

**В.Т. Пчентлешев**

**АНАЛИТИЧЕСКИЙ  
МЕТОД  
ВЫЧИСЛЕНИЯ ЗНАЧЕНИЯ  
ЧИСЛА ПИ**



Москва 2021

**В.Т. Пчентлешев**

**АНАЛИТИЧЕСКИЙ  
МЕТОД  
ВЫЧИСЛЕНИЯ ЗНАЧЕНИЯ  
ЧИСЛА ПИ**

**Издательство «Перо»  
Москва, 2021**

УДК 51  
ББК 22.1  
П92

Книга издана за счет средств автора, в авторской редакции.

**В.Т. Пчентлешев. Аналитический метод вычисления значения числа ПИ.** – М.: Издательство «Перо», 2021 – 294 с.

ISBN 978-5-00189-333-2

В настоящей книге предложен аналитический, непосредственно связанный с геометрией, круга, цилиндра, тора, конуса и шара, метод вычисления значения числа ПИ ( $\pi$ ) с какой угодно точностью. Доказано, что число ПИ, стоящее в формулах для вычисления, длины окружности, площади круга, площади поверхности цилиндра, объема цилиндра, площади поверхности тора, объема тора, площади поверхности конуса, объема конуса, площади поверхности сферы и объем шара – имеет разные значения.

Книга будет полезна математикам, а также студентам, преподавателям и всем любителям математики.

In this book, an analytical method is proposed that is directly related to the geometry of a circle, cylinder, torus, cone and ball, a method for calculating the value of the number PI ( $\pi$ ) with any accuracy. It is shown that the number PI, which is used in formulas for calculating the circumference, the area of the circle, the surface area of the cylinder, the volume of the cylinder, the surface area of the torus, the volume of the torus, the surface area of the cone, the volume of the cone, the surface area of the sphere and the volume of the ball, has different values.

The book will be useful for mathematicians, as well as students, teachers and all lovers of mathematics.

ISBN 978-5-00189-333-2

© В.Т. Пчентлешев, 2021

## Оглавление

Оглавление.....	3
Предисловие.....	6
Введение.....	7
Глава 1	
§1. Положения, используемые при доказательствах.....	15
Глава 2	
§2. Вычисление длины окружности и площади круга.....	19
§2.1. Вычисление длины окружности.....	19
§2.1.1. Метод вписанного многоугольника.....	19
§2.1.2. Метод описанного многоугольника.....	22
§2.1.3. Результирующий метод.....	25
§2.2. Вычисление площади круга.....	27
§2.2.1. Метод вписанного многоугольника.....	27
§2.2.2. Метод описанного многоугольника.....	28
§2.2.3. Результирующий метод.....	29
§2.3. Выводы.....	31
§2.4. О решение задачи квадратуры круга.....	36
Глава 3	
§3. Вычисление площади поверхности и объема цилиндра.....	38
§3.1. Вычисление площади поверхности цилиндра.....	38
§3.1.1. Метод вписанного многогранника.....	38
§3.1.2. Метод описанного многогранника.....	42
§3.1.3. Результирующий метод.....	49
§3.2. Вычисление объема цилиндра.....	51
§3.2.1. Метод вписанного многогранника.....	51
§3.2.2. Метод описанного многогранника.....	52
§3.2.3. Результирующий метод.....	53
§3.3. Выводы .....	55

## Глава 4

§4. Вычисление площади поверхности и объема тора.....	57
§4.1. Вычисление площади поверхности тора.....	57
§4.1.1. Метод вписанного многогранника.....	57
§4.1.2. Метод описанного многогранника.....	65
§4.1.3. Результирующий метод.....	74
§4.2. Вычисление объема тора.....	76
§4.2.1. Метод вписанного многогранника.....	76
§4.2.2. Метод описанного многогранника.....	77
§4.2.3. Результирующий метод.....	78
§4.3. Выводы.....	79

## Глава 5

§5. Вычисление площади поверхности и объема конуса.....	81
§5.1. Вычисление площади поверхности конуса.....	81
§5.1.1. Метод вписанного многогранника.....	81
§5.1.2. Метод описанного многогранника.....	86
§5.1.3. Результирующий метод.....	92
§5.2. Вычисление объема конуса.....	95
§5.2.1. Метод вписанного многогранника.....	95
§5.2.2. Метод описанного многогранника.....	96
§5.2.3. Результирующий метод.....	96
§5.3. Выводы.....	98

## Глава 6

§6. Вычисление площади поверхности сферы и объема шара... ..	100
§6.1. Вычисление площади поверхности сферы.....	100
§6.1.1. Метод вписанного многогранника.....	100
§6.1.1.1. Вычисление площади основания первой пирамиды....	100
§6.1.1.2. Вычисление площади основания второй пирамиды....	115
§6.1.1.3. Вычисление площади основания третьей пирамиды... ..	129
§6.1.1.4. Вычисление площади основания последней пирамиды	143
§6.1.1.5. Вычисление площади поверхности всей сферы.....	153
§6.1.2. Метод описанного многогранника.....	160
§6.1.2.1. Вычисление площади основания первой пирамиды... ..	160
§6.1.2.2. Вычисление площади основания второй пирамиды....	170
§6.1.2.3. Вычисление площади основания третьей пирамиды....	180

§6.1.2.4. Вычисление площади основания последней пирамиды	190
§6.1.2.5. Вычисление площади поверхности всей сфера.....	200
§6.1.3. Результирующий метод.....	205
§6.2. Вычисление объема шара.....	214
§6.2.1. Метод вписанного многогранника.....	214
§6.2.1.1. Вычисление объема первой пирамиды.....	214
§6.2.1.2. Вычисление объема второй пирамиды.....	221
§6.2.1.3. Вычисление объема третьей пирамиды.....	228
§6.2.1.4. Вычисление объема последней пирамиды.....	235
§6.2.1.5. Вычисление объема всего шара.....	244
§6.2.2. Метод описанного многогранника.....	258
§6.2.2.1. Вычисление объема первой пирамиды.....	258
§6.2.2.2. Вычисление объема второй пирамиды.....	259
§6.2.2.3. Вычисление объема третьей пирамиды.....	261
§6.2.2.4. Вычисление объема последней пирамиды.....	262
§6.2.2.5. Вычисление объема всего шара.....	265
§6.2.3. Результирующий метод.....	271
§6.3. Выводы.....	284
Заключение .....	288
Литература.....	293

## Предисловие

Автора всегда интересовали задачи, которые считались неразрешимыми. Одной из таких задач является задача квадратуры круга. Автору хотелось попробовать свои силы в решении этой задачи. Первые же полученные результаты оказались настолько неожиданными и необычными, что автор поначалу думал, что он в чем-то ошибается. Настолько невероятной казалась сама мысль о том, что в течение нескольких тысячелетий (по сути, за всю историю человеческой цивилизации) никто из математиков (и вообще из образованных людей) не обратил внимание на то, что числа  $\pi$ , стоящие в формулах для вычисления, длины окружности, площади круга, площади поверхности цилиндра, объема цилиндра, площади поверхности тора, объема тора, площади поверхности конуса, объема конуса, площади поверхности сферы и объема шара – могут иметь разные значения. Со временем автору пришлось столкнуться с похожей ситуацией в других науках (в частности, в физике), когда казалась бы общепринятые истины, на самом деле оказываются никакими не истинами, а произвольно принятыми (для некоей определенности) положениями, никакого отношения не имеющими к действительности. Основная часть предлагаемой работы была закончена автором в 90-е годы XX века. Желание опубликовать данную работу пришло автору не сразу. Автор надеется, что читатель не напрасно потратит свое время чтением предлагаемой работы.

## Введение

Вычисление значения числа  $\pi$  (общепринятое обозначение числа  $\pi$  – это буква греческого алфавита “ $\pi$ ”) связано с вычислением длины окружности, и с решением одной из знаменитых задач древности – квадратуры круга.

В разное время решением данной задачи занимались многие математики.

Древние шумеры располагали приближенным значением числа  $\pi = 3 \frac{1}{8}$ , полученным, вероятно, в результате конкретных измерений длины окружности ([1], с.133).

В Древнем Китае имелось несколько приближенных значений числа  $\pi$ . Лю Ци получил значение  $\pi = 3,15$ , а Ван Фань получил значение  $\pi = 3,1556$  ([2], с.264).

Индийский математик Ариабхатта, используя 384-угольники, получил значение числа  $\pi = 3,1416$  ([3], с.68).

Более точное значение числа  $\pi$  в Индии получали путем разложения дуг окружности по степеням тангенса типа ([3], с.69):

$$\varphi = \tan \varphi - \frac{\tan^3 \varphi}{3} + \frac{\tan^5 \varphi}{5} - \dots, \quad (\text{B. 1})$$

При  $\varphi = \frac{\pi}{4}$  получается ряд:

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \dots, \quad (\text{B. 2})$$

Таким образом, уравнения (B.1) и (B.2), по всей вероятности, были первыми представлениями числа  $\pi$  в виде аналитического выражения.

Архимед в работе «Измерение круга» ([4], с.266-271) вычислял значение числа  $\pi$  используя для этого метод впи-

санных и описанных многоугольников, то есть, чисто геометрический метод. В этом методе длина окружности получается больше периметра вписанного в круг многоугольника, но меньше периметра описанного около круга многоугольника. Таким образом, определялись нижние и верхние границы значения числа  $\pi$  (а, следовательно, взяв, например, среднеарифметическое от нижней и верхней границы можно получить некое искомое значение числа  $\pi$ ).

В Европе первым математиком, давшим аналитическое выражение для вычисления значения числа  $\pi$  с какой угодно точностью, был французский математик Виет. Значение числа  $\pi$  он вычислял в виде бесконечного произведения вида ([3], с.83).

$$\frac{\pi}{2} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{2}} \times \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}} \times \sqrt{\frac{1}{2}} \times \sqrt{\frac{1}{2} + \dots}}, \quad (\text{В. 3})$$

Гюйгенс Х. в работе «О найденной величине круга» ([5], с.103-166) вычислял значение числа  $\pi$  методом вписанных и описанных многоугольников (тем же методом, который использовал Архимед).

Л. Эйлер, согласно работы Юшкевича А.П. «Леонард Эйлер о квадратуре круга» ([6], с.159-210) вычислял значение числа  $\pi$  аналитическим методом, используя для этого бесконечные ряды, например, типа:

$$\pi = \frac{28}{10} \times \left( 1 + \frac{2}{3} \times \frac{2}{100} + \frac{2 \times 4}{3 \times 5} \times \left( \frac{2}{100} \right)^2 + \dots \right), \quad (\text{В. 4})$$

Из [16] известны еще десятки формул для вычисления значения числа  $\pi$ , некоторые из которых приведены ниже.

Формула Валлиса:

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2}{1} \times \frac{2}{3} \times \frac{4}{3} \times \frac{4}{5} \times \frac{6}{5} \times \frac{6}{7} \times \frac{8}{7} \times \frac{8}{9} \times \dots, \quad (\text{B. 5})$$

Ряд Лейбница:

$$\frac{\pi}{4} = \frac{1}{1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \dots, \quad (\text{B. 6})$$

Другие ряды:

$$\frac{\pi^2}{6} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \dots, \quad (\text{B. 7})$$

$$\pi = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{4^k} \times \left( \frac{2}{4k+1} + \frac{2}{4k+2} + \frac{2}{4k+3} \right), \quad (\text{B. 8})$$

Ряд индийского математика Сриниваса Рамануджана, найденный им в начале XX века:

$$\frac{1}{\pi} = \frac{2 \times \sqrt{2}}{9801} \times \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(4k)! (1103 + 26390k)}{(k!)^4 \times 396^{4k}}, \quad (\text{B. 9})$$

Ряд братьев Чудновских, найденный ими в 1987 году, который используется в программах, вычисляющих значение числа  $\pi$  на персональных компьютерах:

$$\frac{1}{\pi} = \frac{1}{426880 \times \sqrt{10005}} \times \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(6k)! (13591409 + 545140134k)}{(3k)! (k!)^3 \times (-640320)^{3k}}, \quad (\text{B. 10})$$

Формула Бэйли-Боруэйна-Плаффа, открытая в 1997 году Саймоном Плаффом:

$$\pi = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{16^k} \times \left( \frac{4}{8k+1} - \frac{2}{8k+4} - \frac{1}{8k+5} - \frac{1}{8k+6} \right), \quad (\text{B. 11})$$

Подводя некоторый итог вышеизложенному, можно отметить, что с момента возникновения задачи вычисления значения числа  $\pi$  и до настоящего времени, известны три принципиально разных способа вычисления значения числа  $\pi$ .

Первый – непосредственное измерение длины окружности, например, при помощи гибкой нити.

Второй – геометрический метод, использующий вписанные и описанные многоугольники. Данный метод позволяет определить числовой диапазон, в котором будет находиться число  $\pi$ , но не само число  $\pi$ .

Третий – аналитический метод, использующий для вычисления значения числа  $\pi$  уравнения типа (В.1÷В.11).

Относительно вышеуказанного третьего метода нужно сказать следующее. Уравнения типа (В.1÷В.11), вообще говоря, к геометрии круга не имеют никакого отношения, и вот почему. С левой стороны равенства у них стоит искомое число  $\pi$ , а с правой стороны равенства стоит набор цифр, в виде бесконечного произведения или ряда.

Однако, число  $\pi$ , по своей природе, имеет непосредственное отношение к геометрии круга, так как оно является коэффициентом пропорциональности в формуле для определения длины окружности и площади круга.

Автор не видит какая связь существует между числом  $\pi$ , стоящем в формуле для определения длины окружности  $L_{\text{окр}} = 2 \times \pi \times r$ , где  $r$  – радиус окружности, и уравнениями типа (В.1÷В.11).

Невозможно доказать, что уравнения типа (В.1÷В.11) имеют отношение к геометрии круга. **В это можно только верить – что в науке в принципе недопустимо.** Если известен числовой диапазон, в котором находится искомое число, то всегда можно подобрать бесконечный ряд или бесконечное произведение, численное значение которого будет находиться в данном числовом диапазоне. Но невоз-

можно доказать, что вычисленное таким методом число – это именно искомое число  $\pi$ . Это подтверждается тем простым фактом, что уравнения типа (В.1÷В.11), по форме, совершенно разные уравнения. Вычисленные по уравнениям типа (В.1÷В.11) числа  $\pi$  – количественно отличаются друг от друга (начиная с определенного знака после запятой).

Ламберт И.Г. в работ «Предварительные сведения ищущих квадратуру и спрямление круга» ([5], с.167-196) и Лежандр А.М. в работе «Доказательство того, что отношение длины окружности к диаметру и квадрат его суть иррациональные числа» ([5], с.197-210), используя бесконечные ряды, которые не имели никакого отношения к геометрии круга, вычисляли не значение числа  $\pi$  как таковое, а определяли его природу, то есть, его иррациональность.

Таким образом, берется, например, бесконечный ряд, численное значение которого лежит в том же числовом диапазоне, что и значение числа  $\pi$ , но который непосредственно не имеет никакого отношения к геометрии круга и к числу  $\pi$ . Затем над этим рядом производятся те или иные действия, в результате которых получается, например, что данный ряд является иррациональным. Из этого делается вывод, что и число  $\pi$  иррационально.

Но если для анализа природы числа  $\pi$  взять выражение, не имеющее никакого отношения к геометрии круга, а, следовательно, и к числу  $\pi$ , то на каком основании свойства этого выражения можно переносить на число  $\pi$ ? **В это можно только верить - что в науке в принципе недопустимо.**

Вычислять площадь поверхности сферы и объем шара умели уже в древности.

В частности Архимед вписывал в круг и описывал около круга правильные многоугольники, число сторон у

которых кратно 4, и вращал круг и эти многоугольники вокруг диаметра, соединяющего две противоположные вершины многоугольника. В результате вращения круга получался шар, а в результате вращения многоугольников получались тела вращения, составленные из нескольких усеченных конусов. Вычисление поверхности тел вращения сводилось к определению боковых поверхностей всех усеченных конусов. При этом, поверхность шара будет находиться между поверхностью описанного тела вращения и поверхностью вписанного тела вращения ([7], с.121).

Открытие интегрального счисления открыло новые возможности для вычисления площади поверхности шара и объема шара.

В частности, объем шара согласно ([8], с.350-351) вычисляется как интеграл от его площади  $F_x$  поперечного сечения:

$$V_{\text{ш}} = \int_a^b F_x \times d_x = \dots = \frac{4}{3} \times \pi \times R^3, \text{ (В.12)}$$

Площадь поверхности сферы вычисляется разбиением поверхности сферы на элементарные участки в виде усеченных конусов, и вычисление боковой поверхности каждого элементарного усеченного конуса, и затем суммирование всех боковых поверхностей элементарных усеченных конусов ([8], с.356).

Несколько иным способом вычисляется площадь поверхности сферы и объем шара согласно ([9], с.298-303). Как известно, уравнение окружности имеет вид:

$$x^2 + y^2 = R^2, \text{ (В.13)}$$

Где,

$x, y$  – координаты,

$R$  – радиус окружности.  
Откуда,

$$y^2 = R^2 - x^2, \text{ (B. 14)}$$

Объем шара с использованием интеграла равен:

$$V_{\text{ш}} = \int_{-R}^{+R} y^2 \times dx = \dots = \frac{4}{3} \times \pi \times R^3, \text{ (B. 15)}$$

Площадь поверхности сферы находится следующим образом. Поверхность шара разбивается на элементарные сферические треугольники. Вершины треугольников соединяются с центром шара. Таким образом получают элементарные пирамиды. Объем элементарной пирамиды равен:

$$\Delta V_{\text{п}} = \frac{1}{3} \times \Delta S \times h, \text{ (B. 16)}$$

Где,

$\Delta S$  – площадь основания элементарной пирамиды,  
 $h$  – высота элементарной пирамиды.

Полный объем шара будет равен сумме объемов элементарных пирамид, то есть:

$$V_{\text{ш}} = \sum_0^S \frac{1}{3} \times \Delta S \times h, \text{ (B. 17)}$$

При  $\Delta S \rightarrow 0$  и  $h \rightarrow R$  получим:

$$V_{\text{ш}} = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \sum_0^S \frac{1}{3} \times \Delta S \times h = \int_0^S \frac{1}{3} \times R \times dS = \frac{1}{3} \times R \times S, \text{ (B. 18)}$$

Однако, объем шара найден по формуле (В.15). Приравняем уравнения (В.15) и (В.18):

$$\frac{4}{3} \times \pi \times R^3 = \frac{1}{3} \times R \times S, \text{ (В. 19)}$$

Откуда определяется площадь поверхности сферы  $S_{\text{сф}}$ .

$$S_{\text{сф}} = 4 \times \pi \times R^2, \text{ (В. 20)}$$

Как видно из вышеизложенного, вне зависимости от способа вычисления площади поверхности сферы или объема шара, в формулах стоит одно и то же число  $\pi$ .

Это следует из того, что для вычисления боковой поверхности усеченных конусов и объема усеченных конусов, на которые разбивается шар, используется одно и то же число  $\pi$ , определяемое для круга.

Таким образом, считается, как само собой разумеющееся, что число  $\pi$ , стоящее в формулах для вычисления, длины окружности, площади круга, площади поверхности цилиндра, объема цилиндра, площади поверхности тора, объема тора, площади поверхности конуса, объема конуса, площади поверхности сферы и объема шара – имеет одно и то же значение.

Автором предлагается аналитический, непосредственно связанный с геометрией круга, цилиндра, тора, конуса и шара, метод вычисления значения числа  $\pi$  с какой угодно точностью, с помощью которого будет доказано, что вышеуказанное утверждение неверно.

## Глава 1

### §1. Положения, используемые при доказательствах

Для доказательства того, что число  $\pi$ , стоящее в формулах для вычисления, длины окружности, площади круга, площади поверхности цилиндра, объема цилиндра, площади поверхности тора, объема тора, площади поверхности конуса, объема конуса, площади поверхности сферы и объема шара, имеет разные значения, будут использованы положения, считающиеся общепризнанными в Геометрии и именуемые в дальнейшем **Правилами**.

**Правило 1.1 (П.1.1).** Высота, биссектриса и медиана, опущенные на одну и ту же сторону треугольника совпадают, если две другие стороны треугольника равны ([10], с.183).

**Правило 1.2 (П.1.2).** Соотношения прямоугольного треугольника:  $\sin \alpha = \frac{a}{c}$ ,  $\cos \alpha = \frac{b}{c}$ ,  $\tan \alpha = \frac{a}{b}$ , где,  $a$  и  $b$  – катеты,  $c$  – гипотенуза,  $\alpha$  – прилежающий к гипотенузе угол ([10], с.190).

**Правило 1.3 (П.1.3).** Площадь треугольника равна половине произведения его стороны на его высоту, опущенную на эту сторону из противоположащего этой стороне угла ([10], с.183).

**Правило 1.4 (П.1.4).** Прямая принадлежит плоскости, если она проходит через две точки, принадлежащие данной плоскости ([12], с.44).

**Правило 1.5 (П.1.5).** Две плоскости взаимно перпендикулярны, если одна из плоскостей имеет прямую, перпендикулярную данной плоскости ([11], с.55).

**Следствие 1.5 (С.1.5).** Перпендикуляр к плоскости лежит в плоскости, перпендикулярной данной плоскости.

**Правило 1.6 (П.1.6).** Прямая перпендикулярна плоскости, если она перпендикулярна любым двум пересекающимся прямым данной плоскости ([11], с.55).

**Следствие 1.6 (С.1.6).** Если прямая перпендикулярна плоскости, то она перпендикулярна любой прямой, лежащей в данной плоскости и пересекающейся с данной прямой.

**Правило 1.7 (П.1.7).** Мерой угла между двумя плоскостями служит линейный угол, образованный двумя прямыми – сечениями граней этого угла плоскостью, перпендикулярной к их ребру ([13], с.192).

**Следствие 1.7 (С.1.7).** Плоскость, перпендикулярная их ребру, то есть, линия их пересечения, в соответствии со С.1.5 будет перпендикулярна каждой из пересекающихся плоскостей. Или иными словами, если каждая из двух пересекающихся плоскостей перпендикулярна другой плоскости, то линия пересечения этих плоскостей перпендикулярна данной плоскости.

**Правило 1.8 (П.1.8).** Треугольники равны если: три стороны их соответственно равны, две стороны и угол между ними равны, сторона и прилежающие к ней углы соответственно равны ([14], с.71).

**Правило 1.9 (П.1.9).** Соотношения прямоугольного треугольника:  $c^2 = a^2 + b^2$ , где, а и b – катеты, с – гипотенуза ([10], с.183).

**Правило 1.10 (П.1.10).** Треугольники подобны если: две стороны одного треугольника пропорциональны двум сторонам другого треугольника, а углы, заключенные между ними, равны ([10], с.183).

**Правило 1.11 (П.1.11).** Соотношения подобных треугольников:  $\frac{a'}{a} = \frac{b'}{a} = \frac{c'}{a}$ , где, а', b', с' – стороны одного треу-

гольника,  $a$ ,  $b$ ,  $c$  – стороны другого треугольника ([15], с.342).

**Правило 1.12 (П.1.12).** Теорема косинусов:  $c^2 = a^2 + b^2 - 2 \times a \times b \times \cos \gamma$ , где,  $a$ ,  $b$ ,  $c$  – стороны треугольника,  $\gamma$  – угол между известными сторонами треугольника  $a$  и  $b$  ([10], с.190).

**Правило 1.13 (П.1.13).** Объем пирамиды равен:  $V_{\text{п}} = \frac{1}{3} \times S_{\text{осн}} \times h$ , где,  $S_{\text{осн}}$  – площадь основания пирамиды,  $h$  – высота пирамиды ([10], с.187).

**Правило 1.14 (П.1.14).** Площадь трапеции равна:  $S_{\text{тр}} = \left(\frac{a+b}{2}\right) \times h$ , где,  $a$ ,  $b$  – противолежащие стороны трапеции,  $h$  – высота трапеции, соединяющая противолежащие стороны  $a$  и  $b$  ([10], с.184).

**Правило 1.15 (П.1.15).** Длина окружности равна  $L_{\text{окр}} = \pi \times d$ , где,  $\pi$  – число ПИ,  $d$  – диаметр окружности ([10], с.185).

**Правило 1.16 (П.1.16).** Площадь круга равна  $S_{\text{кр}} = \pi \times r^2$ , где,  $\pi$  – число ПИ,  $r$  – радиус окружности ([10], с.185).

**Правило 1.17 (П.1.17).** Площадь прямоугольника равна  $S_{\text{пр}} = a \times b$ , где,  $a$ ,  $b$  – стороны прямоугольника ([10], с.184).

**Правило 1.18 (П.1.18).** Площадь поверхности цилиндра равна  $S_{\text{ц}} = 2 \times r \times \pi \times (r + H_{\text{ц}})$ , где,  $r$  – радиус основания цилиндра,  $\pi$  – число ПИ,  $H_{\text{ц}}$  – высота цилиндра ([10], с.188).

**Правило 1.19 (П.1.19).** Объем цилиндра равен  $V_{\text{ц}} = \pi \times r^2 \times H_{\text{ц}}$ , где,  $r$  – радиус основания цилиндра,  $\pi$  – число ПИ,  $H_{\text{ц}}$  – высота цилиндра ([10], с.188).

**Правило 1.20 (П.1.20).** Площадь поверхности тора равна  $S_{\text{т}} = 4 \times r \times R \times \pi^2$ , где,  $r$  – радиус образующей окруж-

ности тора,  $R$  – радиус направляющей окружности тора,  $\pi$  – число ПИ ([10], с.189).

**Правило 1.21 (П.1.21).** Объем тора равен  $V_T = 2 \times \pi^2 \times R \times r^2$ , где,  $r$  – радиус образующей окружности тора,  $R$  – радиус направляющей окружности тора,  $\pi$  – число ПИ ([10], с.189).

**Правило 1.22 (П.1.22).** Площадь поверхности конуса равна  $S_K = \pi \times r \times (r + L_K)$ , где,  $\pi$  – число ПИ,  $r$  – радиус основания конуса,  $L_K$  – образующая конуса ([10], с.189).

**Правило 1.23 (П.1.23).** Объем конуса равен  $V_K = \frac{1}{3} \times r^2 \times \pi \times H_K$ , где,  $r$  – радиус основания конуса,  $\pi$  – число ПИ,  $H_K$  – высота конуса ([10], с.189).

**Правило 1.24 (П.1.24).** Площадь поверхности сферы равна  $S_{сф} = 4 \times \pi \times R^2$ , где,  $\pi$  – число ПИ,  $R$  – радиус сферы ([10], с.189).

**Правило 1.25 (П.1.25).** Объем шара равен  $V_K = \frac{4}{3} \times \pi \times R^3$ , где,  $\pi$  – число ПИ,  $R$  – радиус шара ([10], с.189).

## Глава 2

§2. Вычисление длины Окружности  
и площади Круга

## §2.1. Вычисление длины Окружности

## §2.1.1. Метод вписанного многоугольника

На Рис.2.1.1.1 показана окружность с центром в точке  $O$ , радиусами  $|OA| = |OB| = r$ , угол между которыми равен  $\alpha$ .

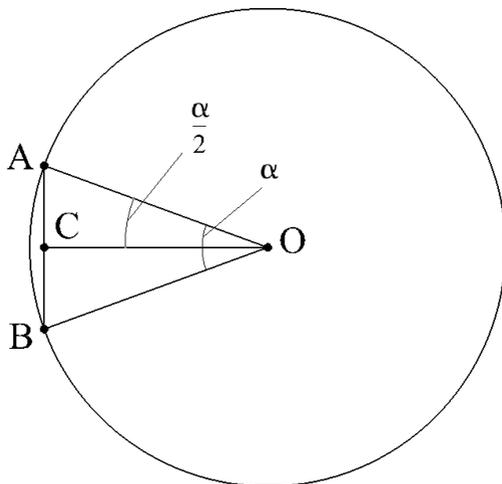


Рис.2.1.1.1.

Соединив точки  $A$  и  $B$  между собой, получим равнобедренный треугольник  $OAB$  (так как  $|OA| = |OB|$ ). Из точки  $O$  опустим перпендикуляр на сторону  $|AB|$  треугольника  $OAB$ . Получим два прямоугольных треугольника  $OAC$  и  $OBC$ . Так как треугольник  $OAB$  равнобедренный (доказано ранее), и что  $|OC| \perp |AB|$  (принято ранее), то в

соответствии с **П.1.1**  $|OC|$  является, одновременно, и высотой и биссектрисой и медианой треугольника  $OAB$ . Следовательно,  $|AC| = |CB|$ , угол  $AOC$  равен углу  $BOC$  и равен  $\frac{\alpha}{2}$ .

Рассмотрим прямоугольный треугольник  $OAC$  (доказано ранее), у которого известна гипотенуза  $|OA| = r$ , (начальное условие), и прилежающий к ней угол  $AOC = \frac{\alpha}{2}$ , (доказано ранее). Определим согласно **П.1.2** его катеты  $|OC|$  и  $|AC|$ :

$$|OC| = |OA| \times \cos \frac{\alpha}{2} = r \times \cos \frac{\alpha}{2}, (2.1.1.1)$$

$$|AC| = |OA| \times \sin \frac{\alpha}{2} = r \times \sin \frac{\alpha}{2}, (2.1.1.2)$$

Рассмотрим треугольник  $OAB$ . Так как  $|AC| = |CB|$  (доказано ранее), следовательно, сторона  $|AB|$  будет равна:

$$|AB| = |AC| + |CB| = 2 \times |AC| = 2 \times r \times \sin \frac{\alpha}{2}, (2.1.1.3)$$

Чем меньше будет угол  $\alpha$ , тем меньше длина стороны  $|AB|$  треугольника  $OAB$  будет отличаться от длины дуги окружности  $\widehat{AB}$ . Умножив значение стороны  $|AB|$ , вычисленное по формуле (2.1.1.3), на число таких сторон, укладывающихся по длине окружности, то есть, на  $\frac{360}{\alpha}$ , получим (Рис.2.1.1.2) полную длину окружности  $L_{\text{дл.окр.в}}$ :

$$\begin{aligned} L_{\text{дл.окр.в}} &= |AB| \times \frac{360}{\alpha} = 2 \times r \times \sin \frac{\alpha}{2} \times \frac{360}{\alpha} = 2 \times r \times \pi_{\text{дл.окр.в}} = \\ &= d \times \pi_{\text{дл.окр.в}}, (2.1.1.4) \end{aligned}$$

Где,

$d$  – диаметр окружности,

$\pi_{\text{дл.окр.в}}$  – коэффициент, стоящий в формуле для вычисления длины окружности.

$$\pi_{\text{дл.окр.в}} = \sin \frac{\alpha}{2} \times \frac{360}{\alpha}, \quad (2.1.1.5)$$

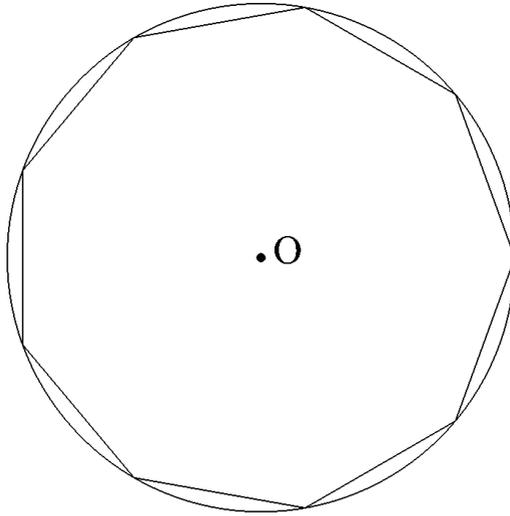


Рис.2.1.1.2.

Как видно из Рис.2.1.1.2, по формуле (2.1.1.4) вычисляется, на самом деле, не длина окружности, а периметр вписанного в окружность многоугольника, так как точно вычислять длину кривых линий (каковой, в частности, является окружность) мы не умеем. Мы умеем точно вычислять только длины прямых линий.

### §2.1.2. Метод описанного многоугольника

На Рис.2.1.2.1 показана окружность с центром в точке  $O$ , радиусом  $|OC_0| = r$ . Проведем через точку  $C_0$  прямую линию, касательную к окружности, а, следовательно, перпендикулярную к радиусу  $|OC_0|$ .

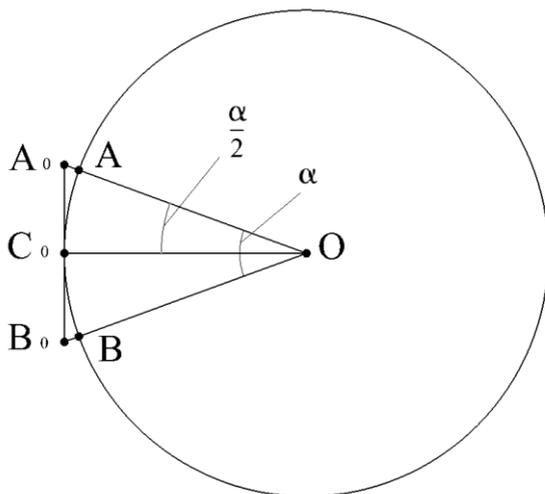


Рис.2.1.2.1.

Проведем из точки  $O$  прямую линию под углом  $\frac{\alpha}{2}$  к радиусу  $|OC_0|$  до ее пересечения с вышеуказанной касательной к окружности в точке  $A_0$ . При этом, данная прямая линия пересекает окружность в точке  $A$ . Проведем из точки  $O$  прямую линию под углом  $\frac{\alpha}{2}$  к радиусу  $|OC_0|$  до ее пересечения с вышеуказанной касательной к окружности в точке  $B_0$ . При этом, данная прямая линия пересекает окружность в точке  $B$ . Таким образом, угол  $A_0OC_0$  равен углу  $B_0OC_0$  и равен  $\frac{\alpha}{2}$ , а угол  $A_0OB_0$  равен  $\alpha$ .

Таким образом мы получили равнобедренный треугольник  $OA_0B_0$  (так как  $|OC_0| \perp |A_0B_0|$ , углы  $A_0OC_0$  и  $B_0OC_0$  равны между собой, а, следовательно,  $|OA_0| = |OB_0|$ ), состоящий из двух прямоугольных треугольников  $OA_0C_0$  и  $OB_0C_0$ . Так как треугольник  $OA_0B_0$  равнобедренный (доказано ранее), и что  $|OC_0| \perp |A_0B_0|$  (принято ранее), то в соответствии с **П.1.1**  $|OC_0|$  является, одновременно, и высотой и биссектрисой и медианой треугольника  $OA_0B_0$ . Следовательно,  $|A_0C_0| = |C_0B_0|$ .

Рассмотрим прямоугольный треугольник  $OA_0C_0$  (доказано ранее), у которого известен катет  $|OC_0| = r$  (начальное условие), и прилегающий к нему угол  $A_0OC_0 = \frac{\alpha}{2}$  (начальное условие). Определим согласно **П.1.2** его катет  $|A_0C_0|$ :

$$|A_0C_0| = |OC_0| \times \tan \frac{\alpha}{2} = r \times \tan \frac{\alpha}{2}, \quad (2.1.2.1)$$

Рассмотрим треугольник  $OA_0B_0$ .  $|A_0C_0| = |C_0B_0|$  (доказано ранее), следовательно, сторона  $|A_0B_0|$  будет равна:

$$\begin{aligned} |A_0B_0| &= |A_0C_0| + |C_0B_0| = 2 \times |A_0C_0| = \\ &= 2 \times r \times \tan \frac{\alpha}{2}, \quad (2.1.2.2) \end{aligned}$$

Чем меньше будет угол  $\alpha$ , тем меньше длина стороны  $|A_0B_0|$  треугольника  $OA_0B_0$  будет отличаться от длины дуги окружности  $\widehat{AB}$ . Умножив значение стороны  $|A_0B_0|$ , вычисленное по формуле (2.1.2.2), на число таких сторон, укладывающихся по длине окружности, то есть, на  $\frac{360}{\alpha}$ , получим (Рис.2.1.2.2) полную длину окружности  $L_{\text{дл.окр.о}}$ :

$$\begin{aligned}
 L_{\text{дл.окр.о}} &= |A_0 B_0| \times \frac{360}{\alpha} = 2 \times r \times \tan \frac{\alpha}{2} \times \frac{360}{\alpha} = \\
 &= 2 \times r \times \pi_{\text{дл.окр.о}} = d \times \pi_{\text{дл.окр.о}}, \quad (2.1.2.3)
 \end{aligned}$$

Где,

$\pi_{\text{дл.окр.о}}$  – коэффициент, стоящий в формуле для вычисления длины окружности.

$$\pi_{\text{дл.окр.о}} = \tan \frac{\alpha}{2} \times \frac{360}{\alpha}, \quad (2.1.2.4)$$

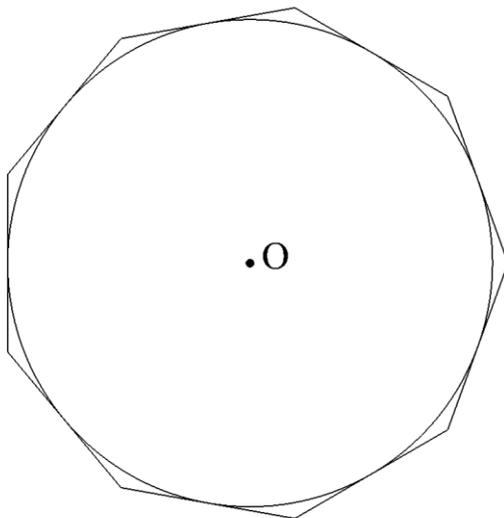


Рис.2.1.2.2.

Как видно из Рис.2.1.2.2, по формуле (2.1.2.3) вычисляется, на самом деле, не длина окружности, а периметр описанного около окружности многоугольника, так как точно вычислять длину кривых линий (каковой, в частности, является окружность) мы не умеем. Мы умеем точно вычислять только длины прямых линий.

### §2.1.3. Результирующий Метод

При использовании метода вписанного в окружность многоугольника в §2.1.1 была найдена формула (2.1.1.4) для вычисления длины окружности, имеющая вид:

$$L_{\text{дл.окр.в}} = 2 \times r \times \sin \frac{\alpha}{2} \times \frac{360}{\alpha} = 2 \times r \times \pi_{\text{дл.окр.в}}, \quad (2.1.3.1)$$

Формула (2.1.3.1) является нижней границей для вычисления значения длины окружности.

При использовании метода описанного около окружности многоугольника в §2.1.2 была найдена формула (2.1.2.3) для вычисления длины окружности, имеющая вид:

$$L_{\text{дл.окр.о}} = 2 \times r \times \tan \frac{\alpha}{2} \times \frac{360}{\alpha} = 2 \times r \times \pi_{\text{дл.окр.о}}, \quad (2.1.3.2)$$

Формула (2.1.3.2) является верхней границей для вычисления значения длины окружности.

Как видно из формул (2.1.3.1) и (2.1.3.2), они по форме не равны между собой.

Искомая длина окружности находится между вышеуказанными нижней и верхней границами. Поэтому, результирующая длина окружности (Рис.2.1.3.1) может быть вычислена как среднеарифметическое от формул (2.1.3.1) и (2.1.3.2):

$$\begin{aligned} L_{\text{дл.окр.р}} &= \frac{L_{\text{дл.окр.в}} + L_{\text{дл.окр.о}}}{2} = \\ &= \frac{\left(2 \times r \times \sin \frac{\alpha}{2} \times \frac{360}{\alpha}\right) + \left(2 \times r \times \tan \frac{\alpha}{2} \times \frac{360}{\alpha}\right)}{2} = \\ &= 2 \times r \times \frac{180}{\alpha} \times \left(\sin \frac{\alpha}{2} + \tan \frac{\alpha}{2}\right) = 2 \times r \times \pi_{\text{дл.окр.р}} = \\ &= d \times \pi_{\text{дл.окр.р}}, \quad (2.1.3.3) \end{aligned}$$

Где,

$\pi_{\text{дл.окр.р}}$  – коэффициент, стоящий в формуле для вычисления длины окружности.

$$\pi_{\text{дл.окр.р}} = \frac{180}{\alpha} \times \left( \sin \frac{\alpha}{2} + \tan \frac{\alpha}{2} \right), \quad (2.1.3.4)$$

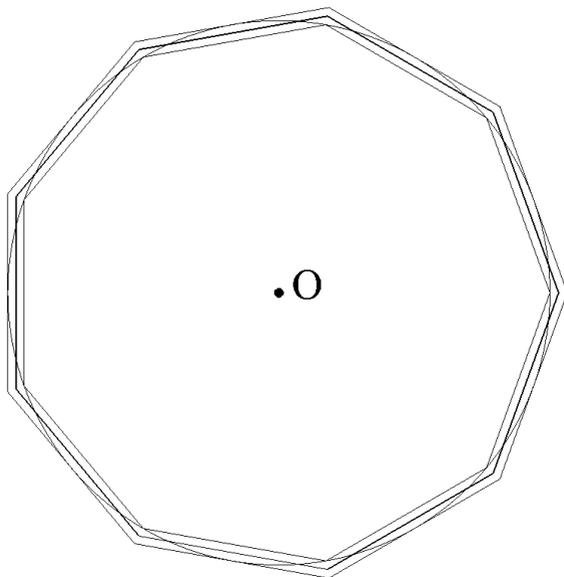


Рис.2.1.3.1.

Как видно из Рис.2.1.3.1, по формуле (2.1.3.3) вычисляется, на самом деле, не длина окружности, а периметр некоего среднеарифметического многоугольника, так как точно вычислять длину кривых линий (каковой, в частности, является окружность) мы не умеем. Мы умеем точно вычислять только длины прямых линий.

Значение длины окружности, вычисленное по формуле (2.1.3.3) по результирующему методу, будет ближе к искомому значению длины окружности, по сравнению с длина-

ми окружностей, вычисленными, по формуле (2.1.1.4) по методу вписанного многоугольника, и по формуле (2.1.2.3) по методу описанного многоугольника.

А, следовательно, значение числа  $\Pi$ , вычисленное по формуле (2.1.3.4) будет ближе к искомому числу  $\Pi$ , по сравнению с числами  $\Pi$ , вычисленными, по формуле (2.1.1.5) по методу вписанного многоугольника, и по формуле (2.1.2.4) по методу описанного многоугольника.

## §2.2. Вычисление площади Круга

### §2.2.1. Метод вписанного многоугольника

Площадь треугольника  $OAB$  (Рис.2.1.1.1), у которого известна сторона  $|AB|$  и высота  $|OC|$  (найлены ранее в §2.1.1), согласно **П.1.3** будет равна:

$$\begin{aligned} S_{OAB} &= \frac{1}{2} \times |AB| \times |OC| = \frac{1}{2} \times 2 \times r \times \sin \frac{\alpha}{2} \times r \times \cos \frac{\alpha}{2} = \\ &= r^2 \times \sin \frac{\alpha}{2} \times \cos \frac{\alpha}{2}, \quad (2.2.1.1) \end{aligned}$$

Чем меньше будет угол  $\alpha$ , тем меньше площадь треугольника  $OAB$  будет отличаться от площади кругового сектора  $OAB$ . Умножив площадь треугольника  $OAB$ , вычисленную по формуле (2.2.1.1), на число таких треугольников, уместяющихся в кругу, то есть, на  $\frac{360}{\alpha}$ , получим (Рис.2.1.1.2) полную площадь круга  $S_{кр.в}$ :

$$\begin{aligned} S_{кр.в} &= S_{OAB} \times \frac{360}{\alpha} = r^2 \times \sin \frac{\alpha}{2} \times \cos \frac{\alpha}{2} \times \frac{360}{\alpha} \\ &= r^2 \times \pi_{пл.кр.в}, \quad (2.2.1.2) \end{aligned}$$

Где,

$\pi_{\text{пл.кр.в}}$  – коэффициент, стоящий в формуле для вычисления площади круга.

$$\pi_{\text{пл.кр.в}} = \sin \frac{\alpha}{2} \times \cos \frac{\alpha}{2} \times \frac{360}{\alpha}, \quad (2.2.1.3)$$

Как видно из Рис.2.1.1.2, по формуле (2.2.1.2) вычисляется, на самом деле, не площадь круга, а площадь вписанного в круг многоугольника, так как точно вычислять площади фигур, ограниченных кривыми линиями (каковой, в частности, является окружность) мы не умеем. Мы умеем точно вычислять площади только плоских фигур, ограниченных только прямыми линиями.

### §2.2.2. Метод описанного многоугольника

Площадь треугольника  $OA_0B_0$  (Рис.2.1.2.1), у которого известна сторона  $|A_0B_0|$  (найдена ранее в §2.1.2) и высота  $|OC_0|$  (начальное условие в §2.1.2), согласно **П.1.3** будет равна:

$$\begin{aligned} S_{OA_0B_0} &= \frac{1}{2} \times |A_0B_0| \times |OC_0| = \frac{1}{2} \times 2 \times r \times \tan \frac{\alpha}{2} \times r = \\ &= r^2 \times \tan \frac{\alpha}{2}, \quad (2.2.2.1) \end{aligned}$$

Чем меньше будет угол  $\alpha$ , тем меньше площадь треугольника  $OA_0B_0$  будет отличаться от площади кругового сектора  $OAB$ . Умножив площадь треугольника  $OA_0B_0$ , вычисленную по формуле (2.2.2.1), на число таких треугольников, уместяющихся в кругу, то есть, на  $\frac{360}{\alpha}$ , получим (Рис.2.1.2.2) полную площадь круга  $S_{\text{кр.о}}$ :

$$\begin{aligned}
 S_{\text{кр.о}} &= S_{OA_0B_0} \times \frac{360}{\alpha} = r^2 \times \tan \frac{\alpha}{2} \times \frac{360}{\alpha} \\
 &= r^2 \times \pi_{\text{дл.окр.о}}, \quad (2.2.2.2)
 \end{aligned}$$

Где,

$\pi_{\text{дл.окр.о}}$  – коэффициент, стоящий в формуле для вычисления площади круга.

$$\pi_{\text{дл.окр.о}} = \tan \frac{\alpha}{2} \times \frac{360}{\alpha}, \quad (2.2.2.3)$$

Как видно из Рис.2.1.2.2, по формуле (2.2.2.2) вычисляется, на самом деле, не площадь круга, а площадь описанного около круга многоугольника, так как точно вычислять площади фигур, ограниченных кривыми линиями (каковой, в частности, является окружность) мы не умеем. Мы умеем точно вычислять площади только плоских фигур, ограниченных только прямыми линиями.

### §2.2.3. Результирующий Метод

При использовании метода вписанного в круг многоугольника в §2.2.1 была найдена формула (2.2.1.2) для вычисления площади круга, имеющая вид:

$$S_{\text{кр.в}} = r^2 \times \sin \frac{\alpha}{2} \times \cos \frac{\alpha}{2} \times \frac{360}{\alpha} = r^2 \times \pi_{\text{пл.кр.в}}, \quad (2.2.3.1)$$

Формула (2.2.3.1) является нижней границей для вычисления значения площади круга.

При использовании метода описанного около круга многоугольника в §2.2.2 была найдена формула (2.2.2.2) для вычисления площади круга, имеющая вид:

$$S_{\text{кр.о}} = r^2 \times \tan \frac{\alpha}{2} \times \frac{360}{\alpha} = r^2 \times \pi_{\text{дл.окр.о}}, \quad (2.2.3.2)$$

Формула (2.2.3.2) является верхней границей для вычисления значения площади круга.

Как видно из формул (2.2.3.1) и (2.2.3.2), они по форме не равны между собой.

Искомая площадь круга находится между вышеуказанными нижней и верхней границами. Поэтому, результирующая площадь круга может быть вычислена как среднееарифметическое (Рис.2.1.3.1) от формул (2.2.3.1) и (2.2.3.2):

$$\begin{aligned} S_{\text{кр.р}} &= \frac{S_{\text{кр.в}} + S_{\text{кр.о}}}{2} = \\ &= \frac{\left( r^2 \times \sin \frac{\alpha}{2} \times \cos \frac{\alpha}{2} \times \frac{360}{\alpha} \right) + \left( r^2 \times \tan \frac{\alpha}{2} \times \frac{360}{\alpha} \right)}{2} = \\ &= r^2 \times \frac{180}{\alpha} \times \left( \left( \sin \frac{\alpha}{2} \times \cos \frac{\alpha}{2} \right) + \tan \frac{\alpha}{2} \right) = r^2 \times \pi_{\text{пл.кр.р}}, \quad (2.2.3.3) \end{aligned}$$

Где,

$\pi_{\text{пл.кр.р}}$  – коэффициент, стоящий в формуле для вычисления площади круга.

$$\pi_{\text{пл.кр.р}} = \frac{180}{\alpha} \times \left( \left( \sin \frac{\alpha}{2} \times \cos \frac{\alpha}{2} \right) + \tan \frac{\alpha}{2} \right), \quad (2.2.3.4)$$

Значение площади круга, вычисленное по формуле (2.2.3.3) по результирующему методу, будет ближе к искомому значению площади круга, по сравнению с площадями круга, вычисленными, по формуле (2.2.1.2) по методу вписанного многоугольника, и по формуле (2.2.2.2) по методу описанного многоугольника.

А, следовательно, значение числа ПИ, вычисленное по формуле (2.2.3.4), будет гораздо ближе к искомому числу

ПИ, по сравнению со значениями числа ПИ, вычисленными, по формуле (2.2.1.3) по методу вписанного многоугольника, и по формуле (2.2.2.3) по методу описанного многоугольника.

Как видно из Рис.2.1.3.1, по формуле (2.2.3.3) вычисляется, на самом деле, не площадь круга, а площадь некоего среднеарифметического многоугольника, так как точно вычислять площади фигур, ограниченных кривыми линиями (каковой, в частности, является окружность) мы не умеем. Мы умеем точно вычислять площади плоских фигур, ограниченных только прямыми линиями.

### §2.3. Выводы

Таким образом, как видно из всего вышеизложенного, предлагаемые аналитические методы вычисления длины окружности и площади круга являются **ранее не известной разновидностью методов вписанного в круг и описанного около круга многоугольников**, основу которых составляет использование тригонометрических функций  $\sin$ ,  $\cos$  и  $\tan$ . При этом, предлагаемые аналитические методы вычисления длины окружности и площади круга непосредственно связаны с геометрией окружности и круга.

В §2.1.1 по методу вписанного многоугольника была получена формула (2.1.1.5) для вычисления числа  $\pi_{\text{дл.окр.в}}$  вида:

$$\pi_{\text{дл.окр.в}} = \sin \frac{\alpha}{2} \times \frac{360}{\alpha}, \quad (2.3.1)$$

В §2.1.2 и §2.2.2 по методу описанного многоугольника были получены формулы (2.1.2.4) и (2.2.2.3) для вычисления числа  $\pi_{\text{дл.окр.о}}$  вида:

$$\pi_{\text{дл.окр.о}} = \tan \frac{\alpha}{2} \times \frac{360}{\alpha}, (2.3.2)$$

В §2.1.3 по результирующему методу была получена формула (2.1.3.4) для вычисления числа  $\pi_{\text{дл.окр.р}}$  вида:

$$\pi_{\text{дл.окр.р}} = \frac{180}{\alpha} \times \left( \sin \frac{\alpha}{2} + \tan \frac{\alpha}{2} \right), (2.3.3)$$

В §2.2.1 по методу вписанного многоугольника была получена формула (2.2.1.3) для вычисления числа  $\pi_{\text{пл.кр.в}}$  вида:

$$\pi_{\text{пл.кр.в}} = \sin \frac{\alpha}{2} \times \cos \frac{\alpha}{2} \times \frac{360}{\alpha}, (2.3.4)$$

В §2.2.3 по результирующему методу была получена формула (2.2.3.4) для вычисления числа  $\pi_{\text{пл.кр.р}}$  вида:

$$\pi_{\text{пл.кр.р}} = \frac{180}{\alpha} \times \left( \left( \sin \frac{\alpha}{2} \times \cos \frac{\alpha}{2} \right) + \tan \frac{\alpha}{2} \right), (2.3.5)$$

Из **П.1.15** известна формула для вычисления длины окружности, равная:

$$L_{\text{дл.окр}} = 2 \times r \times \pi = d \times \pi, (2.3.6)$$

Из **П.1.16** известна формула для вычисления площади круга, равная:

$$S_{\text{кр}} = \pi \times r^2, (2.3.7)$$

Как видно, формулы (2.3.1÷2.3.7) отличаются друг от друга тем, что в формулах (2.3.6) и (2.3.7) стоит некое единое (для всех формул – для вычисления, длины окружности, площади круга, площади поверхности цилиндра, объема цилиндра, площади поверхности тора, объема тора, площади поверхности конуса, объема конуса, площади сферы и объема шара) число  $\pi$ , а в формулах (2.3.1÷2.3.5) стоят числа  $\pi_{\text{дл.окр.в}}$ ,  $\pi_{\text{дл.окр.о}}$ ,  $\pi_{\text{дл.окр.р}}$ ,  $\pi_{\text{пл.кр.в}}$  и  $\pi_{\text{пл.кр.р}}$ . При этом, вышеуказанные числа по форме и по величине не равны между собой.

В таблице 2.3.1 приведены значения вышеуказанных чисел ПИ при величине угла  $\alpha$ , равном,  $1^\circ$  (что соответствует 360-угольнику) и  $0,1^\circ$  (что соответствует 3600-угольнику), с точностью до десятого знака после запятой. Для сравнения, в таблице 2.3.1 приведено известное из [16] значение единого (для всех формул – для вычисления, длины окружности, площади круга, площади поверхности цилиндра, объема цилиндра, площади поверхности тора, объема тора, площади поверхности конуса, объема конуса, площади поверхности сферы, объема шара) числа  $\pi$ , полученного путем вычисления на компьютере бесконечного ряда (не имеющего никакого отношения к геометрии окружности и круга), с точностью до 10 знаков после запятой.

Таблица 2.3.1

	$\alpha = 1^\circ$	$\alpha = 0,1^\circ$
$\pi_{\text{дл.окр.в}}$	3,1415527794	3,1415922548
$\pi_{\text{дл.окр.о}}$	3,1416724046	3,1415934510
$\pi_{\text{дл.окр.р}}$	<b>3,1416125904</b>	<b>3,1415928528</b>
$\pi_{\text{пл.кр.в}}$	3,1414331556	3,1415910397
$\pi_{\text{пл.кр.р}}$	<b>3,1415527800</b>	<b>3,1415922318</b>
$\pi$	<b>3,1415926535</b>	

Как видно из формул (2.3.3), (2.3.5) и таблицы 2.3.1, число  $\pi_{\text{дл.окр.р}}$  (стоящее в формуле для вычисления длины окружности, полученное по результирующему методу) и число  $\pi_{\text{пл.кр.р}}$  (стоящее в формуле для вычисления площади круга, полученное по результирующему методу) по форме и по величине (численно) не равны между собой (при  $\alpha = 1^\circ$  – начиная с 4-й цифры после запятой, а при  $\alpha = 0,1^\circ$  – начиная с 7-й цифры после запятой). Вышеуказанные числа  $\pi_{\text{дл.окр.р}}$  и  $\pi_{\text{пл.кр.р}}$  численно отличаются от единого числа  $\pi$ , известного из [16] (при  $\alpha = 0,1^\circ$  – начиная с 7-й цифры после запятой).

Каким бы малым не был угол  $\alpha$  (и угол  $\frac{\alpha}{2}$ ), он всегда будет больше нуля. Следовательно,  $\cos \frac{\alpha}{2}$  всегда будет меньше единицы, а, следовательно, всегда  $\pi_{\text{дл.окр.р}}$  будет не равно  $\pi_{\text{пл.кр.р}}$ :

$$\pi_{\text{дл.окр.р}} \neq \pi_{\text{пл.кр.р}}, \quad (2.3.8)$$

И здесь не имеет значение тот факт, что разница между числами  $\pi_{\text{дл.окр.р}}$  и  $\pi_{\text{пл.кр.р}}$  невелика, и которой, в некоторых расчетах, можно пренебречь. Числа 1,23456 и 1,23457 так же отличаются друг от друга на малую величину, и числа 999 999 999 и 1 000 000 000 так же отличаются друг от друга на малую величину, которой, в некоторых расчетах, можно пренебречь. Однако, тем не менее, это принципиально разные числа. Такими же принципиально разными числами являются числа  $\pi_{\text{дл.окр.р}}$  и  $\pi_{\text{пл.кр.р}}$ .

По-видимому, считалось, что число ПИ, стоящее в формуле для вычисления длины окружности, и число ПИ, стоящее в формуле для вычисления площади круга – это одно и тоже число ПИ потому, что путем непосредственного измерения, длины окружности (например, посредством

гибкой нити) и площади круга, обеспечить точность измерения до 7-го (или даже до 4-го) знака после запятой практически невозможно. А, поэтому, увидеть то, что эти числа ПИ не равны между собой, было невозможно. Это можно увидеть, только используя для вычисления длины окружности и площади круга предложенные автором аналитические выражения (2.1.3.3) и (2.2.3.3), а для вычисления числа ПИ – аналитические выражения (2.1.3.4) и (2.2.3.4). Известные ранее аналитические выражения типа  $(B.1 \div B.11)$ , используемые для вычисления значения числа ПИ, на самом деле, не имеют никакого отношения к геометрии круга, и увидеть в них то, что эти числа ПИ не равны между собой, невозможно в принципе. Невозможно доказать то, что вычисленное по выражениям  $(B.1 \div B.11)$  число ПИ это то же самое число ПИ, которое стоит в формулах для определения длины окружности и площади круга. **В это можно только верить – что в науке в принципе недопустимо.**

### **Важно понимать следующее.**

По формулам (2.1.1.4), (2.1.2.3) и (2.1.3.3) вычисляется, на самом деле, не длина окружности (то есть, не длина кривой линии), как таковая, а длина ломанной линии (периметр многоугольника). Это следует из следующего очевидного факта. В качестве единицы измерения длины нами принята длина прямой линии (в частности, длина одного метра). Кривая линия (каковой является окружность) и прямая линия – это два принципиально разных типа линий. Даже сама длина кривой линии – это условное понятие. В принципиальной постановке вопроса мы должны ясно понимать тот очевидный факт, что **мы не умеем точно вычислять величины длин кривых линий (любого типа, в том числе, длину окружности).**

По формулам (2.2.1.2), (2.2.2.2) и (2.2.3.3) вычисляется, на самом деле, не площадь круга, как таковая, а площадь многоугольника. Это следует из следующего очевидного факта. В качестве единицы измерения площади нами принят квадрат. А что такое квадрат? Это плоский четырехугольник, у которого все четыре стороны равны между собой и все четыре угла равны между собой. При этом, все четыре стороны квадрата представляют собой прямые линии. А что такое круг? Это плоская фигура, ограниченная замкнутой кривой линией – окружностью. Поэтому, в принципе, невозможно точно вычислить площадь круга. В принципиальной постановке вопроса мы должны ясно понимать тот очевидный факт, что **мы не умеем точно вычислять площади фигур, ограниченные кривыми линиями (любого типа, в том числе, окружностью)**. При вычислении площади круга (и других фигур, ограниченных кривыми линиями) мы, на самом деле, вычисляем площади многоугольников.

## §2.4. О решении задачи квадратуры круга

Теперь что касается решения задачи квадратуры круга.

Из всего вышеизложенного однозначно следует, что сама постановка задачи решения квадратуры круга (в любой ее постановке, а не только классическая – при помощи циркуля и линейки) бессмысленна.

По-видимому, квадратура круга так долго мучила умы математиков (а, возможно, кого-то продолжает мучить до сих пор) из-за недопонимания ими самых фундаментальных основ математики (которые, кстати, они сами и придумали).

А именно. Стороны квадрата можно вычислить (и измерить) точно (они конечны по величине), а, следовательно, можно точно вычислить площадь квадрата (которая так же конечна по величине), так как стороны квадрата – это прямые линии (длину которых мы умеем точно вычислять и измерять). Теперь что касается круга. Диаметр круга можно вычислить (и измерить) точно (он конечен по величине), так как диаметр круга – это прямая линия. Из этого математиками делается неверный вывод, что и площадь круга можно вычислить точно (то есть, что и площадь круга должна быть конечна по величине), а, следовательно, можно найти такой квадрат, который будет равен по площади кругу. **Но это совершенно неверно.** Мы можем точно вычислить (или измерить) площадь какой-либо плоской фигуры, если мы можем точно вычислить (или измерить), по меньшей мере (например, как в случае с квадратом) две стороны (два точных размера) этой фигуры. В случае с кругом точно вычислить (измерить) можно только один размер – диаметр круга. **Поэтому, площадь круга (и других фигур, ограниченных кривыми линиями) точно вычислить невозможно в принципе.** То, что мы понимаем под площадью круга (и других фигур, ограниченных кривыми линиями), на самом деле, являются площадями многоугольников. **А, следовательно, в принципе, невозможно построить квадрат, равный по площади кругу.**

Однако, из этого очевидного факта вовсе не следует, что нужно сложить руки и ничего не делать. Например, в технике, для расчетов, вполне подходят методы вычисления периметра многоугольников и площадей многоугольников, отождествляя их с длинами кривых линий и площадями фигур, ограниченных кривыми линиями, соответственно.

## Глава 3

§3. Вычисление площади поверхности  
и объема Цилиндра§3.1. Вычисление площади поверхности  
Цилиндра

## §3.1.1. Метод вписанного многогранника

На Рис.3.1.1.1 показан круговой прямой цилиндр с радиусом основания цилиндра  $r$ , с центром основания цилиндра в точке  $O_1$  и центром верхней поверхности цилиндра в точке  $O_2$ . Таким образом, прямая линия  $|O_1O_2|$  является осью цилиндра и его высотой  $|O_1O_2| = H_{\text{ц}}$ .

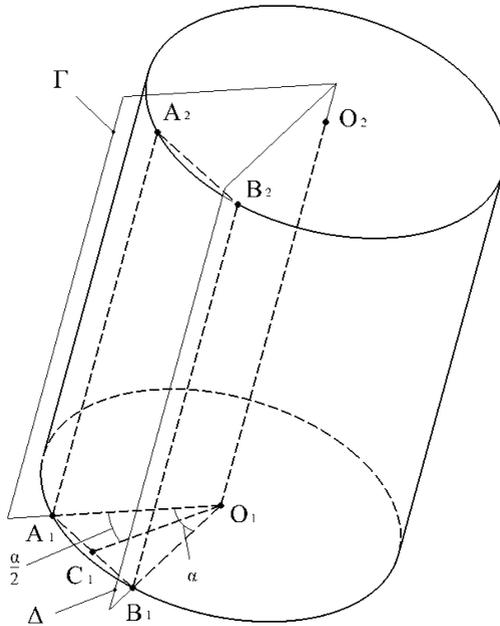


Рис.3.1.1.1.

Проведем через ось цилиндра  $|O_1O_2|$  плоскость  $\Gamma$ . Построив линию пересечения плоскости  $\Gamma$  с боковой поверхностью цилиндра, получим прямую линию  $|A_1A_2|$ , которая является образующей цилиндра и которая перпендикулярна плоскости основания цилиндра. Следовательно,  $|A_1A_2| = |O_1O_2|$ .

Построив линию пересечения плоскости  $\Gamma$  с основанием цилиндра, получим прямую линию  $|O_1A_1|$ , которая является радиусом основания цилиндра  $|O_1A_1| = r$ .

Проведем через ось цилиндра  $|O_1O_2|$  плоскость  $\Delta$  под углом  $\alpha$  к плоскости  $\Gamma$ . Построив линию пересечения плоскости  $\Delta$  с боковой поверхностью цилиндра, получим прямую линию  $|B_1B_2|$ , которая является образующей цилиндра и которая перпендикулярна плоскости основания цилиндра. Следовательно,  $|B_1B_2| = |O_1O_2|$ . Построив линию пересечения плоскости  $\Delta$  с основанием цилиндра, получим прямую линию  $|O_1B_1|$ , которая является радиусом основания цилиндра  $|O_1B_1| = r$ .

Соединив точки  $A_1$  и  $B_1$  между собой, получим равнобедренный треугольник  $A_1O_1B_1$  (так как  $|O_1A_1| = |O_1B_1|$ ).

Полная площадь поверхности цилиндра  $S_{ц,в}$  будет равна сумме площадей основания  $S_{осн.ц,в}$  и верхней  $S_{верх.пов.ц,в}$  поверхностей цилиндра, и боковой  $S_{бок.ц,в}$  поверхности цилиндра:

$$\begin{aligned} S_{ц,в} &= S_{осн.ц,в} + S_{верх.пов.ц,в} + S_{бок.ц,в} = \\ &= 2 \times S_{осн.ц,в} + S_{бок.ц,в}, \quad (3.1.1.1) \end{aligned}$$

Ранее в §2.2.1 была найдена формула (2.2.1.2) для вычисления площади круга по методу вписанного многоугольника. По этой формуле будет вычислена площади основания  $S_{осн.ц,в}$  и верхней  $S_{верх.пов.ц,в}$  поверхностей цилиндра, которая будет иметь вид:

$$\begin{aligned}
 S_{\text{осн.ц.в}} &= S_{\text{верх.пов.ц.в}} = r^2 \times \sin \frac{\alpha}{2} \times \cos \frac{\alpha}{2} \times \frac{360}{\alpha} = \\
 &= r^2 \times \pi_{\text{пл.кр.в}}, \quad (3.1.1.2)
 \end{aligned}$$

Площадь боковой поверхности цилиндра  $S_{\text{бок.ц.в}}$  будет вычислена далее.

Соединив точки  $A_2$  и  $B_2$  между собой, получим прямоугольник  $A_1A_2B_2B_1$ . Ранее в §2.1.1 была найдена формула (2.1.1.3) для вычисления стороны  $|AB|$ . В данном случае  $|AB| = |A_1B_1|$ , а, следовательно, сторона  $|A_1B_1|$  будет равна:

$$\begin{aligned}
 |A_1B_1| &= |A_1C_1| + |C_1B_1| = \\
 &= 2 \times |A_1C_1| = 2 \times r \times \sin \frac{\alpha}{2}, \quad (3.1.1.3)
 \end{aligned}$$

Согласно **П.1.17** вычислим площадь  $S_{A_1A_2B_2B_1}$  прямоугольника  $A_1A_2B_2B_1$ , которая будет равна:

$$S_{A_1A_2B_2B_1} = |A_1B_1| \times |A_1A_2| = 2 \times r \times \sin \frac{\alpha}{2} \times H_{\text{ц}}, \quad (3.1.1.4)$$

Чем меньше будет угол  $\alpha$ , тем меньше площадь прямоугольника  $A_1A_2B_2B_1$  будет отличаться от площади сектора боковой поверхности цилиндра, ограниченного дугами окружностей  $\widehat{A_1B_1}$  и  $\widehat{A_2B_2}$  и прямыми линиями (образующими цилиндра)  $|A_1A_2|$  и  $|B_1B_2|$ . Умножив площадь прямоугольника  $A_1A_2B_2B_1$ , вычисленную по формуле (3.1.1.4), на число таких прямоугольников, уместяющихся на боковой поверхности цилиндра, то есть, на  $\frac{360}{\alpha}$ , получим (Рис.3.1.1.2) полную площадь боковой поверхности цилиндра  $S_{\text{бок.ц.в}}$ :

$$\begin{aligned}
 S_{\text{бок.ц.в}} &= S_{A_1A_2B_2B_1} \times \frac{360}{\alpha} = 2 \times r \times \sin \frac{\alpha}{2} \times H_{\text{ц}} \times \frac{360}{\alpha} = \\
 &= 2 \times r \times H_{\text{ц}} \times \pi_{\text{дл.окр.в}}, \quad (3.1.1.5)
 \end{aligned}$$

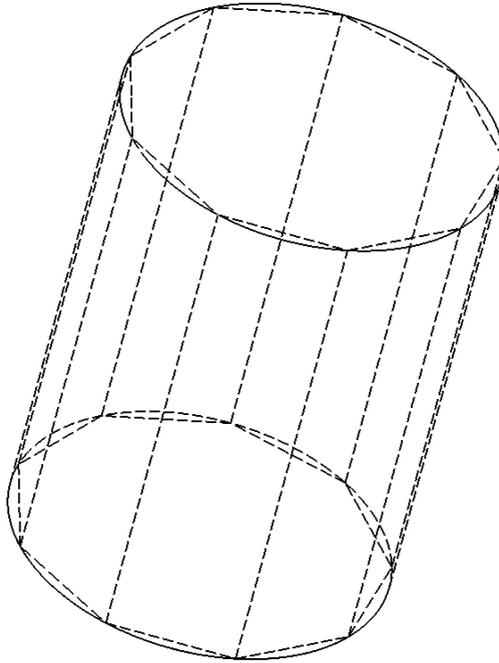


Рис.3.1.1.2.

Полная площадь поверхности цилиндра  $S_{ц.в}$  будет равна:

$$\begin{aligned}
 S_{ц.в} &= S_{осн.ц.в} + S_{верх.пов.ц.в} + S_{бок.ц.в} = 2 \times S_{осн.ц.в} + S_{бок.ц.в} = \\
 &= 2 \times \left( r^2 \times \sin \frac{\alpha}{2} \times \cos \frac{\alpha}{2} \times \frac{360}{\alpha} \right) + 2 \times r \times \\
 &\times \sin \frac{\alpha}{2} \times H_{ц} \times \frac{360}{\alpha} = \\
 &= 2 \times r^2 \times \pi_{пл.кр.в} + 2 \times r \times H_{ц} \times \pi_{дл.окр.в} = \\
 &= 2 \times r \times (r \times \pi_{пл.кр.в} + H_{ц} \times \pi_{дл.окр.в}), \quad (3.1.1.6)
 \end{aligned}$$

Как видно из Рис.3.1.1.2, по формуле (3.1.1.6) вычисляется, на самом деле, не площадь поверхности цилиндра, а площадь вписанного в цилиндр многогранника в виде

многогранной призмы, так как точно вычислять площади, плоских фигур, ограниченных кривыми линиями (каковой, в частности, является окружность), и криволинейных поверхностей (каковой, в частности, является боковая поверхность цилиндра), мы не умеем. Мы умеем вычислять площади только плоских фигур, ограниченных только прямыми линиями.

