Л. Д. КУДРЯВЦЕВ

КУРС математического АНАЛИЗА

2

Л. Д. КУДРЯВЦЕВ

Курс математического анализа

Том II

Допущено
Министерством высшего и среднего
специального образования СССР
в качестве учебника для студентов
физико-математических
и инженерно-физических
специальностей вузов

МОСКВА «ВЫСШАЯ ШКОЛА» 1981

ББК 22.16
К 88
УДК 517 (0.75.8)

Кудрявцев Л. Д.

К88 Курс математического анализа (в двух томах): Учебник для студентов университетов и втузов. М.: Высшая школа, 1981, т. II: — 584 с., ил.

В пер.: 1 р. 50 к.

Во втором томе содержится интегральное и дифференциальное исчисления функций многих переменных, теория дифференцируемых отображений, теория рядов Фурье и преобразования Фурье, элементы функционального анализа и теория обобщенных функций.

Предназначается студентам университетов и физико-математических и инженерно-физических специальностей втузов, а также студентам других специальностей для углубленной математической подготовки.

К $\frac{20203-121}{001(01)-81}$ 35—81 1702050000

517.2
ББК 22.16

Настоящая книга является второй частью двухтомного курса математического анализа. В ней изложены вопросы, изучаемые обычно студентами на втором курсе. Нумерация глав, параграфов и рисунков в этом томе продолжает соответствующую нумерацию первого тома.

Глава пятая, с которой начинается этот том, посвящена дифференциальному исчислению функций многих переменных и по существу является непосредственным продолжением главы второй первого тома. Дальнейшие главы содержат изложение интегрального исчисления функций многих переменных, теории рядов и интеграла Фурье. Преобразование Фурье излагается сначала в классическом виде, а затем даются его обобщения для пространства L_2 и для обобщенных функций. Заканчивается том небольшим «Дополнением», основная часть которого касается численных методов для вычисления приближенных значений функций приближенных решений уравнений и приближенных вычислений интегралов.

ГЛАВА ПЯТАЯ

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИИ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ

(продолжение)

§ 39. ФОРМУЛА ТЕЙЛОРА И РЯД ТЕЙЛОРА ДЛЯ ФУНКЦИЙ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ

39.1 ФОРМУЛА ТЕЙЛОРА ДЛЯ ФУНКЦИЙ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ

Если функция многих переменных имеет достаточное число непрерывных производных в окрестности некоторой точки, то эту функцию в указанной окрестности можно (подобно тому как это было сделано для функций одного переменного) представить в виде суммы некоторого многочлена и остатка, который «мал» в определенном смысле.

Теорема 1. *Пусть функция $z=f(x, y)$ определена и непрерывна вместе со всеми своими частными производными до порядка m включительно $(m \geqslant 1)$ в δ-окрестности точки (x_0, y_0). Тогда для всех Δx и Δy, удовлетворяющих условию $\rho=\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}<\delta$, существует такое $\theta=\theta(\Delta x, \Delta y)$, $0<\theta<1$, что справедлива формула*

$$\Delta z=f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)-f(x_0, y_0)=\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y}\Delta y+$$
$$+\frac{1}{2!}\left[\frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial x^2}\Delta x^2+2\frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial x\,\partial y}\Delta x\,\Delta y+\frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial y^2}\Delta y^2\right]+$$
$$+\frac{1}{3!}\left(\Delta x\frac{\partial}{\partial x}+\Delta y\frac{\partial}{\partial y}\right)^{\{3\}} f(x_0, y_0)+\ldots+$$
$$+\frac{1}{(m-1)!}\left(\Delta x\frac{\partial}{\partial x}+\Delta y\frac{\partial}{\partial y}\right)^{\{m-1\}} f(x_0, y_0)+r_{m-1}(\Delta x, \Delta y),$$

или, короче

$$\Delta z=\sum_{k=1}^{m-1}\frac{1}{k!}\left(\Delta x\frac{\partial}{\partial x}+\Delta y\frac{\partial}{\partial y}\right)^{\{k\}} f(x_0, y_0)+r_{m-1}(\Delta x, \Delta y), \quad (39.1)$$

где

$$r_{m-1}(\Delta x, \Delta y)=\frac{1}{m!}\left(\Delta x\frac{\partial}{\partial x}+\Delta y\frac{\partial}{\partial y}\right)^{\{m\}} f(x_0+\theta\Delta x, y_0+\theta\Delta y). \quad (39.2)$$

Формула (39.1) называется *формулой Тейлора* (порядка $m-1$) для функции f, функция $r_{m-1}(\Delta x, \Delta y)$ — *ее остаточным членом*, а его запись в виде (39.2) — остаточным членом формулы Тейлора в *форме Лагранжа*.

При $m=1$ в (39.1) требует разъяснения смысл первого члена правой части, поскольку в этом случае верхний индекс суммирования равен нулю. В этом случае, по определению, полагается, что этот член равен нулю, т. е. что формула (39.1) имеет вид

$$\Delta z = r_0(\Delta x,\ \Delta y).$$

В дальнейшем всегда, когда встретится выражение, записанное с помощью символа $\sum$, у которого значение верхнего индекса суммирования меньше значения нижнего индекса будем также считать, что это выражение равно нулю.

Доказательство. Пусть Δx и Δy зафиксированы так, что $\rho=\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}<\delta$, тогда все точки вида $(x_0+t\,\Delta x,\ y_0+t\,\Delta y)$, где $0\leqslant t\leqslant 1$, лежат на отрезке, соединяющем точки $(x_0,\ y_0)$ и $(x_0+\Delta x,\ y_0+\Delta y)$, и поэтому все они принадлежат δ-окрестности точки $(x_0,\ y_0)$. Вследствие этого имеет смысл композиция функций

$$z=f(x,\ y)$$

и

$$x=x_0+t\,\Delta x,\quad y=y_0+t\,\Delta y,\quad 0\leqslant t\leqslant 1,$$

т. е. сложная функция

$$F(t)=f(x_0+t\,\Delta x,\ y_0+t\,\Delta y),\qquad 0\leqslant t\leqslant 1. \tag{39.3}$$

Очевидно, что

$$\Delta z=f(x_0+\Delta x,\ y_0+\Delta y)-f(x_0,\ y_0)=F(1)-F(0). \tag{39.4}$$

Поскольку функция f имеет в δ-окрестности точки $(x_0,\ y_0)$ m непрерывных частных производных, то, согласно теореме о производных сложной функции (см. п. 20.3), функция F также имеет на отрезке $[0,\ 1]$ m непрерывных производных и поэтому для нее справедлива формула Тейлора порядка $m-1$ с остаточным членом в форме Лагранжа:

$$F(t)-F(0)=F'(0)\,t+\frac{F''(0)}{2!}t^2+\ldots+\frac{F^{(m-1)}(0)}{(m-1)!}t^{m-1}+\frac{F^{(m)}(\theta t)}{m!}t^m,$$
$$0<\theta<1, \tag{39.5}$$

и в рассматриваемой окрестности точки $(x_0,\ y_0)$ функцию (39.3) можно m раз продифференцировать по правилу дифференцирования сложной функции (см. замечание 2 в п. 20.4), причем значения получающихся смешанных частных производных не зависят от порядка дифференцирования (см. п. 21.1).

Выразив производные $F^{(k)}(t)$ через производные функции $f(x,\ y)$ и положив в формуле (39.5) $t=1$ (см. (39.4)), получим требуемую формулу Тейлора для функции $f(x,\ y)$. Действительно, из (39.3) следует, что

$$F'(t)=\frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt}=$$
$$=\frac{\partial f(x_0+t\,\Delta x,\ y_0+t\,\Delta y)}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial f(x_0+t\,\Delta x,\ y_0+t\,\Delta y)}{\partial y}\Delta y.$$

Отсюда для $F''(t)$, опустив для краткости обозначения аргументов, получим

$$F''(t)=\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial f}{\partial y}\Delta y\right)=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\Delta x^2+2\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}\Delta x\,\Delta y+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\Delta y^2.$$

Вообще по индукции легко установить, что

$$F^{(k)}(t)=\left(\Delta x\frac{\partial}{\partial x}+\Delta y\frac{\partial}{\partial y}\right)^{\{k\}}f(x_0+t\,\Delta x,\ y_0+t\,\Delta x),$$
$$k=1,\ 2,\ \ldots,\ m. \qquad (39.6)$$

Положив в формулах (39.6) $t=0$ при $k=1,\ 2,\ \ldots,\ m-1$, будем иметь:

$$F'(0)=\frac{\partial f(x_0,\ y_0)}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial f(x_0,\ y_0)}{\partial y}\Delta y;$$
$$F''(0)=\frac{\partial^2 f(x_0,\ y_0)}{\partial x^2}\Delta x^2+2\frac{\partial^2 f(x_0,\ y_0)}{\partial x\,\partial y}\Delta x\,\Delta y+\frac{\partial^2 f(x_0,\ y_0)}{\partial y^2}\Delta y^2,$$

и вообще

$$F^{(k)}(0)=\left(\Delta x\frac{\partial}{\partial x}+\Delta y\frac{\partial}{\partial y}\right)^{\{k\}}f(x_0,\ y_0),\qquad k=1,\ 2,\ \ldots,\ m-1. \qquad (39.7)$$

При $k=m$, заменив t на θt,

$$F^{(m)}(\theta t)=\left(\Delta x\frac{\partial}{\partial x}+\Delta y\frac{\partial}{\partial y}\right)^{\{m\}}f(x_0+\theta t\,\Delta x,\ y_0+\theta t\,\Delta y). \qquad (39.8)$$

Подставим теперь (39.7) и (39.8) в (39.5) и положим $t=1$; тогда в силу соотношения (39.4)

$$\Delta z=F(1)-F(0)=\sum_{k=1}^{m-1}\frac{F^{(k)}(0)}{k!}+\frac{F^{(m)}(0)}{m!}=$$
$$=\sum_{k=1}^{m-1}\frac{1}{k!}\left(\Delta x\frac{\partial}{\partial x}+\Delta y\frac{\partial}{\partial y}\right)^{\{k\}}f(x_0,\ y_0)+$$
$$+\frac{1}{m!}\left(\Delta x\frac{\partial}{\partial x}+\Delta y\frac{\partial}{\partial y}\right)^{\{m\}}f(x_0+\theta\,\Delta x,\ y_0+\theta\,\Delta y),\quad 0<\theta<1.\ \square$$

Следствие. *В предположениях теоремы* 1 *справедлива формула*

$$\Delta z=\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{k!}\left(\Delta x\frac{\partial}{\partial x}+\Delta y\frac{\partial}{\partial y}\right)^{\{k\}}f(x_0,\ y_0)+r_m(\Delta x,\ \Delta y), \qquad (39.9)$$

причем остаточный член $r_m(\Delta x, \Delta y)$ может быть записан в каждом из следующих видов:

$$r_m(\Delta x, \Delta y) = \sum_{k=0}^{m} \varepsilon_k(\Delta x, \Delta y)\, \Delta x^k \Delta y^{m-k}, \tag{39.10}$$

где

$$\lim_{\rho \to 0} \varepsilon_k(\Delta x, \Delta y) = 0, \quad k = 0, 1, \ldots, m, \quad \rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$$

или

$$r_m(\Delta x, \Delta y) = \varepsilon(\Delta x, \Delta y)\, \rho^m, \tag{39.11}$$

где $\lim\limits_{\rho \to 0} \varepsilon(\Delta x, \Delta y) = 0$, *т. е.*

$$r_m(\Delta x, \Delta y) = o(\rho^m). \tag{39.12}$$

Представление остаточного члена формулы Тейлора в форме (39.12) называется его записью в *форме Пеано*.

Доказательство. Положим

$$\varepsilon_k'(\Delta x, \Delta y) = \frac{\partial^m f(x_0 + \theta\Delta x, y_0 + \theta\Delta y)}{\partial x^k \partial y^{m-k}} - \frac{\partial^m f(x_0, y_0)}{\partial x^k \partial y^{m-k}}. \tag{39.13}$$

В силу непрерывности всех частных производных порядка m

$$\lim_{\rho \to 0} \varepsilon_k'(\Delta x, \Delta y) = 0.$$

Преобразуем остаток $r_{m-1}(\Delta x, \Delta y)$ (см. (39.2)), использовав выражение (39.13), следующим образом:

$$r_{m-1}(\Delta x, \Delta y) = \frac{1}{m!} \sum_{k=0}^{m} C_m^k \frac{\partial^m f(x_0 + \theta\Delta x, y_0 + \theta\Delta y)}{\partial x^k \partial y^{m-k}} \Delta x^k \Delta y^{m-k} =$$

$$= \frac{1}{m!} \sum_{k=0}^{m} C_m^k \frac{\partial^m f(x_0, y_0)}{\partial x^k \partial y^{m-k}} \Delta x^k \Delta y^{m-k} +$$

$$+ \frac{1}{m!} \sum_{k=0}^{m} C_m^k \varepsilon_k'(\Delta x, \Delta y)\, \Delta x^k \Delta y^{m-k} =$$

$$= \frac{1}{m!}\left(\Delta x \frac{\partial}{\partial x} + \Delta y \frac{\partial}{\partial y}\right)^{(m)} f(x_0, y_0) + \sum_{k=0}^{m} \varepsilon_k(\Delta x, \Delta y)\, \Delta x^k \Delta y^{m-k}, \tag{39.14}$$

где $\varepsilon_k(\Delta x, \Delta y) = \frac{C_m^k}{m!} \varepsilon_k'(\Delta x, \Delta y)$, и потому

$$\lim_{\rho \to 0} \varepsilon_k(\Delta x, \Delta y) = 0. \tag{39.15}$$

Подставляя (39.14) в (39.1), получим формулу Тейлора (39.9) с остаточным членом в виде (39.10).

Покажем, что остаточный член (39.10) можно записать в виде (39.11). Для этого положим

$$\varepsilon(\Delta x,\ \Delta y)=\sum_{k=0}^{m}\varepsilon_k(\Delta x,\ \Delta y)\left(\frac{\Delta x}{\rho}\right)^k\left(\frac{\Delta y}{\rho}\right)^{m-k}. \qquad (39.16)$$

Тогда

$$r_m(\Delta x,\ \Delta y)=\sum_{k=0}^{m}\varepsilon_k(\Delta x,\ \Delta y)\,\Delta x^k\,\Delta y^{m-k}=$$

$$=\rho^m\sum_{k=0}^{m}\varepsilon_k(\Delta x,\ \Delta y)\left(\frac{\Delta x}{\rho}\right)^k\left(\frac{\Delta y}{\rho}\right)^{m-k}=\varepsilon(\Delta x,\ \Delta y)\,\rho^m,$$

и так как $\left|\frac{\Delta x}{\rho}\right|\leqslant 1$ и $\left|\frac{\Delta y}{\rho}\right|\leqslant 1$, то из (39.15) следует, что

$$\lim_{\rho\to 0}\varepsilon(\Delta x,\ \Delta y)=0. \ \square$$

Используя понятие дифференциалов высших порядков, формуле Тейлора можно придать более компактную форму, внешне идентичную формуле Тейлора для функций одного переменного, записанной также с помощью дифференциалов. В самом деле, так как (см. п. 21.2)

$$d^kf(x,\ y)=\left(\Delta x\frac{\partial}{\partial x}+\Delta y\frac{\partial}{\partial y}\right)^{(k)}f(x,\ y),\quad k=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ m,$$

то, полагая для краткости $M_0=(x_0,\ y_0)$ и $M=(x_0+\Delta x,\ y_0+\Delta y)$, формулу (39.9) можно записать в виде

$$\Delta z=\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{k!}\,d^kf(M_0)+r_m(M). \qquad (39.17)$$

Эта форма записи формулы Тейлора наиболее проста и потому удобна для запоминания.

Сделаем несколько замечаний к доказательствам теоремы 1 и ее следствия. Прежде всего в условиях этой теоремы было потребовано, чтобы функция f имела непрерывные производные до порядка m включительно в некоторой δ-окрестности точки $(x_0,\ y_0)$. Можно было бы потребовать непрерывность в указанной окрестности только производных порядка m, поскольку из их непрерывности вытекает и непрерывность в этой окрестности всех младших производных данной функции, т. е. производных порядков $k=0,\ 1,\ \ldots,\ m-1$ (см. п. 20.2).

Подчеркнем, что непрерывность частных производных в δ-окрестности точки $(x_0,\ y_0)$ была использована, во-первых, для того чтобы встречающиеся частные производные не зависели от порядка дифференцирования (это было использовано как при доказательстве формулы Тейлора (39.1), так и в самой форме записи этой формулы), и, во-вторых, для того, чтобы функцию (39.3) можно было m раз дифференцировать по правилу дифференцирования сложной функции. Обратим внимание на то, что при $m=1$ смешанные производные отсутствуют; для возможности же один раз дифференцировать функцию (39.3) по правилу сложной функции, а следовательно, и для справедливости теоремы 1 достаточно более слабого предположения о рассматриваемой функции f. Именно, вместо предположения о непрерывной дифференцируемости в вышеуказанной δ-окрестности точки (x_0, y_0) функции f достаточно ее дифференцируемости в этой окрестности (см. определения 2 и 4 в п. 20.2).

Непрерывность частных производных порядка m (в точке (x_0, y_0)) использована также при доказательстве следствия теоремы 1: она нужна для того, чтобы функции $\varepsilon_k' (\Delta x, \Delta y)$, определенные формулами (39.13), стремились к нулю при $\rho \to 0$.

Подчеркнем еще, что при сделанных предположениях в формуле (39.9) доказано, что $r_m (\Delta x, \Delta y) = o(\rho^m)$ при $\rho \to 0$ не в смысле предела по любому фиксированному направлению, как может показаться на первый взгляд из приведенного доказательства, а в более сильном смысле — в смысле предела в точке (x_0, y_0) (почему?).

Формулу (39.1) можно несколько обобщить, если не стремиться к тому, чтобы она была справедливой для всех точек $(x_0+\Delta x_0, y_0+\Delta y)$ δ-окрестности точки (x_0, y_0), а рассматривать эту формулу лишь при фиксированных Δx и Δy. Именно, если функция f определена и имеет непрерывные частные производные порядка m на открытом множестве, содержащем отрезок с концами (x_0, y_0) и $(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)$, то формула (39.1) также остается справедливой вместе с ее доказательством. Из этого следует, что если функция f определена в выпуклой области G (см. п. 18.2) и имеет в G непрерывные частные производные порядка m, то для любых двух точек $(x_0, y_0) \in G$ и $(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) \in G$ справедлива формула Тейлора (39.1).

Упражнение 1. Пусть функция $f(x, y)$ непрерывна вместе со своими частными производными до порядка m включительно в некоторой окрестности точки (x_0, y_0). Доказать, что ее *многочлен Тейлора* порядка m, т. е. многочлен

$$P(x, y) = \sum_{k=0}^{m} \frac{1}{k!} \left[(x-x_0)\frac{\partial}{\partial x} + (y-y_0)\frac{\partial}{\partial y} \right]^{(k)} f(x_0, y_0)$$

является многочленом наилучшего приближения функции $f(x, y)$ «в бесконечно малой окрестности точки (x_0, y_0)». Это означает следующее: каков бы ни был многочлен $Q(x, y)$, степени не большей m (т. е. в каждом его члене сумма показателей степеней у переменных x и y должна не превышать числа m) такой, что

$$f(x, y) = Q(x, y) + o(\rho^n), \quad n \geqslant m, \quad \text{при } \rho \to 0,$$

где

$$\rho=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2},$$

он совпадает с указанным многочленом Тейлора $P(x, y)$ функции $f(x, y)$.

Все сказанное переносится и на случай функций любого числа переменных.

Теорема 1'. *Если функция n переменных $y=f(x_1, \ldots, x_n)$ определена и непрерывна вместе со всеми своими частными производными до порядка m, $m \geqslant 1$, включительно в некоторой δ-окрестности точки $x^{(0)}=(x_1^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)})$, то справедлива формула*

$$\Delta y=f(x_1^{(0)}+\Delta x_1, \ldots, x_n^{(0)}+\Delta x_n)-f(x_1^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)})=$$
$$=\sum_{k=1}^{m-1}\frac{1}{k!}\left(\Delta x_1\frac{\partial}{\partial x_1}+\ldots+\Delta x_n\frac{\partial}{\partial x_n}\right)^{\{k\}}f(x^0)+r_{m-1}(\Delta x), \tag{39.18}$$

где

$$r_{m-1}(\Delta x)=$$
$$=\frac{1}{m!}\left(\Delta x_1\frac{\partial}{\partial x_1}+\ldots+\Delta x_n\frac{\partial}{\partial x_n}\right)^{\{m\}}f(x_1^{(0)}+\theta\Delta x_1, \ldots, x_n^{(0)}+\theta\Delta x_n),$$
$$0<\theta<1, \quad \Delta x=(\Delta x_1, \ldots, \Delta x_n), \tag{39.19}$$

а также формула

$$\Delta y=\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{k!}\left(\Delta x_1\frac{\partial}{\partial x_1}+\ldots+\Delta x_n\frac{\partial}{\partial x_n}\right)^{\{k\}}f(x^{(0)})+r_m(\Delta x), \tag{39.20}$$

где $r_m(\Delta x)$ можно записать в каждом из следующих видов: либо

$$r_m(\Delta x)=\sum_{m_1+\ldots+m_n=m}\varepsilon_{m_1\ldots m_n}(\Delta x)\,\Delta x_1^{m_1}\ldots\Delta x_n^{m_n}, \tag{39.21}$$

где $\lim\limits_{\rho\to 0}\varepsilon_{m_1, \ldots, m_n}(\Delta x)=0$, $\rho=\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n}\Delta x_i^2}$, *либо*

$$r_m(\Delta x)=\varepsilon(\Delta x)\rho^m, \quad \lim_{\rho\to 0}\varepsilon(\Delta x)=0, \tag{39.22}$$

т. е.

$$r_m(\Delta x)=o(\rho^m), \quad \rho\to 0.$$

Наконец, через дифференциалы формулу (39.20) *можно записать в виде*

$$\Delta y=\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{k!}d^kf(x^{(0)})+r_m(\Delta x). \tag{39.23}$$

Раскроем теперь скобки в формулах (39.18) и (39.19), воспользовавшись алгебраической формулой

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)^k = \sum_{k_1+\ldots+k_n=k} \frac{k!}{k_1!k_2!\ldots k_n!} a_1^{k_1} a_2^{k_2}\ldots a_n^{k_n}.$$

Для того чтобы короче записать результат, введем новые обозначения. Положим $k=(k_1, \ldots, k_n)$, $|k|=k_1+\ldots+k_n$, $k!=k_1!\ldots k_n!$,

$$f^{(k)}=\frac{\partial^{|k|} f}{\partial x_1^{k_1}\partial x_2^{k_2}\ldots\partial x_n^{k_n}},\quad (x-x^{(0)})^k=(x_1-x_1^{(0)})^{k_1}\ldots(x_n-x_n^{(0)})^{k_n};$$

$k=(k_1, \ldots, k_n)$ — называется *мультииндексом*.

В этих обозначениях формула Тейлора (39.18) с остаточным членом в виде (39.19) перепишется в виде

$$f(x)=\sum_{|k|<m}\frac{f^{(k)}(x^{(0)})}{k!}(x-x^{(0)})^k+\sum_{|k|=m}\frac{f^{(k)}(x^{(0)}+\theta(x-x^{(0)}))}{k!}(x-x^{(0)})^k.$$

Здесь как всегда, $x=(x_1, \ldots, x_n)$, $x^{(0)}=(x_1^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)})$ и

$$x^{(0)}+\theta(x-x^{(0)})=(x_1^{(0)}+\theta(x_1-x_1^{(0)}), \ldots, x_n^{(0)}+\theta(x_n-x_n^{(0)})).$$

В этом виде формула Тейлора для функций любого числа переменных выглядит так же, как и для функций одной переменной.

Иногда, особенно в случае функций многих переменных, для производных употребляется обозначение

$$D^k \overset{\text{def}}{=} \frac{\partial^{k_1+\ldots+k_n}}{\partial x_1^{k_1}\ldots\partial x_n^{k_n}},$$

где $k=(k_1, \ldots, k_n)$ — мультииндекс. Если пользоваться этой символикой, то формула Тейлора примет вид

$$f(x)=\sum_{|k|<m}\frac{1}{k!}D^k f(x^{(0)})(x-x^{(0)})^k+$$
$$+\sum_{|k|=m}\frac{1}{k!}D^k f(x^{(0)}+\theta(x-x^{(0)}))(x-x^{(0)})^k,\qquad 0<\theta<1.$$

39.2. ФОРМУЛА КОНЕЧНЫХ ПРИРАЩЕНИЙ ДЛЯ ФУНКЦИЙ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ

Частный случай формулы Тейлора (39.18), в котором $m=1$, обычно называется формулой конечных приращений Лагранжа для функций многих переменных. В силу сделанных в предыдущем пункте замечаний к теореме 1 о предположениях, при которых справедливы формулы (39.1) и (39.18), из теоремы 1′ получаем следующее утверждение.

Теорема 2. *Если функция $f(x_1, \ldots, x_n)$ дифференцируема в каждой точке некоторой выпуклой области $G \subset R^n$, то для каждой пары точек $(x_1, \ldots, x_n)$ и $(x_1+\Delta x_1, \ldots; x_n+\Delta x_n)$ из G существует такое θ, $0<\theta<1$, что*

$$f(x_1+\Delta x_1, \ldots, x_n+\Delta x_n)-f(x_1, \ldots, x_n)= \\ =\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f(x_1+\theta\,\Delta x_1, \ldots, x_n+\theta\,\Delta x_n)}{\partial x_i}\Delta x_i,$$

или, короче,

$$f(x+\Delta x)-f(x)=\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f(x+\theta\,\Delta x)}{\partial x_i}\Delta x_i, \tag{39.24}$$

где $x=(x_1, \ldots, x_n)$, $x+\Delta x=(x_1, +\Delta x_1, \ldots, x_n+\Delta x_n)$ *и*

$$x+\theta\,\Delta x=(x_1+\theta\,\Delta x_1, \ldots, x_n+\theta\,\Delta x_n).$$

Формула (39.24), как указывалось, и называется *формулой конечных приращений Лагранжа.*

Эта формула, так же как и вообще формула Тейлора, находит многочисленные и разнообразные применения в различных вопросах математического анализа.

Обратим внимание на то, что теорема 2 не является частным случаем теоремы 1, поскольку в ней требуется не непрерывная дифференцируемость рассматриваемой функции в каждой точке множества G, а лишь ее дифференцируемость. Однако доказательство теоремы 2 фактически содержится в доказательстве теоремы 1. Действительно, как это отмечалось в замечаниях к доказательству теоремы 1 и ее следствию (см. п. 39.1), при $m=1$ приведенное выше доказательство теоремы 1 сохраняет силу и при предположениях теоремы 2, т. е. при предположении лишь дифференцируемости (а не непрерывной дифференцируемости) функции f.

В качестве примера применения формулы (39.24) докажем следующее утверждение.

Теорема 3. *Если функция дифференцируема в каждой точке выпуклой области G и имеет в G ограниченные частные производные, то она равномерно непрерывна в этой области.*

Доказательство. Если

$$\left|\frac{\partial f(x)}{\partial x_i}\right| \leqslant c, \qquad i=1, 2, \ldots, n, \quad x \in G$$

(c — постоянная), то для любых двух точек $x'=(x'_1, \ldots, x'_n)$ и $x''=$ $=(x''_1, \ldots, x''_n)$ из (39.24) следует, что

$$|f(x'')-f(x')| \leqslant \sum_{i=1}^{n} \left|\frac{\partial f(\xi)}{\partial x_i}\right| |x''_i - x'_i| \leqslant cn\rho(x', x'')$$

(здесь ξ — некоторая точка отрезка с концами в точках x' и x''). Поэтому, если задано $\varepsilon > 0$, достаточно взять $\delta = \frac{\varepsilon}{cn}$, чтобы для любых точек $x' \in G$ и $x'' \in G$ таких, что $\rho(x', x'') < \delta$, выполнялось неравенство

$$|f(x'') - f(x')| < \varepsilon, \tag{39.25}$$

а это и означает равномерную непрерывность функции f в области G.

39.3. ЗАМЕЧАНИЯ ОБ ОЦЕНКЕ ОСТАТОЧНОГО ЧЛЕНА ФОРМУЛЫ ТЕЙЛОРА ВО ВСЕЙ ОБЛАСТИ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ФУНКЦИИ

Остаточный член в формуле Тейлора, очевидно, зависит не только от приращений аргументов, но и от самой точки, в окрестности которой рассматривается разложение функции и которую мы в п. 39.1 считали фиксированной. Теперь нас будут интересовать поведение и оценка остаточного члена в зависимости от изменения указанной точки. Чтобы подчеркнуть эту зависимость, мы в этом пункте будем остаточный член порядка m обозначать $r_m(x, \Delta x)$, где $x = (x_1, \ldots, x_n)$ — точка, в окрестности которой раскладывается данная функция по формуле Тейлора. Как и раньше, $\Delta x = (\Delta x_1, \ldots, \Delta x_n)$.

В формулах (39.21) и (39.22) будем вместо $\varepsilon_{m_1 \ldots m_n}(\Delta x)$ и $\varepsilon(\Delta x)$ соответственно писать $\varepsilon_{m_1 \ldots m_n}(x, \Delta x)$ и $\varepsilon(x, \Delta x)$. В дальнейшем нам потребуется оценка остаточного члена формулы Тейлора в форме Пеано сразу для всей области существования разложения по указанной формуле.

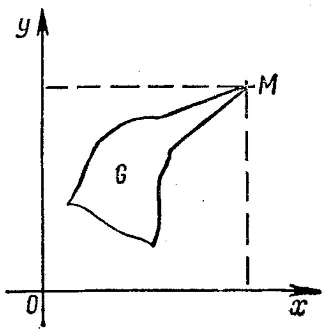


Рис. 144

Введем сначала понятие непрерывности частных производных в замыкании открытого множества. Это требует специального определения, так как в граничной точке открытого множества G даже в случае, когда функция определена на замыкании $\overline{G}$ множества G, понятие частной производной, вообще говоря, не определено (см., например, точку M границы области G на рис. 144).

Определение 1. *Функция f, определенная на открытом множестве $G \subset R^n$, называется непрерывно продолжаемой на его замыкание $\overline{G}$, если существует такая непрерывная на $\overline{G}$ функция F, что $F = f$ на G.*

Функция F называется непрерывным продолжением функции f (на $\overline{G}$) и для простоты будет также обозначаться символом f.

Очевидно в силу единственности предела функции, если у функции, определенной на G, существует непрерывное продолжение на $\bar{G}$, то оно единственно.

Определение 2. *Функция f называется непрерывно дифференцируемой (соответственно m раз непрерывно дифференцируемой) на $\bar{G}$, если функция f определена на G и все ее частные производные первого порядка (соответственно частные производные до порядка m включительно) непрерывно продолжаемы с G на $\bar{G}$.*

Упражнения. 2. Доказать, что если функция f определена на открытом множестве $G \subset R^n$ и имеет на нем непрерывно продолжаемую на его замыкание $\bar{G}$ производную $\frac{\partial f}{\partial x_1}$, и в некоторой точке границы множества G существует (односторонняя) частная производная $\frac{\partial f}{\partial x_1}$, то она совпадает с непрерывным продолжением в эту точку частной производной $\frac{\partial f}{\partial x_1}$.

3. Доказать, что для того, чтобы непрерывная функция, определенная на ограниченном открытом множестве $G \subset R^n$, была непрерывно продолжаемой на его замыкание, необходимо и достаточно, чтобы она была равномерно непрерывной на G. Показать, что в случае неограниченного открытого множества условие равномерной непрерывности продолжаемой функции, являясь достаточным для непрерывного продолжения, не является необходимым.

4. Построить пример непрерывной и ограниченной в области функции, которую нельзя непрерывно продолжить на замыкание этой области.

Вернемся теперь к формуле Тейлора. Пусть функция f m раз непрерывно дифференцируема на замыкании $\bar{G}$ открытого ограниченного множества G. Тогда, согласно результатам п. 39.1, в каждой точке $x \in G$ имеет место разложение (39.20) функции f по формуле Тейлора, причем стремление к нулю $\varepsilon_{m_1 \ldots m_n}(x, \Delta x)$ в формуле (39.21) и $\varepsilon(x, \Delta x)$ в формуле (39.22) при $\rho \to 0$ равномерно на множестве G (см. определение в п. 20.2), т. е. для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, что если

$$\rho = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \Delta x_i^2} < \delta, \tag{39.26}$$

то

$$|\varepsilon_{m_1 \ldots m_n}(x, \Delta x)| < \varepsilon \quad \text{и} \quad |\varepsilon(x, \Delta x)| < \varepsilon$$

для всех точек $x \in G$.

Это в данном случае непосредственно следует из метода получения функций $\varepsilon_{m_1 \ldots m_n}$ и $\varepsilon(\Delta x)$. Действительно, в силу ограниченности и замкнутости замыкания $\bar{G}$ открытого множества G непрерывные продолжения на $\bar{G}$ частных производных порядка m данной функции равномерно непрерывны на $\bar{G}$, поэтому (см. формулу (39.13) для случая $n = 2$; в общем случае справедлива аналогичная формула) если выполнено условие (39.26), то

$$|\varepsilon_{m_1 \ldots m_n}(x, \Delta x)| \leqslant \omega\left(\delta, \frac{\partial f}{\partial x_1^{m_1} \ldots \partial x_n^{m_n}}, \bar{G}\right). \tag{39.27}$$

Здесь правая часть (модуль непрерывности соответствующей производной) не зависит от точки множества G и стремится к нулю при $\delta \to 0$. Поэтому из (39.27) следует равномерное стремление $\varepsilon_{m_1 \dots m_n}$ к нулю на G.

Теперь можно оценить бесконечно малую $\varepsilon(\Delta x, \Delta y)$ в формуле (39.22). Для произвольного натурального n ее можно, аналогично случаю $n=2$ (см. (39. 16)), представить в виде

$$\varepsilon(x, \Delta x) = \sum_{m_1+\dots+m_n=m} \varepsilon_{m_1 \dots m_n}(x, \Delta x) \left(\frac{\Delta x_1}{\rho}\right)^{m_1} \dots \left(\frac{\Delta x_n}{\rho}\right)^{m_n}.$$

Отсюда имеем:

$$|\varepsilon(x, \Delta x)| \leqslant \sum_{m_1+\dots+m_n=m} |\varepsilon_{m_1 \dots m_n}(x, \Delta x)|. \qquad (39.28)$$

В правой части неравенства (39.28) стоит некоторое фиксированное число слагаемых; обозначим его через N. В силу уже доказанного равномерного в G стремлении к нулю функции $\varepsilon_{m_1 \dots m_n}(x, \Delta x)$ для любого заданного $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, что если выполнено условие $\rho(x, x+\Delta x) < \delta$, то

$$|\varepsilon_{m_1 \dots m_n}(x, \Delta x)| < \frac{\varepsilon}{N}, \quad m_1+\dots+m_n=m.$$

Отсюда и из неравенства (39.28) следует, что

$$|\varepsilon(x, \Delta x)| < \varepsilon. \ \square$$

Отметим еще одну оценку в целом остаточного члена формулы Тейлора, получающуюся из записи его в форме Лагранжа (39.19).

Если функция f определена на открытом множестве G и имеет на G ограниченные частные производные порядка m, т. е. существует такая постоянная $M > 0$, что

$$\left|\frac{\partial^m f(x)}{\partial x_1^{m_1} \dots \partial x_n^{m_n}}\right| \leqslant M, \quad m_1+\dots+m_n=m, \qquad x \in G, \qquad (39.29)$$

то при выполнении условия $\rho(x, x+\Delta x) < \delta$ для всех $x \in G$ справедливо неравенство

$$|r_{m-1}(x, \Delta x)| \leqslant \frac{Mn^m\delta^m}{m!}.$$

Это сразу следует из формулы (39.19), если абсолютные величины каждого слагаемого ее правой части оценить с помощью неравенства (39.29) и очевидного неравенства $|\Delta x_i| \leqslant \delta$.

39.4. РАВНОМЕРНАЯ СХОДИМОСТЬ ПО ПАРАМЕТРУ СЕМЕЙСТВА ФУНКЦИЙ

В предыдущем пункте мы встретились с понятием равномерной сходимости на данном множестве семейства функций, зависящих от некоторого параметра, когда этот параметр стремится к определенным значениям. Такими функциями в нашем случае являлись $\varepsilon_{m_1\ldots m_n}(x, \Delta x)$ и $\varepsilon(x, \Delta x)$, где роль параметра играло Δx. В простейшем виде этот случай встречался еще раньше в п. 20.2.

Сформулируем определение равномерной сходимости семейства функций в общем случае.

Определение 3. *Пусть $X \subset R^n$, $Y \subset R^m$, $y^{(0)}$ — предельная точка множества Y или одна из бесконечностей*) ∞, $+\infty$, $-\infty$ (последние две бесконечности имеет смысл рассматривать только при $m=1$). Пусть, далее, функция $\varphi(x)$ определена для всех $x \in X$, а $f(x, y)$ — для всех $x \in X$ и $y \in Y$.*

Функция $f(x, y)$ называется равномерно стремящейся на множестве X к функции $\varphi(x)$ при $y \to y^{(0)}$ и пишется

$$f(x, y) \underset{X}{\rightrightarrows} \varphi(x), \quad y \to y^{(0)}$$

если для любого $\varepsilon > 0$ существует такая проколотая окрестность $\mathring{U}(y^{(0)})$ точки $y^{(0)}$, что для всех $x \in X$ и всех $y \in Y \cap \mathring{U}(y^{(0)})$, выполняется неравенство

$$|f(x, y) - \varphi(x)| < \varepsilon. \tag{39.30}$$

Переменная y часто называется в этом случае параметром, а функция $f(x, y)$, $y \in Y$, — «семейством функций от x» (в том смысле, что эта функция при различных фиксированных $y \in Y$ задает функции переменной x).

Подобно случаю равномерной сходимости последовательности функций (см. п. 36.1) условие равномерной сходимости функций по параметру можно сформулировать, используя понятие предела, следующим образом.

Функция $f(x, y)$ равномерно стремится на множестве X к функции $\varphi(x)$ при $y \to y^{(0)}$ тогда и только тогда, когда

$$\lim_{y \to y^0} \sup_{x \in X} |f(x, y) - \varphi(x)| = 0. \tag{39.31}$$

Таким образом условие $f(x, y) \underset{X}{\rightrightarrows} \varphi(x)$, $y \to y^{(0)}$, равносильно стремлению к нулю при $y \to y^0$ функции $F(y) \overset{\text{def}}{=} \sup\limits_{x \in X} |f(x, y) - \varphi(x)|$. Доказательство этого утверждения совсем не сложно и

*) Бесконечности ∞, $+\infty$, $-\infty$ будем для простоты называть в дальнейшем также точками («бесконечно удаленными»).

аналогично случаю равномерной сходимости последовательности функций. Его проведение предоставляется читателю.

Справедлив в рассматриваемом случае и аналог критерия Коши равномерной сходимости последовательностей.

Теорема 4 (критерий Коши). *Для того чтобы функция $f(x, y)$ при $y \to y^{(0)}$ равномерно стремилась на множестве X к некоторой функции, необходимо и достаточно, чтобы для любого $\varepsilon > 0$ нашлась такая проколотая окрестность $\mathring{U}(y^{(0)})$ точки $y^{(0)}$, чтобы для любых*

$$y' \in \mathring{U}(y^{(0)}) \cap Y \quad и \quad y'' \in \mathring{U}(y^{(0)}) \cap Y$$

и любого $x \in X$ выполнялось неравенство

$$|f(x, y'') - f(x, y')| < \varepsilon. \tag{39.32}$$

Действительно, необходимость условия (39.32), как всегда в подобных ситуациях, легко следует из условия (39.30). Для доказательства же достаточности следует показать, что из условия (39.32) вытекает, что для любого фиксированного $x \in X$ существует $\lim\limits_{y \to y^{(0)}} f(x, y)$ и что стремление функции $f(x, y)$ к этому пределу при $y \to y^{(0)}$ происходит равномерно.

Все это также рекомендуется проделать читателю самостоятельно.

Упражнение 5. Доказать: для того чтобы функция $f(x, y)$, $x \in X$, $y \in X$ равномерно на множестве X стремилась при $y \to y^{(0)}$ к функции $\varphi(x)$, $x \in X$, необходимо и достаточно, чтобы для любой последовательности $y^{(n)} \in Y$, $y^{(n)} \neq y^{(0)}$, $n = 1, 2, \ldots$, стремящейся к $y^{(0)}$, последовательность $f(x, y^{(n)})$, $n = 1, 2, \ldots$, равномерно на множестве X сходилась к функции $\varphi(x)$.

Примеры. 1. Рассмотрим семейство функций $f(x, y) = e^{-xy}$, где $0 \leqslant x \leqslant 1$, $0 \leqslant y < +\infty$. Очевидно

$$\lim_{y \to +\infty} f(x, y) = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad x > 0, \\ 1, & \text{если} \quad x = 0 \end{cases}$$

(таким образом переменная y, если использовать указанную выше терминологию, является параметром). Обозначим предельную функцию через $\varphi(x)$,

$$\varphi(x) = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad x > 0, \\ 1, & \text{если} \quad x = 0. \end{cases} \tag{39.33}$$

Докажем, что стремление функции $f(x, y)$ к $\varphi(x)$ при $y \to +\infty$ происходит неравномерно. Для этого достаточно показать, что существует такое $\varepsilon_0 > 0$, что какую бы окрестность $\mathring{U}(+\infty)$ ни взять, найдутся такие $x \in [0, 1]$ и $y \in \mathring{U}(+\infty)$, что будет выполнено неравенство $|e^{-xy} - \varphi(x)| \geqslant \varepsilon_0$. Возьмем ε_0 таким, что $0 < \varepsilon_0 < 1$, и произвольную окрестность $\mathring{U}(+\infty)$. Тогда, какое бы $y \in \mathring{U}(+\infty)$ ни взять, для него $\lim\limits_{x \to 0} e^{-xy} = 1$, и поэтому найдется такое $x \in (0, 1]$, что

$$|e^{-xy} - \varphi(x)| = |e^{-xy} - 0| > \varepsilon_0.$$

Таким образом, в данном случае условия критерия Коши (см. теорему 4) не выполняются.

Однако, при любом a, $0 < a < 1$, семейство функций $f(x, y) = e^{-xy}$ при $y \to +\infty$ равномерно стремится к нулю на отрезке $[a, 1]$. Проверим в этом случае выполнение условий критерия Коши (см. теорему 4). Для любого $\varepsilon > 0$ существует число $\eta_\varepsilon > 0$, такое, что $e^{-a\eta_\varepsilon} < \varepsilon$ $\left(\text{достаточно взять любое } \eta > \frac{|\ln \varepsilon|}{a}\right)$; поэтому для всех $y > \eta_\varepsilon$ и всех $x \in [a, 1]$ будем иметь

$$|e^{-xy} - 0| = e^{-xy} < e^{-a\eta_\varepsilon} < \varepsilon.$$

Конечно, исследование равномерной сходимости рассматриваемого семейства функций можно выполнить и применив критерий (39.31). Действительно, использовав формулу (39.33), получим

$$\sup_{0 \leq x \leq 1} |e^{-xy} - \varphi(x)| \geq \sup_{0 < x \leq 1} e^{-xy} = 1,$$

поэтому условие (39.31) заведомо не выполняется. Если же $0 < a < 1$, то

$$\lim_{y \to +\infty} \sup_{a \leq x \leq 1} |e^{-xy} - \varphi(x)| = \lim_{y \to +\infty} \sup_{a \leq x \leq 1} e^{-xy} = \lim_{y \to +\infty} e^{-ay} = 0.$$

Таким образом,

$$e^{-xy} \underset{[0,\,1]}{\not\rightrightarrows} \varphi(x), \quad e^{-xy} \underset{[0,\,a]}{\rightrightarrows} \varphi(x), \quad y \to +\infty, \quad 0 < a < 1.$$

2. В случае, когда Y является множеством натуральных чисел $Y = \{1, 2, 3, \ldots\}$, а $y^{(0)} = +\infty$, приведенное определение равномерной сходимости по параметру превращается в определение равномерной сходимости последовательности функций $f_n(x) = f(x, n)$, $n = 1, 2, \ldots$, на множестве X.

3. Пусть функция $f(x, y)$ непрерывна на прямоугольнике $Q = \{(x, y): -\infty < a \leq x \leq b < +\infty, \ -\infty < c \leq y \leq d < +\infty\}$ и пусть $y_0 \in [c, d]$.

Обозначим через $\omega(\delta, f)$ модуль непрерывности функции f в прямоугольнике Q; тогда

$$|f(x, y) - f(x, y_0)| \leq \omega(|y - y_0|; f), \quad (x, y) \in Q. \tag{39.34}$$

Правая часть этого неравенства не зависит от x и в силу равномерной непрерывности функции f на прямоугольнике Q $\lim\limits_{\delta \to 0} \omega(\delta; f) = 0$. Поэтому из неравенства (39.34) следует, что при $y \to y_0$ функция $f(x, y)$ равномерно на отрезке $[a, b]$ стремится к функции $f(x, y_0)$.

Упражнение 6. Доказать, что если семейство функций $f(x, y)$, $x \in X \subset R^n$, $y \in Y \subset R^m$ таково, что функции $f(x, y)$ при любом фиксированном $y \in Y$ непрерывны по x на множестве X и равномерно на этом множестве стремятся к $\varphi(x)$ при $y \to y^{(0)}$, то $\varphi(x)$ также непрерывна на множестве X.

39.5. ЗАМЕЧАНИЯ О РЯДАХ ТЕЙЛОРА ДЛЯ ФУНКЦИЙ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ

Если функция $f(x)$ определена и бесконечно много раз дифференцируема в некоторой δ-окрестности точки $x^{(0)} = (x_1^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}) \in R^n$, то для этой функции формула Тейлора (39.20) будет, очевидно, справедливой при любом натуральном $n = 1, 2, \ldots$ и $\sum\limits_{i=1}^{n} \Delta x_i^2 < \delta^2$. Если при этом ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} \left(\Delta x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \ldots + \Delta x_n \frac{\partial}{\partial x_n}\right)^{\{k\}} f(x^{(0)})$$

будет сходиться к $\Delta y = f(x) - f(x^{(0)})$ (см. п. 38.2), то получится формула

$$\Delta y = f(x) - f(x^{(0)}) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} \left(\Delta x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \ldots + \Delta x_n \frac{\partial}{\partial x_n}\right)^{\{k\}} f(x^{(0)}),$$

где $x = (x_1, \ldots, x_n)$ и $x_i - x_i^{(0)} = \Delta x_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Отсюда, перенеся $f(x^{(0)})$ в правую часть, получим разложение функции в степенной ряд, называемый *рядом Тейлора* функции f:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \left[(x_1 - x_1^{(0)}) \frac{\partial}{\partial x_1} + \ldots + (x_n - x_n^{(0)}) \frac{\partial}{\partial x_n}\right]^{\{k\}} f(x^{(0)}),$$

или, что то же

$$f(x) = \sum_{|k|=0}^{\infty} \frac{1}{k!} D^k f(x^{(0)}) (x - x^{(0)})^k,$$

где $k = (k_1, \ldots, k_n)$ — мультииндекс.

Упражнение 7. Разложить в ряд Тейлора функцию $f(x, y) = e^{x+y}$.

§ 40. ЭКСТРЕМУМЫ ФУНКЦИЙ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ

40.1. НЕОБХОДИМЫЕ УСЛОВИЯ ЭКСТРЕМУМА

Изучаемые в настоящем и некоторых следующих параграфах вопросы носят аналитический характер, и их доказательства не усложняются при увеличении числа переменных. Поэтому мы проведем их рассмотрение сразу в общем n-мерном случае, указывая при необходимости их специфические особенности для случаев $n=2$ и $n=3$.

Определение 1. *Пусть функция $f(x)$ определена на множестве $E \subset R^n$. Точка $x^{(0)} \in E$ называется точкой строгого максимума, соответственно строгого минимума, если существует такая окрестность $U(x^{(0)})$ точки $x^{(0)}$, что для всех $x \in U(x^{(0)}) \cap E$, $x \neq x^{(0)}$, выполняется неравенство $f(x) < f(x^{(0)})$ соответственно неравенство $f(x) > f(x^{(0)})$.*

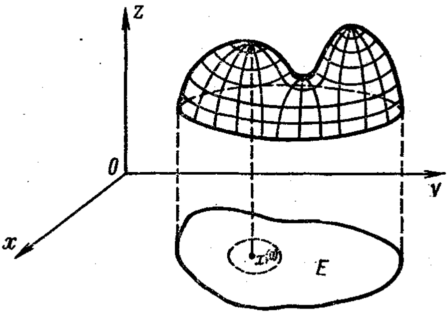


Рис. 145

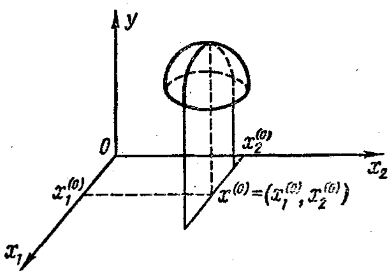


Рис. 146

Таким образом, точка строгого максимума (соответственно строгого минимума) характеризуется тем, что $\Delta f = f(x) - f(x^{(0)}) < 0$ (соответственно $\Delta f > 0$) при всех $x \in U(x^{(0)}) \cap E$, $x \neq x^{(0)}$ (рис. 145).

Если же для точки $x^{(0)}$ существует такая окрестность $U(x^{(0)})$, что при всех $x \in U(x^{(0)}) \cap E$ выполняется условие $f(x) \leq f(x^{(0)})$ (соответственно $f(x) \geq f(x^{(0)})$), то $x^{(0)}$ называется просто точкой максимума (соответственно минимума).

Определение 2. *Точки (строгого) максимума и минимума функции называются точками (строгого) экстремума.*

Теорема 1. *Пусть функция $f(x)$, $x=(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ определена в некоторой окрестности точки $x^{(0)}$; если она является точкой экстремума функции $f(x)$ и если в ней существует какая-либо из производных $\frac{\partial f}{\partial x_j}$ (j может принимать одно из значений $1, 2, \ldots, n$), то она равна нулю, $\frac{\partial f(x^{(0)})}{\partial x_j} = 0$.*

Следствие. *Если функция $f(x)$ дифференцируема в точке экстремума $x^{(0)}$, то ее дифференциал равен нулю в этой точке, $df(x^{(0)}) = 0$.*

Доказательство (теоремы и следствия). Пусть для определенности $j=1$. Если $x^{(0)} = (x_1^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)})$ является точкой экстремума для функции $f(x) = f(x_1, \ldots, x_n)$, то $x_1^{(0)}$ является точкой экстремума для функции $f(x_1, x_2^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)})$ одной переменной x_1 (рис. 146), а поэтому если в этой точке существует производная

$\frac{\partial f}{\partial x_1}$, то по теореме Ферма (см. п. 11.1) она равна нулю, т. е.

$$\frac{\partial f(x^{(0)})}{\partial x_1} = \frac{df(x_1, x_2^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)})}{dx_1}\Bigg|_{x_1 = x_1^{(0)}} = 0.$$

Аналогично обстоит дело в случае любой переменной x_j ($j = 2, \ldots, n$).

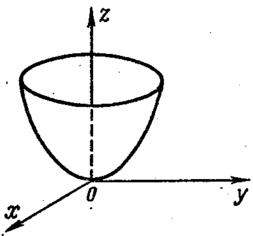


Рис. 147

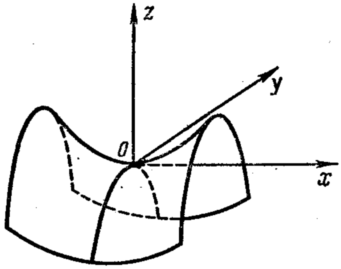


Рис. 148

Если функция $f(x)$ дифференцируема в точке экстремума $x^{(0)}$, то в этой точке существуют все производные $\frac{\partial f}{\partial x_i}$, $i = 1, 2, \ldots, n$, и, согласно доказанному, все они равны нулю, поэтому и

$$df(x^{(0)}) = \sum_{i=1}^{n} \frac{df(x^{(0)})}{\partial x_i} dx_i = 0. \ \square$$

Примеры. 1. Найдем точки экстремума функции $z = x^2 + y^2$. Точки экстремума в силу доказанного находятся среди тех, для которых $dz = 0$. Так как $dz = 2x\,dx + 2y\,dy$, то условие $dz = 0$ выполняется в единственной точке (0, 0). В этой точке $z = 0$, во всех же других точках $z = x^2 + y^2 > 0$. Поэтому (0, 0) является точкой строгого минимума для функции $z = x^2 + y^2$ (рис. 147).

2. Исследуем точки экстремума функции $z = x^2 - y^2$. Поступая аналогично предыдущему случаю, находим, что условие $dz = 0$ снова выполняется в точке (0, 0) и в этой точке $z = 0$. Однако здесь при $y = 0$ и любых $x \neq 0$ имеем $z > 0$, а при $x = 0$ и любом $y \neq 0$ имеем $z < 0$. Поэтому точка (0, 0) не является точкой экстремума, и, значит, функция $z = x^2 - y^2$ вообще не имеет экстремальных точек (рис. 148).

40.2. ДОСТАТОЧНЫЕ УСЛОВИЯ СТРОГОГО ЭКСТРЕМУМА

Напомним несколько определений из курса алгебры.

Определение 3. *Квадратичная форма* $A(x) = A(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i, j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j$, $a_{ij} = a_{ji}$, $i, j = 1, 2, \ldots, n$, *называется положи-*

тельно (соответственно отрицательно) определенной, если $A(x)>0$ *(соответственно* $A(x)<0$*) для любой точки* $x\in R^n$, $x\neq 0$.

Квадратичная форма, являющаяся положительно или отрицательно определенной, называется также просто определенной (или знакоопределенной) квадратичной формой.

Определение 4. *Квадратичная форма, принимающая как положительные, так и отрицательные значения, называется неопределенной.*

Лемма 1. *Пусть* S *— единичная сфера в* R^n:

$$S=\{x\colon x_1^2+\ldots+x_n^2=1\},$$

и пусть $A(x)$ *— определенная квадратичная форма; тогда*

$$\inf_{x\in S}|A(x)|=\mu>0.$$

Доказательство. Функция $A(x)$ является многочленом второй степени по переменным $x_1, \ldots, x_n$, поэтому $A(x)$, а, следовательно, и $|A(x)|$ непрерывны во всем пространстве R^n. Отсюда вытекает, что функция $|A(x)|$ непрерывна на компакте S. Согласно теореме Вейерштрасса, функция $|A(x)|$ достигает на S своей нижней грани, т. е. существует такая точка $x^{(0)}\in S$, что

$$\mu\overset{\text{def}}{=}\inf_{x\in S}|A(x)|=|A(x^{(0)})|.$$

По определению знакоопределенной квадратичной формы $|A(x)|>0$ для всех точек $x\in S$, значит, в частности, $\mu=$ $=|A(x^{(0)})|>0$. □

Определение 5. *Пусть функция* f *дифференцируема в точке* $x^{(0)}\in R^n$. *Если* $df(x^{(0)})=0$, *то* $x^{(0)}$ *называется стационарной точкой функции* f.

Очевидно, что точка $x^{(0)}$, в которой функция f дифференцируема, является стационарной в том и только в том случае, если

$$\frac{df(x^{(0)})}{dx_i}=0,\quad i=1,\ 2,\ \ldots,\ n. \tag{40.1}$$

Согласно следствию из теоремы 1, точка экстремума, в которой функция f дифференцируема, является стационарной; обратное, конечно, вообще говоря, неверно: не всякая стационарная точка, в которой функция дифференцируема, является точкой экстремума (см. пример 2 в конце п. 40.1).

Теорема 2 (достаточные условия строгого экстремума). *Пусть функция* f *определена и имеет непрерывные производные второго порядка в некоторой окрестности точки* $x^{(0)}$. *Пусть* $x^{(0)}$ *является стационарной точкой функции* f; *тогда если квадратичная форма*

$$A(dx_1,\ \ldots,\ dx_n)=\sum_{i,\ j=1}^{n}\frac{\partial^2 f(x^{(0)})}{\partial x_i\partial x_j}dx_i\,dx_j, \tag{40.2}$$

т. е. второй дифференциал функции f в точке $x^{(0)}$, положительно определенна (отрицательно определенна), то $x^{(0)}$ является точкой строгого минимума (соответственно строгого максимума); если же квадратичная форма (40.2) *неопределенна, то в точке $x^{(0)}$ нет экстремума.*

Доказательство. Пусть $U(x^{(0)}, \delta_0)$ — δ_0-окрестность стационарной для функции f точки $x^{(0)}$, в которой функция f имеет непрерывные вторые производные. Пусть точка

$$x^{(0)}+dx=(x_1^{(0)}+dx_1, \ldots, x_n^{(0)}+dx_n)$$

принадлежит этой окрестности.

По формуле Тейлора (см. (39.23)), учитывая условия стационарности (40.1), получим

$$\Delta f=f(x^{(0)}+dx)-f(x^{(0)})=\frac{1}{2}\sum_{i,\,j=1}^{n}\frac{\partial^2 f(x^{(0)})}{\partial x_i\,\partial x_j}dx_i\,dx_j+\varepsilon(dx)\rho^2,$$

где $dx=(dx_1, \ldots, dx_n)$, $\rho^2=dx_1^2+\ldots+dx_n^2$, и

$$\lim_{\rho\to 0}\varepsilon(dx)=0, \tag{40.3}$$

или

$$\Delta f=\frac{\rho^2}{2}\left[\sum_{i,\,j=1}^{n}\frac{\partial^2 f(x^{(0)})}{\partial x_i\,\partial x_j}\frac{dx_i}{\rho}\frac{dx_j}{\rho}+2\varepsilon(dx)\right]=$$

$$=\frac{\rho^2}{2}\left[A\left(\frac{dx_1}{\rho}, \ldots, \frac{dx_n}{\rho}\right)+2\varepsilon(dx)\right]. \tag{40.4}$$

Точка $\left(\frac{dx_1}{\rho}, \ldots, \frac{dx_n}{\rho}\right)$ лежит на единичной сфере S (т. е. на сфере с центром в начале координат и радиусом, равным 1), ибо $\left(\frac{dx_1}{\rho}\right)^2+\cdots+\left(\frac{dx_n}{\rho}\right)^2=1$.

Пусть квадратичная форма (40.2) знакоопределенна. Тогда, согласно лемме, $\inf\limits_S|A|=\mu>0$. Выберем δ, $0<\delta<\delta_0$, так, чтобы $2|\varepsilon(dx)|<\mu$ при $\rho<\delta$. Тогда при $\rho<\delta$, т. е. при $x^{(0)}+dx\in U(x^{(0)}, \delta)$ и $dx\neq 0$, все выражение в квадратных скобках в правой части формулы (40.4) будет иметь тот же знак, что и первое слагаемое $A\left(\frac{dx_1}{\rho}, \ldots, \frac{dx_n}{\rho}\right)$:

$$\operatorname{sign}\Delta f=\operatorname{sign}A\left(\frac{dx_1}{\rho}, \ldots, \frac{dx_n}{\rho}\right).$$

Поэтому, если квадратичная форма (40.2) является положительно определенной, то $\Delta f>0$, а если отрицательно определенной, то $\Delta f<0$ при $x^{(0)}+dx\in \mathring{U}(x^{(0)}, \delta)$. Значит, в первом случае $x^{(0)}$ является точкой строгого минимума, а во втором — точкой строгого максимума.

Пусть теперь квадратичная форма (40.2) является неопределенной; это означает, что существуют две такие точки $dx' = (dx_1', \ldots, dx_n')$ и $dx'' = (dx_1'', \ldots, dx_n'')$, что $A(dx_1', \ldots, dx_n') > 0$, а $A(dx_1'', \ldots, dx_n'') < 0$. Мы не можем на основании этого сразу сказать, что приращение функции Δf меняет знак в любой окрестности точки $x^{(0)}$, так как точки $x^{(0)} + dx' = (x_1^{(0)} + dx_1', \ldots, x_n^{(0)} + dx_n')$ и $x^{(0)} + dx'' = (x_1^{(0)} + dx_1'', \ldots, x_n^{(0)} + dx_n'')$ могут, вообще говоря, даже и не принадлежать области определения функции f. Однако, нужный нам результат будет следовать из того, что квадратичная форма $A(dx)$ сохраняет один и тот же знак или равенство нулю на каждой прямой, проходящей через точку $x^{(0)}$, из которой удалена сама эта точка, а значение $A\left(\frac{dx}{\rho}\right)$, $dx \neq 0$, вообще не зависит от выбора точки на этой прямой.

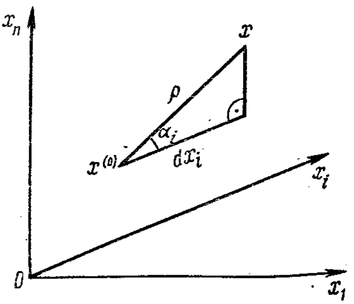


Рис. 149

Рассмотрим точку $dx' = (dx_1', \ldots, dx_n')$. Проведем полупрямую, начинающуюся в точке $x^{(0)}$ и проходящую через точку $x^{(0)} + dx'$. Для любой точки $x = (x_1, \ldots, x_n)$ этой полупрямой положим $dx_i = x_i - x_i^{(0)}$, $i = 1, 2, \ldots, n$, и $\rho = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} dx_i^2}$. Тогда (рис. 149)

$$\frac{dx_i}{\rho} = \cos\alpha_i, \quad i = 1, 2, \ldots, n, \tag{40.5}$$

где $\cos\alpha_i$ суть направляющие косинусы рассматриваемой полупрямой. Поэтому точка

$$\left(\frac{dx_1}{\rho}, \ldots, \frac{dx_n}{\rho}\right) = (\cos\alpha_1, \ldots, \cos\alpha_n), \tag{40.6}$$

лежащая, очевидно, на единичной сфере*) S с центром $x^{(0)}$, будет одной и той же для всех точек x этой полупрямой, т. е. точка (40.6) не зависит от расстояния ρ между x и $x^{(0)}$.

Следовательно и значение квадратичной формы (40.2) в точке (40.6), т. е. $A\left(\frac{dx_1}{\rho}, \ldots, \frac{dx_n}{\rho}\right)$, не зависит от ρ. Отсюда для любой точки (40.6) имеем

$$A\left(\frac{dx_1}{\rho}, \ldots, \frac{dx_n}{\rho}\right) = A\left(\frac{dx_1'}{\rho'}, \ldots, \frac{dx_n'}{\rho'}\right) = \frac{1}{\rho'^2} A(dx_1', \ldots, dx_n') > 0.$$

Пусть $A\left(\frac{dx_1}{\rho}, \ldots, \frac{dx_n}{\rho}\right) = \mu' > 0$. Выберем $\rho_0 > 0$ так, чтобы при $\rho < \rho_0$ имело место неравенство $2|\varepsilon(dx)| < \mu'$, что возможно

*) Напомним, что для направляющих косинусов справедливо равенство $\cos^2\alpha_1 + \ldots + \cos^2\alpha_n = 1$.

в силу (40.3). Тогда для любой точки $x^{(0)}+dx$, лежащей на полупрямой (40.5) и такой, что $0<\rho=\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n} dx_i^2}<\rho_0$, в формуле (40.4) выражение в квадратных скобках будет иметь знак первого члена, и поэтому $\Delta f>0$. Итак, в любой окрестности точки $x^{(0)}$ имеются точки, для которых $\Delta f>0$.

Аналогично, исходя из отрицательного значения квадратичной формы (40.2) в точке (dx_i''), доказывается, что в любой окрестности точки $x^{(0)}$ существуют точки, для которых $\Delta f<0$. А это и означает, что в рассматриваемом случае $x^{(0)}$ не является точкой экстремума. □

При практическом применении этой теоремы возникает вопрос: как установить, будет ли квадратичная форма (40.2) положительно или отрицательно определенной. Для этой цели может служить, например, так называемый критерий Сильвестра положительной определенности квадратичной формы, доказываемый в курсах алгебры. Он состоит в следующем.

Для того чтобы квадратичная форма

$$A(x)=A(x_1, \ldots, x_n)=\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j, \tag{40.7}$$

у которой $a_{ij}=a_{ji}$, $i, j=1, 2, \ldots, n$, *была положительно определенной, необходимо и достаточно, чтобы*

$$a_{11}>0, \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}>0, \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}>0, \ \ldots, \ \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}>0.$$

Замечая, что квадратичная форма $A(x)$ отрицательно определена тогда и только тогда, когда квадратичная форма $-A(x)=$ $=\sum\limits_{i,j=1}^{n}(-a_{ij})x_ix_j$ положительно определена, получаем, пользуясь известными свойствами определителя, следующий критерий отрицательной определенности.

Для того чтобы квадратичная форма (40.7) *была отрицательно определенной, необходимо и достаточно, чтобы*

$$a_{11}<0, \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}>0, \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}<0, \ \ldots,$$

$$(-1)^n \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}>0.$$

Сформулируем теперь теорему 2 для случая двух переменных, выразив условия, накладываемые на квадратичную форму (40.2), в явном виде через вторые частные производные.

Теорема 3. *Пусть функция $f(x, y)$ определена и имеет непрерывные частные производные второго порядка в некоторой окрестности точки (x_0, y_0), которая является стационарной для $f(x, y)$, т. е. в ней*

$$f_x = f_y = 0. \tag{40.8}$$

Тогда если в (x_0, y_0)

$$f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 > 0, \tag{40.9}$$

то она является точкой строгого экстремума, а именно строгого максимума, если в ней

$$f_{xx} < 0^{*)},$$

и строгого минимума, если

$$f_{xx} > 0.$$

Если же в точке (x_0, y_0)

$$f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 < 0, \tag{40.10}$$

то экстремума в ней нет.

Наконец, когда

$$f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 = 0 \tag{40.11}$$

в точке (x_0, y_0), то может случиться, что экстремум в ней есть, и может случиться, что экстремума нет.

Действительно, если $f_{xx} \neq 0$ в точке (x_0, y_0), то квадратичную форму (40.2) в нашем случае можно записать в виде

$$A(dx, dy) = f_{xx}\,dx^2 + 2f_{xy}\,dx\,dy + f_{yy}\,dy^2 = \\ = \frac{1}{f_{xx}}\left[(f_{xx}\,dx + f_{xy}\,dy)^2 + (f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2)\,dy^2\right]. \tag{40.12}$$

Все частные производные здесь и ниже взяты в точке (x_0, y_0).

Мы непосредственно видим, что при выполнении условия (40.9) выражение в квадратных скобках в формуле (40.12) положительно при $dx^2 + dy^2 > 0$, т. е. $A(dx, dy)$ является определенной квадратичной формой, а именно положительно определенной при $f_{xx} > 0$ и отрицательно определенной при $f_{xx} < 0$. Это, конечно, следует и из вышеприведенного критерия Сильвестра. В первом случае, согласно теореме 2, (x_0, y_0) является точкой строгого минимума, а во втором — точкой строгого максимума. Если же выполнено условие (40.10), то при $dy = 0$, $dx \neq 0$, из (40.12) имеем $\operatorname{sign} A(dx, 0) = \operatorname{sign} f_{xx}$, а при $dx = f_{xy}$, $dy = -f_{xx}$ получим $\operatorname{sign} A(f_{xy}, -f_{xx}) = -\operatorname{sign} f_{xx}$, откуда следует, что квадратичная

---

*) Очевидно, из условия (40.9) следует, что $f_{xx} \neq 0$ в точке (x_0, y_0).

форма $A(dx, dy)$ при выполнении условия (40.10) является неопределенной.

Итак, полностью разобран случай

$$f_{xx} \neq 0 \quad \text{и} \quad f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 \neq 0.$$

Случай

$$f_{xx} = 0, \quad f_{yy} \neq 0 \quad \text{и} \quad f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 \neq 0$$

исследуется аналогично.

Если же $f_{xx} = f_{yy} = 0$, но по-прежнему $f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 \neq 0$, то, очевидно, $f_{xy} \neq 0$, следовательно, в этом случае выполняется условие (40.10) и $A(dx, dy) = 2f_{xy}\,dx\,dy$. Отсюда сразу видно, что квадратичная форма $A(dx, dy)$ при сделанных предположениях является неопределенной, ибо $\operatorname{sign} A(dx, dy) = -\operatorname{sign} A(dx, -dy)$. Поэтому достаточно взять сначала dx и dy одного знака, а затем разных знаков, чтобы получить значения квадратичной формы разных знаков. По теореме 2 (x_0, y_0) не является в этом случае точкой экстремума.

Наконец, случай $f_{xx} = f_{yy} = f_{xy} = 0$ несовместим с предположением $f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 \neq 0$. Таким образом, разобраны все возможные случаи при выполнении неравенства $f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 \neq 0$.

Для завершения доказательства теоремы нам достаточно показать на примерах, что, когда имеет место соотношение (40.11), экстремум может быть, а может и не быть.

У функции $z = x^2 + 2xy + y^2$ точка $(0, 0)$ является стационарной, и в ней $z_{xx} = z_{xy} = z_{yy} = 2$, и, значит, выполняется условие (40.11). Замечая, что $z = (x+y)^2$, видим, что всюду $z \geqslant 0$, причем $z = 0$ на прямой $x + y = 0$; поэтому точка $(0, 0)$ является точкой экстремума, правда, нестрогого.

Для функции $z = xy^3$ точка $(0, 0)$ также является стационарной, и в ней $z_{xx} = z_{yy} = z_{xy} = 0$, поэтому условие (40.11) также выполняется. Однако в силу того, что в формулу, задающую эту функцию, переменные x и y входят в нечетных степенях, функция меняет знак в любой окрестности нуля, значит, $(0, 0)$ не является точкой экстремума.

§ 40.3. ЗАМЕЧАНИЯ ОБ ЭКСТРЕМУМАХ НА МНОЖЕСТВАХ

Пусть функция f дифференцируема на открытом ограниченном множестве G и непрерывна на его замыкании $\overline{G}$. Пусть требуется найти наибольшее и наименьшее значения функции f на множестве $\overline{G}$ (они существуют по теореме 3 п. 19.5). Для этого можно, например, найти все стационарные точки функции f в G, вычислить в них значения функции и выбрать, если, конечно, это возможно (а теоретически возможно это, например, когда число стационарных точек конечно), точки, в которых функция принимает наибольшее и наименьшее значения из всех значений в стационарных точках. После этого следует сравнить эти значения со значениями, которые функция принимает на границе открытого множества G, например, найдя, если это удается сделать, наибольшее и наименьшее значения функции f на границе области G. Сравнив наибольшее и наименьшее значения в стационарных точках с наибольшим и наименьшим значениями на границе множества G, мы можем, очевидно, найти искомый максимум и минимум f на $\bar{G}$.

В случае, когда G — плоская область и ее граница является кривой, заданной некоторым представлением $x = x(t)$, $y = y(t)$, $\alpha \leqslant t \leqslant \beta$, вопрос о нахождении экстремальных значений функции $f(x, y)$ на границе G сводится к исследованию на экстремум функции одного переменного $f(x(t), y(t))$, что делается уже известными нам методами.

Методы, которые можно применять в многомерном случае для отыскания экстремальных точек на границе области будут рассмотрены в § 43.

Упражнения 1. Найти экстремумы функции $z = x^3 + 12xy^2 - 15x - 24y$.

2. Имеет ли функция $z = x^4y^2 - 3x^2y + 2x + y$ экстремум в точке $(1, 1)$?

3. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z = x^2 + y^2 - 4x - 2y + 4$ в замкнутой области, ограниченной линиями $x = 4$, $y = -1$, $x - y = 3$.

4. Пусть $a = \mathrm{const} > 0$, $E = \{(x, y) : |x| < a,\ y \in R\}$. Найти все экстремумы функции $z = \frac{3}{2a} x^2 + \sqrt{6(a^2 - x^2)} \cos y$ в E и все ее наибольшие и наименьшие значения в $\bar{E}$.

5. Полная поверхность прямоугольного параллелепипеда равна $6a^2$. При каких значениях длин ребер его объем — наибольший?

§ 41. НЕЯВНЫЕ ФУНКЦИИ

41.1 НЕЯВНЫЕ ФУНКЦИИ, ОПРЕДЕЛЯЕМЫЕ ОДНИМ УРАВНЕНИЕМ

Выясним условия, при которых одно уравнение с несколькими переменными определяет однозначную функцию, т. е. определяет одну из этих переменных как функцию остальных. Начнем наше рассмотрение с изучения уравнения, содержащего два неизвестных,

$$F(x, y) = 0.$$

Если функция двух переменных $F(x, y)$ задана на некотором подмножестве A плоскости R^2_{xy}, $A \subset R^2_{xy}$ и существует такая функция одной переменной $y = f(x)$, определенная на множестве $B \subset \boldsymbol{R}_x$, содержащемся в проекции множества A на ось Ox, что для всех $x \in B$ имеет место $(x, f(x)) \in A$ и справедливо тождество $F(x, f(x)) = 0$, то f называется *неявной функцией*, определяемой уравнением $F(x, y) = 0$.

Лемма. *Пусть функция $F(x, y)$ непрерывна в некоторой прямоугольной окрестности*

$$U(x_0, y_0)=\{(x, y): |x-x_0|<\xi, \quad |y-y_0|<\eta\} \text{*)}$$

точки (x_0, y_0) и при каждом фиксированном $x\in(x_0-\xi, x_0+\xi)$ строго монотонна по y на интервале $(y-\eta, y_0+\eta)$. Тогда, если

$$F(x_0, y_0)=0,$$

то существуют окрестности $U(x_0)=(x_0-\delta, x_0+\delta)$ точки x_0 и $U(y_0)=(y-\varepsilon, y_0+\varepsilon)$ точки y_0 такие, что для каждого $x\in U(x_0)$ имеется и притом единственное решение $y\in U(y_0)$ уравнения $F(x, y)=0$. Это решение, являющееся функцией от x и обозначаемое $y=f(x)$, непрерывно в точке x_0 и

$$f(x_0)=y_0.$$

Таким образом, лемма, в частности, утверждает, что при сделанных предположениях неявная функция $y=f(x)$, определяемая уравнением $F(x, y)=0$, существует и обладает тем свойством, что при условии $x\in U(x_0)$, $y\in U(y_0)$ равенства

$$F(x, y)=0 \quad \text{и} \quad y=f(x)$$

равносильны.

Доказательство. По условиям леммы функция $F(x, y)$ при каждом фиксированном $x\in(x_0-\xi, x_0+\xi)$ строго монотонна по переменной y на интервале $(y_0-\eta, y_0+\eta)$, в частности на нем строго монотонна функция $F(x_0, y)$. Пусть для определенности она строго возрастает. Выберем произвольное $\varepsilon>0$, подчиненное лишь условию $0<\varepsilon<\eta$. Поскольку функция $F(x_0, y)$ переменной y строго возрастает на отрезке $[y_0-\varepsilon, y_0+\varepsilon]$, и по условию $F(x_0, y_0)=0$, то

$$F(x_0, y_0-\varepsilon)<0, \qquad F(x_0, y_0+\varepsilon)>0.$$

Но функция двух переменных $F(x, y)$ по предположению непрерывна на открытом множестве $U(x_0, y_0)$ и $(x_0, y_0-\varepsilon)\in U(x_0, y_0)$, $(x_0, y_0+\varepsilon)\in U(x_0, y_0)$, поэтому существует такое $\delta>0$, $0<\delta<\xi$, что в δ-окрестности точки $(x_0, y_0-\varepsilon)$ выполняется неравенство $F(x, y)<0$, а в δ-окрестности точки $(x_0, y_0+\varepsilon)$ — неравенство $F(x, y)>0$ (см. лемму 1 в п. 19.3). В частности, при всех $x\in(x_0-\delta, x_0+\delta)$ (рис. 150) будут справедливыми неравенства

$$F(x, y_0-\varepsilon)<0, \qquad F(x, y_0+\varepsilon)>0. \tag{41.1}$$

Положим

$$U(x_0)\overset{\text{def}}{=}(x_0-\delta, x_0+\delta), \qquad U(y_0)\overset{\text{def}}{=}(y_0-\varepsilon, y_0+\varepsilon).$$

---

*) В соответствии с принятыми в курсе обозначениями окрестность точки (x_0, y_0) правильнее было бы обозначить через $U((x_0, y_0))$, а не через $U(x_0, y_0)$. Для простоты обозначений мы будем опускать вторые скобки.

Поскольку при фиксированном $x \in U(x_0)$ функция $F(x, y)$ переменной y непрерывна на отрезке $[y_0-\varepsilon, y_0+\varepsilon]$, то из условия (41.1) согласно теореме Коши о промежуточных значениях непрерывной функции (см. теорему 2 в п. 6.2) следует, что существует такое $y^* \in U(y_0)$ (см. рис. 150), что $F(x, y^*)=0$. В силу строгой монотонности функции $F(x, y)$ на отрезке $[y_0-\varepsilon, y_0+\varepsilon]$ по переменной y, указанное y^* единственно.

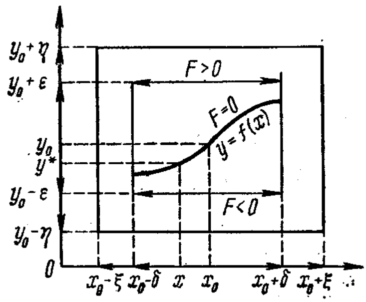


Рис. 150

Таким образом, получено однозначное соответствие (однозначная функция) $x \mapsto y^*$, $x \in U(x_0)$, $y^* \in U(y_0)$, которое будем обозначать через f: $y^*=f(x)$.

По определению этого соответствия для любого $x \in U(x_0)$ и $y^*=f(x)$ имеем

$$F(x, y^*)=0, \qquad y^* \in U(y_0),$$

причем точка y^*, обладающая этим свойством, единственна. Тем самым нами доказаны существование и единственность искомой функции f.

Далее, по условию леммы $F(x_0, y_0)=0$, и так как $x_0 \in U(x_0)$, $y_0 \in U(y_0)$, то в силу единственности функции f имеем $y_0=f(x_0)$.

Наконец, заметим, что $\varepsilon>0$ было фиксировано произвольным образом при условии, что $\varepsilon<\eta$, и что для него было найдено такое $\delta>0$, что из $|x-x_0|<\delta$ (т. е. из условия $x \in U(x_0)$) вытекало включение $f(x) \in U(y_0)$, т. е. неравенство $|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$. Это и означает непрерывность функции f в точке x_0. $\square$

Удобные для приложения достаточные условия однозначной разрешимости уравнения $F(x, y)=0$ в некоторой окрестности точки (x_0, y_0), для которой $F(x_0, y_0)=0$, даются следующей теоремой.

Теорема 1. *Пусть функция $F(x, y)$ непрерывна в некоторой окрестности точки (x_0, y_0) и имеет в этой окрестности частную производную $F_y(x, y)$, которая непрерывна в точке (x_0, y_0). Тогда, если*

$$F(x_0, y_0)=0, \qquad F_y(x_0, y_0) \neq 0,$$

то найдутся такие окрестности $U(x_0)$ и $U(y_0)$ соответственно точек x_0 и y_0, что для каждого $x \in U(x_0)$ существует и притом единственное решение $y=f(x) \in U(y_0)$ уравнения $F(x, y)=0$ *). *Это решение непрерывно всюду в $U(x_0)$ и $y_0=f(x_0)$.*

Если дополнительно предположить, что функция F имеет в некоторой окрестности точки (x_0, y_0) частную производную

*) В этом случае говорят также, что уравнение $F(x, y)=0$ однозначно разрешимо в окрестности $U(x_0, y_0)=\{(x, y): x \in U(x_0),\ y \in U(y_0)\}$ точки (x_0, y_0).

$F_x(x, y)$, непрерывную в точке (x_0, y_0), то функция $f(x)$ также имеет в точке x_0 производную и для нее справедлива формула

$$f'(x_0) = -\frac{F_x(x_0, y_0)}{F_y(x_0, y_0)}.$$

Доказательство. В силу непрерывности функции $F(x, y)$ в некоторой окрестности точки (x_0, y_0) и непрерывности частной производной $F_y(x, y)$ в точке (x_0, y_0), существует прямоугольная окрестность

$$U(x_0, y_0) = \{(x, y) : |x - x_0| < \xi, \ |y - y_0| < \eta\}$$

точки (x_0, y_0), в которой сама функция $F(x, y)$ непрерывна, а значения частной производной $F_y(x, y)$ имеют тот же знак, что и ее значение в точке (x_0, y_0). Поэтому при каждом фиксированном $x \in (x_0 - \xi, x_0 + \xi)$ функция $\varphi(y) \stackrel{\text{def}}{=} F(x, y)$ дифференцируема на интервале $(y_0 - \eta, y_0 + \eta)$, а ее производная $\varphi'(y) = F_y(x, y)$ сохраняет постоянный знак. Следовательно, функция $\varphi(y)$ строго монотонна на указанном интервале.

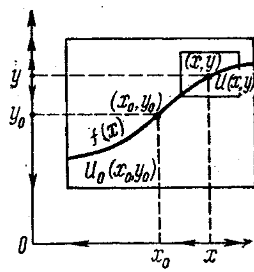


Рис. 151

Таким образом все условия леммы для функции $F(x, y)$ в построенной прямоугольной окрестности $U(x_0, y_0)$ выполнены. Следовательно, существуют окрестности $U(x_0) = (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, $U(y_0) = (y_0 - \varepsilon, y_0 + \varepsilon)$ и единственная функция $y = f(x)$, определенная на $U(x_0)$, такие, что при каждом $x \in U(x_0)$ имеют место включение $f(x) \in U(y_0)$ и равенство $F(x, f(x)) = 0$, причем функция f непрерывна в точке x_0.

Поскольку для каждой точки (x, y), для которой $x \in U(x_0)$, $y \in U(y_0)$, существует ее прямоугольная окрестность $U(x, y)$, содержащаяся в прямоугольной окрестности

$$U_0(x_0, y_0) = \{(x, y) : |x - x_0| < \delta, \quad |y - y_0| < \varepsilon\}$$

(рис. 151), то для $U(x, y)$ также выполняются все условия леммы. Следовательно, в силу единственности решения $f(x)$ уравнения $F(x, y) = 0$ в окрестности $U_0(x_0, y_0)$ согласно той же лемме функция $y = f(x)$ непрерывна в каждой точке $x \in U(x_0)$.

Докажем теперь последнее утверждение теоремы. В силу непрерывности частных производных F_x и F_y в точке (x_0, y_0), функция F дифференцируема в этой точке:

$$F(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - F(x_0, y_0) = \\ = F_x(x_0, y_0)\Delta x + F_y(x_0, y_0)\Delta y + \varepsilon_1 \Delta x + \varepsilon_2 \Delta y, \qquad (41.2)$$

где

$$\lim_{\rho \to 0} \varepsilon_1 = \lim_{\rho \to 0} \varepsilon_2 = 0, \quad \rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}.$$

Возьмем в формуле (41.2)

$$x_0+\Delta x\in U(x_0),\quad \Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0).$$

Тогда в силу условия $F(x, f(x))=0$ получим

$$F(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)=F(x_0+\Delta x, f(x_0+\Delta x))=0,$$

и так как $F(x_0, y_0)=0$, то из (41.2) имеем

$$F_x(x_0, y_0)\Delta x+F_y(x_0, y_0)\Delta y+\varepsilon_1\Delta x+\varepsilon_2\Delta y=0.$$

Отсюда

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=-\frac{F_x(x_0, y_0)+\varepsilon_1}{F_y(x_0, y_0)+\varepsilon_2}. \tag{41.3}$$

Пусть теперь $\Delta x\to 0$; тогда, в силу непрерывности функции f, $\Delta y\to 0$, а, значит, при $\Delta x\to 0$ имеем $\rho=\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}\to 0$, откуда следует, что в формуле (41.3) $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\varepsilon_1=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\varepsilon_2=0$. Поэтому при $\Delta x\to 0$ предел правой части равенства (41.3) существует и равен $-\frac{F_x(x_0, y_0)}{F_y(x_0, y_0)}$ (напомним, что $F_y(x_0, y_0)\neq 0$), следовательно, при $\Delta x\to 0$ существует и предел левой части, т. е. существует производная

$$f'(x_0)=-\frac{F_x(x_0, y_0)}{F_y(x_0, y_0)}. \ \square \tag{41.4}$$

Замечание. Если функции F_x и F_y непрерывны в окрестности $U_0(x_0, y_0)$ точки (x_0, y_0), то производная f' непрерывна на интервале $U(x_0)$. Действительно, применив формулу (41.4) к произвольной точке $x\in U(x_0)$ получим

$$f'(x)=-\frac{F_x(x, f(x))}{F_y(x, f(x))},$$

откуда по теореме о композиции непрерывных функций вытекает непрерывность функции $f'(x)$ на $U(x_0)$.

Аналогичным образом вводится понятие неявной функции, определяемой уравнением

$$F(x_1, \ldots, x_n, y)=0, \tag{41.5}$$

а также формулируется и доказывается теорема, аналогичная теореме 1. Для того чтобы получить ее формулировку, достаточно лишь в формулировке теоремы 1 под x понимать точку n-мерного пространства, $x=(x_1, \ldots, x_n)\in R^n$, в частности $x^{(0)}=(x_1^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)})$.

Теорема 1'. *Пусть функция $F(x, y)\equiv F(x_1, \ldots, x_n, y)$ непрерывна в некоторой окрестности точки $(x^{(0)}, y^{(0)})$ и имеет в этой окрестности частную производную F_y, непрерывную в точке $(x^{(0)}, y^{(0)})$.*

Если $F(x^{(0)}, y^{(0)})=0$, а $F_y(x^{(0)}, y^{(0)})\neq 0$, то найдутся такие *окрестности U_x и U_y соответственно точек $x^{(0)}$ и $y^{(0)}$, что для каждого $x \in U(x)$ существует, и притом единственное, решение*

$$y = f(x) = f(x_1, \ldots, x_n) \in U_y$$

уравнения $F(x, y) = 0$ *), *причем это решение $y = f(x)$ непрерывно на U_x и $y^{(0)} = f(x^{(0)})$.*

Если, кроме того, в некоторой окрестности точки $(x^{(0)}, y^{(0)})$ существуют все частные производные F_{x_i}, непрерывные в точке $(x^{(0)}, y^{(0)})$, то в точке $x^{(0)}$ существуют и частные производные f_{x_i}, $i = 1, 2, \ldots, n$, причем если частные производные F_{x_i}, $i = 1, 2, \ldots, n$, и F_y непрерывны в окрестности точки $(x^{(0)}, y^{(0)})$, то частные производные f_{x_i} существуют и непрерывны в некоторой окрестности точки $x^{(0)}$.

При этом формулы для частных производных неявной функции, определяемой уравнением (41.5), имеют вид

$$\frac{\partial y}{\partial x_i} = -\frac{\dfrac{\partial F}{\partial x_i}}{\dfrac{\partial F}{\partial y}},$$

$$i = 1, 2, \ldots, n.$$

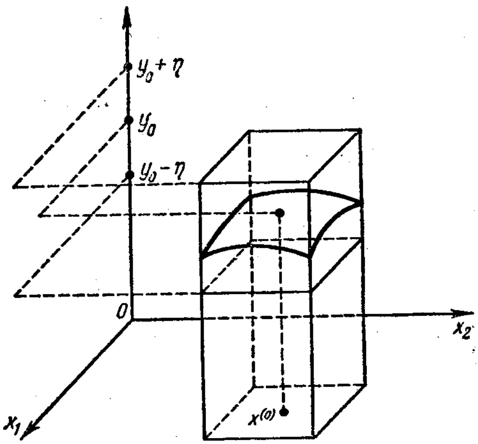


Рис. 152

Упражнения. 1. Сформулировать условия, при которых функция $f(x)$, определяемая уравнением $F(x, y) = 0$ (теорема 1), имеет в точке (x_0, y_0) непрерывные производные до n-го порядка включительно. Найти формулы для $f''(x_0)$ и $f'''(x_0)$.

2. С помощью теоремы 1 и ответа на предыдущие упражнения найти достаточные условия существования функции $x = \varphi(y)$, обратной к $y = f(x)$ и имеющей в точке y_0 непрерывные производные до n-го порядка включительно. Доказать, что

$$\frac{d^2x}{dy^2} = -\frac{f''(x)}{[f'(x)]^3}, \quad \frac{d^3x}{dy^3} = \frac{3[f''(x)]^2 - f'(x)f'''(x)}{[f'(x)]^5}.$$

3. Найти $\dfrac{dy}{dx}$ и $\dfrac{d^2y}{dx^2}$, если y — функция, определяемая уравнением $\cos x^2y^2 + xy = 2$.

---

*) На рис. 152 изображен случай, когда $n = 2$ и окрестность U_x прямоугольная.

41.2. ПРОИЗВЕДЕНИЯ МНОЖЕСТВ

Прежде чем рассмотреть вопрос о разрешимости систем уравнений, введем некоторые новые понятия.

Пусть R_x^n — n-мерное евклидово пространство, точки которого будем обозначать через $x=(x_1, \ldots, x_n)$, R_y^m — m-мерное евклидово пространство, точки которого будем обозначать $y=(y_1, \ldots, y_m)$, а R_{xy}^{n+m} — $(n+m)$-мерное евклидово пространство точек

$$(x, y)=(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m).$$

Определение 1. *Пусть* $A\subset R_x^n$ *и* $B\subset R_y^m$. *Множество точек* (x, y) *пространства* R_{xy}^{n+m} *таких, что* $x\in A$ *и* $y\in B$, *называется произведением* *) *множеств* A *и* B *и обозначается* $A\times B$ (см. п. 1.2*). *Таким образом,*

$$A\times B=\{(x, y): x\in A,\ y\in B\}.$$

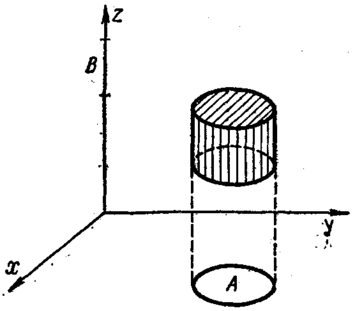


Рис. 153

Примеры. 1. Если $A=R_x^n$, $B=R_y^m$, то

$$A\times B=R_x^n\times R_y^m=R_{xy}^{n+m}.$$

2. Пусть $n=2$ и A — круг; $m=1$ и B — отрезок. Тогда $A\times B$ — прямой круговой цилиндр (рис. 153).

3. Пусть $x^{(0)}=(x_1^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)})\in R_x^n$ и $A=P(x^{(0)}; \delta_1, \ldots, \delta_n)=\{x: |x_i-x_i^{(0)}|<\delta_i;\ i=1, 2, \ldots, n\}$ — прямоугольная окрестность точки $x^{(0)}$; пусть $y^{(0)}=(y_1^{(0)}, \ldots, y_m^{(0)})\in R_y^m$ и $B=P(y^{(0)}; \eta_1, \ldots, \eta_m)=\{y: |y_j-y_j^{(0)}|<\eta_j,\ j=1, 2, \ldots, m\}$ — прямоугольная окрестность точки $y^{(0)}$. Тогда

$$\begin{aligned}A\times B=\{(x, y):\ &|x_i-x_i^{(0)}|<\delta_i,\quad i=1, 2, \ldots, n;\\ &|y_j-y_j^{(0)}|<\eta_j,\quad j=1, 2, \ldots, m\}=\\ &=P((x^{(0)}, y^{(0)});\ \delta_1, \ldots, \delta_n,\ \eta_1, \ldots, \eta_m)\end{aligned}\tag{41.6}$$

является прямоугольной окрестностью точки $(x^{(0)}, y^{(0)})$.

Очевидно и обратное: поскольку всякая прямоугольная окрестность точки $(x^{(0)}, y^{(0)})$ записывается формулой, стоящей в середине равенства (41.6), то она всегда может быть представлена как произведение прямоугольных окрестностей точек $x^{(0)}$ и $y^{(0)}$.

Упражнение 4. Доказать, что если множества $A\subset R_x^n$ и $B\subset R_y^m$ являются открытыми множествами соответственно в пространствах R_x^n и R_y^m, то и их произведение $A\times B$ — открытое множество в пространстве R_{xy}^{n+m}.

*) Применяется также термин *декартово произведение*.

41.3. НЕЯВНЫЕ ФУНКЦИИ, ОПРЕДЕЛЯЕМЫЕ СИСТЕМОЙ УРАВНЕНИЙ

Рассмотрим условия, при которых система уравнений

$$F_i(x, y)=0, \quad i=1, 2, \ldots, m, \quad x\in R^n, \quad y\in R^m, \tag{41.7}$$

или, подробнее,

$$\begin{aligned} &F_1(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m)=0,\\ &F_2(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m)=0,\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ &F_m(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m)=0 \end{aligned} \tag{41.8}$$

однозначно разрешима относительно $y_1, \ldots, y_m$ в некоторой окрестности точки $(x^{(0)}, y^{(0)})$, в которой $F_i(x^{(0)}, y^{(0)})=0$, $i=1, 2, \ldots, m$.

Определение 2. *Пусть задана система функций* $u_i=u_i(t_1, \ldots, t_n)$, $i=1, 2, \ldots, m$, *имеющих в некоторой точке* $t^{(0)}$ *все частные производные первого порядка. Тогда матрица, составленная из частных производных этих функций в точке* $t^{(0)}$,

$$\left\|\begin{matrix} \frac{\partial u_1}{\partial t_1} & \frac{\partial u_1}{\partial t_2} & \cdots & \frac{\partial u_1}{\partial t_n}\\ \frac{\partial u_2}{\partial t_1} & \frac{\partial u_2}{\partial t_2} & \cdots & \frac{\partial u_2}{\partial t_n}\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\ \frac{\partial u_m}{\partial t_1} & \frac{\partial u_m}{\partial t_2} & \cdots & \frac{\partial u_m}{\partial t_n} \end{matrix}\right\|$$

или, короче,

$$\left\|\frac{\partial u_i}{\partial t_j}\right\| \quad i=1, 2, \ldots, m, \quad j=1, 2, \ldots, n,$$

*называется матрицей Якоби**) *данной системы функций.*

Если $m=n$, то определитель матрицы Якоби называется *определителем Якоби*, или *якобианом*, системы функций $u_1, \ldots, u_n$ по переменным $t_1, \ldots, t_n$ и обозначается следующим образом**)

$$\frac{\partial(u_1, \ldots, u_n)}{\partial(t_1, \ldots, t_n)}.$$

Мы увидим в дальнейшем, что якобиан системы функций естественным образом возникает в различных вопросах теории функции многих переменных.

Прежде чем перейти к изложению основной теоремы, кратко поясним на простом примере (не оговаривая все детали) идею ее

---

*) К. Якоби (1804—1851) — немецкий математик.

**) Применяется также обозначение $\frac{D(u_1, \ldots, u_n)}{D(t_1, \ldots, t_n)}$.

доказательства и покажем, каким образом в ее условиях возникает якобиан рассматриваемой системы. Пусть в какой-то окрестности точки (x_0, y_0, z_0) заданы непрерывно дифференцируемые функции F и Φ, причем

$$F(x_0, y_0, z_0)=0,$$
$$\Phi(x_0, y_0, z_0)=0.$$

Допустим, что необходимо решить систему уравнений

$$F(x, y, z)=0,$$
$$\Phi(x, y, z)=0$$

в некоторой окрестности указанной точки, найдя из нее переменные $y=\varphi(x)$ и $z=\psi(x)$, как такие непрерывные функции φ и ψ переменной x, что $\varphi(x_0)=y_0$, $\psi(x_0)=z_0$. Разрешив для этого, например, первое уравнение относительно z, получим $z=f(x, y)$. Подставив это выражение во второе уравнение и разрешив его относительно y, будем иметь $y=\varphi(x)$. Полагая $\psi(x)=f[x, \varphi(x)]$, получим искомое решение:

$$y=\varphi(x),$$
$$z=\psi(x).$$

Возникает, конечно, вопрос о том, при выполнении каких условий возможно проделать указанные операции, или, точнее, когда существуют и однозначно определены все вышеупомянутые функции. (Естественно, при этом надо выяснить, где, т. е. для каких значений переменных x и y, определены эти функции? Этот вопрос мы сейчас не будем подробно анализировать, чтобы не отвлекаться от основной идеи. Он будет рассмотрен при доказательстве теоремы 2 этого пункта.)

Для того чтобы одно из данных уравнений, например первое, было разрешимым в некоторой окрестности точки (x_0, y_0, z_0) относительно переменной z, достаточно, чтобы (см. теорему 1' в п. 41.1) $\frac{\partial F(x_0, y_0, z_0)}{\partial z}\neq 0$. Если $z=f(x, y)$ — соответствующее решение, то, для того чтобы уравнение, получающееся в результате подстановки этого решения во второе уравнение, $\Phi[x, y, f(x, y)]=0$ было разрешимым относительно переменной y, достаточно, чтобы полная частная производная по y левой части получившегося равенства не обращалась в нуль в точке (x_0, y_0), т. е. чтобы в этой точке

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y}+\frac{\partial \Phi}{\partial z}\frac{\partial f}{\partial y}\neq 0.$$

Но согласно п. 41.1,

$$\frac{\partial f}{\partial y}=-\frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial z}}$$

следовательно, подставляя это выражение в предыдущее неравенство, получим, что условие разрешимости можно записать в виде

$$\frac{\partial(F,\ \Phi)}{\partial(y,\ z)}=\frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial \Phi}{\partial z}-\frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial \Phi}{\partial y}\neq 0 \text{ в точке } (x_0,\ y_0,\ z_0).$$

Из этого условия, очевидно, вытекает, что в точке $(x_0,\ y_0,\ z_0)$ либо $\frac{\partial F}{\partial z}\neq 0$, либо $\frac{\partial \Phi}{\partial z}\neq 0$, т. е. одно из заданных уравнений разрешимо относительно z.

Таким образом, для заданной системы уравнений неравенство нулю в точке $(x_0,\ y_0,\ z_0)$ якобиана $\frac{\partial(F,\ \Phi)}{\partial(y,\ z)}$ обеспечивает существование в некоторой окрестности точки $(x_0,\ y_0,\ z_0)$ решения вида

$$y=\varphi(x)$$
$$z=\psi(x).$$

Сформулируем теперь основную теорему этого пункта.

Теорема 2. *Пусть функции* $F_i(x,\ y)=F_i(x_1,\ \ldots,\ x_n,\ y_1,\ \ldots,\ y_m)$, $i=1,\ 2,\ \ldots,\ m$, *непрерывно дифференцируемы в некоторой окрестности точки* $(x^{(0)},\ y^{(0)})$, *где* $x^{(0)}=(x_1^{(0)},\ \ldots,\ x_n^{(0)})$, $y^{(0)}=(y_1^{(0)},\ \ldots$ $\ldots,\ y_m^{(0)})$. *Тогда если* $F_i(x^{(0)},\ y^{(0)})=0$, $i=1,\ 2,\ \ldots,\ m$, *и если в точке* $(x^{(0)},\ y^{(0)})$ *якобиан* $\frac{\partial(F_1,\ \ldots,\ F_m)}{\partial(y_1,\ \ldots,\ y_m)}$ *не равен нулю, то найдутся такие окрестности* U_x *и* U_y *точек* $x^{(0)}$ *и* $y^{(0)}$ *соответственно в пространствах* R_x^n *и* R_y^m, *что для каждого* $x\in U_x$ *существует единственное решение*

$$y=f(x)\in U_y$$

системы уравнений (41.7):

$$y=f(x)=\{y_k=f_k(x_1,\ \ldots,\ x_n),\ k=1,\ 2,\ \ldots,\ m\}^{*)},$$

причем функции $f_k(x)$, $k=1,\ 2,\ \ldots,\ m$, *образующие это решение, непрерывно дифференцируемы на* U_x *и* $f(x^{(0)})=y^{(0)}$.

Таким образом, если выполняются предположения теоремы, то условие

$$F_i(x,\ y)=0,\quad i=1,\ 2,\ \ldots,\ m,\quad (x,\ y)\in U_x\times U_y$$

эквивалентно условию

$$y=f(x),\quad x\in U_x,\quad y\in U_y.$$

---

*) Система функций $f_k(x_1,\ \ldots,\ x_n)$, $k=1,\ 2,\ \ldots,\ m$ обозначена одним символом $f(x)$, поскольку она задает определенное соответствие: точкам некоторого множества пространства R_x^n указанная система функций ставит в соответствие определенные точки пространства R_y^m, или, как говорят, отображает указанное множество пространства R_x^n в пространство R_y^m.

Доказательство. Прежде всего заметим, что утверждение: решение $y=f(x)$ системы уравнений (41.7) удовлетворяет условию $f(x^{(0)})=y^{(0)}$, очевидно, непосредственно следует из утверждения о единственности решения $y=f(x)\in U_y$ при $x\in U_x$ и условий $F_i(x^{(0)}, y^{(0)})=0$, $i=1, 2, \ldots, m$, $x^{(0)}\in U_x$, $y^{(0)}\in U_y$.

Для доказательства теоремы применим метод математической индукции. Для случая одного уравнения, т. е. когда $m=1$, теорема была установлена нами в п. 41.1. Пусть теперь она верна для $m-1$ уравнений ($m>1$). Докажем, что тогда она имеет место и для m уравнений.

Покажем сначала, что каждое из уравнений (41.8), например последнее

$$F_m(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m)=0,$$

можно разрешить в окрестности точки $(x^{(0)}, y^{(0)})$ по крайней мере относительно одного переменного. Действительно, по условию теоремы, в точке $(x^{(0)}, y^{(0)})$

$$\frac{\partial(F_1, \ldots, F_m)}{\partial(y_1, \ldots, y_m)}=\begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y_1} & \ldots & \frac{\partial F_1}{\partial y_m} \\ \cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot \\ \frac{\partial F_m}{\partial y_1} & \ldots & \frac{\partial F_m}{\partial y_m} \end{vmatrix}\neq 0,$$

а поэтому в этой точке хотя бы один элемент последней строчки определителя Якоби отличен от нуля. Пусть для определенности это будет последний элемент:

$$\frac{\partial F_m(x^{(0)}, y^{(0)})}{\partial y_m}\neq 0.$$

Отсюда в силу теоремы 1′ п. 41.1 следует, что уравнение $F_m(x, y)=0$ может быть разрешено относительно y_m в некоторой окрестности точки (x_0, y_0). Сформулируем это более точно. Обозначим через U окрестность точки $(x^{(0)}, y^{(0)})$, в которой функции F_i, $i=1, 2, \ldots, m$, непрерывно дифференцируемы, и положим $\tilde{y}\overset{\text{def}}{=}(y_1, \ldots, y_{m-1})$. Тогда найдутся прямоугольная окрестность U^{m+n-1} точки

$$(x^{(0)}, \tilde{y}^{(0)})=(x_1^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}, y_1^{(0)}, \ldots, y_{m-1}^{(0)}) \qquad (41.9)$$

и окрестность U^1 точки $y_m^{(0)}$ такие, что $U^{m+n-1}\times U^1\subset U$, и существует единственная определенная на U^{m+n-1} функция

$$y_m=\varphi(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_{m-1}), \qquad (41.10)$$

удовлетворяющая следующим условиям: если

$$(x, \tilde{y})=(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_{m-1})\in U^{m+n-1},$$

то

$$\varphi(x, \tilde{y}) = \varphi(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_{m-1}) \in U^1, \qquad (41.11)$$

$$F_m(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_{m-1}, \varphi(x, \tilde{y})) = 0. \qquad (41.12)$$

Кроме того, согласно той же теореме 1', функция $\varphi(x, \tilde{y})$ непрерывно дифференцируема на U^{m+n-1} и

$$\varphi(x^{(0)}, \tilde{y}^{(0)}) = y_m^{(0)}. \qquad (41.13)$$

При этом если $(x, \tilde{y}) \in U^{m+n-1}$ и $y_m \in U^1$, то система (41.8) эквивалентна системе

$$\begin{aligned} &F_j(x, y) = 0, \quad j = 1, 2, \ldots, m-1, \\ &y_m = \varphi(x, y). \end{aligned} \qquad (41.14)$$

Подставим в первые $m-1$ уравнения системы (41.14) выражение (41.10). Тогда, введя обозначение

$$\Phi_i(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_{m-1}) =$$
$$= F_i(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_{m-1}, \varphi(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_{m-1})),$$
$$i = 1, 2, \ldots, m-1, \qquad (41.15)$$

получим следующую систему $m-1$ уравнений с $m+n-1$ неизвестными:

$$\begin{aligned} &\Phi_1(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_{m-1}) = 0, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &\Phi_{m-1}(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_{m-1}) = 0. \end{aligned} \qquad (41.16)$$

При этом для $(x, \tilde{y}) \in U^{m+n-1}$, $y_m \in U^1$ система уравнений

$$\begin{aligned} &\Phi_j(x, \tilde{y}) = 0, \quad j = 1, 2, \ldots, m-1, \\ &y_m = \varphi(x, \tilde{y}) \end{aligned} \qquad (41.17)$$

эквивалентна системе (41.14).

Покажем, что система (41.16) удовлетворяет условиям, отличающимся от тех, которым удовлетворяет система (41.8), только тем, что $m-1$ заменено через m. Действительно, функции Φ_k, $k = 1, 2, \ldots, m-1$, непрерывно дифференцируемы в окрестности U^{m+n-1} как композиции непрерывно дифференцируемых функций. Из условий $F_i(x^{(0)}, y^{(0)}) = 0$, $i = 1, 2, \ldots, m$, и (41.15), (41.13) следует, что $\Phi_k(x^{(0)}, y^{(0)}) = 0$, $k = 1, 2, \ldots, m-1$.

Докажем, что в точке $(x^{(0)}, \tilde{y}^{(0)})$ (см. (41.9))

$$\frac{\partial(\Phi_1, \ldots, \Phi_{m-1})}{\partial(y_1, \ldots, y_{m-1})} \neq 0.$$

Для этого предварительно заметим, что из (41.10) и (41.15) следует, что

$$\frac{\partial \Phi_i}{\partial y_k} = \frac{\partial F_i}{\partial y_k} + \frac{\partial F_i}{\partial y_m} \frac{\partial \varphi}{\partial y_k}, \quad i, k = 1, 2, \ldots, m-1, \qquad (41.18)$$

а из (41.12) — что

$$\frac{\partial F_m}{\partial y_k}+\frac{\partial F_m}{\partial y_m}\frac{\partial \varphi}{\partial y_k}=0,\quad k=1,\,2,\,\ldots,\,m-1. \tag{41.19}$$

Теперь в определителе $\frac{\partial(F_1,\,\ldots,\,F_m)}{\partial(y_1,\,\ldots,\,y_m)}$ к k-му столбцу прибавим последний столбец, умноженный на $\frac{\partial\varphi}{\partial y_k}$, $k=1,\,\ldots,\,m-1$, от чего, как известно, значение определителя не изменится. Поэтому, использовав (41.18) и (41.19) и разложив получившийся определитель по элементам последней строки, получим

$$\left.\frac{\partial(F_1,\,\ldots,\,F_m)}{\partial(y_1,\,\ldots,\,y_m)}\right|_{(x^{(0)},\,y^{(0)})}=$$

$$=\left.\begin{vmatrix}\frac{\partial F_1}{\partial y_1}+\frac{\partial F_1}{\partial y_m}\frac{\partial\varphi}{\partial y_1} & \ldots & \frac{\partial F_1}{\partial y_{m-1}}+\frac{\partial F_1}{\partial y_m}\frac{\partial\varphi}{\partial y_{m-1}} & \frac{\partial F_1}{\partial y_m}\\ \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot\\ \frac{\partial F_m}{\partial y_1}+\frac{\partial F_m}{\partial y_m}\frac{\partial\varphi}{\partial y_1} & \ldots & \frac{\partial F_m}{\partial y_{m-1}}+\frac{\partial F_m}{\partial y_m}\frac{\partial\varphi}{\partial y_{m-1}} & \frac{\partial F_m}{\partial y_m}\end{vmatrix}\right|_{(x^{(0)},\,y^{(0)})}=$$

$$=\left.\begin{vmatrix}\frac{\partial\Phi_1}{\partial y_1} & \ldots & \frac{\partial\Phi_1}{\partial y_{m-1}} & \frac{\partial F_1}{\partial y_m}\\ \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot\\ \frac{\partial\Phi_{m-1}}{\partial y_1} & \ldots & \frac{\partial\Phi_{m-1}}{\partial y_{m-1}} & \frac{\partial F_{m-1}}{\partial y_m}\\ 0 & \ldots & 0 & \frac{\partial F_m}{\partial y_m}\end{vmatrix}\right|_{(x^{(0)},\,\tilde y^{(0)})}=$$

$$=\frac{\partial F_m(x^{(0)},\,y^{(0)})}{\partial y_m}\left.\frac{\partial(\Phi_1,\,\ldots,\,\Phi_{m-1})}{\partial(y_1,\,\ldots,\,y_{m-1})}\right|_{(x^{(0)},\,\tilde y^{(0)})},$$

и так как левая часть равенства отлична от нуля, то отлична от нуля и правая, откуда

$$\left.\frac{\partial(\Phi_1,\,\ldots,\,\Phi_{m-1})}{\partial(y_1,\,\ldots,\,y_{m-1})}\right|_{(x^{(0)},\,\tilde y^{(0)})}\neq 0.$$

В силу выполнения для функций Φ_i, $i=1,2,\ldots,m-1$, условий, аналогичных условиям для функций F_i, $i=1,\,2,\,\ldots,\,m$, и согласно предположению индукции система уравнений (41.16) однозначно разрешима относительно переменных $y_1,\,\ldots,\,y_{m-1}$ в некоторой окрестности точки $(x^{(0)},\,\tilde y^{(0)})$. Точнее, пусть U^{m+n-1} — прямоугольная окрестность точки $(x^{(0)},\,\tilde y^{(0)})$, полученная при разрешении уравнения $F_m=0$ относительно переменной y_m. Разложим ее в произведение прямоугольных окрестностей U'_x и $U'_{\tilde y}$ точек $x^{(0)}=(x_1^{(0)},\,\ldots,\,x_n^{(0)})$ и $\tilde y_1^{(0)}=(y_1^{(0)},\,\ldots,\,y_{m-1}^{(0)})$ соответственно в пространствах R_x^n и $R_{\tilde y}^{m-1}$ (здесь $\tilde y=(y_1,\,\ldots,\,y_{m-1})$): $U^{m+n-1}=U'_x\times U'_{\tilde y}$. Тогда существует окрестность $U_x\subset U'_x$ точки $x^{(0)}$, окрестность

$U_{\tilde{y}} \subset U'_{\tilde{y}}$ точки $\tilde{y}^{(0)}$ и единственная система функций

$$\begin{gathered} y_1 = f_1(x) = f_1(x_1, \ldots, x_n), \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ y_{m-1} = f_{m-1}(x) = f_{m-1}(x_1, \ldots, x_n), \end{gathered} \tag{41.20}$$

определенных на множестве U_x и удовлетворяющих следующим условиям: если $x \in U_x$, то

$$(f_1(x), \ldots, f_{m-1}(x)) \in U_{\tilde{y}}. \tag{41.21}$$

и на U_x функции (41.20) непрерывно дифференцируемы и удовлетворяют системе уравнений (41.16):

$$\Phi_i(x_1, \ldots, x_n, f_1(x), \ldots, f_{m-1}(x)) = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, m-1. \tag{41.22}$$

Важно заметить, что в силу единственности решения (41.20) системы (41.16) при $x \in U_x$, $\tilde{y} \in U_{\tilde{y}}$ и $y_m \in U^1$, система уравнений

$$\begin{gathered} y_k = f_k(x), \quad k = 1, 2, \ldots, m-1, \\ y_m = \varphi(x, \tilde{y}) \end{gathered} \tag{41.23}$$

эквивалентна системе (41.17).

Подставляя выражения (41.20) в (41.10) получим функцию от x, определенную на U_x; обозначим ее через f_m:

$$y_m = \varphi(x_1, \ldots, x_n, f_1(x), \ldots, f_{m-1}(x)) = f_m(x_1, \ldots, x_n) = f_m(x). \tag{41.24}$$

Покажем, что система функций

$$y_k = f_k(x_1, \ldots, x_n), \quad k = 1, 2, \ldots, m, \tag{41.25}$$

(см. (41.20) и (41.24)) и является искомой системой функций, удовлетворяющей требованиям, сформулированным в теореме. В самом деле, пусть $U_y = U_{\tilde{y}} \times U^1$; тогда если $x \in U_x$, то в силу (41.21) и (41.11) $f(x) = (f_1(x), \ldots, f_m(x)) \in U_y$. Из (41.15), (41.22), (41.24) и (41.12) следует, что $F_i(x, f(x)) = 0$, $i = 1, 2, \ldots, m$, для всех $x \in U_x$. В силу теоремы 1' и предположения индукции функции (41.10) и (41.20), а поэтому и функция (41.24) непрерывно дифференцируемы.

Таким образом, доказано, что отображение $f(x)$, задаваемое функциями (41.25), является непрерывно дифференцируемым решением системы уравнений (41.8) на множестве U_x, причем если $x \in U_x$, то $y = f(x) \in U_y$. Отметим еще, что если $x \in U_x$, то система (41.25) эквивалентна системе (41.23).

Остается доказать единственность решения системы уравнений (41.8). Для доказательства изобразим проделанные в процессе доказательства переходы от одних систем уравнений к другим, им эквивалентным, т. е. имеющим в точности те же решения, системам в виде схемы следующим образом:

$$
\begin{array}{l}
F_i(x,\ y)=0,\quad i=1,\ 2,\ \ldots,\ m,\\
\quad\ \Updownarrow\\
F_j(x,\ y)=0,\quad j=1,\ 2,\ \ldots,\ m-1,\\
y_m=\varphi(x,\ y).\\
\quad\ \Updownarrow \qquad\qquad \Phi_j(x,\ \tilde{y})\equiv F_j(x,\ \tilde{y},\ \varphi(x,\ \tilde{y})),\quad j=1,\ 2,\ \ldots,\ m-1,\\
\Phi_j(x,\ \tilde{y})=0,\quad j=1,\ 2,\ \ldots,\ m-1,\\
y_m=\varphi(x,\ \tilde{y}).\\
\quad\ \Updownarrow\\
y_j=f_j(x),\quad j=1,\ 2,\ \ldots,\ m-1,\\
y_m=\varphi(x,\ \tilde{y}).\\
\quad\ \Updownarrow \qquad\qquad f_m(x)\equiv\varphi(x,\ f_1(x),\ \ldots,\ f_{m-1}(x))\\
y_i=f_i(x),\quad i=1,\ 2,\ \ldots,\ m.
\end{array}
$$

Двойные стрелки обозначают эквивалентность рассматриваемых систем уравнений, которая имеет место во всяком случае для $x\in U_x$, $y\in U_y$. Из этой эквивалентности и следует единственность решения (41.25) системы (41.8) в рассматриваемых окрестностях, откуда, как было отмечено выше, в силу условия $F_i(x^{(0)},\ y^{(0)})=0$, $i=1,\ 2,\ \ldots,\ m$, вытекает, что $f(x^{(0)})=y^{(0)}$. $\square$

Доказанная теорема о неявных функциях является одной из основных теорем математического анализа и имеет много разнообразных приложений в различных его разделах. С некоторыми из них мы познакомимся в последующих частях нашего курса. Она является «чистой теоремой существования»: ни из ее формулировки, ни из приведенного ее доказательства не следует, вообще говоря, никакого конкретного метода для решения системы (41.8). Например, если все F_k, $k=1,\ 2,\ \ldots,\ m$ в указанной системе уравнений являются элементарными функциями, то, следуя схеме доказательства теоремы, вообще говоря, не удастся «найти в явном виде» все те функции, существование которых использовалось при проведении указанного доказательства, и получить решение системы так же в виде элементарных функций. И в действительности в этом случае решение системы уравнений (41.8), которое существует в силу указанной теоремы, не является, вообще говоря, набором элементарных функций (даже если эта система состоит из одного уравнения).

Конечно, если функции F_k элементарные и, следовательно, задаются некоторыми формулами, то решение системы (41.8) может быть найдено с любой степенью точности, т. е. принципиально с любой степенью точности можно составить таблицы значений этих решений. Фактическая же точность, с которой вычисляются решения, определяется, конечно, конкретной целью, для которой решается рассматриваемая система. Сама теорема 2 в этом случае дает объективную уверенность, что проводя правильно соответствующие вычисления, мы действительно вычисляем искомое решение системы. Мы не будем останавливаться на численных методах решения систем уравнений; лишь некоторые вопросы численного решения уравнений рассмотрены в «Добавлении» в конце этого тома.

Существенным является также то обстоятельство, что теорема 2, как и вообще теоремы подобного типа, дает качественные методы в данном случае для изучения свойств решений системы уравнений.

Интересно отметить, что частные производные решения системы (41.8) при выполнении условий теоремы 2 легко выражаются в явном виде через частные производные функций F_k, $k=1, 2, \ldots, m$. Действительно, чтобы найти частную производную $\frac{\partial y_j}{\partial x_i}$, надо продифференцировать равенства (41.8) по x_i, считая их тождествами по $x_1, \ldots, x_n$, т. е. подставив в них их решения $y_j=y_j(x_1, \ldots, x_n)$, $j=1, \ldots, m$. Тогда получим

$$\frac{\partial F_k}{\partial x_i}+\sum_{j=1}^{m}\frac{\partial F_k}{\partial y_j}\frac{\partial y_j}{\partial x_i}=0, \qquad k=1,\ 2,\ \ldots,\ m.$$

Эта система уравнений, линейных относительно $\frac{\partial y_j}{\partial x_i}$, в силу того, что в рассматриваемой точке ее определитель не равен нулю:

$$\frac{\partial(F_1, \ldots, F_m)}{\partial(y_1, \ldots, y_m)}\neq 0,$$

имеет, и притом единственное, решение, которое может быть найдено, например, по правилу Крамера *).

Если нужно найти все производные

$$\frac{\partial y_j}{\partial x_i}, \qquad i=1,\ 2,\ \ldots,\ n, \qquad j=1,\ 2,\ \ldots,\ m,$$

то целесообразно вычислить дифференциалы обеих частей указанных выше тождеств (41.8). Использовав инвариантность формы первого дифференциала относительно выбора переменных, получим

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial F_k}{\partial x_i}\,dx_i+\sum_{j=1}^{m}\frac{\partial F_k}{\partial y_j}\,dy_j=0, \qquad k=1,\ 2,\ \ldots,\ m.$$

Эта система линейных относительно $dy_1, \ldots, dy_m$ уравнений в силу того же условия $\frac{\partial(F_1, \ldots, F_m)}{\partial(y_1, \ldots, y_m)}\neq 0$ имеет, и притом един-

*) Г. Крамер (1704—1752) — швейцарский математик.

ственное, решение. Если его найти, то коэффициент при dx_i в выражении для dy_j и будет частной производной $\frac{\partial y_j}{\partial x_i}$.

Оба эти метода применимы и для вычисления производных высших порядков функций $y_j(x_1, \ldots, x_n)$, являющихся решениями системы уравнений (41.8) (например, в предположении, что все функции F_k, $k=1, 2, \ldots, m$, имеют соответствующих порядков непрерывные производные). Применяя метод дифференциалов, следует, конечно, помнить, что дифференциалы порядка выше первого в случае, когда они выражаются через дифференциалы функций, имеют более сложный вид, чем когда они выражаются только через дифференциалы независимых переменных (см. п. 21.2).

Производные высших порядков функций $y_j(x_1, \ldots, x_n)$ можно получить последовательным дифференцированием и из выражений для первых производных $\frac{\partial y_j}{\partial x_i}$, найденных по формулам Крамера из указанной ранее системы уравнений

$$\frac{\partial F_k}{\partial x_i}+\sum_{j=1}^{m}\frac{\partial F_k}{\partial y_j}\frac{\partial y_j}{\partial x_i}=0, \qquad k=1, 2, \ldots, m,$$

в виде отношения двух определителей. Это отношение можно дифференцировать столько раз, сколько раз дифференцируемы функции F_k, $k=1, \ldots, m$. При этом, если все производные функций F_k, $k=1, \ldots, m$, до порядка r включительно непрерывны, то будут непрерывными и все частные производные функций $y_j(x_1, \ldots, x_n)$, $j=1, \ldots, m$, до того же порядка r.

Множество (называемое также часто классом) всех r раз непрерывно дифференцируемых в области G функций обозначается через $C^r(G)$. Таким образом: *если, дополнительно к условиям теоремы* 2, $F_k \in C^r(U)$, $k=1, \ldots, m$, *где* U — *некоторая окрестность точки* $(x^{(0)}, y^{(0)})$, *то решения* $y_j=y_j(x_1, \ldots, x_n)$ *системы уравнений* (41.7) *также принадлежат классу* $C^r(U_x)$ *в некоторой окрестности* U_x *точки* $x^{(0)}$.

Упражнения. 5. При каких условиях, налагаемых на f и на g, уравнение $y=xf(z)+g(z)$ определяет, в некоторой окрестности U точки (x_0, y_0), функцию $z(x, y) \in C^2(U)$? Доказать, что если эти условия выполнены, то для всех $(x, y) \in U$

$$z_y^2 z_{xx}-2z_x z_y z_{xy}+z_x^2 z_{yy}=0.$$

6. Дана система уравнений

$$uf'(v)=[y-f(v)]^2,$$
$$(x+v)f'(v)=y-f(v).$$

Найти условия, налагаемые на функцию f, при которых эта система определяет в некоторой окрестности U точки (x_0, y_0), функции $u=u(x, y)$, $v=v(x, y)$ класса $C^1(U)$. Доказать, что в этом случае $u_x u_y=u$ всюду в U.

41.4. ОТОБРАЖЕНИЯ

В этом пункте будут изучаться отображения $f: E \to R^m$, $E \subset R^n$, т. е. такие соответствия, которые каждой точке $x = (x_1, \ldots, x_n)$ множества E, лежащего в n-мерном арифметическом точечном пространстве R^n (см. п. 18.1) ставят в соответствие точку $y = (y_1, \ldots, y_m)$ m-мерного арифметического точечного пространства R^m. Таким образом, $f: (x_1, \ldots, x_n) \mapsto (y_1, \ldots, y_m)$, $(x_1, \ldots, x_n) \in E$. Очевидно, что задание такого отображения f равносильно заданию m функций $f_j: E \to \boldsymbol{R}$, таких, что $f_j: x \mapsto y_j$, $j = 1, \ldots, m$, $x \in E$, $y_j \in \boldsymbol{R}$. Эти функции

$$f_j(x) = f_j(x_1, \ldots, x_n), \quad i = 1, 2, \ldots, m, \quad x \in E, \tag{41.26}$$

называются *координатными функциями отображения* f и пишется

$$f = (f_1, \ldots, f_m).$$

На рассматриваемые отображения обобщается понятие непрерывности.

Определение 3. *Отображение $f: E \to R^m$, $E \subset R^n$, называется непрерывным в точке $x^{(0)} \in E$, если для любой окрестности $V(y^{(0)})$ точки $y^{(0)} = f(x^0)$ существует такая окрестность $U(x^{(0)})$ точки $x^{(0)}$, что*

$$f(U(x^{(0)}) \cap E) \subset V(y^{(0)}).$$

Поскольку в любой окрестности точки *) содержится ее сферическая окрестность, то это определение равносильно следующему.

Отображение $f: E \to R^m$, $E \subset R^n$, называется непрерывным в точке $x^{(0)} \in E$, если для любой ε-окрестности точки $y^{(0)} = f(x^{(0)})$ существует такая δ-окрестность точки $x^{(0)}$, что

$$f(U(x^{(0)}, \delta) \cap E) \subset U(y^{(0)}, \varepsilon).$$

Это, в свою очередь, с помощью неравенств можно перефразировать следующим образом.

Отображение $f: E \to R^m$, $E \subset R^n$, называется непрерывным в точке $x^{(0)} \in E$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что для всех точек $x \in E$, удовлетворяющих условию $\rho(x, x^{(0)}) < \delta$, выполняется неравенство

$$\rho(f(x), f(x^{(0)})) < \varepsilon.$$

Можно сформулировать определение непрерывности и в терминах последовательностей.

Определение 3'. *Отображение $f: E \to \boldsymbol{R}^m$, $E \subset \boldsymbol{R}^n$, называется непрерывным в точке $x^{(0)} \in E$, если для любой последовательности*

---

*) Напомним, что окрестностью точки называется любое открытое множество, содержащее эту точку (см. определение 14 в п. 18.2).

$x^{(k)} \in E$, $k=1, 2, \ldots$, *такой что* $\lim\limits_{k\to\infty} x^{(k)} = x^{(0)}$, *имеет место*

$$\lim_{k\to\infty} f(x^{(k)}) = f(x^{(0)}).$$

Равносильность этих двух определений доказывается аналогично тому, как это было сделано для равносильности определений предела функций по Коши и по Гейне. Проведем это доказательство.

Пусть отображение f *непрерывно в точке* $x^{(0)}$ в смысле определения 3, $x^{(k)} \in E$, $k=1, 2, \ldots$ и

$$\lim_{k\to\infty} x^{(k)} = x^{(0)}. \tag{41.27}$$

Зададим $\varepsilon > 0$. Для него существует такая $\delta > 0$, что при $x \in E$, $\rho(x, x^{(0)}) < \delta$ выполняется неравенство $\rho(f(x), f(x^{(0)}) < \varepsilon$.

В силу условия (41.27) существует такой номер k_0, что для всех $k \geqslant k_0$ имеем $x^{(k)} \in U(x^{(0)}, \delta)$, а следовательно и $\rho(f(x^{(k)}), f(x^{(0)})) < \varepsilon$. Это и означает, что $\lim\limits_{k\to\infty} f(x^{(k)}) = f(x^{(0)})$.

Пусть, теперь, отображение f непрерывно в точке $x^{(0)}$ в смысле определения 3′ и пусть условия определения 3 не выполнены, т. е. существует такое $\varepsilon_0 > 0$, что для любой $\delta > 0$ существует такое $x_\delta \in U(x^{(0)}, \delta) \cap E$, для которого $\rho(f(x_\delta), f(x^{(0)})) \geqslant \varepsilon_0$. Взяв последовательно $\delta = \frac{1}{k}$, $k=1, 2, \ldots$, и положив для краткости $x^{(k)} = x_{1/k}$, получим $x^{(k)} \in U\left(x^{(0)}, \frac{1}{k}\right) \cap E$, т. е. $\rho(x^{(k)}, x^{(0)}) < \frac{1}{k}$. Следовательно, $\lim\limits_{k\to\infty} x^{(k)} = x^{(0)}$ и $x^{(k)} \in E$; однако $\rho(f(x^{(k)}), f(x^{(0)})) \geqslant \varepsilon_0$ и, таким образом, последовательность $\{f(x^{(k)})\}$ не имеет своим пределом точку $f(x^{(0)})$. Полученное противоречие доказывает сделанное утверждение. $\square$

Лемма 1. *Отображение* $f = (f_1, \ldots, f_m): E \to R^m$, $E \subset R^n$, *непрерывно в точке* $x^{(0)}$ *тогда и только тогда, когда в этой точке непрерывны все координатные функции* $f_1, \ldots, f_m$.

Доказательство необходимости. Пусть отображение f непрерывно в точке $x^{(0)} \in E$, $y^{(0)} = (y_1^{(0)}, \ldots, y_m^{(0)}) \overset{\text{def}}{=} f(x^{(0)})$. Согласно определению 3, для каждой окрестности $V(y^{(0)})$ точки $y^{(0)}$, в частности — для каждой ее кубической окрестности (см. п. 18.1)

$$P(y^{(0)}, \varepsilon) = \{y : |y_i - y_i^{(0)}| < \varepsilon\}$$

существует такая окрестность $U(x^{(0)})$ точки $x^{(0)}$, что

$$f(U(x^{(0)}) \cap E) \subset P(y^{(0)}, \varepsilon).$$

Следовательно для всех $x \in U(x^{(0)}) \cap E$ выполняются неравенства

$$|f_j(x) - y_j^{(0)}| < \varepsilon, \qquad j = 1, 2, \ldots, m.$$

Это и означает, что все координатные функции $f_1, \ldots, f_m$ непрерывны в точке $x^{(0)}$.

Доказательство достаточности. Пусть все координатные функции $f_1, \ldots, f_m$ непрерывны в точке $x^{(0)} \in E$, $y^{(0)} = (y_1^{(0)}, \ldots, y_m^{(0)}) = f(x^{(0)})$ и задана окрестность $V(y^{(0)})$ точки $y^{(0)}$. Тогда существует такое $\varepsilon > 0$, что ε-кубическая окрестность $P(y^{(0)}, \varepsilon)$ точки $y^{(0)}$ содержится в $V(y^{(0)})$,

$$P(y^{(0)}, \varepsilon) \subset V(y^{(0)}).$$

В силу непрерывности каждой функции f_j, $j = 1, 2, \ldots, m$, в точке $x^{(0)}$ существуют такие окрестности $U_j = U(x^{(0)})$, что при $x \in U_j \cap E$ выполняется неравенство

$$|f_j(x) - y_j^{(0)}| < \varepsilon. \tag{41.28}$$

Положим $U = \bigcap\limits_{i=1}^{m} U_j$. Тогда U, как пересечение конечного числа открытых множеств U_j, будет открытым множеством, причем, поскольку все U_j содержали точку $x^{(0)}$, то U также содержит ее. Таким образом, множество U является окрестностью точки $x^{(0)}$. При этом, если $x \in U \cap E$, то при всех $j = 1, 2, \ldots, m$ выполняются неравенства (41.28). Это означает, что

$$f(x) \in P(y^{(0)}, \varepsilon),$$

а следовательно, $f(x) \in V(y^{(0)})$. Итак, для произвольной окрестности $V(y^{(0)})$ найдена такая окрестность U точки $x^{(0)}$, что

$$f(U \cap E) \subset V(y^{(0)}). \ \square$$

Лемма 1 в частности показывает, что определения непрерывных отображений отрезка, данные при рассмотрении понятия кривой в п. 16.1 (для случая отображений отрезка в трехмерное пространство) и в п. 18.2 (для случая отображения отрезка в произвольное n-мерное евклидово пространство) как отображений, координатные функции которых непрерывны, равносильны определению непрерывных отображений отрезка, как таких отображений, которые в каждой точке отрезка удовлетворяют условиям определения 3 этого пункта.

Отображение: $f: E \to R_y^m$, $E \subset R_x^n$, называется *непрерывным на множестве* E, если оно непрерывно в каждой точке множества E.

Лемма 2. *Отображение f открытого множества пространства R_x^n в пространство R_y^m непрерывно на этом множестве тогда и только тогда, когда прообраз каждого открытого множества пространства R_y^m при отображении f является открытым множеством пространства R_x^n.*

Доказательство необходимости. Пусть f непрерывно отображает открытое множество $G \subset R_x^n$ в пространство R_y^m и пусть

U — открытое множество пространства $R_y^m: U \subset R_y^m$. Покажем, что прообраз $f^{-1}(U)$ этого множества — открытое в пространстве R_x^n множество. Если множество $f^{-1}(U)$ пусто, то утверждение очевидно, так как пустое множество открыто.

Пусть множество $f^{-1}(U)$ не пусто, т. е. существует точка $x^{(0)} \in f^{-1}(U)$ и, следовательно, $f(x^{(0)}) \in U$. Поскольку U — открытое множество, то оно является окрестностью точки $y^{(0)} = f(x^{(0)})$. Поэтому, в силу непрерывности отображения f в точке $x^{(0)}$ (см. определение 3′), существует такая окрестность U_x этой точки, что $f(U_x \cap G) \subset U$, следовательно, $U_x \cap G \subset f^{-1}(U)$. Поскольку множество $U_x \cap G$, как пересечение двух открытых множеств U_x и G, является открытым и $x^{(0)} \in U_x \cap G$, то $x^{(0)}$ — внутренняя точка множества $f^{-1}(U)$.

Таким образом, каждая точка прообраза открытого множества U является внутренней точкой этого прообраза, значит, он — открытое множество.

Доказательство достаточности. Пусть f — отображение открытого множества G пространства R_x^n в R_y^m и пусть при этом отображении прообраз каждого открытого в пространстве R_y^m множества является открытым в R_x^n множеством. Пусть $x^{(0)} \in G$. Покажем, что отображение f непрерывно в точке $x^{(0)}$.

Пусть U_y — некоторая окрестность точки $y^{(0)} = f(x^{(0)})$. Поскольку прообраз $f^{-1}(U_y)$ открытого множества U_y является, по предположению, открытым множеством и, очевидно, $x^{(0)} \in f^{-1}(U_y) \subset G$, то множество $U_x = f^{-1}(U_y)$ является окрестностью точки $x^{(0)}$, причем $f(U_x) = U_y$. Отсюда непосредственно и вытекает непрерывность отображения f в точке $x^{(0)}$ (см. определение 3). $\square$

Пример. Рассмотрим отображение $f: \boldsymbol{R}^2 \to \boldsymbol{R}$, заданное формулой $f(x, y) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1$. Согласно лемме 2 прообраз открытого множества $(-\infty, 0)$, т. е. множество точек (x, y), удовлетворяющих неравенству $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} < 1$ (и, следовательно, составляющих внутренность эллипса), а также прообраз открытого множества $(0, +\infty)$, т. е. множество таких точек (x, y), что $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} > 1$ (эти точки образуют внешность эллипса), являются открытыми множествами.

Вообще, если $f: R^n \to R$ — непрерывная на R^n функция, то для любого числа $a \in R$ множества $\{x: f(x) < a, x \in R^n\}$ и $\{x: f(x) > a, x \in R^n\}$ являются открытыми множествами как прообразы открытых множеств $(-\infty, a)$ и $(a, +\infty)$.

Теорема Вейерштрасса об ограниченности непрерывных на компактах функций и достижимости этими функциями их нижних и верхних граней обобщается и на случай непрерывных отображений. Более точно — справедливо следующее утверждение.

Лемма 3. *Пусть $f: A \to R^m$, $A \subset \boldsymbol{R}^n$ — непрерывное отображение компакта A в пространство R^m. Тогда множество $f(A)$ также является компактом.*

Короче: *непрерывный образ компакта является компактом.*

Доказательство. Пусть $y^{(k)} \in f(A)$ — произвольная последовательность точек из $f(A)$. В силу определения образа множества при заданном отображении, для любого $k = 1, 2, \ldots$ существует такая точка $x^{(k)} \in A$, что $f(x^{(k)}) = y^{(k)}$. Поскольку A — компакт, то из последовательности $\{x^{(k)}\}$ можно выделить сходящуюся подпоследовательность $\{x^{(k_s)}\}$, предел которой $x^{(0)}$ принадлежит компакту A: $\lim\limits_{s \to \infty} x^{(k_s)} = x^{(0)} \in A$.

В силу непрерывности функции f в точке $x^{(0)}$ имеем

$$\lim_{s \to \infty} f\left(x^{(k_s)}\right) = f(x^{(0)}), \text{ т. е. } \lim_{s \to \infty} y^{(k_s)} = f(x^{(0)}) \in f(A).$$

Таким образом, из любой последовательности точек, принадлежащей множеству $f(A)$, можно выделить сходящуюся, предел которой принадлежит этому множеству. Это и означает, что $f(A)$ — компакт. $\square$

Замечание. Из леммы 3 следует доказанная ранее теорема о достижимости нижней и верхней граней действительной функцией, непрерывной на компакте (см. п. 19.5). В самом деле, согласно лемме 3, множество значений такой функции является компактом на числовой прямой, а всякий компакт на числовой прямой имеет конечные минимальную и максимальную точки. Это следует из того, что компакт — ограниченное множество и, следовательно, имеет конечную верхнюю (нижнюю) грань, которая в силу своего определения является точкой прикосновения множества. Поскольку компакт замкнут, то она ему принадлежит и является, очевидно, его максимальной (минимальной) точкой.

Обобщается на случай отображений и понятие равномерной непрерывности.

Определение 4. *Отображение f множества $E \subset R_x^n$ в пространство R_y^m называется равномерно непрерывным, если для любого $\varepsilon > 0$ — существует такое $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, что для любых точек $x' \in E$ и $x'' \in E$, удовлетворяющих условию $\rho(x', x'') < \delta$, выполняется неравенство $\rho(f(x'), f(x'')) < \varepsilon$.*

Для отображений имеет место и утверждение, аналогичное теореме Кантора (см. п. 19.6) для непрерывных функций.

Лемма 4. *Непрерывное отображение компакта равномерно непрерывно.*

Доказательство. Воспользуемся тем же методом, что и при доказательстве теоремы Кантора о равномерной непрерывности действительных функций, непрерывных на компактах (см. теорему 5 в п. 19.5).

Допустим, что существует отображение $f: A \to R^m$, $A \subset R^n$, непрерывное на компакте A, но не равномерно непрерывное на нем. Тогда существует такое $\varepsilon_0 > 0$, что для любого $\delta > 0$ найдутся точки $x'_\delta \in A$ и $x''_\delta \in A$, для которых имеют место неравенства

$$\rho(x''_\delta, x'_\delta) < \delta \quad \text{и} \quad \rho(f(x''_\delta), f(x'_\delta)) \geqslant \varepsilon_0.$$

Пусть $\delta = \frac{1}{k}$, $x'^{(k)} \stackrel{\text{def}}{=} x'_{1/k}$, $x''^{(k)} \stackrel{\text{def}}{=} x''_{1/k}$, $k = 1, 2, \ldots$. Поскольку A — компакт, то из последовательности $\{x'^{(k)}\}$ можно выделить сходящуюся подпоследовательность $\{x'^{(k_s)}\}$, предел $x^{(0)}$ которой содержится во множестве A: $\lim\limits_{s \to \infty} x'^{(k_s)} = x^{(0)} \in A$. При этом из

$$\rho(x''^{(k_s)}, x^{(0)}) \leqslant \rho(x''^{(k_s)}, x'^{(k_s)}) + \rho(x'^{(k_s)}, x^{(0)}) <$$
$$< \frac{1}{k_s} + \rho(x'^{(k_s)}, x^{(0)}) \to 0 \quad \text{при} \quad s \to \infty$$

следует, что подпоследовательность $\{x''^{(k_s)}\}$ второй последовательности $\{x''^{(k)}\}$ также сходится к точке $x^{(0)}$.

Теперь заметим, что из непрерывности отображения f в точке $x^{(0)}$ явствует, что

$$\lim_{s \to \infty} f(x'^{(k_s)}) = \lim_{s \to \infty} f(x''^{(k_s)}) = f(x^{(0)}),$$

и так как

$$\rho(f(x''^{(k_s)}), f(x'^{(k_s)})) \leqslant \rho(f(x''^{(k_s)}), f(x^{(0)})) + \rho(f(x^{(0)}), f(x'^{(k_s)})) \to 0$$
$$\text{при } s \to \infty,$$

то $\lim\limits_{s \to \infty} \rho(f(x''^{(k_s)}), f(x'^{(k_s)})) = 0$. Это противоречит условию $\rho(f(x''^{(k_s)}), f(x'^{(k_s)})) \geqslant \varepsilon_0$. □

С помощью доказанных свойств непрерывных отображений можно получить одно полезное для дальнейшего свойство областей (т. е. открытых линейно связных множеств, см. п. 18.2). Сформулируем это свойство также в виде леммы.

Лемма 5. *Открытое множество является областью тогда и только тогда, когда любые две его точки можно соединить целиком лежащей в нем ломаной.*

Доказательство. Достаточность сформулированного условия не требует доказательства. В самом деле, если у некоторого открытого множества $G \subset R^n$ любые две точки можно соединить некоторой ломаной, целиком лежащей в нем, то, поскольку всякая ломаная является кривой (см. п. 16.5), любые две точки множества G оказываются соединимыми в нем кривой, что и означает, согласно определению (см. определение 25 в п. 18.2), что открытое множество G линейно связно, т. е. является областью (см. определение 26 там же).

Докажем необходимость условий леммы. Пусть G — область пространства R^n. Рассмотрим точки $x \in G$ и $y \in G$. Согласно определению области, существует кривая $\gamma = \{r(t),\ a \leqslant t \leqslant b\}$, соединяющая в G точки x и y, т. е. $r(a) = x$, $r(b) = y$ и $r(t) \in G$, $a \leqslant t \leqslant b$. Кривая γ представляет собой непрерывный образ отрезка $[a, b]$, являющегося компактом и, поэтому (см. лемму 3), сама будет компактом. Поскольку компакт γ не пересекается с замкнутым множеством $R^n \setminus G$, то расстояние между ними больше нуля (см. лемму 7 в п. 18.2). Следовательно, существует такое число $\eta > 0$, что $\rho(\gamma, R^n \setminus G) > \eta$.

Отображение $r(t)$, $a \leqslant t \leqslant b$, отрезка $[a, b]$, будучи непрерывным, является и равномерно непрерывным (см. лемму 4). Поэтому существует такое $\delta > 0$, что для любых двух точек $t' \in [a, b]$ и $t'' \in [a, b]$, удовлетворяющих условию $|t'' - t'| < \delta$, выполняется неравенство

$$\rho(r(t''),\quad r(t')) < \eta.$$

Отсюда вытекает, что для любого разбиения $\tau = \{t_i\}_{i=0}^{i=k}$ отрезка $[a, b]$ мелкости $\delta_\tau < \delta$ все точки ломаной λ_τ с вершинами $r(t_i)$, $i = 0, 1, \ldots, k$, будут содержаться в G. (почему)? Следовательно, $\lambda_\tau \subset G$.

Поскольку началом и концом ломаной λ_τ являются соответственно начало и конец кривой γ, т. е. произвольно заданные точки x и y из G, то нами доказано, что любые две точки области могут быть соединены ломаной. $\square$

Пусть теперь $E \subset R^n_x$, $D \subset R^m_y$, $y = f(x)$ — отображение множества E в R^m_y, причем $f(E) \subset D$ и $z = g(y)$ — отображение D в R^p_z, т. е. $f: E \to D$, $g: D \to R^p_z$. В этом случае имеет смысл композиция $g \circ f: E \to R^p_z$, отображающая множество $E \subset R^n_x$ в p-мерное пространство $R^p_z: (g \circ f) \overset{\text{def}}{=} g(f(x))$, $x \in E$.

Отметим, что если отображение $f(x)$ множества E непрерывно в точке $x^{(0)} \in E$, а $g(y)$ определено в некоторой окрестности точки $y^{(0)} = f(x^{(0)})$, то всегда существует такая окрестность U_x точки $x^{(0)}$, что на множестве $E \cap U_x$ имеет смысл композиция $g \circ f$. Действительно, пусть U_y — окрестность точки $y^{(0)}$, на которой определено отображение $g(y)$; согласно определению 3 для нее существует такая окрестность U_x, что $f(U_x \cap E) \subset U_y$. Очевидно, что для всех точек $x \in U_x \cap E$, и имеет смысл композиция $g \circ f$.

Напомним еще, что, согласно введенной для функций терминологии (см. п. 1.2*), отображение $f: E \to R^m_y$, $E \subset R^n_x$ называется *взаимно однозначным*, или *инъекцией*, если разным точкам множества E при этом отображении соответствуют разные точки. В этом случае говорят также, что множество E взаимно однозначно отображается посредством этого отображения на множество $f(E)$, т. е. $f: E \to f(E)$ является биекцией. При выполнении этого условия на множестве $f(E)$ существует однозначное обратное отображение (обратная функция) $f^{-1}(y)=x$, где x таково, что $f(x)=y$. Поэтому $f^{-1}[f(x)]=x$, т. е. это *тождественное отображение* (тождественным отображением множества E называется отображение, которое каждой точке $x\in E$ ставит в соответствие эту же точку).

Определение 5. *Если отображение f множества $E\subset R_x^n$ в пространство R_y^m взаимно однозначно и непрерывно на E, а обратное ему отображение f^{-1} непрерывно на $f(E)$, то f называется гомеоморфным отображением, или гомеоморфизмом, а множество $f(E)$ называется гомеоморфным образом множества E, или, что то же, множеством, гомеоморфным множеству E.*

Очевидно, что если f — гомеоморфизм множества E, то f^{-1} является гомеоморфизмом множества $f(E)$.

При гомеоморфном отображении открытого множества на открытое образы открытых подмножеств также открыты. Действительно, если f — гомеоморфное отображение открытого множества G на открытое же множество Γ, V — открытое подмножество множества G, $W=f(V)$, то $V=f^{-1}(W)$, т. е. V является образом множества W при непрерывном отображении f^{-1} открытого множества Γ и, следовательно, W является прообразом открытого множества V при этом отображении. Поэтому согласно лемме 2 множество W открыто.

Рассмотрим теперь композицию непрерывных отображений.

Лемма 6. *Пусть $f: E\to R^m$, $E\subset R^n$, $g: D\to R^s$, $D\supset f(E)$. Если отображение f непрерывно в точке $x^{(0)}\in E$, а g непрерывно в точке $f(x^{(0)})$, то композиция $g\circ f$ также непрерывна в точке $x^{(0)}$.*

Доказательство этого утверждения может быть проведено методом, аналогичным использованному при доказательстве теоремы 2 п. 5.2 и теоремы 2 п. 19.4, основанном на определении непрерывности в терминах окрестностей. Для разнообразия докажем лемму, исходя из определения непрерывности в терминах последовательности.

Пусть $x^{(k)}\in E$, $k=1, 2, \ldots$, и $\lim\limits_{k\to\infty} x^{(k)}=x^{(0)}$. Тогда $f(x^{(k)})\in D$ и, в силу непрерывности отображения f в точке $x^{(0)}$, имеем

$$\lim_{k\to\infty} f(x^{(k)})=f(x^{(0)}). \tag{41.29}$$

В силу же непрерывности отображения g в точке $f(x^{(0)})$ для любой последовательности $y^{(k)}\in D$, $k=1, 2, \ldots$, $\lim\limits_{k\to\infty} y^{(k)}=f(x^{(0)})$ имеет место $\lim\limits_{k\to\infty} g(y^{(k)})=g(f(x^{(0)}))$. В частности, в силу (41.29) при $y^{(k)}=f(x^{(k)})$

$$\lim_{k\to\infty} g(f(x^{(k)}))=g(f(x^{(0)})).$$

Это и означает непрерывность композиции $g\circ f$ в точке $x^{(0)}$. □

Упражнение 7. Доказать, что непрерывное взаимно однозначное отображение компакта пространства R^n в некоторое пространство R^m является гомеоморфизмом.

В заключение этого пункта определим, что будет пониматься под образом кривой при заданном непрерывном отображении, и докажем лемму о непрерывных образах линейно связных множеств.

Пусть f — непрерывное отображение множества $E \subset R_x^n$ в пространство R_y^m, и Γ — кривая, целиком лежащая во множестве E, т. е. задан класс эквивалентных отображений отрезков во множество E (см. § 16).

Пусть

$$x(t), \quad a \leqslant t \leqslant b,$$

— одно из представлений кривой Γ. Кривая в пространстве R_y^m, представлением которой является отображение

$$f[x(t)], \quad a \leqslant t \leqslant b,$$

называется *образом кривой* Γ при отображении f и обозначается через $f(\Gamma)$.

Это определение корректно, так как при сделанных предположениях $f(x(t))$, $a \leqslant t \leqslant b$, является непрерывным отображением отрезка в пространство и, следовательно, определяет некоторую кривую.

Лемма 7. *Пусть $f: E \to R^m$ непрерывное отображение линейно-связного множества $E \subset R^n$ в пространство R^m. Тогда множество $f(E)$ также линейно связно.*

Короче: *непрерывный образ линейно связного множества линейно связен.*

Доказательство. Пусть E — линейно связное множество и f — его непрерывное отображение в R^m. Для того чтобы доказать, что множество $f(E)$ является линейно связным, надо доказать, что две любые его точки можно соединить в $f(E)$ непрерывной кривой (см. определение 25 в п. 18.2). Пусть $y^{(1)} \in f(E)$ и $y^{(2)} \in f(E)$; выберем какие-либо точки $x^{(1)} \in f^{-1}(y^{(1)})$ и $x^{(2)} \in f^{-1}(y^{(2)})$. Поскольку $x^{(1)} \in E$, $x^{(2)} \in E$ и E линейно связно, то существует такая кривая Γ, что ее началом является точка $x^{(1)}$, концом — точка $x^{(2)}$ и все ее точки принадлежат множеству E.

Кривая $f(\Gamma)$ является искомой кривой. Действительно, ее началом является точка $y^{(1)} = f(x^{(1)})$, а концом — точка $y^{(2)} = f(x^{(2)})$. Все же другие ее точки принадлежат множеству $f(E)$. Таким образом, $f(E)$ — линейно связное множество. $\square$

Упражнения. 8. Отображение $f: R^2 \to R^2$ задано следующим образом: $(x, y) \longmapsto (2x, 3y)$. Во что оно переводит окружность $x^2 + y^2 = 1$?

9. Найти образ прямой $x = 2$ плоскости Oxy при отображении $f: R^2 \to R^2$, заданном следующим образом: $(x, y) \longmapsto (xy, y)$.

10. В плоскости Oxy задана прямая $x = c$ ($c = \text{const} \neq 0$). Найти ее образ при отображении $f: R^2 \longmapsto R^2$ с координатными функциями $(e^x \cos y, e^x \sin y)$.

41.5. ВЕКТОРНЫЕ ОТОБРАЖЕНИЯ

При изучении дифференцируемых отображений (их определение будет дано ниже, в п. 41.7) пространство R^n, в котором лежит отображаемое множество, и пространство R^m, в которое происходит отображение, удобнее рассматривать как векторные евклидовы пространства (см. п. 18.4). Для простоты n-мерный вектор с координатами $(x_1, \ldots, x_n)$ будем обозначать тем же символом x, которым мы обозначали точку n-мерного точечного пространства с теми же координатами. Это, конечно, не приведет к недоразумениям, так как и точка n-мерного пространства и n-мерный вектор представляют собой упорядоченный набор n действительных чисел.

Пусть $E \subset R^n$ и $f: E \to R^m$, где теперь отображение f ставит в соответствие каждому вектору $x \in E$ некоторый вектор $y = f(x) \in R^m$. Такие отображения будем называть *векторными*.

Если $e_1, \ldots, e_n$ — координатные векторы в пространстве R^n (см. п. 18.4), $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_m$ — координатные векторы в пространстве R^m,

$$x = (x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i, \quad y = (y_1, \ldots, y_m) = \sum_{j=1}^{m} y_j \varepsilon_j \text{ и } y = f(x), \text{ то}$$

каждая координата y_j, $j = 1, 2, \ldots, m$, вектора y также является функцией от вектора $x \in E$ и, следовательно, функцией от его координат $x_1, \ldots, x_n$:

$$y_j = f_j(x) = f_j(x_1, \ldots, x_n), \quad j = 1, 2, \ldots, m. \tag{41.30}$$

Как и в случае точечного пространства (см. (41.26)) функции (41.30) называются *координатными функциями отображения* f и пишется $f = (f_1, \ldots, f_m)$.

Интерпретация n-мерных точек $(x_1, \ldots, x_n)$ как векторов не препятствует, конечно, рассмотрению таких свойств отображений как их непрерывность и равномерная непрерывность. Поэтому все сказанное об отображениях в предыдущем пункте остается в силе и для векторных отображений. Напомним еще, что для расстояния $\rho(x, y)$ между векторами x и y справедлива формула (см. в п. 18.4 формулу (18.37)) $\rho(x, y) = |x - y|$.

В качестве примера отметим, что длина $|x|$ вектора $x \in R^n$ является непрерывной функцией в R^n. Это следует из неравенства (18.36): поскольку для любых $x_0 \in R^n$ и $x \in R^n$ справедливо неравенство

$||x| - |x_0|| \leqslant |x - x_0|$, то

$$\lim_{x \to x_0} |x| = \lim_{|x - x_0| \to 0} |x| = |x_0|.$$

41.6. ЛИНЕЙНЫЕ ОТОБРАЖЕНИЯ

Рассмотрим специальный класс отображений пространства R^n в R^m, называемых *линейными*.

Определение 6. *Отображение* $f: R^n \to R^m$ *называется линейным (или, более полно, линейным однородным), если для любых двух векторов* $x' \in R^n$, $x'' \in R^n$ *и любых двух чисел* $\lambda' \in \boldsymbol{R}$, $\lambda'' \in \boldsymbol{R}$ *выполняется равенство*

$$f(\lambda' x' + \lambda'' x'') = \lambda' f(x') + \lambda'' f(x'').$$

Из этого определения по индукции следует, что при линейном отображении f любая конечная линейная комбинация векторов $x^{(j)} \in R^n$ отображается в такую же линейную комбинацию образов $f(x^{(j)})$, $j = 1, 2, \ldots, k$, этих векторов

$$f\left(\sum_{j=1}^{k} \lambda_j x^{(j)}\right) = \sum_{j=1}^{k} \lambda_j f(x^{(j)}).$$

Обычно линейные однородные отображения называются *линейными операторами*. О линейном операторе $f: R^n \to R^m$ говорят, что он действует из R^n в R^m.

Из определения линейного оператора непосредственно следует, что композиция $g \circ f$ линейных операторов $f: R^n \to R^m$ и $g: R^m \to R^s$ также является линейным оператором $g \circ f: R^n \to R^s$.

Пусть $f: R^n \to R^m$ — линейный оператор. Образ каждого координатного вектора $e_j \in R^n$, $j = 1, 2, \ldots, n$, при отображении f является вектором пространства R^m и поэтому раскладывается по координатным векторам $\varepsilon_i \in R^m$, $i = 1, 2, \ldots, m$. Обозначим коэффициенты этого разложения через a_{ij}:

$$f(e_j) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} \varepsilon_i.$$

Пусть $y = f(x)$, $x = \sum_{j=1}^{n} x_j e_j$ и

$$y = \sum_{i=1}^{m} y_i \varepsilon_i. \tag{41.31}$$

Тогда в силу линейности отображения f получим

$$y = f(x) = f\left(\sum_{j=1}^{n} x_j e_j\right) = \sum_{j=1}^{n} x_j f(e_j) =$$

$$= \sum_{j=1}^{n} x_j \sum_{i=1}^{m} a_{ij} \varepsilon_i = \sum_{i=1}^{m} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j\right) \varepsilon_i. \tag{41.32}$$

Сравнив коэффициенты разложения вектора y по координатным векторам $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_m$ в (41.31) и (41.32), получим

$$\begin{gathered} y_1 = a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_m = a_{m1}x_1 + \ldots + a_{mn}x_n. \end{gathered} \tag{41.33}$$

Наоборот, легко проверить, что всякое отображение $f: R^n \to R^m$, координатные функции которого имеют вид (41.33), является линейным оператором.

Матрица

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot \\ a_{m1} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix} \tag{41.34}$$

называется *матрицей линейного оператора* f.

Очевидно, что если (41.34) является матрицей линейного оператора f, то для любого $x = \sum_{j=1}^{n} x_j e_j$ имеет место (см. (41.32)) разложение

$$f(x) = \sum_{i=1}^{m} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \right) \varepsilon_i. \tag{41.35}$$

Пример. Пусть π_i — оператор проектирования на i-ую координатную ось, т. е.

$$\pi_i(y) = \pi_i(y_1, \ldots, y_m) = y_i \tag{41.36}$$

(i — фиксированное число среди чисел $1, 2, \ldots, m$). Тогда π_i является линейным оператором с квадратной матрицей порядка m, состоящей из одних лишь нулей кроме i-го элемента главной диагонали, равного единице:

$$\begin{pmatrix} 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \ldots & 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix}$$

С помощью операторов проектирования π_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, легко устанавливается связь между произвольным векторным отображением $f: E \to R^m$, $E \subset R^n$ и его координатными функциями f_i (см. (41.30)):

$$f_i = \pi_i \circ f, \tag{41.37}$$

т. е. каждая координатная функция f_i, $i=1, 2, \ldots, m$, является композицией отображения f с оператором проектирования π_i.

Если $m=1$, т. е. линейный оператор $f: R^n \to \boldsymbol{R}$ отображает пространство R^n во множество всех действительных чисел, то он называется обычно *линейным функционалом*.

В силу (41.33) всякий линейный функционал имеет вид

$$y = a_1x_1 + \ldots + a_nx_n, \tag{41.38}$$

где $a_1, \ldots, a_n$ — некоторые действительные числа.

Обозначив через a вектор с координатами $(a_1, \ldots, a_n)$, получим, что всякий линейный функционал $f: R^n \to \boldsymbol{R}$ имеет вид

$$f(x) = (a, x),$$

где через (a, x) обозначено скалярное произведение векторов a и x. Очевидно и обратное: каждое отображение вида $x \mapsto (a, x)$ является линейным функционалом $f: R^n \to \boldsymbol{R}$.

Упражнение 11. Установить, какие из следующих отображений линейны:
а) $f: R^3 \to R^2$, причем $f(x, y, z) = (x, z)$;
б) $f: R^4 \to R^4$, причем $f(x) = -x$, где x — произвольный вектор в R^4;
в) $f: R^3 \to R^3$, причем $f(x) = x + (0, -1, 0)$, где x — любой вектор в R^3;
г) $f: R^2 \to R^2$, причем $f(x, y) = (2x+y, y)$;
д) $f: R^2 \to R^2$, причем $f(x, y) = (2x, y-x)$;
е) $f: R^2 \to R^2$, причем $f(x, y) = (y, x)$;
ж) $f: R^2 \to R$, причем $f(x, y) = xy$.

Напомним определения некоторых операций с матрицами (известных из алгебры). Если $A = (a_{ij})$ и $B = (b_{ij})$ — прямоугольные матрицы с одинаковым числом строк и столбцов, $i = 1, 2, \ldots$ $\ldots, m$, $j = 1, 2, \ldots, n$, то их *сумма* определяется как матрица, элемент c_{ij} которой является суммой соответствующих элементов матриц A и B, т. е.

$$c_{ij} \overset{\text{def}}{=} a_{ij} + b_{ij}, \quad i = 1, 2, \ldots, m, \quad j = 1, 2, \ldots, n.$$

Произведением матрицы A на число λ называется матрица, все элементы c_{ij} которой получаются из соответствующих элементов матрицы A умножением их на λ

$$c_{ij} \overset{\text{def}}{=} \lambda a_{ij}, \quad i = 1, 2, \ldots, m, \quad j = 1, 2, \ldots, n.$$

Если число столбцов матрицы $A = (a_{ij})$ равно числу строк матрицы $B = (b_{jk})$, $i = 1, 2, \ldots, m$, $j = 1, 2, \ldots, n$, $k = 1, 2, \ldots, s$, то *произведение* AB матриц A и B определяется как матрица, состоящая из элементов c_{ik}, которые определяются по формулам:

$$c_{ik} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{jk}, \quad i = 1, 2, \ldots, m, \quad k = 1, 2, \ldots, s.$$

Отметим два нужных нам для дальнейшего свойства линейных операторов.

1°. *Если f и g — линейные операторы, $f: R^n \to R^m$, $g: R^n \to R^m$, а λ и μ — произвольные числа, то $\lambda f + \mu g$ — также линейный оператор, действующий из R^n в R^m, причем, если A и B суть матрицы линейных операторов f и g, то $\lambda A + \mu B$ является матрицей оператора $\lambda f + \mu g$.*

Доказательство этого утверждения производится путем его непосредственной проверки: если

$$y_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j, \quad i = 1, 2, \ldots, m$$

— координатные функции отображения f, а

$$z_i = \sum_{j=1}^{n} b_{ij} x_j, \quad i = 1, 2, \ldots, m$$

— координатные функции отображения g, то для координатных функций отображения $\lambda f + \mu g$ будем иметь (при сложении и умножении на числа векторов их координаты складываются и умножаются на те же числа)

$$\lambda y_i + \mu z_i = \lambda \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j + \mu \sum_{j=1}^{n} b_{ij} x_j = \sum_{j=1}^{n} (\lambda a_{ij} + \mu b_{ij}) x_j,$$

т. е., во-первых, координатные функции отображения $\lambda f + \mu g$ являются линейными функциями, а, во-вторых, элементами c_{ij} матрицы отображения $\lambda f + \mu g$ являются числа $c_{ij} = \lambda a_{ij} + \mu b_{ij}$, т. е. элементы матрицы $\lambda A + \mu B$, где $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$. $\square$

2°. *Если f и g — линейные операторы, $f: R^n \to R^m$, $g: R^m \to R^s$, то их композиция $g \circ f$ также является линейным оператором $R^n \to R^s$, а ее матрица равна произведению матриц отображений g и f.*

Снова выполним непосредственную проверку утверждения. Если

$$y_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j, \quad i = 1, 2, \ldots, m,$$

— координатные функции отображения f, а

$$z_k = \sum_{i=1}^{m} b_{ki} y_i, \quad k = 1, 2, \ldots, s$$

— координатные функции отображения g, то

$$z_k = \sum_{i=1}^{m} b_{ki} y_i = \sum_{i=1}^{m} b_{ki} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{m} b_{ki} a_{ij} \right) x_j,$$

т. е., во-первых, координатные функции композиции $g \circ f$ суть линейные функции, а, во-вторых, элементы c_{kj} ее матрицы получаются из элементов матриц a_{ij} и b_{ki} операторов f и g по правилу

$$c_{kj} = \sum_{i=1}^{m} b_{ki} a_{ij}. \tag{41.39}$$

Как было сказано, такая матрица (c_{kj}) и называется произведением матриц (b_{ki}) и (a_{ij}). □

Заметим, что каждый линейный оператор $f: R^n \to R^m$ является непрерывным отображением пространства R^n, ибо все его координатные функции (41.33), будучи линейными, непрерывны.

Длина вектора $x \in R^n$, как это отмечалось в п. 41.5, является непрерывной в пространстве R^n функцией. Поэтому, если $f: R^n \to R^m$ — линейный оператор, то функция $|f(x)|$, как композиция двух непрерывных функций, будет также непрерывной в R^n.

Поскольку единичный шар $Q^n = \{x \in R^n : |x| \leqslant 1\}$ является компактом, то для всякого линейного оператора $f: R^n \to R^m$ сужение непрерывной функции $|f|: R^n \to R$ на шар Q^n, т. е. функция $|f|: Q^n \to R$, ограничено:

$$\sup_{|x| \leqslant 1} |f(x)| < +\infty. \tag{41.40}$$

Определение 7. *Для линейного оператора (в частности — для линейного функционала, при $m = 1$) $f: R^n \to R^m$ число $\sup_{|x| \leqslant 1} |f(x)|$ называется его нормой*) и обозначается через $\|f\|$:*

$$\|f\| \overset{\text{def}}{=} \sup_{|x| \leqslant 1} |f(x)|. \tag{41.41}$$

В силу неравенства (41.40) норма любого линейного оператора конечна.

Оценим длину образа вектора $x \in R^n$ через норму оператора f и длину x самого вектора. Для любого $x \neq 0$, $x \in R^n$, вектор $\xi = \frac{x}{|x|}$ имеет длину $1: |\xi| = \left|\frac{x}{|x|}\right| = \frac{1}{|x|}|x| = 1$. Поэтому, использовав линейность оператора f, свойство (18.34) длины вектора и определение (41.41), получим

$$|f(x)| = \left|f\left(|x|\frac{x}{|x|}\right)\right| = \left||x| f\left(\frac{x}{|x|}\right)\right| = |x|\left|f\left(\frac{x}{|x|}\right)\right| \leqslant$$
$$\leqslant |x| \sup_{|\xi| \leqslant 1} |f(\xi)| = |x| \|f\|,$$

т. е.

$$|f(x)| \leqslant \|f\| |x|. \tag{41.42}$$

Из этого неравенства следует, что при $|x| < 1$ справедливо неравенство $|f(x)| < \|f\|$. Вспомним, что непрерывная на компакте функция достигает на нем своего наибольшего значения (см. тео-

*) Общее определение нормы будет дано в п. 57.3.

рему 3 в п. 19.5). Поэтому функция $|f|:Q^n\to\boldsymbol{R}$, будучи непрерывной на компакте Q^n, достигает на нем своего наибольшего значения:

$$\|f\|=\sup_{|x|\leqslant 1}|f(x)|=\max_{|x|\leqslant 1}|f(x)|,$$

а поскольку при $|x|<1$ имеет место неравенство $|f(x)|<\|f\|$, то указанный максимум достигается при $|x|=1$, т. е. на единичной сфере $S^{n-1}=\{x:|x|=1\}$. Таким образом,

$$\|f\|=\max_{|x|=1}|f(x)|. \tag{41.43}$$

Отметим еще одно полезное выражение для нормы линейного оператора

$$\|f\|=\sup_{x\in R^n,\ x\neq 0}\frac{|f(x)|}{|x|}. \tag{41.44}$$

Докажем его. Используя снова свойство длины (18.34) вектора, линейность отображения f и формулу (41.41), получим

$$\sup_{x\in R^n,\ x\neq 0}\frac{|f(x)|}{|x|}=\sup_{x\in R^n,\ x\neq 0}\left|\frac{1}{|x|}f(x)\right|=\sup_{x\in R^n,\ x\neq 0}\left|f\left(\frac{x}{|x|}\right)\right|=$$
$$=\sup_{|\xi|=1}|f(\xi)|=\|f\|.$$

Нетрудно оценить норму $\|f\|$ линейного оператора f через элементы его матрицы (41.34). Замечая, что квадрат длины вектора равен сумме квадратов его координат, применяя формулу (41.35) и неравенство Коши-Шварца (18.2), будем иметь

$$|f(x)|^2=\left|\sum_{i=1}^{m}\left(\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j\right)e_i\right|^2=$$
$$=\sum_{i=1}^{m}\left(\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j\right)^2\leqslant\sum_{i=1}^{m}\left(\sum_{j=1}^{n}a_{ij}^2\right)\left(\sum_{j=1}^{n}x_j^2\right)=$$
$$=\left(\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}^2\right)|x|^2.$$

Отсюда для каждого $x\neq 0$, $x\in R^n$:

$$\frac{|f(x)|}{|x|}\leqslant\sqrt{\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}^2}.$$

Поэтому в силу (41.44)

$$\|f\|=\sup_{x\in R^n,\ x\neq 0}\frac{|f(x)|}{|x|}\leqslant\sqrt{\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}^2}. \tag{41.45}$$

Тем самым еще раз, но уже «алгебраическим путем» доказано неравенство (41.40).

41.7. ДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫЕ ОТОБРАЖЕНИЯ

Перейдем теперь к определению дифференцируемых векторных отображений. Предварительно напомним, что функция n переменных $f: E \to R$, $E \subset R^n$ *), определенная в окрестности точки $x = (x_1, \ldots, x_n) \in E$ называется *дифференцируемой* в этой точке, если существуют такие постоянные $a_1, \ldots, a_n$ (они являются частными производными функции f в этой точке $a_i = \frac{\partial f}{\partial x_i}(x)$), что

$$f(x_1 + h_1, \ldots, x_n + h_n) - f(x_1, \ldots, x_n) = \\ = a_1 h_1 + \ldots + a_n h_n + o(h), \quad h \to 0, \qquad (41.46)$$

где $h = (h_1, \ldots, h_n)$. Для отображений из n-мерного пространства в m-мерное «o малое» определяется следующим образом: пусть U — окрестность точки $x_0 \in E$, $\alpha: U \to \boldsymbol{R}^m$; будем говорить, что $\alpha = o(x)$ при $x \to x_0$, если $|\alpha| = o(|x|)$, $x \to x_0$, т. е. если существует такая функция $\varepsilon: U \to \boldsymbol{R}$, что

$$|\alpha(x)| = \varepsilon(x)|x|, \qquad (41.47)$$

$$x \in U \text{ и } \lim_{x \to x_0} \varepsilon(x) = 0.$$

Само собой разумеется, что $|\alpha(x)|$ является длиной вектора в пространстве R^m, а $|x|$ — длиной вектора в пространстве R^n. Для выражений вида $o(x)$, являющихся векторами, сохраняются обычные правила действий с символом «o малое», например, $o(x) + o(x) = o(x)$ при $x \to x_0$ и т. п.

Линейное отображение (линейный функционал) $(h_1, \ldots, h_n) \mapsto a_1 h_1 + \ldots + a_n h_n$ в формуле (41.46) называется *дифференциалом функции* f в точке x. Обозначив его через $D(x)$, получим

$$D(x)(h) = a_1 h_1 + \ldots + a_n h_n.$$

Таким образом, определение дифференцируемости (41.46) можно представить в виде

$$f(x + h) = f(x) + D(x)(h) + o(h), \quad h \to 0.$$

Аналогично определяется и дифференцируемость отображения в общем случае.

Определение 8. *Пусть U — окрестность, в пространстве R^n, точки $x \in R^n$. Отображение $f: U \to R^m$ называется дифференцируемым в точке x, если существует такое линейное отображение (линейный оператор) $l: R^n \to R^m$, что*

$$f(x + h) = f(x) + l(h) + o(h), \quad h \to 0, \quad h \in R^n. \qquad (41.48)$$

*) Через $\boldsymbol{R}$, как всегда, обозначается множество всех действительных чисел.

Линейный оператор l называется дифференциалом отображения f в точке x и обозначается через $D(x)$ или более подробно, через $D_f(x)$.

Используя это обозначение, определение дифференцируемости (41.48) можно переписать в виде

$$f(x+h)=f(x)+D_f(x)(h)+o(h), \quad h\to 0. \tag{41.49}$$

Матрица дифференциала $D_f(x)$ (см. (41.34)) *называется производной отображения f в точке x и обозначается через $f'(x)$.*

Отметим, что из формулы (41.48) сразу следует, что отображение, дифференцируемое в точке x, непрерывно в ней:

$$\lim_{h\to 0} f(x+h)=f(x).$$

Теорема 3. *Если отображение $f: E\to R^m$, $E\subset R^n$, дифференцируемо в точке $x\in E$, то его дифференциал в этой точке определяется однозначно.*

Следствие. *Дифференциал линейного отображения совпадает с самим отображением.*

Доказательство теоремы. Пусть наряду с равенством (41.48) выполняется также равенство

$$f(x+h)=f(x)+l_1(h)+o(h), \quad h\to 0, \tag{41.50}$$

где $l_1: R^n\to R^m$, l_1 — линейный оператор. Вычитая одно из этих равенств из другого, получим

$$l(h)-l_1(h)=o(h) \text{ при } h\to 0,$$

т. е. существует такая функция $\varepsilon(h)$, определенная на некоторой окрестности V нуля пространства R^n, т. е. $\varepsilon: V\to \boldsymbol{R}$, что $\lim\limits_{h\to 0}\varepsilon(h)=0$ и для всех $h\in V$ имеет место

$$|l(h)-l_1(h)|=\varepsilon(h)|h|. \tag{41.51}$$

Возьмем теперь произвольное $k\in R^n$; тогда для всех достаточно малых t будем иметь $tk\in V$. Поэтому в (41.51) для таких t можно взять $h=tk$:

$$|l(tk)-l_1(tk)| = \varepsilon(tk)|tk|.$$

Поскольку $|tk|=|t||k|$ и отображения l и l_1 линейны, будем иметь

$$l(tk)-l_1(tk)=t[l(k)-l_1(k)],$$

а потому

$$|l(k)-l_1(k)|=\varepsilon(tk)|k|. \tag{41.52}$$

Но $\lim\limits_{t\to 0} tk=0$, следовательно, в силу свойства функции ε, имеем также $\lim\limits_{t\to 0}\varepsilon(tk)=0$. Переходя к пределу при $t\to 0$ в (41.52), получим $|l(k)-l_1(k)|=0$, т. е. для любого $k\in R^n$

$$l(k)=l_1(k).$$

Это и означает, что $l=l_1$. □

Доказательство следствия. Пусть $f: R^n\to R^m$ — линейный оператор. Тогда в силу линейности для любых $x\in R^n$ и $h\in R^n$

$$f(x+h)=f(x)+f(h),$$

т. е. равенство (41.48) выполняется при $l=f$ и $o(h)\equiv 0$. В силу единственности дифференциала $D_f(x)=f$. □

Теорема 4 (линейность дифференциала). *Если отображения $f: E\to R^m$ и $g: E\to R^m$, $E\subset R^n$, дифференцируемы в точке $x\in E$, то при любых числах λ и μ линейная комбинация $\lambda f+\mu g$ также дифференцируема в точке x и*

$$D_{\lambda f+\mu g}(x)=\lambda D_f(x)+\mu D_g(x).$$

Доказательство. В силу дифференцируемости отображений f и g в точке x имеем (см. (41.49)):

$$f(x+h)=f(x)+D_f(x)(h)+o(h),\quad h\to 0,$$
$$g(x+h)=g(x)+D_g(x)(h)+o(h),\quad h\to 0;$$

отсюда

$$(\lambda f(x+h)+\mu g(x+h)=$$
$$=[\lambda f(x)+\mu g(x)]+[\lambda D_f(x)+\mu D_g(x)](h)+o(h),\ h\to 0.$$

Поскольку $\lambda D_f(x)+\mu D_g(x)$ является линейным отображением (см. п. 41.6), то, в силу определения 8, линейное отображение $\lambda D_f(x)+\mu D_g(x)$ является дифференциалом отображения $\lambda f+\mu g$. □

Теорема 5. *Пусть $E\subset R^n$, $D\subset R^m$, $f: E\to D$, $g: D\to R^s$, причем отображение f дифференцируемо в точке $x\in E$, а g — в точке $f(x)$. Тогда композиция $g\circ f$ дифференцируема в точке x и ее дифференциал в этой точке равен композиции дифференциалов отображений f и g:*

$$D_{g\circ f}(x)=D_g(f(x))\circ D_f(x). \tag{41.53}$$

Следствие. *Если выполнены условия теоремы, то производная композиции отображений равна произведению производных:*

$$(g\circ f)'(x)=g'(f(x))f'(x). \tag{41.54}$$

Как видно из приведенных формул, благодаря удачному выбору определений и символики, в формулировках теорем имеет место полная аналогия с одномерным случаем.

Доказательство. В силу дифференцируемости отображения f имеем

$$(g\circ f)(x+h)=g(f(x+h))=$$
$$=g(f(x)+D_f(x)(h)+o(h)),\quad h\to 0. \tag{41.55}$$

Таким образом, аргумент функции g в точке $y=f(x)$ получил приращение

$$k=D_f(x)(h)+o(h). \tag{41.56}$$

Поэтому из (41.55) в силу дифференцируемости функции g имеем

$$(g\circ f)(x+h)=g(y+k)=g(y)+D_g(y)(k)+o(k),\quad k\to 0. \tag{41.57}$$

Поскольку (см. неравенство (41.42))

$$|D_f(x)(h)|\leqslant\|D_f(x)\|\,|h|, \tag{41.58}$$

где норма $\|D_f(x)\|$ линейного оператора $D_f(x)$ является неотрицательным числом, то для функции $k=k(h)$, определенной равенством (41.56) получим

$$\lim_{h\to 0} k=0. \tag{41.59}$$

Более того, справедлива оценка

$$|k|\leqslant\|D_f(x)\|\,|h|+|o(h)|,\quad h\to 0,$$

а так как при достаточно малых h имеет место неравенство $|o(h)|<|h|$, то для таких h справедлива и оценка

$$|k|\leqslant(\|D_f(x)\|+1)\,|h|. \tag{41.60}$$

Далее, из определения $o(k)$ (см. (41.47)) явствует, что существует такая функция $\varepsilon(k)$, что

$$\lim_{k\to 0}\varepsilon(k)=0 \tag{41.61}$$

и $|o(k)|=\varepsilon(k)|k|$. Поэтому в силу (41.60) для указанных достаточно малых h выполняется неравенство

$$|o(k)|=\varepsilon(k)\,|k|\leqslant\varepsilon(k)(\|D_f(x)\|+1)\,|h|. \tag{41.62}$$

А поскольку из (41.59) и (41.61) вытекает, что $\lim\limits_{h\to 0}\varepsilon(k)=0$ и следовательно,

$$\varepsilon(k)(\|D_f(x)\|+1)\,|h|=o(h)\ \text{при}\ h\to 0,$$

то из (41.62) имеем $|o(k)|\leqslant o(h)$, $h\to 0$, откуда

$$o(k)=o(h)\ \text{при}\ h\to 0.$$

Это означает, что формулу (41.57) можно переписать в виде

$$(g\circ f)(x+h)=g(y)+D_g(y)(k)+o(h),\quad h\to 0, \tag{41.63}$$

где k задается по формуле (41.56).

Рассмотрим теперь среднее слагаемое в правой части равенства (41.63). В силу линейности отображения $D_g(y)$ имеем

$$D_g(y)(k)=D_g(y)(D_f(x)(h)+o(h))=$$
$$=D_g(y)(D_f(x)(h))+D_g(y)\,o(h),\quad h\to 0. \qquad (41.64)$$

Вследствие неравенства (41.42) будем иметь $|D_g(y)\,o(h)|\leqslant \leqslant \|D_g(y)\|\,|o(h)|$, а поэтому

$$D_g(y)\,o(h)=o(h),\quad h\to 0;$$

следовательно, из (41.64) получим:

$$D_g(y)(k)=D_g(y)(D_f(x)(h))+o(h)=$$
$$=(D_g(y)\circ D_f(x))(h)+o(h),\quad h\to 0.$$

Подставляя полученное для $D_g(y)$ выражение в (41.63) и принимая во внимание, что $y=f(x)$, будем окончательно иметь

$$(g\circ f)(x+h)=g(f(x))+(D_g(f(x))\circ D_f(x))(h)+o(h),\quad h\to 0.$$

Поскольку композиция линейных операторов является линейным оператором, то в силу единственности дифференциала оператор $D_g(f(x))\circ D_f(x)$ является дифференциалом композиции $f\circ g$, т. е. формула (41.53) доказана.

Формула (41.54) сразу следует из нее, поскольку при композиции линейных операторов их матрицы перемножаются. □

Теорема 6. *Отображение $f=(f_1, \ldots, f_m): E\to R^m$, $E\subset R^n$, дифференцируемо в точке $x\in E$ в том и только том случае, когда все его координатные функции $f_i: E\to R$, $i=1, 2, \ldots, m$, дифференцируемы в этой точке.* В этом случае элементы a_{ij} *матрицы дифференциала $D_f(x)$ являются соответствующими частными производными координатных функций:*

$$a_{ij}=\frac{\partial f_i(x)}{\partial x_j},\quad i=1, 2, \ldots, m,\quad j=1, 2, \ldots, n.$$

Иначе говоря, производная $f'(x)$ является матрицей Якоби системы функции f_i (см. определение 2 п. 41.3),

$$f'(x)=\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1(x)}{\partial x_1} \cdots \frac{\partial f_1(x)}{\partial x_n} \\ \cdots\cdots\cdots \\ \frac{\partial f_m(x)}{\partial x_1} \cdots \frac{\partial f_m(x)}{\partial x_n}\end{pmatrix} \qquad (41.65)$$

и называется также *матрицей Якоби отображения* f в точке x.

Доказательство. 1. Координатные функции $f_i=\pi_i\circ f$ (см. (41.37)) являются композицией двух дифференцируемых отображений: отображения f, которое дифференцируемо в точке x по условию, и проекции π_i (см. (41.36)), которая, как всякий линейный оператор $R^m\to R$ дифференцируема на всем пространстве R^m. Следовательно, согласно теореме 5, функции f_i, $i = 1, 2, \ldots, m$, дифференцируемы в точке x.

2. Пусть все координатные функции $f_i = \pi_i \circ f$ отображения дифференцируемы в точке x. В силу (41.46) это означает, что существуют такие постоянные a_{ij}, $i = 1, 2, \ldots, m$, $j = 1, 2, \ldots, n$, что

$$f_i(x+h) = f_i(x) + a_{i1}h_1 + \ldots + a_{in}h_n + o(h),$$
$$h \to 0, \quad i = 1, 2, \ldots, m. \tag{41.66}$$

Отсюда, как известно (см. 20.2), следует, что коэффициенты a_{ij} при приращениях h_j аргументов x_j являются соответствующими частными производными функций f_i:

$$a_{ij} = \frac{\partial f_i(x)}{\partial x_j}, \quad i = 1, 2, \ldots, m, \quad j = 1, 2, \ldots, n. \tag{41.67}$$

Обозначим через $l: R^n \to R^m$ линейный оператор с матрицей (a_{ij}). Поскольку $(o(h), \ldots, o(h)) = o(h)$ *), то равенства (41.66) можно записать в виде

$$f(x+h) = f(x) + l(h) + o(h), \quad h \to 0.$$

Это и означает дифференцируемость отображения f, причем из (41.67) следует справедливость формулы (41.65). ☐

З а м е ч а н и е 1. В силу формул (41.54) и (41.65), следствие из теоремы 5 означает, что матрица Якоби композиции отображений f и g равна произведению матриц Якоби этих отображений.

Это, впрочем, непосредственно следует и из формулы дифференцирования сложной функции: если $z_k = g_k(y_1, \ldots, y_m)$, $k = 1, 2, \ldots, s$, а $y_i = f_i(x_1, \ldots, x_n)$, $i = 1, 2, \ldots, m$, то (см. (20.26))

$$\frac{\partial z_k}{\partial x_j} = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial z_k}{\partial y_i}\frac{\partial y_i}{\partial x_j}, \quad k = 1, 2, \ldots, s, \quad j = 1, 2, \ldots, n,$$

что согласно правилу умножения матриц (см. п. 41.6) и означает, что матрица $\left(\frac{\partial z_k}{\partial x_j}\right)$ является произведением матриц $\left(\frac{\partial z_k}{\partial y_i}\right)$ и $\left(\frac{\partial y_i}{\partial x_j}\right)$,

$$\left(\frac{\partial z_k}{\partial x_j}\right) = \left(\frac{\partial z_k}{\partial y_i}\right)\left(\frac{\partial y_i}{\partial x_j}\right).$$

Определение 9. *В случае $m = n$ определитель*

$$\det\left(\frac{\partial f_i(x)}{\partial x_j}\right)$$

*) Запись $(o(h), \ldots, o(h)) = o(h)$ означает, что вектор, координаты которого являются бесконечно малыми более высокого порядка, чем h, сам является бесконечно малой более высокого порядка, чем h при $h \to 0$. Совпадение в данном случае обозначений вектора и его координат связано с тем, что мы, чтобы не усложнять символики, выбрали для n-мерного вектора обозначение x, в котором не отражена его размерность. Она делается ясной, только если он записан с помощью координат $x = (x_1, \ldots, x_n)$.

матрицы Якоби (41.65) *называется определителем Якоби или якобианом отображения* $f: E \to R^n$, $E \subset R^n$, *в точке* $x \in E$ *и обозначается* (см. п. 41.3)

$$\frac{\partial (f_1, \ldots, f_n)}{\partial (x_1, \ldots, x_n)} \text{ или } \frac{D (f_1, \ldots, f_n)}{D (x_1, \ldots, x_n)}.$$

Замечание 2. Из алгебры известно, что при умножении квадратных матриц их определители перемножаются; поэтому при выполнении условий теоремы 5 в случае $m = n = s$ якобиан композиции отображений f и g равен произведению якобианов отображений f и g

$$\frac{\partial (z_1, \ldots, z_n)}{\partial (x_1, \ldots, x_n)} = \frac{\partial (z_1, \ldots, z_n)}{\partial (y_1, \ldots, y_n)} \frac{\partial (y_1, \ldots, y_n)}{\partial (x_1, \ldots, x_n)}. \qquad (41.68)$$

Действительно,

$$\frac{\partial (z_1, \ldots, z_n)}{\partial (x_1, \ldots, x_n)} = \det \left(\frac{\partial z_k}{\partial x_j}\right) = \det \left(\frac{\partial z_k}{\partial y_i}\right) \left(\frac{\partial y_i}{\partial x_j}\right) =$$
$$= \det \left(\frac{\partial z_k}{\partial y_i}\right) \det \left(\frac{\partial y_i}{\partial x_j}\right) = \frac{\partial (z_1, \ldots, z_n)}{\partial (y_1, \ldots, y_n)} \frac{\partial (y_1, \ldots, y_n)}{\partial (x_1, \ldots, x_n)}.$$

Замечание 3. Пусть $E \subset R^n$ и $\mathrm{Id}: E \to E$ — тождественное отображение множества E на себя. В координатной форме оно записывается в виде условия равенства координат точек образа и прообраза при этом отображении, т. е. координатные функции имеют вид

$$f_i (x) = x_i, \quad i = 1, 2, \ldots, n, \quad (x_1, \ldots, x_n) \in E.$$

Если $x^{(0)}$ — внутренняя точка множества E, то эти функции можно дифференцировать в этой точке, и поскольку $\frac{\partial x_i}{\partial x_j} = 0$ при $i \neq j$ и $\frac{\partial x_i}{\partial x_i} = 1$, то матрица Якоби тождественного отображения является единичной матрицей

$$E = \begin{pmatrix} 1 \ldots 0 \\ \ldots \\ 0 \ldots 1 \end{pmatrix}.$$

Пусть теперь $U \subset R^n$, $V \subset R^n$ и $f: U \to V$ — взаимно однозначное (инъективное) отображение, а $f^{-1}: f(U) \to U$ — обратное ему. Тогда для любой точки $x \in U$ имеем $f^{-1}(f(x)) = x$, т. е. композиция $f^{-1} \circ f$ является тождественным отображением.

Пусть отображение f дифференцируемо в точке $x_0 \in U$ (следовательно, x_0 — внутренняя точка множества U, ибо только для таких точек определено понятие дифференцируемости), а обратное отображение f^{-1} дифференцируемо в точке $f(x_0)$. Поскольку $f^{-1} \circ f$ — тождественное отображение, то в силу формулы (41.54) имеем

$$(f^{-1})' f' = (f^{-1} \circ f)' = (\mathrm{Id})' = E. \qquad (41.69)$$

Перейдя от этого равенства матриц к их якобианам, получим

$$\det (f^{-1})' \det f' = 1, \tag{41.70}$$

ибо $\det E = 1$.

Если отображение f задано координатными функциями (41.30), то формулу (41.70) можно переписать в виде

$$\frac{\partial (x_1, \ldots, x_n)}{\partial (y_1, \ldots, y_n)} \frac{\partial (y_1, \ldots, y_n)}{\partial (x_1, \ldots, x_n)} = 1. \tag{41.71}$$

Из этой формулы следует, что при сделанных предположениях как якобиан отображения f в точке x, так и якобиан обратного отображения f^{-1} в точке $f(x)$ не обращаются в ноль.

Перепишем формулу (41.71) еще в виде

$$\frac{\partial (x_1, \ldots, x_n)}{\partial (y_1, \ldots, y_n)} = \frac{1}{\dfrac{\partial (y_1, \ldots, y_n)}{\partial (x_1, \ldots, x_n)}}. \tag{41.72}$$

Эта формула является очевидным обобщением формулы для производной обратной функции одного переменного: $\dfrac{dx}{dy} = \dfrac{1}{\dfrac{dy}{dx}}$.

В заключение сформулируем два полезных определения.

Определение 10. *Отображение $f: E \to R^m$, $E \subset R^n$, дифференцируемое в каждой точке $x \in E$ называется дифференцируемым отображением множества E.*

Очевидно, если отображение дифференцируемо на множестве E, то какова бы ни была точка $x \in E$, согласно определению 8 отображение f определено в некоторой ее окрестности, т. е. E — открытое множество.

Согласно теореме 6 отображение $f = (f_1, \ldots, f_n)$ дифференцируемо на множестве E тогда и только тогда, когда на этом множестве дифференцируемы все его координатные функции $f_1, \ldots, f_n$. Если все координатные функции непрерывно дифференцируемы на E, т. е. все их первые частные производные непрерывны на E, то отображение f называется *непрерывно дифференцируемым отображением множества E*.

Определение 11. *Гомеоморфное отображение $f: G \to D$, где G и D — открытые множества пространства R^n называется диффеоморфным отображением или диффеоморфизмом, если как оно само, так и обратное ему отображение $f^{-1}: D \to G$, дифференцируемы.*

41.8. ОТОБРАЖЕНИЯ С НЕРАВНЫМ НУЛЮ ЯКОБИАНОМ. ПРИНЦИП СОХРАНЕНИЯ ОБЛАСТИ

Прежде всего рассмотрим вопрос о существовании отображения, обратного данному. Как мы знаем, в случае $n = 1$ для непрерывно дифференцируемой на некотором отрезке функции условие необращения в ноль ее производной (которое влечет за собой ее строгую монотонность) является достаточным для существования обратной ей однозначной непрерывно дифференцируемой функции. В случае же произвольного n дело существенно осложняется: соответствующие точечные условия, налагаемые на дифференциальные свойства отображения позволяют утверждать лишь что локально, т. е. в окрестности точки, существует обратное отображение. Более точно, справедлива следующая теорема.

Теорема 7. *Пусть*

$$y=f(x)=\begin{cases} y_1=f_1(x_1, \ldots, x_n), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_n=f_n(x_1, \ldots, x_n) \end{cases} \tag{41.73}$$

— непрерывно дифференцируемое отображение открытого множества $G \subset R^n$ в пространство R^n. Если якобиан этого отображения не обращается в ноль в точке $x^{(0)} \in G$, то существуют такие окрестности U_x и U_y соответственно точек $x^{(0)}$ и $y^{(0)}=f(x^{(0)})$, что $f(x)$, $x \in U_x$, является взаимно однозначным отображением окрестности U_x на окрестность U_y, а обратное ему отображение непрерывно дифференцируемо на множестве U_y.

Следствие. *Пусть f — непрерывно дифференцируемое отображение открытого множества $G \subset R^n$ в пространство R^n. Если якобиан отображения f не равен нулю на G, то образ множества G при этом отображении также является открытым множеством.*

Доказательство. Рассмотрим функции

$$F_i(x, y)=f_i(x_1, \ldots, x_n)-y_i, \quad i=1, 2, \ldots, n.$$

Они определены для всех $y=(y_1, \ldots, y_n) \in R^n_y$ и всех $x=(x_1, \ldots$ $\ldots, x_n) \in G \subset R^n_x$. С их помощью система равенств (41.73), задающих отображение f, перепишется в виде

$$F_i(x, y)=0, \quad i=1, 2, \ldots, n. \tag{41.74}$$

При этом функции $F_i(x, y)$ определены и непрерывно дифференцируемы в некоторой окрестности точки $(x^{(0)}, y^{(0)})$ (за такую окрестность можно взять, например, $G \times R^n_y$),

$$F_i(x^{(0)}, y^{(0)})=0 \text{ и } \left.\frac{\partial(F_1, \ldots, F_n)}{\partial(x_1, \ldots, x_n)}\right|_{(x^{(0)}, y^{(0)})}=\left.\frac{\partial(f_1, \ldots, f_n)}{\partial(x_1, \ldots, x_n)}\right|_{x^{(0)}} \neq 0.$$

Таким образом, выполнены все условия теоремы 2 настоящего параграфа о разрешимости системы уравнений.

