək;

3) $\varepsilon_n = \frac{b-a}{2}$ dəqiqliyini tapmaq, 1-ci addıma qayıdaraq növbəti iterasiyaya keçmək. Əgər $\varepsilon_n \le \varepsilon$, olarsa, 4-cü addıma keçməklə x^*-in axtarışını tamamlamaq;

4) $x^* \approx \bar{x} = \frac{a+b}{2}, f^* \approx \bar{x}$ əvəz etmək.

Qeydlər:

1) Aşağıdakı mülahizələri nəzərə alaraq (11.1)-dən δ rəqəmi $(0; 2\varepsilon)$ intervalında seçilir;

a) δ nə qədər kiçik olsa, hər iterasiyada parçanın uzunluğunun nisbi azalması bir o qədər çox olar, yəni. δ azaldıqca dixotomiya metodunun daha yüksək yaxınlaşma dərəcəsi əldə edilir;

b) δ çox kiçik olduqda, δ dəyəri ilə fərqlənən $\boldsymbol{x_1}$ və $\boldsymbol{x_2}$ nöqtələrində $f(x)$ qiymətlərinin müqayisəsi çətinləşir. Buna görə də, δ seçimi $f(x) -$ in təyin edilməsinin düzgünlüyünə və x arqumentini təyin edərkən etibarlı onluq işarələrin sayına uyğun olmalıdır.

2)ε dəqiqliyi ilə x* nöqtəsini təyin etmək üçün lazım olan dixotomiya metodunun n iterasiya sayı

$$n \ge \log_2 \frac{b-a-\delta}{2\varepsilon-\delta} \quad (11.2)$$

bərabərsizliyi ilə müəyyən edilir.

İlkin [a;b] parçasının uzunluğunu Δ_0 ilə işarə edək. Birinci iterasiyadan sonra alınan parçanın uzunluğu

$$\Delta_1 = \frac{\Delta_0}{2} + \frac{\delta}{2}$$

ikinci iterasiyadan sonra

$$\Delta_2 = \frac{\Delta_1}{2} + \frac{\delta}{2} = \frac{b-a}{4} + \delta\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{2}\right)$$

üçüncü iterasiyadan sonra

$$\Delta_3 = \frac{\Delta_2}{2} + \frac{\delta}{2} = \frac{b-a}{8} + \delta\left(\frac{1}{8} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\right)$$

və s. olacaqdır.

Beləliklə, n iterasiya nəticəsində x* nöqtəsi üçün axtarış parçasının uzunluğu

$$\Delta_n = \frac{b-a}{2^n} + \left(\frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^{n-1}} + \cdots \ldots + \frac{1}{2}\right) = \frac{b-a}{2^n} + (1 - \frac{1}{2^n})\delta \quad (11.3)$$

olacaqdır.

Bu halda

$$\varepsilon_n = \frac{\Delta_n}{2}$$

minimum nöqtəsinin müəyyən edilməsinin dəqiqliyinə nail olunacaqdır;

$$\varepsilon_n = \frac{b-a}{2^{n+1}} + \left(1 - \frac{1}{2^n}\right)\frac{\delta}{2} \leq \varepsilon \quad (11.4)$$

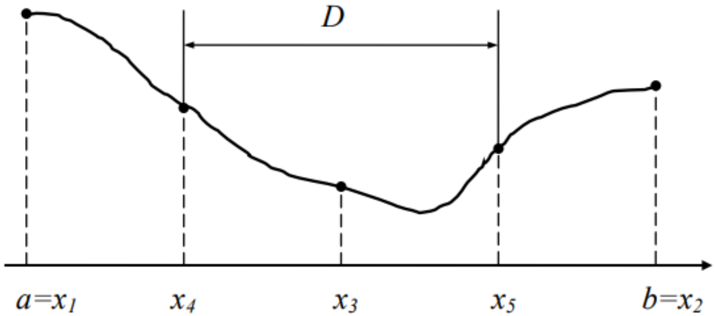
şərtindən n tapsaq, (11.2) bərabərsizliyini alarıq.

3) δ kəmiyyəti kifayət qədər kiçik seçilə bilər, ona görə də (11.2-də) onu nəzərə almasaq,

$$\varepsilon_n = \frac{b-a}{2^{n+1}}$$

alırıq. Dixotomiya metodunun hər iterasiyası zamanı $f(x)$ -in iki qiyməti hesablanır. Buna görə də, $f(x)$-in N hesablamalardan sonra n = N/2 iterasiyalar aparılır və x*-ın təyin edilməsinin dəqiqliyinə nail olunur:

$$\varepsilon(N) = \varepsilon_{N/2} = \frac{b-a}{\frac{N}{2}+1} \quad (11.5)$$



Şəkil 11.2. Parçanın yarıya bölünməsi üsulunun qrafik təsviri

Məsələ 11.1 $f(x) = x^4 + e^{-x} \rightarrow \min, x \in [0;1],\ \varepsilon = 0{,}1$ məsələsini parçanın yariya bölünməsi üsulu ilə həll edin:

δ=0,02 seçirik .

I iterasiya:

1)$x_1 = 0{,}49$,

$x_2 = 0{,}51$,

$f(x_1) = 0{,}670$,

$f(x_2) = 0{,}688$

tapaq;

2) $f(x_1) > f(x_2)$ oldugu üçün a = x_1 = 0,49;

3) $\frac{b-a}{2}$ =0,255> 0,1

oldugu üçün növbəti iterasiyaya keçək:

Digər iterasiyaların nömrələrinə uygun hesablama nəticələri Cədvəl 11.1-də təqdim edilmişdir:

№	A	B	$\frac{b-a}{2}$	x_1	x_2	$f(x_1)$	$f(x_2)$	$f(x_1)$ və $f(x_2)$ fərqi
2	0,49	1	0,26	0.735	0,755	0,771	0,792	$f(x_1) < f(x_2)$
3	0,49	0,755	0,13	0,613	0,633	0,683	0,691	$f(x_1) < f(x_2)$
4	0,49	0,633	0,07	0,07< 0,1 –dəqiqlik əldə edilmişdir.				

Cədvəl 11.1 Parçanın yarıya bölünməsi üsulu ilə hesablamaların nəticələri

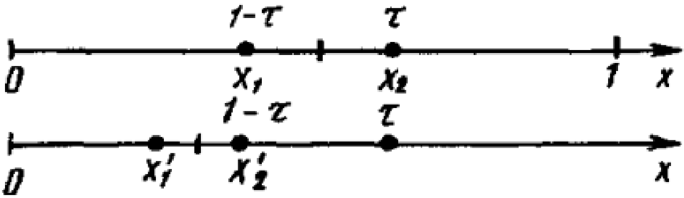
Beləliklə, $x^* \approx \frac{0{,}49+0{,}633}{2} \approx 0{,}56,\ f^* \approx f(0{,}56) = 0{,}67.$

11.4.Qızıl bölgü üsulu

[a;b] parçasında x_1 və x_2 nöqtələrinin elə simmetrik düzülüşünə nəzər salaq ki, burada onlardan biri ilkin parçanın bir hissəsini xaric etdikdən sonra alınan yeni parçada sınaq nöqtəsinə çevrilir.

Belə nöqtələrin istifadəsi parçanın aradan qaldırılması üsulunun hər iterasiyasında (birincisi istisna olmaqla) $f(x)$-in yalnız bir qiymətini müəyyən etməklə məhdudlaşır(çünki başqa bir qiymət əvvəlki iterasiyaların birində artıq tapılmışdı).

Göstərilən xassəyə malik olan x_1 və x_2 nöqtələrini tapaq. Əvvəlcə [0;1] parçasına nəzər salaq və dəqiqlik üçün fərz edək ki, o kiçildildiyində bu parçanın sağ tərəfi xaric edilir. Qəbul edək ki, $x_2 = \tau$, onda simmetrik yerləşən x_1 nöqtəsi $x_1 = 1 - \tau$ (Şəkil 11.3).



Şəkil 11.3. Qızıl bölgü üsulunda sınaq nöqtələrinin təyini

[0;1] parçasının x_1 sınaq nöqtəsi yeni $[0;\tau]$ parçasının x_2 sınaq nöqtəsinə keçəcək. $x_2 = \tau$ və $x_{2'} = 1 - \tau$ nöqtələrinin [0;1] və $[0;\tau]$ parçalarını eyni nisbətdə bölməsi üçün $\frac{1}{\tau} = \frac{\tau}{1-\tau}$və ya $\tau^2 = 1 - \tau$ bərabərliyi təmin edilməlidir. Buradan τ aşagıdakı müsbət qiymət taparıq:

$\tau = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$= 0,618.

Beləliklə,

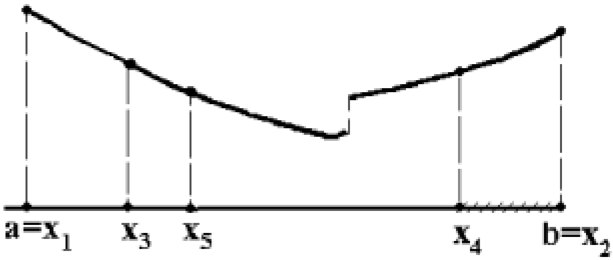
$$x_1 = 1 - \tau = \frac{3 - \sqrt{5}}{2}$$

$$x_2 = \tau = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}.$$

İxtiyari [a;b] parçası üçün sınaq nöqtələri üçün ifadələr aşağıdakı formanı alacaqdır:

$$x_1 = a + \frac{3 - \sqrt{5}}{2}(b - a);$$

$$x_2 = a + \frac{\sqrt{5}-1}{2}(b-a) \quad (11.6)$$



Şəkil 11.3. Qızıl bölgü üsulunun qrafik təsviri

Qeydlər:

(11.5)-dən x_1 və $x_2$nöqtələri aşağıdakı xüsusiyyətlərə malikdir:

1)onların hər biri [a;b] parçasını iki qeyri-bərabər hissəyə bölür ki, bütün parçanın uzunluğunun onun böyük hissəsinin uzunluğuna nisbəti, parçanın daha böyük və kiçik hissələrinin uzunluqlarının nisbətinə bərabər olur.

Bu xüsusiyyətə malik olan nöqtələr [a; b] parçasının qızıl bölgü nöqtələri adlanır. Bu, isə sözü gedən üsulun adını izah edir;

2)sınaq nöqtələri (11.6) ilə aradan qaldırılan parçaların hər iterasiyasında onlardan biri $\bar{x}$ növbəti parçaya keçir və bu nöqtədə f(x) qiyməti hesablanmamalıdır.

Əgər [a; x_2] yeni parçaya çevrilirsə, onda ilkin parçanın $\bar{x} = x_1$ sınaq nöqtəsi onun ikinci sınaq nöqtəsinə çevrilir

[x_1;b] parçasına keçid zamanı ilkin parçanın $\bar{x} = x_2$ sınaq nöqtəsi [x_1;b] parçasının birinci sınaq nöqtəsi olur;

3) $x_1 = a + b - x_2$ və $x_2 = a + b - x_1$ olduğunu yoxlamaq asandır. Buna görə də qızıl bölgü üsulunun hər iterasiyasında yeni parçanın çatışmayan sınaq nöqtəsi,ni (11.6) düsturlarından istifadə etmədən toplama və çıxmadan istifadə etməklə ona keçən sınaq nöqtəsindən tapımaq olar;

4)qızıl bölgü üsulundan istifadə edərək hesablamaların sonunda, x*-in təxmini dəyəri kimi, əldə edilən parçaların sonuncunun ortasını $\bar{x} = \frac{a+b}{2}$ götürmək olar.

Hər iterasiyada minimum nöqtələr üçün axtarış parçası eyni nisbətdə azalır $\tau = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$., buna görə də n itersiya nəticəsində onun uzunluğu $\Delta_n = \tau^n(b-a)$ olur.

Beləliklə, n iterasiyadan sonra x* nöqtəsinin təyin edilməsinin ε_ndəqiqliyi

$$\varepsilon_n = \frac{\Delta_n}{2} = \frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^n (b-a) \qquad (11.7)$$

bərabərliyindən tapılır və x* nöqtəsinin axtarışını ε dəqiqliklə başa çatdırmaq şərti isə $\varepsilon_n = \varepsilon$ bərabərsizliyidir.

Qızıl bölgü üsulunun alqoritmi:

1)(11.6) düsturlarından istifadə edərək x_1 və x_2 nöqtələrini tapmaq . $f(x_1)$və $f(x_2)$ hesablamaq. $\tau = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$, $\varepsilon_n = \frac{b-a}{2}$ əvəz etmək;

2) Axtarışın sonunun yoxlamaq: əgər $\varepsilon_n > \varepsilon$ olarsa, 3-cü addıma, əks halda – 4-cü addıma keçmək;

3)Yeni parçaya və yeni sınaq nöqtələrinə keçmək.

Əgər,

$f(x_1) \leq f(x_2)$olarsa, onda $b = x_2, x_2 = x_1$,

$f(x_1) \geq f(x_2)$ olarsa, onda, $x_1 = b - \tau(b-a)$ və $f(x_1)$ hesablamaq, əks halda $a = x_1, x_1 = x_2$ qoymaq.

$f(x_1) = f(x_2)$ olarsa, onda, $x_2 = b + \tau(b-a)$ və $f(x_2)$ hesablamaq, $\varepsilon_n = \tau\varepsilon_n$ qəbul etmək və 2-ci addıma keçmək;

4)Axtarışı bitirmək: $x^* \approx \bar{x} = \frac{a+b}{2}$, $f^* \approx f(\bar{x})$ əvəz etmək.

Məsələ 11.1 $f(x) = x^4 + e^{-x} \to \min, x \in [0; 1]$, $\varepsilon = 0,1$ məsələsini qızıl bölgü üsulu ilə həll edin:

I iterasiya:

1)$x_1 = 0,382$,

$x_2 = 0,618$,

$f(x_1) = 0{,}704,$
$f(x_2) = 0{,}685,$
$\varepsilon_n = 0{,}5$ tapaq;
2) $\varepsilon_n = 0{,}5 > \varepsilon = 0{,}1$ oldugu üçün 3-cü addıma keçmək;
3) $f(x_1) > f(x_2),$
buna görə də

$$a = 0.382,$$
$$x_1 = 0.618,$$
$$f(x_1) = 0{,}685,$$
$$x_2 = 0{,}764,$$
$$\varepsilon_n = 0{,}309$$

qəbul edək və $f(x_2) = 0{,}807$ hesablayaq. İkinci addımdan başlayaraq növbəti iterasiyaya keçmək.

Digər iterasiyaların nömrəsi göstərilməklə hesablama nəticələri Cədvəl 11.2.-də təqdim edilmişdir:

№	A	B	ε_n	x_1	x_2	$f(x_1)$	$f(x_2)$	$f(x_1)$ və $f(x_2)$ fərqi
2	0,382	1,000	0,309	0.618	0,764	0,685	0,807	$f(x_1) < f(x_2)$
3	0,382	0,764	0,191	0,528	0,618	0,668	0,685	$f(x_1) < f(x_2)$
4	0,382	0,618	0,118	0,472	0,528	0,673	0,668	$f(x_1) > f(x_2)$
5	0,472	0,618	0,073	0,073< 0,1 –dəqiqlik əldə edilmişdir.				

Cədvəl 11.2. Qızıl bölgü üsulu ilə hesablamaların nəticələri

Beləliklə, $x^* \approx \frac{0{,}472+0{,}618}{2} \approx 0{,}55,\ f^* \approx f(0{,}55) = 0{,}67.$

Qeyd. Verilmiş ε dəqiqliyə nail olmaq üçün tələb olunan iterasiyaların sayını (11.7) nəzərə alınmaqla $\varepsilon_n \leq \varepsilon$ şərtindən tapmaq olar:

$$n \geq \ln\left(\frac{2\varepsilon}{b-a}\right)/\ln \approx -2{,}1\ \left(\frac{2\varepsilon}{b-a}\right).$$

Beləki, $f(x)$ -in N hesablamaları qızıl bölgü üsulunun N – 1 iterasiyasını yerinə yetirməyə imkan verir və bu hesablamalar nəticəsində x*-ın təyin edilməsində əldə edilən dəqiqlik aşağıdakı kimidir:

$$\varepsilon(N) = \varepsilon_{N-1} = \frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^{N-1} (b-a) \quad (11.8)$$

ÖZÜNÜ YOXLAMAQ ÜÇÜN SUALLAR VƏ TAPŞIRIQLAR

1.Tək dəyişənli funksiyanı minimuma endirmək üçün istifadə edilən birbaşa üsullar hansılardır?

2.Parçanın aradan qaldırılması üsullarının xüsusiyyətlərini izah edin

3. Parçanın yarıya bölünməsi (dixotomiya) üsulunun mahiyyətini izah edin.

4. Parçanın yarıya bölünməsi (dixotomiya) üsulunun alqoritmini izah edin

5. Qızıl bölgü üsulunun mahiyyətini izah edin.

6. Qızıl bölgü üsulunun alqoritmini izah edin.

7.Parçanın yarıya bölünməsi üsulundan istifadə edərək, $[1{,}5; 2]$ *parçasında* $f(x) = x^4 + 8x^3 - 6x^2 - 72x$ *funksiyasının minimum qiymətini və minimum* x^* *nöqtəsini tapın (*$\varepsilon = 0{,}05$).

8.Parçanın yarıya bölünməsi üsulundan istifadə edərək, $[0; 8]$ *parçasında* $f(x) = 12x^2 - 12x$ *funksiyasının minimum qiymətini və minimum* x^* *nöqtəsini tapın*

($\varepsilon = 1$).

