

Челябинский государственный университет

В.Е. Неуважаев

**МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ
ТУРБУЛЕНТНОГО ПЕРЕМЕШИВАНИЯ**

(учебное пособие для студентов старших курсов ЧГУ)

Челябинск • 2000

Вместо введения

Что нужно знать, чтобы спецкурс был доступен и легко усваивался? Прежде всего — уравнения газовой динамики и их простейшие применения: для описания движения слоистых систем, течений с ударными волнами и контактными границами. Кроме того, из общего курса математической физики следует вспомнить свойства уравнения диффузии как с постоянным коэффициентом диффузии, так и зависящим от решения. Для облегчения прочтения некоторые из этих понятий с соответствующими ссылками на дополнительную литературу даны в Приложении.

Предлагаемый спецкурс с 1992 года читается группе прикладных математиков ЧГУ.

§ 1 Предмет спецкурса

Уровень цивилизации в сильной степени зависит от количества энергии, приходящегося на душу населения. Естественные источники: уголь, нефть, газ — ограничены. Проблема получения новых источников энергии одна из главных, стоящих перед человечеством. Один из путей получения новых источников энергии — лазерный термоядерный синтез. Сферическая мишень с DT-топливом в центре сжимается до высоких плотностей и температур, так что возникает термоядерная реакция с выделением энергии. Если на этом принципе удастся построить электростанцию, то источником DT-топлива может послужить вода, запасы которой практически неисчерпаемы. Поэтому лучшие умы человечества заняты этой проблемой несколько последних десятилетий.

Однако на пути получения высоких сжатий мишени (в 1000 и более раз) возникает много трудностей. Одна из них — неустойчивость на границах раздела, которая приводит к разрушению контактных границ и их турбулентному перемешиванию.

Подобного рода задачи также возникают в технических устройствах, в которых присутствуют границы раздела, ускоряющиеся или замедляющиеся. Окружающая нас среда: атмосфера и океан также порождает неустойчивые течения. Подавляющее большинство реально встречающихся в природе и технике течений являются турбулентными. В этом случае скорость, давление, температура и другие гидродинамические величины беспорядочно пульсируют, изменяясь в пространстве и во времени. Ламинарные течения носят спокойный, плавный характер и представляют собой довольно редкое исключение. Турбулентные течения, в отличие от ламинарных, обладают гораздо большей способностью к передаче количества движения, турбулентная среда имеет большую эффективную вязкость. Турбулентные потоки обладают повышенной способностью к передаче тепла и пассивных примесей, к распространению химических реакций.

Основная цель настоящего спецкурса — изучение этого явления, построение теории и на ее основе — количественное определение характеристик области турбулентного перемешивания: ширины области перемешивания и распределения плотности каждого вещества в пространстве.

Методы изучения гидродинамической неустойчивости и турбулентного перемешивания: экспериментальные, математические (численное моделирование на ЭВМ) и теоретические. В спецкурсе речь пойдет в основном о теоретическом и математическом исследованиях проблемы, хотя также будет рассказано об основных экспериментальных установках и результатах, полученных на них.

§ 2 Общие представления о неустойчивостях и содержание по главам

Общее понятие о неустойчивостях Кельвина–Гельмгольца, Релея–Тейлора, Рихтмайера–Мешкова. Число Рейнольдса.

Если сферическую мишень облучать пучком лазерного света равномерно по поверхности со всех сторон, то один из режимов сжатия может быть качественно изображен на рис.1 с помощью (r, t) -диаграммы. На рисунке обозначены r_1 и r_2 — границы раздела разных веществ, r_3 — фронт тепловой волны, перемещающийся по массе вещества (в отличие от границ r_1 и r_2 , на которых поток массы отсутствует).

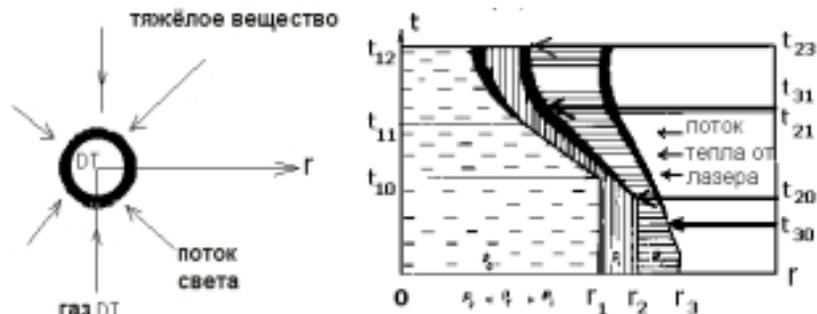


Рис.1. Качественная картина сжатия мишени под действием световой волны

В интервале времени $[t_{10}, t_{11}]$ граница r_1 движется после выхода на нее ударной волны с постоянной скоростью. Это приводит к неустойчивости Рихтмайера–Мешкова — малые возмущения растут со временем, а случайные начальные возмущения приводят к турбулентному перемешиванию.

$[t_{11}, t_{12}]$ – интервал времени, в котором граница Γ_1 движется замедленно. Так как $\rho_0 < \rho_1$, то здесь возникает неустойчивость Релея–Тейлора, приводящая к разрушению границы – сплошная закрапка. $[t_{20}, t_{21}]$ – интервал, в котором граница Γ_2 движется ускоренно, здесь $\rho_1 > \rho_2$, поэтому имеет место неустойчивость Релея–Тейлора, и граница также разрушается. На этой границе на стадии замедления $[t_{21}, t_{22}]$ происходит уменьшение зоны турбулентного перемешивания, связанное с механизмом сепарации. В интервале времени $[t_{30}, t_{31}]$ фронт тепловой волны, называемый фронтом испарения, движется ускоренно и на нем также возможно развитие перемешивания.

Если ударная волна выходит на контактную поверхность не одновременно, то это приводит к появлению тангенциальной составляющей скорости, которая будет разрывной, что приведет к скольжению веществ вдоль контактной границы. Такая неустойчивость, называемая неустойчивостью Кельвина–Гельмгольца, также является источником развития малых возмущений и приводит к турбулентному перемешиванию веществ.

Попытки описания возникновения и развития турбулентности имеют историю и подробно изложены в литературе. В основном, это относится к сдвиговой турбулентности, появляющейся в результате скольжения слоев. Известны сложные модели, содержащие десятки параметров и позволяющие описывать тонкие экспериментальные результаты. Однако из-за своей громоздкости они сложны в реализации. Простые модели, имеющие всего несколько параметров, ограничены в применении. В реальных ситуациях приходится делать выбор между общностью и сложностью, с одной стороны, и простотой и реализуемостью, с другой.

Турбулентность, зарождающаяся на границах раздела веществ, находящихся в поле силы тяжести, имеет ряд специфических особенностей. Ее теоретическое изучение было начато работами Беленького С.З. и Фрадкина Е.С. [1,2]. Ими была предложена приближенная полуэмпирическая модель диффузного типа, содержащая один параметр. Она была доведена до простой формулы

$$L = \alpha g \left(\ln \frac{\rho_1}{\rho_2} \right) t^2,$$

где ρ_1 и ρ_2 – плотности веществ по разные стороны границы, g – ускорение границы, α – эмпирическая постоянная. Эта формула позволила

дать количественную оценку области шириной L , охваченной турбулентным перемешиванием. Однако обратное влияние турбулентного перемешивания на основное движение в этом приближении не учитывалось.

Учет турбулентного перемешивания в газодинамических программах потребовало существенного развития и обобщения модели. Эти работы развивались параллельно в РФЯЦ – ВНИИП и РФЯЦ – ВНИИЭФ. В ИЭФ от простых моделей [37, 96] перешли к более сложным, учитывающим анизотропию турбулентного перемешивания [93, 40, 41]. В ИП были применены простые модели диффузного типа.

Прежде всего была построена модель, пригодная в общем случае: в [1] рассматривалось изотермическое приближение, ограниченное условием, что температура в области турбулентного перемешивания не зависит от пространственной координаты. С этой целью здесь в §3 проведено исследование устойчивости произвольного адиабатического движения и получены условия, приводящие к неустойчивости. Также приводится значение инкремента при совместном действии гравитационной и сдвиговой неустойчивостей. В дальнейшем при определении источников турбулентности в предлагаемых моделях понятие инкремента, определяющее неустойчивые течения, играет фундаментальную роль.

В §4 даны качественные рассуждения о развитии начальных возмущений и переходу к турбулентности (п.1), а также излагается в общих чертах методология изучения турбулентных течений (пп. 2,3). Выводится уравнение баланса для плотности кинетической энергии турбулентности (п.4), имеющее в дальнейшем основное применение.

В §5 приводится простейшая модель Беленького–Фрадкина [1], пригодная для описания автомодельного течения при постоянном ускорении. Анализируются свойства модели во всем диапазоне числа Атвуда $0 \leq A \leq 1$ и излагаются ее недостатки.

В §6 содержится дальнейшее развитие диффузионной модели, основанное на получении уравнения баланса для кинетической энергии турбулентности. Эта диффузионная модель названа k (или lv) моделью. Существенным ограничением ее является присутствие в коэффициентах модели масштаба длины – ширины области перемешивания. Поэтому большее применение имеет $k\epsilon$ – модель, свободная от масштаба длины.

Для углубленного изучения модели турбулентного перемешивания предлагается приближенный подход, в котором турбулентная скорость в области перемешивания полагается не зависящей от пространственной координаты. Это упрощение позволяет построить решение задачи в аналитическом виде для произвольного закона ускорения и тем самым получить решения ряда конкретных задач. Эта симметричная модель (в ее рамках получается, что ширина зоны перемешивания в сторону легкого вещества равна ширине зоны в сторону тяжелого) позволила понять и

обработать ряд экспериментов (затухание турбулентного перемешивания, задержка перемешивания при начальном размытии границы раздела, зависимость решения от начальной шероховатости, прохождение через контактную границу замедляющейся ударной волны). Симметричная k -модель и ее свойства рассматриваются в §7. Здесь же показывается, как можно учесть несимметрию турбулентного перемешивания.

В §8 рассматриваются уравнения $k\varepsilon$ – модели, имеющей более широкое применение.

В §9 устанавливаются закономерности в развитии турбулентного перемешивания для случая перемешивания слоя конечной ширины.

В §10 излагаются результаты экспериментов, обнаруживших при смене знака ускорения явление сепарации области турбулентного перемешивания. Это свойство области турбулентности связано с гетерогенным характером перемешивания. Модель диффузионного типа дополняется новыми уравнениями, которые позволяют описать сепарацию.

В 11 параграфе описываются эксперименты по определению постоянных модели и делается их выбор. Две основные константы модели выбираются на основе двух типов экспериментов: с постоянным и выключенным ускорением. Другие эксперименты, например, по определению перемешивания тонкого слоя, служат дополнительной проверкой правильности сделанного выбора.

§ 3. Условия неустойчивости произвольного адиабатического движения

Прежде чем начать изложение этого параграфа, обратимся к Приложению 1.

1. Вывод дисперсионного соотношения

Турбулентные течения возникают там, где нарушены условия устойчивости движения к малым возмущениям. Уравнения, описывающие полуэмпирические теории, содержат члены, порождающие турбулентность. Они получаются путем осреднения исходных газодинамических уравнений. Условия генерации турбулентности могут быть получены и как результат исследования устойчивости газодинамического движения.

В настоящем параграфе устанавливаются эти условия. Фрадким Е.С. [2] они были получены в предположении изотермичности. В [3] они обобщены на случай достаточно произвольного адиабатического движения. Там же указан необходимый и достаточный признак устойчивости по отношению к бесконечно малым трехмерным возмущениям. На основе этого признака найден ряд достаточных «профильных» признаков устойчивости и неустойчивости, которые имеют вид неравенств для

величин $g, c^2, \frac{\partial \ln \rho}{\partial x}$ (g – ускорение, c – скорость звука). Здесь

ограничимся случаем постоянного ускорения и экспоненциальным распределением плотности. Тогда система линеаризованных уравнений будет иметь постоянные коэффициенты и исследование значительно упрощается. Исходные уравнения, описывающие газодинамическое течение без вязкости и теплопроводности возьмем в виде:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_k} \rho U_k = 0, \quad (3.1)$$

$$\frac{\partial \rho U_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_k} \rho U_i U_k + \frac{\partial P}{\partial x_i} = 0, \quad (3.2)$$

$$\frac{\partial s}{\partial t} + U_k \frac{\partial s}{\partial x_k} = 0, \quad F(\rho, s, P) = 0. \quad (3.3)$$

Здесь $i=1,2,3$, а по повторяющимся индексам проводится суммирование, U_1, U_2, U_3 – компоненты скорости, ρ – плотность, P – давление, s – последняя энтропия. Последним выписано уравнение состояния.

Пусть вдоль оси ox_1 на интервале $0 \leq x_1 \leq X_1$ известно решение системы уравнений (3.1–3.3):

$$U_1(x_1, t), U_2 = U_3 = 0, \rho(x_1, t), P(x_1, t), s(x_1, t).$$

В приложении 1 приводятся без вывода условия на ударной волне и контактном разрыве. Изучим поведение выписанного решения по отношению к бесконечно малым трехмерным возмущениям, которые обозначим соответственно:

$$U'_i, \rho', P', s'.$$

Все выписанные величины являются функциями времени t и пространственных переменных x_1, x_2, x_3 . Линеаризованные уравнения для возмущений будем рассматривать в движущейся системе координат:

$$x_{10} = x_1 - \int_0^t U_1 dt, \quad t_0 = t.$$

Тогда

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t_0} - U_1 \frac{\partial}{\partial x_{10}},$$

$$\frac{\partial}{\partial x_1} = \left(1 - \int_0^t \frac{\partial U_1}{\partial x_1} dt \right) \frac{\partial}{\partial x_{10}}.$$

В дальнейшем градиент $\frac{\partial U_1}{\partial x_1}$ будем считать малым и таким, что:

$$\left| \int_0^t \frac{\partial U_1}{\partial x_1} dt \right| \ll 1,$$

поэтому

$$\frac{\partial}{\partial x_1} \approx \frac{\partial}{\partial x_{10}}.$$

После подстановки возмущенного решения:

$$\begin{aligned} \tilde{U}_1 &= U_1(x_1, t) + U_1'(x_1, x_2, x_3, t); & \tilde{U}_i &= U_i'(x_1, x_2, x_3, t); & i &= 2, 3; \\ \tilde{\rho} &= \rho(x_1, t) + \rho(x_1, x_2, x_3, t); & \tilde{P} &= P(x_1, t) + P'(x_1, x_2, x_3, t); \\ \tilde{s} &= s(x_1, t) + s'(x_1, x_2, x_3, t). \end{aligned}$$

Подставив его в исходную систему (3.1)–(3.3) получим систему линеаризованных уравнений:

$$\left. \begin{aligned}
 \frac{\partial \rho'}{\partial t} + \rho \frac{\partial U'k}{\partial xk} + U'_1 \frac{\partial \rho}{\partial x_1} &= 0, \\
 \frac{\partial U'_1}{\partial t} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P'}{\partial x_1} + \frac{\rho'}{\rho^2} \frac{\partial P}{\partial x_1}, \\
 \frac{\partial U'_2}{\partial t} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P'}{\partial x_2}, \\
 \frac{\partial U'_3}{\partial t} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P'}{\partial x_2}, \\
 \frac{\partial s'}{\partial t} + U'_1 \frac{\partial s}{\partial x_1} &= 0, \\
 \rho' &= \left(\frac{\partial \rho}{\partial s} \right)_p s' + \left(\frac{\partial \rho}{\partial P} \right)_s P'.
 \end{aligned} \right\} \quad (3.4)$$

индекс 0 здесь опущен: $t = t_0$; $x_{10} = x_1$.

Необходимо отметить, что здесь опущены члены типа $\frac{\partial}{\partial x}(u' \rho')$

из-за их малости.

Решение последней системы будем искать в виде:

$$\left. \begin{aligned} U_i' &= U_i'(x_1) e^{i(\omega t + k_2 x_2 + k_3 x_3)}; \\ \rho' &= \rho'(x_1) e^{i(\omega t + k_2 x_2 + k_3 x_3)}; \\ P' &= P'(x_1) e^{i(\omega t + k_2 x_2 + k_3 x_3)}; \\ s' &= s'(x_1) e^{i(\omega t + k_2 x_2 + k_3 x_3)}, \end{aligned} \right\} \quad (3.5)$$

где k_2 и k_3 – некоторые вещественные постоянные, а ω – вообще говоря, комплексное число.

Подстановка (3.5) в (3.4) приводит к системе

$$i\omega\rho' + ik_3\rho U_3' + ik_2\rho U_2' + \frac{\partial}{\partial x_1}(\rho U_1') = 0,$$

$$i\omega U_1' = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P'}{\partial x_1} - \frac{\rho'}{\rho} g_0,$$

$$i\omega U_2' = -ik_2 \frac{P'}{\rho},$$

$$i\omega U_3' = -ik_3 \frac{P'}{\rho},$$

$$i\omega s' = -U_1' \frac{\partial s}{\partial x_1},$$

$$g_0 = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x_1}.$$

Из этой системы получается дифференциальное уравнение второго порядка

для U_1' :

$$\omega^4 + \left[-k_1^2 c_0^2 + \frac{1}{\rho U_1'} \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\rho c_0^2 \frac{\partial U_1'}{\partial x_1} \right) \right] \omega^2 + k_1^2 \varphi_0 = 0. \quad (3.6)$$

Здесь обозначено $\varphi_0 = -g_0 (g_0 + c_0^2 a_0)$, $a_0 = \frac{\partial \ln \rho}{\partial x_1}$,

$c_0^2 = \frac{1}{\left. \frac{\partial \rho}{\partial P} \right|_s}$, $k_1^2 = k_2^2 + k_3^2$ При выводе положено, что g_0, c_0, a_0 –

постоянные величины. Легко заметить, что это возможно, когда начальное распределение плотности имеет экспоненциальный вид. Также использовано равенство:

$$\frac{\partial \rho}{\partial x_1} - \left(\frac{\partial \rho}{\partial s} \right)_P \frac{\partial s}{\partial x_1} = \left(\frac{\partial \rho}{\partial P} \right)_s \frac{\partial P}{\partial x_1} = -\frac{\rho g}{c_0^2}.$$

Вывод дисперсионного уравнения (3.6) приводится в Приложении 2.

2 Условие устойчивости

Решение на интервале $0 \leq x \leq X_1$ уравнения (3.6) будем искать в виде

$$U_1' = \frac{U_1}{\sqrt{\rho}} \sin \frac{n\pi}{X_1} X_1, \quad n = 1, 2, \dots; \quad U_1 - const.$$

Любую функцию–решение можно разложить в ряд Фурье. Полагаем, что границы рассматриваемой области – жесткие стенки, поэтому $U_1' \Big|_{x_1=0, X_1} = 0$. Тогда уравнение (3.6) после подстановки в него U_1 примет вид дисперсионного соотношения

$$\omega^4 - \left(k_1^2 + \frac{4n^2 \pi^2 + X_1^2 a_0^2}{4X_1^2} \right) c_0^2 \omega^2 + k_1^2 \varphi_0 = 0. \quad (3.7)$$

Теорема: Условие $\varphi_0 = -g_0 (g_0 + a_0 c_0^2) \geq 0$ необходимо и достаточно для устойчивости.

Действительно, при $\varphi_0 < 0$ один из корней квадратного (по отношению к ω^2) уравнения (3.7) отрицателен, поэтому всегда найдется

корень ω с чисто мнимой отрицательной частью и согласно (3.5) решение будет экспоненциально возрастать.

$$\omega^2 = y; \quad b^2 = \left(k_1^2 + \frac{4n^2\pi^2 + X_1^2 a_0^2}{4X_1^2} \right) c_0^2;$$

$$y^2 - b^2 y + k_1^2 \varphi_0 = 0; \quad y_{1,2} = \frac{b^2 \pm \sqrt{b^4 - 4k_1^2 \varphi_0}}{2}.$$

При $\varphi_0 \geq 0$ сумма и произведение корней положительны, также положителен и дискриминант уравнения (3.7), поскольку

$$\left(k_1^2 + \frac{4n^2\pi^2 + X_1^2 a_0^2}{4X_1^2} \right)^2 c_0^4 - 4k_1^2 \varphi_0 > \left(k_1^2 + \frac{a_0^2}{4} \right)^2 c_0^4 +$$

$$4k_1^2 \left(g_0^2 + g_0 a_0 c_0^2 \right) = \left(k_1^2 - \frac{a_0^2}{4} \right)^2 c_0^4 + k_1^2 \left(2g_0 + a_0 c_0^2 \right)^2 \geq 0,$$

поэтому все четыре корня уравнения (3.7) будут вещественны и решение устойчиво.

3 Свойства дисперсионного уравнения (3.7)

Дисперсионное уравнение (3.7) получено для общего случая. Рассмотрим предельный случай $c_0 \rightarrow \infty$, отвечающий несжимаемой жидкости. Уравнение (3.7) перейдет в следующее соотношение:

$$\omega^2 = - \frac{k_1^2 g_0 a_0}{k_1^2 + \frac{4n^2\pi^2 + X_1^2 a_0^2}{4X_1^2}}, \quad (3.8)$$

что совпадает с результатом Забабахина Е.И. Формула (3.8) дает наглядное представление зависимости инкремента от начальных условий задачи, в частности, от длины начальных продольных (n) и поперечных ($k_1^2 = k_2^2 + k_3^2$) возмущений.

Если градиент давления $\left(g_0 = -\frac{\partial P}{\rho \partial x} \right)$ и градиент плотности $\left(a_0 = \frac{\partial \rho}{\rho \partial x} \right)$ имеют разные знаки, то течение будет неустойчивым для любых номеров гармоник n, k_2, k_3 , т.к. тогда $\omega^2 < 0$.

Пусть $c_0 \neq \infty$. Рассмотрим короткие волны, когда $k_1 \rightarrow \infty$. Очевидно в этом случае

$$\omega_{1,2} = \frac{\varphi_0}{c_0^2} = -g_0 \left(a_0 + \frac{g_0}{c_0^2} \right). \quad (3.9)$$

один из корней ω_1 приводит к неустойчивости, если $\varphi_0 < 0$.

Проанализируем все возможные ситуации.

Если $\left| \frac{g_0}{c_0^2} \right| \gg |a_0| = \left| \frac{\partial \ln \rho}{\partial x_1} \right|$, то неустойчивость имеет место

всегда так как в этом случае $\omega^2 \approx -\frac{g_0^2}{c_0^2} < 0$. Другими словами, с учетом

сжимаемости для достаточно больших ускорений (замедлений) движение неустойчиво всегда.

Если $\frac{g_0}{c_0^2} \ll a_0$, то $\omega^2 \approx -g_0 \frac{\partial \ln \rho}{\partial x_1}$, т.е. как и в случае

несжимаемой жидкости ($c_0 = \infty$) неустойчивость зависит от знаков

градиентов $\frac{\partial P}{\partial x}$ и $\frac{\partial \rho}{\partial x}$.

Если $\frac{g_0}{c_0^2}$ имеет тот же порядок, что и $\frac{\partial \ln \rho}{\partial x_1}$, то возможны разные ситуации: как устойчивые, так и неустойчивые, определяемые знаком выражения Φ_0 .

В дальнейшем полученное выражение (3.9) используется при выводе уравнения турбулентной энергии, а именно для записи члена, генерирующего турбулентность. Условие $\Phi_0 < 0$ отвечает неустойчивому случаю, приводящему к турбулентному перемешиванию.

Если газ идеальный и $P = \frac{c_0^2 \rho}{\gamma}$, то (3.9) сведется к формуле

$$\omega^2 = g_0 \left(\frac{1}{\gamma} \frac{\partial \ln P}{\partial x_1} - \frac{\partial \ln \rho}{\partial x_1} \right), \quad (3.10)$$

что множителем $\frac{1}{\gamma}$ отличается от результата Фрадкина Е.С. для изотермического случая [50] и совпадает с частотой колебаний внутренних волн, полученной в [52].

4. Совместное действие гравитационной и сдвиговой неустойчивостей

Если дополнительно к распределению плотности и давления имеет место еще поперечное течение, например, в направлении оси ox_3 $U_3 \neq 0$, $U_1 = U_2 = 0$, то вопрос об устойчивости такого течения усложняется.

Известны условия устойчивости для границы раздела в предположении несжимаемости. Если ρ_1 и ρ_2 – плотности соответственно тяжелой и легкой жидкостей, а U_{31} и U_{32} соответствующие тангенциальные составляющие скорости, то инкремент роста малых возмущений выражается формулой [61]

$$\omega = k_1 \frac{\rho_1 U_{31} + \rho_2 U_{32}}{\rho_1 + \rho_2} \pm \sqrt{\frac{g_0 (\rho_2 - \rho_1) k_1}{\rho_1 + \rho_2} - \frac{\rho_1 \rho_2 (U_{31} - U_{32})^2 k_1^2}{(\rho_1 + \rho_2)^2}} . \quad (3.11)$$

Условие неустойчивости получается при отрицательных значениях подкоренного выражения, когда

$$(U_{31} - U_{32})^2 > \frac{g_0 (\rho_2^2 - \rho_1^2)}{k_1 \rho_1 \rho_2} . \quad (3.12)$$

Это неравенство для коротких волн (большие значения k_1) имеет место всегда. В этом случае для одного из корней $Im\omega < 0$, поэтому, согласно (3.5), возмущения растут экспоненциально.

При непрерывном изменении величин $\rho(x)$ и $U_3(x)$ значение $Im\omega$ из размерных соображений и на основании формул (3.10) и (3.11), по-видимому, будет эквивалентно выражению

$$\sqrt{g\varphi_0 + \alpha_1 \left(\frac{\partial U_3}{\partial x_1} \right)^2} .$$

Хотя, конечно, эту формулу следовало бы получить строго, осуществив вывод дисперсионного уравнения. Последнее выражение можно переписать в виде:

$$Im\omega \cong \sqrt{-\frac{g}{\rho} \left(\frac{\partial \rho}{\partial s} \right)_p \frac{\partial s}{\partial x_1} + \alpha_1 \left(\frac{\partial U_3}{\partial x_1} \right)^2} . \quad (3.13)$$

В п.4 условие неустойчивости произвольного течения будет получено из энергетических соображений.

§ 4. Методы изучения турбулентных течений

1. Стадии развития начальных возмущений.

Переход к турбулентности

Покажем, как развиваются возмущения в неустойчивом случае.

В предыдущем параграфе найдены условия, при которых начальные возмущения растут. Для того чтобы определить, как эти возмущения

развиваются во времени, нужно иметь дело с исходной системой уравнений (3.1)–(3.3) не переходя к линеаризованным уравнениям. Эта задача может быть решена только с помощью численных методов. Или постановкой соответствующего эксперимента.

Исторически сперва были поставлены опыты, затем результаты этих опытов многократно использовались для проверки численных программ. В качестве примера можно привести фотографии границы раздела двух жидкостей, полученные в экспериментах Льюиса [], и газов – в экспериментах Василенко [] и Зайцева [].

Общая картина движения такова: амплитуда первоначально заданного синусоидального возмущения $\eta = \eta_0 \sin \frac{2\pi x}{\lambda}$; $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ растёт сперва симметрично, а затем несимметрично вверх и вниз, в сторону легкого с большей скоростью, с некоторого момента гладкость поверхности теряется и образуются вихри. Возникает сложное течение, переходящее в турбулентное. Условно можно выделить три стадии.

1) Линейная стадия, когда $0 \leq \frac{\eta}{\lambda} \leq 0.1$. В этом случае справедливы линеаризованные уравнения. Возмущение на этой стадии растёт вверх и вниз симметрично согласно формуле $\eta = \eta_0 ch \sqrt{gkA} t$. Однако вскоре наступает несимметрия и признаки нелинейности – негладкость в поведении границы.

2) На второй стадии, когда $0.1 \leq \frac{\eta}{\lambda} \leq 0.4$, имеет место образование пузырей в сторону тяжелого вещества и с выходом на закон $\eta_1 \sqrt{g\lambda t}$, и струй в сторону легкого $\eta_2 gt^2$. Время выхода существенно зависит от числа Атвуда $A = \frac{\rho_1 - \rho_2}{\rho_1 + \rho_2}$. При близких к нулю значениях А симметричность течения сохраняется дольше, чем при А близких к 1.

3) На третьей стадии, когда $\frac{\eta}{\lambda} \geq 0.4$, происходит разрушение регулярной структуры, которое возникает в силу общей неустойчивости течения. Она длится ограниченное время по двум причинам.

Во-первых, при проваливании тяжелых струй в легкое вещество происходит скольжение слоев относительно друг друга, которое приводит к гельмгольцевой неустойчивости и к разрушению границы. На концах тяжелых струй образуются вихри, приводящие в конце концов к

разрушению струи. Ширина зоны, в которой происходит это перемешивание, будет возрастать.

Во-вторых, всплывающие пузыри легкого вещества также неустойчивы: в процессе всплывания будет происходить их объединение [63].

Эти два неустойчивых процесса приводят к разрушению границы раздела и появлению турбулентного характера перемешивания. Скорость фронта возмущения в сторону тяжелого вещества при каждом укрупнении (объединении) должна возрастать, выходя со временем на линейный закон. В целом возникает область турбулентного перемешивания, развивающаяся, вообще говоря, несимметрично, но по одному и тому же квадратичному закону.

Если при $t = 0$ начальные данные заданы не в виде синусоиды, а хаотическим образом, то турбулентное течение возникает сразу при $t > 0$.

Мы здесь пренебрегли вязкостью, которая может существенно изменить картину течения, затянув ее развитие во времени. Но полностью сделать течение устойчивым вязкость не может.

2. Осреднение по Рейнольдсу

Как описать турбулентность? Это можно сделать на основании уравнений гидродинамики, если произвести их осреднение. Все характеристики движения представляются в виде двух слагаемых: гладкое, отвечающее некоторому осреднению–сглаживанию, и второе слагаемое – включает в себя весь хаос – так называемая пульсационная добавка:

$$\left. \begin{aligned} e &= \bar{e} + e' \\ U_i &= \bar{U}_i + U_i'; \quad \rho = \bar{\rho} + \rho'; \\ P &= \bar{P} + P'; \quad T = \bar{T} + T'. \end{aligned} \right\} \quad (4.1)$$

Прежде чем провести осреднение уравнений (3.1)–(3.3) сформулируем, следуя [] 5 гипотез Рейнольдса:

- 1) $\overline{f + g} = \bar{f} + \bar{g}$; 2) $\overline{af} = a\bar{f}$, если a – постоянная; 3) $\overline{a} = a$, если a – постоянная; 4) $\frac{\partial \bar{f}}{\partial s} = \frac{\partial \bar{f}}{\partial s}$, где $s = x_1, x_2, x_3, t$; 5) $\overline{f\bar{g}} = \bar{f}\bar{g}$.

Выпишем четыре очевидных следствия из этих гипотез:

- 1) $\overline{\bar{f}} = \bar{f}$; 2) $\overline{f'} = \bar{f} - \bar{f} = 0$; 3) $\overline{f'\bar{h}} = \bar{f}'\bar{h} = 0$; 4) $\overline{f\bar{h}'} = \bar{f}\bar{h}' = 0$.

3 Осреднение уравнений газовой динамики

К исходным уравнениям (3.1)–(3.3) применим операцию осреднения, удовлетворяющую условиям Рейнольдса. Истинные значения плотности ρ , энергии e , давления P , скорости U_k заменим соответственно значениями $(\bar{\rho}, \bar{e}, \bar{P}, \bar{U}_k)$ и пульсациями (ρ', e, P', U'_k) , согласно (4.1). Предварительно в энергетическом уравнении (3.3) от энтропии s перейдем к переменным e и P . При осреднении будем пренебрегать третьими корреляциями и произведениями вторых. Тогда уравнения (3.1)–(3.3) перейдут в следующие:

$$\frac{\partial \bar{\rho}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_k} \bar{\rho} \tilde{U}_k = 0, \quad (4.2)$$

$$\frac{\partial \bar{\rho} \tilde{U}_i}{\partial t} + \frac{\partial \bar{\rho} \tilde{U}_i \tilde{U}_k}{\partial x_k} + \frac{\partial \bar{P}}{\partial x_i} = - \frac{\partial \overline{\bar{\rho} U'_i U'_k}}{\partial x_k}, \quad (4.3)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \bar{\rho} \tilde{e}}{\partial t} + \frac{\partial \bar{\rho} \tilde{U}_k \tilde{e}}{\partial x_k} + \bar{P} \frac{\partial \tilde{U}_k}{\partial x_k} = \\ & = - \frac{\partial \overline{U'_k P'}}{\partial x_k} + \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{\bar{P}}{\bar{\rho}} \overline{U'_k \rho'} \right) - \frac{\partial \overline{\bar{\rho} U'_k e'}}{\partial x_k} + U'_k \frac{\partial \bar{P}'}{\partial x_k}. \end{aligned} \quad (4.4)$$

Здесь обозначено $\tilde{U}_k = \bar{U}_k + \frac{\rho' U'_k}{\bar{\rho}}$, $\tilde{e} = \bar{e} + \frac{\rho' e'}{\bar{\rho}}$. В дальнейшем

функции \tilde{U}_k и \tilde{e} примем за основные.

Если имеется примесь, то уравнение для массовой концентрации c_i будет:

$$\frac{\partial \rho c_i}{\partial t} - \frac{\partial (\rho c_i U_k)}{\partial x_k} = 0. \quad (4.6)$$

После осреднения оно перейдет в следующее:

$$\frac{\partial \bar{\rho} \tilde{c}_i}{\partial t} + \frac{\partial \bar{\rho} \tilde{c}_i \tilde{U}_k}{\partial x_k} = - \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\overline{\bar{\rho} c'_i U'_k} \right), \quad (4.7)$$

где

$$\tilde{c}_i = \bar{c}_i + \frac{\overline{\rho'c'}}{\bar{\rho}}. \quad (4.8)$$

Левые части уравнений (3.1)–(3.3), (4.6) совпадают с левыми частями уравнений (4.2)–(4.4), (4.7). В правые части вошли неизвестные выражения

$U_i'U_k', U_k'P', U_k'\rho', U_k'e', U_k'c_i'$. Прежде, чем их определить, получим уравнение баланса для вновь введенной величины – плотности кинетической энергии турбулентности E_t :

$$E_t = \frac{1}{2} \overline{\rho U_k'U_k'}.$$

4. Уравнение баланса для плотности кинетической энергии турбулентности

Из уравнений (3.1), (3.2) для плотности кинетической энергии

$$E = \frac{1}{2} \rho U_k U_k \quad (4.10)$$

следует

$$\frac{\partial E}{\partial t} + \frac{\partial E U_k}{\partial x_k} + U_k \frac{\partial P}{\partial x_k} = 0 \quad (4.11)$$

Проведем осреднение последнего уравнения, имея ввиду, что

$$\bar{E} = \tilde{E} + E_t,$$

где

$$\tilde{E} = \frac{\bar{\rho}}{2} \tilde{U}_k \tilde{U}_k.$$

Пренебрегая, как и выше, третьими и последующими корреляциями, получим

$$\frac{\partial E_t}{\partial t} + \frac{\partial \tilde{U}_k E_t}{\partial x_k} = \frac{\overline{U_k' \rho'}}{\bar{\rho}} \frac{\partial \bar{P}}{\partial x_k} - \overline{\rho U_k' U_i'} \frac{\partial \tilde{U}_k}{\partial x_i} - \overline{U_k' \frac{\partial P'}{\partial x_k}}. \quad (4.12)$$

При выводе этого уравнения использовано равенство

$$\frac{\partial \tilde{E}}{\partial t} + \frac{\partial \tilde{U}_k \tilde{E}}{\partial x_k} + \tilde{U}_k \frac{\partial \bar{P}}{\partial x_k} + \tilde{U}_k \frac{\partial \bar{\rho} U_k' U_i'}{\partial x_i} = 0,$$

которое является следствием уравнений (4.2) и (4.3).

