С.М. НИКОЛЬСКИЙ

КУРС МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

I

С. М. НИКОЛЬСКИЙ

КУРС МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

Том I

Издание третье,
переработанное и дополненное

*Допущено Министерством высшего
и среднего специального образования СССР
в качестве учебника для студентов физических
и механико-математических специальностей
высших учебных заведений*

МОСКВА «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
1983

22.16
Н 64
УДК 517

Никольский С. М. **Курс математического анализа.** Т. I. — 3-е изд., перераб. и доп.— М.: Наука, Главная редакция физико-математической литературы, 1983.— 464 с.

Учебник для студентов физических и механико-математических специальностей вузов написан на основе курса лекций, читаемого автором в Московском физико-техническом институте. Фактически принят как учебное пособие в некоторых втузах с повышенной программой по математике.

Первый том содержит дифференциальное исчисление функций одной и многих переменных, ряды и интегральное исчисление для функций одной переменной.

Для третьего издания учебник существенно переработан и дополнен.

Илл.— 83.

Н $\frac{1702050000 - 105}{053(02)-83}$ 78-83

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ К ПЕРВОМУ ИЗДАНИЮ

Этот учебник, выходящий в двух томах, соответствует, если не считать некоторых добавлений, программе курса математического анализа, читаемого мною уже много лет в Московском физико-техническом институте.

Первая глава носит вводный характер. В ней на основе интуитивных представлений о пределе вводятся основные понятия математического анализа и даже на основании наглядных и физических соображений устанавливается связь между производной и интегралом и даются элементы техники дифференцирования и интегрирования, нужные читателю, изучающему параллельно физику.

Вторая глава посвящена действительному числу. В основу понятия числа взято его представление в виде бесконечной десятичной дроби. Только часть этой главы — крупный шрифт,— рассматривается как обязательная. При желании она может быть еще уменьшена.

Я придерживаюсь точки зрения, впрочем, традиционной, что основные факты математического анализа сначала должны быть изложены для функций одной переменной, а затем уже для многих переменных. Здесь неизбежны повторения, но они незначительны. С другой стороны, для такой аудитории, какой являются студенты наших мехматов, физматов и физтехов, вполне возможно переходить от одной не к двум и не к трем, а сразу же к n переменным. Весь вопрос тут только в удачных обозначениях. Но они уже выработаны в журнальной и монографической литературе, целесообразность их уже проверена и теперь они должны становиться достоянием наших учебников. Такой подход обеспечивает правильную перспективу. Ведь во второй половине курса,— в таких разделах как ряды Фурье, интеграл Фурье,— читателю придется овладевать представлением о бесконечномерности функциональных пространств.

В своем изложении я достаточно рано ввожу понятие n-мерного евклидова пространства, пространства со скалярным произведением, банахова пространства и широко пользуюсь этими понятиями, однако, в меру необходимости выполнения программы.

Как требуется программами, изложение курса ведется на основе интеграла Римана. Я старался аналогичные теоремы в одномерном и многомерном случаях доказывать аналогично, чтобы сэкономить силы читателя для других вопросов.

Очень деликатный вопрос — как быть с полнотой пространств L и L_2? Чтобы решить этот вопрос, я не строю абстрактные элементы, заменяющие функции, интегрируемые по Лебегу, и в основном тексте ограничиваюсь только разъяснениями о том, как соответствующий факт выглядел бы в терминах интеграла Лебега.

Впрочем, учебник снабжен добавочной главой 19 (том II), посвященной интегралу Лебега. Я уверен, что многие мои читатели по собственной инициативе будут заглядывать в нее. Они от этого ничего не потеряют. Современная математическая физика, которую им придется изучать, нуждается в интеграле Лебега. Например, прямые вариационные методы математической физики немыслимы без употребления интеграла Лебега. К чтению главы 19 читатель будет вполне подготовлен после того как он познакомится с понятием меры Жордана.

Главы 17 и 18 (том II) тоже дополнительные. В главе 18 уделено место таким важным понятиям современного анализа, как усреднение функции по Соболеву и разбиение единицы. По-настоящему они должны входить в обязательные программы повышенных курсов анализа.

Глава 17 посвящена дифференцируемым многообразиям и дифференциальным формам. Кульминационным ее пунктом является доказательство теоремы Стокса в n-мерном пространстве. Эта глава может служить проверкой того, насколько оказался подготовленным читатель, освоивший эту книгу.

Я желал, чтобы мой читатель, освоив курс, легче ориентировался в методах математической физики. Ряд добавлений сделан именно исходя из интересов математической физики. Большое поле деятельности здесь возникает при изложении вопросов, связанных с функциями многих переменных. Здесь наша педагогическая мысль должна еще поработать. Я надеюсь, что и моя книга вносит некоторую лепту в это трудное дело.

Я хочу отметить книги, оказавшие на меня большое влияние.

Во-первых, это «Курс анализа бесконечно малых» Ш. Ж. де ла Валле-Пуссена. Двухтомник Валле-Пуссена, память которого я хочу здесь почтить, я старательно изучал будучи студентом, а теперь он служит моей настольной книгой.

Во-вторых, это книга «Введение в теорию функций действительного переменного» П. С. Александрова и А. Н. Колмогорова, которую я тоже в свое время старательно изучил и, следуя ей, читал свои курсы в Днепропетровском университете. Но я, кроме того, неоднократно слушал лекции этих двух выдающихся авторов, один из них — А. Н. Колмогоров — мой научный учитель. Выражаю им здесь свою глубокую благодарность.

Я хочу выразить свою признательность коллективу кафедры математики Московского физико-технического института, в котором я работаю двадцать пять лет, в течение которых много раз обсуждались вопросы преподавания математического анализа. Конечно, при этом я должен особо выделить моих коллег проф. Л. Д. Кудрявцева, заведующего кафедрой, и проф. О. В. Бесова, беседы с которыми были особенно интенсивными.

С первыми главами рукописи книги детально ознакомились мои коллеги проф. Е. А. Волков и проф. П. И. Лизоркин, отметив имеющиеся там недочеты, которые я устранил. Главу 17, посвященную дифференциальным формам, внимательно прочитал проф. Р. В. Гамкрелидзе; многие его советы я учел. Мне были очень полезны также советы проф. А. А. Дезина, с которым я беседовал по этому вопросу.

Мои официальные рецензенты академик И. Н. Векуа и кафедра математики Московского института электронного машиностроения весьма благожелательно отнеслись к моей книге; они дали ряд полезных советов, которыми я воспользовался.

Я учел, конечно, и советы моего коллеги, редактора книги А. А. Вашарина, тщательно прочитавшего текст рукописи и проверившего его во всех деталях.

Всем указанным лицам я приношу свою глубокую благодарность.

С. М. Никольский

ПРЕДИСЛОВИЕ КО ВТОРОМУ ИЗДАНИЮ

Для 2-го издания сделаны изменения, носящие чисто педагогический характер (см., в частности, §§ 3.7, 3.8, 5.8, 5.11, 6.2, 6.11, 7.5, 7.12, 7.22, 8.5, 10.10). Иногда они свелись к перераспределению материала внутри параграфа. Менее нужные факты по возможности относились в конец параграфа, чтобы в случае необходимости можно было их опустить без ущерба для понимания дальнейшего текста.

Автор считает существенными следующие недочеты, замеченные в 1-м издании тома I:

стр. 223, строки 5, 6 снизу, следует читать так:

$$\Delta_{yh}\Delta_{xh}f = \Delta_{yh}[f(x+h, y) - f(x, y)] =$$
$$= h\left[f'_y(x+h, y+\theta h) - f'_y(x, y+\theta h)\right] =$$
$$= h^2 f''_{xy}(x+\theta_1 h, y+\theta h) = h^2\left[f''_{xy}(x, y) + \varepsilon\right]$$

стр. 173, строки 5, 6 снизу, следует читать так:

α неотрицательное число.

Я благодарю А. А. Вашарина, Ю. С. Никольского, А. М. Полосуева и С. А. Теляковского, обративших мое внимание на некоторые недочеты в 1-м издании.

С. М. Никольский

ПРЕДИСЛОВИЕ К ТРЕТЬЕМУ ИЗДАНИЮ

3-е издание несколько дополнено. Сравнительно существенным изменениям подверглись § 2.3 (лемма 1), 2.4, 3.4, 3.6, 3.7 (теоремы 2, 3, 6), 3.8, 5.14 (теоремы 1, 2), 7.16 (теорема 1), 7.17 (теорема 1), 7.19, 11.3, 11.6 (теорема 2), 11.7, 11.8, 11.11, 11.12.

Я благодарю О. В. Бесова, Я. С. Бугрова, А. Н. Вейсенберга, Р. В. Гамкрелидзе, В. Т. Лозовика, Ю. С. Никольского, М. С. Никулина, С. А. Теляковского, В. П. Шанькова, сделавших полезные замечания, а иногда обративших мое внимание на недочеты во 2-м издании I и II томов. Есть еще один квалифицированный математик, которого я благодарю за присланные замечания, но его подпись оказалась неразборчивой.

Я благодарю также многих слушателей — студентов Московского физико-технического института, которым я читал из года в год математический анализ, следуя этой книге. К их замечаниям я прислушиваюсь особенно.

2-е издание переведено на другие языки: латышский — издательством Zvaigzne (Riga, 1979), английский — издательством Мир (1975), испанский (первый том) — издательством URMO S. A. de edicional (Bilbao, 1979).

К тому же издательство Мир готовит 2-е издание своего перевода. Переводчики тоже делали замечания. Я благодарю переводчиков на латышский язык У. Гринфельда, Г. Энгелиса и Е. Энгелиса, на английский язык — В. М. Волосова и на испанский язык — Апарисио Бернардо.

1982 *С. М. Никольский*

Глава 1

ВВЕДЕНИЕ

§ 1.1. Вступление

Название «Математический анализ» представляет собой сокращенное видоизменение старого названия «Анализ бесконечно малых». Последнее больше говорит, но оно тоже сокращенное. Название «Анализ посредством бесконечно малых» характеризовало бы предмет более точно.

Было бы лучше, если бы название отражало те объекты, которые подвергаются анализу (изучению). В классическом математическом анализе такими объектами являются прежде всего функции, т. е. переменные величины, зависящие от других переменных величин.

Мы говорим «прежде всего», потому что дальнейшее развитие математического анализа привело к возможности изучения его методами более сложных образований, чем функции (функционалов, операторов и т. д.). Но об этом говорить пока рано. Ближайшей нашей задачей является изучение достаточно общих, встречающихся на практике функций методами бесконечно малых или, что все равно, методами пределов. В чем заключаются эти методы — это постепенно будет разворачиваться перед читателем в дальнейшем. Скажем пока, что эти методы, в частности, приводят к очень важным операциям над функциями — дифференцирования и интегрирования.

Параграфы 1.2, 1.3 посвящены понятиям множества и функции.

Следующие три параграфа, 1.4 — 1.6, носят чисто вводный характер. Из них читатель получит представление об основных понятиях математического анализа, которые будут подробно в развернутом виде изучаться в этой книге,— непрерывности, производной, неопределенного и определенного интегралов. Понятием предела мы, конечно, здесь пользуемся, но вовсе его пока не определяем и не разъясняем, всецело пока полагаясь на интуицию читателя. Возможен и такой способ чтения книги, при котором параграфы 1.4 — 1.6 выпускаются, с тем чтобы впоследствии возвратиться к ним по мере ссылок на них.

§ 1.2. Множество. Интервал, отрезок

Любое собрание или совокупность каких-либо предметов называют в математике *множеством*. Например, можно говорить о множестве всех деревьев, находящихся на данной поляне, или о множестве гусей, пасущихся на ней, или о множестве всех целых чисел. Если A обозначает некоторое заданное множество предметов, а x — один из этих предметов, то говорят, что x есть *элемент* множества A и записывают этот факт так: $x \in A$.

Если y не есть элемент A, то это записывают так: $y \overline{\in} A$ или $y \notin A$.

Если одно и то же множество оказалось обозначенным двумя буквами, A и B, пишут $A = B$, подчеркивая в случае необходимости, что здесь идет речь о теоретико-множественном равенстве, которое не надо смешивать с равенством между числами.

Если из того, что $x \in A$, всякий раз следует, что $x \in B$, то пишут $A \subset B$ и говорят, что A *входит* в B или A *есть подмножество или часть* B. Отдадим себе отчет в том, что при таком определении случай $A = B$ есть частный случай $A \subset B$. Ведь если не только $A \subset B$, но и $B \subset A$, то $A = B$, и наоборот.

Если множество состоит только из одного элемента x, то лучше его обозначить другой буквой, например, A, потому, что надо отличать логически множество, состоящее из одного элемента, от самого этого элемента. Необходимо еще формально ввести *пустое множество*, не содержащее в себе никаких элементов, которое обозначают так: $\varnothing$ (или O). По определению $O \subset A$, каково бы ни было множество A.

Из школьного курса математики мы знаем, что между действительными числами и точками прямой можно ввести взаимно однозначное соответствие*) при помощи следующего правила. Числу 0 приводится во взаимно однозначное соответствие произвольно выбранная на прямой точка O — нулевая точка. Длина некоторого определенного отрезка принимается за единицу. Каждому действительному числу $\pm a$ $(a > 0)$ приводится в соответствие точка прямой, отстоящая от нулевой точки на расстоянии, равном a, и лежащая правее или левее O, в зависимости от того, стоит ли перед a знак «+» или «−». Наоборот, если A есть какая-либо точка нашей прямой, отстоящая от 0 на расстоянии a, то ей приводится в соответствие число $+a$ или $-a$, в зависимости от того, лежит ли A правее или левее 0.

Прямая, все точки которой описанным выше образом приведены в соответствие со всеми действительными числами, называется *числовой прямой* или *действительной осью*. Точки ее называются числами, которые они представляют. Таким образом, можно говорить о точке 0, 1, 1,2, $\sqrt{2}$ и т. д. Мы будем позволять себе числа называть *точками* (*числовой прямой*) и, наоборот, точки числами.

Пусть числа (точки) a и b удовлетворяют неравенству $a < b$.

---

*) По этому поводу см. дальше § 2.7.

Множество чисел x, удовлетворяющих неравенствам $a \leqslant x \leqslant b$, называется *отрезком* (с концами a, b) или *сегментом* и обозначается так: $[a, b]$.

Множество чисел x, удовлетворяющих неравенствам $a < x < b$, называется *интервалом* (с концами a, b) или *открытым отрезком* и обозначается так: (a, b).

Множество чисел x, удовлетворяющих неравенствам $a \leqslant x < b$ или $a < x \leqslant b$, обозначаются соответственно $[a, b)$, $(a, b]$ и называются *полуоткрытыми отрезками* или *полуинтервалами*. Первый, например, *закрыт* слева и *открыт* справа.

Часто рассматривают еще множества, называемые *бесконечными интервалами* или *полуинтервалами*: 1) $(-\infty, \infty)$, 2) $(-\infty, a]$, 3) $(-\infty, a)$, 4) (a, ∞), 5) $[a, \infty)$.

Первое из них есть множество всех действительных чисел (действительная прямая); остальные состоят из всех чисел, для которых соответственно: 2) $x \leqslant a$, 3) $x < a$, 4) $a < x$, 5) $a \leqslant x$.

В связи с этой терминологией удобно употреблять слова *конечное* или *бесконечное число*. Конечное число — это просто число. Бесконечное же число на самом деле не есть число — это символ $+\infty$ или $-\infty$.

Отметим, что у отрезка $[a, b]$ концы всегда конечны. У интервала же (a, b) «концы» могут быть конечными и бесконечными числами.

Пишут еще

$$[a, b] = \{x\colon a \leqslant x \leqslant b\}, \quad (a, b) = \{x\colon a < x < b\}.$$

Например, правая часть первого из этих множественных равенств читается так: множество всех чисел (точек) x, для которых выполняются неравенства $a \leqslant x \leqslant b$.

Пусть A и B — два множества любой природы. *Суммой* или *объединением* A и B называется множество, обозначаемое через $A + B$ или $A \cup B$, представляющее собой совокупность всех элементов A и B.

Разностью A и B называется множество, обозначаемое через $A \backslash B$ (или $A - B$), представляющее собой совокупность всех элементов A, не принадлежащих B.

Пересечением A и B называется множество, обозначаемое через AB или $A \cap B$, представляющее собой совокупность всех элементов, каждый из которых принадлежит как A, так и B.

Справедливо теоретико-множественное равенство

$$(A \pm B)C = AC \pm BC, \tag{1}$$

где A, B, C — произвольные множества. Например, в случае «+» оно доказывается так. Если элемент x принадлежит левой части (1), то он принадлежит одновременно как $A + B$, так и C. Но тогда x обязательно принадлежит хотя бы одному из множеств A или B. Пусть для определенности $x \in A$; тогда $x \in AC$, а следовательно, и правой части (1). Наоборот, пусть x принадлежит правой части равенства; тогда x принадлежит одному из множеств AC или BC. Пусть для определенности $x \in AC$; тогда x принадлежит как A, так и C, следовательно, x принадлежит как $A+B$, так и C, т. е. левой части (1).

Понятие суммы множеств естественно распространяется на любое конечное и даже бесконечное число слагаемых (множеств).

Выражения

$$\bigcup_{k=1}^{N} A_k = A_1 + \ldots + A_N, \quad \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k = A_1 + A_2 + \ldots$$

обозначают объединения всех элементов множеств $A_1, \ldots, A_N$, соответственно $A_1, A_2, \ldots$, и называются *суммами* или *объединениями* указанных множеств.

Справедливы равенства

$$C \bigcup_{k=1}^{N} A_k = \bigcup_{k=1}^{N} CA_k, \quad C \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k = \bigcup_{k=1}^{\infty} CA_k$$

(аналогичные (1) в случае «+»), где C — произвольное множество.

Примеры.

1) $[0, 2] + [1, 3] = [0, 3]$; 2) $[0, 2] - [1, 3] = [0, 1)$; 3) $\bigcup_{k=-\infty}^{\infty} [k, k+1] = \bigcup_{k=-\infty}^{\infty} [k, k+1) = R$, где R — множество всех действительных чисел.

§ 1.3. Функция

Пусть E есть множество чисел и пусть в силу некоторого вполне определенного закона каждому числу x из E приведено в соответствие (одно) число y; тогда говорят, что на E задана *функция* (однозначная), которую записывают так:

$$y = f(x) \quad (x \in E). \tag{1}$$

Это определение функции предложено Н. И. Лобачевским и Дирихле *). Множество E называют областью задания или определения функции $f(x)$. Говорят также, что задана *независимая переменная* x, которая может принимать частные значения x из множества E, и каждому $x \in E$ в силу упомянутого закона приведено в соответствие определенное значение (число) другой переменной y, называемой *функцией* или *зависимой переменной*. Независимую переменную называют *аргументом*.

*) Н. И. Лобачевский (1792—1856) — великий русский математик, создатель неевклидовой геометрии. Л. Дирихле (1805—1859) немецкий математик.

Для выражения понятия функции употребляют геометрический язык. Говорят, что задано множество E точек x действительной прямой — *область определения* или *задания функции*, и закон, в силу которого каждой точке $x \in E$ приводится в соответствие число $y = f(x)$.

Если мы хотим говорить о функции как о некотором законе, приводящем в соответствие каждому числу $x \in E$ некоторое число y, то достаточно ее обозначить одной буквой f. Символ $f(x)$ обозначает число y, которое в силу закона f соответствует значению $x \in E$. Если, например, число 1 принадлежит области E задания функции f, то $f(1)$ есть *значение функции* f в точке $x = 1$. Если 1 не принадлежит E ($1 \overline{\in} E$), то говорят, что функция f *не определена* в точке $x = 1$.

Множество E_1 всех значений $y = f(x)$, где $x \in E$, называется *образом* множества E при помощи функции f. Иногда пишут в таком случае $E_1 = f(E)$. Но это обозначение надо употреблять с осторожностью, по возможности разъясняя его всякий раз, когда оно употребляется, чтобы не было путаницы с обозначением $y = f(x)$, где x есть произвольная точка (число), принадлежащая множеству E, а y — соответствующая ей при помощи функции (закона f) точка множества E_1. Говорят еще, что функция f *отображает* множество E *на* множество E_1.

Если образ $E_1 = f(E) \subset A$, где A — множество чисел, вообще не совпадающее с E_1, то говорят, что функция f *отображает* E *в* A.

Для функций f и φ, заданных на одном и том же множестве E, определяются *сумма* $f + \varphi$, *разность* $f - \varphi$, *произведение* $f\varphi$, *частное* $\frac{f}{\varphi}$. Это новые функции, значения которых выражаются соответственно формулами

$$f(x) + \varphi(x), f(x) - \varphi(x), f(x)\varphi(x), \frac{f(x)}{\varphi(x)}, \quad x \in E, \qquad (2)$$

где в случае частного предполагается, что $\varphi(x) \neq 0$ на E.

Для обозначения функции употребляют и любые другие буквы, F, Φ, Ψ, ..., так же как вместо x, y можно писать z, u, v, w, ...

Если функция f отображает множество E в E_1, а функция F отображает множество E_1 во множество E_2, то функцию $z = F(f(x))$ называют *функцией от функции*, или *сложной функцией*, или *суперпозицией* f и F. Она определена на множестве E и отображает E в E_2.

Возможна сложная функция, в образовании которой участвует n функций: $z = F_1(F_2(F_3 \ldots (F_n(x)) \ldots))$.

Практика доставляет нам много примеров функций. Например, площадь S круга есть функция его радиуса r, выражаемая формулой $S = \pi r^2$. Эта функция определена, очевидно, на множестве всех положительных чисел r.

Можно, не связывая вопрос с площадью круга, говорить о зависимости между переменными S и r, выраженной формулой

$S = \pi r^2$. Функция $S = \varphi(r)$, заданная этой формулой, определена на всей действительной оси, т. е. для всех действительных чисел r — не обязательно только положительных.

Ниже приводятся примеры функций, заданных формулами:

$$1)\ y = \sqrt{1 - x^2}, \quad 4)\ y = \frac{x^2 - 1}{x - 1},$$
$$2)\ y = \lg(1 + x), \quad 5)\ y = \arcsin x.$$
$$3)\ y = x - 1,$$

Мы имеем в виду действительные функции, принимающие действительные значения y для действительных значений аргумента x. Нетрудно видеть, что областями определения приведенных функций являются соответственно:

1) отрезок $[-1, 1] = \{-1 \leqslant x \leqslant 1\}$;

2) множество $x > -1$;

3) вся действительная ось;

4) вся действительная ось, из которой исключена точка $x = 1$;

5) отрезок $[-1, +1]$.

Функции, определяемые в примерах 1) и 2), можно рассматривать как функции от функции: 1) $y = \sqrt{u}$, $u = 1 - v$, $v = x^2$; 2) $y = \lg u$, $u = 1 + x$.

Важным средством задания функции является график. Зададим прямоугольную систему координат x, y (рис. 1.1), на оси x отметим отрезок $[a, b]$ и изобразим любую кривую Γ, обладающую следующим свойством: какова бы ни была точка $x \in [a, b]$, прямая, проходящая через нее параллельно оси y, пересекает кривую Γ в одной точке A. Такую заданную в прямоугольной (декартовой) системе координат кривую Γ мы будем называть *графиком*. График определяет функцию $y = f(x)$ на отрезке $[a, b]$ следующим образом. Если x есть произвольная точка отрезка $[a, b]$, то соответствующее значение $y = f(x)$ определяется как ордината точки A (см. рис. 1.1). Следовательно, при помощи графика дается вполне определенный закон соответствия между x и $y = f(x)$.

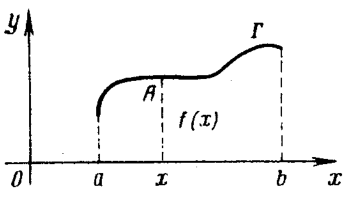

Рис. 1.1.

Мы задали функцию при помощи графика на множестве E, являющемся отрезком $[a, b]$. В других случаях E может быть интервалом, полуинтервалом, всей действительной осью, множеством рациональных точек, принадлежащих к данному интервалу, и т. д.

Зададим на некотором интервале (a, b) функцию $f(x)$ и произвольное (постоянное) число $\alpha \neq 0$. С помощью α и f можно сконструировать ряд других функций: 1) $\alpha f(x)$; 2) $f(x) + \alpha$;

3) $f(x-\alpha)$; 4) $f(\alpha x)$. Функции 1) и 2) определены на том же интервале (a, b). Ординаты графика функции 1) увеличены в α раз сравнительно с соответствующими ординатами $f(x)$. График функции 2) получается из графика f поднятием последнего на величину α *); график же функции 3) получается из графика f путем сдвига последнего вправо на величину α. Наконец, функция 4) при $\alpha > 0$ определена, очевидно, на интервале $(a/\alpha, b/\alpha)$; график ее получается из графика f путем равномерного его сжатия в α раз.

Функцию f называют *четной* или *нечетной*, если она определена на множестве, симметричном относительно нулевой точки и обладает на нем свойством $f(-x)=f(x)$ или свойством $f(-x)=-f(x)$.

График четной функции, очевидно, симметричен относительно оси y, а график нечетной функции симметричен относительно начала координат. Например, x^{2k} (k — натуральное), $\cos x$, $\ln|x|$, $\sqrt{1+x^2}$, $f(|x|)$ — четные функции, а x^{2k+1} ($k \geqslant 0$ — целое), $\sin x$, $x\sqrt{1+x^2}$, $xf(|kx|)$ — нечетные функции.

Нетрудно видеть, что *произведение двух четных или двух нечетных функций есть функция четная, а произведение четной функции на нечетную есть нечетная функция.*

Конечно, большинство функций не четны и не нечетны.

Функция на различных частях области ее определения может быть задана различными формулами. Например, пусть поезд, вышедший из пункта A в момент $t=0$, шел в течение двух часов со скоростью 100 *км* в час и, прибыв в пункт B, стоял там один час, а затем шел дальше в течение трех часов со скоростью 80 *км* в час. Тогда функция $s=f(t)$, выражающая расстояние (в километрах) поезда от A в момент времени t, очевидно будет определяться следующими тремя формулами:

$$f(t)=\begin{cases}100t & (0 \leqslant t \leqslant 2),\\ 200 & (2 \leqslant t \leqslant 3),\\ 200+80(t-3) & (3 \leqslant t \leqslant 6).\end{cases}$$

Функция может быть задана в виде таблицы. Например, мы могли бы измерять температуру T воздуха через каждый час. Тогда каждому моменту времени $t=0, 1, 2, \ldots, 24$ соответствовало бы определенное число T в виде таблицы:

t	0	1	2	3	...
T	T_0	T_1	T_2	T_3	...

*) Конечно, при $\alpha < 0$ поднятие или сдвиг вправо на величину α надо понимать как соответственно опускание или сдвиг влево на величину $|\alpha|$.

Таким образом, мы получили бы функцию $T = f(t)$, определенную на множестве E целых чисел от 0 до 24, заданную таблицей.

Если функция $y = f(x)$ задана на некотором множестве E формулой, то всегда можно считать, что ей соответствует вполне определенный график, определяющий геометрически эту функцию. Обратное совсем не ясно: если функция задана произвольным графиком, то может ли она быть выраженной некоторой формулой? Это очень сложный вопрос. Чтобы ответить на него, надо отдать себе отчет в том, какой смысл мы вкладываем в слово формула. Выше, когда мы говорили, что данная функция $y = f(x)$ выражается формулой, мы молчаливо считали, что при этом y получается из x при помощи конечного числа таких операций, как сложение, вычитание, умножение, деление, извлечение корня той или иной степени, логарифмирование, взятие операции sin, cos, arcsin и других алгебраических и тригонометрических операций.

Математический анализ дает средства для значительного расширения понятия формулы. Весьма важным таким средством является разложение функции в бесконечный ряд по элементарным функциям.

Многие, а может быть и все, встречающиеся на практике функции могут быть изображены формулой, представляющей собой некоторый бесконечный ряд, членами которого являются элементарные функции, которые будут определены ниже. Но сейчас об этом говорить не время. Мы еще не готовы к этому.

Так или иначе, задана ли функция $f(x)$ формулой или же она задана другим каким-либо способом, например, при помощи графика, она уже может служить объектом изучения средствами математического анализа, если она удовлетворяет некоторым дополнительным общим свойствам, таким как непрерывность, монотонность, выпуклость, дифференцируемость и др. Но об этом будет идти речь впереди.

Важнейшим средством изучения функции является понятие предела, являющееся основным понятием математического анализа. Следующая глава посвящена этому понятию.

Если каждому числу x, принадлежащему данному множеству E чисел, в силу некоторого закона соответствует определенное множество e_x чисел y, то говорят, что этим законом определена *многозначная функция* $y = f(x)$. Если окажется, что e_x для каждого $x \in E$ состоит только из одного числа y, то мы получим однозначную функцию.

Однозначную функцию называют просто «функцией» без добавления прилагательного «однозначная», если только это не приводит к недоразумениям.

Алгебра и тригонометрия доставляют нам примеры многозначных функций; такими являются функции $\sqrt{x}$, $\operatorname{Arcsin} x$, $\operatorname{Arctg} x$, ...

Функция $\sqrt{x}$ определена для $x \geqslant 0$. Она двузначна*) для $x > 0$: каждому положительному x соответствуют два действительных числа, отличающихся между собой знаками, квадраты которых равны x. Что же касается функции $\operatorname{Arcsin} x$, то она бесконечнозначна. Она приводит в соответствие каждому значению x из отрезка $[-1, +1]$ бесконечное множество значений y, которые могут быть записаны по формуле

$$y = (-1)^k \arcsin x + k\pi \qquad (k = 0, 2, \ldots).$$

Выше мы говорили о функциях от одной переменной. Но можно говорить также о функциях двух, трех и вообще n переменных.

Функция от двух переменных определяется следующим образом. Рассматривается множество E пар чисел (x, y). При этом имеются в виду *упорядоченные* пары. Это значит, что две пары (x_1, y_1) и (x_2, y_2) считаются равными (совпадающими) тогда и только тогда, когда $x_1 = x_2$ и $y_1 = y_2$. Если в силу некоторого закона каждой паре $(x, y) \in E$ приведено в соответствие число z, то говорят, что этим определена на множестве E *функция* $z = f(x, y)$ *от двух переменных*, x и y.

Так как каждой паре чисел (x, y) соответствует на плоскости, где введена декартова система координат, точка с абсциссой x и ординатой y, и, наоборот, каждой точке таким образом соответствует пара (x, y), то можно говорить, что наша функция $f(x, y)$ задана на множестве E точек плоскости.

Функции $z = f(x, y)$ от двух переменных изображают в трехмерном пространстве, где задана прямоугольная система координат (x, y, z), в виде геометрического места точек $(x, y, f(x, y))$, проекции которых принадлежат множеству E определения f.

Например, таким геометрическим местом для функции

$$z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}, \qquad x^2 + y^2 \leqslant 1$$

является верхняя половина шаровой поверхности радиуса 1 с центром в нулевой точке.

В этом же духе можно определить функцию трех переменных. Областью ее определения может теперь служить некоторое множество E упорядоченных троек чисел (x, y, z) или, что все равно, им соответствующих точек трехмерного пространства, где введена декартова система координат.

Если каждой тройке чисел (точке трехмерного пространства) $(x, y, z) \in E$ в силу некоторого закона соответствует число u, то говорят, что этим определена на E функция $u = F(x, y, z)$.

---

*) Впрочем, символ $\sqrt[k]{x}$ $(k = 2, 3, \ldots)$ мы будем понимать всюду, если это не оговорено особо, как арифметическое значение корня k-й степени из $x \geqslant 0$, т. е. как неотрицательное число, k-я степень которого равна x.

Аналогично можно рассматривать множество E упорядоченных систем $(x_1, \ldots, x_n)$ из n чисел, где n — заданное натуральное число. Опять, если каждой такой системе, принадлежащей E, соответствует в силу некоторого закона число z, то говорят, что z есть *функция от переменных* $x_1, \ldots, x_n$, определенная на множестве E, и записывают эту функцию в виде $z = F(x_1, \ldots, x_n)$.

В случае $n > 3$ в нашем распоряжении уже нет реального n-мерного пространства, чтобы использовать его для изображения систем $(x_1, \ldots, x_n)$ в виде принадлежащих ему точек. Но математики выдумали n-мерное пространство, и оно им благополучно служит, и притом не хуже чем реальное трехмерное пространство. Именно, n-мерным пространством называется множество всевозможных систем n чисел $(x_1, \ldots, x_n)$ (см. § 6.1).

Если две функции, f и φ, от n переменных заданы на одном и том же множестве E систем $(x_1, \ldots, x_n)$ — точек n-мерного пространства,— то можно определить сумму $f + \varphi$, разность $f - \varphi$, произведение $f\varphi$ и частное f/φ как функции, определенные на E при помощи равенств, аналогичных равенствам (2), где надо только числа x заменить системами $(x_1, \ldots, x_n)$. Естественным образом определяются также сложные функции, такие как $f(\varphi(x, y), \psi(x, y, z)) = F(x, y, z)$, где (x, y, z) — тройки чисел, принадлежащих некоторому множеству троек.

Ниже приводится несколько примеров функций многих переменных, заданных посредством элементарных формул.

Пример 1. $u = Ax + By + Cz + D$, где A, B, C, D — заданные постоянные действительные числа, есть линейная функция от трех переменных (x, y, z). Она задана на всем трехмерном пространстве. Более общая линейная функция от n переменных $(x_1, \ldots, x_n)$ задается формулой $u = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i + b$, где $a_1, \ldots, a_n$, b — заданные постоянные числа. Эта формула определена в любой точке $(x_1, \ldots, x_n)$ n-мерного пространства, или, как еще говорят, на всем n-мерном пространстве.

Пример 2. $z = \lg \sqrt{1 - x^2 - y^2}$. Эта действительная функция задана на области, представляющей собой круг радиуса 1 с центром в $(0, 0)$, из которого удалены все граничные точки, т. е. точки окружности радиуса 1 с центром $(0, 0)$. Для этих точек наша функция не определена, потому что $\lg 0$ не имеет смысла.

Пример 3. Функция

$$z = f(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{для } y \geqslant 0, \\ 1 & \text{для } y < 0 \end{cases}$$

геометрически изображается двумя параллельными полуплоскостями, не связанными между собой. Расположение их по отношению к системе координат (x, y, z) очевидно.

Функция от одной переменной может быть задана неявным образом при помощи равенства

$$F(x, y) = 0, \tag{3}$$

где F есть функция от двух переменных x и y.

Пусть на некотором множестве G точек (x, y) задана функция F. Равенство (3) определяет некоторое подмножество Ω множества G, на котором функция F равна нулю. Конечно, в частности Ω может быть пустым множеством. Пусть Ω — непустое множество, и пусть E есть множество (очевидно, непустое) таких значений x (чисел), которым соответствует хотя бы один y так, что пара x, y принадлежит Ω. Таким образом, E есть множество всех чисел x, каждому из которых соответствует непустое множество e_x чисел y так, что $(x, y) \in \Omega$, или, что все равно, так, что для указанной пары (x, y) выполняется равенство (3). Этим определена на множестве E некоторая функция $y = \varphi(x)$ от x, вообще говоря, многозначная. В этом случае говорят, что функция φ *определена неявно* при помощи равенства (3). Для нее, очевидно, выполняется тождество

$$F(x, \varphi(x)) \equiv 0 \text{ для всех } x \in E.$$

По аналогии можно также определить функцию $x = \psi(y)$ от переменной y, определяемую неявно при помощи равенства (3). Для нее выполняется тождество

$$F(\psi(y), y) \equiv 0 \text{ для всех } y \in E_1,$$

где E_1 есть некоторое множество чисел. Говорят еще, что функция $y = \varphi(x)$ (или $x = \psi(y)$) удовлетворяет уравнению (3).

Функцию $x = \psi(y)$ называют *обратной* по отношению к функции $y = \varphi(x)$.

Пример 4. Уравнение

$$x^2 + y^2 = r^2, \tag{4}$$

где $r > 0$ неявно определяет двузначную функцию от одной переменной

$$y = \pm\sqrt{r^2 - x^2} \quad (-r \leqslant x \leqslant r);$$

впрочем, при $x = \pm r$ она однозначна.

Естественно считать, что эта двузначная функция распадается на две непрерывные однозначные функции $y = +\sqrt{r^2 - x^2}$ и $y = -\sqrt{r^2 - x^2}$ $(-r \leqslant x \leqslant r)$. Графики их (полуокружности) в совокупности дают окружность радиуса r с центром в начале координат. Эта окружность есть геометрическое место точек, координаты (x, y) которых удовлетворяют уравнению (4).

Перейдем к более общему n-мерному случаю. Пусть на некотором множестве G точек $(x_1, \ldots, x_n)$ n-мерного пространства задана функция $F(x_1, \ldots, x_n)$. Равенство

$$F(x_1, \ldots, x_n) = 0 \tag{5}$$

определяет некоторое подмножество Ω множества G, на котором функция F равна нулю. Пусть Ω — непустое множество и пусть E — множество (непустое!) таких систем $(x_1, \ldots, x_{n-1})$, которым соответствует хотя бы одно значение x_n такое, что точка $(x_1, \ldots, x_n)$ принадлежит Ω. Таким образом, E есть множество всех систем $(x_1, \ldots, x_{n-1})$, каждой из которых соответствует непустое множество $e_{x_1,\ldots,x_{n-1}}$ чисел x_n таких, что $(x_1, \ldots, x_n) \in \Omega$, или, что все равно, таких, что для $(x_1, \ldots, x_n)$ выполняется равенство (5) Этим определена на множестве E некоторая функция $x_n = \varphi(x_1, \ldots, x_{n-1})$ от $(x_1, \ldots, x_{n-1})$, вообще говоря, многозначная. Говорят, что функция φ определена неявно при помощи равенства (5). Для нее, очевидно, выполняется тождество

$$F(x_1, \ldots, x_{n-1}, \varphi(x_1, \ldots, x_{n-1})) \equiv 0 \quad (x_1, \ldots, x_{n-1}) \in E.$$

Элементарные функции

1. *Постоянная функция* C. Каждому действительному числу x соответствует y, равный одному и тому же числу C. График этой функции (в прямоугольной системе координат) есть прямая, параллельная оси x, находящаяся на расстоянии $|C|$ от оси x и расположенная выше оси x, если $C > 0$, и ниже оси x, если $C < 0$.

2. *Степенная функция* x^n $(n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$. При n положительном целом функция x^n определена на всей действительной оси. При n отрицательных целых она определена на всей действительной оси, за исключением точки $x = 0$. Неудобно во всех случаях считать 0^0 вполне определенным числом (см. далее § 5.14). Конечно, например, при рассмотрении функции $y = x^0$, может оказаться удобным формально считать, что $0^0 = 1$. Ведь тогда эта функция будет иметь непрерывный график (прямую, параллельную оси x) для всех значений x.

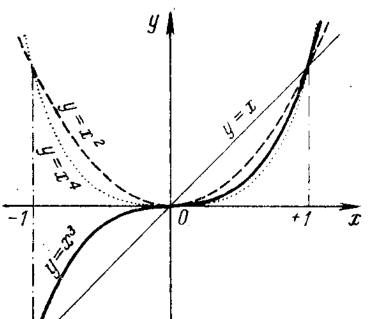

Рис. 1.2.

На рис. 1.2 приведены графики функций $y = x$, x^2, x^3, x^4.

3. *Многочленом степени* n называется функция вида

$$P(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n,$$

где $a_0, a_1, \ldots, a_n$ — *постоянные коэффициенты* и n есть заданное натуральное число. Многочлен степени n получается из постоянных a_k $(k = 0, \ldots, n)$ и функций $x, x^2, \ldots, x^n$ при помощи конечного числа арифметических действий: сложения, вычитания и умножения.

Многочлен называют также *целой рациональной функцией* (*степени* n). Областью его определения является вся действительная ось.

4. *Рациональной функцией* называется функция вида

$$R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)},$$

где $P(x) = a_0 + \ldots + a_n x^n$ и $Q(x) = b_0 + b_1 x + \ldots + b_m x^m$ — некоторые многочлены $(b_m \neq 0)$.

Рациональная функция определена для всех x действительной оси, кроме нулей многочлена Q, т. е. точек x, для которых $Q(x) = 0$. Количество таких точек не превышает m.

Рациональная функция получается из некоторых постоянных и функций вида x^k (k натуральное) путем применения к ним арифметических действий (в конечном числе): сложения, вычитания, умножения и деления.

5. *Степенна́я функция* x^a (a — постоянное число) изучается в школьном курсе алгебры. Однако не все, связанное с этой функцией, полностью обосновывается в обычных школьных курсах алгебры. Например, определение x^a, когда a есть иррациональное число, основано на достаточно тонких понятиях из теории пределов. После того как будет изложена теория пределов, мы вернемся к функции x^a, дадим ее исчерпывающее определение и докажем ее свойства.

6. *Показательная функция* a^x ($a > 0$). Эта функция также известна из школьного курса алгебры. Однако про нее, так же как и про степенну́ю функцию, можно сказать, что связанные с нею определения и свойства обычно не полностью получают обоснование в школьном курсе. Поэтому к функции a^x мы еще вернемся. Обратная к a^x есть функция $\lg_a x$.

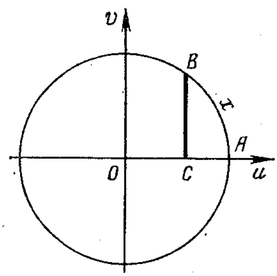

Рис. 1.3.

7. *Функция* $\sin x$ известна читателю из курса тригонометрии. Она определяется там из геометрических соображений. Напомним определение $\sin x$. Зададим число x. Отложим на окружности радиуса 1 от начальной точки A (рис. 1.3) дугу длины $|x|$ в направлении, противоположном движению часовой стрелки, если $x > 0$, или в направлении движения часовой стрелки, если $x < 0$. Длина дуги исчисляется в радианах. Пусть B есть конец дуги. Тогда длина перпендикуляра BC к прямой OA, взятая со знаком «+», если B будет выше OA, и со знаком «−», если B будет ниже OA, есть $y = \sin x$.

В этом же известном читателю духе определяются функции $\cos x$, $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{cosec} x$, $\sec x$, $\operatorname{ctg} x$ и устанавливаются их свойства.

Затем определяются обратные *тригонометрические функции* $\operatorname{Arcsin} x$, $\operatorname{Arccos} x$, ...

Все перечисленные в пп. 1—7 функции могут быть названы *простейшими элементарными функциями*. Всякая функция, составленная из простейших элементарных функций с помощью операций сложения, вычитания, умножения, деления и функции от функции, если количество примененных при этом указанных операций конечно, называется *элементарной функцией*. Такую функцию мы и называем функцией, заданной формулой.

Примеры элементарных функций: $\sin x^2$, $(\sin x)^2$, $\operatorname{tg}\lg\sqrt{1-x^2}$, $\cos n \arccos x$, $x^x = a^{x \log_a x}$ $(a > 0)$.

Полярная система координат. В плоскости зададим луч OL (*полярную ось*), выходящий из точки O — *полюса полярной системы координат* (рис. 1.4).

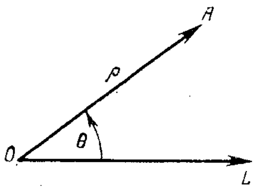

Рис. 1.4.

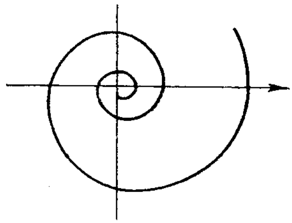

Рис. 1.5.

Произвольная точка A плоскости определяется парой чисел $(\rho,\ \theta)$ — ее *полярными координатами*, где ρ — расстояние A до O, а θ — выраженный в радианах угол между OL и OA. Точка O исключительная. Она определяется парой $(0,\ \theta)$, где θ — произвольное число. Угол θ отсчитывается против часовой стрелки. Функцию $\rho = f(\theta)$, заданную на интервале (отрезке или произвольном множестве E значений θ) можно интерпретировать как множество точек $(\rho,\ \theta)$ плоскости, где $\theta \in E$, $\rho = f(\theta)$. Многие

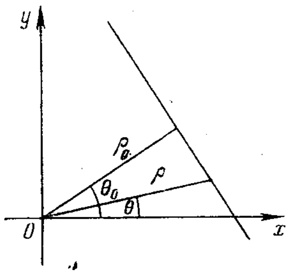

Рис. 1.6.

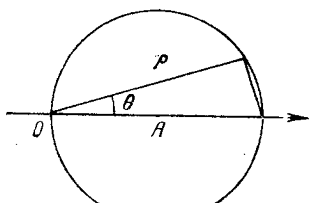

Рис. 1.7.

кривые на плоскости могут быть описаны в полярных координатах соответствующими функциями $\rho = f(\theta)$ (многозначными или однозначными). Например, 1) функция $\rho = a^\theta$ $(a > 0,\ -\infty < \theta < \infty)$ описывает в полярных координатах спираль Архимеда (рис. 1.5); 2) функция

$$\rho = \frac{\rho_0}{\cos(\theta - \theta_0)}, \quad \theta \in \left(\theta_0 - \frac{\pi}{2},\ \theta_0 + \frac{\pi}{2}\right), \quad \rho_0 > 0$$

описывает такую прямую, что опущенный на нее из полюса O

перпендикуляр имеет длину ρ_0 и образует с полярной осью угол θ_0 (рис. 1.6); функция $\rho = 2\cos\theta \left(-\frac{\pi}{2} \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{2}\right)$ описывает окружность радиуса 1 с центром в точке $A(1, 0)$ (рис. 1.7).

§ 1.4. Понятие непрерывности функции

На рис. 1.8 изображен график функции $y = f(x)$ $(a \leqslant x \leqslant b)$. Его естественно назвать непрерывным графиком, потому что он может быть нарисован одним непрерывным движением карандаша без отрыва от бумаги. Зададим произвольную точку (число) $x \in [a, b]$. Близкая к ней другая точка $x' \in [a, b]$ может быть записана в виде $x' = x + \Delta x$, где Δx есть число положительное

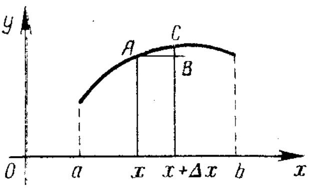

Рис. 1.8.

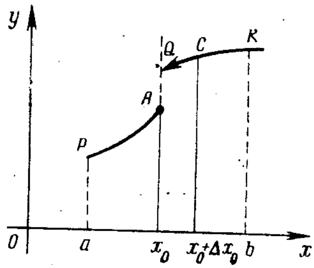

Рис. 1.9.

или отрицательное, называемое *приращением* x. Разность

$$\Delta f = \Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$$

называется *приращением функции* f в точке x, соответствующим приращению Δx. На рис. 1.8 Δy равно длине отрезка BC.

Будем стремить Δx непрерывно к нулю; тогда для рассматриваемой функции, очевидно, и Δy будет стремиться к нулю:

$$\Delta y \to 0 \quad (\Delta x \to 0). \tag{1}$$

Рассмотрим теперь график, изображенный на рис. 1.9. Он состоит из двух непрерывных кусков PA и QR. Однако эти куски не соединены непрерывно и потому график естественно назвать разрывным. Чтобы график изображал однозначную функцию $y = F(x)$ в точке x_0, условимся, что $F(x_0)$ равно длине отрезка, соединяющего A и x_0; в знак этого точка A изображена на графике жирно, в то время как у точки Q нарисована стрелка, указывающая, что Q не принадлежит графику. Если бы точка Q принадлежала графику, то функция f была бы двузначной в точке x_0.

Придадим теперь x_0 приращение Δx_0 и определим соответствующее приращение функции:

$$\Delta F = F(x_0 + \Delta x_0) - F(x_0).$$

Если мы будем Δx_0 стремить непрерывно к нулю, то теперь уже нельзя сказать, что ΔF будет стремиться к нулю. Для отрицательных Δx_0, стремящихся к нулю, это так, но для положительных вовсе не так: из рисунка видно, что если Δx_0, оставаясь положительным, стремится к нулю, то соответствующее приращение ΔF при этом стремится к положительному числу, равному длине отрезка AQ.

После этих рассмотрений естественно ввести следующее определение (принадлежащее Коши). Функция f, заданная на отрезке $[a, b]$, называется *непрерывной в точке x этого отрезка, если приращение ее в этой точке, соответствующее приращению Δx* *), *стремится к нулю при любом способе стремления Δx к нулю.* Это свойство (непрерывности в x) записывается в виде соотношения (1) или еще так:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0. \tag{2}$$

Запись (2) читается так: предел Δy равен нулю, когда Δx стремится к нулю по любому закону. Впрочем, выражение «по любому закону» обычно опускают, подразумевая его.

Если определенная на $[a, b]$ функция f не является непрерывной в точке $x \in [a, b]$, т. е. если для нее не выполняется свойство (2) хотя бы при одном способе стремления Δx к нулю, то она называется *разрывной* в точке x.

Функция, изображенная на рис. 1.8, непрерывна в любой точке $x \in [a, b]$, функция же, изображенная на рис. 1.9, очевидно, непрерывна в любой точке $x \in [a, b]$, за исключением точки x_0, потому что для последней соотношение (2) не выполняется, когда $\Delta x_0 \to 0$, оставаясь положительным.

Данное определение непрерывности функции в точке, само по себе совершенно корректное, базируется пока на интуитивном понимании понятия предела. После того как будет изложена теория пределов, это определение, которое может быть расширено и на случай функций многих переменных, получит полное обоснование.

Функция, непрерывная в любой точке отрезка (интервала), называется *непрерывной* на нем.

Непрерывная функция математически выражает свойство, с которым нам приходится часто встречаться на практике, заключающееся в том, что малому приращению независимой переменной соответствует малое же приращение зависимой от нее переменной (функции).

---

*) Здесь имеется в виду Δx такое, что $x + \Delta x \in [a, b]$.

Прекрасными примерами непрерывной функции могут служить различные законы движения тел $s = f(t)$, выражающие зависимости пути s, пройденного телом, от времени t. Время и пространство непрерывны, при этом тот или иной закон движения $s = f(t)$ устанавливает между ними определенную непрерывную связь, характеризующуюся тем, что малому приращению времени соответствует малое приращение пути.

К абстракции непрерывности человек пришел, наблюдая окружающие его так называемые сплошные среды — твердые, жидкие или газообразные, например, металлы, воду, воздух. На самом деле, всякая физическая среда представляет собой скопление большого числа отделенных друг от друга движущихся частиц. Однако эти частицы и расстояния между ними настолько малы по сравнению с объемами сред, с которыми приходится иметь дело в макроскопических физических явлениях, что многие такие явления можно достаточно хорошо изучать, если считать приближенно массу изучаемой среды непрерывно распределенной без всяких просветов в занятом ею пространстве. На таком допущении базируются многие физические дисциплины, например, гидродинамика, аэродинамика, теория упругости. Математическое понятие непрерывности естественно играет в этих дисциплинах, как и во многих других, большую роль.

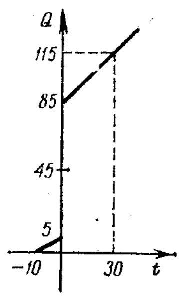

Рис. 1.10.

Непрерывные функции образуют основной класс функций, с которым оперирует математический анализ.

Примерами непрерывных функций могут служить элементарные функции, определенные в § 1.3. Они непрерывны на интервалах изменения x, где они определены.

Разрывные функции в математике отражают скачкообразные процессы, встречающиеся в природе. При ударе, например, величина скорости тела меняется скачкообразно. Многие качественные переходы сопровождаются скачками. Например, зависимость $Q = f(t)$ между температурой t одного грамма воды (льда) и количеством Q калорий, находящегося в ней тепла, когда t изменяется между $-10°$ и $+10°$, если принять условно, что при $-10°$ величина $Q = 0$ выражается следующими формулами:

$$Q(t) = \begin{cases} 0{,}5t + 5, & -10 \leqslant t < 0, \\ t + 85, & 0 < t < 30. \end{cases}$$

Мы считаем, что теплоемкость льда равна 0,5. При $t = 0$ эта функция оказывается неопределенной — многозначной; можно для удобства условиться, что при $t = 0$ она принимает вполне определенное значение, например, $f(0) = 45$. Функция $Q = f(t)$, очевидно, разрывная при $t = 0$, изображена на рис. 1.10.

§ 1.5. Производная

Понятие производной возникло как результат многовековых усилий, направленных на решение таких задач, как задача о проведении касательной к кривой или о вычислении скорости неравномерного движения. Подобные задачи и задача о вычислении площади криволинейной фигуры интересовали математиков с древних времен. В XVII веке в работах Ньютона и Лейбница эта деятельность получила определенное теоретическое завершение. Ньютон и Лейбниц создали общие методы дифференцирования и интегрирования функций и доказали важную теорему, носящую их имя, устанавливающую тесную связь между операциями дифференцирования и интегрирования. Надо, однако, иметь в виду, что современное изложение этих вопросов существенно отличается от того, как они излагались во времена Ньютона и Лейбница. В рассуждениях и понятиях, которыми оперировали в то время, с нашей точки зрения можно найти много неясного; да и сами математики того времени это сознавали, о чем свидетельствуют ожесточенные дискуссии, которые происходили по этим вопросам между ними.

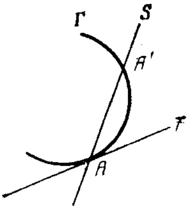

Рис. 1.11.

Современный математический анализ базируется на понятии предела, которое выкристаллизовалось в четкую формулировку не так уж давно — в первой половине прошлого столетия. Большая заслуга в этом принадлежит французскому математику Коши.

Понятие предела существенно используется в определениях понятий непрерывности функции, производной, интеграла.

М г н о в е н н а я с к о р о с т ь. Пусть точка движется по прямой и функция $s = f(t)$ выражает зависимость от времени $t \in (a, b)$ ее расстояния (с учетом знака*)) s до некоторой начальной точки O прямой. В момент времени $t \in (a, b)$ точка находится на расстоянии $s = f(t)$ от O. В момент же времени $t + \Delta t \in (a, b) (\Delta t \neq 0)$ она находится на расстоянии $s + \Delta s = f(t + \Delta t)$ от O. Средняя скорость ее на промежутке времени $(t, t + \Delta t)$ равна

$$v_{\text{ср}} = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{f(t + \Delta t) - f(t)}{\Delta t}.$$

Мгновенную или истинную скорость v точки в момент времени t естественно определить как предел, к которому стремится $v_{\text{ср}}$ при $\Delta t \to 0$, т. е.

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t}.$$

*) Точнее, s есть координата точки прямой, где заданы начальная точка O, единичный отрезок и положительное направление.

Касательная к кривой. Рассмотрим какую-нибудь непрерывную кривую *) Г в плоскости или пространстве (рис. 1.11). Пусть A — лежащая на ней точка, и A' — другая лежащая на Г точка. Прямую S, проходящую через A и A', будем называть *секущей* (кривую Г). Будем теперь точку A' двигать непрерывно по Г, неограниченно приближая к A. Тогда секущая S будет вращаться относительно A. Может случиться, что при этом S будет стремиться занять в пределе положение вполне определенной (проходящей, очевидно, через A) прямой, которую мы обозначили через T. Если это будет иметь место, то говорят, что кривая Г имеет в точке A *касательную*. Именно, прямую T называют *касательной* к Г в точке A.

Не всякая непрерывная кривая в любой ее точке имеет касательную. Тривиальным примером этого может служить кривая, изображенная на рис. 1.12. Она состоит из двух гладких **) кусков Γ_1 и Γ_2, соединенных в точке A «под углом». На рисунке на

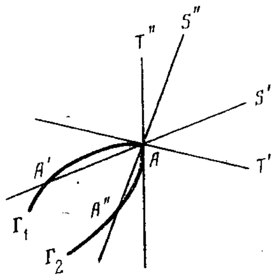

Рис. 1.12.

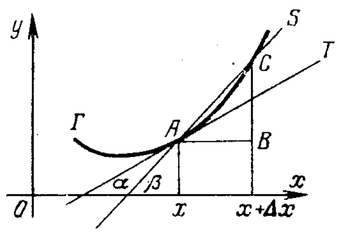

Рис. 1.13.

Г отмечены две другие точки, A', A'', соответственно лежащие на Γ_1, Γ_2; через S' и S'' обозначены проходящие через A', A'' и и A секущие.

Очевидно, что если A', A'', двигаясь соответственно по Γ_1, Γ_2, будут приближаться к A, то секущие S', S'' будут стремиться занять в пределе положение двух разных прямых T' и T''. Поэтому рассматриваемая кривая не имеет касательной в точке A. Впрочем, можно было бы, развивая введенное определение, сказать, что наша кривая имеет в точке A две односторонние касательные, но об этом речь сейчас не идет.

---

*) Строгое определение непрерывной кривой будет дано в § 6.5. Согласно этому определению произвольная точка $A \in \Gamma$ непрерывно зависит от параметра (числа) t, пробегающего интервал или отрезок. Если точки A, $A' \in \Gamma$ определяются соответственно значениями t, t' параметра и если t' стремится к t, то говорят, что A' стремится (неограниченно приближается) к A, двигаясь по Г.

**) Строгое описание гладкого куска кривой дано в § 6.5.

Пусть теперь кривая Γ есть график непрерывной на $(a,\ b)$ функции (рис. 1.13) $y = f(x)$.

Зададим на Γ точку A, имеющую абсциссу x, и другую точку, C, имеющую абсциссу $x + \Delta x$ $(\Delta x \neq 0)$. Секущая S, проходящая через A и C, очевидно, образует с положительным направлением оси x угол β, тангенс которого равен

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

Будем Δx стремить к нулю; тогда, вследствие непрерывности f, будет также Δy стремиться к нулю, и точка C, двигаясь по Γ, будет стремиться к точке A. Если окажется (этого может и не быть!), что при этом отношение $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ стремится при любом способе стремления Δx к нулю к одному и тому же конечному пределу (числу) k:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} \to k \qquad (\Delta x \to 0),$$

то тогда и угол β будет стремиться к некоторому отличному от $\pi/2$ углу α. Вместе с β и секущая S, вращаясь около точки A, будет стремиться занять в пределе положение прямой T, проходящей через A под углом α с положительным направлением оси x. Но тогда T есть касательная к Γ в точке A и

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \operatorname{tg} \beta = \operatorname{tg} \alpha.$$

Мы установили, что, *если отношение* $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ *при* $\Delta x \to 0$ *стремится к конечному пределу, то кривая* Γ *имеет в точке* A *касательную, тангенс угла которой с положительным направлением оси* x *равен этому пределу.*

Сила тока. Допустим, что известна функция $Q = f(t)$, выражающая количество электричества, прошедшее через фиксированное сечение провода за время t. За период от t до $t + \Delta t$ через сечение протекает количество электричества $\Delta Q = f(t - \Delta t) - f(t)$. Средняя сила тока при этом равна

$$I_{\text{ср}} = \frac{\Delta Q}{\Delta t} = \frac{f(t + \Delta t) - f(t)}{\Delta t}.$$

Предел этого отношения при $\Delta t \to 0$ дает силу тока в момент t:

$$I = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta Q}{\Delta t}.$$

Производная. Все три рассмотренные задачи, несмотря на то, что они относятся к различным областям человеческого знания — механике, геометрии, теории электричества,— привели к одной и той же математической операции, которую нужно произвести над некоторой функцией. Надо найти предел отношения приращения функции к соответствующему приращению аргумента, когда последнее стремится к нулю. Мы могли бы как угодно увеличить число задач, решение которых приводится к подобной операции. К ней приводит задача о скорости химической реакции, о плотности неравномерно распределенной массы и др.

Естественно, что эта операция получила в математике специальное название. Она называется операцией *дифференцирования функции*. Результат ее называется *производной*.

Итак, *производной от функции f, заданной на некотором интервале (a, b), в точке x этого интервала, называется предел, к которому стремится отношение приращения функции f в этой точке к соответствующему приращению аргумента, когда последнее стремится к нулю*. Производную принято обозначать так*):

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

Но широко употребляются и другие обозначения: y', $\frac{dy}{dx}$, $\frac{df(x)}{dx}$. Удобство того или иного из них читатель впоследствии оценит сам.

Результаты рассмотренных примеров теперь можно сформулировать так:

Скорость в момент t движущейся по числовой прямой точки, координата которой s есть функция $s = f(t)$ от времени t, равна производной от этой функции $s' = f'(t)$.

Тангенс угла α между касательной к кривой, описываемой функцией $y = f(x)$, в точке, имеющей абсциссу x, и положительным направлением оси x равен производной $f'(x)$.

Сила тока I в проводе в момент t, если функция $Q = f(t)$ выражает количество электричества, прошедшее за время t через сечение провода, равна производной $I = Q' = f'(t)$.

Некоторые формулы. При натуральном $n = 1, 2, \ldots$

$$(x^n)' = nx^{n-1}. \tag{1}$$

*) Предел $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$, где рассматриваются только $\Delta x > 0$ или только $\Delta x < 0$, называется соответственно *правой* или *левой* производной от f в точке x. Про функцию f, заданную на отрезке $[a, b]$, принято говорить, что она имеет на этом отрезке производную, если она имеет производную в любой точке интервала (a, b) и, кроме того, правую производную в точке a и левую — в точке b.

В самом деле, считая $\Delta x = h$, будем иметь

$$(x^n)' = \lim_{h\to 0}\frac{\Delta y}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^n - x^n}{h} =$$
$$= \lim_{h\to 0}\frac{h\left[(x+h)^{n-1} + (x+h)^{n-2}x + \ldots + x^{n-1}\right]}{h} =$$
$$= \lim_{h\to 0}(x+h)^{n-1} + \lim_{h\to 0}(x+h)^{n-2}x + \ldots + \lim_{h\to 0}x^{n-1} = nx^{n-1},$$

где мы снова пользуемся элементарными свойствами пределов, которые будут обоснованы в дальнейшем (см. ниже замечание).

Справедливы также формулы:

$$(\sin ax)' = a\cos ax, \tag{2}$$
$$(\cos ax)' = -a\sin ax, \tag{3}$$

где a — константа. Докажем первое равенство, доказательство второго предоставляем читателю. При $a \neq 0$

$$\lim_{h\to 0}\frac{\sin a(x+h) - \sin ax}{h} = \lim_{h\to 0}\left[a\frac{\sin\frac{ah}{2}}{\frac{ah}{2}}\cos\left(ax + \frac{h}{2}\right)\right] =$$
$$= a\lim_{h\to 0}\frac{\sin\frac{ah}{2}}{\frac{ah}{2}}\lim_{h\to 0}\cos\left(ax + \frac{h}{2}\right) = a\cdot 1\cdot\cos ax = a\cos ax.$$

Мы воспользовались свойством $\lim\limits_{\alpha\to 0}\frac{\sin\alpha}{\alpha} = 1$ и тем фактом, что функция $\cos x$ непрерывна. Оба эти утверждения будут обоснованы далее (см. § 4.2 и 4.9). При $a = 0$ равенства (2) и (3) выражают, что производная от постоянной равна нулю (см. ниже (4)).

Производная от функции $f(x)$ есть в свою очередь функция $f'(x)$. Если производная от $f'(x)$ существует, то она называется *второй производной* от $f(x)$ и обозначается так: $f''(x)$.

Подобным же образом определяются *высшие производные* $f^{(n)}(x)$ от $f(x)$ порядка n, где n — любое натуральное число.

Вторая производная от функции $s = f(t)$, выражающей закон движения точки на прямой, равна, очевидно, ускорению этой точки в момент времени t.

Уже из сказанного видно, что понятие производной имеет громадное значение в прикладных вопросах, но оно является фундаментальным и в самой математике. Это будет видно из дальнейшего.

Отметим, что *постоянное число* C, рассматриваемое как функция от x (см. § 1.3), *имеет производную, равную нулю тождественно* (т. е. равную нулю для всех x). В самом деле,

$$f(x) = C,\ f(x+\Delta x) = C,\ C' = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{C - C}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0} 0 = 0. \tag{4}$$

Обратное утверждение также верно: *если про функцию известно, что ее производная равна нулю тождественно, $f'(x) \equiv 0$, то она есть постоянная.* Это простое утверждение, чтобы его доказать строго математически, требует уже достаточно серьезного аппарата, с которым мы познакомимся позднее (см. § 5.8). С другой стороны, из механических соображений оно совершенно очевидно. В самом деле, пусть функция $s = f(t)$ выражает закон движения точки по прямой, причем ее скорость тождественно равна нулю: $v = f'(t) \equiv 0$. Тогда точка стоит на месте и расстояние s ее до начальной точки O равно постоянной при любом t. Тот факт, что в этом рассуждении мы x заменили на t, не имеет значения — время тоже можно обозначить через x.

Отметим еще, что если функции $u(x)$ и $v(x)$ имеют в некоторой точке x производную и A, B — постоянные числа, то функция

$$f(x) = Au(x) + Bv(x) \tag{5}$$

также имеет производную, равную

$$f'(x) = Au'(x) + Bv'(x). \tag{6}$$

В самом деле,

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{Au(x+h) + Bv(x+h) - [Au(x) + Bv(x)]}{h} =$$
$$= \lim_{h\to 0}\left(A\,\frac{u(x+h) - u(x)}{h}\right) + \lim_{h\to 0}\left(B\,\frac{v(x+h) - v(x)}{h}\right) =$$
$$= A\lim_{h\to 0}\frac{u(x+h) - u(x)}{h} + B\lim_{h\to 0}\frac{v(x+h) - v(x)}{h} = Au'(x) + Bv'(x). \tag{7}$$

Во втором равенстве в этой цепочке равенств мы воспользовались тем фактом, что предел суммы равен сумме пределов, и в третьем,— что постоянную законно вынести за знак предела.

По индукции можно доказать более общее утверждение *):

$$\left(\sum_{j=1}^{n} a_j u_j(x)\right)' = \sum_{j=1}^{n} a_j u_j'(x),$$

где a_j — постоянные числа, а про функции $u_j(x)$ предполагается, что они имеют производные.

В частности, получим производную от многочлена:

$$\left(\sum_{k=0}^{n} a_k x^k\right)' = \sum_{1}^{n} k a_k x^{k-1}$$

(a_k — постоянные).

*) Надо иметь в виду обозначение

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j = \sum_{1}^{n} \alpha_j.$$

Замечание. Формулу $(x^n)' = nx^{n-1}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ можно доказать по индукции. При $n = 1$ имеем

$$x' = \lim_{h \to 0} \frac{x + h - x}{h} = 1 = x^0.$$

Если теперь допустить, что формула $(x^{n-1})' = (n-1)x^{n-2}$ $(n = 2, 3, \ldots)$ верна, то получим (см. § 5.1 (5))

$$(x^n)' = (xx^{n-1})' = x'x^{n-1} + x(x^{n-1})' = nx^{n-1}.$$

Отметим формулы (4)—(9) § 5.1 и таблицу § 5.5, которые могут оказаться полезными читателю еще до того как он дойдет до них, изучая предмет систематически.

§ 1.6. Первообразная. Неопределенный интеграл

Пусть на интервале (a, b) задана непрерывная функция f. По определению функция F называется *первообразной функцией* для f на интервале (a, b) *), если на нем производная от F равна f:

$$F'(x) = f(x) \quad (x \in (a, b)).$$

Очевидно, что если функция F есть первообразная для f на (a, b), а C — постоянная, то функция $F(x) + C$ есть также первообразная для f, потому что

$$(F(x) + C)' = F'(x) + C' = F'(x) = f(x).$$

Обратно, если F и F_1 — первообразные для $f(x)$ на (a, b), то они необходимо отличаются друг от друга на всем интервале (a, b) на некоторую постоянную C:

$$F_1(x) = F(x) + C. \tag{1}$$

В самом деле, $(F_1(x) - F(x))' = F_1'(x) - F'(x) = f(x) - f(x) \equiv 0$. Но тогда, как отмечалось в предыдущем параграфе, существует такое (постоянное) число C, что $F_1(x) - F(x) = C$, на (a, b). Отсюда следует (1).

Итак, мы установили, правда, пользуясь механическими соображениями, важный факт: если F есть *какая-либо первообразная от f на интервале (a, b), то всевозможные первообразные от f на этом интервале выражаются формулой $F(x) + C$, где вместо C можно подставить любое число.*

Дадим теперь следующее определение:

Неопределенным интегралом от непрерывной на интервале (a, b) функции f называется произвольная ее первообразная

---

*) Аналогично определяется первообразная для f на отрезке $[a, b]$. Надо принять во внимание только сноску на стр. 33.

функция. Неопределенный интеграл обозначается так:

$$\int f(x)dx.$$

Из сказанного следует, что если F *есть некоторая определенная первообразная функция для* f *на интервале* (a, b), *то неопределенный интеграл от* f *на этом интервале равен*

$$\int f\,dx = F(x) + C, \tag{2}$$

где C *— соответствующим образом подобранная постоянная.*

Если f_1, f_2 — непрерывные на интервале (a, b) функции и A_1, A_2 — постоянные, то имеет место следующее равенство, выражающее основное свойство неопределенного интеграла:

$$\int (A_1f_1(x) + A_2f_2(x))dx = A_1\int f_1(x)dx + A_2\int f_2(x)dx + C, \tag{3}$$

где C есть некоторая постоянная.

В самом деле, по определению неопределенного интеграла слева в (3) стоит какая-то одна из первообразных функций от $A_1f_1(x) + A_2f_2(x)$. С другой стороны, имеет место равенство

$$(A_1\int f_1(x)dx + A_2\int f_2(x)dx)' =$$
$$= A_1(\int f_1(x)dx)' + A_2(\int f_2(x)dx)' = A_1f_1(x) + A_2f_2(x), \tag{4}$$

потому что интегралы $\int f_1\,dx$, $\int f_2\,dx$ обозначают соответственно некоторые первообразные функции от f_1 и f_2. Поэтому правая часть (3) без последнего члена C есть также первообразная для $A_1f_1(x) + A_2f_2(x)$, но тогда она отличается от левой части (3) на некоторую постоянную.

Свойство (3) по индукции распространяется на любое конечное число непрерывных на (a, b) функций $f_1, \ldots, f_n$ и постоянных $A_1, \ldots, A_n$:

$$\int \left(\sum_{j=1}^{n} A_jf_j(x)\right) dx = \sum_{j=1}^{n} A_j \int f_j(x)\,dx + C. \tag{5}$$

Как следствие при $A_1 = 1$, $A_2 = \pm 1$, $n = 2$ вытекает равенство

$$\int (f_1 \pm f_2)\,dx = \int f_1\,dx \pm \int f_2\,dx + C,$$

а при $A_1 = A$ и $A_2 = 0$, $f_1 = f$ — равенство

$$\int Af\,dx = A\int f\,dx + C.$$

П р и м е р ы.

$$\int x^{n-1}\,dx = \frac{x^n}{n} + C, \quad n = 1, 2, \ldots \tag{6}$$

$$\int \cos ax\,dx = \frac{\sin ax}{a} + C, \quad a \neq 0, \tag{7}$$

$$\int \sin ax\,dx = -\frac{\cos ax}{a} + C, \quad a \neq 0. \tag{8}$$

В самом деле (см. 1.5 (1), (2), (3)),

$$\left(\frac{x^n}{n}\right)' = \frac{1}{n}(x^n)' = x^{n-1},$$

$$\left(\frac{\sin ax}{a}\right)' = \frac{1}{a}(\sin ax)' = \frac{1}{a}a\cos ax = \cos ax,$$

$$-\left(\frac{\cos ax}{a}\right)' = -\frac{1}{a}(\cos ax)' = \sin ax.$$

Из (5) и (6) следует, что неопределенный интеграл от многочлена $P_n(x) = \sum_0^n a_k x^k$ степени n (a_k — постоянные) равен

$$\int P_n(x)\,dx = \sum_0^n a_k \frac{x^{k+1}}{k+1} + C.$$

§ 1.7. Понятие определенного интеграла. Площадь криволинейной фигуры

Зададим на отрезке $[a, b]$ (a и b — конечные числа) неотрицательную непрерывную функцию $f(x)$. График ее изобразим на рис. 1.14. Поставим задачу: требуется разумно определить понятие площади фигуры, ограниченной кривой $y = f(x)$, осью x, прямыми $x = a$ и $x = b$ и вычислить эту площадь. Поставленную задачу естественно решить так.

Произведем разбиение отрезка $[a, b]$ на n частей точками

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b, \tag{1}$$

выберем на каждом из полученных частичных отрезков

$$[x_j, x_{j+1}] \quad (j = 0, 1, \ldots, n-1) \tag{2}$$

по произвольной точке $\xi_j \in [x_j, x_{j+1}]$, определим значения $f(\xi_j)$ функции f в этих точках и составим сумму

$$S_n = \sum_0^{n-1} f(\xi_j)\,\Delta x_j \quad (\Delta x_j = x_{j+1} - x_j), \tag{3}$$

которую называют *интегральной суммой* и которая, очевидно, равна сумме площадей затушеванных прямоугольников (см. рис. 1.14).

Будем теперь стремить все Δx_j к нулю и притом так, чтобы максимальный (самый большой) частичный отрезок разбиения стремился к нулю. Если при этом величина S_n стремится к определенному пределу S, не зависящему от способов разбиения (1) и выбора точек ξ_j на частичных отрезках, то естественно величину S называть *площадью нашей криволинейной фигуры.*

Таким образом,

$$S = \lim_{\max \Delta x_j \to 0} \sum_{0}^{n-1} f(\xi_j) \Delta x_j. \tag{4}$$

Итак, мы дали определение площади нашей криволинейной фигуры. Возникает вопрос, имеет ли каждая такая фигура площадь, иначе говоря, стремится ли на самом деле к конечному пределу ее интегральная сумма S_n, когда $\max \Delta x_j \to 0$? В дальнейшем будет доказано, что этот вопрос решается положительно: каждая определенная выше криволинейная фигура, соответствующая некоторой непрерывной функции $f(x)$, действительно имеет площадь в смысле сделанного определения, выражаемую, таким образом, зависящим от этой фигуры числом S.

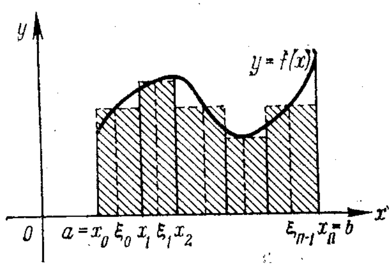

Рис. 1.14.

Другой возникающий здесь вопрос, насколько естественно данное определение площади, как всегда в таких случаях, решается практикой. Мы скажем только, что практика полностью оправдала это определение. У нас будет много случаев убедиться в правильности сделанного определения.

Но обратим внимание на выражение (4). Отвлекаясь от задачи нахождения площади, мы можем на него смотреть как на некоторую операцию, при помощи которой по данной функции f, заданной на $[a, b]$, определяется число S. Она называется *операцией интегрирования* функции f на (конечном) отрезке $[a, b]$, а результат ее, если он существует, называется *определенным интегралом* от f на $[a, b]$ и записывается так:

$$S = \lim_{\max \Delta x_j \to 0} \sum_{j=0}^{n-1} f(\xi_j) \Delta x_j = \int_a^b f(x)\, dx. \tag{5}$$

Итак, по определению *определенным интегралом от функции f на отрезке $[a, b]$ называется предел интегральной суммы* (4), *когда максимальный частичный отрезок разбиения* (1) *стремится к нулю.*

В этом определении, которое теперь уже не связано с задачей о нахождении площади, функция f не обязательно непрерывна и неотрицательна на $[a, b]$. Надо отметить, что это определение не утверждает существования определенного интеграла для всякой функции f, заданной на $[a, b]$, т. е. существования предела (5). Оно только говорит, что если этот предел существует для заданной на $[a, b]$ функции f, то он называется определенным интегралом от f на $[a, b]$.

Следует иметь в виду также, что когда говорят, что указанный предел S существует, то подразумевают, что он не зависит от способов разбиения отрезка $[a, b]$ на части и выбора на полученных частичных отрезках точек ξ_j. Например, если известно, что определенный интеграл $S = \int\limits_0^1 f(x)\,dx$ от некоторой функции f на отрезке $[0, 1]$ существует, то он может быть получен, например, при помощи отыскания предела $S = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum\limits_{j=0}^{n-1} f\left(\frac{j}{n}\right)$ интегральных сумм, соответствующих разбиению $[0, 1]$ на n равных частей точками $x_j = j/n$ $(j = 0, 1, \ldots, n)$ и выбору в качестве ξ_j левых концов частичных отрезков разбиения.

Но число S может быть получено так же как предел

$$S = \lim_{n\to\infty} \sum_{j=0}^{n-1} f\left(\left(\frac{j+1}{n}\right)^2\right)\left[\left(\frac{j+1}{n}\right)^2 - \left(\frac{j}{n}\right)^2\right]$$

интегральных сумм, соответствующих разбиению $[0, 1]$ точками $x_j = (j/n)^2$ $(j = 0, 1, \ldots, n-1)$ и выбору в качестве ξ_j правых концов частичных отрезков разбиения. В этом случае длина j-го частичного отрезка удовлетворяет соотношениям

$$\left(\frac{j+1}{n}\right)^2 - \left(\frac{j}{n}\right)^2 = \frac{2j+1}{n^2} \leqslant \frac{2(n-1)+1}{n^2} = \frac{2n-1}{n^2} = \frac{2}{n} - \frac{1}{n^2} \to 0$$
$$(n\to\infty),$$

показывающим, что максимальный из них (самый правый) имеет длину, стремящуюся к нулю вместе с неограниченным возрастанием n.

В теории определенного интеграла доказывается, что всякая непрерывная на отрезке $[a, b]$ функция интегрируема на нем, т. е. для нее предел (5) существует. Отсюда и следует упомянутый факт, что всякая фигура рассмотренного выше типа имеет площадь.

Пример. Площадь S (рис. 1.15), ограниченная параболой $y = x^2$, осью x и прямой $x = 1$, равна

$$S = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_0^{n-1} \left(\frac{k}{n}\right)^2 = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^3} \sum_0^{n-1} k^2 =$$
$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^3} \frac{2n^3 - 3n^2 + n}{6} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2n} + \frac{1}{6n^2}\right) = \frac{1}{3}.$$

Мы показали, что интегральная сумма функции $y = x^2$, соответствующая разбиению $[0, 1]$ на равные части, стремится к числу $1/3$.

Тот факт, что сумма $\sum\limits_{0}^{n-1}(x_j)^2\Delta x_j$, соответствующая произвольному разбиению $[0, 1]$, стремится к $1/3$, когда $\max\Delta x_j \to 0$ непосредственно доказать элементарными методами не так уж просто. Это, однако, следует из упомянутого утверждения, что определенный интеграл от непрерывной на (конечном) отрезке функции всегда существует.

Приведем другие примеры практических задач, решение которых сводится к вычислению определенных интегралов.

Работа. Пусть к движущейся по прямой точке приложена направленная вдоль этой прямой переменная сила $F = f(x)$, где $f(x)$ есть непрерывная функция от x — абсциссы движущейся точки. Работа силы F при передвижении точки от a до b равна

$$W = \lim_{\max\Delta x_j \to 0} \sum_{j=0}^{n-1} f(x_j)\,\Delta x_j = \int_a^b f(x)\,dx,$$

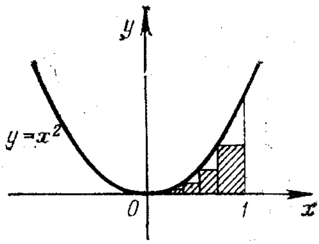

Рис. 1.15.

где $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$, $\Delta x_j = x_{j+1} - x_j$. В самом деле, в силу непрерывности f произведение $f(x_j)\Delta x_j$ близко к истинной работе на $[x_j, x_{j+1}]$, а сумма этих произведений близка к истинной работе на $[a, b]$ и притом тем ближе, чем меньше $\max\limits_j \Delta x_j$.