9.Parçanın yarıya bölünməsi üsulundan istifadə edərək, $[0; 2]$ *parçasında* $f(x) = \frac{1}{4}x^4 + x^2 - 8x + 12$ *funksiyasının minimum qiymətini və minimum* x^* *nöqtəsini tapın (*$\varepsilon = 0{,}05$).

10.Parçanın yarıya bölünməsi üsulundan istifadə edərək, $[0;1]$ *parçasında* $f(x)=\frac{1}{2}x^2-sinx$ *funksiyasının minimum qiymətini və minimum* x^* *nöqtəsini tapın (*$\varepsilon=0{,}03$).

11.Parçanın yarıya bölünməsi üsulundan istifadə edərək, $[1;2]$ *parçasında* $f(x)=x^2-3x+xlnx$ *funksiyasının minimum qiymətini və minimum* x^* *nöqtəsini tapın (*$\varepsilon=0{,}05$).

12.Qızıl bölgü üsulundan istifadə edərək, $[0;1]$ *parçasında* $f(x)=x^3-3sinx$ *funksiyasının minimum qiymətini və minimum* x^* *nöqtəsini tapın (*$\varepsilon=0{,}001$).

13.Qızıl bölgü üsulundan istifadə edərək, $[1{,}5;2]$ *parçasında* $f(x)=x^4+8x^3-6x^2-72x$ *funksiyasının minimum qiymətini və minimum* x^* *nöqtəsini tapın (*$\varepsilon=0{,}05$).

14. Qızıl bölgü üsulundan istifadə edərək, $[-1;0]$ *parçasında* $f(x)=x^4+8x^2+x+1$ *funksiyasının minimum qiymətini və minimum* x^* *nöqtəsini tapın (*$\varepsilon=0{,}003$).

15. Qızıl bölgü üsulundan istifadə edərək, $[0;2]$ *parçasında* $f(x)=\frac{1}{4}x^4+x^2-8x+12$ *funksiyasının minimum qiymətini və minimum* x^* *nöqtəsini tapın (*$\varepsilon=0{,}05$).

XII FƏSİL.TƏK DƏYİŞƏNLİ FUNKSİYALARIN TÖRƏMƏDƏN İSTİFADƏ ETMƏKLƏ, ŞƏRTSİZ OPTİMALLAŞDIRMA ÜSULLARI

12.1. Sınıq xətlər üsulu

Törəmələrdən istifadə etməklə tək dəyişənli funksiyanın şərtsiz minimuma endirilməsi üsullarına sınıq xəttlər, toxunanlar, Nyuton və başqaları daxildir.

Sınıq xətlər üsulu Lipşis şərtini təmin edən ixtiyari (mütləq unimodal olması mütləq deyil) funksiyaları minimuma endirmək üçün nəzərdə tutulmuş üsuldur. Tutaq ki, $f(x)$ funksiyası [a;b] intervalında Lipşis şərtini ödəyir(əgər L>0 ədədi varsa (Lipşits sabiti), yəni, bütün $x', x'' \in [a, b]$üçün

$$|f(x') - f(x'')| \le L|x' - x''| \quad (12.1)$$

Lipşis şərtini yoxlamaq üçün aşağıdakı faktdan istifadə edilir: əgər $f(x)$ funksiyasının $[a, b]$ intervalında məhdud törəməsi varsa, o, (12.1) şərtini ödəyir. Burada

$$L \ge \max_{[a,b]} |f'(x)|$$

$f(x)$ funksiyası [a;b] -də L sabiti ilə Lipşis şərtini ödəyir. $f(x)$ -i minimumlaşdırmaq üçün sınıq xətlər üsulu təsvir edək:

$$x_1^* = \frac{1}{2L}[f(a) - f(b) + L(a + b)],$$

$$p_1^* = \frac{1}{2L}[f(a) - f(b) + L(a - b)]$$

yazaq və aşağıdakı hesablama sxemini həyata keçirək:

Addım 1. Bir cüt $(x_1^*\ p_1^*)$ ədədləri əvəzinə iki yeni (x_1', p_1) və (x_1'', p_1) cütünü aşağıdakı kimi əmələ gətirək:

$x_1' = x_1^* - \Delta_1,$

$$x_1' = x_1^* + \Delta_1,$$

$$p_1 = \frac{1}{2}[f(x_1^*) + p_1^*],$$

burada

$$\Delta_1 = \frac{1}{2}[f(x_1^*) - p_1^*].$$

Addım 2. Alınan $(x_1' \ , p_1)$ və $(x_1'', \ p_1)$ cütündən ikinci komponenti minimal olanı seçirik. Onu $(x_2^* \ p_2^*)$ işarə edək və onu nəzərdən keçirilən çoxluqdan çıxardaq (təbii olaraq bu addımda $(x_2^* \ p_2^*)$ kimi $(x_2' \ , p_2)$ və $(x_2'', \ p_2)$ cütlərindən hər hansı birini götürmək olar).

Komponentləri

$$x_2' = x_2^* - \Delta_2,$$

$$x_2' = x_2^* + \Delta_2,$$

$$p_2 = \frac{1}{2}[f(x_2^*) + p_2^*],$$

burada

$$\Delta_2 = \frac{1}{2}[f(x_2^*) - p_2^*].$$

Düsturları ilə hesablanan $(x_2^* \ p_2^*)$ cütləri əvəzinə iki yeni $(x_2' \ , p_2)$və (x_2'', p_2) çütlərini əlavə edək. Nəticədə üç cüt ədəddən $(x \ , p)$ ibarət çoxluq alırıq.

Addım n. Əvvəlki addımlarda alınan n sayda $(x \ , p)$ cütdən ikinci komponenti minimal olanı seçmək.

Onu $(x_n^* \ p_n^*)$ işarə edək və onu nəzərdən keçirilən çoxluqdan çıxardaq.

Komponentləri

$$x_n' = x_n^* - \Delta_n,$$

$$x_n' = x_n^* + \Delta_n,$$

$$p_n = \frac{1}{2}[f(x_n^*) + p_n^*],$$

burada

$$\Delta_n = \frac{1}{2}[f(x_n^*) - p_n^*].$$

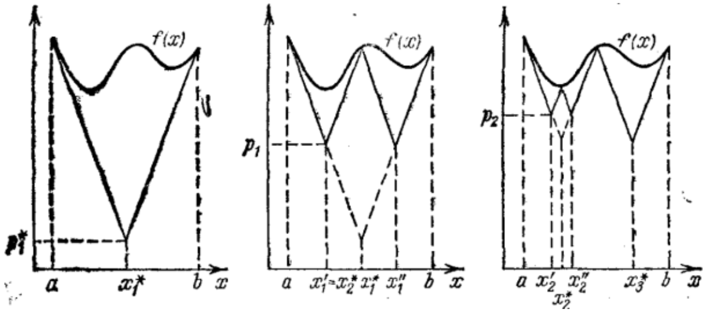
Düsturları ilə hesablanan iki yeni $(x_n' \ , p_n)$və (x_n'', p_n) çütlərini əlavə edək.

$$x^* \approx {x_0}^{(*)},$$

$f^* \approx f x_0{}^{(*)}$ oldugunu qəbul edərək, minimumlaşdırma məsələsinin təxmini həllini əldə edirik.
f^*-nin dəqiqliyi

$$0 \leq j(x_n^*) - f^* \leq 2L\Delta_n$$

bərabərsizlikləri ilə xarakterizə olunur.
Həndəsi olaraq sınıq xəttlər üsulu $f(x)$ funksiyasının qrafikinə aşağıdan yaxınlaşan və bütün həlqələrinin bucaq əmsalları ±L-ə bərabər olan sınıq xətlər ardıcıllığının qurulmasından ibarətdir.



Şəkil.12.1. Sınıq xəttlər üsulu

Məsələ12.1. Sınıq xəttər üsulu ilə 0,01 dəqiqliyi ilə $[10,15]$ parçasında $f(x) = \frac{\sin(x)}{x}$ funksiyasının minimumunu və x^*minimum nöqtəsini müəyyən edin:

Həlli: $f(x)$ funksiyası müəyyən edilmiş parçada diferensiallaşdırılır. Çünki $x \in [10,15]$-də

$$|f'(x)| = \left|\frac{xcos(x) - \sin(x)}{x^2}\right| < \frac{x|cos(x) + | \quad |\sin(x)|}{x^2} < \frac{x+1}{x^2} \leq 0,11$$

onda $f(x)$ funksiyası L = 0,11 sabiti ilə Lipşits şərtini ödəyir.
$x_1^* = 12{,}056,\ p_1^* = -0{,}281$ oldugunu tapdıqdan sonra (12.2)-dəki əlaqələrdən istifadə edərək hesablamalara davam edirik. Hesablama nəticələri aşağıdakı cədvəldəki kimidir:

N	Çıxarılmış cüt (x,p)		$2L\Delta_n$	Daxil olan cütlər (x,p)		
	x_n^*	p_n^*		x'_n	p''_n	P_n
1	12,056	-0,281	0,240	10,963	13,149	-0,161
2	10,963	-0,161	0,070	10,646	11,280	-0,126
3	13,149	-0,161	0,203	12,227	14,071	0,096
4	10,646	-0,126	0,038	10,474	10,818	-0,107
5	11,280	-0,126	0,041	11,094	11,466	-0,106
6	10,474	-0,107	0,024	10,364	10,584	-0,095
7	10,818	-0,107	0,160	10,745	10.891	-0,099
8	11,094	-0,106	0,016	11,020	11,168	-0,098
9	11,466	-0,106	0,028	11,338	11,594	-0,092
10	10,891	-0,099	$0,008 < \varepsilon$	-	-	-

Yuxarıdakı cədvəldən tapırıq:

$$x^* \approx 10{,}89,$$

$f^* \approx f(10{,}89) = 0{,}091$

12.2 Toxunanlar üsulu

Əgər f(x) funksiyasının törəmələrinin hesablanması və ya ölçülməsi böyük çətinliklər yaratmırsa, onda minimumlaşdırma məsələsini həll edərkən f(x)-in törəmələrinin istifadəsinə əsaslanan dolayı üsullardan istifadə etmək olar. Bir çox hallarda bu üsullar birbaşa minimumlaşdırma üsullarından daha sürətli yaxınlaşmanı təmin edir.

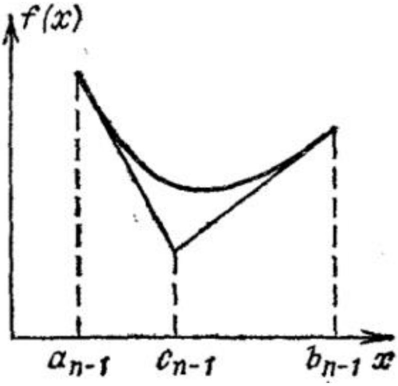
Toxunanlar üsulunu nəzərdən keçirək. Bu üsul [a;b] intervalında qabarıq və diferensiallaşan f(x) funksiyalarına şamil edilir. Bu cür funksiyalar Lipsiş şərtini ödəyir.

Əgər

$f[\propto x' + (1-\propto)x''] \leq \propto f(x') + (1-\propto)f(x'')$ (12.2.)

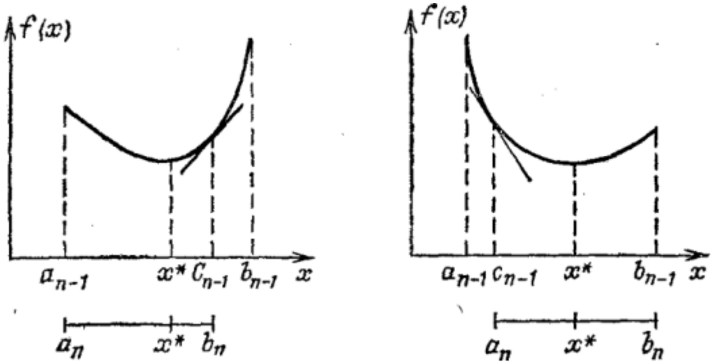
$$x', x'' \in [a; b] \text{ və } \text{ və } \propto \in [a; b]$$
$f(x)$ funksiyası $[a; b]$ parçasında qabarıq adlanır.
(12.2) şərtinin yoxlanması demək olar ki, həmişə çətinliklərə səbəb olur, buna görə də praktikada aşağıdakı qabarıqlıq meyarından istifadə olunur:
$[a; b]$ parçasında iki dəfə diferensiallaşması və f(x) funksiyası $[a; b]$ parçasında qabarıq olması üçün bütün $x \in [a; b]$ –də $f''(x) \geq 0$ olması zəruri və kafidir. Yəni, əgər ikinci törəmə bu parçanın bütün x üçün müsbət olarsa, funksiya $[a; b]$ −də qabarıqdır
$$f''(x) \geq 0, \ x \in [a; b].$$
Minimum nöqtədən keçərkən aşağıdakı şərtlər yerinə yetirilir:
$$f'(x_k + 0) \geq 0$$
$$f'(x_k - 0) \leq 0$$
$$x_k = x^*$$
Toxunanlar üsulunu təsvir edək:
Tutaq ki, $f(x)$ funksiyası $[a; b]$ parçasında diferensiallanan qabarıq funksiyadır və $f'(a) \cdot f'(b) < 0$.
Təkrarlanma münasibətlərinə uyğun olaraq $\{a_n\}, \{b_n\}$ və $\{c_n\}$, n=1,2....ardıcıllıgını quraq: $a_0 = a, \, b_0 = b,$
$$c_{n-1} = \frac{b_{n-1}f'(b_{n-1}) - a_{n-1}f'(a_{n-1}) + f'(a_{n-1}) - f'(b_{n-1})}{f'(b_{n-1}) - f'(a_{n-1})}, \ (12.3)$$
$$\left\{\begin{matrix} f'(c_{n-1}) \geq 0 \ olduqda \ a_n = a_{n-1}, \ b_n = c_{n-1} \\ f'(c_{n-1}) < 0 \ olduqda \ a_n = c_{n-1}, \quad b_n = \ b_{n-1} \end{matrix}\right\} (12.4)$$
n addımdan sonra
$$x^* \approx c_n \, ; f^* \approx f(c_n)$$
$f'(c_n)$törəməsi sıfıra kifayət qədər yaxın olduqda, f(x) tələb olunan minimumlaşdırma dəqiqliyi əldə edilmiş hesab olunur, yəni, $|f'(c_n)| \leq \varepsilon$, burada $\varepsilon < 0$

Toxunanlar üsulunun sadə həndəsi mənası var: (12.3) düsturundakı c_{n-1} qiyməti- bu $[a_{n-1}; b_{n-1}]$ parçasının sərhəd nöqtələrində çəkilmiş f(x) qrafikinə toxunanların kəsişmə nöqtəsinin absissidir(şəkil 12.1).



Şəkil 12.1. Toxunanlar üsulunnun qrafik təsviri

Şəkil 12.2 isə uygun olaraq 12.4. düsturundakı $f(c_{n-1}) < 0$ və $f(c_{n-1}) > 0$ vəziyyətlərini əks etdirir.



Şəkil 12.2. Toxunanlar üsulunnun qrafik təsviri

$[a_n; b_n]$ parçası elə seçilir ki, $x^* \in [a; b]$.

Əgər $f'(a) \cdot f'(b) < 0$ şərti ödənmirsə, onda

a)$f'(a) > 0$, $f'(b) > 0$ olduqda $x^* = a$

b) $f'(a) < 0$, $f'(b) < 0$ olduqda $x^* = b$

c)Əgər $f'(a) = 0$ və $f'(b) = 0$, $x^* = b$

Məsələ 12.2. $f(x) = x^2 + e^x$ funksiyasının $[-1; 1]$ parçasında qabarıq olmasını müəyyən edin və onu $|f'(c_n)| \leq 0{,}05$ dəqiqliyi ilə toxunanlar üsulu ilə minimallaşdırın:

Həlli: $f''(x) = 2 + e^x > 0$ oldugu üçün $f(x)$ funksiyası qabarıqdır, eyni zamanda

$$f'(a) \cdot f'(b) < 0.$$

(12.3) və (12.4) düsturları ilə hesablama aparaq və onun nəticələrini aşagıdakı cədvəldə yerləşdirək:

n	a_n	b_n	c_n	$f'(c_n)$	Qeyd
0	-1	1	0,11586	1,35	$f'(c_0) > 0$ $b_1 = c_0$
1	-0,41637	0,11586	-0,14313	-0,173	$f'(c_1) > 0$ $b_2 = c_1$
2	-0,41637	0,11586	-0,14313	0,58	$f'(c_2) > 0$ $b_3 = c_2$
3	-0,41637	-0,14313	-0,27806	0,02	$f'(c_3)$ $\leq 0{,}05$, dəqiqlik əldə edilmişdir

Yuxarıdakı cədvəldən əldə edirik ki,

$$x^* \approx c_3 = 0{,}278$$
$$f^* \approx f(c_3) = 0{,}835$$

12.3 Tək dəyişənli funksiyaların minimallaşdırılmasında Nyuton üsulu

Müəyyən şərtlər altında $f(x)$ funksiyasının təkcə birinci deyil, həm də ikinci törəmələrindən istifadə edən Nyuton üsulu yuxarıda müzakirə edilən minimuma endirmə üsullarına nisbətən x^* minimum nöqtəsinə daha yüksək yaxınlaşma sürətini təmin edir.

Tutaq ki, $f(x)$ R üzərində iki dəfə diferensiallanan qabarıq funksiyadır. x_0 ilkin yaxınlaşmasını seçərək,

$$x_n = x_{n-1} - \frac{f'(x_{n-1})}{f''(x_{n-1})}, \ n = 1,2, \ldots. \ (12.5)$$

ardıcıllığını quraq.