В силу этой теоремы уравнения (41.74), или, что то же, система (41.73), могут быть разрешены, и притом единственным образом, относительно переменных $x_1, \ldots, x_n$ в некоторой окрестности точки $(x^{(0)}, y^{(0)})$. Более подробно это означает, что существуют такие окрестности U_x^* и U_y, соответственно точек $x^{(0)}$ и $y^{(0)}$,

$x^{(0)} \in U_x^*$, $y^{(0)} \in U_y$ и такое единственное отображение

$$x = g(y) = \begin{cases} x_1 = g_1(y_1, \ldots, y_n), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n = g_n(y_1, \ldots, y_n), \end{cases} \tag{41.75}$$

отображающее окрестность U_y в окрестность U_x^*, что для всех $y \in U_y$ имеет место тождество

$$f[g(y)] = y.$$

Иначе говоря, для каждой точки $y \in U_y$ существует и притом единственная точка $x = g(y) \in U_x^*$, переходящая при отображении f в точку y. Тем самым $x \in f^{-1}(y) \cap U_x^*$, $g(y)$ является отображением, однозначным, непрерывно дифференцируемым и обратным к f на $U_y : g = f^{-1}$.

Положим $U_x = U_x^* \cap f^{-1}(U_y)$. Тогда U_x — открытое множество, ибо оно является пересечением двух открытых множеств U_x^* и $f^{-1}(U_y)$ (открытость множества $f^{-1}(U_y)$ следует из того, что оно является прообразом открытого множества U_y при непрерывном отображении f, см. лемму 2 в п. 41.4). Очевидно, что U_x отображается взаимно однозначно на U_y, а поскольку $x^{(0)} \in U_x^*$ и $f(x^{(0)}) = y^{(0)} \in U_y$, то $x^{(0)} \in U_x$, т. е. U_x — искомая окрестность точки $x^{(0)}$. $\square$

Замечание 1. Окрестности U_x и U_y, фигурирующие в условиях теоремы 4, обладают еще тем дополнительным свойством, что якобиан отображения f окрестности U_x на окрестность U_y не обращается в ноль на окрестности U_x, а якобиан обратного отображения f^{-1} не обращается в нуль на окрестности U_y. Это сразу следует из формулы (41.71). Действительно, в силу того что отображение f взаимно однозначно переводит окрестность U_x в окрестность U_y и того, что f и f^{-1} непрерывно дифференцируемы, можно применить указанную формулу к отображению f, рассматриваемому на множестве U_x. Согласно этой формуле, произведение якобианов отображений f и f^{-1} равно единице и, следовательно, каждый из них не равен нулю.

Доказательство следствия. Пусть $y = f(x)$ — непрерывно дифференцируемое отображение открытого множества G в пространство R^n, а $y^{(0)}$ — произвольная точка множества $f(G)$. Выберем какую-либо точку $x^{(0)}$ в прообразе точки $y^{(0)} : x^{(0)} \in f^{-1}(y^{(0)})$, следовательно, $f(x^{(0)}) = y^{(0)}$. В силу теоремы 4 существуют такие окрестности $U_x \subset G$ и U_y соответственно точек $x^{(0)}$ и $y^{(0)}$, что $f(U_x) = U_y$. Следовательно, $U_y \subset f(G)$. Иначе говоря, для всякой точки $y^{(0)} \in f(G)$ существует ее окрестность, содержащаяся во множестве $f(G)$. Таким образом, любая точка множества $f(G)$ является внутренней для этого множества, что и означает, что $f(G)$ — открытое множество. $\square$

Замечание 2. Если при некотором отображении f для точек $x^{(0)}$ и $y^{(0)} = f(x^{(0)})$ существуют соответственно окрестности U_x и U_y, взаимно однозначно отображающиеся им друг на друга, то говорят, что *отображение* f *локально взаимно однозначно в точке* $x^{(0)}$.

Если при этом отображение f непрерывно на U_x, а f^{-1} непрерывно на U_y, то f называется *локально гомеоморфным* в точке $x^{(0)}$ *отображением* или *локальным гомеоморфизмом*. Если, наконец, указанный локальный гомеоморфизм является диффеоморфизмом, то рассматриваемое отображение называется *локально диффеоморфным* в данной точке (определения гомеоморфизма и диффеоморфизма см. в п. 41.4 и п. 41.7).

Употребляя эту терминологию, можно сказать, что отображение f, рассматриваемое в теореме 4, в каждой точке, в которой его якобиан не равен нулю, является локально диффеоморфным отображением.

Теорема 8 (принцип сохранения области). *Образ n-мерной области в n-мерном пространстве при непрерывно дифференцируемом отображении с якобианом, не обращающимся в нуль, является областью.*

Доказательство. Пусть G — область, $G \subset R^n$ и $y = f(x)$ — отображение G в R^n, удовлетворяющее условиям теоремы. Согласно следствию теоремы 4, множество $f(G)$ открыто, а по лемме 7 п. 41.4 линейно связно. Поэтому, если G — область, то при выполнении условий теоремы множество $f(G)$ также является областью. $\square$

Упражнение 12. Построить пример непрерывно дифференцируемого отображения некоторой плоской области, якобиан которого нигде не обращается в нуль и которое не взаимно однозначно.

41.9. НЕЯВНЫЕ ФУНКЦИИ, ОПРЕДЕЛЯЕМЫЕ УРАВНЕНИЕМ, В КОТОРОМ НАРУШАЮТСЯ УСЛОВИЯ ЕДИНСТВЕННОСТИ. ОСОБЫЕ ТОЧКИ ПЛОСКИХ КРИВЫХ

Мы уже знаем, что если координаты некоторой точки $x^{(0)} = (x_1^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)})$ удовлетворяют уравнению

$$F(x_1, \ldots, x_n) = 0 \qquad (41.76)$$

и в этой точке производная $\dfrac{\partial F}{\partial x_i}$ не равна нулю, то при соответствующих условиях, налагаемых на непрерывность самой функции F и указанной производной, уравнение (41.76) разрешимо в некоторой окрестности точки $x^{(0)}$ относительно x_i и решение является непрерывно дифференцируемой функцией остальных координат.

Естественно, возникает вопрос: а что будет в случае, когда в точке $x^{(0)}$ частные производные по всем аргументам обращаются в нуль — определяет в этом случае уравнение (41.76) какие-либо функции или нет? Остановимся на этом вопросе, однако ввиду его сложности ограничимся рассмотрением двумерного случая.

Итак, будем рассматривать уравнение

$$F(x, y) = 0, \tag{41.77}$$

где функция F определена и непрерывно дифференцируема в некоторой окрестности точки (x_0, y_0), такой, что

$$F(x_0, y_0) = 0. \tag{41.78}$$

Пусть

$$F_x(x_0, y_0) = F_y(x_0, y_0) = 0. \tag{41.79}$$

Покажем, что и при выполнении этих условий уравнение (41.77) иногда может быть разрешено в окрестности точки (x_0, y_0) относительно одной из переменных, так что получится непрерывно дифференцируемая функция; однако это можно сделать, вообще говоря, не единственным образом. Таким образом, условие

$$F_x^2(x_0, y_0) + F_y^2(x_0, y_0) \neq 0, \tag{41.80}$$

которое в нашем случае (см. (41.79)) не выполняется и которое позволяет применить теорему 1 о неявных функциях к одному из переменных, естественно назвать условием однозначной разрешимости уравнения (41.77).

Определение 12. *Точка* (x_0, y_0), *координаты которой удовлетворяют условиям* (41.78) *и* (41.79), *называется особой точкой уравнения* (41.77).

Особая точка называется изолированной, если существует ее окрестность, в которой она является единственной особой точкой.

Геометрически это означает, что если уравнение (41.77) является неявным представлением какой-либо кривой, то в окрестности особых точек этого уравнения кривая, вообще говоря, не является графиком некоторой гладкой однозначной функции (как это имеет место при выполнении условия (41.80)); здесь возможны разные особенности, которые мы сейчас и рассмотрим.

Введем для краткости записи обозначения

$$F_{xx}(x_0, y_0) = F_{xx}^0,\quad F_{xy}(x_0, y_0) = F_{xy}^0,\quad F_{yy}(x_0, y_0) = F_{yy}^0.$$

Теорема 9. *Пусть функция* $F(x, y)$ *определена и дважды непрерывно дифференцируема в некоторой окрестности изолированной особой точки* (x_0, y_0) *уравнения* (41.77) *и пусть*

$$F_{xx}^0 F_{yy}^0 - F_{xy}^{0^2} \neq 0.$$

Тогда, если

$$F_{xx}^0 F_{yy}^0 - F_{xy}^{0^2} > 0, \tag{41.81}$$

то (x_0, y_0) *является изолированным решением уравнения* (41.77), *т. е. существует окрестность точки* (x_0, y_0) *никакая точка ко-*

торой, кроме (x_0, y_0), *не удовлетворяет уравнению* (41.77); *если же*

$$F^0_{xx}F^0_{yy} - F^{0^2}_{xy} < 0, \tag{41.82}$$

то уравнение (41.77) *разрешимо в некоторой окрестности точки* (x_0, y_0), *но не однозначно: имеются две различные дифференцируемые функции, удовлетворяющие уравнению* (41.77). *Поэтому* (x_0, y_0) *называется в этом случае двойной точкой.*

Например, если

$$F^0_{yy} \neq 0, \tag{41.83}$$

то существуют две дифференцируемые функции $f_1(x)$ и $f_2(x)$, определенные в некоторой окрестности точки x_0 и такие, что в этой окрестности $F(x, f_1(x)) = 0$, $F(x, f_2(x)) = 0$, причем $f_1(x_0) = f_2(x_0) = y_0$, а производные функции $f_1(x)$ и $f_2(x)$ в точке x_0 являются различными корнями уравнения

$$F^0_{xx} + 2F^0_{xy}k + F^0_{yy}k^2 = 0^{*)}. \tag{41.84}$$

Доказательство. Пусть выполнено условие (41.81). Вместе с (41.79) оно достаточно для наличия строгого экстремума функции $F(x, y)$ в точке (x_0, y_0) (см. теорему 3 в п. 40.2). Поэтому существует окрестность U точки (x_0, y_0), такая, что при $(x, y) \in U$ и $(x, y) \neq (x_0, y_0)$ либо всегда $F(x, y) > F(x_0, y_0)$, либо всегда $F(x, y) < F(x_0, y_0)$, и так как $F(x_0, y_0) = 0$, то $F(x, y) \neq 0$ для всех $(x, y) \in U$, $(x, y) \neq (x_0, y_0)$, т. е. (x_0, y_0) является изолированным решением уравнения (41.77)**).

Пусть теперь выполнено условие (41.82). Разложим функцию $F(x, y)$ по формуле Тейлора в окрестности точки (x_0, y_0) до слагаемых второго порядка; тогда, приняв во внимание условия (41.78) и (41.79), получим:

$$F(x, y) = \frac{1}{2}\left[F^0_{xx}(x-x_0)^2 + 2F^0_{xy}(x-x_0)(y-y_0) + F^0_{yy}(y-y_0)^2\right] + o(r^2), \tag{41.85}$$

где $r = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}$. Положим $x - x_0 = r\cos\varphi$, $y - y_0 = r\sin\varphi$. Очевидно, (r, φ) — полярные координаты точки (x, y), причем в качестве начала полярной системы координат принята точка (x_0, y_0).

---

*) Корни этого уравнения вещественны и различны в силу условий (41.82) и (41.83).

**) В доказательстве этого утверждения используется не то, что (x_0, y_0) является изолированной особой точкой, а лишь то, что она является просто особой точкой, в которой выполняется условие (41.81).

В этих координатах

$$F(x, y)=\frac{r^2}{2}(F^0_{xx}\cos^2\varphi+2F^0_{xy}\cos\varphi\sin\varphi+F^0_{yy}\sin^2\varphi)+o(r^2)=$$
$$=\frac{r^2}{2}P(\varphi)+o(r^2), \qquad (41.86)$$

где

$$P(\varphi)=F^0_{xx}\cos^2\varphi+2F^0_{xy}\cos\varphi\sin\varphi+F^0_{yy}\sin^2\varphi, \qquad (41.87)$$

или при $\varphi\neq\frac{\pi}{2}(2k+1)$, $k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots,$

$$P(\varphi)=\cos^2\varphi\,(F^0_{xx}+F^0_{xy}\operatorname{tg}\varphi+F^0_{yy}\operatorname{tg}^2\varphi). \qquad (41.88)$$

Предположим теперь, что выполнено также и условие (41.83). Пусть k_1 и k_2 — корни уравнения (41.84) и пусть $\varphi_1=\operatorname{arctg}k_1$ и $\varphi_2=\operatorname{arctg}k_2$. Тогда

$$\varphi_1\neq\pm\pi/2, \qquad \varphi_2\neq\pm\pi/2, \qquad (41.89)$$

и из (41.88) следует, что

$$P(\varphi)=\cos^2\varphi\,(\operatorname{tg}\varphi-\operatorname{tg}\varphi_1)(\operatorname{tg}\varphi-\operatorname{tg}\varphi_2). \qquad (41.90)$$

Из формулы (41.90) видно, что функция $P(\varphi)$ при $\varphi\neq\neq\frac{\pi}{2}(2k+1)$, $k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ обращается в ноль только для $\varphi=\varphi_1+k\pi$ и $\varphi=\varphi_2+k\pi$, $k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, причем при переходе аргумента через эти значения она меняет знак. Нам будет удобно интерпретировать $P(\varphi)$ как функцию точки окружности C с центром в точке (x_0, y_0) и радиуса, равного 1 (такой радиус выбирается для простоты, чтобы длины дуг совпадали с углами φ).

Пусть $\varepsilon>0$. Обозначим через $U_1=U_1(\varepsilon)$ открытый угол, определяемый неравенством $\varphi_1-\varepsilon<\varphi<\varphi_1+\varepsilon$, т. е.

$$U_1=\{(r, \varphi):\varphi_1-\varepsilon<\varphi<\varphi_1+\varepsilon\},$$

соответственно положим

$$U_2=\{(r, \varphi):\varphi_2-\varepsilon<\varphi<\varphi_2+\varepsilon\};$$

при этом выберем $\varepsilon>0$ столь малым, чтобы U_1 и U_2 не пересекались и не содержали в себе полуоси ординат, а значит, и вообще вертикальных полупрямых (последнее всегда можно выполнить вследствие условий (41.89)).

Пусть U_1^* и U_2^* — углы, центрально симметричные с U_1 и U_2 относительно точки (x_0, y_0):

$$U_1^*=\{(r, \varphi):\varphi_1+\pi-\varepsilon<\varphi<\varphi_1+\pi+\varepsilon\},$$
$$U_2^*=\{(r, \varphi):\varphi_2+\pi-\varepsilon<\varphi<\varphi_2+\pi+\varepsilon\}.$$

В силу выбора числа ε множества U_1, U_2, U_1^* и U_2^* попарно не пересекаются (рис. 154).

Рассмотрим теперь $P(\varphi)$ как функцию точки вышеуказанной окружности C. Точку окружности C, которой соответствует полярный угол φ, будем для простоты также обозначать через φ. Удалим из указанной окружности интервалы с центрами в точках φ_1, φ_2, $\varphi_1+\pi$ и $\varphi_2+\pi$ длины 2ε*); в силу выбора $\varepsilon>0$ эти интервалы не имеют общих точек. Оставшееся множество, которое обозначим через B, является ограниченным и замкнутым, а следовательно, компактом. На B функция $P(\varphi)$ непрерывна и не обращается в нуль, а поэтому

$$\inf_{\varphi \in B} |P(\varphi)| = \mu > 0. \tag{41.91}$$

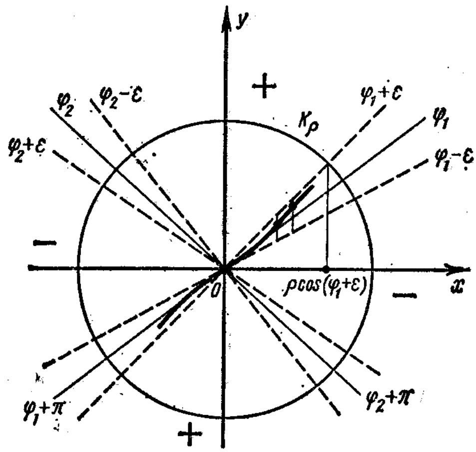


Рис. 154

Обозначим через K_ρ замкнутый круг с центром в точке (x_0, y_0) и радиусом ρ:

$$K_\rho = \{(r, \varphi) : 0 \leqslant r \leqslant \rho\},$$

а через L_ρ обозначим множество, которое получается вычитанием (в теоретико-множественном смысле, см. п. 1.1) множеств U_1, U_2, U_1^* и U_2^* из круга K_ρ. Очевидно, что в силу (41.91)

$$\inf_{(r, \varphi) \in L_\rho} |P(\varphi)| = \mu > 0.$$

Теперь, замечая, что из (41.86) следует

$$F(x, y) = \frac{r^2}{2}[P(\varphi) + \alpha(r, \varphi)], \tag{41.92}$$

где $\lim\limits_{r \to 0} \alpha(r, \varphi) = 0$, выберем $\rho > 0$ так, чтобы при $r \leqslant \rho$ выполнялось неравенство

$$|\alpha(r, \varphi)| < \mu. \tag{41.93}$$

Тогда из (41.92) следует, что для всех точек $(r, \varphi) \in L_\rho$ выражение, стоящее в правой части формулы (41.92), имеет тот же знак, что и $P(\varphi)$.

*) Интервалом длины 2ε на окружности с центром в точке, полярный угол которой равен φ_0, называется множество ее точек, полярные углы φ которых удовлетворяют неравенству $\varphi_0 - \varepsilon < \varphi < \varphi_0 + \varepsilon$.

Множество L_ρ состоит из четырех замкнутых секторов (см. рис. 154), на каждом из которых, за вычетом их центра, функция $P(\varphi)$, а значит, в силу выбора ρ, и функция $F(x, y)$ принимают значения одного и того же знака, а на соседних секторах — разных.

Рассмотрим теперь угол $U_1 = U_1(\varepsilon)$. Пусть для определенности $0 \leqslant \varphi_1 < \pi/2$. Пересечение замыкания $\overline{U}_1$ угла U_1 с вертикальной прямой $x = x^*$, $x_0 < x^* \leqslant x_0 + \rho\cos(\varphi_1 + \varepsilon)$, представляет собой отрезок, на верхнем и нижнем концах которого функция $F(x^*, y)$ принимает значения разного знака. Функция $F(x^*, y)$, рассматриваемая как функция одного переменного y при фиксированном x^*, будучи непрерывной на указанном отрезке, обращается в некоторой его точке y^* в нуль, т. е. для каждого x^*, где $x_0 < x^* \leqslant x_0 + \rho\cos(\varphi_1 + \varepsilon)$, существует по крайней мере одна точка y^*, такая, что

$$F(x^*, y^*) = 0, \quad (x^*, y^*) \in U_1(\varepsilon) \cap K_\rho. \tag{41.94}$$

Определим $y = f_1(x)$ как функцию, ставящую в соответствие числу x^* число y^*:

$$f_1(x^*) = y^*, \quad x_0 < x^* \leqslant x_0 + \rho\cos(\varphi_1 + \varepsilon).$$

Покажем, что при достаточно малых ε и ρ функция f_1 определена однозначно, т. е. существуют такие $\varepsilon > 0$ и $\rho > 0$, что при заданном x^* условия (41.94) однозначно определяют y^*. Допустим противное. Возьмем последовательности $\varepsilon_n \to 0$ и $\rho_n \to 0$ при $n \to \infty$. Тогда существуют две последовательности точек с одинаковыми абсциссами x_n и разными ординатами y_n' и y_n'', такие, что

$$(x_n, y_n') \in U_1(\varepsilon_n) \cap K_{\rho_n}, \quad F(x_n, y_n') = 0,$$

$$(x_n, y_n'') \in U_1(\varepsilon_n) \cap K_{\rho_n}, \quad F(x_n, y_n'') = 0.$$

Тогда в силу теоремы Ролля на отрезке $[y_n', y_n'']$ прямой $x = x_n$ найдется точка y_n, такая, что

$$F_y(x_n, y_n) = 0, \tag{41.95}$$

при этом очевидно, $(x_n, y_n) \in U_1(\varepsilon_n) \cap K_{\rho_n}$; по условию (см. (41.79)) мы имели еще

$$F_y(x_0, y_0) = 0. \tag{41.96}$$

По формуле конечных приращений, примененной к функции $F_y(x, y)$,

$$F_y(x_n, y_n) - F_y(x_0, y_0) = F_{yx}(\xi_n, \eta_n)(x_n - x_0) + F_{yy}(\xi_n, \eta_n)(y_n - y_0),$$

$$(\xi_n, \eta_n) \in U_1(\varepsilon_n) \cap K_{\rho_n},$$

откуда в силу (41.95) и (41.96)

$$F_{xy}(\xi_n, \eta_n)+F_{yy}(\xi_n, \eta_n)\frac{y_n-y_0}{x_n-x_0}=0. \qquad (41.97)$$

Пусть $(x_n, y_n)=(r_n, \psi_n)$. Очевидно, $|\psi_n-\varphi_1|<\varepsilon_n$; а поэтому из условия $\varepsilon_n\to 0$ следует, что $\psi_n\to\varphi_1$ при $n\to\infty$, и так как $\operatorname{tg}\psi_n=\frac{y_n-y_0}{x_n-x_0}$, то

$$\lim_{n\to\infty}\frac{y_n-y_0}{x_n-x_0}=\operatorname{tg}\varphi_1=k_1. \qquad (41.98)$$

Переходя к пределу в равенстве (41.97) при $n\to\infty$, в силу (41.98) имеем

$$F_{xy}^0+F_{yy}^0k_1=0, \text{ т. е. } k_1=-\frac{F_{xy}^0}{F_{yy}^0};$$

подставляя это значение корня в уравнение (41.84), получим

$$F_{xx}^0F_{yy}^0-F_{xy}^{0^2}=0,$$

что противоречит условию (41.82).

Итак, функция $y=f_1(x)$ действительно однозначно определяется при достаточно малых ε и ρ. В дальнейшем будем предполагать, что ε и ρ выбраны именно таким образом.

Доопределим функцию f_1 в точке x_0, положив $y_0=f_1(x_0)$. Очевидно, по самому определению функции $f_1(x)$ имеем

$$F(x, f_1(x))=0, \qquad x_0\leqslant x\leqslant x_0+\rho\cos(\varphi_1+\varepsilon).$$

Покажем, что в точке x_0 у функции $f_1(x)$ существует правосторонняя производная и что она равна k_1. Пусть произвольно фиксировано $\varepsilon>0$. Из вышеизложенного следует существование такого $\rho=\rho(\varepsilon)>0$, что соответствующая часть графика функции $f_1(x)$ целиком лежит в $U_1(\varepsilon)\cap K_\rho$:

$$(x, f_1(x))\in U_1(\varepsilon)\cap K_\rho, \quad x_0\leqslant x\leqslant x_0+\rho\cos(\varphi_1+\varepsilon). \qquad (41.99)$$

Возьмем $\delta=\rho\cos(\varphi_1+\varepsilon)$ и пусть x таково, что $0<x-x_0<\delta$, $y=f_1(x)$ и $(x, y)=(r, \varphi)$. В силу (41.99) имеем $|\varphi-\varphi_1|<\varepsilon$. Это означает, что $\lim\limits_{x\to x_0+0}\varphi=\varphi_1$ и поэтому $\lim\limits_{x\to x_0+0}\operatorname{tg}\varphi=\operatorname{tg}\varphi_1$. Поскольку $\operatorname{tg}\varphi=\frac{y-y_0}{x-x_0}$, то из доказанного следует, что

$$\lim_{x\to x_0+0}\frac{f_1(x)-f_1(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0+0}\frac{y-y_0}{x-x_0}=\operatorname{tg}\varphi_1,$$

т. е. у функции $f_1(x)$ существует производная справа в точке x_0, равная $\operatorname{tg}\varphi_1=k_1$.

Подобным же образом из рассмотрения поведения функции $F(x, y)$ в угле U_1^* доказывается, что при некотором $\delta'>0$ на отрезке $[x_0-\delta', x_0]$ существует функция $f_1(x)$ такая, что при $x_0-\delta' \leqslant x \leqslant x_0$:

$F(x, f_1(x))=0, (x, f_1(x)) \in U_1^*, f_1'(x_0)=k_1$ (под производной, естественно, в данном случае понимается левосторонняя производная).

Если число ρ взять столь малым, чтобы в круговой окрестности радиуса ρ точки (x_0, y_0) не содержалось других особых точек уравнения (41.77), кроме (x_0, y_0), то функция $f_1(x)$ будет дифференцируемой и во всех точках $x \neq x_0$. Это сразу следует из доказанной выше теоремы о неявных функциях (см. теорему 1 в п. 41.1). В результате мы и получили функцию $f_1(x)$, определенную в некоторой окрестности точки x_0 и обладающую всеми требуемыми свойствами.

Аналогично доказывается существование функции $f_2(x)$, также являющейся решением уравнения (41.77) и удовлетворяющей условиям теоремы, причем график этой функции проходит в углах U_2 и U_2^* и через точку (x_0, y_0).

Если $F_{yy}^0=0$, а $F_{xx}^0 \neq 0$, то все рассмотрения проводятся аналогичным образом; следует только поменять местами роль осей Ox и Oy, так что в результате получим решения уравнения (41.77) в виде функций от переменной $y: f_1(y)$ и $f_2(y)$.

Если, наконец, $F_{xx}^0=F_{yy}^0=0$ и, значит, $F_{xy}^0 \neq 0$, то проще всего выполнить замену переменных: $x=\xi+\eta$, $y=\xi-\eta$ (повернуть оси координат на угол $\pi/4$). Тогда (как легко убедиться непосредственно дифференцированием)

$$F_{\xi\xi}^0=-F_{\eta\eta}^0=2F_{xy}^0 \neq 0, \quad F_{\xi\eta}^0=0,$$

т. е. в новой координатной системе получим уже изученный случай. В частности, уравнение (41.84) для угловых коэффициентов касательных в особой точке в координатной системе ξ, η имеет вид

$$k^2-1=0,$$

и, значит, $k_{1,2}=\pm 1$. Иначе говоря, биссектрисы координатных углов, являющиеся координатными осями в старой системе координат x, y, суть касательные к графикам двух функций, которые определяются уравнением (41.77) в некоторой окрестности рассматриваемой особой точки. □

Если уравнение $F(x, y)=0$ является неявным представлением какой-либо кривой, то в особой точке (x_0, y_0) этого уравнения кривая может (хотя и не обязана) иметь какие-либо особенности, т. е. в окрестности особой точки этого уравнения кривая, вообще говоря, не является графиком некоторой гладкой однозначной функции.

Следует напомнить также, что множество точек, координаты которых удовлетворяют уравнению (41.77), вообще говоря, не является всегда кривой в смысле данного ранее определения кривой (см. п. 16.2*), задаваемой параметрически.

Примеры. 1. Пусть дано уравнение $y^2(x^2+y^2+1)=0$. Здесь $F(x, y)=y^2(x^2+y^2+1)$, а поэтому $F_x=2xy^2$, $F_y=2x^2y+4y^3+2y$. Условия наличия особой точки (41.78) и (41.79) дают в этом случае

$$x_0=0, \ y_0=0.$$

Таким образом, особой точкой является (0, 0). Однако в этой точке кривая, определяемая уравнением, не имеет особенности, так как оно (множитель x^2+y^2+1 нигде не обращается в нуль) равносильно уравнению $y=0$ и рассматриваемая кривая является графиком явной функции $y=f(x)\equiv 0$. Отметим, что, как легко убедиться, в этом случае в точке (0, 0)

$$F_{xx}F_{yy}-F_{xy}^2=0. \tag{41.100}$$

2. Для уравнения

$$(x^2+y^2)(x^2+y^2-1)=0. \tag{41.101}$$

условия (41.79) превращаются в следующую систему уравнений:

$$2x^3+2xy^2-x=0,$$
$$2y^3+2x^2y-y=0.$$

Сложив и вычтя эти уравнения, получим систему

$$(x+y)(2x^2+2y^2-1)=0$$
$$(x-y)(2x^2+2y^2-1)=0.$$

Отсюда либо $x=y=0$, либо $2x^2+2y^2-1=0$, однако точка (x, y), координаты которой удовлетворяют последнему соотношению, не является корнем уравнения (41.101) $\left(\text{для нее } x^2+y^2=\frac{1}{2}\right.$, и, значит, ни один из сомножителей левой части (41.101) не обращается в ноль$\left.\right)$.

Таким образом, единственной особой точкой является (0, 0). Легко проверить, что здесь выполняется условие (41.81), и, значит, точка (0, 0) является изолированным корнем уравнения (41.101). Геометрически, как это сразу видно, уравнение (41.101) задает единичную окружность и ее центр (0, 0) (это множество, очевидно, не является носителем никакой кривой, заданной параметрически в смысле п. 16.2*).

3. Для уравнения

$$x^3+y^3-3axy=0 \tag{41.102}$$

условия (41.79) наличия особой точки приводят к системе уравнений

$$x^2-ay=0,$$
$$y^2-ax=0,$$

откуда либо $x=y=0$, и эта точка удовлетворяет уравнению (41.102), либо $x=a$, $y=a$, но координаты этой точки не являются решением уравнения (41.102). Снова здесь (0, 0) — единственная особая точка. Нетрудно убедиться, что при этом выполняются условия (41.82), и, значит, (0, 0) является двойной точкой.

Геометрически для кривой, неявным представлением которой является уравнение (41.102) (она называется декартов лист, и мы с ней уже встречались в п. 14.5); точка (0, 0) является точкой *самопересечения* (см. рис. 61 в первом томе).

4. Для уравнения

$$y^2-x^3=0 \tag{41.103}$$

(0, 0) является особой точкой; в ней выполняется уже условие (41.100), и тем самым в этом случае не выполняются условия теоремы 6. Геометрически кривая, выражаемая уравнением (41.103) и называемая полукубической параболой $y=\pm x^{3/2}$, имеет в точке (0, 0) касательную и расположена в окрестности этой точки по одну сторону от нормали.

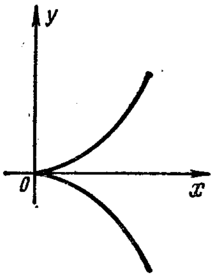


Рис. 155

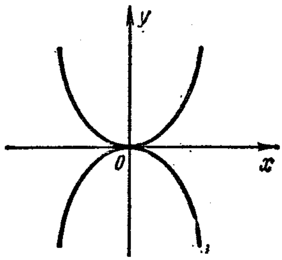


Рис. 156

Точки такого типа называются *точками возврата* (рис. 155).

5. Для уравнения

$$y^2-x^4=0 \tag{41.104}$$

(0, 0) также является особой точкой, и снова здесь выполняется условие (41.100). Уравнение (41.104), очевидно, распадается на два уравнения: $y=x^2$ и $y=-x^2$, которые задают две параболы, имеющие в точке (0, 0) общую касательную.

Особые точки, в некоторой окрестности которых уравнение (41.77) задает две непрерывно дифференцируемые кривые, имеющие в точке (x_0, y_0) общую касательную, называются *точками самоприкосновения* (рис. 156) этих двух кривых.

Может случиться, что при выполнении условия (41.100) особая точка окажется изолированным решением уравнения (41.77), или его двойной точкой.

В заключение дадим некоторые пояснения к уравнению (41.84). Если (x_0, y_0) — особая точка уравнения (41.77), то после параллельного переноса начала координат в точку (x_0, y_0) уравнение (41.77) примет вид

$$F^0_{xx}x^2 + 2F^0_{xy}xy + F^0_{yy}y^2 + o(x^2 + y^2) = 0, \tag{41.105}$$

(здесь через x и y обозначены координаты точки в новой системе координат, а индексом 0 наверху обозначены значения частных производных в точке (0, 0) этой системы), откуда с точностью до бесконечно малых более высокого порядка наше уравнение можно записать следующим образом:

$$F^0_{xx}x^2 + 2F^0_{xy}xy + F^0_{yy}y^2 = 0. \tag{41.106}$$

В случае выполнения условия (41.82) левая часть уравнения (41.106) распадается на два действительных множителя, каждый из которых, приравненный нулю, и дает касательные к двум ветвям кривой в точке (0, 0) (см. (41.84)). В случае же выполнения условия (41.81) левая часть уравнения (41.106) распадается на два комплексных множителя: «касательные мнимы». Это естественно, так как здесь говорить о касательной не имеет смысла, ибо в этом случае особая точка является изолированной.

Это замечание особенно удобно использовать для определения характера особой точки в случае алгебраической кривой, т. е. кривой, заданной уравнением

$$P(x, y) = 0, \tag{41.107}$$

где $P(x, y)$—многочлен от двух переменных x и y. Если (0, 0)—особая точка этого уравнения, то из условий (41.78) и (41.79) следует, что этот многочлен не содержит ни свободного члена, ни членов первого порядка, т. е. уравнение (41.107) имеет вид

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 + Q(x, y) = 0,$$

где $Q(x, y)$ — многочлен, все члены которого по крайней мере третьего порядка. Характер поведения решений этого уравнения определяется его главной частью, т. е. уравнением

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 = 0,$$

которое является уравнением (41.106) для данного случая ибо, как легко видеть, здесь

$$a = F^0_{xx}, \quad b = F^0_{xy} \quad \text{и} \quad c = F^0_{yy}.$$

Если же точка (0, 0) удовлетворяет уравнению (41.107), но не является особой, то (41.107) имеет вид

$$Ax + By + R(x, y) = 0, \quad A^2 + B^2 > 0,$$

где $R(x, y)$ — многочлен, все члены которого имеют порядок не ниже второго. Из теоремы о неявных функциях (см. теорему 1 в п. 41.1) следует, что уравнение

$$Ax + By = 0$$

является в этом случае уравнением касательной в точке (0, 0) к графику решения уравнения (41.107).

Упражнения. Исследовать поведение каждой из следующих кривых в окрестности ее особых точек; найти касательные в особой точке.

13. $y^2 = x^2 + x^3$.
14. $y^2 = x^2 - x^3$.
15. $y^2 = x^2 - x^4$.
16. $(x^2 - 9)\, y^2 = x^4$.
17. $y^2 = x\,(x-3)^2$.
18. $y\,(y-2)^2 = x^2$.
19. $4y^2 = x^5 + 5x^4$.
20. $(x^2 - y^2)\, y = x^4$.
21. $(y - x^2)^2 = x^5$.

41.10. ЗАМЕНА ПЕРЕМЕННЫХ

Часто в различных вопросах математического анализа и в его приложениях при изучении той или иной формулы, содержащей какие-либо функции и их производные (обыкновенные или частные), оказывается целесообразным перейти к другим независимым переменным, а иногда и к другим функциям, которые связаны с функциями, входящими в рассматриваемую формулу, определенными соотношениями. Все эти преобразования делаются на основании правил дифференцирования сложных и неявных функций. Рассмотрим несколько примеров.

Пусть $u = u(x, y)$. Преобразуем выражения

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 \text{ и } \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

к полярным координатам r и φ. Первое из этих выражений является квадратом длины градиента ∇u функции u, т. е. равно $|\nabla u|^2$, а второе имеет специальное обозначение Δu:

$$|\nabla u|^2 = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2, \tag{41.108}$$

$$\Delta u \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}. \tag{41.109}$$

Символ Δ, указывающий на применение к функции u операции (41.109), называется *оператором Лапласа* *).

Из формул, связывающих декартовые координаты с полярными,

$$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi, \tag{41.110}$$

находим:

$$\frac{\partial x}{\partial r} = \cos\varphi, \quad \frac{\partial x}{\partial \varphi} = -r\sin\varphi, \quad \frac{\partial y}{\partial r} = \sin\varphi, \quad \frac{\partial y}{\partial \varphi} = r\cos\varphi. \tag{41.111}$$

*) П. Лаплас (1749—1827) — французский механик и математик.

Применим формулы дифференцирования сложной функции:

$$\frac{\partial u}{\partial r}=\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r}=\frac{\partial u}{\partial x}\cos\varphi+\frac{\partial u}{\partial y}\sin\varphi,$$

$$\frac{\partial u}{\partial \varphi}=\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \varphi}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \varphi}=-\frac{\partial u}{\partial x}r\sin\varphi+\frac{\partial u}{\partial y}r\cos\varphi.$$

Разрешим эти равенства относительно $\frac{\partial u}{\partial x}$ и $\frac{\partial u}{\partial y}$:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial r}\cos\varphi-\frac{\partial u}{\partial \varphi}\frac{\sin\varphi}{r},\quad \frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial r}\sin\varphi+\frac{\partial u}{\partial \varphi}\frac{\cos\varphi}{r} \qquad (41.112)$$

и подставим получившиеся выражения в (41.108):

$$|\nabla u|^2=\left(\frac{\partial u}{\partial r}\cos\varphi-\frac{\partial u}{\partial \varphi}\frac{\sin\varphi}{r}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial r}\sin\varphi+\frac{\partial u}{\partial \varphi}\frac{\cos\varphi}{r}\right)^2=$$
$$=\left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)^2+\frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial u}{\partial \varphi}\right)^2.$$

Теперь перейдем к вычислению выражения (41.109). Продифференцируем формулы (41.110) сначала по x, затем по y:

$$\left.\begin{aligned}1&=\cos\varphi\frac{\partial r}{\partial x}-r\sin\varphi\frac{\partial \varphi}{\partial x},\\ 0&=\sin\varphi\frac{\partial r}{\partial x}+r\cos\varphi\frac{\partial \varphi}{\partial x},\end{aligned}\right\}\qquad \left.\begin{aligned}0&=\cos\varphi\frac{\partial r}{\partial y}-r\sin\varphi\frac{\partial \varphi}{\partial y},\\ 1&=\sin\varphi\frac{\partial r}{\partial y}+r\cos\varphi\frac{\partial \varphi}{\partial y}.\end{aligned}\right\}$$

Разрешим получившиеся системы относительно $\frac{\partial r}{\partial x}$, $\frac{\partial \varphi}{\partial x}$, $\frac{\partial r}{\partial y}$ и $\frac{\partial \varphi}{\partial y}$:

$$\frac{\partial r}{\partial x}=\cos\varphi,\quad \frac{\partial r}{\partial y}=\sin\varphi,\quad \frac{\partial \varphi}{\partial x}=-\frac{\sin\varphi}{r},\quad \frac{\partial \varphi}{\partial y}=\frac{\cos\varphi}{r}. \qquad (41.113)$$

Продифференцируем теперь формулы (41.72) по x и y; тогда, использовав (41.113), получим

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial u}{\partial r}\cos\varphi-\frac{\partial u}{\partial \varphi}\frac{\sin\varphi}{r}\right)\frac{\partial r}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial \varphi}\left(\frac{\partial u}{\partial r}\cos\varphi-\frac{\partial u}{\partial \varphi}\frac{\sin\varphi}{r}\right)\frac{\partial \varphi}{\partial x}=$$
$$=\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}\cos^2\varphi-\frac{2\cos\varphi\sin\varphi}{r}\frac{\partial^2 u}{\partial r\,\partial \varphi}+\frac{\sin^2\varphi}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}+$$
$$+\frac{\sin^2\varphi}{r}\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{2\cos\varphi\sin\varphi}{r^2}\frac{\partial u}{\partial \varphi};$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial u}{\partial r}\sin\varphi+\frac{\partial u}{\partial \varphi}\frac{\cos\varphi}{r}\right)\frac{\partial r}{\partial y}+\frac{\partial}{\partial \varphi}\left(\frac{\partial u}{\partial r}\sin\varphi+\frac{\partial u}{\partial \varphi}\frac{\cos\varphi}{r}\right)\frac{\partial \varphi}{\partial y}=$$
$$=\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}\sin^2\varphi+\frac{2\cos\varphi\sin\varphi}{r}\frac{\partial^2 u}{\partial r\,\partial \varphi}+\frac{\cos^2\varphi}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}+$$
$$+\frac{\cos^2\varphi}{r}\frac{\partial u}{\partial r}-\frac{2\cos\varphi\sin\varphi}{r^2}\frac{\partial u}{\partial \varphi}.$$

Подставив получившиеся выражения в (41.109), будем иметь

$$\Delta u=\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}.$$

В случае, когда в преобразуемое выражение входит не одна, а несколько производных данного порядка, удобно применять метод вычисления не производных, а дифференциалов. Например, считая независимыми переменными x и y, найдем выражения для дифференциалов dr и $d\varphi$. Из формул (41.110) имеем

$$dx = \cos\varphi\, dr - r\sin\varphi\, d\varphi,\quad dy = \sin\varphi\, dr + r\cos\varphi\, d\varphi,$$

отсюда

$$dr = \cos\varphi\, dx + \sin\varphi\, dy,\quad d\varphi = -\frac{\sin\varphi}{r}dx + \frac{\cos\varphi}{r}dy \qquad (41.114)$$

(отметим, что из этих формул также сразу получаются формулы (41.113)).

Для функции $u = u(x, y)$ имеем

$$du = \frac{\partial u}{\partial r}dr + \frac{\partial u}{\partial\varphi}d\varphi = \\ = \left(\frac{\partial u}{\partial r}\cos\varphi - \frac{\partial u}{\partial\varphi}\frac{\sin\varphi}{r}\right)dx + \left(\frac{\partial u}{\partial r}\sin\varphi + \frac{\partial u}{\partial\varphi}\frac{\cos\varphi}{r}\right)dy. \qquad (41.115)$$

В выражении для дифференциала du коэффициенты dx и dy являются производными $\frac{\partial u}{\partial x}$ и $\frac{\partial u}{\partial y}$, поэтому из (41.115) сразу получаются обе формулы (41.112). Найдем далее вторые дифференциалы d^2r и $d^2\varphi$ из (41.114):

$$d^2r = -\sin\varphi d\varphi\, dx + \cos\varphi\, d\varphi\, dy = \\ = \frac{\sin^2\varphi\, dx^2 - 2\cos\varphi\sin\varphi\, dx\, dy + \cos^2\varphi\, dy^2}{r},$$

$$d^2\varphi = -\left(\frac{\cos\varphi}{r}dx + \frac{\sin\varphi}{r}dy\right)d\varphi + \left(\frac{\sin\varphi}{r^2}dx - \frac{\cos\varphi}{r^2}dy\right)dr = \\ = \frac{2\cos\varphi\sin\varphi\, dx^2 - 2(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi)\, dx\, dy - 2\cos\varphi\sin\varphi\, dy^2}{r^2}.$$

Теперь из (41.115) для d^2u получим

$$d^2u = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2}dr^2 + 2\frac{\partial^2 u}{\partial r\,\partial\varphi}dr\,d\varphi + \frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}d\varphi^2 + \frac{\partial u}{\partial r}d^2r + \frac{\partial u}{\partial\varphi}d^2\varphi = \\ = \left(\cos^2\varphi\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} - \frac{2\cos\varphi\sin\varphi}{r}\frac{\partial^2 u}{\partial r\,\partial\varphi} + \frac{\sin^2\varphi}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2} + \right. \\ \left. + \frac{\sin^2\varphi}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{2\cos\varphi\sin\varphi}{r^2}\frac{\partial u}{\partial\varphi}\right)dx^2 + 2(\ldots)\,dx\,dy + (\ldots)\,dy^2.$$

Отсюда и получаются выражения для вторых производных $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}$ и $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ как соответственно коэффициенты при dx^2, $2dx\,dy$ и dy^2.

Аналогичные методы применимы, конечно, и в случае, когда производится какая-либо другая замена переменных $x = x(u, v)$,

$y=y(u, v)$, когда имеются производные высших порядков, а также когда речь идет о функциях большего числа переменных.

Упражнение 22. Преобразовать выражение $|\nabla u|^2$, где $u=u(x, y)$, к ортогональным координатам ξ, η, т. е. таким координатам, что

$$\frac{\partial x}{\partial \xi}\frac{\partial x}{\partial \eta}+\frac{\partial y}{\partial \xi}\frac{\partial y}{\partial \eta}=0.$$

23. Преобразовать уравнение $y''-xy'^3+e^y y'^3=0$, приняв y за новую независимую переменную, а x — за функцию от y.

24. В уравнении $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$ перейти к новым независимым переменным $u=x+y$, $v=x-y$.

25. В выражении $\frac{1}{2}z\left(\frac{1}{x^2}\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{1}{y^2}\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right)+\frac{1}{2}\left[\left(\frac{1}{x}\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{1}{y}\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2\right]-$ $-\frac{1}{2}z\left(\frac{1}{x^3}\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{1}{y^3}\frac{\partial z}{\partial y}\right)$ перейти к переменным u, v, $w=w(u, v)$, если $u=x^2$, $v=y^2$, $w=z^2$ $\left(\text{ответ: } \frac{\partial^2 w}{\partial u^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial v^2}\right)$.

Задача 27. В n-мерном пространстве преобразовать выражение $|\nabla u|^2$, где $u=u(x_1, \ldots, x_n)$, к ортогональным координатам $\xi_1, \ldots, \xi_n$, т. е. таким координатам, что при $i\neq k$ выполняется равенство

$$\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial x_j}{\partial \xi_i}\frac{\partial x_j}{\partial \xi_k}=0,\quad k=1, 2, \ldots, n.$$

§ 42. ЗАВИСИМОСТЬ ФУНКЦИЙ

2.1. ПОНЯТИЕ ЗАВИСИМОСТИ ФУНКЦИЙ. НЕОБХОДИМОЕ УСЛОВИЕ ЗАВИСИМОСТИ ФУНКЦИЙ

Определение 1. *Пусть на открытом множестве $G\subset R^n$ заданы непрерывно дифференцируемые функции*

$$y_i=\varphi_i(x),\quad i=1, 2, \ldots, m,\quad x=(x_1, \ldots, x_n)\in G. \qquad (42.1)$$

Если существуют открытое множество D в пространстве $R^{m-1}_{y_1, \ldots, y_{m-1}}$ и непрерывно дифференцируемая на D функция $\Phi(y_1, \ldots, y_{m-1})$, такие, что в любой точке $x\in G$ выполняются условия $(\varphi_1(x), \ldots, \varphi_{m-1}(x))\in D$ и $\Phi(\varphi_1(x), \ldots, \varphi_{m-1}(x))=\varphi_m(x)$, то функция φ_m называется зависимой на множестве G от функций $\varphi_1, \ldots, \varphi_{m-1}$.

Определение 2. *Если среди функций системы* (42.1) *есть функция, зависимая от остальных на множестве G, то эта система называется зависимой на множестве G.*

Если ни одна функция системы (42.1) *не зависит от остальных на множестве G, то эта система называется независимой на G.*

Иногда для краткости вместо выражения «зависимая (независимая) система функций» будем просто говорить «зависимые (соответственно независимые) функции».

В вопросе зависимости системы функций (42.1) фундаментальную роль играет матрица Якоби этой системы

$$\left\| \frac{\partial y_i}{\partial x_j} \right\|, \quad i = 1, 2, \ldots, m; \quad j = 1, 2, \ldots, n, \tag{42.2}$$

i — номер строчки, j — номер столбца.

Теорема 1 (необходимое условие зависимости функций). *Пусть* $m \leqslant n$ *и система функций* (42.1) *зависима на открытом множестве* G. *Тогда в любой точке этого множества ранг матрицы Якоби* (42.2) *) *этой системы меньше* m.

Доказательство. По условию, система функций (42.1) зависима на G, т. е. по крайней мере одна из этих функций зависит от остальных. Пусть для определенности φ_m зависит от $\varphi_1, \ldots, \varphi_{m-1}$:

$$\varphi_m(x) = \Phi(\varphi_1(x), \ldots, \varphi_{m-1}(x)), \qquad x \in G,$$

где Φ — непрерывно дифференцируемая функция от $(m-1)$ аргументов $y_1, \ldots, y_{m-1}$. Отсюда

$$\frac{\partial y_m}{\partial x_j} = \sum_{i=1}^{m-1} \frac{\partial \Phi}{\partial y_i} \frac{\partial y_i}{\partial x_j} \quad \text{для всех } j = 1, 2, \ldots, n.$$

Эта формула показывает, что m-я строка матрицы Якоби (42.2) в каждой точке $x \in G$ является линейной комбинацией остальных строк этой матрицы, и, значит, ранг матрицы Якоби (42.2) меньше m в каждой точке $x \in G$. □

Следствие 1. *Пусть* $m = n$ *и система функций* (42.1) *зависима на* G. *Тогда ее якобиан* $\frac{\partial(y_1, \ldots, y_n)}{\partial(x_1, \ldots, x_n)}$ *равен нулю во всех точках множества* G.

Следствие 2 (достаточные условия независимости функций). *Пусть* $m \leqslant n$ *и пусть ранг матрицы Якоби* (42.2) *хоть в одной точке открытого множества* G *равен* m. *Тогда система* (42.1) *независима на множестве* G.

Следствие 1 получается сразу из доказанной теоремы при $m = n$.

Следствие 2 легко доказывается от противного.

Поскольку строки матрицы Якоби (42.2) являются координатами градиентов функций (42.1), то теорему 1 можно перефразировать следующим образом.

---

*) Напомним, что рангом матрицы называется максимальное число ее линейно независимых строк. Это число совпадает с максимальным порядком минора этой матрицы, не равного нулю.

Если система функций (42.1) *зависима в области* G, *то градиенты* $\nabla\varphi_1, \ldots, \nabla\varphi_m$ *этих функций линейно зависимы в каждой точке* G.

42.2. ДОСТАТОЧНЫЕ УСЛОВИЯ ЗАВИСИМОСТИ ФУНКЦИЙ

В этом пункте сохраним обозначения предыдущего пункта и будем, как и раньше, предполагать, что функции (42.1) непрерывно дифференцируемы на открытом множестве $G \subset R^n$.

Теорема 2 (достаточные условия зависимости функций). *Пусть ранг матрицы Якоби* (42.2) *системы функций* (42.1) *в каждой точке открытого множества* G *не превышает числа* r, $r < m \leqslant n$, *а в некоторой точке* $x^{(0)} \in G$ *равен* r, *иначе говоря, существуют такие переменные* $x_{j_1}, \ldots, x_{j_r}$ *и функции* $y_{i_1} = \varphi_{i_1}(x), \ldots, y_{i_r} = \varphi_{i_r}(x)$, *что*

$$\left.\frac{\partial(y_{i_1}, \ldots, y_{i_r})}{\partial(x_{j_1}, \ldots, v_{j_r})}\right|_{x^{(0)}} \neq 0. \tag{42.3}$$

Тогда все r *функций, входящих в условие* (42.3), *независимы на множестве* G *и существует окрестность точки* $x^{(0)}$, *такая, что любая из оставшихся* $m-r$ *функций зависит на этой окрестности от указанных* r *функций.*

Доказательство. Пусть для простоты записи условие (42.3) имеет вид

$$\left.\frac{\partial(y_1, \ldots, y_r)}{\partial(x_1, \ldots, x_r)}\right|_{x^{(0)}} \neq 0 \tag{42.4}$$

(этого всегда можно добиться, перенумеровав в случае необходимости функции и аргументы системы (42.1) в нужном порядке). Согласно следствию 2 из теоремы 1 п. 42.1., функции $y_1, \ldots, y_r$ независимы в G.

Покажем, что каждая из остальных зависит от них в некоторой окрестности точки $x^{(0)} = (x_1^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)})$. Пусть $y_i^{(0)} = \varphi_i(x^{(0)})$, $i = 1, 2, \ldots, m$. Рассмотрим систему первых r функций системы (42.1):

$$\begin{gathered} y_1 = \varphi_1(x_1, \ldots, x_n) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ y_r = \varphi_r(x_1, \ldots, x_n). \end{gathered} \tag{42.5}$$

Прежде всего выберем такое η_0, чтобы всякая точка $x = (x_1, \ldots, x_n)$, принадлежащая η_0-кубической окрестности точки $x^{(0)}$, т. е. всякая точка x, для которой $|x_i - x_i^{(0)}| < \eta_0$, $i = 1, 2, \ldots, n$, принадлежала множеству $G : x \in G$. Это всегда возможно в силу его открытости.

Далее, в силу условия (42.4) и теоремы о неявных функциях (см. п. 41.3) система (42.5) разрешима относительно переменных

$x_1, \ldots, x_r$ в некоторой окрестности точки $(x^{(0)}, y^{(0)})$:

$$\begin{aligned} x_1 &= f_1(y_1, \ldots, y_r, x_{r+1}, \ldots, x_n), \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_r &= f_r(y_1, \ldots, y_r, x_{r+1}, \ldots, x_n). \end{aligned} \tag{42.6}$$

При этом функции $f_1, \ldots, f_r$ определены и непрерывно дифференцируемы в некоторой окрестности точки $(y_1^{(0)}, \ldots, y_r^{(0)}, x_{r+1}^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)})$.

Более подробно (если в качестве окрестностей брать кубические окрестности) это означает следующее: можно выбрать такие числа $\delta > 0$ и $\eta > 0$, причем для удобства взять их меньшими η_0: $\delta < \eta_0$, $\eta < \eta_0$, что если через U обозначить кубическую окрестность точки $(y_1^{(0)}, \ldots, y_r^{(0)}, x_{r+1}^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)})$, задаваемую неравенствами

$$|y_i - y_i^{(0)}| < \delta, \quad i = 1, 2, \ldots, r, \quad |x_j - x_j^{(0)}| < \delta, \quad j = r+1, \ldots, n,$$

то

1) на окрестности U функции f_k, $k = 1, 2, \ldots, r$ определены и непрерывно дифференцируемы;

2) для всех точек $(y_1, \ldots, y_r, x_{r+1}, \ldots, x_n) \in U$ справедливы неравенства

$$|f_k(y_1, \ldots, y_r, x_{r+1}, \ldots, x_n) - x_k^{(0)}| < \eta, \qquad k = 1, 2, \ldots, r;$$

3) на окрестности U выполняются равенства

$$\varphi_i(f_1, \ldots, f_r, x_{r+1}, \ldots, x_n) = y_i, \qquad i = 1, 2, \ldots, r,$$

где под f_k, $k = 1, \ldots, r$, понимаются правые части равенств (42.6).

Рассмотрим композицию функций (42.6) и $\varphi_{r+1}(x_1, \ldots, x_n)$, т. е. функцию

$$y_{r+1} = \varphi_{r+1}(f_1, \ldots, f_r, x_{r+1}, \ldots, x_n), \tag{42.7}$$

где $f_k = f_k(y_1, \ldots, y_r, x_{r+1}, \ldots, x_n)$, $k = 1, \ldots, r$. Эта сложная функция заведомо определена и непрерывно дифференцируема на указанной выше кубической окрестности U точки

$$(y_1^{(0)}, \ldots, y_r^{(0)}, x_{r+1}^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}).$$

Покажем, что на самом деле функция (42.7) в этой окрестности U не зависит от переменных $x_{r+1}, \ldots, x_n$, т. е. не меняется при их изменении, и тем самым является фактически лишь функцией переменных $y_1, \ldots, y_r$. Для этого достаточно показать, что для функции (42.7) на окрестности U выполняется равенство

$$\frac{\partial y_{r+1}}{\partial x_j} = 0, \qquad j = r+1, \ldots, n \tag{42.8}$$

(см. п. 20.4 или формулу конечных приращений Лагранжа в п. 39.2, из которой сразу следует достаточность условия (42.8) для независимости функции от переменных $x_{r+1}, \ldots, x_n$ в выпуклой области, а следовательно, и в кубической окрестности).

Для доказательства равенства (42.8) зафиксируем одно из j ($j=r+1, \ldots, n$) и координаты x_k с индексами k, принимающими значения $r+1, \ldots, j-1, j+1, \ldots, n$, обозначив их через x_k^*, причем выберем x_k^* так, чтобы $|x_k^*-x_k^{(0)}|<\delta$, $k=r+1, \ldots, j-1, j+1, \ldots, n$.

Рассмотрим отображение

$$
\begin{gathered}
y_1=y_1,\\
\cdots\\
y_r=y_r,
\end{gathered}
\tag{42.9}
$$

$$
y_{r+1}=\varphi_{r+1}(f_1^*, \ldots, f_r^*, x_{r+1}^*, \ldots, x_{j-1}^*, x_j, x_{j+1}^*, \ldots, x_n^*),
$$

где $f_k^*=f_k(y_1, \ldots, y_r, x_{r+1}^*, \ldots, x_{j-1}^*, x_j, x_{j+1}^*, \ldots, x_n^*)$, кубической окрестности $U^{(j)}$ точки $(y_1^{(0)}, \ldots, y_r^{(0)}, x_j^{(0)})$, задаваемой неравенствами

$$
|y_k-y_k^{(0)}|<\delta, \quad k=1, 2, \ldots, r, \quad |x_j-x_j^{(0)}|<\delta.
$$

Символически, чтобы подчеркнуть, какие именно переменные меняются, изобразим отображение (42.9) в виде

$$
(y_1, \ldots, y_r, x_j)\to(y_1, \ldots, y_r, y_{r+1}).
$$

Это отображение непрерывно дифференцируемо на $U^{(j)}$; его матрица Якоби имеет вид

$$
\begin{Vmatrix}
1 & 0 & 0 & 0\\
0 & 1 & 0 & 0\\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\
\frac{\partial y_{r+1}}{\partial y_1} & \frac{\partial y_{r+1}}{\partial y_2} & \frac{\partial y_{r+1}}{\partial y_r} & \frac{\partial y_{r+1}}{\partial x_j}
\end{Vmatrix}
$$

и потому

$$
\frac{\partial(y_1, \ldots, y_r, y_{r+1})}{\partial(y_1, \ldots, y_r, x_j)}=\frac{\partial y_{r+1}}{\partial x_j}, \tag{42.10}
$$

т. е. якобиан рассматриваемого отображения равен интересующей нас производной.

На окрестности $U^{(j)}$ это отображение можно представить в виде композиции двух отображений: непрерывно дифференцируемого отображения

$$
\begin{gathered}
x_1=f_1(y_1, \ldots, y_r, x_{r+1}^*, \ldots, x_{j-1}^*, x_j, x_{j+1}^*, \ldots, x_n^*),\\
\cdots\cdots\cdots\\
x_r=f_r(y_1, \ldots, y_r, x_{r+1}^*, \ldots, x_{j-1}^*, x_j, x_{j+1}^*, \ldots, x_n^*),\\
x_j=x_j
\end{gathered}
$$

окрестности $U^{(j)}$ и непрерывно дифференцируемого отображения

$$\begin{gathered}
y_1=\varphi_1(x_1, \ldots, x_r, x_{r+1}^*, \ldots, x_{j-1}^*, x_j, x_{j+1}^*, \ldots, x_n^*), \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
y_r=\varphi_r(x_1, \ldots, x_r, x_{r+1}^*, \ldots, x_{j-1}^*, x_j, x_{j+1}^*, \ldots, x_n^*), \\
y_{r+1}=\varphi_{r+1}(x_1, \ldots, x_r, x_{r+1}^*, \ldots, x_{j-1}^*, x_j, x_{j+1}^*, \ldots, x_n^*)
\end{gathered}$$

окрестности точки $(x_1^{(0)}, \ldots, x_r^{(0)}, x_j^{(0)})$, задаваемой неравенствами

$$|x_i-x_i^{(0)}|<\eta, \quad i=1, 2, \ldots, r, \quad |x_j-x_j^{(0)}|<\delta.$$

В силу выбора чисел δ и η композиция этих отображений, которую для наглядности можно символически изобразить в виде

$$(y_1, \ldots, y_r, x_j)\to(x_1, \ldots, x_r, x_j)\to(y_1, \ldots, y_r, y_{r+1}),$$

определена и непрерывно дифференцируема на окрестности $U^{(j)}$. Первое из этих отображений непрерывно дифференцируемо в окрестности $U^{(j)}$ точки $(y_1^{(0)}, \ldots, y_r^{(0)}, x_j^{(0)})$, а второе непрерывно дифференцируемо в соответствующей окрестности точки $(x_1^{(0)}, \ldots, x_r^{(0)}, x_j^{(0)})$. Поэтому из (42.10) и из свойств якобианов отображений (см. п. 41.7) имеем

$$\frac{\partial y_{r+1}}{\partial x_j}=\frac{\partial(y_1, \ldots, y_r, y_{r+1})}{\partial(y_1, \ldots, y_r, x_j)}=\frac{\partial(y_1, \ldots, y_r, y_{r+1})}{\partial(x_1, \ldots, x_r, x_j)}\frac{\partial(x_1, \ldots, x_r, x_j)}{\partial(y_1, \ldots, y_r, x_j)} \qquad (42.11)$$

В силу условия теоремы ранг матрицы Якоби на множестве G меньше или равен r, следовательно,

$$\frac{\partial(y_1, \ldots, y_r, y_{r+1})}{\partial(x_1, \ldots, x_r, x_j)}=0$$

всюду на G. Поэтому из (42.11) сразу следует, что для любой точки $(y_1, \ldots, y_r, x_j)\in U^{(j)}$ и, следовательно, для любой точки

$$(y_1, \ldots, y_r, x_{r+1}^*, \ldots, x_{j-1}^*, x_j, x_{j+1}^*, \ldots, x_n^*)\in U$$

справедливо равенство (42.8). Поскольку координаты x_k^* были фиксированы произвольным образом, лишь бы $|x_k^*-x_k^{(0)}|<\delta$; $k=r+1, \ldots, j-1, j+1, \ldots, n$, то это означает, что равенство (42.8) справедливо на всей окрестности U.

Таким образом, функция (42.7) зависит только от переменных $y_1, \ldots, y_r$. Обозначив ее символом Φ, получим

$$\varphi_{r+1}(f_1, \ldots, f_r, x_{r+1}, \ldots, x_n)=\Phi(y_1, \ldots, y_r).$$

Выберем теперь так δ_0, $\delta_0<\delta$ и $\delta_0<\eta$, чтобы при $|x_i-x_i^{(0)}|<\delta_0$, $i=1, 2, \ldots, n$, выполнялись бы неравенства

$$|y_i-y_i^{(0)}|<\delta, \quad j=1, 2, \ldots, r.$$

Это возможно в силу непрерывности функций $y_j=\varphi_j(x_1, \ldots, x_n)$, $j=1, 2, \ldots, r$, системы (42.5) в точке $x^{(0)}$.

В силу доказанного для любой точки x δ_0-кубической окрестности точки $x^{(0)}$, т. е. для любой такой точки $x=(x_1, \ldots, x_n)$, что

$$|x_i - x_i^{(0)}| < \delta_0, \quad i=1, 2, \ldots, n,$$

будет справедливо тождество

$$\varphi_{r+1}(x) = \Phi(\varphi_1(x), \ldots, \varphi_r(x)),$$

т. е. в указанной окрестности точки $x^{(0)}$ функции $\varphi_1, \ldots, \varphi_r, \varphi_{r+1}$ зависимы.

Аналогично доказывается и зависимость каждой из функций $\varphi_{r+2}, \ldots, \varphi_m$ от $\varphi_1, \ldots, \varphi_r$ в некоторой окрестности точки $x^{(0)}$. □

Аналогично необходимому условию зависимости функций достаточные условия также можно сформулировать в терминах градиентов. Для простоты ограничимся случаем $r=m-1$.

Если градиенты $\nabla\varphi_1, \ldots, \nabla\varphi_m$ линейно зависимы во всех точках области G, то какова бы ни была точка $x \in G$, в которой $m-1$ из указанных градиентов линейно независимы, существует ее окрестность, в которой функции $\varphi_1, \ldots, \varphi_m$ зависимы. При этом, если, например, градиенты $\nabla\varphi_1, \ldots, \nabla\varphi_{m-1}$ линейно независимы в рассматриваемой точке, и, следовательно, градиент $\nabla\varphi_m$ в этой точке является их линейной комбинацией, то в указанной окрестности функция φ_m зависит от функций $\varphi_1, \ldots, \varphi_{m-1}$.

Следует обратить внимание на то, что достаточные условия зависимости функций, установленные в этом пункте, имеют локальный характер в отличие от результатов предшествующего пункта, имеющих глобальный характер. Это означает следующее: если система m непрерывно дифференцируемых функций (42.1) зависима на открытом множестве $G \subset R^n$, то согласно теореме 1 п. 42.1 в каждой точке этого множества ранг матрицы Якоби этой системы меньше m (соответственно если хотя бы в одной точке множества G ранг рассматриваемой матрицы равен m, то система независима на всем множестве G). Что же касается теоремы 2 настоящего пункта, то она утверждает лишь, что если в какой-то точке $x^{(0)} \in G$ выполняются условия этой теоремы, то только на некоторой окрестности этой точки (а не на всем множестве G) данная система функций является зависимой системой. Таким образом, действительно, утверждение теоремы 2 имеет локальный характер.

Добавим еще, что если в каждой точке $x^{(0)}$ открытого множества G выполняются условия теоремы 2, то, конечно, в этом случае в некоторой окрестности каждой точки рассматриваемая система функций будет зависимой. Однако теорема 2 не гарантирует, что эта зависимость будет одной и той же во всех указанных окрестностях, т. е. из теоремы 2 не следует, что в разных точках одни и те же функции будут зависимыми от других и что функции Φ, «осуществляющие» зависимости одних и тех же функций, рассматриваемых на разных окрестностях, будут совпадать в точках пересечения этих окрестностей. Следовательно, из теоремы 2 не следует, что система функций, удовлетворяющая условиям этой теоремы во всех точках $x^{(0)}$ множества G, будет зависимой на всем множестве G в целом, в едином смысле, т. е. в смысле определения 1. Это и означает, что теорема 2 не имеет глобального характера.

Заметим, что существует несколько более общий подход к понятию зависимости функций, позволяющий построить глобальную теорию этого вопроса, однако мы не будем на этом останавливаться.

Пример. Рассмотрим систему функций

$$u=\sin(x+y),$$
$$v=\cos(x+y). \tag{42.12}$$

Якобиан этой системы равен нулю на всей плоскости

$$\begin{vmatrix} \cos(x+y) & \cos(x+y) \\ -\sin(x+y) & -\sin(x+y) \end{vmatrix}=0,$$

и, как легко видеть, ранг матрицы Якоби этой системы равен единице во всех точках плоскости.

Согласно теореме 2, функции (42.12) зависимы в окрестности каждой точки плоскости. В данном случае зависимость функций легко находится в явном виде, например на открытом множестве точек (x, y), для которых $\cos(x+y)>0$, она может быть задана формулой $v=\sqrt{1-u^2}$.

Упражнения 1. Пусть $u=x^2+y^2+z^2$, $v=xy+yz+zx$, $w=x+y+z$. Доказать, что функции u, v, w зависимы и найти уравнение, выражающее их зависимость.

2. Исследовать вопрос о зависимости функций $u=\xi^3+\eta^3+\zeta^3$, $v=\xi\eta\zeta$, $w=\xi^2+\eta^2+\zeta^2$, $z=\xi\eta+\eta\zeta+\zeta\xi$.

Задача 28. Функция $u=u(x, y)$ называется гармонической в плоской области, если во всех точках этой области она удовлетворяет уравнению $\Delta u=0$ (см. (41.109)). Доказать, что две гармонические функции зависимы в плоской области тогда и только тогда, когда они линейно зависимы.

§ 43. УСЛОВНЫЙ ЭКСТРЕМУМ

43.1. ПОНЯТИЕ УСЛОВНОГО ЭКСТРЕМУМА

Пусть на открытом множестве $G\subset R^n$ заданы функции

$$y_i=f_i(x), \quad i=1, 2, \ldots, m, \tag{43.1}$$

$x=(x_1, \ldots, x_n)\in G$. Обозначим через E множество точек $x\in G$, в которых все функции f_i, $i=1, 2, \ldots, m$, обращаются в ноль:

$$E=\{x: f_i(x)=0, \ i=1, \ldots, m, \ x\in G\}. \tag{43.2}$$

Уравнения

$$f_i(x)=0, \ i=1, 2, \ldots, m, \tag{43.3}$$

будем называть *уравнениями связи*.

Определение 1. *Пусть на G задана функция $y=f_0(x)$. Точка $x^{(0)} \in E$ называется точкой условного экстремума**) *функции $f_0(x)$ относительно (или при выполнении) уравнений связи* (43.3), *если она является точкой обычного экстремума этой функции, рассматриваемой только на множестве E* (см. п. 40.1).

Иначе говоря, здесь значение функции $f_0(x)$ в точке $x^{(0)}$ сравнивается не со всеми ее значениями в достаточно малой окрестности этой точки, а только со значениями в точках, принадлежащих одновременно указанной достаточно малой окрестности и множеству E. Как и в случае обычных экстремумов, можно, естественно, рассматривать точки просто условного экстремума и точки строго условного экстремума.

Примеры. 1. Рассмотрим функцию

$$f(x,\ y)=x^2+y^2 \qquad (43.4)$$

и уравнение связи

$$x+y-1=0. \qquad (43.5)$$

Найдем условный экстремум функции (43.4) при выполнении уравнения связи (43.5). Из (43.5) имеем $y=1-x$, откуда

$$f(x,\ 1-x)=2x^2-2x+1.$$

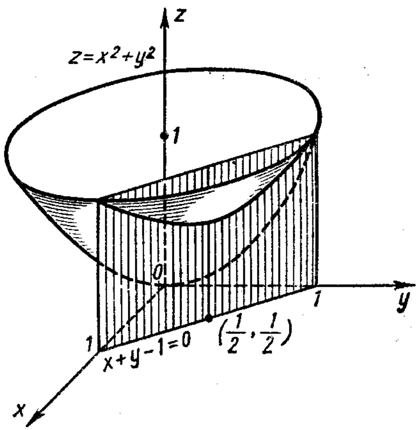


Рис. 157

Таким образом, при выполнении условия связи функция (43.4) является функцией одного переменного. Ее экстремум находится элементарно: приравнивая нулю ее производную (необходимое условие экстремума), получим $2x-1=0$, откуда $x=\frac{1}{2}$. В этой точке рассматриваемая функция, очевидно, имеет минимум (она является многочленом второй степени с положительным коэффициентом при старшем члене). Значению $x=\frac{1}{2}$, согласно уравнению связи (43.5), соответствует $y=\frac{1}{2}$.

Следовательно, в точке (1/2, 1/2) функция (43.4) достигает минимума относительно уравнения связи (43.5). Геометрически это означает, что точка параболоида $z=x^2+y^2$, проектирующаяся в точку (1/2, 1/2), является самой низкой из всех его точек, лежащих над прямой (43.5) (рис. 157). Этот пример показывает, что точка, в которой функция достигает условного экстремума, не является, вообще говоря, точкой экстремума этой функции.

*) Принят также термин «относительный экстремум».

2. Рассмотрим функцию $f(x, y)=y^2-x^2$ и уравнение связи $y=2x$.

Имеем $f(x, 2x)=3x^2$, т. е. при выполнении уравнений связи рассматриваемая функция также является функцией одного переменного и, очевидно, достигает минимума при $x=0$ (рис. 158). Значению $x=0$, согласно уравнению связи, соответствует значение $y=0$, а поэтому функция $f(x, y)=y^2-x^2$ имеет в точке (0, 0) условный минимум относительно уравнения связи $y=2x$.

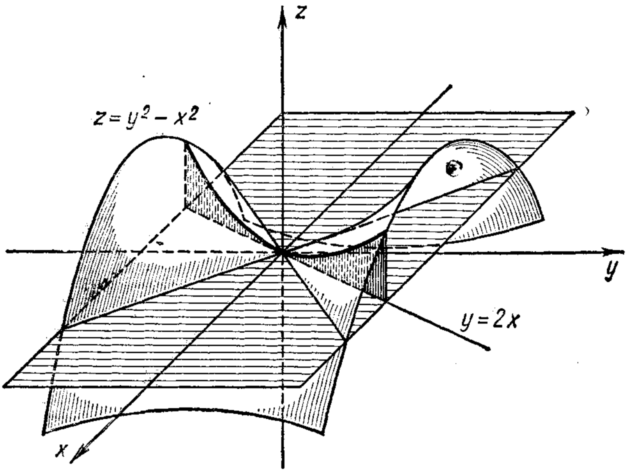


Рис. 158

Следует заметить, что в этом случае сама функция $f(x, y)$ не имеет ни максимума, ни минимума ни в какой точке плоскости. Таким образом, рассмотренный пример показывает, что функция может не иметь экстремума, но при определенных уравнениях связи может иметь условный экстремум.

В дальнейшем будем предполагать, что

1) все функции $f_0, f_1, \ldots, f_m$ непрерывно дифференцируемы в открытом множестве G;

2) в рассматриваемой точке $x^{(0)}$ векторы $\nabla f_1, \ldots, \nabla f_m$ линейно независимы, т. е. ранг матрицы Якоби

$$\left(\frac{\partial f_j}{\partial x_i}\right), \quad j=1, 2, \ldots, m, \quad i=1, 2, \ldots, n,$$

равен m — числу ее строк (строки матрицы Якоби являются компонентами градиентов $\nabla f_1, \ldots, \nabla f_m$).

Согласно результатам предыдущего параграфа это означает, что функции системы (43.1) независимы в некоторой окрестности точки $x^{(0)}$. Поскольку в n-мерном пространстве не может быть больше чем n линейно независимых векторов и ранг матрицы не может быть больше числа столбцов, то из условия 2) следует, что $m \leqslant n$.

Согласно условию 2) в точке $x^{(0)}$ хотя бы один из определителей вида

$$\frac{\partial (f_1, \ldots, f_m)}{\partial (x_{i_1}, \ldots, x_{i_m})}$$

отличен от нуля. Пусть для определенности в точке $x^{(0)}$

$$\frac{\partial (f_1, \ldots, f_m)}{\partial (x_1, \ldots, x_m)} \neq 0. \tag{43.6}$$

Тогда, в силу теоремы о неявных функциях (см. п. 41.3), систему уравнений (43.3) в некоторой окрестности точки $x^{(0)} = (x_1^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)})$ можно разрешить относительно переменных $x_1, \ldots, x_m$:

$$\begin{aligned} x_1 &= \varphi_1 (x_{m+1}, \ldots, x_n) \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_m &= \varphi_m (x_{m+1}, \ldots, x_n). \end{aligned} \tag{43.7}$$

Подставив значения $x_1, \ldots, x_m$, даваемые формулами (43.7) в $y = f_0(x)$, т. е. рассмотрев композицию функции f_0 и $\varphi_1, \ldots, \varphi_m$ получим функцию

$$y = f_0 (\varphi_1 (x_{m+1}, \ldots, x_n), \ldots, \varphi_m (x_{m+1}, \ldots, x_n), x_{m+1}, \ldots, x_n) \overset{\text{def}}{=} \\ \overset{\text{def}}{=} g (x_{m+1}, \ldots, x_n) \tag{43.8}$$

от $n-m$ переменных $x_{m+1}, \ldots, x_n$, определенную и непрерывно дифференцируемую в некоторой окрестности точки $\tilde{x}^{(0)} = (x_{m+1}^{(0)}, \ldots \ldots, x_n^{(0)})$ в $(n-m)$-мерном пространстве R^{n-m}.

Поскольку, согласно теореме о неявных функциях, условия (43.3) и (43.7) равносильны, то справедливо следующее утверждение.

Точка $x^{(0)}$ является точкой (строгого) условного экстремума для функции $f_0(x)$ относительно уравнений связи (43.3) *в том и только в том случае, когда $\tilde{x}^{(0)}$ является точкой обычного (строгого) экстремума функции* (43.8).

Если $\tilde{x}^{(0)}$ — точка обычного экстремума функции g, то она является стационарной точкой этой функции (см. п. 40.1):

$$dg (\tilde{x}^{(0)}) = 0. \tag{43.9}$$

Напомним, что дифференциал — линейная однородная функция и его равенство нулю означает равенство нулю этой функции при любых значениях ее аргументов, в данном случае — при любых $dx_{m+1}, dx_{m+2}, \ldots, dx_n$. Это возможно, очевидно, в том и только в том случае, когда все коэффициенты при этих аргументах, т. е. производные $\frac{\partial g}{\partial x_{m+k}}$, $k = 1, 2, \ldots, n-m$ обращаются в ноль в точке $x^{(0)}$. Условие (43.9) необходимо для условного экстремума в точке $x^{(0)}$.

Таким образом, метод, основанный на решении системы уравнений (43.3), позволяет свести вопрос о нахождении условного экстремума к уже изученному вопросу об обычном экстремуме. Именно таким образом мы и поступали в рассмотренных выше примерах. Однако выразить решение системы (43.3) через элементарные функции часто невозможно или весьма затруднительно; поэтому желательно располагать методом, позволяющим найти условный экстремум не решая системы (43.3). Такой способ изложен ниже.

43.2. МЕТОД МНОЖИТЕЛЕЙ ЛАГРАНЖА ДЛЯ НАХОЖДЕНИЯ ТОЧЕК УСЛОВНОГО ЭКСТРЕМУМА

В этом пункте будет предполагаться, что все функции f_0, $f_1, \ldots, f_m$ непрерывно дифференцируемы в открытом множестве G.

Теорема 1. *Пусть $x^{(0)}$ — точка условного экстремума функции f_0 при выполнении уравнений связи* (43.3). *Тогда в этой точке градиенты $\nabla f_0, \nabla f_1, \ldots, \nabla f_m$ линейно зависимы, т. е. существуют такие, не все равные нулю, числа $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_m$, что*

$$\lambda_0 \nabla f_0 + \lambda_1 \nabla f_1 + \ldots + \lambda_m \nabla f_m = 0. \tag{43.10}$$

Следствие. *Если в точке $x^{(0)}$ условного экстремума функции f_0 относительно уравнений связи* (43.3) *градиенты $\nabla f_1, \ldots, \nabla f_m$ линейно независимы, т. е. ранг матрицы Якоби*

$$\left(\frac{\partial f_j}{\partial x_i}\right), \quad j = 1, 2, \ldots, m, \quad i = 1, 2, \ldots, n,$$

равен m, то существуют такие $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$, что в этой точке

$$\nabla f_0 + \sum_{j=1}^{m} \lambda_j \nabla f_j = 0, \tag{43.11}$$

т. е. ∇f_0 является линейной комбинацией градиентов $\nabla f_1, \ldots, \nabla f_m$.

В координатной форме это условие имеет вид: для любого $i = 1, 2, \ldots, n$ в точке $x^{(0)}$

$$\frac{\partial f_0}{\partial x_i} + \sum_{j=1}^{m} \lambda_j \frac{\partial f_j}{\partial x_i} = 0. \tag{43.12}$$

Функция

$$F(x) \overset{\text{def}}{=} f_0(x) + \sum_{j=1}^{m} \lambda_j f_j(x), \tag{43.13}$$

где числа $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ удовлетворяют условию (43.12), называется *функцией Лагранжа* рассматриваемой задачи, а сами числа $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ — *множителями Лагранжа.*

Условие (43.12) означает, что если $x^{(0)}$ является точкой условного экстремума функции f_0 относительно уравнений связи (43.3), то она является стационарной точкой для функции Лагранжа, т. е.

$$\frac{\partial F(x^{(0)})}{\partial x_i}=0, \quad i=1,\ 2,\ \ldots,\ n. \tag{43.14}$$

Прежде чем доказать теорему, разъясним ее смысл и покажем, как ее использовать для нахождения точек условного экстремума. Прежде всего обратим внимание на то, что у функции вида (43.13) при произвольных числах $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$, каждая точка ее условного экстремума является и точкой условного экстремума исходной функции f_0, и наоборот. Мы выбираем такие значения $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, чтобы выполнялись условия (43.12), т. е. чтобы данная точка условного экстремума оказалась и стационарной точкой функции (43.11).

Для отыскания точек условного экстремума следует рассмотреть систему $n+m$ уравнений (43.3) и (43.10) относительно неизвестных $x_1^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}, \lambda_1, \ldots, \lambda_m$ и решить ее (если это окажется возможным), найдя $x_1^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}$ и по возможности исключив $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$. Сформулированная теорема утверждает, что все точки условного экстремума будут находиться среди найденных таким образом точек $(x_1^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)})$. Вопрос о том, какие же из них фактически будут точками условного экстремума, требует дополнительного исследования; соображения об этом будут высказаны в пункте 43.5 *.

Доказательство теоремы. Докажем утверждение, равносильное теореме: если в точке $x^{(0)}=(x_1^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)})$, удовлетворяющей уравнениям связи

$$f_k(x^{(0)})=0,\ k=1,\ 2,\ \ldots,\ m, \tag{43.15}$$

градиенты $\nabla f_0, \nabla f_1, \ldots, \nabla f_m$ линейно независимы, то $x^{(0)}$ не является точкой условного экстремума.

Итак, пусть $\nabla f_0, \nabla f_1, \ldots, \nabla f_m$ линейно независимы и, следовательно, ранг матрицы Якоби $\left(\frac{\partial f_j}{\partial x_i}\right)$, $j=0,\ 1,\ \ldots,\ m$, $i=1,\ 2,\ \ldots$ $\ldots,\ n$, равен $m+1$. Тогда в этой матрице существует минор порядка $m+1$ не равный нулю. Для определенности будем считать, что он образован первыми $m+1$ столбцами, т. е.

$$\left.\frac{\partial(f_0, f_1, \ldots, f_m)}{\partial(x_1, x_2, \ldots, x_{m+1})}\right|_{x=x^{(0)}}\neq 0. \tag{43.16}$$

Множество G — открыто, а поэтому существует такое $\delta_0>0$, что при всех δ, $0<\delta<\delta_0$, куб

$$Q_\delta^n=\{x: |x_i-x_i^{(0)}|<\delta,\ i=1,\ 2,\ \ldots,\ n\}$$

лежит в G и, следовательно, на нем определены все функции $f_0, f_1, \ldots, f_m$.

Зафиксируем $x_{m+2}=x_{m+2}^{(0)}, \ldots, x_n=x_n^{(0)}$ и введем обозначения

$$x^*=(x_1, \ldots, x_{m+1})$$
$$Q_\delta^{m+1}=\{x^*: |x_i-x_i^{(0)}|<\delta,\ i=1, 2, \ldots, m+1\}.$$

Очевидно, функции $f_j(x_1, \ldots, x_{m+1}, x_{m+2}^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)})$, $j=0, 1, \ldots, m$, определены и непрерывно дифференцируемы всюду в Q_δ^{m+1}. Рассмотрим отображение $\Phi: Q_\delta^{m+1} \to R^{m+1}$, задаваемое формулами

$$\begin{aligned} y_1&=f_0(x_1, \ldots, x_{m+1}, x_{m+2}^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}) \\ y_2&=f_1(x_1, \ldots, x_{m+1}, x_{m+2}^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}) \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ y_{m+1}&=f_{m+1}(x_1, \ldots, x_{m+1}, x_{m+2}^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}). \end{aligned} \tag{43.17}$$

В силу (43.16) для точки $x^{*(0)}=(x_1^{(0)}, \ldots, x_{m+1}^{(0)})$ имеем

$$\left.\frac{\partial(y_1, \ldots, y_{m+1})}{\partial(x_1, \ldots, x_{m+1})}\right|_{x^*=x^{*(0)}}=\left.\frac{\partial(f_0, f_1, \ldots, f_m)}{\partial(x_1, x_2, \ldots, x_{m+1})}\right|_{x=x^{(0)}}=0,$$

а в силу (43.15) $\Phi(x^{*(0)})=(f_0(x^{(0)}), 0, \ldots, 0)$. Поэтому (см. теорему 7 в п. 41.8 о локальной обратимости непрерывно дифференцируемого отображения в точке, в которой его якобиан не равен нулю) существует такое $\varepsilon>0$, что на окрестности

$$V=\{y=(y_1, \ldots, y_{m+1}): : |y_1-f_0(x^{(0)})|<\varepsilon, \ |y_j|<\varepsilon, j=2, 3, \ldots, m+1\}$$

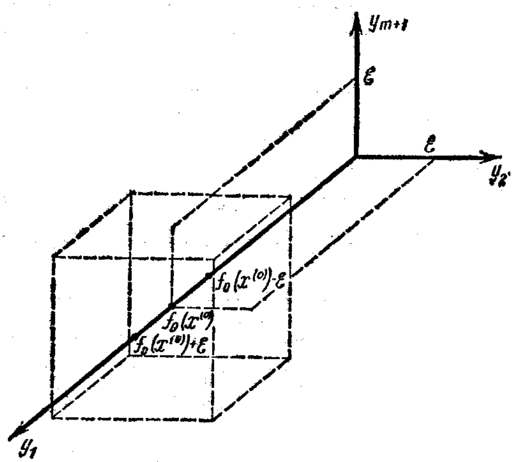


Рис. 159

(рис. 159) определено обратное к Φ отображение, и, следовательно, в любую точку этой окрестности отображается какая-то точка из Q_δ^{m+1}.

В частности, поскольку при любом η, $0<\eta<\varepsilon$, имеет место включение $(f(x^{(0)})\pm\eta, 0, \ldots, 0)\in V$, то в кубе Q_δ^{m+1} найдутся точки $x'^*=(x_1', \ldots, x_{m+1}')$ и $x''^*=(x_1'', \ldots, x_{m+1}'')$, отображающиеся при отображении Φ в указанные точки окрестности V:

$\Phi(x'^*)=(f(x^{(0)})+\eta, 0, \ldots, 0)$, $\Phi(x''^*)=(f(x^{(0)})-\eta, 0, \ldots, 0)$. Если положим для краткости $x'=(x_1', \ldots, x_{m+1}', x_{m+2}^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)})$ и $x''=(x_1'', \ldots, x_{m+1}'', x_{m+2}^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)})$, то в координатной записи (см. (43.17)) получим

$$f_0(x') = f_0(x^{(0)}) + \eta > f(x^{(0)}),$$

$$f_k(x') = 0, \qquad k = 1, 2, \ldots, m, \quad x' \in Q_\delta^n$$

и

$$f_0(x'') = f_0(x^{(0)}) - \eta < f(x^{(0)}),$$

$$f_k(x'') = 0, \qquad k = 1, 2, \ldots, m, \quad x'' \in Q_\delta^n.$$

В силу произвольности $\delta > 0$, $0 < \delta < \delta_0$, это и означает, что $x^{(0)}$ не является точкой условного экстремума. □

Доказательство следствия. Если векторы $\nabla f_1, \ldots, \nabla f_m$ линейно независимы, то в равенстве (43.10) имеем $\lambda_0 \neq 0$, так как в случае $\lambda_0 = 0$ указанные векторы в силу (43.10) оказались бы линейно зависимыми. Разделив обе части (43.10) на λ_0, получим равенство вида (43.11). □

43.3*. ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ИНТЕРПРЕТАЦИЯ МЕТОДА ЛАГРАНЖА

Дадим теперь некоторые геометрические пояснения к теореме 1. Рассмотрим для простоты случай условного экстремума функции двух переменных $z = f(x, y)$ при выполнении уравнения связи $\varphi(x, y) = 0$.

Пусть функции f и φ непрерывно дифференцируемы в окрестности точки (x_0, y_0), $\nabla\varphi(x_0, y_0) = \left(\frac{\partial\varphi(x_0, y_0)}{\partial x}, \frac{\partial\varphi(x_0, y_0)}{\partial y}\right) \neq 0$ и $\varphi(x_0, y_0) = 0$. В силу условия $\nabla\varphi(x_0, y_0) \neq 0$, согласно теореме о неявных функциях, уравнение $\varphi(x, y) = 0$ в окрестности точки (x_0, y_0) задает некоторую гладкую кривую, обладающую явным представлением либо вида $y = y(x)$, либо вида $x = x(y)$. Поскольку нас интересуют только достаточно близкие к (x_0, y_0) точки, то указанную кривую будем называть просто кривой $\varphi(x, y) = 0$ (т. е. попросту говоря, всюду в дальнейшем будем рассматривать сужение функции f и φ на указанную окрестность точки (x_0, y_0)).

Градиент $\nabla\varphi(x_0, y_0)$ является нормалью к кривой $\varphi(x, y) = 0$ в точке (x_0, y_0) (п. 20.6). Обозначим через τ единичный касательный вектор к кривой $\varphi(x, y)$ в точке (x_0, y_0). Пусть для определенности рассматриваемая кривая задается уравнением $y = y(x)$. Если (x_0, y_0) — точка условного экстремума, то x_0 является точкой обычного экстремума для функции $g(x) \overset{\text{def}}{=} f(x, g(x))$ (см. п. 43.1) и поэтому $g'(x) = 0$, т. е. производная функции f в точке (x_0, y_0) в направлении кривой $\varphi(x, y) = 0$, или, что то же (см. п. 20.7), в направлении вектора τ, равна нулю,

$$\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial \tau} = (\nabla f(x_0, y_0), \tau) = 0.$$

Это означает ортогональность градиента $\nabla f(x_0, y_0)$ и касательного вектора τ, что равносильно коллинеарности векторов $\nabla f(x_0, y_0)$ и $\nabla\varphi(x_0, y_0)$:

$$\nabla f(x_0, y_0) = \lambda\nabla\varphi(x_0, y_0),$$

т. е. выполняется условие (43.11). Выполнение этого условия в точке условного экстремума можно пояснить и другим путем. Пусть $f(x_0, y_0) \overset{\text{def}}{=} c$. Если в точке (x_0, y_0) не выполняется условие (43.11), т. е. градиенты ∇f и $\nabla\varphi$ не коллинеарны, то это означает, что в этой точке $\nabla f \neq 0$ и линия уровня $f(x, y) = c$ и кривая $\varphi(x, y) = 0$ в этой точке пересекаются под некоторым углом α, отличным от 0 и π (рис. 160). Поэтому в любой достаточно малой окрестности точки (x_0, y_0) часть кривой $\varphi(x, y) = 0$ окажется расположенной в области $f < c$ (в «области меньших значений»), а часть — в области $f > c$ (в «области больших значений»). Это означает, что в точке (x_0, y_0) нет рассматриваемого условного экстремума.

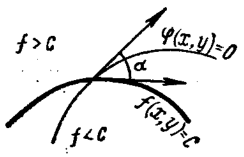


Рис. 160

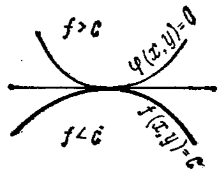


Рис. 161

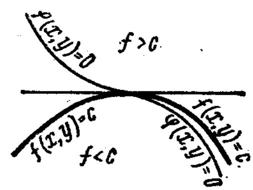


Рис. 162

В случае же, когда векторы ∇f и $\nabla\varphi$ коллинеарны, $\nabla f = \lambda\Delta\varphi$ часть кривой $\varphi(x, y) = 0$ может принадлежать некоторой окрестности точки (x_0, y_0), целиком лежащей в области меньших значений $f < c$ (рис. 161) или в области больших значений $f > c$. В этом случае в точке (x_0, y_0) достигается условный экстремум.

Однако в случае коллинеарности векторов ∇f и $\nabla\varphi$ кривая $\varphi(x, y) = 0$ также может оказаться расположенной в любой достаточно малой окрестности точки (x_0, y_0) частично в области меньших, а частично в области больших значений функции f (рис. 162) — тогда в точке (x_0, y_0) снова не будет условного экстремума. Подобная ситуация возникает, например, когда кривые $f(x, y) = c$ и $\varphi(x, y) = 0$ имеют в точке (x_0, y_0) общую касательную, причем кривая $f(x, y) = c$ расположена в достаточно малой окрестности точки (x_0, y_0) по одну сторону от этой касательной, а кривая $\varphi(x, y) = 0$ имеет в этой точке перегиб, переходя с одной стороны касательной на другую.

Сказанное поясняет то обстоятельство, что (43.10) является **необходимым, но не достаточным условием** для условного экстремума.

Приведенные геометрические рассмотрения вопроса об условном экстремуме распространяются и на многомерный случай.

43.4*. СТАЦИОНАРНЫЕ ТОЧКИ ФУНКЦИИ ЛАГРАНЖА

В этом пункте будет дано описание стационарных точек функции Лагранжа (43.13) посредством функции $g(x_{m+1}, \ldots, x_n)$, введенной в п. 43.1 (см. (43.8)). Предварительно докажем одну простую лемму из линейной алгебры.

Пусть задана система линейных однородных уравнений

$$a_{i1}x_1 + \ldots + a_{in}x_n = 0, \qquad i = 1, 2, \ldots, m, \tag{43.18}$$

и еще одно линейное однородное уравнение

$$b_1x_1 + \ldots + b_nx_n = 0. \tag{43.19}$$

Систему уравнений, получаемую присоединением к системе (43.18) уравнения (43.19), будем называть *расширенной системой* (43.18) — (43.19).

Лемма. *Для того чтобы расширенная система* (43.18)—(43.19) *была равносильна основной системе* (43.18) *необходимо и достаточно, чтобы уравнение* (43.19) *являлось линейной комбинацией уравнений системы* (43.18).

Следствие. *Для того чтобы уравнение* (43.19) *было линейной комбинацией уравнений* (43.18) *или, что то же, чтобы вектор*

$$b \stackrel{\text{def}}{=} (b_1, \ldots, b_n) \tag{43.20}$$

был линейной комбинацией векторов

$$a_i \stackrel{\text{def}}{=} (a_{i1}, \ldots, a_{in}), \qquad i = 1, 2, \ldots, m, \tag{43.21}$$

необходимо и достаточно, чтобы каждое решение системы (43.18) *являлось решением уравнения* (43.19).

Доказательство леммы. Пусть ранг матрицы (a_{ij}) коэффициентов системы (43.18) равен m_0. Очевидно, что $m_0 \leq m$. Если $m_0 < m$, то $m - m_0$ уравнений системы (43.18) являются линейными комбинациями остальных. Отбросив те $m - m_0$ линейные уравнения, которые являются линейными комбинациями оставшихся, получим систему из m_0 линейно независимых уравнений, равносильную системе (43.18), причем уравнение (43.19) является линейной комбинацией уравнений системы (43.18) тогда и только тогда, когда оно является линейной комбинацией указанной системы из оставшихся m_0 уравнений. Поэтому будем с самого начала считать, что $m = m_0$, т. е. что ранг матрицы (a_{ij}) коэффициентов системы (43.18) равен m—числу уравнений этой системы.

Пусть системы (43.18) и (43.18)—(43.19) равносильны. Это означает, что пространства их решений совпадают. Поскольку все уравнения основной системы (43.18) входят в расширенную систему (43.18)—(43.19), то каждое решение расширенной системы является и решением основной системы, т. е. пространство решений расширенной системы содержится в пространстве решений основной системы. Следовательно, совпадение этих пространств равносильно равенству их размерностей.

Размерность s пространства решений системы линейных однородных уравнений равна, как известно, числу неизвестных n этой системы, из которого вычтен ранг r матрицы коэффициентов системы: $s=n-r$. Отсюда следует, что равносильность систем (43.18) и (43.18)—(43.19) означает равенство рангов их матриц. Ранг матрицы коэффициентов системы (43.18) по условию равен m, т. е. векторы (43.21) линейно независимы.

Ранг матрицы коэффициентов расширенной системы (43.18)—(43.19) согласно сказанному в наших условиях также равен m. Поэтому векторы (см. (43.20) и (43.21))

$$b,\ a_1,\ \ldots,\ a_m \tag{43.22}$$

линейно зависимы. А это означает, что b является линейной комбинацией векторов $a_1, \ldots, a_m$.

В самом деле, линейная зависимость векторов (43.22) означает, что существуют такие числа $\mu_0, \mu_1, \ldots, \mu_m$, не все равные нулю, что

$$\mu_0 b+\mu_1 a_1+\ldots+\mu_m a_m=0. \tag{43.23}$$

Здесь заведомо $\mu_0 \neq 0$, так как в противном случае векторы $a_1, \ldots$ $\ldots, a_m$ оказались бы линейно зависимыми. Поделив равенство (43.23) на μ_0, получим, что b является линейной комбинацией векторов $a_1, \ldots, a_m$.

Обратно, если b является линейной комбинацией векторов (43.21), то в системах векторов (43.21) и (43.22) имеется в точности по m линейно независимых векторов, т. е. ранги матриц коэффициентов систем уравнений (43.18) и (43.18)—(43.19) равны.

Итак, условие, что вектор b является линейной комбинацией векторов (43.21):

$$b=\lambda_1 a_1+\ldots+\lambda_m a_m$$

эквивалентно равенству рангов матриц коэффициентов рассматриваемых основной и расширенной системы уравнений, а следовательно, эквивалентно их равносильности. □

Утверждение следствия сразу следует из леммы, поскольку системы (43.18) и (43.18)—(43.19) очевидно равносильны тогда и только тогда, когда каждое решение системы (43.18) является и решением уравнения (43.19) — остальные уравнения этих систем просто совпадают. □

З а м е ч а н и е 1. Доказанная лемма и ее следствия имеют простую геометрическую интерпретацию в n-мерном е в к л и д о в о м векторном пространстве R^n, т. е. в n-мерном пространстве со скалярным произведением. Используя обозначение скалярного произведения, систему (43.18) можно записать в виде

$$(a_i, x)=0, \qquad i=1, 2, \ldots, m, \tag{43.24}$$

а уравнение (43.19) в виде

$$(b,\ x) = 0, \tag{43.25}$$

где векторы $a_1, \ldots, a_m$ и b определены в (43.20) и (43.21), а $x = (x_1, \ldots, x_n)$.

Множество всевозможных линейных комбинаций векторов $a_1, \ldots, a_m$ образует подпространство пространства R^n и называется *подпространством, натянутым* на эти *векторы*. Обозначим его через $\mathscr{L}(a_1, \ldots, a_m)$.

Множество решений системы (43.24) состоит из всех векторов x, ортогональных подпространству $\mathscr{L}(a_1, \ldots, a_m)$. Обозначим это множество решений через T. Оно также является подпространством пространства R^n.

Подпространства $L \overset{\text{def}}{=} \mathscr{L}(a_1, \ldots, a_m)$ и T называются *ортогональными дополнениями* друг другу в *пространстве* R^n.

Поскольку $L = \mathscr{L}(a_1, \ldots, a_m)$, то представимость вектора b в виде линейной комбинации векторов $a_1, \ldots, a_m$ равносильна его принадлежности подпространству L пространства R^n: $b \in L$. Это условие, в свою очередь, равносильно ортогональности вектора b подпространству T: $b \perp T$, которая означает, что для всех $x \in T$ имеет место равенство $(b, x) = 0$, т. е. что любое решение x системы (43.24) является решением уравнения (43.25). Это и является утверждением следствия леммы.

Замечание 2. Напомним метод, которым можно получить все решения однородной системы линейных уравнений. Пусть система (43.18) состоит из линейно независимых уравнений. Тогда ранг матрицы его коэффициентов равен m. Это означает, что существует минор этой матрицы порядка m, не равный нулю. Пусть для определенности

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1m} \\ a_{m1} & \ldots & a_{mm} \end{vmatrix} \neq 0. \tag{43.26}$$

В этом случае все решения системы (43.18) можно получить, задавая произвольно последние $n-m$ координаты вектора $(x_1, \ldots, x_n)$. Остальные координаты однозначно находятся из системы уравнений (43.18). В самом деле, возьмем произвольное решение $(x_1^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)})$ системы (43.18). После подстановки $x_{m+1} = x_{m+1}^{(0)}, \ldots, x_n = x_n^{(0)}$ в (43.18) получится система из m линейных уравнений (с m неизвестными $x_1, \ldots, x_m$), матрица коэффициентов которой в силу условия (43.26) невырожденная. Поэтому существуют единственные значения $x_1, \ldots, x_m$, удовлетворяющие получившейся системе. Поскольку $(x_1^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)})$ также было решением системы (43.18), то $x_1 = x_1^{(0)}, \ldots, x_m = x_m^{(0)}$.

Перейдем теперь к анализу стационарных точек функции Лагранжа.

Теорема 2. *Пусть функции $f_0, f_1, \ldots, f_m$ непрерывно дифференцируемы в области $G \subset R^n$, $x^{(0)} \in G$,*

$$f_i(x^{(0)}) = 0, \qquad i = 1, 2, \ldots, m,$$

и ранг матрицы Якоби функций $f_1, \ldots, f_m$ в точке $x^{(0)}$ равен m. Для того чтобы в точке $x^{(0)} = (x_1^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)})$ градиент ∇f_0 являлся линейной комбинацией градиентов $\nabla f_1, \ldots, \nabla f_m$ необходимо и достаточно, чтобы точка $x^{(0)} = (x_{m+1}^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)})$ была стационарной точкой для функции $g(x) = g(x_{m+1}, \ldots, x_n)$ (см. (43.8)).

Напомним, что если в точке $x^{(0)}$ градиент ∇f_0 является линейной комбинацией

$$\nabla f_0 = \lambda_1 \nabla f_1 + \ldots + \lambda_m \nabla f_m, \tag{43.27}$$

градиентов $\nabla f_1, \ldots, \nabla f_m$, то это равносильно тому, что существует функция Лагранжа

$$F = f_0 - \lambda_1 f_1 - \ldots - \lambda_m f_m, \tag{43.28}$$

для которой точка $x^{(0)}$ является стационарной:

$$\frac{\partial F(x^{(0)})}{\partial x_i} = 0, \qquad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{43.29}$$

Это просто координатная запись условия (43.27), ибо в силу (43.28)

$$\frac{\partial F}{\partial x_i} = \frac{\partial f_0}{\partial x_i} - \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial x_i} - \ldots - \lambda_m \frac{\partial f_m}{\partial x_i}, \qquad i = 1, \ldots, m.$$

Доказательство. По условию ранг матрицы Якоби системы функций $f_1, \ldots, f_m$ в точке $x^{(0)}$ равен m. Будем считать для определенности, как и в п. 43.1, что

$$\left.\frac{\partial(f_1, \ldots, f_m)}{\partial(x_1, \ldots, x_m)}\right|_{x^{(0)}} \neq 0. \tag{43.30}$$

Подставим в уравнение связи (43.3) функции (43.7), являющиеся решением этих уравнений, и продифференцируем получившиеся относительно переменных $x_{m+1}, \ldots, x_n$ тождества. Получим для точки $\tilde{x}^{(0)}$ равенства $df_i(\tilde{x}^{(0)}) = 0$, $i = 1, 2, \ldots, m$, справедливые для любых приращений $dx_{m+1}, \ldots, dx_n$ независимых переменных $x_{m+1}, \ldots, x_n$ (напомним, что дифференциал является линейной функцией, определенной на всем пространстве). Использовав инвариантность формы первого дифференциала относительно выбора переменных, получим, что в точке $x^{(0)}$ выполняются равенства

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_1} dx_1 + \ldots + \frac{\partial f_i}{\partial x_m} dx_m + \frac{\partial f_i}{\partial x_{m+1}} dx_{m+1} + \ldots + \frac{\partial f_i}{\partial x_n} dx_n = 0, \tag{43.31}$$
$$i = 1, 2, \ldots, m,$$

где $dx_{m+1}, \ldots, dx_n$ произвольны, а $dx_1, \ldots, dx_m$ находятся из формул (43.7). Таким образом вектор

$$dx = (dx_1, \ldots, dx_m, dx_{m+1}, \ldots, dx_n) \tag{43.32}$$

является решением линейной однородной системы (43.31).

Отметим, что в силу условия (43.30) значения $dx_1, \ldots, dx_m$ при заданных $dx_{m+1}, \ldots, dx_n$ однозначно находятся и из системы (43.31). Из замечания 2 следует также, что указанным способом получаются все решения системы (43.31).

Стационарность точки $\tilde{x}^{(0)}$ для функции $g(\tilde{x}) = g(x_{m+1}, \ldots, x_n)$ означает, что $dg(\tilde{x}^{(0)}) = 0$. Это равенство, в силу инвариантности формы первого дифференциала, можно более подробно записать в виде

$$\frac{\partial f_0}{\partial x_1} dx_1 + \ldots + \frac{\partial f_0}{\partial x_m} dx_m + \frac{\partial f_0}{\partial x_{m+1}} dx_{m+1} + \ldots + \frac{\partial f_0}{\partial x_n} dx_n = 0, \tag{43.33}$$

где $dx_{m+1}, \ldots, dx_n$ можно задавать произвольно, а $dx_1, \ldots, dx_m$ следует находить из формул (43.7) или, что дает тот же результат, из формул (43.31). Иначе говоря, любое решение системы уравнений (43.31) является и решением уравнения (43.33). Согласно следствию из леммы это возможно тогда и только тогда, когда уравнение (43.33) является линейной комбинацией уравнений системы (43.31), т. е. когда существуют такие числа $\lambda_1, \ldots$ $\ldots, \lambda_m$, что

$$\nabla f_0 = \lambda_1 \nabla f_1 + \ldots + \lambda_m \nabla f_m. \ \square$$

З а м е ч а н и е 3. Согласно замечанию 2 совокупность всех решений системы уравнений (43.31) образует подпространство T пространства R^n, являющееся ортогональным дополнением к подпространству $L = \mathscr{L}(\nabla f_1, \ldots, \nabla f_m)$. Любой вектор $y \in T$ ортогонален каждому градиенту ∇f_i, а поэтому его естественно назвать *касательным вектором* в точке $x^{(0)}$ к гиперповерхности $f_i(x) = 0$, являющейся множеством уровня (см. § 19) функции f_i, $i = 1, \ldots$ $\ldots, m$.

Таким образом, пространство решений T системы (43.31), состоит из векторов, касательных одновременно ко всем гиперповерхностям $f_i(x) = 0$, $i = 1, \ldots, m$, и потому его называют касательным пространством пересечения всех гиперповерхностей $f_i(x) = 0$, $i = 1, 2, \ldots, m$. Напомним, что векторы касательного пространства T, т. е. решения системы (43.31), были обозначены через dx (см. (43.32)).

Поскольку в точке условного экстремума согласно теореме 2 имеет место включение

$$\nabla f_0 \in L = \mathscr{L}(\nabla f_1, \ldots, \nabla f_m),$$

то

$$\nabla f_0 \perp T.$$

Иначе говоря, градиент ∇f_0 одновременно ортогонален всем касательным dx к гиперповерхностям $f_i(x)=0$, $i=1, 2, \ldots, m$:

$$(\Delta f_0,\ dx)=0$$

(это другая запись уравнения (43.33)), т. е. градиент ∇f_0 перпендикулярен касательному пространству T в точке $x^{(0)}$. Но множество всех векторов, ортогональных к ∇f_0, образует $(n-1)$-мерное подпространство T_0, называемое касательным пространством к гиперповерхности $f_0(x)=f_0(x^{(0)})$. В силу сказанного выше, каждый вектор из T, будучи ортогонален градиенту ∇f_0, принадлежит к T_0, т. е. $T\subset T_0$.

Итак, *если $x^{(0)}$ — точка условного экстремума, то $T\subset T_0$, т. е. касательное пространство в точке $x^{(0)}$ пересечения всех гиперповерхностей, задаваемых уравнениями связи, содержится в касательном пространстве в той же точке гиперповерхности $f_0(x)=f_0(x^{(0)})$.*

Замечание 4. Из теоремы 2 еще раз вытекает следствие теоремы 1. В самом деле, если $x^{(0)}$ является точкой условного экстремума, то $\tilde{x}^{(0)}$ является точкой обычного экстремума для функции g (см. п. 43.1) и, следовательно, ее стационарной точкой. Поэтому согласно теореме 2 точка $x^{(0)}$ является стационарной точкой для функции Лагранжа, т. е. выполняется условие (43.29).

43.5*. ДОСТАТОЧНЫЕ УСЛОВИЯ ДЛЯ ТОЧЕК УСЛОВНОГО ЭКСТРЕМУМА

В этом пункте также будем предполагать выполненными все предположения, наложенные на функции f_0 и f_i, $i=1, 2, \ldots, m$, в п. 43.1. Пусть

$$F=f_0+\sum_{i=1}^{m}\lambda_i f_i$$

— функция Лагранжа (см. (43.13)) для функции f_0 и уравнений связи (43.3). Пусть $x^{(0)}\in G$ удовлетворяет уравнениям связи (43.3) и является стационарной точкой функции Лагранжа, т. е. точкой, координаты которой удовлетворяют системе уравнений (43.12) и (43.3). Нашей целью является получение метода, с помощью которого можно установить условия, достаточные для того, чтобы $x^{(0)}$ являлась точкой условного экстремума рассматриваемой задачи.

Заметим прежде всего, что если точка $x\in G$ удовлетворяет уравнениям связи (43.3), то

$$\Delta f=f(x)-f(x^{(0)})=F(x)-F(x^{(0)})=\Delta F. \qquad (43.34)$$

Отсюда сразу видно, что если $x^{(0)}$ является точкой обычного экстремума для функции F, т. е. ΔF не меняет знака в некоторой окрестности точки $x^{(0)}$, то $x^{(0)}$ является точкой условного экстремума для функции f_0.

Действительно, из (43.34) следует в этом случае, что приращение Δf_0 для допустимых значений x, т. е. удовлетворяющих уравнением связи, также не меняет знака. Это достаточное условие, однако, накладывает слишком сильное ограничение на поведение функции Лагранжа $F(x)$ в рассматриваемой точке — она должна иметь обычный экстремум, что сильно сужает область возможного применения указанного условия при решении задач. Поэтому целесообразно получить более общий достаточный признак условного экстремума.

Пусть $x^{(0)}=(x_1^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)})$ удовлетворяет уравнениям связи (43.3). Вернемся к рассмотрению функции (43.8), т. е. функции $g(\tilde{x})=g(x_{m+1}, \ldots, x_n)$, $\tilde{x}=(x_{m+1}, \ldots, x_n)$, получаемой из $f_0(x)= = f_0(x_1, \ldots, x_n)$ при условии, что $x_1, \ldots, x_m$ являются функциями переменных $x_{m+1}, \ldots, x_n$, определяемыми уравнениями связи (43.3) в некоторой окрестности точки $x^{(0)}$. Будем дополнительно предполагать, что $f_0(x)$ и $f_i(x)$, $i=1, 2, \ldots, m$, дважды непрерывно дифференцируемы в точке $x^{(0)}$.

Выше отмечалось (см. п. 43.1), что $x^{(0)}$ является точкой условного (строгого) экстремума для функции $f_0(x)$ относительно уравнений связи (43.3) тогда и только тогда, когда $\tilde{x}^{(0)}=(x_{m+1}^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)})$ является точкой обычного (строгого) экстремума для функции $g(x)$. Поэтому, если например, в точке $x^{(0)}$ функция $g(x)$ удовлетворяет достаточным условиям существования строгого экстремума, то в этой точке функция $f_0(x)$ имеет условный строгий экстремум относительно уравнений связи (43.3). Достаточные условия для обычного строгого экстремума были получены нами ранее (см. теорему 2 в п. 40.2). Для нашего случая они имеют вид:

$$1)\ \frac{\partial g(\tilde{x}^{(0)})}{\partial x_i}=0, \qquad i=m+1, \ldots, n; \tag{43.35}$$

2) второй дифференциал

$$d^2 g(\tilde{x}^{(0)})=\sum_{i,\ j=m+1}^{n} \frac{\partial^2 g(\tilde{x}^{(0)})}{\partial x_i \partial x_j} dx_i\, dx_j \tag{43.36}$$

является положительно или отрицательно определенной квадратичной формой.

При выполнении этих условий $\tilde{x}^{(0)}$ является точкой строгого минимума или максимума для функции $g(x)$. В силу сказанного выше указанные условия являются и достаточными условиями для того, чтобы $x^{(0)}$ являлась точкой условного строгого минимума (максимума) для функции $f_0(x)$ относительно уравнений связи (43.3). Однако они неудобны для практического использования, так как требуют знания функции $g(\tilde{x})$. Поэтому, исходя из полученных достаточных условий условного строгого экстремума, выраженных посредством функции $g(\tilde{x})$, получим достаточные условия того же экстремума, но выраженные только через функцию Лагранжа и уравнения связи.

Прежде всего заметим, что в силу условия (43.6) система (43.31) разрешима, и притом однозначно, относительно $dx_1, \ldots, dx_m$ при произвольно фиксированных $dx_{m+1}, \ldots, dx_n$. Систему (43.31), выражающую равенство нулю дифференциалов функций $f_i(x)$ в точке $x^{(0)}$:

$$df_i = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, m,$$

при выполнении условий (43.3), будем записывать кратко в виде

$$df = 0, \tag{43.37}$$

где $f = (f_1, \ldots, f_m)$.

Пусть $x^{(0)}$ является стационарной точкой для функции Лагранжа $F(x)$ (см. (43.13)). Это означает, что $dF(x^{(0)}) = 0$, т. е. что в этой точке $\nabla f_0 + \sum\limits_{i=1}^{m} \nabla f_i = 0$. В теореме 2 п. 43.4* было показано, что в этом случае $\tilde{x}^{(0)}$ является стационарной точкой для функции $g(\tilde{x})$, т. е.

$$dg(\tilde{x}^{(0)}) = 0. \tag{43.38}$$

Поясним еще раз вывод этой формулы и покажем, что

$$d^2g(\tilde{x}^{(0)}) = d^2F(x^{(0)})\,|_{df=0}. \tag{43.39}$$

Это равенство следует понимать как равенство функций $n-m$ переменных $dx_{m+1}, \ldots, dx_n$. В правой части равенства (43.39) остальные переменные $dx_1, \ldots, dx_m$, которые входят в выражения написанных дифференциалов, определяются из системы уравнений (43.37) или, что равносильно (см. формулы (43.7)),

$$dx_k = d\varphi_k(x_1, \ldots, x_{n-m}), \quad k = 1, 2, \ldots, m.$$

Используя инвариантность формы первого дифференциала относительно выбора переменных и формулу (43.8), имеем

$$dg(\tilde{x}^{(0)}) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f_0(\tilde{x}^{(0)})}{\partial x_j}\, dx_j.$$

Прибавим к этому равенству сумму (равную нулю) левых частей тождеств (43.31), умноженных соответственно на постоянные λ_i, входящие в функцию Лагранжа $F(x)$ (точнее, i-е равенство (43.31) умножается на постоянную λ_i). Тогда, использовав услоние (43.13), получим

$$dg(\tilde{x}^{(0)}) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j}\left[f_0(x) + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f_i(x)\right] dx_j \Bigg|_{x=x^{(0)}} =$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial F(x^{(0)})}{\partial x_j} dx_j = 0.$$

Утверждение (43.38) доказано.

Равенство (43.39) доказывается аналогичным приемом. Прежде всего напишем второй дифференциал для функции $g(\tilde{x})$ в точке $\tilde{x}^{(0)}$:

$$d^2 g(\tilde{x}^{(0)}) = \sum_{j,\,k=1}^{n} \frac{\partial^2 f_0(x^{(0)})}{\partial x_j \partial x_k} dx_j\, dx_k + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f_0(x^{(0)})}{\partial x_j} d^2 x_j. \qquad (43.40)$$

Далее, продифференцировав тождества, получающиеся в результате дифференцирования уравнений связи (43.3), т. е. тождества

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_1} dx_1 + \ldots + \frac{\partial f_i}{\partial x_n} dx_n = 0, \qquad i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n,$$

будем иметь в точке $x^{(0)}$:

$$\sum_{j,\,k=1}^{n} \frac{\partial^2 f_i(x^{(0)})}{\partial x_j \partial x_k} dx_j\, dx_k + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f_i(x^{(0)})}{\partial x_j} d^2 x_j = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, m. \quad (43.41)$$

Умножив i-е равенство (43.41) на постоянную λ_i, входящую в функцию Лагранжа $F(x)$, прибавим получившиеся выражения к правой части равенства (43.40); тогда получим

$$d^2 g(\tilde{x}^{(0)}) = \sum_{j,\,k=1}^{n} \frac{\partial^2 F(x^{(0)})}{\partial x_j \partial x_k} dx_j\, dx_k + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial F(x^{(0)})}{\partial x_j} d^2 x_j,$$

где dx_i, $i = 1, \ldots, n$ удовлетворяет системе уравнений (43.37). Поскольку точка $x^{(0)}$ стационарная для функции Лагранжа, то второй член получившегося равенства обращается в ноль, и тем самым формула (43.39) доказана.

Будем говорить, что квадратичная форма $d^2F(x^{(0)})$ является положительно (отрицательно) определенной квадратичной формой переменных dx_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, при условии, что эти переменные удовлетворяют системе уравнений (43.37), если для любых dx_i, $i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n$, удовлетворяющих этой системе уравнений и таких, что $\sum_{i=1}^{n} (dx_i)^2 > 0$, выполняется неравенство $d^2F(x^{(0)}) > 0$ (соответственно $d^2F(x^{(0)}) < 0$).

Пусть точка $x^{(0)}$ удовлетворяет уравнениям связи (43.3) и является стационарной для функции Лагранжа (43.13) и пусть второй дифференциал функции Лагранжа в этой точке является положительно (отрицательно) определенной квадратичной формой переменных $dx_1, \ldots, dx_n$ при условии, что они удовлетворяют системе уравнений (43.37). Тогда из (43.38) и (43.39) следует, что $\tilde{x}^{(0)}$ является стационарной точкой для функции $g(\tilde{x})$ и что второй дифференциал этой функции в точке $\tilde{x}^{(0)}$ является положительно (отрицательно) определенной квадратичной формой переменных $dx_{m+1}, \ldots, dx_n$, и, следовательно, функция $g(\tilde{x})$ имеет в точке $\tilde{x}^{(0)}$ строгий минимум (максимум), а значит, функция $f_0(x)$ имеет в точке $x^{(0)}$ условный строгий минимум (максимум) относительно уравнений связи (43.3).

Сформулируем полученный результат в виде теоремы.

Теорема 3. *Если* $x^{(0)} = (x_1^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)})$ *удовлетворяет уравнениям связи* (43.3) *и является стационарной точкой для функции Лагранжа* (43.13) *и если второй дифференциал функции Лагранжа в этой точке является положительно* (*отрицательно*) *определенной квадратичной формой переменных* $dx_1, \ldots, dx_n$ *при условии, что они удовлетворяют системе уравнений* (43.31), *то* $x^{(0)}$ *является точкой условного строгого минимума* (*максимума*) *для функции* f *относительно уравнений связи* (43.3).

Таким образом, чтобы исследовать стационарную точку функции Лагранжа (43.13) на условный экстремум, надо исследовать на определенность квадратичную форму (43.39), т. е. второй дифференциал функции Лагранжа в этой точке при выполнении условий связи (43.3) (когда дифференциалы dx_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, связаны соотношениями (43.31)). При этом следует иметь в виду, что если второй дифференциал функции Лагранжа в рассматриваемой точке окажется положительно (отрицательно) определенным и без выполнения условий связи, то он будет таковым, конечно, и при их выполнении.

Пусть, например, требуется найти точки экстремума функции $f(x, y) = xy$, когда точка (x, y) лежит на прямой $x - y = 0$. Функцией Лагранжа в данном случае является $F(x, y) = xy - \lambda(x - y)$, и так как $\frac{\partial F}{\partial x} = y - \tilde{\lambda}$, $\frac{\partial F}{\partial y} = x + \lambda$, то для определения стационарных точек функции $F(x, y)$, удовлетворяющих условиям связи, имеем систему уравнений

$$x - y = 0,$$

$$y - \lambda = 0,$$

$$x + \lambda = 0,$$

из которых следует, что $x = y = \lambda = 0$.

Исследуем в точке $(0, 0)$ второй дифференциал функции $F(x, y)$ при выполнении условий связи, т. е. когда $dx - dy = 0$. Имеем

$$d^2F = 2dx\,dy, \tag{43.42}$$

и, значит, при выполнении условий связи

$$d^2F = dx^2 \geqslant 0, \tag{43.43}$$

т. е. второй дифференциал (43.42), являясь неопределенной квадратичной формой, при выполнении условий связи превращается в положительно определенную квадратичную форму (43.43). Поэтому (0, 0) является точкой строгого условного минимума для рассмотренной задачи. Впрочем в данном случае это легко усмотреть и сразу: вдоль прямой $x-y=0$ функция $f(x, y)=xy$ примет вид $f(x, x)=x^2$, имея, очевидно, в точке $x=0$ строгий минимум.

Упражнения: Найти точки условного экстремума функций при указанных уравнениях связи:

1. $z=\frac{x}{a}+\frac{y}{b}$, $x^2+y^2=1$.
2. $z=x^2+y^2$, $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$.
3. $u=xyz$, $x^2+y^2+z^2=1$, $x+y+z=0$.
4. $u=x^2+y^2+z^2$, $Ax+By+Cz+D=0$.
5. $u=2x+y-z+1$, $x^2+y^2-2z^2-22=0$.
6. Найти наибольшее значение функции $z=xy$ в единичном круге $x^2+y^2\leqslant 1$.
7. В круг заданного радиуса вписать n-угольник наибольшей площади.
8. Представить число $a>0$ в виде суммы слагаемых $x_1, \ldots, x_n$ так, чтобы произведение $x_1^{\alpha_1}x_2^{\alpha_2}\ldots x_n^{\alpha_n}$ ($\alpha_i>0$, $i=1, \ldots, n$) принимало наибольшее значение.

ГЛАВА ШЕСТАЯ
ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ

§ 44. КРАТНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

44.1. ПОНЯТИЕ ОБЪЕМА В n-МЕРНОМ ПРОСТРАНСТВЕ (МЕРА ЖОРДАНА). ИЗМЕРИМЫЕ МНОЖЕСТВА

Напомним кратко основные понятия, связанные с определением n-мерного объема (площади в случае $n=2$) и дадим новое определение понятия объема (меры) множества, которое будет отличаться от введенного ранее (см. п. 31.1).

Пусть R^n — n-мерное евклидово пространство ($n=1, 2, 3, \ldots$). Его точки, как обычно, будем обозначать через $x=(x_1, \ldots, x_n)$, где x_i, $i=1, 2, \ldots, n$ — координаты точки x в некоторой раз и навсегда фиксированной системе координат. Зафиксируем целое неотрицательное число k, ($k=0, 1, \ldots$). Рассмотрим i-ю координатную ось ($i=1, 2, \ldots, n$), т. е. множество точек x с координатами $x_1=\ldots=x_{i-1}=x_{i+1}=\ldots=x_n=0$. Через ее точки с координатами вида $x_i=10^{-k}m$, $m=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ проведем ортогональные этой оси гиперплоскости размерности $n-1$. Множество всех таких гиперплоскостей, построенных для всех координатных осей x_i, $i=1, 2, \ldots, n$, порождает семейство n-мерных замкнутых кубов вида

$$Q^n=\left\{x: \frac{m_i}{10^k} \leqslant x_i \leqslant \frac{m_i+1}{10^k}, \quad i=1, 2, \ldots, n\right\}, \qquad (44.1)$$

где m_i, при $i=1, 2, \ldots, n$, пробегают независимо друг от друга множество всех целых чисел.

Кубы (44.1) называются *кубами ранга* k, и их совокупность обозначается через T_k, $k=0, 1, \ldots$.

Множество всех кубов ранга k, очевидно, покрывает все пространство, т. е.

$$R^n=\bigcup_{Q^n \in T_k} Q^n.$$

Два куба одного ранга могут иметь в качестве общих точек лишь некоторые свои граничные точки. В случае $n=1$ куб (44.1) является, очевидно, отрезком, а в случае $n=2$ — квадратом.

Число $1/10^{kn}$ называется n-мерным объемом куба (44.1) и обозначается через μQ^n:

$$\mu Q^n \stackrel{\text{def}}{=} 10^{-kn}.$$

Для множества S, представляющего собой объединение конечного или счетного числа различных кубов Q_j^n данного ранга k, $j = 1, 2, \ldots$:

$$S = \bigcup_j Q_j^n, \quad Q_j^n \in T_k,$$

его n-мерный объем μS определяется равенством

$$\mu S \stackrel{\text{def}}{=} \sum_j \mu Q_j^n. \tag{44.2}$$

Очевидно, μS неотрицательное число или $+\infty$.

Пусть теперь E — произвольное множество в R^n. Обозначим через $s_k = s_k(E)$ множество точек всех n-мерных кубов ранга k, целиком лежащих в E, а через $S_k = S_k(E)$ — множество точек всех n-мерных кубов ранга k, каждый из которых пересекается с множеством E по непустому множеству ($k = 0, 1, 2, \ldots$):

$$s_k(E) = \bigcup_{Q^n \subset E} Q^n,$$

$$S_k(E) = \bigcup_{Q^n \cap E \neq \varnothing} Q^n, \quad Q^n \in T_k.$$

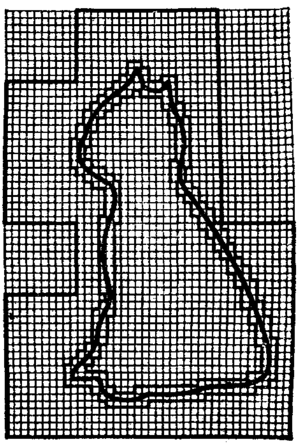


Рис. 163

Таким образом, все кубы ранга k, содержащиеся в s_k, лежат во множестве E, а кубы ранга k, содержащиеся в S_k, образуют покрытие множества E (рис. 163), т. е. $s_k(E) \subset E \subset S_k(E)$. При этом множество E лежит «строго внутри» многогранника $S_k = S_k(E)$, т. е. не пересекается с его границей ∂S_k. Действительно, точка $x \in E \cap \partial S_k$ не может существовать, так как будучи граничной для S_k, она принадлежала бы грани некоторого куба ранга k. Поскольку рассматриваемые кубы замкнуты, то по определению многогранника S_k к нему принадлежали бы и все кубы ранга k, содержащие указанную грань, ибо она содержит точку $x \in E$. Тем самым эта точка не была бы граничной для S_k.

Очевидно,

$$s_0 \subset s_1 \subset \ldots \subset s_k \subset s_{k+1} \subset \ldots$$

$$S_0 \supset S_1 \supset \ldots \supset S_k \supset S_{k+1} \supset \ldots$$

и, следовательно, в силу определения (44.2)

$$\mu s_0 \leqslant \mu s_1 \leqslant \ldots \leqslant \mu s_k \leqslant \mu s_{k+1} \leqslant \ldots$$
$$\mu S_0 \geqslant \mu S_1 \geqslant \ldots \geqslant \mu S_k \geqslant \mu S_{k+1} \geqslant \ldots. \qquad (44.3)$$

Таким образом, получились две монотонные последовательности, членами которых являются элементы расширенного множества действительных чисел $\bar{R}$ (см. п. 2.5), а именно, либо неотрицательные действительные числа, либо $+\infty$. Поэтому для любого множества $E \subset R^n$ всегда существуют конечные или бесконечные пределы

$$\lim_{k \to \infty} \mu s_k(E) \quad \text{и} \quad \lim_{k \to \infty} \mu S_k(E).$$

Определение 1. *Конечный или бесконечный предел* $\lim\limits_{k \to +\infty} \mu s_k(E)$ *называется нижней или внутренней n-мерной мерой Жордана**) *множества E и обозначается через* $\mu_* E$,

$$\mu_* E \overset{\text{def}}{=} \lim_{k \to +\infty} \mu s_k(E), \qquad (44.4)$$

а предел $\lim\limits_{k \to +\infty} \mu S_k(E)$ *называется верхней или внешней n-мерной мерой Жордана множества E и обозначается через* $\mu^* E$,

$$\mu^* E \overset{\text{def}}{=} \lim_{k \to +\infty} \mu S_k(E). \qquad (44.5)$$

Если нижняя $\mu_* E$ *и верхняя* $\mu^* E$ *меры множества E конечны и совпадают, то оно называется измеримым по Жордану. Общее значение нижней и верхней меры Жордана измеримого множества E обозначается через* μE *и называется n-мерной мерой Жордана или n-мерным объемом множества E*:

$$\mu E = \mu_* E = \mu^* E. \qquad (44.6)$$

Для пустого множества по определению полагается $\mu \varnothing = 0$.

Иногда вместо μE будем писать $\mu_n E$, для того чтобы подчеркнуть, что речь идет о мере множества E, рассматриваемого как подмножество именно n-мерного пространства.

В дальнейшем для простоты меру Жордана будем часто называть просто *мерой*, а множество, измеримое по Жордану, просто *измеримым*.

Под измеримым множеством, как это показывает сам смысл слова «измеримый», в математике подразумевается такое точечное множество в $\boldsymbol{R}^n$, которое можно каким-то образом измерить, т. е. сопоставить ему, по определенным правилам, некоторое неотрицательное число, являющееся объемом в трехмерном случае, площадью в двумерном и длиной в одномерном. Если размерность

*) К. Жордан (1838—1922) — французский математик.

пространства $n \geqslant 3$, то множество, измеримое по Жордану в этом пространстве, называется также *кубируемым*, а в случае $n=2$ — *квадрируемым*. Термины кубируемое и квадрируемое множество отражают собой тот факт, что указанное выше измерение множества осуществляется посредством кубов, соответственно квадратов.

Простым вычислением нетрудно проверить, что если множество E представляет собой объединение конечного числа различных n-мерных кубов ($n=1, 2, \ldots$) данного ранга, то оно измеримо и его мера Жордана совпадает с мерой, определенной равенством (44.2).

Для любого множества E при каждом $k=0, 1, 2, \ldots$, очевидно,

$$\mu s_k(E) \geqslant 0, \quad \mu S_k(E) \geqslant 0.$$

Перейдя к пределу при $k \to \infty$, получим $\mu_* E \geqslant 0$, $\mu^* E \geqslant 0$. Отсюда вытекает следующее свойство меры Жордана.

Свойство 1°. *Для всякого измеримого множества* $\mu E \geqslant 0$.

Далее заметим, что в силу определений (44.4) и (44.5) для любого множества E определена конечная или бесконечная нижняя и верхняя меры Жордана. При этом, поскольку для каждого $k=0, 1, 2, \ldots$ выполняется неравенство $0 \leqslant \mu s_k(E) \leqslant \mu S_k(E)$, то, выполнив предельный переход при $k \to \infty$, для любого множества E будем иметь

$$0 \leqslant \mu_* E \leqslant \mu^* E.$$

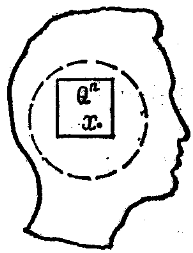


Рис. 164

Отсюда очевидным образом следует, что если верхняя мера множества E равна нулю, $\mu^* E = 0$, то множество E измеримо и $\mu E = 0$.

Если у множества E имеется внутренняя точка, то найдется такой номер k_0, что множество $s_{k_0}(E)$ будет непустым; следовательно $\mu s_{k_0}(E) > 0$, откуда в силу (44.3), (44.4) и (44.6) будет следовать, что $\mu_* E > 0$. В самом деле, если x — внутренняя точка множества E, то существует такое $\varepsilon > 0$, что сферическая окрестность $U(x, \varepsilon)$ содержится в E. Поэтому достаточно взять такой ранг k_0, чтобы длина диагонали куба*) ранга k_0 была меньше ε:

$$10^{-k_0}\sqrt{n} < \varepsilon.$$

Тогда куб Q^n ранга k, содержащий точку x (такой куб, по крайней мере один, всегда существует) будет целиком лежать во множестве $s_{k_0}(E)$ (рис. 164). Поэтому

$$\mu s_{k_0}(E) \geqslant \mu Q^n > 0.$$

Из сказанного следует, что нижняя *мера Жордана любого открытого множества* G всегда *положительна*: $\mu_* G > 0$.

*) Диагональ n-мерного куба с ребром длины a равна $a\sqrt{n}$.

Отметим, что определенный нами ранее в п. 31.1 объем открытого множества совпадает с его нижней мерой Жордана. Однако, для построения достаточно общего аналога интеграла Римана в случае функций многих переменных понятие только нижней меры Жордана оказывается недостаточным. Для этой цели очень удобно понятие измеримого по Жордану множества.

Если множество E ограничено, то $\mu_* E$ и $\mu^* E$ всегда конечны. Действительно, из ограниченности множества E следует, что оно пересекается только с конечным множеством кубов нулевого ранга и, следовательно, $S_0(E)$ состоит из конечного числа кубов. Поэтому согласно (44.2) $\mu S_0(E) < +\infty$. Но при любом $k=0, 1, \ldots$

$$s_k(E) \subset S_k(E) \subset S_0(E).$$

Поэтому

$$0 \leqslant \mu s_k(E) \leqslant \mu S_k(E) \leqslant \mu S_0(E).$$

Отсюда, перейдя к пределу при $k \to +\infty$, получим

$$0 \leqslant \mu_* E \leqslant \mu^* E \leqslant \mu S_0(E) < +\infty,$$

т. е. меры $\mu_* E$ и $\mu^* E$ конечны.

Если же множество E неограничено, то для любого $k = 0, 1, 2, \ldots$ множество $S_k(E)$ состоит из бесконечного количества кубов ранга k. Поэтому в силу формулы (44.2) для всех k имеем $\mu S_k(E) = +\infty$, следовательно и $\mu^* E = +\infty$, т. е. множество E заведомо не измеримо. Отсюда:

если множество измеримо по Жордану, то оно ограничено.

Как нижняя, так и верхняя меры Жордана обладают так называемым свойством монотонности. Сформулируем его в виде леммы.

Лемма 1. *Если $E_1 \subset E_2$, то*

$$\mu_* E_1 \leqslant \mu_* E_2, \qquad \mu^* E_1 \leqslant \mu^* E_2. \tag{44.7}$$

Это вытекает непосредственно из того, что при всех $k = 0, 1, 2, \ldots$ справедливы включения

$$s_k(E_1) \subset s_k(E_2), \qquad S_k(E_1) \subset S_k(E_2), \tag{44.8}$$

ибо первое из них означает, что куб ранга k, лежащий в E_1, лежит и в E_2, а второе, что куб ранга k, пересекающийся со множеством E_1, пересекается и с E_2. И то и другое утверждения следуют из включения $E_1 \subset E_2$. Из (44.8) в силу (44.2) вытекает справедливость неравенств

$$\mu s_k(E_1) \leqslant \mu s_k(E_2), \qquad \mu S_k(E_1) \leqslant \mu S_k(E_2).$$

Устремив здесь k к $+\infty$, получим в пределе (44.7). □

Следствие 1. *Если $E_1 \subset E_2$ и $\mu E_2 = 0$, то $\mu E_1 = 0$.*

Действительно, в силу леммы 1

$$0 \leqslant \mu^* E_1 \leqslant \mu^* E_2 = \mu E_2 = 0.$$

Следовательно, $\mu^* E_1 = 0$, откуда и $\mu E_1 = 0$. $\square$

Следствие 2. *Если $\mu E = 0$ и $\bar{E}$ — замыкание множества E (см. п. 18.2), то $\mu \bar{E} = 0$.*

В самом деле, из условия $\mu E = 0$ следует, что для любого $\varepsilon > 0$ существует такой ранг k, что

$$\mu S_k(E) < \varepsilon.$$

Многогранник $S_k(E)$ состоит из конечного числа замкнутых кубов (если количество кубов ранга k, входящих в множество $S_k(E)$, было бы бесконечным, то согласно (44.2) была бы бесконечной и его мера: $\mu S_k(E) = +\infty$) и, следовательно, является замкнутым множеством: $\overline{S_k(E)} = S_k(E)$. Но $E \subset S_k(E)$, поэтому $\bar{E} \subset \overline{S_k(E)} = S_k(E)$. Отсюда $\mu^* \bar{E} \leqslant \mu^* S_k(E) = \mu S_k(E)$, т. е. для любого $\varepsilon > 0$:

$$\mu^* \bar{E} < \varepsilon.$$

Это возможно только тогда, когда $\mu \bar{E} = 0$. $\square$

Из леммы 1 для измеримых множеств вытекает следующее свойство.

Свойство 2° (монотонность меры). *Если E_1 и E_2 — измеримые по Жордану множества и $E_1 \subset E_2$, то*

$$\mu E_1 \leqslant \mu E_2. \tag{44.9}$$

Лемма 2 (полуаддитивность верхней меры). *Для любой конечной совокупности множеств $E_1, E_2, \ldots, E_m$ имеет место неравенство*

$$\mu^* \bigcup_{j=1}^{m} E_j \leqslant \bigcup_{j=1}^{m} \mu^* E. \tag{44.10}$$

Доказательство. Для любого ранга $k = 0, 1, 2, \ldots$ справедливо равенство

$$S_k\left(\bigcup_{j=1}^{m} E_j\right) = \bigcup_{j=1}^{m} S_k(E_j).$$

В самом деле, каждый куб ранга k, который пересекается с множеством $\bigcup_{j=1}^{m} E_j$, пересекается хотя бы с одним из множеств E_j и наоборот. Поэтому в силу (44.2)

$$\mu S_k\left(\bigcup_{j=1}^{m} E_j\right) = \mu \bigcup_{j=1}^{m} S_k(E_j) \leqslant \sum_{j=1}^{m} \mu S_k(E_j).$$

Перейдя здесь к пределу при $k \to +\infty$, получим (44.10). $\square$

Следствие. *Объединение конечного числа множеств меры ноль имеет меру ноль.*

Действительно, если $\mu E_j = 0$, $j = 1, 2, \ldots, m$, то в силу (44.10)

$$\mu^* \bigcup_{j=1}^{m} E_j \leqslant \sum_{j=1}^{m} \mu^* E_j = \sum_{j=1}^{m} \mu E_j = 0.$$

Следовательно, множество $\bigcup_{j=1}^{m} E_j$ измеримо и его верхняя мера, а потому и мера равны нулю:

$$\mu \bigcup_{j=1}^{m} E_j = 0. \ \square$$

Упражнения. 1. Показать, что объединение счетной совокупности множеств жордановой меры ноль может не иметь меру ноль.

2. Доказать, что если E_1 и E_2 — открытые множества, то

$$\mu_* (E_1 \cup E_2) \leqslant \mu_* E_1 + \mu_* E_2.$$

Указание. Полезно воспользоваться утверждением, содержащимся в упражнении 11 п. 18.3.

Будет ли это неравенство всегда справедливым, т. е. без предположения об открытости множеств E_1 и E_2?

3. Привести пример таких непересекающихся множеств E_1 и E_2, что

$$\mu^* (E_1 \cup E_2) \neq \mu^* E_1 + \mu^* E_2.$$

Критерий измеримости множеств устанавливается следующей теоремой.

Теорема 1. *Для того чтобы множество E было измеримым по Жордану, необходимо и достаточно, чтобы оно было ограниченным и чтобы его граница ∂E имела меру Жордана, равную нулю:*

$$\mu \, \partial E = 0. \tag{44.11}$$

Для всякого множества E обозначим через $\sigma_k = \sigma_k(E)$ множество точек тех и только тех кубов ранга k, которые содержатся в $S_k(E)$ и не содержатся в $s_k(E)$:

$$\sigma_k(E) = \bigcup_{Q^n \subset S_k,\ Q^n \not\subset s_k} Q^n.$$

Таким образом, множество $\sigma_k(E)$ состоит из замкнутых кубов и теоретико-множественная разность $S_k(E) \setminus s_k(E)$ содержится во множестве $\sigma_k(E)$ и, вообще говоря, не совпадает с ним! С другой стороны

$$\overline{S_k(E) \setminus s_k(E)} = \sigma_k(E)\ ^{*)}.$$

*) Черта над множеством, как всегда, обозначает его замыкание (см. п. 18.2).

Доказательству теоремы 1 предпошлем лемму.

Лемма 3. *Для любого ограниченного множества* $E \subset R^n$ *справедливы включения*

$$\partial E \subset \sigma_k(E) \subset S_k(\partial E). \tag{44.12}$$

Доказательство леммы. Покажем сначала, что

$$\partial E \subset \sigma_k(E). \tag{44.13}$$

Поскольку $E \subset S_k(E)$, то $\bar{E} \subset \overline{S_k(E)}$. Множество $S_k(E)$ состоит, в силу ограниченности множества E, из конечного числа замкнутых кубов и поэтому замкнуто: $\overline{S_k(E)} = S_k(E)$. Следовательно, для любого $k=0, 1, 2, \ldots, \bar{E} \subset S_k(E)$, а значит и $\partial E \subset S_k(E)$, ибо $\partial E \subset \bar{E}$.

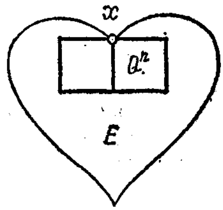


Рис. 165

Возьмем какую-либо граничную точку x множества $E: x \in \partial E$. В силу включения $\partial E \subset S_k(E)$ существует по крайней мере один такой куб Q^n ранга k, что $x \in Q^n$ и $Q^n \subset S_k(E)$. Если Q^n не содержится в $s_k(E)$, то, очевидно, $Q^n \subset \sigma_k(E)$, а следовательно, и $x \in \sigma_k(E)$.

Если же $Q^n \subset s_k(E)$ (рис. 165), то в силу включений $x \in Q^n$ и $Q^n \subset s_k(E) \subset E$ имеем $x \in E$. Поэтому в этом случае все кубы ранга k, содержащие точку x, лежат в $S_k(E)$, ибо пересечение всякого такого куба со множеством E содержит точку x и, следовательно, не пусто. Все эти кубы не могут принадлежать множеству E — в противном случае точка x была бы внутренней, а не граничной точкой множества E. Поэтому среди всех кубов ранга k, содержащих точку x, найдется по крайней мере один куб Q_0^n, который не содержится в $s_k(E)$, т. е. $Q_0^n \subset S_k(E)$, но $Q_0^n \not\subset s_k(E)$. Отсюда следует, что $Q_0^n \subset \sigma_k(E)$, и поскольку $x \in Q_0^n$, то и в этом случае $x \in \sigma_k(E)$. Точка x была произвольной точкой границы ∂E, а поэтому включение (44.13) доказано.

Второе включение (44.12), т. е. включение $\sigma_k(E) \subset S_k(\partial E)$ доказывается проще и даже без предположения об ограниченности множества E. Всякий куб Q^n ранга k, лежащий в $\sigma_k(E)$ имеет заведомо точки как из множества E (ибо в силу определения множества $\sigma_k(E)$ всякий куб ранга k, содержащийся в этом множестве, содержится и в $S_k(E)$, а следовательно, пересекается с E), так и точки, не принадлежащие E (ибо согласно тому же определению никакой куб ранга k, целиком лежащий в E, т. е. принадлежащий к $s_k(E)$, не содержится в $\sigma_k(E)$). Поскольку куб Q^n — линейно связное множество, то в нем заведомо имеются точки границы множества E (см. лемму 9 в п. 18.2). Это и означает, что $Q^n \subset S_k(\partial E)$, а поскольку Q^n был произвольным кубом ранга k, лежащим в $\sigma_k(E)$, то

$$\sigma_k(E) \subset S_k(\partial E). \ \square \tag{44.14}$$

Доказательство теоремы. Необходимость. Пусть E — измеримое множество. Тогда, как доказано выше, оно ограничено. Далее, согласно определению измеримого множества нижняя и верхняя меры множества E конечны и равны: $\mu_* E = \mu^* E$, т. е.

$$\lim_{k\to+\infty} \mu s_k(E) = \lim_{k\to\infty} \mu S_k(E). \tag{44.15}$$

Поскольку, согласно определению множества $\sigma_k(E)$ и формуле (44.2)

$$\mu\sigma_k(E) = \mu S_k(E) - \mu s_k(E), \tag{44.16}$$

то из (44.15) следует, что

$$\lim_{k\to+\infty} \mu\sigma_k(E) = 0. \tag{44.17}$$

В силу включения (44.13) и монотонности верхней меры (см. (44.7)) при любом $k=0, 1, 2, \ldots$ справедливо неравенство

$$\mu^*\partial E \leqslant \mu^*\sigma_k(E) = \mu\sigma_k(E).$$

Перейдя к пределу при $k\to+\infty$, в силу (44.17) получим $\mu^*\partial E = 0$.

Следовательно, множество ∂E измеримо по Жордану, и $\mu\partial E = 0$.

Достаточность. Пусть E — ограниченное множество и $\mu\partial E = 0$. Тогда, по определению меры

$$\lim_{k\to+\infty} \mu S_k(\partial E) = 0. \tag{44.18}$$

В силу включения (44.14) и монотонности меры (см. свойство 2 меры) справедливо неравенство $\mu\sigma_k(E) \leqslant \mu S_k(\partial E)$ и, следовательно, (см. (44.16)) неравенство

$$\mu S_k(E) - \mu s_k(E) \leqslant \mu S_k(\partial E). \tag{44.19}$$

Поскольку множество E — ограничено, то его нижняя мера $\mu_* E$ и верхняя $\mu^* E$ конечны и поэтому (см. (44.4) и (44.5)) в неравенстве (44.19) можно перейти к пределу при $k\to+\infty$. В силу (44.18) получим

$$\mu^* E - \mu_* E = 0, \text{ т. е. } \mu^* E = \mu_* E.$$

Это и означает измеримость по Жордану множества E. $\square$

С помощью теоремы 1 легко показать, что при теоретико-множественных операциях объединения множеств, пересечения и вычитания их измеримость не нарушается. Предварительно заметим, что для любых двух множеств E_1 и E_2, лежащих в пространстве R^n, справедливы включения (рис. 166)

$$\partial(E_1 \cup E_2) \subset \partial E_1 \cup \partial E_2, \tag{44.20}$$

$$\partial(E_1 \cap E_2) \subset \partial E_1 \cup \partial E_2, \tag{44.21}$$

$$\partial(E_1 \setminus E_2) \subset \partial E_1 \cup \partial E_2. \tag{44.22}$$

Докажем, например, включение (44.21). Пусть $x \in \partial(E_1 \cap E_2)$. Тогда, прежде всего, $x \in \bar{E}_1 \cap \bar{E}_2$, ибо из того, что $x \in \partial(E_1 \cap E_2)$ следует, что в любой окрестности точки x имеются точки, одновременно принадлежащие к E_1 и к E_2, т. е. x является точкой прикосновения как множества E_1, так и E_2. Если $x \in \partial E_1$, или $x \in \partial E_2$, или и то и другое, то, очевидно, $x \in \partial E_1 \cup \partial E_2$. Если же $x \notin \partial E_1$ и $x \notin \partial E_2$, то поскольку $x \in \bar{E}_1$ и $x \notin \partial E_1$, то x является внутренней точкой для множества E_1 и аналогично, внутренней точкой для множества E_2 (ибо замыкание всякого множества состоит только из внутренних точек этого множества и его граничных точек; каждое из них может, конечно, оказаться пустым). В этом случае у точки x существуют окрестности $U_1(x) \subset E_1$ и $U_2(x) \subset E_2$, пересечение $U(x) = U_1(x) \cap U_2(x)$ которых будет также окрестностью точки x, и, очевидно, $U(x) \subset E_1 \cap E_2$. Таким образом, у точки x нашлась окрестность $U(x)$, все точки которой принадлежат множеству $E_1 \cap E_2$, т. е. x — внутренняя, а не граничная точка этого множества: $x \notin \partial(E_1 \cap E_2)$. Полученное противоречие показывает, что случай $x \notin \partial E_1$ и одновременно $x \notin \partial E_2$ невозможен, если $x \in \partial(E_1 \cap E_2)$.

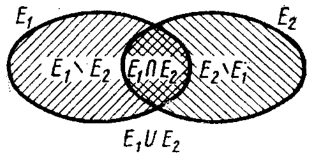


Рис. 166

Упражнение 4. Доказать включения (44.20) и (44.22).

Из включений (44.20) и (44.21) методом математической индукции для любого конечного числа множеств легко устанавливается справедливость включений

$$\partial \bigcup_{j=1}^{m} E_j \subset \bigcup_{j=1}^{m} \partial E_j, \quad \partial \bigcap_{j=1}^{m} E_j \subset \bigcap_{j=1}^{m} \partial E_j. \tag{44.23}$$

Свойство 3^0. *Объединение и пересечение конечного числа измеримых по Жордану множеств, а также разность двух таких множеств являются измеримыми по Жордану множествами.*

В самом деле, если множества E_j измеримы, то согласно теореме 1 $\mu\partial E_j = 0$, $i = 1, 2, \ldots, m$. Поэтому в силу следствия из леммы 2 $\mu \bigcup_{j=1}^{m} \partial E_j = 0$, а тогда (см. следствие 1 леммы 1) из включений (44.23) следует соответственно, что

$$\mu\partial \bigcup_{j=1}^{m} E_j = 0, \quad \mu\partial \bigcap_{j=1}^{m} E_j = 0.$$

Отсюда следует, что в силу той же теоремы 1 множества $\bigcup_{j=1}^{m} E_j$

и $\bigcap\limits_{j=1}^{m} E_j$ также измеримы. Аналогично доказывается измеримость разности измеримых множеств.

Теперь можно легко доказать, что для меры Жордана справедливо неравенство, аналогичное неравенству (44.10) для верхней меры. Сформулируем соответствующее утверждение.

Для любой конечной совокупности измеримых множеств $E_1, E_2, \ldots$ $\ldots, E_m$ справедливо неравенство

$$\mu \bigcup_{i=1}^{m} E_i \leqslant \sum_{i=1}^{m} \mu E_i. \tag{44.24}$$

Действительно, если множества E_i измеримы, то $\mu^* E_i = \mu E_i$, и согласно выше доказанному объединение $\bigcup\limits_{i=1}^{m} E_i$ также измеримо, и следовательно, $\mu^* \bigcup\limits_{i=1}^{m} E_i = \mu \bigcup\limits_{i=1}^{m} E_i$. Поэтому формула (44.24) в рассматриваемом случае совпадает с формулой (44.10).

Свойство 4° (аддитивность меры). *Мера объединения конечного числа попарно непересекающихся измеримых по Жордану множеств равна сумме мер этих множеств.*

Таким образом, если E_i — измеримые множества, $E_i \cap E_j = \varnothing$, $i \neq j$, $i, j = 1, 2, \ldots, m$, то

$$\mu \bigcup_{i=1}^{m} E_i = \sum_{i=1}^{m} \mu E_i. \tag{44.25}$$

Докажем это. Поскольку для любого ранга k справедливо включение $s_k(E_i) \cap s_k(E_j) \subset E_i \cap E_j$, то из условия $E_i \cap E_j = \varnothing$ при $i \neq j$ следует, что $s_k(E_i) \cap s_k(E_j) = \varnothing$, $i \neq j$; поэтому согласно (44.2)

$$\sum_{i=1}^{m} \mu s_k(E_i) = \mu \bigcup_{i=1}^{m} s_k(E_i). \tag{44.26}$$

Если куб ранга k лежит в некотором множестве E_i, то он лежит и в объединении $\bigcup\limits_{i=1}^{m} E_i$, следовательно,

$$\bigcup_{i=1}^{m} s_k(E_i) \subset s_k\left(\bigcup_{i=1}^{m} E_i\right).$$

Отсюда в силу (44.26) и монотонности меры (в данном случае — даже из формулы (44.2)) вытекает, что

$$\sum_{i=1}^{m} \mu s_k(E_i) = \mu \bigcup_{i=1}^{m} s_k(E_i) \leqslant \mu s_k\left(\bigcup_{i=1}^{m} E_i\right).$$

Перейдя к пределу при $k \to +\infty$, получим

$$\sum_{i=1}^{m} \mu E_i \leq \mu \bigcup_{i=1}^{m} E_i. \tag{44.27}$$

С другой стороны для любых измеримых множеств справедливо обратное неравенство (44.24). Очевидно, что из (44.24) и (44.27) и следует равенство (44.25), т. е. аддитивность меры.

Замечание. Из свойств 3 и 4 меры вытекает, что если к измеримому множеству присоединить или вычесть из него множество меры ноль, то полученное множество будет также измеримым, и его мера будет равной мере исходного множества. Действительно, если E — измеримое множество, а $\mu E_0 = 0$, то, по свойству 3 меры, множества $E \setminus E_0$ и $E \cup E_0$ также измеримы. Далее по свойству 4 при $E_0 \subset E$ и $\mu E_0 = 0$ имеем

$$\mu E = \mu [(E \setminus E_0) \cup E_0] = \mu (E \setminus E_0) + \mu E_0 = \mu (E \setminus E_0).$$

В силу же монотонности меры и неравенства (44.24) для любого E_0, $\mu E_0 = 0$ справедливы неравенства

$$\mu E \leq \mu (E \cup E_0) \leq \mu E + \mu E_0 = \mu E,$$

откуда $\mu (E \cup E_0) = \mu E$.

В свою очередь из сказанного следует, что если к измеримому множеству присоединить или вычесть из него какое-то множество его граничных точек, то получится снова измеримое множество с той же мерой, что и данное. Это вытекает из того, что в силу теоремы 1 граница измеримого множества, а значит и любое ее подмножество, имеют меру ноль. Таким образом, в частности, если множество E измеримо, то его замыкание $\bar{E} = E \cup \partial E$ также измеримо, причем $\mu E = \mu \bar{E}$.

Обратное утверждение неверно: *существуют неизмеримые по Жордану множества, замыкания которых измеримы*. Простым примером подобного множества является множество рациональных точек на некотором отрезке. Оно неизмеримо (почему?), а его замыканием является отрезок, который измерим.

Примеры измеримых множеств сколь угодно большой размерности можно получить с помощью построения цилиндров, основаниями которых служат также измеримые множества. Сформулируем определение цилиндра.

Определение 2. *Пусть E_0 — множество, лежащее на гиперплоскости $R^{n-1} = \{x : x_n = 0\}$ пространства R^n, a и b действительные числа, $a \leq b$. Множество*

$$E = \{x : (x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, 0) \in E_0, \ a \leq x_n \leq b\}$$

называется n-мерным цилиндром с основанием E_0 и образующей (параллельной координатной оси x_n) длины $h = b - a$.

Очевидно, что, используя понятие произведения множеств (см. п. 1.2* или 41.2) можно сказать, что цилиндр E является произведением множеств E_0 и отрезка $[a, b]: E = E_0 \times [a, b]$. Если E_0 — ограниченное множество, то и цилиндр с основанием E_0 является ограниченным множеством. Отсюда следует, что всякий цилиндр, в основании которого лежит измеримое множество, ограничен, ибо измеримое множество ограничено.

Теорема 2. *Если E_0 — измеримое по Жордану множество пространства R^{n-1}, то всякий n-мерный цилиндр E с основанием E_0 является измеримым по Жордану множеством в пространстве R^n, и*

$$\mu_n E = h\mu_{n-1} E_0, \tag{44.28}$$

где h — длина образующей цилиндра E.

Следствие. *Если основание цилиндра имеет $(n-1)$-мерную меру, равную нулю, то сам n-мерный цилиндр имеет n-мерную меру, также равную нулю.*

Доказательство теоремы. Прежде всего заметим, что проекция *) каждого n-мерного куба Q^n ранга k является $(n-1)$-мерным кубом Q^{n-1} также ранга k и

$$\mu Q^n = (10^{-k})\, \mu Q^{n-1}. \tag{44.29}$$

Обозначим через $q_1^{n-1}, \ldots, q_l^{n-1}$ $(n-1)$-мерные кубы ранга k, составляющие множество $s_k(E_0)$, а через $Q_1^{n-1}, \ldots, Q_m^{n-1}$ — $(n-1)$-мерные кубы, составляющие $S_k(E_0)$.

Пусть $q_{i1}^n, \ldots, q_{ip}^n$ суть n-мерные кубы из $s_k(E)$, проектирующиеся в куб $q_i^{n-1} \subset s_k(E_0)$. Поскольку E — цилиндр, то число p таких n-мерных кубов q_{ij}^n одно и то же для всех $i = 1, 2, \ldots, l$, поэтому

$$s_k(E) = \bigcup_{i=1}^{l} \bigcup_{j=1}^{p} q_{ij}^n. \tag{44.30}$$

Аналогично, число r n-мерных кубов Q_{ij}^n из $S_k(E)$, проектирующихся в один и тот же куб Q_i^{n-1} из $S_k(E_0)$, одинаково для всех $i = 1, 2, \ldots, m$, поэтому

$$S_k(E) = \bigcup_{i=1}^{m} \bigcup_{j=1}^{r} Q_{ij}^n. \tag{44.31}$$

Проекция множества $\bigcup_{j=1}^{p} q_{ij}^n$ на ось x_n является отрезком длины $p/10^k$, причем

$$p/10^k \leqslant h, \tag{44.32}$$

*) Проекцией $\text{пр}_{x_n} E$ множества $E \subset R^n$ на гиперплоскость $R^{n-1} = \{x : x_n = 0\}$ называется множество точек вида $(x_1, \ldots, x_{n-1}, 0)$ для каждой из которых существует такое x_n, что $(x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n) \in E$.

ибо все кубы q_{ij}^n содержатся в $s_k(E)$ и, следовательно, в цилиндре E. Проекция же указанного множества на гиперплоскость R^{n-1} представляет собой один из кубов q_i^{n-1}, поэтому

$$\mu_n s_k(E) = \sum_{i=1}^{l} \sum_{j=1}^{p} \mu_n q_{ij}^n = \sum_{i=1}^{l} \sum_{j=1}^{p} \frac{1}{10^k} \mu_{n-1} q_i^{n-1} =$$
$$= \frac{p}{10^k} \sum_{i=1}^{l} \mu_{n-1} q_i^{n-1} = \frac{p}{10^k} \mu_{n-1} s_k(E_0). \qquad (44.33)$$

Проекция «столбика кубов» $\bigcup_{j=1}^{r} Q_{ij}^n$ (рис. 167) на ось x_n есть отрезок длины $10^{-k} r$, причем

$$h \leqslant \frac{r}{10^k} \leqslant h + \frac{2}{10^k}. \qquad (44.34)$$

Далее, каждый такой столбик проектируется на гиперплоскость R^{n-1} в куб Q_i^{n-1}, либо содержащийся в $s_k(E_0)$, либо в $\sigma_k(E_0) = \overline{S_k(E_0) \setminus s_k(E_0)}$ (множество $\sigma_k(E_0)$ было введено при доказательстве теоремы 1). Поэтому

$$\mu_n S_k(E) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{r} \mu_n Q_{ij}^n = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{r} \frac{1}{10^k} \mu_{n-1} Q_i^{n-1} =$$
$$= \frac{r}{10^k} \sum_{i=1}^{m} \mu_{n-1} Q_i^{n-1} = \frac{r}{10^k} [\mu s_k(E_0) + \mu \sigma_k(E_0)]. \qquad (44.35)$$

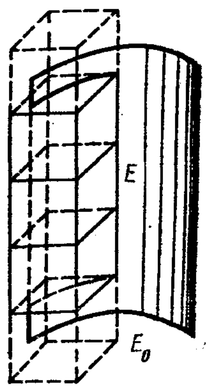


Рис. 167

Наконец, заметим, что каждый из столбиков $\bigcup_{j=1}^{r} Q_{ij}^n$, который проектируется в куб $q^{n-1} \subset s_k(E_0)$, отличается от столбика $\bigcup_{j=1}^{p} q_{ij}^n$, проектирующегося в тот же куб q^{n-1}, лишь двумя кубами, добавленными к нему снизу и сверху (в смысле убывания, соответственно возрастания, координаты x_n (см. рис. 148). Поэтому

$$r = p + 2.$$

Отсюда и из неравенств (44.32) и (44.34) имеем

$$\frac{p}{10^k} \leqslant h \leqslant \frac{p+2}{10^k} = \frac{r}{10^k} \leqslant h + \frac{2}{10^k}.$$

В силу этого из неравенств (44.33) и (44.35) получим

$$\mu_n S_k(E)-\mu_n s_k(E)=\frac{r-p}{10^k}\mu_{n-1}s_k(E_0)+$$
$$+\frac{r}{10^k}\mu\sigma_k(E_0)\leqslant\frac{2}{10^k}\mu_{n-1}E_0+\left(h+\frac{2}{10^k}\right)\mu\sigma_k(E_0),$$

и поскольку $\lim\limits_{k\to\infty}\frac{2}{10^k}=0$, $\lim\limits_{k\to\infty}\mu\sigma_k(E_0)=0$, то

$$\lim_{k\to+\infty}[\mu_n S_k(E)-\mu_n s_k(E)]=0. \tag{44.36}$$

Множество E_0, как всякое измеримое множество, ограничено. Нетрудно убедиться, что диаметры $d(E_0)$ и $d(E)$ множеств E_0 и E связаны соотношением $d(E)=\sqrt{[d(E_0)]^2+h^2}$, из которого следует, что множество E также ограничено. Поэтому, как было упомянуто выше, оно имеет конечные верхнюю и нижнюю меры. Из формул (44.4), (44.5) и (44.36) следует, что они равны: $\mu^*E=\mu_*E$, т. е. множество E измеримо.

Докажем теперь формулу (44.28). Для этого умножим неравенство

$$\mu_{n-1}s_k(E_0)\leqslant\mu E_0\leqslant\mu_{n-1}S_k(E_0)$$

на h. Применив неравенства (44.32) и (44.34), будем иметь (см. также (44.33) и (44.35))

$$\mu_n s_k(E)=\frac{p}{10^k}\mu_{n-1}s_k(E_0)\leqslant h\mu E_0\leqslant\frac{r}{10^k}\mu_{n-1}S_k(E_0)=\mu_n S_k(E),$$

причем обе части получившегося неравенства в силу (44.36) стремятся при $k\to\infty$ к одному и тому же пределу μE, откуда и следует формула (44.28).

Задача 29. Построить пример неизмеримой по Жордану области.

Задача 30. Доказать, что мера Жордана не зависит от выбора декартовой системы координат.

44.2. МНОЖЕСТВА МЕРЫ НОЛЬ

В предыдущем пункте было установлено, что множество измеримо по Жордану тогда и только тогда, когда его граница имеет меру ноль. Поэтому важно иметь признаки, по которым можно было бы установить, что множество имеет меру ноль. Достаточно общим примером множеств меры ноль являются цилиндры, в основании которых лежат множества меры ноль (см. следствие из теоремы 2). Другой широкий класс множеств меры ноль дается в нижеследующей теореме.

Теорема 3. *График всякой непрерывной на компакте функции имеет меру ноль.*

Доказательство. Пусть функция $y=f(x)=f(x_1, \ldots, x_n)$ непрерывна на компакте $A\subset R^n_x$. Пусть E — ее график, т. е.

множество таких точек $(x, y) = (x_1, \ldots, x_n, y)$ в n-мерном пространстве R_{xy}^{n+1}, что $(x_1, \ldots, x_n) \in A$, а $y = f(x_1, \ldots, x_n)$:

$$E = \{(x, y) : (x_1, \ldots, x_n) \in A, \quad y = f(x_1, \ldots, x_n)\}.$$

Покажем, что $(n+1)$-мерная мера Жордана множества E равна нулю. Множество A будучи компактом, ограничено. Поэтому существует такое натуральное число m, что n-мерный куб

$$P_m = \{x : -m \leqslant x_i \leqslant m, \quad i = 1, 2, \ldots, n\}$$

содержит множество $A : P_m \supset A$. Тем более куб

$$P_{m+1} = \{x : -m-1 \leqslant x_i \leqslant m+1, \quad i = 1, 2, \ldots, n\}$$

также содержит $A : P_{m+1} \supset A$ и, более того, каким бы ни был куб Q некоторого ранга $k = 0, 1, 2, \ldots$, пересекающийся со множеством A, т. е. $Q \subset S_k(A)$, он также содержится в $P_{m+1} : Q \subset \subset P_{m+1}$. Поэтому при любом k имеем $S_k(A) \subset P_{m+1}$. Здесь и в дальнейшем через $S_k(A)$, $S_k(E)$, как и в п. 44.1, обозначаются множества точек всех кубов ранга k, соответствующих пространств, пересекающихся с множествами $A \subset E_x^n$, $E \subset R_{xy}^{n+1}$.

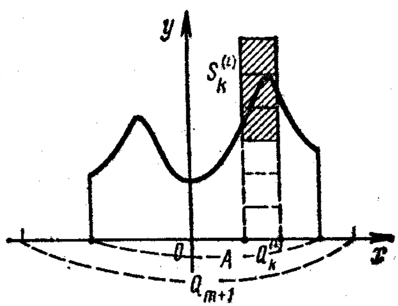


Рис. 168

Множество $S_k(E)$ распадается на конечное число «столбиков» $S_k^{(i)}$, каждый из которых состоит из $(n+1)$-мерных кубов ранга k, имеющих одну и ту же проекцию (см. сноску на с. 124) $Q_k^{(i)}$ в пространство R_x^n (на рис. 168 изображен случай $n = 1$):

$$S_k(E) = \bigcup_i S_k^{(i)}, \quad \text{пр}_y S_k^{(i)} = Q_k^{(i)}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots. \tag{44.37}$$

Обозначим через $\omega(\delta)$ модуль непрерывности функции f на A. Замечая, что диагональ (диаметр *)) n-мерного куба с ребром длины $1/10^k$ равна $\sqrt{n}/10^k$, для высоты $h_k^{(i)}$ каждого столбика $S_k^{(i)}$ имеем (см. рис. 149) оценку

$$h_k^{(i)} \leqslant \omega\left(\frac{\sqrt{n}}{10^k}\right) + \frac{2}{10^k}. \tag{44.38}$$

Действительно, для оценки высоты $h_k^{(i)}$ к расстоянию $\omega(10^{-k}\sqrt{n})$ между наибольшим и наименьшим значениями функции $f(x)$ на

*) Определение диаметра множества см. определение 11 в п. 19.6.

кубе $Q_k^{(i)}$ достаточно добавить длины ребер самого нижнего и самого верхнего кубов рассматриваемого столбика $S_k^{(i)}$ (эта оценка достигается, когда точки графика, соответствующие указанным экстремальным значениям, окажутся на гранях кубов ранга k). Из (44.37) и (44.38) получаем:

$$\mu S^k(E) = \mu \bigcup_i S_k^{(i)} = \sum_i \mu S_k^{(i)} = \sum_i h_k^{(i)} \mu Q_k^{(i)} \leqslant$$
$$\leqslant \left[\omega\left(\frac{\sqrt{n}}{10^k}\right) + \frac{2}{10^k}\right] \sum_i \mu Q_k^{(i)} \leqslant \left[\omega\left(\frac{\sqrt{n}}{10^k}\right) + \frac{2}{10^k}\right] \mu P_{m+1}. \qquad (44.39)$$

Поскольку функция f непрерывна на компакте, она равномерно непрерывна на нем, и поэтому $\lim\limits_{k \to +\infty} \omega(10^{-k}\sqrt{n}) = 0$, и поскольку $\lim\limits_{k \to +\infty} \frac{2}{10^k} = 0$, то из (44.39) имеем $\lim\limits_{k \to \infty} \mu S_k(E) = 0$, а это и означает, что $\mu^* E = 0$, следовательно, и $\mu E = 0$. □

В силу теорем 2 и 3 всякое ограниченное множество, границу которого можно представить как объединение конечного числа множеств, каждое из которых представляет собой либо часть графика непрерывной на ограниченном замкнутом множестве функции, либо часть цилиндра с основанием меры ноль, является измеримым множеством, ибо, в силу аддитивности меры, мера границы указанного множества равна нулю, и, следовательно, согласно теореме 1 оно измеримо. Таким образом получено описание достаточно широкого класса множеств, измеримых по Жордану и часто встречающихся в математическом анализе и его приложениях. Так, например, плоские множества (криволинейные трапеции, «секторы» кривых, заданных в полярных координатах, а также тела вращения, площади и соответственно объемы которых вычислялись в § 32 с помощью одномерного интеграла Римана, являются измеримыми по Жордану множествами, ибо, как нетрудно убедиться, их границы имеют меру ноль.

Подобным же образом измеримы по Жордану параллелепипеды и эллипсоиды, в частности — шары, так как их границы можно представить в виде объединения графиков непрерывных на компактах функций.

Заметим, что в § 31 было введено понятие меры $\operatorname{mes} G$ для открытых множеств. Сравнивая ее определение с определением, приведенным в п. 44.1, видим, что $\operatorname{mes} G = \mu_* G$, т. е. введенная в § 31 мера является нижней мерой Жордана. Однако в силу сказанного выше все рассмотренные в примерах § 32 множества были измеримыми по Жордану и, следовательно, для них мера $\operatorname{mes} G$ являлась мерой Жордана, т. е. для них имело место $\operatorname{mes} G = \mu G$.

Представляет интерес обобщить теорему 3 на случай параметрически заданных множеств, в частности — на случай пара-метрических кривых. Оказывается, что даже в этом случае одной лишь непрерывности рассматриваемых кривых недостаточно для того, чтобы они имели меру ноль. Существуют, например, кривые $x_i = x_i(t)$, $a \leqslant t \leqslant b$, $i = 1, 2, \ldots, n$ ($x_i(t)$ — непрерывные на некотором отрезке $[a, b]$ функции), называемые кривыми Пеано*), которые проходят через каждую точку некоторого n-мерного куба и, следовательно, не имеют меры ноль.

Задача 31. Построить пример кривой Пеано.

Теорема 4. *Всякая плоская спрямляемая кривая имеет меру ноль.*

Доказательство. Пусть задана спрямляемая кривая γ, длина которой равна S. Пусть, далее $r = r(t)$, $a \leqslant t \leqslant b$, — некоторое представление кривой γ. Разобьем ее последовательно, т. е. в порядке возрастания параметра t, точками $r(t_i)$, $t_i \in [a, b]$, $i = 0, 1, \ldots, m$, $t_0 = a$, $t_m = b$, на m равных по длине частей, т. е. возьмем такое разбиение $\tau = \{t_i\}_{i=0}^{i=m}$ отрезка $[a, b]$, чтобы длина каждой части γ_i (кривой γ), задаваемой представлением $r = r(t)$, $t_{i-1} \leqslant t \leqslant t_i$, $i = 1, 2, \ldots, m$, имела длину S/m.

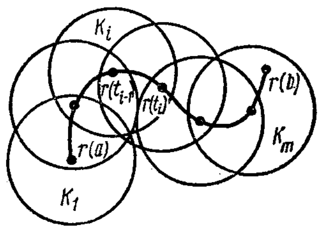


Рис. 169

Обозначим через K_i замкнутый круг с центром в точке $r(t_{i-1})$ и радиусом S/m. Поскольку дуга γ_i имеет длину S/m и ее начало является центром круга K_i, то вся она лежит в этом круге (рис. 169). Отсюда вытекает, что вся кривая γ содержится в объединении кругов K_i:

$$\gamma \subset \bigcup_{i=1}^{m} K_i.$$

Следовательно, в силу монотонности и полуаддитивности верхней меры (см. леммы 1 и 2 в п. 44.1)

$$\mu^*\gamma \leqslant \mu^* \bigcup_{i=1}^{m} K_i \leqslant \sum_{i=1}^{m} \mu^* K_i. \tag{44.40}$$

Но $\mu^* K_i = \mu K_i = \pi\left(\frac{S}{m}\right)^2$, $i = 1, \ldots, m$ **), поэтому из (44.40) имеем $\mu^*\gamma \leqslant \pi S^2/m$. Левая часть неравенства не зависит от m, а правая — стремится к нулю, при $m \to +\infty$, вследствие чего $\mu\gamma = 0$. $\square$

*) Д. Пеано (1858—1932) — итальянский математик.

**) Действительно, окружность C, являющуюся границей круга K, можно представить как объединение двух полуокружностей, каждая из которых представляет собой график непрерывной на отрезке функции. Поэтому согласно теореме 3 $\mu C = 0$, следовательно, всякий круг K является измеримым множеством.

Упражнение 5. Доказать, что всякая спрямляемая кривая в трехмерном пространстве имеет меру ноль.

Из теорем 1 и 4 следует, что всякое ограниченное плоское множество, граница которого является спрямляемой кривой, измеримо.

44.3. ОПРЕДЕЛЕНИЕ КРАТНОГО ИНТЕГРАЛА

Сформулируем определение кратного интеграла Римана. Для этого введем прежде всего понятие разбиения измеримого множества и понятие мелкости этого разбиения.

Пусть E — измеримое по Жордану множество, $E \subset R^n$. Конечная система $\tau = \{E_i\}_{i=1}^{i=i_0}$ непустых измеримых по Жордану множеств E_i, $i = 1, 2, \ldots, i_0$, называется *разбиением множества* E, если

1) попарные пересечения множеств E_i имеют меру ноль:

$$\mu(E_i \cap E_j) = 0, \qquad i \neq j;$$

2) $\bigcup\limits_{i=1}^{i_0} E_i = E$;

Число $\delta_\tau = \max\limits_{i=1, 2, \ldots, i_0} d(E_i)$, где $d(E_i)$ — диаметр множества E_i, называется *мелкостью разбиения* τ.

В силу аддитивности меры Жордана для всякого разбиения $\tau = \{E_i\}_{i=1}^{i=i_0}$ множества E имеем

$$\mu E = \sum_{i=1}^{i_0} \mu E_i. \tag{44.41}$$

Действительно, пусть при фиксированном i $E_i^* = \bigcup\limits_{j \neq i} E_i \cap E_j$ и $E^* = \bigcup\limits_{i=1}^{i_0} E_i^*$. Тогда, в силу п. 1) определения разбиения множества $\mu(E_i \cap E_j) = 0$, $i \neq j$, поэтому $\mu E_i^* \leqslant \sum\limits_{j \neq i} \mu(E_i \cap E_j) = 0$, т. е. $\mu E_i^* = 0$. Отсюда $\mu E^* \leqslant \sum\limits_{i=1}^{i_0} \mu E_i^* = 0$, следовательно $\mu E^* = 0$. Кроме того, множества E^*, $E_i \setminus E^* = E_i^{**}$ $i = 1, 2, \ldots, i_0$, попарно не пересекаются и в силу п. 2) $\bigcup\limits_{i=1}^{i_0} E_i^{**} \cup E^* = \bigcup\limits_{i=1}^{i_0} E_i = E$. Поскольку

$$\mu E_i = \mu(E_i \setminus E^*) = \mu E_i^{**},$$

то из всего этого, вследствие аддитивности меры следует, что

$$\mu E = \sum_{i=1}^{i_0} \mu E_i^{**} + \mu E^* = \sum_{i=1}^{i_0} \mu E_i. \ \square$$

Для простоты обозначений иногда вместо $\{E_i\}_{i=1}^{i=i_0}$ будем писать $\{E_i\}$.

Пусть $\tau=\{E_i\}$ и $\tau'=\{E'_j\}$ — разбиения измеримого множества E. Разбиение τ' называется *вписанным* в разбиение τ, если для каждого $E'_j\in\tau'$ существует такой элемент $E_i\in\tau$, что $E'_j\subset E_i$. В этом случае пишут $\tau'\succ\tau$ или $\tau\prec\tau'$.

Отметим два свойства разбиений множества.

1^0. *Если $\tau\prec\tau'$ и $\tau'\prec\tau''$, то $\tau\prec\tau''$.*

2^0. *Для любых двух разбиений $\tau'=\{E'_i\}$ и $\tau''=\{E''_j\}$ измеримого множества E существует такое его разбиение τ, что $\tau\succ\tau'$ и $\tau\succ\tau''$.*

Свойство 1^0 очевидным образом следует из определения вписанного разбиения. В качестве же указанного в свойстве 2^0 разбиения τ можно взять множество всевозможных непустых пересечений $E'_i\cap E''_j$.

Примером разбиения измеримого множества является совокупность всевозможных непустых пересечений данного множества с кубами некоторого фиксированного ранга k. Отсюда видно, что для всякого измеримого множества существуют разбиения сколь угодно малой мелкости.

Определение 3. *Пусть на измеримом по Жордану множестве $E\subset R^n$ задана функция $y=f(x)=f(x_1,\ldots,x_n)$ и $\tau=\{E_i\}_{i=1}^{i=i_0}$ — некоторое разбиение множества E; выберем произвольным образом точки $\xi^{(i)}\in E_i$, $i=1, 2, \ldots, i_0$. Сумма вида*

$$\sigma_\tau=\sigma_\tau(f;\ \xi^{(1)},\ldots,\xi^{(i_0)})=\sum_{i=1}^{i_0} f(\xi^{(i)})\,\mu E_i \tag{44.42}$$

называется интегральной суммой Римана функции f.

Подобно случаю функции одного переменного определение кратного интеграла можно сформулировать, используя понятие предела последовательности или «язык $\varepsilon-\delta$».

Определение 4. *Число A называется интегралом Римана от функции f по измеримому по Жордану множеству $E\subset R^n$, если какова бы ни была последовательность разбиений $\tau_m=\{E_i^m\}_{i=1}^{i=i^{(m)}}$, $m=1, 2, \ldots$, множества E такая, что мелкости разбиений τ_m стремятся к нулю при $m\to+\infty$: $\lim\limits_{m\to+\infty}\delta_{\tau_m}=0$, и каковы бы ни были точки $\xi^{(i,\,m)}\in E_i^m$, $i=1, 2, \ldots, i^{(m)}$, последовательность интегральных сумм $\sigma_{\tau_m}\left(f;\ \xi^{(1,\,m)},\ldots,\xi^{(i^{(m)},\,m)}\right)$ при $m\to+\infty$ имеет своим пределом число A:*

$$\lim_{m\to+\infty}\sigma_{\tau_m}\left(f;\ \xi^{(1,\,m)},\ldots,\xi^{(i^{(m)},\,m)}\right)=A. \tag{44.43}$$

Интеграл от функции f по множеству E обозначается через

$$\int f(x)\,dE \quad \text{или} \quad \underset{E}{\int\int\ldots\int} f(x_1, x_2, \ldots, x_n)\,dx_1\,dx_2\ldots dx_n.$$

Если существует интеграл $\int f(x)\,dE$, то функция f называется *интегрируемой по Риману* на множестве E. Интегрируемые по Риману функции часто будем называть просто *интегрируемыми*.

Равенство (44.43), т. е. определение интеграла, кратко записывается в виде формулы

$$\int f(x)\,dE = \lim_{\delta_\tau \to 0} \sigma_\tau. \tag{44.44}$$

В терминах ε и δ этот предел означает следующее: *для любого* $\varepsilon > 0$ *существует такое* $\delta_\varepsilon > 0$, *что каково бы ни было разбиение* $\tau = \{E_i\}_{i=1}^{i=i_0}$ *множества* E *мелкости* $\delta_\tau < \delta_\varepsilon$ *и каковы бы ни были точки* $\xi^{(i)} \in E_i$, $i = 1, 2, \ldots, i_0$, *выполняется неравенство*

$$\left|\sigma_\tau(f;\ \xi^{(1)}, \ldots, \xi^{(i_0)}) - \int f(x)\,dE\right| < \varepsilon. \tag{44.45}$$

Обычным путем доказывается, что определения (44.43) и (44.45) предела интегральных сумм эквивалентны.

Отметим, что определение интеграла (44.44), в случае, когда $n = 1$, а множеством, по которому производится интегрирование, является отрезок, формально не совпадает с данным ранее определением интеграла Римана от функции одной переменной, так как там рассматривались лишь разбиения отрезка на отрезки, а теперь рассматриваются всевозможные разбиения отрезка на измеримые по Жордану множества. Однако, можно показать (это будет сделано в п. 44.7*), что при $n = 1$ оба определения для случая, когда множество, по которому производится интегрирование, является отрезком, равносильны, т. е. приводят к одному и тому же понятию интегрируемости функции и к одному и тому же понятию интеграла.

При определении интеграла по множеству $E \subset R^n$ можно для составления интегральных сумм использовать не все элементы разбиений τ множества E, а отбрасывать те слагаемые, которые соответствуют элементам разбиения, замыкания которых пересекаются с некоторым фиксированным множеством меры ноль. Проанализируем это обстоятельство подробнее.

Пусть E — измеримое множество, $E_0 \subset E$ и $\tau = \{E_i\}_{i=1}^{i=i_0}$ — разбиение множества E. Обозначим через $\tau(E_0)$ совокупность тех элементов разбиения τ, замыкания которых не пересекаются со множеством E_0:

$$\tau(E_0) = \{E_i : \bar{E}_i \cap E_0 = \varnothing,\quad E_i \in \tau\}, \tag{44.46}$$

а через $\tau_0(E_0)$ — наоборот, совокупность тех E_i, для которых их замыкания $\bar{E}_i$ пересекаются с E_0:

$$\tau_0(E_0) = \{E_i : \bar{E}_i \cap E_0 \neq \varnothing,\quad E_i \in \tau\}. \tag{44.47}$$

Лемма 6. *Пусть E — измеримое по Жордану множество пространства R^n, $E_0 \subset E$ и $\mu E_0 = 0$. Тогда*

$$\lim_{\delta_\tau \to 0} \sum_{E_i \in \tau_0(E_0)} \mu E_i = 0. \tag{44.48}$$

Суммирование в формуле (44.48) происходит только по тем индексам i, для которых $E_i \in \tau_0(E_0)$.

Доказательство. Пусть $E_0 \subset E$ и $\mu E_0 = 0$; тогда и $\mu \bar{E}_0 = 0$ (см. в п. 44.1 замечание после доказательства аддитивности меры). Поэтому для любого $\varepsilon > 0$ существует такой ранг k, что

$$\mu S_k(\bar{E}_0) < \varepsilon. \tag{44.49}$$

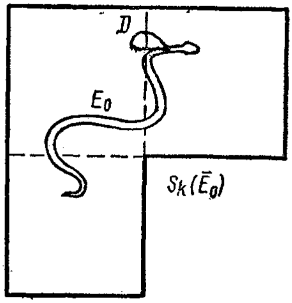


Рис. 170

Здесь, как всегда, $S_k(\bar{E}_0)$ обозначает совокупность точек всех кубов ранга k, пересекающихся со множеством $\bar{E}_0$ и, следовательно, покрывающих его: $\bar{E}_0 \subset S_k(\bar{E}_0)$.

Напомним, что $\bar{E}_0$ лежит строго внутри многогранника $S_k(\bar{E}_0)$, т. е. не пересекается с его границей (см. п. 44.1). Поскольку множество $\bar{E}_0$ ограничено и замкнуто, а граница $\partial S_k(\bar{E}_0)$ многогранника $S_k(\bar{E}_0)$, как и граница любого множества, замкнута, то $\bar{E}_0$ и $\partial S_k(\bar{E})$ находятся на положительном расстоянии δ друг от друга (см. лемму 7 в п. 18.2).

$$\delta = \rho(\bar{E}_0, \partial S_k(\bar{E})) > 0. \tag{44.50}$$

Поэтому всякое множество D с диаметром $d(D)$, меньшим чем δ, пересекающееся со множеством $E_0 \subset \bar{E}_0$, будет целиком лежать в $S_k(\bar{E}_0)$ (рис. 170). Действительно, если $d(D) < \delta$ и существует $x \in D \cap E_0$, то (см. (44.50)) $D \subset U(x, \delta) \subset S_k(\bar{E}_0)$, где, как обычно, $U(x, \delta)$ — шаровая окрестность точки x радиуса δ.

Пусть теперь $\tau = \{E_i\}$ — разбиение множества E мелкости $\delta_\tau < \delta$. Тогда для всякого элемента E_i этого разбиения, замыкание которого пересекается с множеством E_0, т. е. для каждого $E_i \in \tau_0(E_0)$, будем иметь $E_i \subset S_k(\bar{E}_0)$. Поэтому

$$\bigcup_{E_i \in \tau_0(E_0)} E_i \subset S_k(\bar{E}_0).$$

Следовательно, в силу (44.49)

$$\sum_{E_i \in \tau_0(E_0)} \mu E_i = \mu \bigcup_{E_i \in \tau_0(E_0)} E_i \leq \mu S_k(\bar{E}_0) < \varepsilon. \ \square$$

Введем еще одно обозначение. Пусть E — измеримое множество, $\tau = \{E_i\}_{i=1}^{i=i_\tau}$ — некоторое его разбиение, $E_0 \subset E$. Для всякой функции f, определенной на E, положим (см. (44.46) и (44.47))

$$\sigma_{\tau(E_0)} = \sigma_{\tau(E_0)}(f;\ \xi^{(1)}, \ldots, \xi^{(i_0)}) = \sum_{E_i \in \tau(E_0)} f(\xi^{(i)})\, \mu E_i. \quad (44.51)$$

Эта запись означает, что суммирование в правой части равенства происходит только по тем индексам i, для которых $E_i \in \tau(E_0)$. Как всегда $\xi^{(i)} \in E_i$. Для симметрии записи обычные интегральные суммы Римана можно по аналогии записывать в виде

$$\sigma_\tau = \sum_{E_i \in \tau} f(\xi^{(i)})\, \mu E_i.$$

Вместо символа суммирования $\sum\limits_{E_i \in \tau}$ иногда для краткости будем писать $\sum\limits_{\tau}$.

Теорема 5. *Пусть E — измеримое по Жордану множество пространства R^n, $\tau = \{E_i\}_{i=1}^{i=i_0}$ — его разбиение, $E_0 \subset E$ и $\mu E_0 = 0$. Если функция f ограничена на множестве E, то риманов интеграл*

$$\int f(x)\, dE = \lim_{\delta_\tau \to 0} \sigma_\tau$$

существует тогда и только тогда, когда существует предел

$$\lim_{\delta_\tau \to 0} \sigma_{\tau(E_0)}.$$

При этом, если последний предел существует, то он равен интегралу $\int f(x)\, dE$.

Доказательство. Для всякого разбиения $\tau = \{E_i\}_{i=1}^{i=i_0}$ множества E у каждого элемента E_i либо его замыкание $\bar{E}_i$ не пересекается со множеством E_0, и тогда $E_i \in \tau(E_0)$ (см. (44.46)), либо — пересекается (см. (44.47)), а тогда $E_i \in \tau_0(E_0)$. Следовательно, $\tau = \tau(E_0) \cup \tau_0(E_0)$, причем $\tau(E_0)$ и $\tau_0(E_0)$ не имеют общих элементов.

Положим

$$\sigma_{\tau_0(E_0)} = \sum_{E_i \in \tau_0(E_0)} f(\xi^{(i)})\, \mu E_i, \quad \xi^{(i)} \in E_i.$$

Здесь суммирование в правой части равенства происходит только по тем индексам i, для которых $E_i \in \tau_0(E_0)$. Очевидно, что для любой интегральной суммы Римана σ_τ справедливо равенство (см. (44.42) и (44.51))

$$\sigma_\tau = \sigma_{\tau(E_0)} + \sigma_{\tau_0(E_0)}. \quad (44.52)$$

В силу ограниченности на E функции f существует такая постоянная $M > 0$, что для всех $x \in E$ выполняется неравенство $|f(x)| \leq M$.

Поэтому

$$|\sigma_{\tau_0(E_0)}| \leqslant \sum_{E_i \in \tau_0(E_0)} |f(\xi^{(i)})| \mu E_i \leqslant M \sum_{E_i \in \tau_0(E_0)} \mu E_i.$$

Поскольку согласно лемме 6

$$\lim_{\delta_\tau \to 0} \sum_{E_i \in \tau_0(E_0)} \mu E_i = 0, \quad \text{то} \quad \lim_{\delta_\tau \to 0} \sigma_{\tau_0(E_0)} = 0.$$

В силу этого из равенства (44.52) следует, что интегральные суммы σ_τ и $\sigma_{\tau(E_0)}$ одновременно имеют или нет пределы при $\delta_\tau \to 0$, причем, если эти пределы существуют, то они равны. □

Из этой теоремы следует, что, если функция определена и ограничена на некотором измеримом множестве E, то при определении интеграла, как предела интегральных сумм, в них можно отбрасывать все слагаемые, соответствующие элементам разбиения, замыкания которых содержат граничные точки, ибо множество $E_0 = \partial E$ имеет меру ноль (см. теорему 1 в п. 44.1).

Из теоремы 5 следует также, что если функция f определена и ограничена на измеримом множестве E, то изменение ее значений на некотором множестве $E_0 \subset E$ меры ноль, в результате которого снова получается ограниченная на E функция, не влияет ни на интегрируемость функции, ни на значение интеграла от функции, если он существует. Это сразу следует из того, что, при указанном изменении функций сумма $\sigma_{\tau(E_0)}$ не меняется, а в силу теоремы 5, если ее предел при $\delta_\tau \to 0$ существует, то он равен интегралу $\int f(x)\, dE$:

$$\lim_{\delta_\tau \to 0} \sigma_{\tau(E_0)} = \int f(x)\, dE.$$

Из этого замечания, в частности, следует, что функция f является интегрируемой на измеримом множестве E тогда и только тогда, когда на этом множестве E интегрируема всякая функция, получающаяся из f произвольным изменением ее значений в граничных точках, т. е. на множестве $E \cap \partial E$, таким, что эти значения остаются, однако, ограниченными. При указанной операции не меняется и значение интеграла $\int f(x)\, dE$. Все это следует из того, что граница измеримого множества, а значит, и любая ее часть, имеют меру ноль.

Таким образом, интегрируемость и значение интеграла от функции по множеству E не зависят от значений функции в граничных точках измеримого множества E, если только эти значения ограничены.

44.4. СУЩЕСТВОВАНИЕ ИНТЕГРАЛА

Простейшим примером интегрируемой по Риману функции является произвольная числовая функция f, определенная на некотором множестве $E \subset R^n$, мера Жордана которого равна нулю: $\mu E = 0$. В этом случае для любого разбиения $\tau = \{E_i\}_{i=1}^{i=i_0}$ множества E будем иметь $\mu E_i = 0$ для всех $i = 1, 2, \ldots, i_0$, и потому при любом выборе точек $\xi^{(i)} \in E_i$ получим $f(\xi^{(i)}) \mu E_i = 0$, и, следовательно, (см. (44.42))

$$\sigma_\tau = \sigma_\tau (f;\ \xi^{(1)}, \ldots, \xi^{(i_0)}) = \sum_{i=1}^{i_0} f(\xi^{(i)}) \mu E_i = 0.$$

Отсюда, согласно определению интеграла, он существует в этом случае и равен нулю:

$$\int f(x)\, dE = \lim_{\delta_\tau \to 0} \sigma_\tau = 0.$$

Поскольку функция f произвольна, то в частности, она может быть и неограниченной. Иначе говоря, условие ограниченности функции не является необходимым для ее интегрируемости по Риману на произвольном измеримом по Жордану множестве. Вспомним, что для интегрируемости функции по Риману на отрезке условие ограниченности функции было необходимым (см. теорему 1 в п. 27.2). Однако, с некоторым видоизменением теорема об ограниченности интегрируемой функции оказывается справедливой и для рассматриваемого здесь интеграла.

Предварительно докажем лемму.

Лемма 7. *Пусть функция f определена на измеримом по Жордану множестве E, $\tau = \{E_i\}_{i=1}^{i=i_0}$ — разбиение этого множества и E^* — объединение всех элементов этого разбиения, имеющих положительную меру:* $E^* = \bigcup\limits_{\mu E_i > 0} E_i$.