Масса стержня переменной плотности. Будем считать, что отрезок $[a, b]$ оси x имеет массу с переменной линейной плотностью $\rho(x) \geqslant 0$, где $\rho(x)$ — непрерывная на $[a, b]$ функция. Общая масса этого отрезка равна интегралу

$$M = \lim_{\max\Delta x_j \to 0} \sum_{0}^{n-1} \rho(x_j)\,\Delta x_j = \int_a^b \rho(x)\,dx, \tag{6}$$

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b, \quad \Delta x_j = x_{j+1} - x_j.$$

Непосредственное вычисление определенного интеграла по формуле (5) связано с трудностями — интегральные суммы сколько-нибудь сложных функций имеют громоздкий вид и зачастую не легко преобразовывать их к виду, удобному для вычисления пределов. Во всяком случае, на этом пути не удалось создать общих методов. Интересно отметить, что впервые задачу этого рода решил Архимед. При помощи рассуждений, которые отдаленно напоминают современный метод пределов, он вычислил площадь сегмента параболы. В дальнейшем на протяжении веков многие математики решали задачи на вычисление площадей фигур и объемов тел. Все же еще в XVII веке постановка таких задач и методы их решения носили сугубо частный характер. Существенный сдвиг в этом вопросе внесли Ньютон и Лейбниц, указавшие общий метод решения таких задач. Они показали, что вычисление определенного итеграла от функции может быть сведено к отысканию ее первообразной.

Пусть задана непрерывная на $[a, b]$ функция $f(x)$ и пусть $F(x)$ есть ее первообразная. Теорема Ньютона и Лейбница утверждает справедливость равенства

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a), \tag{7}$$

показывающего, что если для функции f известна ее первообразная F, то вычисление определенного интеграла от f на $[a, b]$ сводится к простой подстановке чисел a и b в F.

Эта теорема будет доказана в § 9.9, а сейчас мы дадим ее простое механическое толкование. Будем считать, что x есть время, а функция $y = F(x)$ выражает закон движения по прямой точки, т. е. y есть расстояние с соответствующим знаком в момент x движущейся точки до закрепленной нулевой точки.

Путь, пройденный точкой за промежуток времени $a \leqslant x \leqslant b$, очевидно, равен *)

$$\Lambda = F(b) - F(a). \tag{8}$$

С другой стороны, он может быть вычислен интегрированием скорости $f(x) = F'(x)$ точки:

$$\Lambda = \lim_{\max \Delta x_j \to 0} \sum_{j=0}^{n-1} f(x_j)\,\Delta x_j = \int_a^b f(x)\,dx. \tag{9}$$

Ведь произведение $f(x_j)\Delta x_j$ приближенно выражает путь, пройденный точкой на отрезке времени $[x_j, x_{j+1}]$, где x_j определены как в (1). Но тогда из (8) и (9) следует (7).

Примеры.
$$\int_a^b x^{n-1}dx = \frac{x^n}{n}\Bigg|_a^b = \frac{1}{n}(b^n - a^n) \qquad (n \neq 0),$$

$$\int_a^b \cos\alpha x\,dx = \frac{\sin\alpha x}{\alpha}\Bigg|_a^b = \frac{1}{\alpha}(\sin\alpha b - \sin\alpha a), \qquad \alpha \neq 0.$$

При этом мы считаем, что $F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$.

Количество подобных примеров можно значительно увеличить после того, как читатель познакомится с §§ 5.1—5.5, где изложены основы техники дифференцирования элементарных функций.

---

*) Впрочем, термин «путь, пройденный точкой», не совсем точно выражает данное явление. Если, например, закон движения таков, что точка сначала продвинулась вправо, пройдя путь Λ_1, а затем влево, пройдя путь Λ_2, то $\Lambda = \Lambda_1 - \Lambda_2$.

Глава 2

ДЕЙСТВИТЕЛЬНОЕ ЧИСЛО

§ 2.1. Рациональные и иррациональные числа

В этой главе мы даем обзор основных свойств (аксиом) действительного числа. Это уместно, потому что среди этих свойств имеются такие, с которыми мы не имели дела в арифметике и школьном курсе алгебры, где рассматриваются операции над постоянными числами. Между тем эти свойства обнаруживаются при рассмотрении *переменных чисел* или, как говорят по традиции,— *переменных величин.*

При изучении функций приходится привлекать свойства чисел во всей их полноте помимо тех свойств, с которыми мы хорошо знакомы из школьной математики.

Целые числа:

$$\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots \qquad (1)$$

можно складывать, вычитать и умножать друг на друга, получая снова целые числа.

Рациональные числа будем записывать в виде $\pm p/q$ $(+p/q = p/q)$, где p и q целые, $p \geqslant 0$ (p больше или равно нулю) и $q > 0$. Таким образом, если это не оговорено, в выражении p/q мы считаем p и q неотрицательными. Два рациональных числа $\pm p_1/q_1$ и $\pm p_2/q_2$ считаются равными в том и только в том случае, если они имеют одинаковый знак и если $p_1q_2 = q_1p_2$. Выражение $\pm 0/q$ определяет одно и то же число 0 независимо от знака («+» или «−») и числа q. Два неотрицательных числа, p_1/q_1 и p_2/q_2, находятся в отношении

$$\frac{p_1}{q_1} < \frac{p_2}{q_2},$$

если $p_1q_2 < q_1p_2$. Хорошо известно, как сравниваются рациональные числа с произвольными знаками и как определяются четыре арифметических действия над ними. Нет необходимости это напоминать*).

В практических вычислениях вполне достаточно оперировать только рациональными числами. Однако числа нужны еще для

*) Мы считаем, что читателю известны из школьного курса основные свойства рациональных чисел и только повторяем некоторые из них без доказательства.

целей измерения геометрических и физических величин (длин отрезков, площадей, объемов, температур и т. д.). Мы здесь имеем в виду не практическое приближенное измерение этих величин, а точное (теоретическое) выражение их числами. Для этих целей рациональных чисел уже недостаточно. Рассмотрим, например, отрезок, представляющий собой гипотенузу прямоугольного треугольника с равными катетами длины единица. Если допустить, что длина этого отрезка выражается положительной рациональной дробью p/q, которую будем считать несократимой, то площадь построенного на нем квадрата равна p^2/q^2, а площадь каждого из квадратов, построенных на катетах, равна 1. Тогда в силу теоремы Пифагора получим равенство $p^2=2q^2$. Правая его часть есть целое число, делящееся на 2, но тогда левая должна быть четной, а вместе с ней и p. Отсюда следует, что левая часть делится на 4, но тогда q^2 делится на 2, откуда также q делится на 2. Итак, p и q имеют общий множитель 2, что противоречит предположению, что дробь p/q взята несократимой. Таким образом, имеются отрезки, длины которых не выражаются рациональными числами. Их называют *несоизмеримыми с единицей*. Чтобы выразить их длины *), появилась необходимость в новых числах, называемых *иррациональными*. Так возникло число $\sqrt{2}$, выражающее длину гипотенузы рассмотренного треугольника.

Существуют различные способы введения иррациональных чисел. Покажем, как можно ввести их при помощи бесконечных десятичных дробей.

Зададим произвольное положительное рациональное число p/q. Превратим его по известным правилам арифметики в десятичную дробь. В результате получим

$$\begin{array}{l|l} p & q \\ \cline{2-2} \underline{\beta_0} & \alpha_0,\alpha_1\alpha_2\ldots \\ \quad \underline{\beta_1} & \\ \quad \ldots & \end{array} \qquad (2)$$

где α_0 — целое неотрицательное число, а α_k $(k=1, 2, \ldots)$ — цифры.

Будем писать

$$p/q=\alpha_0,\ \alpha_1\alpha_2\ldots=+\alpha_0,\ \alpha_1\alpha_2\ldots \qquad (3)$$

и называть десятичную дробь в правой части (3) *десятичным разложением числа p/q*.

Легко показать, что десятичное разложение положительного рационального числа не зависит от способа задания последнего, иначе говоря, при замене в (2) p и q соответственно на p_1, q_1,

*) A priori длина и положительное число — разные понятия, но между ними имеется тесная связь, называемая изоморфизмом (см. далее § 2.7).

где $pq_1 = p_1q$, получается в точности то же десятичное разложение $\alpha_0, \alpha_1\alpha_2 \ldots$.

Будем считать, что дробь p/q несократимая.

Хорошо известно, что если знаменатель дроби p/q имеет вид $q = 2^s5^l$, где s и l — неотрицательные целые числа, то ее десятичное разложение есть *конечная десятичная дробь*

$$\frac{p}{q} = \alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_m, \tag{4}$$

которая, в частности, может оказаться натуральным числом ($p/q = \alpha_0$). Если формально приписать справа к этой десятичной дроби бесконечно много нулей, то она превращается в бесконечную десятичную дробь:

$$\frac{p}{q} = \alpha_0, \alpha_1 \ldots \alpha_m = \alpha_0, \alpha_1 \ldots \alpha_m 000 \ldots = \alpha_0, \alpha_1 \ldots \alpha_m (0). \tag{5}$$

Мы называем ее периодической десятичной дробью с периодом 0, потому что в ней цифра 0 периодически повторяется.

Пользуются также и другим представлением конечной десятичной дроби (4) в виде периодической десятичной дроби с периодом 9:

$$\alpha_0, \alpha_1 \ldots \alpha_m = \alpha_0, \alpha_1 \ldots \alpha_{m-1}(\alpha_m - 1)99 \ldots =$$
$$= \alpha_0, \alpha_1 \ldots \alpha_{m-1}(\alpha_m - 1)(9) \quad (\alpha_m > 0), \tag{6}$$

хотя оно и не возникает в процессе (2).

Пусть теперь знаменатель положительной дроби p/q не имеет вид 2^s5^l. Тогда процесс (2) бесконечный — на любом его шаге возникает положительный остаток. Каждый остаток меньше q, и потому после того, как цифры числа p снесены, среди первых q остатков окажется по крайней мере два равных между собой. Но как только возникает остаток, который уже был прежде, процесс становится повторяющимся — *периодическим*. Поэтому десятичное разложение произвольного положительного рационального числа p/q имеет вид

$$\frac{p}{q} = \alpha_0, \alpha_1 \ \ldots \ \alpha_m\gamma_1 \ldots \gamma_s\gamma_1 \ldots \gamma_s \ldots = \alpha_0, \alpha_1 \ldots \alpha_m (\gamma_1 \ldots \gamma_s). \tag{7}$$

Разложения (5) или (6) можно рассматривать как частные случаи (7). Разложение вида (7) называется положительной десятичной периодической дробью с периодом, представляющим собой группу цифр $\gamma_1\gamma_2 \ldots \gamma_s$.

Ниже приводятся частные примеры положительных бесконечных десятичных периодических дробей:

$$\frac{1}{6} = 0{,}166\ldots = 0{,}1\,(6), \qquad \frac{1}{7} = 0{,}(142857),$$

$$\frac{2}{9} = 0{,}22\ldots = 0,(2), \qquad \frac{7}{99} = 0{,}0707\ldots = 0,(07),$$

$$\frac{17}{999} = 0{,}017017\ldots = 0,(017), \qquad \frac{7}{990} = 0{,}0070707\ldots = 0{,}0\,(07).$$

В первом примере периодом является цифра 6, во втором — группа цифр 142857, в четвертом — группа цифр 07.

У положительной десятичной дроби хотя бы одно из чисел $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2\ldots$ не равно нулю.

Итак, *каждому положительному рациональному числу p/q при помощи процесса* (2) *ставится в соответствие положительная десятичная периодическая дробь с периодом, отличным от* 9 *).

При других вычислениях могут получаться десятичные дроби с периодом 9, но при желании их затем можно записать через соответствующие им конечные десятичные дроби или, что все равно, десятичные дроби с периодом 0.

Верно и обратное утверждение: *каждая положительная десятичная периодическая дробь, если она не имеет период* 9, *может быть получена при помощи процесса* (2) *из некоторой обыкновенной положительной дроби p/q (единственной).*

Например, если дробь 103/330 подвергнуть процессу (2), то получим десятичную периодическую дробь $\frac{103}{330} = 0{,}3\,(12)$. Обратно, эта последняя превращается в исходную дробь при помощи равенств

$$0{,}3\,(12) = \frac{3,(12)}{10} = \frac{3 + 0,(12)}{10} = \frac{3}{10} + \frac{12}{99\cdot 10} = \frac{309}{990} = \frac{103}{330}.$$

Отрицательному рациональному числу $-p/q$ приводят в соответствие бесконечное десятичное разложение числа p/q, взятое со знаком «—».

Итак, имеется взаимно однозначное соответствие **) $\pm p/q = \pm\,\alpha_0, \alpha_1\alpha_2\alpha_3\ldots$ между не равными нулю рациональными числами и бесконечными десятичными не равными нулю периодическими дробями. Каждому не равному нулю рациональному

---

*) Если допустить, что процесс (2) привел к десятичной дроби с периодом 9, то, начиная с некоторого этапа процесса, остатки γ_k, γ_{k+1} равны между собой, а в частном получаются цифры 9. Но тогда $10\gamma_k = 9q + \gamma_{k+1}$, и так как $\gamma_k = \gamma_{k+1}$, то $\gamma_k = q$. Но этого не может быть, так как $\gamma_k < q$.

**) Если каждому элементу x множества A соответствует определенный элемент y множества B так, что любой элемент $y \in B$ соответствует одному и только одному $x \in A$, то говорят, что этим установлено одно-однозначное или взаимно однозначное соответствие ($x \rightleftarrows y$).

числу соответствует при помощи указанного выше процесса одно и только одно его десятичное бесконечное периодическое разложение, не имеющее периода 9. Обратно, любое такое разложение соответствует при помощи указанного процесса некоторому не равному нулю рациональному числу (единственному).

Числу нуль (оно тоже рациональное) *естественно привести в соответствие разложение* $0 = \pm 0{,}00\ldots = 0{,}00\ldots$

Кроме периодических десятичных дробей существуют непериодические, например, $0{,}1010010001\ldots$; $0{,}121122111222\ldots$

Вот еще пример: если извлекать корень квадратный из 2 по известному правилу, то получим определенную бесконечную непериодическую десятичную дробь $\sqrt{2} = 1{,}41\ldots$ Она определена в том смысле, что любому натуральному числу k соответствует определенная цифра α_k k-го разряда числа $\sqrt{2}$, однозначно вычисляемая согласно правилу извлечения квадратного корня.

Математический анализ дает много путей вычисления числа π, с любой наперед заданной точностью. Это приводит к вполне определенному бесконечному десятичному разложению π, которое, как оказывается, не является периодическим.

Дадим теперь определение иррационального числа, пока чисто формальное. *Иррациональным числом называется произвольная бесконечная непериодическая дробь*

$$a = \pm \alpha_0, \alpha_1\alpha_2\alpha_3\ldots, \tag{8}$$

где α_0 — целое неотрицательное число, а α_k $(k = 1, 2, \ldots)$ — цифры, знак же равенства «$=$» выражает, что мы обозначили правую часть (8) *через a.* Впрочем, удобно говорить, что правая часть (8) есть десятичное разложение числа a.

Рациональное и иррациональные числа называются действительными (или вещественными) числами.

Из сказанного следует, что *всякое не равное нулю действительное число может быть записано в виде бесконечной десятичной дроби* (8). *Если оно рационально, то его десятичное разложение есть бесконечная десятичная периодическая дробь. В противном случае согласно нашему определению выражение* (8) *само определяет иррациональное число.*

Число a, где не все α_k равны нулю, называется положительным или отрицательным в зависимости от того, будет ли в (8) фигурировать «$+$» или «$-$»; при этом, как обычно, «$+$» будем позволять себе опускать.

Действительные числа определены пока формально, надо еще определить арифметические операции над ними, ввести для них понятие «$>$» и проверить, что эти операции и понятие «$>$» согласуются с уже имеющимися соответствующими операциями и понятием «$>$» для рациональных чисел, а также удовлетворяют свойствам, которые мы предъявляем к числам.

Определение понятия «$>$» дается в § 2.2, а определения арифметических операций в § 2.3. В § 2.4 формулируются и доказываются основные свойства числа, распределенные на пять групп I—V. Первые три группы содержат известные свойства, которыми мы руководствуемся при арифметических вычислениях и решениях неравенств. Группа IV составляет одно свойство (*Архимеда*). Наконец, группа V также состоит из одного свойства: существования предела у неубывающей ограниченной последовательности. В сущности, для дальнейшего нам будет важно только знать, что действительные числа (десятичные дроби) суть объекты, для которых определены понятие «$>$» и арифметические операции, удовлетворяющие свойствам I—V. Поэтому может быть и такой способ чтения книги, когда читатель систематически читает крупный шрифт, только более или менее ознакомившись с мелким шрифтом, где даются доказательства свойств I—V.

Из свойств I—V можно получить логически все остальные свойства числа.

Существует аксиоматический подход к определению действительного числа, заключающийся в том, что числами называются некоторые объекты (вещи) a, b, c, ..., *удовлетворяющие свойствам* I—V. *При таком подходе свойства* I—V *называются аксиомами числа.*

Аксиоматическое построение понятия числа на первый взгляд может показаться более простым. Однако здесь возникает вопрос, совместны ли аксиомы I—V? Чтобы доказать их совместность, появляется необходимость построить формальные символы, для которых можно определить арифметические операции и понятие «$>$» и проверить, что они удовлетворяют аксиомам I—V. Такими символами как раз и могут служить бесконечные десятичные дроби.

§ 2.2. Определение неравенства

Зададим два числа $a = \pm\alpha_0, \alpha_1\alpha_2, \ldots$, $b = \pm\beta_0, \beta_1\beta_2\ldots$, определяемых бесконечными десятичными дробями, не имеющими периода 9 *). Будем считать, что они равны между собой тогда и только тогда, когда их знаки одинаковы и

$$\alpha_k = \beta_k \quad (k = 0, 1, 2, \ldots).$$

Для положительных a и b по определению, $a < b$ или, что все равно, $b > a$, если $\alpha_0 < \beta_0$, или, если найдется такой индекс (целое неотрицательное число) l, что $\alpha_k = \beta_k$ ($k = 0, 1, 2, \ldots, l$) и $\alpha_{l+1} < \beta_{l+1}$.

*) Если число задано десятичной дробью с периодом 9, то его всегда можно записать также в виде десятичной дроби с периодом 0.

По определению, $a>0$ или $a<0$ в зависимости от того, будет ли a положительным или отрицательным, далее по определению, $a<b$, если $a<0$, $b>0$, или если a, $b<0$ и $|a|>|b|$.

Если $a=\pm\alpha_0, \alpha_1\alpha_2\ldots$, то, по определению, $-a=\mp\alpha_0, \alpha_1\alpha_2\ldots$ и абсолютная величина $|a|=+\alpha_0, \alpha_1\alpha_2\ldots=\alpha_0, \alpha_1\alpha_2\ldots$. Таким образом,

$$|-a|=|a|=\begin{cases} a & (a\geqslant 0), \\ -a & (a\leqslant 0). \end{cases}$$

Приведенные определения согласованы с соответствующими определениями для рациональных чисел.

§ 2.3. Определение арифметических действий

Пусть каждому неотрицательному целому числу (индексу) n в силу некоторого закона приведено в соответствие число x_n. Совокупность

$$x_0,\ x_1,\ x_2,\ \ldots \tag{1}$$

называется *последовательностью* (чисел). Отдельные числа x_n последовательности (1) называются ее *элементами*. Элементы x_n и x_m при $m\neq n$ считаются отличными как элементы данной последовательности, хотя как числа они могут быть равны между собой, т. е. может быть $x_n=x_m$. *Последовательность* называется *неубывающей* (*невозрастающей*), если $x_k\leqslant x_{k+1}$ ($x_k\geqslant x_{k+1}$) для всех $k=0, 1, 2, \ldots$

Будем говорить, что *последовательность* (1) *ограничена сверху* (*числом* M), если существует целое число M такое, что $x_k\leqslant M$ для всех $k=0, 1, 2, \ldots$

Если числа x_k последовательности (1) целые, то будем говорить, что она *стабилизируется* к числу ξ, если найдется такое k_0, что $x_k=\xi$ для всех $k>k_0$.

Очевидно, что *если последовательность целых чисел не убывает и ограничена сверху числом M, то она стабилизируется к некоторому целому числу $\xi\leqslant M$.*

Рассмотрим теперь последовательность неотрицательных десятичных дробей

$$\left.\begin{array}{l} a_1=\alpha_{10}, \alpha_{11}\alpha_{12}\alpha_{13}\ldots, \\ a_2=\alpha_{20}, \alpha_{21}\alpha_{22}\alpha_{23}\ldots, \\ a_3=\alpha_{30}, \alpha_{31}\alpha_{32}\alpha_{33}\ldots, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \end{array}\right\} \tag{2}$$

Правые части в (2) образуют таблицу (*бесконечную матрицу*).

Будем говорить, что *последовательность* (2) *стабилизируется к числу* $a=\gamma_0, \gamma_1\gamma_2\gamma_3\ldots$, *и писать*

$$a_n \rightrightarrows a, \tag{3}$$

если k-й столбец таблицы (2) *стабилизируется к γ_k, каково бы ни было* $k = 0, 1, 2, \ldots$. При этом, очевидно, автоматически оказывается, что γ_0 — целое неотрицательное, а γ_k $(k = 1, 2, \ldots)$ — цифры.

Замечание. Последовательность чисел $a_1, a_2, a_3, \ldots$, где

$$a_{2k} = 1,\ \underbrace{0 \ldots 0}_{k\,\text{раз}} 11 \ldots \qquad (k = 1, 2, \ldots),$$

$$a_{2k+1} = 0,\ \underbrace{9 \ldots 9}_{k\,\text{раз}} \ldots \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots)$$

не стабилизируется. Из § 3.1, где вводится понятие предела, будет ясно, что данная последовательность имеет предел, равный 1 $(a_n \to 1)$. Итак, последовательность десятичных дробей может иметь предел и в то же время не стабилизироваться. Однако из того, что $a_n \rightrightarrows a$, следует, что $a_n \to a$ (см. § 3.1).

Для произвольного числа $a = \alpha_0, \alpha_1\alpha_2 \ldots$ введем его *n-ю срезку* $a^{(n)} = \alpha_0, \alpha_1 \ldots \alpha_n$, представляющую собой конечную десятичную дробь. Мы считаем, что операции с конечными десятичными дробями читателю известны из курса арифметики.

Зададим положительные числа $a = \alpha_0, \alpha_1\alpha_2 \ldots$, $b = \beta_0, \beta_1\beta_2 \ldots$, разложенные в бесконечные десятичные дроби.

Введем последовательность чисел

$$a^{(n)} + b^{(n)} = \alpha_0, \alpha_1 \ldots \alpha_n + \beta_0, \beta_1 \ldots \beta_n = \lambda_0^{(n)}, \lambda_1^{(n)} \ldots \lambda_n^{(n)} \tag{4}$$

$$(n = 1, 2, \ldots).$$

Ниже будет доказана лемма, из которой будет следовать, что эта последовательность стабилизируется к некоторому определенному числу $\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2 \ldots$. Его естественно назвать *суммой чисел a и b* и писать $a + b = \gamma_0, \gamma_1\gamma_2 \ldots$

Итак, мы определяем сумму $a + b$ как число, для которого

$$a^{(n)} + b^{(n)} \rightrightarrows a + b. \tag{5}$$

Произведение, разность и частное чисел a и b определяем следующим образом:

$$\left(a^{(n)} b^{(n)}\right)^{(n)} \rightrightarrows ab, \tag{6}$$

$$a^{(n)} - \left(b^{(n)} + 10^{-n}\right) \rightrightarrows a - b \quad (a > b > 0)^{*)}, \tag{7}$$

$$\left(\frac{a^{(n)}}{b^{(n)} + 10^{-n}}\right)^{(n)} \rightrightarrows \frac{a}{b}. \tag{8}$$

Выражения слева в (5) — (8) не убывают при возрастании n: благодаря этому и ограниченности их сверху они на основании

---

*) $n > n_0$, где n_0 настолько велико, что разность слева в (7) положительна. Отметим, что равенство $(a - b) + b = a (a > b > 0)$ доказывается в § 2.8 после (4), а равенство $a \cdot \frac{1}{a} = 1 (a > 0)$ доказывается на основании § 2.8 (12).

доказываемой ниже леммы стабилизируются к определённым числам, которые обозначаются соответственно через ab, $a-b$, a/b. Надо иметь в виду, что $a^{(n)}$ не убывает при неограниченном возрастании n, а $b^{(n)}+10^{-n}$ не возрастает; кроме того, имеют место неравенства

$$\left(a^{(n)}b^{(n)}\right)^{(n)} \leqslant (\alpha_0+1)(\beta_0+1),\ a^{(n)}-\left(b^{(n)}+10^{-n}\right) \leqslant (\alpha_0+1),$$
$$\left(\frac{a^{(n)}}{b^{(n)}+10^{-n}}\right)^{(n)} \leqslant \frac{\alpha_0+1}{\beta_0, \beta_1 \ldots \beta_s}$$

(где s такое, что $\beta_s>0$), показывающие, что левые их части ограничены.

Положим еще

$$0+a=a\pm 0=a,\ a\cdot 0=0\cdot a=a-a=\frac{0}{b}=0\ (a\geqslant 0, b>0). \tag{9}$$

Мы определили для неотрицательных чисел a, b их сумму, разность, произведение и частное, предполагая в случае разности, что $a \geqslant b$, и частного, что $b>0$. Эти определения распространяются обычными способами на числа a и b произвольных знаков. Например, если a, $b \leqslant 0$, то полагаем $a+b=b+a=-(|a|+|b|)$. Если же a и b — числа разных знаков и $|a| \geqslant |b|$, то полагаем $a+b=b+a=\pm||a|-|b||$, где выбирается знак, одинаковый со знаком a. В частности, имеет место

$$a+(-a)=0 \tag{10}$$

для любого a.

Подобные правила можно было бы привести для остальных арифметических действий, но в этом нет необходимости — они хорошо известны из школьного курса алгебры.

Но, чтобы обосновать сказанное, нам предстоит доказать лемму:

Лемма 1. *Если неубывающая последовательность* (2) *конечных десятичных дробей* (*см.* § 2.2, (4) *и* (5)) *ограничена сверху целым числом M, то она стабилизируется к некоторому числу a, удовлетворяющему неравенствам*

$$a_n \leqslant a \leqslant M \quad (n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots). \tag{11}$$

В самом деле, в условиях леммы целые числа нулевого столбца матрицы (2) также не убывают и ограничены сверху числом M, поэтому они стабилизируются на некотором целом неотрицательном числе $\gamma_0 \leqslant M$. Рассуждая теперь по индукции, допустим, что уже доказано, что столбцы матрицы (2) с номерами, не превышающими k, стабилизируются соответственно к γ_0, γ_1, ..., γ_k и

$$\gamma_0,\ \gamma_1 \ldots \gamma_k \leqslant M \quad (\gamma_1,\ \ldots,\ \gamma_k — \text{цифры}). \tag{12}$$

Докажем, что $(k+1)$-й столбец в (2) также стабилизируется к некоторой цифре γ_{k+1} и имеет место неравенство

$$\gamma_0, \gamma_1 \ldots \gamma_k \gamma_{k+1} \leqslant M. \tag{13}$$

В самом деле, раз десятичные разложения чисел a_n при $n > n_1$ при достаточно большом n_1 имеют вид

$$a_n = \gamma_0, \gamma_1 \ldots \gamma_k \alpha_{n,\,k+1} \alpha_{n,\,k+2} \ldots \leqslant M,$$

и, кроме того, a_n не убывает, то для указанных n цифры $\alpha_{n,\,k+1}$ $(\leqslant 9)$ не убывают, и следовательно, стабилизируются при $n \geqslant n_2$, где n_2 достаточно велико, к некоторой цифре γ_{k+1}. При этом $\gamma_0, \gamma_1 \ldots \gamma_{k+1} \leqslant a_n \leqslant M$ $(n \geqslant n_2)$, и мы доказали (13) и тот факт, что $a_n \underset{\rightarrow}{\rightarrow} a$. Так как a_n конечная десятичная дробь, то при некотором k для всех $s > k$ цифры $\alpha_{ns} = 0$ и $\alpha_n = \alpha_{n0}, \alpha_{n1} \ldots \alpha_{nk} \leqslant \leqslant \gamma_0, \gamma_1 \ldots \gamma_k \leqslant \gamma_0, \gamma_1 \gamma_2 \ldots = a$. Не может быть $a > M$. Иначе для некоторого k было бы $\gamma_0, \gamma_1 \ldots \gamma_k > M$, что противоречит (12).

§ 2.4. Основные свойства действительных чисел

I. Свойства порядка.

I_1. Для каждой пары действительных чисел a и b имеет место одно и только одно соотношение:

$$a = b, \quad a > b, \quad a < b.$$

I_2. Из $a < b$ и $b < c$ следует $a < c$ (транзитивное свойство знака «$<$»).

I_3. Если $a < b$, то найдется такое число c, что $a < c < b$.

Свойства I_1 и I_2 вытекают непосредственно из определений знаков «$=$» и «$<$». Если положительные, не имеющие периода 9, числа $a = \alpha_0, \alpha_1\alpha_2 \ldots$, $b = \beta_0, \beta_1\beta_2 \ldots$ записаны в виде бесконечных дробей и $a < b$, то при некотором s_0

$$\alpha_k = \beta_k, \; k \leqslant s_0 - 1 \text{ (если } s_0 = 0, \text{ то эти равенства опускаются)},$$
$$\alpha_{s_0} < \beta_{s_0}.$$

Найдется также $s_1 > s_0$ такое, что $\alpha_{s_1} < 9$. Если положить $c = \alpha_0, \alpha_1 \ldots \alpha_{s_1 - 1}(\alpha_{s_1} + 1)$, то, очевидно, c — конечная десятичная дробь, удовлетворяющая неравенствам $a < c < b$.

Распространение доказательства I_3 на случай любых a и b не представляет труда.

II. Свойства действий сложения и вычитания*).

II_1. $a + b = b + a$ (переместительное или коммутативное свойство).

*) При аксиоматическом подходе надо еще добавить: каждой паре чисел a, b в силу некоторого закона соответствует число $a + b$, называемое их суммой; при этом выполняются $\mathrm{II}_1 - \mathrm{II}_5$. II_3 и II_4 тогда надо видоизменить: существует число 0 (нуль) такое, что $a + 0 = a$ для всех a, так же как существует для каждого a число $-a$ такое, что $a + (-a) = 0$. Единствен-

II_2. $(a+b)+c=a+(b+c)$ (сочетательное или ассоциативное свойство).

II_3. $a+0=a$.

II_4. $a+(-a)=0$.

II_5. Из $a<b$ следует, что $a+c<b+c$ для любого c.

Доказательство этих свойств достаточно привести для положительных чисел a, b, c. Тогда эти свойства автоматически переносятся на числа любого знака, как это хорошо известно из элементарной алгебры. Итак, пусть $a, b, c>0$.

Свойство II_1 следует на основании § 2.3, (5) из того, что оно верно для конечных дробей: $a^{(n)}+b^{(n)}=b^{(n)}+a^{(n)}$ $(n=1, 2, \ldots)$.

Свойства II_3 и II_4 непосредственно вытекают из сделанных выше определений (см. § 2.3, (9) и (10)).

Доказательство II_2 см. в § 2.8. Свойство II_5 очевидно, когда a и b — конечные десятичные дроби. Пусть теперь a и b произвольны. Выберем конечную десятичную дробь d такую, что $a<d<b$. Тогда при достаточно больших n имеем $a^{(n)}<d<b^{(n)}$, и, так как все это конечные дроби, то $a^{(n)}+c<d+c<b^{(n)}+c$. С ростом n срезки $a^{(n)}$ и $b^{(n)}$ не убывают, поэтому $a+c\leqslant d+c<b+c$, откуда $a+c<b+c$.

Равенство II_1 тривиально, если a или b равно нулю (см. § 2.3 (9)).

III. Свойства действий умножения и деления*).

III_1. $ab=ba$ (переместительное или коммутативное свойство).

III_2. $ab(c)=a(bc)$ (сочетательное или ассоциативное свойство).

III_3. $a\cdot 1=a$.

III_4. $a\cdot\frac{1}{a}=1$ $(a\neq 0)$.

III_5. $(a+b)c=ac+bc$ (распределительный или дистрибутивный закон).

ность нуля может быть выведена логически из рассматриваемых аксиом: допущение существования другого нуля $0'$ влечет, что $0'=0'+0=0+ +0'=0$. Выводится также из аксиом существование разности $a-b$, т. е. числа, которое надо добавить к b, чтобы получить a. Это число есть $a+(-b)$, потому что $a+(-b)+b=a+0=a$. Оно единственно, потому что если $b+c=b+c'$, то $c=(-b)+b+c=(-b)+b+c'=c'$.

*) При аксиоматическом подходе надо добавить: каждой паре a, b в силу определенного закона соответствует число ab, называемое произведением a и b. При этом выполняются свойства III_1 — III_6. Надо еще видоизменить III_3 и III_4: существует число 1 (единица), отличное от 0 и такое, что $a\cdot 1=a$ для всех a; существует для любого $a\neq 0$ число $1/a$ такое, что $a\cdot\frac{1}{a}=1$. Единственность единицы выводится логически из рассматриваемых аксиом так же, как существование и единственность частного a/b $(b\neq 0)$, т. е. числа, которое надо умножить на b, чтобы получить a. Вывод вполне аналогичен выводу в сноске к II, где 0 надо заменить на 1 и действие сложения на умножение. При этом автоматически $1>0$; ведь если допустить, что $1<0$, то (см. II_4, II_5) $0=1+(-1)<-1$ и (см. III_6) $1(-1)<0(-1)$, т. е. (см. III_3) $-1<0$, и мы получим противоречие: $-1<0<-1$. Надо учесть, что

$$0\cdot(-1)=0\cdot(-1)+0\cdot 1+0\cdot 1=0(-1+1+1)=0\cdot(0+1)=0\cdot 1=0.$$

III_6. Из $a < b$, $c > 0$ следует $ac < bc$.

По тем же соображениям, что и для свойств II, существенно проверить III в случае только положительных a, b, c (см. § 2.8).

IV. Архимедово свойство.

Каково бы ни было число $c > 0$, существует натуральное $n > c$. В самом деле, если $c = \alpha_0, \alpha_1\alpha_2 \ldots$, то можно взять $n = \alpha_0 + 2$.

Из архимедова свойства и некоторых предыдущих свойств следует, что, каково бы ни было положительное число ε, всегда можно указать такое натуральное n, что выполняется неравенство $1/n < \varepsilon$.

В самом деле, согласно IV для числа $1/\varepsilon$ можно указать натуральное n такое, что $1/\varepsilon < n$, что в силу III_6 влечет нужное неравенство.

Заметим, что для данного числа $c \geqslant 0$ в ряду $0, 1, 2, \ldots$ целых неотрицательных чисел, очевидно, имеется единственное m, для которого выполняются неравенства $m \leqslant c < m + 1$.

V. Свойство существования предела у неубывающей ограниченной последовательности действительных чисел.

Если последовательность положительных чисел

$$a_1, a_2, a_3, \ldots \tag{1}$$

не убывает и ограничена сверху числом M, то существует действительное число a, не превышающее M, к которому эта последовательность стремится как к своему пределу:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \leqslant M. \tag{2}$$

Это значит, что для всякого $\varepsilon > 0$ найдется натуральное число n_0 такое, что $|a - a_n| = a - a_n < \varepsilon$ для всех $n > n_0$.

Доказательство. Каждый элемент a_n последовательности (1) разложим в бесконечную десятичную дробь:

$$a_n = a_{n,0}, a_{n,1}a_{n,2}a_{n,3} \ldots . \tag{3}$$

Последовательность чисел (3) ограничена сверху числом M ($a_n \leqslant M$) и не убывает, поэтому на основании леммы 1 из § 2.3 последовательность десятичных дробей (3) стабилизируется к некоторому числу $a \leqslant M$:

$$a_n \rightrightarrows a = \gamma_0, \gamma_1\gamma_2 \ldots .$$

Но тогда a_n стремится к a как к своему пределу:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a.$$

В самом деле, для любого $\varepsilon > 0$ найдется натуральное m такое, что $10^{-m} < \varepsilon$. Так как a_n стабилизируется к a, то найдется

n_0 такое, что при $n > n_0$ первые m компонент чисел a_n уже стабилизированы:

$$a_n = \gamma_0, \gamma_1 \ldots \gamma_m \alpha_{n, m+1} \alpha_{n, m+2} \ldots,$$

т. е. равны соответственно первым m компонентам числа a. Но тогда

$$|a - a_n| = a - a_n = 0, 0 \ldots 0 \, a_{n, m+1} \, a_{n, m+2}, \ldots \leqslant 10^{-m} < \varepsilon \quad (n > n_0),$$

что и требовалось доказать.

Замечание 1. Из I—V следует более общее чем V свойство, утверждающее, что всякая *монотонная*, т. е. неубывающая или невозрастающая, ограниченная последовательность не обязательно положительных чисел имеет предел (конечный; см. далее § 3.4). Пусть R есть множество всех рациональных чисел. В R свойства I—IV выполняются, однако свойство V не всегда выполняется, как показывает следующий пример.

Пример. Пусть $a = \alpha_0, \alpha_1\alpha_2\alpha_3 \ldots$ есть произвольное положительное иррациональное число, а

$$a^{(n)} = \alpha_0, \alpha_1 \ldots \alpha_n \quad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

его n-е срезки. Числа $a^{(n)}$ рациональные и образуют ограниченную сверху числом a последовательность. При этом их десятичные разложения стабилизируются к десятичному разложению числа a. Но тогда, как мы знаем,

$$\lim_{n \to \infty} a^{(n)} = a.$$

Таким образом, числа $a^{(n)}$ принадлежат R, но предел их последовательности не принадлежит R, а если учесть, что предел у последовательности может быть только один (см. далее § 3.1), то получим: для R свойство V, вообще говоря, не выполняется.

§ 2.5. Изоморфизм различных представлений действительных чисел. Длина отрезка, физические величины

В предыдущих параграфах были определены действительные числа $a, b, c, \ldots$ в виде бесконечных десятичных разложений и было установлено, что они удовлетворяют свойствам, составляющим указанные выше группы I—V (коротко, свойствам I—V).

Но мы могли бы, рассуждая аналогично, определить бесконечные двоичные или троичные (вообще n-ичные) разложения $a', b', c', \ldots$ и ввести для них понятия «$>$» и операции сложения «$+$» и умножения «$\cdot$». При проверке оказалось бы, что эти новые объекты тоже удовлетворяют свойствам I—V.

Отметим еще так называемые дедекиндовы сечения во множестве рациональных чисел. Во многих учебниках именно на их основе определяют действительные числа (см. П. С. Александров и А. Н. Колмогоров, Введение в теорию функций действительного переменного, ГТТИ, 1938, а также Г. М. Фихтенгольц, Курс дифференциального и интегрального исчисления, т. I, «Наука», 1970).

Всевозможные дедекиндовы сечения a', b', c', ... представляют собой не что иное, как разложения всего множества рациональных чисел на два непустых класса $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$, где любое число класса $\mathfrak{A}$ меньше любого числа класса $\mathfrak{B}$. Оказывается, что для дедекиндовых сечений можно определить понятия «$>$», «$+$», «$\cdot$» и установить, что с этими определениями они удовлетворяют свойствам I—V.

Наконец, отметим, что при определении действительных чисел иногда считают удобным вводить (см. В. В. Немыцкий, М. И. Слудская и А. Н. Черкасов, Курс математического анализа, т. I, Физматгиз, 1957) так называемые фундаментальные последовательности рациональных чисел. Существенно разные (в известном смысле) такие последовательности обозначают символами a', b', c' ..., вводят для них понятия «$>$», «$+$», «$\cdot$» и доказывают, что они удовлетворяют свойствам I—V.

Важно отметить, что все указанные определения действительных чисел с формальной точки зрения не отличаются друг от друга. Это следует из формулируемой ниже теоремы, которую можно назвать *теоремой об изоморфизме множеств, удовлетворяющих условиям* I—V.

Понятие *изоморфизм*, точнее, *изоморфизм относительно свойств* «$>$», «$+$», «$\cdot$», lim (предел) будет разъяснено ниже попутно.

Теорема 1. *Пусть E есть множество десятичных дробей a, b, c, ... и E' есть множество элементов a', b', c', ..., для которых определены понятия больше («$>$») и операции сложения («$+$») и умножения («$\cdot$») так, что выполняются свойства* I—V.

Тогда между элементами $a \in E$ и $a' \in E'$ можно указать взаимно однозначное соответствие

$$a \sim a',$$

являющееся изоморфизмом по отношению к понятию «$>$», арифметическим действиям и понятию предела.

Это значит, что, если

$$a \sim a', \quad b \sim b',$$

то

$$\left.\begin{aligned} a \pm b &\sim a' \pm b', \\ ab &\sim a'b' \\ \frac{a}{b} &\sim \frac{a'}{b'} \quad (b \neq 0), \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

если при этом $a < b$, то $a' < b'$.

Наконец, для ограниченной сверху неубывающей последовательности элементов $a_n \in E$ $(n = 1, 2, \ldots)$ имеет место

$$\lim_{n\to\infty} a_n \sim \lim_{n\to\infty} a_n'. \tag{2}$$

Таким образом, будем ли мы оперировать десятичными разложениями a, b, c, ... или им соответствующими элементами a', b', c', ..., если это оперирование сводится к арифметическим действиям, взятым в конечном числе, или к нахождению предела неубывающей последовательности, мы каждый раз будем приходить к элементам d и d', находящимся в указанном выше соответствии $d \sim d'$.

Таким образом, все определенные выше конкретные множества (дедекиндовых сечений, фундаментальных последовательностей, бесконечных двоичных разложений и т. д.) изоморфны между собой в указанном смысле.

Это указывает на возможность корректно определить понятие действительного числа аксиоматически в том смысле, как это уже было определено в конце § 2.1.

Из сказанного следует, что с формальной точки зрения все равно, исходим ли мы при определении действительных чисел из бесконечных десятичных дробей или из аксиоматического подхода к понятию числа. Конечно, с философской точки зрения второй подход более приемлем: числа суть абстракции, выражающие количественные отношения в природе, а десятичные дроби — их представляющие формальные символы.

Приведем основные факты, связанные с доказательством теоремы об изоморфизме.

Пусть E есть множество всех действительных чисел и E' — множество, вообще говоря, любых других объектов, удовлетворяющих свойствам I—V. Тогда в E' имеются нуль $0'$ и единица $1'$ $(0' < 1')$ и имеют смысл элементы $2' = 1' + 1'$, $3' = 2' + 1'$, ... и элементы $-1'$, $-2'$, $-3'$, ... В результате получим последовательность с двойным входом*) (различных между собой) элементов E':

$$\ldots\ -2',\ -1',\ 0',\ 1',\ 2',\ \ldots,$$

соответствующих целым числам

$$\ldots\ -2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ \ldots$$

Элементы (3) можно делить друг на друга, исключая деление на $0'$. Поэтому в E' имеются (рациональные) элементы вида $\pm p'/q' = \pm n'p'/n'q' = a'$ $(q' > 0,\ p' \geqslant 0)$, находящиеся во взаимно однозначном соответствии с рациональными числами $\pm p/q = a$, что мы кратко запишем так: $a \sim a'$. Здесь n' соответствует натуральному числу n. Это соответствие является *изоморфизмом по отношению к знаку* «$>$» *и арифметическим операциям*, т. е. выполняются соотношения (1) пока для рациональных элементов.

На самом деле указанный изоморфизм $a \sim a'$ распространяется на все элементы множеств E и E'. Убедимся в этом. В силу уже установленного изоморфизма между рациональными элементами имеет место соответствие

$$\pm\, \alpha_0, \alpha_1 \ldots \alpha_n \sim \pm\, \alpha_0', \alpha_1' \ldots \alpha_n' = \pm\, (\alpha_0\alpha_1 \ldots \alpha_n)'/10^{n'}$$

---

*) Про элементы a_k, зависящие от целого k и расположенные так:

$$\ldots\ a_{-2},\ a_{-1},\ a_0,\ a_1,\ a_2,\ \ldots,$$

говорят, что они образуют *последовательность с двойным входом*.

между конечными десятичными дробями E и E', где в скобках справа находится целое число $\alpha_0\alpha_1 \ldots \alpha_n = \alpha_0 10^n + \alpha_1 10^{n-1} + \ldots + \alpha_n$. Это соответствие изоморфно по отношению к знаку «$>$» и арифметическим операциям. Пусть $a = \alpha_0, \alpha_1\alpha_2 \ldots$ есть произвольное положительное число, представленное бесконечной десятичной дробью.

Легко видеть, что оно является пределом неубывающей последовательности его срезок: $a = \lim a^{(n)}$. Так как $a^{(n)} \leqslant \alpha_0 + 1$ для любого числа $n = 1, 2, \ldots$, то также $a^{(n)\prime} \leqslant (\alpha_0 + 1)'$. Кроме того, элементы $a^{(n)\prime}$ не убывают, потому что числа $a^{(n)}$ не убывают. Поэтому на основании свойства V, которое предположено верным в E', существует в E' элемент a', являющийся пределом: $a' = \lim a^{(n)\prime}$.

Естественно a' записать в виде выражения $a' = \alpha_0', \alpha_1' \alpha_2' \ldots$, называя его бесконечной десятичной дробью в E', а $a^{(n)\prime}$ — его n-ми срезками. Этим каждому действительному числу a приведен в соответствие элемент $a' \in E'$ $(a \to a')$. Это соответствие не противоречит соответствию

$$\alpha_0, \alpha_1 \ldots \alpha_k \to \alpha_0', \alpha_1' \ldots \alpha_k',$$

потому что наряду с равенством

$$\alpha_0, \alpha_1 \ldots \alpha_k = \alpha_0, \alpha_1 \ldots \alpha_{k-1} (\alpha_k - 1)99 \ldots \qquad (\alpha_k > 0)$$

имеет место равенство

$$\alpha_0'\alpha_1' \cdots \alpha_k' = \alpha_0'\alpha_1' \cdots \alpha_{k-1}' \left(\alpha_k' - 1\right) 9'9' \cdots \tag{4}$$

Ведь бесконечная дробь справа по определению есть предел ее срезок (в E'), но число $\alpha_0', \alpha_1' \ldots \alpha_k'$, как нетрудно видеть, уже является этим пределом, но тогда они равны, потому что последовательность может иметь единственный предел.

Но мы еще покажем, что всякий элемент $\lambda \in E'$ обязательно соответствует некоторому числу $a \in E$ и притом единственному.

Зададим произвольный положительный элемент $\lambda \in E'$. Согласно архимедову свойству (верному в E') существует натуральный элемент $n' > \lambda$. Таким образом, $0' < \lambda < n'$ и, так как $0' < 1'$, то $0' < 1' < 2' < \ldots < n'$. В этой цепи, очевидно, существует единственный (целый неотрицательный) элемент α_0' такой, что $\alpha_0' \leqslant \lambda < \alpha_0' + 1'$. Пересматривая теперь элементы конечной цепи $\alpha_0', 0' < \alpha_0, 1' < \cdots < \alpha_0, 9' < \alpha_0' + 1'$, найдем среди них единственный α_0, α_1' такой, что

$$(\alpha_0, \alpha_1)' \leqslant \lambda < (\alpha_0, \alpha_1 + 1)'$$

(если $\alpha_1 = 9$, то $(\alpha_0, \alpha_1 + 1)' = \alpha_0' + 1$). Продолжив этот процесс, по индукции получим последовательность цифр $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ такую, что

$$(\alpha_0, \alpha_1 \ldots \alpha_k)' \leqslant \lambda < (\alpha_0, \alpha_1 \ldots \alpha_{k-1} (\alpha_k + 1))'$$

при любом k. Так как к тому же правая часть в этих соотношениях отличается от левой на $(10^{-k})' \to 0$ $(k \to \infty)$, то

$$\lambda = \lim_{k \to \infty} (\alpha_0, \alpha_1 \cdots \alpha_k)'. \tag{5}$$

Итак, каждый положительный элемент $\lambda \in E'$ соответствует некоторому очевидно положительному числу a $(a = \lambda)$. Единственность этого числа вытекает из следующих соображений.

Пусть $0 < a < b$. Найдутся конечная десятичная дробь r, и натуральное l такие, что $0 < a^{(n)} \leqslant a < r \leqslant b^{(l)} \leqslant b$ для всех натуральных n. Поэтому $a' = \lim a^{(n)\prime} \leqslant r' < b^{(l)\prime} \leqslant b'$, т. е. $a' < b'$.

Этим доказано (пока в случае положительных a, a'), что соответствие $a \to a'$ изоморфно по отношению к знаку «$>$». В частности, установлено, что разным положительным a соответствуют разные положительные a'. Таким образом, соответствие $a \to a'$ есть на самом деле взаимно однозначное соответствие $a \rightleftarrows a'$ (или $a \sim a'$) между положительными элементами E и E'.

Отметим, что для положительных a, $b \in E$ имеют место равенства

$$\begin{gathered}
(a^{(n)} + b^{(n)})' = a^{(n)\prime} + b^{(n)\prime}, \\
[a^{(n)} - (b^{(n)} + 10^{-n})]' = a^{(n)\prime} - (b^{(n)\prime} + 10^{-n\prime}) \quad (a > b), \\
(a^{(n)} b^{(n)})^{(n)\prime} = (a^{(n)\prime} b^{(n)\prime})^{(n)\prime}, \\
\left(\frac{a^{(n)}}{b^{(n)} + 10^{-n}}\right)' = \frac{a^{(n)\prime}}{b^{(n)\prime} + 10^{-n\prime}}.
\end{gathered} \tag{6}$$

И так как из того, что последовательность десятичных дробей

$$c_n = \alpha_{0n}, \alpha_{1n}\alpha_{2n} \ldots \quad (n = 1, 2, \ldots)$$

стабилизируется к дроби $c = \gamma_0, \gamma_1\gamma_2 \ldots$ $(c_n \rightrightarrows c)$, следует, что c_n' стабилизируется к c' $\left(c_n' \rightrightarrows c'\right)$, то равенства (6) влекут соответствия (1). Верно также соотношение (2).

Для отрицательных чисел a полагаем $a' = -(-a')$. В результате вместе с соответствием $0 \sim 0'$ получим взаимно однозначное соответствие $a \sim a'$ между действительными числами и всеми элементами E'. Оно, очевидно, изомофно относительно знака «$>$», а также относительно арифметических операций. Не приводя все детали рассуждений, поясняющих это последнее утверждение, ограничимся доказательством равенства $(a+b)' = a' + b'$, когда $a > 0$, $b < 0$, $a > |b|$.

В этом случае

$$(a + b)' = (a - |b|)' = a' - |b'| = a' + b'.$$

Первое равенство в этой цепи верно в силу известных свойств чисел, второе уже доказано для $a > |b|$, третье — в силу того, что $a' - |b'|$ есть такой элемент E', который надо прибавить к $|b'|$, чтобы получить a'. Этот элемент (единственный) есть $a' + (-|b'|) = a' + (-(-b)') = a' + b'$ (см. сноску к свойствам II в § 2.4).

Особое внимание занимает представление чисел точками прямой, являющееся общепринятой удобной геометрической интерпретацией чисел. Остановимся на нем подробнее.

Предупредим читателя, что приводимые ниже рассуждения носят не очень формальный характер, скорее, они представляют собой схему, следуя которой можно провести аккуратные рассуждения.

Будем рассматривать всевозможные отрезки прямых, лежащих в данной плоскости. Среди них выберем один произвольный, о котором будем говорить, что он имеет длину, равную единице. Равновеликие отрезки, совпадающие при наложении, обладают некоторым общим свойством, которое обозначают буквой a (или b, c, ...) и называют *длиной* любого из этих отрезков. Пусть σ и δ — отрезки длины соответственно a и b. Если при наложении их друг на друга σ окажется *существенной* частью δ, т. е. если при этом окажется, что σ есть часть δ и σ не совпадает с δ, то считают, что их длины находятся в отношении $a < b$.

Отрезок, полученный из единичного отрезка делением последнего на q равных частей и взятием геометрической суммы p таких частей, называется *рациональным* (*соизмеримым с единицей*).

Ясно, что длины отрезков удовлетворяют аксиомам I.

По определению, сумма $a+b$ и разность $a-b$ $(a>b)$ суть соответственно длины геометрической суммы и разности отрезков. Легко видеть, что свойства II (за исключением пока II_3, II_4) для длин удовлетворяются.

На рис. 2.1 изображен произвольный угол, на одной стороне которого отложены от вершины последовательно отрезки OA и AC длины 1 и b, а на другой — отрезок OB длины a. Кроме того, проведена прямая CD, параллельная прямой AB. Она отсекает отрезок BD, длину которого, по определению, назовем произведением ab. Это определение корректно, потому что, если бы мы подобную конструкцию создали для другого угла O' (рис. 2.2), то получили бы отрезок $B'D'$, равновеликий отрезку BD.

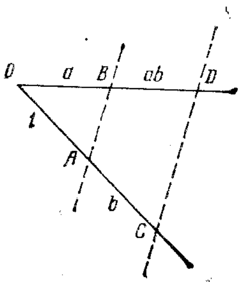

Рис. 2.1.

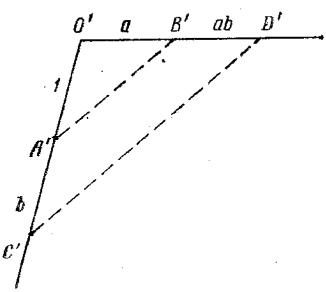

Рис. 2.2.

Ясно, как определить a/b — результат деления a на b. Надо (рис. 2.3) на одной стороне угла отложить последовательно от вершины отрезки длины b и a, а на другой — единичный отрезок, провести CD параллельно AB, и тогда длина AC, по определению, есть a/b. Это определение также корректно, и при этом действие деления оказывается обратным к умножению: $b(a/b)=a$.

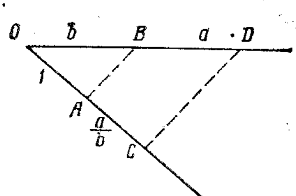

Рис. 2.3.

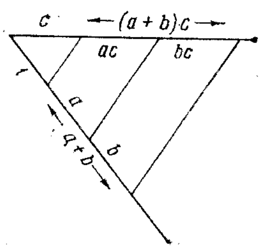

Рис. 2.4.

Легко проверяется геометрически, что свойства III для длин удовлетворяются. Например, дистрибутивный закон III_5 проверяется с помощью рис. 2.4. Подобным образом проверяется, что $(a-b)c=ac-bc$ $(a>b)$.

Рассмотрим теперь прямую с отмеченной на ней точкой 0. Точкам прямой, лежащим правее 0, взаимно однозначно соответствуют длины отрезков, соединяющих эти точки с нулевой точкой. Эти длины будем называть положительными длинами. Вводим формально отрицательную длину $-a$, соответствующую точке прямой, симметричной относительно 0 точке a (т. е. точке, соответствующей длине a). Точке 0 чисто формально приводим в соответствие длину нуль. В результате между точками всей прямой и новыми символами a, b, ..., которые могут теперь быть положительными, отрицательными и нулем, установлено взаимно однозначное соответствие. По известным правилам, которые незачем повторять, для новых символов определяются арифметические операции и знак «$>$». Они удовлетворяют, как это доказывается в курсе элементарной алгебры, свойствам I—III, поскольку положительные a, b, ... им удовлетворяют. На прямой мы можем мысленно отметить рациональные точки $\pm p/q$, соответствующие положительным и отрицательным длинам отрезков, соизмеримых с выбранной единицей. Они сами по себе удовлетворяют свойствам I—II.

Свойства IV, V для новых объектов также удовлетворяются. Свойство V выражает на математическом языке тот факт, что прямую мы мыслим как некоторый непрерывный геометрический образ. Таким образом, снабженные знаком (как указано выше) длины отрезков удовлетворяют свойствам I—V и, следовательно, они изоморфны действительным числам. Это обстоятельство позволяет в практике смешивать понятие длины отрезка и понятие соответствующего этому отрезку в силу указанного изоморфизма числа.

В заключение отметим, что физика доставляет нам много примеров понятий, изоморфных действительным числам; их называют физическими величинами. Температура, масса, скорость, если она направлена вдоль определенной прямой,— это все физические величины. Впрочем, они могут оказаться изоморфными не всем действительным числам, а только принадлежащим некоторому интервалу. Например, в случае массы этим интервалом является $(0, \infty)$.

§ 2.6. Дополнение

Этот параграф содержит доказательства и схемы доказательств отдельных утверждений § 2.4. Мы думаем, что читатель, желающий с ними ознакомиться, легче их воспримет после того, как усвоит следующую далее гл. 3. Это не значит, что § 2.6 базируется на гл. 3, но в идейном отношении излагаемые как тут, так и там вопросы схожи, и в то же время изложение в § 2.6 носит достаточно сжатый характер.

Справедливо свойство:

Пусть для бесконечных дробей $a = \alpha_0, \alpha_1\alpha_2\ldots$, $b = \beta_0, \beta_1\beta_2\ldots$, не имеющих периода 9, верно равенство

$$b^{(n)} = a^{(n)} + \lambda_n, \tag{1}$$

где λ_n стремится к нулю при $n \to \infty$ ($a^{(n)}$, $b^{(n)}$ — срезки a, b). Тогда $a = b$ и, следовательно, $\alpha_k = \beta_k$, $k = 0, 1, 2, \ldots$

Доказательство. Пусть обе десятичные дроби a и b не имеют периода 9. Допустим, что они не равны, для определенности $a < b$. Тогда при некотором натуральном k

$$a = \alpha_0,\alpha_1 \ldots \alpha_{k-1}\alpha_k\alpha_{k+1}\ldots,$$
$$b = \alpha_0,\alpha_1 \ldots \alpha_{k-1}\beta_k\beta_{k+1}\ldots \qquad (\alpha_k < \beta_k),$$

и, кроме того, $\alpha_s < 9$ при некотором $s > k$. Поэтому при любом $n > s$

$$b^{(n)} - a^{(n)} = \alpha_0,\alpha_1\ldots \alpha_{k-1}\beta_k\beta_{k+1}\ldots\beta_n - \alpha_0\alpha_1\ldots\alpha_{k-1}\alpha_k\alpha_{k+1}\ldots\alpha_n \geqslant$$
$$\geqslant \alpha_0,\alpha_1\ldots\alpha_{k-1}\beta_k - \alpha_0,\alpha_1\ldots \alpha_{k-1}\alpha_k\alpha_{k+1}\ldots\alpha_{s-1}(\alpha_s+1) = \delta > 0.$$

Но это невозможно, потому что по условию $b^{(n)} - a^{(n)} = \lambda_n \to 0$ при $n \to \infty$.

Заметим, что равенство

$$c = \gamma_0,\gamma_1\ldots\gamma_k 99\ldots = \gamma_0,\gamma_1\ldots\gamma_{k-1}(\gamma_k+1)000\ldots$$

показывает, что n-е срезки входящих в него десятичных дробей отличаются на величину 10^{-n}, стремящуюся к нулю при $n \to \infty$. Но тогда данное свойство, доказанное уже для десятичных дробей a и b, не имеющих периода 9, верно также, если одна из них или обе имеют 9 своим периодом.

Докажем теперь, что, если $a > b > 0$, то

$$(a-b)+b=a. \tag{2}$$

В самом деле,

$$a^{(n)}-(b^{(n)}+10^{-n}) \rightrightarrows a-b, \qquad (a-b)^{(n)}+b^{(n)} \rightrightarrows (a-b)+b.$$

Поэтому для каждого n найдется такое $s > n$, что

$$(a-b)^{(n)} = [a^{(s)}-(b^{(s)}+10^{-s})]^{(n)} = a^{(n)}-b^{(n)}+\lambda_n, \tag{3}$$

$$[(a-b)+b]^{(n)} = [(a-b)^{(s)}+b^{(s)}]^{(n)} = (a-b)^{(n)}+b^{(n)}+\mu_n,$$

где $\lambda_n \to 0$ и $\mu_n \to 0$ при $n \to \infty$.

Но тогда

$$[(a-b)+b]^{(n)} = (a-b)^{(n)}+b^{(n)}+\mu_n = \\ = a^{(n)}-b^{(n)}+\lambda_n+b^{(n)}+\mu_n = a^{(n)}+\nu_n, \tag{4}$$

где $\nu_n = \lambda_n+\mu_n \to 0$ $(n \to \infty)$.

Из соотношения (4) на основании доказанного свойства следует (2).

Величину (бесконечно малую) $\lambda_n \to 0$ $(n \to \infty)$ принято еще записывать так: $o(1)$ $(n \to \infty)$. Надо иметь в виду, что если наряду с λ_n рассматривается тут же другая бесконечно малая величина, ее обозначают тем же символом $o(1)$.

Покажем, что

$$a+(b+c) = (a+b)+c. \tag{5}$$

В самом деле, при $n \to \infty$

$$[a+(b+c)]^{(n)} = a^{(n)}+(b+c)^{(n)}+o(1) = \\ = a^{(n)}+b^{(n)}+c^{(n)}+o(1) \tag{6}$$

$$[(a+b)+c]^{(n)} = (a+b)^{(n)}+c^{(n)}+o(1) = \\ = a^{(n)}+b^{(n)}+c^{(n)}+o(1). \tag{7}$$

Поэтому на основании доказанного свойства имеет место (5).

Свойства III_1—III_5 суть непосредственные следствия нижеследующих равенств:

$$(a^{(n)}b^{(n)})^{(n)} = (b^{(n)}a^{(n)})^{(n)}, \tag{8}$$

$$((ab)^{(n)}c^{(n)})^{(n)} = (ab)^{(n)}c^{(n)}+o(1) = a^{(n)}b^{(n)}c^{(n)}+o(1) \quad (n \to \infty), \tag{9}$$

$$(a^{(n)}(bc)^{(n)})^{(n)} = a^{(n)}b^{(n)}c^{(n)}+o(1) \quad (n \to \infty), \tag{10}$$

$$(a^{(n)}\cdot(1)^{(n)})^{(n)} = a^{(n)}+o(1) \quad (n \to \infty), \tag{11}$$

$$\left(\left(\frac{1}{a}\right)^{(n)}a^{(n)}\right)^{(n)} = \left(\frac{1}{a}\right)^{(n)}a^{(n)}+o(1) = \frac{1}{a^{(n)}+10^{-n}}a^{(n)}+o(1) = 1+o(1), \tag{12}$$

$$((a+b)^{(n)}c^{(n)})^{(n)} = (a+b)^{(n)}c^{(n)}+o(1) = a^{(n)}c^{(n)}+b^{(n)}c^{(n)}+o(1), \tag{13}$$

$$(ac)^{(n)}+(bc)^{(n)} = a^{(n)}c^{(n)}+b^{(n)}c^{(n)}+o(1) \quad (n \to \infty). \tag{14}$$

Свойство (8) очевидно. Для примера поясним доказательство свойства (9). Первое его равенство верно потому, что снятие внешнего значка n влечет увеличение первого члена (9) на величину (конечную десятичную дробь), не превышающую $10^{-n} = o(1)$, Далее, ab есть число, к которому стабилизируется

$$(a^{(n)}b^{(n)})^{(n)} \rightrightarrows ab.$$

Но тогда для любого n найдется зависящее от него $s \geqslant n$ такое, что (μ_n, $\nu_n = o(1)$, $n \to \infty$)

$$(ab)^{(n)} = (a^{(s)}b^{(s)})^{(n)} = \{(a^{(n)} + \mu_n)(b^{(n)} + \nu_n)\}^{(n)} =$$
$$= \{a^{(n)}b^{(n)} + (a^{(n)}\nu_n + b^{(n)}\mu_n + \mu_n\nu_n)\}^{(n)} = \{a^{(n)}b^{(n)} + o(1)\}^{(n)} =$$
$$= (a^{(n)}b^{(n)})^{(n)} + o(1) = a^{(n)}b^{(n)} + o(1) \quad (n \to \infty).$$

В третьем равенстве надо принять во внимание, что $a^{(n)} \leqslant a$ и $b^{(n)} \leqslant b$, поэтому $a^{(n)}\nu_n = o(1)$, $b^{(n)}\mu_n = o(1)$, кроме того, $o(1) + o(1) = o(1)$. Из (9) — (14) следует соответственно $\text{III}_1 - \text{III}_5$ в силу доказанного выше утверждения (2). Проверку того факта, что действия над бесконечными дробями согласованы с соответствующими действиями над рациональными дробями, предоставляем читателю.

В случае, например, сложения требуется проверить, что бесконечное десятичное разложение суммы

$$\frac{p_1}{q_1} + \frac{p_2}{q_2} = \frac{p_1q_2 + p_2q_1}{q_1q_2}$$

в точности равно сумме бесконечных десятичных разложений слагаемых.

§ 2.7. Неравенства для абсолютных величин

Неравенство

$$|a| < \varepsilon \tag{1}$$

эквивалентно двум неравенствам

$$-\varepsilon < a < \varepsilon. \tag{1'}$$

Отсюда неравенство

$$|a - b| < \varepsilon \tag{2}$$

эквивалентно неравенствам

$$b - \varepsilon < a < b + \varepsilon. \tag{2'}$$

Аналогично, неравенство

$$|a - b| \leqslant \varepsilon \tag{3}$$

эквивалентно неравенствам $b - \varepsilon \leqslant a \leqslant b + \varepsilon$.

Справедливы также неравенства

$$|a + b| \leqslant |a| + |b|, \tag{4}$$
$$|a - b| \geqslant |\,|a| - |b|\,|. \tag{5}$$

Неравенство (4) можно получить, рассмотрев отдельно четыре случая: 1) a, $b \geqslant 0$, 2) a, $b \leqslant 0$, 3) $a \leqslant 0 \leqslant b$, 4) $b \leqslant 0 \leqslant a$.

Например, в случае 2)

$$a + b \leqslant b \leqslant 0, \quad |a + b| = -(a + b) = -a - b = |a| + |b|,$$

а в случае 3), если допустить что $|b| \geqslant |a|$,

$$|a+b| = b + a \leqslant |a| + |b|.$$

Случай 3) при допущении $|b| \leqslant |a|$ читатель разберет сам, так же как случай 1). Случай 4) сводится к 3).

Далее, в силу (4)

$$|a| \leqslant |b| + |a-b|, \quad |b| \leqslant |a| + |a-b|,$$

т. е.

$$|a| - |a-b| \leqslant |b| \leqslant |a| + |a-b|,$$

но тогда верно (5).

§ 2.8. Точные верхняя и нижняя грани множества

Множество E действительных чисел x называется *ограниченным*, если существует положительное число M такое, что выполняется неравенство $|x| < M$ для всех $x \in E$ или, что все равно, $-M < x < M$.

Если E не удовлетворяет указанному свойству, т. е. каково бы ни было положительное число M (как бы оно ни было велико), найдется такое $x_0 \in E$, что $|x_0| > M$, то E называется *неограниченным*.

Множество E называется *ограниченным сверху* (соответственно *снизу*), если существует число K (соответственно k) такое, что $x \leqslant K$ (соответственно $k \leqslant x$) для всех $x \in E$. Число K (соответственно k) называется *верхней* (*нижней*) *гранью* E.

Очевидно, что *ограниченное множество является одновременно ограниченным сверху и снизу*. Множество R всех действительных чисел, очевидно, неограничено как снизу, так и сверху; множество R_+ положительных чисел ограничено снизу, но не ограничено сверху; отрезок $[a, b]$ и интервал (a, b) при конечных a и b являются примерами ограниченных множеств.

Число M (соответственно m) называется *точной верхней* (соответственно *нижней*) *гранью множества чисел* A, если выполняются следующие свойства:

1) $x \leqslant M$ (соответственно $x \geqslant m$) для всех $x \in A$.

2) Как бы ни было мало́ $\varepsilon > 0$, найдется такое число $x_0 \in A$, что $M - \varepsilon < x_0$ ($x_0 < m + \varepsilon$).

Точная верхняя грань A обозначается так:

$$M = \sup A = \sup_{x \in A} x,$$

а точная нижняя грань так:

$$m = \inf A = \inf_{x \in A} x,$$

(sup, inf — сокращения латинских слов supremum — наивысший, infimum — наинизший). В следующем параграфе будет доказано существование точной верхней грани у ограниченного сверху множества, так же как точной нижней грани у ограниченного снизу множества. Единственность их очевидна.

Для неограниченного сверху множества A будем писать:

$$\sup A = \sup_{x\in A} x = +\infty,$$

а для неограниченного снизу:

$$\inf A = \inf_{x\in A} x = -\infty;$$

будем называть в этом случае $+\infty$, $-\infty$ соответственно точной верхней и точной нижней гранью A.

Отрезок $[a, b]$ и интеграл (a, b), очевидно, имеют в качестве своей точной верхней грани точку (число) b. В случае отрезка точная верхняя грань (число b) принадлежит ему, а в случае интервала — не принадлежит. Множество $(-\infty, 0)$, очевидно, имеет в качестве своей точной верхней грани число 0 и в качестве нижней символ $-\infty$.

Отметим очевидное равенство

$$\inf_{x\in A} x = -\sup_{x\in A}(-x).$$

Выше мы определили понятие точной верхней грани отдельно для ограниченного и для неограниченного сверху множества. Ниже дается общее определение, годное для обоих случаев.

Число M (конечное или $+\infty$) называется *точной верхней гранью множества действительных чисел* A, если выполняются следующие свойства:

1) $x \leqslant M$ для всех $x \in A$;

2) каково бы ни было конечное число $M' < M$, найдется такое число $x_0 \in A$, что $M' < x_0 \leqslant M$.

Подобное определение можно дать и для точной нижней грани неограниченного снизу множества чисел. Теперь m может быть либо конечным числом, либо $-\infty$.

Возникает вопрос, имеет ли произвольное множество действительных чисел точную верхнюю (нижнюю) грань. Для неограниченного сверху (снизу) множества, как мы видели, имеет — по определению. Она равна $+\infty$ (соответственно $-\infty$). Для ограниченного множества тоже имеет. Это будет доказано далее в § 3.6.

Глава 3

ПРЕДЕЛ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

§ 3.1. Понятие предела последовательности

Метод пределов есть основной метод, на котором базируется математический анализ.

Пусть каждому натуральному числу $n = 1, 2, \ldots$, приведено в соответствие в силу некоторого закона число *) x_n. Тогда говорят, что этим определена *последовательность чисел* $x_1, x_2, x_3, \ldots$ или, короче, *последовательность* $\{x_n\}$.

Отдельные снабженные номерами n (*индексами*) числа x_n называют *элементами последовательности* $\{x_n\}$. Они могут быть действительными или комплексными. Мы здесь рассматриваем случай, когда они действительны.

Для разных n_1, n_2 отдельные элементы x_{n_1}, x_{n_2} последовательности могут оказаться равными как числа $\left(x_{n_1} = x_{n_2}\right)$. Однако x_{n_1} и x_{n_2} рассматриваются как разные элементы последовательности.

Ниже приводятся примеры последовательностей:

1) $\{n\} = \{1, 2, 3, \ldots\}$,

2) $\left\{\frac{1}{n}\right\} = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots\right\}$,

3) $\left\{\frac{(-1)^n}{n}\right\} = \left\{-1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, \ldots\right\}$,

4) $\left\{\frac{n-1}{n}\right\} = \left\{0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \ldots\right\}$,

5) $\left\{1 + \frac{1}{10^n}\right\} = \{1{,}1;\ 1{,}01;\ 1{,}001;\ \ldots\}$,

6) $\{(-1)^n\} = \{-1, +1, -1, \ldots\}$,

7) $\{1;\ 2;\ \ldots;\ 10;\ 0{,}1;\ 0{,}01;\ 0{,}001;\ \ldots\}$.

В случае 7) не видно, как написать общую формулу для произвольного элемента x_n, однако закон образования чисел x_n ясен:

$$x_n = \begin{cases} n & (n = 1, \ldots, 10), \\ \dfrac{1}{10^{n-10}} & (n = 11, 12, \ldots). \end{cases}$$

---

*) То есть x_n — функция на множестве натуральных чисел.

Мы еще будем употреблять следующую терминологию: *переменная x_n пробегает последовательность $\{x_n\}$ или последовательность значений x_n.*

Переменную x_n, все значения которой равны одному и тому же числу a, называют *постоянной* и обычно обозначают просто через a.

По определению, число a называется *пределом последовательности* $\{x_n\}$, если для любого положительного числа ε найдется (зависящее от него) натуральное число N такое, что для всех натуральных $n > N$ выполняется неравенство

$$|x_n - a| < \varepsilon \quad (n > N).$$

При этом мы будем писать

$$\lim x_n = \lim_{n\to\infty} x_n = a$$

или

$$x_n \to a$$

и говорить, что *переменная x_n стремится к a* или что *последовательность $\{x_n\}$ стремится (сходится)* к числу a.

Покажем, что переменная 2) имеет предел, равный нулю. В самом деле, зададим ε и составим неравенство

$$|x_n| = \frac{1}{n} < \varepsilon.$$

Оно верно для всех $n > \frac{1}{\varepsilon}$ или для всех $n > N$, где N есть какое-либо натуральное число $N > \frac{1}{\varepsilon}$. Таким образом, для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое натуральное N, что $|x_n| < \varepsilon$ для всех $n > N$.

В точности также доказывается, что и последовательность 3) имеет предел 0. Переменная 4) стремится к 1, потому что в этом случае

$$|1 - x_n| = \left|1 - \frac{n-1}{n}\right| = \frac{1}{n} < \varepsilon$$

для всех $n > N$, где N — натуральное число, большее, чем $1/\varepsilon$.

Нетрудно показать, что и переменная 5) стремится к 1. Переменная 7), очевидно, стремится к нулю. Не имеет значения тот факт, что она сначала имеет тенденцию возрастать: в этом вопросе важно, какие значения она имеет для достаточно больших n.

Если x_n удовлетворяет неравенству

$$|a - x_n| < \varepsilon,$$

то это все равно, что x_n удовлетворяет неравенствам

$$a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon$$

или, употребляя геометрический язык, что точка (число) x_n принадлежит интервалу $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$. Поэтому, употребляя геометрический язык, можно дать такое определение предела: *переменная x_n имеет пределом число (точку) a, если для любого $\varepsilon>0$ найдется такое натуральное N, что для всех $n>N$ точки $x_n \in (a-\varepsilon, a+\varepsilon)$.*

Произвольный интервал (c, d), содержащий в себе точку a, т. е. такой, что $c<a<d$, называется *окрестностью точки a*. Очевидно, какова бы ни была окрестность (c, d) точки a, найдется такое $\varepsilon>0$, что интервал $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ содержится в (c, d), т. е. $(a-\varepsilon, a+\varepsilon) \subset (c, d)$.

Поэтому тот факт, что $x_n \to a$, можно выразить еще и так: какова бы ни была окрестность (c, d) точки a, все точки x_n, начиная с некоторого номера n, должны попасть в эту окрестность, т. е. должно существовать натуральное N такое, что $x_n \in (c, d)$ $(n>N)$. Что касается точек $x_1, \ldots, x_N$ с индексами $n \leqslant N$, то они могут принадлежать или не принадлежать (c, d). Таким образом, если вне (c, d) имеются точки x_n, то их конечное число.

С другой стороны, если известно, что вне (c, d) имеется только конечное число точек $x_{n_1}, x_{n_2}, \ldots, x_{n_s}$, то, положив

$$N=\max\{n_1, n_2, \ldots, n_s\},$$

мы можем сказать, что для всех $n>N$ точки $x_n \in (c, d)$. Поэтому можно дать еще такое определение предела: *переменная x_n имеет своим пределом a, если вне любой окрестности точки a имеется конечное или пустое множество точек x_n.*

Переменная 6) ни к какому пределу не стремится, потому что если предположить, что эта переменная имеет предел, равный a, то любая как угодно малая по длине окрестность точки a должна была бы содержать все элементы x_n, за исключением конечного числа их. Но вне интервала длины 1/2, как бы он ни был расположен на действительной оси, имеется, очевидно, бесконечное число элементов x_n нашей последовательности.

Нетрудно видеть, что и последовательность 1) не стремится ни к какому пределу. Впрочем, в дальнейшем мы будем говорить, что она стремится к бесконечности, вкладывая в это понятие несколько иной смысл.

Легко видеть, что если переменная x_n имеет предел, то он единственный. Ведь если бы она имела два предела, a и b, где $a<b$, то интервалы $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ и $(b-\varepsilon, b+\varepsilon)$, где $\varepsilon=(b-a)/3$, должны были бы содержать каждый все точки последовательности $\{x_n\}$, за исключением конечного их числа. Но это, очевидно, невозможно, потому что эти интервалы не имеют общих точек (не пересекаются).

Пример 6) показывает, что для разных n_1, n_2 отдельные значения последовательности $\{x_n\}$ могут быть равными: $x_{n_1}=x_{n_2}$. Однако x_{n_1} и x_{n_2} рассматриваются как *разные элементы* последовательности.

Легко видеть, что *если две последовательности* $\{x_n\}$, $\{x'_n\}$ *имеют только конечное число различных соответствующих элементов (имеющих одинаковый индекс n), то они одновременно либо не имеют пределов, либо имеют пределы и притом равные.*

Докажем несколько теорем, выражающих свойства переменных, стремящихся к пределам.

Теорема 1. *Если переменная x_n имеет предел, то она ограничена.*

Доказательство. Пусть $x_n \to a$. Тогда для $\varepsilon = 1$ должно найтись натуральное число N такое, что

$$1 > |x_n - a| \text{ для } n > N.$$

Отсюда $1 > |x_n - a| \geqslant |x_n| - |a|$ или

$$|x_n| < |a| + 1 \text{ для } n > N.$$

Положим $M = \max\{|a| + 1, |x_1|, \ldots, |x_N|\}$. Тогда очевидно, что

$$|x_n| \leqslant M \quad (n = 1, 2, \ldots),$$

т. е. переменная x_n ограничена.

Теорема 2. *Если переменная x_n имеет не равный нулю предел a, то найдется такое N, что*

$$|x_n| > \frac{|a|}{2} \quad \textit{для } n > N.$$

Больше того, для указанных n, если $a > 0$, то $x_n > a/2$, если же $a < 0$, то $x_n < a/2$. Таким образом, начиная с некоторого номера, x_n сохраняет знак a.

Доказательство. Пусть $x_n \to a$. *Тогда для* $\varepsilon = |a|/2$ должно найтись натуральное N такое, что

$$\frac{|a|}{2} > |a - x_n| \geqslant |a| - |x_n| \quad (n > N),$$

откуда $|x_n| > |a| - \frac{|a|}{2} = \frac{|a|}{2}$, и первое утверждение теоремы доказано. С другой стороны, неравенство $|a|/2 > |a - x_n|$ эквивалентно следующим двум:

$$a - \frac{|a|}{2} < x_n < a + \frac{|a|}{2} \quad (n > N).$$

Тогда, если $a > 0$, то

$$\frac{a}{2} = a - \frac{|a|}{2} < x_n \quad (n > N),$$

а если $a<0$, то

$$x_n < a + \frac{|a|}{2} = a - \frac{a}{2} = \frac{a}{2} \quad (n > N),$$

и этим доказано второе утверждение теоремы.

Теорема 3. *Если* $x_n \to a$, $y_n \to b$ *и* $x_n \leqslant y_n$ *для всех* $n = 1, 2, \ldots$, *то* $a \leqslant b$.