Tələb olunan hesablama dəqiqliyinə nail olmaq üçün $|f'(x_{n-1})| \leq \varepsilon$

(ε-kifayət qədər kiçik rəqəm) bərabərsizliyini şərt hesab edərək,

$$x^* \approx x_n,$$
$$f^* \approx f(x_n)$$

əvəz edək. $x_n$seçimi uğursuz olarsa, (12.5) ardıcıllığı dagıla bilər. Əgər x_n nöqtəsi x^* kifayət qədər yaxındırsa, bu ardıcıllıq daha tez x^*-ə yaxınlaşır. Yaxınlaşma sürətinin qiymətləndirilməsini aşağıdakı kimi tərtib etmək olar. $f(x)$ R üzərində iki dəfə diferensiallanan funksiya olsun, burada $f(x'') \geq \mu > 0$ bütün $x \in R$ və $f(x'')$ L sabit ilə R üzərində Lipşis şərtini ödəyir.

Onda, əgər x_0 ilkin yaxınlaşma

$$q = \frac{L}{2\mu^2}|f'(x_0|) < 1$$

şərtini ödəyirsə, onda (12.5) ardıcıllığı R üzərində $f(x)$ funksiyasının yeganə minimum nöqtəsinə x^* yaxınlaşır və

$$|x^* - x_n| \leq \frac{2\mu}{L} q^{2^n}, n = 0,1, \ldots..$$

Məsələ 12.3. Nyuton üsulu ilə x^*minimum nöqtəsini və $|f'(x_n)| \leq 10^{-7}$) dəqiqliyi ilə $f(x) = (x-2)^4 - \ln(x)$ funksiyasının minimum qiymətini müəyyən edin:

Həlli. $x_0 = 3$ seçək və (12.5) düsturu ilə hesablamalar aparaq. Hesablamanın nəticələrini aşagıdakı cədvəldə qeyd edək:

N	x_n	$f(x_n)$	$f'(x_n)$
0	3	$-9{,}86 * 10^{-2}$	3,67
1	2,6972477	-0,7558859	0,985
2	2,5322701	-0,8488508	0,208

3	2,4736906	-0,8553636	$2{,}1 * 10^{-2}$
4	2,4663735	-0,8554408	$3 * 10^{-4}$
5	2,4662656	-0,8554408	$5 * 10^{-8} < 10^{-7}$

Son olaraq $x^* \approx 2{,}4662656$ $f^* \approx= -0{,}8554408$

ÖZÜNÜ YOXLAMAQ ÜÇÜN SUALLAR VƏ TAPŞIRIQLAR

1.Aşağıdakı funksiyalardan hansının qabarıq olduğunu müəyyənləşdirin:

a)$f(x) = e^x$

b)$f(x) = \frac{1}{2}x^2$

c)$f(x) = |x|$

d)$f(x) = xlogx, x > 0$

e)$f(x) = x + logx, x > 0$

2.Toxunanlar üsulu ilə ilə tapılan ilkin yaxınlaşmadan istifadə edərək, Nyuton üsulu ilə

$$f(x) = x^4 + e^{-x} \quad , [0; 1]$$

funksiyasının x^**minimum nöqtəsini tapın. Hesablamanı* $|f'(x_n)| \leq 10^{-6}$) *dəqiqliyi ilə tamamlayın.*

3.Toxunanlar üsulu ilə ilə tapılan ilkin yaxınlaşmadan istifadə edərək, Nyuton üsulu ilə

$$f(x) = x^4 + x^2 + x + 1 \ , \ [-1; 2]$$

funksiyasının x^**minimum nöqtəsini tapın. Hesablamanı* $|f'(x_n)| \leq 10^{-6}$) *dəqiqliyi ilə tamamlayın.*

4.Toxunanlar üsulu ilə ilə tapılan ilkin yaxınlaşmadan istifadə edərək, Nyuton üsulu ilə

$$f(x) = \sqrt{1 + x^2} + e^{-2x} \quad , [0; 1]$$

funksiyasının x^**minimum nöqtəsini tapın. Hesablamanı* $|f'(x_n)| \leq 10^{-6}$) *dəqiqliyi ilə tamamlayın.*

5.Toxunanlar üsulu ilə ilə tapılan ilkin yaxınlaşmadan istifadə edərək, Nyuton üsulu ilə

$$f(x) = \frac{x^2}{2} - cosx \quad , [0; 3]$$

funksiyasının x^**minimum nöqtəsini tapın. Hesablamanı* $|f'(x_n)| \leq 10^{-6}$) *dəqiqliyi ilə tamamlayın.*

6.*Toxunanlar üsulu ilə ilə tapılan ilkin yaxınlaşmadan istifadə edərək, Nyuton üsulu ilə*

$$f(x) = x - lnx \quad , [0,1; 2]$$

funksiyasının x^**minimum nöqtəsini tapın. Hesablamanı* $|f'(x_n)| \leq 10^{-6}$) *dəqiqliyi ilə tamamlayın*

XIII FƏSİL. COX DƏYİŞƏNLİ FUNKSİYALARIN ŞƏRTSİZ OPTİMALLAŞDIRILMALARIN BİRBAŞA ÜSULLARI

13.1. Çox dəyişənli funksiyanın minimallaşdırılması məsələsinin ümumi qoyuluşu

Məqsəd funksiyasının $f(x): R^n \to R$ oldugu şərtsiz optimallaşdırılma məsələsini nəzərdən keçirək (məhdudiyyətsiz):

$$f(x) \to extr$$

Tərif 13.1. $f(x) = f(x_{1,}x_2, \dots \dots x_n)$ $x \in R^n$ funksiyasının qradiyenti $x^* \in R^n$ nöqtəsində vektor adlanır.

$$\nabla f(x^*) = \left(\frac{\partial f(x^*)}{\partial x_1}, \frac{\partial f(x^*)}{\partial x_2}, \dots \dots \dots \frac{\partial f(x^*)}{\partial x_n}\right)$$

Tərif 13.2. $\nabla f(x^*) = 0$ və yaxud

$$\frac{\partial f(x^*)}{\partial x_i}, i = 1,2, \dots \dots . , n$$

şərtlərin yerinə yetirildiyi $x^* \in R^n$nöqtəsi $f(x) = f(x_{1,}x_2, \dots \dots . . x_n)$ funksiyasının stasionar nöqtəsi adlanır.

Teorem 13.1. (1-ci dərəcəli ekstremum üçün zəruri şərt). Fərz edək ki, $f(x): R^n \to R$ funksiyası $x^* \in R^n$
nöqtəsində diferensiallana bilir. Əgər x^* - $f(x)$-in şərtsiz lokal ekstremum nöqtəsidirsə, onda

$$\nabla f(x^*) = 0.$$

İsbatı:

Müəyyənlik üçün fərz edək ki, $f(x)$ funksiyasının lokal maksimum nöqtəsi x^*- dir, daha dogrusu onun $\mathrm{U}(x^*)$ ətrafı mövcuddur:

$$\forall x \in \mathrm{U}(x^*) \to f(x) \leq f(x^*).$$

Teoremi ziddiyyətli (əks) üsulla isbat edək:

Fərz edək ki, $\nabla f(x^*) \neq 0$. Onda istənilən vektor üçün

$$S = \alpha \cdot \nabla f(x^*),$$

burada $\alpha > 0 \quad S \in U(x^*)$

$((\nabla f(x^*), S) = \nabla f(x^*), \alpha \cdot \nabla f(x^*)) = \alpha \|\nabla f(x^*)\|^2 > 0,$

yəni s vektoru $f(x)$funksiyasının x^* nöqtəsində artma istiqamətini təyin edir və uygun olaraq kifayət qədər kiçik a > 0 üçün $f(x^* + \alpha S) > f(x^*)$. . bərabərsizliyi qüvvədədir. Burada ziddiyyət alınır. Beləliklə,

$$\nabla f(x^*) = 0$$

Tərif 13.3. Fərz edək ki,

$$A = a_{ij,}\ i, j = 1,2,3, \ldots\ldots, n$$

nxm-ölçülü simmetrik matrisdir.Əgər istənilən $h \in R^n$, $h \neq 0$ üçün

$$(h, Ah) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} h_i h_j > 0$$

şərt ödənilirsə, A matrisi müsbət müəyyən adlanır.

Əgər $(h, Ah) < 0$ A matrisi mənfi müəyyən adlanır.

Əgər $(h, Ah) \geq 0$ - A matrisi qeyri-mənfi müəyyən adlanır.

Əgər $(h, Ah) \leq 0$ - A matrisi qeyri- müsbət müəyyən adlanır.

A matrisinin müsbət (mənfi) müəyyənliyi (və ya (h, Ah) kvadrat forması) Silvestr meyarından istifadə etməklə müəyyən edilə bilər.

Teorem 13.2 (Silvester meyarı). Simmetrik A matrisi yalnız və yalnız onun bütün əsas minorları müsbət olduqda müsbət müəyyən hesab edilir.

$$detA_k = \begin{vmatrix} a_{11} & \ldots. & a_{1k} \\ \ldots. & \ldots. & \ldots. \\ a_{k1} & \ldots. & a_{kk} \end{vmatrix} > 0\,, k = 1,2,3, \ldots., n$$

A matrisinin mənfi müəyyən olması üçün aşağıdakı şərtlərin yerinə yetirilməsi zəruri və kifayətdir:

$$(-1)^k detA_k = (-1)^k \begin{vmatrix} a_{11} & \ldots. & a_{1k} \\ \ldots. & \ldots. & \ldots. \\ a_{k1} & \ldots. & a_{kk} \end{vmatrix} > 0\,,$$

$$k = 1,2,3, \ldots., n$$

Teorem 13.3. Simmetrik A matrisinin (və ya (h, Ah) kvadrat forması) qeyri-mənfi müəyyənliyi üçün zəruri və kafi şərt aşağıdakı $(2^n - 1)$ bərabərsizliklərinin yerinə yetirilməsidir:

$$a_{11} \geq 0, \qquad a_{22} \geq 0, \dots.., \qquad a_{nn} \geq 0,$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \geq 0, \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} \geq 0, \dots, \begin{vmatrix} a_{n-1n-1} & a_{n-1n} \\ a_{nn-1} & a_{nn} \end{vmatrix} \geq 0$$

....

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \dots. & a_{1n} \\ \dots. & \dots. & \dots. \\ a_{n1} & \dots. & a_{nn} \end{vmatrix} \geq 0$$

Uygun olaraq simmetrik A matrisinin (və ya (h, Ah) kvadrat forması) qeyri-müsbət müəyyənliyi üçün zəruri və kafi şərt aşağıdakı $(2^n - 1)$ bərabərsizliklərinin yerinə yetirilməsidir:

$$a_{11} \leq 0, \qquad a_{22} \leq 0, \dots.., \qquad a_{nn} \leq 0,$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \geq 0, \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} \geq 0, \dots, \begin{vmatrix} a_{n-1n-1} & a_{n-1n} \\ a_{nn-1} & a_{nn} \end{vmatrix} \geq 0$$

....

$$(-1)^n = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots. & a_{1n} \\ \dots. & \dots. & \dots. \\ a_{n1} & \dots. & a_{nn} \end{vmatrix} \geq 0$$

Teorem 13.4 (1-ci dərəcəli ekstremum üçün zəruri şərt). Fərz edək ki, $f(x): R^n \to R$ funksiyası $x^* \in R^n$ nöqtəsində 2 dəfə diferensiallana bilir. Əgər x^* - $f(x)$-in şərtsiz lokal ekstremum nöqtəsidirsə, onda aşagıdakı Hess matrisi

$$\mathrm{H}(x^*) = \left(\frac{\partial^2 f(x^*)}{\partial x_i x_j}\right).$$

i,j=1,2,3,....n qeyri-mənfi müəyyəndir.

Əgər x^* - $f(x)$-in şərtsiz lokal maksimum nöqtəsidirsə, onda $\mathrm{H}(x^*)$ Hesse matrisi qeyri-müsbət müəyyəndir.

13.2. Şərtsiz ekstremum üçün zəruri və kafi şərtlər

Teorem 13.5. Fərz edək ki, $f(x): R^n \to R$ funksiyası $x^* \in R^n$ nöqtəsində 2 dəfə diferensiallana bilir. x^* - $f(x)$-in şərtsiz lokal minimum nöqtəsi olması üçün kifayətdir ki :
— $\nabla f(x^*) = 0$;
— $\mathrm{H}(x^*)$ Hesse matrisi müsbət müəyyən olsun.

x^* - $f(x)$-in şərtsiz lokal maksimum nöqtəsi olması üçün kifayətdir ki :
— $\nabla f(x^*) = 0$;
— $\mathrm{H}(x^*)$ Hess matrisi mənfi müəyyən olsun.

İsbatı:

$f(x)$ funksiyası x^* nöqtəsində iki dəfə diferensiallana bildiyi üçün, onda istənilən $h = h_1, h_2, h_3, \dots \dots .., h_n \in R^n$ üçün
$(f(x^* + h) = f(x^*) + (\nabla f(x^*), h) + \frac{1}{2}(h, \mathrm{H}(x^*)h) + \alpha(h)$ dogrudur. Burada

$$\lim_{\|h\| \to 0} \frac{\alpha(h)}{\|h\|^2} = 0.$$

(13.5) teoreminin şərtlərini nəzərə alaraq,

$$(h, \mathrm{H}(x^*)h) > 0 \quad h \neq 0$$

oldugunu alırıq.

$$f(x^* + h) - f(x^*) = \frac{1}{2}(h, \mathrm{H}(x^*)h) + \alpha(h)$$

Bərabərliyin sağ tərəfinin işarəsi isə x^* nöqtəsinin ətrafındakı birinci toplananın $\frac{1}{2}(h, \mathrm{H}(x^*)h)$ işarəsi ilə müəyyən edilir:

$$U_\delta(x^*) = \{x \in R^n : x = x^* + h, \|h\| < \delta\},$$

yəni aşagıdakı bərabərsizlik mövcuddur:
$f(x^* + h) - f(x^*) > 0 \to f(x^* + h) > f(x^*)$.
Burada x^* - $f(x)$-in şərtsiz lokal minimum nöqtəsidir.

Teorem 13.6. Fərz edək ki, x^*- $f(x): R^n \to R$ funksiyasının stasionar nöqtəsidir . Burada $f(x)$ funksiyası $x^* \in R^n$ nöqtəsinin ətrafında 2 dəfə diferensiallana bilir və $f(x)$ funksiyasının bütün ikinci qismən törəmələri x^* nöqtəsində kəsilməzdir. Belə halda:

-əgər $d^2f(x^*, \Delta x_1, \Delta x_2, \dots \dots, \Delta x_n) > 0$ ("müsbət" işarəsini saxlayır) $\forall\ \Delta x_i$ x^* nöqtəsinin qonşulugundadırsa, onda x^* nöqtəsi $f(x)$funksiyasının şərtsiz lokal minimum nöqtəsidir;

-əgər $d^2f(x^*, \Delta x_1, \Delta x_2, \dots \dots, \Delta x_n) < 0$ ("mənfi" işarəsini saxlayır) $\forall\ \Delta x_i$ x^* nöqtəsinin qonşulugundadırsa, onda x^* nöqtəsi $f(x)$funksiyasının şərtsiz lokal maksimum nöqtəsidir;

-əgər $d^2f(x^*, \Delta x_1, \Delta x_2, \dots \dots, \Delta x_n)$ - $\Delta x_1, \Delta x_2, \dots \dots, \Delta x_n$ -n işarəsi dəyişmiş funksiyasıdırsa, yəni, həm müsbət, həm də mənfi qiymətlər alırsa, onda x^* nöqtəsi $f(x)$ funksiyasının ekstremum nöqtəsi deyil;

- əgər $d^2f(x^*, \Delta x_1, \Delta x_2, \dots \dots, \Delta x_n) \geq 0$ və ya $d^2f(x^*, \Delta x_1, \Delta x_2, \dots \dots, \Delta x_n) \leq 0$, eyni zamanda sıfıra bərabər olmayan $\Delta x_1, \Delta x_2, \dots \dots, \Delta x_n$ qiymətlər var ki, onlar üçün ikinci diferensialın dəyəri sıfıra çevrilir, onda x^* nöqtəsində $f(x)$ funksiyası ekstremuma malik ola da bilər, olmaya da bilər. Bu halda əlavə tədqiqat tələb olunur

Funksiyanın şərtsiz ekstremumunun tapılmasının ümumi sxemi:

1)$f(x)$ funksiyasının mümkün ekstremum nöqtələrini tapmaq:

$f(x)$ funksiyasının $\nabla f(x^*) = 0$ - stasionar nöqtələri olduğu nöqtələri;

$\frac{\partial f(x^*)}{\partial x_i}$ $, i = 1,2, \dots \dots, n$ qismən törəmələrin olmadıgı nöqtələri;

2)Ekstremum üçün kafi şərtlərin yerinə yetirilməsini təhlil etmək (teorem 13.5 və ya teorem 13.6-ya əsasən);

3)$f_{extr}(x)$ hesablamaq.

Məsələ 13.1 Ekstremum funksiyasını nəzərdən keçirin:

$$f(x) = f(x_1, x_2) = x_1, x_2 - \frac{1}{2(x_1 + x_2)}$$

Həlli: $f(x)$ funksiyasının $\nabla f(x)$ qradiyentini müəyyən edək:

$$\nabla f(x) = \nabla f(x_1, x_2) =$$
$$= \left(x_2 + \frac{1}{2(x_1 + x_2)^2}, x_1 + \frac{1}{2(x_1 + x_2)^2}\right),$$

həmçinin, $H(x)$ Hesse matrisini tərtib edək:

$$H(x) = H(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{(x_1+x_2)^3} & 1 - \frac{1}{(x_1+x_2)^3} \\ 1 - \frac{1}{(x_1+x_2)^3} & -\frac{1}{(x_1+x_2)^3} \end{pmatrix}$$

Ekstremum üçün zəruri şərtdən (teorem 13.1) istifadə edərək $f(x) = (x_1, x_2)$ funksiyasının ekstremum ola biləcəyi stasionar nöqtələrini tapaq:

$$\nabla f(x) = 0 \rightarrow \left\{ \begin{matrix} x_2 + \frac{1}{2(x_1 + x_2)^2} = 0, \\ x_1 + \frac{1}{2(x_1 + x_2)^2} = 0 \end{matrix} \right\} \rightarrow$$

$$x_1 = x_2 \rightarrow x_1 + \frac{1}{8x_1^2} = 0 \rightarrow x_1^3 = -\frac{1}{8} \rightarrow$$
$$x_1 = -\frac{1}{2} \rightarrow x_2 = -\frac{1}{2}$$

$f(x)$ funksiyasının qismən törəmələrinin olmadığı nöqtələr yoxdur.