Если функция f неограничена на множестве E^*, то каково бы ни было число $M > 0$, можно так выбрать точки $\xi^{(i)} \in E_i$, что будет справедливо неравенство

$$\left| \sum_{i=1}^{i_0} f(\xi^{(i)}) \mu E_i \right| > M.$$

Следствие. *Пусть функция f определена на измеримом по Жордану множестве E. Если у множества E существуют сколь угодно мелкие разбиения, для которых функция f неограничена на объединении всех их элементов положительной меры, то функция f неинтегрируема на E.*

Доказательство леммы. По условию леммы множество E^* является объединением элементов E_i положительной меры разбиения τ. Поскольку всякое разбиение состоит из конечного числа элементов, то E^* является конечной суммой указанных множеств $E_i \in \tau$. Поэтому, если функция f неограничена на множестве E^*, то она неограничена и на некотором множестве E_i положительной меры. Пусть для определенности им будет множество E_1. В силу неограниченности функции f на E_1 можно выбрать такую последовательность $\xi_n^{(1)} \in E_1$, $n=1, 2, \ldots$, что будет иметь место равенство $\lim\limits_{n\to\infty} f(\xi_n^{(1)}) = \infty$. Зафиксируем каким-либо образом остальные точки $\xi^{(i)} \in E_i$ при $i=2, 3, \ldots, i_0$.

Поскольку сумма $\sum\limits_{i=2}^{n} f(\xi^{(i)})\mu E_i$ — фиксированное число и $\mu E_1 > 0$, то в сумме

$$f(\xi_n^{(1)})\mu E_1 + \sum_{i=2}^{i_0} f(\xi^{(i)})\mu E_i$$

при $n \to \infty$ первое слагаемое стремится к бесконечности, а второе — постоянное; отсюда

$$\lim_{n\to\infty}\left| f(\xi_n^{(1)})\mu E_1 + \sum_{i=2}^{i_0} f(\xi^{(i)})\mu E_i \right| = +\infty.$$

Поэтому для любого числа $M > 0$ можно подобрать такой номер $n_0 = n_0(M)$, что будет справедливым неравенство

$$\left| f(\xi_{n_0}^{(1)})\mu E_1 + \sum_{i=2}^{i_0} f(\xi^{(i)})\mu E_i \right| > M. \quad \square$$

Доказательство следствия. Если функция f интегрируема на множестве E, т. е. существует предел

$$\lim_{\delta_\tau \to 0} \sum_{i=1}^{i_0} f(\xi^{(i)})\mu E_i = \int f(x)\,dE,$$

то для любого $\varepsilon > 0$, например для $\varepsilon = 1$, существует такое $\delta_0 > 0$, что для всех разбиений $\tau = \{E_i\}_{i=1}^{i=i_0}$ множества E мелкости $\delta < \delta_0$ при любом выборе точек $\xi^{(i)} \in E_i \in \tau$ выполняется неравенство

$$\left| \sum_{i=1}^{i_0} f(\xi^{(i)})\mu E_i - \int f(x)\,dE \right| < 1$$

и, следовательно, неравенство

$$\int f(x)\,dE - 1 < \sum_{i=1}^{i_0} f(\xi^{(i)})\mu E_i < \int f(x)\,dE + 1. \qquad (44.53)$$

Если же функция f удовлетворяет условиям следствия, то у множества E существует разбиение τ мелкости $\delta_\tau < \delta_0$, для которого функция f неограничена на объединении всех элементов положительной меры этого разбиения. Тогда по лемме 7 сумму $\sum\limits_{i=1}^{i_0} f(\xi^{(i)})\,\mu E_i$ можно сделать сколь угодно большой по абсолютной величине за счет выбора точек $\xi^{(i)} \in E_i \in \tau$. Поэтому такая функция не может быть интегрируемой — для нее не выполняется условие (44.53). □

Покажем теперь, что если пренебречь множеством меры ноль, то всякая интегрируемая функция будет ограниченной.

Теорема 6. *Если функция f интегрируема на множестве E, то существует такое множество $E_0 \subset E$ меры ноль: $\mu E_0 = 0$, что функция f ограничена на $E \setminus E_0$.*

Доказательство. Пусть функция f интегрируема на E, и указанного в теореме множества E_0 не существует. Возьмем любое $\delta_0 > 0$ и какое-либо разбиение τ множества E мелкости $\delta_\tau < \delta_0$. Обозначим через E^* объединение всех элементов положительной меры. Тогда множество $E \setminus E^*$ является объединением конечного числа множеств $E_i \in \tau$ меры ноль, и поэтому оно само имеет меру ноль: $\mu(E \setminus E^*) = 0$. Вследствие этого по сделанному предположению функция f неограничена на множестве E^*. Отсюда, согласно следствию из леммы 7 получаем, что функция f неинтегрируема. □

Покажем теперь, что для важного класса измеримых по Жордану открытых множеств теорема об ограниченности интегрируемой функции полностью сохраняется. Для доказательства этого нам понадобится одна геометрическая лемма.

Лемма 8. *Непустое пересечение замкнутого n-мерного куба с открытым множеством n-мерного пространства имеет положительную нижнюю меру Жордана.*

Следствие. *Для любого открытого измеримого по Жордану множества существуют сколь угодно мелкие разбиения, все элементы которых имеют положительную меру.*

Доказательство леммы. Пусть Q — n-мерный куб, G — открытое множество пространства R^n и $Q \cap G \neq \varnothing$. Какова бы ни была точка $x \in Q \cap G$, в силу открытости множества G существует такая ее окрестность $U(x)$, что

$$U(x) \subset G. \tag{44.54}$$

Нетрудно убедиться, что во множестве $U(x)$ всегда имеется внутренняя точка y куба Q. В самом деле, может случиться, что сама точка x является внутренней для куба Q и тогда можно взять $y = x$. Если же x — граничная точка куба Q, то она является граничной и для множества его внутренних точек. Поэтому ее окрестность $U(x)$ заведомо содержит внутреннюю точку y куба Q

(рис. 171). В силу определения внутренней точки (см. п. 18.2) существует такая ее окрестность $V(y)$, что

$$V(y) \subset Q. \tag{44.55}$$

В силу (44.54) и (44.55) справедливы включения

$$U(x) \cap V(y) \subset U(x) \subset G, \quad U(x) \cap V(y) \subset V(y) \subset Q;$$

поэтому

$$U(x) \cap V(y) \subset Q \cap G. \tag{44.56}$$

Поскольку $y \in U(x)$ и $y \in V(y)$, то пересечение $U(x) \cap V(y)$ не пусто, ибо содержит во всяком случае точку y. Далее, будучи пересечением двух открытых множеств, оно также является открытым и потому (см. п. 44.1)

$$\mu_*[U(x) \cap V(y)] > 0.$$

В силу свойства монотонности нижней меры (см. лемму 1 в п. 44.1) из (44.56) имеем

$$\mu_*[U(x) \cap V(y)] \leqslant \mu_*(Q \cap G).$$

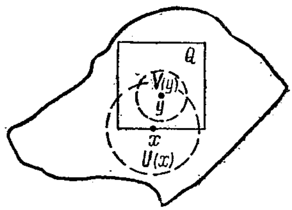


Рис. 171

Из двух последних неравенств явствует, что $\mu_*(Q \cap G) > 0$. $\square$

Доказательство следствия. Пусть G — измеримое открытое в R^n множество. Зафиксируем разбиение пространства R^n на кубы некоторого ранга k. Множество кубов Q этого ранга, имеющих непустое пересечение со множеством G, является конечным, ибо множество G, в силу его измеримости, ограничено. Перенумеруем все указанные кубы: $Q_1, Q_2, \ldots, Q_{i_0}$. Множества $E_i = Q_i \cap G \neq \varnothing$, $i = 1, 2, \ldots, i_0$, измеримы и образуют разбиение $\tau = \{E_i\}_{i=1}^{i=i_0}$ множества G. Действительно, с одной стороны $E_i = Q_i \cap G \subset G$, следовательно, $\bigcup\limits_{i=1}^{i_0} E_i \subset G$, а с другой — каждая точка $x \in G$, как и всякая точка пространства R^n принадлежит хотя бы одному кубу Q ранга k: $x \in Q \cap G$. Тогда $Q \cap G \in \tau$, т. е. при некотором i $Q = Q_i$, поэтому $x \in Q_i \cap E = E_i \subset \bigcup\limits_{i=1}^{i_0} E_i$.

Таким образом, $\bigcup\limits_{i=1}^{i_0} E_i = G$.

Далее, $E_i \cap E_j \subset Q_i \cap Q_j$. Если пересечение $Q_i \cap Q_j$ непусто, то оно представляет собой куб размерности, меньшей чем n, и, следовательно, является графиком непрерывной (даже линейной) функции на компакте. Поэтому его мера равна нулю: $\mu Q_i \cap Q_j = 0$, откуда и $\mu E_i \cap E_j = 0$, $i \neq j$. Наконец, согласно лемме 8 $\mu E_i > 0$.

Очевидно, что существуют сколь угодно мелкие разбиения τ указанного вида. Действительно, каково бы ни было $\delta > 0$, достаточно взять такой ранг k, чтобы $\sqrt{n}/10^k < \delta$ ($d(Q) = 10^{-k}\sqrt{n}$ — диаметр куба Q ранга k) и тогда

$$d(E_i) = d(Q_i \cap G) \leqslant d(Q_i) = 10^{-k}\sqrt{n} < \delta, \quad i = 1, 2, \ldots, i_0,$$

и поэтому $\delta_\tau < \delta$. $\square$

Теорема 7. *Если функция интегрируема на открытом множестве, то она ограничена.*

Доказательство. Пусть функция f интегрируема на открытом множестве G. Тогда, согласно определению интеграла, множество G измеримо по Жордану, а на основании следствия из леммы 8, существуют сколь угодно мелкие его разбиения, все элементы которых имеют положительную меру. Очевидно, что в силу леммы 8 для разбиений, построенных при доказательстве следствия из указанной леммы, объединение всех их элементов положительной меры совпадает с самим множеством G. Если функция f была бы неограниченной на G, то, согласно следствию из леммы 7, она была бы неинтегрируемой.

Замечание. Как видно из приведенного доказательства теоремы 7, открытость множества G потребовалась лишь для того, чтобы показать, что существуют его разбиения сколь угодно малой мелкости, все элементы которых имеют положительную меру. Тем самым для всех множеств, обладающих этим свойством, интегрируемость на них функций влечет за собой их ограниченность.

Легко, например, можно убедиться в том, что замыкание $\bar{G}$ любого измеримого открытого множества G также имеет сколь угодно мелкие разбиения, мера всех элементов которых положительна. Действительно, достаточно снова взять все кубы Q_i ранга k, имеющие с G непустое пересечение. Тогда они будут и подавно иметь непустое пересечение с замыканием $\bar{G}$ множества G: $Q_i \cap \bar{G} \supset Q_i \cap G \neq \varnothing$. При этом, поскольку $S_k(G)$ — замкнутое множество и $G \subset S_k(G)$, то $\bar{G} \subset S_k(G)$. Следовательно, если положить $E_i = Q_i \cap \bar{G}$, где $Q_i \cap G \neq \varnothing$, то $\tau = \{E_i\}$ образует покрытие замыкания $\bar{G}$ множества G, ибо многогранник $S_k(G)$ состоит только из указанных кубов Q_i, и по лемме 8

$$\mu E_i = \mu(Q_i \cap \bar{G}) \geqslant \mu(Q_i \cap G) > 0.$$

Упражнение 6. Построить пример функции, неограниченной и интегрируемой на множестве положительной меры.

Если функция f ограничена на измеримом множестве то, как и в одномерном случае, можно определить верхние и нижние суммы Дарбу.

Определение 5. *Пусть f — функция, ограниченная на измеримом по Жордану множестве E, $\tau = \{E_i\}_{i=1}^{i=i_0}$ — разбиение множества E,*

$$m_i = \inf_{x \in E_i} f(x), \quad M_i = \sup_{x \in E_i} f(x), \quad i = 1, 2, \ldots, i_0.$$

Тогда суммы

$$s_\tau = \sum_{i=1}^{i_0} m_i \mu E_i, \quad S_\tau = \sum_{i=1}^{i_0} M_i \mu E_i$$

называются соответственно нижними и верхними суммами Дарбу.

Для сумм Дарбу и интегральных сумм Римана справедливы очевидные неравенства

$$s_\tau \leqslant \sigma_\tau \leqslant S_\tau.$$

Как и для функций одной переменной, для любых двух разбиений τ_1 и τ_2 справедливо неравенство

$$s_{\tau_1} \leqslant S_{\tau_2}.$$

Теорема 8. *Для того чтобы ограниченная на измеримом по Жордану множестве $E \subset R^n$ функция f была интегрируемой по Риману на этом множестве необходимо и достаточно, чтобы*

$$\lim_{\delta_\tau \to 0} (S_\tau - s_\tau) = 0. \tag{44.57}$$

При выполнении этих условий

$$\lim_{\delta_\tau \to 0} S_\tau = \lim_{\delta_\tau \to 0} s_\tau = \int f(x)\, dE. \tag{44.58}$$

Условие (44.57) равносильно следующему

$$\lim_{\delta_\tau \to 0} \sum_{i=1}^{i_0} \omega(f; E_i)\, \mu E_i = 0, \tag{44.59}$$

где $\omega(f; E_i)$ — колебание функции f на множестве $E_i \in \tau = \{E_i\}$.

Доказательство этой теоремы проводится аналогично одномерному случаю и рекомендуется проделать читателю самостоятельно.

Упражнение 7. Сформулировать определения пределов (44.57) — (44.59) с помощью последовательностей и используя «ε-δ-язык».

Теорема 9. *Если функция непрерывна на измеримом по Жордану компакте, то она интегрируема на нем.*

Доказательство. Пусть E — измеримый компакт, $E \subset R^n$, а f — непрерывная на нем функция. Всякая функция, непрерывная на компакте, ограничена (см. п. 19.5) и равномерно непрерывна (см. п. 19.6) на нем. Поэтому и здесь доказательство протекает аналогично одномерному случаю (см. п. 27.5): легко получается оценка

$$\sum_{i=1}^{i_0} \omega(f;\ E_i)\,\mu E_i \leqslant \omega(\delta_\tau;\ f)\,\mu E,$$

где $\omega(\delta,\ f)$ — модуль непрерывности функции f. Из этой оценки сразу следует выполнение условия (44.59), а поэтому, согласно теореме 8, и интегрируемость функции f. $\square$

44.5*. ОБ ИНТЕГРИРУЕМОСТИ РАЗРЫВНЫХ ФУНКЦИЙ

Непрерывность функции не является необходимым условием интегрируемости: существуют и разрывные интегрируемые функции. Достаточно широкий класс разрывных интегрируемых функций устанавливается следующей теоремой.

Теорема 10. *Если функция ограничена на измеримом по Жордану компакте и множество ее точек разрыва имеет жорданову меру ноль, то эта функция интегрируема по Риману.*

Доказательство. Пусть функция f определена и ограничена на компакте, т. е. на ограниченном замкнутом множестве $E \subset R^n$. В силу ограниченности функции f на E существует такая постоянная $M > 0$, что для всех $x \in E$ выполняется неравенство

$$|f(x)| \leqslant M. \tag{44.60}$$

Пусть E_0 — множество точек разрыва функции f. По условию теоремы $\mu E_0 = 0$, а поэтому для любого фиксированного $\varepsilon > 0$ существует такой ранг k, что

$$\mu S_k(E_0) < \frac{\varepsilon}{3^n 4M}. \tag{44.61}$$

Это следует из того, что в данном случае, согласно определению меры, $\lim\limits_{k\to+\infty} \mu S_k(E_0) = 0$. Пусть многогранник $S_k(E_0)$ состоит из кубов $Q_1, Q_2, \ldots, Q_l$. Обозначим через P_j куб, получающийся из Q_j преобразованием подобия с центром в центре куба Q_j и коэффициентом подобия равным трем; тогда

$$\mu P_j = 3^n \mu Q_j, \quad j = 1,\ 2,\ \ldots,\ l. \tag{44.62}$$

Положим $P = \bigcup\limits_{j=1}^{s} P_j$. В силу неравенств (44.61) и (44.62) имеем

$$\mu P = \mu \bigcup_{j=1}^{l} P_j \leqslant \sum_{j=1}^{s} \mu P_j = \sum_{j=1}^{s} 3^n \mu Q_j = 3^n \mu S_k(E_0) < \frac{\varepsilon}{4M}. \tag{44.63}$$

Отметим, что множество P получается из $S_k(E_0)$ окаймлением последнего полосой кубов с ребрами длины 10^{-k}, поэтому всякое множество A с диаметром $d(A)$, меньшим чем 10^{-k}, пересекающееся с множеством $S_k(E_0)$, содержится в P (рис. 172):

$$d(A) < 10^{-k}, \quad A \cap S_k(E_0) \neq \varnothing \Rightarrow A \subset P. \tag{44.64}$$

Обозначим теперь через G множество внутренних точек многогранника $S_k(E_0)$. Очевидно, G — открытое множество, а поскольку по условиям теоремы E замкнуто, то множество $F = E \setminus G$ также замкнуто, причем в силу ограниченности E множество F ограничено, поэтому F — компакт. Далее, множество E_0 лежит внутри многогранника $S_k(E_0)$, т. е. $E_0 \subset G$ (как отмечалось выше, см. п. 44.1, это справедливо вообще для любого множества E и вытекает из определения многогранника $S_k(E)$). Отсюда явствует, что функция f непрерывна на компакте F, а поскольку, кроме того, множество F измеримо, как разность двух измеримых множеств E и G, то согласно теореме 9 функция f интегрируема на F. Поэтому для выбранного выше $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что для любого разбиения τ_F множества F мелкости $\delta_{\tau_F} < \delta$ выполняется неравенство

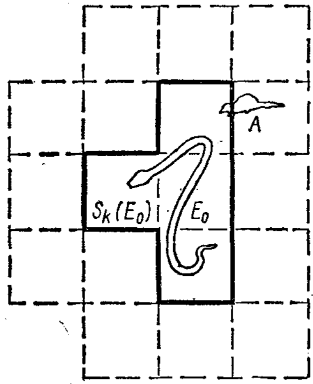


Рис. 172

$$S_{\tau_F} - s_{\tau_F} < \frac{\varepsilon}{2}, \tag{44.65}$$

где S_{τ_F} и s_{τ_F} — верхние и нижние суммы Дарбу функции f, соответствующие разбиению τ_F множества F.

Пусть

$$\delta_0 = \min\{10^{-k}, \delta\} \tag{44.66}$$

$\tau = \{E_i\}_{i=1}^{i=i_0}$ — какое-либо разбиение множества E мелкости $\delta_\tau < \delta_0$. Очевидно, что $\tau_F \overset{\text{def}}{=} \{E_i \cap F\}$, где $E_i \cap F \neq \varnothing$, является разбиением множества F мелкости $\delta_{\tau_F} \leqslant \delta_\tau < \delta_0$, и поэтому в силу (44.66), для τ_F выполняется неравенство (44.65).

Положим

$$M_i = \sup_{x \in E_i} f(x), \qquad m_i = \inf_{x \in E_i} f(x),$$

$$S_\tau = \sum_{i=1}^{i_0} M_i \mu E_i, \qquad s_\tau = \sum_{i=1}^{i_0} m_i \mu E_i,$$

$$M_i' = \sup_{x \in E_i \cap F} f(x), \qquad m_i' = \inf_{x \in E_i \cap F} f(x),$$

$$S_{\tau_F} = \sum_{E_i \cap F \neq \varnothing} M_i' \mu(E_i \cap F), \qquad s_{\tau_F} = \sum_{E_i \cap F \neq \varnothing} m_i' \mu(E_i \cap F).$$

Каждое множество $E_i \in \tau$ либо пересекается с G, либо нет. В случае непересечения, т. е. если $E_i \cap G = \varnothing$, то $E_i \subset F$, и для таких индексов i имеем $M_i = M_i'$, $m_i = m_i'$, $E_i \cap F = E_i$.

Поскольку $E_i \neq \varnothing$ и $E_i \subset E = F \cup G$, то из $E_i \cap G = \varnothing$ следует, что $E_i \subset F$ и, следовательно, $E_i \cap F \neq \varnothing$. Поэтому, заметив, что в нижеописанных суммах все слагаемые неотрицательны, получим:

$$\sum_{E_i \cap G = \varnothing} (M_i - m_i)\,\mu E_i = \sum_{E_i \cap G = \varnothing} (M_i' - m_i')\,\mu E_i \leqslant$$
$$\leqslant \sum_{E_i \cap F \neq \varnothing} (M_i' - m_i')\,\mu (E_i \cap F) = S_{\tau_F} - s_{\tau_F} < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{44.67}$$

Если же $E_i \cap G \neq \varnothing$, то в силу (44.64) и (44.66) $E_i \subset P$ и поэтому для этих индексов i (см. еще (44.63))

$$\sum_{E_i \cap G \neq \varnothing} \mu E_i = \mu \bigcup_{E_i \cap G \neq \varnothing} E_i \leqslant \mu P < \frac{\varepsilon}{4M}. \tag{44.68}$$

Использовав очевидные неравенства $|m_i| \leqslant M$, $|M_i| \leqslant M$, $i = 1, 2, \ldots, i_0$, непосредственно вытекающие из (44.60), и применив неравенство (44.68), будем иметь

$$\sum_{E_i \cap G \neq \varnothing} (M_i - m_i)\,\mu E_i \leqslant \sum_{E_i \cap G \neq \varnothing} [|M_i| + |m_i|]\,\mu E_i \leqslant$$
$$\leqslant 2M \sum_{E_i \cap G \neq \varnothing} \mu E_i < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{44.69}$$

Из (44.67) и (44.69) вытекает, что

$$S_\tau - s_\tau = \sum_{i=1}^{i_0} (M_i - m_i)\,\mu E_i =$$
$$= \sum_{E_i \cap G \neq \varnothing} (M_i - m_i)\,\mu E_i + \sum_{E_i \cap G = \varnothing} (M_i - m_i)\,\mu E_i < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Отсюда, согласно теореме 8, следует интегрируемость функции f на множестве E. $\square$

44.6. СВОЙСТВА КРАТНОГО ИНТЕГРАЛА

В этом пункте будут рассмотрены свойства кратного интеграла, аналогичные свойствам интеграла от функции одного переменного по отрезку. Напомним, что интегрируемость какой-либо функции (по Риману) на некотором множестве предполагает его измеримость по Жордану.

1°. *Пусть E — измеримое множество; тогда* $\int dE = \mu E$.

Действительно, в данном случае подынтегральная функция тождественно равна единице. Поэтому, если $\tau = \{E_i\}_{i=1}^{i=i_0}$ — некоторое разбиение множества E, то (см. (44.41))

$$\int dE = \lim_{\delta_\tau \to 0} \sum_{i=1}^{i_0} \mu E_i = \mu E.$$

2°. *Пусть E и E^* — измеримые множества, $E^* \subset E$ и функция f ограничена и интегрируема на E; тогда она интегрируема и на E^*.*

В самом деле, множество $E^{**} = E \setminus E^*$ также измеримо, как разность двух измеримых множеств. Пусть $\tau^* = \{E_i^*\}$ — разбиение множества E^* мелкости δ_{τ^*} и $\tau^{**} = \{E_j^{**}\}$ — разбиение множества E^{**} мелкости $\delta_{\tau^{**}} \leqslant \delta_{\tau^*}$. Тогда $\tau = \{E_i^*, E_j^{**}\}$ является разбиением множества E мелкости $\delta_\tau = \delta_{\tau^*}$. Если

$$\omega_\tau = \sum_{\tau^*} \omega(f, E_i^*)\, \mu E_i^* + \sum_{\tau^{**}} \omega(f, E_j^{**})\, \mu E_j^{**}$$

и

$$\omega_{\tau^*} = \sum_{\tau^*} \omega(f, E_i^*)\, \mu E_i^*,$$

то, очевидно, $0 \leqslant \omega_{\tau^*} \leqslant \omega_\tau$. Но $\lim\limits_{\delta_\tau \to 0} \omega_\tau = 0$, а поэтому $\lim\limits_{\delta_{\tau^*} \to 0} \omega_{\tau^*} = 0$, откуда и следует интегрируемость функции f на множестве E^* (см. (44.59)).

3°. **Аддитивность интеграла по множествам.** *Если E' и E'' — измеримые множества, $E = E' \cup E''$, $E' \cap E'' = \varnothing$ и функция f ограничена и интегрируема на множестве E, то интегралы $\int f(x)\, dE'$ и $\int f(x)\, dE''$ существуют и*

$$\int f(x)\, dE = \int f(x)\, dE' + \int f(x)\, dE''. \tag{44.70}$$

Поскольку существование интегралов $\int f(x)\, dE'$ и $\int f(x)\, dE''$ следует из свойства 2°, то нуждается в доказательстве лишь формула (44.70). Пусть $\tau' = \{E_i'\}$ и $\tau'' = \{E_j''\}$ — разбиения соответственно множеств E' и E''. Тогда $\tau = \{E_i', E_j''\}$ является разбиением множества E, и его мелкость равна наибольшей из мелкостей разбиений $\delta_{\tau'}$ и $\delta_{\tau''}$: $\delta_\tau = \max\{\delta_{\tau'}, \delta_{\tau''}\}$.

Пусть $\xi^{(i)} \in E_i'$, $\eta^{(j)} \in E_j''$,

$$\delta_{\tau'} = \sum_{\tau'} f(\xi^{(i)})\, \mu E_i', \quad \sigma_{\tau''} = \sum_{\tau''} f(\eta^{(j)})\, \mu E_j''$$

$$\sigma_\tau = \sigma_{\tau'} + \sigma_{\tau''}. \tag{44.71}$$

В силу интегрируемости функции f на множествах E, E' и E''

$$\lim_{\delta_\tau\to 0}\sigma_\tau=\int f(x)\,dE,\ \lim_{\delta_{\tau'}\to 0}\sigma_{\tau'}=\int f(x)\,dE',\ \lim_{\delta_{\tau''}\to 0}\sigma_{\tau''}=\int f(x)\,dE''.$$

Поэтому, переходя к пределу в равенстве (44.71) при $\delta_\tau\to 0$ получим (44.70).

Замечание. Следует обратить внимание на следующее обстоятельство: может случиться, что функция f определена на множестве $E=E'\cup E''$, где E' и E'' — измеримые множества, $E'\cap\cap E''=\varnothing$, интегралы $\int f(x)\,dE'$ и $\int f(x)\,dE''$ существуют, а интеграл $\int f(x)\,dE$ не существует.

Поясним сказанное на примере. Пусть $(r,\ \varphi)$ — полярные координаты точки на плоскости,

$$f(r,\ \varphi)=\begin{cases}0, & \text{если } r<1,\\ 1/\varphi, & \text{если } r=1,\ 0<\varphi\leqslant 2\pi,\end{cases}$$

$E'=\{(r,\ \varphi):\ r<1\}$ — открытый круг, $E''=\{(r,\ \varphi):\ r=1\}$ — окружность. Очевидно, $\mu E''=0$, а поэтому, несмотря на то, что функция f неограничена на E'' она интегрируема и $\int f(r,\ \varphi)\,dE''=0$. Существует и интеграл $\int f(r,\ \varphi)\,dE'=0$. Однако, интеграл $\int f(r,\ \varphi)\,dE$ по замкнутому кругу $E=E'\cup E''$ не существует. Действительно, множество E представляет собой замыкание области, поэтому у него существуют сколь угодно мелкие разбиения, все элементы которых имеют положительную меру. Следовательно (см. замечание к теореме 7), всякая интегрируемая на E функция ограничена, а заданная функция f неограничена и потому не интегрируема.

Важно отметить, однако, что для ограниченных функций подобной ситуации быть не может: если функция f ограничена и интегрируема на измеримых множествах E' и E'', $E'\cap E''=\varnothing$, то она интегрируема и на множестве $E=E'\cup E''$, причем справедлива формула (44.70). Это будет доказано в п. 44.7*.

Заметим лишь, что в случае, когда одно из множеств E' или E'' имеет меру ноль, то интегрируемость ограниченной функции f на их объединении, в предположении ее интегрируемости на каждом из них, можно получить почти дословным повторением рассуждений, проведенных при доказательстве теоремы 10. В самом деле, пусть f интегрируема и ограничена на измеримых множествах E' и E'', $\mu E'=0$, $E=E'\cup E''$. Тогда, если, как и в указанном доказательстве, построить множество $G\supset E'$ (множество E' играет здесь роль множества E_0 из теоремы 10) и положить $F=E\setminus G$, то будем иметь $F\subset E''$ и, следовательно, в силу свойства 2° интегралов, функция f окажется интегрируемой на множестве F, откуда, как и выше, вытекает ее интегрируемость на множестве E, а, значит, в силу свойства 3°, и справедливость формулы (44.70), где $\int f(x)\,dE' = 0$.

Подобным методом, только более сложным путем, можно доказать и общее утверждение.

4°. **Линейность интеграла.** *Если функции f_1 и f_2 интегрируемы на множестве E, то для любых чисел λ_1 и λ_2 существует интеграл $\int [\lambda_1 f_1(x) + \lambda_2 f_2(x)]\,dE$ и справедливо равенство*

$$\int [\lambda_1 f_1(x) + \lambda_2 f_2(x)]\,dE = \lambda_1 \int f_1(x)\,dE + \lambda_2 \int f_2(x)\,dE.$$

5°. *Если функции f и g интегрируемы и ограничены на некотором множестве, то и их произведение и отношение f/g* (при $\inf\limits_E |g| > 0$) *интегрируемы на этом множестве.*

6°. **Интегрирование неравенств.** *Если функции f и g интегрируемы на множестве E, и для всех $x \in E$ выполняется неравенство $f(x) \leqslant g(x)$, то $\int f(x)\,dE \leqslant \int g(x)\,dE$.*

7°. *Если функция f интегрируема и ограничена на множестве E, тогда и ее абсолютная величина $|f|$ интегрируема на нем, причем $\left|\int f(x)\,dE\right| \leqslant \int |f(x)|\,dE$.*

Доказательство свойств 4°, 5°, 6°, 7° проводится совершенно аналогично одномерному случаю (см. п. 28.1).

8°. **Монотонность интеграла от неотрицательных функций по множествам.** *Если E и E^* — измеримые множества, $E^* \subset E$, функция f неотрицательна, ограничена и интегрируема на E, то*

$$\int f(x)\,dE^* \leqslant \int f(x)\,dE. \tag{44.72}$$

Действительно, в силу свойств 2° и 3° интегралы $\int f(x)\,dE^*$ и $\int f(x)\,d(E \setminus E^*)$ существуют и

$$\int f(x)\,dE = \int f(x)\,dE^* + \int f(x)\,d(E \setminus E^*).$$

Поскольку $f(x) \geqslant 0$, то в силу свойства 6° $\int f(x)\,d(E \setminus E^*) \geqslant 0$, а отсюда и следует неравенство (44.72).

9°. *Пусть функция f интегрируема и неотрицательна на измеримом открытом множестве G, $x^0 \in G$, функция f непрерывна в точке $x^{(0)}$ и $f(x^{(0)}) > 0$. Тогда*

$$\int f(x)\,dG > 0. \tag{44.73}$$

Действительно, в силу непрерывности функции f в точке $x^{(0)}$ для любого $\varepsilon > 0$ существует такая окрестность $U = U(x^{(0)})$ этой точки, что для всех $x \in U$ выполняется неравенство $f(x^{(0)}) - \varepsilon < f(x) < f(x^{(0)}) + \varepsilon$. При этом в силу открытости множества G окрестность U всегда можно выбрать так, чтобы $U \subset G$.

Выбрав $\varepsilon = \frac{f(x^{(0)})}{2}$ получим для него такую окрестность U, что для всех x, принадлежащих этой окрестности будем иметь $f(x) > \frac{f(x^{(0)})}{2}$. Отсюда, применяя последовательно свойства 8°, 6° и 1°, найдем, что

$$\int f(x)\,dG \geqslant \int f(x)\,dU \geqslant \frac{f(x^{(0)})}{2}\int dU = \frac{f(x^{(0)})}{2}\mu U > 0,$$

ибо $\mu U > 0$, как мера всякого открытого множества. □

Отметим непосредственное следствие из свойства 9°.

Следствие. *Если функция f непрерывна, интегрируема и неотрицательна на измеримом открытом множестве G и не является тождественным нулем, то $\int f(x)\,dG > 0$.*

10°. **Полная аддитивность интеграла по множествам.** *Пусть функция f ограничена и интегрируема на множестве E, а $\{E_k\}$, $k = 1, 2 \ldots$ — последовательность таких измеримых множеств $E_k \subset E$, что*

$$\lim_{k\to+\infty} \mu E_k = \mu E. \text{*)} \tag{44.74}$$

Тогда

$$\lim_{k\to+\infty} \int f(x)\,dE_k = \int f(x)\,dE. \tag{44.75}$$

В силу аддитивности интеграла имеем:

$$\int f(x)\,dE - \int f(x)\,dE_k = \int f(x)\,d(E \setminus E_k).$$

Поскольку по условию функция f ограничена, т. е. существует такая постоянная $M > 0$, что $|f(x)| \leqslant M$ для всех $x \in E$, то

$$\left|\int f(x)\,dE - \int f(x)\,dE_k\right| = \left|\int f(x)\,d(E\setminus E_k)\right| \leqslant$$
$$\leqslant \int |f(x)|\,d(E\setminus E_k) \leqslant M\int d(E\setminus E_k) = M\mu(E\setminus E_k).$$

По аддитивности меры имеем $\mu(E\setminus E_k) = \mu E - \mu E_k$, следовательно

$$\left|\int f(x)\,dE - \int f(x)\,dE_k\right| \leqslant M(\mu E - \mu E_k).$$

Отсюда в силу (44.74) и следует (44.75). □

11°. **Теорема о среднем.** *Пусть функции f и g ограничены и интегрируемы на множестве E. Если функция g не меняет знака на E и $m \leqslant f(x) \leqslant M$, $x \in E$, то существует такое число λ, $m \leqslant \lambda \leqslant M$, что*

$$\int f(x)\,g(x)\,dE = \lambda \int g(x)\,dE.$$

*) С последовательностями измеримых множеств, обладающих свойством (44.74) мы уже встречались, см. например, теорему 2 в п. 31.2.

Следствие. *Пусть E — измеримое линейно связное множество или замыкание линейно связного множества. Тогда если функция f ограничена, интегрируема и непрерывна на E, то существует такая точка $\xi \in E$, что $\int f(x)\, dE = f(\xi)\, \mu E$.*

Теорема о среднем доказывается совершенно аналогично одномерному случаю (см. п. 28.2). Для получения следствия надо использовать теорему о промежуточных значениях функции, непрерывной на линейно связном множестве или на его замыкании (см. п. 19.5).

44.7*. КРИТЕРИИ ИНТЕГРИРУЕМОСТИ ФУНКЦИЙ РИМАНА И ДАРБУ И ИХ СЛЕДСТВИЯ

Пусть функция f определена и ограничена на измеримом по Жордану множестве E, $\tau = \{E_i\}_{i=1}^{i=i_0}$ — его разбиение, $m_i = \inf\limits_{E} f$, $M_i = \sup\limits_{E} f$, $s_\tau = \sum\limits_{i=1}^{i_0} m_i \mu E_i$, $S_\tau = \sum\limits_{i=1}^{i_0} M_i \mu E_i$ — нижняя и верхняя суммы Дарбу, соответствующие разбиению τ. Положим

$$I_* = \sup_\tau s_\tau, \quad I^* = \inf_\tau S_\tau; \tag{44.76}$$

I_* называется *нижним*, а I^* — *верхним интегралом Дарбу* функции f. Оказывается, что нижний и верхний интегралы Дарбу являются не только соответственно верхней и нижней гранью интегральных сумм Дарбу, но и их пределом при условии, что мелкость разбиений стремится к нулю.

Теорема 11. *Если функция f ограничена на измеримом по Жордану множестве E, то*

$$I_* = \lim_{\delta_\tau \to 0} s_\tau, \quad I^* = \lim_{\delta_\tau \to 0} S_\tau.$$

Доказательство. Установим справедливость первой формулы (вторая доказывается аналогично). Пусть $|f(x)| \leqslant M$, $x \in E$, а $\varepsilon > 0$ задано. В силу определения (44.76) существует такое разбиение $\tau^* = \{E_i^*\}$ множества E, что

$$s_{\tau^*} > I_* - \frac{\varepsilon}{3}. \tag{44.77}$$

Здесь $s_{\tau^*} = \sum\limits_{i=1}^{i_0} m_i^* \mu E_i^*$, $m_i^* = \inf\limits_{E_i^*} f$, $i = 1, 2, \ldots, i_0$. Пусть

$$E_0 = \bigcup_{i=1}^{i_0} \partial E_i^*. \tag{44.78}$$

Поскольку каждое множество E_i^* измеримо, то $\mu\partial E_i^*=0$; поэтому $\mu E_0=0$. Следовательно, существует такой ранг $k=k(\varepsilon)$, что

$$\mu S_k(E_0)<\frac{\varepsilon}{3^{n+1}M}. \tag{44.79}$$

Покажем, что для любого разбиения $\tau=\{E_j\}_{j=1}^{j=j_0}$ множества E мелкости $\delta_\tau<10^{-k}$ выполняется равенство

$$I_*-\varepsilon<s_\tau\leqslant I_*. \tag{44.80}$$

В силу произвольности $\varepsilon>0$ это и означает, что $\lim\limits_{\delta_\tau\to 0} s_\tau=I_*$.

Неравенство $s_\tau\leqslant I_*$ непосредственно вытекает из определения нижнего интеграла I_* (см. (44.76)). Поэтому надо доказать лишь неравенство

$$s_\tau>I_*-\varepsilon \tag{44.81}$$

при условии $\delta_\tau<10^{-k}$.

Пусть $S_k=S_k(E_0)$ состоит из кубов $Q_1, \ldots, Q_m$. Аналогично тому, как это было сделано при доказательстве теоремы 10, обозначим через P_j куб, получающийся из Q_j преобразованием подобия с центром в центре куба Q_j и коэффициентом подобия, равным 3, $j=1, 2, \ldots, m$. Положим

$$P=\bigcup_{j=1}^{m} P_j, \quad G=E\setminus P. \tag{44.82}$$

Из определений множеств P и G следует, что множество G отделено от многогранника $S_k(E_0)$ «полосой» кубов с ребрами длины 10^{-k}. Прежде всего оценим меру μP. Из определения множества P (см. 44.82)) и неравенства (44.79) имеем (сравните с (44.63))

$$\mu P=\mu\bigcup_{j=1}^{m} P_j\leqslant\sum_{j=1}^{m}\mu P_j=$$
$$=3^n\sum_{j=1}^{m}\mu Q_j=3^n\mu S_k(E_0)<\frac{\varepsilon}{3M}. \tag{44.83}$$

Далее заметим, что для любого множества $A\subset E$ с диаметром $d(A)<10^{-k}$, пересекающимся со множеством $G: A\cap G\neq\varnothing$, существует и притом единственное множество $E_i^*\in\tau^*$ такое, что

$$A\subset E_i^*. \tag{44.84}$$

Действительно, выберем какую-либо точку $x\in A\cap G$. Поскольку $A\subset E$, то $x\in E$, и поэтому точка x содержится в некотором элементе E_i^* разбиения τ^*. Для этого элемента и выполняется включение (44.84). В самом деле, если это включение не имело бы места, то нашлась бы точка $y \in A \setminus E_i^*$. Поскольку $x \in A$, $y \in A$ и $d(A) < 10^{-k}$, то $\rho(x, y) < 10^{-k}$. Следовательно, отрезок с концами в точках x и y, имея длину, меньшую, чем 10^{-k}, и один конец x во множестве G, не пересекается со множеством $S_k(E_0)$, ибо оно отделено от G полосой ширины 10^{-k}. Однако из того, что один конец отрезка принадлежит некоторому множеству, в данном случае — множеству E_i^*, а другой нет, следует (см. лемму 9 в п. 18.2), что на этом отрезке существует точка $z \in \partial E_i^*$. Но (см. (44.78)) $\partial E_i^* \subset E_0 \subset S_k(E_0)$, т. е. $z \in S_k(E_0)$. Следовательно, указанный отрезок пересекается со множеством $S_k(E_0)$. Полученное противоречие и доказывает вложение (44.84).

Докажем единственность множества E_i^*, удовлетворяющего включению (44.84). Пусть существует еще одно множество $E_k^* \in \tau^*$, такое, что $A \subset E_k^*$, $k \neq i$. Тогда $A \subset E_i^* \cap E_k^*$. Если пересечение $E_i^* \cap E_k^*$ содержало бы хоть одну точку, являющуюся одновременно внутренней для множеств E_i^* и E_k^*, то эта точка была бы внутренней и для пересечения $E_i^* \cap E_k^*$, а тогда имело бы место неравенство $\mu E_i^* \cap E_k^* > 0$. Это неравенство противоречит определению разбиения (см. п. 44.3), в силу которого $\mu E_i^* \cap E_k^* = 0$ при $i \neq k$. Следовательно, каждая точка пересечения $E_i^* \cap E_k^*$, поэтому и каждая точка множества A, является граничной точкой по крайней мере для одного из множеств E_i^*, E_k^*. Но тогда $A \subset \bigcup\limits_{i=1}^{i_0} \partial E_i^* = E_0 \subset S_k(E_0)$. Это невозможно, так как множество A пересекается со множеством G, которое не пересекается с $S_k(E_0)$. Противоречие получилось из предположения о существовании второго элемента E_k^* из τ^*, содержащего множество A. Следовательно такой элемент единственен.

Возьмем теперь произвольное разбиение $\tau = \{E_j\}_{j=1}^{j=j_0}$ множества E мелкости $\delta_\tau < 10^{-k}$. Нижнюю сумму Дарбу

$$s_\tau = \sum_{j=1}^{j_0} m_j \mu E_j, \quad m_j = \inf_{x \in E_j} f(x), \quad j = 1, 2, \ldots, j_0,$$

разобьем на два слагаемых, соответствующих тем E_j, которые пересекаются со множеством G, и тем, которые с ним не пересекаются и, следовательно, целиком лежат в множестве P (см. (44.82)).

$$s_\tau = \sum_{E_j \cap G \neq \varnothing} m_j \mu E_j + \sum_{E_j \subset P} m_j \mu E_j. \tag{44.85}$$

Использовав очевидное неравенство

$$|m_j| \leqslant M, \quad j = 1, 2, \ldots, j_0, \tag{44.86}$$

где $|f(x)|\leqslant M$, $x\in E$, и оценку (44.83), получим

$$\left|\sum_{E_j\subset P} m_j\mu E_j\right| \leqslant \sum_{E_j\subset P} |m_j|\,\mu E_j \leqslant M\sum_{E_j\subset P}\mu E_j \leqslant$$
$$\leqslant M\mu\bigcup_{E_j\subset P} E_j \leqslant M\mu P < M\frac{\varepsilon}{3M}=\frac{\varepsilon}{3}.$$

В частности, $\sum\limits_{E_j\subset P} m_j\mu E_j > -\frac{\varepsilon}{3}$. Поэтому из (44.85) имеем

$$s_\tau > \sum_{E_j\cap G\neq\varnothing} m_j\mu E_j - \frac{\varepsilon}{3}. \tag{44.87}$$

Теперь заметим, что $d(E_j)\leqslant\delta_\tau<10^{-k}$, поэтому для каждого E_j, пересекающегося со множеством G, в силу (44.84) существует такое $E_i^*\in\tau^*$, что $E_j\subset E_i^*$. Обозначим через G_i объединение всех тех E_j, которые пересекаются с G и содержатся в E_i^*:

$$G_i=\bigcup_{E_j\subset E_i^*,\ E_j\cap G\neq\varnothing} E_j.$$

Группируя в сумме $\sum\limits_{E_j\cap G\neq\varnothing} m_j\mu E_j$ слагаемые, содержащиеся в одном и том же множестве G_i, запишем ее в виде

$$\sum_{E_j\cap G\neq\varnothing} m_j\mu E_j=\sum_{i=1}^{i_0}\sum_{E_j\subset G_i} m_j\mu E_j. \tag{44.88}$$

Для оценки внутренней суммы, заметим, что для любого $i=1, 2, \ldots, i_0$ согласно очевидному равенству

$$E_i^*=(E_i^*\cap G_i)\cup(E_i^*\setminus G_i)=G_i\cup(E_i^*\setminus G_i)$$

(второе равенство следует из включения $G_i\subset E_i^*$) имеем

$$m_i^*\mu E_i^*=m_i^*\mu G_i+m_i^*\mu(E_i^*\setminus G_i)=$$
$$=m_i^*\mu\bigcup_{E_j\subset G_i} E_j+m_i^*\mu(E_i^*\setminus G_i)=$$
$$=m_i^*\sum_{E_j\subset G_j}\mu E_j+m_i^*\mu(E_i^*\setminus G_i). \tag{44.89}$$

Оценим второе слагаемое. Каждая точка $x\in E_i^*\setminus G_i$ принадлежит некоторому множеству $E_j\in\tau: x\in E_j$. Это E_j не может пересекаться с G, так как всякое $E_j\in\tau$, пересекающееся с G, целиком содержится в некотором элементе разбиения τ^* (см. (44.84)). Поскольку пересечение $E_j\cap E_i^*$ непусто: $x\in E_j\cap E_i^*$, то в данном случае этим элементом может быть только множество E_i^*, т. е. $E_j\subset E_i^*$. Но тогда, в силу определения множества G_i, имело бы место включение $E_j \subset G_i$ и, следовательно, $x \in G_i$. Это противоречит предположению, что $x \in E_i^* \setminus G_i$. Итак, множество E_j не пересекается с G и поэтому $E_j \subset P$. Отсюда, в частности, вытекает, что $x \in P$. Поскольку x — произвольная точка множества $E_i^* \setminus G_i$, то $E_i^* \setminus G_i \subset P$, и поэтому $E_i^* \setminus G_i \subset E_i^* \cap P$.

Использовав это включение и неравенство (44.86), получим

$$m_i^* \mu (E_i^* \setminus G_i) \leqslant M \mu E_i^* \cap P.$$

Подставив это неравенство в (44.89), будем иметь

$$m_i^* \mu E_i^* \leqslant \sum_{E_j \subset G_i} m_i^* \mu E_j + M \mu E_i^* \cap P.$$

Теперь заметив, что из включения $E_j \subset G_i \subset E_i^*$ следует неравенство $m_i^* \leqslant m_j$ (нижняя грань подмножества не меньше, чем нижняя грань самого множества), получим

$$m_i^* \mu E_i^* \leqslant \sum_{E_j \subset G_i} m_j \mu E_j + M \mu E_i^* \cap P,$$

откуда

$$\sum_{E_j \subset G_i} m_j \mu E_j \geqslant m_i^* \mu E_i^* - M \mu E_i^* \cap P.$$

Просуммировав обе части по i от 1 до i_0, в силу (44.88) будем иметь

$$\sum_{E_j \cap G \neq \varnothing} m_j \mu E_j \geqslant \sum_{i=1}^{i_0} m_i^* \mu E_i - M \sum_{i=1}^{i_0} \mu E_i^* \cap P = s_{\tau^*} - M \sum_{i=1}^{i_0} \mu E_i^* \cap P.$$

Поскольку, согласно (44.83)

$$\sum_{i=1}^{i_0} \mu E_i^* \cap P = \mu \bigcup_{i=1}^{i_0} E_i^* \cap P \leqslant \mu P < \frac{\varepsilon}{3M},$$

то

$$\sum_{E_j \cap G \neq \varnothing} m_j \mu E_j > s_{\tau^*} - \frac{\varepsilon}{3}. \tag{44.90}$$

Применив теперь последовательно неравенства (44.87), (44.90) и (44.77), получим

$$s_\tau > \sum_{E_j \cap G \neq \varnothing} m_j \mu E_j - \frac{\varepsilon}{3} > s_{\tau^*} - \frac{2\varepsilon}{3} > I_* - \varepsilon,$$

т. е. неравенство (44.81), а следовательно, и теорема 11, доказаны. $\square$

С ее помощью можно установить два критерия интегрируемости ограниченной функции.

Теорема 12 (критерий Дарбу). *Ограниченная на измеримом по Жордану множестве функция интегрируема по Риману тогда и только тогда, когда ее верхний и нижний интегралы Дарбу равны.*

Доказательство. Пусть I_* и I^* — соответственно нижний и верхний интегралы Дарбу функции f, ограниченной на измеримом множестве E. Следовательно, для любого разбиения τ множества E выполняются неравенства (см. (44.76))

$$s_\tau \leqslant I_* \leqslant I^* \leqslant S_\tau. \tag{44.91}$$

Необходимость условия $I_* = I^*$. Если функция f интегрируема на множестве E, то (см. (44.57))

$$\lim_{\delta_\tau \to 0} (S_\tau - s_\tau) = 0,$$

и поскольку $0 \leqslant I^* - I_* \leqslant S_\tau - s_\tau$, то $I_* = I^*$.

Достаточность условия $I_* = I^*$. Если $I_* = I^*$, то в силу теоремы 11

$$\lim_{\delta_\tau \to 0} (S_\tau - s_\tau) = \lim_{\delta_\tau \to 0} S_\tau - \lim_{\delta_\tau \to 0} s_\tau = I^* - I_* = 0,$$

и поэтому, согласно теореме 8 из п. 44.4, функция f интегрируема. □

Теорема 13 (критерий Римана). *Ограниченная на измеримом по Жордану множестве E функция f интегрируема по Риману тогда и только тогда, когда для любого $\varepsilon > 0$ существует такое разбиение τ множества E, что*

$$S_\tau - s_\tau < \varepsilon, \tag{44.92}$$

где s_τ и S_τ — нижняя и верхняя суммы Дарбу функции f, соответствующие разбиению τ.

Доказательство. Если функция f интегрируема на множестве E, то для нее выполняется условие (44.57) (см. теорему 8 в п. 44.4). Справедливость (44.92) следует из определения предела сумм Дарбу при $\delta_\tau \to 0$.

Если, наоборот, выполняется условие (44.92), то в силу (44.91) при любом $\varepsilon > 0$ справедливо неравенство $0 \leqslant I^* - I_* < \varepsilon$ и потому $I_* = I^*$. Отсюда, согласно теореме 12 и вытекает, что функция f интегрируема на множестве E. □

Итак, вспоминая определение кратного интеграла, данное в п. 44.3, теорему 8 из п. 44.4 и теоремы 12 и 13 этого пункта, получаем эквивалентность следующих пяти утверждений:

1) *функция f интегрируема на множестве E, т. е. существует предел* $\lim\limits_{\delta_\tau \to 0} \sigma_\tau = \int f(x)\, dE$;

2) $\lim\limits_{\delta_\tau \to 0} (S_\tau - s_\tau) = 0$;

3) $\lim\limits_{\delta_\tau\to 0}\sum\limits_{i=1}^{i_0}\omega(f;\ E_i)\mu E_i=0$, $\tau=\{E_i\}_{i=1}^{i_0}$ — *разбиение множества* E;

4) *для любого* $\varepsilon>0$ *существует такое разбиение* τ *множества* E, *что* $S_\tau-s_\tau<\varepsilon$;

5) $I_*=I^*$.

Таким образом выполнение каждого из этих условий равносильно существованию интеграла $\int f(x)dE$, причем

$$\int f(x)dE=\lim_{\delta_\tau\to 0}\sigma_\tau=\lim_{\delta_\tau\to 0}s_\tau=\lim_{\delta_\tau\to 0}S_\tau.$$

Замечание 1. Доказанные теоремы позволяют теперь без труда доказать аддитивность интеграла по измеримым множествам для ограниченных функций (см. п. 44.6, свойство 3) в следующем виде: *если ограниченная функция* f *интегрируема на непересекающихся множествах* E_1 и E_2, *то она интегрируема и на множестве* $E=E_1\cup E_2$.

Действительно, если функция f ограничена и интегрируема на множествах E_1 и E_2, то, в силу теоремы 13, для любого $\varepsilon>0$ существуют разбиения τ_1 и τ_2 соответственно множеств E_1 и E_2 такие, что

$$S_{\tau_1}-s_{\tau_1}<\frac{\varepsilon}{2},\quad S_{\tau_2}-s_{\tau_2}<\frac{\varepsilon}{2}. \tag{44.93}$$

Поскольку $\tau=\tau_1\cup\tau_2$ является разбиением множества $E=E_1\cup E_2$ и соответствующие ему верхняя S_τ и нижняя s_τ суммы Дарбу выражаются через аналогичные суммы Дарбу, соответствующие разбиениям τ_1 и τ_2, по формулам $S_\tau=S_{\tau_1}+S_{\tau_2}$, $s_\tau=s_{\tau_1}+s_{\tau_2}$, то вычитая из первого из этих равенств второе, получаем в силу (44.93)

$$S_\tau-s_\tau=(S_{\tau_1}-s_{\tau_1})+(S_{\tau_2}-s_{\tau_2})<\varepsilon.$$

Из выполнения этого условия следует (снова согласно теореме 13), что функция f интегрируема на множестве E.

Замечание 2. Как уже отмечалось в п. 44.3, для функций одной переменной, определенных на отрезках, мы располагаем двумя определениями интеграла, а именно, определением, данным в п. 27.1 — с помощью разбиений отрезков только на отрезки, и определением из п. 44.3 — с помощью разбиений отрезков на любые измеримые по Жордану множества. Эти два определения эквивалентны.

Докажем это. И при первом и при втором определении необходимым условием интегрируемости является ограниченность рассматриваемой функции: см. теорему 1 в п. 27.2 и замечание к теореме 7 в п. 44.4. (отрезок является замыканием интервала, т. е. замыканием открытого множества). Поэтому рассмотрим ограниченную на некотором отрезке $[a, b]$ функцию f. Пусть для этой функции существует интеграл $I = \lim\limits_{\delta_\tau \to 0} \sum\limits_{i=1}^{i_0} f(\xi_i)\mu E_i$ в смысле п. 44.3, т. е. для всевозможных разбиений $\tau = \{E_i\}_{i=1}^{i=i_0}$ отрезка $[a, b]$ на измеримые по Жордану множества E_i. Тогда, если ограничиться лишь частью разбиений τ, для которых все множества E_i являются отрезками, то при $\delta_\tau \to 0$ предел интегральных сумм $\sum\limits_{i=1}^{i_0} f(\xi_i)\mu E_i$ по указанной части разбиений также будет существовать и будет равен тому же числу I. Следовательно, если существует интеграл в смысле п. 44.3, то он существует и в смысле п. 27.1.

Пусть, наоборот, существует интеграл $I = \int\limits_a^b f(x)\,dx$ в смысле п. 27.1. Тогда согласно теореме 2 из п. 27.4 $\lim\limits_{\delta_\tau \to 0} (S_\tau - s_\tau) = 0$, где τ — разбиение отрезка $[a, b]$ на отрезки. Следовательно, для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что для всякого разбиения τ отрезка $[a, b]$ на отрезки длин, не превышающих δ, справедливо неравенство $S_\tau - s_\tau < \varepsilon$. Но уже из того, что существует по крайней мере одно разбиение τ, для которого выполняется неравенство $S_\tau - s_\tau < \varepsilon$, следует, согласно теореме 13 из этого пункта, что функция f интегрируема в смысле определения п. 44.3.

Итак, оба определения интеграла по отрезку действительно эквивалентны.

Замечание 3. Из доказанного вытекает также следующее усиление достаточных условий интегрируемости функции, доказанных в теореме 2 из п. 27.4: для интегрируемости функции f на отрезке $[a, b]$ в смысле определения интеграла в п. 27.1 достаточно, чтобы для любого $\varepsilon > 0$ нашлось хотя бы одно такое разбиение τ отрезка $[a, b]$ на отрезки, что для нижних и верхних сумм Дарбу соответствующих этому разбиению, выполнялось бы неравенство $S_\tau - s_\tau < \varepsilon$.

Действительно, в этом случае функция f интегрируема на отрезке $[a, b]$ в смысле п. 44.3, а потому, согласно доказанному, и в смысле п. 27.1.

Замечание 4. Из предыдущего замечания непосредственно следует, что функция f, ограниченная на некотором отрезке $[a, b]$ и интегрируемая по Риману на любом отрезке $[a, \eta]$, $a < \eta < b$, интегрируема и на всем отрезке $[a, b]$ (это факт был отмечен нами без доказательства в п. 33.1). Действительно, если $|f(x)| \leqslant M$, $x \in [a, b]$, и задано $\varepsilon > 0$, то выберем δ, $0 < \delta < b - a$, так, чтобы $\delta < \frac{\varepsilon}{4M}$. Тогда в силу интегрируемости функции

f на отрезке $[a, b-\delta]$ существует такое его разбиение τ, что если s_τ и S_τ — нижняя и верхняя суммы Дарбу функции для этого разбиения, то

$$S_\tau - s_\tau < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Обозначим через τ_0 разбиение отрезка $[a, b]$, получающееся из разбиения τ_0 отрезка $[a, b-\delta]$ добавлением точки b: $\tau_0 = \tau \cup \{b\}$, и пусть $m_0 = \inf\limits_{[b-\delta, b]} f(x)$, $M_0 = \sup\limits_{[b-\delta, b]} f(x)$. Если s_{τ_0} и S_{τ_0} — нижняя и верхняя суммы Дарбу функции для разбиения τ_0, то

$$S_{\tau_0} = S_\tau + M_0\delta, \quad s_{\tau_0} = s_\tau + m_0\delta.$$

Поэтому

$$S_{\tau_0} - s_{\tau_0} = S_\tau - s_\tau + (M_0 - m_0)\delta < \frac{\varepsilon}{2} + 2M\delta = \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

и, следовательно, согласно замечанию 3, функция f интегрируема по Риману на отрезке $[a, b]$.

§ 45. СВЕДЕНИЕ КРАТНОГО ИНТЕГРАЛА К ПОВТОРНОМУ

Перейдем теперь к свойствам кратного интеграла, связанным со специфическими чертами, отличающими многомерный случай от одномерного. Использование этих свойств часто существенно облегчает вычисление конкретных кратных интегралов. Полные доказательства будут проводиться лишь для случая функций двух переменных. Общий, n-мерный случай, в идейном отношении не отличается от плоского, однако рассуждения там принимают более громоздкий и трудно обозримый вид.

45.1. СВЕДЕНИЕ ДВОЙНОГО ИНТЕГРАЛА К ПОВТОРНОМУ

В настоящем параграфе будет показано, что интегрирование функций многих переменных может быть сведено к последовательному интегрированию функций одной переменной. Начнем с того, что определим понятие повторного интеграла.

Пусть на отрезке $[a, b]$ заданы непрерывные функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$, такие, что $\varphi(x) \leqslant \psi(x)$, $a \leqslant x \leqslant b$, и пусть на множестве (рис. 173)

$$E = \{(x, y) : a \leqslant x \leqslant b, \ \varphi(x) \leqslant y \leqslant \psi(x)\} \tag{45.1}$$

определена функция $f(x, y)$.

Если для любого фиксированного $x \in [a, b]$ функция $f(x, y)$, как функция переменного y, интегрируема на отрезке $[\varphi(x), \psi(x)]$, т. е. при любом $x \in [a, b]$ существует интеграл $\int\limits_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x, y)\,dx$ и функция

$$F(x) = \int\limits_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x, y)\,dy \tag{45.2}$$

интегрируема на отрезке $[a, b]$, то интеграл

$$\int\limits_a^b \left[\int\limits_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x, y)\,dy\right] dx \tag{45.3}$$

называется *повторным интегралом* и обозначается через

$$\int\limits_a^b dx \int\limits_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x, y)\,dy. \tag{45.4}$$

Функция $F(x)$, задаваемая равенством (45.2), называется *интегралом, зависящим от параметра* x. Таким образом, повторный интеграл (45.4) является интегралом от интеграла, зависящего от параметра (см. также § 53, 54).

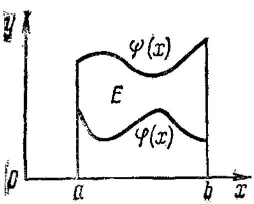


Рис. 173

Заметим, что множество E, задаваемое формулой (45.1) измеримо в смысле плоской меры Жордана и замкнуто. Действительно из непрерывности функций φ и ψ на отрезке $[a, b]$ следует их ограниченность, а поэтому множество E ограничено. Далее, его граница ∂E состоит из графиков указанных функций φ и ψ, а также, быть может, отрезков прямых $x = a$ и $x = b$. Каждое из указанных множеств имеет меру ноль (см. теорему 3 в п. 44.2), а поэтому и граница ∂E множества E также имеет меру ноль. Наконец, множество E задается с помощью нестрогих неравенств $a \leqslant x \leqslant b$, $\varphi(x) \leqslant y \leqslant \psi(x)$, где функции φ и ψ непрерывны, следовательно, эти неравенства сохраняются и при предельном переходе, откуда и вытекает замкнутость множества E. Таким образом, E — измеримый компакт.

Достаточные условия для возможности сведе́ния двукратного интеграла к повторному даются следующей теоремой.

Теорема 1. *Пусть функция $f(x, y)$ непрерывна на множестве E, заданном формулой* (45.1). *Тогда*

$$\iint\limits_E f(x, y)\,dx\,dy = \int\limits_a^b dx \int\limits_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x, y)\,dy. \tag{45.5}$$

Доказательству теоремы предпошлем следующую лемму.

Лемма 1. *В предположениях теоремы* 1 *функция* (45.2) *непрерывна на отрезке* $[a, b]$.

Доказательство леммы. Прежде всего заметим, что интеграл (45.2) существует при любом $x \in [a, b]$. Действительно, функция $f(x, y)$, будучи непрерывной по совокупности переменных x и y, непрерывна по каждому из них. Поэтому указанный интеграл существует как интеграл от непрерывной по y функции на отрезке $[\varphi(x), \psi(x)]$.

Выполнив в этом интеграле замену переменной y на t по формуле

$$y = \varphi(x) + [\psi(x) - \varphi(x)]\, t, \quad 0 \leqslant t \leqslant 1, \tag{45.6}$$

получим

$$F(x) = \int_0^1 f[x, \varphi(x) + (\psi(x) - \varphi(x))\, t]\, (\psi(x) - \varphi(x))\, dt. \tag{45.7}$$

Положим

$$g(x, t) = f[x, \varphi(x) + (\psi(x) - \varphi(x))\, t]\, (\psi(x) - \varphi(x)).$$

Поскольку функция $g(x, t)$ получается с помощью арифметических операций и композиции из непрерывных функций f, φ, ψ и (45.6), то в силу теоремы о непрерывных функциях (см. п. 19.3 и 19.4) $g(x, t)$ непрерывна по совокупности переменных x, t на прямоугольнике

$$\Delta = \{(x, t) : a \leqslant x \leqslant b,\ 0 \leqslant t \leqslant 1\}.$$

Таким образом, для функции $F(x)$ (см. (45.2)) в силу (45.7) имеет место более простое представление

$$F(x) = \int_0^1 g(x, t)\, dt$$

(более простое в том смысле, что в нем постоянны пределы интегрирования).

Пусть теперь $x \in [a, b]$, $x + \Delta x \in [a, b]$.

Обозначим через $\omega(\delta; g)$ модуль непрерывности (см. п. 19.6) функции $g(x, t)$. Тогда

$$|F(x + \Delta x) - F(x)| = \left| \int_0^1 g(x + \Delta x, t)\, dt - \int_0^1 g(x, t)\, dt \right| \leqslant$$

$$\leqslant \int_0^1 |g(x + \Delta x, t) - g(x, t)|\, dt \leqslant \omega(|\Delta x|; g). \tag{45.8}$$

Функция $g(x, t)$, будучи непрерывной на ограниченном замкнутом множестве Δ, равномерно непрерывно на нем, а поэтому (см. п. 19.6) $\lim\limits_{\delta \to 0} \omega(\delta; g) = 0$. Отсюда в силу неравенства (45.8) имеем:

$$\lim_{\Delta x \to 0} [F(x + \Delta x) - F(x)] = 0,$$

что и означает непрерывность функции $F(x)$, определенной формулой (45.2). □

Доказательство теоремы. Прежде всего заметим, что интеграл, стоящий в правой части равенства (45.5), т. е.

$$\int\limits_b^a F(x)\,dx=\int\limits_a^b dx\int\limits_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,\ y)dy,$$

является интегралом от непрерывной функции (см. лемму) и потому существует.

Разобьем теперь множество E на части E_{ij}, $i,\ j=1,\ 2,\ \ldots,\ k$, следующим образом. Рассмотрим разбиение $\tau_k=\{x_i\}_{i=0}^{i=k}$ отрезка $[a,\ b]$ на k равных отрезков:

$$a=x_0<x_1<\ldots<x_k=b,$$

$$x_i-x_{i-1}=\frac{b-a}{k},\quad i=1,\ 2,\ \ldots,\ k,$$

и пусть

$$\varphi_0(x)=\varphi(x),$$

$$\varphi_1(x)=\varphi(x)+\frac{1}{k}[\psi(x)-\varphi(x)],$$

. . . .

$$\varphi_j(x)=\varphi(x)+\frac{j}{k}[\psi(x)-\varphi(x)],$$

. . . .

$$\varphi_k(x)=$$
$$=\varphi(x)+\frac{k}{k}[\psi(x)-\varphi(x)]=\psi(x).$$

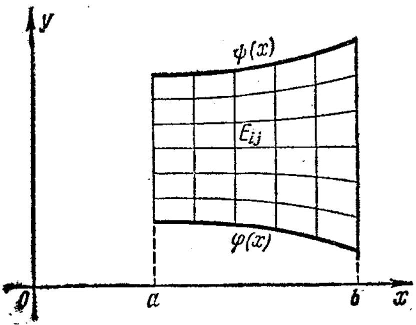


Рис. 174

Положим $E_{ij}=\{(x,\ y):x_{i-1}\leqslant x\leqslant x_i,\ \varphi_{j-1}(x)\leqslant y\leqslant\varphi_j(x)\}$, и пусть $\tau_k^*=\{E_{ij}\}$, $i,\ j=1,\ 2,\ \ldots,\ k$. Очевидно, что τ_k^* является разбиением множества E (рис. 174).

Теперь имеем:

$$\int\limits_a^b dx\int\limits_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,\ y)dy=\sum_{i=1}^{k}\int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} dx\int\limits_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,\ y)dy=$$

$$=\sum_{i=1}^{k}\int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} dx\sum_{j=1}^{k}\int\limits_{\varphi_{j-1}(x)}^{\varphi_j(x)} f(x,\ y)\,dy=$$

$$=\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{k}\int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} dx\int\limits_{\varphi_{j-1}(x)}^{\varphi_j(x)} f(x,\ y)dy.\qquad(45.9)$$

Положим

$$m_{ij}=\inf_{E_{ij}} f(x,\ y)\ \text{и}\ M_{ij}=\sup_{E_{ij}} f(x,\ y),\ i,\ j=1,\ 2,\ \ldots,\ k.$$

Заметив, что

$$\mu E_{ij} = \int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} [\varphi_j(x) - \varphi_{j-1}(x)]\,dx,$$

получим

$$\int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} dx \int\limits_{\varphi_{j-1}(x)}^{\varphi_j(x)} f(x, y)\,dy \leqslant M_{ij} \int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} dx \int\limits_{\varphi_{j-1}(x)}^{\varphi_j(x)} dy =$$

$$= M_{ij} \int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} [\varphi_j(x) - \varphi_{j-1}(x)]\,dx = M_{ij}\mu E_{ij}, \qquad (45.10)$$

и аналогично,

$$\int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} dx \int\limits_{\varphi_{j-1}(x)}^{\varphi_j(x)} f(x, y)\,dy \geqslant m_{ij}\mu E_{ij}. \qquad (45.11)$$

С помощью неравенств (45.10) и (45.11) для повторного интеграла (45.9) получаем следующую оценку через нижние и верхние суммы Дарбу $s_{\tau_k^*}$ и $S_{\tau_k^*}$ функции $f(x, y)$:

$$s_{\tau_k^*} = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{k} m_{ij}\mu E_{ij} \leqslant \int\limits_a^b dx \int\limits_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x, y)\,dy \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{k} M_{ij}\mu E_{ij} = S_{\tau_k^*}. \qquad (45.12)$$

Для мелкости $\delta_{\tau_k^*}$ разбиения τ_k^* области G имеем $\lim\limits_{k\to\infty} \delta_{\tau_k^*} = 0$. Действительно, как уже отмечалось, функции φ и ψ в силу своей непрерывности ограничены на отрезке $[a, b]$, т. е. существует такая постоянная $M > 0$, что $|\varphi(x)| \leqslant M$ и $|\psi(x)| \leqslant M$ для всех $x \in [a, b]$. Поэтому для диаметра $d(E_{ij})$ каждого множества $E_{ij} \in \tau_k^*$ имеем в силу определения функций φ_j

$$d(E_{ij}) \leqslant \sqrt{\left(\frac{b-a}{k}\right)^2 + \max_{[x_{j-1}, x_j]} [\varphi_j(x'') - \varphi_{j-1}(x')]} \leqslant$$

$$\leqslant \sqrt{\left(\frac{b-a}{k}\right)^2 + \left[\omega\left(\frac{b-a}{k}, \psi\right) + 2\omega\left(\frac{b-a}{k}, \varphi\right) + \frac{2M}{k}\right]^2},$$

где $\omega(\delta, \psi)$ и $\omega(\delta, \varphi)$ — модули непрерывностей функций ψ и φ.

Следовательно, $\delta_{\tau_k^*} = \max\limits_{i,j} d(E_{ij}) \leqslant \frac{1}{k}\sqrt{(b-a)^2 + 4M^2} \to 0$ при $k \to +\infty$. Поэтому, в силу интегрируемости функции $f(x, y)$ на E (см. п. 44.4),

$$\lim_{k\to\infty} s_{\tau_k^*} = \lim_{k\to\infty} S_{\tau_k^*} = \iint\limits_G f(x, y)\,dx\,dy.$$

Переходя теперь к пределу в неравенстве (45.12) при $k \to \infty$, получим формулу (45.5). □

Если множество E таково, что существуют такие непрерывные функции $\alpha(y)$ и $\beta(y)$, $\alpha(y) \leqslant \beta(y)$, $c \leqslant y \leqslant d$, что

$$E = \{(x, y) : c \leqslant y \leqslant d, \quad \alpha(y) \leqslant x \leqslant \beta(y)\}, \tag{45.13}$$

а функция $f(x, y)$, как и раньше непрерывна на $\bar{E}$, то в силу равноправия переменных x и y, из теоремы 1 следует, что

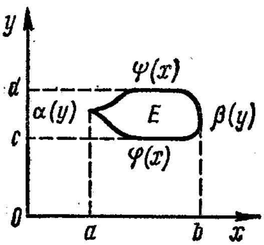


Рис. 175

$$\iint_E f(x, y)\,dx\,dy = \int_c^d dy \int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f(x, y)\,dx. \tag{45.14}$$

Если же для множества E справедливо как равенство (45.1), так и (45.13) (рис. 175), то приравняя правые части равенств (45.5) и (45.14), для непрерывной на множестве $\bar{E}$ функции $f(x, y)$ получим формулу

$$\int_a^b dx \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x, y)\,dy = \int_c^d dy \int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f(x, y)\,dx, \tag{45.15}$$

выражающую собой правило перемены порядка интегрирования в повторных интегралах.

Отметим, что условия, при которых были доказаны формулы (45.5), (45.14) и (45.15), могут быть ослаблены.

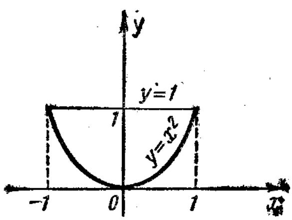


Рис. 176

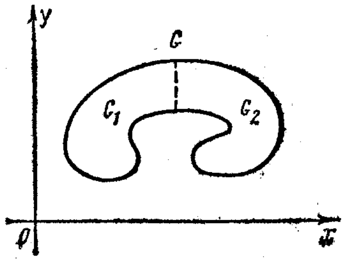


Рис. 177

Пример. Вычислим интеграл от функции $z = x^2y$ по конечной области G, ограниченной частью параболы $y = x^2$ и прямой $y = 1$ (рис. 176). Имеем

$$\iint_G x^2y\,dx\,dy = \int_{-1}^{1} x^2\,dx \int_{x^2}^{1} y\,dy =$$

$$= \int_{-1}^{1} \frac{y^2}{2}\Big|_{x^2}^{1} x^2\,dx = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} (1 - x^4)\,x^2\,dx = \frac{4}{21}.$$

Если требуется вычислить двойной интеграл по множеству, которое нельзя задать в виде (45.1) или (45.13), то для того чтобы использовать полученные формулы, надо попытаться разбить данное множество на части, каждая из которых будет уже иметь вид (45.1) или (45.13) (рис. 177). Если это удастся сделать, то в силу аддитивности интеграла по множествам (см. п. 44.6) вычисление данного интеграла сведется к вычислению интегралов по указанным частям, а последние с помощью формул (45.5) и (45.14) могут быть сведены к однократным.

Упражнения. Вычислить интегралы:

1. $\iint\limits_E \frac{dx\,dy}{y}$, $E=\{(x, y): x^2-6x-5<0;\quad y>1;\quad 3x-y-2>0,\ x^2-y>0\}$.

2. $\iint\limits_E x^2y^2\,dx\,dy$, $E=\{(x, y): y>0;\ xy<1;\ x^2-3xy+2y^2<0\}$.

3. $\iint\limits_E x\,dx\,dy$, $E=\{(x, y): x<20;\ y<20;\ x-y+5>0,\ xy>6\}$.

4. $\iint\limits_E x\sqrt{1+xy}\,dx\,dy$, $E=\left\{(x, y): xy<1,\ x-1<\frac{xy}{x+1}\right\}$.

5. $\int\limits_0^1\int\limits_y^1 e^{x^2}\,dx\,dy$.

6. $\int\limits_0^{1/2}\int\limits_{2y}^1 \cos(x^2+1)\,dx\,dy$.

7. $\int\limits_0^1\int\limits_{\sqrt{y}}^1 \sin(x^3-1)\,dx\,dy$.

8. $\int\limits_0^1\int\limits_0^{1-y} e^{-x^2+2x}\,dx\,dy$.

9. $\int\limits_0^1\int\limits_{\sqrt{y}}^1 e^{x^3/3}\,dx\,dy$.

10. $\int\limits_0^1\int\limits_{(y-1)/2}^0 \operatorname{tg}(x^2+x)\,dx\,dy$.

Изменением порядка интегрирования упростить выражения (функция f непрерывна во всей области интегрирования):

11. $\int\limits_0^1 dy\int\limits_{\frac{1}{9}y^2}^{y} f(x, y)\,dx+\int\limits_1^3 dx\int\limits_{\frac{1}{9}y^2}^{1} f(x, y)\,dy$.

12. $\int\limits_0^1 dx\int\limits_0^{\sqrt{x}} f(x, y)\,dy+\int\limits_1^4 dx\int\limits_0^{1/x} f(x, y)\,dy$.

13. $\int\limits_0^1 dx\int\limits_0^{x^2} f(x, y)+\int\limits_1^3 dx\int\limits_0^{(3-x)/2} f(x, y)\,dy$.

14. Доказать формулу Дирихле $\int\limits_a^b dx\int\limits_a^x f(x, y)\,dy=\int\limits_a^b dy\int\limits_y^b f(x, y)\,dx$.

45.2. ОБОБЩЕНИЕ НА n-МЕРНЫЙ СЛУЧАЙ

Рассмотрим сначала трехмерный случай. Пусть $E\subset R^3$ и функция $f(x, y, z)$ определена на E. Обозначим через E_{xy} проекцию множества E на координатную плоскость переменных x и y

(рис. 178):

$$E_{xy}=\{(x,\ y,\ 0)\text{: существует такое } z, \text{ что } (x,\ y,\ z)\in E\}.$$

Если множество E имеет вид

$$E=\{(x,\ y,\ z):(x,\ y)\in E_{xy},\quad \varphi_1(x,\ y)\leqslant z\leqslant\psi_1(x,\ y)\},$$

где функции $\varphi_1(x,\ y)$ и $\psi_1(x,\ y)$ непрерывны на множестве E_{xy}, которое в свою очередь представимо, например в виде (45.1), а функция $f(x,\ y,\ z)$ непрерывна на исходном множестве E, то справедлива формула, аналогичная формуле (45.5),

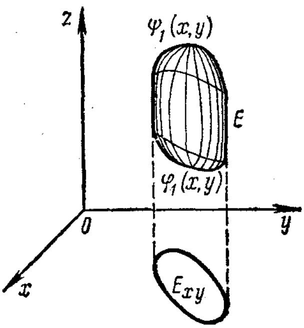


Рис. 178

$$\iiint\limits_E f(x,\ y,\ z)\,dx\,dy\,dz=$$
$$=\int\limits_a^b dx\int\limits_{\varphi(x)}^{\psi(x)}dy\int\limits_{\varphi_1(x,\ y)}^{\psi_1(x,\ y)}f(x,\ y,\ z)\,dz. \tag{45.16}$$

Объединив в правой части два внешних интеграла, можно переписать (45.16) в виде

$$\iiint\limits_E f(x,\ y,\ z)\,dx\,dy\,dz=$$
$$=\iint\limits_{E_{xy}}dx\,dy\int\limits_{\varphi_1(x,\ y)}^{\psi_1(x,\ y)}f(x,\ y,\ z)\,dz. \tag{45.17}$$

Обозначим, теперь, через $E(x)$ сечения множества E плоскостями, перпендикулярными координатной оси Ox,

$$E(x_0)=E\cap\{(x,\ y,\ z):x=x_0\}.$$

Объединив в правой части формулы (45.16) два внутренних интеграла, получим:

$$\iiint\limits_E f(x,\ y,\ z)\,dx\,dy\,dz=\int\limits_a^b dx\iint\limits_{E(x)}f(x,\ y,\ z)\,dy\,dz. \tag{45.18}$$

Таким образом, формулы (45.17) и (45.18) показывают, что в трехмерном случае существует два способа сведения трехмерного интеграла к повторному, содержащему интегралы меньшей кратности.

В частном случае, когда $f(x,\ y,\ z)\equiv 1$, имеем (см. свойство 1° кратных интегралов в п. 44.6) $\iiint dx\,dy\,dz=\mu E$, (μE — объем множества E), $\iint\limits_{E(x)}dy\,dz=\mu E(x)$, ($\mu E(x)$ площадь сечения $E(x)$). Таким образом

$$\mu E=\int\limits_a^b\mu E(x)\,dx. \tag{45.19}$$

— объем тела равен интегралу от переменной площади сечений $E(x)$.

Пример. Найдем объем эллиптического цилиндра высоты h, в основании которого лежит эллипс с полуосями a и b. Взяв за координатную плоскость xy плоскость одного из оснований цилиндра, а за ось z — его ось симметрии, перпендикулярную основаниям (рис. 179), получим согласно формуле (45.19) $\mu E = \int_0^h \mu E(z)\,dz$. Но $E(z)$ эллипс с полуосями a и b, а поэтому (см. пример 4 в п. 32.1) $\mu E(z) = \pi ab$, следовательно $\mu E = \pi ab \int_0^h dz = \pi abh$.

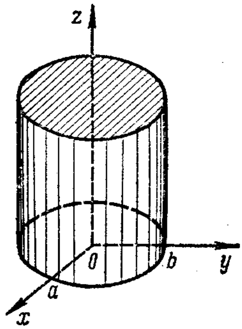


Рис. 179

Аналогично трехмерному случаю кратные интегралы от функций любого числа переменных $n > 3$ можно свести к повторным интегралам. Пусть R^n — n-мерное пространство, R^{n-1} гиперплоскость $x_n = 0$, $E \subset R^n$, $E_{x_1 \ldots x_{n-1}}$ проекция множества E на гиперплоскость переменных $x_1, \ldots, x_{n-1}$, т. е. на R^{n-1}:

$$E_{x_1 \ldots x_{n-1}} = \{(x_1, \ldots, x_{n-1}, 0): \text{существует такое } x_n, \text{ что } (x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n) \in E\}.$$

Пусть существуют такие непрерывные на $E_{x_1 \ldots x_{n-1}}$ функции $\varphi(x_1, \ldots, x_{n-1})$ и $\psi(x_1, \ldots, x_{n-1})$, что множество E состоит из точек $x = (x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n)$, для которых

$$(x_1, \ldots, x_{n-1}) \in E_{x_1 \ldots x_{n-1}}, \quad \varphi(x_1, \ldots, x_{n-1}) \leqslant x_n \leqslant \psi(x_1, \ldots, x_{n-1}).$$

Пусть множество $E_{x_1 \ldots x_{n-1}}$ измеримо в смысле $(n-1)$-мерной меры Жордана и замкнуто. Тогда аналогично двумерному случаю (см. п. 45.1) доказывается, что E также измеримо, но уже в смысле n-мерной меры, и замкнуто, а потому является компактом.

Если функция $f(x) = f(x_1, \ldots, x_n)$ непрерывна на компакте E, то справедлива формула

$$\overbrace{\int \ldots \int_E}^{n \text{ раз}} f(x_1, \ldots, x_n)\,dx_1 \ldots dx_n =$$

$$= \overbrace{\int \ldots \int}^{n-1 \text{ раз}}_{E_{x_1 \ldots x_{n-1}}} dx_1 \ldots dx_{n-1} \int\limits_{\varphi(x_1, \ldots, x_{n-1})}^{\psi(x_1, \ldots, x_{n-1})} f(x_1, \ldots, x_{n-1})\,dx_n, \tag{45.20}$$

которая сводит интегрирование функции n переменных к последовательному интегрированию функции одной переменной и функции $n-1$ переменных.

Если проекция $E_{x_1 \ldots x_{n-1}}$ множества E на гиперплоскость R^{n-1} в свою очередь может быть представлена в виде, аналогичном виду множества E, то получившийся в правой части равенства (45.20) $(n-1)$-кратный интеграл можно свести к $(n-2)$-кратному. Продолжая этот процесс, если, конечно, это возможно, дальше, придем к формуле вида

$$\overbrace{\int \ldots \int_E}^{n \text{ раз}} f(x_1, \ldots, x_n)\, dx_1 \ldots dx_n =$$
$$= \int_a^b dx_1 \int_{\varphi_1(x_1)}^{\psi_1(x_1)} dx_2 \int_{\varphi_2(x_1, x_2)}^{\psi_2(x_1, x_2)} dx_3 \ldots \int_{\varphi_{n-1}(x_1, \ldots, x_{n-1})}^{\psi_{n-1}(x_1, \ldots, x_{n-1})} f(x_1, \ldots, x_n)\, dx_n. \tag{45.21}$$

Таким образом, в рассматриваемом случае интегрирование функции от n переменных сводится к последовательному интегрированию n раз функций одной переменной.

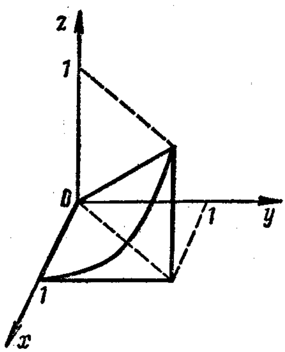


Рис. 180

Обозначим, теперь, через $E_{x_1 \ldots x_m}$ проекцию множества E в пространство $R^m_{x_1 \ldots x_m}$, а через $E(x_1, \ldots, x_m)$ — сечение множества E гиперплоскостями размерности $n-m$, проходящими через точку $(x_1, \ldots, x_m, 0, \ldots, 0)$ и ортогональными подпространству $R^m_{x_1 \ldots x_m}$. Объединив в формуле (45.21) m первых и $n-m$ последних интегрирований, получим

$$\overbrace{\int \ldots \int_E}^{n \text{ раз}} f(x_1, \ldots, x_n)\, dx_1 \ldots dx_n =$$
$$= \overbrace{\int \ldots \int}^{m \text{ раз}}_{E_{x_1 \ldots x_m}} dx_1 \ldots dx_m \overbrace{\int \ldots \int}^{n-m \text{ раз}}_{E(x_1, \ldots, x_m)} f(x_1, \ldots, x_n)\, dx_{m+1} \ldots dx_n. \tag{45.22}$$

Если $f(x_1, \ldots, x_n) \equiv 1$ на E, то из этой формулы аналогично (45.19) получаем

$$\mu E = \int \ldots \int_{E_{x_1 \ldots x_m}} \mu E(x_1, \ldots, x_m)\, dx_1 \ldots dx_m. \tag{45.23}$$

Пример. Вычислим интеграл от функции $f(x, y, z) = xy^2z^3$ по конечной области G, ограниченной поверхностями $z = xy$, $y = x$, $x = 1$ и $z = 0$ (рис. 180). Применив формулу (45.16), будем иметь

$$\iiint_G xy^2z^3\,dx\,dy\,dz = \int_0^1 x\,dx \int_0^x y^2\,dy \int_0^{xy} z^3\,dz =$$

$$= \frac{1}{4}\int_0^1 x^5\,dx \int_0^x y^6\,dy = \frac{1}{28}\int_0^1 x^{12}\,dx = \frac{1}{364}.$$

Упражнения. Вычислить интегралы:

15. $\iiint_E z\,dx\,dy\,dz$, $E=\{(x,\ y,\ z): x^2+y^2+z^2 \leqslant 1,\ x^2+y^2 \leqslant z^2\}$.

16. $\iiint_E (x+y+z)\,x^2y^2z^2\,dx\,dy\,dz$, $E=\{(x,\ y,\ z): x \geqslant 0;\ \ y \geqslant 0;\ \ z \geqslant 0;\ x+y+z \leqslant 1\}$.

17. $\iiint_E (4x-y+z)\,dx\,dy\,dz$; область E ограничена частями поверхностей $x=0,\ y=0,\ z=0,\ x+y=1,\ z=2-x^2$.

18. $\iiint_E z^2\,dx\,dy\,dz$; область E общая часть шаров $x^2+y^2+z^2 \leqslant R^2$ и $x^2+y^2+z^2 \leqslant 2Rz$.

45.3*. ОБОБЩЕННОЕ ИНТЕГРАЛЬНОЕ НЕРАВЕНСТВО МИНКОВСКОГО

В качестве еще одного примера применения правила перемены порядка интегрирования докажем одно часто приемняемое интегральное неравенство.

Пусть функция $f(x,\ y)$ непрерывна на прямоугольнике $\Delta = \{(x,\ y): a \leqslant x \leqslant b,\ c \leqslant y \leqslant d\}$. Тогда она, очевидно, при любом фиксированном $y \in [c,\ d]$ непрерывна по x на отрезке $[a,\ b]$ и при любом фиксированном $x \in [a,\ b]$ непрерывна по y на отрезке $[c,\ d]$.

Для любого $p>1$ справедливо *обобщенное неравенство Минковского*

$$\left\{\int_c^d \left[\int_a^b |f(x,\ y)|\,dx\right]^p dy\right\}^{1/p} \leqslant \int_a^b dx \left[\int_c^d |f(x,\ y)|^p\,dy\right]^{1/p}. \quad (45.24)$$

Положим

$$F(y) = \int_a^b |f(x,\ y)|\,dx. \quad (45.25)$$

Функция F непрерывна (см. лемму 1 в п. 45.1) и неотрицательна на отрезке $[c,\ d]$. Поэтому ее p-я степень также интегрируема и неотрицательна на этом отрезке, и $0 \leqslant \int_c^d F^p(y)\,dy < +\infty$.

Если $\int\limits_c^d F^p(y)\,dy = 0$, то, в силу непрерывности функции F, будем иметь (см. свойство 9 п. 28.1): $F(y) \equiv 0$ на $[c, d]$. Поэтому из формулы (45.25) в силу того же свойства следует, что при любом $y \in [c, d]$ имеет место $f(x, y) \equiv 0$ на $[a, b]$, т. е. $f(x, y) \equiv \equiv 0$ на Δ. В этом случае неравенство (45.24) очевидно справедливо.

Пусть $\int\limits_c^d F^p(y)\,dy > 0$. Тогда, изменив порядок интегрирования и применив неравенство Гельдера (28.48), получим в силу (45.25)

$$\int\limits_c^d F^p(y)\,dy = \int\limits_c^d F^{p-1}(y)\left[\int\limits_a^b |f(x, y)|\,dx\right] dy =$$
$$= \int\limits_a^b dx \int\limits_c^d |f(x, y)|\,F^{p-1}(y)\,dy \leq$$
$$\leq \int\limits_a^b \left[\int\limits_c^d |f(x, y)|^p\,dy\right]^{1/p} \left[\int\limits_c^d F^{q(p-1)}(y)\,dy\right]^{1/q} dx, \tag{45.26}$$

где $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ и, следовательно $q(p-1) = p$. Сократив обе части равенства (45.26) на множитель $\left(\int\limits_c^d F^p(y)\,dy\right)^{1/q} \neq 0$, будем иметь

$$\left(\int\limits_c^d F^p(y)\,dy\right)^{1/p} \leq \int\limits_a^b \left[\int\limits_c^d |f(x, y)|^p\,dy\right]^{1/p} dx.$$

Подставляя сюда (45.25), получаем неравенство (45.24). Условие непрерывности функции f не является существенным для справедливости неравенства (45.24) и может быть ослаблено. Для простоты доказательства в качестве области определения функции f был взят прямоугольник. При более общих предположениях доказательство неравенства Минковского, основанное на той же идее, можно найти в монографии Г. Г. Харди, Д. Е. Литтльвуда, Г. Полиа «Неравенства». М., 1948, 179—180.

§ 46. ЗАМЕНА ПЕРЕМЕННЫХ В КРАТНОМ ИНТЕГРАЛЕ

46.1. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ СМЫСЛ МОДУЛЯ ЯКОБИАНА В ДВУМЕРНОМ СЛУЧАЕ

Пусть G — открытое множество на плоскости R^2_{uv}, G^* — открытое множество на плоскости R^2_{xy}, F — отображение G на G^* и

$$M = (u, v) \in G, \quad M^* = (x, y) \in G^*, \quad F(M) = M^*.$$

Отображение F задается парой функций

$$x = x(u, v), \quad y = y(u, v). \tag{46.1}$$

Будем предполагать, что F удовлетворяет следующим условиям:

1) оно взаимно однозначно отображает G на G^*;

2) оно непрерывно дифференцируемо на G;

3) якобиан $J(u, v) = \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}$ не обращается в нуль на G.

Заметим, что отображение F^{-1}, обратное к F, также является непрерывно дифференцируемым взаимно однозначным отображением с якобианом, не равным нулю на G^* (см. п. 41.7). Поэтому, в частности, отображение F является диффеоморфным отображением открытого множества G (см. определение 11 в п. 41.7) на G^*.

Если γ — простой замкнутый контур, лежащий в G, то в силу взаимной однозначности отображения F его образ $\gamma^* = F(\gamma)$ также является простым замкнутым контуром.

Лемма 1. *Пусть* Γ — *открытое ограниченное множество и* $\Gamma \subset G$. *Тогда* $\Gamma^* = F(\Gamma)$ *также ограниченное открытое множество и*

$$\partial F(\Gamma) = F(\partial\Gamma). \tag{46.2}$$

Доказательство. Поскольку F и F^{-1} — гомеоморфные отображения, то при каждом из них открытые множества отображаются в открытые. Следовательно, внутренние точки какого-либо множества, например, Γ или, соответственно Γ^* переходят во внутренние точки его образа, а граничные — в граничные.

В самом деле, пусть для примера M — внутренняя точка множества Γ, т. е. существует ее окрестность $U = U(M)$, лежащая в Γ: $U \subset \Gamma$. Тогда окрестность $U^* = F(U)$ точки $M^* = F(M)$ лежит в Γ^*: $U^* \subset \Gamma^*$, т. е. M^* внутренняя точка множества Γ^* *).

Пусть теперь M граничная точка множества Γ, $M^* = F(M)$ и U^* — окрестность точки M^*. В силу гомеоморфности отображения F множество $U = F^{-1}(F^*)$ является окрестностью точки M, а поскольку $M \in \partial\Gamma$, то в окрестности U имеются как точки, принадлежащие множеству Γ, так и не принадлежащие ему. Следовательно, в окрестности U^* точки $M^* = F(M)$ (поскольку эта окрестность является образом окрестности $U = U(M)$ точки M при отображении F) также есть точки, как принадлежащие множеству Γ^*, так и не принадлежащие ему, т. е. граничные точки действительно отображаются в граничные:

$$F(\partial\Gamma) \subset \partial\Gamma^*. \tag{46.3}$$

---

*) Мы получили это утверждение как прямое следствие только гомеоморфности отображения F. Конечно, в данном случае это следует сразу из более сильных сделанных выше предположений (см. следствие из теоремы 7 в п. 41.8).

Поскольку аналогичные рассуждения справедливы и для обратного отображения, то в формуле (46.3) можно заменить знак включения знаком равенства, т. е. выполняется условие (46.2). Кроме того, из открытости множества Γ в силу доказанного вытекает и открытость множества Γ^*. Далее, поскольку Γ — ограниченное множество, то замкнутое множество $\overline{\Gamma}$ также ограничено. Поэтому согласно лемме 3 из п. 41.4, множество $F(\overline{\Gamma})$ ограничено. Из ограниченности множества $F(\overline{\Gamma})$ вытекает и ограниченность множества $\Gamma^* = F(\Gamma)$, ибо $F(\Gamma) \subset F(\overline{\Gamma})$. $\square$

Следствие. *Если в предположениях леммы* 1 *граница* Γ *состоит из конечного числа кусочно-непрерывно дифференцируемых кривых, то открытые множества* Γ *и* Γ^* *квадрируемы.*

Доказательство. Если γ непрерывно дифференцируемая кривая, лежащая во множестве G, и $u = u(t)$, $v = v(t)$, $a \leqslant t \leqslant b$ — некоторое ее представление, то функции $u(t)$ и $v(t)$ непрерывно дифференцируемы на отрезке $[a, b]$. При отображении F кривая γ перейдет в кривую $\gamma^* = F(\gamma)$ с представлением

$$x(t) = x(u(t),\ v(t)),\quad y(t) = y(u(t),\ v(t)),\qquad a \leqslant t \leqslant b,$$

у которого в силу формул дифференцирования сложной функции (см. п. 20.3) и теоремы о непрерывности композиции непрерывных функций (см. п. 19.4) функции $x(t)$ и $y(t)$ также имеют непрерывные производные на отрезке $[a, b]$. Следовательно, кривая γ^* — также непрерывно дифференцируема. Отсюда, очевидно, сразу вытекает, что если γ — кусочно-непрерывно дифференцируемая кривая, т. е. является объединением конечного числа непрерывно дифференцируемых кривых (см. п. 16.3), то γ^* — также кусочно-непрерывно дифференцируемая кривая.

Если теперь граница $\partial\Gamma$ открытого множества $\Gamma \subset G$ состоит из конечного числа кусочно-непрерывно дифференцируемых кривых, то и граница $\partial\Gamma^*$ открытого множества $\Gamma^* \subset G^*$ также, в силу сказанного выше, состоит из конечного числа кусочно-непрерывно дифференцируемых кривых. Следовательно, как $\partial\Gamma$, так и $\partial\Gamma^*$ спрямляемы (см. теорему 1 в п. 16.5), вследствие чего они имеют меру ноль (см. теорему 4 в п. 44.2). Поэтому в рассматриваемом случае открытые множества Γ и Γ^*, имея границы меры ноль, — квадрируемы. $\square$

Пусть теперь $(u_0, v_0) \in G$ и h некоторое число. Рассмотрим замкнутый квадрат S (рис. 181) с вершинами в точках

$$(u_0,\ v_0),\quad (u_0+h,\ v_0),\quad (u_0+h,\ v_0+h),\quad (u_0,\ v_0+h). \tag{46.4}$$

Пусть $S \subset G$ (при достаточно малом h это включение всегда выполняется; почему?). Граница ∂S квадрата S, состоящая из четырех его сторон, очевидно, является простым замкнутым кусочно-гладким контуром. В силу следствия из леммы 2 множество

$S^* = F(S)$ (см. рис. 181) представляет собой замкнутую квадрируемую область (то, что S^* — замкнутая *область*, следует из принципа сохранения области, см. п. 41.8).

Изучим поведение отношения

$$\mu F(S)/\mu S\ ^{*)}, \tag{46.5}$$

при стремлении h к нулю.

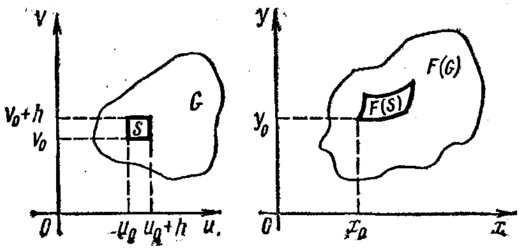


Рис. 181

Введем обозначения:

$$x(u_0,\ v_0) = x_0, \quad y(u_0,\ v_0) = y_0, \quad \frac{\partial x(u_0,\ v_0)}{\partial u} = a_{11}, \quad \frac{\partial x(u_0,\ v_0)}{\partial v} = a_{12},$$

$$\frac{\partial y(u_0,\ v_0)}{\partial u} = a_{21}, \quad \frac{\partial y(u_0,\ v_0)}{\partial v} = a_{22}, \quad u - u_0 = \Delta u, \quad v - v_0 = \Delta v,$$

$$r = \sqrt{\Delta u^2 + \Delta v^2}.$$

В силу дифференцируемости функций (46.1) справедливы формулы

$$\begin{aligned} x &= x(u,\ v) = x_0 + a_{11}(u - u_0) + a_{12}(v - v_0) + \varepsilon_1 r, \\ y &= y(u,\ v) = y_0 + a_{21}(u - u_0) + a_{22}(v - v_0) + \varepsilon_2 r, \end{aligned} \tag{46.6}$$

где функции $\varepsilon_i = \varepsilon_i(u_0,\ v_0,\ \Delta u,\ \Delta v)$, $i = 1,\ 2$, стремятся к нулю при $r \to 0$.

Наряду с отображением F рассмотрим линейное отображение $\tilde{F}$ плоскости R^2_{uv} на плоскость R^2_{xy}, задаваемое формулами

$$\begin{aligned} \tilde{x} &= x_0 + a_{11}(u - u_0) + a_{12}(v - v_0), \\ \tilde{y} &= y_0 + a_{21}(u - u_0) + a_{22}(v - v_0). \end{aligned} \tag{46.7}$$

Из аналитической геометрии известно, что при линейном отображении образ всякого параллелограмма, в частности — квадрата, является параллелограммом, причем отношение площади последнего к площади отображаемого параллелограмма равняется абсолютной величине определителя отображения, который для отобра-

*) Здесь, как всегда, μE обозначает меру (в данном случае — площадь) множества E.

жения $\tilde{F}$ совпадает с якобианом $J(u, v)$ отображения F в точке (u_0, v_0). Таким образом, в рассматриваемом нами случае для отображения (46.7) имеем

$$\frac{\mu\tilde{F}(S)}{\mu S} = \left| \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \right| = |J(u_0, v_0)|. \tag{46.8}$$

Непрерывно дифференцируемое отображение F в окрестности точки (u_0, v_0) отличается от линейного отображения $\tilde{F}$ на бесконечно малую функцию более высокого порядка, чем приращение аргументов (см. (46.6)). Покажем, что отсюда следует справедливость равенства

$$\lim_{h\to 0} \frac{\mu F(S)}{\mu S} = |J(u_0, v_0)|. \tag{46.9}$$

Более того, покажем, что стремление к пределу в этом равенстве происходит равномерно на любом компакте, лежащем в открытом множестве G. Сформулируем этот результат в виде теоремы.

Теорема 1. *Пусть отображение F открытого множества $G \subset R^2_{uv}$ на открытое множество $G^* \subset R^2_{xy}$ взаимно однозначно и непрерывно дифференцируемо на G и пусть его якобиан $J(u, v)$ не обращается в ноль на G. Тогда, если S — квадрат с вершинами* (46.4), *то*

$$\frac{\mu F(S)}{\mu S} = |J(u_0, v_0)| + \varepsilon(u_0, v_0, h), \tag{46.10}$$

где функция $\varepsilon = \varepsilon(u_0, v_0, h)$ при $h \to 0$ стремится к нулю равномерно относительно (u_0, v_0) на любом компакте $A \subset G$ *).

Следствие. *Для любой точки (u_0, v_0) открытого множества G выполняется равенство* (46.9).

Доказательство. Покажем, что площадь образа квадрата S при отображении F отличается от площади образа этого квадрата при линейном отображении $\tilde{F}$ на бесконечно малую более высокого порядка, чем площадь h^2 самого квадрата S, и эта оценка равномерна на любом компакте $A \subset G$, т. е. что

$$\mu F(S) = \mu\tilde{F}(S) + \varepsilon h^2, \tag{46.11}$$

где ε стремится к нулю равномерно на множестве A, когда длина h стороны квадрата S стремится к нулю (определение равномерного стремления функции к пределу см. в п. 39.4). Поскольку (см. (46.8))

$$\mu\tilde{F}(S) = |J(u_0, v_0)|\,\mu S \tag{46.12}$$

и

$$\mu S = h^2,$$

то из (46.11) непосредственно следует утверждение теоремы, т. е. формула (46.10).

---

*) Таким образом, $A \ni (u_0, v_0)$.

Переходя к доказательству формулы (46.11), зафиксируем прежде всего множество A. Поскольку A компакт и $A \subset G$, то функции $\varepsilon_i = \varepsilon_i(u_0, v_0, \Delta u, \Delta v)$, $i = 1, 2$ (см. (46.6)) равномерно стремятся к нулю на множестве A при $r \to 0$ (см. замечание к теореме 4 в п. 20.2, а также п. 39.4). Множества A и $E^2_{uv} \setminus G$ не пересекаются и замкнуты, и кроме того, A ограничено, а поэтому (см. лемму 7 в п. 18.2) $\eta = \rho(A, E^2_{uv} \setminus G) > 0$.

В дальнейшем будем h всегда выбирать таким, что $|h| < \frac{\eta}{\sqrt{2}}$. В этом случае из того, что $(u_0, v_0) \in A$, следует, что $S \subset G$.

Оценим расстояние между образами одной и той же точки квадрата S при отображениях F и $\tilde{F}$. Пусть

$$M = (u, v) \in S, \quad F(M) = (x, y) \quad \text{и} \quad \tilde{F}(M) = (\tilde{x}, \tilde{y}).$$

Тогда из (46.6) и (46.7) получим $x = \tilde{x} + \varepsilon_1 r$, $y = \tilde{y} + \varepsilon_2 r$ и, следовательно,

$$\rho(F(M), \tilde{F}(M)) = \sqrt{(x-\tilde{x})^2 + (y-\tilde{y})^2} = r\sqrt{\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2}.$$

Поскольку r — расстояние от вершины (u_0, v_0) квадрата S до точки $M \in S$, а $|h|\sqrt{2}$ — длина диагонали квадрата S, то, очевидно, выполняется неравенство $r \leqslant |h|\sqrt{2}$, а потому имеем

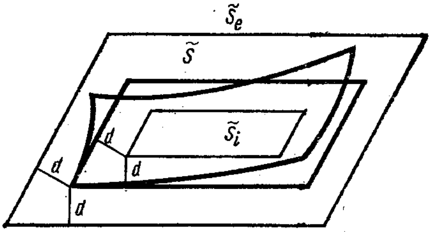


Рис. 182

$$d = \sup_{M \in S} \rho(F(M), \tilde{F}(M)) \leqslant$$
$$\leqslant |h|\,\varepsilon_3(u_0, v_0, h), \qquad (46.13)$$

где $\varepsilon_3 = \varepsilon_3(u_0, v_0, h) = \sup_{M \in S} \sqrt{2(\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2)}$ при $h \to 0$ стремится к нулю равномерно на множестве A.

Построим замкнутый $\tilde{S}_e$*) и открытый $\tilde{S}_i$**) параллелограммы со сторонами, параллельными сторонам параллелограмма $\tilde{S} = \tilde{F}(S)$ и отстоящими от его соответствующих сторон на расстояние d (рис. 182), так, чтобы

$$\tilde{S}_i \subset \tilde{S} = \tilde{F}(S) \subset \tilde{S}_e. \qquad (46.14)$$

Прежде всего покажем, что при достаточно малых h множество $\tilde{S}_i$ не пусто. Более того, покажем, что параллелограмм $\tilde{S}_i$ содержит в себе круг радиуса d с центром в центре параллелограмма S.

---

*) «e» — начальная буква латинского слова exterior (внешний).
**) «i» — начальная буква латинского слова interior (внутренний).

Обозначим через a и b длины сторон параллелограмма $\tilde{S}$, а через H_a и H_b — длины его высот, опущенных соответственно на стороны длин a и b (рис. 183). Для доказательства того, что при достаточно малых h круг радиуса d с центром в центре параллелограмма $\tilde{S}$ содержится в $\tilde{S}_i$, очевидно, достаточно установить справедливость при достаточно малых h неравенств

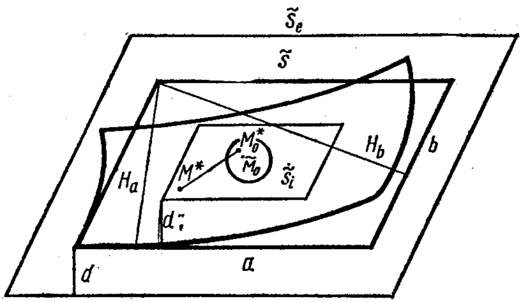


Рис. 183

$$4d < H_a, \quad 4d < H_b. \tag{46.15}$$

Докажем это. Пусть для определенности сторона параллелограмма $\tilde{S}$ длины a соединяет вершины, являющиеся при отображении $\tilde{F}$ образами вершин (u_0, v_0) и (u_0+h, v_0) квадрата S, т. е. соединяет точки (x_0, y_0) и $(x_0+a_{11}h, y_0+a_{21}h)$. Тогда

$$a = \sqrt{a_{11}^2h^2 + a_{21}^2h^2} = |h|\sqrt{a_{11}^2 + a_{21}^2}. \tag{46.16}$$

Аналогично,

$$b = |h|\sqrt{a_{12}^2 + a_{22}^2}. \tag{46.17}$$

Функции $a_{ij} = a_{ij}(u_0, v_0)$, $i, j = 1, 2$ являются значениями соответствующих частных производных функций $x(u, v)$ и $y(u, v)$ в точках (u_0, v_0) компакта A. В силу предположенной непрерывности этих частных производных они ограничены на множестве A, т. е. существует такая постоянная $c_1 > 0$, что на A выполняются неравенства $|a_{ij}| \leq c_1$, $i, j = 1, 2$.

Отсюда и из формул (46.16) и (46.17) следует, что

$$|a| \leq c_1\sqrt{2}\,|h|, \tag{46.18}$$

$$|b| \leq c_1\sqrt{2}\,|h|. \tag{46.19}$$

Далее, по предположению, якобиан $J(u, v)$ отображения F, являющийся непрерывной функцией, не обращается в ноль на множестве G, а следовательно, и на компакте A. Поэтому существует (почему?) такая постоянная $c_2 > 0$, что на множестве A выполняется неравенство

$$|J(u, v)| \geq c_2. \tag{46.20}$$

Заметив, что $\mu\tilde{S}=aH_a=bH_b=|J(u_0, v_0)|h^2$, получим (см. (46.18), (46.19) и (46.20)):

$$h^2=\frac{aH_a}{|J(u_0, v_0)|}\leqslant\frac{1}{c_2}\sqrt{2}\,|h|\,H_a,$$

$$h^2=\frac{bH_b}{|J(u_0, v_0)|}\leqslant\frac{1}{c_2}c_1\sqrt{2}\,|h|\,H_b,$$

т. е.

$$|h|\leqslant\frac{c_1\sqrt{2}}{c_2}H_a, \tag{46.21}$$

$$|h|\leqslant\frac{c_1\sqrt{2}}{c_2}H_b. \tag{46.22}$$

Располагая этими оценками, легко доказать справедливость неравенств (46.15). Действительно, использовав неравенства (46.13), (46.21) и (46.22), получим

$$4d\leqslant 4\varepsilon_3|h|\leqslant\frac{4\sqrt{2}\,c_1\varepsilon_3}{c_2}H_a, \tag{46.23}$$

$$4d\leqslant\frac{4\sqrt{2}\,c_1\varepsilon_3}{c_2}H_b. \tag{46.24}$$

Выберем теперь такое $\delta>0$, чтобы при $|h|<\delta$ и $(u_0, v_0)\in A$ выполнялось условие

$$\frac{4\sqrt{2}\,c_1\varepsilon_3}{c_2}<1. \tag{46.25}$$

Это всегда возможно в силу того, что функция $\varepsilon_3=\varepsilon_3(u_0, v_0, h)$ (см. (46.13)) стремится к нулю равномерно на компакте A при $h\to 0$. Из (46.23), (46.24) и (46.25) следует, что при $|h|<\delta$ выполняются неравенства (46.15), откуда, в частности, вытекает, что множество $\tilde{S}_i$ не пусто. В дальнейшем в ходе доказательства будем всегда предполагать, что $|h|<\delta$.

Множество $\tilde{S}_e\setminus\tilde{S}_i$ назовем *рамкой* и обозначим через $\tilde{R}$:

$$\tilde{R}=\tilde{S}_e\setminus\tilde{S}_i.$$

Рамка $\tilde{R}$ представляет собой объединение четырех не обладающих общими внутренними точками трапеций, высоты которых имеют длину $2d$, а средние линии совпадают с соответствующими сторонами параллелограмма S. Поэтому $\mu\tilde{R}=4d(a+b)$.

Заметим, что если множество $\tilde{S}_i$ было бы пустым, то подсчет площади рамки $\tilde{R}$ пришлось бы делать иначе: указанные выше трапеции превратились бы в треугольники, у которых стороны параллелограмма $\tilde{S}$ уже не являлись бы, вообще говоря, средними линиями.

Из полученного для площади $\mu\tilde{R}$ рамки $\tilde{R}$ выражения, в силу неравенств (46.13), (46.18) и (46.19), следует, что $\mu\tilde{R} \leqslant 8\sqrt{2}\, c_1\varepsilon_3 h^2$. Положив $\varepsilon_4 = 8\sqrt{2}\, c_1\varepsilon_3$, окончательно будем иметь:

$$\mu\tilde{R} \leqslant \varepsilon_4 h^2, \tag{46.26}$$

где функция ε_4 равномерно стремится к нулю на компакте A при $h \to 0$.

Покажем теперь, что площадь множества $F(S)$ отличается от площади параллелограмма $\tilde{S} = \tilde{F}(S)$ не более чем на площадь рамки $\tilde{R}$. Для этого прежде всего установим, что

$$\tilde{S}_i \subset F(S) \subset \tilde{S}_e. \tag{46.27}$$

Действительно, если $M \in S$, то $\tilde{F}(M) \in \tilde{S}$ и согласно (46.13) $\rho(F(M),\ \tilde{F}(M)) \leqslant d$.

Далее, по построению множество $\tilde{S}_e$ содержит все точки плоскости, находящиеся от параллелограмма $\tilde{S}$ на расстоянии, не превышающем числа d. Поэтому $F(M) \in \tilde{S}_e$ и включение $F(S) \subset \tilde{S}_e$ доказано. Осталось доказать, что $\tilde{S}_i \subset F(S)$. Прежде всего заметим, что

$$F(\partial S) \subset \tilde{R}. \tag{46.28}$$

Действительно, если $M \in \partial S$, то $F(M) \in \partial\tilde{S}$ и, согласно (46.13), $\rho(F(M),\ \tilde{F}(M)) \leqslant d$. Но по построению рамка $\tilde{R}$ содержит все точки плоскости, отстоящие от границы $\partial\tilde{S}$ параллелограмма $\tilde{S}$ на расстояние, не превышающее числа d, а поэтому $F(M) \in \tilde{R}$ и включение (46.28) доказано. Поскольку при сделанных предположениях граница $\partial F(S)$ образа $F(S)$ квадрата S совпадает с образом $F(\partial S)$ границы ∂S квадрата S (см. лемму 1 п. 46.1), то включение (46.28) можно переписать в виде

$$\partial F(S) \subset \tilde{R}. \tag{46.29}$$

Пусть теперь M_0 — центр квадрата S. При отображении $\tilde{F}$ он переходит в центр $\tilde{M}_0 = \tilde{F}(M_0)$ параллелограмма $\tilde{S}$. Пусть Q — замкнутый круг радиуса d с центром в точке $\tilde{M}_0$ (величина d определяется формулой (46.13)). Выше было доказано, что $Q \subset \tilde{S}_i$. Если $M_0^* = F(M_0)$, то согласно (46.13), $\rho(M_0^*, \tilde{M}_0) \leqslant d$ и, следовательно, $M_0^* \in Q$, а поэтому и $M_0^* \in \tilde{S}_i$. Таким образом, $\tilde{S}_i$ содержит заведомо одну точку $F(S)$, а именно образ M_0^* центра M_0 квадрата S при отображении F.

Покажем теперь, что и все точки $\tilde{S}_i$ принадлежат $F(S)$. Допустим противное: пусть существует такая точка $M^* \in \tilde{S}_i$, что

$M^* \notin F(S)$ (см. рис. 183). Всякий отрезок является, очевидно, линейно связным множеством, а поэтому, согласно лемме 9 из п. 18.2, на отрезке $M_0^*M^*$ с концами в точках M_0^* и M^* найдется точка границы $\partial F(S)$ множества $F(S)$. Этой точкой не может являться M^*, поскольку множество $F(S)$ замкнуто (см. лемму 3 в п. 41.4), и следовательно, $\partial F(S) \subset F(S)$, а по предположению, $M^* \notin F(S)$. Поэтому точка пересечения множества $\partial F(S)$ с отрезком $M_0^*M^*$ является внутренней точкой параллелограмма $\tilde{S}_i$, а это противоречит включению (46.29).

Таким образом, не существует точки $M^* \in \tilde{S}_i$, для которой одновременно $M^* \notin F(S)$, поэтому $\tilde{S}_i \subset F(S)$. Формула (46.27) доказана.

Из (46.14) и (46.27) следует, что

$$\mu\tilde{S}_i \leqslant \mu\tilde{F}(S) \leqslant \mu\tilde{S}_e, \quad \mu\tilde{S}_i \leqslant \mu F(S) \leqslant \mu\tilde{S}_e,$$

и, следовательно,

$$|\mu F(S) - \mu\tilde{F}(S)| \leqslant \mu\tilde{S}_e - \mu\tilde{S}_i = \mu\tilde{R}.$$

Поэтому в силу (46.26)

$$|\mu F(S) - \mu\tilde{F}(S)| \leqslant \varepsilon_4 h^2, \tag{46.30}$$

где ε_4 стремится к нулю равномерно на компакте A при $h \to 0$.

Положим

$$\varepsilon(u_0, v_0, h) = \frac{\mu F(S) - \mu\tilde{F}(S)}{h^2}, \tag{46.31}$$

тогда из (46.30) следует, что $|\varepsilon| \leqslant |\varepsilon_4|$ и поэтому ε равномерно на множестве A стремится к нулю при $h \to 0$. Из (46.31) имеем

$$\mu F(S) = \mu\tilde{F}(S) + \varepsilon h^2,$$

т. е. мы получили формулу (46.11), откуда, как это уже отмечалось, сразу следует (46.10). □

46.2. ЗАМЕНА ПЕРЕМЕННЫХ В ДВУКРАТНОМ ИНТЕГРАЛЕ

Вначале сохраним обозначения и предположения предыдущего пункта, в частности, будем предполагать, что F является взаимно однозначным непрерывно дифференцируемым отображением открытого множества $G \subset R^2_{uv}$ на открытое множество $G^* \subset R^2_{xy}$ с якобианом, не равным нулю на G. Пусть Γ и Γ^* квадрируемые (и, следовательно, ограниченные) открытые множества, $\overline{\Gamma} \subset G$, $\overline{\Gamma}^* \subset G^*$ и пусть при отображении F множество $\overline{\Gamma}$ отображается на $\overline{\Gamma}^*$. Тогда $\overline{\Gamma}$ и $\overline{\Gamma}^*$ компакты, внутренние точки Γ переходят во внутренние, а граница Γ отображается на границу Γ^*.

Теорема 2 (формула замены переменных в двукратном интеграле). *Пусть функция* $f(x, y)$ *определена и непрерывна на* $\overline{\Gamma}^*$. *Тогда*

$$\iint_{\Gamma^*} f(x, y)\,dx\,dy = \iint_{\Gamma} f[x(u, v), y(u, v)] \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| du\,dv. \qquad (46.32)$$

Доказательство. Заметим, что входящие в (46.32) интегралы существуют как интегралы от функций, непрерывных на замыкании квадрируемых областей. Действительно, по условию функция $f(x, y)$ непрерывна на $\overline{\Gamma}^*$ и якобиан $\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}$ — на $\overline{\Gamma}$, а функция $f[x(u, v), y(u, v)]$ непрерывна на $\overline{\Gamma}$ как композиция непрерывных функций.

Возьмем разбиение ранга k плоскости R_{uv} на квадраты. Ранг k выберем столь большим, чтобы всякий квадрат этого ранга, пересекающийся с $\overline{\Gamma}$, целиком содержался в G (почему такой ранг существует?). Обозначим через Γ_i, $i = 1, 2, \ldots, i_k$ всевозможные непустые пересечения внутренностей (множества внутренних точек) квадратов ранга k с множеством Γ. Множества Γ_i квадрируемы и открыты, ибо их границы имеют меру ноль, так как состоят, вообще говоря, из части границы соответствующего квадрата ранга k и части границы множества Γ. Совокупность $\tau_k = \{\Gamma_i\}_{i=1}^{i=i_k}$ образует разбиение множества Γ, причем, очевидно,

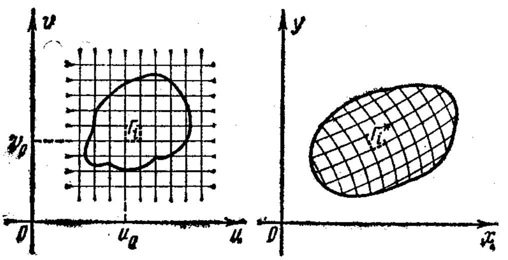


Рис. 184

$$\lim_{k \to \infty} \delta_{\tau_k} = 0. \qquad (46.33)$$

Пусть далее, $\Gamma_i^* = F(\Gamma_i)$; при этом граница Γ_i отображается на границу Γ_i^*, а поэтому граница Γ_i^*, вообще говоря, состоит из части границы множества Γ^* (эта граница в силу предположенной квадрируемости множества Γ^* имеет меру ноль) и части кусочно-гладкой кривой, являющейся образом границы соответствующего квадрата и имеет поэтому также меру ноль. Из сказанного следует, что Γ_i^* является квадрируемым открытым множеством. Из взаимной однозначности отображения F следует, что совокупность $\tau_k^* = \{\Gamma_i^*\}_{i=1}^{i=i_k}$ образует разбиение множества Γ^* (рис. 184).

Оценим мелкость разбиения τ_k^*. Пусть δ_k диаметр квадрата ранга k $\left(\text{очевидно, } \delta_k = \frac{\sqrt{2}}{10^k}\right)$ и $M_1^* = (x_1, y_1) \in \Gamma_i^*$, $M_2^* = (x_2, y_2) \in$

$\in \Gamma_i^*$. Тогда существуют такие $M_1 \in \Gamma_i$ и $M_2 \in \Gamma_i$, что $F(M_1) = M_1^*$, $F(M_2) = M_2^*$, причем $\rho(M_1, M_2) < \delta_k$. Следовательно,

$$\rho(M_1^*, M_2^*) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} \leqslant \leqslant \sqrt{\omega^2(\delta_k; x) + \omega^2(\delta_k; y)}, \tag{46.34}$$

где $\omega(\delta; x)$ и $\omega(\delta; y)$ — модули непрерывности функций $x = x(u, v)$ и $y = y(u, v)$ на компакте $\overline{\Gamma}$. В силу непрерывности этих функций на $\overline{\Gamma}$ они равномерно непрерывны, и поэтому (см. п. 19.6)

$$\lim_{k \to \infty} \omega(\delta_k; x) = \lim_{k \to \infty} \omega(\delta_k; y) = 0. \tag{46.35}$$

Из (46.34) для диаметра $d(\Gamma_i^*)$ получаем

$$d(\Gamma_i^*) = \sup_{\substack{M_1^* \in \Gamma_i^* \\ M_2^* \in \Gamma_i^*}} \rho(M_1^*, M_2^*) \leqslant \sqrt{\omega^2(\delta_k; x) + \omega^2(\delta_k; y)},$$

и, следовательно,

$$\delta_{\tau_k^*} = \sup_{\Gamma_i^* \in \tau_k^*} d(\Gamma_i^*) \leqslant \sqrt{\omega^2(\delta_k; x) + \omega^2(\delta_k; y)},$$

а поэтому в силу (46.35)

$$\lim_{k \to \infty} \delta_{\tau_k^*} = 0\ ^{*)}. \tag{46.36}$$

Отберем теперь только те элементы разбиений τ_k и τ_k^*, замыкания которых не пересекаются с границами $\partial\Gamma$ и $\partial\Gamma^*$ множеств Γ и Γ^*. Обозначим их соответственно через $\tau_k(\partial\Gamma)$ и $\tau_k^*(\partial\Gamma^*)$:

$$\tau_k(\partial\Gamma) = \{\Gamma_i : \Gamma_i \in \tau_k,\ \overline{\Gamma}_i \cap \partial\Gamma = \varnothing\},$$
$$\tau_k^*(\partial\Gamma^*) = \{\Gamma_i^* : \Gamma_i^* \in \tau_k^*,\ \overline{\Gamma}_i^* \cap \partial\Gamma^* = \varnothing\}.$$

В силу сделанных предположений $\Gamma_i^* \in \tau_k^*(\partial\Gamma^*)$ тогда и только тогда, когда $\Gamma_i \in \tau_k(\partial\Gamma)$; при этом $\tau_k(\partial\Gamma)$ состоит из тех и только тех элементов $\Gamma_i \in \tau_k$, которые являются целыми квадратами, содержащимися вместе с их границами в множестве Γ.

Составим интегральные суммы $\sigma_{\tau_k^*(\partial\Gamma^*)}$ (см. п. 44.3) для функции $f(x, y)$, взяв в качестве точек $(\xi_i, \eta_i) \in \overline{\Gamma}_i \in \tau_k^*(\partial\Gamma^*)$ образы каких-либо вершин (u_i, v_i) соответствующих квадратов Γ_i:

$$\xi_i = x(u_i, v_i), \quad \eta_i = y(u_i, v_i). \tag{46.37}$$

---

*) Нетрудно убедиться, что равенство (46.36) можно непосредственно получить из равномерной непрерывности непрерывного отображения компакта (см. лемму 4 в п. 41.4).

Иначе говоря, рассмотрим суммы вида

$$\sigma_{\tau_k^*}(\partial\Gamma^*) = \sum_{\Gamma_i^* \in \tau_k^*(\partial\Gamma^*)} f(\xi_i, \eta_i)\,\mu\Gamma_i^*. \tag{46.38}$$

Как известно (см. теорему 5 в п. 44.3), в силу выполнения условия (46.36)

$$\lim_{k\to\infty} \sigma_{\tau_k^*}(\partial\Gamma^*) = \iint_{\Gamma^*} f(x, y)\,dx\,dy. \tag{46.39}$$

С другой стороны, для $\Gamma_i^* = F(\Gamma_i)$, для которых Γ_i является квадратом, и, следовательно, для $\Gamma_i \in \tau_k(\partial\Gamma)$, согласно теореме 1 предыдущего пункта,

$$\mu\Gamma_i^* = |J(u_i, v_i)|\,\mu\Gamma_i + \varepsilon\mu\Gamma_i, \tag{46.40}$$

где $\varepsilon = \varepsilon(u_i, v_i, \delta_{\tau_k})$ на компакте $\overline{\Gamma}$ равномерно стремится к нулю при $k\to 0$. Подставляя (46.37) и (46.40) в (46.38), получим

$$\sigma_{\tau_k^*}(\partial\Gamma^*) = \sum_{\Gamma_i\in\tau_k(\partial\Gamma)} f[x(u_i, v_i), y(u_i, v_i)]\,|J(u_i, v_i)|\,\mu\Gamma_i + \\ + \sum_{\Gamma_i\in\tau_k(\partial\Gamma)} \varepsilon f[x(u_i, v_i), y(u_i, v_i)]\,\mu\Gamma_i. \tag{46.41}$$

Суммирование в этих суммах распространено на все индексы i, для которых $\overline{\Gamma}_i$ не пересекается с границей Γ. Для первой суммы, стоящей в правой части равенства (46.41), в силу условия (46.33) имеем (см. теорему 5 в п. 44.3)

$$\lim_{k\to\infty} \sum_{\Gamma_i\in\tau_k(\partial\Gamma)} f[x(u_i, v_i), y(u_i, v_i)]\,|J(u_i, v_i)|\,\mu\Gamma_i = \\ = \iint_{\Gamma} f[x(u, v), y(u, v)]\,|J(u, v)|\,du\,dv.$$

Что же касается второй суммы в равенстве (46.41), то она стремится к нулю при $k\to\infty$. Действительно, в силу непрерывности функции $f[x(u, v), y(u, v)]$ на компакте $\overline{\Gamma}$ она ограничена на нем, т. е. существует такая постоянная $C>0$, что

$$|f[x(u, v), y(u, v)]| \leqslant C, \qquad (u, v)\in\overline{\Gamma}.$$

Если фиксировано произвольное $\varepsilon_0>0$, то в силу равномерного на $\overline{\Gamma}$ стремления ε к нулю при $k\to\infty$ можно выбрать k_0 так, чтобы при $k\geqslant k_0$ выполнялось неравенство $|\varepsilon| < \frac{\varepsilon_0}{c\mu\Gamma}$ для всех $(u_i, v_i) \in \overline{\Gamma}_i$, $\Gamma_i \subset \overline{\Gamma}$, тогда:

$$\left| \sum_{\Gamma_i \in \tau_k(\partial\Gamma)} \varepsilon f[x(u_i, v_i), y(u_i, v_i)] \mu\Gamma_i \right| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{\Gamma_i \in \tau_k(\partial\Gamma)} |\varepsilon| |f[x(u_i, v_i), y(u_i, v_i)]| \mu\Gamma_i < \frac{\varepsilon_0}{\mu\Gamma} \sum_i \mu\Gamma_i \leqslant \varepsilon_0.$$

Итак,

$$\lim_{k \to \infty} \sigma_{\tau_k^*(\partial\Gamma)} = \iint_{\Gamma} f[x(u, v), y(u, v)] |J(u, v)| du\, dv. \quad (46.42)$$

Из (46.39) и (46.42) и следует непосредственно формула (46.32). □

Доказанная теорема легко обобщается и на несколько более общий случай, когда якобиан отображения (46.1) может обращаться в ноль на границе области интегрирования, а само отображение быть не взаимно однозначным на этой границе. Точнее, справедлива следующая теорема.

Теорема 2′. *Пусть G и G^* открытые квадрируемые множества: $G \subset R^2_{uv}$, $G^* \subset R^2_{xy}$, и*

$$x = x(u, v),$$
$$y = y(u, v)$$

— непрерывное отображение $\overline{G}$ на $\overline{G}^*$, взаимно однозначно и непрерывно дифференцируемо отображающее G на G^*, якобиан $\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}$ этого отображения не обращается в ноль на G и непрерывно продолжаем на $\overline{G}$. Тогда, если функция $f(x, y)$ непрерывна на множестве $\overline{G}^*$, то

$$\iint_{G^*} f(x, y)\, dx\, dy = \iint_{G} f[x(u, v), y(u, v)] \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| du\, dv.$$

Доказательство. Пусть Γ_k, $k = 1, 2 \ldots$ — последовательность ограниченных открытых квадрируемых множеств, граница которых состоит из конечного числа кусочно-гладких кривых, и

$$\overline{\Gamma}_k \subset G, \quad \Gamma_k \subset \Gamma_{k+1}, \quad \bigcup_{k=1}^{\infty} \Gamma_k = G.$$

В качестве Γ_k можно взять, например совокупность всех внутренних точек множества $S_k(G)$ (см. п. 44.1). Пусть $\Gamma_k^* = F(\Gamma_k)$; тогда Γ_k^* также является ограниченным открытым квадрируемым множеством и

$$\overline{\Gamma}_k^* = F(\overline{\Gamma}_k)' \subset G^*, \quad \Gamma_k^* \subset \Gamma_{k+1}^*, \quad \bigcup_{k=1}^{\infty} \Gamma_k^* = G^*.$$

Из выполнения этих условий следует, что (см. теорему 2. п. 31.2)

$$\lim_{k\to\infty} \mu\Gamma_k = \mu G, \quad \lim_{k\to\infty} \mu\Gamma_k^* = \mu G^*. \tag{46.43}$$

Для каждого из множеств Γ_k, $k=1, 2, \ldots$, выполняются все условия теоремы 2 этого пункта, поэтому

$$\iint\limits_{\Gamma_k^*} f(x, y)\,dx\,dy = \iint\limits_{\Gamma_k} f[x(u, v), y(u, v)]\left|\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}\right| du\,dv. \tag{46.44}$$

Функция $f(x, y)$, как непрерывная на $\bar{G}^*$ функция, интегрируема на G^*, а функция $f[x(u, v), y(u, y)]\left|\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}\right|$ по тем же соображениям интегрируема*) на G. Поэтому в силу выполнения условий (46.43) получаем (см. свойство 10° в п. 44.6):

$$\lim_{k\to\infty} \iint\limits_{\Gamma_k^*} f(x, y)\,dx\,dy = \iint\limits_{G^*} f(x, y)\,dx\,dy,$$

$$\lim_{k\to\infty} \iint\limits_{\Gamma_k} f[x(u, v)\, y(u, v)]\left|\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}\right| du\,dv =$$

$$= \iint\limits_{G} f[x(u, v), \quad y(u, v)]\left|\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}\right| du\,dv. \tag{46.45}$$

Переходя к пределу при $k\to\infty$, в равенстве (46.44) в силу формул (46.45) мы получим искомую формулу замены переменного в интеграле. □

Замена переменных в кратном интеграле часто существенно упрощает его исследование и вычисление. При этом в отличие от однократного интеграла нередко целью замены переменного является не упрощение подынтегральной функции, а переход к более простой области интегрирования, даже ценой некоторого усложнения подынтегральной функции.

П р и м е р. Вычислим интеграл $\iint\limits_{x^2+y^2<1} \cos\pi\sqrt{x^2+y^2}\,dx\,dy.$

Для этого введем новые переменные r, φ (полярные координаты) по формулам

$$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi. \tag{46.46}$$

Тогда $\frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \varphi)} = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{vmatrix} = r$. Отображение (46.46) отображает прямоугольник $G = \{(r, \varphi): 0<r<1, \ -\pi<\varphi<\pi\}$ (здесь r

*) Напомним, что в силу условий теоремы эта функция непрерывно продолжаема с множества G на $\bar{G}$, причем значения продолженной функции на границе множества G не влияют на значение интеграла (см. п. 44.3).

и φ рассматриваются как декартовы координаты на плоскости r, φ) взаимно однозначно, непрерывно дифференцируемо и с якобианом, не равным нулю, на круг $K=\{(x, y): x^2+y^2<1\}$, из которого исключен радиус, лежащий на отрицательной части оси Ox, т. е. на множество (рис. 185) $G^* = K\setminus\{(x, y): x\leqslant 0, y=0\}$.

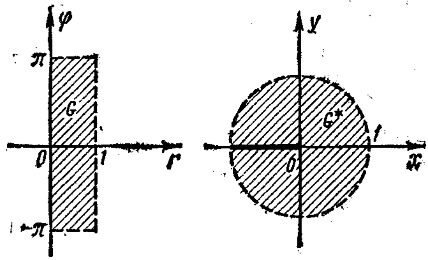


Рис. 185

Замкнутый же прямоугольник $\bar{G}$ при отображении (46.46) переходит в замкнутый круг $\bar{G}^* = \bar{K}$, причем на границе G это отображение уже не взаимно однозначно. Якобиан отображения (46.46) непрерывен на $\bar{G}$, причем в одной точке границы, в начале координат, он обращается в ноль. Все условия, накладываемые на отображение (46.1) в теореме 2′ этого пункта выполняются для отображения (46.46), а поэтому можно применить формулу замены переменного в интеграле:

$$\iint\limits_{x^2+y^2<1} \cos \pi\sqrt{x^2+y^2}\,dx\,dy = \iint\limits_{\substack{0<r<1\\ -\pi<\varphi<\pi}} r\cos \pi r\,dr\,d\varphi =$$

$$= \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^1 r\cos\pi r\,dr = 2\pi\left[\frac{r\sin\pi r}{\pi}\Big|_0^1 - \frac{1}{\pi}\int\limits_0^1 \sin\pi r\,dr\right] = -\frac{4}{\pi}.$$

Формула (46.32) замены переменных в двойном интеграле может быть доказана и для более сбщего случая, в частности, когда якобиан отображения обращается в ноль в области интегрирования, а подынтегральная функция имеет разрывы. Если множества указанных точек имеют меру ноль и отображаются также во множества меры ноль, причем эти множества разбивают области интегрирования G и G^* на конечное число открытых множеств, на каждом из которых подынтегральная функция продолжаема до непрерывной вплоть до границы функции, то формула (46.32) непосредственно следует из доказанного выше.

Упражнения. 1. Пусть $f(x, y)=2\pi(x^2-y^2)\sin\pi(x-y)^2$, а E — квадрат с вершинами (1, 0), (0, 1), (—1, 0), (0, —1). С помощью замены переменных $u=x+y$, $v=x-y$ вычислить интеграл $\iint\limits_E f(x, y)\,dx\,dy$.

2. Переходом к полярным координатам вычислить интеграл $\iint\limits_E f(x, y)\,dx\,dy$, где

а) $f(x, y)=y$, $E=\{(x, y): x^2+y^2<2x,\ 0<x<y\}$;

б) $f(x, y)=\sqrt{x^2+y^2}$, $E=\left\{(x, y): x^2+y^2<1,\ x<y<\sqrt{3}\,x\right\}$.

46.3. КРИВОЛИНЕЙНЫЕ КООРДИНАТЫ

Формулы

$$x = x(u,\ v),\ y = y(u,\ v) \tag{46.47}$$

можно рассматривать не только как отображение, но и как переход от одной системы координат к другой, вообще говоря, криволинейной. Поясним прежде всего понятие криволинейной системы координат.

Пусть G — некоторое открытое множество на плоскости R^2_{xy} и каждой точке $M = (x,\ y) \in G$, а значит, и каждой упорядоченной паре чисел $(x,\ y)$, являющихся координатами точки M в выбранной прямоугольной системе координат, поставлена в соответствие пара чисел $(u,\ v)$ таким образом, что разным точкам M_1 и M_2 соответствуют разные пары $(u_1,\ v_1)$ и $(u_2,\ v_2)$. В этом случае говорят, что на множестве G задана система координат $u,\ v$. При этом если точке M соответствует пара $(u,\ v)$, то пишут $M = (u,\ v)$. Каждая пара $(u,\ v)$ является функцией точки $M \in G$, поэтому и каждый из ее элементов u и v также является функцией точки $M: u = u(M),\ v = v(M)$, или, что то же, ее декартовых координат:

$$\begin{aligned} u &= u(x,\ y),\\ v &= v(x,\ y). \end{aligned} \tag{46.48}$$

Обратно, каждой паре $(u,\ v)$ из рассматриваемого множества пар соответствует точка $M \in G$, т. е. точка M есть функция пар $(u,\ v): M = M(u,\ v)$, а поэтому ее декартовы координаты x и y также являются функциями указанных пар $(u,\ v)$. Иначе говоря, справедливы формулы (46.47), задающие отображение, обратное отображению (46.48).

Множества точек $(x,\ y) \in G$, удовлетворяющих условию $u(x,\ y) = u_0$ и соответственно $v(x,\ y) = v_0$, где u_0 и v_0 некоторые фиксированные постоянные, называются *координатными линиями* в системе координат $u,\ v$.

Используя формулы (46.47), координатные линии можно записать в виде

$$\begin{aligned} x &= x(u_0,\ v),\\ y &= y(u_0,\ v), \end{aligned} \tag{46.49}$$

соответственно в виде

$$\begin{aligned} x &= x(u,\ v_0),\\ y &= y(u,\ v_0). \end{aligned} \tag{46.50}$$

В случае декартовых координат координатные линии суть прямые, в общем же случае — некоторые кривые, задаваемые представлениями (46.49) и (49.50). Этим и объясняется название «криволинейные координаты» (рис. 186).

Будем предполагать, что функции (46.47) удовлетворяют на G всем условиям, при которых была выведена формула (46.32) замены переменного в интеграле, в частности, что они непрерывно дифференцируемы и что якобиан $\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}$ не равен нулю на G. В силу этого координатные линии в окрестности каждой точки из G являются непрерывно дифференцируемыми кривыми.

Исследуем, какой смысл будет иметь в этом случае модуль якобиана. Зафиксируем какие-либо значения u_0, Δu, v_0, Δv. Пусть $M_0=(u_0, v_0)$, Γ — множество всех точек, криволинейные координаты u, v которых удовлетворяют неравенствам $u_0<u<u_0+\Delta u$, $v_0<v<v_0+\Delta v$, и пусть: $\Gamma\subset G$. Множество Γ называется *координатным* (*криволинейным*) *параллелограммом*. Множество Γ открыто (почему?), и его граница представляет собой кусочно-гладкий контур (он состоит из кривых вида $x=$ $=x(u_0, v)$, $y=y(u_0, v)$, где $v_0\leqslant v\leqslant v_0+\Delta v$ и т. п.), поэтому Γ квадрируемая область. Вычислим ее площадь (см. рис. 186). Применив формулу замены переменного в интеграле и интегральную теорему о среднем (см. п. 44.6) получим

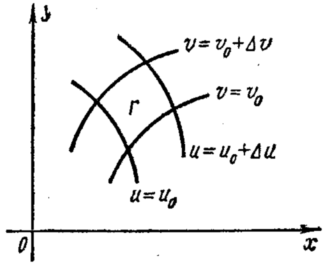


Рис. 186

$$\mu\Gamma=\iint_{\Gamma} dx\,dy=\iint\limits_{\substack{u_0<u<u_0+\Delta u\\ v_0<v<v_0+\Delta v}}\left|\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}\right| du\,dv=$$

$$=\left|\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}\right|_M \int_{u_0}^{u_0+\Delta u} du\int_{v_0}^{v_0+\Delta v} dv=\left|\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}\right|_M \Delta u\,\Delta v,\qquad M\in\overline{\Gamma}.$$

В силу непрерывной дифференцируемости функций (46.47)

$$\left|\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}\right|_M=\left|\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}\right|_{M_0}+\varepsilon,$$

где $\lim\limits_{\Delta u^2+\Delta v^2\to 0}\varepsilon=0$. Таким образом,

$$\mu\Gamma=\left|\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}\right|_{M_0}\Delta u\,\Delta v+\varepsilon\,\Delta u\,\Delta v. \tag{46.51}$$

Формула (46.51) показывает, что модуль якобиана в точке (u_0, v_0) представляет собой коэффициент главной части площади координатного параллелограмма с вершиной в точке (u_0, v_0) относительно произведения $\Delta u\,\Delta v$ при $\Delta u^2+\Delta v^2\to 0$. Это замечание часто используется на практике при вычислении якобиана преобразования криволинейных координат в декартовы. Покажем это на примере полярных координат r, φ. Зафиксируем какие-либо значения r, $r+\Delta r$, φ и $\varphi+\Delta\varphi$ и рассмотрим координатный параллелограмм Γ (рис. 187), образованный координатными линиями r, $r+\Delta r$, φ и $\varphi+\Delta\varphi$. Длины двух его сторон равны соответственно Δr и $r\Delta\varphi$. Вычислив площадь этого параллелограмма так, как если бы он был обыкновенным прямоугольником, будем иметь

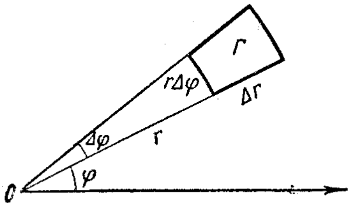


Рис. 187

$$\mu\Gamma \approx r\,\Delta r\,\Delta\varphi.$$

Таким образом, коэффициент у произведения $\Delta r\,\Delta\varphi$ оказался равным r, откуда естественно ожидать, что $\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = r$. В действительности (см. пример в п. 46.2) так и есть. Это произошло потому что при наших неточных вычислениях площади Γ допущена ошибка более высокого порядка малости, чем произведение $\Delta r\,\Delta\varphi$ при $\Delta r^2+\Delta\varphi^2 \to 0$. В самом деле, вычислив $\mu\Gamma$ как разность площадей двух секторов, получим

$$\mu\Gamma = \frac{\Delta\varphi}{2\pi}\pi(r+\Delta r)^2 - \frac{\Delta\varphi}{2\pi}\pi r^2 = r\,\Delta r\,\Delta\varphi + \frac{1}{2}\Delta r^2\,\Delta\varphi.$$

46.4. ЗАМЕНА ПЕРЕМЕННЫХ В n-КРАТНОМ ИНТЕГРАЛЕ

Все сказанное в предыдущих пунктах этого параграфа вместе с доказательством переносится и на n-мерный случай, поэтому мы ограничимся лишь формулировкой соответствующих теорем.

Теорема 3. *Пусть* $G_x \subset R^n_x$ и $G_t \subset R^n_t$ — *открытые множества,* $x = F(t) = \{x_i = x_i(t_1, \ldots, t_n),\ i = 1, 2, \ldots, n\}$ — *взаимно однозначное непрерывно дифференцируемое отображение* G_t *на* G_x, *якобиан* $J(t) = \frac{\partial(x_1, \ldots, x_n)}{\partial(t_1, \ldots, t_n)}$ *которого не равен нулю на* G_t. *Пусть далее* S — *n-мерный куб:*

$$S = \{t : t_i^{(0)} \leqslant t_i \leqslant t_i^{(0)} + h,\quad i = 1, 2, \ldots, n\} \subset G_t,\quad t^{(0)} = (t_1^{(0)}, \ldots, t_n^{(0)}).$$

Тогда $\lim\limits_{h\to 0}\frac{\mu F(S)}{\mu S} = |J(t^{(0)})|$; *при этом, если*

$$\frac{\mu F(S)}{\mu S} = |J(t^{(0)})| + \varepsilon(t^{(0)}, h),$$

то для любого компакта $A \subset G_t$ *функция* $\varepsilon(t^{(0)}, h)$, $t^{(0)} \in A$, *равномерно стремится к нулю на* A *при* $h \to 0$.

Теорема 4. *Пусть:* 1) G_x и G_t — *измеримые открытые множества* $G_x \subset R^n_x$, $G_t \subset R^n_t$; 2) $x = F(t)$ — *непрерывное отображение* $\overline{G}_t$ *на* $\overline{G}_x$, *взаимно однозначно и непрерывно дифференцируемо отобра-*

жающее G_t на G_x; 3) якобиан $J(t)=\frac{\partial(x_1, \ldots, x_n)}{\partial(t_1, \ldots, t_n)}$ этого отображения не обращается в ноль на G_t и непрерывно продолжаем на $\bar{G}_t$. Тогда если функция $f(x)$ непрерывна на множестве $\bar{G}_x$, то

$$\int f(x)\,dG_x=\int f(x(t))\,|J(t)|\,dG_t.$$

Упражнения. Написать формулы замены переменных в тройных интегралах для преобразований координат:

3. $x=r\cos\psi\cos\varphi,\quad y=\cos\psi\sin\varphi,\quad z=r\sin\psi,\quad 0\leqslant r<+\infty,\quad 0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi,$ $-\frac{\pi}{2}\leqslant\psi\leqslant\frac{\pi}{2}$ (сферические координаты).

4. $x=r\cos\varphi,\ y=r\sin\varphi,\ z=z,\ 0\leqslant r<+\infty,\ 0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi,\ -\infty<z<+\infty$ (цилиндрические координаты).

Замечание. В силу формулы замены переменного для любого измеримого множества $G\subset R^n$ и любых криволинейных координат $u_1, \ldots, u_n$ справедлива формула

$$\int\underset{G}{\ldots}\int dx_1\ldots dx_n=\int\underset{G}{\ldots}\int\left|\frac{\partial(x_1, \ldots, x_n)}{\partial(u_1, \ldots, u_n)}\right|du_1\ldots du_n.$$

В частности, если

$$\left|\frac{\partial(x_1, \ldots, x_n)}{\partial(u_1, \ldots, u_n)}\right|=1, \tag{46.52}$$

то

$$\int\underset{G}{\ldots}\int dx_1\ldots dx_n=\int\underset{G}{\ldots}\int du_1\ldots du_n. \tag{46.53}$$

Условие (46.52) заведомо выполняется, если $u_1, \ldots, u_n$ также являются декартовыми координатами в пространстве R^n, и следовательно, выражаются через $x_1, \ldots, x_n$ с помощью линейного преобразования, определитель которого равен ± 1;

$$x_i=\sum_{i=1}^{n}c_{ij}u_j,\quad i=1, 2, \ldots, n,\quad \det\|c_{ij}\|=\pm 1.$$

Левая часть формулы (46.53) равна мере μG множества G «в координатах $x_1, \ldots, x_n$» (см. свойство 1° кратного интеграла в п. 44.6), а правая часть этой формулы в случае, когда $u_1, \ldots$ $\ldots, u_n$ — декартовы координаты, равна соответственно мере множества G «в координатах $u_1, \ldots, u_n$». Таким образом, формула (46.53) показывает, что мера открытого измеримого множества не зависит от выбора декартовой системы координат.

Справедливости ради следует заметить, что при доказательстве формулы замены переменных в кратном интеграле мы использовали тот доказываемый в геометрии факт, что при аффинных (т. е. невырожденных линейных) отображениях абсолютная величина определителя преобразования равна отношению объема параллелепипеда, являющегося образом некоторого куба к объему этого куба.

Упражнения. 5. Пусть $G=\{(x, y, z): 1<x<2;\ 1<x+y<3;\ 1<x+y+y+z<5\}$. Вычислить интеграл $\iiint\limits_G \frac{dx\,dy\,dz}{(x+y)(x+y+z)}$ путем перехода к переменным u, v, w, связанным с x, y, z соотношениями $x+y+z=u$, $x+y=uv$, $x=uvw$.

6. Пусть $G=\{(x, y, z): x<yz<2x;\ y<zx<2y;\ z<xy<2z\}$. Вычислить интеграл $\iiint\limits_G xyz\,dx\,dy\,dz$ путем перехода к переменным u, v, w, связанным с x, y, z соотношениями $ux=yz$, $vy=zx$, $wz=xy$.

§ 47. КРИВОЛИНЕЙНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

47.1. КРИВОЛИНЕЙНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ ПЕРВОГО РОДА

Пусть в трехмерном пространстве R^3 задана кривая $\gamma=\{r(t);\ a\leqslant t\leqslant b\}$ (см. § 16). Мы будем рассматривать однозначные функции F, определенные на точках $r(t)$ этой кривой: $F=F(r(t))$. Если $\rho(t)$, $\alpha\leqslant\tau\leqslant\beta$ — какое-либо другое представление той же кривой γ и $t=t(\tau)$, $\alpha\leqslant\tau\leqslant\beta$ — отображение отрезка $[\alpha, \beta]$ на отрезок $[a, b]$, осуществляющее эквивалентность этих представлений (т. е. $t=t(\tau)$, $\alpha\leqslant\tau\leqslant\beta$ — допустимое преобразование параметра, см. п. 16.1), то, поскольку значение функции F определяется лишь точкой кривой, будем иметь

$$F(\rho(\tau))=F(r(t)),\quad t=(\tau),\quad \alpha\leqslant\tau\leqslant\beta.$$

Рассматриваемые функции F принимают, вообще говоря, различные значения в точках кривой, соответствующих различным значениям параметра, но совпадающих как точки пространства (см. кратные точки в п. 16.1). Такая точка зрения соответствует физической интерпретации кривой γ, например, как траектории движения материальной точки, а функции F — как некоторой силы, действующей на нее, и зависящей не только от положения точки в пространстве, но и от момента, в котором эта точка находится в данном месте. Кроме того, такой подход дает и определенные математические преимущества, которые будут видны в дальнейшем.

Из сказанного следует, что указанные функции, заданные на кривой, нельзя рассматривать как функции, определенные на некотором множестве пространства R^3 и потому, строго говоря, их нельзя обозначать через $F(x, y, z)$, где x, y, z — декартовы координаты пространственных точек. Однако в рассматриваемых ниже вопросах такое обозначение является традиционным, поэтому мы будем его употреблять. Если всегда помнить, что в этих вопросах речь идет о функциях, определенных на точках кривых, то его использование не приведет к недоразумениям.

Пусть теперь задана спрямляемая ориентированная кривая γ, причем $r(s)=\{x(s),\ y(s),\ z(s);\ 0\leqslant s\leqslant S\}$ — ее представление, где в качестве параметра взята переменная длина дуги s и пусть $A=r(0)$ и $B=r(S)$ — начальная и конечная точки этой кривой. В этом случае будем писать $\gamma=\overset{\frown}{AB}$. Противоположно ориентированную кривую обозначим $\overset{\frown}{BA}$.

Определение 1. *Пусть на точках $r(s)$ кривой γ задана некоторая функция F. Тогда выражение $\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} F(x,\ y,\ z)\,ds$, определяемое по формуле*

$$\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} F(x,\ y,\ z)\,ds=\int\limits_{0}^{S} F(x(s),\ y(s),\ z(s))\,ds, \tag{47.1}$$

называется криволинейным интегралом первого рода от функции F по кривой $\overset{\frown}{AB}$.

Этот интеграл обозначается также символами

$$\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} F[r(s)]\,ds \text{ и } \int\limits_{\gamma} F[r(s)]\,ds, \text{ или, короче, } \int\limits_{\gamma} F\,ds.$$

Таким образом, хотя определение криволинейного интеграла первого рода и связано с понятием кривой, т. е. с геометрическим образом, оно сводится к обычному интегралу по отрезку, и поэтому на криволинейный интеграл переносятся все свойства обычного интеграла.

Отметим некоторые специфические свойства интеграла (47.1)

1°. $\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} ds=S.$

Это очевидно.

2°. *Если функция F непрерывна в точках кривой γ как функция параметра s, т. е. если непрерывна функция $F[r(s)]$, $0\leqslant s\leqslant S$, то интеграл $\int\limits_{\gamma} F\,ds$ существует.*

В самом деле, согласно определению (47.1), интеграл $\int\limits_{\gamma} F\,ds$ сводится к интегралу $\int\limits_{0}^{S} F[x(s),\ y(s),\ z(s)]\,ds$ от непрерывной функции по отрезку, который, как известно, существует.

3°. *Криволинейный интеграл первого рода не зависит от ориентации кривой:*

$$\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} F(x,\ y,\ z)\,ds=\int\limits_{\overset{\frown}{BA}} F(x,\ y,\ z)\,ds.$$

Действительно, пусть $M=r(s)$ — точка кривой $\overset{\frown}{AB}$ и s — длина дуги $\overset{\frown}{AM}$. Если $\sigma=S-s$, то σ равняется длине дуги $\overset{\frown}{BM}$ (рис. 188).

Функция $r=r(S-\sigma)$, $0\leqslant\sigma\leqslant S$, является представлением кривой $\widehat{BA}$, поэтому, выполнив в интеграле (47.1) замену переменного $s=S-\sigma$ и заметив, что $ds=-d\sigma$, получим

$$\int\limits_{\widehat{AB}} F(x,\ y,\ z)\,ds=\int\limits_0^S F[x(s),\ y(s),\ z(s)]\,ds=$$
$$=-\int\limits_S^0 F[x(S-\sigma),\ y(S-\sigma),\ z(S-\sigma)]\,d\sigma=$$
$$=\int\limits_0^S F[x(S-\sigma),\ y(S-\sigma),\ z(S-\sigma)]\,d\sigma=\int\limits_{\widehat{BA}} F(x,\ y,\ z)\,d\sigma.$$

Это свойство криволинейного интеграла первого рода связано с тем, что, согласно определению, длина дуги кривой считается положительной независимо от конца, от которого она отсчитывается.

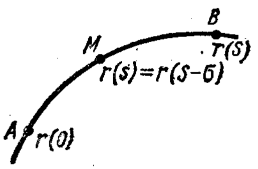


Рис. 188

Прежде чем перейти к следующему свойству, заметим, что $\int\limits_\gamma F\,ds$, как и всякий интеграл, является пределом соответствующих интегральных сумм; специфика этого случая состоит лишь в том, что эти суммы можно описать в геометрических терминах, связанных с кривой γ, по которой ведется интегрирование. Сформулируем это более точно.

4°. *Пусть* $\tau=\{s_i\}_{i=0}^{i=i_0}$ — *разбиение отрезка* $[0,\ S]$, $\xi_i\in[s_{i-1},\ s_i]$, $\Delta s_i=s_i-s_{i-1}$ — *длина дуги кривой* γ *от точки* $r(s_{i-1})$ *до точки* $r(s_i)$, $i=1,\ 2,\ \ldots,\ i_0$, *и* $\sigma_\tau=\sum\limits_{i=1}^{i_0}F[r(\xi_i)]\,\Delta s_i$. *Тогда, если функция* $F[r(s)]$ *интегрируема по Риману на отрезке* $[0,\ S]$, *то*

$$\lim_{\delta_\tau\to 0}\sigma_\tau=\int\limits_\gamma F\,ds. \qquad (47.2)$$

Действительно, σ_τ, очевидно, является интегральной суммой Римана интеграла $\int\limits_0^S F[r(s)]\,ds$, и поэтому формула (47.2) непосредственно следует из (47.1).

Формула (47.1) очень удобна для изучения свойства интеграла $\int\limits_\gamma F\,ds$, однако она далеко не всегда удобна для его вычисления, так как нередко бывает очень сложно или даже практически невозможно найти представление данной кривой, где за параметр взята переменная длина дуги. Укажем поэтому формулу для интеграла $\int\limits_{\gamma} F\,ds$ при любом параметрическом представлении кривой γ.

5°. *Пусть γ — гладкая кривая* (см. определение 16 в п. 16.4), $r(t)=\{\varphi(t), \psi(t), \chi(t);\ a \leqslant t \leqslant b\}$ — *ее непрерывно дифференцируемое представление*, и следовательно, $\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)+\chi'^2(t)>0$, $a \leqslant t \leqslant b$ *).

Пусть функция F непрерывна на кривой γ (в том смысле, что функция $F[r(t)]$ непрерывна на отрезке $[a, b]$). Тогда

$$\int\limits_{\gamma} F(x, y, z)\,ds = \int\limits_{a}^{b} F[\varphi(t), \psi(t), \chi(t)]\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)+\chi'^2(t)}\,dt. \tag{47.3}$$

В самом деле, при сделанных предположениях кривая γ спрямляема, и переменную длину дуги $s=s(t)$ можно принять за параметр (см. следствие 2 из теоремы 2 в п. 16.5) и потому интеграл $\int\limits_{\gamma} F\,ds$ имеет смысл. Выполнив замену переменного $s=s(t)$ в правой части равенства (47.1) и вспомнив, что (см. п. 16.5)

$$\frac{ds}{dt}=\sqrt{x_t'^2+y_t'^2+z_t'^2},$$

получим формулу (47.3).

Из (47.3) следует, что для данной кривой значение интеграла, стоящего в правой части равенства (47.3), не зависит от выбора параметра на кривой, ибо при любом выборе параметра этот интеграл равен интегралу, стоящему в левой части этого равенства.

47.2. КРИВОЛИНЕЙНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ ВТОРОГО РОДА

Ряд математических и прикладных задач приводит к криволинейным интегралам другого типа. Например, если $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t)$ является радиус-вектором движущейся материальной точки, а $\boldsymbol{F}=\boldsymbol{F}(t)$ — сила, действующая на эту точку, то естественно определить работу силы $\boldsymbol{F}$ вдоль траектории Γ рассматриваемой точки как интеграл $\int\limits_{\Gamma} \boldsymbol{F}\,d\boldsymbol{r}$ или, если $\boldsymbol{F}=(P, Q, R)$, а $d\boldsymbol{r}=(dx, dy, dz)$, в координатной записи как интеграл

$$\int\limits_{\Gamma} P\,dx+Q\,dy+R\,dz. \tag{47.4}$$

Вспоминая, что (см. п. 16.5)

$$\frac{dx}{ds}=\cos\alpha,\quad \frac{dy}{ds}=\cos\beta,\quad \frac{dz}{ds}=\cos\gamma, \tag{47.5}$$

*) Напомним, что это условие означает отсутствие особых точек на кривой (см. определение 15 в п. 16.4).

где $t=(\cos\alpha,\ \cos\beta,\ \cos\gamma)$ — единичный касательный вектор, интеграл (47.4) можно представить формально в виде

$$\int (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)\,ds.$$

Сформулируем теперь строгое определение интегралов вида (47.4). Пусть $\gamma=\overset{\frown}{AB}$ — гладкая ориентированная кривая, т. е. непрерывно дифференцируемая ориентированная кривая без особых точек. Тогда существует такое ее непрерывно дифференцируемое представление

$$r(t)=\{x=\varphi(t),\ y=\psi(t),\ z=\chi(t);\ a\leqslant t\leqslant b\},\ A=r(a),\ B=r(b),$$

что

$$\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)+\chi'^2(t)>0,\ a\leqslant t\leqslant b.$$

Пусть $s=s(t)$ — переменная длина дуги, $0\leqslant s\leqslant S$, S — длина всей кривой γ, отсчитываемой от конца A, $(\cos\alpha,\ \cos\beta,\ \cos\gamma)$ — единичный касательный вектор к кривой, $\alpha=\alpha(s)$, $\beta=\beta(s)$, $\gamma=\gamma(s)$, $0\leqslant s\leqslant S$, и пусть функция F, как и в предыдущем пункте, определена на множестве $\{r(t),\ a\leqslant t\leqslant b\}$ всех точек кривой γ.

Определение 2. *Интеграл* $\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} F(x,\ y,\ z)\,dx$ *определяется по формуле*

$$\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} F(x,\ y,\ z)\,dx=\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} F(x,\ y,\ z)\cos\alpha\,ds. \tag{47.6}$$

Аналогично, по определению, полагается

$$\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} F(x,\ y,\ z)\,dy=\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} F(x,\ y,\ z)\cos\beta\,ds,$$

$$\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} F(x,\ y,\ z)\,dz=\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} F(x,\ y,\ z)\cos\gamma\,ds. \tag{47.7}$$

Интегралы вида (47.6) *и* (47.7) *называются криволинейными интегралами второго рода от функции* F *по кривой* $\overset{\frown}{AB}$.

Естественность этих определений видна из формул (47.5).

Отметим некоторые свойства криволинейных интегралов второго рода, ограничиваясь для краткости только случаем интеграла (47.6).

1°. *Если функция* F *непрерывна на кривой* γ, *т. е. непрерывна функция* $F[r(t)]$, $a\leqslant t\leqslant b$, *то интеграл* (47.6) *существует.*

Действительно, при сделанных относительно кривой γ предположениях функция $t=t(s)$, (t — параметр на кривой γ, s — переменная длина дуги) непрерывно дифференцируема на отрезке $[0,\ S]$, а поэтому функция $\cos\alpha=\frac{dx}{dt}\frac{dt}{ds}$ непрерывна на этом отрезке и, следовательно, в силу свойства 2° криволинейных интегралов первого рода (см. п. 47.1) интеграл (47.6) существует. $\square$

В дальнейшем в этом пункте для простоты будем предполагать, что функция F непрерывна на кривой γ. В этом случае все написанные ниже интегралы заведомо существуют.

2°. *Криволинейный интеграл второго рода меняет знак при изменении ориентации кривой, т. е.*

$$\int_{\overset{\frown}{AB}} F(x, y, z)\,dx = -\int_{\overset{\frown}{BA}} F(x, y, z)\,dx.$$

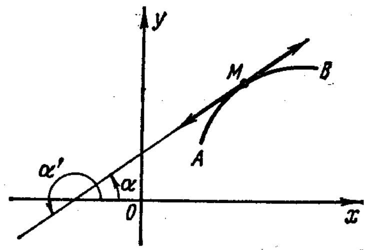


Рис. 189

В самом деле, если α — угол, образованный положительным направлением касательной к кривой $\overset{\frown}{AB}$ с осью Ox, а α' — угол, образованный положительным направлением касательной к кривой $\overset{\frown}{BA}$ с осью Ox, то для соответствующих точек будем иметь $\alpha' = \alpha + \pi$ (рис. 189), и, следовательно, $\cos\alpha' = -\cos\alpha$.

Использовав теперь свойство независимости криволинейного интеграла первого рода от ориентации кривой (см. п. 47.1), получим

$$\int_{\overset{\frown}{BA}} F(x, y, z)\,dx = \int_{\overset{\frown}{BA}} F(x, y, z)\cos\alpha'\,ds = -\int_{\overset{\frown}{BA}} F(x, y, z)\cos\alpha\,ds =$$
$$= -\int_{\overset{\frown}{AB}} F(x, y, z)\cos\alpha\,ds = -\int_{\overset{\frown}{AB}} F(x, y, z)\,dx.$$

Таким образом, это свойство криволинейного интеграла второго рода вытекает из того факта, что криволинейные интегралы

$$\int_{\overset{\frown}{AB}} F(x, y, z)\,dx \quad \text{и} \quad \int_{\overset{\frown}{BA}} F(x, y, z)\,dx$$

равны соответствующим криволинейным интегралам первого рода, подынтегральные выражения которых отличаются только знаком. $\square$

3°. *Если F — непрерывная на кривой γ функция, то для интеграла* (47.6) *справедлива формула*

$$\int_{\overset{\frown}{AB}} F(x, y, z)\,dx = \int_a^b F[\varphi(t), \psi(t), \chi(t)]\,\varphi'(t)\,dt. \qquad (47.8)$$

Действительно, согласно определению (47.6),

$$\int_{\overset{\frown}{AB}} F(x, y, z)\,ds = \int_0^S F[x(s), y(s), z(s)]\cos\alpha(s)\,ds.$$

Выполнив в интеграле, стоящем в правой части этого равенства, замену переменного $s=s(t)$ и замечая, что (см. (47.5) $\cos\alpha = \frac{dx}{ds} = \frac{x'_t}{s'_t}$, получим

$$\int_0^S F[x(s),\ y(s),\ z(s)]\cos\alpha(s)\,ds =$$

$$= \int_a^b F[\varphi(t),\ \psi(t),\ \chi(t)]\frac{x'_t}{s'_t}\,s'_t\,dt = \int_a^b F[\varphi(t),\ \psi(t),\ \chi(t)]\,\varphi'_t(t)\,dt. \ \square$$

Отметим, что мы доказали также, что интеграл, стоящий в правой части этой формулы, не зависит от выбора параметра на кривой, сохраняющего ее ориентацию.

В частном случае, когда за параметр t можно взять переменную x, т. е. когда кривая γ обладает представлением $y=y(x)$, $z=z(x)$, $a\leqslant x\leqslant b$, и, следовательно, не имеет кратных точек, функция F является однозначной функцией не только точек кривой, но и соответствующих точек пространства (в этом случае разным точкам кривой соответствуют разные точки пространства и наоборот).

Формула (47.8) принимает в этом случае вид

$$\int_\gamma F(x,\ y,\ z)\,dx = \int_a^b F[x,\ y(x),\ z(x)]\,dx. \tag{47.9}$$

4. *Интеграл* $\int\limits_{\widehat{AB}} F(x,\ y,\ z)\,dx$ *является пределом соответствующих интегральных сумм, описываемых в терминах, связанных с кривой* γ, *точнее: пусть* $\tau=\{t_i\}_{i=0}^{i=i_0}$ — *разбиение отрезка* $[a,\ b]$, δ_τ — *его мелкость*, $\xi_i\in[t_{i-1},\ t_i]$, $i=1,\ 2,\ \ldots,\ i_0$, *и*

$$\tilde\sigma_\tau = \sum_{i=1}^{i_0} F[r(\xi_i)]\,\Delta x_i,$$

где $\Delta x_i = x(t_i)-x(t_{i-1})$, *тогда*

$$\lim_{\delta_\tau\to 0}\tilde\sigma_\tau = \int_{\widehat{AB}} F(x,\ y,\ z)\,dx. \tag{47.10}$$

В самом деле, по формуле конечных приращений Лагранжа $\Delta x_i = \varphi'(\eta_i)\,\Delta t_i$, где

$$\eta_i\in[t_{i-1},\ t_i],\ \Delta t_i = t_i - t_{i-1},\quad i=1,\ 2,\ \ldots,\ i_0,$$

поэтому

$$\tilde\sigma_\tau = \sum_{i=1}^{i_0} F[r(\xi_i)]\,\varphi'(\eta_i)\,\Delta t_i.$$

Положим

$$\sigma_\tau = \sum_{i=1}^{i_0} F[r(\xi_i)]\,\varphi'(\xi_i)\,\Delta t_i.$$

Сумма σ_τ является интегральной суммой Римана для функции $F[r(t)]\,\varphi(t)$, поэтому

$$\lim_{\delta_\tau \to 0} \sigma_\tau = \int_a^b F[r(t)]\,\varphi'(t)\,dt. \tag{47.11}$$

С другой стороны

$$|\tilde{\sigma}_\tau - \sigma_\tau| \leqslant \sum_{i=1}^{i_0} |F[r(\xi_i)]|\,|\varphi'(\eta_i) - \varphi'(\xi_i)|\,\Delta t_i \leqslant$$

$$\leqslant \omega(\delta_\tau;\ \varphi')\,(b-a) \sup_{a \leqslant t \leqslant a} |F[r(t)]|,$$

где $\omega(\delta;\ \varphi')$ — модуль непрерывности функции φ'. Так как из непрерывности функции $F[r(t)]$ на отрезке $[a, b]$ следует, что $\sup\limits_{a \leqslant t \leqslant b} |F[r(t)]| < \infty$, а из непрерывности функции φ' на том же отрезке следует, что $\lim\limits_{\delta_\tau \to 0} \omega(\delta_\tau;\ \varphi') = 0$, то $\lim\limits_{\delta_\tau \to 0} (\tilde{\sigma}_\tau - \sigma_\tau) = 0$. Поэтому в силу (47.11) получим

$$\lim_{\delta_\tau \to 0} \tilde{\sigma}_\tau = \int_a^b F[r(t)]\,\varphi'(t)\,dt.$$

Отсюда, согласно свойству 3, следует формула (47.10). □

Мы остановились только на тех свойствах криволинейных интегралов, которые связаны со спецификой их определения, с кривой, по которой производится интегрирование. Естественно, что, поскольку рассматриваемые интегралы сводятся к обычным интегралам по отрезку, на них переносятся и различные их свойства (линейность относительно интегрируемых функций, интегральная теорема о среднем и т. д.).

47.3. РАСШИРЕНИЕ КЛАССА ДОПУСТИМЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ ПАРАМЕТРА КРИВОЙ

Непрерывно дифференцируемая ориентированная кривая без особых точек определялась нами (см. п. 16.1 и 16.2*) как кривая, имеющая непрерывно дифференцируемые векторные представления $\boldsymbol{r}(t)$, $a \leqslant t \leqslant b$, такие, что $\boldsymbol{r}'(t) \neq 0$ на отрезке $[a, b]$. В качестве допустимых преобразований параметра при этом рассматривались такие функции

$$t = t(\tau),\quad \alpha \leqslant \tau \leqslant \beta,\quad t(\alpha) = a,\quad t(\beta) = b,$$

которые были непрерывно дифференцируемыми и имели положительную производную на отрезке $[a, b]$. Это требование, однако, часто оказывается слишком обременительным. Например, для дуги γ единичной окружности с центром в начале координат представления

$$y=\sqrt{1-x^2},\ 0 \leqslant x \leqslant 1, \quad \text{и} \quad x=\sin t,\ y=\cos t,\ 0 \leqslant t \leqslant \frac{\pi}{2},$$

оказываются неэквивалентными в этом смысле. Да и само представление $y=\sqrt{1-x^2}$, $0 \leqslant x \leqslant 1$, не определяет в нашем смысле непрерывно дифференцируемую кривую, поскольку у него при $x=1$ производная не существует. Поэтому естественно расширить класс допустимых преобразований параметров и допустимых представлений непрерывно дифференцируемых кривых. Это можно сделать следующим образом.

Рассмотрим совокупность векторных представлений $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t)$, $a \leqslant t \leqslant b$, непрерывных на отрезке $[a, b]$ и непрерывно дифференцируемых на интервале (a, b). *Допустимым преобразованием параметра* будем называть всякую функцию $t=t(\tau)$, $\alpha \leqslant \tau \leqslant \beta$, $t(\alpha)=a$, $t(\beta)=b$, непрерывную на отрезке $[\alpha, \beta]$, непрерывно дифференцируемую и имеющую положительную производную на интервале (α, β). Как всегда, два представления называются *эквивалентными*, если можно перейти от одного к другому с помощью допустимого преобразования параметра.

Определение 3. *Класс эквивалентных представлений указанного типа задает непрерывно дифференцируемую кривую, если в этом классе существует по крайней мере одно представление* $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t)$, $a \leqslant t \leqslant b$, *непрерывно дифференцируемое на всем отрезке* $[a, b]$.

Определение 4. *Непрерывно дифференцируемая кривая называется кривой без особых точек, или, короче, гладкой кривой, если при некотором ее представлении* $\boldsymbol{r}(t)$, $a \leqslant t \leqslant b$ *(а значит, и при всех ее представлениях) выполняется условие* $\boldsymbol{r}'(t) \neq 0$, $a<t<b$.

В смысле этого определения два вышеуказанных представления дуги окружности оказываются эквивалентны и задают гладкую кривую.

Остаются в силе и все данные выше определения криволинейных интегралов и их свойства, естественно, при учете того, что при некоторых представлениях кривых можем получить несобственный интеграл.

Следует подчеркнуть, что расширение класса представлений кривой позволяет производить в ы ч и с л е н и е криволинейного интеграла при более разнообразных представлениях кривой. Например, интеграл $\int\limits_{\gamma} P(x, y)\,dy$, где γ — рассматриваемая выше дуга единичной окружности, а P — непрерывная на γ функция, можно вычислить, пользуясь обоими указанными представлениями:

$$\int_\gamma P(x,\ y)\,dy = -\int_0^1 P\left(x,\ \sqrt{1-x^2}\right)\frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}},$$

$$\int_\gamma P(x,\ y)\,dy = -\int_0^{\pi/2} P(\sin t,\ \cos t)\sin t\,dt.$$

В первом случае здесь может получиться несобственный интеграл.

Вместе с тем при доказательстве теорем можно выбирать «хорошие представления», т. е. непрерывно дифференцируемые вплоть до концов отрезка, а проведенные рассмотрения окажутся справедливыми и для расширенного понятия кривой.

Упражнение 1. Доказать, что при новом определении непрерывно дифференцируемой кривой $\gamma = \{x(t),\ y(t),\ z(t)\}$ ее длина выражается формулой $\int_a^b \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}\,dt$, где написанный интеграл, вообще говоря, несобственный.

47.4. КРИВОЛИНЕЙНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ ПО КУСОЧНО-ГЛАДКИМ КРИВЫМ

Определение 5. *Если кривая γ кусочно-гладкая, т. е. представима в виде объединения конечного числа гладких кривых $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_k$, а функция $F(x, y, z)$ по-прежнему определена на точках кривой γ, то, по определению, положим*

$$\int_\gamma F(x,\ y,\ z)\,dx = \sum_{i=1}^{k} \int_{\gamma_i} F(x,\ y,\ z)\,dx.$$

Если γ — кусочно-гладкая кривая и $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$, $a \leqslant t \leqslant b$, — ее кусочно-гладкое представление, то также будем писать

$$\int_\gamma F(x,\ y,\ z)\,dx = \int_a^b F[x(t),\ y(t),\ z(t)]\,x'(t)\,dt$$

(здесь производная $x'(t)$ может быть не определена в конечном числе точек отрезка $[a,\ b]$), понимая интеграл, стоящий в правой части равенства, вообще говоря, в несобственном смысле.

Аналогичные определения имеют место и для интегралов вида (47.7). В дальнейшем придется иметь дело с суммами интегралов вида (47.6) и (47.7), т. е. с интегралами вида (47.4), где P, Q и R — некоторые функции, определенные на точках кривой γ. Согласно определениям (47.6) и (47.7), справедлива формула

$$\int_\gamma P\,dx+Q\,dy+R\,dz=\int_\gamma (P\cos\alpha+Q\cos\beta+R\cos\gamma)\,ds.$$

Замечание 1. Если Γ обозначает конечную совокупность кусочно-гладких ориентированных кривых γ_i, $i=1, 2, \ldots, k$, то, по определению

$$\int_\Gamma F\,ds=\sum_{i=1}^{k}\int_{\gamma_i} F\,ds,\quad \int_\Gamma F\,dx=\sum_{i=1}^{k}\int_{\gamma_i} F\,dx \text{ и т. д.}$$

Замечание 2. Мы дали определение криволинейных интегралов для кривых, лежащих в трехмерном пространстве R^3. Совершенно аналогично они определяются и для кривых, лежащих в любом n-мерном пространстве R^n, $n=2, 3, 4, \ldots$. Криволинейные интегралы в n-мерном пространстве обладают свойствами, аналогичными рассмотренным выше в трехмерном случае, причем доказательства их также совершенно аналогичны приведенным выше. Поэтому мы не будем останавливаться ни на формулировках, ни на доказательствах соответствующих утверждений.

Упражнения. 2. Доказать, что данные в настоящем пункте определения криволинейных интегралов по кусочно-гладким кривым не зависят от способа разбиения этих кривых на гладкие дуги.

3. Вычислить криволинейный интеграл $\int_\Gamma \sqrt{x+2y}\,dx+\sqrt{x+y}\,dy$, где Γ — треугольный контур с вершинами $O(0;\ 0)$; $B(2;\ 0)$, $C(2;\ 4)$.

4. Вычислить криволинейный интеграл $\int_\Gamma \frac{x^2\,dy-y^2\,dx}{x^{5/3}+y^{5/3}}$, где Γ — дуга астроиды $x=a\cos^3 t$, $y=a\sin^3 t$, ограниченная точками $(a,\ 0)$ и $(0,\ a)$.

47.5. ФОРМУЛА ГРИНА

Определение 6. *Пусть простой замкнутый контур γ является границей ограниченной плоской области G. Если ориентация контура выбрана таким образом, что при обходе контура γ, соответствующем возрастанию параметра, область G остается слева (такой обход обычно называется обходом контура против направления движения часовой стрелки), то эта ориентация называется положительной, в противном же случае (т. е. когда обход контура производится по направлению движения часовой стрелки) — отрицательной* (рис. 190).

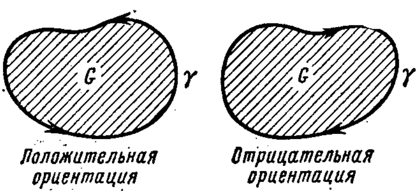


Рис. 190

Положительно ориентированный контур будем обозначать γ^+, а отрицательно ориентированный — через γ^-. Эти понятия определены не строго, не в точных математических терминах. Однако мы не будем давать здесь точных определений, с одной стороны, потому что это нельзя коротко сделать, а с другой стороны, поскольку в дальнейшем во всяком отдельном случае рассматриваемая ориентация всегда будет конкретно указываться. Тем самым наше «общее» определение положительной и отрицательной ориентации простого замкнутого контура послужит лишь для геометрической наглядности рассматриваемых ниже вопросов.

В дальнейшем плоскую область G, замыкание которой может быть представлено одновременно в виде (45.1) и (45.13) (см. рис. 156), будем для кратности называть *элементарной областью*.

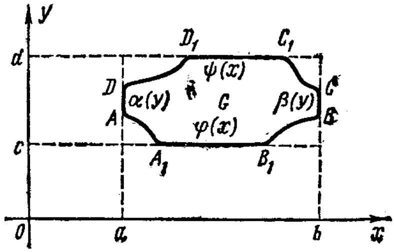


Рис. 191

Теорема 1 (формула Грина *)). *Пусть G — плоская область и ее граница γ является кусочно-гладким контуром. Пусть область G может быть разбита на конечное число элементарных областей G_i**) с кусочно-гладкими границами γ_i, $i=1, 2, \ldots, k$. Пусть, далее, в замкнутой области $\bar{G}$ заданы функции $P(x, y)$ и $Q(x, y)$, непрерывные на $\bar{G}$ вместе со своими частными производными $\frac{\partial P}{\partial y}$ и $\frac{\partial Q}{\partial x}$.* ***) Тогда справедлива формула

$$\iint\limits_{G}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dx\,dy=\int\limits_{\gamma^+} P\,dx+Q\,dy. \qquad (47.12)$$

Доказательство. Пусть сначала область G сама элементарна и, следовательно, ее границу можно представить как объединение графиков двух кусочно непрерывно дифференцируемых функций $\varphi(x)$ и $\psi(x)$, $\varphi(x)\leqslant\psi(x)$, $a\leqslant x\leqslant b$, и, быть может, отрезков прямых $x=a$ и $x=b$, а также как объединение двух графиков кусочно непрерывно дифференцируемых функций $\alpha(y)$ и $\beta(y)$, $\alpha(y)\leqslant\beta(y)$, $c\leqslant y\leqslant d$ и, быть может, отрезков прямых $y=c$ и $y=d$ (рис. 191).

В этом случае, применяя правило сведения двойного интеграла к повторному, теорему Ньютона — Лейбница (п. 29.3) и формулу

*) Дж. Грин (1793—1841) — английский математик.

**) Это означает, что $\{\bar{G}_i\}_{i=1}^{i=k}$ является разбиением замкнутой области $\bar{G}$ (см. п. 44.3).

***) Непрерывность частных производных на $\bar{G}$ понимается как их непрерывность на открытом множестве G и их непрерывная продолжаемость на границу G (см. п. 39.3).

(47.9), имеем

$$\iint_G \frac{\partial P}{\partial y}\,dx\,dy = \int_a^b \left[\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} \frac{\partial P}{\partial y}\,dy\right]dx =$$

$$= \int_a^b \{P[x, \psi(x)] - P[x, \varphi(x)]\}\,dx = \int_a^b P[x, \psi(x)]\,dx -$$

$$- \int_a^b P[x, \varphi(x)]\,dx = \int_{\widehat{DC}} P(x, y)\,dx - \int_{\widehat{AB}} P(x, y)\,dx =$$

$$= - \int_{\widehat{CD}} P(x, y)\,dx - \int_{\widehat{AB}} P(x, y)\,dx. \tag{47.13}$$

Замечая, что для отрезков BC и DA

$$\int_{BC} P(x, y)\,dx = \int_{DA} P(x, y)\,dx = 0 \tag{47.14}$$

(это сразу следует, например, из формулы (47.6), ибо здесь $x = \mathrm{const}$ и потому $\cos\alpha = 0$), и, сложив равенства (47.13) и (47.14), получим

$$\iint_G \frac{\partial P}{\partial y}\,dx\,dy = - \int_{\widehat{AB}} P\,dx - \int_{\widehat{BC}} P\,dx - \int_{\widehat{CD}} P\,dx - \int_{\widehat{DA}} P\,dx = - \int_{\gamma^+} P\,dx. \tag{47.15}$$

При этом получилась ориентация граничного контура γ, при которой следуют последовательно одна за другой точки A, B, C, D. Эта ориентация является положительной (см. определение 6) и обозначается через γ^+.

Совершенно аналогично, исходя из того, что область G элементарна, выводится формула

$$\iint_G \frac{\partial Q}{\partial x}\,dx\,dy = \int_{\gamma^+} Q\,dy. \tag{47.16}$$

Сложив (47.15) и (47.16), мы получим формулу Грина (47.12) для рассматриваемого случая.

Рассмотрим общий случай. Пусть область G разбита на области G_i, $i = 1, 2, \ldots, k$, указанного в условиях теоремы вида. В силу доказанного для каждого $i = 1, 2, \ldots, k$

$$\iint_{G_i} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy = \int_{\gamma_i^+} P\,dx + Q\,dy.$$

Сложив эти равенства, получим

$$\sum_{i=1}^{k} \iint_{G_i} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx\,dy = \sum_{i=1}^{k} \int_{\gamma_i^+} P\,dx + Q\,dy. \qquad (47.17)$$

В силу аддитивности двойного интеграла по множествам (см. п. 44.6) будем иметь

$$\sum_{i=1}^{k} \iint_{G_i} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx\,dy = \iint_{G} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx\,dy. \qquad (47.18)$$

В сумме, стоящей в правой части равенства (47.17), криволинейные интегралы берутся дважды по всем внутренним частям границ γ_i, областей G_i, т. е. таким дугам кривых γ_i, которые являются частью границ двух областей G_i, $i = 1, 2, \ldots, k$, и, следовательно, не входят в границу области G; при этом ориентации этих дуг кривых γ_i противоположны (рис. 192). В силу

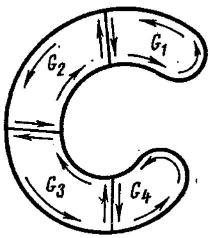


Рис. 192

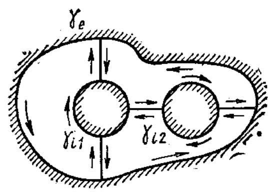


Рис. 193

изменения знака криволинейного интеграла второго рода при изменении ориентации кривой сумма двух криволинейных интегралов по указанным частям кривых γ_i равна нулю. Поэтому в правой сумме формулы (47.17) останутся только интегралы по положительно ориентированным частям границы γ области G, дающие в сумме $\int_{\gamma^+} P\,dx + Q\,dy$. Таким образом,

$$\sum_{i=1}^{k} \int_{\gamma_i^+} P\,dx + Q\,dy = \int_{\gamma^+} P\,dx + Q\,dy. \qquad (47.18')$$

Из (47.17), (47.18) и (47.18′) следует формула (47.12) в общем случае. □

Пусть G — ограниченная область на плоскости R^2 и пусть ее граница состоит из конечного числа простых контуров, которые будем называть *граничными контурами*. Если граничный контур является одновременно и границей неограниченной области, лежащей в $R^2 \setminus \overline{G}$, то будем называть его *внешним*, а если он является одновременно и границей ограниченной области, лежащей в $R^2\setminus\overline{G}$, то — *внутренним*. Так, на рис. 193 контур γ_e внешний, а контуры γ_{i1} и γ_{i2} внутренние.

Если граница области G состоит из внешнего контура γ_e и внутренних контуров $\gamma_{i1}, \gamma_{i2}, \ldots, \gamma_{im}$ и если область G может быть разбита на конечное число элементарных относительно обеих координатных осей областей с кусочно-гладкими границами, то справедлива формула

$$\iint\limits_G \left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dx\,dy=\int\limits_{\gamma_e^+} P\,dx+Q\,dy+\sum_{j=1}^{m}\int\limits_{\gamma_{ij}^-} P\,dx+Q\,dy. \qquad (47.19)$$

Функции P и Q, как и выше, предполагаются непрерывными вместе со своими производными $\frac{\partial P}{\partial y}$ и $\frac{\partial Q}{\partial x}$ в замкнутой области $\overline{G}$.

Доказывается эта формула так же, как и (47.12), если только заметить, что в сумме, стоящей в правой части равенства (47.17), останутся криволинейные интегралы по положительно ориентированным частям внешнего контура и по отрицательно ориентированным частям внутренних контуров (см. рис. 193).

Отметим еще, что в формуле (47.19) все контуры (как внешние, так и внутренние) ориентированы таким образом, что при их обходе область интегрирования остается слева.

Определение 7. *Пусть граница ∂G ограниченной плоской области G состоит из конечного числа простых кусочно-гладких контуров. Совокупность этих контуров, ориентированных так, что при обходе по каждому из них область G остается слева (справа), называется положительной (отрицательной) ориентацией границы G и обозначается также ∂G (соответственно $-\partial G$).*

Формулу Грина можно распространить и на еще более широкий класс областей. Для этого заметим, что в силу доказанного формула Грина справедлива для треугольника, а значит, и для любого многоугольника. Поэтому предельным переходом, аппроксимируя границу области конечнозвенными ломаными, можно получить формулу Грина для любой области (и даже просто открытого множества), граница которой состоит из конечного числа кусочно-гладких кривых. Мы, однако, не будем останавливаться на доказательстве этого факта, а ограничимся лишь его формулировкой. При этом, используя определение 7, мы запишем формулу (47.19) в более компактном виде.

Теорема 1′. *Пусть граница плоской ограниченной области G состоит из конечного числа кусочно-гладких кривых. Тогда, если функции P, Q, $\frac{\partial P}{\partial y}$ и $\frac{\partial Q}{\partial x}$ непрерывны на $\overline{G}$, то*

$$\iint\limits_G \left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dx\,dy=\int\limits_{\partial G} P\,dx+Q\,dy,$$

где ∂G — положительно ориентированная граница области G.

Формула Грина является для кратных интегралов аналогом формулы Ньютона — Лейбница для однократных интегралов: и в той и в другой формуле интегралы от производных по области интегрирования выражаются через значения функции на границе указанной области (в случае формулы Грина эти значения еще интегрируются).

Упражнения. С помощью формулы Грина вычислить следующие криволинейные интегралы, где Г — простой замкнутый контур, состоящий из частей кривых, уравнения которых указаны для каждого интеграла (направление обхода контура — положительное

5. $\int\limits_{\Gamma} (x^2y+x-y)\,dx+(y^2+2x)\,dy;\ y=2,\ y=x^2+1.$

6. $\int\limits_{\Gamma} \frac{y}{x}\,dx+2\ln x\,dy;\ 2x+y=4,\ x=1,\ y=0.$

7. $\int \frac{dx}{y^2}-\frac{dy}{x};\ y=x,\ x=2,\ y=1.$

47.6. ВЫЧИСЛЕНИЕ ПЛОЩАДЕЙ С ПОМОЩЬЮ КРИВОЛИНЕЙНЫХ ИНТЕГРАЛОВ

Положив в формуле Грина $Q=x$, $P=0$, получим $\iint\limits_{G} dx\,dy = \int\limits_{\gamma^+} x\,dy$ и, следовательно,

$$\mu G = \int\limits_{\gamma^+} x\,dy. \tag{47.20}$$

Аналогично, положив $P=-y$, $Q=0$, получим

$$\mu G = -\int\limits_{\gamma^+} y\,dx. \tag{47.21}$$

Складывая формулы (47.20) и (47.21), будем иметь

$$\mu G = \frac{1}{2}\int\limits_{\gamma^+} x\,dy - y\,dx. \tag{47.22}$$

Примеры. 1. Найдем с помощью формулы (47.22) площадь, ограниченную эллипсом $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$. Используем его параметрическое представление: $x=a\cos t$, $y=b\sin t$. Применив формулу (47.22), получим искомую площадь:

$$S=\frac{1}{2}\int\limits_{\gamma^+} x\,dy-y\,dx=\frac{1}{2}ab\int\limits_0^{2\pi}(\cos^2 t+\sin^2 t)\,dt=\pi ab.$$

Сравнивая этот метод вычисления площади, ограниченной эллипсом, с приведенным раньше (см. пример 4 в п. 32.1), легко убедиться, на сколько здесь меньше объем вычислений.

2. Найдем площадь, ограниченную астроидой (см. в т. 1, рис. 75) $x=a\cos^3 t$, $y=a\sin^3 t$, $0\leqslant t\leqslant 2\pi$. Замечая, что здесь возрастание параметра t соответствует положительной ориентации контура, имеем:

$$S=\frac{1}{2}\int\limits_{\gamma+} x\,dy-y\,dx=\frac{3a^2}{2}\int\limits_0^{2\pi}(\cos^4 t\sin^2 t+\sin^4 t\cos^2 t)\,dt=$$
$$=\frac{3a^2}{8}\int\limits_0^{2\pi}\sin^2 2t\,dt=\frac{3a^2}{16}\int\limits_0^{2\pi}(1-\cos 4t)\,dt=\frac{3\pi a^2}{8}.$$

Упражнения. С помощью криволинейного интеграла вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями:

8. $x=t^2$, $y=t^3$, $x=1$, $y=0$.

9. $y^2=4-x$, $x=1$, $y=1$ (в первой четверти).

47.7. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ СМЫСЛ ЗНАКА ЯКОБИАНА ОТОБРАЖЕНИЯ ПЛОСКОЙ ОБЛАСТИ

Пусть F — взаимно однозначное непрерывно дифференцируемое отображение плоской области $G\subset R^2_{uv}$ в плоскость R^2_{xy} с якобианом, всюду в G не равным нулю. Тогда в силу принципа сохранения области множество $G^*=F(G)$ также является областью (см. п. 41.8), а якобиан, в силу его непрерывности, сохраняет знак на G (см. теорему 4 в п. 19.5), т. е. либо всюду на G положителен, либо всюду отрицателен.

Пусть в координатной записи отображение F задается формулами

$$x=x(u,\ v),\qquad y=y(u,\ v). \tag{47.23}$$

Лемма 1. *Если γ — кусочно-гладкая кривая, лежащая в G, то ее образ $\gamma^*=F(\gamma)$ при отображении F также будет кусочно-гладкой кривой.*

Доказательство. Пусть сначала γ — гладкая кривая, т. е. непрерывно дифференцируемая кривая без особых точек (см. определения 15 и 16 в п. 16.4), и пусть

$$u=u(t),\quad v=v(t),\quad a\leqslant t\leqslant b,$$

— некоторое ее представление. Тогда на отрезке $[a,\ b]$ функции $u(t)$ и $v(t)$ непрерывно дифференцируемы и $\left(\frac{du}{dt}\right)^2+\left(\frac{dv}{dt}\right)^2>0$.

Представлением кривой $\gamma^*=F(\gamma)$ будет являться пара функций

$$x=x(u(t),\ v(t)),\quad y=y(u(t),\ v(t)),\quad a\leqslant t\leqslant b,$$

которые в силу свойств композиции непрерывно дифференцируемых функций (см. п. 19.3 и 20.3) также будут непрерывно дифференцируемыми. Покажем, что кривая γ^* также не будет иметь особых точек. В самом деле, поскольку

$$\frac{dx}{dt}=\frac{\partial x}{\partial u}\frac{du}{dt}+\frac{\partial x}{\partial v}\frac{dv}{dt},$$

$$\frac{dy}{dt}=\frac{\partial y}{\partial u}\frac{du}{dt}+\frac{\partial y}{\partial v}\frac{dv}{dt},$$

то, рассматривая эти равенства как систему линейных уравнений относительно $\frac{du}{dt}$ и $\frac{dv}{dt}$, видим, что если в некоторой точке $t\in[a, b]$ выполнялись бы равенства $\frac{dx}{dt}=\frac{dy}{dt}=0$, то в силу необращения в ноль якобиана

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}=\begin{vmatrix}\frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v}\\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v}\end{vmatrix}$$

указанная система имела бы единственное решение, которым является нулевое решение, т. е. в той же точке t были бы справедливыми равенства $\frac{du}{dt}=\frac{dv}{dt}=0$ и тем самым соответствующая точка кривой γ была бы особой, что, по предположению, невозможно.