### §3.1.2. Метод описанного многогранника

На Рис.3.1.2.1 показан круговой прямой цилиндр с радиусом основания цилиндра  $r$ , с центром основания цилиндра в точке  $O_1$  и центром верхней поверхности цилиндра в точке  $O_2$ . Таким образом, прямая линия  $|O_1O_2|$  является осью цилиндра и его высотой  $|O_1O_2| = H_{\text{ц}}$ .

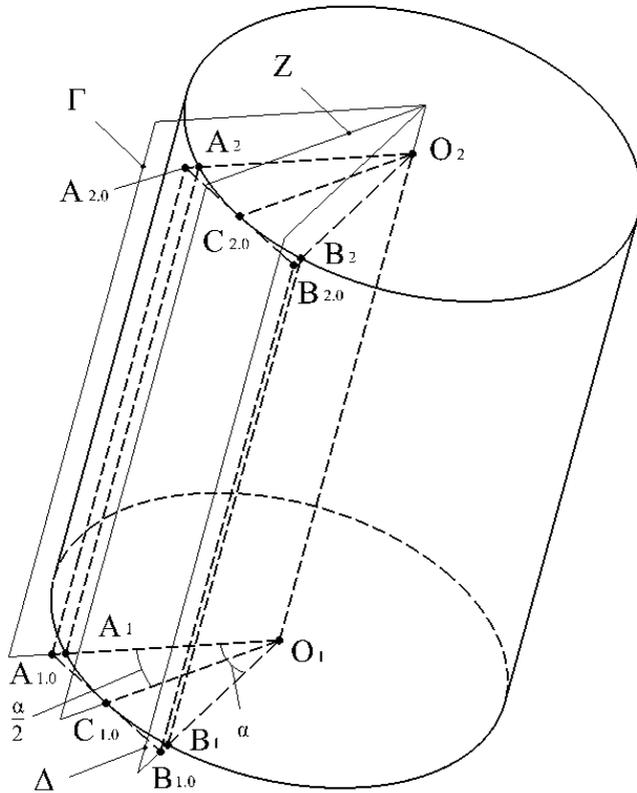


Рис.3.1.2.1.

Проведем через ось цилиндра  $|O_1O_2|$  плоскость  $Z$ . Построив линию пересечения плоскости  $Z$  с основанием цилиндра, получим прямую линию  $|O_1C_{1.0}|$ , которая является радиусом основания цилиндра  $|O_1C_{1.0}| = r$ . Построив линию пересечения плоскости  $Z$  с верхней поверхностью цилиндра, получим прямую линию  $|O_2C_{2.0}|$ , которая является радиусом верхней поверхности цилиндра  $|O_2C_{2.0}| = r$ .

Проведем через ось цилиндра  $|O_1O_2|$  плоскость  $\Gamma$  под углом  $\frac{\alpha}{2}$  к плоскости  $Z$ . Построив линию пересечения плоскости  $\Gamma$  с боковой поверхностью цилиндра, получим прямую линию  $|A_1A_2|$ , которая является образующей цилиндра и которая перпендикулярна плоскости основания цилиндра. Следовательно,  $|A_1A_2| = |O_1O_2|$ . Построив линию пересечения плоскости  $\Gamma$  с основанием цилиндра, получим прямую линию  $|O_1A_1|$ , которая является радиусом основания цилиндра  $|O_1A_1| = r$ . Построив линию пересечения плоскости  $\Gamma$  с верхней поверхностью цилиндра, получим прямую линию  $|O_2A_2|$ , которая является радиусом верхней поверхности цилиндра  $|O_2A_2| = r$ .

Проведем через ось конуса  $|O_1O_2|$  плоскость  $\Delta$  под углом  $\frac{\alpha}{2}$  к плоскости  $Z$  и под углом  $\alpha$  к плоскости  $\Gamma$ . Построив линию пересечения плоскости  $\Delta$  с боковой поверхностью цилиндра, получим прямую линию  $|B_1B_2|$ , которая является образующей цилиндра и которая перпендикулярна плоскости основания цилиндра. Следовательно,  $|B_1B_2| = |O_1O_2|$ . Построив линию пересечения плоскости  $\Delta$  с основанием цилиндра, получим прямую линию  $|O_1B_1|$ , которая является радиусом основания цилиндра  $|O_1B_1| = r$ . Построив линию пересечения плоскости  $\Delta$  с верхней поверхностью цилиндра, получим прямую линию  $|O_2B_2|$ , которая является радиусом верхней поверхности цилиндра  $|O_2B_2| = r$ .

Проведем через точку  $C_{1,0}$  прямую линию, лежащую в плоскости основания цилиндра, касательную к окружности основания цилиндра, а, следовательно, перпендикулярную к радиусу основания цилиндра  $|O_1C_{1,0}| = r$ . Проведем из точки  $O_1$  прямую линию до ее пересечения с вышеуказанной касательной к окружности основания цилиндра в точке  $A_{1,0}$ , при этом, данная прямая линия по направлению совпадает с направлением радиуса  $|O_1A_1| = r$  (то есть,

угол между прямой линией  $|O_1A_{1.0}|$  и радиусом  $|O_1C_{1.0}|$  равен  $\frac{\alpha}{2}$ , и данная прямая линия пересекает окружность основания цилиндра в точке  $A_1$ ). Таким образом, прямая линия  $|O_1A_{1.0}|$  лежит в плоскости  $\Gamma$ . Проведем из точки  $O_1$  прямую линию до ее пересечения с вышеуказанной касательной к окружности основания цилиндра в точке  $B_{1.0}$ , при этом, данная прямая линия по направлению совпадает с направлением радиуса  $|O_1B_1| = r$  (то есть, угол между прямой линией  $|O_1B_{1.0}|$  и радиусом  $|O_1C_{1.0}|$  равен  $\frac{\alpha}{2}$ , и данная прямая линия пересекает окружность основания цилиндра в точке  $B_1$ ). Таким образом, прямая линия  $|O_1B_{1.0}|$  лежит в плоскости  $\Delta$ . В результате мы получили равнобедренный треугольник  $O_1A_{1.0}B_{1.0}$ , у которого  $|A_{1.0}B_{1.0}| \perp |O_1C_{1.0}|$ .

Проведем через точку  $C_{2.0}$  прямую линию, лежащую в плоскости верхней поверхности цилиндра, касательную к окружности верхней поверхности цилиндра, а, следовательно, перпендикулярную к радиусу верхней поверхности цилиндра  $|O_2C_{2.0}| = r$ . Проведем из точки  $O_2$  прямую линию до ее пересечения с вышеуказанной касательной к окружности верхней поверхности цилиндра в точке  $A_{2.0}$ , при этом, данная прямая линия по направлению совпадает с направлением радиуса  $|O_2A_2| = r$  (то есть, угол между прямой линией  $|O_2A_{2.0}|$  и радиусом  $|O_2C_{2.0}|$  равен  $\frac{\alpha}{2}$ , и данная прямая линия пересекает окружность верхней поверхности цилиндра в точке  $A_2$ ). Таким образом, прямая линия  $|O_2A_{2.0}|$  лежит в плоскости  $\Gamma$ . Проведем из точки  $O_2$  прямую линию до ее пересечения с вышеуказанной касательной к окружности верхней поверхности цилиндра в точке  $B_{2.0}$ , при этом, данная прямая линия по направлению совпадает с направлением радиуса  $|O_2B_2| = r$  (то есть, угол между прямой линией  $|O_2B_{2.0}|$  и радиусом

$|O_2C_{2.0}|$  равен  $\frac{\alpha}{2}$ , и данная прямая линия пересекает окружность верхней поверхности цилиндра в точке  $B_2$ ). Таким образом, прямая линия  $|O_2B_{2.0}|$  лежит в плоскости  $\Delta$ . В результате мы получили равнобедренный треугольник  $O_2A_{2.0}B_{2.0}$ , у которого  $|A_{2.0}B_{2.0}| \perp |O_2C_{2.0}|$ .

Полная площадь поверхности цилиндра  $S_{ц.р}$  будет равна сумме площадей основания  $S_{осн.ц.о}$  и верхней  $S_{верх.пов.ц.о}$  поверхностей цилиндра, и боковой  $S_{бок.ц.о}$  поверхности цилиндра:

$$\begin{aligned} S_{ц.о} &= S_{осн.ц.о} + S_{верх.пов.ц.о} + S_{бок.ц.о} = \\ &= 2 \times S_{осн.ц.о} + S_{бок.ц.о}, \quad (3.1.2.1) \end{aligned}$$

Ранее в §2.2.2 была найдена формула (2.2.2.2) для вычисления площади круга по методу описанного многоугольника. По этой формуле будет вычислена площади основания  $S_{осн.ц.о}$  и верхней  $S_{верх.пов.ц.о}$  поверхностей цилиндра, которая будет иметь вид:

$$\begin{aligned} S_{осн.ц.о} &= S_{верх.пов.ц.о} = r^2 \times \tan \frac{\alpha}{2} \times \frac{360}{\alpha} = \\ &= r^2 \times \pi_{дл.окр.о}, \quad (3.1.2.2) \end{aligned}$$

Площадь боковой поверхности цилиндра будет вычислена далее.

Соединив точки  $A_{1.0}$  и  $A_{2.0}$ ,  $B_{1.0}$  и  $B_{2.0}$  между собой, получим четырехугольник  $A_{1.0}A_{2.0}B_{2.0}B_{1.0}$ .  $|O_1C_{1.0}| = |O_2C_{2.0}| = r$ , и  $|O_1C_{1.0}|$  и  $|O_2C_{2.0}|$  лежат в одной плоскости  $Z$ .  $|A_{1.0}B_{1.0}| \perp |O_1C_{1.0}|$  и  $|A_{2.0}B_{2.0}| \perp |O_2C_{2.0}|$ . Следовательно,  $|A_{1.0}B_{1.0}|$  и  $|A_{2.0}B_{2.0}|$  лежат в одной плоскости и  $|A_{1.0}B_{1.0}| = |A_{2.0}B_{2.0}|$ . А, следовательно, четырехугольник  $A_{1.0}A_{2.0}B_{2.0}B_{1.0}$  является прямоугольником, у которого известна высота  $|A_{1.0}A_{2.0}| = |O_1O_2| = H_{ц.}$

Ранее в §2.1.2 методом описанного многоугольника была найдена формула (2.1.2.2) для вычисления стороны  $|A_0B_0|$ . В данном случае  $|A_0B_0| = |A_{1.0}B_{1.0}|$ , следовательно, сторона  $|A_{1.0}B_{1.0}|$  будет равна:

$$|A_{1.0}B_{1.0}| = 2 \times r \times \tan \frac{\alpha}{2}, \quad (3.1.2.3)$$

Согласно **П.1.17** вычислим площадь  $S_{A_{1.0}A_{2.0}B_{2.0}B_{1.0}}$  прямоугольника  $A_{1.0}A_{2.0}B_{2.0}B_{1.0}$ , которая будет равна:

$$\begin{aligned} S_{A_{1.0}A_{2.0}B_{2.0}B_{1.0}} &= |A_{1.0}B_{1.0}| \times |A_{1.0}A_{2.0}| = \\ &= 2 \times r \times \tan \frac{\alpha}{2} \times H_{\text{ц}}, \quad (3.1.2.4) \end{aligned}$$

Чем меньше будет угол  $\alpha$ , тем меньше площадь прямоугольника  $A_{1.0}A_{2.0}B_{2.0}B_{1.0}$  будет отличаться от площади сектора боковой поверхности цилиндра, ограниченного дугами окружностей  $\widehat{A_1B_1}$  и  $\widehat{A_2B_2}$  и прямыми линиями (образующими цилиндра)  $|A_1A_2|$  и  $|B_1B_2|$ . Умножив площадь прямоугольника  $A_{1.0}A_{2.0}B_{2.0}B_{1.0}$ , вычисленную по формуле (3.1.2.4), на число таких прямоугольников, уместяющихся на боковой поверхности цилиндра, то есть, на  $\frac{360}{\alpha}$ , получим (Рис.3.1.2.2) полную площадь боковой поверхности цилиндра  $S_{\text{бок.ц.о}}$ :

$$\begin{aligned} S_{\text{бок.ц.о}} &= S_{A_{1.0}A_{2.0}B_{2.0}B_{1.0}} \times \frac{360}{\alpha} = 2 \times r \times \tan \frac{\alpha}{2} \times H_{\text{ц}} \times \frac{360}{\alpha} = \\ &= 2 \times r \times H_{\text{ц}} \times \pi_{\text{дл.окр.о}}, \quad (3.1.2.5) \end{aligned}$$

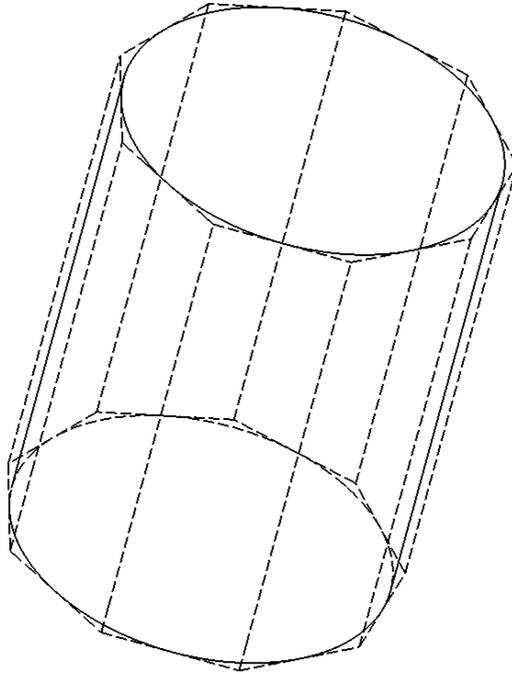


Рис.3.1.2.2.

Полная площадь поверхности цилиндра  $S_{ц.о}$  будет равна:

$$\begin{aligned}
 S_{ц.о} &= 2 \times S_{осн.ц.о} + S_{бок.ц.о} = \\
 &= 2 \times r^2 \times \tan \frac{\alpha}{2} \times \frac{360}{\alpha} + 2 \times r \times \tan \frac{\alpha}{2} \times H_{ц} \times \\
 &\times \frac{360}{\alpha} = \\
 &= 2 \times r^2 \times \pi_{дл.окр.о} + 2 \times r \times H_{ц} \times \pi_{дл.окр.о} = \\
 &= 2 \times r \times \pi_{дл.окр.о} \times (r + H_{ц}), \quad (3.1.2.6)
 \end{aligned}$$

Как видно из Рис.3.1.2.2, по формуле (3.1.2.6) вычисляется, на самом деле, не площадь поверхности цилиндра, а

площадь описанного около цилиндра многогранника в виде многогранной призмы, так как точно вычислять площади, плоских фигур, ограниченных кривыми линиями (каковой, в частности, является окружность), и криволинейных поверхностей (каковой, в частности, является боковая поверхность цилиндра), мы не умеем. Мы умеем вычислять площади только плоских фигур, ограниченных только прямыми линиями.

### §3.1.3. Результирующий Метод

При использовании метода вписанного многогранника в §3.1.1 была найдена формула (3.1.1.6) для вычисления полной площади поверхности цилиндра  $S_{ц,в}$ , имеющая вид:

$$S_{ц,в} = 2 \times r \times (r \times \pi_{пл.кр.в} + H_{ц} \times \pi_{дл.окр.в}), (3.1.3.1)$$

Формула (3.1.3.1) является нижней границей для вычисления значения площади поверхности цилиндра.

При использовании метода описанного многогранника в §3.1.2 была найдена формула (3.1.2.6) для вычисления полной площади поверхности цилиндра  $S_{ц,о}$ , имеющая вид:

$$S_{ц,о} = 2 \times r \times \pi_{дл.окр.о} \times (r + H_{ц}), (3.1.3.2)$$

Формула (3.1.3.2) является верхней границей для вычисления значения площади поверхности цилиндра.

Искомая полная площадь поверхности цилиндра находится между вышеуказанными нижней и верхней границами. Поэтому, результирующая формула для вычисления полной площади поверхности цилиндра  $S_{ц,р}$  будет представлять среднеарифметическое (Рис.3.1.3.1) от формул (3.1.3.1) и (3.1.3.2) вида:

$$\begin{aligned}
 S_{ц,р} &= \frac{S_{ц,в} + S_{ц,о}}{2} = \\
 &= \frac{(2 \times r \times (r \times \pi_{пл.кр.в} + H_{ц} \times \pi_{дл.окр.в})) + (2 \times r \times \pi_{дл.окр.о} \times (r + H_{ц}))}{2} = \\
 &= r \times (r \times \pi_{пл.кр.в} + H_{ц} \times \pi_{дл.окр.в}) + \pi_{дл.окр.о} \times (r + H_{ц}), (3.1.3.3)
 \end{aligned}$$

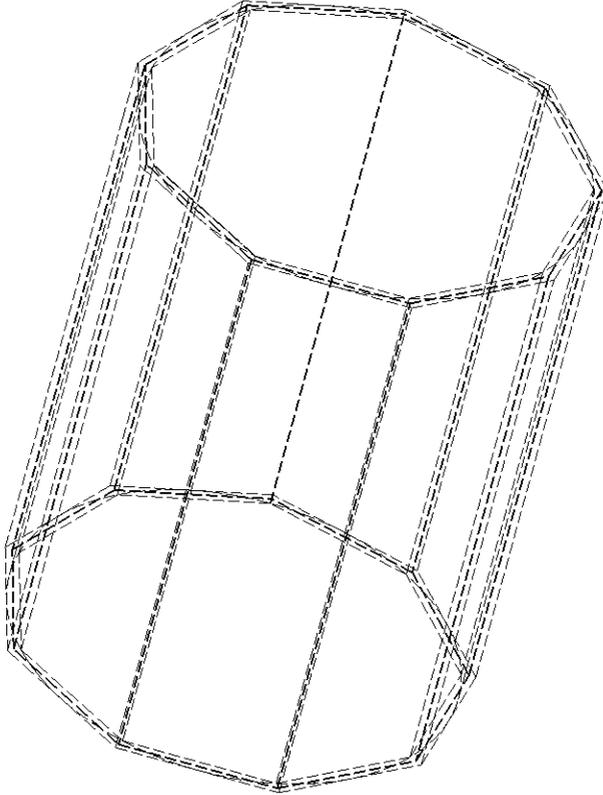


Рис.3.1.3.1.

Как видно из Рис.3.1.3.1, по формуле (3.1.3.3) вычисляется, на самом деле, не площадь поверхности цилиндра, а площадь некоего среднеарифметического многогранника в виде многогранной призмы, так как точно вычислять площади, плоских фигур, ограниченных кривыми линиями

(каковой, в частности, является окружность), и криволинейных поверхностей (каковой, в частности, является боковая поверхность цилиндра), мы не умеем. Мы умеем вычислять площади только плоских фигур, ограниченных только прямыми линиями.

Вычисленная по формуле (3.1.3.3) площадь поверхности цилиндра ближе по величине к искомой площади поверхности цилиндра, по сравнению с площадями поверхности цилиндра, вычисленными, по формуле (3.1.1.6) по методу вписанного многогранника, и по формуле (3.1.2.6) по методу описанного многогранника.

## §3.2. Вычисление объема Цилиндра

### §3.2.1. Метод вписанного многогранника

При использовании метода вписанного многогранника в §3.1.1 была найдена формула (3.1.1.2) для вычисления площади основания цилиндра  $S_{\text{осн.ц.в}}$ . Высота цилиндра равна  $|O_1O_2| = H_{\text{ц}}$ .

Согласно **П.1.19** объем цилиндра  $V_{\text{ц.в}}$  будет равен произведению площади основания цилиндра  $S_{\text{осн.ц.в}}$ , вычисленной по формуле (3.1.1.2), на высоту цилиндра  $|O_1O_2| = H_{\text{ц}}$ :

$$\begin{aligned} V_{\text{ц.в}} &= S_{\text{осн.ц.в}} \times H_{\text{ц}} = r^2 \times \sin \frac{\alpha}{2} \times \cos \frac{\alpha}{2} \times \frac{360}{\alpha} \times H_{\text{ц}} = \\ &= \pi_{\text{пл.кр.в}} \times r^2 \times H_{\text{ц}}, \end{aligned} \quad (3.2.1.1)$$

Как видно из Рис.3.1.1.2, по формуле (3.2.1.1) вычисляется, на самом деле, не объем цилиндра, а объем вписанного в цилиндр многогранника в виде многогранной призмы, так как точно вычислять объемы тел, ограниченных криволинейными поверхностями (каковой, в частности, яв-

ляется боковая поверхность цилиндра), мы не умеем. Мы умеем вычислять объемы тел, ограниченных только плоскими поверхностями.

### §3.2.2. Метод описанного многогранника

При использовании метода описанного многогранника в §3.1.2 была найдена формула (3.1.2.2) для вычисления площади основания цилиндра  $S_{\text{осн.ц.о}}$ . Высота цилиндра равна  $|O_1O_2| = H_{\text{ц}}$ .

Согласно **П.1.19** объем цилиндра  $V_{\text{ц.о}}$  будет равен произведению площади основания цилиндра  $S_{\text{осн.ц.о}}$ , вычисленной по формуле (3.1.2.2), на высоту цилиндра  $|O_1O_2| = H_{\text{ц}}$ :

$$V_{\text{ц.о}} = S_{\text{осн.ц.о}} \times H_{\text{ц}} = r^2 \times \tan \frac{\alpha}{2} \times \frac{360}{\alpha} \times H_{\text{ц}} = \pi_{\text{дл.окр.о}} \times r^2 \times H_{\text{ц}}, \quad (3.2.2.1)$$

Как видно из Рис.3.1.2.2, по формуле (3.2.2.1) вычисляется, на самом деле, не объем цилиндра, а объем описанного около цилиндра многогранника в виде многогранной призмы, так как точно вычислять объемы тел, ограниченных криволинейными поверхностями (каковой, в частности, является боковая поверхность цилиндра), мы не умеем. Мы умеем вычислять объемы тел, ограниченных только плоскими поверхностями.

### §3.2.3. Результирующий Метод

При использовании метода вписанного многогранника в §3.2.1 была найдена формула (3.2.1.1) для вычисления объема цилиндра  $V_{ц}$ , имеющая вид:

$$V_{ц,в} = r^2 \times \sin \frac{\alpha}{2} \times \cos \frac{\alpha}{2} \times \frac{360}{\alpha} \times H_{ц} = \pi_{пл.кр.в} \times r^2 \times H_{ц}, \quad (3.2.3.1)$$

Формула (3.2.3.1) является нижней границей для вычисления объема цилиндра.

При использовании метода описанного многогранника в §3.2.2 была найдена формула (3.2.2.1) для вычисления объема цилиндра  $V_{ц}$ , имеющая вид:

$$V_{ц,о} = r^2 \times \tan \frac{\alpha}{2} \times \frac{360}{\alpha} \times H_{ц} = \pi_{дл.окр.о} \times r^2 \times H_{ц}, \quad (3.2.3.2)$$

Формула (3.2.3.2) является верхней границей для вычисления объема цилиндра.

Искомый объем цилиндра находится между вышеуказанными нижней и верхней границами. Поэтому, результирующая формула для вычисления объема цилиндра  $V_{ц,р}$  будет представлять среднеарифметическое (Рис.3.2.3.1) от формул (3.2.3.1) и (3.2.3.2):

$$\begin{aligned} V_{ц,р} &= \frac{V_{ц,в} + V_{ц,о}}{2} = \\ &= \frac{\left( r^2 \times \sin \frac{\alpha}{2} \times \cos \frac{\alpha}{2} \times \frac{360}{\alpha} \times H_{ц} \right) + \left( r^2 \times \tan \frac{\alpha}{2} \times \frac{360}{\alpha} \times H_{ц} \right)}{2} = \\ &= \frac{r^2 \times H_{ц} \times \left( \frac{360}{\alpha} \times \left( \left( \sin \frac{\alpha}{2} \times \cos \frac{\alpha}{2} \right) + \tan \frac{\alpha}{2} \right) \right)}{2} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{2 \times r^2 \times H_{\text{ц}} \times \left( \frac{180}{\alpha} \times \left( \left( \sin \frac{\alpha}{2} \times \cos \frac{\alpha}{2} \right) + \tan \frac{\alpha}{2} \right) \right)}{2} = \\
 &= r^2 \times H_{\text{ц}} \times \left( \frac{180}{\alpha} \times \left( \left( \sin \frac{\alpha}{2} \times \cos \frac{\alpha}{2} \right) + \tan \frac{\alpha}{2} \right) \right) = \\
 &= \pi_{\text{пл.кр.р}} \times r^2 \times H_{\text{ц}}, \quad (3.2.3.3)
 \end{aligned}$$

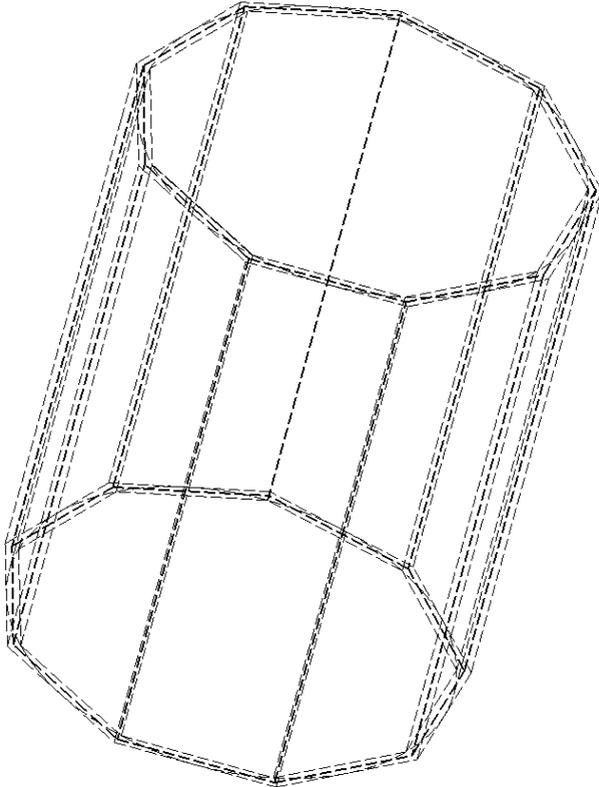


Рис.3.2.3.1.

Как видно из Рис.3.2.3.1, по формуле (3.2.3.3) вычисляется, на самом деле, не объем цилиндра, а объем некоего среднеарифметического многогранника в виде многогран-

ной призмы, так как точно вычислять объемы тел, ограниченных криволинейными поверхностями (каковой, в частности, является боковая поверхность цилиндра), мы не умеем. Мы умеем вычислять объемы тел, ограниченных только плоскими поверхностями.

Вычисленный по формуле (3.2.3.3) объем цилиндра ближе по величине к искомому объему цилиндра, по сравнению с объемами цилиндров, вычисленными, по формуле (3.2.3.1) по методу вписанного многогранника, и по формуле (3.2.3.2) по методу описанного многогранника.

### §3.3. Выводы

В §3.1.3 по результирующему методу была найдена формула (3.1.3.3) для вычисления площади поверхности цилиндра  $S_{ц,р}$  вида:

$$S_{ц,р} = r \times ((r \times \pi_{пл.кр.в} + H_{ц} \times \pi_{дл.окр.в})) + \pi_{дл.окр.о} \times (r + H_{ц}), (3.3.1)$$

Из **П.1.18** известна формула для вычисления площади поверхности цилиндра, равная:

$$S_{ц} = 2 \times r \times \pi \times (r + H_{ц}), (3.3.2)$$

В §3.2.3 по результирующему методу была найдена формула (3.2.3.3) для вычисления объема цилиндра  $V_{ц,р}$  вида:

$$V_{ц,р} = \pi_{пл.кр.р} \times r^2 \times H_{ц}, (3.3.3)$$

Из **П.1.19** известна формула для вычисления объема цилиндра, равная:

$$V_{ц} = \pi \times r^2 \times H_{ц}, (3.3.4)$$

Как видно, формулы (3.3.1÷3.3.4) отличаются друг от друга тем, что в формулах (3.3.2) и (3.3.4) стоит некое единое (для всех формул – для вычисления, длины окружности, площади круга, площади поверхности цилиндра, объема цилиндра, площади поверхности тора, объема тора, площади поверхности конуса, объема конуса, площади поверхности сферы и объема шара) число  $\pi$ , в формуле (3.3.1) стоят три числа  $\pi_{\text{пл.кр.в}}$ ,  $\pi_{\text{дл.окр.в}}$  и  $\pi_{\text{дл.окр.о}}$ , а в формуле (3.3.3) стоит одно число  $\pi_{\text{пл.кр.р}}$ . При этом, вышеуказанные числа, как об этом указано ранее в §2.3 в таблице 2.3.1, по величине не равны между собой.

## Глава 4

### §4. Вычисление площади поверхности и объема Тора

#### §4.1. Вычисление площади поверхности Тора

##### §4.1.1. Метод вписанного многогранника

На Рис.4.1.1.1 показан тор с центром в точке  $O_4$ , радиусом образующей окружности  $r$  и радиусом направляющей окружности  $R$ .

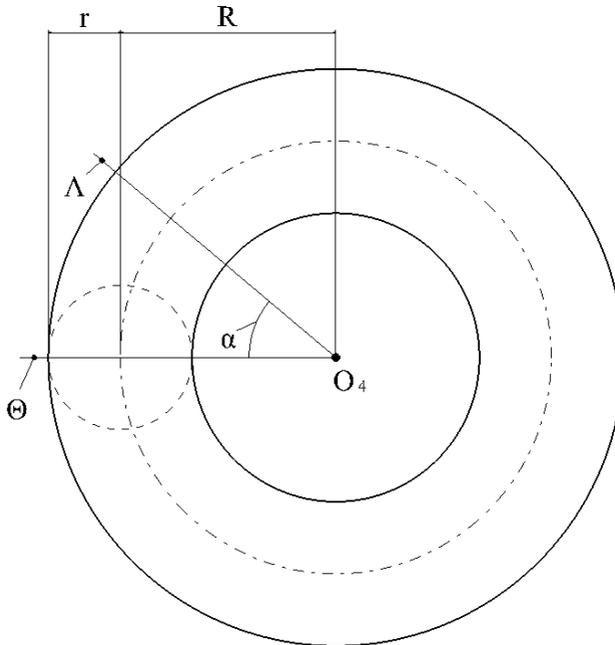


Рис.4.1.1.1.

Проведем через ось вращения тора, проходящую через точку  $O_4$  и перпендикулярную плоскости, в которой лежит

направляющая окружность тора, плоскость  $\Lambda$ . Проведем через ось вращения тора, проходящую через точку  $O_4$  и перпендикулярную плоскости, в которой лежит направляющая окружность тора, плоскость  $\Theta$ , которая составляет с плоскостью  $\Lambda$  угол  $\alpha$ .

Плоскость  $\Lambda$  (Рис.4.1.1.2) пересекает направляющую окружность в точке  $O_6$ , а сечение тора этой плоскостью представляет собой окружность радиусом  $r$ . Плоскость  $\Theta$  пересекает направляющую окружность в точке  $O_5$ , а сечение тора этой плоскостью представляет собой окружность радиусом  $r$ .

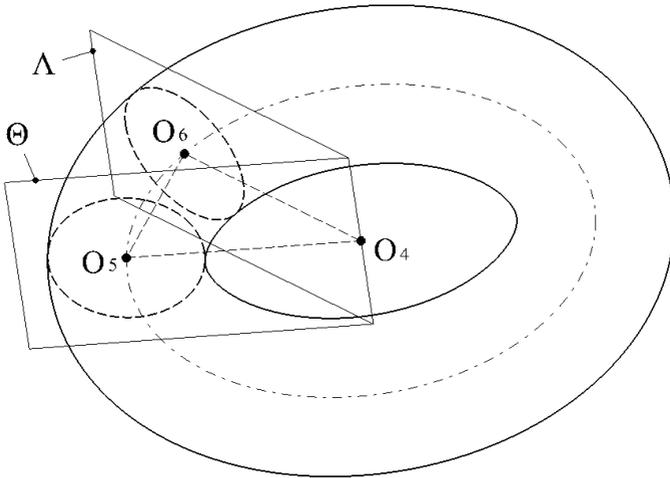


Рис.4.1.1.2.

Соединив точки  $O_4$  и  $O_5$ ,  $O_4$  и  $O_6$ ,  $O_5$  и  $O_6$  между собой, получим равнобедренный треугольник  $O_4O_5O_6$  (так как  $|O_4O_5| = |O_4O_6| = R$ ).

Рассмотрим равнобедренный треугольник  $O_4O_5O_6$  (Рис.4.1.1.3), у которого известны две стороны  $|O_4O_5|$  и  $|O_4O_6|$ , и угол  $O_5O_4O_6 = \alpha$  между ними.

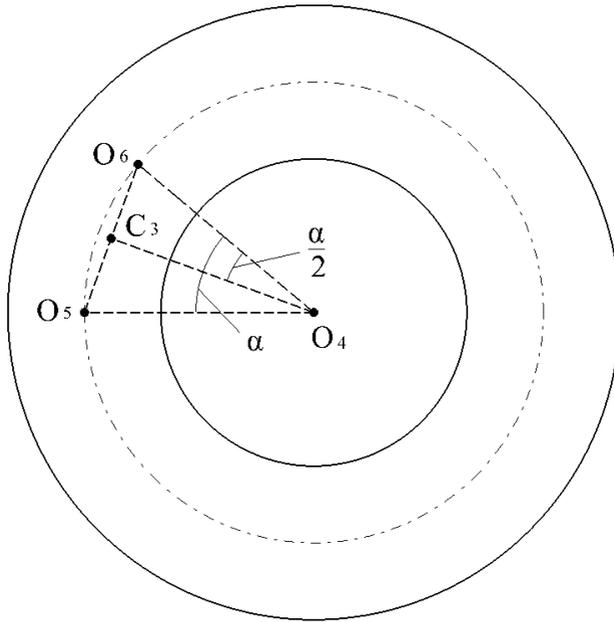


Рис.4.1.1.3.

Из точки  $O_4$  опустим перпендикуляр  $|O_4C_3|$  на сторону  $|O_5O_6|$  треугольника  $O_4O_5O_6$ . Получим два прямоугольных треугольника  $O_4C_3O_6$  и  $O_4C_3O_5$ . Треугольник  $O_4O_5O_6$  равнобедренный (доказано ранее),  $|O_4C_3| \perp |O_5O_6|$  (принято ранее), то в соответствии с **П.1.1**  $|O_4C_3|$  является, одновременно, и высотой, и биссектрисой и медианой треугольника  $O_4O_5O_6$ . Следовательно,  $|O_5C_3| = |C_3O_6|$ , угол  $O_6O_4C_3$  равен углу  $O_5O_4C_3$  и равен  $\frac{\alpha}{2}$ .

Рассмотрим прямоугольный треугольник  $O_4C_3O_6$  (доказано ранее), у которого известна гипотенуза  $|O_4O_6| = R$  (начальное условие), и прилегающий к ней угол  $O_6O_4C_3 = \frac{\alpha}{2}$

(доказано ранее). Определим согласно **П.1.2** его катет  $|C_3O_6|$ :

$$|C_3O_6| = |O_4O_6| \times \sin \frac{\alpha}{2} = R \times \sin \frac{\alpha}{2}, \quad (4.1.1.1)$$

Рассмотрим треугольник  $O_4O_5O_6$ .  $|O_5C_3| = |C_3O_6|$  (доказано ранее), следовательно, сторона  $|O_5O_6|$  будет равна:

$$\begin{aligned} |O_5O_6| &= |C_3O_6| + |O_5C_3| = 2 \times |C_3O_6| = \\ &= 2 \times R \times \sin \frac{\alpha}{2}, \quad (4.1.1.2) \end{aligned}$$

Построим круговой прямой цилиндр (Рис.4.1.1.4) с радиусом основания равным  $r$ , у которого сторона  $|O_5O_6|$  треугольника  $O_4O_5O_6$  будет, одновременно, и осью и высотой цилиндра  $|O_5O_6| = H_{\text{ц}}$ .

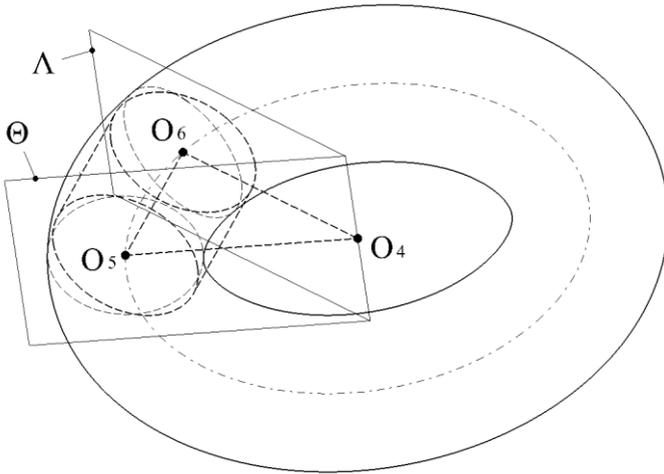


Рис.4.1.1.4.

Проведя те же построения, что и в §3.1.1, получим прямоугольник  $A_3A_4B_4B_3$ .

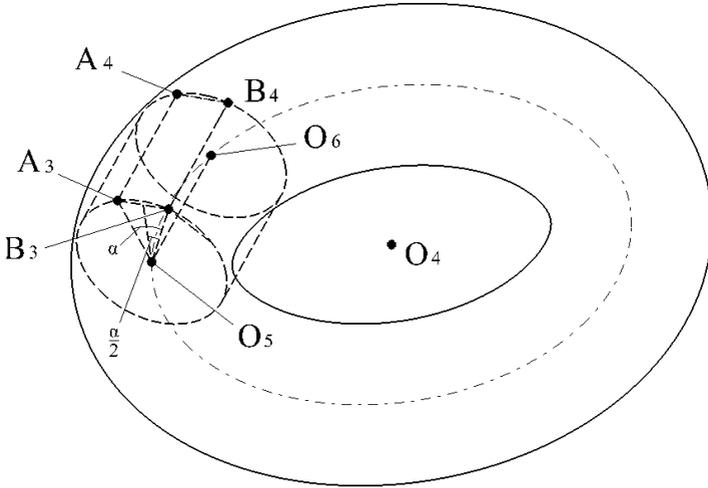


Рис.4.1.1.5.

Ранее в §3.1.1 была найдена формула (3.1.1.5) для вычисления площади боковой поверхности цилиндра  $S_{\text{бок.ц.в.}}$ , вычисленная методом вписанного в цилиндр многогранника, в данном случае имеющая вид:

$$\begin{aligned}
 S_{\text{бок.ц.в.}} &= 2 \times r \times \sin \frac{\alpha}{2} \times H_{\text{ц}} \times \frac{360}{\alpha} = 2 \times r \times \sin \frac{\alpha}{2} \times |O_5O_6| \times \frac{360}{\alpha} = \\
 &= 2 \times r \times \sin \frac{\alpha}{2} \times \left( 2 \times R \times \sin \frac{\alpha}{2} \right) \times \frac{360}{\alpha} = \\
 &= 4 \times r \times R \times \sin \frac{\alpha}{2} \times \pi_{\text{дл.окр.в.}}, \quad (4.1.1.3)
 \end{aligned}$$

Как и в §3.1.1, по формуле (4.1.1.3) вычисляется, на самом деле, не площадь боковой поверхности цилиндра, а площадь боковой поверхности вписанного в цилиндр многогранника в виде многогранной призмы (Рис.4.1.1.6), так как точно вычислять площади криволинейных поверхностей (каковой, в частности, является боковая поверхность цилиндра), мы не умеем.

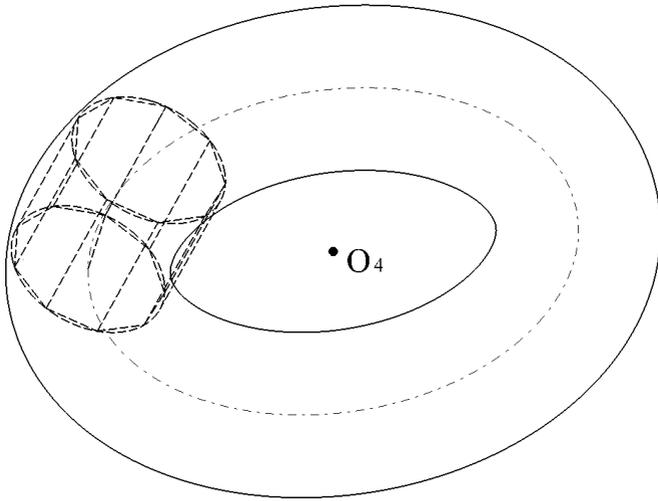


Рис.4.1.1.6.

На Рис.4.1.1.7 видно, что цилиндр, своей частью, лежащей внутри направляющей окружности тора, расположен за пределами сектора тора, ограниченного плоскостями  $\Lambda$  и  $\Theta$ , а своей частью, лежащей во вне направляющей окружности тора, не доходит до плоскостей  $\Lambda$  и  $\Theta$ .

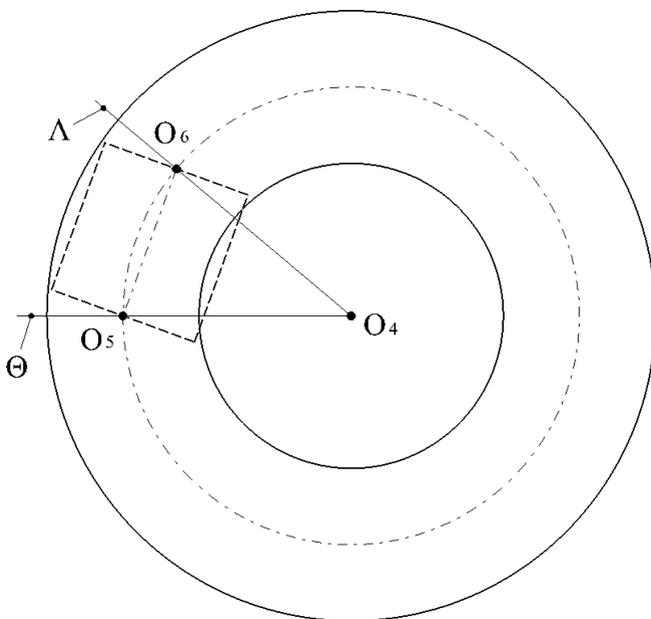


Рис.4.1.1.7.

Из этого может сложиться ложное впечатление, что вычисленная по формуле (4.1.1.3) площадь боковой поверхности цилиндра, не соответствует площади боковой поверхности сектора тора, ограниченного плоскостями  $\Lambda$  и  $\Theta$ .

Однако это не так, и вот почему. Если мы боковую поверхность цилиндра (Рис.4.1.1.8), выступающую за пределы поверхностей  $\Lambda$  и  $\Theta$ , и расположенную внутри направляющей окружности тора, обрежем плоскостями  $\Lambda$  и  $\Theta$ , и обрезанные участки боковой поверхности цилиндра (так называемые «копыта») добавим к боковой поверхности цилиндра, расположенной во вне направляющей окружности тора, то получится полное соответствие сектору тора, ограниченного плоскостями  $\Lambda$  и  $\Theta$ .

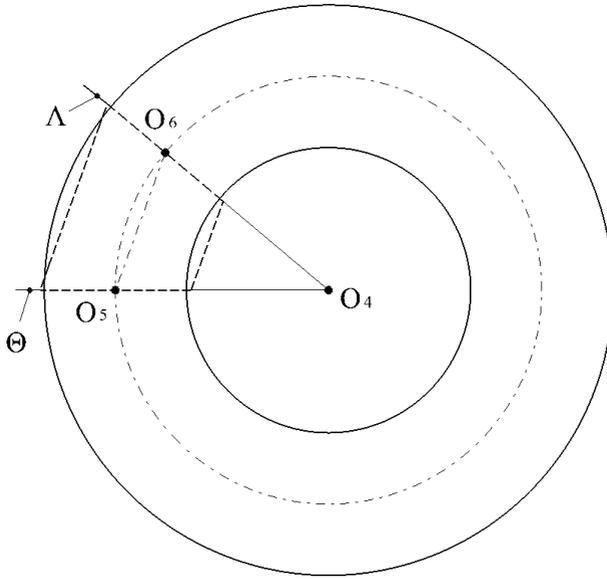


Рис.4.1.1.8.

Умножив площадь боковой поверхности цилиндра  $S_{\text{бок.ц.в}}$ , вычисленную по формуле (4.1.1.3), на число таких цилиндров, уместящихся на поверхности тора, то есть, на  $\frac{360}{\alpha}$ , получим (Рис.4.1.1.9) полную площадь поверхности тора  $S_{\text{т.в}}$ :

$$\begin{aligned} S_{\text{т.в}} &= S_{\text{бок.ц.в}} \times \frac{360}{\alpha} = 4 \times r \times R \times \sin \frac{\alpha}{2} \times \pi_{\text{дл.окр.в}} \times \frac{360}{\alpha} = \\ &= 4 \times r \times R \times \pi_{\text{дл.окр.в}}^2, \quad (4.1.1.4) \end{aligned}$$

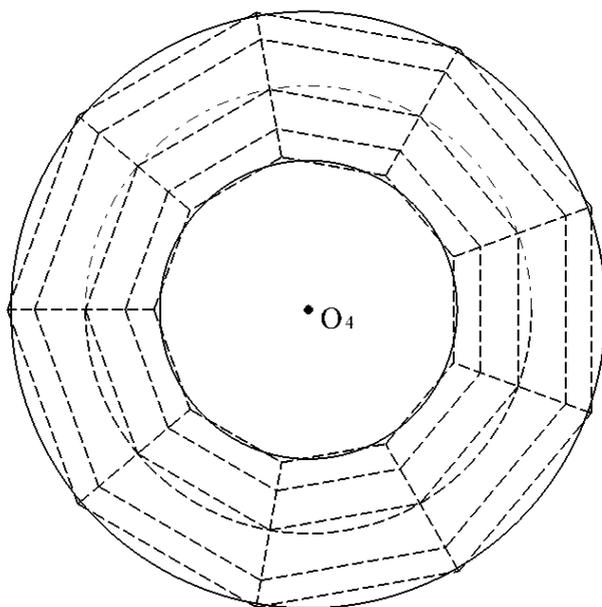


Рис.4.1.1.9.

Как видно из Рис.4.1.1.9, по формуле (4.1.1.4) вычисляется, на самом деле, не площадь поверхности тора, а площадь некоего вписанного в тор торообразного многогранника, так как точно вычислять площади криволинейных поверхностей (каковой, в частности, является поверхность тора), мы не умеем. Мы умеем вычислять площади только плоских фигур, ограниченных только прямыми линиями.

### §4.1.2. Метод описанного многогранника

На Рис.4.1.2.1 показан тор с центром в точке  $O_4$ , радиусом образующей окружности  $r$  и радиусом направляющей окружности  $R$ .

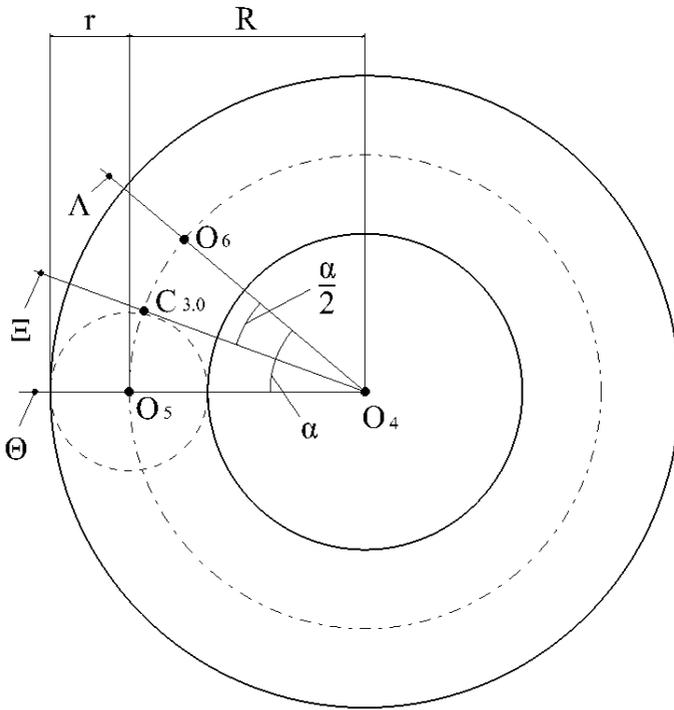


Рис.4.1.2.1.

Проведем через ось вращения тора, проходящую через точку  $O_4$  и перпендикулярную плоскости, в которой лежит направляющая окружность тора, плоскость  $\Xi$ . Проведем через ось вращения тора, проходящую через точку  $O_4$  и перпендикулярную плоскости, в которой лежит направляющая окружность тора, плоскость  $\Lambda$  под углом  $\frac{\alpha}{2}$  к плоскости  $\Xi$ . Проведем через ось вращения тора, проходящую через точку  $O_4$  и перпендикулярную плоскости, в которой лежит направляющая окружность тора, плоскость  $\Theta$  под углом  $\frac{\alpha}{2}$  к плоскости  $\Xi$ , и которая составляет с плоскостью  $\Lambda$  угол  $\alpha$ .

Плоскость  $\Xi$  пересекает направляющую окружность тора в точке  $C_{3,0}$ . Плоскость  $\Lambda$  пересекает направляющую окружность тора в точке  $O_6$ , а сечение тора этой плоскостью представляет собой окружность радиусом  $r$ . Плоскость  $\Theta$  пересекает направляющую окружность тора в точке  $O_5$ , а сечение тора этой плоскостью представляет собой окружность радиусом  $r$ .

Проведем (Рис.4.1.2.2) через точку  $C_{3,0}$  прямую линию, касательную к направляющей окружности, а, следовательно, перпендикулярную к радиусу  $|O_4C_{3,0}|$ .

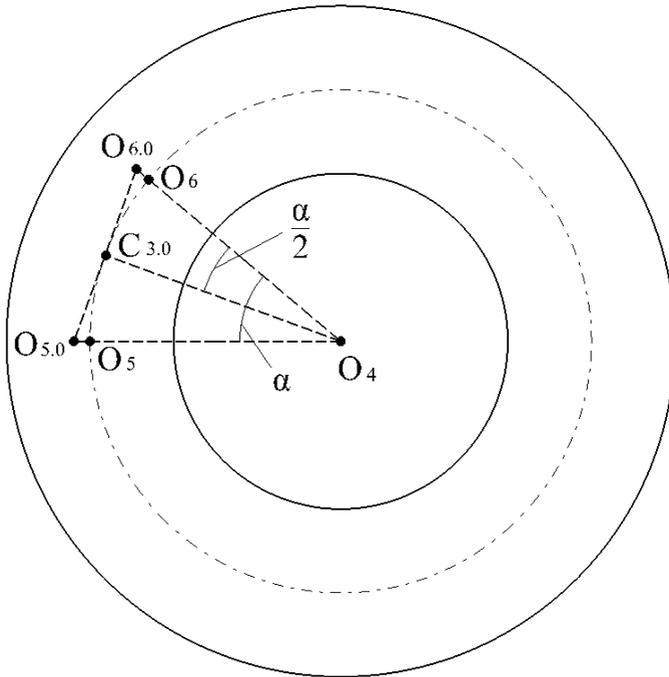


Рис.4.1.2.2.

Проведем из точки  $O_4$  прямую линию под углом  $\frac{\alpha}{2}$  к радиусу  $|O_4C_{3.0}|$  до ее пересечения с вышеуказанной касательной к направляющей окружности в точке  $O_{5.0}$ . При этом, данная прямая линия пересекает направляющую окружность тора в точке  $O_5$ . Таким образом, прямая линия  $|O_4O_{5.0}|$  лежит в плоскости  $\Theta$ . Проведем из точки  $O_4$  прямую линию под углом  $\frac{\alpha}{2}$  к радиусу  $|O_4C_{3.0}|$  до ее пересечения с вышеуказанной касательной к направляющей окружности в точке  $O_{6.0}$ . При этом, данная прямая линия пересекает направляющую окружность тора в точке  $O_{6.0}$ . Таким образом, прямая линия  $|O_4O_{6.0}|$  лежит в плоскости  $\Lambda$ .

Таким образом мы получили равнобедренный треугольник  $O_4O_{5.0}O_{6.0}$  (так как  $|O_4O_{5.0}| = |O_4O_{6.0}|$ ).

Ранее в §2.1.2 методом описанного многоугольника была найдена формула (2.1.2.2) для вычисления стороны  $|A_0B_0|$ , которая в данном случае соответствует стороне  $|O_{5.0}O_{6.0}|$ . Следовательно, сторона  $|O_{5.0}O_{6.0}|$  будет равная:

$$|O_{5.0}O_{6.0}| = 2 \times R \times \tan \frac{\alpha}{2}, \quad (4.1.2.1)$$

Построим круговой прямой цилиндр (Рис.4.1.2.3) с радиусом основания равным  $r$ , у которого сторона  $|O_{5.0}O_{6.0}|$  треугольника  $O_4O_{5.0}O_{6.0}$  будет, одновременно, и осью и высотой цилиндра  $|O_{5.0}O_{6.0}| = H_{ц}$ .

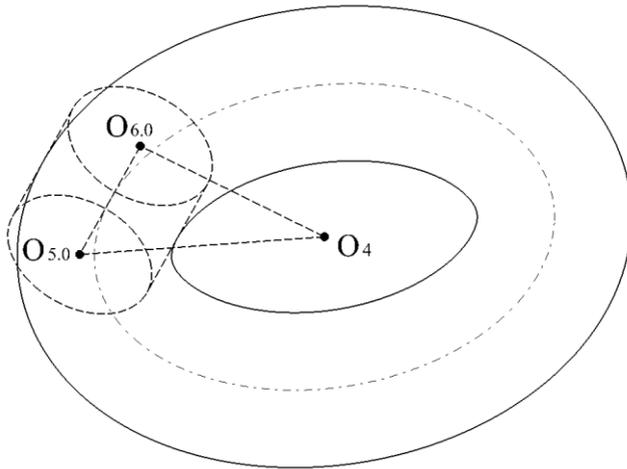


Рис.4.1.2.3.

Проведя те же построения, что и в §3.1.2, получим прямоугольник  $A_{3.0}A_{4.0}B_{4.0}B_{3.0}$ .

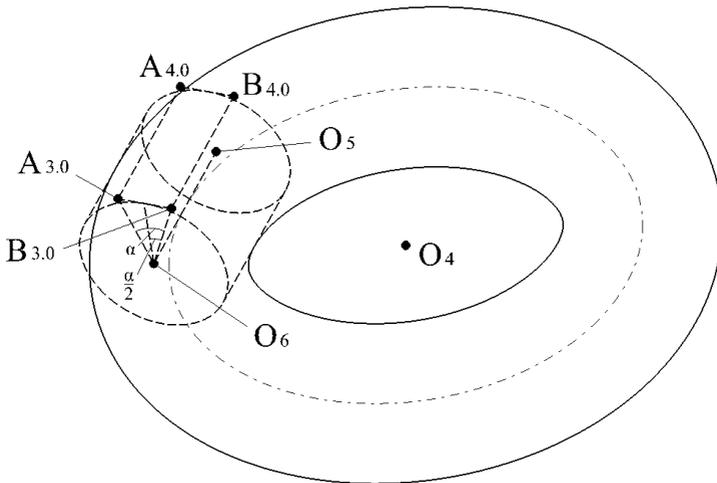


Рис.4.1.2.4.

Ранее в §3.1.2 была найдена формула (3.1.2.5) для вычисления площади боковой поверхности цилиндра  $S_{\text{бок.ц.о}}$ , вычисленная методом описанного около цилиндра многогранника, в данном случае имеющая вид:

$$\begin{aligned}
 S_{\text{бок.ц.о}} &= 2 \times r \times \tan \frac{\alpha}{2} \times H_{\text{ц}} \times \frac{360}{\alpha} = \\
 &= 2 \times r \times \tan \frac{\alpha}{2} \times |O_{5.0}O_{6.0}| \times \frac{360}{\alpha} = \\
 &= 2 \times r \times \tan \frac{\alpha}{2} \times \left(2 \times R \times \tan \frac{\alpha}{2}\right) \times \frac{360}{\alpha} = \\
 &= 4 \times r \times R \times \tan \frac{\alpha}{2} \times \pi_{\text{дл.окр.о}}, (4.1.2.2)
 \end{aligned}$$

Как и в §3.1.2, по формуле (4.1.2.3) вычисляется, на самом деле, не площадь боковой поверхности цилиндра, а площадь боковой поверхности описанного около цилиндра многогранника в виде многогранной призмы (Рис.4.1.2.5), так как точно вычислять площади криволинейных поверхностей (каковой, в частности, является боковая поверхность цилиндра), мы не умеем. Мы умеем вычислять площади только плоских фигур, ограниченных только прямыми линиями.

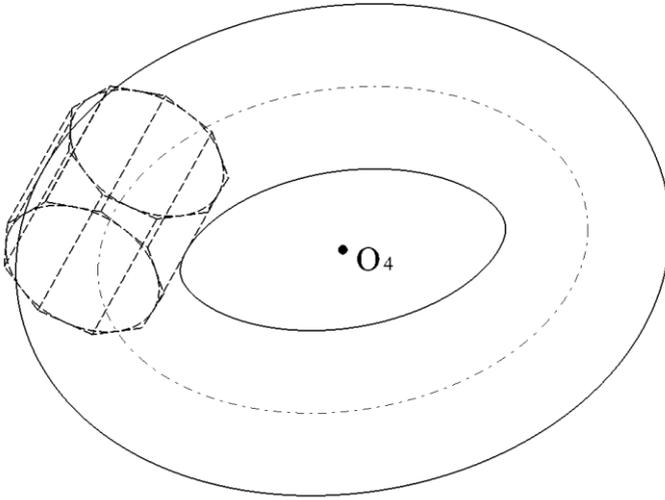


Рис.4.1.2.5.

На Рис.4.1.2.6 видно, что цилиндр, своей частью, лежащей внутри направляющей окружности тора, расположен за пределами сектора тора, ограниченного плоскостями  $\Lambda$  и  $\Theta$ , а своей частью, лежащей во вне направляющей окружности тора, не доходит до плоскостей  $\Lambda$  и  $\Theta$ .

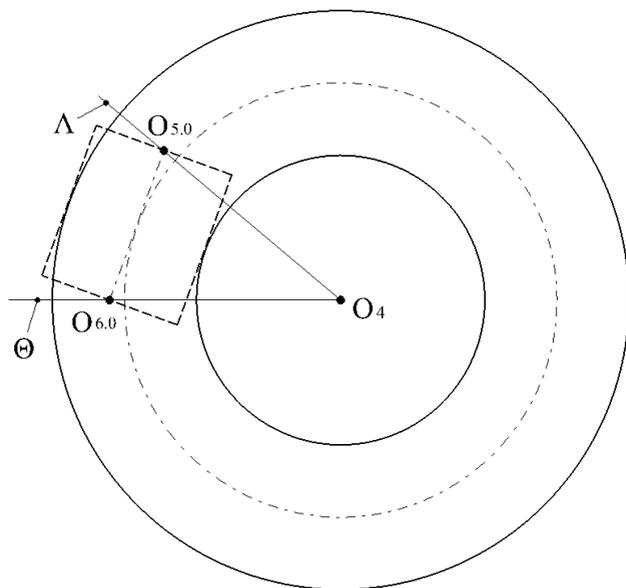


Рис.4.1.2.6.

Из этого может сложиться ложное впечатление, что вычисленная по формуле (4.1.2.2) площадь боковой поверхности цилиндра, не соответствует площади боковой поверхности сектора тора, ограниченного плоскостями  $\Lambda$  и  $\Theta$ .

Однако это не так, и вот почему. Если мы боковую поверхность цилиндра (Рис.4.1.2.7), выступающую за пределы плоскостей  $\Lambda$  и  $\Theta$ , и расположенную внутри направляющей окружности тора, обрежем плоскостями  $\Lambda$  и  $\Theta$ , и обрезанные участки боковой поверхности цилиндра (так называемые «копыта») добавим к боковой поверхности цилиндра, расположенной во вне направляющей окружности тора, то получится полное соответствие сектору тора, ограниченного поверхностями  $\Lambda$  и  $\Theta$ .



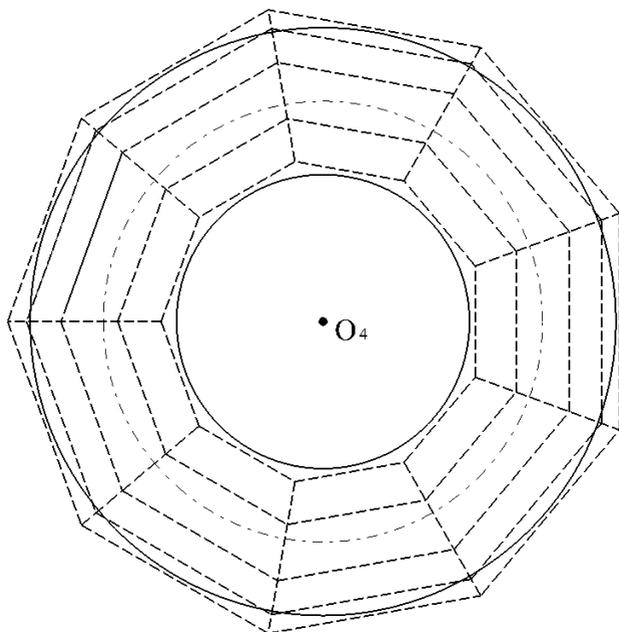


Рис.4.1.2.8.

Как видно из Рис.4.1.2.8, по формуле (4.1.2.3) вычисляется, на самом деле, не площадь поверхности тора, а площадь некоего описанного около тора торообразного многогранника, так как точно вычислять площади криволинейных поверхностей (каковой, в частности, является поверхность тора), мы не умеем.

### §4.1.3. Результирующий Метод

При использовании метода вписанного многогранника в §4.1.1 была найдена формула (4.1.1.4) для вычисления площади поверхности тора  $S_{Т,В}$ , имеющая вид:

$$S_{т.в} = 4 \times r \times R \times \pi_{дл.окр.в}^2, (4.1.3.1)$$

Формула (4.1.3.1) является нижней границей для вычисления площади поверхности тора.

При использовании метода описанного многогранника в §4.1.2 была найдена формула (4.1.2.3) для вычисления площади поверхности тора  $S_{т.о}$ , имеющая вид:

$$S_{т.о} = 4 \times r \times R \times \pi_{дл.окр.о}^2, (4.1.3.2)$$

Формула (4.1.3.2) является верхней границей для вычисления площади поверхности тора.

Искомая площадь поверхности тора находится между вышеуказанными нижней и верхней границами. Поэтому, результирующая формула для вычисления площади поверхности тора  $S_{т.р}$  будет представлять среднеарифметическое от формул (4.1.3.1) и (4.1.3.2) вида:

$$\begin{aligned} S_{т.р} &= \frac{S_{т.в} + S_{т.о}}{2} = \frac{(4 \times r \times R \times \pi_{дл.окр.в}^2) + (4 \times r \times R \times \pi_{дл.окр.о}^2)}{2} = \\ &= 2 \times r \times R \times (\pi_{дл.окр.в}^2 + \pi_{дл.окр.о}^2), (4.1.3.3) \end{aligned}$$

По формуле (4.1.3.3) вычисляется, на самом деле, не площадь поверхности тора, а площадь некоего среднеарифметического торообразного многогранника, так как точно вычислять площади криволинейных поверхностей (каковой, в частности, является поверхность тора), мы не умеем.

Вычисленная по формуле (4.1.3.3) площадь поверхности тора ближе по величине к искомой площади поверхности тора, по сравнению с площадями поверхности, вычисленными, по формуле (4.1.1.4) по методу вписанного многогранника, и по формуле (4.1.2.3) по методу описанного многогранника.

## §4.2. Вычисление объема Тора

### §4.2.1. Метод вписанного многогранника

Вычислим объем тора.

Ранее в §2.2.1 методом вписанного многоугольника была найдена формула (2.2.1.2) для вычисления площади круга  $S_{кр.в}$ . По этой формуле будет вычислена площадь основания цилиндра  $S_{осн.ц.в}$ , показанного на Рис.4.1.1.4÷4.1.1.7, а именно:

$$S_{кр.в} = S_{осн.ц.в} = r^2 \times \pi_{пл.кр.в}, (4.2.1.1)$$

Ранее в §4.1.1 методом вписанного многогранника была найдена формула (4.1.1.2) для вычисления высоты цилиндра  $|O_5O_6|$ , равная:

$$|O_5O_6| = 2 \times R \times \sin \frac{\alpha}{2}, (4.2.1.2)$$

Объем цилиндра  $V_{ц.в}$ , показанного на Рис.4.1.1.4÷4.1.1.7, будет равен:

$$\begin{aligned} V_{ц.в} &= S_{осн.ц.в} \times |O_5O_6| = (r^2 \times \pi_{пл.кр.в}) \times \left(2 \times R \times \sin \frac{\alpha}{2}\right) = \\ &= 2 \times \pi_{пл.кр.в} \times R \times r^2 \times \sin \frac{\alpha}{2}, (4.2.1.3) \end{aligned}$$

Умножив объем цилиндра  $V_{ц.в}$ , вычисленный по формуле (4.2.1.3), на число таких цилиндров, вмещающихся на теле тора, то есть, на  $\frac{360}{\alpha}$ , получим объем тора  $V_{т.в}$ :

$$\begin{aligned} V_{т.в} &= V_{ц.в} \times \frac{360}{\alpha} = 2 \times \pi_{пл.кр.в} \times R \times r^2 \times \sin \frac{\alpha}{2} \times \frac{360}{\alpha} = \\ &= 2 \times \pi_{пл.кр.в} \times \pi_{дл.окр.в} \times R \times r^2, (4.2.1.4) \end{aligned}$$

По формуле (4.2.1.4) вычисляется, на самом деле, не объем тора, а объем некоего вписанного в тор торообразного многогранника, так как точно вычислять объемы тел, ограниченных криволинейными поверхностями (каковой, в частности, является поверхность тора), мы не умеем. Мы умеем вычислять только объемы тел, ограниченных только плоскими поверхностями.

### §4.2.2. Метод описанного многогранника

Ранее в §2.2.2 методом описанного многоугольника была найдена формула (2.2.2.2) для вычисления площади круга  $S_{кр.о}$ . По этой формуле будет вычислена площадь основания цилиндра  $S_{осн.ц.о}$ , показанного на Рис.4.1.2.3÷4.1.2.6, а именно:

$$S_{кр.о} = S_{осн.ц.о} = r^2 \times \pi_{дл.окр.о}, (4.2.2.1)$$

Ранее в §4.1.2 методом описанного многогранника была найдена формула (4.1.2.1) для вычисления высоты цилиндра  $|O_{5,0}O_{6,0}|$ , равная:

$$|O_{5,0}O_{6,0}| = 2 \times R \times \tan \frac{\alpha}{2}, (4.2.2.2)$$

Объем цилиндра  $V_{ц.о}$  (Рис.4.1.2.3÷4.1.2.6) будет равен:

$$\begin{aligned} V_{ц.о} &= S_{осн.ц.о} \times |O_5O_6| = (r^2 \times \pi_{дл.окр.о}) \times \left(2 \times R \times \tan \frac{\alpha}{2}\right) = \\ &= 2 \times \pi_{дл.окр.о} \times R \times r^2 \times \tan \frac{\alpha}{2}, (4.2.2.3) \end{aligned}$$

Умножив объем цилиндра  $V_{ц.о}$ , вычисленный по по формуле (4.2.2.3), на число таких цилиндров, уместающихся на теле тора, то есть, на  $\frac{360}{\alpha}$ , получим объем тора  $V_{т.о}$ :

$$\begin{aligned}
 V_{т.о} &= V_{ц.о} \times \frac{360}{\alpha} = 2 \times \pi_{дл.окр.о} \times R \times r^2 \times \tan \frac{\alpha}{2} \times \frac{360}{\alpha} = \\
 &= 2 \times \pi_{дл.окр.о}^2 \times R \times r^2, (4.2.2.4)
 \end{aligned}$$

По формуле (4.2.2.4) вычисляется, на самом деле, не объем тора, а объем некоего описанного около тора торообразного многогранника, так как точно вычислять объемы тел, ограниченных криволинейными поверхностями (каковой, в частности, является поверхность тора), мы не умеем. Мы умеем вычислять только объемы тел, ограниченных только плоскими поверхностями.

### §4.2.3. Результирующий Метод

При использовании метода вписанного многогранника в §4.2.1 была найдена формула (4.2.1.4) для вычисления объема тора  $V_{т.в}$ , имеющая вид:

$$V_{т.в} = 2 \times \pi_{пл.кр.в} \times \pi_{дл.окр.в} \times R \times r^2, (4.2.3.1)$$

Формула (4.2.3.1) является нижней границей для вычисления объема тора.