Beləliklə, funksiyanın bir kritik nöqtəsi var:

$$x^* = \left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right).$$

$x^* = \left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ nöqtələrində $H(x_1, x_2)$ Hesse matrisi aşagıdakı şəkil alır:

$$H(x^*) = H\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$H(x^*)$ Hesse matrisinin ikinci dərəcəli əsas minoru

$$detH_2(x^*) = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -3 < 0$$

olduğundan matrisi nə müsbət, nə də mənfi müəyyən deyildir, ona görə də $x^* = \left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ nöqtəsində ekstremum yoxdur.

Məsələ 13.2 Ekstremum funksiyasını nəzərdən keçirin

$$f(x) = f(x_1, x_2) = e^{2x_1}(x_1 + x_2^2 - 2x_2)$$

Həlli:

$f(x)$ funksiyasının $\nabla f(x)$ qradiyentini müəyyən edək:

$$\nabla f(x) = \nabla f(x_1, x_2) =$$
$$(e^{2x_1}(2x_1 + 2x_2^2 - 4x_2 + 1, \qquad e^{2x_1}(2x_2 - 2)),$$

həmçinin, $H(x)$ Hesse matrisini tərtib edək:

$$H(x) = H(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} 4x_1 + 4x_2^2 - 8x_2 + 4 & e^{2x_1}(4x_2 - 4) \\ e^{2x_1}(4x_2 - 4) & e^{2x_1}2 \end{pmatrix}$$

Ekstremum üçün zəruri şərtdən (teorem 13.1) istifadə edərək $f(x) = (x_1, x_2)$ funksiyasının ekstremum ola biləcəyi stasionar nöqtələrini tapaq:

$$\nabla f(x) = 0 \rightarrow \left\{ \begin{matrix} e^{2x_1}(2x_1 + 2x_2^2 - 4x_2 + 1 = 0, \\ e^{2x_1}(2x_2 - 2) = 0 \end{matrix} \right\} \rightarrow$$

İkinci tənlikdən $x_2 = 1 \rightarrow 2x_1 - 1 = 0 \rightarrow x_1 = \frac{1}{2}$.

$f(x)$ funksiyasının qismən törəmələrinin olmadığı nöqtələr yoxdur.

Beləliklə, funksiyanın bir kritik nöqtəsi var: $x^* = \left(\frac{1}{2}, 1\right)$.

$x^* = \left(\frac{1}{2}, 1\right)$ nöqtələrində $H(x_1, x_2)$ Hesse matrisi aşagıdakı şəkil alır:

$$H(x^*) = H\left(\frac{1}{2}, 1\right) = \begin{pmatrix} 2e & 0 \\ 0 & 2e \end{pmatrix}$$

$H(x^*)$ Hesse matrisinin birinci dərəcəli əsas minoru

$$detH_1(x^*) = 2e > 0$$

olduğundan matris müsbət müəyyəndir, Teorem 13.5-ə uygun olaraq $f(x_1, x_2)$ funksiyası $x^* = \left(\frac{1}{2}, 1\right)$ nöqtəsində lokal minimuma malikdir və

$f_{min}\left(\frac{1}{2}, 1\right) = -\frac{e}{2}$ dəyəri alır.

Məsələ 13.3 Ekstremum funksiyasını nəzərdən keçirin

$$f(x) = f(x_1, x_2) = x_1^2\, x_2^2 + \frac{x_1^2}{2} + \frac{x_2^2}{2} + x_1 x_2 + 1$$

Həlli:

1)$f(x)$ funksiyasının $\nabla f(x)$ qradiyentini müəyyən edək:

$$\nabla f(x) = \nabla f(x_1, x_2) =$$
$$\left(2x_1x_2^2 + x_1 + x_2,\ 2x_2x_1^2 + x_2 + x_1\right),$$

həmçinin, $H(x)$ Hesse matrisini tərtib edək:

$$H(x) = H(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} 2x_2^2 + 1 & 4x_1x_2 + 1 \\ 4x_1x_2 + 1 & 2x_1^2 + 1 \end{pmatrix}$$

Ekstremum üçün zəruri şərtdən (teorem 13.1) istifadə edərək $f(x) = (x_1, x_2)$ funksiyasının ekstremum ola biləcəyi stasionar nöqtələrini tapaq:

$$\nabla f(x) = 0 \rightarrow \left\{\begin{matrix} 2x_1x_2^2 + x_1 + x_2 & = 0, \\ 2x_2x_1^2 + x_2 + x_1 & = 0 \end{matrix}\right\} \rightarrow$$

$x_1 = x_2 = 2x_2^3 + 2x_2 = 0 \rightarrow\ x_2 = 0 \rightarrow\ x_1 = 0.$

$f(x)$ funksiyasının qismən törəmələrinin olmadığı nöqtələr yoxdur.

Beləliklə, funksiyanın bir kritik nöqtəsi var $x^* = (0,0)$.

2)$x^* = (0,0)$ nöqtələrində $H(x_1, x_2)$ Hesse matrisi aşagıdakı şəkil alır:

$$H(x^*) = H(0,0) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$H(x^*)$ Hesse matrisinin ikinci dərəcəli əsas minoru

$$detH_2(x^*) = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$H(x^*)$ Hesse matrisinin birinci dərəcəli əsas minoru isə

$$detH_1c1 > 0$$

olduğundan matris $H(x^*)$ matrisi qeyri-mənfi müəyyəndir, ekstremum üçün kafi şərtlər ödənilmir. Əlavə tədqiqat tələb olunur.

3)$f(x) = f(x_1, x_2)$ funksiyasının qiymətini tədqiq edək.

$$f(x_1, x_2) = x_1^2\, x_2^2\; + \frac{x_1^2}{2} + \frac{x_2^2}{2} + \; x_1 x_2 + 1$$

$$= (x_1 x_2)^2 + \frac{1}{2}((x_1 + x_2)^2 + 1,$$

Deməli, $f(x_1, x_2) > 0$,əgər $x_1\; \neq 0, x_2\; \neq$0. Bu zaman ,

$f(x_1, x_2) >, f(0{,}0)$ əldə edirik. Deməli, $x^* = (0{,}0)$ nöqtəsində $f(x_1, x_2)$ funksiyası lokal minimuma malikdir və $f_{min}(0{,}0) =$ 1 qiyməti alır.

13.3. Düzgün Simpleks ilə minimallaşdırma üsulu

$f(x)$ funksiyasının qiymətlərinin hesablanmasına, yəni birbaşa minimallaşma üsullarına əsaslanan

$f(x) \rightarrow min,\; x \in R^n$ şərtsiz minimumlaşdırma məsələsinin həlli alqoritmlərini nəzərdən keçirək.Qeyd etmək lazımdır ki, onların tətbiqi məqsəd funksiyasının diferensiallaşdırılmasını və hətta onun analitik dəqiqləşdirilməsini tələb etmir. Sadəcə ixtiyari nöqtələrdə $f(x)$ dəyərini hesablamaq və ya ölçmək lazımdır.Belə hallara praktiki olaraq mühüm optimallaşdırma məsələlərində rast gəlinir.

Əvvəlcə minimum nöqtəyə yeni yaxınlaşmanın seçilməsini R^n fəzasının bir neçə nöqtəsində funksiyanın qiymətlərini müqayisə etməklə müəyyən edildiyi hesablama prosedurları üzərində dayanaq.

R^n fəzasında düzgün simpleks bir-birindən n+1 bərabər məsafədə yerləşən nöqtələrin (simpleksin təpələri) çoxluğudur. İki təpəni birləşdirən parçaya simpleksin tərəfi deyilir.

Əgər x^0 , R^n fəzasında düzgün simpleksin təpələrindən biridirsə, qalan n təpənin x^1 …….,x^n koordinatlarını aşagıdakı düsturlardan istifadə etməklə tapmaq olar:

$$x_j^i = \begin{Bmatrix} x_j^0 + d_1, & i \neq j, \\ x_j^0 + d_2, & i \neq j, \end{Bmatrix} \quad (13.1)$$

burada:

$$d_1 = \frac{a\left(\sqrt{n+1} - 1\right)}{n\sqrt{2}};$$

$$d_2 = \frac{a\left(\sqrt{n+1} + n - 1\right)}{n\sqrt{2}};$$

$a -$ tərəfin uzunlugudur.

(13.1) düsturlarına əsasən qurulmuş simpleksin x^0 təpəsi baza (əsas) adlandıracağıq.Məlum bir simpleksdən istifadə edərək, hər hansı bir təpəni əks etdirməklə yeni bir simpleks qurmaq olar.Yeni və köhnə $\hat{x}^k$ və x^k təpələri aşagıdakı münasibətlə bir-birilə bağlıdır:

$$\frac{\hat{x}^k + x^k}{2} = x^c,$$

burada:

$$x^c = \frac{1}{n} \sum_{i \neq k} x^i$$

Nəticədə eyni tərəfləri və təpələri olan yeni düzgün simpleks alınır:

$$\hat{x}^k = 2x^c - x^k, x^{i,} \text{ i=0,……,n, } i \neq k$$

Düzgün simpleksdən istifadə etməklə $f(x)$funksiyasının minimum nöqtəsinin axtarışı aşağıdakı kimi aparılır. Hər bir iterasiyada simpleksin təpələrində $f(x)$-in qiymətləri müqayisə edilir. Sonra yuxarıda təsvir edilən əks etdirmə proseduru $f(x)$-in ən böyük qiymət aldığı təpə üçün həyata keçirilir. Əgər əks olunan təpədə funksiya daha kiçik qiymət alırsa, onda yeni simpleksə keçilir. Əks halda, növbəti ən yüksək $f(x)$ qiyməti ilə təpəni əks etdirmək üçün başqa cəhd edilir. Əgər bu, funksiyanın azalmasına gətirib çıxarmazsa, onda simpleksin tərəfinin uzunluğu, məsələn, yarıya qədər azaldılır və bu tərəf ilə yeni simpleks qurulur. Funksiyanın minimum qiymət aldığı köhnə simpleksin x^0 təpəsi baza (əsas təpə) kimi seçilir. $f(x)$ –in minimum nöqtəsinin axtarışı ya simpleksin tərəfi , ya da simpleksin təpələrindəki funksiya dəyərləri arasındakı fərq kifayət qədər kiçik olduqda tamamlanır. Bu üsulun alqoritminin variantlarından birini təsvir edək:

1)ε dəqiqlik parametrini , x^0 baza nöqtəsini və a
tərəfini seçmək və (13.1) düsturlarından istifadə edərək ilkin simpleksi qurmaq. $f(x^0)$ hesablamaq;

2)Simpleksin x^1 ....,x^ntəpələrində $f(x)$ -in qiymətlərini hesablamaq;

3) Simpleksin x^1 ....,x^n təpələrini

$$f(x^0) \leq f(x^1) \leq \cdots \ldots \leq f(x^{n-1}) \leq f(x^n)$$

kimi düzmək;

4)

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left[f\left(x^i\right) - f(x^0)\right]^2 < \varepsilon^2 \quad (13.2)$$

şərtini yoxlamaq. Əgər şərt yerinə yetirilirsə, onda
$x^* \approx x^0, f^* \approx f(x^0)$ əvəz etmək və hesablamaları dayandırmaq. Əks halda, 4-cü addıma keçmək;

5)

$$x^c = \frac{1}{n}\sum_{i \neq k} x^i$$

hesablamaq və x^n təpəsinin əksini yerinə yetirmək:
$\hat{x}^n = 2x^c - x^n$. Əgər $f(\hat{x}^n) < f(x^n)$ olarsa, $x^n = =\hat{x}^n$ əvəz etmək və 2-ci addıma keçmək. Əks halda 5-ci addıma keçmək;

6)

$$x^c = \frac{1}{n}\sum_{i \neq k} x^i$$

hesablamaq və x^n təpəsinin əksini yerinə yetirmək:
$\hat{x}^n = 2x^c - x^n$. Əgər $f(\hat{x}^{n-1}) < f(x^{n-1})$ olarsa, $x^{n-1} = =\hat{x}^{n-1}$ əvəz etmək və 2-ci addıma keçmək. Əks halda 6-cı addıma keçmək;
7) x^0 baza təpəsi olduğunu nəzərə alaraq, tərəfləri 2 dəfə az oolan yeni düzgün simpleksə keçmək. $x^i = \frac{x^i + x^0}{2}, i = 1, \dots \dots . . n$ düsturundan istifadə edərək simpleksin qalan n təpəsini tapmaq. 1-ci addıma keçmək.

Qeydlər:
1) $f(x)$ funksiyası çoxmodaldırsa, onda təsvir olunan üsul ilə $f(x)$ -in qlobal minimum nöqtəsini deyil, lokal nöqtəsini tapmaq olar;
2) məqsəd funksiyası aşağıdan məhdud deyilsə,üsulun alqoritminə əlavə dayandırma proseduru daxil edilməlidir.

13.4. Koordinatların tsiklik enməsi üsulu

Bu üsul f(x) məqsəd funksiyasının əvvəlcə birinci baza (əsas) vektor e^1, sonra ikinci - e^2 və s. istiqamətində ardıcıl olaraq minimuma endirilməsindən ibarətdir.Son e^n baza (əsas) vektor istiqamətində minimallaşdırma başa çatdıqdan sonra dövr təkrarlanır.

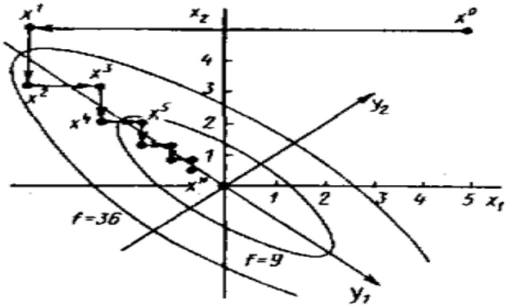
Alqoritmi təsvir edək:
1) $x \in R^n$ dəqiqliyə nail olmaq üçün kriteriya seçmək, məsələn, $\rho(x^{k+1}, x^k) < \varepsilon_1$, ε kəmiyyəti .$f(x)$ hesablamaq, $j = 1$ əvəz etmək;
2) $\Phi(\alpha) = f(x + \alpha e^1) \rightarrow min$, $\alpha \in R$, tək ölçülü minimallaşdırma məsələsinin həll etmək, yəni,α^* tapmaq. $\hat{x} = x + \alpha e^1$ əvəz etmək, $f(x)$ hesablamaq;
3)Əgər $j < n$ olarsa, $x = \hat{x}$, $j = j + 1$ əvəz etmək və 1-ci addıma keçmək. Əks halda 3-cü addıma keçmək;

4) $\|x-\hat{x}\|<\varepsilon$ və ya $|f(x)-f(\hat{x})|<\varepsilon$ dəqiqliyinə nail olma şərtini yoxlayın.Əgər şərt yerinə yetirilirsə, $x^*=\hat{x},\ f^*=f(\hat{x})$ əvəz etmək və axtarışı bitirmək. Əks halda, $x=\hat{x},\ f(x)=f(\hat{x}), j=1$ əvəz etmək və 1-ci addıma keçmək;

Koordinatların tsiklik enmə üsulunun effektivliyi əhəmiyyətli dərəcədə məqsəd funksiyasının xüsusiyyətlərindən asılıdır.

Məsələ 13.4. .$f(x)=5x_1^2+5x_2^2+8x_1x_2\rightarrow min$ məsələsini tsiklik koordinatların enmə üsulu ilə həll edin:

Həlli: Koordinat sisteminin 45° bucaqla fırlanması $(x_1=(y_1+y_2)/\sqrt{2}$ və $x_1=(-y_1+y_2)/\sqrt{2}$ dəyişənlərinin dəyişdirilməsi funksiyanı $f_1(y)=y_1^2+9y_2^2$ şəklinə salır. Aydındır ki, məqsəd funksiyasının səviyyə xətləri ellipsdir $\frac{y_1^2}{9}+y_2^2=c^2$ (Şəkil 13.1.).



Şəkil 13.1. Koordinatların tsiklik enmə üsulunun qrafik təsviri

Yuxarıdakı alqoritmdən istifadə etməklə aparılmış hesablamaların nəticələri aşağıdakı cədvəldə təqdim olunmuşdur:

İterasiyalaın nömrəsi	x_1	x_2	$f(x)$
0	5	5	450
1	-4	5	45
2	-4	3.2	28.8
3	-2.56	3.2	18.43
4	-2.56	2.05	11.8
5	-1.64	2.05	7.55
6	-1.64	1.31	4.83
7	-1.05	1.31	3.09
8	-1.05	0.84	1.98
9	-0.67	0.84	1.27
10	-0.67	0.54	0.81

Cədvəl 13.1. Koordinatların tsiklik enmə üsulu ilə hesablamaların nəticələri

Cədvəl 13.1. və Şəkil 13.1.-dən aydın olur ki, $\{x^k\}$ minimumlaşdırma ardıcıllığı $x^* = (0,0)$ minimum nöqtəsinə yaxınlaşır. Bu məsələdə minimum nöqtə üçün axtarış trayektoriyası aydın bir ziqzaq xarakteri daşıyır.