Итак, если кривая γ — гладкая, то кривая $\gamma^*=F(\gamma)$ также гладкая. Отсюда сразу следует, что образ кусочно-гладкой кривой при рассматриваемом отображении является также кусочно-гладкой кривой, ибо кусочно-гладкая кривая (см. определение 16 в п. 16.4) представляет собой объединение конечного числа гладких кривых. □

Пусть, теперь, $\Gamma\subset G$, Γ — ограниченная область, и ее граница $\partial\Gamma$ является простым кусочно-гладким контуром γ (такие границы называются *кусочно-гладкими*). Пусть далее, $\Gamma^*=F(\Gamma)$. Тогда в силу принципа сохранения области множество Γ^* — также область, и кроме того, ее граница $\partial\Gamma^*$ есть образ границы $\partial\Gamma$ области Γ (см. лемму 1 в п. 46.1), т. е. $\partial\Gamma^*=F(\partial\Gamma)$. Поэтому граница $\partial\Gamma^*$ также является простым (в силу взаимной однозначности отображения F) кусочно-гладким (согласно лемме 1 этого пункта) контуром γ^*. Следовательно, по контурам $\gamma=\partial\Gamma$ и $\gamma^*=\partial\Gamma^*$ можно вычислять криволинейные интегралы. Пусть области Γ и Γ^* таковы, что к ним применима формула Грина, например, они удовлетворяют условиям, налагаемым на область в теореме 1 п. 47.5. (На самом деле, как уже отмечалось, при сделанных предположениях формула Грина всегда применима, однако это не было доказано).

Обозначим через γ^+ как обычно, положительно ориентированный контур γ (см. п. 47.5). Пусть

$$u = u(t),\quad v = v(t),\quad a \leqslant t \leqslant b,$$

— представление контура γ^+ и, следовательно,

$$x = x[u(t),\ v(t)],\quad y = y[u(t),\ v(t)],\quad a \leqslant t \leqslant b, \tag{47.24}$$

— некоторое представление контура γ^*.

Будем предполагать еще, что существуют смешанные производные $\frac{\partial^2 y}{\partial v\, \partial u}$ и $\frac{\partial^2 y}{\partial u\, \partial v}$ и что они непрерывны, а следовательно, и равны друг другу во всех точках области G.

Согласно формуле (47.20),

$$\mu\Gamma^* = \varepsilon \int\limits_{\gamma^*} x\, dy, \tag{47.25}$$

где $\varepsilon = +1$, если ориентация контура γ^* положительна, и $\varepsilon = -1$ в противоположном случае. Иначе говоря, $\varepsilon = +1$ (соответственно $\varepsilon = -1$), если положительному обходу данного контура γ соответствует при отображении (47.23) положительный же (соответственно отрицательный) обход контура $\gamma^* = F(\gamma)$.

Преобразовав интеграл (47.25) по формуле (47.8) и использовав представление (47.24) контура γ^*, будем иметь:

$$\mu\Gamma^* = \varepsilon \int\limits_a^b x y'_t\, dt = \varepsilon \int\limits_a^b x \left(\frac{\partial y}{\partial u}\frac{du}{dt} + \frac{\partial y}{\partial v}\frac{dv}{dt}\right) dt =$$

$$= \varepsilon \int\limits_{\gamma^+} x \frac{\partial y}{\partial u}\, du + x \frac{\partial y}{\partial v}\, dv.$$

К получившемуся интегралу применим формулу Грина (см. теорему 1 в п. 47.5). Положив $P = x\frac{\partial y}{\partial u}$, $Q = x\frac{\partial y}{\partial v}$ и заметив, что в этом случае

$$\frac{\partial Q}{\partial u} = \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} + x\frac{\partial^2 y}{\partial u\, \partial v},\quad \frac{\partial P}{\partial v} = \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u} + x\frac{\partial^2 y}{\partial v\, \partial u}$$

(здесь нами используется потребованное выше существование вторых частных производных $\frac{\partial^2 y}{\partial v\, \partial u}$ и $\frac{\partial^2 y}{\partial u\, \partial v}$), получим

$$\frac{\partial Q}{\partial u} - \frac{\partial P}{\partial v} = \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u} = \frac{\partial(x,\ y)}{\partial(u,\ v)},$$

откуда

$$\mu\Gamma^* = \varepsilon \int\limits_{\gamma^+} P\, du + Q\, dv = \varepsilon \iint\limits_{\Gamma} \left(\frac{\partial Q}{\partial u} - \frac{\partial P}{\partial v}\right) du\, dv = \varepsilon \iint\limits_{\Gamma} \frac{\partial(x,\ y)}{\partial(u,\ v)}\, du\, dv.$$

Левая часть этого равенства больше нуля, значит, правая часть также положительна, и так как якобиан отображения (47.23) не меняет знака, то это возможно лишь в том случае, когда $\varepsilon \frac{\partial (x, y)}{\partial (u, v)} > 0$, т. е. когда число ε имеет тот же знак, что и якобиан $\frac{\partial (x, y)}{\partial (u, v)}$, а в этом случае $\varepsilon \frac{\partial (x, y)}{\partial (u, v)} = \left| \frac{\partial (x, y)}{\partial (u, v)} \right|$. Тем самым знак ε не зависит от выбора контура γ, а определяется знаком якобиана, который один и тот же во всех точках области G.

Таким образом, доказана следующая теорема.

Теорема 2. *Если выполнены сделанные выше предположения, то справедлива формула*

$$\mu\Gamma^* = \iint\limits_{\Gamma} \left| \frac{\partial (x, y)}{\partial (u, v)} \right| du\, dv. \tag{47.26}$$

Кроме того, если $\frac{\partial (x, y)}{\partial (u, v)} > 0$ *на* Γ, *то* $\varepsilon = +1$, *иначе говоря, если якобиан отображения* F *положителен, то положительному обходу всякого контура* $\gamma \subset G$, *являющегося границей ограниченной области* $\Gamma \subset G$, *при отображении* F *соответствует положительный обход контура* $\gamma^* = F(\gamma)$, *являющегося границей ограниченной области* $\Gamma^* = F(\Gamma)$. *Если же якобиан* $\frac{\partial (x, y)}{\partial (u, v)} < 0$ *на* Γ, *то* $\varepsilon = -1$, *т. е. положительному обходу всякого контура* γ *указанного типа соответствует при отображении* F *отрицательный обход контура* $\gamma^* = F(\gamma)$.

Таким образом, *геометрический смысл знака якобиана состоит в том, что в случае положительного якобиана ориентация контура при отображении сохраняется, а при отрицательном — меняется.*

С помощью формулы Грина (47.19) формула (47.26) легко обобщается на случай, когда граница области Γ состоит из конечного числа кусочно-гладких замкнутых контуров.

Отметим еще, что с помощью формулы (47.26) можно без труда получить более простое доказательство теоремы 1 из п.46.1 о геометрическом смысле модуля якобиана. Действительно, пусть $M_0 \in \Gamma$, $d(\Gamma)$ — диаметр области Γ, и область Γ каким-либо образом стягивается к точке M_0 и, следовательно, $d(\Gamma) \to 0$. По теореме о среднем (см. п. 44.6)

$$\mu\Gamma^* = \iint\limits_{\Gamma} \left| \frac{\partial (x, y)}{\partial (u, v)} \right| du\, dv = \left| \frac{\partial (x, y)}{\partial (u, v)} \right|_M \mu\Gamma, \quad M \in \Gamma,$$

поэтому

$$\frac{\mu\Gamma^*}{\mu\Gamma} = \left| \frac{\partial (x, y)}{\partial (u, v)} \right|_M.$$

В силу непрерывности якобиана

$$\lim_{d(\Gamma) \to 0} \left| \frac{\partial (x, y)}{\partial (u, v)} \right|_M = \left| \frac{\partial (x, y)}{\partial (u, v)} \right|_{M_0},$$

следовательно

$$\lim_{d(\Gamma)\to 0}\frac{\mu\Gamma^*}{\mu\Gamma}=\left|\frac{\partial(\dot{x},\ y)}{\partial(u,\ v)}\right|_{M_0},\tag{47.27}$$

т. е. мы доказали формулу (46.9) и в некотором смысле даже в более общем виде; так, здесь Γ — не обязательно квадрат (правда, на отображение F мы наложили несколько более сильные условия, потребовав непрерывности смешанных производных $\frac{\partial^2 y}{\partial u\,\partial v}$ и $\frac{\partial^2 y}{\partial v\,\partial u}$ и возможности применения формулы Грина для области Γ^*). Нетрудно убедиться и в том, что стремление к пределу в формуле (47.27) происходит равномерно в смысле, указанном в теореме 1 п. 46.1.

Несмотря на простоту вывода формулы (47.27) (достигнутую во многом за счет более сильных предположений), следует отметить, что доказательство теоремы 1, приведенное в п. 46.1, идейно предпочтительнее, так как оно лучше раскрывает сущность вопроса, связанную с тем, что дифференцируемое отображение в малом достаточно хорошо аппроксимируется линейным отображением.

47.8. УСЛОВИЯ НЕЗАВИСИМОСТИ КРИВОЛИНЕЙНОГО ИНТЕГРАЛА ОТ ПУТИ ИНТЕГРИРОВАНИЯ

Все кривые (контуры), рассматриваемые в этом пункте, будут всегда предполагаться кусочно-гладкими; для краткости это не будет каждый раз специально оговариваться. Отметим еще, что во всякой области G любые две ее точки всегда можно соединить кусочно-гладкой кривой, например ломаной (см. лемму 5 в п. 41.4), лежащей целиком в G.

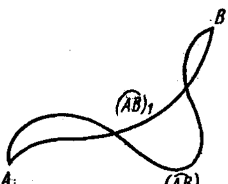


Рис. 194

Пусть задана плоская область G и на ней определены непрерывные функции $P=P(x,\ y)$ и $Q=Q(x,\ y)$. Рассмотрим вопрос о том, при выполнении каких условий криволинейный интеграл $\int\limits_{\widehat{AB}} P\,dx+Q\,dy$ при произвольно фиксированных точках $A\in G$ и $B\in G$ не зависит от выбора кривой $\widehat{AB}$, их соединяющей и лежащей в G.

Лемма 2. *Условие независимости рассматриваемого криволинейного интеграла от указанного пути интегрирования равносильно равенству нулю интеграла по любому замкнутому контуру, лежащему в области G.*

Доказательство. 1. Действительно, пусть для любого замкнутого контура $\gamma\subset G$ имеет место равенство $\int\limits_{\gamma} P\,dx+Q\,dy=0$, и даны две кривые $(\widehat{AB})_1$ и $(\widehat{AB})_2$, соединяющие в G точки A и B (см. рис. 194). Обозначим через $(\widehat{BA})_2$

кривую, получающуюся из $(\overset{\frown}{AB})_2$ заменой на ней ориентации на противоположную. Объединение $(\overset{\frown}{AB})_1 \cup (\overset{\frown}{BA})_2$ кривых $(\overset{\frown}{AB})_1$ и $(\overset{\frown}{BA})_2$ является замкнутым контуром, поэтому

$$\int\limits_{(\overset{\frown}{AB})_1 \cup (\overset{\frown}{BA})_2} P\,dx + Q\,dy = 0; \tag{47.28}$$

но

$$\int\limits_{(\overset{\frown}{AB})_1 \cup (\overset{\frown}{BA})_2} P\,dx + Q\,dy = \int\limits_{(\overset{\frown}{AB})_1} P\,dx + Q\,dy + \int\limits_{(\overset{\frown}{BA})_2} P\,dx + Q\,dy =$$
$$= \int\limits_{(\overset{\frown}{AB})_1} P\,dx + Q\,dy - \int\limits_{(\overset{\frown}{AB})_2} P\,dx + Q\,dy. \tag{47.29}$$

Из (47.28) и (47.29) следует, что

$$\int\limits_{(\overset{\frown}{AB})_1} P\,dx + Q\,dy = \int\limits_{(\overset{\frown}{AB})_2} P\,dx + Q\,dy,$$

т. е. криволинейный интеграл $\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} P\,dx + Q\,dy$ не зависит от пути интегрирования $\overset{\frown}{AB} \subset G$ при фиксированных $A \in G$ и $B \in G$.

2. Обратно, пусть интеграл $\int P\,dx + Q\,dy$ не зависит от пути интегрирования в указанном смысле и задан замкнутый контур γ, лежащий в G. Выберем на нем две точки A и $B \neq A$; тогда $\gamma = \overset{\frown}{AB} \cup \overset{\frown}{BA}$ и

$$\int\limits_{\gamma} P\,dx + Q\,dy = \int\limits_{\overset{\frown}{AB}} + \int\limits_{\overset{\frown}{BA}} = \int\limits_{\overset{\frown}{AB}} - \int\limits_{(\overset{\frown}{AB})_1} = 0,$$

где $(\overset{\frown}{AB})_1$ обозначает кривую, получающуюся из кривой $\overset{\frown}{BA}$ заменой на ней ориентации на противоположную. $\square$

Сформулируем критерий независимости интеграла от пути интегрирования.

Теорема 3. *Пусть функции $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ непрерывны в плоской области G. Для того чтобы криволинейный интеграл $\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} P\,dx + Q\,dy$ при фиксированных точках $A \in G$ и $B \in G$ не зависел от пути интегрирования $\overset{\frown}{AB} \subset G$, необходимо и достаточно, чтобы выражение $P\,dx + Q\,dy$ являлось полным дифференциалом некоторой функции $u = u(x, y)$, определенной в области G:*

$$du = P\,dx + Q\,dy \tag{47.30}$$

(это равносильно тому, что $\frac{\partial u}{\partial x} = P$, $\frac{\partial u}{\partial y} = Q$, $(x, y) \in G$).

При выполнении этого условия для любых двух точек $A = (x_0, y_0) \in G$ и $B = (x_1, y_1) \in G$ и любой кривой $\overset{\frown}{AB}$, соеди-

няющей эти точки в $G: \widehat{AB} \subset G$, имеет место тождество

$$\int_{\widehat{AB}} P\,dx + Q\,dy = u(x_1, y_1) - u(x_0, y_0). \qquad (47.31)$$

Доказательство необходимости условия (47.30). Допустим, что рассматриваемый интеграл не зависит от пути интегрирования, лежащего в области G, а только от его начальной и конечной точек. Пусть $M_0 = (x_0, y_0) \in G$, $M = (x, y) \in G$ и $\widehat{M_0M}$ — некоторая кусочно-гладкая кривая, соединяющая в G точки M_0 и M (такая кривая, даже ломаная, всегда существует, см. лемму 5 в п. 41.4). Положим

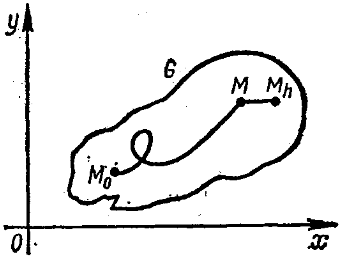


Рис. 195

$$u(M) = u(x, y) \overset{\text{def}}{=} \int_{\widehat{M_0M}} P\,dx + Q\,dy.$$

Функция $u(x, y)$ однозначна, так как значение $u(M) = u(x, y)$ не зависит от выбора кривой, соединяющей в G точки M_0 и M.

Покажем, что

$$\frac{\partial u(x, y)}{\partial x} = P(x, y) \text{ и } \frac{\partial u(x, y)}{\partial y} = Q(x, y).$$

Зафиксируем точку $M = (x, y)$, а точку $M_h = (x+h, y) \in G$, $h \neq 0$, выберем так, чтобы отрезок MM_h, соединяющий M и M_h (который, очевидно, параллелен оси Ox и имеет длину $|h|$), содержался в G (рис. 195). Для всех достаточно малых чисел h такой выбор всегда можно сделать (почему?). Тогда имеем

$$u(x+h, y) - u(x, y) =$$
$$= \int_{\widehat{M_0M}_h} P\,dx + Q\,dy - \int_{\widehat{M_0M}} P\,dx + Q\,dy = \int_{MM_h} P\,dx + Q\,dy.$$

Вдоль отрезка MM_h координата y постоянна, поэтому $\int_{MM_h} Q\,dy = 0$ и, следовательно, $u(x+h, y) - u(x, y) = \int_{MM_h} P\,dx = \int_x^{x+h} P(t, y)\,dt$. Применив интегральную теорему о среднем, получим

$$u(x+h, y) - u(x, y) = P(x+\theta h, y)\,h, \quad 0 < \theta < 1,$$

откуда

$$\frac{u(x+h, y) - u(x, y)}{h} = P(x+\theta h, y), \quad 0 < \theta < 1. \qquad (47.32)$$

Правая часть этого равенства в силу непрерывности функции $P(x, y)$ имеет предел при $h \to 0$, следовательно, и левая часть при $h \to 0$ имеет предел. Перейдя к пределу в (47.32), будем иметь $\frac{\partial u(x, y)}{\partial x} = P(x, y)$.

Совершенно аналогично доказывается и равенство $\frac{\partial u(x, y)}{\partial y} = Q(x, y)$.

Итак, существование функции $u(x, y)$, для которой имеет место соотношение (47.30), доказано.

Пусть теперь $A \in G$, $B \in G$, $\overset{\frown}{AB}$ — некоторая кривая, соединяющая в G точки A и B, и пусть $x = x(t)$, $y = y(t)$, $a \leqslant t \leqslant b$ — ее представление и, следовательно, $A = (x(a), y(a))$, $B = (x(b), y(b))$. Тогда

$$\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} P\,dx + Q\,dy = \int\limits_a^b \{P[x(t), y(t)]x'(t) + Q[x(t), y(t)]y'(t)\}\,dt =$$

$$= \int\limits_a^b \left[\frac{\partial u(x(t), y(t))}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial u(x(t), y(t))}{\partial y}\frac{dy}{dt}\right]dt =$$

$$= \int\limits_a^b u_t'(x(t), y(t))\,dt = u[x(b), y(b)] - u[x(a), y(a)] = u(B) - u(A),$$

т. е. формула (47.31) также доказана.

Д о к а з а т е л ь с т в о д о с т а т о ч н о с т и условия (47.30) для независимости криволинейного интеграла от пути интегрирования непосредственно следует из формулы (47.31). Действительно, начальная точка любого замкнутого контура γ совпадает с конечной, а поэтому в силу (47.31)

$$\int\limits_\gamma P\,dx + Q\,dy = u(A) - u(A) = 0.$$

Согласно лемме 2 это и означает независимость соответствующего криволинейного интеграла от пути интегрирования. □

Заметим, что хотя доказанная теорема и дает необходимые и достаточные условия независимости криволинейного интеграла от пути интегрирования, эти условия трудно проверяемы.

Если сузить класс рассматриваемых областей, то можно получить существенно более простой и эффективный критерий. Введем следующее определение.

Определение 8. *Плоская область G называется односвязной, если, каков бы ни был простой контур $\gamma \subset G$, ограниченная область Γ, границей которой является γ, содержится в G.*

Образно говоря, односвязность области означает, что область не имеет «дыр». Круг является примером односвязной области, круговое кольцо — неодносвязной (рис. 196).

Прежде чем формулировать другой критерий независимости криволинейного интеграла от пути интегрирования, докажем лемму, которая понадобится при доказательстве этого критерия.

Лемма 3. *Пусть функции $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ непрерывны в области G, γ — гладкая кривая, лежащая в G, $x = x(t)$, $y = y(t)$, $a \leqslant t \leqslant b$, — ее представление, $\tau = \{t_i\}_{i=0}^{i=i_0}$ — разбиение отрезка $[a, b]$, λ_τ — ломаная с вершинами в точках $(x(t_i), y(t_i))$, $i = 0, 1, \ldots, i_0$* (см. п.16.5). *Тогда*

$$\lim_{\delta_\tau \to 0} \int_{\lambda_\tau} P\,dx + Q\,dy = \int_\gamma P\,dx + Q\,dy. \tag{47.33}$$

Заметим, что в силу равномерной непрерывности на отрезке $[a, b]$ функций $x(t)$ и $y(t)$ длины звеньев ломаной λ_τ, т. е. длины отрезков с вершинами в точках $(x(t_{i-1}), y(t_{i-1}))$ и $(x(t_i), y(t_i))$, при $\delta_\tau \to 0$ также стремятся к нулю.

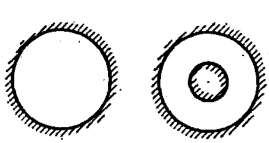


Рис. 196

Доказательство. Кривая γ является компактом; поскольку этот компакт не пересекается с замкнутым множеством $R^2_{xy} \setminus G$, то расстояние между ними больше нуля (см. лемму 7 п. 18.2). Пусть η — какое-либо число, такое, что $\rho(\gamma, R^2_{xy} \setminus G) > \eta > 0$. Обозначим через γ_η совокупность всех точек плоскости, находящихся от γ на расстоянии, не большем, чем η. Множество γ_η ограничено, замкнуто (см. в п. 18.3 лемму 11) и $\gamma_\eta \subset G$.

В силу равномерной непрерывности функций $x(t)$ и $y(t)$ на отрезке $[a, b]$ существует такое число $\delta_0 > 0$, что для любых двух точек $t' \in [a, b]$ и $t'' \in [a, b]$, удовлетворяющих условию $|t' - t''| < \delta_0$, выполняется неравенство

$$\rho(M', M'') = \sqrt{[x(t'') - x(t')]^2 + [y(t'') - y(t')]^2} < \eta,$$

где $M' = (x(t'), y(t'))$, $M'' = (x(t''), y(t''))$ (сравнить с леммой 4 в п. 41.4). Все точки отрезка с концами в точках M' и M'', очевидно, также находятся от точки M' на расстоянии, не большем чем η и поэтому лежат во множестве γ_η и, следовательно, в G. Это означает, что если мелкость δ_τ разбиения τ отрезка $[a, b]$ такова, что $\delta_\tau < \delta_0$, то все точки ломаной λ_τ лежат в G и для таких разбиений τ имеет смысл интеграл $\int_{\lambda_\tau} P\,dx + Q\,dy$.

Рассмотрим интегралы $\int_\gamma P\,dx$ и $\int_{\lambda_\tau} P\,dx$. Положим

$$x_i = x(t_i),\ y_i = y(t_i),\ P_i = P(x_i, y_i),\ \Delta x_i = x_i - x_{i-1},\ i = 1, 2, \ldots, i_0,$$

$$\sigma_\tau = \sum_{i=1}^{i_0} P_i \Delta x_i.$$

Как известно (см. п. 47.2, свойство 4),

$$\lim_{\delta_\tau \to 0} \sigma_\tau = \int_\gamma P\,dx. \tag{47.34}$$

Пусть, далее, $M_i = (x_i, y_i)$ — вершины ломаной λ_τ; тогда

$$\int_{\lambda_\tau} P\,dx = \sum_{i=1}^{i_0} \int_{M_{i-1}M_i} P\,dx. \tag{47.35}$$

С другой стороны, заметим, что (употребляя обозначения из п. 47.2)

$$\int_{M_{i-1}M_i} dx = \int_{M_{i-1}M_i} \cos\alpha\,ds = |M_{i-1}M_i| \cos\alpha = \Delta x_i,$$

поэтому

$$\sigma_\tau = \sum_i P_i\,\Delta x_i = \sum_i \int_{M_{i-1}M_i} P_i\,dx. \tag{47.36}$$

Обозначив через L_τ длину ломаной λ_τ, через S — длину кривой γ, а через $\omega(\delta;\ P)$ — модуль непрерывности функции $P(x, y)$ на компакте γ_η и заметив, что в силу определения кривой: $L_\tau \leqslant S$, из (47.35) и (47.36) получим

$$\left|\int_{\lambda_\tau} P\,dx - \sigma_\tau\right| \leqslant \sum \left|\int_{M_{i-1}M_i} |P - P_i|\,dx\right| \leqslant$$

$$\leqslant \omega(\delta_\tau;\ P) \sum_i |\Delta x_i| \leqslant \omega(\delta_\tau;\ P)\,L_\tau \leqslant \omega(\delta_\tau;\ P)\,S.$$

Отсюда в силу равномерной непрерывности функции $P(x, y)$ на множестве γ_η имеем $\lim\limits_{\delta_\tau \to 0}\left(\int\limits_{\lambda_\tau} P\,dx - \sigma_\tau\right) = 0$, и, значит, в силу (47.34)

$$\lim_{\delta_\tau \to 0} \int_{\lambda_\tau} P\,dx = \int_\gamma P\,dx. \tag{47.37}$$

Аналогично доказывается и равенство

$$\lim_{\delta_\tau \to 0} \int_{\lambda_\tau} Q\,dy = \int_\gamma Q\,dy. \tag{47.38}$$

Из (47.37) и (47.38) непосредственно и следует утверждение леммы, т. е. формула (47.33). □

Замечание. Утверждение, аналогичное лемме, справедливо и для криволинейных интегралов в пространстве, причем доказательство пространственного случая проводится по той же схеме, что и для плоского.

Теорема 4. *Пусть функции $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ непрерывны вместе со своими частными производными $\frac{\partial P}{\partial y}$ и $\frac{\partial Q}{\partial x}$ в плоской* *области G. Для того, чтобы криволинейный интеграл $\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} P\,dx+Q\,dy$ при произвольно фиксированных точках $A\in G$ и $B\in G$ не зависел от пути интегрирования $\overset{\frown}{AB}\subset G$, необходимо, а если область G односвязна, — то и достаточно, чтобы во всех точках области G выполнялось равенство $\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$.*

Доказательство необходимости. Пусть рассматриваемый интеграл не зависит от пути интегрирования, лежащего в области G, а только от его начальной и конечной точек. Тогда согласно теореме 3 существует функция $u=u(x, y)$ такая, что $du=P\,dx+Q\,dy$, т. е. такая, что $\frac{\partial u}{\partial x}=P$, $\frac{\partial u}{\partial y}=Q$. Поскольку $\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial^2 u}{\partial y\,\partial x}$, $\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}$ и по условиям теоремы производные $\frac{\partial P}{\partial y}$ и $\frac{\partial Q}{\partial x}$, а следовательно, и смешанные производные $\frac{\partial^2 u}{\partial y\,\partial x}$ и $\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}$ непрерывны, то (см. п. 21.1) они и равны, т. е. $\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$.

Доказательство достаточности. Пусть теперь область G односвязна и во всех ее точках $\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$. Если γ — кусочно-гладкий простой замкнутый контур, лежащий в G, и D — ограниченная область, границей которой является γ, то, применив формулу Грина (здесь используется односвязность области G), получим

$$\int\limits_{\gamma^+} P\,dx+Q\,dy=\iint\limits_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dx\,dy=0.$$

Если кривая γ, лежащая в G, имеет конечное число точек самопересечения, то последовательно для каждой ее «петли» γ_k, $k=1, 2, \ldots, k_0$, являющейся уже простым замкнутым контуром, в силу доказанного имеем $\int\limits_{\gamma_k} P\,dx+Q\,dy=0$, откуда следует, что и для всей кривой γ

$$\int\limits_{\gamma} P\,dx+Q\,dy=0. \tag{47.39}$$

Переходя к рассмотрению общего случая, обратим прежде всего внимание на то, что рассмотренным приемом равенство (47.39) доказывается и для случая, когда γ является замкнутой конечнозвенной ломаной. С геометрической точки зрения отличие состоит лишь в том, что самопересечение конечнозвенной ломаной может состоять не только из конечного числа точек, но и конечного числа отрезков, что лишь незначительно усложняет рассуждение. Возможность применения формулы Грина к конечной области, ограниченной конечнозвенной ломаной, следует из того, что такую область можно разбить на треугольники, которые, очевидно, являются элементарными относительно обеих координатных осей областями. Следовательно, в этом случае выполняются предпосылки теоремы 1 п. 47.3.

Любая же замкнутая кусочно-гладкая кривая γ, лежащая в G, может быть сколь угодно точно аппроксимирована замкнутыми конечнозвенными ломаными, поэтому предельным переходом равенство (47.39) может быть получено и для любой замкнутой кривой из G. Проделаем это.

Пусть γ — кусочно-гладкая замкнутая кривая в области G, заданная некоторым представлением $r(t)$, $a \leqslant t \leqslant b$, и являющаяся объединением гладких кривых $\gamma_1, \ldots, \gamma_k$. Впишем в каждую кривую γ_j, $j=1, 2, \ldots, k$, ломаную λ_j. Объединение всех ломаных λ_j, $j=1, 2, \ldots, k$, образует замкнутую ломаную λ, соответствующую некоторому разбиению τ отрезка $[a, b]$. В силу доказанного

$$\int_\lambda P\,dx+Q\,dy=0.$$

Но, согласно лемме,

$$\lim_{\delta_\tau\to 0}\int_{\lambda_j} P\,dx+Q\,dy=\int_{\gamma_j} P\,dx+Q\,dy,\quad j=1, \ldots, k,$$

и, следовательно,

$$\lim_{\delta_\tau\to 0}\int_{\lambda} P\,dx+Q\,dy=\int_{\gamma} P\,dx+Q\,dy,$$

поэтому

$$\int_\gamma P\,dx+Q\,dy=0. \quad \square$$

Иногда условие $\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$ называют *критерием полного дифференциала в односвязной области*, поскольку согласно теоремам 3 и 4 это условие необходимо и достаточно для того, чтобы выражение $P\,dx+Q\,dy$ в области G являлось дифференциалом некоторой функции $u(x, y)$, $(x, y)\in G$.

В заключение этого пункта отметим, что требование односвязности рассматриваемой области при доказательстве достаточности условий теоремы 4 для независимости криволинейного интеграла от пути интегрирования является существенным и его нельзя отбросить. Подтвердим это примером.

Пример. Пусть $P(x, y)=-\frac{y}{x^2+y^2}$, $Q(x, y)=\frac{x}{x^2+y^2}$.

Легко проверить, что

$$\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y} \tag{47.40}$$

для всех точек плоскости, исключая начало координат (0, 0). Это следует, например, из того, что

$$d\left(\operatorname{arctg}\frac{y}{x}\right)=\frac{-y\,dx+x\,dy}{x^2+y^2},\quad x^2+y^2>0. \tag{47.41}$$

Таким образом, в этом случае за область G можно взять всю плоскость с «выколотым» началом координат: $G=R^2\setminus\{(0,\ 0)\}$. Область G, очевидно, не односвязна. В качестве замкнутого контура возьмем единичную окружность $\gamma_0=\{x=\cos t,\ y=\sin t,\ 0\leqslant t\leqslant 2\pi\}$, тогда

$$\int\limits_{\gamma_0} P\,dx+Q\,dy=\int\limits_{\gamma_0}\frac{-y\,dx+x\,dy}{x^2+y^2}=\int\limits_0^{2\pi} dt=2\pi.$$

Следовательно, в этом случае условия (47.40) выполнены, и существует замкнутый контур γ_0, по которому интеграл не равен нулю. Нетрудно убедиться, что вообще по любой окружности γ_r радиуса r с центром в начале координат

$$\int\limits_{\gamma_r} P\,dx+Q\,dy=2\pi. \tag{47.42}$$

Далее, каков бы ни был простой кусочно-гладкий контур γ, являющийся границей ограниченной области Γ, содержащей начало координат (в этом случае говорят, что контур γ содержит внутри себя начало координат), для него также

$$\int\limits_{\gamma} P\,dx+Q\,dy=2\pi. \tag{47.43}$$

Для доказательства этого возьмем окружность γ_r такого радиуса r, что $\gamma_r\subset\Gamma$; тогда γ и γ_r не пересекаются. Соединив контуры γ и γ_r отрезками λ_1 и λ_2, как показано на рис. 197, — получим два замкнутых контура γ_1 и γ_2, не содержащих внутри себя начала координат и состоящих из дуг γ_r' и γ_r'' окружности γ_r, частей γ' и γ'' контура γ и отрезков λ_1 и λ_2.

В силу условия (47.40) для этих контуров справедливы равенства

$$\int\limits_{\gamma_1} P\,dx+Q\,dy=0,\quad \int\limits_{\gamma_2} P\,dx+Q\,dy=0.$$

Сложив эти равенства и опустив для краткости подынтегральные выражения, получим (рис. 197):

$$0=\int\limits_{\gamma_1}+\int\limits_{\gamma_2}=\int\limits_{\gamma'^+}+\int\limits_{\lambda_1^+}+\int\limits_{\gamma_r'^-}+\int\limits_{\lambda_2^+}+\int\limits_{\gamma''^+}+\int\limits_{\lambda_2^-}+\int\limits_{\gamma_r''^-}+\int\limits_{\lambda_1^-}=$$

$$=\int\limits_{\gamma'^+}+\int\limits_{\gamma''^+}-\int\limits_{\gamma_r'^+}-\int\limits_{\gamma_r''^+}=\int\limits_{\gamma^+}-\int\limits_{\gamma_r^+}.$$

Отсюда в силу (47.42) и следует (47.43). Более того, это равенство выполняется и в случае, если контур γ, обходя «один раз» вокруг начала координат, образует конечное число «петель», не охватывающих начало координат (рис. 198), ибо интеграл по этим петлям равен нулю.

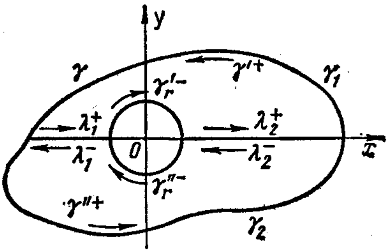


Рис. 197

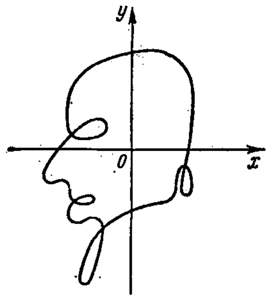


Рис. 198

Если M_0 — фиксированная точка рассматриваемой области G, $M_0 \in G$, $M \in G$, $\overset{\frown}{M_0M}$ — какая-либо кривая, соединяющая в G точки M_0 и M, то $u(M) = \int\limits_{\overset{\frown}{M_0M}} P\,dx + Q\,dy$ будет уже многозначной функцией, значения которой определяются выбором различных путей, соединяющих точки M_0 и M. Если γ_0 — какая-либо фиксированная кривая, соединяющая M_0 и M, то все значения функции u в точке M задаются формулой

$$u(M) = \int\limits_{\gamma_0} P\,dx + Q\,dy + 2\pi n, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

— каждый обход вокруг начала координат изменяет значение функции $u(M)$ на величину $\pm 2\pi$ в зависимости от направления обхода.

В данном случае в этом легко убедиться и непосредственно: из формулы (47.41) следует, что

$$\int\limits_{\gamma_0} P\,dx + Q\,dy = \int\limits_{\gamma_0} \frac{-y\,dx + x\,dy}{x^2+y^2} = \left(\operatorname{Arctg}\frac{y}{x}\right)_0,$$

где $\left(\operatorname{Arctg}\frac{y}{x}\right)_0$ — некоторое фиксированное значение $\operatorname{Arctg}\frac{y}{x}$; поэтому

$$u(M) = \operatorname{Arctg}\frac{y}{x}.$$

Вдумчивый читатель заметил, что многие рассуждения, проведенные в этом примере, не зависят от конкретного вида функций P и Q и являются справедливыми всегда, когда мы имеем дело с одной изолированной «особой точкой», т. е. точкой, в которой нарушается условие (47.40). Конечно, при однократном «обходе» такой особой точки будет получаться не 2π, а, вообще говоря, какое-то другое число.

Результат, аналогичный теореме 4, имеет место и когда γ — пространственная кривая (см. п. 52.6).

Упражнения 10. Доказать формулу

$$\iint\limits_G v\,\Delta u\,dx\,dy = -\iint\limits_G \left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y}\right) dx\,dy + \int\limits_{\gamma^+} v\frac{\partial u}{\partial \nu}\,ds,$$

где G — плоская область, для которой справедлива формула Грина, γ — ограничивающий ее контур, ν — единичная внешняя нормаль к контуру γ, а Δ — оператор Лапласа (см. п. 41.10).

11. Вычислить интеграл $\int\limits_\Gamma 2(x+y^2)\,dx + (4xy+\cos y)\,dy$, где Γ — произвольная кусочно-гладкая кривая, соединяющая точки (1, 0) и (ξ, η).

12. Пусть Γ — произвольный простой замкнутый кусочно-гладкий контур, ограничивающий область, содержащую начало координат. Вычислить интеграл

$$\int\limits_\Gamma \frac{e^x}{x^2+y^2}\left[(x\sin y - y\cos y)\,dx + (x\cos y + y\sin y)\,dy\right]$$

при положительном направлении обхода контура Γ.

§ 48. НЕСОБСТВЕННЫЕ КРАТНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

48.1. ОСНОВНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ

Как и ранее для однократных интегралов, введем понятие несобственного кратного интеграла, т. е. кратного интеграла от функций, которые либо неограничены, либо определены на неограниченной области. Определение кратного несобственного интеграла сформулируем в таком виде, что оно будет охватывать оба указанных случая (ср. с п. 33.1).

Определение 1. *Пусть G — открытое множество (ограниченное или неограниченное) в n-мерном пространстве R^n. Последовательность открытых множеств G_k, $k=1, 2, \ldots$, будем называть последовательностью, монотонно исчерпывающей открытое множество G, если:*

1) $\bar{G}_k \subset G_{k+1}$, $k=1, 2, \ldots$;

2) $\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} G_k = G$.

Здесь $\bar{G}$, как всегда, означает замыкание (см. п. 18.2) множества G.

Определение 2. *Пусть на открытом множестве G задана функция f (ограниченная или неограниченная), интегрируемая по Риману на любом измеримом по Жордану открытом множестве D,* *таком, что* $\bar{D} \subset G$. *Функция* f *называется интегрируемой в несобственном смысле на открытом множестве* G, *если для любой последовательности открытых измеримых множеств* G_k, $k=1, 2, \ldots$, *монотонно исчерпывающей множество* G, *существует предел* $\lim\limits_{k \to \infty} \int f\, dG_k$, *не зависящий от выбора указанной последовательности* G_k, $k=1, 2, \ldots$.

Этот предел называется несобственным интегралом от функции f *по открытому множеству* G *и обозначается через* $\int f\, dG$, *или более подробно*,

$$\iint\limits_G \ldots \int f(x_1, x_2, \ldots, x_n)\, dx_1\, dx_2 \ldots dx_n.$$

Таким образом,

$$\int f\, dG = \lim_{k \to \infty} \int f\, dG_k. \tag{48.1}$$

Если интеграл $\int f\, dG$ *существует, то говорят также, что он сходится, а в противном случае — что он расходится.*

Следует заметить, что в случае $n=1$ данное определение несобственного интеграла не эквивалентно определению несобственного интеграла от функции одного переменного, данного в § 33. Это связано с тем, что в указанном параграфе мы в качестве множеств G_k брали лишь интервалы, т. е. одномерные открытые измеримые множества весьма специального вида. Поэтому введенное в настоящем параграфе понятие несобственного интеграла (48.1) будем применять только в случае $n \geqslant 2$, сохранив для случая $n=1$ прежнее понятие несобственного интеграла.

Если открытое множество G измеримо по Жордану и функция f интегрируема на G, то несобственный интеграл от функции f совпадает с обычным интегралом Римана, — это следует из полной аддитивности интеграла Римана (см. п. 44.6).

Определение (48.1) позволяет перенести на несобственные интегралы ряд свойств собственных интегралов: аддитивность интеграла по множествам, линейность интеграла, интегрирование неравенств, сведение кратного интеграла к повторному, формулу замены переменного и др.

Например, если $x = F(u)$ — непрерывно дифференцируемое взаимно однозначное отображение открытого множества $D \subset R_u^n$ на открытое множество $G \subset R_x^n$ и якобиан $J(u)$ этого отображения нигде не обращается в ноль на D, то для любой непрерывной на G функции f справедлива формула замены переменного в интеграле:

$$\int f(x)\, dG = \int f[F(u)]\, |J(u)|\, dD.$$

Доказать это можно точно так же, как доказана теорема 2′ в п. 46.2; следует только вместо полной аддитивности интеграла использовать определение (48.1).

Используя аддитивность несобственного кратного интеграла, определение (48.1) можно переписать в другом эквивалентном виде. Замечая, что для измеримого открытого множества $\Gamma \subset G$ справедливо равенство

$$\int f\,dG - \int f\,d\Gamma = \int f\,d(G \setminus \overline{\Gamma}), \tag{48.2}$$

можно сказать, что интеграл $\int f\,dG$ сходится тогда и только тогда, когда для любой последовательности измеримых открытых множеств G_k, $k = 1, 2, \ldots$, монотонно исчерпывающей множество G, существуют интегралы $\int f d(G \setminus \overline{G}_k)$ и

$$\lim_{k \to \infty} \int f d(G \setminus \overline{G}_k) = 0.$$

Упражнение 1. Доказать формулу (48.2); в частности, показать, что интегралы $\int f\,dG$ и $\int f\,d(G \setminus \overline{\Gamma})$ одновременно сходятся или расходятся.

48.2. НЕСОБСТВЕННЫЕ ИНТЕГРАЛЫ ОТ НЕОТРИЦАТЕЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ

Теорема 1. *Пусть функция f неотрицательна на открытом множестве $G \subset R^n$. Тогда, какова бы ни была последовательность $\{G_k\}$ открытых измеримых по Жордану множеств G_k, монотонно исчерпывающих множество G, предел*

$$\lim_{k \to \infty} \int f(x)\,dG, \tag{48.3}$$

конечный или равный $+\infty$, всегда существует.

Если он конечен, то интеграл $\int f(x)\,dG$ существует, и, следовательно, предел (48.3) равен этому интегралу, если же предел (48.3) бесконечен, то интеграл $\int f(x)\,dG$ не существует.

В последнем случае пишут $\int f(x)\,dG = +\infty$. Это оправдывается тем, что в силу сформулированной теоремы для любой другой последовательности $\{D_k\}$ открытых измеримых множеств D_k, монотонно исчерпывающих множеств G, имеем $\lim\limits_{k \to \infty} \int f(x)\,dD_k = +\infty$.

Доказательство. Очевидно, что теорема будет доказана, если показать, что в предположении неотрицательности функции f на открытом множестве G для любой монотонно исчерпывающей область G последовательности измеримых множеств G_k, $k = 1, 2, \ldots$ существует конечный или бесконечный предел

$$\lim_{k \to \infty} \int f\,dG_k$$

и этот предел не зависит от выбора указанной последовательности.

Пусть G_k, $k=1, 2, \ldots,$ — последовательность измеримых множеств, монотонно исчерпывающая открытое множество G. Тогда, согласно определению такой последовательности, $G_k \subset G_{k+1}$, а так как $f \geqslant 0$, то $\int f\,dG_k \leqslant \int f\,dG_{k+1}$, $k=1, 2, \ldots$ и, следовательно, всегда существует конечный или бесконечный предел

$$\lim_{k\to\infty} \int f\,dG_k = I_1.$$

Пусть теперь D_k, $k=1, 2, \ldots,$ — какая-либо другая последовательность измеримых множеств, монотонно исчерпывающая открытое множество G. В силу доказанного выше существует конечный или бесконечный предел

$$\lim_{k\to\infty} \int f\,dD_k = I_2.$$

Покажем, что

$$I_1 = I_2. \tag{48.4}$$

Для любого фиксированного элемента G_k первой последовательности существует номер $k_0 = k_0(k)$ такой, что

$$\overline{G}_k \subset D_{k_0}. \tag{48.5}$$

В самом деле, если бы указанного номера k_0 не нашлось, то для любого натурального $m=1, 2, \ldots,$ существовала бы точка $x^{(m)} \in \overline{G}_k \setminus D_m$. Открытое множество G_k, будучи измеримым по Жордану, является ограниченным, поэтому его замыкание $\overline{G}_k$ представляет собой замкнутое ограниченное множество, т. е. компакт. В силу его ограниченности последовательность $\{x^{(m)}\}$ также ограничена и, следовательно, согласно теореме Больцано — Вейерштрасса (см. п. 18.1, теорему 2), из нее можно выделить сходящуюся подпоследовательность $\{x^{(m_\nu)}\}$. Если $x^{(0)} = \lim\limits_{\nu\to+\infty} x^{(m_\nu)}$, то из замкнутости множества $\overline{G}_k$ вытекает, что $x^{(0)} \in \overline{G}_k$ и потому $x_0 \in G$. Но тогда в силу свойства 2 монотонно исчерпывающих последовательностей (см. определение 1) найдется номер m_0 такой, что $D_{m_0} \ni x^{(0)}$. Поскольку D_{m_0} — открытое множество, то оно является окрестностью точки $x^{(0)}$ и, следовательно, содержит почти все точки сходящейся к $x^{(0)}$ последовательности $\{x^{(m_\nu)}\}$. Обозначим через ν_0 какой-либо такой номер, что $m_{\nu_0} \geqslant m_0$ и $x^{(m_{\nu_0})} \in D_{m_0}$. Тогда в силу свойства 1 монотонно исчерпывающих последовательностей $x^{(m_{\nu_0})} \in D_{m_{\nu_0}}$, но поскольку $x^{(m_{\nu_0})} \in \overline{G}_k$, то это противоречит выбору последовательности $\{x^{(m)}\}$. Тем самым существование указанного выше (см. (48.5)) номера k_0 доказано (впрочем, его существование следует также непосредственно из леммы Гейне — Бореля, см. п. 18.3, так как система $\{D_k\}$ образует открытое покрытие компакта $\overline{G}_k$).

Теперь заметим, что в силу условия $f \geqslant 0$ из включения (48.5) вытекает, что $\int f\,dG_k \leqslant \int f\,dD_{k_0}$. Но, очевидно, $\int f\,dD_{k_0} \leqslant I_2$, поэтому при любом $k=1, 2, \ldots$

$$\int f\,dG_k \leqslant I_2$$

Перейдя в этом неравенстве к пределу при $k \to \infty$, получим $I_1 \leqslant I_2$.

Подобным же образом доказывается и неравенство $I_1 \geqslant I_2$. □

Пример. Рассмотрим интеграл $I = \iint\limits_{R^2} e^{-x^2-y^2}\,dx\,dy$. Положим $G_k = \{(x, y)\colon x^2+y^2<k^2\}$, $k=1, 2, \ldots$. Эта последовательность является последовательностью открытых квадрируемых множеств (в данном случае просто кругов), монотонно исчерпывающей всю плоскость R^2.

Пусть $I_k = \iint\limits_{G_k} e^{-x^2-y^2}\,dx\,dy$. Перейдем к полярным координатам:

$$I_k = \iint\limits_{G_k} e^{-r^2} r\,dr\,d\varphi = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^k e^{-r^2} r\,dr = 2\pi \frac{e^{-r^2}}{2}\Bigg|_0^k = \pi(1-e^{-k^2}).$$

Отсюда, согласно определению (48.1),

$$I = \lim_{k\to\infty} I_k = \pi. \tag{48.6}$$

Формула (48.6) позволяет найти величину интеграла

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\,dx,$$

называемого *интегралом Пуассона* *) и часто встречающегося в приложениях. Действительно, обозначая через D_k квадрат $|x| \leqslant k$, $|y| \leqslant k$, $k=1, 2, \ldots$, и применив к интегралу по D_k от функции $e^{-x^2-y^2}$ формулу сведения кратного интеграла к повторному (см. п. 45.1), получим

$$I = \iint\limits_{R^2} e^{-x^2-y^2}\,dx\,dy = \lim_{k\to\infty} \iint\limits_{D_k} e^{-x^2-y^2}\,dx\,dy =$$

$$= \lim_{k\to\infty} \int\limits_{-k}^{k} dx \int\limits_{-k}^{k} e^{-x^2-y^2}\,dx\,dy = \lim_{k\to\infty} \int\limits_{-k}^{k} \left(\int\limits_{-k}^{k} e^{-x^2}\,dx \right) e^{-y^2}\,dy =$$

$$= \lim_{k\to\infty} \left(\int\limits_{-k}^{k} e^{-x^2}\,dx \right)^2 = \left(\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\,dx \right)^2.$$

*) С. Пуассон (1781—1840) — французский физик и математик.

Поэтому из (48.6) сразу следует, что

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi}.$$

Теорема 2 (признак сравнения). *Пусть на открытом множестве G выполняются неравенства $0 \leqslant f(x) \leqslant g(x)$, $x \in G$. Тогда из сходимости интеграла $\int g(x)\,dG$ следует сходимость интеграла $\int f(x)\,dG$, а из расходимости интеграла $\int f(x)\,dG$ следует расходимость интеграла $\int g(x)\,dG$.*

Эта теорема доказывается аналогично подобной теореме в одномерном случае (см. п. 33.3).

В качестве примеров и эталонов для сравнения с другими интегралами рассмотрим интегралы

$$\int \cdots \int\limits_{x_1^2+\ldots x_n^2 \geqslant 1} \frac{dx_1 \ldots dx_n}{\left(\sqrt{x_1^2+\ldots+x_n^2}\right)^\alpha}, \tag{48.7}$$

$$\int \cdots \int\limits_{x_1^2+\ldots+x_n \leqslant 1} \frac{dx_1 \ldots dx_n}{\left(\sqrt{x_1^2+\ldots+x_n^2}\right)^\alpha}. \tag{48.8}$$

Первый интеграл берется по внешности единичного шара; второй — по его внутренности.

Для исследования этих интегралов удобно ввести *сферические координаты* ρ, $\varphi_1, \ldots, \varphi_{n-1}$ в n-мерном пространстве. Они вводятся по формулам

$$\left.\begin{array}{l}
x_1 = \rho \cos\varphi_{n-1} \cos\varphi_{n-2} \ldots \cos\varphi_2 \cos\varphi_1, \\
x_2 = \rho \cos\varphi_{n-1} \cos\varphi_{n-2} \ldots \cos\varphi_2 \sin\varphi_1 \\
x_3 = \rho \cos\varphi_{n-1} \cos\varphi_{n-2} \ldots \cos\varphi_3 \sin\varphi_2, \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
x_i = \rho \cos\varphi_{n-1} \ldots \cos\varphi_i \sin\varphi_{i-1}, \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
x_n = \rho \sin\varphi_{n-1},
\end{array}\right\} \tag{48.9}$$

где

$$0 \leqslant \rho < +\infty \quad 0 \leqslant \varphi_1 \leqslant 2\pi \quad -\frac{\pi}{2} \leqslant \varphi_i \leqslant \frac{\pi}{2}, \; i = 2, 3, \ldots, n-1.$$

С помощью этих формул декартовым координатам $x_1, \ldots, x_n$ точки пространства сопоставляются сферические координаты ρ, $\varphi_1, \ldots, \varphi_{n-1}$, и обратно. При этом следует иметь в виду, что, подобно полярным координатам на плоскости, здесь не существует полного взаимно однозначного соответствия между множествами n чисел $(x_1, \ldots, x_n)$ и $(\rho, \varphi_1, \ldots, \varphi_{n-1})$.

Отметим, что $\rho = \sqrt{x_1^2+\ldots+x_n^2}$.

Элементарными, но несколько громоздкими вычислениями, которые не будем здесь приводить, можно показать, что якобиан этого преобразования имеет вид

$$\frac{\partial(x_1, x_2, \ldots, x_n)}{\partial(\rho, \varphi_1, \ldots, \varphi_{n-1})} = \rho^{n-1}\cos\varphi_2\cos^2\varphi_3\ldots\cos^{n-2}\varphi_{n-1}.$$

Положим для краткости

$$\Phi(\varphi_2, \ldots, \varphi_{n-1}) = \cos\varphi_2\cos^2\varphi_3\ldots\cos^{n-2}\varphi_{n-1}.$$

Легко убедиться, что $\Phi(\varphi_2, \ldots, \varphi_{n-1}) \geqslant 0$ и что

$$c = \int\limits_0^{2\pi}\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2}\ldots\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2}\Phi(\varphi_2\ldots\varphi_{n-1})\,d\varphi_1\ldots d\varphi_{n-1} > 0.$$

Это сразу следует из свойства 9 кратных интегралов в п. 44.6.

Исследуем теперь сходимость интеграла (48.7). В качестве последовательности открытых измеримых множеств G_k, $k = 1, 2, \ldots$, монотонно исчерпывающей внешность единичного шара Q, возьмем последовательность множеств

$$G_k = \left\{x = (\rho, \varphi_1, \ldots, \varphi_{n-1}) : 1 + \frac{1}{k} < \rho < k\right\}, \quad k = 1, 2, \ldots.$$

Перейдем к сферическим координатам:

$$\int\limits_{G_k}\ldots\int\frac{dx_1\ldots dx_n}{\left(\sqrt{x_1^2+\ldots+x_n^2}\right)^\alpha} =$$

$$= \int\limits_{1+\frac{1}{k}}^{k}\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2}\ldots\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2}\rho^{n-1-\alpha}\Phi(\varphi_2, \ldots, \varphi_{n-1})\,d\rho\,d\varphi_1\ldots d\varphi_{n-1} =$$

$$= c\int\limits_{1+\frac{1}{k}}^{k}\rho^{n-1-\alpha}\,d\rho.$$

Таким образом, вопрос о сходимости интеграла (48.7) свелся к сходимости интеграла $\int\limits_1^\infty \rho^{n-1-\alpha}\,d\rho$, который, как известно (см. п. 33.3), сходится при $n-1-\alpha < -1$, т. е. при $\alpha > n$, и расходится при $\alpha \leqslant n$. Итак, доказана следующая лемма.

Лемма 1. *Интеграл (48.7) сходится, если α больше размерности пространства, и расходится в противном случае.*

Рассмотрим теперь интеграл (48.8). Положив

$$G_k = \left\{x = (\rho, \varphi_1, \ldots, \varphi_{n-1}) : \frac{1}{k} < \rho < 1 - \frac{1}{k}\right\}, \quad k = 3, 4, \ldots,$$

получим

$$\int_{G_k} \cdots \int \frac{dx_1, \ldots, dx_n}{\left(\sqrt{x_1^2+\ldots+x_n^2}\right)^\alpha} =$$

$$= \int_{\frac{1}{k}}^{1-\frac{1}{k}} \int_0^{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cdots \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \rho^{n-1-\alpha}\Phi(\varphi_2, \ldots, \varphi_{n-1})\, d\rho\, d\varphi_1 \ldots d\varphi_{n-1} =$$

$$= c \int_{\frac{1}{k}}^{1-\frac{1}{k}} \rho^{n-1-\alpha}\, d\rho.$$

Таким образом, вопрос о сходимости интеграла (48.8) свелся к сходимости интеграла $\int_0^1 \rho^{n-1-\alpha}\, d\rho$. Этот интеграл, как известно, сходится, если $n-1-\alpha > -1$, т. е. если $\alpha < n$, и расходится в противном случае. Полученный результат сформулируем снова в виде леммы.

Лемма 2. *Интеграл* (48.8) *сходится, если* α *меньше размерности пространства, и расходится в противном случае.*

Подобно одномерному случаю (см. п. 33.3) с помощью интегралов (48.7) и (48.8) можно сформулировать критерии сходимости несобственных кратных интегралов, однако мы не будем на этом подробно останавливаться.

48.3. НЕСОБСТВЕННЫЕ ИНТЕГРАЛЫ ОТ ФУНКЦИЙ, МЕНЯЮЩИХ ЗНАК

Определение 3. *Несобственный интеграл* $\int f\, dG$ *называется абсолютно сходящимся, если сходится интеграл* $\int |f|\, dG$.

Для изучения абсолютной сходимости интеграла от функции $f(x)$ нам будут полезны функции

$$f_+(x) = \begin{cases} f(x), & \text{если } f(x) \geq 0, \\ 0, & \text{если } f(x) < 0, \end{cases} \qquad f_-(x) = \begin{cases} -f(x), & \text{если } f(x) \leq 0, \\ 0, & \text{если } f(x) > 0. \end{cases}$$

Легко видеть, что

$$f_+ = \frac{|f|+f}{2}, \quad f_- = \frac{|f|-f}{2}, \tag{48.10}$$

$$0 \leq f_+(x) \leq |f(x)|, \quad 0 \leq f_-(x) \leq |f(x)|, \tag{48.11}$$

$$f(x) = f_+(x) - f_-(x), \quad |f(x)| = f_+(x) + f_-(x). \tag{48.12}$$

Из формул (48.10) следует, что если функция f интегрируема, по Риману, на некоторой измеримой по Жордану области, то и функции f_+ и f_- интегрируемы по Риману на этой области; из первой формулы (48.12) следует обратное утверждение. Поэтому из (48.10) — (48.12) следует, что *интеграл* $\int f\,dG$ *абсолютно сходится тогда и только тогда, когда сходятся интегралы* $\int f_+\,dG$ *и* $\int f_-\,dG$.

Как и в случае несобственных интегралов от функции одного переменного, из абсолютной сходимости кратного интеграла следует его сходимость (при этом, конечно, рассматриваются только такие функции, которые интегрируемы на каждом открытом измеримом множестве, содержащемся вместе со своим замыканием в открытом множестве, по которому производится интегрирование). Это сразу получается на основании формул (48.11), первой формулы (48.12) и из теоремы 2 настоящего параграфа (см. п. 48.2). Однако для кратных несобственных интегралов справедлива и обратная теорема.

Теорема 3. *Если кратный интеграл* $\int f\,dG$ $(n \geqslant 2)$ *сходится, то он и абсолютно сходится.*

Эта неожиданная на первый взгляд теорема связана с отличием определения несобственных интегралов от функции одного и n переменных $(n > 1)$, указанных в начале этого параграфа *).

Доказательство теоремы. Пусть интеграл $\int f\,dG$ абсолютно расходится, т. е. для некоторой (а значит и для всякой, см. теорему 1 в п. 48.2) последовательности открытых измеримых по Жордану множеств G_k, $k = 1, 2, \ldots$, монотонно исчерпывающей открытое множество G, имеем $\lim\limits_{k \to \infty} \int |f|\,dG_k = +\infty$. Без ограничения общности (переходя, если надо, к подпоследовательности) можно предполагать, что

$$\int |f|\,dG_{k+1} > 3\int |f|\,dG_k + 2k, \quad k = 1, 2, \ldots. \tag{48.13}$$

Пусть $A_k = G_{k+1} \setminus \overline{G}_k$; тогда A_k — открытое измеримое множество, и так как $\overline{G}_k \subset G_{k+1}$, то (рис. 199) $G_{k+1} = A_k \cup \overline{G}_k$, и, следовательно,

$$\int |f|\,dG_{k+1} = \int |f|\,dA_k + \int |f|\,dG_k.$$

---

*) Отметим, однако, что можно было бы и в n-мерном случае получить ту же связь между сходимостью и абсолютной сходимостью интеграла, что и в одномерном случае, если соответствующим образом ввести определение несобственного n-кратного интеграла. Например, в случае интегралов по всему пространству для этого достаточно в определении интеграла в качестве элементов монотонно исчерпывающей последовательности брать только n-мерные шары с центром в начале координат. Впрочем, если применить к одномерному интегралу определение несобственного интеграла, данное в п. 48.1, и понимать одномерный интеграл Римана в смысле § 44, то теорема 3 вместе с ее доказательством будет справедливой и при $n = 1$.

Отсюда в силу неравенства (48.13) $\int |f|\,dA_k > 2\int |f|\,dG_k + 2k$. Используя вторую формулу (48.12), получим

$$\int f_+\,dA_k + \int f_-\,dA_k > 2\int |f|\,dG_k + 2k.$$

Пусть для определенности $\int f_+\,dA_k \geqslant \int f_-\,dA_k$; тогда

$$2\int f_+\,dA_k \geqslant \int f_+\,dA_k + \int f_-\,dA_k > 2\int |f|\,dG_k + 2k,$$

и, следовательно,

$$\int f_+\,dA_k > \int |f|\,dG_k + k. \tag{48.14}$$

Нашей целью является получение неравенства подобного типа не для функции f_+, а для функции f. Для этого, казалось бы, можно просто отбросить точки, в которых функция f_+ обращается в ноль; тогда на оставшемся множестве мы имели бы $f = f_+$. Однако получившееся множество может, вообще говоря, оказаться неизмеримым, а поэтому мы будем действовать несколько обходным путем.

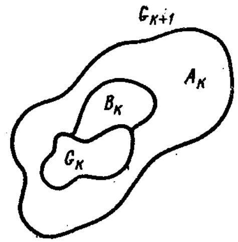


Рис. 199

Из неравенства (48.14) следует, что при любом достаточно мелком разбиении $\tau = \{E_i\}_{i=1}^{i=i_0}$ множества A_k (см. п. 44.3) для любой интегральной суммы Римана имеем

$$\sum_{i=1}^{i_0} f_+(\xi_i)\,\mu E_i > \int |f|\,dG_k + k,$$

$$\xi_i \in E_i, \qquad i = 1, 2, \ldots, i_0.$$

Выберем указанное разбиение τ открытого измеримого множества A_k таким, чтобы все элементы E_i этого разбиения также были открытыми измеримыми по Жордану множествами — это всегда возможно (см. п. 44.4). Обозначим через E_i^* те множества $E_i \in \tau$, для которых $f_+(\xi) > 0$ во всех точках $\xi \in \bar{E}_i$; тогда, выбирая $\xi_i \in \bar{E}_i \neq E_i^*$ так, что $f(\xi_i) = 0$, получим

$$\sum_i{}' f_+(\xi_i)\,\mu E_i^* > \int |f|\,dG_k + k, \tag{48.15}$$

где (а также и в дальнейшем) знак «штрих» у суммы означает, что суммирование распространяется только на те индексы i, для которых $E_i = E_i^*$. Положим $B_k = \bigcup_i{}' E_i^*$ (см. рис. 199). Очевидно, что B_k — открытое измеримое множество, лежащее во множестве A_k, а $\tau^* = \{E_i^*\}$ является его разбиением. На замыкании этого множества $f_+ > 0$ и, следовательно, $f_+ = f$. Из неравенства (48.15) следует, что для нижней суммы Дарбу s_{τ^*} функции f на множестве B_k справедливо неравенство $s_{\tau^*} \geqslant \int f\,dG_k + k$. Отсюда, очевидно, следует, что

$$\int f\,dB_k \geqslant \int |f|\,dG_k + k. \tag{48.16}$$

Заметим, что $f \geqslant -|f|$ и, следовательно,

$$\int f\,dG_k \geqslant -\int |f|\,dG_k. \tag{48.17}$$

Сложив неравенства (48.16) и (48.17) получим:

$$\int f\,dB_k + \int f\,dG_k \geqslant k. \tag{48.18}$$

Пусть $D_k = B_k \cup G_k$, $k = 1, 2, \ldots$. Очевидно D_k — открытое измеримое множество и

$$G_k \subset D_k \subset G_{k+1}, \quad k = 1, 2, \ldots. \tag{48.19}$$

В силу того, что множества B_k и G_k не пересекаются (так как не пересекаются множества A_k и G_k) из (48.18) имеем $\int f\,dD_k \geqslant$ $\geqslant k$, откуда

$$\lim_{k \to \infty} \int f\,dD_k = +\infty. \tag{48.20}$$

Из включения (48.19) следует, что множества D_k, $k = 1, 2, \ldots$, образуют последовательность измеримых открытых множеств, монотонно исчерпывающую открытое множество G, ибо таковой являлась заданная последовательность G_k, $k = 1, 2, \ldots$, поэтому равенство (48.20) означает, что интеграл $\int f\,dG$ расходится. □

Итак, для кратных интегралов сходимость несобственного интеграла $\int f\,dG$ эквивалентна его абсолютной сходимости.

Упражнение 2. Заменив в определении кратного несобственного интеграла всюду открытые множества областями (в частности, рассматривая только монотонно исчерпывающие данную область последовательности, состоящие только из измеримых областей), показать, что и при таком «более узком» определении кратного несобственного интеграла сохраняется теорема 3.

§ 49. НЕКОТОРЫЕ ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ И ФИЗИЧЕСКИЕ ПРИЛОЖЕНИЯ КРАТНЫХ ИНТЕГРАЛОВ

49.1. ВЫЧИСЛЕНИЕ ПЛОЩАДЕЙ И ОБЪЕМОВ

Пусть E — измеримое множество в R^n. Как известно (см. п. 44.6).

$$\mu E = \int dE. \tag{49.1}$$

Таким образом, с помощью n-кратного интеграла можно вычислять меру измеримых множеств в n-мерном пространстве (площадь —

в двумерном, объем — в трехмерном). Если n-кратный интеграл (49.1) можно свести к повторному (см. § 45), то вычисление меры измеримого множества E n-мерного пространства сведется к вычислению $(n-1)$-кратного интеграла.

Пусть, например, D — открытое измеримое множество в $(n-1)$-мерном пространстве $R^{n-1}_{x_1, \ldots, x_{n-1}}$, $x_n = f(x_1, \ldots, x_{n-1})$ — неотрицательная функция, определенная и непрерывная на замыкании $\overline{D}$ множества D, а

$$G = \{x = (x_1, \ldots, x_n) : (x_1, \ldots, x_{n-1}) \in D, \quad 0 < x_n < f(x_1, \ldots, x_{n-1})\}$$

(таким образом, G является n-мерным аналогом криволинейной плоской трапеции, рассмотренной нами в п. 32.1). Тогда

$$\mu G = \int dG = \int dD \int\limits_0^{f(x_1, \ldots, x_{n-1})} dx_n = \int f(x_1, \ldots, x_{n-1})\, dD,$$

т. е.

$$\mu G = \underbrace{\int \ldots \int}_{n-1 \text{ раз}}\limits_{D} f(x_1, \ldots, x_{n-1})\, dx_1 \ldots dx_{n-1}.$$

Меру произвольных (необязательно измеримых по Жордану) в частности неограниченных, открытых множеств пространства R^n, $n \geqslant 2$, если ее понимать в смысле определения п. 31.1 и 31.2, т. е. как нижнюю меру Жордана, можно вычислить с помощью несобственных интегралов. Действительно пусть G — произвольное открытое множество в R^n и G_k, $k = 1, 2, \ldots,$ — последовательность открытых измеримых множеств, монотонно исчерпывающих множество G (см. п. 48.1). Тогда, как известно (см. п. 31.2), $\lim\limits_{k \to \infty} \mu G_k = \mu G$. Но в силу (49.1) $\mu G_k = \int dG_k$, а поэтому $\mu G = \lim\limits_{k \to \infty} \int dG_k$.

По определению же кратного несобственного интеграла, $\lim\limits_{k \to \infty} \int dG_k = \int dG$. Таким образом $\mu G = \int f\, dG$, где интеграл в правой части понимается, вообще говоря (а именно, если G не является измеримой областью), как несобственный.

Остается лишь показать, что для любого открытого множества G всегда существует последовательность измеримых множеств G_k, $k = 1, 2, \ldots,$ монотонно исчерпывающая заданное множество G. Докажем это.

Рассмотрим последовательность T_k, $k = 1, \ldots,$ разбиений пространства R^n на кубы (см. п. 44.1) и обозначим через Q_k n-мерный открытый куб, определяемый следующим образом:

$$Q_k = \{(x_1, \ldots, x_n) : |x_i| < k, \quad i = 1, 2, \ldots, n\}.$$

Число кубов данного ранга k (см. п. 44.1), содержащихся в Q_k, а следовательно, и подавно в пересечении $G\cap Q_k$, конечно. Обозначим эти замкнутые кубы $P_1, \ldots, P_{j_k}$:

$$P_j\in T_k;\quad P_j\subset G\cap Q_k,\quad j=1,\ 2,\ \ldots,\ j_k.$$

Через G_k обозначим множество внутренних точек множества $\bigcup\limits_{j=1}^{j_k} P_j$. Например, в случае, изображенном на рис. 200, множество G_k состоит из внутренних точек двух квадратов P_1 и P_2 и интервала, получающегося отбрасыванием вершин этих квадратов из их общего ребра.

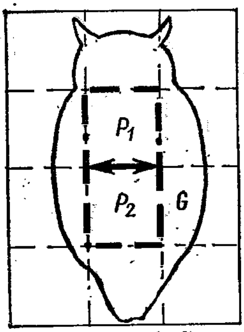


Рис. 200

Множества G_k, $k=1,\ 2,\ \ldots$, и являются открытыми измеримыми множествами, образующими последовательность, монотонно исчерпывающую данное открытое множество G.

Напомним, что для вычисления объемов тел часто оказывается удобным метод сечений: см. формулу (45.23).

Упражнение 1. Доказать, что построенная последовательность множеств G_k, $k=1,\ 2,\ \ldots$, действительно образует последовательность измеримых множеств, монотонно исчерпывающих данное множество G.

49.2. ФИЗИЧЕСКИЕ ПРИЛОЖЕНИЯ КРАТНЫХ ИНТЕГРАЛОВ

С помощью кратных интегралов можно вычислить различные физические величины: массу и заряд тела, центр тяжести, момент инерции, поток жидкости, потенциал тела и т. п.

Найдем в качестве примера центр тяжести плоской фигуры. Пусть в некоторой квадрируемой области G распределена некоторая масса, вообще говоря, с переменной поверхностной плотностью $\rho(x,\ y)$, т. е. на замыкании $\bar G$ области G задана некоторая неотрицательная и непрерывная функция $\rho(x,\ y)$. Область G с распределенной в ней массой будем называть *фигурой* S, а величину

$$M=\iint\limits_G \rho(x,\ y)\,dx\,dy \tag{49.2}$$

— ее *массой*. Если $\rho(x,\ y)$ — не тождественный ноль, то $M>0$.

Определим и найдем центр тяжести фигуры S. Возьмем какое-либо разбиение $\tau=\{G_i\}$, $i=1,\ 2,\ \ldots,\ k$, области G (см. п. 44.3). Множество G_i с распределенной в нем массой плотности $\rho(x,\ y)$, $(x,\ y)\in G_i$, назовем фигурой S_i. Выберем по некоторой точке $(\xi_i,\ \eta_i)\in\bar G_i$. Величину $m_i=\rho(\xi_i,\ \eta_i)\,\mu G_i$ назовем приближенным значением массы фигуры S_i (естественность такого названия следует из формулы (49.2)). Величины же $m_i\xi_i$ и $m_i\eta_i$ назовем приближенными значениями статических моментов фигуры S_i, $i = 1, 2, \ldots, k$, соответственно относительно координатных осей Oy и Ox (естественность этого названия следует из того, что статическими моментами материальной точки массы m с координатами (x, y) относительно осей Ox и Oy называются величины my и mx, см. п. 32.6). Наконец, величины

$$\begin{aligned} S_x(\tau) &= \sum_{i=1}^{k} \eta_i m_i = \sum_{i=1}^{k} \eta_i \rho(\xi_i, \eta_i)\mu G_i, \\ S_y(\tau) &= \sum_{i=1}^{k} \xi_i m_i = \sum_{i=1}^{k} \xi_i \rho(\xi_i, \eta_i)\mu G_i \end{aligned} \tag{49.3}$$

назовем приближенными τ-моментами фигуры S относительно осей Ox и Oy, а их пределы при $\delta_\tau \to 0$

$$\lim_{\delta_\tau \to 0} S_x(\tau) = S_x, \quad \lim_{\delta_\tau \to 0} S_y(\tau) = S_y$$

— *статическими моментами фигуры* S относительно осей Ox и Oy. Эти пределы при сделанных предположениях существуют. Действительно, из формул (49.3) видно, что $S_x(\tau)$ и $S_y(\tau)$ являются интегральными суммами Римана для функций $y\rho(x, y)$ и $x\rho(x, y)$, а потому

$$S_x = \iint_G y\rho(x, y)\,dx\,dy, \quad S_y = \iint_G x\rho(x, y)\,dx\,dy. \tag{49.4}$$

Определение 1. *Точка (x_0, y_0) называется центром тяжести (центром масс, центром инерции) фигуры S, если статические моменты относительно координатных осей материальной точки массы M, равной массе всей фигуры S и находящейся в точке (x_0, y_0) равны соответствующим статическим моментам фигуры S, т. е. если*

$$Mx_0 = S_y, \quad My_0 = S_x.$$

Из формул (49.2) и (49.3) получаем

$$x_0 = \frac{\iint_G x\rho(x, y)\,dx\,dy}{\iint_G \rho(x, y)\,dx\,dy}, \quad y_0 = \frac{\iint_G y\rho(x, y)\,dx\,dy}{\iint_G \rho(x, y)\,dx\,dy}.$$

Упражнение 2. Доказать, что центр тяжести фигуры не зависит от выбора системы координат.

В качестве примера рассмотрим «криволинейную трапецию» G, порожденную графиками непрерывных неотрицательных функций $f(x)$ и $g(x)$, $0 \leqslant g(x) \leqslant f(x)$, $a \leqslant x \leqslant b$:

$$G = \{(x, y) : a < x < b, \quad g(x) < y < f(x)\}.$$

Пусть $\rho(x, y) \equiv 1$. Поскольку $\iint\limits_G dx\,dy = \mu G$, то

$$x_0 = \frac{1}{\mu G}\iint\limits_G x\,dx\,dy = \frac{1}{\mu G}\int\limits_a^b x\,dx\int\limits_{g(x)}^{f(x)} dy = \frac{1}{\mu G}\int\limits_a^b [f(x) - g(x)]\,x\,dx,$$

$$y_0 = \frac{1}{\mu G}\iint\limits_G y\,dx\,dy = \frac{1}{\mu G}\int\limits_a^b dx\int\limits_{g(x)}^{f(x)} y\,dy = \frac{1}{2\mu G}\int\limits_a^b [f^2(x) - g^2(x)]\,dx;$$

отсюда

$$2\pi y_0\mu G = \pi\int\limits_a^b f^2(x)\,dx - \pi\int\limits_a^b g^2(x)\,dx.$$

Здесь в правой части равенства стоит объем тела, полученного вращением криволинейной трапеции G вокруг оси x-в; — мы пришли ко второй теореме Гульдина.

Теорема (Гульдин). *Объем тела вращения плоской фигуры вокруг не пересекающей ее оси равен произведению площади этой фигуры на длину окружности, описанной центром тяжести этой фигуры.*

Пример. Вычислим с помощью второй теоремы Гульдина объем μQ тора Q, полученного вращением круга $(x-a)^2 + y^2 \leqslant r^2$, $0 < r \leqslant a$ вокруг оси Oy:

$$\mu Q = 2\pi a \cdot \pi r^2 = 2\pi^2 a r^2.$$

Упражнения. Найти массу плоской фигуры, ограниченной линиями:

3. $y^2 = 2x,\ x + y = 4,\ y \geqslant 1;\ \rho(x, y) = x + y$.
4. $y = 2x,\ y = -2,\ y = 4x - 2;\ \rho(x, y) = 2|x| + |y|$.

Найти статические моменты относительно осей координат однородной плоской фигуры ($\rho = \rho_0 = \mathrm{const}$), ограниченной заданными линиями:

5. $y^2 = 4x,\ x + y = 3,\ x = 0$.
6. $y = x^3,\ x + y = 2,\ x = 0$.

Найти координаты центра масс плоской фигуры, ограниченной указанными линиями:

7. $x^2 + y^2 = 4,\ x^2 + y^2 = 1,\ y \geqslant 0;\ \rho = \rho_0 = \mathrm{const}$.
8. $y^2 = 4x,\ y = 2,\ x = 0;\ \rho(x, y) = x$.
9. $r = \sqrt{2},\ r = 2\sin\varphi\ (0 \leqslant \varphi \leqslant \pi/2,\ r \geqslant \sqrt{2}),\ \rho = \rho_0 = \mathrm{const}$ (r, φ — полярные координаты).
10. $x = a\cos^3 t,\ y = a\sin^3 t,\ y = 0\ (0 \leqslant t \leqslant \pi),\ \rho = \rho_0 = \mathrm{const}$.

§ 50. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ПОВЕРХНОСТЕЙ

50.1. ПОНЯТИЕ ПОВЕРХНОСТИ

Пусть в пространстве R^3 фиксирована декартова система координат x, y, z. Декартовы координаты в плоскостях, в которых лежат отображаемые области, будем обозначать буквами u, v, сами эти области — буквой D, рассматриваемые их отображения — буквами f, r, ρ (быть может, с теми или иными индексами).

Как обычно, через $\bar{D}$ будем обозначать замыкание области D (напомним, что $\bar{D}$ называется замкнутой областью), а через ∂D — ее границу (см. п. 18.2). Для образов точек $M=(u, v)\in\bar{D}$ при указанных отображениях будет употребляться как запись вида $f(M)$, так и вида $f(u, v)$.

Непрерывной поверхностью S называется всякое множество точек трехмерного пространства R^3, заданное как непрерывный образ некоторой замкнутой плоской области $\bar{D}$. Само рассматриваемое непрерывное отображение $r(u, v)$ замкнутой области $\bar{D}$ на множество S называется *представлением поверхности* (или, подробнее, *параметрическим представлением*) и пишется

$$S=\{r(u, v):(u, v)\in\bar{D}\}.$$

Переменные u, v называются *координатами*, или *параметрами*, непрерывной поверхности S.

Для непрерывной поверхности $S=\{r=r(u, v):(u, v)\in\bar{D}\}$ множество точек пространства R^3, заданное как образ границы ∂D области D при отображении $r(u, v)$, называется *краем поверхности* S и обозначается через ∂S:

$$\partial S=\{r(u, v):(u, v)\in\partial D\}.$$

По аналогии с определением кривой можно ввести понятие эквивалентных отображений, но на этот раз не отрезков, а отображений замкнутых плоских областей в трехмерное пространство R^3, и считать по определению, что два эквивалентных непрерывных отображения задают одну и ту же непрерывную поверхность (см. п. 50.2*). Отображения, осуществляющие эквивалентность двух представлений одной и той же поверхности, называются *допустимыми преобразованиями параметров*.

При заданном представлении $r(u, v)$, $(u, v)\in\bar{D}$, некоторой непрерывной поверхности и при фиксированных значениях параметров u, v через $r(u, v)$, естественно, обозначается точка этой поверхности, в которую при рассматриваемом представлении отображается точка $(u, v)\in\bar{D}$.

Подчеркнем, что представление непрерывной поверхности не является обязательно взаимно однозначным отображением. Точка непрерывной поверхности $S=\{r(u, v);\ (u, v)\in\bar{D}\}$, в которую при данном отображении $r(u, v)$ отображаются по крайней мере две различные точки замкнутой области $\bar{D}$, называется *кратной точкой*, или *точкой самопересечения* этой поверхности.

Таким образом, если точка M непрерывной поверхности является кратной точкой последней, то при заданном представлении $r(u, v)$, $(u, v)\in\bar{D}$, этой поверхности существуют по крайней мере две такие точки $(u_1, v_1)\in\bar{D}$ и $(u_2, v_2)\in\bar{D}$, что $r(u_1, v_1)=r(u_2, v_2)=M$.

Отображение $r(u, v)$ можно задавать в координатном виде:

$$r(u, v)=(x(u, v),\quad y(u, v),\quad z(u, v))$$

и в векторном:

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u, v),$$

где $\boldsymbol{r}(u, v)$ — радиус-вектор с концом в точке $r(u, v) \in R^3$.

В дальнейшем будут изучаться прежде всего дифференциальные свойства поверхностей определенных классов, состоящих из «достаточно гладких», т. е. достаточное число раз (непрерывно) дифференцируемых поверхностей. Определим, например, понятие непрерывно дифференцируемой поверхности.

Непрерывно дифференцируемой поверхностью называется множество S пространства R^3, заданное как непрерывно дифференцируемый образ некоторой замкнутой плоской области.

Само рассматриваемое непрерывно дифференцируемое отображение замкнутой области $\bar{D}$ на множество S называется, как и выше, представлением этой поверхности, причем, по определению, считается, что два непрерывно дифференцируемых отображения замкнутых плоских областей задают одну и ту же непрерывно дифференцируемую поверхность, если они эквивалентны относительно непрерывно дифференцируемых преобразований (см. п. 50.2*).

Аналогичным образом определяются и другие специальные классы непрерывных поверхностей: дважды непрерывно дифференцируемые поверхности и вообще n раз непрерывно дифференцируемые поверхности.

Если за параметры в одном из представлений непрерывной поверхности можно взять какие-либо две координаты пространства R^3 (например, если существует замкнутая область $\bar{D}$ на плоскости xy и функция $z = f(x, y)$, $(x, y) \in \bar{D}$, являющаяся представлением рассматриваемой непрерывной поверхности), то такое представление называется явным.

Очевидно, что если непрерывная поверхность допускает явное представление, то она не имеет кратных точек.

В дальнейшем непрерывную поверхность там, где это не сможет привести к недоразумениям, будем называть просто поверхностью.

Пример. Поверхность, задаваемая представлением

$$x = r\cos\psi\cos\varphi, \quad y = r\cos\psi\sin\varphi, \quad z = r\sin\varphi,$$

$$0 \leq \varphi \leq 2\pi, \quad -\frac{\pi}{2} \leq \psi \leq \frac{\pi}{2},$$

является сферой с центром в начале координат и радиусом r, у которой весь меридиан $\varphi = 0$ состоит из кратных точек.

В следующем пункте будет дано другое, в некотором смысле более детализированное, определение поверхности. Целесообразно, видимо, при первом чтении пропустить следующий пункт и вернуться к нему лишь тогда, когда в этом почувствуется внутренняя необходимость.

50.2*. ЭКВИВАЛЕНТНЫЕ ОТОБРАЖЕНИЯ. ПАРАМЕТРИЧЕСКИ ЗАДАННЫЕ ПОВЕРХНОСТИ

Для строгого определения поверхности необходимо прежде всего ввести понятие эквивалентных отображений замкнутых плоских областей.

Определение 1. *Непрерывное отображение f замыкания $\bar{D}$ некоторой плоской области D в трехмерное пространство R^3 называется эквивалентным непрерывному отображению f_1 замыкания $\bar{D}_1$ плоской области D_1 в то же пространство R^3, если существует такое гомеоморфное (см. определение 5 в п. 41.4) отображение F замкнутой области $\bar{D}$ на замкнутую область $\bar{D}_1$, при котором внутренние точки переходят во внутренние, а граничные — в граничные (т. е. D отображается на D_1, а ∂D на ∂D_1), и для каждой точки $M \in D$ выполняется равенство*

$$f(M) = f_1[F(M)], \tag{50.1}$$

т. е. $f = f_1 \cdot F$.

В этом случае F называется *отображением, осуществляющим эквивалентность отображений* f и f_1. Если f эквивалентно отображению f_1, то пишется $f \sim f_1$.

Схематически определение эквивалентных отображений можно изобразить диаграммой, где стрелками изображены рассматриваемые отображения и результат отображений не зависит от выбора пути на диаграмме:

$$\begin{tikzcd}
 & R^3 & \\
D \arrow[ur, "f"] \arrow[rr, "F"'] & & D_1 \arrow[ul, "f_1"']
\end{tikzcd}$$

Очевидно, что: 1) всякое отображение эквивалентно самому себе: $f \sim f$ (здесь отображением, осуществляющим эквивалентность, является тождественное отображение). Легко убедиться, что

2) $f \sim f_1$, то $f_1 \sim f$,

3) а если $f \sim f_1$ и $f_1 \sim f_2$, то $f \sim f_2$.

Если f и f_1 — эквивалентные непрерывные отображения соответственно замкнутых областей $\bar{D}$ и $\bar{D}_1$, то из (50.1) следует, что образы множеств $\bar{D}$ и $\bar{D}_1$ при отображениях f и f_1 совпадают:

$$f(\bar{D}) = f_1(\bar{D}_1). \tag{50.2}$$

Заметим еще, что условия, наложенные на эквивалентные отображения в определении 1, независимы. Именно, из того, что F является гомеоморфным отображением замкнутой области D на замкнутую область $\bar{D}_1$, не следует, что оно переводит внутренние точки во внутренние. Например, если $D = \{(u, v) : u^2 + v^2 < 1\}$ — круг, а $D_1 = \{(u, v) : 0 < u^2 + v^2 < 1\}$ — круг с «выколотым» центром, то тождественное отображение (очевидно, являющееся гомеоморфным) $\bar{D}$ на $\bar{D}_1$ переводит внутреннюю точку $(0, 0)$ области D в граничную точку $(0, 0)$ области D_1.

Перейдем теперь к определению поверхности.

Определение 2. *Всякое множество всевозможных непрерывных эквивалентных между собой (см. определение 1) отображений $r(u, v)$ замкнутых плоских областей $\bar{D}$ в трехмерное пространство R^3 называется параметрически заданной поверхностью S и обозначается*

$$S = \{r(u, v) : (u, v) \in \bar{D}\}, \tag{50.3}$$

а каждое из указанных эквивалентных непрерывных отображений $r(u, v)$ называется представлением параметрически заданной поверхности S.

Если $r(u, v)$, $(u, v) \in \bar{D}$ — представление параметрически заданной поверхности S и если $\boldsymbol{r}(u, v)$ — радиус-вектор с концом в точке $r(u, v)$, то $\boldsymbol{r}(u, v)$, $(u, v) \in \bar{D}$, называется *векторным представлением* этой поверхности S и пишется

$$S = \{\boldsymbol{r}(u, v), \quad (u, v) \in \bar{D}\}. \tag{50.4}$$

Если $r(u, v) = (x(u, v),\ y(u, v),\ z(u, v))$, то функции

$$x = x(u, v), \quad y = y(u, v), \quad z = (u, v)$$

называются *координатным представлением* параметрически заданной поверхности S и пишется

$$S = \{x(u, v), \quad y(u, v), \quad z(u, v); \quad (u, v) \in \bar{D}\}. \tag{50.5}$$

Очевидно, что параметрически заданная поверхность однозначно определяется каждым из своих представлений. Это позволяет, что часто более удобно, правую часть каждого из равенств (50.3), (50.4) и (50.5) понимать не как совокупность всех представлений определенного типа рассматриваемой поверхности S, а как некоторое вполне определенное ее соответствующее представление.

Определение 3. *Пусть $r(M)$, $M \in \bar{D}$ и $\rho(M_1)$, $M_1 \in \bar{D}_1$ — два представления некоторой параметрически заданной поверности S и F — отображение $\bar{D}$ на $\bar{D}_1$, осуществляющее их эквивалентность (см. определение 1).*

Если $M_1 = F(M)$, $M \in \bar{D}$, $M_1 \in \bar{D}_1$ (точка M, а поэтому и точка M_1 фиксированы), и, следовательно, $r(M) = \rho(M_1) = P \in R^3$, то пары (P, M) и (P, M_1) называются эквивалентными и пишется

$$(P, M) \sim (P, M).$$

Легко проверить, что

1) $(P, M) \sim (P, M)$;
2) если $(P, M) \sim (P, M_1)$, то $(P, M_1) \sim (P, M)$;

3) если $(P, M) \sim (P, M_1)$, а $(P, M_1) \sim (P, M_2)$, то $(P, M) \sim \sim (P, M_2)$.

Если $(P, M) \sim (P, M_1)$ и M — внутренняя (граничная) точка замкнутой области $\bar{D}$, то, согласно определению 1, M_1 также является внутренней (граничной) точкой замкнутой области $\bar{D}_1$.

Определение 4. *Пусть S — параметрически заданная поверхность. Всякая совокупность $\{(P, M)\}$, $M \in \bar{D}$, всех эквивалентных между собою пар (P, M) (точка $P \in R^3$ фиксирована) называется точкой данной поверхности S, а точка P — ее носителем.*

Точка $\{(P, M)\}$, $M \in D$, поверхности S называется внутренней (краевой) если каждая точка M является внутренней (граничной) точкой соответствующей замкнутой области $\bar{D}$.

Каждая точка $\{(P, M)\}$, $M \in \bar{D}$, параметрически заданной поверхности $S = \{r(M), M \in \bar{D}\}$ однозначно определяется каждой парой $(P, M) \in \{(P, M)\}$, и поскольку в этой паре $P = r(M)$, то каждая точка параметрически заданной поверхности S при некотором заданном ее представлении $r(M)$, $M \in \bar{D}$, однозначно определяется точкой M, причем точка $P = r(M)$ является носителем рассматриваемой точки поверхности. Поэтому для краткости точки параметрически заданной поверхности будут, как правило, обозначаться не символом $\{(P, M)\}$, а просто $r(M)$, или, что равносильно, $r(u, v)$, где $M = (u, v)$. В силу сказанного это обозначение имеет однозначный смысл.

Определение 5. *Совокупность всех носителей всех точек параметрически заданной поверхности S называется носителем этой поверхности.*

В силу условия (50.2) носитель параметрически заданной поверхности (являющийся, очевидно, некоторым множеством точек в пространстве R^3) однозначно определяется каждым ее представлением.

Определение 6. *Точка $P \in R^3$, являющаяся носителем двух разных точек параметрически заданной поверхности S, называется кратной точкой или, что то же, точкой самопересечения носителя параметрически заданной поверхности.*

Возвращаясь к определению поверхности, данному в п. 50.1, видим, что то, что там было названо «*непрерывной поверхностью*», в нашей новой терминологии называется «*носителем параметрически заданной поверхности*». Попытка ввести понятие «точки поверхности» для поверхностей с кратными точками приводит в том или ином виде к определениям 4 и 6. Отметим, что понятие параметрически заданной поверхности с кратными точками очень удобно при рассмотрении ряда вопросов, изучаемых в последующих параграфах.

В дальнейшем, там, где это не сможет привести к недоразумениям, «непрерывная поверхность» (см. п. 50.1), или, что то же, «носитель параметрически заданной поверхности» (см. определение 5), а также «параметрически заданная поверхность» (см. определение 2), будут называться просто поверхностью.

Определим теперь понятие части поверхности.

Определение 7. *Пусть S — параметрически заданная поверхность $r(u, v)$, $(u, v) \in \bar{D}$, — некоторое ее представление, D' — область, содержащаяся в $D: D' \subset D$. Параметрически заданная поверхность S', определяемая представлением $r(u, v)$, $(u, v) \in \bar{D}'$, называется частью поверхности S.*

Как уже отмечалось (см. п. 50.1), понятие эквивалентных отображений замкнутых плоских областей можно вводить не только для непрерывных отображений, но и для других классов отображений, например для непрерывно дифференцируемых. В применении к параметрически заданным поверхностям это приводит к непрерывно дифференцируемым поверхностям. Их определение базируется на понятии отображений, эквивалентных относительно непрерывно дифференцируемых преобразований.

Определим это понятие. Как и раньше (см. п. 39.3), под функцией, непрерывно дифференцируемой в замыкании некоторой области, будем понимать такую функцию, которая имеет непрерывные в самой области производные, непрерывно продолжаемые на ее границу.

Отображение некоторой замкнутой области называется *непрерывно дифференцируемым*, если каждая координатная функция, задающая это отображение (см. п. 41.4), является непрерывно дифференцируемой функцией на рассматриваемой замкнутой области. При этом продолженные функции в этих случаях обозначаются теми же символами, что и исходные продолжаемые функции.

Если некоторое отображение $u_1 = \varphi(u, v)$, $v_1 = \psi(u, v)$ непрерывно дифференцируемо на замыкании $\bar{D}$ области D, то, согласно сделанному соглашению, это означает, в частности, что якобиан $\frac{\partial(\varphi, \psi)}{\partial(u, v)}$ этого отображения непрерывно продолжаем с области D на ее замыкание $\bar{D}$ и его продолжение, обозначаемое тем же символом, $\frac{\partial(\varphi, \psi)}{\partial(u, v)}$, также будет называться якобианом.

Прежде всего надо сформулировать, что будет пониматься под эквивалентными непрерывно дифференцируемыми отображениями. Для этого введем понятие регулярных отображений.

Определение 8. *Гомеоморфное отображение F замыкания $\bar{D}$ плоской области D на замыкание $\bar{D}_1$ плоской области D_1, переводящее внутренние точки во внутренние, а граничные — в граничные, называется регулярным отображением замкнутой области $\bar{D}$ на замкнутую область $\bar{D}_1$, если как само это отображение F, так и обратное ему F^{-1} непрерывно дифференцируемы соответственно на замкнутых областях $\bar{D}$ и $\bar{D}_1$.*

Заметим, что всякое регулярное отображение F замкнутой области $\bar{D}$ имеет во всех точках области D не равный нулю якобиан. Действительно, согласно определению 8, при отображении F образ каждой внутренней точки является внутренней точкой. Поскольку в этих точках прямое и соответственно обратное отображения непрерывно дифференцируемы, то их якобианы не могут обратиться в ноль, ибо их произведение равно единице (см. п. 41.7).

Отсюда следует, что якобиан регулярного отображения F не равен нулю и на замкнутой области $\bar{D}$. Действительно, в силу непрерывной продолжаемости якобианов как прямого, так и обратного отображений соответственно на замыкания $\bar{D}$ и $\overline{F(D)}$ областей D и $F(D)$ произведение этих якобианов равно единице и для всех точек замкнутой области $\bar{D}$.

Мы уже встречались с регулярными отображениями замкнутых плоских областей специального вида, например, в п. 46.1.

Определение 9. *Пусть f и f_1 суть непрерывные отображения замыканий $\bar{D}$ и $\bar{D}_1$ плоских областей D и D_1 в пространство R^3 и пусть эти отображения непрерывно дифференцируемы в замкнутых областях $\bar{D}$ и $\bar{D}_1$. Отображения f и f_1 называются эквивалентными относительно непрерывно дифференцируемых преобразований, если существует такое регулярное отображение F замкнутой области $\bar{D}$ на замкнутую область $\bar{D}_1$, что для каждой точки $M \in \bar{D}$ выполняется условие* (50.1).

Теперь можно определить непрерывно дифференцируемую поверхность.

Определение 10. *Всякое множество отображений $r(u, v)$ замкнутых плоских областей $\bar{D}$ в трехмерное пространство R^3 непрерывно дифференцируемых и эквивалентных относительно непрерывно дифференцируемых преобразований называется параметрически заданной непрерывно дифференцируемой поверхностью S, а каждое из указанных отображений $r(u, v)$ называется представлением этой поверхности и пишется, как и раньше,*

$$S = \{r(u, v);\quad (u, v) \in \bar{D}\}.$$

Подчеркнем, что если поверхность $S = \{r(u, v);\ (u, v) \in D\}$ непрерывно дифференцируема, то это, в частности, означает, что каждое ее векторное представление $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u, v)$, $(u, v) \in \bar{D}$, имеет частные производные $\boldsymbol{r}_u$ и $\boldsymbol{r}_v$ *), непрерывные в области D и непрерывно продолжаемые на ее границу. Поскольку, согласно принятому соглашению, продолженные функции обозначаются

*) Такие понятия, как, например, непрерывность, предел, дифференцируемость естественным образом переносятся и на вектор-функции нескольких переменных. Так, функция $\boldsymbol{r}(u, v)$, определенная на области G, называется *непрерывной в точке* $(u_0, v_0) \in G$, если $\lim\limits_{(u, v) \to (u_0, v_0)} \boldsymbol{r}(u, v) = \boldsymbol{r}(u_0, v_0)$. Производная $\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u}(u_0, v_0)$ определяется равенством

$$\frac{\partial \boldsymbol{r}(u_0, v_0)}{\partial u} = \left.\frac{d\boldsymbol{r}(u, v_0)}{du}\right|_{u = u_0}.$$

теми же символами, что и продолжаемые*), то можно считать, что функции r_u и r_v непрерывны на замкнутой области $\bar{D}$.

Подобным образом можно определить и другие классы параметрически заданных поверхностей, например дважды непрерывно дифференцируемые или вообще n раз непрерывно дифференцируемые параметрически заданные поверхности, а также понятие их точки, носителя и их части.

Резюмируя, окончательно можно сказать, что *параметрически заданной поверхностью какого-то класса является некоторая совокупность эквивалентных между собой в определенном смысле отображений* $r(u, v)$, $(u, v) \in \bar{D}$, *называемых ее представлениями.*

Понятие эквивалентности определяется в зависимости от выбора класса.

Определение 11. *Преобразования параметров, осуществляющие переход от одного представления поверхности к другому, ему эквивалентному, называются допустимыми.*

Таким образом, если $r(u, v)$, $(u, v) \in \bar{D}$ и $\rho(u_1, v_1)$, $(u_1, v_1) \in \bar{D}_1$ — два представления одной и той же параметрически заданной поверхности некоторого класса, а отображение

$$u_1 = \varphi(u, v),$$
$$v_1 = \psi(u, v)$$

замкнутой области $\bar{D}$ на замкнутую область $\bar{D}_1$ является допустимым преобразованием параметров, то для всех точек $(u, v) \in \bar{D}$ выполняется соотношение (см. (50.1))

$$r(u, v) = \rho[\varphi(u, v), \quad \psi(u, v)].$$

Параметрически заданная поверхность при заданном классе допустимых преобразований параметров однозначно определяется каждым своим представлением, поэтому, чтобы задать такую поверхность, достаточно задать лишь одно ее представление.

50.3. ПОВЕРХНОСТИ, ЗАДАННЫЕ НЕЯВНО

Отметим еще один подход к понятию поверхности. Если $F(x, y, z)$ — непрерывная в некоторой трехмерной области функция, то совокупность точек (x, y, z) таких, что

$$F(x, y, z) = 0, \tag{50.6}$$

называется *поверхностью, заданной неявно.* Не останавливаясь подробно на анализе такого подхода к понятию поверхности, отметим лишь, что в случае если функция F удовлетворяет в неко-

---

*) Точнее, это соглашение было принято (см. п. 39.3) для скалярных функций и, следовательно, для координат векторных функций, поэтому его естественно принять и для самих векторных функций.

торой точке (x_0, y_0, z_0) условиям теоремы о неявных функциях (см. п. 41.1), то часть поверхности (50.6) в некоторой окрестности указанной точки (т. е. пересечение этой окрестности с данной поверхностью) допускает явное представление, и можно сказать, что в этой ситуации поверхность, заданная неявно, локально сводится к поверхности, заданной явным представлением (см. п. 50.1). Только такой случай поверхностей, заданных неявно, встретится в дальнейшем, поэтому не будем специально останавливаться на разъяснении тех или иных понятий для поверхностей, заданных неявно.

В качестве простейшего примера поверхности, заданной неявно, отметим уравнение

$$x^2+y^2+z^2=1.$$

Точки, координаты которых удовлетворяют этому уравнению, образуют поверхность шара единичного радиуса с центром в начале координат.

В дальнейшем будут изучаться в основном лишь непрерывные поверхности, заданные параметрическим представлением и, вообще говоря, с кратными точками. Они будут называться, как это уже отмечалось, просто «поверхностями»; в случаях, когда понятие поверхности будет пониматься в каком-либо другом смысле, это будет специально оговариваться.

50.4. КАСАТЕЛЬНАЯ ПЛОСКОСТЬ И НОРМАЛЬ К ПОВЕРХНОСТИ

Пусть

$$S=\{\boldsymbol{r}(u, v);\quad (u, v)\in\bar{D}\} \tag{50.7}$$

— непрерывно дифференцируемая поверхность. Рассмотрим некоторое ее векторное представление $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(u, v)$, $(u, v)\in\bar{D}$. Как и всякое ее векторное представление, оно является непрерывно дифференцируемой вектор-функцией на замкнутой плоской области $\bar{D}$.

Будем для простоты считать, что пересечение каждой прямой $u=u_0$ или $v=v_0$ с замкнутой областью $\bar{D}$ состоит из одного отрезка (быть может, вырождающегося в точку) или пусто. Пусть, например, пересечение $\bar{D}$ с прямой $v=v_0$ не пусто, тогда

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(u, v_0),\quad (u, v_0)\in\bar{D}$$

(v_0 фиксировано) является представлением некоторой непрерывно дифференцируемой кривой, которая называется *координатной линией* (*u-линией*). Вектор

$$\boldsymbol{r}_u=\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u}=(x_u, y_u, z_u)$$

является ее касательным вектором. Аналогично определяются другие координатные линии (*v-линии*) с помощью представления

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(u_0, v),\ (u_0, v)\in\bar{D}$$

(u_0 фиксировано) и касательные к ним векторы

$$\boldsymbol{r}_v = \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v} = (x_v,\ y_v,\ z_v).$$

Определение 12. *Точка $r(u, v)$ поверхности (50.7), для которой векторы $\boldsymbol{r}_u$ и $\boldsymbol{r}_v$ не коллинеарны (линейно независимы), называется неособой при данном представлении этой поверхности. В противном случае, т. е. когда векторы $\boldsymbol{r}_u$ и $\boldsymbol{r}_v$ коллинеарны в данной точке, она называется особой точкой поверхности при данном ее представлении.*

Если точка поверхности неособая, то в ней, в частности $\boldsymbol{r}_u \neq 0$, $\boldsymbol{r}_v \neq 0$. Очевидно, что точка поверхности является неособой при данном представлении поверхности в том и только в том случае, когда в этой точке $\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v \neq \boldsymbol{0}$.

Упражнение 1. Доказать, что если $r(u_0, v_0)$ является внутренней неособой при данном представлении $r(u, v)$, $(u, v) \in \bar{D}$, точкой поверхности S, т. е. для этой точки $(u_0, v_0) \in D$ и $\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v \neq 0$, то некоторая часть поверхности S, для которой точка $r(u_0, v_0)$ также является внутренней, обладает явным представлением относительной одной из осей координат.

Рассмотрим кривую на поверхности (50.7). Пусть эта кривая задана непрерывно дифференцируемыми функциями

$$u = u(t),\ v = v(t),\ (u(t),\ v(t)) \in D,\ a \leqslant t \leqslant b,$$

т. е. представлением

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}[u(t),\ v(t)],\quad (u(t),\ v(t)) \in D,\quad a \leqslant t \leqslant b, \tag{50.8}$$

причем $u'^2(t) + v'^2(t) > 0$ на $[a, b]$.

Продифференцировав равенство (50.8), получим

$$d\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_u\,du + \boldsymbol{r}_v\,dv, \tag{50.9}$$

здесь $du = u'(t)\,dt$, $dv = v'(t)\,dt$. Если точка поверхности, в которой рассматривается равенство (50.9), не особая, то вектор $d\boldsymbol{r}$ является касательным к кривой (50.8). Равенство (50.9) показывает, что в данной точке $r(u_0, v_0)$ поверхности (50.7) касательная к любой кривой (50.8) на этой поверхности, проходящей через точку $\boldsymbol{r}(u_0, v_0)$, лежит в плоскости векторов $\boldsymbol{r}_u(u_0, v_0)$ и $\boldsymbol{r}_v(u_0, v_0)$.

Определение 13. *Плоскость, проходящая через точку $r(u_0, v_0)$ поверхности (50.7), в которой лежат все касательные к кривым (50.8), проходящим через эту точку, называется касательной плоскостью к поверхности в данной точке (называемой точкой касания).*

Упражнение 2. Доказать, что для любого вектора $\boldsymbol{v}$, лежащего в касательной плоскости к поверхности S в неособой точке, существует проходящая через эту точку кривая на поверхности S, для которой вектор $\boldsymbol{v}$ является касательным.

Если данная точка поверхности (50.7) неособая, то в ней всегда существует, и притом единственная, касательная плоскость: именно в силу (50.9) ею является плоскость, проходящая через $r(u_0, v_0)$ параллельно векторам $\boldsymbol{r}_u(u_0, v_0)$ и $\boldsymbol{r}_v(u_0, v_0)$. Отсюда легко написать ее уравнение в векторном виде. Обозначив через $\boldsymbol{r}_0$ радиус-вектор точки касания, а через $\boldsymbol{r}$ — текущий радиус-вектор точек на касательной плоскости, получим (рис. 201):

$$(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0)\,\boldsymbol{r}_u\boldsymbol{r}_v=0$$

(в левой части равенства стоит смешанное произведение указанных векторов).

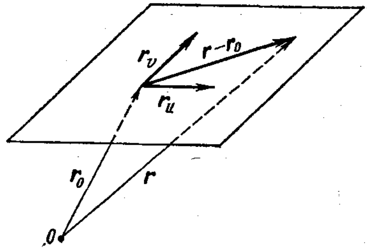


Рис. 201

Если $\boldsymbol{r}=(x, y, z)$, $\boldsymbol{r}_0=(x_0, y_0, z_0)$, $\boldsymbol{r}_u=(x_u, y_u, z_u)$, $\boldsymbol{r}_v=(x_v, y_v, z_v)$, то уравнение касательной плоскости в координатном виде перепишется следующим образом:

$$\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{vmatrix}=0.$$

В случае явного задания поверхности

$$z=f(x, y), \quad (x, y)\in\overline{D}, \tag{50.10}$$

будем иметь $u=x$, $v=y$ и поэтому

$$\begin{aligned} x_u&=1, & y_u&=0, & z_u&=f_x, \\ x_v&=0, & y_v&=1, & z_v&=f_y; \end{aligned} \tag{50.11}$$

следовательно, уравнение касательной плоскости в этом случае будет иметь вид

$$\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ 1 & 0 & f_x \\ 0 & 1 & f_y \end{vmatrix}=0,$$

откуда

$$z-z_0=(x-x_0)\,f_x+(y-y_0)\,f_y, \tag{50.12}$$

где через f_x и f_y для краткости обозначены частные производные $f_x(x, y)$ и $f_y(x, y)$ в точке (x_0, y_0).

Из этой формулы следует, что два определения касательной плоскости для поверхности с явным представлением (50.10), данные в настоящем пункте и ранее в п. 20.5, эквивалентны. В самом деле, оба определения приводят к одному и тому же уравнению (50.12).

Определение 14. *Прямая, проходящая через точку касания поверхности с касательной плоскостью и перпендикулярная этой плоскости, называется нормальной прямой к поверхности в указанной точке.*

Ее уравнение в общем случае в неособой точке поверхности имеет вид

$$\frac{x-x_0}{\begin{vmatrix} y_u & z_u \\ y_v & z_v \end{vmatrix}} = \frac{y-y_0}{\begin{vmatrix} z_u & x_u \\ z_v & x_v \end{vmatrix}} = \frac{z-z_0}{\begin{vmatrix} x_u & y_u \\ x_v & y_v \end{vmatrix}}.$$

В случае явного представления (50.10) эти уравнения принимают вид

$$\frac{x-x_0}{f_x} = \frac{y-y_0}{f_y} = -(z-z_0). \tag{50.13}$$

Определение 15. *Всякий ненулевой вектор, коллинеарный нормальной прямой, проходящей через данную точку поверхности, называется нормалью к этой поверхности в указанной точке.*

Примером нормали в неособой точке поверхности является векторное произведение

$$\boldsymbol{n} = \boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v,$$

вычисленное в рассматриваемой точке.

Согласно данному определению, в каждой неособой (при заданном представлении) точке $r(u, v)$ рассматриваемой поверхности при фиксированных значениях параметров u и v существует, и притом единственная, нормальная прямая. Следует иметь в виду, что если точка P пространства является кратной точкой поверхности, т. е. существует по крайней мере две пары параметров (при заданном представлении) (u_1, v_1) и (u_2, v_2) таких, что $P = r(u_1, v_2) = r(u_2, v_2)$, то может, конечно, случиться, что этим парам параметров будут соответствовать различные нормальные прямые, тем самым в указанной точке P нормальная прямая будет не единственна.

Для поверхности, заданной неявно уравнением

$$F(x, y, z) = 0,$$

где $F(x, y, z)$ — непрерывно дифференцируемая в окрестности точки (x_0, y_0, z_0) функция, $F(x_0, y_0, z_0) = 0$, и в этой точке $F_x^2 + F_y^2 + F_z^2 > 0$, уравнение касательной плоскости в точке (x_0, y_0, z_0) имеет вид

$$(x-x_0)F_x + (y-y_0)F_y + (z-z_0)F_z = 0,$$

где F_x, F_y и F_z обозначают значения соответствующих частных производных, взятых в точке (x_0, y_0, z_0).

Вспомнив, что вектор с координатами F_x, F_y, F_z, т. е. вектор $\nabla F=(F_x, F_y, F_z)$ называется *градиентом функции* F (см. п. 20.6), видим, что градиент функции в данной точке поверхности $F(x, y, z)=0$ перпендикулярен касательной плоскости в этой точке, т. е. коллинеарен нормальной прямой.

Поэтому уравнение нормальной прямой к поверхности имеет вид

$$\frac{x-x_0}{F_x}=\frac{y-y_0}{F_y}=\frac{z-z_0}{F_z}.$$

Все эти формулы сразу следуют из (50.12) и (50.13). Действительно, если, например, $F_z \neq 0$ и $z=f(x, y)$ — функция, определяемая уравнением $F=0$ в окрестности точки (x_0, y_0, z_0), то достаточно заметить, что $f_x=-\frac{F_x}{F_z}$, $f_y=-\frac{F_y}{F_z}$ (см. п. 41.1).

Если функция $F(x, y, z)$ задана и непрерывно дифференцируема в области G, то для любой точки поверхности, заданной неявно уравнением $F(x, y, z)=c$ (c — постоянная), получим уравнение касательной плоскости и нормальной прямой того же вида, что и в случае $F=0$, если только в этой точке $F_x^2+F_y^2+F_z^2>0$. Множество точек $(x, y, z) \in G$, для которых $F=c$, называется, как мы знаем, поверхностью уровня функции F (см. п. 19.1).

Таким образом, градиент $\nabla F=(F_x, F_y, F_z)$ в точке (x_0, y_0, z_0) поверхности уровня $F(x, y, z)=c$ направлен по нормальной прямой к этой поверхности в точке (x_0, y_0, z_0). Иначе говоря, градиент функции ортогонален к поверхности уровня (т. е. перпендикулярен касательной плоскости к поверхности уровня в рассматриваемой точке).

Мы доказали существование касательной плоскости в неособой точке у непрерывно дифференцируемой поверхности при фиксированном ее представлении. Возникает вопрос: что будет, если перейти к другому представлению этой поверхности? Прежде всего, останется ли неособая точка неособой, а особая — особой? Оказывается, что да.

Докажем это. Пусть $\boldsymbol{r}(u, v)$, $(u, v) \in \bar{D}$, и $\boldsymbol{\rho}(u_1, v_1)$, $(u_1, v_1) \in \bar{D}_1$, суть два представления одной и той же непрерывно дифференцируемой поверхности. Поскольку переход от любого представления непрерывно дифференцируемой поверхности к другому ее представлению осуществляется посредством регулярного отображения, то существует такое регулярное отображение

$$\begin{aligned} u_1&=\varphi(u, v),\\ v_1&=\psi(u, v) \end{aligned} \tag{50.14}$$

замкнутой области $\bar{D}$ на замкнутую область $\bar{D}_1$, что для всех точек $(u, v) \in \bar{D}$ справедливо равенство

$$\boldsymbol{r}(u, v)=\boldsymbol{\rho}[\varphi(u, v), \psi(u, v)]. \tag{50.15}$$

При этом, как было доказано, якобиан отображения (50.14) не равен нулю нигде в замкнутой области $\bar{D}$:

$$\frac{\partial(\varphi, \psi)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} \varphi_u & \varphi_v \\ \psi_u & \psi_v \end{vmatrix} \neq 0, \quad (u, v) \in \bar{D}.$$

Продифференцировав тождество (50.15), получим

$$\begin{aligned} \boldsymbol{r}_u &= \varphi_u \boldsymbol{\rho}_{u_1} + \psi_u \boldsymbol{\rho}_{v_1}, \\ \boldsymbol{r}_v &= \varphi_v \boldsymbol{\rho}_{u_1} + \psi_v \boldsymbol{\rho}_{v_1}. \end{aligned} \tag{50.16}$$

Следовательно, пара векторов $\boldsymbol{\rho}_{u_1}$, $\boldsymbol{\rho}_{v_1}$ преобразуется в пару векторов $\boldsymbol{r}_u$, $\boldsymbol{r}_v$ с помощью невырожденной матрицы

$$\begin{Vmatrix} \varphi_u & \psi_v \\ \varphi_u & \psi_v \end{Vmatrix}.$$

Поэтому для данной точки (u, v) векторы $\boldsymbol{r}_u$, $\boldsymbol{r}_v$ будут линейно независимыми тогда и только тогда, когда будут линейно независимыми векторы $\boldsymbol{\rho}_{u_1}$, $\boldsymbol{\rho}_{v_1}$ в точке (u_1, v_1), получающейся из точки (u, v) с помощью преобразования (50.14), причем в случае их линейной независимости плоскость векторов $\boldsymbol{r}_u$ и $\boldsymbol{r}_v$ и плоскость векторов $\boldsymbol{\rho}_{u_1}$ и $\boldsymbol{\rho}_{v_1}$ совпадают.

Итак, *неособая (особая) при данном представлении точка непрерывно дифференцируемой поверхности будет неособой (особой) и при любом другом представлении этой поверхности, а плоскость, касательная к поверхности в неособой точке при одном представлении поверхности, будет касательной и при другом ее представлении.*

Определение 16. *Непрерывно дифференцируемая поверхность, у которой нет особых точек, называется гладкой поверхностью.*

В силу доказанного выше, чтобы проверить, что данная поверхность является гладкой, достаточно убедиться, что у нее имеется одно непрерывно дифференцируемое представление и при этом представлении нет особых точек.

Следует обратить внимание на то, что у гладкой поверхности $S = \{\boldsymbol{r}(u, v), (u, v) \in \bar{D}\}$ векторные функции $\boldsymbol{r}_u$ и $\boldsymbol{r}_v$ не только непрерывны на замыкании области D, но согласно определению и неколлинеарны на этом замыкании $\bar{D}$. Иначе говоря, у гладкой поверхности (50.7) всюду на замкнутой области $\bar{D}$ выполняется неравенство

$$\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v \neq 0.$$

Замечание. Из формул (50.16) следует, что

$$\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v = (\varphi_u \boldsymbol{\rho}_{u_1} + \psi_u \boldsymbol{\rho}_{v_1}) \times (\varphi_v \boldsymbol{\rho}_{u_1} + \psi_v \boldsymbol{\rho}_{v_1}) = \varphi_u \psi_v (\boldsymbol{\rho}_{u_1} \times \boldsymbol{\rho}_{v_1}) + \\ + \psi_u \varphi_v (\boldsymbol{\rho}_{v_1} \times \boldsymbol{\rho}_{u_1}) = \frac{\partial(\varphi, \psi)}{\partial(u, v)} (\boldsymbol{\rho}_{u_1} \times \boldsymbol{\rho}_{v_1}).$$

Поскольку при допустимых преобразованиях параметров (50.14) якобиан $\frac{\partial(\varphi, \psi)}{\partial(u, v)}$ нигде в $\bar{D}$ не обращается в ноль, то из полученной формулы следует, что векторные произведения $\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v$ и $\boldsymbol{\rho}_{u_1} \times \boldsymbol{\rho}_{v_1}$ в данной точке поверхности могут обращаться в ноль только одновременно. Но было показано, что необходимым и достаточным условием того, что данная точка поверхности при данном представлении поверхности $\boldsymbol{r}(u, v)$ — неособая, является неравенство нулю в этой точке векторного произведения $\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v$. Тем самым еще раз доказано, что неособая (особая) точка поверхности при одном представлении поверхности будет такой же и при другом ее представлении.

Упражнения. 3. Составить уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности $x = 2u - v$, $y = u^2 + v^2$, $z = u^3 - v^3$ в точке $M(3; 5; 7)$.

4. К поверхности $xyz = 1$ провести касательную плоскость, параллельную плоскости $x + y + z - a = 0$ ($a = \text{const}$).

5. Доказать, что все касательные плоскости поверхности $z = xf\left(\frac{y}{x}\right)$ (f — произвольная дифференцируемая функция) проходят через начало координат.

6. Доказать, что все касательные плоскости, проведенные к поверхности $x = u\cos v$, $y = u\sin v$, $z = au + f(v)$ ($a = \text{const}$, f — произвольная дифференцируемая функция) в любой точке ее координатной линии $v = c$ ($c = \text{const}$), проходят через фиксированную прямую.

50.5 ПЕРВАЯ КВАДРАТИЧНАЯ ФОРМА ПОВЕРХНОСТИ

Зафиксируем какое-либо представление $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u, v)$, $(u, v) \in \bar{D}$ данной гладкой поверхности и рассмотрим касательную к ней плоскость в некоторой ее точке. Как мы видели, векторы $\boldsymbol{r}_u$ и $\boldsymbol{r}_v$ образуют в этой плоскости базис. Векторы, лежащие в касательной плоскости, будем обозначать символом $d\boldsymbol{r}$, а их координаты относительно базиса $\boldsymbol{r}_u$ и $\boldsymbol{r}_v$ — через du и dv *). Таким образом

$$d\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_u\, du + \boldsymbol{r}_v\, dv.$$

Найдем квадрат длины вектора, лежащего в касательной плоскости, выраженный через координаты естественного базиса $\boldsymbol{r}_u$ и $\boldsymbol{r}_v$ (в линейной алгебре это выражение обычно называется *основной метрической формой* рассматриваемого пространства, в данном случае плоскости):

$$|d\boldsymbol{r}|^2 = (\boldsymbol{r}_u du + \boldsymbol{r}_v dv)^2 = \boldsymbol{r}_u^2 du^2 + 2\boldsymbol{r}_u \boldsymbol{r}_v du\, dv + \boldsymbol{r}_v^2 dv^2.$$

Введем обозначения

$$E = \boldsymbol{r}_u^2, \quad F = \boldsymbol{r}_u \boldsymbol{r}_v, \quad G = \boldsymbol{r}_v^2; \tag{50.17}$$

*) Это обозначение естественно, ибо если вектор в касательной плоскости является касательным к некоторой кривой (50.8) на поверхности, то при соответствующем выборе параметра вектор $d\boldsymbol{r}$ будет являться дифференциалом вектора (50.8) и, следовательно, для него будет выполняться равенство (50.9).

тогда

$$|d\boldsymbol{r}^2| = E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2. \tag{50.18}$$

Определение 17. *Квадратичная форма* $E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2$ *называется первой квадратичной формой поверхности* *).

Посмотрим, как она меняется при переходе к другому представлению поверхности (см. формулы (50.14)). Как известно (см. (50.16)), при этом базисы в рассматриваемой плоскости преобразуются с помощью матрицы

$$\begin{Vmatrix} \varphi_u & \psi_u \\ \varphi_v & \psi_v \end{Vmatrix}.$$

Следовательно, координаты векторов преобразуются с помощью транспонированной матрицы, т. е. матрицы Якоби

$$J = \begin{Vmatrix} \varphi_u & \varphi_v \\ \psi_u & \psi_v \end{Vmatrix}.$$

Если матрицу первой квадратичной формы (50.18) при представлении поверхности $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u, v)$ обозначить через A, а при представлении $\boldsymbol{\rho} = \boldsymbol{\rho}(u_1, v_1)$ — через A_1, т. е.

$$A = \begin{Vmatrix} E & F \\ F & G \end{Vmatrix}, \quad E = \boldsymbol{r}_u^2, \quad F = \boldsymbol{r}_u \boldsymbol{r}_v, \quad G = \boldsymbol{r}_v^2,$$

$$A_1 = \begin{Vmatrix} E_1 & F_1 \\ F_1 & G_1 \end{Vmatrix}, \quad E_1 = \boldsymbol{\rho}_{u_1}^2, \quad F_1 = \boldsymbol{\rho}_{u_1}\boldsymbol{\rho}_{v_1}, \quad G_1 = \boldsymbol{\rho}_{v_1}^2,$$

то, как известно из курса линейной алгебры, для первой квадратичной формы поверхности, как и вообще для всякой квадратичной формы,

$$A = J^* A_1 J,$$

где через J^* обозначена матрица, транспонированная с матрицей Якоби J.

Отсюда для соответствующих определителей

$$\begin{vmatrix} E & F \\ F & G \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} E_1 & F_1 \\ F_1 & G_1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \varphi_u & \varphi_v \\ \psi_u & \psi_v \end{vmatrix}^2,$$

или

$$EG - F^2 = (E_1 G_1 - F_1^2) \left| \frac{\partial(u_1, v_1)}{\partial(u, v)} \right|^2. \tag{50.19}$$

---

*) То, что рассматриваемая квадратичная форма называется первой, объясняется тем, что существуют другие квадратичные формы, связанные с поверхностью. Их изучение не входит в задачу настоящего курса.

Заметим, что по самому своему определению первая квадратичная форма положительно определенна (действительно, если $du^2+dv^2>0$, т. е. $dr\not\equiv 0$, то $|dr|^2>0$), а поэтому ее дискриминант положителен: $EG-F^2>0$. В силу же отсутствия особых точек выполняются неравенства $r_u\neq 0$, $r_v\neq 0$, а поэтому из определения коэффициентов E и G (50.17) непосредственно следует, что $E>0$ и $G>0$.

Если известна первая квадратичная форма поверхности, то можно, даже не располагая уравнением поверхности и не зная ее формы, решать целый ряд относящихся к ней задач, например находить длины лежащих на ней кривых и углы между ними, вычислять площадь частей поверхности. Совокупность всех свойств поверхности, которые можно установить, исходя из одной лишь первой квадратичной формы, называется внутренней геометрией поверхности. К рассмотрению подобных задач мы и перейдем.

Упражнения. 7. Какая из следующих квадратичных форм может служить первой квадратичной формой некоторой поверхности: а) $du^2+3du\,dv+dv^2$; б) $du^2+6du\,dv+9dv^2$; в) $du^2-6du\,dv+13dv^2$; г) $du^2+2du\,dv-dv^2$.

8. Найти первую квадратичную форму *геликоида* (винтовой поверхности) $x=u\cos v$, $y=u\sin v$, $z=av+f(u)$ ($a=\text{const}$, f — произвольная дифференцируемая функция).

9. Доказать, что первая квадратичная форма поверхности вращения приводима к виду $du^2+G(u)\,dv^2$.

50.6. КРИВЫЕ НА ПОВЕРХНОСТИ. ВЫЧИСЛЕНИЕ ИХ ДЛИН И УГЛОВ МЕЖДУ НИМИ

Рассмотрим непрерывно дифференцируемую кривую (50.8), лежащую на данной поверхности (50.7). Предположим, что отсчет длины дуг $s=s(t)$ на ней производится в направлении возрастания параметра, т. е. что $\frac{ds}{dt}>0$. Как известно (см. п. 16.5), $\frac{ds}{dt}=\left|\frac{dr}{dt}\right|$, откуда $ds=|dr|$, следовательно, см. (50.18),

$$ds^2=|dr|^2=dr^2=E\,du^2+2F\,du\,dv+G\,dv^2,$$

поэтому

$$\frac{ds}{dt}=\sqrt{E\left(\frac{du}{dt}\right)^2+2F\frac{du}{dt}\frac{dv}{dt}+G\left(\frac{dv}{dt}\right)^2}.$$

Таким образом, для длины L кривой (50.8) получаем формулу

$$L=\int_a^b\sqrt{E\left(\frac{du}{dt}\right)^2+2F\frac{du}{dt}\frac{dv}{dt}+G\left(\frac{dv}{dt}\right)^2}\,dt.$$

Перейдем теперь к вычислению углов между кривыми на поверхности.

Определение 18. *Если две кривые пересекаются в некоторой точке, то углом между ними в этой точке называется угол,* *образованный их касательными в указанной точке (если, конечно, эти касательные существуют).*

Пусть две гладкие кривые, лежащие на рассматриваемой поверхности, пересекаются в некоторой точке. Обозначим дифференциалы их представлений в этой точке соответственно через $d\boldsymbol{r}$ и $\delta\boldsymbol{r}$, а коэффициенты разложений по векторам $\boldsymbol{r}_u$ и $\boldsymbol{r}_v$ — соответственно через du, dv и δu, δv; тогда

$$d\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_u\,du + \boldsymbol{r}_v\,dv,$$
$$\delta\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_u\,\delta u + \boldsymbol{r}_v\,\delta v.$$

Поэтому если φ — искомый угол между кривыми, т. е. между векторами $d\boldsymbol{r}$ и $\delta\boldsymbol{r}$, то

$$\cos\varphi = \frac{d\boldsymbol{r}\,\delta\boldsymbol{r}}{|d\boldsymbol{r}|\,|\delta\boldsymbol{r}|} = \frac{E\,du\,\delta u + F\,(du\,\delta v + dv\,\delta u) + G\,dv\,\delta v}{\sqrt{E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2}\,\sqrt{E\,\delta u^2 + 2F\,\delta u\,\delta v + G\,\delta v^2}}.$$

Упражнения. 10. Доказать, что для того, чтобы координатные u- и v-линии на поверхности были ортогональными, необходимо и достаточно, чтобы всюду на поверхности выполнялось равенство $F=0$.

11. На поверхности с первой квадратичной формой du^2+dv^2 найти угол между кривыми $v=2u$, $v=-2u$.

50.7. ПЛОЩАДЬ ПОВЕРХНОСТИ

Пусть непрерывно дифференцируемое представление $\boldsymbol{r}(u, v)$ рассматриваемой гладкой поверхности S определено на замыкании $\bar{D}$ квадрируемой области D. Рассмотрим разбиение T_k плоскости переменных u и v на квадраты некоторого ранга k. Поскольку из квадрируемости области следует ее ограниченность, то замкнутая область $\bar{D}$ окажется покрытой конечным числом квадратов ранга k. Пронумеруем каким-либо образом все непустые пересечения этих квадратов с замкнутой областью $\bar{D}$ и обозначим их через E_i, $i=1, 2, \ldots, i_0$. Тогда

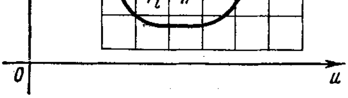


Рис. 202

$$\tau = \{E_i : E_i = Q \cap \bar{D} \neq \varnothing,\ Q \in T_k\}$$

образует разбиение замкнутой области $\bar{D}$ (определение разбиения см. в п. 44.3).

Рассмотрим множества E_i, которые представляют собой полные замкнутые квадраты, лежащие в области D (при достаточно малой мелкости разбиения τ такие непустые множества E_i всегда существуют; почему?). Совокупность всех указанных множеств E_i обозначим через $\tau(\partial D)$ (ср. с п. 44.4).

Возьмем какой-либо квадрат $E_i \in \tau(\partial D)$ (рис. 202). Пусть длина его стороны равна h, а P_i — одна из его вершин. Тогда при переходе от вершины P_i к соседним вершинам радиус-вектор $\boldsymbol{r}(u, v)$ с точностью до бесконечно малых более высокого порядка, чем h, получит приращения, равные по абсолютной величине соответственно числам $|\boldsymbol{r}_u h|$ и $|\boldsymbol{r}_v h|$ ибо

$$\boldsymbol{r}(u+h, v)-\boldsymbol{r}(u, v)=\boldsymbol{r}_u h+o(h),$$
$$\boldsymbol{r}(u, v+h)-\boldsymbol{r}(u, v)=\boldsymbol{r}_v h+o(h).$$

При определении площади поверхности будем образы квадратов $E_i \in \tau(\partial D)$ заменять прямолинейными параллелограммами, построенными на векторах $\boldsymbol{r}_u h$ и $\boldsymbol{r}_v h$ (рис. 203). Найдем площадь такого параллелограмма. Обозначив ее через $\Delta\sigma_i$, получим

$$\Delta\sigma_i = |\boldsymbol{r}_u h \times \boldsymbol{r}_v h|_{P_i} = |\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v|_{P_i} h^2 = |\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v|_{P_i} \mu E_i.$$

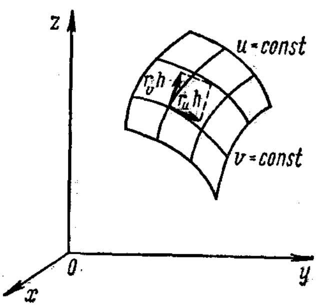


Рис. 203

Функции $\boldsymbol{r}_u$ и $\boldsymbol{r}_v$ непрерывны на замкнутой квадрируемой области $\bar{D}$; поэтому

$$\lim_{\delta_\tau \to 0} \sum_{E_i \in \tau(\partial D)} \Delta\sigma_i = \iint_D |\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v| \, du \, dv, \tag{50.20}$$

где δ_τ, как всегда, обозначает мелкость разбиения τ. Очевидно, условие, что мелкость разбиения δ_τ стремится к нулю, равносильно тому, что ранги k квадрильяжей плоскости, из которых мы исходили, стремятся к бесконечности.

Для доказательства справедливости равенства (50.20) достаточно заметить, что при произвольном выборе точек $P_i \in E_i \in \tau$, $i=1, 2, \ldots$, справедливо равенство

$$\lim_{\delta_\tau \to 0} \sum_{E_i \in \tau(\partial D)} \Delta\sigma_i = \lim_{\delta_\tau \to 0} \sum_{i=1}^{i_0} |\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v|_{P_i} \mu E_i = \iint_D |\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v| \, du \, dv.$$

Действительно, во-первых, предел интегральных сумм интегрируемой функции не зависит от выбора в данном случае точек $P_i \in E_i \in \tau$, а, во-вторых, выбрасывание из интегральных сумм слагаемых, соответствующих множествам $E_i \in \tau$, не входящих в $\tau(\partial D)$, не влияет, как известно (см. п. 44.3), на величину предела интегральных сумм, в нашем случае — на величину предела (50.20).

Определение 19. *Предел* (50.20) *называется площадью или мерой* μS *поверхности* S:

$$\mu S = \lim_{\sigma_\tau \to 0} \sum_{E_i \in \tau(\partial D)} \Delta\sigma_i.$$

Для вычисления площади поверхности из (50.20) непосредственно получается формула

$$\mu S=\iint\limits_{D}|\boldsymbol{r}_u\times\boldsymbol{r}_v|\,du\,dv. \tag{50.21}$$

Запишем ее в другом виде, выразив подынтегральное выражение через коэффициенты первой квадратичной формы. Прежде всего заметим, что для любых векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ справедливы формулы

$$|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}|\,|\boldsymbol{b}|\sin\widehat{\boldsymbol{ab}},$$

$$\boldsymbol{ab}=|\boldsymbol{a}|\,|\boldsymbol{b}|\cos\widehat{\boldsymbol{ab}},$$

где $\widehat{\boldsymbol{ab}}$ — угол между векторами $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$. Возведем в квадрат и сложим эти формулы:

$$|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|^2+|\boldsymbol{ab}|^2=\boldsymbol{a}^2\boldsymbol{b}^2.$$

Отсюда следует, что

$$|\boldsymbol{r}_u\times\boldsymbol{r}_v|^2=\boldsymbol{r}_u^2\boldsymbol{r}_v^2-(\boldsymbol{r}_u\boldsymbol{r}_v)^2=EG-F^2, \tag{50.22}$$

поэтому формула (50.21) может быть записана также в виде

$$\mu S=\iint\limits_{D}\sqrt{EG-F^2}\,du\,dv. \tag{50.23}$$

Иногда для краткости записи выражение $\sqrt{EG-F^2}\,du\,dv$ обозначается символом dS:

$$dS=\sqrt{EG-F^2}\,du\,dv; \tag{50.24}$$

и называется *элементом площади*. Применяя это обозначение, формулу (50.23) можно переписать в виде

$$\mu S=\iint\limits_{D}dS.$$

Покажем, что величина площади поверхности не зависит от выбора ее представления (при этом рассматриваются только представления, заданные на замкнутых квадрируемых областях). Перейдем к другому представлению $\rho=\rho(u_1, v_1)$ данной непрерывно дифференцируемой поверхности, которое задано на замыкании $\bar{D}_1$ квадрируемой области D_1 и, следовательно, для которого преобразование (50.14) параметров u, v в параметры u_1, v_1 является регулярным отображением $\bar{D}$ на $\bar{D}_1$.

В новой системе координат рассмотрим интеграл

$$\mu S=\iint\limits_{D_1}\sqrt{F_1G_1-F_1^2}\,du_1\,dv_1.$$

Для сравнения его с интегралом (50.23) выполним замену переменных (50.14), что возможно, так как все предпосылки теоремы 2′ п. 46.2 в данном случае выполнены. Использовав (50.19), получим

$$\mu S_1 = \iint\limits_{D_1} \sqrt{E_1 G_1 - F_1^2}\, du_1\, dv_1 =$$
$$= \iint\limits_{D} \sqrt{E_1 G_1 - F_1^2} \left| \frac{\partial(\varphi, \psi)}{\partial(u, v)} \right| du\, dv = \iint\limits_{D} \sqrt{EG - F^2}\, du\, dv = \mu S.$$

Таким образом, действительно, величина площади поверхности не зависит от выбора ее представления.

Найдем выражение для площади поверхности, имеющей явное представление $z = f(x, y)$, $(x, y) \in \bar{D}$. В этом случае $u = x$, $v = y$, $\boldsymbol{r} = (x, y, f(x, y))$ и, следовательно (см. формулы (50.11)),

$$\boldsymbol{r}_u = (1,\ 0,\ f_x), \quad \boldsymbol{r}_v = (0,\ 1,\ f_y),$$
$$E = \boldsymbol{r}_u^2 = 1 + f_x^2, \quad F = \boldsymbol{r}_u \boldsymbol{r}_v = f_x f_y, \quad G = \boldsymbol{r}_v^2 = 1 + f_y^2,$$
$$EG - F^2 = (1 + f_x^2)(1 + f_y^2) - f_x^2 f_y^2 = 1 + f_x^2 + f_y^2; \tag{50.25}$$
$$\mu S = \iint\limits_{D} \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}\, dx\, dy.$$

Упражнения. 12. Доказать, что площадь поверхности вращения, определенная в п. 32.4, совпадает с площадью этой поверхности, определенной в настоящем пункте.

13. Найти периметр и внутренние углы криволинейного треугольника, лежащего на поверхности с первой квадратичной формой $du^2 + (u^2 + a^2)\, dv^2$ и ограниченного дугами кривых $u = \frac{1}{2} a v^2$, $u = -\frac{1}{2} a v^2$, $v = 1$ $(a = \text{const} > 0)$.

14. Найти площадь криволинейного четырехугольника, лежащего на *геликоиде* $x = u \cos v$, $y = u \sin v$, $z = au$ $(a = \text{const})$ и ограниченного дугами кривых $u = 0$, $u = a$, $v = 0$, $v = 1$.

15. На поверхности с первой квадратичной формой $du^2 + (u^2 + a^2)\, dv^2$ расположен криволинейный треугольник, ограниченный дугами кривых $u = av$, $u = -av$, $v = 1$. Найти его площадь.

50.8. ОРИЕНТАЦИЯ ГЛАДКОЙ ПОВЕРХНОСТИ

В этом параграфе будем предполагать, что в пространстве выбирается всегда правая система координат. Это означает следующее. Пусть $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$ и $\boldsymbol{k}$ — единичные орты координатных осей. Если смотреть из конца вектора $\boldsymbol{k}$ на плоскость xOy, то вектор $\boldsymbol{i}$ надо повернуть на угол $\frac{\pi}{2}$ против часовой стрелки, чтобы он совпал с вектором $\boldsymbol{j}$. В этом случае говорят также, что упорядоченная тройка векторов $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$ и $\boldsymbol{k}$ согласована по «правилу штопора». Аналитически это означает, что в пространстве точек (x, y, z) рассматриваются только такие упорядоченные базисы $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$, которые получаются из упорядоченного базиса $\boldsymbol{i}=(1;\ 0;\ 0)$, $\boldsymbol{j}=(0;\ 1;\ 0)$, $\boldsymbol{k}=(0;\ 0;\ 1)$ с помощью матриц, имеющих положительный определитель (точнее, равный $+1$). Таким образом, если

$$\boldsymbol{e}_m=c_{m1}\boldsymbol{i}+c_{m2}\boldsymbol{j}+c_{m3}\boldsymbol{k}, \qquad m=1,\ 2,\ 3,$$

является базисом, задающим правую систему координат, то

$$\begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{vmatrix}=+1.$$

Все определения и понятия, связанные с координатами, вводимые ниже в этом параграфе, даются применительно к правым системам координат.

Пусть S — гладкая поверхность (см. определение 16). Тогда всякое ее векторное представление $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(u,\ v)$, $(u,\ v)\in\bar{D}$, непрерывно дифференцируемо и $\boldsymbol{r}_u\times\boldsymbol{r}_v\neq 0$ на замкнутой области $\bar{D}$.

Следовательно, в каждой точке поверхности S определен нормальный единичный вектор

$$\boldsymbol{\nu}=\frac{\boldsymbol{r}_u\times\boldsymbol{r}_v}{|\boldsymbol{r}_u\times\boldsymbol{r}_v|}, \tag{50.26}$$

являющийся непрерывной функцией на $\bar{D}$. Кратко это обстоятельство выражают, говоря, что на поверхности S существует непрерывная единичная нормаль.

Определение 20. *Всякая непрерывная единичная нормаль* $\boldsymbol{\nu}=\boldsymbol{\nu}(u,\ v)$, $(u,\ v)\in\bar{D}$, *гладкой поверхности* $S=\{r(u,\ v);\ (u,\ v)\in\bar{D}\}$ *называется ориентацией поверхности* S.

Очевидно, что если вектор $\boldsymbol{\nu}$ является ориентацией поверхности S, то и вектор $-\boldsymbol{\nu}$ также является ориентацией той же поверхности, и легко показать, что других ориентаций нет.

Упражнение 16. Доказать, что поверхность может иметь только две ориентации.

Одна из двух ориентаций $\boldsymbol{\nu}$ или $-\boldsymbol{\nu}$ (произвольно выбранная) называется *положительной*, а другая — *отрицательной*.

Таким образом, понятие положительности и отрицательности ориентации в этом смысле не определяется однозначно самой поверхностью, а зависит от выбора ее представления. Положительная и отрицательная ориентации поверхности называются *противоположными* ориентациями этой поверхности.

Для определенности в дальнейшем для гладкой поверхности, заданной фиксированным векторным представлением $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(u,\ v)$, $(u,\ v)\in\bar{D}$ за положительную ориентацию будем принимать всегда вектор (50.26).

Подчеркнем, что непрерывность нормали $\boldsymbol{\nu}$ рассматривается относительно переменных u, v, а не относительно пространственных переменных x, y и z. Если поверхность имеет кратные точки, то может случиться, что в точке пространства, являющейся носителем разных точек поверхности может оказаться несколько различных нормалей.

Чтобы при регулярном преобразовании параметров u, v у поверхности сохранялась ориентация, необходимо дополнительно потребовать, чтобы якобиан этого преобразования был положительным. Действительно, для преобразования параметров

$$u_1=\varphi(u, v),$$
$$v_1=\psi(u, v)$$

из формул (50.16), как мы видели (см. замечание в конце п. 50.4) следует, что

$$\boldsymbol{r}_u\times\boldsymbol{r}_v=\frac{\partial(\varphi, \psi)}{\partial(u, v)}(\boldsymbol{\rho}_{u_1}\times\boldsymbol{\rho}_{v_1}),$$

и, следовательно, если якобиан $\frac{\partial(\varphi, \psi)}{\partial(u, v)}$ положителен, то векторы $\boldsymbol{r}_u\times\boldsymbol{r}_v$ и $\boldsymbol{\rho}_{u_1}\times\boldsymbol{\rho}_{v_1}$ направлены в одну и ту же сторону, а если он отрицателен, то в противоположные.

Таким образом, для поверхностей, у которых выбрана ориентация, допустимыми преобразованиями будем считать такие непрерывно дифференцируемые преобразования, у которых якобиан положителен.

Поверхность S с положительной ориентацией будем обозначать через S^+, а с отрицательной — через S^-.

Подчеркнем, что всякая гладкая параметрическая заданная поверхность всегда ориентируема, т. е. у нее всегда существует ориентация.

Определение 21. *Поверхность, у которой фиксирована одна из ее ориентаций, называется ориентированной.*

Данное выше определение ориентации, разумеется, не переносится на негладкие поверхности. Примером поверхности, не дифференцируемой в одной точке, на которой уже нельзя выбрать непрерывную нормаль, является конус:

$$z=\sqrt{x^2+y^2},\quad x^2+y^2\leqslant a^2. \tag{50.27}$$

В этом случае векторное представление имеет вид:

$$\boldsymbol{r}(x, y)=\left(x, y, \sqrt{x^2+y^2}\right),$$

следовательно,

$$\boldsymbol{r}_x=\left(1;\ 0;\ \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right),\quad \boldsymbol{r}_y=\left(0;\ 1;\ \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right);$$

$$\boldsymbol{r}_x\times\boldsymbol{r}_y=\left(-\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}};\ -\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}};\ 1\right);\quad |\boldsymbol{r}_x\times\boldsymbol{r}_y|=\sqrt{2}.$$

Поскольку пределы $\lim\limits_{(x,\, y)\to(0,\, 0)} \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$ и $\lim\limits_{(x,\, y)\to(0;\, 0)} \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$ не существуют (почему?), то и единичная нормаль

$$\boldsymbol{\nu} = \frac{\boldsymbol{r}_x \times \boldsymbol{r}_y}{|\boldsymbol{r}_x \times \boldsymbol{r}_y|} = \left(-\frac{x}{\sqrt{2(x^2+y^2)}};\ -\frac{y}{\sqrt{2(x^2+y^2)}};\ \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

не имеет предела при $(x, y) \to (0, 0)$. Поэтому на конусе (50.27) нельзя выбрать нормаль, непрерывную на $\bar{D} = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leqslant a^2\}$.

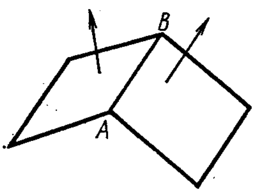


Рис. 204

Простым примером негладкой поверхности S, на которой существует целая линия, вдоль которой нормали при любом их выборе терпят разрыв, является часть двугранного угла, изображенная на рис. 204. Указанной линией на этой поверхности является отрезок AB.

50.9. СКЛЕИВАНИЕ ПОВЕРХНОСТЕЙ

Данное выше определение параметрически заданной непрерывной поверхности не охватывает все то, что интуитивно входит в понятие поверхности. Так, можно показать, что поверхность шара не является носителем какой-либо непрерывной параметрически заданной поверхности без кратных точек. Считать же, что поверхность шара имеет кратные точки, представляется неоправданным усложнением. Существуют различные пути для преодоления этого неудобства. Мы выберем путь, основанный на склеивании конечного числа поверхностей. Склеивание поверхностей естественным образом возникает при рассмотрении самых простых задач. Например, боковую поверхность цилиндра естественно рассматривать как результат склеивания противоположных сторон прямоугольника, полную поверхность цилиндра как результат склеивания его боковой поверхности и двух оснований, поверхность конуса как результат склеивания его боковой поверхности с основанием и т. д.

Перейдем к точным определениям. Будем говорить, что у поверхности $S = \{\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u, v);\ (u, v) \in \bar{D}\}$ ее край (см. п. 50.1) является кривой, если граница ∂D области D является кривой (точнее, носителем кривой):

$$\partial D = \{u(t),\ v(t);\ a \leqslant t \leqslant b\}.$$

В этом случае край ∂S поверхности S можно также рассматривать как кривую:

$$\partial S = \{r(u(t),\ v(t));\ a \leqslant t \leqslant b\}.$$

Мы определим операцию склеивания поверхностей для поверхностей, края которых являются кривыми.

Пусть заданы поверхности $S_i=\{r_i(u_i, v_i); (u_i, v_i)\in \bar{D}_i\}$, края ∂S_i которых суть кривые, т. е. границы ∂D_i областей D_i являются кривыми:

$$u_i=u_i(t_i),\ v_i=v_i(t_i),\ a_i\leqslant t_i\leqslant b_i,\ i=1, 2, \ldots, m.$$

Тогда края поверхностей ∂S_i будут представлять собой кривые

$$\gamma_i=\{\boldsymbol{r}_i(u_i(t_i), v_i(t_i));\ a_i\leqslant t_i\leqslant b_i\}.$$

Пусть для некоторых пар (i, j), $i, j=1, 2, \ldots, m$, $i\neq j$, задано конечное число отрезков $[a_{ij}^k, b_{ij}^k]\subset[a_i, b_i]$, $a_{ij}^k\leqslant b_{ij}^k$, и отрезков $[a_{ji}^k, b_{ji}^k]\subset[a_j, b_j]$, $a_{ji}^k\leqslant b_{ji}^k$, $k=1, 2, \ldots, n_{ij}=n_{ji}$, причем как отрезки $[a_{ij}^k, b_{ij}^k]$, так и отрезки $[a_{ji}^k, b_{ji}^k]$ попарно не имеют общих внутренних точек, а также гомеоморфизмы $\varphi_{ij}^k:[a_{ij}^k, b_{ij}^k]\to[a_{ji}^k, b_{ji}^k]$, называемые *склеивающими гомеоморфизмами*. При этом для любого $t_i\in[a_{ij}^k, b_{ij}^k]$ имеет место «склеивание»:

$$\boldsymbol{r}_i(u_i(t_i), v_i(t_i))=\boldsymbol{r}_j\left(u_j\left(\varphi_{ij}^k(t_i)\right), v_j\left(\varphi_{ij}^k(t_i)\right)\right). \tag{50.28}$$

Обозначим через γ_{ij}^k кривую с представлением

$$\boldsymbol{r}_i(u_i(t_i), v_i(t_i)),\ t\in[a_{ij}^k, b_{ij}^k].$$

Кривые γ_{ij}^k называются *кривыми склейки* или *кривыми, по которым производится склеивание.*

Очевидно, что в силу (50.28) отображение

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_j(u_j(t_j), v_j(t_j)),\ t_j\in[a_{ji}^k, b_{ji}^k]$$

также является представлением кривой γ_{ij}^k, ибо гомеоморфизмы φ_{ij}^k представляют собой допустимое преобразование параметра для кривой γ_{ij}^k.

Будем предполагать кроме того, что при $j'\neq j$ отрезки

$$[a_{ij}^k, b_{ij}^k] \text{ и } [a_{ij'}^l, b_{ij'}^l],\ k=1, 2, \ldots, n_{ij},\ l=1, 2, \ldots n_{ij'},$$

не имеют общих внутренних точек, а следовательно, каждый конец отрезка $[a_{ij}^k, b_{ij}^k]$ может принадлежать еще не более чем одному отрезку $[a_{ij'}^l, b_{ij'}^l]$. Это условие означает, что каждая кривая склейки γ_{ij}^k является частью только двух кривых γ_i и γ_j, образующих края поверхностей S_i и S_j.

Поверхности S_i и S_j называются соседними, если они склеиваются по крайней мере по одной кривой γ_{ij}^k. Система склеивающих гомеоморфизмов φ_{ij}^k называется *связной*, если для любых поверхностей S_p и S_q из рассматриваемой системы в ней существуют такие поверхности $S_{i_1}, S_{i_2}, \ldots, S_{i_r}$, что $S_{i_1}=S_p$, $S_{i_r}=S_q$, и каждая поверхность S_{i_ν} является соседней с $S_{i_{\nu+1}}$, т. е. склеена с ней по одной или нескольким кривым с помощью соответствующих склеивающих гомеоморфизмов $\varphi_{i_\nu i_{\nu+1}}$, $\nu=1, 2, \ldots r-1$.

Определение 22. *Система поверхностей $S_1, S_2, \ldots, S_m$ со связной системой склеивающих гомеоморфизмов φ_{ij}^k называется поверхностью, склеенной из поверхностей $S_1, \ldots, S_m$* по кривым γ_{ij}^k *и обозначается через $S=\{S_i\}$.*

Это определение, несмотря на свою формальную громоздкость, имеет, очевидно, простой геометрический смысл. Образно говоря, склеенная поверхность $S=\{S_i\}$ представляет собой поверхности $S_1, \ldots, S_m$, у некоторых пар которых S_i, S_j отождествлены (склеены) точки, лежащие на кривых γ_{ij}^k и отображающиеся друг в друга при гомеоморфизмах φ_{ij}^k — в этом и состоит условие склеивания (50.28). Безусловно, как отмечалось, кроме того предполагается, что от каждой поверхности S_i можно через конечное число шагов перейти к любой другой поверхности S_j, переходя каждый раз с некоторой поверхности на одну из соседних с ней.

Если $S=\{S_i\}$ — склеенная поверхность, то совокупность всех дуг, являющихся такими частями кривых ∂S_i, что никакие точки этих частей, кроме, быть может, концевых, не склеиваются ни с какими точками других кривых ∂S_i, называется краем ∂S склеенной поверхности S.

Можно показать, что объединяя соответствующим образом указанные части кривых ∂S_i, принадлежащие краю ∂S поверхности $S=\{S_i\}$, можно получить конечное число замкнутых кривых (контуров). Иначе говоря, край склеенной поверхности состоит из конечного числа замкнутых контуров.

Примером склеивания поверхностей может служить склеивание в сферу $x^2+y^2+z^2=1$ двух полусфер $z=\sqrt{1-x^2-y^2}$ и $z=-\sqrt{1-x^2-y^2}$, $x^2+y^2\leqslant 1$, по их краю, т. е. по окружности $x^2+y^2=1$, $z=0$. Задавая уравнение этой окружности в параметрическом виде

$$x=\cos t,\ y=\sin t,\ z=0,\ 0\leqslant t\leqslant 2\pi$$

в качестве склеивающего гомеоморфизма $\varphi:[0, 2\pi]\to[0, 2\pi]$ можно взять тождественное отображение отрезка $[0, 2\pi]$ на себя.

С помощью склеивания гладких поверхностей можно определить понятие кусочно-гладкой поверхности.

Определение 23. *Поверхность $S=\{S_i\}$, склеенная из гладких поверхностей $S_1, \ldots, S_m$, называется кусочно-гладкой поверхностью.*

Поверхность кругового цилиндра, поверхность параллелепипеда, дают примеры кусочно-гладких поверхностей. Прямой же круговой конус (50.27) нельзя разбить на конечное число склеенных гладких частей, поэтому он не является кусочно-гладкой поверхностью в смысле определения 23. Можно обобщить операцию склеивания поверхностей таким образом, что при формальном сохранении определения кусочно-гладких поверхностей для такой обобщенной операции склеивания в класс кусочно-гладких поверхностей попадут уже и конические поверхности. Мы не будем на этом останавливаться и предоставим проделать это в случае необходимости самому читателю.

50.10. ОРИЕНТИРУЕМЫЕ И НЕОРИЕНТИРУЕМЫЕ ПОВЕРХНОСТИ

Очередной нашей задачей является определение понятия ориентации для поверхностей, склеенных из параметрически заданных поверхностей.

Определение ориентации с помощью выбора непрерывной единичной нормали на поверхности оказывается в этом случае неудобным даже при отсутствии кратных точек и понимании непрерывности нормали, как ее непрерывной зависимости от точек пространства (а не параметров склеиваемых поверхностей). Это связано с возможным нарушением гладкости поверхности на кривых, по которым происходит склеивание.

Например, часть поверхности двугранного угла, изображенную на рис. 204, можно рассматривать как результат склеивания двух равных прямоугольников. Если стремиться по разным граням к одной и той же точке на ребре этого угла, то пределы соответствующих единичных нормалей получатся разные. Ниже будет дано такое определение ориентируемой поверхности, при котором указанная поверхность будет ориентируемой.

Отметим, что при склеивании поверхностей даже «гладким образом» (т. е. когда для любой кривой, по которой произведено склеивание, в каждой ее точке можно так выбрать единичную нормаль, что она будет пределом соответствующим образом выбранных в окрестности этой точки единичных нормалей двух склеивающихся поверхностей) у склеенных поверхностей могут возникнуть качественно новые особенности: в отличие от параметрически заданных поверхностей в этом случае не всегда на всей поверхности можно выбрать непрерывную единичную нормаль. Примером такой поверхности является так называемый лист Мёбиуса *). Его можно получить, взяв прямоугольную полоску бумаги $ABCD$, один раз перекрутив ее вокруг оси симметрии MN, параллельной сторонам BC и AD и склеив ребро AB с CD (рис. 205). Правда, при таком способе образования лист Мёбиуса получается в результате склеивания поверхности самой с собой. Однако нетрудно получить его и склеиванием, описанным в определении 22, двух прямоугольников $ABEF$ и $FECD$ (см. рис. 205).

Одной из характерных особенностей листа Мёбиуса является то, что у него имеется лишь одна «сторона»: его невозможно, как например боковую поверхность цилиндра, покрасить, скажем, с одной стороны красной, а с другой синей краской. Кроме того,

*) А. Ф. Мёбиус (1790—1868) — немецкий математик и астроном.

на листе Мёбиуса нельзя выбрать единичную нормаль, которая являлась бы непрерывной функцией точки пространства.

Все приведенные соображения делают естественным попытаться дать такое определение ориентации поверхности, для которого поверхности, например, типа поверхности параллелепипеда оказались бы ориентированными, а поверхности типа листа Мёбиуса — неориентированными.

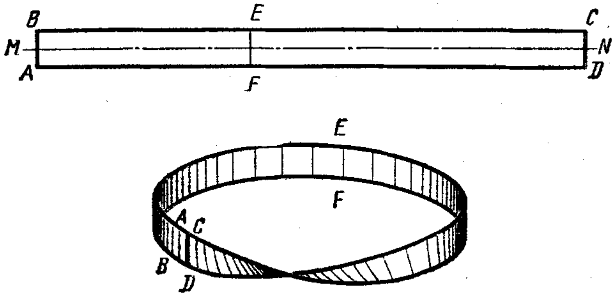


Рис. 205

Обратим внимание на то, что лист Мёбиуса может являться носителем параметрически заданной гладкой поверхности с кратными точками, и эта поверхность, как всякая гладкая параметрически заданная поверхность, будет ориентированной. Это, конечно, не имеет никакого отношения к неориентируемости самого листа Мёбиуса.

50.11. ВТОРОЙ ПОДХОД К ПОНЯТИЮ ОРИЕНТАЦИИ ПОВЕРХНОСТИ

Перейдем к описанию другого подхода к понятию ориентации, основанного на склеивании поверхностей, края которых суть кривые. Пусть $S=\{\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(u, v);\ (u, v)\in\bar{D}\}$ — гладкая поверхность, краем которой является кривая. Положительная ориентация кривой $\partial D=\{u(t),\ v(t);\ a\leqslant t\leqslant b\}$ (т. е. ориентация против часовой стрелки на плоскости u, v с правой системой координат) в силу отображения $r(u(t),\ v(t))$, $a\leqslant t\leqslant b$, порождает вполне определенную ориентацию края ∂S поверхности S. Эта ориентация края ∂S поверхности S называется согласованной с ориентацией

$$\boldsymbol{\nu}=\frac{\boldsymbol{r}_u\times\boldsymbol{r}_v}{|\boldsymbol{r}_u\times\boldsymbol{r}_v|}$$

(см. определение 20) поверхности S.

Естественность этого определения можно пояснить следующим образом. Рассмотрим явно заданную поверхность $S: z=f(x,\ y)$,

$(x, y) \in \bar{D}$. Для нее (см. (50.10), (50.11) и (50.26))

$$\mathbf{v} = \left(-\frac{f_x}{\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}},\ -\frac{f_y}{\sqrt{1+f_y^2+f_y^2}},\ \frac{1}{\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}}\right).$$

Следовательно, $\cos\widehat{\mathbf{v}\mathbf{k}} = \frac{1}{\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}} > 0$, т. е. вектор нормали $\mathbf{v}$ образует с осью Oz острый угол и поэтому согласован с положительной ориентацией края ∂S поверхности S по правилу штопора: ориентация контура ∂S соответствует направлению вращения ручки штопора, а направление нормали $\mathbf{v}$ — движению самого штопора (рис. 206).

Очевидно, что если ориентация $\mathbf{v}$ рассматриваемой гладкой поверхности S согласована с ориентацией ее края ∂S, то ориентация $-\mathbf{v}$ согласована с противоположной ориентацией кривой ∂S. Таким образом, задание ориентации $\mathbf{v}$ гладкой поверхности равносильно заданию ориентации кривой ∂S, являющейся ее краем. Поэтому ориентированный край ∂S гладкой поверхности S будем так же как и непрерывную единичную нормаль $\mathbf{v}$ называть *ориентацией поверхности* S.

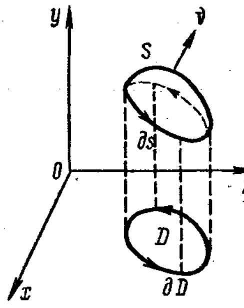


Рис. 206

Для негладкой параметрически заданной поверхности, краем которой является контур, его ориентацию можно принять за исходное определение ориентации самой поверхности. Пусть S_1 и S_2 — две гладкие поверхности, у которых края суть кривые, и пусть эти две поверхности склеены (в смысле определения 22) по кривым $\gamma_1, \ldots, \gamma_m$, являющимся частями краев поверхностей S_1 и S_2. Ориентации ∂S_1 и ∂S_2 поверхностей S_1 и S_2 называются *согласованными*, если каждая из них порождает на склеивающихся кривых $\gamma_1, \ldots, \gamma_m$ противоположные ориентации.

Определение 24. *Поверхность S, склеенная из поверхностей $S_1, \ldots, S_m$ называется ориентируемой, если существуют такие ориентации $\partial S_1, \ldots, \partial S_m$ краев поверхностей $S_1, \ldots, S_m$, что для любых двух соседних поверхностей S_i и S_j их ориентации ∂S_i и ∂S_j согласованы.*

Совокупность таких ориентаций, если она существует, называется *ориентацией поверхности* S.

Если указанной совокупности ориентаций ∂S_i не существует, то поверхность S называется *неориентируемой*.

Если $\partial S_1, \ldots, \partial S_m$ является ориентацией поверхности $S = \{S_i\}$, то совокупность противоположных ориентаций также является ориентацией поверхности S, называемой *противоположной данной*.

Можно показать, что если поверхность S ориентируема, то никаких других ориентаций, кроме двух указанных, у нее нет. Одна из этих двух ориентаций (произвольно какая) обычно называется положительной, а другая — отрицательной.

Аналогично ранее рассмотренному в п. 50.8 случаю ориентируемая поверхность, у которой фиксирована одна из ее ориентаций, называется *ориентированной*. При этом та из ориентированных поверхностей, ориентация которой названа положительной, обозначается через S^+, а противоположно ориентированная — через S^-.

Край ориентированной склеенной поверхности $S=\{S_i\}$, как край всякой склеенной поверхности, состоит, согласно сказанному выше, из конечного числа замкнутых контуров. Каждый из этих контуров в свою очередь представляет собой объединение конечного числа кривых, каждая из которых является частью одного из контуров ∂S_i, а именно такой частью, что все ее точки, кроме быть может концевых, не склеиваются с точками других краев ∂S_j. Поэтому заданная согласованная ориентация склеенной ориентируемой поверхности $S=\{S_i\}$ порождает определенные ориентации (т. е. порядки точек) на указанных кривых. Можно показать, что эти ориентации, вместе взятые, составляют ориентации всех контуров, входящих в край ∂S склеенной поверхности S. Совокупность этих ориентаций контуров, составляющих край ∂S поверхности S, называется *ориентацией* этого *края*, порожденной заданной ориентацией поверхности S, или, что то же, согласованной с ней.

Обратим внимание на то, что в определении 24 ориентации поверхности не предполагалось даже дифференцируемости склеиваемых поверхностей $S_1, \ldots, S_m$.

Если поверхность S склеена из гладких поверхностей $S_1, \ldots, S_m$, то для задания ее ориентации можно задать на каждой поверхности $S_1, \ldots, S_m$ непрерывные единичные нормали таким образом, чтобы согласованные с ними ориентации ∂S_i краев поверхностей S_i были согласованы между собой в смысле определения 24, т. е. являлись ориентацией поверхности S (см. рис. 207).

Для того, чтобы при таком задании ориентации узнать, совпадают или нет две ориентации, достаточно проверить это лишь в одной произвольной точке: если в ней нормали совпадают, то они совпадают и всюду, а если они в этой точке не совпадают, т. е. противоположны, то они и всюду противоположны, поскольку, как выше отмечалось, существуют только две ориентации заданной поверхности.

Однако в случае кусочно-гладкой поверхности уже нельзя ввести понятие положительной ориентации, используя заданные представления склеиваемых гладких поверхностей и беря на них единичные нормали по формуле (50.26), так как эти ориентации могут оказаться несогласованными. Поэтому в случае кусочно-гладких поверхностей следует всегда конкретно оговаривать, что именно подразумевается в данном случае под ориентированными поверхностями S^+ и S^- заданной поверхности S.

Можно показать, что всякая кусочно-гладкая поверхность, являющаяся границей некоторой области трехмерного пространства, ориентируема. При этом одна из ориентаций состоит из единичных нормалей, направленных от поверхности в область — так называемые *внутренние нормали*, а другая состоит из единичных нормалей, направленных от поверхности наружу от области — так называемые *внешние нормали*. Примером такой поверхности является сфера. В качестве ее ориентации можно взять, например, единичные нормали, направленные по радиусу от точки сферы к центру (рис. 208).

Рис. 207

Примером неориентируемой поверхности (в смысле определения 24) является лист Мёбиуса.

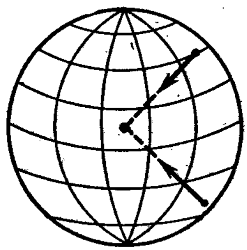


Рис. 208.

Иногда ориентируемые кусочно-гладкие поверхности называют также *двусторонними поверхностями*: они имеют две «стороны», соответствующие двум выборам единичных нормалей, задающим две ее ориентации. Соответственно неориентируемые поверхности называются *односторонними*. Оправдание этого термина было пояснено в п. 50.10 на примере листа Мёбиуса.

Мы не будем останавливаться на математизации всех описанных наглядных соображений и доказательстве высказанных утверждений. Это потребовало бы методов, изучение которых выходит за рамки настоящего курса. Упомянутые выше без доказательства общие утверждения по существу не используются в дальнейшем изложении. В каждом же конкретном случае, о котором будет идти речь, можно будет всегда непосредственно указать, какая именно ориентация рассматривается в данном случае.

Упражнения. 17. Доказать, что прямой круговой цилиндр является кусочно-гладкой поверхностью без края.

18. Пусть заданы вектор $\boldsymbol{\tau}$ и кривая $\gamma = \{\rho(u),\ a \leqslant u \leqslant b\}$. *Цилиндрической поверхностью* S с образующей γ и направляющей, параллельной вектору $\boldsymbol{\tau}$, называется поверхность, заданная представлением вида

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u,\ v) \overset{\mathrm{def}}{=} \rho(u) + v\boldsymbol{\tau},\quad a \leqslant u \leqslant b,\quad c \leqslant v \leqslant d.$$

Доказать, что если кривая γ — кусочно-гладкая, то и поверхность S кусочно-гладкая.

§ 51. ПОВЕРХНОСТНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

В этом и следующих параграфах будут рассматриваться только поверхности, задаваемые параметрическими представлениями, и притом только гладкие (см. определение 16 в § 50) и кусочно-гладкие (см. определение 23 в § 50).

51.1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ И СВОЙСТВА ПОВЕРХНОСТНЫХ ИНТЕГРАЛОВ

Пусть задана гладкая поверхность S, причем

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(u, v)= \\ =\{x=x(u, v),\ y=y(u, v),\ z=z(u, v);\ (u, v)\in\bar{D}\} \tag{51.1}$$

— ее представление, точнее, непрерывно дифференцируемое представление без особых точек, D — квадрируемая плоская область и, как обычно, E, G и F — коэффициенты первой квадратичной формы поверхности S. Пусть, далее, на множестве точек $r(u, v)$ поверхности S задана функция Φ, т. е. функция $\Phi(r(u, v))=\Phi(x(u, v),\ y(u, v),\ z(u, v))$. Иногда функцию Φ будем обозначать также через $\Phi(x, y, z)$ (ср. п. 47.1).

Определение 1. *Интеграл* $\iint\limits_S \Phi(x, y, z)\,dS$ *определяется равенством* (*см.* (50.24))

$$\iint\limits_S \Phi(x, y, z)\,dS= \\ =\iint\limits_D \Phi(x(u, v),\ y(u, v),\ z(u, v))\sqrt{EG-F^2}\,du\,dv. \tag{51.2}$$

Он называется *поверхностным интегралом первого рода.*

При определенных ограничениях, налагаемых на функцию Φ, интеграл (51.2) существует. Так, например, он существует для всякой непрерывной на гладкой поверхности $S=\{r(u, v),\ (u, v)\in\bar{D}\}$ функции Φ, т. е. для непрерывной на замкнутой квадрируемой области $\bar{D}$ функции $\Phi(r(u, v))$. В самом деле, в этом случае согласно определению 1 интеграл

$$\iint\limits_S \Phi(x, y, z)\,dS$$

сводится к интегралу от непрерывной на $\bar{D}$ функции, который, как известно (см. п. 44.4), существует. Более общие условия существования поверхностного интеграла первого рода могут быть получены из соответствующих условий существования кратных интегралов (см. п. 44.4), примененных к интегралу, стоящему в правой части равенства (51.2).

Пусть для простоты функция Φ непрерывна на гладкой поверхности S и пусть $\boldsymbol{\rho}=\boldsymbol{\rho}(u_1, v_1)=(\varphi(u_1, v_1),\ \psi(u_1, v_1),\ \chi(u_1, v_1))$ — другое представление этой поверхности, которое задано на замыкании $\bar{D}_1$ квадрируемой области $\bar{D}_1$ и для которого преобразование (50.14) параметров u, v в u_1, v_1 взаимно однозначно и непрерывно дифференцируемо на $\bar{D}$ и имеет на $\bar{D}$ не равный нулю якобиан. Если E_1, F_1 и G_1 суть коэффициенты первой квадратичной формы, соответствующие этому представлению, то

$$\iint_D \Phi(x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \sqrt{EG-F^2}\, du\, dv =$$

$$= \iint_{D_1} \Phi(\varphi(u_1, v_1), \psi(u_1, v_1), \chi(u_1, v_1)) \sqrt{E_1G_1-F_1^2}\, du_1\, dv_1. \qquad (51.3)$$

Чтобы в этом убедиться, достаточно в интеграле, стоящем в правой части этого равенства, выполнить замену переменных (50.14) и воспользоваться формулой (50.19). Таким образом, поверхностный интеграл первого рода не зависит от выбора представления поверхности. Поверхностные интегралы первого рода встречаются в различных вопросах математики и ее приложений. Например, площадь поверхности (см. п. 50.7) выражается с помощью поверхностного интеграла первого рода: если функция $\Phi(x, y, z)$ тождественно равна единице на поверхности S, то формула (51.2) превращается в формулу для площади μS поверхности S (см. (50.23)):

$$\mu S = \iint_D \sqrt{EG-F^2}\, du\, dv = \iint_S dS.$$

Если $\Phi(x, y, z)$ — плотность некоторой массы, распределенной по поверхности S, то интеграл (51.2) дает величину массы всей поверхности.

Пусть теперь $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$ и $\boldsymbol{k}$ — как обычно, единичные координатные векторы,

$$\boldsymbol{n} = \boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{vmatrix} = \frac{\partial(y, z)}{\partial(u, v)} \boldsymbol{i} + \frac{\partial(z, x)}{\partial(u, v)} \boldsymbol{j} + \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \boldsymbol{k} \qquad (51.4)$$

и

$$\boldsymbol{\nu} = \boldsymbol{n}/|\boldsymbol{n}|, \qquad (51.5)$$

причем, согласно нашим предположениям, нормаль $\boldsymbol{\nu}$ непрерывно продолжаема на границу области D.

Поверхность S, на которой выбрана единичная нормаль $\boldsymbol{\nu}$, обозначим через S^+, а ту же поверхность, на которой выбрана нормаль $-\boldsymbol{\nu}$, — через S^- (очевидно, $\boldsymbol{\nu}$ и $-\boldsymbol{\nu}$ суть две ориентации поверхности S). Подчеркнем, что S^+ и S^- определяются самой поверхностью «с точностью до ориентации» и зависят от выбора представления поверхности.

Определение 2. *Поверхностные интегралы*

$$\iint_{S^+} \Phi(x, y, z)\, dx\, dy \quad и \quad \iint_{S^-} \Phi(x, y, z)\, dx\, dy, \qquad (51.6)$$

называемые поверхностными интегралами второго рода (при заданном представлении поверхности), определяются согласно формулам

$$\iint\limits_{S+} \Phi(x,\ y,\ z)\,dx\,dy = \iint\limits_{S} \Phi(x,\ y,\ z)\cos(\widehat{\mathbf{v},\ \boldsymbol{k}})\,dS,$$
$$\iint\limits_{S-} \Phi(x,\ y,\ z)\,dx\,dy = \iint\limits_{S} \Phi(x,\ y,\ z)\cos(\widehat{-\mathbf{v},\ \boldsymbol{k}})\,dS, \qquad (51.7)$$

где $(\widehat{\mathbf{v},\ \boldsymbol{k}})$ *и* $(\widehat{-\mathbf{v},\ \boldsymbol{k}})$ — *углы между векторами* $\mathbf{v}$, $\boldsymbol{k}$ *и, соответственно, между* $-\mathbf{v}$, $\boldsymbol{k}$.

За основу этого определения взято интуитивное соображение о том, что элемент площади dS данной поверхности (см. (50.24)), помноженный на косинус угла, который он «составляет» с плоскостью xOy, приближенно равен элементу площади $dx\,dy$ этой плоскости (рис. 209), как было бы, если бы речь шла о площадях плоской фигуры и ее проекции.

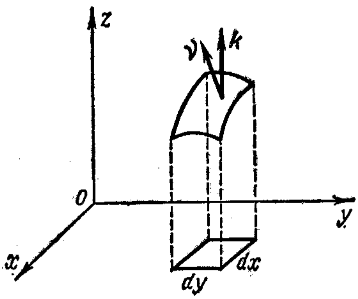


Рис. 209

Интегралы (51.6) будем обозначать общим символом

$$\iint\limits_{S} \Phi(x,\ y,\ z)\,dx\,dy. \qquad (51.8)$$

Так как $(\widehat{\mathbf{v},\ \boldsymbol{k}}) + (\widehat{-\mathbf{v},\ \boldsymbol{k}}) = \pi$ и, следовательно, $\cos(\widehat{-\mathbf{v},\ \boldsymbol{k}}) = -\cos(\widehat{\mathbf{v},\ \boldsymbol{k}})$, то из (51.7) получим

$$\iint\limits_{S-} \Phi(x,\ y,\ z)\,dx\,dy = -\iint\limits_{S+} \Phi(x,\ y,\ z)\,dx\,dy. \qquad (51.9)$$

Аналогично поверхностным интегралам первого рода, поверхностные интегралы второго рода заведомо существуют, если функция Φ непрерывна на поверхности S. Поскольку поверхностные интегралы первого рода не зависят от выбора представления поверхности, то поверхностные интегралы второго рода (51.6) не зависят от выбора представления ориентированной поверхности (иначе говоря, не зависят от выбора представления поверхности, сохраняющего ее заданную ориентацию), но, конечно (51.8), при данной поверхности S и данной функции Φ зависят, вообще говоря, от выбора непрерывной нормали $\mathbf{v}$ на поверхности, т. е. от выбора ориентации поверхности (см. 51.9)).

Выведем формулы, удобные для вычисления поверхностных интегралов второго рода. Предварительно заметим, что из (51.4), (51.5) и (50.22) следует, что

$$\cos(\widehat{\mathbf{v}, \boldsymbol{k}}) = \mathbf{v}\boldsymbol{k} = \frac{\boldsymbol{n}\boldsymbol{k}}{|\boldsymbol{n}|} = \frac{(\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v)\boldsymbol{k}}{|\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v|} = \frac{\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}}{|\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v|} = \frac{\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}}{\sqrt{EG - F^2}},$$

поэтому

$$\iint\limits_S \Phi(x, y, z)\,dx\,dy = \iint\limits_S \Phi(x, y, z)\cos(\widehat{\mathbf{v}\boldsymbol{k}})\,dS =$$

$$= \iint\limits_D \Phi[x(u, v), y(u, v), z(u, v)]\cos(\widehat{\mathbf{v}\boldsymbol{k}})\sqrt{EG - F^2}\,du\,dv =$$

$$= \iint\limits_D \Phi[x(u, v), y(u, v), z(u, v)]\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}\,du\,dv.$$

Таким образом, опуская у функций обозначения аргументов, имеем

$$\iint\limits_{S^+} \Phi\,dx\,dy = \iint\limits_D \Phi\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}\,du\,dv \tag{51.10}$$

и, согласно (51.9),

$$\iint\limits_{S^-} \Phi\,dx\,dy = -\iint\limits_D \Phi\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}\,du\,dv = \iint\limits_D \Phi\frac{\partial(y, x)}{\partial(u, v)}\,du\,dv. \tag{51.11}$$

Иногда интеграл $\iint\limits_{S^+} \Phi\,dx\,dy$ обозначается через $\iint\limits_S \Phi\,dx\,dy$; в этом случае интеграл $\iint\limits_{S^-} \Phi\,dx\,dy$ записывается в виде $\iint\limits_S \Phi\,dy\,dx$.

Таким образом,

$$\iint\limits_S \Phi\,dx\,dy = \iint\limits_D \Phi\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}\,du\,dv,$$

$$\iint\limits_S \Phi\,dy\,dx = \iint\limits_D \Phi\frac{\partial(y, x)}{\partial(u, v)}\,du\,dv.$$

Если поверхность S задана явно непрерывно дифференцируемой функцией $z = f(x, y)$, $(x, y) \in \bar{D}$, то формула (51.2) принимает вид (см. (50.25))

$$\iint\limits_S \Phi(x, y, z)\,dS = \iint\limits_D \Phi(x, y, f(x, y))\sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}\,dx\,dy,$$

а формулы (51.10) и (51.11) — вид:

$$\iint\limits_{S^+} \Phi(x, y, z)\,dx\,dy = \iint\limits_D \Phi(x, y, f(x, y))\,dx\,dy,$$

$$\iint\limits_{S^-} \Phi(x, y, z)\,dx\,dy = -\iint \Phi(x, y, f(x, y))\,dx\,dy.$$

Здесь S^+ называется «верхней стороной поверхности S» (она соответствует положительной ориентации $\mathbf{v}$ поверхности S при заданном ее представлении $z=f(x, y)$, а S^- — «*нижней стороной поверхности* S» (она соответствует отрицательной ориентации $-\mathbf{v}$). Эти названия объясняются тем обстоятельством, что в случае явного задания поверхности

$$\boldsymbol{n}=\begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 1 & 0 & f_x \\ 0 & 1 & f_y \end{vmatrix} = -f_x\boldsymbol{i}-f_y\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k},$$

и, следовательно,

$$\mathbf{v}=\left(-\frac{f_x}{\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}},\ -\frac{f_y}{\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}},\ \frac{1}{\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}}\right),$$

поэтому

$$\cos(\widehat{\mathbf{v}, \boldsymbol{k}})=\frac{1}{\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}}>0.$$

Отсюда видно, что угол между векторами $\mathbf{v}$ и k — острый, т. е. вектор $\mathbf{v}$ направлен «вверх» от рассматриваемой поверхности (см. рис. 209).

Подобно определению (51.7) определяются и другие поверхностные интегралы второго рода:

$$\begin{aligned}
&\iint\limits_{S^+}\Phi(x, y, z)\,dy\,dz=\iint\limits_{S}\Phi(x, y, z)\cos(\widehat{\mathbf{v}, \boldsymbol{i}})\,dS,\\
&\iint\limits_{S^-}\Phi(x, y, z)\,dy\,dz=\iint\limits_{S}\Phi(x, y, z)\cos(\widehat{-\mathbf{v}, \boldsymbol{i}})\,dS,\\
&\iint\limits_{S^+}\Phi(x, y, z)\,dz\,dx=\iint\limits_{S}\Phi(x, y, z)\cos(\widehat{\mathbf{v}, \boldsymbol{j}})\,dS,\\
&\iint\limits_{S^-}\Phi(x, y, z)\,dz\,dx=\iint\limits_{S}\Phi(x, y, z)\cos(\widehat{-\mathbf{v}, \boldsymbol{j}})\,dS.
\end{aligned}\tag{51.12}$$

Для этих интегралов аналогично проделанному выше получаем

$$\begin{aligned}
&\iint\limits_{S^-}\Phi\,dy\,dz=-\iint\limits_{S^+}\Phi\,dy\,dz,\\
&\iint\limits_{S^-}\Phi\,dz\,dx=-\iint\limits_{S^+}\Phi\,dz\,dx,\\
&\iint\limits_{S^+}\Phi\,dy\,dz=\iint\limits_{D}\Phi\frac{\partial(y, z)}{\partial(u, v)}\,du\,dv,\\
&\iint\limits_{S^+}\Phi\,dz\,dx=\iint\limits_{D}\Phi\frac{\partial(z, x)}{\partial(u, v)}\,du\,dv.
\end{aligned}\tag{51.13}$$

Различные задачи, приводящие к понятию поверхностного интеграла второго рода, будут рассмотрены в § 52.

51.2. ПОВЕРХНОСТНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ КАК ПРЕДЕЛЫ ИНТЕГРАЛЬНЫХ СУММ

Поверхностные интегралы могут быть получены также и как пределы соответствующих интегральных сумм. Пусть S — гладкая поверхность и $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(u, v)$, $(u, v)\in\bar{D}$, — ее представление, D — квадрируемая область. Будем для простоты предполагать, что у области D существуют сколь угодно мелкие разбиения, элементы которых — кварируемые области. Только такие разбиения и будут рассматриваться в настоящем пункте. Возьмем какое-либо из указанных разбиений $\tau=\{D_i\}_{i=1}^{i=i_0}$ области D. Обозначим через S_i, $i=1, \ldots, i_0$, поверхность, задаваемую представлением $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(u, v)$, $(u, v)\in\bar{D}_i$. Очевидно, что все S_i также гладкие поверхности (система $\tau_S=\{S_i\}_{i=1}^{i=i_0}$ называется *разбиением поверхности* S). Пусть функция $\Phi(r(u, v))=\Phi(x(u, v), y(u, v), z(u, v))$ непрерывна на $\bar{D}$ и $(u_i, v_i)\in\bar{D}_i$, $\Phi_i=\Phi(r(u_i, v_i))$. Обозначим через $\cos_i(\widehat{\boldsymbol{\nu}, \boldsymbol{k}})$ косинус угла между нормалью $\boldsymbol{\nu}$ и ортом $\boldsymbol{k}$ в точке $r(u_i, v_i)$ данной поверхности и положим

$$\sigma_\tau^{(1)}=\sum_{i=1}^{i_0}\Phi_i\mu S_i,$$

$$\sigma_\tau^{(2)}=\sum_{i=1}^{i_0}\Phi_i\cos_i(\widehat{\boldsymbol{\nu}, \boldsymbol{k}})\,\mu S_i;$$

тогда

$$\lim_{\delta_\tau\to 0}\sigma_\tau^{(1)}=\iint_S\Phi(x, y, z)\,dS, \tag{51.14}$$

$$\lim_{\delta_\tau\to 0}\sigma_\tau^{(2)}=\iint_S\Phi(x, y, z)\,dx\,dy, \tag{51.15}$$

где, как всегда, δ_τ — мелкость разбиения τ. Действительно,

$$\iint_S\Phi(x, y, z)\,dS=\iint_D\Phi(r(u, v))\sqrt{FG-F^2}\,du\,dv=$$
$$=\sum_{i=1}^{i_0}\iint_{D_i}\Phi(r(u, v))\sqrt{EG-F^2}\,du\,dv;$$

поскольку $\mu S_i=\iint_{D_i}\sqrt{EG-F^2}\,du\,dv$, то

$$\sigma_\tau^{(1)}=\sum_{i=1}^{i_0}\Phi_i\iint_{D_i}\sqrt{EG-F^2}\,du\,dv=$$
$$=\sum_{i=1}^{i_0}\iint_{D_i}\Phi(r(u_i, v_i))\sqrt{EG-F^2}\,du\,dv.$$

Обозначив теперь через $\omega(\delta;\ \Phi)$ модуль непрерывности функции Φ на замкнутой области $\bar{D}$, будем иметь

$$\left|\iint\limits_S \Phi(x,\ y,\ z)\,dS-\sigma_\tau^{(1)}\right|\leqslant$$

$$\leqslant\sum_{i=1}^{i_0}\iint\limits_{D_i}|\Phi(r(u,\ v))-\Phi(r(u_i,\ v_i))|\sqrt{EG-F^2}\,du\,dv\leqslant$$

$$\leqslant\omega(\delta_\tau,\ \Phi)\sum_{i=1}^{i_0}\mu S_i=\omega(\delta_\tau;\ \Phi)\,\mu S.$$

Перейдя в этом неравенстве к пределу при $\delta_\tau\to 0$ и заметив, что $\lim\limits_{\delta_\tau\to 0}\omega(\delta_\tau;\ \Phi)=0$, получим формулу (51.14).

Аналогично доказывается формула (5.15) (произведение $\Phi\cos(\widehat{\mathbf{v},\ \boldsymbol{k}})$ непрерывно, а значит, и равномерно непрерывно на $\bar{D}$). Подобные утверждения справедливы и для интегралов второго рода других типов (15.12).

Упражнение 1. Доказать формулу (51.15).

51.3. ПОВЕРХНОСТНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ ПО КУСОЧНО-ГЛАДКИМ ПОВЕРХНОСТЯМ

Определим поверхностные интегралы по кусочно-гладким поверхностям.

Определение 3. *Пусть* $S=\{S_i\}_{i=1}^{i=k}$ *кусочно-гладкая поверхность (см. определение* 23 *в п.* 50.9) *и* $\Phi(x,\ y,\ z)$ — *функция, определенная на множестве точек поверхности* S. *Тогда, по определению,*

$$\iint\limits_S\Phi\,dS=\sum_{i=1}^{k}\iint\limits_{S_i}\Phi\,dS_i. \tag{51.16}$$

Определение 4. *Если кусочно-гладкая поверхность* $S=\{S_i\}_{i=1}^{i=k}$ *ориентируема и* $S^+=\{S_i^+\}_{i=1}^{i=k}$ — *одна из соответствующих ей ориентированных поверхностей (обозначения см. в п.* 50.11), *то, по определению,*

$$\iint\limits_{S^+}\Phi\,dx\,dy=\sum_{i=1}^{k}\iint\limits_{S_i^+}\Phi\,dx\,dy,\quad \iint\limits_{S^+}\Phi\,dy\,dz=\sum_{i=1}^{k}\iint\limits_{S_i^+}\Phi\,dy\,dz,$$

$$\iint\limits_{S^+}\Phi\,dz\,dx=\sum_{i=1}^{k}\iint\limits_{S_i^+}\Phi\,dz\,dx. \tag{51.17}$$

Конечно, это определение содержательно только в том случае, когда интегралы, стоящие в правых частях равенств, существуют. Для этого, прежде всего, представления поверхностей S_i должны быть заданы на квадрируемых областях.

Аналогично в рассматриваемом случае определяются и интегралы по поверхности $S^-=\{S_i^-\}_{i=1}^{i=k}$.

Мы остановились только на тех свойствах поверхностных интегралов, которые связаны со спецификой их определения, с поверхностью, по которой, как говорят, производится интегрирование. Естественно, что, поскольку они сводятся к обычным кратным интегралам, на них переносятся и различные их свойства (линейность, интегральная теорема о среднем и т. п.).

Замечание. Условия, налагаемые на отображения, осуществляющие допустимые преобразования параметров для гладких поверхностей, сформулированные нами выше (см. определения 10 в п. 50.2 и 16 в п. 50.4), часто оказываются слишком жесткими (ср. с подобным обстоятельством для кривых в п. 47.3). Например, при таком подходе представления части шара единичного радиуса с центром в начале координат, лежащей в первом октанте:

$$z=\sqrt{1-x^2-y^2},\quad \text{где}\quad x^2+y^2\leqslant 1,\quad x\geqslant 0,\quad y\geqslant 0$$

и

$$x=r\cos\psi\cos\varphi,\quad y=r\cos\psi\sin\varphi,\quad z=r\sin\psi,$$

где $0\leqslant\varphi\leqslant\frac{\pi}{2}$, $0\leqslant\psi\leqslant\frac{\pi}{2}$ не эквивалентны. Более того, первое представление не определяет в указанном смысле непрерывно дифференцируемую поверхность, поскольку частные производные функции $z=\sqrt{1-x^2-y^2}$ не ограничены в области $D=\{(x,\ y): x^2+y^2<1,\ x>0,\ y>0\}$ и не могут быть непрерывно продолжены на ее замыкание $\bar{D}$. Поэтому естественно расширить определение непрерывно дифференцируемой поверхности. Сделаем это следующим образом.

Рассмотрим совокупность представлений $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(u,\ v)$, $(u,\ v)\in\bar{D}$, непрерывных на $\bar{D}$ и непрерывно дифференцируемых на D. Допустимыми преобразованиями параметров $u=\varphi(u_1,\ v_1)$, $v=\psi(u_1,\ v_1)$ $(u_1,\ v_1)\in\bar{D}_1$, будем называть всякое взаимно однозначное непрерывное отображение замыкания $\bar{D}_1$ плоской области D_1 на $\bar{D}$, переводящее внутренние точки во внутренние, граничные в граничные, непрерывно дифференцируемое и имеющее не равный нулю якобиан в D. Как всегда, два представления называются эквивалентными, если можно перейти от одного к другому с помощью допустимого преобразования параметров.

Мы скажем, что класс эквивалентных представлений указанного типа задает непрерывно дифференцируемую поверхность, если в этом классе существует по крайней мере одно представление $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(u,\ v)$, $(u,\ v)\in\bar{D}$, непрерывно дифференцируемое вплоть до границы области D.

Непрерывно дифференцируемая поверхность называется гладкой, если $\boldsymbol{r}_u\times\boldsymbol{r}_v\neq 0$ в $\bar{D}$ при некотором ее представлении $\boldsymbol{r}=$

$=\boldsymbol{r}(u, v)$, $(u, v) \in \bar{D}$. Площадь непрерывно дифференцируемой поверхности с представлением $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(u, v)$, $(u, v) \in \bar{D}$, определяется как значение интеграла

$$\iint\limits_{D} |\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v|\, du\, dv,$$

который, быть может, является и несобственным. Чтобы убедиться в его существовании, достаточно выполнить замену переменного с помощью допустимого преобразования, переводящего данное представление в представление, непрерывно дифференцируемое вплоть до границы области.

Аналогичным образом ослабляются требования, налагаемые на допустимые преобразования параметра и в случае ориентированных поверхностей.

При таких определениях остаются в силе все данные выше определения поверхностных интегралов и их свойства, естественно с учетом того, что в этом случае при некоторых представлениях поверхностей мы можем получить несобственные интегралы. Остаются справедливыми и все относящиеся к поверхностным интегралам теоремы, доказываемые в следующем параграфе; мы не будем однако специально останавливаться на этом.

Упражнения. 2. Пусть S — гладкая поверхность в новом расширенном смысле и Φ — функция, непрерывная на S. Доказать, что существуют интегралы

$$\int\limits_{S} \Phi(x, y, z)\, dx\, dy, \qquad \int\limits_{S} \Phi(x, y, z)\, dz\, dx, \qquad \int\limits_{S} \Phi(x, y, z)\, dy\, dz.$$

Вычислить следующие поверхностные интегралы первого рода:

3. $\iint\limits_{S} x^2y^2\, dS$; $S=\{(x, y, z)\colon x^2+y^2+z^2=R^2,\ z \geqslant 0\}$.

4. $\iint\limits_{S} \dfrac{dS}{x^2+y^2+z^2}$; $S=\{(x, y, z)\colon x^2+y^2=R^2,\ 0 \leqslant z \leqslant H\}$.

5. $\iint\limits_{S} \dfrac{dS}{r}$; S — часть поверхности параболоида $z=xy$, отсекаемая цилиндром $x^2+y^2=R^2$, а r — расстояние текущей точки поверхности S от оси Oz.

Вычислить следующие поверхностные интегралы второго рода:

6. $\iint\limits_{S} z\, dx\, dy$, где S — внешняя сторона эллипсоида $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$.

7. $\iint\limits_{S} yz\, dx\, dy+zx\, dy\, dz+xy\, dz\, dx$, где S — внешняя сторона поверхности, состоящей из части боковой поверхности цилиндра $x^2+y^2=R^2$ и частей плоскостей

$$x=0,\quad y=0,\quad z=0,\quad z=H,\quad \text{причем}\quad x, y, z \geqslant 0.$$

§ 52. СКАЛЯРНЫЕ И ВЕКТОРНЫЕ ПОЛЯ

52.1. ОПРЕДЕЛЕНИЯ

Вместо терминов «числовая функция точки», «вектор-функция точки» употребляются и равнозначные им: *скалярное поле, векторное* поле. Эта терминология подчеркивает, что значения рассматриваемых функций зависят именно от точек пространства (в которых эти функции определены), а не от их координат, при выборе той или иной системы координат.

Употребляя эту терминологию, можно сказать, например, что всякое скалярное поле $u=u(M)$, определенное и дифференцируемое в некоторой области G, порождает векторное поле его градиентов (см. п. 20.6 и п. 50.5, стр. 245): $\boldsymbol{a}(M)=\operatorname{grad} u$.

Определение 1. *Пусть в области* G *) *задано векторное поле* $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}(M)$ *и существует определенная в* G *функция* $u=u(M)$, *такая, что* $\boldsymbol{a}(M)=\operatorname{grad} u(M)$. *Тогда функция* $u(M)$ *называется потенциальной функцией, или потенциалом данного векторного поля* **).

Вводя символ набла, $\nabla=\boldsymbol{i}\frac{\partial}{\partial x}+\boldsymbol{j}\frac{\partial}{\partial y}+\boldsymbol{k}\frac{\partial}{\partial z}$ (см. п. 20.7), можно написать:

$$\operatorname{grad} u=\nabla u,$$

где справа стоит «произведение» символического вектора набла на числовую функцию u.

Пусть, например, $\boldsymbol{E}(M)$ — напряженность электрического поля, созданного единичным отрицательным зарядом, помещенным в начале координат. Тогда в точке $M(y, x, z)$ вектор $\boldsymbol{E}(M)$ имеет, как это известно из физики, длину $1/r^2$, где $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$, и направлен от точки M к началу координат. Отсюда получается, что

$$\boldsymbol{E}(M)=\left(-\frac{x}{r^3},\ -\frac{y}{r^3},\ -\frac{z}{r^3}\right).$$

Электрический потенциал рассматриваемого поля, т. е. функция $u(M)=1/r$, является и потенциалом в указанном выше смысле, ибо $\operatorname{grad} u(M)=\boldsymbol{E}(M)$.

Рассмотрим снова векторное поле $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}(M)$, определенное в некоторой области G. Зафиксируем систему координат, тогда вектор-функцию $\boldsymbol{a}(M)$ можно рассматривать как функцию трех переменных — координат x, y, z точки M: $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}(x, y, z)$.

---

*) В этом параграфе для простоты рассматриваются только плоские или трехмерные области G.