Доказательство. Допустим, что $b<a$. Зададим $\varepsilon < \frac{a-b}{2}$ и подберем натуральные N_1 и N_2 так, чтобы

$$a - \varepsilon < x_n \ (n > N_1), \ y_n < b + \varepsilon \ (n > N_2),$$

что возможно, потому что $x_n \to a$, а $y_n \to b$.

Если $N = \max\{N_1, N_2\}$, то, очевидно, $y_n < b+\varepsilon < a-\varepsilon < x_n$ $(n > N)$, и мы пришли к противоречию, так как по условию $x_n \leqslant \leqslant y_n$ для всех n.

Если бы в условии теоремы 3 было бы $x_n < y_n$ (вместо $x_n \leqslant \leqslant y_n$), то все равно можно утверждать только, что $a \leqslant b$ (пример: $x_n = 1 - 3^{-n}$, $y_n = 1 - 2^{-n}$).

Теорема 4. *Если переменные x_n и y_n стремятся к одному и тому же пределу a и $x_n \leqslant z_n \leqslant y_n$ $(n = 1, 2, \ldots)$, то переменная z_n также стремится к a.*

Доказательство. Задав $\varepsilon > 0$, можно найти N_1 и N_2 такие, что

$$a - \varepsilon < x_n \ (n > N_1), \quad y_n < a + \varepsilon \ (n > N_2),$$

откуда для $n > N = \max\{N_1, N_2\}$

$$a - \varepsilon < x_n \leqslant z_n \leqslant y_n < a + \varepsilon,$$

и

$$|z_n - a| < \varepsilon \ (n > N),$$

что и требовалось доказать.

Теорема 5. *Если* $x_n \to a$, *то* $|x_n| \to |a|$.

Доказательство теоремы следует из неравенства

$$||x_n| - |a|| \leqslant |x_n - a|.$$

§ 3.2. Арифметические действия с пределами

Пусть x_n и y_n обозначают переменные, пробегающие соответственно последовательности $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$. По определению, *сумма* $x_n + y_n$, *разность* $x_n - y_n$, *произведение* $x_n y_n$ *и частное* x_n/y_n *суть переменные*, пробегающие соответственно последовательности $\{x_n + y_n\}$, $\{x_n - y_n\}$, $\{x_n y_n\}$, $\{x_n/y_n\}$. В случае частного предполагается, что $y_n \neq 0$ для всех $n = 1, 2, \ldots$.

Если $x_n = c$ для $n = 1, 2, \ldots$, то в этом случае пишут $c \pm y_n$, cy_n, c/y_n вместо $x_n \pm y_n$, $x_n y_n$, x_n/y_n.

Справедливы следующие утверждения:

$$\lim (x_n \pm y_n) = \lim x_n \pm \lim y_n, \tag{1}$$

$$\lim (x_n y_n) = \lim x_n \lim y_n, \tag{2}$$

$$\lim \frac{x_n}{y_n} = \frac{\lim x_n}{\lim y_n}, \text{ если } \lim y_n \neq 0. \tag{3}$$

Эти утверждения надо понимать в том смысле, что *если существуют пределы x_n и y_n, то существуют также и пределы их суммы, разности, произведения и частного (с указанной оговоркой) и выполняются равенства* (1)—(3).

Доказательство. Пусть $x_n \to a$ и $y_n \to b$. Зададим $\varepsilon > 0$ и подберем N так, чтобы

$$|x_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}, \ |y_n - b| < \frac{\varepsilon}{2} \quad (n > N).$$

Тогда

$$|(x_n \pm y_n) - (a \pm b)| \leqslant |x_n - a| + |y_n - b| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \ (n > N),$$

и мы доказали (1).

Чтобы доказать (2), заметим, что

$$|x_n y_n - ab| = |x_n y_n - a y_n + a y_n - ab| \leqslant$$

$$\leqslant |x_n y_n - a y_n| + |a y_n - ab| \leqslant |y_n|\,|x_n - a| + |a|\,|y_n - b|. \tag{4}$$

Так как y_n имеет предел, то (по теореме 1 предыдущего параграфа) существует положительное число M такое, что

$$|y_n| < M \quad (n = 1, 2, \ldots). \tag{5}$$

При этом можно считать, что M выбрано так, чтобы выполнялось также неравенство

$$|a| < M. \tag{6}$$

Подберем натуральное N так, чтобы

$$|x_n - a| < \frac{\varepsilon}{2M}, \ |y_n - b| < \frac{\varepsilon}{2M} \quad (n > N). \tag{7}$$

Тогда из (4) — (7) следует, что

$$|x_n y_n - ab| < \frac{M\varepsilon}{2M} + \frac{M\varepsilon}{2M} = \varepsilon \quad (n > N).$$

Этим доказано равенство (2).

Пусть теперь к условию, что $x_n \to a$ и $y_n \to b$, добавляется условие, что $b \neq 0$. Тогда

$$\left|\frac{x_n}{y_n} - \frac{a}{b}\right| = \left|\frac{x_n b - y_n a}{y_n b}\right| = \frac{|(x_n - a)b + (b - y_n)a|}{|y_n|\,|b|} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{|x_n - a|}{|y_n|} + \frac{|b - y_n|\,|a|}{|y_n|\,|b|}. \tag{8}$$

Теперь уже удобно использовать теорему 2 предыдущего параграфа, в силу которой

$$|y_n| > \frac{|b|}{2} \quad (n > N_1) \tag{9}$$

для достаточно большого N_1. Зададим $\varepsilon > 0$ и подберем N_2 и N_3 такие, чтобы

$$|x_n - a| < \frac{\varepsilon |b|}{4} \quad (n > N_2), \tag{10}$$

$$|a| |y_n - b| < \frac{\varepsilon b^2}{4} \quad (n > N_3). \tag{11}$$

Тогда, положив $N = \max\{N_1, N_2, N_3\}$, будем в силу (8)—(11) иметь

$$\left| \frac{x_n}{y_n} - \frac{a}{b} \right| < \frac{\varepsilon |b|}{4} \frac{2}{|b|} + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon \quad (n > N),$$

что доказывает равенство (3).

Заметим, что пределы переменных, стоящие в левых частях равенств (1)—(3), могут существовать без того, чтобы существовали отдельно пределы x_n и y_n. Например, если $x_n = y_n = n$, то x_n и y_n не имеют (конечных) пределов, в то время как $\lim (x_n - y_n) = 0$, $\lim x_n/y_n = 1$.

Теоремы о пределах суммы, разности, произведения и частного во многих случаях дают возможность узнать, имеет ли переменная предел и чему он равен, если она есть результат конечного числа арифметических действий над несколькими другими переменными, существование и величина пределов которых известны.

Однако часто встречаются случаи, выходящие за границы применимости доказанных теорем, и здесь остается большое поле для инициативы математика.

§ 3.3. Бесконечно малая и бесконечно большая величины

Переменная α_n, имеющая предел, равный нулю, называется *бесконечно малой величиной* или, короче *бесконечно малой*.

Таким образом, переменная α_n есть бесконечно малая, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется N такое, что $|\alpha_n| < \varepsilon$ $(n > N)$.

Нетрудно видеть, что *для того, чтобы переменная x_n имела предел a, необходимо и достаточно, чтобы $x_n = a + \alpha_n$, где α_n есть бесконечно малая.*

Переменная β_n называется *бесконечно большой величиной* или просто *бесконечно большой*, если для любого $M > 0$ найдется такое N, что $|\beta_n| > M$ $(n > N)$. При этом пишут

$$\lim \beta_n = \infty \text{ или } \beta_n \to \infty, \tag{1}$$

и говорят, что β_n *стремится к бесконечности*. Такая терминология считается удобной, несмотря на то, что знак ∞ не обозначает никакого числа и *бесконечно большая заведомо ни к какому конечному пределу (числу) не стремится.*

Если бесконечно большая β_n начиная с некоторого N принимает только положительные значения или только отрицательные значения, то пишут

$$\lim \beta_n = +\infty \text{ или } \beta_n \to +\infty, \tag{2}$$

соответственно

$$\lim \beta_n = -\infty \text{ или } \beta_n \to -\infty. \tag{3}$$

Таким образом, из (2), так же как и из (3), следует (1). Пример переменной $\{(-1)^n n\}$ показывает, что может иметь место соотношение (1), в то время как не имеет места ни (2) ни (3).

Отметим следующие очевидные свойства:

1. *Если переменная x_n ограничена, а y_n — бесконечно большая, то* $x_n/y_n \to 0$.

2. *Если абсолютная величина x_n ограничена снизу положительным числом, а y_n — неравная нулю бесконечно малая, то* $x_n/y_n \to \infty$.

Докажем только второе свойство.

Дано, что для некоторого числа $a > 0$ имеет место неравенство $|x_n| > a$, $n = 1, 2, \ldots$ и для всякого $\varepsilon > 0$ существует N такое, что

$$|y_n| < \varepsilon \quad (n > N). \tag{4}$$

Тогда

$$\left|\frac{x_n}{y_n}\right| > \frac{a}{\varepsilon} = M \quad (n > N).$$

Зададим произвольное положительное число M и подберем по нему ε так, чтобы $M = a/\varepsilon$, а по ε подберем такое N, чтобы имело место свойство (4). Тогда

$$\left|\frac{x_n}{y_n}\right| > M \quad (n > N),$$

что и требовалось доказать.

Из высказанных двух утверждений получаются следующие следствия:

$$\lim_{y_n \to \infty} \frac{c}{y_n} = 0, \quad \lim_{y_n \to 0} \frac{c}{y_n} = \infty \quad (c \neq 0).$$

Множества (M, ∞), $(-\infty, M)$, $\{x : |x| > M\}$, где M — произвольное число, называются соответственно *окрестностями «точек»* $-\infty$, $+\infty$, ∞.

Пусть $a \geqslant 0$ и k — натуральное число. Под выражением $\sqrt[k]{a}$ мы будем понимать, если это не будет оговорено особо *), арифметическое значение корня k-й степени из a, т. е. неотрицательное число, k-я степень которого равна a. Оно существует и единственно. Это нам будет удобно доказать позже (в конце § 4.5). Но уже сейчас мы будем этим фактом пользоваться. Так поступают в элементарной математике — не обосновывают логически существование корней, но доказывают их свойства **).

Примеры.

1. $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[k]{n} = \infty$ $(k = 1, 2, 3 \ldots)$, потому что неравенства $\sqrt[k]{n} > N$ и $n > N^k$, где $N > 0$, вытекают одно из другого, и поэтому для любого N можно указать такое n_0 (именно, $n_0 > N^k$), что для всех $n > n_0$ будет $\sqrt[k]{n} > N$.

2. Однако $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$. Действительно, $\sqrt[n]{n} = 1 + \varepsilon_n$, где $\varepsilon_n > 0$. Поэтому ***) $n = (1+\varepsilon_n)^n > 1 + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}\varepsilon_n^2$, откуда $\varepsilon_n^2 < \frac{2}{n-1}$ и (см. пример 1) $\varepsilon_n < \sqrt{2}/\sqrt{n-1} \to 0$ $(n\to\infty)$.

3. При $a > 1$ и натуральном k $\lim\limits_{n\to\infty}(n^k/a^n) = 0$, потому что, если ли положить $a = 1+\varepsilon$, то $\varepsilon > 0$ и при $n > k$

$$\frac{n^k}{a^n} = \frac{n^k}{(1+\varepsilon)^n} < \frac{n^k}{C_n^{k+1}\varepsilon^{k+1}} = \frac{(k+1)!}{\varepsilon^{k+1}}\,\frac{n^k}{n(n-1)\ldots(n-k)} =$$

$$= \frac{(k+1)!}{\varepsilon^{k+1}}\,\frac{1}{\left(1-\frac{1}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{k}{n}\right)}\,\frac{1}{n} \to 0 \quad (n\to\infty).$$

§ 3.4. Существование предела у монотонной ограниченной последовательности

Не всякая переменная имеет предел. Часто бывает важно знать, существует ли у данной переменной предел? Следующая теорема дает очень простой признак существования предела переменной.

Теорема 1. *Пусть переменная x_n $(n = 1, 2, \ldots)$ не убывает (не возрастает), т. е. удовлетворяет условию $x_n \leqslant x_{n+1}$ (соответственно $x_n \geqslant x_{n+1}$) для любого $n = 1, 2, \ldots$ Если она ограничена сверху (снизу) числом B (соответственно A), то существует предел $\lim x_n$, равный некоторому числу M (соответственно m), удовлетворяющему неравенству $M \leqslant B$ (соответственно $A \leqslant m$). Если же она не ограничена сверху (снизу), то $\lim x_n = +\infty$ ($\lim x_n = -\infty$).*

*) При $k > 2$ есть и комплексные корни k-й степени из a.

**) Имеются в виду свойства, перечисленные в § 4.6 (до § 4.6 (1)).

***) Мы здесь воспользовались формулой Ньютона. Ее элементарный вывод теперь не входит в нашу школьную программу, но его можно найти во всех старых учебниках алгебры. Этот вывод, основанный на понятии производной от x^n, см. в § 5.9, пример 1.

Доказательство. Пусть переменная x_n ограничена сверху числом B и не убывает.

Если $x_1 > 0$, то и $x_n > 0$ для $n = 1, 2, \ldots$. В этом случае теорема уже была доказана (см. § 2.4, свойство V). Ее утверждение было выбрано в качестве одного из основных свойств действительных чисел. При аксиоматическом подходе это утверждение может быть принято как аксиома V действительного числа наряду с аксиомами I—IV (см. конец § 2.1).

Пусть теперь $x_1 \leqslant 0$ и $c > |x_1|$. Переменная $y_n = x_n + c$ ($n = 1, 2, \ldots$) очевидно принимает положительные значения ($y_n > 0$), не убывает ($y_n \leqslant y_{n+1}$) и ограничена сверху числом $B + c$ ($y_n \leqslant B + c$). Поэтому на основании уже доказанного существует предел

$$\lim y_n = y_0 \leqslant B + c.$$

Но тогда существует также предел

$$M = \lim x_n = \lim (y_n - c) = y_0 - c \leqslant B.$$

Пусть теперь неубывающая переменная x_n не ограничена сверху. Тогда, как бы ни было велико положительное число N, найдется такое n_0, что $N < x_{n_0}$. Но в силу того, что x_n не убывает,

$$x_{n_0} \leqslant x_n \text{ для } n > n_0.$$

Таким образом, каково бы ни было положительное число N, найдется такое n_0, что

$$N < x_n \text{ для } n > n_0,$$

а это и значит, что $\lim x_n = +\infty$.

Для невозрастающей переменной x_n теорема доказывается аналогично. Но можно свести вопрос к уже доказанному. Так как x_n не возрастает и ограничена снизу, то $-x_n$ не убывает и ограничена сверху числом $-A$, поэтому существует $\lim (-x_n) \leqslant -A$, а с ним и предел $\lim x_n$, равный

$$m = \lim x_n = -\lim (-x_n) \geqslant A.$$

Пример 1. Переменная q^n ($n = 1, 2, \ldots$), где $0 < q < 1$, удовлетворяет условию $q^{n+1} < q^n$, т. е. она монотонно убывает, кроме того, она ограничена снизу, потому что $0 < q^n$ для любого n. Поэтому согласно теореме 1 существует предел $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = A$.

Очевидно, что q^{n+1} должна иметь тот же предел A, но

$$\lim q^{n+1} = q \lim q^n = qA \quad \text{и} \quad A = qA.$$

Так как $q \neq 1$, то это может быть лишь если $A = 0$. Итак,

$$\lim_{n\to\infty} q^n = 0 \quad (0 < q < 1).$$

Отсюда следует, что для $a > 1$

$$\lim_{n\to\infty} a^n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{(1/a)^n} = +\infty.$$

Пример 2. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a^n}{n!} = 0$.

В силу равенства $|a^n/n!| = |a|^n/n!$ достаточно рассмотреть случай $a > 0$. Пусть m — натуральное число такое, что $m+1 > a$. Тогда (см. пример 1)

$$\frac{a^n}{n!} < \frac{a^m}{m!}\left(\frac{a}{m+1}\right)^{n-m} \to 0 \quad (n\to\infty).$$

§ 3.5. Число e

Рассмотрим переменную

$$\alpha(n) = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \quad (n = 1, 2, \ldots).$$

Имеем

$$\alpha(n) = 1 + n\frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}\frac{1}{n^2} + \ldots =$$

$$= 1 + 1 + \frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right) + \ldots$$

и, аналогично,

$$\alpha(n+1) = 1 + 1 + \frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right) + \frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right) + \ldots$$

Члены $\alpha(n)$ меньше соответствующих членов $\alpha(n+1)$ и, кроме того, $\alpha(n+1)$ имеет на один (последний) положительный член больше, чем $\alpha(n)$. Поэтому $\alpha(n) < \alpha(n+1)$ $(n = 1, 2, \ldots)$ и переменная $\alpha(n)$ монотонно возрастает.

Далее,

$$\alpha(n) = 2 + \frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right) + \ldots <$$

$$< 2 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{1}{n!} < 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{2^{n-1}} < 2 + 1 = 3.$$

Это показывает, что переменная $\alpha(n)$ ограничена сверху.

Таким образом, переменная $\alpha(n)$ монотонно возрастает и ограничена сверху. По теореме 1 она имеет предел, который не превышает 3.

Этот предел — вполне определенное число, которое называют *числом e*. Таким образом,

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e. \tag{1}$$

Число e имеет большое значение в математическом анализе. Мы убедимся в этом скоро. В известном смысле оно является естественным основанием для логарифмов. Число e называется еще *неперовым числом* по имени шотландского математика Д. Непера (1550—1617). Это — иррациональное число. Ниже приводится его значение с первыми шестью точными десятичными знаками:

$$e = 2{,}718281\ldots$$

В § 5.10 показано, как вычислить число e с наперед заданной точностью.

В дальнейшем, когда будет введено понятие предела функции, мы увидим, что указанный предел существует и равен e, когда n стремится к бесконечности любого знака, изменяясь непрерывно.

§ 3.6. Леммы о вложенных отрезках, существовании точных граней множества и сечения во множестве действительных чисел

Лемма 1. *Пусть задана последовательность отрезков (множеств чисел x, для которых $a_n \leqslant x \leqslant b_n$)*

$$\sigma_n = [a_n,\ b_n] \qquad (n = 1,\ 2, \ldots),$$

вложенных друг в друга, т. е. таких, что $\sigma_{n+1} \subset \sigma_n$ $(n = 1, 2, \ldots)$, с длинами, стремящимися к нулю:

$$d_n = b_n - a_n \to 0 \qquad (n \to \infty).$$

Тогда существует, и притом единственная, точка (число), одновременно принадлежащая всем отрезкам σ_n.

Доказательство. Очевидно, что $a_1 \leqslant a_2 \leqslant \ldots \leqslant b_m$ при любом заданном m. Это показывает, что числа a_n не убывают и ограничены сверху числом b_m при любом m, и согласно теореме 1 § 3.4 существует число c, к которому стремится последовательность a_n, при этом $a_n \leqslant c \leqslant b_m$. Так как в этих неравенствах n и m произвольны, то, в частности,

$$a_n \leqslant c \leqslant b_n \quad (n = 1,\ 2,\ \ldots),$$

следовательно, $c \in \sigma_n$, каково бы ни было n.

Найденная точка c — единственная, удовлетворяющая сформулированному свойству. Ведь если допустить существование другой такой точки c_1, то выполнялись бы неравенства $a_n \leqslant c \leqslant b_n$, $a_n \leqslant c_1 \leqslant b_n$, откуда $b_n - a_n \geqslant |c_1 - c| = \varepsilon > 0$ для любого n. Но это противоречило бы тому, что $b_n - a_n \to 0$.

Лемма 2. *У ограниченного сверху (снизу) числом M (числом m) множества действительных чисел существует точная верхняя (нижняя) грань, не превышающая (не меньшая) $M(m)$.*

Доказательство. Пусть E есть произвольное ограниченное сверху числом M множество действительных чисел (точек) и пусть x_0 — какая-либо точка E.

Зададим отрезок $[a, M]$, где $a < x_0$, который обозначим через σ_0. Разделим σ_0 на два равных отрезка и обозначим через σ_1 правый из них, если он содержит в себе точки E, в противном случае обозначим через σ_1 левый отрезок. Разделим σ_1 на два равных отрезка и обозначим через σ_2 правый из них, если он содержит точки E, в противном случае берем в качестве σ_2 левый отрезок. Продолжив этот процессс по индукции, получим последовательность вложенных отрезков $\sigma_0 \supset \sigma_1 \supset \sigma_2 \supset \ldots$ таких, что их длины стремятся к нулю и при любом n отрезок σ_n содержит в себе точки E, но правее σ_n нет точек E. Согласно лемме 1 существует, и притом единственная, точка c, принадлежащая всем σ_n. Очевидно, что $c \leqslant M$. Докажем, что

$$\sup E = c.$$

Для этого покажем, что выполняются два условия:

1) $x \leqslant c$ для всех $x \in E$;

2) для любого $\varepsilon > 0$ существует $x_1 \in E$ такое, что

$$c - \varepsilon < x_1 \leqslant c. \tag{1}$$

Если бы утверждение 1) не было верно, то существовала бы точка $y \in E$ такая, что $c < y$. Так как отрезки σ_n содержат в себе c и длины их стремятся к нулю, то найдется n такое, что точка y будет правее σ_n. Но этого не может быть, потому, что по построению правее σ_n нет точек E. Этим доказано условие 1).

Зададим теперь $\varepsilon > 0$. Очевидно найдется n такое, что σ_n окажется правее точки $c - \varepsilon$. При этом в σ_n имеется по крайней мере одна точка, которую обозначим через x_1, принадлежащая E. Для нее выполняются неравенства (1).

Если теперь E есть ограниченное снизу числом m множество точек x, то соответствующее множество точек $-x$ ограничено сверху числом $-m$, и так как последнее имеет точную верхнюю грань, которая не превышает $-m$, то существует

$$\inf_{x \in E} x = -\sup_{x \in E} (-x) \geqslant m.$$

Лемма 3. *Если множество R всех действительных чисел разбито на два непересекающихся непустых множества,*

$$R = A + B,$$

так, что всякое $a \in A$ меньше всякого $b \in B$, то либо существует число c, наибольшее в A, и тогда в B нет наименьшего числа, либо существует число c, наименьшее в B, и тогда в A нет наибольшего числа.

Доказательство. Пусть множество R всех действительных чисел разбито на два класса A и B, как это сказано в формулировке леммы. Пусть b — число, принадлежащее B. Тогда $a < b$ для всех $a \in A$, и в силу леммы 2 существует точная верхняя грань

$$\sup_{a \in A} a = c \leqslant b. \tag{2}$$

Число c по условию принадлежит одному из классов A или B.

Если $c \in A$, то очевидно, что c есть наибольшее число в классе A. Допустим, что наряду с этим в B есть наименьшее число, которое обозначим через b_0. Тогда среднее арифметическое

$$(c + b_0)/2 = d < b_0,$$

и потому $d \in A$ (ведь b_0 — наименьшее число в классе B). С другой стороны, $c < d$ и вследствие (2) d не может принадлежать A, и мы пришли к противоречию.

Если теперь допустить, что $c \in B$, то аналогичными рассуждениями легко устанавливается, что c есть наименьшее число в классе B, и тогда в A нет наибольшего числа. Этим лемма 3 доказана.

Замечание. В нашем распоряжении имеется четыре внешне отличных, но по существу весьма близких утверждения:

1) Лемма 1 — о вложенных отрезках.

2) Лемма 2 — о существовании точной верхней грани у ограниченного множества.

3) Лемма 3 — о сечении во множестве действительных чисел.

4) Теорема 1, § 3.4 — о существовании предела монотонной ограниченной последовательности.

В нашем изложении утверждение 4) представляет собой одно из основных свойств действительных чисел — свойство V. С помощью этого свойства (и свойств I—IV) мы доказали утверждения 1), 2), 3).

На самом деле утверждения 1), 2), 3), 4) (при наличии I—IV) эквивалентны. Любое из них влечет за собой, как нетрудно проверить, верность остальных.

§ 3.7. Подпоследовательности. Верхний и нижний пределы

Пусть задана произвольная последовательность действительных чисел $\{x_n\} = \{x_1, x_2, x_3, \ldots\}$. Из нее можно выделить бесконечным числом способов новую последовательность

$$\{x_{n_k}\} = \{x_{n_1}, x_{n_2}, x_{n_3}, \ldots\},$$

где индекс n_k пробегает возрастающую последовательность (бесконечную!) натуральных чисел $n_1 < n_2 < n_3 < \ldots$ Последовательность $\{x_{n_k}\}$ называется *подпоследовательностью последовательности* $\{x_n\}$.

Нас здесь будут интересовать только подпоследовательности, которые сходятся либо к конечному числу, либо к $+\infty$, либо к $-\infty$ (т. е. имеют предел конечный, $+\infty$ или $-\infty$). Их мы будем называть *сходящимися*, а их пределы — *числами* (*конечными* или *бесконечными*), распространяя, таким образом, название «число» и на символы $-\infty$ и $+\infty$. Мы считаем, что $-\infty < \alpha < +\infty$, где α — любое действительное (конечное) число. В силу этого соглашения $+\infty$ есть *наибольшее число*, а $-\infty$ *наимень-*

шее. Для расширенного таким образом множества чисел, очевидно, выполняются аксиомы числа группы I (см. § 2.4).

Предупредим читателя, что в наших рассуждениях весьма существенно, что элементы x_n (не числа x_n!) последовательности $\{x_n\}$ считаются различными, если они соответствуют различным индексам n. Надо различать числа (точки), которые пробегаются последовательностью, от ее элементов.

Например, последовательность

$$1, 2, 3, 1, 2, 3, 1, \ldots \tag{1}$$

(как и всякая последовательность) состоит из бесконечного числа элементов x_1, x_2, x_3, ..., но она пробегает весьма бедное множество чисел $\{1, 2, 3\}$, состоящее только из трех чисел (точек).

Легко видеть, что если последовательность сходится, то любая ее подпоследовательность тоже сходится и притом к тому же числу (конечному, $+\infty$, $-\infty$). Но из того, что последовательность $\{x_n\}$ имеет сходящуюся подпоследовательность не следует, что сама она сходится.

Но справедлива теорема, имеющая большое применение. Ее часто называют теоремой Вейерштрасса:

Теорема 1. *Из всякой ограниченной последовательности $\{x_n\}$ можно выделить подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$, сходящуюся к некоторому числу (конечному).*

Доказательство. Пусть значения x_n нашей последовательности принадлежат отрезку $\Delta_0 = [c, d]$. Разделим его на две половинки и обозначим через Δ_1 самую правую из них, содержащую в себе бесконечное число элементов x_n.

Это надо понимать в том смысле, что если обе указанные половинки содержат в себе бесконечное число элементов, то Δ_1 есть правая из них, а если только одна из них содержит бесконечное число элементов x_n, то именно она и обозначается через Δ_1.

Пусть x_{n_1} — один из элементов отрезка Δ_1. Обозначим далее через Δ_2 самую правую половину отрезка Δ_1, содержащую в себе бесконечное число элементов x_n. Очевидно, что среди последних найдется элемент x_{n_2} с $n_2 > n_1$. Вообще, если отрезки $\Delta_1 \supset \Delta_2 \supset \ldots \supset \Delta_{k-1}$ и принадлежащие соответственно им элементы $x_{n_1}, \ldots, x_{n_{k-1}}$ уже определены, то обозначим через Δ_k самую правую половину отрезка Δ_{k-1}, содержащую в себе бесконечное множество элементов x_n. Очевидно, что среди последних найдется элемент x_{n_k} с $n_k > n_{k-1}$. Обозначим через a точку, принадлежащую всем Δ_k ($k = 1, 2, \ldots$). Очевидно, определенная нами подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$ стремится к a.

Теорема доказана.

Теорема 2. *Из любой последовательности действительных чисел (ограниченной или неограниченной) можно выделить под-*

последовательность, сходящуюся к конечному числу, $+\infty$ *или* $-\infty$.

В самом деле, это утверждение для ограниченной последовательности уже доказано в теореме 1 и тогда соответствующая подпоследовательность сходится к конечному числу. Если же последовательность $\{x_n\}$ не ограничена сверху (снизу), то для любого натурального k найдется очевидно натуральное n_k такое, что $k < x_{n_k}$ $(x_{n_k} < -k)$ и подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$ стремится к $+\infty$ $(-\infty)$.

Докажем часто употребляемую в анализе теорему.

Теорема 3. *Если последовательность* $\{x_n\}$ *такова, что ее любая подпоследовательность содержит в свою очередь подпоследовательность, сходящуюся к одному и тому же числу* A (*конечному,* $+\infty$ *или* $-\infty$), *то существует предел* $\lim x_n = A$.

В самом деле, если бы последовательность $\{x_n\}$ не стремилась к A, то существовала бы окрестность A, вне которой имелось бы бесконечное число элементов x_n. Перенумеровав эти элементы в порядке возрастания n, получаем некоторую подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$. Из последней на основании предыдущей теоремы можно выделить ее подпоследовательность $\{x_{n_{k'}}\}$, стремящуюся к некоторому числу B (конечному, $+\infty$ или $-\infty$), очевидно, заведомо не равному A. Мы получили противоречие, потому что последовательность $\{x_{n_{k'}}\}$ является подпоследовательностью исходной последовательности $\{x_n\}$ и по условию стремится к A.

3.7.1 *). Введем теперь определение: число α (конечное, $+\infty$ или $-\infty$) называется *верхним* (*нижним*) *пределом последовательности действительных чисел* $\{x_n\}$ (или *переменной* x_n), если существует подпоследовательность x_{n_k}, сходящаяся к нему, и при этом всякая другая сходящаяся подпоследовательность последовательности $\{x_n\}$ сходится к числу не большему (не меньшему) чем α.

Например, последовательность (1), очевидно, имеет верхний предел, равный 3, и нижний предел, равный 1, а последовательность 1, -2, 3, $-4, \ldots$ имеет верхний предел $+\infty$ и нижний, равный $-\infty$.

Верхний и нижний пределы последовательности обозначаются соответственно через $\overline{\lim}\, x_n$, $\underline{\lim}\, x_n$ или еще так: $\limsup x_n$, $\liminf x_n$ (см. в конце параграфа упражнение).

Последовательность x_n *может иметь только один верхний* (*нижний*) *предел*, потому что если допустить, что a_1 и a_2 — два

---

*) Пункт 3.7.1 посвящен верхним и нижним пределам, которые в этой книге используются только в теории рядов (§ 11.3, теоремы 2, 3, § 11.11, теоремы 1—3).

такие предела и $a_1 < a_2$, то существовала бы подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$, сходящаяся к a_2, что противоречит тому факту, что a_1 есть верхний предел.

Отметим, что метод вложенных друг в друга отрезков, который мы применили при доказательстве теоремы 1, привел нас к подпоследовательности $\{x_{n_k}\}$, сходящейся к числу a, которое равно верхнему пределу последовательности $\{x_n\}$:

$$a = \overline{\lim}\, x_n.$$

В самом деле, пусть $a' > a$. Подберем n настолько большим, что a' оказывается правее Δ_n. Но правее Δ_n может быть только конечное число элементов x_n и, следовательно, не существует подпоследовательности $\{x_n\}$, которая бы сходилась к числу a'.

Таким образом, указанный процесс доказывает существование верхнего предела у ограниченной последовательности.

Если бы мы наш процесс видоизменили, обозначая через Δ_n для каждого n не самую правую, а самую левую половину Δ_{n-1}, содержащую бесконечное число элементов x_n, то в результате получили бы число a (точку), равное нижнему пределу последовательности $\{x_n\}$.

Покажем, что верхний (нижний) предел ограниченной последовательности $\{x_n\}$ обладает следующим свойством: *для любого $\varepsilon > 0$ интервал $(a - \varepsilon,\ a + \varepsilon)$ содержит в себе бесконечное число элементов x_n, при этом справа (слева) от этого интервала имеется не более, чем конечное число элементов x_n.*

В самом деле, можно указать такое n, что $\Delta_n \subset (a - \varepsilon,\ a + \varepsilon)$, но в Δ_n имеется бесконечное число элементов x_n — тем более в $(a - \varepsilon,\ a + \varepsilon)$; правее (левее) же Δ_n имеется не более чем конечное число элементов x_n — тем более правее (левее) интервала $(a - \varepsilon,\ a + \varepsilon)$.

Для ограниченной последовательности $\{x_n\}$ действительных чисел это свойство верхнего (нижнего) предела может служить другим эквивалентным его определением.

Действительно, в случае, например, верхнего предела, если число a обладает этим свойством и $a' > a$, то взяв ε так, чтобы было $a < a + \varepsilon < a'$, получим, что правее $a + \varepsilon$ имеется не более чем конечное число элементов x_n и, следовательно, не может существовать подпоследовательность последовательности $\{x_n\}$, сходящаяся к a'. Но подпоследовательность, сходящаяся к a, существует; чтобы получить ее, фиксируем $\varepsilon > 0$ и подбираем n_1 так, чтобы $x_{n_1} \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$. Затем подбираем $n_2 > n_1$ так, чтобы $x_{n_2} \in \left(a - \frac{\varepsilon}{2}, a + \frac{\varepsilon}{2}\right)$, что возможно, так как интервал $\left(a - \frac{\varepsilon}{2}, a + \frac{\varepsilon}{2}\right)$ содержит бесконечное число элементов x_n. Затем подбираем $n_3 > n_2$ так, чтобы $x_{n_3} \in \left(a - \frac{\varepsilon}{3}, a + \frac{\varepsilon}{3}\right)$ и т. д. Очевидно, $x_{n_k} \to a\ (k \to \infty)$.

Если последовательность не ограничена сверху, то, очевидно, можно выделить из нее подпоследовательность, сходящуюся к $+\infty$, и так как $+\infty$ больше любого числа, то

$$\overline{\lim}\, x_n = +\infty.$$

Если последовательность ограничена сверху конечным числом, которое обозначим через b, но не ограничена снизу, то возможны два случая:

1-й случай. Найдется такое конечное число $a < b$, что неравенства $a \leqslant x_n \leqslant b$ удовлетворяются для бесконечного числа индексов n. Таким образом, из этих индексов, если их расположить в возрастающем порядке, образуется бесконечная подпоследовательность натуральных чисел $\{n_k\} = \{n_1 < n_2 < \ldots\}$. Последней соответствует подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$ нашей последовательности, очевидно, ограниченная. Существование ее верхнего предела уже доказано. Легко видеть, что

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\, x_n = \overline{\lim_{k\to\infty}}\, x_{n_k},$$

и мы доказали существование $\overline{\lim}\, x_n$ и в этом случае.

2-й случай. Для любого $a \leqslant b$ неравенство $a \leqslant x_n \leqslant b$ или, что в данном случае все равно, неравенство $a \leqslant x_n$, выполняется для конечного числа индексов n. Это значит, очевидно, что

$$\lim x_n = -\infty.$$

Но тогда и верхний предел $\overline{\lim}\, x_n = -\infty$ (так же как нижний!), т. е. он и в этом последнем случае существует.

Объединяя эти результаты с установленными выше результатами для ограниченной последовательности, получим:

Теорема 4. *Любая последовательность действительных чисел $\{x_n\}$ имеет верхний (нижний) предел (равный конечному числу, $+\infty$ или $-\infty$).*

Если последовательность ограничена, то ее верхний и нижний пределы конечны.

Теорема 5. *Всегда $\underline{\lim}\, x_n \leqslant \overline{\lim}\, x_n$, и равенство в этом соотношении имеет место тогда и только тогда, когда существует предел x_n (конечный, $+\infty$ или $-\infty$), и тогда*

$$\underline{\lim}\, x_n = \overline{\lim}\, x_n = \lim x_n. \tag{2}$$

В самом деле, если существует предел x_n, то все подпоследовательности $\{x_n\}$ сходятся к нему, и поэтому имеет место (2).

Наоборот, пусть

$$\underline{\lim}\, x_n = \overline{\lim}\, x_n = A. \tag{3}$$

Если A — конечное число, то из (3) следует, что для любого $\varepsilon > 0$ неравенства

$$A - \varepsilon < x_n < A + \varepsilon$$

соблюдаются для всех индексов n, за исключением конечного их числа, а это значит, что $x_n \to A$. Если теперь $A = +\infty$, то неравенству $x_n \leqslant M$ может при любом конечном M удовлетворять только конечное число элементов x_n, но тогда $\lim x_n = +\infty$. Аналогично рассматривается случай $A = -\infty$.

Отметим очевидное равенство

$$\underline{\lim}\, x_n = -\overline{\lim}\,(-x_n). \tag{4}$$

Справедливы неравенства (правые части конечны)

$$\overline{\lim}\,(x_n + y_n) \leqslant \overline{\lim}\, x_n + \overline{\lim}\, y_n, \tag{5}$$

$$\underline{\lim}\,(x_n + y_n) \geqslant \underline{\lim}\, x_n + \underline{\lim}\, y_n, \tag{6}$$

где переменные x_n и y_n ограничены. Неравенство (5) доказывается так: найдется сходящаяся подпоследовательность $\{x_{n_k} + y_{n_k}\}$ такая, что

$$\overline{\lim}\,(x_n + y_n) = \lim\left(x_{n_k} + y_{n_k}\right); \tag{7}$$

можно далее из $\{n_k\}$ выбрать подпоследовательность $\{n_k'\}$ такую, что существует предел $\lim x_{n_k'}$. Далее, из подпоследовательности $\{n_k'\}$ можно выбрать в свою очередь ее подпоследовательность $\{n_k''\}$ такую, что $\lim y_{n_k''}$ существует, но тогда, очевидно, и $\lim x_{n_k''}$ будет существовать. Поэтому

$$\lim\left(x_{n_k} + y_{n_k}\right) = \lim\left(x_{n_k''} + y_{n_k''}\right) =$$

$$= \lim x_{n_k''} + \lim y_{n_k''} \leqslant \overline{\lim}\, x_n + \overline{\lim}\, y_n. \tag{8}$$

Из (7) и (8) следует (5).

В силу (4) и (5)

$$\underline{\lim}\,(x_n + y_n) = -\overline{\lim}\,(-x_n + (-y_n)) \geqslant$$

$$\geqslant -(\overline{\lim}\,(-x_n) + \overline{\lim}\,(-y_n)) = \underline{\lim}\, x_n + \underline{\lim}\, y_n,$$

т. е. справедливо (6).

Теорема 6. *Пусть A — конечное положительное число и существует предел* $\lim x_n = A$ и $\{y_n\}$ — любая последовательность.

Тогда

$$\overline{\lim}\,(x_n y_n) = A\,\overline{\lim}\,y_n. \tag{9}$$

В частности,

$$\overline{\lim}\,(A y_n) = A\,\overline{\lim}\,y_n. \tag{10}$$

Здесь считается $A\cdot(+\infty) = +\infty$ и $A\cdot(-\infty) = -\infty$.

Доказательство. Будем считать, что $\{y_{n_k}\}$ есть произвольная сходящаяся (к конечному числу, $+\infty$ или $-\infty$) подпоследовательность последовательности $\{y_n\}$. Тогда $\{x_{n_k}y_{n_k}\}$ автоматически будет произвольной сходящейся подпоследовательностью последовательности $\{x_n y_n\}$. Поэтому

$$A\lim y_{n_k} = \lim\left(x_{n_k}y_{n_k}\right) \leqslant \overline{\lim}\,(x_n y_n),$$

следовательно,

$$A\,\overline{\lim}\,y_n \leqslant \overline{\lim}\,(x_n y_n). \tag{11}$$

С другой стороны,

$$\lim\left(x_{n_k}y_{n_k}\right) = A\lim y_{n_k} \leqslant A\,\overline{\lim}\,y_n,$$

следовательно,

$$\overline{\lim}\,(x_n y_n) \leqslant A\,\overline{\lim}\,y_n. \tag{12}$$

Из (11) и (12) следует (9).

Пример. Последовательность

$$E = \{\sin n\alpha\} \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

в случае, если $\alpha = \lambda\pi$, где $\lambda = p/q$ рационально (p, $q > 0$), носит периодический характер:

$$\sin\alpha,\ \sin 2\alpha,\ \ldots,\ \sin 2q\alpha,\ \sin\alpha,\ \sin 2\alpha,\ \ldots \tag{13}$$

Пределы различных сходящихся ее подпоследовательностей могут быть равны только одному из первых $2q$ чисел (13). Наибольшее из них, очевидно, есть $\overline{\lim}\,\sin n\alpha$, а наименьшее есть $\underline{\lim}\,\sin n\alpha$.

Пусть теперь $\lambda > 0$ иррационально. Будем отмечать числа $n\alpha$ на единичной окружности γ, как это принято в тригонометрии. Тогда, каковы бы ни были различные натуральные числа n_1 и n_2, точки $n_1\alpha$ и $n_2\alpha$ геометрически различны, так как в противном случае имело бы место равенство

$$n_2\alpha = n_1\alpha + 2k\pi, \qquad \alpha = \lambda\pi,$$

где k — целое, т. е. $(n_2 - n_1)\lambda = 2k$ и λ было бы рациональным. Следовательно, точки $n\alpha$ ($n = 0, 1, 2, \ldots$) образуют бесконечное множество, которое мы обозначим через $\mathfrak{M}$. Но тогда для любого $\varepsilon > 0$ найдется пара точек $n_1\alpha$, $n_2\alpha$, геометрически отстоящих друг от друга (вдоль γ) на расстоянии меньшем, чем ε. Это значит, что

$$(n_2 - n_1)\alpha = 2k\pi + \omega = \beta \qquad (n_1 < n_2),$$

где $|\omega| < \varepsilon$, а k — целое.

Точки 0, β, 2β, 3β, … принадлежат, очевидно, $\mathfrak{M}$. Кроме того, любые рядом стоящие точки этой последовательности находятся на равном расстоянии, меньшем, чем ε. Отсюда следует, что какова бы ни была точка $t \in \gamma$, на γ существует на расстоянии (вдоль γ) меньшем, чем ε, точка множества $\mathfrak{M}$. Это показывает, что любая точка $t \in \gamma$ есть предельная точка множества $\mathfrak{M}$.

Из сказанного следует, что каково бы ни было t, всегда можно подобрать подпоследовательность натуральных чисел $n_1 < n_2 < n_3 < \ldots$, такую, что

$$\lim_{k\to\infty} \sin n_k\alpha = \sin t.$$

Но $\sin t$ пробегает все значения отрезка $[-1, +1]$; отсюда следует, что

$$\varliminf_{n\to\infty} \sin n\alpha = -1, \quad \varlimsup_{n\to\infty} \sin n\alpha = 1.$$

Упражнение. Доказать, что для любой переменной x_n

$$\varlimsup x_n = \lim_{n\to\infty} \sup_{k>n} x_k, \quad \varliminf x_n = \lim_{n\to\infty} \inf_{k>n} x_k.$$

Указание. Для неограниченной сверху (снизу) переменной $\sup\limits_{k>n} x_k = +\infty$ $(\inf\limits_{k>n} x_k = -\infty)$, и тогда надо считать, что $\lim\limits_{n\to\infty} (+\infty) = +\infty$ $(\lim\limits_{n\to\infty} (-\infty) = -\infty)$.

§ 3.8. Критерий Коши *) существования предела

Пусть переменная x_n $(n = 1, 2, \ldots)$ стремится к конечному пределу a. Тогда для произвольного положительного числа ε найдется такое N, что

$$|x_n - a| < \varepsilon/2 \qquad (n > N).$$

Пусть n и m будут любыми натуральными числами, большими, чем N. Тогда

$$|x_n - a| < \varepsilon/2 \quad \text{и} \quad |x_m - a| < \varepsilon/2 \qquad (n, m > N).$$

Отсюда

$$|x_n - x_m| = |x_n - a + a - x_m| \leqslant |x_n - a| + |a - x_m| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

и мы получим утверждение:

Если переменная x_n $(n = 1, 2, \ldots)$ имеет конечный предел, то она удовлетворяет следующему условию, называемому условием Коши: для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое N, что для всех n, $m > N$ выполняется неравенство

$$|x_n - x_m| < \varepsilon.$$

Верно и обратное утверждение:

*) О. Л. Коши (1789—1857) — французский математик. В его трудах впервые определены основные понятия математического анализа (предел, непрерывность, интеграл, ...) так, как это принято в современной математике.

Если переменная x_n $(n = 1, 2, \ldots)$ удовлетворяет условию Коши, то она стремится к конечному пределу, т. е. существует число a такое, что

$$\lim x_n = a.$$

Докажем это утверждение. Пусть задана переменная x_n $(n = 1, 2, \ldots)$, удовлетворяющая условию Коши. Положим $\varepsilon = 1$ и подберем N такое, чтобы

$$|x_n - x_m| < 1 \qquad (n,\ m > N).$$

Зафиксируем какое-либо $m > N$. Из написанного неравенства следует

$$1 > |x_n - x_m| \geqslant |x_n| - |x_m|,$$

или

$$|x_n| < 1 + |x_m| \qquad (n > N),$$

и переменная x_n ограничена.

Но из ограниченной последовательности $\{x_n\}$ можно выделить подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$, сходящуюся к некоторому числу:

$$\lim_{k \to \infty} x_{n_k} = a. \tag{1}$$

Покажем, что тогда последовательность $\{x_n\}$ имеет предел, равный

$$\lim_{n \to \infty} x_n = a.$$

В самом деле, зададим $\varepsilon > 0$ и подберем N такое, чтобы выполнялись неравенства

$$|x_n - x_m| < \varepsilon/2 \qquad (n,\ m > N). \tag{2}$$

Подберем также k_0 настолько большое, чтобы одновременно выполнялись неравенства

$$|x_{n_k} - a| < \varepsilon/2,$$

$n_k > N$ для всех $k > k_0$. Это возможно в силу того, что $n_k \to \infty$ $(k \to \infty)$, и в силу (1). Но тогда в неравенстве (2) можно при $k > k_0$ положить $m = n_k$ и будем иметь

$$|x_n - a| \leqslant |x_n - x_{n_k}| + |x_{n_k} - a| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \quad (n > N).$$

Это доказывает, что последовательность $\{x_n\}$ имеет предел, равный a.

Если соединить вместе доказанные прямое и обратное утверждения, то получим следующую теорему, о которой говорят, что она дает критерий Коши существования (конечного) предела.

Теорема. *Для того чтобы переменная* x_n $(n=1, 2, \ldots)$ *стремилась к (конечному) пределу, необходимо и достаточно, чтобы она удовлетворяла условию Коши.*

Отметим, что условие Коши можно сформулировать и в следующей форме: *для всякого* $\varepsilon > 0$ *найдется такое* $N > 0$, *что*

$$|x_{n+p} - x_n| < \varepsilon$$

для всех $n > N$ *и любых натуральных* p.

§ 3.9. Теорема Вейерштрасса *)

Пусть E есть множество чисел (точек действительной прямой). По определению, точка a называется *предельной точкой* E, если любая ее окрестность, т. е. интервал (c, d), где $c < a < d$, содержит в себе хотя бы одну точку x, принадлежащую E и отличную от a.

На самом деле *любая окрестность* (c, d) *предельной точки* a *содержит в себе бесконечное число точек множества* E *и из них можно выделить бесконечную последовательность различных точек* $x_1, x_2, x_3, \ldots (x_n \neq x_k, n \neq k)$, *сходящуюся к* a. Действительно, по определению, на (c, d) имеется точка $x_1 \in E$, $x_1 \neq a$. Но можно указать интервал (c_1, d_1) длины $d_1 - c_1 < 1$, содержащий a, но не содержащий x_1. На нем, по определению a, должна найтись точка $x_2 \in E$, $x_2 \neq a$. Но снова можно указать интервал (c_2, d_2) длины $d_2 - c_2 < 1/2$, содержащий a, но не содержащий x_1 и x_2, и на нем найти точку $x_3 \in E$, $x_3 \neq a$ и т. д. В результате мы получим нужную последовательность.

Итак, можно дать второе (эквивалентное) определение предельной точки: *точка* a *есть предельная точка множества* E, *если любая ее окрестность содержит бесконечное множество точек* E.

Множество E' всех предельных точек множества E называется *производным множеством* от E.

Пример 1. Множество E точек последовательности $\{1/n\}$ имеет предельную точку 0.

Действительно, любая окрестность точки 0 содержит в себе бесконечное множество точек нашей последовательности. С другой стороны, если $a \neq 0$, то интервал $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$, где $0 < \varepsilon < |a|$, содержит конечное число точек множества E или вовсе не содержит их. Таким образом, единственная предельная точка множества E есть 0.

Таким образом, в данном примере производное множество E' состоит из одной точки 0. При этом она не принадлежит E. Множество E_1, состоящее из 0 и точек вида $1/n$ $(n = 1, 2, \ldots)$, очевидно, также имеет 0 своей предельной точкой. Она принадлежит E_1. Таким образом, предельная точка множества E может принадлежать и не принадлежать E.

Пример 2. Множество R всех рациональных чисел имеет в качестве своих предельных точек любую точку действительной оси — рациональную и иррациональную, потому что в любом интервале имеются точки R. Сово-

*) К. Вейерштрасс (1815—1897) — немецкий математик.

купность предельных точек множества, иррациональных точек x, удовлетворяющих неравенствам $0 \leqslant x \leqslant 1$, есть, очевидно, отрезок $[0, 1]$.

Множество A, состоящее из конечного числа точек, очевидно, не может иметь предельную точку, т. е. в данном случае A' — пустое множество. Бесконечное неограниченное множество также может не иметь предельной точки, как показывает пример множества натуральных чисел 1, 2, 3... Однако, имеет место

Теорема Вейерштрасса. *Бесконечное ограниченное множество E точек имеет по крайней мере одну предельную точку, т. е. E' — не пустое множество.*

Эта теорема доказана в § 7.9 (теорема 2) в n-мерном случае. Но и сейчас читатель при желании может ее прочитать, имея в виду пока одномерный случай.

§ 3.10. Счетное множество. Счетность множества рациональных чисел. Несчетность множества действительных чисел

Множество E элементов x любой природы называется *бесконечным*, если, каково бы ни было натуральное число n, в нем имеется больше, чем n элементов.

E называется *счетным*, если оно *бесконечно* и его элементы можно *перенумеровать*. Это значит, что между (всеми) элементами $x \in E$ и числами натурального ряда

$$\{1, 2, 3, \ldots\} \tag{1}$$

можно установить взаимно однозначное соответствие. Если при этом элементу $x \in E$ соответствует натуральное число n, то естественно обозначить его через x_n. В результате множество E можно записать в виде *последовательности* элементов:

$$E = \{x_1, x_2, x_3, \ldots\}. \tag{2}$$

В частности, множество (1) натуральных чисел тривиальным образом счетно. Очевидно также, что множество четных натуральных чисел счетно, потому что оно бесконечно и его элементы x можно занумеровать, положив $x_n = 2n$ $(n = 1, 2, \ldots)$.

Пусть E есть счетное множество, перенумерованное в виде последовательности (2), *и A — непустая его часть. Тогда в A имеется элемент с наименьшим номером.* В самом деле, в (2) имеется элемент $x_n \in A$ с некоторым номером n_1. Элементов $x_n \in A$ с номерами $n \leqslant n_1$ имеется только конечное число; среди них можно выбрать элемент x_{n_0} с наименьшим номером — это и будет, очевидно, элемент A, имеющий самый малый номер в A.

Если E — счетное множество и A — его бесконечная часть, то A — счетное множество, которое можно занумеровать следующим образом: обозначим через z_1 элемент A с наименьшим номером в E; выкидываем из A этот элемент и в оставшемся бесконечном множестве A_1 выбираем элемент с наименьшим номером в E, который обозначаем через z_2; выкидываем z_2 из A_1 и т. д.

Счетная (теоретико-множественная) сумма

$$E = \bigcup_{k=1}^{\infty} E^k = E^1 + E^2 + \ldots$$

счетных множеств E^k есть счетное множество. В самом деле, запишем элементы $x_j^k \in E^k$ $(j = 1, 2, \ldots)$ в виде таблицы:

$$E^1 = \{x_1^1, x_2^1, x_3^1, \ldots\},$$
$$E^2 = \{x_1^2, x_2^2, x_3^2, \ldots\},$$
$$E^3 = \{x_1^2, x_2^3, x_3^3, \ldots\},$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

Перенумеруем их в следующем порядке:

$$x_1^1, x_2^1, x_1^2, x_3^1, x_2^2, x_1^3, x_4^1, \ldots,$$

выбрасывая, однако, на каждом этапе нумерации те элементы, которые уже были занумерованы на предыдущем этапе: ведь может случиться, что E^k и E^l имеют общие элементы. В результате получим бесконечную последовательность элементов $\{y_1, y_2, y_3, \ldots\}$, очевидно, исчерпывающую множество E. Это доказывает, что E — счетное множество.

Аналогично доказывается, что *конечная сумма $E = E^1 + \ldots$ $\ldots + E^N$ счетных или конечных множеств, среди которых есть хотя бы одно счетное, счетна.*

Докажем, что *множество положительных (отрицательных) рациональных чисел, а следовательно, множество всех рациональных чисел, счетно.*

Чисел p/q ($p > 0$, $q > 0$ — целые) с $p + q = 1$ нет, среди же чисел p/q с $p + q = 2$ имеется одно: $1 = 1/1$; обозначим его через y_1. Среди не занумерованных еще чисел p/q с $p + q = 3$ имеется два: $1/2$ и $2 = 2/1$; обозначим их соответственно через y_2 и y_3; этот процесс продолжаем по индукции. В результате все положительные рациональные числа будут, очевидно, перенумерованы.

С другой стороны, *множество всех действительных чисел не счетно (несчетно).*

Докажем, что уже единичный интервал $(0, 1)$ есть несчетное множество, откуда и будет следовать высказанное утверждение, потому что мы знаем, что часть счетного множества может быть только конечной или счетной. Точки x (числа) интервала $(0, 1)$ будем записывать в виде бесконечных десятичных дробей. Допустим, что интервал $(0, 1)$ есть счетное множество, тогда все его точки можно было бы перенумеровать

$$
\begin{aligned}
x^1 &= 0, \alpha_1^1\alpha_2^1\alpha_3^1 \ldots, \\
x^2 &= 0, \alpha_1^2\alpha_2^2\alpha_3^2 \ldots, \\
x^3 &= 0, \alpha_1^3\alpha_2^3\alpha_3^3 \ldots, \\
&\ldots\ldots\ldots
\end{aligned} \tag{3}
$$

Однако это заключение, как мы сейчас увидим, противоречиво. Для каждого натурального n определим цифру α_n так, чтобы выполнялись неравенства $0 < \alpha_n < 9, \alpha_n \neq \alpha_n^n$, что, очевидно, возможно. Сконструируем число $a = 0, \alpha_1\alpha_2\alpha_3 \ldots$ Оно принадлежит интервалу $(0, 1)$ и должно, таким образом, значиться под некоторым номером n_0 в таблице (3): $a = x^{n_0}$. Но тогда должно было бы быть $\alpha_{n_0} = \alpha_{n_0}^{n_0}$, что невозможно.

Упражнения.

1. Доказать, что множество точек плоскости с рациональными координатами (x, y) счетно.
2. То же доказать для множества точек $(x_1, \ldots, x_n)$ n-мерного пространства с рациональными координатами x_j.

Глава 4

ПРЕДЕЛ ФУНКЦИИ

§ 4.1. Понятие предела функции

Число A называется *пределом функции f в точке a*, если функция f определена на некоторой окрестности a, т. е. на некотором интервале (c, d), где $c < a < d$, за исключением, быть может, самой точки a, и если для всякого $\varepsilon > 0$ можно указать зависящее от него $\delta > 0$ такое, что для всех x, для которых $0 < |x-a| < \delta$, имеет место

$$|f(x) - A| < \varepsilon.$$

Тот факт, что A есть предел f в точке a, принято записывать следующим образом:

$$\lim_{x \to a} f(x) = A \quad \text{или} \quad f(x) \to A \quad (x \to a).$$

Другое определение предела функции в точке может быть высказано в терминах пределов последовательностей.

Число A называется *пределом функции f в точке a*, если она определена на некоторой окрестности точки a, за исключением, быть может, самой точки a и если предел последовательности $\{f(x_n)\}$ существует и равен A, какова бы ни была последовательность $\{x_n\}$, сходящаяся к a и такая, что $x_n \neq a$ для всех n. Таким образом,

$$\lim_{\substack{x_n \to a \\ x_n \neq a}} f(x_n) = A.$$

Здесь считается, как и в других подобных случаях, само собой разумеющимся, что сходящаяся к a переменная x_n пробегает значения, для которых $f(x)$ определена.

Высказанные определения эквивалентны. В самом деле, пусть функция f имеет предел в смысле первого определения и пусть задана переменная x_n, не равная ни при каком n числу a и стремящаяся к a. Зададим ε и подберем δ так, как это сказано в первом определении. Затем подберем натуральное N так, чтобы $|x_n - a| < \delta$ для $n > N$. Но тогда

$$|f(x_n) - A| < \varepsilon \text{ для } n > N,$$

а это значит, что последовательность чисел $\{f(x_n)\}$ стремится к A, и так как это свойство верно для любой сходящейся к a последовательности $\{x_n\}$, лишь бы $x_n \neq a$ и все x_n принадлежали к области определения функции, то доказано, что из первого определения предела следует второе.

Обратно, пусть функция $f(x)$ имеет предел в смысле второго определения. Допустим, что при этом она не имеет предела в смысле первого определения. Это значит, что существует хотя бы одно ε, которое мы обозначим через ε_0, для которого нельзя подобрать нужное δ, т. е. для *любого* δ среди x, удовлетворяющих соотношениям $0 < |x-a| < \delta$, должен найтись хотя бы один $x = x^{(\delta)}$ такой, что для него $|f(x^{(\delta)}) - A| \geqslant \varepsilon_0$.

В качестве δ мы берем все числа вида $\delta = 1/k$ $(k = 1, 2, \ldots)$ и для каждого из них найдем точку $x_k = x^{(\delta)}$, для которой

$$0 < |x_k - a| < \frac{1}{k} \quad (x_k \neq a)$$

$$|f(x_k) - A| \geqslant \varepsilon_0 \qquad (k = 1, 2, \ldots).$$

Из этих соотношений видно, что $x_k \to a$ $(x_k \neq a)$, в то время как $f(x_k)$ заведомо не стремится к числу A. Таким образом, допущение, что из второго определения предела не следует первое, приводит к противоречию.

Эквивалентность двух определений доказана.

Выражение *предел функции в точке* a часто заменяют выражением *предел функции при* x, *стремящемся к* a, или, короче, *предел функции при* $x \to a$. Если угодно, это выражение больше соответствует духу понятия предела потому, что число $A = \lim\limits_{x \to a} f(x)$ ничего не говорит о значении f в самой точке $x = a$. Функция может не быть определенной в $x = a$. Число A говорит о поведении функции в малой окрестности точки a, из которой выбрасывается точка a. Оно говорит о том, что если x приближается к a по любому закону, оставаясь не равным a, то соответствующее значение $f(x)$ в свою очередь приближается к A, т. е. делается как угодно близким к A.

Пример 1. Рассмотрим функцию $f(x) = (x^2 - 4)/(x - 2)$. Она определена для всех $x \neq 2$. Попробуем найти ее предел при $x \to 2$. Для любого $x \neq 2$ $\dfrac{x^2 - 4}{x - 2} = x + 2$, а так как при определении предела при $x \to 2$ совсем не принимаются во внимание значения f в точке $x = 2$, то

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = \lim_{x \to 2} (x + 2).$$

Это равенство пока написано в том смысле, что если один из пределов существует, то существует и второй и равен ему. Таким образом, вместо того чтобы вычислять предел более сложной функции $(x^2 - 4)/(x - 2)$, достаточно вычислить предел более простой функции $x + 2$. Этот последний при $x \to 2$, очевидно, равен 4. Ведь если подставить в $x + 2$ вместо x произвольную переменную x_n, стремящуюся к 2, то независимо от способа стремления ее к 2

$$\lim_{x_n \to 2} (x_n + 2) = 2 + 2 = 4.$$

Вычисления, связанные с нахождением данного предела, обычно располагают следующим образом:

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^2-4}{x-2} = \lim_{x\to 2} (x+2) = \lim_{x\to 2} x + 2 = 4.$$

Подчеркнем, что функции $f(x) = (x^2-4)/(x-2)$ и $\varphi(x) = x+2$ являются разными функциями. Первая из них определена для $x \neq 2$, в то время как вторая определена для всех x. Однако при вычислении предела функций при $x \to 2$ нас совершенно не интересует, определены или не определены эти функции в самой точке $x = 2$, и так как $f(x) = \varphi(x)$ для $x \neq 2$, то

$$\lim_{x\to 2} f(x) = \lim_{x\to 2} \varphi(x) = \varphi(2).$$

Пример 2. Очевидно, что $\lim\limits_{x\to 1} x^2 = 1$, потому что, если $x_n \to 1$, $x_n \neq 1$, то $\lim x_n^2 = \lim x_n \lim x_n = 1\cdot 1 = 1$. С другой стороны, этот факт можно доказать на языке ε и δ.

Определим какой-либо интервал, содержащий точку 1, например $(^1/_2, {}^3/_2)$. Для любого x, принадлежащего ему, очевидно, выполняются неравенства

$$|x^2-1| = |x+1|\,|x-1| \leqslant \frac{5}{2}\,|x-1|.$$

Зададим теперь произвольное $\varepsilon > 0$ и положим $\delta = \min\left\{\frac{1}{2}, \frac{2}{5}\varepsilon\right\}$. Тогда для всех x, удовлетворяющих неравенству $|x-1| < \delta$, будет иметь место соотношение

$$|x^2-1| \leqslant \frac{5}{2}\cdot\frac{2}{5}\,\varepsilon = \varepsilon.$$

Пример 3. Функция $\sin(1/x)$ (график ее изображен на рис. 4.1) определена для всех значений $x \neq 0$. Она определена, таким образом, в окрестности точки $x = 0$, за исключением самой точки $x = 0$. Эта функция не имеет предела при $x \to 0$, потому что последовательность отличных от нуля значений

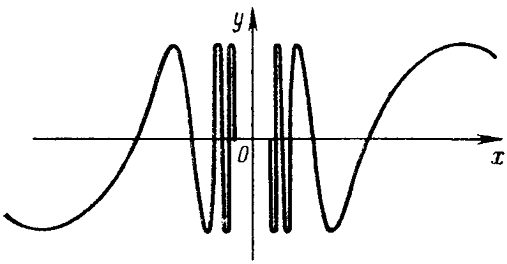

Рис. 4.1.

$$x_k = \frac{2}{\pi(2k+1)},$$

$k = 0, 1, 2, \ldots,$ стремится к нулю и в то же время

$$f(x_k) = (-1)^k$$

не стремится при $k \to \infty$ ни к какому пределу.

Введем еще следующее определение. Будем писать

$$A = \lim_{x\to\infty} f(x)$$

и говорить, что *число A есть предел функции $f(x)$ при x, стре-*

мящемся к бесконечности, если f определена для всех x, удовлетворяющих неравенству $|x| > K$ при некотором $K > 0$, и для любого $\varepsilon > 0$ можно найти число $M > K$ такое, что $|f(x) - A| < \varepsilon$ для всех x, удовлетворяющих неравенству $|x| > M$.

Можно доказать, что это определение эквивалентно следующему:

Число A есть предел функции $f(x)$ при $x \to \infty$, если функция $f(x)$ определена для всех x с $|x| > M$ при некотором M и

$$\lim_{x_n \to \infty} f(x_n) = A$$

для любой сходящейся к ∞ последовательности $\{x_n\}$.

Доказательство эквивалентности этих двух определений проводится по той же схеме, что и в разобранном выше случае предела f в конечной точке a.

Вообще, многие свойства пределов $f(x)$ при $x \to a$, где a — конечное число, и при $x \to \infty$ являются аналогичными. Можно изложить эти свойства единым образом, так что изложение будет одновременно относиться как к случаю, когда $x \to a$, где a — конечное число, так и к случаю $x \to \infty$. Для этого под буквой a надо понимать либо число (конечное *)) либо символ ∞. Если a есть число, то под окрестностью точки a понимается любой интервал (c, d), содержащий в себе точку a. Таким образом, *окрестность (конечной) точки a* есть множество всех точек x, удовлетворяющих неравенствам $c < x < d$. Если же $a = \infty$ (или $+\infty$, или $-\infty$), то под окрестностью a мы условимся понимать множество всех x, удовлетворяющих неравенству

$$|x| > M \text{ (или } x > M\text{, или } x < -M\text{, } M > 0).$$

Мы будем писать

$$\lim_{x \to a} f(x) = A,$$

где a может быть конечным числом или ∞ (или $+\infty$, или $-\infty$), если функция $f(x)$ определена на некоторой окрестности a, за исключением **), быть может, самой точки a, и если для любого $\varepsilon > 0$ найдется такая окрестность точки a, что для всех x, принадлежащих к ней и отличных от a, имеет место неравенство

$$|f(x) - A| < \varepsilon.$$

Это определение объединяет в себе, очевидно, разобранные выше случаи предела f: когда x стремится к конечному числу a и когда x стремится к ∞, $+\infty$, $-\infty$.

---

*) Символы ∞, $+\infty$, $-\infty$ называют *бесконечными числами*; в таких случаях обычные числа называют *конечными числами*.

**) Эта оговорка нужна только в случае конечной точки (числа) a, Приступим к изложению свойств функции $f(x)$, имеющей пределы при $x \to a$, где a есть число или ∞, $+\infty$, $-\infty$. Условимся произвольную окрестность a называть символом $U(a)$. Легко проверить, что *пересечение двух окрестностей, $U_1(a)$ и $U_2(a)$, есть снова некоторая окрестность $U(a)$.*

Теорема 1. *Если $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$, где A — конечное число, то на некоторой окрестности $U(a)$ функция $f(x)$ ограничена, т. е. существует положительное число M такое, что*

$$|f(x)| \leqslant M \quad \text{для всех} \quad x \in U(a), \ x \neq a.$$

Доказательство. Из условия теоремы следует существование окрестности $U(a)$ такой, что

$$1 > |f(x) - A| \geqslant |f(x)| - |A| \qquad (x \in U(a),\ x \neq a).$$

Отсюда для указанных x

$$|f(x)| \leqslant 1 + |A|,$$

где надо считать $M = 1 + |A|$. Теорема доказана.

Теорема 2. *Если $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$ и $A \neq 0$ — конечное число, то существует окрестность $U(a)$ такая, что*

$$|f(x)| > \frac{|A|}{2} \qquad (x \in U(a),\ x \neq a).$$

Больше того, для указанных x

$$f(x) > \frac{A}{2}, \quad \text{если } A > 0,$$

и

$$f(x) < \frac{A}{2}, \quad \text{если } A < 0.$$

Доказательство. Из условия теоремы следует существование для $\varepsilon = |A|/2$ окрестности $U(a)$ такой, что

$$\frac{|A|}{2} > |A - f(x)| \geqslant |A| - |f(x)| \qquad (x \in U(a),\ x \neq a),$$

откуда $|f(x)| > |A|/2$ для указанных x. Первое из этих неравенств можно заменить следующими:

$$A - \frac{|A|}{2} < f(x) < A + \frac{|A|}{2}.$$

При $A > 0$ отсюда следует

$$\frac{A}{2} = A - \frac{|A|}{2} < f(x),$$

а при $A < 0$ следует

$$f(x) < A + \frac{|A|}{2} = \frac{A}{2},$$

что и требовалось доказать.

Теорема 3. *Если*

$$\lim_{x\to a} f_1(x) = A_1, \quad \lim_{x\to a} f_2(x) = A_2$$

и на некоторой окрестности $U(a)$, $x \neq a$

$$f_1(x) \leqslant f_2(x),$$

то $A_1 \leqslant A_2$.

Доказательство. Пусть $x_n \to a$, $x_n \neq a$; тогда для достаточно большого n_0 имеет место неравенство

$$f_1(x_n) \leqslant f_2(x_n) \qquad (n > n_0)$$

и после перехода к пределу неравенство $A_1 \leqslant A_2$.

Теорема 4. *Если*

$$\lim_{x\to a} f_1(x) = A, \quad \lim_{x\to a} f_2(x) = A \tag{1}$$

и на некоторой окрестности $U(a)$, $x \neq a$

$$f_1(x) \leqslant \varphi(x) \leqslant f_2(x), \tag{2}$$

то

$$\lim_{x\to a} \varphi(x) = A. \tag{3}$$

Доказательство. Пусть $x_n \to a$, $x_n \neq a$; тогда при достаточно большом n_0 для $n > n_0$

$$f_1(x_n) \leqslant \varphi(x_n) \leqslant f_2(x_n),$$

и в силу (1) существует предел $\varphi(x_n)$, равный A, а так как $\{x_n\}$ есть произвольная сходящаяся к a последовательность, то имеет место (3).

Теорема 5 (Критерий Коши существования предела). *Для того чтобы существовал предел (конечный)* $\lim_{x\to a} f(x)$, *необходимо и достаточно, чтобы функция* $f(x)$ *была определена в окрестности* a, *за исключением, быть может, самой точки* a, *и для всякого* $\varepsilon > 0$ *существовала такая окрестность* $U(a)$, *что каковы бы ни были точки* x', $x'' \in U(a)$, x', $x'' \neq a$,

$$|f(x') - f(x'')| < \varepsilon.$$

Доказательство. Пусть $\lim_{x\to a} f(x) = A$, где A — конечное число; тогда существует окрестность a, где $f(x)$ определена, за исключением, быть может, самой точки a. Кроме того, для любого $\varepsilon > 0$ найдется такая окрестность $U(a)$, что если $x \in U(a)$, $x \neq a$, то $|f(x) - A| < \varepsilon/2$. Пусть x', $x'' \in U(a)$ и x', $x'' \neq a$; тогда

$$|f(x') - f(x'')| \leqslant |f(x') - A| + |A - f(x'')| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

и мы получили, что условие теоремы необходимо.

Докажем достаточность этого условия. Пусть функция $f(x)$ определена в некоторой окрестности a, за исключением, быть может, самой точки a, и пусть для любого $\varepsilon > 0$ можно указать окрестность $U(a)$ такую, что $|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$ для всех $x', x'' \in U(a)$, $x', x'' \neq a$. Зададим произвольную последовательность $\{x_n\}$, $x_n \neq a$ $(n = 1, 2, \ldots)$, стремящуюся к a. Тогда согласно критерию Коши для последовательности, стремящейся к пределу, найдется натуральное N такое, что для $n, m > N$ будет $x_n, x_m \in U(a)$. Но тогда

$$|f(x_n) - f(x_m)| < \varepsilon \qquad (n, m > N),$$

и последовательность $\{f(x_n)\}$ удовлетворяет критерию Коши и, следовательно, имеет предел.

Мы доказали следующее свойство рассматриваемой функции f: для любой сходящейся к a последовательности чисел $x_n \neq a$ существует $\lim f(x_n)$. Из этого свойства автоматически следует, что пределы $\lim f(x_n)$, соответствующие разным сходящимся к a последовательностям, равны между собой. Но тогда существует $\lim\limits_{x\to a} f(x)$. В самом деле пусть $x_n \to a$, $x'_n \to a$; $x_n, x'_n \neq a$, $n = 1, 2, \ldots$ Тогда по доказанному, существуют числа A и A' такие, что $f(x_n) \to A$ и $f(x'_n) \to A'$. Составим новую последовательность: $\{x_1, x'_1, x_2, x'_2, x_3, \ldots\}$. Она сходится к a. По доказанному выше, должна сходиться к некоторому числу и соответствующая последовательность $\{f(x_1), f(x'_1), f(x_2), f(x'_2), f(x_3) \ldots\}$. Но это возможно, только если $A = A'$. Таким образом, $A = A'$.

Теорема доказана.

Теорема 6. *Пусть*

$$\lim_{x\to a} f(x) = A, \quad \lim_{x\to a} \varphi(x) = B,$$

где A и B — конечные числа. Тогда

$$\lim_{x\to a} [f(x) \pm \varphi(x)] = A \pm B, \qquad \lim [f(x) \cdot \varphi(x)] = AB$$

и при условии, что $B \neq 0$,

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \frac{A}{B}.$$

Докажем для примера второе равенство. Пусть $x_n \to a$, $x_n \neq a$ $(n = 1, 2, \ldots)$; тогда

$$\lim f(x_n) = A, \quad \lim \varphi(x_n) = B,$$

но так как предел произведения двух переменных, пробегающих последовательности, равен произведению их пределов, то

$$\lim [f(x_n)\varphi(x_n)] = \lim f(x_n) \lim \varphi(x_n) = AB.$$

Это равенство доказано для любой переменной $x_n \to a$, $x_n \neq a$, поэтому $\lim\limits_{x\to a}[f(x)\varphi(x)] = AB$.

По определению, $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty$, если функция $f(x)$ определена на некоторой окрестности a, за исключением, быть может, самой точки a, и если для всякого положительного числа M найдется такая окрестность $U(a)$ точки a, что

$$|f(x)| > M \qquad (x \in U(a),\ x \neq a).$$

Если $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty$ и в некоторой окрестности точки a функция $f(x) > 0$ (соответственно $f(x) < 0$), то еще пишут

$$\lim_{x\to a} f(x) = +\infty$$

(соответственно $\lim\limits_{x\to a} f(x) = -\infty$).

Легко доказать следующие теоремы:

Теорема 7. *Если функция $f(x)$ удовлетворяет на некоторой окрестности a неравенству*

$$|f(x)| > M > 0,$$

а для функции $\varphi(x)$ имеет место

$$\lim_{x\to a}\varphi(x) = 0 \qquad (\varphi(x) \neq 0 \text{ для } x \neq a),$$

то

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{\varphi(x)} = \infty.$$

Теорема 8. *Если $|f(x)| < M$ в некоторой окрестности точки a и если $\lim\limits_{x\to a}\varphi(x) = \infty$, то*

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{\varphi(x)} = 0.$$

Следствие. *Если $\varphi(x) \to 0$ $(x \to a,\ \varphi(x) \neq 0)$, то*

$$\lim_{x\to a}\frac{1}{\varphi(x)} = \infty,$$

и если $\varphi(x) \to \infty$ $(x \to a,\ \varphi(x) \neq 0)$, то

$$\lim_{x\to a}\frac{1}{\varphi(x)} = 0.$$

Теорема 9. *Пусть для функции f, определенной в окрестности точки a (конечной или бесконечной), выполняется условие: из всякой сходящейся к a последовательности $\{x_n\}$ можно выделить подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$, для которой $\lim\limits_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = A$. Тогда $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$.*

Доказательство. Пусть $x_n \to a$. Согласно условию любая подпоследовательность последовательности $\{f(x_n)\}$ содержит в себе подпоследовательность, сходящуюся к A. Но тогда по теореме 3 § 3.7 $f(x_n) \to A$.

§ 4.2. Непрерывность функции в точке

По определению, функция f называется *непрерывной в точке* (*конечной*) a, если она определена в некоторой окрестности точки a (в том числе и в самой точке a) и если

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a). \tag{1}$$

На основании сказанного в § 4.1 о пределе функции в точке можно дать следующую развернутую формулировку непрерывности функции в точке:

Функция f называется непрерывной в точке a, если она определена на некотором интервале (c, d), содержащем точку a, и если для любого $\varepsilon > 0$ можно найти такое $\delta > 0$, что для всех x, удовлетворяющих неравенству $|x-a| < \delta$, выполняется неравенство

$$|f(x) - f(a)| < \varepsilon.$$

В силу сказанного в § 4.1 приведенной формулировке полностью эквивалентна следующая формулировка:

Функция f непрерывна в точке a, если она определена на некотором интервале (c, d), содержащем a, и если для любой последовательности $\{x_n\}$, сходящейся к a, имеет место

$$\lim_{x_n\to a} f(x_n) = f(a).$$

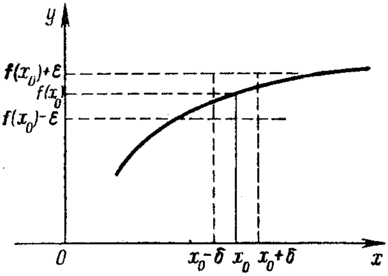

Рис. 4.2.

Если функция $f(x)$, *заданная в окрестности точки a*, не является непрерывной в точке a, т. е. если для нее не выполняется высказанное выше свойство, то говорят, что она *разрывна в точке a*.

Можно дать и прямое определение разрывности f в точке a:

Пусть функция f определена в окрестности точки a и пусть существует такое положительное число $\varepsilon_0 > 0$, что для любого $\delta > 0$ найдется точка x_δ такая, что

$$|a - x_\delta| < \delta, \quad |f(a) - f(x_\delta)| \geqslant \varepsilon_0;$$

тогда $f(x)$ разрывна в точке a.

Рассмотрим непрерывную кривую C — график непрерывной функции $y = f(x)$, $x \in [a, b]$ (рис. 4.2). Термин «непрерывная кривая» здесь употреблен в житейском (интуитивном) смысле — ее можно начертить всю, не отрывая карандаша от бумаги.

Зададим произвольное значение $x_0 \in (a, b)$. Ему соответствует значение $f(x_0)$ нашей функции. Зададим $\varepsilon > 0$ и проведем три прямые параллельно оси x, соответственно на расстояниях $f(x_0) - \varepsilon$,

$f(x_0)$ и $f(x_0)+\varepsilon$ от оси x. Легко видеть, что для нашей (непрерывной) кривой всегда можно подобрать такое $\delta>0$ (зависящее от ε), что для всех x, принадлежащих интервалу $(x_0-\delta, x_0+\delta)$, соответствующие ординаты $f(x)$ нашей кривой будут удовлетворять неравенствам

$$f(x_0)-\varepsilon<f(x)<f(x_0)+\varepsilon.$$

Другими словами, для всякого $\varepsilon>0$ можно указать такое $\delta>0$, что для всех x, удовлетворяющих неравенству $|x-x_0|<\delta$, выполняется неравенство $|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$.

Таким образом, математическое определение непрерывности функции отвечает интуитивному понятию непрерывной кривой.

Обратимся еще к графику, изображенному на рис. 4.3.

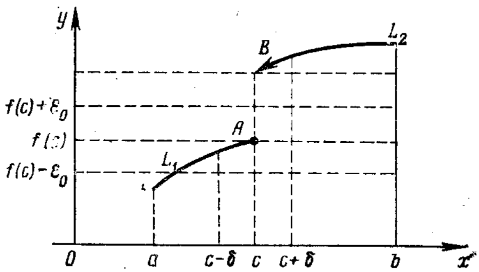

Рис. 4.3.

Этот график представляет собой разрывную кривую L, состоящую из двух непрерывных кусков L_1 и L_2. Кусок L_1 взаимно однозначно проектируется (в направлении оси y) на отрезок $[a, c]$. Кусок же L_2 предполагается лишенным левой концевой точки, он взаимно однозначно проектируется на полуинтервал $(c, b]$. Каждому значению $x\in[a, b]$ соответствует единственное значение $y=f(x)$, равное ординате точки кривой L, имеющей абсциссу x. Кривая L разрывна, она состоит из двух не склеенных друг с другом кусков L_1 и L_2. Разрыв имеет место при переходе аргумента x через значение c. Убедимся в том, что функция $f(x)$ также не является непрерывной в точке c. Очевидно, что $f(c)=Ac$ (рис. 4.3). Возьмем положительное число $\varepsilon_0<AB$. Внимательное рассмотрение чертежа показывает, что как бы ни было мало $\delta>0$, среди значений x, удовлетворяющих неравенству $|c-x|<\delta$, имеются такие, а именно бóльшие чем c, что для них

$$|f(x)-f(c)|>\varepsilon_0.$$

Таким образом, разрывному графику соответствует разрывная функция. В данном случае функция $f(x)$ разрывна в точке c (ср. с § 1.4).