Məsələdən göründüyü kimi, koordinatların tsiklik enmə üsulundan istifadə etməklə məsələnin həllinin səmərəliliyini, əgər onun alqoritmi x^i nöqtələrindən $\rho^i = x^i - x^{i-1}$istiqamətlərində minimum nöqtənin axtarışını vaxtaşırı təkrarlayaraq tamamlamaqla artırmaq olar. Beləliklə, məsələn, əgər x^4 nöqtəsindən $\rho^4 = x^4 - x^2$istiqamətində tam eniş həyata keçirsək (nöqtələrin koordinatları üçün cədvəl 13.1-ə bax),onda x^5, x^6, x^7 nöqtələrinə nisbətən x*= (0,0) minimum nöqtəsinə çox yaxın yerləşən $-2{,}2 \cdot 10^{-5}; 5{,}6 \cdot 10^{-3}$ nöqtəsini alırıq.

Funksiyanın azalma istiqamətlərinin ardıcıl tapılmasından və bu istiqamətlər üzrə minimuma endirilməsindən ibarət olan bu yanaşma bir sıra alqoritmlərin əsasında durur. Onlardan birini nəzərdən keçirək.

Xuk-Jivs üsulunun alqoritmi. Alqoritm iki əsas prosedurdan ibarətdir:
1) $f(x)$ azalma istiqamətini müəyyən etmək üçün nəzərdə tutulmuş verilmiş nöqtənin yaxınlığında koordinatlar üzrə kəşfiyyat axtarışı;
2) azalan istiqamətdə hərəkət.

Verilmiş x nöqtəsindən hər bir koordinat boyunca artımlarla $\Delta_j, j = 1, \dots \dots, n$ koordinat axtarışını tədqiq edən alqoritmi təsvir edək:

1) $\bar{X} = x, i = 1$ əvəz etmək;

2)$y = \bar{x} - \Delta_j e^j$ sınaq addımını atmaq.

Burada e^j- baza (əsas) vektordur.Əgər $f(\bar{x}) \leq f(y)$ olarsa, onda 3-cü addıma, əks halda 4-cü addıma keçmək;

3)$y = \bar{x} + \Delta_j e^j$ sınaq addımını atmaq.

Əgər $f(\bar{x}) \leq f(y)$ olarsa. onda 5-ci addıma, əks halda 4-cü addıma keçmək;

4)$\bar{X} = y$ əvəz etmək;

5) $j = j = 1$ əvəz etmək . Əgər) $j \leq n$ olarsa, onda 2-ci addıma keçmək. Əks halda, kəşfiyyat axtarışı başa çatır - $\bar{X}$ ≠x oldugu halda $f(\bar{x}) < f(y)$ olan $\bar{X}$ nöqtəsi alınır.

Qeyd:Kəşfiyyat axtarışı nəticəsində $\bar{X}$ =x oldugu məlum ola bilər. Onda kəşfiyyat axtarışı uğursuz hesab edilir. Əgər bu halda artım norması $\Delta = (\Delta_{1 \dots\dots\dots,} \Delta_n)$ kiçik, yəni, $\|\Delta\| \leq \varepsilon$ (burada ε göstərilən dəqiqlikdir), onda x*= x qəbul edilir.Göstərilən dəqiqliyə nail olunmazsa, $\Delta = \Delta/\gamma$ qəbul etmək (sabit $\gamma > 1$ – addımın azalma əmsalı) və kəşfiyyat axtarışını təkrarlamaq.

İndi tam Xuk-Jivsüsulunun alqoritmini təqdim edək:

1) x^0 başlanğıc nöqtəsini, $\Delta = (\Delta_{1 \dots\dots\dots,} \Delta_n)$artım vektorunu, $\gamma > 1$ – addımın azalma əmsalını, $\varepsilon > 0$ axtarışın sonu parametrini seçmək;

2) x^0 nöqtəsi üçün kəşfiyyat koordinatları üzrə axtarışı həyata keçirmək, yəni, $\bar{x}^0$ nöqtəsini tapmaq. $\bar{x}^0 \neq x$ olarsa, 3-cü addıma,əks halda – 2-ci addıma keçmək,
3) Axtarışın sonunu yoxlamaq. Əgər $\|\Delta\| \leq \varepsilon$ olarsa, sonra axtarışı dayandırmaq və x*= x^0 əvəz etmək.Əks halda, $\Delta = \Delta/\gamma$ qoymaq və 1-ci addıma keçmək;
4) x nöqtəsindən $\bar{x}^0 - x^0$azalan istiqamətdə hərəkət etmək $x^1 = \bar{x}^0 + (\bar{x}^0 - x^0) = 2\bar{x}^0 - x^0$;
5) x^1nöqtəsində kəşfiyyat axtarışı aparmaq, yəni $\bar{x}^1$ nöqtəsini tapmaq. Əgər $f(\bar{x})^1 < f(\bar{x})^o$olarsa, onda $x^0 = \bar{x}^o, \bar{x}^o = x^1$ əvəz etmək və 3-cü addıma keçmək. Əks halda, $x^0 = \bar{x}^1$ əvəz etmək və 1-ci addıma keçmək.

Yuxarıda təsvir edilən bütün çox dəyişənli funksiyanın şərtsiz minimuma endirilməsinin birbaşa üsulları daha kiçik funksiya dəyəri olan nöqtələrin axtarışı üçün deterministik prosedurları ehtiva edir. Bununla belə, minimum nöqtələrin axtarışı proseduruna təsadüfilik elementlərinin qəsdən daxil edildiyi minimumlaşdırma üsulları da işlənib hazırlanmışdır.

ÖZÜNÜ YOXLAMAQ ÜÇÜN SUALLAR VƏ TAPŞIRIQLAR

1.1-ci dərəcəli ekstremum üçün zəruri şərti izah edin
2.Şərtsiz ekstremum üçün zəruri və kafi şərtlər nədən ibarətdir?
3. $f(x) = f(x_1, x_2) = x_1x_2 + \frac{1}{2(x_1+x_2)}$
funksiyasının maksimum və minimumunu müəyyən edin:
4.$f(x) = f(x_1, x_2) = -x_1^2 - x_1x_2 - x_2^2 + x_1 + x_2$
funksiyasının maksimum və minimumunu araşdırın.
5..$f(x) = f(x_1, x_2) = x_1^2 - x_1x_2 - x_2^2$
funksiyasının maksimum və minimumunu araşdırın.
6.$f(x) = f(x_1, x_2) = x_1^2 - x_1x_2 + x_2^2$
funksiyasının maksimum və minimumunu müəyyən edin.

7. $f(x) = f(x_1, x_2) = x_1^2 - 2\,x_1x_2 + 2x_2^2 + 2x_1$
funksiyasının maksimum və minimumunu müəyyən edin.
8. $f(x) = f(x_1, x_2) = x_1^3 + x_2^3 + 3a\,x_1x_2$
funksiyasının maksimum və minimumunu müəyyən edin.
9. $f(x) = f(x_1, x_2) = x_1^3 - 2x_2^3 - 3\,x_1 + 6x_2$
funksiyasının maksimum və minimumunu müəyyən edin.
10.Düzgün Simpleks ilə minimallaşdırma üsulunun alqoritmini izah edin.
11.Koordinatların tsiklik enməsi üsulunun alqoritmini izah edin.
12.Xuk-Jivs üsulunun alqoritmi izah edin.

XIV FƏSİL.COX DƏYİŞƏNLİ FUNKSİYALARIN TÖRƏMƏDƏN İSTİFADƏ ETMƏKLƏ, ŞƏRTSİZ OPTİMALLAŞDIRMA ÜSULLARI

14.1 Enmə üsulunun ümumi sxemi

Yuxarıda qeyd etdiyimiz kimi birbaşa axtarış üsullarından istifadə edərkən yalnız funksiya dəyərlərinin hesablanması tələb olunur, lakin bu hesablamaların sayı çox böyük ola bilər. Birinci tərtibdən üsullar funksiyaların törəmələrinin qiymətləri haqqında məlumatdan istifadə edir, yəni birinci tərtibin zəruri şərtini təmin edən stasionar nöqtələri tapmağa imkan verir.

Törəmələrdən istifadə edən üsullar iterativ xarakter daşıyır, çünki qradiyentin komponentləri qeyri-xətti funksiyalardır.

Məqsəd funksiyasının $f(x): R^n \to R$ oldugu şərtsiz optimallaşdırılma məsələsini nəzərdən keçirək (məhdudiyyətsiz):

$$f(x) \to min \quad x \in R^n$$

Qoyulmuş məsələnin təxmini həlli üsulu ideyası

$f\left(x^{(0)}\right) \geq f\left(x^{(1)}\right) \geq \cdots \ldots . f\left(x^{(k)}\right) \geq \cdots ..$ şərtini ödəyən $x^{(0)}, x^{(1)} \ldots .., \; x^{(k)}, \ldots .$ nöqtələrinin ardıcıllığının qurulmasından ibarətdir. Belə ardıcıllıqlar $\{x^{(k)}\}$ relaksasiyalı ardıcıllıq, üsullar isə enmə üsulları adlanır.

Fərz edək ki, $x^{(0)}$ -başlanğıc nöqtədir.

$x^{(0)}, x^{(1)} \ldots .., \; x^{(k)}, \ldots .$ ardıcıl təxminlər aşağıdakı kimi müəyyən edilir:

— $x^{(k)}$nöqtəsində enmə istiqaməti $y^{(k)} \in R^n$ seçilir;

— $x^{(k+1)} = x^{(k)} + \propto^{(k)} y^{(k)}, k = 1,2 \ldots$ ....düsturdan istifadə edərək (k +1)-ci yaxınlaşma tapılır.

Burada $\propto^{(k)}$ enmə addımının kəmiyyətidir. Bütün enmə üsulları fərqlənir:

— ya enmə istiqamətini seçməklə;

- ya da enmə istiqamətində hərəkət etməklə.
Hər bir enmə üsulunun $\propto^{(k)}$, $y^{(k)}$ parametrlərini seçərkən əsas vəzifəsi, $x^{(k)}$, k = 0, 1, , 2, ... nöqtələrində $f(x)$ məqsəd funksiyasının qiymətlərinin ardıcıl azalmasını təmin etməkdən ibarətdir.

Teorem 14.1. Fərz edək ki, $f(x)$ funksiyası $x^* \in R^n$ nöqtəsində diferensiallana bilir.Onda

$$(\nabla f(x^*), y) < 0 \quad (14.1)$$

şərtini ödəyən istənilən $y \in R^n$ vektoru x^* nöqtəsində $f(x)$ funksiyasının azalma istiqamətini təyin edir, yəni elə $\propto > 0$ ədədi vardır ki, burada

İsbatı

$y \in R^n$ (14.1.) şərtini ödəyən ixtiyari vektor olsun. Onda elə a > 0 ədədi var ki, x^* nöqtəsinin $\propto$-qonşuluğunda diferensiallanan $f(x)$ funksiyası üçün parçalanma dogrudur(x* nöqtəsində)

$f(x^*+\propto y) - f(x^*)$ =$((\nabla f(x^*), \propto y) + r(\propto y)$ (14.2.)

və

$$\lim_{\propto \to 0} \frac{r(\propto, y)}{\propto \|y\|} = 0$$

(14.1) şərtindən belə çıxır ki, $f(x^*+\propto y) - f(x^*)$ işarəsi (14.2) ifadəsinin birinci toplananı (слагаемым) ilə (x^* nöqtəsinin $\propto$-qonşuluğunda) müəyyən edilir:

$$f(x^*+\propto y) - f(x^*) < 0 \rightarrow f(x^*+\propto y) < f(x^*)$$

Qeyd. $f(x)$ funksiyasının x^* nöqtəsində ən sürətli azalması $y^* = -\nabla f(x^*)$ vektoru istiqamətində baş verir $f(x)$ funksiyasının x^* nöqtəsində antiqradiyenti). -Funksiyanın antiqradientinin bu xassəsi qradiyent üsullarının əsasını təşkil edir.

14.2. Qradiyent enmə üsulu

Qradient üsulları qeyri-xətti proqramlaşdırma məsələsinin həlli üçün təqribi (iterativ) üsullardır və demək olar ki, istənilən məsələni həll etməyə imkan verir. Lakin bu halda lokal ekstremum müəyyən edilir. Buna görə də, hər bir lokal ekstremumun qlobal olduğu qabarıq proqramlaşdırma məsələlərini həll etmək üçün bu üsullardan istifadə etmək məqsədəuyğundur.

Qradiyent üsulunda $f(x)$ funksiyasının qiymətlərinin ardıcıl olaraq azalmasını təmin edən $\{x^{(k)}\}$ ardıcıllığı qurulur.

$\{x^{(k)}\}$ ardıcıllığının qurulması proseduru aşağıdakı kimi təşkil edilmişdir:

$$X^{(k)} = x^k + \alpha^k y^k, k = 0,1,2 \ldots,$$
$$y^k = -\nabla f(x^*)$$

Burada $\alpha^k > 0$ enmə addımının kəmiyyəti kifayət qədər kiçik seçilir ki, $x^{(k)}$; $k = 0,1,2, \ldots\ldots,$ nöqtələrində $f(x)$ məqsəd funksiyasının qiymətlərinin ardıcıl azalması şərti təmin edilsin.

Teorem 14.2. Tutaq ki, $f(x)$ funksiyası aşağıdan məhduddur, R^n −də diferensiallanır və onun $\nabla f(x)$ qradiyenti L > 0 sabiti ilə Lipşis şərtini ödəyir:

$$\|\nabla f(x') - \nabla f(x'')\| \leq L\|x' - x''\|$$
$$\forall x', x'' \in R^n$$

Onda iterativ prosedurun istənilən bir başlanğıc nöqtəsi $x^{(0)}$ üçün

$$X^{(k+1)} = x^{(k)} + \propto y^{(k)} \quad (14.3)$$
$$y^{(k)} = -\nabla f\left(x^{(k)}\right), k = 0,1,2 \ldots,$$

$\propto > 0$ elə ədəd (bütün k üçün sabit olan) seçmək olar ki,

$$\lim_{k\to\infty}\left\|\nabla f\left(x^{(k)}\right)\right\| = 0.$$

Burada $\{x^{(k)}\}$ ardıcıllığı relaksasiyalı olacaqdır.

Teorem 14.3 $f(x)$ funksiyası teorem 14.2-nin şərtlərini ödəyir və C sabiti mövcuddur ki, onun səviyyə çoxlugu

$$L(C) = \{x \in R^n\}: f(x) \leq C$$

boş deyil və kompaktdır. Onda hər hansı ilkin $x^{(0)} \in L(C)$nöqtəsi üçün (14.3) düsturu ilə müəyyən edilən $\{x^{(k)}\}$ ardıcıllığı relaksasiyalı olacaq və onun x^* sərhədd nöqtələrinin hər biri $\nabla f(x^*) = 0$ təmin edir.

Nəticə. Əgər əlavə olaraq $f(x)$funksiyası qabarıqdırsa, onda $\{x^{(k)}\}$ ardıcıllığının hər bir sərhədd nöqtəsi R^n-də $f(x)$ funksiyasının minimum nöqtəsi olacaqdır

Qradiyent enmə üsulunun təhlilini həyata keçirək:

1. α=const sabit addım ilə (14.3) iterativ enmə proseduru sadədir, lakin o,həyata keçirilərkən praktikada seçimlə müəyyən edilən α addım ölçüsü haqqında bilik tələb edir. Bu zaman α –nın böyük addım seçimi

$$f(x^{(k+1)}) = f(x^{(k)} + \propto y^{(k)}) < f(x^{(k)}) \quad (14.4)$$

məqsəd funksiyasının azalması şərtinin pozulmasına gətirib çıxara bilər.

Digər tərəfdən, kifayət qədər kiçik addım (14.4) bərabərsizliyinin yerinə yetirilməsini təmin edəcək, lakin tələb olunan dəqiqliyə nail olmaq üçün çoxlu sayda iterasiya tələb olunacaqdır. Buna görə də əvvəlcə $\alpha > 0$ enmə addımının bəzi qiymətləri təsbit edilir və (14.3) düsturundan istifadə edərək hesablamalar aparılır. Bundan əlavə, (14.4) bərabərsizliyi təmin edilmirsə, o zaman cari iterasiya üçün (14.4) funksiyasının azalma şərti ödənilənə qədər α enmə addımımnın qiyməti azaldılır və hesablamalar davam etdirilir.

2.Enmə prosedurunun tamamlanması şərti. Minimallaşdırma məsələsinin həllinin dəqiqliyinə olan tələb yerinə yetirilir, Məsələn

$$\left\|x^{(k+1)} - x^{(k)}\right\| \le \varepsilon_1 \text{ və ya}$$

$$\left\|f(x^{(k+1)}) - f(x^{(k)})\right\| \le \varepsilon_2$$

burada $\varepsilon_1 > 0$ və $\varepsilon_2 > 0$ əvvəlcədən müəyyən edilmiş ədədlərdir.

(14.3) şərtini nəzərə alaraq

$$\left\|x^{(k+1)} - x^{(k)} \leq \propto\right\| \left\|y^{(k)}\right\| = \propto \left\|\nabla f\left(x^{(k)}\right)\right\|$$

əldə edərik.

Buradan belə nəticə çıxır ki, gradiyent enmə iterativ prosedurunun tamamalanması şərti kimi

$$. \left|\frac{\partial f\left(x^{(k)}\right)}{\partial x_i}\right| \leq \varepsilon_3 \text{ , i=1,2,3,....n və ya}$$

$$\left\|\nabla f\left(x^{(k)}\right)\right\| \leq \varepsilon_3 \text{ , } \varepsilon_3 > 0$$

bərabərsizliklərindən istifadə etmək olar.