При использовании метода описанного многогранника в §4.2.2 была найдена формула (4.2.2.4) для вычисления объема тора  $V_{т.о}$ , имеющая вид:

$$V_{т.о} = 2 \times \pi_{дл.окр.о}^2 \times R \times r^2, (4.2.3.2)$$

Формула (4.2.3.2) является верхней границей для вычисления объема тора.

Искомый объем тора находится между вышеуказанными нижней и верхней границами. Поэтому, результирующая формула для вычисления объема тора  $V_{т.р}$  будет пред-

ставлять среднеарифметическое от формул (4.2.3.1) и (4.2.3.2) вида:

$$V_{T,p} = \frac{(2 \times \pi_{\text{пл.кр.в}} \times \pi_{\text{дл.окр.в}} \times R \times r^2) + (2 \times \pi_{\text{дл.окр.о}}^2 \times R \times r^2)}{2} = (\pi_{\text{пл.кр.в}} \times \pi_{\text{дл.окр.в}} + \pi_{\text{дл.окр.о}}^2) \times R \times r^2, (4.2.3.3)$$

По формуле (4.2.3.3) вычисляется, на самом деле, не объем тора, а объем некоего среднеарифметического торообразного многогранника, так как точно вычислять объемы тел, ограниченных криволинейными поверхностями (каковой, в частности, является поверхность тора), мы не умеем. Мы умеем вычислять только объемы тел, ограниченных только плоскими поверхностями.

Вычисленный по формуле (4.2.3.3) объем тора ближе по величине к искомому объему тора, по сравнению с объемами, вычисленными, по формуле (4.2.1.4) по методу вписанного многогранника, и по формуле (4.2.2.4) по методу описанного многогранника.

### §4.3. Выводы

Ранее в §4.1.3 результирующим методом была найдена формула (4.1.3.3) для вычисления площади поверхности тора  $S_{T,p}$ , имеющая вид:

$$S_{T,p} = 2 \times r \times R \times (\pi_{\text{дл.окр.в}}^2 + \pi_{\text{дл.окр.о}}^2), (4.3.1)$$

Согласно **П.1.20** формула для вычисления площади поверхности тора имеет следующий вид:

$$S_T = 4 \times r \times R \times \pi^2, (4.3.2)$$

Ранее в §4.2.3 результирующим методом была найдена формула (4.2.3.3) для вычисления объема тора, имеющая вид:

$$V_{т,р} = (\pi_{пл.кр.в} \times \pi_{дл.окр.в} + \pi_{дл.окр.о}^2) \times R \times r^2, (4.3.3)$$

Согласно **П.1.21** формула для определения объема тора имеет вид:

$$V_t = 2 \times \pi^2 \times R \times r^2, (4.3.4)$$

Как видно, формулы (4.3.1), (4.3.2), (4.3.3) и (4.3.4) отличаются друг от друга тем, что в формулах (4.3.2) и (4.3.4) стоит некое единое (для всех формул – для вычисления, длины окружности, площади круга, площади поверхности цилиндра, объема цилиндра, площади поверхности тора, объема тора, площади поверхности конуса, объема конуса, площади сферы и объема шара) число  $\pi$ , в формуле (4.3.1) стоят два числа  $\pi_{дл.окр.в}$  и  $\pi_{дл.окр.о}$ , а в формуле (4.3.3) стоят три числа  $\pi_{пл.кр.в}$ ,  $\pi_{дл.окр.в}$  и  $\pi_{дл.окр.о}$ . При этом, вышеуказанные числа, как об этом указано ранее в §2.3 в таблице 2.3.1, по величине не равны между собой.

## Глава 5

§5. Вычисление площади поверхности  
и объема Конуса§5.1. Вычисление площади поверхности  
Конуса

## §5.1.1. Метод вписанного многогранника

На Рис.5.1.1.1 показан круговой прямой конус с центром основания конуса в точке  $O_7$ , радиусом основания  $r$  и вершиной конуса в точке  $O_8$ . Таким образом, прямая линия  $|O_7O_8|$  является осью конуса и его высотой  $|O_7O_8| = H_K$ .

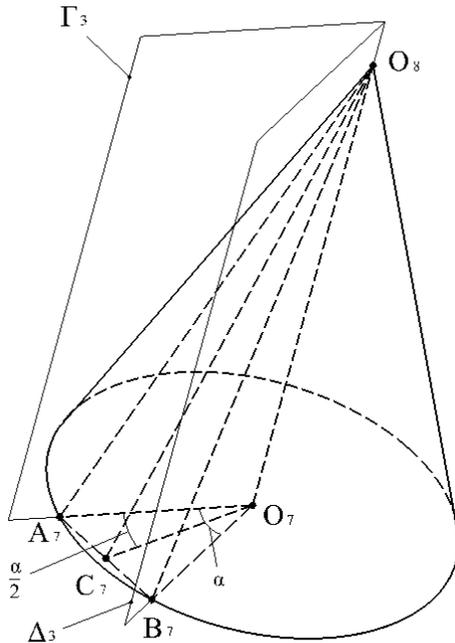


Рис.5.1.1.1.

Проведем через ось конуса  $|O_7O_8|$  плоскость  $\Gamma_3$ . Построив линию пересечения плоскости  $\Gamma_3$  с боковой поверхностью конуса, получим прямую линию  $|A_7O_8|$ , которая является образующей конуса. Построив линию пересечения плоскости  $\Gamma_3$  с основанием конуса, получим прямую линию  $|O_7A_7|$ , которая является радиусом основания конуса  $|O_7A_7| = r$ .

Проведем через ось конуса  $|O_7O_8|$  плоскость  $\Delta_3$  под углом  $\alpha$  к плоскости  $\Gamma_3$ . Построив линию пересечения плоскости  $\Delta_3$  с боковой поверхностью конуса, получим прямую линию  $|B_7O_8|$ , которая является образующей конуса. Построив линию пересечения плоскости  $\Delta_3$  с основанием конуса, получим прямую линию  $|O_7B_7|$ , которая является радиусом основания конуса  $|O_7B_7| = r$ .

Соединив точки  $A_7$  и  $B_7$  между собой, получим равнобедренный треугольник  $A_7O_7B_7$  (так как  $|O_7A_7| = |O_7B_7| = r$ ).

Опустим из точки  $O_7$  перпендикуляр  $|O_7C_7|$  на сторону  $|A_7B_7|$  треугольника  $A_7O_7B_7$ . Соединим точки  $O_8$  и  $C_7$  между собой. Так как треугольник  $A_7O_7B_7$  является равнобедренным (доказано ранее), следовательно, в соответствии с **П.1.1**  $|O_7C_7|$  является, одновременно, высотой, биссектрисой и медианой треугольника  $A_7O_7B_7$ . А, следовательно, угол  $A_7O_7C_7$  равен углу  $B_7O_7C_7$  и равен  $\frac{\alpha}{2}$ , и  $|A_7C_7| = |C_7B_7|$ .

Ранее в §2.1.1 при использовании метода вписанного многоугольника были найдена формула (2.1.1.3) для вычисления длин стороны  $|AB|$ , которая в данном случае равна стороне  $|A_3B_3|$ , и равна:

$$|AB| = |A_7B_7| = 2 \times |O_7A_7| \times \sin \frac{\alpha}{2} = 2 \times r \times \sin \frac{\alpha}{2}, \quad (5.1.1.1)$$

Рассмотрим прямоугольный треугольник  $A_7O_7C_7$  (Рис.5.1.1.1), у которого известны гипотенуза  $|O_7A_7| = r$  и прилежающий к ней угол  $A_7O_7C_7 = \frac{\alpha}{2}$ . Согласно **П.1.2** найдем его катет  $|O_7C_7|$ :

$$|O_7C_7| = |O_7A_7| \times \cos \frac{\alpha}{2} = r \times \cos \frac{\alpha}{2}, \quad (5.1.1.2)$$

Полная площадь поверхности конуса  $S_{к.в}$  равна сумме площадей основания конуса  $S_{осн.к.в}$  и боковой поверхности конуса  $S_{бок.к.в}$ .

Ранее в §2.2.1 при использовании метода вписанного многоугольника была найдена формула (2.2.1.2) для вычисления площади круга  $S_{кр.в}$ , равная в данном случае  $S_{осн.к.в}$ .

$$S_{кр.в} = S_{осн.к.в} = r^2 \times \sin \frac{\alpha}{2} \times \cos \frac{\alpha}{2} \times \frac{360}{\alpha} = r^2 \times \pi_{пл.кр.в}, \quad (5.1.1.3)$$

Остается вычислить площадь боковой поверхности конуса  $S_{бок.к.в}$ . Для этого вычислим площадь треугольника  $O_8A_7B_7$ .

$|O_7O_8|$  является высотой конуса (начальное условие), следовательно,  $|O_7O_8|$  перпендикулярна плоскости основания конуса, а, следовательно, треугольник  $O_7O_8C_7$  прямоугольный.

Рассмотрим прямоугольный треугольник  $O_7O_8C_7$  (Рис.5.1.1.1), у которого известны катеты  $|O_7C_7|$  и  $|O_7O_8| = H_k$ . Согласно **П.1.9** найдем его гипотенузу  $|C_7O_8|$ :

$$|C_7O_8| = \sqrt{|O_7O_8|^2 + |O_7C_7|^2} = \sqrt{H_k^2 + \left(r \times \cos \frac{\alpha}{2}\right)^2}, \quad (5.1.1.4)$$

$|O_7C_7| \perp |A_7B_7|$  (принято ранее), следовательно, плоскость треугольника  $O_7O_8C_7$  перпендикулярна стороне

$|A_7B_7|$ . Следовательно, в соответствии со **C1.6**  $|A_7B_7| \perp |C_7O_8|$ , а, следовательно,  $|C_7O_8|$  является высотой равнобедренного треугольника  $O_8A_7B_7$  (так как  $|A_7O_8| = |B_7O_8|$ , в силу того, что  $|A_7O_8|$  и  $|B_7O_8|$  являются образующими конуса).

Рассмотрим равнобедренный треугольник  $O_8A_7B_7$ . Площадь  $S_{O_8A_7B_7}$  треугольника  $O_8A_7B_7$  согласно **П.1.3** будет равна:

$$\begin{aligned} S_{O_8A_7B_7} &= \frac{1}{2} \times |A_7B_7| \times |C_7O_8| = \\ &= \frac{1}{2} \times 2 \times r \times \sin \frac{\alpha}{2} \times \sqrt{H_K^2 + \left(r \times \cos \frac{\alpha}{2}\right)^2} = \\ &= r \times \sin \frac{\alpha}{2} \times \sqrt{H_K^2 + \left(r \times \cos \frac{\alpha}{2}\right)^2}, \quad (5.1.1.5) \end{aligned}$$

Чем меньше будет угол  $\alpha$ , тем меньше площадь треугольника  $O_8A_7B_7$  будет отличаться от площади боковой поверхности сектора конуса, ограниченного образующими  $|A_7O_8|$  и  $|B_7O_8|$ , и дугой окружности  $\widehat{A_7B_7}$ . Умножив площадь треугольника  $O_8A_7B_7$ , вычисленную по формуле (5.1.1.5), на число таких треугольников, уместяющихся на боковой поверхности конуса, то есть, на  $\frac{360}{\alpha}$ , получим (Рис.5.1.1.2) полную площадь боковой поверхности конуса  $S_{\text{бок.к.в}}$ :

$$\begin{aligned} S_{\text{бок.к.в}} &= S_{O_8A_7B_7} \times \frac{360}{\alpha} = \\ &= r \times \sin \frac{\alpha}{2} \times \sqrt{H_K^2 + \left(r \times \cos \frac{\alpha}{2}\right)^2} \times \frac{360}{\alpha} = \end{aligned}$$

$$= \pi_{\text{дл.окр.в}} \times r \times \sqrt{H_{\text{к}}^2 + \left(r \times \cos \frac{\alpha}{2}\right)^2}, \quad (5.1.1.6)$$

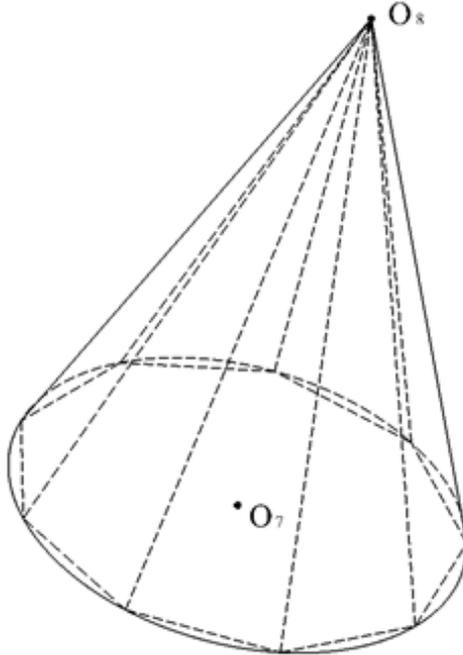


Рис.5.1.1.2.

Вычислим полную площадь поверхности конуса  $S_{\text{к.в}}$ , которая равна сумме площадей основания конуса  $S_{\text{осн.к.в}}$  и боковой поверхности конуса  $S_{\text{бок.к.в}}$ .

$$S_{\text{к.в}} = S_{\text{осн.к.в}} + S_{\text{бок.к.в}} = \left( r^2 \times \sin \frac{\alpha}{2} \times \cos \frac{\alpha}{2} \times \frac{360}{\alpha} \right) +$$

$$\begin{aligned}
& + \left( r \times \sin \frac{\alpha}{2} \times \left( \sqrt{H_k^2 + \left( r \times \cos \frac{\alpha}{2} \right)^2} \right) \times \frac{360}{\alpha} \right) = \\
& = \pi_{\text{пл.кр.в}} \times r^2 + \pi_{\text{дл.окр.в}} \times r \times \\
& \times \sqrt{H_k^2 + \left( r \times \cos \frac{\alpha}{2} \right)^2}, \quad (5.1.1.7)
\end{aligned}$$

Как видно из Рис.5.1.1.2, по формуле (5.1.1.7) вычисляется, на самом деле, не площадь поверхности конуса, а площадь вписанного в конус многогранника в виде многогранной пирамиды, так как точно вычислять площади, плоских фигур (основание конуса), ограниченных кривыми линиями (каковой, в частности, является окружность), и криволинейных поверхностей (каковой, в частности, является боковая поверхность конуса), мы не умеем. Мы умеем вычислять площади только плоских фигур, ограниченных только прямыми линиями.

### §5.1.2. Метод описанного многогранника

На Рис.5.1.2.1 показан круговой прямой конус с центром основания конуса в точке  $O_7$ , радиусом основания  $r$  и вершиной конуса в точке  $O_8$ . Таким образом, прямая  $|O_7O_8|$  является осью конуса и его высотой  $|O_7O_8| = H_k$ .

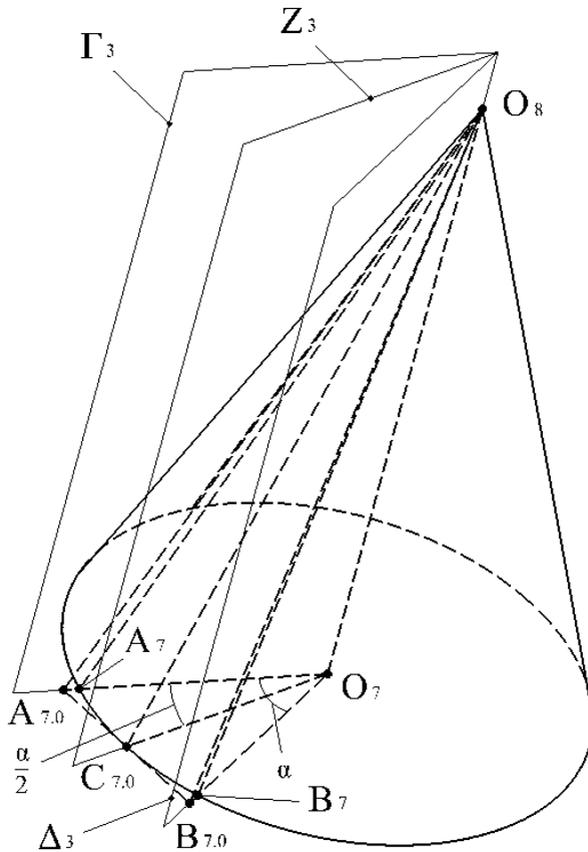


Рис.5.1.2.1.

Проведем через ось конуса  $|O_7O_8|$  плоскость  $Z_3$ . Построив линию пересечения плоскости  $Z_3$  с боковой поверхностью конуса, получим прямую линию  $|C_{7.0}O_8|$ , которая является образующей конуса. Построив линию пересечения плоскости  $Z_3$  с основанием конуса, получим прямую линию  $|O_7C_{7.0}|$ , которая является радиусом основания конуса  $|O_7C_{7.0}| = r$ .

Проведем через ось конуса  $|O_7O_8|$  плоскость  $\Gamma_3$  под углом  $\frac{\alpha}{2}$  к плоскости  $Z_3$ , а, следовательно, и к радиусу  $|O_7C_{7.0}|$ . Построив линию пересечения плоскости  $\Gamma_3$  с боковой поверхностью конуса, получим прямую линию  $|A_7O_8|$ , которая является образующей конуса. Построив линию пересечения плоскости  $\Gamma_3$  с основанием конуса, получим прямую линию  $|O_7A_7|$ , которая является радиусом основания конуса  $|O_7A_7| = r$ .

Проведем через ось конуса  $|O_7O_8|$  плоскость  $\Delta_3$  под углом  $\frac{\alpha}{2}$  к плоскости  $Z_3$ , а, следовательно, и к радиусу  $|O_7C_{3.0}|$  (при этом, угол между плоскостями  $Z_3$  и  $\Delta_3$  равен  $\alpha$ ). Построив линию пересечения плоскости  $\Delta_3$  с боковой поверхностью конуса, получим прямую линию  $|B_7O_8|$ , которая является образующей конуса. Построив линию пересечения плоскости  $\Delta_3$  с основанием конуса, получим прямую линию  $|O_7B_7|$ , которая является радиусом основания конуса  $|O_7B_7| = r$ .

Проведем через точку  $C_{7.0}$  прямую линию, лежащую в плоскости основания конуса, касательную к окружности основания конуса, а, следовательно, перпендикулярную к радиусу основания конуса  $|O_7C_{7.0}| = r$ . Проведем из точки  $O_7$  прямую линию до ее пересечения с вышеуказанной касательной к окружности основания конуса в точке  $A_{7.0}$ , при этом, данная прямая линия по направлению совпадает с направлением радиуса  $|O_7A_7| = r$  (то есть, угол между прямой линией  $|O_7A_{7.0}|$  и радиусом  $|O_7C_{7.0}|$  равен  $\frac{\alpha}{2}$ , и данная прямая линия пересекает окружность основания конуса в точке  $A_7$ ). Проведем из точки  $O_7$  прямую линию до ее пересечения с вышеуказанной касательной к окружности основания конуса в точке  $B_{7.0}$ , при этом, данная прямая линия по направлению совпадает с направлением радиуса  $|O_7B_7| = r$  (то есть, угол между прямой ли-

нией  $|O_7B_{7.0}|$  и радиусом  $|O_7C_{7.0}|$  равен  $\frac{\alpha}{2}$ , данная прямая линия пересекает окружность основания конуса в точке  $B_7$ ).

Таким образом, мы получили треугольник  $O_7A_{7.0}B_{7.0}$ . Так как  $|O_7C_{7.0}| \perp |A_{7.0}B_{7.0}|$ , угол  $A_{7.0}O_7C_{7.0}$  равен углу  $B_{7.0}O_7C_{7.0}$  и равен  $\frac{\alpha}{2}$ , следовательно, треугольник  $O_7A_{7.0}B_{7.0}$  равнобедренный. А, следовательно,  $|O_7A_{7.0}| = |O_7B_{7.0}|$ , и  $|O_7C_{7.0}|$  согласно **П.1.1** является, одновременно, высотой, биссектрисой и медианой треугольника  $O_7A_{7.0}B_{7.0}$ . Следовательно,  $|A_{7.0}C_{7.0}| = |C_{7.0}B_{7.0}|$ .

Ранее в §2.1.2 при использовании метода описанного многоугольника была найдена формула (2.1.2.2) для вычисления длины стороны  $|A_0B_0|$ , которая в данном случае равна стороне  $|A_{7.0}B_{7.0}|$ , и равна:

$$|A_0B_0| = |A_{7.0}B_{7.0}| = 2 \times r \times \tan \frac{\alpha}{2}, \quad (5.1.2.1)$$

Полная площадь поверхности конуса  $S_{к.о}$  равна сумме площадей основания конуса  $S_{осн.к.о}$  и боковой поверхности конуса  $S_{бок.к.о}$ .

Ранее в §2.2.2 при использовании метода описанного многоугольника была найдена формула (2.2.2.2) для вычисления площади круга  $S_{кр.о}$ , равная в данном случае  $S_{осн.к.о}$ , и равная:

$$S_{кр.о} = S_{осн.к.о} = r^2 \times \tan \frac{\alpha}{2} \times \frac{360}{\alpha} = r^2 \times \pi_{дл.окр.о}, \quad (5.1.2.2)$$

Остается вычислить площадь боковой поверхности конуса  $S_{бок.к.о}$ . Для этого вычислим площадь треугольника  $O_8A_{7.0}B_{7.0}$ .

$|O_7O_8|$  является высотой конуса (начальное условие), следовательно,  $|O_7O_8|$  перпендикулярна плоскости осно-

вания конуса, а, следовательно, треугольник  $O_7O_8C_{7.0}$  прямоугольный.

Рассмотрим прямоугольный треугольник  $O_7O_8C_{7.0}$  (Рис.5.1.2.1), у которого известны катеты  $|O_7C_{7.0}| = r$  и  $|O_7O_8| = H_k$ . Согласно **П.1.9** найдем гипотенузу  $|O_8C_{7.0}|$ :

$$|O_8C_{7.0}| = \sqrt{|O_7C_{7.0}|^2 + |O_7O_8|^2} = \sqrt{r^2 + H_k^2}, \quad (5.1.2.3)$$

$|O_7C_{7.0}|$  и  $|O_8C_{7.0}|$  лежат в плоскости  $Z_3$ . Следовательно, в соответствии с **П.1.6**  $|A_{7.0}B_{7.0}|$  перпендикулярна плоскости  $Z_3$ , а, следовательно,  $|O_8C_{7.0}| \perp |A_{7.0}B_{7.0}|$ . Следовательно, треугольник  $O_8A_{7.0}B_{7.0}$  является равнобедренным, и  $|O_8C_{7.0}|$  является его высотой (и образующей конуса).

Вычислим площадь  $S_{O_8A_{7.0}B_{7.0}}$  треугольника  $O_8A_{7.0}B_{7.0}$ , которая согласно **П.1.3** будет равна:

$$\begin{aligned} S_{O_8A_{7.0}B_{7.0}} &= \frac{1}{2} \times |A_{7.0}B_{7.0}| \times |O_8C_{7.0}| = \\ &= \frac{1}{2} \times 2 \times r \times \tan \frac{\alpha}{2} \times \sqrt{r^2 + H_k^2} = \\ &= r \times \tan \frac{\alpha}{2} \times \sqrt{r^2 + H_k^2}, \quad (5.1.2.4) \end{aligned}$$

Чем меньше будет угол  $\alpha$ , тем меньше площадь треугольника  $O_8A_{7.0}B_{7.0}$  будет отличаться от площади боковой поверхности сектора конуса, ограниченного дугой окружности  $\widehat{A_7B_7}$  и образующими конуса  $|A_7O_8|$  и  $|B_7O_8|$ . Умножив площадь треугольника  $O_8A_{7.0}B_{7.0}$ , вычисленную по формуле (5.1.2.4), на число таких треугольников, уместяющихся на боковой поверхности конуса, то есть, на  $\frac{360}{\alpha}$ , получим (Рис.5.1.2.2) полную площадь боковой поверхности конуса  $S_{\text{бок.к.о}}$ :

$$\begin{aligned}
 S_{\text{бок.к.о}} &= S_{O_8 A_7.0 B_7.0} \times \frac{360}{\alpha} = r \times \tan \frac{\alpha}{2} \times \sqrt{r^2 + H_{\text{к}}^2} \times \frac{360}{\alpha} = \\
 &= r \times \pi_{\text{дл.окр.о}} \times \sqrt{r^2 + H_{\text{к}}^2}, \quad (5.1.2.5)
 \end{aligned}$$

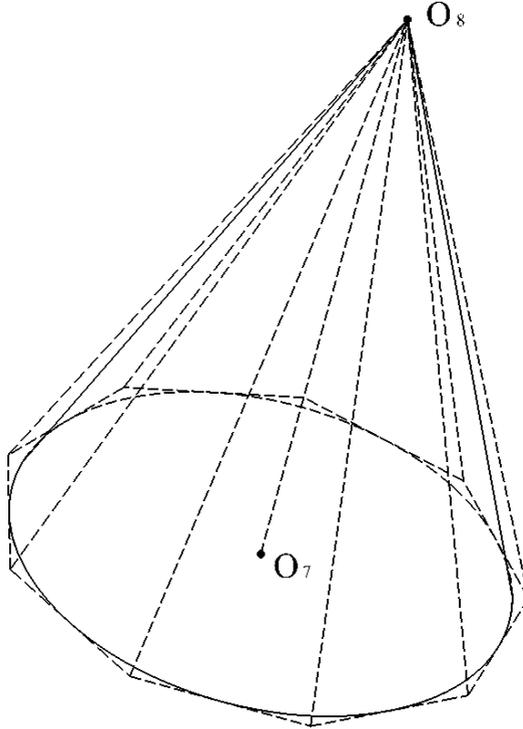


Рис.5.1.2.2.

Вычислим полную площадь поверхности конуса  $S_{\text{к.о}}$ , которая равна сумме площадей основания конуса  $S_{\text{осн.к.о}}$  и боковой поверхности конуса  $S_{\text{бок.к.о}}$ .

$$\begin{aligned}
 S_{к.о} &= S_{осн.к.о} + S_{бок.к.о} = \\
 &= r^2 \times \pi_{дл.окр.о} + r \times \pi_{дл.окр.о} \times \sqrt{r^2 + H_k^2} = \\
 &= \pi_{дл.окр.о} \times \left( r^2 + r \times \sqrt{r^2 + H_k^2} \right), \quad (5.1.2.6)
 \end{aligned}$$

Как видно из Рис.5.1.2.2, по формуле (5.1.2.6) вычисляется, на самом деле, не площадь поверхности конуса, а площадь описанного около конуса многогранника в виде многогранной пирамиды, так как точно вычислять площади, плоских фигур (основание конуса), ограниченных кривыми линиями (каковой, в частности, является окружность), и криволинейных поверхностей (каковой, в частности, является боковая поверхность конуса), мы не умеем. Мы умеем вычислять площади только плоских фигур, ограниченных только прямыми линиями.

### §5.1.3. Результирующий Метод

При использовании метода вписанного многогранника в §5.1.1 была найдена формула (5.1.1.7) для вычисления площади поверхности конуса  $S_{к.в}$ , имеющая вид:

$$S_{к.в} = \pi_{пл.кр.в} \times r^2 + \pi_{дл.окр.в} \times r \times \sqrt{H_k^2 + \left( r \times \cos \frac{\alpha}{2} \right)^2}, \quad (5.1.3.1)$$

Формула (5.1.3.1) является нижней границей для вычисления значения площади поверхности конуса.

При использовании метода описанного многогранника в §5.1.2 была найдена формула (5.1.2.6) для вычисления площади поверхности конуса  $S_{к.о}$ , имеющая вид:

$$S_{к.о} = \pi_{дл.окр.о} \times \left( r^2 + r \times \sqrt{r^2 + H_k^2} \right), \quad (5.1.3.2)$$

Формула (5.1.3.2) является верхней границей для вычисления значения площади поверхности конуса.

Искомая полная площадь поверхности конуса находится между вышеуказанными нижней и верхней границами. Поэтому, результирующая формула для вычисления полной площади поверхности конуса  $S_{к.р}$  (Рис.5.1.3.1) будет представлять среднеарифметическое от формул (5.1.3.1) и (5.1.3.2) вида:

$$\begin{aligned} S_{к.р} &= \frac{S_{к.в} + S_{к.о}}{2} = \\ &= \frac{1}{2} \times \left( \pi_{пл.кр.в} \times r^2 + \pi_{дл.окр.в} \times r \times \sqrt{H_k^2 + \left( r \times \cos \frac{\alpha}{2} \right)^2} \right) + \\ &\quad + \frac{1}{2} \times \left( \pi_{дл.окр.о} \times \left( r^2 + r \times \sqrt{r^2 + H_k^2} \right) \right) = \\ &= \frac{1}{2} \times r \times \left( \left( \pi_{пл.кр.в} \times r + \pi_{дл.окр.в} \times \sqrt{H_k^2 + \left( r \times \cos \frac{\alpha}{2} \right)^2} \right) + \right. \\ &\quad \left. + \left( \pi_{дл.окр.о} \times \left( r + \sqrt{r^2 + H_k^2} \right) \right) \right), \quad (5.1.3.3) \end{aligned}$$

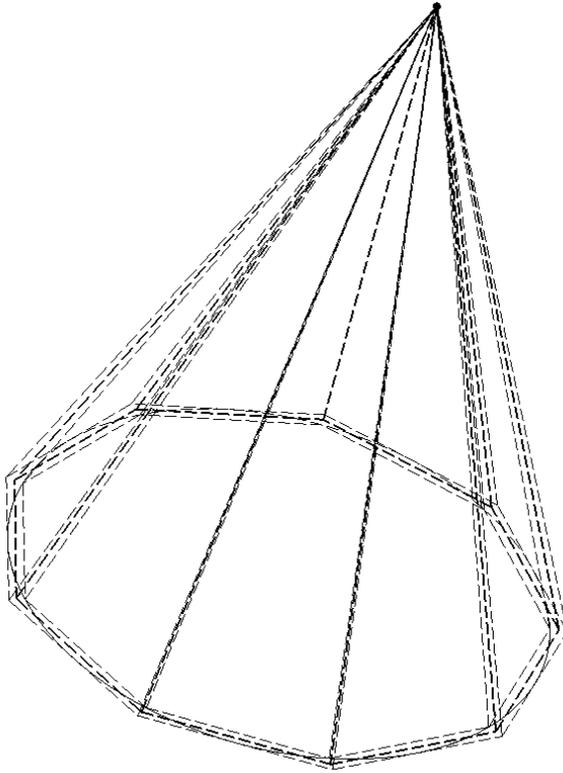


Рис.5.1.3.1.

Как видно из Рис.5.1.3.1, по формуле (5.1.3.3) вычисляется, на самом деле, не площадь поверхности конуса, а площадь некоего среднеарифметического многогранника в виде многогранной пирамиды, так как точно вычислять площади, плоских фигур (основание конуса), ограниченных кривыми линиями (каковой, в частности, является окружность), и криволинейных поверхностей (каковой, в частности, является боковая поверхность конуса), мы не умеем. Мы умеем вычислять только площади плоских фигур, ограниченных только прямыми линиями.

Вычисленная по формуле (5.1.3.3) площадь поверхности конуса ближе по величине к искомой площади поверхности конуса, по сравнению с площадями поверхности конуса, вычисленными, по формуле (5.1.1.7) методом вписанного многогранника, и по формуле (5.1.2.6) методом описанного многогранника.

## §5.2. Вычисление объема Конуса

### §5.2.1. Метод вписанного многогранника

Ранее в §5.1.1 при использовании метода вписанного многогранника была найдена формула (5.1.1.3) для вычисления площади основания конуса  $S_{\text{осн.к.в}}$ , имеющая следующий вид:

$$S_{\text{осн.к.в}} = r^2 \times \pi_{\text{пл.кр.в}}, \quad (5.2.1.1)$$

Согласно **П.1.23** вычислим объем конуса  $V_{\text{к.в}}$ :

$$V_{\text{к.в}} = \frac{1}{3} \times S_{\text{осн.к.в}} \times H_{\text{к}} = \frac{1}{3} \times r^2 \times \pi_{\text{пл.кр.в}} \times H_{\text{к}}, \quad (5.2.1.2)$$

По формуле (5.2.1.2) вычисляется, на самом деле, не объем конуса, а объем некоего вписанного в конус многогранника в виде многогранной пирамиды, так как точно вычислять объемы тел, ограниченных криволинейными поверхностями (каковой, в частности, является боковая поверхность конуса), мы не умеем. Мы умеем вычислять только объемы тел, ограниченных только плоскими поверхностями.

### §5.2.2. Метод описанного многогранника

Ранее в §5.1.2 при использовании метода вписанного многогранника была найдена формула (5.1.2.2) для вычисления площади основания конуса  $S_{\text{осн.к.о}}$ , имеющая следующий вид:

$$S_{\text{осн.к.о}} = r^2 \times \pi_{\text{дл.окр.о}}, \quad (5.2.2.1)$$

Согласно **П.1.23** вычислим объем конуса  $V_{\text{к.о}}$ :

$$V_{\text{к.о}} = \frac{1}{3} \times S_{\text{осн.к.о}} \times H_{\text{к}} = \frac{1}{3} \times r^2 \times \pi_{\text{дл.окр.о}} \times H_{\text{к}}, \quad (5.2.2.2)$$

По формуле (5.2.2.2) вычисляется, на самом деле, не объем конуса, а объем некоего описанного около конуса многогранника в виде многогранной пирамиды, так как точно вычислять объемы тел, ограниченных криволинейными поверхностями (каковой, в частности, является боковая поверхность конуса), мы не умеем. Мы умеем вычислять только объемы тел, ограниченных только плоскими поверхностями.

### §5.2.3. Результирующий Метод

При использовании метода вписанного многогранника в §5.2.1 была найдена формула (5.2.1.2) для вычисления объема конуса  $V_{\text{к.в}}$ , имеющая вид:

$$V_{\text{к.в}} = \frac{1}{3} \times r^2 \times \pi_{\text{пл.кр.в}} \times H_{\text{к}}, \quad (5.2.3.1)$$

Формула (5.2.3.1) является нижней границей для вычисления объема конуса.

При использовании метода описанного многогранника в §5.2.2 была найдена формула (5.2.2.2) для вычисления объема конуса, имеющая вид:

$$V_{к.0} = \frac{1}{3} \times r^2 \times \pi_{дл.окр.0} \times H_{к}, \quad (5.2.3.2)$$

Формула (5.2.3.1) является верхней границей для вычисления объема конуса.

Искомый объем конуса находится между вышеуказанными нижней и верхней границами. Поэтому, результирующая формула для вычисления объема конуса  $V_{к.р}$  будет представлять среднеарифметическое от формул (5.2.3.1) и (5.2.3.2) вида:

$$\begin{aligned} V_{к.р} &= \frac{V_{к} + V_{к.0}}{2} = \\ &= \frac{\left(\frac{1}{3} \times r^2 \times \pi_{пл.кр.в} \times H_{к}\right) + \left(\frac{1}{3} \times r^2 \times \pi_{дл.окр.0} \times H_{к}\right)}{2} = \\ &= \frac{1}{6} \times r^2 \times H_{к} \times (\pi_{пл.кр.в} + \pi_{дл.окр.0}) = \\ &= \frac{1}{6} \times r^2 \times H_{к} \times \left( \left( \sin \frac{\alpha}{2} \times \cos \frac{\alpha}{2} \times \frac{360}{\alpha} \right) + \left( \tan \frac{\alpha}{2} \times \frac{360}{\alpha} \right) \right) = \\ &= \frac{1}{3} \times r^2 \times H_{к} \times \left( \frac{180}{\alpha} \times \left( \left( \sin \frac{\alpha}{2} \times \cos \frac{\alpha}{2} \right) + \tan \frac{\alpha}{2} \right) \right) = \\ &= \frac{1}{3} \times r^2 \times \pi_{пл.кр.р} \times H_{к}, \quad (5.2.3.3) \end{aligned}$$

По формуле (5.2.3.3) вычисляется, на самом деле, не объем конуса, а объем некоего среднеарифметического многогранника в виде многогранной пирамиды, так как точно вычислять объемы тел, ограниченных криволинейными поверхностями (каковой, в частности, является боковая поверхность конуса), мы не умеем. Мы умеем вы-

числять только объемы тел, ограниченных только плоскими поверхностями.

Вычисленный по формуле (5.2.3.3) объем ближе по величине к искомому объему конуса, по сравнению с объемами, вычисленными, по формуле (5.2.1.2) методом вписанного многогранника, и по формуле (5.2.2.2) методом описанного многогранника.

### §5.3. Выводы

В §5.1.3 по результирующему методу была найдена формула (5.1.3.3) для вычисления площади поверхности конуса  $S_{к,р}$ , имеющая вид:

$$S_{к,р} = \frac{1}{2} \times r \times \left( \left( \pi_{пл.кр.в} \times r + \pi_{дл.окр.в} \times \sqrt{H_k^2 + \left( r \times \cos \frac{\alpha}{2} \right)^2} \right) + \left( \pi_{дл.окр.0} \times \left( r + \sqrt{r^2 + H_k^2} \right) \right) \right), \quad (5.3.1)$$

Из П.1.22 известна формула для вычисления площади поверхности конуса  $S_k$ , имеющая следующий вид:

$$S_k = \pi \times r \times (r + L_k), \quad (5.3.2)$$

В §5.2.3 по результирующему методу была найдена формула (5.2.3.3) для вычисления объема конуса  $V_{к,р}$ , имеющая вид:

$$V_{к,р} = \frac{1}{3} \times r^2 \times \pi_{пл.кр.р} \times H_k, \quad (5.3.3)$$

Из **П.1.23** известна формула для вычисления объема конуса  $V_k$ , имеющая следующий вид:

$$V_k = \frac{1}{3} \times r^2 \times \pi \times H_k, \quad (5.3.4)$$

Как видно, в формулах (5.3.2) и (5.3.4) стоит некое единое (для всех формул – для вычисления, длины окружности, площади круга, площади поверхности цилиндра, объема цилиндра, площади поверхности тора, объема тора, площади поверхности конуса, объема конуса, площади поверхности сферы и объема шара) число  $\pi$ , в формуле (5.3.1) стоят три числа  $\pi_{\text{пл.кр.в}}$ ,  $\pi_{\text{дл.окр.в}}$  и  $\pi_{\text{дл.окр.о}}$ , а в формуле (5.3.3) стоит одно число  $\pi_{\text{пл.кр.р}}$ . При этом, вышеуказанные числа, как об этом указано ранее в §2.3 в таблице 2.3.1, по величине не равны между собой.



Радиус  $|OD|$  лежит на диаметре  $|DE|$ . Проведем из центра шара  $O$  радиус  $|OF|$ , перпендикулярный диаметру  $|DE|$ , а, следовательно, и перпендикулярный радиусу  $|OD|$ . Через диаметр  $|DE|$  и радиус  $|OF|$  проведем плоскость  $\Pi_0$ . Плоскость  $\Pi_0$  пересекает поверхность сферы (шара) по дуге окружности  $\widehat{DFE}$ . Проведем через радиус  $|OF|$  плоскость  $\Sigma_0$ , перпендикулярную диаметру  $|DE|$ , а так как диаметр  $|DE|$  лежит в плоскости  $\Pi_0$ , то в соответствии с **П.1.5** плоскость  $\Sigma_0$  будет перпендикулярна плоскости  $\Pi_0$ .

Проведем из центра шара точки  $O$  радиус  $|OG|$  (Рис.6.1.1.1.1) так, чтобы он лежал в плоскости  $\Sigma_0$ . При этом радиус  $|OG|$  составляет с радиусом  $|OF|$  (так как  $|OF|$  также лежит в плоскости  $\Sigma_0$ ) угол  $FOG = \frac{\alpha}{2}$ . Проведем через радиус  $|OG|$  и диаметр  $|DE|$  плоскость  $\Phi_0$ . Плоскость  $\Phi_0$  пересекает поверхность сферы (шара) по дуге окружности  $\widehat{DGE}$ .

Проведем из центра шара точки  $O$  радиус  $|OH|$  (Рис.6.1.1.1.1) так, чтобы он лежал в плоскости  $\Sigma_0$  и составлял с радиусом  $|OF|$  угол  $FOH = \frac{\alpha}{2}$ , а с радиусом  $|OG|$ , соответственно, угол  $GOH = \alpha$ . Проведем через радиус  $|OH|$  и диаметр  $|DE|$  плоскость  $\Psi_0$ . Плоскость  $\Psi_0$  пересекает поверхность сферы (шара) по дуге окружности  $\widehat{DHE}$ .

Диаметр  $|DE|$  является линией пересечения плоскостей  $\Pi_0$ ,  $\Phi_0$  и  $\Psi_0$ . Радиус  $|OF|$  лежит в плоскости  $\Sigma_0$  и  $|OF| \perp |DE|$  (начальное условие). Так как  $|DE|$  перпендикулярен плоскости  $\Sigma_0$ , а  $|OG|$  и  $|OH|$  лежат в плоскости  $\Sigma_0$  (принято ранее), то в соответствии со **С.1.6**  $|DE| \perp |OG|$  и  $|DE| \perp |OH|$ . Вместе с тем радиус  $|OF|$  лежит в плоскости  $\Pi_0$ , радиус  $|OG|$  лежит в плоскости  $\Phi_0$ , а радиус  $|OH|$  лежит в плоскости  $\Psi_0$  (принято ранее).

Следовательно, в соответствии с **П.1.7** угол  $FOG = \frac{\alpha}{2}$  является углом между плоскостями  $\Pi_0$  и  $\Phi_0$ , угол  $FOH = \frac{\alpha}{2}$  является углом между плоскостями  $\Pi_0$  и  $\Psi_0$ , а угол  $GOH = \alpha$  является углом между плоскостями  $\Phi_0$  и  $\Psi_0$ .

Плоскость  $\Sigma_0$  пересекает поверхность сферы (шара), заключенную между плоскостями  $\Phi_0$  и  $\Psi_0$ , по дуге окружности  $\widehat{GFH}$ .

Проведем из центра шара точки  $O$  радиус  $|OI_1| = R$  (Рис.6.1.1.1.2) так, чтобы он лежал в плоскости  $\Pi_0$  и сос-

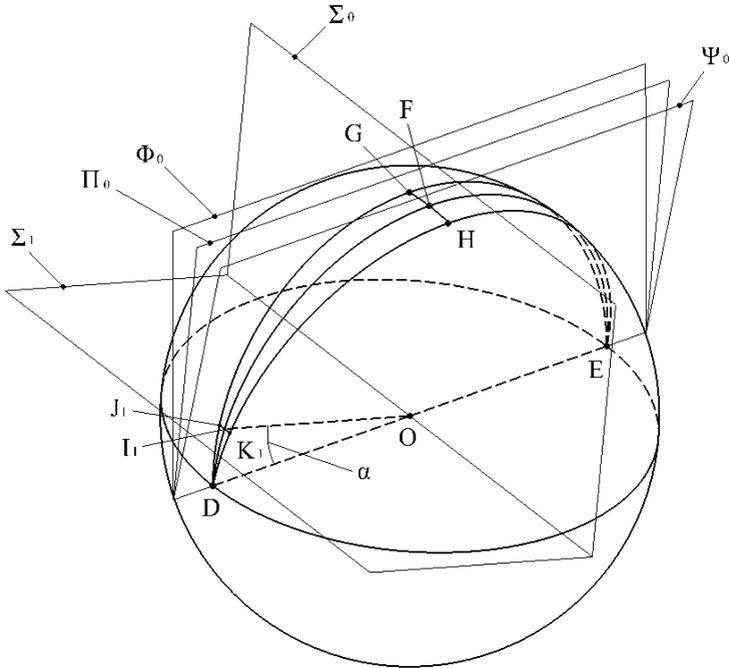


Рис.6.1.1.1.2.

тавлял с радиусом  $|OD|$  угол  $\alpha$  (тоесть, угол  $DOI_1 = \alpha$ ). Проведем через радиус  $|OI_1|$  плоскость  $\Sigma_1$ , перпендикулярную плоскости  $\Pi_0$ . При этом, плоскость  $\Sigma_1$  пересекает,

дугу окружности  $\widehat{DG}$  (лежащую в плоскости  $\Phi_0$ ) в точке  $J_1$ , а дугу окружности  $\widehat{DH}$  (лежащую в плоскости  $\Psi_0$ ) в точке  $K_1$ . При этом,  $|OJ_1| = R$  и  $|OK_1| = R$ . Плоскость  $\Sigma_1$  пересекает поверхность сферы (шара), заключенную между плоскостями  $\Phi_0$  и  $\Psi_0$ , по дуге окружности  $\widehat{J_1I_1K_1}$ .

Соединив точки  $J_1$  и  $O$ ,  $K_1$  и  $O$ ,  $J_1$  и  $D$ ,  $K_1$  и  $D$ ,  $J_1$  и  $K_1$  (Рис.6.1.1.1.3) между собой, получим пирамиду  $ODJ_1K_1$  с основанием в виде треугольника  $DJ_1K_1$  и вершиной в точке  $O$ . При этом, основание пирамиды  $DJ_1K_1$  касается изнутри поверхности сферы в трех точках  $D$ ,  $J_1$  и  $K_1$ .

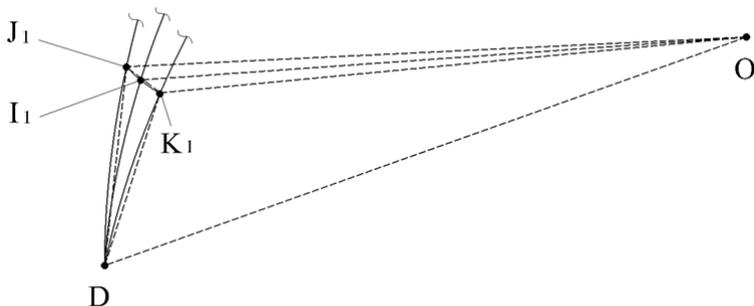


Рис.6.1.1.1.3.

Сторона пирамиды  $OJ_1K_1$  представляет собой равнобедренный треугольник (так как  $|OJ_1| = |OK_1| = R$ ). Точки  $O$ ,  $J_1$  и  $K_1$  лежат в плоскости  $\Sigma_1$ , следовательно, в соответствии с **П.1.4** и  $|OJ_1|$ ,  $|OK_1|$  и  $|J_1K_1|$  будут лежать в плоскости  $\Sigma_1$ , а, следовательно, и весь треугольник  $OJ_1K_1$  лежит в плоскости  $\Sigma_1$ .

Сторона пирамиды  $ODJ_1$  представляет собой треугольник. Точки  $O$ ,  $D$  и  $J_1$  лежат в плоскости  $\Phi_0$ , следовательно, в соответствии с **правилем П.1.4** и  $|OD|$ ,  $|DJ_1|$  и  $|OJ_1|$  будут лежать в плоскости  $\Phi_0$ , а, следовательно, и весь треугольник  $ODJ_1$  лежит в плоскости  $\Phi_0$ .

Сторона пирамиды  $ODK_1$  представляет собой треугольник. Точки  $O$ ,  $D$  и  $K_1$  лежат в плоскости  $\Psi_0$ , следовательно, в соответствии с **П.1.4** и  $|OD|$ ,  $|DK_1|$  и  $|OK_1|$  будут лежать в плоскости  $\Psi_0$ , а, следовательно, и весь треугольник  $ODK_1$  лежит в плоскости  $\Psi_0$ .

$|J_1K_1|$  пересекает радиус  $|OI_1|$  в точке  $Q_1$  (Рис.6.1.1.1.4).

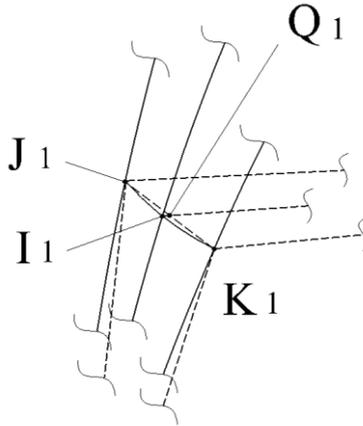


Рис.6.1.1.1.4.

Рассмотрим пирамиду  $ODJ_1K_1$  (Рис.6.1.1.1.5). Опустим из точки  $D$  перпендикуляр  $|DL_1|$  на сторону пирамиды  $OJ_1K_1$ . Так как сторона пирамиды  $OJ_1K_1$  лежит в плоскости  $\Sigma_1$ , которая перпендикулярна плоскости  $\Pi_0$  (принято ранее), а точка  $D$  лежит в плоскости  $\Pi_0$ , то в соответствии со **С.1.5**  $|DL_1|$  будет лежать в плоскости  $\Pi_0$ .

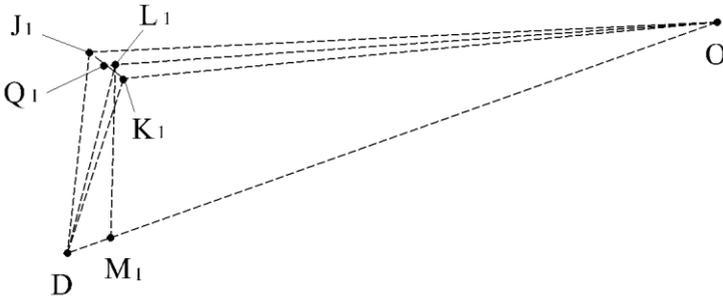


Рис.6.1.1.1.5.

Точка  $L_1$  должна лежать, одновременно, и в плоскости  $\Pi_0$  и в плоскости  $\Sigma_1$ , то есть на радиусе  $|OI_1|$ , являющемся линией пересечения плоскостей  $\Pi_0$  и  $\Sigma_1$ . Так как точки  $O$  и  $L_1$  лежат на радиусе  $|OI_1|$ , то и  $|OL_1|$ , будет лежать на радиусе  $|OI_1|$ .

$|DL_1|$  перпендикулярна стороне пирамиды  $OJ_1K_1$  (плоскости  $\Sigma_1$  (принято ранее)).  $|OL_1|$  лежит в плоскости  $\Sigma_1$  (так как она лежит на радиусе  $|OI_1|$ , который лежит в плоскости  $\Sigma_1$  (принято ранее)). Следовательно, в соответствии со **С.1.6**  $|DL_1| \perp |OL_1|$ , а, следовательно, треугольник  $ODL_1$  прямоугольный, у которого известна гипотенуза  $|OD| = R$  (начальное условие), и прилежащий к ней угол  $DOL_1 = \alpha$  (так как угол  $DOL_1$  равен углу  $DOI_1 = \alpha$ , в силу того, что  $|OL_1|$  лежит на радиусе  $|OI_1|$ ). Согласно **П.1.2** найдет катет  $|OL_1|$ :

$$|OL_1| = |OD| \times \cos \alpha = R \times \cos \alpha, \quad (6.1.1.1.1)$$

Опустим из точки  $L_1$  (Рис.6.1.1.1.5) перпендикуляр  $|L_1M_1|$  на радиус  $|OD|$ . Получим прямоугольный треугольник  $OL_1M_1$ , у которого известна гипотенуза  $|OL_1|$  (найдено ранее) и прилежающий к ней угол  $M_1OL_1 = \alpha$  (так как угол  $M_1OL_1$  равен углу  $DOI_1 = \alpha$ , в силу того, что

$|OM_1|$  лежит на радиусе  $|OD|$ , а  $|OL_1|$  лежит на радиусе  $|OI_1|$ ). В соответствии с **П.1.2** найдем катет  $|L_1M_1|$ :

$$|L_1M_1| = |OL_1| \times \sin \alpha = R \times \cos \alpha \times \sin \alpha, \quad (6.1.1.1.2)$$

Из точки  $L_1$  (Рис.6.1.1.1.6) проведем прямую линию, перпендикулярную плоскости  $\Pi_0$ , до ее пересечения с плоскостью  $\Phi_0$  в точке  $N_1$ , и до ее пересечения с плоскостью  $\Psi_0$  в точке  $P_1$ . Соединив точки  $N_1$  и  $M_1$ ,  $P_1$  и  $M_1$  между собой, получим треугольник  $M_1N_1P_1$ . Точка  $L_1$  лежит на радиусе  $|OI_1|$  (доказано ранее), который лежит в плоскости  $\Sigma_1$ . Плоскость  $\Sigma_1$  перпендикулярна плоскости  $\Pi_0$ .  $|N_1P_1|$  перпендикулярна плоскости  $\Pi_0$  (принято ранее), следовательно,  $|N_1P_1|$  лежит в плоскости  $\Sigma_1$  и в соответствии со **С.1.5** плоскость треугольника  $M_1N_1P_1$  перпендикулярна плоскости  $\Pi_0$ . А, следовательно, точка  $N_1$  лежит на радиусе  $|OJ_1|$ , а точка  $P_1$  лежит на радиусе  $|OK_1|$ .

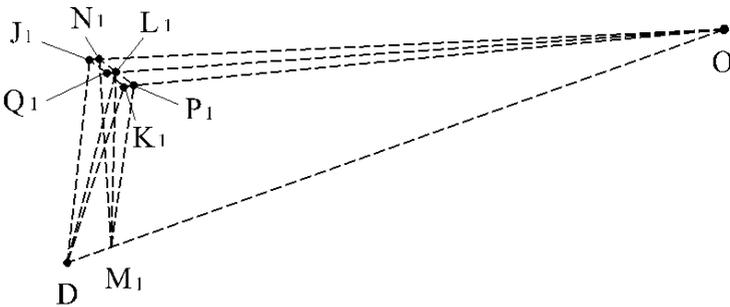


Рис.6.1.1.1.6.

Так как точки  $N_1$  и  $M_1$  лежат в плоскости  $\Phi_0$  (в плоскости треугольника  $ODJ_1$ ), то в соответствии с **П.1.4** и  $|N_1M_1|$  будет лежать в плоскости треугольника  $ODJ_1$ .

Так как точки  $P_1$  и  $M_1$  лежат в плоскости  $\Psi_0$  (в плоскости треугольника  $ODK_1$ ), то в соответствии с **П.1.4** и  $|P_1M_1|$  будет лежать в плоскости треугольника  $ODK_1$ .

$|DE|$  является линией пересечения плоскостей  $\Pi_0$ ,  $\Phi_0$  и  $\Psi_0$ . Следовательно, в соответствии с **П.1.7** угол  $N_1M_1P_1$  является углом между плоскостями  $\Phi_0$  и  $\Psi_0$ , и равен  $\alpha$  (начальное условие), а углы  $L_1M_1N_1$  и  $L_1M_1P_1$  являются углами между плоскостями  $\Pi_0$  и  $\Phi_0$ , и  $\Pi_0$  и  $\Psi_0$ , соответственно, равны между собой и равны  $\frac{\alpha}{2}$  (начальное условие).

Рассмотрим треугольник  $M_1N_1P_1$  (Рис.6.1.1.1.7).  $|N_1P_1|$  перпендикулярна плоскости  $\Pi_0$  (принято ранее). Точки  $L_1$  и  $M_1$  лежат, соответственно, на радиусах  $|OI_1|$  и  $|OD|$ , каждый из которых лежит в плоскости  $\Pi_0$  (начальное условие). Следовательно, и точки  $L_1$  и  $M_1$  будут лежать в плоскости  $\Pi_0$ , а, следовательно, в соответствии с **П.1.4** и  $|L_1M_1|$  лежит в плоскости  $\Pi_0$ . Следовательно, в соответствии со **С.1.6**  $|N_1P_1| \perp |L_1M_1|$ .

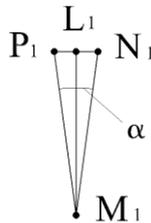


Рис.6.1.1.1.7.

Рассмотрим треугольники  $M_1L_1N_1$  и  $M_1L_1P_1$  (Рис.6.1.1.1.7). Они имеют одну общую сторону  $|L_1M_1|$ . Углы  $L_1M_1N_1$  и  $L_1M_1P_1$ , прилежащие к стороне  $|L_1M_1|$ , равны между собой и равны  $\frac{\alpha}{2}$  (доказано ранее). Углы  $N_1L_1M_1$  и  $P_1L_1M_1$ , прилежащие к стороне  $|L_1M_1|$ , равны между собой и равны  $90^\circ$  (так как  $|N_1P_1| \perp |L_1M_1|$ ). Сле-

довательно, в соответствии с **П.1.8** треугольники  $M_1L_1N_1$  и  $M_1L_1P_1$  равны между собой.

Рассмотрим треугольник  $M_1L_1P_1$  (Рис.6.1.1.1.7), у которого известен катет  $|L_1M_1|$  (данный треугольник прямоугольный, так как  $|N_1P_1| \perp |L_1M_1|$ , а, следовательно, и  $|L_1P_1| \perp |L_1M_1|$ ) и угол  $L_1M_1P_1 = \frac{\alpha}{2}$  (доказано ранее). В соответствии с **П.1.2** найдем катет  $|L_1P_1|$ :

$$\begin{aligned} |L_1P_1| &= |L_1M_1| \times \tan \frac{\alpha}{2} = \\ &= R \times \cos \alpha \times \sin \alpha \times \tan \frac{\alpha}{2}, \quad (6.1.1.1.3) \end{aligned}$$

Из равенства треугольников  $M_1L_1N_1$  и  $M_1L_1P_1$  следует, что  $|L_1P_1| = |L_1N_1|$ , а, следовательно,  $|N_1P_1|$  будет равна:

$$\begin{aligned} |N_1P_1| &= |L_1P_1| + |L_1N_1| = 2 \times |L_1P_1| = \\ &= 2 \times R \times \cos \alpha \times \sin \alpha \times \tan \frac{\alpha}{2}, \quad (6.1.1.1.4) \end{aligned}$$

Рассмотрим треугольник  $ON_1P_1$  (Рис.6.1.1.1.8).  $|OL_1|$  лежит в плоскости  $\Pi_0$  (так как  $|OL_1|$  лежит на радиусе  $|OI_1|$ , который лежит в плоскости  $\Pi_0$  (начальное условие)).

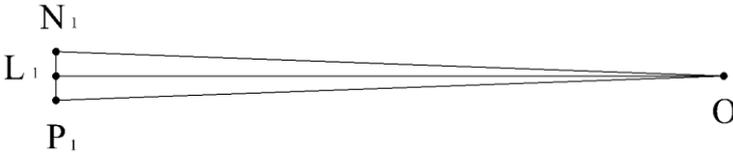


Рис.6.1.1.1.8.

$|N_1P_1|$  перпендикулярна плоскости  $\Pi_0$  (принято ранее), следовательно, в соответствии со **С.1.5**  $|N_1P_1| \perp |OL_1|$ .  $|L_1P_1| = |L_1N_1|$  (доказано ранее). Треугольники  $OL_1N_1$  и

$OL_1P_1$  имеют общую сторону  $|OL_1|$ . Таким образом, у треугольников  $OL_1N_1$  и  $OL_1P_1$  равны две стороны и угол между ними. Следовательно, в соответствии с **П.1.8** треугольники  $OL_1N_1$  и  $OL_1P_1$  равны между собой. Так как  $|N_1P_1| \perp |OL_1|$ , следовательно, треугольники  $OL_1N_1$  и  $OL_1P_1$  прямоугольные.

Рассмотрим прямоугольный треугольник  $OL_1P_1$  (Рис.6.1.1.1.8). У него известен катет  $|OL_1|$  (найден ранее) и катет  $|L_1P_1|$  (также найден ранее). Следовательно, в соответствии с **П.1.9** найдем гипотенузу  $|OP_1|$ :

$$\begin{aligned} |OP_1| &= \sqrt{|OL_1|^2 + |L_1P_1|^2} = \\ &= \sqrt{(R \times \cos \alpha)^2 + \left(R \times \cos \alpha \times \sin \alpha \times \tan \frac{\alpha}{2}\right)^2} = \\ &= R \times \cos \alpha \times \sqrt{1 + \sin^2 \alpha \times \tan^2 \frac{\alpha}{2}}, \quad (6.1.1.1.5) \end{aligned}$$

Рассмотрим треугольник  $OJ_1K_1$  (Рис.6.1.1.1.9). Так как было доказано ранее данный треугольник равнобедренный. Из равенства треугольников  $OL_1N_1$  и  $OL_1P_1$  (доказано ранее) следует, что  $|ON_1| = |OP_1|$ , то есть, что треугольник  $ON_1P_1$  равнобедренный. Угол  $N_1OP_1$  равен углу  $J_1OK_1$ .

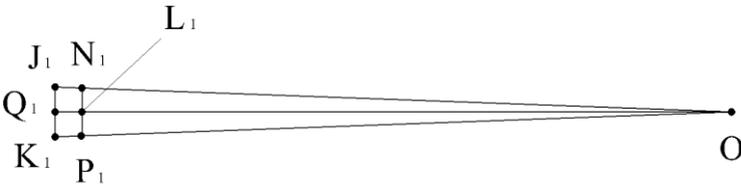


Рис.6.1.1.1.9.

Следовательно, в соответствии с **П.1.10** треугольники  $ON_1P_1$  и  $OJ_1K_1$  подобны. Из их подобия согласно **П.1.11** следует:

$$\frac{|OK_1|}{|OP_1|} = \frac{|J_1K_1|}{|N_1P_1|}, \quad (6.1.1.1.6)$$

Откуда найдем  $|J_1K_1|$ :

$$\begin{aligned} |J_1K_1| &= \frac{|OK_1| \times |N_1P_1|}{|OP_1|} = \\ &= \frac{R \times \left(2 \times R \times \cos \alpha \times \sin \alpha \times \tan \frac{\alpha}{2}\right)}{R \times \cos \alpha \times \sqrt{1 + \sin^2 \alpha \times \tan^2 \frac{\alpha}{2}}} = \\ &= \frac{2 \times R \times \sin \alpha \times \tan \frac{\alpha}{2}}{\sqrt{1 + \sin^2 \alpha \times \tan^2 \frac{\alpha}{2}}}, \quad (6.1.1.1.7) \end{aligned}$$

$|N_1P_1| \perp |OL_1|$ ,  $|L_1P_1| = |L_1N_1|$  (доказано ранее). Следовательно,  $|OL_1|$  является, одновременно, и медианой и биссектрисой и высотой треугольника  $ON_1P_1$ .

Так как  $|OL_1|$  лежит на  $|OQ_1|$ , которая, в свою очередь, лежит на радиусе  $|OI_1|$ , и что треугольник  $OJ_1K_1$  равнобедренный (доказано ранее) и подобный треугольнику  $ON_1P_1$  (доказано ранее), следовательно,  $|OQ_1|$  является, одновременно, и медианой и биссектрисой и высотой треугольника  $OJ_1K_1$ . То есть, что  $|J_1K_1| \perp |OQ_1|$ , и что  $|J_1Q_1| = |Q_1K_1|$ .  $|J_1K_1|$  лежит в плоскости треугольника  $OJ_1K_1$  (доказано ранее), а  $|N_1P_1|$  лежит в плоскости треугольника  $ON_1P_1$  (доказано ранее).  $|J_1K_1| \perp |OQ_1|$  и  $|N_1P_1| \perp |OL_1|$  (доказано ранее), следовательно, и  $|J_1K_1| \perp |OI_1|$  и  $|N_1P_1| \perp |OI_1|$  (так как  $|OQ_1|$  лежит на радиусе  $|OI_1|$ , и  $|OL_1|$  лежит на радиусе  $|OI_1|$ ).

Следовательно,  $|N_1P_1| \parallel |J_1K_1|$ . Но так как  $|N_1P_1|$  перпендикулярна плоскости  $\Pi_0$  (принято ранее), следовательно, и  $|J_1K_1|$  будет перпендикулярна плоскости  $\Pi_0$ .

Рассмотрим треугольник  $OJ_1K_1$  (Рис.6.1.1.1.10). Точка  $Q_1$  является точкой пересечения радиуса  $|OI_1|$  и стороны  $|J_1K_1|$  треугольника  $OJ_1K_1$ . Соединим точки  $D$  и  $Q_1$  между собой. Так как точка  $Q_1$  лежит на радиусе  $|OI_1|$ , который лежит в плоскости  $\Pi_0$ , следовательно, и точка  $Q_1$  будет лежать в плоскости  $\Pi_0$ . Точка  $D$  лежит в плоскости  $\Pi_0$  (начальное условие). Таким образом, точки  $D$  и  $Q_1$  лежат в плоскости  $\Pi_0$ , а, следовательно, в соответствии с **П.1.4**  $|DQ_1|$  будет лежать в плоскости  $\Pi_0$ .  $|OQ_1|$  лежит на радиусе  $|OI_1|$ , который лежит в плоскости  $\Pi_0$  (начальное условие), следовательно, и  $|OQ_1|$  лежит в плоскости  $\Pi_0$ .

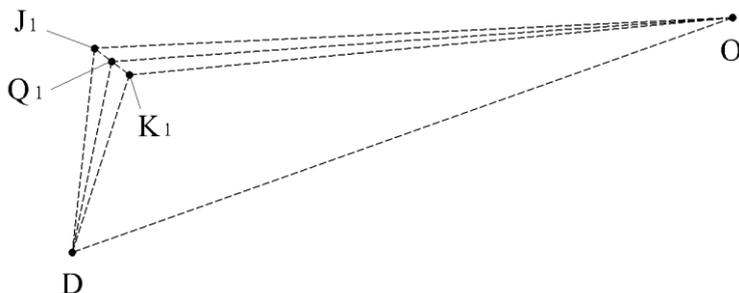


Рис.6.1.1.1.10.

$|DQ_1|$  и  $|OQ_1|$  лежат в плоскости  $\Pi_0$  (доказано ранее), а  $|J_1K_1|$  перпендикулярна плоскости  $\Pi_0$  (доказано ранее). Следовательно, в соответствии со **С.1.6**  $|J_1K_1| \perp |DQ_1|$  и  $|J_1K_1| \perp |OQ_1|$ .

Рассмотрим треугольник  $DJ_1K_1$  (Рис.6.1.1.1.11), который является основанием пирамиды  $ODJ_1K_1$ .  $|J_1K_1| \perp |DQ_1|$  и  $|J_1Q_1| = |Q_1K_1|$  (доказано ранее). Угол  $J_1Q_1D$  треугольника  $DJ_1Q_1$  равен углу  $K_1Q_1D$  треугольника  $DK_1Q_1$  и равен

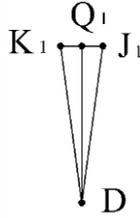


Рис.6.1.1.1.11.

$90^\circ$  (так как  $|J_1K_1| \perp |DQ_1|$ ). Треугольники  $DJ_1Q_1$  и  $DK_1Q_1$  имеют одну общую сторону  $|DQ_1|$ . Следовательно, в соответствии с **П.1.8** треугольники  $DJ_1Q_1$  и  $DK_1Q_1$  равны между собой, а, следовательно,  $|DJ_1| = |DK_1|$ . Следовательно, в соответствии с **П.1.1**  $|DQ_1|$  является высотой треугольника  $DJ_1Q_1$ .

Рассмотрим прямоугольный треугольник  $OK_1Q_1$  (Рис.6.1.1.1.9) (так как  $|J_1K_1| \perp |OQ_1|$  (доказано ранее), следовательно, и  $|Q_1K_1| \perp |OQ_1|$ ), у которого известна гипотенуза  $|OK_1| = R$  (начальное условие) и катет  $|Q_1K_1| = \frac{1}{2} \times |J_1K_1|$  (найденный ранее, так как было доказано, что  $|J_1Q_1| = |Q_1K_1|$ , а, следовательно,  $|J_1K_1| = |J_1Q_1| + |Q_1K_1|$ ). Следовательно, в соответствии с **П.1.9** найдем катет  $|OQ_1|$ :

$$\begin{aligned}
 |OQ_1| &= \sqrt{|OK_1|^2 - |Q_1K_1|^2} = \sqrt{|OK_1|^2 - \left(\frac{|J_1K_1|}{2}\right)^2} = \\
 &= \sqrt{R^2 - \left(\frac{2 \times R \times \sin \alpha \times \tan \frac{\alpha}{2}}{2 \times \sqrt{1 + \sin^2 \alpha \times \tan^2 \frac{\alpha}{2}}}\right)^2} = \\
 &= R \times \sqrt{1 - \frac{\sin^2 \alpha \times \tan^2 \frac{\alpha}{2}}{1 + \sin^2 \alpha \times \tan^2 \frac{\alpha}{2}}}, \quad (6.1.1.1.8)
 \end{aligned}$$

Рассмотрим треугольник  $ODQ_1$  (Рис.6.1.1.1.12), у которого известны две стороны,  $|OD| = R$  (начальное условие) и  $|OQ_1|$  (найдена ранее), и угол между ними  $\angle DOQ_1 = \alpha$  (так как угол  $\angle DOQ_1$  равен углу  $\angle DOI_1 = \alpha$ , в силу того, что  $|OQ_1|$  лежит на радиусе  $|OI_1|$ ).

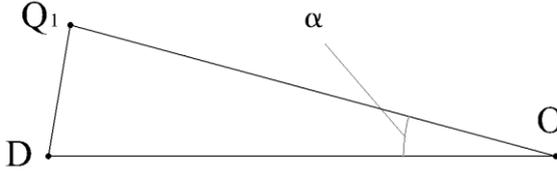


Рис.6.1.1.1.12.