Величина $\Delta y = \Delta f(x) = f(x+h) - f(x)$ называется *приращением функции f в точке x, соответствующим приращению h независимой переменной.*

Мы можем понятие непрерывности функции f в точке a выразить еще следующим образом (на языке h): *функция $f(x)$ непрерывна в точке a, если функция $f(a+h)$ от h определена в некоторой окрестности $h=0$ и если для всякого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta > 0$ такое, что для $|h| < \delta$ выполняется*

$$|f(a+h) - f(a)| < \varepsilon.$$

Иначе говоря, функция f непрерывна в точке a, если ее приращение в этой точке, соответствующее приращению h аргумента, стремится к нулю вместе с h.

Из свойств предела функции (см. § 4.1) и определения непрерывности в точке немедленно следует

Теорема 1. *Если функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ непрерывны в точке a, то непрерывны также в точке a и их сумма $f(x)+\varphi(x)$, разность $f(x)-\varphi(x)$ и произведение $f(x)\varphi(x)$, а также и частное $f(x)/\varphi(x)$ при добавочном условии, что $\varphi(a) \neq 0$.*

Докажем еще теорему о непрерывности функции от функции.

Теорема 2. *Если функция $\varphi(x)$ непрерывна в точке a и функция $f(y)$ непрерывна в точке $b=\varphi(a)$, то функция от функции $F(x) = f(\varphi(x))$ непрерывна в точке a.*

Доказательство. Зададим $\varepsilon > 0$. Вследствие непрерывности функции f в точке b найдется такое $\sigma > 0$, что функция $f(y)$ определена на интервале $(b-\sigma,\ b+\sigma)$ и выполняется неравенство

$$|f(y) - f(b)| < \varepsilon \text{ для } |y-b| < \sigma. \tag{2}$$

А вследствие непрерывности функции φ в точке a найдется такое $\delta > 0$, что функция $\varphi(x)$ определена на интервале $(a-\delta,\ a+\delta)$ и $|\varphi(x)-\varphi(a)| < \sigma$ для

$$|x-a| < \delta. \tag{3}$$

Из полученных соотношений следует, что для всех x, удовлетворяющих неравенству (3), функция $f(\varphi(x))$ определена и имеет место неравенство

$$|f(\varphi(x)) - f(\varphi(a))| < \varepsilon \text{ или } |F(x) - F(a)| < \varepsilon, \tag{4}$$

что и требовалось доказать.

Чтобы доказать непрерывность F в точке $x=a$, рассуждают еще так. Так как функция φ непрерывна в точке a и функция f непрерывна в точке $b=\varphi(a)$ и, кроме того, $F(a) = f(\varphi(a))$, то для любой стремящейся к a последовательности $\{x_n\}$ имеет место

$$\lim_{x_n \to a} F(x_n) = \lim_{\varphi(x_n) \to \varphi(a)} f(\varphi(x_n)) = f(\varphi(a)) = F(a).$$

Если функция $\Phi(x)$ получена из нескольких функций с помощью только арифметических действий и операций функции от функции, то установление факта непрерывности Φ в данной точке может быть сведено к последовательному применению предыдущих двух теорем, если эти теоремы применяются конечное число раз.

Отметим следующие теоремы, непосредственно вытекающие из определения непрерывности функций в точке и из теорем § 4.1 о пределе функции.

Теорема 3. *Если функция $f(x)$ непрерывна в точке a, то существует окрестность $U(a)$ точки a, на которой $f(x)$ ограничена.*

Теорема 4. *Если функция $f(x)$ непрерывна в точке a и $f(a) \neq 0$, то существует окрестность $U(a)$ точки a, на которой*

$$|f(x)| > \frac{|f(a)|}{2}.$$

Больше того, если $f(a) > 0$, то

$$\frac{f(a)}{2} < f(x) \quad (x \in U(a)),$$

а если $f(a) < 0$, то

$$f(x) < \frac{f(a)}{2} \quad (x \in U(a)).$$

Пример 1. Постоянная функция $f(x) = C$ определена и непрерывна для любого значения x, потому что приращение ее, соответствующее любому приращению h, равно

$$\Delta C = C - C = 0,$$

и следовательно, тривиальным образом $\Delta C \to 0$ $(h \to 0)$.

Пример 2. Функция $f(x) = x^n$ $(n = 1, 2, \ldots)$ определена на всей действительной оси и непрерывна на ней.

В самом деле, функция $y = x$ очевидно, непрерывна для любого x. Поэтому этот же факт имеет место для функции $x^2 = xx$, но тогда и для $x^3 = x^2x$. По индукции приходим к непрерывности x^n.

Пример 3. Алгебраический многочлен

$$P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots + a_n$$

$(a_0, \ldots, a_n$ — заданные числа и n — натуральное число) есть, очевидно, функция, непрерывная для любого x, потому что x^{n-k} $(k = 0, 1, \ldots, n)$ есть, как показано выше, непрерывная на действительной оси функция, a_kx^{n-k} есть непрерывная на оси функция как произведение двух непрерывных на оси функций a_k и x^{n-k} и, наконец, $P(x)$, непрерывна на оси как сумма конечного числа непрерывных на оси функций.

Пример 4. Рациональная функция

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{a_0x^n + \ldots + a_n}{b_0x^m + \ldots + b_m}, \qquad b_0 \neq 0$$

$(n, m$ — натуральные числа и a_k, b_k — заданные числа) есть непрерывная функция для всех значений x, для которых $Q(x) \neq 0$. Это следует из того, что $f(x)$ получается из непрерывных функций x^k и чисел, взятых в конечном числе, путем производства над ними арифметических действий (сложения, вычитания, умножения и деления).

Пример 5. Функция $f(x) = \sin x$ непрерывна для всех значений x. Это вытекает из следующих рассуждений.

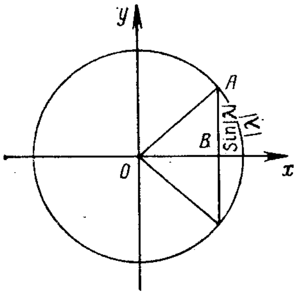

Рис. 4.4.

Имеет место неравенство $|\sin\lambda| \leqslant |\lambda|$. Чтобы доказать его при $|\lambda| \leqslant \pi/2$, помножим его (обе его части) на 2, и тогда левая его часть будет равна длине хорды (рис. 4.4), стягивающей дугу длины $2|\lambda|$. Если теперь $|\lambda| \geqslant \pi/2$, то $|\lambda| \geqslant \pi/2 > 1 \geqslant |\sin\lambda|$. Поэтому

$$|\sin(x+h) - \sin x| = \left|2\sin\frac{h}{2}\cos\left(x+\frac{h}{2}\right)\right| \leqslant \leqslant 2\left|\frac{h}{2}\right|\cdot 1 = |h|$$

и $|\sin(x+h) - \sin x| \to 0$ при $h \to 0$, а это значит, что функция $\sin x$ в точке x (любой) непрерывна.

Пример 6. Функция $\cos x$ непрерывна для всех значений x потому, что

$$|\cos(x+h) - \cos x| = \left|2\sin\frac{h}{2}\sin\left(x+\frac{h}{2}\right)\right| \leqslant 2\left|\frac{h}{2}\right|\cdot 1 = |h| \to 0, \quad h \to 0.$$

Из полученного неравенства видно, что для всякого ε можно найти δ (в данном случае $\delta = \varepsilon$) такое, что если $|h| < \delta$, то $|\cos(x+h) - \cos x| < \varepsilon$.

Замечание. В этой книге мы исходим из обычного геометрического определения тригонометрических функций (см. § 1.3, п. 7). Но возможны другие их определения, носящие чисто аналитический характер (см. § 10.11).

Пример 7. Функция $|x|$ непрерывна для всех значений x, потому что

$$||x+h| - |x|| \leqslant |x+h-x| = |h| \to 0, \quad h \to 0.$$

Если функция f не является непрерывной в точке $x = a$ и в то же время существует конечный предел $\lim\limits_{x\to a} f(x)$, то говорят, что она имеет *устранимый разрыв* в этой точке. Этим хотят сказать, что f можно видоизменить в точке a (если она определена в a) или доопределить ее в этой точке (если она в a не определена), положив $f(a) = \lim\limits_{x\to a} f(x)$, и после этого f станет непрерывной функцией в этой точке.

Пример 8. Функция

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-1}{x-1}, & x \neq 1, \\ 3, & x = 1, \end{cases}$$

очевидно, разрывна в точке $x = 1$. Но этот разрыв устраняется, если положить $f(1) = 2$.

Если функция f непрерывна для всех x в достаточно малой окрестности точки a, за исключением $x = a$, и неограничена в этой окрестности, то говорят, что *f имеет бесконечный разрыв в a*.

Пример 9. Функция $\sin(1/x)$ может служить примером ограниченной функции с неустранимым разрывом в $x=0$, а функция $\operatorname{tg} x$ — примером функции, имеющей бесконечные разрывы $\left(\text{в точках } x_k = \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots\right)$.

Пример 10. Функции $\cos(\sin x^2)$ и $(\sin x)^2$ являются непрерывными на всей действительной оси функциями. Это следует из того, что функции x^2, $\sin x$, $\cos x$ непрерывны на действительной оси, и из теоремы о непрерывности функции от функции.

§ 4.3. Пределы функции справа и слева. Монотонная функция

По определению, *левой окрестностью точки* (числа) a называется произвольный полуинтервал $(c, a]$, а *правой окрестностью* a называется произвольный полуинтервал $[a, d)$ $(c < a < d)$. *Окрестностью* («точки») $+\infty$ естественно считать (*полубесконечный*) *интервал* $(N, +\infty)$, а *окрестностью* $-\infty$ *интервал* $(-\infty, N)$, где N — в обоих случаях произвольное (конечное) число. Можно еще говорить, что окрестности $+\infty$, $-\infty$ суть соответственно левая и правая окрестности («точки») ∞.

На основе этих определений вводится понятие *правого* и *левого предела* функции f в точке a (конечной и бесконечной). Например, говорят, что A есть *правый предел* f *в точке* a (конечной или бесконечной), если f определена в некоторой правой окрестности a, за исключением, быть может, самой точки a, и если для любого $\varepsilon > 0$ можно указать такую правую окрестность a, что для всех принадлежащих к ней $x \neq a$ выполняется неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$.

Впрочем, правый (левый) предел f в ∞ обычно называют пределом f при $x \to -\infty$ $(x \to +\infty)$.

Можно еще дать другое определение правого предела функции в точке. Говорят, что функция f *имеет правый предел в точке* a (конечной или бесконечной), равный числу A, если она определена на некоторой правой окрестности a, за исключением, быть может, самой точки a, и если $\lim\limits_{x_n \to a} f(x_n) = A$ для любой сходящейся к a *последовательности* $\{x_n\}$, значения которой $x_n \neq a$ и принадлежат к указанной правой окрестности.

Тот факт, что оба сформулированные определения правого предела эквивалентны, доказывается совершенно аналогично тому, как это делается в случае предела (см. § 4.1).

Сказанное понятным образом переносится на понятие левого предела. Вообще, теоремы § 4.1 о пределах по аналогии переносятся на правые и левые пределы.

Если a — конечная точка, то правый и левый пределы f в ней записываются соответственно так:

$$f(a+0)=\lim_{\substack{x\to a\\ x>a}} f(x), \quad f(a-0)=\lim_{\substack{x\to a\\ x<a}} f(x).$$

Пользуясь определением пределов на «языке ε и δ», легко доказать, что для того чтобы f имела предел в конечной точке a, необходимо и достаточно, чтобы существовали правый и левый пределы f в этой точке и были равны между собой, и тогда $f(a+0)=f(a-0)=\lim\limits_{x\to a} f(x)$.

Пределы f при $x\to-\infty, +\infty, \infty$ часто записывают соответственно так:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=f(-\infty), \quad \lim_{x\to+\infty} f(x)=f(+\infty), \quad \lim_{x\to\infty} f(x)=f(\infty).$$

Здесь, как в случае конечной точки, имеет место очевидное утверждение: для того чтобы существовал предел f при $x\to\infty$ необходимо и достаточно, чтобы существовали и были равны между собой пределы f при $x\to+\infty$ и $x\to-\infty$ и тогда $f(-\infty)=f(+\infty)=f(\infty)$.

До сих пор мы говорили о конечных пределах функции (A было конечно!), но можно по аналогии ввести пределы:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty, \quad \lim_{x\to+\infty} f(x)=-\infty,$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=+\infty, \quad \lim_{x\to-\infty} f(x)=-\infty.$$

Например, последнее из этих четырех соотношений выражает, что функция f определена для всех x, меньших некоторого числа (т. е. на некоторой окрестности $-\infty$), и каково бы ни было положительное число N, найдется такое число L, что для всех $x<L$ имеет место $f(x)<-N$.

Односторонние пределы, т. е. пределы справа и слева, имеют большое значение при рассмотрении монотонных функций.

Пусть E — множество действительных чисел (точек прямой). Функция f, определенная на E, называется *неубывающей* (*невозрастающей*) *на* E, если из того, что $x', x''\in E$ и $x'<x''$, следует, что $f(x')\leqslant f(x'')$ (соответственно $f(x')\geqslant f(x'')$).

Неубывающие и невозрастающие на E функции носят общее название *монотонных функций на* E.

Теорема 1. *Пусть функция f не убывает на интервале (a, b), где, в частности, может быть $a=-\infty$, $b=+\infty$. Если она ограничена сверху числом M, то существует предел (конечный) $\lim\limits_{\substack{x\to b\\ x<b}} f(x)\leqslant M$. Если же она не ограничена сверху, то $\lim\limits_{\substack{x\to b\\ x<b}} f(x)=+\infty$.*

Доказательство. Из ограниченности f следует существование конечной точной верхней грани $\sup\limits_{x \in (a,b)} f(x) = A \leqslant M$. Таким образом, $f(x) \leqslant A$ для всех $x \in (a, b)$, и для всякого $\varepsilon > 0$ существует $x_1 \in (a, b)$ такое, что $A - \varepsilon < f(x_1) \leqslant A$. Но в силу того, что f не убывает, $f(x_1) \leqslant f(x)$, $x_1 \leqslant x < b$. Таким образом, для любого $\varepsilon > 0$ можно указать $x_1 < b$ такое, что $A - \varepsilon < f(x) < A + \varepsilon$ для всех x, удовлетворяющих неравенствам $x_1 < x < b$. Это и значит, что

$$A = \lim_{\substack{x \to b \\ x < b}} f(x).$$

Пусть теперь неубывающая функция f не ограничена сверху. Тогда для любого M существует $x_1 \in (a, b)$ такое, что $M < f(x_1)$ и вследствие того, что f не убывает на (a, b),

$$M < f(x_1) \leqslant f(x), \qquad x_1 < x < b,$$

а это и говорит о том, что

$$\lim_{\substack{x \to b \\ x < b}} f(x) = +\infty.$$

По образцу доказанной теоремы легко доказывается и

Теорема 2. *Если функция f не убывает на (a, b), где может быть $a = -\infty$, $b = +\infty$, и $f(x)$ ограничена снизу числом m, то существует (конечный) предел функции f в точке a справа:*

$$\lim_{\substack{x \to a \\ x > a}} f(x) = A \geqslant m.$$

Если же функция f не ограничена снизу, то

$$\lim_{\substack{x \to a \\ x > a}} f(x) = -\infty.$$

Читатель может самостоятельно видоизменить формулировки и доказательства подобных теорем для невозрастающей на (a, b) функции.

Пример. На отрезке $[0, 2]$ задана функция

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{для } 0 \leqslant x < 1, \\ x + 1 & \text{для } 1 \leqslant x < 2. \end{cases}$$

Она однозначна и монотонна на $[0, 2]$. Легко видеть, что $f(1 - 0) = 1$, $f(1 + 0) = f(1) = 2$.

Теорема 3. *Если функция f не убывает на отрезке $[a, b]$, то в каждой точке $x \in (a, b)$ существуют пределы $f(x - 0)$ и $f(x + 0)$ и выполняются неравенства*

$$f(x - 0) \leqslant f(x) \leqslant f(x + 0).$$

Существуют также пределы $f(a+0)$, $f(b-0)$, *удовлетворяющие неравенствам*

$$f(a) \leqslant f(a+0), \quad f(b-0) \leqslant f(b).$$

Эта теорема немедленно следует из предыдущих теорем, если учесть, что из ее условий вытекает, что функция f не убывает на каждом из отрезков $[a, x]$, $[x, b]$.

Можно ввести понятие *непрерывности функции в точке справа и слева.*

Функция f называется *непрерывной в точке* a (конечной) *справа* (*слева*), если существует $f(a+0)$ и $f(a+0)=f(a)$ (соответственно, если существует $f(a-0)$ и $f(a-0)=f(a)$).

Если для функции f в точке a (конечной) имеют смысл оба числа $f(a-0)$ и $f(a+0)$ (конечные) и если она все же разрывна в a, то говорят, что эта функция *имеет разрыв первого рода в точке* a.

Отметим, что *если функция* f *непрерывна как справа, так и слева в точке* a, *то она, очевидно, непрерывна в точке* a. Можно

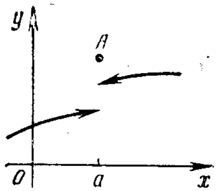

Рис. 4.5.

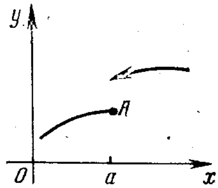

Рис. 4.6.

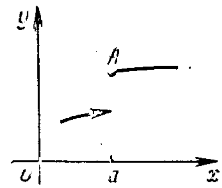

Рис. 4.7.

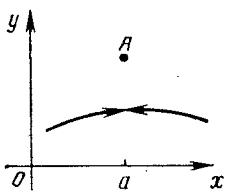

Рис. 4.8.

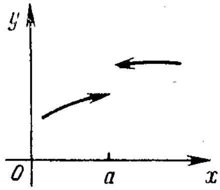

Рис. 4.9.

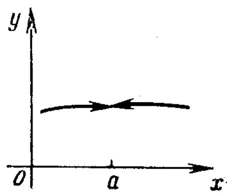

Рис. 4.10.

еще сказать, что *для того, чтобы функция* $f(x)$ *была непрерывной в точке* a, *необходимо и достаточно, чтобы три числа,* $f(a-0)$, $f(a)$, $f(a+0)$, *имели смысл и чтобы они были равны между собой.*

Мы приводим для примера шесть графиков функций, имеющих разрыв первого рода в точке a. Буква A обозначает точку $A=(a, f(a))$ плоскости. Стрелка на конце куска кривой обозначает, что концевая точка, где находится стрелка, выброшена. На рисунках 4.5—4.8 изображены графики функций f, для которых все три числа $f(a)$, $f(a-0)$, $f(a+0)$ имеют смысл. На рис. 4.5 числа $f(a)$, $f(a-0)$, $f(a+0)$ различны между собой; функция не только разрывна в a, но и разрывна справа и слева в a. На рис. 4.6 f непрерывна слева в a. На рис. 4.7 f непрерывна справа в a. На рис. 4.8 f имеет устранимый разрыв в a. На рис. 4.9 f не определена в a, разрыв неустраним. На рис. 4.10 f не определена в a, но f можно доопределить в a так, что она будет непрерывной в a.

Заметим следующий важный факт. *Если заданная на отрезке* $[a, b]$ *функция* f *монотонна на нем (не убывает или не возрастает), то, какова бы ни была точка* $x \in [a, b]$, *в ней функция* f *либо непрерывна, либо имеет разрыв первого рода.* Это утверждение есть непосредственное следствие из теорем 1, 2 и определения понятия точки разрыва первого рода *).

Если функция f определена в окрестности точки a, исключая быть может a, и имеет разрыв в a, не являющийся разрывом первого рода, то говорят, что она имеет в a *разрыв второго рода*. Например, функция $\sin(1/x)$ имеет в точке $x=0$ разрыв второго рода. Функция

$$\psi(x) = \begin{cases} 0, & x \leqslant 0, \\ \sin\frac{1}{x}, & x > 0 \end{cases}$$

также имеет в точке $x=0$ разрыв второго рода, потому что хотя для нее и имеет смысл число

$$\psi(0-0) = 0,$$

но не имеет смысла число $\psi(0+0)$.

§ 4.4. Функции, непрерывные на отрезке

Функция f называется *непрерывной на отрезке* $[a, b]$ (на множестве точек x, удовлетворяющих неравенствам $a \leqslant x \leqslant b$), если она непрерывна во всех точках интервала (a, b) (множества точек x, для которых $a < x < b$), непрерывна справа в точке a и непрерывна слева в точке b **).

Функции, непрерывные на отрезке, обладают рядом замечательных свойств, к изложению которых мы сейчас приступим. Впрочем, мы не останавливаемся пока на важном понятии — равномерной непрерывности функции; оно будет изучено позднее (§ 7.10, теорема 4), сразу для функции n переменных. Из полученных там результатов выводятся соответствующие результаты для непрерывной на отрезке $[a, b]$ функции от одной переменной.

*) О числе точек разрыва монотонной функции см. конец § 9.5.

**) Подчеркнем, что у отрезка $[a, b]$ всегда его концы — конечные числа (точки).

Начнем со следующей леммы:

Лемма 1. *Если все значения x_n последовательности $\{x_n\}$, стремящейся к числу α, принадлежат $[a, b]$, то и $\alpha \in [a, b]$.*

Доказательство. Эта лемма следует из теоремы 3 § 3.1.

Теорема 1. *Если функция f непрерывна на отрезке $[a, b]$, то она ограничена на нем.*

Доказательство. Допустим, что f не ограничена на $[a, b]$. Тогда для каждого натурального числа n найдется точка $x_n \in \in [a, b]$ такая, что

$$|f(x_n)| > n \qquad (n = 1, 2, \ldots). \tag{1}$$

Последовательность $\{x_n\}$ ограничена (a и b — числа!) и из нее можно выделить подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$, сходящуюся к некоторой точке $\alpha \in [a, b]$ (см. предыдущую лемму и теорему 1 из § 3.7). Но в точке α функция f непрерывна и потому*)

$$\lim_{k=\infty} f\left(x_{n_k}\right) = f(\alpha). \tag{2}$$

Но свойство (2) противоречит свойству (1). Поэтому f может быть только ограниченной на $[a, b]$.

Заметим, что если функция непрерывна на интервале (a, b) или на полуинтервале $[a, b)$ или $(a, b]$, то она не обязательно ограничена на нем. Например, функция $1/x$ непрерывна на полуинтервале $(0, 1]$, но не ограничена на нем.

Если эту функцию доопределить, положив $f(0) = 0$, то она будет конечной в любой точке отрезка $[0, 1]$, однако, *неограниченной на нем.*

Теорема 2. *Непрерывная на $[a, b]$ функция f достигает в некоторых точках отрезка $[a, b]$ своих максимума и минимума, т. е. существуют точки α и β, принадлежащие $[a, b]$, для которых имеет место*

$$\min_{x \in [a,b]} f(x) = f(\alpha), \qquad \max_{x \in [a,b]} f(x) = f(\beta).$$

Таким образом, $f(\alpha) \leqslant f(x) \leqslant f(\beta)$ для всех $x \in [a, b]$.

Доказательство. По предыдущей теореме непрерывная на $[a, b]$ функция ограничена, следовательно, она ограничена сверху некоторым числом K:

$$f(x) \leqslant K \qquad (x \in [a, b]).$$

Но тогда существует точная верхняя грань f на $[a, b]$:

$$\sup_{x \in [a,b]} f(x) = M. \tag{3}$$

Число M обладает следующим свойством: для любого натураль-

*) Если $\alpha = b$ (соответственно $\alpha = a$), то в этой точке f непрерывна слева (справа).

ного числа n найдется на $[a, b]$ точка x_n такая, что

$$M-\frac{1}{n}<f(x_n)\leqslant M \quad (n=1, 2, \ldots).$$

Последовательность $\{x_n\}$, как принадлежащая к $[a, b]$, ограничена, и потому из нее можно выделить подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$ сходящуюся к некоторому числу β, которое заведомо принадлежит $[a, b]$ (учесть лемму 1). Но функция f непрерывна в точке β и потому $\lim\limits_{k\to\infty} f\left(x_{n_k}\right)=f(\beta)$. С другой стороны, $M-\frac{1}{n_k}<f\left(x_{n_k}\right)\leqslant$ $\leqslant M$ $(k=1, 2, \ldots)$ и

$$\lim_{k\to\infty} f\left(x_{n_k}\right)=M.$$

Но так как $f\left(x_{n_k}\right)$ может стремиться только к одному пределу, то $M=f(\beta)$.

Верхняя грань (3), таким образом, достигается в точке β, т. е., как говорят, *функция f достигает в точке β своего максимума на отрезке* $[a, b]$. Мы доказали, что существует точка $\beta\in[a, b]$, для которой

$$\max_{x\in[a,b]} f(x)=f(\beta).$$

Доказательство другой части теоремы о минимуме аналогично, но его можно свести к доказательству первой части теоремы, учитывая, что

$$\min_{x\in[a,b]} f(x)=-\max_{x\in[a,b]}\{-f(x)\}.$$

Замечание. Функция $y=x$ непрерывна на интервале $(0, 1)$ и ограничена на нем; верхняя ее грань $\sup\limits_{x\in(0,1)} x=1$ не достигается, т. е. нет такого $x_0\in(0, 1)$, для которого эта функция равна 1. Таким образом, в доказанной теореме условие непрерывности f *на замкнутом* (содержащем в себе оба конца a и b) *отрезке* существенно.

Очевидно, что $\sup\limits_{x\geqslant 0}\operatorname{arctg} x=\pi/2$. Однако, нет такого x на луче $x\geqslant 0$, для которого функция $\operatorname{arctg} x$ принимает значение $\pi/2$, и она не достигает максимума на $x\geqslant 0$. В данном случае условия теоремы не выполняются: область задания непрерывной функции $\operatorname{arctg} x$ неограничена.

Теорема 3. *Если функция f непрерывна на отрезке* $[a, b]$ *и числа $f(a)$ и $f(b)$ не равны нулю и имеют разные знаки, то на интервале (a, b) имеется по крайней мере одна точка c такая, что $f(c)=0$.*

Доказательство. Обозначим отрезок $[a, b]$ через Δ_0. Разделим Δ_0 на две равные части. Если в середине Δ_0 функция равна нулю, то теорема доказана; если этого нет, то одна из половинок Δ_0 такова, что на концах ее наша функция принимает значения разных знаков. Обозначим именно эту половинку через Δ_1 и разделим ее на две равные части. Может случиться, что в середине Δ_1 наша функция равна нулю, и тогда теорема доказана. Если нет, то обозначим через Δ_2 ту из половинок, на концах которой f принимает значения разных знаков. Рассуждая так по индукции, мы либо наткнемся на очередном этапе рассуждений на точку $c \in (a, b)$, для которой $f(c)=0$, и тогда теорема доказана, либо получим последовательность (бесконечную) вложенных друг в друга отрезков $\Delta_1 \supset \Delta_2 \supset \ldots$, на каждом из которых f имеет значения разных знаков. Тогда существует точка c, принадлежащая всем Δ_n, следовательно, и $[a, b]$. Очевидно, $f(c)=0$, потому что, если допустить, например, что $f(c)>0$, то нашлась бы окрестность U_c точки c такая, что для всех x из $[a, b]$, принадлежащих U_c, функция $f(x)$ была бы положительной, но этого не может быть, потому что при достаточно большом n отрезок $\Delta_n \subset U_c$, а f не сохраняет знак на Δ_n. Теорема доказана.

Следствие. *Если функция f непрерывна на $[a, b]$, $f(a)=A$, $f(b)=B$ и C — произвольное число, находящееся между числами A и B $(A \neq B)$, то на интервале (a, b) найдется по крайней мере одна точка c, для которой $f(c)=C$.*

Это следствие можно сформулировать и так: *непрерывная на отрезке $[a, b]$ функция принимает все промежуточные значения между ее значениями на концах отрезка $[a, b]$.*

Доказательство. Определяем новую функцию $F(x) = f(x) - C$, где C — константа — число, находящееся между $A = f(a)$ и $B = f(b)$. Так как f — непрерывная на $[a, b]$ функция, то и F — непрерывная на $[a, b]$ функция. При этом, очевидно, F принимает на концах отрезка $[a, b]$ значения, имеющие разные знаки. Тогда, по доказанной теореме, должна найтись внутри $[a, b]$ такая точка c, что $F(c)=0$ или $f(c)-C=0$, т. е. $f(c)=C$. Это требовалось доказать.

Пример. Уравнение

$$\cos x - x = 0$$

имеет корень на интервале $(0, \pi)$.

В самом деле, функция $f(x) = \cos x - x$ непрерывна на отрезке $[0, \pi]$ и на концах его принимает значения разных знаков: $f(0)=1$, $f(\pi) = -(1+\pi)$.

Замечание. Для разрывной на $[a, b]$ функции доказанная теорема вообще не имеет места, как легко видеть на примере функции

$$f(x) = \begin{cases} -1, & -1 \leqslant x < 0 \\ 1, & 0 \leqslant x \leqslant 1. \end{cases}$$

§ 4.5. Обратная функция

Зададим какую-либо функцию $y=f(x)$ на произвольном множестве чисел (точек на прямой) E и обозначим через $E_1=f(E)$ образ E (см. § 1.3).

Каждому $y \in E_1$ приведем в соответствие множество всех $x \in E$, для которых $y=f(x)$ Это не пустое множество, обозначим его через e_y.

Таким образом, на E_1 определена функция $x=\varphi(y)$, вообще говоря, многозначная. Функция $\varphi(y)$ называется *обратной функцией по отношению* к $f(x)$.

Важно выделить тот случай, когда обратная функция однозначна. Это всегда имеет место, если функция f *строго монотонна*, т. е. строго возрастает или строго убывает на области E своего определения.

Функция f называется *строго возрастающей* (*убывающей*) на E, если из того, что $x', x'' \in E$ и $x'<x''$, следует, что $f(x')<f(x'')$ (соответственно $f(x')>f(x'')$).

Если $f(x)$ есть строго возрастающая (убывающая) функция на E, то обратная ей функция $x=\varphi(y)$, очевидно, также однозначная, строго возрастающая (убывающая) на образе $E_1=f(E)$ функция.

В этом случае, очевидно, имеют место тождества:

$$\varphi[f(x)]=x,\ x \in E; \quad f[\varphi(y)]=y,\ y \in E_1.$$

При этом удобно обозначать обратную к f функцию символом f^{-1}:

$$f^{-1}f(x)=x,\ x \in E; \quad ff^{-1}(y)=y,\ y \in E_1.$$

Теорема 1. *Пусть $y=f(x)$ есть непрерывная строго возрастающая на отрезке $[a, b]$ функция и $A=f(a)$, $B=f(b)$.*

Тогда образ $[a, b]$ есть отрезок $[A, B]$ и обратная к f функция $x=\varphi(y)$ однозначна, строго возрастает и непрерывна на $[A, B]$.

В этой теореме можно заменить «возрастающая» на «убывающая» и тогда в ее заключении надо заменить $[A, B]$ на $[B, A]$.

Доказательство. Пусть $E_1=f([a, b])$. По условию $A, B \in E_1$ и, так как функция f непрерывна на $E=[a, b]$, то и любая точка $[A, B]$ принадлежит E_1 (см. следствие теоремы 3 § 4.4 о промежуточных значениях непрерывной функции).

Если точка y не принадлежит $[A, B]$, то вследствие строгой монотонности f она не может быть образом какой-либо точки $x \in [a, b]$. Этим доказано, что образ отрезка $[a, b]$ при помощи f есть отрезок $[A, B]$. То, что обратная определенная на $[A, B]$ функция $x=\varphi(y)$ однозначна и строго монотонна, следует непосредственно из строгой монотонности $y=f(x)$ на $[a, b]$. Остается доказать непрерывность функции $x=\varphi(y)$ в любой точке $y_0 \in [A, B]$.

Пусть y_0 есть внутренняя точка $[A, B]$, т. е. $y_0 \in (A, B)$. Ей, мы уже знаем, соответствует единственная точка $x_0 \in (a, b)$ такая, что $y_0 = f(x_0)$ или $x_0 = \varphi(y_0)$.

Зададим положительное число $\varepsilon > 0$, которое будем считать настолько малым, что $[x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon] \subset [a, b]$, и пусть $y_1 = f(x_0 - \varepsilon)$, $y_2 = f(x_0 + \varepsilon)$. Из строгой монотонности f следует, что для любого $y \in (y_1, y_2)$ соответствующее значение $x = \varphi(y) \in (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$.

Таким образом, доказано, что для всякого достаточно малого $\varepsilon > 0$ именно такого, что $[x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon] \subset [a, b]$, можно подобрать окрестность (y_1, y_2) точки y_0 такую, что $|x - x_0| = |\varphi(y) - \varphi(y_0)| < \varepsilon$ для всех $y \in (y_1, y_2)$.

Сформулированное здесь свойство функции $\varphi(y)$ доказано для достаточно малых $\varepsilon > 0$. Но тогда оно, очевидно, верно и для любых $\varepsilon > 0$. Это свойство выражает тот факт, что функция $\varphi(y)$ непрерывна в точке y_0.

Для концевой точки $y_0 = B$ соответствующая точка $x_0 = b = \varphi(y_0)$. Полагаем $x_1 = b - \varepsilon > a$, $y_1 = f(x_1)$ и тогда, очевидно, будет $|\varphi(y_0) - \varphi(y)| < \varepsilon$ для всех $y \in (y_1, y_0]$.

В этом же духе рассматривается случай $y_0 = A$.

Приведем еще другое доказательство непрерывности функции $x = \varphi(y)$ (обратной к функции $y = f(x)$, непрерывной и строго монотонной на $[a, b]$). Зададим $y_0 \in [A, B]$ и произвольную последовательность точек $y_n \in [A, B]$ такую, что $y_n \to y_0$. Положим $x_0 = \varphi(y_0)$, $x_n = \varphi(y_n)$. Тогда $y_0 = f(x_0)$, $y_n = f(x_n)$. Непрерывность φ в точке y_0 будет доказана, если мы покажем, что $x_n \to x_0$.

Допустим, что это не так. Тогда найдется подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$, стремящаяся к некоторой точке $x' \in [a, b]$, отличной от x_0. В силу строгой монотонности f тогда $f(x_0) \neq f(x')$.

Но по условию $f(x_{n_k}) = y_{n_k} \to y_0 = f(x_0)$, а в силу непрерывности f

$$f(x_{n_k}) \to f(x'), \quad x_{n_k} \to x'.$$

Мы получили противоречие, потому что одна и та же последовательность $\{f(x_{n_k})\}$ не может стремиться к разным пределам.

Пример. Функция $y = \sin x$ непрерывна и строго монотонна на отрезке $[-\pi/2, \pi/2]$. Образом этого отрезка посредством функции $\sin x$ является отрезок $[-1, +1]$. На основании доказанной теоремы существует определенная на отрезке $[-\pi/2, \pi/2]$ обратная к $\sin x$ однозначная непрерывная строго возрастающая функция $x = \arcsin y$ $(-1 \leqslant y \leqslant 1)$.

Для функции $y = \sin x$, рассматриваемой на всей действительной оси, обратная функция, как известно, уже многозначна:

$$x = \operatorname{Arcsin} y = (-1)^k \arcsin y + k\pi \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots), \tag{1}$$

т. е. каждому $y \in [-1, +1]$ соответствует множество e_y значений x, определяемых формулой (1).

Теорема 2. *Пусть $y = f(x)$ есть непрерывная строго возрастающая на интервале (a, b) функция и пусть*

$$A = \inf f(x), \qquad B = \sup f(x), \qquad x \in (a, b), \tag{2}$$

где, в частности, может быть a, $A = -\infty$, b, $B = +\infty$.

Тогда образ (a, b) есть интервал (A, B) и обратная к f функция $x = \varphi(y)$ однозначна, строго возрастает и непрерывна на (A, B).

Замечание. В этой теореме можно слова «возрастающая», «возрастает» заменить на «убывающая», «убывает», но тогда образ (a, b) будет (B, A).

Из определения числа B непосредственно следует, что если оно конечно, то точка $y > B$ не может принадлежать образу $f((a, b))$. Но и число B тоже не может принадлежать $f((a, b))$, иначе существовала бы точка $x_1 \in (a, b)$ такая, что $B = f(x_1)$, и так как на интервале (a, b) можно определить точку $x_2 > x_1$, то в силу строгой монотонности f мы получили бы $f(x_2) > B = f(x_1)$, что противоречит определению B.

Подобным образом доказывается, что и число A не принадлежит $f((a, b))$, если оно конечно. Итак, образ $f((a, b))$ принадлежит (A, B). Но на самом деле эти два множества совпадают. Действительно, пусть $y \in (A, B)$. Тогда в силу определений (2) должны найтись такие x_1, $x_2 \in (a, b)$, что

$$y_1 = f(x_1) < y < f(x_2) = y_2,$$

и вследствие строгого возрастания f должно быть $x_1 < x_2$. Но функция f непрерывна на (a, b), тем более на $[x_1, x_2]$, и когда x пробегает отрезок $[x_1, x_2]$, сама она должна пробегать все значения между y_1 и y_2, следовательно, и значение y.

Это значит, что существует значение $x = \varphi(y)$ (единственное в силу строгой монотонности f) такое, что $y = f(x)$. Этим доказано, что образ интервала (a, b) есть интервал (A, B) и что определенная выше функция $x = \varphi(y)$ есть обратная к f функция.

Функция φ непрерывна в точке y, потому что φ можно также рассматривать как обратную функцию к функции f, определенной на указанном отрезке $[x_1, x_2]$, а к этой последней можно применить предыдущую теорему. Тот факт, что φ строго возрастает, очевиден. Теорема доказана.

Примечание. В теореме 2 интервалы (a, b), (A, B) можно соответственно заменить на полуинтервалы, например, на $[a, b)$, $[A, B)$ и тогда a и A — конечные числа.

Пример. Рассмотрим $\sqrt[n]{a}$, где $a > 0$ и n — натуральное число. *Арифметическим значением корня n-й степени из a* называется положительное число, n-я степень которого равна a. Это число обозначается еще так:

$$\sqrt[n]{a} = a^{1/n}. \tag{3}$$

Существование и единственность этого числа вытекает из следующих соображений. Функция

$$y = x^n \tag{4}$$

непрерывна и строго возрастает на полуинтервале $[0, \infty)$, и, кроме того, она равна нулю при $x = 0$ и стремится к $+\infty$ вместе с x. На основании теоремы 2 и примечания к ней функция $y = x^n$ имеет обратную однозначную и непрерывную функцию $x = \varphi(y)$ $(0 \leqslant y < \infty)$, строго возрастающую, равную нулю при $y = 0$ и стремящуюся к $+\infty$ вместе с y.

Таким образом, каково бы ни было $y \in [0, \infty)$, существует единственное положительное число $x = \varphi(y)$ такое, что $[\varphi(y)]^n = y$. Но тогда $\varphi(y) = y^{1/n}$.

В частности, если считать $y = a$, то мы доказали существование и единственность арифметического значения корня n-й степени из a $(a \geqslant 0)$.

§ 4.6. Показательная и логарифмическая функции

Функция a^x. Зададим положительное число $a > 0$. Если n — натуральное число, то число a^n определяется как произведение $a^n = a \ldots a$ из n сомножителей, каждый из которых равен a, а число $a^{1/n}$ — как арифметическое значение корня n-й степени из a.

Если теперь p/q $(q > 0)$ есть неотрицательная рациональная дробь, то, по определению, полагают

$$a^{p/q} = (a^p)^{1/q} = (a^{1/q})^p, \quad a^0 = 1.$$

Доказательство второго равенства в этой цепи и того факта, что это определение приводит к тому же числу, если дробь p/q будет записана в форме $np/nq = p/q$, где n — произвольное натуральное число, известно читателю из элементарной алгебры. Наконец, по определению, полагают

$$a^{-p/q} = \frac{1}{a^{p/q}}.$$

Этим определена функция a^x $(a > 0)$ для любых рациональных значений x.

Обозначим через Q множество всех рациональных чисел. Функция a^x определена на этом множестве. В курсе элементарной математики доказывается на основании только аксиом числа I — IV групп, что она удовлетворяет свойству:

$$a^{x+y} = a^x a^y, \tag{1}$$

каковы бы ни были $x, y \in Q$. Там доказывается также неравенство $a^x < a^y$ $(x < y;\ x, y \in Q,\ a > 1)$.

Но функцию a^x можно доопределить на всех иррациональных точках так, что определенная таким образом на всей действительной оси R продолженная функция, которую естественно обозначить снова через a^x, будет непрерывной всюду на R. Больше того, для продолженной функции свойство (1) выполняется уже для всех $x, y \in R$.

Начнем с того, что докажем вспомогательное неравенство (Бернулли *)).

Если $a > 1$ и N — натуральное, то $a^{1/N} = 1 + \lambda$, где $\lambda > 0$. Поэтому, учитывая формулу бинома Ньютона, получим

$$a = (1+\lambda)^N > 1 + N\lambda \text{ и } a^{1/N} - 1 < (a-1)/N.$$

Если теперь h есть произвольное положительное рациональное число, удовлетворяющее неравенствам $0 < h \leqslant 1$, то можно подобрать такое натуральное N, что $1/(N+1) < h \leqslant 1/N$. Поэтому при $a > 1$

$$a^h - 1 \leqslant a^{1/N} - 1 < \frac{a-1}{N} = \frac{N+1}{N}(a-1)\frac{1}{N+1} < 2(a-1)h.$$

На основании неравенства Бернулли получим

$$a^y - a^x = a^x(a^{y-x} - 1) \leqslant 2a^x(a-1)(y-x) \quad (x,\ y \in Q,\ 0 < y - x \leqslant 1). \tag{2}$$

Зададим произвольное положительное рациональное число c и введем новое множество Q_c, состоящее из всех $x \in Q$, которые удовлетворяют неравенству $x \leqslant c$.

Из (2) следует:

$$a^y - a^x \leqslant M(y-x) \quad (x,\ y \in Q_c,\ 0 < y - x \leqslant 1,\ M = 2(a-1)a^c), \tag{3}$$

где, таким образом, M есть константа, не зависящая от рассматриваемых x, y.

Следовательно,

$$|a^x - a^y| \leqslant M|x-y| \qquad (x,\ y \in Q_c,\ |x-y| \leqslant 1). \tag{4}$$

Зададим произвольное действительное число $x = \pm\alpha_0,\ \alpha_1\alpha_2\alpha_3\ldots$ и положим

$$x^{(n)} = \pm\alpha_0, \alpha_1 \ldots \alpha_n \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots).$$

Если $x \in Q_c$, то и $x^{(n)} \in Q_c$. Кроме того, $|x - x^{(n)}| \leqslant 10^{-n} < 1$, поэтому

$$\left|a^x - a^{x^{(n)}}\right| \leqslant M\,|x - x^{(n)}|,$$

и, следовательно, имеет место равенство

$$\lim_{n\to\infty} a^{x^{(n)}} = a^x. \tag{5}$$

Так как c может быть любым положительным рациональным числом, то мы доказали, что для всякого рационального числа x выполняется равенство (5).

Пусть теперь x есть иррациональное число, удовлетворяющее неравенству $x < c$. Так как $\lim\limits_{n\to\infty} x^{(n)} = x$, то на основании критерия Коши существования предела для любого числа $\varepsilon > 0$ найдется такое N, что

$$|x^{(n)} - x^{(m)}| < \varepsilon/M \qquad (n,\ m > N). \tag{6}$$

Это показывает в силу (4), что имеет место неравенство

$$\left|a^{x^{(n)}} - a^{x^{(m)}}\right| \leqslant M\frac{\varepsilon}{M} = \varepsilon \qquad (n, m > N),$$

*) Я. Бернулли (1654—1705) — швейцарский математик.

верное для любых указанных натуральных n, m. Но тогда последовательность чисел $\{a^{x(n)}\}$ тоже удовлетворяет условию Коши: существует предел этой последовательности при $n \to \infty$. Этот предел обозначают символом a^x, т. е. пишут

$$a^x = \lim_{n\to\infty} a^{x(n)}. \tag{7}$$

Итак, для любого действительного числа x выполняется равенство (7). Для рационального x это равенство доказано выше. Для иррационального x доказано только существование предела в правой части (7), а левая часть a^x считается равной правой по определению.

Пусть теперь x и y любые действительные числа, удовлетворяющие неравенствам $x \leqslant c$, $y \leqslant c$, $|x-y| < 1/2$. Тогда при $n > 1$

$$x^{(n)} \leqslant c,\ y^{(n)} < c,$$

$$|x^{(n)} - y^{(n)}| \leqslant |x^{(n)} - x| + |x-y| + |y - y^{(n)}| \leqslant 2\cdot 10^{-n} + \frac{1}{2} < 1$$

и

$$|a^{x^{(n)}} - a^{y^{(n)}}| \leqslant M|x^{(n)} - y^{(n)}| \qquad (n = 1, 2, \ldots), \tag{8}$$

Перейдем в полученном неравенстве к пределу при $n \to \infty$. Так как при этом $x^{(n)} \to x$, $y^{(n)} \to y$, $a^{x^{(n)}} \to a^x$, $a^{y^{(n)}} \to y$ и функция $|x|$ непрерывна, то получим

$$|a^x - a^y| \leqslant M|x-y| \tag{9}$$

при $0 < |x-y| < 1/2$. Из неравенства (9) непосредственно следует, что функция a^x непрерывна для любого $x < c$, следовательно, и для любого x, потому что c можно считать произвольным.

Имеют место свойства

$$a^x < a^y,\ \text{если}\ x < y, \tag{10}$$

$$\lim_{x\to-\infty} a^x = 0, \quad \lim_{x\to+\infty} a^x = +\infty, \tag{11}$$

$$a^{x+y} = a^x a^y. \tag{12}$$

Чтобы доказать эти свойства, будем исходить из того, что для рациональных x, y они известны из школьного курса элементарной алгебры.

Пусть λ и μ — постоянные рациональные числа такие, что $x < \lambda < \mu < y$, и пусть x_n, $y_n \in Q$ — переменные такие, что $x_n \to x$, возрастая, и $y_n \to y$, убывая. Тогда $a^{x_n} < a^\lambda < a^\mu < a^{y_n}$, а после перехода к пределу $a^x \leqslant a^\lambda < a^\mu \leqslant a^y$, и мы получили (10). Свойства (11) следуют из того, что это верно в случае, когда $x \to -\infty$, или $x \to +\infty$, пробегая рациональные значения, и из доказанной уже монотонности (см. (10)). Наконец, (12) следует из равенства $a^{x_n+y_n} = a^{x_n}a^{y_n}$ после перехода в нем к пределу.

До сих пор мы считали $a > 1$. Если $0 < a < 1$, то полагаем

$$a^x = \frac{1}{(1/a)^x}, \quad -\infty < x < \infty. \tag{13}$$

В этом случае свойство (12) функции a^x и ее непрерывность сохранятся, но теперь уже она будет строго убывать. Наконец, полагаем

$$1^x = 1 \tag{14}$$

для всех x.

Отметим еще, что при натуральном m

$$a^{xm} = a^x a^{(m-1)x} = (a^x)^2 a^{(m-2)x} = \ldots = (a^x)^m,$$

$$(a^{x/m})^m = a^x \quad \text{и} \quad a^{x/m} = (a^x)^{1/m},$$

поэтому для рационального числа $p/q > 0$

$$(a^x)^{p/q} = (a^x)^{(1/q)p} = (a^{x/q})^p = a^{x(p/q)}.$$

Далее, если y — произвольное положительное число, и $y_n \to y$, где y_n — рациональные, то

$$a^{xy} = \lim_{n\to\infty} a^{xy_n} = \lim_{n\to\infty} (a^x)^{y_n} = (a^x)^y,$$

и мы доказали, что $a^{xy} = (a^x)^y$ пока для $y > 0$. На основании (12) это равенство, очевидно, распространяется на случай произвольного y (ведь $a^{-y}a^y = a^{y-y} = a^0 = 1$).

Функция $\lg_a x$ ($a > 0$, $a \neq 1$). Пусть для определенности $a > 1$. Тогда $y = a^x$ есть функция непрерывная и строго возрастающая на всей действительной оси. При этом

$$\inf_{x\in(-\infty,+\infty)} a^x = 0, \qquad \sup_{x\in(-\infty,+\infty)} a^x = +\infty.$$

Таким образом, функция a^x отображает действительную ось $(-\infty, +\infty)$ на открытую полуось $(0, \infty)$, и обратная к ней функция по теореме 2 § 4.5 однозначна, строго возрастает и непрерывна на $(0, \infty)$. Эта функция называется *логарифмом y при основании a* и обозначается так:

$$\lg_a y.$$

Из сказанного следует, что (мы заменяем y на x)

$$\lim_{x\to+\infty} \lg_a x = +\infty, \quad \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \lg_a x = -\infty.$$

При $a < 1$ рассуждения аналогичны. Функция a^x также отображает действительную ось $(-\infty, +\infty)$ на полуось $(0, +\infty)$, но строго убывая. Обратная функция $\lg_a x$, определенная на $(0, +\infty)$, также будет строго убывать, и теперь

$$\lim_{x\to\infty} \lg_a x = -\infty, \quad \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \lg_a x = +\infty.$$

Имеют место тождества ($a \neq 1$, $a > 0$)

$$a^{\lg_a x} = x \quad (0 < x < +\infty), \quad \lg_a a^x = x \quad (-\infty < x < +\infty).$$

Отсюда на основании свойств функции a^x при x, $y > 0$ имеем

$$a^{\lg_a (xy)} = xy = a^{\lg_a x} a^{\lg_a y} = a^{\lg_a x + \lg_a y}$$

и

$$\lg_a (xy) = \lg_a x + \lg_a y.$$

Если в этом равенстве заменить x на x/y, то получим

$$\lg_a x - \lg_a y = \lg_a \frac{x}{y}.$$

Далее,

$$a^{\lg_a x^y} = x^y = \left(a^{\lg_a x}\right)^y = a^{y \lg_a x} \quad (x > 0),$$

поэтому

$$\lg_a x^y = y \lg_a x \quad (a \neq 1,\ a > 0,\ x > 0).$$

Наконец, отметим, что для положительных не равных 1 чисел a и b имеет место

$$a^{\lg_a b \cdot \lg_b a} = \left(a^{\lg_a b}\right)^{\lg_b a} = b^{\lg_b a} = a$$

и, следовательно,

$$\lg_a b \cdot \lg_b a = 1.$$

Логарифм числа a при основании e называется *натуральным логарифмом* числа a и обозначается так: $\lg_e a = \ln a$.

§ 4.7. Степенная функция x^b

Здесь b — постоянная, а x — переменная. При любом b эта функция во всяком случае определена на положительной полуоси $x > 0$ (ведь в § 4.6 мы обосновали определение числа a^x, где $a > 0$ и x произвольно).

Имеет место формула (см. § 4.6)

$$x^b = e^{b \lg x} \quad (x > 0), \tag{1}$$

с помощью которой свойства степенно́й функции можно вывести из известных уже нам свойств показательной и логарифмической функций. Очевидно, x^b есть непрерывная функция. При $b > 0$ она строго возрастает и обладает свойствами

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} x^b = 0, \quad \lim_{x \to +\infty} x^b = +\infty.$$

При $b > 0$ естественно считать, что $0^b = 0$; тогда функция x^b делается непрерывной справа в точке $x = 0$.

При $b < 0$ функция x^b непрерывна и строго убывает на положительной полуоси и обладает свойствами

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} x^b = +\infty, \quad \lim_{x \to +\infty} x^b = 0.$$

Формула (1) влечет характеристическое свойство степенно́й функции:

$$(xy)^b = x^b y^b \quad (x, y > 0).$$

На рис. 1.2 и рис. 4.11, 4.12 приведены графики функции x^b $x > 0$ для нескольких положительных и отрицательных значений b.

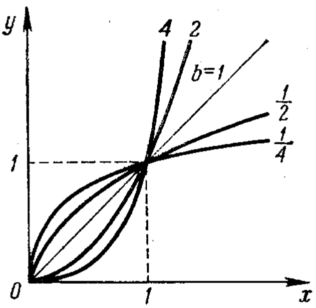

Рис. 4.11.

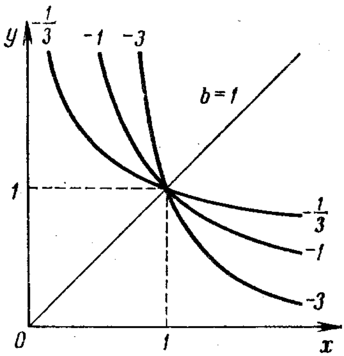

Рис. 4.12.

Степенна́я функция x^b имеет смысл как действительная функция и для отрицательных x, если b — целое или рациональное p/q, где q — нечетное.

§ 4.8. Еще о числе e

В § 3.5 рассматривалась функция

$$\alpha(n) = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

от целого аргумента n, и было показано, что если $n \to \infty$, пробегая натуральные числа, то $\alpha(n)$ стремится к пределу, который был назван числом e. Но функция $\alpha(n)$ определена на самом деле для произвольных, действительных значений n, исключая $n \in$ $\in (-1, 0]$. Мы покажем, и это важно для приложений, что

$$\lim_{n \to \infty} \alpha(n) = e, \tag{1}$$

где предел понимается как предел функции $\alpha(n)$, определенной для указанных n.

Чтобы доказать (1), достаточно убедиться в том, что (1) верно в двух случаях: когда $n \to +\infty$ и когда $n \to -\infty$, пробегая не обязательно целые значения.

Если n — положительное действительное число и $[n]$ — его целая часть, то $n < [n] + 1 \leqslant n + 1$ и очевидно, что

$$\left(1 + \frac{1}{[n]+1}\right)^{[n]+1} < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} < \left(1 + \frac{1}{[n]}\right)^{[n]+2} < e\left(1 + \frac{1}{[n]}\right)^2.$$

При $n \to +\infty$, очевидно, $[n]$, $[n] + 1 \to +\infty$, откуда первый и последний члены цепи стремятся к e. Поэтому

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} \to e \ (n \to +\infty),$$

и так как при этом

$$1+\frac{1}{n} \to 1,$$

то мы доказали (1). Пока для $n \to +\infty$.

Если теперь $n \to -\infty$, то $m = -n \to +\infty$ и

$$\lim_{n\to-\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \lim_{m\to+\infty}\left(1-\frac{1}{m}\right)^{-m} = \lim_{m\to+\infty}\left(\frac{m}{m-1}\right)^m =$$

$$= \lim_{m\to+\infty}\left(1+\frac{1}{m-1}\right)^{m-1}\left(1+\frac{1}{m-1}\right) = e,$$

т. е. доказано (1) и при $n \to -\infty$. Но тогда верно (1).

Полагая $h = 1/n$, получим еще

$$\lim_{h\to0}(1+h)^{1/h} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e.$$

§ 4.9. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x}{x}$

Целью этого параграфа является доказать, что

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x} = 1. \tag{1}$$

Функция $\psi(x) = (\sin x)/x$ определена для всех значений $x \neq 0$.

Пусть $0 < x < \pi/2$; тогда (рис. 4.13) $\sin x < x < \operatorname{tg} x$, потому что половина хорды, стягивающей дугу окружности, меньше половины дуги, которая в свою очередь меньше половины длины, объемлющей дугу ломаной. Тогда $1 < x/(\sin x) < 1/(\cos x)$, или

$$\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1. \tag{2}$$

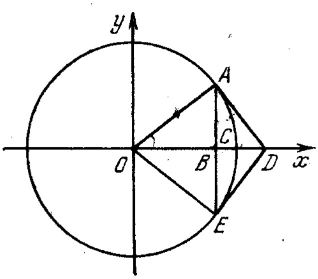

Рис. 4.13.

Эти неравенства, очевидно, верны не только для положительных, но и для отрицательных x, удовлетворяющих неравенствам $0 < |x| < \pi/2$, в силу четности входящих в (2) функций.

Функция $\cos x$ непрерывна (см. § 4.2, пример 6), поэтому

$$\lim_{x\to0}\cos x = \cos 0 = 1.$$

Перейдем в соотношениях (2) к пределу при $x \to 0$. Пределы левой и правой частей (2) равны 1, поэтому существует и притом равный 1 предел средней части (2).

§ 4.10. Порядок переменной, эквивалентность (асимптотика)

Говорят, что f *на множестве точек* E *имеет порядок* φ или еще f *есть* O *большое от* φ *на* E и пишут при этом

$$f(x) = O(\varphi(x)) \text{ на } E, \tag{1}$$

если

$$|f(x)| \leqslant C|\varphi(x)| \text{ на } E, \tag{2}$$

где C — не зависящая от x положительная константа.

В частности,

$$f(x) = O(1) \text{ на } E$$

обозначает тот факт, что f на E ограничена.

Очевидно, если $f(x) = O(\varphi_1(x))$ на E и $\varphi_1(x) = O(\varphi_2(x))$ на E, то $f(x) = O(\varphi_2(x))$ на E.

Примеры.

1. $\sin x = O(x)$ на $(-\infty, +\infty)$.
2. $x = O(x^2)$ на $[1, \infty]$ (но не на $[0, 1]$); при этом x^2 и x здесь переставить местами, очевидно, нельзя. С другой стороны, $x^2 = O(x) = O(1)$ на $[0, 1]$.

Мы будем писать

$$f(x) = o(\varphi(x)) \quad (x \to a) \tag{3}$$

и говорить, что *функция* f есть *о малое от* φ *при* $x \to a$, если

$$f(x) = \varepsilon(x)\varphi(x), \tag{3'}$$

где функция $\varepsilon(x) \to 0$ $(x \to a)$.

Мы также будем писать

$$f(x) = O(\varphi(x)) \quad (x \to a), \tag{4}$$

если существует окрестность $U(a)$ точки a (конечной и бесконечной) такая, что

$$f(x) = O(\varphi(x)) \quad (x \in U(a),\ x \neq a). \tag{4'}$$

Само собой разумеется, что определение (3), так же как и (4), предполагает, что обе функции f и φ определены на некоторой окрестности точки a, за исключением, быть может, самой точки a. Если на некоторой такой окрестности (исключая точку a) $\varphi(x) \neq 0$, то определения (3) и (4), очевидно, эквивалентны следующим: говорят, что f *есть о малое от* φ *при* $x \to a$, если

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = 0 \tag{5}$$

и *f есть O большое от φ при $x \to a$*, если существует окрестность $U(a)$, на которой, за исключением точки a, отношение $f(x)/\varphi(x)$ ограничено. Можно считать, что стремление $x \to a$ происходит только слéва ($x < a$) или справа ($x > a$), и тогда для бесконечной точки в первом случае надо считать, что $x \to +\infty$ и во втором, что $x \to -\infty$. Конечно, под окрестностью a понимается тогда правая или соответственно левая ее окрестность.

Наконец, можно считать в (3), (4), что x стремится к конечному или бесконечному пределу a, пробегая определенную последовательность $x_1, x_2, \ldots$

Очевидно, что если $f(x) = o(\varphi(x))$ $(x \to a)$, а $\varphi(x) = o(\psi(x))$ $(x \to a)$, то $f(x) = o(\psi(x))$ $(x \to a)$, потому что

$$f(x) = \varepsilon(x)\varphi(x) = \varepsilon(x)\varepsilon_1(x)\psi(x) = \varepsilon_2(x)\psi(x),$$

где $\varepsilon_2(x) = \varepsilon(x)\varepsilon_1(x) \to 0$ $(x \to a)$, так как $\varepsilon(x) \to 0$ и $\varepsilon_1(x) \to 0$.

Примеры.

1. $x^n = o(e^x)$ $(x \to +\infty)$, $(n = 1, 2, 3, \ldots)$.
2. $x^2 = o(x)$ $(x \to 0)$.
3. $x = o(x^2)$ $(x \to \infty)$.
4. $\ln x = o(x)$ $(x \to +\infty)$.
5. $x = O(\sin x)$ $(x \to 0)$.

Говорят, что функции $f_1(x)$ и $f_2(x)$ *эквивалентны* (*равны асимптотически*) при $x \to a$ и пишут

$$f_1(x) \approx f_2(x) \quad (x \to a),$$

если обе они определены и не равны нулю на некоторой окрестности точки a, за исключением, быть может, самой точки a, и если

$$\lim_{x \to a} \frac{f_1(x)}{f_2(x)} = 1. \tag{6}$$

Здесь относительно стремления x к a можно согласиться, так же как выше.

Теорема 1. *Для того чтобы две функции $f_1(x)$ и $f_2(x)$ были эквивалентными (равными асимптотически) при $x \to a$, необходимо и достаточно чтобы выполнялись свойства*

$$f_1(x) = f_2(x) + o(f_2(x)) \quad (x \to a), \qquad f_2(x) \neq 0 \quad (x \neq a). \tag{7}$$

Доказательство. Из (6) следует, что

$$\frac{f_1(x)}{f_2(x)} = 1 + \varepsilon(x) \qquad (\varepsilon(x) \to 0,\ x \to a),$$

откуда

$$f_1(x) = f_2(x) + \varepsilon(x)f_2(x) = f_2(x) + o(f_2(x)) \quad (x \to a),$$

т. е. справедливо (7).

Обратно, пусть имеет место (7). Тогда $f_1(x)=f_2(x)+\varepsilon(x)f_2(x)$, где $\varepsilon(x)\to 0$ $(x\to a)$. Отсюда

$$\frac{f_1(x)}{f_2(x)}=1+\varepsilon(x),$$

и после перехода к пределу при $x\to a$ получим (6).

Заметим, что если $f_1(x)\approx f_2(x)$ $(x\to a)$, то, очевидно, и обратно, $f_2(x)\approx f_1(x)$ $(x\to a)$.

Теорема 2. *Пусть в окрестности точки a, за исключением, быть может, ее самой, заданы три функции, $f_1(x)$, $f_2(x)$ и $\Lambda(x)$. Если $f_1(x)\approx f_2(x)$ при $x\to a$, то*

$$\lim_{x\to a}\{f_1(x)\Lambda(x)\}=\lim_{x\to a}\{f_2(x)\Lambda(x)\}. \tag{8}$$

Это равенство надо понимать в том смысле, что *если существует предел правой его части, то существует также, и притом ему равный, предел левой части, и обратно.*

Отсюда следует, что если один из пределов не существует, то не существует и второй.

Доказательство. Пусть существует предел, стоящий в правой части (8), равный A. Тогда, очевидно,

$$\lim_{x\to a}\{f_1(x)\Lambda(x)\}=\lim_{x\to a}\frac{f_1(x)}{f_2(x)}\lim_{x\to a}\{f_2(x)\Lambda(x)\}=1\cdot A=A.$$

Аналогично доказывается существование предела правой части (8) и равенство (8), если известно, что существует предел левой части (8).

Доказанная теорема очень проста и в то же время она весьма важна. Для применения ее на практике надо знать побольше случаев эквивалентных пар функций.

Ниже мы приводим ряд таких случаев.

1) $\sin x\approx x\ (x\to 0)$, потому что $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$.

2) $1-\cos x\approx \frac{1}{2}x^2\ (x\to 0)$, потому что

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{2\left(\frac{x}{2}\right)^2}{x^2}=\frac{1}{2}.$$

Второе равенство в этой цепи верно на основании теоремы 2 в силу того, что $\sin\frac{x}{2}\approx\frac{x}{2}\ (x\to 0)$.

3) $e^h-1\approx h\ (h\to 0)$, потому что, если положить $e^h-1=z$, то $e^h=1+z$, $h=\ln(1+z)$ и

$$\lim_{h\to 0}\frac{e^h-1}{h}=\lim_{z\to 0}\frac{z}{\ln(1+z)}=\lim_{z\to 0}\frac{1}{\ln(1+z)^{1/z}}=\frac{1}{\ln e}=1.$$

При этом предпоследнее равенство верно, потому что $\ln u$ есть функция непрерывная для $u > 0$ и, в частности, в точке $u = e$.

4) $\ln(1+u) \approx u$ $(u \to 0)$, потому что

$$\lim_{u\to 0} \frac{\ln(1+u)}{u} = \lim_{u\to 0} \ln(1+u)^{1/u} = \ln e = 1.$$

5) $\sqrt[n]{1+u} - 1 \approx \frac{u}{n} (u \to 0), n = 1, 2, \ldots,$ потому что

$$\frac{\sqrt[n]{1+u}-1}{\frac{u}{n}} = \frac{u}{\frac{u}{n}[(1+u)^{(n-1)/n} + (1+u)^{(n-2)/n} + \ldots + 1]} \to 1 \ (u \to 0).$$

Учесть, что функция $(1+u)^\alpha$ непрерывна в точке $u = 0$.

6) $\operatorname{tg} x \approx x$ $(x \to 0)$, потому что

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = \lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x} \cdot \frac{1}{\cos x}\right) = 1,$$

так как $\cos x$ — непрерывная функция.

Например, в силу 2) и 5) и теоремы 2

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[3]{1+x^2}-1}{1-\cos x} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{x^2}{3}}{\frac{x^2}{2}} = \frac{2}{3}. \tag{9}$$

Полезно следующее определение. Если для функции $\varphi(x)$ можно подобрать числа α и m, где $\alpha \neq 0$, такие, что $\varphi(x) \approx \alpha x^m$, $x \to 0$, то говорят, что *функция* αx^m *есть главный степенной член функции* $\varphi(x)$. Очевидно, что числа α, m однозначно зависят от функции $\varphi(x)$.

Правые части асимптотических равенств 1)—6) суть, очевидно, главные степенные члены левых частей. Общие методы нахождения главных степенных членов в более сложных случаях основаны на применении формулы Тейлора (см. далее § 5.11, примеры 3, 4, и § 5.14).

Если αx^m, βx^n $(\alpha, \beta \neq 0)$ суть, соответственно, главные степенные члены функций φ и ψ, то на основании теоремы 2

$$\lim_{x\to 0} \frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{\alpha x^m}{\beta x^n} = \begin{cases} \frac{\alpha}{\beta} & (m = n), \\ 0 & (m > n), \\ \infty & (m < n). \end{cases} \tag{10}$$

Это рассуждение в частном случае было проведено при вычислении предела (9).

Глава 5

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ДЛЯ ФУНКЦИЙ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

§ 5.1. Производная

Перед чтением этой главы мы рекомендуем читателю прочесть еще раз § 1.5, где говорилось о том, как возникает понятие производной. А сейчас мы начинаем сразу с формального определения производной.

Производной от функции f в точке x называется предел, к которому стремится отношение ее приращения Δy в этой точке к соответствующему приращению Δx аргумента, когда последнее стремится к нулю:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}. \tag{1}$$

Заметим, что при фиксированном x величина $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ есть вполне определенная функция от Δx:

$$\psi(\Delta x) = \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Если функция f определена в некоторой окрестности точки x, то функция $\psi(\Delta x)$ определена для достаточно малых, не равных нулю Δx, т. е. для Δx, удовлетворяющих неравенству $0 < |\Delta x| < \delta$, где δ достаточно малое положительное число. При $\Delta x = 0$ она заведомо не определена. Вопрос о существовании производной функции f в точке x эквивалентен вопросу о существовании предела функции $\psi(\Delta x)$ в точке $\Delta x = 0$.

Теорема 1. *Если функция f имеет производную в точке x, то она непрерывна в этой точке.*

Доказательство. Из существования конечного предела (1) следует, что

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) + \varepsilon(\Delta x),$$

где $\varepsilon(\Delta x) \to 0$ при $\Delta x \to 0$. Отсюда

$$\Delta y = f'(x)\Delta x + \varepsilon(\Delta x)\Delta x = f'(x)\Delta x + o(\Delta x) \quad (\Delta x \to 0)$$

и

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0.$$

А это последнее равенство выражает, что функция f в точке x непрерывна.

Утверждение обратное теореме 1 не верно: если функция f непрерывна в точке x, то отсюда не следует, что она имеет производную в этой точке (см. ниже).

Говорят, что *f имеет в точке x бесконечную производную, равную* $+\infty$ *или* $-\infty$ (случай ∞ исключается), если в этой точке $f'(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = +\infty$ или соответственно $f'(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = -\infty$.

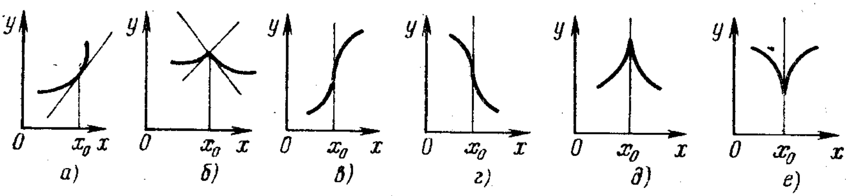

Рис. 5.1.

Наконец, введем понятия *правой* и *левой производной от f в точке x*:

$$f'_+(x) = \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta x > 0}} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \psi(0+0), \quad f'_-(x) = \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta x < 0}} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \psi(0-0).$$

Для того чтобы существовала производная $f'(x)$, очевидно, необходимо и достаточно, чтобы существовали производные от f в точке x справа и слева и были равны между собой и тогда автоматически они равны $f'(x)$.

Это утверждение верно также, если в нем термин «производная» заменить на «бесконечная производная».

Функция, изображенная на рис. 5.1, *а*, имеет производную в точке x_0 — график в этой точке имеет (см. § 1.5) касательную (единственную). Функция, изображенная на рис. 5.1, *б*, не имеет производной, но существуют $f'_+(x_0)$ и $f'_-(x_0)$, не равные друг другу. Функции, изображенные на рис. 5.1, *в*, *г*, имеют бесконечные производные $f'(x_0) = +\infty$ и $f'(x_0) = -\infty$ соответственно, а функции на рис. 5.1, *д* и *е* не имеют производной в точке x_0. В случае рис. 5.1, *д* $f'_-(x_0) = +\infty$, $f'_+(x_0) = -\infty$, а в случае рис. 5.1, *е* $f'_-(x_0) = -\infty$, $f'_+(x_0) = +\infty$.

Надо иметь в виду, что производная от функции в точке x есть функция от x. С этой точки зрения обозначение $f'(x)$ является весьма удобным, $f'(a)$ обозначает число — производную от функции f в точке a.

В § 1.5 были выведены формулы (1) — (4) производной от x^n ($n = 0, 1, \ldots$), $\sin x$ и $\cos x$. Ниже выводится производная от показательной функции a^x ($a > 0$):

$$(a^x)' = \lim_{h\to 0} \frac{a^{x+h} - a^x}{h} = \lim_{h\to 0} a^x \frac{a^h - 1}{h} =$$

$$= a^x \lim_{z\to 0} \frac{z}{\lg_a (1+z)} = a^x \frac{1}{\lim\limits_{z\to 0} \lg_a (1+z)^{1/z}} =$$

$$= \frac{a^x}{\lg_a e} = a^x \ln a. \qquad (2)$$

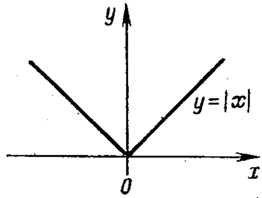

Рис. 5.2.

Здесь мы воспользовались подстановкой $a^h - 1 = z \to 0$ ($h \to 0$) и тем фактом, что функция $\lg_a u$ для $u > 0$, в частности, при $u = e$, непрерывна.

Если в последнем равенстве положить $a = e$, то получим

$$(e^x)' = e^x. \qquad (3)$$

Рассмотрим функцию (рис. 5.2)

$$y = |x| = \begin{cases} x, & x \geqslant 0, \\ -x, & x < 0. \end{cases}$$

При $x = 0$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{|0+h| - |0|}{h} = \frac{|h|}{h} \to \begin{cases} 1 & (h > 0,\ h \to 0), \\ -1 & (h < 0,\ h \to 0). \end{cases}$$

Производная от $|x|$ в точке $x = 0$ не существует, потому что правая производная в этой точке отлична от левой; в остальных точках производная от $|x|$ существует и равна

$$|x|' = \operatorname{sign} x = \begin{cases} +1, & x > 0, \\ -1, & x < 0. \end{cases}$$

Из рассмотрения графика видно, что функция $|x|$ непрерывна для любого x, в том числе и в точке $x = 0$. Это видно также из следующих выкладок:

$$||x+h| - |x|| \leqslant |x+h-x| = |h| \to 0 \quad (h \to$$

Функция $|x|$ интересна тем, что она непрерывна для любого x, но имеется такое значение x, именно $x = 0$, для которого она не имеет производной. В точке $x = 0$ графика этой функции не существует касательной.

Пример функции $|x|$ показывает, что обратное теореме 1 утверждение неверно.

В математике известны примеры функций f, непрерывных на отрезке $[a, b]$ и не имеющих производной ни в одной точке этого отрезка (функция Вейерштрасса). Их графики невозможно нарисовать, но они могут быть заданы с помощью некоторых формул. Эти примеры мы не приводим здесь.

Пример 1. Функция

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{для рациональных } x, \\ x^2 & \text{для иррациональных } x \end{cases}$$

разрывна во всех точках $x \neq 0$, но в точке $x = 0$ имеет производную $f'(0) = 0$, потому что для h рациональных $\frac{f(h) - f(0)}{h} = \frac{0 - 0}{h} = 0$ и для h иррациональных $\frac{f(h) - f(0)}{h} = \frac{h^2 - 0}{h} = h \to 0 \ (h \to 0)$.

Пример 2. Функция

$$f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x} & \text{при } x \neq 0, \\ 0 & \text{при } x = 0 \end{cases}$$

непрерывна на $(-\infty, \infty)$; для всех $x \neq 0$ она имеет производную, но в точке $x = 0$ она не имеет даже правой производной и левой, потому что величина $\frac{f(h) - f(0)}{h} = \sin \frac{1}{h}$ не имеет предела, когда $h \to 0$, оставаясь положительным или отрицательным

Если функции $u(x)$ и $v(x)$ имеют производные в точке x, то их сумма, разность, произведение и частное (при условии, что $v(x) \neq 0$) имеют производные и справедливы равенства

$$(u \pm v)' = u' \pm v', \tag{4}$$

$$(uv)' = uv' + u'v, \tag{5}$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{vu' - uv'}{v^2} \quad (v \neq 0). \tag{6}$$

Доказательство (4) приведено в § 1.5. Докажем (5), (6). Придадим независимой переменной x приращение Δx. Пусть соответствующие приращения u и v будут Δu и Δv. Тогда

$$(uv)' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta (uv)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(u + \Delta u)(v + \Delta v) - uv}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} u \frac{\Delta v}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to 0} v \frac{\Delta u}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} \Delta v = uv' + vu',$$

потому что из того, что v имеет производную, следует, что она непрерывна, т. е. что $\Delta v \to 0$ при $\Delta x \to 0$.

В частности, если C — постоянная, то $(Cu)' = Cu' + C'u = Cu'$, потому что $C' = 0$.

Докажем (6):

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\Delta x}\left(\frac{u + \Delta u}{v + \Delta v} - \frac{u}{v}\right) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{v\frac{\Delta u}{\Delta x} - u\frac{\Delta v}{\Delta x}}{v(v + \Delta v)} = \frac{vu' - uv'}{v^2}.$$

Несколько основных формул дифференцирования

1. $$\left(\frac{1}{x}\right)' = \frac{x \cdot 1' - 1 \cdot x'}{x^2} = \frac{-1}{x^2} \qquad (x \neq 0).$$

Более общая формула

$$\left(\frac{1}{x^n}\right)' = \frac{x^n \cdot 1' - 1(x^n)'}{x^{2n}} = \frac{-nx^{n-1}}{x^{2n}} = -\frac{n}{x^{n+1}} \qquad (n = 1,\ 2 \ldots;\ x \neq 0).$$

Таким образом, справедлива формула

$$(x^n)' = nx^{n-1} \quad (n = 0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \ldots), \tag{7}$$

обобщающая формулу § 1.5 (1) на любые целые n.

Дальше мы увидим, что она остается верной и для нецелых n.

2. $$(\operatorname{tg} x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{\cos x\,(\sin x)' - \sin x\,(\cos x)'}{\cos^2 x} =$$
$$= \frac{\cos x \cos x - \sin x\,(-\sin x)}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x. \tag{8}$$

3. $$(\operatorname{ctg} x)' = \left(\frac{\cos x}{\sin x}\right)' = \frac{\sin x\,(\cos x)' - \cos x\,(\sin x)'}{\sin^2 x} =$$
$$= \frac{-\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin^2 x} = -\operatorname{cosec}^2 x. \tag{9}$$

§ 5.2. Дифференциал функции

Если функция f имеет в точке x производную, то существует предел

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x), \qquad \Delta y = f(x + \Delta x) - f(x).$$

Отсюда следует, что $\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) + \varepsilon(\Delta x)$, где $\varepsilon(\Delta x) \to 0$ при $\Delta x \to 0$. Таким образом,

$$\Delta y = f'(x)\Delta x + \varepsilon(\Delta x)\Delta x; \quad \varepsilon(\Delta x) \to 0 \quad \text{при} \quad \Delta x \to 0 \tag{1}$$

или

$$\Delta y = f'(x)\Delta x + o(\Delta x) \quad (\Delta x \to 0). \tag{1'}$$

Если ввести обозначение $A = f'(x)$, то равенство (1) можно записать следующим образом:

$$\Delta y = A\Delta x + o(\Delta x) \quad (\Delta x \to 0). \tag{2}$$

Говорят, что функция f *дифференцируема в точке* x, если ее приращение Δy в этой точке можно записать в виде (2), где A — некоторая константа, не зависящая от Δx (но вообще зависящая от x).

Из сказанного следует, что *если функция f имеет в точке x производную, то она дифференцируема в этой точке* ($A=f'(x)$).

Верно и обратное утверждение: *если функция f дифференцируема в точке x, т. е. ее приращение в точке x представимо в виде* (2), *то она имеет производную в точке x, равную числу A.*

В самом деле, пусть приращение Δy в точке x представимо в виде (2). Разделим обе части (2) на Δx и перейдем к пределу. Тогда

$$f'(x)=A+\lim_{\Delta x\to 0}\frac{o(\Delta x)}{\Delta x}=A+\lim_{\Delta x\to 0}o(1)=A.$$

Таким образом, *для того чтобы функция f имела производную в точке x, необходимо и достаточно чтобы она была дифференцируемой в этой точке.*

Равенство (2) показывает, что если $A=f'(x)\neq 0$, то приращение функции эквивалентно при $\Delta x\to 0$ первому слагаемому правой части (2):

$$\Delta y\approx A\Delta x\quad(\Delta x\to 0).$$

В этом случае (когда $A\neq 0$) член $A\Delta x$ называется *главным линейным членом приращения.* Главный член линейно (точнее, пропорционально) зависит от Δx. *Приближенно, пренебрегая бесконечно малой $o(\Delta x)$ высшего порядка, при малых Δx можно считать Δy равным главному члену.*

Главный линейный член приращения называют *дифференциалом* функции f в точке x (соответствующим приращению Δx независимой переменной x) и обозначают так:

$$dy=df=f'(x)\Delta x.$$

В целях симметрии приращение Δx независимой переменной обозначают еще через dx, полагая, таким образом, $\Delta x=dx$. Это соглашение не противоречит выражению $dx=x'\Delta x=\Delta x$ для дифференциала функции $y=x$ от x.

Таким образом, дифференциал функции f в точке x запишется так:

$$dy=f'(x)dx. \tag{3}$$

Из этого равенства следует, что *производная от f в точке x равна $f'(x)=\frac{dy}{dx}$, т. е. она равна отношению дифференциала функции f в точке x к соответствующему дифференциалу независимой переменной x.*

Надо иметь в виду, *что дифференциал dx независимой переменной не зависит от x, он равен Δx — произвольному приращению аргумента x. Что же касается дифференциала dy функции y (отличной от x), то он зависит от x и dx* (см. (3)).

Можно дать геометрическое представление указанных понятий.