3.Həll seçimi. Son hesablanmış $x^{(k)}$ nöqtəsi x^*üçün təxmini olaraq qəbul edilir. Onda $f\left(x^{(k)}\right)$ qiyməti təxminən $f^* = f(x^*)$ qiymətini müəyyən edir.

Əgər $f'(x^k) \neq 0$ olarsa, onda $f(x)$ funksiyasının sürətli artma istiqaməti qradiyentin istiqamətində, azalma istiqaməti antiqradiyentin istiqamətində olacaqdır.

Məsələ 14.1 . $\left|\frac{\partial f\left(x^{(k)}\right)}{\partial x_i}\right| \leq 0{,}05, i = 1{,}2$ hesablamanı tamamlayaraq, qradiyent enmə üsulundan istifadə edərək

$$f(x) = f(x_1, x_2) = x_1^2 + 2x_2^2 + e^{x_1 + x_2};\ x \in R^2$$

məqsəd funksiyasını minimallaşdırın:

Həlli:İlkin təxmini $x^{(0)} = (0{,}0)$ və $\propto = 1$ enmə addımının qiymətini seçək, (14.3) ardıcıllığını quraq ($\propto$enmə addımının bölünməsi ilə). Hesablamaların nəticələrini aşagıdakı cədvəldə qeyd edək:

K	x_1^k	x_2^k	$f(x^k)$	$\frac{\partial f\left(x^{(k)}\right)}{\partial x_1}$	$\frac{\partial f\left(x^{(k)}\right)}{\partial x_2}$	$\propto$
0	0	0	1	1	1	1
	-1	-1	3,145	-	-	
	0	0	1	1	1	0,5
	-0,5	-0,5	1,118	-	-	
	0	0	1	1	1	0,25
1	-0,25	-0,25	0,794	0,106	-3,93	0,25
2	-0,277	-0,152	0,774	0,098	0,045	0,25
3	-0,301	-0,163	0,772	0,026	0,023	

Beləliklə,
$x^* \approx x^{(3)}$ =(-0,301, -0,163)
$f^* \approx f$(-0,301, -0,163) =0,772 alırıq.

14.3. Sürətli enmə üsulu

$\{x^{(k)}\}$ ardıcıllığının qurulması proseduru aşağıdakı kimi təşkil edilmişdir:

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} + \propto^{(k)} y^{(k)}, k = 0,1,2 \ldots,$$

$$y^{(k)} = -\nabla f\left(x^{(k)}\right).$$

$\propto^{(k)} > 0$ enmə addımının qiyməti olaraq birölçülü minimumlaşdırma məsələlərinin həlli $y^{(k)}$ seçilir:

$$g^{(k)}\left(\propto^{(k)}\right) = \min_{\propto > 0} g^{(k)}(\propto), g^{(k)}(\propto) = f(x^{(k)} + \propto y^{(k)}) \ (14.5.)$$

Beləliklə, bu üsulda enmə, məqsəd funksiyasının ən sürətli azalması istiqamətində və eyni zamanda maksimum mümkün addımla həyata keçirilir.

Teorem 14.4. Tutaq ki, $f(x)$funksiyası 14.2. teoreminin şərtlərini ödəyir. Onda hər hansı $x^{(0)}$başlanğıc nöqtəsi üçün sürəlli enmə üsulu

$$\lim_{k\to\infty} \left\|\nabla f\left(x^{(k)}\right)\right\| = 0.$$

təmin edən $\{x^{(k)}\}$ ardıcıllığının qurulmasına gətirib çıxarır.
Əgər $y^{(k)} \neq 0$ olarsa, (14.6) minimumlaşdırma məsələsinin yalnız $\propto^{(k)} > 0$ olduqda həlli var, çünki

$$\frac{dg^{(k)}(\propto)}{d\propto} = \frac{\partial f\left(x^{(k)}\right)}{\partial y^{(k)}} = (\nabla f\left(x^{(k)}\right), y^{(k)}) = -\left\|y^{(k)}\right\|^2 < 0$$

$$\propto = 0$$

yəni $\propto^{(k)} > 0$ olduqda $f(x)$ funksiyasının qiymətində azalma var.
Sürətli enmə üsulunun k-ci addlmlnda $\propto^{(k)} > 0$ (14.5) məsələsinin həllidir, onda

$$\frac{dg^{(k)}(\propto)}{d\propto}\Big|_{\propto=\propto^{(k)}} = (\nabla f(x^{(k+1)}), y^{(k)}) = 0 \rightarrow (y^{(k+1)}, y^{(k)}) = 0$$

Buradan belə nəticə çıxır ki, (k + 1)-ci iterasiyada enmə istiqaməti əvvəlki k-ci iterasiyada enmə istiqamətinə ortoqonaldır. Beləliklə, sürətli enmə üsulundan üzrə hərəkət əyrisi, bitişik əlaqələri qarşılıqlı ortoqonal olan sınıq bir xəttdir.

Qradiyent üsullarının effektivliyi minimallaşdırılan funksiyanın növündən asılıdır.

Məsələ 14.2. $\left|\frac{\partial f(x^{(k)})}{\partial x_i}\right| \le 0{,}05, i = 1{,}2$ hesablamanı tamamlayaraq, sürətli enmə üsulundan istifadə edərək

$$f(x) = f(x_1, x_2) = x_1^2 + 2x_2^2 + e^{x_1+x_2};\ x \in R^2$$

məqsəd funksiyasını minimallaşdırın.

Həlli:İlkin təxmini $x^{(0)} = (0{,}0)$ seçək, onda $\nabla f(x^{(k)}) = (1{,}1)$,

$$g^{(0)}(\propto) = f(0 - 1 \propto, 0 - 1 \propto) = 3 \propto + e^{-2\propto}$$

$g^{(0)}(\propto)$ funksiyasının $\propto^{(0)}$ minimum nöqtəsini tapmaq üçün seçmə (перебора) metodundan istifadə edirik:

$\propto$	0,18	0,20	0,22	0,24	0,26
$g^{(0)}(\propto)$	0,795	0,790	0,789	0,791	0,797

Yəni, $\propto^{(0)} = 0{,}22$.

Buradan alırıq

$$x^{(1)} = (0; 0) - 0{,}22(1; 1) = (-0{,}22; -0{,}22).$$

Addım 1. $\nabla f(x^{(1)}) = (0{,}204, -0{,}236)$,

$$g^{(1)}(\propto) = (-0{,}22 - 0{,}204 \propto)^2 + (-0{,}22 + 0{,}236 \propto)^2 + e^{-0{,}44+0{,}032\propto}$$

$g^{(1)}(\propto)$ minimallaşdıraq:

$\propto$	0,28	0,30	0,32	0,34	0,36
$g^{(1)}(\propto)$	0,77401	0,77384	0,77380	0,77387	0,77401

Yəni, $\propto^{(1)} = 0{,}32$.

Buradan alırıq

$$x^{(2)} = (-0{,}22, -0{,}22) - 0{,}32(0{,}204, -0{,}236)$$
$$= (-0{,}2853, \quad -0{,}1445).$$

Addım 2. $\nabla f\left(x^{(2)}\right) = (0{,}08007;\ \ 0{,}07268)$,

$$g^{(2)}(\propto) = (-0{,}2853 - 0{,}08007 \propto)^2$$
$$+ (-0{,}1445 + 0{,}07268 \propto)^2 + e^{-0{,}429+0{,}15275\propto}$$

$g^{(2)}(\propto)$ minimallaşdıraq:

$\propto$	0,20	0,22	0,24	0,26	0,28
$g^{(2)}(\propto)$	0,77273	0,77241	0,77240	0,77241	0,77244

Yəni, $\propto^{(2)} = 0{,}24$.

Buradan alırıq,

$$x^{(3)} = (-0{,}3045, -0{,}1619),$$

$\nabla f\left(x^{(3)}\right) = (0{,}01821;\ -0{,}02051)$, yəni tələb olunan dəqiqliyə nail olunmuşdur.

Beləliklə,

$x^* \approx x^{(3)}$ =(-0,305, -0,162),

$f^* \approx f$(-0,305, -0,162) =0,772 alırıq.

14.4.Qoşma qradiyent üsulu

(x) funksiyasının minimum nöqtəsinə$\{x^{(k)}\}$ ardıcıllığının qurulması proseduru aşağıdakı kimi təşkil edilmişdir:

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - \propto^{(k)} p^{(k)}, k = 0,1,2 \ldots, \quad (14.6)$$

$$p^{(0)} = \nabla f\left(x^{(0)}\right), p^{(k)} = \nabla f\left(x^{(k)}\right) + \beta^k p^{(k-1)}, k = 1,2, \ldots, \quad (14.7)$$

$\propto^{(k)} > 0$ enmə addımının qiyməti olaraq birölçülü minimumlaşdırma məsələlərinin həlli seçilir:

$$g^{(k)}\left(\propto^{(k)}\right) = \min_{\propto>0} g^{(k)}(\propto), g^{(k)}(\propto) = f(x^{(k)} - \propto p^{(k)}) \quad (14.8)$$

β^k parametri aşagıdakı düstirla müəyyən edilir:

$$\beta^k = \frac{\left\|\nabla f\left(x^{(k)}\right)\right\|^2}{\|\nabla f(x^{(k-1)})\|^2} = \frac{\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f\left(x^{(k)}\right)}{\partial x_i}^2}{\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f\left(x^{(k-1)}\right)}{\partial x_i}^2} \quad , \quad k = 1,2, \ldots,$$

Beləliklə, qoşma gradiyent üsulu sürətli enmə üsulundan yalnız istiqamət seçimində fərqlənir($y^{(k)} = -\nabla f\left(x^{(k)}\right)$ əvəzinə $p^{(k)}$). Bu zaman (14.7) ifadəsindən $p^{(k)}$ yalnız -$\nabla f\left(x^{(k)}\right)$ antiqradienti ilə deyil, həm də əvvəlki addımda $p^{(k-1)}$enmə istiqaməti ilə müəyyən edilir. Bu, $f(x)$ funksiyasının xüsusiyyətlərini onun minimum nöqtəsinə ardıcıl (14.6) yaxınlaşmalarını qurarkən yuxarıda müzakirə olunan qradiyent üsullarla müqayisədə daha dolğun nəzərə almağa imkan verir.

Teorem 14.5. Tutaq ki, $f(x)$ funksiyası aşağıdan məhduddur və onun $\nabla f(x)$ qradiyenti L > 0 sabiti ilə Lipşis şərtini ödəyir:

$$\|\nabla f(x') - \nabla f(x'') \| \leq L\|x' - x'' \|$$

$$\forall x', x'' \in R^n$$

Onda (14.6)–(14.8) düsturlarına uyğun qurulmuş $\{x^{(k)}\}$ ardıcıllığı üçün aşağıdakı bərabərliklər dogridir:

$$\lim_{k\to\infty}\left\|\nabla f\left(x^{(k)}\right)\right\| = 0.$$

Qoşma gradiyent üsulunun iterasiya prosedurunu tamamlamaq üçün şərt minimumlaşdırma məsələsinin həllinin düzgünlüyünə dair tələbin yerinə yetirilməsidir:

$$\left|\frac{\partial f\left(x^{(k)}\right)}{\partial x_i}\right| \leq \varepsilon_3 \text{ , i=1,2,....n və ya}$$

$$\left\|\nabla f\left(x^{(k)}\right)\right\| \leq \varepsilon_3 \text{ , } \varepsilon_3 > 0$$

Məsələ 14.3. $\left|\frac{\partial f\left(x^{(k)}\right)}{\partial x_i}\right| \leq 0{,}03, i = 1{,}2$ hesablamanı tamamlayaraq, qoşma qradiyent üsulundan istifadə edərək

$$f(x) = f(x_1, x_2) = x_1^2 + 2x_2^2;\ x \in R^2$$

məqsəd funksiyasını minimallaşdırın.

Həlli: İlkin təxmini $x^{(0)} = (1{,}1)$ seçək, onda

$$\nabla f\left(x^{(k)}\right) = (2{,}4),$$

$p^{(0)}=\ \nabla f\left(x^{(0)}\right) = (2{,}4),$

$$g^{(0)}(\propto) = f(1 - 2 \propto, 1 - 4 \propto) = 36 \propto^2 - 20 \propto +3$$

$g^{(0)}(\propto)$ funksiyasının $\propto^{(0)}$ minimum nöqtəsini tapmaq üçün $\frac{dg^{(0)}(\propto)}{d\propto} = 0$, $\propto=\propto^{(0)}$ yəni, $\propto^{(0)}= \frac{5}{18}$.

$$x^{(1)} = (1; 1) - \frac{5}{18}(2; 4) = \left(\frac{4}{9}; -\frac{1}{9}\right).$$

Addım I. $\nabla f\left(x^{(1)}\right) = \left(\frac{8}{9}, -\frac{4}{9}\right)$, $\beta^{(1)} = \frac{4}{81}$,

$$p^{(1)} = \left(\frac{8}{9}; -\frac{4}{9}\right) + \frac{4}{81}(2{,}4) = \left(\frac{80}{81}; -\frac{20}{81}\right),$$

$$g^{(1)}(\propto) = \frac{800}{729} \propto^2 - \frac{80}{81} \propto + \frac{2}{9}$$

$g^{(1)}(\propto)$minimallaşdıraq və buradan $a^{(1)} = \frac{9}{20}$ alırıq, Buradan

$$x^{(2)} = \left(\frac{4}{9}; -\frac{1}{9}\right) - \frac{9}{20}\left(\frac{80}{81}; -\frac{20}{81}\right) = (0{,}0)$$

$\nabla f\left(x^{(2)}\right) = (0{,}0)$,tələb olunan dəqiqlik əldə edilmişdir. Beləliklə,

$$x^* \approx x^{(2)} = (0,\ 0),$$

$$f^* \approx f(0,\ 0) = 0$$

alırıq.

Məsələ 14.4. $\left|\frac{\partial f\left(x^{(k)}\right)}{\partial x_i}\right| \leq 0{,}05, i = 1{,}2$ hesablamanı tamamlayaraq, qoşma qradiyent üsulundan istifadə edərək

$$f(x) = f(x_1, x_2) = x_1^2 + 2x_2^2 + x_1x_2 - 7x_1 - 7x_2,$$

$$x \in R^2$$

məqsəd funksiyasını minimallaşdırın.

Həlli: İlkin təxmini $x^{(0)} = (0{,}0)$ seçək, onda

$\nabla f\left(x^{(k)}\right) = (-7, -7),$

$p^{(0)}=\ \nabla f\left(x^{(0)}\right) = (-7, -7),$

$$g^{(0)}(\propto) = f(0 + 7 \propto, 0 + 7 \propto) = 98(2 \propto^2 - \propto)$$

$g^{(0)}(\propto)$ funksiyasının $\propto^{(0)}$ minimum nöqtəsini tapmaq üçün $\frac{dg^{(0)}(\propto)}{d\propto} = 0$, $\propto=\propto^{(0)}$ yəni, $\propto^{(0)} = \frac{1}{4}$.

$$x^{(1)} = (0;0) - \frac{1}{4}(-7,-7) = \left(\frac{7}{4};\frac{7}{4}\right).$$

Addım I. $\nabla f\left(x^{(1)}\right) = \left(-\frac{7}{4},\frac{7}{4}\right)$, $\beta^{(1)} = \frac{1}{16}$,

$$p^{(1)} = \left(-\frac{7}{4},\frac{7}{4}\right) + \frac{1}{16}(-7,-7) = \left(-\frac{35}{16};-\frac{21}{16}\right),$$

$$g^{(1)}(\propto) = \frac{49}{32}\left(\frac{7}{2}\propto^2 - 4\propto -392\right)$$

$g^{(1)}(\propto)$minimallaşdıraq və buradan $\alpha^{(1)} = \frac{4}{27}$ alırıq, Buradan

$$x^{(2)} = \left(\frac{7}{4};-\frac{7}{4}\right) - \frac{4}{7}\left(-\frac{35}{16};-\frac{21}{16}\right) = (3,1)$$

$\nabla f\left(x^{(2)}\right) = (0,0)$,tələb olunan dəqiqlik əldə edilmişdir.

Beləliklə,

$x^* \approx x^{(2)}$ =(3, 1),

$f^* \approx f$(3, 1) =-14 alırıq.