**) Иногда в приложениях потенциал u определяется формулой $\boldsymbol{a}=-\operatorname{grad} u$.

Пусть $M_0=(x_0, y_0, z_0)\in G$ и задан единичный вектор $\boldsymbol{e}=(\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$. Проведем через точку M_0 прямую в направлении $\boldsymbol{e}$:

$$x=x_0+t\cos\alpha,\quad y=y_0+t\cos\beta,\quad z=z_0+t\cos\gamma,$$
$$-\infty<t<+\infty.$$

Определение 2. *Производная вектор-функции*

$$\boldsymbol{a}(x_0+t\cos\alpha,\ y_0+t\cos\beta,\ z_0+t\cos\gamma)$$

по t при $t=0$ (если она существует) называется производной вектор-функции $\boldsymbol{a}(M)$ по направлению $\boldsymbol{e}$ в точке M_0 и обозначается через $\frac{\partial\boldsymbol{a}}{\partial\boldsymbol{e}}$:

$$\frac{\partial\boldsymbol{a}(M_0)}{\partial\boldsymbol{e}}=\frac{d}{dt}\boldsymbol{a}(x_0+t\cos\alpha,\ y_0+t\cos\beta,\ z_0+t\cos\gamma)\big|_{t=0}.$$

По правилу дифференцирования сложной функции, опуская для простоты обозначения аргумента, получаем

$$\frac{\partial\boldsymbol{a}}{\partial\boldsymbol{e}}=\frac{\partial\boldsymbol{a}}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial\boldsymbol{a}}{\partial y}\cos\beta+\frac{\partial\boldsymbol{a}}{\partial z}\cos\gamma. \tag{52.1}$$

Полагая $\boldsymbol{e}\nabla=\cos\alpha\frac{\partial}{\partial x}+\cos\beta\frac{\partial}{\partial y}+\cos\gamma\frac{\partial}{\partial z}$ («скалярное произведение» вектора $\boldsymbol{e}$ и символического вектора ∇), перепишем формулу (52.1) в виде

$$\frac{\partial\boldsymbol{a}}{\partial\boldsymbol{e}}=(\boldsymbol{e}\nabla)\boldsymbol{a}.$$

Определение 3. *Если $\boldsymbol{b}=(b_x, b_y, b_z)$ — произвольный (не обязательно единичный) фиксированный вектор, то вектор*

$$(\boldsymbol{b}\nabla)\boldsymbol{a}=b_x\frac{\partial\boldsymbol{a}}{\partial x}+b_y\frac{\partial\boldsymbol{a}}{\partial y}+b_z\frac{\partial\boldsymbol{a}}{\partial z}$$

называется градиентом вектора $\boldsymbol{a}$ по вектору $\boldsymbol{b}$.

Если $\boldsymbol{b}=b\boldsymbol{b}_0$, где $|\boldsymbol{b}_0|=1$, то «формальными преобразованиями» получим

$$(\boldsymbol{b}\nabla)\boldsymbol{a}=(b\boldsymbol{b}_0\nabla)\boldsymbol{a}=b(\boldsymbol{b}_0\nabla)\boldsymbol{a}=b\frac{\partial\boldsymbol{a}}{\partial\boldsymbol{b}_0}.$$

Переходя к координатной записи, легко непосредственно убедиться в справедливости полученной формулы и показать, что с символом ∇ можно обращаться при вычислениях, как с настоящим вектором, не забывая, конечно, при этом, что, кроме этого, ∇ означает также и определенную операцию дифференцирования. Мы не будем здесь останавливаться на обосновании законности таких «формальных преобразований с символом ∇». Любая формула, полученная подобным образом, может быть, конечно, получена и без применения символа ∇ обычными обоснованными рассуждениями в координатах. Следует иметь в виду, однако, что применение символа ∇ часто весьма существенно сокращает выкладки.

Вернемся снова к исходному векторному полю $\boldsymbol{a}=(a_x, a_y, a_z)$ в области G.

Определение 4. *Пусть поле $\boldsymbol{a}(a_x, a_y, a_z)$ дифференцируемо в некоторой точке. Число $\frac{\partial a_x}{\partial x}+\frac{\partial a_y}{\partial y}+\frac{\partial a_z}{\partial z}$ называется дивергенцией поля в этой точке и обозначается через* $\operatorname{div}\boldsymbol{a}$, *т. е.*

$$\operatorname{div}\boldsymbol{a}=\frac{\partial a_x}{\partial x}+\frac{\partial a_y}{\partial y}+\frac{\partial a_z}{\partial z}. \tag{52.2}$$

Символически $\operatorname{div}\boldsymbol{a}$ может быть записана как скалярное произведение символа ∇ и вектора $\boldsymbol{a}$:

$$\operatorname{div}\boldsymbol{a}=\nabla\boldsymbol{a}$$

Определение 5. *Вектор с координатами*

$$\frac{\partial a_z}{\partial y}-\frac{\partial a_y}{\partial z},\quad \frac{\partial a_x}{\partial z}-\frac{\partial a_z}{\partial x},\quad \frac{\partial a_y}{\partial x}-\frac{\partial a_x}{\partial y} \tag{52.3}$$

называется вихрем, или ротором, векторного поля $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}(M)$ и обозначается $\operatorname{rot}\boldsymbol{a}$.

С помощью символа ∇ ротор можно записать в виде следующего векторного произведения:

$$\operatorname{rot}\boldsymbol{a}=\nabla\times\boldsymbol{a}=\begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ a_x & a_y & a_z \end{vmatrix} \tag{52.4}$$

Геометрический и физический смысл $\operatorname{div}\boldsymbol{a}$ и $\operatorname{rot}\boldsymbol{a}$ будет выяснен в дальнейшем.

Приведем пример формальных преобразований с символом ∇. Если за символом ∇ следует несколько членов, на один из которых он действует как оператор дифференцирования, а на другие нет, то для ясности будем обозначать этот член вертикальной стрелкой. Поясним это на примере.

Пусть f — скалярное, $\boldsymbol{a}$ — векторное поле, тогда

$$\operatorname{rot} f\boldsymbol{a}=\nabla\times f\boldsymbol{a}=\nabla\times f\overset{\downarrow}{\boldsymbol{a}}+\nabla\times\overset{\downarrow}{f}\boldsymbol{a}=$$
$$=f(\nabla\times\boldsymbol{a})+(\nabla f\times\boldsymbol{a})=f\operatorname{rot}\boldsymbol{a}+\operatorname{grad}f\times\boldsymbol{a}).$$

Введем еще некоторые определения, связанные с векторным полем $\boldsymbol{a}=(a_x, a_y, a_z)$ в области G.

Определение 6. *Пусть γ — замкнутая кусочно-гладкая кривая в области G. Интеграл*

$$\int_\gamma a_x\,dx+a_y\,dy+a_z\,dz.$$

называется циркуляцией векторного поля $\boldsymbol{a}=(a_x, a_y, a_z)$ *по кривой* γ *и обозначается* $\int\limits_\gamma \boldsymbol{a}\,d\boldsymbol{r}$, где $d\boldsymbol{r}=(dx, dy, dz)$.

Если γ — ориентированная гладкая кривая, $t=(\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$ — ее единичный касательный вектор, s — переменная длина дуги, а $\text{пр}_t\,\boldsymbol{a}$ — величина проекции вектора $\boldsymbol{a}$ на касательную, то

$$\int\limits_\gamma \boldsymbol{a}\,d\boldsymbol{r}=\int\limits_\gamma \text{пр}_t\,\boldsymbol{a}\,ds.$$

Действительно,

$$\int\limits_\gamma \boldsymbol{a}\,d\boldsymbol{r}=\int\limits_\gamma a_x\,dx+a_y\,dy+a_z\,dz=$$
$$=\int\limits_\gamma (a_x\cos\alpha+a_y\cos\beta+a_z\cos\gamma)\,ds=\int\limits_\gamma \boldsymbol{a}t\,ds=\int\limits_\gamma \text{пр}_t\,\boldsymbol{a}\,ds.$$

Определение 7. *Поле, циркуляция которого по любой замкнутой кусочно-гладкой кривой, лежащей в области* G, *равна нулю, называется потенциальным.*

Напомним, что в п. 47.8 было показано (см. лемму 2), что условие равенства нулю интеграла $\int\limits_\gamma P\,dx+Q\,dy$ по любому замкнутому контуру $\gamma\subset G$ равносильно тому, что $\int\limits_{AB} P\,dx+Q\,dy$ не зависит от пути интегрирования между точками A и B. При доказательстве этого утверждения нигде не использовалось, что кривая γ лежит в плоской области. Поэтому доказательство леммы 2, приведенное в п. 47.8, сохраняет свою силу и для криволинейных интегралов по пространственным кривым. Таким образом циркуляция $\int\limits_\gamma \boldsymbol{a}\,d\boldsymbol{r}=\int\limits_\gamma a_x\,dx+a_y\,dy+a_z\,dz$ *равна нулю по любому замкнутому кусочно-гладкому контуру* $\gamma\subset G$ *тогда и только тогда, когда интеграл* $\int\limits_{AB} a_x\,dx+a_y\,dy+a_z\,dz$ *не зависит от пути интегрирования*, т. е. от кривой с началом в точке A, концом в точке B и целиком лежащей в области G.

Рассмотрим в качестве примера плоское векторное поле, т. е. поле $\boldsymbol{a}=(P, Q)$, заданное на плоской области $G: P=P(x, y)$, $Q=Q(x, y)$. Вихрь этого поля имеет вид

$$\operatorname{rot}\boldsymbol{a}=\begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ P & Q & 0\end{vmatrix}=\boldsymbol{k}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right).$$

Теорема 4 п. 47.8 во вновь введенных терминах может быть перефразирована следующим образом. *Для односвязной плоской области* G *потенциальность поля, существование потенциальной* *функции и условие, что вихрь поля во всех точках равен нулю, эквивалентны.*

Определение 8. *Пусть S — некоторая ориентированная поверхность, лежащая в области G, $\boldsymbol{\nu}$ — единичный вектор нормали к поверхности, задающей ее ориентацию, и S^+ — поверхность S с указанной ориентацией. Интеграл*

$$\iint\limits_{S^+} \boldsymbol{a\nu}\, dS$$

называется потоком векторного поля через поверхность S и обозначается

$$\iint\limits_{S} \boldsymbol{a}\, \boldsymbol{dS},$$

где

$$\boldsymbol{dS} = \boldsymbol{\nu}\, dS \quad \left(\text{или } \iint\limits_{S} \boldsymbol{a}\, \boldsymbol{dS}^+,\ \boldsymbol{dS}^+ = \boldsymbol{\nu}\, \boldsymbol{dS}\right).$$

Очевидно, что $\boldsymbol{a\nu} = \text{пр}_{\boldsymbol{\nu}}\, \boldsymbol{a}$, поэтому $\iint\limits_{S} \boldsymbol{a}\, \boldsymbol{dS} = \iint\limits_{S} \text{пр}_{\boldsymbol{\nu}}\, \boldsymbol{a}\, dS$.

Обычно в потоке $\iint\limits_{S^+} \boldsymbol{a\nu}\, dS$ опускают индекс ориентации и пишут просто $\iint\limits_{S} \boldsymbol{a\nu}\, dS$, считая, что в качестве ориентации взята нормаль $\boldsymbol{\nu}$, стоящая в подынтегральном выражении.

В дальнейших пунктах этого параграфа мы изучим некоторые свойства векторных полей, в частности, установим в трехмерном случае необходимые и достаточные условия потенциальности поля. Предварительно мы докажем теоремы об интегралах, тесно связанные с понятиями, введенными в этом пункте.

Упражнения. 1. Доказать следующие формулы:

а) $\text{rot grad}\, u = 0$;

б) $\text{div rot}\, \boldsymbol{a} = 0$;

в) $\text{div grad}\, u = \Delta u$,

где $\Delta u = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2}$;

г) $\text{rot rot}\, \boldsymbol{a} = \text{grad div}\, \boldsymbol{a} - \Delta \boldsymbol{a}$,

где $\Delta \boldsymbol{a} = (\Delta a_x, \Delta a_y, \Delta a_z)$, $\boldsymbol{a} = (a_x, a_y, a_z)$;

д) $\text{div}\, (f\boldsymbol{a}) = f\, \text{div}\, \boldsymbol{a} + \text{grad}\, f\boldsymbol{a}$;

е) $\text{div}\, \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = \boldsymbol{b}\, \text{rot}\, \boldsymbol{a} - \boldsymbol{a}\, \text{rot}\, \boldsymbol{b}$.

2. Найти поток векторного поля $\boldsymbol{a} = (x - 2z)\boldsymbol{i} + (x + 3y + z)\boldsymbol{j} + (5x + y)\boldsymbol{k}$ через треугольную площадку с вершинами $A(1, 0, 0)$, $B(0, 1, 0)$, $C(0, 0, 1)$ и ориентацией, определяемой нормалью, направленной противоположно началу координат.

3. Найти поток векторного поля $\boldsymbol{a} = y^2\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$ через поверхность $S: \{(x, y, z): z = x^2 + y^2,\ 0 \leqslant z \leqslant 2\}$, единичная нормаль к которой направлена в сторону, противоположную оси Oz.

4. Найти поток векторного поля $\boldsymbol{a} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + \sqrt{x^2 + y^2 - 1}\,\boldsymbol{k}$ через противоположную началу координат сторону гиперболоида $x^2 + y^2 - z^2 = 1$, $0 \leqslant z \leqslant \sqrt{3}$.

5. Найти поток векторного поля $\boldsymbol{a}=(xy-y^2)\,\boldsymbol{i}+(-x^2+xy+2x)\,\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}$ через противоположную началу координат сторону части цилиндрической поверхности $x^2+y^2=1$, отсекаемой конусом $z^2=\frac{1}{2}\,x^2+y^2$.

6. Найти $\operatorname{div}\boldsymbol{a}$, если

$$\boldsymbol{a}=(6x^2y^2-z^3+yz-5)\,\boldsymbol{i}+(4x^3y+xz+2)\,\boldsymbol{j}+(xy-3xz^2-3)\,\boldsymbol{k}.$$

Пусть $\boldsymbol{r}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}$, $r=|\boldsymbol{r}|$, f — дифференцируемая всюду в R_+ числовая функция, $\boldsymbol{c}$ — постоянный вектор. Найти:

7. $\operatorname{div}(f(r)\boldsymbol{r})$.

8. $\operatorname{div}(\boldsymbol{rc})$.

9. $\operatorname{div}(\operatorname{grad} f(r))$.

10. $\operatorname{div}(r^2\boldsymbol{c})$.

11. $\operatorname{div}(f(r)\,\boldsymbol{c})$.

12. $\operatorname{div}(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{r})$.

13. Найти $\operatorname{rot}\boldsymbol{a}$, если

$$\boldsymbol{a}=xyz\boldsymbol{i}+(2x+3y-z)\boldsymbol{j}+(x^2+z^2)\boldsymbol{k}.$$

Найти:

14. $\operatorname{rot}(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{r})$

15. $\operatorname{rot}((\boldsymbol{cr})\,\boldsymbol{r})$

16. $\operatorname{rot}(f(r)\,\boldsymbol{r})$.

17. $\operatorname{rot}(f(r)\,\boldsymbol{c})$.

18. Найти циркуляцию векторного поля $\boldsymbol{a}=-y\boldsymbol{i}+x\boldsymbol{j}+c\boldsymbol{k}$ ($c=\mathrm{const}$) по окружности $(x-2)^2+y^2=1$, лежащей в плоскости Oxy.

19. Найти циркуляцию векторного поля $a=y\boldsymbol{i}-x\boldsymbol{j}$ по замкнутой линии, образуемой дугой астроиды $x=R\cos^3 t$, $y=R\sin^3 t$ $(0\leqslant t\leqslant\pi/2)$ и отсекаемыми ею отрезками осей координат.

52.2. ОБ ИНВАРИАНТНОСТИ ПОНЯТИЙ ГРАДИЕНТА, ДИВЕРГЕНЦИИ И ВИХРЯ

Прежде всего заметим, что при ортогональном преобразовании декартовых координат символический вектор ∇ преобразуется по правилам преобразования обычных векторов. Действительно, пусть задано ортогональное преобразование координат

$$\begin{aligned} x'&=a_{11}x+a_{12}y+a_{13}z,\\ y'&=a_{21}x+a_{22}y+a_{23}z,\\ z'&=a_{31}x+a_{32}y+a_{33}z. \end{aligned}\tag{52.5}$$

Для таких преобразований матрица обратного преобразования совпадает с транспонированной матрицей, поэтому

$$\begin{aligned} x&=a_{11}x'+a_{21}y'+a_{31}z',\\ y&=a_{12}x'+a_{22}y'+a_{32}z',\\ z&=a_{13}x'+a_{23}y'+a_{33}z'. \end{aligned}\tag{52.6}$$

При этом, как хорошо известно, по формулам (52.5) и (52.6) преобразуются как координаты точек, так и координаты векторов.

Используя формулы (52.5) и правило дифференцирования сложной функции, получим

$$\begin{gathered}\frac{\partial}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x'}\frac{\partial x'}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial y'}\frac{\partial y'}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial z'}\frac{\partial z'}{\partial x}=a_{11}\frac{\partial}{\partial x'}+a_{21}\frac{\partial}{\partial y'}+a_{31}\frac{\partial}{\partial z'},\\ \frac{\partial}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial x'}\frac{\partial x'}{\partial y}+\frac{\partial}{\partial y'}\frac{\partial y'}{\partial y}+\frac{\partial}{\partial z'}\frac{\partial z'}{\partial y}=a_{12}\frac{\partial}{\partial x'}+a_{22}\frac{\partial}{\partial y'}+a_{32}\frac{\partial}{\partial z'},\\ \frac{\partial}{\partial z}=\frac{\partial}{\partial x'}\frac{\partial x'}{\partial z}+\frac{\partial}{\partial y'}\frac{\partial y'}{\partial z}+\frac{\partial}{\partial z'}\frac{\partial z'}{\partial z}=a_{13}\frac{\partial}{\partial x'}+a_{23}\frac{\partial}{\partial y'}+a_{33}\frac{\partial}{\partial z'}.\end{gathered}\tag{52.7}$$

Соответственно обратные формулы, выражающие производные по переменным x', y', z' через производные по x, y, z будут иметь вид

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x'}&=a_{11}\frac{\partial}{\partial x}+a_{12}\frac{\partial}{\partial y}+a_{13}\frac{\partial}{\partial z},\\ \frac{\partial}{\partial y'}&=a_{21}\frac{\partial}{\partial x}+a_{22}\frac{\partial}{\partial y}+a_{23}\frac{\partial}{\partial z},\\ \frac{\partial}{\partial z'}&=a_{31}\frac{\partial}{\partial x}+a_{32}\frac{\partial}{\partial y}+a_{33}\frac{\partial}{\partial z}.\end{aligned}\tag{52.8}$$

Формулы (52.5) — (52.8) и показывают, что координаты обычных векторов и «координаты» символического вектора ∇ при ортогональных преобразованных декартовых координат преобразуются по одному и тому же правилу. В частности, из (52.8) следует, что градиент функции u в системе координат x, y, z, т. е. вектор с координатами $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial u}{\partial z}$ в системе x', y', z' будет иметь координаты $\frac{\partial u}{\partial x'}$, $\frac{\partial u}{\partial y'}$, $\frac{\partial u}{\partial z'}$, т. е. являться градиентом и в этой системе координат. Тем самым еще раз доказано (см. п. 20.7), что градиент функции не зависит от выбора декартовой системы координат. Поскольку вектор ∇ преобразуется подобно обычным векторам, то естественно ожидать, что и скалярное произведение $\nabla\boldsymbol{a}$ не зависит от выбора указанной системы координат.

Пусть вектор $\boldsymbol{a}$ в системе x, y, z имеет координаты a_x, a_y, a_z, а в системе x', y', z' — координаты $a_{x'}$, $a_{y'}$, $a_{z'}$. В силу формул (52.7) имеем

$$\begin{aligned}\frac{\partial a_x}{\partial x}+\frac{\partial a_y}{\partial y}+\frac{\partial a_z}{\partial z}&=a_{11}\frac{\partial a_x}{\partial x'}+a_{21}\frac{\partial a_x}{\partial y'}+a_{31}\frac{\partial a_x}{\partial z'}+\\ &+a_{12}\frac{\partial a_y}{\partial x'}+a_{22}\frac{\partial a_y}{\partial y'}+a_{32}\frac{\partial a_y}{\partial z'}+a_{13}\frac{\partial a_z}{\partial x'}+a_{23}\frac{\partial a_z}{\partial y'}+a_{33}\frac{\partial a_z}{\partial z'}=\\ &=\frac{\partial}{\partial x'}(a_{11}a_x+a_{12}a_y+a_{13}a_z)+\frac{\partial}{\partial y'}(a_{21}a_x+a_{22}a_y+a_{23}a_z)+\\ &+\frac{\partial}{\partial z'}(a_{31}a_x+a_{32}a_y+a_{33}a_z).\end{aligned}\tag{52.9}$$

Применяя формулы (52.5) к вектору $\boldsymbol{a}=(a_x,\ a_y,\ a_z)$, (т. е. заменяя в этих формулах x, y, z на a_x, a_y, a_z, а x', y', z' на $a_{x'}$, $a_{y'}$, $a_{z'}$), получим, что выражения в круглых скобках в правой части равенства (52.9) равны последовательно $a_{x'}$, $a_{y'}$, $a_{z'}$ и, следовательно,

$$\frac{\partial a_x}{\partial x}+\frac{\partial a_y}{\partial y}+\frac{\partial a_z}{\partial z}=\frac{\partial a_{x'}}{\partial x'}+\frac{\partial a_{y'}}{\partial y'}+\frac{\partial a_{z'}}{\partial z'}.$$

Это равенство и показывает, что дивергенция векторного поля в каждой точке однозначно определяется самим векторным полем, а не зависит от выбора системы координат, как это могло бы показаться сначала из формулы (52.2).

Векторное произведение обычных векторов в силу своего геометрического смысла не зависит от выбора декартовых систем координат с одинаковой ориентацией (например, векторное произведение двух векторов не изменится, если от одной правой декартовой системы координат (см. п. 50.8) перейти к такой же другой). Поэтому естественно ожидать, что тем же свойством обладает и «символическое векторное произведение» $\operatorname{rot}\boldsymbol{a}=\nabla\times\boldsymbol{a}$.

В самом деле, если обозначить единичные координатные векторы системы координат x', y', z' соответственно через $\boldsymbol{i}'$, $\boldsymbol{j}'$, $\boldsymbol{k}'$, то, как известно, единичные координатные векторы $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ системы координат x, y, z выражаются через $\boldsymbol{i}'$, $\boldsymbol{j}'$, $\boldsymbol{k}'$ посредством матрицы, транспонированной к матрице преобразования (52.5), т. е. посредством матрицы преобразования (52.6):

$$\begin{aligned}\boldsymbol{i}&=a_{11}\boldsymbol{i}'+a_{21}\boldsymbol{j}'+a_{31}\boldsymbol{k}',\\ \boldsymbol{j}&=a_{12}\boldsymbol{i}'+a_{22}\boldsymbol{j}'+a_{32}\boldsymbol{k}',\\ \boldsymbol{k}&=a_{13}\boldsymbol{i}'+a_{23}\boldsymbol{j}'+a_{33}\boldsymbol{k}'.\end{aligned}\tag{52.10}$$

Используя формулы (52.6), (52.7) и (52.10), получим:

$$\operatorname{rot}\boldsymbol{a}=\nabla\times\boldsymbol{a}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x}&\dfrac{\partial}{\partial y}&\dfrac{\partial}{\partial z}\\ a_x&a_y&a_z\end{vmatrix}=$$

$$\begin{vmatrix}a_{11}\boldsymbol{i}'+a_{21}\boldsymbol{j}'+a_{31}\boldsymbol{k}' & a_{12}\boldsymbol{i}'+a_{22}\boldsymbol{j}'+a_{32}\boldsymbol{k}' & a_{13}\boldsymbol{i}'+a_{23}\boldsymbol{j}'+a_{33}\boldsymbol{k}'\\ a_{11}\dfrac{\partial}{\partial x'}+a_{21}\dfrac{\partial}{\partial y'}+a_{31}\dfrac{\partial}{\partial z'} & a_{12}\dfrac{\partial}{\partial x'}+a_{22}\dfrac{\partial}{\partial y'}+a_{32}\dfrac{\partial}{\partial z'} & a_{13}\dfrac{\partial}{\partial x'}+a_{23}\dfrac{\partial}{\partial y'}+a_{33}\dfrac{\partial}{\partial z'}\\ a_{11}a_{x'}+a_{21}a_{y'}+a_{31}a_{z'} & a_{12}a_{x'}+a_{22}a_{y'}+a_{32}a_{z'} & a_{13}a_{x'}+a_{23}a_{y'}+a_{33}a_{z'}\end{vmatrix}=$$

$$=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\ a_{21}&a_{22}&a_{23}\\ a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{vmatrix}\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}'&\boldsymbol{j}'&\boldsymbol{k}'\\ \dfrac{\partial}{\partial x'}&\dfrac{\partial}{\partial y'}&\dfrac{\partial}{\partial z'}\\ a_{x'}&a_{y'}&a_{z'}\end{vmatrix}.\tag{52.11}$$

Последнее равенство доказывается так же, как для обычных числовых матриц доказывается тот факт, что определитель произведения двух квадратных матриц одного и того же порядка равен произведению их определителей. Для доказательства этого равенства достаточно убедиться, что в обеих его частях стоят одинаковые алгебраические суммы одних и тех же слагаемых.

Определитель ортогонального преобразования равен $+1$ или -1, причем если это преобразование сохраняет ориентацию, то $+1$. Поэтому если в рассматриваемом случае выбрать системы координат x, y, z и x', y', z', ориентированные одинаково, то будем иметь

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = 1$$

и, следовательно, из (52.11) получим

$$\begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ a_x & a_y & a_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i}' & \boldsymbol{j}' & \boldsymbol{k}' \\ \dfrac{\partial}{\partial x'} & \dfrac{\partial}{\partial y'} & \dfrac{\partial}{\partial z'} \\ a_{x'} & a_{y'} & a_{z'} \end{vmatrix}.$$

Это равенство и означает, что вихрь векторного поля не зависит от выбора декартовой системы координат, имеющей ту же ориентацию, что и заданная. Заметим, однако, что если от одной системы координат перейти к системе с другой ориентацией, например от правой системы координат — к левой, то каждый вихрь (как и обычное векторное произведение) заменится противоположным вектором. Это следует из формулы (52.11), поскольку определитель ортогонального преобразования, меняющего ориентацию, равен -1.

Таким образом, вихрь векторного поля однозначно «с точностью до знака» определяется самим векторным полем, а если ограничиться только одними правыми декартовыми системами координат, то не зависит от их выбора.

52.3. ФОРМУЛА ОСТРОГРАДСКОГО — ГАУССА. ГЕОМЕТРИЧЕСКОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ ДИВЕРГЕНЦИИ

Пусть G — область в пространстве R^3_{xyz}. Предположим, что на плоскости R^2_{xy} существует такая квадрируемая область Γ, что граница области G состоит из двух поверхностей S_1 и S_2, задаваемых соответственно явными представлениями $z=\varphi(x, y)$ и $z=\psi(x, y)$, где функции $\varphi(x, y)$ и $\psi(x, y)$ непрерывны на замкнутой области $\overline{\Gamma}$, $\varphi(x, y)\leqslant\psi(x, y)$, $(x, y)\in\overline{\Gamma}$, и, быть может, из части S_0 цилиндра, основанием которого является граница $\partial\Gamma$ области Γ (см. п. 44.1). Предположим также, что S_0, S_1 и S_2 являются кусочно-гладкими поверхностями (рис. 210). В этом случае и вся граница S области G также будет кусочно-гладкой поверхностью и притом ориентируемой, как всякая кусочно-гладкая поверхность, являющаяся границей области. Внешние нормали $\mathbf{v}$ поверхности S на ее гладких частях являются их ориентациями. В силу этих ориентаций гладкие части поверхности S ориентированы согласованно (см. п. 50.11) и, следовательно, порождают ориентацию всей поверхности S. Эта ориентация получается, если для каждой гладкой части поверхности выбрать ориентацию ее края, согласованную с внешней нормалью $\mathbf{v}$ на этой части по правилу штопора.

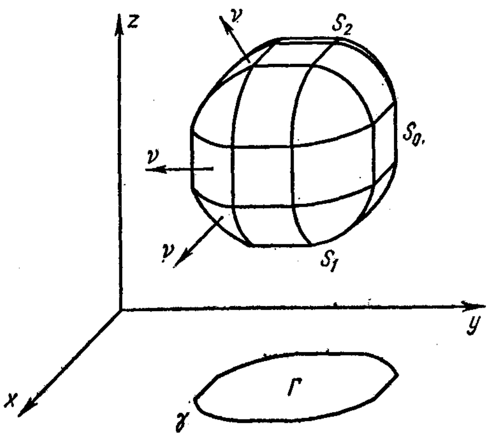


Рис. 210

Обозначим поверхность S, соответственно поверхности S_0, S_1 и S_2 с выбранной ориентацией (которую будем называть положительной) через S^+, соответственно через S_0^+, S_1^+ и S_2^+. Отметим, что здесь для поверхности S_1 положительной ориентацией является ее «нижняя сторона», а для поверхности S_2 — ее «верхняя сторона» (см. 51.1).

В рассматриваемом случае выбор нормали $\mathbf{v}$ легко описывается и непосредственно, т. е. без привлечения понятия «внешней» нормали: в точках поверхности S_1, в которых нормаль существует, надо выбрать нормаль, образующую тупой угол с осью Oz, а в точках поверхности S_2 — острый. В точках же поверхности S_0 выбор нормали для наших целей, как это будет видно из дальнейшего, безразличен — мы будем брать по поверхности S интегралы вида (51.7), которые по поверхности S_0 равны нулю при любом выборе нормалей, так как эти нормали всегда перпендикулярны оси Oz.

Будем предполагать, что область G обладает свойствами, аналогичными перечисленным, относительно всех осей координат. Такие области будем называть *элементарными областями* (ср. п. 47.5). Пример элементарной области изображен на рис. 210).

Через $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ — обозначим направляющие косинусы единичной внешней нормали $\mathbf{v}$ поверхности S:

$$\mathbf{v} = (\cos\alpha,\ \cos\beta,\ \cos\gamma).$$

Теорема 1 (Остроградский — Гаусс*)). *Пусть в замыкании $\bar{G}$ области G указанного выше вида заданы функции $P=P(x, y, z)$, $Q=Q(x, y, z)$ и $R=R(x, y, z)$ непрерывные на $\bar{G}$, вместе со своими частными производными $\frac{\partial P}{\partial x}$, $\frac{\partial Q}{\partial y}$, $\frac{\partial R}{\partial z}$**). Тогда*

$$\iiint\limits_G \left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right) dx\,dy\,dz = \iint\limits_{S^+} (P\cos\alpha+Q\cos\beta+R\cos\gamma)\,dS. \tag{52.12}$$

Эту формулу, полагая $\boldsymbol{a}=(P, Q, R)$, можно переписать в виде

$$\iiint\limits_G \operatorname{div}\boldsymbol{a}\,dx\,dy\,dz = \iint\limits_S \boldsymbol{a}\,\boldsymbol{dS}^+, \tag{52.13}$$

т. е. интеграл по области от дивергенции векторного поля равен потоку этого поля через поверхность, ограничивающую данную область.

Доказательство. Рассмотрим, например, интеграл

$$\iiint\limits_G \frac{\partial R}{\partial z}\,dx\,dy\,dz.$$

Использовав обозначения, введенные в начале этого пункта, получим

$$\iiint\limits_G \frac{\partial R}{\partial z}\,dx\,dy\,dz = \iint\limits_{\Gamma}\left[\int\limits_{\varphi(x,y)}^{\psi(x,y)} \frac{\partial R}{\partial z}\,dz\right]dx\,dy =$$

$$=\iint\limits_{\Gamma}\{R[x, y, \psi(x, y)]-R[x, y, \varphi(x, y)]\}\,dx\,dy =$$

$$=\iint\limits_{S_2^+} R(x, y, z)\,dx\,dy + \iint\limits_{S_1^+} R(x, y, z)\,dx\,dy. \tag{52.14}$$

Заметив, далее, что на поверхности S_0 имеет место равенство $\cos\gamma=0$, будем иметь (см. (51.7))

$$\iint\limits_{S_0^+} R(x, y, z)\,dx\,dy = \iint\limits_{S_0^+} P(x, y, z)\cos\gamma\,dS = 0.$$

Поэтому формулу (52.14) можно переписать в виде

$$\iiint\limits_G \frac{\partial R}{\partial z}\,dx\,dy\,dz =$$

$$=\iint\limits_{S_2^+} R\,dx\,dy + \iint\limits_{S_1^+} R\,dx\,dy + \iint\limits_{S_0^+} R\,dx\,dy = \iint\limits_{S^+} R\,dx\,dy. \tag{52.15}$$

---

*) М. В. Остроградский (1801—1861) — русский математик; К. Ф. Гаусс (1777—1855) — немецкий математик.

**) Непрерывность частных производных на границе понимается как их непрерывная продолжаемость на границу области.

Совершенно аналогично доказываются формулы

$$\iiint\limits_G \frac{\partial P}{\partial x}\,dx\,dy\,dz = \iint\limits_{S^+} P\,dy\,dz, \qquad \iiint\limits_G \frac{\partial Q}{\partial y}\,dx\,dy\,dz = \iint\limits_{S^+} Q\,dz\,dx, \tag{52.16}$$

Складывая (52.15) и (52.16) в силу определений (51.7) и (51.12) мы и получим формулу (52.12), называемую *формулой Остроградского — Гаусса.* □

Иногда формулу (52.12) бывает удобно использовать в виде

$$\iiint\limits_G \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right) dx\,dy\,dz = \iint\limits_S P\,dy\,dz + Q\,dz\,dx + R\,dx\,dy.$$

Справедливость такой записи непосредственно вытекает из определения поверхностного интеграла второго рода: см. (51.7) и (51.12).

Формула Остроградского — Гаусса (52.12) может быть доказана и в случае областей G более общего вида, чем было указано, а именно для таких, для которых существует конечное разбиение на области G_i, $i=1, 2, \ldots, i_0$, рассмотренного выше вида. Для этого достаточно написать формулу Остроградского для каждой области G_i и полученные результаты сложить; в результате получается искомая формула для области G. Действительно, в левой части равенства в силу аддитивности интеграла получится соответствующий интеграл по области G, а в правой части в силу того, что внешние нормали в точках границ областей G_i, принадлежащих границам двух таких областей, направлены в разные стороны, поверхностные интегралы по соответствующим частям границ областей G_i, в сумме дадут ноль, и останутся только интегралы по частям границ G_i, составляющим в совокупности границу области G (ср. п. 47.5). Указанные разбиения области G часто бывает удобно производить плоскостями, параллельными координатным плоскостям.

Заметим, что среди областей такого типа есть и области, граница которых состоит из нескольких «кусков», т. е. может быть представлена как сумма конечного числа кусочно-гладких непересекающихся поверхностей (ср. с соответствующими обобщениями формулы Грина в п. 47.5).

Можно показать, что формула Остроградского — Гаусса справедлива для любой ограниченной области, граница которой состоит из конечного числа кусочно-гладких поверхностей. Однако это довольно громоздко, и мы не будем на этом останавливаться, а ограничимся лишь формулировкой теоремы.

Теорема 1′ (Остроградский — Гаусс). *Пусть граница ∂G ограниченной области G состоит из конечного числа кусочно-гладких* *поверхностей, а вектор* $\boldsymbol{a}=(P,\ Q,\ R)$ *и частные производные* $\frac{\partial P}{\partial x}$, $\frac{\partial Q}{\partial y}$ *и* $\frac{\partial R}{\partial z}$ *непрерывны на* $\bar{G}$, *тогда*

$$\iiint\limits_G \operatorname{div}\boldsymbol{a}\,dx\,dy\,dz=\iint\limits_{\partial G}\boldsymbol{a}\,d\boldsymbol{S}.$$

В качестве ориентации на гладких частях границы ∂G здесь выбрана внешняя нормаль.

Например, если $G=\{(x,y,z)\colon 0<a<\sqrt{x^2+y^2+z^2}<b\}$ — шаровое кольцо и, следовательно, его граница состоит из двух сфер

$$S_1=\{(x,\ y,\ z)\colon\ x^2+y^2+z^2=a^2\}\ \text{и}\ S_2=\{(x,\ y,\ z)\colon x^2+y^2+z^2=b^2\},$$

то на внутренней сфере S_1 надо взять нормаль, направленную к центру шара G, и на внешней сфере S_2 — от центра шара.

Формула Остроградского — Гаусса позволяет найти выражение для объема области через соответствующий поверхностный интеграл. В самом деле, полагая в (52.12) $P(x,\ y,\ z)=x$, $Q(x,\ y,\ z)=y$, $R(x,\ y,\ z)=z$ и заметив, что $\iiint\limits_G dx\,dy\,dz=\mu G$, получим

$$\mu G=\frac{1}{3}\iint\limits_{S^+}(x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma)\,dS,$$

или

$$\mu G=\frac{1}{3}\iint\limits_{S^+}x\,dy\,dz+y\,dz\,dx+z\,dx\,dy.$$

Формула Остроградского — Гаусса дает также возможность установить геометрический подход к понятию дивергенции.

Теорема 2. *Пусть в трехмерной области* G*) *определено непрерывно дифференцируемое векторное поле* $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}(M)$. *Пусть* $M_0\in G$ *и* D — *область с кусочно-гладкой границей* S *такая, что* $M_0\in D$, $\bar{D}\subset G$ *и для области* D *справедлива формула Остроградского — Гаусса* **).

Обозначим через S^+ *поверхность* S, *ориентированную с помощью выбора внешней нормали, а через* $d(D)$ — *диаметр области* D. *Тогда*

$$\operatorname{div}\boldsymbol{a}(M_0)=\lim_{d(D)\to 0}\frac{\iint\limits_S \boldsymbol{a}\,d\boldsymbol{S}^+}{\mu D}. \tag{52.17}$$

Доказательство. По формуле (52.13) имеем

$$\iiint\limits_D \operatorname{div}\boldsymbol{a}\,dx\,dy\,dz=\iint\limits_S\boldsymbol{a}\,d\boldsymbol{S}^+. \tag{52.18}$$

---

*) Здесь на структуру области G не накладывается никаких ограничений.

**) Такие области D всегда существуют, например к ним относятся все шары достаточно малого радиуса с центром в точке M_0 или кубы достаточно малого размера с центром в точке M_0.

Но по интегральной теореме о среднем (п. 44.6),

$$\iiint\limits_{D} \operatorname{div} \boldsymbol{a}\, dx\, dy\, dz = \operatorname{div} \boldsymbol{a}(M)\, \mu D, \quad M \in D. \tag{52.19}$$

Подставив (59.19) в (52.18), получим

$$\operatorname{div} \boldsymbol{a}(M) = \frac{\iint\limits_{S} \boldsymbol{a}\, d\boldsymbol{S}^{+}}{\mu D}. \tag{52.20}$$

Переходя к пределу в формуле (52.20) при $d(D) \to 0$, в силу непрерывности в точке M_0 функции $\operatorname{div} \boldsymbol{a}(M)$ получим формулу (52.17).

Можно показать, что величины, входящие в правую часть равенства (52.17), не зависят от выбора системы координат (в правую часть входит двойной интеграл от скалярного произведения векторов и объем области), поэтому отсюда еще раз следует, что дивергенция векторного поля не зависит от выбора системы координат.

Из равенства (52.17) следует, что правая часть этого равенства может быть принята за определение дивергенции данного поля.

Точки векторного поля $\boldsymbol{a}$, в которых $\operatorname{div} \boldsymbol{a} \neq 0$, называются «источниками» векторного поля. Интуитивно естественность этого термина объясняется тем обстоятельством, что если точка является «источником», то, как видно из формулы (52.17), для всех достаточно малых по диаметру областей D, содержащих точку M_0, будем иметь $\iint\limits_{S} \boldsymbol{a}\, d\boldsymbol{S} \neq 0$, т. е. поток через любую достаточно малую поверхность, окружающую источник, не равен нулю.

52.4. ФОРМУЛА СТОКСА. ГЕОМЕТРИЧЕСКОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ ВИХРЯ

Пусть S — дважды непрерывно дифференцируемая поверхность без особых точек в пространстве R^3_{xyz} и $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u, v)$, $(u, v) \in \overline{D}$, — ее представление, D — плоская ограниченная область, для которой справедлива формула Грина. Допустим, что граница области D состоит из одного простого кусочно-гладкого контура. Обозначим через γ_0 положительно ориентированный контур, ограничивающий область D, и через $u = u(t)$, $v = v(t)$, $a \leqslant t \leqslant b$ — его представление. Пусть

$$\boldsymbol{\nu} = \frac{\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v}{|\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v|}$$

— ориентация на поверхности S (см. определение 20 в п. 50.8), $\boldsymbol{\nu} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$. При сделанных предположениях нормаль $\boldsymbol{\nu}$ непрерывна на $\overline{D}$.

Обозначим через S^{+} поверхность S с выбранной на ней нормалью $\boldsymbol{\nu}$. Пусть γ — контур с представлением $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u(t), v(t))$,

$a \leqslant t \leqslant b$. Будем говорить, что *контур γ ограничивает поверхность S, а также что поверхность S натянута на контур γ.*

Пусть, наконец, G — область в пространстве R^3_{xyz} и $S \subset G$. При выполнении этих предположений справедлива следующая теорема.

Теорема 3 (Стокс [*]). *Пусть функции P, Q и R непрерывны вместе со своими первыми частными производными в области G и пусть $\boldsymbol{a} = (P, Q, R)$. Тогда*

$$\int_\gamma \boldsymbol{a}\, d\boldsymbol{r} = \iint_S \operatorname{rot} \boldsymbol{a}\, d\boldsymbol{S}^+, \tag{52.21}$$

т. е. циркуляция векторного поля по контуру γ равна потоку вихря этого поля через поверхность S, ограниченную контуром γ. В координатной форме эта формула имеет вид

$$\int_\gamma P\,dx + Q\,dy + R\,dz = \iint_S \begin{vmatrix} \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} dS,$$

или

$$\int_\gamma P\,dx + Q\,dy + R\,dz = \iint_S \left[\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\cos\alpha + \right.$$
$$\left. + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\cos\beta + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\cos\gamma\right] dS. \tag{52.22}$$

Доказательство. Рассмотрим, например, интеграл $\int_\gamma P\,dx$. Заметив, что вдоль кривых γ_0 и γ переменные u и v являются функциями от t, и употребив обозначения, введенные в начале этого пункта, получим

$$\int_\gamma P(x, y, z)\,dx =$$
$$= \int_a^b P[x(u(t), v(t)), y(u(t), v(t)), z(u(t), v(t))]\, x'_t(u(t), v(t))\,dt =$$
$$= \int_{\gamma_0} P[x(u, v), y(u, v), z(u, v)]\left[\frac{\partial x(u, v)}{\partial u} du + \frac{\partial x(u, u)}{\partial v} dv\right].$$

Мы здесь воспользовались формулой

$$x'_t(u(t), v(t)) = \frac{\partial x(u(t), v(t))}{\partial u}\frac{du}{dt} + \frac{\partial x(u(t), v(t))}{\partial v}\frac{dv}{dt}.$$

[*] Дж. Стокс (1819—1903) — английский механик и математик.

Применим формулу Грина к получившемуся интегралу $\int\limits_{\gamma_0} P\frac{\partial x}{\partial u}du + P\frac{\partial x}{\partial v}dv$, будем иметь:

$$\int\limits_{\gamma} P\,dx = \iint\limits_{D}\left[\frac{\partial}{\partial u}\left(P\frac{\partial x}{\partial v}\right) - \frac{\partial}{\partial v}\left(P\frac{\partial x}{\partial u}\right)\right]du\,dv =$$
$$= \iint\limits_{D}\left[\left(\frac{\partial P}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial P}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u} + \frac{\partial P}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial u}\right)\frac{\partial x}{\partial v} + P\frac{\partial^2 x}{\partial u\,\partial v} -\right.$$
$$\left. - \left(\frac{\partial P}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial P}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial P}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial v}\right)\frac{\partial x}{\partial u} - P\frac{\partial^2 x}{\partial v\,\partial u}\right]du\,dv =$$
$$= \iint\limits_{D}\left[\frac{\partial P}{\partial z}\frac{\partial(z,\,x)}{\partial(u,\,v)} - \frac{\partial P}{\partial y}\frac{\partial(x,\,y)}{\partial(u,\,v)}\right]du\,dv =$$
$$= \iint\limits_{S^+}\frac{\partial P}{\partial z}dz\,dx - \iint\limits_{S^+}\frac{\partial P}{\partial y}dx\,dy = \iint\limits_{S}\left(\frac{\partial P}{\partial z}\cos\beta - \frac{\partial P}{\partial y}\cos\gamma\right)dS. \tag{52.23}$$

Здесь приняты во внимание формулы (51.10) и (51.13). Аналогично доказывается, что

$$\int\limits_{\gamma} Q\,dy = \iint\limits_{S}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}\cos\gamma - \frac{\partial Q}{\partial z}\cos\alpha\right)dS, \tag{52.24}$$

$$\int\limits_{\gamma} R\,dz = \iint\limits_{S}\left(\frac{\partial R}{\partial y}\cos\alpha - \frac{\partial R}{\partial x}\cos\beta\right)dS. \tag{52.25}$$

Складывая формулы (52.23), (52.24) и (52.25), мы и получим формулу (52.22), которая называется *формулой Стокса*. □

Чтобы нагляднее представить себе связь выбора нормали $\mathbf{v}$ на поверхности S с ориентацией ограничивающего ее контура γ, рассмотрим поверхность S, имеющую явное представление $z = f(x,\ y)$, $(x,\ y) \in \overline{\Gamma}$.

Пусть γ_0 — положительно ориентированный на плоскости xOy контур, являющийся границей Γ, и $x = x(t)$, $y = y(t)$, $a \leqslant t \leqslant b$, — его представление. Как и выше, ориентацию кривой γ зададим представлением

$$x = x(t),\quad y = y(t),\quad z = f[x(t),\ y(t)],\quad a \leqslant t \leqslant b. \tag{52.26}$$

В рассматриваемом случае контур γ_0 является проекцией кривой γ. Нормаль же $\mathbf{v}$, как это было показано, при явном представлении поверхности образует острый угол с осью Oz (см. п. 51.1), поэтому если смотреть на поверхность S с положительного направления оси Oz, то контур γ будет ориентирован против часовой стрелки, т. е. ориентация кривой γ согласована с нормалью $\mathbf{v}$ «по правилу штопора» (рис. 211). Это равносильно тому, что наблюдатель, обходящий поверхность S по ориентированному контуру γ и смотрящий на нее из конца нормали ν, видит поверхность S слева. Такая наглядная интерпретация согласованности ориентации нормали ν и контура γ имеет то преимущество, что она не связана с выбором системы координат и остается справедливой для любой поверхности S, рассматриваемой в теореме Стокса, а не только для явно заданной поверхности. Конечно, все подобные рассуждения не являются математическими доказательствами, а служат лишь для наглядного пояснения формулы Стокса.

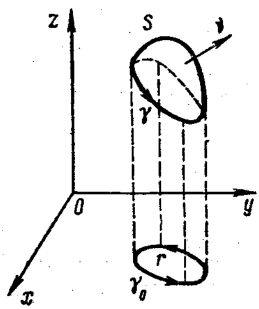


Рис. 211

Следует заметить, что формула Стокса остается справедливой, если в ней взять противоположную ориентацию контура и противоположные нормали $-\nu$; в этом случае обе части равенства (52.21) изменят знак на противоположный (при этом ориентации контура и поверхности остаются согласованными по «правилу штопора»).

Формула Стокса может быть доказана и для ориентируемых кусочно-гладких поверхностей $S=\{S_i\}_{i=1}^{i=i_0}$, а именно таких, для которых поверхности S_i, $i=1, 2, \ldots, i_0$, удовлетворяют условиям доказанной теоремы 3. При этом край поверхности ∂S (см. п. 50.11) может состоять из конечного числа замкнутых контуров γ_j, $j=1, 2, \ldots, j_0$.

Для доказательства этого достаточно написать формулы Стокса для каждой поверхности S_i, $i=1, 2, \ldots, i_0$, и сложить их (ср. с обобщениями формулы Грина в п. 47.5 и теоремы Остроградского — Гаусса в п. 52.3).

Отметим также, что в теореме 3 условие д в а ж д ы непрерывной дифференцируемости поверхности S было наложено только для простоты доказательства (оно в этом случае с у щ е с т в е н н о упрощается). Формула Стокса (52.21) справедлива и при предположении лишь гладкости поверхности S (при сохранении прочих условий теоремы 3). Доказательство этого факта выходит за рамки нашего курса.

Из всего сказанного следует, что формула Стокса остается справедливой и для просто ориентированных кусочно-гладких поверхностей $S=\{S_i\}_{i=1}^{i=i_0}$ (т. е. без предположения о д в а ж д ы непрерывной дифференцируемости поверхностей S_i).

Сформулируем теорему для этого случая.

Теорема 3′ (Стокс). *Пусть вектор-функция $\boldsymbol{a}$ непрерывно дифференцируема в области G и пусть $S=\{S_i\}_{i=1}^{i=i_0}$ — ориентированная кусочно-гладкая поверхность и ∂S — ее край с ориентацией, порожденной заданной ориентацией поверхности S* (см. п. 50.11). *Тогда*

$$\int_{\partial S} \boldsymbol{a}\, d\boldsymbol{r} = \iint_S \operatorname{rot} \boldsymbol{a}\, d\boldsymbol{S}.$$

Наглядно согласование ориентаций контуров γ_j, из которых состоит край ∂S поверхности S, с ориентацией этой поверхности и, следовательно, с ориентацией $\mathbf{v}$ поверхностей S_i означает, что наблюдатель, двигающийся по контуру γ_j, $j=1, 2, \ldots, j_0$, и смотрящий на поверхность S из конца нормали $\mathbf{v}$, видит поверхность S слева.

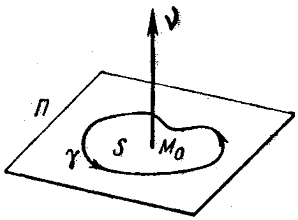


Рис. 212

Теорема Стокса дает возможность установить геометрический подход к понятию вихря векторного поля.

Теорема 4. *Пусть в трехмерной области G определено непрерывно дифференцируемое векторное поле $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}(M)$; M_0 — фиксированная точка, $M_0 \in G$, $\mathbf{v}$ — произвольный постоянный единичный вектор, Π — плоскость, перпендикулярная вектору $\mathbf{v}$ и проходящая через точку M_0, S — ограниченная область в плоскости Π, границей которой является кусочно-гладкий контур γ, $d(S)$ — диаметр области S; пусть контур γ согласованно ориентирован с нормалью $\mathbf{v}$* *), *$M_0 \in S$ и $S \subset G$* **) *(рис. 212). Тогда* ***)

$$\operatorname{rot}_{\mathbf{v}} \boldsymbol{a}(M_0) = \lim_{d(S)\to 0} \left(\frac{\int_{\gamma} \boldsymbol{a}\, d\boldsymbol{r}}{\mu S} \right). \tag{52.27}$$

Доказательство. По формуле Стокса

$$\int_{\gamma} \boldsymbol{a}\, d\boldsymbol{r} = \iint_S \operatorname{rot}_{\mathbf{v}} \boldsymbol{a}\, dS,$$

но по интегральной теореме о среднем

$$\iint_S \operatorname{rot}_{\mathbf{v}} \boldsymbol{a}\, dS = \operatorname{rot}_{\mathbf{v}} \boldsymbol{a}(M)\, \mu S, \quad M \in S.$$

Следовательно,

$$\operatorname{rot}_{\mathbf{v}} \boldsymbol{a}(M) = \frac{\int_{\gamma} \boldsymbol{a}\, dS}{\mu S}. \tag{52.28}$$

Заметим, что при $d(S)\to 0$ и $M \to M_0$. В силу непрерывности в точке M_0 функции $\operatorname{rot}_{\mathbf{v}} \boldsymbol{a}(M)$, переходя к пределу в (52.28) при $d(S)\to 0$, получим формулу (52.27). $\square$

Из (52.27) следует, что правая часть его может быть принята за определение проекции вихря данного поля на произвольный, но фиксированный единичный вектор $\mathbf{v}$. Это приводит и к новому

---

*) Как и в теореме 3 (по «правилу штопора»).

**) Указанные области S, очевидно, всегда существуют (почему?).

***) Через $\operatorname{rot}_{\mathbf{v}} \boldsymbol{a}$ обозначена проекция вектора $\operatorname{rot} \boldsymbol{a}$ на вектор $\mathbf{v}$, т. е. $\operatorname{rot}_{\mathbf{v}} \boldsymbol{a} = \text{пр}_{\mathbf{v}} \operatorname{rot} \boldsymbol{a}$.

определению самого вихря, так как достаточно, например, взять три произвольных ортогональных единичных вектора $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, $\mathbf{v}_3$, проекциями на которые, как это хорошо известно, однозначно определяется всякий вектор.

Можно показать, что величины, входящие в правую часть равенства (52.27), не зависят от выбора системы координат, однако согласованность ориентаций вектора $\mathbf{v}$ и контура γ зависит от ориентации системы координат: при переходе от правой системы координат к левой согласованность ориентаций $\mathbf{v}$ и γ по правилу штопора заменяется согласованностью по правилу «антиштопора», т. е. при фиксированной ориентации вектора $\mathbf{v}$ ориентация контура γ изменяется на противоположную. Тем самым интеграл $\int\limits_{\gamma} \boldsymbol{a}\, d\boldsymbol{r}$ при изменении ориентации системы координат изменяет знак, а потому в силу формулы (52.27) меняет знак и $\operatorname{rot} \boldsymbol{a}$.

Из сказанного следует, что формула Стокса (52.22) справедлива не только в правой, но и в левой системе координат, так как при изменении ориентации системы координат и левая и правая части равенства (52.22) меняют знак: при фиксированной ориентации $\mathbf{v}$ поверхности S в случае изменения ориентации системы координат изменяют знак как $\operatorname{rot} \boldsymbol{a}$, так и контур γ.

52.5. СОЛЕНОИДАЛЬНЫЕ ВЕКТОРНЫЕ ПОЛЯ

В этом пункте ограниченную область, для которой справедлива теорема Остроградского — Гаусса (см. п. 52.3), будем называть *допустимой*. Совокупность поверхностей будем называть *допустимой*, если она является границей допустимой области.

Выше отмечалось (см. п. 52.3), что теорема Остроградского — Гаусса справедлива для любой ограниченной области, граница которой состоит из конечного числа кусочно-гладких поверхностей. Поэтому всякая такая область допустима. Очевидно, справедливо и обратное утверждение: всякая допустимая область имеет границу, состоящую из конечного числа кусочно-гладких поверхностей — иначе нельзя было бы даже говорить о поверхностных интегралах по границе.

Читатель, предпочитающий пользоваться только доказанными фактами, может под допустимыми областями и поверхностями понимать именно те, для которых в настоящем курсе была доказана теорема Остроградского — Гаусса.

Определение 9. *Непрерывно дифференцируемое в области G векторное поле $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}(x, y, z)$ называется соленоидальным в этой области, если его поток через ориентированную границу любой допустимой области D, замыкание $\bar{D}$ которой лежит в G: $\bar{D} \subset G$, равен нулю:*

$$\iint\limits_{\partial D} \boldsymbol{a}\, d\boldsymbol{S} = 0. \qquad (52.29)$$

Граница ∂D допустимой области D имеет две ориентации, порожденные соответственно внутренней и внешней нормалями. Очевидно, если условие (52.29) выполняется при одной ориентации, то оно выполняется и при другой, так как соответствующие интегралы могут отличаться только знаком.

Поясним определение соленоидальности поля на примере. Пусть G — шаровое кольцо: часть пространства, заключенная между двумя сферами S_r и S_R с общим центром O и радиусами r и R, $r < R$, и пусть векторное поле $\boldsymbol{a}$ соленоидально в G. Тогда его поток будет равен нулю, например, через любую сферу S, лежащую в G и ограничивающую шар, также лежащий в G (рис. 213).

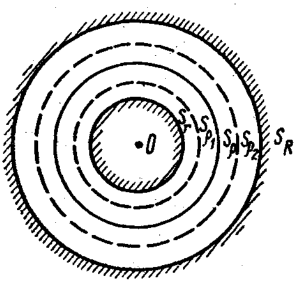


Рис. 213

Однако поток векторного поля $\boldsymbol{a}$ через сферу S_ρ с центром в точке O и радиусом ρ, $r < \rho < R$, не обязан быть равным нулю, так как шар, ограниченный этой сферой, не содержится в области G.

Вместе с тем сумма потоков векторного поля $\boldsymbol{a}$ будет равна нулю через две сферы S_{ρ_1} и S_{ρ_2} с тем же центром и радиусами ρ_1 и ρ_2, $r < \rho_1 < \rho_2 < R$, если одну из них ориентировать, выбрав нормаль, идущую к центру O, а другую — от центра. Действительно, указанные сферы ограничивают шаровое кольцо, целиком лежащее в области G, а выбранная их ориентация является ориентацией границы, соответствующей внешней или внутренней нормали. Поэтому по определению соленоидальности поля его поток через рассматриваемую ориентированную границу будет равен нулю.

Теорема 5. *Для того чтобы непрерывно дифференцируемое в области G векторное поле было соленоидальным в ней, необходимо и достаточно, чтобы его дивергенция равнялась нулю во всех точках области G:*

$$\operatorname{div} \boldsymbol{a}(M) = 0, \quad M \in G.$$

Доказательство необходимости. Пусть $\boldsymbol{a}$ — соленоидальное в области G векторное поле и $M_0 \in G$. Обозначим через Q_r открытый шар радиуса $r > 0$ с центром в точке M_0, а через S_r ограничивающую его сферу. Поскольку все точки $M \in G$, в том числе и точка M_0, являются внутренними для G, то существует такое $r_0 > 0$, что при $r < r_0$ все шары радиуса r вместе с ограничивающими их сферами S_r будут содержаться в G.

Заметим, теперь, что предел (52.17), равный значению дивергенции векторного поля $\boldsymbol{a}$ в точке M_0, существует для произвольных допустимых областей D, $D \subset \bar{D} \subset G$, диаметры которых стремятся к нулю. Поэтому он существует и при специальном выборе $D=Q_r$, $r<r_0$:

$$\operatorname{div} \boldsymbol{a}(M_0)=\lim_{r\to 0}\frac{\iint\limits_{S_r} \boldsymbol{a}\, d\boldsymbol{S}}{\mu Q_r}.$$

В силу определения соленоидальности поля, для всех $r<r_0$ имеет место равенство

$$\iint\limits_{S_r} \boldsymbol{a}\, d\boldsymbol{S}=0,$$

поэтому $\operatorname{div} \boldsymbol{a}(M_0)=0$.

Доказательство достаточности. Пусть $\boldsymbol{a}$ — непрерывно дифференцируемое в области G векторное поле с дивергенцией, равной нулю во всех точках области G. Если D — произвольная допустимая область, такая, что $D\subset\bar{D}\subset G$, то в силу теоремы Остроградского — Гаусса

$$\iint\limits_{\partial D} \boldsymbol{a}\, d\boldsymbol{S}=\iiint\limits_{D} \operatorname{div} \boldsymbol{a}\, dx\, dy\, dz=0,$$

т. е. поле $\boldsymbol{a}$ соленоидально. □

Типичным примером соленоидального поля является векторное поле, представляющее собой в некоторой области поле роторов дважды непрерывно дифференцируемого в этой области векторного поля.

Действительно, если $\boldsymbol{a}$ — дважды непрерывно дифференцируемое в области G поле, то $\operatorname{rot} \boldsymbol{a}$ является соленоидальным в G полем, так как $\operatorname{div}\operatorname{rot} \boldsymbol{a}=0$.

Нетрудно провести правдоподобное рассуждение, убеждающее в справедливости этого соотношения. Для этого достаточно перейти к символическому вектору ∇; тогда рассматриваемое равенство примет вид $\nabla(\nabla\times\boldsymbol{a})=0$.

Смешанное произведение обычных векторов в случае, когда два сомножителя совпадают, равно нулю, ибо в этом случае параллелепипед, натянутый на эти векторы, вырождается в параллелограмм, и, следовательно, его объем равен нулю. Поэтому естественно ожидать, что указанное равенство справедливо и для вектора ∇. Это правдоподобное рассуждение можно превратить в математически обоснованное и, тем самым, имеющее доказательную силу, если доказать, что символический вектор ∇ на самом деле обладает использованными нами свойствами, аналогичными соответствующим свойствам обычных векторов. Это можно сделать простой проверкой, переходя, например, к координатной записи (см. (52.2) и (52.4)).

52.6. ПОТЕНЦИАЛЬНЫЕ ВЕКТОРНЫЕ ПОЛЯ

В этом пункте поверхность S, для которой справедлива теорема Стокса, будем называть допустимой.

Определение 10. *Трехмерная область G называется односвязной, если какова бы ни была замкнутая ломаная γ, лежащая в G, существует допустимая поверхность S, также лежащая в G и натянутая на ломаную γ* (см. п. 52.4).

Иногда односвязные области называются также *поверхностно односвязными*.

Если рассматриваемая область G выпуклая, то существует очень простой способ натягивания поверхностей на контур. Искомую поверхность всегда можно взять в этом случае в виде конуса с вершиной в произвольно фиксированной точке $M_0 \in G$, направляющей которого служит заданная кривая γ. Если

$$\rho = \rho(u), \quad 0 \leqslant u \leqslant 2\pi,$$

— представление этой кривой и r_0 — радиус-вектор точки M_0, то искомый конус S, натянутый на данный контур, задается представлением

$$r = r_0 + v[\rho(u) - r_0], \quad 0 \leqslant u \leqslant 2\pi, \quad 0 \leqslant v \leqslant 1. \tag{52.30}$$

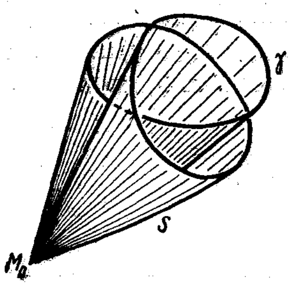


Рис. 214

Рассматривая u и v как полярные координаты, видим, что «представление» конуса задано на единичном круге, причем единичная окружность $\gamma_0 = \{(u, v) : v = 1\}$ переходит в заданный контур γ, ее центр — в вершину конуса (рис. 214).

Слово «представление» взято в кавычки, так как понятие представления поверхности было введено выше лишь для случая, когда параметры u и v являлись декартовыми координатами. Конус (52.30) в общем случае будет иметь кратные точки и не будет кусочно-гладкой поверхностью даже в случае, когда γ — достаточно гладкая кривая, т. е. если γ — достаточное число раз непрерывно дифференцируемая кривая без особых точек. При этом на конусе (52.30) будут иметься, вообще говоря, особые точки, отличные от вершины. Чтобы устранить это затруднение наиболее простым образом, мы и ограничились при определении односвязной области рассмотрением лишь контуров, являющихся замкнутыми ломаными. В этом случае вершину конуса M_0 всегда можно выбрать таким образом, что указанный конус будет кусочно-гладкой поверхностью. Действительно, при любом выборе вершины конуса в случае, когда его направляющей является некоторая ломаная γ, конус распадается на конечное число треугольников S_i, $i = 1, 2, \ldots, k$, правда, быть может, вырожденных, т. е. превратившихся в отрезок или точку. Одной из вершин этих треугольников будет вершина конуса M_0, а противоположной стороной — одно из звеньев ломаной γ. Каждый такой треугольник можно рассматривать как непрерывно дифференцируемую любое число раз поверхность и задавать его представлением, осуществляемым линейными функциями (см. п. 16.5 и (52.30)). Если треугольник вырожденный, то все его точки будут особыми. Однако сколь угодно малым смещением вершины конуса можно добиться того, что она окажется в общем положении со всеми звеньями ломаной γ, т. е. не будет лежать ни на одной прямой, проходящей через какое-либо звено ломаной γ. В результате все треугольники S_i, $i = 1, 2, \ldots, k$, станут невырожденными и, следовательно, могут рассматриваться как гладкие поверхности без особых точек. Сам же конус S окажется, таким образом, кусочно-гладкой поверхностью $S = \{S_i\}_{i=1}^{i=k}$. При этом, поскольку при всех достаточно малых смещениях каждой точки области она остается внутри области, вершину M_0 конуса S всегда можно выбрать в области и поэтому в силу ее выпуклости весь конус S будет лежать в этой области. К получившемуся кусочно-гладкому конусу S можно применить теорему Стокса, иначе говоря, этот конус является допустимой в этом пункте поверхностью. Итак, мы доказали, что всякая *выпуклая область односвязна*.

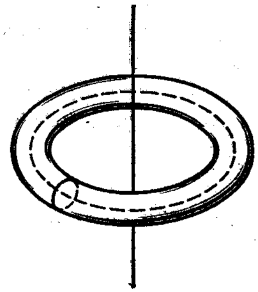


Рис. 215

Примером неодносвязной области является тор, т. е. область, образуемая вращением круга вокруг не пересекающей его оси (рис. 215).

Напомним, что поле называется потенциальным, когда его циркуляция $\int\limits_{\gamma} \boldsymbol{a}\,d\boldsymbol{r}$ равна нулю по любому замкнутому контуру $\gamma \subset G$, или, что то же, когда интеграл $\int\limits_{\widehat{AB}} \boldsymbol{a}\,d\boldsymbol{r}$ не зависит от пути интегрирования, соединяющего в области G точки A и B. Подробнее об этом см. п. 52.1. Оказывается, что в односвязной области векторное поле потенциально тогда и только тогда, когда оно безвихревое. Это утверждение содержится в нижеформулируемой и доказываемой теореме 6.

Теорема 6. *Пусть в односвязной области G задано непрерывно дифференцируемое векторное поле $\boldsymbol{a} = (P, Q, R)$. Тогда эквивалентны следующие три свойства:*

1. *Векторное поле $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}(M)$ является в области G потенциальным.*

2. *Существует потенциальная в G функция $u = u(M)$, т. е. такая функция $u(M)$, что $\boldsymbol{a} = \operatorname{grad} u$, или, что то же, $du =$*

$= P\,dx + Q\,dy + R\,dz$. *В этом случае для любых двух точек* $A \in G$ *и* $B \in G$ *и любой кусочно-гладкой кривой* $\overset{\frown}{AB}$, *соединяющей в* G *эти точки,*

$$\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} \boldsymbol{a}\,d\boldsymbol{r} = u(B) - u(A).$$

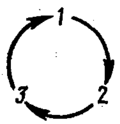
3. *Векторное поле* $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}(M)$ *является безвихревым:* $\operatorname{rot} \boldsymbol{a} = 0$ *в области* G, *т. е.*

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}, \quad \frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial y}, \quad \frac{\partial R}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial z}.$$

Подчеркнем, что из теоремы 6 в частности вытекает, что *непрерывно дифференцируемое в односвязной области векторное поле* $\boldsymbol{a}$ *потенциально тогда и только тогда, когда оно является полем градиентов некоторой скалярной функции* u:

$$\boldsymbol{a} = \nabla u.$$

Доказательство. Применим схему



Первый шаг: $1 \to 2$. Это утверждение, т. е. существование потенциальной функции, доказывается совершенно аналогично рассмотренному раньше случаю плоской области (см. теорему 3 в п. 47.8) и поэтому не будем приводить его доказательство.

Второй шаг: $2 \to 3$. Утверждение $2 \to 3$ также доказывается аналогично плоскому случаю: оно означает просто-напросто равенство соответствующих вторых смешанных производных потенциальной функции.

Утверждения $1 \to 2$ и $2 \to 3$ справедливы и без предположения односвязности области G.

Третий шаг: $3 \to 1$. Пусть $\operatorname{rot} \boldsymbol{a} = 0$ в G. Допустим сначала, что γ — кусочно дважды непрерывно дифференцируемая замкнутая кривая, лежащая в G. Если существует допустимая поверхность S, содержащаяся в G и ограниченная контуром γ, то из теоремы Стокса сразу получаем

$$\int\limits_{\gamma} \boldsymbol{a}\,d\boldsymbol{r} = \iint\limits_{S} \operatorname{rot} \boldsymbol{a}\,d\boldsymbol{S} = 0.$$

В силу односвязности области G (см. определение 10) это верно, в частности, для любой конечнозвенной ломаной. Поэтому, если γ — любая кусочно-гладкая замкнутая кривая, лежащая в G, то, выбирая последовательность ломаных λ_n, вписанных в γ со звеньями, стремящимися к нулю при $n\to\infty$, по лемме 3 п. 47.8, получим

$$\int_\gamma \boldsymbol{a}\,d\boldsymbol{r}=\lim_{n\to\infty}\int_{\gamma_n}\boldsymbol{a}\,d\boldsymbol{r}=0. \ \square$$

В заключение заметим, что хотя потенциальные и соленоидальные векторные поля не исчерпывают совокупности всех возможных векторных полей, однако, они позволяют описать широкий класс векторных полей. Именно, при достаточно общих предположениях любое векторное поле $\boldsymbol{a}$ представляет собой сумму потенциального и соленоидального векторного поля. Более точно, существуют такие скалярная функция u и векторное поле $\boldsymbol{b}$, что $\boldsymbol{a}=\nabla u+\operatorname{rot}\boldsymbol{b}$. Поскольку $\operatorname{rot}\nabla u=0$ и $\operatorname{div}\operatorname{rot}\boldsymbol{b}=0$, то первое слагаемое является потенциальным полем, а второе — соленоидальным.

Это предложение называется теоремой Гельмгольца *) (ее доказательство можно найти в книге: Ф. М. Морс, Г. Фешбах «Методы теоретической физики», т. I, М., 1960).

Упражнения. 20. Доказать, что поток ротора непрерывно дифференцируемого в некоторой области векторного поля через любую сферу, лежащую в указанной области, равен нулю.

21. Доказать, что

$$\iiint_G \operatorname{grad}\varphi \operatorname{rot}\boldsymbol{a}\,dx\,dy\,dz=\iint_S (\boldsymbol{a}\times\operatorname{grad}\varphi\, d\boldsymbol{S}).$$

Здесь предполагается что для области G, ограниченной поверхностью S, применима теорема Остроградского — Гаусса.

22. Для векторных полей $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{r}/|\boldsymbol{r}|^3$ и $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{r}/|\boldsymbol{r}|$ найти дивергенцию и ротор. Являются ли эти поля потенциальными, соленоидальными? Вычислить поток векторных полей $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ через сферу $S_R=\{(x, y, z): x^2+y^2+z^2=R^2\}$.

23. Вычислить поток векторного поля $\boldsymbol{a}=\dfrac{\boldsymbol{r}}{|\boldsymbol{r}|^3}$ через сферу $x^2+y^2+(z-1)^2=2$.

24. Пусть $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c}$ — дифференцируемые векторные поля, u — дважды дифференцируемая скалярная функция в области $G\subset R^3$ $\boldsymbol{b}=\operatorname{grad}u$ и $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$, Доказать, что для того чтобы $\operatorname{div}\boldsymbol{c}=0$, необходимо и достаточно, чтобы функция u удовлетворяла в G уравнению $\Delta u=\operatorname{div}\boldsymbol{a}$ (тем самым доказательство теоремы Гельмгольца сводится к решению в области G уравнения вида $\Delta u=f(x, y, z)$).

С помощью теоремы Остроградского — Гаусса вычислить поток векторного поля $\boldsymbol{a}$ через замкнутую поверхность S, если:

25. $\boldsymbol{a}=(1+2x)\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}$, $S=\{(x, y, z): x^2+y^2=z^2,\ 0\leq z\leq 4\}$.

26. $\boldsymbol{a}=2x\boldsymbol{i}-y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}$, $S=\{(x, y, z): x^2+y^2+z^2=4,\ 3z=x^2+y^2\}$.

Установить, какие из следующих векторных полей соленоидальны:

27. $\boldsymbol{a}=x(z^2-y^2)\boldsymbol{i}+y(x^2-z^2)\boldsymbol{j}+z(y^2+x^2)\boldsymbol{k}$.

28. $\boldsymbol{a}=(1+2xy)\boldsymbol{i}-y^2z\boldsymbol{j}+(z^2y-2yz+1)\boldsymbol{k}$.

С помощью теоремы Стокса найти циркуляцию вектора $\boldsymbol{a}$ по контуру γ, если

29. $\boldsymbol{a}=y\boldsymbol{i}-x\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}$; $\gamma=\{(x, y, z): x^2+y^2+z^2=4,\ x^2+y^2=z^2,\ z\geq 0\}$.

30. $\boldsymbol{a}=y^2\boldsymbol{i}+z^2\boldsymbol{j}$; $\gamma=\{(x, y, z): x^2+y^2=9,\ 3y+4z=5\}$.

---

*) Г. Гельмгольц (1821—1894) — немецкий физик и физиолог.

§ 53. СОБСТВЕННЫЕ ИНТЕГРАЛЫ, ЗАВИСЯЩИЕ ОТ ПАРАМЕТРА

53.1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ИНТЕГРАЛОВ, ЗАВИСЯЩИХ ОТ ПАРАМЕТРА; ИХ НЕПРЕРЫВНОСТЬ И ИНТЕГРИРУЕМОСТЬ ПО ПАРАМЕТРУ

Пусть Y — некоторое множество действительных чисел, $\varphi(y)$ и $\psi(y)$ — две функции, определенные на Y, $\varphi(y) \leqslant \psi(y)$ и функция $f(x, y)$ определена на множестве

$$\{(x, y): y \in Y, \ x \in [\varphi(y), \psi(y)]\}. \qquad (53.1)$$

Интегралы вида

$$\Phi(y) = \int_{\varphi(y)}^{\psi(y)} f(x, y)\, dx \qquad (53.2)$$

называются *интегралами, зависящими от параметра*, а переменная y называется обычно *параметром*.

Часто встречается тот частный случай такого типа интегралов, когда функции φ и ψ постоянны, т. е. интегралы вида

$$\Phi(y) = \int_a^b f(x, y)\, dx. \qquad (53.3)$$

Если Y является множеством всех натуральных чисел $Y = N = \{1, 2, \ldots, n, \ldots\}$, то, полагая $f(x, n) = f_n(x)$, $n = 1, 2, \ldots$, интеграл (53.3) можно переписать в виде

$$\int_a^b f_n(x)\, dx, \ n = 1, 2, \ldots.$$

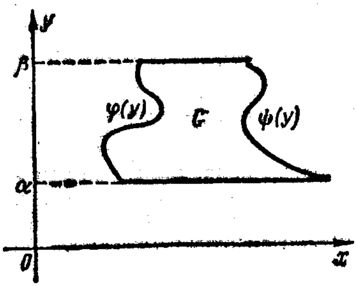


Рис. 216

Тем самым получилась числовая последовательность, образованная интегралами от функций некоторой функциональной последовательности.

Мы рассмотрим случай, когда множество Y представляет собой отрезок $[\alpha, \beta]$, функции $\varphi(y)$ и $\psi(y)$ непрерывны на этом отрезке и $\varphi(y) \leqslant \psi(y)$, $y \in [\alpha, \beta]$. Пусть графики функций $\varphi(y)$ и $\psi(y)$ и, быть может, отрезки прямых $y = \alpha$ и $y = \beta$ образуют границу ограниченной области G (рис. 216). Она, очевидно, квадрируема (см. п. 44.1). В этом случае множество (53.1), на котором определена функция $f(x, y)$, является замыканием $\bar{G}$ указанной области G:

$$\bar{G} = \{(x, y);\ \alpha \leqslant y \leqslant \beta,\ \varphi(y) \leqslant x \leqslant \psi(y)\}. \qquad (53.4)$$

В дальнейшем мы изучим свойства функции $\Phi(y)$ (ее непрерывность, правила ее дифференцирования и интегрирования) в зависимости от свойств функций $f(x, y)$, $\varphi(y)$, $\psi(y)$. Некоторые из этих свойств были получены раньше при изучении кратного интеграла. Так, например, лемма, доказанная в п. 45.1, дает условия, при которых интеграл, зависящий от параметра, является непрерывной функцией этого параметра. Сформулируем эту лемму в обозначениях настоящего параграфа в виде теоремы.

Теорема 1. *Если функция $f(x, y)$ непрерывна на замыкании $\bar{G}$ области G (см. (53.4)), то функция $\Phi(y)$, задаваемая формулой* (53.2) *непрерывна на отрезке* $[\alpha, \beta]$.

Утверждению этой теоремы можно придать следующий вид:

$$\lim_{y \to y_0} \int_{\varphi(y)}^{\psi(y)} f(x, y)\, dx = \int_{\lim\limits_{y \to y_0} \varphi(y)}^{\lim\limits_{y \to y_0} \psi(y)} \lim_{y \to y_0} f(x, y)\, dx. \tag{53.5}$$

Действительно, из теоремы 1 следует, что предел, стоящий в левой части равенства (53.5), равен $\Phi(y_0)$, а в силу непрерывности функций φ, ψ и f, правая часть равенства также равна

$$\int_{\varphi(y_0)}^{\psi(y_0)} f(x, y_0)\, dx = \Phi(y_0).$$

В частности, для интеграла (53.3) имеем

$$\lim_{y \to y_0} \int_a^b f(x, y)\, dx = \int_a^b \lim_{y \to y_0} f(x, y)\, dx,$$

т. е. в этом случае возможен предельный переход под знаком интеграла.

В теореме о предельном переходе под знаком интеграла можно ослабить требования, накладываемые на функцию $f(x, y)$, потребовав вместо ее непрерывности по совокупности переменных, лишь непрерывность по одной переменной и равномерное стремление к пределу по другой.

Теорема 2. *Пусть функция $f(x, y)$ определена для всех $x \in [a, b]$ $y \in Y$ и непрерывна по x на $[a, b]$ при любом фиксированном $y \in Y$. Тогда если при $y \to y_0$**) *функция $f(x, y)$ равномерно на отрезке $[a, b]$ стремится к $\varphi(x)$ (см. п. 39.4), то*

$$\lim_{y \to y_0} \int_a^b f(x, y)\, dx = \int_a^b \varphi(x)\, dx.$$

Доказательство. Рассмотрим какую-либо последовательность $y_n \in Y$, $n = 1, 2, \ldots$, такую, что $\lim\limits_{n \to \infty} y_n = y_0$. Тогда (см. упражнение 5 в п. 39.4) последовательность $\varphi_n(x) = f(x, y_n)$ будет равномерно на отрезке $[a, b]$ стремиться к функции $\varphi(x)$.

---

*) Здесь y_0 — число или одна из бесконечностей ∞, $+\infty$ или $-\infty$.

Отсюда следует (см. п. 36.4), во-первых, что $\varphi(x)$ непрерывна и, следовательно, интегрируема на отрезке $[a, b]$, а во-вторых, что

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f(x, y_n)\,dx = \lim_{n\to\infty}\int_a^b \varphi_n(x)\,dx = \int_a^b \varphi(x)\,dx,$$

и так как это верно для любой указанной последовательности $\{y_n\}$, то теорема доказана.

Перейдем к вопросу об интегрировании интегралов (53.2), зависящих от параметра.

Теорема 3. *Пусть область G элементарна относительно обеих осей координат, т. е.*

$$G=\{(x, y): \alpha<y<\beta,\quad \varphi(y)<x<\psi(y)\}=$$
$$=\{(x, y): a<x<b,\quad \varphi_1(x)<y<\psi_1(x)\},$$

где функции φ и ψ непрерывны на отрезке $[\alpha, \beta]$, а функции φ_1 и ψ_1 — на отрезке $[a, b]$. Тогда, если функция $f(x, y)$ непрерывна на замыкании $\bar{G}$ области G, то

$$\int_\alpha^\beta \Phi(y)\,dy=\int_\alpha^\beta\left[\int_{\varphi(y)}^{\psi(y)} f(x, y)\,dx\right]dy=\int_a^b\left[\int_{\varphi_1(x)}^{\psi_1(x)} f(x, y)\,dy\right]dx=$$
$$=\iint_G f(x, y)\,dx\,dy. \qquad (53.6)$$

Очевидно, теорема 3 является перефразировкой соответствующей теоремы о сведении кратного интеграла к повторному (см. п. 45.1).

53.2. ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ ИНТЕГРАЛОВ, ЗАВИСЯЩИХ ОТ ПАРАМЕТРА

При изучении дифференциальных свойств интегралов, зависящих от параметра, рассмотрим сначала интегралы вида (53.3).

Теорема 4 (правило Лейбница). *Если функция $f(x, y)$ и ее частная производная $\frac{\partial f(x, y)}{\partial y}$ непрерывны в замкнутом прямоугольнике $\Delta=\{(x, y): a\leqslant x\leqslant b,\ \alpha\leqslant y\leqslant\beta\}$, то функция $\Phi(y)=\int_a^b f(x, y)\,dx$ дифференцируема на отрезке $[\alpha, \beta]$ и*

$$\frac{d\Phi(y)}{dy}=\int_a^b\frac{\partial f(x, y)}{\partial y}\,dx.$$

Таким образом, чтобы при сделанных предположениях продифференцировать интеграл, зависящий от параметра, достаточно продифференцировать подынтегральное выражение, оставляя пределы интегрирования неизменными.

Доказательство. Пусть $y \in [\alpha, \beta]$ и $y+\Delta y \in [\alpha, \beta]$; тогда

$$\frac{\Phi(y+\Delta y)-\Phi(y)}{\Delta y} = \frac{1}{\Delta y}\int_a^b [f(x, y+\Delta y)-f(x, y)]\,dx =$$

$$= \int_a^b \frac{\partial f(x, y+\theta\Delta y)}{\partial y}\,dx, \quad 0<\theta<1.$$

Здесь применена формула конечных приращений Лагранжа.

Обозначив теперь через $\omega\left(\delta; \frac{\partial f}{\partial y}\right)$ модуль непрерывности функции $\frac{\partial f}{\partial y}$, получим

$$\left|\frac{\Phi(y+\Delta y)-\Phi(y)}{\Delta y} - \int_a^b \frac{\partial f(x, y)}{\partial y}\,dx\right| \leqslant \int_a^b \left|\frac{\partial f(x, y+\theta\Delta y)}{\partial y} - \frac{\partial f(x, y)}{\partial y}\right| dx \leqslant$$

$$\leqslant \int_a^b \omega\left(|\Delta y|; \frac{\partial f}{\partial y}\right)dx \leqslant \omega\left(|\Delta y|; \frac{\partial f}{\partial y}\right)(b-a). \qquad (53.7)$$

В силу равномерной непрерывности функции $\frac{\partial f}{\partial y}$ на замкнутом прямоугольнике Δ имеем $\lim\limits_{\Delta y\to 0} \omega\left(|\Delta y|; \frac{\partial f}{\partial y}\right)=0$; поэтому из (53.7) получим

$$\lim_{\Delta y\to 0}\frac{\Phi(y+\Delta y)-\Phi(y)}{\Delta y} = \int_a^b \frac{\partial f(x, y)}{\partial y}\,dx. \ \square$$

Теорема 4 легко обобщается и на случай зависящего от параметра интеграла общего вида (53.2).

Теорема 4′. *Пусть*: 1) *функция* $f(x, y)$ *и ее частная производная* $\frac{\partial f(x, y)}{\partial y}$ *непрерывны на замкнутом прямоугольнике*

$$\Delta = \{(x, y)\colon a\leqslant x\leqslant b,\ \alpha\leqslant y\leqslant\beta\},$$

2) $\bar{G}\subset\Delta$ (см. (53.4));

3) *пусть функции* $\varphi(y)$ *и* $\psi(y)$ *имеют непрерывные на отрезке* $[\alpha, \beta]$ *производные.*

Тогда интеграл (53.2), *зависящий от параметра, также имеет производную на отрезке* $[\alpha, \beta]$, *причем*

$$\frac{d\Phi}{dy} = \int_{\varphi(y)}^{\psi(y)} \frac{\partial f(x, y)}{\partial y}\,dx - f[\varphi(y), y]\frac{d\varphi(y)}{dy} + f[\psi(y), y]\frac{d\psi(y)}{dy}. \qquad (53.8)$$

Доказательство. Рассмотрим функцию

$$F(y,\ u,\ v)=\int\limits_u^v f(x,\ y)\,dx,\qquad a\leqslant u\leqslant b,\quad a\leqslant v\leqslant b,\quad \alpha\leqslant y\leqslant\beta.$$

Нетрудно непосредственно проверить, что частные производные $\frac{\partial F}{\partial y}$, $\frac{\partial F}{\partial u}$, $\frac{\partial F}{\partial v}$ функции F существуют и непрерывны по совокупности переменных y, u, v. Проверим сначала существование и непрерывность частной производной $\frac{\partial F}{\partial y}$. Ее существование непосредственно следует из теоремы 4, причем

$$\frac{\partial F}{\partial y}=\int\limits_u^v\frac{\partial f(x,\ y)}{\partial y}\,dx. \tag{53.9}$$

Докажем ее непрерывность. Пусть $a\leqslant u\leqslant b$, $a\leqslant v\leqslant b$, $\alpha\leqslant y\leqslant\beta$, $a\leqslant u+\Delta u\leqslant b$, $a\leqslant v+\Delta v\leqslant b$, $\alpha\leqslant y+\Delta y\leqslant\beta$; положив

$$\Delta\frac{\partial F(y,\ u,\ v)}{\partial y}=\frac{\partial F(y+\Delta y,\ u+\Delta u,\ v+\Delta v)}{\partial y}-\frac{\partial F(y,\ u,\ v)}{\partial y},$$

получим:

$$\left|\Delta\frac{\partial F(y,\ u,\ v)}{\partial y}\right|=\left|\int\limits_{u+\Delta u}^{v+\Delta v}\frac{\partial f(x,\ y+\Delta y)}{\partial y}\,dx-\int\limits_u^v\frac{\partial f(x,\ y)}{\partial y}\,dx\right|\leqslant$$

$$\leqslant\left|\int\limits_u^v\left[\frac{\partial f(x,\ y+\Delta y)}{\partial y}-\frac{\partial f(x,\ y)}{\partial y}\right]dx\right|+$$

$$+\left|\int\limits_{u+\Delta u}^{u}\frac{\partial f(x,\ y+\Delta y)}{\partial y}\,dx\right|+\left|\int\limits_v^{v+\Delta v}\frac{\partial f(x,\ y+\Delta y)}{\partial y}\,dx\right|. \tag{53.10}$$

Поскольку функция $\frac{\partial f}{\partial y}$ определена на прямоугольнике Δ, то в силу вышеуказанного выбора значений аргументов все написанные интегралы имеют смысл и

$$|v-u|\leqslant b-a. \tag{53.11}$$

Далее, из непрерывности функции $\frac{\partial f}{\partial y}$ на прямоугольнике Δ следует, что она ограничена на нем, т. е. существует такая постоянная $M>0$, что для всех точек $(x,\ y)\in\Delta$ выполняется неравенство

$$\left|\frac{\partial f(x,\ y)}{\partial y}\right|\leqslant M. \tag{53.12}$$

Обозначив, как и выше, через $\omega\left(\delta;\ \frac{\partial f}{\partial y}\right)$ модуль непрерывности функции $\frac{\partial f}{\partial y}$ на прямоугольнике Δ и использовав неравенства

(53.11) и (53.12), из (53.10) получим

$$\left|\Delta \frac{\partial F(y, u, v)}{\partial y}\right| \leqslant \omega\left(|\Delta y|; \frac{\partial f}{\partial y}\right)\left|\int\limits_u^v dx\right| + M\left|\int\limits_{u+\Delta u}^{u} dx\right| + M\left|\int\limits_v^{v+\Delta v} dx\right| \leqslant$$

$$\leqslant (b-a)\,\omega\left(|\Delta y|; \frac{\partial f}{\partial y}\right) + M|\Delta u| + M|\Delta v|.$$

Отсюда следует, что $\lim\limits_{\sqrt{\Delta y^2+\Delta u^2+\Delta v^2}\to 0} \Delta \dfrac{\partial F(y, u, v)}{\partial y} = 0$. Это и означает непрерывность частной производной $\dfrac{\partial F}{\partial y}$ на множестве

$$\{(y, u, v): c \leqslant y \leqslant d,\ a \leqslant u \leqslant b,\ a \leqslant v \leqslant b\}.$$

Непрерывность на этом множестве частных производных

$$\frac{\partial F}{\partial u} = -f(u, y), \quad \frac{\partial F}{\partial v} = f(v, y) \tag{52.13}$$

очевидна.

Связь между функциями Φ и F устанавливается формулой

$$\Phi(y) = F(y, \varphi(y), \psi(y)).$$

В силу доказанного выше функцию Φ можно дифференцировать по правилу дифференцирования сложных функций:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y} = \frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial u}\frac{du}{dy} + \frac{\partial F}{\partial v}\frac{dv}{dy}.$$

Подставляя сюда выражения для частных производных

$$\frac{\partial F}{\partial y}, \quad \frac{\partial F}{\partial u} \quad \text{и} \quad \frac{\partial F}{\partial v}$$

(см. (53.9) и (53.13)) и полагая $u = \varphi(y)$ и $v = \psi(y)$, получим формулу (53.8). $\square$

§ 54. НЕСОБСТВЕННЫЕ ИНТЕГРАЛЫ, ЗАВИСЯЩИЕ ОТ ПАРАМЕТРА

54.1. ОСНОВНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ. РАВНОМЕРНАЯ СХОДИМОСТЬ ИНТЕГРАЛОВ, ЗАВИСЯЩИХ ОТ ПАРАМЕТРА

Мы будем рассматривать интегралы вида

$$\Phi(y) = \int\limits_a^b f(x, y)\,dx, \tag{54.1}$$

где $-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty$, переменная y принадлежит некоторому множеству Y и интеграл (54.1) при некоторых (в частности, при всех) значениях y является несобственным.

Определение 1. *Если для каждого* $y_0 \in Y$ *интеграл*

$$\Phi(y_0) = \int_a^b f(x, y_0)\, dx$$

сходится, то интеграл (54.1) *называется сходящимся на множестве* Y.

В дальнейшем, если не оговорено что-либо другое, будем рассматривать только случай, когда выполняются условия:

1) $-\infty < a < b \leqslant +\infty$;

2) при любом $y \in Y$ функция $f(x, y)$ по переменной x интегрируема, по Риману, на каждом отрезке $[a, \eta]$, где η таково, что $a < \eta < b$.

В этом случае сходимость интеграла (54.1) на множестве Y означает, что при любом $y \in Y$ существует предел

$$\lim_{\eta \to b-0} \int_a^\eta f(x, y)\, dx = \int_a^b f(x, y)\, dx$$

(если $b = +\infty$, то $b - 0 = +\infty$). Поскольку

$$\int_a^b f(x, y)\, dx - \int_a^\eta f(x, y)\, dx = \int_\eta^b f(x, y)\, dx,$$

то из сказанного при каждом фиксированном $y \in Y$ получим

$$\lim_{\eta \to b-0} \int_\eta^b f(x, y)\, dx = 0.$$

Таким образом, *если интеграл* (54.1) *сходится на множестве* Y, *то при каждом фиксированном* $y \in Y$ *для любого числа* $\varepsilon > 0$ *существует такое* $\eta_\varepsilon = \eta_\varepsilon(y) < b$, *что если* $\eta_\varepsilon \leqslant \eta < b$, *то*

$$\left| \int_\eta^b f(x, y)\, dx \right| < \varepsilon. \tag{54.2}$$

Условия, при которых для несобственных интегралов, зависящих от параметра, справедливы теоремы, аналогичные доказанным в предыдущем параграфе для собственных интегралов основаны на понятии так называемой равномерной сходимости интеграла.

Будем предполагать, как было отмечено, что интеграл (54.1) удовлетворяет вышеуказанным условиям 1) и 2).

Определение 2. *Сходящийся на множестве* Y *интеграл* $\int_a^b f(x, y)\, dx$ *называется равномерно сходящимся на этом множестве, если для любого* $\varepsilon > 0$ *существует такое* $\eta_\varepsilon < b$, *что для* *всех* $y \in Y$ *и всех* η *таких, что* $\eta_\varepsilon < \eta < b$, *выполняется неравенство*

$$\left| \int_\eta^b f(x, y)\, dx \right| < \varepsilon.$$

Напомним, что в рассматриваемом нами случае b может быть как конечным, т. е. числом, так и бесконечным, т. е. равным $+\infty$. Таким образом, в приведенном виде определение равномерной сходимости годится одновременно как для случая, когда интегрирование производится по конечному отрезку $[a, b]$, а несобственный интеграл возникает за счет неограниченности подынтегральной функции, так и для случая, когда несобственный интеграл получается за счет неограниченности промежутка интегрирования $[a, +\infty)$.

Приведенные определения сходимости и равномерной сходимости интеграла напоминают соответствующие определения для рядов (см. п. 36.1 и 36.3). Между ними действительно имеется связь.

Пусть $\{\eta_n\}$ — некоторая последовательность, такая, что

$$\eta_1 = a, \quad \eta_n \in [a, b), \quad n = 1, 2, \ldots, \text{ и } \lim_{n \to \infty} \eta_n = b.$$

Наряду с интегралом (54.1) рассмотрим ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \int_{\eta_k}^{\eta_{k+1}} f(x, y)\, dx. \tag{54.3}$$

Пусть

$$S_n(y) = \sum_{k=1}^{n-1} \int_{\eta_k}^{\eta_{k+1}} f(x, y)\, dx = \int_a^{\eta_n} f(x, y)\, dx$$

— его частичная сумма. Тогда, если интеграл (54.1) сходится (соответственно равномерно сходится) на множестве Y, то, очевидно, сходится (соответственно равномерно сходится) на множестве Y и ряд (54.3); при этом

$$\int_a^b f(x, y)\, dx = \lim_{n \to \infty} \int_a^{\eta_n} f(x, y)\, dx = \lim_{n \to \infty} S_n(y),$$

т. е. рассматриваемый интеграл равен сумме ряда (54.3).

Определение равномерной сходимости интеграла можно перефразировать еще следующим образом.

Определение 2'. Сходящийся на множестве Y интеграл (54.1) называется *равномерно сходящимся* на этом множестве, если

$$\lim_{\eta \to b-0} \sup_{y \in Y} \left| \int_\eta^b f(x, y)\, dx \right| = 0. \tag{54.4}$$

Действительно, если интеграл (54.1) равномерно сходится на множестве Y в смысле определения 2, то для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\eta_\varepsilon < b$, что выполняется неравенство (54.2) при $y \in Y$ и $\eta_\varepsilon \leqslant \eta < b$ и, следовательно,

$$\sup_{y \in Y} \left| \int_\eta^b f(x, y)\, dx \right| \leqslant \varepsilon, \quad \eta_\varepsilon \leqslant \eta < b,$$

откуда и следует (54.4). Обратно, если рассматриваемый интеграл равномерно сходится на множестве Y в смысле определения 2′, то из условия (54.4) для любого $\varepsilon > 0$ следует существование такого числа η_ε, что при $y \in Y$ и $\eta_\varepsilon \leqslant \eta < b$ выполняется неравенство (54.2). $\square$

Если рассмотреть интеграл

$$F(y, \eta) \overset{\text{def}}{=} \int_\eta^b f(x, y)\, dx,$$

то, очевидно, что условие (54.4) означает, что этот интеграл равномерно на Y стремится к нулю при $\eta \to b - 0$ (здесь в терминологии п. 39.4 параметром является не y, как это было там, а переменная η).

Равномерная сходимость на множестве Y интеграла (54.1) означает также равномерное стремление на множестве Y функции

$$\Phi(y, \eta) \overset{\text{def}}{=} \int_a^\eta f(x, y)\, dx \tag{54.5}$$

при $\eta \to b - 0$ к функции (54.1).

Действительно, последнее означает (см. п. 39.4), что для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\eta_\varepsilon < b$, что для каждого η, удовлетворяющего условию $\eta_\varepsilon \leqslant \eta < b$, и всех $y \in Y$ выполняется неравенство

$$|\Phi(y) - \Phi(y, \eta)| < \varepsilon.$$

Но

$$\Phi(y) - \Phi(y, \eta) = \int_a^b f(x, y)\, dx - \int_a^\eta f(x, y)\, dx = \int_\eta^b f(x, y)\, dx.$$

Поэтому

$$\left| \int_\eta^b f(x, y)\, dx \right| < \varepsilon.$$

Таким образом условие $\Phi(y, \eta) \underset{Y}{\rightrightarrows} \Phi(y)$ при $\eta \to b - 0$ равносильно выполнению условий определения 2, т. е. равномерной сходимости на множестве Y интеграла (54.1).

Пример. Рассмотрим интеграл $\Phi(y)=\int\limits_0^{+\infty} ye^{-xy}\,dx$. В качестве множества Y возьмем полуось $y\geqslant 0$ (при любом $y<0$ этот интеграл расходится). Легко убедиться, что рассматриваемый интеграл сходится на Y. Для любого $\alpha>0$ он сходится равномерно на промежутке $[\alpha, +\infty)$. Действительно, в этом случае легко проверяется, например, выполнение условия (54.4):

$$\lim_{\eta\to+\infty}\sup_{y\geqslant\alpha}\left|\int\limits_\eta^{+\infty} ye^{-xy}\,dx\right| = \lim_{\eta\to+\infty}\sup_{y\geqslant\alpha} e^{-\eta y} = \lim_{\eta\to+\infty} e^{-\alpha\eta}=0.$$

На всей же полуоси Y равномерной сходимости нет. В самом деле,

$$\lim_{\eta\to+\infty}\sup_{y\geqslant 0}\left|\int\limits_\eta^{+\infty} ye^{-xy}\,dx\right| = \lim_{\eta\to+\infty}\sup_{y\geqslant 0} e^{-\eta y}=1,$$

т. е. на множестве Y условие (54.4) не выполняется.

Теорема 1 (признак Вейерштрасса). *Если существует неотрицательная функция $\varphi(x)$, определенная на промежутке $[a, b)$ и интегрируемая по Риману на каждом отрезке $[a, \eta]$, где $a<\eta<b$, такая что:*

1) $|f(x, y)|\leqslant\varphi(x)$, *где* $a\leqslant x<b$, $y\in Y$;

2) *интеграл* $\int\limits_a^b \varphi(x)\,dx$ *сходится,*

то интеграл (54.1) *равномерно сходится на множестве* Y.

Доказательство. Прежде всего, в силу признака сравнения (см. п. 33.3) интеграл (54.1) абсолютно, а значит, и просто сходится при любом $y\in Y$. Далее, в силу сходимости интеграла $\int\limits_a^b \varphi(x)\,dx$ для любого числа $\varepsilon>0$ существует такое $\eta_\varepsilon<b$, что если $\eta_\varepsilon\leqslant\eta<b$, то $\int\limits_\eta^b \varphi(x)\,dx<\varepsilon$. Тогда, в силу условия 1 теоремы

$$\left|\int\limits_\eta^b f(x, y)\,dx\right|\leqslant\int\limits_\eta^b |f(x, y)|\,dx\leqslant\int\limits_\eta^b \varphi(x)\,dx<\varepsilon,\quad \eta_\varepsilon\leqslant\eta<b,\quad y\in Y,$$

а это и означает равномерную сходимость интеграла $\int\limits_a^b f(x, y)\,dx$ на множестве Y. □

С помощью признака Вейерштрасса, например, сразу устанавливается, что интеграл $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2+y^2}$ равномерно сходится на всей вещественной оси $-\infty < y < +\infty$. Действительно, интеграл $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \pi$ сходится, и при любых x и y выполняется неравенство $\frac{1}{1+x^2+y^2} \leqslant \frac{1}{1+x^2}$.

Из критерия Коши равномерной сходимости функций по параметру (см. п. 39.4) непосредственно получаются необходимые и достаточные условия (также называемые критерием Коши) для равномерной сходимости интегралов.

Теорема 2 (критерий Коши равномерной сходимости интегралов). Для того чтобы интеграл (54.1) равномерно сходился на множестве Y, необходимо и достаточно, чтобы для любого $\varepsilon > 0$ существовало такое $\eta < b$, что для всех η' и η'', удовлетворяющих условиям $\eta < \eta' < b$, $\eta < \eta'' < b$ и всех $y \in Y$ выполнялось неравенство

$$\left| \int\limits_{\eta'}^{\eta''} f(x, y)\, dx \right| < \varepsilon. \tag{54.6}$$

Действительно, как было отмечено, равномерная сходимость интеграла (54.1) равносильна равномерному стремлению к пределу функции $\Phi(y, \eta)$ (см. (54.5)), а неравенство (54.6) в обозначениях (54.5) можно записать в виде

$$|\Phi(y, \eta'') - \Phi(y, \eta')| < \varepsilon.$$

Поэтому теорема 2 является просто перефразировкой теоремы 4 из п. 39.4 для рассматриваемого здесь случая.

Упражнения. Исследовать сходимость и равномерную сходимость интегралов при всех значениях параметра α, указать области изменения параметра α, на которых имеет место равномерная сходимость интегралов:

1. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+\alpha^2}$.
2. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+(x-\alpha)^2}$.
3. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x-\alpha)^2}\, dx$.
4. $\int\limits_{0}^{1} \frac{dx}{x+\alpha\sqrt{x}}$.
5. $\int\limits_{0}^{1} \frac{dx}{x^\alpha}$.
6. Исследовать на равномерную сходимость интеграл $\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{dx}{(x-a)^p+b^p}$ при $a \in \boldsymbol{R}$, $b \geqslant b_0 > 0$ (соответственно, при $b > 0$), $p > 1$.

54.2*. ПРИЗНАК РАВНОМЕРНОЙ СХОДИМОСТИ ИНТЕГРАЛОВ

В этом пункте будет доказан признак равномерной сходимости интегралов, аналогичный соответствующему признаку для равномерной сходимости рядов (см. п. 36.3).

Теорема 3. *Пусть функции $f(x, y)$ и $g(x, y)$ определены при $a \leqslant x < +\infty$ и $y \in Y$ (a — конечно, Y — некоторое числовое множество), причем функция $f(x, y)$ непрерывна по переменной x, а $g(x, y)$ имеет непрерывную по x производную $\frac{\partial g}{\partial x}$. Если*

1) *функция $g(x, y)$ при каждом $y \in Y$ монотонна по x и равномерно на множестве Y стремится к нулю при $x \to \infty$;*

2) *интеграл $\int\limits_a^\eta f(x, y)\,dx$ ограничен как функция переменных $\eta \in [a, +\infty)$ и $y \in Y$ на множестве $[a, +\infty) \times Y$; то интеграл*

$$\int\limits_a^{+\infty} g(x, y) f(x, y)\,dx \tag{54.7}$$

равномерно сходится на множестве Y.

Доказательство. Согласно второй теореме о среднем для интегралов (см. п. 30.3*) при любых η' и η'', $a < \eta' < \eta''$, справедливо равенство

$$\int\limits_{\eta'}^{\eta''} g(x, y) f(x, y)\,dx =$$

$$= g(\eta', y) \int\limits_{\eta'}^{\xi} f(x, y)\,dx + g(\eta'', y) \int\limits_{\xi}^{\eta''} f(x, y)\,dx, \tag{54.8}$$

где $\eta' < \xi < \eta''$. В силу условия 2) теоремы существует такая постоянная $M > 0$, что для всех $(\eta, y) \in [a, +\infty) \times Y$ имеет место неравенство $\left|\int\limits_a^\eta f(x, y)\,dx\right| \leqslant M$. Поэтому

$$\left|\int\limits_{\eta'}^{\xi} f(x, y)\,dx\right| = \left|\int\limits_a^{\xi} f(x, y)\,dx + \int\limits_a^{\eta'} f(x, y)\,dx\right| \leqslant$$

$$\leqslant \left|\int\limits_a^{\xi} f(x, y)\,dx\right| + \left|\int\limits_a^{\eta'} f(x, y)\,dx\right| = 2M, \tag{54.9}$$

аналогично,

$$\left|\int\limits_{\xi}^{\eta''} f(x, y)\,dx\right| \leqslant 2M. \tag{54.10}$$

Зафиксируем произвольное $\varepsilon > 0$. В силу равномерного на множестве Y стремления к нулю функции $g(x, y)$ при $x \to +\infty$, существует такое $\eta_\varepsilon > a$, что для всех $x > \eta_\varepsilon$ и всех $y \in Y$ справедливо неравенство

$$|g(x, y)| < \frac{\varepsilon}{4M}. \tag{54.11}$$

С помощью неравенств (54.9), (54.10) и (54.11) из (54.8) следует, что для любых $\eta' > \eta_\varepsilon$ и $\eta'' > \eta_\varepsilon$ имеет место оценка

$$\left|\int\limits_{\eta'}^{\eta''} g(x, y) f(x, y)\, dx\right| \leqslant$$

$$\leqslant |g(\eta', y)| \left|\int\limits_{\eta'}^{\xi} f(x, y)\, dx\right| + |g(\eta'', y)| \left|\int\limits_{\xi}^{\eta''} f(x, y)\, dx\right| <$$

$$< 2M\frac{\varepsilon}{4M} + 2M\frac{\varepsilon}{4M} = \varepsilon.$$

Таким образом выполняется условие Коши (см. п. 54.1) равномерной сходимости интеграла (54.7). □

Замечание. Можно было бы интеграл в левой части равенства оценить и не прибегая ко второй теореме о среднем, а поступая аналогично доказательству признака Дирихле в п. 33.6, проинтегрировать его по частям. Это однако удлинило бы доказательство и по существу были бы повторены рассуждения, проведенные при доказательстве второй теоремы о среднем.

Наличие у функции $g(x, y)$ непрерывной производной по x не является существенным и вызвано лишь тем, что вторая теорема о среднем в п. 28.3* была доказана при этом предположении.

Пример. Интеграл $\int\limits_1^{+\infty} \frac{x \sin xy}{1+x^2}\, dx$ равномерно сходится при $y \geqslant y_0 > 0$. Действительно, функция $g(x) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{x}{1+x^2}$ убывает при $x \geqslant 1$ и $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = 0$, причем, поскольку $g(x)$ не зависит от y, то стремление $g(x)$ к нулю при $x \to +\infty$ происходит равномерно относительно y; кроме того

$$\left|\int\limits_0^{\eta} \sin xy\, dx\right| = \frac{1-\cos \eta y}{y} \leqslant \frac{2}{y_0}.$$

Таким образом, оба условия теоремы 3 выполнены.

Задача 32. Доказать, что если функции $f(x, y)$ и $g(x, y)$ определены при $-\infty < a \leqslant x < +\infty$ и $y \in Y$, причем интеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x, y)\, dx$ равномерно сходится на Y, а функция $g(x, y)$ монотонна по x и ограничена на множестве $[a, +\infty) \times Y$, то интеграл $\int\limits_a^{+\infty} g(x, y) f(x, y)\, dx$ сходится равномерно на Y.

Упражнения. 7. Пусть функции $f(x)$ и $g(x, y)$ непрерывны по x, функция $g(x, y)$ монотонно и равномерно относительно $y \in Y$ стремится к нулю при $x \to +\infty$ и имеет непрерывную производную $\frac{\partial g(x, y)}{\partial x}$, $x \geqslant a$, $y \in Y$, а интеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$ сходится. Тогда интеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x) g(x, y)\,dx$ равномерно сходится на множестве Y.

Исследовать на равномерную сходимость интегралы:

8. $\int\limits_0^{\infty} e^{-\alpha x} \frac{\sin^p x}{x^q}\,dx$ при $\alpha \geqslant 0$, $p \geqslant 0$, $q \geqslant 0$.

9. $\int\limits_1^{\infty} \frac{\ln^p x}{x^q}\,dx$ при $p \geqslant 0$, $q \geqslant 0$.

54.3. СВОЙСТВА НЕСОБСТВЕННЫХ ИНТЕГРАЛОВ, ЗАВИСЯЩИХ ОТ ПАРАМЕТРА

При изучении свойств несобственных интегралов, зависящих от параметра, очень часто придется иметь дело с перестановкой предельных переходов по различным переменным. Поэтому прежде всего докажем лемму, относящуюся к этому вопросу.

Лемма 1. *Пусть X и Y — два числовых множества; функция $f(x, y)$ определена на их произведении $X \times Y$* (см. п. 41.2): $x \in X$, $y \in Y$; *x_0 и y_0 — числа или какие-то из бесконечностей ∞, $+\infty$, $-\infty$ и существуют пределы*

$$\varphi(x) = \lim_{y \to y_0} f(x, y), \quad x \in X, \quad \text{и} \quad \psi(y) = \lim_{x \to x_0} f(x, y), \quad y \in Y.$$

Если стремление функции f хотя бы к одному из указанных пределов происходит равномерно, то существуют и равны оба повторных предела:

$$\lim_{x \to x_0} \lim_{y \to y_0} f(x, y) = \lim_{y \to y_0} \lim_{x \to x_0} f(x, y).$$

Доказательство. Пусть, например, функция $f(x, y)$ равномерно на X стремится к $\varphi(x)$ при $y \to y_0$. Тогда для любого фиксированного $\varepsilon > 0$ существует окрестность $U(y_0)$, такая, что, каковы бы ни были $y \in \mathring{U}(y_0) \cap Y$*) и $x \in X$, выполняется неравенство

$$|f(x, y) - \varphi(x)| < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{54.12}$$

Если $y_1 \in \mathring{U}(y_0) \cap Y$ и $y_2 \in \mathring{U}(y_0) \cap Y$, то

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leqslant |f(x, y_1) - \varphi(x)| + |\varphi(x) - f(x, y_2)| < \varepsilon.$$

*) Через $\mathring{U}$, как всегда, обозначается проколотая окрестность.

Переходя здесь к пределу при $x \to x_0$, получим

$$|\psi(y_1) - \psi(y_2)| \leqslant \varepsilon. \qquad (54.13)$$

Согласно критерию Коши для существования предела функции (см. п. 4.11), из (54.13) следует существование конечного предела

$$\lim_{y \to y_0} \psi(y) = A.$$

Итак, доказано существование повторного предела

$$\lim_{y \to y_0} \lim_{x \to x_0} f(x, y) = A.$$

Зафиксируем теперь $y_1 \in \mathring{U}(y_0) \cap Y$. Тогда из (54.12) при $y = y_1$ и из (54.13) при $y_2 \to y_0$ соответственно получим

$$|f(x, y_1) - \varphi(x)| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad |\psi(y_1) - A| \leqslant \varepsilon. \qquad (54.14)$$

Для всех $y \in Y$ существует предел $\lim\limits_{x \to x_0} f(x, y) = \psi(y)$. Поэтому при фиксированном $y_1 \in \mathring{U}(y_0) \cap Y$ для заданного $\varepsilon > 0$ найдется такая окрестность $U(x_0)$, что для всех $x \in \mathring{U}(x_0) \cap X$ будем иметь

$$|f(x, y_1) - \psi(y_1)| < \varepsilon. \qquad (54.15)$$

Из неравенств (54.14) и (54.15) для всех $x \in \mathring{U}(x_0) \cap X$ имеем

$$|\varphi(x) - A| \leqslant |\varphi(x) - f(x, y_1)| + |f(x, y_1) - \psi(y_1)| + |\psi(y_1) - A| < 3\varepsilon,$$

что и означает существование повторного предела

$$A = \lim_{x \to x_0} \varphi(x) = \lim_{x \to x_0} \lim_{y \to y_0} f(x, y). \ \square$$

Теорема 4. *Пусть* $-\infty < a < b \leqslant +\infty$ *и функция* $f(x, y)$ *определена для всех* $x \in [a, b)$, $y \in Y$ *и при любом* $y \in Y$ *непрерывна по* x *на* $[a, b)$. *Тогда если при любом* $\eta \in [a, b)$ *функция* $f(x, y)$ *равномерно на отрезке* $[a, \eta]$ *стремится к функции* $\varphi(x)$ *при* $y \to y_0$ **) *и интеграл*

$$\int_a^b f(x, y)\, dx \qquad (54.16)$$

равномерно сходится на множестве Y, *то*

$$\lim_{y \to y_0} \int_a^b f(x, y)\, dx = \int_a^b \lim_{y \to y_0} f(x, y)\, dx = \int_a^b \varphi(x)\, dx. \qquad (54.17)$$

---

*) Здесь y_0 — число или одна из бесконечностей ∞, $+\infty$, $-\infty$.

Доказательство. Если $a<\eta<b$, то в силу теоремы 2 п. 53.1 имеем

$$\lim_{y\to y_0}\int_a^\eta f(x, y)\,dx=\int_a^\eta \lim_{y\to y_0} f(x, y)\,dx=\int_a^\eta \varphi(x)\,dx. \tag{54.18}$$

Поэтому, согласно определению несобственного интеграла, равенство (54.17) можно переписать в виде

$$\lim_{y\to y_0}\lim_{\eta\to b-0}\int_a^\eta f(x, y)\,dx=\lim_{\eta\to b-0}\lim_{y\to y_0}\int_a^\eta f(x, y)\,dx. \tag{54.19}$$

Таким образом, остается доказать возможность перестановки порядка предельных переходов для функции

$$\Phi(y, \eta)=\int_a^\eta f(x, y)\,dx.$$

Это следует из доказанной выше леммы. В самом деле, согласно (54.18) существует предел $\lim\limits_{y\to y_0}\Phi(y, \eta)$. С другой стороны, существует и предел

$$\lim_{\eta\to b-0}\Phi(y, \eta)=\lim_{\eta\to b-0}\int_a^\eta f(x, y)\,dx=\int_a^b f(x, y)\,dx,$$

причем здесь, согласно условию теоремы, стремление к пределу происходит равномерно на множестве Y. Следовательно, справедливость равенства (54.19) непосредственно вытекает из утверждения леммы. □

Теорема 5. *Пусть функция $f(x, y)$ определена и непрерывна (как функция двух переменных) на полуоткрытом «прямоугольнике»*

$$\{(x, y): a\leqslant x<b,\quad c\leqslant y\leqslant d\},$$
$$-\infty<a<b\leqslant+\infty,\quad -\infty<c<d<+\infty.$$

Тогда, если интеграл $\Phi(y)=\int\limits_a^b f(x, y)\,dx$ сходится равномерно на $[c, d]$, то он является непрерывной функцией на этом отрезке.

Доказательство. Каково бы ни было $y_0\in[c, d]$, функция $f(x, y)$ при $y\to y_0$ равномерно на любом отрезке $[a, \eta]$, $a<\eta<b$, стремится к функции $f(x, y_0)$ (см. п. 39.4). Поэтому, согласно предыдущей теореме (см. (54.17)),

$$\lim_{y\to y_0}\Phi(y)=\int_a^b \lim_{y\to y_0} f(x, y)\,dx=\int_a^b f(x, y_0)\,dx=\Phi(y_0). \quad \square$$

Теорема 6. *Если выполнены предположения теоремы 5, то*

$$\int_c^d \Phi(y)\,dy = \int_c^d dy \int_a^b f(x, y)\,dx = \int_a^b dx \int_c^d f(x, y)\,dy. \tag{54.20}$$

Доказательство. Если $a < \eta < b$, то по теореме 3, п. 53.1, имеем

$$\int_c^d dy \int_a^\eta f(x, y)\,dx = \int_a^\eta dx \int_c^d f(x, y)\,dy. \tag{54.21}$$

Функция $\Phi(y, \eta) = \int_a^\eta f(x, y)\,dx$ непрерывна по y и при $\eta \to b-0$ стремится к своему пределу $\Phi(y)$ равномерно на отрезке $[c, d]$. Поэтому, согласно теореме 2, п. 53.1, в левой части равенства (54.21) можно перейти к пределу под знаком интеграла при $\eta \to b-0$:

$$\lim_{\eta \to b-0} \int_c^d dy \int_a^\eta f(x, y)\,dx = \lim_{\eta \to b-0} \int_c^d \Phi(y, \eta)\,dy = \int_c^d \lim_{\eta \to b-0} \Phi(y, \eta)\,dy =$$
$$= \int_c^d \Phi(y)\,dy = \int_c^d dy \int_a^b f(x, y)\,dx;$$

при этом полученный предел конечен. Следовательно, при $\eta \to b-0$ существует тот же предел и у правой части равенства (54.21), который в силу определения несобственного интеграла равен

$$\int_a^b dx \int_c^d f(x, y)\,dy. \ \square$$

Докажем одну теорему о перестановке порядка интегрирования для случая, когда оба интеграла несобственные.

Теорема 7. *Пусть функция $f(x, y)$ определена и непрерывна на полуоткрытом прямоугольнике*

$$\{(x, y): a \leqslant x < b, \quad c \leqslant y < d\},$$
$$-\infty < a < b \leqslant +\infty, \quad -\infty < c < d \leqslant +\infty.$$

Если интеграл

$$\int_a^b f(x, y)\,dx \tag{54.22}$$

равномерно сходится на любом отрезке $[c, \eta]$, $c < \eta < d$, а интеграл

$$\int_c^d f(x, y)\,dy \tag{54.23}$$

равномерно сходится на любом отрезке $[a, \xi]$, $a<\xi<b$, *и существует один из двух повторных интегралов*

$$\int_c^d dy \int_a^b |f(x, y)|\, dx, \quad \int_a^b dx \int_c^d |f(x, y)|\, dy,$$

то существуют и равны между собой оба повторных интеграла

$$\int_c^d dy \int_a^b f(x, y)\, dx \quad и \quad \int_a^b dx \int_c^d f(x, y)\, dy, \quad т.\ е.$$

$$\int_c^d dy \int_a^b f(x, y)\, dx = \int_a^b dx \int_c^d f(x, y)\, dy. \tag{54.24}$$

Доказательство. Пусть, например, существует интеграл

$$\int_a^b dx \int_c^d |f(x, y)|\, dy \tag{54.25}$$

и пусть $c<\eta<d$. В силу равномерной сходимости на отрезке $[c, \eta]$ интеграла (54.22), согласно теореме 6 имеем

$$\int_c^\eta dy \int_a^b f(x, y)\, dx = \int_a^b dx \int_c^\eta f(x, y)\, dy. \tag{54.26}$$

Предел левой части этого равенства при $\eta \to d-0$, очевидно, равен

$$\int_c^d dy \int_a^b f(x, y)\, dx.$$

Покажем, что предел правой части равенства (54.26) равен

$$\int_a^b dx \int_c^d f(x, y)\, dy,$$

т. е. что в этом случае возможен предельный переход при $\eta \to d-0$ под знаком интеграла. Проверим выполнение предпосылок теоремы 4 этого пункта. Функция $\Phi(x, \eta) = \int_c^\eta f(x, y)\, dy$ непрерывна по x (см. теорему 1 п. 53.1) и, согласно условию теоремы, на любом отрезке $[a, \xi]$, $a<\xi<b$, при $\eta \to d-0$ равномерно стремится к интегралу (54.23), т. е. к функции $F(x) = \int_c^d f(x, y)\, dy$.

Наконец, интеграл

$$\int_a^b \Phi(x, \eta)\, dx = \int_a^b dx \int_c^\eta f(x, y)\, dy$$

сходится равномерно относительно η, $c<\eta<d$, ибо

$$|\Phi(x, \eta)| \leqslant \int_c^d |f(x, y)|\, dy,$$

а интеграл (54.25), по предположению, сходится.

Следовательно, условия теоремы 4 для правой части равенства (54.26) выполнены, поэтому

$$\lim_{\eta\to d-0} \int_a^b \Phi(x, \eta)\, dx = \int_a^d \lim_{\eta\to d-0} \Phi(x, \eta)\, dx = \int_a^b dx \int_c^d f(x, y)\, dy.$$

Итак, доказываемое равенство (54.24) получается из (54.26) предельным переходом при $\eta\to d-0$. $\square$

Перейдем теперь к рассмотрению дифференцируемости несобственных интегралов, зависящих от параметра.

Теорема 8. *Пусть функции $f(x, y)$ и $\frac{\partial f(x, y)}{\partial y}$ определены и непрерывны на полуоткрытом прямоугольнике*

$$\Delta = \{a \leqslant x < b,\quad c \leqslant y \leqslant d\},$$

$$-\infty < a < b \leqslant +\infty, \quad -\infty < c < d < +\infty.$$

Если интеграл $\int_a^b f(x, y)\, dx$ сходится, а интеграл $\int_a^b \frac{\partial f(x, y)}{\partial y}\, dx$ равномерно сходится на отрезке $[c, d]$, то функция $\Phi(y) = \int_a^b f(x, y)\, dx$ непрерывно дифференцируема на этом отрезке и

$$\frac{d}{dy} \int_a^b f(x, y)\, dx = \int_a^b \frac{\partial f(x, y)}{\partial y}\, dx.$$

Доказательство. Представим функцию $\Phi(y) = \int_a^b f(x, y)\, dx$ в виде сходящегося на отрезке $[c, d]$ ряда

$$\Phi(y) = \int_a^b f(x, y)\, dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\eta_n}^{\eta_{n+1}} f(x, y)\, dx, \tag{54.27}$$

где η_n, $n=1, 2, \ldots,$ — фиксированная последовательность, такая, что $\eta_n \in [a, b)$, $\eta_1 = a$ и $\lim\limits_{n\to\infty} \eta_n = b$, а функцию $\int_a^b \frac{\partial f(x, y)}{\partial y}\, dx$ —

в виде равномерно сходящегося на отрезке $[c, d]$ ряда

$$\int_a^b \frac{\partial f(x, y)}{\partial y}\, dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\eta_n}^{\eta_{n+1}} \frac{\partial f(x, y)}{\partial y}\, dx. \qquad (54.28)$$

Согласно теореме 4 п. 53.2, каждый член ряда (54.28) является производной по переменной y от соответствующего члена ряда (54.27), а поэтому в силу теоремы о дифференцировании рядов (см. п. 36.4) сумма ряда (54.28) является производной суммы ряда (54.27). □

Как уже отмечалось, все предыдущие формулировки и доказательства относятся к несобственным интегралам, зависящим от параметра, которые удовлетворяют условиям 1) и 2), сформулированным в начале п. 54.1. Совершенно аналогично рассматриваются и более общие случаи, например, когда

1') $-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty$;

2') при любом $y \in Y$ функция $f(x, y)$ по переменной x интегрируема, по Риману, на каждом отрезке $[\xi, \eta]$, где $a < \xi < \eta < b$.

Построенная теория интегралов, зависящих от параметра, естественным образом переносится и на случай, когда интеграл зависит от двух или вообще от некоторого конечного числа параметров $y_1, \ldots, y_n$. При этом многие формулировки определений и теорем, а также доказательства формально остаются прежними, если только вкладывать новый смысл в применяемые обозначения. Это относится, например, к определению равномерной сходимости и теореме о предельном переходе под знаком интеграла, следует только считать, что $y = (y_1, \ldots, y_n)$ и $y_0 = (y_1^{(0)}, \ldots, y_n^{(0)})$ — точки n-мерного евклидова пространства, а $y \to y_0$ понимать в смысле предела в этом пространстве.

54.4. ПРИМЕНЕНИЕ ТЕОРИИ ИНТЕГРАЛОВ, ЗАВИСЯЩИХ ОТ ПАРАМЕТРА, К ВЫЧИСЛЕНИЮ ОПРЕДЕЛЕННЫХ ИНТЕГРАЛОВ

До сих пор в нашем распоряжении было два способа вычисления определенных интегралов. Первый из них исходит из определения интеграла как предела интегральных сумм и широко используется в численных методах. С ним мы более подробно ознакомимся в п. 60.4. Второй способ, которым мы уже постоянно пользовались, основан на нахождении первообразной подынтегральной функции и применении формулы Ньютона — Лейбница. Оказывается, что иногда удается получать точные значения определенных интегралов, используя теорию интегралов, зависящих от параметра. При этом ценность этого метода состоит в том, что с его помощью в ряде случаев вычисляются интегралы от функций, первообразные которых не являются элементарными функциями и тем самым обычный способ использования формулы Ньютона — Лейбница оказывается неприменимым.

Пример 1. Пусть требуется вычислить интеграл

$$J=\int_0^1 \frac{\operatorname{arctg} x}{x\sqrt{1-x^2}}\,dx. \tag{54.29}$$

Приведем способы его вычисления, основанные на его замене некоторым интегралом, зависящим от параметра, для которого (54.29) является частным значением.

Рассмотрим функцию $f(x,\ y)=\dfrac{\operatorname{arctg} xy}{x\sqrt{1-x^2}}$ и интеграл

$$J(y)=\int_0^1 f(x,\ y)\,dx=\int_0^1 \frac{\operatorname{arctg} xy}{x\sqrt{1-x^2}}\,dx. \tag{54.30}$$

Очевидно, что интеграл (54.29) получается отсюда при $y=1$. Так как $\dfrac{\operatorname{arctg} xy}{x\sqrt{1-x^2}}=O(1)$ при $x\to 0$ и $\dfrac{\operatorname{arctg} xy}{x\sqrt{1-x^2}}=O\left(\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right)$ при $x\to 1$ и любом фиксированном y, то интеграл (54.30) сходится при любом y.

Из неравенства $\left|\dfrac{\partial f(x,\ y)}{\partial y}\right|=\left|\dfrac{1}{(1+x^2y^2)\sqrt{1-x^2}}\right|\leqslant\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ и сходимости интеграла $\displaystyle\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=\frac{\pi}{2}$ следует, что интеграл

$$\int_0^1 \frac{\partial f(x,\ y)}{\partial y}\,dx \tag{54.31}$$

равномерно сходится на всей вещественной оси и, согласно теореме 8 п. 54.3, равен $J'(y)$.

Выполнив последовательно замены переменного интегрирования $x=\cos\varphi$ и $t=\operatorname{tg}\varphi$, получим

$$J'(y)=\int_0^1\frac{dx}{(1+x^2y^2)\sqrt{1-x^2}}=\int_0^{\pi/2}\frac{d\varphi}{1+y^2\cos^2\varphi}=$$

$$=\int_0^{+\infty}\frac{dt}{1+y^2+t^2}=\frac{1}{\sqrt{1+y^2}}\operatorname{arctg}\frac{t}{\sqrt{1+y^2}}\Bigg|_0^{+\infty}=\frac{\pi}{2\sqrt{1+y^2}}.$$

Отсюда, согласно определению неопределенного интеграла, вытекает, что

$$J(y)=\int J'(y)\,dy=\frac{\pi}{2}\int\frac{dy}{\sqrt{1+y^2}}=\frac{\pi}{2}\ln\left(y+\sqrt{1+y^2}\right)+C.$$

Но из (54.30) следует, что $J(0)=0$, поэтому $C=0$ и

$$J(y)=\frac{\pi}{2}\ln\left(y+\sqrt{1+y^2}\right).$$

Подставляя сюда $y=1$ получаем значение искомого интеграла (54.29)

$$J=J(1)=\frac{\pi}{2}\ln(1+\sqrt{2}).$$

Интеграл (54.29) можно вычислить и используя интегрирование по параметру. Заметив, что $\frac{\operatorname{arctg} x}{x}=\int\limits_0^1 \frac{dy}{1+x^2y^2}$, получим для J выражение

$$J=\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}\int\limits_0^1 \frac{dy}{1+x^2y^2}. \tag{54.32}$$

Интеграл же $\int\limits_0^1 \frac{dx}{(1+x^2y^2)\sqrt{1-x^2}}$ сходится равномерно по y, ибо $\frac{1}{(1+x^2y^2)\sqrt{1-x^2}}\leqslant\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, а интеграл $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ сходится. Поэтому в (54.32) можно переменить порядок интегрирования (см. теорему 6 п. 54.3). Тогда (используя непосредственно найденное выше значение получающегося интеграла по x) находим

$$J=\int\limits_0^1 dy\int\limits_0^1 \frac{dx}{(1+x^2y^2)\sqrt{1-x^2}}=\frac{\pi}{2}\int\limits_0^1 \frac{dy}{\sqrt{1+y^2}}=\frac{\pi}{2}\ln(1+\sqrt{2}).$$

Пример 2. Вычислим значение интеграла

$$I(\alpha)=\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin \alpha x}{x}\,dx. \tag{54.33}$$

Можно показать, что соответствующий неопределенный интеграл при $\alpha\neq 0$ не выражается через элементарные функции, и тем самым данный интеграл нельзя вычислить обычным приемом с помощью формулы Ньютона — Лейбница.

Интеграл (54.33) сходится при всех значениях α. Действительно, если $\alpha=0$, то, очевидно, $I(0)=0$. Если же $\alpha\neq 0$, то, производя замену переменного $t=\alpha x$, получим

$$I(\alpha)=\begin{cases} \int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,dt=I(1), & \text{если } \alpha>0 \\ -\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,dt=-I(1) & \text{если } \alpha<0 \end{cases}$$

Интеграл же $I(1)$ сходится (см. п. 33.5), поэтому и интеграл $I(\alpha)$ сходится.

Для того чтобы вычислить интеграл (54.33), рассмотрим более общий интеграл $I(\alpha, \beta)=\int\limits_0^{+\infty} e^{-\beta x}\frac{\sin \alpha x}{x}\,dx$.

Продифференцировав формально по α под знаком интеграла, получим интеграл $\int\limits_0^{+\infty} e^{-\beta x}\cos\alpha\, dx$, который при любом фиксированном $\beta>0$ равномерно сходится относительно параметра α, $-\infty<\alpha<+\infty$. Следовательно, при $\beta>0$ (см. т. 1, п. 26.4)

$$\frac{\partial I(\alpha, \beta)}{\partial\alpha}=\int\limits_0^{+\infty} e^{-\beta x}\cos\alpha x\, dx=\frac{\beta}{\alpha^2+\beta^2},$$

откуда

$$I(\alpha, \beta)=\int\limits_0^{\alpha}\frac{\beta\, dt}{t^2+\beta^2}+C(\beta)=\operatorname{arctg}\frac{\alpha}{\beta}+C(\beta).$$

Но $I(0, \beta)=0$, следовательно, $C(\beta)=0$. Итак,

$$I(\alpha, \beta)=\operatorname{arctg}\frac{\alpha}{\beta},\quad \beta>0.$$

Нас, однако, интересует значение интеграла $I(\alpha, \beta)$ при $\beta=0$. Проще всего попытаться обосновать возможность предельного перехода под знаком интеграла $I(\alpha, \beta)$ при $\beta\to+0$. Зафиксируем число $b\geqslant 0$ и покажем, что интеграл $I(\alpha, \beta)$ при любом фиксированном $\alpha\neq 0$ равномерно сходится по параметру β на отрезке $[0, b]$. Действительно, интегрируя по частям (см. там же, п. 26.4), получим

$$\int\limits_\eta^{+\infty} e^{-\beta x}\frac{\sin\alpha x}{x}\,dx=\frac{1}{x}e^{-\beta x}\frac{\alpha\cos\alpha x+\beta\sin\alpha x}{\alpha^2+\beta^2}\Bigg|_\eta^{+\infty}+$$
$$+\int\limits_\eta^{+\infty} e^{-\beta x}\frac{\alpha\cos\alpha x+\beta\sin\alpha x}{\alpha^2+\beta^2}\frac{dx}{x^2}.$$

Выберем η_ε так, чтобы при $\eta\geqslant\eta_\varepsilon$ выполнялись неравенства

$$\left|\frac{1}{\eta}e^{-\eta\beta}\frac{\alpha\cos\alpha\eta+\beta\sin\alpha\eta}{\alpha^2+\beta^2}\right|\leqslant\frac{|\alpha|+b}{\alpha^2}\frac{1}{\eta}<\frac{\varepsilon}{2},$$

$$\left|\int\limits_\eta^{+\infty} e^{-\beta x}\frac{\alpha\cos\alpha x+\beta\sin x}{\alpha^2+\beta^2}\frac{dx}{x^2}\right|\leqslant\frac{|\alpha|+b}{\alpha^2}\int\limits_\eta^{+\infty}\frac{dx}{x^2}<\frac{\varepsilon}{2}.$$

Тогда при $\eta \geq \eta_\varepsilon$ получим $\left| \int\limits_{\eta}^{+\infty} e^{-\beta x} \frac{\sin \alpha x}{x} dx \right| < \varepsilon$, что и доказывает равномерную сходимость интеграла $I(\alpha, \beta)$ по параметру β на любом отрезке $[0, b]$. Теперь в силу теоремы 4 п. 54.3

$$I(\alpha) = I(\alpha, 0) = \lim_{\beta \to +0} I(\alpha, \beta) = \lim_{\beta \to +0} \operatorname{arctg} \frac{\alpha}{\beta} = \frac{\pi}{2} \operatorname{sign} \alpha;$$

итак

$$I(\alpha) = \int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin \alpha x}{x} dx = \begin{cases} \pi/2, & \text{если } \alpha > 0, \\ 0, & \text{если } \alpha = 0, \\ -\pi/2, & \text{если } \alpha < 0. \end{cases}$$

Следует обратить внимание на то, что дифференцирование по α в (54.33) привело бы к расходящемуся интегралу $\int\limits_0^{\infty} \cos \alpha x \, dx$. Оно стало возможным, в $I(\alpha, \beta)$, благодаря наличию множителя $e^{-\beta x}$, $\beta > 0$, называемого «множителем сходимости». Вычисление интеграла вида $\int\limits_0^{\infty} f(x) \, dx$ путем перехода к $\int\limits_0^{\infty} e^{-\beta x} f(x) \, dx$, дифференцирования по β, нахождения полученного интеграла и перехода к пределу при $\beta \to 0$ называется «методом введения множителя сходимости».

Знание значения $I(\alpha)$ позволяет легко находить и значение многих подобных интегралов. Например, легко можно показать (и это мы используем в дальнейшем), что

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{1 - \cos \alpha x}{x^2} dx = |\alpha| \pi. \tag{54.34}$$

Действительно, интегрируя по частям, найдем

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{1 - \cos \alpha x}{x^2} dx = \alpha \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin \alpha x}{x} dx = 2\alpha \int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin \alpha x}{x} dx = |\alpha| \pi.$$

Упражнения. Вычислить интегралы:

10. $\int\limits_0^{a} \frac{\ln(1 + ax)}{1 + x^2} dx \quad (a > 0)$.

11. $\int\limits_0^{\pi/2} \frac{\ln(1 + a \cos x)}{\cos x} dx \quad (|a| < 1)$.

12. $\int\limits_0^{\infty} \frac{\operatorname{arctg} ax}{x(1 + b^2 x^2)} dx$.

13. $\int\limits_0^{\infty} \frac{\cos ax + \cos bx - 2}{x^2} dx \ (a, \ b \neq 0)$.

14. $\int\limits_0^{\infty} e^{-ax} \frac{\sin^2 bx}{x^2} dx$.

54.5. ЭЙЛЕРОВЫ ИНТЕГРАЛЫ

Рассмотрим интегралы

$$B(p,\ q)=\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,dx, \tag{54.35}$$

$$\Gamma(s)=\int_0^{+\infty} x^{s-1}e^{-x}\,dx, \tag{54.36}$$

называемые *эйлеровыми интегралами* соответственно *первого* и *второго рода*. Интеграл (54.35) называется также *бета-функцией*, а (54.36) — *гамма-функцией*.

Выясним прежде всего, для каких значений параметров p, q и s имеют смысл правые части формул (54.35) и (54.36). Рассмотрим сначала интеграл (54.35). Подынтегральная функция имеет, вообще говоря, две особенности: при $x=0$ и при $x=1$, поэтому представим его в виде

$$\mathrm{B}(p,\ q)=\int_0^{1/2} x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,dx+\int_{1/2}^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,dx.$$

Сравнивая первый интеграл в правой части с интегралом $\int_0^{1/2} x^{p-1}dx$, а второй — с $\int_{1/2}^1 (1-x)^{q-1}\,dx$, которые сходятся соответственно при $p>0$ и $q>0$ и соответственно расходятся при выполнении неравенств $p\leqslant 0$ и $q\leqslant 0$ (см. п. 33.3), получаем, что областью определения бета-функции (54.35) в плоскости p, q является прямой угол $p>0$, $q>0$.

Далее, интеграл $\mathrm{B}(p,\ q)$ равномерно сходится в каждом прямом угле $p\geqslant p_0$, $q\geqslant q_0$, каковы бы ни были $p_0>0$ и $q_0>0$. Действительно, это следует, согласно признаку Вейерштрасса (см. п. 54.1), из неравенства

$$x^{p-1}(1-x)^{q-1}\leqslant x^{p_0-1}(1-x)^{q_0-1},\quad 0\leqslant x\leqslant 1,$$

и доказанной выше сходимости интеграла

$$\mathrm{B}(p_0,\ q_0)=\int_0^1 x^{p_0-1}(1-x)^{q_0-1}\,dx,\quad p_0>0,\ q_0>0.$$

Поскольку всякая точка $(p,\ q)$, $p>0$, $q>0$, принадлежит некоторому углу: $p>p_0$, $q>q_0$, при соответствующем выборе чисел $p_0>0$ и $q_0>0$, то в силу теоремы 5 п. 54.3 функция $\mathrm{B}(p,\ q)$ непрерывна во всей своей области определения.

Для отыскания области определения гамма-функции (54.36) представим ее в виде

$$\Gamma(s)=\int_0^1 x^{s-1}e^{-x}dx+\int_1^{+\infty} x^{s-1}e^{-x}dx. \qquad (54.37)$$

Сравнивая первое слагаемое в правой части с интегралом $\int_0^1 x^{s-1}dx$, который сходится при $s>0$ и расходится при $s\leqslant 0$, получим, что $\int_0^1 x^{s-1}e^{-x}dx$ сходится и расходится при тех же значениях параметра s. Что же касается второго интеграла в правой части равенства (54.37), то он сходится при всех значениях s. Это, например, следует из справедливости при любом s равенства $x^{s-1}e^{-x}=o(e^{-x/2})$ для $x\to+\infty$ и из сходимости интеграла $\int_1^{+\infty} e^{-x/2}dx=2e^{-\frac{1}{2}}$. Таким образом, интеграл (54.36) сходится для всех $s>0$ и расходится при $s\leqslant 0$.

Покажем теперь, что интеграл (54.36) равномерно сходится на всяком отрезке $[s_1, s_2]$, где $0<s_1<s_2<+\infty$. Действительно, пусть $s_1\leqslant s\leqslant s_2$; тогда если $0\leqslant x\leqslant 1$, то

$$x^{s-1}e^{-x}\leqslant x^{s_1-1}e^{-x},$$

а если $x\geqslant 1$, то

$$x^{s-1}e^{-x}\leqslant x^{s_2-1}e^{-x}$$

и так как интегралы $\int_0^1 x^{s_1-1}e^{-x}dx$ и $\int_1^{+\infty} x^{s_2-1}e^{-x}dx$ сходятся, то из формулы (54.37) в силу признака Вейерштрасса равномерной сходимости интегралов (см. п. 54.1) вытекает равномерная сходимость интеграла $\Gamma(s)$ на отрезке $[s_1, s_2]$. Отсюда в силу теоремы 5 п. 54.3 следует, что функция $\Gamma(s)$ непрерывна во всей своей области определения.

Упражнение 15. Доказать, что функции $B(p, q)$ и $\Gamma(s)$ бесконечно дифференцируемы.

Задача 33. Доказать, что $B(p, q)$ и $\Gamma(s)$ являются аналитическими функциями.

Установим некоторые свойства интегралов $\Gamma(s)$ и $B(p, q)$. Прежде всего из формулы (54.36) непосредственно получаем

$$\Gamma(s)>0 \quad (s>0), \qquad (54.38)$$

в частности, гамма-функция не имеет нулей. Далее, проинтегрировав по частям, получим

$$\Gamma(s+1)=\int_0^{+\infty} x^s e^{-x}dx=-x^s e^{-x}\Big|_0^{+\infty}+s\int_0^{+\infty} x^{s-1}e^{-x}dx=s\Gamma(s). \qquad (54.39)$$

Таким образом, если $s > n$ $(n = 1, 2, \ldots)$, то

$$\Gamma(s) = (s-1)(s-2)\ldots(s-n)\Gamma(s-n). \qquad (54.40)$$

При любом $s > 0$ можно выбрать целое неотрицательное число n так, чтобы $0 < s - n \leqslant 1$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$, и тогда $\Gamma(s)$ с помощью формулы (54.40) будет выражаться через значение гамма-функции в некоторой точке промежутка $(0, 1]$. Иначе говоря, зная значения гамма-функции на промежутке $(0, 1]$, можно найти ее значение в любой точке.

Заметим еще, что $\Gamma(1) = 1$, и, следовательно, в силу формулы (54.40)

$$\Gamma(n+1) = n!.$$

Отсюда видно, что гамма-функция $\Gamma(s+1)$ является продолжением функции $s!$, определенной только для целых $s = 0, 1, 2, \ldots$, на всю полуось $s > -1$ действительных чисел.

Из свойств бета-функции $B(p, q)$ докажем следующие.

1. Для любых $p > 0$ и $q > 0$

$$B(p, q) = B(q, p). \qquad (54.41)$$

Чтобы в этом убедиться, достаточно в интеграле (54.35) выполнить замену переменного $t = 1 - x$.

2. Для любых $p > 0$ и $q > 1$

$$B(p, q) = \frac{q-1}{p+q-1} B(p, q-1). \qquad (54.42)$$

Аналогично, в силу симметрии (см. (54.41)), для любых $q > 0$ и $p > 1$

$$B(p, q) = \frac{p-1}{p+q-1} B(p-1, q). \qquad (54.43)$$

Действительно, проинтегрировав по частям (54.35) и заметив, что $x^p(1-x)^{q-2} = x^{p-1}(1-x)^{q-2} - x^{p-1}(1-x)^{q-1}$, получим

$$B(p, q) = \int_0^1 (1-x)^{q-1} d\frac{x^p}{p} = \frac{x^p(1-x)^{q-1}}{p}\bigg|_0^1 +$$

$$+ \frac{q-1}{p}\int_0^1 x^p(1-x)^{q-2}dx = \frac{q-1}{p}\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-2}dx -$$

$$- \frac{q-1}{p}\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx = \frac{q-1}{p} B(p, q-1) - \frac{q-1}{p} B(p, q),$$

откуда следует (54.42), а в силу симметрии и (54.43).

3. Для любых $p > 0$

$$B(p, n) = B(n, p) = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots (n-1)}{p(p+1)\ldots(p+n-1)}, \quad n = 1, 2, \ldots.$$

Эта формула получается последовательным применением соотношения (54.42), если только заметить, что $B(p, 1) = \int\limits_0^1 x^{p-1}\,dx = \frac{1}{p}$.

Если же и $p = m$ — натуральное число, то $B(m, n) = \frac{(n-1)!\,(m-1)!}{(m+n-1)!}$.

Между функциями $B(p, q)$ и $\Gamma(s)$ существует связь, которая устанавливается формулой Эйлера

$$B(p, q) = \frac{\Gamma(p)\,\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}, \quad p > 0, \ q > 0. \tag{54.44}$$

Докажем ее, следуя методу Дирихле. Сделаем в формуле (54.36) замену переменного $x = (1+t)\,y$, $t > 0$:

$$\frac{\Gamma(s)}{(1+t)^s} = \int\limits_0^{+\infty} y^{s-1} e^{-(1+t)\,y}\,dy$$

и положим $s = p+q$, $p > 0$, $q > 0$; тогда

$$\frac{\Gamma(p+q)}{(1+t)^{p+q}} = \int\limits_0^{+\infty} y^{p+q-1} e^{-(1+t)\,y}\,dy.$$

Помножим обе части этого равенства на t^{p-1} и проинтегрируем по t от 0 до $+\infty$:

$$\Gamma(p+q) \int\limits_0^{+\infty} \frac{t^{p-1}}{(1+t)^{p+q}}\,dt = \int\limits_0^{+\infty} t^{p-1}\,dt \int\limits_0^{+\infty} y^{p+q-1} e^{-(1+t)\,y}\,dy. \tag{54.45}$$

В интеграле, стоящем в левой части этого равенства, выполним замену переменного $t = \frac{x}{1-x}$:

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{t^{p-1}}{(1+t)^{p+q}}\,dt = \int\limits_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,dx = B(p, q). \tag{54.46}$$

Для вычисления правой части равенства заметим, что

$$\int\limits_0^{+\infty} t^{p-1}\,dt \int\limits_0^{+\infty} y^{p+q-1} e^{-(1+t)\,y}\,dy =$$

$$= \lim_{\xi \to +0} \int\limits_0^{+\infty} t^{p-1}\,dt \int\limits_\xi^{+\infty} y^{p+q-1} e^{-(1+t)\,y}\,dy. \tag{54.47}$$

Действительно, обозначая $\Phi(t, \xi) = \int\limits_{\xi}^{+\infty} y^{p+q-1}e^{-(1+t)y}\,dy$, из оценки

$$0 \leqslant \Phi(t, 0) - \Phi(t, \xi) \leqslant \int\limits_{0}^{\xi} y^{p+q-1}e^{-y}\,dy,$$

$$\int\limits_{0}^{+\infty} t^{p-1}\Phi(t, \xi)\,dt \leqslant \int\limits_{0}^{+\infty} t^{p-1}\Phi(t, 0)\,dt$$

заключаем, что при $\xi \to +0$ функция $\Phi(t, \xi)$ стремится к $\Phi(t, 0)$ равномерно относительно $t \in (0, +\infty)$ и что интеграл $\int\limits_{0}^{+\infty} t^{p-1}\Phi(t, \xi)\,dt$ равномерно сходится относительно ξ, ибо сходится интеграл (54.45). Следовательно, в правой части (54.47) можно перейти к пределу под знаком внешнего интеграла. Далее,

$$\int\limits_{0}^{+\infty} t^{p-1}\,dt \int\limits_{\xi}^{+\infty} y^{p+q-1}e^{-(1+t)y}\,dy =$$
$$= \int\limits_{\xi}^{+\infty} y^{p+q-1}e^{-y}\,dy \int\limits_{0}^{+\infty} t^{p-1}e^{-ty}\,dt, \quad \xi > 0, \; p \geqslant 1, \; q \geqslant 1. \qquad (54.48)$$

Перестановка порядка интегрирования здесь возможна в силу того, что, во-первых, интеграл $t^{p-1}\int\limits_{\xi}^{+\infty} y^{p+q-1}e^{-(1+t)y}\,dy$ равномерно сходится по t на любом отрезке $[0, a]$, что следует из равномерной оценки подынтегральной функции

$$t^{p-1}y^{p+q-1}e^{-(1+t)y} \leqslant a^{p-1}y^{p+q-1}e^{-y}, \quad 0 \leqslant t \leqslant a,$$

и сходимости интеграла $\int\limits_{\xi}^{+\infty} y^{p+q-1}e^{-y}\,dy$, во-вторых, интеграл

$$y^{p+q-1}e^{-y}\int\limits_{0}^{\infty} t^{p-1}e^{-ty}\,dt$$

равномерно сходится по y на любом отрезке $[\xi, b]$, $\xi > 0$, что следует из равномерной оценки подынтегральной функции

$$y^{p+q-1}e^{-y}t^{p-1}e^{-ty} \leqslant b^{p+q-1}t^{p-1}e^{-\xi t}$$

и сходимости интеграла $\int\limits_{0}^{+\infty} t^{p-1}e^{-\xi t}\,dt$; в-третьих, интеграл, стоящий в правой части равенства (54.48), существует. Таким образом, законность перестановки порядка интегрирования в (54.48) следует из теоремы 7 п. 54.3 (отметим, что здесь подынтегральная функция неотрицательна).

Выполнив замену переменного $ty=u$, получим

$$\int_{\xi}^{+\infty} y^{p+q-1}e^{-y}\,dy \int_{0}^{+\infty} t^{p-1}e^{-t}\,dt = \Gamma(p) \int_{\xi}^{+\infty} y^{q-1}e^{-y}\,dy. \tag{54.49}$$

Наконец,

$$\lim_{\xi\to+0} \int_{\xi}^{+\infty} y^{q-1}e^{-y}\,dy = \Gamma(q). \tag{54.50}$$

Из (54.45) — (54.50) получаем формулу (54.44) для $p \geqslant 1$, $q \geqslant 1$. Если теперь $p>0$ и $q>0$, то, по доказанному,

$$\mathrm{B}(p+1,\ q+1) = \frac{\Gamma(p+1)\,\Gamma(q+1)}{\Gamma(p+q+2)}.$$

Применяя соотношения (54.39), (54.42) и (54.43), получим формулу (54.44) в предположении $p>0$, $q>0$. □

54.6. КОМПЛЕКСНОЗНАЧНЫЕ ФУНКЦИИ ДЕЙСТВИТЕЛЬНОГО АРГУМЕНТА

Мы будем в дальнейшем систематически рассматривать комплекснозначные функции $w(t)=u(t)+iv(t)$ действительного аргумента t (функции $u(t)$ и $v(t)$ принимают действительные значения). Мы уже встречались с понятием предела и непрерывности подобных функций. Производная функции $w(t)$ определяется по формуле

$$w'(t) \overset{\text{def}}{=} u'(t)+iv'(t).$$

Покажем, например, что, согласно этому правилу, $(e^{i\alpha t})' = i\alpha e^{i\alpha t}$. Действительно,

$$(e^{i\alpha t})' = (\cos\alpha t + i\sin\alpha t)' = -\alpha\sin\alpha t + i\alpha\cos\alpha t = i\alpha(\cos\alpha t + i\sin\alpha t) = i\alpha e^{i\alpha t}.$$

Аналогично определяется и интеграл (собственный или несобственный) от функции $w=u+iv$:

$$\int_a^b w(t)\,dt = \int_a^b u(t)\,dt + i\int_a^b v(t)\,dt, \qquad -\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty.$$

Интеграл $\int_a^b (u(x)+iv(x))\,dx$ называется *несобственным*, если несобственен хотя бы один из интегралов $\int_a^b u(x)\,dx$ и $\int_a^b v(x)\,dx$. При этом несобственный интеграл $\int_a^b (u(x)+iv(x))\,dx$ называется *сходящимся*, если сходятся как $\int\limits_a^b u(x)\,dx$, так и $\int\limits_a^b v(x)\,dx$. В этом случае

$$\int\limits_a^b (u(x)+iv(x))\,dx \overset{\text{def}}{=} \int\limits_a^b u(x)\,dx + i\int\limits_a^b v(x)\,dx.$$

При этом функция w называется *абсолютно интегрируемой*, если абсолютно интегрируемы функции u и v.

Очевидно, что ряд свойств интегралов от действительных функций (линейность интеграла, аддитивность его по множествам и т. п.) автоматически переносится и на комплекснозначные функции. Отметим, например, что если $w(x)=u(x)+iv(x)$, где $u(x)$ и $v(x)$ — интегрируемые, по Риману, на отрезке $[a, b]$ действительные функции, то интеграл $\int\limits_a^b w(x)\,dx$ также является пределом интегральных сумм $\sigma_\tau=\sum\limits_{i=1}^{k} w(\xi_i)\,\Delta x_i$ ($\tau=\{x_i\}_{i=0}^{i=k}$ — разбиение отрезка $[a, b]$, $x_{i-1}\leqslant\xi_i\leqslant x_i$, $\Delta x_i=x_i-x_{i-1}$, $i=1, 2, \ldots, k$). Отсюда, как и для действительных функций, следует, что в этом случае функция $|w(x)|$ также интегрируема по Риману и что выполняется неравенство

$$\left|\int\limits_a^b w(x)\,dx\right| \leqslant \int\limits_a^b |w(x)|\,dx.$$

Предельным переходом справедливость этого неравенства устанавливается и для абсолютно интегрируемых в несобственном смысле комплекснозначных функций.

Вместе с тем в случае функций, принимающих комплексные значения, следует быть осторожным при использовании аналогов теорем, доказанных для действительных функций. Далеко не все утверждения, справедливые для функций действительного аргумента, принимающих только действительные значения, переносятся на комплекснозначные функции. С подобной ситуацией мы уже встречались при изучении вектор-функций (см. п. 15.2 и п. 37.9 *). Например, утверждения, подобные теореме Ролля, а следовательно, и теореме Лагранжа о средних значениях, не имеют места для комплекснозначных функций. Это показывает пример, приведенный в п. 15.2, если его записать в терминах комплексных чисел.

Именно, рассмотрим функцию $f(t)=\cos t+i\sin t$, $0\leqslant t\leqslant 2\pi$; тогда $f(0)=f(2\pi)=1$, $f'(t)=-\sin t+i\cos t$. Поскольку $|f'(t)|=\sqrt{\sin^2 t+\cos^2 t}=1$, то не существует такой точки $\xi\in[0, 2\pi]$, что $f'(\xi)=0$. Следовательно аналог теоремы Ролля в этом случае не имеет места.

Неверным оказывается и правило Лопиталя, доказательство которого было основано на теоремах о среднем. Подтвердим это примером *).

Пусть $f(t)=t$, $g(t)=t+t^2e^{\frac{i}{t^2}}$, $0<t<1$. Поскольку согласно формуле Эйлера $e^{i/t^2}=\cos\frac{1}{t^2}+i\sin\frac{1}{t^2}$, то

$$|e^{i/t^2}|=\sqrt{\cos^2\frac{1}{t^2}+\sin^2\frac{1}{t^2}}=1.$$

Поэтому $\lim\limits_{t\to 0} f(t)=\lim\limits_{t\to 0} g(t)=0$ и

$$\lim_{t\to 0}\frac{f(t)}{g(t)}=\lim_{t\to 0}(1+te^{i/t^2})=1. \tag{54.51}$$

Заметив, что

$$g'(t)=1+\left(2t-\frac{2i}{t}\right)e^{i/t^2}, \quad 0<t<1,$$

получим

$$|g'(t)|\geqslant\left|\frac{2i}{t}-2t\right|-1\geqslant\frac{2}{t}-2t-1\geqslant\frac{2}{t}-1=\frac{2-t}{t}.$$

Следовательно $\left|\frac{f'(t)}{g'(t)}\right|=\frac{1}{|g'(t)|}\leqslant\frac{t}{2-t}$, вследствие чего

$$\lim_{t\to 0}\frac{f'(t)}{g'(t)}=0. \tag{54.52}$$

Сравнивая (54.51) и (54.52) убеждаемся, что в данном случае правило Лопиталя не применимо.

54.7*. АСИМПТОТИЧЕСКОЕ ПОВЕДЕНИЕ ГАММА-ФУНКЦИИ

Покажем, что асимптотическое поведение гамма-функции

$$\Gamma(s+1)=\int_0^{+\infty} e^{-x}x^s\,dx, \quad s>-1, \tag{54.53}$$

при больших значениях независимой переменной s может быть описано довольно простой формулой, содержащей только элементарные функции.

Подынтегральная функция в интеграле (54.53) принимает, как легко видеть, наибольшее значение при $x=s$. Выполним в этом интеграле замену переменной интегрирования, перенеся точку $x=s$ в новое начало координат: $x=s+y$, а затем произведя преобразование подобия с коэффициентом, равным s: $y=st$, т. е.

*) Этот пример заимствован из книги У. Рудина «Основы математического анализа». М., 1966.

положим $x=s(1+t)$. Получим

$$\Gamma(s+1)=e^{-s}s^{s+1}\int\limits_{-1}^{+\infty}[e^{-t}(1+t)]^s\,dt. \tag{54.54}$$

Рассмотрим функцию

$$\varphi(t)\overset{\text{def}}{=}e^{-t}(1+t),\quad -\infty<t<+\infty, \tag{54.55}$$

Поскольку $\varphi'(t)=-te^{-t}$, то при $t>0$ функция φ убывает, при $t<0$ — возрастает, а в точке $t=0$ достигает наибольшего значения $\varphi(0)=1$. Далее, положив

$$h(t)\overset{\text{def}}{=}-t+\ln(1+t),\quad -1<t<-\infty, \tag{54.56}$$

получим

$$\varphi(t)=e^{h(t)},\quad -1<t<+\infty, \tag{54.57}$$

где при $|t|<1$

$$h(t)=-\frac{t^2}{2}+\frac{t^3}{3}-\frac{t^4}{4}+\ldots$$

и поэтому

$$h(t)=-\frac{t^2}{2}+o(t^2),\quad t\to 0. \tag{54.58}$$

Итак, гамма-функция представима в виде (см. (54.54), (54.55) и (54.57))

$$\Gamma(s+1)=e^{-s}s^{s+1}\int\limits_{-1}^{+\infty}e^{sh(t)}\,dt, \tag{54.59}$$

где поведение функции $h(t)$ при $t\to 0$ описывается соотношением (54.58).

Прежде чем переходить к выводу асимптотической формулы для $\Gamma(s+1)$ при $s\to+\infty$, поясним метод ее получения с помощью нестрогих, но правдоподобных рассуждений. График функции $\varphi(t)$ имеет вид, изображенный на рис. 217. При возрастании параметра s график функции $[\varphi(t)]^s$ будет «прижиматься» к оси переменной t и к единичному отрезку оси ординат. Поэтому ясно, что интеграл

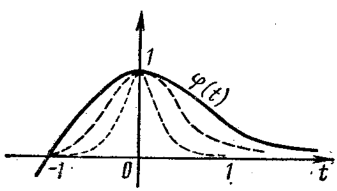


Рис. 217

$$\int\limits_{-1}^{+\infty}e^{sh(t)}\,dt, \tag{54.60}$$

стоящий в правой части формулы (54.59) при больших значениях s будет хорошо приближаться интегралом

$$\int\limits_{-\delta}^{\delta}e^{sh(t)}\,dt, \tag{54.61}$$

где $\delta > 0$ произвольно, но фиксировано, причем с тем большей точностью, чем больше значение параметра s. Иными словами, если s достаточно велико, то как при $-1 < t < -\delta$, так и при $t > \delta$ значения функции $e^{sh(t)}$ столь малы, что каждым из интегралов $\int\limits_{-1}^{-\delta} e^{sh(t)}\,dt$ и $\int\limits_{\delta}^{\infty} e^{sh(t)}\,dt$ можно с высокой точностью пренебречь. Естественно ожидать, что при фиксированном $\delta > 0$ и относительная погрешность приближения интеграла (54.60) с помощью интегралов вида (54.61) может быть сделана сколь угодно малой за счет выбора достаточно большого значения параметра s.

В силу (54.58), взяв достаточно малое $\delta > 0$, можно интеграл (54.61) хорошо приблизить интегралом

$$\int\limits_{-\delta}^{\delta} e^{-\frac{st^2}{2}}\,dt = \sqrt{\frac{2}{s}} \int\limits_{-\delta\sqrt{\frac{s}{2}}}^{\delta\sqrt{\frac{s}{2}}} e^{-u^2}\,du. \tag{54.62}$$

Если $\delta > 0$, то правая часть этого равенства при $s \to +\infty$ стремится к интегралу Пуассона (см. п. 48.2)

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2}\,du = \sqrt{\pi}. \tag{54.63}$$

В результате интеграл (54.60) при больших значениях s оказывается в каком-то смысле хорошо приближенным выражением $\sqrt{2\pi/s}$ (см. (54.62) и (54.63)). Поэтому естественно попытаться доказать асимптотическое равенство

$$\int\limits_{-1}^{+\infty} e^{sh(t)}\,dt \sim \sqrt{\frac{2\pi}{s}}, \quad s \to +\infty.$$

Покажем, что оно действительно имеет место. Зададим произвольно ε, $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}$. В силу (54.58) существует такое δ, $0 < \delta < 1$, что для всех $t \in [-\delta, \delta]$ выполняется неравенство

$$\left| h(t) + \frac{t^2}{2} \right| < \varepsilon t^2,$$

т. е.

$$-\left(\frac{1}{2} + \varepsilon\right) t^2 < h(t) < -\left(\frac{1}{2} - \varepsilon\right) t^2.$$

Следовательно (в силу монотонности функции e^x), при всех $s>0$ имеет место неравенство

$$e^{-\frac{(1+2\varepsilon)st^2}{2}}<e^{sh(t)}<e^{-\frac{(1-2\varepsilon)st^2}{2}}.$$

Интегрируя его по отрезку $[-\delta, \delta]$, получим

$$\int_{-\delta}^{\delta} e^{-\frac{(1+2\varepsilon)st^2}{2}}dt \leqslant \int_{-\delta}^{\delta} e^{sh(t)}\,dt \leqslant \int_{-\delta}^{\delta} e^{-\frac{(1-2\varepsilon)st^2}{2}}dt. \qquad (54.64)$$

Оценим теперь, насколько интеграл (54.61), стоящий в середине этого неравенства, отличается от интересующего нас интеграла (54.60). Вспоминая, что функция $\varphi(t)=e^{sh(t)}=e^{-t}(1+t)$ (см. (54.55) и (54.57)) возрастает на промежутке $[-1, -\delta]$ и убывает на $[\delta, +\infty)$, получим для всех $s>1$:

$$0<\int_{-1}^{+\infty} e^{sh(t)}\,dt-\int_{-\delta}^{\delta} e^{sh(t)}\,dt=$$

$$=\int_{-1}^{-\delta} e^{(s-1)h(t)}e^{h(t)}\,dt+\int_{\delta}^{+\infty} e^{(s-1)h(t)}e^{h(t)}\,dt\leqslant$$

$$\leqslant e^{(s-1)h(-\delta)}\int_{-1}^{-\delta} e^{h(t)}\,dt+e^{(s-1)h(\delta)}\int_{\delta}^{+\infty} e^{h(t)}\,dt\leqslant$$

$$\leqslant\left[e^{(s-1)h(-\delta)}+e^{(s-1)h(\delta)}\right]\int_{-1}^{+\infty} e^{h(t)}\,dt\leqslant C_1e^{-\alpha_1 s}, \qquad (54.65)$$

где $\alpha_1=-\max\{h(-\delta),\ h(\delta)\}>0$,

$$C_1=\left(e^{-h(-\delta)}+e^{-h(\delta)}\right)\int_{-1}^{+\infty} e^{h(t)}\,dt<+\infty.$$

Отметим, что функция $h(t)$ (см. (54.56)) достигает строгого максимума в точке $t=0$, причем $h(0)=0$; поэтому $h(-\delta)<0$ и $h(\delta)<0$.

Подобным образом оцениваются и крайние интегралы в неравенстве (54.64). Выполнив замену переменной интегрирования $u=t\sqrt{\frac{(1+2\varepsilon)s}{2}}$, получим (см. (54.63))

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(1+2\varepsilon)st^2}{2}}dt=\sqrt{\frac{2}{(1+2\varepsilon)s}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2}\,du=\sqrt{\frac{2\pi}{(1+2\varepsilon)s}}.$$

Теперь, аналогично (54.65), будем иметь

$$0<\sqrt{\frac{2\pi}{(1+2\varepsilon)s}}-\int_{-\delta}^{\delta}e^{-\frac{(1+2\varepsilon)st^2}{2}}dt=$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{(1+2\varepsilon)st^2}{2}}dt-\int_{-\delta}^{\delta}e^{-\frac{(1+2\varepsilon)st^2}{2}}dt=$$

$$=\int_{-\infty}^{-\delta}e^{-\frac{(1+2\varepsilon)(s-1)t^2}{2}}e^{-\frac{(1+2\varepsilon)t^2}{2}}dt+$$

$$+\int_{\delta}^{+\infty}e^{-\frac{(1+2\varepsilon)(s-1)t^2}{2}}e^{-\frac{(1+2\varepsilon)t^2}{2}}dt\leqslant$$

$$\leqslant e^{-\frac{(1+2\varepsilon)(s-1)\delta^2}{2}}\left(\int_{-\infty}^{-\delta}e^{-\frac{(1+2\varepsilon)t^2}{2}}dt+\int_{\delta}^{+\infty}e^{-\frac{(1+2\varepsilon)t^2}{2}}dt\right)=$$

$$=e^{-\frac{(1+2\varepsilon)(s-1)\delta^2}{2}}\sqrt{\frac{2}{1+2\varepsilon}}\left(\int_{-\infty}^{-\delta\sqrt{\frac{1+2\varepsilon}{2}}}e^{-u^2}du+\int_{\delta\sqrt{\frac{1+2\varepsilon}{2}}}^{+\infty}e^{-u^2}du\right)\leqslant$$

$$\leqslant e^{-\frac{(1+2\varepsilon)(s-1)\delta^2}{2}}\sqrt{\frac{2}{1+2\varepsilon}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-u^2}du\leqslant$$

$$\leqslant e^{-\frac{(1+2\varepsilon)(s-1)\delta^2}{2}}\sqrt{2\pi}\leqslant C_2e^{-\alpha_2 s}, \qquad (54.66)$$

где $\alpha_2=\frac{(1+2\varepsilon)\delta^2}{2}>0$, $C_2=e^{\frac{(1+2\varepsilon)\delta^2}{2}}\sqrt{2\pi}$.

Тем же методом получается и оценка

$$0<\sqrt{\frac{2}{(1-2\varepsilon)s}}-\int_{-\delta}^{\delta}e^{-\frac{(1-2\varepsilon)st^2}{2}}dt\leqslant C_3e^{-\alpha_3 s}, \qquad (54.67)$$

где $\alpha_3=\frac{(1-2\varepsilon)\delta^2}{2}>0$, $C_3=e^{\frac{(1-2\varepsilon)\delta^2}{2}}\sqrt{2\pi}$.

Положив $\alpha=\min\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$ и подставив (54.65), (54.66) и (54.67) в (54.64), получим при соответствующих постоянных $C_4>0$ и $C_5>0$ (зависящих от ε)

$$\sqrt{\frac{2\pi}{(1+2\varepsilon)s}}+C_4e^{-\alpha s}\leqslant\int_{-1}^{+\infty}e^{sh(t)}dt\leqslant\sqrt{\frac{2\pi}{(1-2\varepsilon)s}}+C_5e^{-\alpha s}.$$

Поделим полученное неравенство на $\sqrt{2\pi/s}$

$$\frac{1}{\sqrt{1+2\varepsilon}}+C_4e^{-\alpha s}\sqrt{\frac{s}{2\pi}}\leqslant\frac{1}{\sqrt{\frac{2\pi}{s}}}\int\limits_{-1}^{+\infty}e^{sh(t)}\,dt\leqslant$$
$$\leqslant\frac{1}{\sqrt{1-2\varepsilon}}+C_5e^{-\alpha s}\sqrt{\frac{s}{2\pi}}.$$

Следовательно, для любого $\varepsilon>0$

$$\frac{1}{\sqrt{1+2\varepsilon}}\leqslant\lim_{s\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{\frac{2\pi}{s}}}\int\limits_{-1}^{+\infty}e^{sh(t)}\,dt\leqslant\frac{1}{\sqrt{1-2\varepsilon}}.$$

Устремив здесь ε к нулю, получим

$$\lim_{s\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{\frac{2\pi}{s}}}\int\limits_{-1}^{+\infty}e^{sh(t)}\,dt=1,$$

или, что то же, искомое асимптотическое равенство

$$\int\limits_{-1}^{+\infty}[e^{-t}(1+t)]^s\,dt\sim\sqrt{\frac{2\pi}{s}},\quad s\to+\infty.$$

Умножив обе его части на $e^{-s}s^{s+1}$, в силу (54.54), получим асимптотическую формулу

$$\Gamma(s+1)\sim\sqrt{2\pi}\,e^{-s}s^{s+\frac{1}{2}},\quad s\to+\infty,\qquad(54.68)$$

называемую *формулой Стирлинга для гамма-функции.* Эта формула является, очевидно, обобщением формулы Стирлинга для факториала натуральных чисел (см. п. 37.8), которая получается из (54.68), если положить $s=n$, ибо $\Gamma(n+1)=n!$ (см. п. 54.5).

54.8*. АСИМПТОТИЧЕСКИЕ РЯДЫ

В п. 37.10* изучались разложения функций в асимптотические степенные ряды при $x\to+\infty$. Напомним, что ряд

$$a_0+\frac{a_1}{x}+\frac{a_2}{x^2}+\ldots+\frac{a_n}{x^n}+\ldots$$

называется *асимптотическим разложением функции* f при $x\to+\infty$, если его частичные суммы

$$S_n(x)=a_0+\frac{a_1}{x}+\ldots+\frac{a_n}{x^n}$$

удовлетворяют условию

$$f(x)-S_n(x)=o\left(\frac{1}{x^n}\right),\quad x\to+\infty.$$

Понятие асимптотического разложения функции естественным образом обобщается на ряды по системам функций, образующих так называемые *асимптотические последовательности.*

Определение 3. *Последовательность функций* $\varphi_n(x)$, $n=0, 1, 2, \ldots$, *определенных в некоторой проколотой окрестности точки* a *(конечной или бесконечно удаленной), называется асимптотической последовательностью при* $x\to a$, *если для всех* $n=0, 1, 2, \ldots$ *имеет место соотношение*

$$\varphi_{n+1}(x)=o(\varphi_n(x)),\quad x\to a. \tag{54.69}$$

Примерами асимптотических последовательностей при $x\to a$ являются $\varphi_n(x)=(x-a)^n$, если a — конечная точка и $\varphi_n(x)=x^{-n}$, если $a=+\infty$ или $a=-\infty$, $n=0, 1, 2, \ldots$.

Определение 4. *Пусть* $\varphi_n(x)$, $n=0, 1, 2, \ldots$, *является асимптотической последовательностью при* $x\to a$. *Ряд*

$$a_0\varphi_0(x)+a_1\varphi_1(x)+\ldots+a_n\varphi_n(x)+\ldots \tag{54.70}$$

называется асимптотическим рядом (или асимптотическим разложением) при $x\to a$ *заданной функции* f, *определенной в некоторой проколотой окрестности точки* a, *если его частичные суммы*

$$S_n(x)=a_0\varphi_0(x)+a_1\varphi_1(x)+\ldots+a_n\varphi_n(x) \tag{54.71}$$

удовлетворяет условию: для любого $n=0, 1, 2, \ldots$ *имеет место асимптотическое равенство*

$$f(x)-S_n(x)=o(\varphi_n(x)),\quad x\to a. \tag{54.72}$$

Лемма 2. *Пусть* $\varphi_n(x)$, $n=0, 1, 2, \ldots$, — *асимптотическая при* $x\to a$ *последовательность. Для того чтобы ряд* (54.70) *являлся асимптотическим разложением функции* f *при* $x\to a$ *необходимо и достаточно, чтобы*

$$f(x)-S_n(x)=O(\varphi_{n+1}(x)),\quad x\to a,\quad n=0, 1, 2, \ldots. \tag{54.73}$$

Иначе говоря, ряд (54.70) является асимптотическим разложением функции f при $x\to a$ тогда и только тогда, когда его частичная сумма $S_n(x)$ служит приближенным значением функции $f(x)$ с точностью до $O(\varphi_{n+1}(x))$ при $x\to a$, т. е. ошибка имеет порядок первого отбрасываемого члена.

Доказательство необходимости условия (54.73). Соотношение (54.72) при $n=1, 2, \ldots$ можно переписать в виде

$$f(x)-S_{n-1}(x)-a_n\varphi_n(x)=o(\varphi_n(x)),\quad x\to a,$$

откуда

$$f(x)-S_{n-1}(x)=a_n\varphi_n(x)+o(\varphi_n(x))=O(\varphi_n(x)),\quad x\to a,\quad n=1,\ 2\ \ldots,$$

т. е. выполняется условие (54.73). □

Доказательство достаточности условия (54.73). В силу (54.73) и (54.69) имеем

$$f(x)-S_n(x)=O(\varphi_{n+1}(x))=O(o(\varphi_n(x)))=o(\varphi_n(x)),\ x\to a,\ n=0,1,2,\ldots,$$

что совпадает с (54.72). □

Любопытно отметить, что если для любого $n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,$ выполняется условие

$$f(x)-S_n(x)=O(\varphi_n(x)),\quad x\to a,\tag{54.74}$$

более слабое, чем (54.72), то из него в силу (54.69) следует (54.72). Иначе говоря, выполнение условия (54.74) для всех $n=0,\ 1,\ 2,\ldots$ означает, что ряд (54.70) является асимптотическим разложением функции f при $x\to a$. Действительно из (54.74) для $n=1,\ 2,\ \ldots$ имеем

$$f(x)-S_{n-1}(x)=a_n\varphi_n(x)+O(\varphi_n(x))=O(\varphi_n(x))=$$
$$=O(o(\varphi_{n-1}(x)))=o(\varphi_{n-1}(x)),\quad x\to a,$$

т. е. условие (54.72).

Если асимптотическая последовательность $\varphi_n(x)$, $n=0,\ 1,\ 2,\ldots,$ такова, что существует проколотая окрестность точки a, в которой при всех $n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots$ имеет место неравенство $\varphi_n(x)\neq 0$, то аналогично случаю степенных асимптотических рядов функций получаем:

если функция f раскладывается при $x\to a$ в асимптотический ряд (54.70), *то такое разложение единственно и его коэффициенты последовательно определяются по формулам*

$$a_0=\lim_{x\to a}f(x),\quad a_n=\lim_{x\to a}\frac{1}{\varphi_n(x)}\left[f(x)-\sum_{k=0}^{n-1}a_k\varphi_k(x)\right].$$

Однако для практического нахождения асимптотических разложений заданных функций эта формула оказывается не всегда удобной. Часто проще получить нужное разложение другим путем, например, в случае интегралов при помощи интегрирования по частям. При этом, обычно, заранее не задаются асимптотической последовательностью $\{\varphi_n(x)\}$, а строят ее, исходя из свойств данной функции в окрестности точки a.

Пример. Разложим в асимптотический ряд при $x\to+\infty$ функцию

$$F(x,\ \alpha)=\int_x^{+\infty}\frac{e^{it}}{t^\alpha}\,dt,\quad x>0,\tag{54.75}$$

($\alpha > 0$ — параметр), подобрав соответствующую асимптотическую последовательность. Поскольку

$$F(x, \alpha) = \int_x^{+\infty} \frac{\cos t}{t^\alpha} dt + i \int_x^{+\infty} \frac{\sin t}{t^\alpha} dt,$$

то по признаку Дирихле (см. п. 33.6) мнимая и действительная части функции $F(x, \alpha)$ представляют собой, при $x > 0$, сходящиеся интегралы. Поэтому сходится и интеграл (54.75). Отметим, что действительной и мнимой частью интеграла $\frac{1}{2} F\left(x^2, \frac{1}{2}\right)$ являются неполные интегралы Френеля (см. § 34)

$$\int_x^{+\infty} \cos \theta^2 \, d\theta, \quad \int_x^{+\infty} \sin \theta^2 \, d\theta.$$

Чтобы в этом убедиться, достаточно в интеграле $\frac{1}{2} F\left(x^2, \frac{1}{2}\right)$ сделать замену переменной интегрирования $t = \theta^2$.

Интегрируя по частям (54.75), получим

$$F(x, \alpha) = \int_x^{+\infty} \frac{e^{it}}{t^\alpha} dt = \frac{ie^{ix}}{x^\alpha} - i\alpha \int_x^{+\infty} \frac{e^{it}}{t^{\alpha+1}} dt = \frac{ie^{ix}}{x^\alpha} - i\alpha F(x, \alpha+1).$$

Применяя последовательно эту формулу к значениям функции F, получающимся в правой части, будем иметь

$$F(x, \alpha) = \frac{ie^{ix}}{x^\alpha} - i\alpha F(x, \alpha+1) =$$

$$= \frac{ie^{ix}}{x^\alpha} - i\alpha \left[\frac{ie^{ix}}{x^{\alpha+1}} - i(\alpha+1) F(x, \alpha+2)\right] =$$

$$= \frac{ie^{ix}}{x^\alpha} - \frac{\alpha i^2 e^{ix}}{x^{\alpha+1}} + \frac{\alpha(\alpha+1) i^3 e^{ix}}{x^{\alpha+2}} + \ldots + \frac{(-1)^n \alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+n-1)\, i^{n+1} e^{ix}}{x^{\alpha+n}} +$$

$$+ (-i)^{n+1} \alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+n) F(x, \alpha+n+1) =$$

$$= \frac{ie^{ix}}{x^\alpha} \sum_{k=0}^{n} \frac{\alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+k-1)}{(ix)^k} + \frac{\alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+n)}{i^{n+1}} F(x, \alpha+n+1). \quad (54.76)$$

Ряд

$$\frac{ie^{ix}}{x^\alpha} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+n-1)}{(ix)^n} \quad (54.77)$$

является асимптотическим разложением функции $F(x, \alpha)$ при $x \to +\infty$.

Действительно, последовательность функций $\varphi_n(x) = e^{ix} x^{-n-\alpha}$, $n = 0, 1, \ldots$, является, как легко проверить, асимптотической, а для частичных сумм $S_n(x, \alpha)$ ряда (54.77) в силу (54.76) имеем:

$$|F(x, \alpha) - S_n(x, \alpha)| = \left|\frac{\alpha(\alpha+1)\dots(\alpha+n)}{i^{n+1}} F(x, \alpha+n+1)\right| =$$

$$= \alpha(\alpha+1)\dots(\alpha+n)\left|\int\limits_x^{+\infty} \frac{e^{it}}{t^{\alpha+n+1}}\,dt\right| \leqslant \alpha(\alpha+1)\dots(\alpha+n)\int\limits_x^{+\infty}\frac{dt}{t^{\alpha+n+1}} =$$

$$= \frac{\alpha(\alpha+1)\dots(\alpha+n-1)}{x^{\alpha+n}} = O\left(\frac{e^{ix}}{x^{\alpha+n}}\right),\quad x \to \infty,$$

т. е. выполняется условие (54.74), и, следовательно, ряд (54.77) действительно является асимптотическим разложением функции $F(x, \alpha)$ при $x \to +\infty$.

54.9.* АСИМПТОТИЧЕСКОЕ РАЗЛОЖЕНИЕ НЕПОЛНОЙ ГАММА-ФУНКЦИИ

При любом $x > 0$ для гамма-функции $\Gamma(s)$ имеем

$$\Gamma(s) = \int\limits_0^{+\infty} t^{s-1}e^{-t}\,dt = \int\limits_0^x t^{s-1}e^{-t}\,dt + \int\limits_x^{+\infty} t^{s-1}e^{-t}\,dt.$$

Функция

$$\Gamma(s, x) \overset{\text{def}}{=} \int\limits_x^{+\infty} t^{s-1}e^{-t}\,dt,\quad x > 0, \tag{54.78}$$

называется неполной гамма-функцией. Она определена при всех действительных значениях параметра s. Найдем ее асимптотическое разложение при $x \to +\infty$. Выполняя в правой части (54.78) интегрирование по частям, получим

$$\Gamma(s, x) = \int\limits_x^{+\infty} t^{s-1}e^{-t}\,dt =$$

$$= x^{s-1}e^{-x} + (s-1)\int\limits_x^{+\infty} t^{s-2}e^{-t}\,dt = x^{s-1}e^{-x} + (s-1)\Gamma(s-1, x).$$

Применяя последовательно эту формулу к значениям неполной гамма-функции, получающимся в правой части, будем иметь:

$$\Gamma(s, x) = x^{s-1}e^{-x} + (s-1)x^{s-2}e^{-x} + \dots + (s-1)(s-2)\dots$$

$$\dots(s-n+1)x^{s-n}e^{-x} + (s-1)(s-2)\dots(s-n)\Gamma(s-n, x) =$$

$$= e^{-x}x^s\sum_{k=0}^{n}\frac{(s-1)(s-2)\dots(s-k+1)}{x^k} +$$

$$+ (s-1)(s-2)\dots(s-n)\Gamma(s-n, x).$$

Отсюда при $n > s - 1$ имеем

$$\left|\Gamma(s, x) - e^{-x}x^s \sum_{k=0}^{n} \frac{(s-1)(s-2)\dots(s-k+1)}{x^k}\right| =$$
$$= |(s-1)(s-2)\dots(s-n)\Gamma(s-n, x)| \leqslant$$
$$\leqslant |(s-1)\dots(s-n)| \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t^{n-s+1}}\,dt \leqslant$$
$$\leqslant |(s-1)(s-2)\dots(s-n)| \frac{1}{x^{n-s-1}} \int_x^{+\infty} e^{-t}\,dt =$$
$$= |(s-1)\dots(s-n)| \frac{e^{-x}}{x^{n-s-1}} = O\left(\frac{e^{-x}}{x^{n-s-1}}\right), \quad x \to +\infty$$

т. е. для частичных сумм ряда

$$e^{-x}x^s \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(s-1)(s-2)\dots(s-n+1)}{x^n} \tag{54.79}$$

и для последовательности $\varphi_n(x) = x^{-n+s+1}e^{-x}$, которая является, как это легко проверить, асимптотической, при $x \to +\infty$ выполняется условие (54.73). Таким образом ряд (54.79) является асимптотическим разложением неполной гамма-функции $\Gamma(s, x)$ при $x \to +\infty$.

В п. 54.7* был найден первый член асимптотического разложения гамма-функции $\Gamma(s+1)$ при $s \to +\infty$. Можно найти и следующие члены, т. е. разложить гамма-функцию в асимптотический ряд. Он выглядит следующим образом:

$$\Gamma(s+1) \sim$$
$$\sim (2\pi)^{\frac{1}{2}} e^{-s} s^{s+\frac{1}{2}} \left(1 + 3c_3 \frac{2!}{1!\,2^2} \frac{2}{s} + 5c_5 \frac{4!}{2!\,2^4} \left(\frac{2}{s}\right)^2 + \dots\right),$$
$$s \to +\infty. \tag{54.80}$$

Здесь $\{c_k\}$ — последовательность коэффициентов разложения в степенной ряд (в окрестности нуля) функции $t = t(z)$, определяемой равенством $\frac{1}{2}z^2 = -h(t)$, где $h(t)$ задана формулой (54.56).

Можно получить и асимптотическое разложение для натурального логарифма гамма-функции. Оно имеет вид

$$\ln\Gamma(s) \sim \left(s - \frac{1}{2}\right)\ln s - s + \frac{1}{2}\ln 2\pi + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{B_{2n}}{2n(2n-1)s^{2n-1}},$$
$$s \to +\infty \tag{54.81}$$

и называется *рядом Стирлинга*. Здесь B_{2n} — так называемые *числа Бернулли*, определяемые равенством

$$\sum_{k=0}^{m-1} k^n = \frac{1}{n+1} \sum_{j=0}^{n} C_{n+1}^{j} B_j m^{n+1-j}$$

(все нечетные числа Бернулли, кроме $B_1 = -\frac{1}{2}$, равны нулю).

Из формулы (54.81) с помощью потенцирования можно найти асимптотическое разложение для гамма-функции, в котором коэффициенты выражены в явном виде. Оно имеет вид

$$\Gamma(s) \sim (2\pi)^{\frac{1}{2}} e^{-s} s^{s-\frac{1}{2}} \left\{1 + \frac{1}{12s} + \frac{1}{288s^2} - \frac{139}{51840s^3} + \ldots\right\}, \quad s \to +\infty.$$

Доказательство формул (54.80) и (54.81) не входит в задачу настоящего курса. Описание методов, с помощью которых получаются подобные разложения можно найти в книге М. В. Федорюка «Метод перевала». М., 1977.

54.10. ЗАМЕЧАНИЯ О КРАТНЫХ ИНТЕГРАЛАХ, ЗАВИСЯЩИХ ОТ ПАРАМЕТРА

Мы рассмотрели выше «одномерные» интегралы, зависящие от параметра, т. е. случай, когда и переменная интегрирования и параметр являлись числовыми переменными. Эта теория обобщается на случай кратных интегралов, зависящих от «многомерного» параметра, т. е. на интегралы вида

$$F(y) = \int f(x, y)\, dG. \tag{54.82}$$

Здесь функция $f(x, y)$ определена на открытом множестве $G \subset R^n$ и интегрируема, по Риману, на любом открытом измеримом по Жордану множестве Γ, таком, что $\overline{\Gamma} \subset G$. Параметр y пробегает некоторое множество Y, которое может быть, например, подмножеством m-мерного пространства R^m, а интеграл (54.82) понимается, вообще говоря, в несобственном смысле.

Интеграл (54.82) называется *сходящимся*, если при каждом фиксированном $y_0 \in Y$ интеграл

$$\int f(x, y_0)\, dG$$

сходится. В случае $n \geq 2$ это, как известно (см. п. 48.3), эквивалентно условию сходимости интеграла

$$\int |f(x, y_0)|\, dG.$$

Сходящемуся интегралу (54.82) (и любой последовательности открытых измеримых по Жордану множеств G_k, $k = 1, 2, \ldots$, монотонно исчерпывающей множество G) естественным образом сопоставляется ряд, суммой которого он является:

$$\int f(x,\ y)\,dG = \int f(x,\ y)\,dG_1 + \sum_{k=1}^{\infty} \int f(x,\ y)\,d(G_{k+1} \setminus \bar{G}_k). \qquad (54.83)$$

Подобно одномерному случаю определяется и равномерно сходящийся интеграл.

Определение 5. *Сходящийся интеграл* (54.82) *называется равномерно сходящимся, если для любого* $\varepsilon > 0$ *существует такой компакт* $A \subset G$, *что для каждого открытого измеримого по Жордану множества* Γ, *для которого* $A \subset \Gamma \subset \bar{\Gamma} \subset G$, *выполняется неравенство*

$$\int \left| f(x,\ y)\,d(G \setminus \bar{\Gamma}) \right| < \varepsilon.$$

Это определение равносильно следующему:

Определение 5'. *Сходящийся интеграл* (54.82) *называется равномерно сходящимся, если, какова бы ни была монотонно исчерпывающая открытое множество* G *последовательность открытых измеримых по Жордану множеств* G_k, $k = 1, 2, \ldots$, *и каково бы ни было число* $\varepsilon > 0$, *существует номер* k_ε, *зависящий от данной последовательности и числа* ε, *такой, что для каждого номера* $k \geq k_\varepsilon$ *и всех* $y \in Y$ *справедливо неравенство*

$$\left| \int f(x,\ y)\,d(G \setminus \bar{G}_k) \right| < \varepsilon.$$

Если интеграл (54.82) равномерно сходится на множестве G относительно параметра $y \in Y$, то ряд (54.83) также равномерно сходится на G.

Для кратных интегралов, зависящих от параметра, остаются в силе теоремы об их непрерывности, дифференцируемости и интегрируемости, аналогичные доказанным выше. В этом легко убедиться, и мы не будем на этом подробно останавливаться.

Встречаются интегралы, зависящие от параметра и более сложным образом: в них не только подынтегральная функция f, но и множество G, по которому происходит интегрирование, зависит от параметра, т. е. $G = G(y)$:

$$F(y) = \int f(x,\ y)\,dG(y). \qquad (54.84)$$

Примером такого интеграла в одномерном случае является интеграл

$$F(y) = \int_a^b \frac{dx}{|x-y|^\alpha}, \quad a \leq y \leq b.$$

Здесь $G(y)$ состоит из двух (кроме случая $y = a$ и $y = b$) интервалов $(a,\ y)$ и $(y,\ b)$, меняющихся с изменением параметра y.

Рассмотрим аналогичный пример в n-мерном пространстве. Пусть G — открытое множество в R^n, функция $\mu=\mu(x)$ непрерывна в G, $\rho=\rho(x, y)$ — расстояние между точками x и y, $x \in G$, $y \in R^n$ и α — некоторое число. Интегралы вида

$$u(y)=\int \frac{\mu(x)\,dG}{\rho^\alpha} \tag{54.85}$$

называются *потенциалами* и относятся к типу (54.84), так как в них множеством, по которому производится интегрирование, является множество $G \setminus \{y\}$, зависящее от y (в формуле (54.85), мы обозначили, как это делается обычно, область интегрирования просто через G). Если $\alpha=1$ и $n=3$, то функция (54.85) называется *ньютоновым потенциалом*.

Задача 34. Доказать, что если G — измеримое по Жордану открытое множество и функция $\mu=\mu(x)$ непрерывна на его замыкании $\bar{G}$, то интеграл (54.85) при $\alpha<n$ непрерывен во всем пространстве.

ГЛАВА СЕДЬМАЯ
РЯДЫ ФУРЬЕ. ИНТЕГРАЛ ФУРЬЕ

§ 55. ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ РЯДЫ ФУРЬЕ

55.1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ РЯДА ФУРЬЕ. ПОСТАНОВКА ОСНОВНЫХ ЗАДАЧ

Определение 1. *Ряд вида*

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx \tag{55.1}$$

называется тригонометрическим рядом.

Его частичные суммы являются линейными комбинациями функций, входящих в систему

$$1) \ \cos x, \ \sin x, \ \cos 2x, \ \sin 2x, \ \ldots, \ \cos nx, \ \sin nx, \ \ldots \tag{55.2}$$

Определение 2. *Множество функций* (55.2) *называется тригонометрической системой.*

Лемма 1. *Тригонометрическая система* (55.2) *обладает следующими свойствами:*

1. *интеграл по отрезку* $[-\pi, \pi]$ *от произведения двух различных функций, входящих в нее, равен нулю (это свойство называется ортогональностью* *)) *системы* (55.2), *т. е.*

$$\begin{gathered}\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cos mx \, dx = 0, \qquad n \neq m,\\ \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \sin mx \, dx = 0, \qquad n \neq m,\\ \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \sin mx \, dx = 0, \qquad m, \ n, = 0, \ 1, \ 2, \ \ldots;\end{gathered} \tag{55.3}$$

$$2) \ \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 nx \, dx = \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 nx \, dx = \pi, \qquad n = 1, \ 2, \ \ldots. \tag{55.4}$$

---

*) Происхождение термина «ортогональность» будет разъяснено в п. 58.1.

Доказательство. При любых целых неотрицательных m, n, таких, что $m \neq n$, имеем

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \sin mx\, dx = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} [\cos(n-m)x - \cos(n+m)x]\, dx =$$
$$= \frac{\sin(n-m)x}{2(n-m)}\Bigg|_{-\pi}^{\pi} - \frac{\sin(n+m)x}{2(n+m)}\Bigg|_{-\pi}^{\pi} = 0.$$

Аналогично доказываются и два других равенства (55.3).

Докажем теперь (55.4):

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 nx\, dx = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} (1 + \cos 2nx)\, dx = \pi,$$
$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 nx\, dx = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} (1 - \cos 2nx)\, dx = \pi. \quad \square$$

Теорема 1. *Пусть*

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx \tag{55.5}$$

и ряд, стоящий в правой части этого равенства, сходится равномерно на отрезке $[-\pi, \pi]$. *Тогда*

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, dx,$$
$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx, \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx\, dx, \quad n = 1, 2, \ldots . \tag{55.6}$$

Доказательство. Поскольку ряд, стоящий в правой части равенства (55.5), сходится равномерно на отрезке $[-\pi, \pi]$, а все его члены являются непрерывными на этом отрезке функциями, то и его сумма $f(x)$ непрерывна на отрезке $[-\pi, \pi]$, а сам ряд можно почленно интегрировать (см. п. 36.4) от $-\pi$ до π:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, dx = \int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx\right) dx =$$
$$= \frac{a_0}{2} \int_{-\pi}^{\pi} dx + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx\, dx + b_n \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx\, dx = \pi a_0.$$

Отсюда следует первая из формул (55.6).

Если ряд (55.5) почленно помножить на $\cos nx$ и $\sin nx$ ($n = 1, 2, \ldots$), то полученные ряды будут также равномерно сходиться на отрезке $[-\pi, \pi]$ (см. свойство 2 в п. 36.3).