Рассмотрим (рис. 5.3) график функции $y = f(x)$; A и B суть точки графика, соответствующие значениям x и $x+\Delta x$ независимой переменной. Ординаты точек A и B соответственно равны $f(x)$ и $f(x+\Delta x)$. Приращение функции $\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x)$ в точке x равно длине отрезка BD и представляется в виде суммы $\Delta y = BD = DC + CB$, где $DC = \operatorname{tg} \alpha \, \Delta x = f'(x)\Delta x$ и α есть угол между касательной в точке A к графику и положительным направлением оси x.

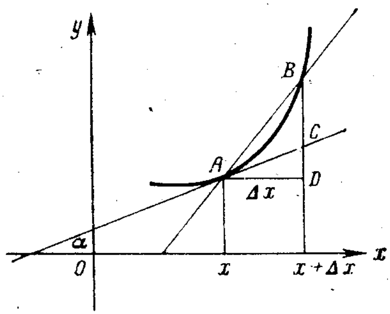

Рис. 5.3.

Мы видим, что отрезок DC есть дифференциал функции f в точке x:

$$DC = dy = f'(x)\Delta x.$$

Таким образом, на долю второго члена CB приращения Δy приходится величина $o(\Delta x)$. Эта величина при больших Δx может быть даже больше, чем главный член, но она есть бесконечно малая более высокого порядка, чем Δx, когда $\Delta x \to 0$. При $f'(x) \neq 0$ для всякого $\varepsilon > 0$ можно указать такое $\delta > 0$, что при всех Δx, удовлетворяющих неравенству $|\Delta x| < \delta$, имеет место неравенство $CB/DC < \varepsilon$.

Отметим очевидные формулы:

$$d(u \pm v) = (u \pm v)'\,dx = u'\,dx \pm v'\,dx = du \pm dv, \tag{4}$$

$$d(uv) = (uv)'\,dx = (uv' + u'v)\,dx = u\,dv + v\,du, \tag{5}$$

$$d\left(\frac{u}{v}\right) = \left(\frac{u}{v}\right)' dx = \frac{v\,du - u\,dv}{v^2}. \tag{6}$$

Пример. Нужно прикинуть, сколько материала истрачено на изготовление коробки кубической формы, если известно, что внутренний размер ребра коробки равен 10 *см*, а толщина стенок равна 0,1 *см*.

Объем куба есть функция $V(a) = a^3$ от длины его ребра a. Объем стенок коробки определяется как приращение функции

$$\Delta V = V(10 + 0,1) - V(10) \approx V'(10) \cdot 0,1 =$$
$$= 0,1\,[3a^2]_{a=10} = 300 \cdot 0,1 = 30\ (см^3).$$

§ 5.3. Производная функции от функции

Теорема. *Пусть задана функция от функции $z = F(x) = f(\varphi(x))$, где $y = \varphi(x)$, $z = f(y)$. При этом функция φ имеет производную в точке x, а функция f имеет производную в точке y. Тогда существует производная от F в точке x, равная*

$$F'(x) = f'(y)\varphi'(x). \tag{1}$$

Доказательство. Так как функция f имеет производную в точке y, то она дифференцируема в этой точке (см. предыдущий параграф), т. е.

$$\Delta z = f'(y)\Delta y + \varepsilon(\Delta y)\Delta y \qquad (\varepsilon(\Delta y) \to 0 \text{ при } \Delta y \to 0). \qquad (2)$$

Будем считать, что $\varepsilon(0) = 0$. Равенство (2) при таком соглашении останется верным ($0 = f'(y)0 + 0, 0$).

Зададим приращение Δx независимой переменной x. Оно влечет за собой определенное приращение Δy функции $y = \varphi(x)$, которое, в свою очередь, влечет за собой приращение Δz функции $z = f(y)$, выраженное через Δy по формуле (2).

Но полученное число Δz есть в то же время приращение функции $z = F(x)$, соответствующее взятому нами приращению Δx в точке x.

Разделив обе части равенства (2) на Δx, получим

$$\frac{\Delta z}{\Delta x} = f'(y)\frac{\Delta y}{\Delta x} + \varepsilon(\Delta y)\frac{\Delta y}{\Delta x}. \qquad (3)$$

Перейдя теперь к пределу при $\Delta x \to 0$, получим производную

$$F'(x) = \lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta z}{\Delta x} = f'(y)\lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} + \lim_{\Delta y \to 0}\varepsilon(\Delta y)\lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} =$$

$$= f'(y)\varphi'(x) + 0\cdot\varphi'(x) = f'(y)\varphi'(x).$$

Заметим, что соглашение, что $\varepsilon(0) = 0$, было сделано на тот случай, когда при некоторых $\Delta x \neq 0$ будет $\Delta y = 0$.

Формула (1) может быть усложнена. Например, если $z = f(y)$, $y = \varphi(x)$, $x = \psi(\xi)$ и все три функции имеют производные в соответствующих точках, то $z'_\xi = z'_y y'_x x'_\xi$.

Пример 1. Чтобы вычислить производную по переменной x от функции $z = \cos(\sin^3 x^2)$, вводим цепочку вспомогательных функций:

$$z = \cos u, \quad u = v^3, \quad v = \sin w, \quad w = x^2.$$

Тогда

$$\frac{dz}{dx} = (\cos u)'(v^3)'(\sin w)'(x^2)' =$$

$$= -\sin u\,(3v^2)\cos w\cdot 2x = -6x\cos x^2\sin^2 x^2\sin(\sin^3 x^2).$$

Функции

$$\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad \operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2},$$

$$\operatorname{th} x = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}, \qquad \operatorname{cth} x = \frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x}$$

называются соответственно *гиперболическими синусом, косинусом, танген-*

сом, котангенсом. Очевидно,

$$(\operatorname{sh} x)' = \frac{1}{2}\left(e^{x} + e^{-x}\right) = \operatorname{ch} x, \tag{4}$$

$$(\operatorname{ch} x)' = \frac{1}{2}\left(e^{x} - e^{-x}\right) = \operatorname{sh} x, \tag{5}$$

$$(\operatorname{th} x)' = \frac{\operatorname{ch} x\,(\operatorname{sh} x)' - \operatorname{sh} x\,(\operatorname{ch} x)'}{(\operatorname{ch} x)^2} = \frac{(\operatorname{ch} x)^2 - (\operatorname{sh} x)^2}{(\operatorname{ch} x)^2} = \frac{1}{(\operatorname{ch} x)^2}, \tag{6}$$

$$(\operatorname{cth} x)' = \left(\frac{1}{\operatorname{th} x}\right)' = -\frac{(\operatorname{th} x)'}{(\operatorname{th} x)^2} = -\frac{1}{(\operatorname{ch} x)^2}\,\frac{(\operatorname{ch} x)^2}{(\operatorname{sh} x)^2} = -\frac{1}{(\operatorname{sh} x)^2}. \tag{7}$$

Другое доказательство теоремы. Рассмотрим некоторую последовательность значений $\Delta x \to 0$.

Если ее значения вызывают соответствующие $\Delta y \neq 0$, то

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta z}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{\Delta z}{\Delta y} \cdot \frac{\Delta y}{\Delta x}\right) = z'_y y'_x.$$

Другой характерный случай, если значения Δx рассматриваемой последовательности вызывают $\Delta y = 0$. Тогда $\Delta z = 0$, и

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta z}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{0}{\Delta x} = 0 = z'_y y'_x.$$

Последнее равенство в этой цепи верно потому, что в этом случае, очевидно, необходимо $y'_x = 0$.

Если теперь последовательность значений $\Delta x \to 0$ произвольна, то из нее всегда можно выделить подпоследовательность первого или второго вида. В обоих случаях предел $\frac{\Delta z}{\Delta x}$ $(\Delta x \to 0)$ существует и равен $z'_y y'_x$. Но тогда существует предел $\frac{\Delta z}{\Delta x}$ для нашей последовательности (см. § 4.1, теорема 9), равный, очевидно, $z'_y y'_x$.

§ 5.4. Производная обратной функции

Пусть на интервале (a, b) задана непрерывная строго монотонная, т. е. строго возрастающая или строго убывающая, функция $y = f(x)$. Пусть образ (a, b) есть интервал (A, B). Тогда обратная к f функция $x = \varphi(y)$ есть однозначная непрерывная и строго монотонная на (A, B) функция (см. § 4.5).

Зафиксируем $x \in (a, b)$ и дадим ему приращение $(x + \Delta x \in (a, b))$. Тогда f получит соответствующее приращение Δy $(y, y + \Delta y \in (A, B))$, такое, что $y + \Delta y = f(x + \Delta x)$.

Наоборот, $\varphi(y + \Delta y) = x + \Delta x$.

Вследствие непрерывности прямой и обратной функций для указанных Δx и Δy имеет место утверждение: из $\Delta x \to 0$ следует $\Delta y \to 0$, и обратно.

Пусть теперь функция φ в точке y имеем неравную нулю производную $\varphi'(y)$. Покажем, что в таком случае функция f также имеет в соответствующей точке x производную. В самом деле,

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{1}{\dfrac{\Delta x}{\Delta y}}.$$

Так как из того, что $\Delta x\to 0$, следует, что $\Delta y\to 0$, то

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{1}{\lim\limits_{\Delta y\to 0}\dfrac{\Delta x}{\Delta y}}=\frac{1}{\varphi'(y)},$$

и мы получили

$$f'(x)=\frac{1}{\varphi'(y)} \tag{1}$$

или

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\dfrac{dx}{dy}}. \tag{1'}$$

Этим доказано, что *если $y=f(x)$ есть строго монотонная непрерывная функция и $x=\varphi(y)$ — обратная к ней функция, имеющая в точке y производную $\varphi'(y)\neq 0$, то функция f имеет в соответствующей точке x производную, определяемую формулой* (1).

Может случиться, что в точке y $\lim\limits_{\Delta y\to 0}\dfrac{\Delta x}{\Delta y}=\infty$. В этом случае, очевидно, функция f имеет в точке x производную $f'(x)=0$.

Если же $\lim\limits_{\Delta y\to 0}\dfrac{\Delta x}{\Delta y}=0$, то для строго возрастающей функции при этом $\Delta x/\Delta y>0$, а для строго убывающей $\Delta x/\Delta y<0$. В первом случае $f'(x)=+\infty$, а во втором $f'(x)=-\infty$.

Производная $\lg_a x$. На основании доказанной теоремы, если $y=\lg_a x$, то

$$(\lg_a x)'=\frac{1}{(a^y)'}=\frac{1}{a^y\ln a}=\frac{1}{x\ln a}=\frac{\ln_a e}{x}\quad(a>0).$$

В случае натурального логарифма производная имеет особенно простой вид

$$(\ln x)'=\frac{1}{x}.$$

Этим объясняется, что в математическом анализе, по крайней мере в теоретических рассуждениях, предпочитают рассматривать логарифмические функции при основании e.

Функция $\ln x$ как действительная функция определена только для положительных значений x *).

*) Для отрицательных x функция $\ln x$ также может быть естественно определена как комплексная функция. Но эти вопросы нас здесь не интересуют.

Но можно рассматривать функцию $\ln|x|$, которая определена как для положительных, так и для отрицательных x. Ее график симметричен относительно оси y, а для положительных x совпадает с графиком $\ln x$ (рис. 5.4).

Функция $\ln|x|$ будет играть большую роль в интегральном исчислении. Ее производная при $x \neq 0$ равна

$$(\ln|x|)' = \frac{1}{|x|}\operatorname{sign} x = \frac{1}{x} \quad (x \neq 0),$$

где

$$\operatorname{sign} x = \begin{cases} 1 \text{ для } x > 0, \\ -1 \text{ для } x < 0. \end{cases}$$

(См. далее § 8.1, второй пример таблицы неопределенных интегралов.)

Для производной от степенной функции $x^n (x > 0)$, где n — любое действительное число, имеет место формула

$$(x^n)' = \left(e^{n\ln x}\right)' = \frac{n}{x}e^{n\ln x} = nx^{n-1}, \tag{8}$$

обобщающая формулу § 1.5, (1).

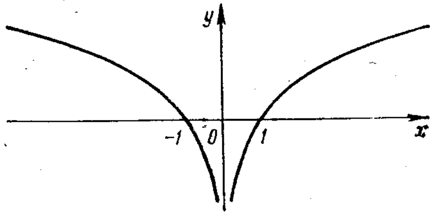

Рис. 5.4.

Производные обратных тригонометрических функций. Функция $y = \arcsin x$ строго возрастает на отрезке $[-1, +1]$ и отображает этот отрезок на $[-\pi/2, \pi/2]$. Обратная к ней функция $x = \sin y$ имеет производную $(\sin y)' = \cos y$, положительную на интервале $(-\pi/2, \pi/2)$. Поэтому

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{(\sin y)'} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad (-1<x<1).$$

Следовательно,

$$(\arccos x)' = \left(\frac{\pi}{2} - \arcsin x\right)' = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} \quad (-1 < x < 1).$$

Здесь берется арифметическое значение корня (со знаком «+»). Функция $y = \operatorname{arctg} x$ строго возрастает на действительной оси $(-\infty, +\infty)$ и отображает ее на интервал $(-\pi/2, \pi/2)$. Обратная к ней функция $x = \operatorname{tg} y$ имеет производную $(\operatorname{tg} y)' = \sec^2 y$, не равную нулю на этом интервале. Поэтому

$$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{(\operatorname{tg} y)'} = \frac{1}{\sec^2 y} = \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 y} = \frac{1}{1+x^2} \quad (-\infty < x < \infty).$$

Упражнение. Доказать равенство $(\lg_x a)' = -\dfrac{(\lg_x a)^2}{x\ln a}$.

§ 5.5. Таблица производных простейших элементарных функций

$(C)' = 0$ (C — постоянная);

$(x^n)' = nx^{n-1}$ ($n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$);

$(a^x)' = \ln a \cdot a^x$ ($a > 0$);

$(x^a)' = ax^{a-1}$ ($x > 0$);

$$(\lg_a x)' = \frac{\lg_a e}{x} \quad (x > 0,\ a > 0);$$

$$(\ln x)' = \frac{1}{x} \quad (x > 0);$$

$$(\ln |x|)' = \frac{1}{x} \quad (x \neq 0);$$

$$(|x|)' = \operatorname{sign} x = \begin{cases} 1 & (x > 0); \\ -1 & (x < 0); \end{cases}$$

$(\sin x)' = \cos x$;

$(\cos x)' = -\sin x$;

$(\operatorname{tg} x)' = \sec^2 x$;

$(\operatorname{ctg} x)' = -\operatorname{cosec}^2 x$;

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}};$$

$$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}};$$

$$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2};$$

$(\operatorname{sh} x)' = \operatorname{ch} x$;

$(\operatorname{ch} x)' = \operatorname{sh} x$;

$$(\operatorname{th} x)' = \frac{1}{(\operatorname{ch} x)^2};$$

$$(\operatorname{cth} x)' = -\frac{1}{(\operatorname{sh} x)^2}.$$

Упражнения.

Показать, что *)

1. $$\frac{d}{dx}\sqrt{ax^2+bx+c} = \frac{2ax+b}{2\sqrt{ax^2+bx+c}}.$$

2. $$\frac{d}{dx}\ln\left(x+\sqrt{a^2+x^2}\right) = \frac{1}{\sqrt{a^2+x^2}}.$$

3. $$\left(\arcsin\frac{x}{a}\right)' = \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}.$$

4. $\left(\arcsin\frac{1}{x}\right)' = \mp\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$ (верхний знак соответствует $x > 0$, а нижний $x < 0$).

5. $(x^x)' = (e^{x\ln x})' = x^x(1+\ln x)$.

6. $(\ln|\operatorname{tg} x|)' = \dfrac{1}{\sin x\cos x}$, откуда $\left(\ln\left|\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}\right|\right)' = \dfrac{1}{\sin x}$.

7. $$\frac{a^2}{2}\left(\arcsin\frac{x}{a} + \frac{x}{a^2}\sqrt{a^2-x^2}\right)' = \sqrt{a^2-x^2}.$$

8. $$(|x|^p)' = \begin{cases} p|x|^{p-2}x, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases} \quad (p > 1).$$

---

*) Формулы 1—7 полезно иметь в виду при вычислении неопределенных интегралов.

§ 5.6. Производные и дифференциалы высшего порядка

Производная от функции f есть снова функция. Поэтому можно попытаться взять от нее производную. Полученная функция (если она существует) называется *второй производной от* $f(x)$ и обозначается через $f''(x)$. Таким образом,

$$f''(x) = (f'(x))'.$$

По индукции, *производная* $f^{(n)}(x)$ *порядка* n определяется как первая производная от производной $f^{(n-1)}(x)$ порядка $(n-1)$:

$$f^{(n)}(x) = (f^{(n-1)}(x))'.$$

Конечно, производная n-го порядка от данной функции f в данной точке x может существовать и не существовать.

Если говорят, что функция f имеет производную n-го порядка в точке x, то этим самым утверждают, что она имеет в достаточно малой окрестности точки x производную $f^{(n-1)}(x)$ порядка $(n-1)$, которая имеет производную в точке x. Эта последняя обозначается через $f^{(n)}(x)$ и называется производной порядка n от f в точке x.

Функция x^m, где m — целое положительное число, имеет на всей действительной оси производную любого порядка

$$(x^m)^{(n)} = m(m-1)\ldots(m-n+1)x^{m-n}.$$

При $n > m$ $(x^m)^{(n)} \equiv 0$.

Степенная функция x^a, где a — произвольное действительное число, имеет для $x > 0$ производную любого порядка n, определяемую по аналогичной формуле

$$(x^a)^{(n)} = a(a-1)\ldots(a-n+1)x^{a-n}. \tag{1}$$

Очевидно,

$$(a^x)^{(n)} = (\ln a)^n a^x \quad (-\infty < x < \infty), \tag{2}$$

и, в частности,

$$(e^x)^{(n)} = e^x \quad (-\infty < x < \infty). \tag{3}$$

Нетрудно проверить формулы

$$(\sin x)^{(n)} = \sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right) \quad (n = 1, 2, \ldots), \tag{4}$$

$$(\cos x)^{(n)} = \cos\left(x + n\frac{\pi}{2}\right). \tag{5}$$

Если $s = f(t)$ есть функция, выражающая зависимость прямолинейного пути, пройденного точкой, от времени t, то вторая производная $s'' = f''(t)$ есть ускорение точки в момент t. В дальнейшем мы увидим, что знание второй производной от функции имеет большое значение при изучении поведения ее графика.

Формула Лейбница. Если функция $f = uv$, где u и v в свою очередь функции, имеющие в некоторой точке производные порядка n, то f имеет производную n-го порядка в этой точке, выражаемую по формуле Лейбница:

$$f^{(n)} = uv^{(n)} + C_n^1 u'v^{(n-1)} + C_n^2 u''v^{(n-2)} + \ldots + u^{(n)}v = \sum_{l=0}^{n} C_n^l u^{(l)} v^{(n-l)}, \tag{6}$$

где C_n^l — биномиальные коэффициенты и $u^{(0)} = u$ (см. § 5.9, (6) и (7)).

Доказательство этой формулы проводится по индукции. При $n = 1$ она очевидна. Если предположить, что она верна при n, то ее верность при $n + 1$ получается из следующих выкладок:

$$f^{(n+1)} = \frac{d}{dx} \sum_{l=0}^{n} C_n^l u^{(l)} v^{(n-l)} = \sum_{l=0}^{n} C_n^l \left(u^{(l+1)} v^{(n-l)} + u^{(l)} v^{(n-l+1)}\right) =$$

$$= \sum_{l=1}^{n+1} C_n^{l-1} u^{(l)} v^{(n+1-l)} + \sum_{l=0}^{n} C_n^l u^{(l)} v^{(n+1-l)} = \sum_{0}^{n+1} C_{n+1}^l u^{(l)} v^{(n+1-l)},$$

так как $C_{n+1}^0 = C_n^0 = C_n^n = C_{n+1}^{n+1} = 1$ и $C_{n+1}^l = C_n^l + C_n^{l-1}$ $(l = 1, \ldots, n)$.

Пример. $(x \sin x)^{100} =$

$$= x \sin\left(x + 100\frac{\pi}{2}\right) + 100 \cdot 1 \cdot \sin\left(x + 99\frac{\pi}{2}\right) = x \sin x - 100 \cos x.$$

Рассмотрим функцию $y = f(x)$, заданную на некотором интервале (a, b). Ее можно бесконечным числом способов записать в виде

$$y = \varphi(\psi(x)) = f(x) \quad (x \in (a, b)). \tag{7}$$

Ниже мы будем употреблять следующую терминологию: переменная y есть функция $(y = f(x))$ от *независимой* переменной x; эта же самая переменная y есть функция от *зависимой* переменной u $(y = \varphi(u),\ u \neq x)$. Последняя зависит от независимой переменной x $(u = \psi(x))$. *Таким образом, роль переменной x здесь носит исключительный характер — она в этих рассуждениях будет фигурировать только как независимая переменная.*

Дифференциал от функции f

$$dy = f'(x)dx \tag{8}$$

мы будем также называть *первым дифференциалом от f в точке x, соответствующим дифференциалу (приращению) независимой переменной $dx = \Delta x$.*

Дифференциал n-го порядка от функции f в точке x, соответствующий дифференциалу независимой переменной $dx = \Delta x$, онределяется по индукции:

$$d^n y = d(d^{n-1}y) = d(f^{(n-1)}(x)dx^{n-1}) = f^{(n)}(x)dx^n. \tag{9}$$

Таким образом, в этих равенствах дифференциалы d и d^{n-1} берутся для одного и того же дифференциала dx независимой переменной x, который при этом рассматривается как постоянная величина (не зависящая от x).

Из равенства (9) следует, что n-я производная от f в точке x есть отношение

$$f^{(n)}(x) = \frac{d^n y}{dx^n}, \tag{10}$$

где в числителе $d^n y$ есть n-й дифференциал от y в точке x, соответствующий тому значению dx, которое стоит в знаменателе.

Пусть теперь переменная y рассматривается как функция от *зависимой* переменной $u (u \neq x)$, т. е. $y = \varphi(u)$, $u = \psi(x)$, где φ и ψ имеют достаточное число производных. Тогда

$$dy = f'(x)dx = \varphi'(u)\psi'(x)dx = \varphi'(u)du, \tag{11}$$

и мы выразили первый дифференциал dy через u.

Равенство (11) замечательно вот с какой точки зрения. Мы определили дифференциал dy функции y как произведение производной от y по *независимой* переменной x на дифференциал dx. Оказывается, что dy можно определить так же, как произведение производной от y по *зависимой* переменной u на дифференциал du. При этом имеют место равенства

$$dy = y'_x dx = y'_u du, \tag{12}$$

если, конечно, дифференциал du, стоящий в третьем члене (12), соответствует именно тому dx, которое стоит во втором члене (12).

В этом смысле говорят, что форма $dy = \varphi'(u)du$ записи первого дифференциала *инвариантна относительно любой переменной u*. Для дифференциалов второго и более высокого порядка инвариантность уже не имеет места. Мы хотим этим сказать, что при $n > 1$ и $u \neq x$ $d^n y$, вообще говоря, не равняется $\varphi^{(n)}(u)du^n$, как это имеет место по определению в случае, когда $u = x$ есть независимая переменная.

В самом деле,

$$d^2 y = d(dy) = d(\varphi'(u)du) = d\varphi'(u)du + \varphi'(u)d^2u =$$
$$= \varphi''(u)(du)^2 + \varphi'(u)d^2u. \tag{13}$$

Теперь $d^2u \neq 0$ и членом $\varphi'(u)d^2u$ нельзя пренебречь, ведь $d^2u = \psi''(x)(dx)^2$. Таким образом, второй дифференциал, в отличие от первого, не имеет инвариантного характера.

То же явление (отсутствие инвариантности) имеет место и для дифференциалов более высокого порядка. Имеем

$$\begin{aligned} d^3y = d(d^2y) &= \varphi'''(u)(du)^3 + \varphi''(u)d(du)^2 + \varphi''(u)du\,d^2u + \varphi'(u)d^3u = \\ &= \varphi'''(u)(du)^3 + \varphi''(u)2du\,d^2u + \varphi''(u)du\,d^2u + \varphi'(u)d^3u = \\ &= \varphi'''(u)(du)^3 + 3\varphi''(u)du\,d^2u + \varphi'(u)d^3u. \end{aligned} \tag{14}$$

В этом же духе вычисляются дифференциалы более высокого порядка. К сожалению, с увеличением n соответствующее выражение для d^ny становится все более и более громоздким.

Пусть y есть функция от u, где u — зависимая переменная, т. е. в свою очередь есть функция от третьей переменной x. Явно эту последнюю зависимость u от x мы не хотим выражать. Больше того, мы можем ее вовсе не знать, а только предполагать, что такая зависимость есть. Требуется вычислить производные от y по u: $y'_u, y''_u, y'''_u, \ldots$

Мы уже знаем, что

$$y'_u = \frac{dy}{du} \qquad (du \neq 0), \tag{15}$$

т. е. что производная от y по переменной u равна отношению дифференциалов: $dy:du$.

При вычислении производных более высокого порядка применяется это правило и правило вычисления дифференциалов от суммы, разности, произведения и частного (см. § 5.2, (4), (5), (6)). Кроме того, надо иметь в виду, что $d^ny = d(d^{n-1}y)$.

Имеем

$$y''_u = \frac{d\left(\dfrac{dy}{du}\right)}{du} = \frac{1}{du}\,\frac{du\,d^2y - dy\,d^2u}{du^2} = \frac{du\,d^2y - dy\,d^2u}{du^3}. \tag{16}$$

Левая часть (16) есть вторая производная от y по u, а правая часть есть определенное рациональное выражение от дифференциалов du, dy, d^2u, d^2y. Если $u = x$, т. е. независимая переменная, то $du = dx \neq 0$, а $d^2u = 0$, и из (16) следует уже известное нам равенство $y''_u = \dfrac{d^2y}{du^2}$, но если u есть функция от x, не равная x, то y''_u вычисляется по формуле (16).

Имеем также

$$y'''_u = \frac{d\left(\dfrac{du\,d^2y - dy\,d^2u}{du^3}\right)}{du} =$$

$$= \frac{du^3\left(d^2u\,d^2y + du\,d^3y - d^2y\,d^2u - dy\,d^3u\right) - \left(du\,d^2y - dy\,d^2u\right)3du^2d^2u}{du^7}. \tag{17}$$

Добавление. *Производная от четной функции есть функция нечетная:*

$$f'(-x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(-x+h)-f(-x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{f(x-h)-f(x)}{h} = -f'(x).$$

Аналогично *производная нечетной функции есть четная функция.* Поэтому производная порядка k от четной функции есть четная или нечетная функция в зависимости от того, будет ли k четным или нет.

§ 5.7. Возрастание и убывание функции на интервале и в точке. Локальный экстремум

Функция f называется *строго возрастающей на интервале* (a, b) (*или отрезке* $[a, b]$), если для любых точек x_1, x_2 из (a, b) (или $[a, b]$), удовлетворяющих неравенству $x_1 < x_2$, имеет место неравенство $f(x_1) < f(x_2)$.

Функция f называется *неубывающей на* (a, b) (*или* $[a, b]$), если из того, что $x_1, x_2 \in (a, b)$ (или $[a, b]$) и $x_1 < x_2$ следует $f(x_1) \leqslant f(x_2)$.

Аналогично, функция f называется *строго убывающей*, соответственно *невозрастающей на* (a, b) (*или* $[a, b]$), если из того, что $x_1 < x_2$, $x_1, x_2 \in (a, b)$ (или $[a, b]$) следует, что $f(x_1) > f(x_2)$, соответственно $f(x_1) \geqslant f(x_2)$.

Пусть функция f определена в некоторой окрестности точки x. Тогда для достаточно малых Δx имеет смысл ее приращение в точке x:

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x).$$

По определению, функция f:

1) *возрастает в точке* x, если существует $\delta > 0$ такое, что

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} > 0 \quad (0 < |\Delta x| < \delta); \tag{1}$$

2) *убывает в точке* x, если существует $\delta > 0$ такое, что

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} < 0 \quad (0 < |\Delta x| < \delta); \tag{2}$$

3) *достигает локального максимума в точке* x, если существует $\delta > 0$ такое, что

$$\Delta y \leqslant 0 \quad (|\Delta x| < \delta); \tag{3}$$

4) *достигает локального минимума в точке* x, если существует $\delta > 0$ такое, что

$$\Delta y \geqslant 0 \quad (|\Delta x| < \delta). \tag{4}$$

Подчеркнем, что все неравенства (1) — (4) должны соблюдаться для достаточно малых Δx, положительных и отрицательных.

Указанные четыре свойства можно еще выразить так: для всех точек $x' \in (x-\delta, x)$ и для всех точек $x'' \in (x, x+\delta)$ имеет место:

$$\text{в случае } 1)\ f(x') < f(x) < f(x''),$$
$$2)\ f(x') > f(x) > f(x'');$$

и для всех точек $x' \in (x-\delta, x+\delta)$:

$$\text{в случае } 3)\ f(x') \leqslant f(x),$$
$$4)\ f(x') \geqslant f(x),$$

т. е. в случае 3) значение f в точке x *является максимальным в достаточно малой окрестности* x и в случае 4) значение f в точке x *является минимальным в достаточно малой окрестности* x.

Локальные максимум или минимум называют локальным *экстремумом.*

В дальнейшем нас будет интересовать вопрос, как узнать, что имеет место тот или иной из приведенных четырех случаев, если известны производные от f первого или более высокого порядка в точке x или по соседству с ней.

Допустим, что функция f в точке x имеет положительную производную: $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) > 0$. Таким образом, величина $\Delta y/\Delta x$, являющаяся при фиксированном x функцией от Δx, стремится к положительному числу. Но тогда (см. теорему 2 § 4.1) и сама эта величина должна быть положительной для всех Δx, удовлетворяющих неравенству $|\Delta x| < \delta$, при достаточно малом δ, т. е. согласно определению 1) функция f в точке x должна возрастать.

Аналогично доказывается, что если $f'(x) < 0$, то f убывает в точке x. Мы доказали следующую теорему:

Теорема. *Если функция f в точке x имеет положительную (отрицательную) производную, то она возрастает (убывает) в этой точке.*

Из этой теоремы немедленно следует

Теорема Ферма́. *Если функция f достигает в точке x локального экстремума (максимума или минимума) и в ней существует производная $f'(x)$, то последняя равна нулю ($f'(x) = 0$).*

В самом деле, если бы $f'(x) \neq 0$, то в силу предыдущей теоремы функция должна была бы быть возрастающей или убывающей в точке x, что исключает возможность существования экстремума функции в этой точке.

Эту теорему можно сформулировать и так:

Для того чтобы функция f, имеющая в точке x производную, достигала в ней локального экстремума, необходимо, чтобы производная от f в этой точке была равной нулю.

Конечно, условия $f'(x) = 0$ недостаточно, чтобы функция имела в x локальный экстремум. Если $f'(x) = 0$, то функция f может не иметь локального экстремума в точке x. Она может в этой точке возрастать, как это имеет место, например, для функции x^3 при $x=0$, убывать (например, $f(x)=-x^3$ при $x=0$), а может точка x и не быть ни точкой возрастания ни убывания, ни точкой экстремума функции. Например, функция

$$f(x)=\begin{cases} x^2\sin\frac{1}{x}, & x\neq 0, \\ 0, & x=0 \end{cases} \tag{5}$$

имеет производную $f'(0)=0$, потому что

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2\sin(1/x)}{x}=\lim_{x\to 0}x\sin\frac{1}{x}=0$$

$\left(\text{ведь } \left|\sin\frac{1}{x}\right|\leqslant 1\right)$. С другой стороны, в любой как угодно малой окрестности $|x|<\delta$ точки 0 как справа, так и слева от нее f принимает положительные и отрицательные значения. Поэтому точка 0 не является ни точкой возрастания, ни точкой убывания, ни точкой экстремума функции f.

В следующем параграфе мы переходим к очень важным теоремам, называемым теоремами о среднем. С их помощью будет весьма удобно получить дальнейшие заключения, относящиеся к теории локальных экстремумов.

§ 5.8. Теоремы о среднем значении. Критерии возрастания и убывания функции на интервале. Достаточные критерии локальных экстремумов

Теорема Ролля*). *Пусть функция f непрерывна на отрезке $[a, b]$, имеет производную на интервале (a, b) и принимает равные значения на концах его $(f(a)=f(b))$.*

Тогда на интервале (a, b) есть хотя бы одна точка c, где производная от f равна нулю $(f'(c)=0)$.

Доказательство. Пусть M и m соответственно максимум и минимум f на отрезке $[a, b]$. Они существуют в силу непрерывности f на $[a, b]$. Если выполняются равенства $M=m=f(a)$, то $f(x)=M$ для всех $x\in[a, b]$ и $f'(c)=0$ в любой точке $c\in(a, b)$. Если же указанные равенства одновременно не выполняются, то по крайней мере одно из чисел M или m отлично от числа $f(a)=f(b)$, пусть для определенности M. Но тогда максимум функции f на отрезке $[a, b]$ достигается в некоторой точке c интервала (a, b) и, следовательно, в этой точке f имеет также локальный максимум. Так как в точке c производная $f'(c)$ суще-

*) М. Ролль (1652—1719) — французский математик, доказавший эту теорему для многочленов.

ствует, то по теореме Ферма она равна нулю. Случай $m \neq f(a)$ разбирается аналогично.

Теорема доказана.

Теорема о среднем Коши. *Пусть функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ непрерывны на отрезке $[a, b]$ и имеют производные на интервале (a, b) одновременно не обращающиеся в нуль. При этом $\varphi(b) - \varphi(a) \neq 0$* *).

Тогда на интервале (a, b) найдется точка c, для которой выполняется равенство

$$\frac{\psi(b)-\psi(a)}{\varphi(b)-\varphi(a)} = \frac{\psi'(c)}{\varphi'(c)} \quad (a<c<b). \tag{1}$$

Доказательство. Вводим функцию

$$F(x) = [\psi(b) - \psi(a)]\varphi(x) - [\varphi(b) - \varphi(a)]\psi(x).$$

Она, очевидно, непрерывна на $[a, b]$ и имеет производную на интервале (a, b). Кроме того, $F(a) = F(b)$. Поэтому по теореме Ролля найдется такая точка $c \in (a, b)$, что $F'(c) = 0$, т. е.

$$[\varphi(b) - \varphi(a)]\psi'(c) = [\psi(b) - \psi(a)]\varphi'(c). \tag{2}$$

Число $\varphi'(c) \neq 0$, потому что в противном случае, в силу того, что $\varphi(b) - \varphi(a) \neq 0$, было бы $\psi'(c) = 0$, но $\varphi'(c)$ и $\psi'(c)$ по условию одновременно не равны нулю. Поэтому произведение $[\varphi(b) - \varphi(a)]\varphi'(c) \neq 0$. Разделив на него левую и правую части равенства (2), получим (1).

Как следствие из теоремы Коши при $\varphi(x) = x$ и $\psi = f$ получим теорему Лагранжа:

Теорема о среднем Лагранжа **). *Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$ и имеет производную на интервале (a, b). Тогда существует на интервале (a, b) точка c, для которой выполняется равенство*

$$f(b) - f(a) = (b-a)f'(c) \quad (a<c<b). \tag{3}$$

Теорема Лагранжа имеет простой геометрический смысл, если записать ее в таком виде:

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c) \qquad (a<c<b).$$

Левая часть этого равенства есть тангенс угла наклона к оси x хорды, стягивающей точки $(a, f(a))$ и $(b, f(b))$ графика функции $y = f(x)$, а правая часть есть тангенс угла наклона касательной к графику в некоторой промежуточной точке $c \in (a, b)$. Теорема Лагранжа утверждает, что если кривая (рис. 5.5) есть график непрерывной на $[a, b]$ функции, имеющей производную

*) Заметим, что, например, условие $\varphi'(x) \neq 0$ на (a, b) влечет за собой $\varphi(b) - \varphi(a) \neq 0$.

**) Ж. А. Лагранж (1736—1813) — французский математик.

на (a, b), то на этой кривой существует точка, соответствующая некоторой абсциссе $c (a < c < b)$ такая, что касательная к кривой в этой точке параллельна хорде, стягивающей концы кривой $(a, f(a))$ и $(b, f(b))$.

Равенство (3) называется *формулой* (*Лагранжа*) *конечных приращений.* Промежуточное значение c удобно записывать в виде

$$c = a + \theta(b - a),$$

где θ есть некоторое число, удовлетворяющее неравенствам $0 < \theta < 1$. Тогда формула Лагранжа примет вид

$$f(b) - f(a) = (b - a) f'(a + \theta(b - a)) \quad (0 < \theta < 1). \tag{4}$$

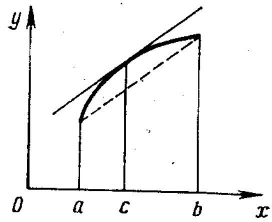

Рис. 5.5.

Она верна, очевидно, не только для $a < b$, но и для $a \geqslant b$.

Теорема 1. *Функция, непрерывная на отрезке $[a, b]$ и имеющая неотрицательную (положительную) производную на интервале (a, b), не убывает (строго возрастает) на $[a, b]$.*

Действительно, пусть $a \leqslant x_1 < x_2 \leqslant b$; тогда на отрезке $[x_1, x_2]$ выполняются условия теоремы Лагранжа. Поэтому найдется на интервале (x_1, x_2) точка c, для которой

$$f(x_2) - f(x_1) = (x_2 - x_1) f'(c) \quad (x_1 < c < x_2).$$

Если по условию $f' \geqslant 0$ на (a, b), то $f'(c) \geqslant 0$ и

$$f(x_2) - f(x_1) \geqslant 0; \tag{5}$$

если же $f' > 0$ на (a, b), то $f'(c) > 0$ и

$$f(x_2) - f(x_1) > 0. \tag{6}$$

Так как неравенства (5) и (6) имеют место, каковы бы ни были x_1, x_2, где $a \leqslant x_1 < x_2 \leqslant b$, то в первом случае f не убывает, а во втором f строго возрастает на отрезке $[a, b]$.

Теорема 2. *Если функция имеет на интервале (a, b) производную, равную нулю, то она постоянна на (a, b).*

В самом деле, на основании теоремы Лагранжа имеет место

$$f(x) - f(x_1) = (x - x_1) f'(c),$$

где x_1 — фиксированная точка интервала (a, b), x — произвольная его точка (она может находиться справа и слева от x_1) и c — некоторая, зависящая от x_1 и x точка, находящаяся между x_1 и x. Так как по условию $f'(x) \equiv 0$ на (a, b), то $f'(c) = 0$ и $f(x) = f(x_1) = C$ для всех $x \in (a, b)$.

Заметим, что в приведенных теоремах ослабление налагаемых в них условий может привести к неверности утверждений.

Например, функция $f(x)$, определяемая равенствами

$$f(x)=\begin{cases} x, & 0\leqslant x<\frac{1}{2} \\ 1-x, & \frac{1}{2}\leqslant x<1 \end{cases}$$

(рис. 5.6), очевидно, непрерывна на отрезке $[0, 1]$, равна нулю на его концах и имеет производную во всех точках $(0, 1)$, за исключением только одной точки $x=\frac{1}{2}$, и для нее уже, очевидно, не выполняется теорема Лагранжа.

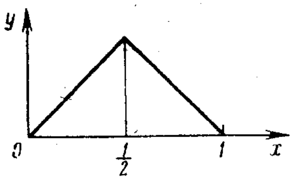

Рис. 5.6.

Докажем теорему, которая дает достаточный критерий существования локального экстремума функции.

Теорема 3. *Если функция f непрерывна в окрестности точки x_0 и имеет производную*

$$f'(x)\geqslant 0 \quad (\leqslant 0) \quad \textit{справа от } x_0,$$
$$f'(x)\leqslant 0 \quad (\geqslant 0) \quad \textit{слева от } x_0,$$

то x_0 есть точка локального минимума (максимума) f.

Выражение *справа* (*слева*) *от* x_0 означает «на достаточно малом интервале с левым (правым) концом x_0». Доказательство непосредственно следует из формулы конечных приращений.

$$\Delta f=f(x)-f(x_0)=(x-x_0)f'(x_0+\theta(x-x_0)),$$

потому что из условий теоремы следует, что правая часть формулы неотрицательна (неположительна) в достаточно малой окрестности точки x_0 независимо от знака $x-x_0$.

Заметим, что в этой теореме существование производной в самой точке x_0 не предполагалось. Конечно, если производная $f'(x_0)$ существует, то по теореме Ферма она равна нулю.

Следующая теорема дает достаточный критерий существования локального экстремума функции по знаку второй производной.

Теорема 4. *Если функция f удовлетворяет условиям $f'(x_0)=0$ и $f''(x_0)>0$ ($f''(x_0)<0$), то x_0 есть точка локального минимума (максимума) функции f.*

Доказательство. Существование второй производной в точке x_0 влечет за собой существование первой производной $f'(x)$ в окрестности точки x_0 и, тем более, непрерывность f в этой окрестности. Из того, что $f''(x_0)>0$ (<0) следует, что $f'(x)$ возрастает (убывает) в точке x_0 и, так как $f'(x_0)=0$, то справа от x_0 $f'>0$ (<0), а слева от x_0 $f'<0$ (>0). Теперь утверждение теоремы следует из предыдущей теоремы.

Мы знаем, что непрерывная на отрезке $[a, b]$ функция, имеющая всюду на интервале (a, b) положительную производную, строго возрастает на отрезке $[a, b]$. С другой стороны, пример, который приводится ниже, показывает, что если непрерывная в окрестности точки $x=0$ функция f имеет положительную производную в этой точке, то отсюда не следует, что f возрастает в некоторой достаточно малой окрестности $x=0$.

Таким образом, возрастание функции в точке не влечет, вообще говоря, ее возрастание в некоторой ее окрестности.

Пример 1. Функция $F(x)=\frac{x}{2}+f(x)$, где f определяется равенством (5) предыдущего параграфа, имеет производную $F'(0)=\frac{1}{2}+f'(0)=1/2>0$ в точке $x=0$ и, следовательно, возрастает в этой точке. В то же время она не возрастает на любом интервале, содержащем эту точку. Действительно, для $x \neq 0$

$$F'(x)=\frac{1}{2}-\cos\frac{1}{x}+2x\sin\frac{1}{x}.$$

При $x_k = 1/k\pi$ $(k=1, 2, \ldots)$

$$F'(x_k)=\frac{1}{2}-(-1)^k,$$

откуда видно, что в любом интервале, содержащем в себе нулевую точку, производная F' принимает значения разных знаков и, следовательно, F не изменяется на нем монотонно.

Пример 2. На отрезке $[-1, e]$ дана функция

$$\psi(x)=\begin{cases} x\ln|x|, & x\neq 0,\\ 0, & x=0.\end{cases}$$

Она непрерывна, имеет конечную производную всюду на $[-1, e]$, за исключением $x=0$, где

$$\psi'(0)=\lim_{h\to 0}\frac{\psi(h)-\psi(0)}{h}=\lim_{h\to 0}\ln|h|=-\infty. \tag{7}$$

Из (7) следует, что ψ в точке $x=0$ убывает. Уравнение $\psi'(x)=1+\ln|x|=0$ имеет два корня: $x_1=-1/e$, $x_2=1/e$. Кроме того, $\psi''(x)=1/x$ $(x\neq 0)$ и $\psi''(-1/e)<0$, $\psi''(1/e)>0$, следовательно, $-1/e$ есть точка локального максимума, а $1/e$ — точка локального минимума.

Пример 3. График функции (см. § 8.9)

$$x=\frac{t^2-a}{b+2t\sqrt{c}} \qquad \left(b^2-4ac<0,\ c>0\right)$$

распадается на две непрерывные ветви, соответствующие изменению t на $(-\infty, -b/2\sqrt{c})$, $(-b/2\sqrt{c}, \infty)$. На каждом из этих интервалов функция монотонно возрастает от $-\infty$ до $+\infty$. Это легко видеть, если учесть, что в силу условия $b^2-4ac>0$ производная $x'>0$ и при $t=-b/2\sqrt{c}$ выражение $\left(t^2-a\right)=\frac{b^2}{4c}-a<0$.

§ 5.9. Формула Тейлора

При помощи формулы Тейлора *) можно по данным значениям $f(a)$, $f'(a)$, $\ldots$, $f^{(n-1)}(a)$ функции f и ее производных в точке a и некоторым сведениям о производной $f^{(n)}$ в окрестности этой точки узнать приближенно, часто с большой точностью, значение f в точках этой окрестности.

Средством приближения являются специально строящиеся по указанным значениям многочлены, называемые *многочленами Тейлора* данной *функции*.

Мы начнем с того, что выведем формулу Тейлора для многочлена

$$P(x) = b_0 + b_1x + \ldots + b_nx^n. \tag{1}$$

Зададим произвольное число a и в правой части равенства (1) произведем замену x на $(x-a)+a$:

$$P(x) = b_0 + b_1[(x-a)+a] + \ldots + b_n[(x-a)+a]^n.$$

Затем раскроем квадратные скобки и приведем подобные при одинаковых степенях $x-a$. В результате получим равенство

$$P(x) = \beta_0 + \beta_1(x-a) + \ldots + \beta_n(x-a)^n = \sum_{k=0}^{n} \beta_k(x-a)^k, \tag{2}$$

где β_k — постоянные, зависящие от исходных коэффициентов b_k.

Равенство (2) называется *разложением многочлена $P(x)$ по степеням $x-a$*, а числа β_k называются коэффициентами данного разложения.

С этой точки зрения исходное равенство (1) можно трактовать как разложение $P(x)$ по степеням x, т. е. по степеням $x-a$, где $a=0$.

Будем последовательно дифференцировать равенство (2):

$$P'(x) = \beta_1 + 2\beta_2(x-a) + 3\beta_3(x-a)^2 + \ldots,$$
$$P''(x) = 2\beta_2 + 3\cdot 2\beta_3(x-a) + 4\cdot 3\beta_4(x-a)^2 + \ldots,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$P^{(k)}(x) = k!\beta_k + (k+1)k\ldots 2\beta_{k+1}(x-a) + \ldots$$

В последнем равенстве, определяющем k-ю производную, положим $x=a$. Тогда в правой части все члены, начиная со второго, обратятся в нуль, и мы получим $P^{(k)}(a) = k!\beta_k$ $(k=0, 1, 2, \ldots)$. При этом, как обычно, мы считаем, что $P^{(0)}(a) = P(a)$, $0! = 1$. Итак, коэффициенты β_k разложения (2) многочлена $P(x)$ по степеням $x-a$ необходимо выражаются по формуле

$$\beta_k = \frac{P^{(k)}(a)}{k!} \quad (k = 0, 1, 2\ldots). \tag{3}$$

*) Б. Тейлор (1685—1731) — английский математик.

Отсюда, в частности, следует, что один и тот же многочлен $P(x)$ степени n можно разложить по степеням $x-a$ единственным образом, т. е., если для всех значений x

$$P(x)=\sum_{k=0}^{n}\beta_k(x-a)^k=\sum_{k=0}^{n}\beta'_k(x-a)^k,$$

где β_k, β'_k — постоянные, то

$$\beta_k=\beta'_k \quad (k=0, 1, \ldots, n).$$

Ведь как числа β_k, так и β'_k вычисляются по одной и той же формуле (3).

Итак,

$$P(x)=P(a)+\frac{P'(a)}{1}(x-a)+\frac{P''(a)}{2!}(x-a)^2+\ldots+\frac{P^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n=$$
$$=\sum_{k=0}^{n}\frac{P^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k. \qquad (4)$$

Формула (4) называется *формулой Тейлора по степеням $x-a$ для многочлена $P(x)$ степени n.*

Формулу Тейлора по степеням x, т. е. выражение

$$P(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{P^{(k)}(0)}{k!}x^k, \qquad (5)$$

называют также формулой Маклорена.

Пример 1. Бином Ньютона. Рассмотрим многочлен n-й степени

$$P(x)=(a+x)^n,$$

где a — произвольное число, а n — натуральное число. Его k-я производная равна

$$P^{(k)}(x)=n(n-1)\ \ldots\ (n-k+1)(a+x)^{n-k},$$

откуда $P^{(k)}(0)=n(n-1)\ \ldots\ (n-k+1)a^{n-k}$ и, следовательно, на основании формулы Маклорена для многочлена n-й степени будем иметь

$$(a+x)^n=a^n+na^{n-1}x+\frac{n(n-1)}{2!}a^{n-2}x^2+$$
$$+\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}a^{n-3}x^3+\ldots+\frac{n(n-1)\ldots 1}{(n-1)!}ax^{n-1}+x^n. \qquad (6)$$

Это равенство называется *формулой бинома Ньютона.*

Если ввести обычное обозначение

$$C_n^k=\frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{k!}, \qquad C_n^n=C_n^0=1, \qquad (7)$$

то формула бинома Ньютона может быть записана в более компактной форме:

$$(a+x)^n=\sum_{k=0}^{n}C_n^k a^{n-k}x^k. \qquad (6')$$

Числа C_n^k называются *биномиальными коэффициентами.*

Отметим, что если числитель и знаменатель дроби в (7) помножить на $(n-k)!$, то получим

$$C_n^k = \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)(n-k)\ldots 1}{k!\,(n-k)!},$$

т. е.

$$C_n^k = \frac{n!}{k!\,(n-k)} \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots n). \tag{7'}$$

Случай $k = 0$ тоже включается в эту формулу. Ведь $0! = 1$.

Другое важное свойство биномиальных коэффициентов выражается равенством

$$C_{n+1}^{k+1} = C_n^k + C_n^{k+1}.$$

Доказательство его предоставляем читателю. Если учесть, что $C_n^0 = C_n^n = 1$, то с помощью последнего равенства можно легко получить последовательно числа C_n^k для любых n и k, всякий раз пользуясь только одним действием сложения.

Выше мы вывели формулу Тейлора для многочлена. Пусть теперь в окрестности точки a задана функция f, не являющаяся многочленом степени $n-1$, но имеющая там производные до n-го порядка включительно *).

Вычислим числа $f(a), f'(a), \ldots, f^{(n-1)}(a)$ и составим при их помощи функцию

$$Q(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1}(x-a) + \ldots + \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(x-a)^{n-1} = \\ = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k. \tag{8}$$

Очевидно, Q есть многочлен степени $n-1$. Он называется *многочленом Тейлора*, именно $(n-1)$-*м многочленом Тейлора, функции* f по степеням $(x-a)$.

Если бы исходная функция f сама была многочленом степени $n-1$, то, как мы установили, выполнялось бы тождество $f(x) = Q(x)$ для всех значений x из нашей окрестности. Но в данном случае это тождество не имеет места, ведь мы предположили, что f не есть многочлен степени $n-1$. Это не мешает многочлену Q быть тесно связанным с f. В самом деле, разложим многочлен Q по формуле Тейлора:

$$Q(x) = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{Q^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k. \tag{9}$$

*) На самом деле все выводы в этом параграфе проходят при менее ограничительных условиях, налагаемых на f (см. ниже формулировку теоремы 1).

Так как (8) и (9) суть разложения по степеням $x-a$ одного и того же многочлена, то

$$f^{(k)}(a)=Q^{(k)}(a) \quad (k=0,\ 1,\ \ldots,\ n-1). \tag{10}$$

Итак, $(n-1)$-й многочлен Тейлора от функции f можно определить еще и как такой многочлен степени $n-1$, для которого выполняется n равенств (10).

Пример 2. На рис. 5.7 изображена кривая $y=f(x)$. В качестве ее нулевого приближения в окрестности точки $a=0$ естественно взять график ее нулевого многочлена Тейлора $y=Q_0(x)$, представляющий собой прямую $y=f(0)$, параллельную оси x. В качестве же первого приближения к нашей кривой естественно взять касательную к ней в точке $x=0$. Ее уравнение есть $y=Q_1(x)$, где $Q_1(x)=f(0)+f'(0)x$. Следующее приближение — это второе приближение $y=Q_2(x)$, где $Q_2(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2}x^2$. Это многочлен Тейлора по степеням x второй степени, т. е. такой многочлен второй степени, что он и его производные первого и второго порядка в точке 0 совпадают соответственно с $f(0)$, $f'(0)$, $f''(0)$.

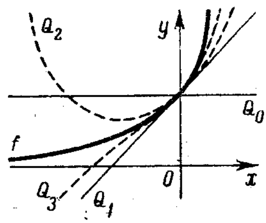

Рис. 5.7.

Мы видим, что графики последующих многочленов Тейлора функции f по степеням x прилегают все теснее и теснее к графику f, во всяком случае, в достаточно малых окрестностях точки $a=0$, если, конечно, функция в ней достаточно много раз дифференцируема.

Положим

$$f(x)=Q_{n-1}(x)+R_n(x), \tag{11}$$

где Q_{n-1} есть $(n-1)$-й многочлен Тейлора функции f по степеням $x-a$.

Равенство (11) называется *формулой Тейлора функции f в окрестности точки a*, а $R_n(x)$ называется *остаточным членом* или *n-м остатком* рассматриваемой формулы Тейлора.

Замечательно, что для остаточного члена можно дать нетривиальные выражения через n-ю производную от f. Ниже мы выведем два таких выражения: *остаточный член в форме Лагранжа* и *остаточный член в форме Коши.*

Остаточный член формулы Тейлора в форме Лагранжа выглядит следующим образом:

$$R_n(x)=\frac{(x-a)^n}{n!}f^{(n)}(\xi), \quad \xi\in(a,x),$$

где ξ есть некоторая (зависящая от x и n) точка интервала $(a,\ x)$. Здесь и далее x можно считать не только бо́льшим, но и ме́ньшим, чем a*). Обычно точное значение ξ неизвестно, утверждается лишь, что ξ находится где-то на интервале $(a,\ x)$.

*) Если $x<a$, то $(a,\ x)$, $[a,\ x]$ обозначают множества точек t, удовлетворяющих соответственно неравенствам $x<t<a$, $x\leqslant t\leqslant a$.

Бывает удобно число ξ записать в виде $\xi = a + \theta(x - a)$, где θ есть некоторое число, удовлетворяющее неравенствам $0 < \theta < 1$. При таком обозначении остаточный член в форме Лагранжа имеет следующий вид:

$$R_n(x) = \frac{(x-a)^n}{n!} f^{(n)}(a + \theta(x-a)), \qquad 0 < \theta < 1.$$

Остаточный член формулы Тейлора в форме Коши выглядит так:

$$R_n(x) = \frac{(x-a)^n (1-\theta)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(a + \theta(x-a)), \qquad 0 < \theta < 1,$$

где θ — число, зависящее от x и n.

Отметим, что при $n = 1$ формула Тейлора функции с остаточным членом в форме Лагранжа (или Коши) есть уже известная нам формула Лагранжа о среднем значении:

$$f(x) - f(a) = (x-a) f'(a + \theta(x-a)), \quad 0 < \theta < 1.$$

Соответствующая теорема гласит:

Теорема 1. *Пусть функция f непрерывна на отрезке $[a, x]$ вместе со своими производными до $(n-1)$-го порядка включительно и имеет производную порядка n на интервале (a, x).*

Тогда ее n-й остаточный член формулы Тейлора может быть записан в форме Лагранжа или в форме Коши.

Доказательство. Зададим произвольное натуральное число p и указанное в теореме значение x. Предупредим, что на протяжении доказательства x будет оставаться неизменным. Нам будет удобно ввести новую вспомогательную переменную u. По отношению к ней x будет рассматриваться как постоянная.

Мы ставим своей задачей найти удобное выражение для остатка $R_n(x)$ в формуле Тейлора

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + R_n(x).$$

Коротко будем говорить, что мы ищем $R_n(x)$, т. е. значение остатка в точке x. Для этого представим $R_n(x)$ в виде произведения $R_n(x) = (x-a)^p H$, сведя таким образом вопрос к отысканию величины H. Величина H зависит от x и в силу сделанного соглашения будет рассматриваться как постоянная.

Итак, мы имеем равенство

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + (x-a)^p H.$$

Заменим чисто формально в правой его части постоянную a на переменную u. Тогда получим функцию

$$\Phi(u) = \sum_{0}^{n-1} \frac{(x-u)^k}{k!} f^{(k)}(u) + (x-u)^p H =$$

$$= f(u) + \frac{x-u}{1} f'(u) + \ldots + \frac{(x-u)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(u) + (x-u)^p H, \quad (12)$$

которая во всяком случае определена и непрерывна для всех значений u, принадлежащих отрезку $[a, x]$, потому что на этом отрезке непрерывна исходная функция $f(u)$ вместе со своими производными до $(n-1)$-й включительно. Кроме того, из определения функции $\Phi(u)$ следует, что при $u = a$ она принимает значение $f(x)$ $(\Phi(a) = f(x))$. Больше того, при $u = x$ она также обращается в $f(x)$ $(\Phi(x) = f(x))$, что непосредственно видно из правой части (12): если положить в ней $u = x$, все члены обращаются в нуль, кроме первого, равного $f(x)$. Наконец, наша функция $\Phi(u)$ имеет на интервале (a, x) производную, потому что на нем имеет производную n-го порядка исходная функция f.

Мы видим, что наша вспомогательная функция $\Phi(u)$ удовлетворяет условиям теоремы Ролля — она непрерывна на отрезке $[a, x]$, имеет производную на интервале (a, x) и принимает равные значения на его концах. Но тогда согласно теореме Ролля существует между a и x промежуточная точка $u = a + \theta(x - a)$ такая, что производная Φ' в ней равна нулю.

Найдем фактически эту производную:

$$\Phi'(u) = f'(u) - f'(u) + (x-u) f''(u) - (x-u) f''(u) + \ldots$$

$$\ldots - \frac{(x-u)^{n-2}}{(n-2)!} f^{(n-1)}(u) + \frac{(x-u)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(u) - p(x-u)^{p-1} H.$$

В этом выражении все члены сокращаются, за исключением последних двух. Если в оставшееся выражение подставить указанное значение $u = a + \theta(x - a)$, то, как было сказано, оно обратится в нуль.

Решая полученное уравнение относительно H и умножая найденное H на $(x - a)^p$, получим искомое выражение для остаточного члена:

$$R_n(x) = \frac{(x-a)^n}{(n-1)!\,p} (1-\theta)^{n-p} f^{(n)}(a + \theta(x-a)).$$

Это выражение зависит от p, где p может быть любым натуральным числом. Если в нем положить $p = n$, то получим остаточный член в форме Лагранжа, а если положить $p = 1$, то в форме Коши.

Отметим, что при $a=0$ формулу Тейлора называют также *формулой Маклорена*. В этом случае она имеет вид

$$f(x)=\sum_{0}^{n-1}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k+R_n(x), \tag{13}$$

$$R_n(x)=\frac{x^n}{n!}f^{(n)}(\theta x) \text{ — форма Лагранжа,}$$

$$R_n(x)=\frac{x^n}{(n-1)!}(1-\theta)^{n-1}f^{(n)}(\theta x) \text{ — форма Коши.}$$

Предположим теперь, что функция f имеет в точке a непрерывную производную $f^{(n)}$ порядка n. Отсюда следует, что существует некоторая окрестность точки a, на которой функция f имеет производную $f^{(n)}$ и тем более непрерывную производную $f^{(n-1)}$. Таким образом, условия для разложения f по формуле (13) с остатком в форме Лагранжа соблюдены, и можно написать, учитывая предположенную непрерывность $f^{(n)}$ при $x=a$, что

$$R_n(x)=\frac{(x-a)^n}{n!}f^{(n)}(a+\theta(x-a))=\frac{(x-a)^n}{n!}f^{(n)}(a)+r_n(x) \tag{14}$$

и

$$r_n(x)=\frac{(x-a)^n}{n!}\left[f^{(n)}(a+\theta(x-a))-f^{(n)}(a)\right]=(x-a)^n o(1)=$$
$$=o\left((x-a)^n\right) \qquad (x\to a).$$

Следовательно,

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k+o\left((x-a)^n\right) \qquad (x\to a). \tag{15}$$

Разложение (15) называют *формулой Тейлора разложения функции f по степеням $(x-a)$ с остаточным членом в форме Пеано* *).

Мы доказали следующую теорему.

Теорема 2. *Если функция f имеет непрерывную производную порядка n в точке a, то она разлагается по формуле (15) Тейлора по степеням $x-a$ с остаточным членом в форме Пеано.*

Докажем лемму.

Лемма. *Из равенства*

$$\alpha_0+\alpha_1(x-a)+\ldots+\alpha_n(x-a)^n+o\left((x-a)^n\right)=\alpha_0'+\alpha_1'(x-a)+$$
$$+\ldots+\alpha_n'(x-a)^n+o\left((x-a)^n\right), \quad x\to a, \tag{16}$$

где α_k, α_k' — числа, не зависящие от x, следует, что

$$\alpha_k=\alpha_k' \quad (k=0,1,\ldots,n). \tag{17}$$

*) Д. Пеано (1852—1932) — итальянский математик.

Действительно, возьмем предел левой и правой частей (16) при $x \to a$. Тогда получим равенство $\alpha_0 = \alpha_0'$. Таким образом, можно считать, что в (16) слагаемых α_0, α_0' нет, и можно (16) сократить на $x-a$ и получить равенство

$$\alpha_1 + \alpha_2(x-a) + \ldots + \alpha_n(x-a)^{n-1} + o\left((x-a)^{n-1}\right) = \\ = \alpha_1' + \alpha_2'(x-a) + \ldots + \alpha_n'(x-a)^{n-1} + o\left((x-a)^{n-1}\right),$$

откуда после перехода к пределу при $x \to a$ получим еще, что $\alpha_1 = \alpha_1'$. Продолжая этот процесс последовательно, мы получим (17) и лемма доказана.

Из доказанной леммы и сказанного выше следует *единственность разложения функции f по формуле Тейлора с остатком в форме Пеано.* Эти слова надо понимать в следующем смысле. Если функция f, имеющая в точке $x=a$ непрерывную производную n-го порядка, представлена в виде

$$f(x) = \alpha_0 + \alpha_1(x-a) + \ldots + \alpha_n(x-a)^n + o((x-a)^n), \quad x \to a, \tag{18}$$

где α_k — постоянные числа, то эти числа равны

$$\alpha_k = \frac{f^{(k)}(a)}{k!},$$

т. е. (18) есть тейлорово разложение f с остатком в форме Пеано.

Формула Тейлора в окрестности $x=0$ четной (нечетной) функции f содержит в себе члены только четной (нечетной) степени x:

$$f(x) = a_0 + a_2x^2 + a_4x^4 + \ldots,$$

$$(f(x) = a_1x + a_3x^3 + \ldots).$$

Это следует из того, что нечетные производные от четной функции, так же как четные производные от нечетных функций, суть нечетные функции (см. конец § 5.6). Но последние к тому же предполагаются непрерывными в точке $x=0$, но тогда они необходимо равны нулю в этой точке.

В частности, с помощью этого утверждения легко следует, что *для того чтобы многочлен*

$$P(x) = \sum_0^n \alpha_k x^k$$

был четным (нечетным), т. е. четной (нечетной) функцией, необходимо и достаточно, чтобы все его члены имели x в четной (нечетной) степени.

Пример 3. Из равенства $1+x^2+\ldots+x^{2m} = (1-x^{2m+2})/(1-x^2)$ и того факта, что $x^{2m+2}/(1-x^2) = o(x^{2m})$ $(x\to 0)$, следует, что

$$\frac{1}{1-x^2} = 1+x^2+\ldots+x^{2m}+o\left(x^{2m}\right) \quad (x\to 0). \tag{19}$$

Но тогда (19) есть формула Тейлора функции $(1-x^2)^{-1}$ по степеням x с остаточным членом в форме Пеано.

§ 5.10. Формулы Тейлора для важнейших элементарных функций

Функция $f(x)=e^x$. Для этой функции

$$f^{(n)}(x)=e^x,\quad f^{(n)}(0)=1,\quad f^{(n)}(\theta x)=e^{\theta x} \qquad (n=0,\,1,\,2,\,\ldots).$$

Поэтому формула Тейлора по степеням x функции e^x с остатком, в форме Лагранжа имеет вид

$$e^x=1+\frac{x}{1}+\frac{x^2}{2!}+\ldots+\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}+R_n(x),$$

$$R_n(x)=\frac{x^n}{n!}e^{\theta x} \quad (0<\theta<1).$$

Если положить в ней $x=1$, то получим приближенное выражение для e:

$$e\approx 1+1+\frac{1}{2!}+\ldots+\frac{1}{(n-1)!}$$

с ошибкой $|R_n(1)|\leqslant \frac{1}{n!}e<\frac{3}{n!}$.

При любом $x\geqslant 0$

$$|R_n(x)|\leqslant \frac{x^n}{n!}e^x\to 0 \qquad (n\to\infty)$$

и при $x<0$

$$|R_n(x)|\leqslant \frac{|x|^n}{n!}\to 0 \qquad (n\to\infty).$$

Функция $f(x)=\sin x$. Для этой функции

$$f^{(n)}(x)=\sin\left(x+n\frac{\pi}{2}\right),\qquad f^{(n)}(0)=\sin\frac{n\pi}{2},$$

$$f^{(n)}(\theta x)=\sin\left(\theta x+\frac{n\pi}{2}\right) \qquad (n=1,2,\ldots).$$

Формула Тейлора по степеням x с остаточным членом Лагранжа имеет вид

$$\sin x = x-\frac{x^3}{n!}+\ldots+(1)^{\nu+1}\frac{x^{2\nu-1}}{(2\nu-1)!}+R_{2\nu+1}(x),$$

$$R_{2\nu+1}(x)=\frac{x^{2\nu+1}}{(2\nu+1)!}\sin\left(\theta x+(2\nu+1)\frac{\pi}{2}\right).$$

Остаток стремится к нулю при $\nu \to \infty$ для любого x:

$$|R_{2\nu+1}(x)| \leqslant \frac{|x|^{2\nu+1}}{(2\nu+1)!} \to 0 \quad (\nu \to \infty).$$

Функция $f(x) = \cos x$. Для этой функции

$$f^{(n)}(x) = \cos\left(x + \frac{n\pi}{2}\right), \quad f^{(n)}(0) = \cos\frac{n\pi}{2},$$

$$f^{(n)}(\theta x) = \cos\left(\theta x + \frac{n\pi}{2}\right) \quad (n = 1, 2, \ldots).$$

Формула Тейлора по степеням x с остаточным членом в форме Лагранжа имеет вид

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots + (-1)^{\nu-1}\frac{x^{2(\nu-1)}}{(2(\nu-1))!} + R_{2\nu}(x),$$

$$R_{2\nu}(x) = \frac{x^{2\nu}}{(2\nu)!}\cos\left(\theta x + 2\nu\frac{\pi}{2}\right).$$

Остаток ведет себя как и в случае $\sin x$:

$$|R_{2\nu}(x)| \leqslant \frac{|x|^{2\nu}}{(2\nu)!} \to 0 \quad (\nu \to \infty).$$

Особенно хорошо стремится к нулю остаток функций $\sin x$ и $\cos x$ при $|x| \leqslant 1$. Заметим, что численные значения этих функций как раз достаточно знать для дуг x в пределах между числом 0 и числом $\pi/4 < 1$.

Функция $f(x) = \ln(1+x)$ определена и сколько угодно раз дифференцируема для $x > -1$. Ее формулу Тейлора по степеням x можно написать для $n = 1, 2, \ldots$ при $x > -1$. Так как

$$f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(1+x)^n}, \quad f^{(n)}(0) = (-1)^{n-1}(n-1)!,$$

то формула Тейлора имеет вид

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \ldots + (-1)^n\frac{x^{n-1}}{n-1} + R_n(x).$$

При этом для остатка запишем две формы — форму Лагранжа:

$$R_n(x) = \frac{(-1)^{n+1}x^n}{n(1+\theta x)^n} \quad (0 < \theta < 1)$$

и форму Коши:

$$R_n = (-1)^{n+1}\frac{x^n}{1+\theta x}\left(\frac{1-\theta}{1+\theta x}\right)^{n-1} \quad (0 < \theta < 1).$$

Пусть $0 \leqslant x \leqslant 1$; тогда, обращаясь к форме Лагранжа, получим $|R_n(x)| \leqslant \frac{1}{n}x^n \to 0$ $(n \to \infty)$. Мы видим, что при $0 < x < 1$

остаток стремится к нулю быстро, при $x=1$ стремление к нулю происходит очень медленно.

В случае $-1<x<0$ форма Лагранжа не дает возможности сделать определенное заключение о стремлении R_n к нулю, потому что мы знаем только, что θ удовлетворяет неравенствам $0<\theta<1$. При этом не надо забывать, что θ зависит от x и n. Но, применяя форму Коши, получим, считая, что $0<|x|<1$, оценку

$$|R_n|<\frac{|x|^n}{1-|x|}\to 0 \qquad (n\to\infty),$$

потому, что $\frac{1-\theta}{1+\theta x}<\frac{1-\theta}{1-\theta}=1$.

При $x=-1$ $\ln(1+x)$ не имеет смысла. При $x>1$ формула при любом n имеет смысл, однако ее остаточный член $R_n(x)$ теперь уже не стремится к нулю при $n\to\infty$. В этом можно убедиться *), рассуждая следующим окольным путем. Положим

$$S_n(x)=x-\frac{x^2}{2}+\ldots+(-1)^n\frac{x^{n-1}}{n-1}.$$

Тогда

$$S_n(x)+R_n(x)=S_{n+1}(x)+R_{n+1}(x)$$

и

$$R_n(x)-R_{n+1}(x)=(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n}.$$

Для $x>1$ и $n\to\infty$ правая часть этого равенства не стремится к нулю. Поэтому $R_n(x)$ при $n\to\infty$ не может стремиться к нулю — не выполняется критерий Коши существования предела.

Итак, остаточный член формулы Тейлора функции $\ln(1+x)$ по степеням x стремится при $n\to\infty$ к нулю только при x, удовлетворяющих неравенствам $-1<x\leqslant 1$.

Ф у н к ц и я $f(x)=(1+x)^m$. Для этой функции

$$f^{(n)}(x)=m(m-1)\ldots(m-n+1)(1+x)^{m-n},$$

$$f^{(n)}(0)=m(m-1)\ldots(m-n+1).$$

Формула Тейлора по степеням x имеет вид

$$(1+x)^m=1+mx+\frac{m(m-1)}{1\cdot 2}x^2+\frac{m(m-1)(m-2)}{3!}x^3+\\ +\ldots+\frac{m(m-1)\ldots(m-n+2)}{(n-1)!}x^{n-1}+R_n(x).$$

При этом остаток в форме Лагранжа записывается так:

$$R_n=\frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{n!}x^n(1+\theta x)^{m-n},$$

*) Это следует также из расходимости при $|x|>1$ ряда с общим членом $(-1)^n x^{n-1}/(n-1)$ (см. § 11.1).

а в форме Коши

$$R_n = \frac{m(m-1)\dots(m-n+1)}{(n-1)!}x^n(1+\theta x)^{m-1}\left(\frac{1-\theta}{1+\theta x}\right)^{n-1}.$$

При натуральном m и любом x все члены формулы, начиная с $(m+1)$-го, исчезают и формула Тейлора превращается в элементарную формулу Ньютона (см. § 5.9, (6)).

Для остальных m формула имеет смысл, во всяком случае при $x > -1$.

Пусть $0 \leqslant x < 1$. Тогда, если воспользоваться формулой Лагранжа, получим для $n > m$:

$$|R_n(x)| \leqslant \frac{|m(m-1)\dots(m-n+1)|}{n!}x^n \to 0 \quad (n\to\infty)$$

(см. ниже замечание).

Если же $-1 < x < 0$, то, воспользовавшись формулой Коши, получим (см. ниже замечание)

$$|R_n(x)| \leqslant C\frac{|m(m-1)|\dots(m-n+1)|}{(n-1)!}|x|^n \to 0 \quad (n\to\infty),$$

где C — число, вообще зависящее от x, но не зависящее от n, потому что $((1-\theta)/(1+\theta x))^{n-1} \leqslant ((1-\theta)/(1-\theta))^{n-1} = 1$ и при $m-1>0$

$$(1+\theta x)^{m-1} \leqslant 2^{m-1},$$

а при $m-1<0$

$$(1+\theta x)^{m-1} < \frac{1}{(1-|x|)^{1-m}}.$$

Таким образом, остаточный член формулы Тейлора функции $(1+x)^m$ при $-1<x<1$ стремится к нулю при $n\to\infty$. При $x>1$ остаточный член уже не стремится к нулю *), так как, если обозначать через $S_n(x)$ сумму первых n членов разложения $(1+x)^m$, то получим (см. ниже замечание)

$$R_n(x) - R_{n+1}(x) = S_{n+1}(x) - S_n(x) =$$
$$= \frac{m(m-1)\dots(m-n+1)}{n!}x^n \to \infty \quad (n\to\infty)$$

и для $R_n(x)$ не выполняется условие Коши существования предела.

Случаи $x=\pm 1$ мы не рассматриваем. Скажем только, что в этих случаях остаточный член R_n может стремиться и не стремиться к нулю при $n\to\infty$ в зависимости от m. При $m<0$ и $x=-1$ функция $(1+x)^m$ вообще не имеет смысла.

*) Это следует также из расходимости ряда при $x>1$ с общим членом $\frac{m(m-1)\dots(m-n+1)}{n!}x^n$ (см. § 11.1).

Замечание. Для

$$u_n = \frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{n!}x^n,$$

где m — произвольное действительное число, имеет место

$$\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \frac{|m-n|}{n+1}|x| \to |x|, \quad n\to\infty.$$

Но тогда, как докажет это читатель, при $n\to\infty$

$$u_n\to 0, \text{ если } |x|<1, \quad u_n\to\infty, \text{ если } |x|>1$$

(впрочем, см. § 11.3, теорема 2).

§ 5.11. Ряд Тейлора

Выражение

$$u_0+u_1+u_2+u_3+\ldots, \tag{1}$$

где u_k — числа, зависящие в силу некоторого закона от натурального индекса k ($k=0, 1, 2, \ldots$), называется *рядом*.

Обозначим через $S_n = \sum\limits_0^{n-1} u_k$ сумму его первых n членов. Числа S_n составляют последовательность $\{S_n\}=\{S_1, S_2, S_3, \ldots\}$. Если она сходится, т. е. существует конечный предел $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$, то говорят, что ряд (1) *сходится и имеет сумму, равную* S. При этом пишут $S=u_0+u_1+u_2+\ldots$

Если функция f имеет в некоторой окрестности точки a производные сколь угодно высокого порядка, то для нее чисто формально можно написать ряд

$$f(a)+\frac{f'(a)}{1}(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\ldots, \tag{2}$$

который носит название *ряда Тейлора функции f по степеням* $(x-a)$. Для данных значений a и x он может сходиться или расходиться. Особенно важен тот случай, когда ряд Тейлора функции f сходится к самой функции, т. е. имеет суммой $f(x)$.

Это имеет место тогда и только тогда, когда остаточный член в формуле Тейлора

$$f(x) = \sum_0^{n-1}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + R_n(x) = S_n(x)+R_n(x) \tag{3}$$

стремится к нулю при $n\to\infty$. Действительно, если $\lim\limits_{n\to\infty} R_n(x)=0$, то из (3) следует, что

$$\lim_{n\to\infty} S_n(x) = f(x),$$

и так как $S_n(x)$ есть сумма первых n членов ряда (2), то ряд (2) сходится и имеет своей суммой $f(x)$:

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1}(x-a) + \frac{f''(a)(x-a)^2}{2!} + \ldots \tag{4}$$

Обратно, если известно, что для некоторого значения x имеет место равенство (4), т. е. если известно, что ряд (2) при этом значении x сходится и имеет своей суммой число $f(x)$, то это значит, что для указанного значения

$$\lim_{n\to\infty} S_n(x) = f(x).$$

Но тогда из (3) следует, что $R_n(x) \to 0$, $n \to \infty$.

На основании результатов, которые были получены в предыдущем параграфе, мы можем теперь сказать, что имеют место следующие разложения в ряды Тейлора:

$$\left.\begin{aligned}
e^x &= 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots \quad (-\infty < x < \infty),\\
\sin x &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots \quad (-\infty < x < \infty),\\
\cos x &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots \quad (-\infty < x < \infty),\\
(1+x)^m &= 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \\
&\quad + \frac{m(m-1)(m-2)}{3!}x^3 + \ldots \quad (-1 < x < 1),\\
\ln(1+x) &= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots \quad (-1 < x \leqslant 1).
\end{aligned}\right\} \tag{5}$$

В приведенных примерах множества E точек x, где ряды Тейлора по степеням x сходятся, представляют собой интервал или полуинтервал с центром в 0. Это не случайные факты. В дальнейшем будет выяснено, что ряд вида (см. § 11.11)

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots, \tag{6}$$

где a_k — заданные постоянные числа, обладает тем свойством, что если он сходится в точке x_1, то он заведомо сходится для всех x, удовлетворяющих неравенству $|x| < |x_1|$. Ряды вида (6) называются *степенными рядами*.

Бывают и такие случаи, что для функции f можно формально написать ее ряд Тейлора по степеням $(x-a)$.

$$f(a) + \frac{f'(a)}{1}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \ldots, \tag{7}$$

иначе говоря, для этой функции имеют смысл производные $f^{(k)}(a)$

для любого $k = 0, 1, 2, \ldots$ и ряд (7) сходится для некоторых значений x, однако сумма ряда для этих x не равна $f(x)$.

Пример 1. Вот пример такой функции:

$$\psi(x) = \begin{cases} e^{1/(x^2-1)}, & |x| < 1, \\ 0, & |x| \geqslant 1. \end{cases} \tag{8}$$

Если $|x| < 1$, $u = 1 - x^2$, то

$$\psi'(x) = -2x(1-x^2)^{-2} e^{1/(x^2-1)} = -2xu^{-2}e^{-1/u} \to 0, \quad x \to 1.$$

По индукции доказывается, что для $k = 0, 1, 2, \ldots$

$$\psi^{(k)}(x) = P(x)(1-x^2)^{-l} e^{1/(x^2-1)} = P(x)\, u^{-l} e^{-1/u} \to P(1)\cdot 0 = 0.$$
$$x < 1, \quad x \to 1,$$

где $P(x)$ — некоторый многочлен, а число $l > 0$ зависит от k. Если учесть, что $\psi(x) = 0$ при $|x| \geqslant 1$, то мы доказали, что $\lim\limits_{x\to 1} \psi^{(k)}(x) = 0$. Далее, $\psi(1) = 0$, и если уже установлено, что $\psi^{(k)}(1) = 0$ при некотором k, то

$$\psi^{(k+1)}(1) = \lim_{x\to 1} \frac{\psi^{(k)}(x) - \psi^{(k)}(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1} \psi^{(k+1)}(1 + \theta(x-1)) = 0 \quad (0 < \theta < 1).$$

Итак, для функции ψ имеют смысл равные нулю числа $\psi(1)$, $\psi'(1)$, $\psi''(1), \ldots$ и можно написать ее ряд Тейлора по степеням $x - 1$. Все его члены при любом x равны нулю. Он, таким образом, сходится, и его сумма для любого x равна нулю, но отлична от $\psi(x)$ для $|x| < 1$. Аналогичные факты имеют место при $x = -1$.

Функция ψ есть пример бесконечно дифференцируемой на действительной оси функции, равной нулю вне некоторого отрезка.

Функции $f(x)$, разлагающиеся в ряд Тейлора по степеням $(x - a)$, сходящийся к $f(x)$ в некоторой окрестности точки a, называются *аналитическими во всех точках указанной окрестности (открытой). В частности, они аналитические в точке a.*

Из сказанного выше следует, что функции e^x, $\sin x$, $\cos x$ — аналитические на всей действительной оси, а функции $\ln(1+x)$ и $(1+x)^m$ — аналитические на интервале $(-1, +1)$.