ÖZÜNÜ YOXLAMAQ ÜÇÜN SUALLAR VƏ TAPŞIRIQLAR

1. Qradiyent üsulunun alqoritmini izah edin.

2. Sürətli enmə üsulunu izah edin.

3. Qoşma qradiyent üsulunu izah edin.

4.$x^{(0)}$*nöqtəsindən* α *addımı ilə qradiyent enmənin bir addımını yerinə yetirin* $f(x^{(0)})$ *və* $f(x^{(1)})$ *qiymətlərini müqayisə edin:*

$f(x) = f(x_1, x_2) = x_1^2 + 2x_2^2 + e^{x_1+x_2}$,

$x^{(0)} = (1{,}1),\ \alpha = 0{,}1.$

5.$x^{(0)}$*nöqtəsindən* α *addımı ilə qradiyent enmənin bir addımını yerinə yetirin* $f(x^{(0)})$ *və* $f(x^{(1)})$ *qiymətlərini müqayisə edin:*

$f(x) = f(x_1, x_2) = x_1^2 + 2x_2^2 + e^{x_1+x_2}$,

$x^{(0)} = (1{,}1),\ \alpha = 0{,}265.$

6.$x^{(0)}$*nöqtəsindən* α *addımı ilə qradiyent enmənin bir addımını yerinə yetirin* $f(x^{(0)})$ *və* $f(x^{(1)})$ *qiymətlərini müqayisə edin:*

.$f(x) = f(x_1, x_2) = x_1^2 + 2x_2^2 + e^{x_1+x_2}$,

$x^{(0)} = (1{,}1),\ \alpha = 0{,}5.$

7.$x^{(0)}$*nöqtəsindən* α *addımı ilə qradiyent enmənin bir addımını yerinə yetirin* $f(x^{(0)})$ *və* $f(x^{(1)})$ *qiymətlərini müqayisə edin:*

$$f(x) = f(x_1, x_2) = 2x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2 + x_1 + x_2$$

$x^{(0)} = (0{,}0),\ \alpha = 0{,}1.$

8.$x^{(0)}$*nöqtəsindən* α *addımı ilə qradiyent enmənin bir addımını yerinə yetirin* $f(x^{(0)})$ *və* $f(x^{(1)})$ *qiymətlərini müqayisə edin:*

$$f(x) = f(x_1, x_2) = 2x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2 + x_1 + x_2$$

$x^{(0)} = (0{,}0),\ \alpha = 0{,}5.$

9.$x^{(0)}$*nöqtəsindən* α *addımı ilə qradiyent enmənin bir addımını yerinə yetirin* $f(x^{(0)})$ *və* $f(x^{(1)})$ *qiymətlərini müqayisə edin:*

$$f(x) = f(x_1, x_2) = 2x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2 + x_1 + x_2$$

$x^{(0)} = (0{,}0),\ \alpha = 1.$

10. $\left|\frac{\partial f(x^{(k)})}{\partial x_i}\right| \leq 0{,}01, i = 1{,}2$ *hesablamanı tamamlayaraq, sürətli enmə üsulundan istifadə edərək* $f(x) = f(x_1, x_2) = 7x_1^2 + 2x_1x_2 + 5x_2^2 + x_1 - 10x_2$ *məqsəd funksiyasını minimallaşdırın.*

11. $\left|\frac{\partial f(x^{(k)})}{\partial x_i}\right| \leq 0{,}01, i = 1{,}2$ *hesablamanı tamamlayaraq, sürətli enmə üsulundan istifadə edərək* $f(x) = f(x_1, x_2) = 3x_1^2 - 3x_1x_2 + 4x_2^2 - 2x_1 + x_2$ *məqsəd funksiyasını minimallaşdırın.*

12. $\left|\frac{\partial f(x^{(k)})}{\partial x_i}\right| \leq 0{,}01, i = 1{,}2$ *hesablamanı tamamlayaraq, sürətli enmə üsulundan istifadə edərək*

$$f(x) = f(x_1, x_2) = x_1^2 + 4x_1x_2 + 17x_2^2 + 5x_2$$

məqsəd funksiyasını minimallaşdırın.

13. $\left|\frac{\partial f(x^{(k)})}{\partial x_i}\right| \leq 0{,}01, i = 1{,}2$ *hesablamanı tamamlayaraq, sürətli enmə üsulundan istifadə edərək* $f(x) = f(x_1, x_2) = 5x_1^2 - 4x_1x_2 + 5x_2^2 - x_1 - x_2$ *məqsəd funksiyasını minimallaşdırın.*

14. $\left|\frac{\partial f(x^{(k)})}{\partial x_i}\right| \leq 0{,}01, i = 1{,}2$ *hesablamanı tamamlayaraq, sürətli enmə üsulundan istifadə edərək* $f(x) = f(x_1, x_2) = 4x_1^2 + 4x_1x_2 + 6x_2^2 - 17x_1$ *məqsəd funksiyasını minimallaşdırın.*

15. $\left|\frac{\partial f(x^{(k)})}{\partial x_i}\right| \leq 0{,}01, i = 1{,}2$ *hesablamanı tamamlayaraq, sürətli enmə üsulundan istifadə edərək* $f(x) = f(x_1, x_2) = 10x_1^2 + 3x_1x_2 + x_2^2 + 10x_2$ *məqsəd funksiyasını minimallaşdırın.*

16. $\left|\frac{\partial f(x^{(k)})}{\partial x_i}\right| \leq 0{,}02, i = 1{,}2$ *hesablamanı tamamlayaraq, qoşma qradiyent üsulundan istifadə edərək*

$f(x) = f(x_1, x_2) = 7x_1^2 + 2x_1x_2 + 5x_2^2 + x_1 - 10x_2$ *məqsəd funksiyasını minimallaşdırın.*

17. $\left|\frac{\partial f(x^{(k)})}{\partial x_i}\right| \leq 0{,}02, i = 1{,}2$ *hesablamanı tamamlayaraq, qoşma qradiyent üsulundan istifadə edərək* $f(x) = f(x_1, x_2) = 3x_1^2 - 3x_1x_2 + 4x_2^2 - 2x_1 + x_2$*məqsəd funksiyasını minimallaşdırın.*

18. $\left|\frac{\partial f(x^{(k)})}{\partial x_i}\right| \leq 0{,}02, i = 1{,}2$ *hesablamanı tamamlayaraq, qoşma qradiyent üsulundan istifadə edərək*

$$f(x) = f(x_1, x_2) = x_1^2 + 4x_1x_2 + 17x_2^2 + 5x_2$$

məqsəd funksiyasını minimallaşdırın.

19. $\left|\frac{\partial f(x^{(k)})}{\partial x_i}\right| \leq 0{,}02, i = 1{,}2$ *hesablamanı tamamlayaraq, qoşma qradiyent üsulundan istifadə edərək* $f(x) = f(x_1, x_2) = 5x_1^2 - 4x_1x_2 + 5x_2^2 - x_1 - x_2$*məqsəd funksiyasını minimallaşdırın.*

20. $\left|\frac{\partial f(x^{(k)})}{\partial x_i}\right| \leq 0{,}02, i = 1{,}2$ *hesablamanı tamamlayaraq, qoşma qradiyent üsulundan istifadə edərək* $f(x) = f(x_1, x_2) = 4x_1^2 + 4x_1x_2 + 6x_2^2 - 17x_1$ *məqsəd funksiyasını minimallaşdırın.*

XV FƏSİL. ÇOX DƏYİŞƏNLİ FUNKSİYALARIN MİNİMALLAŞDIRILMASINDA NYUTON ÜSULU

15.1. Çox dəyişənli funksiyaların minimallaşdırılmasında Nyuton üsulunun ümumi şəkildə qoyuluşu

Nyuton üsulu 2-ci tərtibli üsullara aiddir və minimumlaşdırma məsələsinin kifayət qədər yaxşı lokallaşdırıldığı halda istifadə edilməsi tövsiyə olunur. Bu, adətən ilkin mərhələdə sıfırıncı tərtibli üsulların (birbaşa axtarış üsullarından) birindən istifadə edildikdə və sonra Nyuton üsuluna keçid edildikdə mühüm əhəmiyyət kəsb edir.

Nyuton üsulunun ideyası şərti qradiyent üsuluna bənzəyir, lakin burada $x^{(k)}$ nöqtəsinin yaxınlığında $f(x)$ funksiyasının xətti yox, kvadratik approksimasiyasından istifadə edilir.

Fərz edək ki, $x^{(k)} \in R^n$ yaxınlaşması məlumdur. Əgər $f(x)$ məqsəd funksiyası R^n üzərində iki dəfə fasiləsiz diferensiallanarsa, onda $x^{(k)}$ nöqtəsinin ətrafında aşağıdakı parçalanma dogrudur: $f(x) = f^k(x) + r(x^{(k)}, h)$ və

$$\lim_{\propto \to \infty} \frac{r(x^{(k)}, h)}{\|h\|^2} = 0$$

Burada: $h = x - x^{(k)}$

$f^k(x)$ - aşağıdakı kvadratik funksiyanı göstərir:

$$f^k(x) = f(x^{(k)}) + (\nabla f x^{(k)}), h) + \frac{1}{2}(h, H\big(x^{(k)}\big)h)$$

Fərz edək ki, Hesse matrisi $\big(H(x^{(k)}\big)$ müsbət müəyyəndir. Növbəti $x^{(k+1)}$ nöqtəsi qismində $f^k(x)$ kvadratik funksiyasının qlobal minimum nöqtəsini seçirik:

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - H^{-1}(x^{(k)}) \cdot \nabla f(x^{(k)}) \quad (15.1)$$

Burada:

$$f^k(x^{(k+1)}) = f(x^{(k)}) - \frac{1}{2}(H^{-1}(x^{(k)}) \cdot \nabla f(x^{(k)}), \nabla f(x^{(k)}).$$

İstənilən $y \in R^n, y \neq 0$ oldugu üçün (y, $H^{-1}y) > 0$.

Onda

$$f^k(x^{(k+1)}) < f(x^{(k)}) \text{ və } f^k(x^{(k)}) = f(x^{(k)}),$$

yəni,

$$h = x^{(k+1)} - x^{(k)} = -H^{-1}(x^{(k)})\,) \cdot \nabla f(x^{(k)})$$

vektoru ($x^{(k)}$ nöqtəsində $f^k(x)$-in azalma istiqamətini, eləcə də $f(x)$ -in məqsəd funksiyasının azalma istiqamətini müəyyən edir:

$$f(x^{(k+1)}) - f(x^{(k)} < 0 \text{ (15.2)}$$

Dogrudan da

$$f^k(x) = \nabla f(x^{(k)}) + H(x^{(k)})\text{h} \rightarrow (\nabla f^k(x^{(k)}), h^k)$$
$$= (\nabla f(x^{(k)}), h^k)$$

Bu halda

$$f^k(x^{(k+1)}) < f^k(x^{(k)})$$

yəni, h^k- $x^{(k)}$ nöqtəsində $f^k(x)$-in azalma istiqamətini müəyyən edir:

$(\nabla f^k(x^{(k)}), h^k) < 0 \rightarrow$ $(\nabla f(x^{(k)}), h^k) < 0$ (15.2)

bərabərsizliyi yalnız ($x^{(k)}$ -ə yaxın $x^{(k+1)}$ nöqtəsi üçün doğru olacaqdır.

Beləliklə, (15.1) düsturu iterativ prosesi təşkil etmək üçün istifadə edilə bilər (onun yaxınlaşmasını təmin edən bəzi məhdudiyyətlərlə).

Teorem 15.1.Fərz edək ki, $f(x)$ funksiyası R^n üzərində iki dəfə fasiləsiz diferensiallanır, x^*- $f(x)$ funksiyasının stasionar nöqtəsidir və $H(x^*)$ Hess matrisi dəyişmir.

Onda x^* nöqtəsinin elə qonşulugu var ki, buradan istənilən ilkin $x^{(0)}$ yaxınlaşması üçün (15.1) düsturuna uyğun olaraq $\{x^k\}$ ardıcıllığı qurulur:

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - H^{-1}(x^{(k)}) \cdot \nabla f(x^{(k)}), k = 1,2,3, \dots \dots$$

x^* yaxınlaşır.

Beləliklə, hər hansı bir $x^{(0)} \in U\ (x^*)$ üçün $\{x^k\}$ (15.9) ardıcıllığını alırıq, hər bir sərhəd nöqtəsi

$$\nabla f(x^*) = 0 \text{ şərtini ödəyir.}$$

Deməli, əgər $x^{(0)}$ ilkin yaxınlaşması f(x) funksiyasının minimum nöqtəsinə kifayət qədər yaxın seçilibsə, onda Nyuton metodu (15.1) ilə qurulan ardıcıllıq bu nöqtəyə uygunlaşacaqdır.Lakin minimum nöqtənin mövqeyini bilmədən belə bir $x^{(0)}$seçimi praktiki olaraq mümkün deyil.

15.2 Nyuton üsulunun təhlili

Nyuton üsulunun təhlilinin sxemi aşagıdakı kimidir:

1) Ümumi halda hər iterasiyada ikinci törəmələrin $H^{-1}(x^{(k)})$ matrisinin hesablanması prosesi əhəmiyyətli hesablama xərcləri tələb edir ki, bu da Nyuton üsulundan istifadənin səmərəliliyini kəskin azaldır.

2) Prosesin yaxınlaşması o zaman təmin edilir ki, ilkin nöqtə $x^{(0)}$ ekstremum nöqtəsinə kifayət qədər yaxın olsun.

3) Nyuton üsulunun iterativ prosedurunun başa çatmasının şərti minimumlaşdırma məsələsinin həllinin düzgünlüyünə dair tələbin yerinə yetirilməsidir:

$$\frac{\partial f(x^k)}{\partial x_i} \leq \varepsilon_3, i = 1,2,3, \dots .. n, \quad \text{və ya}$$

$$\left\| \nabla f(x^{(k)} \right\| \leq \varepsilon_3, \varepsilon_3 > 0.$$

4) Həll seçimi. x^* üçün təxmin qismində sonuncu hesablanmış x^k nöqtəsi qəbul edilir.Onda $f(x^{(k)})$ dəyəri təqribən f^*=$f(x^{(*)})$ dəyərini müəyyən edir.

Məsələ 15.1. $f(x) = \sqrt{(1 + x^2)}, x \epsilon R$ məqsəd funksiyasının minimum nöqtəsini heablayın:

Həlli: Addım 0. İlkin $x^{(0)} = c \ > \ 0$ yaxınlaşmasını seçək. $f(x)$ funksiyasının birinci və ikinci törəmələrini hesablayaq:

$f'(x) = \frac{x}{\sqrt{(1+x^2)}}$, $f''(x) = \frac{x}{\sqrt{(1+x^2)^{3/2}}} \to \left(f''(x)\right)^{-1} = (1+x^2)^{3/2}$

Addım 1. 15.1. düsturuna əsasən $x^{(1)}$ hesablayaq:

$$\boldsymbol{x}^{(1)} = \boldsymbol{x}^{(0)} - \left(f''\left(\boldsymbol{x}^{(0)}\right)\right)^{-1} f'\left(\boldsymbol{x}^{(0)}\right)$$
$$= c - (1+c^2)^{\frac{3}{2}} \cdot \frac{x}{\sqrt{(1+c^2)}} = c - c(1+c^2)$$
$$= -c^3$$

Addım 2. $x^{(2)}$ hesablayaq:

$$\boldsymbol{x}^{(2)} = \boldsymbol{x}^{(1)} - \left(f''\left(\boldsymbol{x}^{(1)}\right)\right)^{-1} f'\left(\boldsymbol{x}^{(1)}\right)$$
$$= -c^3 - (1+(-c^3)^2)^{\frac{3}{2}} \cdot \frac{-c^3}{\sqrt{1+(-c^3)^2}}$$
$$= -c^3 + -c^3(1+c^6) = c^9$$

Nəticədə ilkin $\boldsymbol{x}^{(0)}$yaxınlaşmasının müvafiq seçimi ilə:

- $\left|x^{(0)}\right| < 1 \to x^{(k)} \to x_{min} = 0;$
- $\left|x^{(0)}\right| = 1 \to x^{(k)} = -1^{(k)};$
- $\left|x^{(0)}\right| > 1 \to x^{(k)} \to \infty.$

Beləliklə, bu misalda, ilkin yaxınlaşmanın $x^{(0)} = c \ > \ 1$ seçilməsində Nyuton üsulundan istifadə, minimum nöqtədən uzaqlaşan $\{x^{(k)}\}$ ardıcıllığının qurulmasına gətirib çıxarır.

Məsələ 15.2. $\left|\frac{\partial f(x^{(k)})}{\partial x_i}\right| \leq 10^{-5}, i = 1,2$ dəqiqliyi ilə ilkin yaxınlaşma kimi $x^{(0)} = (0{,}3012259, -0{,}1529096)$ seçərək, Nyuton üsulu ilə

$$f(x) = f(x_1, x_2) = x_1^2 + 2x_2^2 + e^{x_1+x_2};\ x \in R^2$$

funksiyasının minimum nöqtəsini tapın:

Həlli: Addım 0. İlkin yaxınlaşma

$$x^{(0)} = (0{,}3012259, -0{,}1529096),$$

onda

$$\nabla f(x^{(0)}) = (0{,}02622655 - 0{,}02296005),$$

$$H(x^{(0)}) = \begin{matrix} 0{,}39319151 & 0{,}62867835 \\ 0{,}62867835 & 0{,}22329787 \end{matrix}$$

$H^{-1}(x^{(0)})$ tərs matrisini tapaq:

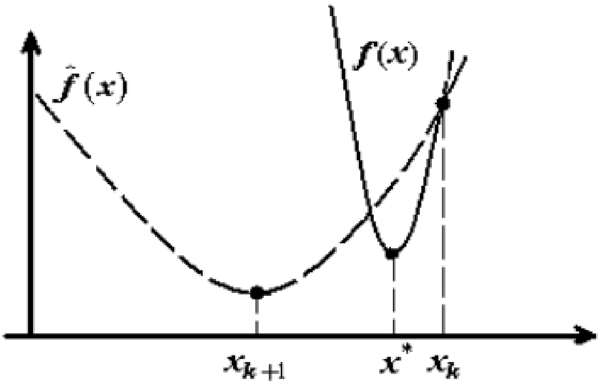
$$H^{-1}(x^{(0)}) = \begin{pmatrix} 0{,}39319151 & -0{,}053404226 \\ -0{,}053404226 & 0{,}22329787 \end{pmatrix}$$

Addım 1.(15.9) düsturu əsasında $x^{(1)}$ hesablayaq: $x^{(1)} = x^{(0)} - H^{-1}(x^{(0)}) \cdot \nabla f(x^{(0)}) = (-0{,}3012259, -0{,}1629096) - \begin{pmatrix} 0{,}39319151 & -0{,}053404226 \\ -0{,}053404226 & 0{,}22329787 \end{pmatrix} \cdot (0{,}02622655 - 0{,}02296005) = (-0{,}3127641, -0{,}1563821)$

$\nabla f(x^{(1)}) = (7{,}9 \cdot 10^{-6}, 7{,}9 \cdot 10^{-6})$, yəni, tələb olunan dəqiqlik əldə edilmişdir. Buna görə də

$\boldsymbol{x}^* = \boldsymbol{x}^{(1)} = (-0{,}3127641, -0{,}1563821)$ alırıq.