Интегрируя почленно эти ряды и используя свойство ортогональности (55.3) тригонометрической системы и равенства (55.4), будем иметь

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx = \int_{-\pi}^{\pi} a_n \cos^2 nx\,dx = \pi a_n,$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx = \int_{-\pi}^{\pi} b_n \sin^2 nx\,dx = \pi b_n.$$

Из полученных ссотношений непосредственно вытекают формулы (55.6). □

Теперь заметим, что интегралы (55.6) имеют смысл не только для функций, непрерывных на отрезке $[-\pi, \pi]$, а также, например, и для функций, интеграл от которых абсолютно сходится на этом отрезке.

Напомним, что понятие абсолютно сходящегося интеграла (как и просто сходящегося интеграла) было введено только для функций, определенных на некотором интервале (a, b), $-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty$, у которых существует такое конечное множество точек x_i, $i = 0, 1, 2, \ldots, k$, $a \leqslant x_0 < x_1 < \ldots < x_k \leqslant b$, что функция f интегрируема по Риману на любом отрезке $[\xi_i, \eta_i]$, где $x_{i-1} < \xi_i < \eta_i < x_i$. При этом, если $a = -\infty$, то $x_0 = -\infty$, а если $b = +\infty$, то $x_k = +\infty$. Числа $x_0, x_1, \ldots, x_k$ называются *особыми точками функции*.

Если при этих предположениях интеграл $\int_a^b |f(x)|\,dx$ сходится, то всегда имеет смысл и сходится интеграл $\int_a^b f(x)\,dx$ (см. п. 33.5).

Функции, интеграл от абсолютной величины которых сходится на данном промежутке, называются *абсолютно интегрируемыми* на этом промежутке.

Отметим, что если функция интегрируема по Риману, на некотором отрезке, то ее абсолютная величина также интегрируема, по Риману, на нем (см. п. 28.1), и, следовательно, функция, интегрируемая по Риману на отрезке, абсолютно интегрируема на нем.

Если интеграл от функции f абсолютно сходится на отрезке $[-\pi, \pi]$, то для нее все интегралы (55.6) также сходятся, так как они представляют собой интегралы от произведения абсолютно интегрируемой функции $f(x)$ на ограниченную (синус или косинус), а такие интегралы абсолютно сходятся (см. лемму 2 в п. 33.5).

Определение 3. *Пусть функция f абсолютно интегрируема на отрезке $[-\pi, \pi]$. Тригонометрический ряд* (55.1), *коэффициенты которого задаются формулами* (55.6), *называется рядом Фурье* *), *или, более подробно, тригонометрическим рядом Фурье, а числа a_n и b_n — коэффициентами Фурье функции f.*

В этом случае пишут

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx.$$

Частичные суммы порядка n этого ряда будем обозначать через $S_n(x, f)$, или, короче, $S_n(x)$. Подчеркнем, что здесь знак $\sim$ обозначает не асимптотическое равенство, а просто соответствие: функции сопоставляется ее ряд Фурье.

Теорему 1 в этих терминах можно перефразировать следующим образом.

Всякий равномерно сходящийся тригонометрический ряд является рядом Фурье своей суммы.

Упражнение 1. Пусть функция f абсолютно интегрируема на отрезке $[-\pi, \pi]$ и пусть

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx.$$

Тогда, если функция f — четная, то $b_n = 0$, $n = 1, 2, \ldots$, если же f — нечетная функция, то $a_n = 0$, $n = 0, 1, 2, \ldots$.

2. Является ли тригонометрический ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^2}$$

рядом Фурье?

В этом параграфе будут изучаться периодические функции, т. е. такие функции f, для каждой из которых существует число $T > 0$, такое, что при всех x, принадлежащих области определения функции f, значения $x + T$ и $x - T$ также принадлежат этой области и выполняется равенство

$$f(x + T) = f(x).$$

Такие функции называются T-периодическими.

Упражнение 3. Показать, что функция f, равная нулю в любой рациональной точке и единице во всех иррациональных точках имеет своим периодом любое рациональное число, и никакое иррациональное число не является ее периодом.

---

*) Ж. Фурье (1768—1830) — французский физик и математик.

Пусть f абсолютно интегрируема на отрезке $[-\pi, \pi]$ и, следовательно, ей можно сопоставить ряд Фурье. Если он сходится на некотором множестве, то сходится к 2π-периодической функции, так как все его члены 2π-периодичны. Поэтому бывает удобно и саму функцию f «периодически продолжить» с периодом 2π. Кавычки поставлены потому, что в действительности функцию f можно продолжить периодически только в случае, когда $f(-\pi) = f(\pi)$.

Если это условие не выполнено, то *продолжением функции* f назовем 2π-периодическую функцию $\bar{f}$, которую получим, полагая для любой точки $x \in [-\pi, \pi)$, в которой определена функция f (напомним, что в силу абсолютной интегрируемости функции f на отрезке $[-\pi, \pi]$ она определена во всех его точках, кроме, быть может, конечного их множества),

$$\bar{f}(x+2\pi k) = f(x), \qquad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots .$$

Такое продолжение в случае, когда $f(-\pi) \neq f(\pi)$ приводит к несовпадению значений функций f и $\bar{f}$ при $x = \pi$. Однако, поскольку коэффициенты Фурье функции определяются с помощью интегралов (55.6), то это не приведет к их изменению, и, следовательно, ряды Фурье данной функции f и продолженной $\bar{f}$ совпадают.

Отметим, что при указанном периодическом продолжении функция $\bar{f}$ может не быть непрерывной в точках $2\pi k$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, если функция f непрерывна при $x = -\pi$ и $x = \pi$. Продолженная функция $\bar{f}$ будет непрерывной в точках $2\pi k$, если f непрерывна в $x = -\pi$ и $x = \pi$, причем $f(-\pi) = f(\pi)$. Непрерывность в других точках при периодическом продолжении сохраняется: если f непрерывна в точке $x \in (-\pi, \pi)$, то $\bar{f}$ непрерывна в любой точке $x + 2k\pi$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$.

Часто продолженную функцию $\bar{f}$ будем обозначать тем же символом f, что и продолжаемую.

Если функция f 2π-периодична, то при вычислении ее коэффициентов Фурье (см. (55.6)) интегрирование можно выполнять по любому отрезку длины 2π, например, по отрезку $[0, 2\pi]$:

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x)\, dx,$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos nx\, dx, \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin nx\, dx.$$

Действительно, если какая-либо функция φ имеет период равный T и для некоторого числа $a \in \boldsymbol{R}$ интегрируема на отрезке $[a, a+T]$, то при любом выборе $b \in \boldsymbol{R}$ она интегрируема и на отрезке $[b, b+T]$, причем

$$\int_b^{b+T} \varphi(x)\,dx = \int_a^{a+T} \varphi(x)\,dx,$$

т. е. интеграл $\int_a^{a+T} \varphi(x)\,dx$ не зависит от выбора числа $a \in \boldsymbol{R}$. Это свойство периодических функций легко доказывается заменой переменной интегрирования и его рекомендуется провести читателю самостоятельно.

В § 58 мы обобщим понятие тригонометрического ряда Фурье, а именно определим и изучим ряды Фурье по произвольной ортогональной системе функций. В настоящем же параграфе будем изучать лишь тригонометрические ряды Фурье абсолютно интегрируемых функций (см. также п. 58.6).

Прежде всего будет рассматриваться вопрос об условиях, гарантирующих сходимость ряда Фурье. В случае же сходимости ряда Фурье данной функции $f(x)$ при определенных условиях мы выясним, чему равна его сумма $S(x)$, в частности — когда она совпадает с функцией $f(x)$. Будет изучаться «скорость» сходимости рядов Фурье и условия, от которых она зависит. Будет показано, что и в том случае, когда ряд Фурье непрерывной функции расходится в некоторых точках (примеры таких рядов существуют), по нему можно восстановить саму функцию во всех точках. Мы увидим, наконец, что с определенной точки зрения сходимость рядов Фурье естественно рассматривать не только в обычном смысле (как сходимость последовательности частичных сумм в точке или равномерную сходимость), но и совершенно по-другому, а именно в смысле среднего квадратичного (см. п. 55.7, 55.8 и 55.9).

55.2. СТРЕМЛЕНИЕ КОЭФФИЦИЕНТОВ ФУРЬЕ К НУЛЮ

Большую роль в теории тригонометрических рядов играет тот факт, что коэффициенты Фурье абсолютно интегрируемой функции стремятся к нулю при $n \to \infty$. Он вытекает из доказываемого ниже несколько более общего утверждения, часто применяемого в исследованиях, относящихся к рядам Фурье и смежным вопросам.

Теорема 2 (Риман). *Если функция f абсолютно интегрируема на промежутке (a, b), конечном или бесконечном, то*

$$\lim_{\nu \to \infty} \int_a^b f(x) \cos \nu x\,dx = \lim_{\nu \to \infty} \int_a^b f(x) \sin \nu x\,dx = 0.$$

Следствие. *Коэффициенты Фурье* (55.6) *абсолютно интегрируемой функции стремятся к нулю при $n \to \infty$.*

Прежде чем доказывать эти утверждения, введем ряд понятий, которые будут неоднократно использоваться в дальнейшем.

Определение 4. *Для всякой функции f, определенной на всей числовой оси, замыкание множества точек, в которых $f(x) \neq 0$, называется ее носителем и обозначается через* $\operatorname{supp} f$ *).

Определение 5. *Функция f, определенная на всей числовой оси, называется финитной, если ее носитель содержится в некотором конечном отрезке.*

Определение 6. *Для всякого множества E, лежащего на числовой прямой, функция*

$$\chi(x) = \chi_E(x) = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad x \in E, \\ 0, & \text{если} \quad x \notin E, \end{cases}$$

называется характеристической функцией множества E.

На рис. 218 изображена характеристическая функция полуинтервала вида $[a, b)$.

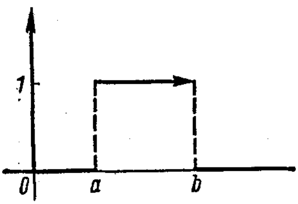


Рис. 218

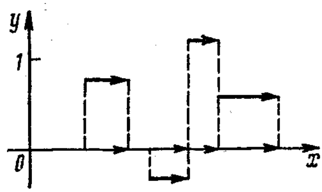


Рис. 219

Определение 7. *Функция f, определенная на всей числовой оси, называется финитной ступенчатой функцией, если она является линейной комбинацией конечного числа характеристических функций попарно не пересекающихся полуинтервалов $[a_i, b_i)$, $i = 1, 2, \ldots, m$, т. е. если она представима в виде*

$$f(x) = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \chi_i(x) \tag{55.7}$$

(рис. 219), где $\chi_i(x)$ — характеристическая функция интервала $[a_i, b_i)$, а λ_i, $i = 1, \ldots, m$, — некоторые действительные числа.

Нетрудно убедиться, что если не требовать, чтобы полуинтервалы $[a_i, b_i)$, $i = 1, 2, \ldots, m$, попарно не пересекались, то получится равносильное определение. Это следует из того, что пересечение конечного числа рассматриваемых ограниченных полуинтервалов является также полуинтервалом того же вида.

Очевидно, всякая функция вида (55.7) финитна.

*) От латинского слова supportus — опора.

Финитная ступенчатая функция f интегрируема на всей числовой оси, при этом, если она задана формулой (55.7), то

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \int_{-\infty}^{+\infty} \chi_i(x)\,dx = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \int_{a_i}^{b_i} dx = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i (b_i - a_i).$$

Упражнение 4. *Доказать, что всякая непрерывная на отрезке функция является пределом равномерно сходящейся последовательности финитных ступенчатых функций, носители которых принадлежат тому же отрезку.*

Лемма 2. *Для любой функции f, абсолютно интегрируемой на конечном или бесконечном промежутке с концами a и b, $-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty$, существует последовательность таких финитных ступенчатых функций φ_n, $n = 1, 2, \ldots$, что*

$$1°)\ \operatorname{supp} \varphi_n \subset (a, b),$$

$$2°)\ \lim_{n \to \infty} \int_a^b |f(x) - \varphi_n(x)|\,dx = 0.$$

Доказательство. Пусть функция f абсолютно интегрируема на промежутке с концами a и b. Допустим для определенности, что она интегрируема на любом отрезке

$$[\xi, \eta], \quad -\infty \leqslant a < \xi < \eta < b \leqslant +\infty$$

(общий случай абсолютно интегрируемой функции, см. п. 55.1, легко сводится к этому). Тогда, согласно определению несобственного интеграла, для любого фиксированного числа $\varepsilon > 0$ существуют такие числа ξ и η, что

$$\int_a^{\xi} |f(x)|\,dx + \int_{\eta}^{b} |f(x)|\,dx < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{55.8}$$

Функция f интегрируема, по Риману, на отрезке $[\xi, \eta]$ и, следовательно, если обозначить через s_τ нижнюю сумму Дарбу функции f, соответствующую разбиению τ отрезка $[\xi, \eta]$, то

$$\lim_{\delta_\tau \to 0} s_\tau = \int_{\xi}^{\eta} f(x)\,dx,$$

где δ_τ — мелкость разбиения τ. Поэтому существует разбиение $\tau_0 = \{x_i\}_{i=1}^{i=k}$ отрезка $[\xi, \eta]$, такое, что если s_{τ_0} — нижняя сумма Дарбу для функции f, соответствующая разбиению τ_0, т. е.

$$s_{\tau_0} = \sum_{i=1}^{k} m_i \Delta x_i, \quad m_i = \inf_{x_{i-1} \leqslant x \leqslant x_i} f(x), \quad \Delta x_i = x_i - x_{i-1}, \quad i = 1, 2, \ldots, k,$$

то

$$0 \leqslant \int_{\xi}^{\eta} f(x)\,dx - s_{\tau_0} < \frac{\varepsilon}{2},$$

где ε — фиксированное выше число.

Положим

$$\varphi(x) = \begin{cases} m_i, & \text{если } x_{i-1} \leqslant x < x_i, \quad i = 1, 2, \ldots, k, \\ 0, & \text{если } x < \xi \text{ или } x \geqslant \eta. \end{cases} \tag{55.9}$$

Очевидно $\varphi(x)$ — финитная ступенчатая функция,

$$\operatorname{supp}\varphi \subset [\xi, \eta] \subset (a, b) \text{ и } \int_{\xi}^{\eta} \varphi(x)\,dx = \sum_{i=1}^{k} m_i \Delta x_i = s_{\tau_0}.$$

Следовательно,

$$\int_{\xi}^{\eta} [f(x) - \varphi(x)]\,dx = \int_{\xi}^{\eta} f(x)\,dx - \int_{\xi}^{\eta} \varphi(x)\,dx < \frac{\varepsilon}{2}, \tag{55.10}$$

при этом поскольку $\varphi(x) \leqslant f(x)$, $\xi \leqslant x < \eta$, то

$$f(x) - \varphi(x) = |f(x) - \varphi(x)| \geqslant 0.$$

Из неравенств (55.8) и (55.10) имеем:

$$\int_{a}^{b} |f(x) - \varphi(x)|\,dx = \int_{a}^{\xi} |f(x)|\,dx + \int_{\xi}^{\eta} [f(x) - \varphi(x)]\,dx + \int_{\eta}^{b} |f(x)|\,dx < \varepsilon.$$

Полагая, например, $\varepsilon = \frac{1}{n}$ и обозначая соответствующие финитные ступенчатые функции φ через φ_n, $n = 1, 2, \ldots$, получим последовательность финитных ступенчатых функций φ_n, для которой выполняется утверждение леммы. $\square$

Доказательство теоремы. Пусть $\chi(x)$ — характеристическая функция полуинтервала $[\xi, \eta)$. Тогда для любого интервала $(a, b) \supset [\xi, \eta)$ будем иметь

$$\lim_{\nu \to \infty} \int_{a}^{b} \chi(x) \sin \nu x\,dx = \lim_{\nu \to \infty} \int_{\xi}^{\eta} \sin \nu x\,dx = \lim_{\nu \to \infty} \frac{\cos \nu\xi - \cos \nu\eta}{\nu} = 0,$$

ибо

$$\left| \frac{\cos \nu\xi - \cos \nu\eta}{\nu} \right| \leqslant \frac{|\cos \nu\xi| + |\cos \nu\eta|}{\nu} \leqslant \frac{2}{\nu} \to 0, \quad \nu \to \infty.$$

Так как любая финитная ступенчатая функция является линейной комбинацией конечного числа характеристических функций полуинтервалов рассмотренного вида, то утверждение теоремы справедливо и для любой финитной ступенчатой функции.

Если теперь функция f является абсолютно интегрируемой на промежутке с концами a и b, $-\infty \leq a < b \leq +\infty$, то для любого числа $\varepsilon > 0$, согласно лемме существует финитная ступенчатая функция φ, такая, что

$$\int_a^b |f(x) - \varphi(x)|\, dx < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Для этой ступенчатой функции (поскольку для ступенчатых функций теорема уже доказана) существует такое ν_ε, что при $|\nu| \geq \nu_\varepsilon$

$$\left| \int_a \varphi(x) \sin \nu x\, dx \right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Поэтому, используя тождество $f(x) = [f(x) - \varphi(x)] + \varphi(x)$, при $|\nu| \geq \nu_\varepsilon$ получим

$$\left| \int_a^b f(x) \sin \nu x\, dx \right| \leq \left| \int_a^b [f(x) - \varphi(x)] \sin \nu x\, dx \right| + \\ + \left| \int_a^b \varphi(x) \sin \nu x\, dx \right| \leq \int_a^b |f(x) - \varphi(x)|\, dx + \\ + \left| \int_a^b \varphi(x) \sin \nu x\, dx \right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Это означает, что $\lim\limits_{\nu \to \infty} \int_a^b f(x) \sin \nu x\, dx = 0.$

Аналогично доказывается, что

$$\lim_{\nu \to \infty} \int_a^b f(x) \cos \nu x\, dx = 0. \ \square$$

55.3. ИНТЕГРАЛ ДИРИХЛЕ. ПРИНЦИП ЛОКАЛИЗАЦИИ

Пусть функция $f(x)$ абсолютно интегрируема на отрезке $[-\pi, \pi]$. Найдем удобное для исследований выражение частичной суммы $S_n(x; f)$ ряда Фурье функции f, называемой также просто *суммой Фурье n-го порядка $n = 0, 1, 2, \ldots$, этой функции.* Подставив в $S_n(x; f)$ выражения для коэффициентов Фурье (55.6), получим:

$$S_n(x;\ f)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{n} a_k\cos kx+b_k\sin kx=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,dt+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)(\cos kt\cos kx+\sin kt\sin kx)\,dt=$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\left[\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{n}\cos k(t-x)\right]dt. \qquad (55.11)$$

Положим

$$D_n(t)=\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{n}\cos kt, \qquad (55.12)$$

тогда формула (55.11) перепишется в виде

$$S_n(x;\ f)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} D_n(t-x)f(t)\,dt. \qquad (55.13)$$

Функция $D_n(t)$ называется *ядром Дирихле*, а интеграл, стоящий в правой части равенства (55.13), — *интегралом Дирихле*.

Лемма 3. *Ядро Дирихле*:

1) *четная непрерывная* 2π-периодическая функция, причем

$$D_n(0)=n+\frac{1}{2};$$

2) *удовлетворяет условию*

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} D_n(t)\,dt=1; \qquad (55.14)$$

3) *при* $t\neq 2\pi k,\ k=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \ldots$:

$$D_n(t)=\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{2\sin\frac{t}{2}}. \qquad (55.15)$$

Доказательство. Непрерывность, четность и существование периода, равного 2π, для ядра Дирихле $D_n(t)$ непосредственно следует из его определения, т. е. из формулы (55.12). Из этой же формулы следует и равенство (55.14): чтобы его получить, достаточно проинтегрировать по отрезку $[-\pi,\ \pi]$ обе части равенства (55.12):

$$\int_{-\pi}^{\pi} D_n(t)\,dt = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} dt + \sum_{k=1}^{n}\int_{-\pi}^{\pi}\cos kt\,dt = \pi$$

ибо при $k=1,\ 2,\ \ldots$: $\int_{-\pi}^{\pi}\cos kt\,dt = 0$.

Докажем теперь формулу (55.15). Имеем:

$$D_n(t) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n}\cos kt = \frac{1}{2\sin\frac{t}{2}}\left(\sin\frac{t}{2} + \sum_{k=1}^{n} 2\sin\frac{t}{2}\cos kt\right) =$$

$$= \frac{1}{2\sin\frac{t}{2}}\left[\sin\frac{t}{2} + \sum_{k=1}^{n}\left(\sin\frac{2k+1}{2}t - \sin\frac{2k-1}{2}t\right)\right] =$$

$$= \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{2\sin\frac{t}{2}},\quad t \neq 2\pi k,\quad k=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \ldots.$$

Отметим, что в силу четности ядра Дирихле

$$\int_{-\pi}^{0} D_n(t)\,dt = \int_{0}^{\pi} D_n(t)\,dt,$$

поэтому

$$\int_{-\pi}^{\pi} D_n(t)\,dt = 2\int_{0}^{\pi} D_n(t)\,dt.$$

Отсюда и из свойства 2° ядра Дирихле следует, что

$$\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} D_n(t)\,dt = 1. \qquad (55.16)$$

Заметим еще, что правая часть равенства (55.15) имеет смысл лишь при $t \neq 2\pi k$, k — целое. Но поскольку

$$\lim_{t\to 2k\pi}\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{2\sin\frac{t}{2}} = \lim_{t\to 2k\pi} D_n(t) = n+\frac{1}{2},$$

то функцию $\dfrac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{2\sin\frac{t}{2}}$ можно доопределить при $t=2\pi k$, $k=0$, $\pm 1,\ \pm 2,\ \ldots$, считая ее значение в каждой из этих точек по определению равным $n+\frac{1}{2}$. Доопределенная указанным способом функция непрерывна при $t=2\pi k$ для всех целых k.

Вернемся к рассмотрению функции f, абсолютно интегрируемой на отрезке $[-\pi, \pi]$. Нас будет интересовать, в частности, предел последовательности частичных сумм $S_n(x; f)$ ее ряда Фурье. Заметим, что непосредственно перейти к пределу при $n\to\infty$ в правой части равенства (55.13), т. е. перейти к пределу под знаком интеграла, нельзя, так как предел ядра Дирихле при $n\to\infty$ не существует. Продолжим функцию f с полуинтервала $[-\pi, \pi)$ в 2π-периодическую функцию и обозначим ее также через f (подробнее о периодическом продолжении см. в п. 55.1).

Докажем следующую лемму.

Лемма 4. *Для частичной суммы Фурье $S_n(x; f)$ абсолютно интегрируемой 2π-периодической функции f справедливы формулы*

$$S_n(x;\ f)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} D_n(t)\, f(x+t)\,dt \tag{55.17}$$

и

$$S_n(x;\ f)=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} D_n(t)\,[f(x+t)+f(x-t)]\,dt. \tag{55.18}$$

Следствие. *Для любых $\delta\in(0, \pi)$, $x\in[-\pi, \pi]$ частичная сумма $S_n(x; f)$ ряда Фурье абсолютно интегрируемой 2π-периодической функции f обладает следующим асимптотическим интегральным представлением:*

$$S_n(x;\ f)=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\delta} D_n(t)\,[f(x+t)+f(x-t)]\,dt+o(1),\quad n\to\infty. \tag{55.19}$$

Доказательство леммы. Выполним в интеграле Дирихле (55.13) замену переменной интегрирования $u=t-x$:

$$S_n(x;\ f)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} D_n(t-x)\, f(t)\,dt=$$
$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi-x}^{\pi-x} D_n(u)\, f(x+u)\,du=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} D_n(u)\, f(x+u)\,du. \tag{55.20}$$

Мы снова воспользовались здесь тем обстоятельством, что интеграл от периодической функции по отрезку, длина которого равна ее периоду, не зависит от положения этого отрезка на действительной оси (см. п. 55.1), и применили это свойство к 2π-периодической по u функции $D_n(u)\, f(x+u)$. Итак формула (55.17) доказана.

Для доказательства формулы (55.18) представим правую часть равенства (55.20) в виде суммы двух интегралов с промежутками интегрирования $[-\pi, 0]$ и $[0, \pi]$; в первом интеграле выполним замену переменной $u=-t$ и воспользуемся четностью ядра Дирихле:

$$D_n(-u)=D_n(u)$$

(см. лемму 3). В результате будем иметь:

$$S_n(x;\ f)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} D_n(u)f(x+u)\,du=$$
$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} D_n(u)f(x+u)\,du+\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} D_n(u)f(x+u)\,du=$$
$$=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} D_n(t)f(x-t)\,dt+\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} D_n(u)f(x+u)\,du=$$
$$=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} D_n(t)[f(x+t)+f(x-t)]\,dt.$$

Формула (55.18) также доказана. □

Доказательство следствия. Зафиксируем число δ, $0<\delta<\pi$, и представим правую часть (55.18) в виде суммы двух интегралов следующим образом:

$$S_n(x;\ f)=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\delta}+\frac{1}{\pi}\int_{\delta}^{\pi}. \tag{55.21}$$

Поскольку функция $\dfrac{1}{2\sin\frac{t}{2}}$ непрерывна, а следовательно, и ограничена на отрезке $[\delta, \pi]$ $\left(\text{именно для всех } t\in[\delta, \pi]\text{: } 0<\dfrac{1}{2\sin\frac{t}{2}}\leqslant\right.$ $\left.\leqslant\dfrac{1}{2\sin\frac{\delta}{2}}\right)$, а функция $f(x+t)+f(x-t)$ при любом фиксированном $x\in[-\pi, \pi]$ 2π-периодична по t и абсолютно интегрируема на отрезке $[-\pi, \pi]$, то на $[\delta, \pi]$ абсолютно интегрируемо и их произведение $\dfrac{f(x+t)+f(x-t)}{2\sin\frac{t}{2}}$. Поэтому, согласно теореме Римана (см. теорему 2 в п. 55.2) второй интеграл в правой части равенства (55.21) стремится к нулю при $n\to\infty$, т. е.

$$\frac{1}{\pi}\int_{\delta}^{\pi}\frac{f(x+t)+f(x-t)}{2\sin\frac{t}{2}}\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t\,dt=o(1),\quad n\to\infty.$$

Подставляя это выражение в (55.21) получим формулу (55.19). □

Из формулы (55.19) следует одно важное свойство рядов Фурье, называемое принципом локализации. Сформулируем его в виде теоремы.

Теорема 3 (принцип локализации). *Если f — 2π-периодическая абсолютно интегрируемая функция, то существование и значение предела последовательности ее частичных сумм Фурье $S_n(x;\ f)$ в любой точке $x_0 \in [-\pi,\ \pi]$ зависит только от существования и значения предела при $n \to \infty$ интеграла*

$$\frac{1}{\pi}\int_0^\delta D_n(t)\,[f(x_0+t)+f(x_0-t)]\,dt,$$

где δ — сколь угодно малое положительное число.

Подчеркнем, что в подынтегральное выражение указанного интеграла входят лишь значения функции f на отрезке $[x_0-\delta,\ x_0+\delta]$, и, тем самым, существование и значение предела частичных сумм ряда Фурье функции f зависит только от ее свойств в окрестности точки x_0, или, как говорят, от ее локальных свойств вблизи точки x_0.

Из принципа локализации следует, что если в любой, сколь угодно малой, окрестности точки x_0 функции f и g совпадают, то пределы $\lim\limits_{n\to\infty} S(x_0;\ f)$ и $\lim\limits_{n\to\infty} S(x_0;\ g)$ одновременно существуют или нет, причем если эти пределы существуют, то они равны. Это тем более интересно, что ряды Фурье таких функций вообще говоря, различны, ибо в формулы для коэффициентов Фурье входят значения функции по всему отрезку $[-\pi,\ \pi]$.

55.4. СХОДИМОСТЬ РЯДОВ ФУРЬЕ В ТОЧКЕ

В этом пункте будут рассматриваться 2π-периодические абсолютно интегрируемые на отрезке длины 2π функции, которые имеют только точки разрыва первого рода, вследствие чего в каждой точке x_0 числовой оси существуют односторонние пределы:

$$\lim_{h\to+0} f(x_0+h)=f(x_0+0),\quad \lim_{h\to+0} f(x_0-h)=f(x_0-0).$$

Определение 8 (Лебег *)). *Точка x_0 называется регулярной точкой функции f, если*

$$f(x_0)=\frac{f(x_0+0)+f(x_0-0)}{2}.$$

Очевидно, каждая точка непрерывности функции является ее регулярной точкой.

---

*) А. Л. Лебег (1875—1941)—французский математик.

Если x_0 — точка разрыва первого рода функции f, то под ее односторонними производными $f'_+(x)$ и $f'_-(x)$ будем здесь понимать пределы

$$f'_+(x)=\lim_{h\to+0}\frac{f(x+h)-f(x+0)}{h},$$

$$f'_-(x)=\lim_{h\to+0}\frac{f(x-h)-f(x-0)}{-h}.$$

В случае, когда функция непрерывна в точке x, и, следовательно, $f(x+0)=f(x-0)=f(x)$, сформулированное определение односторонних производных совпадает с данным раньше (см. п. 9.1).

Для удобства формулировки теоремы о сходимости ряда Фурье введем обозначение

$$f_x^*(t)\overset{\text{def}}{=}f(x+t)+f(x-t)-f(x+0)-f(x-0). \qquad (55.22)$$

Очевидно, что в регулярной точке x функция $f_x^*(t)$ имеет вид

$$f_x^*(t)=f(x+t)+f(x-t)-2f(x).$$

Нам понадобится следующая простая лемма.

Лемма 5. *Для 2π-периодической абсолютно интегрируемой на отрезке длины 2π функции f интегралы*

$$\int_0^\delta\frac{|f_x^*(t)|}{t}\,dt,\ 0<\delta\leqslant\pi,\quad u\quad \int_0^\pi\frac{|f_x^*(t)|}{2\sin\frac{t}{2}}\,dt \qquad (55.23)$$

сходятся или расходятся одновременно.

Доказательство. Действительно, для любого δ, $0<\delta<\pi$ функция $\frac{1}{2\sin\frac{t}{2}}$ непрерывна, а поэтому и интегрируема по Риману на отрезке $[\delta, \pi]$. Функция же $f_x^*(t)$ (x фиксировано) абсолютно интегрируема на этом отрезке, следовательно и их произведение $\frac{f_x^*(t)}{2\sin\frac{t}{2}}$ абсолютно интегрируемо на отрезке $[\delta, \pi]$, т. е. при любом δ, $0<\delta<\pi$, интеграл

$$\int_\delta^\pi\frac{|f_x^*(t)|}{2\sin\frac{t}{2}}\,dt \qquad (55.24)$$

сходится (см. лемму 2 в п. 33.5).

Выберем теперь $\delta>0$ так, чтобы на отрезке $[0, \delta]$ функция $f_x^*(t)$ не имела особых точек (см. п. 55.1) кроме, быть может, точки $t=0$, т. е. чтобы она при любом ε, $0<\varepsilon<\delta$, была интегрируемой по Риману на отрезке $[\varepsilon, \delta]$; это всегда возможно, так как из предположения абсолютной интегрируемости функции f следует, что у нее, а следовательно, и у функции f_x^* имеется лишь конечное число особых точек (см. снова п. 55.1).

Теперь заметим, что функции $\frac{f_x^*(t)}{t}$ и $\frac{f_x^*(t)}{2\sin\frac{t}{2}}$ эквивалентны при $t \to 0$, ибо

$$\lim_{t\to 0} \frac{2\sin\frac{t}{2}}{t} = 1;$$

поэтому по признаку сходимости интегралов, называемому признаком сравнения (см. следствие из теоремы 1 в п. 33.3), примененному к абсолютным величинам рассматриваемых функций, интегралы

$$\int_0^\delta \frac{|f_x^*(t)|}{t}\,dt, \quad \int_0^\delta \frac{|f_x^*(t)|}{2\sin\frac{t}{2}}\,dt$$

одновременно сходятся или расходятся. В силу сходимости интеграла (55.24), отсюда сразу следует, что интегралы (55.23) также будут одновременно сходиться или расходиться. $\square$

Теорема 4 (признак Дини). *Пусть f — 2π-периодическая функция, абсолютно интегрируемая на отрезке длины 2π.*

Тогда, если x является точкой непрерывности или точкой разрыва первого рода и при некотором δ, $0<\delta<\pi$, интеграл

$$\int_0^\delta \frac{|f_x^*(t)|}{t}\,dt \qquad (55.25)$$

сходится, то ряд Фурье функции f сходится в точке x к значению

$$\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}. \qquad (55.26)$$

Следствие 1. *Если условия теоремы выполнены, то в любой регулярной точке функции f (в частности — во всех ее точках непрерывности) ряд Фурье этой функции сходится к ее значению в рассматриваемой точке.*

Следствие 2. *Если f — 2π-периодическая функция, абсолютно интегрируемая на отрезке длины 2π и в точке x существуют $f(x+0)$, $f(x-0)$, $f'_+(x)$ и $f'_-(x)$, то ряд Фурье функции сходится в этой точке к значению* (55.26).

Следствие 3. *Ряд Фурье кусочно непрерывно дифференцируемой на отрезке $[-\pi, \pi]$ функции f сходится в каждой точке интервала $(-\pi, \pi)$ к значению* (55.26), *а в точках $x=-\pi$ и $x=\pi$ к значению*

$$\frac{f(-\pi+0)+f(\pi-0)}{2}. \qquad (55.27)$$

Следствие 4. *Ряд Фурье непрерывной кусочно дифференцируемой на отрезке $[-\pi, \pi]$ функции сходится в любой точке интервала $(-\pi, \pi)$ к значению функции в этой точке, а в точках $x=-\pi$ и $x=\pi$ к значению* (55.27).

Доказательство теоремы. Используя формулы (55.18) и (55.16) будем иметь

$$S_n(x; f)-\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}=$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_0^\pi D_n(t)[f(x+t)+f(x-t)]\,dt-\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}\,\frac{2}{\pi}\int_0^\pi D_n(t)\,dt=$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_0^\pi D_n(t)[f(x+t)+f(x-t)-f(x+0)-f(x-0)]\,dt=$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_0^\pi \frac{f_x^*(t)}{2\sin\frac{t}{2}}\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t\,dt. \quad (55.28)$$

Пусть интеграл (55.25) сходится. Тогда, согласно лемме 5, сходится и интеграл

$$\int_0^\pi \frac{|f_x^*(t)|}{2\sin\frac{t}{2}}\,dt,$$

иначе говоря, функция $\dfrac{f_x^*(t)}{2\sin\frac{t}{2}}$ абсолютно интегрируема на отрезке $[0, \pi]$. Поэтому, согласно теореме Римана (см. п. 55.2)

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\pi}\int_0^\pi \frac{f_x^*(t)}{2\sin\frac{t}{2}}\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t\,dt=0,$$

следовательно, в силу (55.28):

$$\lim_{n\to\infty} S_n(x; f)=\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}. \quad \square$$

Следствие 1 непосредственно вытекает из теоремы в силу определения регулярной точки функции.

Докажем следствие 2. Согласно теореме 4 достаточно показать, что если существуют пределы $f(x+0)$, $f(x-0)$ и односторонние производные $f'_+(x)$, $f'_-(x)$, то интеграл (55.25) сходится при некотором $\delta>0$. Прежде всего, в силу существования конечного предела

$$\lim_{t\to 0}\frac{f_x^*(t)}{t}=\lim_{t\to 0}\left[\frac{f(x+t)-f(x+0)}{t}+\frac{f(x-t)-f(x-0)}{t}\right]=f'_+(x)-f'_-(x),$$

функция $\frac{f_x^*(t)}{t}$ ограничена в некоторой окрестности точки $t=0$. Поэтому существует такое δ, $0<\delta<\pi$, что на отрезке $[0, \delta]$ функция $\frac{f_x^*(t)}{t}$ ограничена и, следовательно, не имеет особых точек, вследствие чего она интегрируема по Риману на этом отрезке (см. п. 33.1, а также замечание 4 в п. 44.7). Функция, интегрируемая по Риману, абсолютно интегрируема, а поэтому интеграл (55.25) конечен. □

Для доказательства следствия 3 функцию f, заданную на отрезке $[-\pi, \pi]$, продолжим периодически с периодом 2π с полуинтервала $[-\pi, \pi)$ на всю числовую ось и обозначим полученную функцию через $\bar{f}$. В силу определения кусочной дифференцируемости (см. определение 1 в п. 30.2) функция $\bar{f}$ удовлетворяет условиям следствия 2. Согласно этому следствию ряд Фурье функции $\bar{f}$, очевидно совпадающий с рядом Фурье для f, сходится в каждой точке x к

$$\frac{\bar{f}(x+0)+\bar{f}(x-0)}{2}.$$

Если $x\in(-\pi, \pi)$, то $\bar{f}(x\pm 0)=f(x\pm 0)$ и, следовательно, $\frac{\bar{f}(x+0)+\bar{f}(x-0)}{2}=\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}$. При $x=-\pi$ указанный ряд сходится к $\frac{\bar{f}(-\pi+0)+\bar{f}(-\pi-0)}{2}$, а при $x=\pi$ — к значению $\frac{\bar{f}(\pi+0)+\bar{f}(\pi-0)}{2}$. В силу периодичности функции $\bar{f}$

$$\bar{f}(-\pi-0)=\bar{f}(\pi-0)=f(\pi-0),\quad \bar{f}(\pi+0)=\bar{f}(-\pi+0)=f(-\pi+0).$$

Поэтому

$$\frac{\bar{f}(-\pi+0)+\bar{f}(-\pi-0)}{2}=\frac{\bar{f}(\pi+0)+\bar{f}(\pi-0)}{2}=\frac{f(-\pi+0)+f(\pi-0)}{2}. \quad □$$

Следствие 4 непосредственно вытекает из следствий 1 и 3. □

Заметим, что в формулах (55.26) и (55.27) сумма ряда Фурье функции f выражена через саму функцию f, заданную на отрезке $[-\pi, \pi]$, а не через ее периодическое продолжение $\bar{f}$ на всю числовую ось.

Если функция f удовлетворяет условиям следствия 4, т. е. непрерывна и кусочно-дифференцируема на отрезке $[-\pi, \pi]$ и кроме того $f(-\pi)=f(\pi)$ (т. е. ее периодическое продолжение на всю числовую ось совпадает с ней всюду на $[-\pi, \pi]$, включая концы), то на всем отрезке $[-\pi, \pi]$ функция f равна сумме своего ряда Фурье:

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos nx+b_n\sin nx.$$

Поэтому такая функция в каждой точке отрезка $[-\pi, \pi]$ может быть представлена с любой степенью точности частичной суммой ее ряда Фурье, т. е. линейной комбинацией синусов и косинусов кратных дуг (говорят также, что указанная функция аппроксимируется суммой простых гармоник *)). То, что в рассматриваемом случае период равен именно 2π не существенно: случай произвольного периода $T>0$ легко сводится к рассмотренному простой заменой переменного (см. п. 55.12).

Примеры 1. Найдем ряд Фурье функции $\operatorname{ch} x$, $-\pi \leqslant x \leqslant \pi$. Вычислим ее коэффициенты Фурье:

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} \operatorname{ch} x\, dx = \frac{\operatorname{sh} x}{\pi}\Big|_{-\pi}^{\pi} = \frac{2 \operatorname{sh} \pi}{\pi},$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} \operatorname{ch} x \cos nx\, dx = (-1)^n \frac{2 \operatorname{sh} \pi}{\pi (1+n^2)}, \quad n = 1,\ 2, \ldots.$$

Из четности функции $\operatorname{ch} x$ следует, что для нее $b_n = 0$, $n = 1, 2, \ldots$. Функция $\operatorname{ch} x$ непрерывно дифференцируема и, следовательно, удовлетворяет условиям следствия 4 из теоремы 4; кроме того она принимает одинаковые значения на концах отрезка $[-\pi, \pi]$, поэтому ее ряд Фурье во всех точках отрезка $[-\pi, \pi]$ сходится к самой функции $\operatorname{ch} x$:

$$\operatorname{ch} x = \frac{\operatorname{sh} \pi}{\pi}\left(1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{1+n^2} \cos nx\right).$$

Этот ряд сходится равномерно, что следует из его сравнения со сходящимся числовым рядом $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{1+n^2}$.

Графики функции $\operatorname{ch} x$ и суммы $S(x)$ его ряда Фурье изображены на рис. 220.

2. Найдем ряд Фурье функции $\operatorname{sh} x$, $-\pi \leqslant x \leqslant \pi$.

В силу ее нечетности имеем

$$a_n = 0, \quad n = 0,\ 1,\ 2, \ldots;$$

далее,

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sh} x \sin nx\, dx = (-1)^{n-1} \frac{2n \operatorname{sh} \pi}{\pi (1+n^2)}, \quad n = 1,\ 2, \ldots.$$

Функция $\operatorname{sh} x$ непрерывно дифференцируема и удовлетворяет условиям следствия 4 из теоремы 4, но $\operatorname{sh}(-\pi) \neq \operatorname{sh} \pi$; поэтому во всех точках интервала $(-\pi, \pi)$ ряд Фурье функции $\operatorname{sh} x$ схо-

*) Простой гармоникой называют (преимущественно в физике) выражение вида $A \cos nx + B \sin nx$, где A и B — постоянные.

дится к самой функции:

$$\operatorname{sh} x = \frac{2 \operatorname{sh} \pi}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{n}{1+n^2} \sin nx, \quad -\pi < x < \pi,$$

а в точках $x = -\pi$ и $x = \pi$ — к значению $\frac{\operatorname{sh}(-\pi) + \operatorname{sh} \pi}{2} = 0$.

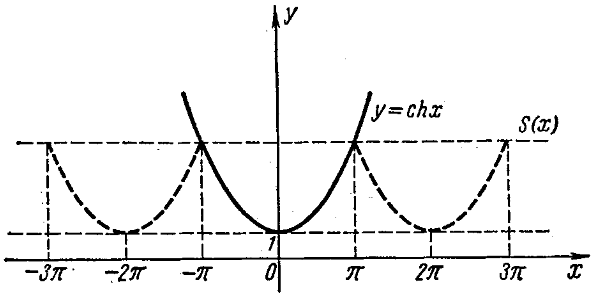


Рис. 220

Ряд Фурье функции $\operatorname{sh} x$ уже не сходится равномерно к ней на всем отрезке $[-\pi, \pi]$ (действительно, в противном случае его сумма должна была бы быть непрерывной на отрезке $[-\pi, \pi]$, а она имеет разрывы на его концах). Графики функций $\operatorname{sh} x$ и суммы $S(x)$ ее ряда Фурье для сравнения изображены на рис. 221.

3. Разложим в ряд Фурье функцию

$$f(x) = \frac{\pi - x}{2}, \qquad 0 \leqslant x \leqslant 2\pi.$$

Хотя функция f выглядит несколько искусственно, ее ряд Фурье имеет очень простой вид и позволяет получить ряд интересных формул.

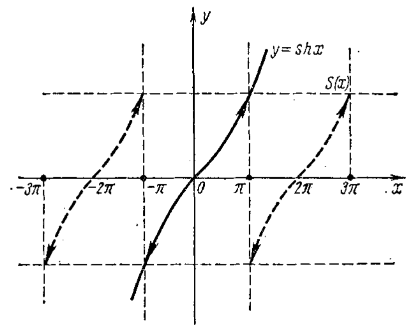


Рис. 221

Продолжим функцию f 2π-периодически с полуинтервала $[0, 2\pi)$ на всю числовую ось. В результате получится нечетная функция, в силу чего все ее коэффициенты Фурье a_n будут равными нулю: $a_n = 0$, $n = 0, 1, 2, \ldots$.

Вычислим коэффициенты b_n. Интегрируя по частям, получим

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\pi - x}{2} \sin nx\, dx =$$

$$= -\frac{1}{2\pi} (\pi - x) \frac{\cos nx}{n} \Big|_0^{2\pi} - \frac{1}{2n\pi} \int_0^{2\pi} \cos nx\, dx = \frac{1}{n}.$$

Итак,

$$\frac{\pi - x}{2} \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}. \tag{55.29}$$

В силу следствия 4 теоремы 4 для $0 < x < 2\pi$ имеет место равенство

$$\frac{\pi - x}{2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}. \tag{55.30}$$

При $x=0$ это равенство, очевидно, несправедливо, так как сумма получившегося ряда при $x=0$ равна нулю, а $f(0) \neq 0$.

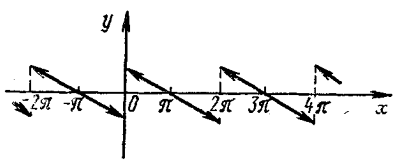


Рис. 222

График суммы ряда (55.29) изображен на рис. 222. Заметим, что этот ряд заведомо не сходится равномерно на отрезке $[0, 2\pi]$, так как его сумма не является на нем непрерывной функцией (равномерная сходимость ряда (55.29) была исследована в п. 36.3).

Заменив в (55.30) x через $2x$ и деля обе части получившегося равенства на 2, получим

$$\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin 2kx}{2k}, \qquad 0 < x < \pi. \tag{55.31}$$

Вычтем это равенство из (55.30):

$$\frac{\pi}{4} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin (2k-1)x}{2k-1}, \qquad 0 < x < \pi. \tag{55.32}$$

Подставив получившееся выражение для $\frac{\pi}{4}$ в (55.31), получим

$$x = 2\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{\sin nx}{n}.$$

Это равенство верно уже и при $x=0$, а в силу нечетности обеих частей равенства и при $-\pi < x < 0$, т. е. на всем интервале $(-\pi, \pi)$, но, конечно, не на его концах, в которых сумма ряда равна нулю.

Отметим еще, что положив в (55.32) $x=\frac{\pi}{2}$, получим так называемый ряд Лейбница

$$\frac{\pi}{4}=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\ldots,$$

который нам уже встречался раньше (см. п. 37.7, пример 2).

Упражнения. 5. Найти ряд Фурье функции $f(x)=|x|$, $-\pi\leqslant x\leqslant\pi$, и с помощью него вычислить сумму ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^2}$.

6. Найти ряд Фурье для функций

а) $f(x)=x^2$, $0\leqslant x\leqslant 2\pi$;

б) $f(x)=x^2$, $-\pi\leqslant x\leqslant\pi$;

в) $f(x)=x^2$ при $0\leqslant x\leqslant\pi$, а на $[-\pi, 0)$ функция f продолжена нечетным образом.

С помощью полученных разложений вычислить суммы рядов

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2},\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2}.$$

55.5*. СХОДИМОСТЬ РЯДОВ ФУРЬЕ ДЛЯ ФУНКЦИЙ, УДОВЛЕТВОРЯЮЩИХ УСЛОВИЮ ГЁЛЬДЕРА

В этом пункте мы укажем более слабое достаточное условие, чем условие односторонней дифференцируемости (см. следствие 2 теоремы 4 в п. 55.4), также обеспечивающее сходимость интеграла (55.25) и, следовательно, сходимость ряда Фурье 2π-периодической абсолютно интегрируемой на отрезке длины, равной периоду, функции f к значению (55.26).

Определение 9. *Функция f, определенная на интервале (x_0, b) называется функцией, удовлетворяющей справа условию Гёльдера степени α в точке x_0, если существуют конечный правосторонний предел $f(x_0+0)$ и такие постоянные $M>0$ и $\delta>0$, что для любого h, удовлетворяющего условию $0<h<\delta$, выполняется неравенство*

$$|f(x_0+h)-f(x_0+0)|<Mh^{\alpha}. \tag{55.33}$$

Функция f, определенная на интервале (a, x_0), называется функцией, удовлетворяющей слева условию Гёльдера степени α в точке x_0, если существуют конечный левосторонний предел $f(x_0-0)$ и такие постоянные $M>0$ и $\delta>0$, что для любого h, удовлетворяющего условию $0<h<\delta$, выполняется неравенство

$$|f(x_0-h)-f(x_0-0)|<Mh^{\alpha}. \tag{55.34}$$

Функция f, удовлетворяющая в точке x_0 условию Гёльдера некоторой степени как справа, так и слева, называется функцией, *удовлетворяющей условию Гёльдера данной степени в рассматриваемой точке.*

Функция, определенная на некотором отрезке, называется функцией, удовлетворяющей условию Гёльдера данной степени на этом отрезке, если в каждой его точке она удовлетворяет условию Гёльдера указанной степени, причем в каждой внутренней точке отрезка как справа, так и слева: в левом конце отрезка — справа, а в правом — слева.

Отметим, что так называемое классическое условие Гёльдера данной степени состоит в следующем. Функция f называется *удовлетворяющей* в точке x классическому условию Гёльдера степени $\alpha > 0$, если существуют такие $\delta > 0$ и $M > 0$, что для всех h, $|h| < \delta$, выполняется неравенство

$$|f(x+h) - f(x)| \leqslant M|h|^{\alpha}.$$

Очевидно, что в этом случае, благодаря условию $\alpha > 0$, функция f всегда непрерывна в точке x: из $\lim\limits_{h \to 0} |h|^{\alpha} = 0$, $\alpha > 0$, следует, что $\lim\limits_{h \to 0} f(x+h) = f(x)$.

Аналогично определяются односторонние классические условия Гёльдера.

Таким образом, отличие рассматриваемого нами условия Гёльдера от классического состоит, в частности, в том, что согласно нашему определению функция, удовлетворяющая условию Гёльдера в некоторой точке, может быть разрывной в ней.

Условие Гёльдера степени единица обычно называется *условием Липшица* *⁾.

Упражнения. 7. Доказать, что если функция удовлетворяет в некоторой точке условию Гёльдера степени α, то при $0 < \beta < \alpha$ она удовлетворяет в этой точке и условию Гёльдера степени β.

8. Доказать, что если функция имеет на отрезке ограниченную производную, то она удовлетворяет на нем условию Липшица с одной и той же постоянной M.

9. Доказать, что если функция удовлетворяет на некотором отрезке классическому условию Гёльдера степени $\alpha > 1$, то она постоянна на этом отрезке.

10. Доказать, что функция $f(x) = x^{\alpha}$, $x \geqslant 0$, $0 < \alpha \leqslant 1$, удовлетворяет в точке $x = 0$ условию Гёльдера степени α и не удовлетворяет в ней никакому условию Гёльдера степени $\beta > \alpha$.

Теорема 5. *Пусть функция f абсолютно интегрируема на отрезке $[-\pi, \pi]$. Если она удовлетворяет в точке $x \in (-\pi, \pi)$ условию Гёльдера степени α, $\alpha > 0$, то ее ряд Фурье сходится в этой точке и его сумма равна*

$$\frac{f(x+0) + f(x-0)}{2};$$

*⁾ Р. Липшиц (1832—1903) — немецкий математик.

в частности, если функция, кроме того, непрерывна в точке $x \in (-\pi, \pi)$, то ее ряд Фурье сходится к значению функции в этой точке:

$$\lim_{n \to \infty} S_n(x;\ f) = f(x).$$

Если функция f удовлетворяет условию Гёльдера справа в точке $x = -\pi$ и слева в точке $x = \pi$, то ее ряд Фурье сходится в этих точках и его сумма в них равна

$$\frac{f(-\pi)+f(\pi)}{2}.$$

Доказательство. Выберем δ, $0 < \delta < \pi$, так, чтобы во-первых, на отрезке $[0, \delta]$ не было других особых точек функции $\frac{f_x^*(t)}{t^\alpha}$ кроме, быть может, точки $x = 0$, а во-вторых, чтобы при всех h, $|h| < \delta$, функция f удовлетворяла условиям Гёльдера (55.33) и (55.34) в точке x. Тогда, в силу формулы (55.22) для функции $f_x^*(t)$, будем иметь

$$\left|\frac{f_x^*(t)}{t}\right| \leqslant \left|\frac{f(x+t)-f(x+0)}{t}\right| + \left|\frac{f(x-t)-f(x-0)}{t}\right| \leqslant \frac{2M}{t^{1-\alpha}}.$$

Поскольку интеграл $\int\limits_0^\delta \frac{dt}{t^{1-\alpha}}$, $\alpha > 0$, сходится, то в силу признака сравнения сходится в нашем случае и интеграл (55.25). Поэтому теорема 5 следует из теоремы 4. $\square$

В заключение заметим, что если функция f в точке x имеет правостороннюю производную f'_+, то f удовлетворяет в этой точке справа условию Гёльдера степени 1. В самом деле, из существования конечного предела

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x+0)}{h} = f'_+(x)$$

следует, что найдется такое $\delta > 0$, что для всех h, $|h| < \delta$, будет справедливым неравенство

$$\left|\frac{f(x+h)-f(x+0)}{h} - f'_+(x)\right| < 1,$$

откуда, положив $M \overset{\text{def}}{=} |f'_+(x)| + 1$, получим

$$-M < \frac{f(x+h)-f(x+0)}{h} < M;$$

следовательно,

$$|f(x+h)-f(x+0)| \leqslant M|h|, \qquad |h| < \delta.$$

Аналогичное утверждение справедливо, конечно, и для левосторонних производных.

Задача 35. Функция f, определенная на отрезке $[a, b]$, называется *функцией класса Гёльдера* $H^\alpha(M)$ на этом отрезке, если для каждой пары точек x и $x+h$ этого отрезка, $x \in [a, b]$, $x+h \in [a, b]$, выполняется неравенство

$$|f(x+h)-f(x)| \leqslant M|h|^\alpha,$$

иначе говоря, если функция f удовлетворяет классическому условию Гёльдера одной и той же степени α и с одной и той же постоянной M во всех точках отрезка $[a, b]$.

Доказать, что если 2π-периодическая абсолютно интегрируемая на отрезке длины 2π функция принадлежит на некотором отрезке $[a, b]$ классу Гёльдера $H^\alpha(M)$, $0<\alpha\leqslant 1$, $M>0$, то на всяком отрезке $[a', b']$, содержащемся в интервале (a, b): $0<a<a'<b'<b<2\pi$ ряд Фурье функции f сходится к ней равномерно.

55.6. СУММИРОВАНИЕ РЯДОВ ФУРЬЕ МЕТОДОМ СРЕДНИХ АРИФМЕТИЧЕСКИХ

Пусть функция f абсолютно интегрируема на отрезке $[-\pi, \pi]$ и удовлетворяет условию $f(-\pi)=f(\pi)$, а следовательно, 2π-периодически продолжаема на всю вещественную ось. Пусть $S_n(x)$ — ее суммы Фурье, а $D_n(x)$ — ядра Дирихле, $n=0, 1, 2, \ldots$ (см. (55.11) и (55.12)).

Рассмотрим средние арифметические:

$$\sigma_n(x)=\frac{S_0(x)+S_1(x)+\ldots+S_n(x)}{n+1},$$

$$\Phi_n(x)=\frac{D_0(x)+D_1(x)+\ldots+D_n(x)}{n+1}, \quad n=0, 1, 2, \ldots. \tag{55.35}$$

Сумма $\sigma_n(x)$ называется *суммой Фейера**) n-го порядка функции f, а $\Phi_n(x)$ — *ядром Фейера* n-го порядка.

Из формулы

$$S_n(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} D_n(u) f(x+u)\,du$$

(см. (55.17)) получаем

$$\sigma_n(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \Phi_n(u) f(x+u)\,du. \tag{55.36}$$

Будем исследовать поведение сумм $\sigma_n(x)$ при $n\to\infty$, т. е. рассмотрим суммирование ряда Фурье методом средних арифметических (см. п. 35.15).

Изучим прежде всего свойства ядра Фейера.

Лемма 6. *Ядро Фейера обладает следующими свойствами.*

1°. *Функция* $\Phi_n(x)$ *является четной непрерывной* 2π-*периодической, причем*

$$\Phi_n(0)=\frac{n+1}{2}; \tag{55.37}$$

*) Л. Фейер (1880—1959) — венгерский математик.

2°. *Для всех* t *ядро Фейера* $\Phi_n(t)$ *неотрицательно*: $\Phi_n(t) \geqslant 0$;

3°. $\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} \Phi_n(t)\,dt = \frac{2}{\pi}\int\limits_{0}^{\pi} \Phi_n(t)\,dt = 1$;

4°. При $t \neq 2k\pi$, $k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$:

$$\Phi_n(t) = \frac{\sin^2 \frac{n+1}{2} t}{2(n+1)\sin^2 \frac{t}{2}}.$$

Следствие. *При любом фиксированном* δ, $0<\delta<\pi$, *имеет место равенство*

$$\lim_{n\to\infty} \max_{\delta \leqslant |t| \leqslant \pi} \Phi_n(t) = 0. \tag{55.38}$$

Доказательство. Сначала докажем свойство 1°. Четность, непрерывность и периодичность ядра Фейера следуют сразу в силу формулы (55.35) из тех же свойств ядра Дирихле (см. лемму 3 в п. 55.3). Далее, поскольку $D_k(0) = k + \frac{1}{2}$, $k = 0, 1, 2, \ldots$, то

$$\Phi_n(0) = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} D_k(0) = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}\left(k+\frac{1}{2}\right) = \\ = \frac{1}{n+1}\left[\frac{n(n+1)}{2} + \frac{n+1}{2}\right] = \frac{n+1}{2}.$$

Докажем свойство 3°:

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\Phi_n(t)\,dt = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} D_k(t)\,dt = 1.$$

В силу четности ядра $\Phi_n(t)$ отсюда следует, что

$$\frac{2}{\pi}\int\limits_{0}^{\pi}\Phi_n(t)\,dt = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\Phi_n(t)\,dt = 1.$$

Докажем теперь свойство 4°, из которого, очевидно, следует свойство 2°. Для $t \neq 2k\pi$, $k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, имеем

$$(n+1)\Phi_n(t) = \sum_{k=0}^{n} D_k(t) = \sum_{k=0}^{n}\frac{\sin\left(k+\frac{1}{2}\right)t}{2\sin\frac{t}{2}} = \\ = \sum_{k=0}^{n}\frac{2\sin\frac{t}{2}\sin\left(k+\frac{1}{2}\right)t}{4\sin^2\frac{t}{2}} = \frac{1}{4\sin^2\frac{t}{2}}\sum_{k=0}^{n}\left[\cos kt - \cos(k+1)t\right] = \\ = \frac{1-\cos(n+1)t}{4\sin^2\frac{t}{2}} = \frac{\sin^2\frac{n+1}{2}t}{2\sin^2\frac{t}{2}}. \quad \square$$

Отметим, что формулу (55.37) можно получить, в силу непрерывности ядра Фейера, и предельным переходом из свойства 4°, устремляя t к нулю.

Доказательство следствия. Используя свойство 4° ядра Фейера, получим

$$0 \leqslant \max_{\delta \leqslant |t| \leqslant \pi} \Phi_n(t) = \frac{1}{2(n+1)} \max_{\delta \leqslant |t| \leqslant \pi} \frac{\sin^2 \frac{n+1}{2} t}{\sin^2 \frac{t}{2}} \leqslant \frac{1}{2(n+1)\sin^2 \frac{\delta}{2}}.$$

Поскольку правая часть получившегося неравенства стремится к нулю при $n \to \infty$, то из полученной оценки сразу следует (55.38). □

Примерный вид графика ядра Фейера изображен на рис. 223.

В этом пункте будем рассматривать только непрерывные на отрезке $[-\pi, \pi]$ функции f, принимающие на его концах равные значения: $f(-\pi) = f(\pi)$. Очевидно, каждую такую функцию можно продолжить 2π-периодически с отрезка $[-\pi, \pi]$ на всю числовую ось $\boldsymbol{R}$. Полученная функция, которую обозначим через $\bar{f}$, будет непрерывна на всей оси $\boldsymbol{R}$.

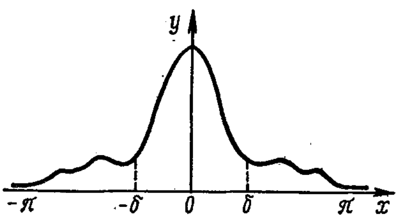


Рис. 223

Исходная функция f, как всякая непрерывная на отрезке функция, ограничена, т. е. существует постоянная $M > 0$ такая, что $|f(x)| \leqslant M$, $x \in [-\pi, \pi]$. Ясно, что тогда

$$|\bar{f}(x)| \leqslant M, \quad x \in \boldsymbol{R},$$

т. е. функция $\bar{f}$ ограничена на всей оси $\boldsymbol{R}$.

Кроме того, функция $\bar{f}$ равномерно непрерывна на всей оси $\boldsymbol{R}$. В самом деле, будучи непрерывной на любом конечном отрезке, например, на $[0, 4\pi]$, она равномерно непрерывна на нем (см. теорему 5 в п. 19.6). Это означает, что для любого $\varepsilon > 0$ существует такое δ, $0 < \delta < 2\pi$, что для всех $x_1 \in [0, 4\pi]$, $x_2 \in [0, 4\pi]$, $|x_2 - x_1| < \delta$, выполняется неравенство

$$|\bar{f}(x_2) - \bar{f}(x_1)| < \varepsilon.$$

Но для произвольных x_1' и x_2' таких, что $|x_2' - x_1'| < \delta$ найдутся целые числа n и m, для которых $x_1 \overset{\text{def}}{=} x_1' - 2\pi n \in [0, 4\pi]$, $x_2 \overset{\text{def}}{=} x_2' - 2\pi m \in [0, 4\pi]$ и $|x_1 - x_2| < \delta$, а поскольку в силу 2π-периодичности $\bar{f}(x_1) = \bar{f}(x_1')$, $\bar{f}(x_2) = \bar{f}(x_2')$, то

$$|\bar{f}(x_2') - \bar{f}(x_1')| = |\bar{f}(x_2) - \bar{f}(x_1)| < \varepsilon.$$

Это и означает равномерную непрерывность функции $\tilde{f}$ на всей числовой оси $\boldsymbol{R}$.

В дальнейшем будем периодически продолженную функцию обозначать тем же символом f, что и продолжаемую.

Теорема 6 (Фейер). *Если функция непрерывна на отрезке* $[-\pi, \pi]$ *и принимает на его концах равные значения, то последовательность ее сумм Фейера сходится равномерно на этом отрезке к самой функции.*

Следствие. *Если ряд Фурье непрерывной на отрезке* $[-\pi, \pi]$ *функции, принимающей на его концах равные значения, сходится в некоторой точке, то он сходится к значению функции в этой точке.*

Доказательство. Пусть функция f непрерывна на отрезке $[-\pi, \pi]$ и $f(-\pi)=f(\pi)$. Продолжим ее 2π-периодически на всю числовую ось $\boldsymbol{R}$. Оценим разность $f(x)-\sigma_n(x)$ между функцией f и ее суммой Фейера σ_n, используя представление суммы Фейера в виде (55.36) и свойства ядра Фейера, доказанные в лемме 6 и ее следствии. Зададим произвольное $\varepsilon>0$. Имеем

$$|f(x)-\sigma_n(x)|=\left|\frac{f(x)}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\Phi_n(t)\,dt-\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\Phi_n(t)f(x+t)\,dt\right|=$$

$$=\frac{1}{\pi}\left|\int_{-\pi}^{\pi}\Phi_n(t)[f(x)-f(x+t)]\,dt\right|\leqslant$$

$$\leqslant\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\Phi_n(t)\,|f(x)-f(x+t)|\,dt=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{-\delta}+\frac{1}{\pi}\int_{-\delta}^{\delta}+\frac{1}{\pi}\int_{\delta}^{\pi}, \tag{55.39}$$

где $\delta>0$ выбрано так, что значение модуля непрерывности $\omega(\delta;\ f)$ функции f удовлетворяет неравенству

$$\omega(\delta;\ f)<\frac{\varepsilon}{3}.$$

Это возможно, ибо функция f равномерно непрерывна на всей числовой оси $\boldsymbol{R}$. Поэтому для любого $x\in\boldsymbol{R}$:

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\delta}^{\delta}\Phi_n(t)\,|f(x)-f(x+t)|\,dt\leqslant$$

$$\leqslant\frac{\omega(\delta;\ f)}{\pi}\int_{-\delta}^{\delta}\Phi_n(t)\,dt\leqslant\frac{\varepsilon}{3\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\Phi_n(t)\,dt=\frac{\varepsilon}{3}. \tag{55.40}$$

Оставшиеся два интеграла оцениваются одинаковым способом: функция f ограничена на всей числовой прямой, т. е. существует такая постоянная $M>0$, что для всех $x \in \boldsymbol{R}$ имеет место неравенство

$$|f(x)| \leqslant M.$$

Следовательно, для любого $x \in \boldsymbol{R}$:

$$\frac{1}{\pi}\int_{\delta}^{\pi} \Phi_n(t)\,|f(x)-f(x+t)|\,dt \leqslant \frac{1}{\pi}\int_{\delta}^{\pi} \Phi_n(t)\,[|f(x)|+|f(x+t)|]\,dt \leqslant$$

$$\leqslant \frac{2M}{\pi}\int_{\delta}^{\pi} \Phi_n(t)\,dt \leqslant \frac{2M}{\pi} \max_{\delta \leqslant t \leqslant \pi} \Phi_n(t) \int_{0}^{\pi} dt =$$

$$= \frac{2M(\pi-\delta)}{\pi} \max_{\delta \leqslant t \leqslant \pi} \Phi_n(t) < 2M \max_{\delta \leqslant t \leqslant \pi} \Phi_n(t).$$

Согласно следствию из леммы 6 правая часть полученного неравенства стремится к нулю при $n \to \infty$, поэтому существует такое n_0, что при всех $n \geqslant n_0$ выполняется неравенство

$$\frac{1}{\pi}\int_{\delta}^{\pi} \Phi_n(t)\,|f(x)-f(x+t)|\,dt < \frac{\varepsilon}{3}. \tag{55.41}$$

Аналогично, для любого $x \in \boldsymbol{R}$ и всех $n \geqslant n_0$:

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{-\delta} \Phi_n(t)\,|f(x)-f(x+t)|\,dt < \frac{\varepsilon}{3}. \tag{55.42}$$

Из (55.39), (55.40), (55.41) и (55.42) для произвольного $x \in \boldsymbol{R}$ и всех $n \geqslant n_0$ имеем

$$|f(x)-\sigma_n(x)| < \frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon,$$

т. е. последовательность $\{\sigma_n\}$ сходится равномерно на всей числовой оси R к функции f. □

Доказательство следствия. Всякий сходящийся ряд суммируется методом средних арифметических к своей сумме (см. п. 35.15). Поэтому, если ряд Фурье непрерывной на отрезке $[-\pi, \pi]$ функции, принимающей на его концах одинаковые значения, сходится в некоторой точке к какому-то числу A, то предел последовательности средних арифметических частичных сумм, т. е. сумм Фейера, также равен A: если $\lim\limits_{n\to\infty} S_n(x_0;\ f) = A$, то $\lim\limits_{n\to\infty} \sigma_n(x_0) = A$. Но согласно доказанной теореме $\lim\limits_{n\to\infty} \sigma_n(x_0) = f(x_0)$, следовательно и $\lim\limits_{n\to\infty} S_n(x_0;\ f) = f(x_0)$. □

Подчеркнем, что ряд Фурье функции, непрерывной на отрезке $[-\pi, \pi]$ и принимающей на его концах одинаковые значения, может расходиться в ряде точек. Однако, согласно доказанному, если он сходится в некоторой точке, то обязательно к значению самой функции в этой точке.

В заключение заметим, что для непрерывной на отрезке функции, принимающей на его концах одинаковые значения, ряд Фурье, независимо от его сходимости или расходимости в отдельных точках, позволяет однозначно восстановить указанную функцию: достаточно образовать из его частичных сумм суммы Фейера — их последовательность уже сходится, и притом равномерно, к самой функции. Таким образом, даже изучение расходящегося ряда может оказаться полезным.

55.7. ПРИБЛИЖЕНИЕ НЕПРЕРЫВНЫХ ФУНКЦИЙ МНОГОЧЛЕНАМИ

Определение 10. *Функции вида*

$$\frac{A_0}{2}+\sum_{k=1}^{n} A_k\cos kx+B_k\sin kx \quad A_n^2+B_n^2>0$$

называются тригонометрическими многочленами (полиномами) порядка n, $n=0, 1, 2, \ldots$).*

Теорема 7 (Вейерштрасс). *Если функция f непрерывна на отрезке $[-\pi, \pi]$ и $f(-\pi)=f(\pi)$, то для каждого числа $\varepsilon>0$ существует такой тригонометрический полином $T(x)$, что*

$$|f(x)-T(x)|<\varepsilon, \quad -\pi\leqslant x\leqslant\pi.$$

Действительно, в силу теоремы 6 (см. п. 55.6) в качестве такого тригонометрического полинома можно взять, например, соответствующую сумму Фейера $\sigma_n(x)$, являющуюся, очевидно, тригонометрическим полиномом порядка не выше n.

Теорема 8 (Вейерштрасс). *Если функция f непрерывна на отрезке $[a, b]$, то для каждого $\varepsilon>0$ существует алгебраический многочлен $P(x)$ такой что*

$$|f(x)-P(x)|<\varepsilon, \quad a\leqslant x\leqslant b.$$

Доказательство. Отобразим отрезок $[0, \pi]$ линейно на отрезок $[a, b]$:

$$x=a+\frac{b-a}{\pi}t, \quad 0\leqslant t\leqslant\pi, \quad a\leqslant x\leqslant b,$$

и пусть $f^*(t)=f\left(a+\frac{b-a}{\pi}t\right)$. Функция f^* определена этой формулой на $[0, \pi]$. Продолжим ее четным образом на отрезок $[-\pi, 0]$, т. е. положим

$$f^*(t)=f^*(-t), \quad \text{если} \quad t\in[-\pi, 0].$$

*) Здесь считается, что $B_0=0$.

Полученная таким образом функция f^* непрерывна на $[-\pi, \pi]$ (почему?) и $f^*(-\pi)=f^*(-\pi)$. Поэтому, согласно теореме 7, для любого числа $\varepsilon>0$ существует тригонометрический полином $T(t)$ такой, что

$$|f^*(t)-T(t)|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

Как мы знаем, $\cos kt$ и $\sin kt$, $k=1, 2, \ldots$, а следовательно, и тригонометрический полином $T(t)$ являются аналитическими функциями и поэтому разлагаются в степенные ряды, сходящиеся на всей действительной прямой и, следовательно, равномерно сходящиеся на каждом конечном отрезке (см. § 37):

$$T(t)=\sum_{k=0}^{\infty} c_k t^k.$$

Если $P_n(t)$ суть частичные суммы этого ряда, то в силу его равномерной сходимости на отрезке $[-\pi, \pi]$ существует такой номер n_ε, что при $n\geqslant n_\varepsilon$

$$|T(t)-P_n(t)|<\frac{\varepsilon}{2}, \qquad -\pi\leqslant t\leqslant\pi.$$

Беря для определенности $n=n_\varepsilon$ и полагая $P(t)=P_{n_\varepsilon}(t)$, имеем

$$|f^*(t)-P(t)|\leqslant|f^*(t)-T(t)|+|T(t)-P(t)|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}<\varepsilon.$$

Возвращаясь к переменной x, т. е. полагая $t=\pi\frac{x-a}{b-a}$, получим

$$\left|f(x)-P\left(\pi\frac{x-a}{b-a}\right)\right|<\varepsilon,\ a\leqslant x\leqslant b,$$

где $P\left(\pi\frac{x-a}{b-a}\right)$ — очевидно, многочлен. □

Замечание. Пусть функция f непрерывна на отрезке $[a,b]$. Возьмем какую-либо последовательность чисел $\varepsilon_n>0$, $n=1,2,\ldots$, стремящуюся к нулю $\left(\text{например, } \varepsilon_n=\frac{1}{n}\right)$; тогда, согласно теореме 8, для каждого $n=1,2,\ldots$ существует многочлен $P_n(x)$ (здесь n порядковый номер, а не степень многочлена) такой, что

$$|f(x)-P_n(x)|<\varepsilon_n,\ a\leqslant x\leqslant b. \tag{55.43}$$

Очевидно, при $n\to\infty$ имеем $P_n(x)\rightrightarrows f(x)$ на отрезке $[a, b]$.

Итак, всякая непрерывная на отрезке функция является пределом равномерно сходящейся на этом отрезке последовательности многочленов. Обратное, т. е. что всякая функция, являющаяся пределом равномерно сходящейся на некотором отрезке последовательности многочленов (и, более того, последовательности любых непрерывных функций), непрерывна на этом отрезке, уже доказано (см. теорему 8′ в п. 36.4).

Таким образом, теорема Вейерштрасса устанавливает характеристическое свойство непрерывных и только непрерывных функций.

Весьма любопытно отметить, что первоначально понятие непрерывности функции было введено нами в абстрактной общей форме, оно никак не было связано с конкретными классами элементарных функций, в частности — с многочленами, и тем самым ни с какими аналитическими представлениями функций через многочлены.

Теорема Вейерштрасса показывает, что введенный таким образом класс непрерывных функций в известном смысле не очень далек от класса многочленов! Именно, какова бы ни была непрерывная на отрезке функция f и как мало бы ни было заранее заданное число $\varepsilon > 0$, всегда существует многочлен, отличающийся на всем отрезке от функции f не более чем на ε, т. е. аппроксимирующий (приближающий) ее с любой, наперед заданной степенью точности! Нетрудно получить и аналитическое представление в виде ряда многочленов для непрерывной на отрезке функции. Из (55.43) имеем

$$f(x) = \lim_{n \to \infty} P_n(x), \quad a \leqslant x \leqslant b, \tag{55.44}$$

или

$$f(x) = P_1(x) + \sum_{n=1}^{\infty} [P_{n+1}(x) - P_n(x)] \tag{55.45}$$

($P_n(x)$ — многочлены), причем стремление к пределу в (55.44) и сходимость ряда (55.45) происходят равномерно на отрезке $[a, b]$. При этом, как существование предела (55.44), так и существование разложения (55.45) являются необходимым и достаточным условием непрерывности функции f на рассматриваемом отрезке. Это оправдывает интуитивное представление о функции как об аналитическом выражении, составленном из независимой переменной и постоянных посредством алгебраических и аналитических операций.

Аналогичные замечания можно сделать и по поводу первой теоремы Вейерштрасса (теорема 7).

55.8. ПОЛНОТА ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ И СИСТЕМЫ НЕОТРИЦАТЕЛЬНЫХ ЦЕЛЫХ СТЕПЕНЕЙ x В ПРОСТРАНСТВЕ НЕПРЕРЫВНЫХ ФУНКЦИЙ

В этом пункте мы перефразируем доказанные выше теоремы и выведем из них некоторые простые следствия.

Определение 11. *Пусть X — некоторое множество функций, определенных на отрезке $[a, b]$. Система функций*

$$\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n, \ldots \tag{55.46}$$

называется полной для множества X в смысле равномерного приближения, если, какова бы ни была функция $f \in X$, для каждого $\varepsilon > 0$ существует такое конечное число функций $\varphi_{n_1}, \varphi_{n_2}, \ldots, \varphi_{n_k}$ из системы (55.46) и такие числа $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$, что

$$|f(x) - [\lambda_1 \varphi_{n_1}(x) + \lambda_2 \varphi_{n_2}(x) + \ldots + \lambda_k \varphi_{n_k}(x)]| < \varepsilon$$

для всех $x \in [a, b]$.

Иначе говоря, система функций (55.46) образует полную систему для множества X, если любую функцию из X можно сколь угодно точно приблизить конечными линейными комбинациями функций системы (55.46).

Используя понятие полноты системы, теоремы 7 и 8 предыдущего параграфа можно перефразировать соответственно следующим образом.

Теорема 7′. *Система тригонометрических функций* (55.2) *полна, в смысле равномерного приближения, для множества непрерывных на отрезке $[-\pi, \pi]$ функций, принимающих на его концах равные значения.*

Теорема 8′. *Система целых неотрицательных степеней x, т. е. система*

$$1, x, x^2, \ldots, x^n, \ldots, \tag{55.47}$$

полна в смысле равномерного приближения для множества всех непрерывных на любом заданном отрезке функций.

Определение 12. *Пусть функции f и g определены на отрезке $[a, b]$. Число*

$$\sqrt{\int_a^b [f(x) - g(x)]^2 \, dx}$$

называется средним квадратичным отклонением на отрезке $[a, b]$ функции f от функции g).*

Определение 13. *Система функций* (55.46) *называется полной в смысле среднего квадратичного приближения для некоторого множества X функций, определенных на отрезке $[a, b]$, если, какова бы ни была функция $f \in X$, для каждого $\varepsilon > 0$ существует такая конечная линейная комбинация функций системы* (55.46), *что ее среднее квадратичное отклонение на отрезке $[a, b]$ от функции f меньше ε.*

Теорема 9. *Система тригонометрических функций* (55.2) *полна в смысле среднего квадратичного приближения во множестве непрерывных на отрезке $[-\pi, \pi]$ функций, принимающих в точках π и $-\pi$ одно и то же значение.*

---

*) Можно сказать и «отклонение функции g от функции f», поскольку рассматриваемое выражение не меняет своего значения, если f и g поменять местами.

Доказательство. Пусть f — непрерывная на отрезке $[-\pi, \pi]$ функция, причем $f(\pi)=f(-\pi)$. Согласно теореме 7′, для любого $\varepsilon>0$ существует такой тригонометрический полином $T(x)$, что

$$|f(x)-T(x)|<\frac{\varepsilon}{\sqrt{2\pi}},\ -\pi\leqslant x\leqslant\pi.$$

Отсюда для среднего квадратичного отклонения этого полинома от функции f имеем

$$\sqrt{\int_{-\pi}^{\pi}[f(x)-T(x)]^2\,dx}<\frac{\varepsilon}{\sqrt{2\pi}}\sqrt{\int_{-\pi}^{\pi}dx}=\varepsilon.\ \square$$

В дальнейшем мы увидим (см. п. 58.6), что ограничение $f(\pi)=f(-\pi)$, использованное нами при доказательстве теоремы 9 (только в этом случае можно было сослаться на теорему 7′), не является существенным. Именно, тригонометрическая система (55.2) полна в смысле среднего квадратичного во всем множестве непрерывных на отрезке $[-\pi, \pi]$ функций и, более того, можно показать, что она полна в смысле среднего квадратичного и во множестве всех функций с интегрируемым на отрезке $[-\pi, \pi]$ квадратом.

Заметим, что тригонометрическая система (55.2) заведомо не полна во множестве всех непрерывных на отрезке $[-\pi, \pi]$ функций в смысле равномерного приближения, т. е. в смысле определения 11. Действительно, если функция f такова, что для любого $\varepsilon>0$ существует такой тригонометрический полином T_ε, что

$$|f(x)-T_\varepsilon(x)|<\varepsilon,\quad -\pi\leqslant x\leqslant\pi,$$

то из условия $T_\varepsilon(\pi)=T_\varepsilon(-\pi)$ при $\varepsilon\to 0$ следует, что $f(\pi)=f(-\pi)$.

При приближении функций в смысле среднего квадратичного тригонометрическими полиномами особую роль играют частичные суммы ряда Фурье приближаемой функции. В следующем пункте будет показано, что частичная сумма n-го порядка имеет наименьшее среднее квадратичное отклонение от данной функции по сравнению с любым тригонометрическим полиномом степени n.

Наконец, можно показать, что если функция f обладает интегрируемым квадратом на отрезке $[-\pi, \pi]$, то отклонение от нее в смысле среднего квадратичного ее частичных сумм Фурье $S_n(x)$ стремится к нулю, когда $n\to\infty$, или, как говорят, функция f с интегрируемым квадратом является пределом в смысле среднего квадратичного своих частичных сумм Фурье (см. об этом в п. 58.6). Все эти обстоятельства говорят в пользу изучения приближения функций в смысле среднего квадратичного отклонения.

Аналогично теореме 9 доказывается следующая теорема.

Теорема 10. *Система неотрицательных целых степеней x, т. е. система* (55.47), *полна в смысле среднего квадратичного приближения во множестве непрерывных на любом заданном отрезке функций.*

Доказательство. Пусть функция f непрерывна на некотором отрезке $[a, b]$. Тогда для каждого $\varepsilon > 0$, согласно теореме 8′, существует такой полином P, что

$$|f(x) - P(x)| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{b-a}}, \quad a \leqslant x \leqslant b,$$

откуда

$$\sqrt{\int_a^b [f(x) - P(x)]^2\, dx} < \varepsilon. \ \square$$

55.9. МИНИМАЛЬНОЕ СВОЙСТВО КОЭФФИЦИЕНТОВ ФУРЬЕ. НЕРАВЕНСТВО БЕССЕЛЯ И РАВЕНСТВО ПАРСЕВАЛЯ

В этом пункте мы рассмотрим ряды Фурье для интегрируемых функций, квадрат которых также интегрируем (здесь интегрируемость понимается, вообще говоря, в несобственном смысле) на отрезке $[-\pi, \pi]$. Существенно заметить, что если функция f такова, что она имеет конечное число особых точек (см. п. 55.1) на отрезке $[-\pi, \pi]$, интегрируема по Риману по любому отрезку, не содержащему ни одной особой точки и ее квадрат f^2 интегрируем на отрезке $[-\pi, \pi]$, то из неравенства

$$|f| \leqslant \frac{1+|f|^2}{2}$$

следует, что функция $|f|$ интегрируема на этом отрезке. Обратное, вообще говоря, неверно. Существуют положительные функции $\left(\text{например, функция } \frac{1}{\sqrt{|x|}}\right)$, интегрируемые на отрезке $[-\pi, \pi]$, квадрат которых, однако, уже не интегрируем на нем.

Таким образом, указанное множество функций с интегрируемым на отрезке $[-\pi, \pi]$ квадратом составляет собственное подмножество множества всех абсолютно интегрируемых на отрезке $[-\pi, \pi]$ функций.

Заметим, что аналогично вводится понятие функции с интегрируемым квадратом и для любого конечного промежутка.

Теорема 11. *Пусть f — функция с интегрируемым на отрезке $[-\pi, \pi]$ квадратом. Тогда если $S_n(x)$ — ее сумма Фурье порядка n, то*

$$\int_{-\pi}^{\pi} [f(x) - S_n(x)]^2\, dx = \min_{T_n(x)} \int_{-\pi}^{\pi} [f(x) - T_n(x)]^2\, dx, \qquad (55.48)$$

где минимум в правой части равенства берется по всем тригонометрическим многочленам T_n степени не выше n.

Если a_0, a_n, b_n, $n=1, 2, \ldots$, суть коэффициенты Фурье функции f, то справедливо неравенство

$$\frac{a_0^2}{2}+\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2+b_n^2 \leqslant \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\,dx, \tag{55.49}$$

называемое неравенством Бесселя *).

Доказательство. Пусть

$$T_n(x)=\frac{A_0}{2}+\sum_{k=1}^{n} A_k\cos kx+B_k\sin kx,$$

тогда, открывая квадратные скобки в выражении

$$\int_{-\pi}^{\pi} [f(x)-T_n(x)]^2\,dx \tag{55.50}$$

и используя лемму 1 из п. 55.1 (в частности, ортогональность тригонометрической системы), получим

$$\int_{-\pi}^{\pi} [f(x)-T_n(x)]^2\,dx=\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\,dx+\pi\left(\frac{A_0^2}{2}+\sum_{k=1}^{n} A_k^2+B_k^2\right)-$$
$$-2\left[\frac{A_0}{2}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx+\sum_{k=1}^{n} A_k\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx\,dx+\right.$$
$$\left.+B_k\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin kx\,dx\right]=\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\,dx+\pi\left(\frac{A_0^2}{2}+\sum_{k=1}^{n} A_k^2+B_k^2\right)-$$
$$-2\pi\left[\frac{a_0A_0}{2}+\sum_{k=1}^{n} a_kA_k-b_kB_k\right]=\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\,dx+$$
$$+\pi\left[\frac{(A_0-a_0)^2}{2}+\sum_{k=1}^{n}(A_k-a_k)^2+(B_k-b_k)^2\right]-$$
$$-\pi\left[\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{n} a_k^2+b_k^2\right]. \tag{55.51}$$

Из полученного выражения видно, что величина (55.50) принимает наименьшее значение, когда $A_0=a_0$, $A_k=a_k$, $B_k=b_k$, $k=1, 2, \ldots$, т. е. тогда, когда $T_n(x)$ является суммой Фурье $S_n(x)$ порядка n функции f. Первое утверждение теоремы доказано.

*) Ф. Бессель (1784—1846) — немецкий астроном и математик.

Если $T_n(x) = S_n(x)$ — сумма Фурье порядка n, то из (55.51) следует, что

$$\int_{-\pi}^{\pi} [f(x) - S_n(x)]^2\,dx = \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\,dx - \pi\left[\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{n} a_k^2 + b_k^2\right], \quad (55.52)$$

откуда

$$\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\,dx - \pi\left[\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{n} a_k^2 + b_k^2\right] \geqslant 0.$$

Это неравенство справедливо при любом натуральном n. Переходя в нем к пределу при $n \to \infty$, получим неравенство

$$\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\,dx - \pi\left[\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k^2 + b_k^2\right] \geqslant 0,$$

очевидно, равносильное неравенству (55.49). $\square$

Из неравенства Бесселя следует, что для функции с интегрируемым квадратом ряд

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 + b_n^2$$

сходится. Общий член сходящегося ряда стремится к нулю, поэтому в рассматриваемом случае $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$.

Таким образом, мы еще раз установили стремление к нулю коэффициентов Фурье (см. п. 55.2), однако на этот раз для более узкого (как это отмечалось в начале этого пункта) класса функций, чем раньше, а именно для класса функций с интегрируемым квадратом.

В п. 58.6 будет показано, что на самом деле формула (55.49) справедлива со знаком равенства. Здесь мы докажем этот факт лишь для случая, когда функция f непрерывна и 2π-периодична.

Теорема 12. *Пусть функция f непрерывна на отрезке $[-\pi, \pi]$, $f(-\pi) = f(\pi)$ и a_0, a_n, b_n, $n = 1, 2, \ldots,$ — ее коэффициенты Фурье. Тогда справедливо равенство*

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\,dx = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 + b_n^2,$$

называемое равенством Парсеваля *).

Доказательство. Для каждого $\varepsilon > 0$ в силу полноты в смысле среднего квадратичного приближения системы тригоно-

*) М. Парсеваль (1755—1836 г.)—французский математик.

метрических функций (55.2) в классе непрерывных функций, принимающих одинаковые значения на концах отрезка $[-\pi, \pi]$, для функции f существует тригонометрический полином $T(x)$ некоторого порядка k такой, что

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}[f(x)-T(x)]^2\,dx<\varepsilon. \tag{55.53}$$

Согласно же теореме 11 (см. (55.48)), для суммы Фурье $S_k(x)$ того же порядка k выполняется неравенство

$$\int_{-\pi}^{\pi}[f(x)-S_k(x)]^2\,dx \leqslant \int_{-\pi}^{\pi}[f(x)-T(x)]^2\,dx.$$

Отсюда и из формул (55.52) и (55.53) получим:

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f^2(x)\,dx-\left[\frac{a_0^2}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n^2+b_n^2\right]\leqslant$$
$$\leqslant\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f^2(x)\,dx-\left[\frac{a_0^2}{2}+\sum_{n=1}^{k}a_n^2+b_n^2\right]=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}[f(x)-S_k(x)]^2\,dx\leqslant$$
$$\leqslant\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}[f(x)-T(x)]^2<\varepsilon.$$

Поскольку это неравенство справедливо при любом $\varepsilon>0$, то его левая часть равна нулю. □

Следствие. *Если выполнены предположения теоремы, то*

$$\lim_{n\to\infty}\int_{-\pi}^{\pi}[f(x)-S_n(x)]^2\,dx=0.$$

Действительно, в силу теоремы 12 при $n\to\infty$ правая часть равенства (55.52) стремится к нулю. □

55.10. ХАРАКТЕР СХОДИМОСТИ РЯДОВ ФУРЬЕ. ПОЧЛЕННОЕ ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ РЯДОВ ФУРЬЕ

Изучим связь рядов Фурье функции и ее производной.

Теорема 13. *Пусть функция f непрерывна на отрезке $[-\pi, \pi]$, $f(-\pi)=f(\pi)$ и пусть*

$$f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx+b_n\sin nx.$$

Если функция f кусочно непрерывно дифференцируема на отрезке $[-\pi, \pi]$ (см. определение 1 в п. 30.2), то

$$f'(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} -na_n \sin nx + nb_n \cos nx,$$

т. е. ряд Фурье производной получается из ряда Фурье самой функции формальным почленным дифференцированием *).

Доказательство. Пусть

$$f'(x) \sim \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \cos nx + \beta_n \sin nx.$$

Тогда, замечая, что $f(\pi) = f(-\pi)$, и интегрируя по частям, получим

$$\alpha_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f'(t)\,dt = \frac{1}{\pi}[f(\pi) - f(-\pi)] = 0,$$

$$\alpha_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f'(t) \cos nt\,dt = \frac{1}{\pi} f(t) \cos nt \Big|_{-\pi}^{\pi} + \frac{n}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin nt\,dt = nb_n,$$

$$\beta_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f'(t) \sin nt\,dt = f(t) \sin nt \Big|_{-\pi}^{\pi} - \frac{n}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos nt\,dt = -na_n,$$

$$n = 1, 2, \ldots . \quad \square$$

Перейдем к изучению скорости сходимости ряда Фурье в зависимости от гладкости функций. Предварительно докажем лемму.

Лемма 7. *Пусть функция f имеет на отрезке непрерывные производные до порядка $k-1$ включительно и кусочно непрерывную производную порядка k $(k \geqslant 1)$* **), *причем*

$$f^{(j)}(-\pi) = f^{(j)}(\pi), \quad j = 0, 1, \ldots, k-1,$$

и пусть

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx.$$

---

*) При этом без каких-либо предположений о сходимости ряда Фурье производной.

**) Мы говорим, что некоторая функция имеет кусочно непрерывную производную на данном отрезке, если эта функция является кусочно непрерывно дифференцируемой функцией на указанном отрезке (см. определение I в п. 30.2). Тем самым, если функция имеет кусочно непрерывную производную на каком-то отрезке, то может случиться, что в конечном числе точек этого отрезка она вовсе не имеет производной. Например, функция $f(x) = |x|$ на отрезке $[-1, 1]$ имеет кусочно непрерывную производную, а в точке $x = 0$ не имеет производной.

Тогда

$$|a_n| \leqslant \frac{\varepsilon_n}{n^k}, \quad |b_n| \leqslant \frac{\varepsilon_n}{n^k}, \quad n=1, 2, \ldots,$$

где $\varepsilon_n > 0$ *и ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n^2$ *сходится.*

Доказательство. Применяя последовательно теорему 13 k раз, получим

$$f^{(k)}(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \cos nx + \beta_n \sin nx,$$

где либо

$$\alpha_n = \pm n^k a_n, \quad \beta_n = \pm n^k b_n, \tag{55.54}$$

либо

$$\alpha_n = \pm n^k b_n, \quad \beta_n = \pm n^k a_n, \tag{55.55}$$

причем по неравенству Бесселя

$$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n^2 + \beta_n^2 \leqslant \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [f^{(k)}(x)]^2\, dx. \tag{55.56}$$

Положим $\varepsilon_n = \sqrt{\alpha_n^2 + \beta_n^2}$. В силу неравенства (55.56) ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n^2$ сходится.

Если справедливо (55.54), то

$$|a_n| = \frac{|\alpha_n|}{n^k} \leqslant \frac{\sqrt{\alpha_n^2 + \beta_n^2}}{n^k} = \frac{\varepsilon_n}{n^k}.$$

Аналогично,

$$|b_n| \leqslant \frac{\varepsilon_n}{n^k}, \quad k=1, 2, \ldots.$$

Подобным же образом эта оценка получается и в случае (55.55). □

Теорема 14. *Пусть функция* f *имеет на отрезке* $[-\pi, \pi]$ *непрерывные производные до порядка* $k-1$ *включительно и кусочно непрерывную производную порядка* k $(k \geqslant 1)$, *причем* $f^{(j)}(-\pi) = f^{(j)}(\pi)$, $j=0, 1, \ldots, k-1$. *Тогда ряд Фурье функции* f *равномерно и абсолютно на всем отрезке* $[-\pi, \pi]$ *сходится к самой функции* f *и*

$$|f(x) - S_n(x; f)| \leqslant \frac{\eta_n}{n^{k-\frac{1}{2}}},$$

где $\lim\limits_{n\to\infty} \eta_n = 0$ ($\{\eta_n\}$ — *числовая последовательность*), *а* $S_n(x; f)$ — *сумма Фурье порядка* n *функции* f.

Таким образом, можно сказать, что на отрезке $[-\pi, \pi]$ равномерно выполняется оценка

$$f(x) - S_n(x;\ f) = o\left(n^{-k+\frac{1}{2}}\right).$$

Предварительно заметим, что если $\{u_n\}$ и $\{v_n\}$ — последовательности неотрицательных чисел, таких, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n^2 < +\infty \quad \text{и} \quad \sum_{n=1}^{\infty} v_n^2 < +\infty,$$

то

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n v_n \leqslant \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} u_n^2}\sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} v_n^2}. \tag{55.57}$$

Действительно, это неравенство сразу получается предельным переходом из неравенства Коши — Шварца

$$\sum_{n=1}^{N} u_n v_n \leqslant \sqrt{\sum_{n=1}^{N} u_n^2}\sqrt{\sum_{n=1}^{N} v_n^2} \text{ при } N \to \infty \text{ (см. п. 18.1 и 35.8*)}$$

(отметим, что неравенство (55.57) является частным случаем неравенства (35.33) из п. 35.8* при $p = q = 2$).

Доказательство теоремы 14. Пусть

$$f(x) \sim \frac{a}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} a_m \cos mx + b_m \sin mx, \tag{55.58}$$

$$S_n(x;\ f) = \frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^{n} a_m \cos mx + b_m \sin mx.$$

По лемме,

$$|a_m| \leqslant \frac{\varepsilon_m}{m^k}, \quad |b_m| \leqslant \frac{\varepsilon_m}{m^k}, \tag{55.59}$$

где ε_m таковы, что ряд

$$\sum_{m=1}^{\infty} \varepsilon_m^2 \tag{55.60}$$

сходится.

Применяя неравенства (55.57) и (55.59), оценим остаток $r_n(x)$ ряда (55.58):

$$|r_n(x)| = \left|\sum_{m=n+1}^{\infty} a_m \cos mx + b_m \sin mx\right| \leqslant \sum_{m=n+1}^{\infty} |a_m| + |b_m| \leqslant$$

$$\leqslant 2 \sum_{m=n+1}^{\infty} \frac{\varepsilon_m}{m^k} \leqslant 2\sqrt{\sum_{m=n+1}^{\infty} \varepsilon_m^2}\sqrt{\sum_{m=n+1}^{\infty} \frac{1}{m^{2k}}}. \tag{55.61}$$

Положим

$$\varkappa_n = \sum_{m=n+1}^{\infty} \varepsilon_m^2.$$

В силу сходимости ряда (55.60) имеем

$$\lim_{n \to \infty} \varkappa_n = 0. \tag{55.62}$$

Далее, заметим, что на отрезке $[m-1,\ m]$ выполняется неравенство $\frac{1}{m^{2k}} \leqslant \frac{1}{x^{2k}}$ (рис. 224) и, следовательно, $\frac{1}{m^{2k}} \leqslant \int\limits_{m-1}^{m} \frac{dx}{x^{2k}}$. Поэтому

$$\sum_{m=n+1}^{\infty} \frac{1}{m^{2k}} \leqslant \sum_{m=n+1}^{\infty} \int\limits_{m-1}^{m} \frac{dx}{x^{2k}} \leqslant \int\limits_{n}^{+\infty} \frac{dx}{x^{2k}} = \frac{1}{(2k-1)\, n^{2k-1}}.$$

Таким образом, из (55.61) вытекает оценка

$$|r_n(x)| \leqslant 2 \sqrt{\frac{\varkappa_n}{2k-1}} \frac{1}{\sqrt{n^{2k-1}}}. \tag{55.63}$$

Положим, наконец, $\eta_n = \frac{2}{\sqrt{2k-1}} \sqrt{\varkappa_n}$; в силу (55.62) $\lim\limits_{n \to \infty} \eta_n = 0$. Поэтому из неравенства (55.63) получаем

$$|r_n(x)| \leqslant \frac{\eta_n}{n^{k-\frac{1}{2}}} = o\left(\frac{1}{n^{k-\frac{1}{2}}}\right), \quad n = 1,\ 2,\ \ldots,$$

при этом бесконечно малая η_n не зависит от точки x.

Согласно следствию 4 из теоремы 4 п. 55.4 ряд (55.58) сходится к функции $f(x)$, следовательно, $r_n(x) = f(x) - S_n(x, f)$ и, таким образом, равномерная сходимость ряда Фурье с указанной оценкой доказана.

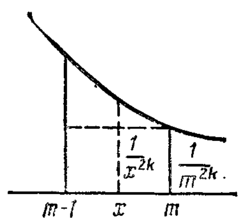


Рис. 224

Его абсолютная сходимость также доказана, так как мы получили оценку (см. (55.61))

$$\sum_{m=n+1}^{\infty} |a_m| + |b_m| \leqslant \frac{\eta_n}{n^{k-\frac{1}{2}}},$$

из которой следует, что ряд Фурье функции f не только абсолютно сходится, но и что ряд, составленный из абсолютных величин его членов и даже, более того, ряд

$$\sum_{m=1}^{\infty} |a_m| + |b_m|$$

сходится с той же «скоростью» $\frac{\eta_n}{n^{k-\frac{1}{2}}}$. $\square$

Теорема 14 показывает, что чем глаже функция f, т. е. чем больше она имеет производных, тем быстрее сходится к ней ее ряд Фурье. При этом неравенство (53.63) дает возможность оценивать погрешность, получающуюся при замене ряда Фурье его n-й частичной суммой.

Из этой теоремы следует, в частности при $k=1$, что ряд Фурье всякой периодической периода 2π непрерывной и кусочно-непрерывно дифференцируемой функции (см. п. 30.2) равномерно на всем периоде сходится к самой функции.

Упражнения. 11. Будет ли ряд Фурье функции $f(x)=|x|$, $-\pi\leqslant x\leqslant\pi$, сходиться равномерно? Будет ли равномерно сходиться ряд, полученный почленным дифференцированием ряда Фурье этой функции?

12. Показать, что ряд Фурье непрерывной периодической кусочно-линейной функции (определение кусочно-линейной функции см. в упражнении 6 в п. 19.6) сходится к ней равномерно.

13. Используя результат предыдущего упражнения и результат упражнения 6 из п. 19.5, доказать теорему 7 из п. 55.7 о равномерной аппроксимации непрерывных периодических функций тригонометрическими полиномами.

55.11. ПОЧЛЕННОЕ ИНТЕГРИРОВАНИЕ РЯДОВ ФУРЬЕ

В этом пункте покажем, что ряды Фурье можно почленно интегрировать.

Теорема 15. *Пусть f — непрерывная на отрезке* $[-\pi, \pi]$ *функция и*

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos nx+b_n\sin nx \tag{55.64}$$

— ее ряд Фурье. Тогда

$$\int_0^t f(x)\,dx=\int_0^t \frac{a_0\,dx}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^t (a_n\cos nx+b_n\sin nx)\,dx=$$
$$=\frac{a_0t}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n}\sin nt+\frac{b_n}{n}(1-\cos nt), \tag{55.65}$$

и ряд, стоящий справа, сходится равномерно.

Отметим, что утверждение о сходимости (и даже равномерной) ряда (55.65) имеет место без каких-либо предположений о сходимости исходного ряда (55.64).

Доказательство. Рассмотрим функцию

$$F(t)=\int_0^t\left[f(x)-\frac{a_0}{2}\right]dx. \tag{55.66}$$

Она непрерывна на отрезке $[-\pi, \pi]$, имеет на этом отрезке непрерывную производную $F'(t)=f(t)-\frac{a_0}{2}$ и

$$F(\pi)-F(-\pi)=\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx-\pi a_0=0.$$

Поэтому в силу теоремы 14 ее ряд Фурье сходится к ней и притом равномерно. Обозначим ее коэффициенты Фурье через A_0, A_n, B_n, $n=1, 2, \ldots$. Тогда в силу сказанного

$$F(t)=\frac{A_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos nt+B_n \sin nt. \qquad (55.67)$$

Найдем коэффициенты этого ряда. Интегрируя по частям, получим

$$A_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F(t)\cos nt\,dt=\frac{1}{\pi}F(t)\frac{\sin nt}{n}\Big|_{-\pi}^{\pi}-$$
$$-\frac{1}{n\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left[f(t)-\frac{a_0}{2}\right]\sin nt\,dt=-\frac{b_n}{n}, \quad n=1, 2 \ldots.$$

Аналогично, $B_n=\frac{a_n}{n}$, $n=1, 2, \ldots$.

Чтобы найти A_0, положим в (55.67) $t=0$. Тогда, заметив, что $F(0)=0$, получим

$$\frac{A_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty} A_n=0, \text{ откуда } \frac{A_0}{2}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{b_n}{n}.$$

Итак,

$$F(t)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n}\sin nt+\frac{b_n}{n}(1-\cos nt).$$

Отсюда и из (55.66) и следует формула (55.65), равномерная же сходимость ряда (55.65) следует из равномерной сходимости ряда (55.67). □

Задача 36. Доказать, что сходящийся тригонометрический ряд $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\sin nx}{\ln n}$ не является рядом Фурье никакой абсолютно интегрируемой функции.

Отметим, что если $\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx=0$ и, следовательно, $a_0=0$, то в результате почленного интегрирования ряда Фурье функции f снова получается ряд Фурье некоторой функции $\tilde{f}$, а именно, как следует из доказанного,

$$F(x)=\int_0^x f(t)\,dt.$$

Поскольку для любой первообразной Φ для непрерывной на отрезке $[-\pi, \pi]$ функции f справедлива формула Ньютона — Лейбница

$$\Phi(\pi)-\Phi(-\pi)=\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx,$$

то условие $\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx=0$ равносильно тому, что все первообразные функции f принимают на концах отрезка $[-\pi, \pi]$ одинаковые значения.

55.12. РЯДЫ ФУРЬЕ В СЛУЧАЕ ПРОИЗВОЛЬНОГО ИНТЕРВАЛА. КОМПЛЕКСНАЯ ЗАПИСЬ РЯДОВ ФУРЬЕ

Теория тригонометрических рядов Фурье 2π-периодических функций легко переносится и на случай периодических функций с любым периодом $2l$. Для этого достаточно отрезок $[-l, l]$ отобразить на $[-\pi, \pi]$ с помощью линейного отображения:

$$y=\frac{\pi}{l}x, \quad -l\leqslant x\leqslant l, \quad -\pi\leqslant y\leqslant \pi,$$

тогда вопрос сведется к уже рассмотренному случаю. *Рядом Фурье* функции f с периодом $2l$ по исходной переменной x называется ряд

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty} c_n\cos\frac{n\pi x}{l}+b_n\sin\frac{n\pi x}{l},$$

где

$$a_0=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(t)\,dt, \quad a_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(t)\cos\frac{n\pi t}{l}\,dt,$$

$$b_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(t)\sin\frac{n\pi t}{l}\,dt, \quad n=1, 2, \ldots.$$

В частности, если функция f четная, то

$$f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos\frac{n\pi x}{l},$$

где

$$a_n=\frac{2}{l}\int_0^l f(t)\cos\frac{n\pi t}{l}\,dt, \quad n=0, 1, 2, \ldots,$$

а если f — нечетная, то

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi x}{l},$$

где

$$b_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(t) \sin \frac{n\pi t}{l}\, dt, \quad n = 1, 2, \ldots.$$

В заключение отметим еще так называемую *комплексную запись* рядов Фурье, часто используемую в математике и ее приложениях. Пусть

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx. \tag{55.68}$$

Как известно (см. п. 37.6),

$$\cos nx = \frac{1}{2}(e^{nxi} + e^{-nxi}), \tag{55.69}$$

$$\sin nx = \frac{1}{2i}(e^{nxi} - e^{-nxi}) = \frac{i}{2}(e^{-nxi} - e^{nxi}). \tag{55.70}$$

Подставив (55.69) и (55.70) в (55.68), получим

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2}(a_n - b_n i)\, e^{nxi} + \frac{1}{2}(a_n + b_n i)\, e^{-nxi}.$$

Полагая

$$c_0 = \frac{a_0}{2}, \quad c_n = \frac{1}{2}(a_n - b_n i), \quad c_{-n} = \frac{1}{2}(a_n + b_n i),$$

имеем

$$f(x) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}, \tag{55.71}$$

где, очевидно, $c_{-n} = \bar{c}_n$, $n = 1, 2, \ldots$. Вспомнив, что $\cos\alpha \pm \pm i \sin\alpha = e^{\pm i\alpha}$ (см. п. 37.6), будем иметь

$$c_n = \frac{1}{2}(a_n - b_n i) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)(\cos nx - i \sin nx)\, dx =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, e^{-inx}\, dx, \text{*)}$$

$$c_{-n} = \frac{1}{2}(a_n + b_n i) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, e^{inx}\, dx, \quad n = 1, 2, \ldots.$$

---

*) Определение интеграла от комплекснозначной функции действительного аргумента см. в п. 54.6.

или, объединив обе формулы и добавив случай $n=0$,

$$c_n=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,e^{-inx}\,dx, \quad n=0,\ \pm 1,\ \pm 2, \ldots. \tag{55.72}$$

Подставив (55.72) в (55.71), получим

$$f(x) \sim \frac{1}{2\pi}\sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{inx}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,e^{-int}\,dt. \tag{55.73}$$

Итак, мы записали ряд Фурье в комплексной форме и нашли соответствующие выражения для его коэффициентов.

Требует разъяснения лишь понятие сходимости ряда вида (55.73).

Частичной суммой порядка n ряда

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} z_n \tag{55.74}$$

называется сумма $S_n=\sum\limits_{k=-n}^{n} z_k$. Ряд (55.74) называется сходящимся, если существует $S=\lim\limits_{n\to\infty} S_n$, при этом S называется суммой ряда и пишется

$$S=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} z_n.$$

§ 56. ИНТЕГРАЛ ФУРЬЕ И ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ФУРЬЕ

56.1. ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ В ВИДЕ ИНТЕГРАЛА ФУРЬЕ

Пусть функция f абсолютно интегрируема на всей действительной оси. Напишем для нее интеграл, соответствующий в определенном смысле ряду Фурье, в котором суммирование по индексу n заменено интегрированием по некоторому параметру:

$$\int_{0}^{+\infty} [a(y)\cos xy + b(y)\sin xy]\,dy, \tag{56.1}$$

где

$$a(y)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cos yt\,dt, \tag{56.2}$$

$$b(y)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\sin yt\,dt. \tag{56.3}$$

Формулы (56.2) и (56.3) напоминают формулы для коэффициентов Фурье.

Определение 1. *Интеграл* (56.1) *называется интегралом Фурье* функции f.

Подставляя (56.2) и (56.3) в интеграл (56.1), преобразуем его следующим образом:

$$\int_0^{+\infty} [a(y)\cos xy + b(y)\sin xy]\,dy =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty} dy \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)(\cos ty\cos xy + \sin ty\sin xy)\,dt =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty} dy \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cos y(x-t)\,dt. \tag{56.4}$$

Подобно тому, как сумма ряда Фурье функции при определенных условиях равна самой функции, интеграл Фурье также представляет исходную функцию.

Теорема 1. *Пусть*

1) *функция f кусочно-непрерывна на каждом конечном отрезке и абсолютно интегрируема на всей действительной прямой;*

2) *в точке x существуют производная справа $f'_+(x)$ и производная слева $f'_-(x)$. Тогда для указанной точки x справедлива формула*

$$\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2} = \frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty} dy \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cos y(x-t)\,dt. \tag{56.5}$$

Доказательство. Рассмотрим интеграл

$$S(\eta) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\eta} dy \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cos y(x-t)\,dt, \tag{56.6}$$

где $\eta > 0$, а x — фиксированная точка, в которой существуют односторонние производные $f'_+(x)$ и $f'_-(x)$.

Очевидно, что интеграл Фурье

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty} dy \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cos y(x-t)\,dt \tag{56.7}$$

является пределом функции (56.6) при $\eta \to +\infty$, т. е. $S(\eta)$ является в этом смысле аналогом частичных сумм рядов Фурье.

Для каждого числа $\xi > 0$, согласно теореме об интегрировании интегралов, зависящих от параметра (см. п. 53.1), имеем

$$\int_0^{\eta} dy \int_{-\xi}^{\xi} f(t)\cos y(x-t)\,dt = \int_{-\xi}^{\xi} f(t)\,dt \int_0^{\eta} \cos y(x-t)\,dy = \\ = \int_{-\xi}^{\xi} f(t)\,\frac{\sin\eta(x-t)}{x-t}\,dt. \qquad (56.8)$$

Действительно, в силу кусочной непрерывности функции $f(t)$ прямоугольник $-\xi \leqslant t \leqslant \xi$, $0 \leqslant y \leqslant \eta$, можно разбить прямыми, параллельными оси Oy, на конечное число прямоугольников, на каждом из которых функция $f(t)\cos y(x-t)$ будет уже непрерывной, как функция двух переменных, вплоть до границы (если на границе указанных прямоугольников в нужном случае значениями функции f считать ее односторонние пределы, т. е. $f(t+0)$ или $f(t-0)$). Применяя теорему 3 из п. 53.1 к каждому прямоугольнику и суммируя полученные результаты, мы и получим формулу (56.8).

Из очевидного неравенства

$$|f(t)\cos y(x-t)| \leqslant |f(t)|$$

и сходимости интеграла $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|\,dt$ следует равномерная сходимость на отрезке $[0, \eta]$ относительно параметра y интеграла

$$F(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cos y(x-t)\,dt, \qquad (56.9)$$

т. е. функция

$$F(y, \xi) = \int_{-\xi}^{\xi} f(t)\cos y(x-t)\,dt$$

стремится к пределу (56.9) при $\xi \to +\infty$ равномерно на отрезке $[0, \eta]$.

Далее, функция $F(y, \xi)$ непрерывна по y. Действительно, функция f ограничена на отрезке $[-\xi, \xi]$: $|f(t)| \leqslant M$, $-\xi \leqslant t \leqslant \xi$. Обозначим через $\omega(\delta)$ модуль непрерывности функции $\cos y(x-t)$, $0 \leqslant y \leqslant \eta$, $-\xi \leqslant t \leqslant \xi$. Тогда $\lim\limits_{\delta \to 0} \omega(\delta) = 0$, поэтому

$$|F(y+\Delta y, \xi) - F(y, \xi)| \leqslant \\ \leqslant \int_{-\xi}^{\xi} |f(t)|\,|\cos(y+\Delta y)(x-t) - \cos y(x-t)|\,dt \leqslant 2M\xi\omega(\Delta y) \to 0$$

при $\Delta y \to 0$.

В силу теоремы 2 п. 53.1 в левой части равенства (56.8) можно перейти к пределу под знаком интеграла при $\xi \to +\infty$.

В результате получим

$$S(\eta)=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\frac{\sin\eta(x-t)}{x-t}\,dt.$$

Этот интеграл конечен, ибо (см. (56.6) и (56.9)) он равен $\int\limits_0^\eta F(y)\,dy$, где функция $F(y)$ непрерывна как предел равномерно сходящегося при $\xi\to+\infty$ семейства непрерывных по y функций $F(y,\xi)$.

Интеграл $S(\eta)$ является аналогом интеграла Дирихле для рядов Фурье. Положив $u=t-x$ (ср. (55.17)), получим

$$S(\eta)=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(u+x)\,\frac{\sin\eta u}{u}\,du.$$

Представив получившийся интеграл в виде суммы двух:

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}=\int\limits_{-\infty}^{0}+\int\limits_{0}^{+\infty}$$

и выполнив в первом из них замену $u=-t$, получим

$$S(\eta)=\frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{+\infty}[f(x+t)+f(x-t)]\,\frac{\sin\eta t}{t}\,dt.$$

Вспоминая (см. п. 54.4), что при $\eta>0$

$$\int\limits_{0}^{+\infty}\frac{\sin\eta t}{t}\,dt=\frac{\pi}{2},$$

получим

$$S(\eta)-\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}=\frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{+\infty}[f(x+t)+f(x-t)]\,\frac{\sin\eta t}{t}\,dt-$$

$$-[f(x+0)+f(x-0)]\,\frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{+\infty}\frac{\sin\eta t}{t}\,dt=$$

$$=\frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{+\infty}\frac{f(x+t)-f(x+0)}{t}\sin\eta t\,dt+$$

$$+\frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{+\infty}\frac{f(x-t)-f(x-0)}{t}\sin\eta t\,dt. \qquad (56.10)$$

Рассмотрим, например, первый интеграл, стоящий в правой части этого равенства. Разобьем его на два интеграла:

$$\int_0^{+\infty} = \int_0^1 + \int_1^{\infty}.$$

Поскольку

$$\lim_{t \to +0} \frac{f(x+t)-f(x+0)}{t} = f'_+(x),$$

то $\frac{f(x+t)-f(x+0)}{t}$ является кусочно-непрерывной функцией переменной t на отрезке $[0, 1]$, поэтому в силу теоремы 2 из п. 55.2

$$\lim_{\eta \to +\infty} \int_0^1 \frac{f(x+t)-f(x+0)}{t} \sin \eta t \, dt = 0. \tag{56.11}$$

Функция $\frac{f(x+t)}{t}$ также кусочно-непрерывна на любом отрезке полуоси $t \geqslant 1$ и так как

$$\left|\frac{f(x+t)}{t}\right| \leqslant |f(x+t)|,$$

то

$$\int_1^{+\infty} \left|\frac{f(x+t)}{t}\right| dt \leqslant \int_1^{+\infty} |f(x+t)| \, dt = \int_{x+1}^{+\infty} |f(s)| \, ds \leqslant$$

$$\leqslant \int_{-\infty}^{+\infty} |f(s)| \, ds < +\infty,$$

т. е. $\frac{f(x+t)}{t}$ абсолютно интегрируема на этой полуоси и, следовательно, в силу той же теоремы

$$\lim_{\eta \to +\infty} \int_1^{+\infty} \frac{f(x+t)}{t} \sin \eta t \, dt = 0. \tag{56.12}$$

Наконец, из сходимости интеграла $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dt$ (см. п. 33.6), выполняя замену переменного $u = \eta t$, получаем

$$\lim_{\eta \to +\infty} \int_1^{+\infty} \frac{f(x+0)}{t} \sin \eta t \, dt = f(x+0) \lim_{\eta \to +\infty} \int_{\eta}^{+\infty} \frac{\sin u}{u} du = 0. \tag{56.13}$$

Из (56.11), (56.12) и (56.13) следует, что

$$\lim_{\eta \to +\infty} \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{f(x+t)-f(x+0)}{t} \sin \eta t \, dt = 0.$$

Аналогично доказывается, что

$$\lim_{\eta\to+\infty}\frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{f(x-t)-f(x-0)}{t}\sin\eta t\,dt=0.$$

Отсюда в силу (56.10) получаем

$$\lim_{\eta\to+\infty}S(\eta)=\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}.$$

Поскольку предел, стоящий в левой части, равен интегралу Фурье (56.7), то равенство (56.5) доказано. □

Требования, накладываемые на функцию в этой теореме, можно ослабить, потребовав, например, чтобы функция была абсолютно интегрируемой на всей числовой оси и удовлетворяла в каждой точке обобщенному условию Гёльдера. Мы не стали этого делать ради некоторого упрощения доказательства (ср. с доказательством теоремы 4 и ее следствий в п. 55.4).

Упражнение 1. Доказать, что если функция f в дополнение к наложенным на нее в теореме 1 ограничениям является четной или нечетной, то справедливы формулы: для четной функции

$$\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}=\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\cos yx\,dy\int_0^{+\infty}f(t)\cos yt\,dt,$$

для нечетной

$$\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}=\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\sin yx\,dy\int_0^{+\infty}f(t)\sin yt\,dt.$$

56.2. РАЗЛИЧНЫЕ ВИДЫ ЗАПИСИ ФОРМУЛЫ ФУРЬЕ

В дальнейшем для простоты записи будем считать, что функция f абсолютно интегрируема на всей числовой оси $\boldsymbol{R}$ и во всех ее точках непрерывна и имеет односторонние производные. В этом случае для всех $x\in\boldsymbol{R}$ согласно теореме 1 справедлива формула Фурье

$$f(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty}dy\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\cos y(x-t)\,dt,$$

и так как подынтегральная функция четная относительно переменной y, то

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}dy\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\cos y(x-t)\,dt. \qquad (56.14)$$

В силу очевидного неравенства

$$|f(t)\sin y(x-t)|\leqslant|f(t)|$$

при ограничениях, наложенных на функцию f, существует также интеграл

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \sin y(x-t)\, dt,$$

причем в силу признака Вейерштрасса (см. п. 54.1) он равномерно сходится на всей числовой оси переменного y и, следовательно, является непрерывной функцией от y. Поэтому для любого числа η существует интеграл

$$\int_{-\eta}^{\eta} dy \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \sin y(x-t)\, dt, \tag{56.15}$$

причем в силу нечетности подынтегральной функции относительно переменной y этот интеграл равен нулю. Однако при сделанных предположениях относительно функции f нельзя гарантировать существование несобственного интеграла

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dy \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \sin y(x-t)\, dt. \tag{56.16}$$

Чтобы получить нужные формулы, нам придется ввести еще одно обобщение понятия интеграла.

56.3. ГЛАВНОЕ ЗНАЧЕНИЕ ИНТЕГРАЛА

Введем следующее определение.

Определение 2. *Пусть функция φ интегрируема на любом конечном отрезке. Если существует конечный предел*

$$\lim_{\eta \to +\infty} \int_{-\eta}^{\eta} \varphi(x)\, dx, \qquad \eta > 0,$$

то он называется главным значением интеграла $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)\, dx$ *и обозначается буквами v. p.* *)

$$v.\ p. \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)\, dx \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{\eta \to +\infty} \int_{-\eta}^{\eta} \varphi(x)\, dx. \tag{56.17}$$

Подчеркнем, что отличие этого определения от определения несобственного интеграла $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)\, dx$ в смысле определения п. 33.1 состоит в том, что там для функции φ, интегрируемой на любом

*) Главное значение — по-французски valeur principale.

конечном отрезке, интеграл $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)\,dx$ определялся как предел интегралов $\int\limits_{\xi}^{\eta} \varphi(x)\,dx$ при независимом стремлении ξ к $-\infty$ и η к $+\infty$. Здесь же требуется существование лишь предела указанных интегралов $\int\limits_{\xi}^{\eta} \varphi(x)\,dx$ для частного случая, когда $\xi=-\eta$ и $\eta \to +\infty$.

Подобным же образом определяется и главное значение несобственного интеграла в точке: пусть $a<c<b$ и функция φ при любом $\varepsilon>0$ интегрируема, по Риману, на отрезках $[a, c-\varepsilon]$ и $[c+\varepsilon, b]$ (естественно, предполагается также, что $a<c-\varepsilon$ и $c+\varepsilon<b$); тогда главное значение интеграла $\int\limits_{a}^{b} \varphi(x)\,dx$ в точке c определяется формулой

$$v.\ p. \int\limits_{a}^{b} \varphi(x)\,dx = \lim_{\varepsilon \to 0} \left[\int\limits_{a}^{c-\varepsilon} \varphi(x)\,dx + \int\limits_{c+\varepsilon}^{b} \varphi(x)\,dx \right].$$

Иногда, там, где это не может привести к недоразумениям, интеграл в смысле главного значения обозначается просто символом интеграла без букв $v.\ p.$

Если для некоторой функции существует несобственный интеграл, то у этой функции существует и главное значение интеграла и оно совпадает с ее несобственным интегралом. Обратное неверно: у функции может существовать (и, следовательно, быть конечным) главное значение интеграла, а несобственный интеграл быть расходящимся.

Например, интегралы $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} x\,dx$ и $\int\limits_{-1}^{1} \frac{dx}{x}$ не существуют как несобственные, однако существуют в смысле главного значения, которое в обоих случаях равно нулю.

56.4. КОМПЛЕКСНАЯ ЗАПИСЬ ИНТЕГРАЛА ФУРЬЕ

Вернемся к формуле Фурье (56.14) и запишем ее, используя понятие главного значения интеграла, в другом виде. В силу нечетности по y подынтегральной функции в интеграле (56.16) имеем, согласно сформулированному определению главного значения интеграла

$$v.\ p. \int\limits_{-\infty}^{+\infty} dy \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t) \sin y(x-t)\,dt = 0. \tag{56.18}$$

Умножив обе части этого равенства на $\frac{i}{2\pi}$ и сложив с интегралом (56.14), получим

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} dy \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, e^{iy(x-t)}\, dt, \tag{56.19}$$

где внешний интеграл понимается в смысле главного значения. Формула (56.19) и называется *комплексной записью интеграла Фурье*.

56.5. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ФУРЬЕ

Если положить

$$\Phi(y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, e^{-iyt}\, dt,$$

то формула (56.19) примет вид

$$f(x)=v.\ p.\ \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} \Phi(y)\, e^{ixy}\, dy. \tag{56.20}$$

Определение 3. *Функция Φ, которая ставится в соответствие функции f формулой*

$$\Phi(y)=v.\ p.\ \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, e^{-iyt}\, dt, \tag{56.21}$$

называется преобразованием Фурье функции f и обозначается $F[f]$ или $\hat{f}$.

В этом определении $f(t)$, вообще говоря, комплекснозначная функция действительного аргумента. Отметим, что функция $\Phi = F[f]$ может принимать существенно комплексные значения и в том случае, когда функция f принимает только действительные значения.

Преобразование Фурье определено, в частности, для всех абсолютно интегрируемых функций. Употребив, например, для преобразования Фурье функции f обозначение $\hat{f}$, формулу (56.20) можно записать в виде

$$f(x)=v.\ p.\ \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(y)\, e^{ixy}\, dy. \tag{56.20'}$$

Эта формула позволяет восстановить саму функцию f, если известно ее преобразование Фурье $\hat{f}$. Она называется *формулой обращения*.

Определение 4. *Функция Ψ, которая ставится в соответствие функции f формулой*

$$\Psi(y) = v.\ p. \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, e^{iyt}\, dt, \tag{56.22}$$

называется обратным преобразованием Фурье функции f и обозначается $F^{-1}[f]$.

Преобразование Фурье и обратное преобразование Фурье определены на множестве функций, для которых интегралы (56.21) и (56.22) существуют в смысле главного значения. Это множество содержит в себе, в частности, множество всех абсолютно интегрируемых на всей вещественной оси функций, для которых интегралы в формулах (56.21) и (56.22) можно понимать как обычные несобственные интегралы, а не только как интегралы в смысле главного значения. Термин «обратное преобразование Фурье» оправдывается тем, что преобразование F^{-1} обращает преобразование Фурье F. Более точно, справедлива следующая лемма.

Лемма 1. *Если непрерывная абсолютно интегрируемая на всей оси функция f имеет в каждой точке конечные односторонние производные, то*

$$F^{-1}[F[f]] = F[F^{-1}[f]] = f.$$

Доказательство. Первая формула обращения, т. е. формула $F^{-1}[F[f]] = f$, является просто другой записью уже доказанной формулы (56.19).

Покажем справедливость второй формулы обращения. Поскольку косинус — четная функция, то в (56.14) можно переставить местами t и x:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dy \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cos y(t-x)\, dt,$$

в силу же нечетности синуса (ср. (56.18))

$$v.\ p. \int_{-\infty}^{+\infty} dy \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \sin y(t-x)\, dt = 0.$$

Поэтому наряду с формулой (56.19) имеем также

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dy \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, e^{iy(t-x)}\, dt,$$

или

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, e^{ity}\, dt \right] e^{-ixy}\, dy,$$

где внешний интеграл понимается в смысле главного значения. Эта формула может быть переписана в виде

$$F[F^{-1}[f]]=f. \ \square$$

Отметим, что справедливость формул обращения может быть доказана и при более слабых ограничениях на функцию, чем существование у нее в каждой точке односторонних производных.

Лемма 2. *Пусть для функций f_1 и f_2 существует преобразование Фурье (соответственно обратное преобразование Фурье). Тогда, каковы бы ни были числа λ_1 и λ_2 для функции $\lambda_1 f_1+\lambda_2 f_2$ также существует преобразование Фурье (соответственно обратное ему), причем*

$$F[\lambda_1 f_1+\lambda_2 f_2]=\lambda_1 F[f_1]+\lambda_2 F[f_2]$$

(*соответственно* $F^{-1}[\lambda_1 f_1+\lambda_2 f_2]=\lambda_1 F^{-1}[f_1]+\lambda_2 F^{-1}[f_2]$).

Это свойство называется *линейностью преобразования Фурье* (соответственно обратного преобразования Фурье). Оно непосредственно следует из линейности интеграла и из формул (56.21) и (56.22).

Следствие. $F[0]=F^{-1}[0]=0$.

Действительно, например,

$$F[0]=F[0\cdot 0]=0\cdot F[0]=0.$$

Впрочем, это свойство следует, конечно сразу и из формул (56.21) и (56.22).

Лемма 3. *Преобразование Фурье F, так же как и обратное преобразование Фурье F^{-1}, являются взаимно однозначными отображениями множества непрерывных абсолютно интегрируемых на всей вещественной оси функций, имеющих в каждой точке односторонние производные, во множество функций, для которых интегралы* (56.21) *и* (56.22) *существуют в смысле главного значения.*

Доказательство. Достаточно доказать лишь взаимную однозначность отображений F и F^{-1} — остальное уже доказано выше. Докажем, например, взаимную однозначность отображения F. Пусть $F[f_1]=F[f_2]$; тогда

$$F^{-1}[F[f_1]]=F^{-1}[F[f_2]].$$

Отсюда согласно лемме 1, следует, что

$$f_1=f_2. \ \square$$

Преобразование Фурье во всяком случае определено для абсолютно интегрируемых функций. В следующих пунктах будут изучаться свойства этого преобразования. В дальнейшем же будет показано, как преобразование Фурье обобщается на более широкие классы функций, а именно на функции с интегрируемым квадратом (п. 58.7*) и на так называемые обобщенные функции (п. 59.7).

56.6. ИНТЕГРАЛЫ ЛАПЛАСА

Найдем преобразование Фурье $\hat{f}$ четного продолжения функции e^{-ax}, $a>0$, с полупрямой $x\geqslant 0$ на всю числовую прямую, т. е. попросту говоря, преобразование Фурье функции $f(x)=e^{-a|x|}$, $-\infty<x<+\infty$:

$$\hat{f}(y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}e^{-a|x|}e^{-ixy}\,dx=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{0}e^{ax}e^{-ixy}\,dx+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{0}^{+\infty}e^{-ax}e^{-ixy}\,dx=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{0}^{+\infty}e^{-(a-iy)x}\,dx+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{0}^{+\infty}e^{-(a+iy)x}\,dx=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\frac{1}{a-iy}+\frac{1}{a+iy}\right)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{a}{a^2+y^2}.$$

Применение обратного преобразования Фурье к полученной функции дает исходную функцию

$$e^{-ax}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{a}{a^2+y^2}e^{ixy}\,dy,\qquad x\geqslant 0.$$

Вспоминая, что $e^{ixy}=\cos xy+i\sin xy$ и замечая, что в силу нечетности подынтегральной функции $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin xy}{a^2+y^2}dy=0$, получим

$$e^{-ax}=\frac{a}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos xy}{a^2+y^2}\,dy=\frac{2a}{\pi}\int\limits_{0}^{+\infty}\frac{\cos xy}{a^2+y^2}\,dy,\qquad x\geqslant 0.$$

Найдем теперь преобразование Фурье $\hat{f}$ нечетного продолжения функции e^{-ax}, $a>0$, с положительной полуоси $x>0$, т. е. преобразование Фурье функции

$$f(x)=\begin{cases} e^{-ax} & x>0,\\ -e^{ax} & x<0.\end{cases}$$

Имеем

$$\hat{f}(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{0}(-e^{ax})\,e^{-ixy}\,dx+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{0}^{+\infty}e^{-ax}e^{ixy}\,dx=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(-\frac{1}{a-iy}+\frac{1}{a+iy}\right)=-\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{y}{a^2+y^2}\,i.$$

Применив снова формулу обращения преобразования Фурье, получим

$$e^{-ax}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(-\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{y}{a^2+y^2}i\right)e^{ixy}\,dy=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{+\infty}\frac{y\sin xy}{a^2+y^2}\,dy,\qquad x>0.$$

Итак, нам не только удалось найти преобразование Фурье рассматриваемых функций, но и получить сразу из формулы обращения (56.20′) значения двух интегралов:

$$\int_{0}^{+\infty}\frac{\cos xy}{a^2+y^2}\,dy=\frac{\pi}{2a}e^{-ax},\qquad x\geqslant 0,$$

$$\int_{0}^{+\infty}\frac{y\sin xy}{a^2+y^2}\,dy=\frac{\pi}{2}e^{-ax},\qquad x>0.$$

Эти интегралы называются *интегралами Лапласа.*

56.7. СВОЙСТВА ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ФУРЬЕ АБСОЛЮТНО ИНТЕГРИРУЕМЫХ ФУНКЦИЙ

В этом и следующих пунктах будут рассмотрены некоторые свойства преобразования Фурье функции f, которое, как и выше, будет обозначаться через $\hat{f}$ или $F[f]$. При этом будет предполагаться, что функция f принимает, вообще говоря, комплексные значения, а ее аргумент, как всегда, действителен.

Лемма 4. *Если функция f абсолютно интегрируема на всей числовой оси, то ее преобразование Фурье $\hat{f}(y)$ ограничено на всей оси, причем*

$$|\hat{f}(y)|\leqslant\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}|f(x)|\,dx. \tag{56.23}$$

Следствие. *Если последовательность абсолютно интегрируемых функций $f_n(x)$, $n=1, 2, \ldots$, и абсолютно интегрируемая функция $f(x)$ таковы, что*

$$\lim_{n\to\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}|f_n(x)-f(x)|\,dx=0,$$

то последовательность $\{\hat{f}_n(y)\}$ равномерно на всей числовой оси сходится к функции $\hat{f}(y)$.

Доказательство. Неравенство (56.23) следует из формулы (см. (56.21))

$$\hat{f}(y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\,e^{-ixy}\,dy, \tag{56.24}$$

если только вспомнить, что $|e^{-ixy}|=1$. $\square$

Следствие сразу вытекает из неравенства (56.23) и линейности преобразования Фурье, ибо

$$|\hat{f}_n(y)-\hat{f}(y)|=|\widehat{f_n(x)-f}(x)| \underset{(56.23)}{\leqslant} \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}|f_n(x)-f(x)|\,dx. \ \square$$

Лемма 5. *Если функция f абсолютно интегрируема на всей числовой оси, то ее преобразование Фурье $\hat{f}(y)$ непрерывно и*

$$\lim_{y\to\pm\infty}\hat{f}(y)=0. \tag{56.25}$$

Доказательство. Пусть $f(x)=u(x)+iv(x)$, где $u(x)$ и $v(x)$ — действительные абсолютно интегрируемые функции. Поскольку $\widehat{f(x)}=\widehat{u(x)}+i\widehat{v(x)}$, то для доказательства непрерывности функции $\hat{f}(y)$ достаточно доказать непрерывность функций $\widehat{u(x)}$ и $\widehat{v(x)}$. Здесь, как всегда, $u(x)$ и $v(x)$ — действительнозначные функции действительного аргумента, а $\widehat{u(x)}$ и $\widehat{v(x)}$ — вообще говоря, комплекснозначные функции действительного аргумента.

Согласно лемме 2 из п. 55.2, для любой действительной абсолютно интегрируемой на всей оси функции $f(x)$ существует последовательность финитных ступенчатых функций $\varphi_n(x)$, $n=1, 2, \ldots$, таких, что

$$\lim_{n\to\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}|\varphi_n(x)-f(x)|\,dx=0.$$

В силу следствия леммы 4 последовательность $\{\hat{\varphi}_n(y)\}$ сходится равномерно к функции $\hat{f}(y)$. Для того чтобы убедиться в непрерывности функции $\hat{f}(y)$, достаточно доказать, что функции $\hat{\varphi}_n(y)$ непрерывны (см. теорему 8′ в п. 36.4). Покажем это. Каждая финитная ступенчатая функция является линейной комбинацией одноступенчатых (см. п. 55.2), точнее, характеристических функций полуинтервалов вида $[a, b)$. Поэтому в силу линейности преобразования Фурье непрерывность функции $\hat{f}$ будет доказана, если мы покажем, что для характеристической функции любого полуинтервала $[a, b)$ ее преобразование Фурье непрерывно.

Пусть ω — характеристическая функция полуинтервала $[a, b)$, т. е. $\omega(x)=1$, если $a\leqslant x<b$, и $\omega(x)=0$, если $x<a$ или $x\geqslant b$. Тогда в силу (56.21) при $y\neq 0$ имеем

$$\hat{\omega}(y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_a^b e^{-ixy}\,dx=-\frac{1}{iy\sqrt{2\pi}}\int\limits_a^b e^{-ixy}\,d(-ixy)=$$
$$=\frac{i}{y\sqrt{2\pi}}e^{-ixy}\Big|_{x=a}^{x=b}=\frac{i\,(e^{-iby}-e^{-iay})}{y\sqrt{2\pi}}.$$

Если же $y=0$, то в силу той же формулы (56.21)

$$\hat{\omega}(0)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_a^b dx=\frac{b-a}{\sqrt{2\pi}}.$$

Итак,

$$\hat{\omega}(y)=\begin{cases}\dfrac{i\left(e^{-iby}-e^{-iay}\right)}{y\sqrt{2\pi}} & \text{при} \quad y\neq 0,\\ \dfrac{b-a}{\sqrt{2\pi}} & \text{при} \quad y=0.\end{cases}$$

Очевидно, правая часть этого равенства является непрерывной функцией при всех $y\neq 0$. Покажем, что она непрерывна и при $y=0$:

$$\lim_{y\to 0}\frac{i\left(e^{-iyb}-e^{-iya}\right)}{y\sqrt{2\pi}}=\frac{i}{\sqrt{2\pi}}\lim_{y\to 0}\frac{1}{y}\left[(1-iby+o(y))-(1-iay+o(y))\right]=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\lim_{y\to 0}\left[b-a+\frac{o(y)}{y}\right]=\frac{b-a}{\sqrt{2\pi}},$$

т. е. функция $\hat{\omega}(y)$ действительно непрерывна в точке $y=0$.

Таким образом доказана непрерывность на всей числовой оси преобразования Фурье $\hat{f}$ абсолютно интегрируемой на всей числовой оси функции f, принимающей действительные значения. Отсюда, как было сказано, сразу следует и непрерывность преобразования Фурье $\hat{f}$ абсолютно интегрируемой на всей числовой оси функции $f=u+iv$, т. е. принимающей, вообще говоря, и комплексные значения.

Равенство (56.25) следует из теоремы 2, п. 55.2. Действительно, пусть снова сначала функция f абсолютно интегрируема на всей числовой оси и принимает только действительные значения, тогда

$$\hat{f}(y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\cos xy\,dx-i\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\sin xy\,dx\right],$$

где в силу указанной теоремы вещественная и мнимая части, а следовательно, и сама функция $\hat{f}(y)$ стремятся к нулю при $y\to\pm\infty$.

Если, теперь, $f=u+iv$, то по доказанному $\lim\limits_{y\to\pm\infty}\hat{u}(y)=\lim\limits_{y\to\pm\infty}\hat{v}(y)=0$, следовательно, $\lim\limits_{y\to\pm\infty}\hat{f}(y)=0$. $\square$

56.8. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ФУРЬЕ ПРОИЗВОДНЫХ

Теорема 2. *Пусть абсолютно интегрируемая на всей числовой оси функция f имеет n абсолютно интегрируемых и непрерывных на всей оси производных. Тогда*

$$F\left[f^{(k)}\right]=(iy)^k F[f], \qquad k=0,\ 1,\ \ldots,\ n, \tag{56.26}$$

и существует постоянная $M>0$ *такая, что*

$$|F[f]|\leqslant\frac{M}{|y^n|}. \tag{56.27}$$

Доказательство. Пусть сначала функция f принимает только действительные значения. Если f абсолютно интегрируема на всей оси вместе со своей производной f' и эта производная непрерывна, то

$$f(x)=f(0)+\int_0^x f'(t)\,dt.$$

Поскольку интеграл $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}|f'(t)|\,dt$ по условию теоремы сходится, то сходится и интеграл $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}f'(t)\,dt$, поэтому в силу определения сходимости интеграла существуют пределы $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\int\limits_0^x f'(t)\,dt$ и, следовательно, пределы $\lim\limits_{x\to\pm\infty}f(x)$. При этом из сходимости интеграла $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}f(t)\,dt$ следует, что указанные пределы равны нулю: $\lim\limits_{x\to\pm\infty}f(x)=0$. Применив интегрирование по частям к формуле преобразования Фурье, получим

$$F[f']=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}f'(x)\,e^{-ixy}\,dx=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}f(x)\,e^{-ixy}\Big|_{-\infty}^{+\infty}+$$
$$+\frac{iy}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\,e^{-ixy}\,dx=iyF[f].$$

Таким образом, дифференцирование функции приводит к умножению ее преобразования Фурье на множитель iy.

Если теперь $f=u+iv$, где u и v — вещественные функции, и снова f абсолютно интегрируема вместе со своей производной $f'=u'+iv'$ и эта производная непрерывна, то

$$F[f']=F[u'+iv']=F[u']+iF[v']=iyF[u]-yF[v]=$$
$$=iyF[u+iv]=iyF[f].$$

Формула (56.26) при $n=1$ доказана.

Для произвольного n она получается отсюда по индукции.

Функция $F[f^{(n)}]$ ограничена (см. лемму 4), поэтому верхняя грань $M=\sup\limits_{-\infty<y<+\infty}F[f^{(n)}]$ конечна и, следовательно, оценка (56.27) следует из формулы (56.26) при $k=n$. □

Итак, чем больше абсолютно интегрируемых производных имеет функция f, тем быстрее стремится к нулю на бесконечности ее преобразование Фурье.

Заметим, что теорема 2 вместе с ее доказательством остается справедливой и в случае, когда производная n-го порядка рассматриваемой функции является не непрерывной, а имеет конечное число разрывов первого рода (см. п. 5.1) при сохранении остальных предположений. Действительно, в этом случае указанная производная на любом конечном отрезке является кусочно-непрерывной функцией (см. п. 28.3) и потому проводимое в доказательстве интегрирование по частям законно (см. п. 30.2 и п. 33.2).

Упражнение 2. Доказать, что преобразование Фурье $F(y)$ функции $f(x)=\frac{1}{1+|x|^3}$ равно $O\left(\frac{1}{y^3}\right)$ при $y\to\infty$.

56.9. СВЕРТКА И ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ФУРЬЕ

Пусть функции φ и ψ определены на всей действительной оси. В различных вопросах математики часто используется так называемая *свертка функций* φ и ψ, которая обозначается $\varphi*\psi$, или, если x — аргумент свертки, через $(\varphi*\psi)(x)$ и определяется равенством

$$(\varphi*\psi)(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(t)\psi(x-t)\,dt. \tag{56.28}$$

Для простоты в этом пункте будем предполагать, что рассматриваемые функции $\varphi(t)$, $\psi(t)$, $\chi(t)$ принимают только действительные значения. Интеграл (56.28) заведомо существует, если обе функции ограничены и абсолютно интегрируемы*). При этом интеграл (56.28), и более того, интеграл

$$\int_{-\infty}^{+\infty}|\varphi(t)\psi(x-t)|\,dt$$

равномерно сходятся на всей действительной оси. В самом деле в силу ограниченности функции ψ имеем $|\psi|\leqslant M$, где M — постоянная, поэтому для всех x и t

$$|\varphi(t)\psi(x-t)|\leqslant M|\varphi(t)|$$

и сделанное утверждение в силу абсолютной интегрируемости функции φ вытекает из признака Вейерштрасса равномерной сходимости интегралов (см. п. 54.1). Из приведенных рассуждений следует также, что если функции φ и ψ ограничены, абсолютно

*) Существование интеграла (56.28) можно гарантировать и при более общих условиях, однако мы на этом не будем здесь останавливаться.

интегрируемы и непрерывны, то и их свертка f также непрерывна, ограничена и абсолютно интегрируема. Действительно, непрерывность функции f следует из равномерной сходимости интеграла (56.28), а ограниченность — из оценки

$$|(\varphi * \psi)(x)| \leqslant \int_{-\infty}^{+\infty} |\varphi(t)\psi(x-t)|\,dt \leqslant M \int_{-\infty}^{+\infty} |\varphi(t)|\,dt.$$

Докажем абсолютную интегрируемость свертки. Пусть $f=\varphi*\psi$; имеем

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} dx \left|\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t)\psi(x-t)\,dt\right| \leqslant$$

$$\leqslant \int_{-\infty}^{+\infty} dx \int_{-\infty}^{+\infty} |\varphi(t)\psi(x-t)|\,dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |\varphi(t)|\,dt \int_{-\infty}^{+\infty} |\psi(x-t)|\,dx =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} |\varphi(t)|\,dt \int_{-\infty}^{+\infty} |\psi(s)|\,ds. \qquad (56.29)$$

Перестановка порядка интегрирования здесь возможна в силу того (см. теорему 7 п. 54.3), что интеграл $\int_{-\infty}^{+\infty} |\varphi(t)\psi(x-t)|\,dt$ равномерно сходится на всей оси, интеграл $\int_{-\infty}^{+\infty} |\varphi(t)\psi(x-t)|\,dx = |\varphi(t)| \int_{-\infty}^{+\infty} |\psi(x-t)|\,dx$ равномерно сходится на любом конечном отрезке (почему?), а повторный интеграл $\int_{-\infty}^{+\infty} dx \int_{-\infty}^{+\infty} |\varphi(t)\psi(x-t)|\,dt$, как это следует из последнего равенства формулы (56.29), существует.

Таким образом, при сделанных предположениях к функции $f=\varphi*\psi$ можно в свою очередь применять операцию свертки с некоторой непрерывной ограниченной и абсолютно интегрируемой функцией (причем снова получится функция того же класса) или преобразование Фурье.

Операция свертки функций *коммутативна и ассоциативна* в рассматриваемом классе функций. Действительно, выполнив в интеграле (56.28) замену переменного $x-t=s$, получим

$$\varphi*\psi = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t)\psi(x-t)\,dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x-s)\psi(s)\,ds = \psi*\varphi.$$

Далее, производя в ниже написанном интеграле замену переменного $t=y-\xi$, меняя порядок интегрирования и делая замену

$x-y+\xi=\eta$, получим

$$(\varphi*\psi)*\chi=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\chi(y-x)\,dx\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\varphi(t)\psi(x-t)\,dt=$$
$$=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\chi(y-x)\,dx\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\varphi(y-\xi)\psi(x-y+\xi)\,d\xi=$$
$$=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\varphi(y-\xi)\,d\xi\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\psi(x-y+\xi)\chi(y-x)\,dx=$$
$$=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\varphi(y-\xi)\,d\xi\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\psi(\eta)\chi(\xi-\eta)\,d\eta=(\psi*\chi)*\varphi=\varphi*(\psi*\chi).$$

Возможность перестановки порядка интегрирования и в этом случае следует из теоремы 7 п. 54.3. Действительно, исследуем на равномерную сходимость интегралы

$$\chi(y-x)\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\varphi(y-\xi)\psi(x-y+\xi)\,d\xi, \tag{56.30}$$

$$\varphi(y-\xi)\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\psi(x-y+\xi)\chi(y-x)\,dx. \tag{56.31}$$

В силу ограниченности функций ψ и χ имеем $|\psi|\leqslant M$, $|\chi|\leqslant M$, где M — постоянная, и поэтому

$$|\chi(y-x)\varphi(y-\xi)\psi(x-x+\xi)|\leqslant M^2|\varphi(y-\xi)|,$$
$$|\varphi(y-\xi)\psi(x-y+\xi)\chi(y-x)|\leqslant M^2|\chi(y-x)|.$$

Из этих неравенств и абсолютной интегрируемости функций φ и χ следует, согласно признаку Вейерштрасса, что интегралы (56.30) и (56.31) равномерно сходятся соответственно относительно переменных x и ξ (переменная y фиксирована) на любом конечном отрезке (почему?). Наконец, существует повторный интеграл

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}dx\int\limits_{-\infty}^{+\infty}|\chi(y-x)\varphi(y-\xi)\psi(x-y+\xi)|\,d\xi=(|\varphi|*|\psi|)*|\chi|.$$

Таким образом, все условия указанной теоремы 7 из п. 54.3 выполнены.

Следует заметить, что при рассмотрении сверток функций можно существенно ослабить ограничения, накладываемые на свертываемые функции. Однако доказательство свойств сверток в этом случае потребовало бы прежде всего более тонких теорем о перемене порядка интегрирования. Для простоты изложения мы не стали этого делать.

Займемся теперь изучением преобразования Фурье сверток двух функций. Для удобства видоизменим определение свертки $\varphi * \psi$, добавив дополнительный множитель $1/\sqrt{2\pi}$:

$$\varphi * \psi = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t)\psi(x-t)\,dt.$$

Теорема 3. *Пусть функции φ и ψ ограничены, непрерывны и абсолютно интегрируемы на числовой оси. Тогда*

$$F[\varphi * \psi] = F[\varphi]F[\psi].$$

Доказательство. Функции φ и ψ ограничены, непрерывны и абсолютно интегрируемы, поэтому функция $\varphi * \psi$ обладает теми же свойствами, в частности, она абсолютно интегрируема, и для нее можно рассматривать преобразование Фурье

$$F[\varphi * \psi] = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-ixy}dx \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t)\psi(x-t)\,dt.$$

Меняя здесь порядок интегрирования (что возможно здесь в силу теоремы 7 п. 54.3) и производя замену переменного $x = t + s$ получим

$$F[\varphi * \psi] = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t)\,dt \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \psi(x-t)e^{-ixy}dx =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t)e^{-ity}dt \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \psi(s)e^{-isy}ds = F[\varphi]F[\psi],$$

т. е. преобразование Фурье свертки двух функций равно произведению преобразований Фурье этих функций. □

Теорема 3 также может быть доказана при более слабых ограничениях на рассматриваемые функции, но мы не будем на этом останавливаться.

56.10. ПРОИЗВОДНАЯ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ФУРЬЕ ФУНКЦИИ

Теорема 4. *Если функция $f(x)$ непрерывна, а функции $f(x)$, $xf(x)$, ..., $x^n f(x)$ абсолютно интегрируемы на всей числовой оси, то преобразование Фурье функции f является n раз дифференцируемой на всей числовой прямой функцией и*

$$i^k F^{(k)}[f] = F[x^k f], \quad k = 0, 1, \ldots, n.$$

Доказательство. Пусть сначала функция f принимает только действительные значения. Формально дифференцируя по параметру y интеграл

$$F[f]=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,e^{-ixy}\,dx$$

и замечая, что $|xf(x)\,e^{-ixy}|=|xf(x)|$, получим абсолютно и равномерно сходящийся интеграл

$$-i\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)\,e^{-ixy}\,dx,\quad -\infty<y<+\infty.$$

Следовательно (см. п. 54.3, теорема 8), в этом случае преобразование Фурье $F[f]$ функции f является дифференцируемой функцией и

$$iF'[f]=F[xf].$$

Если теперь $f=u+iv$, где u и v — действительные функции, то

$$F'[f]=F'[u+iv]=\{F[u]+iF[v]\}'=F'[u]+iF'[v]=$$
$$=-iF[xu]+F[xv]=-iF[xu+ixv]=-iF[xf].$$

Далее по индукции получаем, что преобразование Фурье $F[f]$ функции f имеет производные до порядка n включительно и $i^kF^{(k)}[f]=F[x^kf]$, $k=0, 1, \ldots, n$. $\square$

Следствие. *Если предположения теоремы выполнены, то все производные $F^{(k)}[f]$, $k=0, 1, \ldots, n$, непрерывны и стремятся к нулю при стремлении их аргумента к бесконечности.*

В силу леммы 5 следствие непосредственно вытекает из того, что производные $F^{(k)}[f]$ являются преобразованиями Фурье абсолютно интегрируемых функций.

Можно показать, что если произведения вида $e^{a|x|^{\alpha}}f(x)$ абсолютно интегрируемы при определенных ограничениях, налагаемых на $a>0$ и $\alpha>0$, то это приводит к еще большей гладкости преобразования Фурье, а именно оказывается, что оно принадлежит к тем или иным классам аналитических функций.

Формула, задающая обратное преобразование Фурье, отличается от формулы, задающей прямое преобразование Фурье (см. (56.21) и (56.22)), лишь тем, что в показателе степени у числа e под интегралом i заменено на $-i$, поэтому для обратного преобразования Фурье справедливы свойства, аналогичные доказанным нами для прямого преобразования Фурье.

Упражнения. 3. Доказать, что преобразование Фурье функции $f(x)=\frac{1}{1+x^4}$ дважды дифференцируемо на всей числовой прямой.

4. Доказать, что преобразование Фурье функции $f(x)=xe^{-|x|}$ бесконечно дифференцируемо на всей числовой прямой.

§ 57. ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ ПРОСТРАНСТВА

57.1. МЕТРИЧЕСКИЕ ПРОСТРАНСТВА

Определение 1. *Множество* $X=\{x, y, z, \ldots\}$ *называется метрическим пространством* X, *если на множестве упорядоченных пар* (x, y) *элементов этого множества определена неотрицательная функция* $\rho(x, y)$, *называемая расстоянием* (*или метрикой*), *такая, что*:

1) $\rho(x, y)=0$, *тогда и только тогда, когда* $x=y$;

2) $\rho(x, y)=\rho(y, x)$, $x\in X$, $y\in X$;

3) $\rho(x, y)\leqslant\rho(x, z)+\rho(z, y)$, $x\in X$, $y\in X$, $z\in X$.

Условия 1, 2 и 3 называются *аксиомами расстояния*.

Элементы метрического пространства называются *точками*.

Примеры. 1. Совокупность всех действительных чисел $\boldsymbol{R}$, если расстояние между действительными числами определить как абсолютную величину их разности: $\rho(x, y)=|x-y|$, $x\in\boldsymbol{R}$, $y\in\boldsymbol{R}$, образует метрическое пространство.

2. Множество комплексных чисел $\boldsymbol{C}$, расстояние между элементами которого задается по формуле $\rho(z, z')=|z-z'|$, $z\in\boldsymbol{C}$, $z'\in\boldsymbol{C}$ также образует метрическое пространство.

3. Евклидово пространство R^n размерности n (см. п. 18.1) является метрическим пространством, если расстояние между его точками $x=(x_1, \ldots, x_n)$ и $y=(y_1, \ldots, y_n)$ определить по формуле (см. (18.1))

$$\rho(x, y)=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i-y_i)^2}.$$

4. Пусть E — некоторое множество. Рассмотрим множество ограниченных на E функций, принимающих действительные (или комплексные) значения. Для двух таких функций φ и ψ положим

$$\rho(\varphi, \psi)=\sup_{t\in E}|\varphi(t)-\psi(t)|. \tag{57.1}$$

Легко проверяется, что функция $\rho(\varphi, \psi)$ является метрикой. Справедливость свойств расстояния 1 и 2 ясна непосредственно. Проверим справедливость свойства 3. Пусть φ, ψ и χ — ограниченные функции, определенные на множестве E. Для любого элемента $t\in E$ имеем

$$|\varphi(t)-\chi(t)|=|[\varphi(t)-\psi(t)]+[\psi(t)-\chi(t)]|\leqslant$$
$$\leqslant|\varphi(t)-\psi(t)|+|\psi(t)-\chi(t)|,$$

поэтому

$$|\varphi(t)-\chi(t)|\leqslant\sup_E|\varphi(t)-\psi(t)|+\sup_E|\psi(t)-\chi(t)|,$$

откуда

$$\sup_E |\varphi(t)-\chi(t)| \leqslant \sup_E |\varphi(t)-\psi(t)| + \sup_E |\psi(t)-\chi(t)|,$$

т. е.

$$\rho(\varphi, \chi) \leqslant \rho(\varphi, \psi) + \rho(\psi, \chi).$$

5. Пусть G — измеримое по Жордану открытое множество n-мерного евклидова пространства R^n. Множество X непрерывных на замыкании $\bar{G}$ множества G функций образует метрическое пространство, если расстояние между функциями $\varphi \in X$ и $\psi \in X$ определить по формуле

$$\rho(\varphi, \psi) = \int |\psi(x) - \varphi(x)| \, dG.$$

Действительно, если $\rho(\varphi, \psi) = 0$, т. е. $\int |\psi(x) - \varphi(x)| \, dG = 0$, то в силу следствия из свойства 9° кратных интегралов (см. п. 44.6) $\varphi(x) = \psi(x)$ для всех $x \in G$ и, следовательно, для всех $x \in \bar{G}$. Свойство 2° расстояния в этом случае очевидно, а свойство 3° легко проверяется: если φ, ψ и χ — непрерывны на $\bar{G}$, то

$$\rho(\varphi, \psi) = \int |\varphi(x) - \chi(x)| \, dG = \int |[\varphi(x) - \psi(x)] - [\psi(x) - \chi(x)]| \, dG \leqslant$$

$$\leqslant \int |\varphi(x) - \psi(x)| \, dG + \int |\psi(x) - \chi(x)| \, dG = \rho(\varphi, \psi) + \rho(\psi, \chi).$$

В случае $n = 1$, $\bar{G} = [a, b]$ введенная метрика для непрерывных на отрезке $[a, b]$ функций имеет вид

$$\rho(\varphi, \psi) = \int_a^b |\varphi(x) - \psi(x)| \, dx. \tag{57.2}$$

Естественным образом аналогичное пространство вводится и для функций, определенных на бесконечном промежутке. Например, в случае $a = -\infty$, $b = +\infty$ для двух непрерывных абсолютно интегрируемых на всей числовой оси функций φ и ψ расстояние определяется по формуле

$$\rho(\varphi, \psi) = \int_{-\infty}^{+\infty} |\varphi(x) - \psi(x)| \, dx. \tag{57.3}$$

Всякое подмножество метрического пространства X в свою очередь является метрическим пространством относительно той же метрики и называется *подпространством пространства* X.

Определение 2. *Два метрических пространства X и X' называются изометричными, если между их точками существует взаимно однозначное соответствие f, сохраняющее расстояние, т. е. такое, что если*

$$x' = f(x), \quad y' = f(y), \quad x \in X, \quad y \in X, \quad x' \in X', \quad y' \in X',$$

то $\rho(x, y) = \rho(x', y')$ (такие соответствия также называются изометричными).

Определение 3. *Пусть X — метрическое пространство; последовательность его точек $\{x_n\}$ называется сходящейся к точке $x \in X$, если $\lim\limits_{n\to\infty} \rho(x, x_n) = 0$, т. е. если для любого числа $\varepsilon > 0$ существует такой номер n_ε, что для всех номеров $n \geqslant n_\varepsilon$ выполняется неравенство $\rho(x, x_n) < \varepsilon$. В этом случае пишется $x = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$ или $x_n \to x$ при $n \to \infty$ и говорится, что точка x является пределом данной последовательности.*

Например, в случае примеров 1 и 2 сходимость в рассматриваемых там метрических пространствах означает обычную сходимость числовых (соответственно действительных или комплексных) последовательностей. В примере 3 сходимостью последовательности является сходимость последовательности точек в n-мерном пространстве, встречавшаяся нам раньше (см. п. 18.1). В метрическом пространстве функций, определенных и ограниченных на некотором множестве, расстояние между которыми определяется формулой (57.1), последовательность функций $\{\varphi_n\}$ сходится к функции φ, если

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{t \in E} |\varphi(t) - \varphi_n(t)| = 0,$$

т. е. если последовательность $\{\varphi_n\}$ равномерно на множестве E сходится к функции φ (см. т. I, п. 36.2).

Наконец, пример 5 дает вид сходимости последовательности функций в смысле некоторой интегральной метрики. В случае $n = 1$ подобная сходимость уже встречалась в п. 55.2 (лемма 2) и в п. 56.7 (следствие леммы 4).

Упражнение 1. Множество E метрического пространства X называется *ограниченным*, если

$$d(E) \overset{\text{def}}{=} \sup_{x \in E,\ y \in E} \rho(x, y) < +\infty;$$

величина $d(E)$ называется *диаметром* множества E. Доказать, что всякая сходящаяся последовательность метрического пространства ограничена.

Определение 4. *Последовательность $\{x_n\}$ точек метрического пространства X называется фундаментальной, если для любого числа $\varepsilon > 0$ существует такой номер n_ε, что для всех номеров $n \geqslant n_\varepsilon$ и $m \geqslant n_\varepsilon$ выполняется неравенство*

$$\rho(x_n, x_m) < \varepsilon.$$

Лемма 1. *Если последовательность $\{x_n\}$ сходится, то она фундаментальная.*

Доказательство. Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$. Тогда для любого числа $\varepsilon > 0$ существует такой номер n_ε, что для всех номеров $n \geqslant n_\varepsilon$ справедливо неравенство

$$\rho(x, x_n) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Следовательно, если $n \geqslant n_\varepsilon$ и $m \geqslant n_\varepsilon$, то

$$\rho(x_n, x_m) \leqslant \rho(x_n, x) + \rho(x, x_m) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon. \ \square$$

Определение 5. *Метрическое пространство называется полным, если всякая фундаментальная последовательность его точек сходится к его же точке.*

Очевидно, что метрическое пространство, изометричное полному пространству, также является полным метрическим пространством.

Примеры. 6. Метрические пространства действительных и комплексных чисел являются примерами полных метрических пространств. Полным является и n-мерное евклидово пространство R^n (см. п. 18.1). Рациональные числа дают пример неполного метрического пространства.

7. Рассмотрим метрическое пространство функций, определенных и ограниченных на множестве E, расстояние между которыми определено формулой (57.1). В этом пространстве последовательность функций φ_n, $n = 1, 2, \ldots$, является фундаментальной, если для любого числа $\varepsilon > 0$ существует такой номер n_ε, что для всех номеров $n \geqslant n_\varepsilon$ и $m \geqslant m_\varepsilon$ выполняется неравенство

$$\rho(\varphi_n, \varphi_m) = \sup_E |\varphi_n(x) - \varphi_m(x)| < \varepsilon,$$

т. е. если последовательность $\{\varphi_n\}$ удовлетворяет критерию Коши равномерной сходимости последовательности на множестве E (см. п. 36.2). В силу этого критерия последовательность $\{\varphi_n\}$ равномерно на множестве E сходится к некоторой функции φ, т. е.

$$\lim_{n\to\infty} \sup_E |\varphi(x) - \varphi_n(x)| = 0. \tag{57.4}$$

Покажем, что эта функция φ также ограничена и, следовательно, принадлежит рассматриваемому пространству. Действительно, в силу (57.4) для любого числа $\varepsilon > 0$, в частности для $\varepsilon = 1$, существует такой номер n_1, что для всех $n \geqslant n_1$ и всех $x \in E$ выполняется неравенство

$$|\varphi(x) - \varphi_n(x)| < 1;$$

поэтому

$$|\varphi(x)| \leqslant |\varphi(x) - \varphi_{n_1}(x)| + |\varphi_{n_1}(x)| < 1 + \sup_E |\varphi_{n_1}(x)|.$$

Так как функция φ_{n_1} ограничена, то ограничена и функция φ. Мы доказали тем самым, что рассматриваемое пространство функций является полным.

Можно показать, что метрическое пространство функций, рассмотренных в примере 5, не является полным.

Для всякого метрического пространства X естественным образом вводится понятие ε-окрестности $U(x, \varepsilon)$ точки $x \in X$, $\varepsilon > 0$:

$$U(x, \varepsilon) = \{y : y \in R, \ \rho(y, x) < \varepsilon\},$$

а затем дословно, так же как для n-мерного пространства R^n (см. т. I, п. 18.2), вводятся понятия точки прикосновения множества, предельной и изолированной точки, граничной и внутренней точки, замыкания $\bar{A}$ множества A, понятие замкнутого и открытого множества.

Справедливы для произвольных метрических пространств и леммы 3, 4, 5 и 6, доказанные в п. 18.2 для открытых и замкнутых множеств n-мерных евклидовых пространств, причем доказательства, приведенные в п. 18.2, сохраняют свою силу и в общем случае.

Определение 6. *Множество A метрического пространства X называется плотным в пространстве X, если замыкание $\bar{A}$ множества A совпадает с пространством $X : \bar{A} = X$.*

Например, множество рациональных чисел плотно во множестве действительных чисел.

Очевидно, что свойство множества быть плотным в пространстве сохраняется при изометрических отображениях этого пространства.

Определение 7. *Полное метрическое пространство X^* называется пополнением метрического пространства X, если в пространстве X^* существует плотное в нем подмножество X', изометричное пространству X.*

Например, множество действительных чисел является пополнением множества рациональных чисел.

Иногда бывает удобно «отождествить» элементы пространств X и X', соответствующие друг другу при изометричном соответствии пространств X и X', и тем самым рассматривать множество X как подмножество его пополнения X^*. Поясним более подробно операцию отождествления элементов двух изометрических пространств X и Y. Пусть X и Y^* — метрические пространства, $Y \subset Y^*$, $f : X \to Y$ — изометричное отображение. Рассмотрим множество $X^* = X \cup (Y^* \setminus Y)$, получающееся из пространства X присоединением к нему множества $Y^* \setminus Y$. Таким образом: $X^* \setminus X = Y^* \setminus Y$. Определим для точек $x \in X^*$ и $y \in X^*$ понятие расстояния $\rho_{X^*}(x, y)$. Для удобства введем отображение $F : X^* \to Y^*$, задаваемое формулой

$$F(x) \overset{\text{def}}{=} \begin{cases} f(x), & \text{если} \quad x \in X, \\ x, & \text{если} \quad x \in X^* \setminus X. \end{cases}$$

Ясно, что F является взаимно однозначным отображением (биекцией) множества X^* на Y^*.

Теперь для любых $x \in X^*$ и $y \in Y^*$ положим

$$\rho_{X^*}(x, y) = \rho(F(x), F(y)).$$

Легко проверить, что определенная таким образом функция $\rho_{X^*}(x, y)$ удовлетворяет трем аксиомам расстояния, и, следовательно, X^* является метрическим пространством, а отображение F изометрично отображает пространство X^* на Y^*, причем при этом отображении множество X переходит в Y. Поэтому, если множество Y было плотным в пространстве Y^*, то множество X будет плотным в пространстве X^*.

Под утверждением «отождествим в пространстве Y^* множество X с изометричным ему пространством Y» и понимается рассмотрение пространства X^* вместо Y^*.

Покажем, что для всякого неполного метрического пространства существует его пополнение, т. е. покажем, что всякое неполное метрическое пространство является плотным подмножеством в некотором полном метрическом пространстве.

Теорема 1. *Для всякого метрического пространства существует его пополнение.*

Доказательство.

I. Конструкция пополнения X^* заданного метрического пространства X.

Две последовательности $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ элементов пространства X назовем *эквивалентными*, если

$$\lim_{n \to \infty} \rho(x_n, y_n) = 0. \tag{57.5}$$

Эквивалентность двух последовательностей $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ обозначается символом $\{x_n\} \sim \{y_n\}$; она обладает следующими свойствами:

1°. Всякая последовательность $\{x_n\}$ эквивалентна сама себе: $\{x_n\} \sim \{x_n\}$.

2°. Если $\{x_n\} \sim \{y_n\}$, то $\{y_n\} \sim \{x_n\}$.

3°. Если $\{x_n\} \sim \{y_n\}$, а $\{y_n\} \sim \{z_n\}$, то $\{x_n\} \sim \{z_n\}$.

Нас будут интересовать только фундаментальные последовательности пространства X. Их множество распадается на непересекающиеся классы эквивалентных между собой последовательностей. Обозначим эти классы через x^*, y^*, z^*, ..., а их совокупность — через X^*. Если фундаментальная последовательность $\{x_n\}$ содержится в классе x^*, то будем, как обычно, это записывать следующим образом: $\{x_n\} \in x^*$.

II. Определение расстояния $\rho^*(x^*, y^*)$ в X^*.

Пусть $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ — две фундаментальные последовательности метрического пространства X. Тогда числовая последовательность $\rho(x_n, y_n)$ также фундаментальна, т. е. удовлетворяет условию Коши (см. п. 3.7). Действительно, для любых номеров n и m

$$\rho(x_n, y_n) \leqslant \rho(x_n, x_m) + \rho(x_m, y_m) + \rho(y_m, y_n)$$

и, следовательно, в силу симметрии индексов n и m

$$|\rho(x_n, y_n)-\rho(x_m, y_m)| \leqslant \rho(x_n, x_m)+\rho(y_n, y_m). \tag{57.6}$$

Из фундаментальности последовательностей $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ следует, что для любого числа $\varepsilon>0$ существует такой номер n_ε, что для всех номеров $n \geqslant n_\varepsilon$ и $m \geqslant n_\varepsilon$ выполняются неравенства

$$\rho(x_n, x_m)<\frac{\varepsilon}{2}, \quad \rho(y_n, y_m)<\frac{\varepsilon}{2}. \tag{57.7}$$

Из (57.6) и (57.7) для $n \geqslant n_\varepsilon$ и $m \geqslant n_\varepsilon$ получаем

$$|\rho(x_n, y_n)-\rho(x_m, y_m)|<\varepsilon.$$

Следовательно, числовая последовательность $\{\rho(x_n, y_n)\}$ является фундаментальной, т. е. удовлетворяет условию Коши и, следовательно, сходится.

Пусть $\{x_n\} \in x^*$, $\{y_n\} \in y^*$. Положим, по определению, $\rho^*(x^*, y^*) \overset{\text{def}}{=} \lim\limits_{n\to\infty} \rho(x_n, y_n)$. В силу доказанного указанный предел существует. Покажем, что так определенная функция $\rho^*(x^*, y^*)$ не зависит от выбора фундаментальных последовательностей $\{x_n\} \in x^*$ и $\{y_n\} \in y^*$ и удовлетворяет аксиомам расстояния.

Пусть $\{x_n\} \in x^*$, $\{x'_n\} \in x^*$, $\{y_n\} \in y^*$, $\{y'_n\} \in y^*$. Тогда

$$\rho(x_n, y_n) \leqslant \rho(x_n, x'_n)+\rho(x'_n, y'_n)+\rho(y_n, y'_n)$$

и

$$|\rho(x_n, y_n)-\rho(x'_n, y'_n)| \leqslant \rho(x_n, x'_n)+\rho(y_n, y'_n).$$

В силу эквивалентности последовательностей $\{x_n\}$, $\{x'_n\}$ и соответственно — $\{y_n\}$, $\{y'_n\}$ получим (см. (57.5)):

$$\lim_{n\to\infty} \rho(x_n, x'_n)=\lim_{n\to\infty} \rho(y_n, y'_n)=0$$

и, следовательно,

$$\lim_{n\to\infty} \rho(x_n, y_n)=\lim_{n\to\infty} \rho(x'_n, y'_n).$$

III. Проверка аксиом расстояния для $\rho^*(x^*, y^*)$.

Пусть $\{x_n\} \in x^*$, $\{y_n\} \in y^*$, $\{z_n\} \in z^*$. Если $\rho^*(x^*, y^*)=0$, то $\lim\limits_{\to\infty} \rho(x_n, y_n)=0$, т. е. последовательности $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ эквивалентны, что означает совпадение элементов x^* и $y^*: x^*=y^*$. Из равенства $\rho(x_n, y_n)=\rho(y_n, x_n)$, перейдя к пределу при $n\to\infty$, получим $\rho^*(x^*, y^*)=\rho^*(y^*, x^*)$, а из неравенства $\rho(x_n, y_n) \leqslant \rho(x_n, z_n)+\rho(z_n, y_n)$ получим

$$\rho^*(x^*, y^*) \leqslant \rho^*(x^*, z^*)+\rho^*(z^*, y^*).$$

Итак, X^* является метрическим пространством.

IV. Построение подпространства пространства X^*, изометричного пространству X.

Пусть $x \in X$. Последовательность $x_n = x$, $n = 1, 2, \ldots$, очевидно, фундаментальная. Поставим в соответствие каждому $x \in X$ точку $x^* \in X^*$ такую, что $\{x\} \in x^*$. Если при указанном соответствии точке x соответствует точка x^*, а точке y — точка y^*, то, очевидно, при $x \neq y$ будем иметь $x^* \neq y^*$, причем $\rho^*(x^*, y^*) = \lim\limits_{n \to \infty} \rho(x, y) = \rho(x, y)$, т. е. указанное соответствие осуществляет взаимно однозначное изометрическое соответствие между пространством X и некоторым подмножеством X' пространства X^*.

Точку x^* пространства X^*, соответствующую при рассматриваемом соответствии точке $x \in X$, мы будем для простоты обозначать также через x, а пространство X' через X. Можно считать, что мы просто отождествили соответствующие точки пространств X и X' (см. замечание после определения 7). В этих обозначениях имеем изометрическое включение

$$X \subset X^*.$$

V. Доказательство плотности X в X^*.

Покажем, что каждая точка x^* пространства X^* является точкой прикосновения множества X. Для этого достаточно показать, что для любой точки $x^* \in X^*$ существует последовательность $x_n \in X$, $n = 1, 2, \ldots$, сходящаяся к x^*.

Пусть $x^* \in X^*$ и $\{x_n\} \in x^*$, $x_n \in X$. Точку пространства X^*, содержащую фундаментальную последовательность, все члены которой равны одной и той же точке x_n, будем обозначать, согласно сделанному выше соглашению, также через x_n. Докажем, что последовательность $\{x_n\}$, $x_n \in X^*$, сходится к точке $x^* \in X^*$. Зафиксируем число $\varepsilon > 0$. Из фундаментальности последовательности $\{x_n\}$ следует, что существует такой номер n_ε, что для всех номеров $n \geqslant n_\varepsilon$ и $m \geqslant n_\varepsilon$ выполняется неравенство

$$\rho(x_m, x_n) < \frac{\varepsilon}{2}. \qquad (57.8)$$

Замечая, что по определению расстояния в X^*

$$\rho^*(x^*, x_n) = \lim_{m \to \infty} \rho(x_m, x_n),$$

из неравенства (57.8) для $n \geqslant n_\varepsilon$ получим

$$\rho^*(x^*, x_n) \leqslant \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon,$$

т. е. $\lim\limits_{n \to \infty} \rho^*(x^*, x_n) = 0$, что означает, что x^* является точкой прикосновения множества X. Итак, $\overline{X} = X^*$.

VI. Доказательство полноты пространства X^*.

Пусть $\{x_n^*\}$ — фундаментальная последовательность точек пространства X^*, $x_n \in X$ и $\rho^*(x_n^*, x_n) < \frac{1}{n}$, $n = 1, 2, \ldots$. Такие точки x_n существуют в силу плотности X в X^*.

Последовательность $\{x_n\}$ фундаментальная. Действительно, замечая, что

$$\rho^*(x_n, x_m) \leqslant \rho^*(x_n, x_n^*) + \rho^*(x_n^*, x_m^*) + \rho^*(x_m^*, x_m) < \\ < \frac{1}{n} + \rho^*(x_n^*, x_m^*) + \frac{1}{m},$$

выберем номер n_ε так, чтобы

$$\rho^*(x_n^*, x_m^*) < \frac{\varepsilon}{3}, \quad \frac{1}{n} < \frac{\varepsilon}{3}, \quad \frac{1}{m} < \frac{\varepsilon}{3}$$

для всех $n \geqslant n_\varepsilon$ и $m \geqslant n_\varepsilon$. Тогда

$$\rho(x_n, x_m) = \rho^*(x_n, x_m) < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon \tag{57.9}$$

для всех $n \geqslant n_\varepsilon$ и $m \geqslant n_\varepsilon$, т. е. последовательность $\{x_n\}$ — фундаментальная.

Обозначим через x^* класс эквивалентных последовательностей, которому принадлежит последовательность $\{x_n\}$. Очевидно,

$$\rho^*(x^*, x_n^*) \leqslant \rho^*(x^*, x_n) + \rho^*(x_n, x_n^*) = \rho^*(x^*, x_n) + \frac{1}{n}.$$

Но из (57.9) при $m \to \infty$ и $n \geqslant n_\varepsilon$ получим

$$\rho^*(x^*, x_n) = \lim_{m \to \infty} \rho(x_m, x_n) \leqslant \varepsilon.$$

Следовательно,

$$\lim_{n \to \infty} \rho^*(x^*, x_n) = 0,$$

а потому и

$$\lim_{n \to \infty} \rho^*(x^*, x_n^*) = 0.$$

Таким образом, мы доказали, что данная фундаментальная последовательность $\{x_n^*\}$ сходится в X^*. Полнота X^* доказана. □

Упражнение 2. Доказать, что с точностью до изометрических пространств пополнение метрического пространства единственно.

Определение 8. *Числовая функция f (действительно- или комплекснозначная), определенная на множестве A метрического пространства X, называется непрерывной в точке $x_0 \in A$ (или, более подробно, непрерывной по множеству A в точке $x_0 \in A$), если для любого числа $\varepsilon > 0$ существует число $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что для всех точек $x \in U(x_0, \delta) \cap A$ выполняется неравенство*

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

Определение 9. *Функция f, определенная на множестве A метрического пространства X, называется непрерывной на множестве $B \subset A$, если она непрерывна по множеству A в каждой точке $x_0 \in B$.*

Упражнение 3. Сформулировать определение непрерывности в точке x_0 функции f, заданной на множестве $A \ni x_0$, с помощью понятия последовательности и доказать эквивалентность этого определения с определением 8.

Дословно, так же, как и в п. 36.4 (см. т. 1), доказывается, что предел равномерно сходящейся на метрическом пространстве последовательности непрерывных функций является непрерывной функцией.

Пример. Рассмотрим метрическое пространство ограниченных и непрерывных на некотором метрическом пространстве X функций f, расстояние между которыми определяется по формуле (57.1). Поскольку фундаментальность последовательности $\{f_n\}$ в смысле метрики (57.1) означает, что последовательность $\{f_n\}$ удовлетворяет условию Коши равномерной сходимости на множестве X, то всякая фундаментальная последовательность непрерывных функций $\{f_n\}$ равномерно сходится к некоторой функции f. Эта функция f, как отмечалось выше, непрерывна и, как было доказано несколько раньше в этом пункте, ограничена на X, т. е. принадлежит рассматриваемому пространству функций.

Таким образом, *пространство ограниченных и непрерывных на метрическом пространстве X функций является полным метрическим пространством.* Оно, очевидно, является подпространством всех ограниченных на X функций с расстоянием, определенным той же формулой (57.1).

В частности, поскольку всякая функция, непрерывная на некотором компакте A, лежащем в n-мерном евклидовом пространстве R^n, ограничена (см. п. 19.4), то пространство функций, непрерывных на компакте A, с расстоянием, определенным по формуле (57.1), является полным.

Определение 10. *Пусть X — метрическое пространство. Функция f, определенная на множестве упорядоченных пар (x, y), где $x \in A$, $y \in B$, $A \subset X$, $B \subset X$, называется непрерывной в точке (x_0, y_0), $x_0 \in A$, $y_0 \in B$, если для любого числа $\varepsilon > 0$ существует число $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что для всех пар (x, y) таких, что $x \in U(x_0, \delta) \cap A$, $y \in U(y_0, \delta) \cap B$, справедливо неравенство $|f(x, y) - f(x_0, y_0)| < \varepsilon$.*

Функция, непрерывная в каждой точке (x, y) некоторого множества пар, называется непрерывной на этом множестве.

Упражнения. 4. Проверить аксиомы расстояния для функции $\rho(\varphi, \psi)$, определенной формулой (57.3) для пространства абсолютно интегрируемых непрерывных на всей числовой оси функций.

5. Привести пример последовательности непрерывных функций, сходящейся на некотором отрезке в смысле расстояния (57.2), но не сходящейся на этом отрезке в смысле точечной сходимости (т. е. в смысле определения 3 п. 36.1).

6. Привести пример последовательности, сходящейся на некотором отрезке в смысле точечной сходимости, но не сходящейся на этом отрезке в смысле расстояния (57.2).

7. Доказать, что пространство непрерывных на отрезке $[a, b]$ функций, расстояние между которыми определяется по формуле (57.2), не является полным.

57.2. ЛИНЕЙНЫЕ ПРОСТРАНСТВА

Определение 11. *Множество $X=\{x, y, z, \ldots\}$ называется действительным линейным пространством (или векторным пространством над полем действительных чисел), если:*

каждой упорядоченной паре (x, y) элементов $x \in X$ и $y \in X$ поставлен в соответствие некоторый элемент пространства X, называемый суммой x и y и обозначаемый $x+y$;

каждому элементу $x \in X$ и каждому действительному числу λ поставлен в соответствие единственный элемент пространства X, называемый произведением λ на x и обозначаемый λx. При этом выполняются следующие группы аксиом:

1. а) $x+y=y+x$ *для любых* $x \in X$ *и* $y \in X$;

б) $x+(y+z)=(x+y)+z$ *для любых* $x \in X$, $y \in X$ *и* $z \in X$;

в) *в X существует элемент, называемый нулевым и обозначаемый 0, такой, что $x+0=x$ для любого $x \in X$;*

г) *для каждого $x \in X$ существует элемент множества X, называемый противоположным элементу x, обозначаемый через $-x$ и такой, что $x+(-x)=0$.*

2. а) $1x=x$ *для любого* $x \in X$;

б) $\lambda(\mu x)=(\lambda\mu)x$ *для любого $x \in X$ и любых действительных чисел λ и μ.*

3. а) $(\lambda+\mu)x=\lambda x+\mu x$ *для любого $x \in X$ и любых действительных чисел λ и μ;*

б) $\lambda(x+y)=\lambda x+\lambda y$ *для любых $x \in X$, $y \in Y$ и любого действительного числа λ.*

Для каждой пары элементов $x \in X$ и $y \in Y$ элемент $x+(-y)$ называется *разностью элементов* x и y и обозначается через $x-y$.

Если в приведенном определении действительного линейного пространства всюду заменить действительные числа комплексными: λ, $\mu \in \boldsymbol{C}$, то получится определение *комплексного линейного пространства.*

Примеры. 1. Множество всех действительных (комплексных) чисел образует действительное (комплексное) линейное пространство.

2. Пусть E — некоторое множество. Совокупность $F(E)$ всех функций $f: E \to \boldsymbol{R}$ (соответственно $f: E \to \boldsymbol{C}$) при естественном определении их сложения и умножения на действительное (комплексное) число:

$$(f_1+f_2)(x) \overset{\text{def}}{=} f_1(x)+f_2(x), \quad (\lambda f)(x) \overset{\text{def}}{=} \lambda(f(x)),$$

$$f_1 \in F(E), \quad f_2 \in F(E), \quad f \in F(E), \quad \lambda \in \boldsymbol{R} \text{ или } \lambda \in \boldsymbol{C}$$

является действительным (комплексным) линейным пространством.

3. Множество всех многочленов от одной переменной с действительными (комплексными) коэффициентами является линейным действительным (комплексным) пространством.

4. Множество всех многочленов степеней, не превышающих натурального n, от одной переменной с действительными (комплексными) коэффициентами является действительным (комплексным) линейным пространством.

5. Пространство всевозможных числовых последовательностей $\{x_n\}$, $x_n \in \boldsymbol{R}$ (или $x_n \in \boldsymbol{C}$), $n \in \boldsymbol{N}$, при естественном определении операций их сложения и умножения на число (см. п. 3.9) также является линейным пространством.

Определение 12. *Множество X', содержащееся в линейном пространстве X (действительном или комплексном) называется подпространством этого пространства, если все линейные комбинации элементов множества X' содержатся в нем.*

Иначе говоря, множество $X' \subset X$ является подпространством пространства X, если для любых двух элементов $x \in X'$, $y \in X'$ и любых чисел $\lambda \in \boldsymbol{R}$, $\mu \in \boldsymbol{R}$ (соответственно, $\lambda \in \boldsymbol{C}$, $\mu \in \boldsymbol{C}$) имеет место включение

$$\lambda x + \mu y \in X'.$$

Очевидно, что подпространство X' линейного пространства X в свою очередь является линейным пространством. Если X — линейное пространство и $x \in X$, то совокупность всех элементов пространства X вида λx, где λ — всевозможные числа, служит примером подпространства пространства X.

Множество функций, действительнозначных и непрерывных на некотором множестве $E \subset R^n$, является подпространством пространства всех действительнозначных функций, определенных на E.

Элементы линейных пространств обычно называются *точками* или *векторами*.

Определение 13. *Конечная система векторов $x_1, \ldots, x_n$ линейного пространства X (действительного или комплексного) называется линейно зависимой, если существуют такие числа $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ (соответственно действительные или комплексные), не все равные нулю, что*

$$\lambda_1 x_1 + \ldots + \lambda_n x_n = 0.$$

В противоположном случае, т. е. когда из указанного равенства следует, что все числа $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ равны нулю, система векторов $x_1, \ldots, x_n$ называется линейно независимой.

Определение 14. *Система векторов x_α, $\alpha \in \mathfrak{A}$ ($\mathfrak{A}$ — некоторое множество индексов) линейного пространства X называется линейно независимой, если любая ее конечная подсистема x_{α_1}, $x_{\alpha_2}, \ldots, x_{\alpha_n}$ линейно независима.*

Упражнения. 8. Доказать, что если система x_α, $\alpha \in \mathfrak{A}$, линейно независимая, то $x_\alpha \neq 0$ для всех $\alpha \in \mathfrak{A}$.

9. Доказать, что, для того чтобы конечная система векторов была линейно зависимой, необходимо и достаточно, чтобы по крайней мере один из них являлся линейной комбинацией остальных.

Определение 15. *Пусть задано множество $\{x_\alpha, \alpha \in \mathfrak{A}\}$ векторов линейного пространства X. Совокупность всевозможных конечных линейных комбинаций элементов этого множества, т. е. совокупность всевозможных векторов вида*

$$\lambda_1 x_{\alpha_1} + \lambda_2 x_{\alpha_2} + \ldots + \lambda_k x_{\alpha_k},$$

где $x_{\alpha_j} \in \{x_\alpha, \alpha \in \mathfrak{A}\}$, а *$\lambda_j$ — числа, $j = 1, 2, \ldots, k$, называется линейной оболочкой множества $\{x_\alpha, \alpha \in \mathfrak{A}\}$.*

Определение 16. *Если в пространстве X (действительном или комплексном) имеется система n линейно независимых векторов, линейной оболочкой которых является пространство X, то оно называется n-мерным и обозначается R^n, а всякая упорядоченная система n линейно независимых векторов, линейной оболочкой которых является пространство R^n, называется базисом пространства.*

Иначе говоря, векторы $e_1, e_2, \ldots, e_n$ являются базисом пространства R^n, если:

1) векторы $e_1, e_2, \ldots, e_n$ линейно независимы;

2) для каждого $x \in R^n$ существуют такие числа $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, что $x = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \ldots + \lambda_n e_n$.

Элементы пространства R^n называются n-мерными векторами (соответственно действительными или комплексными).

Каждое n-мерное пространство называется конечномерным.

Упражнения. 10. Доказать, что в n-мерном пространстве каждая система линейно независимых векторов, линейной оболочкой которых является все пространство, состоит из n векторов.

11. Доказать, что каждая система из n линейно независимых векторов в n-мерном пространстве является его базисом.

Примером n-мерного действительного пространства является n-мерное арифметическое векторное пространство (см. п. 18.4).

Аналогично этому пространству может быть построено комплексное арифметическое n-мерное пространство C^n. Его точками называются упорядоченные системы n комплексных чисел: $x = (x_1, \ldots, x_n)$ $x_j \in \boldsymbol{C}$, $j = 1, 2, \ldots, n$. При этом, если $x \in C^n$, $\lambda \in \boldsymbol{C}$, то

$$\lambda x \overset{\mathrm{def}}{=} (\lambda x_1, \ldots, \lambda x_n),$$

и для $x = (x_1, \ldots, x_n) \in C^n$ и $y = (y_1, \ldots, y_n) \in C^n$

$$x + y \overset{\mathrm{def}}{=} (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n).$$

Базисом в этом пространстве являются векторы $e_i = \{\delta_1^i, \ldots, \delta_n^i\}$, где δ_j^i — так называемый *символ Кронекера*

$$\delta_j^i = \begin{cases} 1, & \text{если } i = j, \\ 0, & \text{если } i \neq j. \end{cases}$$

Очевидно, что $x = (x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$.

Другим примером конечномерного линейного пространства является пространство $\mathscr{P}^n$ многочленов степеней не превышающих натурального n. Оно является $(n+1)$-мерным: его размерность равна числу коэффициентов у рассматриваемых многочленов.

Определение 17. *Отображение f линейного пространства X в линейное пространство Y называется линейным отображением (или, что то же, линейным оператором), если для любых двух элементов $x \in X$, $y \in X$ и любых чисел λ и μ справедливо равенство*

$$f(\lambda x + \mu y) = \lambda f(x) + \mu f(y).$$

Множество линейных операторов $f: X \to Y$, отображающих линейное пространство X в линейное пространство Y обозначается через $\mathscr{L}(X, Y)$. Легко непосредственно проверить, что множество $\mathscr{L}(X, Y)$ при естественном определении сложения его элементов и умножения их на число, т. е. при определении этих операций по формулам

$$(f_1 + f_2)(x) \stackrel{\text{def}}{=} f_1(x) + f_2(x),\ f_1 \in \mathscr{L}(X, Y),\ f_2 \in \mathscr{L}(X, Y),$$
$$(\lambda f)(x) \stackrel{\text{def}}{=} \lambda (f(x)),\ f \in \mathscr{L}(X, Y),\ \lambda \in \boldsymbol{R} \text{ или } \lambda \in \boldsymbol{C},$$
$$x \in X,$$

образует также линейное пространство (действительное, если пространства X и Y были действительными линейными пространствами, и комплексное, если они были комплексными).

Определение 18. *Если* $f: X \to Y$ и Y — *линейное пространство, то множество* $\{x : f(x) = 0\} \subset X$ *называется ядром отображения* f *и обозначается через* $\ker f$*):

$$\ker f \stackrel{\text{def}}{=} \{x : f(x) = 0\}.$$

Лемма 2. *Для того чтобы линейное отображение $f: X \to Y$ линейного пространства X в линейное пространство Y было взаимно однозначным отображением X в Y, т. е. было инъекцией,*

*) От английского слова kernel — ядро.

необходимо и достаточно, чтобы его ядро состояло только из нулевого элемента:

$$\ker f = 0.$$

Доказательство необходимости. Очевидно, что любой линейный оператор f переводит ноль в ноль, ибо для любого $x \in X$ имеем: $f(0) = f(0x) = 0f(x) = 0$. Поэтому, если f — инъекция, то не существует $x \neq 0$, такого, что $f(x) = 0$. Это и означает, что $\ker f = 0$.

Доказательство достаточности. Пусть $\ker f = 0$ и $f(x) = f(y)$. Тогда в силу линейности отображения f имеем $f(x-y) = f(x) - f(y) = 0$, т. е. $x - y \in \ker f$ и так как $\ker f = 0$, то $x - y = 0$. Следовательно $x = y$. Это и означает, что f — инъекция. $\square$

Примером линейных взаимно однозначных отображений являются прямое и обратное преобразование Фурье в соответствующих линейных пространствах функций (см. леммы 2 и 3 в п. 56.5).

Определение 19. *Пусть X и Y — линейные пространства. Линейное взаимно однозначное отображение пространства X на пространство Y называется изоморфным отображением, или изоморфизмом линейных пространств.*

Если для линейных пространств X и Y существует изоморфное отображение X на Y, то они называются изоморфными.

Два изоморфных пространства могут отличаться лишь природой своих элементов, а не свойствами линейного пространства как такового; поэтому в дальнейшем часто мы не будем различать изоморфные линейные пространства.

Упражнение 12. Доказать, что все n-мерные линейные пространства изоморфны между собой.

Определение 20. *Линейное пространство, не являющееся конечномерным, называется бесконечномерным.*

Очевидно, что линейное пространство является бесконечномерным тогда и только тогда, когда оно не имеет конечного базиса.

Примером бесконечномерного пространства является линейное пространство всех многочленов от одной переменной. Действительно это пространство заведомо не имеет конечного базиса: любая линейная комбинация заданной конечной системы многочленов является многочленом степени не выше степени старшего многочлена из указанной системы, и потому многочлены бо́льших степеней не могут быть получены указанным способом.

Попытка обобщить понятие базиса в случае бесконечномерных пространств приводит к бесконечным суммам, т. е. рядам вида $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n e_n$. Для того чтобы имело смысл говорить об их сумме в пространстве X, в нем должно быть определено понятие сходимости последовательностей. Рассмотрению одного такого вида пространств посвящен следующий пункт.

57.3. НОРМИРОВАННЫЕ И ПОЛУНОРМИРОВАННЫЕ ПРОСТРАНСТВА

Определение 21. *Линейное пространство X (действительное или комплексное) называется нормированным, если на множестве его точек определена действительная функция, называемая нормой, обозначаемая $\|x\|_X$ или, короче, $\|x\|$, $x \in X$, и имеющая следующие свойства:*

1°) $\|x\| \geqslant 0$, $x \in X$;

2°) $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$, $x \in X$, λ — *число*;

3°) $\|x+y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$, $x \in X$, $y \in X$;

4°) *если* $\|x\| = 0$, *то* $x = 0$.

Заметим, что из свойства 2° следует, что если $x = 0$, то $\|x\| = 0$. Действительно, фиксируя произвольный элемент $x \in X$, получим

$$\|0\| = \|0 \cdot x\| = 0 \|x\| = 0.$$

Определение 22. *Если на множестве точек линейного пространства X определена действительная функция $\|x\|$, $x \in X$, удовлетворяющая только свойствам* 1, 2, 3, *то пространство X называется полунормированным, а функция $\|x\|$ — полунормой.*

Свойство 2° нормы (полунормы) называется ее *однородностью*, а свойство 3° — *неравенством треугольника.*

Отметим, что всякое подмножество линейного полунормированного (в частности, нормированного) пространства, являющееся подпространством линейного пространства, в свою очередь является линейным полунормированным (соответственно, нормированным) пространством.

Упражнение 13. Выяснить, будут ли выражения $\sup\limits_{a \leqslant t \leqslant b} |f^{(n)}(t)|$, $\int_a^b |f^{(n)}(t)|\, dt$ нормой? — полунормой? — для каких функций? — для каких n?

57.4. ПРИМЕРЫ НОРМИРОВАННЫХ И ПОЛУНОРМИРОВАННЫХ ПРОСТРАНСТВ

1. Множество действительных чисел и множество комплексных чисел, если в них за норму взять абсолютную величину чисел, образуют линейные нормированные пространства.

2. Если в действительном арифметическом n-мерном пространстве R^n норму вектора $x=(x_1, \ldots, x_n)\in R^n$ определить как его длину (см. п. 18.4)

$$\|x\| \overset{\mathrm{def}}{=} |x| = \sqrt{x_1^2+\ldots+x_n^2},$$

то R^n будет линейным нормированным пространством.