Можно показать (см. ниже пример 2), что, каково бы ни было $a > 0$, функции $\ln(1+x)$ и $(1+x)^m$ разлагаются в сходящийся к ним ряд Тейлора по степеням $(x-a)$ для достаточно малых $x - a$, откуда следует, что функции $\ln(1+x)$ и $(1+x)^m$ на самом деле аналитические при любом $x > 0$. Аналитические функции изучаются в специальной математической дисциплине — теории функций комплексного переменного, называемой также теорией аналитических функций.

Возможна следующая классификация функций, заданных на интервале. Функции:

1) произвольные, вообще разрывные;
2) непрерывные;
3) имеющие производную $f^{(n)}$ для некоторого $n = 1, 2, 3, \ldots$;

4) имеющие непрерывную производную $f^{(n)}$ для некоторого $n = 1, 2, \ldots$;

5) бесконечно дифференцируемые, т. е. имеющие производную $f^{(n)}$ любого порядка, таким образом, имеющие непрерывную производную $f^{(n)}$ любого порядка;

6) аналитические.

Каждый следующий класс в этом ряду содержится в предыдущем и состоит из более «хороших» функций.

Функция, определенная равенствами (8), бесконечно дифференцируема на $(-\infty, \infty)$, но не является аналитической на нем. Впрочем, она аналитическая на $(1, \infty)$, $(-\infty, 1)$ и на $(-1, 1)$.

Пример 2. Пусть $f(x) = \ln x$. Тогда

$$f^{(k)}(x) = (-1)^{k-1}(k-1)!x^{-k} \quad (x > 0;\ k = 1, 2, \ldots),$$

$$\ln x = \ln a + \sum_{1}^{n-1} \frac{(-1)^{k-1}(x-a)^k}{ka^k} + R_n(x), \qquad a > 0,$$

где $R_n(x) = \dfrac{(-1)^{n-1}}{n} \dfrac{(x-a)^n}{(a+\theta(x-a))^n}$, $|x-a| < a$. Если $|x-a| < a/2$, то тогда $|a + \theta(x-a)| > a - |x-a| > a - (a/2) = a/2$, $|(x-a)/(a + \theta(x-a))| < 1$ и $|R_n(x)| < 1/n \to 0$.

Таким образом, имеет место разложение в сходящийся ряд

$$\ln x = \ln a + \frac{x-a}{1 \cdot a} - \frac{(x-a)^2}{2a^2} + \frac{(x-a)^3}{3a^3} + \ldots$$

для любого $a > 0$ и $|x-a| < a/2$. Это показывает, что функция $\ln x$ — аналитическая для любого $a > 0$.

Пример 3. Найдем главный степенной член функции $\ln(1 + x + x^2)$:

$$\ln(1 + x + x^2) = (x + x^2) + o(x + x^2) = x + o(x) + o(x) = x + o(x),$$
$$x \to 0.$$

Ведь $\ln(1+u) = u + o(u)$, $u \to 0$; $u = x + x^2 \to 0$ $x \to 0$; $x^2 = o(x)$, $x \to 0$ и $o(x + x^2) = o(x)$, $x \to 0$, потому что

$$\frac{o(x+x^2)}{x} = \underbrace{\frac{o(x+x^2)}{x+x^2}}_{\downarrow\ 0} \cdot \underbrace{\frac{x+x^2}{x}}_{\downarrow\ 1} \to 0, \quad x \to 0.$$

Пример 4. Найдем теперь главный степенной член функции

$$\ln(1 + x + x^2) - x.$$

Если воспользоваться предыдущим результатом, то это не даст главного члена. Ведь тогда

$$\ln(1 + x + x^2) - x = x + o(x) - x = o(x), \qquad x \to 0.$$

Но мы получили некоторую информацию. Главный член, если существует, то имеет степень $n > 1$. Попробуем воспользоваться формулой Тейлора с остатком $o(u^2)$, $u \to 0$ в смысле Пеано. Имеем $\ln(1+u) = u - \frac{u^2}{2} + o(u^2)$, $u \to 0$, поэтому

$$\ln(1+x+x^2) - x = x + x^2 - \frac{(x+x^2)^2}{2} + o((x+x^2)^2) - x =$$

$$= x^2 - \frac{x^2}{2} + o(x^2) + o(x^2) = \frac{x^2}{2} + o(x^2), \quad x \to 0.$$

§ 5.12. Выпуклость кривой в точке. Точка перегиба

Говорят, что *кривая $y = f(x)$ обращена в точке x_0 выпуклостью кверху* (*книзу*), если существует окрестность x_0 такая, что для всех ее точек x касательная к кривой в точке x_0 (т. е. в точке, имеющей абсциссу x_0) расположена выше (ниже) самой кривой (рис. 5.8; здесь в точке x_1 кривая обращена выпуклостью книзу, в точке x_2 — кверху).

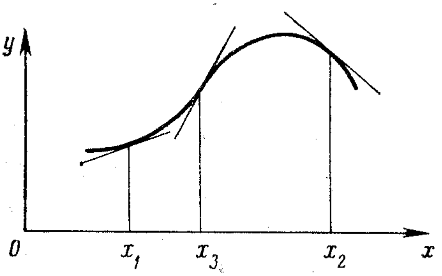

Рис. 5.8.

Говорят, что точка x_0 есть *точка перегиба кривой* $y = f(x)$, если при переходе x через x_0 точка кривой (имеющая абсциссу x) переходит с одной стороны касательной на другую (на рис. 5.8 точка x_3 — точка перегиба). Иначе говоря, существует достаточно малое $\delta > 0$ такое, что для всех $x \in (x_0 - \delta, x_0)$ кривая находится с одной стороны касательной в x_0, а для всех $x \in (x_0, x_0 + \delta)$ — с другой.

Указанные определения выделяют возможные расположения кривой относительно касательной к ней в достаточно малой окрестности точки касания. Но не нужно думать, что эти определения исчерпывают все возможные случаи такого расположения. Вспомним о кривой, являющейся графиком функции

$$f(x) = \begin{cases} 0 & (x = 0), \\ x^2 \sin \frac{1}{x} & (x \neq 0). \end{cases}$$

Ось x пересекает и касается этой кривой в точке $x = 0$ и $x = 0$ не есть точка перегиба.

Теорема 1. *Если функция f имеет в точке x_0 вторую непрерывную производную и $f''(x_0) > 0$ (< 0), то кривая $y = f(x)$ обращена в x_0 выпуклостью книзу* (*кверху*).

Доказательство. Разлагаем f в окрестности $x=x_0$ по формуле Тейлора

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+R(x),$$

$$R(x)=\frac{(x-x_0)^2}{2}f''(x_0+\theta(x-x_0)) \quad (0<\theta<1).$$

Остаток $R(x)$ равен величине превышения кривой f над касательной к ней в точке x_0. В силу непрерывности f'', если $f''(x_0)>0$, то и $f''(x_0+\theta(x-x_0))>0$ для x, принадлежащих достаточно малой окрестности точки x_0, а потому, очевидно, и $R(x)>0$ для любого отличного от x_0 значения x, принадлежащего к указанной окрестности.

Аналогично рассматривается случай $f''(x_0)<0$.

Теорема 2. *Если функция f такова, что производная f''' непрерывна в x_0, а $f''(x_0)=0$ и $f'''(x_0)\neq 0$, то кривая $y=f(x)$ имеет в x_0 точку перегиба.*

Доказательство. В этом случае

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+R(x),$$

$$R(x)=\frac{(x-x_0)^3}{3!}f'''(x_0+\theta(x-x_0)).$$

В силу непрерывности f''' в x_0 и того факта, что $f'''(x_0)\neq 0$, следует, что $f'''(x_0+\theta(x-x_0))$ сохраняет знак в некоторой окрестности точки x_0; он один и тот же справа и слева от точки x_0. С другой стороны, множитель $(x-x_0)^3$ меняет знак при переходе x через x_0, а вместе с ним и величина $R(x)$ (равная превышению точки кривой над касательной в x_0) меняет знак при переходе x через x_0. Это доказывает теорему.

Сформулируем более общую теорему:

Теорема 3. *Пусть функция f обладает следующими свойствами:*

$$f''(x_0)=\ldots=f^{(k)}(x_0)=0,$$

$f^{(k+1)}(x)$ непрерывна в x_0 и $f^{(k+1)}(x_0)\neq 0$.

Тогда, если k — нечетное число, то кривая $y=f(x)$ обращена выпуклостью вверх или вниз в зависимости от того, будет ли $f^{(k+1)}(x_0)<0$ или $f^{(k+1)}(x_0)>0$, а если k — четное число, то x_0 есть точка перегиба кривой.

Если дополнительно к приведенным уже условиям еще

$$f'(x_0)=0, \tag{1}$$

то, если k — нечетное число, функция f достигает в точке x_0 максимума или минимума в зависимости от того, будет ли $f^{(k+1)}(x_0)<0$ или $f^{(k+1)}(x_0)>0$.

Доказательство основано на том, что при указанных условиях имеет место разложение по формуле Тейлора

$$f(x) = f(x_0) + (x - x_0) f'(x_0) + \frac{(x - x_0)^{k+1}}{(k+1)!} f^{(k+1)}(x_0 + \theta(x - x_0)),$$

а при дополнительном условии (1) это разложение превращается в следующее:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{(x - x_0)^{k+1}}{(k+1)!} f^{(k+1)}(x_0 + \theta(x - x_0)).$$

В заключение заметим, что говорят также, что кривая $y = f(x)$ имеет точку перегиба в точке x, где производная $f(x)$ равна $+\infty$ или $-\infty$ (см. рис. 5.1. *в*, *г* на стр. 128 и замечания к ним).

§ 5.13. Выпуклость кривой на отрезке

По определению кривая $y = f(x)$ называется *выпуклой кверху* (*книзу*) на отрезке $[a, b]$, если любая дуга этой кривой с концами в точках x_1, x_2 $(a \leqslant x_1 < x_2 \geqslant b)$ расположена не ниже (не выше) стягивающей ее хорды (рис. 5.9, 5.10).

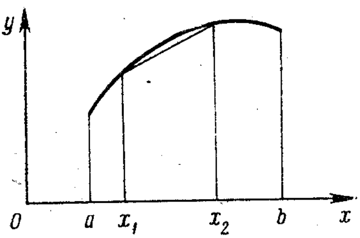

Рис. 5.9.

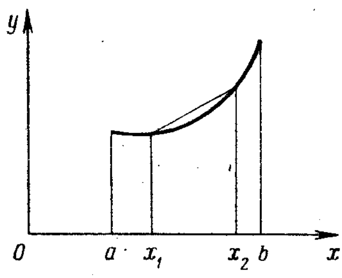

Рис. 5.10.

Теорема 1. *Пусть функция f непрерывна на $[a, b]$ и имеет вторую производную на (a, b).*

Для того чтобы кривая $y = f(x)$ была выпуклой кверху (книзу) на $[a, b]$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось неравенство $f''(x) \leqslant 0$ $(f''(x) \geqslant 0)$ для всех $x \in (a, b)$.

Доказательство. Пусть наша кривая — выпуклая кверху на $[a, b]$. Тогда для любых x и $h > 0$ таких, что x, $x + 2h \in [a, b]$, имеет место неравенство $f(x + h) \geqslant (f(x) + f(x + 2h))/2$, откуда $f(x + h) - f(x) \geqslant f(x + 2h) - f(x + h)$.

Если теперь x_1 и x_2 — произвольные точки интервала (a, b), то, положив $h = (x_2 - x_1)/n$, будем иметь

$$f(x_1 + h) - f(x_1) \geqslant f(x_1 + 2h) - f(x_1 + h) \geqslant \ldots \geqslant f(x_2) - f(x_2 - h).$$

Таким образом, $(f(x_1 + h) - f(x_1))/h \geqslant (f(x_2 - h) - f(x_2))/(-h)$, и, переходя к пределу при $h \to 0$, получим неравенство

$$f'(x_1) \geqslant f'(x_2),$$

показывающее, что производная f' на интервале (a, b) не возрастает. Но тогда $f''(x) \leqslant 0$ на (a, b).

Обратно пусть $f''(x) \leqslant 0$ и $a < x_1 < x_2 < b$. Нужно доказать, что функция $F(x) = f(x) - f(x_1) - m(x - x_1)$, где $m = (f(x_2) - f(x_1))/(x_2 - x_1)$, удовлетворяет неравенству $F(x) \geqslant 0$ на $[x_1, x_2]$. Допустим, что это не так. Тогда $\min\limits_{x_1 \leqslant x \leqslant x_2} F(x) = F(x_0) < 0$ и $x_1 < x_0 < x_2$. Поэтому $F'_1(x_0) = 0$.

Применив формулу Тейлора, получим $0 = F(x_2) = F(x_0) + \frac{(x_2 - x_0)^2}{2!} \times$ $\times F''(x_0 + \theta(x_2 - x_0)) = F(x_0) + \frac{(x_2 - x_0)^2}{2!} f''(x_0 + \theta(x_2 - x_0))$. Но в правой части этой цепочки равенств первый член, по предположению, отрицательный, а второй неположительный, поэтому правая часть меньше нуля и мы пришли к противоречию.

Доказательство в случае

$$f''(x) \geqslant 0$$

аналогично.

Пример. Функция $y = \sin x$ имеет непрерывную первую производную и вторую производную

$$(\sin x)'' = -\sin x \leqslant 0$$

на $[0, \pi/2]$. Поэтому хорда OA, стягивающая дугу кривой $y = \sin x$ на $[0, \pi/2]$, ниже синусоиды (рис. 5.11). Так как уравнение хорды $y = (2/\pi)x$, то мы получим неравенство

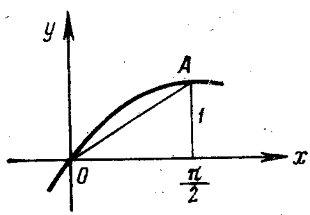

Рис. 5.11.

$$\frac{2}{\pi} x \leqslant \sin x, \qquad 0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2},$$

часто употребляемое в математическом анализе.

§ 5.14. Раскрытие неопределенностей

В нашем распоряжении теперь имеются очень сильные методы дифференциального исчисления — теоремы о среднем и формула Тейлора. С их помощью можно автоматизировать вычисление многих пределов, приводящих при грубом применении обычных правил к неопределенностям вида $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, $\infty - \infty$, $0 \cdot \infty$, 0^0, ∞^0, 1^∞.

Случай 0/0. Требуется вычислить $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)}{\varphi(x)}$ в предположении, что $\lim\limits_{x \to a} f(x) = 0$, $\lim\limits_{x \to a} \varphi(x) = 0$, $\varphi(x) \neq 0$ в окрестности a.

Пусть a — конечное число и для функций f и φ найдены главные степенные члены (относительно $(x - a)$):

$$f(x) = \alpha_p (x - a)^p + o((x - a)^p) \qquad (x \to a),\ \alpha_p \neq 0,$$

$$\varphi(x) = \beta_q (x - a)^q + o((x - a)^q) \qquad (x \to a),\ \beta_q \neq 0.$$

Тогда (см. § 4.10, (10))

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim_{x \to a} \frac{\alpha_p (x-a)^p}{\beta_q (x-a)^q} = \begin{cases} \dfrac{\alpha_p}{\beta_p} & \text{при } p = q, \\ 0 & \text{при } p > q, \\ \infty & \text{при } p < q. \end{cases}$$

Примеры.

1. $$\lim_{x \to 0} \frac{x - \operatorname{tg} x}{x - \sin x} = \lim_{x \to 0} \frac{x - \left(x + \frac{1}{3} x^3 + o(x^3)\right)}{x - \left(x - \frac{x^3}{3!} + o(x^3)\right)} = \lim_{x \to 0} \frac{-\frac{1}{3} + o(1)}{\frac{1}{6} + o(1)} = -2.$$

2. $$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{\sin x} = \lim_{x \to 0} \frac{1 - \left(1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right)}{x + o(x)} = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{x^2}{2} + o(x^2)}{x + o(x)} = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{x^2}{2}}{x} = 0.$$

3. $$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1 - x}{\sqrt{1-x} - \cos\sqrt{x}} =$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2) - 1 - x}{\left(1 - \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + o(x^2) - \left(1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{4!} + o(x^2)\right)\right)} =$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\frac{x^2}{2} + o(x^2)}{-\left(\frac{1}{8} + \frac{1}{24}\right) x^2 + o(x^2)} = -3$$

Но функции f и φ могут не иметь производных в точке a или почему-либо может быть затруднительно или нежелательно вычисление их в этой точке. Тогда может быть полезна следующая общая теорема, доказательство которой основано на применении теоремы о среднем Коши:

Теорема. 1. *Пусть функции f и φ непрерывны и имеют производные в окрестности точки a (a — число или ∞), за исключением, быть может, точки a; при этом φ и φ' не равны нулю в указанной окрестности и*

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} \varphi(x) = 0.$$

Тогда, если существует предел

$$\lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)} = A \tag{1}$$

(конечный или бесконечный), то существует также равный ему предел

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)} = A. \tag{2}$$

В частности, здесь речь может идти о правом или левом пределе, и тогда под окрестностью a понимается правая или левая ее окрестность.

Доказательство. Пусть a — число (конечное). Тогда, полагая $f(a) = 0 = \lim_{x\to a} f(x)$, $\varphi(a) = 0 = \lim_{x\to a} \varphi(x)$, мы получим, что функции f и φ непрерывны в точке a. Это свойство вместе со сформулированными в теореме свойствами позволяет применить к функциям f и φ теорему Коши. Таким образом, какова бы ни была точка x из указанной окрестности, найдется между a и x точка $\xi = a + \theta(x-a)$, $0 < \theta < 1$ такая, что

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)} = \frac{f(x) - f(a)}{\varphi(x) - \varphi(a)} = \frac{f'(\xi)}{\varphi'(\xi)}. \tag{3}$$

Если существует предел (1), то, очевидно, также существует предел

$$\lim_{x\to a} \frac{f'(\xi)}{\varphi'(\xi)} = A,$$

а следовательно, и предел (2).

Итак, существование второго предела в (2) влечет существование равного ему первого предела в (2). Обратное утверждение неверно.

Пример 4. В силу того, что $\sin x \approx x (x \to 0)$,

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2 \sin(1/x)}{\sin x} = \lim_{x\to 0} x \sin\frac{1}{x} = 0.$$

С другой стороны, соответствующее отношение производных равно

$$\frac{2x\sin(1/x) - \cos(1/x)}{\cos x} = 2x\frac{1}{\cos x}\sin\frac{1}{x} - \frac{\cos(1/x)}{\cos x}. \tag{4}$$

Оно, очевидно, не стремится ни к какому пределу при $x \to 0$. Это видно из того, что первый член правой части стремится к нулю, а второй не стремится к какому-либо пределу. Это не мешает тому, что после подстановки в (4) вместо x функции $\xi = \xi(x)$, которая возникает в формуле Коши (3), получается такая функция от x, которая имеет предел при $x \to 0$.

Нам надо рассмотреть еще случай $a = \infty$ (или $a = +\infty$ или $a = -\infty$). Сделаем подстановку $x = 1/u$. Тогда получим функции $F(u) = f(1/u)$, $\Phi(u) = \varphi(1/u)$ от u. Они непрерывны в окрестности точки 0 (при $a = +\infty$ или $a = -\infty$ — в правой или левой окрестностях точки 0), имеют производные (по u) в этой окрестности и Φ, так же как Φ' не равны нулю в ней.

При этом $\lim_{u\to 0} F(u) = \lim_{x\to\infty} f(x) = 0$ и $\lim_{u\to 0} \Phi(u) = \lim_{x\to\infty} \varphi(x) = 0$.

Далее, если существует $\lim_{x\to\infty} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$, то, очевидно, существует равный ему предел:

$$\lim_{u\to 0}\frac{F'(u)}{\Phi'(u)}=\lim_{u\to 0}\frac{f'(1/u)\left(-1/u^2\right)}{\varphi'(1/u)\left(-1/u^2\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}.$$

Поэтому на основании уже доказанного выше (для конечного a)

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\lim_{u\to 0}\frac{F(u)}{\Phi(u)}=\lim_{u\to 0}\frac{F'(u)}{\Phi'(u)}=\lim_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}.$$

Этим теорема доказана.

Приводимое ниже доказательство теоремы 1 годится как для конечного, так и бесконечного a, т. е. a может быть равным ∞, $+\infty$ или $-\infty$.

Пусть задана принадлежащая к указанной в теореме окрестности последовательность точек x_k ($x_k\neq a$), стремящаяся к a ($x_k\to\to a$). В силу того, что $f(x)\to 0$, $\varphi(x)\to 0$ при $x\to a$, для каждого натурального k найдется натуральное n_k такое, что

$$\left|f\left(x_{n_k}\right)\right|<\frac{1}{k}|f(x_k)|,\quad \left|\varphi\left(x_{n_k}\right)\right|<\frac{1}{k}|\varphi(x_k)|,\quad k=1,2,\ldots,$$

при этом можно считать, что $n_k<n_{k+1}$. Поэтому

$$\begin{aligned} f\left(x_{n_k}\right)&=o(f(x_k)),\\ \varphi\left(x_{n_k}\right)&=o(\varphi(x_k)),\end{aligned}\qquad k\to\infty, \tag{5}$$

и справедливо асимптотическое равенство (см. теорему 1 § 4.10)

$$\frac{f(x_k)}{\varphi(x_k)}\approx\frac{f(x_k)-f\left(x_{n_k}\right)}{\varphi(x_k)-\varphi\left(x_{n_k}\right)}\qquad (k\to\infty). \tag{6}$$

Применяя для каждого k теорему Коши (см. (1) § 5.8), находим точку $\xi_k\in\left(x_k,\ x_{n_k}\right)$ такую, что

$$\frac{f(x_k)-f\left(x_{n_k}\right)}{\varphi(x_k)-\varphi\left(x_{n_k}\right)}=\frac{f'(\xi_k)}{\varphi'(\xi_k)}. \tag{7}$$

В силу условия (1) из (6) и (7) получим (см. теорему 2 § 4.10), что существует предел

$$\lim_{k\to\infty}\frac{f(x_k)}{\varphi(x_k)}=\lim_{k\to\infty}\frac{f(x_k)-f\left(x_{n_k}\right)}{\varphi(x_k)-\varphi\left(x_{n_k}\right)}=\lim_{k\to\infty}\frac{f'(\xi_k)}{\varphi'(\xi_k)}=A.$$

Теорема доказана.

С л у ч а й ∞/∞. Справедлива следующая теорема.

Т е о р е м а 2. *Пусть функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ непрерывны и имеют производные f' и φ' в окрестности (в частности, в правой или в левой окрестности) точки a (конечной или бесконечной), за исключением самой точки a. При этом $\varphi'\neq 0$ в указанной окрест-*

ности и

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} \varphi(x) = \infty \qquad (+\infty \textit{ или } -\infty). \tag{8}$$

Тогда, если существует

$$\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)} = A, \tag{9}$$

то существует равный ему предел

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)} = A. \tag{10}$$

Доказательство. Зададим произвольную последовательность точек x_k ($x_k \neq a$), стремящуюся к a ($x_k \to a$).

Так как по условию $f(x_k) \to \infty$, $\varphi(x_k) \to \infty$, то каждому натуральному k можно привести в соответствие натуральное $n_k > k$ ($n_k > n_{k-1}$) такое, что

$$k\,|f(x_k)| < |f(x_{n_k})|, \qquad k\,|\varphi(x_k)| < |\varphi(x_{n_k})| \qquad (k = 1, 2, \ldots).$$

Следовательно,

$$f(x_k) = o\left(f(x_{n_k})\right), \qquad \varphi(x_k) = o\left(\varphi(x_{n_k})\right) \qquad (k \to \infty).$$

Поэтому (см. теоремы 1 и 2 § 4.10) для некоторых $\xi_k \in (x_k, x_{n_k})$

$$\lim_{k\to\infty} \frac{f(x_{n_k})}{\varphi(x_{n_k})} = \lim_{k\to\infty} \frac{f(x_{n_k}) - f(x_k)}{\varphi(x_{n_k}) - \varphi(x_k)} = \lim_{k\to\infty} \frac{f'(\xi_k)}{\varphi'(\xi_k)} = A \qquad (k = 1, 2, \ldots), \tag{11}$$

потому что при $k \to \infty$ $x_k \to a$, следовательно, $x_{n_k} \to a$ ($k < n_k$) и $\xi_k \to a$. Мы доказали, что из всякой последовательности $\left\{\dfrac{f(x_k)}{\varphi(x_k)}\right\}$ можно выделить подпоследовательность $\left\{\dfrac{f(x_{n_k})}{\varphi(x_{n_k})}\right\}$, для которой

$$\lim_{k\to\infty} \frac{f(x_{n_k})}{\varphi(x_{n_k})} = A.$$

Но тогда (см. теорему 9 § 4.1) существует предел

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = A,$$

и выполняется равенство (10).

В равенстве (10) существование второго предела влечет существование ему равного первого, но не наоборот, как показывает следующий пример: предел

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x - \sin x}{x} = \lim_{x\to\infty} \left(1 - \frac{\sin x}{x}\right) = 1$$

существует, между тем как предел при $x \to \infty$ отношения производных $(1-\cos x)/1$ не существует.

Выражаемые теоремами 1, 2 правила, в силу которых вычисление предела отношения функций может быть сведено к вычислению предела отношения их производных, называют правилом Лопиталя, по имени математика, который сформулировал это правило, правда, для весьма простых случаев. Впрочем это правило было известно И. Бернулли до Лопиталя *).

Другие неопределенности. Нам остается еще рассмотреть другие виды неопределенностей. Их можно свести к предыдущим.

Если $f \to \infty$ и $\varphi \to \infty$, то пишем $f - \varphi = \left(\frac{1}{\varphi} - \frac{1}{f}\right) : \frac{1}{f\varphi}$, и получаем неопределенность вида $0/0$.

Если же $f \to 0$ и $\varphi \to \infty$, то пишем $f\varphi = \frac{f}{1/\varphi}$, что приводит к неопределенности вида $0/0$.

Выражения u^v, приводящие к неопределенностям 0^0, ∞^0, 1^∞, удобно логарифмировать, что приводит к неопределенностям вида $0 \cdot \infty$.

Например, $\lim\limits_{x \to a} u^v = e^{\lim\limits_{x \to a} v \ln u}$ если предел показателя степени в правой части конечный. Если же последний равен $+\infty$, $-\infty$, то предел левой части равен соответственно $+\infty$, 0.

Примеры.

5. $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{\ln x}{x} = \lim\limits_{x \to \infty} \frac{1/x}{1} = 0.$

6. $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} x \ln x = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} \frac{\ln x}{1/x} = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} \frac{1/x}{1/x^2} = 0.$

7. $\lim\limits_{x \to +\infty} x^k e^{-x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x^k}{e^x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{kx^{k-1}}{e^x} = \ldots = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{k!}{e^x} = 0$ $(k = 1, 2, \ldots).$

§ 5.15. Кусочно непрерывные и кусочно гладкие функции

Функцию f мы называем *гладкой* на отрезке $[a, b]$, если она имеет непрерывную производную на этом отрезке.

В этом определении под производной в точках a, b понимается соответственно правая и левая производная в этих точках. Гладкая на $[a, b]$ функция автоматически непрерывна на $[a, b]$, ведь она имеет всюду на $[a, b]$ производную.

Другое эквивалентное определение гласит: *функция f гладкая на $[a, b]$, если она непрерывна на отрезке $[a, b]$ и имеет на интервале (a, b) непрерывную производную $f'(x)$ такую, что*

---

*) Г. Ф. Лопиталь (1661—1704) — французский математик. И. Бернулли (1667—1748) — швейцарский математик.

существуют пределы

$$f'(a+0)=A, \quad f'(b-0)=B. \tag{1}$$

Ясно, что первое определение влечет второе. Допустим теперь, что f — гладкая в смысле второго определения. Тогда

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=f'(a+\theta h)\to A \qquad (h>0,\ h\to 0,\ 0<\theta<1) \tag{2}$$

и, следовательно, f имеет производную (правую) в точке a, равную $f'(a)=A$. В силу первого равенства (1) она непрерывна (справа) в этой точке. Аналогично доказывается существование и непрерывность производной от f в точке b и равенство $f'(b)=B$. Следовательно, f гладкая также и в смысле первого определения.

Функцию f мы называем *кусочно непрерывной* на отрезке $[a, b]$, если она определена и непрерывна всюду на $[a, b]$, за исключением, быть может, конечного числа точек x_j $(a\leqslant x_1<\ldots<x_N\leqslant b)$, в которых существуют пределы f справа и слева, т. е. имеют смысл конечные числа $f(x_j-0)$, $f(x_j+0)$. Впрочем, для $x=a$ и $x=b$ предполагается, что имеют смысл соответственно только $f(a+0)$, $f(b-0)$.

Таким образом, кусочно непрерывная на $[a, b]$ функция f непрерывна на каждом из интервалов (x_j, x_{j+1}). Больше того, независимо от того, определена или не определена она в точках x_j, x_{j+1}, ее можно видоизменить или доопределить в этих точках так, что она окажется непрерывной уже на отрезке $[x_j, x_{j+1}]$.

Пример 1. Функция $[x]$, определяемая как наибольшее целое число, не превышающее x, может служить примером функции, являющейся кусочно непрерывной на любом отрезке $[a, b]$. Ее график изображен на рис. 5.12. Точками разрыва функции $[x]$ являются целые значения $x=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ Разрывы в этих точках первого рода, т. е. в них существуют правый и левый пределы функции. Рассмотрим один из наибольших интервалов непрерывности нашей функции, для определенности $(1, 2)$. На нем функция $[x]$ непрерывна. На соответствующем отрезке $[1, 2]$ она уже перестает быть непрерывной $([2-0]=1\neq[2])$. Но достаточно ее видоизменить, положив равной 1 при $x=2$, как она окажется непрерывной на $[1, 2]$.

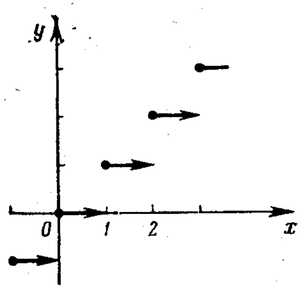

Рис. 5.12.

Мы назовем функцию f *кусочно гладкой на отрезке* $[a, b]$, если она кусочно непрерывна и имеет кусочно непрерывную производную f' на этом отрезке. Таким образом, отрезок $[a, b]$ можно разбить точками

$$a=x_0<x_1<\ldots<x_N=b \tag{3}$$

так, что f непрерывна вместе со своей производной f' на каждом из интервалов (x_j, x_{j+1}) и, кроме того, существуют односторонние конечные пределы как f, так и f' в концевых точках x_j этих интервалов.

Если, рассматривая вполне определенный отрезок $[x_j, x_{j+1}]$, видоизменить или доопределить нашу функцию f на его концах $x=x_j$, x_{j+1} так, что она примет в них соответственно значения $f(x_j+0)$, $f(x_{j+1}-0)$, то, как это было установлено в начале этого параграфа, функция f окажется гладкой на отрезке $[x_j, x_{j+1}]$.

Например, функция $\psi(x)=[x]$, очевидно, не только кусочно непрерывна, но и кусочно гладкая на любом отрезке $[a, b]$, потому что на интервалах $(m, m+1)$, где m — целое, она непрерывна вместе со своей производной и на их концах существуют односторонние пределы ψ и ψ'. Если заменить значение $\psi(m+1)=$ $=m+1$ на новое значение $\psi(m+1)=m$, то функция ψ окажется постоянной на замкнутом отрезке $[m, m+1]$, следовательно, гладкой (см. рис. 5.12).

Важным частным случаем кусочно гладкой функции является *непрерывная кусочно гладкая на отрезке* $[a, b]$ *функция* f. Для нее имеют место следующие характерные свойства:

1) f непрерывна на $[a, b]$; 2) существует разбиение (3) отрезка $[a, b]$ такое, что f является гладкой функцией на каждом из частичных отрезков $[x_j, x_{j+1}]$.

Пример 2. Функция $|x|$ не является гладкой на $[-1, 1]$, потому что в точке $x=0$ она не имеет производной. С другой стороны, $|x|$ — непрерывная кусочно гладкая на $[-1, +1]$ функция, потому что она непрерывна на $[-1, +1]$ и имеет непрерывную производную на интервалах $(-1, 0)$, $(0, 1)$, которая к тому же имеет соответствующие односторонние пределы на концах этих интервалов.

Очевидно, что $$|x|' = \operatorname{sign} x = \begin{cases} +1, & x>0, \\ -1, & x<0. \end{cases}$$

Мы считаем, что функция $\operatorname{sign} x$ в точке $x=0$ не определена.

Упражнения.

1. Показать, что функция, изображенная на рис. 5.6, кусочно гладкая. Показать еще, что функции изображенные на рисунках 5.1, *в* — *е*, не являются таковыми.

Пояснение. Учесть, что эти функции в точке x_0 имеют бесконечные производные, во всяком случае, правые и левые.

2. Показать, что функция $f(x)=\begin{cases} 0, & x=0, \\ x^2 \sin \frac{1}{x}, & 0<|x|\leqslant 1, \end{cases}$ не является гладкой на отрезке $[-1, +1]$, несмотря на то, что она имеет производную во всех точках этого отрезка.

3. Показать, что если функция f непрерывная, но не гладкая на отрезке $[a, b]$, и в то же время гладкая на каждом из отрезков $[a, c]$, $[c, b]$, то f не имеет производной в точке c, хотя и имеет в этой точке правую и левую производные.

4. Показать, что если f непрерывна и имеет производную f' во всех точках $[a, b]$, то последняя не может иметь разрывы первого рода (производная от f в примере 2, хотя и существует всюду на $[-1, +1]$, но имеет в $x=0$ разрыв второго рода).

Глава 6

n-МЕРНОЕ ПРОСТРАНСТВО. ГЕОМЕТРИЯ КРИВОЙ

§ 6.1. n-мерное пространство. Линейное множество

Произвольную упорядоченную систему $\mathbf{x}=(x_1, \ldots, x_n)$ из n действительных (комплексных) чисел x_j называют *вектором* или *точкой n-мерного действительного* (*комплексного*) *пространства* R_n. Таким образом, R_n есть множество всех указанных $\mathbf{x}$.

Векторы (точки) $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}\in R_n$ мы будем складывать и вычитать и умножать на них действительные (комплексные) числа, руководствуясь следующим правилом: если $\mathbf{x}=(x_1, \ldots, x_n)$, $\mathbf{y}=(y_1, \ldots, y_n)$ и α, β — действительные (комплексные) числа, то

$$\alpha\mathbf{x}\pm\beta\mathbf{y}=(\alpha x_1\pm\beta y_1, \ldots, \alpha_n x_n\pm\beta_n y_n).$$

Вектор (точку) $\mathbf{0}=(0, \ldots, 0)$ называют *нулевым вектором* (*точкой*) R_n. Очевидно, $\mathbf{x}+\mathbf{0}=\mathbf{x}$ для любого $\mathbf{x}\in R_n$. Полагают еще $(-1)\mathbf{x}=-\mathbf{x}$ и тогда, очевидно, $\mathbf{x}-\mathbf{y}=\mathbf{x}+(-\mathbf{y})$.

В приложениях (в геометрии, в механике) говорят, что $\mathbf{x}=(x_1, \ldots, x_n)$ есть вектор, начало которого есть нулевая точка, а конец — точка $\mathbf{x}=(x_1, \ldots, x_n)$. В двумерном и трехмерном случае ($n=2, 3$) такая терминология имеет наглядный смысл.

Непосредственно проверяется выполнение следующих свойств ($\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$, $\mathbf{z}\in R_n$, α, β — действительные (комплексные *)) числа):

1) $\mathbf{x}+\mathbf{y}=\mathbf{y}+\mathbf{x}$,
2) $(\mathbf{x}+\mathbf{y})+\mathbf{z}=\mathbf{x}+(\mathbf{y}+\mathbf{z})$,
3) из $\mathbf{x}+\mathbf{y}=\mathbf{x}+\mathbf{z}$ следует $\mathbf{y}=\mathbf{z}$,
4) $\alpha\mathbf{x}+\alpha\mathbf{y}=\alpha(\mathbf{x}+\mathbf{y})$,
5) $\alpha\mathbf{x}+\beta\mathbf{x}=(\alpha+\beta)\mathbf{x}$,
6) $\alpha(\beta\mathbf{x})=(\alpha\beta)\mathbf{x}$,
7) $1\cdot\mathbf{x}=\mathbf{x}$.

Множество E элементов $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$, $\mathbf{z}$, ... любой природы называется *линейным действительным* (*комплексным*) *множеством*, если для любых двух элементов $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}\in E$ в силу некоторого закона определен элемент $\mathbf{x}+\mathbf{y}\in E$, называемый их *суммой*, и если для любого действительного (комплексного) числа α и любого элемента $\mathbf{x}\in E$ определен также элемент $\alpha\mathbf{x}\in E$ (*произведение* α *на* $\mathbf{x}$) и при этом выполняются перечисленные выше свойства (аксиомы) 1)—7).

Из сказанного следует, что R_n *можно рассматривать как пример линейного множества.* Но существуют и многие другие такие

*) О комплексных числах см. § 8.2.

примеры. Множество всех последовательностей действительных или комплексных чисел $\mathbf{x} = \{x_1, x_2, \ldots\}$, если считать, что

$$\alpha\mathbf{x} + \beta\mathbf{y} = \{\alpha x_1 + \beta y_1, \alpha x_2 + \beta y_2, \ldots\}, \quad \mathbf{y} = \{y_1, y_2, \ldots\},$$

есть линейное множество. Его подмножество, состоящее из сходящихся к конечным числам последовательностей, с тем же определением сложения и умножения на число, очевидно, также есть линейное множество. Множество C всех непрерывных на отрезке $[a, b]$ функций f (действительных или комплексных), если считать, как обычно, что

$$\alpha f + \beta\varphi = \alpha f(x) + \beta\varphi(x) \quad (f, \varphi \in C),$$

есть тоже, очевидно, линейное множество.

Наконец, множество многочленов $P_n(x) = \sum\limits_0^n a_k x^k$ степени не выше n есть также линейное множество, если понимать их сложение и умножение на число в обычном смысле.

В списке аксиом 1) — 7) ничего не говорится явно о вычитании элементов и о нулевом элементе. На самом деле эти понятия возникают на основе этих аксиом. Положим $\theta_\mathbf{x} = 0 \cdot \mathbf{x}$; тогда $\mathbf{x} + \theta_\mathbf{x} = \mathbf{x} + 0 \cdot \mathbf{x} = 1 \cdot \mathbf{x} = \mathbf{x}$.

Аналогично определяем $\theta_\mathbf{y} = 0 \cdot \mathbf{y}$; для него также $\mathbf{y} + \theta_\mathbf{y} = \mathbf{y}$. Далее,

$$\mathbf{x} + \mathbf{y} + \theta_\mathbf{y} = \mathbf{x} + (\mathbf{y} + \theta_\mathbf{y}) = \mathbf{x} + \mathbf{y},$$
$$\mathbf{x} + \mathbf{y} + \theta_\mathbf{x} = \mathbf{x} + (\theta_\mathbf{x} + \mathbf{y}) = (\mathbf{x} + \theta_\mathbf{x}) + \mathbf{y} = \mathbf{x} + \mathbf{y}.$$

Но тогда (аксиома 3)) $\theta_\mathbf{x} = \theta_\mathbf{y} = \theta$, каковы бы ни были $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in E$. Итак, θ есть нулевой элемент в E, так как для любого $\mathbf{x} \in E$ имеет место $\mathbf{x} + \theta = \mathbf{x}$. Положим теперь $-\mathbf{x} = (-1)\mathbf{x}$; тогда $\mathbf{x} + (-\mathbf{x}) = (1 - 1)\mathbf{x} = 0\mathbf{x} = \theta$. Вычитание $\mathbf{x} - \mathbf{y}$ двух элементов $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in E$ определяется при помощи равенства $\mathbf{x} - \mathbf{y} = \mathbf{x} + (-\mathbf{y})$. Это действие, обратное действию сложения:

$$(\mathbf{x} - \mathbf{y}) + \mathbf{y} = \mathbf{x} + (-\mathbf{y}) + \mathbf{y} = \mathbf{x} + [(-\mathbf{y}) + \mathbf{y}] = \mathbf{x} + \theta = \mathbf{x}.$$

§ 6.2. Евклидово n-мерное пространство. Пространство со скалярным произведением

Пусть R_n есть действительное или комплексное n-мерное пространство. Произвольным его точкам (векторам)

$$\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n), \quad \mathbf{y} = (y_1, \ldots, y_n)$$

приведем в соответствие число

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_{j=1}^{n} x_j \overline{y}_j, \tag{1}$$

называемое *скалярным произведением векторов* $\mathbf{x}$ *и* $\mathbf{y}$.

Здесь черта над y_j есть знак комплексного сопряжения. В случае действительного пространства y_j действительны и $\overline{y}_j = y_j$.

Скалярное произведение, очевидно, обладает следующими свойствами:

1) $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \overline{(\mathbf{y}, \mathbf{x})}$;

2) $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ есть *линейная форма по* $\mathbf{x}$, т. е. для любых векторов $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$, $\mathbf{z}$ и чисел α, β

$$(\alpha\mathbf{x} + \beta\mathbf{y}, \mathbf{z}) = \alpha(\mathbf{x}, \mathbf{z}) + \beta(\mathbf{y}, \mathbf{z});$$

таким образом, в силу 1)

$$(\mathbf{x}, \alpha\mathbf{y} + \beta\mathbf{z}) = \overline{\alpha}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \overline{\beta}(\mathbf{x}, \mathbf{z});$$

3) $(\mathbf{x}, \mathbf{x}) \geqslant 0$ для любого вектора $\mathbf{x}$, а из равенства $(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = 0$ следует, что $\mathbf{x} = \theta$, так как тогда $x_j = 0$, $j = 1, \ldots, n$.

Введем следующее определение: если E есть линейное (действительное или комплексное) множество и любым его двум элементам (обобщенным векторам) $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ приведено в соответствие число $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$, подчиняющееся условиям 1) — 3), то будем говорить, что E есть *линейное пространство со скалярным произведением* (где введено скалярное произведение).

Конечно, если E — *действительное* линейное множество, то в формулировках условий 1) — 3) можно черточки, обозначающие комплексное сопряжение, опустить.

Теперь мы можем сказать, что *n-мерное пространство R_n, в котором введено понятие* (1), *есть пространство со скалярным произведением.*

В математике известны и другие линейные пространства со скалярным произведением. Некоторые из них мы будем изучать (см. гл. 14).

Пусть $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ — два элемента какого-либо линейного множества E, где введено скалярное произведение, и λ — произвольное число (действительное или комплексное, в зависимости от того, будет ли E действительным или комплексным). Тогда в силу свойств 1) — 3)

$$0 \leqslant (\mathbf{x} + \lambda\mathbf{y}, \mathbf{x} + \lambda\mathbf{y}) = (\mathbf{x}, \mathbf{x}) + \overline{\lambda}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \lambda\overline{(\mathbf{x}, \mathbf{y})} + |\lambda|^2(\mathbf{y}, \mathbf{y}). \tag{2}$$

Если $(\mathbf{y}, \mathbf{y}) > 0$, то положив в (2)

$$\lambda = -\frac{(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{(\mathbf{y}, \mathbf{y})}, \tag{3}$$

и, учтя что $a\overline{a} = |a|^2$, будем иметь

$$\overline{\lambda}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \lambda\overline{(\mathbf{x}, \mathbf{y})} = -\frac{|(\mathbf{x}, \mathbf{y})|^2}{(\mathbf{y}, \mathbf{y})} = -|\lambda|^2(\mathbf{y}, \mathbf{y}),$$

т. е.

$$0 \leqslant (\mathbf{x}, \mathbf{x}) - \frac{|(\mathbf{x}, \mathbf{y})|^2}{(\mathbf{y}, \mathbf{y})}, \tag{4}$$

и мы получили важное неравенство (*неравенство Буняковского*):

$$|(\mathbf{x}, \mathbf{y})| \leqslant (\mathbf{x}, \mathbf{x})^{1/2}(\mathbf{y}, \mathbf{y})^{1/2}. \tag{5}$$

При $(\mathbf{y}, \mathbf{y}) = 0$, т. е. если $\mathbf{y} = \theta$ есть нулевой элемент, оно тоже верно, потому что $(\mathbf{x}, \theta) = (\mathbf{x}, 0 \cdot \theta) = 0(\mathbf{x}, \theta) = 0$.

Далее, для любых двух элементов $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in E$ имеет место:

$$\begin{aligned}(\mathbf{x}+\mathbf{y}, \mathbf{x}+\mathbf{y}) &= (\mathbf{x}, \mathbf{x}) + (\mathbf{x}, \mathbf{y}) + (\mathbf{y}, \mathbf{x}) + (\mathbf{y}, \mathbf{y}) \leqslant \\ &\leqslant (\mathbf{x}, \mathbf{x}) + 2|(\mathbf{x}, \mathbf{y})| + (\mathbf{y}, \mathbf{y}) \leqslant \\ &\leqslant (\mathbf{x}, \mathbf{x}) + 2\sqrt{(\mathbf{x}, \mathbf{x})}\sqrt{(\mathbf{y}, \mathbf{y})} + (\mathbf{y}, \mathbf{y}) = \left(\sqrt{(\mathbf{x}, \mathbf{x})} + \sqrt{(\mathbf{y}, \mathbf{y})}\right)^2, \end{aligned} \tag{6}$$

и мы получили другое важное неравенство:

$$(\mathbf{x}+\mathbf{y}, \mathbf{x}+\mathbf{y})^{1/2} \leqslant (\mathbf{x}, \mathbf{x})^{1/2} + (\mathbf{y}, \mathbf{y})^{1/2}. \tag{7}$$

Для пар элементов вида $\mathbf{x} = \alpha\mathbf{y}$ и $\mathbf{y}$, где α — число и $\mathbf{y}$ любое или $\mathbf{y} = \theta$ и $\mathbf{x}$ любое, неравенство (5) обращается в точное равенство

$$|(\mathbf{x}, \mathbf{y})| = (\mathbf{x}, \mathbf{x})^{1/2}(\mathbf{y}, \mathbf{y})^{1/2}. \tag{8}$$

Наоборот, если выполняется равенство (8), то либо $\mathbf{y} = \theta$, либо выполняется (2) со знаком равенства, если λ определить по формуле (3), и тогда $\mathbf{x} + \lambda\mathbf{y} = \theta$ в силу свойства 3) скалярного произведения.

Неравенство (7), очевидно, обращается в равенство при условии, что либо $\mathbf{y} = \theta$, либо $\mathbf{x} = \alpha\mathbf{y}$, где α — неотрицательное число.

Но и наоборот, если (7) есть на самом деле равенство, то все соотношения в (6) обращаются в равенства, откуда, в частности, следует (8). Следовательно, либо $\mathbf{y} = \theta$, либо $\mathbf{x} = \alpha\mathbf{y}$, где α — число. Положив в равенстве (7) $\mathbf{x} = \alpha\mathbf{y}$, $(\mathbf{y}, \mathbf{y}) > 0$, получим после сокращения на $(\mathbf{y}, \mathbf{y})$ равенство $|1+\alpha| = 1 + |\alpha|$, откуда $\alpha \geqslant 0$.

Арифметическое значение корня квадратного из $(\mathbf{x}, \mathbf{x})$ называется *нормой* $\mathbf{x}$ и обозначается так: $\|\mathbf{x}\| = (\mathbf{x}, \mathbf{x})^{1/2}$ (см. следующий параграф).

n-мерное пространство R_n, где введено скалярное произведение (1), а вместе с ним и норма $\|\mathbf{x}\| = |\mathbf{x}| = \left(\sum_1^n |x_j|^2\right)^{1/2}$ для $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$, называется *евклидовым n-мерным пространством*. Таким образом, нормы элементов $\mathbf{x}$ евклидова n-мерного пространства мы будем обозначать также через $|\mathbf{x}|$. При $n = 3$ норма $|\mathbf{x}| = \left(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2\right)^{1/2}$ вектора $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ есть его длина.

Неравенства (5), (7) для элементов евклидова n-мерного пространства превращаются в следующие неравенства для систем чисел $(x_1, \ldots, x_n)$, $(y_1, \ldots, y_n)$:

$$\left|\sum_1^n x_j\overline{y}_j\right| \leqslant \left(\sum_1^n |x_j|^2\right)^{1/2} \left(\sum_1^n |y_j|^2\right)^{1/2}, \tag{9}$$

$$\left(\sum_1^n |x_j + y_j|^2\right)^{1/2} \leqslant \left(\sum_1^n |x_j|^2\right)^{1/2} + \left(\sum_1^n |y_j|^2\right)^{1/2}. \tag{10}$$

Из (9) следует

$$\sum_1^n |x_j y_j| \leqslant \left(\sum_1^n |x_j|^2\right)^{1/2} \left(\sum_1^n |y_j|\right)^{1/2}, \tag{11}$$

потому что можно считать, что неравенство (9) применено к неотрицательным числам $|x_j|$, $|y_j| = |\bar{y}_j|$.

Отметим еще неравенства

$$\frac{1}{n^{1/2}}\sum_1^n |x_j| \leqslant \left(\sum_{j=1}^n |x_j|^2\right)^{1/2} \leqslant \sum_1^n |x_j|. \tag{12}$$

Первое из них вытекает из (11), если считать $y_j = 1$ ($j = 1, \ldots$ $\ldots, n$), а второе проверяется непосредственно после возведения его частей в квадрат.

Соотношение (9) называется *неравенством Коши*, а (10) есть частный случай *неравенства Минковского* (см. далее § 14.2, (12)).

§ 6.3. Линейное нормированное пространство

Если E есть линейное множество элементов $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \ldots$ и каждому его элементу $\mathbf{x}$ приведено в соответствие число $\|\mathbf{x}\|$, удовлетворяющее ниже формулируемым трем свойствам 1) — 3), то говорят, что E есть *линейное нормированное пространство*, а число $\|\mathbf{x}\|$ называют *нормой элемента* $\mathbf{x}$.

1) $\|\mathbf{x}\| \geqslant 0$ для любого $\mathbf{x} \in E$; из равенства $\|\mathbf{x}\| = 0$ следует, что $\mathbf{x} = \theta$, т. е. есть нулевой элемент линейного множества E;

2) $\|\alpha\mathbf{x}\| = |\alpha|\,\|\mathbf{x}\|$ для любого $\mathbf{x} \in E$ и любого числа α (комплексного или действительного, в зависимости от того, будет ли E комплексным или действительным);

3) $\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\| \leqslant \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|$, каковы бы ни были $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in E$.

Таким образом, евклидово пространство R_n есть нормированное пространство с нормой

$$\|\mathbf{x}\| = |\mathbf{x}| = \left(\sum_1^n |x_j|^2\right)^{1/2}. \tag{1}$$

Возможны и другие (не евклидовы) нормировки пространства R_n. Например, для точек (векторов) $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in R_n$ можно ввести норму

$$\|\mathbf{x}\| = \max\{|x_1|, |x_2|, \ldots, |x_n|\}, \tag{2}$$

или

$$\|\mathbf{x}\| = \left(\sum_1^n |x_j|^p\right)^{1/p} \quad (1 \leqslant p < \infty) \tag{3}$$

Тот факт, что (2) есть норма, так же как то, что (3) при $p = 1$ есть норма, читатель легко может проверить (общий случай см. § 14.2).

Неравенство 3) называется *неравенством треугольника*. В двумерном или трехмерном случае евклидова пространства оно как раз и выражает известный геометрический факт, что длина стороны треугольника не превышает суммы длин остальных его двух сторон, и кстати доказывает этот факт аналитическим путем.

Из неравенства 3) следует (если заменить в нем $\mathbf{x}$ на $\mathbf{x}-\mathbf{y}$ или $\mathbf{y}$ на $\mathbf{y}-\mathbf{x}$), что

$$\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\| \geqslant \|\mathbf{x}\| - \|\mathbf{y}\|, \quad \|\mathbf{x}-\mathbf{y}\| \geqslant \|\mathbf{y}\| - \|\mathbf{x}\|,$$

поэтому

$$\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\| \geqslant |\|\mathbf{x}\| - \|\mathbf{y}\||. \tag{4}$$

В нормированном пространстве E можно определить *понятие предела*. Будем говорить, что последовательность элементов $\mathbf{x}_n \in E$ *сходится* (*стремится*) к элементу $\mathbf{x} \in E$ и писать $\mathbf{x}_n \to \mathbf{x}$ или $\lim \mathbf{x}_n = \mathbf{x}$ $(n \to \infty)$, если $\|\mathbf{x}_n - \mathbf{x}\| \to 0$ $(n \to \infty)$.

Если последовательность элементов $\mathbf{x}_n \in E$ *имеет предел* $\mathbf{x} \in E$, *то этот предел единственный*, потому что из того, что $\mathbf{x}_n \to \mathbf{x}$, $\mathbf{x}_n \to \mathbf{y}$, следует

$$\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\| = \|(\mathbf{x}-\mathbf{x}_n) + (\mathbf{x}_n - \mathbf{y})\| \leqslant \|\mathbf{x}-\mathbf{x}_n\| + \|\mathbf{x}_n - \mathbf{y}\| \to 0,$$

откуда $\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\| = 0$, т. е. $\mathbf{x} = \mathbf{y}$.

Так как $|\|\mathbf{x}_n\| - \|\mathbf{x}\|| \leqslant \|\mathbf{x}_n - \mathbf{x}\| \to 0$, то из того, что $\mathbf{x}_n$ сходится к $\mathbf{x}$, следует, что $\|\mathbf{x}_n\|$ стремится к $\|\mathbf{x}\|$:

$$\|\mathbf{x}_n\| \to \|\mathbf{x}\| \quad (n \to \infty).$$

Если $\mathbf{x}_n$, $\mathbf{y}_n$, $\mathbf{x}$, $\mathbf{y} \in E$, а α_n, α — числа и если $\mathbf{x}_n \to \mathbf{x}$, $\mathbf{y}_n \to \mathbf{y}$, $\alpha_n \to \alpha$, то

$$\lim_{n\to\infty} (\mathbf{x}_n \pm \mathbf{y}_n) = \mathbf{x} \pm \mathbf{y}, \quad \lim_{n\to\infty} (\alpha_n \mathbf{x}_n) = \alpha \mathbf{x}.$$

В самом деле,

$$\|(\mathbf{x} \pm \mathbf{y}) - (\mathbf{x}_n \pm \mathbf{y}_n)\| \leqslant \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_n\| + \|\mathbf{y} - \mathbf{y}_n\| \to 0 \quad (n \to \infty),$$

$$\|\alpha\mathbf{x} - \alpha_n\mathbf{x}_n\| = \|(\alpha - \alpha_n)\mathbf{x} + \alpha_n(\mathbf{x} - \mathbf{x}_n)\| \leqslant \|(\alpha - \alpha_n)\mathbf{x}\| + \\ + \|\alpha_n(\mathbf{x} - \mathbf{x}_n)\| \leqslant |\alpha - \alpha_n| \, \|\mathbf{x}\| + |\alpha_n| \, \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_n\| \to 0 \quad (n \to \infty)$$

§ 6.4. Вектор-функция в n-мерном евклидовом пространстве

Пусть E есть множество действительных чисел t. Если каждому $t \in E$ в силу определенного закона приведен в соответствие вектор *)

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}(t) = (x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t)), \tag{1}$$

то будем говорить, что этим определена *вектор-функция* $\mathbf{x}(t)$ *на* E.

Обычные функции $\alpha(t)$ (приводящие в соответствие каждому $t \in E$ число $\alpha(t)$) называют также *скалярными функциями*.

---

*) Мы будем иметь в виду векторы $\mathbf{x}$, принадлежащие действительному пространству R_n, но ничего в наших рассуждениях не изменится, если считать R_n комплексным.

Будем говорить, что вектор-функция $\mathbf{x}(t)$ имеет предел в точке t_0, равный вектору $\mathbf{y}=(y_1, \ldots, y_n)$, и писать

$$\lim_{t\to t_0}\mathbf{x}(t)=\mathbf{y} \text{ или } \mathbf{x}(t)\to\mathbf{y},\ t\to t_0, \tag{2}$$

если

$$\lim_{t\to t_0}|\mathbf{y}-\mathbf{x}(t)|=0, \tag{3}$$

или, что все равно (пояснения ниже), если

$$\lim_{t\to t_0}x_j(t)=y_j \quad (j=1, \ldots, n). \tag{4}$$

Равенство (3) утверждает, что скалярная функция $|\mathbf{y}-\mathbf{x}(t)|$ от t имеет предел при $t\to t_0$, равный нулю, но это, как мы знаем, предполагает, что она определена на некоторой окрестности точки t_0, за исключением, быть может, самой точки t_0, но тогда и все компоненты $x_j(t)$ определены на этой окрестности.

Имеют место неравенства (см. 6.2, (11))

$$\frac{1}{\sqrt{n}}|y_j-x_j(t)|\leqslant$$
$$\leqslant\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{j=1}^{n}|y_j-x_j(t)|\leqslant\left[\sum_{j=1}^{n}(y_j-x_j(t))^2\right]^{1/2}=|\mathbf{y}-\mathbf{x}(t)|,$$

из которых следует, что если выполняется (3), то выполняется и (4) для всех $j=1, \ldots, n$, и наоборот.

По определению, вектор-функция $\mathbf{x}(t)$ имеет правый (левый) предел в точке t_0, равный $\mathbf{y}=(y_1, \ldots, y_n)$, если

$$|\mathbf{x}(t)-\mathbf{y}|\to 0,\quad t\to t_0,\quad t>t_0$$

(соответственно $|\mathbf{x}(t)-\mathbf{y}|\to 0$, $t\to t_0$, $t<t_0$). Эти пределы обозначаются соответственно так:

$$\mathbf{x}(t_0+0)=\lim_{\substack{t\to t_0\\ t>t_0}}\mathbf{x}(t),\quad \mathbf{x}(t_0-0)=\lim_{\substack{t\to t_0\\ t<t_0}}\mathbf{x}(t).$$

Легко видеть, рассуждая как выше, что

$$\mathbf{x}(t_0+0)=(x_1(t_0+0), \ldots, x_n(t_0+0)),$$
$$\mathbf{x}(t_0-0)=(x_1(t_0-0), \ldots, x_n(t_0-0)),$$

причем существование векторных пределов, стоящих в левых частях этих равенств, влечет существование соответствующих пределов компонент, и наоборот.

По определению, вектор-функция $\mathbf{x}(t)$ *непрерывна, непрерывна справа* или *непрерывна слева* в точке t_0, если существуют соответственно пределы $\lim_{t\to t_0}\mathbf{x}(t)$, $\mathbf{x}(t_0+0)$ и $\mathbf{x}(t_0-0)$, равные $\mathbf{x}(t_0)$.

Эти определения, очевидно, эквивалентны утверждениям, что компоненты $x_j(t)$ ($j = 1, \ldots, n$) в точке t_0 непрерывны, непрерывны справа, непрерывны слева.

Очевидно, что $\mathbf{x}(t)$ непрерывна в $t = t_0$ тогда и только тогда, когда существуют $x(t_0)$, $\mathbf{x}(t_0 + 0)$ и $\mathbf{x}(t_0 - 0)$ и выполняются равенства $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}(t_0 + 0) = \mathbf{x}(t_0 - 0)$.

Производная от вектор-функции $\mathbf{x}(t)$ в точке t определяется как предел:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \frac{d\mathbf{x}}{dt} = \lim_{h\to 0} \frac{\mathbf{x}(t+h) - \mathbf{x}(t)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\Delta\mathbf{x}}{h},$$

если, конечно, он существует. Производная порядка m от $\mathbf{x}(t)$ определяется по индукции:

$$\frac{d^m\mathbf{x}}{dt^m} = \frac{d}{dt}\frac{d^{m-1}\mathbf{x}}{dt^{m-1}} \quad (m = 2, 3, \ldots).$$

При этом, очевидно, существование ее влечет за собой существование производных m-го порядка от компонент и наоборот. Имеет место равенство

$$\frac{d^m\mathbf{x}}{dt^m} = \left(x_1^{(m)}(t), \ldots, x_n^{(m)}(t)\right) \quad (m = 1, 2, \ldots).$$

Производные первого и второго порядка обозначают и так:

$$\dot{\mathbf{x}} = \dot{\mathbf{x}}(t), \quad \ddot{\mathbf{x}} = \ddot{\mathbf{x}}(t).$$

Если $\mathbf{x}(t)$, $\mathbf{y}(t)$ — вектор-функция, а $\alpha(t)$ — скалярная функция, то имеют место равенства:

$$\lim_{t\to t_0} [\mathbf{x}(t) \pm \mathbf{y}(t)] = \lim_{t\to t_0} \mathbf{x}(t) \pm \lim_{t\to t_0} \mathbf{y}(t),$$

$$\lim_{t\to t_0} [\alpha(t)\,\mathbf{x}(t)] = \lim_{t\to t_0} \alpha(t) \lim_{t\to t_0} \mathbf{x}(t),$$

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{x} \pm \mathbf{y}) = \frac{d\mathbf{x}}{dt} \pm \frac{d\mathbf{y}}{dt}, \quad \frac{d}{dt}(\alpha\mathbf{x}) = \alpha\frac{d\mathbf{x}}{dt} + \frac{d\alpha}{dt}\mathbf{x},$$

где, конечно, предполагается, что пределы или производные, фигурирующие в правых частях равенств, существуют. Эти равенства тривиальным образом доказываются переходом от векторов к соответствующим координатам, например,

$$\lim_{t\to t_0} [\mathbf{x}(t) \pm \mathbf{y}(t)] = \left(\lim_{t\to t_0} [x_1(t) \pm y_1(t)], \ldots, \lim_{t\to t_0} [x_n(t) \pm y_n(t)]\right) =$$

$$= \left(\lim_{t\to t_0} x_1(t) \pm \lim_{t\to t_0} y_1(t), \ldots, \lim_{t\to t_0} x_n(t) + \lim_{t\to t_0} y_n(t)\right) =$$

$$= \left(\lim_{t\to t_0} x_1(t), \ldots, \lim_{t\to t_0} x_n(t)\right) \pm \left(\lim_{t\to t_0} y_1(t), \ldots, \lim_{t\to t_0} y_n(t)\right) =$$

$$= \lim_{t\to t_0} \mathbf{x}(t) \pm \lim_{t\to t_0} \mathbf{y}(t).$$

Но можно рассуждения проводить чисто векторным путем, например, полагая $\lim_{t\to t_0} \alpha(t) = \beta$, $\lim_{t\to t_0} \mathbf{x}(t) = \mathbf{y}$, получим

$$|\alpha(t)\mathbf{x}(t) - \beta\mathbf{y}| \leqslant |[\alpha(t) - \beta]\mathbf{x}(t)| + |\beta(\mathbf{x}(t) - \mathbf{y})| \leqslant$$
$$\leqslant |\alpha(t) - \beta|\, |\mathbf{x}(t)| + |\beta|\, |\mathbf{x}(t) - \mathbf{y}| \to 0 \cdot |\mathbf{y}| + |\beta| \cdot 0 = 0,\ t \to t_0.$$

§ 6.5. Кривая в n-мерном пространстве

При непрерывном возрастании t на $[a, b]$ ((a, b)) точка, определяемая непрерывной вектор-функцией

$$\mathbf{x}(t) = (\varphi_1(t), \ldots, \varphi_n(t)) \in R_n, \tag{1}$$

описывает некоторый образ — *траекторию* (*годограф*) *вектор-функции* $\mathbf{x}(t)$ *или множество точек, упорядоченное посредством переменной* t. При этом не исключено, что подвижная точка $\mathbf{x}(t)$ может возвратиться в точку пространства R_n, которую она уже прошла, но уже при новом значении t. При $n = 2$, 3 подобные траектории имеют реальный смысл.

Наряду с непрерывной вектор-функнией (1) будем рассматривать вектор-функции, определяемые векторными равенствами

$$\mathbf{x}_*(\tau) = \mathbf{x}(\lambda(\tau)) = (\varphi_1(\lambda(\tau)), \ldots, \varphi_n(\lambda(\tau)))$$
$$(\tau \in [c, d] \text{ или } \tau \in (c, d)) \tag{2}$$

или, что все равно, системами скалярных равенств

$$x_1 = \varphi_{*1}(\tau) = \varphi_1(\lambda(\tau)), \ldots, x_n = \varphi_{*n}(\tau) = \varphi_n(\lambda(\tau)), \tag{2'}$$

где $t = \lambda(\tau)$ есть произвольная непрерывная строго монотонная (действительная!) функция, отображающая (взаимно однозначно!) некоторый отрезок $[c, d]$ (интервал (c, d)) новой переменной τ на отрезок $[a, b]$ (интервал (a, b)) прежней переменной t.

Ясно, что уравнение (2) определяет ту же траекторию, что и уравнение (1), и упорядочение ее точек с помощью t и τ происходит одинаково, если $\lambda(\tau)$ строго возрастает, и оно меняется на противоположное упорядочение, если $\lambda(\tau)$ строго убывает.

Говорят, что уравнение (1) определяет *непрерывную кривую* Γ, заданную параметрически через параметр t, в то время как уравнение (2) определяет ту же кривую Γ, но через параметр τ. Таким образом, различным указанным строго монотонным непрерывным функциям $\lambda(\tau)$ соответствуют различные *параметрические представления* одной и той же *непрерывной кривой* Γ.

Всегда можно функцию $\lambda(\tau)$ подобрать так, что будет $c = 0$, $d = 1$.

Функции $\lambda(\tau)$ можно разбить на два класса: класс строго возрастающих функций и класс строго убывающих функций. Первый класс упорядочивает точки Γ в одном направлении, а второй — в другом, ему противоположном. В связи с этим возникает понятие *ориентированной кривой* Г. Мы можем обозначить, например, через Γ_+ кривую Г, ориентированную при помощи параметра t. Γ_+ определяют также всевозможные уравнения (2), где $\lambda(\tau)$ — непрерывные строго возрастающие функции. Эту же *кривую* Г, *ориентированную противоположно*, естественно обозначать через Γ_-. Она определяется всевозможными уравнениями (2), где $\lambda(\tau)$ — непрерывные строго убывающие функции.

Кривая Г называется *гладкой на* $[a, b]$ [на (a, b)), если ее можно*) задать при помощи *гладкой вектор-функции* $\mathbf{x}(t)$, т. е. непрерывной и имеющей непрерывную *не равную нулю* производную на $[a, b]$ (на (a, b)) или, что, очевидно, все равно, если компоненты $x_j(t)$ вектор-функции $\mathbf{x}(t)$ есть гладкие скалярные функции на $[a, b]$ (на (a, b)), имеющие производные, одновременно не равные нулю. Это последнее свойство эквивалентно тому факту, что

$$|\mathbf{x}'(t)|^2 = \sum_{j=1}^{n} [x_j'(t)]^2 > 0, \quad t \in [a, b] \ ((a, b)). \tag{3}$$

В этой формулировке, конечно, непрерывность $\mathbf{x}(t)$ в концевых точках a и b понимается как односторонняя непрерывность справа в a и слева в b. Производная же $\mathbf{x}'(t)$ в a и b понимается как правая в a и левая в b.

Мы будем называть параметр τ *допустимым* параметром гладкой кривой Г, если он связан с t при помощи равенства $t = \lambda(\tau)$, $\tau \in [c, d]$ ((c, d)), где $\lambda(\tau)$ не только непрерывна и строго монотонна, но имеет непрерывную производную, не равную нулю на $[c, d]$ ((c, d)). Таким образом, производная $\lambda'(\tau)$ на самом деле имеет один и тот же знак на $[c, d]$ ((c, d)): «+» или «−». Если τ — допустимый параметр, то сформулированное выше на языке t определяющее свойство гладкой кривой, очевидно, сохранится, если его формулировать на языке τ, потому что вектор-функция $\mathbf{x}(\lambda(\tau)) = x_*(\tau)$, имеет непрерывную производную на $[c, d]$ ((c, d)), к тому же не равную нулю:

$$\sum_{j=1}^{n} x_{*j}'(\tau)^2 = \lambda'(\tau)^2 \sum_{j=1}^{n} x_j'(t)^2 > 0.$$

Зададим точку $(x_1^0, \ldots, x_n^0) = \mathbf{x}^0 \in \Gamma$, соответствующую значению $t_0 \in (a, b)$. Одно из слагаемых суммы в (3) положительное, для определенности будем считать n-е: $x_n'(t_0)^2 > 0$.

---

*) Здесь слово «можно» существенно, так как гладкую вектор-функцию можно «испортить», введя новый параметр τ при помощи подстановки $t = \lambda(\tau)$, где $\lambda(\tau)$ — строго монотонная непрерывная функция, имеющая производную, равную нулю, или вовсе не имеющая производной в некоторых τ.

Тогда существует окрестность*) значения t_0 на которой $x_n'(t)$ сохраняет знак, и на этой окрестности уравнение $x_n = x_n(t)$ можно разрешить:

$$t = \mu(x_n), \quad \left(x_n^0 - \eta_1 < x_n < x_n^0 + \eta_2\right),$$

где $\eta_1, \eta_2 > 0$ — некоторые числа, а μ — функция, обратная к $x_n(t)$, непрерывная и имеющая непрерывную производную. Но тогда кусок нашей кривой (1), соответствующий указанной окрестности, наряду с уравнениями (1) определяется также уравнениями

$$\begin{gathered} x_j = \mu_j(x_n) = x_j[\mu(x_n)] \quad (j = 1, \ldots, n-1), \\ x_n = x_n \quad \left(x_n^0 - \eta_1 < x_n < x_n^0 + \eta_2\right). \end{gathered}$$

Эти уравнения можно дифференцировать один раз (в указанной окрестности):

$$\frac{dx_j}{dx_n} = \frac{\frac{dx_j}{dt}}{\frac{dx_n}{dt}} \quad (j = 1, \ldots, n-1).$$

Сказанное мы резюмируем:

Теорема 1. *Какова бы ни была точка* $\mathbf{x}^0$ *гладкой кривой* Γ, *соответствующая некоторому значению* $t = t_0 \in (a, b)$ *параметра, можно указать такое достаточно малое* $\delta > 0$, *что кусок* Γ, *соответствующий изменению* t *на интервале* $(t_0 - \delta, t_0 + \delta)$, *можно параметрически выразить по крайней мере через одну из координат* x_i:

$$x_j = \varphi_j(x_i) \quad \left(j = 1, \ldots, i-1, i+1, \ldots, n;\ x_i^0 - \eta_1 < x_i < x_i^0 + \eta_2\right),$$

где функции φ_j *имеют непрерывные производные*:

$$\frac{dx_j}{dx_i} = \frac{\frac{dx_j}{dt}}{\frac{dx_i}{dt}} \quad (j = 1, \ldots, i-1, i+1, \ldots, n).$$

В частности, в двумерном случае гладкая кривая определяется двумя уравнениями:

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t) \quad (t \in (a, b)), \tag{4}$$

где φ и ψ имеют непрерывные, одновременно не равные нулю производные. Если, например, $\varphi'(t_0) \neq 0$, то существует интервал $(t_0 - \delta, t_0 + \delta)$, на котором φ имеет обратную функцию $t = \varphi^{-1}(x)$, и тогда $y = f(x) = \psi(\varphi^{-1}(x))$. Обычно в этом случае говорят, что

---

*) Если $t_0 = a, b$, то вместо окрестности надо иметь в виду полуокрестность (правую или левую) точки t_0.

функция $y=f(x)$ задана параметрически равенствами (4), формулу же

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} \tag{5}$$

трактуют как *формулу производной от функции $f(x)$ в параметрическом виде*. Очевидно также, что

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}\left(\frac{y_t'}{x_t'}\right)=\frac{d}{dt}\left(\frac{y_t'}{x_t'}\right)\frac{dt}{dx}=\frac{x_t'y_t''-y_t'x_t''}{x_t'^3}, \tag{6}$$

если добавочно допустить, что существуют вторые производные x_t'', y_t''.

Кривая Γ называется *непрерывной кусочно гладкой* на $[a, b]$ (на (a, b)), если ее можно задать при помощи непрерывной на $[a, b]$ ((a, b)) вектор-функции $\mathbf{x}(t)$ такой, что отрезок $[a, b]$ (интервал (a, b)) может быть разбит на конечное число частей точками $a=t_0<t_1<\ldots<t_N=b$ так, что $\mathbf{x}(t)$ на этих частях *) $[a, t_1]$ $[t_1, t_2]$, ..., $[t_{N-1}, b]$ есть гладкая кривая.

Надо иметь в виду, что в точках деления t_k $(k=1, \ldots, N-1)$ левая производная $\dot{\mathbf{x}}(t_k-0)$, вообще говоря, не равна правой $\dot{\mathbf{x}}(t_k+0)$, но обе они отличны от нуля (среди их компонент имеется хотя бы одна не равная нулю).

Различные параметрические представления непрерывной кусочно-гладкой кривой Γ определяются уравнением (2) при помощи функции $t=\lambda(\tau)$, имеющей на $[c, d]$ ((c, d)) не равную нулю непрерывную производную $\lambda'(\tau)$.

Непрерывная кривая (1) называется также *кривой Жордана* (*жордановой кривой*) по имени французского математика Жордана (1838—1922). Если при этом $\mathbf{x}(a)=\mathbf{x}(b)$, то кривую называют *замкнутой* (*замкнутой кривой Жордана*). Если, кроме того, из того факта, что $\mathbf{x}(t_1)=\mathbf{x}(t_2)$ следует только, что либо $t_1=t_2$, либо одно из чисел t_1, t_2 равно a, а другое b, то кривая Γ называется *замкнутой самонепересекающейся кривой Жордана* или *непрерывной замкнутой самонепересекающейся кривой*.

Если из равенства $\mathbf{x}(t_1)=\mathbf{x}(t_2)$ ($t_1, t_2\in[a, b]$ или $t_1, t_2\in(a, b)$) следует $t_1=t_2$, то говорят, что Γ есть *незамкнутая самонепересекающаяся кривая*.

При $n=2$ мы получим плоскую непрерывную кривую

$$x_1=x_1(t),\ x_2=x_2(t),\ t\in[a, b] \text{ или } t\in(a, b). \tag{7}$$

---

*) В случае интервала $[a, t_1]$, $[t_{N-1}, b]$ заменяются соответственно на $(a, t_1]$, $[t_{N-1}, b)$.

Например, уравнения

$$x = \cos\theta,\ y = \sin\theta\ (-\infty < \theta < \infty) \tag{8}$$

определяют гладкую плоскую кривую. Когда θ непрерывно изменяется от $-\infty$ до $+\infty$, соответствующая точка (x, y) описывает бесконечное число раз окружность

$$x^2 + y^2 = 1. \tag{9}$$

В связи с этими говорят, что уравнения (8) суть параметрические уравнения окружности (9). В данном случае параметр θ имеет геометрический смысл — это есть угол, образованный радиус-вектором точки (x, y) с положительным направлением оси x.

Уравнения окружности (8) можно записать более экономно:

$$x = \cos\theta,\ y = \sin\theta \quad (0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi), \tag{10}$$

где θ пробегает только отрезок $[0, 2\pi]$. Кривая (10) есть гладкая самонепересекающаяся замкнутая кривая. Про окружность Γ, рассматриваемую как геометрическое место точек (x, y), удовлетворяющих уравнению (9), тоже обычно говорят, что она замкнутая кривая. Это можно понимать в следующем смысле: существует непрерывная самонепересекающаяся заданная параметрически замкнутая кривая, кривая (10), пробегающая точки Γ и только точки Γ.

Жордан доказал следующее геометрически очевидное утверждение, требующее, однако, для его обоснования нетривиальных рассуждений: *самонепересекающаяся непрерывная замкнутая кривая* Γ, *лежащая на плоскости* R, *делит множество* $R - \Gamma$ *на две непересекающиеся непустые области, внутреннюю по отношению к* Γ *и внешнюю*: $R - \Gamma = A_i + A_e$. Любые две точки в A_i можно соединить непрерывной кривой, полностью принадлежащей к A_i, а любые две точки A_e можно соединить непрерывной кривой, принадлежащей к A_e. Любая кривая, соединяющая произвольную точку A_i с произвольной точкой A_e, имеет по крайней мере одну общую точку с Γ (пересекается с Γ). Область A_i ограничена, в то время как A_e не ограничена.

Нужно сказать, что определение непрерывной кривой является настолько общим, что имеются примеры удовлетворяющих этому определению математических объектов, которые весьма сильно отклоняются от нашего обычного представления о кривой, в особенности, если разрешить ей самопересекаться.

Доказано, например, что можно определить такие непрерывные на отрезке $[0, 1]$ функции

$$x = \varphi(t),\ y = \psi(t) \quad (0 \leqslant t \leqslant 1),$$

что при непрерывном возрастании t от $t = 0$ до $t = 1$ переменная точка $(\varphi(t), \psi(t))$, отправляясь при $t = 0$ от положения $(0, 0)$, пробежит буквально все точки квадрата $0 \leqslant x,\ y \leqslant 1$ и при $t = 1$

окажется в верхнем правом его углу (1, 1). Таким образом, эта кривая (кривая Пеано) заметает буквально все точки квадрата $0 \leqslant x,\ y \leqslant 1$, и при этом отдельные его точки заметаются кривой не один раз.

На рис. 6.1. изображена плоская кривая Г, которую будем считать заданной непрерывно дифференцируемыми функциями

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t), \quad \varphi'^2 + \psi'^2 > 0, \quad 0 < t < 1.$$

Когда t непрерывно возрастает на интервале $(0, 1)$, точка (x, y) движется по кривой Г от точки A через B, C и снова при $t \to 1$ стремится к B. Мы видим, что, немотря на непрерывную дифференцируемость функций φ и ψ, кривая Г имеет особенность в точке B, выражающуюся в том, что как бы ни был мал прямоугольник с центром в B, принадлежащая ему часть Г не проектируется взаимно однозначно ни на одну из осей координат. Если гладкая кривая Г в любой ее точке не обладает этим недостатком, т. е. если любую точку можно покрыть прямоугольником Δ с ребрами, параллельными осям координат, так, что $\Gamma\Delta$ проектируемая взаимно однозначно на одну из координатных осей, то Г называют *одномерным дифференцируемым многообразием.*

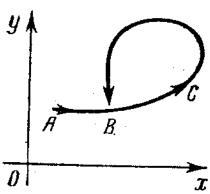

Рис. 6.1.

В § 17.1 доказана лемма 1, из которой как частный случай вытекает следующее утверждение.

Если определенная на отрезке $[a, b]$ *гладкая кривая* $\overline{\Gamma}$

$$x_i = \varphi_i(t), \quad \sum_{i=1}^{n} (\varphi_i')^2 > 0, \qquad a \leqslant t \leqslant b$$

самонепересекается, т. е. если $\overline{\Gamma}$ *и* $[a, b]$ *при помощи уравнений* (1) *находятся во взаимно однозначном соответствии, то полученная из нее выкидыванием обоих ее концов кривая* Г (*заданная на интервале* (a, b)) есть *одномерное дифференцируемое многообразие.*

Пример 1. Эллипс Г

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad (a, b > 0)$$

есть ограниченная гладкая замкнутая самонепересекающаяся кривая, потому что Г также описывается параметрически уравнениями

$$x = a\cos\theta, \quad y = b\sin\theta \quad (0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi), \tag{12}$$

определяющими ограниченную гладкую замкнутую кривую в том понимании терминов гладкость, замкнутость, как это определено выше в этом параграфе.