Заметим, что балансное уравнение (4.12) получено без привлечения уравнения сохранения энергии (3.3).

Уравнение баланса для плотности кинетической энергии турбулентности E_t дополняет осредненные уравнения (4.2)–(4.4), (4.7). Для замыкания этих уравнений нужно определить правые части. Обычно для определения неизвестных членов, входящих в правые части, используют гипотезу Прандтля, состоящую в том, что неизвестные величины выражаются через потоки от средних значений \tilde{U}_k , $\bar{\rho}$, \bar{P} , $\tilde{\varepsilon}$, \tilde{c}_i :

$$\left. \begin{aligned} \overline{U'_k \rho'} &= -D \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial x_k}, \\ \overline{U'_k \varepsilon'} &= -D \frac{\partial \tilde{\varepsilon}}{\partial x_k}, \\ \overline{U'_k c_i} &= -D \frac{\partial \tilde{c}_i}{\partial x_k}, \\ \overline{U'_k U'_i} &= \frac{1}{3} V^2 \delta_{ki} - \alpha_2 D \left[\left(\frac{\partial \tilde{U}_k}{\partial x_i} + \frac{\partial \tilde{U}_i}{\partial x_k} \right) + \frac{2}{3} \frac{d \ln \rho}{dt} \delta_{ki} \right] \end{aligned} \right\} \quad (4.13)$$

Здесь δ_{ki} – символ Кронекера, α_2 – некоторая постоянная, $\frac{V^2}{2}$ – кинетическая энергия турбулентности, определяемая как

$$\frac{V^2}{2} = \frac{E_t}{\bar{\rho}} = \frac{\overline{U'_k U'_k}}{2} \quad (4.14)$$

$$D = lV \quad (4.15)$$

Кроме этого, l имеет смысл среднего расстояния, на которое способны перемещаться турбулентные образования, сохраняя свою индивидуальность. Масштаб связывают с шириной L – характеризующей ширину области турбулентного перемешивания с помощью эмпирической постоянной α . Представление неизвестного члена $\overline{U'_k U'_i}$ базируется на концепции скалярной вихревой вязкости.

В уравнении баланса (4.12) нет члена диффузионного типа. Он необходим для описания затухания турбулентности при выключенных источниках. Его вводят как бы за счет отброшенных третьих корреляций, формально полагая:

$$\frac{\partial}{\partial x_k} \overline{\rho U'_i U'_i U'_k} = -\beta \frac{\partial}{\partial x_k} \bar{\rho} D \frac{\partial V^2}{\partial x_k},$$

где β еще одна постоянная.

Для правильного описания затухания турбулентности также важен еще один член, который вводится следующим образом:

$$U_k' \frac{\partial P'}{\partial x_k} = v\bar{\rho} \frac{V^3}{l},$$

где V очередная постоянная, определяемая как и все выше введенные постоянные α , β , α_2 из экспериментов.

Итак, уравнение баланса (4.12) с учетом введенных предположений примет вид:

$$\begin{aligned} \bar{\rho} \frac{dV^2}{2dt} = & -\frac{D}{\bar{\rho}} \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial x_k} \frac{\partial \bar{P}}{\partial x_k} + \alpha_2 \bar{\rho} D \left[\left(\frac{\partial \tilde{U}_k}{\partial x_i} + \frac{\partial \tilde{U}_i}{\partial x_{ki}} \right) \frac{\partial \tilde{U}_k}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \left(\frac{d \ln \bar{\rho}}{dt} \right)^2 \right] + \\ & + \frac{1}{3} V^2 \frac{d\bar{\rho}}{dt} - v\bar{\rho} \frac{V^3}{l} + \beta \frac{\partial}{\partial x_k} \bar{\rho} D \frac{\partial V^2}{\partial x_k} \end{aligned}$$

Здесь $\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \tilde{U}_k \frac{\partial}{\partial x_k}$.

Выпишем окончательный вид всех уравнения для одномерного случая. Значки осреднения опустим, так же как и индекс у переменной X .

$$\frac{d\rho}{dt} = -\rho \frac{\partial U}{\partial x}, \quad (4.16)$$

$$\frac{dc_i}{dt} = \frac{\partial}{\rho \partial x} \rho D \frac{\partial c_i}{\partial x}, \quad (4.17)$$

$$\frac{dU}{dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x} \left(P + \frac{1}{3} \rho V^2 \right) + \frac{4}{3} \alpha_2 \frac{\partial}{\rho \partial x} \rho D \frac{\partial U}{\partial x}, \quad (4.18)$$

$$\frac{d\varepsilon}{dt} - \frac{P}{\rho^2} \frac{d\rho}{dt} = \frac{\partial}{\rho \partial x} \rho D \frac{\partial \left(\varepsilon + \frac{P}{\rho} \right)}{\partial x} - \frac{D}{\rho^2} \left(\frac{\partial \rho}{\partial x} \right) \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{vV^3}{l}, \quad (4.19)$$

$$\frac{d(\rho V^2)}{2dt} = \rho D \left[g \frac{\partial \rho}{\rho \partial x} + \frac{4}{3} \alpha_2 \left(\frac{d \ln \rho}{dt} \right)^2 \right] - \frac{v\rho V^3}{\rho} + \beta \frac{\partial}{\partial x} \rho D \frac{\partial V^2}{\partial x} + \frac{5}{6} \rho V^2 \frac{d \ln \rho}{dt}$$

(4.20)

Получили четыре уравнения для четырех неизвестных функций ρ, U, T, V, c_1, c_2 . Энергия и давление определяются уравнениями состояния. Для смеси будем вычислять P и ε по формулам:

$$P = \sum_1^2 c_i P_i(\rho, T);$$

$$\varepsilon = \sum c_i \varepsilon_i(\rho, T)$$

Коэффициент турбулентной диффузии D определен формулой (4.15). В уравнения вошли постоянные $\alpha, \alpha_2, \nu, \beta$, которые определяются ниже.

Уравнение баланса (4.20) может быть уточнено, если привлечь исследования § 3 по определению условий неустойчивости и произвести замену в источниковом члене турбулентности – квадратной скобки уравнения (4.20)

$$g \frac{\partial \rho}{\rho \partial x} \rightarrow g \left(\frac{\partial \rho}{\rho \partial x} + \frac{g}{c^2} \right).$$

Эта замена сделана согласно формуле (3.9).

§ 5. Свойства Iv – модели турбулентного перемешивания. Модель Беленького–Фрадкина

В §4 получены уравнения модели турбулентного перемешивания (4.16)–(4.20). Они содержат четыре параметра, которые определяются из эксперимента. Для оптимального выбора этих параметров нужно знать свойства модели и ее поведение в различных предельных случаях. Изучение свойств модели ведется в последующих параграфах.

В настоящем параграфе свойства модели изучены для несжимаемых сред. В этом случае удастся получить ряд автомодельных решений, установить их структуру и зависимость решений от числа Атвуда. Рассмотрено решение в приближении Беленького–Фрадкина, справедливом при малых числах Атвуда. Построено решение для произвольных чисел Атвуда. Установлена нефизичность модели при числе Атвуда, стремящемся к 1. Для устранения этого недостатка модели следует перейти от полной ширины L к эффективной L^* .

1 Автомодельные уравнения

Ряд важных свойств полученной модели турбулентного перемешивания можно установить, если ограничиться перемешиванием двух несжимаемых жидкостей при заданном законе ускорения.

В этом случае массовые концентрации c_i с плотностью смеси ρ связаны соотношениями

$$c_1 + c_2 = 1, \quad c_2 = \frac{(\rho_1^0 - \rho)\rho_2^0}{\rho(\rho_1^0 - \rho_2^0)}. \quad (5.1)$$

Здесь ρ_1^0 и ρ_2^0 – начальные плотности тяжелой и легкой жидкостей.

Из уравнений (4.16) и (4.17) с учетом (5.1) следует явное выражение для скорости U :

$$U = -D \frac{\partial \ln \rho}{\partial x}. \quad (5.2)$$

Действительно, перейдем в уравнении (4.17) от c_2 к ρ , используя (5.1)

$$\partial c_2 = \frac{dc_2}{d\rho} \partial \rho = -\frac{\rho_1^0 \rho_2^0}{\rho^2 (\rho_1^0 - \rho_2^0)} \partial \rho.$$

Получим уравнение

$$\frac{d\rho}{dt} = \rho \frac{\partial}{\partial x} D \frac{\partial \rho}{\partial x}. \quad (5.3)$$

Из сравнения этого уравнения с уравнением (4.16) следует (5.2). Из (5.2) и (5.3) получим уравнение для плотности смеси:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} D \frac{\partial \rho}{\partial x}. \quad (5.4)$$

Уравнение, выражающее закон сохранения турбулентной кинетической энергии, согласно (4.20), имеет вид:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d\rho V^2}{dt} = \rho D g \frac{\partial \ln \rho}{\partial x} - \nu \frac{\rho V^3}{l} + \beta \frac{\partial}{\partial x} \rho D \frac{\partial V^2}{\partial x} + \\ + \frac{4}{3} \alpha_2 \rho D \left(\frac{d \ln \rho}{dt} \right)^2 + \frac{5}{6} \rho V^2 \frac{d \ln \rho}{dt}. \end{aligned} \quad (5.5)$$

Здесь

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} - D \frac{\partial \ln \rho}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x}.$$

(5.5а)

Напомним, что

$$\left. \begin{aligned} D &= lV, \\ l &= \alpha L. \end{aligned} \right\} \quad (5.6)$$

В итоге имеем систему двух уравнений с неизвестными плотностью ρ и турбулентной скоростью V , где α , ν , β , α_2 – эмпирические постоянные.

Для системы (5.4), (5.5) ставится следующая задача Коши: найти решение при $t > 0$, если в начальный момент известны $V(0, x)$ и $\rho(0, x)$:

$$\left. \begin{aligned} V(0, x) &= 0, \\ \rho(0, x) &= \begin{cases} \rho_1^0, & \text{если } x \geq 0, \\ \rho_2^0, & \text{если } x \leq 0. \end{cases} \end{aligned} \right\} \quad (5.7)$$

Анализ исходных размерностей показывает, что полученные уравнения имеют автомодельное решение и при степенном законе ускорения:

$$g = g_0 t^m.$$

Введем безразмерные величины с тем, чтобы от уравнений в частных производных перейти к системе обыкновенных дифференциальных уравнений. Для этого обозначим через s перемещение системы под действием ускорения g_0 :

$$s = \frac{g_0 t^2}{2},$$

а через u – скорость перемещения системы:

$$u = g_0 t = \frac{ds}{dt}.$$

Безразмерные представители длины $\bar{\lambda}$, турбулентной скорости $\bar{\xi}$ и плотности Δ введем следующим образом:

$$\bar{\lambda} = \frac{x}{s}, \quad \bar{\xi} = \frac{V}{u}, \quad \Delta = \frac{\rho}{\rho_1^0}. \quad (5.8)$$

Подстановка (5.8) в (5.4) и (5.5) приводит к обыкновенным дифференциальным уравнениям:

$$\left. \begin{aligned}
 (\bar{\xi}\Delta')' &= -\frac{\Delta'\bar{\lambda}}{\alpha(\bar{\lambda}_1 - \bar{\lambda}_2)}, \\
 4\beta\bar{\xi}\bar{\xi}'' + 8\beta(\bar{\xi}')^2 + 2\left[\frac{\bar{\lambda}}{(\bar{\lambda}_1 - \bar{\lambda}_2)\alpha} + (1+2\beta)\frac{\Delta'}{\Delta}\bar{\xi}\right]\bar{\xi}' &= \\
 = \left[-1 + \frac{2}{3}\left(\frac{\bar{\lambda}}{\alpha(\bar{\lambda}_1 - \bar{\lambda}_2)} + \frac{\Delta'}{\Delta}\bar{\xi}\right)\bar{\xi}\right]\frac{\Delta'}{\Delta} + \frac{\bar{\xi}}{\alpha(\bar{\lambda}_1 - \bar{\lambda}_2)} + \frac{2v\bar{\xi}^2}{\alpha^2(\bar{\lambda}_1 - \bar{\lambda}_2)^2} - \\
 - \frac{9}{2}\alpha_2\left(\frac{\Delta'}{\Delta}\right)^2\left[\bar{\lambda} + \alpha(\bar{\lambda}_1 - \bar{\lambda}_2)\bar{\xi}\frac{\Delta'}{\Delta}\right]^2 &
 \end{aligned} \right\}, \quad (5.9)$$

где ' означает производную по $\bar{\lambda}$.

Здесь мы воспользовались тем, что ширина области перемешивания L есть

$$L = (\bar{\lambda}_1 - \bar{\lambda}_2)s. \quad (5.10)$$

Условия соответственно на левой и правой границах области перемешивания имеют вид:

$$\bar{\lambda} = \bar{\lambda}_2: \quad \bar{\xi} = 0, \quad \Delta = \frac{1}{n} = \frac{\rho_2^0}{\rho_1^0}, \quad (5.11)$$

$$\bar{\lambda} = \bar{\lambda}_1: \quad \bar{\xi} = 0, \quad \Delta = 1. \quad (5.12)$$

Таким образом, получили краевую задачу с неопределенными границами для системы из двух уравнений, содержащих вторые производные от искомым функций Δ и $\bar{\xi}$. Условий (5.11) и (5.12), вообще говоря, недостаточно, чтобы найти решение. Общие методы решения таких задач неизвестны.

Однако, как легко заметить, на концах области интегрирования система (5.9) имеет особенности: коэффициенты при старших производных обращаются в нуль. Дополнительное исследование характера поведения интегральных кривых в окрестности границ позволяет найти разложение искомого решения.

Для изучения свойств модели турбулентного перемешивания рассмотрим ряд упрощений. Все они будут относиться к уравнению для кинетической энергии турбулентности (5.5).

2. Приближение Беленького–Фрадкина

Беленький и Фрадкин в работе [1] для турбулентной скорости использовали явное выражение

$$vV^2 = \alpha^2 L^2 g_0 \frac{\partial \rho}{\rho \partial x}, \quad (5.13)$$

которое получили из размерных соображений, положив $V \cong \overline{\omega}$, где под $\overline{\omega}$ понимается мнимая часть инкремента ω . Основным источником, порождающим турбулентное перемешивание, является член, пропорциональный инкременту (3.9). Из длины L и инкремента ω можно составить единственную комбинацию, имеющую размерность скорости. Выражение (5.13) после перехода к безразмерным величинам примет вид

$$\bar{\xi}^2 = \frac{\alpha^2 (\bar{\lambda}_1 - \bar{\lambda}_2)^2}{2\nu} \frac{\Delta'}{\Delta}. \quad (5.14)$$

Возвращаясь к исходному уравнению (5.5), нетрудно заметить, что выражение (5.14) получается, если в (5.5) оставить только генерационный и диссипативный члены (первые два слагаемых в правой части).

Подстановка явного выражения для безразмерной скорости $\bar{\xi}$ (5.14) в первое уравнение системы (5.9) приводит к одному уравнению для плотности Δ :

$$3\Delta\Delta'' - (\Delta')^2 = -\frac{\sqrt{\nu}\bar{\lambda}}{\alpha^2 (\bar{\lambda}_1 - \bar{\lambda}_2)^2} \Delta^{\frac{3}{2}} (\Delta')^{\frac{1}{2}}. \quad (5.15)$$

Введем новую переменную

$$\bar{y}^2 = \frac{\Delta'}{\Delta}. \quad (5.16)$$

Эта замена понижает порядок уравнения (5.15)

$$3\bar{y}' + \bar{y}^3 = -\frac{\sqrt{\nu}\bar{\lambda}}{\alpha^2 (\bar{\lambda}_1 - \bar{\lambda}_2)^2}. \quad (5.17)$$

Из граничных условий (5.11) и (5.12) и соотношения (5.14) следует:

$$\left. \begin{aligned} \bar{\lambda} = \bar{\lambda}_1 : \bar{y}(\bar{\lambda}_1) &= 0, \\ \bar{\lambda} = \bar{\lambda}_2 : \bar{y}(\bar{\lambda}_2) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (5.18)$$

Кроме того, функция \bar{y} , очевидно, удовлетворяет условию

$$\int_{\bar{\lambda}_2}^{\bar{\lambda}_1} \bar{y}^2 d\bar{\lambda} = \ln n. \quad (5.19)$$

Это получается, если воспользоваться соотношением (5.16).

Далее можно построить приближенное решение, верное при n , близком к 1. Для этого поступим, как в [1], и положим, что перемешивание происходит симметрично, т.е.

$$\bar{\lambda}_1 = -\bar{\lambda}_2 = \bar{\lambda}_0.$$

В уравнении (5.17) пренебрежем членом \bar{y}^3 :

$$3\bar{y}' = -\frac{2\sqrt{\nu}\bar{\lambda}}{\alpha^2(\bar{\lambda}_1 - \bar{\lambda}_2)^2}.$$

Это уравнение интегрируется. Его решением будет парабола:

$$\bar{y} = \frac{\sqrt{\nu}}{12\alpha^2\bar{\lambda}_0^2}(\bar{\lambda}_0^2 - \bar{\lambda}^2). \quad (5.20)$$

Из условия (5.19) определится $\bar{\lambda}_0$:

$$\bar{\lambda}_0 = 270\frac{\alpha^4}{\nu}\ln n.$$

Окончательная формула (5.10) для ширины области перемешивания примет вид

$$L = 270\frac{\alpha^4}{\nu}(\ln n)2s. \quad (5.21)$$

А для плотности получится следующее выражение:

$$\Delta = n \frac{-\frac{1}{2} - \frac{5}{8}\left(\frac{\bar{\lambda}}{\bar{\lambda}_0}\right)^3 + \frac{15}{16}\frac{\bar{\lambda}}{\bar{\lambda}_0} + \frac{3}{16}\left(\frac{\bar{\lambda}}{\bar{\lambda}_0}\right)^5}{.}. \quad (5.22)$$

Как показано в [1], построенное решение верно для малых перепадов плотности вплоть до $n = 4$. Если $n > 4$, то нужно численно интегрировать уравнение (5.17).

Здесь ради простоты рассматривалось постоянное ускорение. Можно построить автомоделное решение и для произвольного ускорения, зависящего только от времени. Это будет сделано ниже.

3. Асимптотические свойства решения уравнения (5.17)

Рассмотрим свойства решения Бельенского–Фрадкина во всем диапазоне перепада плотностей n : $1 < n < \infty$. При n , близком к 1, решение построено в предыдущем параграфе. Если n заметно больше единицы, то требуется численное интегрирование уравнения (5.17). В правую часть его вошла безразмерная длина $\bar{\lambda}_1 - \bar{\lambda}_2$ и постоянные α и ν . От них можно избавиться, если перейти к новым переменным η и z :

$$\left. \begin{aligned} z &= \left[\frac{2\alpha^4}{\nu} (\bar{\lambda}_1 - \bar{\lambda}_2)^4 \right]^{\frac{1}{10}} \bar{y}, \\ \eta &= \left[\frac{\nu}{2\alpha^4 (\bar{\lambda}_1 - \bar{\lambda}_2)^4} \right]^{\frac{1}{5}} \bar{\lambda}. \end{aligned} \right\} \quad (5.23)$$

Подстановка (5.23) в (5.17) приведет к уравнению

$$3z' + z^3 = -2\eta \quad (5.24)$$

с граничными условиями при

$$\eta = \eta_1, \eta_2; \quad z = 0. \quad (5.25)$$

Получилось уравнение (5.24), свободное от неизвестных коэффициентов.

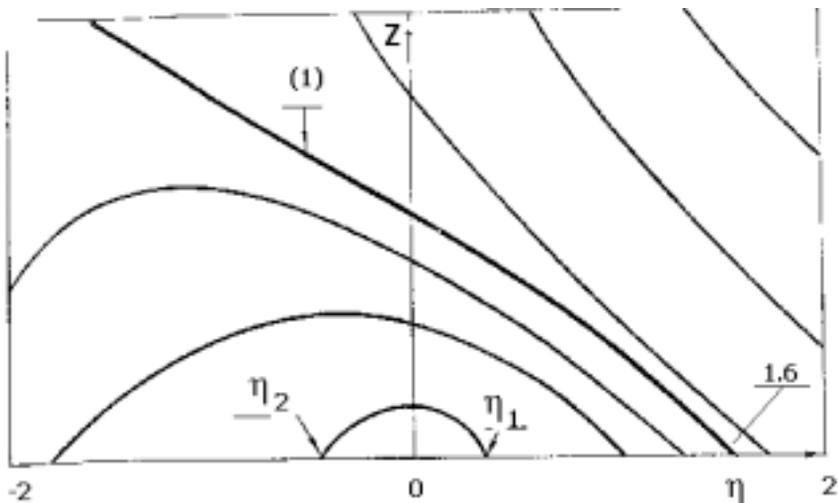


Рис. 5.1. Поле интегральных кривых уравнения (5.24), (1)–предельное решение для $n = \infty$.

Поле интегральных кривых уравнения (5.24) представлено на рис.5.1. Видно, что существует решение (1), разделяющее плоскость на две области. Все положительные по z решения, лежащие ниже этой кривой, удовлетворяют граничному условию (5.25): решение пересекает ось $z = 0$. Каждая интегральная кривая отвечает решению с соответствующим начальным перепадом плотностей n , определяемым интегралом

$$\int_{-\eta_2}^{\eta_1} z^2 d\eta = \ln n. \quad (5.27)$$

Разделительная кривая (1) отвечает предельному решению, получаемому при $n \rightarrow \infty$. Численное интегрирование уравнения (5.24) показывает, что η_1 при этом конечно, а $\eta_2 \rightarrow -\infty$:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \eta_1 = 1.6,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \eta_2 = -\infty.$$

При n , близком к 1, решение приближенно можно заменить параболой. При $n \gg 1$, как следует из рис.5.1, оно имеет куполообразный вид с вершиной z_{\max} , смещенной влево. При $n \rightarrow \infty$ $\eta_2 \rightarrow -\infty$ и $z_{\max} \rightarrow \infty$, так что $z(-\infty) = \infty$. Предельное решение (1) имеет приближенное представление:

$$z^3 + \frac{9}{4\eta_1^3} z^2 + \frac{3}{\eta_1} z = 2(\eta_1 - \eta), \quad \eta_1 = 1.6.$$

Таким образом, при $n \rightarrow \infty$ $\eta_1 \rightarrow 1.6$ и $\eta_2 \rightarrow -\infty$. Возвращаясь к исходным безразмерным координатам фронтов перемешивания $\bar{\lambda}_1$ и $\bar{\lambda}_2$, получим, что обе эти координаты при $n \rightarrow \infty$ стремятся к ∞ . Действительно это так, потому что, согласно (5.23)

$$\left. \begin{aligned} \bar{\lambda}_1 &= \frac{2\alpha^4}{\nu} (\eta_1 - \eta_2)^4 \eta_1, \\ \bar{\lambda}_2 &= \frac{2\alpha^4}{\nu} (\eta_1 - \eta_2)^4 \eta_2. \end{aligned} \right\} \quad (5.28)$$

Поэтому отношение полной ширины L к перемещению системы s также неограниченно растет:

$$\frac{L}{s} = \bar{\lambda}_1 - \bar{\lambda}_2 = \frac{2\alpha^4}{\nu} (\eta_1 - \eta_2)^5 .$$

Это происходит за счет того, что при $n \rightarrow \infty$ фронт перемешивания в сторону легкого вещества, определяемый через безразмерную величину η_2 , распространяется с неограниченной скоростью. Может показаться, что в целом все нормально, если фронт в сторону тяжелого вещества имеет ограниченную скорость. Однако, это не так.

Рассмотрим поведение ширины области турбулентного перемешивания L_1 , отсчитываемой от точки $x = 0$ до $x = x_1$, так что имеет место равенство

$$\frac{L_1}{s} = \lambda_1 = \left[\frac{2\alpha^4}{\nu} (\eta_1 - \eta_2)^4 \right]^{\frac{1}{5}} \eta_1 .$$

Из того, что $\eta_2 \rightarrow \infty$ при $n \rightarrow \infty$ получается, что $\frac{L_1}{s}$ также стремится к ∞ . Таким образом, в перемешивание в конечный момент времени включается неограниченная масса вещества, что противоречит экспериментальным данным.

Этот недостаток модели Беленького–Фрадкина можно исправить, если в коэффициенте D (5.6) вместо полной ширины L брать эффективную L^* , которую определять, например, как расстояние между точками, в которых безразмерная плотность δ

$$\delta = \frac{\rho - \rho_2}{\rho_1 - \rho_2} = \frac{n\Delta - 1}{n - 1} \quad (5.29)$$

принимает значения от 0.1 до 0.9 или 0.01 и 0.99. Разумеется, при этом изменит свое значение и постоянная α , так что

$$l = \alpha^* L^* . \quad (5.30)$$

Окончательные выражения для полной и эффективной ширин получаются в виде

$$L = \frac{2\alpha_*^4}{\nu} (\eta_{0.9} - \eta_{0.1})^4 (\eta_1 - \eta_2) s,$$

$$L^* = \frac{2\alpha_*^4}{\nu} (\eta_{0.9} - \eta_{0.1})^5 s.$$

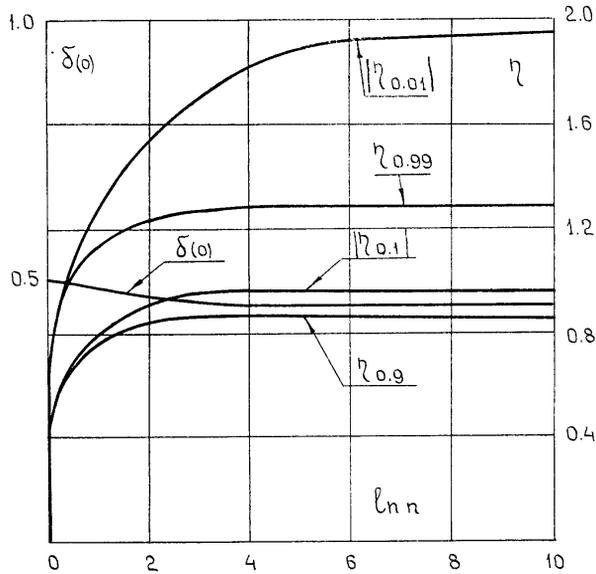


Рис.5.2. Зависимость безразмерной координаты фронтов перемешивания ($\eta_{0.1}$, $\eta_{0.01}$, $\eta_{0.9}$, $\eta_{0.99}$) и безразмерной плотности $\delta(0)$ от $\ln n$

На рис.5.2 нанесены результаты численного интегрирования уравнения (5.24). Из них следует, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\eta_{0.9} - \eta_{0.1}) = 0.87 + 0.96 = 1.83.$$

Поэтому

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{L^*}{s} = \frac{2\alpha_*^4}{\nu} 20.5, \quad (5.31)$$

т.е. предел конечен. Также будет конечно и отношение $\frac{L_1}{s}$ при $n \rightarrow \infty$.

Отношение же полной ширины L к s по-прежнему неограниченно растет.

Это следует отнести к недостаткам выбранной модели, с которым можно смириться, так как этот рост происходит за счет «хвоста» малой массы. Между тем в случае, когда в коэффициенте диффузии D использовалась полная ширина, в перемешивание включалась неограниченная масса.

В заключение приведем аналитические формулы приближенного решения, справедливые во всем диапазоне n , если за эффективную ширину L^* принять $L^* = 2L_1$. Для этого воспользуемся результатами численного интегрирования уравнения (5.24), представленными на рис. 5.1 и 5.2. Значение $\delta(0)$ с хорошей точностью можно аппроксимировать формулой:

$$\delta(0) = 0.5 - 0.034A - 0.006A^3, \quad A = \frac{n-1}{n+1}. \quad (5.32)$$

Значения η_1 и η_2 могут быть определены, если воспользоваться формулой (5.27), переписанной в виде двух формул:

$$\int_0^{\eta_1} z^2 d\eta = -\ln \Delta(0), \quad (5.33)$$

$$\int_{-\eta_2}^0 z^2 d\eta = \ln n\Delta(0). \quad (5.34)$$

Также будем считать, что

$$z = \frac{1}{3}(\eta_1^2 - \eta^2), \quad \text{если } 0 \leq \eta \leq \eta_1 \text{ для любых } n \quad (5.35)$$

$$z^3 = -2\eta, \quad \text{если } -\eta_2 \leq \eta \leq 0 \text{ для } n \gg 1. \quad (5.36)$$

Подставим (5.32) в (5.29) и получим

$$\Delta(0) = \frac{1 - 0.068A^2 - 0.012A^4}{1 + A}. \quad (5.37)$$

Из (5.35), (5.37), (5.33) следует

$$\eta_1^5 = \frac{9 \cdot 15}{8} \ln \frac{1+A}{1-0.068A^2-0.012A^4}, \quad \text{для } 0 \leq A \leq 1. \quad (5.38)$$

Из (5.36), (5.37), (5.34) следует

$$(-\eta_2)^5 = \frac{25}{144 \cdot 18 \cdot 9} (\ln 2n)^3, \quad \text{для } n \gg 1.$$

Окончательно получим:

$$\frac{L_1}{s} = 540 \frac{\alpha_*^4}{v} \ln \frac{1+A}{1-0.068A^2-0.012A^4}, \quad \text{для } 0 \leq A \leq 1 \quad (5.39)$$

Здесь использована формула

$$\bar{\lambda}_1 = \frac{\alpha_*^4}{v} (2\eta_1)^5,$$

полученная из (5.23) в предположении, что $L^* = 2L_1$. Безразмерную плотность Δ можно получить из уравнения (5.16), которое в переменных η, z имеет вид

$$z^2 = \frac{\Delta_{\eta}'}{\Delta},$$

где значок η означает дифференцирование по η в отличие от (5.16), где дифференцирование по $\bar{\lambda}$. С учетом (5.35), (5.38) получим:

$$\Delta = \left[\Delta(0) \right]^{1 - \frac{15}{8} \left[\frac{x}{L_1} \frac{2}{3} \left(\frac{x}{L_1} \right)^3 + \frac{1}{5} \left(\frac{x}{L_1} \right)^5 \right]}$$

для $0 \leq x \leq L$, где $\Delta(0)$ зависит от A согласно (5.37).

§ 6. Свойства Iv–модели турбулентного перемешивания. Автономные решения в общем случае

В этом параграфе рассмотрены свойства автономных решений системы уравнений (5.9) при $\alpha_2 = 0$. Роль этого параметра будет отдельно рассмотрена в § 7. Сперва положим также и $\beta = 0$.

1. Модель перемешивания при $\alpha_2 = 0$, $\beta = 0$.

Рассмотрение будем вести в эйлеровых координатах. Исходные уравнения (5.9) при $\beta = 0$ и $\alpha_2 = 0$ несколько упростятся. В коэффициенты уравнений для ξ и Δ войдут постоянные α и ν , что неудобно при исследовании общих свойств решения. Оказывается, существует преобразование, приводящее к уравнению, содержащему в коэффициентах постоянные α и ν только в комбинации $\frac{\alpha^2}{\nu}$.

Это преобразование следующее:

$$\bar{\lambda} = \frac{2}{9}\alpha^2(\lambda_1 - \lambda_2)^2 \lambda, \quad \bar{\xi} = \frac{1}{3}\alpha(\lambda_1 - \lambda_2)\xi, \quad \bar{y} = \frac{3}{\sqrt{2}}\frac{y}{\alpha(\lambda_1 - \lambda_2)} \quad (6.1)$$

После подстановки (6.1) в (5.9) получим

$$\left(\frac{2}{3}\lambda + y^2\xi\right)\xi' - \frac{\nu\xi^2}{\alpha^2(\lambda_1 - \lambda_2)^2} - \frac{\xi}{3} + \left[1 - \left(\frac{2}{3}\lambda + y^2\xi\right)\frac{\xi}{3}\right]y^2 = 0, \quad (6.2)$$

$$-\left(\frac{2}{3}\lambda + \xi'\right) = \xi\left(y^2 + \frac{2y'}{y}\right). \quad (6.3)$$

Уравнения (6.2) и (6.3) нужно дополнить граничными условиями (5.11), (5.12) на левой и правой границах перемешивания, которые в новых переменных будут иметь вид

$$\lambda = \lambda_2: \quad \xi(\lambda_2) = 0, \quad y(\lambda_2) = -\frac{2}{3}\lambda_2, \quad (6.4)$$

$$\lambda = \lambda_l: \xi(\lambda_l) = 0, \quad y(\lambda_l) = \frac{2}{3} \lambda_l. \quad (6.5)$$

Значения функций $y(\lambda_2)$ и $y(\lambda_1)$ устанавливаются путем дополнительного исследования поведения решения в окрестности граничных точек, которые для системы уравнений (6.2) и (6.3) являются особыми.

Покажем, что искомое решение должно выходить из точки (6.4) и входить в точку (6.5). Для этого нужно установить, что

$$y_1 = y(\lambda_1) = \frac{2}{3}\lambda_1.$$

Рассмотрим все допустимые значения y_1 : $y_1 = 0$; $y_1 = \infty$; $y_1 > 0$ и конечно.

1) $y_1 = 0$. Система уравнений (6.2)–(6.3) в окрестности точки $(\lambda_1, 0, 0)$ примет вид

$$\xi' = \frac{3}{2}\lambda_1\left(\frac{\xi}{3} - y^2\right), \quad y' = -\frac{\lambda_1}{3}\frac{y}{\xi}.$$

Можно показать, что среди решений, выходящих из точки $(\lambda_1, 0, 0)$ нет искомого, удовлетворяющего очевидным условиям $\xi > 0$, $y > 0$. Действительно, разделив одно уравнение на другое, получим

$$\frac{d\xi}{dy} = \frac{3y^2 - \xi}{y}\xi.$$

Видно, что среди кривых, лежащих в квадранте $\xi > 0$, $y > 0$, нет решения, проходящего через начало координат.

2) $y_1 = \infty$. В этом случае уравнения (6.2)–(6.3) эквивалентны урезанной системе

$$\left. \begin{aligned} \left(\frac{2}{3}\lambda_1 + y^2\xi\right)\xi' + \left(1 - \frac{1}{3}y^2\xi^2\right)y^2 &= 0 \\ -\left(\frac{2}{3}\lambda_1 + \xi'\right) &= \xi\left(y^2 + \frac{2y'}{y}\right). \end{aligned} \right\}$$

Безразмерная комбинация $y^2\xi$ в точке $\lambda = \lambda_1$ равна нулю. Действительно, если вернуться к исходным величинам, то

$$y^2\xi \approx D \frac{\partial p}{\rho dx},$$

т.е. выражение $y^2\xi$ есть поток смеси и поэтому на фронте перемешивания равно нулю.