Следовательно, в соответствии с **П.1.12** найдем третью сторону  $|DQ_1|$  треугольника  $ODQ_1$ :

$$\begin{aligned}
 |DQ_1| &= \sqrt{|OD|^2 + |OQ_1|^2 - 2 \times |OD| \times |OQ_1| \times \cos \alpha} = \\
 &= \sqrt{R^2 + \left( R \times \sqrt{1 - \frac{\sin^2 \alpha \times \tan^2 \frac{\alpha}{2}}{1 + \sin^2 \alpha \times \tan^2 \frac{\alpha}{2}}} \right)^2 -} \\
 &\quad - 2 \times R \times \left( R \times \sqrt{1 - \frac{\sin^2 \alpha \times \tan^2 \frac{\alpha}{2}}{1 + \sin^2 \alpha \times \tan^2 \frac{\alpha}{2}}} \right) \times \cos \alpha = \\
 &= R \times \sqrt{2 - \frac{\sin^2 \alpha \times \tan^2 \frac{\alpha}{2}}{1 + \sin^2 \alpha \times \tan^2 \frac{\alpha}{2}}} -
 \end{aligned}$$

$$- 2 \times \cos \alpha \times \sqrt{1 - \frac{\sin^2 \alpha \times \tan^2 \frac{\alpha}{2}}{1 + \sin^2 \alpha \times \tan^2 \frac{\alpha}{2}}}, \quad (6.1.1.1.9)$$

Площадь треугольника  $DJ_1K_1$  (Рис.6.1.1.1.11), у которого ранее найдены сторона  $|J_1K_1|$  и высота  $|DQ_1|$ , согласно **П.1.3** будет равна:

$$\begin{aligned} S_{DJ_1K_1} &= \frac{1}{2} \times |J_1K_1| \times |DQ_1| = \\ &= \frac{1}{2} \times \left( \frac{2 \times R \times \sin \alpha \times \tan \frac{\alpha}{2}}{\sqrt{1 + \sin^2 \alpha \times \tan^2 \frac{\alpha}{2}}} \right) \times \\ &\times \left( R \times \sqrt{2 - \frac{\sin^2 \alpha \times \tan^2 \frac{\alpha}{2}}{1 + \sin^2 \alpha \times \tan^2 \frac{\alpha}{2}} - 2 \times \cos \alpha \times \sqrt{1 - \frac{\sin^2 \alpha \times \tan^2 \frac{\alpha}{2}}{1 + \sin^2 \alpha \times \tan^2 \frac{\alpha}{2}}}} \right) = \\ &= R^2 \times \sin \alpha \times \tan \frac{\alpha}{2} \times \\ &\times \sqrt{\frac{2 - \frac{\sin^2 \alpha \times \tan^2 \frac{\alpha}{2}}{1 + \sin^2 \alpha \times \tan^2 \frac{\alpha}{2}} - 2 \times \cos \alpha \times \sqrt{1 - \frac{\sin^2 \alpha \times \tan^2 \frac{\alpha}{2}}{1 + \sin^2 \alpha \times \tan^2 \frac{\alpha}{2}}}}{1 + \sin^2 \alpha \times \tan^2 \frac{\alpha}{2}}}, \quad (6.1.1.1.10) \end{aligned}$$

Таким образом, чем меньше будет угол  $\alpha$ , тем меньше площадь треугольника  $DJ_1K_1$  будет отличаться от площади поверхности сферы, ограниченной дугами окружностей  $\widehat{DJ_1}$ ,  $\widehat{J_1K_1}$  и  $\widehat{K_1D}$ .

### §6.1.1.2. Вычисление площади основания второй пирамиды

На Рис.6.1.1.2.1 показан шар с центром в точке  $O$ , диаметром  $|DE|$  и радиусом  $|OD| = R$ .

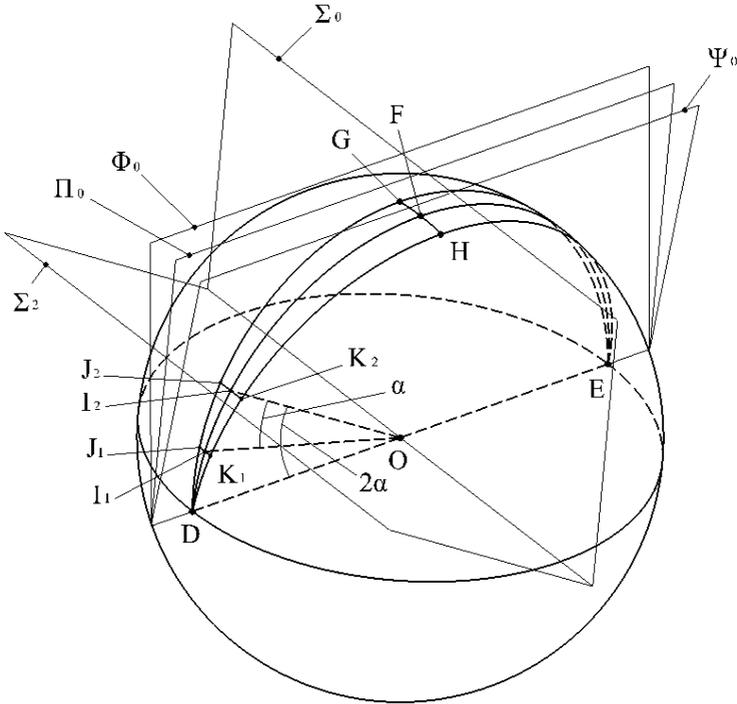


Рис.6.1.1.2.1.

Проведем из центра шара точки  $O$  радиус  $|OI_2| = R$  так, чтобы он лежал в плоскости  $\Pi_0$  и составлял, с радиусом  $|OD|$  угол  $2\alpha$  (то есть, угол  $DOI_2 = 2\alpha$ ), а с радиусом  $|OI_1|$  угол  $\alpha$  (то есть, угол  $I_2OI_1 = \alpha$ ). Проведем через радиус  $|OI_2|$  плоскость  $\Sigma_2$ , перпендикулярную плоскости  $\Pi_0$ . При этом, плоскость  $\Sigma_2$  пересекает, дугу окружности

$\widehat{DG}$  (лежащую в плоскости  $\Phi_0$ ) в точке  $J_2$ , а дугу окружности  $\widehat{DH}$  (лежащую в плоскости  $\Psi_0$ ) в точке  $K_2$ . При этом,  $|OJ_2| = R$  и  $|OK_2| = R$ . Плоскость  $\Sigma_2$  пересекает поверхность сферы (шара), заключенную между плоскостями  $\Phi_0$  и  $\Psi_0$ , по дуге окружности  $\widehat{J_2I_2K_2}$ .

Соединив точки  $J_1$  и  $O$ ,  $K_1$  и  $O$ ,  $J_2$  и  $O$ ,  $K_2$  и  $O$ ,  $J_1$  и  $J_2$ ,  $J_2$  и  $K_2$ ,  $K_2$  и  $K_1$ ,  $K_1$  и  $J_1$  (Рис.6.1.1.2.2) между собой, получим пирамиду  $OJ_1J_2K_2K_1$  с основанием в виде трапеции  $J_1J_2K_2K_1$  и вершиной в точке  $O$ . При этом, основание пирамиды  $J_1J_2K_2K_1$  касается изнутри поверхности сферы в четырех точках  $J_1$ ,  $J_2$ ,  $K_2$  и  $K_1$ .

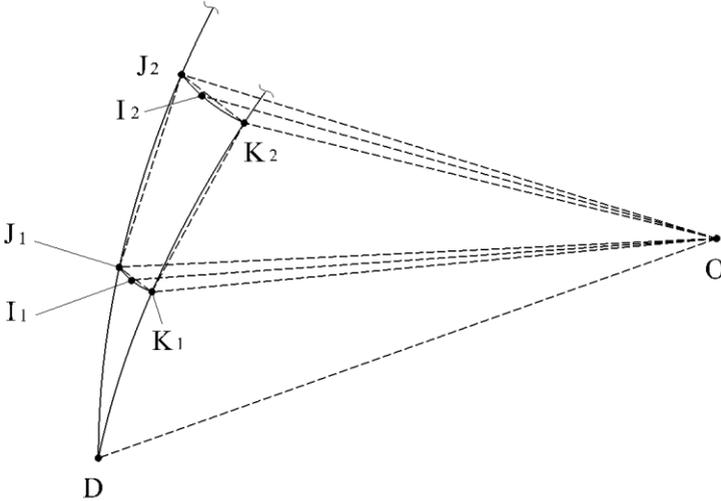


Рис.6.1.1.2.2.

Страна пирамиды  $OJ_2K_2$  представляет собой равнобедренный треугольник (так как  $|OJ_2| = |OK_2| = R$ ). Точки  $O$ ,  $J_2$  и  $K_2$  лежат в плоскости  $\Sigma_2$ , следовательно, в соответствии с **П.1.4** и  $|OJ_2|$ ,  $|OK_2|$  и  $|J_2K_2|$  будут лежать в плоскости  $\Sigma_2$ , а, следовательно, и весь треугольник  $OJ_2K_2$  будет лежать в плоскости  $\Sigma_2$ .

$|J_2K_2|$  пересекает радиус  $|OI_2|$  в точке  $Q_2$  (Рис.6.1.1.1.3).

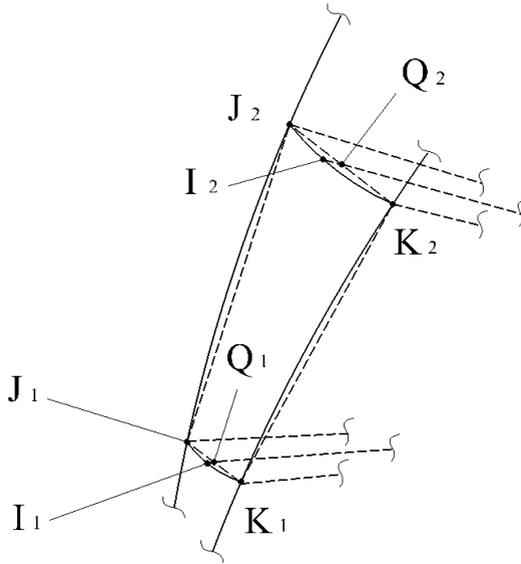


Рис.6.1.1.2.3.

Рассмотрим пирамиду  $OJ_1J_2K_2K_1$  (Рис.6.1.1.2.4). Опустим из точки  $D$  перпендикуляр  $|DL_2|$  на плоскость треугольника  $OJ_2K_2$  (на сторону пирамиды  $OJ_2K_2$ ). Так как сторона пирамиды  $OJ_2K_2$  лежит в плоскости  $\Sigma_2$  (доказано ранее), которая перпендикулярна плоскости  $\Pi_0$  (принято ранее), а точка  $D$  лежит в плоскости  $\Pi_0$  (начальное условие), то в соответствии со **С.1.5**  $|DL_2|$  будет лежать в плоскости  $\Pi_0$ .

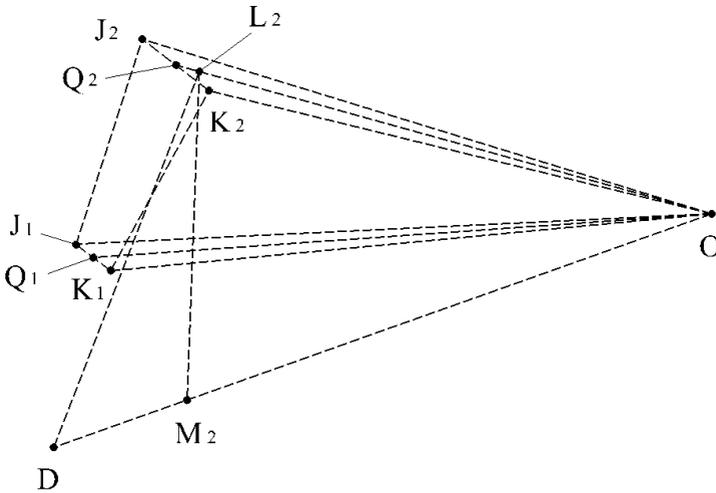


Рис.6.1.1.2.4.

Точка  $L_2$  должна лежать, одновременно, и в плоскости  $\Pi_0$  и в плоскости  $\Sigma_2$ , то есть, на радиусе  $|OI_2|$ , являющемся линией пересечения плоскостей  $\Pi_0$  и  $\Sigma_2$ . Так как точки  $O$  и  $L_2$  лежат на радиусе  $|OI_2|$ , то и  $|OL_2|$  будет лежать на радиусе  $|OI_2|$ .

$|DL_2|$  перпендикулярна стороне пирамиды  $OJ_2K_2$  (плоскости  $\Sigma_2$ ) (принято ранее).  $|OL_2|$  лежит в плоскости  $\Sigma_2$  (так как она лежит на радиусе  $|OI_2|$ , который лежит в плоскости  $\Sigma_2$  (принято ранее)). Следовательно, в соответствии со **С.1.6**  $|DL_2| \perp |OL_2|$ , а, следовательно, треугольник  $ODL_2$  прямоугольный, у которого известна гипотенуза  $|OD| = R$  (начальное условие) и прилежащий к ней угол  $\angle DOL_2 = 2\alpha$  (так как угол  $\angle DOL_2$  равен углу  $\angle DOI_2 = 2\alpha$ , в силу того, что  $|OL_2|$  лежит на радиусе  $|OI_2|$ ). Согласно **П.1.2** найдем катет  $|OL_2|$ :

$$|OL_2| = |OD| \times \cos 2\alpha = R \times \cos 2\alpha, \quad (6.1.1.2.1)$$

Опустим из точки  $L_2$  (Рис.6.1.1.2.4) перпендикуляр  $|L_2M_2|$  на радиус  $|OD|$ . Получим прямоугольный треугольник  $OL_2M_2$ , у которого известна гипотенуза  $|OL_2|$  (найдена ранее) и прилежащий к ней угол  $M_2OL_2 = 2\alpha$  (так как угол  $M_2OL_2$  равен углу  $DOI_2 = 2\alpha$ , в силу того, что  $|OM_2|$  лежит на радиусе  $|OD|$ , а  $|OL_2|$  лежит на радиусе  $|OI_2|$ ). В соответствии с **П.1.2** найдем катет  $|L_2M_2|$ :

$$|L_2M_2| = |OL_2| \times \sin 2\alpha = R \times \cos 2\alpha \times \sin 2\alpha, (6.1.1.2.2)$$

Из точки  $L_2$  (Рис.6.1.1.2.5) проведем прямую линию, перпендикулярную плоскости  $\Pi_0$ , до ее пересечения с плоскостью  $\Phi_0$  в точке  $N_2$ , и до ее пересечения с плоскостью  $\Psi_0$  в точке  $P_2$ . Соединив точки  $N_2$  и  $M_2$ ,  $P_2$  и  $M_2$  между собой, получим треугольник  $M_2N_2P_2$ . Точка  $L_2$  лежит на радиусе  $|OI_2|$  (доказано ранее), который лежит в плоскости  $\Sigma_2$ . Плоскость  $\Sigma_2$  перпендикулярна плоскости  $\Pi_0$ .  $|N_2P_2|$  перпендикулярна плоскости  $\Pi_0$  (принято ранее), следовательно,  $|N_2P_2|$  лежит в плоскости  $\Sigma_2$  и в соответствии со **С.1.5** плоскость треугольника  $M_2N_2P_2$  перпендикулярна плоскости  $\Pi_0$ . А, следовательно, точка  $N_2$  лежит на радиусе  $|OJ_2|$ , а точка  $P_2$  лежит на радиусе  $|OK_2|$ .

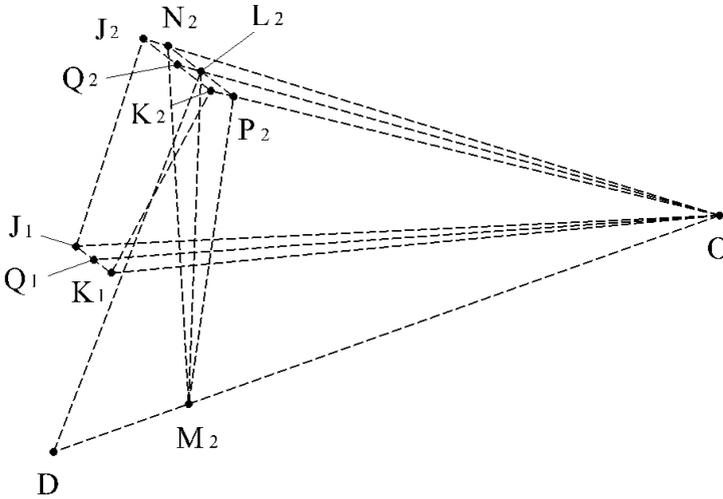


Рис.6.1.1.2.5.

Так как точки  $N_2$  и  $P_2$  лежат в плоскости  $\Sigma_2$  (в плоскости треугольника  $OJ_3K_3$ ), то в соответствии с **П.1.4**  $|N_2P_2|$  лежит в плоскости треугольника  $OJ_2K_2$ .

Так как точки  $N_2$  и  $M_2$  лежат в плоскости  $\Phi_0$ , то в соответствии с **П.1.4** и  $|N_2M_2|$  лежит в плоскости  $\Phi_0$ .

Так как точки  $P_2$  и  $M_2$  лежат в плоскости  $\Psi_0$ , то в соответствии с **П.1.4** и  $|P_2M_2|$  лежит в плоскости  $\Psi_0$ .

$|DE|$  является линией пересечения плоскостей  $\Pi_0$ ,  $\Phi_0$  и  $\Psi_0$ . Следовательно, в соответствии с **П.1.7** угол  $N_2M_2P_2$  является углом между плоскостями  $\Phi_0$  и  $\Psi_0$ , и равен  $\alpha$  (начальное условие), а углы  $L_2M_2N_2$  и  $L_2M_2P_2$  являются углами между плоскостями  $\Pi_0$  и  $\Phi_0$ , и  $\Pi_0$  и  $\Psi_0$ , соответственно, равны между собой и равны  $\frac{\alpha}{2}$  (начальное условие).

Рассмотрим треугольник  $M_2N_2P_2$  (Рис.6.1.1.2.6).  $|N_2P_2|$  перпендикулярна плоскости  $\Pi_0$  (принято ранее). Точки  $L_2$  и  $M_2$  лежат на радиусах  $|OI_2|$  и  $|OD|$ , соответственно,

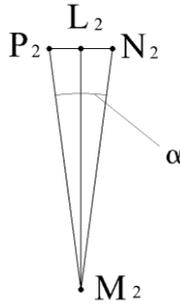


Рис.6.1.1.2.6.

каждый из которых лежит в плоскости  $\Pi_0$  (начальное условие). Следовательно, и точки  $L_2$  и  $M_2$  будут лежать в плоскости  $\Pi_0$ , а, следовательно, в соответствии с **П.1.4** и  $|L_2M_2|$  лежит в плоскости  $\Pi_0$ . Следовательно, в соответствии со **С.1.6**  $|N_2P_2| \perp |L_2M_2|$ .

Рассмотрим треугольники  $M_2L_2N_2$  и  $M_2L_2P_2$  (Рис.6.1.1.2.6). Они имеют одну общую сторону  $|L_2M_2|$ . Углы  $L_2M_2N_2$  и  $L_2M_2P_2$ , прилежащие к стороне  $|L_2M_2|$ , равны между собой и равны  $\frac{\alpha}{2}$  (доказано ранее). Углы  $N_2L_2M_2$  и  $P_2L_2M_2$ , прилежащие к стороне  $|L_2M_2|$ , равны между собой и равны  $90^\circ$  (так как  $|N_2P_2| \perp |L_2M_2|$ ). Следовательно, в соответствии с **П.1.8** треугольники  $M_2L_2N_2$  и  $M_2L_2P_2$  равны между собой.

Рассмотрим (Рис.6.1.1.2.6) прямоугольный треугольник  $M_2L_2P_2$  (так как угол  $P_2L_2M_2 = 90^\circ$  (доказано ранее)), у которого известны катет  $|L_2M_2|$  (найден ранее) и угол  $L_2M_2P_2 = \frac{\alpha}{2}$  (доказано ранее). В соответствии с **П.1.2** найдем катет  $|L_2P_2|$ :

$$\begin{aligned} |L_2P_2| &= |L_2M_2| \times \tan \frac{\alpha}{2} = \\ &= R \times \cos 2\alpha \times \sin 2\alpha \times \tan \frac{\alpha}{2}, \quad (6.1.1.2.3) \end{aligned}$$

Из равенства треугольников  $M_2L_2N_2$  и  $M_2L_2P_2$  следует, что  $|L_2P_2| = |L_2N_2|$ , а, следовательно,  $|N_2P_2|$  будет равна:

$$\begin{aligned} |N_2P_2| &= |L_2P_2| + |L_2N_2| = 2 \times |L_2P_2| = \\ &= 2 \times R \times \cos 2\alpha \times \sin 2\alpha \times \tan \frac{\alpha}{2}, \quad (6.1.1.2.4) \end{aligned}$$

Рассмотрим треугольник  $ON_2P_2$  (Рис.6.1.1.2.7).  $|OL_2|$  лежит в плоскости  $\Pi_0$  (так как  $|OL_2|$  лежит на радиусе  $|OI_2|$ , который лежит в плоскости  $\Pi_0$  (начальное условие)).

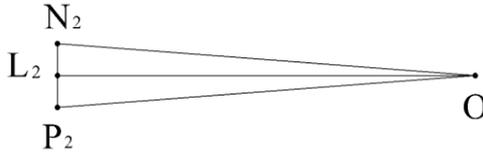


Рис.6.1.1.2.7.

$|N_2P_2|$  перпендикулярна плоскости  $\Pi_0$  (принято ранее), следовательно, в соответствии со **С.1.6**  $|N_2P_2| \perp |OL_2|$ .  $|L_2P_2| = |L_2N_2|$  (доказано ранее). Треугольники  $OL_2N_2$  и  $OL_2P_2$  имеют общую сторону  $|OL_2|$ . Таким образом, у треугольников  $OL_2N_2$  и  $OL_2P_2$  равны две стороны и углы между ними. Следовательно, в соответствии с **П.1.8** треугольники  $OL_2N_2$  и  $OL_2P_2$  равны между собой. Так как  $|N_2P_2| \perp |OL_2|$  (доказано ранее), следовательно, треугольники  $OL_2N_2$  и  $OL_2P_2$  прямоугольные.

Рассмотрим прямоугольный треугольник  $OL_2P_2$  (Рис.6.1.1.2.7). У него известны катеты  $|OL_2|$  и  $|L_2P_2|$  (найжены ранее). Следовательно, в соответствии с **П.1.9** найдем гипотенузу  $|OP_2|$ :

$$\begin{aligned}
 |OP_2| &= \sqrt{|OL_2|^2 + |L_2P_2|^2} = \\
 &= \sqrt{(R \times \cos 2\alpha)^2 + \left(R \times \cos 2\alpha \times \sin 2\alpha \times \tan \frac{\alpha}{2}\right)^2} = \\
 &= R \times \cos 2\alpha \times \sqrt{1 + \sin^2 2\alpha \times \tan^2 \frac{\alpha}{2}}, \quad (6.1.1.2.5)
 \end{aligned}$$

Рассмотрим треугольник  $OJ_2K_2$  (Рис.6.1.1.2.8), который является равнобедренным (доказано ранее).

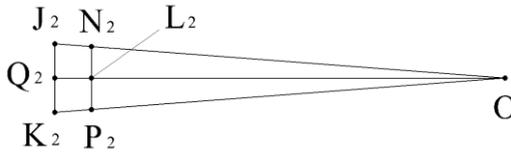


Рис.6.1.1.2.8.

Из равенства треугольников  $OL_2N_2$  и  $OL_2P_2$  (доказано ранее) следует, что  $|ON_2| = |OP_2|$ , то есть, что треугольник  $ON_2P_2$  равнобедренный. Угол  $N_2OP_2$  равен углу  $J_2OK_2$ . Следовательно, в соответствии с **П.1.10** треугольники  $ON_2P_2$  и  $OJ_2K_2$  подобны. Из их подобия согласно **П.1.11** следует:

$$\frac{|OK_2|}{|OP_2|} = \frac{|J_2K_2|}{|N_2P_2|}, \quad (6.1.1.2.6)$$

Откуда найдем  $|J_2K_2|$ :

$$\begin{aligned}
 |J_2K_2| &= \frac{|OK_2| \times |N_2P_2|}{|OP_2|} = \\
 &= \frac{R \times \left(2 \times R \times \cos 2\alpha \times \sin 2\alpha \times \tan \frac{\alpha}{2}\right)}{R \times \cos 2\alpha \times \sqrt{1 + \sin^2 2\alpha \times \tan^2 \frac{\alpha}{2}}} =
 \end{aligned}$$

$$= \frac{2 \times R \times \sin 2\alpha \times \tan \frac{\alpha}{2}}{\sqrt{1 + \sin^2 2\alpha \times \tan^2 \frac{\alpha}{2}}}, \quad (6.1.1.2.7)$$

$|N_2P_2| \perp |OL_2|$ , а  $|L_2P_2| = |L_2N_2|$  (доказано ранее). Следовательно,  $|OL_2|$  является, одновременно, и медианой и биссектрисой и высотой треугольника  $ON_2P_2$ .

Так как  $|OL_2|$  лежит на  $|OQ_2|$ , которая в свою очередь лежит на радиусе  $|OI_2|$ , и что равнобедренный треугольник  $OJ_2K_2$  (доказано ранее) подобен треугольнику  $ON_2P_2$  (доказано ранее), следовательно,  $|OQ_2|$  является, одновременно, и медианой и биссектрисой и высотой треугольника  $OJ_2K_2$ . То есть, что  $|J_2K_2| \perp |OQ_2|$  и  $|J_2Q_2| = |Q_2K_2|$ .  $|J_2K_2|$  лежит в плоскости треугольника  $OJ_2K_2$  (доказано ранее), а  $|N_2P_2|$  также лежит в плоскости треугольника  $OJ_2K_2$  (доказано ранее).  $|J_2K_2| \perp |OQ_2|$  и  $|N_2P_2| \perp |OL_2|$  (доказано ранее), следовательно, и  $|J_2K_2| \perp |OI_2|$  и  $|N_2P_2| \perp |OQ_2|$  (так как  $|OQ_2|$  лежит на радиусе  $|OI_2|$ , и  $|OL_2|$  лежит на радиусе  $|OI_2|$ ).

Следовательно,  $|N_2P_2| \parallel |J_2K_2|$ . Но так как  $|N_2P_2|$  перпендикулярна плоскости  $\Pi_0$  (принято ранее), следовательно, и  $|J_2K_2|$  будет перпендикулярна плоскости  $\Pi_0$ .

Рассмотрим треугольник  $OJ_2K_2$  (Рис.6.1.1.2.9). Точка  $Q_2$  является точкой пересечения радиуса  $|OI_2|$  и стороны  $|J_2K_2|$  треугольника  $OJ_2K_2$ .

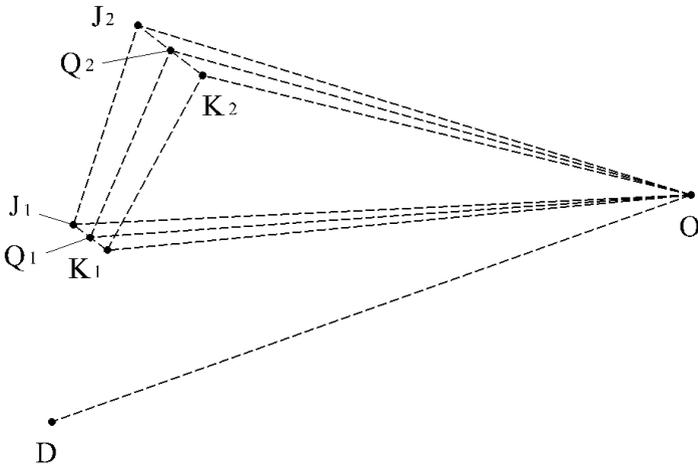


Рис.6.1.1.2.9.

Соединим точки  $Q_1$  и  $Q_2$  между собой. Так как точка  $Q_2$  лежит на радиусе  $|OI_2|$ , который лежит в плоскости  $\Pi_0$ , следовательно, и точка  $Q_2$  будет лежать в плоскости  $\Pi_0$ . Точка  $Q_1$  лежит в плоскости  $\Pi_0$  (доказано ранее в §6.1.1.1). Таким образом, точки  $Q_1$  и  $Q_2$  лежат в плоскости  $\Pi_0$ , а, следовательно, в соответствии с **П.1.4** и  $|Q_1Q_2|$  будет лежать в плоскости  $\Pi_0$ .  $|OQ_2|$  лежит на радиусе  $|OI_2|$ , который лежит в плоскости  $\Pi_0$ , следовательно, и  $|OQ_2|$  лежит в плоскости  $\Pi_0$ .

$|Q_1Q_2|$  и  $|OQ_2|$  лежат в плоскости  $\Pi_0$  (доказано ранее), а  $|J_2K_2|$  перпендикулярна плоскости  $\Pi_0$  (доказано ранее). Следовательно, в соответствии со **С.1.6**  $|J_2K_2| \perp |Q_1Q_2|$  и  $|J_2K_2| \perp |OQ_2|$ .

Рассмотрим треугольник  $OK_2Q_2$  (Рис.6.1.1.2.8), который является прямоугольным (так как  $|J_2K_2| \perp |OQ_2|$ , следовательно, и  $|Q_2K_2| \perp |OQ_2|$ ), и у которого известна гипотенуза  $|OK_2| = R$  (начальное условие) и катет  $|Q_2K_2| = = \frac{1}{2} \times |J_2K_2|$  (так как  $|J_2Q_2| = |Q_2K_2|$ , следовательно,

$|J_2K_2| = |J_2Q_2| + |Q_2K_2|$  (найдено ранее)). Следовательно, в соответствии с **П.1.9** найдем катет  $|OQ_2|$ :

$$\begin{aligned}
 |OQ_2| &= \sqrt{|OK_2|^2 - |Q_2K_2|^2} = \sqrt{|OK_2|^2 - \left(\frac{|J_2K_2|}{2}\right)^2} = \\
 &= \sqrt{R^2 - \left(\frac{2 \times R \times \sin 2\alpha \times \tan \frac{\alpha}{2}}{2 \times \sqrt{1 + \sin^2 2\alpha \times \tan^2 \frac{\alpha}{2}}}\right)^2} = \\
 &= R \times \sqrt{1 - \frac{\sin^2 2\alpha \times \tan^2 \frac{\alpha}{2}}{1 + \sin^2 2\alpha \times \tan^2 \frac{\alpha}{2}}}, \quad (6.1.1.2.8)
 \end{aligned}$$

Рассмотрим треугольник  $OQ_1Q_2$  (Рис.6.1.1.2.10), у которого известны две стороны,  $|OQ_1|$  (найдена ранее в §6.1.1.1) и  $|OQ_2|$  (найдена ранее в данном параграфе) и угол между ними  $Q_1OQ_2 = \alpha$  (так как угол  $Q_1OQ_2$  равен разности между углами  $DOI_2 = 2\alpha$  и  $DOI_1 = \alpha$  (так как  $|OQ_1|$  лежит на радиусе  $|OI_1|$ , а  $|OQ_2|$  лежит на радиусе  $|OI_2|$ )).

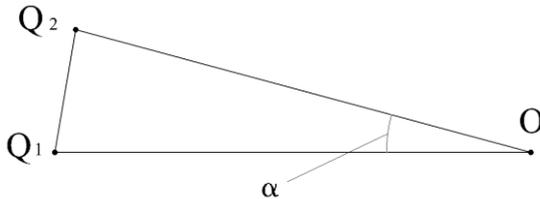


Рис.6.1.1.2.10.

Следовательно, в соответствии с **П.1.12** найдем третью сторону  $|Q_1Q_2|$ :

$$\begin{aligned}
|Q_1 Q_2| &= \sqrt{|OQ_1|^2 + |OQ_2|^2 - 2 \times |OQ_1| \times |OQ_2| \times \cos \alpha} = \\
&= \sqrt{\left( R \times \sqrt{1 - \frac{\sin^2 \alpha \times \tan^2 \frac{\alpha}{2}}{1 + \sin^2 \alpha \times \tan^2 \frac{\alpha}{2}}} \right)^2 + \left( R \times \sqrt{1 - \frac{\sin^2 2\alpha \times \tan^2 \frac{\alpha}{2}}{1 + \sin^2 2\alpha \times \tan^2 \frac{\alpha}{2}}} \right)^2 -} \\
&\quad - 2 \times \left( R \times \sqrt{1 - \frac{\sin^2 \alpha \times \tan^2 \frac{\alpha}{2}}{1 + \sin^2 \alpha \times \tan^2 \frac{\alpha}{2}}} \right) \times \left( R \times \sqrt{1 - \frac{\sin^2 2\alpha \times \tan^2 \frac{\alpha}{2}}{1 + \sin^2 2\alpha \times \tan^2 \frac{\alpha}{2}}} \right) \times \cos \alpha = \\
&= R \times \sqrt{\left( 1 - \frac{\sin^2 \alpha \times \tan^2 \frac{\alpha}{2}}{1 + \sin^2 \alpha \times \tan^2 \frac{\alpha}{2}} \right) + \left( 1 - \frac{\sin^2 2\alpha \times \tan^2 \frac{\alpha}{2}}{1 + \sin^2 2\alpha \times \tan^2 \frac{\alpha}{2}} \right) -} \\
&\quad - 2 \times \cos \alpha \times \sqrt{1 - \frac{\sin^2 \alpha \times \tan^2 \frac{\alpha}{2}}{1 + \sin^2 \alpha \times \tan^2 \frac{\alpha}{2}}} \times \sqrt{1 - \frac{\sin^2 2\alpha \times \tan^2 \frac{\alpha}{2}}{1 + \sin^2 2\alpha \times \tan^2 \frac{\alpha}{2}}}, \quad (6.1.1.2.9)
\end{aligned}$$

Рассмотрим трапецию  $J_1 J_2 K_2 K_1$  (Рис.6.1.1.2.11), являющуюся основанием пирамиды  $OJ_1 J_2 K_2 K_1$ .  $|J_2 K_2| \perp |Q_1 Q_2|$  (доказано ранее).

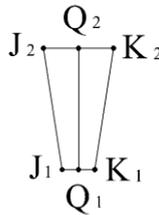


Рис.6.1.1.2.11.

Как было доказано ранее в §6.1.1.1,  $|J_1 K_1|$  перпендикулярна плоскости  $\Pi_0$ .  $|Q_1 Q_2|$  лежит в плоскости  $\Pi_0$  (доказано ранее), следовательно, в соответствии со **С.1.6**  $|J_1 K_1| \perp |Q_1 Q_2|$ . Следовательно,  $|Q_1 Q_2|$  является высо-

той трапеции  $J_1J_2K_2K_1$ . Ранее были найдены противолежащие стороны данной трапеции  $|J_1K_1|$  (найдена в §6.1.1.1) и  $|J_2K_2|$  (найдена в данном параграфе). Согласно **П.1.14** найдем площадь трапеции  $J_1J_2K_2K_1$ :

$$\begin{aligned}
 S_{J_1J_2K_2K_1} &= \left( \frac{|J_1K_1| + |J_2K_2|}{2} \right) \times |Q_1Q_2| = \\
 &= \frac{1}{2} \times \left( \frac{2 \times R \times \sin \alpha \times \tan \frac{\alpha}{2}}{\sqrt{1 + \sin^2 \alpha \times \tan^2 \frac{\alpha}{2}}} + \frac{2 \times R \times \sin 2\alpha \times \tan \frac{\alpha}{2}}{\sqrt{1 + \sin^2 2\alpha \times \tan^2 \frac{\alpha}{2}}} \right) \times R \times \\
 &\times \sqrt{\left( 1 - \frac{\sin^2 \alpha \times \tan^2 \frac{\alpha}{2}}{1 + \sin^2 \alpha \times \tan^2 \frac{\alpha}{2}} \right) + \left( 1 - \frac{\sin^2 2\alpha \times \tan^2 \frac{\alpha}{2}}{1 + \sin^2 2\alpha \times \tan^2 \frac{\alpha}{2}} \right) -} \\
 &\frac{- 2 \times \cos \alpha \times \sqrt{1 - \frac{\sin^2 \alpha \times \tan^2 \frac{\alpha}{2}}{1 + \sin^2 \alpha \times \tan^2 \frac{\alpha}{2}}} \times \sqrt{1 - \frac{\sin^2 2\alpha \times \tan^2 \frac{\alpha}{2}}{1 + \sin^2 2\alpha \times \tan^2 \frac{\alpha}{2}}}}{=} \\
 &= R^2 \times \left( \frac{\sin \alpha \times \tan \frac{\alpha}{2}}{\sqrt{1 + \sin^2 \alpha \times \tan^2 \frac{\alpha}{2}}} + \frac{\sin 2\alpha \times \tan \frac{\alpha}{2}}{\sqrt{1 + \sin^2 2\alpha \times \tan^2 \frac{\alpha}{2}}} \right) \times \\
 &\times \sqrt{\left( 1 - \frac{\sin^2 \alpha \times \tan^2 \frac{\alpha}{2}}{1 + \sin^2 \alpha \times \tan^2 \frac{\alpha}{2}} \right) + \left( 1 - \frac{\sin^2 2\alpha \times \tan^2 \frac{\alpha}{2}}{1 + \sin^2 2\alpha \times \tan^2 \frac{\alpha}{2}} \right) -} \\
 &\frac{- 2 \times \cos \alpha \times \sqrt{1 - \frac{\sin^2 \alpha \times \tan^2 \frac{\alpha}{2}}{1 + \sin^2 \alpha \times \tan^2 \frac{\alpha}{2}}} \times \sqrt{1 - \frac{\sin^2 2\alpha \times \tan^2 \frac{\alpha}{2}}{1 + \sin^2 2\alpha \times \tan^2 \frac{\alpha}{2}}}}{=} , (6.1.1.2.10)
 \end{aligned}$$

Таким образом, чем меньше будет угол  $\alpha$ , тем меньше площадь трапеции  $J_1J_2K_2K_1$  будет отличаться от площади поверхности сферы, ограниченной дугами окружностей  $\widehat{J_1J_2}$ ,  $\widehat{J_2K_2}$ ,  $\widehat{K_2K_1}$  и  $\widehat{K_1J_1}$ .

### §6.1.1.3. Вычисление площади основания третьей пирамиды

На Рис.6.1.1.3.1 показан шар с центром в точке  $O$ , диаметром  $|DE|$  и радиусом  $|OD| = R$ .

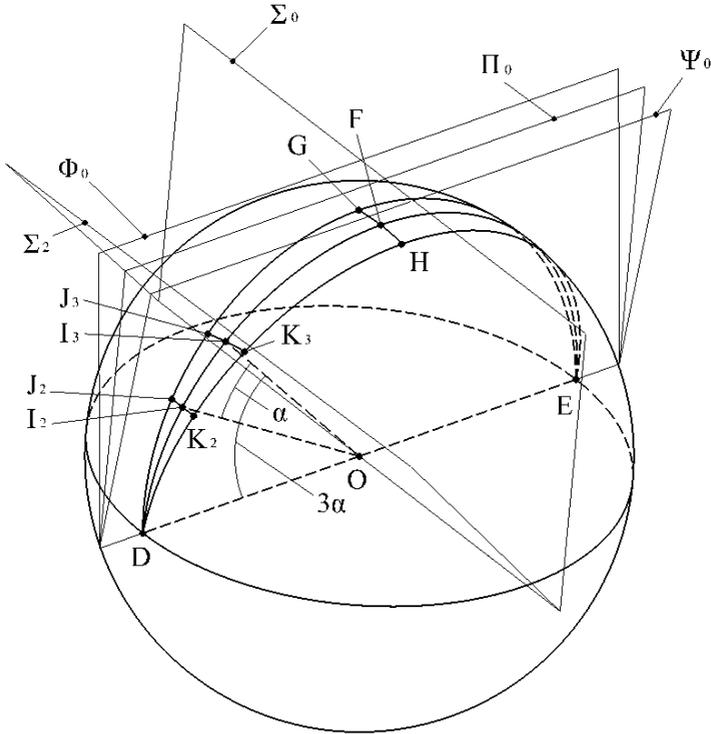


Рис.6.1.1.3.1.

Проведем из центра шара точки  $O$  радиус  $|OI_3| = R$  так, чтобы он лежал в плоскости  $\Pi_0$  и составлял, с радиусом  $|OD|$  угол  $3\alpha$  (то есть, угол  $DOI_3 = 3\alpha$ ), а с радиусом  $|OI_2|$  угол  $\alpha$  (то есть, угол  $I_2OI_3 = \alpha$ ). Проведем через радиус  $|OI_3|$  плоскость  $\Sigma_3$ , перпендикулярную плоскости  $\Pi_0$ . При этом, плоскость  $\Sigma_3$  пересекает, дугу окружности

$\widehat{DG}$  (лежащую в плоскости  $\Phi_0$ ) в точке  $J_3$ , а дугу окружности  $\widehat{DH}$  (лежащую в плоскости  $\Psi_0$ ) в точке  $K_3$ . При этом,  $|OJ_3| = R$  и  $|OK_3| = R$ . Плоскость  $\Sigma_3$  пересекает поверхность сферы (шара), заключенную между плоскостями  $\Phi_0$  и  $\Psi_0$ , по дуге окружности  $\widehat{J_3I_3K_3}$ .

Соединив точки  $J_2$  и  $O$ ,  $K_2$  и  $O$ ,  $J_3$  и  $O$ ,  $K_3$  и  $O$ ,  $J_2$  и  $J_3$ ,  $J_3$  и  $K_3$ ,  $K_3$  и  $K_2$ ,  $K_2$  и  $J_2$  (Рис.6.1.1.3.2) между собой, получим пирамиду  $OJ_2J_3K_3K_2$  с основанием в виде трапеции

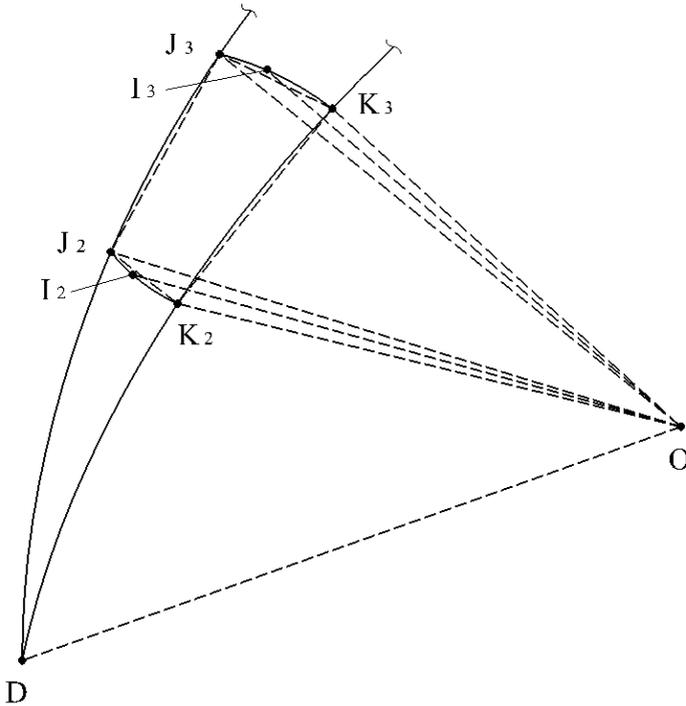


Рис.6.1.1.3.2.

$J_2J_3K_3K_2$  и вершиной в точке  $O$ . При этом, основание пирамиды  $J_2J_3K_3K_2$  касается изнутри поверхности сферы в четырех точках  $J_2$ ,  $J_3$ ,  $K_3$  и  $K_2$ .

Сторона пирамиды  $OJ_3K_3$  представляет собой равнобедренный треугольник (так как  $|OJ_3| = |OK_3| = R$ ). Точки  $O$ ,  $J_3$  и  $K_3$  лежат в плоскости  $\Sigma_3$ , следовательно, в соответствии с **П.1.4** и  $|OJ_3|$ ,  $|OK_3|$  и  $|J_3K_3|$  будут лежать в плоскости  $\Sigma_3$ , а следовательно, и весь треугольник  $OJ_3K_3$  будет лежать в плоскости  $\Sigma_3$ .

$|J_3K_3|$  пересекает радиус  $|OI_3|$  в точке  $Q_3$  (Рис.6.1.1.1.3).

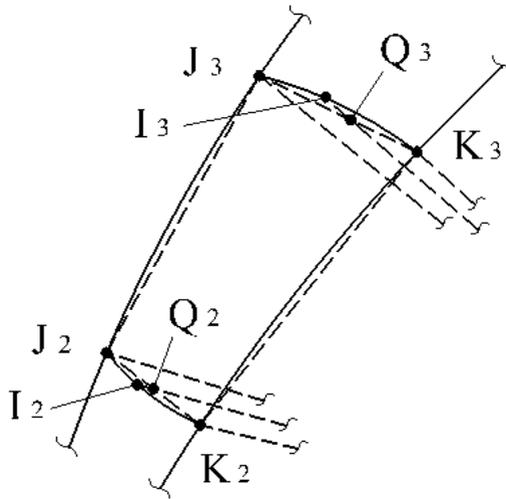


Рис.6.1.1.3.3.

Рассмотрим пирамиду  $OJ_2J_3K_3K_2$  (Рис.6.1.1.3.4). Опустим из точки  $D$  перпендикуляр  $|DL_3|$  на плоскость треугольника  $OJ_3K_3$  (на сторону пирамиды  $OJ_3K_3$ ). Так как сторона пирамиды  $OJ_3K_3$  лежит в плоскости  $\Sigma_3$  (доказано ранее), которая перпендикулярна плоскости  $\Pi_0$  (принято ранее), а точка  $D$  лежит в плоскости  $\Pi_0$  (начальное условие), то в соответствии со **С.1.5**  $|DL_3|$  будет лежать в плоскости  $\Pi_0$ .

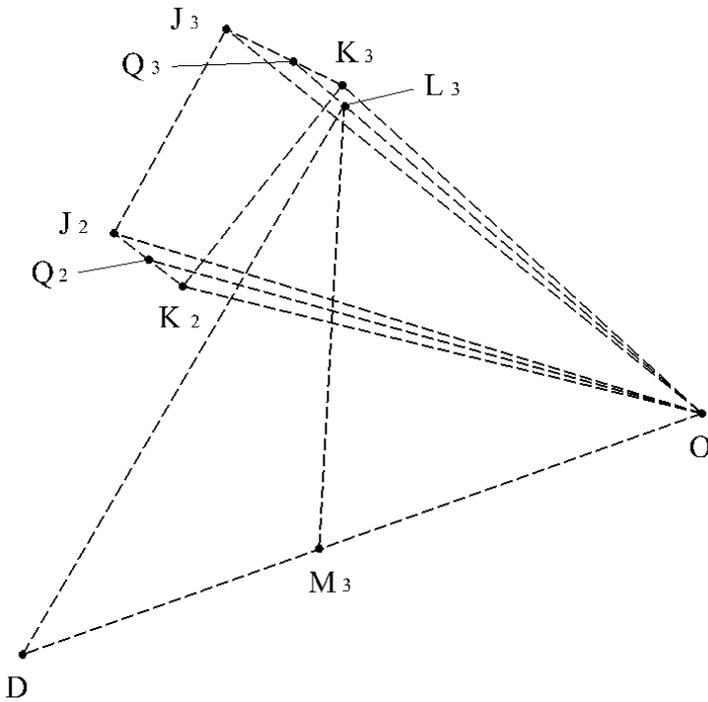


Рис.6.1.1.3.4.

Точка  $L_3$  должна лежать, одновременно, и в плоскости  $\Pi_0$  и в плоскости  $\Sigma_3$ , то есть, на радиусе  $|OI_3|$ , являющемся линией пересечения плоскостей  $\Pi_0$  и  $\Sigma_3$ . Так как точки O и  $L_3$  лежат на радиусе  $|OI_3|$ , то и  $|OL_3|$  будет лежать на радиусе  $|OI_3|$ .

$|DL_3|$  перпендикулярна стороне пирамиды  $OJ_3K_3$  (плоскости  $\Sigma_3$ ) (принято ранее).  $|OL_3|$  лежит в плоскости  $\Sigma_3$  (так как она лежит на радиусе  $|OI_3|$ , который лежит в плоскости  $\Sigma_3$  (принято ранее)). Следовательно, в соответствии со **С.1.6**  $|DL_3| \perp |OL_3|$ , а, следовательно, треугольник  $ODL_3$  прямоугольный, у которого известна гипотенуза  $|OD| = R$  (начальное условие) и прилежащий к ней угол

$DOL_3 = 3\alpha$  (так как угол  $DOL_3$  равен углу  $DOI_3 = 3\alpha$ , в силу того, что  $|OL_3|$  лежит на радиусе  $|OI_3|$ ). Согласно **П.1.2** найдем катет  $|OL_3|$ :

$$|OL_3| = |OD| \times \cos 3\alpha = R \times \cos 3\alpha, (6.1.1.3.1)$$

Опустим из точки  $L_3$  (Рис.6.1.1.3.4) перпендикуляр  $|L_3M_3|$  на радиус  $|OD|$ . Получим прямоугольный треугольник  $OL_3M_3$ , у которого известна гипотенуза  $|OL_3|$  (найдена ранее) и прилегающий к ней угол  $M_3OL_3 = 3\alpha$  (так как угол  $M_3OL_3$  равен углу  $DOI_3 = 3\alpha$ , в силу того, что  $|OM_3|$  лежит на радиусе  $|OD|$ , а  $|OL_3|$  лежит на радиусе  $|OI_3|$ ). В соответствии с **П.1.2** найдем катет  $|L_3M_3|$ :

$$|L_3M_3| = |OL_3| \times \sin 3\alpha = R \times \cos 3\alpha \times \sin 3\alpha, (6.1.1.3.2)$$

Из точки  $L_3$  (Рис.6.1.1.3.5) проведем прямую линию, перпендикулярную плоскости  $\Pi_0$ , до ее пересечения с плоскостью  $\Phi_0$  в точке  $N_3$ , и до ее пересечения с плоскостью  $\Psi_0$  в точке  $P_3$ . Соединив точки  $N_3$  и  $M_3$ ,  $P_3$  и  $M_3$  между собой, получим треугольник  $M_3N_3P_3$ . Точка  $L_3$  лежит на радиусе  $|OI_3|$  (доказано ранее), который лежит в плоскости  $\Sigma_3$ . Плоскость  $\Sigma_3$  перпендикулярна плоскости  $\Pi_0$ .  $|N_3P_3|$  перпендикулярна плоскости  $\Pi_0$  (принято ранее), следовательно,  $|N_3P_3|$  лежит в плоскости  $\Sigma_3$  и в соответствии со **С.1.5** плоскость треугольника  $M_3N_3P_3$  перпендикулярна плоскости  $\Pi_0$ . А, следовательно, точка  $N_3$  лежит на радиусе  $|OJ_3|$ , а точка  $P_3$  лежит на радиусе  $|OK_3|$ .

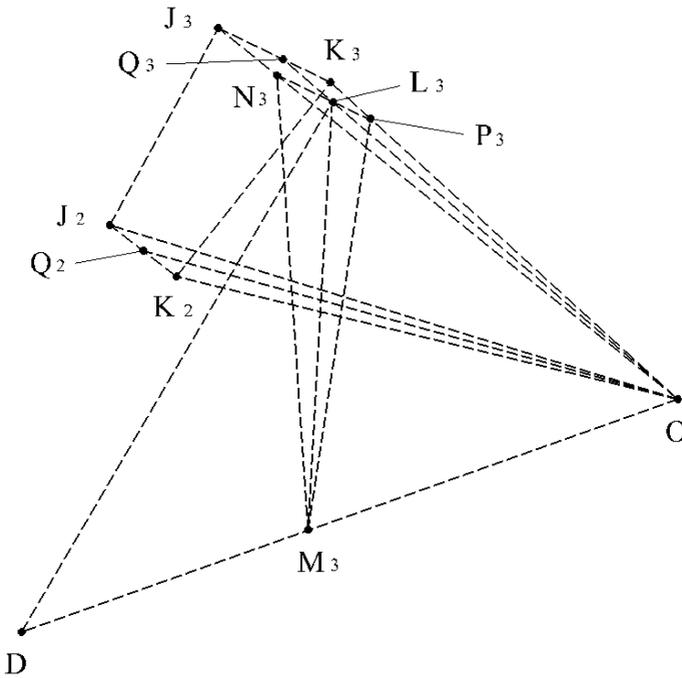


Рис.6.1.1.3.5.

Так как точки  $N_3$  и  $P_3$  лежат в плоскости  $\Sigma_3$  (в плоскости треугольника  $OJ_3K_3$ ), то в соответствии с **П.1.4**  $|N_3P_3|$  лежит в плоскости треугольника  $OJ_3K_3$ .

Так как точки  $N_3$  и  $M_3$  лежат в плоскости  $\Phi_0$ , то в соответствии с **П.1.4**  $|N_3M_3|$  лежит в плоскости  $\Phi_0$ .

Так как точки  $P_3$  и  $M_3$  лежат в плоскости  $\Psi_0$ , то в соответствии с **П.1.4**  $|P_3M_3|$  лежит в плоскости  $\Psi_0$ .

$|DE|$  является линией пересечения плоскостей  $\Pi_0, \Phi_0$  и  $\Psi_0$ . Следовательно, в соответствии с **П.1.7** угол  $N_3M_3P_3$  является углом между плоскостями  $\Phi_0$  и  $\Psi_0$ , и равен  $\alpha$  (начальное условие), а углы  $L_3M_3N_3$  и  $L_3M_3P_3$  являются угла-

ми между плоскостями  $\Pi_0$  и  $\Phi_0$ , и  $\Pi_0$  и  $\Psi_0$ , соответственно, равны между собой и равны  $\frac{\alpha}{2}$  (начальное условие).

Рассмотрим треугольник  $M_3N_3P_3$  (Рис.6.1.1.3.6).  $|N_3P_3|$  перпендикулярна плоскости  $\Pi_0$  (принято ранее). Точки  $L_3$  и  $M_3$  лежат на радиусах  $|OI_3|$  и  $|OD|$ , соответственно, каждый из которых лежит в плоскости  $\Pi_0$  (начальное условие). Следовательно, и точки  $L_3$  и  $M_3$  будут лежать в плоскости  $\Pi_0$ , а, следовательно, в соответствии с **П.1.4**  $|L_3M_3|$  лежит в плоскости  $\Pi_0$ . Следовательно, в соответствии со **С.1.6**  $|N_3P_3| \perp |L_3M_3|$ .

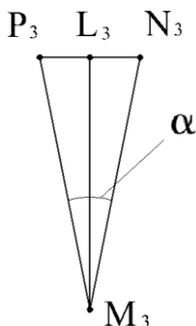


Рис.6.1.1.3.6.

Рассмотрим треугольники  $M_3L_3N_3$  и  $M_3L_3P_3$  (Рис.6.1.1.3.6). Они имеют одну общую сторону  $|L_3M_3|$ . Углы  $L_3M_3N_3$  и  $L_3M_3P_3$ , прилежащие к стороне  $|L_3M_3|$ , равны между собой и равны  $\frac{\alpha}{2}$  (доказано ранее). Углы  $N_3L_3M_3$  и  $P_3L_3M_3$ , прилежащие к стороне  $|L_3M_3|$ , равны между собой и равны  $90^\circ$  (так как  $|N_3P_3| \perp |L_3M_3|$ ). Следовательно, в соответствии с **П.1.8** треугольники  $M_3L_3N_3$  и  $M_3L_3P_3$  равны между собой.

Рассмотрим (Рис.6.1.1.3.6) прямоугольный треугольник  $M_3L_3P_3$  (так как  $|N_3P_3| \perp |L_3M_3|$ , а, следовательно, и  $|L_3P_3| \perp |L_3M_3|$ ), у которого известны катет  $|L_3M_3|$

(найден ранее) и угол  $L_3M_3P_3 = \frac{\alpha}{2}$  (доказано ранее). В соответствии с **П.1.2** найдем катет  $|L_3P_3|$ :

$$\begin{aligned} |L_3P_3| &= |L_3M_3| \times \tan \frac{\alpha}{2} = \\ &= R \times \cos 3\alpha \times \sin 3\alpha \times \tan \frac{\alpha}{2}, \quad (6.1.1.3.3) \end{aligned}$$

Из равенства треугольников  $M_3L_3N_3$  и  $M_3L_3P_3$  следует, что  $|L_3P_3| = |L_3N_3|$ , а, следовательно,  $|N_3P_3|$  будет равна:

$$\begin{aligned} |N_3P_3| &= |L_3P_3| + |L_3N_3| = 2 \times |L_3P_3| = \\ &= 2 \times R \times \cos 3\alpha \times \sin 3\alpha \times \tan \frac{\alpha}{2}, \quad (6.1.1.3.4) \end{aligned}$$

Рассмотрим треугольник  $ON_3P_3$  (Рис.6.1.1.3.7).  $|OL_3|$  лежит в плоскости  $\Pi_0$  (так как  $|OL_3|$  лежит на радиусе  $|OI_3|$ , который лежит в плоскости  $I_0$  (начальное условие)).

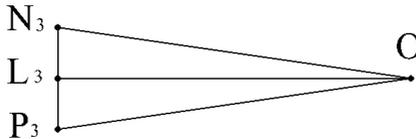


Рис.6.1.1.3.7.

$|N_3P_3|$  перпендикулярна плоскости  $\Pi_0$  (принято ранее), следовательно, в соответствии со **С.1.6**  $|N_3P_3| \perp |OL_3|$ .  $|L_3P_3| = |L_3N_3|$  (доказано ранее). Треугольники  $OL_3N_3$  и  $OL_3P_3$  имеют общую сторону  $|OL_3|$ . Таким образом, у треугольников  $OL_3N_3$  и  $OL_3P_3$  равны две стороны и углы между ними. Следовательно, в соответствии с **П.1.8** треугольники  $OL_3N_3$  и  $OL_3P_3$  равны между собой. Так как  $|N_3P_3| \perp |OL_3|$  (доказано ранее), следовательно, треугольники  $OL_3N_3$  и  $OL_3P_3$  прямоугольные.

Рассмотрим прямоугольный треугольник  $OL_3P_3$  (Рис.6.1.1.3.7). У него известны катеты  $|OL_3|$  и  $|L_3P_3|$  (найжены ранее). Следовательно, в соответствии с **П.1.9** найдем гипотенузу  $|OP_3|$ :

$$\begin{aligned} |OP_3| &= \sqrt{|OL_3|^2 + |L_3P_3|^2} = \\ &= \sqrt{(R \times \cos 3\alpha)^2 + \left(R \times \cos 3\alpha \times \sin 3\alpha \times \tan \frac{\alpha}{2}\right)^2} = \\ &= R \times \cos 3\alpha \times \sqrt{1 + \sin^2 3\alpha \times \tan^2 \frac{\alpha}{2}}, \quad (6.1.1.3.5) \end{aligned}$$

Рассмотрим треугольник  $OJ_3K_3$  (Рис.6.1.1.3.8), который является равнобедренным (доказано ранее).

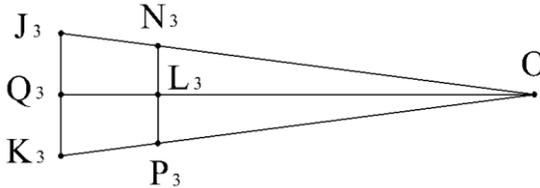


Рис.6.1.1.3.8.

Из равенства треугольников  $OL_3N_3$  и  $OL_3P_3$  (доказано ранее) следует, что  $|ON_3| = |OP_3|$ , то есть, что треугольник  $ON_3P_3$  равнобедренный. Угол  $N_3OP_3$  равен углу  $J_3OK_3$ . Следовательно, в соответствии с **П.1.10** треугольники  $ON_3P_3$  и  $OJ_3K_3$  подобны. Из их подобия согласно **П.1.11** следует:

$$\frac{|OK_3|}{|OP_3|} = \frac{|J_3K_3|}{|N_3P_3|}, \quad (6.1.1.3.6)$$

Откуда найдем  $|J_3K_3|$ :

$$\begin{aligned}
 |J_3K_3| &= \frac{|OK_3| \times |N_3P_3|}{|OP_3|} = \\
 &= \frac{R \times \left(2 \times R \times \cos 3\alpha \times \sin 3\alpha \times \tan \frac{\alpha}{2}\right)}{R \times \cos 3\alpha \times \sqrt{1 + \sin^2 3\alpha \times \tan^2 \frac{\alpha}{2}}} = \\
 &= \frac{2 \times R \times \sin 3\alpha \times \tan \frac{\alpha}{2}}{\sqrt{1 + \sin^2 3\alpha \times \tan^2 \frac{\alpha}{2}}}, \quad (6.1.1.3.7)
 \end{aligned}$$

$|N_3P_3| \perp |OL_3|$ , а  $|L_3P_3| = |L_3N_3|$  (доказано ранее). Следовательно,  $|OL_3|$  является, одновременно, и медианой и биссектрисой и высотой треугольника  $ON_3P_3$ .

Так как  $|OL_3|$  лежит на  $|OQ_3|$ , которая в свою очередь лежит на радиусе  $|OI_3|$ , и что равнобедренный треугольник  $OJ_3K_3$  (доказано ранее) подобен треугольнику  $ON_3P_3$  (доказано ранее), следовательно,  $|OQ_3|$  является, одновременно, и медианой и биссектрисой и высотой треугольника  $OJ_3K_3$ . То есть, что  $|J_3K_3| \perp |OQ_3|$  и  $|J_3Q_3| = |Q_3K_3|$ .  $|J_3K_3|$  лежит в плоскости треугольника  $OJ_3K_3$  (доказано ранее), а  $|N_3P_3|$  также лежит в плоскости треугольника  $OJ_3K_3$  (доказано ранее).  $|J_3K_3| \perp |OQ_3|$  и  $|N_3P_3| \perp |OL_3|$  (доказано ранее). Следовательно, и  $|J_3K_3| \perp |OI_3|$  и  $|N_3P_3| \perp |OQ_3|$  (так как  $|OQ_3|$  лежит на радиусе  $|OI_3|$ , и  $|OL_3|$  лежит на радиусе  $|OI_3|$ ).

Следовательно,  $|N_3P_3| \parallel |J_3K_3|$ . Но так как  $|N_3P_3|$  перпендикулярна плоскости  $\Pi_0$  (принято ранее), следовательно, и  $|J_3K_3|$  будет перпендикулярна плоскости  $\Pi_0$ .

Рассмотрим треугольник  $OJ_3K_3$  (Рис.6.1.1.3.9). Точка  $Q_3$  является точкой пересечения радиуса  $|OI_3|$  и стороны  $|J_3K_3|$  треугольника  $OJ_3K_3$ .

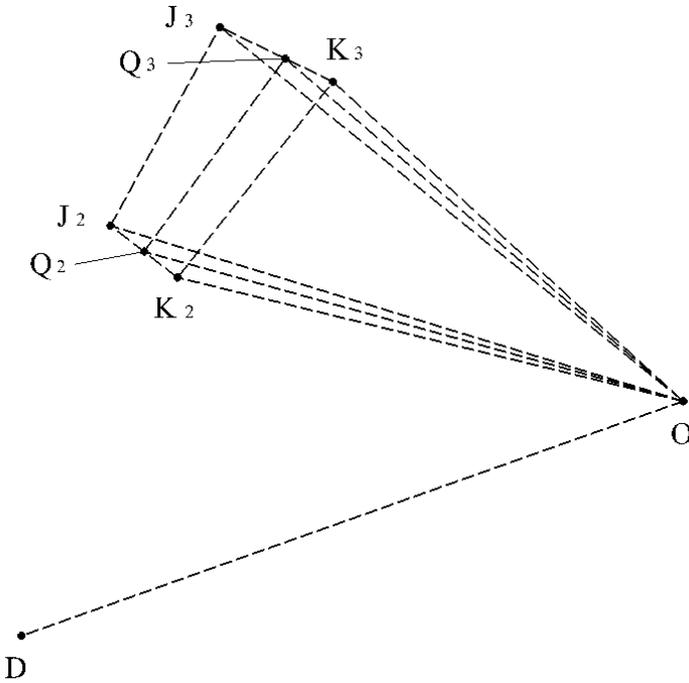


Рис.6.1.1.3.9.

Соединим точки  $Q_2$  и  $Q_3$  между собой. Так как точка  $Q_3$  лежит на радиусе радиуса  $|OI_3|$ , который лежит в плоскости  $\Pi_0$ , следовательно, и точка  $Q_3$  будет лежать в плоскости  $\Pi_0$ . Точка  $Q_2$  лежит в плоскости  $\Pi_0$  (доказано ранее в §6.1.1.2). Таким образом, точки  $Q_2$  и  $Q_3$  лежат в плоскости  $\Pi_0$ , а, следовательно, в соответствии с **П.1.4** и  $|Q_2Q_3|$  будет лежать в плоскости  $\Pi_0$ .  $|OQ_3|$  лежит на радиусе  $|OI_3|$ , который лежит в плоскости  $\Pi_0$ , следовательно, и  $|OQ_3|$  лежит в плоскости  $\Pi_0$ .

$|Q_2Q_3|$  и  $|OQ_3|$  лежат в плоскости  $\Pi_0$  (доказано ранее), а  $|J_3K_3|$  перпендикулярна плоскости  $\Pi_0$  (доказано ранее). Следовательно, в соответствии со **С.1.6**  $|J_3K_3| \perp |Q_2Q_3|$  и  $|J_3K_3| \perp |OQ_3|$ .

Рассмотрим треугольник  $OK_3Q_3$  (Рис.6.1.1.3.8), который является прямоугольным (так как  $|J_3K_3| \perp |OQ_3|$ , следовательно, и  $|Q_3K_3| \perp |OQ_3|$ ), и у которого известна гипотенуза  $|OK_3| = R$  (начальное условие) и катет  $|Q_3K_3| = \frac{1}{2} \times |J_3K_3|$  (так как  $|J_3Q_3| = |Q_3K_3|$ , следовательно,  $|J_3K_3| = |J_3Q_3| + |Q_3K_3|$  (найдено ранее)). Следовательно, в соответствии с **П.1.9** найдем катет  $|OQ_3|$ :

$$\begin{aligned}
 |OQ_3| &= \sqrt{|OK_3|^2 - |Q_3K_3|^2} = \sqrt{|OK_3|^2 - \left(\frac{|J_3K_3|}{2}\right)^2} = \\
 &= \sqrt{R^2 - \left(\frac{2 \times R \times \sin 3\alpha \times \tan \frac{\alpha}{2}}{2 \times \sqrt{1 + \sin^2 3\alpha \times \tan^2 \frac{\alpha}{2}}}\right)^2} = \\
 &= R \times \sqrt{1 - \frac{\sin^2 3\alpha \times \tan^2 \frac{\alpha}{2}}{1 + \sin^2 3\alpha \times \tan^2 \frac{\alpha}{2}}}, \quad (6.1.1.3.8)
 \end{aligned}$$

Рассмотрим треугольник  $OQ_2Q_3$  (Рис.6.1.1.3.10), у которого известны две стороны,  $|OQ_2|$  (найдена ранее в §6.1.1.2) и  $|OQ_3|$  (найдена ранее в данном параграфе) и

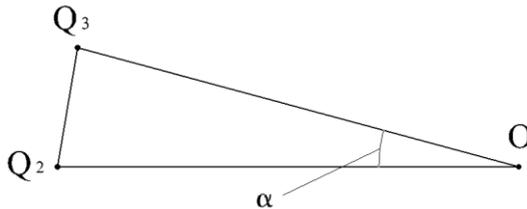


Рис.6.1.1.3.10.

угол между ними  $Q_2OQ_3 = \alpha$  (так как угол  $Q_2OQ_3$  равен разности между углами  $DOI_3 = 3\alpha$  (начальное условие) и  $DOI_2 = 2\alpha$  (начальное условие), в силу того, что  $|OQ_2|$  лежит на радиусе  $|OI_2|$  (доказано ранее), а  $|OQ_3|$  лежит на радиусе  $|OI_3|$  (доказано ранее).

Следовательно, в соответствии с **П.1.12** найдем третью сторону  $|Q_2Q_3|$ :

$$\begin{aligned}
 |Q_2Q_3| &= \sqrt{|OQ_2|^2 + |OQ_3|^2 - 2 \times |OQ_2| \times |OQ_3| \times \cos \alpha} = \\
 &= \sqrt{\left( R \times \sqrt{1 - \frac{\sin^2 2\alpha \times \tan^2 \frac{\alpha}{2}}{1 + \sin^2 2\alpha \times \tan^2 \frac{\alpha}{2}}} \right)^2 + \left( R \times \sqrt{1 - \frac{\sin^2 3\alpha \times \tan^2 \frac{\alpha}{2}}{1 + \sin^2 3\alpha \times \tan^2 \frac{\alpha}{2}}} \right)^2 -} \\
 &\quad - 2 \times \left( R \times \sqrt{1 - \frac{\sin^2 2\alpha \times \tan^2 \frac{\alpha}{2}}{1 + \sin^2 2\alpha \times \tan^2 \frac{\alpha}{2}}} \right) \times \left( R \times \sqrt{1 - \frac{\sin^2 3\alpha \times \tan^2 \frac{\alpha}{2}}{1 + \sin^2 3\alpha \times \tan^2 \frac{\alpha}{2}}} \right) \times \cos \alpha = \\
 &= R \times \sqrt{\left( 1 - \frac{\sin^2 2\alpha \times \tan^2 \frac{\alpha}{2}}{1 + \sin^2 2\alpha \times \tan^2 \frac{\alpha}{2}} \right) + \left( 1 - \frac{\sin^2 3\alpha \times \tan^2 \frac{\alpha}{2}}{1 + \sin^2 3\alpha \times \tan^2 \frac{\alpha}{2}} \right) -} \\
 &\quad - 2 \times \cos \alpha \times \sqrt{1 - \frac{\sin^2 2\alpha \times \tan^2 \frac{\alpha}{2}}{1 + \sin^2 2\alpha \times \tan^2 \frac{\alpha}{2}}} \times \sqrt{1 - \frac{\sin^2 3\alpha \times \tan^2 \frac{\alpha}{2}}{1 + \sin^2 3\alpha \times \tan^2 \frac{\alpha}{2}}}, \quad (6.1.1.3.9)
 \end{aligned}$$

Рассмотрим трапецию  $J_2J_3K_3K_2$  (Рис.6.1.1.3.9), являющуюся основанием пирамиды  $OJ_2J_3K_3K_2$ .  $|J_3K_3| \perp |Q_2Q_3|$  (доказано ранее).