Пример 2. Астроида Г

$$|ax|^{2/3} + |by|^{2/3} = (a^2 - b^2)^{2/3} \quad (0 < b < a) \tag{13}$$

есть ограниченная непрерывная кусочно гладкая замкнутая кривая, потому что уравнение (13) эквивалентно следующим двум:

$$x = \frac{a^2 - b^2}{a}\cos^3\theta, \quad y = \frac{a^2 - b^2}{b}\sin^3\theta \qquad (0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi), \tag{14}$$

причем имеется только одна пара значений θ ($\theta = 0$, $\theta = 2\pi$), которым соответствует одна и та же точка Г. Из (13) видно, что кривая Г симметрична относительно осей координат, а из (14) видно, что она непрерывна; производные от x и y по θ тоже непрерывны и одновременно не равны нулю всюду, за исключением точек 0, $\pi/2$, π, $3\pi/2$. Поэтому куски Г, соответствующие интервалам $(0, \pi/2)$, $(\pi/2, \pi)$, $(\pi, 3\pi/2)$, $(3\pi/2, 2\pi)$, гладкие (см. § 6.9, рис. 6.11).

§ 6.6. Геометрический смысл производной вектор-функции

Пусть в пространстве, где определена прямоугольная система координат (x, y, z), задана гладкая вектор-функция (см. стр. 186)

$$\mathbf{r}(t) = (\varphi(t), \psi(t), \chi(t)), \qquad t \in (a, b). \tag{1}$$

На рис. 6.2 изображен годограф вектора $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ и отмечены две точки A и B годографа — концы векторов $\mathbf{r}(t)$ и $\mathbf{r}(t+\Delta t)$ с началом в нулевой точке.

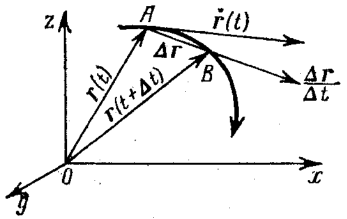

Рис. 6.2.

Очевидно, что вектор $\overline{AB} = \Delta\mathbf{r} = \mathbf{r}(t+\Delta t) - \mathbf{r}(t)$. При $\Delta t \to 0$ точка B, двигаясь по годографу, стремится к точке A, а секущая, проходящая через A и B, стремится занять положение определенной прямой, которую называют *касательной к годографу в точке* A. Поэтому предельный вектор

$$\dot{\mathbf{r}} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t},$$

(он не равен нулю!) лежит на касательной к годографу в точке A. Длина $|\dot{\mathbf{r}}|$ вектора $\dot{\mathbf{r}}$ есть предел длины вектора $\frac{\Delta\mathbf{r}}{\Delta t}$ при $\Delta t \to 0$, потому что

$$\left| |\dot{\mathbf{r}}| - \left|\frac{\Delta\mathbf{r}}{\Delta t}\right| \right| \leqslant \left| \dot{\mathbf{r}} - \frac{\Delta\mathbf{r}}{\Delta t} \right| \to 0 \quad (\Delta t \to 0).$$

Если t есть время и конец вектора $\mathbf{r}(t)$ описывает движение некоторой точки, то $\dot{\mathbf{r}}(t)$ есть вектор, выражающий скорость этой точки в момент времени t. Длина его $|\dot{\mathbf{r}}|$ есть скалярная величина скорости. Кроме того, вектор $\dot{\mathbf{r}}$ определяет направление движения точки в момент t. Вектор $\ddot{\mathbf{r}}$ есть ускорение точки в момент t.

В § 6.4 мы уже останавливались на некоторых свойствах производной от вектор-функции. Отметим еще следующие очевидные свойства ($[\mathbf{a} \times \mathbf{b}] = \mathbf{a} \times \mathbf{b}$):

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \left(\mathbf{a}, \frac{d\mathbf{b}}{dt}\right) + \left(\frac{d\mathbf{a}}{dt}, \mathbf{b}\right), \qquad \frac{d}{dt}[\mathbf{a} \times \mathbf{b}] = \left[\mathbf{a} \times \frac{d\mathbf{b}}{dt}\right] + \left[\frac{d\mathbf{a}}{dt} \times \mathbf{b}\right],$$

где $(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$ — скалярное произведение, а $[\mathbf{a} \times \mathbf{b}] =$

$=(a_yb_z-a_zb_y,\quad a_zb_x-a_xb_z,\quad a_xb_y-a_yb_x)$ — векторное произведение векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$.

Отметим еще следующий факт. Пусть гладкая вектор-функция $\mathbf{b}=\mathbf{b}(t)$ имеет постоянную норму (длину): $|\mathbf{b}(t)|=c=\text{const}>0$. Тогда $(\mathbf{b},\mathbf{b})=b^2=c^2$ и

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{b},\mathbf{b})=2\left(\mathbf{b},\frac{d\mathbf{b}}{dt}\right)=0.$$

Таким образом, для любого t векторы $\mathbf{b}$ и $\dfrac{d\mathbf{b}}{dt}$ ортогональны (по условию $\mathbf{b},\ \dfrac{d\mathbf{b}}{dt}\neq 0\Big)$.

Произвольный вектор $\mathbf{a}=\mathbf{a}(t)$, имеющий при любом рассматриваемом t положительную длину ($|\mathbf{a}|>0$), можно записать в виде $\mathbf{a}=\alpha\boldsymbol{\omega}$, где

$$\boldsymbol{\omega}(t)=\frac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|}=\left(\frac{a_1(t)}{|\mathbf{a}|},\ \frac{a_2(t)}{|\mathbf{a}|},\ \frac{a_3(t)}{|\mathbf{a}|}\right),\ \alpha(t)=|\mathbf{a}|=$$
$$=\sqrt{a_1(t)^2+a_2(t)^2+a_3(t)^2}.$$

Очевидно, что если вектор $\mathbf{a}$ имеет производную для рассматриваемых t, то функции $\boldsymbol{\omega}$ и α имеют производные для этих t. Производная от вектора $\mathbf{a}$ раскладывается на два вектора:

$$\frac{d\mathbf{a}}{dt}=\frac{d\alpha}{dt}\boldsymbol{\omega}+\alpha\frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt}. \tag{1}$$

Из них первый направлен в ту же сторону, что и $\mathbf{a}$ (или $\boldsymbol{\omega}$), и длина его равна скорости изменения длины $\mathbf{a}$, а второй ортогонален к $\boldsymbol{\omega}$. Эта формула применяется в механике для разложения вектора ускорения на две составляющие, из которых одна имеет направление движения, а другая направлена перпендикулярно к ней.

§ 6.7. Длина дуги кривой

Пусть Γ есть непрерывная кривая

$$\mathbf{r}(t)=(\varphi(t),\ \psi(t),\ \chi(t))\qquad (t\in[a,\ b]). \tag{1}$$

Разобьем отрезок $[a,\ b]$ на части точками

$$a=t_0<t_1<\ldots<t_n=b. \tag{2}$$

Им соответствуют точки кривой Γ $A=A_0,\ A_1,\ \ldots,\ A_n=B$. Если соединить их последовательно отрезками (рис. 6.3), то получим ломаную, вписанную в Γ.

Длиной кривой Γ называется предел, к которому стремится сумма длин звеньев этой ломаной,

$$|\breve{AB}|=\lim\sum_1^n|A_{k-1}A_k|,\quad \max(t_k-t_{k-1})\to 0, \tag{3}$$

когда максимальный частичный отрезок разбиения (2) стремится к нулю. Если предел (3) существует, то говорят, что *кривая спрямляема на отрезке* $[a, b]$ *изменения параметра* t.

Будем считать теперь, что наша кривая Г гладкая. Таким образом, функции φ, ψ, χ предполагаются непрерывными и имеющими непрерывные производные на $[a, b]$, подчиняющиеся неравенству

$$|\dot{\mathbf{r}}(t)|^2 = \varphi'(t)^2 + \psi'(t)^2 + \chi'(t)^2 > 0 \qquad (t \in [a, b]). \tag{4}$$

В разделе «Интегральное исчисление» будет доказано, что гладкая кривая спрямляема на любом отрезке изменения параметра t и что длина дуги гладкой кривой Г обладает свойством аддитивности. Это значит, что если P_1, P_2, P_3 — три точки Г, соответствующие значениям t_1, t_2, t_3 параметра, и $t_1 < t_2 < t_3$, то имеет место равенство

$$|\overset{\frown}{P_1P_3}| = |\overset{\frown}{P_1P_2}| + |\overset{\frown}{P_2P_3}|.$$

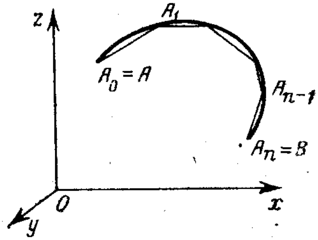

Рис. 6.3.

Введем новую функцию, $s = F(t)$, равную длине дуги $\overset{\frown}{AC}$, соответствующей изменению параметра на отрезке $[a, t]$. В интегральном исчислении будет доказано, что функция $F(t)$ обладает следующими свойствами: она непрерывна и имеет непрерывную производную на $[a, b]$, определяемую формулой

$$F'(t) = \frac{ds}{dt} = \sqrt{\varphi'(t)^2 + \psi'(t)^2 + \chi'(t)^2} > 0. \tag{5}$$

Кроме того, $F(a) = 0$. Но тогда s есть строго возрастающая функция, отображающая отрезок $[a, b]$ изменения t на некоторый отрезок $[0, l]$ изменения s, и существует обратная к ней функция

$$t = \Lambda(s) \qquad (0 \leqslant s \leqslant l),$$

непрерывная и имеющая непрерывную производную $\Lambda'(s) > 0$.

Следовательно, s можно рассматривать как один из допустимых параметров нашей гладкой кривой Г:

$$x = \varphi(\Lambda(s)), \quad y = \psi(\Lambda(s)), \quad z = \chi(\Lambda(s)) \qquad (0 \leqslant s \leqslant l).$$

Пусть теперь τ есть произвольный допустимый параметр Г, связанный с t при помощи функции $t = \lambda(\tau)$, имеющей не равную нулю непрерывную производную. Тогда знак $\frac{ds}{d\tau} = \frac{ds}{dt}\lambda'(\tau)$ зависит от знака $\lambda'(\tau)$. Таким образом, учитывая формулу производной функции от функции, будем иметь

$$\frac{ds}{d\tau} = \lambda'(\tau)\sqrt{\varphi'(t)^2 + \psi'(t)^2 + \chi'(t)^2} = \pm\sqrt{\varphi_1'(\tau)^2 + \psi_1'(\tau)^2 + \chi_1'(\tau)^2}, \tag{6}$$

где
$$x=\varphi_1(\tau)=\varphi(\lambda(\tau)), \qquad y=\psi_1(\tau)=\psi(\lambda(\tau)),$$
$$z=\chi_1(\tau)=\chi(\lambda(\tau)) \qquad (\tau\in(c,d)) \tag{7}$$

— уравнения Г, выраженные через параметр τ, а перед корнем стоит знак «+» или «−» в зависимости от того, будет ли s возрастать или убывать при возрастании τ.

Отсюда
$$ds=\pm\sqrt{dx^2+dy^2+dz^2}, \tag{8}$$

где при $d\tau>0$ надо поставить «+» в первом случае и «−» во втором. Однако при $d\tau<0$ надо, наоборот, поставить в первом случае «−», а во втором «+».

Если в равенстве (6) положить $\tau=s$, то справа перед корнем надо поставить знак «+», и мы получим равенство $1=\sqrt{\left(\frac{dx}{ds}\right)^2+\left(\frac{dy}{ds}\right)^2+\left(\frac{dz}{ds}\right)^2}$. Заметим, что мы считали, что $s=0$ при $t=a$ и что s возрастает вместе с t.

Заметим еще, что приведенное выше определение длины дуги Г внешне зависит от параметрического представления кривой. На самом деле *длина дуги есть инвариант, не зависящий от выбора параметра* t, при помощи которого задана кривая (см. § 10.3, (3)).

§ 6.8. Касательная. Нормаль к плоской кривой

В пространстве, где определена прямоугольная система координат (x, y, z), пусть задана гладкая кривая, определяемая вектором $\mathbf{r}(t)=(x(t), y(t), z(t))$, $t\in(a, b)$ (рис. 6.4). Будем считать, что отсчет дуги выбран так, что ее длина возрастает вместе с возрастанием параметра t (так же, как в § 6.7).

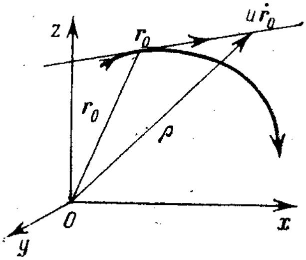

Рис. 6.4.

Положим $\mathbf{r}_0=\mathbf{r}(t_0)=(x_0, y_0, z_0)$ и $\dot{\mathbf{r}}_0=\dot{\mathbf{r}}(t_0)=(x_0', y_0', z_0')$. Вектор $\dot{\mathbf{r}}_0$ имеет направление касательной к нашей кривой в точке t_0, поэтому произвольная точка касательной $\rho=(x, y, z)$ определяется вектором
$$\boldsymbol{\rho}=\mathbf{r}_0+u\dot{\mathbf{r}}_0, \tag{1}$$

где u — произвольное число (текущий параметр касательной).

Равенство (1) есть уравнение *касательной к кривой в точке* t_0 в векторной форме.

Из (1) следует, что уравнения касательной в декартовых координатах имеют вид

$$x - x_0 = ux_0', \quad y - y_0 = uy_0', \quad z - z_0 = uz_0',$$

или

$$\frac{x - x_0}{x_0'} = \frac{y - y_0}{y_0'} = \frac{z - z_0}{z_0'}. \tag{2}$$

Обозначим через α, β, γ углы, которые образует положительное направление касательной (направление $\dot{\mathbf{r}}_0$) соответственно с положительными направлениями осей координат x, y, z. Очевидно

$$\cos\alpha = \frac{x_0'}{\sqrt{x_0'^2 + y_0'^2 + z_0'^2}} = \left(\frac{dx}{ds}\right)_0,$$

$$\cos\beta = \frac{y_0'}{\sqrt{x_0'^2 + y_0'^2 + z_0'^2}} = \left(\frac{dy}{ds}\right)_0,$$

$$\cos\gamma = \frac{z_0'}{\sqrt{x_0'^2 + y_0'^2 + z_0'^2}} = \left(\frac{dz}{ds}\right)_0,$$

где $\left(\frac{dx}{ds}\right)_0$ обозначает, что в $\frac{dx}{ds}$ надо подставить значение $s = s_0$, соответствующее $t = t_0$. Перед корнями стоит знак «+», потому что мы согласились, что длина дуги возрастает вместе с t.

Кривую, заданную в плоскости x, y, можно рассматривать как частный случай кривой в пространстве, у которой $z(t) \equiv 0$. Поэтому соотношениям (2) в плоском случае соответствует одно уравнение

$$\frac{x - x_0}{x_0'} = \frac{y - y_0}{y_0'}.$$

Положительное направление касательной образует в этом случае с осью x угол α, для которого

$$\cos\alpha = \frac{x_0'}{\sqrt{x_0'^2 + y_0'^2}} = \left(\frac{dx}{ds}\right)_0, \quad \sin\alpha = \frac{y_0'}{\sqrt{x_0'^2 + y_0'^2}} = \left(\frac{dy}{ds}\right)_0.$$

В плоском случае можно еще определить понятие *нормали в точке t_0 кривой*, то есть прямой, принадлежащей рассматриваемой плоскости и проходящей через точку t_0 перпендикулярно к касательной. В некоторых вопросах важно задать положительное направление нормали $\mathbf{N}$. Оно задается так, чтобы направление $\mathbf{T}$ касательной, идущее в сторону возрастания t, и $\mathbf{N}$ образовали систему, ориентированную так же, как система осей координат x, y, иначе говоря, угол, образованный $\mathbf{T}$ и $\mathbf{N}$, *должно быть возможно* непрерывным передвижением по плоскости совместить с координатным углом так, что $\mathbf{T}$ совпадет с положительным направлением оси x, а $\mathbf{N}$ — с положительным направлением оси y (рис. 6.5 и 6.6).

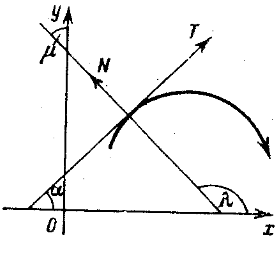

Рис. 6.5.

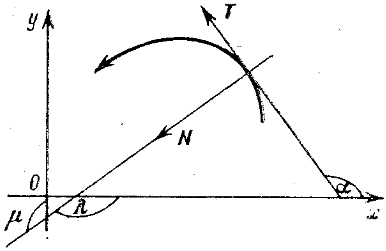

Рис. 6.6.

Пусть λ, μ — суть углы, образованные положительным направлением нормали соответственно с осями x, y. Из рисунков видно, что сделанное соглашение приводит нас к формулам *)

$$\cos\lambda = -\sin\alpha = -\left(\frac{dy}{ds}\right)_0, \quad \cos\mu = \cos\alpha = \left(\frac{dx}{ds}\right)_0.$$

§ 6.9. Кривизна и радиус кривизны кривой. Плоская кривая. Эволюта и эвольвента

Кривизной окружности радиуса R называется число $1/R$. Это число можно получить как отношение угла между касательными в концах какой-нибудь дуги окружности к длине этой дуги. Последнее определение дает идею определения кривизны, пригодного для произвольных гладких кривых.

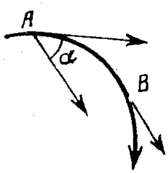

Рис. 6.7.

Рассмотрим гладкую кривую Γ (рис. 6.7). Она спрямляема, и имеет смысл говорить о длине любой ее дуги $\overset{\smile}{AB}$. Угол α $(0 \leqslant \alpha \leqslant \pi)$ между (положительными) направлениями касательных к дуге в ее точках A и B называется *углом смежности дуги* $\overset{\smile}{AB}$. Отношение угла смежности дуги $\overset{\smile}{AB}$ к ее длине называется *средней кривизной дуги* $\overset{\smile}{AB}$ (см. рис. 6.7). Наконец, *кривизной кривой* Γ в ее точке A называется предел (конечный или бесконечный) отношения угла смежности α дуги $\overset{\smile}{AB}$ кривой к ее длине Δs $(\Delta s > 0)$, когда последняя стремится к нулю:

$$K = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\alpha}{\Delta s}. \tag{1}$$

*) Запомнить это можно, взяв векторное произведение $(0,\ 0,\ 1) \times (\cos\alpha,\ \sin\alpha,\ 0) = (-\sin\alpha,\ \cos\alpha,\ 0)$.

Таким образом, $0 \leqslant K \leqslant \infty$. По определению, величина $R = 1/K$ (где считается, что $0 = 1/\infty$, $\infty = 1/0$) называется *радиусом кривизны* Г в точке A.

Заметим, что угол смежности α ($\alpha \geqslant 0$) дуги $\breve{AB}$ равен углу между векторами $\dot{\mathbf{r}}(t)$ и $\dot{\mathbf{r}}(t+\Delta t) = \dot{\mathbf{r}} + \Delta\dot{\mathbf{r}}$, где $r(t)$ — радиус-вектор точки Г, или углу между соответствующими единичными векторами $\boldsymbol{\tau}(t) = \dot{\mathbf{r}}(t)/|\dot{\mathbf{r}}(t)|$ и $\boldsymbol{\tau}(t+\Delta t)$. Поэтому косинус угла α, очевидно, равен скалярному произведению $(\tau(t), \tau(t+\Delta t))$, а сам угол α может быть записан в виде

$$\alpha = \arccos(\tau(t), \tau(t+\Delta t)) \qquad (0 \leqslant \alpha \leqslant \pi),$$

откуда видно, что для гладкой кривой из $\Delta t \to 0$ следует $\alpha \to 0$.

Из векторной алгебры известно, что

$$\sin\alpha = \frac{|\dot{\mathbf{r}} \times (\dot{\mathbf{r}} + \Delta\dot{\mathbf{r}})|}{|\dot{\mathbf{r}}|\,|\dot{\mathbf{r}} + \Delta\dot{\mathbf{r}}|} = \frac{|\dot{\mathbf{r}} \times \Delta\dot{\mathbf{r}}|}{|\dot{\mathbf{r}}|\,|\dot{\mathbf{r}} \times \Delta\dot{\mathbf{r}}|}, \quad \Delta\dot{\mathbf{r}} = \dot{\mathbf{r}}(t+\Delta t) - \dot{\mathbf{r}}(t), \qquad (2)$$

так как $\dot{\mathbf{r}} \times \dot{\mathbf{r}} = 0$. Знаменатель здесь не равен нулю, потому что у гладкой кривой $\dot{\mathbf{r}} \neq \mathbf{0}$. При $\Delta t \to 0$ знаменатель стремится к $|\dot{\mathbf{r}}|^2 > 0$, а числитель стремится к нулю. Введем длину дуги $s = s(t)$ нашей кривой. Длина куска $\breve{AB}$ равна $\Delta s = s(t+\Delta t) - s(t)$ $(\Delta t > 0)$. Из $\Delta s \to 0$ следует $\Delta t \to 0$, потому что t и s оба — допустимые параметры гладкой кривой (см. § 6.7).

Будем теперь предполагать, что радиус-вектор $\mathbf{r}(t)$ нашей гладкой кривой Г имеет вторую производную $\ddot{\mathbf{r}}(t)$, и при этом условии докажем существование конечной кривизны Г в точке A (определяемой параметром t).

В силу (1), (2) кривизна Г в точке t равна (пояснения ниже)

$$K = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\alpha}{\Delta s} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\sin\alpha}{\Delta s} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\left|\dot{\mathbf{r}} \times \dfrac{\Delta\dot{\mathbf{r}}}{\Delta t}\right|}{|\dot{\mathbf{r}}|\,|\dot{\mathbf{r}}(t+\Delta t)|\,\dfrac{\Delta s}{\Delta t}}, \qquad (3)$$

т. е.

$$K = \frac{1}{R} = \frac{|\dot{\mathbf{r}}(t) \times \ddot{\mathbf{r}}(t)|}{|\dot{\mathbf{r}}(t)|^3} = \frac{\sqrt{(y'z'' - z'y'')^2 + (z'x'' - x'z'')^2 + (x'y'' - y'x'')^2}}{(x'^2 + y'^2 + z'^2)^{3/2}}. \qquad (4)$$

В третьем члене (3) мы заменили α на $\sin\alpha$ под знаком предела. Это законно, ведь если для стремящейся к нулю последовательности значений Δs соответствующие значения $\alpha > 0$, то $\sin\alpha \approx \alpha$ $(\alpha \to 0)$ и применима теорема 2 § 4.10, если же значения $\alpha = 0$, начиная с некоторого, то для них $\sin\alpha = \alpha = 0$ и снова верно второе равенство (3).

Если параметр $t = s$ есть длина дуги Г, то, как мы знаем, $|\dot{\mathbf{r}}(s)| = 1$ и вектор $\ddot{\mathbf{r}}(s)$ перпендикулярен к $\dot{\mathbf{r}}(s)$, поэтому

$$K = |\ddot{\mathbf{r}}(s)|, \quad R = \frac{1}{|\ddot{\mathbf{r}}(s)|}. \tag{5}$$

В плоском случае ($z \equiv 0$) выражение кривизны через координаты выглядит так:

$$K = \frac{|x'y'' - y'x''|}{(x'^2 + y'^2)^{3/2}}. \tag{6}$$

Если плоская кривая задана уравнением $y = f(x)$, где функция f в окрестности точки x имеет непрерывную производную и в самой точке вторую производную, то, полагая в последней формуле $t = x$, получим

$$K = \frac{\left|\frac{d^2y}{dx^2}\right|}{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{3/2}} \tag{7}$$

(в полярных координатах см. § 7.26, упражнение 1).

Пусть $A = (x, f(x))$ есть точка кривой Г. Точка O, лежащая на нормали к Г в точке A на расстоянии $R = 1/K$ от A в сторону вогнутости Г, называется *центром кривизны* Г *в точке* A.

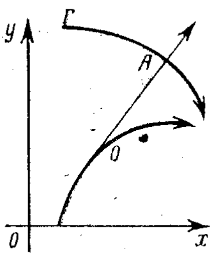

Рис. 6.8.

Кривая γ, являющаяся геометрическим местом центров O кривизны плоской кривой Г, называется *эволютой* Г. Сама кривая Г называется *эвольвентой* γ.

На рис. 6.8 изображена плоская кривая Г. Направление возрастания ее длины дуги s показано стрелкой. Вторая производная $y = f''(x) < 0$. Поэтому радиус кривизны в точке A равен

$$R = -\frac{(1 + y'^2)^{3/2}}{y''}. \tag{8}$$

Направляющие косинусы касательной (направленной в сторону возрастания s) равны $\frac{dx}{ds}$, $\frac{dy}{ds}$, а направляющие косинусы единичной нормали $\mathbf{v}$, идущей от A в сторону вогнутости Г, задаются числами

$$\mathbf{v} = \left(\frac{dy}{ds}, -\frac{dx}{ds}\right). \tag{9}$$

Координаты (ξ, η) центра O кривизны Г в точке A определяются, очевидно, равенствами

$$\xi = x + \frac{dy}{ds} R, \quad \eta = y - \frac{dx}{ds} R. \tag{10}$$

Это таким образом, уравнения *эволюты.*

В случае расположения и ориентировки кривой Γ как на рис. 6.8 $y''_x < 0$, $x'_t > 0$. Поэтому из формулы

$$y''_x = \frac{x'_t y''_t - y'_t x''_t}{x'^3_t}$$

следует, что числитель ее правой части отрицательный, и потому [см. (6)]

$$R = \frac{\left(x'^2_t + y'^2_t\right)^{3/2}}{y'_t x''_t - x'_t y''_t}, \quad s'_t = \left(x'^2_t + y'^2_t\right)^{1/2}. \tag{11}$$

Следовательно, из (10) следует, что уравнения эволюты кривой Γ в параметрической форме имеют вид

$$\xi = x - y'_t \frac{x'^2_t + y'^2_t}{x'_t y''_t - y'_t x''_t}, \quad \eta = y + x'_t \frac{x'^2_t + y'^2_t}{x'_t y''_t - y'_t x''_t}. \tag{12}$$

Они сохраняются и при других расположениях и ориентировке относительно осей координат.

Ниже дается другой вывод уравнений (12) эволюты кривой Γ.

Вводим для Γ в качестве параметра длину дуги s. Соответствующую вектор-функцию записываем, как это обычно делают, в виде $\mathbf{r}(s) = (x(s), y(s))$, хотя формально следовало бы употреблять другие обозначения, например, $\mathbf{r}_1(s) = (x_1(s), y_1(s))$. Вектор $\dot{\mathbf{r}}(s)$ перпендикулярен к вектору $\ddot{\mathbf{r}}(s)$, а следовательно, и к вектору $\mathbf{v} = \ddot{\mathbf{r}}(s)/|\ddot{\mathbf{r}}(s)|$. Вектор $\mathbf{v}$, очевидно, есть единичный вектор нормали, направленный внутрь Γ, поэтому радиус-вектор $\boldsymbol{\rho}$ эволюты определяется векторными уравнениями (см. (5))

$$\boldsymbol{\rho} = \mathbf{r} + \mathbf{v}R = \mathbf{r} + \ddot{\mathbf{r}}(s)R^2$$

или, что все равно, двумя скалярными равенствами ($\boldsymbol{\rho} = (\xi, \eta)$):

$$\xi = x + x''_s \frac{\left(x'^2_t + y'^2_t\right)^3}{\left(x'_t y''_t - y'_t x''_t\right)^2}, \quad \eta = y + y''_s \frac{\left(x'^2_t + y'^2_t\right)^3}{\left(x'_t y''_t - y'_t x''_t\right)^2}. \tag{13}$$

Но

$$x'_s = x'_t \frac{dt}{ds} = \frac{x'_t}{s'_t}, \quad s'_t = \sqrt{x'^2_t + y'^2_t},$$

$$x_s'' = \frac{s_t' x_t'' - x_t' \frac{d}{dt} s_t'}{s_t'^3} = \frac{s_t' x_t'' - \frac{x_t'\left(x_t' x_t'' + y_t' y_t''\right)}{s_t'}}{s_t'^3} =$$

$$= \frac{\left(x_t'^2 + y_t'^2\right) x_t'' - x_t'\left(x_t' x_t'' + y_t' y_t''\right)}{s_t'^4} = -y_t' \frac{x_t' y_t'' - y_t' x_t''}{s_t'^4}$$

и, аналогично,

$$y_s'' = \frac{\left(x_t'^2 + y_t'^2\right) y_t'' - y_t'\left(x_t' x_t'' + y_t' y_t''\right)}{s_t'^4} = x_t' \frac{x_t' y_t'' - y_t' x_t''}{s_t'^4}.$$

Подставляя полученные выражения x_s'', y_s'' в (13), получаем уравнения (12).

Отметим два факта, характеризующие связь между эвольвентой и эволютой:

1) Нормаль к эвольвенте в любой ее точке s является в то же время касательной к эволюте.

В самом деле [см. (11)], $\frac{1}{R} = y_s' x_s'' - x_s' y_s''$, и свойство 1) вытекает из того, что касательные векторы к Γ и γ в соответствующих точках перпендикулярны [см. (10)]:

$$x_s'\xi_s' + y_s'\eta_s' = \left(x_s'^2 + y_s'^2\right) + \left(y_s'' x_s' - x_s'' y_s'\right) R + \left(x_s' y_s' - x_s' y_s'\right) R_s' =$$
$$= 1 - \frac{1}{R} R + 0 = 0.$$

2) Справедливо равенство

$$\sigma' = \pm R', \tag{14}$$

где, если A и O — соответствующие точки эвольвенты Γ и эволюты γ, то R — радиус кривизны Γ в A, а σ — длина дуги γ, соединяющей O с некоторой неподвижной точкой γ. Знак «+» или «−» зависит от направления отсчета σ.

В самом деле, равенство (10) запишем следующим образом:

$$\mathbf{r} - \boldsymbol{\rho} = -R\mathbf{v},$$

где $\mathbf{r}$, $\boldsymbol{\rho}$ — соответственно радиус-векторы A и O, откуда $(\mathbf{r} - \boldsymbol{\rho}, \mathbf{r} - \boldsymbol{\rho}) = R^2$. Дифференцируя по t, получим (пояснения ниже)

$$RR' = (\mathbf{r} - \boldsymbol{\rho}, \dot{\mathbf{r}} - \dot{\boldsymbol{\rho}}) = -(\mathbf{r} - \boldsymbol{\rho}, \dot{\boldsymbol{\rho}}) = -R|\dot{\boldsymbol{\rho}}| = \mp R\sigma',$$

что влечет за собой (14).

Второе равенство цепи следует из того, что в силу уже доказанного свойства 1) $(\mathbf{r} - \boldsymbol{\rho}, \dot{\mathbf{r}}) = 0$, третье — из того, что $|\mathbf{r} - \boldsymbol{\rho}| = R$ и векторы $\mathbf{r} - \boldsymbol{\rho}$ и $\dot{\boldsymbol{\rho}}$ направлены одинаково; четвертое следует из того, что $|\dot{\rho}| = \pm\sigma$, где знак $\pm$ зависит от выбора отсчета σ на эволюте.

Например, если σ возрастает вместе с t, то $R' = -\sigma'$, откуда $\int\limits_{t_1}^{t_2} R'dx = -\int\limits_{t_1}^{t_2} \sigma'\,dt$, и в силу формулы Ньютона—Лейбница

$$R_2 - R_1 = \sigma_1 - \sigma_2,$$

где σ_1, R_1 соответствуют значению t_1, а σ_2, R_2 соответствуют значению t_2. Таким образом, в рассматриваемом случае увеличение длины дуги эволюты вызывает равное ему уменьшение радиуса кривизны эвольвенты.

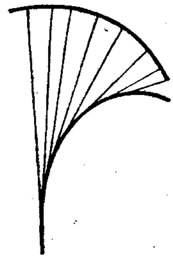

Рис. 6.9.

Представим себе нить, навернутую на эволюту. Пусть она сматывается с последней, будучи все время натянутой. Отделяясь от эволюты, она, очевидно, все время будет касаться эволюты. Свободный же ее конец будет описывать эвольвенту (рис. 6.9). Так как длина нити может быть произвольной, то эволюта порождает бесконечно много эвольвент.

П р и м е р 1. Эволюта циклоиды

$$x = t - \sin t, \quad y = 1 - \cos t \tag{14}$$

есть кривая $\xi = t + \sin t$, $\eta = -1 + \cos t$. Полагая $t = \tau + \pi$, получим уравнения

$$\xi - \pi = \tau - \sin\tau, \quad \eta + 2 = 1 - \cos\tau,$$

определяющие исходную кривую, но только сдвинутую (эволюта циклоиды есть циклоида, конгруэнтная исходной; рис. 6.10).

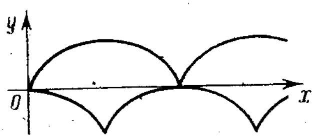

Рис. 6.10.

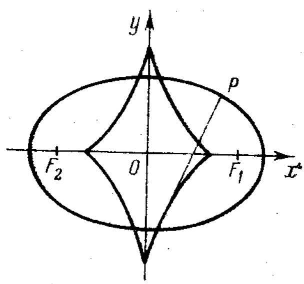

Рис. 6.11.

П р и м е р 2. Эволюта эллипса $x = a\cos t$, $y = b\sin t$ $(a \geqslant b > 0)$ есть астроида (рис. 6.11),

$$\xi = \frac{a^2 - b^2}{a}\cos^3 t, \quad \eta = -\frac{a^2 - b^2}{b}\sin^3 t$$

(см. § 6.5, пример 2).

§ 6.10. Соприкасающаяся плоскость и подвижный триэдр кривой

Соприкасающейся плоскостью к кривой Г в ее точке A называется предельное положение плоскости, проходящей через касательную к Г в точке A параллельно касательной в другой точке B кривой, когда последняя, двигаясь по кривой, стремится к A.

Покажем, что если кривая $\mathbf{r}(t)$ имеет непрерывную производную $\dot{\mathbf{r}}$ в окрестности точки t_0 и, кроме того, вторую производную $\ddot{\mathbf{r}}(t_0)$ такую, что $\dot{\mathbf{r}}_0 \times \ddot{\mathbf{r}}_0 = \dot{\mathbf{r}}(t_0) \times \ddot{\mathbf{r}}(t_0) \neq \mathbf{0}$, то соприкасающаяся плоскость к этой кривой в точке $t = t_0$ существует и имеет уравнение

$$(\boldsymbol{\rho} - \mathbf{r}_0)[\dot{\mathbf{r}}_0 \times \ddot{\mathbf{r}}_0] = 0, \tag{1}$$

где $\boldsymbol{\rho}$ — радиус-вектор текущей точки плоскости.

В самом деле, положим

$$\Delta\dot{\mathbf{r}}_0 = \dot{\mathbf{r}}(t_0 + \Delta t) - \dot{\mathbf{r}}(t_0).$$

Тогда вектор $\dot{\mathbf{r}}_0 \times \dfrac{\Delta\dot{\mathbf{r}}_0}{\Delta t} = \dot{\mathbf{r}}(t_0) \times \dfrac{\dot{\mathbf{r}}(t_0 + \Delta t)}{\Delta t}$, ортогонален (перпендикулярен) к приложенным к точке A векторам $\dot{\mathbf{r}}(t_0)$ и $\dot{\mathbf{r}}(t_0 + \Delta t)$, а следовательно, и к проходящей через них плоскости. Так как он стремится при $\Delta t \to 0$ к вектору $\dot{\mathbf{r}}_0 \times \ddot{\mathbf{r}}_0 \neq \mathbf{0}$, то и указанная плоскость стремится к плоскости, проходящей через A, перпендикулярной к $\dot{\mathbf{r}}_0 \times \ddot{\mathbf{r}}$, а это и есть соприкасающаяся плоскость к Г в A. Ее уравнение, очевидно, есть (1).

Существует еще другое определение: *соприкасающейся плоскостью кривой* Г *в точке* A *называется предельное положение подвижной плоскости, проходящей через точку* A *и две другие точки* A_1, A_2 *кривой* Г, *когда последние, двигаясь по* Г, *стремятся к* A.

Можно показать, что при условиях, наложенных выше на $\mathbf{r}(t)$, в окрестности точки t_0 существует соприкасающаяся плоскость к Г в этой точке и в смысле этого второго определения и она определяется уравнением (1). Таким образом, она совпадает с соприкасающейся плоскостью в смысле первого определения.

В декартовых координатах уравнение (1) записывается в виде

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ x_0' & y_0' & z_0' \\ x_0'' & y_0'' & z_0'' \end{vmatrix} = 0, \tag{2}$$

где x, y, z — текущие координаты соприкасающейся плоскости, $\mathbf{r}_0 = (x_0, y_0, z_0)$, $\dot{\mathbf{r}}_0 = (x_0', y_0', z_0')$ и $\ddot{\mathbf{r}}_0 = (x_0'', y_0'', z_0'')$.

Выпущенные из точки $A = (x, y, z)$ векторы $\dot{\mathbf{r}}$ и $\ddot{\mathbf{r}}$, очевидно, принадлежат к соприкасающейся плоскости S. Если $t = s$ есть длина дуги Г, то $\dot{\mathbf{r}}(s)$ — единичный вектор, а вектор $\ddot{\mathbf{r}}(s)$ перпендикулярен к $\dot{\mathbf{r}}(s)$.

Из точки A нашей кривой Г (подчиняющейся указанным условиям) можно выпустить три единичных вектора, $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\beta}$, $\boldsymbol{\gamma}$, определяющих естественную прямоугольную систему координат в окрестности A

$$\left.\begin{aligned}
&\boldsymbol{\alpha} = \frac{\dot{\mathbf{r}}}{|\dot{\mathbf{r}}|} = \dot{\mathbf{r}}(s) && \text{— единичный вектор касательной;}\\
&\boldsymbol{\beta} = \frac{\ddot{\mathbf{r}}(s)}{|\ddot{\mathbf{r}}(s)|} = R\ddot{\mathbf{r}}(s) = R\frac{d\boldsymbol{\alpha}}{ds} && \text{— единичный вектор главной нормали;}\\
&\boldsymbol{\gamma} = \boldsymbol{\alpha}\times\boldsymbol{\beta} && \text{— единичный вектор бинормали.}
\end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Заметим, что направление $\boldsymbol{\alpha}$ зависит от параметра t в том смысле, что замена t на $-t$ изменяет направление $\boldsymbol{\alpha}$ на противоположное.

Что касается вектора $\boldsymbol{\beta}$, то мы его определили с помощью параметра s — длины дуги Г. Замена s на $-s$ или на $s+s_0$, где s_0 — постоянная, не влечет за собой изменение $\ddot{\mathbf{r}}(s)$ (дифференцирование по s производится два раза), поэтому $\boldsymbol{\beta}$ есть *инвариант* — его направление вовсе не связано с параметрическим представлением кривой.

Нормалью к кривой Г в точке A естественно называть прямую, проходящую через эту точку перпендикулярно к касательной к Г в этой точке. Среди нормалей имеется одна, принадлежащая к соприкасающейся плоскости S (к кривой Г в точке A). Она называется *главной нормалью*. Вектор $\ddot{\mathbf{r}}(s)$, очевидно, принадлежит к S и перпендикулярен к касательной, поэтому он лежит на главной нормали. Удобно считать, что вектор $\ddot{\mathbf{r}}(s)$ или $\boldsymbol{\beta}$ определяет положительное направление главной нормали. Можно еще сказать, что $\boldsymbol{\beta}$ есть выходящий из точки A единичный вектор, принадлежащий к S и направленный в сторону вогнутости кривой Г (точнее, ее проекции на S).

Отложим от точки A в направлении $\boldsymbol{\beta}$ вектор длины R — радиуса кривизны Г в A. Конец его — точка O — называется *центром кривизны* Г в A. В случае плоской кривой Г это определение совпадает с приведенным в § 6.10 определением центра кривизны. Очевидно, что центр кривизны O определяется вектором [см. 6.9, (5)]

$$\boldsymbol{\rho} = \mathbf{r} + R\boldsymbol{\beta} = \mathbf{r} + \frac{\ddot{\mathbf{r}}(s)}{|\ddot{\mathbf{r}}(s)|^2}.$$

Наконец, вектор γ определен как единичный вектор, перпендикулярный к α и β и притом направленный так, чтобы система (α, β, γ) была ориентирована так же, как прямоугольная система координат (x, y, z), в которой рассматривается кривая.

Прямая, на которой лежит вектор γ (приложенный к точке A), называется *бинормалью* к Γ в A. Вектор γ определяет ее положительное направление.

Приложенные к движущейся по Γ точке A векторы α, β, γ определяют подвижный триэдр.

Отметим, что нормаль к плоской кривой, определенная в § 6.8, очевидно, совпадает (при $\ddot{\mathbf{r}}(s) \neq 0$) с главной нормалью. Положительные же направления на этой прямой (нормали или главной нормали) определены из разных принципов и могут не совпадать.

Исследование поведения вектора $\mathbf{r}(s)$ в окрестности точки s_0 часто удобно проводить, рассматривая $\mathbf{r}(s) - \mathbf{r}(s_0)$ в прямоугольной системе координат α, β, γ. Будем считать, что $\mathbf{r} = \mathbf{r}(s)$ (s — дуга Γ) и $\mathbf{r}_0 = \mathbf{r}(s_0)$ есть вектор точки $A_0 \in \Gamma$ и $\mathbf{ab}$ есть скалярное произведение векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$.

Тогда α, β, γ — функции от s. Из равенства $\gamma\alpha = 0$, $\gamma\gamma = 1$ следует, что проекции $\frac{d\gamma}{ds}$ на направления α и γ равны нулю:

$$\frac{d\gamma}{ds}\alpha = -\gamma\frac{d\alpha}{ds} = -|\ddot{\mathbf{r}}|\gamma\beta = 0, \quad \frac{d\gamma}{ds}\gamma = 0.$$

Но тогда

$$\frac{d\gamma}{ds} = \frac{1}{T}\beta, \tag{4}$$

где

$$\frac{1}{T} = \frac{\partial\gamma}{ds}\beta. \tag{5}$$

Число $1/T$ называется *кручением* Γ в рассматриваемой точке $A \in \Gamma$. Его можно, очевидно, еще определить как число, абсолютная величина которого равна $\left|\frac{1}{T}\right| = \left|\frac{d\gamma}{ds}\right|$ (скорости изменения единичного вектора бинормали относительно s); *знак же* $1/T$ *положительный* или *отрицательный* в зависимости от того, будет ли проекция $\frac{d\gamma}{ds}$ на направление β положительна или отрицательна.

Отметим формулы Френе:

$$\frac{d\alpha}{ds} = \frac{\beta}{R}, \quad \frac{d\gamma}{ds} = \frac{\beta}{T}, \quad \frac{d\beta}{ds} = -\frac{\alpha}{R} - \frac{\gamma}{T}. \tag{6}$$

Первые две из них уже доказаны [см. (3), (4)], а третья доказывается следующим образом. Из тождества $\beta\alpha = \gamma\beta = 0$, $\beta\beta = 1$ дифференцированием их по s получаем

$$\frac{d\beta}{ds}\alpha = -\beta\frac{d\alpha}{ds} = -\frac{1}{R}, \quad \frac{d\beta}{ds}\gamma = -\beta\frac{d\gamma}{ds} = -\frac{1}{T}, \quad \frac{d\beta}{ds}\beta = 0.$$

Следовательно,

$$\frac{d\beta}{ds} = \left(\frac{d\beta}{ds}\alpha\right)\alpha + \left(\frac{d\beta}{ds}\beta\right)\beta + \left(\frac{d\beta}{ds}\gamma\right)\gamma = -\frac{\alpha}{R} - \frac{\gamma}{T}.$$

Из (6) следует, что если кривизна Г тождественно равна нулю ($1/R \equiv \equiv 0$), то $\frac{d\alpha}{ds} \equiv 0$, откуда следует, что $\mathbf{r}(s) = \mathbf{r}(s_0) + (s - s_0)\dot{\mathbf{r}}(s_0)$, т. е. Г есть прямая. Если же кручение Г тождественно равно нулю ($1/T \equiv 0$), то $\frac{d\gamma}{ds} = 0$, $(\gamma\mathbf{r})' = \gamma\alpha + \dot{\gamma}\mathbf{r} = 0$ и $\gamma\mathbf{r} = \text{const}$; это показывает, что Г — плоская кривая.

Пример 1. Винтовая линия Г

$$x = a\cos\theta, \quad y = a\sin\theta, \; z = h\theta \quad (a, h > 0)$$

имеет длину дуги s, производная которой по θ равна

$$\frac{ds}{d\theta} = \sqrt{x'^2_\theta + y'^2_\theta + z'^2_\theta} = \sqrt{a^2 + h^2}.$$

Поэтому единичный вектор α касательной к Г имеет проекции

$$\frac{dx}{ds} = \frac{\frac{dx}{d\theta}}{\frac{ds}{d\theta}} = -\frac{a\sin\theta}{\sqrt{a^2 + h^2}}, \quad \frac{dy}{ds} = \frac{a\cos\theta}{\sqrt{a^2 + h^2}}, \quad \frac{dz}{ds} = \frac{h}{\sqrt{a^2 + h^2}}.$$

Далее,

$$\frac{d^2x}{ds^2} = -\frac{a\cos\theta}{a^2 + h^2}, \quad \frac{d^2y}{ds^2} = \frac{-a\sin\theta}{a^2 + h^2}, \quad \frac{d^2z}{ds^2} = 0,$$

$$K = |\ddot{\mathbf{r}}| = \frac{a}{a^2 + h^2}, \quad \beta = \frac{\ddot{\mathbf{r}}}{|\ddot{\mathbf{r}}|} = -\cos\theta\mathbf{i} - \sin\theta\mathbf{j} + 0\cdot\mathbf{k},$$

что показывает, что главная нормаль к Г параллельна плоскости x, y и идет по направлению к оси кругового цилиндра, на который навернута винтовая линия. Наконец,

$$\gamma = \frac{h\sin\theta}{\sqrt{a^2 + h^2}}\mathbf{i} - \frac{h\cos\theta}{\sqrt{a^2 + h^2}}\mathbf{j} + \frac{a}{\sqrt{a^2 + h^2}}\mathbf{k},$$

$$\frac{d\gamma}{ds} = \frac{h\cos\theta}{a^2 + h^2}\mathbf{i} + \frac{h\sin\theta}{a^2 + h^2}\mathbf{j} + 0\mathbf{k}, \quad \frac{1}{T} = \frac{d\gamma}{ds}\beta = -\frac{h}{a^2 + h^2}.$$

В предположении, что $\mathbf{r}(s)$ имеет в окрестности $s = s_0$ непрерывные производные до третьего порядка включительно, имеет место формула Тейлора

$$\mathbf{r} - \mathbf{r}_0 = (s - s_0)\,\dot{\mathbf{r}}_0 + \frac{(s - s_0)^2}{2!}\ddot{\mathbf{r}}_0 + \frac{(s - s_0)^3}{3!}\dddot{\mathbf{r}}_0 + o\left((s - s_0)^3\right)$$
$$(s \to s_0), \tag{7}$$

где остаток есть вектор, длина которого стремится к нулю быстрее, чем $|s - s_0|^3$.

Так как единичные векторы

$$\alpha = \dot{\mathbf{r}}_0, \quad \beta = \frac{\ddot{\mathbf{r}}_0}{|\ddot{\mathbf{r}}_0|}, \quad \gamma = \alpha \times \beta \quad (\ddot{\mathbf{r}} \neq 0)$$

ортогональны, то имеют место равенства

$$\mathbf{r}(s) - \mathbf{r}(s_0) = \lambda(s)\boldsymbol{\alpha} + \mu(s)\boldsymbol{\beta} + \nu(s)\boldsymbol{\gamma}, \tag{8}$$

$$\lambda(s) = (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0, \boldsymbol{\alpha}), \quad \mu(s) = (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0, \boldsymbol{\beta}), \quad \nu(s) = (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0, \boldsymbol{\gamma}),$$

$$\lambda'(s_0) = \frac{d}{ds}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0, \boldsymbol{\alpha})\big|_{s=s_0} = (\dot{\mathbf{r}}(s), \boldsymbol{\alpha})\big|_{s=s_0} = 1, \tag{9}$$

$$\mu'(s_0) = (\dot{\mathbf{r}}_0, \boldsymbol{\beta}) = 0, \quad \mu''(s_0) = (\ddot{\mathbf{r}}_0, \boldsymbol{\beta}) \neq 0, \tag{10}$$

$$\nu'(s_0) = \nu''(s_0) = 0, \quad \nu'''(s_0) = (\dddot{\mathbf{r}}(s_0), \boldsymbol{\gamma}) \neq 0. \tag{11}$$

Последнее условие ($\nu'''(s_0) \neq 0$) мы предполагаем дополнительно. Оно обычно имеет место (случай $\nu'''(s_0) = 0$ исключительный).

Если смотреть на кривую Γ по направлению бинормали, то будем видеть ее проекцию Γ_γ на плоскость векторов $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\beta}$:

$$(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)_\gamma = \lambda(s)\boldsymbol{\alpha} + \mu(s)\boldsymbol{\beta}.$$

В силу свойств (9), (10) Γ_γ имеет в точке A_0 касательную $\mathbf{T}$ и в малой окрестности A_0 находится полностью над $\mathbf{T}$ или под $\mathbf{T}$ (рис. 6.12).

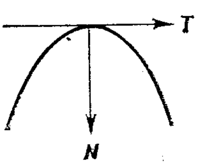

Рис. 6.12.

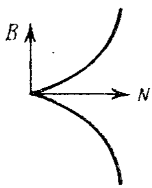

Рис. 6.13.

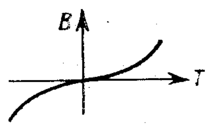

Рис. 6.14.

Если смотреть на Γ по направлению касательной, то будем видеть ее проекцию Γ_α на плоскость векторов $\boldsymbol{\beta}$, $\boldsymbol{\gamma}$: $(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)_\alpha = \mu(s)\boldsymbol{\beta} + \nu(s)\boldsymbol{\gamma}$. Таким образом, Γ_α определяется уравнениями

$$\eta = \mu(s), \quad \zeta = \nu(s), \tag{12}$$

где (η, ζ) — прямоугольные координаты в системе, определяемой ортами $(\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma})$.

Имеем в силу (10)

$$\eta = \frac{(s - s_0)^2}{2}\mu''(s_0) + o\left((s - s_0)^3\right) \quad (s \to s_0),$$

и в силу (11)

$$\zeta = \frac{(s - s_0)^3}{3!}\nu'''(s_0) + o\left((s - s_0)^3\right) \quad (s \to s_0).$$

Таким образом, при малых $|s - s_0|$ знак $\eta = \mu(s)$ один и тот же, независимо от знака $s - s_0$,

$$\left(\frac{d\zeta}{d\eta}\right)_0 = \lim_{s \to s_0}\frac{\nu'(s)}{\mu'(s)} = \lim_{s \to s_0}\frac{\nu''(s)}{\mu''(s)} = \frac{\nu''(s_0)}{\mu''(s_0)} = 0,$$

а знак $\zeta = \nu(s)$ меняется вместе с переменой знака $s - s_0$, и кривая (12) имеет в начале координат (η, ζ) точку возврата (рис. 6.13; см. еще далее § 7.23).

Наконец, если смотреть на Γ по главной нормали, то будем видеть ее проекцию Γ_β на плоскость векторов $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\gamma}$:

$$(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)_\beta = \lambda(s)\boldsymbol{\alpha} + \nu(s)\boldsymbol{\gamma}.$$

В силу (9), (11) кривая $\xi = \lambda(s)$, $\zeta = \nu(s)$ обладает свойствами

$$\left(\frac{d\zeta}{d\xi}\right)_0 = \frac{\nu'(s_0)}{\lambda'(s_0)} = 0, \quad \left(\frac{d^2\zeta}{d\xi^2}\right)_0 = \frac{\lambda'(s_0)\,\nu''(s_0) - \lambda''(s_0)\,\nu'(s_0)}{\lambda'(s_0)^3} = 0,$$

$$\left(\frac{d^3\zeta}{d\xi^3}\right)_0 = \nu'''(s_0) \neq 0.$$

Это показывает, что кривая Γ_β имеет точку перегиба в A_0 (рис. 6.14).

§ 6.11. Асимптота

Пусть задана кривая (или ветвь кривой) Γ, определяемая уравнением

$$y = f(x) \qquad (x > N), \tag{1}$$

где $f(x)$ — непрерывная для любого $x > N$ функция. Точку $A = (x, f(x))$ кривой Γ можно считать зависящей от x.

Пусть, кроме того, задана прямая L

$$y = ax + b, \tag{2}$$

(a, b — постоянные числа). Если расстояние от точки A кривой до прямой L стремится к нулю при неограниченном возрастании x, то прямая L называется *асимптотой* кривой Γ, соответствующей стремлению x к $+\infty$.

Итак, пусть L есть асимптота Γ при $x \to +\infty$. Уравнение L в нормальном виде записывается так:

$$\frac{y - ax - b}{\sqrt{1+a^2}} = 0.$$

Поэтому расстояние точки $A = (x, f(x))$ кривой Γ до L равно $\rho(x) = |f(x) - ax - b|/\sqrt{1+a^2}$. Так как L, по условию, асимптота Γ при $x \to +\infty$, то $\lim\limits_{x\to+\infty} \rho(x) = 0$. Отсюда

$$\lim_{x\to+\infty} |f(x) - ax - b| = 0. \tag{3}$$

Поэтому $\lim\limits_{x\to+\infty} \left[\frac{f(x)}{x} - a - \frac{b}{x}\right] = \lim\limits_{x\to+\infty} \left[\frac{f(x)}{x} - a\right] = 0$, т. е.

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = a. \tag{4}$$

Из сказанного следует, как надо поступать, чтобы найти асимптоту Γ при $x \to +\infty$. Надо взять предел (4). Если он не существует, то кривая Γ не имеет асимптоты. Если же предел (4) существует и равен a, надо вычислить предел

$$\lim_{x\to+\infty} \{f(x)-ax\}=b. \tag{5}$$

Если на самом деле предел (5) не существует, то кривая Г не имеет асимптоты при $x\to+\infty$. Если же он существует, то полученные константы a и b определяют прямую, которая и есть асимптота Г при $x\to+\infty$. Так как пределы (4) и (5) если существуют, то единственны, то непрерывная кривая Г (или ветвь кривой), определяемая равенством (1), либо не имеет вовсе либо имеет единственную асимптоту при $x\to+\infty$.

Аналогично определяется асимптота при $x\to-\infty$ непрерывной кривой (ветви кривой)

$$y=f(x) \quad (x<-N), \tag{6}$$

а также асимптота при $x\to\infty$ кривой

$$y=f(x) \quad (N\leqslant|x|) \tag{7}$$

(состоящей из двух ветвей, соответствующих $x>N$ и $x<-N$). В проведенных выше рассуждениях надо считать в случае (6), что $x\to-\infty$, а в случае (7), что $x\to\infty$.

Если кривая Г (или ветвь кривой) определяется уравнением $y=f(x)$ $(a<x<b)$, где $f(x)$ — непрерывная функция на интервале (a, b), обладающая свойством $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x>a}} f(x)=+\infty$, то в этом случае естественно называть прямую $x=a$ асимптотой Г. Во всяком случае, прямую $x=a$ принято называть *асимптотой* Г, если непрерывная функция $f(x)\to\infty$, $x\to a$ и строго монотонна в правой или левой окрестности точки $x=a$. Ведь тогда кривую Г можно записать в виде $x=\varphi(y)$, где y, положительное или отрицательное, достаточно велико по абсолютной величине и прямая $x=a$, очевидно, является асимптотой Г в указанном в начале параграфа смысле.

Пример 1. Отдадим себе отчет, какой вид имеет график Г функции $f(x)=\dfrac{1}{x}+x+e^{-x}$.

Предел $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{1}{x^2}+1+\dfrac{e^{-x}}{x}\right)=1$. Но уже предел этого отношения при $x\to-\infty$ равен $+\infty$.

Далее, $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-x]=0$. Таким образом, $y=x$ есть асимптота Г при $x\to+\infty$. Прямая $x=0$ тоже есть асимптота Г при стремлении x к 0 справа и слева:

$$\lim_{\substack{x\to0\\ x>0}} f(x)=+\infty, \quad \lim_{\substack{x\to0\\ x<0}} f(x)=-\infty.$$

Найти корни уравнения $f'(x) = 0$ не удается. Но очевидно, что

$$f''(x) = \frac{2}{x^3} + e^{-x} > 0 \quad (x > 0),$$

$$\lim_{x\to 0+0} f'(x) = -\infty, \quad \lim_{x\to+\infty} f'(x) = 1.$$

Таким образом, $f'(x)$ на $(0, \infty)$ строго возрастает и существует только одно значение $x_0 > 0$, где $f'(x_0) = 0$. Функция $f(x)$, очевидно, убывает на $(0, x_0)$ от $+\infty$ до $f(x_0)$, затем возрастает, и при этом ее график имеет при $x \to +\infty$ асимптоту $y = x$ и весь находится над последней.

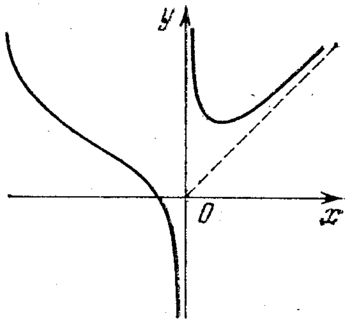

Рис. 6.15.

На интервале $(-\infty, 0)$

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2} + 1 - e^{-x} < 0,$$

потому что $-1/x^2 < 0$ и $1 - e^{-x} < 0$. Учитывая это, легко видеть, что $f(x)$ на $(-\infty, 0)$ строго убывает от $+\infty$ до $-\infty$. Далее,

$$f''(x) = \frac{2}{x^3} + e^{-x},$$

$$f'''(x) = -\frac{6}{x^4} - e^{-x} < 0 \text{ на } (-\infty, 0),$$

$$\lim_{x\to-\infty} f''(x) = +\infty, \quad \lim_{x\to 0, x<0} f''(x) = -\infty.$$

Поэтому на $(-\infty, 0)$ имеется, и притом единственная, точка x_1 перегиба графика $f(x)$. На $(-\infty, x_1)$ график f обращен выпуклостью книзу, а на $(x_1, 0)$ — выпуклостью кверху (см. схематический график, рис. 6.15).

Пример 2. Кривая $y = \sqrt{x}$ $(x \geqslant 0)$ не имеет асимптоты, потому что хотя предел

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x}}{x} = 0$$

и существует, все же предел

$$\lim_{x\to+\infty} (\sqrt{x} - 0\cdot x) = \infty$$

не конечный.

§ 6.12. Замена переменных

Пусть y есть функция от x, а $x = \varphi(t)$ — заданная функция от t. Тогда y есть функция от t. Производные $\frac{dy}{dx}, \frac{dy^2}{dx^2}, \ldots$ от y по x выражаются через производные $\frac{dy}{dt}, \frac{d^2y}{dt^2}, \ldots$ и через известные производные $\frac{dx}{dt} = \varphi'(t)$, $\frac{d^2x}{dt^2} = \varphi''(t)$ по следующим формулам

(§ 6.5, (5), (6)):

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}, \quad \frac{dx}{dt}\neq 0, \tag{1}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{\frac{dx}{dt}\frac{d^2y}{dt^2}-\frac{dy}{dt}\frac{d^2x}{dt^2}}{\left(\frac{dx}{dt}\right)^3}. \tag{2}$$

Более сложным является случай, когда нужно выразить производные $\frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \ldots$ через $\frac{dv}{dt}, \frac{d^2v}{dt^2}, \ldots$, где $v=\lambda(y)$, $x=\mu(t)$ — данные функции. Здесь функция $\lambda(y)$ предполагается обратимой ($y=\lambda^{-1}(v)$).

Очевидно, что

$$\frac{dy}{dv}\frac{dv}{dt}=\frac{dy}{dx}\frac{dx}{dt}, \tag{3}$$

откуда

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dv}\frac{dv}{dt}}{\frac{dx}{dt}}, \tag{4}$$

и мы выразили $\frac{dy}{dx}$ через $\frac{dv}{dt}$ и данные функции от v и от t.

Дифференцируя (3) по t, получим

$$\frac{d^2y}{dv^2}\left(\frac{dv}{dt}\right)^2+\frac{dy}{dv}\frac{d^2v}{dt^2}=\frac{d^2y}{dx^2}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\frac{dy}{dx}\frac{d^2x}{dt^2}. \tag{5}$$

Заменив в (5) $\frac{dy}{dx}$ выражением (4), и разрешив полученное уравнение относительно $\frac{d^2y}{dx^2}$, получим, что $\frac{d^2y}{dx^2}$ выражается через $\frac{dv}{dt}, \frac{d^2v}{dt^2}$ и известные функции от v и от t.

Чтобы получить $\frac{d^3y}{dx^3}$, надо продифференцировать (5) по t, заменить $\frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}$ найденными выражениями и разрешить полученное уравнение относительно $\frac{d^3y}{dx^3}$. Подобным образом поступаем для получения соответствующих выражений для более высоких производных $\frac{d^ky}{dx^k}$.

Глава 7

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ

§ 7.1. Открытое множество

В n-мерном пространстве $R_n = R$ зададим произвольную точку $\mathbf{x}^0 = (x_1^0, \ldots, x_n^0)$. *Шаром* (или *замкнутым шаром*) радиуса $r > 0$ с центром в этой точке называют множество точек $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in R$, для которых выполняется неравенство

$$|\mathbf{x} - \mathbf{x}^0| = \left[\sum_1^n (x_j - x_j^0)^2\right]^{1/2} \leqslant r.$$

Открытым шаром радиуса r с центром в $\mathbf{x}^0$ мы будем называть множество точек $\mathbf{x}$, для которых выполняется строгое неравенство $|\mathbf{x} - \mathbf{x}^0| < r$.

Определим *прямоугольник* в R (замкнутый прямоугольник или прямоугольный параллелепипед в R) как множество точек $\mathbf{x} \in R$, координаты которых удовлетворяют неравенствам $a_j \leqslant x_j \leqslant b_j$ ($a_j < b_j$, $j = 1, \ldots, n$). В случае $n = 3$ это реальный прямоугольный параллелепипед с гранями, параллельными осям прямоугольных координат (x_1, x_2, x_3).

Можно еще определить *открытый прямоугольник в R* как множество точек, удовлетворяющих строгим неравенствам $a_j < x_j < b_j$ ($j = 1, \ldots, n$).

Множество точек $\mathbf{x}$, координаты которых удовлетворяют неравенствам $|x_j - x_j^0| \leqslant a$ ($j = 1, \ldots, n$), где $a > 0$ — заданное число, естественно назвать *кубом* (или *замкнутым кубом*) в R с центром в точке $\mathbf{x}^0$ и стороной длины $2a$. Конечно, при $n = 3$ это будет куб с гранями, параллельными осям (прямоугольной) системы координат.

Наконец, *открытый куб* (в R) определяется при помощи неравенств $|x_j - x_j^0| < a$ ($j = 1, \ldots, n$).

Неравенства $|x_j - x_j^0| \leqslant \left(\sum_1^n (x_j - x_j^0)^2\right)^{1/2} < r$ говорят, что если точка x принадлежит шару радиуса r с центром в x^0, то она принадлежит и кубу со стороной длины $2r$ с тем же центром. Таким образом, *куб со стороной* длины $2r$ *с центром в* $\mathbf{x}^0$ *содержит в себе шар радиуса* r с тем же центром. С другой стороны, если точка $\mathbf{x}$ принадлежит кубу, $|x_j - x_j^0| < a$ ($j = 1, \ldots, n$), то для нее выполняется неравенство $\left(\sum_{1}^{n}(x_j - x_j^0)^2\right)^{1/2} < \sqrt{n}\,a$, показывающее, что *шар с центром в* $\mathbf{x}^0$ *радиуса* $a\sqrt{n}$ *содержит в себе куб со стороной длины* $2a$ *с тем же центром* (см. § 6.2 (12)).

Мы рассматривали открытые шары и кубы, но это же верно и для замкнутых шаров и кубов.

Зададим произвольное множество E точек $\mathbf{x} \in R$. По определению, $\mathbf{x}^0$ называется *внутренней точкой* множества E, если существует открытый шар с центром в этой точке, полностью принадлежащий E. Слово *шар* здесь можно заменить на *куб*, потому что всякий шар содержит некоторый куб с тем же центром, и наоборот.

Множество называется *открытым*, если все его точки внутренние. Это определение можно еще сформулировать так: *множество E открытое, если из того, что какая-нибудь точка принадлежит ему, следует, что она внутренняя точка.*

Отсюда видно, что *пустое множество есть открытое множество.*

Открытый шар

$$|\mathbf{x} - \mathbf{x}^0| < r \tag{1}$$

есть открытое множество. В самом деле, пусть $\mathbf{y}$ есть принадлежащая ему точка, т. е. $|\mathbf{y} - \mathbf{x}^0| = \rho < r$, и $\mathbf{x}$ — произвольная точка, принадлежащая шару

$$|\mathbf{x} - \mathbf{y}| < \varepsilon \qquad (\varepsilon < r - \rho). \tag{2}$$

Для нее $|\mathbf{x} - \mathbf{x}^0| = |\mathbf{x} - \mathbf{y} + \mathbf{y} - \mathbf{x}^0| \leqslant |\mathbf{x} - \mathbf{y}| + |\mathbf{y} - \mathbf{x}^0) < \varepsilon + \rho < r$. Это показывает, что шар (2) принадлежит шару (1).

Предоставляем читателю доказать, что *открытый прямоугольник*, в частности, открытый куб, *есть открытое множество.*

Пересечение G_1G_2 двух открытых множеств G_1 и G_2 есть открытое множество. В самом деле, пусть точка $\mathbf{x}^0$ принадлежит к G_1G_2. Так как $\mathbf{x}^0$ есть внутренняя точка как G_1 так и G_2, то существуют два открытых шара с центром в $\mathbf{x}^0$, из которых первый принадлежит G_1, а второй — G_2. Пересечение их есть, очевидно, открытый шар (наименьший из них), принадлежащий G_1G_2.

Легко видеть, что *сумма конечного или счетного числа открытых множеств есть открытое множество.* Однако пересечение счетного числа открытых множеств может и не быть открытым, например, пересечение открытых шаров $|\mathbf{x}| < 1/k$ $(k = 1, 2, \ldots)$ есть точка (нулевая точка).

Окрестностью точки $\mathbf{x}^0 \in R_n$ называют произвольное открытое множество, содержащее в себе эту точку. Очевидно, что *пересечение двух окрестностей* $\mathbf{x}^0$ *есть в свою очередь окрестность* $\mathbf{x}^0$.

После сказанного понятие внутреней точки множества E можно еще определить так: $\mathbf{x}^0$ *есть внутренняя точка E, если суще-*

ствует *принадлежащая E окрестность* $\mathbf{x}^0$. В самом деле, если $\mathbf{x}^0$ — внутренняя точка по первому определению, то найдется принадлежащий E открытый шар с центром в $\mathbf{x}^0$, но последний есть окрестность $\mathbf{x}^0$. Наоборот, если x^0 есть внутренняя точка по второму определению, то существует принадлежащая E окрестность $\mathbf{x}^0$, которая, будучи открытым множеством, содержит открытый шар с центром в $\mathbf{x}^0$.

В дальнейшем в нашем распоряжении будет много примеров открытых множеств, определенных строго математически, а сейчас мы призовем читателя к геометрической интуиции, сказав, что если с произвольно геометрического тела содрать его границу, то получим открытое множество.

В ближайших параграфах мы будем рассматривать функции $f(x) = f(x_1, \ldots, x_n)$ от n переменных $x_1, \ldots, x_n$ или, что все равно, от точки $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$, определенные на окрытых множествах n-мерного пространства.

Множество E называется *связным*, если любые его две точки x', x'' можно соединить принадлежащей ему непрерывной кривой, т. е. если существует непрерывная вектор-функция $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$, $0 \leqslant t \leqslant 1$ такая, что $\mathbf{x}(0) = x'$, $\mathbf{x}(1) = x''$, $\mathbf{x}(t) \in E$ (см. § 6.5).

Отрезком $\overline{x'x''}$ называется кривая $x(t) = tx' + (1-t)x''$, $t \in [0, 1]$, очевидно, непрерывная и соединяющая точки x', x''.

Множество называется *выпуклым*, если вместе с точками x', x'' принадлежит ему соединяющий их отрезок. (Примеры см. конец § 7.3.)

Замечание 1. Куб Δ в R_n можно определить при помощи неравенств:

$$\Delta = \{a_j \leqslant x_j \leqslant b_j;\ j = 1, \ldots, n\},$$

где $2d = b_j - a_j$ $(j = 1, \ldots, n)$. Легко видеть, что Δ есть сумма 2^n кубов вида $\{\lambda_j \leqslant x_j \leqslant \mu_j;\ j = 1, \ldots, n\}$, где всевозможными способами надо положить $\lambda_j = a_j$, $\mu_j = (a_j + b_j)/2$ или $\lambda_j = (a_j + b_j)/2$, $\mu_j = b_j$. Говорят, что этим куб Δ разбит на 2^n равных кубов (имеющих стороны длины d).

Замечание 2. Мы называем кубом в R_n то, что при $n = 3$ есть обычный (трехмерный) куб со сторонами, параллельными осям координат. Общее определение n-мерного куба требует введения ортогонального преобразования координат:

$$x_j - x_j^0 = \sum_{k=1}^{n} \alpha_{jk}\xi_k,$$

где $\mathbf{x}^0 = \left(x_1^0, \ldots, x_n^0\right) \in R_n$ и α_{jk} — действительные числа, для которых $\sum_{k=1}^{n} \alpha_{jk}^2 = 1$, $\sum_{k=1}^{n} \alpha_{ik}\alpha_{jk} = 0$ $(i \neq j;\ i, j = 1, \ldots, n)$. Например, замкнутым кубом Δ в R_n с центром в $\mathbf{x}^0 \in R_n$ и сторонами длины $2d$ называется такое множество точек $\mathbf{x} \in R_n$, которое после надлежащего (зависящего от Δ) ортогонального преобразования координат превращается во множество вида $\{|\xi_k| \leqslant d;\ k = 1, \ldots, n\}$.

Подобное замечание относится и к n-мерным прямоугольникам.

§ 7.2. Предел функции

По определению, *функция* $f(\mathbf{x}) = f(x_1, \ldots, x_n)$ *имеет предел в точке* $\mathbf{x}^0 = (x_1^0, \ldots, x_n^0)$, равный числу A, обозначаемый так:

$$\lim_{x \to x^0} f(\mathbf{x}) = \lim_{\substack{x_j \to x_j^0 \\ (j=1, \ldots, n)}} f(x_1, \ldots, x_n) = A \tag{1}$$

(пишут еще $f(\mathbf{x}) \to A(\mathbf{x} \to \mathbf{x}^0)$), если она определена на некоторой окрестности точки $\mathbf{x}^0$, за исключением, быть может, ее самой, и если существует предел

$$\lim_{\substack{|\mathbf{x}^k - \mathbf{x}^0| \to 0 \\ \mathbf{x}^k \neq \mathbf{x}^0}} f(\mathbf{x}^k) = A, \tag{2}$$

какова бы ни была стремящаяся к $\mathbf{x}^0$ последовательность точек $\mathbf{x}^k$ из указанной окрестности ($k = 1, 2, \ldots$), отличных от $\mathbf{x}^0$ (см. § 6.3).

Другое эквивалентное определение заключается в следующем: *функция* f *имеет в точке* $\mathbf{x}^0$ *предел, равный* A, если она определена в некоторой окрестности точки $\mathbf{x}^0$, за исключением, быть может, ее самой, и для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что

$$|f(\mathbf{x}) - A| < \varepsilon \tag{3}$$

для всех $\mathbf{x}$, удовлетворяющих неравенствам

$$0 < |\mathbf{x} - \mathbf{x}^0| < \delta. \tag{4}$$

В этом определении можно заменить неравенства (4) на следующие

$$0 < \sum_{j=1}^{n} |x_j - x_j^0| < \delta \quad (j = 1, \ldots, n),$$

или сказать, что для любого $\varepsilon > 0$ найдется окрестность $U(\mathbf{x}^0)$ такая, что для всех принадлежащих к ней $\mathbf{x} \neq \mathbf{x}^0$ выполняется (3).

Эквивалентность первого и второго определения в n-мерном случае доказывается аналогично тому, как это делалось в одномерном случае (см. § 4.1).

Сформулируем критерий Коши существования предела (доказываемое как в одномерном случае) (см. § 4.1 теорема 5).

Для того чтобы функция f *имела в точке* $\mathbf{x}^0$ *предел* (*конечный*), *необходимо и достаточно, чтобы для любого* $\varepsilon > 0$ *нашлась окрестность* $U(\mathbf{x}^0)$ (в частности, куб или шар с центром в $\mathbf{x}^0$) *так, чтобы для всех* $\mathbf{x}, \mathbf{x}' \in U(\mathbf{x}^0)$, *отличных от* $\mathbf{x}^0$, *имело место неравенство*

$$|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}')| < \varepsilon.$$

Критерий Коши можно сформулировать и так: *для того чтобы функция* f *имела в точке* $\mathbf{x}^0$ *предел, необходимо и достаточ-*

но, чтобы функция $f(\mathbf{x})-f(\mathbf{x}')$, *зависящая от переменных* $(\mathbf{x}, \mathbf{x}')=(x_1, \ldots, x_n, x_1', \ldots, x_n')$, *имела предел в точке* $(\mathbf{x}^0, \mathbf{x}^0)$, *равный нулю.*

Очевидно, что если число A есть предел $f(\mathbf{x})$ в $\mathbf{x}^0$, то A есть предел функции $f(\mathbf{x}^0+\mathbf{h})$ от $\mathbf{h}$ в нулевой точке:

$$\lim_{\mathbf{h}\to 0} f(\mathbf{x}^0+\mathbf{h})=A,$$

и наоборот.

Рассмотрим некоторую функцию f, заданную во всех точках окрестности точки $\mathbf{x}^0$, кроме быть может точки $\mathbf{x}^0$, пусть $\boldsymbol{\omega}=(\omega_1, \ldots, \omega_n)$ — произвольный вектор длины единица ($|\boldsymbol{\omega}|=1$) и $t\geqslant 0$ — скаляр. Точки вида $\mathbf{x}^0+t\boldsymbol{\omega}$ ($0\leqslant t$) образуют выходящий из $\mathbf{x}^0$ *луч в направлении вектора* $\boldsymbol{\omega}$. Для каждого $\boldsymbol{\omega}$ можно рассматривать функцию

$$f(\mathbf{x}^0+t\boldsymbol{\omega})=f\left(x_1^0+t\omega_1, \ldots, x_n^0+t\omega_n\right) \quad (0<t<\delta_\omega)$$

от скалярной переменной t, где δ_ω есть число, зависящее от $\boldsymbol{\omega}$. Предел этой функции (от одной переменной t)

$$\lim_{t\to 0, t>0} f(\mathbf{x}^0+t\boldsymbol{\omega})=\lim_{t\to 0, t>0} f\left(x_1^0+t\omega_1, \ldots, x_n^0+t\omega_n\right),$$

если он существует, естественно назвать *пределом f в точке* $\mathbf{x}^0$ *по направлению вектора* $\boldsymbol{\omega}$.

В частности, если $\boldsymbol{\omega}$ — единичный орт $\mathbf{e}^j=(0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)$, направленной по оси x_j, то можно говорить о пределе f в точке $\mathbf{x}^0$ по направлению положительной полуоси x_j:

$$\lim_{\substack{t\to 0,\\ t>0}} f(\mathbf{x}^0+t\mathbf{e}^j)=\lim_{\substack{t\to 0,\\ t>0}} f\left(x_1^0, \ldots, x_{j-1}^0, x_j^0+t, x_{j+1}^0, \ldots, x_n^0\right),$$

или отрицательной полуоси x_j:

$$\lim_{\substack{t\to 0,\\ t>0}} f(\mathbf{x}^0-t\mathbf{e}^j)=\lim_{\substack{t\to 0,\\ t>0}} f\left(x_1^0, \ldots, x_{j-1}^0, x_j^0-t, x_{j+1}^0, \ldots, x_n^0\right).$$

Из того, что функция f имеет в точке $\mathbf{x}^0$ предел, равный A, следует, очевидно, что она имеет в этой точке предел, равный A, и по любому направлению. Но обратное утверждение неверно — функция f может иметь предел в $\mathbf{x}^0$, равный A по любому направлению и в то же время не иметь предела в $\mathbf{x}^0$.

Пример 1.

1) $f(x, y)=\dfrac{x^3+y^3}{x^2+y^2}$; 2) $\varphi(x, y)=\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$.

Функции f и φ определены на плоскости (x, y), за исключением точки $(0, 0)$. Имеем

$$|f(x, y)|\leqslant\frac{2(x^2+y^2)^{3/2}}{x^2+y^2}=2(x^2+y^2)^{1/2},$$

откуда

$$\lim_{x,y\to 0} f(x, y) = 0$$

(для $\varepsilon > 0$ полагаем $\delta = \varepsilon/2$ и тогда $|f(x, y)| < \varepsilon$, если только $(x^2 + y^2)^{1/2} < \delta$).

Далее, считая, что k постоянная, имеем

$$\varphi(x, kx) = \frac{1 - k^2}{1 + k^2},$$

откуда видно, что предел φ в $(0, 0)$ по разным направлениям вообще различен. Поэтому φ не имеет предела в $(0, 0)$.

Пример 2. В плоскости (x, y) определим спираль $\rho = \theta$ $(0 < \theta \leqslant 2\pi)$, где ρ — радиус-вектор, а θ — полярный угол. Пусть $\psi(x, y)$ определяется следующим образом (рис. 7.1): $\psi(0, 0) = 1$, $\psi(x, y) = 0$ для $\rho = \sqrt{x^2 + y^2} \geqslant \theta > 0$, ψ линейна на любом отрезке, соединяющем точку $(0, 0)$ с точкой спирали. Легко видеть, что $\lim\limits_{t\to 0} \psi(tx, ty) = 1$, какова бы ни была точка $(x, y) \neq (0, 0)$, т. е. существует равный 1 предел ψ в $(0, 0)$ по любому направлению, между тем как предел ψ в $(0, 0)$ не существует. Ведь если приближаться к точке $(0, 0)$ по кривой, находящейся между спиралью и осью x в первой четверти плоскости (x, y), то вдоль этой кривой $\psi(x, y) = 0$.

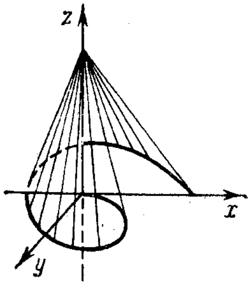

Рис. 7.1.

Будем писать $\lim\limits_{x\to x^0} f(\mathbf{x}) = \infty$, если функция f определена в некоторой окрестности $\mathbf{x}^0$, за исключением, быть может, $\mathbf{x}^0$, и для всякого $N > 0$ найдется $\delta > 0$ такое, что $|f(\mathbf{x})| > N$, коль скоро $0 < |\mathbf{x} - \mathbf{x}^0| < \delta$.

Можно говорить о пределе f, когда $\mathbf{x} \to \infty$:

$$\lim_{x\to\infty} f(\mathbf{x}) = A. \tag{5}$$

Например, в случае конечного числа A равенство (5) надо понимать в том смысле, что для всякого $\varepsilon > 0$ можно указать такое $N > 0$, что для точек $\mathbf{x}$, для которых $|\mathbf{x}| > N$, функция f определена и имеет место неравенство $|f(\mathbf{x}) - A| < \varepsilon$.