Последняя система уравнений после сделанного замечания заметно упрощается:

$$\frac{2}{3}\lambda_1\xi' = -y^2, \quad y' = \frac{3}{4\lambda_1}\frac{y^3}{\xi}.$$

Поделив одно уравнение на другое и проинтегрировав, получим:

$$\frac{dy}{d\xi} = -\frac{y}{2\xi}, \quad y = c\xi^{-1/2}.$$

3) $y_1 > 0$. y_1 – постоянная. Урезанная система примет вид

$$\frac{2}{3}\lambda_1\xi' = -y_1^2, \quad -\left(\frac{2}{3}\lambda_1 + \xi'\right) = \xi\left(y_1^2 + \frac{2y'}{y_1}\right),$$

откуда неминуемо следует, что

$$y_1 = \frac{2}{3}\lambda_1, \quad \xi'(\lambda_1) = -\frac{2}{3}\lambda_1.$$

Аналогично исследуется другая точка и показывается, что

$$y_2 = \frac{2}{3}\lambda_2, \quad \xi'(\lambda_2) = -\frac{2}{3}\lambda_2.$$

Разложение решения в окрестности фронтов перемешивания может быть получено в виде рядов соответственно в точках λ_1 и λ_2 :

$$y = \frac{2}{3}\lambda_i + \left(-\frac{1}{4} + \frac{14}{81}\lambda_i^3\right)(\lambda_i - \lambda) + \dots, \quad (6.6)$$

$$\xi = -\frac{2}{3}\lambda_i(\lambda - \lambda_i) - \left(\frac{1}{12} + \frac{2}{81}\lambda_i^3\right)(\lambda_i - \lambda)^2 + \dots; \quad i = 1, 2. \quad (6.7)$$

Значения λ_1 и λ_2 неизвестны. Искомое решение должно проходить еще через одну особую точку, лежащую в интервале (λ_2, λ_1) . Действительно, коэффициент при ξ' в уравнении (6.2) на концах интервала (λ_2, λ_1) принимает разные знаки, поэтому в некоторой точке λ_3 обратится в нуль. Эта точка имеет седлообразный характер, поэтому при численном интегрировании преодолевается без особых затруднений.

Заметим, что особая точка λ_3 отвечает лагранжевой координате, которая в начальный момент совпадала с границей раздела. В этой точке

выполнено условие (5.2), имеющее в безразмерных координатах вид равенства.

$$\frac{2}{3}\lambda_3 + y_3^2 \xi_3 = 0, \quad (6.8)$$

что в свою очередь приводит к связи

$$y_3^2 = \frac{1}{3}\xi_3 + \frac{v\xi_3^2}{\alpha^2(\lambda_1 - \lambda_2)^2},$$

которая является следствием (6.2) и (6.8).

Дополнительное соотношение

$$\int_{\lambda_2}^{\lambda_1} y^2 d\lambda = \ln n \quad (6.9)$$

замыкает краевую задачу и позволяет найти единственное решение.

Формально задача переопределена: для системы из двух обыкновенных дифференциальных уравнений известны значения искомых функций Y и ξ как при $\lambda = \lambda_1$, так и при $\lambda = \lambda_2$ (на основании разложений (6.6) и (6.7)). Поэтому начиная численное интегрирование из точки $\lambda = \lambda_1$ и доводя его до точки $\lambda = \lambda_2$, в которой одна из функций, например, ξ , принимает заданное значение, можно получить результаты, когда функция Y будет отлична от значения $y = -\frac{2}{3}\lambda_2$. Однако в действительности этого не происходит в силу особого характера точки. Достаточно интегрирование довести до точки λ_2 , в которой $\xi = 0$, как условие $y = -\frac{2}{3}\lambda_2$ выполнится автоматически. В этом убеждают нас результаты численного интегрирования.

Таким образом, каждой фиксированной точке $\lambda = \lambda_1$ ставится в соответствие решение, определяемое вплоть до точки $\lambda = \lambda_2$. Интеграл (6.9) укажет, какому конкретному значению n отвечает построенное решение.

Если требуется найти решение для заданного n , то оно вычисляется итерациями. Следует заметить, что в коэффициент уравнения (6.2) вошло

выражение $\frac{\nu}{\alpha^2(\lambda_1 - \lambda_2)^2}$, зависящее от интервала интегрирования λ_2, λ_1 и комбинации $\frac{\alpha^2}{\nu}$. Для определения решения с заданной комбинацией $\frac{\alpha^2}{\nu}$ применяется метод, в котором неизвестный коэффициент находится вместе с решением путем итераций.

Как уже отмечалось, в принятой модели решение будет определяться начальным перепадом плотностей n и параметром $\frac{\alpha^2}{\nu}$. Проведем исследование зависимости решения от этих величин.

Вначале фиксируем n ($n = 10$) и рассмотрим следующие значения параметра $\frac{\alpha^2}{\nu}$: 0.0018; 0.061; ∞ . Параметр $\frac{\alpha^2}{\nu}$, как будет показано в § 7, определяет степень затухания турбулентного перемешивания при выключенном ускорении, поэтому область его изменения фактически определена. Однако представляет интерес рассмотреть его влияние на профиль решения.

Результаты сравнения представлены на рис. 6.1. По пространству выбрана переменная $\frac{\lambda}{\lambda_1}$, так что правые концы профилей совмещены.

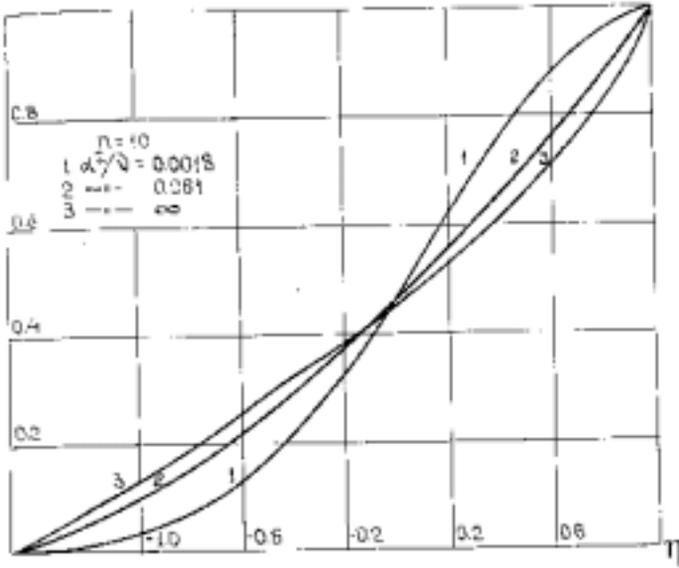


Рис. 6.1. Профиль безразмерной плотности δ в зависимости от параметра $\frac{\alpha^2}{\nu}$ при $n = 10$, $\beta = 0$, здесь переменная $\eta = \frac{\lambda}{\lambda_1}$.

Из сравнения следует, что при изменении параметра $\frac{\alpha^2}{\nu}$ в довольно широком диапазоне значений от 0.061 до ∞ различия между профилями (кривые 2 и 3) незначительны. С другой стороны, для значений $\frac{\alpha^2}{\nu}$ в интервале $0 < \frac{\alpha^2}{\nu} < 0.0018$ профиль безразмерной плотности (кривая 1) мало отличается от профиля в приближении Беленького–Фрадкина на интервале от $\lambda_{0,1}$ до $\lambda_{0,9}$. На фронтах перемешивания различия будут существенными из-за негладкого примыкания профиля в рассматриваемом случае (см. разложение (6.6): $\frac{\Delta'}{\Delta}(\lambda = \lambda_i) = \frac{2}{3} \lambda_i (-1)^{i-1}$, $i = 1, 2$). Из

рис.6.1 также следует, что заметные отличия в профиле имеются, когда, например, $\frac{\alpha^2}{\nu}$ изменяется от 0.0018 до 0.061.

Изучим зависимость решения от начального перепада плотностей n при некотором фиксированном значении параметра $\frac{\alpha^2}{\nu}$, а именно, $\frac{\alpha^2}{\nu} = 0.061$.

Прежде всего определим величину несимметрии $\frac{\lambda_1}{\lambda_2}$ как функцию $\ln n$.

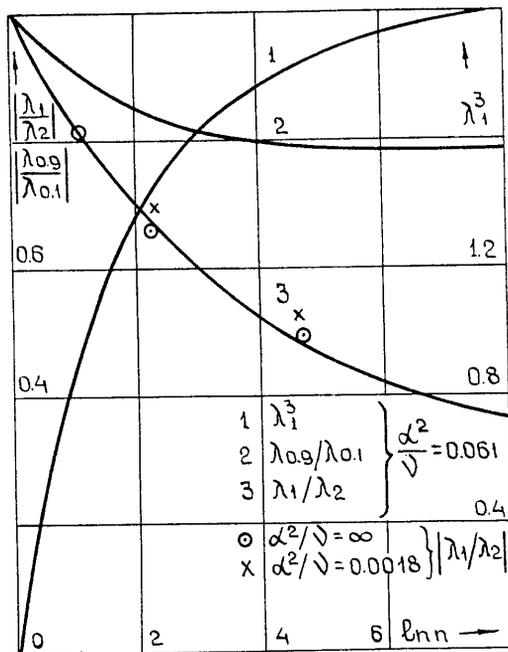


Рис.6.2. Зависимость несимметрии перемешивания $\left| \frac{\lambda_1}{\lambda_2} \right|$ – кривая 3, $\left| \frac{\lambda_{0.9}}{\lambda_{0.1}} \right|$ кривая 2

и λ_1^3 – кривая 1 от $\ln n$, $\beta = 0$.

Из результатов численного интегрирования, представленных на рис.6.2, следует, что при $n \rightarrow I$ перемешивание вправо и влево происходит симметрично: $\left| \frac{\lambda_1}{\lambda_2} \right| \rightarrow I$. При $n \rightarrow \infty$ $\left| \frac{\lambda_1}{\lambda_2} \right| \rightarrow 0$, при этом выражение λ_1^3

ограничено, так что $\lambda_2 \rightarrow -\infty$. Это значит, что отношение полной ширины L к перемещению системы S будет неограниченно расти, так как, согласно (5.10) и (6.1),

$$\frac{L}{s} = \bar{\lambda}_1 - \bar{\lambda}_2 = \frac{2\alpha^2}{9} (\lambda_1 - \lambda_2)^3.$$

Очевидно, что и отношение эффективной ширины L^* к S будет $\rightarrow \infty$, ибо

$$\frac{L^*}{s} = \frac{2\alpha^2}{9} (\lambda_1 - \lambda_2)^2 (\lambda_{0,1} - \lambda_{0,9}).$$

Поэтому, как и раньше, в исходные уравнения нужно вместо полной ширины ввести эффективную. Такая замена сводится к тому, что в формулах (6.1)–(6.3) α заменяется на α_* , а $\lambda_1 - \lambda_2$ – на $\lambda_{0,9} - \lambda_{0,1}$.

Полагая $\frac{\alpha_*^2}{\nu} = 0.061$, снова построим зависимость λ_1^3 от $\ln n$ и $\frac{\lambda_1}{\lambda_2}$

от $\ln n$. Хотя по-прежнему $\frac{L}{s} \rightarrow \infty$, отношение $\frac{L^*}{s}$ будет конечно, так как

$$\frac{L^*}{s} = \frac{2\alpha_*^2}{9} (\lambda_{0,1} - \lambda_{0,9})^3. \quad (6.10)$$

Несимметрия перемешивания $\left| \frac{\lambda_{0,9}}{\lambda_{0,1}} \right|$ изменяется в интервале $(0.78 \div 1.0)$ при n , изменяющемся в интервале $(1, \infty)$. В сравнении с несимметрией, полученной в § 5 (там интервал $(0.9 \div 1.0)$), имеем, что в модели настоящего параграфа несимметрия в перемешивании несколько

больше при больших значениях n , но при $n \rightarrow 1 \left| \frac{\lambda_1}{\lambda_2} \right| \rightarrow 1$ также стремится к единице.

Профиль безразмерной плотности δ для различных n при фиксированном параметре $\frac{\alpha_*^2}{\nu} = 0.061$ представлен на рис. 6.3.

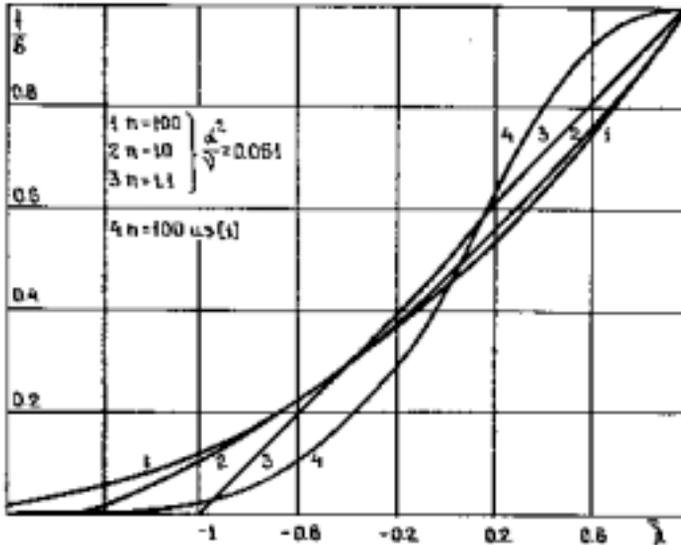


Рис.6.3. Профиль безразмерной плотности для различных n при $\frac{\alpha_*^2}{\nu} = 0.061$

Существенная зависимость его от n имеет место, в основном, при значениях $n < 10$ (кривые 2 и 3). Если $n > 10$, то профили слабо различаются между собой (кривые 1 и 2).

2. Модель перемешивания в случае $\alpha_2 = 0$, $\beta \neq 0$

Будем считать $\alpha_2 = 0$ и изучать модель с тремя постоянными: α , ν , β . Случай $\beta = 0$ рассмотрен выше. Когда коэффициент β велик, можно считать, что $\frac{\partial V}{\partial x} = 0$. Это приближение изучено в § 7.

Исходные уравнения возьмем в автомодельных переменных. Это будет система (5.9) с граничными условиями (5.11) и (5.12). В коэффициенты уравнений входят постоянные α , ν , β . Как уже отмечалось, существует преобразование (6.1), приводящее к системе, в которой постоянные α и ν

войдут только в комбинации $\frac{\alpha^2}{\nu}$. Одно из уравнений (5.9) перейдет в следующее:

$$2\beta\xi\xi'' + 4\beta\xi'^2 + \left[\frac{2}{3}\lambda + (1+2\beta)y^2\xi \right] \xi' - \frac{\nu\xi^2}{\alpha^2(\lambda_{0,1} - \lambda_{0,9})^2} - \left[1 - \left(\frac{2}{3}\lambda + y^2\xi \right) \frac{\xi}{3} \right] y^2 = 0. \quad (6.11)$$

Здесь введена эффективная ширина L^* , так как при полной ширине, как и раньше, получается нефизичная зависимость решения от параметра n .

Остановимся на изучении зависимости решения от параметра n . Значение отношения $\frac{\alpha^2}{\nu}$ выберем согласно закону «2/7» равным 0.061. Физический смысл этого закона будет пояснен в § 7.

Проведем анализ разложения решения в окрестности фронта перемешивания. Разложение при $\lambda = \lambda_i$, $i = 1, 2$ есть

$$\left. \begin{aligned}
 y &= \frac{2}{3} \lambda_i \sqrt{1-4\beta} + \frac{20\beta-3 + \frac{8}{9} \left(\frac{7}{3} - 8\beta \right) (1-4\beta) \lambda_i^3}{12(1-7\beta)} \sqrt{1-4\beta} (\lambda_i - \lambda) + \dots, \\
 \xi &= \frac{2}{3} \lambda_i (\lambda - \lambda_i) + \frac{8\beta-1 - \frac{8}{27} (1+18\beta)(1-4\beta) \lambda_i^3}{12(1-7\beta)} (\lambda_i - \lambda)^2 + \dots,
 \end{aligned} \right\} \quad (6.12)$$

если $\beta < \frac{1}{4}$ и $\beta \neq \frac{1}{7}$ ¹; и

$$\left. \begin{aligned}
 y &= c_i (\lambda_i - \lambda)^{\frac{4\beta-1}{2}}, \\
 \xi &= \frac{\lambda_i}{6\beta} (\lambda_i - \lambda),
 \end{aligned} \right\} \text{если } \beta > \frac{1}{4}. \quad (6.13)$$

C_i – произвольная постоянная. В случае $\beta > \frac{1}{4}$ решение на фронте имеет неаналитический характер.

Как видно из представленных разложений, коэффициент β при диффузионном члене имеет несколько критических значений. При $\beta = \frac{1}{7}$ и $\beta = \frac{1}{4}$ разложение теряет аналитический характер. Вспоминая связь $y^2 = \frac{\Delta'}{\Delta}$, отметим, что при $0 < \beta < \frac{1}{4}$ и $\beta \neq \frac{1}{7}$ решение y на фронтах λ_1 и λ_2 принимает определенные конечные значения, поэтому производная от безразмерной плотности Δ' имеет ненулевое значение.

¹ Особенность в разложении при $\beta = \frac{1}{7}$ была замечена

При $\beta > \frac{1}{4}$ y обращается в нуль, следовательно и производная Δ' равна нулю.

Из полученных разложений можно также сделать выводы о знаке производной y' и тем самым установить знак второй производной Δ'' . Из (6.12) следует, что при выполнении равенства

$$\lambda_1^3 = \frac{(3 - 20\beta)27}{(1 + 28\beta)(1 - 4\beta)8} \text{ получаем } \Delta''(\lambda_1) = 0.$$

Построение решения системы уравнений (6.11) и (6.3) с граничными условиями (6.12), (6.13) можно осуществить только численно. Появление диффузионного члена с коэффициентом β в сравнении со случаем $\beta = 0$ существенно усложнило задачу – повысился порядок одного из уравнений.

С другой стороны, фронт перемешивания является особой точкой, причем характер ее таков, что вести численное интегрирование всей системы уравнений, выходя из этой точки, невозможно в силу расходящегося характера интегральных кривых. Это замечание относится и к правому и к левому фронту. Поэтому здесь применен специальный итерационный метод численного интегрирования системы (6.11), (6.3), предложенный Яковлевым В.Г. Суть его состоит в том, что исходная система интегрируется поочередно: при заданном значении y

определяется решение ξ^v из (6.11). Последнее уравнение относительно ξ второго порядка, и для его решения применяется метод прогонки. Затем с известной функцией ξ^v интегрируется уравнение (6.3) и находится y^{v+1} . Оказывается, что такой процесс не всегда сходится, поэтому применяются специальные меры, избавляющие от этого недостатка.

Результаты численного интегрирования получены при $\frac{\alpha_*^2}{v} = 0.061$ и различных значениях параметра β . Значение параметра $\beta = 0.2$ выбрано путем сравнения расчетного профиля с экспериментальным при $n = 3$. Результаты этого сравнения представлены на рис. 6.4.

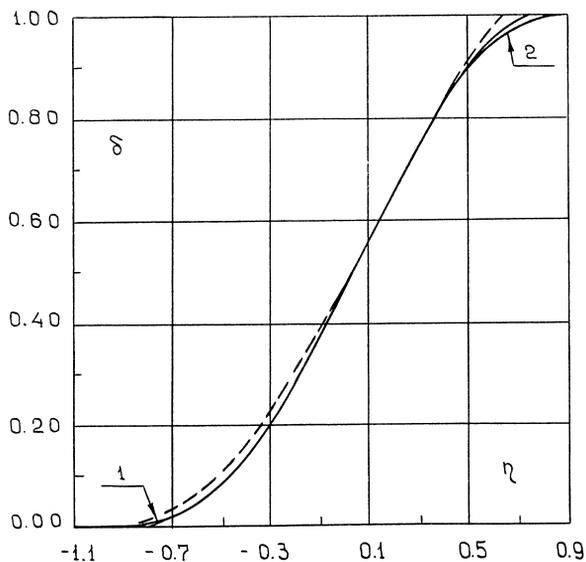


Рис. 6.4. Распределение безразмерной плотности δ в зависимости от безразмерной координаты $\eta = \frac{x}{L^*}$ для $n = 3$. — — усредненные результаты экспериментов [49], [74], — точное решение при $\beta = 0.2$ (1) и $\beta = 0.5$ (2)

Видно, что подбором параметра β можно получить вполне удовлетворительное согласие с опытом.

С выбранным параметром $\beta = 0.2$ и $\frac{\alpha_*^2}{\nu} = 0.061$ проведено исследование зависимости несимметрии перемешивания и эффективной ширины от параметра n .

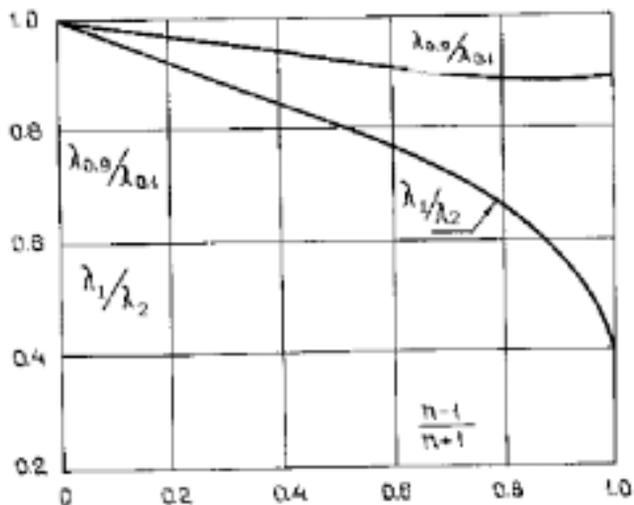


Рис. 6.5. Зависимость несимметрии перемешивания от числа Атвуда при $\beta = 0.2$

На рис. 6.5 демонстрируется изменение несимметрии, измеренной по фронтам перемешивания $\left| \frac{\lambda_1}{\lambda_2} \right|$, а также по эффективным фронтам $\left| \frac{\lambda_{0.9}}{\lambda_{0.1}} \right|$, от числа Атвуда $\frac{n-1}{n+1}$. Как и раньше в §4 и §7, перемешивание развивается

почти симметрично при малых значениях $\frac{n-1}{n+1}$ и несимметрично при

$\frac{n-1}{n+1} \approx 1$. Предельное значение несимметрии $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\lambda_{0.9}}{\lambda_{0.1}} \right| = 0.88$.

Напомним, что при $\beta = 0$ было $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\lambda_{0.9}}{\lambda_{0.1}} \right| = 0.78$.

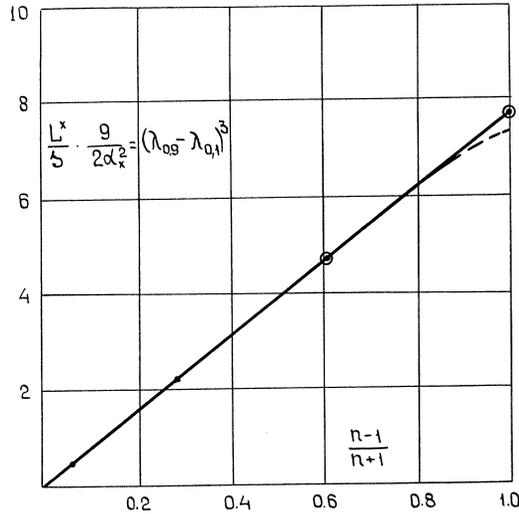


Рис.6.6. Зависимость отношения $\frac{9L^*}{2s\alpha_*^2}$ от числа Атвуда, --- модель § 7 ($\beta = 0$), — модель § 9 ($\beta = 0.2$)

На рис.6.6 в сравнении с решением ($\beta = 0$) нанесена зависимость отношения $\frac{9L^*}{2s\alpha_*^2}$ от числа Атвуда. Решение настоящего параграфа фактически описывается прямой

$$\frac{9L^*}{2s\alpha_*^2} = 7.77A.$$

Введение параметра β мало сказалось на несимметрии перемешивания, определяемой как $\left| \frac{\lambda_{0.9}}{\lambda_{0.1}} \right|$ и на эффективной ширине. Параметр β помог подогнать профиль плотности δ под экспериментальный. Влияние параметра β , в основном, проявилось на фронтах перемешивания.

На рис. 6.4 приведен профиль плотности δ при $n = 3$. Как следует из разложений (6.12) и (6.14), на фронтах перемешивания при $\beta = 0.2$ имеет место негладкое примыкание (первая производная терпит разрыв).

§ 7. Приближение кусочно–постоянного коэффициента диффузии

Рассмотрим приближенную модель, в которой положено, что турбулентная скорость V не зависит от пространственной переменной и изменяется только во времени [45]. Такое приближение позволяет построить решение в аналитическом виде для переменного ускорения и во всем диапазоне изменения чисел Атвуда. Тем самым предоставляется возможность теоретически изучить влияние постоянных теории на асимптотические свойства решения. В частности, комбинация из постоянных $\frac{\alpha^2}{\nu}$ может быть выбрана на основании теоретических и экспериментальных результатов, устанавливающих закон затухания турбулентности при выключенных источниках.

Предлагаемое приближение оказывается весьма полезным для изучения свойств усложненной модели, а также для выявления роли дополнительных постоянных, таких как α_2 . Это приближение также будет широко применяться при изучении выхода на автомодельный режим и в задаче о перемешивании тонкого слоя.

Будем рассматривать перемешивание двух сред, имеющих постоянные начальные плотности ρ_1^0 и ρ_2^0 . Ускорение g полагаем функцией, зависящей только от времени:

$$g = g(t).$$

Сформулируем граничные условия. Как уже отмечалось ранее, естественно предположить, что на фронте перемешивания в обе стороны плотность непрерывно переходит в начальную, а кинетическая энергия равна нулю.

При постоянном ускорении эта задача автомодельна. Ее решения исследованы и приведены в §6. Фронт перемешивания развивается несимметрично, в сторону легкого вещества с большей скоростью. Влияние несимметрии $\frac{L_2}{L_1}$ зависит от числа Атвуда A и достигает значения

1.11 ÷ 1.15 при $A = 1$, если фронт перемешивания определять

эффективно по значениям объемной концентрации $f_1 = f_2 = 0.1$ и 1.37 если $f_1 = f_2 = 0.01$. Функция кинетической энергии турбулентного перемешивания носит колоколообразный характер. Ранее была рассмотрена приближенная модель, в которой функция V полагалась в области турбулентного перемешивания зависящей только от времени.

$$V = \begin{cases} V(t), & |x| \leq \frac{L}{2}, \\ 0, & |x| > \frac{L}{2}. \end{cases} \quad (7.1)$$

Такое приближение позволяет в аналитическом виде построить решение при произвольном от времени законе ускорения.

Здесь уточняется полученное ранее решение. Делается это за счет нового определения ширины области перемешивания L . Так как в предположении (7.1) коэффициент диффузии D в уравнении (5.4) зависит только от времени, то решение для плотности не будет иметь фронта. Поэтому фронт вводится эффективно. Это приводит к необходимости пересчета эмпирической постоянной α и к некоторым неудобствам при сравнении с экспериментом.

Предлагается интегральный способ, основанный на законе сохранения перемешанной массы. Ширина области перемешивания определяется по следующему алгоритму:

$$L = 2 \left[\int_{-\infty}^0 \frac{f_1 dx}{f_1(0)} + \int_0^{\infty} \frac{f_2 dx}{f_2(0)} \right], \quad (7.2)$$

где f_1, f_2 – объемные концентрации $f_1 = \frac{\rho - \rho_2}{\rho_1 - \rho_2}$; $f_2 = \frac{\rho_1 - \rho}{\rho_1 - \rho_2}$.

Заметим, что эта формула может быть рекомендована как для обработки экспериментальных результатов, где точно определить фронт бывает трудно, так и для численного алгоритма, где те же трудности, что при экспериментальной обработке. Геометрический смысл формулы (7.2) демонстрируется на рис. 7.1.

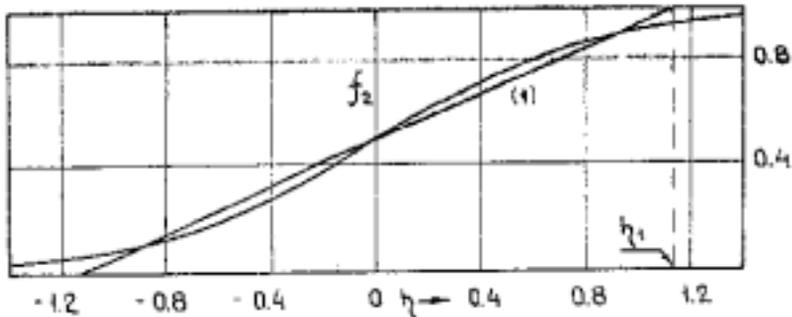


Рис. 7.1 Профиль объемной концентрации f_2 от безразмерного расстояния

$\eta = \frac{x}{2\sqrt{\tau}}$. (1) – линейный профиль, полученный из условия сохранения перемешанной массы.

1 Приближенные уравнения. Точное решение.

Получим вместо (5.5) приближенное уравнение. Для этого проинтегрируем обе части уравнения (5.5) по области перемешивания $|x| \leq \frac{L}{2}$. Предварительно определим L из уравнения (5.4), решение которого может быть представлено аналитически. Перейдем к новой переменной

$$\partial \tau = D \partial t. \quad (7.3)$$

Тогда уравнение диффузии

$$\frac{\partial \rho}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2}$$

будет иметь решение

$$\rho = \frac{\rho_1^0 + \rho_2^0}{2} + \frac{\rho_1^0 - \rho_2^0}{2} \Phi \left(\frac{x}{2\sqrt{\tau}} \right), \quad (7.4)$$

где $\Phi(\eta) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\eta e^{-z^2} dz$ – интеграл вероятности, $\eta = \frac{x}{2\sqrt{\tau}}$.

Обратим внимание, что для объемной концентрации $f_2 = \frac{1}{2}(1 + \Phi)$ решение получается независимым от числа Атвуда.

Фронт перемешивания X_i выбирается таким образом, чтобы площадь на рис. 7.1 равнялась площади треугольника со стороной Ox_i . Следует отметить, что в сформулированном выше приближении перемешивание протекает симметрично влево и вправо, поэтому $x_1 = -x_2 = \frac{L}{2}$; а из равенства площадей следует формула:

$$\eta_1 = 2 \int_0^{\infty} (1 - \Phi) d\eta = \frac{2}{\sqrt{\pi}}.$$

Поэтому

$$L = 2x_1 = 4\eta_1 \sqrt{\tau} = 8\sqrt{\frac{\tau}{\pi}} \quad (7.5)$$

Ширина области перемешивания входит в уравнение баланса кинетической энергии (5.5). Зная ее (7.5), усредним по области $|x| \leq \frac{L}{2}$ уравнение (5.5), предварительно перейдя к переменной τ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho V^2}{2\partial \tau} + \frac{v\rho V^2}{\alpha^2 L^2} = g \frac{\partial \rho}{\partial x} + \beta \frac{\partial}{\partial x} \left(\rho \frac{\partial V^2}{\partial x} \right) + \frac{1}{2} \frac{\partial \rho}{\partial x} \frac{\partial V^2}{\partial x} - \\ - \frac{1}{3} \rho V^2 \left(\frac{\partial \ln \rho}{\partial x} \right)^2 + \frac{5}{6} V^2 \frac{\partial \rho}{\partial \tau} \end{aligned} \quad (7.6)$$

В результате получим следующее уравнение:

$$\frac{\partial (\bar{V}^2 M)}{2\partial \tau} + \frac{v\bar{V}^2 M}{\alpha^2 L^2} = g\Phi(\eta_1)(\rho_1^0 - \rho_2^0) - \frac{\Phi(\sqrt{2}\eta_1)}{12\sqrt{2}\tau} \bar{V}^2 A^2 M$$

, (7.7)

где

$$M = (\rho_1^0 + \rho_2^0) \frac{L}{2}. \quad (7.8)$$

Здесь использованы соотношения:

$$\begin{aligned}
a) \int_{|x| \leq \frac{L}{2}} \rho V^2 dx &= \bar{V}^2 M, \\
б) \int_{|x| \leq \frac{L}{2}} g \frac{\partial \rho}{\partial x} dx &= g \Phi(\eta_1) (\rho_1^0 - \rho_2^0), \\
в) \int_{|x| \leq \frac{L}{2}} \frac{\partial \rho}{\partial x} \frac{\partial V^2}{\partial x} dx &= 0, \\
г) \int_{|x| \leq \frac{L}{2}} V^2 \frac{\partial \rho}{\partial \tau} dx &= \bar{V}^2 \int_{|x| \leq \frac{L}{2}} \frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2} dx = 0, \\
д) \int_{|x| \leq \frac{L}{2}} \rho V^2 \left(\frac{\partial \ln \rho}{\partial x} \right)^2 dx &= \bar{V}^2 \int_{|x| \leq \frac{L}{2}} \left(\frac{\partial \ln \rho}{\partial x} \right)^2 \rho dx = \frac{M}{4\tau} \Phi(\sqrt{2}\eta_1) \frac{A^2 \bar{V}^2}{\sqrt{2}}.
\end{aligned} \tag{7.9}$$

При вычислении последнего интеграла принято следующее приближение:

$$\begin{aligned}
\int_{|x| \leq \frac{L}{2}} \left(\frac{\partial \ln \rho}{\partial x} \right)^2 \rho dx &= \frac{(\rho_1^0 + \rho_2^0)}{4\sqrt{\tau}} A^2 \eta_1^2 \int_{-\eta_1}^{\eta_1} \frac{e^{-2\eta^2} d\eta}{1 + A\Phi(\eta)} \\
\frac{(\rho_1^0 + \rho_2^0)}{4\sqrt{\tau}} A^2 \eta_1^2 \int_{-\eta_1}^{\eta_1} e^{-2\eta^2} [1 - A\Phi(\eta)] d\eta &= \frac{A^2 M}{4\sqrt{2} \tau} \Phi(\sqrt{2} \cdot \eta_1)
\end{aligned}$$

Уравнение (7.7) преобразуется к виду:

$$\frac{d\bar{V}^2}{2d\tau} + k \frac{\bar{V}^2}{\tau} = \frac{\Phi(\eta_1)}{2\eta_1 \sqrt{\tau}} gA, \tag{7.10}$$

$$k = 0.25 + \frac{v}{16\eta_1^2 a^2} + \frac{\Phi(\sqrt{2}\eta_1)}{12\sqrt{2}} A^2. \tag{7.11}$$

Возвращаясь с помощью (7.3) и (7.5) к исходной переменной t , получим:

$$\frac{d\bar{V}^2}{dL} + 4k \frac{\bar{V}^2}{L} = \frac{\Phi(\eta_1)}{2\eta_1^2} gA, \tag{7.12}$$

$$\frac{dL}{dt} = 8\eta_1^2 a \bar{V}. \quad (7.13)$$

Решение последних уравнений представляется в интегральной форме:

$$\bar{V}^2 = \bar{V}_0^2 \left(\frac{L_0}{L} \right)^{4k} + \frac{\Phi(\eta_1)}{2\eta_1^2} AL^{-4k} \int_{L_0}^L g L^{4k} dL, \quad (7.14)$$

$$t = \frac{1}{8a\eta_1^2} \int_{L_0}^L \frac{dL}{\bar{V}} \quad (7.15)$$

Здесь ради общности положено, что в начальный момент есть область турбулентного перемешивания L_0 с начальной турбулентной скоростью \bar{V}_0 :

$$t = 0; \quad \bar{V} = \bar{V}_0; \quad L = L_0. \quad (7.16)$$

Заметим, что система обыкновенных дифференциальных уравнений (7.12)–(7.13) сводится к одному уравнению второго порядка:

$$\frac{d\dot{L}^2}{\dot{L}dt} + 4k \frac{\dot{L}^2}{L} = 32\eta_1^2 a^2 \Phi(\eta_1) g A,$$

где $(\dot{})$ означает дифференцирование по времени. Тем самым получаем замкнутое уравнение для определения ширины области перемешивания, содержащее две эмпирические постоянные a и ν . Напомним, что параметр k , согласно (7.11), зависит от a , ν и A .