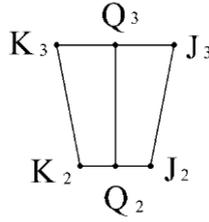


Рис.6.1.1.3.11.

Как было доказано ранее в §6.1.1.2,  $|J_2K_2|$  перпендикулярна плоскости  $\Pi_0$ .  $|Q_2Q_3|$  лежит в плоскости  $\Pi_0$  (доказано ранее), следовательно, в соответствии со **С.1.6**  $|J_2K_2| \perp |Q_2Q_3|$ . Следовательно,  $|Q_2Q_3|$  является высотой трапеции  $J_2J_3K_3K_2$ . Ранее были найдены противоположные стороны данной трапеции  $|J_2K_2|$  (найдена в §6.1.1.2) и  $|J_3K_3|$  (найдена в данном параграфе). Согласно **П.1.14** найдем площадь трапеции  $J_2J_3K_3K_2$ :

$$\begin{aligned}
 S_{J_2J_3K_3K_2} &= \left( \frac{|J_2K_2| + |J_3K_3|}{2} \right) \times |Q_2Q_3| = \\
 &= \frac{1}{2} \times \left( \frac{2 \times R \times \sin 2\alpha \times \tan \frac{\alpha}{2}}{\sqrt{1 + \sin^2 2\alpha \times \tan^2 \frac{\alpha}{2}}} + \frac{2 \times R \times \sin 3\alpha \times \tan \frac{\alpha}{2}}{\sqrt{1 + \sin^2 3\alpha \times \tan^2 \frac{\alpha}{2}}} \right) \times R \times \\
 &\times \sqrt{\left( 1 - \frac{\sin^2 2\alpha \times \tan^2 \frac{\alpha}{2}}{1 + \sin^2 2\alpha \times \tan^2 \frac{\alpha}{2}} \right) + \left( 1 - \frac{\sin^2 3\alpha \times \tan^2 \frac{\alpha}{2}}{1 + \sin^2 3\alpha \times \tan^2 \frac{\alpha}{2}} \right) -} \\
 &- 2 \times \cos \alpha \times \sqrt{1 - \frac{\sin^2 2\alpha \times \tan^2 \frac{\alpha}{2}}{1 + \sin^2 2\alpha \times \tan^2 \frac{\alpha}{2}}} \times \sqrt{1 - \frac{\sin^2 3\alpha \times \tan^2 \frac{\alpha}{2}}{1 + \sin^2 3\alpha \times \tan^2 \frac{\alpha}{2}}} =
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= R^2 \times \left( \frac{\sin 2\alpha \times \tan \frac{\alpha}{2}}{\sqrt{1 + \sin^2 2\alpha \times \tan^2 \frac{\alpha}{2}}} + \frac{\sin 3\alpha \times \tan \frac{\alpha}{2}}{\sqrt{1 + \sin^2 3\alpha \times \tan^2 \frac{\alpha}{2}}} \right) \times \\
&\times \sqrt{\left( 1 - \frac{\sin^2 2\alpha \times \tan^2 \frac{\alpha}{2}}{1 + \sin^2 2\alpha \times \tan^2 \frac{\alpha}{2}} \right) + \left( 1 - \frac{\sin^2 3\alpha \times \tan^2 \frac{\alpha}{2}}{1 + \sin^2 3\alpha \times \tan^2 \frac{\alpha}{2}} \right) -} \\
&\overline{- 2 \times \cos \alpha \times \sqrt{1 - \frac{\sin^2 2\alpha \times \tan^2 \frac{\alpha}{2}}{1 + \sin^2 2\alpha \times \tan^2 \frac{\alpha}{2}}} \times \sqrt{1 - \frac{\sin^2 3\alpha \times \tan^2 \frac{\alpha}{2}}{1 + \sin^2 3\alpha \times \tan^2 \frac{\alpha}{2}}}, (6.1.1.3.10)
\end{aligned}$$

Таким образом, чем меньше будет угол  $\alpha$ , тем меньше площадь трапеции  $J_2J_3K_3K_2$  будет отличаться от площади поверхности сферы, ограниченной дугами  $\widehat{J_2J_3}$ ,  $\widehat{J_3K_3}$ ,  $\widehat{K_3K_2}$  и  $\widehat{K_2J_2}$ .

#### §6.1.1.4. Вычисление площади основания последней пирамиды

Как видно из уравнений (6.1.1.2.10) и (6.1.1.3.10), они отличаются только значением коэффициента перед углом  $\alpha$ .

Уравнения (6.1.1.2.10) и (6.1.1.3.10) можно записать в виде:

$$\begin{aligned}
S_{J_{j-1}J_jK_jK_{j-1}} &= R^2 \times \left( \frac{\sin(i-\alpha) \times \tan \frac{\alpha}{2}}{\sqrt{1 + \sin^2(i-\alpha) \times \tan^2 \frac{\alpha}{2}}} + \frac{\sin i \times \tan \frac{\alpha}{2}}{\sqrt{1 + \sin^2 i \times \tan^2 \frac{\alpha}{2}}} \right) \times \\
&\times \sqrt{\left( 1 - \frac{\sin^2(i-\alpha) \times \tan^2 \frac{\alpha}{2}}{1 + \sin^2(i-\alpha) \times \tan^2 \frac{\alpha}{2}} \right) + \left( 1 - \frac{\sin^2 i \times \tan^2 \frac{\alpha}{2}}{1 + \sin^2 i \times \tan^2 \frac{\alpha}{2}} \right) -}
\end{aligned}$$

$$-2 \times \cos \alpha \times \sqrt{1 - \frac{\sin^2(i - \alpha) \times \tan^2 \frac{\alpha}{2}}{1 + \sin^2(i - \alpha) \times \tan^2 \frac{\alpha}{2}}} \times \sqrt{1 - \frac{\sin^2 i \times \tan^2 \frac{\alpha}{2}}{1 + \sin^2 i \times \tan^2 \frac{\alpha}{2}}}, \quad (6.1.1.4.1)$$

Подставив в уравнение (6.1.1.4.1) вместо  $i$  значение, равное  $2\alpha$  или  $3\alpha$ , а вместо  $j$  значение, равное 2 или 3, получим уравнения (6.1.1.2.10) и (6.1.1.3.10), соответственно.

Все последующие пирамиды при изменении угла  $DOI_i$  от  $DOI_3 = 3\alpha$  до  $DOI_{90-\alpha} = (90 - \alpha)$  будут иметь в основании трапецию, и ее площадь будет вычисляться по формуле (6.1.1.4.1). При этом, вместо  $i$  нужно будет подставить текущее значение угла  $DOI_i$ , а вместо  $j$  поставить текущее значение индекса.

Исключением будет последняя пирамида (Рис.6.1.1.4.1), заключенная между углами  $DOI_{90-\alpha} = (90 - \alpha)$  и  $DOF = 90$ , так как одна сторона основания пирамиды будет найдена иным, по сравнению с предыдущими пирамидами, способом.

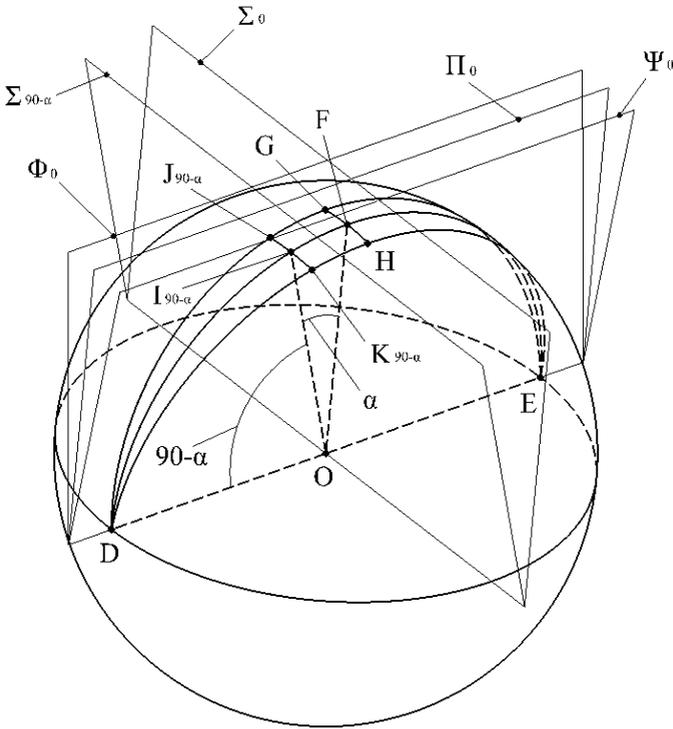


Рис.6.1.1.4.1.

Рассмотрим последнюю пирамиду. Совершив построения, аналогичные тем, что были произведены в §6.1.1.2 и §6.1.1.3, получим сторону основания последней пирамиды  $|J_{90-\alpha}K_{90-\alpha}|$ , которая также будет перпендикулярна плоскости  $\Pi_0$  (так как  $|J_1K_1|$ ,  $|J_2K_2|$  и  $|J_3K_3|$  перпендикулярны плоскости  $\Pi_0$  (доказано ранее)).

Из уравнений (6.1.1.2.7) и (6.1.1.3.7) видно, что они отличаются только значением коэффициента перед углом  $\alpha$ . Следовательно, и  $|J_{90-\alpha}K_{90-\alpha}|$  будет вычислена по той же формуле, подставив значение угла, равное  $(90 - \alpha)$ , то есть:

$$|J_{90-\alpha}K_{90-\alpha}| = \frac{2 \times R \times \sin(90 - \alpha) \times \tan \frac{\alpha}{2}}{\sqrt{1 + \sin^2(90 - \alpha) \times \tan^2 \frac{\alpha}{2}}}, \quad (6.1.1.4.2)$$

Соединив точки  $J_{90-\alpha}$  и  $O$ ,  $K_{90-\alpha}$  и  $O$ ,  $G$  и  $O$ ,  $H$  и  $O$ ,  $J_{90-\alpha}$  и  $G$ ,  $G$  и  $H$ ,  $H$  и  $K_{90-\alpha}$ ,  $K_{90-\alpha}$  и  $J_{90-\alpha}$  (Рис.6.1.1.4.2) между собой, получим пирамиду  $OJ_{90-\alpha}GHK_{90-\alpha}$  с основанием в виде трапеции  $J_{90-\alpha}GHK_{90-\alpha}$  и вершиной в точке  $O$ .

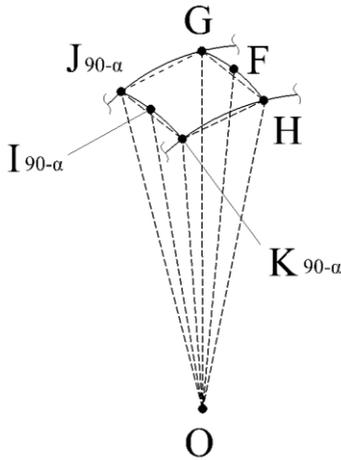


Рис.6.1.1.4.2.

Рассмотрим треугольник  $OGH$ . Точки  $G$  и  $H$  лежат в плоскости  $\Sigma_0$  (начальное условие), следовательно, в соответствии с **П.1.4** и  $|GH|$  будет лежать в плоскости  $\Sigma_0$ .  $|OG|$  и  $|OH|$  лежат в плоскости  $\Sigma_0$  (начальное условие). Следовательно, весь треугольник  $OGH$  лежит в плоскости  $\Sigma_0$ .

$|OG| = |OH| = R$  (начальное условие), следовательно, треугольник  $OGH$  равнобедренный. Угол  $GOH = \alpha$ , а угол  $FOG$  равен углу  $FOH = \frac{\alpha}{2}$  (начальное условие). Радиус  $|OF|$  и сторона  $|GH|$  треугольника  $OGH$  (Рис.6.1.1.4.3)

пересекаются в точке  $Q_{90}$ . Следовательно,  $|OQ_{90}|$  лежит на радиусе  $|OF|$ . Так как треугольник  $OGH$  равнобедренный (доказано ранее), а угол  $FOG$  равен углу  $FOH = \frac{\alpha}{2}$  (начальное условие), и что  $|OQ_{90}|$  лежит на радиусе  $|OF|$  (доказано ранее), следовательно,  $|OQ_{90}|$  является биссектрисой угла  $GOH$ , а в соответствии с **П.1.1**, и медианой и высотой треугольника  $OGH$ . То есть, что  $|GQ_{90}| = |Q_{90}P|$ , а  $|GH| \perp |OQ_{90}|$ .  $|J_{90-\alpha}K_{90-\alpha}|$  пересекает радиус  $|OI_{90-\alpha}|$  в точке  $Q_{90-\alpha}$ .

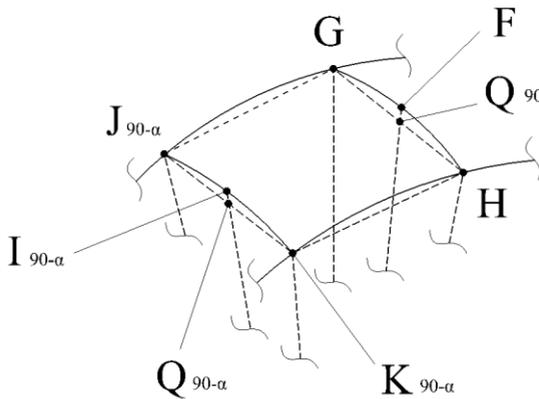


Рис.6.1.1.4.3.

Рассмотрим прямоугольный треугольник  $OGQ_{90}$  (Рис.6.1.1.4.4) (так как  $|GH| \perp |OQ_{90}|$  (доказано ранее), а, следовательно, и  $|GQ_{90}| \perp |OQ_{90}|$ , так как  $|GQ_{90}|$  лежит на  $|GH|$ ), у которого известна гипотенуза  $|OG| = R$  (начальное условие), и прилегающий к ней угол  $Q_{90}OG = \frac{\alpha}{2}$  (так как угол  $Q_{90}OG$  равен углу  $FOG = \frac{\alpha}{2}$  (начальное условие), в силу того что  $|OQ_{90}|$  лежит на радиусе  $|OF|$

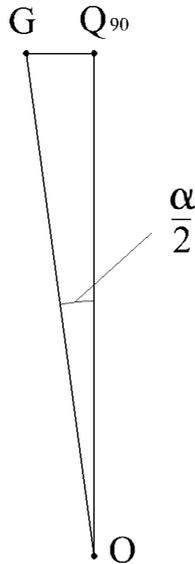


Рис.6.1.1.4.4.

(доказано ранее)). В соответствии с **П.1.2** найдем катеты  $|GQ_{90}|$  и  $|OQ_{90}|$  треугольника  $OGQ_{90}$ :

$$|GQ_{90}| = |OG| \times \sin \frac{\alpha}{2} = R \times \sin \frac{\alpha}{2}, \quad (6.1.1.4.3)$$

$$|OQ_{90}| = |OG| \times \cos \frac{\alpha}{2} = R \times \cos \frac{\alpha}{2}, \quad (6.1.1.4.4)$$

Так как  $|GQ_{90}| = |Q_{90}H|$  (доказано ранее), следовательно, найдем  $|GH|$ :

$$\begin{aligned} |GH| &= |GQ_{90}| + |Q_{90}H| = 2 \times |GQ_{90}| = \\ &= 2 \times R \times \sin \frac{\alpha}{2}, \quad (6.1.1.4.5) \end{aligned}$$

Рассмотрим пирамиду  $OJ_{90-\alpha}GHK_{90-\alpha}$  (6.1.1.4.5) с основанием в виде трапеции  $J_{90-\alpha}GHK_{90-\alpha}$  и вершиной в точке  $O$ . При этом, основание пирамиды  $J_{90-\alpha}GHK_{90-\alpha}$  касается из-

нутри поверхности сферы в четырех точках  $J_{90-\alpha}$ , G, H и  $K_{90-\alpha}$ .

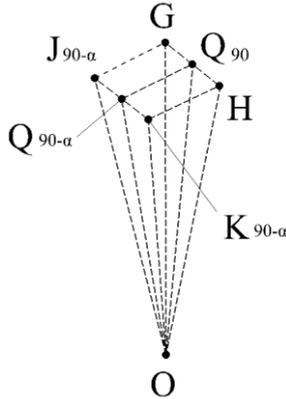


Рис.6.1.1.4.5.

Как видно из формул (6.1.1.2.8) и (6.1.1.3.8) они отличаются только значением коэффициента перед углом  $\alpha$ . Следовательно, и  $|OQ_{90-\alpha}|$  будет вычислена по такой же формуле, подставив значение угла, равное  $(90 - \alpha)$ :

$$|OQ_{90-\alpha}| = R \times \sqrt{1 - \frac{\sin^2(90 - \alpha) \times \tan^2 \frac{\alpha}{2}}{1 + \sin^2(90 - \alpha) \times \tan^2 \frac{\alpha}{2}}}, \quad (6.1.1.4.6)$$

Рассмотрим треугольник  $OQ_{90}Q_{90-\alpha}$  (6.1.1.4.6), у которого известны стороны  $|OQ_{90-\alpha}|$  и  $|OQ_{90}|$  (найжены ранее) и угол между ними  $Q_{90-\alpha}OQ_{90} = \alpha$  (так как  $|OQ_{90-\alpha}|$  лежит на радиусе  $|OI_{90-\alpha}|$ , а  $|OQ_{90}|$  лежит на радиусе  $|OF|$  (доказано ранее), а угол  $Q_{90-\alpha}OQ_{90}$  равен разности между углом  $DOF = 90^\circ$  (начальное условие) и углом  $DOI_{90-\alpha} = 90 - \alpha$  (начальное условие)).

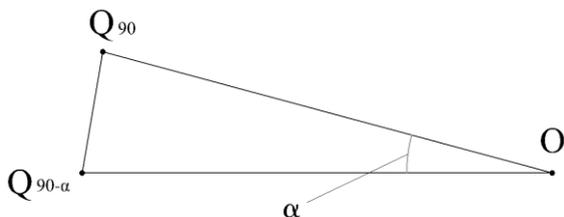


Рис.6.1.1.4.6.

В соответствии с **П.1.12** найдем третью сторону  $|Q_{90}Q_{90-\alpha}|$  треугольника  $OQ_{90}Q_{90-\alpha}$ :

$$\begin{aligned}
 |Q_{90}Q_{90-\alpha}| &= \sqrt{|OQ_{90-\alpha}|^2 + |OQ_{90}|^2 - 2 \times |OQ_{90-\alpha}| \times |OQ_{90}| \times \cos \alpha} = \\
 &= \sqrt{\left( R \times \sqrt{1 - \frac{\sin^2(90 - \alpha) \times \tan^2 \frac{\alpha}{2}}{1 + \sin^2(90 - \alpha) \times \tan^2 \frac{\alpha}{2}}} \right)^2 + \left( R \times \cos \frac{\alpha}{2} \right)^2 -} \\
 &\quad - 2 \times \left( R \times \sqrt{1 - \frac{\sin^2(90 - \alpha) \times \tan^2 \frac{\alpha}{2}}{1 + \sin^2(90 - \alpha) \times \tan^2 \frac{\alpha}{2}}} \right) \times \left( R \times \cos \frac{\alpha}{2} \right) \times \cos \alpha = \\
 &= R \times \sqrt{\left( 1 - \frac{\sin^2(90 - \alpha) \times \tan^2 \frac{\alpha}{2}}{1 + \sin^2(90 - \alpha) \times \tan^2 \frac{\alpha}{2}} \right) + \cos^2 \frac{\alpha}{2} -} \\
 &\quad - 2 \times \cos \alpha \times \cos \frac{\alpha}{2} \times \sqrt{1 - \frac{\sin^2(90 - \alpha) \times \tan^2 \frac{\alpha}{2}}{1 + \sin^2(90 - \alpha) \times \tan^2 \frac{\alpha}{2}}}, \quad (6.1.1.4.7)
 \end{aligned}$$

Рассмотрим трапецию  $J_{90-\alpha}ГНК_{90-\alpha}$  (6.1.1.4.7). Так как было доказано в §6.1.1.2 и §6.1.1.3 для рассмотренных пирамид, и  $|J_{90-\alpha}K_{90-\alpha}|$  также будет перпендикулярна плос-

кости  $\Pi_0$ .  $|GH| \perp |OQ_{90}|$  (доказано ранее), а  $|OQ_{90}|$  лежит в плоскости  $\Pi_0$  (так как  $|OQ_{90}|$  лежит на радиусе  $|OF|$  (доказано ранее), который лежит в плоскости  $\Pi_0$  (начальное условие)), то в соответствии со **С.1.6**  $|GH|$  перпендикулярна плоскости  $\Pi_0$ . Но  $|Q_{90}Q_{90-\alpha}|$  лежит в плоскости  $\Pi_0$  (так как точки  $Q_{90}$  и  $Q_{90-\alpha}$  лежат в плоскости  $\Pi_0$  (так как они лежат на радиусах  $|OF|$  и  $|OI_{90-\alpha}|$ , соответственно, которые лежат в плоскости  $\Pi_0$ ), а, следовательно, в соответствии с **П.1.4** и  $|OQ_{90-\alpha}|$  лежит в плоскости  $\Pi_0$ ). Следовательно, в соответствии со **С.1.6**  $|Q_{90}Q_{90-\alpha}|$  будет перпендикулярна и  $|GH|$  и  $|J_{90-\alpha}K_{90-\alpha}|$ . То есть,  $|Q_{90}Q_{90-\alpha}|$  является высотой трапеции  $J_{90-\alpha}GHK_{90-\alpha}$ .

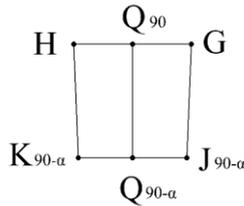


Рис.6.1.1.4.7.

Ранее были найдены противолежащие стороны трапеции  $|J_{90-\alpha}K_{90-\alpha}|$  и  $|GH|$ , и высота трапеции  $|Q_{90}Q_{90-\alpha}|$ . Согласно **П.1.14** найдем площадь трапеции  $J_{90-\alpha}GHK_{90-\alpha}$ :

$$\begin{aligned}
 S_{J_{90-\alpha}GHK_{90-\alpha}} &= \left( \frac{|J_{90-\alpha}K_{90-\alpha}| + |GH|}{2} \right) \times |Q_{90}Q_{90-\alpha}| = \\
 &= \frac{1}{2} \times \left( \frac{2 \times R \times \sin(90 - \alpha) \times \tan \frac{\alpha}{2}}{\sqrt{1 + \sin^2(90 - \alpha) \times \tan^2 \frac{\alpha}{2}}} + 2 \times R \times \sin \frac{\alpha}{2} \right) \times R \times
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times \sqrt{\left(1 - \frac{\sin^2(90 - \alpha) \times \tan^2 \frac{\alpha}{2}}{1 + \sin^2(90 - \alpha) \times \tan^2 \frac{\alpha}{2}}\right) + \cos^2 \frac{\alpha}{2}} - \\
& \frac{- 2 \times \cos \alpha \times \cos \frac{\alpha}{2} \times \sqrt{1 - \frac{\sin^2(90 - \alpha) \times \tan^2 \frac{\alpha}{2}}{1 + \sin^2(90 - \alpha) \times \tan^2 \frac{\alpha}{2}}}}{= R^2 \times \left(\frac{\sin(90 - \alpha) \times \tan \frac{\alpha}{2}}{\sqrt{1 + \sin^2(90 - \alpha) \times \tan^2 \frac{\alpha}{2}}} + \sin \frac{\alpha}{2}\right) \times} \\
& \times \sqrt{\left(1 - \frac{\sin^2(90 - \alpha) \times \tan^2 \frac{\alpha}{2}}{1 + \sin^2(90 - \alpha) \times \tan^2 \frac{\alpha}{2}}\right) + \cos^2 \frac{\alpha}{2}} - \\
& \frac{- 2 \times \cos \alpha \times \cos \frac{\alpha}{2} \times \sqrt{1 - \frac{\sin^2(90 - \alpha) \times \tan^2 \frac{\alpha}{2}}{1 + \sin^2(90 - \alpha) \times \tan^2 \frac{\alpha}{2}}}}{(6.1.1.4.8)
\end{aligned}$$

Таким образом, чем меньше будет угол  $\alpha$ , тем меньше площадь трапеции  $J_{90-\alpha} \widehat{G} \widehat{H} K_{90-\alpha}$  будет отличаться от площади поверхности сферы, ограниченной дугами  $J_{90-\alpha} \widehat{G}$ ,  $\widehat{G} \widehat{H}$ ,  $\widehat{H} K_{90-\alpha}$  и  $K_{90-\alpha} \widehat{J}_{90-\alpha}$ .

### §6.1.1.5. Вычисление площади поверхности всей сферы

Для того, чтобы вычислить площадь поверхности сферы, ограниченной дугами окружностей,  $\widehat{DG}$ ,  $\widehat{GH}$ , и  $\widehat{HD}$ , необходимо суммировать уравнения (6.1.1.1.10), (6.1.1.2.10) (предварительно представив его в виде суммы площадей оснований пирамид, начиная со второй и заканчивая предпоследней) и (6.1.1.4.8) (Рис.6.1.1.5.1).

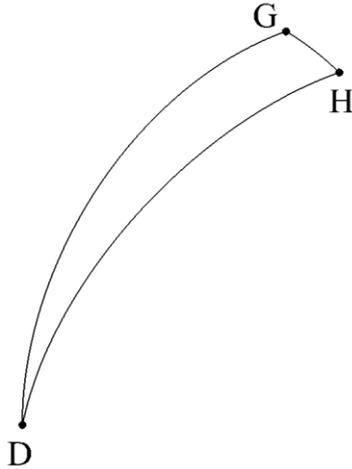


Рис.6.1.1.5.1.

На самом деле будет вычислена не площадь фрагмента сферической поверхности, а площадь фрагмента вписанной в сферу изнутри многогранной поверхности (Рис.6.1.1.5.2), так как вычислять площади криволинейных поверхностей мы не умеем.

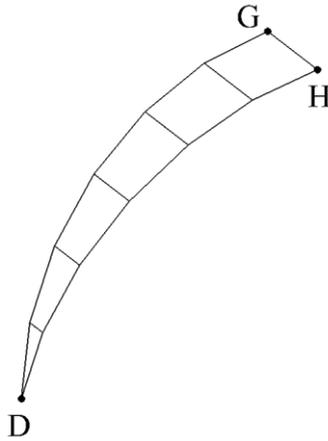


Рис.6.1.1.5.2.

Умножив полученное значение на два (так как плоскость  $\Sigma_0$  делит фрагмент сферической поверхности, ограниченный дугами окружностей  $\widehat{DGE}$  и  $\widehat{DHE}$ , на две равные части), получим площадь поверхности сферы, ограниченной дугами окружностей  $\widehat{DGE}$  и  $\widehat{DHE}$  (Рис.6.1.1.5.3).

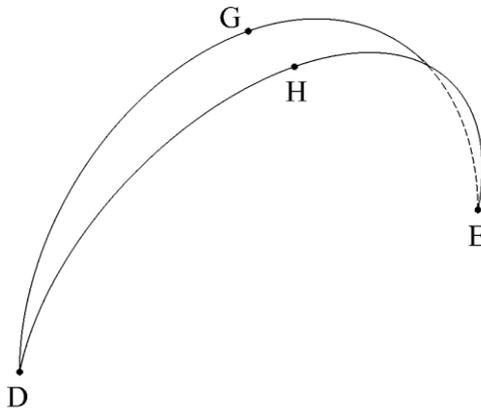


Рис.6.1.1.5.3.

На самом деле будет вычислена не площадь фрагмента сферической поверхности, а площадь фрагмента вписанной в сферу изнутри многогранной поверхности (Рис.6.1.1.5.4), так как вычислять площади криволинейных поверхностей мы не умеем.

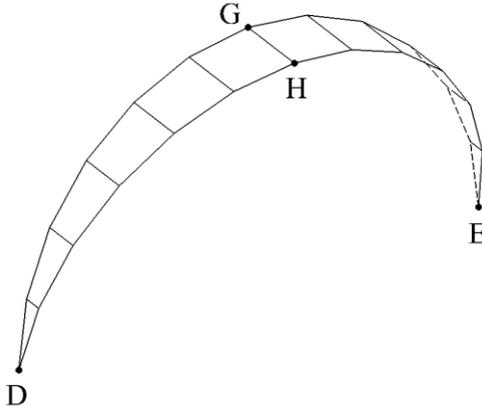


Рис.6.1.1.5.4.

А умножив это значение на число таких участков, укладываемых на поверхности всей сферы, то есть, на  $\frac{360}{\alpha}$ , получим площадь поверхности всей сферы  $S_{\text{пов.сф.в}}$  (Рис.6.1.1.5.5):

$$S_{\text{пов.сф.в}} = \left( \frac{\left( R^2 \times \sin \alpha \times \tan \frac{\alpha}{2} \times \sqrt{2 - \frac{\sin^2 \alpha \times \tan^2 \frac{\alpha}{2}}{1 + \sin^2 \alpha \times \tan^2 \frac{\alpha}{2}} - 2 \times \cos \alpha \times \sqrt{1 - \frac{\sin^2 \alpha \times \tan^2 \frac{\alpha}{2}}{1 + \sin^2 \alpha \times \tan^2 \frac{\alpha}{2}}}} \right)}{\sqrt{1 + \sin^2 \alpha \times \tan^2 \frac{\alpha}{2}}} \right) +$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{i=2\alpha}^{i=\frac{90}{\alpha}-\alpha} \left( R^2 \times \left( \frac{\sin(i-\alpha) \times \tan \frac{\alpha}{2}}{\sqrt{1 + \sin^2(i-\alpha) \times \tan^2 \frac{\alpha}{2}}} + \frac{\sin i \times \tan \frac{\alpha}{2}}{\sqrt{1 + \sin^2 i \times \tan^2 \frac{\alpha}{2}}} \right) \times \right. \\
& \times \sqrt{\left( 1 - \frac{\sin^2(i-\alpha) \times \tan^2 \frac{\alpha}{2}}{1 + \sin^2(i-\alpha) \times \tan^2 \frac{\alpha}{2}} \right) + \left( 1 - \frac{\sin^2 i \times \tan^2 \frac{\alpha}{2}}{1 + \sin^2 i \times \tan^2 \frac{\alpha}{2}} \right) -} \\
& \left. - 2 \times \cos \alpha \times \sqrt{1 - \frac{\sin^2(i-\alpha) \times \tan^2 \frac{\alpha}{2}}{1 + \sin^2(i-\alpha) \times \tan^2 \frac{\alpha}{2}}} \times \sqrt{1 - \frac{\sin^2 i \times \tan^2 \frac{\alpha}{2}}{1 + \sin^2 i \times \tan^2 \frac{\alpha}{2}}} \right) + \\
& + R^2 \times \left( \frac{\sin(90-\alpha) \times \tan \frac{\alpha}{2}}{\sqrt{1 + \sin^2(90-\alpha) \times \tan^2 \frac{\alpha}{2}}} + \sin \frac{\alpha}{2} \right) \times \\
& \times \sqrt{\left( 1 - \frac{\sin^2(90-\alpha) \times \tan^2 \frac{\alpha}{2}}{1 + \sin^2(90-\alpha) \times \tan^2 \frac{\alpha}{2}} \right) + \cos^2 \frac{\alpha}{2} -} \\
& \left. - 2 \times \cos \alpha \times \cos \frac{\alpha}{2} \times \sqrt{1 - \frac{\sin^2(90-\alpha) \times \tan^2 \frac{\alpha}{2}}{1 + \sin^2(90-\alpha) \times \tan^2 \frac{\alpha}{2}}} \right) \times 2 \times \frac{360}{\alpha} = \\
& = 4 \times R^2 \times \pi_{\text{пл.пов.сф.в}}, (6.1.1.5.1)
\end{aligned}$$

Где,

$\pi_{\text{пл.пов.сф.в}}$  – коэффициент, стоящий в формуле для вычисления площади поверхности сферы.

$$\pi_{\text{пл.пов.сф.в}} = \left( \frac{\left( \sin \alpha \times \tan \frac{\alpha}{2} \times \sqrt{2 - \frac{\sin^2 \alpha \times \tan^2 \frac{\alpha}{2}}{1 + \sin^2 \alpha \times \tan^2 \frac{\alpha}{2}} - 2 \times \cos \alpha \times \sqrt{1 - \frac{\sin^2 \alpha \times \tan^2 \frac{\alpha}{2}}{1 + \sin^2 \alpha \times \tan^2 \frac{\alpha}{2}}}}{\sqrt{1 + \sin^2 \alpha \times \tan^2 \frac{\alpha}{2}}} \right) + \right. \\ \left. + \sum_{i=2\alpha}^{i=\frac{90}{\alpha}-\alpha} \left( \left( \frac{\sin(i-\alpha) \times \tan \frac{\alpha}{2}}{\sqrt{1 + \sin^2(i-\alpha) \times \tan^2 \frac{\alpha}{2}}} + \frac{\sin i \times \tan \frac{\alpha}{2}}{\sqrt{1 + \sin^2 i \times \tan^2 \frac{\alpha}{2}}} \right) \times \right. \\ \left. \times \sqrt{\left( 1 - \frac{\sin^2(i-\alpha) \times \tan^2 \frac{\alpha}{2}}{1 + \sin^2(i-\alpha) \times \tan^2 \frac{\alpha}{2}} \right) + \left( 1 - \frac{\sin^2 i \times \tan^2 \frac{\alpha}{2}}{1 + \sin^2 i \times \tan^2 \frac{\alpha}{2}} \right) -} \right. \\ \left. - 2 \times \cos \alpha \times \sqrt{1 - \frac{\sin^2(i-\alpha) \times \tan^2 \frac{\alpha}{2}}{1 + \sin^2(i-\alpha) \times \tan^2 \frac{\alpha}{2}}} \times \sqrt{1 - \frac{\sin^2 i \times \tan^2 \frac{\alpha}{2}}{1 + \sin^2 i \times \tan^2 \frac{\alpha}{2}}} \right) + \\ \left. + \left( \frac{\sin(90-\alpha) \times \tan \frac{\alpha}{2}}{\sqrt{1 + \sin^2(90-\alpha) \times \tan^2 \frac{\alpha}{2}}} + \sin \frac{\alpha}{2} \right) \times \right. \\ \left. \times \sqrt{\left( 1 - \frac{\sin^2(90-\alpha) \times \tan^2 \frac{\alpha}{2}}{1 + \sin^2(90-\alpha) \times \tan^2 \frac{\alpha}{2}} \right) + \cos^2 \frac{\alpha}{2} -} \right.$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{-----} \\ - 2 \times \cos \alpha \times \cos \frac{\alpha}{2} \times \sqrt{1 - \frac{\sin^2(90 - \alpha) \times \tan^2 \frac{\alpha}{2}}{1 + \sin^2(90 - \alpha) \times \tan^2 \frac{\alpha}{2}}} \times \frac{180}{\alpha}, (6.1.1.5.2) \end{array} \right\}$$

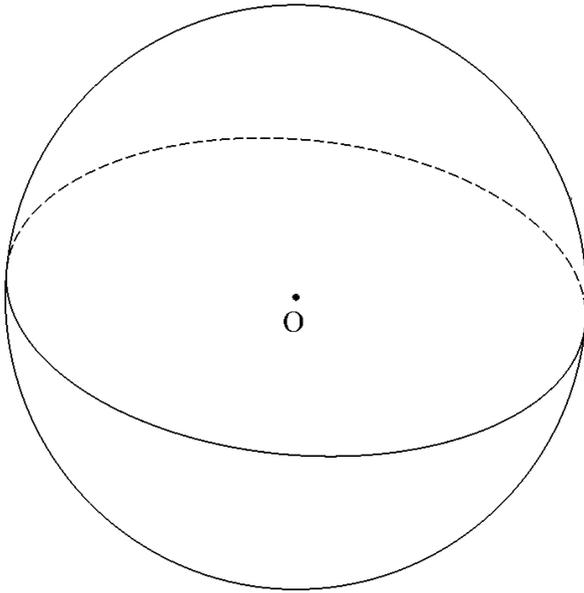


Рис.6.1.1.5.5.

По формуле (6.1.1.5.1) вычисляется, на самом деле, не площадь поверхности сферы (Рис.6.1.1.5.5), а площадь поверхности вписанного в сферу изнутри сферообразного многогранника (Рис.6.1.1.5.6), так как вычислять площади криволинейных поверхностей мы не умеем.

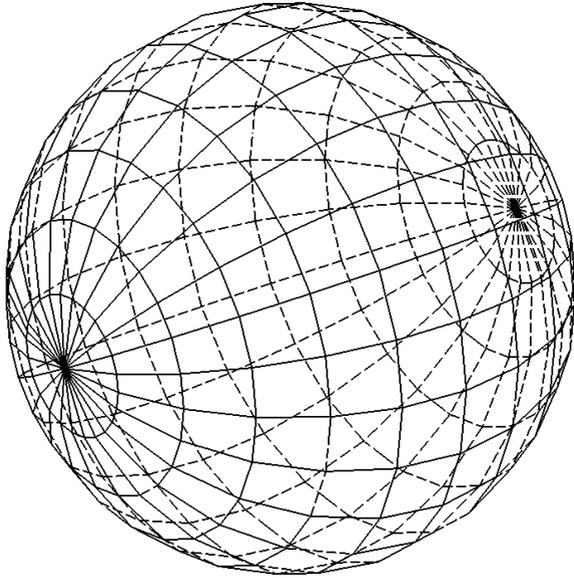


Рис.6.1.1.5.6.

## §6.1.2.Метод описанного многогранника

### §6.1.2.1. Вычисление площади основания первой пирамиды

На Рис.6.1.2.1.1 показан шар с центром в точке  $O$ , диаметром  $|DE|$  и радиусом  $|OD| = R$ .

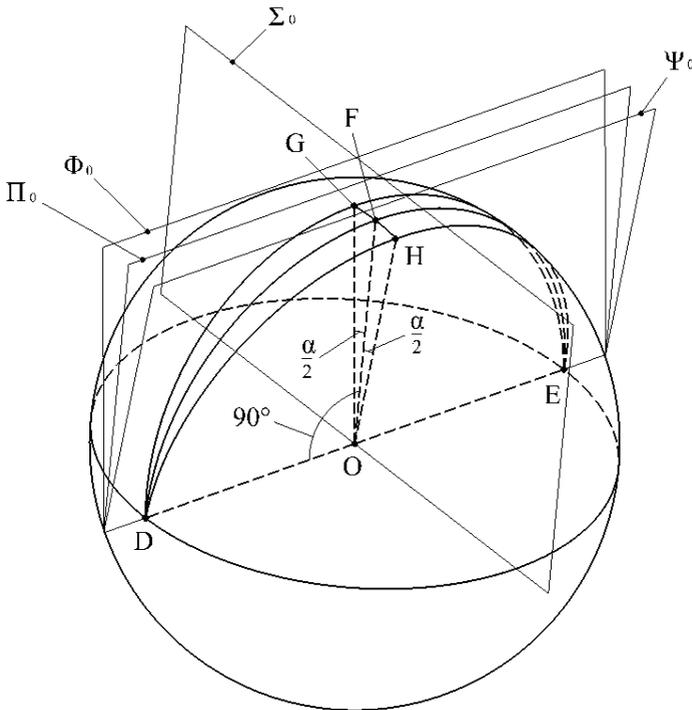


Рис.6.1.2.1.1.

Радиус  $|OD|$  лежит на диаметре  $|DE|$ . Проведем из центра шара  $O$  радиус  $|OF|$ , перпендикулярный диаметру  $|DE|$ , а, следовательно, и радиусу  $|OD|$ . Через диаметр  $|DE|$  и радиус  $|OF|$  проведем плоскость  $\Pi_0$ . Плоскость

$\Pi_0$  пересекает поверхность сферы (шара) по дуге окружности  $\overline{DFE}$ . Проведем через радиус  $|OF|$  плоскость  $\Sigma_0$ , перпендикулярную диаметру  $|DE|$ , а так как диаметр  $|DE|$  лежит в плоскости  $\Pi_0$ , то в соответствии с **П.1.5** плоскость  $\Sigma_0$  будет перпендикулярна плоскости  $\Pi_0$ .

Проведем из центра шара точки  $O$  радиус  $|OG|$  (Рис.6.1.2.1.1) так, чтобы он лежал в плоскости  $\Sigma_0$ . При этом радиус  $|OG|$  составляет с радиусом  $|OF|$  (так как  $|OF|$  также лежит в плоскости  $\Sigma_0$ ) угол  $FOG = \frac{\alpha}{2}$ . Проведем через радиус  $|OG|$  и диаметр  $|DE|$  плоскость  $\Phi_0$ . Плоскость  $\Phi_0$  пересекает поверхность сферы (шара) по дуге окружности  $\overline{DGE}$ .

Проведем из центра шара точки  $O$  радиус  $|OH|$  (Рис.6.1.2.1.1) так, чтобы он лежал в плоскости  $\Sigma_0$  и составлял с радиусом  $|OF|$  угол  $FOH = \frac{\alpha}{2}$ , а с радиусом  $|OG|$ , соответственно, угол  $GOH = \alpha$ . Проведем через радиус  $|OH|$  и диаметр  $|DE|$  плоскость  $\Psi_0$ . Плоскость  $\Psi_0$  пересекает поверхность сферы (шара) по дуге окружности  $\overline{DHE}$ .

Диаметр  $|DE|$  является линией пересечения плоскостей  $\Pi_0$ ,  $\Phi_0$  и  $\Psi_0$ . Радиус  $|OF|$  лежит в плоскости  $\Sigma_0$  и  $|OF| \perp |DE|$  (начальное условие). Так как  $|DE|$  перпендикулярен плоскости  $\Sigma_0$ , а  $|OG|$  и  $|OH|$  лежат в плоскости  $\Sigma_0$  (принято ранее), то в соответствии со **С.1.6**  $|DE| \perp |OG|$  и  $|DE| \perp |OH|$ . Вместе с тем радиус  $|OF|$  лежит в плоскости  $\Pi_0$ , радиус  $|OG|$  лежит в плоскости  $\Phi_0$ , а радиус  $|OH|$  лежит в плоскости  $\Psi_0$  (принято ранее). Следовательно, в соответствии с **П.1.7** угол  $FOG = \frac{\alpha}{2}$  является углом между плоскостями  $\Pi_0$  и  $\Phi_0$ , угол  $FOH = \frac{\alpha}{2}$  является углом между плоскостями  $\Pi_0$  и  $\Psi_0$ , а угол  $GOH = \alpha$  является углом между плоскостями  $\Phi_0$  и  $\Psi_0$ .

Плоскость  $\Sigma_0$  пересекает поверхность сферы (шара), заключенную между плоскостями  $\Phi_0$  и  $\Psi_0$ , по дуге окружности  $\widehat{GFH}$ .

Проведем из центра шара точки  $O$  радиус  $|OI_1| = R$  (Рис.6.1.2.1.2) так, чтобы он лежал в плоскости  $\Pi_0$  и составлял с радиусом  $|OD|$  угол  $\alpha$  (то есть, угол  $DOI_1 = \alpha$ ). Проведем из центра шара точки  $O$  радиус  $|OI_{0,1}| = R$  так, чтобы он лежал в плоскости  $\Pi_0$  и составлял с радиусом  $|OD|$  и с радиусом  $|OI_1|$  угол  $\frac{\alpha}{2}$  (то есть, угол  $DOI_{0,1} = \frac{\alpha}{2}$  и угол  $I_{0,1}OI_1 = \frac{\alpha}{2}$ ).

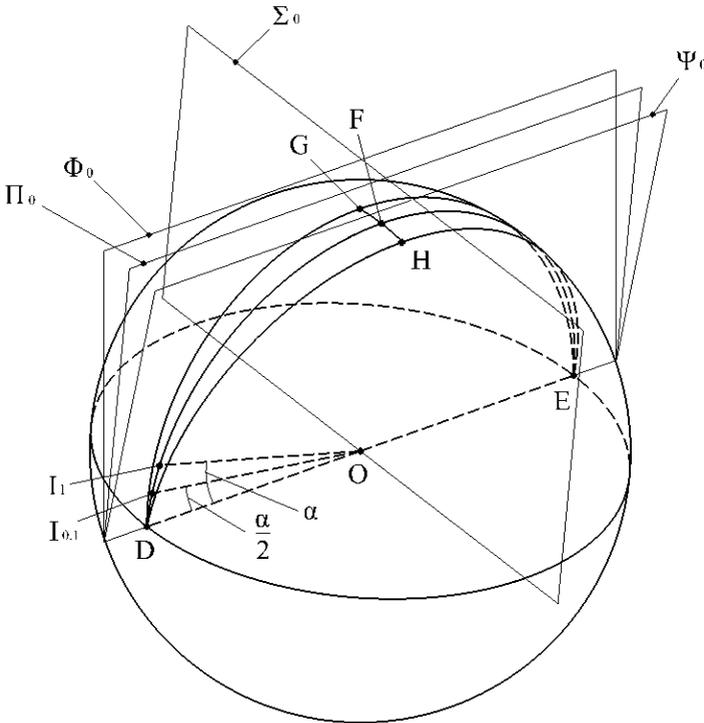


Рис.6.1.2.1.2.

В плоскости  $\Pi_0$  через точку  $I_{0,1}$  (Рис.6.1.2.1.3) проведем прямую линию, касательную к дуге окружности  $\widehat{DF}$ , а, следовательно, перпендикулярную к радиусу  $|OI_{0,1}| = R$ .

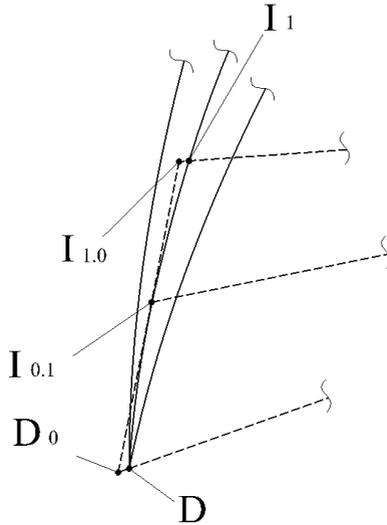


Рис.6.1.2.1.3.

В плоскости  $\Pi_0$  из точки  $O$  проведем прямую линию до ее пересечения с вышеуказанной касательной к дуге окружности  $\widehat{DF}$  в точке  $I_{1,0}$ , при этом, данная прямая линия  $|OI_{1,0}|$  по направлению совпадает с направлением радиуса  $|OI_1|$  (то есть, данная прямая линия  $|OI_{1,0}|$  пересекает дугу окружности  $\widehat{DF}$  в точке  $I_1$ ). Таким образом, прямая линия  $|OI_{1,0}|$  лежит в плоскости  $\Pi_0$ . Проведем из точки  $O$  прямую линию до ее пересечения с вышеуказанной касательной к дуге окружности  $\widehat{DF}$  в точке  $D_0$ , при этом, данная прямая линия  $|D_0I_{1,0}|$  по направлению совпадает с направлением радиуса  $|OD|$  (то есть, данная прямая линия  $|D_0I_{1,0}|$  пересекает дугу окружности  $\widehat{DF}$  в точке  $D$ ). Таким образом, прямая линия  $|D_0I_{1,0}|$  лежит в плоскости  $\Pi_0$ .



Так как  $|D_0I_{0,1}| = |I_{0,1}I_{1,0}|$  (доказано ранее), то сторона  $|D_0I_{1,0}|$  треугольника  $OD_0I_{1,0}$  будет равна:

$$\begin{aligned} |D_0I_{1,0}| &= |D_0I_{0,1}| + |I_{0,1}I_{1,0}| = 2 \times |I_{0,1}I_{1,0}| = \\ &= 2 \times R \times \tan \frac{\alpha}{2}, \quad (6.1.2.1.3) \end{aligned}$$

Из точки  $I_{1,0}$  (Рис.6.1.2.1.5) проведем прямую линию, перпендикулярную плоскости  $\Pi_0$ , до ее пересечения с плоскостью  $\Phi_0$  в точке  $J_{1,0}$ , и до ее пересечения с плоскостью  $\Psi_0$  в точке  $K_{1,0}$ . Таким образом, мы получили прямую линию  $|J_{1,0}K_{1,0}|$ , перпендикулярную плоскости  $\Pi_0$ . Соединив точки  $D_0$  и  $J_{1,0}$ ,  $D_0$  и  $K_{1,0}$  между собой, получим треугольник  $D_0J_{1,0}K_{1,0}$ . Точка  $I_{1,0}$  лежит на радиусе  $|OI_1|$  (принято ранее), который лежит в плоскости  $\Pi_0$ .  $|J_{1,0}K_{1,0}|$  перпендикулярна плоскости  $\Pi_0$  (принято ранее), следовательно, в соответствии со **С.1.5** плоскость треугольника  $D_0J_{1,0}K_{1,0}$  перпендикулярна плоскости  $\Pi_0$ .

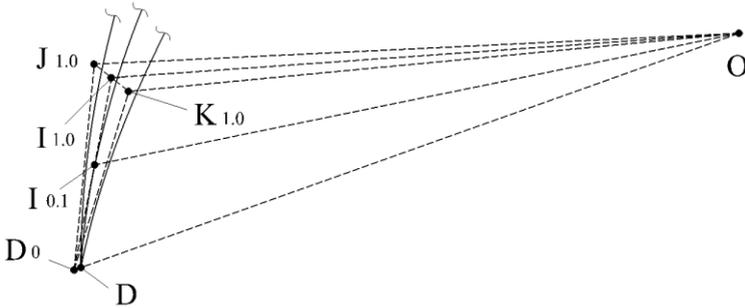


Рис.6.1.2.1.5.

Соединив точки  $O$  и  $J_{1,0}$ ,  $O$  и  $K_{1,0}$  между собой, получим пирамиду  $OD_0J_{1,0}K_{1,0}$  с основанием в виде треугольника  $D_0J_{1,0}K_{1,0}$  и вершиной в точке  $O$ . При этом, основание пирамиды  $D_0J_{1,0}K_{1,0}$  касается извне поверхности сферы в одной точке  $I_{0,1}$ .

Плоскость треугольника  $D_0J_{1.0}K_{1.0}$  перпендикулярна плоскости  $\Pi_0$  (доказано ранее). Треугольник  $OD_0I_{1.0}$  лежит в плоскости  $\Pi_0$  (так как точки  $O$ ,  $D_0$  и  $I_{1.0}$  лежат в плоскости  $\Pi_0$ ). Следовательно, плоскость треугольника  $OD_0I_{1.0}$  перпендикулярна плоскости треугольника  $D_0J_{1.0}K_{1.0}$ , а прямая линия  $|D_0I_{1.0}|$  является линией пересечения плоскостей треугольников  $OD_0I_{1.0}$  и  $D_0J_{1.0}K_{1.0}$ .  $|D_0I_{1.0}| \perp |OI_{0.1}|$  (принято ранее), следовательно, радиус  $|OI_{0.1}|$  перпендикулярен плоскости треугольника  $D_0J_{1.0}K_{1.0}$  (основанию пирамиды), а, следовательно, радиус  $|OI_{0.1}|$  является высотой пирамиды  $OD_0J_{1.0}K_{1.0}$ .

Плоскость треугольника  $OJ_{1.0}K_{1.0}$  (Рис.6.1.2.1.6) пересекает поверхность сферы по дуге окружности  $\widehat{J_1K_1}$ .

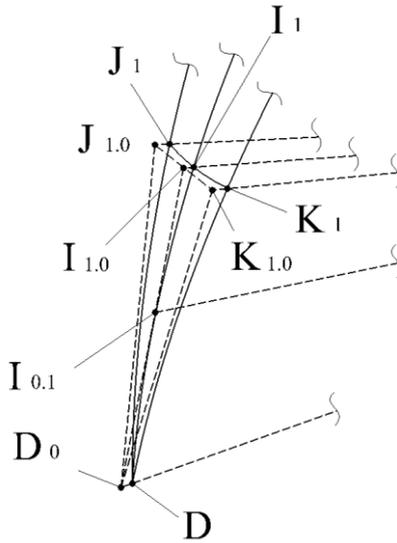


Рис.6.1.2.1.6.

Из точки  $I_{1.0}$  (Рис.6.1.2.1.7) опустим перпендикуляр  $|I_{1.0}M_1|$  на радиус  $|OD|$ . Соединив точки  $J_{1.0}$  и  $M_1$ ,  $K_{1.0}$  и  $M_1$  между собой, получим треугольник  $M_1J_{1.0}K_{1.0}$ .  $|J_{1.0}K_{1.0}|$

перпендикулярна плоскости  $\Pi_0$  (принято ранее), следовательно, плоскость треугольника  $M_1J_{1.0}K_{1.0}$  перпендикулярна плоскости  $\Pi_0$ . А, следовательно, в соответствии с **П.1.7** угол  $J_{1.0}M_1K_{1.0}$  является углом между плоскостями  $\Phi_0$  и  $\Psi_0$  и равен  $\alpha$ , угол  $J_{1.0}M_1I_{1.0}$  является углом между плоскостями  $\Phi_0$  и  $\Pi_0$  и равен  $\frac{\alpha}{2}$ , угол  $K_{1.0}M_1I_{1.0}$  является углом между плоскостями  $\Pi_0$  и  $\Psi_0$  и равен  $\frac{\alpha}{2}$ .

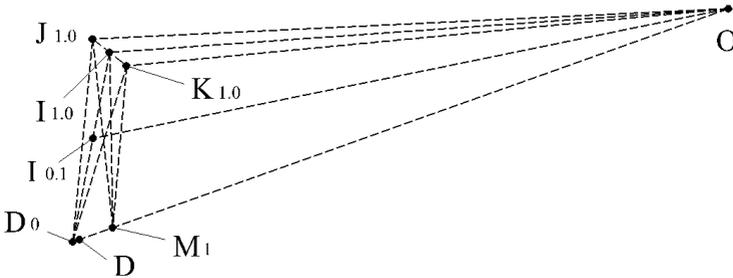


Рис.6.1.2.1.7.

Рассмотрим прямоугольный треугольник  $OM_1I_{1.0}$  (Рис.6.1.2.1.7), у которого известна гипотенуза  $|OI_{1.0}|$  (найдена ранее) и прилежащий к ней угол  $I_{1.0}OM_1 = \alpha$  (начальное условие, так как точка  $M_1$  лежит на радиусе  $|OD|$ ). Согласно **П.1.2** найдем катет  $|I_{1.0}M_1|$ :

$$|I_{1.0}M_1| = |OI_{1.0}| \times \sin \alpha = \frac{R \times \sin \alpha}{\cos \frac{\alpha}{2}}, \quad (6.1.2.1.4)$$

Рассмотрим треугольник  $M_1J_{1.0}K_{1.0}$  (Рис.6.1.2.1.8).  $|J_{1.0}K_{1.0}|$  перпендикулярна плоскости  $\Pi_0$  (принято ранее). Точки  $I_{1.0}$  и  $M_1$  лежат, соответственно, на радиусах  $|OI_1|$  и  $|OD|$ , каждый из которых лежит в плоскости  $\Pi_0$  (начальное условие). Следовательно, и точки  $I_{1.0}$  и  $M_1$  будут ле-

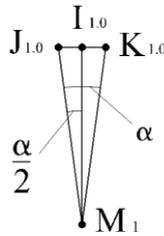


Рис. 6.1.2.1.8.

жать в плоскости  $\Pi_0$ , а, следовательно, в соответствии с **П.1.4** и  $|I_{1.0}M_1|$  лежит в плоскости  $\Pi_0$ . Следовательно, в соответствии со **С.1.5**  $|J_{1.0}K_{1.0}| \perp |I_{1.0}M_1|$ .

Рассмотрим треугольники  $M_1I_{1.0}J_{1.0}$  и  $M_1I_{1.0}K_{1.0}$  (Рис.6.1.2.1.8). Они имеют одну общую сторону  $|I_{1.0}M_1|$ . Углы  $J_{1.0}M_1I_{1.0}$  и  $K_{1.0}M_1I_{1.0}$ , прилежащие к стороне  $|I_{1.0}M_1|$ , равны между собой и равны  $\frac{\alpha}{2}$  (доказано ранее). Углы  $J_{1.0}I_{1.0}M_1$  и  $K_{1.0}I_{1.0}M_1$ , прилежащие к стороне  $|I_{1.0}M_1|$ , равны между собой и равны  $90^\circ$  (так как  $|J_{1.0}K_{1.0}| \perp |I_{1.0}M_1|$ ). Следовательно, в соответствии с **П.1.8** треугольники  $M_1I_{1.0}J_{1.0}$  и  $M_1I_{1.0}K_{1.0}$  равны между собой.

Рассмотрим прямоугольный треугольник  $M_1I_{1.0}J_{1.0}$  (Рис.6.1.2.1.8), у которого известен катет  $|I_{1.0}M_1|$  и прилежающий к нему угол  $J_{1.0}M_1I_{1.0} = \frac{\alpha}{2}$  (доказано ранее). В соответствии с **П.1.2** найдем катет  $|J_{1.0}I_{1.0}|$ :

$$|J_{1.0}I_{1.0}| = |I_{1.0}M_1| \times \tan \frac{\alpha}{2} = \frac{R \times \sin \alpha}{\cos \frac{\alpha}{2}} \times \tan \frac{\alpha}{2}, \quad (6.1.2.1.5)$$

Из равенства треугольников  $M_1I_{1.0}J_{1.0}$  и  $M_1I_{1.0}K_{1.0}$  следует, что  $|J_{1.0}I_{1.0}| = |I_{1.0}K_{1.0}|$ , а, следовательно,  $|J_{1.0}K_{1.0}|$  будет равна:

$$\begin{aligned}
 |J_{1.0}K_{1.0}| &= |J_{1.0}I_{1.0}| + |I_{1.0}K_{1.0}| = 2 \times |J_{1.0}I_{1.0}| = \\
 &= 2 \times \frac{R \times \sin \alpha}{\cos \frac{\alpha}{2}} \times \tan \frac{\alpha}{2}, \quad (6.1.2.1.6)
 \end{aligned}$$

Рассмотрим треугольник  $D_0J_{1.0}K_{1.0}$  (Рис.6.1.2.1.9).  $|J_{1.0}K_{1.0}|$  перпендикулярна плоскости  $\Pi_0$  (принято ранее).  $|D_0I_{1.0}|$  лежит в плоскости  $\Pi_0$  (доказано ранее). Следовательно, в соответствии со **С.1.6**  $|J_{1.0}K_{1.0}| \perp |D_0I_{1.0}|$ .  $|J_{1.0}I_{1.0}| = |I_{1.0}K_{1.0}|$  (доказано ранее). А, следовательно,  $|D_0I_{1.0}|$  является высотой треугольника  $D_0J_{1.0}K_{1.0}$ , у которого известны высота  $|D_0I_{1.0}|$  и сторона  $|J_{1.0}K_{1.0}|$  (найде-ны ранее).

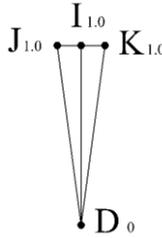


Рис.6.1.2.1.9.

Согласно **П.1.3** найдем площадь треугольника  $D_0J_{1.0}K_{1.0}$  (который является основанием пирамиды  $OD_0J_{1.0}K_{1.0}$ ):

$$\begin{aligned}
 S_{D_0J_{1.0}K_{1.0}} &= \frac{1}{2} \times |J_{1.0}K_{1.0}| \times |D_0I_{1.0}| = \\
 &= \frac{1}{2} \times \left( 2 \times \frac{R \times \sin \alpha}{\cos \frac{\alpha}{2}} \times \tan \frac{\alpha}{2} \right) \times \\
 &\times \left( 2 \times R \times \tan \frac{\alpha}{2} \right) =
 \end{aligned}$$

$$= 2 \times R^2 \times \frac{\sin \alpha \times \tan^2 \frac{\alpha}{2}}{\cos \frac{\alpha}{2}}, \quad (6.1.2.1.7)$$

Таким образом, чем меньше будет угол  $\alpha$ , тем меньше площадь треугольника  $D_0J_{1,0}K_{1,0}$  будет отличаться от площади поверхности сферы, ограниченной дугами окружностей  $\widehat{DJ_1}$ ,  $\widehat{J_1K_1}$  и  $\widehat{K_1D}$  (Рис.6.1.2.1.6).

### §6.1.2.2. Вычисление площади основания второй пирамиды

На Рис.6.1.2.2.1 показан шар с центром в точке  $O$ , диаметром  $|DE|$  и радиусом  $|OD| = R$ .

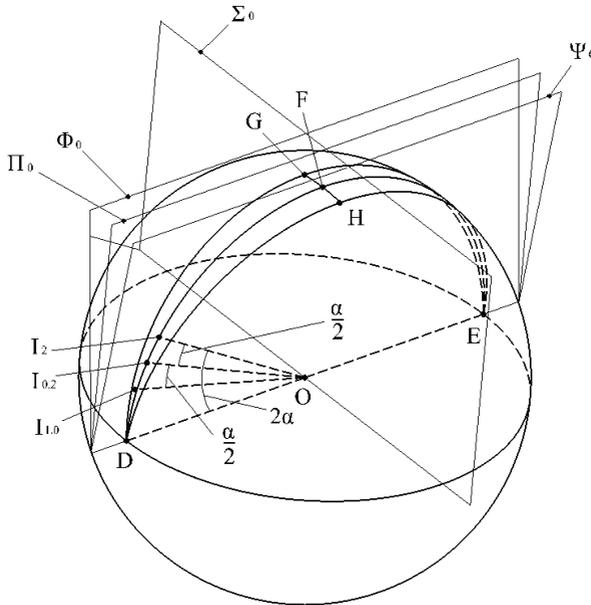


Рис.6.1.2.2.1.

Проведем из центра шара точки  $O$  радиус  $|OI_2| = R$  так, чтобы он лежал в плоскости  $\Pi_0$  и составлял с радиусом  $|OD|$  угол  $2\alpha$  (то есть, угол  $DOI_2 = \alpha$ ). Проведем из центра шара точки  $O$  радиус  $|OI_{0.2}| = R$  так, чтобы он лежал в плоскости  $\Pi_0$  и составлял с радиусом  $|OI_2|$  и прямой линией  $|OI_{1.0}|$  угол  $\frac{\alpha}{2}$  (то есть, угол  $I_2OI_{0.2} = \frac{\alpha}{2}$  и угол  $I_{0.2}OI_{1.0} = \frac{\alpha}{2}$ ).

В плоскости  $\Pi_0$  из точки  $I_{1.0}$  через точку  $I_{0.2}$  (Рис.6.1.2.2.2) проведем прямую линию. Получим треугольник  $OI_{1.0}I_{0.2}$  равный треугольнику  $OD_0I_{0.1}$ , построенному в §6.1.2.1 (так как  $|OI_{0.1}| = |OI_{0.2}| = R$  и угол  $D_0OI_{0.1}$  равен углу  $I_{1.0}OI_{0.2} = \frac{\alpha}{2}$ ). Следовательно, прямая линия  $|I_{1.0}I_{0.2}|$  будет касательна к дуге окружности  $\widehat{DF}$ , а, следовательно, перпендикулярна к радиусу  $|OI_{0.2}|$ .

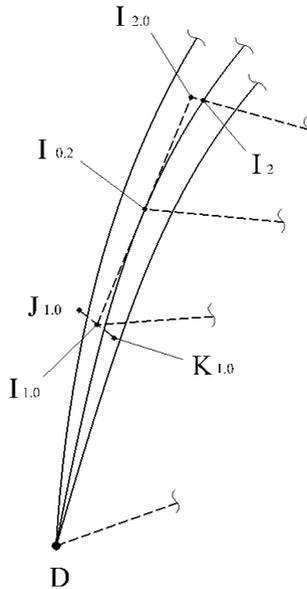


Рис.6.1.2.2.2.

Продлим прямую  $|I_{1.0}I_{0.2}|$  далее. В плоскости  $\Pi_0$  из точки  $O$  проведем прямую линию до ее пересечения с вышеуказанной касательной к дуге окружности  $\widehat{DF}$  в точке  $I_{2.0}$ , при этом, данная прямая линия  $|OI_{2.0}|$  по направлению совпадает с направлением радиуса  $|OI_2|$  (то есть, данная прямая линия  $|OI_{2.0}|$  пересекает дугу окружности  $\widehat{DF}$  в точке  $I_2$ ). Таким образом, прямая линия  $|OI_{2.0}|$  лежит в плоскости  $\Pi_0$ , а прямая линия  $|I_{1.0}I_{2.0}|$  касательна к дуге окружности  $\widehat{DF}$  в точке  $I_{0.2}$ , и лежит в плоскости  $\Pi_0$ .

Таким образом, мы получили треугольник  $OI_{1.0}I_{2.0}$  (Рис.6.1.2.2.3), лежащий в плоскости  $\Pi_0$ , у которого угол  $I_{1.0}OI_{2.0} = \alpha$ , угол  $I_{1.0}OI_{0.2} = \frac{\alpha}{2}$  и угол  $I_{2.0}OI_{0.2} = \frac{\alpha}{2}$ .  $|I_{1.0}I_{2.0}| \perp |OI_{0.2}|$  (доказано ранее), следовательно, сог-

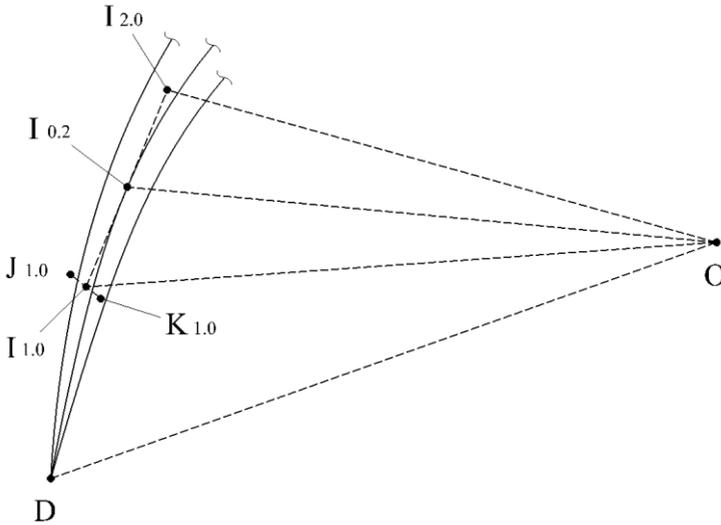


Рис.6.1.2.2.3.

ласно **П.1.1** радиус  $|OI_{0,2}|$  является, одновременно, высотой, биссектрисой и медианой треугольника  $OI_{1,0}I_{2,0}$ . А, следовательно,  $|I_{1,0}I_{0,2}| = |I_{0,2}I_{2,0}|$ . Таким образом, треугольник  $OI_{1,0}I_{2,0}$  является равнобедренным, и состоит из двух прямоугольных треугольников  $OI_{1,0}I_{0,2}$  и  $OI_{2,0}I_{0,2}$ , которые равны между собой.

Рассмотрим прямоугольный треугольник  $OI_{0,2}I_{2,0}$  (Рис.6.1.2.2.3), у которого известен катет  $|OI_{0,2}| = R$  и прилежающий к нему угол  $I_{2,0}OI_{0,2} = \frac{\alpha}{2}$ . Согласно **П.1.2** найдем его второй катет  $|I_{0,2}I_{2,0}|$  и гипотенузу  $|OI_{2,0}|$ :

$$|I_{0,2}I_{2,0}| = |OI_{0,2}| \times \tan \frac{\alpha}{2} = R \times \tan \frac{\alpha}{2}, (6.1.2.2.1)$$

$$|OI_{2,0}| = \frac{|OI_{0,2}|}{\cos \frac{\alpha}{2}} = \frac{R}{\cos \frac{\alpha}{2}}, (6.1.2.2.2)$$

Так как  $|I_{1,0}I_{0,2}| = |I_{0,2}I_{2,0}|$  (доказано ранее), то сторона  $|I_{1,0}I_{2,0}|$  треугольника  $OI_{1,0}I_{2,0}$  будет равна:

$$\begin{aligned} |I_{1,0}I_{2,0}| &= |I_{1,0}I_{0,2}| + |I_{0,2}I_{2,0}| = 2 \times |I_{0,2}I_{2,0}| = \\ &= 2 \times R \times \tan \frac{\alpha}{2}, (6.1.2.2.3) \end{aligned}$$

Из точки  $I_{2,0}$  (Рис.6.1.2.2.4) проведем прямую линию, перпендикулярную плоскости  $\Pi_0$ , до ее пересечения с плоскостью  $\Phi_0$  в точке  $J_{2,0}$ , и до ее пересечения с плоскостью  $\Psi_0$  в точке  $K_{2,0}$ . Таким образом, мы получили прямую линию  $|J_{2,0}K_{2,0}|$ , перпендикулярную плоскости  $\Pi_0$ . Ранее в §6.1.2.1 была построена прямая линия  $|J_{1,0}K_{1,0}|$ , перпендикулярная плоскости  $\Pi_0$ . Соединив точки  $J_{1,0}$  и  $J_{2,0}$ ,  $K_{1,0}$  и  $K_{2,0}$  между собой, получим трапецию  $J_{1,0}J_{2,0}K_{2,0}K_{1,0}$ . Так как каждая из прямых линий  $|J_{1,0}K_{1,0}|$  и  $|J_{2,0}K_{2,0}|$  перпендикулярна плоскости  $\Pi_0$  (принято ранее), следова-

тельно, в соответствии со **С.1.5** плоскость трапеции  $J_{1.0}J_{2.0}K_{2.0}K_{1.0}$  будет перпендикулярная плоскости  $\Pi_0$ .