3. Комплексное арифметическое n-мерное пространство C^n (см. п. 57.2) будет нормированным, если положить

$$\|x\| \overset{\mathrm{def}}{=} \sqrt{|x_1|^2+\ldots+|x_n|^2}, \quad x=(x_1, \ldots, x_n)\in C^n.$$

4. В действительном арифметическом n-мерном пространстве R^n можно ввести не только норму, совпадающую с длиной $|x|$ его элементов $x=(x_1, \ldots, x_n)\in R^n$. Например, положим

$$\|x\|_p \overset{\mathrm{def}}{=} (|x_1|^p+\ldots+|x_n|^p)^{1/p}, \quad 1\leqslant p<+\infty,$$
$$\|x\|_\infty = \max_{i=1,2,\ldots,n} |x_i|.$$

Очевидно, длина вектора совпадает с нормой $\|x\|_2$. Проверим выполнение аксиом норм для $\|x\|_r$, $1\leqslant r\leqslant+\infty$. При $r=1$ по свойству абсолютной величины чисел

$$\|x+y\|_1=\sum_{i=1}^n |x_i+y_i|\leqslant \sum_{i=1}^n |x_i|+\sum_{i=1}^n |y_i|=\|x\|_1+\|y\|_1.$$

При $1<p<+\infty$ применим неравенство Минковского (см. п. 35.8*):

$$\|x+y\|_p=\left(\sum_{i=1}^n |x_i+y_i|^p\right)^{1/p}\leqslant\left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p\right)^{1/p}+\left(\sum_{i=1}^n |y_i|^p\right)^{1/p}=$$
$$=\|x\|_p+\|y\|_p.$$

Для $\|x\|_\infty$ имеем

$$\|x+y\|_\infty=\max_{i=1,2,\ldots,n}|x_i+y_i|\leqslant\max_{i=1,2,\ldots,n}(|x_i|+|y_i|)\leqslant$$
$$\leqslant\max_{i=1,2,\ldots,n}|x_i|+\max_{i=1,2,\ldots,n}|y_i|=\|x\|_\infty+\|y\|_\infty.$$

Остальные свойства норм для $\|x\|_r$, $1\leqslant r\leqslant+\infty$, проверяются еще проще.

Упражнение 14. Доказать, что $\|x\|_\infty=\lim_{p\to\infty}\|x\|_p$, $x\in R^n$.

Определение 23. *Две нормы $\|x\|$ и $\|x\|^*$ в линейном нормированном пространстве X называются эквивалентными, если существуют такие постоянные $c_1>0$ и $c_2>0$, что для всех $x\in X$ выполняется неравенство*

$$c_1\|x\|\leqslant\|x\|^*\leqslant c_2\|x\|.$$

Теорема 2. *В конечномерном линейном пространстве все нормы эквивалентны.*

Доказательство. Пусть X — конечномерное линейное пространство. Следовательно, в нем существует базис $\{e_1, \ldots, e_n\}$, состоящий из некоторого числа $n \in N$ его элементов, и для любого $x \in X$ имеется и притом единственное разложение

$$x = x_1 e_1 + \ldots + x_n e_n.$$

Пусть $\|x\|$ — некоторая норма в пространстве X. Покажем, что она эквивалентна квадратичной норме

$$\|x\|_2 = \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2}.$$

Поскольку две нормы, каждая из которых эквивалентна третьей, также эквивалентны между собой, то из этого и будет следовать, что все нормы любого конечномерного пространства эквивалентны.

Прежде всего заметим, что $c_1 \overset{\text{def}}{=} \|e_1\| + \ldots + \|e_n\| > 0$, ибо для всех $k = 1, 2, \ldots, n$, имеет место неравенство $e_k \neq 0$, и, следовательно, $\|e_k\| > 0$. Далее, из очевидного неравенства

$$|x_k| \leqslant \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2} = \|x\|_2, \quad k = 1, 2, \ldots, n,$$

получим, используя свойство нормы, неравенство

$$\|x\| = \|x_1 e_1 + \ldots + x_n e_n\| \leqslant |x_1| \|e_1\| + \ldots + |x_n| \|e_n\| \leqslant$$
$$\leqslant (\|e_1\| + \ldots + \|e_n\|) \|x\|_2 = c_1 \|x\|_2.$$

Итак, существует такое $c_1 > 0$, что для любого $x \in X$

$$\|x\| \leqslant c_1 \|x\|_2.$$

Докажем теперь, что существует такое $c_2 > 0$, что

$$\|x\| \geqslant c_2 \|x\|_2.$$

Поскольку в случае $x = 0$ это неравенство очевидно выполняется при любом $c_2 > 0$, то его достаточно доказать лишь для $x \neq 0$. Выберем базис $\{e_1, \ldots, e_n\}$ в пространстве X, так чтобы он состоял из единичных в смысле квадратичной нормы векторов

$$\|e_1\|_2 = \ldots = \|e_n\|_2 = 1.$$

Это всегда возможно, так как если $\{e_1, \ldots, e_n\}$ — какой-то базис линейного пространства, а $\|\cdot\|$ какая-либо норма в этом пространстве, то

$$\left\{\frac{e_1}{\|e_1\|}, \ldots, \frac{e_n}{\|e_n\|}\right\}$$

также будет его базисом, причем норма всех его элементов будет равна 1:

$$\left\|\frac{e_k}{\|e_k\|}\right\| = \frac{1}{\|e_k\|} \|e_k\| = 1, \quad k = 1, 2, \ldots, n.$$

Пространство X с выбранным базисом можно рассматривать как арифметическое n-мерное пространство (см. п. 18.4). Для этого достаточно каждому его вектору $x = x_1e_1 + \ldots + x_ne_n$ сопоставить упорядоченный набор n чисел $(x_1, \ldots, x_n)$ — его координат относительно указанного базиса. При этом квадратичная норма $\|x\|_2$ является длиной вектора x:

$$\|x\|_2 = \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2} = |x|.$$

Единичная сфера $S^{n-1} = \{x : x_1^2 + \ldots + x_n^2 = 1\}$ этого пространства является, как известно (см. п. 18.3 и п. 18.4), компактом. Рассмотрим на ней функцию

$$f(x) \stackrel{\text{def}}{=} \|x\|.$$

Из неравенства

$$|f(x) - f(y)| = |\|x\| - \|y\|| \leqslant \|x - y\|^{*)} \leqslant$$
$$\leqslant c_1\|x - y\|_2 = c_1|x - y|, \quad x \in X, \; y \in X,$$

следует, что эта функция непрерывна на всем пространстве X и, следовательно, на сфере S^{n-1}.

Поскольку для любой точки $x \in S^{n-1}$ имеем $\|x\|_2 = 1$, то $x \neq 0$, а потому в силу свойства 4° нормы функция f удовлетворяет на сфере S^{n-1} неравенству $f(x) = \|x\| > 0$. Согласно теореме Вейерштрасса всякая непрерывная на компакте функция достигает на нем своего минимального значения. Пусть функция f достигает свой минимум на сфере S^{n-1} в точке $x_0 \in S^{n-1}$. Положим

$$c_2 \stackrel{\text{def}}{=} \min_{x \in S^{n-1}} f(x) = f(x_0) > 0.$$

Тогда для любого $x \in S^{n-1}$ будем иметь:

$$\|x\| = f(x) \geqslant f(x_0) = c_2.$$

Теперь, заметив, что для каждого $x \in X$, $x \neq 0$, точка $\frac{x}{\|x\|_2}$ лежит на сфере S^{n-1}:

$$\left\|\frac{x}{\|x\|_2}\right\|_2 = \frac{1}{\|x\|_2}\|x\|_2 = 1$$

и, следовательно, для нее $\left\|\frac{x}{\|x\|_2}\right\| \geqslant c_2$ получим

$$\|x\| = \left\|\|x\|_2 \frac{x}{\|x\|_2}\right\| = \left\|\frac{x}{\|x\|_2}\right\| \|x\|_2 \geqslant c_2\|x\|_2,$$

т. е.

$$\|x\| \geqslant c_2\|x\|_2, \quad x \in X, \; x \neq 0.$$

Эквивалентность норм $\|x\|$ и $\|x\|_2$ доказана. □

---

*) Мы воспользовались здесь неравенством $|\|x\| - \|y\|| \leqslant \|x - y\|$. Оно справедливо для любых элементов полунормированного пространства и легко следует из свойства 3° полунормы в определении 21 (см. ниже лемму 4 в п. 57.5).

5. Пусть снова $1 \leqslant p < +\infty$. Рассмотрим линейное подпространство всех последовательностей $x = (x_1, \ldots, x_n, \ldots)$, $x_n \in \boldsymbol{R}$ (или $x_n \in \boldsymbol{C}$), состоящее из таких последовательностей, для которых

$$\|x\|_p \overset{\text{def}}{=} \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p\right)^{1/p} < +\infty. \tag{57.10}$$

Функция $\|x\|_p$ является нормой, что проверяется аналогично конечному случаю (см. пример 4), так как, в частности, неравенство Минковского справедливо и для бесконечных сумм.

В случае, когда все элементы рассматриваемых последовательностей — действительные числа, их пространство с нормой (57.10) обозначается через l_p.

6. В п. 41.6 для линейного оператора $A: R^n \to R^m$ была введена норма по формуле (см. (41.41))

$$\|A\| = \sup_{\|x\| \leqslant 1} |Ax|, \quad x \in R^n.$$

Это действительно норма, в смысле определения п. 57.3, в линейном пространстве $\mathscr{L}(R^n, R^m)$, что будет следовать из дальнейших рассмотрений.

Пусть X и Y — произвольные линейные нормированные пространства и $A: X \to Y$ — линейный оператор. Положим

$$\|A\| \overset{\text{def}}{=} \sup_{\|x\| \leqslant 1} \|Ax\|, \tag{57.11}$$

где $\|x\| = \|x\|_X$ и $\|Ax\| = \|Ax\|_Y$.

В случае произвольно выбранных линейных пространств X и Y может оказаться, что верхняя грань $\|A\|$, определяемая равенством (57.11), не будет конечной для всякого линейного оператора $A: X \to Y$.

Пусть $\mathscr{L}(X, Y)$ как всегда (см. п. 57.2) — множество всех линейных операторов A, отображающих пространство X в пространство Y, $\mathscr{L}_c(X, Y)$ — множество тех из них, для которых $\|A\| < +\infty$. Покажем, что $\mathscr{L}_c(X, Y)$ также является линейным пространством, а $\|A\|$ — нормой в нем. Если $A \in \mathscr{L}_c(X, Y)$ и $B \in \mathscr{L}_c(X, Y)$, то

$$\|A+B\| = \sup_{\|x\| \leqslant 1} \|(A+B)x\| = \sup_{\|x\| \leqslant 1} \|Ax + Bx\| \leqslant$$
$$\leqslant \sup_{\|x\| \leqslant 1} (\|Ax\| + \|Bx\|) \leqslant \sup_{\|x\| \leqslant 1} \|Ax\| + \sup_{\|x\| \leqslant 1} \|Bx\| = \|A\| + \|B\| < +\infty,$$

и, следовательно, $A+B \in \mathscr{L}_c(X, Y)$. Для любого $\lambda \in \boldsymbol{R}$ (или $\lambda \in \boldsymbol{C}$ в случае комплексных пространств)

$$\|\lambda A\| = \sup_{\|x\| \leqslant 1} \|\lambda Ax\| = \sup_{\|x\| \leqslant 1} |\lambda| \|Ax\| =$$
$$= |\lambda| \sup_{\|x\| \leqslant 1} \|Ax\| = |\lambda| \|A\| < +\infty$$

и, следовательно, $\lambda A \in \mathscr{L}_c(X, Y)$. Таким образом $\mathscr{L}_c(X, Y)$ действительно является линейным пространством.

Далее, очевидно, что из (57.11) непосредственно следует, что $\|A\| \geqslant 0$. При этом, если $\|A\|=0$, т. е. $\sup\limits_{\|x\| \leqslant 1} \|Ax\|=0$, то для всех x таких, что $\|x\| \leqslant 1$ имеет место равенство $\|Ax\|=0$, а следовательно, и $Ax=0$. Но тогда и вообще для всех $x \in X$ также имеем $Ax=0$. Действительно, если x такой элемент пространства X, что $\|x\|>1$, то заведомо $x \neq 0$, а значит

$$\left\| \frac{x}{\|x\|} \right\| = \frac{1}{\|x\|}\|x\| = 1.$$

Поэтому в силу уже доказанного $A\left(\frac{x}{\|x\|}\right)=0$. Отсюда $\frac{1}{\|x\|}Ax=0$ и, следовательно, для любого $x \in X: Ax=0$. Это означает, что $A=0$. Итак, $\|A\|$ — действительно норма в пространстве $\mathscr{L}_c(X, Y)$.

Если значение $\|A\|$, определяемое формулой (57.11) бесконечно: $\|A\|=+\infty$, то будем говорить, что норма оператора A бесконечна.

Норму $\|A\|$ (как конечную, так и бесконечную) можно получить и несколько другим способом. Именно, оказывается, что

$$\|A\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}, \quad x \in X. \tag{57.12}$$

Для доказательства этой формулы заметим, что

$$\sup_{\|x\| \leqslant 1} \|Ax\| = \sup_{\|y\|=1} \|Ay\|. \tag{57.13}$$

В самом деле, с одной стороны, очевидно, что

$$\sup_{\|x\| \leqslant 1} \|Ax\| \geqslant \sup_{\|y\|=1} \|Ay\|,$$

ибо при увеличении числового множества его верхняя грань может только увеличиваться. С другой стороны, для любого элемента $x \in X$, такого что $0<\|x\| \leqslant 1$, положим $y \overset{\text{def}}{=} \frac{x}{\|x\|}$; тогда $\|y\|=1$ и $\|Ay\| = \frac{1}{\|x\|}\|Ax\| \geqslant \|Ax\|$. Отсюда

$$\sup_{\|x\| \leqslant 1} \|Ax\| \leqslant \sup_{\|y\|=1} \|Ay\|.$$

Из полученных неравенств и вытекает равенство (57.13).

Теперь имеем:

$$\sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} = \sup_{x \neq 0} \left\| A \frac{x}{\|x\|} \right\| = \sup_{\|y\|=1} \|Ay\| = \sup_{\|y\| \leqslant 1} \|Ay\| = \|A\|,$$

т. е. формула (57.12) также доказана. Из нее очевидно следует, что для любого $x \in X$, $x \neq 0$,

$$\|Ax\|/\|x\| \leqslant \|A\|,$$

и следовательно, для любого $x \in X$ имеет место неравенство

$$\|Ax\| \leqslant \|A\| \|x\|,$$

где $\|x\|$ — норма в пространстве X, $\|Ax\|$ — норма в пространстве Y, а $\|A\|$ — норма в пространстве $\mathscr{L}(X, Y)$. Это неравенство, очевидно, является обобщением неравенства (41.42) в п. 41.6.

Существует еще один подход к понятию нормы оператора, связанный с понятием так называемых ограниченных операторов.

Определение 24. *Оператор $A: X \to Y$ называется ограниченным, если существует такая постоянная $c > 0$, что для всех элементов $x \in X$ выполняется неравенство*

$$\|Ax\| \leqslant c\|x\|.$$

Если A — линейный ограниченный оператор, то все постоянные $c > 0$, обладающие указанным свойством, ограничены снизу нулем, и потому их множество имеет конечную нижнюю грань. Обозначим ее через c_0:

$$c_0 = \inf\{c : \|Ax\| \leqslant c\|x\|, \quad x \in X\}.$$

Покажем, что

$$c_0 = \|A\|.$$

Прежде всего заметим, что справедливо неравенство

$$\|Ax\| \leqslant c_0\|x\|.$$

В самом деле, если бы нашелся такой элемент $x_0 \in X$, что $\|Ax_0\| > c_0\|x_0\|$, то нашлось бы число $\varepsilon > 0$, для которого выполняется неравенство $\|Ax_0\| > (c_0 + \varepsilon)\|x_0\|$. Однако это невозможно, так как согласно определению нижней грани существует такое число $c > 0$, что $c < c_0 + \varepsilon$ и для всех $x \in X$ выполняется неравенство $\|Ax\| \leqslant c\|x\|$. В частности $\|Ax_0\| \leqslant c\|x_0\| < (c_0 + \varepsilon)\|x_0\|$. Таким образом, нижняя грань c_0 также удовлетворяет неравенству, с помощью которого определяется ограниченность оператора A. Поэтому в определении постоянной c_0 можно заменить нижнюю грань минимумом:

$$c_0 = \min\{c : \|Ax\| \leqslant c\|x\|, \quad x \in X\}.$$

Из неравенства $\|Ax\| \leqslant c_0\|x\|$ при $x \neq 0$ имеем

$$\|Ax\|/\|x\| \leqslant c_0,$$

откуда

$$\sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} \leqslant c_0, \quad x \in X.$$

Случай строгого неравенства

$$\sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} < c_0, \quad x \in X,$$

невозможен, так как тогда нашлось бы такое число $\varepsilon > 0$, что

$$\sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} < c_0 - \varepsilon$$

и, следовательно, для любого $x \in X$, $x \neq 0$, тем более было бы справедливо неравенство

$$\|Ax\|/\|x\| < c_0 - \varepsilon, \quad \text{или} \quad \|Ax\| < (c_0 - \varepsilon)\|x\|, \quad x \in X,$$

что противоречило бы выбору c_0 как минимальной постоянной, обладающей свойством $\|Ax\| \leq c\|x\|$, $x \in X$.

Итак,

$$c_0 = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} = \|A\|.$$

Образно говоря, это равенство означает, что оператор A ограничен тогда и только тогда, когда он имеет конечную норму. Таким образом, множество ограниченных операторов составляет пространство $\mathscr{L}_c(X, Y)$.

В п. 41.6 было показано, что всякий линейный оператор $A: X \to Y$ в случае, когда линейные нормированные пространства X и Y конечномерны и в качестве норм в них взяты квадратичные нормы $\|x\|_2$ и $\|y\|_2$, $x \in X$, $y \in Y$, имеет конечную норму. Поскольку в конечномерных линейных пространствах все нормы эквивалентны (см. теорему 2 в примере 4), то отсюда следует, что *любой линейный оператор A, отображающий конечномерное линейное пространство X в конечномерное же линейное пространство Y, ограничен при любом выборе норм в этих пространствах, т. е. в этом случае*

$$\mathscr{L}(X, Y) = \mathscr{L}_c(X, Y).$$

7. Линейное пространство всех ограниченных действительных функций, определенных на произвольном множестве E, являющееся подпространством пространства $F(E)$ всех действительных функций $f: E \to \boldsymbol{R}$ (см. п. 57.2), превращается в нормированное, если в нем ввести норму по формуле

$$\|f\|_\infty \overset{\text{def}}{=} \sup_{t \in E} |f(t)|. \tag{57.14}$$

Обозначим это пространство через $S(E)$. В случае, когда E является метрическим пространством, подпространство пространства $S(E)$, состоящее из непрерывных на E функций f, обозначим через $C(E)$ [*], а норму (57.14) в этом пространстве будем обозначать также и через $\|f\|_C$.

[*] C — первая буква латинского слова continuum — непрерывный.

Если E является компактом в R^n, то (см. теорему 3 в п. 19.5)

$$\|f\|_C = \sup_{t \in E} |f(t)| = \max_{t \in E} |f(t)|.$$

В частности, это верно для пространства $C[a, b]$ функций, непрерывных на отрезке $[a, b]$ числовой прямой.

8. Пусть фиксировано число p, $1 \leqslant p < +\infty$. Рассмотрим множество функций f, определенных на некотором отрезке $[a, b]$ и таких, что интеграл

$$\int_a^b |f(x)|^p\, dx$$

сходится. Это множество, как легко проверить, образует линейное пространство, которое обозначается через $RL_p[a, b]$ *).

Положим

$$\|f\|_p \overset{\text{def}}{=} \left[\int_a^b |f(t)|^p\, dt\right]^{1/p}. \tag{57.15}$$

Покажем, что (57.15) является полунормой в $RL_p[a, b]$. Из формулы (57.15), очевидно, сразу следует, что $\|f\|_p \geqslant 0$. При этом из условия $\|f\|_p = 0$ не следует, что $f = 0$. В самом деле, рассмотрим, например, функцию

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{при} \quad x = a, \\ 0 & \text{при} \quad x \in (a, b]. \end{cases}$$

Ясно, что $\|f\|_p = 0$, но функция f не равняется тождественно нулю на отрезке $[a, b]$, и потому она не является нулем линейного пространства $RL_p[a, b]$.

Проверим однородность выражения (57.14): для всех $f \in RL_p[a, b]$ и любого $\lambda \in \boldsymbol{R}$ (или $\lambda \in \boldsymbol{C}$) имеем

$$\|\lambda f\|_p = \left[\int_a^b |\lambda f(t)|^p\, dt\right]^{1/p} = |\lambda| \left[\int_a^b |f(t)|^p\, dt\right]^{1/p} = |\lambda|\, \|f\|_p.$$

Докажем для (57.15) неравенство треугольника. Для любых $f \in RL_p[a, b]$ и $g \in RL_p[a, b]$, согласно неравенству Минковского для интегралов (см. п. 28.4*), получим:

$$\|f+g\|_p = \left[\int_a^b |f(t)+g(t)|^p\, dt\right]^{1/p} \leqslant$$

$$\leqslant \left[\int_a^b |f(t)^p|\, dt\right]^{1/p} + \left[\int_a^b |g(t)|^p\, dt\right]^{1/p} = \|f\|_p + \|g\|_p.$$

Итак, действительно, $\|f\|_p$ является полунормой (не являющейся нормой) в линейном пространстве $RL_p[a, b]$.

*) R — первая буква фамилии Б. Римана (B. Riemann), а L — первая буква фамилии А. Лебега (H. Lebesgue).

Аналогичная конструкция справедлива и для бесконечных промежутков; соответствующие полунормированные пространства будем также обозначать через RL_p.

9. Рассмотрим множество всех непрерывных на отрезке $[a, b]$ функций. Оно является линейным пространством. Мы уже знаем, что в нем можно ввести норму $\|f\|_C$, определенную в примере 7 этого пункта. Можно в нем рассмотреть и полунорму (57.15), причем в этом пространстве полунорма (57.15) является уже нормой.

Действительно, если функция f непрерывна на отрезке $[a, b]$ и $\|f\|_p = 0$, $1 \leqslant p < +\infty$, и, следовательно,

$$\int\limits_a^b |f(x)|^p\,dx = 0,$$

то из неотрицательности и непрерывности функции $|f(x)|^p$, $x \in [a, b]$, следует (см. свойство 9 интеграла в п. 28.1), что $f(x) \equiv 0$ на $[a, b]$.

Пространство непрерывных на отрезке $[a, b]$ *функций с нормой* (57.15) *обозначается через* $CL_p[a, b]$.

Подобным же образом строятся аналогичные пространства для неограниченных промежутков, а также и для функций многих переменных.

Если одно и то же множество принадлежит различным линейным нормированным или полунормированным пространствам (например, пространства $C[a, b]$ и $CL_p[a, b]$ состоят из одних и тех же функций), то часто бывает полезным оценить одну норму (полунорму) этих элементов через другую. Теоремы, выражающие подобные оценки, называются обычно *теоремами вложения*.

Поясним сказанное на примере, сформулированном в виде леммы.

Лемма 3. *Пусть* $-\infty < a < b < +\infty$, $1 < p < +\infty$. *Если* $f \in RL_p[a, b]$, *то*

$$\|f\|_1 \leqslant (b-a)^{1/q}\|f\|_p, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1, \tag{57.16}$$

а если $f \in RL_p[a, b] \cap S[a, b]$, *то*

$$\|f\|_p \leqslant (b-a)^{1/p}\|f\|_\infty. \tag{57.17}$$

Доказательство. Принимая во внимание, что полунорма $\|f\|_p$ определяется по формуле (57.15), получим, используя неравенство Гёльдера (см. п. 28.4*),

$$\|f\|_1 = \int\limits_a^b |f(t)|\cdot 1\,dt \leqslant$$

$$\leqslant \left[\int\limits_a^b |f(t)|^p\,dt\right]^{1/p}\left[\int\limits_a^b dx\right]^{1/q} = (b-a)^{1/q}\|f\|_p, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1,$$

тем самым (57.16) доказано. Неравенство (57.17) также сразу вытекает из определений (57.14) и (57.15) соответствующих норм:

$$\|f\|_p=\left[\int_a^b|f(t)|^p\,dt\right]^{1/p}\leqslant\left\{\int_a^b\left[\sup_{[a,b]}|f(t)|\right]^p dt\right\}^{1/p}=$$
$$=\|f\|_\infty\left(\int_a^b dt\right)^{1/p}=(b-a)^{1/p}\|f\|_\infty. \ \square$$

Упражнение 15. Обозначим через $C^1L_2[a, b]$ подмножество пространства $CL_2[a, b]$, состоящее из непрерывно дифференцируемых на отрезке $[a, b]$ функций. Доказать, что

1) $C^1L_2[a, b]$ является линейным нормированным пространством, если под нормой функции $f\in C^1L_2[a, b]$ понимать ее норму в пространстве $CL_2[a, b]$;

2) оператор дифференцирования D является линейным неограниченным оператором D: $C^1L_2[a, b]\to CL_2[a, b]$.

Указание: полезно рассмотреть функции $\sin nx\in C^1L_2[-\pi, \pi]$.

57.5. СВОЙСТВА ПОЛУНОРМИРОВАННЫХ ПРОСТРАНСТВ

В полунормированных пространствах можно ввести понятие сходящейся последовательности и ее предела.

Определение 25. *Если последовательность $\{x_n\}$ элементов полунормированного (в частности, нормированного) линейного пространства X такова, что существует элемент $x\in X$ такой, что $\lim\limits_{n\to\infty}\|x_n-x\|=0$, то последовательность $\{x_n\}$ называется сходящейся по полунорме (соответственно по норме) к элементу x и пишется $x=\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.*

Вводя в каком-либо линейном пространстве функций различные полунормы (в частности, нормы), будем получать различные понятия сходимости последовательностей функций. Например, сходимость в смысле нормы (57.14) означает равномерную сходимость; сходимость в смысле полунормы (57.15) является уже сходимостью другого рода: она называется *сходимостью в среднем*, или, подробнее, в смысле p-среднего (иногда говорят и просто о сходимости в смысле пространства L_p). Мы уже встречались с частным случаем сходимости такого рода при $p=1$: см. лемму 2 в п. 55.2, следствие леммы 4 в п. 56.7 и метрику (57.2), а при $p=2$ — в следствии из теоремы 12 п. 55.9. При $p=2$ сходимость в среднем называется также сходимостью *в смысле среднего квадратичного*.

Неравенства (57.16) и (57.17) между различными полунормами функций позволяют установить связь между различными видами сходимостей функций.

Например, пусть последовательность функций f_n, $n=1, 2, \ldots$ и функция f таковы, что

1°. Последовательность $\{f_n\}$ сходится равномерно на отрезке $[a, b]$ к функции f.

2°. При всех $n=1, 2, \ldots$: $f_n - f \in S[a, b] \cap RL_p[a, b]$.

Тогда последовательность $\{f_n\}$ сходится к функции f на отрезке $[a, b]$ и в смысле p-среднего, $1 \leqslant p < +\infty$.

В самом деле, в силу (57.17) справедливо неравенство

$$\|f_n - f\|_p \leqslant (b-a)^{1/p} \|f_n - f\|_\infty.$$

Равномерная сходимость последовательности $\{f_n\}$ к функции f на отрезке $[a, b]$ означает, что

$$\lim_{n \to \infty} \|f_n - f\|_\infty = 0.$$

Следовательно

$$\lim_{n \to \infty} \|f_n - f\|_p = 0.$$

Упражнение 16*. Построить пример последовательности непрерывных неотрицательных на отрезке функций, сходящейся в среднем, но не сходящейся ни в одной точке.

Следует обратить внимание на то, что в полунормированном пространстве у сходящейся последовательности предел, вообще говоря, не единственен. При этом, если $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = a$ и $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = b$, то полунорма разности двух пределов равна нулю: $\|a-b\|=0$. Это сразу следует из неравенства

$$\|a-b\| \leqslant \|a - x_n\| + \|x_n - b\|.$$

Лемма 4. *Для любых двух элементов x и y линейного полунормированного пространства X справедливо неравенство*

$$|\|x\| - \|y\|| \leqslant \|x-y\|. \tag{57.18}$$

Доказательство. Так как

$$\|x\| = \|(x-y)+y\| \leqslant \|x-y\| + \|y\|,$$

то

$$\|x\| - \|y\| \leqslant \|x-y\|$$

и аналогично

$$\|y\| - \|x\| \leqslant \|x-y\|.$$

Из последних двух неравенств и следует неравенство (57.18). □

Определение 26. *Пусть X — линейное полунормированное (в частности, нормированное) пространство. Множество $E \subset X$ называется ограниченным, или, подробнее, ограниченным по полунорме (соответственно по норме), если существует такая постоянная $M>0$, что для всех $x \in E$ выполняется неравенство $\|x\| \leqslant M$.*

Лемма 5. *Если последовательность $\{x_n\}$ сходится по полунорме в X, то она ограничена.*

Доказательство. Пусть $x=\lim\limits_{n\to\infty} x_n$; в силу сходимости последовательности существует такое n_0, что если $n \geqslant n_0$, то $\|x_n - x\| \leqslant 1$ и, следовательно,

$$\|x_n\| = \|(x_n - x) + x\| \leqslant \|x_n - x\| + \|x\| \leqslant \|x\| + 1.$$

Положим $M = \max\{\|x_1\|, \|x_2\|, \ldots, \|x_{n_0-1}\|, \|x\|+1\}$; тогда, очевидно, для всех $n=1, 2, \ldots$ справедливо неравенство $\|x_n\| \leqslant \leqslant M$. □

На линейном пространстве с полунормой можно определить понятие непрерывной функции. Нам в дальнейшем (см. п. 57.9) понадобится понятие непрерывности функции одной и двух переменных на полунормированном пространстве. Определим эти понятия.

Пусть X — полунормированное пространство. Действительная или комплексная функция f, определенная на X, называется *непрерывной в точке* $x_0 \in X$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что для всех $x \in X$, удовлетворяющих условию $\|x - x_0\| < \delta$, выполняется неравенство

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

Пусть Y — также полунормированное пространство. Действительная или комплексная функция f, определенная на произведении $X \times Y$, называется *непрерывной в точке* $(x_0, y_0) \in X \times Y$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что для всех $(x, y) \in X \times Y$, удовлетворяющих неравенствам $\|x - x_0\| < \delta$, $\|y - y_0\| < \delta$, выполняется неравенство

$$|f(x, y) - f(x_0, y_0)| < \varepsilon.$$

Если функция f непрерывна в каждой точке некоторого множества, то она называется *непрерывной* на этом множестве.

Определение непрерывности можно, конечно, сформулировать для полунормированных пространств и пользуясь последовательностями элементов пространства.

Например, числовая функция f, определенная на полунормированном пространстве X, называется непрерывной в точке x_0, если для любой последовательности $\{x_n\}$, сходящейся к x_0 по полунорме пространства X: $\lim\limits_{n\to\infty} \|x_n - x_0\| = 0$ имеет место равенство $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0)$.

Эквивалентность двух сформулированных выше определений предела функции доказывается по той же схеме, что и в случае, когда X — множество действительных чисел (см. п. 4.5).

Лемма 6. *Полунорма $\|x\|$ является непрерывной функцией на полунормированном пространстве X.*

Доказательство. Пусть заданы элемент $x_0 \in X$ и число $\varepsilon > 0$. Тогда для всех таких x, что $\|x - x_0\| < \varepsilon$ в силу леммы 4 имеем $|\|x\|-\|x_0\||<\|x-x_0\|<\varepsilon$, т. е. условие непрерывности функции на X выполняется при выборе $\delta=\varepsilon$. □

Определение 27. *Пусть X и Y — линейные полунормированные (в частности, нормированные) пространства. Отображение f, изоморфно отображающее пространство X как линейное пространство на пространство Y (см. определение* 19), *и такое, что для любого $x\in X$ справедливо равенство*

$$\|x\|_X=\|f(x)\|_Y,$$

называется изоморфным отображением или изоморфизмом линейных полунормированных (нормированных) пространств.

Если для линейных полунормированных (нормированных) пространств X и Y существует изоморфное отображение X на Y, то они называются изоморфными.

Два изоморфных полунормированных (нормированных) пространства могут отличаться друг от друга только природой своих элементов, а не свойствами пространства. Поэтому в дальнейшем мы часто не будем различать изоморфные полунормированные (нормированные) пространства, состоящие из различных элементов; такие пространства можно «отождествлять».

Поясним это подробнее. Пусть X и Y — линейные полунормированные пространства, $Y\subset Y^*$, а $f: X\to Y$ — изоморфное отображение. Рассмотрим множество $X^*=X\cup(Y^*\setminus Y)$, получающееся из пространства X присоединением к нему множества $Y^*\setminus Y$. Таким образом: $X^*\setminus X=Y^*\setminus Y$. Определим для элементов множества X^* операции сложения и умножения на число, а также норму — они будут снабжаться индексом X^*. Для удобства введем отображение $F: X^*\to Y^*$, задаваемое формулой

$$F(x)\overset{\text{def}}{=}\begin{cases} f(x), & \text{если } x\in X,\\ x & \text{если } x\in X^*\setminus X.\end{cases} \tag{57.19}$$

Ясно, что F является взаимно однозначным отображением (биекцией) множества X^* на Y^*.

Теперь для любых $x\in X^*$, $y\in X^*$ и любых чисел λ, μ положим

$$(\lambda x+\mu y)_{X^*}\overset{\text{def}}{=}F^{-1}[\lambda F(x)+\mu F(y)],$$

$$\|x\|_{X^*}\overset{\text{def}}{=}\|F(x)\|.$$

Так определенное пространство X^* является линейным полунормированным (нормированным), изоморфным пространству Y^* и содержащим X в качестве своего подмножества. Под утверждением «отождествим в пространстве Y^* множество Y с изоморфным ему пространством X» и понимается рассмотрение указанного выше пространства X^* (сравните с отождествлением изометрических метрических пространств п. 57.1).

Упражнения. 17. Пусть X — линейное полунормированное пространство. Элементы $x \in X$ и $y \in X$ называются *эквивалентными*, если $\|x-y\|=0$. Обозначим через $\tilde{X}$ множество, элементами которого являются классы эквивалентных элементов пространства X. Пусть $\tilde{x} \in \tilde{X}$, $\tilde{y} \in \tilde{X}$, $x \in \tilde{x}$, $y \in \tilde{y}$, λ — число. Определим $\tilde{x}+\tilde{y}$ как элемент множества $\tilde{X}$, содержащий $x+y$, а $\lambda\tilde{x}$ — как элемент из $\tilde{X}$, содержащий λx. Положим $\|\tilde{x}\|_{\tilde{X}}=\|x\|_X$. Доказать, что данные определения корректны, т. е. не зависят от выбора элементов $x \in \tilde{x}$ и $y \in \tilde{y}$, и что $\tilde{X}$ является линейным нормированным пространством с нормой $\|\tilde{x}\|_{\tilde{X}}$.

18. Доказать, что функции $x+y$ и λx непрерывны на всяком линейном полунормированном пространстве X (x и y — элементы этого пространства, а λ — число), иначе говоря, что операции сложения и умножения на число непрерывны в указанном пространстве.

57.6. СВОЙСТВА НОРМИРОВАННЫХ ПРОСТРАНСТВ

В линейном нормированном пространстве X можно естественным образом ввести расстояние между элементами этого пространства. Именно, справедливо следующее утверждение.

Лемма 7. *Линейное нормированное пространство X является метрическим пространством с метрикой*

$$\rho(x, y)=\|x-y\|, \tag{57.20}$$

при этом сходимость последовательностей в пространстве X по этой метрике совпадает со сходимостью по норме.

Доказательство. Функция $\rho(x, y)$, определенная формулой (57.20), действительно является расстоянием: свойства расстояния (см. п. 57.1) вытекают из свойств нормы 1°—4° (проверьте это). Второе утверждение леммы очевидно.

Будем говорить, что *метрика* (57.20) *порождается заданной нормой пространства* X. Например, метрика, порожденная нормой $\|x\|=\sqrt{x_1^2+\ldots+x_n^2}$ в арифметическом линейном пространстве n-мерных вещественных векторов $x=(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, является метрикой евклидова пространства R^n, определенной формулой (18.1).

Последовательность точек пространства X, фундаментальная относительно метрики (57.20), называется также *фундаментальной относительно нормы*, заданной в пространстве X.

Упражнение 19. Доказать, что множество в линейном нормированном пространстве ограничено по норме (см. определение 26 в п. 57.5) тогда и только тогда, когда оно ограничено как множество метрического пространства в смысле метрики (57.20) (см. упражнение 1 в п. 57.1).

Пример. Рассмотрим пространство l_p, последовательностей действительных чисел с нормой (57.10). Обозначим через e_n последовательность, у которой n-й член равен единице, а все остальные нули. Очевидно, что при $n \neq m$

$$\|e_n-e_m\|=(1+1)^{1/p}=2^{1/p}.$$

Поэтому последовательность элементов e_n, $n=1, 2, \ldots$, пространства l_p не может содержать фундаментальной, а, следовательно, и сходящейся подпоследовательности.

Последовательность $\{e_n\}$ ограничена, ибо для всех n имеем $\|e_n\|=1$. Она образует замкнутое множество в l_p, так как множество $\{e_n\}$ не имеет предельных точек в l_p (в противном случае в ней нашлась бы сходящаяся подпоследовательность).

Таким образом, в бесконечномерном пространстве существуют ограниченные последовательности, из которых нельзя выделить сходящуюся. Существуют также и ограниченные замкнутые множества, у которых не из всякой последовательности их точек можно выделить сходящуюся.

Замечание 1. Если в линейном пространстве X введены две нормы элементов $\|\cdot\|^{(1)}$ и $\|\cdot\|^{(2)}$, причем они эквивалентны (см. определение 23 в п. 57.4), то последовательность $x_n \in X$, $n=1, 2, \ldots$, сходится к элементу $x \in X$ в смысле нормы $\|\cdot\|^{(1)}$ тогда и только тогда, когда она сходится к x в смысле нормы $\|\cdot\|^{(2)}$.

Действительно, в силу эквивалентности норм $\|\cdot\|^{(1)}$ и $\|\cdot\|^{(2)}$ существуют такие постоянные $c_1>0$ и $c_2>0$, что выполняются неравенства

$$c_1\|x_n-x\|^{(2)} \leqslant \|x_n-x\|^{(1)} \leqslant c_2\|x_n-x\|^{(2)}.$$

Из этих неравенств сразу и следует эквивалентность сходимостей последовательности $\{x_n\}$ к x в смысле норм $\|\cdot\|^{(1)}$ и $\|\cdot\|^{(2)}$.

Из доказанной в теореме 2 п. 57.4 эквивалентности всех норм в конечномерном пространстве следует, что сходимости последовательностей его точек по всем нормам эквивалентны. Поскольку сходимость по квадратичной норме $\|x\|_2$ равносильна покоординатной сходимости (см. п. 18.1 и 18.4), то сходимость последовательности точек в конечномерном пространстве по любой норме равносильна сходимости числовых последовательностей координат рассматриваемых точек относительно произвольного базиса.

Замечание 2. Отметим, что в случае, когда полунорма не является нормой даже такая простая функция как линейная на конечномерном линейном полунормированном пространстве может оказаться не непрерывной. Рассмотрим, например, двумерное арифметическое пространство X векторов $x=(x_1, x_2)$ с полунормой $\|x\|=|x_1|$. Это действительно полунорма, так как $\|x\|=|x_1|\geqslant 0$. Кроме того, для любого числа λ имеем $\lambda x=(\lambda x_1, \lambda x_2)$ и потому $\|\lambda x\|=|\lambda x_1|=|\lambda||x_1|=|\lambda|\|x\|$. Наконец, если $y=(y_1, y_2)$ также является элементом из X, то $x+y=(x_1+y_1, x_2+y_2)$, следовательно $\|x+y\|=|x_1+y_1|\leqslant|x_1|+|y_1|=\|x\|+\|y\|$. Таким образом, все свойства полунормы выполнены.

Покажем, что линейная функция $f(x)=x_2$ не непрерывна на X. Действительно, для последовательности $x^{(n)}=(1/n, 1)$ любая точка вида $x=(0, x_2)$ (x_2 произвольно) является ее пределом в смысле рассматриваемой полунормы:

$$\lim_{n\to\infty} \|x^{(n)} - x\| = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0.$$

В частности точка $O = (0, 0)$ является пределом последовательности $\{x^{(n)}\}$. Однако

$$\lim_{n\to\infty} f(x^{(n)}) = 1 \neq 0 = f(O).$$

Это и означает, что функция $f(x) = x_2$ не является непрерывной по полунорме $\|x\| = |x_1|$.

Подчеркнем, однако, что если в конечномерном пространстве полунорма является нормой, то всякая линейная функция будет непрерывна относительно этой нормы. Действительно, пусть X — n-мерное линейное нормированное пространство и f — линейный функционал на X. Пусть $\{e_1, \ldots, e_n\}$ — базис в X и, следовательно, любой элемент $x \in X$ представим и притом единственным образом в виде $x = x_1e_1 + \ldots + x_ne_n$. Поскольку f — линейный функционал, то

$$f(x) = f(x_1e_1 + \ldots + x_ne_n) = \\ = x_1f(e_1) + \ldots + x_nf(e_n) = a_1x_1 + \ldots + a_nx_n,$$

где $a_k = f(e_k)$, $k = 1, 2, \ldots, n$, — фиксированные для f числа. Вспоминая, что сходимость последовательности точек по любой норме в конечномерном пространстве эквивалентна ее покоординатной сходимости, сразу убеждаемся, что из полученной формулы $f(x) = a_1x_1 + \ldots + a_nx_n$ действительно следует непрерывность функции f.

Лемма 8. *Норма является непрерывной функцией на линейном нормированном пространстве в смысле метрики* (57.20).

В силу равенства (57.20) это следует из того, что полунорма непрерывна по полунорме (см. лемму 6 в п. 57.5).

Определение 28. *Линейное нормированное пространство называется полным, если оно является полным метрическим пространством в смысле метрики, порождаемой нормой данного пространства.*

Полное линейное нормированное пространство называется банаховым пространством *).

Линейное нормированное пространство $C[a, b]$ непрерывных на отрезке $[a, b]$ функций с нормой (57.14) является банаховым пространством. Мы в этом убедились в п. 57.1, когда рассматривали метрическое пространство непрерывных на отрезке $[a, b]$ функций с расстоянием (57.1), которое как раз порождается нормой (57.14). Мы видели, что полнота пространства $C[a, b]$ сле-

---

*) С. Банах (1892—1945) — польский математик.

дует из того, что сходимость последовательности в этом пространстве означает ее равномерную сходимость на отрезке $[a, b]$.

Теорема 3. *Всякое линейное нормированное пространство содержится и плотно в некотором банаховом пространстве.*

Доказательство. Согласно теореме 1 п. 57.1, достаточно показать, что на пополнение X^* линейного нормированного пространства X, рассматриваемого как метрическое с метрикой (57.20), можно продолжить с X алгебраические операции и норму. Это можно сделать с помощью предельного перехода. Как и при доказательстве теоремы 1, будем считать, что $X \subset X^*$, иначе говоря, отождествим пространство X с изометричным ему подпространством построенного там пополнения X^*.

Пусть, например, $x \in X^*$ и $y \in X^*$. В силу плотности X в X^* существуют последовательности $x_n \in X$ и $y_n \in X$, $n = 1, 2, \ldots$, такие, что $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = x$, $\lim\limits_{n \to \infty} y_n = y$.

Покажем, что последовательность $\{x_n + y_n\}$ сходится. Действительно,

$$\rho(x_n + y_n,\ x_m + y_m) = \|(x_n + y_n) - (x_m + y_m)\| \leqslant$$
$$\leqslant \|x_n - x_m\| + \|y_n - y_m\| = \rho(x_n,\ x_m) + \rho(y_n,\ y_m).$$

Из сходимости последовательностей $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ следует, что они фундаментальные, поэтому последовательность $\{x_n + y_n\}$ также фундаментальная и, следовательно, в силу полноты X^*, сходящаяся.

Положим, по определению,

$$x + y = \lim_{n \to \infty} (x_n + y_n).$$

Аналогично с помощью предельного перехода определяется и λx, $x \in X^*$.

Легко проверить, что определенные так алгебраические операции $x + y$, λx для элементов пополнения X^* не зависят от выбора последовательностей $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$, таких, что $x_n \to x$, $y_n \to y$, $x_n \in X$, $y_n \in X$, $n = 1, 2, \ldots$. Также легко убедиться, что в случае, когда элементы принадлежат исходному пространству X, определенные нами алгебраические операции совпадают с заданными.

Определим теперь норму для $x \in X^*$. Пусть $x_n \in X$, $n = 1, 2, \ldots$, и $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = x$. Покажем что последовательность $\{\|x_n\|\}$ фундаментальная. В самом деле, из неравенства (57.18) для всех натуральных n и m имеем

$$\bigl|\|x_n\| - \|x_m\|\bigr| \leqslant \|x_n - x_m\| = \rho(x_n,\ x_m). \tag{57.21}$$

Последовательность $\{x_n\}$, будучи сходящейся, является и фундаментальной, поэтому из неравенства (57.21) следует, что и числовая последовательность $\{\|x_n\|\}$ фундаментальна, а значит, сходится.

Положим, по определению,

$$\|x\| = \lim_{n\to\infty} \|x_n\|.$$

Так определенная норма $\|x\|$, $x \in X^*$, не зависит от выбора последовательности $x_n \in X$, $n = 1, 2, \ldots$, такой, что $x_n \to x$. Легко проверить также, используя предельный переход, что для функции $\|x\|$, $x \in X^*$, выполняются свойства нормы $1^\circ - 4^\circ$ и что в случае $x \in X$ мы получаем прежнюю норму. □

В качестве примера отметим линейное нормированное пространство $CL_p[a, b]$ непрерывных на отрезке $[a, b]$ функций с нормой (57.15). Эта норма при $p = 1$ порождает метрику (57.2). Можно показать, что метрическое пространство непрерывных функций с метрикой (57.2) не является полным. Согласно доказанной теореме, рассматриваемое линейное нормированное пространство непрерывных на отрезке $[a, b]$ функций можно дополнить до полного пространства. Это банахово пространство обозначается $L[a, b]$.

Определение 29. *Система элементов x_α, $\alpha \in \mathfrak{A}$ ($\mathfrak{A}$ — некоторое множество индексов) линейного полунормированного пространства X называется полной в этом пространстве, если для каждого элемента $x \in X$ и любого числа $\varepsilon > 0$ существуют такие элементы $x_{\alpha_1}, \ldots, x_{\alpha_n}$ данной системы и такие числа $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, что выполняется неравенство*

$$\|x - (\lambda_1 x_{\alpha_1} + \ldots + \lambda_n x_{\alpha_n})\| < \varepsilon. \tag{57.22}$$

Сформулируем это определение несколько иначе, введя предварительно еще одно понятие.

Определение 30. *Множество $A \subset X$ называется плотным в полунормированном пространстве X, если для любого элемента $x \in X$ и любого $\varepsilon > 0$ найдется такой элемент $a \in A$, что*

$$\|x - a\| < \varepsilon.$$

Если X — нормированное и, следовательно, метрическое пространство, то определение 30 в силу (57.20) приводит к тому же понятию плотности множества, что и определение 6 из п. 57.1. Теперь можно сказать:

Система $\{x_\alpha\}$, $\alpha \in \mathfrak{A}$ — полна в пространстве X, если множество конечных линейных комбинаций ее элементов, т. е. ее линейная оболочка (см. определение 15 в п. 57.2) *образует плотное в X множество.*

Если X является нормированным пространством, то в нем, как во всяком метрическом пространстве, имеет смысл понятие замыкания множества, а поскольку плотность некоторого множества в метрическом пространстве означает, что замыкание этого множества совпадает с самим пространством (см. определение 6 в п. 57.1), то в этом случае определение 30 можно перефразировать и таким образом:

система элементов x_α, $\alpha \in \mathfrak{A}$ ($\mathfrak{A}$ — некоторое множество индексов) линейного нормированного пространства X называется полной, если замыкание ее линейной оболочки (см. п. 57.2) совпадает со всем пространством X.

С частным случаем понятия полноты для системы функций мы уже встречались в п. 55.8.

Определение 31. *Если в линейном нормированном пространстве X существует счетное множество элементов, образующее полную систему пространства X, то пространство X называется сепарабельным.*

В заключение этого пункта введем понятие базиса, а предварительно — понятие ряда в пространстве X.

Определение 32. *Пусть x_n, $n = 1, 2, \ldots,$ — последовательность элементов линейного нормированного пространства X. Положим $s_n = x_1 + \ldots + x_n$, $n = 1, 2, \ldots$; пара последовательностей $\{x_n\}$, $\{s_n\}$ называется рядом (с общим членом x_n) и обозначается*

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n; \tag{57.23}$$

элементы s_n называются n-ми частичными суммами ряда (57.23).

Если последовательность s_n, $n = 1, 2, \ldots,$ сходится в пространстве X, то ряд (57.23) называется *сходящимся*. В этом случае предел $s = \lim\limits_{n \to \infty} s_n$ последовательности s_n, $n = 1, 2, \ldots,$ называется *суммой ряда* (57.23) и пишется

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n = s.$$

Таким образом, как и в случае числовых рядов, мы будем одним и тем же символом $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ обозначать как сам ряд, так и его сумму, если он сходится.

Как и для числовых рядов для рядов в линейных нормированных пространствах справедливы следующие утверждения.

Если ряд (57.23) *сходится, то сходится и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \lambda x_n$, причем если $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n = s$, то $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \lambda x_n = \lambda s$.*

Если в пространстве X сходятся два ряда, то сходится и ряд, общий член которого равен сумме их членов с одинаковыми номерами, и его сумма равна сумме сумм данных рядов.

Определение 33. *Последовательность элементов e_n, $n=1, 2, \ldots$ линейного нормированного пространства называется базисом, если, каков бы ни был элемент x, существует, и притом единственная, последовательность чисел λ_n, $n=1, 2, \ldots$, такая что*

$$x=\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n e_n. \tag{57.24}$$

Таким образом, если последовательность $\{e_n\}$ является базисом пространства X, то для каждого элемента $x \in X$ существует, и притом единственная, последовательность чисел $\{\lambda_n\}$, такая, что для каждого $\varepsilon > 0$ существует такой номер n_ε, что при всех $n \geqslant n_\varepsilon$ выполняется неравенство

$$\|x-(\lambda_1 e_1+\ldots+\lambda_n e_n)\|<\varepsilon. \tag{57.25}$$

Формула (57.24) называется разложением элемента x по базису $\{e_n\}$.

Нетрудно убедиться, что если система элементов $\{e_n\}$ образует базис, то она линейно независима. Это сразу следует из единственности разложения элементов пространства по базису. В самом деле, если бы элементы e_n, $n=1, 2, \ldots$, оказались линейно зависимыми, то среди них нашлось бы конечное множество таких $e_{n_1}, \ldots, e_{n_k}$, что для некоторых чисел $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$, которые не все равны нулю, имело бы место равенство $\lambda_1 e_{n_1}+\ldots+\lambda_k e_{n_k}=0$, т. е. получилось бы разложение нуля по элементам базиса с коэффициентами, которые не все равны нулю. Поскольку для нуля имеется тривиальное разложение $0=\sum\limits_{n=1}^{\infty}0e_n$, то тем самым нарушено условие единственности разложения элементов по базису.

Если линейное нормированное пространство имеет базис, состоящий из конечного или счетного множества элементов, то это пространство сепарабельно. Действительно, нетрудно проверить, что множество всех конечных линейных комбинаций элементов указанных базисов с рациональными коэффициентами счетно и плотно во всем пространстве.

З а м е ч а н и е. Подчеркнем отличие между последовательностью элементов, образующих полную систему, и последовательностью элементов, образующих базис. В первом случае коэффициенты λ_k, $k=1, 2, \ldots, n$, в неравенстве (57.22) зависят, вообще говоря, не только от выбора элемента $x \in X$, но и от выбора числа ε. Во втором же случае коэффициенты λ_k, $k=1, 2, \ldots, n$, в неравенстве (57.25) определяются только самим элементом (они называются *коэффициентами разложения элемента x по данному базису* или *координатами элемента x при данном базисе*) и лишь их количество, т. е. число n_ε, зависит от выбора ε.

Существуют сепарабельные банаховы пространства, в которых нет базиса. В следующем пункте будет рассмотрен более узкий класс пространств, в которых базис всегда существует.

57.7. ЛИНЕЙНЫЕ ПРОСТРАНСТВА СО СКАЛЯРНЫМ ПРОИЗВЕДЕНИЕМ

Определение 34. *Действительная функция, определенная на множестве упорядоченных пар элементов действительного линейного пространства и обозначаемая (x, y), $x \in X$, $y \in X$, называется скалярным умножением, если она удовлетворяет следующим условиям:*

1°) $(x, y) = (y, x)$, $x \in X$, $y \in X$;

2°) $(\lambda x + \mu y, z) = \lambda (x, z) + \mu (y, z)$, $x \in X$, $y \in X$, $z \in X$, λ *и* μ — *действительные числа:*

3°) $(x, x) \geqslant 0$, $x \in X$;

4°) *если* $(x, x) = 0$, *то* $x = 0$.

Заметим, что из свойств 2° следует, что для любого $x \in X$ справедливо равенство

$$(x, 0) = 0.$$

Действительно, $(x, 0) = (x, 0 \cdot 0) = 0\,(x, 0) = 0$.

Определение 35. *Действительная функция (x, y), определенная на множестве упорядоченных пар элементов действительного линейного пространства X, $x \in X$, $y \in X$ и удовлетворяющая лишь условиям* 1, 2, 3, *называется полускалярным умножением.*

Аналогичным образом вводится понятие и полускалярного (в частности, скалярного) умножения в комплексном линейном пространстве $\boldsymbol{R}$. В этом случае комплекснозначная функция (x, y) называется полускалярным (соответственно скалярным) умножением, если она удовлетворяет свойству 2° для любых комплексных чисел λ и μ, свойству 3° и свойству

$$1'^\circ)\ (x, y) = \overline{(y, x)}, \quad x \in X, \quad y \in X,$$

где, как всегда, черта над числом обозначает сопряженное ему комплексное число.

В дальнейшем под линейным пространством будем понимать действительное линейное пространство, если не оговорено что-либо другое.

Результат скалярного (полускалярного) умножения двух элементов $x \in X$, и $y \in Y$ называется их *скалярным* (*полускалярным*) *произведением* (x, y). Линейные пространства, для элементов которых определена операция скалярного (полускалярного) умножения, называются *линейными пространствами со скалярным* (*полускалярным*) *произведением*.

Лемма 9. *Для любой пары векторов x и y линейного пространства X с полускалярным произведением справедливо неравенство*

$$(x, y)^2 \leqslant (x, x)(y, y), \tag{57.26}$$

которое называется неравенством Коши — Шварца.

Доказательство. Для любого действительного числа λ в силу свойства 3 полускалярного умножения имеем

$$(\lambda x + y, \lambda x + y) \geqslant 0.$$

Применив свойства 1° и 2° полускалярного умножения, получим:

$$\lambda^2 (x, x) + 2\lambda (x, y) + (y, y) \geqslant 0.$$

Если $(x, x) = 0$, то $2\lambda(x, y) + (y, y) \geqslant 0$. Поскольку это справедливо для любого действительного λ, то $(x, y) = 0$ и, следовательно, неравенство (57.26) справедливо — обе его части обращаются в ноль. Если же $(x, x) \neq 0$, то дискриминант получившегося квадратичного относительно λ трехчлена неположителен:

$$(x, y)^2 - (x, x)(y, y) \leqslant 0,$$

что равносильно условию (55.26).

Следствие. *Для любой пары векторов линейного пространства с полускалярным произведением справедливо неравенство*

$$\sqrt{(x+y, x+y)} \leqslant \sqrt{(x, x)} + \sqrt{(y, y)}, \quad x \in X, \quad y \in X.$$

Действительно, применив неравенство Коши—Шварца, получим:

$$(x+y, x+y) = (x, x) + 2(x, y) + (y, y) \leqslant$$
$$\leqslant (x, x) + 2\sqrt{(x, x)(y, y)} + (y, y) = \left[\sqrt{(x, x)} + \sqrt{(y, y)}\right]^2 \square.$$

Упражнение 20. Доказать, что в комплексном линейном пространстве X с полускалярным произведением выполняется неравенство

$$|(x, y)|^2 \leqslant (x, x)(y, y), \quad x \in X, \quad y \in X.$$

Если в линейном пространстве X с полускалярным произведением положить

$$\|x\| = \sqrt{(x, x)}, \quad x \in X, \tag{57.27}$$

то функция $\|x\|$ удовлетворяет свойствам 1°—3° полунормы. Свойство 1° полунормы следует из свойства 3° полускалярного умножения, свойство 2° — из свойства 2°, свойство 3° полунормы — из следствия леммы 9.

Если же полускалярное умножение является скалярным, то полунорма (57.27) является нормой. Действительно, свойство 4° нормы следует из свойства 4 скалярного умножения. Таким образом, мы доказали следующее утверждение.

Лемма 10. *Каждое линейное пространство со скалярным (соответственно полускалярным) произведением является нормированным (соответственно полунормированным) пространством с нормой (соответственно полунормой), определяемой формулой* (57.27), *а следовательно, и метрическим пространством с метрикой* (57.20).

Полунорму (57.27) будем называть *полунормой* (соответственно *нормой*), *порожденной заданным полускалярным* (*скалярным*) *произведением*. Расстояние (57.20), порожденное нормой (57.27) линейного пространства со скалярным произведением, будем также называть *расстоянием, порожденным заданным скалярным произведением*.

Применяя обозначение полунормы, неравенство (57.26) можно переписать в виде

$$|(x, y)| \leqslant \|x\| \|y\|. \tag{57.28}$$

57.8. ПРИМЕРЫ ЛИНЕЙНЫХ ПРОСТРАНСТВ СО СКАЛЯРНЫМ ПРОИЗВЕДЕНИЕМ

1. В множестве действительных чисел $\boldsymbol{R}$ обычная операция умножения является и скалярным умножением в смысле определения 34.

В множестве комплексных чисел $\boldsymbol{C}$ *скалярным произведением* чисел x и y является произведение $x\bar{y}$.

2. Действительное арифметическое n-мерное векторное пространство R^n, в котором скалярное произведение векторов $x = (x_1, \ldots, x_n) \in R^n$ и $y = (y_1, \ldots, y_n) \in R^n$ определяется по формуле (см. (18.32) в п. 18.4)

$$(x, y) = x_1 y_1 + \ldots + x_n y_n$$

является линейным пространством со скалярным произведением в смысле определения 34 п. 57.7. В этом случае норма элемента $x \in R^n$ совпадает с его длиной $|x|$ (см. п. 57.4, пример 2):

$$\|x\| = |x| = \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2},$$

а соответствующая метрика с расстоянием в n-мерном арифметическом точечном пространстве:

$$\rho(x, y) = \|x - y\| = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \ldots + (x_n - y_n)^2}.$$

Напомним, что для этого пространства неравенство Коши — Шварца было доказано нами раньше (см. лемму 1 в п. 18.1 и неравенство (18.39) в п. 18.4).

В арифметическом комплексном пространстве C^n (см. п. 57.2) скалярное произведение вводится по формуле

$$(x, y) = x_1\bar{y}_1 + \ldots + x_n\bar{y}_n, \quad x = (x_1, \ldots, x_n) \in C^n, \quad y = (y_1, \ldots, y_n) \in C^n.$$

3. Рассмотрим линейное полунормированное пространство $RL_2[a, b]$ из примера 8, п. 57.4, состоящее из функций с интегрируемым (вообще говоря, в несобственном смысле) на отрезке $[a, b]$ квадратом, т. е. из таких функций f, для которых

$$\int_a^b f^2(t)\,dt < +\infty.$$

Пусть $f \in RL_2[a, b]$ и $g \in RL_2[a, b]$. Вспомним, что произведение функций, интегрируемых по Риману на некотором отрезке, также интегрируемо по Риману на этом отрезке. Поэтому на любом отрезке $[\xi, \eta] \subset [a, b]$, не содержащем особых точек функций f и g (см. п. 55.1), произведение fg также интегрируемо по Риману, и следовательно имеет смысл рассматривать несобственный интеграл

$$\int_a^b f(t)\,g(t)\,dt. \tag{57.29}$$

Поскольку, кроме того, в любой не являющейся особой для функции f или g точке x справедливо неравенство

$$|f(t)\,g(t)| \leqslant \frac{f^2(t)+g^2(t)}{2}\ ^{*)},$$

то интеграл (57.29) сходится, и притом абсолютно.

Полускалярное произведение в этом пространстве определяется формулой

$$(f,\ g) = \int_a^b f(t)\,g(t)\,dt. \tag{57.30}$$

Свойства 1°, 2°, 3° полускалярного произведения легко проверяются. Полученное пространство с полускалярным произведением (57.30) будем также обозначать через $RL_2[a, b]$.

Заметим, что неравенство (57.26) в этом случае может быть записано следующим образом:

$$\left(\int_a^b f(t)\,g(t)\,dt\right)^2 \leqslant \int_a^b f^2(t)\,dt \int_a^b g^2(t)\,dt;$$

оно является частным случаем неравенства Гёльдера (см. п. 28.4*) при $p=q=2$ и называется неравенством Коши — Буняковского **).

Полунорма, порожденная полускалярным произведением (57.30), имеет, очевидно, вид

$$\|f\| = \sqrt{\int_a^b f^2(t)\,dt}, \tag{57.31}$$

*) Оно следует из очевидного неравенства $(|f(t)| - |g(t)|)^2 \geqslant 0$.

**) В. Я. Буняковский (1804—1889) — русский математик.

т. е. совпадает с полунормой (57.15), рассмотренной в примере 8, п. 57.4 при $p=2$. Отсюда следует, что полускалярное произведение (57.30) не является скалярным, так как в п. 57.4 было установлено, что полунорма (57.15) не является нормой при всех $p \geqslant 1$.

Однако, в подпространстве $CL_2[a, b]$ пространства $RL_2[a, b]$, состоящем только из функций, непрерывных на отрезке $[a, b]$, полускалярное произведение (57.30) является уже скалярным, ибо, как было показано в примере 9, п. 57.4, в этом случае

$$\|f\|_2=\sqrt{(f, f)}, \quad f \in CL_2[a, b]$$

является не только полунормой, но и нормой.

Для расстояния между двумя непрерывными функциями f и g в этом пространстве получаем формулу

$$\rho(f, g)=\|f-g\|=\left\{\int_a^b [f(x)-g(x)]^2\, dx\right\}^{1/2}. \tag{57.32}$$

Мы уже встречались со сходимостью функций в смысле этой метрики: см., например, следствие теоремы 12 в п. 55.9.

Все сказанное естественным образом распространяется и на функции, определенные на любом бесконечном промежутке, в частности на всей оси.

Упражнение 21. Пусть X — линейное пространство с полускалярным произведением. Элементы $x \in X$ и $y \in Y$ называются *эквивалентными*, если $\|x-y\|^2=(x-y, x-y)=0$. Обозначим через $\tilde{X}$ множество, элементами которого являются классы эквивалентных элементов пространства X. Пусть $\tilde{x} \in \tilde{X}$, $\tilde{y} \in \tilde{X}$, $x \in \tilde{x}$, $y \in \tilde{y}$, λ и μ — числа. Определим $\lambda\tilde{x}+\mu\tilde{y}$ как элемент множества $\tilde{X}$, содержащий $\lambda x+\mu y$, и положим $(\tilde{x}, \tilde{y})=(x, y)$. Доказать, что эти определения корректны, т. е. не зависят от выбора элементов $x \in \tilde{x}$ и $y \in \tilde{y}$, и что $\tilde{X}$ является линейным пространством, а $(\tilde{x}, \tilde{y})$ — скалярным произведением в нем.

57.9. СВОЙСТВА ЛИНЕЙНЫХ ПРОСТРАНСТВ СО СКАЛЯРНЫМ ПРОИЗВЕДЕНИЕМ. ГИЛЬБЕРТОВЫ ПРОСТРАНСТВА

Линейное пространство с полускалярным произведением является согласно (57.27) и полунормированным. Поэтому для него определено понятие сходящейся последовательности, ее предела, и понятие непрерывной функции (см. п. 57.5).

Лемма 11. *Полускалярное произведение* (x, y) *является непрерывной функцией* (см. п. 57.5) *своих аргументов* x *и* y *на множестве* $X \times X$, *на котором оно задано*: $x \in X$, $y \in X$.

Доказательство. В самом деле для любых $x_0 \in X$, $y_0 \in X$, $x \in X$ и $y \in X$ выполняется неравенство

$$|(x_0, y_0)-(x, y)|=|(x_0-x, y_0)+(x, y_0-y)| \leqslant \leqslant \|x_0-x\|\|y_0\|+\|x\|\|y-y_0\|, \tag{57.33}$$

из которого сразу следует указанная непрерывность полускалярного произведения. Действительно, если $x \in U(x_0, \delta)$, $y \in U(y_0, \delta)$, то, заметив, что $\|x\| \leqslant \|x - x_0\| + \|x_0\| < \|x_0\| + \delta$, из (57.33) получим

$$|(x_0, y_0) - (x, y)| < \delta \|y_0\| + (|x_0| + \delta)\delta.$$

Отсюда следует, что при любом фиксированном числе $\varepsilon > 0$ всегда можно выбрать $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ так, что при $x \in U(x_0, \delta)$, $y \in U(y_0, \delta)$ выполняется неравенство $|(x_0, y_0) - (x, y)| < \varepsilon$; для этого достаточно выбрать $\delta > 0$ так, чтобы $\delta \|y_0\| + (\|x_0\| + \delta)\delta < \varepsilon$; это, очевидно, всегда возможно. $\square$

В пространстве X с полускалярным произведением можно говорить о сходимости рядов по полунорме, порожденной полускалярным произведением: ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$, $x_n \in X$, $x = 1, 2, \ldots$, называется *сходящимся*, если последовательность его частичных сумм $s_n = \sum\limits_{k=1}^{n} x_n$ сходится по указанной полунорме к некоторому элементу $s \in X$, который называется суммой ряда: $s = \sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$.

Отметим, что сумма ряда в пространстве с полускалярным произведением определена неоднозначно. Однако, если $s = \sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ и $s^* = \sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$, т. е. s и s^* суть суммы одного и того же ряда, то $\|s^* - s\| = 0$ (см. п. 57.5), и потому для любого элемента $a \in X$ имеет место равенство $(s^*, a) = (s, a)$. Действительно, в силу неравенства Коши — Шварца для полускалярного произведения

$$|(s^*, a) - (s, a)| = |(s^* - s, a)| \leqslant \|s^* - s\| \|a\| = 0.$$

Из непрерывности полускалярного произведения во всем пространстве следует, например, что ряды в пространстве с полускалярным произведением можно умножать почленно не только на числовые множители, но и на элементы самого пространства. Докажем это.

Лемма 12. *Пусть в пространстве X с полускалярным произведением задан сходящийся ряд*

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n = s, \quad x_n \in X, \quad n = 1, 2, \ldots.$$

Тогда для всякого элемента $a \in X$ числовой ряд, получающийся из данного почленным умножением его на a, также сходится и

$$\sum_{n=1}^{\infty} (x_n, a) = (s, a).$$

Иначе говоря, для сходящегося ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ и любого элемента $a \in X$ справедливо равенство

$$\sum_{n=1}^{\infty} (x_n, a) = \left(\sum_{n=1}^{\infty} x_n, a \right).$$

Доказательство. Поскольку

$$s = \lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} x_k,$$

то

$$\sum_{n=1}^{\infty} (x_n, a) = \lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} (x_k, a) = \lim_{n \to \infty} \left(\sum_{k=1}^{n} x_k, a \right) = \\ = \left(\lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} x_k, a \right) = (s, a).$$

Пример. Рассмотрим пространство $RL_2[a, b]$ из примера 3 п. 57.8. Пусть ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(t)$ функций $f_n \in RL_2[a, b]$ сходится в этом пространстве к функции $f \in RL_2[a, b]$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(t) = f(t), \quad t \in [a, b],$$

т. е. последовательность частичных сумм

$$s_n(t) = \sum_{k=1}^{n} f_k(t)$$

этого ряда сходится к функции f в смысле среднего квадратичного:

$$\lim_{n \to \infty} \int_a^b [f(t) - s_n(t)]^2 \, dt = 0.$$

Тогда для любой функции $\varphi(x) \in RL_2[a, b]$ согласно лемме 12

$$(f, \varphi) = \sum_{n=1}^{\infty} (f_n, \varphi),$$

т. е.

$$\int_a^b f(x) \varphi(x) \, dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b f_n(x) \varphi(x) \, dx.$$

В частности, при $\varphi=1$

$$\int_a^b f(x)\,dx=\sum_{n=1}^{\infty}\int_a^b f_n(x)\,dx.$$

Иначе говоря,

$$\int_a^b\left[\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)\right]dx=\sum_{n=1}^{\infty}\int_a^b f_n(x)\,dx.$$

Итак, *если ряд функций с интегрируемым квадратом на отрезке* $[a, b]$ *сходится на нем в смысле среднего квадратичного к некоторой функции также с интегрируемым квадратом на* $[a, b]$, *то ряд можно почленно интегрировать.*

Поскольку из равномерной сходимости последовательности непрерывных функций вытекает сходимость этой последовательности к той же функции и в смысле среднего квадратичного (см. п. 57.4), то из доказанного здесь утверждения следует, что *если ряд непрерывных функций сходится на отрезке равномерно, то его можно почленно интегрировать.*

Этот результат был получен нами ранее другим путем в главе о рядах (см. теорему 9 в п. 36.4).

Определение 36. *Два линейных пространства* X *и* Y *со скалярным (полускалярным) произведением называются изоморфными, если они изоморфны как линейные пространства, и отображение* f, *отображающее пространство* X *на пространство* Y *и осуществляющее этот изоморфизм, сохраняет скалярное произведение (полускалярное произведение), т. е. для любых двух элементов* $x\in X$ *и* $y\in X$ *выполняется равенство*

$$(x,\ y)=(f(x),\ f(y)).$$

Два изоморфных линейных пространства со скалярным (полускалярным) произведением могут отличаться лишь природой своих элементов, а не метрическими свойствами, поэтому в дальнейшем изоморфные линейные пространства со скалярным (полускалярным) произведением часто не будут различаться.

Поясним это на примере. Пусть X и Y^* — линейные пространства со скалярным (полускалярным) произведением и пусть f — изоморфное отображение пространства X на множество $Y\subset Y^*$. Тогда, «отождествляя» элементы пространства X с соответствующими им элементами множества Y, можно рассматривать пространство X как подпространство пространства Y^*. Под этим понимается (сравните с соответствующими конструкциями в п. 57.1 и п. 57.5) рассмотрение линейного пространства X^*, состоящего из элементов пространства X и элементов множества $Y^*\setminus Y$. При этом в пространстве X^* операции сложения элементов и умножения их на число вводятся так же, как это было сделано после определения 27 в п. 57.5, а скалярное (полускалярное) произведение $(x, y)_{X^*}$, $x \in X^*$, $y \in X^*$ определяется в пространстве через скалярное (полускалярное) произведение в пространстве Y^* посредством биекции $F : X^* \to Y^*$, задаваемое формулой (57.19), следующим образом:

$$(x, y)_{X^*} = (F(x), F(y)),$$

где в правой части стоит скалярное (полускалярное) произведение в пространстве Y^*. Легко проверить, что пространство X^* изоморфно пространству Y^*.

Упражнения 22. Доказать, что все n-мерные линейные пространства со скалярным произведением изоморфны между собой.

22. Доказать, что всякое n-мерное линейное пространство со скалярным произведением полно в смысле метрики, порожденной скалярным произведением.

Определение 37. *Линейное пространство со скалярным произведением, полное в смысле метрики, порожденной заданным скалярным произведением, называется гильбертовым*) пространством.*

Просто же линейное пространство со скалярным произведением называют также *предгильбертовым пространством.* Это название оправдывается следующей теоремой.

Теорема 4. *Всякое предгильбертово пространство X содержится и плотно в некотором гильбертовом пространстве X^*.*

Доказательство. Согласно теореме 1 п. 57.1 и теореме 3 п. 57.6, достаточно показать, что на пополнение X^* линейного нормированного пространства X можно продолжить с X скалярное произведение с сохранением свойств $1^\circ - 4^\circ$. Это можно сделать с помощью предельного перехода. Действительно, поскольку $\bar{X} = X^*$, то для любой пары точек $x \in X^*$ и $y \in X^*$ существуют последовательности точек $x_n \in X$, $y_n \in X$, $n = 1, 2, \ldots$, такие, что

$$\lim_{n \to \infty} x_n = x, \quad \lim_{n \to \infty} y_n = y.$$

Покажем, что существует $\lim\limits_{n \to \infty} (x_n, y_n)$. В самом деле, из неравенства (57.33) следует, что для всех натуральных m и n

$$|(x_m, y_m) - (x_n, y_n)| \leq \|x_m - x_n\| \|y_m\| + \|x_n\| \|y_m - y_n\|.$$

Так как в силу сходимости последовательности $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ ограничены по норме и являются фундаментальными, то из этого неравенства следует, что числовая последовательность $\{(x_n, y_n)\}$ — также фундаментальная и, следовательно, сходится.

Положим, по определению, $(x, y) = \lim\limits_{n \to \infty} (x_n, y_n)$. Легко проверить, используя предельный переход, что это определение не зависит от выбора последовательностей $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$, таких, что

*) Д. Гильберт (1862—1943) — немецкий математик.

$x_n \to x$, $y_n \to y$, и что для таким образом определенной функции (x, y) выполняются свойства $1°-4°$ скалярного произведения. □

Полученное гильбертово пространство называется *пополнением исходного предгильбертова пространства.*

Примером гильбертова пространства является n-мерное евклидово пространство (см. (57.8)). Другие примеры будут рассмотрены далее.

Упражнение 23. Доказать, что предгильбертово пространство, изоморфное гильбертову пространству, само является гильбертовым.

57.10. ПРОСТРАНСТВО L_2

Напомним (см. пример 3 в п. 57.8), что линейное пространство непрерывных на отрезке $[a, b]$ функций со скалярным произведением, определенным по формуле (57.30) обозначается через $CL_2[a, b]$.

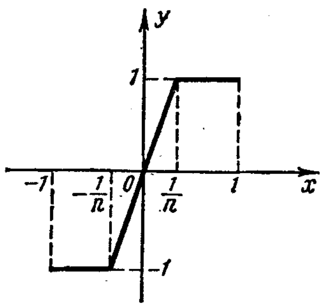


Рис. 225

Норма в пространстве $CL_2[a, b]$ определяется (57.31).

Лемма 13. *Пространство* $CL_2[a, b]$ *не является гильбертовым.*

Доказательство. Чтобы убедиться, что всякое пространство CL_2 $[a, b]$ не является полным, достаточно рассмотреть пространство $CL_2[a, b]$ для некоторого фиксированного отрезка (почему?). Возьмем для определенности отрезок $[-1, 1]$ и приведем пример фундаментальной в пространстве $CL_2[-1, 1]$ последовательности функций, не сходящейся в этом пространстве.

Положим

$$f_n(x) = \begin{cases} -1, & \text{если } -1 \leq x \leq -\frac{1}{n}, \\ nx, & \text{если } -\frac{1}{n} \leq x \leq \frac{1}{n}, \\ 1, & \text{если } \frac{1}{n} \leq x \leq 1 \end{cases} \tag{57.34}$$

$$n = 1, 2, \ldots$$

(рис. 225). Очевидно, что функции $f_n(x)$, $n = 1, 2, \ldots$, непрерывны на отрезке $[-1; 1]$. Замечая далее, что $|f_n(x)| \leq 1$, имеем для $m > n$

$$\|f_n - f_m\|^2 = \int_{-1}^{1} |f_n(x) - f_m(x)|^2 \, dx = \int_{-1/n}^{1/n} |f_n(x) - f_m(x)|^2 \, dx \leq$$

$$\leq \int_{-1/n}^{1/n} [|f_n(x)| + |f_m(x)|]^2 \, dx \leq 4 \int_{-1/n}^{1/n} dx = \frac{8}{n},$$

откуда, очевидно, следует, что последовательность (57.34) — фундаментальная в пространстве $CL_2[a, b]$.

Действительно, если задано $\varepsilon > 0$, то выбирая n_0 так, что $8/n_0 < \varepsilon$ для всех $n \geq n_0$ и всех $m > n$, будем иметь $\|f_n - f_m\| < \frac{8}{n} \leq \frac{8}{n_0} < \varepsilon$. Поскольку

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \begin{cases} -1 & \text{при} \quad -1 \leq x < 0, \\ 0 & \text{при} \quad x = 0, \\ 1 & \text{при} \quad 0 < x \leq 1, \end{cases}$$

то естественно ожидать, что если последовательность $\{f_n\}$ сходится в смысле среднего квадратичного, то она сходится к той же функции, к которой она сходится поточечно, т. е. к функции (см. рис. 226):

$$f(x) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} -1 & \text{при} \quad -1 \leq x < 0, \\ 0 & \text{при} \quad x = 0, \\ 1 & \text{при} \quad 0 < x \leq 1. \end{cases}$$

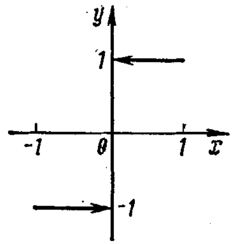


Рис. 226

Однако эта функция f разрывна и потому $f \notin CL_2[0, 1]$. Следовательно, естественно ожидать, что последовательность $\{f_n\}$ не имеет предела в пространстве $CL_2[a, b]$. Покажем это.

Нетрудно убедиться, что последовательность (57.34) сходится на отрезке $[-1, 1]$ в смысле полунормы (57.31) к функции f. Действительно,

$$\|f - f_n\|^{2\,*)} = \int_{-1}^{1} |f(x) - f_n(x)|^2 dx = \int_{-1/n}^{1/n} |f(x) - f_n(x)|^2 dx \leq$$
$$\leq \int_{-1/n}^{+1/n} [|f(x)| + |f_n(x)|^2] dx \leq 4 \int_{-1/n}^{+1/n} dx = \frac{8}{n} \to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty,$$
$$\text{ибо} \quad |f(x)| \leq 1, \quad |f_n(x)| \leq 1, \quad x \in [-1, 1]. \tag{57.35}$$

Предел по полунорме не единственен и поэтому возникает вопрос: не существует ли еще и непрерывной функции, которая также является пределом последовательности $\{f_n\}$ в смысле среднего квадратичного. Покажем, что такой функции не существует. Допустим противное. Пусть существует такая непрерывная на отрезке $[-1, 1]$ функция $g(x)$, что

$$\lim_{n\to\infty} \|g - f_n\| = 0. \tag{57.36}$$

---

*) Поскольку $f - f_n$ уже не является непрерывной функцией, то здесь символ $\|\varphi\|$ обозначает уже полунорму (57.31) функции φ. Это следует иметь в виду и в дальнейших рассмотрениях.

Тогда

$$\|f-g\|=\|(f-f_n)+(f_n-g)\|\leqslant\|f-f_n\|+\|f_n-g\|,$$

где оба слагаемых правой части в силу (57.35) и (57.36) стремятся к нулю при $n\to\infty$, а левая часть не зависит от n, следовательно,

$$\int_{-1}^{1}|f(x)-g(x)|^2\,dx=\|f-g\|^2=0;$$

тем более

$$\int_{-1}^{0}|f(x)-g(x)|^2\,dx=0,\quad \int_{0}^{1}|f(x)-g(x)|^2\,dx=0. \tag{57.37}$$

Рассмотрим, например, случай $x\geqslant 0$. Поскольку функции f и g непрерывны на интервале $(0, 1)$, то в силу (57.37) они совпадают на этом интервале (см. свойство 9 определенного интеграла в п. 28.1). Поэтому

$$g(+0)=\lim_{x\to+0}g(x)=\lim_{x\to+0}f(x)=1.$$

Аналогично из рассмотрения случая $x\leqslant 0$ будем иметь

$$g(-0)=\lim_{x\to-0}f(x)=-1,$$

т. е. g — разрывная функция.

Полученное противоречие и доказывает утверждение. □

Итак, линейное пространство $CL_2[a, b]$ не полно. Однако мы знаем, что всякое предгильбертово пространство можно дополнить до полного, в частности это можно сделать и с рассматриваемым пространством. Мы вернемся к этому вопросу несколько позже, а сейчас рассмотрим еще одно пространство.

Попробуем взять более широкий класс функций, чем непрерывные, а именно рассмотрим линейное пространство $RL_2[a, b]$ функций с интегрируемым на некотором отрезке $[a, b]$ квадратом (см. пример 3 в п. 57.8) с полускалярным произведением, задаваемым формулой (57.30), и сконструируем из этого пространства пространство со скалярным произведением.

Определение 38. *Две функции f и g с интегрируемым на отрезке $[a, b]$ квадратом назовем эквивалентными, если полунорма* (57.31) *их разности равна нулю*:

$$\|f-g\|=\sqrt{\int_a^b[f(x)-g(x)]^2\,dx}=0. \tag{57.38}$$

Эквивалентность функций в смысле этого определения будем обозначать символом

$$f\sim g. \tag{57.39}$$

Употребление в этом случае того же символа, который употреблялся для асимптотического равенства функций, т. е. для обозначения их эквивалентности в смысле порядка их изменения (см. определение 5 в п. 8.2), не приведет к недоразумению, так как всегда будет ясно, о какой эквивалентности функций идет речь.

Отношение эквивалентности (57.39) обладает следующими свойствами:

1°) $f \sim f$;

2°) если $f \sim g$, то $g \sim f$;

3°) если $f \sim g$ и $g \sim h$, то $f \sim h$.

Разобьем множество всех функций с интегрируемым на отрезке $[a, b]$ квадратом, т. е. пространство $RL_2[a, b]$ на классы эквивалентных между собой функций. Эти классы будем называть классами эквивалентности и обозначать заглавными латинскими буквами F, G, H, ..., а их совокупность — через $\mathfrak{F}$. Каждую функцию f, принадлежащую классу эквивалентности F, будем называть его представителем. Кратко выражая процесс построения множества $\mathfrak{F}$, говорят, что оно получается из множества всех функций с интегрируемым квадратом «отождествлением» его эквивалентных элементов. Итак, теперь каждое множество эквивалентных функций рассматривается как один элемент множества $\mathfrak{F}$.

Для каждого $F \in \mathfrak{F}$ и каждого действительного числа λ элемент λF определяется следующим образом. Выберем какого-либо представителя $f \in F$, тогда функция λf является также функцией с интегрируемым на отрезке $[a, b]$ квадратом и, следовательно, принадлежит некоторому классу эквивалентности, т. е. является представителем некоторого элемента из $\mathfrak{F}$, который и определяется как элемент λF.

Чтобы показать, что это определение корректно, надо доказать, это элемент λF не зависит от выбора функции $f \in F$. Действительно, если $f \in F$ и $f_1 \in F$, то $f_1 \sim f$, т. е. $\|f_1 - f\| = 0$. Следовательно, $\|\lambda f_1 - \lambda f\| = |\lambda| \|f_1 - f\| = 0$, а это означает, что $\lambda f_1 \sim \lambda f$. Поэтому функции λf_1 и λf принадлежат одному и тому же классу эквивалентности, т. е. одному и тому же элементу множества $\mathfrak{F}$.

Определим теперь операцию сложения элементов множества $\mathfrak{F}$. Пусть $F \in \mathfrak{F}$ и $G \in \mathfrak{F}$. Выберем какие-либо функции $f \in F$ и $g \in G$. Элемент $F + G$ определим как класс эквивалентности, содержащий элемент $f + g$. Это определение однозначно, так как если

$$f \in F, \quad f_1 \in F, \; g \in G, \quad g_1 \in G$$

и, следовательно,

$$f_1 \sim f, \quad g_1 \sim g,$$

то

$$\|f_1 - f\| = 0, \quad \|g_1 - g\| = 0.$$

Поэтому

$$0 \leqslant \|(f_1+g_1)-(f+g)\| \leqslant \|f_1-f\|+\|g_1-g\|=0,$$

т. е.

$$f_1+g_1 \sim f+g$$

и, таким образом, функция f_1+g_1 принадлежит тому же классу эквивалентности, что и функция $f+g$.

Итак, для того чтобы сложить элементы из множества $\mathfrak{F}$ или умножить их на число, надо выбрать их представителей и проделать над ними указанную операцию; в результате получится некоторая функция; класс эквивалентности, представителем которого является эта функция, и будет результатом рассматриваемой операции.

Множество $\mathfrak{F}$ с введенными в нем операциями λF и $F+G$ образует линейное пространство. Действительно, для этих операций выполняются свойства 1°, 2°, 3° определения 11 в п. 57.2. Проверим, например, что для любых $F \in \mathfrak{F}$, $G \in \mathfrak{F}$ и любого числа λ справедливо равенство

$$\lambda(F+G)=\lambda F+\lambda G. \tag{57.40}$$

Если $f \in F$ и $g \in G$, то, согласно определению сложения элементов из множества $\mathfrak{F}$, получим $f+g \in F+G$, $\lambda(f+g) \in \lambda(F+G)$. Поскольку f и g — элементы линейного пространства, то $\lambda(f+g)=$ $=\lambda f+\lambda g$. В силу же правила умножения элементов из $\mathfrak{F}$ на число и сложения этих элементов

$$\lambda f \in \lambda F, \quad \lambda g \in \lambda G, \quad \lambda f+\lambda g \in \lambda F+\lambda G.$$

Таким образом, классы эквивалентности $\lambda(F+G)$ и $\lambda F+\lambda G$ содержат общий элемент $\lambda(f+g)=\lambda f+\lambda g$ и, следовательно, совпадают. Равенство (57.40) доказано.

Аналогично проверяется и выполнение остальных свойств линейных пространств (см. определение 11 в п. 57.2) для операций сложения и умножения на число элементов из множества $\mathfrak{F}$.

Отметим, что нулем полученного линейного пространства $\mathfrak{F}$ является класс эквивалентности, содержащий функцию, тождественно равную нулю на отрезке $[a, b]$. Этот класс состоит из тех и только тех функций f, которые эквивалентны нулю, иначе говоря, для которых полунорма (57.31) равна нулю: $\|f\|=0$, т. е.

$$\int_a^b f^2(x)\,dx=0.$$

Определим теперь в линейном пространстве $\mathfrak{F}$ скалярное умножение. Пусть $F \in \mathfrak{F}$, $G \in \mathfrak{F}$; выберем из классов F и G каких-либо представителей $f \in F$ и $g \in G$ и положим

$$(F, G) \overset{\text{def}}{=} (f, g). \tag{57.41}$$

Таким образом, для того чтобы скалярно перемножить элементы пространства $\mathfrak{F}$, надо выбрать их представителей и скалярно умножить их друг на друга (в смысле полускалярного произведения (57.30)). Полученный результат и будет равен скалярному произведению рассматриваемых элементов из множества $\mathfrak{F}$.

Определение (57.41) также не зависит от выбора функций из классов эквивалентности. Действительно, если

$$f \in F,\ f_1 \in F,\ g \in G,\ g_1 \subset G,$$

то

$$f_1 \sim f,\ g_1 \sim g$$

и, следовательно,

$$\|f_1 - f\| = 0,\ \|g_1 - g\| = 0.$$

Поэтому, используя неравенство Коши — Шварца (57.28) получим

$$0 \leqslant |(f_1, g_1) - (f, g)| = |[(f_1, g_1) - (f, g_1)] + [(f, g_1) - (f, g)]| \leqslant$$
$$\leqslant |(f_1 - f_1 g_1)| + |(f_1, g_1 - g)| \leqslant \|f_1 - f\| \|g_1\| + \|f\| \|g_1 - g\| = 0.$$

Таким образом $(f_1, g_1) = (f, g)$.

Функция (57.41) удовлетворяет всем свойствам скалярного умножения. Действительно, пусть $f \in F \in \mathfrak{F}$, $g \in G \in \mathfrak{F}$, $h \in H \in \mathfrak{F}$, λ и μ — числа, тогда

$$(\lambda F + \mu G, H) = (\lambda f + \mu g, h) = \lambda (f, h) + \mu (g, h) = \lambda (F, H) + \mu (G, H),$$
$$(F, G) = (f, g) = (g, f) = (G, F),$$
$$(F, F) = (f, f) \geqslant 0.$$

Наконец, если $(F, F) = 0$, то это означает, что для любой функции $f \in F$ имеем $(f, f) = \|f\|^2 = 0$, т. е. $f \sim 0$, а это, как отмечалось выше, и означает, что элемент F является нулевым элементом пространства $\mathfrak{F}$.

Определение 39. *Линейное пространство $\mathfrak{F}$ со скалярным произведением* (57.41) *называется пространством* $\widetilde{RL}_2 = \widetilde{RL}_2[a, b]$.

Отметим, что норма $\|F\|_{\widetilde{RL}_2}$ элемента F в пространстве $\widetilde{RL}_2[a, b]$, согласно (57.27) и (57.41), определяется через полунорму $\|f\|_{RL_2}$ функции $f \in F$ по формуле

$$\|F\|_{\widetilde{RL}_2} = \|f\|_{RL_2} = \left[\int_a^b f^2(x)\, dx\right]^{1/2},\ f \in F, \tag{57.42}$$

причем в силу доказанной однозначности определения скалярного произведения это определение однозначно, т. е. не зависит от выбора функции $f \in F$.

Замечание 1. Элементами пространства $\widetilde{RL}_2[a, b]$ являются классы эквивалентных функций, однако в математической литературе часто встречается выражение «функция из пространства $\widetilde{RL}_2$». Это условное выражение означает просто, что речь идет о функции с интегрируемым квадратом и, следовательно, принадлежащей одному из рассматриваемых классов эквивалентных функций, т. е. являющейся его представителем. Это выражение удобно, так как операция сложения, умножения на число и операция скалярного умножения классов эквивалентных функций сводятся к соответствующей операции над их представителями, причем результат не зависит от выбора указанных представителей. Это обстоятельство в известном смысле оправдывает также и часто употребляющееся условное выражение «пространство $\widetilde{RL}_2[a, b]$ состоит из функций с интегрируемым квадратом»; в этом случае пространство $\widetilde{RL}_2$ нередко обозначается просто через RL_2.

Каждая непрерывная на отрезке $[a, b]$ функция, будучи функцией с интегрируемым квадратом на этом отрезке, принадлежит некоторому классу эквивалентности, т. е. некоторому элементу пространства $\widetilde{RL}_2[a, b]$. При этом в указанном классе нет другой непрерывной функции, ибо если непрерывные функции эквивалентны, то они равны.

Изучим отображение, ставящее в соответствие каждой непрерывной функции $f \in CL_2[a, b]$ класс эквивалентности $F \in \widetilde{RL}_2[a, b]$, к которому она принадлежит: $f \in F$. Это отображение называется *естественным отображением* $CL_2[a, b]$ в $\widetilde{RL}_2[a, b]$. В силу самого определения операций сложения элементов (являющихся классами эквивалентности), умножения их на число и их скалярного произведения в пространстве $\widetilde{RL}_2[a, b]$, сводящихся к таким же действиям над представителями классов эквивалентности, естественное отображение является линейным и сохраняет скалярное произведение. Оно является взаимно однозначным отображением (инъекцией) пространства $CL_2[a, b]$ в пространство $\widetilde{RL}_2[a, b]$, так как если бы при этом отображении две непрерывные функции отобразились в один и тот же элемент пространства $\widetilde{RL}_2[a, b]$, т. е. в один и тот же класс эквивалентности, то они обе принадлежали бы этому классу. А это, как было отмечено выше, возможно только в случае, если они являются одной и той же непрерывной функцией.

Для изучения его дальнейших свойств предварительно докажем три леммы об аппроксимации функций. В них вместо $\|\cdot\|_{RL_2}$ будем для краткости просто писать $\|\cdot\|$.

Лемма 14. *Пусть квадрат функции f интегрируем на конечном или бесконечном промежутке с концами a и b, $-\infty \leq a < b \leq +\infty$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует такая финитная ступенчатая функция* φ (см. п. 55.2), *равная нулю вне указанного промежутка, что*

$$\|f - \varphi\| < \varepsilon.$$

Доказательство. Предположим для простоты, что функция f интегрируема по Риману на любом отрезке $[\xi, \eta]$, $a < \xi <$

$<\eta<b$, т. е. что внутри рассматриваемого промежутка с концами a и b нет особых точек функции f (см. п. 55.1). Общий случай легко сводится к этому.

Пусть задано $\varepsilon>0$. Зафиксируем так ξ и η, чтобы

$$\int_a^\xi f^2(x)\,dx+\int_\eta^b f^2(x)\,dx<\frac{\varepsilon^2}{2}. \tag{57.43}$$

Это возможно в силу того, что интеграл по отрезку $[a, b]$ от функции f^2 сходится. Функция f, будучи интегрируемой, по Риману, на отрезке $[\xi, \eta]$, ограничена на нем:

$$|f(x)|\leqslant M, \quad \xi\leqslant x\leqslant\eta, \tag{57.44}$$

M — постоянная.

Согласно лемме 2 в п. 55.2 для данного $\varepsilon>0$ существует такая финитная ступенчатая функция φ, что ее носитель $\operatorname{supp}\varphi$ содержится в отрезке $[\xi, \eta]$, т. е. $\operatorname{supp}\varphi\subset[\xi, \eta]$,

$$|\varphi(x)|\leqslant M, \quad x\in[\xi, \eta] \tag{57.45}$$

(это следует из формулы (55.9)) и

$$\int_\xi^\eta |f(x)-\varphi(x)|\,dx<\frac{\varepsilon^2}{4M}. \tag{57.46}$$

Применив последовательно неравенства (57.43), (57.44), (57.45) и (57.46), получим:

$$\|f-\varphi\|^2=\int_a^b [f(x)-\varphi(x)]^2\,dx=\int_a^\xi f^2(x)\,dx+\int_\eta^b f^2(x)\,dx+$$
$$+\int_\xi^\eta [f(x)-\varphi(x)]^2\,dx\leqslant\frac{\varepsilon^2}{2}+\int_\xi^\eta [|f(x)|+|\varphi(x)|]\,|f(x)-\varphi(x)|\,dx\leqslant$$
$$<\frac{\varepsilon^2}{2}+2M\int_\xi^\eta |f(x)-\varphi(x)|\,dx<\frac{\varepsilon^2}{2}+2M\frac{\varepsilon^2}{4M}=\varepsilon^2.$$

Отсюда следует, что $\|f-\varphi\|<\varepsilon$. □

Лемма 15. Пусть φ — финитная ступенчатая функция, равная нулю вне отрезка $[a, b]$; тогда для любого $\varepsilon>0$ существует такая финитная непрерывная на всей числовой оси функция g, также равная нулю вне указанного отрезка, что

$$\|g-\varphi\|<\varepsilon.$$

Доказательство. Достаточно рассмотреть случай характеристической функции полуинтервала, ибо всякая финитная ступенчатая функция является конечной линейной комбинацией подобных функций (см. п. 55.2). Итак, пусть задана функция

$$\chi(x)=\begin{cases}1 & \text{для } a\leqslant x<b,\\ 0 & \text{для } x<a \text{ и } x\geqslant b,\end{cases}$$

и задано $\varepsilon>0$. Возьмем какое-либо $\eta>0$ так, чтобы выполнялись неравенства

$$\eta<\frac{\varepsilon^2}{8},\quad \eta<\frac{b-a}{2},$$

и рассмотрим функцию $g(x)$, график которой изображен на рис. 227.

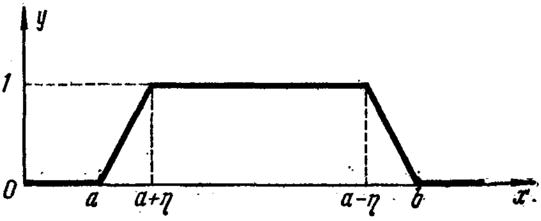


Рис. 227

При желании ее можно аналитически описать следующим образом

$$g(x)=\begin{cases}0 & \text{для } x<a \text{ и } x>b,\\ \dfrac{x-a}{\eta} & \text{для } a\leqslant x\leqslant a+\eta,\\ 1 & \text{для } a+\eta<x<b-\eta,\\ \dfrac{b-x}{\eta} & \text{для } b-\eta\leqslant x\leqslant b.\end{cases}$$

Очевидно, что $g(x)$ является финитной непрерывной на всей числовой оси функцией. Поскольку $|\chi(x)|\leqslant 1$, $|g(x)|\leqslant 1$, $-\infty<x<+\infty$, то

$$\|\chi-g\|^2=\int_a^b[\chi(x)-g(x)]^2\,dx=\int_a^{a+\eta}[\chi(x)-g(x)]^2\,dx+$$
$$+\int_{b-\eta}^{b}[\chi(x)-g(x)]^2\,dx\leqslant\int_a^{a+\eta}[|\chi(x)|+|g(x)|]^2\,dx+$$
$$+\int_{b-\eta}^{b}[|\chi(x)|+|g(x)|]^2\,dx\leqslant 4\int_a^{a+\eta}dx+4\int_{b-\eta}^{b}dx<8\eta<\varepsilon^2,$$

т. е. $\|\chi-g\|<\varepsilon$. $\square$

Лемма 16. Если f является функцией с интегрируемым квадратом на отрезке $[a, b]$, то она на этом отрезке является пределом в смысле среднего квадратичного некоторой последовательности непрерывных на всей числовой оси финитных функций f_n, $n=1, 2, \ldots$, носители которых лежат на отрезке $[a, b]$:

$$\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|^2 = \lim_{n\to\infty} \int_a^b [f_n(x) - f(x)]^2\, dx = 0. \tag{57.47}$$

Доказательство. Каково бы ни было $\varepsilon > 0$, в силу леммы 14 существует такая финитная ступенчатая функция φ, равная нулю вне отрезка $[a, b]$, что

$$\|f - \varphi\| < \frac{\varepsilon}{2},$$

а в силу леммы 15 для этой ступенчатой функции φ найдется такая функция g, непрерывная на всей числовой оси и равная нулю вне отрезка $[a, b]$, что

$$\|\varphi - g\| < \frac{\varepsilon}{2},$$

и, следовательно, (рис. 228)

$$\|f - g\| \leqslant \|f - \varphi\| + \|\varphi - g\| < \varepsilon.$$

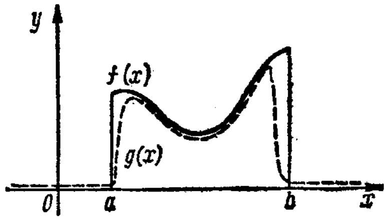


Рис. 228

Выбирая теперь некоторую числовую последовательность $\varepsilon_n \to +0$ при $n\to\infty$, $n=1, 2, \ldots$, и обозначая через f_n соответствующую числу ε_n в силу указанной конструкции, функцию, непрерывную на всей числовой оси и равную нулю вне отрезка $[a, b]$, получим искомую последовательность $\{f_n\}$, удовлетворяющую условию (57.47) (определение предела последовательности функций в смысле среднего квадратичного см. в п. 57.5) и такую, что $\operatorname{supp} f_n \subset [a, b]$ для всех $n=1, 2, \ldots$. $\square$

Определение 40. *Подмножество пространства $CL_2[a, b]$ состоящее из функций f, обращающихся в ноль на концах отрезка $[a, b]$: $f(a)=f(b)=0$, называется пространством $\mathring{C}L_2[a, b]$.*

Очевидно, что лемма 16 означает, что любую функцию с интегрируемым на отрезке $[a, b]$ квадратом можно сколь угодно точно в смысле среднего квадратичного приблизить функциями из $\mathring{C}L_2[a, b]$. Ясно, что $\mathring{C}L_2[a, b]$ является линейным предгильбертовым пространством, и

$$\mathring{C}L_2[a, b] \subset CL_2[a, b]. \tag{57.48}$$

Вернемся теперь к естественному отображению $CL_2[a, b] \to \widetilde{RL}_2[a, b]$.

Теорема 5. *Естественное отображение $CL_2[a, b] \to \widetilde{RL}_2[a, b]$, т. е. отображение, ставящее в соответствие каждой непрерывной* *на отрезке* $[a, b]$ *функции класс эквивалентности, к которому она принадлежит, является изоморфным отображением пространства* $CL_2[a, b]$ *в* $\widetilde{RL}_2[a, b]$, *причем образ пространства* $\mathring{C}L_2[a, b]$ *(а, следовательно, в силу* (57.48) *и всего пространства* $CL_2[a, b]$) *плотен в* $\widetilde{RL}_2[a, b]$.

Доказательство теоремы 5. Обозначим через Φ естественное отображение пространства $CL_2[a, b]$ в пространства $\widetilde{RL}_2[a, b]$, т. е. отображение, ставящее в соответствие каждой непрерывной на отрезке $[a, b]$ функции f класс эквивалентных функций с интегрируемым на этом отрезке квадратом, которому она принадлежит, иначе говоря, класс эквивалентности, представителем которого она является. Таким образом, если

$$f \in CL_2[a, b] \quad \text{и} \quad f \in F \in \widetilde{RL}_2[a, b],$$

то $\Phi(f) = F$.

Пусть $F = \Phi(f) = 0$; тогда $\|F\| = 0$, но $f \in F$, поэтому и $\|f\| = 0$. По свойству нормы отсюда следует, что $f = 0$, т. е. ядро отображения Φ состоит только из нулевого элемента. Поскольку естественное отображение Φ линейно, то оно взаимно однозначно отображает пространство $CL_2[a, b]$ в пространство $\widetilde{RL}_2[a, b]$ (см. лемму 2 в п. 57.2).

Покажем, что образ пространства $\mathring{C}L_2[a, b]$ при этом отображении является плотным в пространстве $\widetilde{RL}_2[a, b]$ множеством. Пусть $F \in \widetilde{RL}_2[a, b]$ и функция f является представителем элемента F, т. е. $f \in F$. Поскольку f является функцией с интегрируемым на отрезке $[a, b]$ квадратом, то, согласно лемме 3, она является пределом в смысле среднего квадратичного некоторой последовательности непрерывных на отрезке $[a, b]$ функций f_n, обращающихся в ноль на его концах (см. (57.47)), т. е. $f_n \in \mathring{C}L_2[a, b]$, $n = 1, 2, \ldots$. Если $f_n \in F_n \in \widetilde{RL}_2[a, b]$, то, согласно определению нормы в пространстве $\widetilde{RL}_2[a, b]$, получим

$$\|F_n - F\|_{\widetilde{RL}_2} = \|f_n - f\|_{RL_2},$$

где справа, как обычно, стоит полунорма (57.31). Отсюда в силу равенства (57.47) получаем

$$\lim_{n \to \infty} \|F_n - F\| = 0. \tag{57.49}$$

Поскольку класс эквивалентности F являлся произвольно фиксированным элементом пространства $\widetilde{RL}_2[a, b]$, а $F_n = \Phi(f_n)$, где f_n — непрерывная на отрезке $[a, b]$ функция, обращающаяся в ноль на его концах, и, следовательно, $F_n \in \Phi(\mathring{C}L_2[a, b])$; $n = 1, 2, \ldots$, то равенство (57.49) и означает плотность образа множества $\mathring{C}L_2[a, b]$ в пространстве $\widetilde{RL}_2[a, b]$ при отображении Φ.

Для доказательства же плотности образа множества $\widetilde{C}L_2[a, b]$ при его естественном отображении в пространство $\widetilde{R}L_2[a, b]$ заметим, что из включения (57.48) следует очевидным образом, что

$$\Phi(\mathring{C}L_2[a, b]) \subset \Phi(CL_2[a, b]) \subset \widetilde{R}L_2[a, b].$$

А если в каком-либо метрическом пространстве X плотно множество A, т. е. $\bar{A} = X$ и $A \subset B \subset X$, то, конечно, множество B также плотно в X, ибо $\bar{A} \subset \bar{B} \subset X$ и так как $\bar{A} = X$, то и $\bar{B} = X$. Поэтому из плотности множества $\Phi(\mathring{C}L_2[a, b])$ в пространстве $\widetilde{R}L_2[a, b]$ следует и плотность в нем множества $\Phi(CL_2[a, b])$. □

Если отождествить каждую непрерывную функцию $f \in CL_2[a, b]$ с классом эквивалентных функций $F \in \widetilde{R}L_2[a, b]$, которому она принадлежит: $f \in F$, т. е. отождествить f с ее образом при естественном отображении Φ, то получим, что $CL_2[a, b]$ является подмножеством пространства $\widetilde{R}L_2[a, b]$:

$$\mathring{C}L_2[a, b] \subset \widetilde{R}L_2[a, b]. \tag{57.50}$$

Это включение называется *естественным вложением* пространства CL_2 в пространство $\widetilde{R}L_2$.

Итак, в силу (57.48) и (57.50) справедливы включения

$$\mathring{C}L_2[a, b] \subset CL_2[a, b] \subset \widetilde{R}L_2[a, b],$$

причем согласно теореме 5

$$\overline{\widetilde{C}L_2[a, b]} = \widetilde{R}L_2[a, b]$$

— множество $\mathring{C}L_2[a, b]$, а следовательно и $CL_2[a, b]$, плотны в пространстве $\widetilde{R}L_2[a, b]$.

Можно показать, что пространство $\widetilde{R}L[a, b]$ не является полным, т. е. не является гильбертовым пространством.

Задача 37. Доказать, что пространство $\widetilde{R}L_2[a, a]$ не является полным.

Выше было показано (см. п. 57.9), что всякое предгильбертово пространство можно дополнить до полного, т. е. до гильбертова пространства. В частности, это можно сделать и с пространством $\widetilde{R}L_2[a, b]$.

Определение 41. *Пополнение предгильбертова пространства* $\widetilde{R}L_2 = \widetilde{R}L_2[a, b]$ *называется пространством* $L_2 = L_2[a, b]$.

В силу определения пополнения

$$\widetilde{R}L_2[a, b] \subset L_2[a, b] \tag{57.51}$$

и $\widetilde{R}L_2[a, b]$ плотно в пространстве $L_2[a, b]$, т. е.

$$\overline{\widetilde{R}L_2[a, b]} = L_2[a, b].$$

В силу включений (57.48), (57.50) и (57.51) имеют место естественные вложения

$$\mathring{C}L_2[a, b] \subset CL_2[a, b] \subset \widetilde{R}L_2[a, b] \subset L_2[a, b]. \qquad (57.52)$$

Оказывается, что не только $\widetilde{R}L_2$ плотно в пространстве L_2, но и $\mathring{C}L_2$ плотно в L_2.

Теорема 6. *Пространство $\mathring{C}L_2[a, b]$ плотно в пространстве $L_2[a, b]$.*

Следствие. *Пространство $CL_2[a, b]$ плотно в пространстве $L_2[a, b]$.*

Доказательство теоремы 6. Пусть $f \in L_2[a, b]$ и пусть произвольно фиксировано $\varepsilon > 0$. Для простоты все элементы пространства $L_2[a, b]$ будем также обозначать строчными латинскими буквами, хотя они, вообще говоря, и не являются функциями. Поскольку пространство $L_2[a, b]$ является пополнением пространства $\widetilde{R}L_2[a, b]$, то существует такой элемент $g \in \widetilde{R}L_2[a, b]$, что

$$\|f-g\|_{L_2} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Согласно включению (57.52) и плотности множества $\mathring{C}L_2[a, b]$ в пространстве $\widetilde{R}L_2[a, b]$, существует такой элемент $h \in \mathring{C}L_2[a, b]$, что

$$\|g-h\|_{L_2} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Поэтому

$$\|f-h\|_{L_2} \leqslant \|f-g\|_{L_2} + \|g-h\|_{L_2} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Это и означает, что множество $\mathring{C}L_2[a, b]$ плотно в пространстве $L_2[a, b]$. □

Следствие очевидным образом вытекает из теоремы, так как (как это было показано при доказательстве теоремы 5), если подмножество A некоторого множества B, $A \subset B$, плотно в каком-то метрическом пространстве $X \supset B$, то и само множество B тем более плотно в X. В данном случае $\mathring{C}L_2[a, b] \subset CL_2[a, b]) \subset L_2[a, b]$ и $\mathring{C}L_2[a, b]$ плотно в $L_2[a, b]$. Поэтому $CL_2[a, b]$ также плотно в $L_2[a, b]$.

Упражнение 24. Доказать, что если X — метрическое пространство, $A \subset B \subset X$, множество A плотно в множестве B, а множество B плотно в пространстве X, то и множество A плотно в пространстве X.

Замечание 2. Если рассматривать пространство $L_2[a, b]$ как пространство, получающееся из пространства $\widetilde{R}L_2[a, b]$ конструкцией пополнения пространств, описанной в теоремах 1, 3 и 4 настоящего параграфа, то его элементами будут являться классы эквивалентных фундаментальных последовательностей, составленные из классов эквивалентных функций с интегрируемым квадратом. Если при этом произвести отождествление пространства CL_2 и RL_2 с их образами в L_2, как это указывалось выше, и тем самым считать, что

$$CL_2 \subset \widetilde{RL}_2 \subset L_2,$$

то окажется, что пространство L_2 состоит из непрерывных функций, из классов эквивалентных функций с интегрируемым квадратом, не содержащих непрерывных функций, и из «абстрактных элементов», представляющих собой указанные классы фундаментальных последовательностей. Можно, далее, условно в смысле замечания 1 «заменить» все элементы из пространства $\widetilde{RL}_2$ функциями — произвольно выбранными их представителями. Тогда пространство L_2 окажется состоящим из функций с интегрируемым квадратом и тех же абстрактных элементов, необходимо возникающих при процессе пополнения пространства $\widetilde{RL}_2$ ввиду его неполноты. Эта «условная замена» элементов пространства $\widetilde{RL}_2[a, b]$ их представителями отражает точное утверждение, что операции над классами эквивалентных функций сводятся к соответствующим операциям над их представителями в вышеуказанном смысле.

Оказывается, и это очень интересно и важно, что указанные абстрактные элементы можно рассматривать не как классы фундаментальных последовательностей классов эквивалентности, а как некоторые функции, точнее как классы эквивалентных функций в смысле определения 38, причем скалярное произведение для них также определяется формулами (57.30) и (57.41), только интеграл в этих формулах следует понимать не в смысле собственного или несобственного интеграла Римана, а в более общем смысле, в смысле так называемого интеграла Лебега. Рассмотрение этого вопроса выходит, однако, за рамки рассматриваемых методов и поэтому не будет излагаться в настоящем курсе. Его изложение можно найти, например, в замечательном учебнике С. М. Никольского «Курс математического анализа», т. I, II, 2-е изд., М., 1975.

З а м е ч а н и е 3. Определение пространства $L_2[a, b]$ естественным образом обобщается и на случай бесконечного промежутка. Рассмотрим для определенности всю числовую ось. Для двух непрерывных интегрируемых в квадрате на всей действительной оси функций φ и ψ скалярное произведение определим по формуле

$$(\varphi, \psi) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)\psi(x)\,dx. \tag{57.53}$$

Это определение корректно, ибо интеграл, стоящий справа, при сделанных относительно функций φ и ψ предположениях сходится, и даже абсолютно. Это сразу следует из неравенства

$$|\varphi(x)\psi(x)| \leqslant \frac{\varphi^2(x)+\psi^2(x)}{2}.$$

Свойства скалярного произведения для (57.53) легко проверяются. Можно показать аналогично случаю конечного промежутка, что получившееся при этом метрическое пространство непрерывных интегрируемых в квадрате функций, так же как и предгильбертово пространство, получающееся «отождествлением» эквивалентных функций с интегрируемым на всей числовой оси квадратом, не является полным в метрике, порожденной скалярным произведением (57.53). Пополнения этих пространств совпадают с точностью до изоморфизма и обозначаются через $L_2(-\infty, +\infty)$.

Упражнения. 25. Доказать, что функция $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}$ на отрезке $[0, 1]$ не является пределом в смысле среднего квадратичного последовательности непрерывных функций.

26. Доказать неэквивалентность понятий сходимости в среднем в смысле L_1 и в смысле L_2 для последовательности функций.

27. Доказать, что если последовательность интегрируемых на некотором отрезке функций равномерно на этом отрезке сходится к некоторой интегрируемой на нем функции, то указанная последовательность сходится в той же функции на рассматриваемом отрезке и в среднем как в смысле L_1, так и в смысле L_2.

28. Построить пример последовательности непрерывных на некотором отрезке функций, сходящейся на нем к некоторой непрерывной функции в среднем в смысле L_2, но не сходящейся равномерно на этом отрезке.

29. Построить пример последовательности неотрицательных непрерывных на отрезке функций, сходящейся на нем в среднем, но не сходящейся в смысле среднего квадратичного.

Задача 38. Доказать, что для любого p, $1 \leqslant p < +\infty$, и любого промежутка с концами в точках a и b, $-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty$, множество непрерывных на нем функций плотно в пространстве $\widetilde{RL}_p(a, b)$.

Мы описали различные типы пространств. В анализе в основном изучаются пространства, элементами которых являются функции. Такие пространства называются *функциональными*.

Для простоты в примерах рассматривались функции одного переменного. Подобным же образом, если взять линейное пространство функций, непрерывных на замыкании некоторого измеримого по Жордану множества $G \subset R^n$, ввести скалярное произведение по формуле $(\varphi, \psi) = \int \varphi\psi \, dG$ и пополнить получившееся пространство, то получим гильбертово пространство, которое обозначается $L_2(G)$.

При этом можно показать, что все таким образом полученные пространства $L_2(G)$ будут сепарабельными бесконечномерными гильбертовыми пространствами.

Бесконечномерность пространства $L_2[a, b]$ будет установлена в п. 58.2, а его сепарабельность — в п. 58.3 (теорема 2).

В дальнейшем (см. п. 58.5, теорему 10) будет доказано, что все бесконечномерные сепарабельные гильбертовы пространства изоморфны между собой. Таким образом, изучив определенные свойства функций одной или многих переменных, удается из некоторых их множеств образовать пространства L_2. Однако, превратившись в точки этого пространства, функции утрачивают многие свои индивидуальные свойства. В частности, пространства L_2 неотличимы друг от друга по числу переменных, от которых зависят функции, из которых образованы эти пространства. Это, конечно, нисколько не мешает применять функциональные пространства с большим успехом как в чисто теоретических вопросах, так и в приложениях математики.

Введенные в этом параграфе многочисленные определения будут применяться в дальнейшем для описания определенных свойств различных классов функций в привычных и наглядных геометрических терминах (пространство, точка, расстояние, вектор, базис и т. п.) и помогут установить аналогии, имеющиеся между обычными n-мерными векторными пространствами и пространствами функций, и выяснить специфические свойства бесконечномерных функциональных пространств.

§ 58. ОРТОНОРМИРОВАННЫЕ БАЗИСЫ И РАЗЛОЖЕНИЯ ПО НИМ

58.1. ОРТОНОРМИРОВАННЫЕ СИСТЕМЫ

Определение 1. *Пусть X — линейное пространство с полускалярным произведением. Элементы $x \in X$ и $y \in X$ называются ортогональными, если $(x, y) = 0$, в этом случае пишется также $x \perp y$.*

Определение 2. *Система элементов x_α, $\alpha \in \mathfrak{A}$, ($\mathfrak{A}$ — некоторое множество индексов) линейного пространства X с полускалярным произведением называется ортогональной, если каждые ее два элемента ортогональны. Если, кроме того, норма ее любого элемента равна единице, т. е. $\|x_\alpha\| = 1$, $\alpha \in \mathfrak{A}$, то она называется ортонормированной.*

Очевидно, если система x_α, $\alpha \in \mathfrak{A}$, ортогональна и $x_\alpha \neq 0$ для всех $\alpha \in \mathfrak{A}$, то ее можно «нормировать». Действительно, поделив каждый элемент на его норму, т. е. умножив x_α на число $1/\|x_\alpha\|$, получим ортонормированную систему

$$\left\{\frac{x_\alpha}{\|x_\alpha\|},\ \alpha \in \mathfrak{A}\right\}.$$

Напомним, что если X — пространство со скалярным произведением, то условие $\|x\| \neq 0$ равносильно тому, что $x \neq 0$.

Лемма 1. *Если система* $\{x_\alpha,\ \alpha \in \mathfrak{A}\}$ *элементов пространства* X *с полускалярным произведением ортогональна и* $\|x_\alpha\| \neq 0$ *для всех* $\alpha \in A$, *то она линейно независима.*

Доказательство. Пусть для некоторых элементов

$$x_{\alpha_k},\quad \alpha_k \in \mathfrak{A},\quad k = 1,\ 2,\ \ldots,\ n,$$

имеем

$$\lambda_1 x_{\alpha_1} + \lambda_2 x_{\alpha_2} + \ldots + \lambda_n x_{\alpha_n} = 0.$$

Умножим скалярно обе части этого равенства на x_{α_k}, k — фиксировано ($k = 1,\ 2,\ \ldots,\ n$), получим

$$\lambda_k \left(x_{\alpha_k},\ x_{\alpha_k}\right) = 0,$$

ибо в силу ортогональности системы $\left(x_{\alpha_j},\ x_{\alpha_k}\right) = 0$, $j \neq k$. Замечая далее, что, по предположению, $x_{\alpha_k} \neq 0$ и, следовательно $\left(x_{\alpha_k},\ x_{\alpha_k}\right) \neq 0$, получим $\lambda_k = 0$, $k = 1,\ 2,\ \ldots,\ n$.

Линейная независимость системы x_α, $\alpha \in \mathfrak{A}$, доказана. □

Докажем еще одну лемму, выражающую критерий линейной независимости функций через скалярные произведения.

Лемма 2. *Если для системы элементов* $x_1,\ \ldots,\ x_n$ *пространства* X *со скалярным произведением определитель*

$$G(x_1,\ \ldots,\ x_n) = \begin{vmatrix} (x_1,\ x_1) & (x_1,\ x_2) & \ldots & (x_1,\ x_n) \\ (x_2,\ x_1) & (x_2,\ x_2) & \ldots & (x_2,\ x_n) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ (x_n,\ x_1) & (x_n,\ x_2) & \ldots & (x_n,\ x_n) \end{vmatrix}$$

равен нулю, то система линейно зависима.

Определитель $G(x_1,\ \ldots,\ x_n)$ называется *определителем Грама* *) данной системы.

Доказательство. Рассмотрим систему n линейных уравнений с n неизвестными λ_i, $i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n$:

$$(\lambda_1 x_1 + \ldots + \lambda_n x_n,\ x_i) = 0,\quad i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n, \tag{58.1}$$

или

$$\lambda_1 (x_1,\ x_i) + \ldots + \lambda_n (x_n,\ x_i) = 0,\quad i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n.$$

Определителем этой системы является транспонированный определитель Грама, который по условию леммы равен нулю. Следовательно, система (58.1) имеет нетривиальное решение $\lambda_1 \ldots,\ \lambda_n$ (т. е. такое, что не все λ_i, $i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n$, равны нулю). Умножим равенство (58.1) на λ_i и просуммируем по i от 1 до n:

$$(\lambda_1 x_1 + \ldots + \lambda_n x_n,\ \lambda_1 x_1 + \ldots + \lambda_n x_n) = 0.$$

*) И. Грам (1850—1916) — датский математик.

Отсюда $\lambda_1 x_1 + \ldots + \lambda_n x_n = 0$, что означает линейную зависимость системы $x_1, \ldots, x_n$. $\square$

Упражнения. 1. Доказать, что если конечная система элементов предгильбертова пространства линейно зависима, то ее определитель Грама равен нулю.

2. Доказать, что если $\{\omega_\alpha\}$ — ортонормированная система, то для любых двух ее элементов ω_α и $\omega_{\alpha'}$ имеет место равенство

$$\|\omega_{\alpha'} - \omega_\alpha\| = \sqrt{2}, \quad \alpha' \neq \alpha,$$

3. Доказать, что функции $\sin x$, $\sin 3x$, $\sin 5x$, $\sin 7x$, $\sin 9x$ — линейно независимы.

Примеры 1. Тригонометрическая система функций

$$1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \ldots, \cos nx, \sin nx, \ldots \tag{58.2}$$

ортогональна в пространстве $L_2[-\pi, \pi]$ (см. п. 57.10). Это было доказано в лемме 1 п. 55.1.

Из формул (55.4) следует, что $\|\sin nx\| = \sqrt{\pi}$, $\|\cos nx\| = \sqrt{\pi}$, $n = 1, 2, \ldots$, поэтому ортонормированная система, соответствующая системе (58.2), имеет вид

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos x, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin x, \ldots, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos nx, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin nx \ldots .$$

2. Многочлены

$$P_0(x) = 1, \; P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n (x^2-1)^n}{dx^n}, \; n = 1, 2, \ldots, \tag{58.3}$$

называются *полиномами Лежандра*. Из формулы (58.3) видно, что $P_n(x)$ является многочленом степени n:

$$P_n(x) = \frac{(2n-1)!!}{n!} x^n + \ldots .$$

Покажем, что система (58.3) ортогональна в пространстве $L_2[-1, 1]$. Для этого докажем более общее утверждение, а именно, — что полином Лежандра $P_n(x)$ ортогонален к любому многочлену $Q_m(x)$ степени $m < n$. Заметив предварительно, что выражение

$$\frac{d^k (x^2-1)^n}{dx^k}$$

при $k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$, обращается в ноль в точках $x = -1$ и $x = 1$, имеем, интегрируя по частям:

$$\int_{-1}^{1} Q_m(x) \frac{d^n (x^2-1)^n}{dx^n} dx = Q_m(x) \frac{d^{n-1} (x^2-1)^n}{dx^{n-1}} \Big|_{-1}^{1} -$$

$$- \int_{-1}^{1} Q'_m(x) \frac{d^{n-1} (x^2-1)^n}{dx^{n-1}} dx = \ldots = (-1)^m Q_m^{(m)}(x) \int_{-1}^{1} \frac{d^{n-m} (x^2-1)^n}{dx^{n-m}} dx =$$

$$= (-1)^m Q_m^{(m)}(x) \frac{d^{n-m-1} (x^2-1)^n}{dx^{n-m-1}} \Big|_{-1}^{1} = 0.$$

Таким образом,

$$\int_{-1}^{1} Q_m(x) P_n(x)\, dx = 0, \quad m < n;$$

в частности,

$$\int_{-1}^{1} P_m(x) P_n(x)\, dx = 0, \quad m \neq n.$$

Подсчитаем теперь норму полиномов Лежандра. Заметив, что

$$P_n(x) = \frac{(2n-1)!!}{n!} x^n + Q_{n-1}(x)$$

где $Q_{n-1}(x)$ — многочлен степени не выше $n-1$, и использовав ортогональность $P_n(x)$ ко всем многочленам меньшей степени, получим:

$$\int_{-1}^{+1} P_n^2(x)\, dx = \int_{-1}^{+1} P_n(x) \left[\frac{(2n-1)!!}{n!} x^n + Q_{n-1}(x)\right] dx =$$

$$= \frac{(2n-1)!!}{n!} \int_{-1}^{1} P_n(x)\, x^n\, dx = \frac{(2n-1)!!}{n!\,(2n)!!} \int_{-1}^{1} \frac{d^n (x^2-1)^n}{dx^n} x^n\, dx.$$

Интегрируя последовательно по частям, будем иметь

$$\int_{-1}^{+1} P_n^2(x)\, dx = \ldots = (-1)^{n-1} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \int_{-1}^{1} x d(x^2-1)^n =$$

$$= (-1)^{n-1} \frac{(2n-1)!!}{(2n-2)!!} \int_{-1}^{1} (x^2-1)^{n-1} x^2\, dx =$$

$$= (-1)^{n-1} \frac{(2n-1)!!}{(2n-2)!!} \frac{1}{3} \int_{-1}^{1} (x^2-1)^{n-1}\, dx^3 =$$

$$= (-1)^{n-1} \frac{(2n-1)!!}{(2n-4)!!} \frac{1}{3} \int_{-1}^{1} (x^2-1)^{n-2} x^4\, dx = \ldots = \int_{-1}^{1} x^{2n}\, dx = \frac{2}{2n+1}.$$

Таким образом,

$$\|P_n(x)\| = \sqrt{\frac{2}{2n+1}}.$$

Система полиномов Лежандра, как и всякая ортогональная система ненулевых элементов, линейно независима (см. лемму 1) в пространстве $L_2\,[-1, 1]$. Поскольку в данном случае рассматриваемая система функций состоит из многочленов, то из их линейной независимости на каком-то отрезке (в данном случае на отрезке $[-1, 1]$) следует и их линейная независимость на любом другом отрезке.

Действительно, если какие-то многочлены $Q_1(x), \ldots, Q_k(x)$ линейно независимы на отрезке $[a, b]$, то они, очевидно, линейно независимы и на всей числовой оси (всякая система функций, линейно независимая на некотором множестве, линейно независима и на всяком большем множестве, на котором определены все функции рассматриваемой системы). Если бы многочлены $Q_1(x), \ldots, Q_k(x)$ оказались бы линейно зависимы на некотором отрезке $[\alpha, \beta]$, т. е. нашлись бы такие числа $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$, не все равные нулю, что для всех $x \in [\alpha, \beta]$ выполнялось равенство $\lambda_1 Q_1(x) + \ldots + \lambda_k Q_k(x) = 0$, то это означало бы, что все коэффициенты многочлена $\lambda_1 Q_1(x) + \ldots + \lambda_k Q_k(x)$ равны нулю (многочлен с неравными нулю коэффициентами может иметь лишь конечное число нулей). Это означает, что многочлены $Q_1(x), \ldots, Q_k(x)$ линейно зависимы на всей числовой оси. Полученное противоречие доказывает их линейную независимость на отрезке $[\alpha, \beta]$.

Из линейной независимости полиномов Лежандра следует, что любой многочлен степени, не большей n, является линейной комбинацией полиномов Лежандра $P_0(x), P_1(x), \ldots, P_n(x)$. Действительно, в $(n+1)$-мерном пространстве многочленов степеней, не превышающих n, любая система $n+1$ линейно независимых многочленов, в частности указанная система полиномов Лежандра, образует базис. Поэтому всякий многочлен рассматриваемой степени, является линейной комбинацией элементов указанной системы.

3. Система функций $\{e^{inx}\}$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, ортогональна на отрезке $[-\pi, \pi]$.

В самом деле,

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{inx}\overline{e^{imx}}\,dx = \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(n-m)x}\,dx.$$

Отсюда, вспоминая, что период функции e^z равен $2\pi i$ (см. п. 37.6), при $n \neq m$ получим:

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{inx}\overline{e^{imx}}\,dx = \frac{1}{i(n-m)} e^{i(n-m)x}\Big|_{-\pi}^{\pi} = 0.$$

Упражнение 4. Доказать, что последовательность функций $\sin(2n-1)\frac{x}{2}$, $n = 1, 2, \ldots$, образует ортогональную систему на отрезке $[0, \pi]$.

58.2. ОРТОГОНАЛИЗАЦИЯ

Пусть снова X — предгильбертово пространство. Рассмотрим следующую задачу. Пусть дана линейно независимая счетная система элементов x_n, $n = 1, 2, \ldots$, пространства X. Требуется с помощью конечных линейных комбинаций получить из нее ортогональную систему. Оказывается, эта задача всегда имеет решение.

Теорема 1. *Пусть*

$$x_n, \quad n=1, 2, \ldots, \tag{58.4}$$

— линейно независимая система элементов пространства X. Тогда *существует ортогональная система элементов* y_n, $y_n \neq 0$, $n=1, 2, \ldots$, *этого пространства, такая, что каждый ее элемент* y_n, $n=1, 2, \ldots$, *является линейной комбинацией первых* n *элементов системы* (58.4):

$$y_n = \alpha_{n,1}x_1 + \alpha_{n,2}x_2 + \ldots + \alpha_{n,n}x_n. \tag{58.5}$$

Построение ортогональной системы $\{y_n\}$ вида (58.5) из линейно независимой системы $\{x_n\}$ называется обычно *процессом ортогонализации системы* $\{x_n\}$.

Доказательство. Положим $y_1 = x_1$. Поскольку система (58.4) линейно независима, то $y_1 \neq 0$ (почему?).

Пусть существуют попарно ортогональные элементы $y_n \neq 0$, $n=1, 2, \ldots, k$, $k \geqslant 1$, удовлетворяющие условию (58.5). Будем искать элемент y_{k+1}, ортогональный ко всем $y_1, \ldots, y_k$, в виде

$$y_{k+1} = \beta_{k+1,1}y_1 + \ldots + \beta_{k+1,k}y_k - x_{k+1}. \tag{58.6}$$

Из условий ортогональности

$$(y_1, y_{k+1}) = \ldots = (y_k, y_{k+1}) = 0 \tag{58.7}$$

получаем

$$(y_1, y_1)\beta_{k+1,1} = (y_1, x_{k+1}), \ \ldots, \ (y_k, y_k)\beta_{k+1,k} = (y_k, x_{k+1}). \tag{58.8}$$

Отсюда однозначно определяются коэффициенты $\beta_{k+1,i}$, $i=1, 2, \ldots, k$. Элемент y_{k+1}, задаваемый представлением (58.6) с найденными коэффициентами $\beta_{k+1,i}$, $i=1, 2, \ldots, k$, удовлетворяет условиям (58.7).

Подставим в (58.6) выражения для y_n, $n=1, 2, \ldots, k$, записанные в виде (58.5); после приведения подобных членов получим

$$y_{k+1} = \alpha_{k+1,1}x_1 + \ldots + \alpha_{k+1,k}x_k - x_{k+1}. \tag{58.9}$$

Отсюда следует, что $y_{k+1} \neq 0$, ибо в противном случае элементы $x_1, \ldots, x_{k+1}$ оказались бы линейно зависимыми. $\square$

Замечание. Отметим, что если какая-либо ортогональная система элементов z_n, $z_n \neq 0$, $n=1, 2, \ldots$, пространства X такова, что каждый элемент z_n также является линейной комбинацией первых n элементов системы (58.4):

$$z_n = \gamma_{n,1}x_1 + \ldots + \gamma_{n,n}x_n, \quad n=1, 2, \ldots, \tag{58.10}$$

то элемент z_n отличается от элемента y_n лишь некоторым числовым множителем $\lambda_n \neq 0$:

$$z_n = \lambda_n y_n, \quad n=1, 2, \ldots.$$

Докажем это. Обозначим через $L(u_1, \ldots, u_n)$ линейную оболочку системы элементов $u_1, \ldots, u_n$ (см. п. 57.2); $L(x_1, \ldots, x_n)$ является n-мерным пространством, в котором элементы $x_1, \ldots, x_n$ образуют базис (см. п. 57.2). Элементы y_i, $i=1,2,\ldots,n$ (соответственно z_i, $i=1, 2, \ldots, n$), линейно независимы и содержатся в $L=(x_1, \ldots, x_n)$; следовательно, элементы y_i, $i=1, 2, \ldots, n$ и элементы z_i, $i=1, 2, \ldots, n$, также образуют базис в пространстве $L(x_1, \ldots, x_n)$. Таким образом, $L(x_1, \ldots, x_n)=L(y_1, \ldots, y_n)=$ $=L(z_1, \ldots, z_n)$, $n=1, 2, \ldots$.

Элемент $y_n \in L(x_1, \ldots, x_n)$ ортогонален подпространству $L(y_1, \ldots, y_{n-1})=L(x_1, \ldots, x_{n-1})$, т. е. ортогонален каждому элементу этого подпространства. Элемент же $z_n \in L(x_1, \ldots, x_n)$ ортогонален подпространству $L(z_1, \ldots, z_{n-1})=L(x_1, \ldots, x_{n-1})$. Итак, элементы y_n и z_n n-мерного пространства $L(x_1, \ldots, x_n)$ ортогональны одному и тому же $(n-1)$-мерному подпространству $L(x_1, \ldots, x_{n-1})$ и, следовательно, пропорциональны: $z_n=\lambda_n y_n$, $\lambda_n \neq 0$, $n=1, 2, \ldots$ (почему?).

Отметим еще, что из

$$L(x_1, \ldots, x_n)=L(y_1, \ldots, y_n), \qquad n=1, 2, \ldots$$

вытекает совпадение линейных оболочек бесконечных систем (58.4) и (58.5).

Рассмотрим теперь систему степеней x:

$$1, x, x^2, \ldots, x^n, \ldots . \tag{58.11}$$

Эта система линейно независима на любом промежутке (конечном или бесконечном). Действительно, если

$$\lambda_0+\lambda_1 x+\ldots+\lambda_n x^n \equiv 0, \tag{58.12}$$

то, дифференцируя это тождество n раз, получим

$$n!\lambda_n=0,$$

т. е. $\lambda_n=0$.

Если уже доказано, что $\lambda_{k+1}=\ldots=\lambda_n=0$, то тождество (58.12) примет вид

$$\lambda_0+\lambda_1 x+\ldots+\lambda_k x^k=0.$$

Дифференцируя его k раз, получим $\lambda_k=0$. Итак, $\lambda_1=\ldots=\lambda_n=0$, что и означает линейную независимость функций $1, x, \ldots, x^n$.

Заметим, что поскольку функции системы (58.11), рассматриваемые на некотором отрезке $[a, b]$, принадлежат пространствам $C[a, b]$ (см. пример 7 в п. 57.4), $CL_2[a, b]$ и $L_2[a, b]$ (см. п. 57.10), то в этих пространствах имеются бесконечные линейно независимые системы. Следовательно, указанные пространства бесконечномерны, т. е. заведомо не имеют базиса, состоящего из конечного числа элементов.

Если систему (58.11) взять на отрезке $[-1, 1]$ в качестве исходной системы (58.4) и применить к ней процесс ортогонализации (см. (58.5)) в пространстве $L_2[-1, 1]$, то получим последовательность ортогональных многочленов соответственно степеней 0, 1, 2, ... Из сделанного выше замечания следует, что эти многочлены могут отличаться от многочленов Лежандра (58.3), которые также ортогональны, лишь постоянным множителем.

58.3. ПОЛНЫЕ СИСТЕМЫ. ПОЛНОТА ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ И СИСТЕМЫ ПОЛИНОМОВ ЛЕЖАНДРА

Напомним (см. п. 57.6), что система элементов $\Omega = \{x_\alpha\}$, $\alpha \in \mathfrak{A}$, называется *полной в полунормированном пространстве* X, если множество всех конечных линейных комбинаций ее элементов плотно в пространстве X в смысле заданной в нем полунормы. Иначе говоря, система полна, если для каждого $x \in X$ и любого $\varepsilon > 0$ существуют такие элементы $x_{\alpha_k} \in \Omega$ и числа λ_k, $k = 1, 2, \ldots, m$, что

$$\left\| x - \sum_{k=1}^{m} \lambda_k x_{\alpha_k} \right\| < \varepsilon.$$

Определение 3. *Полунормированное пространство X называется вложенным в полунормированное пространство Y, если*

1°) $X \subset Y$;

2°) *существует такая постоянная $c > 0$, что для любого $x \in X$ имеет место неравенство*

$$\|x\|_Y \leq c\|x\|_X.$$

Постоянная $c > 0$ называется *константой вложения*. Вложение пространства X в пространство Y обозначается символом

$$X \Subset Y.$$

Легко проверить, что если $X \Subset Y$ и $Y \Subset Z$, то $X \Subset Z$. Из леммы 3, п. 57.4 следует, что для любого отрезка имеют место вложения

$$RL_p[a, b] \Subset RL_1[a, b],$$
$$RL_p[a, b] \cap S[a, b] \Subset RL_p[a, b], \quad 1 \leq p < +\infty.$$

Здесь во втором вложении пространство $RL_p[a, b] \cap S[a, b]$ рассматривается с нормой $\|\cdot\|_\infty$, т. е. с нормой пространства $S[a, b]$. Если ограничиться только одними непрерывными функциями, то из второго вложения следует вложение

$$C[a, b] \Subset CL_p[a, b], \quad 1 \leq p < +\infty. \tag{58.13}$$

Отсюда, вспоминая, что при $p = 2$ пространство $CL_2[a, b]$ изометрически вкладывается в пространство $L_2[a, b]$ (см. (57.52)) получаем еще вложение

$$C[a,\ b] \Subset L_2[a,\ b]. \tag{58.14}$$

Обратим внимание на то, что во вложениях (58.13) и (58.14) вкладываемые пространства плотны в пространствах, в которые они вкладываются: в случае (58.13) это следует просто из того, что множества точек обоих пространств совпадают, а в случае (58.14) это следует из теоремы 6 п. 57.10.

Лемма 3. *Если система $\Omega = \{x_\alpha\}$, $\alpha \in \mathfrak{A}$, полна в полунормированном пространстве X, пространство X вложено в полунормированное пространство Y и множество X плотно в пространстве Y по полунорме этого пространства, то система Ω полна в пространстве Y.*

Доказательство. Возьмем произвольный элемент $y \in Y$ и любое $\varepsilon > 0$. В силу плотности множества X в пространстве X найдется такой элемент $x \in X$, что

$$\|y - x\|_Y < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Поскольку система Ω полна в пространстве X, то существует конечное множество таких элементов $x_{\alpha_k} \in \Omega$ и чисел λ_k, $k = 1, 2, \ldots, m$, что

$$\left\| x - \sum_{k=1}^{m} \lambda_k x_{\alpha_k} \right\|_X < \frac{\varepsilon}{2c},$$

где $c > 0$ — константа вложения $X \Subset Y$. В силу этого вложения (см. определение 3)

$$\left\| x - \sum_{k=1}^{m} \lambda_k x_{\alpha_k} \right\|_Y \leqslant c \left\| x - \sum_{k=1}^{m} \lambda_k x_{\alpha_k} \right\|_X < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Поэтому для первоначально выбранного нами элемента y получим

$$\left\| y - \sum_{k=1}^{m} \lambda_k x_{\alpha_k} \right\|_Y \leqslant \|y - x\|_Y + \left\| x - \sum_{k=1}^{m} \lambda_k x_{\alpha_k} \right\|_Y < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Это и означает плотность системы Ω в пространстве Y. $\square$

Примеры. 1. Система степеней

$$1,\ x,\ x^2,\ \ldots,\ x^n,\ \ldots \tag{58.15}$$

полна в пространствах $C[a,\ b]$, $CL_p[a,\ b]$, $1 \leqslant p < +\infty$ и $L_2[a, b]$ для любого отрезка $[a,\ b]$. Действительно, в силу теоремы Вейерштрасса (см. теорему 8′ в п. 55.8) указанная система степеней полна в пространстве $C[a,\ b]$, которое согласно (58.14) вложено в пространство $L_2[a, b]$ и плотно в нем. Поэтому по лемме 3 этого пункта система степеней (58.15) полна в пространстве $L_2[a, b]$. По той же лемме эта система полна и в пространстве $CL_p[a, b]$ при любом $p \geqslant 1$, ибо $C[a, b]$ вложено в $CL_p[a, b]$ и плотно в нем (см. (58.13)).

Обратим внимание на то, что всякий базис в линейном нормированном пространстве является, очевидно, полной линейно независимой системой. Обратное неверно. Например, система степеней (58.15) хотя и образует полную линейно независимую систему в банаховом пространстве $C[a, b]$, однако не является в нем базисом: если в пространстве $C[a, b]$ некоторая функция f раскладывается по системе степеней (58.15), т. е. $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, то это означает, что написанный степенной ряд сходится равномерно на отрезке $[a, b]$, и, следовательно, функция f аналитическая на интервале (a, b). Поэтому заведомо любая непрерывная на отрезке $[a, b]$ функция не может быть представлена в указанном виде.

2. Система полиномов Лежандра

$$P_0(x) = 1, \quad P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n (x^2-1)^n}{dx^n} \tag{58.3}$$

полна в пространствах $C[a, b]$, $CL_p[a, b]$, $1 \leqslant p < +\infty$, и $L_2[a, b]$ для любого отрезка $[a, b]$. Это сразу следует из того, что любой многочлен $Q(x)$ является линейной комбинацией полиномов Лежандра (см. п. 58.1):

$$Q(x) = \sum_{k=0}^{n} \lambda_k P_k(x). \tag{58.16}$$

Поэтому, если в каком-то полунормированном пространстве X полна система степеней (58.15), т. е. для любого элемента $f \in X$ и любого $\varepsilon > 0$ существует такой многочлен $Q = Q(x)$, что $\|f - Q\| < \varepsilon$, то в силу (58.16)

$$\left\| f - \sum_{k=0}^{n} \lambda_k P_k \right\| < \varepsilon.$$

Это и означает полноту системы полиномов Лежандра в пространстве X.

3. Обозначим через $C^*[-\pi, \pi]$ подпространство пространства непрерывных функций $C[-\pi, \pi]$, состоящее из функций, принимающих на концах отрезка $[-\pi, \pi]$ одинаковые значения:

$$f(-\pi) = f(\pi). \tag{58.17}$$

Тригонометрическая система

$$1, \cos x, \sin x, \ldots, \cos nx, \sin nx, \ldots, \tag{58.2}$$

полна в пространствах $C^*[-\pi, \pi]$ и $L_2[-\pi, \pi]$. Полнота тригонометрической системы в пространстве $C^*[-\pi, \pi]$ была доказана раньше: см. теорему 7′ в п. 55.8.

Обозначим через $\mathring{C}[-\pi, \pi]$ подпространство пространства $C^*[-\pi, \pi]$, состоящее из таких функций f, которые принимают на концах отрезка $[-\pi, \pi]$ значения, равные нулю: $f(-\pi) = f(\pi) = 0$. Согласно теореме 6, п. 57.10 множество $\mathring{C}[-\pi, \pi]$, а следовательно, и пространство $C^*[-\pi, \pi] \supset \mathring{C}[-\pi, \pi]$, плотно в пространстве $L_2[-\pi, \pi]$. Поэтому в силу вложения (см. 58.14))

$$C^*[-\pi, \pi] \Subset L_2[-\pi, \pi]$$

и леммы 3 этого пункта тригонометрическая система (58.2) полна в пространстве $L_2[-\pi, \pi]$.

Отметим, что поскольку условие (58.17) сохраняется при равномерной сходимости, и каждый тригонометрический многочлен ему удовлетворяет, то тригонометрическая система заведомо не полна в пространстве $C[-\pi, \pi]$, так как в нем заведомо есть функции, не удовлетворяющие условию (58.17).

Из рассмотренных примеров как простое следствие вытекает следующее утверждение.

Теорема 2. *Банахово пространство $C[a, b]$ и гильбертово пространство $L_2[a, b]$ являются сепарабельными пространствами.*

Действительно, сепарабельность пространства означает (см. определение 31 в п. 57.6) наличие в нем счетной полной системы. В указанных пространствах таковой системой является, например, система (58.15) целых неотрицательных степеней переменной x.

58.4. РЯДЫ ФУРЬЕ

Пусть, как и раньше, X — предгильбертово пространство. Рассмотрим следующую задачу. Пусть задана система n линейно независимых векторов $e_1, e_2, \ldots, e_n$ пространства X и фиксирован некоторый вектор $x \in X$. Требуется найти линейную комбинацию вида

$$a_1e_1 + \ldots + a_ne_n, \tag{58.18}$$

которая дает наилучшее приближение в пространстве X элемента x, т. е. осуществляет минимум выражения

$$\| x - (a_1e_1 + \ldots + a_ne_n) \|, \tag{58.19}$$

или, что то же, минимум функции

$$\left\| x - \sum_{k=1}^{n} a_ke_k \right\|^2 = \left(x - \sum_{k=1}^{n} a_ke_k,\ x - \sum_{k=1}^{n} a_ke_k \right) \tag{58.20}$$

от переменных $a_1, \ldots, a_n$.

Геометрически это означает, что в n-мерном пространстве $R^n = \mathscr{L}(e_1, \ldots, e_n)$, натянутом на векторы $e_1 \in X, \ldots, e_n \in X$ ищется элемент, наименее удаленный от заданного элемента $x \in X$.

Если пространство X — n-мерное и, следовательно, векторы $e_1, \ldots, e_n$ образуют базис, то всегда можно подобрать такие коэффициенты a_k, $k = 1, 2, \ldots, n$, что будет выполняться равенство

$$x = a_1 e_1 + \ldots + a_n e_n \tag{58.21}$$

и, следовательно, выражение (58.19) обратится в ноль. Если же X не конечномерно, или конечномерно, но имеет размерность, бо́льшую, чем n, то равенство (58.21), вообще говоря, осуществить невозможно и задача состоит в отыскании линейной комбинации (58.18), дающей минимальное значение выражению (58.19).

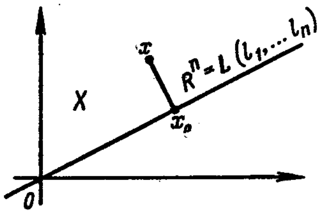


Рис. 229

Мы покажем, что сформулированная задача всегда имеет и притом единственное решение x_0, кроме того, выясним некоторые свойства этого решения (см. рис. 229, на котором схематически изображена рассматриваемая задача). Применяя, если надо, процесс ортогонализации (см. п. 58.2), систему $e_1, \ldots, e_n$ всегда можно заменить ортогональной системой не равных нулю векторов. Поэтому будем предполагать, что $e_k \neq 0$, $(e_k, e_j) = 0$, $k \neq j$, $j, k = 1, 2, \ldots, n$. Пользуясь условием ортогональности, преобразуем функцию (58.20) следующим образом:

$$\begin{aligned}\left\| x - \sum_{k=1}^{n} a_k e_k \right\|^2 &= \left(x - \sum_{k=1}^{n} a_k e_k,\ x - \sum_{j=1}^{n} a_j e_j \right) = (x, x) + \\ &+ \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_k a_j (e_k, e_j) - 2 \sum_{k=1}^{n} a_k (x, e_k) = \\ &= \|x\|^2 + \sum_{k=1}^{n} a_k^2 \|e_k\|^2 - 2 \sum_{k=1}^{n} a_k (x, e_k) = \\ &\|x\|^2 + \sum_{k=1}^{n} \left(a_k \|e_k\| - \frac{(x, e_k)}{\|e_k\|} \right)^2 - \sum_{k=1}^{n} \frac{(x, e_k)^2}{\|e_k\|^2}. \end{aligned} \tag{58.22}$$

Отсюда следует *), что минимум выражения (58.19) достигается, когда

$$a_k \|e_k\| - \frac{(x, e_k)}{\|e_k\|} = 0, \quad k = 1, 2, \ldots, n,$$

*) Очевидно, что это рассуждение является непосредственным обобщением доказательства теоремы 11 из п. 55.9.

т. е. когда

$$a_k = \frac{(x,\ e_k)}{\|e_k\|^2}. \tag{58.23}$$

Числа a_k, определенные по формуле (58.23), *называются коэффициентами Фурье элемента x по системе $e_1, \ldots, e_n$.*

Если система $e_1, \ldots, e_n$ ортонормированная, то формулы (58.23) приобретают более простой вид:

$$a_k = (x,\ e_k). \tag{58.24}$$

В случае n-мерного пространства, когда в качестве векторов $e_1, \ldots, e_n$ выбран базис пространства, коэффициенты Фурье вектора x являются его коэффициентами разложения по указанному базису, т. е. координатами элемента x относительно этого базиса. В этом легко убедиться, умножив скалярно равенство (58.21) на e_k, $k = 1, 2, \ldots, n$: в результате получится (58.23).

Вернемся теперь к выражению (58.22). Если в нем в качестве $a_1, \ldots, a_n$ взять коэффициенты Фурье (58.23), то получим

$$\|x\|^2 - \sum_{k=1}^{n} a_k^2 \|e_k\|^2 = \left\| x - \sum_{k=1}^{n} a_k e_k \right\|^2 \geqslant 0, \tag{58.25}$$

откуда

$$\sum_{k=1}^{n} a_k^2 \|e_k\|^2 \leqslant \|x\|^2. \tag{58.26}$$

Итак, доказана следующая теорема.

Теорема 3. *Пусть e_k, $e_k \neq 0$, $k = 1, 2, \ldots, n$ — ортогональная система векторов предгильбертова пространства X. Наилучшее приближение в пространстве X вектора $x \in X$ линейными комбинациями вида $\sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k e_k$ осуществляется, когда α_k, $k = 1, 2, \ldots, n$, суть коэффициенты Фурье: $\alpha_k = a_k$. При этом*

$$\inf_{\alpha_1, \ldots, \alpha_n} \left\| x - \sum_{k=1}^{n} \alpha_k e_k \right\|^2 = \left\| x - \sum_{k=1}^{n} a_k e_k \right\|^2 = \|x\|^2 - \sum_{k=1}^{n} a_k^2 \|e_k\|^2 \geqslant 0.$$

Следствие 1. *Элемент $x_0 = \sum\limits_{j=1}^{n} \alpha_j e_j$ является элементом наилучшего приближения элемента $x \in X$ в подпространстве $\mathscr{L}(e_1, \ldots, e_n)$ тогда и только тогда, когда элемент $x - x_0$ ортогонален к* $\mathscr{L}(e_1, \ldots, e_n)$, т. е. $x - x_0 \perp \mathscr{L}(e_1, \ldots, e_n)$.

Действительно, условие $x - x_0 \perp \mathscr{L}(e_1, \ldots, e_n)$ равносильно условию: для всех $k = 1, 2, \ldots, n$ имеет место равенство $(x - x_0, e_k) = 0$. Это, в свою очередь, эквивалентно условию $(x, e_k) = (x_0, e_k)$

или, поскольку

$$(x_0, e_k)=\left(\sum_{j=1}^{n} \alpha_j e_j, e_k\right)=\alpha_k (e_k, e_k),$$

условию $(x, e_k)=\alpha_k (e_k, e_k)$. Таким образом, условия

$$x-x_0 \perp \mathscr{L}(e_1, \ldots, e_n) \text{ и } \alpha_k=\frac{(x, e_k)}{(e_k, e_k)}$$

равносильны. Но второе условие означает, что числа α_k являются коэффициентами Фурье элемента x_0, т. е. что x_0 является элементом наилучшего приближения. $\square$

Пусть теперь задана последовательность (а не конечная система, как выше) элементов

$$e_n (e_n \neq 0), \quad n=1, 2, \ldots, \tag{58.27}$$

образующих ортогональную систему в пространстве X. Числа a_k, $k=1, 2, \ldots$, определяемые по формуле (58.23), и в этом случае называются *коэффициентами Фурье* элемента y по системе (58.27).

Определение 4. *Ряд*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n e_n, \tag{58.28}$$

где a_n, $n=1, 2, \ldots$ — коэффициенты Фурье (58.23) *элемента x по системе* (58.27), *называется рядом Фурье элемента x по этой системе.* Если ряд (58.28) является рядом Фурье элемента x, то пишется

$$x \sim \sum_{n=1}^{\infty} a_n e_n.$$

Определение 5. *Пусть задана ортогональная система* (58.27) *и элемент $x \in X$. Наилучшим приближением элемента x с помощью линейных комбинаций вида $\sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k e_k$ (n — фиксировано) называется число $E_n(x)$, определяемое равенством*

$$E_n(x)=\inf_{\alpha_1, \ldots, \alpha_n} \left\| x-\sum_{k=1}^{n} \alpha_k e_k \right\|, \quad n=1, 2, \ldots,$$

где нижняя грань берется по всевозможным коэффициентам $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$, или, что то же, по всевозможным линейным комбинациям вида $\sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k e_k$.

Поскольку всякая линейная комбинация элементов $e_1, \ldots, e_n$ может также рассматриваться и как линейная комбинация элементов $e_1, \ldots, e_n, e_{n+1}$, то, очевидно,

$$E_{n+1}(x) \leqslant E_n(x). \tag{58.29}$$

Из теоремы 3 следует, что рассматриваемая нижняя грань достигается, если в качестве коэффициентов α_k взять коэффициенты Фурье, и что

$$E_n(x) = \inf_{\alpha_1, \ldots, \alpha_n} \left\| x - \sum_{k=1}^{n} \alpha_k e_k \right\| =$$

$$= \left\| x - \sum_{k=1}^{n} a_k e_k \right\| = \sqrt{\|x\|^2 - \sum_{k=1}^{n} a_k^2 \|e_k\|^2},$$

$$a_k = \frac{(x, e_k)}{(e_k, e_k)}, \quad k = 1, 2, \ldots. \tag{58.30}$$

Полученный результат сформулируем в виде следствия 2 из теоремы 3.

Следствие 2. *Частичные суммы*

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k e_k$$

ряда Фурье элемента $x \in X$ осуществляют наилучшее в пространстве X приближение элемента $x \in X$ с помощью линейных комбинаций вида $\alpha_1 e_1 + \ldots + \alpha_n e_n$.

Отметим еще несколько следствий теоремы 3.

Следствие 3. *Если s_n — частичная сумма ряда Фурье элемента $x \in X$, то числовая последовательность $\|x - s_n\|$ убывает:*

$$\|x - s_{n+1}\| \leqslant \|x - s_n\|, \quad n = 1, 2, \ldots \tag{58.31}$$

В самом деле, согласно (58.30)

$$\|x - s_n\| = E_n(x), \quad n = 1, 2, \ldots$$

Поэтому неравенство (58.31) является неравенством (58.29), записанным в других обозначениях.

Следствие 4. *Для коэффициентов Фурье a_n, $n = 1, 2, \ldots$, каждого элемента $x \in X$ справедливо неравенство*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 \|e_n\|^2 \leqslant \|x\|^2, \tag{58.32}$$

называемое неравенством Бесселя.

Неравенство (58.32) непосредственно следует из неравенства (58.26) при $n \to \infty$ (ср. с неравенством (55.49) в п. 55.9).

Следствие 5. *Если существует постоянная $c > 0$ такая, что $\|e_n\| \geqslant c$ при $n = 1, 2, \ldots$, в частности, если система* (58.27) *ортонормированная (в этом случае можно взять $c = 1$), то коэффи-*

циенты Фурье любого элемента $x \in X$ стремятся к нулю при $n \to \infty$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0. \tag{58.33}$$

Это следует из сходимости ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 \leqslant \frac{1}{c^2} \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 \| e_n \|^2 \leqslant \frac{\| x \|^2}{c^2},$$

ибо общий член сходящегося ряда стремится к нулю.

Естественно возникает вопрос: при каких условиях ряд Фурье элемента x сходится?

Теорема 4. *Если пространство X гильбертово (т. е. полно), то ряд Фурье* (58.28) *любого элемента $x \in X$ по любой ортогональной системе* (58.27) *сходится в пространстве X. Если x_0 его сумма:*

$$x_0 = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e_n, \tag{58.34}$$

то элемент $x - x_0$ ортогонален ко всем элементам системы (58.27).

Доказательство. Пусть $s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k e_k$, $n = 1, 2 \ldots$, — частичные суммы ряда Фурье (58.28) элемента x по системе (58.27); тогда

$$\| s_{n+p} - s_n \|^2 = \left\| \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k e_k \right\|^2 = \left(\sum_{k=n+1}^{n+p} a_k e_k, \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k e_k \right) =$$
$$= \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k^2 \| e_k \|^2, \quad n = 1, 2, \ldots, \quad p = 1, 2, \ldots. \tag{58.35}$$

В силу неравенства Бесселя (58.32) ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 \| e_n \|^2$$

сходится, и, следовательно, в силу критерия Коши для сходимости числового ряда для каждого числа $\varepsilon > 0$ существует такой номер n_ε, что при $n \geqslant n_\varepsilon$ и $p > 0$ выполняется неравенство

$$\sum_{k=n+1}^{n+p} a_k^2 \| e_k \|^2 < \varepsilon^2,$$

поэтому, согласно неравенству (58.35) при $n \geqslant n_\varepsilon$ и $p > 0$, имеем

$$\| s_{n+p} - s_n \| < \varepsilon,$$

т. е. последовательность $\{s_n\}$ является фундаментальной в пространстве X и вследствие полноты последнего сходится.

В условиях теоремы последовательность s_n сходится, вообще говоря, не к элементу x. Пусть ее пределом является элемент x_0, т. е. $x_0=\sum_{n=1}^{\infty} a_n e_n$, тогда, используя непрерывность скалярного произведения (см. п. 57.9) и формулу (58.23), получим

$$(x-x_0,\ e_k)=(x,\ e_k)-(x_0,\ e_k)=$$
$$=(x,\ e_k)-\left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n e_n,\ e_k\right)=(x,\ e_k)-\sum_{n=1}^{\infty} a_n (e_n,\ e_k)=$$
$$=(x,\ e_k)-a_k\|e_k\|^2=0,\quad k=1,\ 2,\ \ldots \ \square$$

Что же касается условия сходимости ряда Фурье некоторого отдельного элемента к самому этому элементу, то его можно сформулировать в следующем виде.

Теорема 5. *Ряд Фурье* (58.28) *элемента x предгильбертова пространства сходится к этому элементу тогда и только тогда, когда для него выполняется равенство*

$$\|x\|^2=\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2\|e_n\|^2, \tag{58.36}$$

где a_n — коэффициенты Фурье элемента x по системе (58.27).

Равенство (58.36) называется *равенством Парсеваля.*

В случае, когда система (58.27) ортонормирована, равенство Парсеваля принимает более простой вид:

$$\|x\|^2=\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2,\quad a_n=(x,\ e_n),\quad n=1,\ 2,\ \ldots,$$

и представляет собой обобщение теоремы Пифагора на бесконечномерные пространства.

Доказательство теоремы 5. Мы имели (см. (58.25))

$$\left\|x-\sum_{k=1}^{n} a_k e_k\right\|^2=\|x\|^2-\sum_{k=1}^{n} a_k^2\|e_k\|^2.$$

Переходя здесь к пределу при $n\to\infty$, получим эквивалентность условия

$$\lim_{n\to\infty}\left\|x-\sum_{k=1}^{n} a_k e_k\right\|=0 \tag{58.37}$$

и условия

$$\lim_{n\to\infty}\left(\|x\|^2-\sum_{k=1}^{n} a_k^2\|e_k\|^2\right)=0,$$

т. е. условия

$$\|x\|^2=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} a_k^2\|e_k\|^2.\ \square \tag{58.38}$$

Напомним теперь понятие полной системы (см. п. 57.6) применительно только к случаю счетных систем. Система элементов $e_n \in X$, $n = 1, 2, \ldots$, называется полной, если множество конечных линейных комбинаций элементов этой системы плотно в пространстве X. Это означает, что для каждого элемента $x \in X$ и каждого числа $\varepsilon > 0$ существуют такой номер $n = n(\varepsilon, x)$ и такие числа $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, что выполняется неравенство

$$\|x - (\lambda_1 e_1 + \ldots + \lambda_n e_n)\| < \varepsilon. \tag{58.39}$$

Полнота ортонормированной системы является условием, обеспечивающим сходимость ряда Фурье *любого элемента* пространства к самому этому элементу. Сформулируем это условие в виде теоремы.

Теорема 6. *Ряд Фурье по ортогональной системе* (58.27) *любого элемента предгильбертова пространства сходится к самому этому элементу тогда и только тогда, когда система* (58.27) *является полной.*

Следствие. *Для того чтобы ортогональная система* (58.27) *предгильбертова пространства X была полной в пространстве X, необходимо и достаточно, чтобы для любого элемента $x \in X$ выполнялось равенство Парсеваля* (58.36).

Доказательство теоремы 6. Пусть X — предгильбертово пространство и система (58.27) является ортогональной системой этого пространства. Если для любого $x \in X$ его ряд Фурье по системе (58.27) сходится к x, т. е.

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e_n, \text{ где } a_n = \frac{(x, e_n)}{\|e_n\|^2}, \quad n = 1, 2, \ldots, \tag{58.40}$$

то

$$\lim_{n \to \infty} \left\| x - \sum_{k=1}^{n} a_k e_k \right\| = 0. \tag{58.41}$$

Следовательно, для каждого числа $\varepsilon > 0$ существует такая частичная сумма $s_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k e_k$ ряда Фурье (58.28), что

$$\|x - s_n\| < \varepsilon, \tag{58.42}$$

т. е. выполняется условие (58.39).

Обратно, если условие (58.39) выполняется при каких-то коэффициентах $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, то оно заведомо выполняется согласно теореме 3 и в случае, если взять $\lambda_1 = a_1, \ldots, \lambda_n = a_n$, т. е. в этом случае для заданного $\varepsilon > 0$ выполняется условие (58.42) при некотором n, а значит, и при всех $m > n$ (см. (58.31)), а это равносильно выполнению условия (58.41). □

Следствие непосредственно вытекает из теорем 5 и 6.

Выясним теперь вопрос о единственности элемента, имеющего данный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \alpha_n e_n$ своим рядом Фурье.

Теорема 7. *Если ортогональная система* (58.27) *предгильбертова пространства X полная, то элемент $x \in X$, у которого все коэффициенты Фурье по системе* (58.27) *равны нулю, сам равен нулю.*

Следствие. *Из равенства всех коэффициентов Фурье у двух элементов пространства X по полной ортогональной системе* (58.27) *вытекает равенство самих элементов.*

Доказательство теоремы 7. Если система (58.27) — полная, то согласно теореме 6 любой элемент $x \in X$ является суммой своего ряда Фурье: $x = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n e_n$. Поэтому, если $a_n = 0$, $n = 1, 2, \ldots$, то и $x = 0$.

Доказательство следствия. Если $x_1 \in X$, $x_2 \in X$ и их коэффициенты Фурье равны между собой:

$$\frac{(x_1, e_n)}{\|e_n\|^2} = \frac{(x_2, e_n)}{\|e_n\|^2}, \quad n = 1, 2, \ldots,$$

то для элемента $x = x_1 - x_2$ все коэффициенты Фурье равны нулю:

$$\frac{(x, e_n)}{\|e_n\|^2} = \frac{(x_1 - x_2, e_n)}{\|e_n\|^2} = \frac{(x_1, e_n)}{\|e_n\|^2} - \frac{(x_2, e_n)}{\|e_n\|^2} = 0, \quad n = 1, 2, \ldots,$$

и, следовательно, согласно теореме, $x = 0$, т. е. $x_1 = x_2$. □

Замечание. Следует отметить, что если в предгильбертовом пространстве X задана некоторая ортогональная система $\{e_n\}$, $e_n \neq 0$, и для некоторого $x \in X$ существует его представление в виде

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} x_n e_n,$$

то оно единственно и коэффициенты x_n, $n = 1, 2, \ldots$, являются коэффициентами Фурье. В самом деле, если указанное представление существует, то для любого $m = 1, 2, \ldots$ в силу ортогональности системы $\{e_n\}$ получим:

$$(x, e_m) = \left(\sum_{n=1}^{\infty} x_n e_n, e_m\right) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n (e_n, e_m) = x_m (e_m, e_m),$$

откуда

$$x_m = \frac{(x, e_m)}{(e_m, e_m)},$$

т. е. коэффициенты x_m, $m = 1, 2, \ldots$ определяются однозначно и совпадают с коэффициентами Фурье.

Итак, если в предгильбертовом пространстве имеется полная ортогональная система, то всякий элемент этого пространства раскладывается в ряд по этой системе (теорема 6) и притом единственным образом согласно сделанному замечанию. Иначе говоря, (см. определение 33 в п. 57.6) *всякая полная ортогональная система* $\{e_n\}$, $e_n \neq 0$, $n = 1, 2, \ldots$, *в частности, всякая полная ортонормированная система, предгильбертова пространства является его базисом.*

Например, согласно результатам п. 58.3 полиномы Лежандра (58.3) образуют базис в гильбертовом пространстве $L_2[-1, 1]$, а тригонометрическая система (58.2) — базис в гильбертовом пространстве $L_2[-\pi, \pi]$.

Теперь дадим еще один подход к понятию полноты ортогональной системы в полном пространстве.

Определение 6. *Ортогональная система* (58.27) *называется замкнутой, если в пространстве X не существует элемента, отличного от нуля и ортогонального к каждому из элементов системы* (58.27).

Теорема 8. *Если пространство X полное, то ортогональная система* (58.27) *полна тогда и только тогда, когда она замкнута.*

Доказательство. Если система (58.27) полная, $x \in X$ и x ортогонален ко всем элементам системы (58.27), то все его коэффициенты Фурье по системе (58.27) равны нулю (см. (58.23)), следовательно (теорема 7), $x = 0$.

Обратно, пусть система (58.27) замкнутая, $x \in X$ и $x \sim \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n e_n$. Согласно теореме 4, ряд Фурье элемента x сходится, и если $x_0 = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n e_n$, то $x - x_0 \perp e_n$, $n = 1, 2, \ldots$. Поэтому в силу замкнутости системы (58.27) $x - x_0 = 0$, т. е. $x = x_0$ и $x = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n e_n$. Поскольку x — произвольный элемент пространства X, то отсюда в силу теоремы 6 и следует полнота системы (58.27). $\square$

Задача 39. Выяснить, эквивалентны или нет понятие полной ортогональной системы и понятие замкнутой ортогональной системы во всяком предгильбертовом пространстве.

58.5. СУЩЕСТВОВАНИЕ БАЗИСА В СЕПАРАБЕЛЬНЫХ ГИЛЬБЕРТОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ. ИЗОМОРФИЗМ СЕПАРАБЕЛЬНЫХ ГИЛЬБЕРТОВЫХ ПРОСТРАНСТВ

Теорема 9. *Во всяком сепарабельном линейном пространстве X со скалярным произведением существует ортонормированный базис e_n, $n = 1, 2, \ldots$.*

Доказательство. В случае, если пространство X n-мерное, теорема очевидна (см. п. 18.4 и 57.2), поэтому будем рассматривать только случай, когда пространство X бесконечномерно.

Поскольку пространство X сепарабельно, то в нем существует последовательность элементов

$$\varphi_n, \quad n=1, 2, \ldots,$$

образующих полную систему. Отбрасывая последовательно те из элементов, которые являются линейной комбинацией остальных, получим последовательность элементов

$$\psi_n, \quad n=1, 2, \ldots,$$

имеющих ту же линейную оболочку, что и исходная система $\{\varphi_n\}$ и линейно независимых (почему?). Применив к полученной системе процесс ортогонализации (см. п. 58.2) и нормирования (см. п. 58.1), получим ортонормированную систему

$$e_k, \quad \|e_k\|=1, \quad k=1, 2, \ldots,$$

имеющую ту же линейную оболочку, что и система $\{\psi_n\}$, а значит, ту же, что и система $\{\varphi_n\}$. Поскольку в силу полноты системы $\{\varphi_n\}$ эта линейная оболочка плотна в X, то система $\{e_n\}$ полная. В предыдущем же пункте (см. замечание после теоремы 7) было показано, что всякая полная ортонормированная система элементов предгильбертова пространства является его базисом. $\square$

Теорема 10. *Все сепарабельные бесконечномерные гильбертовы пространства изоморфны между собой* *).

Предварительно докажем две леммы. Первая из них обобщает равенство Парсеваля (58.36).

Лемма 4. *Пусть X — предгильбертово пространство, e_n $(e_n \neq 0)$, $n=1, 2, \ldots,$ — полная ортогональная система в X, $x \in X$, $y \in X$, и пусть*

$$x \sim \sum_{n=1}^{\infty} a_n e_n, \quad y \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n e_n;$$

тогда

$$(x, y)=\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n \|e_n\|^2, \tag{58.43}$$

в частности, если дополнительно предположить, что $\|e_n\|=1$, $n=1, 2, \ldots,$ то

$$(x, y)=\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n.$$

Формула (58.43) обобщает, очевидно, формулу для скалярного произведения в конечномерном пространстве (см. п. 18.4).

*) Определение бесконечномерности пространства см. в п. 57.2, а изоморфизма пространств — в п. 57.9 (определение 36).

Доказательство. По определению коэффициентов Фурье,

$$a_k = \frac{(x, e_k)}{\|e_k\|^2}, \quad b_k = \frac{(y, e_k)}{\|e_k\|^2};$$

поэтому имеем

$$\left(x - \sum_{k=1}^{n} a_k e_k, \quad y - \sum_{k=1}^{n} b_k e_k\right) = (x, y) - \sum_{k=1}^{n} b_k (x, e_k) -$$
$$- \sum_{k=1}^{n} a_k (y, e_k) + \sum_{k=1}^{n} a_k b_k (e_k, e_k) = (x, y) - \sum_{k=1}^{n} a_k b_k \|e_k\|^2. \tag{58.44}$$

Из полноты системы e_n, $n = 1, 2, \ldots$, имеем

$$\lim_{n\to\infty}\left(x - \sum_{k=1}^{n} a_k e_k\right) = 0, \quad \lim_{n\to\infty}\left(y - \sum_{k=1}^{n} b_k e_k\right) = 0,$$

поэтому в силу непрерывности скалярного произведения при $n \to \infty$ левая часть равенства (58.44) стремится к нулю, следовательно, это имеет место и для правой части, т. е.

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k b_k \|e_k\|^2 = (x, y).$$

Это равносильно равенству (58.43). □

Лемма 5. *Пусть X — гильбертово пространство, e_k, $k = 1, 2, \ldots$ — ортонормированный базис в X и a_k, $k = 1, 2, \ldots$ — последовательность чисел таких, что ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k^2$ сходится. Тогда ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k e_k$ сходится в пространстве X, и если $x = \sum_{k=1}^{\infty} a_k e_k$, то a_k, $k = 1, 2, \ldots$ — коэффициенты Фурье элемента x.*

Доказательство. Если $s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k e_k$, то

$$\|s_{p+p} - s_n\|^2 = \left(\sum_{k=n+1}^{n+p} a_k e_k, \quad \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k e_k\right) =$$
$$= \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k^2, \quad n = 1, 2, \ldots, \quad p = 1, 2, \ldots.$$

и в силу сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ он удовлетворяет критерию Коши для сходящихся рядов. Отсюда следует, что последовательность $\{s_n\}$ является фундаментальной в пространстве X и, следовательно, сходится.

Пусть

$$x=\lim_{n\to\infty} s_n, \quad \text{т. е.} \quad x=\sum_{n=1}^{\infty} a_n e_n;$$

тогда в силу единственности разложения элемента пространства по базису (см. замечание к теореме 7)

$$(x, e_n)=a_n, \quad n=1, 2, \ldots,$$

т. е. a_n коэффициенты Фурье элемента x. $\square$

Доказательство теоремы 10. Пусть X и Y — два сепарабельных бесконечномерных гильбертовых пространства. Согласно теореме 9, в них существуют ортонормированные базисы, соответственно e_n, $n=1, 2, \ldots$, и f_n, $n=1, 2, \ldots$.

Пусть $x \in X$ и $x=\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n e_n$, тогда a_n — коэффициенты Фурье элемента x и, следовательно, по равенству Парсеваля ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^2$ сходится. Положим $y=\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n f_n$. Согласно лемме 5, это имеет смысл.

Отображение пространства X в пространство Y, ставящее в соответствие каждому элементу $x \in X$ указанный элемент $y \in Y$, и осуществляет изоморфизм этих пространств. Действительно, при этом соответствии в силу единственности разложения элемента по базису разным элементам пространства X соответствуют разные элементы пространства Y. Далее, всякий элемент пространства Y поставлен в соответствие некоторому элементу пространства X (т. е. указанное отображение является отображением на пространство Y); в самом деле, если $y \in Y$, то, разложив его в Y по базису, получим

$$y=\sum_{n=1}^{\infty} b_n f_n.$$

Пусть $x=\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n e_n$ (такой элемент существует, см. лемму 5). Очевидно, что элементу x и соответствует при установленном соответствии элемент y. Покажем, наконец, что при этом соответствии сохраняется скалярное произведение. Это сразу следует из леммы 4. Действительно, если

$$x=\sum_{n=1}^{\infty} a_n e_n, \quad x'=\sum_{n=1}^{\infty} b_n e_n, \quad y=\sum_{n=1}^{\infty} a_n f_n, \quad y'=\sum_{n=1}^{\infty} b_n f_n,$$

то в силу указанной леммы

$$(x,\ x')=\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n=(y,\ y').\ \square$$

В качестве модели сепарабельного бесконечномерного гильбертова пространства можно взять пространство, элементами которого являются последовательности действительных чисел

$$x=(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n,\ \ldots),$$

для которых ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} x_k^2$ сходится, т. е. пространство l_2 (см. пример 5 в п. 57.4). Скалярное произведение в этом пространстве вводится по следующему правилу:

если $x=(x_1,\ \ldots,\ x_n,\ \ldots)$ *и* $y=(y_1,\ \ldots,\ y_n,\ \ldots)$, *то*

$$(x,\ y)=\sum_{k=1}^{\infty} x_k y_k.$$

Это определение имеет смысл, ибо из сходимости рядов $\sum\limits_{k=1}^{\infty} x_k^2$ и $\sum\limits_{k=1}^{\infty} y_k^2$ вытекает и сходимость ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} x_k y_k$. Это, например, следует из неравенства Гёльдера для рядов при $p=2$ (оно в этом случае часто называется неравенством Коши — Шварца), но может быть получено и из элементарного неравенства

$$x_k y_k \leqslant \frac{x_k^2+y_k^2}{2}.$$

Норма в пространстве l_2 определяется согласно общему правилу по формуле

$$\|x\|=\sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} x_k^2}.$$

Теорема 11. *Пространство l_2 является сепарабельным гильбертовым пространством.*

Доказательство. Пространство l_2 сепарабельно, ибо последовательности e_k, $k=1,\ 2,\ \ldots$, у которых на всех местах стоят нули, кроме k-го, где стоит единица, образуют ортонормированный базис и, следовательно, их конечные линейные комбинации с рациональными коэффициентами образуют счетное плотное в пространстве l_2 множество (почему?).

Полнота пространства l_2 доказывается несколько сложнее. Пусть последовательность

$$x^{(k)}=\left(x_1^{(k)},\ x_2^{(k)},\ \ldots,\ x_n^{(k)},\ \ldots\right),\quad k=1,\ 2,\ \ldots, \tag{58.45}$$

является фундаментальной последовательностью пространства l_2. Тогда из неравенства

$$\|x^{(k+p)}-x^{(k)}\|=\sqrt{\sum_{n=1}^{\infty}\left(x_n^{(k+p)}-x_n^{(k)}\right)^2}\geqslant\left|x_n^{(k+p)}-x_n^{(k)}\right|,$$

$$k=1,\ 2,\ \ldots,\quad p=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\quad n=1,\ 2,\ \ldots,$$

и фундаментальности последовательности (58.45) следует, что при любом фиксированном n числовая последовательность $x_n^{(k)}$, $k=1, 2, \ldots$, удовлетворяет критерию Коши (см. п. 3.7) и, следовательно, сходится. Пусть $\lim\limits_{k\to\infty} x_n^{(k)}=x_n$. В силу фундаментальности последовательности (58.45) для любого $\varepsilon>0$ существует такой номер k_ε, что при любом номере $k\geqslant k_\varepsilon$ и любом натуральном p выполняется неравенство

$$\|x^{(k+p)}-x^{(k)}\|<\varepsilon,$$

т. е.

$$\sqrt{\sum_{n=1}^{\infty}\left(x_n^{(k+p)}-x_n^{(k)}\right)^2}<\varepsilon.$$

Отсюда для любого фиксированного натурального числа m и подавно

$$\sum_{n=1}^{m}\left(x_n^{(k+p)}-x_n^{(k)}\right)^2<\varepsilon^2.$$

Переходя здесь к пределу при $p\to\infty$, получим

$$\sum_{n=1}^{m}\left(x_n-x_n^{(k)}\right)^2\leqslant\varepsilon^2,$$

и так как это верно при любом $m=1,\ 2,\ \ldots,$ то

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(x_n-x_n^{(k)}\right)\leqslant\varepsilon^2,\quad k\geqslant k_\varepsilon. \tag{58.46}$$

Таким образом, точка $y^{(k)}=\left(x_1-x_1^{(k)},\ \ldots,\ x_n-x_n^{(k)},\ \ldots\right)$, $k\geqslant k_\varepsilon$, принадлежит пространству l_2, но тогда и точка $x=(x_1, \ldots, x_n, \ldots)=x^{(k)}+y^{(k)}$ также принадлежит пространству l_2, а условие (58.46) означает, что

$$\lim_{k\to\infty} x^{(k)}=x.$$

Итак, мы доказали, что последовательность (58.46) сходится. Следовательно, l_2 полное пространство. □

В силу теоремы 10 пространство l_2 изоморфно каждому сепарабельному гильбертову пространству.

В п. 58.3 было показано, что пространство $L_2[a, b]$ сепарабельно (см. там теорему 2) для любого отрезка $[a, b]$, следовательно, оно также изоморфно пространству l_2. Можно показать, что и пространство $L_2(G)$, где G — измеримое положительной меры множество n-мерного пространства, также сепарабельно и, следовательно, изоморфно l_2. Таким образом, все гильбертовы пространства интегрируемых в квадрате функций независимо от числа переменных, от которых зависят эти функции, изоморфны между собой.

58.6. РАЗЛОЖЕНИЕ ФУНКЦИЙ С ИНТЕГРИРУЕМЫМ КВАДРАТОМ В РЯД ФУРЬЕ

В § 55 изучались классические ряды Фурье, т. е. ряды Фурье по тригонометрической системе функций, для абсолютно интегрируемых функций. В этом пункте будет получен ряд следствий из общей теории рядов Фурье в гильбертовых пространствах и из свойства полноты системы тригонометрических функций в пространстве $L_2[-\pi, \pi]$ для тригонометрических рядов Фурье более узкого класса функций, чем абсолютно интегрируемые, а именно для функций с интегрируемым на отрезке $[-\pi, \pi]$ квадратом, т. е. для функций пространства $RL_2[-\pi, \pi]$ (см. пример 3 в п. 57.8).

Прежде всего заметим, что если в гильбертовом пространстве $L_2[-\pi, \pi]$ за ортогональную систему взять тригонометрическую систему

$$1,\ \cos x,\ \sin x,\ \ldots,\ \cos nx,\ \sin nx,\ \ldots, \tag{58.2}$$

то коэффициенты Фурье элемента $f \in L_2[-\pi, \pi]$ по этой системе будут определяться согласно (58.23) по формулам

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}(f, 1), \quad a_n = \frac{1}{\pi}(f, \cos nx), \quad b_n = \frac{1}{\pi}(f, \sin nx), \quad n = 1, 2, \ldots \tag{58.47}$$

ибо $\|1\|_{L_2} = \sqrt{2\pi}$, $\|\cos nx\|_{L_2} = \|\sin nx\|_{L_2} = \sqrt{\pi}$ (см. п. 58.1).

Если f — непрерывная на отрезке $[-\pi, \pi]$ функция, то $f \in CL_2[-\pi, \pi] \subset L_2[-\pi, \pi]$. Сравнивая формулы (58.47) для коэффициентов Фурье функции f с формулами (55.6) (скалярное произведение, как обычно, задается формулами (57.30)) видим, что все они совпадают, кроме формулы для коэффициента a_0, которая в (58.47) отличается от формулы в (55.6) множителем 1/2. Отдавая дань традиции будем в дальнейшем придерживаться формулы (55.6) для a_0, т. е. будет считать, что

$$a_0 = \frac{1}{\pi}(f, 1) \tag{58.48}$$

и записывать тригонометрический ряд Фурье в виде

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos nx+b_n\sin nx.$$

Применяя теорему 6 к тригонометрической системе (58.2) в силу полноты этой системы в пространстве $L_2[-\pi, \pi]$ (см. пример 3 в п. 58.3) получим следующую теорему.

Теорема 12. *Каждый элемент $f\in L_2[-\pi, \pi]$ раскладывается в этом пространстве в ряд Фурье по тригонометрической системе*

$$f=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=0}^{\infty} a_n\cos nx+b_n\sin nx, \tag{58.49}$$

причем справедливо равенство Парсеваля

$$\frac{1}{\pi}\|f\|^2=\frac{a_0^2}{2}+\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2+b_n^2.$$

Следствие 1. *Каждая функция $f(x)$ с интегрируемым на отрезке $[-\pi, \pi]$ квадратом*

1) *является пределом в смысле среднего квадратичного (см. п. 57.5) своих частичных сумм Фурье $S_n(x)$ по тригонометрической системе функций при $n\to\infty$, т. е.*

$$\lim_{n\to\infty}\int_{-\pi}^{\pi}[f(x)-S_n(x)]^2\,dx=0; \tag{58.50}$$

2) *и для нее справедливо равенство Парсеваля*

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\,dx=\frac{a_0^2}{2}+\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2+b_n^2. \tag{58.51}$$

Следствие 2. *Если функция f с интегрируемым на отрезке $[-\pi, \pi]$ квадратом и все ее коэффициенты Фурье по тригонометрической системе* (58.2) *равны нулю, то она эквивалентна нулю.*

Здесь везде коэффициенты Фурье при $n=1, 2, \ldots$ определяются по формулам (58.47), а коэффициент a_0 по формуле (58.48).

Поскольку сама теорема 12 вытекает из теоремы 6, то нуждаются в доказательстве только ее следствия.

Итак, пусть функция $f(x)$ есть функция с интегрируемым квадратом на отрезке $[-\pi, \pi]$, т. е. $f(x)\in RL_2[-\pi, \pi]$ (см. пример 8 в п. 57.4 и пример 3 в п. 57.8). Прежде всего заметим, что любая ей эквивалентная функция $g(x)$ (см. определение 38 в п. 57.10) имеет те же коэффициенты Фурье и, следовательно, тот же ряд Фурье. Это следует из того, что полускалярное произведение в пространстве $RL_2[-\pi, \pi]$ не меняется, если его сомножители заменить им эквивалентными (см. формулу (57.41)), и потому, если $f \sim g$, то

$$a_0 = \frac{1}{\pi}(f,\ 1)_{RL_2} = \frac{1}{\pi}(g,\ 1)_{RL_2},$$
$$a_n = \frac{1}{\pi}(f,\ \cos nx)_{RL_2} = \frac{1}{\pi}(g,\ \cos nx)_{RL_2},$$
$$b_n = \frac{1}{\pi}(f,\ \sin nx)_{RL_2} = \frac{1}{\pi}(g,\ \sin nx)_{RL_2},$$
$$n = 1,\ 2,\ \ldots\ ^{*)}.$$

Следовательно, если через F обозначить класс эквивалентных функций, содержащий функцию f, то в силу определения (57.41) скалярного произведения классов эквивалентных функций, т. е. скалярного произведения в пространстве $\widetilde{RL}_2[-\pi,\ \pi]$ (см. п. 57.10) будем иметь

$$a_0 = \frac{1}{\pi}(F,\ 1)_{\widetilde{RL}_2},\quad a_n = \frac{1}{\pi}(F,\ \cos nx)_{\widetilde{RL}_2},\quad b_n = \frac{1}{\pi}(F,\ \sin nx)_{\widetilde{RL}_2},$$
$$n = 1,\ 2,\ \ldots,$$

т. е. ряд Фурье элемента $F \in \widetilde{RL}_2[-\pi,\ \pi] \subset L_2[-\pi,\ \pi]$ совпадает с рядом Фурье каждой функции $f \in F$. Согласно теореме 12 в пространстве $L_2[-\pi,\ \pi]$ имеет место разложение

$$F = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx, \tag{58.52}$$

и равенство Парсеваля

$$\frac{1}{\pi}\|F\|^2_{L_2} = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 + b_n^2. \tag{58.53}$$

Если $S_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum\limits_{k=1}^{n} a_k \cos kx + b_k \sin kx$ — частичная сумма ряда Фурье (58.52), то сходимость этого ряда в пространстве $L_2[-\pi,\ \pi]$ к элементу F означает, что

$$\lim_{n\to\infty} \|F - S_n(x)\|_{L_2} = 0. \tag{58.54}$$

Если, теперь, $f \in F$, то (см. (57.42))

$$\|F - S_n(x)\|_{L_2} = \|f(x) - S_n(x)\|_{RL_2} = \sqrt{\int_{-\pi}^{\pi} [f(x) - S_n(x)]^2 dx}, \tag{58.55}$$

---

*) Индекс у скалярных и полускалярных произведений указывает, в каких пространствах берутся рассматриваемые произведения.

где $\|f(x)-S_n(x)\|_{RL_2}$ — полунорма функции $f(x)-S_n(x)$ в пространстве $RL_2[-\pi, \pi]$, что имеет смысл, ибо $f(x)-S_n(x)\in F-S_n(x)$. Из (58.54) и (58.55) следует, что

$$\lim_{n\to\infty}\int_{-\pi}^{\pi}[f(x)-S_n(x)]^2\,dx=\lim_{n\to\infty}\|f(x)-S_n(x)\|_{RL_2}=0,$$

т. е. равенство (58.50) доказано.

Далее, поскольку в силу той же формулы (57.42) имеют место равенства

$$\|F\|_{L_2}=\|f\|_{RL_2}=\sqrt{\int_{-\pi}^{\pi}f^2(x)\,dx}$$

и поскольку коэффициенты Фурье у F и f одинаковы, то (58.51) следует непосредственно из (58.53).

Для доказательства следствия 2 заметим, что если все коэффициенты Фурье функции $f\in RL_2[-\pi, \pi]$ по тригонометрической системе равны нулю, то из равенства Парсеваля (58.51) следует, что

$$\|f\|_{RL_2}^2=\int_{-\pi}^{\pi}f^2(x)\,dx=0,$$

а это согласно определению 38 из п. 57.10 эквивалентных функций и означает, что

$$f\sim 0.$$

Итак, обратим внимание на то, что если у функции с интегрируемым квадратом все коэффициенты Фурье равны нулю, то она не обязательно является тождественным нулем, а только эквивалентна ему.

Оба следствия доказаны.

Из равенства Парсеваля (58.51) еще раз (независимо от теоремы 2 п. 55.2) следует, что коэффициенты Фурье функции $f(x)$ стремятся к нулю (ибо общий член сходящегося ряда (58.51) всегда стремится к нулю), однако лишь для функций с интегрируемым на отрезке $[-\pi, \pi]$ квадратом. Поскольку всякая функция, непрерывная на отрезке $[-\pi, \pi]$ является и функцией с интегрируемым квадратом, то для нее также справедливо утверждение первого следствия теоремы 12: она раскладывается в ряд Фурье, сходящийся к ней в смысле среднего квадратичного, и для нее справедливо равенство Парсеваля (58.51).

Второе же следствие для непрерывных функций может быть существенно усилено. Сформулируем его в виде отдельной теоремы.

Теорема 13. *Если все коэффициенты Фурье непрерывной на отрезке* $[-\pi, \pi]$ *функции равны нулю, то сама эта функция тождественно равна нулю.*

Следствие (теорема единственности разложения непрерывной функции в ряд Фурье). *Если две непрерывные функции имеют одинаковые коэффициенты Фурье, то они тождественно равны.*

Доказательство. Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[-\pi, \pi]$ и все ее коэффициенты Фурье равны нулю, то из равенства Парсеваля (58.51) имеем $\|f\|_{RL_2}=0$. Но полунорма пространства $RL_2[-\pi, \pi]$ на множестве непрерывных функций является нормой (см. пример 9 в п. 57.4), поэтому $f(x)=0$ для всех $x \in [-\pi, \pi]$.

Следствие вытекает из того, что разность двух функций, у которых одинаковые коэффициенты Фурье, имеет коэффициенты Фурье, равные нулю и потому является тождественным нулем. $\square$

Замечание 1. Теоремы 12 и 13 были сформулированы применительно к тригонометрической системе функций. Подобные утверждения справедливы, конечно, для любой полной ортогональной системы функций, т. е. системы, образующей ортогональный базис в пространстве $L_2[a, b]$. В частности, аналогичные утверждения справедливы для разложений функций по полиномам Лежандра (см. пример 2 в п. 58.3) в пространстве $L_2[-1, 1]$. Например, если все коэффициенты Фурье непрерывной на отрезке $[-1, 1]$ функции по системе полиномов Лежандра равны нулю, то эта функция равна нулю во всех точках отрезка $[-1, 1]$. Доказательства подобных утверждений могут быть проведены по той же схеме, что и выше.

Замечание 2. Основным и существенным фактом, позволившим доказать теорему 12, является полнота тригонометрической системы в пространстве $L_2[-\pi, \pi]$, которая в свою очередь основывается на возможности сколь угодно точно в смысле среднего квадратичного приблизить на отрезке $[-\pi, \pi]$ всякую функцию с интегрируемым на этом отрезке квадратом непрерывной, периода 2π, функцией (см. лемму 16 из п. 57.10). Использование же общей теории о разложении по ортогональным системам в гильбертовом пространстве носило по существу лишь терминологический характер и позволило более кратко и наглядно проводить и записывать рассуждения. В качестве примера понятия, которое весьма удобно при рассмотрении изучаемых вопросов, отметим прежде всего понятие линейного нормированного пространства (в частности, предгильбертова пространства), а значит, и понятие нормы. Введение этих понятий позволило изложить теорию разложений по ортонормированным системам вне зависимости от их конкретного вида. Эти понятия имеют разнообразное применение и в различных других разделах математики.

В заключение, используя полученные результаты, докажем еще одну теорему.

Теорема 14. *Пусть функция f непрерывна на отрезке $[-\pi, \pi]$. Если ее ряд Фурье сходится равномерно на отрезке $[-\pi, \pi]$, то его сумма равна функции f.*

Доказательство. Пусть

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx$$

и

$$S(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx$$

— сумма ряда Фурье функции f.

Прежде всего функция $S(x)$, как сумма равномерно сходящегося ряда непрерывных функций, также непрерывна. Далее, в силу теоремы 1 п. 55.1 коэффициентами Фурье функции $S(x)$ являются числа a_0, a_n, b_n, $n = 1, 2, \ldots$.

Таким образом, две непрерывные на отрезке $[-\pi, \pi]$ функции f и S имеют одинаковые коэффициенты Фурье, и поэтому в силу сказанного выше они совпадают во всех точках отрезка $[-\pi, \pi]$: $f(x) = S(x)$, $-\pi \leqslant x \leqslant \pi$. $\square$

58.7*. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ФУРЬЕ ИНТЕГРИРУЕМЫХ В КВАДРАТЕ ФУНКЦИЙ. ТЕОРЕМА ПЛАНШЕРЕЛЯ

Если квадрат функции f интегрируем на всей действительной оси, то сама функция f, вообще говоря, не абсолютно интегрируема на всей оси, как это видно на примере функции

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}.$$

Поэтому на основании теории преобразования Фурье, изложенной в § 56, нельзя утверждать существование преобразования Фурье для функций из пространства $L_2(-\infty, \infty)$. Покажем, что в этом случае можно определить преобразование Фурье в некотором обобщенном смысле. Предварительно остановимся на определении пространства $L_2(-\infty, +\infty)$ для комплекснозначных функций.