2 Точное решение при кусочно–постоянном ускорении. Неустойчивость Рихтмайера–Мешкова.

Этот вид неустойчивости получается при прохождении через границу раздела ударной волны. В рамках рассмотренной выше модели возникающее перемешивание будем характеризовать числом Атвуда, устанавливающимся после прохождения ударной волны, и δ -образным ускорением, сообщаемым границе некоторую скорость U_0 :

$$U_0 = \int g dt.$$

Обратим внимание на действие генерационного члена

$$\omega^2 = g \frac{\partial \rho}{\partial x},$$

который работает как источник только в случае его положительного значения. Если ускорение изменяется плавно, то отрицательное его значение приводит к убыванию энергии. При перемешивании, вызванном ударной волной, неустойчивость возникает при любом знаке выражения

$g \frac{\partial \rho}{\partial x}$, поэтому при δ – образном законе ускорения генерационный член

следует брать по модулю:

$$\omega^2 = \left| g \frac{\partial \rho}{\partial x} \right|,$$

если g – δ – функция. Поскольку неустойчивость Рихмайера–Мешкова связана с ударной волной, следует учитывать сжимаемость. Поэтому здесь нужно вспомнить выражение для инкремента ω^2 в общем случае сжимаемого газа – формула (3.9). Для удобства перепишем ее вновь:

$$\omega^2 = -g_0 \frac{\partial \ln \rho}{\partial x} - \frac{g_0^2}{c_0^2},$$

где c_0 – скорость звука в газе, g_0 – ускорение. Заметим, что если g_0 достаточно велико, а c_0 – конечно, то второй член в инкременте будет преобладающим и неустойчивость будет иметь место всегда не зависимо от знака ускорения, т.к. в этом случае $\omega^2 < 0$.

Получим решение для ударной волны из общего решения (7.14), (7.15), построив его для ускорения, заданного ступенчатой функцией

$$g = \begin{cases} g_0, & 0 \leq t \leq t_0, \\ 0, & t > t_0, \end{cases} \quad (7.17)$$

а затем найдем предел при условии, что $\lim_{t_0 \rightarrow 0} g_0 t_0 = U_0$.

Вначале рассмотрим нулевые начальные данные:

$$t = 0; \quad L_0 = \bar{V}_0 = 0. \quad (7.18)$$

Тогда из (7.14) и (7.15) следует аналитическое решение:

$$\bar{V}^2 = \begin{cases} \frac{\Phi(\eta_1) g_0 AL}{2\eta_1^2 (1 + 4k)}, & 0 \leq t \leq t_0, \\ \bar{V}_1^2 \left(\frac{L_{10}}{L} \right)^{4k}, & t > t_0, \end{cases} \quad (7.19)$$

$$L = \begin{cases} \frac{8a^2\eta_1^2\Phi(\eta_1)g_0At^2}{1+4k}, & 0 \leq t \leq t_0, \\ L_{10} \left[1 + \frac{2(t-t_0)}{Bt_0} \right]^B, & t > t_0, \end{cases} \quad (7.20)$$

$$L_{10} = \frac{8a^2\eta_1^2\Phi(\eta_1)g_0At_0^2}{1+4k}, \quad \bar{V}_1 = \frac{2a\Phi(\eta_1)g_0At_0}{1+4k}; \quad B = \frac{1}{1+2k}.$$

Очевидно, если $\lim_{t_0 \rightarrow 0} g_0 t_0 = U_0$, то

$$\lim_{t_0 \rightarrow 0+} \bar{V}_1 = \frac{2a\Phi(\eta_1)AU_0}{1+4k}. \quad (7.21)$$

Если теперь предположить, что граница раздела имеет начальную шероховатость, эффективно характеризуемую начальной шириной L_0 , то проходящая ударная волна приведет к появлению турбулентной скорости шероховатой зоны, равной

$$\bar{V}_1(L_0) = 2\alpha\Phi(\eta_1)AU_0. \quad (7.22)$$

Этот результат следует из соотношения:

$$\bar{V}^2 = \frac{\Phi(\eta_1)g_0A}{2\eta_1^2(1+4k)} L \left[1 - \left(\frac{L_0}{L} \right)^{1+4k} \right], \quad (7.23)$$

являющегося решением уравнения (7.12). Вблизи точки $L = L_0$; $\bar{V}(L_0) = 0$ решение (7.23) можно приближенно заменить следующим:

$$\bar{V}^2 \approx \frac{\Phi(\eta_1)}{2\eta_1^2} g_0 A (L - L_0).$$

Тогда ширина L вблизи L_0 представляется выражением:

$$L = L_0 + 8a^2\eta_1^2\Phi(\eta_1)g_0At^2. \quad (7.24)$$

С учетом того, что $g_0 t_0 \rightarrow U_0$, получим (7.22).

Следовательно, имеем интервал значений $\bar{V}_1(L_0, U_0)$ от (7.21) до (7.22). Определенное значение скорости $\bar{V}_1(\beta)$ получается зависящим от параметра $\beta = \frac{U_0 t_0}{L_0}$, где t_0 – некоторое время, которое можно трактовать

как время прохождения ударной волной области шириной L_0 . Получим общую формулу для определения $\bar{V}_1(L_0, U_0) = \bar{V}_1(\beta)$. Для этого в (7.23) заменим $g_0 = \frac{U_0}{t_0}$ и введем параметр β :

$$\frac{\bar{V}_1(\beta)}{U_0} = \sqrt{\frac{A\Phi_1}{2\eta_1^2(1+4k)\beta} \frac{L_{10}}{L_0} \left[1 - \left(\frac{L_{10}}{L_0} \right)^{-(1+4k)} \right]}.$$

Значение $L_{10} = L(t = t_0)$ определим из (7.15), подставляя вместо \bar{V} приближенное решение:

$$\frac{\bar{V}}{U_0} = \begin{cases} \sqrt{\frac{\Phi_1\beta A}{2\eta_1^2} \left(\frac{L}{L_0} - 1 \right)}, & \frac{L}{L_0} < \frac{1+4k}{4k}; \\ \sqrt{\frac{\Phi_1\beta A}{2\eta_1^2(1+4k)} \frac{L}{L_0}}, & \frac{L}{L_0} > \frac{1+4k}{4k}. \end{cases}$$

Полученное приближение наглядно демонстрируется на рис.7.3, где решение (кривая (1)) заменено двумя прямыми (2) и (3).

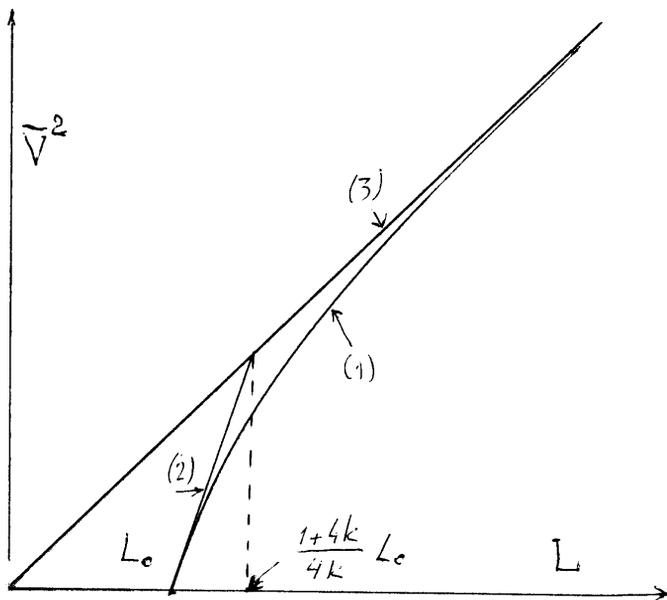


Рис. 7.2. Точное решение (1) заменено двумя отрезками прямых (2) и (3).

Окончательно имеем:

$$\sqrt{\frac{L_{10}}{L_0}} = \begin{cases} \sqrt{1 + 8\eta_1^2 \alpha^2 \Phi_1 A \beta}, & \text{если } \beta A \leq \frac{1}{32k\eta_1^2 \alpha^2 \Phi_1}; \\ \sqrt{\frac{4k}{1+4k}} + 4\eta_1 \alpha \sqrt{\frac{\Phi_1 A \beta}{2(1+4k)}}, & \text{если } \beta A \geq \frac{1}{32k\eta_1^2 \alpha^2 \Phi_1}. \end{cases}$$

После ударной волны перемешивание будет развиваться согласно решению:

$$\bar{V} = \left(\frac{L_{10}}{L} \right)^{2k} \bar{V}_1(\beta), \quad (7.25)$$

$$L = L_{10} \left[1 + \frac{8\eta_1^2 a \bar{V}_1(\beta) (t - t_0)^B}{BL_{10}} \right]. \quad (7.26)$$

Отметим одну важную особенность полученного решения: в случае перемешивания Рихтмайера–Мешкова ширина области перемешивания

существенно зависит от начальной шероховатости L_0 , в отличие от перемешивания Релея–Тейлора, когда при $L_0 \rightarrow 0$ решение стремится к автомодельному закону [(7.20), $0 \leq t \leq t_0$]. В рассмотренном случае (7.26) при $L_0 \rightarrow 0$ решение стремится к тривиальному за счет того, что $L_{10} \rightarrow 0$.

3 Влияние начальных данных на развитие турбулентного перемешивания при постоянном ускорении

Установим зависимость решения от начальной ширины перемешивания L_0 , когда ускорение g_0 постоянно. Как только что было отмечено, при $L_0 \rightarrow 0$ решение стремится к автомодельному.

Выпишем решение (7.14) для постоянного ускорения g_0 в общем случае произвольных (ненулевых) начальных данных (7.16):

$$\bar{V}^2 = \frac{\Phi(\eta_1) g_0 AL}{2\eta_1^2 (1+4k)} + \left[\bar{V}_0^2 - \frac{\Phi(\eta_1) g_0 AL_0}{2\eta_1^2 (1+4k)} \right] \left(\frac{L_0}{L} \right)^{4k}.$$

Определим в явном виде зависимость скорости \bar{V} от ширины L и подставим в уравнение для ширины (7.13)

$$\frac{dL}{d\sqrt{2s}} = 8\eta_1^2 \alpha \sqrt{\left[\frac{\bar{V}_0^2}{g_0} - \frac{\Phi(\eta_1) AL_0}{2\eta_1^2 (1+4k)} \right] \left(\frac{L_0}{L} \right)^{4k} + \frac{\Phi(\eta_1) AL}{2\eta_1^2 (1+4k)}}. \quad (7.27)$$

Очевидно, что при $L_0 \rightarrow 0$ решение стремится к автомодельному, чего нет при импульсном законе ускорения. Если $\frac{\bar{V}_0^2}{g_0} = \frac{\Phi(\eta_1) AL_0}{2\eta_1^2 (1+4k)}$, то уравнение

(7.27) имеет решение

$$\sqrt{L} = \sqrt{L_0} + 4\eta_1 \alpha \sqrt{\frac{\Phi(\eta_1) A}{1+4k}} \sqrt{s} \quad (7.28)$$

В случае, если $\bar{V}_0 \neq 0$ и умеренных значениях безразмерного параметра

$$\frac{\bar{V}_0^2}{g_0 L_0}$$

выход на решение (7.28) происходит довольно быстро в силу того, что, как будет показано ниже, степень $4k$ велика: $4k = 5$. Выше были представлены рассуждения в рамках приближенного рассмотрения

$\frac{\partial V}{\partial x} = 0$. На рис.7.3 нанесены решения, полученные путем интегрирования исходной системы уравнений (5.4), (5.5) при следующих параметрах: $A = 0.5$; $k = 1.25$; $\beta = 0.2$; $\alpha_2 = 0$ для $V_0 = 0$ и трех значений L_0 : 0.1; 0.45; 0.5.

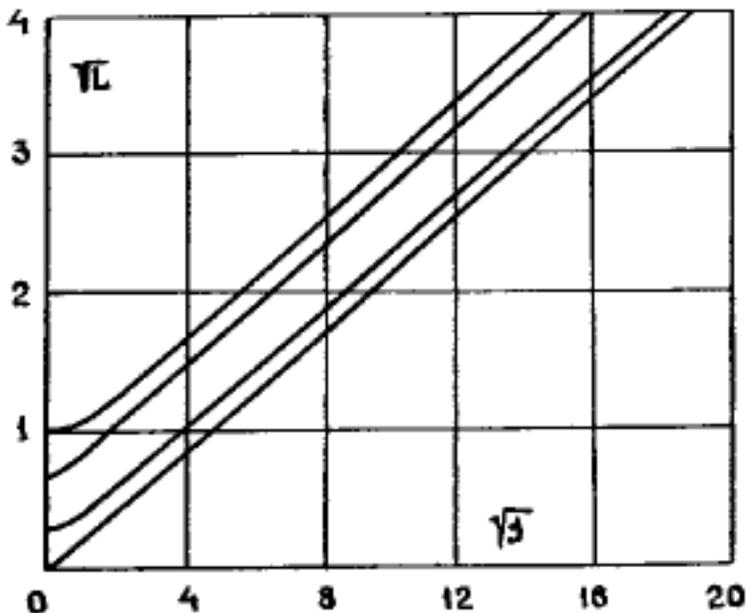


Рис. 7.3. Выход решения на автомодельный режим в зависимости от L_0 в переменных (\sqrt{L}, \sqrt{s}) , $A = 0.5$; $k = 1.25$.

Установление линейного закона в переменных \sqrt{L}, \sqrt{s} происходит довольно быстро.

4 Роль параметра α_2 .

Ниже будет изучено влияние постоянной α_2 на свойства решения и показано, что если α_2 положить ≈ 1 , то роль ее несущественна, и может проявляться только при значительных перепадах начальной плотности, т.е. при числах Атвуда, близких к 1.

Вернемся к уравнению (5.5) и усредним его с учетом того, что $\alpha_2 \neq 0$. Собственно это приведет к тому, что уравнение (7.10) останется в том же виде, только вместо коэффициента k , определяемого формулой (7.11), теперь следует взять другое k , обозначим его через \bar{k} :

$$\bar{k} = 0.25 + \frac{\nu}{16\eta_1^2\alpha^2} + \frac{\Phi(\sqrt{2}\eta_1)}{12\sqrt{2}}A^2 - \frac{2\alpha_2\alpha^2}{3}\eta_1^4A^4.$$

Очевидно, что при $\alpha_2 \approx 1$ роль последнего члена при малых A пренебрежимо мала. Она не существенна и при $A = 1$, поэтому часто полагают $\alpha_2 = 0$, что мы раньше в §6 и делали. Хотя в будущем при богатом экспериментальном материале этот член может потребоваться.

5 Учет несимметрии турбулентного перемешивания.

5.1 Определение несимметрии турбулентного перемешивания

Эксперименты и расчеты по полной модели показывают, что турбулентное перемешивание происходит несимметрично: интенсивность перемешивания в сторону легкого вещества больше интенсивности перемешивания в сторону тяжелого.

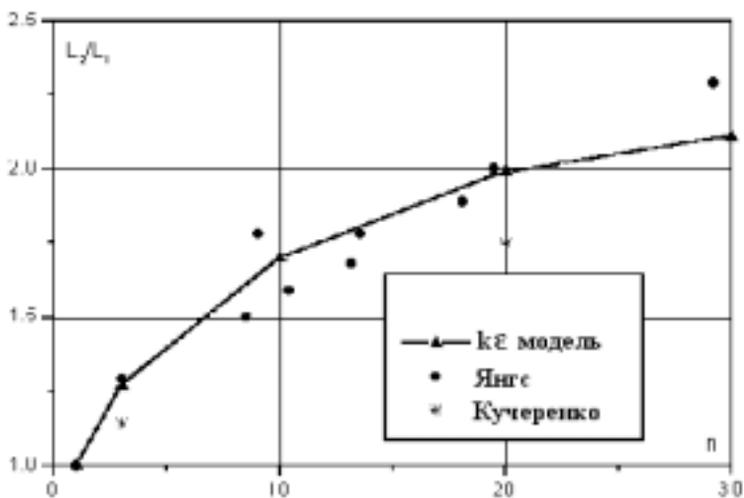


Рис. 7.4. Несимметрия перемешивания $\frac{L_2}{L_1}$ в зависимости от отношения плотностей

$$\eta = \frac{\rho_1}{\rho_2}.$$

На рис. 7.4 нанесена несимметрия $\frac{L_2}{L_1}$ в зависимости от перепада

плотностей $\eta = \frac{\rho_1}{\rho_2}$, полученная в опытах Янгса–Рида [], Кучеренко–

Пылаева [] и расчетно по $k\varepsilon$ -модели []. Некоторые различия между результатами могут объясняться разными способами определения фронтов перемешивания.

Если ориентироваться на результаты опытов Кучеренко–Пылаева [], в которых измерялся профиль плотности, а ширину перемешивания определять эффективно (интегральным способом, описанным выше (7.2)), то получим формулу

$$\frac{L_2}{L_1} = (1 + A)^{0.45}. \quad (7.29)$$

На рис. 7.4 значения по этой формуле обозначены пунктиром. Известно [см. § 6], что если ширины L_2 и L_1 определять по объемной концентрации f_i в

точке 0.1, то несимметрия будет изменяться в интервале [1;1.15]. Принятая нами формула (7.29) будет отвечать фронтам турбулентного перемешивания, определяемых по объемной концентрации $\approx 0.01 \div 0.02$.

5.2 Приближенные уравнения

Будем рассматривать задачу о перемешивании двух веществ с плотностями ρ_1 при $x > 0$ и ρ_2 при $x < 0$ при заданном ускорении $g = g(t)$, являющимся функцией времени. Можно построить аналитическое решение, предположив, что коэффициент турбулентной диффузии D является кусочно-постоянной функцией с разрывом в точке $x = 0$:

$$D = \begin{cases} \alpha L \bar{V}, & \text{если } x > 0; \\ \alpha \beta_2 L \bar{V}, & \text{если } x < 0, \end{cases} \quad (7.30)$$

где \bar{V} – среднее значение турбулентной скорости по области перемешивания $[-L_2, L_1]$, β_2 – новый эмпирический коэффициент, определяемый выше. В п.1 настоящего параграфа в (2.4) полагалось, что коэффициент $\beta_2 = 1$. Это приводило к симметричному перемешиванию, при котором $L_1 = L_2$.

Настоящее уточнение позволяет обеспечить необходимую несимметрию перемешивания, определяемую из эксперимента (или расчетно) через число Атвуда:

$$\sqrt{\beta_2} = (1 + A)^{0.45} \quad (7.31)$$

При таком предположении уравнение для плотности смеси (5.4) сводится к линейному уравнению диффузии с разрывным коэффициентом, а решение для двух несжимаемых жидкостей с начальными плотностями ρ_1 и ρ_2 представляется через интеграл вероятности Φ :

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial \tau} &= \frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2} \quad \text{при } x > 0, \\ \frac{\partial \rho}{\partial \tau} &= \beta_2 \frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2} \quad \text{при } x < 0, \\ \partial \tau &= \alpha L \bar{V} \partial t. \end{aligned} \right\} \quad (7.32)$$

$$\left. \begin{aligned}
 \rho &= \rho_0 + (\rho_1 - \rho_0)\Phi(\eta), \quad \text{если } \eta > 0, \\
 \rho &= \rho_0 + (\rho_0 - \rho_2)\Phi(\eta), \quad \text{если } \eta < 0, \\
 \rho_0 &= \frac{\rho_1 + \rho_2\sqrt{\beta_2}}{1 + \sqrt{\beta_2}}, \quad \Phi = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\eta e^{-z^2} dz, \\
 \eta &= \frac{x}{2\sqrt{\tau}}, \quad \text{если } x > 0, \\
 \eta &= \frac{x}{2\sqrt{\beta_2\tau}}, \quad \text{если } x < 0.
 \end{aligned} \right\} \quad (7.33)$$

Полученное решение (7.33) не имеет явно выраженного фронта, по которому можно было бы определить ширину области перемешивания. Поэтому фронт турбулентного перемешивания определяется, как и раньше, эффективно. Для этого вводятся объемные концентрации: f_1 и f_2 (см. (7.2)). По этим величинам предлагается интегральный способ определения ширин L_1^* и L_2^* :

$$L_2^* = 2 \int_{-\infty}^0 \frac{f_1 dx}{f_1(0)}; \quad L_1^* = 2 \int_0^{\infty} \frac{f_2 dx}{f_2(0)}. \quad (7.34)$$

Используя решение (7.33), получим

$$L_1 = 2\eta_1\sqrt{\tau}; \quad L_2 = 2\eta_1\sqrt{\beta_2\tau}; \quad \eta_1 = \frac{2}{\sqrt{\pi}}; \quad L = (1 + \sqrt{\beta_2})L_1.$$

Здесь и далее значок * опущен.

Осталось получить уравнение для средней турбулентной скорости $\bar{V}(t)$. Вернемся к уравнению (5.5) и осредним его по всей области перемешивания. Это дополнительное предположение упрощает получение аналитического решения и, как показывает последующий анализ, вполне оправдано.

Ввиду того, что положено $\frac{\partial V}{\partial x} = 0$, диффузионный член с коэффициентом β может быть опущен. Присутствующий в других членах уравнения (5.5) коэффициент D будем считать разрывным согласно (7.30). Так как полагаем скорость \bar{V} постоянной по всей области перемешивания, то это предположение для упрощения уравнения (5.5) вполне оправдано. Необходимая несимметрия в перемешивании достигнута введением разрывности (7.30) в коэффициент D для уравнения диффузии (5.3). Также

в уравнении (5.4) временную производную заменим согласно (5.5a).

Разрешим (5.5) на $D_+ = \alpha L \bar{V}_n$, перейдем к переменной τ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho V^2}{2 \partial \tau} + \frac{\nu \rho V^2}{\alpha^2 L^2} \frac{D}{D_+} = g \frac{D}{D_+} \frac{\partial \rho}{\partial x} + \frac{1}{2} \frac{D}{D_+} \frac{\partial \rho}{\partial x} \frac{\partial V^2}{\partial x} - \frac{1}{3} \rho V^2 \frac{D}{D_+} \left(\frac{\partial \ln \rho}{\partial x} \right)^2 + \frac{5}{6} V^2 \frac{\partial \rho}{\partial \tau} + \\ + \frac{4}{3} \alpha_2 \alpha^2 \rho L^2 V^2 \left[\frac{\partial \ln \rho}{\partial \tau} - \frac{D}{D_+} \left(\frac{\partial \ln \rho}{\partial x} \right)^2 \right]^2 \end{aligned} \quad (7.36)$$

Как и раньше, здесь $\partial \tau = \alpha L \bar{V} \partial t$. Чтобы получить среднее значение $\bar{V}(t)$ проведем осреднение уравнения (7.36) по области перемешивания $-L_2 \leq x \leq L_1$. Имеем:

$$\frac{d(\bar{V}^2 M)}{2 d\tau} + \frac{\nu \bar{V}^2 M}{\alpha^2 L^2} = \bar{g} \Phi(\eta_1) \sqrt{\beta_2} (\rho_1 - \rho_2) - \frac{\Phi(\sqrt{2} \eta_1) A_0^2 M \bar{V}^2}{12 \sqrt{2} \tau} X_p + \frac{\alpha_2 \alpha^2 M A_0^4 \bar{V}}{3 \tau} \quad (7.37)$$

где

$$M = \int_{-L_2}^{L_1} \rho dx = 2 \eta_1 (\rho_1 + \rho_2 \sqrt{\beta_2}) \sqrt{\tau} \quad (7.38)$$

$$A_0 = \frac{\rho_1 - \rho_2}{\rho_1 + \rho_2 \sqrt{\beta_2}}; \quad \sqrt{\beta_2} = (1 + A)^{0.45}; \quad A = \frac{\rho_1 - \rho_2}{\rho_1 + \rho_2} \quad (7.39)$$

$$X_p = \left[1 - \frac{A_0 \sqrt{2} (\sqrt{\beta_2} - 1) \eta_1^2}{4 \Phi(\sqrt{2} \eta_1)} \right] \sqrt{\beta_2};$$

$$X_0 = \frac{(1 + \sqrt{\beta_2})}{2} \left[\sqrt{\beta_2} + \beta_2^2 + \frac{3}{2} A_0 \sqrt{\beta_2} \eta_1^2 (1 - \beta_2^2) \right].$$

При выводе (7.37) были использованы следующие приближенные вычисления:

$$\text{a) } \int_{-L_2}^{L_1} \rho V^2 \frac{D}{D_+} dx = \bar{V}^2 M \frac{1 + \beta_2^{3/2}}{1 + \sqrt{\beta_2}};$$

$$б) \int_{-L_2}^{L_1} g \frac{\partial \rho}{\partial x} \sqrt{\beta_2} \frac{D}{D_+} dx = \bar{g} A_0 \Phi_1 \rho_0 \sqrt{\beta_2} (1 + \sqrt{\beta_2});$$

$$в) \int_{-L_2}^{L_1} \frac{\partial \rho}{\partial x} \frac{\partial V^2}{\partial x} dx \cong 0;$$

$$г) \int_{-L_2}^{L_1} V^2 \frac{\partial \rho}{\partial \tau} dx = 0;$$

д)

$$\int_{-L_2}^{L_1} \rho V^2 \left(\frac{\partial \ln \rho}{\partial x} \right)^2 \frac{D}{D_+} dx = \bar{V}^2 \int_{-L_2}^{L_1} \left(\frac{\partial \ln \rho}{\partial x} \right)^2 \frac{D}{D_+} dx \approx \frac{\Phi(\sqrt{2}\eta_1)}{4\sqrt{2}} \frac{A_0^2 M \bar{V}^2}{\tau} X_p$$

;

$$е) \int_{-L_2}^{L_1} \rho V^2 \left(\frac{\partial \ln \rho}{\partial x} \right)^4 \left(\frac{D}{D_+} \right)^2 dx = \frac{A_0^4 \eta_1^2 M \bar{V}^2}{32\tau^2 (1 + \sqrt{\beta_2})^2} X_0;$$

$$ж) \int_{-L_2}^{L_1} V^2 \rho \left[\left(\frac{\partial \ln \rho}{\partial \tau} \right)^2 - 2 \frac{\partial \ln \rho}{\partial \tau} \left(\frac{\partial \ln \rho}{\partial x} \right)^2 \right] dx = 0.$$

Следует также заметить, что при выводе формул д) и е) положено $\Phi(2\eta_1) \approx 1$, а также

$$\int_0^{\eta_1} e^{-4\eta^2} \Phi(\eta) d\eta \approx \frac{\eta_1}{4}; \quad \int_0^{\eta_1} e^{-2\eta^2} \Phi(\eta) d\eta \approx \frac{\eta_1}{4}; \quad \int_0^{\eta_1} e^{-4\eta^2} d\eta \approx \frac{1}{2\eta_1};$$

Перепишем уравнение (7.37), преобразуя его к привычному виду (7.10):

$$\frac{d\bar{V}^2}{2d\tau} + k_y \frac{\bar{V}^2}{\tau} = \frac{\Phi(\eta_1)}{2\eta_1 \sqrt{\tau}} \bar{g} A_0 \sqrt{\beta_2}. \quad (7.40)$$

Здесь коэффициент k_y имеет следующее значение:

$$k_y = 0.25 + \frac{\nu(1 + \beta_2^{3/2})}{4\alpha^2 \eta_1^2 (1 + \sqrt{\beta_2})^3} + \frac{\Phi(\sqrt{2}\eta_1)}{12\sqrt{2}} A_0^2 X_p - \frac{\alpha_2 \alpha^2 \eta_1^4}{3} A_0^4 X_0$$

(7.41)

Далее, как и раньше, согласно (7.32), вернемся к исходной переменной t , а в уравнении (7.40) от τ перейдем к L . Получим:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\bar{V}^2}{dL} + 4k_y \frac{\bar{V}^2}{L} &= \frac{\sqrt{\beta_2} \Phi(\eta_1) \bar{g} A_0}{\eta_1^2 (1 + \sqrt{\beta_2})}; \\ \frac{dL}{dt} &= 2\alpha \eta_1^2 (1 + \sqrt{\beta_2})^2 \bar{V}. \end{aligned} \right\} \quad (7.42)$$

Очевидно, что в предположении симметричного перемешивания $\beta_2 = 1$ и уравнения (7.42) переходят в уравнения (7.12) и (7.13).

5.3 Учет дополнительного ускорения. Выбор постоянных модели
Возникающее турбулентное перемешивание вызывает перемещение вещества со скоростью u :

$$u = -D \frac{\partial \ln \rho}{\partial x}.$$

Усредним это соотношение по области перемешивания $-L_2 \leq 0 \leq x \leq L_1$, предварительно умножив обе части равенства на ρ . Получим

$$\bar{u} = -\frac{\alpha L \bar{V} \sqrt{\beta_2} (\rho_1 - \rho_2) \Phi(\eta_1)}{M} = -\alpha (1 + \sqrt{\beta_2}) \sqrt{\beta_2} A_0 \bar{V} \Phi(\eta_1).$$

Возникающее движение приводит к смещению лагранжевой границы раздела, которое изменит ускорение этой границы:

$$\bar{g}_1 = \bar{g} + \frac{d\bar{u}}{dt} \approx \bar{g} - \alpha (1 + \sqrt{\beta_2}) \sqrt{\beta_2} A_0 \Phi(\eta_1) \frac{d\bar{V}}{dt}. \quad (7.43)$$

Дополнительное ускорение следует учесть при вычислении генерационного члена в уравнении для кинетической энергии турбулентности (7.36). Для этого в этом уравнении ускорение g нужно, согласно (7.43), заменить на \bar{g}_1 . Эта замена приведет к изменению в уравнении (7.42) коэффициента при

производной $\frac{d\bar{V}^2}{dL}$:

$$z_0 \frac{d\bar{V}^2}{dL} + 4k_y \frac{\bar{V}^2}{L} = \frac{\Phi(\eta_1) \sqrt{\beta_2}}{\eta_1^2 (1 + \sqrt{\beta_2})} \bar{g} A_0; \quad (7.44)$$

$$z_0 = 1 + \beta_2 \alpha^2 (1 + \sqrt{\beta_2})^2 A_0^2 \Phi^2(\eta_1).$$

Полученное уравнение является линейной относительно функции \bar{V}^2 и поэтому интегрируется при произвольном ускорении \bar{g} , зависящем от времени.

В модель входят три постоянные: α , α_2 ν . Выберем их. Для этого рассмотрим случай малых чисел Атвуда A_0 , когда $\beta_2 \approx 1$, $A_0 \approx A$ и в коэффициентах уравнения (7.44) можно заменить:

$$k_y \approx k_0 = 0.25 + \frac{\nu}{16\eta_1^2\alpha^2}; \quad z_0 \approx 1,$$

а ускорение задать в виде кусочно–постоянной функции:

$$g = \begin{cases} g_0, & \text{если } 0 \leq t \leq t_0, \\ 0, & \text{если } t > t_0. \end{cases}$$

При сделанных предположениях решение уравнения (7.44) получается в аналитическом виде (7.20). Для удобства прочтения перепишем (7.20):

$$L_1 = \begin{cases} \frac{8\alpha^2\eta_1^2\Phi(\eta_1)g_0At^2}{1+4k_0}, & 0 \leq t \leq t_0, \\ L_{10} \left[1 + \frac{2}{B_0} \frac{t-t_0}{t_0} \right]^{B_0}, & t > t_0. \end{cases} \quad (7.45)$$

$$L_{10} = \frac{8\alpha^2\eta_1^2\Phi(\eta_1)g_0t_0^2A}{1+4k_0}; \quad B_0 = \frac{1}{1+2k_0}.$$

При интегрировании положены нулевые начальные данные:

$$t = 0; \quad \bar{V}_0 = L_0 = 0.$$

Теория [14] и эксперимент [12] при $A = 0$ подсказывают, что степень B_0

равна $\frac{2}{7}$, следовательно, $k_0 = 1.25$ или $\frac{\nu}{16\eta_1^2\alpha^2} = 1$. Значение

постоянной α выбираем, следуя [7, 18, 19], из условия, что

$$L_1 = 0.06g_0At^2.$$

Постоянную α_2 полагаем равной 1. Вспоминая, что

$\eta_1 = 1.128$, $\Phi(\eta_1) = 0.89$, окончательно получим: $\alpha = 0.282$,

$\alpha_2 = 1$, $\nu = 1.62$. С этими постоянными проводится дальнейшее

исследование. Очевидно, что при $\alpha_2 = 1$ роль этой постоянной незначительна, поэтому ниже для простоты мы полагаем: $\alpha_2 = 0$.

5.4 Аналитические решения для постоянного и импульсного ускорений при произвольном числе Атвуда.

Как было показано выше, полученное уравнение (7.44) вместе с уравнением для ширины из (7.42) могут быть проинтегрированы как при постоянном, так и при импульсном ускорениях. Повторяя рассуждения пункта 3 настоящего параграфа, получим:

$$\frac{dL_1}{2ds} = J_1 = \frac{\alpha^2 \eta_1^2 \sqrt{\beta_2} (1 + \sqrt{\beta_2})^2 \Phi(\eta_1) A_0}{z_0 + 4k_y}. \quad (7.47)$$

Напомним, что $2s = g_0 t^2$, а величины β_2 , A_0 , k_y и z_0 зависят от числа Атвуда A . Получается сложная зависимость от A , она представлена графически на рис. 7.5.