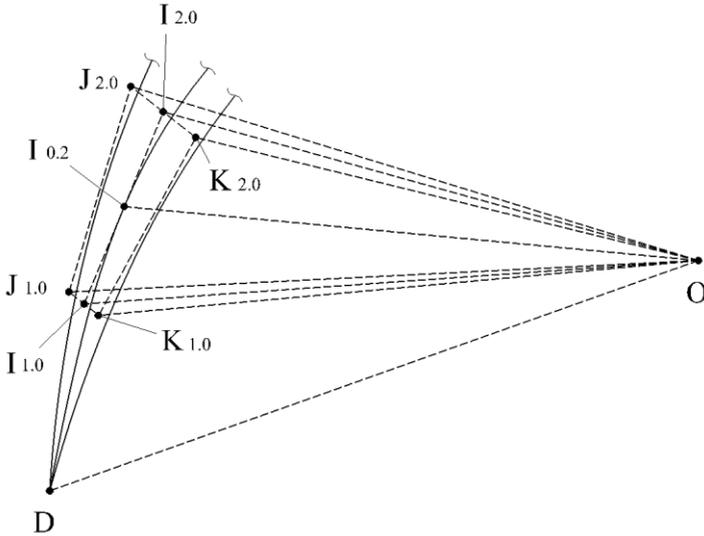


Рис.6.1.2.2.4.

Соединив точки  $O$  и  $J_{1.0}$ ,  $O$  и  $J_{2.0}$ ,  $O$  и  $K_{1.0}$ ,  $O$  и  $K_{2.0}$  между собой, получим пирамиду  $OJ_{1.0}J_{2.0}K_{2.0}K_{1.0}$  с основанием в виде трапеции  $J_{1.0}J_{2.0}K_{2.0}K_{1.0}$  и вершиной в точке  $O$ . При этом, основание пирамиды  $J_{1.0}J_{2.0}K_{2.0}K_{1.0}$  касается извне поверхности сферы в одной точке  $I_{0.2}$ .

Плоскость трапеции  $J_{1.0}J_{2.0}K_{2.0}K_{1.0}$  перпендикулярна плоскости  $\Pi_0$  (доказано ранее). Треугольник  $OI_{1.0}I_{2.0}$  лежит в плоскости  $\Pi_0$  (так как точки  $O$ ,  $I_{1.0}$  и  $I_{2.0}$  лежат в плоскости  $\Pi_0$ ). Следовательно, плоскость треугольника  $OI_{1.0}I_{2.0}$  перпендикулярна плоскости трапеции  $J_{1.0}J_{2.0}K_{2.0}K_{1.0}$ , а прямая линия  $|I_{1.0}I_{2.0}|$  является линией пересечения плоскостей трапеции  $J_{1.0}J_{2.0}K_{2.0}K_{1.0}$  и треугольника  $OI_{1.0}I_{2.0}$ .  $|I_{1.0}I_{2.0}| \perp |OI_{0.2}|$  (доказано ранее), следовательно, радиус  $|OI_{0.2}|$  перпендикулярен плоскости трапеции

$J_{1.0}J_{2.0}K_{2.0}K_{1.0}$  (основанию пирамиды), а, следовательно, радиус  $|OI_{0.2}|$  является высотой пирамиды  $OJ_{1.0}J_{2.0}K_{2.0}K_{1.0}$ .

Плоскость треугольника  $OJ_{1.0}K_{1.0}$  (Рис.6.1.2.2.5) пересекает поверхность сферы по дуге окружности  $\widehat{J_2K_2}$ .

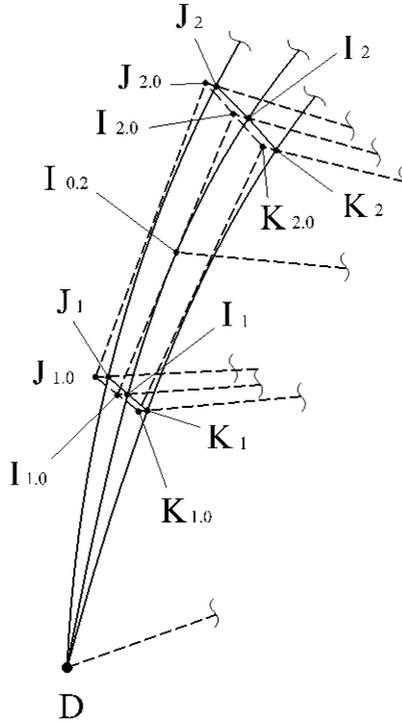


Рис.6.1.2.2.5.

Из точки  $I_{2.0}$  (Рис.6.1.2.2.6) опустим перпендикуляр  $|I_{2.0}M_2|$  на радиус  $|OD|$ . Соединив точки  $J_{2.0}$  и  $M_2$ ,  $K_{2.0}$  и  $M_2$  между собой, получим треугольник  $M_2J_{2.0}K_{2.0}$ .  $|J_{2.0}K_{2.0}|$  перпендикулярна плоскости  $\Pi_0$  (принято ранее), следовательно, плоскость треугольника  $M_2J_{2.0}K_{2.0}$  перпендикулярна плоскости  $\Pi_0$ . А, следовательно, в соответствии с **П.1.7**

угол  $J_{2.0}M_2K_{2.0}$  является углом между плоскостями  $\Phi_0$  и  $\Psi_0$  и равен  $\alpha$ , угол  $J_{2.0}M_2I_{2.0}$  является углом между плоскостями  $\Phi_0$  и  $\Pi_0$  и равен  $\frac{\alpha}{2}$ , угол  $K_{2.0}M_2I_{2.0}$  является углом между плоскостями  $\Pi_0$  и  $\Psi_0$  и равен  $\frac{\alpha}{2}$ .

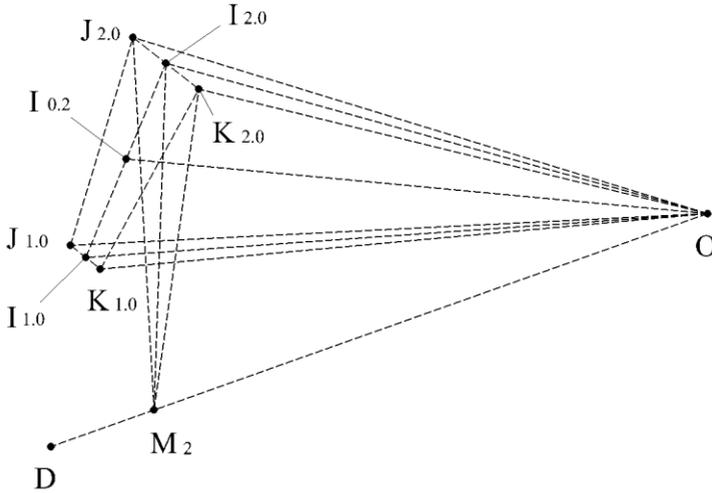


Рис.6.1.2.2.6.

Рассмотрим прямоугольный треугольник  $OM_2I_{2.0}$  (Рис.6.1.2.2.6), у которого известна гипотенуза  $|OI_{2.0}|$  (найдена ранее) и прилежащий к ней угол  $I_{2.0}OM_2 = 2\alpha$  (начальное условие, так как точка  $M_2$  лежит на радиусе  $|OD|$ ). Согласно **П.1.2** найдем катет  $|I_{2.0}M_2|$ :

$$|I_{2.0}M_2| = |OI_{2.0}| \times \sin 2\alpha = \frac{R \times \sin 2\alpha}{\cos \frac{\alpha}{2}}, \quad (6.1.2.2.4)$$

Рассмотрим треугольник  $M_2J_{2.0}K_{2.0}$  (Рис. 6.1.2.2.7).  $|J_{2.0}K_{2.0}|$  перпендикулярна плоскости  $\Pi_0$  (принято ранее). Точки  $I_{2.0}$  и  $M_2$  лежат, соответственно, на радиусах  $|OI_2|$  и

$|OD|$ , каждый из которых лежит в плоскости  $\Pi_0$  (начальное условие). Следовательно, и точки  $I_{2.0}$  и  $M_2$  будут лежать в плоскости  $\Pi_0$ , а, следовательно, в соответствии с **П.1.4** и  $|I_{2.0}M_2|$  лежит в плоскости  $\Pi_0$ . Следовательно, в соответствии со **С.1.5**  $|J_{2.0}K_{2.0}| \perp |I_{2.0}M_2|$ .

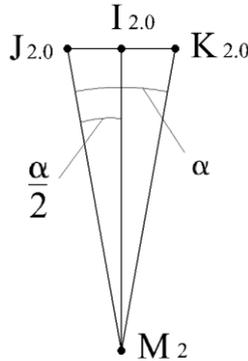


Рис. 6.1.2.2.7.

Рассмотрим треугольники  $M_2I_{2.0}J_{2.0}$  и  $M_2I_{2.0}K_{2.0}$  (Рис.6.1.2.2.7). Они имеют одну общую сторону  $|I_{2.0}M_2|$ . Углы  $J_{2.0}M_2I_{2.0}$  и  $K_{2.0}M_2I_{2.0}$ , прилежащие к стороне  $|I_{2.0}M_2|$ , равны между собой и равны  $\frac{\alpha}{2}$  (доказано ранее). Углы  $J_{2.0}I_{2.0}M_2$  и  $K_{2.0}I_{2.0}M_2$ , прилежащие к стороне  $|I_{2.0}M_2|$ , равны между собой и равны  $90^\circ$  (так как  $|J_{2.0}K_{2.0}| \perp |I_{2.0}M_2|$ ). Следовательно, в соответствии с **П.1.8** треугольники  $M_2I_{2.0}J_{2.0}$  и  $M_2I_{2.0}K_{2.0}$  равны между собой.

Рассмотрим прямоугольный треугольник  $M_2I_{2.0}J_{2.0}$  (Рис.6.1.2.2.7), у которого известен катет  $|I_{2.0}M_2|$  и прилежающий к нему угол  $J_{2.0}M_2I_{2.0} = \frac{\alpha}{2}$  (доказано ранее). В соответствии с **П.1.2** найдем катет  $|J_{2.0}I_{2.0}|$ :

$$|J_{2.0}I_{2.0}| = |I_{2.0}M_2| \times \tan \frac{\alpha}{2} = \frac{R \times \sin 2\alpha}{\cos \frac{\alpha}{2}} \times \tan \frac{\alpha}{2}, \quad (6.1.2.2.5)$$

Из равенства треугольников  $M_2I_{2.0}J_{2.0}$  и  $M_2I_{2.0}K_{2.0}$  следует, что  $|J_{2.0}I_{2.0}| = |I_{2.0}K_{2.0}|$ , а, следовательно,  $|J_{2.0}K_{2.0}|$  будет равна:

$$\begin{aligned} |J_{2.0}K_{2.0}| &= |J_{2.0}I_{2.0}| + |I_{2.0}K_{2.0}| = 2 \times |J_{2.0}I_{2.0}| = \\ &= 2 \times \frac{R \times \sin 2\alpha}{\cos \frac{\alpha}{2}} \times \tan \frac{\alpha}{2}, \quad (6.1.2.2.6) \end{aligned}$$

Рассмотрим трапецию  $J_{1.0}J_{2.0}K_{2.0}K_{1.0}$  (Рис.6.1.2.2.8). Ранее в §6.1.2.1 была построена прямая линия  $|J_{1.0}K_{1.0}|$ , перпендикулярная плоскости  $\Pi_0$  (принято ранее). Прямая линия  $|J_{2.0}K_{2.0}|$  перпендикулярна плоскости  $\Pi_0$  (принято ранее).  $|I_{1.0}I_{2.0}|$  лежит в плоскости  $\Pi_0$  (доказано ранее). Следовательно, в соответствии со **С.1.6**  $|J_{1.0}K_{1.0}| \perp |I_{1.0}I_{2.0}|$  и  $|J_{2.0}K_{2.0}| \perp |I_{1.0}I_{2.0}|$ .  $|J_{1.0}I_{1.0}| = |I_{1.0}K_{1.0}|$  (доказано ранее в §6.1.2.1),  $|J_{2.0}I_{2.0}| = |I_{2.0}K_{2.0}|$  (доказано в этом параграфе). А, следовательно,  $|I_{1.0}I_{2.0}|$  является высотой трапеции  $J_{1.0}J_{2.0}K_{2.0}K_{1.0}$ , у которой известны высота  $|I_{1.0}I_{2.0}|$  (найдена ранее) и две стороны  $|J_{1.0}K_{1.0}|$  (найдена ранее в §6.1.2.1) и  $|J_{2.0}K_{2.0}|$  (найдена в этом параграфе).

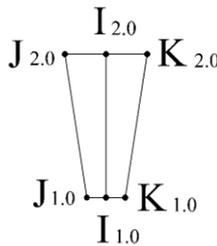


Рис.6.1.2.2.8.

Согласно **П.1.14** найдем площадь  $S_{J_{1.0}J_{2.0}K_{2.0}K_{1.0}}$  трапеции  $J_{1.0}J_{2.0}K_{2.0}K_{1.0}$  (которая является основанием пирамиды  $OJ_{1.0}J_{2.0}K_{2.0}K_{1.0}$ ):

$$\begin{aligned}
 S_{J_{1.0}J_{2.0}K_{2.0}K_{1.0}} &= \frac{(|J_{1.0}K_{1.0}| + |J_{2.0}K_{2.0}|)}{2} \times |I_{1.0}I_{2.0}| = \\
 &= \frac{\left( \left( 2 \times \frac{R \times \sin \alpha}{\cos \frac{\alpha}{2}} \times \tan \frac{\alpha}{2} \right) + \left( 2 \times \frac{R \times \sin 2\alpha}{\cos \frac{\alpha}{2}} \times \tan \frac{\alpha}{2} \right) \right)}{2} \times 2 \times \\
 &\times R \times \tan \frac{\alpha}{2} = \\
 &= 2 \times R^2 \times \left( \left( \frac{\sin \alpha \times \tan \frac{\alpha}{2}}{\cos \frac{\alpha}{2}} \right) + \left( \frac{\sin 2\alpha \times \tan \frac{\alpha}{2}}{\cos \frac{\alpha}{2}} \right) \right) \times \tan \frac{\alpha}{2} = \\
 &= 2 \times R^2 \times \left( \frac{\sin \alpha + \sin 2\alpha}{\cos \frac{\alpha}{2}} \right) \times \tan^2 \frac{\alpha}{2}, (6.1.2.2.7)
 \end{aligned}$$

Таким образом, чем меньше будет угол  $\alpha$ , тем меньше площадь трапеции  $J_{1.0}J_{2.0}K_{2.0}K_{1.0}$  будет отличаться от площади поверхности сферы, ограниченной дугами окружностей  $\widehat{J_1J_2}$ ,  $\widehat{J_2K_2}$ ,  $\widehat{K_2K_1}$  и  $\widehat{K_1J_1}$  (Рис.6.1.2.2.5).

### §6.1.2.3. Вычисление площади основания третьей пирамиды

На Рис.6.1.2.3.1 показан шар с центром в точке  $O$ , диаметром  $|DE|$  и радиусом  $|OD| = R$ .

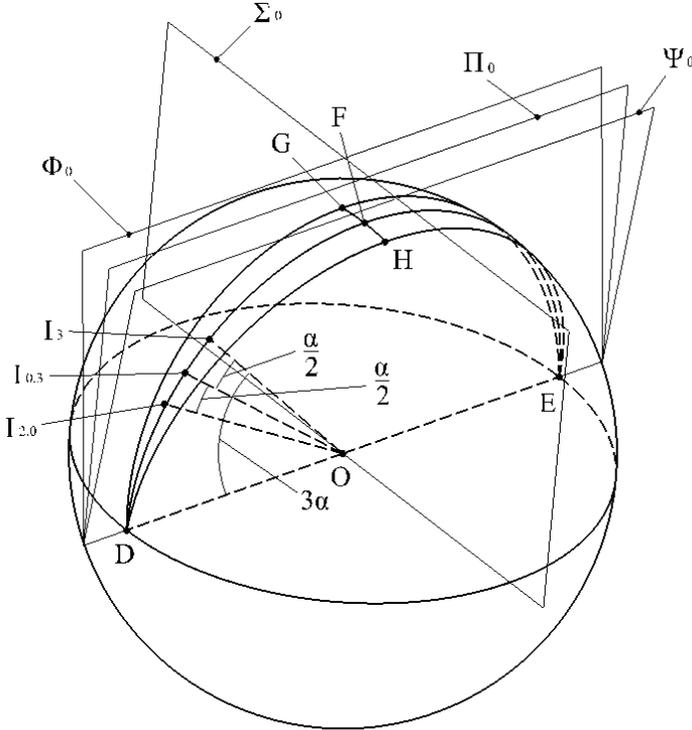


Рис.6.1.2.3.1.

Проведем из центра шара точки  $O$  радиус  $|OI_3| = R$  так, чтобы он лежал в плоскости  $\Pi_0$  и составлял с радиусом  $|OD|$  угол  $3\alpha$  (то есть, угол  $\angle DOI_3 = \alpha$ ). Проведем из центра шара точки  $O$  радиус  $|OI_{0.3}| = R$  так, чтобы он лежал в плоскости  $\Pi_0$  и составлял с радиусом  $|OI_3|$  и прямой

линией  $|OI_{2.0}|$  угол  $\frac{\alpha}{2}$  (то есть, угол  $I_3OI_{0.3} = \frac{\alpha}{2}$  и угол  $I_{0.3}OI_{2.0} = \frac{\alpha}{2}$ ).

В плоскости  $\Pi_0$  (Рис.6.1.2.3.2) из точки  $I_{2.0}$  через точку  $I_{0.3}$  проведем прямую линию. Получим треугольник  $OI_{2.0}I_{0.3}$  равный треугольнику  $OI_{1.0}I_{0.2}$ , построенному в §6.1.2.2 (так как  $|OI_{0.2}| = |OI_{0.3}| = R$  и угол  $I_{1.0}OI_{0.2}$  равен углу  $I_{2.0}OI_{0.3} = \frac{\alpha}{2}$ ). Следовательно, прямая линия  $|I_{2.0}I_{0.3}|$  будет касательна к дуге окружности  $\widehat{DF}$ , а, следовательно, перпендикулярна к радиусу  $|OI_{0.3}|$ .

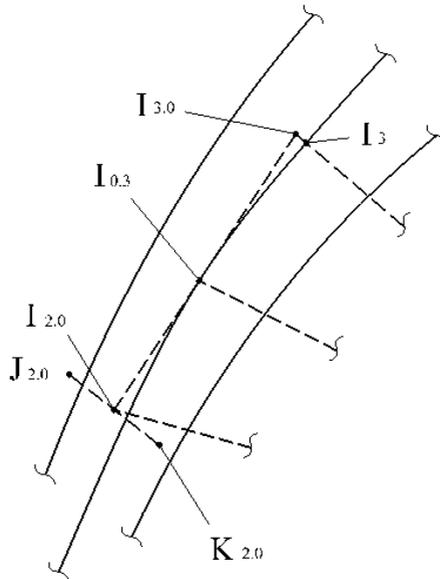


Рис.6.1.2.3.2.

Продлим прямую линию  $|I_{2.0}I_{0.3}|$  далее. В плоскости  $\Pi_0$  из точки  $O$  проведем прямую линию до ее пересечения с вышеуказанной касательной к дуге окружности  $\widehat{DF}$  в точке  $I_{3.0}$ , при этом, данная прямая линия  $|OI_{3.0}|$  по нап-

равлению совпадает с направлением радиуса  $|OI_3|$  (то есть, данная прямая линия  $|OI_{3,0}|$  пересекает дугу окружности  $\widehat{DF}$  в точке  $I_3$ ). Таким образом, прямая линия  $|OI_{3,0}|$  лежит в плоскости  $\Pi_0$ , а прямая линия  $|I_{2,0}I_{3,0}|$  касательна к дуге окружности  $\widehat{DF}$  в точке  $I_{0,3}$ , и лежит в плоскости  $\Pi_0$ .

Таким образом, мы получили треугольник  $O I_{2,0} I_{3,0}$  (Рис.6.1.2.3.3), лежащий в плоскости  $\Pi_0$ , у которого угол  $I_{2,0} O I_{3,0} = \alpha$ , угол  $I_{2,0} O I_{0,3} = \frac{\alpha}{2}$  и угол  $I_{3,0} O I_{0,3} = \frac{\alpha}{2}$ .  $|I_{2,0}I_{3,0}| \perp |OI_{0,3}|$  (доказано ранее), следовательно, согласно **П.1.1** радиус  $|OI_{0,3}|$  является, одновременно, высо-

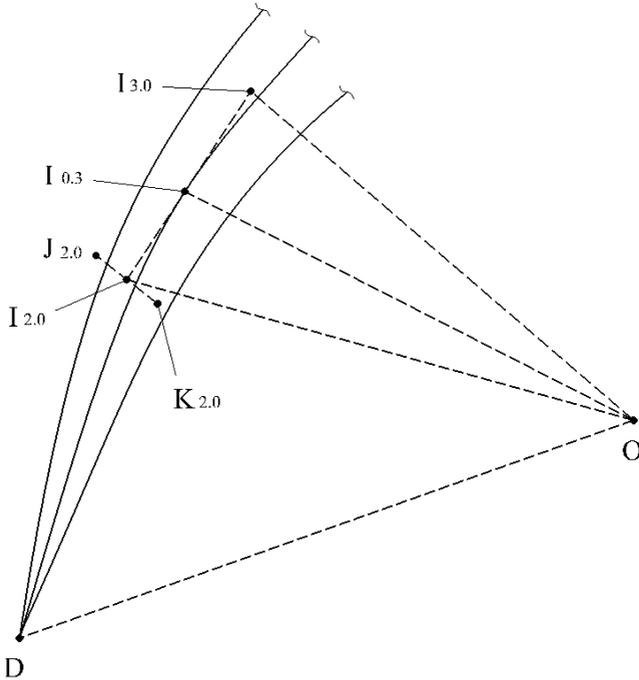


Рис.6.1.2.3.3.

той, биссектрисой и медианой треугольника  $OI_{2.0}I_{3.0}$ . А, следовательно,  $|I_{2.0}I_{0.3}| = |I_{0.3}I_{3.0}|$ .

Таким образом, треугольник  $OI_{2.0}I_{3.0}$  является равнобедренным, и состоит из двух прямоугольных треугольников  $OI_{2.0}I_{0.3}$  и  $OI_{3.0}I_{0.3}$ , которые равны между собой.

Рассмотрим прямоугольный треугольник  $OI_{0.3}I_{3.0}$  (Рис.6.1.2.3.3), у которого известен катет  $|OI_{0.3}| = R$  и прилежащий к нему угол  $I_{3.0}OI_{0.3} = \frac{\alpha}{2}$ . Согласно **П.1.2** найдем его второй катет  $|I_{0.3}I_{3.0}|$  и гипотенузу  $|OI_{3.0}|$ :

$$|I_{0.3}I_{3.0}| = |OI_{0.3}| \times \tan \frac{\alpha}{2} = R \times \tan \frac{\alpha}{2}, (6.1.2.3.1)$$

$$|OI_{3.0}| = \frac{|OI_{0.3}|}{\cos \frac{\alpha}{2}} = \frac{R}{\cos \frac{\alpha}{2}}, (6.1.2.3.2)$$

Так как  $|I_{2.0}I_{0.3}| = |I_{0.3}I_{3.0}|$  (доказано ранее), то сторона  $|I_{2.0}I_{3.0}|$  треугольника  $OI_{2.0}I_{3.0}$  будет равна:

$$\begin{aligned} |I_{2.0}I_{3.0}| &= |I_{2.0}I_{0.3}| + |I_{0.3}I_{3.0}| = 2 \times |I_{0.3}I_{3.0}| = \\ &= 2 \times R \times \tan \frac{\alpha}{2}, (6.1.2.3.3) \end{aligned}$$

Из точки  $I_{3.0}$  (Рис.6.1.2.3.4) проведем прямую линию, перпендикулярную плоскости  $\Pi_0$ , до ее пересечения с плоскостью  $\Phi_0$  в точке  $J_{3.0}$ , и до ее пересечения с плоскостью  $\Psi_0$  в точке  $K_{3.0}$ . Таким образом, мы получили прямую линию  $|J_{3.0}K_{3.0}|$ , перпендикулярную плоскости  $\Pi_0$ . Ранее в §6.1.2.2 была построена прямая линия  $|J_{2.0}K_{2.0}|$ , перпендикулярная плоскости  $\Pi_0$ . Соединив точки  $J_{2.0}$  и  $J_{3.0}$ ,  $K_{2.0}$  и  $K_{3.0}$  между собой, получим трапецию  $J_{2.0}J_{3.0}K_{3.0}K_{2.0}$ . Так как каждая из прямых линий  $|J_{2.0}K_{2.0}|$  и  $|J_{3.0}K_{3.0}|$  перпендикулярна плоскости  $\Pi_0$  (принято ранее), следовательно, в соответствии со **С.1.5** плоскость трапеции  $J_{2.0}J_{3.0}K_{3.0}K_{2.0}$  будет перпендикулярна плоскости  $\Pi_0$ .

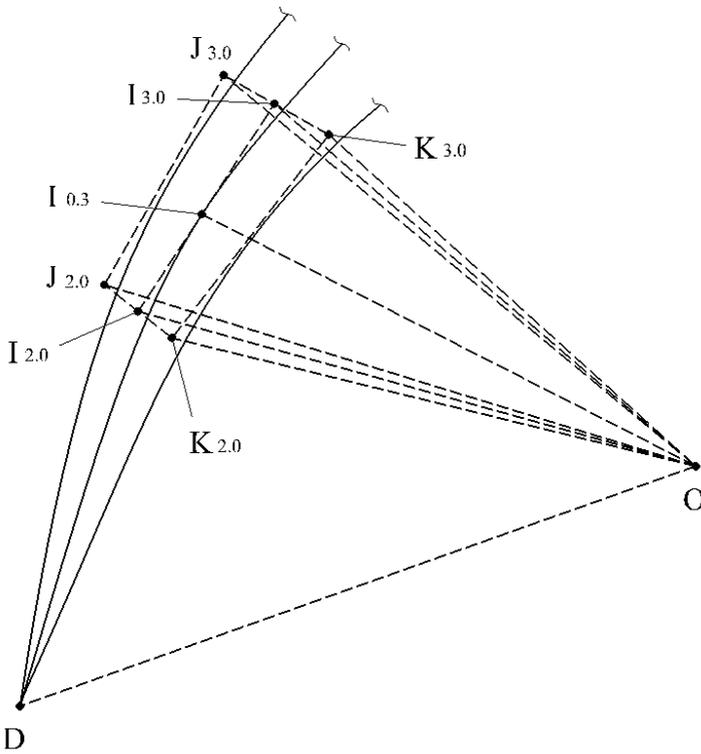


Рис.6.1.2.3.4.

Соединив точки  $O$  и  $J_{2.0}$ ,  $O$  и  $J_{3.0}$ ,  $O$  и  $K_{2.0}$ ,  $O$  и  $K_{3.0}$  между собой, получим пирамиду  $OJ_{2.0}J_{3.0}K_{3.0}K_{2.0}$  с основанием в виде трапеции  $J_{2.0}J_{3.0}K_{3.0}K_{2.0}$  и вершиной в точке  $O$ . При этом, основание пирамиды  $J_{2.0}J_{3.0}K_{3.0}K_{2.0}$  касается извне поверхности сферы в одной точке  $I_{0.3}$ .

Плоскость трапеции  $J_{2.0}J_{3.0}K_{3.0}K_{2.0}$  перпендикулярна плоскости  $\Pi_0$  (доказано ранее). Треугольник  $OI_{2.0}I_{3.0}$  лежит в плоскости  $\Pi_0$  (так как точки  $O$ ,  $I_{2.0}$  и  $I_{3.0}$  лежат в плоскости  $\Pi_0$ ). Следовательно, плоскость треугольника  $OI_{2.0}I_{3.0}$  перпендикулярна плоскости трапеции  $J_{2.0}J_{3.0}K_{3.0}K_{2.0}$ , а прямая линия  $|I_{2.0}I_{3.0}|$  является линией пересечения плос-

костей трапеции  $J_{2.0}J_{3.0}K_{3.0}K_{2.0}$  и треугольника  $OJ_{2.0}I_{3.0}$ .  $|I_{2.0}I_{3.0}| \perp |OI_{0.3}|$  (доказано ранее), следовательно, радиус  $|OI_{0.3}|$  перпендикулярен плоскости трапеции  $J_{2.0}J_{3.0}K_{3.0}K_{2.0}$  (основанию пирамиды), а, следовательно, радиус  $|OI_{0.3}|$  является высотой пирамиды  $OJ_{2.0}J_{3.0}K_{3.0}K_{2.0}$ .

Плоскость треугольника  $OJ_{2.0}K_{3.0}$  (Рис.6.1.2.3.5) пересекает поверхность сферы по дуге окружности  $\widehat{J_3K_3}$ .

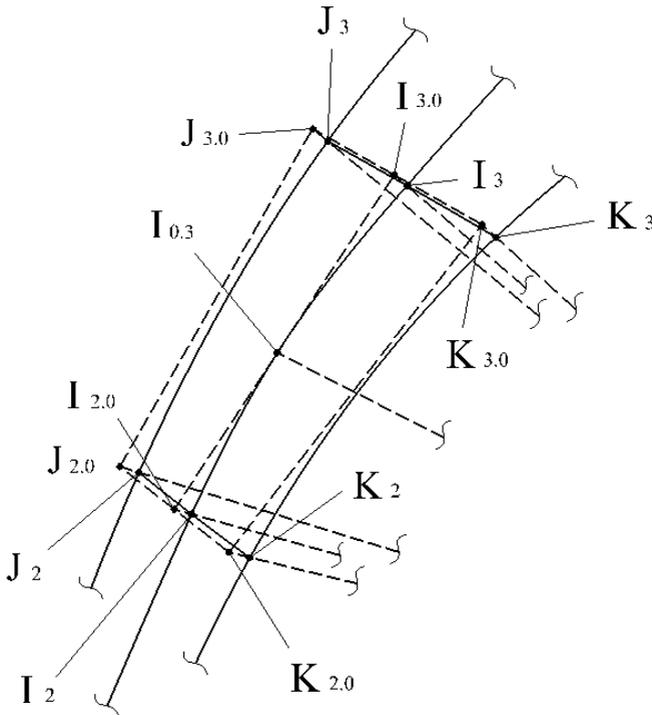


Рис.6.1.2.3.5.

Из точки  $I_{3.0}$  (Рис.6.1.2.3.6) опустим перпендикуляр  $|I_{3.0}M_3|$  на радиус  $|OD|$ . Соединив точки  $J_{3.0}$  и  $M_3$ ,  $K_{3.0}$  и  $M_3$  между собой, получим треугольник  $M_3J_{3.0}K_{3.0}$ .  $|J_{3.0}K_{3.0}|$

перпендикулярна плоскости  $\Pi_0$  (принято ранее), следовательно, плоскость треугольника  $M_3J_{3.0}K_{3.0}$  перпендикулярна плоскости  $\Pi_0$ . А, следовательно, в соответствии с **П.1.7** угол  $J_{3.0}M_3K_{3.0}$  является углом между плоскостями  $\Phi_0$  и  $\Psi_0$  и равен  $\alpha$ , угол  $J_{3.0}M_3I_{3.0}$  является углом между плоскостями  $\Phi_0$  и  $\Pi_0$  и равен  $\frac{\alpha}{2}$ , угол  $K_{3.0}M_3I_{3.0}$  является углом между плоскостями  $\Pi_0$  и  $\Psi_0$  и равен  $\frac{\alpha}{2}$ .

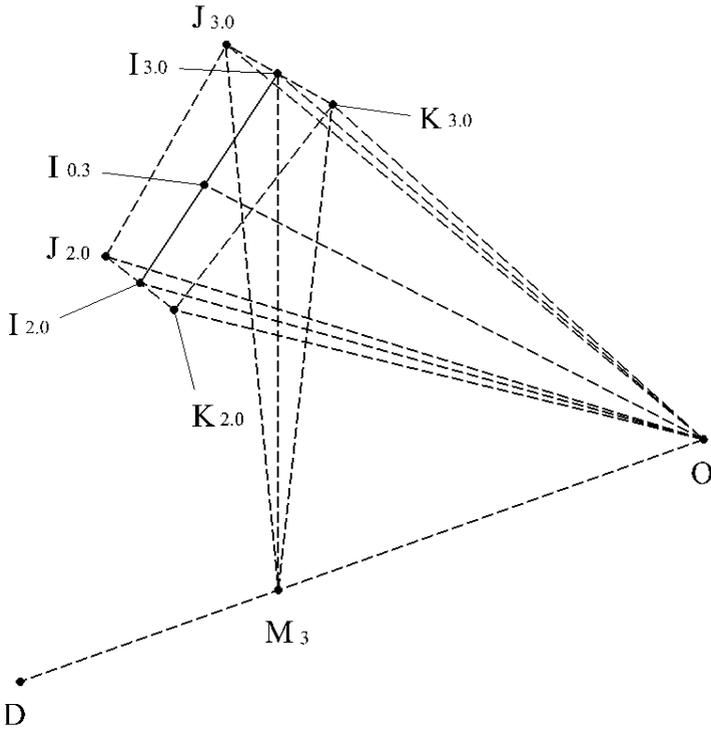


Рис.6.1.2.3.6.

Рассмотрим прямоугольный треугольник  $OM_3I_{3.0}$  (Рис.6.1.2.3.6), у которого известна гипотенуза  $|OI_{3.0}|$  (найдена ранее) и прилегающий к ней угол  $I_{3.0}OM_3 = 3\alpha$

(начальное условие, так как точка  $M_3$  лежит на радиусе  $|OD|$ ). Согласно **П.1.2** найдем катет  $|I_{3.0}M_3|$ :

$$|I_{3.0}M_3| = |OI_{3.0}| \times \sin 3\alpha = \frac{R \times \sin 3\alpha}{\cos \frac{\alpha}{2}}, \quad (6.1.2.3.4)$$

Рассмотрим треугольник  $M_3J_{3.0}K_{3.0}$  (Рис.6.1.2.3.7).  $|J_{3.0}K_{3.0}|$  перпендикулярна плоскости  $\Pi_0$  (принято ранее). Точки  $I_{3.0}$  и  $M_3$  лежат, соответственно, на радиусах  $|OI_{3.0}|$  и  $|OD|$ , каждый из которых лежит в плоскости  $\Pi_0$  (начальное условие). Следовательно, и точки  $I_{3.0}$  и  $M_3$  будут лежать в плоскости  $\Pi_0$ , а, следовательно, в соответствии с **П.1.4** и  $|I_{3.0}M_3|$  лежит в плоскости  $\Pi_0$ . Следовательно, в соответствии со **С.1.5**  $|J_{3.0}K_{3.0}| \perp |I_{3.0}M_3|$ .

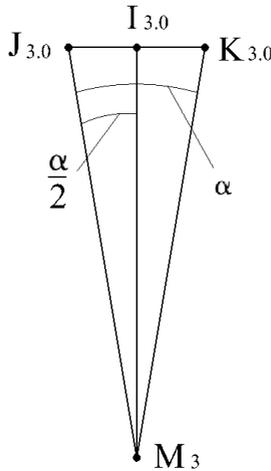


Рис. 6.1.2.3.7.

Рассмотрим треугольники  $M_3I_{3.0}J_{3.0}$  и  $M_3I_{3.0}K_{3.0}$  (Рис.6.1.2.3.7). Они имеют одну общую сторону  $|I_{3.0}M_3|$ . Углы  $J_{3.0}M_3I_{3.0}$  и  $K_{3.0}M_3I_{3.0}$ , прилежащие к стороне  $|I_{3.0}M_3|$ ,

равны между собой и равны  $\frac{\alpha}{2}$  (доказано ранее). Углы  $J_{3.0}I_{3.0}M_3$  и  $K_{3.0}I_{3.0}M_3$ , прилежащие к стороне  $|I_{3.0}M_3|$ , равны между собой и равны  $90^\circ$  (так как  $|J_{3.0}K_{3.0}| \perp |I_{3.0}M_3|$ ). Следовательно, в соответствии с **П.1.8** треугольники  $M_3I_{3.0}J_{3.0}$  и  $M_3I_{3.0}K_{3.0}$  равны между собой.

Рассмотрим прямоугольный треугольник  $M_3I_{3.0}J_{3.0}$  (Рис.6.1.2.3.7), у которого известен катет  $|I_{3.0}M_3|$  и прилежающий к нему угол  $J_{3.0}M_3I_{3.0} = \frac{\alpha}{2}$  (доказано ранее). В соответствии с **П.1.2** найдем катет  $|J_{3.0}I_{3.0}|$ :

$$|J_{3.0}I_{3.0}| = |I_{3.0}M_3| \times \tan \frac{\alpha}{2} = \frac{R \times \sin 3\alpha}{\cos \frac{\alpha}{2}} \times \tan \frac{\alpha}{2}, \quad (6.1.2.3.5)$$

Из равенства треугольников  $M_3I_{3.0}J_{3.0}$  и  $M_3I_{3.0}K_{3.0}$  следует, что  $|J_{3.0}I_{3.0}| = |I_{3.0}K_{3.0}|$ , а, следовательно,  $|J_{3.0}K_{3.0}|$  будет равна:

$$\begin{aligned} |J_{3.0}K_{3.0}| &= |J_{3.0}I_{3.0}| + |I_{3.0}K_{3.0}| = 2 \times |J_{3.0}I_{3.0}| = \\ &= 2 \times \frac{R \times \sin 3\alpha}{\cos \frac{\alpha}{2}} \times \tan \frac{\alpha}{2}, \quad (6.1.2.3.6) \end{aligned}$$

Рассмотрим трапецию  $J_{2.0}J_{3.0}K_{3.0}K_{2.0}$  (Рис.6.1.2.3.8). Ранее в §6.1.2.2 была построена прямая линия  $|J_{2.0}K_{2.0}|$ , перпендикулярная плоскости  $\Pi_0$  (принято ранее). Прямая линия  $|J_{3.0}K_{3.0}|$  перпендикулярна плоскости  $\Pi_0$  (принято ранее).  $|I_{2.0}I_{3.0}|$  лежит в плоскости  $\Pi_0$  (доказано ранее). Следовательно, в соответствии со **С.1.6**  $|J_{2.0}K_{2.0}| \perp |I_{2.0}I_{3.0}|$  и  $|J_{3.0}K_{3.0}| \perp |I_{2.0}I_{3.0}|$ .  $|J_{2.0}I_{2.0}| = |I_{2.0}K_{2.0}|$  (доказано ранее в §6.1.2.2),  $|J_{3.0}I_{3.0}| = |I_{3.0}K_{3.0}|$  (доказано в этом параграфе). А, следовательно,  $|I_{2.0}I_{3.0}|$  является высотой трапеции  $J_{2.0}J_{3.0}K_{3.0}K_{2.0}$ , у которой известны высота  $|I_{2.0}I_{3.0}|$  (найдена ранее) и две

стороны  $|J_{2.0}K_{2.0}|$  (найдена ранее в §6.1.2.2) и  $|J_{3.0}K_{3.0}|$  (найдена в этом параграфе).

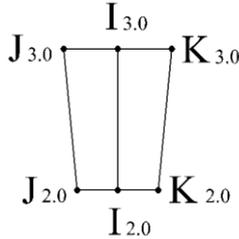


Рис.6.1.2.3.8.

Согласно **П.1.14** найдем площадь  $S_{J_{2.0}J_{3.0}K_{3.0}K_{2.0}}$  трапеции  $J_{2.0}J_{3.0}K_{3.0}K_{2.0}$  (которая является основанием пирамиды  $OJ_{2.0}J_{3.0}K_{3.0}K_{2.0}$ ):

$$\begin{aligned}
 S_{J_{2.0}J_{3.0}K_{3.0}K_{2.0}} &= \frac{(|J_{2.0}K_{2.0}| + |J_{3.0}K_{3.0}|)}{2} \times |I_{2.0}I_{3.0}| = \\
 &= \frac{\left( \left( 2 \times \frac{R \times \sin 2\alpha}{\cos \frac{\alpha}{2}} \times \tan \frac{\alpha}{2} \right) + \left( 2 \times \frac{R \times \sin 3\alpha}{\cos \frac{\alpha}{2}} \times \tan \frac{\alpha}{2} \right) \right)}{2} \times 2 \times R \times \tan \frac{\alpha}{2} = \\
 &= 2 \times R^2 \times \left( \left( \frac{\sin 2\alpha \times \tan \frac{\alpha}{2}}{\cos \frac{\alpha}{2}} \right) + \left( \frac{\sin 3\alpha \times \tan \frac{\alpha}{2}}{\cos \frac{\alpha}{2}} \right) \right) \times \tan \frac{\alpha}{2} = \\
 &= 2 \times R^2 \times \left( \frac{\sin 2\alpha + \sin 3\alpha}{\cos \frac{\alpha}{2}} \right) \times \tan^2 \frac{\alpha}{2}, \quad (6.1.2.3.7)
 \end{aligned}$$

Таким образом, чем меньше будет угол  $\alpha$ , тем меньше площадь трапеции  $J_{2.0}J_{3.0}K_{3.0}K_{2.0}$  будет отличаться от площади поверхности сферы, ограниченной дугами окружностей  $\widehat{J_2J_3}$ ,  $\widehat{J_3K_3}$ ,  $\widehat{K_3K_2}$  и  $\widehat{K_2J_2}$  (Рис.6.1.2.3.5).

### §6.1.2.4. Вычисление площади основания последней пирамиды

Как видно из уравнений (6.1.2.2.7) и (6.1.2.3.7), они отличаются только значением коэффициента перед углом  $\alpha$ .

Уравнения (6.1.2.2.7) и (6.1.2.3.7) можно записать в виде:

$$S_{J_{j-1}J_jK_jK_{j-1}} = 2 \times R^2 \times \left( \frac{\sin(i - \alpha) + \sin i}{\cos \frac{\alpha}{2}} \right) \times \tan^2 \frac{\alpha}{2}, \quad (6.1.2.4.1)$$

Подставив в уравнение (6.1.2.4.1) вместо  $i$  значение, равное  $2\alpha$  или  $3\alpha$ , а вместо  $j$  значение, равное 2 или 3, получим уравнения (6.1.2.2.7) и (6.1.2.3.7).

Все последующие пирамиды при изменении угла  $DOI_i$  от  $DOI_3 = 3\alpha$  до  $DOI_{90-\alpha} = (90 - \alpha)$  будут иметь в основании трапецию, и площадь ее основания будет вычисляться по формуле (6.1.2.4.1). При этом, вместо  $i$  нужно будет подставить текущее значение угла  $DOI_i$ , а вместо  $j$  поставить текущее значение индекса.

Исключением будет последняя пирамида, заключенная между углами  $DOI_{90-\alpha} = (90 - \alpha)$  и  $DOF = 90$ , так как одна сторона основания пирамиды будет найдена иным, по сравнению с предыдущими пирамидами, способом.

На Рис.6.1.2.4.1 показан шар с центром в точке  $O$ , диаметром  $|DE|$  и радиусами  $|OD| = R$  и  $|OF| = R$ , при этом, оба радиуса лежал в плоскости  $\Pi_0$ . Совершив построения, аналогичные тем, что были произведены в §6.1.2.2 и §6.1.2.3, получим прямую линию  $|OI_{(90-\alpha).0}|$ , лежащую в плоскости  $\Pi_0$  (принято ранее). Угол  $DOF = 90^\circ$ , а угол  $DOI_{(90-\alpha).0} = 90 - \alpha$ . Проведем из центра шара точки  $O$  радиус  $|OF_{0.1}| = R$  так, чтобы он лежал



$| I_{(90-\alpha),0} F_{0,1} |$  будет касательна к дуге окружности  $\widehat{DF}$ , а, следовательно, перпендикулярна к радиусу  $| OF_{0,1} |$ .

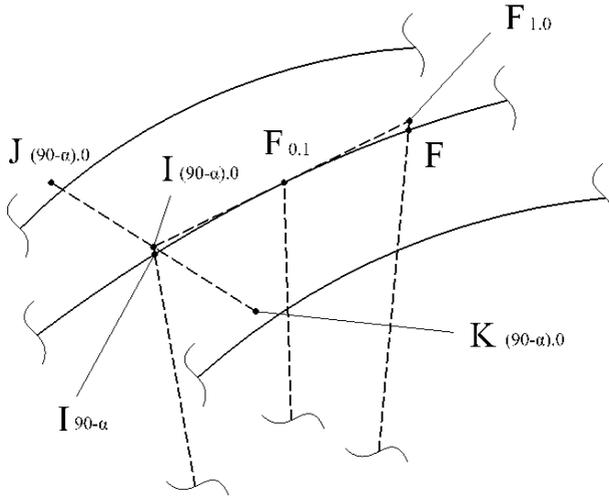


Рис.6.1.2.4.2.

Продлим прямую линию  $| I_{(90-\alpha),0} F_{0,1} |$  далее. В плоскости  $\Pi_0$  из точки  $O$  проведем прямую линию до ее пересечения с вышеуказанной касательной к дуге окружности  $\widehat{DF}$  в точке  $F_{1,0}$ , при этом, данная прямая линия  $| OF_{1,0} |$  по направлению совпадает с направлением радиуса  $| OF |$  (то есть, данная прямая линия  $| OF_{1,0} |$  пересекает дугу окружности  $\widehat{DF}$  в точке  $F$ ). Таким образом, прямая линия  $| OF_{1,0} |$  лежит в плоскости  $\Pi_0$ , а прямая линия  $| I_{(90-\alpha),0} F_{1,0} |$  касательна к дуге окружности  $\widehat{DF}$  в точке  $F_{0,1}$ , и лежит в плоскости  $\Pi_0$ .

Таким образом, мы получили треугольник  $O I_{(90-\alpha),0} F_{1,0}$  (Рис.6.1.2.4.3), лежащий в плоскости  $\Pi_0$ , у которого угол

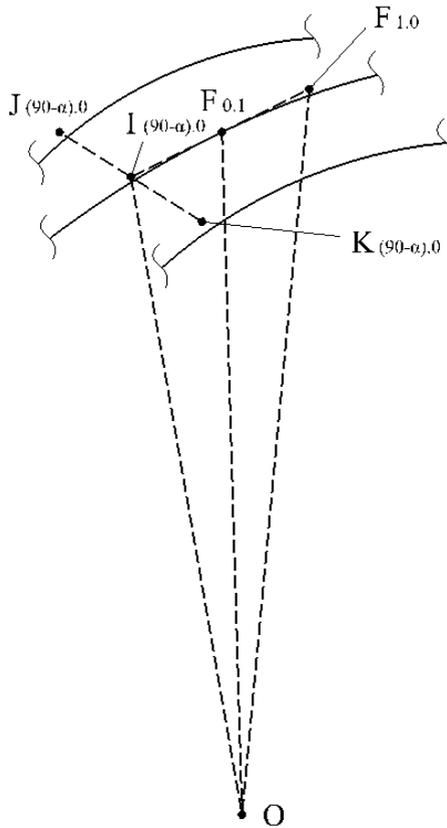


Рис.6.1.2.4.3.

$I_{(90-\alpha),0}OF_{1.0} = \alpha$ , угол  $I_{(90-\alpha),0}OF_{0.1} = \frac{\alpha}{2}$  и угол  $F_{1.0}OF_{0.1} = \frac{\alpha}{2}$ .  $|I_{(90-\alpha),0}F_{1.0}| \perp |OF_{0.1}|$ , следовательно, согласно **П.1.1** радиус  $|OF_{0.1}|$  является, одновременно, высотой, биссектрисой и медианой треугольника  $OI_{(90-\alpha),0}F_{1.0}$ . А, следовательно,  $|I_{(90-\alpha),0}F_{0.1}| = |F_{0.1}F_{1.0}|$ . Таким образом, треугольник  $OI_{(90-\alpha),0}F_{1.0}$  является равнобедренным, и сос-

тоит из двух прямоугольных треугольников  $OI_{(90-\alpha),0}F_{0,1}$  и  $OF_{1,0}F_{0,1}$ , которые равны между собой.

Рассмотрим прямоугольный треугольник  $OF_{0,1}F_{1,0}$  (Рис.6.1.2.4.3), у которого известен катет  $|OF_{0,1}| = R$  и прилежающий к нему угол  $F_{1,0}OF_{0,1} = \frac{\alpha}{2}$ . Согласно **П.1.2** найдем его второй катет  $|F_{0,1}F_{1,0}|$  и гипотенузу  $|OF_{1,0}|$ :

$$|F_{0,1}F_{1,0}| = |OF_{0,1}| \times \tan \frac{\alpha}{2} = R \times \tan \frac{\alpha}{2}, \quad (6.1.2.4.2)$$

$$|OF_{1,0}| = \frac{|OF_{0,1}|}{\cos \frac{\alpha}{2}} = \frac{R}{\cos \frac{\alpha}{2}}, \quad (6.1.2.4.3)$$

Так как  $|I_{(90-\alpha),0}F_{0,1}| = |F_{0,1}F_{1,0}|$  (доказано ранее), то сторона  $|I_{(90-\alpha),0}F_{1,0}|$  треугольника  $OI_{(90-\alpha),0}F_{1,0}$  будет равна:

$$\begin{aligned} |I_{(90-\alpha),0}F_{1,0}| &= |I_{(90-\alpha),0}F_{0,1}| + |F_{0,1}F_{1,0}| = 2 \times |F_{0,1}F_{1,0}| = \\ &= 2 \times R \times \tan \frac{\alpha}{2}, \quad (6.1.2.4.4) \end{aligned}$$

Из точки  $F_{1,0}$  (Рис.6.1.2.4.4) проведем прямую линию, перпендикулярную плоскости  $\Pi_0$ , до ее пересечения с плоскостью  $\Phi_0$  в точке  $J_{90,0}$ , и до ее пересечения с плоскостью  $\Psi_0$  в точке  $K_{90,0}$ . Таким образом, мы получили прямую линию  $|J_{90,0}K_{90,0}|$ , перпендикулярную плоскости  $\Pi_0$ .

Из уравнений (6.1.2.2.6) и (6.1.2.3.6) видно, что они отличаются только значением коэффициента перед углом  $\alpha$ . Следовательно, и  $|J_{(90-\alpha),0}K_{(90-\alpha),0}|$  будет вычислена по той же формуле, подставив значение угла, равное  $(90 - \alpha)$ , тоесть:

$$|J_{(90-\alpha),0}K_{(90-\alpha),0}| = 2 \times \frac{R \times \sin(90 - \alpha)}{\cos \frac{\alpha}{2}} \times \tan \frac{\alpha}{2}, \quad (6.1.2.4.5)$$

Соединив точки  $J_{(90-\alpha),0}$  и  $J_{90,0}$ ,  $K_{(90-\alpha),0}$  и  $K_{90,0}$  между собой, получим трапецию  $J_{(90-\alpha),0}J_{90,0}K_{90,0}K_{(90-\alpha),0}$ . Так как каж-

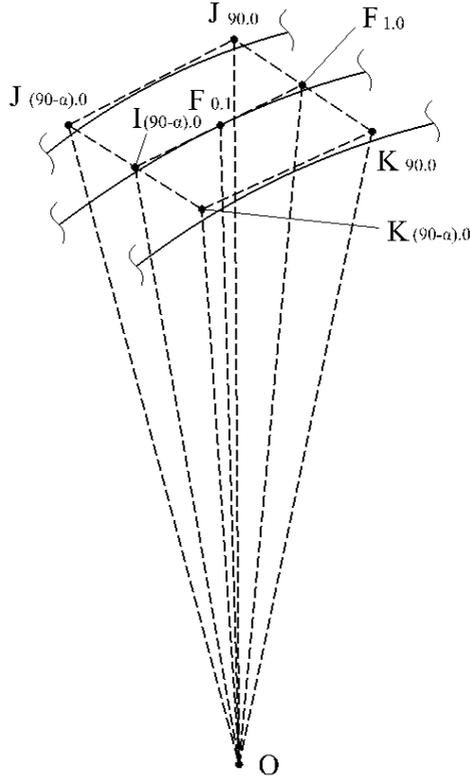


Рис.6.1.2.4.4.

дая из прямых линий  $|J_{90-\alpha}K_{90-\alpha}|$  и  $|J_{90,0}K_{90,0}|$  перпендикулярная плоскости  $\Pi_0$  (принято ранее), следовательно, в соответствии со **С.1.5** плоскость трапеции  $J_{(90-\alpha),0}J_{90,0}K_{90,0}K_{(90-\alpha),0}$  будет перпендикулярная плоскости  $\Pi_0$ .

Соединив точки  $O$  и  $J_{(90-\alpha),0}$ ,  $O$  и  $J_{90,0}$ ,  $O$  и  $K_{(90-\alpha),0}$ ,  $O$  и  $K_{90,0}$  между собой (Рис.6.1.2.4.4), получим пирамиду

$OJ_{(90-\alpha),0}J_{90,0}K_{90,0}K_{(90-\alpha),0}$  с основанием в виде трапеции  $J_{(90-\alpha),0}J_{90,0}K_{90,0}K_{(90-\alpha),0}$  и вершиной в точке  $O$ . При этом, основание пирамиды  $J_{(90-\alpha),0}J_{90,0}K_{90,0}K_{(90-\alpha),0}$  касается извне поверхности сферы в одной точке  $F_{0,1}$ .

Плоскость трапеции  $J_{(90-\alpha),0}J_{90,0}K_{90,0}K_{(90-\alpha),0}$  перпендикулярна плоскости  $\Pi_0$  (доказано ранее). Треугольник  $OI_{(90-\alpha),0}F_{1,0}$  лежит в плоскости  $\Pi_0$  (так как точки  $O$ ,  $I_{(90-\alpha),0}$  и  $F_{1,0}$  лежат в плоскости  $\Pi_0$ ). Следовательно, плоскость треугольника  $OI_{(90-\alpha),0}F_{1,0}$  перпендикулярна плоскости трапеции  $J_{(90-\alpha),0}J_{90,0}K_{90,0}K_{(90-\alpha),0}$ , а прямая линия  $|I_{(90-\alpha),0}F_{1,0}|$  является линией пересечения плоскостей трапеции  $J_{(90-\alpha),0}J_{90,0}K_{90,0}K_{(90-\alpha),0}$  и треугольника  $OI_{(90-\alpha),0}F_{1,0}$ .  $|I_{(90-\alpha),0}F_{1,0}| \perp |OF_{0,1}|$  (доказано ранее), следовательно, радиус  $|OF_{0,1}|$  перпендикулярен плоскости трапеции  $J_{(90-\alpha),0}J_{90,0}K_{90,0}K_{(90-\alpha),0}$  (основанию пирамиды), а, следовательно, радиус  $|OF_{0,1}|$  является высотой пирамиды  $OJ_{(90-\alpha),0}J_{90,0}K_{90,0}K_{(90-\alpha),0}$ .

Плоскость треугольника  $OJ_{90,0}K_{90,0}$  (Рис.6.1.2.4.5) пересекает поверхность сферы по дуге окружности  $\widehat{GH}$ .

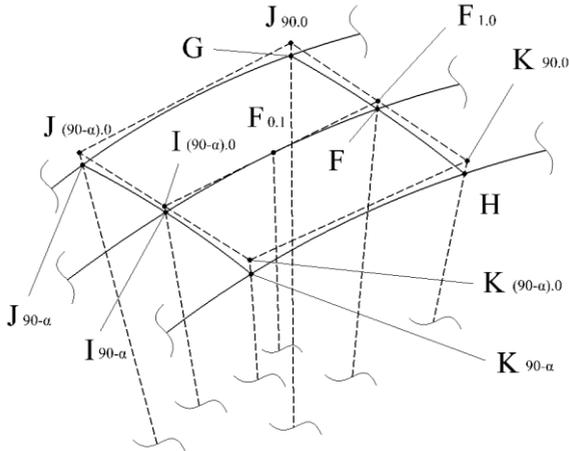


Рис.6.1.2.4.5.

Рассмотрим треугольник  $OJ_{90,0}K_{90,0}$  (Рис.6.1.2.4.6). Прямая линия  $|J_{90,0}K_{90,0}|$  перпендикулярна плоскости  $\Pi_0$  (принято ранее), а прямая линия  $|OF_{1,0}|$  лежит в плоскости  $\Pi_0$  (принято ранее). Следовательно,  $|J_{90,0}K_{90,0}| \perp |OF_{1,0}|$ , а, следовательно, треугольник  $OJ_{90,0}K_{90,0}$  является равнобедренным, у которого,  $|J_{90,0}F_{1,0}| = |F_{1,0}K_{90,0}|$ , угол  $J_{90,0}OK_{90,0} = \alpha$ , угол  $J_{90,0}OF_{1,0} = \frac{\alpha}{2}$ , угол  $K_{90,0}OF_{1,0} = \frac{\alpha}{2}$ , а угол  $OF_{1,0}J_{90,0}$  равен углу  $OF_{1,0}K_{90,0}$  и равен  $90^\circ$ . Следовательно, согласно **П.1.1** прямая линия  $|OF_{1,0}|$  является, одновременно, высотой, биссектрисой и медианой треугольника  $OJ_{90,0}K_{90,0}$ . Таким образом, треугольник  $OJ_{90,0}K_{90,0}$  является равнобедренным, и состоит из двух прямоугольных треугольников  $OF_{1,0}J_{90,0}$  и  $OF_{1,0}K_{90,0}$ , которые равны между собой.

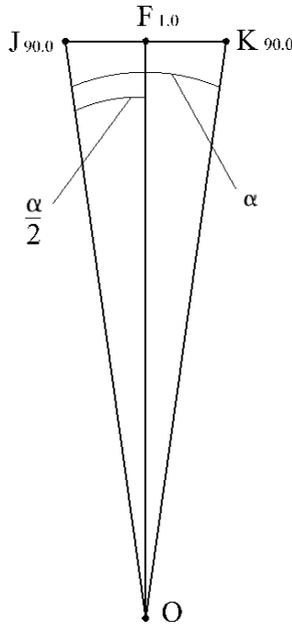


Рис.6.1.2.4.6.

Рассмотрим прямоугольный треугольник  $OF_{1.0}J_{90.0}$  (Рис.6.1.2.4.6), у которого известен катет  $|OF_{1.0}|$  (найден ранее) и прилежающий к нему угол  $F_{1.0}OJ_{90.0} = \frac{\alpha}{2}$ . Согласно **П.1.2** найдем его второй катет  $|F_{1.0}J_{90.0}|$ :

$$|F_{1.0}J_{90.0}| = |OF_{1.0}| \times \tan \frac{\alpha}{2} = \frac{R}{\cos \frac{\alpha}{2}} \times \tan \frac{\alpha}{2}, \quad (6.1.2.4.6)$$

Так как  $|J_{90.0}F_{1.0}| = |F_{1.0}K_{90.0}|$  (доказано ранее), то сторона  $|J_{90.0}K_{90.0}|$  треугольника  $OJ_{90.0}K_{90.0}$  будет равна:

$$\begin{aligned} |J_{90.0}K_{90.0}| &= |F_{1.0}J_{90.0}| + |F_{1.0}K_{90.0}| = 2 \times |F_{1.0}J_{90.0}| = \\ &= 2 \times \frac{R}{\cos \frac{\alpha}{2}} \times \tan \frac{\alpha}{2}, \quad (6.1.2.4.7) \end{aligned}$$

Рассмотрим трапецию  $J_{(90-\alpha).0}J_{90.0}K_{90.0}K_{(90-\alpha).0}$  (Рис.6.1.2.4.7). Ранее в этом параграфе была вычислена формула для прямой линии  $|J_{(90-\alpha).0}K_{(90-\alpha).0}|$ , которая перпендикулярна плоскости  $\Pi_0$  (принято ранее). Прямая линия  $|J_{90.0}K_{90.0}|$  перпендикулярна плоскости  $\Pi_0$  (принято ранее).

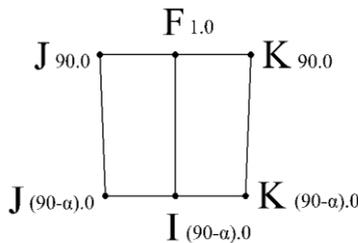


Рис.6.1.2.4.7.

$|I_{(90-\alpha).0}F_{1.0}|$  лежит в плоскости  $\Pi_0$  (доказано ранее). Следовательно, в соответствии со **С.1.6**

$|J_{(90-\alpha),0}K_{(90-\alpha),0}| \perp |I_{(90-\alpha),0}F_{1,0}|$  и  
 $|J_{90,0}K_{90,0}| \perp |I_{(90-\alpha),0}F_{1,0}|$ .  
 $|J_{(90-\alpha),0}I_{(90-\alpha),0}| = |I_{(90-\alpha),0}K_{(90-\alpha),0}|$  (доказано ранее),  
 $|J_{90,0}F_{1,0}| = |F_{1,0}K_{90,0}|$  (доказано ранее). А, следовательно,  
 $|I_{(90-\alpha),0}F_{1,0}|$  является высотой трапеции  
 $J_{(90-\alpha),0}J_{90,0}K_{90,0}K_{(90-\alpha),0}$ , у которой известны высота  
 $|I_{(90-\alpha),0}F_{1,0}|$  (найдена ранее) и две стороны  
 $|J_{(90-\alpha),0}K_{(90-\alpha),0}|$  и  $|J_{90,0}K_{90,0}|$  (найжены ранее).

Согласно **П.1.14** найдем площадь  $S_{J_{(90-\alpha),0}J_{90,0}K_{90,0}K_{(90-\alpha),0}}$  трапеции  $J_{(90-\alpha),0}J_{90,0}K_{90,0}K_{(90-\alpha),0}$  (которая является основанием пирамиды  $OJ_{(90-\alpha),0}J_{90,0}K_{90,0}K_{(90-\alpha),0}$ ):

$$\begin{aligned}
 S_{J_{(90-\alpha),0}J_{90,0}K_{90,0}K_{(90-\alpha),0}} &= \frac{(|J_{(90-\alpha),0}K_{(90-\alpha),0}| + |J_{90,0}K_{90,0}|)}{2} \times |I_{(90-\alpha),0}F_{1,0}| = \\
 &= \frac{\left( \left( 2 \times \frac{R \times \sin(90-\alpha)}{\cos \frac{\alpha}{2}} \times \tan \frac{\alpha}{2} \right) + \left( 2 \times \frac{R}{\cos \frac{\alpha}{2}} \times \tan \frac{\alpha}{2} \right) \right)}{2} \times 2 \times R \times \tan \frac{\alpha}{2} = \\
 &= 2 \times R^2 \times \left( \frac{\sin(90-\alpha) \times \tan \frac{\alpha}{2}}{\cos \frac{\alpha}{2}} + \frac{\tan \frac{\alpha}{2}}{\cos \frac{\alpha}{2}} \right) \times \tan \frac{\alpha}{2} = \\
 &= 2 \times R^2 \times \left( \frac{\sin(90-\alpha) + 1}{\cos \frac{\alpha}{2}} \right) \times \tan^2 \frac{\alpha}{2}, (6.1.2.4.8)
 \end{aligned}$$

Таким образом, чем меньше будет угол  $\alpha$ , тем меньше площадь трапеции  $J_{(90-\alpha),0}G_0H_0K_{(90-\alpha),0}$  будет отличаться от площади поверхности сферы, ограниченной дугами окружностей  $\widehat{J_{90-\alpha}G}$ ,  $\widehat{GH}$ ,  $\widehat{HK_{90-\alpha}}$  и  $\widehat{K_{90-\alpha}J_{90-\alpha}}$  (Рис.6.1.2.4.5).

### §6.1.2.5. Вычисление площади поверхности всей Сферы

Для того, чтобы вычислить площадь поверхности сферы (Рис.6.1.2.5.1), ограниченной дугами окружностей  $\widehat{DG}$ ,  $\widehat{GH}$ , и  $\widehat{HD}$ , необходимо суммировать уравнения (6.1.2.1.7), (6.1.2.2.7) (предварительно представив его в виде суммы площадей оснований пирамид, начиная со второй и заканчивая предпоследней) и (6.1.2.4.8).

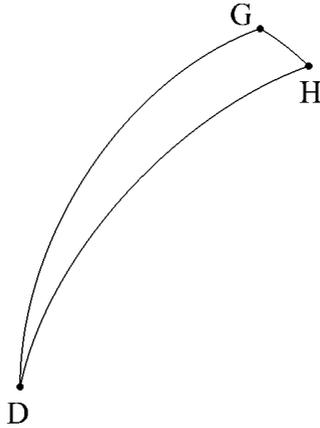


Рис.6.1.2.5.1.

На самом деле будет вычислена не площадь фрагмента сферической поверхности, а площадь фрагмента описанной (Рис.6.1.1.5.2), около сферы извне многогранной поверхности, так как вычислять площади криволинейных поверхностей мы не умеем.

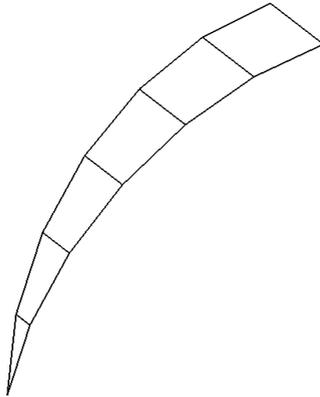


Рис.6.1.2.5.2.

Умножив полученное значение на два (так как плоскость  $\Sigma_0$  делит фрагмент сферической поверхности, ограниченный дугами окружностей  $\widehat{DGE}$  и  $\widehat{DHE}$ , на две равные части), получим площадь поверхности сферы, ограниченной дугами окружностей  $\widehat{DGE}$  и  $\widehat{DHE}$  (Рис.6.1.2.5.3).

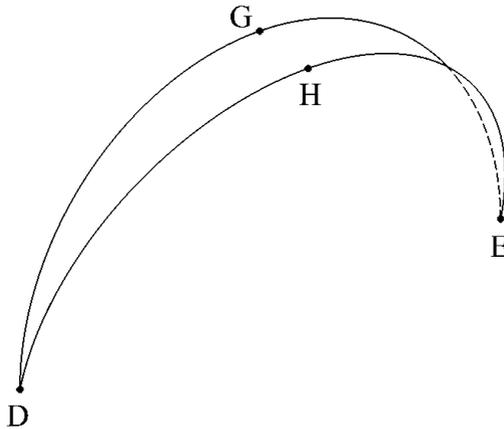


Рис.6.1.2.5.3.

На самом деле будет вычислена не площадь фрагмента сферической поверхности, а площадь фрагмента описанной (Рис.6.1.2.5.4) около сферы извне многогранной поверхности, так как вычислять площади криволинейных поверхностей мы не умеем.

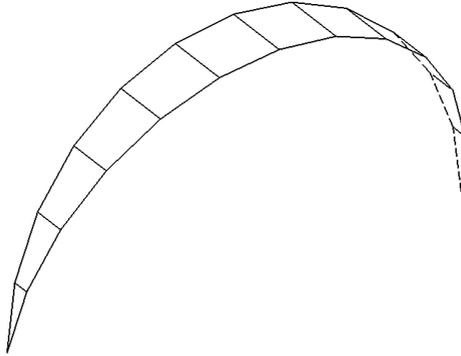


Рис.6.1.2.5.4.

А умножив это значение на число таких участков, укладываемых на поверхности всей сферы, то есть, на  $\frac{360}{\alpha}$ , получим (Рис.6.1.2.5.5) площадь поверхности всей сферы  $S_{\text{сф.о}}$

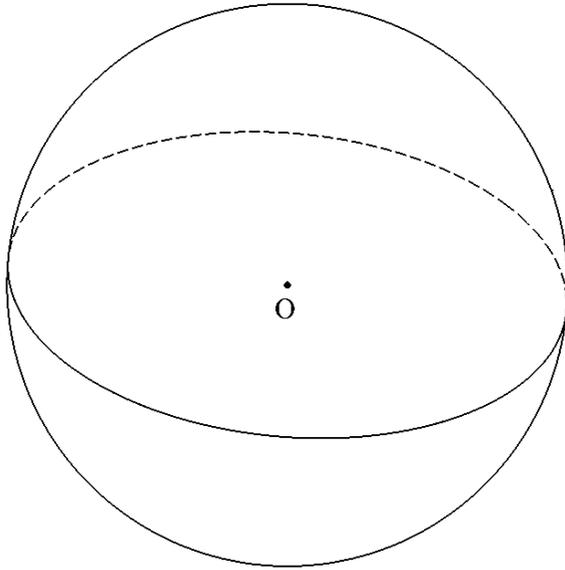


Рис.6.1.2.5.5.