Aydındır ki, müsbət müəyyən matrisi A olan kvadratik funksiya üçün Nyuton üsulundan istifadə, istənilən $x^{(0)} \epsilon R^n$ nöqtəsindən qlobal minimum nöqtənin bir addımda alınmasını təmin edir.



Şəkil 15.1. Nyuton üsulunun qrafik təsviri

Kvadrat funksiyadan başqa qabarıq funksiya üçün bu üsuldan istifadə adətən sürətli yaxınlaşmanı təmin edir.
Fakt budur ki, iterativ prosesin hər bir addımında təkcə birinci deyil, həm də onun ikinci qismən törəmələrinin qiymətlərində $f(x)$ funksiyasının x^k nöqtəsinin ətrafında olan davranışı haqqında məlumatdan istifadə olunur.
Buna görə də, digər şərtlər bərabər olduqda, gradiyent metodları ilə müqayisədə Nyuton üsulu daha sürətli yaxınlaşmanı təmin edir.

15.3.Nyuton-Rafson üsulu

Nyuton-Rafson üsulu modifikasiya edilmiş (dəyişdirilmiş) Nyuton üsuludur və onun mənfi cəhətlərini, məsələn, $\{x^{(k)}\}$ (15.1) ardıcıllığının x* nöqtəsinə yaxınlaşmaması ehtimalını aradan qaldırır.
Nyuton-Rafson üsulunda $\{x^{(k)}\}$ ardıcıllığı aşağıdakı düstura əsasən qurulur:

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - \alpha^{(k)} H^{-1}(x^{(k)}) \nabla f(x^{(k)}),$$
$$k = 0,1,2,3, \dots . n \quad (15.3)$$

Enmə addımın qiyməti kimi $\alpha^{(k)} > 0$ kimi aşağıdakı birölçülü minimumlaşdırma məsələsinin həlli seçilir

$$g^{(k)}\left(\alpha^{(k)}\right) = \min_{\alpha>0} g^{(k)}\,(\alpha),$$
$$g^{(k)}(\alpha) = f(x^{(k)} - \alpha H^{-1}(x^{(k)}) \cdot \nabla f(x^{(k)})). (15.4)$$

Teorem 15.2. $f(x)$ funksiyasının R^n üzərində iki dəfə fasiləsiz diferensiallana bildiyini qəbul edək və $M > m > 0$ ədədləri vardır ki, $\forall x, s \in R^n$ üçün aşağıdakı bərabərsizlik yerinə yetirilir:

$$m\|s\|^2 \le (s, H(x)s) \le M\|s\|^2.$$

Burada:
$H(x)$- Hesse matrisdir. Onda (15.3), (15.4) düsturlarına uyğun olaraq

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - H^{-1}(x^{(k)}) \cdot \nabla f(x^{(k)}),$$

$$k = 0,1,2,3, \dots . n$$

qurulan $\{x^{(k)}\}$ ardıcıllığı $x^{(0)}$ ilkin yaxınlaşmasının seçimindən asılı olmayaraq x* minimum nöqtəsinə yaxınlaşır.

Nyuton üsulunun digər modifikasiyası kimi aşağıdakı iterasiya sxemindən istifadə etmək olar:

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - \alpha^{(k)} H^{-1}(x^{(0)}) \nabla f(x^{(k)}),$$

$$k = 0,1,2,3, \dots . n \qquad (15.5).$$

Burada:

$\alpha^{(k)} > 0$ – tək ölçülü minimumlaşdırma məsələsinin həllidir:

$$g^{(k)}\left(\alpha^{(k)}\right) = \min_{\alpha > 0} g^{(k)}(\alpha),$$

$$g^{(k)}(\alpha) = f(x^{(k)} - \alpha H^{-1}(x^{(0)}) \cdot \nabla f(x^{(k)})).$$

Bu halda enmə istiqamətini qurmaq üçün ikinci törəmələrin) bir dəfə hesablanmış və tərsinə çevrilmiş matrisindən $H(x^{(0)}$istifadə edilir.

Əgər $H(x^{(0)})$ matrisi müsbət müəyyəndirsə, onda (15.5) iterativ proses qradiyentin enişinin modifikasiyasıdır və ilkin $(x^{(0)}$ yaxınlaşmasının seçimindən asılı olmayaraq birləşir.

15.4. Kvazi-Nyuton üsulu

Müəyyən səbəblərdən $f''(x^k)$ matrisini hesablamaq çətindirsə, onda ədədi diferensiasiya düsturlarından istifadə edərək onun approksimasiyasını qurmaq olar. Bu yanaşmadan istifadə edərək qurulan üsullara kvazi-Nyuton üsulu deyilir. Bu məsələyə daha ətraflı baxaq.

$f''(x^k)$ matrisi ikinci dərəcəli qismən törəmələri ehtiva etdiyinə görə, iki dəyişənli $f(x, y)$ funksiyası halını nəzərdən keçirmək kifayətdir.

$\frac{\partial^2 f}{\partial x_2}$ və. $\frac{\partial^2 f}{\partial y_2}$ törəmələrinin approksimasiya üçün məlum olan

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_2} = \frac{f(x-h,y) - 2f(x,y) + f(x+h,y)}{h^2} + O(h^2)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y_2} = \frac{f(x,y-h) - 2f(x,y) + f(x,y+h)}{h^2} + O(h^2)$$

münasibətlərindən istifadə edirik.
Burada:
h-ədədi differensasiya üçün yazılmış düsturların xətasını müəyyən edən kiçik parametrdir.

İndi qarışıq törəməli $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ approksimasiyası üçün fərq münasibətini çıxaraq. İxtiyari kifayət qədər hamar g(x, y) funksiyası üçün fərq operatorlarını təqdim edək:

$$g_x = \frac{g(x+h,y) - g(x,y)}{h}$$

$$g_y = \frac{g(x,y+h) - g(x,y)}{h}$$

$$g_{\bar{x}} = \frac{g(x,y) - g(x-h,y)}{h}$$

$$g_{\bar{y}} = \frac{g(x,y) - g(x,y-h)}{h}$$

$g_x = \frac{\partial g}{\partial x} + \frac{h\partial^2 g}{2\partial x^2}$+o$(h^2)$

$f_{\bar{y}} = \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{h\partial^2 f}{2\partial y^2}$+o$(h^2)$ olduğunu bilərək, $g = f_{\bar{y}}$ üçün bu parçalanmalardan istifadə edərək əldə edirik:

$(f_{\bar{y}})_x = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + \frac{h\partial^3 f}{2\partial^2 x \partial y} - \frac{h\partial^3 f}{2\partial x \partial^2 y}$+o$(h^2)$

Analoji olaraq

$(f_y)_{\bar{x}} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + \frac{h\partial^3 f}{2\partial^2 x \partial y} - \frac{h\partial^3 f}{2\partial x \partial^2 y}$+o($h^2$) alarıq.

Son iki əlaqəni cəmləyərək,

$\frac{1}{2}((f_{\bar{y}})_x + (f_y)_{\bar{x}}) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$+o($h^2$) alarıq.

Burada:

$$(f_{\bar{y}})_x = \frac{f(x+h,y) - f(x,y) + f(x+h,y-h) + f(x,y-h)}{h^2}$$

$$(f_y)_{\bar{x}} = \frac{f(x,y+h) - f(x,y) + f(x-h,y+h) + f(x-h,y)}{h^2}$$

Bu fərq münasibətləri yuxarıdakı fərq operatorlarının ardıcıl tətbiqi ilə əldə edilir. Kvadrat funksiya üçün

$$f(x) = \frac{1}{2}(Ax,x) + b(x);\; f'(x) = Ax + b;\; f''(x) = A$$

(15.1) düsturu aşagıdakı şəkil alır:

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - A^{-1}(Ax^{(k)} + b) \quad (15.6.)$$

yəni, istənilən ilkin yaxınlaşmada dəqiq həll bir iterasiyada əldə edilir.

ÖZÜNÜ YOXLAMAQ ÜÇÜN SUALLAR VƏ TAPŞIRIQLAR

1. Nyuton üsulunu xarakterizə edin.

2. Nyuton-Rafson üsulunu xarakterizə edin.

3. Kvazi-Nyuton üsulunu xarakterizə edin..

4. Kvadrat funksiyanın minimum nöqtəsini Nyuton metodunun bir iterasiyası ilə $x^{(0)} \in R^n$ ixtiyari ilkin yaxınlaşmadan tapıla bilməsini göstərin.

5. 4-cü tapşırığın nəticəsindən istifadə edərək, kvadrat funksiyanın minimum nöqtəsini tapmaq üçün $x^{(0)} \in R^n$ ixtiyari ilkin yaxınlaşmasında Nyuton-Rafson üsulunun bir iterasiyasının kifayət oldugunu göstərin.

6. Nyuton üsulunun bir iterasiyası ilə

$$f(x) = f(x_1, x_2) = 7x_1^2 + 2x_1x_2 + 5x_2^2 + x_1 - 10x_2$$

funksiyasını minimallaşdırın.

7.Nyuton üsulunun bir iterasiyası ilə

$$f(x) = f(x_1, x_2) = x_1^2 + 4x_1x_2 + 17x_2^2 + 5x_2$$

funksiyasını minimallaşdırın.

8. Nyuton üsulunun bir iterasiyası ilə

$$f(x) = f(x_1, x_2) = 4x_1^2 + 4x_1x_2 + 6x_2^2 - 17x_1$$

funksiyasını minimallaşdırın.

9. Nyuton üsulunun bir iterasiyası ilə

$$f(x) = f(x_1, x_2) = 3x_1^2 + 3x_1x_2 + 4x_2^2 - 2x_1 + x_2$$

funksiyasını minimallaşdırın.

10. Nyuton üsulunun bir iterasiyası ilə

$$f(x) = f(x_1, x_2) = 5x_1^2 + 4x_1x_2 + 5x_2^2 - x_1 - x_2$$

funksiyasını minimallaşdırın.

11. Nyuton üsulunun bir iterasiyası ilə

$$f(x) = f(x_1, x_2) = 10x_1^2 + 3x_1x_2 + x_2^2 + 10x_2$$

funksiyasını minimallaşdırın.

12. Nyuton üsulunun bir iterasiyası ilə $f(x) = f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2$*funksiyasını minimallaşdırın.*

13. Nyuton üsulunun bir iterasiyası ilə

$$f(x) = f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 + x_1 + x_2$$

funksiyasını minimallaşdırın.

14.İxtiyarı ilkin yaxınlaşma kimi $x^{(0)} \in R^4$ *–dən istifadə edərək Nyuton üsulu ilə*

$$f(x) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 - 2x_2 + 2x_3 - 2x_4$$

funksiyasını minimallaşdırın.

15.$\left|\frac{\partial f(x^{(k)})}{\partial x_i}\right| \leq 10^{-5}, i = 1,2$ *dəqiqliyi ilə ixtiyari ilkin yaxınlaşma kimi* $x^{(0)} \in R^2$ *seçərək, Nyuton-Rafson üsulu ilə*$f(x) = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + 1} + \frac{1}{2}x_1 - \frac{1}{2}x_2$ *funksiyasının minimum nöqtəsini tapın:*

ŞƏRTİ İŞARƏLƏR:

$x\epsilon X$ - x elementinin X çoşluguna daxil oldugunu göstərir;
R-həqiqi ədədlər çoxluğudur;
R^n- n ölçülü Evklid fəzasıdır;
$A = [a_{ij}] - mxn$ ölçülü matrisdir;
A^T –A matrisi transporizə olunmuşudur;
A^{-1} - kvadrat A matrisinin tərs matrisidir;
$[a, b] -$ ucları a və b nöqtələri olan parçadır;
$det\ A$ –kvadrat A matrisinin determinantıdır;
min $f(x)$ $və$ max $f(x)$-X çoxlugunda $f(x)$ funksiyasının uygun olaraq minimum və maksimum qiymətlərini göstərir;
$m_0 = \inf\limits_{x \in X} f(x)$ədədi X çoxluğunda $f(x)$ funksiyasının aşağı həddini göstərir;
$M_0 = \sup\limits_{x \in X} f(x)$ədədi X çoxluğunda $f(x)$ funksiyasının yuxarı həddini göstərir;
x^* - $f(x)$ funksiyasının X çoxlugunda minimum nöqtəsini göstərir;
$f(x): R^n \rightarrow R$ funksiyasının stasionar nöqtəsidir;
$f'(x) = \left(\frac{\partial f(x)}{\partial x_1}, \frac{\partial f(x)}{\partial x_2}, \dots \dots \dots \frac{\partial f(x)}{\partial x_n}\right)$ - $f(x)$ funksiyasının x nöqtəsində qradiyentidir;
$\mathrm{H}(x) -$ Hesse matrisini göstərir;
$\propto^{(k)} -$ enmə addımının kəmiyyətidir;

ƏDƏBİYYAT:

Azərbaycan dilində

1. A.H.Əliyev, Riyazi proqramlaşdırma (kompüter yönümlü yanaşma). dərs vəsaiti, Bakı, "İqtisad Universiteti" nəş.,,2010, 476 s.
2. Hacızalov Y., Kərimova Y., Hüseynova L., Ekonometrika: nəzəriyyə və praktikum, Dərslik, Bakı, "İqtisad Universiteti" nəş., 2010, 520 s.
3. İsgəndərov A.D., Tağıyev R.Q., Yaqubov Q.Y. Optimallaşdırma üsulları, Bakı. Çaşıoğlu,2002,400s.
4. Quliyev H.F., Yusubov Ş.Ş., Variasiya və optimallaşdırma üsullarının əsasları, Bakı, Çaşıoğlu,2010, 232s.
5. S.Ə.Şabanov. EXCEL paketində iqtisadi-riyazi modellərin həlli, metodik vəsait, Bakı. "İqtisad Universiteti" nəş., 2007, 53 s.
6. Yadigarov T.A. "Əməliyyatlar tədqiqi və ekonometrik məsələlərin Ms.Excel və Eviews proqram paketlərində həlli: Nəzəriyyə və praktika", Bakı, "Avropa" nəş., 2019,352 s.

Rus dilində:

7. Аксёнов, Е.П., Методы оптимальных решений, учеб. Пос., Пермь, ИПЦ «Прокрость», 2016, 90 с.
   Аттетков, А.В., Методы оптимизации, Москва: РИОР: ИНФРА-М, 2013, 269с.
8. Акулич И.Л., Математическое программирование в примерах и задачах,. Москва, Высшая школа, 2012.
9. Бахтин В. И., Линейное программирование, метод. пос. для студентов, В. И. З.Бахтин, И. А. Иванишко и др.,Минск, БГУ, 2012, 39 с.
10. Банди Б..Основы линейного программирования, пер. с англ., М., Радио и связь, 1989, 176 с.
11. Гончаров В.А., Методы оптимизации, учебное пособие, Москва , Издательство Юрайт, 2019
12. Гребенникова, И.В. Методы оптимизации, учебное пособие , Екатеринбург ,УрФУ, 2017,148 с.

13. Жидкова Н.В., Методы оптимизации систем (Электронный ресурс), учебное пособие. Саратов, Ай Пи Эр Медиа, 2018, 149 с.
14. Исследование операций в экономике, учеб. Пособие, под редак. проф. Н.Ш. Кремера,.М.,Юрайт, 2011,430с.
15. Каштаева С.В.. Методы оптимизации.учебное пособие, Пермь, ИПЦ “Прокростъ”, 2020, 84 с
16. Кочегурова Е.А.,Теория и методы оптимизации, учебное пособие для академического бакалавриата, Москва, Юрайт, 2016
17. Леонова Н.Л. Задачи линейного программирования и методы их решения, учебно-методическое пособие,ВШТЭ СПбГУПТД., СПб.,2017,75 с.
18. Методы оптимизации. В 4ч. Ч.1. Линейная оптимизация и ее приложения, учеб.-метод. пособие, Н. В. Лапицкая, Н. П. Можей., Минск , БГУИР, 2018, 179 с. .
19. Методы оптимизации: теория и алгоритмы, учебное пособие, А.А.Черняк, Ж.А.Черняк Ю.М. Метельский, С. А. Богданович., Москва, Юрайт, 2018.
20. Методы оптимизации, учебник, под ред. Ф. П. Васильева., Ф. П. Васильев, М. М. Потапов и др Москва, Юрайт, 2018.
21. Муравьева, Н.В.,Линейное программирование, учебное пособие, Челябинск, Изд. центр ЮУрГУ, 2011, 50 с.
22. Певнева А.Г., Калинкина М.Е., Методы оптимизации, учебное пособие, Санкт-Петербург, Университет ИТМО, 2020, 64 с.
23. Попов, А.М., Экономико-математические методы и модели, учебник , М., Юрайт, 2012, 479с.
24. Шевченко А.С., Линейное программирование, учебное пособие, Рубцовский индустриальный институт, Рубцовск, 2021, 150 с.
25. Шелехова Л. В., Методы оптимальных решений, учебное пособие, Санкт-Петербург, Лань, 2017, 304 с.

MÜNDƏRİCAT

Çapa imzalanıb: 29.11.2024
Kağızın formatı: 60x84 1/16.
Həcmi 15,125 ç.v. (219324 işarə)
Tiraj 200.

“AA – Poliqraf” istehsalat-kommersiya birliyində hazır diopozitivlərdən istifadə olunmaqla çap edilmişdir.

Əlaqə üçün: capevi@internet.ru Tel.: +994552012809