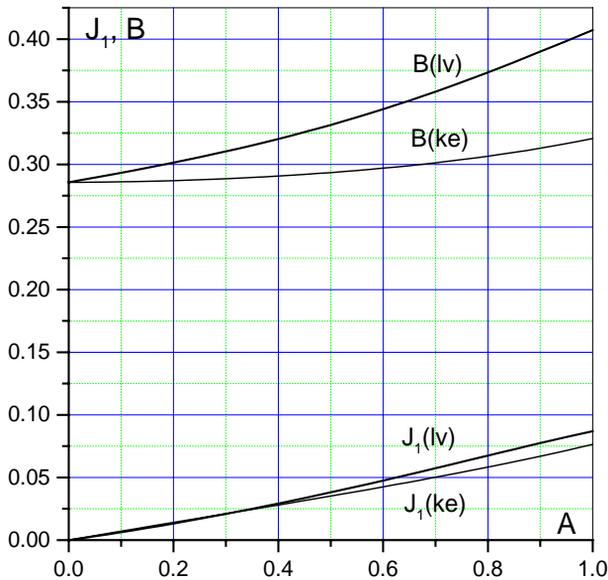


Рис.7.5. Зависимость интенсивностей $J_1 = \frac{L_1}{2s}$ и степеней затухания B от числа Атвуда A для ke и lv моделей.

Зависимость интенсивности J_1 можно аппроксимировать формулой:

$$J_1 = 0.06(1 + 0.47A) A. \quad (7.48)$$

Как видим, построенная зависимость заметно отличается от принятой Янгсом [] (7.45): в предельном случае $A = 1$ постоянная $\alpha = 0.06$ в формуле Янгса (7.45) эффективно должна быть увеличена в 1.47 раза.

Решение для импульсного ускорения получим в общем случае, когда $L_0(0) \neq 0$ и вводится безразмерный параметр $\beta = \frac{U_0 t_0}{L_0}$. Тогда, как и раньше, решение для полной ширины L получится из следующей системы уравнений

$$z_0 \frac{d\bar{V}^2}{dL} + 4k_y \frac{\bar{V}^2}{L} = \frac{\sqrt{\beta_2} \Phi(\eta_1)}{\eta_1^2 (1 + \sqrt{\beta_2})} \bar{g} A_0; \quad (7.49)$$

$$\frac{dL}{dt} = 2\alpha \eta_1^2 (1 + \sqrt{\beta_2})^2 \bar{V}. \quad (7.50)$$

Действие импульсного ускорения приводит к тому, что при начальной шероховатости $L_0 \neq 0$ за малое время t_0 формируются значения $\bar{V}_1(\beta)$ и L_{01} , которые в рассматриваемом случае получаются как и раньше в разделе 7.2, но теперь будут следующими:

$$\bar{V}_1(\beta) = U_0 \sqrt{\frac{z_0 \tilde{A} \Phi(\eta_1)}{2\eta_1^2 (z_0 + 4k_y) \beta} \frac{L_{10}}{L_0} \left[1 - \left(\frac{L_{10}}{L_0} \right)^{\frac{z_0 + 4k_y}{z_0}} \right]}; \quad (7.51)$$

$$\sqrt{\frac{L_{10}}{L_0}} = \begin{cases} \sqrt{1 + 8\eta_1^2 \tilde{\alpha}^2 \Phi(\eta_1) \tilde{A} \beta}, & \text{если } \beta \tilde{A} \leq \frac{z_0}{32k_y \eta_1^2 \tilde{\alpha}^2 \Phi(\eta_1)}; \\ \sqrt{\frac{4k_y}{z_0 + 4k_y} + 4\eta_1 \tilde{\alpha} \sqrt{\frac{z_0 \Phi(\eta_1) \tilde{A} \beta}{2(z_0 + 4k_y)}}}, & \text{если } \beta \tilde{A} \geq \frac{z_0}{32k_y \eta_1^2 \tilde{\alpha}^2 \Phi(\eta_1)}. \end{cases} \quad (7.52)$$

Здесь переписаны ранее полученные формулы раздела 7.2. Формально введены величины \tilde{A} , $\tilde{\alpha}$, чтобы уравнения (7.49) и (7.50) подогнать под вид уравнений (7.12) и (7.13):

$$z_0 = 1 + \alpha^2 \sqrt{\beta_2} (1 + \sqrt{\beta_2})^2 A_0^2 \Phi^2(\eta_1)$$

$$\tilde{A} = \frac{2A_0}{(1 + \sqrt{\beta_2}) z_0}; \quad \tilde{\alpha} = \alpha \frac{(1 + \sqrt{\beta_2})^2}{4}.$$

Решение после действия импульсного ускорения будет определяться формулами (7.25), (7.26). Значения $\bar{V}_1(\beta)$ и L_{01} следует теперь вычислять согласно (7.51), (7.52):

$$\bar{V} = \left(\frac{L_{10}}{L} \right)^{\frac{1-B}{B}} \bar{V}_1(\beta);$$

$$L = L_{10} \left[1 + 8\eta_1^2 \frac{\tilde{\alpha}}{L_{10}B} \bar{V}_1(\beta) (t - t_0) \right]^B; \quad (7.53)$$

$$B = \frac{z_0}{z_0 + 2k_y}.$$

Как видно из формулы (7.53) ширина области турбулентного перемешивания после действия импульсного ускорения будет расти по степенному закону со степенью B , а скорость турбулентного перемешивания будет убывать, т.к. степень $\frac{1-B}{B} < 0$. Интересно

проследить изменение степени B в зависимости от числа Атвуда A . Эта зависимость изображена на рис. 7.5. Она может быть аппроксимирована простой формулой:

$$B = \frac{2}{7} + 0.074(1 + 0.64A) A. \quad (7.54)$$

5.5 Переменное ускорение.

При обработке результатов экспериментов по определению постоянных теории турбулентного перемешивания чаще всего приходится иметь дело с непостоянным ускорением. Поэтому используют хорошо измеряемую в опыте характеристику – перемещение системы s , оно связано с ускорением очевидным соотношением $s = \iint g dt dt$.

Одна из главных постоянных α характеризует интенсивность развития перемешивания во времени и определяется на основании формулы (7.47)

$$\frac{dL}{2ds} = \frac{\alpha^2 \eta_1^2 (1 + \sqrt{\beta_2})^2 \Phi(\eta_1) A_0}{z_0 + 4k_y} \quad (7.55)$$

Пусть ускорение имеет вид

$$g = g_0 t^m, \quad (7.56)$$

где степень m может быть как положительной, так и отрицательной. Значение $m = -1$ является особым ввиду расходимости интеграла от ускорения, поэтому будем считать $m > -1$. Решение при переменном ускорении построено в § 7. В общем случае оно не получается в явной форме, а представляется в виде функциональных и дифференциальных соотношений.

$$\bar{V}^2 = \frac{\Phi(\eta_1) \tilde{A}}{2\eta_1^2} L^{-\frac{4k_y}{z_0} L} \int_0^{\frac{4k_y}{z_0} L} g L^{\frac{4k_y}{z_0}} dL, \quad \frac{dL}{dt} = 8\eta_1^2 \tilde{\alpha} \bar{V}. \quad (7.57)$$

Для простоты здесь рассматриваются нулевые начальные данные: при $t = 0$: $L_0 = V_0 = 0$.

Основная цель исследования – получить формулу для отношения $\frac{L}{2s}$ при ускорении (7.56). Используя (7.56) вычислим перемещение s :

$$s = \frac{g_0 t^{m+2}}{(m+1)(m+2)} \quad (7.58)$$

В (7.57) от t перейдем к s и получим:

$$\frac{L}{2s} = \frac{z_0 (m+1)}{z_0 (m+1) + 2k_y (m+2)} 8\eta_1^2 \tilde{\alpha}^2 \Phi(\eta_1) \tilde{A} \quad (7.59)$$

При $m = 0$ (постоянное ускорение) множитель обращается в $\frac{z_0}{z_0 + 4k_y}$ и

формула (7.59) переходит в (7.55). При $m > 0$ интенсивность увеличивается за счет увеличения множителя до предельного значения $\frac{1}{1+2k}$. При $m < 0$ интенсивность уменьшается. Формально при $m = -1$

множитель обращается в нуль. При $k_y = 1.25$ имеем:

$$\frac{L}{2s} = \frac{m+1}{3.5m+6} 8\eta_1^2 \tilde{\alpha}^2 \Phi(\eta_1) \tilde{A}.$$

Отметим один предельный случай. Если $k_y = 0$, то множитель в (7.59) не зависит от m .

6 Влияние начального размытия профиля плотности на затяжку в развитии турбулентного перемешивания

Известно, что если граница раздела первоначально размыта, то это существенным образом может повлиять на развитие турбулентного перемешивания. Прежде всего непрерывность профиля плотности приводит

к ограничению в значении инкремента $\omega^2 = g \frac{\partial \rho}{\partial x}$. Так выглядит

инкремент для коротких волн, при больших значениях волнового числа k .

При разрывной плотности имеем $\omega^2 = gAk$, где $k = \frac{1}{L}$. Поэтому при

$L \rightarrow \infty$ имеем неограниченный рост инкремента, в отличие от случая с размытым профилем плотности.

Экспериментально получено, что при непрерывном распределении плотности может происходить задержка в развитии турбулентного перемешивания. Получены количественные оценки такой задержки. Ниже проведено теоретическое исследование этого явления и получены аналитические формулы, устанавливающие зависимость величины задержки от параметров задачи.

Пусть L_c эффективная ширина, на которую размыта плотность у границы раздела.

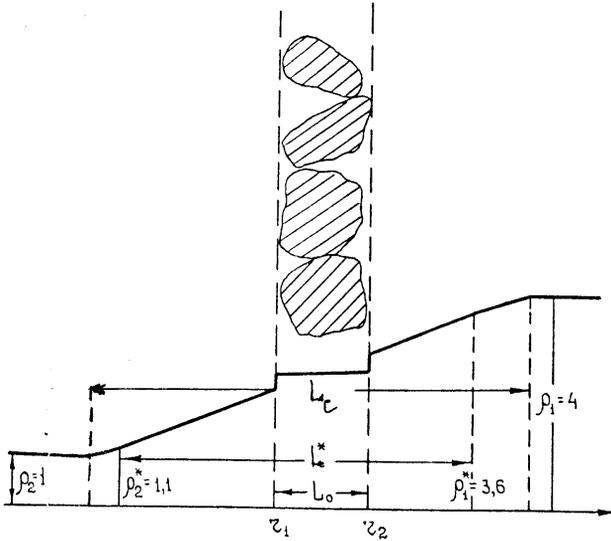


Рис.7.5

В области заданы начальные возмущения, приводящие к развитию турбулентности. В экспериментах это частички промежуточной плотности. В нашем рассмотрении это может быть задание некоторой начальной кинетической энергии турбулентности $k(L_0)$. Оказывается, если определить время задержки как время t_c , при котором ширина перемешивания сравняется с шириной размытия $L = L_c$, то справедлива формула

$$\sqrt{\frac{L_c}{L_0}} = \exp\left(2\eta_1\alpha\sqrt{\frac{\Phi_1 g A}{(1+2k)L_c}}t_c\right) \quad (7.60)$$

Получим ее.

Уравнение (7.12) следует переписать в виде:

$$\frac{d\bar{V}^2}{dL} + 4k\frac{\bar{V}^2}{L} = \begin{cases} \frac{\Phi_1 g A}{2\eta_1^2} \frac{L}{L_c}, & \text{если } L \leq L_c, \\ \frac{\Phi_1 g A}{2\eta_1^2}, & \text{если } L > L_c. \end{cases}$$

Интегрирование полученного уравнения приводит к решению

$$\bar{V}^2 = \begin{cases} \frac{\Phi_1 g A L^2}{4\eta_1^2 L_c (1+2k)}, & L \leq L_c, \\ \bar{V}_c^2 + \frac{\Phi_1 g A L}{2\eta_1^2 (1+4k)} \left[1 - \frac{L_c}{L}\right]^{1+4k}, & L > L_c. \end{cases} \quad (7.61)$$

$$\bar{V}_c^2 = \frac{\Phi_1 g A L_c}{4\eta_1^2 (1+2k)}.$$

Подставим эту зависимость в уравнение для ширины L (7.13) и получим:

$$\sqrt{L} = \begin{cases} \sqrt{L_0} \exp\left(2\eta_1 \alpha \sqrt{\frac{\Phi_1 g A}{(1+2k)L_c}} t\right), & L < L_c, \\ \sqrt{L_c} + 2\eta_1 \sqrt{\frac{\delta\Phi_1 g A}{(1+4k)L_c}} (t - t_c), & L > L_c. \end{cases}$$

Здесь при $L > L_c$ выписано приближенное представление решения.

Обратим внимание на существенную зависимость решения от начальной затравочной шероховатости L_0 . Нулевому значению L_0 отвечает тривиальное решение. Это подтверждается и в экспериментах. Если не задавать начальных возмущений, то перемешивание не развивается.

Формула (7.60) получается, если в (7.62) положить $L = L_c$.

Как уже отмечалось, зависимость задержки перемешивания изучалась экспериментально. Наличие формулы (7.60) позволяет обработать эксперименты, перейдя к плоскости переменных (x, y) :

$$x = \ln \frac{L_c}{L_0}; \quad y = \sqrt{\frac{s_c}{L_c}},$$

где $s_c = \frac{gt_c^2}{2}$ – смещение системы при $t = t_c$. Тогда результаты

экспериментов должны ложиться на прямую с наклоном $\frac{1.02}{\sqrt{A}}$;

$$y = \frac{1.02}{\sqrt{A}} x + 1.5.$$

Результаты обработки изображены на рис. 7.6.

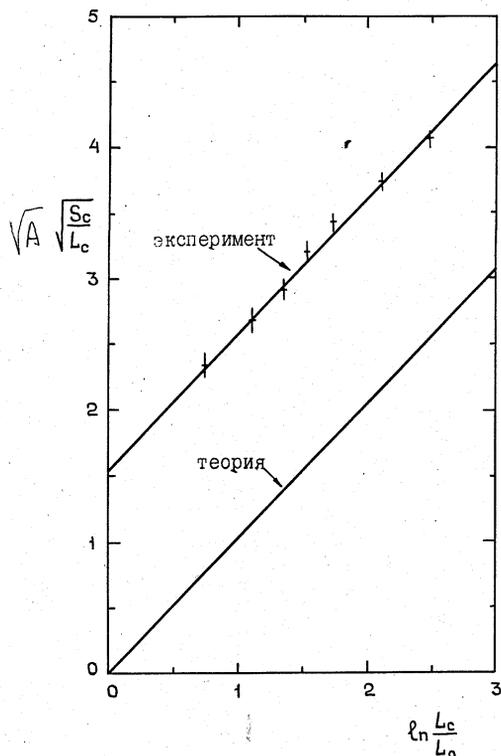


Рис.7.6

Коэффициент при x почти совпадал с экспериментальным. Заметим, что его теоретическое значение может быть уточнено за счет учета несимметрии перемешивания. Таким образом получено косвенное подтверждение правильности проведенного ранее выбора постоянных α и ν .

Экспериментальная прямая в отличие от теоретической не проходит через начало координат ($x=0$, $y=0$). Это можно объяснить разными способами определения шероховатости в опыте и в теории. Если положить

$$L_0 = c_0 L_0^{\text{exp}}, \text{ то прямая пройдет через нуль при } c_0 = 0.32$$

§ 8 кε – модель и ее свойства

Модель турбулентного перемешивания, основанная на уравнении баланса для кинетической энергии турбулентности (lv или k моделей), может с успехом применяться для численного моделирования довольно широкого класса задач [1]. Модель описывает известные лабораторные эксперименты по гравитационному перемешиванию [2], а также позволяет получать количественные оценки влияния турбулентного перемешивания при решении конкретных задач [3].

Однако обратим внимание на один недостаток k -модели – она требует вычисления эффективной ширины перемешивания. Этот недостаток проявляется при расчетах взаимодействия перемешанных областей между собой, а также при обобщении модели на многомерный случай. Он легко устраняется введением еще одного уравнения для скорости диссипации кинетической энергии турбулентного перемешивания, аналогичного уравнению для кинетической модели турбулентности. Модели такого типа называют $k\epsilon$ -моделями. Они широко применяются для описания сдвигового перемешивания, особенно в струйных течениях [5], $k\epsilon$ -модели также использовались и для описания гравитационного перемешивания [6]. Изучению свойств $k\epsilon$ -модели на автомодельных решениях посвящена работа [7].

В настоящем параграфе рассмотрена $k\epsilon$ -модель, содержащая уравнение баланса для кинетической энергии турбулентности k и уравнение скорости диссипации турбулентной энергии ϵ_t . В разделе 1 приводятся уравнения модели, в разделе 2 в приближении кусочно-постоянного коэффициента диффузии получена осредненная по области перемешивания система обыкновенных дифференциальных уравнений (8.8). Эта система справедлива для закона ускорения, зависящего произвольным образом от времени. Заметим, что уравнения получены с учетом несимметрии турбулентного перемешивания. В разделе 3 система (8.8) интегрируется при кусочно-постоянном ускорении. Решение при нулевых начальных данных представляется в аналитическом виде.

Этот вид довольно громоздок, поэтому для практических приложений приводятся простые приближенные выражения, устанавливающие зависимости интенсивности и степени затухания турбулентного перемешивания от числа Атвуда. В разделе 4 подробно исследуется случай ненулевых начальных данных.

1 Уравнение $k\varepsilon$ -модели в приближении несжимаемости

Полуэмпирическая модель с балансным уравнением для кинетической энергии турбулентности, в которой масштаб турбулентности l связывается с шириной области перемешивания L , обладает тем недостатком, что в момент взаимодействия нескольких областей ширина области перемешивания изменяется скачком, что в свою очередь приводит к скачку в значении коэффициента диффузии $D = lv$, а это вряд ли отвечает действительности. Поэтому для полной ширины приходится искать всякого рода интерполяционные зависимости.

Для сдвиговых течений со свободными границами известны модели с уравнениями для масштаба l или для коэффициента диффузии D , пропорционального $l\sqrt{k}$. В этом случае турбулентность описывается двумя дополнительными уравнениями: для кинетической энергии турбулентности k и, например, для масштаба турбулентности l . Эти два уравнения дополняют газодинамические уравнения, полученные после осреднения и содержащие турбулентную вязкость и турбулентную теплопроводность. В качестве второго дополнительного уравнения часто используется уравнение переноса для скорости диссипации турбулентной кинетической энергии, обозначаемой ε_t и связанной с масштабом l и кинетической энергией k соотношением $\varepsilon_t = k^{\frac{2}{3}}l^{-1}$. Модель такого типа называют в отличие от $k\varepsilon$ -модели с одним уравнением $k\varepsilon$ -моделью.

Исходные уравнения подсказаны обзорной работой П.Харши [5].

$$\rho \frac{dk}{dt} + \rho \varepsilon_t = \rho D_\varepsilon \omega^2 + \alpha_k \frac{\partial}{\partial x} (\rho D_\varepsilon) \frac{\partial k}{\partial x} + \frac{2}{3} k \frac{d\rho}{dt}, \quad (8.1)$$

$$\rho \frac{d\varepsilon_t}{dt} + c_{\varepsilon 2} \frac{\varepsilon_t^3}{k} \rho = c_{\varepsilon 1} \rho \frac{\varepsilon_t}{k} D_\varepsilon \omega^2 + \alpha_\varepsilon \frac{\partial}{\partial x} (\rho D_\varepsilon) \frac{\partial \varepsilon_t}{\partial x} + \frac{4}{3} \varepsilon_t \frac{d\rho}{dt} \quad (8.2)$$

Здесь

$$\omega^2 = g \left(\frac{\partial \ln L}{\partial t} + \frac{g}{c^2} \right);$$

$$k = \frac{V^2}{2}; \quad D_\varepsilon = c_\mu \frac{k^2}{\varepsilon_t}; \quad \frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} - D_\varepsilon \frac{\partial \ln \rho}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x}, \quad (8.3)$$

$c_\mu, c_{\varepsilon 1}, c_{\varepsilon 2}, \alpha_\varepsilon, \alpha_k$ – постоянные модели, C – скорость звука. В настоящем рассмотрении $C = \infty$. Новая функция \mathcal{E}_t определяет скорость диссипации кинетической энергии турбулентности. В $k\varepsilon$ -уравнения не входит в явном виде ширина области перемешивания, и этим она выгодно отличается от k -модели, позволяя описывать перемешивание произвольного числа веществ.

Уравнения (8.1) и (8.2) часто используются в приложениях. Подчеркнутые члены другими исследователями не всегда учитываются, хотя они получаются в результате осреднения исходных уравнения газовой динамики. Уравнение для скорости диссипации \mathcal{E}_t составляется по аналогии с уравнением баланса для кинетической энергии турбулентности k , вывод которого был дан в § 4. Как будет показано ниже, роль подчеркнутых членов может быть заметной при числах Атвуда, близких к единице.

2. Приближение кусочно–постоянного коэффициента диффузии

Будем рассматривать две несжимаемые жидкости, находящиеся в поле силы тяжести g . Построим приближенную модель, полагая, что в области перемешивания функции k и \mathcal{E}_t являются функциями времени, а по пространственной переменной x эти функции постоянны. Для уравнений $k\varepsilon$ -модели так же, как это было сделано в §7 для k -модели, можно применить приближение кусочно–постоянного коэффициента диффузии D_ε :

$$D_\varepsilon = \begin{cases} c_\mu \frac{\bar{k}^2}{\bar{\varepsilon}_t}, & \text{если } x > 0, \\ c_\mu \beta_2 \frac{\bar{k}^2}{\bar{\varepsilon}_t}, & \text{если } x < 0, \end{cases} \quad (8.4)$$

где β_2 – коэффициент, определяемый эмпирически, согласно формуле (7.31). Энергия \bar{k} и интенсивность $\bar{\varepsilon}_t$ являются функциями только времени, получаемые в результате осреднения исходных уравнений модели (8.1) и (8.2) по области перемешивания $[-L_2, L_1]$. Таким образом, полагая коэффициент турбулентной диффузии D_ε разрывным, удается описать наблюдаемую в экспериментах несимметрию перемешивания и получить аналитические формулы, пригодные для обработки широкого класса прикладных задач.

Как и раньше, рассмотрим сперва уравнение для плотности смеси (2.1), которое с учетом допущения (8.4) перейдет в следующее:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial \tau} &= \frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2}, \quad \text{при } x > 0, \\ \frac{\partial \rho}{\partial \tau} &= \beta_2 \frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2} \quad \text{при } x < 0, \\ \partial \tau &= c_\mu \frac{\bar{k}^2}{\bar{\varepsilon}_i} dt. \end{aligned} \right\} \quad (8.5)$$

Эти уравнения совпадают с ранее полученными (7.32). Определение эффективной ширины остается прежним [см. (7.2)]:

$$L_1 = 2\eta_1 \sqrt{\tau}; \quad L_2 = 2\eta_1 \sqrt{\beta_2 \tau}; \quad L = L_1 + L_2 = 2\eta_1 (1 + \sqrt{\beta_2}) \sqrt{\tau}. \quad (8.6)$$

Прежде чем провести осреднение уравнений (8.1) и (8.2) разделим их на коэффициент диффузии $D_{\varepsilon+}$. Аналогично мы поступали в §7 для k -модели.

Перейдем к эйлеровым координатам и получим:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \rho k}{\partial \tau} + \rho \frac{\varepsilon_i}{D_{\varepsilon+}} &= g \frac{D_\varepsilon}{D_{\varepsilon+}} \frac{\partial \rho}{\partial x} + \frac{\alpha_8}{D_{\varepsilon+}} \frac{\partial}{\partial x} \rho D_\varepsilon \frac{\partial k}{\partial x} + \\ &+ \frac{D_\varepsilon}{D_{\varepsilon+}} \frac{\partial \ln \rho}{\partial x} \frac{\partial \rho k}{\partial x} + \frac{5}{3} k \left[\frac{\partial \rho}{\partial \tau} - \rho \frac{D_\varepsilon}{D_{\varepsilon+}} \left(\frac{\partial \ln \rho}{\partial x} \right)^2 \right]; \\ \frac{\partial \rho \varepsilon_i}{\partial \tau} + \frac{c_{\varepsilon 2} \rho \varepsilon_i^2}{k D_{\varepsilon+}} &= \frac{c_\mu c_{\varepsilon 1} k}{D_{\varepsilon+}} g \frac{\partial \rho}{\partial x} + \frac{\alpha_{\varepsilon 8}}{D_{\varepsilon+}} \frac{\partial}{\partial x} \rho D_\varepsilon \frac{\partial \varepsilon_i}{\partial x} + \\ &+ \frac{D_\varepsilon}{D_{\varepsilon+}} \frac{\partial \ln \rho}{\partial x} \frac{\partial \rho \varepsilon_i}{\partial x} + \frac{7}{3} \varepsilon_i \left[\frac{\partial \rho}{\partial \tau} - \rho \frac{D_\varepsilon}{D_{\varepsilon+}} \left(\frac{\partial \ln \rho}{\partial x} \right)^2 \right]. \end{aligned} \right\} \quad (8.7)$$

Здесь, согласно (8.5)

$$\partial \tau = D_{\varepsilon+} dt = c_\mu \frac{\bar{k}^2}{\bar{\varepsilon}_i} dt.$$

Как уже отмечалось, значок «+» в коэффициенте диффузии $D_{\varepsilon+}$ означает, что из формулы (8.4) берется только верхнее значение при $x > 0$.

Проведем осреднение по области $[-L_2, L_1]$. Значения L_1 и L_2 связаны с переменной τ соотношениями (8.6). Здесь следует заметить, что отношение коэффициентов $\frac{D_\varepsilon}{D_{\varepsilon+}}$, входящее в (8.7), будет в точке $x = 0$

иметь разрыв, а это нужно учитывать при получении осредненных формул. Окончательный результат после осреднения получим в виде:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\bar{k}}{dL^2} - P_0 \frac{\bar{k}}{L^2} + \frac{1}{4\eta_1^2 (1 + \sqrt{\beta_2})^2} \frac{\bar{\varepsilon}_t^2}{c_\mu \bar{k}^2} &= \frac{P_1}{2\eta_1 L (1 + \sqrt{\beta_2})}; \\ \frac{d\bar{\varepsilon}_t}{dL^2} - P_2 \frac{\bar{\varepsilon}_t}{L^2} + \frac{c_{\varepsilon 2}}{4\eta_1^2 (1 + \sqrt{\beta_2})^2} \frac{\bar{\varepsilon}_t^3}{c_\mu \bar{k}^3} &= \frac{c_{\varepsilon 1} P_1}{2\eta_1 L (1 + \sqrt{\beta_2})} \frac{\bar{\varepsilon}_t}{\bar{k}}; \\ \frac{dL^2}{dt} &= 4\eta_1^2 (1 + \sqrt{\beta_2})^2 c_\mu \frac{\bar{k}^2}{\bar{\varepsilon}_t}; \end{aligned} \right\} \quad (8.8)$$

где

$$\begin{aligned} P_0 &= -0.5 - \frac{\Phi(\sqrt{2}\eta_1) A_0^2}{6\sqrt{2}} X_P; \\ P_1 &= \frac{\Phi(\eta_1) \sqrt{\beta_2} \bar{g} A_0}{2\eta_1}; \\ P_2 &= -0.5 - \frac{\Phi(\sqrt{2}\eta_1) A_0^2}{3\sqrt{2}} X_P. \end{aligned}$$

Теперь поясним алгоритм получения выше приведенных формул. Он во многом напоминает процедуру осреднения для k -модели. А именно, использованы следующие формулы:

$$\begin{aligned} \text{а) } \int_{-L_2}^{L_1} \rho k dx &= \bar{k} M; \quad \text{где } M = 2\eta_1 (\rho_1 + \rho_2 \sqrt{\beta_2}) \sqrt{\tau}; \\ \text{б) } \int_{-L_2}^{L_1} g \frac{D_\varepsilon}{D_{\varepsilon+}} \frac{\partial \rho}{\partial x} dx &= \bar{g} \Phi(\eta_1) \sqrt{\beta_2} (\rho_1 - \rho_2) = \bar{g} A_0 \Phi_1 \rho_0 \sqrt{\beta_2} (1 + \sqrt{\beta_2}); \\ \text{в) } \int_{-L_2}^{L_1} \frac{\partial \rho}{\partial x} \frac{\partial k}{\partial x} dx &\approx 0; \quad \int_{-L_2}^{L_1} \frac{\partial \rho}{\partial x} \frac{\partial \varepsilon_t}{\partial x} dx \approx 0; \end{aligned}$$

$$\text{г) } \int_{-L_2}^{L_1} k \frac{\partial \rho}{\partial \tau} dx = 0;$$

$$\text{д) } \int_{-L_2}^{L_1} \rho k \left(\frac{\partial \ln \rho}{\partial x} \right)^2 \frac{D_\varepsilon}{D_{\varepsilon+}} dx = \frac{\Phi(\sqrt{2}\eta_1) A_0^2 X_p M \bar{k}}{4\sqrt{2} \tau};$$

$$\text{е) } \int_{-L_2}^{L_1} \rho \varepsilon_t \left(\frac{\partial \ln \rho}{\partial x} \right)^2 \frac{D_\varepsilon}{D_{\varepsilon+}} dx = \frac{\Phi(\sqrt{2}\eta_1) A_0^2 X_p M \bar{\varepsilon}_t}{4\sqrt{2} \tau}.$$

Возвращаясь к системе уравнений (8.7) с учетом соотношений а) – е) получим:

$$\frac{d(\bar{k}M)}{d\tau} + \frac{\bar{\varepsilon}_t^2}{c_\mu \bar{k}^2} M = \Phi(\eta_1) \sqrt{\beta_2} (\rho_1 - \rho_2) \bar{g} - \frac{\Phi(\sqrt{2}\eta_1)}{6\sqrt{2}} A_0^2 M X_p \frac{\bar{k}}{\tau};$$

$$\frac{d(\bar{\varepsilon}_t M)}{d\tau} + \frac{c_{\varepsilon 2} \bar{\varepsilon}_t^3}{c_\mu \bar{k}^3} M = c_{\varepsilon 1} \Phi(\eta_1) \bar{g} \sqrt{\beta_2} (\rho_1 - \rho_2) \frac{\bar{\varepsilon}_t}{\bar{k}} - \frac{\Phi(\sqrt{2}\eta_1)}{3\sqrt{2}} A_0^2 M X_p \frac{\bar{\varepsilon}_t}{\tau}$$

Используя соотношение $L = 2\eta_1 (1 + \sqrt{\beta_2}) \sqrt{\tau}$, получим (8.8).

Если положить $\beta_2 = 1$, что справедливо при числах Атвуда близких к нулю, то в системе (8.8) следует положить $X_p = 1$ и $A_0 = A$. Такой симметричный случай был изучен в работе [].

3. Свойства решений системы (8.8).

Решение при кусочно–постоянном ускорении

Исследуем свойства решений системы уравнений (8.8). Заметим, что эти уравнения интегрируются в двух случаях: при постоянном ускорении $\bar{g} = \text{const}$ ($P_1 = \text{const}$), а также при отключенном ускорении $\bar{g} = 0$ ($P_1 = 0$). Последний случай отвечает асимптотическому режиму, на который выходит решение задачи о перемешивании слоя смеси с начальной кинетической энергией $\bar{k}(0)$, имеющего в начальный момент конечную ширину L_0 .

Пусть $\bar{g} = const$. В этом случае, естественно при $L = 0$ принять $\bar{\varepsilon}_t = \bar{k} = 0$. Эта точка является особой для системы уравнений (8.8). Исследование поведения интегральных кривых, проведенное в Приложении 5, показывает, что при нулевых начальных данных решение многозначно: существует однопараметрическое семейство интегральных кривых, удовлетворяющее нулевым начальным данным. Кроме того, помимо этого свойства, есть единственное решение, которое при постоянном ускорении обеспечивает квадратичный закон от времени. Это решение получено в Приложении 5 и имеет вид:

$$L = \frac{0.5\eta_1 \left(1 + \sqrt{\beta_2}\right) c_\mu (c_{\varepsilon_2} - c_{\varepsilon_1})^2 P_1 t^2}{\prod_{i=1}^2 \left[c_{\varepsilon_i} (1 - 2P_0) - 0.5 + 2P_2 \right]}. \quad (8.9)$$

Пусть $\bar{g} = 0$, $(P_1 = 0)$. Система уравнений (8.8) значительно упрощается

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\bar{k}}{d\tau} &= \frac{\bar{k}}{\tau} P_0 - \frac{\bar{\varepsilon}_t^2}{c_\mu \bar{k}^2}; \\ \frac{d\bar{\varepsilon}_t}{d\tau} &= \frac{\bar{\varepsilon}_t}{\tau} P_2 - \frac{c_{\varepsilon_2} \bar{\varepsilon}_t^3}{c_\mu \bar{k}^3}. \end{aligned} \right\} \quad (8.10)$$

Эта система имеет интеграл

$$\frac{\bar{\varepsilon}_t^2}{c_\mu \bar{k}} = \frac{3P_0 - 1 - 2P_2}{P_0(3 - 2c_{\varepsilon_2})} \frac{\bar{k}}{\tau} \quad (8.11)$$

Используя его, получим решения системы уравнений (8.10).

$$\left. \begin{aligned} \bar{k} &= k_1 \left(\frac{\tau}{\tau_1} \right)^{\frac{B_\varepsilon - 1}{B_\varepsilon}} \\ \bar{\varepsilon}_t &= \sqrt{c_\mu \frac{3P_2 - 1 - 2P_2}{P_0(3 - 2c_{\varepsilon_2})} k^{\frac{3}{2}} \tau_1^{\frac{1}{2B_\varepsilon}} \tau^{\frac{2B_\varepsilon - 3}{2B_\varepsilon}}} \\ B_\varepsilon &= \frac{1.5 - c_{\varepsilon_2}}{1 - P_2 + c_{\varepsilon_2}(P_0 - 1)} \end{aligned} \right\} \quad (8.12)$$

k_1 и τ_1 вычисляются согласно формулам (П.5.3) и (П.5.4) в конце интервала t_0 , на котором ускорение постоянно:

$$k_1 = \frac{P_1(c_{\varepsilon 2} - c_{\varepsilon 1})}{c_{\varepsilon 2}(0.5 - P_0) - 0.25 + P_2} \sqrt{\tau_1};$$

$$\sqrt{\tau_1} = \frac{c_\mu P_1 (c_{\varepsilon 2} - c_{\varepsilon 1})^2 t_0^2}{16 \prod_{i=1}^2 [0.25 - P_2 + c_{\varepsilon i} (P_0 - 0.5)]}.$$

Получим формулу для ширины L . Решение (8.12) подставим в третье уравнение (8.8), которое может быть представлено в виде:

$$\frac{d\tau}{dt} = c_\mu \frac{\bar{k}^2}{\bar{\varepsilon}_t}.$$

Окончательно получим сперва выражение для $\sqrt{\tau}$, а затем для ширины L при $t \geq t_0$:

$$\sqrt{\tau} = \sqrt{\tau_1} \left[1 + \frac{1}{B_\varepsilon} \sqrt{\frac{c_\mu k_1 (3 - 2c_{\varepsilon 2})}{(3P_0 - 1 - 2P_2) \tau_1}} (t - t_0) \right]^{B_\varepsilon};$$

$$L = L_{10} \left[1 + \frac{1}{B_\varepsilon} \sqrt{\frac{c_\mu k_1 (3 - 2c_{\varepsilon 2})}{(3P_0 - 1 - 2P_2) \tau_1}} (t - t_0) \right]^{B_\varepsilon} \quad (8.13)$$

где $L_{10} = L(t = t_0)$.