Таким образом, площадь поверхности сферы  $S_{\text{сф.о}}$  будет равна:

$$\begin{aligned}
 S_{\text{сф.о}} &= \left( \left( 2 \times R^2 \times \frac{\sin \alpha \times \tan^2 \frac{\alpha}{2}}{\cos \frac{\alpha}{2}} \right) + \right. \\
 &+ \sum_{i=2\alpha}^{i=\frac{90}{\alpha}-\alpha} \left( 2 \times R^2 \times \left( \frac{\sin(i-\alpha) + \sin i}{\cos \frac{\alpha}{2}} \right) \times \tan^2 \frac{\alpha}{2} \right) + \\
 &\left. + 2 \times R^2 \times \left( \frac{\sin(90-\alpha) + 1}{\cos \frac{\alpha}{2}} \right) \times \tan^2 \frac{\alpha}{2} \right) \times 2 \times \frac{360}{\alpha} =
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \left( \left( 2 \times R^2 \times \frac{\sin \alpha}{\cos \frac{\alpha}{2}} \right) + \sum_{i=2\alpha}^{i=\frac{90}{\alpha}-\alpha} \left( 2 \times R^2 \times \left( \frac{\sin(i-\alpha) + \sin i}{\cos \frac{\alpha}{2}} \right) \right) \right) + \\
&\quad + 2 \times R^2 \times \left( \frac{\sin(90-\alpha) + 1}{\cos \frac{\alpha}{2}} \right) \times \tan^2 \frac{\alpha}{2} \times 2 \times \frac{360}{\alpha} = \\
&= 4 \times R^2 \times \pi_{\text{пл.пов.сф.о}}, \quad (6.1.2.5.1)
\end{aligned}$$

Где,

$\pi_{\text{пл.пов.сф.о}}$  – коэффициент, стоящий в формуле для вычисления площади поверхности сферы.

$$\begin{aligned}
\pi_{\text{пл.пов.сф.о}} &= \left( \left( \frac{\sin \alpha}{\cos \frac{\alpha}{2}} \right) + \sum_{i=2\alpha}^{i=\frac{90}{\alpha}-\alpha} \left( \frac{\sin(i-\alpha) + \sin i}{\cos \frac{\alpha}{2}} \right) \right) + \\
&\quad + \left( \frac{\sin(90-\alpha) + 1}{\cos \frac{\alpha}{2}} \right) \times \tan^2 \frac{\alpha}{2} \times \frac{360}{\alpha}, \quad (6.1.2.5.2)
\end{aligned}$$

На самом деле по формуле (6.1.2.5.1) будет вычислена не площадь поверхности сферы, а площадь описанной около сферы извне поверхности сферообразного многогранника (Рис.6.1.2.5.6), так как вычислять площади криволинейных поверхностей мы не умеем.

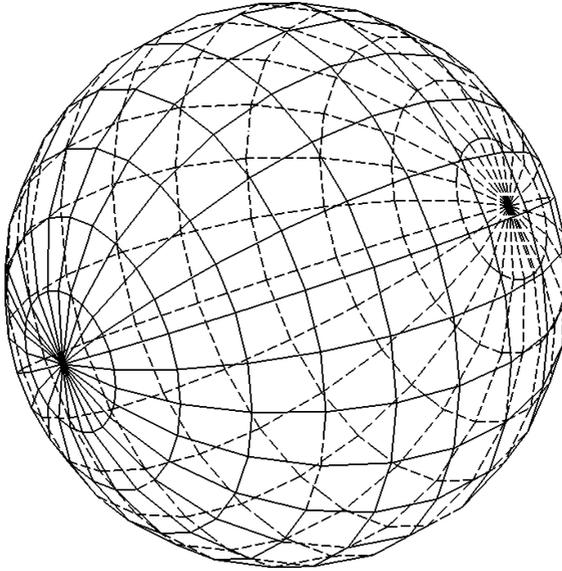


Рис.6.1.2.5.6.

### §6.1.3. Результирующий Метод

При использовании метода вписанного многогранника в §6.1.1 была найдена формула (6.1.1.5.1) для вычисления полной площади поверхности сферы  $S_{\text{сф.в}}$ , имеющая вид:

$$S_{\text{нов.сф.в}} = \left( \frac{\left( R^2 \times \sin \alpha \times \tan \frac{\alpha}{2} \times \sqrt{2 - \frac{\sin^2 \alpha \times \tan^2 \frac{\alpha}{2}}{1 + \sin^2 \alpha \times \tan^2 \frac{\alpha}{2}} - 2 \times \cos \alpha \times \sqrt{1 - \frac{\sin^2 \alpha \times \tan^2 \frac{\alpha}{2}}{1 + \sin^2 \alpha \times \tan^2 \frac{\alpha}{2}}}} \right)}{\sqrt{1 + \sin^2 \alpha \times \tan^2 \frac{\alpha}{2}}} \right) +$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{i=2\alpha}^{i=90-\alpha} \left( R^2 \times \left( \frac{\sin(i-\alpha) \times \tan \frac{\alpha}{2}}{\sqrt{1 + \sin^2(i-\alpha) \times \tan^2 \frac{\alpha}{2}}} + \frac{\sin i \times \tan \frac{\alpha}{2}}{\sqrt{1 + \sin^2 i \times \tan^2 \frac{\alpha}{2}}} \right) \times \right. \\
& \times \sqrt{\left( 1 - \frac{\sin^2(i-\alpha) \times \tan^2 \frac{\alpha}{2}}{1 + \sin^2(i-\alpha) \times \tan^2 \frac{\alpha}{2}} \right) + \left( 1 - \frac{\sin^2 i \times \tan^2 \frac{\alpha}{2}}{1 + \sin^2 i \times \tan^2 \frac{\alpha}{2}} \right) -} \\
& \left. - 2 \times \cos \alpha \times \sqrt{1 - \frac{\sin^2(i-\alpha) \times \tan^2 \frac{\alpha}{2}}{1 + \sin^2(i-\alpha) \times \tan^2 \frac{\alpha}{2}}} \times \sqrt{1 - \frac{\sin^2 i \times \tan^2 \frac{\alpha}{2}}{1 + \sin^2 i \times \tan^2 \frac{\alpha}{2}}} \right) + \\
& + R^2 \times \left( \frac{\sin(90-\alpha) \times \tan \frac{\alpha}{2}}{\sqrt{1 + \sin^2(90-\alpha) \times \tan^2 \frac{\alpha}{2}}} + \sin \frac{\alpha}{2} \right) \times \\
& \times \sqrt{\left( 1 - \frac{\sin^2(90-\alpha) \times \tan^2 \frac{\alpha}{2}}{1 + \sin^2(90-\alpha) \times \tan^2 \frac{\alpha}{2}} \right) + \cos^2 \frac{\alpha}{2} -} \\
& \left. - 2 \times \cos \alpha \times \cos \frac{\alpha}{2} \times \sqrt{1 - \frac{\sin^2(90-\alpha) \times \tan^2 \frac{\alpha}{2}}{1 + \sin^2(90-\alpha) \times \tan^2 \frac{\alpha}{2}}} \right) \times 2 \times \frac{360}{\alpha}, (6.1.3.1)
\end{aligned}$$

Формула (6.1.3.1) является нижней границей для вычисления значения площади поверхности сферы.

При использовании метода описанного многогранника в §6.1.2 была найдена формула (6.1.2.5.1) для вычисления полной площади поверхности сферы  $S_{\text{пов.сф.о}}$ , имеющая вид:

$$\begin{aligned}
 S_{\text{сф.о}} = & \left( \left( 2 \times R^2 \times \frac{\sin \alpha}{\cos \frac{\alpha}{2}} \right) + \right. \\
 & + \sum_{i=2\alpha}^{i=\frac{90}{\alpha}-\alpha} \left( 2 \times R^2 \times \left( \frac{\sin(i-\alpha) + \sin i}{\cos \frac{\alpha}{2}} \right) \right) + \\
 & \left. + 2 \times R^2 \times \left( \frac{\sin(90-\alpha) + 1}{\cos \frac{\alpha}{2}} \right) \right) \times \tan^2 \frac{\alpha}{2} \times 2 \times \frac{360}{\alpha}, \quad (6.1.3.2)
 \end{aligned}$$

Формула (6.1.3.2) является верхней границей для вычисления значения площади поверхности сферы.

Искомая полная площадь поверхности сферы находится между вышеуказанными нижней и верхней границами. Поэтому, результирующая формула для вычисления полной площади поверхности сферы  $S_{\text{пов.сф.р}}$  будет представлять среднеарифметическое от формул (6.1.3.1) и (6.1.3.2) вида:

$$\begin{aligned}
 S_{\text{пов.сф.р}} = & \frac{S_{\text{пов.сф.в}} + S_{\text{пов.сф.о}}}{2} = \frac{1}{2} \times \\
 & \times \left( \left( \left( \left( R^2 \times \sin \alpha \times \tan \frac{\alpha}{2} \times \sqrt{2 - \frac{\sin^2 \alpha \times \tan^2 \frac{\alpha}{2}}{1 + \sin^2 \alpha \times \tan^2 \frac{\alpha}{2}} - 2 \times \cos \alpha \times \sqrt{1 - \frac{\sin^2 \alpha \times \tan^2 \frac{\alpha}{2}}{1 + \sin^2 \alpha \times \tan^2 \frac{\alpha}{2}}}} \right)}{\sqrt{1 + \sin^2 \alpha \times \tan^2 \frac{\alpha}{2}}} \right) + \right. \\
 & \left. + \sum_{i=2\alpha}^{i=\frac{90}{\alpha}-\alpha} \left( R^2 \times \left( \frac{\sin(i-\alpha) \times \tan \frac{\alpha}{2}}{\sqrt{1 + \sin^2(i-\alpha) \times \tan^2 \frac{\alpha}{2}}} + \frac{\sin i \times \tan \frac{\alpha}{2}}{\sqrt{1 + \sin^2 i \times \tan^2 \frac{\alpha}{2}}} \right) \right) \times \right.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times \left( \sqrt{1 - \frac{\sin^2(i - \alpha) \times \tan^2 \frac{\alpha}{2}}{1 + \sin^2(i - \alpha) \times \tan^2 \frac{\alpha}{2}}} + \left( 1 - \frac{\sin^2 i \times \tan^2 \frac{\alpha}{2}}{1 + \sin^2 i \times \tan^2 \frac{\alpha}{2}} \right) - \right. \\
& - 2 \times \cos \alpha \times \left. \sqrt{1 - \frac{\sin^2(i - \alpha) \times \tan^2 \frac{\alpha}{2}}{1 + \sin^2(i - \alpha) \times \tan^2 \frac{\alpha}{2}}} \times \sqrt{1 - \frac{\sin^2 i \times \tan^2 \frac{\alpha}{2}}{1 + \sin^2 i \times \tan^2 \frac{\alpha}{2}}} \right) + \\
& + R^2 \times \left( \frac{\sin(90 - \alpha) \times \tan \frac{\alpha}{2}}{\sqrt{1 + \sin^2(90 - \alpha) \times \tan^2 \frac{\alpha}{2}}} + \sin \frac{\alpha}{2} \right) \times \\
& \times \left( \sqrt{1 - \frac{\sin^2(90 - \alpha) \times \tan^2 \frac{\alpha}{2}}{1 + \sin^2(90 - \alpha) \times \tan^2 \frac{\alpha}{2}}} + \cos^2 \frac{\alpha}{2} - \right. \\
& \left. - 2 \times \cos \alpha \times \cos \frac{\alpha}{2} \times \sqrt{1 - \frac{\sin^2(90 - \alpha) \times \tan^2 \frac{\alpha}{2}}{1 + \sin^2(90 - \alpha) \times \tan^2 \frac{\alpha}{2}}} \right) \times 2 \times \frac{360}{\alpha} + \\
& + \left( \left( \left( 2 \times R^2 \times \frac{\sin \alpha}{\cos \frac{\alpha}{2}} \right) + \sum_{i=2\alpha}^{\frac{90}{\alpha} - \alpha} \left( 2 \times R^2 \times \left( \frac{\sin(i - \alpha) + \sin i}{\cos \frac{\alpha}{2}} \right) \right) \right) + \right. \\
& \left. + 2 \times R^2 \times \left( \frac{\sin(90 - \alpha) + 1}{\cos \frac{\alpha}{2}} \right) \right) \times \tan^2 \frac{\alpha}{2} \times 2 \times \frac{360}{\alpha} \Bigg) =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= R^2 \times \frac{360}{\alpha} \times \left( \left( \left( \left( \sin \alpha \times \tan \frac{\alpha}{2} \times \sqrt{2 - \frac{\sin^2 \alpha \times \tan^2 \frac{\alpha}{2}}{1 + \sin^2 \alpha \times \tan^2 \frac{\alpha}{2}} - 2 \times \cos \alpha \times \sqrt{1 - \frac{\sin^2 \alpha \times \tan^2 \frac{\alpha}{2}}{1 + \sin^2 \alpha \times \tan^2 \frac{\alpha}{2}}}} \right)} \right) \right) \right) + \\
&\quad + \sum_{i=2\alpha}^{\frac{90}{\alpha} - \alpha} \left( \left( \left( \frac{\sin(i - \alpha) \times \tan \frac{\alpha}{2}}{\sqrt{1 + \sin^2(i - \alpha) \times \tan^2 \frac{\alpha}{2}}} + \frac{\sin i \times \tan \frac{\alpha}{2}}{\sqrt{1 + \sin^2 i \times \tan^2 \frac{\alpha}{2}}} \right) \times \right. \right. \\
&\quad \times \left. \left( \left( 1 - \frac{\sin^2(i - \alpha) \times \tan^2 \frac{\alpha}{2}}{1 + \sin^2(i - \alpha) \times \tan^2 \frac{\alpha}{2}} \right) + \left( 1 - \frac{\sin^2 i \times \tan^2 \frac{\alpha}{2}}{1 + \sin^2 i \times \tan^2 \frac{\alpha}{2}} \right) - \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - 2 \times \cos \alpha \times \sqrt{1 - \frac{\sin^2(i - \alpha) \times \tan^2 \frac{\alpha}{2}}{1 + \sin^2(i - \alpha) \times \tan^2 \frac{\alpha}{2}}} \times \sqrt{1 - \frac{\sin^2 i \times \tan^2 \frac{\alpha}{2}}{1 + \sin^2 i \times \tan^2 \frac{\alpha}{2}}} \right) \right) + \\
&\quad + \left( \frac{\sin(90 - \alpha) \times \tan \frac{\alpha}{2}}{\sqrt{1 + \sin^2(90 - \alpha) \times \tan^2 \frac{\alpha}{2}}} + \sin \frac{\alpha}{2} \right) \times \\
&\quad \times \sqrt{\left( 1 - \frac{\sin^2(90 - \alpha) \times \tan^2 \frac{\alpha}{2}}{1 + \sin^2(90 - \alpha) \times \tan^2 \frac{\alpha}{2}} \right) + \cos^2 \frac{\alpha}{2} - } \\
&\quad \left. \left. - 2 \times \cos \alpha \times \cos \frac{\alpha}{2} \times \sqrt{1 - \frac{\sin^2(90 - \alpha) \times \tan^2 \frac{\alpha}{2}}{1 + \sin^2(90 - \alpha) \times \tan^2 \frac{\alpha}{2}}} \right) \right) + \\
&\quad + \left( \left( \left( 2 \times \frac{\sin \alpha}{\cos \frac{\alpha}{2}} \right) + \sum_{i=2\alpha}^{\frac{90}{\alpha} - \alpha} \left( 2 \times \left( \frac{\sin(i - \alpha) + \sin i}{\cos \frac{\alpha}{2}} \right) \right) \right) \right) +
\end{aligned}$$

$$\left. + 2 \times \left( \frac{\sin(90 - \alpha) + 1}{\cos \frac{\alpha}{2}} \right) \times \tan^2 \frac{\alpha}{2} \right) = 4 \times R^2 \times \pi_{\text{пл.пов.сф.р}} \quad (6.1.3.3)$$

Где,

$\pi_{\text{пл.пов.сф.р}}$  – коэффициент, стоящий в формуле для вычисления площади поверхности сферы.

$$\pi_{\text{пл.пов.сф.р}} = \frac{90}{\alpha} \times$$

$$\times \left( \left( \left( \left( \sin \alpha \times \tan \frac{\alpha}{2} \times \sqrt{2 + \frac{\sin^2 \alpha \times \tan^2 \frac{\alpha}{2}}{1 + \sin^2 \alpha \times \tan^2 \frac{\alpha}{2}} - 2 \times \cos \alpha \times \sqrt{1 - \frac{\sin^2 \alpha \times \tan^2 \frac{\alpha}{2}}{1 + \sin^2 \alpha \times \tan^2 \frac{\alpha}{2}}}} \right)} \right) \right) +$$

$$+ \sum_{i=2\alpha}^{\frac{90}{\alpha} - \alpha} \left( \left( \frac{\sin(i - \alpha) \times \tan \frac{\alpha}{2}}{\sqrt{1 + \sin^2(i - \alpha) \times \tan^2 \frac{\alpha}{2}}} + \frac{\sin i \times \tan \frac{\alpha}{2}}{\sqrt{1 + \sin^2 i \times \tan^2 \frac{\alpha}{2}}} \right) \times \right.$$

$$\times \left( \left( 1 - \frac{\sin^2(i - \alpha) \times \tan^2 \frac{\alpha}{2}}{1 + \sin^2(i - \alpha) \times \tan^2 \frac{\alpha}{2}} \right) + \left( 1 - \frac{\sin^2 i \times \tan^2 \frac{\alpha}{2}}{1 + \sin^2 i \times \tan^2 \frac{\alpha}{2}} \right) - \right.$$

$$\left. \left. - 2 \times \cos \alpha \times \sqrt{1 - \frac{\sin^2(i - \alpha) \times \tan^2 \frac{\alpha}{2}}{1 + \sin^2(i - \alpha) \times \tan^2 \frac{\alpha}{2}}} \times \sqrt{1 - \frac{\sin^2 i \times \tan^2 \frac{\alpha}{2}}{1 + \sin^2 i \times \tan^2 \frac{\alpha}{2}}} \right) \right) +$$

$$\begin{aligned}
& + \left( \frac{\sin(90 - \alpha) \times \tan \frac{\alpha}{2}}{\sqrt{1 + \sin^2(90 - \alpha) \times \tan^2 \frac{\alpha}{2}}} + \sin \frac{\alpha}{2} \right) \times \\
& \times \sqrt{\left( 1 - \frac{\sin^2(90 - \alpha) \times \tan^2 \frac{\alpha}{2}}{1 + \sin^2(90 - \alpha) \times \tan^2 \frac{\alpha}{2}} \right) + \cos^2 \frac{\alpha}{2} -} \\
& \left. \begin{aligned}
& - 2 \times \cos \alpha \times \cos \frac{\alpha}{2} \times \sqrt{1 - \frac{\sin^2(90 - \alpha) \times \tan^2 \frac{\alpha}{2}}{1 + \sin^2(90 - \alpha) \times \tan^2 \frac{\alpha}{2}}} + \\
& \left. \left( \left( 2 \times \frac{\sin \alpha}{\cos \frac{\alpha}{2}} \right) + \sum_{i=2\alpha}^{i=\frac{90}{\alpha}-\alpha} \left( 2 \times \left( \frac{\sin(i - \alpha) + \sin i}{\cos \frac{\alpha}{2}} \right) \right) \right) + \right. \\
& \left. \left. + 2 \times \left( \frac{\sin(90 - \alpha) + 1}{\cos \frac{\alpha}{2}} \right) \right) \times \tan^2 \frac{\alpha}{2} \right), (6.1.3.4)
\end{aligned}
\right)
\end{aligned}$$

По формуле (6.1.3.3) вычисляется, на самом деле, не площадь поверхности некоей среднеарифметической сферы (Рис.6.1.3.1), а площадь некоего среднеарифметического сферообразного многогранника (Рис.6.1.3.2), так как точно вычислять площади криволинейных поверхностей

(каковой, в частности, является поверхность сферы), мы не умеем.

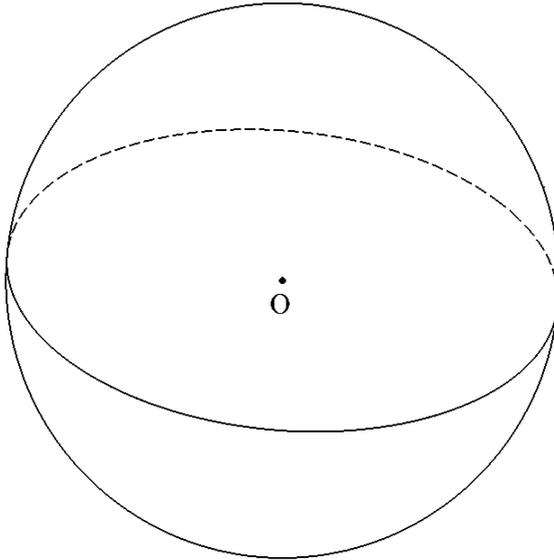


Рис.6.1.3.1.

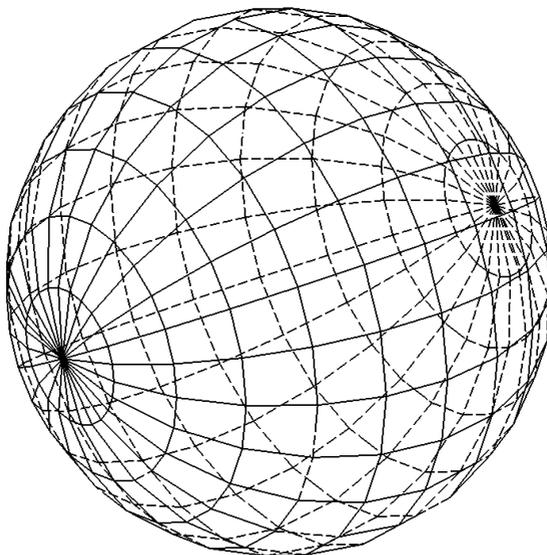


Рис.6.1.3.2.

Вычисленная по формуле (6.1.3.3) площадь поверхности ближе по величине к площади поверхности сферы, по сравнению с площадями поверхности сферы, вычисленными по формулам, (6.1.3.1) по методу вписанного многогранника, и (6.1.3.2) по методу описанного многогранника.

## §6.2. Вычисление объема Шара

### §6.2.1. Метод вписанного многогранника

#### §6.2.1.1. Вычисление объема первой пирамиды

На Рис.6.2.1.1.1 показана пирамида  $ODJ_1K_1$  с основанием в виде треугольника  $DJ_1K_1$  и вершиной в точке  $O$  (построенная в §6.1.1.1). Опустим из точки  $O$  перпендикуляр  $|OS_1|$  на плоскость треугольника  $DJ_1K_1$  (на основание пирамиды).

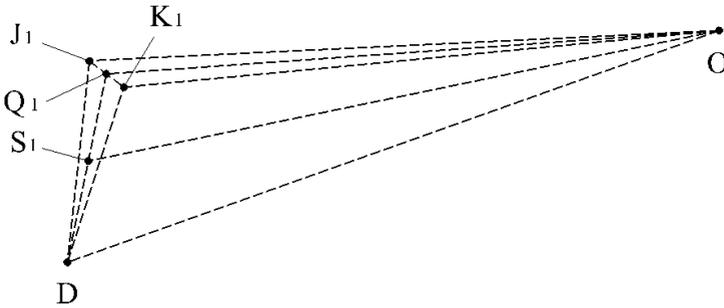


Рис.6.2.1.1.1.

Так как  $|J_1K_1|$  перпендикулярна плоскости  $\Pi_0$  (доказано ранее в §6.1.1.1), то в соответствии с **П.1.5** плоскость треугольника  $DJ_1K_1$  перпендикулярна плоскости  $\Pi_0$ . Так как точка  $O$  лежит в плоскости  $\Pi_0$  (начальное условие), то в соответствии со **С.1.5** перпендикуляр  $|OS_1|$  будет лежать в плоскости  $\Pi_0$ . Но точка  $S_1$ , одновременно, должна лежать и в плоскости  $\Pi_0$  и в плоскости треугольника  $DJ_1K_1$ , то есть, на прямой  $|DQ_1|$ , являющейся линией пересечения этих плоскостей.

Рассмотрим треугольник  $ODQ_1$  (Рис.6.2.1.1.2), у которого известны две стороны,  $|OD| = R$  (начальное условие) и  $|OQ_1|$  (найдена ранее в §6.1.1.1), и угол между ними

$\angle DOQ_1 = \alpha$  (так как угол  $\angle DOQ_1$  равен углу  $\angle DOI_1 = \alpha$ , в силу того, что  $|OQ_1|$  лежит на радиусе  $|OI_1|$ ).

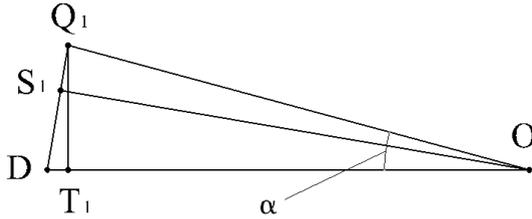


Рис.6.2.1.1.2.

Опустим из точки  $Q_1$  перпендикуляр  $|Q_1T_1|$  на сторону  $|OD|$ .  $|Q_1T_1|$  согласно **П.1.2** будет равна:

$$\begin{aligned} |Q_1T_1| &= |OQ_1| \times \sin \alpha = \\ &= \left( R \times \sqrt{1 - \frac{\sin^2 \alpha \times \tan^2 \frac{\alpha}{2}}{1 + \sin^2 \alpha \times \tan^2 \frac{\alpha}{2}}} \right) \times \\ &\times \sin \alpha, \quad (6.2.1.1.1) \end{aligned}$$

Площадь треугольника  $ODQ_1$  (Рис. 6.2.1.1.2), у которого ранее найдена высота  $|Q_1T_1|$  и известна сторона  $|OD| = R$  (начальное условие), согласно **П.1.3** равна:

$$\begin{aligned} S_{ODQ_1} &= \frac{1}{2} \times |OD| \times |Q_1T_1| = \\ &= \frac{1}{2} \times R \times \left( R \times \sqrt{1 - \frac{\sin^2 \alpha \times \tan^2 \frac{\alpha}{2}}{1 + \sin^2 \alpha \times \tan^2 \frac{\alpha}{2}}} \right) \times \\ &\times \sin \alpha = \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2} \times R^2 \times \sqrt{1 - \frac{\sin^2 \alpha \times \tan^2 \frac{\alpha}{2}}{1 + \sin^2 \alpha \times \tan^2 \frac{\alpha}{2}}} \times \sin \alpha, \quad (6.2.1.1.2)$$

$|DQ_1|$  (найдена ранее в §6.1.1.1) лежит в плоскости треугольника  $DJ_1K_1$  (так как  $|DQ_1|$  является высотой треугольника  $DJ_1K_1$ , и которая перпендикулярна плоскости  $\Pi_0$  (доказано ранее в §6.1.1.1)).  $|OS_1|$  лежит в плоскости  $\Pi_0$ , следовательно, в соответствии со **С.1.6**  $|OS_1| \perp |DQ_1|$ . С другой стороны площадь треугольника  $ODQ_1$  согласно **П.1.3** равна:

$$S_{ODQ_1} = \frac{1}{2} \times |DQ_1| \times |OS_1|, \quad (6.2.1.1.3)$$

Откуда определим величину перпендикуляра  $|OS_1|$ :

$$\begin{aligned}
 |OS_1| &= \frac{2 \times S_{ODQ_1}}{|DQ_1|} = \frac{2 \times \left( \frac{1}{2} \times R^2 \times \sqrt{1 - \frac{\sin^2 \alpha \times \tan^2 \frac{\alpha}{2}}{1 + \sin^2 \alpha \times \tan^2 \frac{\alpha}{2}} \times \sin \alpha} \right)}{R \times \sqrt{2 - \frac{\sin^2 \alpha \times \tan^2 \frac{\alpha}{2}}{1 + \sin^2 \alpha \times \tan^2 \frac{\alpha}{2}} - 2 \times \cos \alpha \times \sqrt{1 - \frac{\sin^2 \alpha \times \tan^2 \frac{\alpha}{2}}{1 + \sin^2 \alpha \times \tan^2 \frac{\alpha}{2}}}} \\
 &= \frac{R \times \sqrt{1 - \frac{\sin^2 \alpha \times \tan^2 \frac{\alpha}{2}}{1 + \sin^2 \alpha \times \tan^2 \frac{\alpha}{2}} \times \sin \alpha}}{2 - \frac{\sin^2 \alpha \times \tan^2 \frac{\alpha}{2}}{1 + \sin^2 \alpha \times \tan^2 \frac{\alpha}{2}} - 2 \times \cos \alpha \times \sqrt{1 - \frac{\sin^2 \alpha \times \tan^2 \frac{\alpha}{2}}{1 + \sin^2 \alpha \times \tan^2 \frac{\alpha}{2}}}} \quad , (6.2.1.1.4)
 \end{aligned}$$

Ранее в §6.1.1.1 была найдена площадь основания пирамиды  $S_{DJ_1K_1}$ . Объем пирамиды  $ODJ_1K_1$  (Рис.6.2.1.1.1) согласно **П.1.13** будет равен:

$$\begin{aligned}
 V_{ODJ_1K_1} &= \frac{1}{3} \times S_{DJ_1K_1} \times |OS_1| = \\
 &= \frac{1}{3} \times \left( R^2 \times \sin \alpha \times \tan \frac{\alpha}{2} \times \sqrt{2 - \frac{\sin^2 \alpha \times \tan^2 \frac{\alpha}{2}}{1 + \sin^2 \alpha \times \tan^2 \frac{\alpha}{2}} - 2 \times \cos \alpha \times \sqrt{1 - \frac{\sin^2 \alpha \times \tan^2 \frac{\alpha}{2}}{1 + \sin^2 \alpha \times \tan^2 \frac{\alpha}{2}}}} \right) \times \\
 &= \left( R \times \sqrt{1 - \frac{\sin^2 \alpha \times \tan^2 \frac{\alpha}{2}}{1 + \sin^2 \alpha \times \tan^2 \frac{\alpha}{2}}} \times \sin \alpha \right) \times \\
 &= \left( 2 - \frac{\sin^2 \alpha \times \tan^2 \frac{\alpha}{2}}{1 + \sin^2 \alpha \times \tan^2 \frac{\alpha}{2}} - 2 \times \cos \alpha \times \sqrt{1 - \frac{\sin^2 \alpha \times \tan^2 \frac{\alpha}{2}}{1 + \sin^2 \alpha \times \tan^2 \frac{\alpha}{2}}} \right)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{3} \times R^3 \times \left( \sin \alpha \times \tan \frac{\alpha}{2} \times \sqrt{2 - \frac{\sin^2 \alpha \times \tan^2 \frac{\alpha}{2}}{1 + \sin^2 \alpha \times \tan^2 \frac{\alpha}{2}} - 2 \times \cos \alpha \times \sqrt{1 - \frac{\sin^2 \alpha \times \tan^2 \frac{\alpha}{2}}{1 + \sin^2 \alpha \times \tan^2 \frac{\alpha}{2}}}} \right) \times \\
 &\quad \sqrt{1 + \sin^2 \alpha \times \tan^2 \frac{\alpha}{2}}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &\times \left( \frac{1 - \frac{\sin^2 \alpha \times \tan^2 \frac{\alpha}{2}}{1 + \sin^2 \alpha \times \tan^2 \frac{\alpha}{2}} \times \sin \alpha}{2 - \frac{\sin^2 \alpha \times \tan^2 \frac{\alpha}{2}}{1 + \sin^2 \alpha \times \tan^2 \frac{\alpha}{2}} - 2 \times \cos \alpha \times \sqrt{1 - \frac{\sin^2 \alpha \times \tan^2 \frac{\alpha}{2}}{1 + \sin^2 \alpha \times \tan^2 \frac{\alpha}{2}}}} \right) \\
 &\quad , (6.2.1.1.5)
 \end{aligned}$$

Таким образом, чем меньше будет угол  $\alpha$ , тем меньше объем пирамиды  $ODJ_1K_1$  с основанием в виде треугольника  $DJ_1K_1$  будет отличаться от объема шарового сектора  $ODJ_1K_1$  с основанием в виде участка поверхности сферы, ограниченного дугами  $\widehat{DJ_1}$ ,  $\widehat{J_1K_1}$  и  $\widehat{K_1D}$ .

### §6.2.1.2. Вычисление объема второй пирамиды

На Рис.6.2.1.2.1 показана пирамида  $OJ_1J_2K_2K_1$  с основанием в виде трапеции  $J_1J_2K_2K_1$  и вершиной в точке  $O$  (построенная в §6.1.1.2).

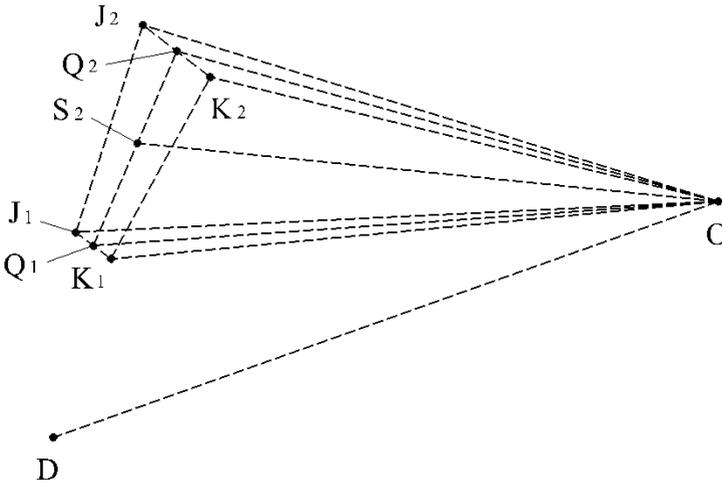


Рис.6.2.1.2.1.

Опустим из вершины точки  $O$  перпендикуляр  $|OS_2|$  на основание пирамиды  $J_1J_2K_2K_1$ . Так как  $|J_2K_2|$  перпендикулярна плоскости  $\Pi_0$  (доказано ранее в §6.1.1.2), то в соответствии с **П.1.5** плоскость основания пирамиды  $J_1J_2K_2K_1$  перпендикулярна плоскости  $\Pi_0$ . Но точка  $O$  лежит в плос-

кости  $\Pi_0$  (начальное условие), следовательно, в соответствии со **С.1.5** перпендикуляр  $|OS_2|$  будет лежать в плоскости  $\Pi_0$ . Но точка  $S_2$ , одновременно, должна лежать и в плоскости  $\Pi_0$  и в плоскости основания пирамиды  $J_1J_2K_2K_1$ , то есть, на прямой  $|Q_1Q_2|$ , являющейся линией пересечения этих плоскостей.

Рассмотрим треугольник  $OQ_1Q_2$  (Рис.6.2.1.2.2), у которого известны стороны,  $|OQ_1|$  (найдена ранее в §6.1.1.1) и  $|OQ_2|$  (найдена ранее в §6.1.1.2), и угол  $Q_1OQ_2 = \alpha$  (доказано ранее). Опустим из точки  $Q_2$  перпендикуляр  $|Q_2T_2|$

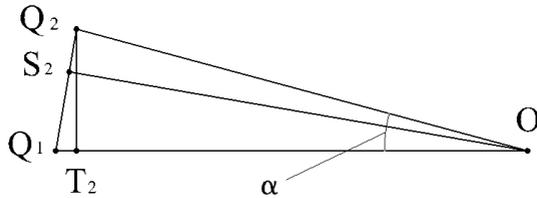


Рис.6.2.1.2.2.

на сторону  $|OQ_1|$ . Согласно **П.1.2**  $|Q_2T_2|$  будет равна:

$$|Q_2T_2| = |OQ_2| \times \sin \alpha =$$

$$= \left( R \times \sqrt{1 - \frac{\sin^2 2\alpha \times \tan^2 \frac{\alpha}{2}}{1 + \sin^2 2\alpha \times \tan^2 \frac{\alpha}{2}}} \right) \times \sin \alpha, \quad (6.2.1.2.1)$$

Площадь треугольника  $OQ_1Q_2$  (Рис.6.2.1.2.2), у которого известны  $|OQ_1|$  (найдена ранее в §6.1.1.1) и высота  $|Q_2T_2|$  (найдена ранее в этом параграфе), согласно **П.1.3** будет равна:

$$\begin{aligned}
S_{OQ_1Q_2} &= \frac{1}{2} \times |OQ_1| \times |Q_2T_2| = \\
&= \frac{1}{2} \times \left( R \times \sqrt{1 - \frac{\sin^2 \alpha \times \tan^2 \frac{\alpha}{2}}{1 + \sin^2 \alpha \times \tan^2 \frac{\alpha}{2}}} \right) \times \\
&\times \left( R \times \sqrt{1 - \frac{\sin^2 2\alpha \times \tan^2 \frac{\alpha}{2}}{1 + \sin^2 2\alpha \times \tan^2 \frac{\alpha}{2}}} \times \sin \alpha \right) = \\
&= \frac{1}{2} \times R^2 \times \sin \alpha \times \sqrt{1 - \frac{\sin^2 \alpha \times \tan^2 \frac{\alpha}{2}}{1 + \sin^2 \alpha \times \tan^2 \frac{\alpha}{2}}} \times \\
&\times \sqrt{1 - \frac{\sin^2 2\alpha \times \tan^2 \frac{\alpha}{2}}{1 + \sin^2 2\alpha \times \tan^2 \frac{\alpha}{2}}}, \quad (6.2.1.2.2)
\end{aligned}$$

Точки  $Q_1$  и  $Q_2$  лежат в плоскости основания пирамиды  $J_1J_2K_2K_1$ , следовательно, в соответствии с **П.1.4** и  $|Q_1Q_2|$  (найдена ранее в §6.1.1.2) лежит в плоскости основания пирамиды  $J_1J_2K_2K_1$ .  $|OS_2|$  перпендикулярна плоскости основания пирамиды  $J_1J_2K_2K_1$  (принято ранее), следовательно, в соответствии со **С.1.6**  $|OS_2| \perp |Q_1Q_2|$ . С другой стороны площадь треугольника  $OQ_1Q_2$  равна:

$$S_{OQ_1Q_2} = \frac{1}{2} \times |Q_1Q_2| \times |OS_2|, \quad (6.2.1.2.3)$$

Откуда определим величину перпендикуляра  $|OS_2|$ :

$$\begin{aligned}
 |OS_2| &= \frac{2 \times S_{O_1O_2}}{|Q_1Q_2|} = \\
 &= \frac{2 \times \left( \frac{1}{2} \times R^2 \times \sin \alpha \times \sqrt{1 - \frac{\sin^2 \alpha \times \tan^2 \frac{\alpha}{2}}{1 + \sin^2 \alpha \times \tan^2 \frac{\alpha}{2}}} \times \sqrt{1 - \frac{\sin^2 2\alpha \times \tan^2 \frac{\alpha}{2}}{1 + \sin^2 2\alpha \times \tan^2 \frac{\alpha}{2}}} \right)}{R \times \sqrt{\left( 1 - \frac{\sin^2 \alpha \times \tan^2 \frac{\alpha}{2}}{1 + \sin^2 \alpha \times \tan^2 \frac{\alpha}{2}} \right) + \left( 1 - \frac{\sin^2 2\alpha \times \tan^2 \frac{\alpha}{2}}{1 + \sin^2 2\alpha \times \tan^2 \frac{\alpha}{2}} \right) - 2 \times \cos \alpha \times \sqrt{1 - \frac{\sin^2 \alpha \times \tan^2 \frac{\alpha}{2}}{1 + \sin^2 \alpha \times \tan^2 \frac{\alpha}{2}}} \times \sqrt{1 - \frac{\sin^2 2\alpha \times \tan^2 \frac{\alpha}{2}}{1 + \sin^2 2\alpha \times \tan^2 \frac{\alpha}{2}}}} \\
 &= \frac{R \times \sin \alpha \times \sqrt{1 - \frac{\sin^2 \alpha \times \tan^2 \frac{\alpha}{2}}{1 + \sin^2 \alpha \times \tan^2 \frac{\alpha}{2}}} \times \sqrt{1 - \frac{\sin^2 2\alpha \times \tan^2 \frac{\alpha}{2}}{1 + \sin^2 2\alpha \times \tan^2 \frac{\alpha}{2}}}}{\sqrt{\left( 1 - \frac{\sin^2 \alpha \times \tan^2 \frac{\alpha}{2}}{1 + \sin^2 \alpha \times \tan^2 \frac{\alpha}{2}} \right) + \left( 1 - \frac{\sin^2 2\alpha \times \tan^2 \frac{\alpha}{2}}{1 + \sin^2 2\alpha \times \tan^2 \frac{\alpha}{2}} \right) - 2 \times \cos \alpha \times \sqrt{1 - \frac{\sin^2 \alpha \times \tan^2 \frac{\alpha}{2}}{1 + \sin^2 \alpha \times \tan^2 \frac{\alpha}{2}}} \times \sqrt{1 - \frac{\sin^2 2\alpha \times \tan^2 \frac{\alpha}{2}}{1 + \sin^2 2\alpha \times \tan^2 \frac{\alpha}{2}}}}, \quad (6.2.1.2.4)
 \end{aligned}$$

Ранее в §6.1.1.2 была найдена площадь основания пирамиды  $S_{J_1J_2K_2K_1}$ . Объем пирамиды  $OJ_1J_2K_2K_1$  (Рис.6.2.1.2.1) согласно **П.1.13** будет равен:

$$\begin{aligned}
V_{J_1 J_2 K_1 K_2 K_3} &= \frac{1}{3} \times S_{J_1 J_2 K_1 K_2} \times |OS_2| = \\
&= \frac{1}{3} \times R^2 \times \left( \frac{\sin \alpha \times \tan \frac{\alpha}{2}}{\sqrt{1 + \sin^2 \alpha \times \tan^2 \frac{\alpha}{2}}} + \frac{\sin 2\alpha \times \tan \frac{\alpha}{2}}{\sqrt{1 + \sin^2 2\alpha \times \tan^2 \frac{\alpha}{2}}} \right) \times \\
&\quad \times \left( \left( 1 - \frac{\sin^2 \alpha \times \tan^2 \frac{\alpha}{2}}{1 + \sin^2 \alpha \times \tan^2 \frac{\alpha}{2}} \right) + \left( 1 - \frac{\sin^2 2\alpha \times \tan^2 \frac{\alpha}{2}}{1 + \sin^2 2\alpha \times \tan^2 \frac{\alpha}{2}} \right) - 2 \times \cos \alpha \times \right. \\
&\quad \left. \sqrt{1 - \frac{\sin^2 \alpha \times \tan^2 \frac{\alpha}{2}}{1 + \sin^2 \alpha \times \tan^2 \frac{\alpha}{2}}} \times \sqrt{1 - \frac{\sin^2 2\alpha \times \tan^2 \frac{\alpha}{2}}{1 + \sin^2 2\alpha \times \tan^2 \frac{\alpha}{2}}} \right) \times \\
&\quad \times \left( \left( 1 - \frac{\sin^2 \alpha \times \tan^2 \frac{\alpha}{2}}{1 + \sin^2 \alpha \times \tan^2 \frac{\alpha}{2}} \right) + \left( 1 - \frac{\sin^2 2\alpha \times \tan^2 \frac{\alpha}{2}}{1 + \sin^2 2\alpha \times \tan^2 \frac{\alpha}{2}} \right) - 2 \times \cos \alpha \times \right. \\
&\quad \left. \sqrt{1 - \frac{\sin^2 \alpha \times \tan^2 \frac{\alpha}{2}}{1 + \sin^2 \alpha \times \tan^2 \frac{\alpha}{2}}} \times \sqrt{1 - \frac{\sin^2 2\alpha \times \tan^2 \frac{\alpha}{2}}{1 + \sin^2 2\alpha \times \tan^2 \frac{\alpha}{2}}} \right) = \\
&= \frac{1}{3} \times R^3 \times \left( \frac{\sin \alpha \times \tan \frac{\alpha}{2}}{\sqrt{1 + \sin^2 \alpha \times \tan^2 \frac{\alpha}{2}}} + \frac{\sin 2\alpha \times \tan \frac{\alpha}{2}}{\sqrt{1 + \sin^2 2\alpha \times \tan^2 \frac{\alpha}{2}}} \right) \times
\end{aligned}$$



Таким образом, чем меньше будет угол  $\alpha$ , тем меньше объем пирамиды  $OJ_1J_2K_2K_1$  с основанием в виде трапеции  $J_1J_2K_2K_1$  будет отличаться от объема шарового сектора  $OJ_1J_2K_2K_1$  с основанием в виде участка поверхности сферы, ограниченного дугами  $\widehat{J_1J_2}$ ,  $\widehat{J_1K_1}$ ,  $\widehat{K_2K_1}$  и  $\widehat{K_1J_1}$ .

### §6.2.1.3. Вычисление объема третьей пирамиды

На Рис.6.2.1.3.1 показана пирамида  $OJ_2J_3K_3K_2$  с основанием в виде трапеции  $J_2J_3K_3K_2$  и вершиной в точке  $O$

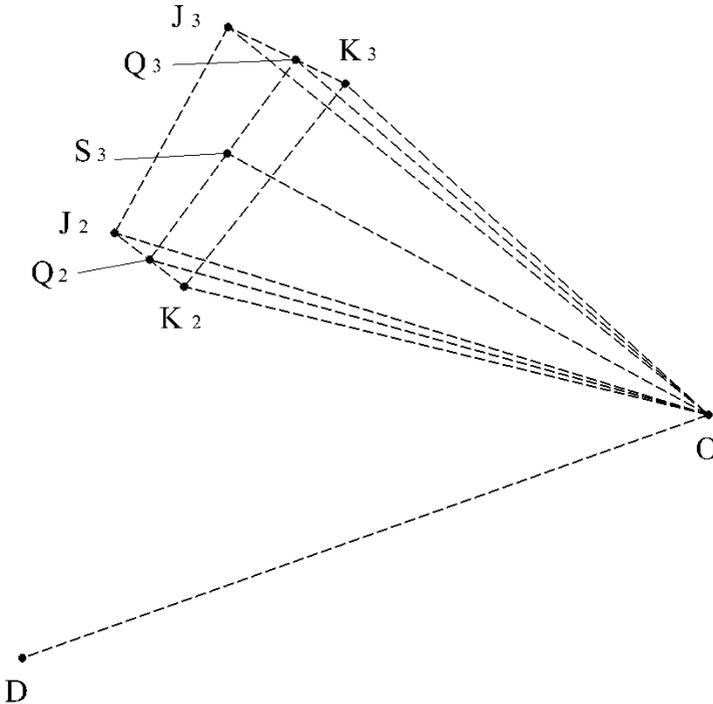


Рис.6.2.1.3.1.

(построенная в §6.1.1.3). Опустим из вершины точки  $O$  перпендикуляр  $|OS_3|$  на основание пирамиды  $J_2J_3K_3K_2$ . Так как  $|J_3K_3|$  перпендикулярна плоскости  $\Pi_0$  (доказано ранее в §6.1.1.3), то в соответствии с **П.1.5** плоскость основания пирамиды  $J_2J_3K_3K_2$  перпендикулярна плоскости  $\Pi_0$ . Но точка  $O$  лежит в плоскости  $\Pi_0$  (начальное условие), следовательно, в соответствии со **С.1.5** перпендикуляр  $|OS_3|$  будет лежать в плоскости  $\Pi_0$ . Но точка  $S_3$ , одновременно, должна лежать и в плоскости  $\Pi_0$  и в плоскости основания пирамиды  $J_2J_3K_3K_2$ , то есть, на прямой  $|Q_2Q_3|$ , являющейся линией пересечения этих плоскостей.

Рассмотрим треугольник  $OQ_2Q_3$  (Рис.6.2.1.3.2), у которого известны стороны  $|OQ_2|$  (найдена ранее в §6.1.1.2) и  $|OQ_3|$  (найдена ранее в §6.1.1.3), и угол  $Q_2OQ_3 = \alpha$  (доказано ранее в §6.1.1.3).

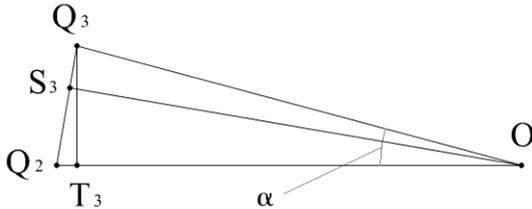


Рис.6.2.1.3.2.

Опустим из точки  $Q_3$  перпендикуляр  $|Q_3T_3|$  на сторону  $|OQ_2|$ .  $|Q_3T_3|$  согласно **П.1.2** будет равна:

$$\begin{aligned}
 & |Q_3T_3| = |OQ_3| \times \sin \alpha = \\
 & = R \times \sqrt{1 - \frac{\sin^2 3\alpha \times \tan^2 \frac{\alpha}{2}}{1 + \sin^2 3\alpha \times \tan^2 \frac{\alpha}{2}}} \times \\
 & \times \sin \alpha, \quad (6.2.1.3.1)
 \end{aligned}$$

Площадь треугольника  $OQ_2Q_3$  (Рис.6.2.1.3.2), у которого известны сторона  $|OQ_2|$  (найдена ранее в §6.1.1.2) и высота  $|Q_3T_3|$  (найдена ранее в данном параграфе), согласно **П.1.3** будет равна:

$$\begin{aligned}
 S_{OQ_2Q_3} &= \frac{1}{2} \times |OQ_2| \times |Q_3T_3| = \\
 &= \frac{1}{2} \times \left( R \times \sqrt{1 - \frac{\sin^2 2\alpha \times \tan^2 \frac{\alpha}{2}}{1 + \sin^2 2\alpha \times \tan^2 \frac{\alpha}{2}}} \right) \times \\
 &\times \left( R \times \sqrt{1 - \frac{\sin^2 3\alpha \times \tan^2 \frac{\alpha}{2}}{1 + \sin^2 3\alpha \times \tan^2 \frac{\alpha}{2}}} \times \sin \alpha \right) = \\
 &= \frac{1}{2} \times R^2 \times \sqrt{1 - \frac{\sin^2 2\alpha \times \tan^2 \frac{\alpha}{2}}{1 + \sin^2 2\alpha \times \tan^2 \frac{\alpha}{2}}} \times \\
 &\times \sqrt{1 - \frac{\sin^2 3\alpha \times \tan^2 \frac{\alpha}{2}}{1 + \sin^2 3\alpha \times \tan^2 \frac{\alpha}{2}}} \times \sin \alpha, (6.2.1.3.2)
 \end{aligned}$$

Точки  $Q_2$  и  $Q_3$  лежат в плоскости основания пирамиды  $J_2J_3K_3K_2$ , следовательно, в соответствии с **П.1.4** и  $|Q_2Q_3|$  (найдена ранее в §6.1.1.3) лежит в плоскости основания пирамиды  $J_2J_3K_3K_2$ .  $|OS_3|$  перпендикулярна плоскости основания пирамиды  $J_2J_3K_3K_2$  (принято ранее), следовательно, в соответствии со **С.1.6**  $|OS_3| \perp |Q_2Q_3|$ . С другой стороны площадь треугольника  $OQ_2Q_3$  равна:

$$S_{OQ_2Q_3} = \frac{1}{2} \times |Q_2Q_3| \times |OS_3|, (6.2.1.3.3)$$

Откуда определим величину перпендикуляра  $|OS_3|$ :

$$\begin{aligned}
 |OS_3| &= \frac{2 \times S_{OQ_2 Q_3}}{|Q_2 Q_3|} = \\
 &= \frac{2 \times \left( \frac{1}{2} \times R^2 \times \sqrt{1 - \frac{\sin^2 2\alpha \times \tan^2 \frac{\alpha}{2}}{1 + \sin^2 2\alpha \times \tan^2 \frac{\alpha}{2}}} \times \sqrt{1 - \frac{\sin^2 3\alpha \times \tan^2 \frac{\alpha}{2}}{1 + \sin^2 3\alpha \times \tan^2 \frac{\alpha}{2}}} \times \sin \alpha \right)}{R \times \left( \sqrt{1 - \frac{\sin^2 2\alpha \times \tan^2 \frac{\alpha}{2}}{1 + \sin^2 2\alpha \times \tan^2 \frac{\alpha}{2}}} + \left( 1 - \frac{\sin^2 3\alpha \times \tan^2 \frac{\alpha}{2}}{1 + \sin^2 3\alpha \times \tan^2 \frac{\alpha}{2}} \right) - 2 \times \cos \alpha \times \sqrt{1 - \frac{\sin^2 2\alpha \times \tan^2 \frac{\alpha}{2}}{1 + \sin^2 2\alpha \times \tan^2 \frac{\alpha}{2}}} \times \sqrt{1 - \frac{\sin^2 3\alpha \times \tan^2 \frac{\alpha}{2}}{1 + \sin^2 3\alpha \times \tan^2 \frac{\alpha}{2}}} \right)} \\
 &= \frac{R \times \sin \alpha \times \sqrt{1 - \frac{\sin^2 2\alpha \times \tan^2 \frac{\alpha}{2}}{1 + \sin^2 2\alpha \times \tan^2 \frac{\alpha}{2}}} \times \sqrt{1 - \frac{\sin^2 3\alpha \times \tan^2 \frac{\alpha}{2}}{1 + \sin^2 3\alpha \times \tan^2 \frac{\alpha}{2}}}}{\left( 1 - \frac{\sin^2 2\alpha \times \tan^2 \frac{\alpha}{2}}{1 + \sin^2 2\alpha \times \tan^2 \frac{\alpha}{2}} \right) + \left( 1 - \frac{\sin^2 3\alpha \times \tan^2 \frac{\alpha}{2}}{1 + \sin^2 3\alpha \times \tan^2 \frac{\alpha}{2}} \right) - 2 \times \cos \alpha \times \sqrt{1 - \frac{\sin^2 2\alpha \times \tan^2 \frac{\alpha}{2}}{1 + \sin^2 2\alpha \times \tan^2 \frac{\alpha}{2}}} \times \sqrt{1 - \frac{\sin^2 3\alpha \times \tan^2 \frac{\alpha}{2}}{1 + \sin^2 3\alpha \times \tan^2 \frac{\alpha}{2}}}} \quad , (6.2.1.3.4)
 \end{aligned}$$

Объем пирамиды  $OJ_2J_3K_3K_3$  (Рис.6.2.1.3.1), у которой известны площадь основания  $S_{J_2J_3K_3K_2}$  (найдена ранее в §6.1.1.3) и высота  $|OS_3|$  (найдена ранее в этом параграфе), согласно **П.1.3** будет равен:

$$\begin{aligned}
V_{O_1 J_2 J_3 K_3 K_2} &= \frac{1}{3} \times S_{J_2 J_3 K_3 K_2} \times |OS_3| = \\
&= \frac{1}{3} \times \left( R^2 \times \left( \frac{\sin 2\alpha \times \tan \frac{\alpha}{2}}{\sqrt{1 + \sin^2 2\alpha \times \tan^2 \frac{\alpha}{2}}} + \frac{\sin 3\alpha \times \tan \frac{\alpha}{2}}{\sqrt{1 + \sin^2 3\alpha \times \tan^2 \frac{\alpha}{2}}} \right) \times \right. \\
&\quad \times \left. \left( \sqrt{1 - \frac{\sin^2 2\alpha \times \tan^2 \frac{\alpha}{2}}{1 + \sin^2 2\alpha \times \tan^2 \frac{\alpha}{2}}} \right) + \left( 1 - \frac{\sin^2 3\alpha \times \tan^2 \frac{\alpha}{2}}{1 + \sin^2 3\alpha \times \tan^2 \frac{\alpha}{2}} \right) - 2 \times \cos \alpha \times \right. \\
&\quad \times \left. \left( \sqrt{1 - \frac{\sin^2 2\alpha \times \tan^2 \frac{\alpha}{2}}{1 + \sin^2 2\alpha \times \tan^2 \frac{\alpha}{2}}} \right) \times \left( \sqrt{1 - \frac{\sin^2 3\alpha \times \tan^2 \frac{\alpha}{2}}{1 + \sin^2 3\alpha \times \tan^2 \frac{\alpha}{2}}} \right) \right) \times \\
&\quad \times \left( R \times \sin \alpha \times \left( \sqrt{1 - \frac{\sin^2 2\alpha \times \tan^2 \frac{\alpha}{2}}{1 + \sin^2 2\alpha \times \tan^2 \frac{\alpha}{2}}} \right) \times \left( \sqrt{1 - \frac{\sin^2 3\alpha \times \tan^2 \frac{\alpha}{2}}{1 + \sin^2 3\alpha \times \tan^2 \frac{\alpha}{2}}} \right) \right) = \\
&\quad \times \left( \left( 1 - \frac{\sin^2 2\alpha \times \tan^2 \frac{\alpha}{2}}{1 + \sin^2 2\alpha \times \tan^2 \frac{\alpha}{2}} \right) + \left( 1 - \frac{\sin^2 3\alpha \times \tan^2 \frac{\alpha}{2}}{1 + \sin^2 3\alpha \times \tan^2 \frac{\alpha}{2}} \right) - 2 \times \cos \alpha \times \right. \\
&\quad \times \left. \left( 1 - \frac{\sin^2 2\alpha \times \tan^2 \frac{\alpha}{2}}{1 + \sin^2 2\alpha \times \tan^2 \frac{\alpha}{2}} \right) \times \left( 1 - \frac{\sin^2 3\alpha \times \tan^2 \frac{\alpha}{2}}{1 + \sin^2 3\alpha \times \tan^2 \frac{\alpha}{2}} \right) \right) \times \\
&\quad \times \left( \frac{\sin 2\alpha \times \tan \frac{\alpha}{2}}{\sqrt{1 + \sin^2 2\alpha \times \tan^2 \frac{\alpha}{2}}} + \frac{\sin 3\alpha \times \tan \frac{\alpha}{2}}{\sqrt{1 + \sin^2 3\alpha \times \tan^2 \frac{\alpha}{2}}} \right) \times \\
&\quad \times \left( \sqrt{1 - \frac{\sin^2 2\alpha \times \tan^2 \frac{\alpha}{2}}{1 + \sin^2 2\alpha \times \tan^2 \frac{\alpha}{2}}} \right) \times \left( \sqrt{1 - \frac{\sin^2 3\alpha \times \tan^2 \frac{\alpha}{2}}{1 + \sin^2 3\alpha \times \tan^2 \frac{\alpha}{2}}} \right)
\end{aligned}$$



Таким образом, чем меньше будет угол  $\alpha$ , тем меньше объем пирамиды  $OJ_2J_3K_3K_2$  с основанием в виде трапеции  $J_2J_3K_3K_2$  будет отличаться от объема шарового сектора  $OJ_2J_3K_3K_2$  с основанием в виде участка поверхности сферы, ограниченного дугами  $\widehat{J_2J_3}$ ,  $\widehat{J_3K_3}$ ,  $\widehat{K_3K_2}$  и  $\widehat{K_2J_2}$ .

#### **§6.2.1.4. Вычисление объема последней пирамиды**

Как видно из уравнений (6.2.1.2.5) и (6.2.1.3.5), они отличаются только значением коэффициента перед углом  $\alpha$ .

Уравнения (6.2.1.2.5) и (6.2.1.3.5) можно записать в виде:



Подставив в уравнение (6.2.1.4.1) вместо  $i$  значение, равное  $2\alpha$  или  $3\alpha$ , а вместо  $j$  значение, равное 2 или 3, получим уравнения (6.2.1.2.5) и (6.2.1.3.5).

Все последующие пирамиды при изменении угла  $DOI_i$  от  $DOI_3 = 3\alpha$  до  $DOI_{90-\alpha} = (90 - \alpha)$  будут иметь в основании трапецию, а объем пирамиды будет вычисляться по формуле (6.2.1.4.1). При этом, вместо  $i$  нужно будет подставить текущее значение угла  $DOI_i$ , а вместо  $j$  поставить текущее значение индекса.

На Рис.6.2.1.4.1 показана пирамида  $OJ_{90-\alpha}GHK_{90-\alpha}$  с основанием в виде трапеции  $J_{90-\alpha}GHK_{90-\alpha}$  и вершиной в точке  $O$  (построенная в §6.1.1.4). Опустим из вершины пирамиды точки  $O$  перпендикуляр  $|OS_{90}|$  на ее основание  $J_{90-\alpha}GHK_{90-\alpha}$ .  $|GH|$  и  $|J_{90-\alpha}K_{90-\alpha}|$  лежат в плоскости основания  $J_{90-\alpha}GHK_{90-\alpha}$  (принято ранее в §6.1.1.4), и каждая из них перпендикулярна плоскости  $\Pi_0$  (доказано ранее в §6.1.1.4).

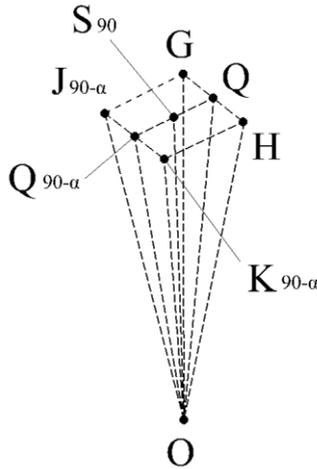


Рис.6.2.1.4.1.

Следовательно, в соответствии с **П.1.5** плоскость основания пирамиды  $J_{90-\alpha}G_{90-\alpha}$  будет перпендикулярна плоскости  $\Pi_0$ . Точка  $O$  лежит в плоскости  $\Pi_0$  (начальное условие), которая перпендикулярна плоскости основания  $J_{90-\alpha}G_{90-\alpha}$  (доказано ранее в §6.1.1.4), следовательно, в соответствии со **С.1.5** перпендикуляр  $|OS_{90}|$  будет лежать в плоскости  $\Pi_0$ . Точка  $S_{90}$  должна, одновременно, лежать и в плоскости  $\Pi_0$  и в плоскости основания  $J_{90-\alpha}G_{90-\alpha}$ , то есть, на стороне  $|Q_{90}Q_{90-\alpha}|$ , являющейся линией пересечения этих плоскостей.

Рассмотрим треугольник  $OQ_{90}Q_{90-\alpha}$  (Рис.6.2.1.4.2), у которого известны стороны  $|Q_{90}Q_{90-\alpha}|$  и  $|OQ_{90}|$  (найлены

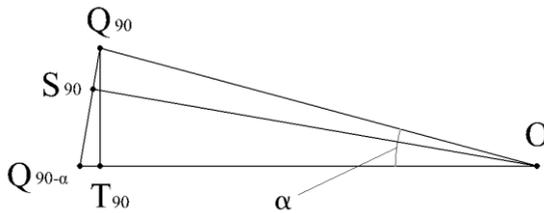


Рис.6.2.1.4.2.

ранее в §6.1.1.4), и угол между ними  $Q_{90-\alpha}OQ_{90} = \alpha$  (доказано ранее в §6.1.1.4). Опустим из точки  $Q_{90}$  перпендикуляр  $|Q_{90}T_{90}|$  на сторону  $|OQ_{90-\alpha}|$ .  $|Q_{90}T_{90}|$  согласно **П.1.2** будет равна:

$$|Q_{90}T_{90}| = |OQ_{90}| \times \sin \alpha = R \times \cos \frac{\alpha}{2} \times \sin \alpha, \quad (6.2.1.4.2)$$

Площадь треугольника  $OQ_{90}Q_{90-\alpha}$ , у которого известна сторона  $|OQ_{90-\alpha}|$  (найдена ранее в §6.1.1.4) и высота  $|Q_{90}T_{90}|$  (найдена ранее в этом параграфе) согласно **П.1.3** будет равна:

$$\begin{aligned}
S_{OQ_{90}Q_{90-\alpha}} &= \frac{1}{2} \times |OQ_{90-\alpha}| \times |Q_{90}T_{90}| = \\
&= \frac{1}{2} \times \left( R \times \sqrt{1 - \frac{\sin^2(90 - \alpha) \times \tan^2 \frac{\alpha}{2}}{1 + \sin^2(90 - \alpha) \times \tan^2 \frac{\alpha}{2}}} \right) \times \\
&\times \left( R \times \cos \frac{\alpha}{2} \times \sin \alpha \right) = \\
&= \frac{1}{2} \times R^2 \times \cos \frac{\alpha}{2} \times \sin \alpha \times \\
&\times \sqrt{1 - \frac{\sin^2(90 - \alpha) \times \tan^2 \frac{\alpha}{2}}{1 + \sin^2(90 - \alpha) \times \tan^2 \frac{\alpha}{2}}}, \quad (6.2.1.4.3)
\end{aligned}$$

Точки  $Q_{90-\alpha}$  и  $Q_{90}$  лежат, соответственно, на  $|J_{90-\alpha}K_{90-\alpha}|$  и  $|GH|$ , каждая из которых лежит в плоскости основания  $J_{90-\alpha}G_{HK_{90-\alpha}}$ , следовательно, и точки  $Q_{90-\alpha}$  и  $Q_{90}$  будут лежать в плоскости основания  $J_{90-\alpha}G_{HK_{90-\alpha}}$ , а, следовательно, в соответствии с **П.1.4** и  $|Q_{90}Q_{90-\alpha}|$  будет лежать в плоскости основания  $J_{90-\alpha}G_{HK_{90-\alpha}}$ .  $|OS_{90}|$  перпендикулярна плоскости основания  $J_{90-\alpha}G_{HK_{90-\alpha}}$  (принято ранее), следовательно, в соответствии со **С.1.6**  $|OS_{90}| \perp |Q_{90}Q_{90-\alpha}|$ . С другой стороны площадь треугольника  $OQ_{90}Q_{90-\alpha}$  равна:

$$S_{OQ_{90}Q_{90-\alpha}} = \frac{1}{2} \times |Q_{90}Q_{90-\alpha}| \times |OS_{90}|, \quad (6.2.1.4.4)$$

Откуда найдем значение высоты пирамиды  $|OS_{90}|$ :

$$\begin{aligned}
 |OS_{90}| &= \frac{2 \times S_{OQ_{90}Q_{90-\alpha}}}{|Q_{90}Q_{90-\alpha}|} = \\
 &= \frac{2 \times \left( \frac{1}{2} \times R^2 \times \cos \frac{\alpha}{2} \times \sin \alpha \times \sqrt{1 - \frac{\sin^2(90 - \alpha) \times \tan^2 \frac{\alpha}{2}}{1 + \sin^2(90 - \alpha) \times \tan^2 \frac{\alpha}{2}}} \right)}{R \times \left( \left( 1 - \frac{\sin^2(90 - \alpha) \times \tan^2 \frac{\alpha}{2}}{1 + \sin^2(90 - \alpha) \times \tan^2 \frac{\alpha}{2}} \right) + \cos^2 \frac{\alpha}{2} - 2 \times \cos \alpha \times \cos \frac{\alpha}{2} \times \sqrt{1 - \frac{\sin^2(90 - \alpha) \times \tan^2 \frac{\alpha}{2}}{1 + \sin^2(90 - \alpha) \times \tan^2 \frac{\alpha}{2}}} \right)} \\
 &= \frac{R \times \cos \frac{\alpha}{2} \times \sin \alpha \times \sqrt{1 - \frac{\sin^2(90 - \alpha) \times \tan^2 \frac{\alpha}{2}}{1 + \sin^2(90 - \alpha) \times \tan^2 \frac{\alpha}{2}}}}{\left( 1 - \frac{\sin^2(90 - \alpha) \times \tan^2 \frac{\alpha}{2}}{1 + \sin^2(90 - \alpha) \times \tan^2 \frac{\alpha}{2}} \right) + \cos^2 \frac{\alpha}{2} - 2 \times \cos \alpha \times \cos \frac{\alpha}{2} \times \sqrt{1 - \frac{\sin^2(90 - \alpha) \times \tan^2 \frac{\alpha}{2}}{1 + \sin^2(90 - \alpha) \times \tan^2 \frac{\alpha}{2}}}}}, \quad (6.2.1.4.5)
 \end{aligned}$$

Объем пирамиды  $OJ_{90-\alpha}GHK_{90-\alpha}$ , у которой известны площадь основания  $S_{J_{90-\alpha}GHK_{90-\alpha}}$  (найдена ранее в §6.1.1.4) и высота  $|OS_{90}|$  (найденны ранее в этом параграфе), согласно **П.1.13** будет равен:

$$\begin{aligned}
 V_{OJ_{90-\alpha}GHK_{90-\alpha}} &= \frac{1}{3} \times S_{J_{90-\alpha}GHK_{90-\alpha}} \times |OS_{90}| = \\
 &= \frac{1}{3} \times R^2 \times \left( \frac{\sin(90-\alpha) \times \tan \frac{\alpha}{2}}{1 + \sin^2(90-\alpha) \times \tan^2 \frac{\alpha}{2}} + \sin \frac{\alpha}{2} \right) \times \\
 &\times \sqrt{\left( 1 - \frac{\sin^2(90-\alpha) \times \tan^2 \frac{\alpha}{2}}{1 + \sin^2(90-\alpha) \times \tan^2 \frac{\alpha}{2}} \right) + \cos^2 \frac{\alpha}{2} - 2 \times \cos \alpha \times \cos \frac{\alpha}{2} \times \sqrt{1 - \frac{\sin^2(90-\alpha) \times \tan^2 \frac{\alpha}{2}}{1 + \sin^2(90-\alpha) \times \tan^2 \frac{\alpha}{2}}}} \times \\
 &\times \left( R \times \cos \frac{\alpha}{2} \times \sin \alpha \times \sqrt{1 - \frac{\sin^2(90-\alpha) \times \tan^2 \frac{\alpha}{2}}{1 + \sin^2(90-\alpha) \times \tan^2 \frac{\alpha}{2}}} \right) \\
 &= \left( \frac{\sin^2(90-\alpha) \times \tan^2 \frac{\alpha}{2}}{1 + \sin^2(90-\alpha) \times \tan^2 \frac{\alpha}{2}} + \cos^2 \frac{\alpha}{2} - 2 \times \cos \alpha \times \cos \frac{\alpha}{2} \times \sqrt{1 - \frac{\sin^2(90-\alpha) \times \tan^2 \frac{\alpha}{2}}{1 + \sin^2(90-\alpha) \times \tan^2 \frac{\alpha}{2}}} \right) \\
 &\times \left( R \times \cos \frac{\alpha}{2} \times \sin \alpha \times \sqrt{1 - \frac{\sin^2(90-\alpha) \times \tan^2 \frac{\alpha}{2}}{1 + \sin^2(90-\alpha) \times \tan^2 \frac{\alpha}{2}}} \right) =
 \end{aligned}$$



Таким образом, чем меньше будет угол  $\alpha$ , тем меньше объем пирамиды  $OJ_{90-\alpha}G\widehat{H}K_{90-\alpha}$  с основанием в виде трапеции  $J_{90-\alpha}G\widehat{H}K_{90-\alpha}$  будет отличаться от объема шарового сектора  $OJ_{90-\alpha}G\widehat{H}K_{90-\alpha}$  с основанием в виде участка поверхности сферы, ограниченного дугами  $J_{90-\alpha}\widehat{G}$ ,  $\widehat{GH}$ ,  $\widehat{HK}_{90-\alpha}$  и  $K_{90-\alpha}\widehat{J}_{90-\alpha}$ .