Пусть f и g — две непрерывные функции с интегрируемым квадратом модуля на всей оси и принимающие, вообще говоря, комплексные значения. Их скалярное произведение определяется в этом случае по формуле

$$(f, g) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\overline{g(x)}\,dx.$$

Легко проверяется, что все свойства, которыми должно обладать скалярное произведение в комплексном линейном пространстве (см. п. 57.7), в этом случае выполняются.

Пространство $L_2(-\infty, \infty)$, которое мы будем рассматривать в этом пункте, определим как пополнение предгильбертова пространства непрерывных и с интегрируемым на всей оси квадратом модуля комплекснозначных функций с указанным скалярным произведением (ср. с теоремой 6 в п. 57.10).

Через $\|f\|$ в настоящем параграфе обозначается норма элемента $f \in L_2(-\infty, +\infty)$; т. е.

$$\|f\| = \sqrt{(f, f)},$$

а также и полунорма

$$\|f\| = \sqrt{\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\overline{f(x)}\,dx}$$

для функций f с интегрируемым на всей оси квадратом модуля. Выше для случая действительных функций отмечалось без доказательства (см. п. 57.10), что каждый элемент пространства L_2 можно рассматривать как класс функций. Аналогичный факт справедлив и для пространства L_2 комплекснозначных функций, причем полунорма $\|f\|$ функций f совпадает с нормой элемента пространства L_2, которому принадлежит (в смысле, аналогичном указанному в п. 57.10) функция f. Мы не будем останавливаться на доказательстве этих фактов и не будем их использовать в дальнейшем.

Комплекснозначную функцию $f(x) = \varphi(x) + i\psi(x)$, где $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ — действительные функции, $-\infty < x < +\infty$, назовем финитной ступенчатой функцией, если финитными ступенчатыми функциями являются функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ (см. определение 7 в п.55.2). В дальнейшем для краткости финитные ступенчатые функции будем называть просто ступенчатыми функциями.

Любые две ступенчатые функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ можно представить в виде конечной линейной комбинации о д н и х и т е х ж е одноступенчатых функций (см. п. 55.2), принимающих значения 1 и 0. Для этого достаточно взять всевозможные непустые пересечения полуинтервалов постоянства функций $\varphi(x)$ и $\psi(x)$. Эти пересечения также являются полуинтервалами $[x_{k-1}, x_k)$, $k = 1, 2, \ldots, n$, на которых постоянны одновременно функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$. Поэтому если

$$\omega_k(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x_{k-1} \leqslant x < x_k, \\ 0, & \text{если } x < x_{k-1} \text{ или } x \geqslant x_k, \end{cases}$$
$$k = 1, 2, \ldots, n,$$

— соответствующие одноступенчатые функции, то существуют такие действительные числа λ_k, $\mu_k = 1, 2, \ldots, n$, что

$$\varphi(x) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \omega_k(x), \quad \psi(x) = \sum_{k=1}^{n} \mu_k \omega_k(x).$$

Отсюда следует, что любая комплекснозначная ступенчатая функция $f(x)=\varphi(x)+i\psi(x)$ представима в виде

$$f(x)=\sum_{k=1}^{n}\zeta_k\omega_k(x), \tag{58.56}$$

где $\zeta_k=\lambda_k+i\mu_k$, $k=1, 2, \ldots, n$, — комплексные числа.

Лемма 6. *Пусть f — комплекснозначная ступенчатая функция и $F[f]$ — ее преобразование Фурье, тогда*

$$\|F[f]\|=\|f\|.$$

Доказательство. Если функция f задана формулой (58.56), то

$$\|f\|^2=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\overline{f(x)}\,dx=$$

$$=\sum_{j,\,k=1}^{n}\zeta_j\overline{\zeta_k}\int_{-\infty}^{+\infty}\omega_j(x)\overline{\omega_k(x)}\,dx=\sum_{k=1}^{n}|\zeta_k|^2(x_k-x_{k-1}). \tag{58.57}$$

Пусть теперь $0<\eta<+\infty$; тогда

$$\int_{-\eta}^{\eta}F[f]\overline{F[f]}\,dy=\frac{1}{2\pi}\int_{-\eta}^{\eta}dy\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)e^{-ixy}\,dx\int_{-\infty}^{+\infty}\overline{f(\xi)}\,e^{i\xi y}\,d\xi=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\overline{f(\xi)}\,dx\,d\xi\int_{-\eta}^{\eta}e^{iy(\xi-x)}\,dy=$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\overline{f(\xi)}\frac{\sin\eta(\xi-x)}{\xi-x}\,dx\,d\xi. \tag{58.58}$$

Все преобразования здесь законны, так как на самом деле все интегралы берутся в конечных пределах.

Поскольку действительная и мнимая части функции $f(x)$ удовлетворяют условиям теоремы о представлении функций с помощью интеграла Фурье (см. теорему 1 в п. 56.1), то для всех x, кроме $x=x_k$, $k=1, 2, \ldots, n$, имеем (см. доказательство указанной теоремы)

$$\lim_{\eta\to+\infty}\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\overline{f(\xi)}\frac{\sin\eta(\xi-x)}{\xi-x}\,d\xi=\overline{f(x)}.$$

Оказывается, что в силу этого при наших предположениях в последнем интеграле (58.58) можно перейти к пределу под знаком интеграла при $\eta\to+\infty$. Однако соответствующая теорема не была доказана в настоящем курсе, и потому нам придется сделать несколько дополнительных вычислений. Подставляя (58.56) в (58.58), получим

$$\int_{-\eta}^{\eta} F[f]\overline{F[f]}\,dy = \frac{1}{\pi}\sum_{i,\,k=1}^{n} \zeta_j\overline{\zeta_k}\int_{x_{j-1}}^{x_j} dx \int_{x_{k-1}}^{x_k} \frac{\sin\eta(\xi-x)}{\xi-x}\,d\xi =$$
$$= \frac{1}{\pi}\sum_{i,\,k=1}^{n} \zeta_j\overline{\zeta_k}\int_{x_{j-1}}^{x_j} dx \int_{\eta(x_{k-1}-x)}^{\eta(x_k-x)} \frac{\sin t}{t}\,dt. \qquad (58.59)$$

Рассмотрим поведение каждого слагаемого получившейся суммы при $\eta\to+\infty$. Если $j=k$, то, меняя порядок интегрирования (рис. 230) и производя интегрирование по переменной x, получим:

$$\frac{1}{\pi}\int_{x_{k-1}}^{x_k} dx \int_{\eta(x_{k-1}-x)}^{\eta(x_k-x)} \frac{\sin t}{t}\,dt =$$
$$= \frac{1}{\pi}\left[\int_{0}^{\eta(x_k-x_{k-1})} \left(x_k - x_{k-1} - \frac{t}{\eta}\right)\frac{\sin t}{t}\,dt + \right.$$
$$\left. + \int_{-\eta(x_k-x_{k-1})}^{0} \left(x_k - x_{k-1} + \frac{t}{\eta}\right)\frac{\sin t}{t}\,dt\right] =$$
$$= \frac{2}{\pi}(x_k - x_{k-1})\int_{0}^{\eta(x_k-x_{k-1})} \frac{\sin t}{t}\,dt + \frac{2}{\pi\eta}[1-\cos\eta(x_k-x_{k-1})].$$

Поскольку

$$\int_{0}^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,dt = \frac{\pi}{2}$$

(см. п. 54.4), то

$$\lim_{\eta\to+\infty} \frac{2}{\pi}(x_k-x_{k-1})\int_{0}^{\eta(x_k-x_{k-1})} \frac{\sin t}{t}\,dt = x_k - x_{k-1}.$$

Далее, очевидно,

$$\lim_{\alpha\to+\infty} \frac{2}{\pi\eta}[1-\cos\eta(x_k-x_{k-1})] = 0,$$

поэтому

$$\lim_{\eta\to+\infty} \frac{1}{\pi}\int_{x_{k-1}}^{x_k} dx \int_{\eta(x_{k-1}-x)}^{\eta(x_k-x)} \frac{\sin t}{t}\,dt = x_k - x_{k-1}, \quad k = 1, 2, \ldots, n.$$

Покажем теперь, что при $j \neq k$

$$\lim_{\eta \to +\infty} \int\limits_{x_{j-1}}^{x_j} dx \int\limits_{\eta(x_{k-1}-x)}^{\eta(x_k-x)} \frac{\sin t}{t}\, dt = 0.$$

Пусть для определенности $x_{j-1} < x_j \leq x_{k-1} < x_k$. При других расположениях полуинтервалов постоянства $[x_{j-1}, x_j)$ и $[x_{k-1}, x_k)$

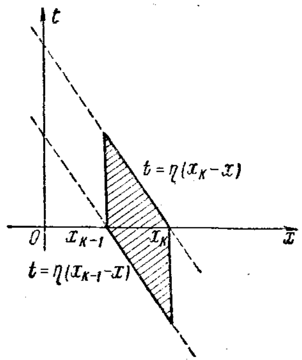


Рис. 230

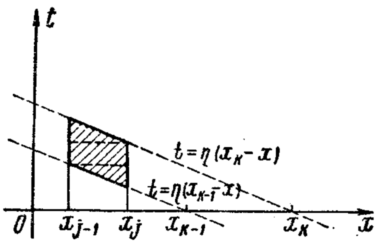


Рис. 231

доказательство аналогично. Меняя снова порядок интегрирования и производя интегрирование по x (рис. 231), с помощью аналогичных рассуждений получим

$$\int\limits_{x_{j-1}}^{x_j} dx \int\limits_{\eta(x_{k-1}-x)}^{\eta(x_k-x)} \frac{\sin t}{t}\, dt = \int\limits_{\eta(x_k-x_j)}^{\eta(x_k-x_{j-1})} \left(x_k - x_{j-1} - \frac{t}{\eta}\right) \frac{\sin t}{t}\, dt +$$

$$+ \int\limits_{\eta(x_{k-1}-x_{j-1})}^{\eta(x_k-x_j)} (x_j - x_{j-1}) \frac{\sin t}{t}\, dt +$$

$$+ \int\limits_{\eta(x_{k-1}-x_j)}^{\eta(x_{k-1}-x_{j-1})} \left(x_j - x_{k-1} + \frac{t}{\eta}\right) \frac{\sin t}{t}\, dt \to 0 \quad \text{при} \quad \eta \to \infty.$$

Теперь из (58.59) имеем

$$\|F[f]\|^2 = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} F[f]\overline{F[f]}\, dx = \lim_{\eta \to +\infty} \int\limits_{-\eta}^{\eta} F[f] F\overline{[f]}\, dy =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} |\zeta_k|^2 (x_k - x_{k-1}) = \|f\|^2. \quad \square$$

Лемма 7. *Пусть f — комплекснозначная функция, непрерывная на отрезке $[a, b]$ и равная нулю вне его, тогда существует последовательность таких ступенчатых функций φ_n, $n=1, 2, \ldots$, что*

$$\lim_{n\to\infty} \|\varphi-\varphi_n\|=0.$$

Доказательство. Для действительных функций это следует из леммы 14 п. 57.10. Пусть теперь $\varphi=u+iv$ — комплекснозначная функция, непрерывная на отрезке $[a, b]$; тогда действительные функции u и v также непрерывны на отрезке $[a, b]$. Поэтому существуют такие последовательности ступенчатых функций $\{u_n\}$ и $\{v_n\}$, что $\|u-u_n\|\to 0$ и $\|v-v_n\|\to 0$ при $n\to\infty$. Если $\varphi_n=u_n+iv_n$, то $\|\varphi-\varphi_n\|\leqslant\|u-u_n\|+\|v-v_n\|$, отсюда $\|\varphi-\varphi_n\|\to 0$ при $n\to\infty$. □

Лемма 8. *Пусть комплекснозначная функция φ непрерывна на отрезке $[a, b]$ и равна нулю вне его, тогда*

$$\|F[\varphi]\|=\|\varphi\|.$$

Доказательство. Пусть φ_n — последовательность ступенчатых функций таких, что

$$\lim_{n\to\infty} \|\varphi-\varphi_n\|=0$$

(см. лемму 7), тогда в силу непрерывности нормы

$$\lim_{n\to\infty} \|\varphi_n\|=\|\varphi\|. \tag{58.60}$$

Из неравенства же Коши — Буняковского получим

$$\int_a^b |\varphi_n(x)-\varphi(x)|\,dx \leqslant \left(\int_a^b dx\right)^{1/2} \left(\int_a^b |\varphi_n(x)-\varphi(x)|^2\,dx\right)^{1/2} = (b-a)^{1/2}\left(\int_a^b |\varphi_n(x)-\varphi(x)|^2\,dx\right)^{1/2}$$

и, следовательно,

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b |\varphi_n(x)-\varphi(x)|\,dx=0,$$

т. е. последовательность $\{\varphi_n\}$ сходится в среднем к функции φ и в смысле L_1. Поэтому если

$$\psi=F[\varphi],\quad \psi_n=F[\varphi_n],\quad n=1, 2, \ldots,$$

то последовательность непрерывных (см. следствие леммы 4 в п. 56.7) функций $\{\psi_n\}$ равномерно сходится к функции ψ, которая в силу этого непрерывна на всей числовой оси. Кроме того, в силу леммы 6

$$\|\psi_n\| = \|\varphi_n\|. \tag{58.61}$$

Отсюда следует, в частности, что непрерывные функции ψ_n являются функциями с интегрируемым квадратом модуля, т. е. принадлежат пространству $L_2(-\infty, +\infty)$. Далее, функции ψ_n, $n=1, 2, \ldots$, образуют фундаментальную последовательность в пространстве $L_2(-\infty, +\infty)$. Это следует из сходимости в среднем в смысле L_2 последовательности $\{\varphi_n\}$ и из равенства

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} |\psi_n(y) - \psi_m(y)|^2\, dy = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} |\varphi_n(y) - \varphi_m(y)|^2\, dy,$$

которое также вытекает из леммы 6, ибо разность ступенчатых функций также является ступенчатой функцией.

Покажем, что последовательность $\{\psi_n\}$ сходится к функции ψ и в пространстве L_2. Действительно, пусть фиксировано $\varepsilon > 0$, тогда в силу фундаментальности последовательности $\{\psi_n\}$ существует такой номер n_ε, что для всех $n \geqslant n_\varepsilon$ и $m \geqslant n_\varepsilon$ выполняется неравенство

$$\|\psi_n - \psi_m\|^2 = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} |\psi_n(y) - \psi_m(y)|^2\, dy < \varepsilon.$$

Тем более, для любого числа $c > 0$ будем иметь

$$\int\limits_{-c}^{c} |\psi_n(y) - \psi_m(y)|^2\, dy < \varepsilon. \tag{58.62}$$

При фиксированных n и c при $m \to \infty$ подынтегральное выражение в (58.62) равномерно стремится к функции $|\psi_n(y) - \psi(y)|^2$. Поэтому в неравенстве (58.62) можно перейти к пределу под знаком интеграла при $m \to \infty$. В результате будем иметь

$$\int\limits_{-c}^{c} |\psi_n(y) - \psi(y)|^2\, dy \leqslant \varepsilon.$$

Устремляя теперь c к $+\infty$, получим, что при $n \geqslant n_\varepsilon$ выполняется неравенство

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} |\psi_n(y) - \psi(y)|^2\, dy \leqslant \varepsilon, \tag{58.63}$$

что и означает сходимость в среднем в смысле L_2 последовательности $\{\psi_n\}$ к функции ψ.

Из доказанного следует также, что $\psi \in L_2(-\infty, +\infty)$. Действительно, в силу (58.61) и (58.63)

$$\|\psi\| \leqslant \|\psi - \psi_n\| + \|\psi_n\| < +\infty.$$

Наконец, из неравенства (57.18) и того что $\lim\limits_{n\to\infty}\|\psi_n-\psi\|=0$, получим

$$\lim_{n\to\infty}\|\psi_n\|=\|\psi\|. \tag{58.64}$$

Из (58.60), (58.61) и (58.64) следует, что

$$\|\psi\|=\|\varphi\|. \ \square$$

Теорема 15 (Планшерель [*]). *Пусть функция φ непрерывна и с интегрируемым квадратом модуля на всей числовой оси и пусть*

$$\psi_M(y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-M}^{M}\varphi(x)e^{-ixy}\,dx, \qquad M>0.$$

Тогда:

1) *функция $\psi_M(y)$ также непрерывна и с интегрируемым на всей числовой оси квадратом,*

2) *при $M\to+\infty$ функции ψ_M сходятся в пространстве $L_2(-\infty, +\infty)$ к некоторому элементу $\psi\in L_2(-\infty, +\infty)$ и*

3) $\|\varphi\|=\|\psi\|$.

Доказательство. Если

$$\varphi_M(x)=\begin{cases}\varphi(x), & \text{если } x\in[-M, M],\\ 0, & \text{если } x\notin[-M, M],\end{cases}$$

то, очевидно,

$$\psi_M=F[\varphi_M],$$

$$\lim_{M\to+\infty}\varphi_M=\varphi \text{ в } L_2(-\infty, +\infty), \tag{58.65}$$

$$\lim_{M\to+\infty}\|\varphi_M\|=\|\varphi\|. \tag{58.66}$$

Согласно лемме 8,

$$\|\psi_M\|=\|\varphi_M\|, \quad M>0, \tag{58.67}$$

$$\|\psi_{M_1}-\psi_{M_2}\|=\|\varphi_{M_1}-\varphi_{M_2}\|, \quad M_1>0, \quad M_2>0. \tag{58.68}$$

Из (58.65) и (58.68) следует в силу полноты пространства $L_2(-\infty, \infty)$, что существует предел (почему?)

$$\lim_{M\to+\infty}\psi_M=\psi \text{ в } L_2(-\infty, +\infty).$$

В силу непрерывности нормы

$$\lim_{M\to+\infty}\|\psi_M\|=\|\psi\| \tag{58.69}$$

из (58.66), (58.67) и (58.69) имеем

$$\|\psi\|=\|\varphi\|. \ \square$$

---

[*] М. Планшерель (1885—1967) — швейцарский математик.

Полученный в процессе доказательства элемент $\psi \in L_2(-\infty, +\infty)$ мы будем также называть *преобразованием Фурье* заданной непрерывной функции $\varphi \in L_2(-\infty, +\infty)$ и писать

$$\psi = F[\varphi]. \tag{58.70}$$

Эта запись естественна, так как если функция φ, кроме того, и абсолютно интегрируема, то $\lim\limits_{M \to +\infty} \psi_M$ совпадает с обычным преобразованием Фурье. Действительно, в этом случае

$$\lim_{M \to +\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} |\varphi_M(x) - \varphi(x)|\, dx = 0.$$

Следовательно, функции $\psi_M = F[\varphi_M]$ при $M \to \infty$ равномерно сходятся к преобразованию Фурье $F[\varphi]$ функции φ. Как мы видели, ψ_M сходится в среднем в смысле L_2 к функции ψ; отсюда нетрудно убедиться, что $\psi = F[\varphi]$ (сравнить аналогичное рассуждение в доказательстве леммы 8).

Преобразование Фурье (58.70) определено пока лишь для тех элементов $\varphi \in L_2(-\infty, +\infty)$, которые являются непрерывными функциями с интегрируемым квадратом, однако по непрерывности оно может быть распространено на все пространство $L_2(-\infty, +\infty)$. Действительно, пусть φ — произвольный элемент из пространства $L_2(-\infty, +\infty)$. Согласно определению пространства $L_2(-\infty, +\infty)$ множество непрерывных функций плотно в нем. Следовательно, существует последовательность непрерывных функций

$$\varphi_n \in L_2(-\infty, +\infty), \qquad n = 1, 2, \ldots,$$

такая, что $\lim\limits_{n \to \infty} \varphi_n = \varphi$, т. е. $\lim\limits_{n \to \infty} \|\varphi_n - \varphi\| = 0$.

Пусть $F[\varphi_n] = \psi_n$, $n = 1, 2, \ldots$. В силу теоремы Планшереля

$$\|\psi_n - \psi_m\| = \|\varphi_n - \varphi_m\|, \qquad n, m = 1, 2, \ldots,$$

поэтому последовательность $\{\psi_n\}$ фундаментальна в L_2 и, следовательно, сходится. Пусть $\psi = \lim\limits_{n \to \infty} \psi_n$. По определению полагаем

$$\psi = F[\varphi]. \tag{58.71}$$

Если $\varphi_n^* \in L_2(-\infty, +\infty)$, $n = 1, 2, \ldots$, — какая-либо другая последовательность непрерывных функций, сходящаяся в $L_2(-\infty, +\infty)$ к элементу φ, и если $\psi_n^* = F[\varphi_n^*]$, то из равенства

$$\|\varphi_n - \varphi_n^*\| = \|\psi_n - \psi_n^*\|$$

имеем $\lim\limits_{n \to \infty} \psi_n^* = \psi$. Таким образом, определение (58.71) не зависит от выбора последовательности непрерывных функций, сходящейся к элементу φ.

Для любого $\varphi \in L_2(-\infty, +\infty)$ справедливо равенство

$$\|F[\varphi]\| = \|\varphi\|,$$

что сразу следует из того, что это равенство имеет место для непрерывных функций $\varphi \in L_2(-\infty, +\infty)$ и непрерывности нормы.

Далее, легко проверить, что преобразование Фурье F линейно на $L_2(-\infty, +\infty)$, т. е.

$$F[\lambda_1\varphi_1 + \lambda_2\varphi_2] = \lambda_1 F[\varphi_1] + \lambda_2 F[\varphi_2]$$

для любых φ_1 и φ_2 из $L_2(-\infty, +\infty)$ и любых чисел λ_1 и λ_2. Это верно для ступенчатых функций. Они образуют плотное в $L_2(-\infty, +\infty)$ множество. Отсюда предельным переходом указанное равенство получается для любых элементов пространства $L_2(-\infty, +\infty)$.

Наконец, преобразование Фурье отображает пространство $L_2(-\infty, +\infty)$ на себя, т. е. каков бы ни был элемент $\psi \in L_2(-\infty, +\infty)$, существует такой элемент $\varphi \in L_2(-\infty, +\infty)$, что $F[\varphi] = \psi$. Для того чтобы это показать, следует тем же методом, как это было сделано для преобразования Фурье, определить на пространстве $L_2(-\infty, +\infty)$ обратное преобразование Фурье F^{-1} и показать, что для любого элемента $\psi \in L_2(-\infty, +\infty)$ справедливо равенство $\|F^{-1}[\psi]\| = \|\psi\|$. Затем можно показать, что

$$F[F^{-1}[\psi]] = \psi \quad \text{и} \quad F^{-1}[F[\psi]] = \psi$$

для всех $\psi \in L_2(-\infty, +\infty)$, исходя из того, что это верно на множестве ступенчатых функций, образующих плотное в $L_2(-\infty, +\infty)$ множество. Если теперь для элемента $\psi \in L_2(-\infty, +\infty)$ взять элемент $\varphi = F^{-1}[\psi]$, то получим $F[\varphi] = \psi$, что и означает, что преобразование F отображает все пространство $L_2(-\infty, +\infty)$ на себя.

Суммируя все сказанное, получим следующую теорему.

Теорема 16 (Планшерель). *Преобразование Фурье F линейно и взаимно однозначно отображает пространство $L_2(-\infty, +\infty)$ на себя, при этом для любого элемента $\varphi \in L_2(-\infty, +\infty)$ справедливо равенство*

$$\|F[\varphi]\| = \|\varphi\|.$$

§ 59. ОБОБЩЕННЫЕ ФУНКЦИИ

59. 1. ОБЩИЕ СООБРАЖЕНИЯ

В этом параграфе мы рассмотрим одно обобщение классического понятия функции, а именно понятие обобщенной функции. Оно возникло при решении некоторых физических задач и в последние годы быстро и прочно вошло в математику. С помощью этого понятия можно распространить преобразование Фурье на существенно более широкий класс функций, чем абсолютно интегрируемые или интегрируемые в квадрате функции. Оно позволяет сформулировать на математическом языке такие идеализированные понятия, как, например, плотность точечного заряда, плотность материальной точки, мгновенный импульс и т. п.

Поясним это подробнее. При изучении физических явлений с помощью математического аппарата нам неизбежно приходится пользоваться различными математическими абстракциями, в частности понятием точки. Мы говорим, например, о массе, сосредоточенной в данной точке пространства, о силе, приложенной в данный момент времени (т. е. в данной точке оси отсчета времени), о точечном источнике того или иного физического поля и т. п. Это удобно при использовании математического аппарата, хотя при этом мы воспроизводим не вполне точную реальную картину: всякая масса имеет определенный объем, всякая сила действует определенный промежуток времени, всякий источник поля имеет определенные размеры и т. д. Оказывается, что при таком подходе к изучению физических явлений недостаточно методов классической математики. Иногда приходится вводить новые математические понятия, создавать новый математический аппарат.

Рассмотрим в качестве примера действие «мгновенной» силы. Пусть в момент времени $t=0$ на тело массы $m\neq 0$ подействовала сила, сообщившая ему скорость $v\neq 0$, после чего действие силы прекратилось. Обозначая через $F(t)$ силу, действующую на тело в момент времени t, получим $F(t)=0$ при $t\neq 0$. Попытаемся найти, чему же равна сила $F(t)$ при $t=0$. По второму закону Ньютона сила равна скорости изменения количества движения относительно времени

$$F(t)=\frac{d(mv)}{dt}$$

и, следовательно, для любого момента времени τ, $0<\tau<+\infty$, имеем

$$\int\limits_{-\infty}^{\tau} F(t)\,dt=mv. \tag{59.1}$$

В качестве нижнего предела интегрирования взята $-\infty$; можно, конечно, вместо нее взять и любое число $a<0$, поскольку до момента времени $t=0$ тело находилось в покое.

Обратим внимание на то, что с точки зрения классической математики, т. е. с точки зрения того понятия интеграла, которое было нами изучено, равенство (59.1) лишено смысла: функция $F(t)$ равна нулю во всех точках, кроме $t=0$ и потому стоящий в левой части формулы (59.1) интеграл, рассматриваемый как несобственный, равен нулю, в то время как правая часть этого равенства не равна нулю. Вместе с тем, исходя из физических соображений, естественно ожидать, что написанное равенство имеет определенный смысл. Это противоречие означает, что мы оказались за пределами возможности использования известного нам математического аппарата, что необходимо ввести какие-то новые математические понятия.

Предположим, для простоты, что количество движения, которое получило тело, равно единице, т. е. что $mv=1$. В этом случае силу $F(t)$, действующую на тело, будем обозначать через $\delta(t)$, следовательно, формула (59.1) будет теперь иметь вид

$$\int\limits_{-\infty}^{\tau} \delta(t)\,dt=1,\ \tau>0. \tag{59.2}$$

Функция $\delta(t)$ называется обычно дельта-функцией (δ-функцией), или функцией Дирака [*].

Чтобы лучше вникнуть в сущность вопроса, предположим, что на тело действует не мгновенная сила, а что в течение промежутка времени от $-\varepsilon$ до 0 ($\varepsilon>0$) на тело действует некоторая постоянная сила, которую мы обозначим через $\delta_\varepsilon(t)$. Предположим также, что эта сила сообщает нашему телу то же самое количество движения, равное единице. Короче говоря, распределим искомую силу $\delta(t)$ на интервал длины ε. Найдем силу $\delta_\varepsilon(t)$.

По закону сохранения времени для любого времени $\tau\geqslant 0$ имеем

$$\int\limits_{-\infty}^{\tau} \delta_\varepsilon(t)\,dt=1.$$

Поскольку сила $\delta_\varepsilon(t)$ равна нулю вне отрезка $[-\varepsilon, 0]$, а на этом отрезке постоянна, то

$$1=\int\limits_{-\infty}^{\tau} \delta_\varepsilon(t)\,dt=\int\limits_{-\varepsilon}^{0} \delta_\varepsilon(t)\,dt=\varepsilon\delta_\varepsilon(t),\quad -\varepsilon\leqslant t\leqslant 0.$$

Поэтому

$$\delta_\varepsilon(t)=\begin{cases}\dfrac{1}{\varepsilon}, & \text{если } -\varepsilon\leqslant t\leqslant 0,\\ 0, & \text{если } t<-\varepsilon \text{ или } t>0.\end{cases} \tag{59.3}$$

Естественно предположить, что мгновенная сила $\delta(t)$ получается из «распределенной силы» $\delta_\varepsilon(t)$ предельным переходом при $\varepsilon\to 0$, т. е.

$$\delta(t)=\lim_{\varepsilon\to 0}\delta_\varepsilon(t),$$

тогда

$$\delta(t)=\begin{cases}+\infty, & \text{если } t=0,\\ 0, & \text{если } t\neq 0.\end{cases} \tag{59.4}$$

[*] П. Дирак (род. 1902 г.) — английский физик.

Эта формула не дает нам возможности, используя известные определения интеграла (собственного или несобственного), получить формулу (59.2). Равенство нулю функции во всех точках, кроме одной, где она равна бесконечности, и одновременное равенство интеграла от этой функции единице противоречат друг другу в рамках той математики, которая в настоящее время называется классической. Это приводит к мысли о необходимости введения нового определения — определения «интеграла» (59.2).

Физически естественно считать, что количество движения, приданное телу мгновенной силой $\delta(t)$, т. е. интеграл (59.2) является пределом количества движения, приданного телу распределенными во времени силами $\delta_\varepsilon(t)$, когда время их действия стремится к нулю, т. е. когда $\varepsilon \to 0$. Поэтому положим, по определению

$$\int_{-\infty}^{\tau} \delta(t)\,dt = \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{-\infty}^{\tau} \delta_\varepsilon(t)\,dt, \quad \tau > 0.$$

Отсюда в силу равенства $\int\limits_{-\infty}^{\tau} \delta_\varepsilon(t)\,dt \equiv 1$, $\tau>0$ для всех $\varepsilon>0$ и следует непосредственно равенство (59.2).

Таким образом, когда говорится, что интеграл (59.2) от дельта-функции равен единице, то этот интеграл следует понимать как предел соответствующих обычных интегралов от δ_ε-функций при $\varepsilon \to +0$.

Оказывается полезным дать аналогичным образом определение и более общих «интегралов», а именно интегралов вида

$$\int_{-\infty}^{\tau} \delta(t) f(t)\,dt, \quad -\infty < \tau < +\infty, \tag{59.5}$$

где $f(t)$ — некоторая непрерывная функция. Именно, определим символ (59.5) равенством

$$\int_{-\infty}^{\tau} \delta(\tau) f(t)\,dt = \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{-\infty}^{\tau} \delta_\varepsilon(t) f(t)\,dt. \tag{59.6}$$

Чтобы доказать, что это определение корректно, надо доказать, что предел (59.6) всегда существует. Покажем, более того, что

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int_{-\infty}^{\tau} \delta_\varepsilon(t) f(t)\,dt = \begin{cases} f(0) & \text{при } \tau \geqslant 0, \\ 0 & \text{при } \tau < 0. \end{cases} \tag{59.7}$$

Пусть сначала $\tau \geqslant 0$. Используя (59.3), получим

$$\left| \int_{-\infty}^{\tau} \delta_\varepsilon(t) f(t)\,dt - f(0) \right| = \left| \frac{1}{\varepsilon} \int_{-\varepsilon}^{0} f(t)\,dt - \frac{f(0)}{\varepsilon} \int_{-\varepsilon}^{0} dt \right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{\varepsilon} \int_{-\varepsilon}^{0} |f(t) - f(0)|\,dt. \tag{59.8}$$

В силу непрерывности функции $f(x)$ при $x=0$ для любого $\eta>0$ существует такое $\varepsilon_\eta>0$, что для всех t, удовлетворяющих условию $|t|<\varepsilon_\eta$, выполняется неравенство

$$|f(t)-f(0)|<\eta.$$

Поэтому для всех $\varepsilon<\varepsilon_\eta$ из неравенства (59.8) следует, что

$$\left|\int_{-\infty}^{\tau}\delta_\varepsilon(t)f(t)\,dt-f(0)\right|<\frac{\eta}{\varepsilon}\int_{-\varepsilon}^{0}dt=\eta.$$

Равенство (59.7) при $\tau\geqslant 0$ доказано. Еще проще оно доказывается при $\tau<0$. Итак, из определения (59.6) следует, что для любой непрерывной функции $f(t)$ справедлива формула

$$\int_{-\infty}^{\tau}\delta(t)f(t)\,dt=\begin{cases} f(0) & \text{при } \tau\geqslant 0,\\ 0 & \text{при } \tau<0.\end{cases} \qquad (59.9)$$

Формула (59.2) следует отсюда при $f(t)\equiv 1$.

Если положить

$$\theta(t)=\begin{cases} 1 & \text{при } t\geqslant 0,\\ 0 & \text{при } t<0,\end{cases} \qquad (59.10)$$

то формула (59.9) при $f(t)\equiv 1$ перепишется в виде

$$\theta(\tau)=\int_{-\infty}^{\tau}\delta(t)\,dt. \qquad (59.11)$$

Функция $\theta(t)$ имеет специальное название — она называется функцией Хевисайда *). Вычисляя производную функции $\theta(t)$ согласно классическому определению производной из (59.10) получим

$$\theta'(t)=\begin{cases} \infty & \text{при } t=0,\\ 0 & \text{при } t\neq 0.\end{cases} \qquad (59.12)$$

На основании этого было бы неверно утверждать, что $\theta'(t)$ является дельта-функцией, так как одной лишь формулой (59.4) функция $\delta(t)$ не определяется, поскольку даже физически ясно, что только из этой формулы не может следовать, что сила $\delta(t)$ сообщает рассматриваемому телу именно единичное количество движения. Однако, удобно положить, по определению

$$\theta'(t)=\delta(t).$$

Это помимо равенства (59.12) оправдывается тем, что в этом случае сохраняется основная формула интегрального исчисления, восстанавливающая функцию по ее производной — формула

*) О. Хевисайд (1850—1925) — английский физик.

Ньютона — Лейбница. Действительно, теперь формула (59.11) может быть переписана в виде

$$\theta(\tau) = \int_{-\infty}^{\tau} \theta'(t)\,dt, \quad -\infty < \tau < +\infty$$

(отметим, что $\theta(-\infty) = 0$).

Заметим, что мы не дали четкого математического определения самой функции $\delta(t)$ как функции точки (выше отмечалось, что формула (59.4) не является таким определением); это вообще невозможно сделать, так как дельта-функция является понятием другой природы. Мы же определили не функцию $\delta(t)$, а «интеграл» (59.5). Это не случайно. Характерным для многих задач физики является то обстоятельство, что вводимые для описания того или иного объекта функции имеют смысл лишь постольку, поскольку непосредственный физический смысл имеют некоторые интегралы от этих функций. Обобщенные функции и возникают как некоторое обобщение семейств интегралов от произведения двух функций, одна из которых фиксирована, а другая может выбираться произвольно из некоторой совокупности.

Итак, нами определено новое понятие — понятие интеграла от дельта-функции (и даже более общее понятие интеграла от произведения непрерывной функции на дельта-функцию). Это не обычный интеграл, т. е. не предел интегральных сумм, а предел соответствующих интегралов, или, образно выражаясь, «предел пределов интегральных сумм». Иначе говоря, для определения интеграла $\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x) f(x)\,dx$ надо к предельному переходу, дающему значение интеграла $\int_{-\infty}^{+\infty} \delta_\varepsilon(x) f(x)\,dx$, добавить еще один предельный переход при $\varepsilon \to 0$. Здесь наблюдается своеобразная аналогия с определением несобственного интеграла: исходя из известного определения интеграла, мы с помощью дополнительного предельного перехода получаем новое математическое понятие. Конечно, дополнительные предельные переходы в этих случаях различны, это приводит к различным понятиям.

При новом определении символа (59.5) мы находимся в круге привычных нам математических определений, расширяющих запас понятий, с которыми имели дело раньше; нам удалось выявить одно интересное свойство дельта-функции $\delta(t)$ (см. (59.9)): она ставит в соответствие каждой непрерывной функции $f(t)$ число $f(0)$, т. е. дельта-функцию можно рассматривать как функцию, определенную на множестве всех непрерывных функций. Отображения, области определения которых представляют собой некоторые множества функций, называются *функционалами*. Дельта-функция является одним из простейших примеров функционалов. Обобщенными функциями, которые упоминались в начале этого пункта, называются функционалы определенного вида (см. п. 59.2).

Как мы видели, свойства дельта-функции определяются свойствами функций $\delta_\varepsilon(x)$. Если взять $\varepsilon=\frac{1}{n}$, $n=1,2,\ldots$, то получится последовательность функций, которая, как и аналогичные ей в определенном смысле, называется дельта-образной последовательностью (точное определение дельта-образных последовательностей будет дано ниже: см. упражнение 6 в п. 59.3). Всякая дельта-образная последовательность может служить для определения свойства (59.9) дельта-функции. Следует отметить, что мы уже встречались раньше с дельта-образными последовательностями: примером такой последовательности является последовательность ядер Фейера $\Phi_n(n)$, $n=1,2,\ldots$. Однако мы не акцентировали внимания на последовательностях такого рода, поскольку они, не являясь самостоятельным объектом изучения, играли вспомогательную роль.

Теперь мы перейдем к систематическому изучению обобщенных функций. Отдельные обобщенные функции возникли первоначально в работах П. Дирака и других физиков в качестве символического способа описания определенных физических явлений. Для использования этих понятий в качестве метода теоретического исследования возникла необходимость создания теории обобщенных функций, что и было сделано. Теория обобщенных функций является весьма полезным математическим аппаратом. С ее помощью удалось решить ряд задач, не поддававшихся решению старыми методами. Ныне обобщенные функции широко применяются как в прикладных, так и в чисто математических исследованиях.

В следующих пунктах этого параграфа мы изложим основы общей теории обобщенных функций, построенной С. Л. Соболевым и Л. Шварцем*.

59.2. ЛИНЕЙНЫЕ ПРОСТРАНСТВА СО СХОДИМОСТЬЮ. ФУНКЦИОНАЛЫ. СОПРЯЖЕННЫЕ ПРОСТРАНСТВА

Определение 1. *Пусть X — некоторое множество и пусть в совокупности всех последовательностей $\{x_n\}$ его элементов, $x_n \in X$, выделен некоторый класс последовательностей, названных сходящимися, и каждой сходящейся последовательности поставлен в соответствие элемент $x \in X$, называемый ее пределом.*

Если при этом выполняются три условия:

1) каждая последовательность элементов множества X может иметь не более одного предела;

---

*) С. Л. Соболев (род. в 1908 г.) — советский математик; Л. Шварц (род. в 1915 г.) — французский математик.

2) всякая последовательность вида $\{x, x, x, \ldots, x, \ldots\}$ является сходящейся, и ее пределом является элемент x;

3) всякая подпоследовательность сходящейся последовательности также является сходящейся и имеет тот же предел, что и вся последовательность,

то множество X называется пространством со сходимостью.

Условия 1, 2 и 3 называются *аксиомами Фреше**).

Если x является пределом последовательности $\{x_n\}$, то, как обычно, пишется

$$x = \lim_{n \to \infty} x_n.$$

Определение 2. *Линейное пространство X называется линейным пространством со сходимостью, если оно является пространством со сходимостью, относительно которой операции сложения элементов пространства и умножения их на число являются непрерывными.*

Это означает, что для любых сходящихся последовательностей $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ элементов из X, имеющих своими пределами соответственно $x \in X$ и $y \in X$, и любых чисел λ и μ последовательность $\{\lambda x_n + \mu y_n\}$ также сходится и

$$\lim_{n \to \infty} (\lambda x_n + \mu y_n) = \lambda x + \mu y.$$

Кроме того, если $\{\lambda_n\}$ — числовая последовательность и $\lim\limits_{n \to \infty} \lambda_n = \lambda$, то $\lim\limits_{n \to \infty} \lambda_n x = \lambda x$ для любого $x \in X$.

Примером линейных пространств со сходимостью являются нормированные линейные пространства; однако существуют линейные пространства со сходимостью, в которых нельзя ввести норму, порождающую заданную сходимость последовательностей.

Определение 3. *Отображения линейного пространства X во множество действительных чисел* **R** *(или во множество комплексных чисел* **C***) называются функционалами, определенными на этом пространстве или функционалами над этим пространством. Значение функционала f в точке x линейного пространства X обозначается через (f, x), т. е. так же как скалярное произведение элементов f и x в линейном пространстве X со скалярным произведением.*

Это обозначение оправдывается, в частности, тем, что скалярное произведение (y, x) при фиксированном элементе y является функционалом, определенным на указанном пространстве X.

Определение 4. *Пусть X — линейное пространство. Функционал f, определенный на этом пространстве, называется линейным (точнее, линейным однородным), если для любых элементов $x \in X$, $y \in X$ и любых чисел λ, μ выполняется условие*

$$(f, \lambda x + \mu y) = \lambda (f, x) + \mu (f, y).$$

---

*) М. Фреше (1878—1973) — французский математик.

Определение 5. *Функционал f, определенный на линейном пространстве X со сходимостью, называется непрерывным, если для любой сходящейся последовательности $x_n \in X$, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$, выполняется условие*

$$\lim_{n\to\infty} (f, x_n) = (f, x).$$

Функционалы, как и всякие числовые функции, можно складывать, умножать друг на друга, в частности на число. Например, если f и g — функционалы, то значение функционала $\alpha f + \beta g$ (α и β — числа) в точке $x \in X$ определяется по формуле

$$(\alpha f + \beta g, x) = \alpha (f, x) + \beta (g, x).$$

Лемма 1. *Линейные непрерывные функционалы образуют линейное пространство.*

Доказательство. Пусть f и g — линейные функционалы, α и β — числа. Покажем, что $\alpha f + \beta g$ — также линейный функционал:

$$\begin{aligned}(\alpha f + \beta g, \lambda x + \mu y) &= \alpha (f, \lambda x + \mu y) + \beta (g, \lambda x + \mu y) = \\ &= \alpha [\lambda (f, x) + \mu (f, y)] + \beta [\lambda (g, x) + \mu (g, y)] = \\ &= \lambda [\alpha (f, x) + \beta (g, x)] + \mu [\alpha (f, y) + \beta (g, y)] = \\ &= \lambda (\alpha f + \beta g, x) + \mu (\alpha f + \beta g, y),\end{aligned}$$

т. е. $\alpha f + \beta g$ — линейный функционал.

Пусть теперь f и g — непрерывные функционалы. Покажем, что тогда и $\alpha f + \beta g$ — также непрерывный функционал. Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$. Тогда

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} (\alpha f + \beta g, x_n) &= \lim_{n\to\infty} [\alpha (f, x_n) + \beta (g, x_n)] = \\ &= \alpha \lim_{n\to\infty} (f, x_n) + \beta \lim_{n\to\infty} (g, x_n) = \alpha (f, x) + \beta (g, x) = (\alpha f + \beta g, x).\end{aligned}$$

Таким образом, во множестве линейных непрерывных функционалов естественным образом определены операции их сложения и умножения на число. Выполнение для этих операций аксиом линейного пространства проверяется безо всякого труда. $\square$

В линейном пространстве линейных непрерывных функционалов пространства X понятие сходимости последовательностей определяется следующим образом.

Определение 6. *Последовательность функционалов f_n, $n = 1, 2, \ldots$, называется сходящейся к функционалу f, если последовательность значений функционалов f_n сходится в каждой точке $x \in X$ к значению в ней функционала f, иначе говоря, если для любого элемента $x \in X$ числовая последовательность $\{(f_n, x)\}$ сходится к числу (f, x).*

Таким образом, утверждение $\lim\limits_{n\to\infty} f_n = f$ равносильно утверждению

$$\lim_{n\to\infty} (f_n, x) = (f, x) \quad \text{для всех} \quad x \in X.$$

При таком определении сходимости функционалов операции их сложения и умножения на число непрерывны (это непосредственно следует из линейности функционалов и из свойств пределов числовых последовательностей), и, следовательно, если ввести понятие сходимости функционалов согласно определению 6, то будет справедливым следующее утверждение, которое мы сформулируем в виде отдельной леммы.

Лемма 2. *Линейные непрерывные функционалы, определенные на пространстве со сходимостью, также образуют линейное пространство со сходимостью.*

Определение 7. *Линейное пространство со сходимостью, элементами которого являются линейные непрерывные функционалы, определенные на пространстве X, называется пространством сопряженным X.*

Пусть X и Y — линейные пространства со сходимостью, причем каждый элемент пространства X является элементом пространства Y и пусть всякая последовательность $x_n \in X$, $n = 1, 2, \ldots$, сходящаяся в X к элементу x, сходится к x и в Y. В этом случае будем писать

$$X \subsetneq Y.$$

Определение 8. *Говорят, что линейный непрерывный функционал f, определенный на пространстве $X \subsetneq Y$, продолжаем на пространство Y в линейный непрерывный функционал, если существует такой линейный непрерывный функционал F, определенный на пространстве Y, что $(F, x) = (f, x)$ для всех $x \in X$ (т. е. $F = f$ на Y). В этом случае функционал F называется продолжением функционала f.*

Упражнение 1. Пусть X и Y — линейные пространства со сходимостью. Доказать, что если $X \subsetneq Y$ и множество X плотно в пространстве Y (т. е. каждый элемент из пространства Y является пределом в этом пространстве последовательности элементов из X), то всякий линейный непрерывный функционал пространства X, продолжаемый в линейный непрерывный функционал пространства Y, продолжаем единственным образом.

Как и для отображений любых линейных пространств, для пространств со сходимостью имеет смысл понятие линейного отображения (линейного оператора) одного пространства со сходимостью в другое такое же пространство (см. определение 17 в п. 57.2). Введем еще понятие непрерывного отображения одного линейного пространства со сходимостью в другое.

Определение 9. *Пусть X_1 и X_2 — два линейных пространства со сходимостью. Отображение Φ пространства X_1 в X_2 (в этом случае отображение называется также и оператором) называется* *непрерывным в точке* $x_0 \in X_1$, *если, какова бы ни была последовательность* $x_n \in X_1$, $n=1, 2, \ldots$, *сходящаяся в пространстве* X_1 *к точке* x_0, *последовательность* $\Phi(x_n) \in X_2$, $n=1, 2, \ldots$, *сходится в* X_2 *к элементу* $\Phi(x_0)$.

Иначе говоря, отображение Φ является непрерывным в точке x_0, если из $\lim\limits_{n\to\infty} X_n = x_0$ следует, что $\lim\limits_{n\to\infty} \Phi(x_n) = \Phi(x_0)$.

Лемма 3. *Если линейное отображение* Φ *линейного пространства со сходимостью* X_1 *в линейное пространство со сходимостью* X_2 *непрерывно в нуле пространства* X_1, *то оно непрерывно и всюду в* X_1.

Доказательство. Пусть $x_0 \in X$ и $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$; тогда $\lim\limits_{n\to\infty} (x_n - x_0) = 0$. В силу непрерывности отображения Φ в нуле

$$\lim_{n\to\infty} \Phi(x_n - x_0) = 0.$$

Поскольку отображение Φ линейно, то

$$\Phi(x_n - x_0) = \Phi(x_n) - \Phi(x_0)$$

и, следовательно,

$$\lim_{n\to\infty} [\Phi(x_n) - \Phi(x_0)] = 0, \quad \text{откуда} \quad \lim_{n\to\infty} \Phi(x_n) = \Phi(x_0).$$

Таким образом, отображение Φ непрерывно в каждой точке $x_0 \in X_1$. $\square$

Определение 10. *Отображение* Φ *линейного пространства со сходимостью* X_1 *в линейное пространство со сходимостью* X_2 *называется непрерывным на* X_1, *если оно непрерывно в каждой точке пространства* X_1.

Для всякого линейного пространства X со сходимостью имеют смысл понятие ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$, $u_n \in X$, $n=1, 2, \ldots$, сходящегося ряда и его суммы. Эти понятия вводятся аналогично случаю линейных нормированных пространств. Это возможно, поскольку в соответствующих определениях из свойств нормы используется лишь то, что во всяком нормированном пространстве определено понятие сходящейся последовательности.

Примеры линейных и непрерывных отображений пространств со сходимостью будут даны в п. 59.6 и в п. 59.7.

59.3. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ОБОБЩЕННЫХ ФУНКЦИЙ. ПРОСТРАНСТВА D И D'

Определим прежде всего основное для нас линейное пространство функций D. Для этого рассмотрим функции, заданные на множестве действительных чисел $\boldsymbol{R}$ и принимающие комплексные значения.

Интересующее нас пространство D состоит из бесконечно дифференцируемых финитных функций (определение финитных функций см. в п.55.2). Все финитные функции при естественным образом определенных операциях их сложения и умножения на число образуют линейное пространство, а бесконечно дифференцируемые финитные функции — его подпространство. Введем в этом подпространстве понятие сходимости последовательностей.

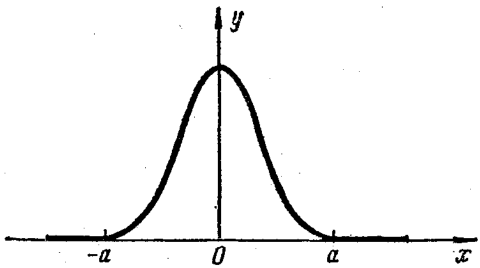


Рис. 232

Определение 11. *Последовательность бесконечно дифференцируемых финитных функций* φ_n, $n = 1, 2, \ldots$, *называется сходящейся к бесконечно дифференцируемой финитной функции* φ, *если:*

1) *существует отрезок* $[a, b]$, *вне которого все функции* ψ_n, $n = 1, 2, \ldots$, *и* ψ *обращаются в ноль**);

2) *на этом отрезке последовательность функций* φ_n, $n = 1, 2, \ldots$, *и последовательности всех их производных* $\varphi_n^{(k)}$, $n = 1, 2, \ldots$, *равномерно сходятся соответственно к функции* φ *и к ее соответствующим производным* $\varphi^{(k)}$, $k = 1, 2, \ldots$.

Совокупность бесконечно дифференцируемых финитных функций с введенной операцией предельного перехода является линейным пространством со сходимостью. Это непосредственно следует из свойств пределов функций и свойств равномерно сходящихся последовательностей.

Определение 12. *Пространство бесконечно дифференцируемых финитных функций с введенной сходимостью называется основным пространством* D.

Очевидно, что если $\varphi \in D$, то и любая производная функции φ принадлежит пространству D.

Заметим еще, что если $\{\varphi_n\}$ сходится к φ в D, то и последовательность $\{\varphi_n^{(k)}\}$ производных любого порядка $k = 1, 2, \ldots$ сходится к $\varphi^{(k)}$ в D. Это непосредственно следует из определения сходимости в пространстве D.

Тривиальным примером функции пространства D является функция, равная нулю на всей оси, менее тривиальным — функция (рис. 232).

$$\varphi(x) = \begin{cases} e^{-\frac{a^2}{a^2 - x^2}}, & \text{если } |x| < a, \\ 0, & \text{если } |x| \geqslant a. \end{cases} \tag{59.13}$$

*) Отрезок $[a, b]$ содержит носители всех функций φ, φ_n, $n = 1, 2, \ldots$,

Упражнения. 2. Доказать, что функция (59.13) бесконечно дифференцируема на всей числовой оси (ср. с (37.25)).

3. Доказать, что для того, чтобы для функции $\varphi \in D$ существовала функция $\psi \in D$ такая, что $\varphi = \psi'$ необходимо и достаточно, чтобы $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t)\,dt = 0$.

Определение 13. *Всякий линейный непрерывный функционал f, определенный на D, называется обобщенной функцией.*

Определение 14. *Функция f, определенная на всей действительной оси, называется локально интегрируемой, если она абсолютно интегрируема на любом конечном отрезке.*

Если f — локально интегрируемая функция, а $\varphi \in D$, то произведение $f\varphi$ абсолютно интегрируемо на всей оси. Действительно, пусть $\operatorname{supp}\varphi \subset [a, b]$ (определение носителя $\operatorname{supp}\varphi$ функции φ см. в п. 55.2); функция φ, очевидно, ограничена: $|\varphi(x)| \leqslant C$, $-\infty < x < +\infty$, поэтому

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} |f(x)\varphi(x)|\,dx = \int\limits_a^b |f(x)\varphi(x)|\,dx \leqslant C\int\limits_a^b |f(x)|\,dx.$$

Определим для локально интегрируемой функции f функционал (f, φ) на D равенством

$$(f, \varphi) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\varphi(x)\,dx. \tag{59.14}$$

Этот функционал линеен и непрерывен. Линейность его очевидна; докажем его непрерывность. Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} \varphi_n = \varphi$ в D. Тогда существует такой отрезок $[a, b]$, что для всех $n = 1, 2, \ldots$, имеют место включения $\operatorname{supp}\varphi_n \subset [a, b]$ и $\operatorname{supp}\varphi \subset [a, b]$; поэтому

$$|(f, \varphi) - (f, \varphi_n)| \leqslant \int\limits_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|\,|\varphi(x) - \varphi_n(x)|\,dx =$$
$$= \int\limits_a^b |f(x)|\,|\varphi(x) - \varphi_n(x)|\,dx \leqslant \sup_{[a, b]} |\varphi(x) - \varphi_n(x)| \int\limits_a^b |f(x)|\,dx \to 0$$

при $n \to \infty$. Таким образом, всякой локально интегрируемой функции $f(x)$ соответствует обобщенная функция (f, φ) *); в этом смысле всякую локально интегрируемую функцию можно рассматривать как обобщенную функцию.

Постоянная, т. е. такая обобщенная функция f, что $(f, \varphi) = c\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)\,dx$, c — постоянная, $\varphi \in D$ (в частности, нулевая функция) порождается локально интегрируемой функцией $f(x) = c$, $-\infty < x < +\infty$.

---

*) В этом случае говорится также, что обобщенная функция (f, φ) порождается функцией f.

Напомним, что под линейным функционалом всегда понимается линейный однородный функционал. Поэтому функционал f, равный одной и той же постоянной c, на всех элементах некоторого линейного пространства X, хотя и является линейной функцией, но не является однородной: если $x \in X$, $y \in X$, λ и μ — числа, то для указанного функционала будем иметь $f(x)=f(y)=f(\lambda x+\mu y)=c$. Если бы он был линейным однородным, то должно было бы иметь место $f(\lambda x+\mu y)=\lambda f(x)+\mu f(y)=(\lambda+\mu)c$. Поскольку при $\lambda+\mu\neq 1$ $f(\lambda x+\mu y)\neq\lambda f(x)+\mu f(y)$, то функционал f не линейно однородный. Следовательно, функционал, равный постоянной, не принадлежит к рассматриваемому нами классу функционалов.

Упражнение 4. Доказать, что две непрерывные на числовой оси функции различны тогда и только тогда, когда различны порожденные ими обобщенные функции.

Иногда обобщенные функции обозначаются символом $f(x)$. Это обозначение чисто символическое; оно отнюдь не обозначает значения обобщенной функции в точке $x\in \boldsymbol{R}$, а отражает лишь тот факт, что обобщенные функции являются в вышеуказанном смысле обобщением обычных (локально интегрируемых) функций; никакое значение обобщенной функции в точке x здесь не подразумевается.

Для обозначения значения обобщенной функции f в точке $\varphi=\varphi(x)$ пространства D наряду с записью (f, φ) употребляется также запись

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\varphi(x)\,dx. \tag{59.15}$$

Таким образом, по определению,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\varphi(x)\,dx=(f,\varphi).$$

Это равенство является определением символа (59.15), который формально читается как «интеграл от произведения f на φ». Эта запись отражает собой тот факт, что обобщенные функции являются обобщением функционалов (59.14), где f — локально интегрируемая функция.

Упражнение 5. Доказать, что функционал $v.p. \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\varphi(x)}{x}\,dx$, $\varphi\in D$, является обобщенной функцией $\left(\text{она обычно обозначается } \mathcal{P}\frac{1}{x}\right)$.

В качестве другого примера обобщенной функции рассмотрим функционал, обозначаемый $\delta=\delta(x)$ и называемый δ-функцией (см. 59.1).

Определение 15. *Функционал, определяемый формулой*

$$(\delta,\varphi)=\varphi(0),\quad \varphi\in D,$$

называется δ-функцией.

Его линейность и непрерывность легко проверяются. Он не может быть представлен в виде (59.14) ни при какой локально интегрируемой функции f. Действительно, если бы нашлась такая локально интегрируемая функция f, что

$$(\delta, \varphi) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\varphi(x)\,dx, \quad \varphi \in D,$$

то для этой функции f и для функции φ, заданной формулой (59.13), мы имели бы

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\varphi(x)\,dx = \varphi(0) = \frac{1}{e}. \tag{59.16}$$

Но в силу абсолютной интегрируемости функции f

$$\lim_{a\to 0}\int_{-a}^{a} |f(x)|\,dx = 0$$

(почему?).

Далее, замечая, что $e^{-\frac{a^2}{a^2-x^2}} < \frac{1}{e}$, $-a \leqslant x \leqslant a$, получим

$$\left|\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\varphi(x)\,dx\right| = \left|\int_{-a}^{a} f(x)e^{-\frac{a^2}{a^2-x^2}}\,dx\right| \leqslant \frac{1}{e}\int_{-a}^{a}|f(x)|\,dx,$$

поэтому левая часть равенства (59.16) при $a\to 0$ стремится к нулю, а правая нет. Полученное противоречие и доказывает наше утверждение. Таким образом, запас обобщенных функций в указанном смысле больше, чем запас обычных.

Определение 16. *Функционал, ставящий в соответствие каждой функции $\varphi \in D$ число $\varphi(x_0)$, где x_0 фиксировано, называется δ-функцией и обозначается $\delta(x - x_0)$.*

Применяя запись (59.15), можно написать

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x-x_0)\varphi(x)\,dx = \varphi(x_0), \qquad \varphi \in D.$$

Определение 17. *Совокупность обобщенных функций, как и всякая совокупность функционалов, определенных на линейном пространстве со сходимостью (см. п. 59.2), образует линейное пространство со сходимостью, сопряженное к D. Оно называется пространством обобщенных функций и обозначается D'.*

Таким образом, сходимость последовательности обобщенных функций f_n, $n = 1, 2, \ldots$, к обобщенной функции f означает, что

$$\lim_{n\to\infty} (f_n, \varphi) = (f, \varphi)$$

для любой функции $\varphi \in D$.

Задача 40. Пусть $f_n \in D'$, $n=1, 2, \ldots$, и пусть для любой функции $\varphi \in D$ существует предел числовой последовательности (f_n, φ). Положим, $F(\varphi) = \lim\limits_{n\to\infty} (f_n, \varphi)$. Доказать, что $F(\varphi)$ является обобщенной функцией.

В п. 59.1 мы рассматривали функции $\delta_\varepsilon(x)$, которые очевидно, локально интегрируемы. Мы видели, что они обладают тем свойством, что для любой непрерывной на всей оси функции φ и, следовательно, для любой функции $\varphi \in D$

$$\lim_{\varepsilon\to+0} (\delta_\varepsilon, \varphi) = \lim_{\varepsilon\to+0} \int_{-\infty}^{+\infty} \delta_\varepsilon(x)\varphi(x)\,dx = \varphi(0) = (\delta, \varphi).$$

С точки зрения обобщенных функций это означает, что в D'

$$\lim_{\varepsilon\to+0} \delta_\varepsilon = \delta^{*)}.$$

Таким образом, δ-функция в пространстве D' является пределом последовательности обобщенных функций, порожденных локально интегрируемыми функциями.

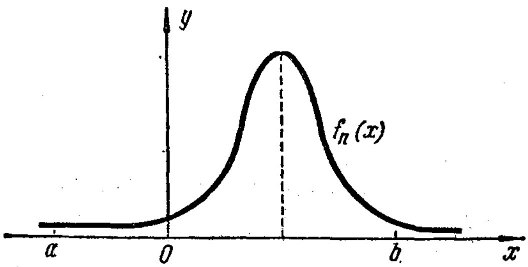


Рис. 233

Упражнения 6. Пусть последовательность абсолютно интегрируемых функций $f_n(x)$, $n=1, 2, \ldots$, такова, что

а) каково бы ни было число $M>0$, при $|a|<M$, $|b|<M$, величины

$$\left|\int_a^b f_n(x)\,dx\right|, \qquad n=1, 2, \ldots$$

ограничены постоянной, не зависящей от a, b, n (она зависит только от M);

б) при любых фиксированных a и b, отличных от нуля,

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx = \begin{cases} 0 & \text{при } a<b<0 \text{ и } 0<a<b, \\ 1 & \text{при } a<0<b. \end{cases}$$

Такие последовательности $f_n(x)$ (рис. 233) называются *дельта-образными*.

*) Как и для обычных функций, символ $\varepsilon\to+0$ означает, что указанное предельное соотношение имеет место для любой последовательности $\varepsilon_n>0$, $n=1, 2, \ldots$, стремящейся к нулю.

Доказать, что для любой непрерывной функции φ и любой дельта-образной последовательности $f_n(x)$, $n=1, 2, \ldots$,

$$\lim_{n\to\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f_n(x)\varphi(x)\,dx=\varphi(0);$$

иначе говоря, $\lim\limits_{n\to\infty}(f_n, \varphi)=(\delta, \varphi)$.

7. Пусть $f_t(x)=\frac{1}{\sqrt{\pi t}}e^{-\frac{x^2}{t}}$. Доказать, что в пространстве D' справедливо равенство $\lim\limits_{t\to+0} f_t(x)=\delta(x)$.

8. Доказать, что в пространстве D' существует предел $\lim\limits_{y\to 0}\frac{1}{x\pm iy}$ $\left(\text{он обозначается } \frac{1}{x\pm i0}\right)$ и что справедливы формулы

$$\frac{1}{x\pm i0}=\mp i\pi\delta(x)+\mathscr{P}\frac{1}{x}.$$

(Они называются формулами Сохоцкого [*].)

Задача 41. Доказать, что всякая сигулярная обобщенная функция является пределом регулярных (в этом смысле пространство обобщенных функций является «пополнением» пространства обычных функций).

Как мы видели, понятие обобщенной функции не сводится к понятию функции точки и поэтому говорить о значении обобщенной функции в данной точке, в частности об обращении ее в ноль в этой точке, вообще говоря, не имеет смысла. Однако можно ввести естественное понятие обращения в ноль обобщенной функции на интервале.

Определение 18. *Будем говорить, что обобщенная функция f обращается в ноль на интервале (a, b), если $(f, \varphi)=0$ для всех $\varphi\in D$, которые имеют носитель, содержащийся в интервале (a, b).*

Упражнение 9. Доказать, что, для того, чтобы непрерывная функция обращалась в ноль в каждой точке интервала, необходимо и достаточно, чтобы она обращалась в ноль на этом интервале как обобщенная функция.

Определение 19. Обобщенные функции f и g называются равными на интервале (a, b), если $f-g=0$ на (a, b).

59.4. ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ ОБОБЩЕННЫХ ФУНКЦИЙ

Определим теперь производную обобщенной функции. Выясним, прежде всего, что представляет собой производная обычной непрерывно дифференцируемой на всей числовой оси функции f, рассматриваемая как функционал (f', φ) на D. Это имеет смысл, поскольку производная f', будучи непрерывной на всей числовой оси является локально интегрируемой функцией.

---

[*] Ю. В. Сохоцкий (1842—1929) — русский математик.

Интегрируя по частям, в силу финитности функции $\varphi \in D$, получим

$$(f', \varphi) = \int_{-\infty}^{+\infty} f'(x)\varphi(x)\,dx = -\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\varphi'(x)\,dx = -(f, \varphi'), \qquad (59.17)$$

причем, как известно, $\varphi' \in D$. Таким образом, производная f' является функционалом на D, значения которого выражаются через значения функции f, рассматриваемой как функционал, с помощью формулы (59.17). Это делает естественным следующее определение.

Определение 20. *Производной обобщенной функции f называется функционал на D, обозначаемый f' и определяемый равенством*

$$(f', \varphi) = -(f, \varphi'), \quad \varphi \in D. \qquad (59.18)$$

Иначе говоря, значение функционала f' в любой точке φ пространства D равно значению функционала f в точке $\varphi' \in D$, взятому с противоположным знаком.

Таким образом, любая обобщенная функция имеет производную. Отсюда следует, что и любая локально интегрируемая функция имеет в смысле определения 20 производную!

Из формулы (59.17) следует, что производная в обычном смысле непрерывно дифференцируемой на всей числовой оси функции, рассматриваемая как функционал над D, совпадает с ее производной в смысле обобщенных функций.

Операцию вычисления производной обобщенной функции называют по аналогии со случаем обычных функций дифференцированием.

Лемма 4. *Функционал f' является линейным непрерывным функционалом и, следовательно, обобщенной функцией.*

Доказательство. Проверим линейность:

$$(f', \lambda\varphi + \mu\psi) = -(f, (\lambda\varphi + \mu\psi)') = -(f, \lambda\varphi' + \mu\psi') =$$
$$= -\lambda(f, \varphi') - \mu(f, \psi') = \lambda(f', \varphi) + \mu(f', \psi), \ \varphi \in D, \ \psi \in D.$$

Для того чтобы проверить непрерывность функционала f вспомним, что если $\varphi \in D$, $\varphi_k \in D$, $k = 1, 2, \ldots$, и $\lim\limits_{k\to\infty} \varphi_k = \varphi$ в D, то в силу определения сходимости в пространстве D и $\lim\limits_{k\to\infty} \varphi_k' = \varphi'$ в D; поэтому если $\varphi_k \to \varphi$ в D, то $\lim\limits_{k\to\infty} (f', \varphi_k) = -\lim\limits_{k\to\infty} (f, \varphi_k') = -(f, \varphi') = (f', \varphi)$.

Таким образом, если $f \in D'$, то f' всегда существует и $f' \in D'$. □

Производные высших порядков обобщенной функции определяются последовательно, как и для обычных функций:

$$f'' = (f')', \quad f''' = (f'')', \ \ldots,$$

вообще

$$f^{(k)}=(f^{(k-1)})' \quad k=1,\ 2,\ \ldots,\ f^{(0)}=f.$$

По индукции легко проверить, что

$$(f^{(k)},\ \varphi)=(-1)^k(f,\ \varphi^{(k)}), \quad \varphi\in D, \quad k=0,\ 1,\ \ldots.$$

Согласно этому определению, обобщенные функции имеют производные любых порядков, или, как иногда говорят, бесконечно дифференцируемы.

Примеры. 1. Пусть

$$\theta(x)=\begin{cases}1, & \text{если } x\geqslant 0,\\ 0, & \text{если } x<0.\end{cases}$$

Функция $\theta(x)$ называется *функцией Хевисайда* (см. (59.10)) или единичной функцией. Она локально интегрируема и потому может рассматриваться как обобщенная функция. Найдем ее производную. Согласно определению (59.18),

$$(\theta',\ \varphi)=-(\theta,\ \varphi')=-\int_{-\infty}^{+\infty}\theta(x)\varphi'(x)\,dx=-\int_0^{+\infty}\varphi'(x)\,dx=$$
$$=\varphi(0)=(\delta,\ \varphi),\quad \varphi\in D,$$

т. е. $\theta'=\delta$ (сравните с п. 59.1).

2. В качестве другого примера вычислим производные δ-функции

$$(\delta^{(k)},\ \varphi)=(-1)^k(\delta,\ \varphi^{(k)})=(-1)^k\varphi^{(k)}(0).$$

Упражнения 10. Пусть f и g — обобщенные функции, λ и μ — числа. Доказать, что

$$(\lambda f+\mu g)'=\lambda f'+\mu g'.$$

11. Доказать, что $\left(\frac{d}{dx}+\lambda\right)\theta(x)e^{-\lambda x}=\delta(x)$.

12. Доказать, что $\left(\frac{d^2}{dx^2}+\omega^2\right)\frac{\theta(x)\sin\omega x}{\omega}=\delta(x)$.

13. Если $\delta_\varepsilon(x)=\begin{cases}\frac{1}{\varepsilon} & \text{при } |x|<\frac{\varepsilon}{2};\\ 0 & \text{при } |x|\geqslant\frac{\varepsilon}{2};\end{cases}$ то в пространстве обобщенных функций

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\delta_\varepsilon(x)=\delta(x) \quad \text{и} \quad \delta'_\varepsilon(x)=\frac{\delta\left(x+\frac{\varepsilon}{2}\right)-\delta\left(x-\frac{\varepsilon}{2}\right)}{\varepsilon}.$$

14. Пусть $f(x)=\begin{cases}f_1(x) & \text{при } x<x_0,\\ f_2(x) & \text{при } x>x_0,\end{cases}$ где функции $f_1(x)$ и $f_2(x)$ непрерывно дифференцируемы и существуют пределы $f'(x_0\pm 0)$. Найти производную $f'(x)$ в пространстве D'.

15. Пусть функция $f(x)$ непрерывно дифференцируема на всей числовой оси. Найти производную $(\theta f)'$ в пространстве D'.

16. Доказать, что в пространстве D' справедлива формула $\mathcal{P}\frac{1}{x}=(\ln|x|)'$ (см. упражнение 5).

17. Доказать, что в пространстве D' справедливо равенство

$$\sum_{n=1}^{\infty}\cos nx=-\frac{1}{2}+\pi\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\delta(x-2k\pi).$$

Указание: воспользоваться формулой (см. пример 3 в п. 55.4)

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n}=\frac{\pi-x}{2},\quad 0<x<2\pi.$$

Лемма 5. *Пусть* $f_n\in D'$, $f\in D'$ *и*

$$\lim_{n\to\infty}f_n=f; \tag{59.19}$$

тогда и

$$\lim_{n\to\infty}f'_n=f', \tag{59.20}$$

т. е. для любой сходящейся в D' *последовательности обобщенных функций производная предельной функции равна пределу последовательности производных.*

Доказательство. Для любой функции $\varphi\in D$

$$(f',\varphi)-(f'_n,\varphi)=-[(f,\varphi')-(f_n,\varphi')]\to 0 \text{ при } n\to\infty,$$

ибо $\varphi'\in D$. $\square$

Можно рассматривать и ряды обобщенных функций

$$\sum_{n=1}^{\infty}u_n, \tag{59.21}$$

где $u_n\in D'$, $n=1, 2, \ldots$. Сумма

$$s_n=\sum_{k=1}^{n}u_k$$

называется *частичной суммой n-го порядка* ($n=1, 2, \ldots$) ряда (59.21). Ряд (59.21) называется *сходящимся*, если в D' существует предел

$$\lim_{n\to\infty}s_n=s.$$

Обобщенная функция s называется суммой ряда (59.21); при этом пишется

$$s=\sum_{n=1}^{\infty}u_n.$$

Лемма 6. *Сходящийся ряд обобщенных функций можно почленно дифференцировать любое число раз:*

$$s^{(k)} = \sum_{n=1}^{\infty} u_n^{(k)}, \qquad k = 1, 2, \ldots .$$

Это следует из леммы 5.

59.5. ПРОСТРАНСТВО ОСНОВНЫХ ФУНКЦИЙ S И ПРОСТРАНСТВО ОБОБЩЕННЫХ ФУНКЦИЙ S'

Обозначим через S множество всех бесконечно дифференцируемых на всей числовой оси комплекснозначных функций, которые вместе со всеми своими производными стремятся к нулю при $x \to \infty$ быстрее любой степени $\frac{1}{x}$. Иначе говоря, множество S состоит из тех и только тех бесконечно дифференцируемых функций φ, для которых при любых целых неотрицательных n и m выполняется условие

$$\lim_{x\to\infty} x^n \varphi^{(m)}(x) = 0. \tag{59.22}$$

Условие принадлежности функции φ к множеству S можно сформулировать и несколько иначе: бесконечно дифференцируемая функция φ принадлежит S тогда и только тогда, когда для любых целых неотрицательных n и m имеем

$$\sup_{-\infty < x < +\infty} |x^n \varphi^{(m)}(x)| = c_{n,m} < \infty. \tag{59.23}$$

Действительно, если это так, то, заменяя в (59.23) n на $n+1$, получим $|x^{n+1}\varphi^{(m)}(x)| \leqslant c_{n+1,m}$, поэтому

$$|x^n \varphi^{(m)}(x)| \leqslant \frac{c_{n+1,m}}{|x|},$$

откуда и следует (59.22). Обратно, из (59.22) и из ограниченности $x^n\varphi^{(m)}(x)$ на любом отрезке следует (59.23).

Очевидно, что множество S является линейным пространством. При этом, если $\varphi \in S$, то и любая производная функции φ принадлежит пространству S.

Определение 21. *Последовательность функций* $\varphi_k(x) \in S$, $k = 1, 2, \ldots$, *называется сходящейся в S к функции* $\varphi(x) \in S$, *если для всех целых неотрицательных n и m каждая последовательность* $x^n\varphi_k^{(m)}(x)$, $k = 1, 2, \ldots$, *равномерно на всей оси сходится к функции* $x^n\varphi^{(m)}(x)$.

Очевидно, что $\lim\limits_{k\to\infty} \varphi_k = \varphi$ в S тогда и только тогда, когда при любых целых неотрицательных n и m

$$\lim_{k\to\infty} \sup_{-\infty<x<+\infty} |x^n[\varphi_k^{(m)}(x) - \varphi^{(m)}(x)]| = 0. \tag{59.24}$$

Отметим, что если $\varphi_k \to \varphi$ в S, то для производных любого порядка $\varphi_k^{(m)} \to \varphi^{(m)}$ в S, $m=1, 2, \ldots$. Линейное пространство S с введенной операцией предельного перехода является линейным пространством со сходимостью.

Очевидно, что $D \subsetneq S$, в частности, последовательность функций $\varphi_k \in D$, $k=1, 2, \ldots$, сходящаяся в D к функции φ, сходится к функции φ и в S. Вместе с тем $D \neq S$, ибо $e^{-x^2} \in S$, но $e^{-x^2} \notin D$.

Задача 42. Доказать, что пространство D плотно в S, т. е. что любая функция $\varphi \in S$ является пределом в S некоторой последовательности функций $\varphi_k \in D$, $k=1, 2, \ldots$.

Определение 22. *Линейный непрерывный функционал, определенный на пространстве S, называется обобщенной функцией медленного роста. Множество всех таких функционалов называется пространством обобщенных функций медленного роста и обозначается S'.*

Каждый функционал $f \in S'$, рассматриваемый только на множестве D, является обобщенной функцией, следовательно, элемент множества S' можно интерпретировать как продолжение некоторого линейного непрерывного функционала с множества D на S (см. п. 59.2). Например, функционал δ, определенный нами в п. 59.3 на пространстве D формулой $(\delta, \varphi) = \varphi(0)$, $\varphi \in D$, может быть продолжен с помощью той же формулы на пространство S.

Можно показать, что не всякая обобщенная функция из D' продолжаема на S, в этом смысле можно сказать, что S' составляет строгую часть D'.

Упражнение 18. Доказать, что обобщенная функция, порожденная локально интегрируемой функцией e^x, не продолжаема в элемент пространства S'.

Всякая локально интегрируемая функция $f(x)$, для которой в некоторой окрестности ∞ справедлива оценка

$$|f(x)| \leqslant A|x|^k \tag{59.25}$$

(A и k — неотрицательные постоянные) *), в частности любой многочлен, порождает функционал пространства D, продолжаемый в линейный непрерывный функционал на S. Он определяется формулой

$$(f, \varphi) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\varphi(x)\,dx, \qquad \varphi \in S. \tag{59.26}$$

*) Такие функции называются функциями медленного роста, откуда и термин «обобщенные функции медленного роста».

Действительно, из условий (59.22) и (59.25) следует, что $f(x)\times\varphi(x)\to 0$ при $x\to\infty$ быстрее любой степени $\frac{1}{x}$, и, следовательно, интеграл (59.26) существует.

Заметим еще, что всякая абсолютно интегрируемая **на всей числовой оси** функция $f(x)$ также порождает по формуле (59.26) линейный непрерывный функционал над S. Действительно, поскольку всякая функция $\varphi\in S$ ограничена, то в этом случае существование интеграла (59.26) следует из неравенства

$$\int_{-\infty}^{+\infty}|f(x)\varphi(x)|\,dx\leqslant\sup_{-\infty<x<+\infty}|\varphi(x)|\int_{-\infty}^{+\infty}|f(x)|\,dx.$$

Упражнения. 19. Доказать, что функционал (59.26) линеен и непрерывен на пространстве S (как в случае, когда функция f медленного роста на бесконечности, так и в случае, когда она абсолютно интегрируема на всей числовой оси).

20. Доказать, что обобщенная функция $\frac{1}{x+i0}\in D'$ (см. упражнение 8) продолжаема в элемент пространства S'.

Множество S' образует линейное пространство со сходимостью, сопряженное с S (см. п. 59.2).

Поскольку для любой функции $\varphi\in S$ будем иметь $\varphi'\in S$, то для обобщенных функций пространства S', как и для обобщенных функций из D', можно определить производную f' по формуле

$$(f',\ \varphi)=-(f,\ \varphi'),\quad \varphi\in S.$$

Таким образом, для любой обобщенной функции $f\in S'$ производная f' всегда существует и $f'\in S'$. При этом на элементе $\varphi\in D$ производные обобщенной функции f, рассматриваемые соответственно как производные в пространствах D' и S', совпадают. Как и в случае пространства D', в пространстве S' производная от предела всегда существует и равна пределу производных.

59.6. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ФУРЬЕ В ПРОСТРАНСТВЕ S

Каждая функция $\varphi\in S$ абсолютно интегрируема. Более того, если $\varphi\in S$, то при любом $k=1,\ 2,\ \ldots$ функция $x^k\varphi(x)$ также абсолютно интегрируема на всей числовой оси. Действительно, поскольку для функции $\varphi\in S$ выполняется условие (59.23), то

$$|x^k\varphi(x)|\leqslant c_{k,0},$$
$$x^2|x^k\varphi(x)|=|x^{k+2}\varphi(x)|\leqslant c_{k+2,0}$$

и потому

$$|x^k\varphi(x)|\leqslant\frac{c_{k,0}+c_{k+2,0}}{1+x^2}. \tag{59.27}$$

Здесь справа стоит абсолютно интегрируемая на всей числовой оси функция, следовательно по признаку сравнения для несобственных интегралов функция $x^k\varphi(x)$ также абсолютно интегрируема при всех $k=0, 1, 2, \ldots$. Отсюда следует, что для функций $\varphi \in S$ существует классическое преобразование Фурье

$$\hat{\varphi}=F[\varphi]=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(x)\,e^{-ixy}\,dx,\quad \varphi\in S, \tag{59.28}$$

а также обратное преобразование Фурье

$$F^{-1}[\varphi]=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(y)\,e^{ixy}\,dy,\quad \varphi\in S.$$

Классичность преобразования Фурье здесь понимается в том смысле, что написанные интегралы являются обычными абсолютно сходящимися интегралами, а не интегралами в смысле главного значения (см. п. 56.3). При этом на S справедливы формулы обращения для прямого и обратного преобразования Фурье (см. п. 56.5):

$$F[F^{-1}[\varphi]]=\varphi,\quad F^{-1}[F[\varphi]]=\varphi,\quad \varphi\in S. \tag{59.29}$$

Отметим, что, например, вторая из этих формул в интегральной форме принимает вид

$$F^{-1}[\hat{\varphi}]=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\hat{\varphi}(y)\,e^{ixy}\,dy=\varphi(x).$$

Теорема 1. *Преобразование Фурье и обратное преобразование Фурье отображают взаимно однозначно, линейно и непрерывно пространство S на себя.*

Доказательство. Покажем, что если $\varphi\in S$, то и $\hat{\varphi}\in S$.

Прежде всего, из того, что для каждой функции $\varphi\in S$ при любом $k=0, 1, 2, \ldots$ функция $x^k\varphi(x)$ является, как показано выше, абсолютно интегрируемой на всей числовой оси, следует согласно теореме 4 из п. 56.10, что преобразование Фурье $\hat{\varphi}=F[\varphi]$ функции φ существует и представляет собой бесконечно дифференцируемую функцию.

Оценим теперь функцию $|y^n\hat{\varphi}^{(m)}(y)|$, где n и m — целые неотрицательные числа. Применяя формулы для производной преобразования Фурье (см. п. 56.10) и для преобразования Фурье производной (см. п. 56.8), получим:

$$|y^n\hat{\varphi}^{(m)}(y)|=|y^nF^{(m)}[\varphi]|=|y^nF[x^m\varphi]|=$$
$$=|F[(x^m\varphi)^{(n)}]|=\left|\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}(x^m\varphi(x))^{(n)}e^{-ixy}\,dx\right|\leqslant$$
$$\leqslant\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}|(x^m\varphi(x))^{(n)}|\,dx.$$

Заметим, что выражение $[x^m\varphi(x)]^{(n)}$ в силу правил дифференцирования представляет собой линейную комбинацию выражений вида $x^p\varphi^{(q)}(x)$, где p и q — неотрицательные целые и, как это было отмечено выше, $\varphi^{(q)}\in S$. Поэтому (см. (59.27)) функции $(1+x^2)x^p\varphi^{(q)}(x)$ ограничены на всей числовой оси, следовательно ограничена и функция $(1+x^2)[x^m\varphi(x)]^{(n)}$, т. е.

$$\sup_{-\infty<x<+\infty}(1+x^2)\,|[x^m\varphi(x)]^{(n)}|<+\infty.$$

Разделим и умножим теперь получившееся выше подынтегральное выражение на $1+x^2$, тогда, принимая во внимание, что $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2}=\pi$, получим:

$$|y^n\hat{\varphi}^{(m)}(y)|\leqslant\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sup_x(1+x^2)\,|(x^m\varphi(x))^{(n)}|\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2}=$$
$$=\sqrt{\frac{\pi}{2}}\sup_x(1+x^2)\,|(x^m\varphi(x))^{(n)}|. \qquad (59.30)$$

Поскольку справа стоит конечная величина, то $\hat{\varphi}\in S$.

Итак, преобразование Фурье отображает S в S, при этом это отображение взаимно однозначно (см. лемму 3 п. 56.5).

Аналогично доказывается и то, что обратное отображение Фурье F^{-1} отображает S в S и притом взаимно однозначно. Легко убедиться, что на самом деле эти отображения происходят на пространство S, т. е. являются биекциями. Это сразу следует из формул взаимности (59.29) для прямого и обратного преобразований Фурье*).

Действительно, покажем, что $F(S)$ совпадает со всем пространством S. Пусть $\psi\in S$, положим $\varphi=F^{-1}[\psi]$.

Тогда

$$F[\varphi]=F[F^{-1}[\psi]]=\psi.$$

Подобным же образом доказывается и то, что

$$F^{-1}(S)=S.$$

Линейность преобразования Фурье отмечалась раньше (см. лемму 2 в п. 56.5).

Докажем теперь непрерывность отображения F.

---

*) Заметим еще, что из того, что $F(S)=F^{-1}(S)=S$, следует, что в формулах (59.29) все интегралы существуют в обычном смысле, а не только в смысле главного значения (сравните с п. 56.5).

Сначала докажем его непрерывность в нуле. Пусть $\lim\limits_{k\to\infty}\varphi_k=0$ в S. Тогда из (59.30) следует, что

$$|y^n\hat{\varphi}_k^{(m)}(y)|\leqslant\sqrt{\frac{\pi}{2}}\sup_x(1+x^2)\,|(x^m\varphi_k(x))^{(n)}|,\quad k=1,\ 2,\ \ldots.$$

Но из (59.24) (при $\varphi(x)=0$) имеем

$$\lim_{k\to\infty}\sup_x(1+x^2)\,|(x^m\varphi_k(x))^{(n)}|=0;$$

поэтому

$$\lim_{k\to\infty}\sup_y|y^n\hat{\varphi}_k^{(m)}(y)|=0,\ \text{т. е.}\ \lim_{k\to\infty}\hat{\varphi}_k=0\ \text{в}\ S.$$

Поскольку преобразование Фурье является линейным отображением линейного пространства S в себя, непрерывным в нуле, то оно непрерывно и во всех точках этого пространства (см. лемму 3 в п. 59.2).

Таким образом, преобразование Фурье F непрерывно отображает S на S.

Совершенно аналогично доказывается непрерывность обратного преобразования Фурье F^{-1}. $\square$

59.7. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ФУРЬЕ ОБОБЩЕННЫХ ФУНКЦИЙ

Предварительно докажем одно интегральное равенство. Пусть функция f непрерывна и абсолютно интегрируема на всей числовой оси и пусть $\varphi\in S$, тогда

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(x)\,dx\int_{-\infty}^{+\infty}f(y)\,e^{-ixy}\,dy=\int_{-\infty}^{+\infty}f(y)\,dy\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(x)\,e^{-ixy}\,dx.\qquad(59.31)$$

Это следует из теоремы 7 п. 54.3. Действительно, повторный интеграл, стоящий слева, существует, ибо существует интеграл

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\left|\varphi(x)\int_{-\infty}^{+\infty}f(y)e^{-ixy}\,dy\right|dx\leqslant\int_{-\infty}^{+\infty}|\varphi(x)|\,dx\int_{-\infty}^{+\infty}|f(y)|\,dy.$$

Если $[a,\ b]$ — произвольный отрезок, то функция f в силу ее непрерывности ограничена на $[a,\ b]:|f(y)|\leqslant M$; поэтому

$$|f(y)\,\varphi(x)e^{-ixy}|\leqslant M\,|\varphi(x)|,\quad a\leqslant y\leqslant b.$$

Отсюда в силу сходимости интеграла $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}|\varphi(y)|\,dx$ следует равномерная сходимость интеграла $f(y)\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\varphi(x)e^{-ixy}\,dx$ на отрезке $[a,\ b]$.

Далее, $|\varphi(x)| \leqslant c_{0,0}$, $-\infty < x < +\infty$ (см. 59.23)); поэтому $|\varphi(x) f(y) e^{-ixy}| \leqslant c_{0,0} |f(y)|$, и так как интеграл $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} |f(y)|\,dy$ сходится, то интеграл

$$\varphi(x) \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(y) e^{-ixy}\,dy$$

равномерно сходится на всей оси.

Наконец, интеграл

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} dx \int\limits_{-\infty}^{+\infty} |\varphi(x) f(y) e^{-ixy}|\,dy = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} |\varphi(x)|\,dx \int\limits_{-\infty}^{+\infty} |f(y)|\,dy$$

конечен, поэтому в рассматриваемом случае выполнены все условия теоремы 7 п. 54.3 и, следовательно, можно переставить порядок интегрирования. Равенство (59.31) доказано.

Если функция $F[f]$ порождает некоторый функционал на S (например, удовлетворяет условию (59.25) или абсолютно интегрируема на всей числовой оси), то, умножив равенство (59.31) на $1/\sqrt{2\pi}$, получим

$$(F[f], \varphi) = (f, F[\varphi]), \quad \varphi \in S. \tag{59.32}$$

Эту формулу и примем за определение преобразования Фурье обобщенных функций из пространства S'.

Определение 23. *Преобразованием Фурье обобщенной функции $f \in S'$ называется функционал $F[f]$, определяемый формулой* (59.32).

Итак, для любой обобщенной функции f из S' определено ее преобразование Фурье $F[f]$: значение функционала $F[f]$ в любой точке φ пространства S равно значению функционала f в точке $F[\varphi] \in S$.

В качестве примера найдем преобразование Фурье единицы, рассматриваемой как обобщенная функция. Очевидно $1 \in S'$. Имеем:

$$(\hat{1}, \varphi) = (1, \hat{\varphi}) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} dy \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) e^{-ixy}\,dx =$$

$$= \sqrt{2\pi}\frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} dy \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) e^{iy(t-x)}\,dx\,\Big|_{t=0} =$$

$$= \sqrt{2\pi}\,\varphi(t)\,|_{t=0} = \sqrt{2\pi}\,(\delta, \varphi)$$

(мы воспользовались здесь леммой 1 п. 56.5. Таким образом, $\hat{1} = \sqrt{2\pi}\,\delta$.

Отметим, что преобразование Фурье $F[\varphi]$ функции $\varphi \in D$, вообще говоря, не принадлежит пространству D, поскольку $F[\varphi]$

не всегда является финитной функцией. Поэтому формула (59.32) имеет смысл не для всех $f \in D'$. Из-за этого обстоятельства при рассмотрении преобразования Фурье обобщенных функций нам и пришлось сузить класс обобщенных функций, введенных раньше, ограничившись только обобщенными функциями медленного роста.

Преобразование Фурье $F[f]$ обобщенной функции f будем обозначать также символом $\hat{f}$ или символом

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-ixy}\, dx.$$

Таким образом, равенство

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-ixy}\, dx = F[f] \tag{59.33}$$

в случае, когда f — обобщенная функция, является определением символа, стоящего в левой части этого равенства.

Определив преобразование Фурье для всех обобщенных функций из S', мы, в частности, определили и преобразование Фурье для обычных функций f, удовлетворяющих условию (59.25), т. е. функций существенно более широкого класса, чем это было сделано раньше (см. п. 56.5 и 58.7*). Это является одним из весьма существенных обстоятельств, оправдывающих целесообразность введения понятия обобщенных функций.

Покажем, что преобразование Фурье обобщенных функций обладает рядом свойств, аналогичных свойствам классического преобразования Фурье, т. е. преобразования Фурье абсолютно интегрируемых функций.

Лемма 7. *Преобразование Фурье $F[f]$ обобщенной функции $f \in S'$, также является обобщенной функцией класса S', т. е. $F[f]$ — линейный и непрерывный функционал над пространством S.*

Доказательство. Проверим линейность преобразования Фурье, т. е. покажем, что, какова бы ни была обобщенная функция $f \in S'$, для любых функций $\varphi \in S$, $\psi \in S$ и любых чисел λ и μ справедливо равенство

$$(F[f], \lambda\varphi + \mu\psi) = \lambda (F[f], \varphi) + \mu (F[f], \psi).$$

Действительно,

$$\begin{aligned}(F[f], \lambda\varphi + \mu\psi) &= (f, F[\lambda\varphi + \mu\psi]) = \\ &= (f, \lambda F[\varphi] + \mu F[\psi]) = \lambda (f, F[\varphi]) + \mu (f, F[\psi]) = \\ &= \lambda (F[f], \varphi) + \mu (F[f], \psi).\end{aligned}$$

Проверим непрерывность преобразования Фурье. Пусть $f \in S'$, $\varphi \in S$, $\varphi_n \in S$, $n = 1, 2, \ldots$, $\lim\limits_{n\to\infty} \varphi_n = \varphi$ и, следовательно (см. теорему 1 п. 59.6),

$$\lim_{n\to\infty} F[\varphi_n]=F[\varphi].$$

Тогда в силу непрерывности функционала f на S получим

$$\lim_{n\to\infty}(F[f],\ \varphi_n)=\lim_{n\to\infty}(f,\ F[\varphi_n])=(f,\ F[\varphi])=(F[f],\ \varphi).$$

Итак, мы показали, что если $f\in S'$, то и $F[f]\in S'$. □

Естественно определяется и обратное преобразование Фурье $F^{-1}[f]$ элемента $f\in S'$ как функционал пространства S', задаваемый формулой

$$(F^{-1}[f],\ \varphi)=(f,\ F^{-1}[\varphi]),\quad \varphi\in S.$$

Если f — абсолютно интегрируемая непрерывная функция, это равенство выполняется для нее в обычном смысле. Это проверяется так же, как и в случае формулы (59.31). По определению, полагается также (ср. (59.33))

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{ixy}\,dx=F^{-1}[f]. \tag{59.34}$$

Как и в случае прямого преобразования Фурье F, показывается, что если $f\in S'$, то и $F^{-1}[f]\in S'$.

Теорема 2. *Преобразование Фурье F и обратное преобразование Фурье F^{-1} отображают линейно, взаимно однозначно и непрерывно пространство S' на себя; при этом для любого элемента $f\in S'$ справедливы равенства*

$$F^{-1}[F[f]]=F[F^{-1}[f]]=f. \tag{59.35}$$

Доказательство. Докажем сначала формулы (59.35). Для любого элемента $\varphi\in S$ имеем

$$(F^{-1}[F[f]],\ \varphi)=(F[f],\ F^{-1}[\varphi])=(f,\ F[F^{-1}[\varphi]])=(f,\ \varphi).$$

Аналогично,

$$(F[F^{-1}[f]],\ \varphi)=(F^{-1}[f],\ F[\varphi])=(f,\ F^{-1}[F[\varphi]])=(f,\ \varphi).$$

Покажем теперь, что преобразование Фурье F отображает пространство S' на все пространство S': $F(S')=S'$. Пусть $g\in S'$, тогда если $f=F^{-1}[g]$, то $F[f]=F[F^{-1}[g]]=g$, т. е. в любой элемент из S' при преобразовании Фурье F отображается некоторый элемент из S'.

Покажем, что F взаимно однозначно. Если $f_1\in S'$, $f_2\in S'$ и $F[f_1]=F[f_2]$, то и $F^{-1}[F[f_1]]=F^{-1}[F[f_2]]$, откуда в силу (59.35) имеем $f_1=f_2$.

Покажем, что отображение F линейно, т. е. для любых обобщенных функций $f\in S'$, $g\in S'$ и любых чисел λ и μ справедливо равенство

$$F[\lambda f+\mu g]=\lambda F[f]+\mu F[g].$$

Чтобы убедиться в справедливости этого равенства, проверим его для любого, но фиксированного элемента $\varphi\in S$:

$$(F[\lambda f+\mu g],\ \varphi)=(\lambda f+\mu g,\ F[\varphi])=\lambda(f,\ F[\varphi])+\mu(g,\ F[\varphi])=$$
$$=\lambda(F[f],\ \varphi)+\mu(F[g],\ \varphi)=(\lambda F[f]+\mu F[g],\ \varphi).$$

Наконец, докажем, что F является непрерывным отображением. Действительно, пусть $f\in S'$, $f_n\in S'$, $n=1, 2, \ldots$, $\lim f_n=f$ и, следовательно, для любого $\varphi\in S$ справедливо равенство $\lim\limits_{n\to\infty}(f_n,\ \varphi)=(f,\ \varphi)$. Тогда

$$\lim_{n\to\infty}(F[f_n],\ \varphi)=\lim_{n\to\infty}(f_n,\ F[\varphi])=(f,\ F[\varphi])=(F[f],\ \varphi).$$

Аналогично доказывается, что и F^{-1} непрерывно взаимно однозначно отображает S' на S'. $\square$

Примеры. Найдем $F[\delta]=\hat{\delta}$. Имеем

$$(\hat{\delta},\ \varphi)=(\delta,\ \hat{\varphi})=\hat{\varphi}(0)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(x)e^{-ixy}\,dx\,\Big|_{y=0}=$$
$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(x)\,dx=\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}},\ \varphi\right),\quad \varphi\in S,$$

поэтому $F[\delta]=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}$ и, следовательно, $F^{-1}[1]=\sqrt{2\pi}\,\delta$ (заметим, что обратное классическое преобразование Фурье $F^{-1}[1]$, так же как и прямое $F[1]$, не существуют). С помощью интегралов (59.33) и (59.34) эти формулы можно переписать в виде

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(x)e^{-ixy}\,dx=1,\qquad \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{ixy}\,dx=\delta(y).$$

Подобным же образом находится и обратное преобразование Фурье δ-функции:

$$F^{-1}[\delta]=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}=F[\delta],$$

отсюда

$$F[1]=F^{-1}[1]=\sqrt{2\pi}\,\delta.$$

Используя способ записи, основанный на равенствах (59.33) и (59.34), эти формулы можно переписать в виде

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-ixy}\,dx=\delta(y),\qquad \int_{-\infty}^{+\infty}\delta(x)e^{ixy}\,dx=1.$$

Вычислим, далее, преобразование Фурье производной обобщенной функции и производную от преобразования Фурье. Предварительно нам придется ввести понятие произведения обобщенной функции $f \in S'$ на обычную бесконечно дифференцируемую функцию $\psi(x)$, обладающую тем свойством, что для любой ее производной $\psi^{(n)}(x)$ существуют постоянные $\beta_n > 0$ и $\alpha_n > 0$, $n = 0, 1, \ldots$, такие, что для всех x справедливо неравенство

$$|\psi^{(n)}(x)| \leqslant \beta_n (1+|x|)^{\alpha_n}, \quad n=0, 1, 2, \ldots .^{*)} \tag{59.36}$$

Заметим, что все многочлены удовлетворяют этому условию.

Если функция ψ — типа (59.36) и $\varphi \in S$, то $\psi\varphi \in S$. Если функция f локально суммируема и удовлетворяет условию (59.25), а функция ψ — условию (59.36), то ψf также удовлетворяет условию (59.25) и

$$(f, \psi\varphi) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\psi(x)\varphi(x)\,dx = (\psi f, \varphi).$$

Пусть ψ удовлетворяет условию (59.36), а $f \in S'$. Определим теперь функционал на S, равный произведению ψf, формулой

$$(\psi f\ \varphi) = (f, \psi\varphi), \quad \varphi \in S.$$

Легко проверить, что $\psi f \in S'$ **), т. е. что ψf является линейным непрерывным функционалом, определенным на пространстве S.

Упражнение 21. Пусть функция $\psi = \psi(x)$ удовлетворяет условию (59.36), а обобщенная функция $f \in S'$. Доказать, что $\psi f \in S'$.

Докажем в заключение формулы

$$F[f^{(n)}] = (ix)^n F[f], \tag{59.37}$$

$$i^n F^{(n)}[f] = F[x^n f], \quad f \in S'. \tag{59.38}$$

Имеем (см. п. 56.8):

$$(F[f^{(n)}], \varphi) = (f^{(n)}, F[\varphi]) = (-1)^n (f, F^{(n)}[\varphi]) =$$
$$= (-1)^n \left(f, \frac{1}{i^n} F[x^n\varphi]\right) = i^n (F[f], x^n\varphi) = ((ix)^n F[f], \varphi), \quad \varphi \in S.$$

Формула (59.37) доказана.

Докажем (59.38) (см. п. 56.10):

$$(F^{(n)}[f], \varphi) = (-1)^n (F[f], \varphi^{(n)}) = (-1)^n (f, F[\varphi^{(n)}]) =$$
$$= (-1)^n (f, (ix)^n F[\varphi]) = \frac{1}{i^n}(x^n f, F[\varphi]) = \left(\frac{1}{i^n} F[x^n f], \varphi\right). \ \square$$

---

*) В силу этого условия (при $n=0$) можно рассматривать $\psi(x)$ как обобщенную функцию пространства S' (см. (59.25)).

**) Затруднения при определении произведения обобщенных функций связаны с тем, что произведение линейных функционалов в обычном смысле как произведение функций (т. е. как произведение значений сомножителей в каждой точке) не является линейным функционалом.

Пример. Найдем преобразование Фурье функции $f(x)=x$:

$$F[x]=F[x\cdot 1]=iF'[1]=i\sqrt{2\pi}\,\delta'.$$

Упражнение 22. Найти преобразование Фурье многочлена.

При вычислении преобразования Фурье обобщенных функций иногда удобно выбрать последовательность обычных функций стремящихся в пространстве S' к заданной (обобщенной) функции, найти преобразование Фурье членов этой последовательности, а затем вычислить искомое преобразование Фурье заданной функции с помощью предельного перехода, используя непрерывность преобразования Фурье. Так, например, для того чтобы вычислить преобразование Фурье $F[\theta]$ функции Хевисайда $\theta(x)$, найдем сначала преобразование Фурье функции $\theta(x)e^{-tx}$ $(t>0)$.

$$F[\theta(x)e^{-tx}]=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{+\infty}e^{-x(t+iy)}\,dx=-\frac{e^{-x(t+iy)}}{\sqrt{2\pi}(t+iy)}\Bigg|_0^{+\infty}=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}(t+iy)}=-\frac{i}{\sqrt{2\pi}(y-it)}. \qquad (59.39)$$

Покажем теперь, что в S'

$$\lim_{t\to+0}\theta(x)e^{-tx}=\theta(x) \qquad (59.40)$$

Действительно, для каждой функции $\varphi\in S$ и любого числа A имеем:

$$|(\theta(x),\ \varphi(x))-(\theta(x)e^{-tx},\ \varphi(x))|=\left|\int_0^{+\infty}(1-e^{-tx})\varphi(x)\,dx\right|\leqslant$$

$$\leqslant\left|\int_0^{A}(1-e^{-tx})\varphi(x)\,dx\right|+\left|\int_A^{+\infty}(1-e^{-tx})\varphi(x)\,dx\right|. \qquad (59.41)$$

Зафиксируем функцию $\varphi\in S$ и какое-либо число $\varepsilon>0$. В силу абсолютной интегрируемости функции φ существует число $A>0$, такое, что

$$\int_A^{+\infty}|\varphi(x)|\,dx<\frac{\varepsilon}{2};$$

тогда

$$\left|\int_A^{+\infty}(1-e^{-tx})\varphi(x)\,dx\right|\leqslant\int_A^{+\infty}|\varphi(x)|\,dx<\frac{\varepsilon}{2}. \qquad (59.42)$$

Выберем теперь $t_0>0$ так, чтобы при $0<t<t_0$ было справедливо неравенство

$$(1-e^{-tA})\int_0^{A}|\varphi(x)|\,dx<\frac{\varepsilon}{2}$$

и, следовательно,

$$\left|\int_0^A (1-e^{-tx})\,\varphi(x)\,dx\right| < (1-e^{-tA})\int_0^A |\varphi(x)|\,dx < \frac{\varepsilon}{2}. \qquad (59.43)$$

Тогда при $0<t<t_0$ из (59.41), (59.42) и (59.43) получим

$$|(\theta(x),\ \varphi(x)) - (\theta(x)\,e^{-tx},\ \varphi(x))| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Формула (59.40) доказана.

В силу непрерывности преобразования Фурье

$$\lim_{t\to+0} F[\theta(x)\,e^{-tx}] = F[\theta(x)]; \qquad (59.44)$$

отсюда и из (59.39) имеем

$$F[\theta(x)] = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \lim_{t\to+0} \frac{i}{y-it},$$

причем из (59.44) следует, что предел, стоящий в правой части, существует (в пространстве S'), он обычно обозначается $\frac{i}{y-i0}$ (см. упражнение 8).

Таким образом,

$$F[\theta(x)] = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,\frac{i}{y-i0}.$$

Упражнение 23. Найти преобразование Фурье функций $x^k\theta(x)$, $k=1, 2, \ldots$.

ДОБАВЛЕНИЕ

§ 60. НЕКОТОРЫЕ ВОПРОСЫ ПРИБЛИЖЕННЫХ ВЫЧИСЛЕНИЙ

60.1. ПРИМЕНЕНИЕ ФОРМУЛЫ ТЕЙЛОРА ДЛЯ ПРИБЛИЖЕННОГО ВЫЧИСЛЕНИЯ ЗНАЧЕНИЙ ФУНКЦИЙ И ИНТЕГРАЛОВ

Для вычисления значений функций очень удобно пользоваться формулой или рядом Тейлора. Поясним это на примерах.

1. Вычисление значения синуса.

Формула Тейлора для функции $\sin x$ имеет вид

$$\sin x = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!} + r_n(x),$$

где

$$r_n(x) = (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \sin^{(2n+1)} \theta x, \quad 0 < \theta < 1$$

(мы взяли остаточный член в форме Лагранжа). Поэтому

$$|r_n(x)| < \frac{|x|^{2n+1}}{(2n+1)!}. \tag{60.1}$$

Пусть требуется найти $\sin 20°$ с точностью до 10^{-3}. В радианной мере $20°$ соответствует $\frac{\pi}{9}$, поэтому выберем номер n так, чтобы

$$\left| r_n\left(\frac{\pi}{9}\right) \right| < \frac{1}{10^3}; \tag{60.2}$$

тогда значение многочлена Тейлора порядка n в точке $x = \frac{\pi}{9}$ и даст нам искомое приближение $\sin 20°$. В силу неравенства (60.1) для выполнения условия (60.2) достаточно, чтобы выполнялось неравенство

$$\frac{1}{(2n+1)!} \left(\frac{\pi}{9}\right)^{2n+1} < \frac{1}{10^3}. \tag{60.3}$$

При $n = 1$ это неравенство не выполняется:

$$\frac{1}{3!} \left(\frac{\pi}{9}\right)^3 > \frac{1}{6} \frac{1}{3^3} = \frac{1}{162} > \frac{1}{10^3},$$

но уже при $n = 2$ оно выполняется:

$$\frac{1}{5!} \left(\frac{\pi}{9}\right)^5 < \frac{1}{120} \cdot \frac{1}{2^5} = \frac{1}{3840} < \frac{1}{10^3}.$$

Поэтому $\sin 20°$ с точностью до 10^{-3} находится по формуле

$$\sin 20° \approx \frac{\pi}{9} - \frac{1}{6}\left(\frac{\pi}{9}\right)^3 \text{*)}. \tag{60.4}$$

Беря значение π из таблиц с точностью до 10^{-4}, подставляя в формулу (60.4), произведя указанные там действия и округляя результат с точностью до 10^{-3}, получим искомое приближение $\sin 20°$:

$$\sin 20° \approx 0{,}343 \text{**)}.$$

При вычислении значений синуса можно воспользоваться не формулой, а рядом Тейлора, который для действительного аргумента является знакочередующимся и потому допускает простую оценку остатка: он не превышает по абсолютной величине абсолютной величины первого члена остатка (см. п. 35 9). Это дает, естественно, тот же результат, что и выше, так как приводит к оценке (60.3), которую мы получили из других соображений.

2. Вычисление значений натуральных логарифмов.

Ряд Тейлора для логарифма

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n}, \quad -1 < x \leqslant 1, \tag{60.5}$$

может быть непосредственно использован лишь для вычисления логарифмов чисел, не превышающих двух. Однако из ряда (60.5) можно получить другие разложения, позволяющие вычислить логарифмы любых чисел. Заменяя в (60.5) x на $-x$ и вычитая получившийся ряд из (60.5), получим

$$\ln \frac{1+x}{1-x} = 2x \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{2n+1}, \quad |x| < 1. \tag{60.6}$$

Когда x изменяется от -1 до 1, то $\frac{1+x}{1-x}$ принимает все положительные значения. Поэтому формула (60.6) может быть использована для вычисления логарифмов любых чисел. Естественно, возникает вопрос о том, сколько надо взять членов в ряде (60.6),

*) Знаком $\approx$ обозначается приближенное равенство с указанной степенью точности.

**) Заметим, что в нашем случае легко устанавливается и более сильное неравенство $r_2\left(\frac{\pi}{9}\right) < \frac{1}{3} 10^{-3}$, а при указанном выборе числа знаков π ошибка при вычислении правой части формулы (60.4) во всяком случае не будет превышать $\frac{2}{3} \cdot 10^{-3}$, поэтому суммарная ошибка и будет не больше 10^{-3}.

чтобы получить логарифм числа с заданной точностью. Для этого надо оценить остаток ряда (60.6). Имеем

$$|r_n(x)| = 2|x| \sum_{k=n}^{\infty} \frac{x^{2k}}{2k+1} < \frac{2|x|^{2n+1}}{2n+1} \sum_{k=0}^{\infty} x^{2k} =$$
$$= \frac{2|x|^{2n+1}}{(2n+1)(1-x^2)}, \quad |x|<1. \qquad (60.7)$$

Применим эту оценку для вычисления $\ln 2$ с точностью 10^{-3}. Решая уравнение

$$\frac{1+x}{1-x} = 2,$$

находим $x=\frac{1}{3}$. Полагая в (60.6) $x=\frac{1}{3}$, находим

$$\ln 2 = \frac{2}{3} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)\,3^{2n}}. \qquad (60.8)$$

Оценка же (60.7) в этом случае дает

$$\left| r_n\left(\frac{1}{3}\right)\right| < \frac{2}{(2n+1)\,3^{2n+1}} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{9}} = \frac{1}{4(2n+1)\,3^{2n-1}}.$$

Отсюда при $n=3$ имеем

$$r_3\left(\frac{1}{3}\right) < \frac{1}{4\cdot 7\cdot 3^5} = \frac{1}{28\cdot 243} < \frac{1}{10^3}.$$

Поэтому для вычисления $\ln 2$ с точностью до 10^{-3} достаточно взять первые три члена ряда (60.8):

$$\ln 2 \approx \frac{2}{3}\left(1+\frac{1}{3^3}+\frac{1}{5\cdot 3^4}\right) \approx 0{,}693.$$

При более грубых вычислениях значений функции с помощью формулы Тейлора

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + r_n(x)$$

часто бывает достаточно ограничиться лишь ее линейной частью, т. е. первыми двумя членами

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0),$$

иначе говоря, заменить приращение функции ее дифференциалом

$$\Delta y = f(x) - f(x_0) \approx f'(x_0)(x-x_0) = f'(x_0)\,\Delta x,$$

где $\Delta x = x - x_0$.

Формула Тейлора позволяет приближенно вычислять и значения определенных интегралов. Рассмотрим один пример такого рода.

3. Вычисление с точностью до 0,0001 интеграла

$$\int_0^1 \frac{\sin x}{x}\,dx.$$

Напишем для подынтегральной функции формулу Тейлора. Для этого воспользуемся известной нам формулой Тейлора для функции $\sin x$ (см. (60.1)), тогда получим

$$\frac{\sin x}{x} = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \frac{x^{2k-2}}{(2k-1)!} + \frac{r_n(x)}{x};$$

поэтому

$$\int_0^1 \frac{\sin x}{x}\,dx = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{(2k-1)!} \int_0^1 x^{2k-2}\,dx + \int_0^1 \frac{r_n(x)}{x}\,dx.$$

В силу оценки (60.1)

$$\left| \int_0^1 \frac{r_n(x)}{x}\,dx \right| \leqslant \int_0^1 \frac{|r_n(x)|}{x}\,dx \leqslant \frac{1}{(2n+1)!} \int_0^1 x^{2n}\,dx = \frac{1}{(2n+1)!\,(2n+1)}.$$

Поскольку при $n=3$

$$\frac{1}{(2n+1)!\,(2n+1)} = \frac{1}{7!\,7} = \frac{1}{35\,280} < \frac{1}{3}\,10^{-4},$$

то с точностью до 0,0001 имеем

$$\int_0^1 \frac{\sin x}{x}\,dx \approx \int_0^1 dx - \frac{1}{6}\int_0^1 x^2\,dx + \frac{1}{120}\int_0^1 x^4\,dx = 1 - \frac{1}{18} + \frac{1}{600} \approx 0{,}9961\ ^{*)}.$$

Отметим, что на практике для приближенного вычисления интегралов применять формулу Тейлора обычно оказывается нецелесообразным, поскольку в нее входят производные заданной функции и их вычисление приводит к дополнительному накоплению ошибок. Целесообразнее применять приближенные формулы интегрирования, в которые входят только значения самой функции. Подобные методы приближенного интегрирования будут рассмотрены в п. 60.4.

Замечание. Для проведения фактических вычислений значений функций или интегралов от них с помощью разложений функций в ряды годятся далеко не всякие разложения рассмат-

*) При переводе простых дробей в десятичные была сделана ошибка, не превышающая $\frac{1}{2}\cdot 10^{-4}$, поэтому суммарная ошибка при выполненном приближенном вычислении рассматриваемого интеграла, действительно не превышает 10^{-4}.

риваемых функций в ряды. Может случиться, что полученный ряд будет сходиться столь «медленно», что практически он либо совсем будет не пригоден для вычислений, либо потребует неоправданно большого их объема (образно говоря, в этом случае ряд «практически расходится», хотя и «теоретически сходится»). В такой ситуации надо попытаться получить какой-то другой ряд, который будет сходиться достаточно быстро («улучшить сходимость ряда», как обычно говорят) и сумма которого позволит найти значения рассматриваемой функции. Именно так и было сделано выше при рассмотрении метода вычисления логарифмов. Было бы, например, нецелесообразно вычислять даже значение $\ln\frac{3}{2}$ с помощью ряда (60.5), хотя ряд и сходится при $x=\frac{1}{2}$, а следует для этого воспользоваться рядом (60.6) при $x=\frac{1}{5}$, так как этот ряд сходится быстрее.

60.2. РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ

Рассмотрим задачу решения уравнения

$$f(x)=0. \tag{60.9}$$

Если функция f непрерывна на отрезке $[a, b]$ и принимает на концах отрезка значения разного знака, то метод, которым в п. 6.2 была доказана теорема о существовании в этом случае точки x_0, в которой функция обращается в ноль, дает и приближенный метод вычисления этого значения x_0, т. е. корня уравнения (60.9). Для этого достаточно последовательно делить отрезок $[a, b]$ пополам, выбирая каждый раз тот отрезок, на концах которого функция f принимает значения разного знака (если, конечно, не случится, что в одном из получившихся концов функция f обратится в ноль — в этом случае искомый корень будет уже найден). Если требуется найти корень уравнения (60.9) с точностью до заданного $\varepsilon>0$, то после n шагов таких, что

$$\frac{b-a}{2^n}<\varepsilon,$$

концы получившегося отрезка и будут давать искомое приближение некоторого корня уравнения (60.9) (левый — с недостатком, правый — с избытком). Такой способ приближенного решения уравнения (60.9), носящий название «метода вилки», принципиально очень прост, хотя и достаточно трудоемок. Он большей частью применяется лишь для «грубой прикидки» результата, т. е. для «грубого» определения интервала, на котором лежит искомый корень рассматриваемого уравнения, а затем на этом интервале для отыскания «более точного» значения корня используются другие, быстрее сходящиеся методы; обычно применяется нижеописанный метод касательных («метод Ньютона»). Как правило, по такой схеме действуют при проведении вычислений на быстродействующих вычислительных машинах. Конечно, такой путь целесообразен и при проведении вычислений «вручную», в частности при помощи логарифмической линейки или миникомпьютера.

Мы рассмотрим методы решения уравнения, носящие названия **метода хорд** и **метода касательных**. Последний из них хорошо обобщается и на случай систем уравнений.

В дальнейшем будем всегда предполагать, что функция f непрерывна на отрезке $[a, b]$ и имеет на этом отрезке первую и вторую производные [*], причем обе они знакопостоянны (в частности, отличны от нуля).

Мы будем предполагать также, что функция f принимает на концах отрезка значения разного знака. В силу законопостоянства первой производной функция f строго монотонна, поэтому при сделанных предположениях уравнение (60.9) имеет в точности один корень на интервале (a, b).

Метод хорд

Этот метод состоит в следующем. График функции f заменяется его хордой, т. е. отрезком, соединяющим концевые точки графика функции f: точки $(a, f(a))$ и $(b, f(b))$. Абсцисса x_1 точки пересечения этой хорды с осью Ox и рассматривается как первое приближение искомого корня (рис. 234). Далее берется тот из отрезков $[a, x_1]$ и $[x_1, b]$, на концах которого функция f принимает значения разного знака (далее будет показано, что при сделанных предположениях $f(x_1) \neq 0$ и, следовательно, такой отрезок всегда существует), и к нему применяется тот же прием; получается второе приближение корня x_2 и т. д. В результате образуется последовательность x_n, $n = 1, 2, \ldots$, которая, как это будет показано, при сделанных ограничениях на функцию f сходится к корню уравнения (60.9).

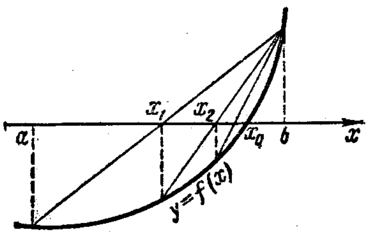


Рис. 234

Легко получить рекуррентные формулы для указанных чисел x_n, $n = 1, 2, \ldots$. Уравнение прямой, проходящей через крайние точки графика функции f, имеет вид

$$y = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) + f(a). \tag{60.10}$$

---

[*] Для метода хорд достаточно требовать существования первой и второй производных лишь на интервале (a, b). Существование производной в концах отрезка $[a, b]$ будет использовано только в методе касательных.

Обозначим его правую часть через $l(x)$, т. е. запишем уравнение (60.10) в виде

$$y=l(x).$$

Найдем абсциссу x_1 точки пересечения прямой (60.10) с осью Ox, т. е. решим уравнение $l(x)=0$; получим

$$x_1=a-\frac{(b-a)f(a)}{f(b)-f(a)}. \qquad (60.11)$$

Легко убедиться, что

$$a<x_1<b \qquad (60.12)$$

(это, например, следует из строгой монотонности и непрерывности функции $l(x)$ и того, что на концах отрезка $[a, b]$ она принимает значения разного знака: $l(a)=f(a)$ и $l(b)=f(b)$).

Аналогично находим

$$x_{n+1}=x_n-\frac{(b-x_n)f(x_n)}{f(b)-f(x_n)}, \quad n=1, 2, \ldots . \qquad (60.13)$$

Покажем, что последовательность $\{x_n\}$ стремится к корню уравнения (60.9) монотонно. Предположим для определенности, что $f'(x)>0$, $f''(x)>0$, $a<x<b$ (см. рис. 234). В этом случае функция f строго монотонно возрастает и строго выпукла вниз. Следовательно, любая внутренняя точка хорды, соединяющей крайние точки графика функции f, лежит над соответствующей точкой графика функции f, т. е.

$$l(x)>f(x), \quad a<x<b.$$

В частности, если x_0 — корень уравнения (60.9): $f(x_0)=0$, то отсюда следует, что

$$l(x_0)>0.$$

Имеем (см. (60.11) и (60.12)):

$$l(x_1)=0, \quad a<x_1<b.$$

Таким образом,

$$l(x_1)<l(x_0), \qquad (60.14)$$

но линейная функция $l(x)$ строго монотонно возрастает, ибо

$$l(b)=f(b)>f(a)=l(a),$$

поэтому из (60.14) следует

$$x_1<x_0.$$

Заменяя теперь отрезок $[a, b]$ отрезком $[x_1, b]$ и замечая, что $f(x_1)<0$, аналогично докажем, что

$$x_1<x_2<x_0.$$

Далее по индукции получим

$$x_1 < x_2 < \ldots < x_n < \ldots < x_0.$$

Таким образом, последовательность $\{x_n\}$, будучи монотонной и ограниченной, сходится. Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = c$. Переходя к пределу при $n \to \infty$ в равенстве (60.13), получим $f(c) = 0$, т. е. последовательность $\{x_n\}$ сходится к корню уравнения (60.9).

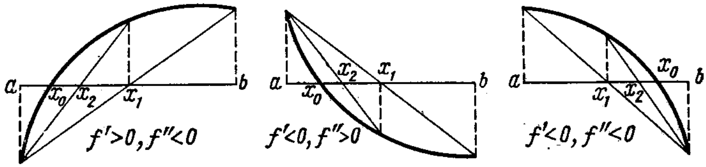


Рис. 235

Если $|f'(x)| \geqslant m > 0$, $a < x < b$, то нетрудно получить оценку скорости сходимости последовательности $\{x_n\}$ через значения самой функции f в точках x_n. Действительно,

$$f(x_n) = f(x_n) - f(x_0) = f'(\xi_n)(x_n - x_0),$$

$$x_n < \xi_n < x_0, \quad n = 1, 2, \ldots;$$

отсюда

$$|x_n - x_0| \leqslant \frac{|f(x_n)|}{m}, \quad n = 1, 2, \ldots.$$

Остальные случаи, т. е. случаи

$$f'(x) > 0, \quad f''(x) < 0,$$

$$f'(x) < 0, \quad f''(x) > 0,$$

$$f'(x) < 0, \quad f''(x) < 0,$$

рассматриваются аналогично разобранному (рис. 235).

Метод касательных (метод Ньютона)

Будем предполагать, что функция f удовлетворяет тем же условиям, что и при рассмотрении метода хорд. Проведем касательную к графику функции f в одной из его концевых точек, например, в точке $(b, f(b))$. Абсцисса x_1 точки ее пересечения с осью Ox и считается первым приближением корня уравнения (60.9). Далее, если $x_1 \in (a, b)$ (а это всегда имеет место для одной из касательных в концевых точках графика см. ниже), то из двух отрезков $[a, x_1]$ и $[x_1, b]$ выбирается тот, на концах которого функция f принимает значения разного знака (далее будет показано, что $f(x_1) \neq 0$). Затем проводится касательная к графику функции f в точке $(x_1, f(x_1))$; точка ее пересечения с осью Ox обозначается x_2 и т. д. (рис. 236).

Легко получаются рекуррентные формулы для указанных чисел x_n, $n=1, 2, \dots$. Уравнение касательной, проходящей через точку $(b, f(b))$, имеет вид

$$y=f'(b)(x-b)+f(b).$$

Обозначим его правую часть через $L(x)$, т. е. запишем это уравнение в виде

$$y=L(x).$$

Найдем абсциссу x_1 точки пересечения этой касательной с осью Ox, т. е. решим уравнение $L(x)=0$; получим

$$x_1=b-\frac{f(b)}{f'(b)}.$$

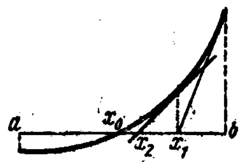


Рис. 236

Точка x_1 может лежать, вообще говоря, вне отрезка $[a, b]$, т. е. вне области определения функции f. Однако если $f(b)$ одного знака с f'', то $x_1 \in (a, b)$. Рассмотрим подробно, как и для метода хорд, случай, когда $f'>0$, $f''>0$ на $[a, b]$. В этом случае функция f строго монотонно возрастает, следовательно, $f(b)>0$; кроме того, функция f выпукла вниз на (a, b), следовательно,

$$L(x)<f(x)$$

(см. п. 14.3).

Если $f(x_0)=0$, $a<x_0<b$, то

$$L(x_0)<0,$$

но $L(b)=f(b)>0$, следовательно,

$$x_0<x_1<b.$$

При этом $f(x_1)>L(x_1)=0$.

Применяя те же рассуждения к отрезку $[a, x_1]$, получим точку x_2, такую, что

$$x_2=x_1-\frac{f(x_1)}{f'(x_1)}, \qquad x_0<x_2<x_1,$$

и, далее,

$$x_{n+1}=x_n-\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \qquad x_0<x_{n+1}<x_n. \tag{60.15}$$

Следовательно, последовательность $\{x_n\}$ монотонна и ограничена, а потому сходится. Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=c$. Переходя к пределу в (60.15), получим $f(c)=0$, т. е. последовательность (60.15) сходится к корню уравнения (60.9).

Когда $|f'(x)| \geqslant m \geqslant 0$, $a < x < b$, то тем же способом, что и в случае метода хорд, получаем оценку

$$|x_n - c| \leqslant \frac{|f(x_n)|}{m}, \quad n = 1, 2, \ldots .$$

Подобным же образом разбираются и оставшиеся случаи различных комбинаций знаков первой и второй производных (рис. 237).

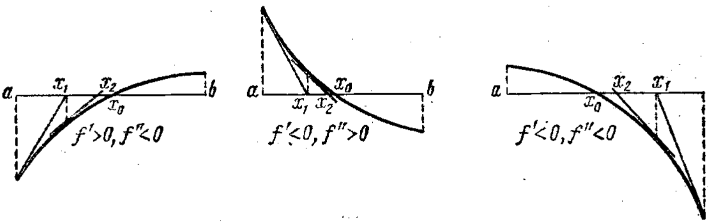


Рис. 237

Дадим еще одну оценку скорости сходимости метода касательных, из которой будет хорошо видно достоинство этого метода. Пусть для функции f на рассматриваемом интервале выполняются неравенства

$$|f'(x)| \geqslant m > 0, \quad |f''(x)| \leqslant M, \quad a < x < b.$$

Разложим функцию f в окрестности точки x_n по формуле Тейлора, например, с остаточным членом в форме Лагранжа

$$f(x) = f(x_n) + f'(x_n)(x - x_n) + \frac{1}{2} f''(\xi)(x - x_n)^2,$$

где $\xi = x_n + \theta(x - x_n)$, $0 < \theta < 1$. Если $f(c) = 0$, то, подставляя $x = c$ в написанную формулу, получим

$$f(x_n) + f'(x_n)(c - x_n) + \frac{1}{2} f''(\xi)(c - x_n)^2 = 0.$$

Отсюда

$$x_n - c = \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} + \frac{f''(\xi)}{2f'(x_n)}(c - x_n)^2,$$

или в силу формулы (60.15)

$$x_{n+1} - c = \frac{f''(\xi)}{2f'(x_n)}(c - x_n)^2.$$

Следовательно,

$$|x_{n+1} - c| \leqslant \frac{M}{2m}|x_n - c|^2,$$

откуда

$$\frac{M}{2m}|x_{n+1} - c| \leqslant \left(\frac{M}{2m}|x_n - c|\right)^2, \quad n = 1, 2, 3, \ldots .$$

Применяя последовательно это неравенство, будем иметь:

$$\frac{M}{2m}|x_n-c|\leqslant\left(\frac{M}{2m}|x_{n-1}-c|\right)^2\leqslant$$
$$\leqslant\left[\left(\frac{M}{2m}|x_{n-2}-c|\right)^2\right]^2\leqslant\ldots\leqslant\left(\frac{M}{2m}|b-c|\right)^{2^n}.$$

Если выбрать первоначальное приближение b так, чтобы $q\overset{\text{def}}{=}\frac{M}{2m}|b-c|<1$, то получим

$$|x_n-c|<\frac{2m}{M}q^{2^n},$$

т. е. скорость сходимости приближенных решений x_n к корню $x=c$ значительно превышает скорость убывания геометрической прогрессии со знаменателем по абсолютной величине меньшим единицы.

Пример. Применим метод Ньютона для приближенного вычисления корня k-ой степени из числа $a>0$, k — целое положительное. В этом случае речь идет о приближенном решении уравнения $x^k-a=0$, т. е. формулу (60.15) следует применить к функции $f(x)=x^k-a$.

Имеем $f'(x)=kx^{k-1}$, и потому для последовательных приближенных значений x_n корня $\sqrt[k]{x}$ имеем рекуррентную формулу

$$x_{n+1}=x_n-\frac{x_n^k-a}{kx_n^{k-1}},$$

или

$$x_{n+1}=\frac{1}{k}\left[(k-1)x_n+\frac{a}{x_n^{k-1}}\right].$$

В случае $k=2$ мы встречались с этой формулой в п. 3.9.

60.3. ИНТЕРПОЛЯЦИЯ ФУНКЦИЙ

Пусть на отрезке $[a, b]$ задана функция f и пусть фиксированы $n+1$ значений аргумента x_i, $i=1, 2, \ldots, n+1$:

$$a\leqslant x_1<x_2<\ldots<x_{n+1}\leqslant b. \qquad (60.16)$$

Одна из простейших интерполяционных задач состоит в отыскании многочлена $P(x)$ не выше некоторой данной степени m, который при значениях аргумента $x=x_i$, $i=1, 2, \ldots, n+1$, называемых *узлами интерполяции*, принимает те же значения, что и данная функция, т. е. имеют место равенства

$$f(x_i)=P(x_i),\ i=1, 2, \ldots, n+1. \qquad (60.17)$$

Такой многочлен $P(x)$ называется *интерполяционным многочленом*, интерполирующим функцию f в данных узлах интерполяции.

Для того чтобы исследовать вопрос о существовании интерполяционного многочлена $P(x)$, удовлетворяющего условиям (60.17), запишем его с неопределенными коэффициентами a_j, $j=0, 1, \ldots, m$;

$$P(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_mx^m$$

и подставим его в систему (60.17). Получим систему из $(n+1)$-го линейного уравнения с $m+1$ неизвестными $a_0, a_1, \ldots, a_m$:

$$\begin{array}{c} a_0+a_1x_1+\ldots+a_mx_1^m=f(x_1) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_0+a_1x_{n+1}+\ldots+a_mx_{n+1}^m=f(x_{n+1}). \end{array} \tag{60.18}$$

Определитель, составленный из коэффициентов этой системы, стоящих в первых k строчках и первых k столбцах, $k\leqslant\min\{m+1, n+1\}$ (число строчек равно $n+1$, число столбцов $m+1$), является так называемым определителем Вандермонда, известным из курса алгебры:

$$W(x_1, \ldots, x_k)=\begin{vmatrix} 1 & x_1\ldots x_1^{k-1} \\ 1 & x_2\ldots x_2^{k-1} \\ \cdot & \cdots\cdots \\ 1 & x_k\ldots x_k^{k-1} \end{vmatrix}=\prod_{1\leqslant i<j\leqslant k}(x_j-x_i).$$

В данном случае этот определитель не равен нулю, ибо все узлы интерполяции различны. Поэтому ранг матрицы коэффициентов системы (60.18) равен наименьшему из двух чисел $m+1$ и $n+1$. Если $n>m$, то система (60.18), вообще говоря, не имеет решения. Если $n\leqslant m$, то решение системы (60.18) всегда существует, причем в случае $n=m$ решение единственно, а при $n<m$ решений бесконечно много. Таким образом, *какие бы ни задать значения в $(n+1)$-м узлах* (60.16), *всегда существует и притом единственный многочлен степени не выше чем n, принимающий в этих узлах заданные значения.*

Для отыскания интерполяционного многочлена $P(x)$ можно решить систему (60.18). Однако можно найти его и другим, более коротким путем. Рассмотрим многочлен

$$P_i(x)=\frac{(x-x_1)\ldots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\ldots(x-x_{n+1})}{(x_i-x_1)\ldots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\ldots(x_i-x_{n+1})}, \quad i=1, 2, \ldots, n+1.$$

Очевидно, что $P_i(x)$ — многочлен степени n и что

$$P_i(x_i)=1, \quad P_i(x_j)=0,$$
$$i=1, 2, \ldots, n+1, \; j=1, 2, \ldots, i-1, i+1, \ldots, n+1. \tag{60.19}$$

Поэтому искомый интерполяционный многочлен может быть записан в виде

$$P(x)=\sum_{i=1}^{n+1}f(x_i)P_i(x). \tag{60.20}$$

Действительно, написанное выражение является многочленом степени не выше n и в силу (60.19) удовлетворяет условиям (60.17).

Интерполяционный многочлен, записанный в виде (60.20), называется *интерполяционным многочленом Лагранжа.*

Исследуем теперь разность между функцией и интерполяционным многочленом

$$R(x) = f(x) - P(x),$$

называемую *остаточным членом интерполяции.* Предположим, что функция f $n+1$ раз дифференцируема на отрезке $[a, b]$. Тогда этим же свойством обладает и остаток $R(x)$, причем

$$R^{(n+1)}(x) = f^{(n+1)}(x), \quad a \leqslant x \leqslant b, \tag{60.21}$$

ибо $P^{(n+1)}(x) \equiv 0$. Положим

$$\omega(x) = (x - x_1)(x - x_2)\ldots(x - x_{n+1}),$$

зафиксируем $x \in [a, b]$ и рассмотрим вспомогательную функцию

$$\varphi(t) = R(t) - \frac{R(x)}{\omega(x)}\omega(t), \quad a \leqslant t \leqslant b.$$

Функция $\varphi(t)$, очевидно, также $n+1$ раз дифференцируема на отрезке $[a, b]$, причем из (60.21) и того, что $\omega^{(n+1)}(t) = (n+1)!$, имеем

$$\varphi^{(n+1)}(t) = f^{(n+1)}(t) - (n+1)!\,\frac{R(x)}{\omega(x)}. \tag{60.22}$$

Далее, функция $\varphi(t)$ обращается в ноль в $n+2$ точках $x, x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}$; поэтому в силу теоремы Ролля ее производная обращается в ноль по крайней мере в $n+1$ точке отрезка $[a, b]$, вторая производная — в n точках и т. д. По индукции получим, что $(n+1)$-я производная функции φ обращается по крайней мере один раз в ноль внутри отрезка $[a, b]$. Пусть $\varphi^{(n+1)}(\zeta) = 0$, $a < \zeta < b$, тогда из (60.22) получим

$$R(x) = \frac{\omega(x)}{(n+1)!} f^{n+1}(\zeta),$$

или, подробнее,

$$R(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_{n+1})}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\zeta), \quad a \leqslant x \leqslant b, \quad a < \zeta < b.$$

Отсюда следует оценка остаточного члена

$$|R(x)| \leqslant \frac{1}{(n+1)!} \max_{a \leqslant x \leqslant b} |(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_{n+1})| \sup_{a \leqslant x \leqslant b} |f^{(n+1)}(x)|.$$

Заметим, что, вообще говоря, даже для аналитических на отрезке $[a, b]$ функций остаточный член интерполяции не стремится к нулю на отрезке $[a, b]$ при $n \to \infty$, т. е. интерполяционные полиномы не сходятся к самой функции. Построение соответствующих примеров достаточно громоздко, поэтому мы не будем на этом останавливаться.

60.4. КВАДРАТУРНЫЕ ФОРМУЛЫ

Рассмотрим теперь некоторые способы приближенного интегрирования функций. Формулы для приближенных значений интегралов называются *квадратурными формулами.*

Пусть на отрезке $[a, b]$ задана функция f. Разобьем отрезок $[a, b]$ на n равных частей точками x_k, $k=1, 2, \ldots, n-1$:

$$a=x_0<x_1<\ldots<x_{n-1}<x_n=b; \quad x_k-x_{k-1}=\frac{b-a}{n}, \quad k=1, 2, \ldots, n.$$

Квадратурные формулы, которые мы рассмотрим, будут получаться посредством замены при интегрировании функции f на каждом отрезке $[x_{k-1}, x_k]$ интерполяционным многочленом степени n. Мы изучим случаи $n=0, 1, 2$. Соответствующие приближенные значения интеграла от функции f будем обозначать символом $L_n(f)$, $n=0, 1, 2$. В первом случае (при $n=0$) соответствующая квадратурная формула называется *формулой прямоугольников*, во втором (при $n=1$) — *формулой трапеций*, в третьем (при $n=2$) — *параболической формулой* или, *чаще, формулой Симпсона.*

Формула прямоугольников

Для интерполяции функции f на отрезке $[x_{k-1}, x_k]$, $k=1, 2, \ldots, n$, многочленом нулевой степени достаточно задать лишь один узел. Возьмем в качестве узла середину отрезка $[x_{k-1}, x_k]$:

$$\xi_k=\frac{x_{k-1}+x_k}{2}.$$

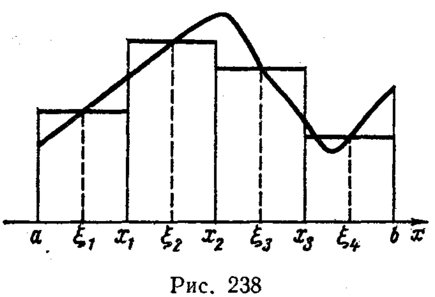


Рис. 238

Интерполяционным многочленом является постоянная

$$P_k(x)=f(\xi_k),$$
$$k=1, 2, \ldots, n.$$

При такой интерполяции мы заменяем данную функцию f «ступенчатой функцией», точнее набором функций, постоянных на каждом отрезке $[x_{k-1}, x_k]$ и равных значению функции f в центре этого отрезка (рис. 238). Вместо интеграла $\int\limits_{x_{k-1}}^{x_k} f(x)\,dx$ возьмем интеграл $\int\limits_{x_{k-1}}^{x_k} P_k(x)\,dx$, т. е. заменим площадь криволинейной трапеции площадью соответствующего прямоугольника.

Напишем теперь квадратурную формулу прямоугольников:

$$L_0[f]=\sum_{k=1}^{n}\int\limits_{x_{k-1}}^{x_k} P_k(x)\,dx=\sum_{k=1}^{n}\int\limits_{x_{k-1}}^{x_k} f(\xi_k)\,dx=\frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k), \qquad (60.23)$$

итак,

$$L_0[f]=\frac{b-a}{n}\left[f\left(\frac{a+x_1}{2}\right)+f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)+\ldots+f\left(\frac{x_{n-1}+b}{2}\right)\right].$$

Формула трапеций

На каждом отрезке $[x_{k-1}, x_k]$, $k=1, 2, \ldots, n$, возьмем интерполяционный многочлен $P_k(x)$ первой степени, определяемый узлами интерполяции x_{k-1} и x_k. Полагая $y_i=f(x_i)$, $i=0, 1, \ldots, n$, получим (см. (60.20))

$$P_k(x)=\frac{x-x_k}{x_{k-1}-x_k}y_{k-1}+\frac{x-x_{k-1}}{x_k-x_{k-1}}y_k,$$
$$k=1, 2, \ldots, n.$$

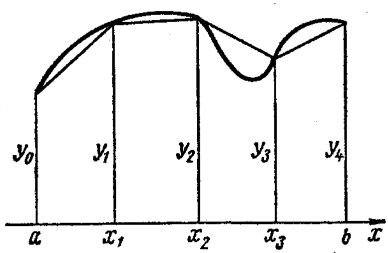


Рис. 239

Таким образом, мы заменяем данную функцию f кусочно-линейной функцией. Вместо интеграла $\int\limits_{x_{k-1}}^{x_k} f(x)\,dx$ возьмем интеграл $\int\limits_{x_{k-1}}^{x_k} P_k(x)\,dx$, т. е. заменим площадь криволинейной трапеции соответствующей площадью обыкновенной трапеции (рис. 239).

Замечая, что

$$\int\limits_{x_{k-1}}^{x_k} P_k(x)\,dx=\frac{y_{k-1}+y_k}{2}\,\frac{b-a}{n}, \quad k=1, 2, \ldots, n,$$

получим квадратурную формулу трапеций

$$L_1[f]=\sum_{k=1}^{n}\int\limits_{x_{k-1}}^{x_k} P_k(x)\,dx=\frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{y_{k-1}+y_k}{2}, \qquad (60.24)$$

или

$$L_1[f]=\frac{b-a}{n}\left[\frac{f(a)+f(b)}{2}+f(x_1)+f(x_2)+\ldots+f(x_n)\right].$$

Формула Симпсона

На каждом отрезке $[x_{k-1}, x_k]$, $k=1, 2, \ldots, n$, возьмем интерполяционный многочлен $P_k(x)$ второй степени, определяемый узлами интерполяции x_{k-1}, $\xi_k=\frac{x_{k-1}+x_k}{2}$ и x_k. Тогда

$$P_k(x)=\frac{(x-\xi_k)(x-x_k)}{(x_{k-1}-\xi_k)(x_{k-1}-x_k)}f(x_{k-1})+$$
$$+\frac{(x-x_{k-1})(x-x_k)}{(\xi_k-x_{k-1})(\xi_k-x_k)}f(\xi_k)+\frac{(x-x_{k-1})(x-\xi_k)}{(x_k-x_{k-1})(x_k-\xi_k)}f(x_k).$$

Непосредственным вычислением убеждаемся, что

$$\int\limits_{x_{k-1}}^{x_k}\frac{(x-\xi_k)(x-x_k)}{(x_{k-1}-\xi_k)(x_{k-1}-x_k)}dx=\frac{1}{6}(x_k-x_{k-1})=\frac{1}{6}\frac{b-a}{n},$$

$$\int\limits_{x_{k-1}}^{x_k}\frac{(x-x_{k-1})(x-x_k)}{(\xi_k-x_{k-1})(\xi_k-x_k)}dx=\frac{2}{3}(x_k-x_{k-1})=\frac{2}{3}\frac{b-a}{n},$$

$$\int\limits_{x_{k-1}}^{x_k}\frac{(x-x_{k-1})(x-\xi_k)}{(x_k-x_{k-1})(x_k-\xi_k)}dx=\frac{1}{6}(x_k-x_{k-1})=\frac{1}{6}\frac{b-a}{n},$$

поэтому

$$\int\limits_{x_{k-1}}^{x_k}P_k(x)\,dx=\frac{b-a}{n}\left[\frac{1}{6}f(x_{k-1})+\frac{2}{3}f(\xi_k)+\frac{1}{6}f(x_k)\right].$$

Теперь нетрудно написать квадратурную формулу Симпсона:

$$L_2[f]=\sum_{k=1}^{n}\int\limits_{x_{k-1}}^{x_k}P_k(x)\,dx=\frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{1}{6}f(x_{k-1})+\frac{2}{3}f(\xi_k)+\frac{1}{6}f(x_k)\right],\tag{60.25}$$

или

$$L_2[f]=\frac{b-a}{6n}\{f(a)+f(b)+2[f(x_1)+\ldots+f(x_{n-1})]+4[f(\xi_1)+\ldots+f(\xi_n)]\}.$$

60.5. ПОГРЕШНОСТЬ КВАДРАТУРНЫХ ФОРМУЛ *)

Мы видели, что всех трех рассмотренных нами случаях квадратурные формулы (см. (60.23), (60.24), (60.25)) имеют вид

$$L(f)=\sum_{k=1}^{n}l_k(f),\tag{60.26}$$

*) В этом пункте мы следуем идеям, развитым в монографии С. М. Никольского «Квадратурные формулы». М., 1974.

где

$$l_k(f)=\frac{b-a}{n}\sum_{i=0}^{m} p_i f(\xi_{ki}), \tag{60.27}$$

$$x_{k-1}\leqslant \xi_{ki}\leqslant x_k,\quad k=1,\ 2,\ \ldots,\ n,\quad i=0,\ 1,\ \ldots,\ m,$$

а p_i — некоторые числа.

В случае формулы прямоугольников мы имели

$$m=0,\ p_0=1,\ \xi_{k0}=\frac{x_{k-1}+x_k}{2};$$

в случае формулы трапеций

$$m=1,\quad p_0=p_1=\frac{1}{2},\quad \xi_{k0}=x_{k-1},\quad \xi_{k1}=x_k;$$

в случае формулы Симпсона

$$m=2,\quad p_0=p_2=\frac{1}{6},\quad p_1=\frac{2}{3},\quad \xi_{k0}=x_{k-1},\quad \xi_{k1}=\frac{x_{k-1}+x_k}{2},\quad \xi_{k2}=x_k,$$
$$k=1,\ 2,\ \ldots,\ n.$$

Пусть теперь заданы какие-либо числа p_i, называемые *весами*, и пусть на отрезке $[0,\ 1]$ задана какая-либо система точек ξ_i, $i=0,\ 1,\ \ldots,\ m$, называемых *узлами*. Пусть, как и раньше, отрезок $[a,\ b]$ разделен точками x_k, $k=0,\ 1,\ \ldots,\ n$, на n равных отрезков $[x_{k-1},\ x_k]$, $k=1,\ 2,\ \ldots,\ n$, и пусть точки ξ_{ki} получаются из узлов ξ_i при линейном отображении отрезка $[0,\ 1]$ на отрезок $[x_{k-1},\ x_k]$, при котором точка ноль переходит в точку x_{k-1}, т. е. при отображении $x=(x_k-x_{k-1})\,t+x_{k-1}$, $0\leqslant t\leqslant 1$.

Формула (60.26) в этом случае называется квадратурной формулой, соответствующей узлам ξ_i и весам p_i, $i=0,\ 1,\ \ldots,\ m$.

Всякая квадратурная формула (60.26) обладает свойством линейности: для любых двух функций f и g, определенных на отрезке $[a,\ b]$, и для любых двух чисел λ и μ, очевидно, справедливо равенство

$$L(\lambda f+\mu g)=\lambda L(f)+\mu L(g).$$

Определение. *Формула* $L(f)=\sum_{k=1}^{n} l_k(f)$ *называется точной для многочленов степени* r, *если для любого многочлена* $P(x)$ *степени не выше чем* r, *для любого отрезка* $[a,\ b]$ *и для любого числа* n *(т. е. для любого разбиения отрезка* $[a,\ b]$ *на равные отрезки) справедливо равенство*

$$L(P(x))=\int_a^b P(x)\,dx.$$

Упражнение. Доказать, что, для того чтобы квадратурная формула $L[f]$, соответствующая узлам ξ_i и весам p_i, $i=0,\ 1,\ \ldots,\ m$, была точной для многочленов степени r, необходимо и достаточно, чтобы для любого многочлена $P(x)$ степени не выше r было справедливо равенство

$$\int_0^1 P(x)\,dx = \sum_{i=0}^{m} p_i P(\xi_i).$$

Поскольку интерполяционный многочлен порядка r совпадает для многочлена степени r с самим многочленом, то квадратурные формулы прямоугольников, трапеций и Симпсона точны соответственно для многочленов нулевой, первой и второй степени.

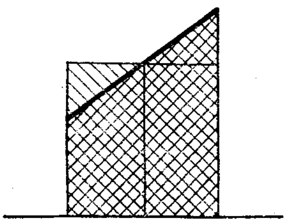


Рис. 240

Однако, более того, квадратурная формула прямоугольников точна для многочленов первой степени, а формула Симпсона — для многочленов третьей степени. Докажем это. Действительно, в случае формулы прямоугольников (см. (60.23) и (60.27))

$$l_k(f) = f\left(\frac{x_{k-1}+x_k}{2}\right)(x_k - x_{k-1}).$$

Простой подсчет дает, что для любой линейной функции справедливо равенство

$$l_k(Ax+B) = \int_{x_{k-1}}^{x_k} (Ax+B)\,dx. \qquad (60.28)$$

Это наглядно видно и на рис. 240. Суммируя равенства (60.28) по k от 1 до n, получим

$$L_0(Ax+B) = \int_a^b (Ax+B)\,dx,$$

что и означает точность квадратурной формулы прямоугольников для многочленов первой степени.

В случае формулы Симпсона (см. (60.25) и (60.27))

$$l_k(f) = \frac{b-a}{n}\left[\frac{1}{6} f(x_{k-1}) + \frac{2}{3} f\left(\frac{x_{k-1}+x_k}{2}\right) + \frac{1}{6} f(x_k)\right]. \qquad (60.29)$$

Достаточно показать, что для любого многочлена третьей степени $P(x)$ в этом случае

$$l_k(P(x)) = \int_{x_{k-1}}^{x_k} P(x)\,dx, \quad k = 1, 2, \ldots, n. \qquad (60.30)$$

В самом деле, если эти равенства будут доказаны, то, суммируя их по k от 1 до n, получим

$$L_2(P(x)) = \int_a^b P(x)\,dx,$$

т. е. что формула Симпсона точна для многочленов третьей степени.

Пусть $P(x)=Ax^3+Bx^2+Cx+D$. Положим $Q(x)=Bx^2+Cx+D$, тогда $P(x)=Ax^3+Q(x)$. Поэтому

$$l_k(P(x))=Al_k(x^3)+l_k(Q(x)),$$

$$\int_{x_{k-1}}^{x_k} P(x)\,dx=A\int_{x_{k-1}}^{x_k} x^3\,dx+\int_{x_{k-1}}^{x_k} Q(x)\,dx,\quad k=1,\ 2,\ \ldots,\ n. \tag{60.31}$$

В силу того, что формула Симпсона точна для многочленов второй степени, имеем

$$l_k(Q(x))=\int_{x_{k-1}}^{x_k} Q(x)\,dx,\quad k=1,\ 2,\ \ldots,\ n.$$

С другой стороны, непосредственным вычислением убеждаемся, что

$$\int_{x_{k-1}}^{x_k} x^3\,dx=\frac{x_k^4-x_{k-1}^4}{4},$$

$$l_k(x^3)=(x_k-x_{k-1})\left[\frac{x_{k-1}^3}{6}+\frac{2}{3}\left(\frac{x_{k-1}+x_k}{2}\right)^3+\frac{x_k^3}{6}\right]=\frac{x_k^4-x_{k-1}^4}{4}.$$

Это и доказывает равенство (60.30).

Порядок погрешности квадратурных формул оказывается связан со степенью многочленов, относительно которых точна рассматриваемая квадратурная формула.

Теорема. *Пусть функция f r раз непрерывно дифференцируема на отрезке $[a,\ b]$ и пусть число $M>0$ таково, что*

$$|f^{(r)}(x)|\leqslant M,\quad a\leqslant x\leqslant b.$$

Если квадратурная формула (60.26) *точна для многочленов степени $r-1$ ($r=1,\ 2,\ \ldots$), то существует постоянная $c_r>0$, не зависящая от функции f, такая, что*

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx-L(f)\right|\leqslant\frac{c_rM(b-a)^{r+1}}{n^r}. \tag{60.32}$$

Доказательство. Представим функцию f на каждом отрезке $[x_{k-1},\ x_k]$, согласно формуле Тейлора, в виде

$$f(x)=P_k(x)+r_k(x),\quad k=1,\ 2,\ \ldots,\ n,$$

где

$$P_k(x)=\sum_{j=0}^{r-1}\frac{f^{(j)}(x_{k-1})}{j!}(x-x_{k-1})^j$$

— многочлен Тейлора степени $r-1$, и, следовательно, $r_k(x)$ — остаточный член формулы Тейлора, который мы запишем в форме Лагранжа:

$$r_k(x)=\frac{f^{(r)}[x_{k-1}+\theta_k(x-x_{k-1})]}{r!}(x-x_{k-1})^r, \tag{60.33}$$

$$0<\theta_k<1, \quad k=1,\ 2,\ \ldots,\ n;$$

тогда

$$\int_a^b f(x)\,dx-L(f)=\sum_{k=1}^n\int_{x_{k-1}}^{x_k}f(x)\,dx-\sum_{k=1}^n l_k(f)=$$
$$=\sum_{k=1}^n\left[\int_{x_{k-1}}^{x_k}P_k(x)\,dx-l_k(P_k(x))\right]+$$
$$+\sum_{k=1}^n\left[\int_{x_{k-1}}^{x_k}r_k(x)\,dx-l_k(r_k(x))\right]. \tag{60.34}$$

В силу того, что данная квадратурная формула точна для многочленов степени $r-1$, справедливо равенство

$$\int_{x_{k-1}}^{x_k}P_k(x)\,dx-l_k(P_k(x))=0, \quad k=1,\ 2,\ \ldots,\ n\ ^{*)}.$$

Поэтому из (60.34) следует, что

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx-L(f)\right|\leqslant\sum_{k=1}^n\int_{x_{k-1}}^{x_k}|r_k(x)|\,dx+\sum_{k=1}^n|l_k(r_k(x))|. \tag{60.35}$$

Далее, из (60.33) имеем

$$|r_k(x)|\leqslant\frac{M}{r!}\left(\frac{b-a}{n}\right)^r, \quad k=1,\ 2,\ \ldots,\ n.$$

Применяя это неравенство, получим

$$\int_{x_{k-1}}^{x_k}|r_k(x)|\,dx\leqslant\frac{M(b-a)^r}{r!\,n^r}\int_{x_{k-1}}^{x_k}dx=\frac{M(b-a)^{r+1}}{r!\,n^{r+1}}.$$

Полагая $p=\max\limits_{i=0,\ 1,\ \ldots,\ m}|p_i|$ (см. (60.27)), имеем

$$|l_k(r_k(x))|\leqslant\frac{b-a}{n}\sum_{i=0}^m|p_i|\,|r_k(\xi_{ki}|\leqslant\frac{(m+1)(b-a)^{r+1}pM}{r!n^{r+1}}.$$

*) Действительно, это следует из определения точности квадратурной формулы относительно многочленов данной степени, приведенного на стр. 559, если в этом определении в качестве отрезка $[a,\ b]$ взять отрезок $[x_{k-1},\ x_k]$ и положить $n=1$.

Подставляя эти оценки в (60.35) и введя обозначение

$$c_r = \frac{1+(m+1)p}{r!},$$

мы и получим неравенство (60.32). $\square$

Из формулы (60.32) следует, в частности, что при вычислении интегралов с помощью квадратурных формул прямоугольников и трапеций (они, как мы знаем, точны для многочленов первого порядка, и потому для них можно взять $r=2$) ошибка имеет порядок $O\left(\frac{1}{n^2}\right)$, а при вычислении интегралов с помощью формулы Симпсона (она точна уже для многочленов третьего порядка и можно взять $r=4$) ошибка составляет уже всего лишь величину $O\left(\frac{1}{n^4}\right)$.

Отметим, что при приведенном подсчете постоянных c_r мы не получили для них минимальных значений. Этого можно достичь, усовершенствовав методы их подсчета.

Задача 43. Доказать, что для формулы прямоугольников можно взять $c_2=\frac{1}{24}$, для формулы трапеций $c_2=\frac{1}{12}$, а для формулы Симпсона $c_4=\frac{1}{2880}$.

60.6. ПРИБЛИЖЕННОЕ ВЫЧИСЛЕНИЕ ПРОИЗВОДНЫХ

Приближенное вычисление производных производится на основе формул, которыми они определяются. Например, поскольку

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h},$$

то так называемое разностное отношение

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} \tag{60.36}$$

дает приближенное значение производной. При этом эта формула позволяет вычислить производную с любой степенью точности за счет выбора соответствующего h — это следует из определения предела.

Оценим порядок приближения производной, вычисляемой по формуле (60.36), относительно h. Предположим, что функция f имеет в окрестности точки x ограниченную вторую производную. Тогда по формуле Тейлора

$$f(x+h)=f(x)+f'(x)h+\frac{h^2}{2}f''(x+\theta h),\quad 0<\theta<1;$$

отсюда

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=f'(x)+\frac{h}{2}f''(x+\theta h),\quad 0<\theta<1,$$

т. е.

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=f'(x)+O(h), \quad h\to 0. \ \square$$

Очевидно, что если в точке x существует производная, то

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x-h)}{2h}=f'(x).$$

Оказывается, что приближенное вычисление производной в точке по приближенной формуле

$$\frac{f(x+h)-f(x-h)}{2h} \qquad (60.37)$$

обеспечивает более высокий порядок малости погрешности относительно h. Покажем это. Пусть функция f имеет в окрестности точки x третью ограниченную производную. Тогда по формуле Тейлора

$$f(x+h)=f(x)+f'(x)h+\frac{1}{2}f''(x)h^2+\frac{1}{6}f'''(x+\theta_1 h)h^3, \quad 0<\theta_1<1,$$

$$f(x-h)=f(x)-f'(x)h+\frac{1}{2}f''(x)h^2-\frac{1}{6}f'''(x+\theta_2 h)h^3, \quad 0<\theta_2<1.$$

Вычитая второе равенство из первого и деля на $2h$, получим:

$$\frac{f(x+h)-f(x-h)}{2h}=f'(x)+\frac{1}{6}[f'''(x+\theta_1 h)+f'''(x+\theta_2 h)]h^2=$$
$$=f'(x)+O(h^2), \quad h\to 0.$$

Таким образом, разностное отношение (60.37) аппроксимирует производную на порядок лучше чем (60.36).

Для приближенного вычисления второй производной в точке x можно поступить следующим образом: приближенно вычислить первую производную в точках x и $x+h$, например, по формулам (60.36):

$$f'(x)\approx\frac{f(x+h)-f(x)}{h}, \quad f'(x+h)\approx\frac{f(x+2h)-f(x+h)}{h};$$

тогда

$$\frac{f'(x+h)-f'(x)}{h}\approx\frac{f(x+2h)-2f(x+h)+f(x)}{h^2}.$$

Разностное отношение, стоящее в правой части полученной формулы и принимается за приближенное значение второй производной в точке x.

В случае, когда у функции f в окрестности точки x существует третья ограниченная производная, то раскладывая числитель по формуле Тейлора, получим

$$\frac{f(x+2h)-2f(x+h)+f(x)}{h^2}=f''(x)+O(h), \ h\to 0. \qquad (60.38)$$

Аналогично случаю первой производной можно показать (в предположении ограниченности четвертой производной в окрестности точки x), что

$$\frac{f(x+h)-2f(x)+f(x-h)}{h^2}=f''(x)+O(h^2),\ h\to 0, \tag{60.39}$$

т. е. у приближенной формулы (60.39) для вычисления второй производной погрешность на порядок лучше, чем у формулы (60.38).

Аналогичным образом вычисляются производные более высоких порядков и частные производные функций многих переменных.

§ 61. РАЗБИЕНИЕ МНОЖЕСТВА НА КЛАССЫ ЭКВИВАЛЕНТНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

Много раз в нашем курсе мы сталкивались с понятием эквивалентности: эквивалентные бесконечно малые и бесконечно большие функции (п. 8.3), эквивалентные отображения отрезка (п. 16.2) и области (п. 50.1), эквивалентные фундаментальные последовательности метрических пространств (п. 57.1), эквивалентные функции при построении пространства $\widetilde{RL}_2$ (п. 57.10) и т. д. Во всех этих случаях отношение эквивалентности обладало следующими тремя свойствами: если элементы рассматриваемого множества обозначить буквами x, y, z, ..., а эквивалентные элементы x и y обозначить символом $x\sim y$, то:

1. Каждый элемент рассматриваемого множества эквивалентен самому себе: $x\sim x$ (рефлексивность).
2. Если $x\sim y$, то $y\sim x$ (симметричность).
3. Если $x\sim y$ и $y\sim z$, то $x\sim z$ (транзитивность).

Всегда предполагалось само собой разумеющимся, что множество тех или иных элементов, в котором введено понятие эквивалентности, обладающее свойством рефлексивности, симметричности и транзитивности, распадается на непересекающиеся классы эквивалентных элементов. В действительности так и есть. Сформулируем и докажем это утверждение в общем случае.

Пусть задано множество $A=\{x, y, z, \ldots\}$ и некоторое подмножество множества его упорядоченных пар, обладающее следующими свойствами: если пара (x, y) принадлежит этому подмножеству, то элементы x и y называются эквивалентными и пишется $x\sim y$, при этом выполняются условия рефлексивности, симметричности и транзитивности. В этом случае говорится, что в множестве A задано отношение эквивалентности.

Теорема. *Если в некотором множестве задано отношение эквивалентности, то это множество является суммой своих попарно не пересекающихся подмножеств эквивалентных между собой элементов.*

Доказательство. Пусть $A=\{x, y, z, \ldots\}$ — множество, в котором задано отношение эквивалентности. Для каждого элемента $x \in A$ через A_x обозначим множество всех элементов множества A, эквивалентных элементу x. Покажем, что

$$A = \bigcup_{x \in A} A_x \tag{61.1}$$

и что это представление множества A в виде суммы подмножеств A_x является искомым, т. е. что слагаемые A_x попарно не пересекаются.

Прежде всего в силу рефлексивности отношения эквивалентности для каждого $x \in A$ имеем $x \sim x$ и, следовательно, $x \in A_x$, т. е. каждый элемент множества A принадлежит некоторому A_x, поэтому

$$A \subset \bigcup_{x \in A} A_x. \tag{61.2}$$

С другой стороны, каждый элемент множества A_x в силу самой конструкции является элементом множества A. Следовательно, $A_x \subset A$ и потому

$$\bigcup_{x \in A} A_x \subset A. \tag{61.3}$$

Из включений (61.2) и (61.3) вытекает равенство (61.1).

Докажем теперь, что любые два элемента каждого из множеств A_x эквивалентны между собой. В самом деле, пусть $y \in A_x$, $z \in A_x$; это означает, что $y \sim x$ и $z \sim x$. В силу симметричности отношения эквивалентности отсюда следует, что $x \sim z$, откуда согласно транзитивности — $y \sim z$.

Покажем, наконец, что слагаемые в правой части равенства (61.1) попарно не пересекаются. Именно, покажем, что для любых двух элементов x' и x'' множества $A_{x'}$ и $A_{x''}$ либо совпадают, либо не пересекаются. В самом деле, пусть у множества $A_{x'}$ и $A_{x''}$ найдется хотя бы один общий элемент: $y \in A_{x'} \cap A_{x''}$ и пусть $z \in A_{x'}$. Поскольку было доказано, что для каждого множества A_x любые два его элемента эквивалентны, то $z \sim y$, $y \sim x''$ и, следовательно, $z \sim x''$, т. е. $z \in A_{x''}$. Элемент z являлся произвольным элементом из множества $A_{x'}$, поэтому

$$A_{x'} \subset A_{x''}; \tag{61.4}$$

аналогично

$$A_{x''} \subset A_{x'}. \tag{61.5}$$

Из (61.4) и (61.5) следует, что

$$A_{x'} = A_{x''}.$$

Таким образом, если у множеств $A_{x'}$ и $A_{x''}$ имеется хотя бы один общий элемент, то они совпадают; если же такового элемента нет, то эти множества, очевидно, не пересекаются.

Итак, представление (61.2) действительно обладает всеми сформулированными в теореме свойствами. $\square$

§ 62. ПРЕДЕЛ ПО ФИЛЬТРУ

При изучении курса анализа нам встретились два понятия предела: предел функции, частным случаем которого является предел последовательности, и предел интегральных сумм. Оказывается, что существует более общее понятие предела, называемое пределом по фильтру, которое содержит в себе оба указанные понятия предела как частные случаи. Существование такого понятия доставляет, безусловно, эстетическое удовлетворение, поэтому в настоящем параграфе будет дано его определение. Однако для изучения математического анализа введение этого понятия не дает по существу никаких преимуществ, чем и объясняется, что оно помещено в конце курса.

62.1. ТОПОЛОГИЧЕСКИЕ ПРОСТРАНСТВА

Определение 1. *Пусть X — некоторое множество и в нем задана система $\Omega = \{G\}$ подмножеств, удовлетворяющих следующим условиям:*

1°. *Пересечение конечного числа множеств системы Ω принадлежит этой системе.*

2°. *Объединение любой совокупности множеств системы Ω принадлежит этой системе.*

3°. $X \in \Omega$, $\varnothing \in \Omega$.

Тогда множество X называется топологическим пространством, система Ω — его топологией, а множества системы Ω — его открытыми подмножествами.

Для любой точки $x \in X$ каждое содержащее ее множество $G \in \Omega$ называется ее окрестностью.

*Если у любых двух точек топологического пространства существуют непересекающиеся окрестности, то пространство называется хаусдорфовым *).*

Примером хаусдорфова топологического пространства является всякое метрическое пространство, так как его открытые множества образуют систему, удовлетворяющую условиям 1°, 2°, 3° определения 1 (см. п. 57.1). Существуют и так называемые неметризуемые топологические пространства (см. об этом в книге П. С. Александров «Введение в теорию множеств и общую топологию». М., 1977).

Для любой точки $x \in X$ всякая ее окрестность заведомо не является пустым множеством, так как она содержит по крайней мере один элемент — саму точку x.

Определение 2. *Всякая подсистема $\mathfrak{B}$ системы Ω открытых множеств топологического пространства называется базой топо-*

*) Ф. Хаусдорф (1868—1942) — немецкий математик.

логии этого пространства, если любое непустое открытое множество пространства (т. е. непустое множество из системы Ω) является объединением некоторой совокупности множеств из $\mathfrak{B}$.

Так, в метрическом пространстве базой топологии является множество $\mathfrak{B}$ всех ε-окрестностей всех точек этого пространства. Действительно, каково бы ни было непустое открытое множество G данного метрического пространства, для каждой его точки $x \in G$ существует такое $\varepsilon > 0$, что ее ε-окрестность содержится в G: $U(x, \varepsilon) \subset G$. Выберем и зафиксируем для каждой точки $x \in G$ одну из таких окрестностей, тогда множество G очевидно будет являться их объединением:

$$G = \bigcup_{x \in G} U(x, \varepsilon).$$

Упражнение 1. Доказать, что в любом метрическом пространстве множество всех ε-окрестностей с рациональным ε всех точек этого пространства образует его базу топологии.

Топологию можно задавать с помощью базы топологии. Именно, если $\mathfrak{B} = \{A\}$ — база топологии Ω пространства X, то согласно определению 2 Ω является системой всех подмножеств пространства X, каждое из которых либо является объединением некоторой совокупности множеств из $\mathfrak{B}$, либо пусто.

Определение 3. *Система $\mathfrak{B}(x)$ окрестностей точки x топологического пространства X называется локальной базой топологии в этой точке, если какова бы ни была окрестность V точки x в пространстве X, то существует такая окрестность $U \in \mathfrak{B}(x)$, что*

$$U \subset V.$$

Очевидно, что совокупность всех окрестностей данной точки образует ее локальную базу топологии. Для любой точки метрического пространства ее локальную базу топологии образуют также, например, все ее ε-окрестности радиусов $\varepsilon = \frac{1}{n}$, $n = 1, 2, \ldots$

Объединение локальных баз топологии во всех точках образует базу топологии всего пространства, ибо каждое непустое открытое множество можно представить, как объединение входящих в него окрестностей его точек, где указанные окрестности берутся из рассматриваемых локальных баз топологии. Тем самым топологию во множестве можно задавать, определяя локальные базы топологии в каждой из его точек.

С помощью понятия окрестности для топологических пространств дословно так же, как для метрических (см. п. 57.1 и п. 18.2) вводятся понятия точек прикосновения, предельных и изолированных, а также понятие замкнутого множества.

62.2. ФИЛЬТРЫ

В дальнейшем через $\mathfrak{P}(X)$ будем обозначать множество всех подмножеств множества X.

Определение 4. *Пусть X — непустое множество. Множество $\mathfrak{F} \subset \mathfrak{P}(X)$ называется фильтром (или, подробнее, фильтром на множестве X), если:*

1°. *Для любых $A' \in \mathfrak{F}$ и $A'' \in \mathfrak{F}$ существует такое $A \in \mathfrak{F}$, что*

$$A \subset A' \cap A''.$$

2°. $\emptyset \notin \mathfrak{F}$, $\mathfrak{F} \neq \emptyset$.

Из свойств 1° и 2° вытекает, что пересечение любого конечного числа множеств, принадлежащих фильтру, непусто.

Примеры. 1. Пусть $X \neq \emptyset$, $X \supset A_0 \neq \emptyset$. Тогда множество $\mathfrak{F} = \{A\colon A_0 \subset A \in \mathfrak{P}(X)\}$ является фильтром на X. Действительно, очевидно, что $A_0 \in \mathfrak{F}$, а если $A' \in \mathfrak{F}$ и $A'' \in \mathfrak{F}$, то $A' \cap A'' \supset A_0 \neq \emptyset$, т. е. оба условия 1° и 2° определения 4 выполнены.

2. Пусть $x \in X$. Тогда множество $\mathfrak{F} = \{A\colon x \in A \in \mathfrak{P}(X)\}$ есть фильтр на X. Этот фильтр является частным случаем фильтра, рассмотренного в предыдущем примере, когда множество A_0 состоит из одной точки x.

3. Пусть $X = N$ — множество натуральных чисел и

$$A_n = \{m\colon m \in N,\ m > n\}, \quad n \in \boldsymbol{N}. \qquad (62.1)$$

Тогда множество всех A_n образует фильтр, обозначаемый $F_N = \{A_n\}$ и называемый *натуральным фильтром*.

Проверим, что F_N — фильтр. Действительно, $\boldsymbol{N} \in F_N$, и следовательно $F_N \neq \emptyset$, все $A_n \neq \emptyset$, а если $m < n$, то $A_n \cap A_m = A_n \in F_N$.

4. Пусть снова $X = \boldsymbol{N}$. Система подмножеств $\mathfrak{F}_N$ множества $\boldsymbol{N}$, каждое из которых является дополнением к конечному подмножеству множества $\boldsymbol{N}$ также образует фильтр на $\boldsymbol{N}$, называемый *фильтром Фреше* и содержащий в себе натуральный фильтр F_N.

Покажем, что $\mathfrak{F}_N$ действительно фильтр. Если $A \in \mathfrak{F}_N$ и $B \in \mathfrak{F}_N$, то обозначим через $n \in N$ наибольшее из чисел, входящих в множество $(N \setminus A) \cup (N \setminus B)$. Такое число существует, так как указанное множество в силу определения $\mathfrak{F}_N$ состоит лишь из конечного множества чисел. Тогда множество $A_n \in F_N$ (см. (62.1)) содержится в $A \cap B$. Далее, поскольку множество натуральных чисел N счетно, а $N \setminus A$, где $A \in \mathfrak{F}_N$, по определению множества $\mathfrak{F}_N$ конечно, то $A \neq \emptyset$. Наконец, $\boldsymbol{N} \in \mathfrak{F}_N$ и, следовательно, $\mathfrak{F}_N \neq \emptyset$. Таким образом $\mathfrak{F}_N$ — фильтр.

5. Пусть X — топологическое пространство и $x \in X$. Локальная база топологии $\mathfrak{B}(x)$ образует фильтр. Действительно, прежде всего, очевидно, что для каждой окрестности $U \in \mathfrak{B}(x)$ имеем $x \in U$ и потому $U \neq \emptyset$. Далее, для любых $U \in \mathfrak{B}(x)$ и $V \in \mathfrak{B}(x)$ пересечение $U \cap V$ является открытым множеством, содержащим точку x, поэтому по определению локальной базы топологии существует такая окрестность $W \in \mathfrak{B}(x)$, что $W \subset U \cap V$.

6. Пусть X — топологическое пространство, x — предельная точка пространства X, $\mathfrak{B}(x)$ — локальная база топологии в этой точке и $\mathring{\mathfrak{B}}(x)$ множество всех «проколотых окрестностей» этой локальной базы топологии, т. е. $\mathring{\mathfrak{B}}(x)$ состоит из множеств

$$\mathring{U}(x) \overset{\text{def}}{=} U(x) \setminus \{x\}, \quad U(x) \in \mathfrak{B}(x).$$

Тогда $\mathring{\mathfrak{B}}(x)$ образует фильтр. В самом деле, если $\mathring{U} \in \mathring{\mathfrak{B}}(x)$, то поскольку точка x является предельной для пространства X, то существует точка $y \in \mathring{U}$ и, следовательно, $\mathring{U} \neq \varnothing$. Далее, для любых $\mathring{U} \in \mathring{\mathfrak{B}}(x)$ и $\mathring{V} \in \mathring{\mathfrak{B}}(x)$ имеем согласно их определению: $\mathring{U} = U \setminus \{x\}$, $\mathring{V} = V \setminus \{x\}$, $U \in \mathfrak{B}(x)$, $V \in \mathfrak{B}(x)$. Пересечение $U \cap V$ является окрестностью точки x, поэтому существует такая окрестность $W \in \mathfrak{B}(x)$, что $W \subset U \cap V$ и потому $\mathring{W} = W \setminus \{x\} \subset \mathring{U} \cap \mathring{V}$. Итак, $\mathring{\mathfrak{B}}(x)$ действительно фильтр.

Определение 5. *Фильтр $\mathfrak{F}_1 = \{A\}$ на множестве X называется фильтром, который сильнее фильтра $\mathfrak{F}_2 = \{B\}$ на том же множестве, если для любого множества $B \in \mathfrak{F}_2$ существует такое $A \in \mathfrak{F}_1$, что $A \subset B$,*

Определение 6. *Если фильтр $\mathfrak{F}_1$ сильнее фильтра $\mathfrak{F}_2$, а $\mathfrak{F}_2$ сильнее $\mathfrak{F}_1$, то фильтры $\mathfrak{F}_1$ и $\mathfrak{F}_2$ называются эквивалентными.*

Пример 7. Пусть $\mathfrak{B}(x)$ — локальная база топологии точки x метрического пространства, состоящая из всех ее ε-окрестностей, а $\mathfrak{B}_0(x)$ — ее локальная база топологии, содержащая только окрестности радиуса $\varepsilon = \frac{1}{n}$, $n = 1, 2, \ldots$. Фильтры $\mathfrak{B}(x)$ и $\mathfrak{B}_0(x)$ эквивалентны.

Упражнение 2. Доказать, что фильтры в примерах 3 и 4 эквивалентны.

Определение 7. *Фильтр $\mathfrak{F}_1$ называется подфильтром фильтра $\mathfrak{F}_2$, если каждый элемент фильтра $\mathfrak{F}_1$ является и элементом фильтра $\mathfrak{F}_2$, т. е. если $\mathfrak{F}_1 \subset \mathfrak{F}_2$.*

Очевидно, что фильтр сильнее всякого своего подфильтра.

Определение 8. *Каждый подфильтр фильтра, эквивалентный самому фильтру, называется его базой.*

Например, в примере 7 фильтр $\mathfrak{B}_0(x)$ является базой фильтра $\mathfrak{B}(x)$, а натуральный фильтр F_N — базой фильтра Фреше $\mathfrak{F}_N$, построенного в примере 4.

Иногда бывает удобно рассматривать фильтры, удовлетворяющие еще одному дополнительному условию.

Определение 9. *Фильтр $\mathfrak{F}$ на множестве X называется полным, если из условий*

$$A \in \mathfrak{F}, \quad B \in \mathfrak{P}(X) \quad \text{и} \quad A \subset B$$

следует, что

$$B \in \mathfrak{F}.$$

В выше рассмотренных примерах 1, 2 и 4 фильтры являлись полными. Например, в примере 4 (фильтр Фреше) это вытекает из того, что если $A \in \mathfrak{F}_N$ и, следовательно, его дополнение в множестве натуральных чисел N конечно, то любое подмножество натуральных чисел B, которое содержит A, также имеет конечное дополнение в N, ибо, если $A \subset B \subset N$, то $N \setminus B \subset N \setminus A$.

Фильтры же, рассмотренные в примерах 3, 5 и 6, уже не являются полными. В примере 3 натуральный фильтр F_N не является полным, поскольку не всякое подмножество A множества натуральных чисел, содержащее множество вида A_n (см. (62.1)), само имеет такой вид, т. е. принадлежит натуральному фильтру F_N. Фильтры, рассмотренные в примерах 5 и 6, не являются полными, так как не всякое множество, содержащее открытое множество, является обязательно само открытым.

Иногда в математической литературе полный фильтр называется просто фильтром, а фильтр в смысле определения 4 базисом (или базой) фильтра. Это оправдано тем, что справедливо следующее утверждение.

Лемма 1. *Всякий фильтр является базой некоторого полного фильтра.*

Доказательство. Пусть $\mathfrak{F} = \{A\}$ — фильтр на множестве X. Определим множество $\mathfrak{G}$, как множество всех таких подмножеств B множества X, что каждое из них имеет в качестве своего подмножества некоторый элемент фильтра $\mathfrak{F}$. Короче, $B \in \mathfrak{G}$ тогда и только тогда, когда существует такое $A \subset \mathfrak{F}$, что $A \subset B$. Покажем, что $\mathfrak{G}$ является полным фильтром, а фильтр $\mathfrak{F}$ — его базой.

Если $B' \in \mathfrak{G}$, $B'' \in \mathfrak{G}$, то существуют такие $A' \in \mathfrak{F}$ и $A'' \in \mathfrak{F}$, что $A' \subset B'$, $A'' \subset B''$. Поскольку $\mathfrak{F}$ — фильтр, то найдется такое $A \in \mathfrak{F}$, что $A \in A' \cap A''$. Заметив, что $A' \cap A'' \subset B' \cap B''$, получим $A \subset B' \cap B''$ и, следовательно, согласно определению $\mathfrak{G}$ множество $B' \cap B''$ является его элементом: $B' \cap B'' \in \mathfrak{G}$. Тем самым выполняется условие 1^0 определения 4.

Если бы $\varnothing \in \mathfrak{G}$, то снова, согласно определению $\mathfrak{G}$, нашлось бы такое $A \in \mathfrak{F}$, что $A \subset \varnothing$, но тогда $A = \varnothing$, т. е. пустое множество оказалось бы элементом $\mathfrak{F}$, что противоречило бы тому, что $\mathfrak{F}$ — фильтр. Следовательно, $\varnothing \notin \mathfrak{G}$. Кроме того, так как $A \subset A$, то каждое множество $A \in \mathfrak{F}$ является и элементом $\mathfrak{G}$, т. е. $\mathfrak{F} \subset \mathfrak{G}$, а поскольку $\mathfrak{F}$, как всякий фильтр, не пуст: $\mathfrak{F} \neq \varnothing$, то не пусто и множество $\mathfrak{G}$: $\mathfrak{G} \neq \varnothing$. Таким образом $\mathfrak{G}$ удовлетворяет всем условиям определения 4, т. е. является фильтром. Его полнота тоже сразу вытекает из его определения. В самом деле, если $B \in \mathfrak{G}$, то существует такое $A \in \mathfrak{F}$, что $A \subset B$. Поэтому для каждого множества B', такого, что $B \subset B' \subset X$, также справедливо включение $A \subset B'$, которое и означает, что $B' \in \mathfrak{G}$.

Наконец, $\mathfrak{F}$ является базой полного фильтра $\mathfrak{G}$. Действительно, с одной стороны, как было показано, $\mathfrak{F} \subset \mathfrak{G}$, т. е. фильтр $\mathfrak{F}$

является подфильтром $\mathfrak{G}$; а выше отмечалось, что всякий фильтр сильнее любого своего подфильтра. С другой стороны, определение фильтра $\mathfrak{G}$ как раз и означает, что фильтр $\mathfrak{F}$ сильнее фильтра $\mathfrak{G}$: каково бы ни было $B \in \mathfrak{G}$ существует такое $A \in \mathfrak{F}$, что $A \subset B$ (см. определение 5). Итак, фильтры $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{G}$ эквивалентны. $\square$

Лемма 2. *Пусть $\mathfrak{F}_1$ — фильтр на множестве X_1, $\mathfrak{F}_2$ — фильтр на множестве X_2 и*

$$\mathfrak{F} \overset{\text{def}}{=} \{C\colon\ C = A \times B,\ A \in \mathfrak{F}_1,\ B \in \mathfrak{F}_2\};. \tag{62.2}$$

тогда $\mathfrak{F}$ является фильтром на произведении $X_1 \times X_2$ множеств X_1 и X_2.

Фильтр $\mathfrak{F}$, определенный равенством (62.2), называется *произведением фильтров* $\mathfrak{F}_1$ и $\mathfrak{F}_2$. Если $\mathfrak{F}$ является произведением фильтров $\mathfrak{F}_1$ и $\mathfrak{F}_2$, то пишется $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}_1 \times \mathfrak{F}_2$.

Доказательство. Пусть $C_1 \in \mathfrak{F}_1$ и $C_2 \in \mathfrak{F}_2$, тогда, согласно определению (62.3) существуют такие $A_1 \in \mathfrak{F}_1$, $A_2 \in \mathfrak{F}_1$ и $B_1 \in \mathfrak{F}_2$, $B_2 \in \mathfrak{F}_2$, что $C_1 = A_1 \times B_1$, а $C_2 = A_2 \times B_2$. Поскольку $\mathfrak{F}_1$ и $\mathfrak{F}_2$ — фильтры, то найдутся такие $A \in \mathfrak{F}_1$ и $B \in \mathfrak{F}_2$, что

$$A \subset A_1 \cap A_2,\quad B \subset B_1 \cap B_2. \tag{62.3}$$

В силу того же определения (62.2): $A \times B \in \mathfrak{F}$, причем из (62.3) следует, что

$$A \times B \subset (A_1 \times B_1) \cap (A_2 \times B_2),$$

ибо, если $(x, y) \in A \times B$, то $x \in A$, $y \in B$. Следовательно в силу (62.3) $x \in A_1 \cap A_2$, $y \in B_1 \cap B_2$, поэтому $(x, y) \in A_1 \times B_1$ и $(x, y) \in$ $\in A_2 \times B_2$, т. е.

$$(x, y) \in (A_1 \times B_1) \cap (A_2 \times B_2).$$

Наконец, каждое $C = A \times B \neq \varnothing$, $A \in \mathfrak{F}_1$, $B \in \mathfrak{F}_2$, ибо в силу определения фильтра $A \neq \varnothing$, $B \neq \varnothing$. Из того, что $\mathfrak{F}_1 \neq \varnothing$ и $\mathfrak{F}_2 \neq \varnothing$, следует, что и $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}_1 \times \mathfrak{F}_2 \neq \varnothing$.

Таким образом $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}_1 \times \mathfrak{F}_2$ удовлетворяет определению фильтра. $\square$

Лемма 3. *Пусть X и Y — некоторые множества, $f\colon X \to Y$ — отображение X в Y и $\mathfrak{F} = \{A\}$ — фильтр на множестве X. Тогда совокупность всех образов $f(A)$ множеств из фильтра $\mathfrak{F}$ является фильтром на множестве Y.*

Фильтр $\{f(A)\}$, $A \in \mathfrak{F}$, называется *образом фильтра $\mathfrak{F}$ при отображении f* и обозначается через

$$f(\mathfrak{F}) = \{f(A)\},\quad A \in \mathfrak{F}. \tag{62.4}$$

Докажем, что $f(\mathfrak{F})$ действительно является фильтром. Пусть $f(A) \in f(\mathfrak{F})$, $f(B) \in f(\mathfrak{F})$, $A \in \mathfrak{F}$, $B \in \mathfrak{F}$. Тогда существует такой элемент C фильтра $\mathfrak{F}\colon C \in \mathfrak{F}$, что $C \subset A \cap B$. Поскольку $f(C) \subset$ $\subset f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$, и по определению системы $f(\mathfrak{F})$ имеем $f(C) \in f(\mathfrak{F})$, то первое условие определения фильтра (см. определение 4) выполнено. Второе условие также выполнено, поскольку $f(\mathfrak{F})$ состоит только из элементов вида $f(A)$, где $A \in \mathfrak{F}$. Следовательно, $f(A) \neq \varnothing$, поскольку $A \neq \varnothing$. Наконец, из того, что $\mathfrak{F} \neq \varnothing$, следует, что и $f(\mathfrak{F}) \neq \varnothing$. $\square$

62.3. ПРЕДЕЛ ФИЛЬТРА

Определение 10. *Пусть X — топологическое пространство, $x \in X$ и $\mathfrak{F}$ — фильтр на X. Точка x называется пределом фильтра $\mathfrak{F}$, или его предельной точкой, если фильтр $\mathfrak{F}$ сильнее фильтра $\mathfrak{B}(x)$, являющегося локальной базой топологии в этой точке.*

Если точка x является пределом фильтра $\mathfrak{F}$, то пишется

$$x = \lim \mathfrak{F}.$$

Примеры. 1. Пусть $X = N$ — множество натуральных чисел, рассматриваемое, как обычно, с дискретной топологией: каждая точка $n \in N$ считается открытым множеством (иначе говоря, каждая точка является изолированной точкой), тогда натуральный фильтр F_N (см. пример 3 в п. 62.2) не имеет предела в N.

Действительно, никакое число $n \in N$ не является пределом фильтра F_N, ибо у любого числа $n_0 \in N$ существует локальная база топологии, состоящая только из этого числа n_0 и не существует $A \in F_N$, содержащегося в одноточечном множестве $\{n_0\}$, поскольку любое $A \in F_N$ содержит бесконечно много элементов. Таким образом, фильтр F_N не сильнее локальной базы топологии любого числа $n_0 \in N$.

2. Пусть $X = N \cup \{+\infty\}$, т. е. множество X получено добавлением к множеству натуральных чисел N «бесконечно удаленной точки» $+\infty$, причем локальная база топологии $\mathfrak{B}(+\infty)$ состоит из всевозможных множеств A_n (см. (61.1)), а локальные базы $\mathfrak{B}(n)$, $n \in N$, по-прежнему из одной точки n. База топологии в X определяется как объединение локальных баз всех его точек.

В пространстве $N \cup \{+\infty\}$ натуральный фильтр F_N имеет своим пределом $+\infty$. Действительно, для любой окрестности $A_n \in \mathfrak{B}(+\infty)$ в качестве элемента $A \in F_N$ такого, что $A \subset A_n$ (см. определение 10), можно взять само A_n, ибо $A_n \in F_N$.

Задача 44. *Доказать, что для того чтобы любой фильтр топологического пространства имел не более одного предела, необходимо и достаточно, чтобы пространство было хаусдорфовым.*

Теорема 1. *Для того чтобы точка x являлась пределом фильтра $\mathfrak{F}$ топологического пространства X, необходимо, чтобы эта точка являлась пределом каждой его базы, и достаточно, чтобы она являлась пределом по крайней мере одной его базы.*

Доказательство необходимости. Пусть подфильтр $\mathfrak{F}_0$ является базой фильтра $\mathfrak{F}$ пространства X и

$$x = \lim \mathfrak{F},$$

т. е. фильтр $\mathfrak{F}$ сильнее локальной базы топологии $\mathfrak{B}(x)$ в точке x. Это означает, что для любой окрестности $U \in \mathfrak{B}(x)$ существует такое $A \in \mathfrak{F}$, что $A \subset U$. Поскольку $\mathfrak{F}_0$ является базой фильтра $\mathfrak{F}$, то для указанного $A \in \mathfrak{F}$ найдется такое $B \in \mathfrak{F}_0$, что $B \subset A$ и, следовательно, $B \subset U$, т. е. подфильтр $\mathfrak{F}_0$ также сильнее локальной базы топологии $\mathfrak{B}(x)$, и потому $x = \lim \mathfrak{F}_0$.

Доказательство достаточности. Пусть подфильтр $\mathfrak{F}_0$ фильтра $\mathfrak{F}$ является его базой и $x = \lim \mathfrak{F}_0$, т. е. $\mathfrak{F}_0$ сильнее локальной базы топологии $\mathfrak{B}(x)$, тогда сам фильтр $\mathfrak{F}$ тем более сильнее $\mathfrak{B}(x)$, ибо каждый элемент подфильтра является и элементом фильтра. Следовательно $x = \lim \mathfrak{F}$. $\square$

62.4. ПРЕДЕЛ ОТОБРАЖЕНИЯ ПО ФИЛЬТРУ

Общее понятие предела дается следующим определением.

Определение 11. *Пусть X — некоторое множество, Y — топологическое пространство, f: $X \to Y$ — отображение X в Y, $\mathfrak{F}$ — фильтр на X.*

Точка $b \in Y$ называется пределом отображения f по фильтру $\mathfrak{F}$ и пишется

$$\lim_{\mathfrak{F}} f(x) = b,$$

если фильтр $f(\mathfrak{F})$ имеет своим пределом в пространстве Y точку b.

Таким образом

$$\lim_{\mathfrak{F}} f(x) \overset{\text{def}}{=} \lim f(\mathfrak{F}). \tag{62.5}$$

Примеры. 1. Пусть $X = N$ — множество натуральных чисел, Y — топологическое пространство, $f: N \to Y$, $y_n \overset{\text{def}}{=} f(n)$, $n \in N$, и пусть F_N — натуральный фильтр, построенный в примере 3, п. 62.2, т. е. F_N состоит из множеств (62.1). Тогда предел отображения f по фильтру F_N совпадает с обычным пределом последовательности $\{y_n\}$ в Y. Действительно, условие $\lim_{F_N} f(n) = b$ равносильно, согласно (62.5), условию $\lim f(F_N) = b$, где $f(F_N) = \{f(A_n)\}$, $f(A_n) = \{y_m : m > n\}$. Равенство предела фильтра $f(F_N)$ точке b означает, что для любой окрестности $U \in \mathfrak{B}(b)$, где $\mathfrak{B}(b)$ — локальная база топологии в точке b, существует содержащийся в U элемент $f(A_{n_0})$ фильтра $f(F_N): f(A_{n_0}) \subset U$. Поскольку при $n > n_0$ выполняется включение $n \in A_{n_0}$, а следовательно, и включение $y_n = f(n) \in f(A_{n_0})$, то при $n > n_0$ имеет место включение $y_n \in U$. Это и означает, что $\lim\limits_{n \to \infty} y_n = b$.

2. Пусть $X = N \times N$, F_N — натуральный фильтр, $\mathfrak{F} = F_N \times F_N$ (см. (62.2)), Y — топологическое пространство, $f: N \times N \to Y$, $y_{mn} \overset{\text{def}}{=} f(m, n)$, $m \in N$, $n \in N$; тогда предел $\lim_{\mathfrak{F}} f(m, n)$ совпадает с обычным пределом двойной последовательности $\{y_{mn}\}$: точка b называется пределом $\lim\limits_{(m, n) \to \infty} y_{mn}$ последовательности $\{y_{mn}\}$, если

для любой окрестности U точки b существуют такие m_0 и n_0, что при $m > n_0$ и $n > n_0$ выполняется включение $y_{mn} \in U$. Таким образом,

$$\lim_{\mathfrak{F}} f(m, n) = \lim_{(m, n) \to \infty} y_{mn}.$$

3. Пусть E — измеримое по Жордану множество в R^n, τ — какое-либо его разбиение: $\tau = \{E_i\}_{i=1}^{i=k}$, $\xi_i \in E_i$, $i = 1, 2, \ldots, k$. Пусть элементами множества X являются в свою очередь всевозможные множества вида

$$x = \{\tau, \xi_1, \ldots, \xi_k\}. \tag{62.6}$$

Для любого $\eta > 0$ обозначим через A_η подмножество множества X, состоящее из всех таких элементов x, у которых мелкости δ_τ, входящих в них разбиений τ меньше η, т. е. $\delta_\tau < \eta$.

Система $\mathfrak{F} = \{A_\eta\}$ является фильтром на X.

Всякая действительная функция f: $E \to \boldsymbol{R}$ порождает отображение φ_f: $X \to \boldsymbol{R}$ по формуле

$$\varphi_f(x) \overset{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^{k} f(\xi_i)\,\mu E_i, \quad x = \{\tau, \xi_1, \ldots, \xi_k\}.$$

Таким образом, $\varphi_f(x)$ является значением соответствующей интегральной суммы Римана функции f.

Предел отображения φ_f: $X \to \boldsymbol{R}$ по фильтру $\mathfrak{F} = \{A_\eta\}$ совпадает с обычным пределом интегральных сумм Римана функции f при условии, что мелкости рассматриваемых разбиений стремятся к нулю:

$$\lim_{\mathfrak{F}} \varphi_f(x) = \lim_{\delta_\tau \to 0} \sum_{i=1}^{k} f(\xi_i)\,\mu E_i.$$

4. Пусть X и Y топологические пространства, f: $X \to Y$, $a \in X$ и $\mathfrak{F}$ — такой фильтр на X, что $\lim \mathfrak{F} = a$ (т. е. фильтр $\mathfrak{F}$ сильнее некоторой локальной базы топологии $\mathfrak{B}(a)$ в точке a).

Предел $\lim_{\mathfrak{F}} f(x)$ в данном случае называется *пределом отображения f по фильтру $\mathfrak{F}$ в точке a.*

При соответствующих выборах фильтров $\mathfrak{F}$ будут получаться в частности пределы в данной точке по различным множествам. Например, если фильтр $\mathfrak{F}$ состоит из окрестностей некоторой локальной базы топологии $\mathfrak{B}(a)$ точки a, то существование предела $\lim_{\mathfrak{F}} f(x)$ в точке a по такому фильтру означает непрерывность отображения f в точке a, причем $\lim_{\mathfrak{F}} f(x) = \lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$.

Если точка a является предельной точкой множества X, а фильтр $\mathfrak{F}$ состоит из проколотых окрестностей некоторой локальной базы топологии в этой точке (см. пример 6 в п. 62.2), то предел $\lim_{\mathfrak{F}} f(x)$ совпадает с обычным пределом $\lim\limits_{x \to a} f(x)$.

Заметим, что раньше символ $x \to a$ не имел для нас самостоятельного смысла: было определено лишь все обозначение $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ в целом. Теперь, в конце курса мы видим, что символ $x \to a$ можно рассматривать как обозначение фильтра $\mathring{\mathfrak{B}}(a)$ или фильтра $\mathfrak{B}(a)$, по которому берется предел отображения (в первом случае получится обычное определение предела отображения в точке a, во втором — определение его непрерывности в этой точке).

Итак, действительно все встретившиеся нам раньше понятия предела являются частным случаем предела отображения по фильтру.

ИМЕННОЙ УКАЗАТЕЛЬ

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

ОГЛАВЛЕНИЕ

Глава пятая

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ (ПРОДОЛЖЕНИЕ)

Глава шестая
ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ

Глава седьмая

РЯДЫ ФУРЬЕ. ИНТЕГРАЛ ФУРЬЕ

ДОБАВЛЕНИЕ