Обратим внимание, что при $t = t_0$ кинетическая энергия \bar{k} принимает значение k_1 , а значение фиксированной функции $\bar{\varepsilon}_t$ будет разрывным в силу того, что при ее вычислении используются разные выражения (П.5.2) при $t \leq t_0$ и (8.11) при $t = t_0$. Именно:

$$\bar{\varepsilon}_t^2(t_0 - 0) = \varepsilon_1 \frac{0.25 - P_2 + c_{\varepsilon 1} (P_0 - 0.5)}{c_{\varepsilon 1} - c_{\varepsilon 2}} c_\mu \frac{\bar{k}_1^3}{\tau_1}$$

$$\bar{\varepsilon}_t^2(t_0 + 0) = \frac{P_0 - 1 + 2P_2}{P_0(3 - 2c_{\varepsilon 2})} c_\mu \frac{\bar{k}_1^3}{\tau_1}.$$

Однако, значение $\bar{\varepsilon}_t$ будет в точке $t = t_0$ непрерывным в частном случае выбора постоянной $c_\varepsilon = 1.5$.

Таким образом, решение для полной ширины будет определяться формулой (8.9). на интервале $[0, t_0]$ постоянного ускорения и (8.13) при выключенном ускорении. Формулу (8.10) можно представить в более общем виде, пригодном в и случае медленно изменяющегося ускорения, если перейти, как и раньше в §7 для lv-модели, от времени t к

$$\text{перемещению } s = \frac{gt^2}{2}.$$

$$L = \frac{c_\mu \Phi_1 A_0 (1 + \sqrt{\beta_2}) \sqrt{\beta_2} (c_{\varepsilon 2} - c_{\varepsilon 1})^2 s}{2 \prod_1 [0.5 - 2P_2 + c_{\varepsilon 1} (2P_0 - 1)]}. \quad (8.14)$$

Обратим внимание, что зависимость от числа Атвуда A проявляется через параметры A_0 , $\sqrt{\beta_2}$, P_0 , P_2 , которые определены выше. Позже эта зависимость будет исследована более детально.

Из формул (8.13) и (8.14) вытекают важные следствия относительно постоянных ke-модели:

1) степень затухания турбулентного перемешивания при выключенном ускорении определяется только постоянной $c_{\varepsilon 2}$, 2) интенсивность

турбулентного перемешивания $J = \frac{dL}{2\alpha s}$ зависит линейно от постоянной

c_μ и разности $(c_{\varepsilon 2} - c_{\varepsilon 1})$, входящей в степени 2. 3) степень затухания турбулентности B_ε и интенсивности турбулентного перемешивания J

зависят от числа Атвуда A через параметры A_0 , P_0 , P_2 . Однако, чтобы получить окончательные формулы, следует как и в §7 уточнить решение за счет учета дополнительного ускорения.

4. Учет дополнительного ускорения

Прежде чем это сделать, перейдем к частному случаю модели, когда $c_{\varepsilon 1} = 1.5$. Тогда уравнения (8.8) допускают интеграл, верный как при постоянном ускорении, так и при нулевом. Эта будет формула (8.11). Ее можно переписать, если перейти от τ к L :

$$\bar{\varepsilon}_t^2 = \eta_1^2 c_\mu \left(1 + \sqrt{\beta_2}\right)^2 \frac{18 - \sqrt{2}\Phi_2 A_0^2 X_P \bar{k}^3}{3(2c_{\varepsilon 2} - 3)} \frac{\bar{k}^3}{L^2} \quad (8.15)$$

Значения A_0 и X_P определены в §7 (7.39). Учет дополнительное ускорение, возникающее за счет перемещения u :

$$u = -D_\varepsilon \frac{\partial \ln \rho}{\partial x}.$$

Усредним эту скорость по области перемешивания $[-L_2 \leq x \leq L_1]$, предварительно умножив обе части равенства на ρ . Как и раньше в §7, учтем разрывность коэффициента D_ε . Получим

$$\begin{aligned} \bar{u} = & - \left(\int_{-L_2}^0 D_{\varepsilon-} d\rho + \int_0^{L_1} D_{\varepsilon+} d\rho \right) \frac{1}{M} = -c_\mu \Phi_1 A_0 \sqrt{\beta_2} \left(1 + \sqrt{\beta_2}\right) \frac{\bar{k}}{\bar{\varepsilon}_t L} - \\ & - \sqrt{c_\mu \beta_2} \frac{\Phi_1 A_0}{\eta_1} \sqrt{\frac{3(2c_{\varepsilon 2} - 3)}{18 - \sqrt{2}\Phi_2 A_0^2 X_P}} \sqrt{\bar{k}}. \end{aligned}$$

Здесь использовано соотношение (8.15). Дифференцируя полученную скорость по времени, получим значение дополнительного ускорения

$$\frac{d\bar{u}}{dt} = -c_\mu \sqrt{\beta_2} \left(1 + \sqrt{\beta_2}\right) \frac{6(2c_{\varepsilon 2} - 3) A_0 \Phi_1 d\bar{k}}{18 - \sqrt{2}\Phi_2 A_0^2 X_P dL}.$$

Если его добавить к ускорению \bar{g} в правые части системы уравнений (8.8), то окончательно получим:

$$\Theta_0 \frac{d\bar{k}}{dL} + 2P_3 \frac{\bar{k}}{L} = \frac{\Phi_1 g_0 A_0 \sqrt{\beta_2}}{2\eta_1^2 (1 + \sqrt{\beta_2})}; \quad (8.16)$$

$$\frac{dL}{dt} = 4\eta_1 \sqrt{c_\mu} (1 + \sqrt{\beta_2}) \sqrt{\frac{3(2c_{\varepsilon_2} - 3)}{18 - \sqrt{2}\Phi_2 A_0^2 X_P}} \sqrt{\bar{k}}; \quad (8.17)$$

$$P_3 = -P_0 + \frac{18 - \sqrt{2}\Phi_2 A_0^2 X_P}{12(2c_{\varepsilon_2} - 3)};$$

$$\Theta_0 = 1 + \frac{3(2c_{\varepsilon_2-3})\beta_2 c_\mu \Phi_1^2 A_0^2}{\eta_1^2 (18 - \sqrt{2}\Phi_2 A_0^2 X_P)}.$$

Уравнение для интенсивности $\bar{\varepsilon}_t$ исключено из рассмотрения с помощью соотношения (8.15). Таким образом, получим систему уравнений (8.16) и (8.17) в переменных \bar{k} , L , t . Свойства подобных уравнений хорошо изучены в §7. В том числе и зависимость от ненулевых начальных данных.

Вернемся к решению уравнений (8.8) для ускорения, заданного ступенчатой функцией (7.17), описываемого формулами (8.13) и (8.14). Уточним за счет дополнительного ускорения. Получим, что формула (8.13) и (8.14) перейдут соответственно в следующее:

$$L = L_{10} \left[1 + \frac{2\eta_1 (1 + \sqrt{\beta_2})}{L_{10} \bar{B}_\varepsilon} \sqrt{\frac{c_\mu k_1 (3 - 2c_{\varepsilon_2})}{3P_0 - 1 - 2P_2}} (t - t_0) \right]^{\bar{B}_\varepsilon}; \quad (8.19)$$

$$L = \frac{12c_\mu (1 + \sqrt{\beta_2}) \sqrt{\beta_2} \Phi_1 A_0 (c_{\varepsilon_2} - c_{\varepsilon_1})^2}{\Theta_0 + 2P_3} \frac{(2c_{\varepsilon_2} - 3)}{18 - \sqrt{2}\Phi_2 A_0^2 X_P}. \quad (8.20)$$

Обратим внимание, что вид решения (8.13) сохранился за исключением степени \bar{B}_ε .

$$\text{Теперь } \bar{B}_\varepsilon = \frac{\Theta_0}{\Theta_0 + P_3}.$$

Получились довольно громоздкие формулы. Чтобы установить зависимость интенсивности турбулентного перемешивания $J = \frac{dL}{2ds}$ и степени затухания турбулентности \bar{B}_ε как и в §7. Построим графики при фиксированных эмпирических постоянных. $c_\mu = 2$, $c_{\varepsilon 1} = 1.5$, $c_{\varepsilon 2} = \frac{15}{8}$, $\eta_1 = \frac{2}{\sqrt{\pi}}$, $\Phi_1 = 0.89$, $\Phi_2 = 0.97$.

Подчеркнем еще раз, что постоянная c_μ выбрана так, чтобы интенсивность перемешивания J для ke и k моделей совпадали при малых числах Атвуда A . Тогда приходим к следующим простым аппроксимационным формулам:

$$J_1 = \frac{dL_1}{2ds} = 0.06(1 + 0.42A)A ; \quad (8.21)$$

$$\bar{B}_\varepsilon = \frac{2}{7} + 0.05A^2 \dots \quad (8.22)$$

Сравнение результатов двух моделей показывает, что зависимость интенсивности перемешивания от числа Атвуда получается фактически одной и той же, степень затухания в ke модели – несколько ниже. Эту незначительную разницу трудно заметить экспериментально.

Подчеркнем основной результат, следующий из полученных аналитических формул, как для ke модели – (формулы (8.19), (8.20)), так и для k модели (формулы (7.48) и (7.54)). Интенсивность турбулентного перемешивания J_1 и степень затухания турбулентности \bar{B}_ε довольно заметно зависят от числа Атвуда. Для J_1 в литературе принято считать зависимость от числа Атвуда линейной. Здесь установлена нелинейность, из которой следует, что при $A = 1$, постоянная перемешивания как бы возрастает на 42%. Также степень затухания \bar{B}_ε возрастает на 18%.

5. Влияние начальных возмущений

Ограничимся частным случаем ke уравнений, когда $c_{\varepsilon 1} = 1.5$, т.е. будем изучать поведение решения уравнений (8.16), (8.17). Сперва заметим, что подобная система уравнений уже была исследована в §7. (уравнения

(7.12), (7.13), а с учетом несимметрии это система (7.44). Здесь будем исследовать систему уравнений (8.16), (8.17) при ненулевых начальных условиях

$$t = 0; \quad L = L_0; \quad k = k_0.$$

При постоянном ускорении из (8.16) имеем решение для \bar{k}

$$\begin{aligned} \bar{k} &= \frac{\sqrt{\beta_2} \Phi_1 A_0 L}{2(1 + \sqrt{\beta_2}) \eta_1^2 (\Theta_0 + 4P_3)} + \\ &+ \left[\bar{k}_0 - \frac{\sqrt{\beta_2} \Phi_1 g_0 A_0 L_0}{2(1 + \sqrt{\beta_2}) \eta_1^2 (\Theta_0 + 4P_3)} \right] \left(\frac{L_0}{L} \right)^{\frac{4P_3}{\Theta_0}}. \end{aligned} \quad (8.23)$$

Заметим, что при определенных начальных данных, приводящих к занулению квадратной скобки, получается сразу автомодельное решение. В других случаях будет иметь место выход на автомодельное решение, которое определяется первым слагаемым в выражении (8.23). Второе слагаемое с ростом L стремится к нулю.

Уравнение для ширины (8.17) после подстановки в него решения (8.23) примет вид:

$$\begin{aligned} \frac{dL}{d\sqrt{2s}} &= \frac{4(1 + \sqrt{\beta_2})}{\sqrt{2}} \sqrt{c_\mu} \sqrt{\frac{3(2c_{\varepsilon 2} - 3)}{18 - \sqrt{2} \Phi_2 A_0 X_p}} \times \\ &\times \sqrt{\frac{\sqrt{\beta_2} \Phi_1 A_0 L}{(1 + \sqrt{\beta_2})(\Theta_0 + 4P_3)} + \left[\frac{2\bar{k}_0}{g_0} \eta_1^2 - \frac{\sqrt{\beta_2} \Phi_1 A_0 L_0}{(1 + \sqrt{\beta_2})(\Theta_0 + 4P_3)} \right] \left(\frac{L_0}{L} \right)^{\frac{4P_3}{\Theta_0}}} \end{aligned} \quad (8.24)$$

Из полученного уравнения видно, как происходит выход на автомодельное решение. Пусть начальные данные таковы, что

$$\frac{2\bar{k}_0}{g_0} = \frac{\sqrt{\beta_2} \Phi_1 A_0 L_0}{(1 + \sqrt{\beta_2}) \eta_1^2 (\Theta_0 + 4P_3)}.$$

Тогда (8.24) можно проинтегрировать и получить

$$\sqrt{L} = \sqrt{L_0} + 2\left(1 + \sqrt{\beta_2}\right) \sqrt{c_\mu} \sqrt{\frac{3(2c_{\varepsilon 2} - 3)}{18 - \sqrt{2}\Phi_2 A_0 X_p}} \sqrt{\frac{\sqrt{\beta_2} \Phi_1 A_0}{(1 + \sqrt{\beta_2})(\Theta_0 + 4P_3)}} \sqrt{s}$$

(8.25)

Заметим, что, как и раньше в §7 (7.28)

Шероховатость входит в качестве слагаемого, если решение представить в переменных \sqrt{L} , \sqrt{s} . Такая зависимость имеет место только при определенных начальных данных, отвечающих автомодельному решению. Такие переменные рекомендуются для обработки экспериментальных результатов. Они позволяют на более ранней стадии выявить автомодельный характер течения.

§ 9. Перемешивание слоя конечной ширины

Во многих экспериментах на границе раздела присутствует пленка. Сложные мишени в проблеме ЛТС как правило имеют тонкие прослойки.

К постановке задачи с тонким слоем приводят также некоторые задачи атмосферы и океана, в которых предметом исследования является определение законов распространения начально турбулизованной примеси.

Рассмотрим закономерности поведения тонкого слоя при больших временах в присутствии поля силы тяжести. Сперва рассмотрим самый простой случай (п.1), когда тонкий слой одного вещества помещен в среду другого вещества. Задача интересна тем, что при больших временах,

когда $\frac{L}{L_0} \gg 1$, устанавливается линейный закон от времени. В

экспериментах определяется коэффициент этой зависимости, и А в теории вычисляется зависимость этого коэффициента от констант модели.

В п. 1.1 в приближении кусочно-постоянного коэффициента диффузии получены аналитические формулы для k -модели.

В п. 1.2 приводятся формулы для $k\varepsilon$ -модели и обсуждается сравнение с k -моделью.

В п. 1.3 рассмотрена более общая постановка о перемешивании тонкого слоя, помещенного между двумя средами разной плотности. Анализируются все возможные ситуации. В зависимости от соотношения плотностей примеси и окружающей среды может представиться несколько характерных ситуаций. Если плотность примеси имеет промежуточное

значение, то в зависимости от расположения легкой и тяжелой сред со временем будет иметь место либо интенсивное перемешивание по квадратичному закону (тяжелое вещество сверху), либо слабое перемешивание со степенью $\frac{2}{7} \div \frac{2}{5}$ (легкое вещество сверху). Примесь

будет растекаться примерно по одинаковому закону вверх и вниз. Если же примесь тяжелее окружающих сред, то в случае, когда тяжелая среда находится сверху, имеет место перемешивание с постоянной скоростью только в сторону тяжелого вещества. Аналогичная картина наблюдается, если примесь легче окружающих сред. Тогда перемешивание происходит в сторону легкого вещества, расположенного внизу, и также с постоянной скоростью, т.е. по линейному закону от времени.

Все эти случаи изучаются на основе полуэмпирических моделей. Частный случай для тонкого слоя, погруженного в тяжелый, в рамках k -модели впервые был рассмотрен в работе [1]. Обобщенное рассмотрение содержится в работах автора [20, 21], где изучался тонкий слой у дна и крышки ускоряющегося сосуда, а также была рассмотрена автоматическая задача о расплывании турбулентного слоя смеси.

1. Решение в приближении кусочно–постоянного коэффициента диффузии

1.1. k -модель. Итак, слой вещества, помещенный в среду другой плотности, перемешивается в любом случае, независимо от знака ускорения, так как одна из границ будет неустойчивой всегда.

На первой стадии до выхода области перемешивания на устойчивую границу решение будет автоматическим. Затем начнется вторая стадия, неавтоматическая, решение асимптотически стремится к решению третьей стадии. Оно будет автоматическим.

Если сделать предположение о постоянстве коэффициента турбулентной диффузии по пространству, то решение задачи о перемешивании слоя можно свести к интегрированию системы обыкновенных дифференциальных уравнений, а случай перемешивания тонкого слоя описать аналитически [46].

Пусть слой ширины L_0 ($0 \leq x \leq L_0$) помещен в более легкую среду плотности ρ_2^0 (случай а) и в более тяжелую ρ_1^0 (случай б). В поле силы тяжести g_0 одна из границ будет всегда устойчива, на ней задаются условия непротекания, а другая неустойчива и перемешивается. Основная

задача последующего изучения – определить профиль смеси, а также закон расплывания ее во времени.

Как и раньше применим приближенный подход § 7 и положим коэффициент диффузии постоянным. Для простоты ограничимся симметричным случаем, когда $\beta_2 = 1$. Тогда задача сведется к решению уравнения диффузии

$$\frac{\partial \rho}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2} \quad (9.1)$$

для слоя плотности ρ_i^0 , имеющего начальную толщину L_0 . Точное решение уравнения (9.1) для случая $i = 1$ (случай а)) имеет вид:

$$\rho = \rho_2^0 + \frac{1}{2}(\rho_1^0 - \rho_2^0) \left[\Phi\left(\frac{x}{2\sqrt{\tau}}\right) - \Phi\left(\frac{x - 2L_0}{2\sqrt{\tau}}\right) \right], \quad (9.2)$$

где $\Phi(\eta)$ – интеграл вероятности.

Для замыкания уравнений необходимо определить способ вычисления ширины области перемешивания, так как из (9.2) следует, что профиль плотности не имеет фронта из-за линейности исходного уравнения диффузии. Поэтому, как и раньше, введем ширину эффективно, используя для этого безразмерный профиль плотности δ :

$$\delta = \frac{\rho - \rho_2^0}{\rho(L_0, \tau) - \rho_2^0} = \frac{\Phi\left(\frac{x}{2\sqrt{\tau}}\right) - \Phi\left(\frac{x - 2L_0}{2\sqrt{\tau}}\right)}{2\Phi\left(\frac{L_0}{2\sqrt{\tau}}\right)}. \quad (9.3)$$

Значение δ изменяется монотонно от 1 при $x = L_0$ до 0 при $x = -\infty$. Введем новую пространственную переменную η :

$$\eta = \frac{x - L_0}{2\sqrt{\tau}}.$$

Определим фронт перемешивания из равенства

$$\int_{-\infty}^0 \delta d\eta = -\frac{1}{2} \eta_m \quad (9.4)$$

Здесь фронт η_m определяется эффективно, если функцию δ представить прямой, соединяющей точки 0 и η_m .

При больших временах функцию δ можно приближенно заменить экспонентой:

$$\delta \cong e^{-\eta^2} \quad (9.5)$$

Это следует из (9.3), если воспользоваться разложением функции Φ в окрестности нуля $\Phi(\eta) \approx \frac{2}{\sqrt{\pi}}\eta$. Подставляя (9.5) в (9.4) получим

$$\eta_m = -\sqrt{\pi}; \quad L_m - L_0 = -2\eta_m\sqrt{\tau}. \quad (9.6)$$

Зная зависимость ширины области перемешивания от τ , вернемся к уравнению баланса для кинетической энергии, предварительно заменив время t на τ на основании соотношения $d\tau = Ddt$ (см.(7.6)):

$$\frac{\partial \rho V^2}{2\partial \tau} + \frac{\nu \rho V^2}{\alpha^2 L_m^2} = g \frac{\partial \rho}{\partial x} + \beta \frac{\partial}{\partial x} \left(\rho \frac{\partial V^2}{\partial x} \right) + \frac{1}{2} \frac{\partial \rho}{\partial x} \frac{\partial V^2}{\partial x} - \frac{1}{3} \rho V^2 \left(\frac{\partial \ln \rho}{\partial x} \right)^2 + \frac{5}{6} V^2 \frac{\partial \rho}{\partial \tau} \quad (9.7)$$

Усредним последнее уравнение по области перемешивания, проинтегрировав его по переменной x в интервале $[-L_m, L_0]$ и заменив

$$\int_{-L_m}^{L_0} V^2 \rho dx = \bar{V}^2 m, \quad \text{где} \quad m = \int_{-L_m}^{L_0} \rho dx.$$

При этом для плотности смеси используем решение (9.2) или его приближенное представление в виде

$$\rho \cong \rho_2^0 + (\rho_1^0 - \rho_2^0) \frac{L_0}{\sqrt{\pi \tau}} e^{-\frac{L_0^2}{4\tau}}.$$

Опуская промежуточные выкладки (см. Приложение 7), получим дифференциальное уравнение для \bar{V}^2 :

$$\frac{\partial \bar{V}^2}{\partial \tau} + \frac{\bar{V}^2}{2\tau} \left(1 + \frac{\nu}{\alpha^2 \eta_m^2} \right) = \frac{gL_0(1-e^{-\pi})}{\tau\pi} (n-1); \quad \eta = \frac{\rho_1^0}{\rho_2^0}. \quad (9.8)$$

Постоянная скорость \bar{V}_∞ будет решением последнего уравнения

$$\bar{V}_\infty = \sqrt{\frac{2gL_0\alpha^2\pi}{\nu + \alpha^2\pi} (1-e^{-\pi})(n-1)}. \quad (9.9)$$

Уравнение (9.8) не применимо в окрестности $\tau = 0$. Поэтому, чтобы удовлетворить начальным данным при $\tau = 0$: $\bar{V}^2 = \bar{V}_0^2$, следует вернуться к полной постановке задачи. Однако это можно и не делать, т.к.

очевидно, что каким бы ни было поведение функции в окрестности нуля при больших временах, а следовательно и τ , функция \bar{V} будет стремиться к постоянному значению, определяемому выражением (9.9). В зависимости от начальной скорости \bar{V}_0 это стремление будет либо сверху, либо снизу.

Возвращаясь к исходным переменным t и L_m с помощью (9.6) и (7.3), получим предельный наклон, устанавливаемый, когда $\frac{L_m}{L_0} \gg 1$:

$$\frac{dL_m}{dt} = 2\alpha\pi\bar{V}_\infty,$$

или

$$\frac{dL_m}{d\sqrt{2sL_0}} = 2^{\frac{3}{2}}\alpha^2\pi\sqrt{\frac{1-e^{-\pi}}{\nu+\alpha^2\pi}}\sqrt{n-1} \quad (9.10)$$

где $s = \frac{gt^2}{2}$.

Другой случай в) может быть рассмотрен аналогичным образом. Фронт перемешивания более легкой смеси распространяется вверх от устойчивой границы, находящейся в точке $x = 0$. Профиль безразмерной плотности при больших временах, как и раньше, описывается формулой (9.5), а скорость перемешивания представляется формулой, подобной (9.10), только

$n - 1$ нужно заменить на $\frac{n-1}{n}$.

$$\frac{dL_m}{d\sqrt{2sL_0}} = 2^{\frac{3}{2}}\alpha^2\pi\sqrt{\frac{1-e^{-\pi}}{\nu+\alpha^2\pi}}\sqrt{\frac{n-1}{n}} \quad (9.11)$$

Если эмпирические постоянные α и ν были уже выбраны, то имеем дополнительную проверку правильности их выбора.

1.2 $k\varepsilon$ -модель. В случае $k\varepsilon$ уравнений решение в приближении кусочно-постоянного коэффициента диффузии строится аналогично тому, как это сделано для k -модели в предыдущем пункте. После осреднения по всей области турбулентного перемешивания $[-L_m, L_0]$ получим два уравнения для \bar{k} и $\bar{\varepsilon}_t$ функций.

При $\frac{L_m}{L_0} \gg 1$ решением будут соотношения:

$$\bar{k}_\infty = \left(1 - \frac{c_{\varepsilon 1}}{c_{\varepsilon 2}}\right) R_0;$$

$$\bar{\varepsilon}_\infty L_m = \sqrt{2c_\mu \eta_m} \left(1 - \frac{c_{\varepsilon 1}}{c_{\varepsilon 2}}\right) R_0^{\frac{3}{2}};$$

$$R_0 = \frac{gL_0 |\rho^0 - \rho_i^0|}{\rho_i^0 \eta_m} (1 - e^{-\pi}).$$

После чего, вспоминая уравнение $d\tau = c_\mu D_i dt$ и соотношение (9.6) получим:

$$\frac{dL_m}{d\sqrt{2sL_0}} = \sqrt{\frac{2c_\mu c_{\varepsilon 2}}{c_{\varepsilon 1}}} \sqrt{1 - e^{-\pi}} \left(1 - \frac{c_{\varepsilon 1}}{c_{\varepsilon 2}}\right) \sqrt{\frac{|\rho^0 - \rho_i^0|}{\rho_i^0}},$$

здесь, если $i = 1$, то $\rho^0 = \rho_2^0$ (тяжелое в легком); если $i = 2$, то $\rho^0 = \rho_1^0$ (легкое в тяжелом).

1.3 Обобщение. Выше рассмотренная задача допускает обобщение, если слой с плотностью ρ^0 находится в окружении жидкостей разных плотностей. Тогда возможны ситуации, когда плотность смеси ρ^0 больше плотностей окружающих сред, меньше или лежит в промежутке между ними:

$$a) \rho^0 > \rho_1^0, \quad \rho^0 > \rho_2^0; \quad б) \rho^0 < \rho_1^0, \quad \rho^0 < \rho_2^0; \quad в) \rho_1^0 > \rho^0 > \rho_2^0; \quad г) \rho_2^0 < \rho^0 < \rho_1^0$$

Эти случаи представлены на рис.5, *а, б, в, г*. Замена в окружении легкого вещества на тяжелое в случаях *а* и *б* отвечает новым случаям *д* и *е* (см. рис.5, *д, е*). На рис. 5 извилистыми кривыми изображены границы все время неустойчивые, жирными линиями – все время устойчивые и обычными линиями – устойчивые ограниченное время $0 \leq t \leq t_0$.

Анализ устойчивости на границах раздела, выполненный в §3, приводит к условию неустойчивости $g \frac{\partial \rho}{\partial x} > 0$. В противном случае граница устойчива и генерационный член в k и $k\varepsilon$ моделях полагается равным нулю. Однако наличие отличного от нуля коэффициента диффузии

$D(D_\varepsilon)$ приведет к тому, что в условиях, когда граница устойчива, образуется протекающий через нее турбулентный поток. Это будет в случае *в*, когда возникает движение примеси в условиях устойчивой стратификации. Эта задача изучалась в работе автора [15], где был получен закон изменения ширины области перемешивания во времени со степенью B , зависящей от постоянных α и V . Здесь приводится уточнение этой зависимости.

Случай *з*, когда обе границы неустойчивы, асимптотически выходит на известное автомодельное решение [12, 18] для двух несжимаемых жидкостей. Ширина области перемешивания примеси развивается с течением времени по квадратичному закону.

Случаи *а* и *б* приводят к постановке, когда одна граница устойчива, а другая нет. Неустойчивость одной из границ в зависимости от расположения тяжелого (ρ_1^0) и легкого (ρ_2^0) веществ может иметь место только до некоторого момента t_0 (в случае *д* и *е* на рис. 5). Начиная с момента t_0 , обе границы станут неустойчивыми, что будет эквивалентно случаю *з*.

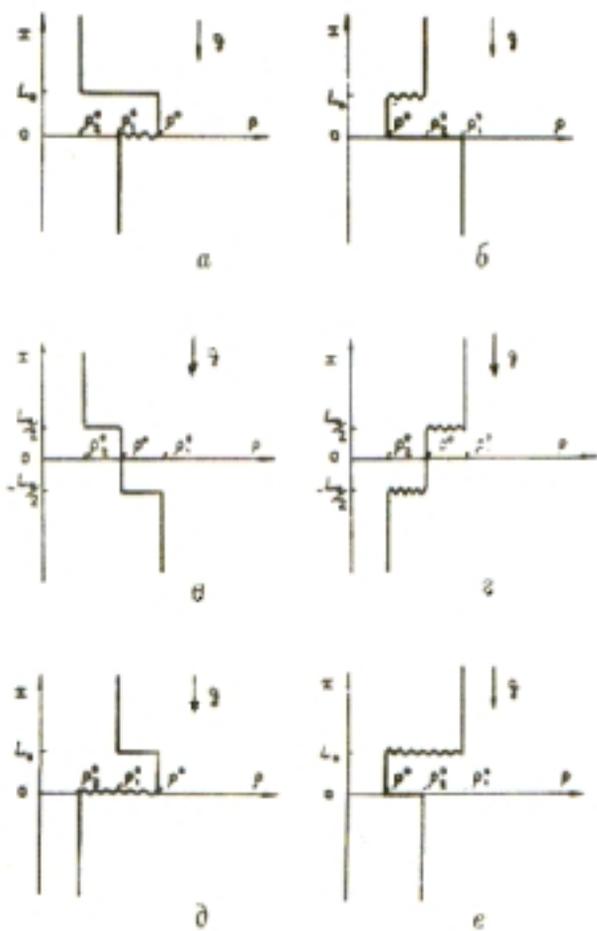


Рис. 5 разные случаи начального расположения турбулизованной примеси с плотностью ρ_0 и легкой и тяжелой жидкостей с плотностями ρ_2^0 и ρ_1^0 соответственно: *a* - $\rho_2^0 < \rho_1^0 < \rho^0$; *б* - $\rho^0 < \rho_2^0 < \rho_1^0$; *в* - $\rho_1^0 > \rho^0 > \rho_2^0$; *г* - $\rho^0 < \rho^0 < \rho_1^0$; *д* - $\rho_2^0 < \rho_1^0 < \rho^0$; *е* - $\rho^0 < \rho_2^0 < \rho_1^0$.

Для определенности будем полагать величины V_0 и ρ^0 в интервале $0 \leq x \leq L_0$ постоянными. Рассмотрим решения уравнений (9.8), (7.12) и (7.13). Со сформулированными выше начальными условиями при достаточно большом времени, которое можно связать с шириной области перемешивания L . Следовательно, определим решение, когда $\frac{L}{L_0} \gg 1$.

Окончательно асимптотические решения при $\frac{L}{L_0} \gg 1$ будут

следующими:

1) случаи z, d, e :

$$\frac{dL}{d\sqrt{2s}} = \begin{cases} 8\eta_1^2 \alpha \sqrt{\left[\frac{\bar{V}_0^2}{g_0} - \frac{\Phi(\eta_1) AL_0}{2\eta_1^2 (1+4k)} \right] \left(\frac{L_0}{L} \right)^{4k}}, & k\text{-модель,} \\ k\varepsilon\text{-модель.} \end{cases}$$

2) случаи a и b :

$$\frac{dL}{d\sqrt{2s}} = \begin{cases} \frac{2.77\pi\alpha^2}{\sqrt{\nu + \pi\alpha^2}} \sqrt{\frac{|\rho^0 - \rho_1^0| L_0}{\rho_1^0}}, & k\text{-модель;} \\ 0.978 \left(1 - \frac{c_{\varepsilon 1}}{c_{\varepsilon 2}} \right) \sqrt{\frac{2c_{\mu} c_{\varepsilon 2}}{c_{\varepsilon 1}}} \sqrt{\frac{|\rho^0 - \rho_1^0| L_0}{\rho_1^0}}, & k\varepsilon\text{-модель.} \end{cases}$$

3) случай v :

$$L \sim t^B, \text{ где } B = \begin{cases} \frac{1 + 4\alpha^2 A^2}{1.5 + \frac{\nu}{8\alpha^2 \pi} + (4\alpha^2 + 0.11) A^2}, & k\text{-модель,} \\ k\varepsilon\text{-модель.} \end{cases}$$

Здесь в случаях 1) и 3) использованы результаты §7 и §8.

2. Распыление турбулизованного слоя смеси

В этом разделе отдельно рассмотрен случай *в*. Изучена задача о расплывании турбулентного слоя смеси, образованного на границе двух несжимаемых сред с постоянными, но разными плотностями. Показано, что при больших временах решение стремится к автомодельному, причем степень автомодельности не может быть определена из анализа размерностей, а находится в процессе решения краевой задачи. Степень есть функция эмпирических постоянных модели. Для ряда параметров построены автомодельные решения и даны графики зависимости степени автомодельности от постоянных модели. В приближении постоянства турбулентной скорости по пространственной переменной получена формула для степени автомодельности, а решение для плотности смеси выражено через интеграл вероятности. Частный случай задачи для однородной среды рассмотрен в [1,2]. Приводимые там результаты вычислений согласуются с полученными в настоящей работе.

2.1 Постановка задачи

Пространство заполнено двумя несжимаемыми жидкостями с плотностями ρ_1^0 и ρ_2^0 . Граница раздела проходит по плоскости. Пусть в начальный момент времени в окрестности границы создается плоский турбулентный слой ширины L_0 , состоящий из смеси обоих веществ. Такое состояние может возникнуть, например, благодаря ускоренному движению границы в интервале времени t_0 при соответствующем знаке ускорения, так что за время t_0 генерируется зона турбулентной смеси шириной L_0 и с некоторой начальной турбулентной скоростью $V(x, t_0)$. В отсутствие источников турбулентности начальный слой смеси расширяется, вовлекая соседние жидкости. Турбулентная энергия, определяемая через характерную турбулентную скорость, при этом затухает, диссипируя в тепло.

Для описания возникающего турбулентного перемешивания будем применять k –модель, основанную на уравнении баланса для кинетической энергии турбулентности и описанную выше в §§ 5–7. Исходные уравнения здесь возьмем в виде (5.4) и (5.5). Для удобства уравнение (5.5) перепишем в виде:

$$\frac{\partial \rho V^2}{2\partial t} - \frac{D}{2} \frac{\partial \ln \rho}{\partial x} \frac{\partial \rho V^3}{\partial x} = -\frac{\nu \rho V^2}{l} + \beta \frac{\partial}{\partial x} \left(\rho D \frac{\partial V^2}{\partial x} \right) + \frac{5\rho V^2}{6} \left[\frac{\partial \ln \rho}{\partial t} - D \left(\frac{\partial \ln \rho}{\partial x} \right) \right]$$

(9.12)

В (9.12) в отличие от (5.5) отсутствует генерационный член. Первый член в правой части порождает диссипацию турбулентной энергии и фактически определяет закон затухания турбулентности. Второй (диффузионный) член с коэффициентом β вводится [4] для описания пространственного растекания турбулентности.

Для системы (9.12), (5.4) ставится следующая задача: определить решение при $t > 0$, если в начальный момент ($t = 0$)

$$V(0, x) = V_0(x), \quad \rho(0, x) = \rho_0(x), \quad |x| \leq \frac{L_0}{2}, \quad (9.13)$$

($V_0(x)$, $\rho_0(x)$) – функции, характеризующие турбулентную смесь. Начало координатной оси возьмем в середине слоя (рис. 9.1).