### §6.2.1.5. Вычисление объема всего Шара

Для определения объема фрагмента шара, представляющего из себя сектор шара с вершиной в точке  $O$  и основанием в виде участка поверхности сферы, ограниченного дугами окружностей  $\widehat{DG}$ ,  $\widehat{GH}$ , и  $\widehat{HD}$  (Рис.6.2.1.5.1), необходимо суммировать уравнения (6.2.1.1.5), (6.2.1.2.5) (предварительно представив его в виде суммы объемов пирамид, начиная со второй и заканчивая предпоследней) и (6.2.1.4.5).

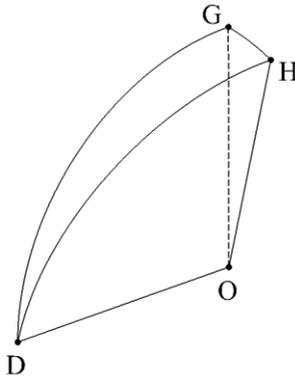


Рис.6.2.1.5.1.

На самом деле будет вычислен не объем фрагмента шара, а объем фрагмента вписанного в шар изнутри сферообразного многогранника (Рис.6.2.1.5.2), так как вычислять

объемы тел, ограниченных криволинейными поверхностями, мы не умеем.

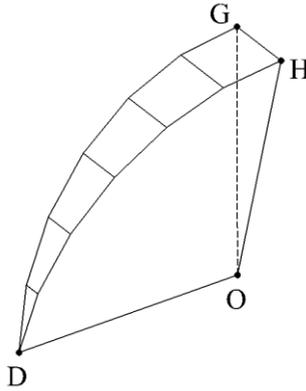


Рис.6.2.1.5.2.

Умножив полученное значение на два (так как плоскость  $\Sigma_0$  делит фрагмент шара, ограниченный дугами окружностей  $\widehat{DGE}$  и  $\widehat{DHE}$  (Рис.6.2.1.5.3), на две равные части), получим объем фрагмента шара, ограниченного дугами окружностей  $\widehat{DGE}$  и  $\widehat{DHE}$  и диаметром  $|DE|$ .

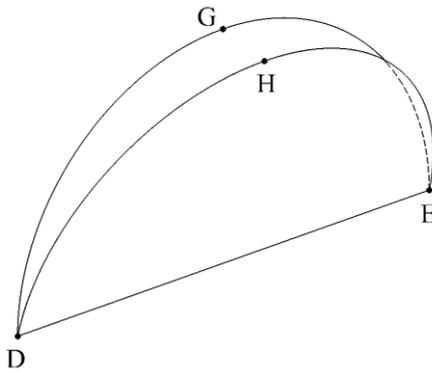


Рис.6.2.1.5.3.

На самом деле будет вычислен не объем фрагмента шара, а объем фрагмента вписанного в шар изнутри сферообразного многогранника (Рис.6.2.1.5.4), так как вычислять объемы тел, ограниченных криволинейными поверхностями, мы не умеем.

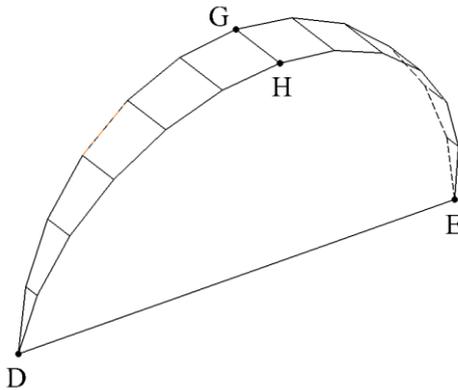


Рис.6.2.1.5.4.

А умножив это значение на число таких фрагментов, укладывающихся на теле шара, то есть, на  $\frac{360}{\alpha}$ , получим полный объем шара  $V_{\text{об.ш.в}}$  (Рис.6.2.1.5.5):

$$\begin{aligned}
 V_{\text{об.ш.в}} = & \left( \frac{1}{3} \times R^3 \times \left( \sin \alpha \times \tan \frac{\alpha}{2} \times \left( 2 - \frac{\sin^2 \alpha \times \tan^2 \frac{\alpha}{2}}{1 + \sin^2 \alpha \times \tan^2 \frac{\alpha}{2}} - 2 \times \cos \alpha \times \sqrt{1 + \sin^2 \alpha \times \tan^2 \frac{\alpha}{2}} \right) \right. \right. \\
 & \left. \left. + \left( 1 - \frac{\sin^2 \alpha \times \tan^2 \frac{\alpha}{2}}{1 + \sin^2 \alpha \times \tan^2 \frac{\alpha}{2}} \right) \times \sin \alpha \right. \right. \\
 & \left. \left. + \left( 2 - \frac{\sin^2 \alpha \times \tan^2 \frac{\alpha}{2}}{1 + \sin^2 \alpha \times \tan^2 \frac{\alpha}{2}} - 2 \times \cos \alpha \times \sqrt{1 + \sin^2 \alpha \times \tan^2 \frac{\alpha}{2}} \right) \right) \right) \times \\
 & \left( 1 - \frac{\sin^2 \alpha \times \tan^2 \frac{\alpha}{2}}{1 + \sin^2 \alpha \times \tan^2 \frac{\alpha}{2}} \right) \times \left( 1 - \frac{\sin^2 \alpha \times \tan^2 \frac{\alpha}{2}}{1 + \sin^2 \alpha \times \tan^2 \frac{\alpha}{2}} \right)
 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
& \left( \frac{1}{3} \times R^3 \left( \sqrt{\frac{\sin(90 - \alpha) \times \tan \frac{\alpha}{2}}{1 + \sin^2(90 - \alpha) \times \tan^2 \frac{\alpha}{2}}} + \sin \frac{\alpha}{2} \right) \times \right. \\
& \left. \times \sqrt{\left( 1 - \frac{\sin^2(90 - \alpha) \times \tan^2 \frac{\alpha}{2}}{1 + \sin^2(90 - \alpha) \times \tan^2 \frac{\alpha}{2}} \right) + \cos^2 \frac{\alpha}{2} - 2 \times \cos \alpha \times \cos \frac{\alpha}{2} \times \sqrt{1 - \frac{\sin^2(90 - \alpha) \times \tan^2 \frac{\alpha}{2}}{1 + \sin^2(90 - \alpha) \times \tan^2 \frac{\alpha}{2}}}} \right) \times \\
& \left( \cos \frac{\alpha}{2} \times \sin \alpha \times \sqrt{1 - \frac{\sin^2(90 - \alpha) \times \tan^2 \frac{\alpha}{2}}{1 + \sin^2(90 - \alpha) \times \tan^2 \frac{\alpha}{2}}} \right. \\
& \left. \times \sqrt{\left( 1 - \frac{\sin^2(90 - \alpha) \times \tan^2 \frac{\alpha}{2}}{1 + \sin^2(90 - \alpha) \times \tan^2 \frac{\alpha}{2}} \right) + \cos^2 \frac{\alpha}{2} - 2 \times \cos \alpha \times \cos \frac{\alpha}{2} \times \sqrt{1 - \frac{\sin^2(90 - \alpha) \times \tan^2 \frac{\alpha}{2}}{1 + \sin^2(90 - \alpha) \times \tan^2 \frac{\alpha}{2}}}} \right) \\
& \left. \times 2 \times \frac{360}{\alpha} = \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \left( \sin \alpha \times \tan \frac{\alpha}{2} \times \frac{2 - \frac{\sin^2 \alpha \times \tan^2 \frac{\alpha}{2}}{1 + \sin^2 \alpha \times \tan^2 \frac{\alpha}{2}} - 2 \times \cos \alpha \times \sqrt{1 + \sin^2 \alpha \times \tan^2 \frac{\alpha}{2}}}{1 - \frac{\sin^2 \alpha \times \tan^2 \frac{\alpha}{2}}{1 + \sin^2 \alpha \times \tan^2 \frac{\alpha}{2}}} \right) \times \\
 & = \frac{4}{3} \times R^3 \times
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \left( \frac{1 - \frac{\sin^2 \alpha \times \tan^2 \frac{\alpha}{2}}{1 + \sin^2 \alpha \times \tan^2 \frac{\alpha}{2}} \times \sin \alpha}{2 - \frac{\sin^2 \alpha \times \tan^2 \frac{\alpha}{2}}{1 + \sin^2 \alpha \times \tan^2 \frac{\alpha}{2}} - 2 \times \cos \alpha \times \sqrt{1 - \frac{\sin^2 \alpha \times \tan^2 \frac{\alpha}{2}}{1 + \sin^2 \alpha \times \tan^2 \frac{\alpha}{2}}}} \right) + \\
 & \times
 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 & \left( \left( \frac{\sin(90 - \alpha) \times \tan \frac{\alpha}{2}}{\sqrt{1 + \sin^2(90 - \alpha) \times \tan^2 \frac{\alpha}{2}}} + \sin \frac{\alpha}{2} \right) \times \left( 1 - \frac{\sin^2(90 - \alpha) \times \tan^2 \frac{\alpha}{2}}{1 + \sin^2(90 - \alpha) \times \tan^2 \frac{\alpha}{2}} \right) + \cos^2 \frac{\alpha}{2} - 2 \times \cos \alpha \times \cos \frac{\alpha}{2} \times \sqrt{1 - \frac{\sin^2(90 - \alpha) \times \tan^2 \frac{\alpha}{2}}{1 + \sin^2(90 - \alpha) \times \tan^2 \frac{\alpha}{2}}} \right) \times \\
 & \left( \cos \frac{\alpha}{2} \times \sin \alpha \times \left( 1 - \frac{\sin^2(90 - \alpha) \times \tan^2 \frac{\alpha}{2}}{1 + \sin^2(90 - \alpha) \times \tan^2 \frac{\alpha}{2}} \right) + \cos^2 \frac{\alpha}{2} - 2 \times \cos \alpha \times \cos \frac{\alpha}{2} \times \sqrt{1 - \frac{\sin^2(90 - \alpha) \times \tan^2 \frac{\alpha}{2}}{1 + \sin^2(90 - \alpha) \times \tan^2 \frac{\alpha}{2}}} \right) \times \frac{180}{\alpha} = \\
 & = \frac{4}{3} \times R^3 \times \pi_{06.м.в.в} , (6.2.1.5.1)
 \end{aligned}$$

Где,

$\pi_{\text{об.ш.в}}$  – коэффициент, стоящий в формуле для вычисления площади поверхности сферы.





$$\begin{aligned}
 & \left( \left( \frac{\sin(90 - \alpha) \times \tan \frac{\alpha}{2}}{1 + \sin^2(90 - \alpha) \times \tan^2 \frac{\alpha}{2}} + \sin \frac{\alpha}{2} \right) \times \left( 1 - \frac{\sin^2(90 - \alpha) \times \tan^2 \frac{\alpha}{2}}{1 + \sin^2(90 - \alpha) \times \tan^2 \frac{\alpha}{2}} \right) + \cos^2 \frac{\alpha}{2} - 2 \times \cos \alpha \times \cos \frac{\alpha}{2} \times \left( 1 - \frac{\sin^2(90 - \alpha) \times \tan^2 \frac{\alpha}{2}}{1 + \sin^2(90 - \alpha) \times \tan^2 \frac{\alpha}{2}} \right) \right) \times \\
 & \left( \cos \frac{\alpha}{2} \times \sin \alpha \times \left( 1 - \frac{\sin^2(90 - \alpha) \times \tan^2 \frac{\alpha}{2}}{1 + \sin^2(90 - \alpha) \times \tan^2 \frac{\alpha}{2}} \right) \right. \\
 & \left. \left( 1 - \frac{\sin^2(90 - \alpha) \times \tan^2 \frac{\alpha}{2}}{1 + \sin^2(90 - \alpha) \times \tan^2 \frac{\alpha}{2}} \right) + \cos^2 \frac{\alpha}{2} - 2 \times \cos \alpha \times \cos \frac{\alpha}{2} \times \left( 1 - \frac{\sin^2(90 - \alpha) \times \tan^2 \frac{\alpha}{2}}{1 + \sin^2(90 - \alpha) \times \tan^2 \frac{\alpha}{2}} \right) \right) \times \frac{180}{\alpha}, (6.2.1.5.2)
 \end{aligned}$$

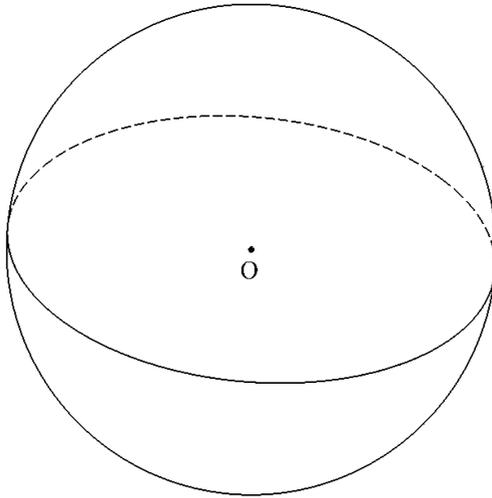


Рис.6.2.1.5.5.

По формуле (6.2.1.5.1) вычисляется, на самом деле, не объем шара (Рис.6.2.1.5.5), а объем вписанного в шар изнутри сферообразного многогранника (Рис.6.2.1.5.6), так как вычислять объемы тел, ограниченных криволинейными поверхностями, мы не умеем.

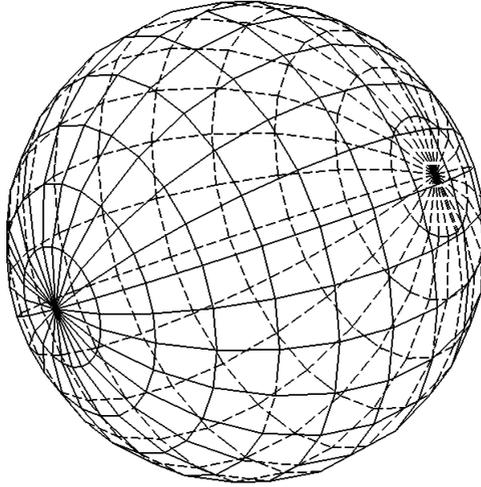


Рис.6.2.1.5.6.

## §6.2.2. Метод описанного многогранника

### §6.2.2.1. Вычисление объема первой пирамиды

На Рис.6.2.2.1.1 показана пирамида  $OD_0J_{1.0}K_{1.0}$  с основанием в виде треугольника  $D_0J_{1.0}K_{1.0}$  и вершиной в точке  $O$  (построенная в §6.1.2.1).

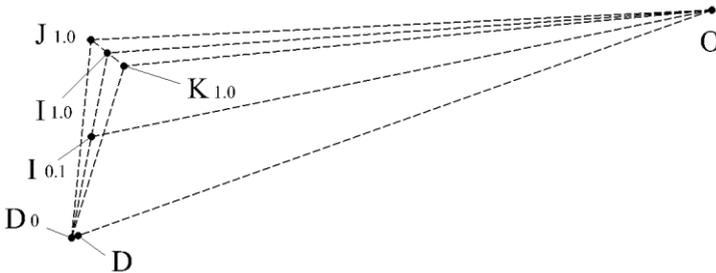


Рис.6.2.2.1.1.

Ранее в §6.1.2.1 были найдены площадь основания  $S_{D_0J_{1.0}K_{1.0}}$  и высота  $|OI_{0.1}| = R$  (начальное условие) пирамиды  $OD_0J_{1.0}K_{1.0}$ . Объем пирамиды  $OD_0J_{1.0}K_{1.0}$  согласно **П.1.13** будет равен:

$$\begin{aligned} V_{OD_0J_{1.0}K_{1.0}} &= \frac{1}{3} \times S_{D_0J_{1.0}K_{1.0}} \times |OI_{0.1}| = \\ &= \frac{1}{3} \times \left( 2 \times R^2 \times \frac{\sin \alpha \times \tan^2 \frac{\alpha}{2}}{\cos \frac{\alpha}{2}} \right) \times R = \\ &= \frac{2}{3} \times R^3 \times \frac{\sin \alpha \times \tan^2 \frac{\alpha}{2}}{\cos \frac{\alpha}{2}}, (6.2.2.1.1) \end{aligned}$$

Таким образом, чем меньше будет угол  $\alpha$ , тем меньше объем пирамиды  $OD_0J_{1.0}K_{1.0}$  с основанием в виде треугольника  $D_0J_{1.0}K_{1.0}$  будет отличаться от объема шарового сектора с основанием в виде участка поверхности сферы (Рис.6.1.2.1.6), ограниченного дугами окружностей  $\widehat{DJ_1}$ ,  $\widehat{J_1K_1}$  и  $\widehat{K_1D}$

### §6.2.2.2. Вычисление объема второй пирамиды

На Рис.6.2.2.2.1 показана пирамида  $OJ_{1.0}J_{2.0}K_{2.0}K_{1.0}$  с основанием в виде трапеции  $J_{1.0}J_{2.0}K_{2.0}K_{1.0}$  и вершиной в точке  $O$  (построенная в §6.1.2.2).

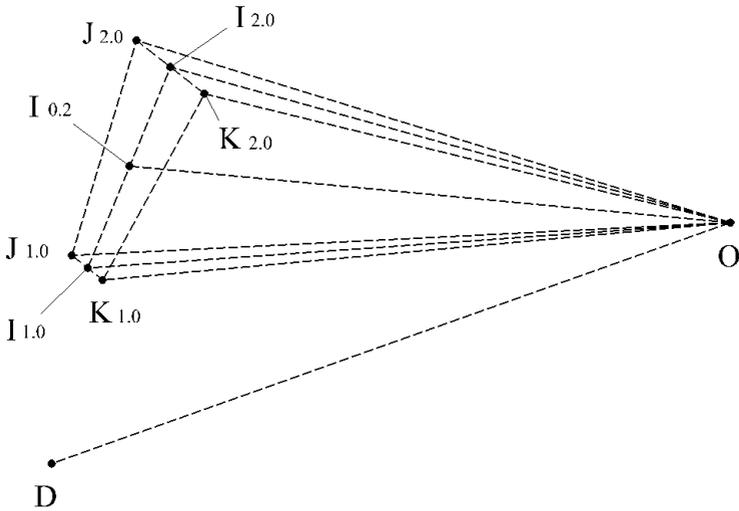


Рис.6.2.2.2.1.

Ранее в §6.1.2.2 были найдены площадь основания  $S_{J_{1.0}J_{2.0}K_{2.0}K_{1.0}}$  и высота  $|OI_{0.2}| = R$  (начальное условие) пирамиды  $OJ_{1.0}J_{2.0}K_{2.0}K_{1.0}$ . Объем пирамиды  $OJ_{1.0}J_{2.0}K_{2.0}K_{1.0}$  согласно **П.1.13** будет равен:

$$\begin{aligned}
 V_{J_{1.0}J_{2.0}K_{2.0}K_{1.0}} &= \frac{1}{3} \times S_{J_{1.0}J_{2.0}K_{2.0}K_{1.0}} \times |OI_{0.2}| = \\
 &= \frac{1}{3} \times \left( 2 \times R^2 \times \left( \frac{\sin \alpha + \sin 2\alpha}{\cos \frac{\alpha}{2}} \right) \times \tan^2 \frac{\alpha}{2} \right) \times \\
 &\times R = \\
 &= \frac{2}{3} \times R^3 \times \left( \frac{\sin \alpha + \sin 2\alpha}{\cos \frac{\alpha}{2}} \right) \times \\
 &\times \tan^2 \frac{\alpha}{2}, \quad (6.2.2.2.1)
 \end{aligned}$$

Таким образом, чем меньше будет угол  $\alpha$ , тем меньше объем пирамиды  $OJ_{1.0}J_{2.0}K_{2.0}K_{1.0}$  с основанием в виде трапеции  $J_{1.0}J_{2.0}K_{2.0}K_{1.0}$  будет отличаться от объема шарового сектора с основанием в виде участка поверхности сферы (Рис.6.1.2.2.5), ограниченного дугами окружностей  $\widehat{J_1J_2}$ ,  $\widehat{J_2K_2}$ ,  $\widehat{K_2K_1}$  и  $\widehat{K_1J_1}$ .

### §6.2.2.3. Вычисление объема третьей пирамиды

На Рис.6.2.2.3.1 показана пирамида  $OJ_{2.0}J_{3.0}K_{3.0}K_{2.0}$  с основанием в виде трапеции  $J_{2.0}J_{3.0}K_{3.0}K_{2.0}$  и вершиной в точке  $O$  (построенная в §6.1.2.3).

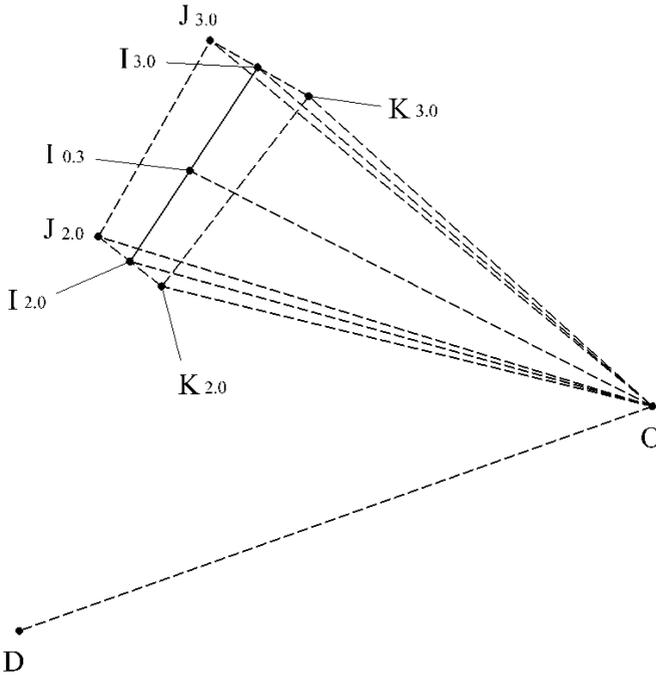


Рис.6.2.2.3.1.

Ранее в §6.1.2.3 были найдены площадь основания  $S_{J_{2,0}J_{3,0}K_{3,0}K_{2,0}}$  и высота  $|OI_{0,3}| = R$  (начальное условие) пирамиды  $OJ_{2,0}J_{3,0}K_{3,0}K_{2,0}$ . Объем пирамиды  $OJ_{2,0}J_{3,0}K_{3,0}K_{2,0}$  согласно **П.1.13** будет равен:

$$\begin{aligned} V_{J_{2,0}J_{3,0}K_{3,0}K_{2,0}} &= \frac{1}{3} \times S_{J_{2,0}J_{3,0}K_{3,0}K_{2,0}} \times |OI_{0,3}| = \\ &= \frac{1}{3} \times \left( 2 \times R^2 \times \left( \frac{\sin 2\alpha + \sin 3\alpha}{\cos \frac{\alpha}{2}} \right) \times \tan^2 \frac{\alpha}{2} \right) \times \\ &\quad \times R = \\ &= \frac{2}{3} \times R^3 \times \left( \frac{\sin 2\alpha + \sin 3\alpha}{\cos \frac{\alpha}{2}} \right) \times \tan^2 \frac{\alpha}{2}, \quad (6.2.2.3.1) \end{aligned}$$

Таким образом, чем меньше будет угол  $\alpha$ , тем меньше объем пирамиды  $OJ_{2,0}J_{3,0}K_{3,0}K_{2,0}$  с основанием в виде трапеции  $J_{2,0}J_{3,0}K_{3,0}K_{2,0}$  будет отличаться от объема шарового сектора с основанием в виде участка поверхности сферы (Рис.6.1.2.3.5), ограниченного дугами окружностей  $\widehat{J_2J_3}$ ,  $\widehat{J_3K_3}$ ,  $\widehat{K_3K_2}$  и  $\widehat{K_2J_2}$ .

#### §6.2.2.4. Вычисление объема последней пирамиды

Как видно из уравнений (6.2.2.2.1) и (6.2.2.3.1), они отличаются только значением коэффициента перед углом  $\alpha$ .

Уравнения (6.2.2.2.1) и (6.2.2.3.1) можно записать в виде:

$$V_{OJ_{j-1}J_jK_jK_{j-1}} = \frac{2}{3} \times R^3 \times \left( \frac{\sin(i - \alpha) + \sin i}{\cos \frac{\alpha}{2}} \right) \times \tan^2 \frac{\alpha}{2}, \quad (6.2.2.4.1)$$

Подставив в уравнение (6.2.2.4.1) вместо  $i$  значение, равное  $2\alpha$  или  $3\alpha$ , а вместо  $j$  значение, равное 2 или 3, получим уравнения (6.2.2.2.1) и (6.2.2.3.1).

Все последующие пирамиды при изменении угла  $DOI_i$  от  $DOI_3 = 3\alpha$  до  $DOI_{90-\alpha} = (90 - \alpha)$  будут иметь в основании трапецию, и ее объем пирамиды будет вычисляться по формуле (6.2.2.4.1). При этом, вместо  $i$  нужно будет подставить текущее значение угла  $DOI_i$ , а вместо  $j$  поставить текущее значение индекса.

Объем последней пирамиды  $OJ_{(90-\alpha).0}G_0H_0K_{(90-\alpha).0}$  будет вычислен по своей формуле. На Рис.6.2.2.4.1 показана

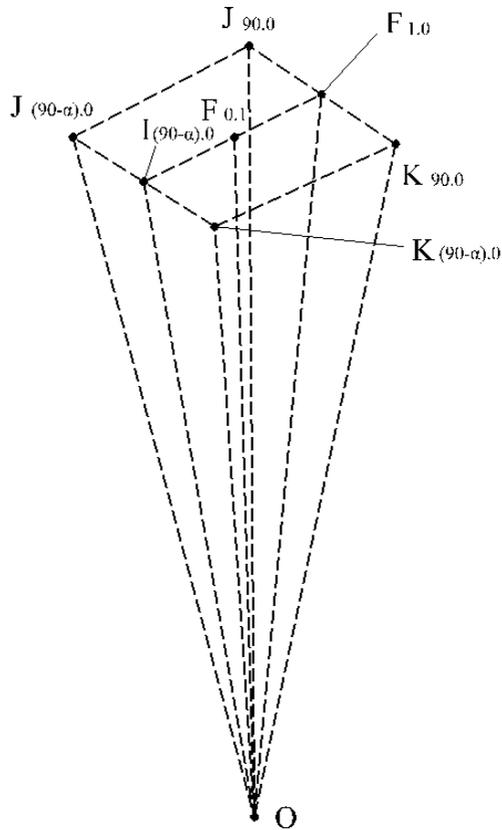


Рис.6.2.2.4.1.

пирамида  $OJ_{(90-\alpha).0}G_0H_0K_{(90-\alpha).0}$  с основанием в виде трапеции  $J_{(90-\alpha).0}G_0H_0K_{(90-\alpha).0}$  и вершиной в точке  $O$  (построенная в §6.1.2.4).

Ранее в §6.1.2.4 были найдены площадь основания  $S_{J_{(90-\alpha).0}J_{90.0}K_{90.0}K_{(90-\alpha).0}}$  и высота  $|OF_{0.1}| = R$  (начальное условие) пирамиды  $OJ_{(90-\alpha).0}G_0H_0K_{(90-\alpha).0}$ . Объем пирамиды  $OJ_{(90-\alpha).0}G_0H_0K_{(90-\alpha).0}$  согласно **П.1.13** будет равен:

$$\begin{aligned}
 V_{J_{(90-\alpha).0}J_{90.0}K_{90.0}K_{(90-\alpha).0}} &= \frac{1}{3} \times S_{J_{(90-\alpha).0}J_{90.0}K_{90.0}K_{(90-\alpha).0}} \times |OF_{0.1}| = \\
 &= \frac{1}{3} \times \left( 2 \times R^2 \times \left( \frac{\sin(90-\alpha) + 1}{\cos \frac{\alpha}{2}} \right) \times \tan^2 \frac{\alpha}{2} \right) \times R = \\
 &= \frac{2}{3} \times R^3 \times \left( \frac{\sin(90-\alpha) + 1}{\cos \frac{\alpha}{2}} \right) \times \tan^2 \frac{\alpha}{2}, \quad (6.2.2.4.2)
 \end{aligned}$$

Таким образом, чем меньше будет угол  $\alpha$ , тем меньше объем пирамиды  $OJ_{(90-\alpha).0}G_0H_0K_{(90-\alpha).0}$  с основанием в виде трапеции  $J_{(90-\alpha).0}G_0H_0K_{(90-\alpha).0}$  будет отличаться от объема шарового сектора с основанием в виде участка поверхности сферы (Рис.6.1.2.4.5), ограниченного дугами окружностей  $\widehat{J_{90-\alpha}G}$ ,  $\widehat{GH}$ ,  $\widehat{HK_{90-\alpha}}$  и  $\widehat{K_{90-\alpha}J_{90-\alpha}}$ .

### §6.2.2.5. Вычисление объема всего Шара

Для определения объема фрагмента шара, представляющего из себя сектор шара с вершиной в точке  $O$  и основанием в виде участка поверхности сферы, ограниченного дугами окружностей  $\widehat{DG}$ ,  $\widehat{GH}$ , и  $\widehat{HD}$  (Рис.6.2.2.5.1), необходимо суммировать уравнения (6.2.2.1.1), (6.2.2.2.1) (предварительно представив его в виде суммы объемов пирамид, начиная со второй и заканчивая предпоследней) и (6.2.2.4.2).

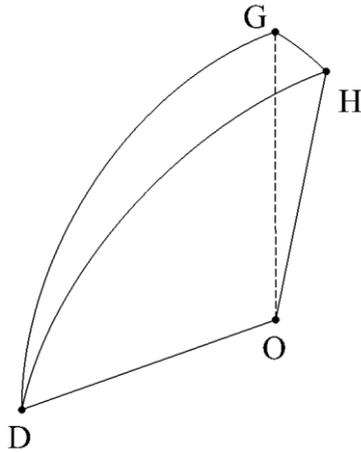


Рис.6.2.2.5.1.

На самом деле будет вычислен не объем фрагмента шара, а объем фрагмента описанного около шара извне сферобразного многогранника (Рис.6.2.2.5.2), так как вычислять объемы тел, ограниченных криволинейными поверхностями, мы не умеем.

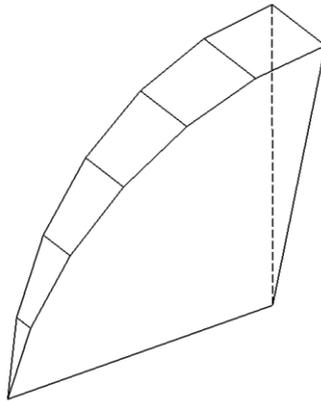


Рис.6.2.2.5.2.

Умножив полученное значение на два (так как плоскость  $\Sigma_0$  делит фрагмент шара, ограниченный дугами окружностей  $\widehat{DGE}$  и  $\widehat{DHE}$  (Рис.6.2.2.5.3), на две равные части), получим объем фрагмента шара, ограниченного дугами окружностей  $\widehat{DGE}$  и  $\widehat{DHE}$  и диаметром  $|DE|$ .

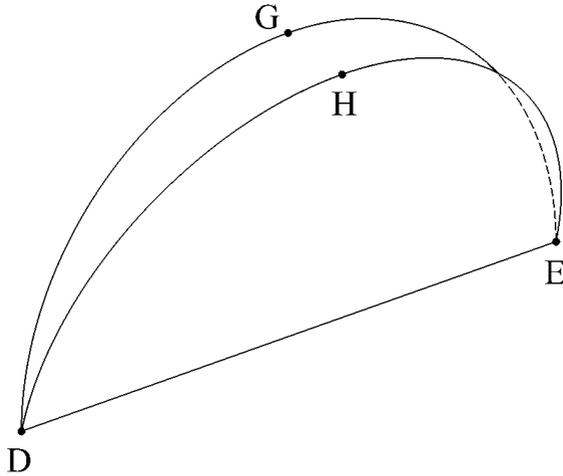


Рис.6.2.2.5.3.

На самом деле будет вычислен не объем фрагмента шара, а объем фрагмента описанного около шара извне сферообразного многогранника (Рис.6.2.2.5.4), так как вычислять объемы тел, ограниченных криволинейными поверхностями, мы не умеем.

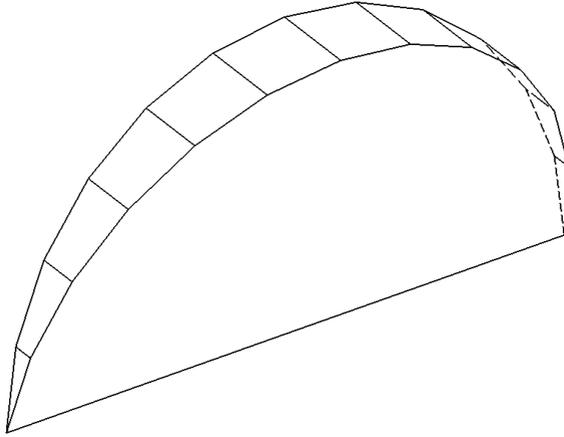


Рис.6.2.2.5.4.

А умножив это значение на число таких фрагментов, укладываемых на теле шара, то есть, на  $\frac{360}{\alpha}$ , получим полный объем шара  $V_{\text{об.ш.о}}$  (Рис.6.2.2.5.5):

$$\begin{aligned}
 V_{\text{об.ш.о}} &= \left( \frac{2}{3} \times R^3 \times \frac{\sin \alpha \times \tan^2 \frac{\alpha}{2}}{\cos \frac{\alpha}{2}} + \right. \\
 &+ \sum_{i=2\alpha}^{\frac{90}{\alpha} \alpha} \left( \frac{2}{3} \times R^3 \times \left( \frac{\sin(i - \alpha) + \sin i}{\cos \frac{\alpha}{2}} \right) \times \tan^2 \frac{\alpha}{2} \right) + \\
 &\left. + \frac{2}{3} \times R^3 \times \left( \frac{\sin(90 - \alpha) + 1}{\cos \frac{\alpha}{2}} \right) \times \tan^2 \frac{\alpha}{2} \right) \times 2 \times \frac{360}{\alpha} =
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{4}{3} \times R^3 \times \left( \frac{\sin \alpha \times \tan^2 \frac{\alpha}{2}}{\cos \frac{\alpha}{2}} + \right. \\
&+ \sum_{i=2\alpha}^{i=\frac{90}{\alpha}\alpha} \left( \left( \frac{\sin(i-\alpha) + \sin i}{\cos \frac{\alpha}{2}} \right) \times \tan^2 \frac{\alpha}{2} \right) + \\
&+ \left. \left( \frac{\sin(90-\alpha) + 1}{\cos \frac{\alpha}{2}} \right) \times \tan^2 \frac{\alpha}{2} \right) \times \frac{360}{\alpha} = \frac{4}{3} \times R^3 \times \pi_{\text{об.ш.о.}} \quad (6.2.2.5.1)
\end{aligned}$$

Где,

$\pi_{\text{об.ш.о.}}$  – коэффициент, стоящий в формуле для вычисления площади поверхности сферы.

$$\begin{aligned}
\pi_{\text{об.ш.о.}} &= \left( \frac{\sin \alpha \times \tan^2 \frac{\alpha}{2}}{\cos \frac{\alpha}{2}} + \sum_{i=2\alpha}^{i=\frac{90}{\alpha}\alpha} \left( \left( \frac{\sin(i-\alpha) + \sin i}{\cos \frac{\alpha}{2}} \right) \times \tan^2 \frac{\alpha}{2} \right) + \right. \\
&+ \left. \left( \frac{\sin(90-\alpha) + 1}{\cos \frac{\alpha}{2}} \right) \times \tan^2 \frac{\alpha}{2} \right) \times \frac{360}{\alpha}, \quad (6.2.2.5.2)
\end{aligned}$$

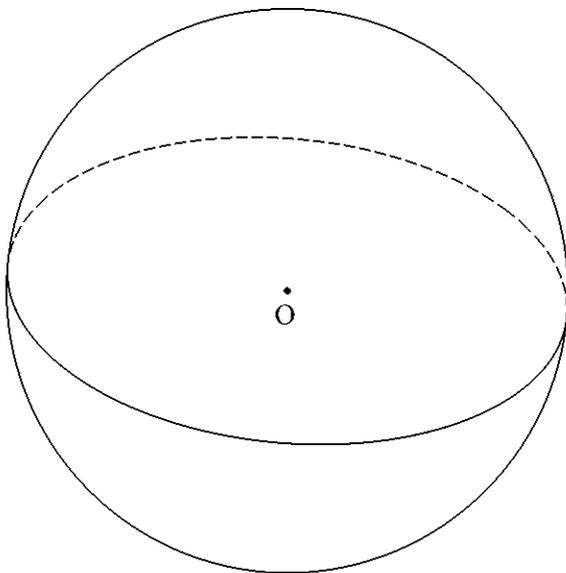


Рис.6.2.2.5.5.

По формуле (6.2.2.5.1) вычисляется, на самом деле, не объем шара (Рис.6.2.2.5.5), а объем описанного около шара сферообразного многогранника (Рис.6.2.2.5.6), так как вычислять объемы тел, ограниченных криволинейными поверхностями, мы не умеем.

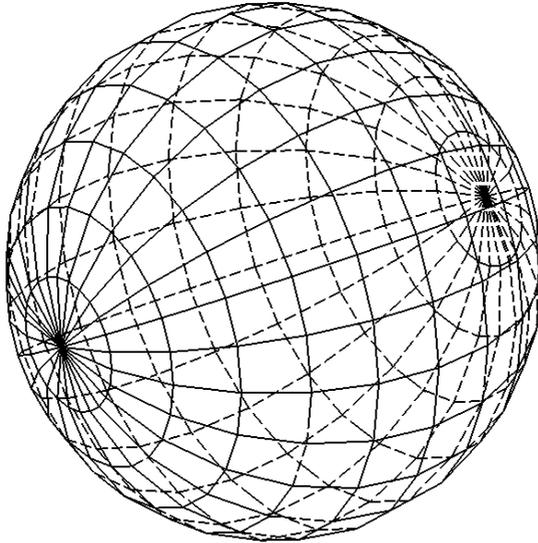


Рис.6.2.2.5.6.

### §6.2.3. Результирующий Метод

При использовании метода вписанного многогранника в §6.2.1.5 была найдена формула (6.2.1.5.1) для вычисления объема шара  $V_{\text{об.ш.в}}$ , имеющая вид:

$$\begin{aligned}
 V_{06, III, B} &= \\
 &= \frac{4}{3} \times R^3 \times \left( \left( \sin \alpha \times \tan \frac{\alpha}{2} \times \frac{\alpha}{2} - \frac{\sin^2 \alpha \times \tan^2 \frac{\alpha}{2}}{1 + \sin^2 \alpha \times \tan^2 \frac{\alpha}{2}} - 2 \times \cos \alpha \times \frac{\alpha}{2} \times \frac{\sin^2 \alpha \times \tan^2 \frac{\alpha}{2}}{1 + \sin^2 \alpha \times \tan^2 \frac{\alpha}{2}} \right) \times \sqrt{1 + \sin^2 \alpha \times \tan^2 \frac{\alpha}{2}} \right) \\
 &\quad + \left( \left( 1 - \frac{\sin^2 \alpha \times \tan^2 \frac{\alpha}{2}}{1 + \sin^2 \alpha \times \tan^2 \frac{\alpha}{2}} \right) \times \sin \alpha \times \frac{\alpha}{2} - \frac{\sin^2 \alpha \times \tan^2 \frac{\alpha}{2}}{1 + \sin^2 \alpha \times \tan^2 \frac{\alpha}{2}} - 2 \times \cos \alpha \times \frac{\alpha}{2} \times \frac{\sin^2 \alpha \times \tan^2 \frac{\alpha}{2}}{1 + \sin^2 \alpha \times \tan^2 \frac{\alpha}{2}} \right) \times \sqrt{1 + \sin^2 \alpha \times \tan^2 \frac{\alpha}{2}}
 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
& \left( \left( \frac{\sin(90 - \alpha) \times \tan \frac{\alpha}{2}}{\sqrt{1 + \sin^2(90 - \alpha) \times \tan^2 \frac{\alpha}{2}}} + \sin \frac{\alpha}{2} \right) \times \left( 1 - \frac{\sin^2(90 - \alpha) \times \tan^2 \frac{\alpha}{2}}{1 + \sin^2(90 - \alpha) \times \tan^2 \frac{\alpha}{2}} \right) + \cos^2 \frac{\alpha}{2} - 2 \times \cos \alpha \times \cos \frac{\alpha}{2} \times \sqrt{1 - \frac{\sin^2(90 - \alpha) \times \tan^2 \frac{\alpha}{2}}{1 + \sin^2(90 - \alpha) \times \tan^2 \frac{\alpha}{2}}} \right) \times \\
& \left( \cos \frac{\alpha}{2} \times \sin \alpha \times \left( 1 - \frac{\sin^2(90 - \alpha) \times \tan^2 \frac{\alpha}{2}}{1 + \sin^2(90 - \alpha) \times \tan^2 \frac{\alpha}{2}} \right) + \cos^2 \frac{\alpha}{2} - 2 \times \cos \alpha \times \cos \frac{\alpha}{2} \times \sqrt{1 - \frac{\sin^2(90 - \alpha) \times \tan^2 \frac{\alpha}{2}}{1 + \sin^2(90 - \alpha) \times \tan^2 \frac{\alpha}{2}}} \right) \times \frac{180}{\alpha} = \\
& = \frac{4}{3} \times R^3 \times \pi_{06_{\text{ин.В}}}, (6.2.3.1)
\end{aligned}$$

Формула (6.2.3.1) является нижней границей для вычисления объема шара.

При использовании метода описанного многогранника в §6.2.2.5 была найдена формула (6.2.2.5.1) для вычисления объема шара  $V_{об.ш.о}$ , имеющая вид:

$$\begin{aligned}
 V_{об.ш.о} &= \frac{4}{3} \times R^3 \times \left( \frac{\sin \alpha \times \tan^2 \frac{\alpha}{2}}{\cos \frac{\alpha}{2}} + \right. \\
 &+ \sum_{i=2\alpha}^{i=\frac{90}{\alpha}-\alpha} \left( \left( \frac{\sin(i-\alpha) + \sin i}{\cos \frac{\alpha}{2}} \right) \times \tan^2 \frac{\alpha}{2} \right) + \\
 &\left. + \left( \frac{\sin(90-\alpha) + 1}{\cos \frac{\alpha}{2}} \right) \times \tan^2 \frac{\alpha}{2} \right) \times \frac{360}{\alpha} = \\
 &= \frac{4}{3} \times R^3 \times \pi_{об.ш.о}, (6.2.3.2)
 \end{aligned}$$

Формула (6.2.3.2) является верхней границей для вычисления объема шара.

Искомый объем шара находится между вышеуказанными нижней и верхней границами. Поэтому, результирующая формула для вычисления объема шара  $V_{об.ш.р}$  будет представлять среднеарифметическое от формул (6.2.3.1) и (6.2.3.2) вида:

$$V_{об.ш.р} = \frac{V_{об.ш.р} + V_{об.ш.о}}{2} = \frac{1}{2} \times \frac{180}{\alpha} \times$$

$$\left( \frac{4}{3} \times R^3 \times \left( \frac{\sin \alpha \times \tan \frac{\alpha}{2} \times \sqrt{2 - \frac{\sin^2 \alpha \times \tan^2 \frac{\alpha}{2}}{1 + \sin^2 \alpha \times \tan^2 \frac{\alpha}{2}}} - 2 \times \cos \alpha \times \sqrt{1 - \frac{\sin^2 \alpha \times \tan^2 \frac{\alpha}{2}}{1 + \sin^2 \alpha \times \tan^2 \frac{\alpha}{2}}} \right) \right) \times$$

$$\left( \left( \frac{1 - \frac{\sin^2 \alpha \times \tan^2 \frac{\alpha}{2}}{1 + \sin^2 \alpha \times \tan^2 \frac{\alpha}{2}} \times \sin \alpha}{2 - \frac{\sin^2 \alpha \times \tan^2 \frac{\alpha}{2}}{1 + \sin^2 \alpha \times \tan^2 \frac{\alpha}{2}} - 2 \times \cos \alpha \times \sqrt{1 - \frac{\sin^2 \alpha \times \tan^2 \frac{\alpha}{2}}{1 + \sin^2 \alpha \times \tan^2 \frac{\alpha}{2}}}} \right) + \right) \times$$

$$+ \left( \sum_{i=2\alpha}^{90-\alpha} \left( \left( \frac{\sin(i-\alpha) \times \tan \frac{\alpha}{2}}{\sqrt{1 + \sin^2(i-\alpha) \times \tan^2 \frac{\alpha}{2}}} + \frac{\sin i \times \tan \frac{\alpha}{2}}{\sqrt{1 + \sin^2 i \times \tan^2 \frac{\alpha}{2}}} \right) \times \right) \right)$$

$$\times \left( \left( \frac{\sin^2(i-\alpha) \times \tan^2 \frac{\alpha}{2}}{1 + \sin^2(i-\alpha) \times \tan^2 \frac{\alpha}{2}} \right) + \left( 1 - \frac{\sin^2 i \times \tan^2 \frac{\alpha}{2}}{1 + \sin^2 i \times \tan^2 \frac{\alpha}{2}} \right) - 2 \times \cos \alpha \times \sqrt{1 - \frac{\sin^2(i-\alpha) \times \tan^2 \frac{\alpha}{2}}{1 + \sin^2(i-\alpha) \times \tan^2 \frac{\alpha}{2}}} \times \sqrt{1 - \frac{\sin^2 i \times \tan^2 \frac{\alpha}{2}}{1 + \sin^2 i \times \tan^2 \frac{\alpha}{2}}} \right) \times$$



$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{2} \times \frac{4}{3} \times R^3 \times \left( \frac{\sin \alpha \times \tan^2 \frac{\alpha}{2}}{\cos \frac{\alpha}{2}} + \sum_{i=2\alpha}^{i=\frac{90-\alpha}{\alpha}} \left( \left( \frac{\sin(i-\alpha) + \sin i}{\cos \frac{\alpha}{2}} \right) \times \tan^2 \frac{\alpha}{2} \right) + \left( \frac{\sin(90-\alpha) + 1}{\cos \frac{\alpha}{2}} \right) \times \tan^2 \frac{\alpha}{2} \right) \times \frac{360}{\alpha} =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& = \frac{4}{3} \times R^3 \times \pi_{06.m.p}, (6.2.3.3)
\end{aligned}$$

Где,

$\pi_{\text{об.ш.р}}$  – коэффициент, стоящий в формуле для вычисления площади поверхности сферы.

$$\pi_{\text{об.м.р.}} = \frac{1}{2} \times \left( \sin \alpha \times \tan \frac{\alpha}{2} \times \frac{2 - \frac{\sin^2 \alpha \times \tan^2 \frac{\alpha}{2}}{1 + \sin^2 \alpha \times \tan^2 \frac{\alpha}{2}} - 2 \times \cos \alpha \times \sqrt{\frac{\alpha}{1 + \sin^2 \alpha \times \tan^2 \frac{\alpha}{2}}}}{1 - \frac{\sin^2 \alpha \times \tan^2 \frac{\alpha}{2}}{1 + \sin^2 \alpha \times \tan^2 \frac{\alpha}{2}}} \right) \times$$

$$\left( \frac{1 - \frac{\sin^2 \alpha \times \tan^2 \frac{\alpha}{2}}{1 + \sin^2 \alpha \times \tan^2 \frac{\alpha}{2}} \times \sin \alpha}{2 - \frac{\sin^2 \alpha \times \tan^2 \frac{\alpha}{2}}{1 + \sin^2 \alpha \times \tan^2 \frac{\alpha}{2}} - 2 \times \cos \alpha \times \sqrt{\frac{\alpha}{1 + \sin^2 \alpha \times \tan^2 \frac{\alpha}{2}}}} + \frac{\sin^2 \alpha \times \tan^2 \frac{\alpha}{2}}{1 + \sin^2 \alpha \times \tan^2 \frac{\alpha}{2}} \right) \times$$



$$\begin{aligned}
 & \left( \left( \frac{\sin(90 - \alpha) \times \tan \frac{\alpha}{2}}{1 + \sin^2(90 - \alpha) \times \tan^2 \frac{\alpha}{2}} + \sin \frac{\alpha}{2} \right) \times \left( 1 - \frac{\sin^2(90 - \alpha) \times \tan^2 \frac{\alpha}{2}}{1 + \sin^2(90 - \alpha) \times \tan^2 \frac{\alpha}{2}} \right) + \cos^2 \frac{\alpha}{2} - 2 \times \cos \alpha \times \cos \frac{\alpha}{2} \times \sqrt{1 - \frac{\sin^2(90 - \alpha) \times \tan^2 \frac{\alpha}{2}}{1 + \sin^2(90 - \alpha) \times \tan^2 \frac{\alpha}{2}}} \right) \times \\
 & \left( \frac{\alpha}{\cos \frac{\alpha}{2}} \times \sin \alpha \times \sqrt{1 - \frac{\sin^2(90 - \alpha) \times \tan^2 \frac{\alpha}{2}}{1 + \sin^2(90 - \alpha) \times \tan^2 \frac{\alpha}{2}}} + \cos^2 \frac{\alpha}{2} - 2 \times \cos \alpha \times \cos \frac{\alpha}{2} \times \sqrt{1 - \frac{\sin^2(90 - \alpha) \times \tan^2 \frac{\alpha}{2}}{1 + \sin^2(90 - \alpha) \times \tan^2 \frac{\alpha}{2}}} \right) + \\
 & \left( \frac{\sin \alpha \times \tan^2 \frac{\alpha}{2}}{\cos \frac{\alpha}{2}} + \sum_{i=2\alpha}^{90-\alpha} \left( \left( \frac{\sin(i - \alpha) + \sin i}{\cos \frac{\alpha}{2}} \right) \times \tan^2 \frac{\alpha}{2} + \left( \frac{\sin(90 - \alpha) + 1}{\cos \frac{\alpha}{2}} \right) \times \tan^2 \frac{\alpha}{2} \right) \times \frac{360}{\alpha} \right), \quad (6.2.3.4)
 \end{aligned}$$

По формуле (6.2.3.3) вычисляется, на самом деле, не объем шара, а объем некоего среднеарифметического сферообразного многогранника, так как точно вычислять объемы тел, ограниченных криволинейными поверхностями (каковой, в частности, является поверхность сферы), мы не умеем. Мы умеем вычислять только объемы тел, ограниченных только плоскими поверхностями.

Вычисленный по формуле (6.2.3.3) объем ближе по величине к искомому объему шара, по сравнению с объемами, вычисленными по формулам, (6.2.3.1) методом вписанного многогранника, и (6.2.3.2) методом описанного многогранника.

### §6.3. Выводы

Ранее в §6.1.1.5 методом вписанного многогранника была найдена формула (6.1.1.5.1) для вычисления площади поверхности сферы  $S_{\text{пов.сф.р}}$ , имеющая вид:

$$S_{\text{пов.сф.в}} = 4 \times \pi_{\text{пл.пов.сф.в}} \times R^2, (6.3.1)$$

Ранее в §6.1.1.5 методом вписанного многогранника была найдена формула (6.1.1.5.2) для вычисления  $\pi_{\text{пл.пов.сф.в}}$ .

Ранее в §6.1.2.5 методом описанного многогранника была найдена формула (6.1.2.5.1) для вычисления площади поверхности сферы  $S_{\text{пов.сф.о}}$ , имеющая вид:

$$S_{\text{пов.сф.в}} = 4 \times \pi_{\text{пл.пов.сф.о}} \times R^2, (6.3.2)$$

Ранее в §6.1.2.5 методом описанного многогранника была найдена формула (6.1.2.5.2) для вычисления  $\pi_{\text{пл.пов.сф.о}}$ .

Как видно из формул (6.1.1.5.2) и (6.1.2.5.2), числа  $\pi_{\text{пл.пов.сф.в}}$  и  $\pi_{\text{пл.пов.сф.о}}$  по форме отличаются друг от друга. Следовательно, нетрудно предположить, что и количественно они будут отличаться друг от друга.

Ранее в §6.1.3 результирующим методом была найдена формула (6.1.3.3) для вычисления площади поверхности сферы  $S_{\text{пов.сф.р}}$ , имеющая вид:

$$S_{\text{пов.сф.р}} = 4 \times \pi_{\text{пл.пов.сф.р}} \times R^2, (6.3.3)$$

Ранее в §6.1.3 результирующим методом была найдена формула (6.1.3.4) для вычисления  $\pi_{\text{пл.пов.сф.р}}$ .

Согласно **П.1.24** формула для вычисления площади поверхности сферы имеет следующий вид:

$$S_{\text{сф}} = 4 \times \pi \times R^2, (6.3.4)$$

Ранее в §6.2.1.5 методом вписанного многогранника была найдена формула (6.2.1.5.1) для вычисления объема шара  $V_{\text{об.ш.в}}$ , имеющая вид:

$$V_{\text{об.ш.в}} = \frac{4}{3} \times R^3 \times \pi_{\text{об.ш.в}}, (6.3.5)$$

Ранее в §6.2.1.5 методом вписанного многогранника была найдена формула (6.2.1.5.2) для вычисления  $\pi_{\text{об.ш.в}}$ .

Ранее в §6.2.2.5 методом описанного многогранника была найдена формула (6.2.2.5.1) для вычисления объема шара  $V_{\text{об.ш.о}}$ , имеющая вид:

$$V_{\text{об.ш.о}} = \frac{4}{3} \times R^3 \times \pi_{\text{об.ш.о}}, (6.3.6)$$

Ранее в §6.2.2.5 методом описанного многогранника была найдена формула (6.2.2.5.2) для вычисления  $\pi_{\text{об.ш.о}}$ .

Как видно из формул (6.2.1.5.2) и (6.2.2.5.2), числа  $\pi_{\text{об.ш.в}}$  и  $\pi_{\text{об.ш.о}}$  по форме отличаются друг от друга. Следовательно, нетрудно предположить, что и количественно они будут отличаться друг от друга.

Ранее в §6.2.3 результирующим методом была найдена формула (6.2.3.3) для вычисления объема шара  $V_{\text{об.ш.р}}$ , имеющая вид:

$$V_{\text{об.ш.р}} = \frac{4}{3} \times R^3 \times \pi_{\text{об.ш.р}}, \quad (6.3.7)$$

Ранее в §6.2.3 результирующим методом была найдена формула (6.2.3.4) для вычисления  $\pi_{\text{об.ш.р}}$ .

Согласно **П.1.25** формула для вычисления объема шара имеет следующий вид:

$$V_{\text{к}} = \frac{4}{3} \times \pi \times R^3, \quad (6.3.8)$$

Как видно из формул (6.1.3.4) и (6.2.3.4), числа  $\pi_{\text{пл.пов.сф.р}}$  и  $\pi_{\text{об.ш.р}}$  по форме отличаются друг от друга. Следовательно, нетрудно предположить, что и количественно они будут отличаться друг от друга.

Формулы (6.3.3), (6.3.4), (6.3.7) и (6.3.8) отличаются друг от друга тем, что в формулах (6.3.4) и (6.3.8) стоит некое единое (для всех формул – для вычисления, длины окружности, площади круга, площади поверхности цилиндра, объема цилиндра, площади поверхности тора, объема тора, площади поверхности конуса, объема конуса, площади сферы и объема шара) число  $\pi$ , а в формулах (6.3.3) и (6.3.7) стоят числа  $\pi_{\text{пл.пов.сф.р}}$  и  $\pi_{\text{об.ш.р}}$ , соответственно. При этом, все вышеуказанные числа по форме, и, как нетрудно предположить, и по величине, отличаются друг от друга.

Автором не вычислялось значение чисел  $\pi_{\text{пл.пов.сф.р}}$  и  $\pi_{\text{об.ш.р}}$  из-за большого требуемого объема вычислений, который очень трудоемок по времени при вычислении на обычном калькуляторе. При наличии специальной программы для вычисления математических формул на компьютере, величину чисел  $\pi_{\text{пл.пов.сф.р}}$  и  $\pi_{\text{об.ш.р}}$  можно считать быстро.

## Заключение

Как видно из всего вышеизложенного, предложенный автором аналитический метод вычисления значения чисел  $\pi_{\text{дл.окр.р}}$ ,  $\pi_{\text{пл.кр.р}}$ ,  $\pi_{\text{пл.кр.в}}$ ,  $\pi_{\text{дл.окр.в}}$ ,  $\pi_{\text{дл.окр.о}}$ ,  $\pi_{\text{пл.пов.сф.р}}$  и  $\pi_{\text{об.ш.р}}$  является ранее не известной разновидностью методов вписанного в круг и описанного около круга многоугольников, непосредственно связан с геометрией, круга, цилиндра, тора, конуса и шара, так как в нем используются тригонометрические функции  $\sin$ ,  $\cos$ ,  $\tan$  и другие известные общепринятые положения Геометрии, которые непосредственно связаны с геометрией, круга, цилиндра, тора, конуса и шара.

Этим предложенный автором аналитический метод отличается от известных уравнений типа (В.1÷В.11), используемых для вычисления значения числа  $\pi$ , которые к геометрии круга не имеют никакого отношения.

Число  $\pi$ , по своей природе, имеет непосредственное отношение к геометрии круга, так как оно является коэффициентом пропорциональности в формулах для вычисления длины окружности и площади круга (и других формулах Геометрии).

Невозможно доказать, что уравнения типа (В.1÷В.11) имеют отношение к геометрии круга. **В это можно только верить – что в науке в принципе недопустимо.** Если известен числовой диапазон, в котором находится искомое число, то всегда можно подобрать бесконечный ряд или бесконечное произведение, численное значение которого будет находиться в данном числовом диапазоне. Но невозможно доказать, что вычисленное таким методом число – это именно искомое число  $\pi$ . Это подтверждается тем простым фактом, что уравнения типа (В.1÷В.11), по форме, совершенно разные уравнения. Вычисленные по уравнениям типа (В.1÷В.11) числа  $\pi$  – количественно отличаются

друг от друга (начиная с определенного знака после запятой).

Предложенными автором результирующими методами получены формулы для вычисления следующих величин.

Длины окружности:

$$L_{\text{дл.окр.р}} = 2 \times r \times \pi_{\text{дл.окр.р}}, (3.1)$$

Площади круга:

$$S_{\text{кр.р}} = r^2 \times \pi_{\text{пл.кр.р}}, (3.2)$$

Площади поверхности цилиндра:

$$S_{\text{ц.р}} = r \times (r \times \pi_{\text{пл.кр.в}} + H_{\text{ц}} \times \pi_{\text{дл.окр.в}}) + \pi_{\text{дл.окр.о}} \times (r + H_{\text{ц}}), (3.3)$$

Объема цилиндра:

$$V_{\text{ц.р}} = \pi_{\text{пл.кр.р}} \times r^2 \times H_{\text{ц}}, (3.4)$$

Площади поверхности тора:

$$S_{\text{т.р}} = 2 \times r \times R \times (\pi_{\text{дл.окр.в}}^2 + \pi_{\text{дл.окр.о}}^2), (3.5)$$

Объема тора:

$$V_{\text{т.р}} = (\pi_{\text{пл.кр.в}} \times \pi_{\text{дл.окр.в}} + \pi_{\text{дл.окр.о}}^2) \times R \times r^2, (3.6)$$

Площади поверхности конуса:

$$S_{\text{кр}} = \frac{1}{2} \times r \times \left( \left( \pi_{\text{пл.кр.в}} \times r + \pi_{\text{дл.окр.в}} \times \sqrt{H_{\text{к}}^2 + \left( r \times \cos \frac{\alpha}{2} \right)^2} \right) + \left( \pi_{\text{дл.окр.о}}^2 \times \left( r + \sqrt{r^2 + H_{\text{к}}^2} \right) \right) \right), (3.7)$$

Объема конуса:

$$V_{к.р} = \frac{1}{3} \times r^2 \times \pi_{пл.кр.р} \times H_{к}, \quad (3.8)$$

Площадь поверхности сферы:

$$S_{пов.сф.р} = 4 \times R^2 \times \pi_{пл.пов.сф.р}, \quad (3.9)$$

Объема шара:

$$V_{об.ш.р} = \frac{4}{3} \times R^3 \times \pi_{об.ш.р}, \quad (3.10)$$

Как видно из уравнений (3.1÷3.10), в них стоят разные по форме и по величине числа  $\pi_{дл.окр.р}$ ,  $\pi_{пл.кр.р}$ ,  $\pi_{пл.кр.в}$ ,  $\pi_{дл.окр.в}$ ,  $\pi_{дл.окр.о}$ ,  $\pi_{пл.пов.сф.р}$  и  $\pi_{об.ш.р}$ .

В таблице 3.1 приведены значения вышеуказанных чисел при величине угла  $\alpha$ , равном  $1^\circ$  (что соответствует 360-угольнику) и  $0,1^\circ$  (что соответствует 3600-угольнику), с точностью до десятого знака после запятой. Для сравнения, в таблице 3.1 приведено известное из [16] значение единого (для всех формул – для вычисления, длины окружности, площади круга, площади поверхности цилиндра, объема цилиндра, площади поверхности тора, объема тора, площади поверхности конуса, объема конуса, площади поверхности сферы, объема шара) числа  $\pi$ , полученного путем вычисления на компьютере бесконечного ряда (не имеющего никакого отношения к геометрии круга), с точностью до 10 знаков после запятой.

При этом, автором не вычислялось значение чисел  $\pi_{пл.пов.сф.р}$  и  $\pi_{об.ш.р}$  из-за большого требуемого объема вычислений, который очень трудоемок по времени при вычислении на обычном калькуляторе. При наличии специальной программы для вычисления математических фор-

мул на компьютере, величину чисел  $\pi_{\text{дл.пов.сф.р}}$  и  $\pi_{\text{об.ш.р}}$  можно рассчитать быстро.

Таблица 3.1

	$\alpha = 1^\circ$	$\alpha = 0,1^\circ$
$\pi_{\text{дл.окр.в}}$	3,1415527794	3,1415922548
$\pi_{\text{дл.окр.о}}$	3,1416724046	3,1415934510
$\pi_{\text{дл.окр.р}}$	<b>3,1416125904</b>	<b>3,1415928528</b>
$\pi_{\text{пл.кр.в}}$	3,1414331556	3,1415910397
$\pi_{\text{пл.кр.р}}$	<b>3,1415527800</b>	<b>3,1415922318</b>
$\pi_{\text{пл.пов.сф.в}}$	-	-
$\pi_{\text{пл.пов.сф.о}}$	-	-
$\pi_{\text{пл.пов.сф.р}}$	-	-
$\pi_{\text{об.ш.в}}$	-	-
$\pi_{\text{об.ш.о}}$	-	-
$\pi_{\text{об.ш.р}}$	-	-
$\pi$	<b>3,1415926535</b>	

Как видно из таблицы 3.1, хотя в количественном отношении вышеуказанные числа  $\pi_{\text{дл.окр.р}}$ ,  $\pi_{\text{пл.кр.р}}$  и  $\pi$  незначительно отличаются друг от друга, но, тем не менее, это принципиально разные числа.

И здесь не имеет значение тот факт, что разница между числами  $\pi_{\text{дл.окр.р}}$  и  $\pi_{\text{пл.кр.р}}$  невелика, и которой, в некоторых расчетах, можно пренебречь. Числа 1,23456 и 1,23457 так же отличаются друг от друга на малую величину, и числа 999 999 999 и 1 000 000 000 так же отличаются друг от друга на малую величину, которой, в некоторых расчетах, можно пренебречь. Однако, тем не менее, это принципиально разные числа. Такими же принципиально разными числами являются числа  $\pi_{\text{дл.окр.р}}$  и  $\pi_{\text{пл.кр.р}}$ .

Предложенный автором метод вычисления значения чисел  $\pi_{\text{дл.окр.р}}$ ,  $\pi_{\text{пл.кр.р}}$ ,  $\pi_{\text{пл.кр.в}}$ ,  $\pi_{\text{дл.окр.в}}$ ,  $\pi_{\text{дл.окр.о}}$ ,  $\pi_{\text{пл.пов.сф.р}}$  и  $\pi_{\text{об.ш.р}}$  позволяет вычислять их с какой угодно точностью, так как чем меньше будет угол  $\alpha$ , стоящий в уравнениях для вычисления вышеуказанных чисел, тем с большей точностью будут вычислены, длина окружности, площадь круга, площадь поверхности цилиндра, объем цилиндра, площадь поверхности тора, объем тора, площадь поверхности конуса, объем конуса, площадь поверхности сферы и объем шара.

### **Важно понимать следующее.**

Предложенный автором аналитический метод позволяет вычислять, длину ломанной линии (периметр многоугольника), площади плоских поверхностей и объемы тел, ограниченных плоскими поверхностями, так как вычислять длину кривых линий (каковой, в частности, является окружность), площади криволинейных поверхностей (каковыми в частности являются поверхности цилиндра, тора, конуса и сферы), и объемы тел, ограниченных криволинейными поверхностями – мы не умеем в принципе.

## Литература

1. Вайман А.А. Шумеро-Вавилонская математика III-I тысячелетия до новой эры. – М.: Издательство Восточной Литературы, 1961. – 275 с.
2. Березкина Э.И. Математика Древнего Китая. М.: Наука, 1980. – 311 с.
3. Белозеров С.Е. Пять знаменитых задач древности. Ростов-на-Дону.: Издательство Ростовского Университета, 1975. – 320 с.
4. Архимед. Сочинения. М.: Государственное издательство физико-математической литературы, 1962. – 639 с.
5. О квадратуре круга. Пер. с нем. Академика Бернштейна С.Я. М.: ОНТИ НКТП СССР, 1935. – 235 с.
6. Юшкевич А.П. Леонард Эйлер о квадратуре круга/Историко-математические исследования. М.: Государственное издательство технико-теоретической литературы, выпуск №10, 1957. – С.159-210.
7. История математики. Том 1. М.: Наука, 1970. – 351 с.
8. Натансон И.П. Краткий курс высшей математики. М.: Государственное издательство физико-математической литературы, 1963. – 311 с.
9. Зайцев И.Л. Элементы высшей математики. М.: Наука, 1972. – 416 с.
10. Бронштейн И.Н., Семендяев К.А. Справочник по математике. М.: Наука, 1986. – 544 с.
11. Бубенников А.В. Начертательная геометрия. М.: Высшая школа, 1985. – 288 с.
12. Гордон В.О., Семенцов-Огиевский М.А. Курс начертательной геометрии. М.: Наука, 1988. – 272 с.
13. Фролов С.А. Начертательная геометрия. М.: Машиностроение, 1983. – 240 с.
14. Александров А.Д. Основания геометрии. М.: Наука, 1987. – 288 с.

15. Берже М. Геометрия. Том 1. М.: Мир, 1984. – 560 с.

16. Сайт в сети Интернет: [https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%9F%D0%B8\(%D1%87%D0%B8%D1%81%D0%BB%D0%BE](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%9F%D0%B8(%D1%87%D0%B8%D1%81%D0%BB%D0%BE).

Научное издание

**Валерий Туркубеевич Пчентлешев**

**АНАЛИТИЧЕСКИЙ МЕТОД  
ВЫЧИСЛЕНИЯ ЗНАЧЕНИЯ  
ЧИСЛА  $\pi$**

Издательство «Перо»

109052, Москва, Нижегородская ул., д. 29–33, стр. 27, ком. 105

Тел.: (495) 973–72–28, 665–34–36

[www.pero-print.ru](http://www.pero-print.ru) e-mail: [info@pero-print.ru](mailto:info@pero-print.ru)

Подписано в печать 16.07.2021. Формат 60x90/16.

Бумага офсетная. Усл. печ. л. 18,5. Тираж 50 экз. Заказ 630.

Отпечатано в ООО «Издательство «Перо»

ISBN 978-5-00189-333-2



9 785001 893332