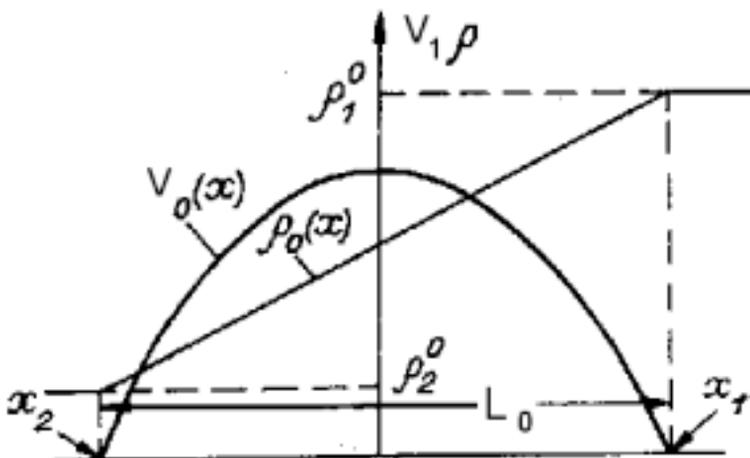


Рис.9.1. Распределение начального состояния $V_0(x)$ и $\rho_0(x)$ в момент $t = 0$.

Краевые условия на левом и правом фронтах перемешивания $x = x_2(t)$ и $x = x_1(t)$ имеют вид

$$\begin{aligned} x = x_2(t): \quad & V[x_2(t), t] = 0, \quad \rho_2[x_2(t), t] = \rho_2^0, \\ x = x_1(t): \quad & V[x_1(t), t] = 0, \quad \rho_1[x_1(t), t] = \rho_1^0. \end{aligned} \quad (9.14)$$

Поставленная задача неавтономна, но при больших временах, когда $t \gg t_0$ и $L \gg L_0$, начальные данные забываются и решение, вообще говоря, стремится к автономному.

2.2. Автомодельное решение

Система (9.12)–(5.4) допускает преобразование подобия:

$$x = \tilde{x}_0 \lambda \bar{\tau}^{\frac{B}{B+1}}, \quad V = \tilde{x}_0^2 \zeta \bar{\tau}^{\frac{B-1}{B+1}}, \quad \rho = \rho_1^0 \Delta. \quad (9.15)$$

Здесь \tilde{x}_0 – размерная постоянная, определяемая начальными данными (9.13); B – пока произвольная безразмерная постоянная, показатель автомодельности; λ , $\zeta(\lambda)$ и $\Delta(\lambda)$ – безразмерные представители длины, скорости и плотности; $\bar{\tau}$ – новая переменная, связанная со временем уравнением

$$\frac{d\bar{\tau}}{dt} = \alpha L. \quad (9.16)$$

В отличие от ранее введенной переменной τ , здесь $\bar{\tau}$.

Из (9.15) следует

$$L = \tilde{x}_0 (\lambda_{0,9} - \lambda_{0,1}) \bar{\tau}^{\frac{B}{B+1}}, \quad (9.17)$$

где $\lambda_{0,9}$ и $\lambda_{0,1}$ отвечают координатам, при которых безразмерная плотность

$$\delta = \frac{n\Delta - 1}{n - 1} \left(n = \frac{\rho_1^0}{\rho_2^0} \right) \text{ принимает значения 0.9 и 0.1.}$$

Используем новые переменные для приведения (9.12), (5.4) к системе обыкновенных дифференциальных уравнений. Для этого (9.15) подставим в (9.12), (5.4):

$$y \left(-\frac{B}{B+1} \lambda - \zeta' \right) = (y^3 + 2y') \zeta; \quad (9.18)$$

$$\frac{2\beta}{\zeta} (\zeta^2 \zeta')' + \left[\frac{B}{B+1} \lambda + (1 + 2\beta) \zeta y^2 \right] \zeta' - \frac{\nu \zeta^2}{\alpha^2 (\lambda_{0,9} - \lambda_{0,1})^2} - \frac{B-1}{B+1} \zeta - \frac{\zeta}{3} y^2 \left[\frac{B}{B+1} \right] \quad (9.19)$$

Штрих означает дифференцирование по λ . При выводе (9.18) и (9.19)

использована замена $y^2 = \frac{\Delta'}{\Delta}$, позволившая понизить порядок первого уравнения.

Краевые условия (9.14) в безразмерных переменных (9.15) примут вид

$$\lambda = \lambda_2: \quad \zeta_2 = 0, \quad \Delta = \frac{1}{n}; \quad \lambda = \lambda_1: \quad \zeta_1 = 0, \quad \Delta = 1. \quad (9.20)$$

Решение задачи для системы (9.18), (9.19) с краевыми условиями на фронтах (9.20) весьма проблематично, тем более, что в точках (9.20) уравнения имеют особенность: коэффициент ζ^2 при старшей производной обращается в нуль.

Однако можно указать универсальный способ решения возникшей краевой задачи – численное интегрирование исходных уравнений в частных производных (9.12), (5.4) с начальными данными (9.13). Численно интегрировались исходные газодинамические уравнения (4.16)–(4.20), при этом несжимаемость имитировалась заданием достаточно большой начальной скорости звука. Таким образом, устанавливается факт выхода на автомодельное решение, которое одновременно и определяется. Прежде чем переходить к обсуждению результатов численного интегрирования, сделаем два замечания.

Замечание 1. Для однородной среды $n = 1$ уравнение (9.18) имеет тривиальное решение $y = 0$, а (9.19) приводится к виду

$$\frac{2\beta}{\zeta} (\zeta^2 \zeta')' + \frac{B}{B+1} \lambda \zeta' - \frac{v\zeta^2}{\alpha^2 (\lambda_{0,9} - \lambda_{0,1})} - \frac{B-1}{B+1} \zeta = 0. \quad (9.21)$$

Этот случай рассмотрен [1,2], где отмечено, что показатель автомодельности B должен определяться в процессе решения краевой задачи. Действительно, фронты перемешивания в этом случае расположены симметрично $\lambda_1 = -\lambda_2 = \lambda_0$. Задачу в новых переменных $\tilde{\lambda}$ и

$\tilde{\zeta} \left(\tilde{\lambda} = \frac{\lambda}{\lambda_0}, \quad \tilde{\zeta} = \frac{\zeta}{\lambda_0^2} \right)$ можно свести к краевой на интервале $[0,1]$ с

$$\begin{aligned} \text{условием симметрии в точке } \tilde{\lambda} = 0 \\ \tilde{\zeta}' = 0 \end{aligned} \quad (9.22)$$

и полностью определяемым решением в точке $\tilde{\lambda} = 1$

$$\tilde{\zeta} = -\frac{B}{(B+1)4\beta} (1-\tilde{\lambda}) - \frac{1}{(B+1)4\beta} (1-\tilde{\lambda})^2 + \dots \quad (9.23)$$

Уравнение (9.21) в переменных $\tilde{\lambda}$ и $\tilde{\zeta}$ будет

$$\frac{2\beta}{\tilde{\zeta}} (\tilde{\zeta}^2 \tilde{\zeta}')' + \frac{B}{B+1} \tilde{\lambda} \tilde{\zeta}' - \frac{v\tilde{\zeta}^2}{4\alpha^2 \lambda_{0,1}^2} - \frac{B-1}{B+1} \tilde{\zeta} = 0.$$

Решение находится численным интегрированием последнего уравнения. Выходя из точки $\tilde{\lambda} = 1$ по разложению (9.23) и интегрируя до точки

$\tilde{\lambda} = 1$, значение параметра автомодельности подбираем таким, чтобы удовлетворять условию в центре симметрии (9.22).

Замечание 2. Степень автомодельности B – функция постоянных модели α , β и V , причем последние две постоянные входят в виде отношения $\frac{V}{\alpha^2}$. Это обстоятельство не замечено в [1,2], где коэффициенты уравнения зависят от параметров α и V . Замена искомого решения в [1,2] на новое $\tilde{\Phi}$ ($\tilde{\Phi} = \alpha^2 \Phi$) приводит к уравнению с одним коэффициентом, пропорциональным отношению $\frac{V}{\alpha^2}$ (в [1,2] $V = c$, $\beta = 0.25$).

2.3. Результаты расчетов и их обсуждение.

Результаты численного интегрирования исходных уравнений в частных производных представлены на рис. 9.2–9.6.

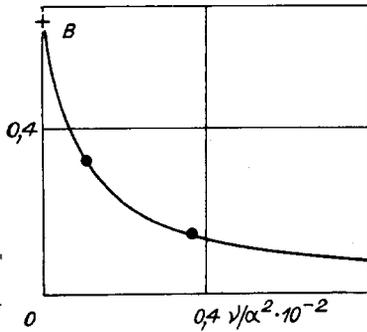


Рис.9.2

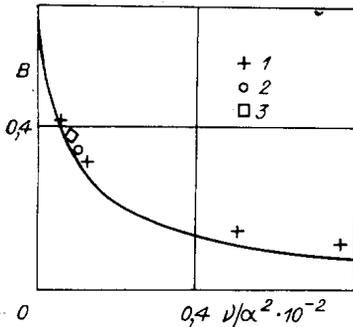


Рис. 9.2

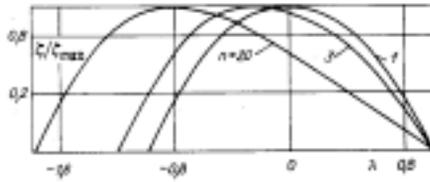


Рис. 9.4

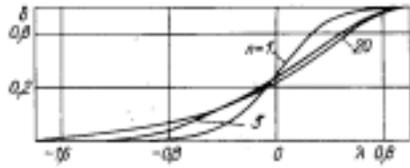


Рис.9.5

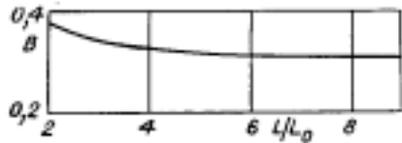


Рис. 9.6

Решение осуществлено по программе ТУРИНБ методом [3]. В качестве начальных данных принимались значения $V_0(x)$ и $\rho_0(x)$: $V_0(x) = V_0$ – постоянная, $\rho(0, x) = \rho_2^0 + (\rho_1^0 - \rho_2^0) \left(\frac{x}{L_0} + 0.5 \right)$, $|x| \leq \frac{L_0}{2}$.

Рассмотрена зависимость решения от начальных параметров $\beta, \frac{V}{\alpha^2}, n$. Установлено слабое влияние значений β и n на степень автомодельности B . Это следует из рис. 9.2, где при $n = 1$ приведена зависимость степени B от отношения $\frac{V}{\alpha^2}$, точки – результаты численного

интегрирования при $\beta = 0.25$, кривая – приближенная зависимость, доставляемая формулой (4.6). Численно определялось решение и при $\beta = 0.75$. отличие в значении B меньше 1% и на рисунках неразлично.

На рис. 9.3 представлены результаты расчетов при фиксированном значении коэффициента $\beta (\beta = 0.25)$ и $n = 3; 10; 20$ (точки 1–3) в

зависимости от $\frac{V}{\alpha^2}$.

Профили безразмерной скорости ζ и плотности α изображены соответственно на рис. 9.4 и 9.5. Структура решения в окрестности фронта

следует из разложения
$$\zeta = \frac{B\lambda_i}{4\beta(B+1)}(\lambda_i - \lambda) + \dots,$$

$$y = D_i(\lambda_i - \lambda)^{\frac{4\beta-1}{2}} + \dots, \quad (i=1, 2) \quad (D_i - \text{постоянные}).$$
 Разложение получено при ограниченных значениях λ_1 и λ_2 . Фронт перемешивания отсутствует только в приближенном решении п.2.4, когда турбулентная скорость ζ полагается не зависящей от пространственной координаты. Разложение для функции y носит неаналитический характер. Значение $\beta = 0.25$ в этом смысле критическое, для него существует разложение в виде ряда по целым степеням, а функция y в точках λ_1 и λ_2 принимает ограниченное значение.

Профиль скорости ζ получается симметричным при $n = 1$, симметрия нарушается, если $n > 1$: максимальное значение скорости сдвигается в сторону легкого вещества с возрастанием n . Фронт перемешивания также будет более продвинутым в сторону легкого вещества. На рис. 9.6 демонстрируется выход на автотомельный режим задачи с начальными данными (9.13) при $\frac{V}{\alpha^2} = 12.5$. Первоначально

неавтотомельные профили скорости и плотности также стремятся в пределе к автотомельным, изображенным на рис. 9.4 и 9.5.

2.4. Приближенное решение

Анализируя профили получаемых решений (см. рис. 9.4), видим, что турбулентная скорость в области перемешивания имеет колоколообразный вид. Поэтому можно, как и в §7, построить приближенное решение, заменив турбулентную скорость в области смеси постоянной величиной. С этой целью усредним уравнение (9.12) по области смеси:

$$\frac{d\bar{V}^2}{2d\tau} = -\frac{k\bar{V}^2}{\tau}, \quad k = 0.25 + \frac{\nu}{16\eta_0^2\alpha^2} + \frac{2A^2}{3\pi}; \quad (9.24)$$

$$d\tau = l\bar{V}dt; \quad (9.25)$$

$$\delta = 0.5 \left(1 + \Phi \left(\frac{x}{2\tau^{0.5}} \right) \right); \quad (9.26)$$

$$L = 4\eta_0\tau^{0.5}, \quad \eta_0 = 0.906. \quad (9.27)$$

Здесь также выписано решение для L и δ ; Φ – интеграл вероятности:

$\Phi(\eta) = \frac{2}{\pi^{0.5}} \int_0^\eta \exp(-\eta^2) d\eta$. При выводе (9.24) использовано решение

для плотности (9.26). Усреднение проведено путем интегрирования по области перемешивания $|x| \leq \frac{L}{2}$. Предварительно в (9.12) введена вместо времени t переменная τ , а после интегрирования по области перемешивания соответствующие интегралы заменены приближенными выражениями

$$\int_{|x| \leq \frac{L}{2}} \frac{\partial \rho V^2}{\partial \tau} dx \quad \frac{\partial (\bar{V}^2 M)}{\partial \tau},$$

$$\int_{|x| \leq \frac{L}{2}} \frac{\partial \rho}{\partial x} \frac{\partial V^2}{\partial x} dx \quad \frac{\partial \rho}{\partial x} \Big|_{x=0} \quad \int_{|x| \leq \frac{L}{2}} \frac{\partial V^2}{\partial x} dx = 0,$$

$$\int_{|x| \leq \frac{L}{2}} U^2 \left(\frac{\partial \ln \rho}{\partial x} \right)^2 \rho dx \quad \left(\frac{\partial \ln \rho}{\partial x} \right)^2 \Big|_{x=0} \bar{U}^2 M,$$

$$M = \int_{|x| \leq \frac{L}{2}} \rho dx = \frac{\rho_1^0 + \rho_2^0}{2} L, \quad \frac{\partial \ln \rho}{\partial x} \Big|_{x=0} = \frac{A}{(\pi\tau)^{0.5}}.$$

Уравнения (9.24)–(9.27) интегрируются, и решение выписывается в виде

$$L = L_3 t^{\frac{1}{1+2k}}, \quad \bar{V} = \frac{L_3}{8\alpha\eta_0^2(1+2k)} t^{-\frac{2k}{1+2k}}. \quad (9.28)$$

Здесь L_3 – постоянная, определяемая начальными данными (9.13). Сравнивая формулы (9.28) и (9.17), находим явное выражение

$$B = \frac{1}{1.5 + \frac{\nu}{8\eta_0^2 \alpha^2} + \frac{1}{3\pi} A^2}, \quad (4.6)$$

применимое и при $n = 1$. Зависимость для этого случая изображена кривой на рис. 9.2. Заметим, что формулу (9.29) можно также получить, конструируя приближенное решение для системы (9.18), (9.19). Это сделано в приложении 8. Формула (9.29) вполне удовлетворительно работает и в общем случае. На рис.9.3 линией показана степень B в формуле (9.29) при $n = 3$. Сравнение результатов численного интегрирования с приближенной формулой (9.29), представленное на рис. 9.2 и 9.3, свидетельствует о хорошей точности приближенной формулы. Численные результаты [1, 2] согласуются с кривой рис. 9.2.

§ 10. ks и $k\epsilon s$ модели для описания турбулентного перемешивания в условиях, приводящих к сепарации

Введение

Помимо диффузионного подхода для описания турбулентного перемешивания существует еще подход многокомпонентной смеси с уравнениями сохранения для каждой компоненты, имеющей свою скорость. В этом подходе вводятся неизвестные обменные члены, которые затем определяются из общих соображений. Этот подход развивается в работах [5–7]. Его достоинством является возможность описания сепарации области турбулентного перемешивания, которая может происходить при смене знака ускорения, когда неустойчивое состояние переходит в устойчивое. Однако, как показано в [6], динамика процесса, связанная со сменой знака ускорения, передается неправильно. Многокомпонентная модель не описывает режим с выключенным ускорением.

Янгс в [6] предложил комбинированную модель. В обменные члены были введены потоки, которые обеспечили диффузионность модели. Для определения коэффициента турбулентной диффузии D было использовано уравнение баланса для кинетической энергии турбулентности. Такой подход позволил описать эксперименты с ускорением, изменяющем знак во времени. Естественно, что комбинированная модель приобрела положительные свойства диффузионной модели.

В работе автора [] в приближении несжимаемости были получены уравнения первоначальной модели Янгса. Система из 5 уравнений сведена к двум уравнениям для плотности смеси и для масштаба длины L . Изучение свойств решений полученных уравнений позволило провести оптимальный выбор обменных членов. Предложенная модификация модели Янгса существенно улучшила согласие с результатами экспериментов по описанию турбулентного перемешивания на неустойчивой стадии.

Анализ модели Янгса подсказал, как следует модифицировать k и $k\epsilon$ модели, чтобы описать явление сепарации. Предложения по учету сепарации с помощью переносных членов делались также Г.Н.Рыковановым и позже А.В.Полионовым []. Поскольку, как показали эксперименты Ю.А.Кучеренко и А.А.Пылаева, интенсивность перемешивания и сепарации значительно отличаются, постоянная сепарации почти на порядок (в семь раз) меньше постоянной перемешивания, то естественно попытаться в рамках диффузионных k и $k\epsilon$ моделей учесть эффект сепарации с помощью переносных членов. Оказалось, что переносные члены, обслуживающие сепарацию, лучше

добавлять только в устойчивых ситуациях, начиная с момента, когда турбулентная кинетическая энергия обращается в нуль.

Если имеет место неустойчивость, то диффузионная модель вполне удовлетворительно описывает все известные тестовые эксперименты, тогда как такое описание на основе переносных членов затруднено, особенно в случае выключенного ускорения. Поэтому в неустойчивом случае следует использовать только диффузионную модель без сепарационных добавок, а последние использовать только в устойчивых ситуациях.

2. Анализ экспериментальных результатов

Ситуация, когда ускорение на границе раздела сменяется замедлением, является типичной в процессе сжатия оболочечных мишеней в проблеме ЛТС. Качественно это показано на рис. 1, где изображены траектория границы раздела, и ускорение на ней в зависимости от времени.

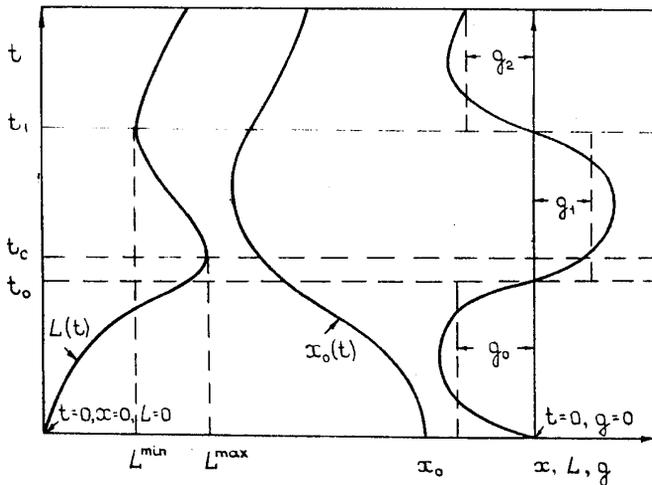


Рис. 1. Типичная картина поведения границы раздела x_0 легкого ρ_2 и тяжелого ρ_1 вещества при смене знака ускорения g . t_0, t_1 – времена обращения ускорения в нуль. $[0; t_0]$ $t > t_1$ – неустойчивые I и III этапы, $[t_0, t_1]$ – устойчивый. L^{\min} и L^{\max} – минимальное и максимальные значения ширины области перемешивания.

В некоторый момент времени t_0 ускорение меняет знак. Если в области $x < x_0$ находится тяжелое вещество плотности ρ_1 , то I стадия до

$t \leq t_0$ будет неустойчивой. На этой стадии граница раздела разрушится и начнется перемешивание. После смены знака ускорения наступит II устойчивая стадия. Как будет вести себя турбулизовавшаяся смесь? Для ответа на этот вопрос были поставлены эксперименты вначале в Алдермастоне [6], затем в Снежинске [14].

В экспериментах ампула с двумя несжимаемыми жидкостями сперва ускорялась до $t = t_0$. В этот момент ускорение меняло знак, и затем при $t = t_1$ снова происходила смена знака ускорения. В [14] были предприняты попытки сделать ускорение на каждом этапе по возможности постоянным. Это обеспечивало автомодельность процесса турбулентного перемешивания на I стадии:

$$h_1 = \alpha_m A g_0 t^2.$$

В [14] показано, что и на II стадии устанавливается режим, который описывается следующей формулой:

$$\sqrt{h_1} = \sqrt{h_{\max}} - \sqrt{\alpha_s} \sqrt{2[s - s_c - \dot{s}_c(t - t_c)]}, \quad (10.1)$$

где α_s – новая эмпирическая постоянная сепарации в отличие от постоянной перемешивания α_m метится индексом “s”, h_{\max} , s_c и \dot{s}_c соответственно максимальное значение ширины области смеси в сторону тяжелого, координата первоначальной границы раздела и ее скорость в момент t_c . Последняя формула является обобщением на случай переменного ускорения. Обработка экспериментов [14], проведенных для $A = 0.5$, дала $\alpha_s = 0.01$. Постоянная сепарация оказалась в 7 раз меньше постоянной перемешивания $\alpha_m = 0.07$.

В экспериментах на III этапе, когда ускорение снова сменило знак [14], наблюдается рост ширины области перемешивания после прохождения второй экстремальной точки, когда h_1 принимает максимальное значение.

Также отметим, что в экспериментах [14] было показано, что максимальное значение ширины h_{\max} наступает через некоторое время $t_c - t_0$ после смены знака ускорением. Предлагаемые ниже kS и kES модели передают и эту особенность эксперимента.

3. Модель Янгса. Аналитические решения

Анализ системы уравнений для многокомпонентной жидкости [] приводит в частном случае двух несжимаемых жидкостей к системе двух уравнений для плотности ρ и для масштаба длины L :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \sqrt{\frac{g_0 L}{(\rho_1 - \rho_2) \rho c_1}} (\rho_1 - \rho)(\rho - \rho_2) \quad (10.2)$$

$$\frac{\partial L}{\partial t} + (\rho_1 + \rho_2 - 2\rho) \sqrt{\frac{g_0 L}{(\rho_1 - \rho_2) \rho c_1}} \frac{\partial L}{\partial x} = \sqrt{\frac{2(\rho_1 - \rho_2) g_0 L}{(\rho_1 + \rho_2) c_1}}, \quad (10.3)$$

Эти уравнения получены в предположении, что $g_0(\rho_1 - \rho_2) > 0$. В противном случае выражение под корнем должно браться по модулю, а перед корнем знак меняется на противоположный. Напомним, что знак выражения $g_0(\rho_1 - \rho_2)$ связан со знаком инкремента и характеризует соответственно неустойчивую (> 0) и устойчивую (< 0) ситуации. В первом случае ширина области перемешивания возрастает и масштаб L растет, во втором случае имеет место сепарация и L убывает. Это следует из уравнения (10.3). c_1 – дополнительная эмпирическая постоянная, введенная в работе [].

Для уравнений (10.2), (10.3) рассмотрим простейшую задачу. Будем полагать, что при $t = 0$ имеем две несжимаемые жидкости, граничащие в точке $x_0 = 0$:

$$\begin{aligned} \rho &= \rho_2 \quad \text{при } x < 0; \\ \rho &= \rho_1 \quad \text{при } x > 0; \end{aligned} \quad (10.4)$$

причем, как и раньше, $\rho_2 < \rho$. Пусть ускорение g_0 со временем дважды меняет знак:

$$g = \begin{cases} g_0 > 0, & 0 \leq t \leq t_0; \\ g_1 < 0, & t_0 \leq t \leq t_1; \\ g_2 > 0, & t_1 \leq t. \end{cases} \quad (10.5)$$

Заметим, что сформулированный пример необходим для оценки влияния сепарации. В эксперименте при таком законе ускорения ширина на первом этапе будет расти, достигнув максимального значения начнет уменьшаться, и затем снова расти.

Цель настоящего параграфа – построить точное решение при постоянном ускорении; на основании профиля смеси получить формулу для ширины области смеси и сравнить ее с известной зависимостью

$$h_1 = \alpha_m A g_0 t^2, \quad (10.6)$$

где h_1 – ширина области перемешивания в сторону тяжелого вещества. Соответственно, через h_2 обозначим ширину в сторону легкого вещества. Это позволит получить связь введенной постоянной c_1 с эмпирической постоянной α_m .

Сделаем одно предположение, которое существенно упростит задачу. Анализируя поведение коэффициента при втором члене в уравнении (10.3), видим, что он в зоне перемешивания меняет знак и обращается в нуль при

$$\rho = \frac{\rho_1 + \rho_2}{2}. \text{ Изменение коэффициента } \frac{\rho_1 + \rho_2 - 2\rho}{\sqrt{(\rho_1 - \rho_2)\rho}}$$

интервале $\left[-\sqrt{\frac{\rho_1 - \rho_2}{\rho_1}}, \sqrt{\frac{\rho_1 - \rho_2}{\rho_2}} \right]$. При малом числе Атвуда есть все

основания этим членом пренебречь, но мы делаем это и в общем случае для любого A . Как легко видеть, при таком допущении уравнение (10.3) превращается в обыкновенное дифференциальное уравнение для масштаба длины L_t и легко интегрируется. В этом разделе, если масштаб длины зависит только от времени, будем метить его индексом t внизу. Значение L_t зависит только от времени, поэтому уравнение (10.2) для плотности смеси интегрируется.

Итак, при постоянном ускорении имеем

$$\sqrt{L_t} = \sqrt{L_0} + \sqrt{\frac{(\rho_1 - \rho_2)g_0}{(\rho_1 + \rho_2)2c_1}} t \quad (10.7)$$

В уравнении (10.2) перейдем к автомодельной переменной

$$\lambda = \frac{x}{L_t}. \quad (10.8)$$

После несложных преобразований получим

$$\left\{ \lambda - \frac{\sqrt{\rho_1(\rho_1 + \rho_2)} [2\rho(2\rho - \rho_1 - \rho_2) - (\rho - \rho_2)(\rho - \rho_1)]}{2\rho(\rho_1 - \rho_2)\sqrt{2\rho\rho_1}} \right\} \frac{d\rho}{d\lambda} = 0 \quad (10.9)$$

Чтобы удовлетворить краевым условиям (10.4), достаточно приравнять нулю выражение в фигурных скобках.

Заметим, что устойчивое разрывное решение (10.4) имеет место при $g_0 < 0$. Это следует из поведения характеристик исходного уравнения (10.3). В этом случае они будут пересекаться по оси $x = 0$, и первоначально заданное разрывное решение будет сохраняться во времени.

Если $g_0 > 0$ и согласно (10.4) легкое вещество находится слева от начала координат, то разрывное решение неустойчиво. В этом случае решением будет функция

$$\lambda = \frac{\sqrt{\rho_1(\rho_1 + \rho_2)} [2\rho(2\rho - \rho_1 - \rho_2) - (\rho - \rho_2)(\rho - \rho_1)]}{2\rho(\rho_1 - \rho_2)\sqrt{2\rho\rho_1}} \quad (10.10)$$

Определим три характерные точки профиля ρ : λ_1 и λ_2 , соответствующие фронтам перемешивания, и ρ_0 в точке $\lambda = 0$.

$$\left. \begin{aligned} \lambda_2 &= -\sqrt{\frac{\rho_1 + \rho_2}{2\rho_2}} \\ \lambda_1 &= -\sqrt{\frac{\rho_1 + \rho_2}{2\rho_1}} \\ \rho_0 = \rho(\lambda = 0) &= \frac{1}{6} \left(\rho_1 + \rho_2 + \sqrt{(\rho_1 + \rho_2)^2 + 3\rho_1\rho_2} \right) \end{aligned} \right\} \quad (10.11)$$

Если использовать (10.7) и (10.8), то получим

$$h_1 = \lambda_1 L_t = \sqrt{\frac{\rho_1 + \rho_2}{2\rho_1}} \frac{\rho_1 - \rho_2}{\rho_1 + \rho_2} \frac{g_0 t^2}{2c_1}.$$

Сравнение с (10.6) дает искомое выражение для c_1 :

$$c_1 = \sqrt{\frac{\rho_1 + \rho_2}{2\rho_1}} \frac{1}{2\alpha_m}.$$

Рассмотрим решение при условии смены знака ускорения. Легко заметить, что при $t \leq t_0$ оно будет определяться выше полученными формулами (10.8), (10.10), (10.11). После смены знака ускорения, согласно (10.8), будем иметь

$$\sqrt{L_t} = \sqrt{A \frac{g_0}{2c_1}} t_0 + \sqrt{A \frac{g_1}{2c_1}} (t_0 - t).$$

Очевидно, разрыв восстановится при $t_{cc} = \left(1 + \sqrt{-\frac{g_0}{g_1}}\right) t_0$. Здесь, как и в

[6], использовано одно и то же значение постоянной c_1 независимо от знака ускорения, хотя, как показано выше, это не так.

4. Модификация модели Янгса

Для того, чтобы оценить свойства полученного решения, необходимо обратиться к результатам экспериментов Кучеренко–Пылаева [9] и Янгса–Рида [6]. Лучше всего сравнивать профили ρ для смеси. Выберем две характеристики профиля: значение плотности смеси в точке начального положения границы ($x = 0$) и меру несимметрии $\frac{h_2}{h_1}$. Совокупный анализ

экспериментальных профилей вместе с теоретическим изучением приводит к выводу [2]: если ширины области перемешивания h_1 и h_2 определять эффективно, отходя от фронта перемешивания внутрь области перемешивания, то несимметрия $\frac{h_2}{h_1}$ изменяется в ограниченных пределах.

Несимметрия решения предыдущего пункта значительно отклоняется от допустимой: $\frac{h_2}{h_1} = \frac{L_2}{L_1} = -\frac{\lambda_2}{\lambda_1} = \sqrt{n}$. Это видно из рис. 7.4. Так для

$n = 3$ в экспериментах $\frac{h_2}{h_1} = [1.19 \div 1.27]$, в теории по Янгсу $\frac{h_2}{h_1} = 1.73$.

Плотность $\rho(0)$ в модели Янгса согласно (10.11) есть

$\lim_{\rho_2 \rightarrow 0} \rho(0) = 0.33\rho_1$, тогда как из [6] и [9] следует, что в опытах.

$\lim_{\rho_2 \rightarrow 0} \rho(0) = 0.45\rho_1$. Таким образом, профиль с симметричным

перемешиванием в обе стороны будет меньше отклоняться от экспериментального, т.к. тогда $\lim_{\rho_2 \rightarrow 0} \rho(0) = 0.5\rho_1$.

Модель с такими свойствами легко получается, если в формуле (10.2) плотность ρ заменить ее средним значением $\frac{\rho_1 + \rho_2}{2}$. Уравнение для ширины L берется в форме (10.3). Уравнение для плотности смеси примет вид

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \sqrt{\frac{2g_0 L}{(\rho_1 - \rho_2)(\rho_1 + \rho_2) c_1}} (\rho_1 - \rho)(\rho - \rho_2). \quad (10.13)$$

Если, как и раньше, пренебречь переносным членом в (10.3) (второй член в левой части), то решение получим в виде линейной функции от λ :

$$\rho = \frac{\rho_1 + \rho_2}{2} + \frac{\rho_1 - \rho_2}{2} \lambda. \quad (10.14)$$

Очевидно, $\lambda_1 = -\lambda_2 = 1$ и $\rho_0 = \frac{\rho_1 + \rho_2}{2}$. Постоянная c_1 связана с

$$\alpha_m \text{ равенством } c_1 = \frac{1}{\alpha_m}.$$

5. Учет сепарации в k -модели на основании уравнения переноса (kS – модель)

Выше было показано, что диффузионные k и kE модели вполне удовлетворительно описывают широкий класс задач с переменным ускорением, в том числе задачи с выключенным ускорением и с тонким слоем. Сепарация может быть описана путем введения переносных членов по схеме предыдущего пункта, однако подключение ее требует особого исследования.

Для написания исходных уравнений модели используем уравнение (10.13). Запишем его вместе с диффузионным членом:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(D \frac{\partial \rho}{\partial x} \pm \sqrt{\alpha_s} \sqrt{\frac{2|g|L}{(\rho_1 - \rho_2)(\rho_1 + \rho_2)}} (\rho_1 - \rho)(\rho - \rho_2) \right), \quad (10.16)$$

где $D = \alpha_0 LV$; если $g > 0$, то берется знак “+”, если $g < 0$, то берется знак “-”.

Здесь учтены оба процесса: диффузии и переноса. Переносной член играет основную роль в определении решения. Это уравнение при некоторых ограничениях сводится к известному обобщенному уравнению

Бюргерса [13], свойства решений которого хорошо изучены. Переносной член с коэффициентом α_s является главным в определении интенсивности турбулентного перемешивания, диффузионный член становится добавкой, размывающей основное решение. Причем в нашем случае это размывание происходит на фронтах перемешивания.

Поэтому наиболее естественный способ учета сепарации раздельный.

На неустойчивой стадии $\left(g \frac{\partial \rho}{\partial x} > 0\right)$ следует применять только

диффузионную модель ($\alpha_s = 0$), на устойчивой $\left(g \frac{\partial \rho}{\partial x} < 0\right)$ – только

сепарационную ($D = 0$). Как осуществлять переход с одних уравнений на другие?

Для этого нужно привлечь уравнение баланса кинетической энергии турбулентности (5.5). Отметим, что теперь генерационный член

$Dg \frac{\partial \rho}{\partial x}$ следует учитывать при любом знаке.

Переход к сепарационной модели ($D = 0$, $\alpha_s \neq 0$) увяжем со значением турбулентной скорости. После смены неустойчивой стадии на устойчивую скорость V начнет падать, стремясь к нулю. Сепарация, как показывают эксперименты, наступает не сразу после смены знака ускорения, а через некоторый промежуток времени. Этот промежуток определяется из уравнения (5.5), когда скорость на устойчивой стадии обратится в нуль. Конечно, обращение турбулентной скорости в нуль скорее всего является недостатком модели. Поэтому в п.6 рассматривается случай, когда эта скорость принимает некоторое постоянное значение.

Точные количественные соотношения будут получены после осреднения уравнения (5.5).

Осредненное уравнение для \bar{V} и уравнение для ширины удобно записать в следующем виде: (7.12) и (7.13)

$$\frac{d\bar{V}^2}{dL} + 4k \frac{\bar{V}^2}{L} = \frac{\Phi(\eta_1)}{2\eta_1^2} gA, \quad (10.17)$$

$$\frac{dL}{dt} = 8\eta_1^2 \alpha_m \bar{V}, \quad (10.18)$$

где $\alpha_m = \alpha$.

Полученная система уравнений (10.17), (10.18) интегрируется при любом законе ускорения g . Рассмотрим ступенчатое ускорение согласно

(10.5). Для простоты будем полагать в начальный момент нулевые начальные данные

$$\bar{V}(0) = 0, \quad L(0) = 0. \quad (10.19)$$

Тогда из (10.17) и (10.18) следует решение I этапа. Мы продолжаем его во второй этап до тех пор, пока скорость \bar{V} не обратится в нуль. Этим самым определится переходное время t_c , при котором происходит смена моделей.

Решение уравнений (10.17) и (10.18) при условии (10.19) и (10.5) есть

$$\bar{V}^2 = \begin{cases} \frac{\Phi(\eta_1) g_0 AL}{2\eta_1^2 (1+4k)}, & 0 \leq t \leq t_0, \\ \bar{V}_0^2 + \frac{\Phi(\eta_1) g_1 AL}{2\eta_1^2 (1+4k)} \left[1 - \left(\frac{L_0}{L} \right)^{1+4k} \right], & t_0 \leq t \leq t_c, \end{cases}$$

$$L = \begin{cases} \frac{8\alpha_m^2 \eta_1^2 \Phi(\eta_1) g_0 A t^2}{1+4k}, & 0 \leq t \leq t_0, \\ L_0 \leq L \leq L_c, & t_0 \leq t \leq t_c. \end{cases}$$

Зависимость ширины от времени на интервале $t_0 \leq t \leq t_c$ определится после интегрирования уравнения (10.18). Значение ширины L_c вычисляется как решение уравнения

$$\frac{L_c}{L_0} - \left(\frac{L_0}{L_c} \right)^{4k} = -\frac{g_0}{g_1}. \quad (10.20)$$

При значении ширины L_2 скорость \bar{V} обращается в нуль:

$$\bar{V}(L_c) = 0, \quad (10.21)$$

поэтому согласно (10.18) при $t = t_c$ ширина достигает своего максимального значения.

Заметим, что экспериментально измеренные отношения $\frac{L_c}{L_0}$ и $\frac{t_c}{t_0}$ дают

возможность дополнительного контроля правильности выбора степени $4k$, которая на I этапе при $A = 0$ есть 5.

Время t_c получается интегрированием (10.18):

$$t_c = t_0 + \frac{1}{8\eta_1^2 \alpha_m} \int_{L_0}^{L_c} \frac{1}{\bar{V}} dL.$$

Подынтегральную функцию на интервале $L_0 \leq L \leq L_c$ можно приближенно заменить следующей:

$$\frac{1}{\bar{V}} \sqrt{-\frac{2\eta_1^2(1+4k)}{\Phi(\eta_1)g_1AL_0} \frac{L_c - L_0}{L - L_0}}.$$

Тогда интеграл легко берется, и для t_c имеем

$$t_c = t_0 + \frac{1}{4\eta_1\alpha_m} \sqrt{-\frac{2(1+4k)}{\Phi(\eta_1)g_1AL_0}} (L_c - L_0).$$

Время t_c служит для переключения на сепарационное уравнение

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\sqrt{\alpha_s} \sqrt{\frac{-2g_1L}{(\rho_1 - \rho_2)(\rho_1 + \rho_2)}} (\rho_1 + \rho_2 - 2\rho) \frac{\partial \rho}{\partial x}. \quad (10.22)$$

Начальными данными для этого уравнения будет распределение плотности из (7.4) на момент $t = t_c$:

$$\rho(x, t_c) = \frac{\rho_1 + \rho_2}{2} + \frac{\rho_1 - \rho_2}{2} \Phi\left(\frac{2x}{\eta_1 L_c}\right).$$

Уравнение для ширины определится из характеристического уравнения

$$\frac{d\sqrt{L}}{dt} = -\sqrt{\alpha_s} \sqrt{-2g_1A} \Phi(\eta_1) \quad (10.23)$$

при условии $t = t_c$, $L = L_c$.

Очевидно, что на втором этапе при $t \geq t_c$ ширина после интегрирования (10.23) примет вид

$$\sqrt{L} = \sqrt{L_c} - \sqrt{\alpha_s} \sqrt{-2g_1A} \Phi(\eta_1) (t - t_c). \quad (10.24)$$

Последнее уравнение дает выражение для следующей критической точки, когда $L = 0$:

$$t_{cc} = t_c + \frac{\sqrt{L_c}}{\sqrt{\alpha_s} \sqrt{-2g_1A} \Phi(\eta_1)}.$$

В нашем случае при $t = t_1$, если ускорение снова меняет знак, наступит неустойчивая стадия, на которой будут действовать уравнения диффузионной модели (10.17) и (10.18) при условии, что

$$\bar{V}(t_1) = 0; \quad L_1 = L(t_1) = \sqrt{L_c} - \sqrt{\alpha_s} \sqrt{-2g_1 A} \Phi(\eta_1)(t_1 - t_c),$$

где ширина L_1 заведомо не равна нулю.

Решением на этом этапе будет

$$\rho = \frac{\rho_1 + \rho_2}{2} + \frac{\rho_1 - \rho_2}{2} \Phi\left(\frac{2x}{\eta_1 L}\right), \quad \sqrt{L} = \sqrt{L_1} + 4\alpha\eta_1 \sqrt{\frac{\Phi(\eta_1) g_2 A}{1+4k}} (t - t_1)$$

6. Учет сепарации в k -модели на основании уравнения (10.16)

Построенная теория п.5 базируется на переключении диффузионной модели на сепарационную, причем момент переключения определяется по обращению в нуль кинетической энергии области турбулентного перемешивания. В таком приближении полная сепарация наступит через конечный промежуток времени.

Однако от этого, видимо, неестественного свойства можно легко избавиться, если в рамках рассматриваемых моделей предположить, что переключение определяется по некоторому ненулевому значению кинетической энергии области турбулентного перемешивания. Для этого следует определить это значение, например, как часть N от кинетической энергии в момент переключения ускорения:

$$\bar{V}_c^2 = N\bar{V}_0^2,$$

N 1, и это значение может быть подсказано экспериментом.

Если дальнейшее поведение кинетической энергии области турбулентного перемешивания предположить известным и постоянным, то естественно на сепарационном этапе, в отличие от проведенного выше рассмотрения, учесть диффузионный член (уравнение (10.16)), где

$$D = \alpha_0 L \bar{V}_c,$$

т. е. турбулентная скорость на всем интервале сепарации полагается постоянной.

Такая постановка приводит к тому, что на сепарационном этапе полного разделения смеси не происходит, а при $t \rightarrow \infty$ устанавливается некоторый асимптотический профиль плотности, определяемый уравнением

$$\frac{\partial \rho}{\partial x} = \frac{\sqrt{\alpha_s}}{\alpha_s L V_c} \sqrt{\frac{-2g_1 L}{(\rho_1 - \rho_2)(\rho_1 + \rho_2)}} (\rho_1 - \rho)(\rho - \rho_2).$$

При этом эффективная ширина L_∞ установившегося профиля будет связана с параметрами задачи следующим образом:

$$L_\infty = \frac{2\alpha_0^2 (\Phi(\eta_1))^3 N}{3\eta_1^2 \alpha_s} \left| \frac{g_0}{g_1} \right| L_0.$$

Очевидно, при $N = 0$ получается рассмотренное в п.5 решение. Выбор параметра N остается свободным. На этапе сепарации уравнение для кинетической энергии турбулентности нуждается в уточнении.

Заключение

Проведен анализ модели турбулентного перемешивания Янгса, основанной на использовании системы уравнений многокомпонентной многоскоростной жидкости.

Показано, что в случае несжимаемых жидкостей уравнения модели могут быть сведены к квазилинейному уравнению переноса, свойства которого хорошо изучены. Проанализирована несимметрия перемешивания и установлено, что при больших числах Атвуда она существенно отличается от экспериментальной. Сделано предложение по совершенствованию модели.

Изучена сепарация в условиях применения диффузионных k и $k\varepsilon$ моделей. Задача сведена к известному уравнению Бюргерса. Показано, что сепарационную добавку следует учитывать только на устойчивом этапе действия ускорения, причем не сразу, а с некоторой затяжкой, определяемой из решения уравнения для кинетической энергии турбулентности.

Проанализированы опыты с сепарацией Янгса и Кучеренко–Пылаева. В результате анализа определена постоянная сепарации α_s :

$$\frac{d\sqrt{h_1}}{d\sqrt{2(s-s_c)-2\dot{s}_c(t-t_c)}} = -\sqrt{\alpha_s A}, \quad \alpha_s = 0.01 \quad (10.25)$$

На основании построенных точных решений возникают следующие вопросы и предложения:

- 1) Справедлива ли зависимость (10.25) для произвольного числа Атвуда? Здесь постоянная α_s вычислена при значении $A = 0.5$.
- 2) Какое решение установится на устойчивом этапе при достаточно большом времени? Для этого в опытах Кучеренко–Пылаева следует продолжить интервал действия устойчивого этапа по сравнению с неустойчивым более чем в 2 раза.
- 3) Проверить вывод теории об автомодельном характере плотности: в безразмерных переменных он остается одним и тем же на всех этапах. В зависимости от знака ускорения профиль плотности самоподобно «расширяется» либо «сужается».

ПРИЛОЖЕНИЕ 1

Рекомендации для самостоятельного изучения:

1. Условия на ударной волне и контактном разрыве.
2. Уравнения газовой динамики в Эйлеровых координатах.
3. Одномерный случай: независимые переменные x и t .
4. Разрывные решения. Понятия об ударной волне и контактном разрыве. Задача о поршне.
5. Литература: А.А. Самарский, Ю.П. Попов, Разрывные схемы газовой динамики. Глава 1.
6. Б.Л. Рождественский, Н.Н. Яненко, Системы квазилинейных уравнений и их применения к газовой динамике. Глава 2. § 4.

Условия на ударной волне

Уравнения:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho U) &= 0 \quad \text{— закон сохранения массы,} \\ \frac{\partial \rho u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho U) + \frac{\partial P}{\partial x} &= 0 \quad \text{— закон сохранения импульса,} \\ \frac{\partial s}{\partial t} + u \frac{\partial s}{\partial x} &= 0, \quad \text{или} \\ \frac{\partial \rho}{\partial t} \left(\varepsilon + \frac{U^2}{2} \right) - \left(\varepsilon + \frac{U^2}{2} + \frac{P}{\rho} \right) &= 0 \quad \text{— закон сохранения энергии.} \end{aligned} \right\} \quad (\text{П.1.1})$$

Здесь ρ – плотность, U – скорость, P – давление, ε – внутренняя энергия, $\varepsilon = \varepsilon(\rho, T)$; $P = P(\rho, T)$ – уравнения состояния для идеального газа.

$$P = (c_p - c_v) \rho T; \quad \varepsilon = c_v T; \quad \gamma = \frac{c_p}{c_v};$$

c_p и c_v – постоянные. s – энтропия $s = s(\rho, T)$. Для идеального газа

$$S = \frac{R}{\gamma - 1} \ln \frac{P}{\rho^\gamma}; \quad R = c_p - c_v. \quad (\text{П.1.2})$$

В (П.1.2) опущена произвольная постоянная, с точностью до которой определяется энтропия каждой частицы газа.

Ударная волна – разрыв, перемещающийся со скоростью D по массе вещества. Все величины на фронте УВ терпят разрыв.

Условия на разрыве – условия Гюгонио:

1) условие сохранения массы:

$$\rho_1 (U_1 - D) = \rho_0 (U_0 - D)$$

2) условие сохранения импульса:

$$\rho_1 (U_1 - D)^2 + P_1 = \rho_0 (U_0 - D)^2 + P_0$$

3) условие сохранения энергии:

$$\rho_1 (U_1 - D) \left(\varepsilon_1 + \frac{P_1}{\rho_1} + \frac{(U_1 - D)^2}{2} \right) = \rho_0 (U_0 - D) \left(\varepsilon_0 + \frac{P_0}{\rho_0} + \frac{(U_0 - D)^2}{2} \right)$$

ПРИЛОЖЕНИЕ 2

Вывод дисперсионного уравнения (3.6)

В § 3 после подстановки (3.5) в (3.6) получена система шести уравнений относительно шести неизвестных функций

$U_i'(x_1)$, $i = 1, 2, 3$, $\rho'(x_1)$, $P'(x_1)$, $s'(x_1)$:

$$i\omega\rho' + ik_3\rho U_3' + ik_2\rho U_2' + \frac{\partial}{\partial x_1}(\rho U_1') = 0, \quad (\text{П.2.1})$$

$$i\omega U_1' = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P'}{\partial x_1} - \frac{\rho'}{\rho} g_0, \quad (\text{П.2.2})$$

$$i\omega U_2' = -ik_2 \frac{P'}{\rho}, \quad (\text{П.2.3})$$

$$i\omega U_3' = -ik_3 \frac{P'}{\rho}, \quad (\text{П.2.4})$$

$$i\omega s' = -U_1' \frac{\partial s}{\partial x_1}, \quad (\text{П.2.5})$$

$$\rho' = + \frac{\partial \rho}{\partial s} \Big|_P s' + \left(\frac{\partial \rho}{\partial P} \right)_s P'. \quad (\text{П.2.6})$$

С учетом введенных ранее обозначений

$$g_0 = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x_1}; \quad c_0^2 = \frac{1}{\frac{\partial \rho}{\partial P} \Big|_s}; \quad a_0 = \frac{\partial \ln \rho}{\partial x_1};$$

$$\Phi_0 = -g_0(g_0 + c_0^2 a_0).$$

из (П.2.5) и (П.2.6) следует:

$$\rho' = \frac{1}{i\omega} \frac{\Phi_0}{g_0 c_0^2} \rho U_1' + \frac{P'}{c_0^2}. \quad (\text{П.2.7})$$

При выводе (П.2.7) использовано равенство

$$\frac{\partial \rho}{\partial x_1} = \frac{\partial \rho}{\partial s} \Big|_P \frac{\partial s}{\partial x_1} + \frac{\partial \rho}{\partial P} \Big|_s \frac{\partial P}{\partial x_1}$$

или

$$\frac{\partial \rho}{\rho \partial s} \Big|_P \frac{\partial s}{\partial x_1} = a_0 + \frac{g_0}{c_0^2} = -\frac{\Phi_0}{g_0 c_0^2}.$$

Из (П.2.1), (П.2.3), (П.2.4) следует:

$$i\omega \rho' - ik_1^2 \frac{P'}{\omega} + \frac{\partial}{\partial x_1} (\rho U_1') = 0 \quad (\text{П.2.8})$$

В (П.2.8) подставим ρ' из (П.2.7) и получим

$$\left(\frac{1}{c^2} - \frac{k_1^2}{c\omega^2} \right) i\omega P' + \frac{\partial}{\partial x_1} (\rho U_1') + \frac{\Phi_0}{g_0 c_0^2} \rho U_1' = 0. \quad (\text{П.2.9})$$

Последнее уравнение преобразуется в (П.2.10):

$$\left(\frac{1}{c^2} - \frac{k_1^2}{\omega^2} \right) i\omega P' + \rho \frac{\partial U_1'}{\partial x_1} - \frac{\rho g_0}{c_0^2} U_1' = 0 \quad (\text{П.2.10})$$

Уравнение (П.2.10) продифференцируем по x_1 и получим (П.2.11):

$$\left(\frac{1}{c^2} - \frac{k_1^2}{\omega^2}\right) i\omega \frac{\partial P'}{\partial x} = \frac{g_0}{c_0^2} \frac{\partial}{\partial x_1} (\rho U_1') - \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\rho \frac{\partial U_1'}{\partial x_1} \right). \quad (\text{П.2.11})$$

Подставим ρ' из (П.2.7) в (П.2.2) и получим:

$$\left(i\omega + \frac{\Phi_0}{i\omega c_0^2} \right) \rho U_1' = -\frac{\partial P'}{\partial x_1} - \frac{g_0}{c_0^2} P' \quad (\text{П.2.12})$$

Наконец, находим из (П.2.10) и (П.2.11) \bar{P}' и $\frac{\partial P'}{\partial x_1}$ и подставляем в (П.2.12). Тем самым получаем уравнение (3.6).

ПРИЛОЖЕНИЕ 3

Покажем, что искомое решение должно выходить из точки (6.4) и входить в точку (6.5). Для этого нужно установить, что

$$y_1 = y(\lambda_1) = \frac{2}{3} \lambda_1.$$

Рассмотрим все допустимые значения y_1 : $y_1 = 0$; $y_1 = \infty$; $y_1 > 0$ и конечно.

4) $y_1 = 0$. Система уравнений (6.2)–(6.3) в окрестности точки $(\lambda_1, 0, 0)$ примет вид

$$\xi' = \frac{3}{2} \lambda_1 \left(\frac{\xi}{3} - y^2 \right), \quad y' = -\frac{\lambda_1}{3} \frac{y}{\xi}.$$

Можно показать, что среди решений, выходящих из точки $(\lambda_1, 0, 0)$ нет искомого, удовлетворяющего очевидным условиям $\xi > 0$, $y > 0$.

Действительно, разделив одно уравнение на другое, получим

$$\frac{d\xi}{dy} = \frac{3y^2 - \xi}{y} \xi.$$

Видно, что среди кривых, лежащих в квадранте $\xi > 0$, $y > 0$, нет решения, проходящего через начало координат.

5) $y_1 = \infty$. В этом случае уравнения (6.2)–(6.3) эквивалентны урезанной системе

$$\left. \begin{aligned} \left(\frac{2}{3}\lambda_1 + y^2\xi\right)\xi' + \left(1 - \frac{1}{3}y^2\xi^2\right)y^2 &= 0 \\ -\left(\frac{2}{3}\lambda_1 + \xi'\right) &= \xi\left(y^2 + \frac{2y'}{y}\right) \end{aligned} \right\} \quad (\text{П.3.1})$$

Безразмерная комбинация $y^2\xi$ в точке $\lambda = \lambda_1$ равна нулю. Действительно, если вернуться к исходным величинам, то

$$y^2\xi \approx D \frac{\partial \rho}{\rho \partial x},$$

т.е. выражение $y^2\xi$ есть поток смеси и поэтому на фронте перемешивания равно нулю.

Система (П.3.1) после сделанного замечания заметно упрощается:

$$\frac{2}{3}\lambda_1\xi' = -y^2, \quad y' = \frac{3}{4\lambda_1} \frac{y^3}{\xi}.$$

Поделив одно уравнение на другое и проинтегрировав, получим:

$$\frac{dy}{d\xi} = -\frac{y}{2\xi}, \quad y = c\xi^{-1/2}.$$

б) $y_1 > 0$. y_1 – постоянная. Урезанная система примет вид

$$\frac{2}{3}\lambda_1\xi' = -y_1^2, \quad -\left(\frac{2}{3}\lambda_1 + \xi'\right) = \xi\left(y_1^2 + \frac{2y'}{y_1}\right),$$

откуда неминуемо следует, что

$$y_1 = \frac{2}{3}\lambda_1, \quad \xi'(\lambda_1) = -\frac{2}{3}\lambda_1.$$

Аналогично исследуется другая точка и показывает, что

$$y_2 = \frac{2}{3}\lambda_2, \quad \xi'(\lambda_2) = -\frac{2}{3}\lambda_2.$$

ПРИЛОЖЕНИЕ 4.

Усреднение уравнения (9.7) по области $-L_m \leq x \leq L_0$.

Проинтегрируем левую и правую части уравнения (9.7) в указанных пределах. Предварительно оценим ряд интегралов:

$$a) \quad \int_{-L_m}^{L_0} \rho V^2 dx = \bar{V}^2 m, \quad \text{где} \quad m = \int_{-L_m}^{L_0} \rho dx.$$

При больших временах $\frac{L_m}{L} \gg 1$:

$$m \cong \left(\rho_2^0 + \frac{\rho_1^0 - \rho_2^0}{2} \Phi \left(\frac{L_0}{2\sqrt{\tau}} \right) \right) L_m \cong \rho_1^0 L_m,$$

$$b) \quad \int_{-L_m}^{L_0} g \frac{\partial \rho}{\partial x} dx = \frac{g(\rho_1^0 - \rho_2^0) L_0}{\sqrt{\tau \pi}} (1 - e^{-\pi});$$

$$c) \quad \int_{-L_m}^{L_0} \frac{\partial \rho}{\partial x} \frac{\partial V^2}{\partial x} dx \cong 0;$$

$$d) \quad \int_{-L_m}^{L_0} \rho V^2 \left(\frac{\partial \ln \rho}{\partial x} \right)^2 dx \cong \frac{\bar{V}^2 (\rho_1^0 - \rho_2^0)^2}{\rho_1^0 \tau^{\frac{3}{2}}};$$

$$e) \quad \int_{-L_m}^{L_0} \frac{\partial \rho}{\partial \tau} dx \cong (\rho_1^0 - \rho_2^0) \frac{L_0 e^{-\pi}}{2\tau}.$$

Пренебрегая членами более высокого порядка малости, получим уравнение:

$$\frac{\partial(\bar{V}m)}{2\partial\tau} + \frac{\nu \bar{V}^2 m}{\alpha^2 L_m^2} = \frac{g(\rho_1^0 - \rho_2^0) L_0 (1 - e^{-\pi})}{\sqrt{\tau \pi}}.$$

Если в это уравнение подставить вместо массы m ее значение $\rho_1^0 L_m$, а вместо ширины $L_m \cong 2\eta_m \sqrt{\tau}$, то получим уравнение (9.8).

Приложение 5

Исследование поведения интегральных кривых системы уравнений (8.8) в окрестности точки $L = \bar{k} = \bar{\varepsilon}_t = 0$.

В уравнении (8.8) перейдем от L к τ . Получим:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\bar{k}}{d\tau} - P_0 \frac{\bar{k}}{\tau} + \frac{\bar{\varepsilon}_t^2}{c_\mu \bar{k}^2} &= \frac{P_1}{\sqrt{\tau}}; \\ \frac{d\bar{\varepsilon}}{d\tau} - P_2 \frac{\bar{\varepsilon}_t}{\tau} + \frac{c_{\varepsilon 2} \bar{\varepsilon}_t^3}{c_\mu \bar{k}^3} &= \frac{c_{\varepsilon 1} P_1 \bar{\varepsilon}_t}{\sqrt{\tau} \bar{k}}. \end{aligned} \right\}; \quad (\text{П.5.1})$$

а) Пусть в окрестности нуля

$$\frac{\varepsilon_t^2}{c_\mu \bar{k}^2} < P_0 \frac{\bar{k}}{\tau} + \frac{P_1}{\sqrt{\tau}}.$$

Тогда систему уравнений (П.5.1) можно заменить следующей

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\bar{k}}{d\tau} &= \frac{\bar{k}}{\tau} P_0 + \frac{P_1}{\sqrt{\tau}} \\ \frac{d\bar{\varepsilon}_t}{\tau} &= \frac{\bar{\varepsilon}_t}{\tau} P_2 + c_{\varepsilon 1} \frac{\bar{\varepsilon}_t}{\bar{k}} \frac{P_1}{\sqrt{\tau}} \end{aligned} \right\}.$$

Полученные уравнения имеют семейство интегральных кривых, выходящее из нуля.

$$\left. \begin{aligned} \bar{k} &= \frac{2P_1}{1-2P_0} \sqrt{\tau} \\ \bar{\varepsilon}_t &= \text{const } \tau^{c_{\varepsilon 1}(0.5-P_0)+P_2} \end{aligned} \right\}; \quad (\text{П.5.2})$$

б) пусть в окрестности нуля

$$\frac{\bar{\varepsilon}_t^2}{c_\mu \bar{k}^2} > P_0 \frac{\bar{k}}{\tau} + \frac{P_1}{\tau^{\frac{1}{2}}}.$$

Тогда от (П.5.1) перейдем к урезанной системе уравнений.

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\bar{k}}{d\tau} &= -\frac{\bar{\varepsilon}_t^2}{c_\mu \bar{k}^2}; \\ \frac{d\bar{\varepsilon}_t}{d\tau} &= -\frac{c_{\varepsilon 2} \bar{\varepsilon}_t^3}{c_\mu \bar{k}^3}, \end{aligned} \right\}$$

Решения полученной системы уравнений приводят к отрицательным значениям \bar{k} , поэтому не рассматриваются.

в) Наконец, остается случай, когда имеет место равенство, т.е.

$$\frac{\bar{\varepsilon}_t^2}{c_\mu \bar{k}^2} = \bar{c}_0 P_0 \frac{\bar{k}}{\tau},$$

где \bar{c}_0 – постоянная. Найдем ее. Из первого уравнения системы (П.5.1) следует

$$\frac{\partial \bar{k}}{\partial \tau} = -\bar{c}_0 P_0 \frac{\bar{k}}{\tau} + P_0 \frac{\bar{k}}{\tau} + \frac{P_1}{\sqrt{\tau}}.$$

Решением, выходящим из нуля, будет

$$\bar{k} = \frac{2P_1 \sqrt{\tau}}{1 - 2P_0(1 - \bar{c}_0)}.$$

Из второго уравнения системы (П.5.1) получаем выражение для \bar{c}_0

$$\bar{c}_0 = \frac{0.25 - P_2 + c_{\varepsilon 1}(P_0 - 0.5)}{P_0(c_{\varepsilon 1} - c_{\varepsilon 2})}.$$

Таким образом, в случае «в» получается единственное нетривиальное решение, имеющее вид

$$\left. \begin{aligned} \bar{k} &= \frac{P_1(c_{\varepsilon 2} - c_{\varepsilon 1})}{c_{\varepsilon 2}(0.5 - P_0) - 0.25 + P_2} \sqrt{\tau} \\ \bar{\varepsilon}_t^2 &= c_\mu (c_{\varepsilon 2} - c_{\varepsilon 1})^2 P_1^3 \frac{0.25 - P_2 + c_{\varepsilon 1}(P_0 - 0.5)}{[0.25 - P_2 + c_{\varepsilon 2}(P_0 - 0.5)]^3} \sqrt{\tau} \end{aligned} \right\} \quad (\text{П.5.3})$$

К этому следует добавить, что помимо решения (П.5.3), будет также существовать бесчисленное множество решений, имеющих разложение (П.5.2). Естественно, возникает вопрос о выборе нужного решения. Квадратичный закон развития ширины области перемешивания от времени

получится, если принять единственное решение (П.5.3). В этом случае получим

$$\sqrt{\tau} = \frac{0.25c_{\mu} (c_{\varepsilon 1} - c_{\varepsilon 2})^2 P_1 t^2}{\left[0.5 + c_{\varepsilon 1} (2P_0 - 1) - 2P_2\right] \left[0.5 + c_{\varepsilon 1} (2P_0 - 1) - 2P_2\right]} \quad (\text{П.5.4})$$

Другой класс решений, определяемый формулами (П.5.2) также существует. Это однопараметрическое семейство интегральных кривых, выходящих из нулевой точки $\tau = 0$; $\bar{k} = 0$; $\bar{\varepsilon}_t = 0$, приводит к некоторому степенному закону

$$L t^{\frac{1}{2c_{\varepsilon 1} - 1}}.$$

Здесь степень вычислена для малых чисел Атвуда. И, вообще говоря, не ясно, какое решение следует выбрать.

Приложение 6

Исследование поведения интегральных кривых в окрестности особой точки $\tau = \tau_0$; $\bar{k} = \bar{\varepsilon}_t = 0$ системы уравнений (8.8).

а) Пусть $\frac{\bar{\varepsilon}_t}{k} \rightarrow 0$. Тогда урезанная система имеет вид

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \bar{k}}{\partial \tau} &= \frac{P_1}{\sqrt{\tau_0}}; \\ \frac{\partial \bar{\varepsilon}_t}{\partial \tau} &= \frac{P_1 c_{\varepsilon 1}}{\sqrt{\tau_0}} \frac{\bar{\varepsilon}_t}{k}; \end{aligned} \right\}$$

а ее решением будет

$$\bar{\varepsilon}_t = \text{const } \bar{k}^{c_{\varepsilon 1}}; \quad \bar{k} = \frac{P_1}{\sqrt{\tau_0}} (\tau - \tau_0).$$

Из точки $\tau = \tau_0$; $\bar{k} = \bar{\varepsilon}_t = 0$ выходит однопараметрическое семейство интегральных кривых.

б) пусть $\frac{\bar{\varepsilon}_t}{\bar{k}} \rightarrow \infty$. Тогда систему (П.5.1) приближенно можно заменить следующей:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \bar{k}}{\partial \tau} &= -\frac{\bar{\varepsilon}_t^2}{c_\mu \bar{k}^2}; \\ \frac{\partial \bar{\varepsilon}_t}{\partial \tau} &= -\frac{c_{\varepsilon 2} \bar{\varepsilon}_t^3}{c_\mu \bar{k}^3}; \end{aligned} \right\}$$

Ее решение $\bar{\varepsilon}_t = \text{const} \bar{k}^{c_{\varepsilon 2}}$ противоречит нашему предположению «б».

в) пусть $\frac{\bar{\varepsilon}_t}{\bar{k}} \rightarrow \text{const}$. В этом случае из нуля выходит единственное решение

$$\bar{\varepsilon}_t = \sqrt{\frac{P_1 c_\mu (c_{\varepsilon 2} - 1)}{\sqrt{\tau_0} (c_{\varepsilon 2} - 1)}} \bar{k};$$

$$\bar{k} = \frac{P_1}{\sqrt{\tau_0}} \frac{c_{\varepsilon 2} - c_{\varepsilon 1}}{c_{\varepsilon 2} - 1} (\tau - \tau_0).$$

Таким образом, поведение интегральных кривых в окрестности изучаемой точки на плоскости $(\bar{k}, \bar{\varepsilon}_t)$ будет иметь вид, изображенный на рис.2. Действительно, это следует из уравнения:

$$\frac{d\bar{k}}{d\bar{\varepsilon}_t} = \frac{-\frac{\tau_0}{c_\mu} \bar{\varepsilon}_t^2 + P_1 \sqrt{\tau_0} \bar{k}^2}{-\frac{c_{\varepsilon 2} \tau_0}{c_\mu} \bar{\varepsilon}_t^2 + P_1 c_{\varepsilon 1} \sqrt{\tau_0} \bar{k}^2} \frac{\bar{k}^2}{\bar{\varepsilon}_t},$$

которое получается из (8.8), (П.5.1), если первое уравнение разделить на второе и отбросить в окрестности $\tau = \tau_0$ члены более высокого порядка малости.

Приложение 7.

Усреднение уравнения (9.7) по области $-L_m \leq x \leq L_0$.

Проинтегрируем левую и правую части уравнения (9.7) в указанных пределах. Предварительно оценим ряд интегралов:

$$a) \quad \int_{-L_m}^{L_0} \rho V^2 dx = \bar{V}^2 m, \quad \text{где} \quad m = \int_{-L_m}^{L_0} \rho dx.$$

При больших временах $\frac{L_m}{L} \gg 1$:

$$m \cong \left(\rho_2^0 + \frac{\rho_1^0 - \rho_2^0}{2} \Phi \left(\frac{L_0}{2\sqrt{\tau}} \right) \right) L_m \cong \rho_2^0 L_m,$$

$$b) \quad \int_{-L_m}^{L_0} g \frac{\partial \rho}{\partial x} dx = \frac{g(\rho_1^0 - \rho_2^0) L_0}{\sqrt{\tau \pi}} (1 - e^{-\pi});$$

$$c) \quad \int_{-L_m}^{L_0} \frac{\partial \rho}{\partial x} \frac{\partial V^2}{\partial x} dx \cong 0;$$

$$d) \quad \int_{-L_m}^{L_0} \rho V^2 \left(\frac{\partial \ln \rho}{\partial x} \right)^2 dx \cong \frac{\bar{V}^2 (\rho_1^0 - \rho_2^0)^2}{\rho_1^0 \tau^{\frac{3}{2}}};$$

$$e) \quad \int_{-L_m}^{L_0} \frac{\partial \rho}{\partial \tau} dx \cong (\rho_1^0 - \rho_2^0) \frac{L_0 e^{-\pi}}{2\tau}.$$

Пренебрегая членами более высокого порядка малости, получим уравнение:

$$\frac{d(\bar{V}m)}{2d\tau} + \frac{\nu \bar{V}^2 m}{\alpha^2 L_m^2} = \frac{g(\rho_1^0 - \rho_2^0) L_0 (1 - e^{-\pi})}{\sqrt{\tau \pi}}.$$

Если в это уравнение подставить вместо массы m ее значение $\rho_2^0 L_m$, а вместо ширины $L_m \cong 2\eta_m \sqrt{\tau}$, то получим уравнение (9.8).

Приложение 8.

Построим приближенное решение системы (9.18), (9.19). Для этого в (9.18) пренебрежем членом ζ' , а функцию ζ заменим постоянной ζ_0 , которую определим путем приближенного интегрирования уравнения (2.5). В результате

$$-\frac{B}{(B+1)\zeta_0} y\lambda = y^3 + 2y'; \quad (\text{П8.1})$$

$$(1+B)\zeta_0 = \frac{1-1.5B}{\frac{\nu}{4\alpha^2\lambda_{0.1}^2} + \frac{y_0^4}{\zeta}}. \quad (\text{П8.2})$$

Последнее соотношение получено следующим образом. Уравнение (9.19) умножено на ζ и от обеих частей его взят интеграл по области $[-\lambda_{0.1}, \lambda_{0.1}]$, при этом использованы приближенные равенства

$$\int_{-\lambda_{0.1}}^{\lambda_{0.1}} \left[\frac{B}{B+1} \lambda + (1+2\beta)\zeta y^2 \right] \zeta \zeta' d\lambda = \frac{B}{B+1} \lambda_{0.1} \zeta_0^2,$$

$$\int_{-\lambda_{0.1}}^{\lambda_{0.1}} \zeta^2 y^2 \left(\frac{B}{B+1} \lambda + \zeta y^2 \right) d\lambda = 2y^4(0) \zeta_0^3 \lambda_{0.1}.$$

Дифференциальное уравнение (П8.1) для функции y есть уравнение Бернулли. Оно интегрируется, и решение представляется в виде

$$\Delta = \frac{1}{y^2(0)} + \left(\frac{1+B}{2B} \zeta_0 \pi \right)^{0.5} \Phi \left[\frac{\lambda B^{0.5}}{(2(B+1)\zeta_0)^{0.5}} \right].$$

Удовлетворяя граничным условиям (9.20), имеем

$$y_0^2 = 2n(n+1), \quad \left[2(1+B)\zeta_0 \pi \right]^{0.5} = \frac{n-1}{n}. \quad (\text{П8.3})$$

Из условия $\delta(\lambda_{0.1}) = 0.1$ находим

$$\lambda_{0.1} = \frac{\eta_0(n-1)}{\pi^{0.5} n}. \quad (\text{П8.4})$$

Из (П8.2)–(П8.4) можно определить показатель автоматодельности B . Выражение для него тождественно совпадает с формулой (9.29).