Справедливы равенства

$$\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}^0} (f(\mathbf{x}) \pm \varphi(\mathbf{x})) = \lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}^0} f(\mathbf{x}) \pm \lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}^0} \varphi(\mathbf{x}), \tag{6}$$

$$\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}^0} (f(\mathbf{x}) \varphi(\mathbf{x})) = \lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}^0} f(\mathbf{x}) \lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}^0} \varphi(\mathbf{x}), \tag{7}$$

$$\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}^0} \frac{f(\mathbf{x})}{\varphi(\mathbf{x})} = \frac{\lim\limits_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}^0} f(\mathbf{x})}{\lim\limits_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}^0} \varphi(\mathbf{x})} \quad \left(\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}^0} \varphi(\mathbf{x}) \neq 0\right), \tag{8}$$

где может быть $\mathbf{x}^0 = \infty$. При этом, как обычно, пределы (конечные) в их левых частях существуют, если существуют пределы f и φ. Докажем для примера (7)

Пусть $\mathbf{x}^k \to \mathbf{x}^0$ $(\mathbf{x}^k \neq \mathbf{x}^0)$; тогда

$$\lim_{\mathbf{x}^k \to \mathbf{x}^0} (f(\mathbf{x}^k)\varphi(\mathbf{x}^k)) = \lim_{\mathbf{x}^k \to \mathbf{x}^0} f(\mathbf{x}^k) \lim_{\mathbf{x}^k \to \mathbf{x}^0} \varphi(\mathbf{x}^k) = \lim_{\mathbf{x} \to \mathbf{x}^0} f(\mathbf{x}) \lim_{\mathbf{x} \to \mathbf{x}^0} \varphi(\mathbf{x}). \quad (9)$$

Таким образом, предел в левой части (9) существует и равен правой части (9), а так как последовательность $\{\mathbf{x}^k\}$ призвольна, то он равен пределу функции $f(\mathbf{x})\varphi(\mathbf{x})$ в точке $\mathbf{x}^0$.

Теорема 1. *Если функция f имеет предел, не равный нулю в точке* $\mathbf{x}^0$,

$$\lim_{\mathbf{x} \to \mathbf{x}^0} f(\mathbf{x}) = A \neq 0,$$

то существует $\delta > 0$ такое, что для всех $\mathbf{x}$, удовлетворяющих неравенствам

$$0 < |\mathbf{x} - \mathbf{x}^0| < \delta, \quad (10)$$

она удовлетворяет неравенству

$$|f(\mathbf{x})| > |A|/2. \quad (11)$$

Больше того, она сохраняет там знак A.

В самом деле, положив $\varepsilon = |A|/2$, найдем $\delta > 0$ такое, чтобы для $\mathbf{x}$, удовлетворяющих неравенствам (10), выполнялось

$$|f(\mathbf{x}) - A| < |A|/2. \quad (12)$$

Поэтому для таких $\mathbf{x}$ $|A|/2 > |A - f(\mathbf{x})| \geqslant |A| - |f(\mathbf{x})|$, т. е. имеет место (11).

Из (12) для указанных $\mathbf{x}$ следует:

$$A - \frac{|A|}{2} < f(\mathbf{x}) < A + \frac{|A|}{2},$$

откуда $A/2 < f(\mathbf{x})$ при $A > 0$ и $f(\mathbf{x}) < A/2$ при $A < 0$ (сохранение знака).

Замечание. В § 7.10 будет дано более общее определение предела функции, заданной на произвольном множестве.

§ 7.3. Непрерывная функция

По определению, функция $f(\mathbf{x}) = f(x_1, \ldots, x_n)$ *непрерывна в точке* $\mathbf{x}^0 = (x_1^0, \ldots, x_n^0)$, если она определена в некоторой ее окрестности, в том числе и в самой точке $\mathbf{x}^0$, и если предел ее в точке $\mathbf{x}^0$ равен ее значению в ней:

$$\lim_{\mathbf{x} \to \mathbf{x}^0} f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}^0). \quad (1)$$

Условие непрерывности f в точке $\mathbf{x}^0$ можно написать в эквивалентной форме:

$$\lim_{\mathbf{h}\to 0} f(\mathbf{x}^0+\mathbf{h}) = f(\mathbf{x}^0), \tag{1'}$$

т. е. функция $f(\mathbf{x})$ непрерывна в точке $\mathbf{x}^0$, если непрерывна функция $f(\mathbf{x}^0+\mathbf{h})$ от $\mathbf{h}$ в точке $\mathbf{h}=\mathbf{0}$.

Можно ввести приращение f в точке $\mathbf{x}^0$, соответствующее приращению $\mathbf{h}=(h_1, \ldots, h_n)$,

$$\Delta_h f(\mathbf{x}^0) = f(\mathbf{x}^0+\mathbf{h}) - f(\mathbf{x}^0),$$

и на его языке определить непрерывность f в $\mathbf{x}^0$: *функция f непрерывна в x^0, если*

$$\lim_{\mathbf{h}\to 0} \Delta_{\mathbf{h}} f(\mathbf{x}^0) =$$

$$= \lim_{h_1,\ldots,h_n\to 0} \left[f\left(x_1^0+h_1, \ldots, x_n^0+h_n\right) - f\left(x_1^0, \ldots, x_n^0\right)\right] = 0. \tag{1''}$$

Из формул (6)—(8) § 7.2 непосредственно следует

Теорема 1. *Сумма, разность, произведение и частное непрерывных в точке $\mathbf{x}^0$ функций $f(\mathbf{x})$ и $\varphi(\mathbf{x})$ есть непрерывная функция в этой точке, если, конечно, в случае частного* $\varphi(\mathbf{x}^0)\neq 0$.

Постоянную c можно рассматривать как функцию $f(\mathbf{x})=c$ от $\mathbf{x}=(x_1, \ldots, x_n)$. Она непрерывна для любого $\mathbf{x}$, потому что

$$f(\mathbf{x}+\mathbf{h}) - f(\mathbf{x}) = c - c = 0 \to 0 \quad (\mathbf{h}\to \mathbf{0}).$$

Следующей по сложности является функция $f_j(\mathbf{x}) = x_j$ ($j = 1, \ldots, n$), где индекс j может равняться одному из значений $1, \ldots, n$. Она также непрерывна (как функция от $\mathbf{x}=(x_1, \ldots, x_n)$!). Действительно, пусть $\mathbf{h}=(h_1, \ldots, h_n)$; тогда

$$|f_j(\mathbf{x}+\mathbf{h}) - f_j(\mathbf{x})| = |(x_j+h_j) - x_j| = |h_j| \leqslant |\mathbf{h}| \to 0 \quad (\mathbf{h}\to\mathbf{0}).$$

Если производить над функциями x_j и постоянными действия сложения, вычитания и умножения в конечном числе, то будем получать функции, называемые *многочленами от* $\mathbf{x}$ *или* $(x_1, \ldots, x_n)$. На основании сформулированных выше свойств *многочлены суть непрерывные функции на R_n* (для всех $\mathbf{x}\in R_n$). Отношение P/Q двух многочленов есть *рациональная функция*, очевидно, непрерывная всюду на R_n, за исключением точек $\mathbf{x}$, где $Q(\mathbf{x})=0$.

Функция

$$P(\mathbf{x}) = x_1^3 - x_2^3 + x_1^2x_3 + 2x_1^2x_2 - 3x_3^2 + 4$$

может служить примером многочлена от (x_1, x_2, x_3) третьей степени.

Вообще, имеет место очевидная

Теорема 2. *Пусть $f(x_1, \ldots, x_m)$ — непрерывная функция в точке $(x_1^0, \ldots, x_m^0)$ пространства R_m и $m < n$.*

Если ее рассматривать как функцию

$$F(x_1, \ldots, x_n) = f(x_1, \ldots, x_m)$$

от $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$, то F непрерывна относительно $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ (в пространстве R_n) в любой точке вида $(x_1^0, \ldots, x_m^0, x_{m+1}^0, \ldots, x_n^0)$, где числа $x_{m+1}^0, \ldots, x_n^0$ произвольны.

В самом деле, если $\mathbf{h} = (h_1, \ldots, h_n)$, то

$$\Delta_h F(\mathbf{x}^0) = F(x_1^0 + h_1, \ldots, x_n^0 + h_n) - F(x_1^0, \ldots, x_n^0) =$$
$$= f(x_1^0 + h_1, \ldots, x_m^0 + h_m) - f(x_1^0, \ldots, x_m^0) \to 0 \quad (\mathbf{h} \to \mathbf{0}).$$

Пусть $\mathbf{k} = (k_1, \ldots, k_n)$ есть целый неотрицательный вектор, т. е. имеющий неотрицательные целые компоненты k_j $(j = 1, \ldots, n)$. Если $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ — точка R_n, то условимся о следующем обозначении:

$$\mathbf{x}^{\mathbf{k}} = x_1^{k_1} x_2^{k_2} \ldots x_n^{k_n}. \tag{2}$$

Эта функция непрерывна для всех $\mathbf{x} \in R_n$, потому что она есть произведение из конечного числа множителей вида x_j, каждый из которых есть непрерывная функция от $\mathbf{x}$. Введем еще новое обозначение

$$|\mathbf{k}| = \sum_{j=1}^{n} k_j, \tag{3}$$

которое употребляют для целых неотрицательных векторов $\mathbf{k}$ и которое не надо путать с $|\mathbf{k}| = \left(\sum_{j=1}^{n} k_j^2\right)^{1/2}$ Составим сумму

$$P_N(\mathbf{x}) = \sum_{|\mathbf{k}| \leqslant N} a_{\mathbf{k}} \mathbf{x}^{\mathbf{k}} = \sum_{|\mathbf{k}| \leqslant N} a_{k_1, \ldots, k_n} x_1^{k_1} \ldots x_n^{k_n},$$

распространенную на всевозможные векторы $\mathbf{k}$ с $|\mathbf{k}| \leqslant N$, где $a_{\mathbf{k}} = a_{k_1, \ldots, k_n}$ — постоянные коэффициенты, снабженные целочисленными векторными индексами $\mathbf{k}$. Эта функция (очевидно непрерывная) называется многочленом от $\mathbf{x}$ степени N.

Справедлива

Теорема 3. *Пусть функция $f(\mathbf{x}) = f(x_1, \ldots, x_m)$ непрерывна в точке $\mathbf{x}^0 = (x_1^0, \ldots, x_m^0)$ пространства R_m (точек $\mathbf{x}$), а функции $\varphi_j(\mathbf{u}) = \varphi_j(u_1, \ldots, u_n)$ непрерывны в точке $\mathbf{u}^0 = (u_1^0, \ldots, u_n^0)$ пространства R_n (точек $\mathbf{u}$). Пусть, кроме того, $\varphi_j(\mathbf{u}^0) = x_j^0$ $(j = 1, \ldots, m)$. Тогда функция*

$$F(\mathbf{u}) = f(\varphi_1(\mathbf{u}), \varphi_2(\mathbf{u}), \ldots, \varphi_m(\mathbf{u}))$$

непрерывна (по $\mathbf{u}$) в точке $\mathbf{u}^0$.

Доказательство. Так как f непрерывна в $\mathbf{x}^0$, то для любого $\varepsilon > 0$ можно указать $\delta > 0$ такое, что f определена для всех

$\mathbf{x}$, для которых $|x_j - x_j^0| < \delta$ $(j = 1, \ldots, m)$, и для них выполняется неравенство $|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}^0)| < \varepsilon$, и так как функции φ_j непрерывны в точке $\mathbf{u}^0$ пространства R_n, то можно определить такое $\eta > 0$, что для точек $\mathbf{u} \in R_n$ шара $|\mathbf{u} - \mathbf{u}^0| < \eta$ выполняются неравенства

$$|\varphi_j(\mathbf{u}) - \varphi_j(\mathbf{u}^0)| < \delta \quad (j = 1, \ldots, m).$$

Тогда выполняется также неравенство

$$|F(\mathbf{u}) - F(\mathbf{u}^0)| = |f(\varphi_1(\mathbf{u}), \ldots, \varphi_n(\mathbf{u})) - f(\varphi_1(\mathbf{u}^0), \ldots, \varphi_m(\mathbf{u}^0))| < \varepsilon,$$

и теорема доказана.

Функцию мы будем называть *элементарной функцией* от переменных $x_1, \ldots, x_n$, если она может быть получена из этих переменных и констант c при помощи конечного числа операций сложения, вычитания, умножения, деления и операций φ, где φ — элементарные функции от одной переменной (см. § 1.3). Функции

1) $\sin \ln \sqrt{1 + x^2 + y^2} = \varphi_1$,
2) $\sin^2 x + \cos 3(x + y) = \varphi_2$,
3) $\ln \dfrac{x - y}{x + y} = \varphi_3$

могут служить примерами элементарных функций.

Легко проверить, пользуясь теоремами 1—3, что функции φ_1 и φ_2 непрерывны на плоскости (x, y), функция же φ_3, очевидно, определена и непрерывна в тех точках (x, y), для которых дробь $(x - y)/(x + y)$ положительна и конечна.

Из теоремы 1 § 7.2 и определения непрерывности функции в точке непосредственно следует

Теорема 4. *Функция $f(\mathbf{x}) = f(x_1, \ldots, x_n)$, непрерывная в точке $\mathbf{x}^0$ и неравная нулю в этой точке, сохраняет знак $f(\mathbf{x}^0)$ в некоторой окрестности этой точки.*

Следствие. *Пусть функция $f(\mathbf{x})$ определена и непрерывна на R_n (во всех точках R_n). Тогда множество G точек $\mathbf{x}$, где она удовлетворяет неравенству $f(x) > c$ (или $f(\mathbf{x}) < c$), какова бы ни была постоянная c, есть открытое множество.*

В самом деле, функция $F(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) - c$ непрерывна на R_n, и множество всех точек $\mathbf{x}$, где $F(\mathbf{x}) > 0$, совпадает с G. Пусть $\mathbf{x}^0 \in G$; тогда существует шар

$$|\mathbf{x} - \mathbf{x}^0| < \delta,$$

на котором $F(\mathbf{x}) > 0$, т. е. он принадлежит к G и точка $\mathbf{x}^0 \in G$ — внутренняя для G.

Случай $f(\mathbf{x}) < c$ доказывается аналогично.

Пример.

1) $f_1(\mathbf{x}) = \sum\limits_1^n \dfrac{x_k^2}{a_k} \quad (a_k > 0)$;

2) $f_2(\mathbf{x}) = \sum_1^n |\mathbf{x_k}|$;

3) $f_3(\mathbf{x}) = \max_k |\mathbf{x_k}|$.

Эти три функции определены и непрерывны на R_n. Непрерывность f_3 вытекает из следующих выкладок:

$$|f_3(\mathbf{x}+\mathbf{h})-f_3(\mathbf{x})| = |\max_k |x_k+h_k| - \max_k |x_k|| \leqslant$$
$$\leqslant \max_k |x_k+h_k-x_k| = \max_k |h_k| \to 0 \quad (|\mathbf{h}|\to 0).$$

В таком случае множества значений $\mathbf{x}$, для которых выполняются неравенства $f_i(\mathbf{x}) < c$ $(i = 1, 2, 3)$,— открытые множества. Первое из них есть внутренность эллипсоида в n-мерном пространстве; второе и третье при $n=2$ суть внутренности квадратов, изображенных соответственно на рис. 7.2 и 7.3.

Эти три множества выпуклые, потому что из неравенств $f_i(x) < c$ и $f_i(y) < c$ следует $f_i(tx+(1-t)y) < c$, $0 \leqslant t \leqslant 1$.

Неравенства $f_i(x) > c > 0$ определяют внешности указанных фигур.

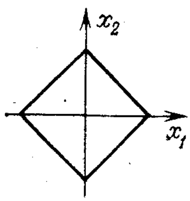

Рис. 7.2.

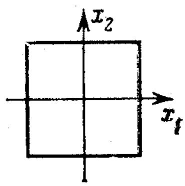

Рис. 7.3.

§ 7.4. Частные производные и производная по направлению

В этом параграфе мы будем рассматривать функции f, определенные на произвольном открытом множестве $G \subset R_n$.

Назовем *приращением* f *в точке* $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ $(\in G)$ *по переменной* x_j *с шагом* h *величину*

$$\Delta_{x_j h} f(x) = f(x_1, \ldots, x_{j-1}, x_j + h, x_{j+1}, \ldots, x_n) - f(x_1, \ldots, x_n),$$

где h — действительное число, достаточно малое, чтобы эта величина имела смысл.

Частной производной по x_j *в точке* $\mathbf{x}$ называется предел

$$f'_{x_j} = \frac{\partial f}{\partial x_j} = \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_j} = \lim_{h\to 0} \frac{\Delta_{x_j h} f(\mathbf{x})}{h} \quad (j = 1, \ldots, n),$$

если он существует. Частная производная $\frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_j}$ есть обычная производная от функции $f(x_1, \ldots, x_n)$, рассматриваемой как функция только от переменной x_j при фиксированных $x_1, \ldots$ $\ldots, x_{j-1}, x_{j+1}, \ldots, x_n$.

Функция $z = f(x, y)$ от двух переменных изображается в трехмерном пространстве, где задана прямоугольная система координат (x, y, z), поверхностью — геометрическим местом точек $(x, y, f(x, y))$, где $(x, y) \in G$. Очевидно, что *величина* $f'_x(x_0, y_0)$

(если она существует) *равна тангенсу наклона к оси x, касательной к сечению этой поверхности плоскостью $y = y_0$ в точке, имеющей абсциссу x_0.*

Производные $\dfrac{\partial f}{\partial x_j}$ $(i = 1, \ldots, n)$ называют также *частными производными первого порядка от f.*

Выражения $\dfrac{\partial}{\partial x_i} \dfrac{\partial}{\partial x_j} f = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$ $(i, j = 1, \ldots, n)$ называют *частными производными второго порядка.* При $i = j$ их принято обозначать так:

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_i} f = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} \quad (i = 1, \ldots, n).$$

Выражения $\dfrac{\partial}{\partial x_k} \dfrac{\partial}{\partial x_i} \dfrac{\partial}{\partial x_j} f = \dfrac{\partial^3 f}{\partial x_k \partial x_i \partial x_j}$ называют *частными производными третьего порядка*, и т. д. Широко пользуются обозначениями, такими как приведенные ниже:

$$\underbrace{\frac{\partial}{\partial x_k} \frac{\partial}{\partial x_k}}_{m \text{ раз}} = \frac{\partial^m}{\partial x_k^m}, \quad \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial^6}{\partial z\, \partial y^2 \partial z^2 \partial x}$$

Мы увидим в дальнейшем, что во многих важных случаях эти операции частного дифференцирования законно менять местами без изменения результата.

Можно еще ввести понятие *производной по направлению.* В случае функций от одной переменной оно не употребляется.

Пусть $\boldsymbol{\omega} = (\omega_1, \ldots, \omega_n)$ есть произвольный единичный вектор. *Производной от функции f в точке* $\mathbf{x}$ *по направлению* $\boldsymbol{\omega}$ называется предел

$$\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\omega}} = \lim_{\substack{t \to 0 \\ t > 0}} \frac{f(\mathbf{x} + t\boldsymbol{\omega}) - f(\mathbf{x})}{t}$$

(если он существует). Подчеркнем, что при вычислении этого предела предполагается, что t стремится к нулю, принимая *положительные* значения, поэтому можно еще сказать, что $\dfrac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial \boldsymbol{\omega}}$ *есть правая производная в точке $t = 0$ от функции $f(\mathbf{x} + \boldsymbol{\omega} t)$* по t.

Можно, как в случае функций от одной переменной, говорить о правой и левой частной производной по x_j. Надо учесть, что *производная по направлению положительной оси x_j совпадает с правой частной производной по x_j, однако производная по направлению отрицательной оси x_j имеет знак, противоположный знаку левой производной по x_j.*

§ 7.5. Дифференцируемая функция. Касательная плоскость

Для простоты будем рассматривать трехмерный случай; в n-мерном случае рассуждения аналогичны. Случай $n=1$ был специально рассмотрен в § 5.2.

Пусть на открытом множестве $G \subset R_3$ задана функция

$$u = f(x, y, z),$$

имеющая в точке $(x, y, z) \in G$ непрерывные частные производные первого порядка. Отсюда автоматически следует, что эти частные производные существуют в некоторой окрестности (x, y, z), хотя, быть может они в точках, отличных от (x, y, z), не являются непрерывными. Рассмотрим приращение f в (x, y, z), соответствующее приращению $(\Delta x, \Delta y, \Delta z)$, где $|\Delta x|$, $|\Delta y|$, $|\Delta z| < \delta$ и δ достаточно мало́, чтобы точка $(x+\Delta x, y+\Delta y, z+\Delta z)$ не выходила из указанной окрестности. Имеют место равенства (пояснения ниже):

$$\Delta u = f(x+\Delta x, y+\Delta y, z+\Delta z) - f(x, y, z) = \tag{1}$$

$$= f(x+\Delta x, y+\Delta y, z+\Delta z) - f(x, y+\Delta y, z+\Delta z) + \tag{2}$$

$$+ f(x, y+\Delta y, z+\Delta z) - f(x, y, z+\Delta z) + \tag{3}$$

$$+ f(x, y, z+\Delta z) - f(x, y, z) = \tag{4}$$

$$= f'_x(x+\theta_1\Delta x, y+\Delta y, z+\Delta z)\,\Delta x + f'_y(x, y+\theta_2\Delta y, z+\Delta z)\Delta y + f'_z(x, y, z+\theta_3\Delta z)\,\Delta z = \tag{5}$$

$$= \big(f'_x(x, y, z) + \varepsilon_1\big)\Delta x + \big(f'_y(x, y, z) + \varepsilon_2\big)\Delta y + \big(f'_z(x, y, z) + \varepsilon_3\big)\Delta z = \tag{6}$$

$$= f'_x(x, y, z)\,\Delta x + f'_y(x, y, z)\,\Delta y + f'_z(x, y, z)\,\Delta z + o(\rho) \quad (\rho \to 0), \tag{7}$$

$$0 < \theta_1, \theta_2, \theta_3 < 1,\ \rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2},\ \varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3 \to 0 \quad (\rho \to 0). \tag{8}$$

Отметим, что соотношение $\rho \to 0$ эквивалентно трем соотношениям: $\Delta x \to 0$, $\Delta y \to 0$, $\Delta z \to 0$.

Переход от (2) к первому члену (5) обосновывается так: функция $f(\xi, y+\Delta y, z+\Delta z)$ от ξ (при фиксированных $y+\Delta y$, $z+\Delta z$) имеет, по условию, производную (по ξ) на отрезке $[x, x+\Delta x]$ и к ней применима теорема Лагранжа о среднем. Аналогичное пояснение ко второму и третьему членам (5). Переход от (5) к (6) чисто формальный: мы положили, например,

$$f'_x(x+\theta_1\Delta x, y+\Delta y, z+\Delta z) = f'_x(x, y, z) + \varepsilon_1.$$

Но не формален здесь факт, что $\varepsilon_1 \to 0$ при $\rho \to 0$. Он следует из предположенной непрерывности f'_x в (x, y, z). Наконец, переход от (6) к (7) сводится к утверждению, что имеет место равенство

$$\varepsilon_1\Delta x + \varepsilon_2\Delta y + \varepsilon_3\Delta z = o(\rho) \quad (\rho \to 0).$$

В самом деле (см. § 6.2, (9)) при $\rho \to 0$

$$|\varepsilon_1 \Delta x + \varepsilon_2 \Delta y + \varepsilon_3 \Delta z|/\rho \leqslant \rho \sqrt{\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \varepsilon_3^2}/\rho = \sqrt{\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \varepsilon_3^2} \to 0.$$

Мы доказали важную теорему:

Теорема 1. *Если функция $u = f$ имеет непрерывные частные производные (первого порядка) в точке (x, y, z), то ее приращение в этой точке, соответствующее достаточно малому приращению $(\Delta x, \Delta y, \Delta z)$, можно записать по формуле*

$$\Delta u = \frac{\partial f}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial f}{\partial y} \Delta y + \frac{\partial f}{\partial z} \Delta z + o(\rho) \ (\rho \to 0), \quad \rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2}, \tag{9}$$

где частные производные взяты в точке (x, y, z).

Так как значения частных производных в правой части (9) не зависят от Δx, Δy, Δz, то из условий теоремы 1 следует, что приращение f в (x, y, z), соответствующее приращению $(\Delta x, \Delta y, \Delta z)$, может быть записано по формуле

$$\Delta u = A \Delta x + B \Delta y + C \Delta z + o(\rho) \quad (\rho \to 0), \tag{10}$$

где числа A, B, C не зависят от Δx, Δy, Δz.

Сделаем следующее определение: если приращение функции f в точке (x, y, z) для достаточно малых $(\Delta x, \Delta y, \Delta z)$ может быть записано в виде суммы (10), где A, B, C — числа, не зависящие от Δx, Δy, Δz, то говорят, что функция f *дифференцируема* в точке (x, y, z). Таким образом, *дифференцируемость функции f в (x, y, z) заключается в том, что ее приращение Δf в этой точке можно записать в виде суммы двух слагаемых: первое слагаемое есть линейная функция $A\Delta x + B\Delta y + C\Delta z$ от $(\Delta x, \Delta y, \Delta z)$ — она называется главной линейной частью приращения Δf, второе же слагаемое, вообще, сложно зависит от приращений Δx, Δy, Δz, но если стремить их к нулю, то оно будет стремиться к нулю, быстрее, чем $\rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2}$.*

Легко видеть, что если функция f дифференцируема в точке (x, y, z), т. е. представляется равенством (10), то она имеет в этой точке производные, равные:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = A, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = B, \quad \frac{\partial f}{\partial z} = C. \tag{11}$$

Например, первое равенство (11) доказывается так. Пусть приращение f в (x, y, z) записывается по формуле (10). Если считать в последней $\Delta x = h$, $\Delta y = \Delta z = 0$, то получим равенство $\Delta_{xh} u = Ah + o(h)$ $(h \to 0)$. После деления его на h и перехода к пределу, получим

$$\lim_{h \to 0} \frac{\Delta_{xh} u}{h} = \frac{\partial f}{\partial x} = A.$$

Из сказанного следует

Теорема 2. *Для того чтобы функция f была дифференцируемой в точке, необходимо, чтобы она имела в этой точке частные производные, и достаточно, чтобы она имела в этой точке непрерывные частные производные.*

Из (10) следует, что *если функция дифференцируема в точке, то она непрерывна в этой точке.*

Пример 1. Функция $f(x, y, z)$, равная нулю на координатных плоскостях $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ и единице в остальных точках R_3, имеет, очевидно, частные производные, равные нулю в точке $(0, 0, 0)$, но она, очевидно, разрывна в этой точке и потому не может быть в ней дифференцируемой. Таким образом, одного существования частных производных в точке недостаточно для дифференцируемости и даже непрерывности в этой точке.

Отметим отличие многомерного случая от одномерного. При $n = 1$ свойство дифференцируемости f в x записывается в виде равенства $\Delta f = A\Delta x + o(\Delta x)$, следовательно, если $A \neq 0$, то остаток стремится к нулю при $\Delta x \to 0$ быстрее главной части. При $n > 1$ это уже не так; например, при $n = 3$, каковы бы ни были числа A, B, C, одновременно не равные нулю, всегда можно стремить Δx, Δy, Δz к нулю так, чтобы при этом постоянно выполнялось равенство $A\Delta x + B\Delta y + C\Delta z = 0$, но тогда в (10) остаточный член $o(\rho)$ вообще больше главного. Впрочем, если мы заставим Δx, Δy, Δz стремиться к нулю так, чтобы выполнялась пропорциональность $\Delta x : \Delta y : \Delta z = A : B : C$, то тогда главная часть приращения будет величиной, имеющей строго порядок ρ, и остаток будет стремиться к нулю быстрее главной части.

Если функция f дифференцируема в точке (x, y, z), то главная линейная часть ее приращения в этой точке называется еще *дифференциалом f в этой точке, соответствующим приращениям $(\Delta x, \Delta y, \Delta z)$ независимых переменных.*

Он записывается так: $df = \frac{\partial f}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}\Delta y + \frac{\partial f}{\partial z}\Delta z$. О других обозначениях мы будем еще говорить.

Рассмотрим поверхность S, описываемую функцией $z = f(x, y)$, заданной в окрестности точки (x_0, y_0).

Плоскость L_0 называется *касательной плоскостью к поверхности S в ее точке* $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ $(z_0 = f(x_0, y_0))$, если расстояние $r(P, L_0)$ подвижной точки $P = (x, y, z) \in S$ до L_0 стремится к нулю быстрее расстояния ρ от P до P_0:

$$r(P, L_0) = o(\rho) \quad (\rho \to 0). \tag{12}$$

Теорема 3. *Если функция f дифференцируема в точке (x_0, y_0), то описываемая ею поверхность имеет, и притом единственную, касательную плоскость в точке P_0, определяемую уравнением*

$$z - z_0 = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0 (x - x_0) + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_0 (y - y_0) \tag{13}$$

($(\,)_0$ обозначает, что в скобках надо положить $x = x_0$, $y = y_0$).

Доказательство. Пусть функция f дифференцируема в точке (x_0, y_0), S — описываемая ею поверхность и L_0 — плоскость, определяемая уравнением (13). Произвольная точка $P \in S$ имеет координаты $(x, y, f(x, y))$. Из аналитической геометрии известно, что ее расстояние до L_0 выражается формулой (пояснения ниже)

$$r(P, L_0) = \frac{1}{M}\left| f(x,y) - f(x_0, y_0) - \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0 (x - x_0) - \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_0 (y - y_0)\right| = \\ = o(r) = o(\rho), \quad r \to 0, \ \rho \to 0, \quad (14)$$

$$r = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2},$$

$$\rho = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + [f(x, y) - f(x_0, y_0)]^2}.$$

Здесь $M = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_0^2 + 1}$ есть нормирующий множитель плоскости L_0. Второе равенство (14) имеет место вследствие предположенной дифференцируемости f в точке (x_0, y_0). Последнее же равенство говорит, что величина вида $o(r)$ $(r \to 0)$ обладает тем свойством, что ее отношение к ρ стремится к нулю при $\rho \to 0$. Ведь если $\rho \to 0$, то тогда и $r \to 0$ $(0 \leqslant r \leqslant \rho!)$ и потому

$$\left|\frac{o(r)}{\rho}\right| = \left|\frac{o(r)}{r} \cdot \frac{r}{\rho}\right| \leqslant \left|\frac{o(r)}{r}\right| \to 0.$$

Мы доказали, что плоскость, определяемая уравнением (13), есть касательная плоскость к S в точке (x_0, y_0).

Другой касательной плоскости к S в точке (x_0, y_0) не существует. В самом деле, пусть касательная плоскость к S в P_0 имеет уравнение

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) - C(z - z_0) = 0, \quad A^2 + B^2 + C^2 = 1. \quad (15)$$

Тогда

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) - C(f - f_0) = o(\rho) = o(r), \quad \rho \to 0, \ r \to 0. \quad (16)$$

Последнее равенство в (16) объясняется следующим образом. В силу дифференцируемости f в точке (x_0, y_0)

$$|f - f_0| = \left|\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0 (x - x_0) + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_0 (y - y_0) + \varepsilon r\right| \leqslant \\ \leqslant r\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_0^2} + r|\varepsilon| < cr,$$

где c — константа, не зависящая от r. Надо учесть, что ε ограничено, потому что $\varepsilon \to 0$ при $r \to 0$. Но тогда

$$\rho = \sqrt{r^2 + |f - f_0|^2} < c_1 r,$$

где c_1 не зависит от r и $\rho \to 0$ при $r \to 0$, следовательно,

$$\left|\frac{o(\rho)}{r}\right| = \left|\frac{o(\rho)}{\rho}\,\frac{\rho}{r}\right| \leqslant c_1\left|\frac{o(\rho)}{\rho}\right| \to 0, \quad r \to 0, \quad \rho \to 0.$$

Если положить в (16) $y = y_0$, разделить на $x - x_0$ и перейти к пределу при $x \to x_0$, то получаем

$$A - C\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0 = 0.$$

Аналогично, полагая в (16) $x = x_0$, деля на $y - y_0$ и переходя к пределу при $y \to y_0$, получим

$$B - C\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_0 = 0.$$

Но тогда $C \neq 0$, потому что иначе было бы $A = B = C = 0$, и, следовательно, наша плоскость имеет вид (13).

Пример 2. Функция ($\alpha > 0$)

$$f(x, y) = \begin{cases} (x^2 + y^2)^{(1+\alpha)/2} & \text{в рациональных точках,} \\ 0 & \text{в остальных точках,} \end{cases}$$

очевидно, разрывна в любой точке, отличной от нулевой, в нулевой же точке она дифференцируема:

$$f(x, y) - f(0, 0) = f(x, y) = 0x + 0y + \rho^{1+\alpha},$$

где $\rho^{1+\alpha} = o(\rho)$ $(\rho \to 0)$. Таким образом, f есть пример функции, дифференцируемой в точке, но не имеющей непрерывных частных производных в этой точке.

Примеры 1 и 2 показывают, что свойство функции быть дифференцируемой в точке слабее свойства иметь непрерывные частные производные в точке, но сильнее свойства иметь частные производные в точке.

§ 7.6. Производная сложной функции; производная по направлению; градиент

Ограничимся рассмотрением функции трех переменных, определенной на открытом множестве $G \subset R_3$. Распространение излагаемых здесь фактов на n-мерный случай производится аналогично.

Теорема 1. *Пусть функция*

$$u = f(x, y, z) \tag{1}$$

дифференцируема в точке $(x, y, z) \in G$, *а функции*

$$x = \varphi(t), \; y = \psi(t), \; z = \chi(t), \tag{2}$$

зависящие от скалярного параметра t, имеют производную в t. Тогда производная по t от сложной функции (производная от f вдоль кривой (2)) $u = F(t) = f(\varphi(t), \psi(t), \chi(t))$ вычисляется по формуле

$$F'(t) = f'_x(\varphi(t), \psi(t), \chi(t))\,\varphi'(t) + f'_y(\varphi(t), \psi(t), \chi(t))\,\psi'(t) + \\ + f'_z(\varphi(t), \psi(t), \chi(t))\,\chi'(t),$$

или, короче:

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{dz}{dt}. \tag{3}$$

В самом деле, вследствие дифференцируемости f в (x, y, z) каково бы ни было достаточно малое приращение $(\Delta x, \Delta y, \Delta z)$,

$$\Delta u = f(x+\Delta x, y+\Delta y, z+\Delta z) - f(x, y, z) =$$
$$= \frac{\partial f}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}\Delta y + \frac{\partial f}{\partial z}\Delta z + o(\rho) \quad \left(\rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2} \to 0\right). \tag{4}$$

Значению t, которому при помощи равенств (2) соответствует точка (x, y, z), придадим приращение Δt. Оно вызовет приращения Δx, Δy, Δz функций (2). Если именно их подставить в (4), то получим приращение $F(t+\Delta t) - F(t) = \Delta u$ функции F в точке t. После деления (4) на Δt и перехода к пределу получим

$$F'(t) = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta t} = \lim_{\Delta t\to 0}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\Delta x}{\Delta t} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\Delta y}{\Delta t} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\Delta z}{\Delta t} + \frac{o(\rho)}{\Delta t}\right) =$$
$$= \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{dz}{dt},$$

т. е. (3), потому что функции (2) имеют производные, а

$$\frac{o(\rho)}{\Delta t} = \varepsilon(\rho)\cdot\sqrt{\left(\frac{\Delta x}{\Delta t}\right)^2 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta t}\right)^2 + \left(\frac{\Delta z^2}{\Delta t}\right)} \to$$
$$\to 0\cdot\sqrt{x_t'^2 + y_t'^2 + z_t'^2} = 0 \quad (\Delta t \to 0)$$

($\Delta t \to 0$ влечет $\rho \to 0$).

Теорема 2. *Если функция f дифференцируема в точке (x, y, z), то для нее имеет смысл производная по направлению любого единичного вектора* $\mathbf{n} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$, *выражаемая формулой*

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{n}} = \frac{\partial f}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial f}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial f}{\partial z}\cos\gamma. \tag{5}$$

Доказательство. Согласно определения производной по направлению (см. § 7.4) и в силу предыдущей теоремы

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{n}} = \lim_{\substack{t\to 0\\ t>0}}\frac{f(x+t\cos\alpha, y+t\cos\beta, z+t\cos\gamma) - f(x, y, z)}{t} =$$
$$= \left[\frac{d}{dt}f(x+t\cos\alpha, y+t\cos\beta, z+t\cos\gamma)\right]_{t=0} =$$
$$= \frac{\partial f}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial f}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial f}{\partial z}\cos\gamma,$$

где частные производные взяты в (x, y, z).

Если $x = \varphi(s)$, $y = \psi(s)$, $z = \chi(s)$ — уравнение гладкой кривой Γ, где параметр s — длина дуги, то величины

$$\frac{dx}{ds} = \varphi'(s), \quad \frac{dy}{ds} = \psi'(s), \quad \frac{dz}{ds} = \chi'(s)$$

суть направляющие косинусы вектора касательной к Г. Поэтому величина

$$\frac{\partial f}{\partial s} = \frac{\partial f}{\partial x}\varphi'(s) + \frac{\partial f}{\partial y}\psi'(s) + \frac{\partial f}{\partial z}\chi'(s) = \frac{d}{ds} f(\varphi(s), \psi(s), \chi(s)),$$

где f — дифференцируемая функция, есть производная по направлению указанного касательного вектора. Говорят еще, что $\frac{\partial f}{\partial s}$ есть производная от f вдоль Г.

Введем вектор

$$\operatorname{grad} f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right), \tag{6}$$

называемый *градиентом* функции f в точке (x, y, z).

Плоскость, проходящая через точку (x_0, y_0, z_0) и перпендикулярная к градиенту f в этой точке, если он не равен нулю, имеет уравнение

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0 (x - x_0) + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_0 (y - y_0) + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)_0 (z - z_0) = 0. \tag{7}$$

Эта плоскость замечательна тем, что ее можно (в силу (5)) рассматривать как геометрическое место выходящих из (x_0, y_0, z_0) лучей, вдоль которых производная от f равна нулю. В § 7.19 будет доказано, что эта плоскость есть касательная плоскость в (x_0, y_0, z_0) к поверхности, определяемой уравнением

$$f(x, y, z) = A \quad (A = f(x_0, y_0, z_0)). \tag{8}$$

Формула (5) говорит, что *производная от f в точке (x, y, z) по направлению единичного вектора* $\mathbf{n}$ *равна проекции градиента f в этой точке на направление* $\mathbf{n}$:

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{n}} = (\operatorname{grad} f, \mathbf{n}) = \operatorname{grad}_{\mathbf{n}} f. \tag{9}$$

Имеет место очевидное неравенство

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{n}} \leqslant |\operatorname{grad} f| \tag{10}$$

для любого вектора $\mathbf{n}$. Если $\operatorname{grad} f = \mathbf{0}$, что обычно бывает только в исключительных точках, то $\frac{\partial f}{\partial \mathbf{n}} = 0$ для любого вектора $\mathbf{n}$. Если же $\operatorname{grad} f \neq \mathbf{0}$ (одна из частных производных от f не равна нулю), то (10) есть строгое неравенство для всех единичных векторов $\mathbf{n}$, за исключением единственного вектора $\mathbf{n}_0 = (\cos\alpha_0,$

$\cos\beta_0$, $\cos\gamma_0$), направленного в сторону $\operatorname{grad} f$. Таким образом,

$$\cos\alpha_0 = \frac{\dfrac{\partial f}{\partial x}}{\sqrt{\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial f}{\partial z}\right)^2}},$$

$$\cos\beta_0 = \frac{\dfrac{\partial f}{\partial y}}{\sqrt{\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial f}{\partial z}\right)^2}}, \quad \cos\gamma_0 = \frac{\dfrac{\partial f}{\partial z}}{\sqrt{\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial f}{\partial z}\right)^2}}. \tag{11}$$

Из сказанного следует, что *градиент функции f в точке (x, y, z) можно определить как вектор, обладающий следующими двумя свойствами*:

1) *длина его равна максимальной величине производной по направлению* $\dfrac{\partial f}{\partial \mathbf{n}}$ в (x, y, z) (для дифференцируемой в (x, y, z) функции этот максимум существует и есть число неотрицательное);

2) *если его длина не равна нулю, то он направлен в ту же сторону, что и вектор* $\mathbf{n}$, *вдоль которого производная* $\dfrac{\partial f}{\partial \mathbf{n}}$ *максимальна.*

Это новое определение градиента полностью эквивалентно его формальному определению при помощи формулы (6). Оно показывает, что $\operatorname{grad} f$ есть инвариант, т. е. он может быть определен независимо от системы координат, в которой рассматривается функция f от точки (см. (1)). Чтобы пояснить эти слова, рассмотрим физический пример. Будем считать, что G есть физическое тело, а $u = u(P)$ есть температура переменной его точки P, вообще меняющаяся от точки к точке. Если в пространстве ввести прямоугольную систему координат (x, y, z), то физическая функция $u = u(P)$ может быть заменена на математическую $u = f(x, y, z)$, где (x, y, z) — прямоугольные координаты точек $P \in G$. В другой прямоугольной системе (x', y', z') наша физическая функция будет описываться, вообще говоря, другой математической функцией

$$u = f_1(x', y', z') = f(\alpha_1 x' + \alpha_2 y' + \alpha_3 z', \beta_1 x' + \beta_2 y' + \beta_3 z', \gamma_1 x' + \gamma_2 y' + \gamma_3 z'), \tag{12}$$

где

$$\begin{aligned} x &= \alpha_1 x' + \alpha_2 y' + \alpha_3 z', \\ y &= \beta_1 x' + \beta_2 y' + \beta_3 z', \\ z &= \gamma_1 x' + \gamma_2 y' + \gamma_3 z' \end{aligned} \tag{13}$$

— формулы преобразования координат.

Градиент нашей физической функции $u=u(P)$ естественно определить в духе второго приведенного выше определения. Это есть вектор, по направлению которого температура в данной точке P возрастает быстрее всего, длина же его равна максимальной скорости возрастания температуры среди скоростей, соответствующих разным направлениям.

Мы знаем, что если функция f, описывающая нашу физическую функцию, в системе (x, y, z) дифференцируема в точке $P=(x, y, z)$, для нее имеет смысл градиент в этой точке, определяемый тройкой чисел

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right). \tag{14}$$

Во второй системе координат (x', y', z') он задается другой тройкой:

$$\left(\frac{\partial f_1}{\partial x'}, \frac{\partial f_1}{\partial y'}, \frac{\partial f_1}{\partial z'}\right). \tag{15}$$

Таким образом, мы из чисто физических соображений доказали, что если некоторый вектор в прямоугольной системе координат (x, y, z) задан тройкой чисел (14), то при условии дифференцируемости f в (x, y, z) он в новой системе (x', y', z') задается тройкой (15), где f_1 определяется формулами (12), (13). Но этот факт можно доказать и формально.

В самом деле, вектор (14) согласно формулам, известным из аналитической геометрии, в новой системе (x', y', z') имеет компоненты

$$\left.\begin{aligned}\alpha_1\frac{\partial f}{\partial x}+\beta_1\frac{\partial f}{\partial y}+\gamma_1\frac{\partial f}{\partial z}&=\frac{\partial f_1}{\partial x'},\\ \alpha_2\frac{\partial f}{\partial x}+\beta_2\frac{\partial f}{\partial y}+\gamma_2\frac{\partial f}{\partial z}&=\frac{\partial f_1}{\partial y'},\\ \alpha_3\frac{\partial f}{\partial x}+\beta_3\frac{\partial f}{\partial y}+\gamma_3\frac{\partial f}{\partial z}&=\frac{\partial f_1}{\partial z'}.\end{aligned}\right\} \tag{16}$$

Тот факт, что эти компоненты равны соответственно $\frac{\partial f_1}{\partial x'}, \frac{\partial f_1}{\partial y'}, \frac{\partial f_1}{\partial z'}$, вытекает из теоремы 1 о производной сложной функции. Надо иметь в виду при применении этой теоремы, что обычную производную по t, очевидно, всюду можно заменить на частную производную по t.

Градиент f еще записывают так:

$$\operatorname{grad} f=\nabla f, \tag{17}$$

где ∇ — оператор*), который каждой дифференцируемой в

*) Знак ∇ напоминает арфу, греческое название которой — $\nu\alpha\beta\lambda\alpha$ (набла).

(x, y, z) функции f приводит в соответствие вектор — $\operatorname{grad} f$. Этот оператор называется *оператором Гамильтона или оператором набла.* Его удобно считать символическим вектором

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right), \tag{18}$$

и рассматривать $\operatorname{grad} f$ как символическое произведение вектора ∇ на скаляр f.

При физическом подходе к функции как к некоторой величине u, зависящей от точки пространства, формулы (16) естественно записать следующим образом (не вводя функций f и f_1 для разных систем координат):

$$\left.\begin{aligned} \alpha_1 \frac{\partial u}{\partial x} + \beta_1 \frac{\partial u}{\partial y} + \gamma_1 \frac{\partial u}{\partial z} &= \frac{\partial u}{\partial x'}, \\ \alpha_2 \frac{\partial u}{\partial x} + \beta_2 \frac{\partial u}{\partial y} + \gamma_2 \frac{\partial u}{\partial z} &= \frac{\partial u}{\partial y'}, \\ \alpha_3 \frac{\partial u}{\partial x} + \beta_3 \frac{\partial u}{\partial y} + \gamma_3 \frac{\partial u}{\partial z} &= \frac{\partial u}{\partial z'}. \end{aligned}\right\} \tag{19}$$

В формальной теории векторов *вектором* (трехмерным) называется вещь, обозначаемая символом **a** и выражаемая в каждой прямоугольной системе координат (x, y, z) тройкой чисел $\mathbf{a} = (a_x, a_y, a_z)$ — компонент **a** в системе (x, y, z). При этом компоненты вектора **a** в любой другой прямоугольной системе координат (x', y', z'), $\mathbf{a} = (a_{x'}, a_{y'}, a_{z'})$, получаются из (a_x, a_y, a_z) при помощи преобразований

$$a_{x'} = \alpha_1 a_x + \beta_1 a_y + \gamma_1 a_z, \quad a_{y'} = \alpha_2 a_x + \beta_2 a_y + \gamma_2 a_z,$$
$$a_{z'} = \alpha_3 a_x + \beta_3 a_y + \gamma_3 a_z,$$

аналогичных преобразованиям координат (x, y, z) в (x', y', z'):

$$x' = \alpha_1 x + \beta_1 y + \gamma_1 z, \quad y' = \alpha_2 x + \beta_2 y + \gamma_2 z, \quad z' = \alpha_3 x + \beta_3 y + \gamma_3 z.$$

Формулы (19) дают, таким образом, формальное доказательство того факта, что $\operatorname{grad} f$ есть вектор.

Отсюда уже нетрудно сделать следующий формальный шаг. Будем считать, что оператор ∇ есть вектор (символический), имеющий в прямоугольной системе (x, y, z) компоненты $\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)$, а в произвольной другой прямоугольной системе (x', y', z') — компоненты $\left(\frac{\partial}{\partial x'}, \frac{\partial}{\partial y'}, \frac{\partial}{\partial z'}\right)$. При этом новые компоненты выражаются через старые при помощи (символических) равенств

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x'} &= \alpha_1 \frac{\partial}{\partial x} + \beta_1 \frac{\partial}{\partial y} + \gamma_1 \frac{\partial}{\partial z}, \\ \frac{\partial}{\partial y'} &= \alpha_2 \frac{\partial}{\partial x} + \beta_2 \frac{\partial}{\partial y} + \gamma_2 \frac{\partial}{\partial z}, \\ \frac{\partial}{\partial z'} &= \alpha_3 \frac{\partial}{\partial x} + \beta_3 \frac{\partial}{\partial y} + \gamma_3 \frac{\partial}{\partial z}, \end{aligned}\right\} \tag{20}$$

т. е. так, как если бы символический оператор ∇ был реальным вектором. Если помножить (символически) левые и правые части (20) на скаляр u (дифференцируемую функцию), то мы получим известное уже нам равенство (19) между частными производными от функции от u.

Таким образом, если заданы компоненты градиента f в системе (x, y, z) и нужно вычислить его компоненты в системе (x', y', z'), можно поступить так. Считаем, что $\operatorname{grad} f = \nabla f$ есть произведение вектора ∇ на скаляр f, находим компоненты ∇ в системе (x', y', z') по формулам (20), а затем умножаем их на скаляр f. Иначе говоря, при преобразовании вектора ∇f к новым координатам применяются те же операции, как если бы ∇ был обычным вектором, а f — помноженным на него числом (скаляром).

Пример 1. Пусть $f(r) = F(Q)$ есть функция от расстояния $r = r(P, Q)$ между фиксированной точкой $P(x_0, y_0, z_0)$ и переменной точкой $Q = (x, y, z)$;

$$\operatorname{grad} F = \left(f'(r)\,\frac{x - x_0}{r},\ f'(r)\,\frac{y - y_0}{r},\ f'(r)\,\frac{z - z_0}{r}\right)$$

есть вектор, имеющий направление вектора PQ и длину $|\operatorname{grad} F| = |f'(r)|$. Поэтому

$$\frac{\partial F}{\partial \mathbf{n}} = |f'(r)| \cos(PQ, \mathbf{n}).$$

В частности, если $F(Q) = f(r) = \ln(1/r)$, то

$$\frac{\partial F}{\partial \mathbf{n}} = -\frac{\cos(PQ, \mathbf{n})}{r}.$$

Пример 2. Функции

$$(\nabla u, \nabla u) = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2, \tag{21}$$

$$\Delta u = \nabla\nabla u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \tag{22}$$

инвариантны относительно преобразований прямоугольных систем координат, потому что $\nabla u = \operatorname{grad} u$ — вектор (инвариант), левая часть (21) есть квадрат его длины (скалярное произведение вектора на самого себя), а $\nabla\nabla$ есть символический инвариант (скалярное произведение символического вектора ∇ на самого себя), умноженный на скаляр.

§ 7.7. Независимость от порядка дифференцирования

Теорема 1. *Пусть на открытом плоском множестве G задана функция $f(x, y)$. Если она имеет в точке (x, y) непрерывные смешанные производные $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$, то они равны между собой в этой точке:*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}. \tag{1}$$

В самом деле,

$$\Delta_{xh}\Delta_{yh} f = \Delta_{xh}[f(x, y+h) - f(x, y)] = f(x+h, y+h) - \\ - f(x+h, y) - f(x, y+h) + f(x, y) = \Delta_{yh}\Delta_{xh} f. \tag{2}$$

Далее (пояснения ниже),

$$\Delta_{yh}\Delta_{xh}f = \Delta_{yh}\,[f(x+h, y) - f(x, y)] = h[f'_y(x+h, y+\theta h) - f'_y(x, y+\theta h)] = h^2 f''_{xy}(x+\theta_1 h, y+\theta h) = h^2\left[f''_{xy}(x, y) + \varepsilon\right] \quad (\varepsilon \to 0 \text{ при } h \to 0). \qquad (3)$$

Так как производная $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ непрерывна в точке (x, y), то тем самым она существует в достаточно малой окрестности этой точки и автоматически в этой окрестности существует $\frac{\partial f}{\partial y} = f'_y$. При достаточно малом h мы не выходим из этой окрестности и законно, как это сделано во втором равенстве (3), применить теорему о среднем по y к функции $[f(x+h, y) - f(x, y)]$. Предпоследнее равенство есть применение этой же теоремы по x к f'_y, что законно, потому что в указанной окрестности существует частная производная $\frac{\partial f'_y}{\partial x} = f''_{xy}$. Последнее равенство, где отмечается, что $\varepsilon \to 0$ при $h \to 0$, выражает, что производная f''_{xy} в точке (x, y) непрерывна. Из (3) следует, что

$$\lim_{h\to 0} \frac{\Delta_{yh}\Delta_{xh}f}{h^2} = f''_{xy}(x, y).$$

Аналогично, пользуясь непрерывностью f''_{yx}, доказывается равенство

$$\lim_{h\to 0} \frac{\Delta_{xh}\Delta_{yh}f}{h^2} = f''_{yx}(x, y),$$

и так как $\Delta_{xh}\Delta_{yh} = \Delta_{yh}\Delta_{xh}f$ при любых h, то верно и (1).

Заметим, что непрерывность обеих входящих в (1) частных производных есть только достаточное условие для выполнения равенства (1). В литературе известны и менее ограничительные накладываемые на f условия, влекущие за собой это равенство, но очень редко приходится их применять.

Пусть дан целочисленный неотрицательный вектор $\mathbf{k} = (k_1, \ldots, k_n)$ $(k_j \geqslant 0)$. Будем говорить, что частная производная подчинена вектору $\mathbf{k}$, если каково бы ни было $j = 1, \ldots, n$, при ее вычислении применяется операция $\frac{\partial}{\partial x_j}$ не больше, чем k_j раз. Если, в частности, $k_j = 0$, то операция $\frac{\partial}{\partial x_j}$ не применяется. Теперь мы можем высказать теорему.

Теорема 2. *Если все подчиненные вектору* $\mathbf{k}$ *частные производные от функции* $f(\mathbf{x}) = f(x_1, \ldots, x_n)$ *непрерывны* (*в* R_n) *в точке* $\mathbf{x}$, *то в любой из них можно переставить порядок дифференцирования как угодно, не изменяя результата.*

Доказательство этой теоремы во всей ее общности потребовало бы хотя и простой, но громоздкой индукции. Мы ограничимся только примером. Производная $\frac{\partial^4 f}{\partial z \partial x \partial z \partial y}$ подчинена, очевидно, вектору (1, 1, 2). В предположении, что не только она, но и все частные производные от f, подчиненные этому вектору, непрерывны по (x, y, z), мы можем, пользуясь всякий раз либо определением частной производной либо теоремой 1, получить равенства

$$\frac{\partial^4 f}{\partial z \partial x \partial z \partial y} = \frac{\partial^2}{\partial z \partial x} \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y} = \frac{\partial^2}{\partial z \partial x}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}\right) = \frac{\partial^2}{\partial x \partial z}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}\right) =$$

$$= \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial^2}{\partial z \partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right) = \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial^2}{\partial y \, \partial z}\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right) = \frac{\partial^4 f}{\partial x \partial y \partial z^2}.$$

Например, во втором равенстве мы рассуждаем так: частные производные $\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y}$ и $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}$, по условию, непрерывны относительно (x, y, z), тем более они непрерывны при фиксированном x относительно (y, z), поэтому они равны. В пятом равенстве это же рассуждение проводится для $\frac{\partial f}{\partial z}$.

Упражнение. Показать, что функция

$$v = \frac{1}{8\pi^{3/2}(t_0 - t)^{3/2}} e^{-\frac{r^2}{4(t_0 - t)}},$$

$$r = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2},$$

называемая фундаментальным решением уравнения теплопроводности, удовлетворяет дифференциальным уравнениям в частных производных:

$$\Delta_0 v - \frac{\Delta v}{\partial t_0} = 0, \qquad \Delta v + \frac{\partial v}{\partial t} = 0$$

$$\left(\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}, \quad \Delta_0 = \frac{\partial^2}{\partial x_0^2} + \frac{\partial^2}{\partial y_0^2} + \frac{\partial^2}{\partial z_0^2}\right).$$

§ 7.8. Дифференциал функции. Дифференциал высшего порядка

Рассмотрим функцию

$$W = f(\mathbf{x}) = f(x_1, \ldots, x_n), \tag{1}$$

заданную на некотором открытом множестве $G \subset R_n$. Ее можно бесконечным числом способов записать в виде

$$W = \varphi(\mathbf{u}) = \varphi(u_1, \ldots, u_m), \tag{2}$$

где

$$u_j = \psi_j(\mathbf{x}) \quad (j = 1, \ldots, m; \ \mathbf{x} \in G). \tag{3}$$

Ниже мы будем употреблять следующую терминологию: переменная W есть функция от независимой векторной переменной $\mathbf{x}$; эта же переменная W есть функция от *зависимой векторной переменной* $\mathbf{u}$. Последняя зависит от независимой переменной $\mathbf{x}$: каждому вектору $\mathbf{x}$ из G соответствует вектор

$$\mathbf{u} = (\psi_1(\mathbf{x}), \ldots, \psi_m(\mathbf{x})).$$

Таким образом, роль векторной переменной $\mathbf{x}$ здесь носит исключительный характер — она в приводимых ниже рассуждениях будет фигурировать *только как независимая переменная*.

Пусть функция f имеет непрерывные частные производные первого порядка в точке $\mathbf{x} \in G$. Тогда, как мы знаем из § 7.5, она дифференцируема, т. е. приращение ее в этой точке может быть записано в виде

$$\Delta W = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial W}{\partial x_j} \Delta x_j + o(\rho) \quad (\rho \to 0), \tag{4}$$

$$\rho = |\Delta x| = \left(\sum_{j=1}^{n} \Delta x_j^2\right)^{1/2}.$$

Сумма

$$dW = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_j} \Delta x_j \tag{5}$$

называется *главной линейной частью приращения* W в точке $\mathbf{x}$ или еще *дифференциалом* W *в этой точке, соответствующим приращениям* $\Delta x_1, \ldots, \Delta x_n$ *независимых переменных.*

Для независимых $x_1, \ldots, x_n$ полагают

$$\Delta x_j = dx_j \quad (j = 1, \ldots, n), \tag{6}$$

и называют эти величины не только приращениями независимых переменных x_i, но и их *дифференциалами*. Мы будем их называть *независимыми дифференциалами* в знак того, что они не зависят от $x = (x_1, \ldots, x_n)$. Формально «независимость» величин dx_j будет проявляться в том, что при дифференцировании (по $x_1, \ldots, x_n$) они будут рассматриваться как *постоянные* ($d(dx_j) = 0$).

В силу соглашения (6) дифференциал W может быть записан в форме

$$dW = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial W}{\partial x_j} dx_j. \tag{7}$$

Ясно, что dW есть величина, зависящая, вообще говоря, от $x_1, \ldots, x_n$ и $dx_1, \ldots, dx_n$.

Для любых двух функций, u и v, имеющих непрерывные частные производные в точке $\mathbf{x}$, справедливы свойства

$$d(u \pm v) = du \pm dv, \tag{8}$$

$$d(uv) = udv + vdu, \tag{9}$$

$$d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{vdu - udv}{v^2} \quad (v \neq 0), \tag{10}$$

и при этом частные производные от функций, стоящих в скобках, непрерывны в точке $\mathbf{x}$.

Докажем, например, третье из этих равенств:

$$d\left(\frac{u}{v}\right) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{u}{v}\right) dx_j = \sum_{1}^{n} \frac{v\frac{\partial u}{\partial x_j} - u\frac{\partial v}{\partial x_j}}{v^2} dx_j =$$

$$= \frac{1}{v^2}\left(v\sum_{1}^{n} \frac{\partial u}{\partial x_j} dx_j - u\sum_{1}^{n} \frac{\partial v}{\partial x_j} dx_j\right) = \frac{vdu - udv}{v^2}.$$

Непрерывность $\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{u}{v}\right)$ видна из третьего члена цепи.

Дифференциал от функции W называют еще *дифференциалом первого порядка*, потому что приходится еще рассматривать дифференциалы высших порядков.

Пусть теперь функция W имеет вторые непрерывные частные производные. По определению, *второй дифференциал* от нее, соответствующий независимым приращениям (дифференциалам) $dx_1, \ldots, dx_n$, определяется равенством

$$d^2W = d(dW), \tag{11}$$

где считается, что обе операции d в правой части (11) берутся для указанных независимых приращений $dx_1, \ldots, dx_n$, которые должны рассматриваться как постоянные (не зависящие от $x_1, \ldots, x_n$). Таким образом,

$$d^2W = d\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial W}{\partial x_i} dx_j = \sum_{i=1}^{n} d\left(\frac{\partial W}{\partial x_i} dx_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \left(d\frac{\partial W}{\partial x_i}\right) dx_i =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 W}{\partial x_j \partial x_i} dx_j dx_i. \tag{12}$$

Так как $\frac{\partial^2 W}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 W}{\partial x_j \partial x_i}$, то второй дифференциал представляет собой квадратическую форму относительно независимых дифференциалов $dx_1, \ldots, dx_n$.

Вообще, дифференциал порядка l от W для независимых дифференциалов $dx_1, \ldots, dx_n$ определяется по индукции при помощи рекуррентного соотношения

$$d^lW = d(d^{l-1}W) \quad (l = 2, 3, \ldots), \tag{13}$$

где d^l, d, d^{l-1} берутся для указанных независимых дифференциалов dx_i, которые к тому же рассматриваются при вычислениях как постоянные (не зависящие от $x_1, \ldots, x_n$).

Рассуждая как в (12), легко получим, что

$$d^3W = \sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^3 W}{\partial x_k \partial x_i \partial x_j} dx_k dx_i dx_j$$

и в общем случае

$$d^lW = \sum_{k_1=1}^{n} \cdots \sum_{k_l=1}^{n} \frac{\partial^l W}{\partial x_{k_1} \ldots \partial x_{k_l}} dx_{k_1} \ldots dx_{k_l}.$$

Мы определили понятие дифференциала функции W в терминах независимых переменных $x_1, \ldots, x_n$ (или независимой векторной переменной $\mathbf{x}$). Но пусть, как это было объяснено в начале этого параграфа, W рассматривается теперь как функция от *зависимой* векторной переменной $\mathbf{u} = (u_1, \ldots, u_m)$. Возникает вопрос, как выражаются дифференциалы первого и высшего порядков в терминах этой переменной u. Начнем изучение этого вопроса в случае дифференциала первого порядка.

Будем предполагать, что функции $\varphi(u)$ и $\psi_j(x)$ $(j = 1, \ldots, n)$, о которых шла речь в начале параграфа, имеют непрерывные частные производные. Тогда

$$dW = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial W}{\partial x_j} dx_j = \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{m} \frac{\partial W}{\partial u_i} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) dx_j =$$
$$= \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial W}{\partial u_i} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} dx_j = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial W}{\partial u_i} du_i, \tag{14}$$

и мы получили, как в случае одной переменной, что первый дифференциал от W выражается через зависимые переменные так же, как через независимые. В этом проявляется *инвариантность формы первого дифференциала.*

Чтобы исследовать поставленный вопрос, в случае второго дифференциала будем предполагать, что функции φ и ψ_j имеют непрерывные частные производные второго порядка.

Дифференцируя обе части (14), приняв во внимание свойства (8) и (9), получим (пояснения ниже)

$$d^2W = d(dW) = \sum_{i=1}^{m} d\left(\frac{\partial W}{\partial u_i}\,du_i\right) = \sum_{i=1}^{m}\left(\sum_{j=1}^{m}\frac{\partial^2 W}{\partial u_j \partial u_i}\,du_j du_i + \frac{\partial W}{\partial u_i}\,d^2u_i\right) =$$

$$= \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m}\frac{\partial^2 W}{\partial u_i \partial u_j}\,du_i du_j + \sum_{i=1}^{m}\frac{\partial W}{\partial u_i}\,d^2u_i. \quad (15)$$

Во втором равенстве этой цепи мы воспользовались свойствами (8) и (9), и, кроме того, тем фактом, что форма первого дифференциала сохраняется и для зависимых переменных u_j.

Мы видим, что второй дифференциал от функции W, выраженный в терминах зависимых переменных u_j, существенно распадается на два слагаемых. Первое слагаемое представляет собой квадратическую форму, аналогичную форме (12), где d^2W выражалось через независимые переменные. Второе же слагаемое представляет собой некоторый добавок, с которым надо считаться: если $u_i \neq x_i$, то этот добавок, вообще говоря, не равен нулю. Впрочем, если u_i $(i = 1, \ldots, m)$ — линейные функции от $x_1, \ldots, x_n$, то свойство инвариантности сохраняется и для дифференциалов высшего порядка.

Отметим, что из наших рассуждений следует, что если выражение (15) взято для $dx_1, \ldots, dx_n$, которые фигурируют в выражении (12), то оба эти выражения тождественно равны, каковы бы ни были $\mathbf{x}$, для которых существуют указанные выше непрерывные частные производные второго порядка, и каковы бы ни были независимые dx_i.

Выраженные через зависимые переменные u_j дифференциалы d^3W, d^4W, ... вычисляются подобным образом последовательно. Приходится считаться с тем фактом, что выражения для них становятся все более громоздкими.

§ 7.9. Предельная точка. Теорема Вейерштрасса. Замкнутые и открытые множества

Рассмотрим произвольное множество E точек $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ пространства $R_n = R$.

По определению, $\mathbf{x}^0 = (x_1^0, \ldots, x_n^0)$ есть *предельная точка* E, если любая ее окрестность содержит хотя бы одну точку $\mathbf{x}$, принадлежащую E и отличную от $\mathbf{x}^0$.

На самом деле из этого определения следует, что любая окрестность $\mathbf{x}^0$ содержит в себе бесконечное множество точек $\mathbf{x}$, принадлежащих E, и можно определить последовательность точек $\mathbf{x}^k \in E$, $k = 1, 2, \ldots$ таких, что $\mathbf{x}^k \neq \mathbf{x}^0$ и $|\mathbf{x}^k - \mathbf{x}^0| \to 0$.

В самом деле, согласно определению предельной точки, для каждого натурального $k = 1, 2, \ldots$ имеется $\mathbf{x}^k \in E$, для которой $0 < |\mathbf{x}^k - \mathbf{x}^0| < 1/k$ и $|\mathbf{x}^k - \mathbf{x}^0| < |\mathbf{x}^{k-1} - \mathbf{x}^0|$, где $k = 1, 2, \ldots$.

Приведем другие определения предельной точки, очевидно, эквивалентные данному выше:

$\mathbf{x}^0$ есть предельная точка E, если любой открытый шар (открытый куб) с центром в $\mathbf{x}^0$ содержит хотя бы одну точку $\mathbf{x} \in E$, $\mathbf{x} \neq \mathbf{x}^0$ или если существует последовательность точек $\{\mathbf{x}^k\}$ такая, что $\mathbf{x}^k \in E$ $\mathbf{x}^k \neq \mathbf{x}^0$, $\mathbf{x}^k \to \mathbf{x}^0$ $(k \to \infty)$.

Множество всех предельных точек E обозначается через E' и называется *производным множеством* от E.

Пример 1. Пусть E — множество точек $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ с рациональными координатами. Любая точка $\mathbf{x}^0 = \left(x_1^0, \ldots, x_n^0\right) \in R$ есть предельная точка E, потому что произвольный куб $\left|x_j - x_j^0\right| < \delta$ $(j = 1, \ldots, n)$ содержит в себе точки E, отличные от x^0. Таким образом, $E' = R_n$.

Пример 2. Конечное множество точек $\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2, \ldots, \mathbf{x}^N$ не имеет ни одной предельной точки $(E \neq \varnothing)$ хотя бы потому, что в любой окрестности предельной точки должно было бы быть бесконечное множество точек E.

Пример 3. Множество E $\mathbf{x}^k = (k, 0, \ldots, 0)$ $(k = 1, 2, \ldots)$ не имеет предельных точек $(E' = \varnothing)$, потому что расстояние между любыми его точками $|\mathbf{x}^k - \mathbf{x}^l| = |k - l| \geqslant 1$ $(k \neq l)$. Если бы точка $\mathbf{x} \in R_n$ была предельной точкой E, то в любой ее малой окрестности находились бы две точки E,— расстояние между ними могло быть меньшим как угодно малого $\delta > 0$.

Пример 4. Пусть

$$V_1 = \left\{\mathbf{x}: \sum_1^n x_k^2 < r^2\right\}, \quad \Gamma = \left\{\mathbf{x}: \sum_1^n x_k^2 = r^2\right\}, \quad V_2 = \left\{\mathbf{x}: \sum_1^n x_k^2 > r^2\right\}.$$

Распространяя обычную терминологию с $n = 3$ на произвольное n, мы скажем, что V_1 есть открытый шар в R_n с центром в нулевой точке, Γ — его граница, и V_2 — его внешность. Имеют место следующие факты:

$$\begin{gathered} V_1' = V_1 + \Gamma, \quad (V_1 + \Gamma)' = V_1 + \Gamma, \quad V_2' = V_2 + \Gamma, \\ (V_2 + \Gamma)' = V_2 + \Gamma, \quad \Gamma' = \Gamma. \end{gathered} \tag{1}$$

Из наглядных соображений (рис. 7.4), которые легко перевести на язык неравенств, следует, что точку $\mathbf{x}^1 \in V_1$ можно окружить достаточно малым шаром (с центром в ней) полностью принадлежащим V_1, откуда x^1 есть предельная точка V_1, но не есть предельная точка Γ и V_2. Любой шар с центром в произвольной точке $\mathbf{x}^2 \in \Gamma$ содержит в себе отличные от нее точки V_1, Γ и V_2, и потому $\mathbf{x}^2$ есть предельная точка V_1, Γ, V_2, $V_1 + \Gamma$, $V_2 + \Gamma$. Наконец, точку $\mathbf{x}^3 \in V_2$ можно окружить шаром, полностью принадлежащим V_2, и потому она есть предельная точка V_2, но не есть предельная точка V_1, Γ, $V_1 + \Gamma$. Отсюда следуют равенства (1).

Рис. 7.4.

Множество E называется *ограниченным*, если оно содержится в некотором шаре (кубе). В противном случае E называется *неограниченным*. В этом определении можно считать, что шар (куб), о котором идет речь, имеет центр в нулевой точке, потому что, если все точки $\mathbf{x} \in E$ удовлетворяют неравенству $|\mathbf{x}-\mathbf{x}^0| < \rho_1$, то и неравенству $|\mathbf{x}| \leqslant |\mathbf{x}-\mathbf{x}^0| + |\mathbf{x}^0| < \rho_2$, где $\rho_2 = \rho_1 + |\mathbf{x}^0|$.

Следующая теорема обобщает соответствующую одномерную теорему и базируется на ней:

Теорема 1. *Из всякой ограниченной последовательности точек* $\mathbf{x}^k = (x_1^k, \ldots, x_n^k)$ $(k = 1, 2, \ldots)$ *можно выделить подпоследовательность* $\{\mathbf{x}^{k_l}\}$ $(l = 1, 2, \ldots)$, *сходящуюся к некоторой точке* $\mathbf{x}^0$:

$$\left\|\mathbf{x}^{k_l} - \mathbf{x}^0\right\| \to 0 \quad (l \to \infty).$$

Доказательство. Так как последовательность $\{\mathbf{x}^k\}$ ограничена, то существует число M такое, что

$$M > |\mathbf{x}^k| \geqslant |x_j^k| \quad (j = 1, \ldots, n;\ k = 1, 2, \ldots).$$

Это показывает, что координаты точек $\mathbf{x}^k$ также ограничены. Первая координата пробегает ограниченную последовательность $\{x_1^k\}$ $(k = 1, 2, \ldots)$, и на основании одномерной теоремы найдется подпоследовательность $\{k_{l_1}\}$ натуральных чисел и некоторое число x_1^0 такие, что $x_1^{k_{l_1}} \to x_1^0$ $(l_1 \to \infty)$. Вторую координату x_2^k рассмотрим только для найденных натуральных k_{l_1}. Подпоследовательность $\left\{x_2^{k_{l_1}}\right\}$ ограничена, и по одномерной теореме можно выбрать подпоследовательность $\left\{x_2^{k_{l_2}}\right\}$ и число x_2^0 такие, что $x_2^{k_{l_2}} \to x_2^0$. Так как $\{k_{l_2}\}$ есть подпоследовательность $\{k_{l_1}\}$, то имеет место одновременно $x_1^{k_{l_2}} \to x_1^0$, $x_2^{k_{l_2}} \to x_2^0$. В силу ограниченности третьей координаты можно, рассуждая как выше, получить подпоследовательность $\left\{k^{l_3}\right\}$ подпоследовательности $\left\{k^{l_2}\right\}$, для которой одновременно

$$x_1^{k_{l_3}} \to x_1^0, \quad x_2^{k_{l_3}} \to x_2^0, \quad x_3^{k_{l_3}} \to x_3^0,$$

где x_3^0 — некоторое число. Продолжая этот процесс, на n-м его этапе получим подпоследовательность натуральных чисел $k_{l_n} = k_l$ и систему чисел $x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0$ такие, что одновременно $x_j^{k_l} \to x_j^0$ $(l \to \infty;\ j \subset 1, \ldots, n)$. Полагая $\mathbf{x}^0 = (x_1^0, \ldots, x_n^0)$, получим утверждение теоремы.

Но возвратимся к предельным точкам. Конечное (состоящее из конечного числа точек) множество не имеет предельных точек (пример 2). Существуют бесконечные неограниченные множества, не имеющие предельных точек (пример 3). Однако имеет место

Теорема 2 (Вейерштрасса). *Ограниченное бесконечное множество E имеет по крайней мере одну предельную точку.*

Доказательство. Так как множество E бесконечно, то оно содержит в себе последовательность $\{\mathbf{x}^k\}$ (бесконечную!) различных между собой точек. Из нее можно на основании предыдущей теоремы выделить подпоследовательность $\{\mathbf{x}^{k_l}\}$, сходящуюся к некоторой точке $\mathbf{x}^0 \in R_n$. Так как все $\mathbf{x}^{k_l}$ для разных l различны, то $\mathbf{x}^0$ есть, очевидно, предельная точка E — ведь в любой ее окрестности имеются точки $\mathbf{x}^{k_l} \in E$, отличные от $\mathbf{x}^0$.

Конечно, $\mathbf{x}^0$ может принадлежать или не принадлежать к E.

Множество $E \subset R_n$ называется *замкнутым*, если все его предельные точки принадлежат ему ($E' \subset E$).

Надо иметь в виду, что в этом определении не утверждается, что E обязано иметь предельные точки, а только говорится, что если E имеет такие точки, то они принадлежат к E. Таким образом, *всякое множество, не имеющее вовсе предельных точек, замкнуто. Пустое множество, конечное множество, множество целых точек* (имеющих целые координаты) в пространстве R_n — *все это замкнутые множества.*

Множество примера 1 не замкнуто потому, что иррациональные точки являются предельными его точками, но они не принадлежат ему.

Шар вместе с границей (пример 4), внешность шара вместе с границей, сама граница — все это примеры замкнутых множеств. Открытый шар, внешность (замкнутого) шара — не замкнутые множества. Это геометрически очевидно, но легко может быть обосновано при помощи соответствующих неравенств.

Дадим еще другое определение замкнутого множества: множество E замкнуто, если из того, что точки сходящейся к $\mathbf{x}^0$ последовательности $\{\mathbf{x}^k\}$ принадлежат E, следует принадлежность $\mathbf{x}^0$ множеству E.

Эти определения эквивалентны. В самом деле, пусть E замкнуто в смысле первого определения, а второе определение для E не выполняется. Тогда найдутся последовательность $\{\mathbf{x}^k\}$ и точка $\mathbf{x}^0$ такие, что $\mathbf{x}^k \in E$, $\mathbf{x}^k \to \mathbf{x}^0$, но $\mathbf{x}^0 \notin E$. Но это возможно, очевидно, только тогда, когда элементы $\mathbf{x}^k$ последовательности пробегают бесконечное множество (различных между собой) точек, но тогда $\mathbf{x}^0$ есть предельная точка E и она должна по условию принадлежать E. Мы пришли к противоречию. Итак, из первого определения следует второе.

Наоборот, пусть E — замкнутое множество по второму определению и $\mathbf{x}^0$ предельная точка E; тогда найдется, как мы знаем, последовательность точек $\mathbf{x}^k \in E$, $\mathbf{x}^k \to \mathbf{x}^0$. По второму определению $\mathbf{x}^0 \in E$ и, таким образом, всякая предельная точка E принадлежит E, т. е. выполняется первое определение.

Если к множеству E добавить все его предельные точки, то мы получим множество, которое обозначают через $\bar{E}$ и называют замыканием E. Таким образом, $\bar{E} = E + E'$.

Теорема 3. *Замыкание множества E есть замкнутое множество.*

Доказательство. Пусть $\mathbf{x}^0$ есть предельная точка $\bar{E}$. Зададим $\varepsilon > 0$. В шаре $|\mathbf{x} - \mathbf{x}^0| < \varepsilon$ должна существовать точка $\mathbf{x}' \in \bar{E}$, $\mathbf{x}' \neq \mathbf{x}^0$. Последнюю можно окружить шаром, принадлежащим исходному шару, настолько малым, что он не содержит в себе точки $\mathbf{x}^0$. В нем обязательно должна быть точка E, которая, таким образом, принадлежит исходному шару. Итак, в любом шаре с центром $\mathbf{x}^0$ имеется отличная от $\mathbf{x}^0$ точка E. Это показывает, что $\mathbf{x}^0$ есть предельная точка E, т. е. $\mathbf{x}^0 \in \bar{E}$.

Между замкнутыми и открытыми (см. § 7.1) множествами имеется тесная связь: *если E замкнуто, то $R - E$ открыто, и наоборот*. В самом деле, пусть E замкнуто и $\mathbf{x}^0 \in R - E$; тогда существует шар с центром в $\mathbf{x}^0$, принадлежащий к $R - E$. Если бы это было не так, то существовала бы последовательность точек $\mathbf{x}^k \in E$, сходящаяся к $\mathbf{x}^0$ ($\mathbf{x}^k \to \mathbf{x}^0$), и в силу замкнутости E тогда бы $\mathbf{x}^0 \in E$, и мы пришли к противоречию.

Пусть теперь E — открытое множество. Возьмем произвольную, принадлежащую $R - E$, последовательность точек $\mathbf{x}^k$, сходящуюся к некоторой точке $\mathbf{x}^0$. Последняя не может быть точкой E, потому что в любой ее окрестности имеются точки $R - E$, но тогда она принадлежит $R - E$. Следовательно, $R - E$ замкнуто.

Введем три определения.

1. Точка $\mathbf{x}^0$ называется *граничной точкой* множества E, если любая ее окрестность содержит в себе как точки E так и точки, не принадлежащие E.

2. Точка $\mathbf{x}^0$ называется (см. § 7.1) *внутренней точкой* множества E, если существует ее окрестность, полностью принадлежащая E.

3. Точка $\mathbf{x}^0$ называется *внешней* по отношению ко множеству E, если она не только не принадлежит E, но существует окрестность $\mathbf{x}^0$, полностью не принадлежащая E.

Всюду в этих определениях, очевидно, «окрестность» можно заменить на «открытый шар с центром в $\mathbf{x}^0$» или «открытый куб с центром в $\mathbf{x}^0$».

Обратим внимание на тот факт, что определения 1—3 взаимно исключают друг друга и единственно возможны. Иначе говоря, каждая точка $\mathbf{x} \in R$ удовлетворяет одному и только одному из этих определений.

Таким образом, если задано произвольное множество $E \subset R$, то по отношению к нему все пространство R распадается на три попарно непересекающихся множества:

1) E_1 — множество внутренних точек E — *открытое ядро множества E*. Это открытое множество, потому что, если $\mathbf{x} \in E_1$, то найдется полностью принадлежащий к E открытый шар V с центром в $\mathbf{x}^0$. Но все точки V — внутренние для V, следовательно, и для E, следовательно, $V \subset E_1$.

2) E_2 — множество внешних точек E — **внешность** E. Это тоже открытое множество, что доказывается аналогично.

3) Γ — множество граничных точек E — **граница** E.

Это замкнутое множество, потому что E_1+E_2 — открыто как сумма двух открытых множеств и $\Gamma = R-(E_1+E_2)$.

Множества $E_1+\Gamma$ и $E_2+\Gamma$, очевидно, замкнутые, потому что их дополнения до R открытые.

Имеют место (теоретико-множественные) равенства

$$E_1+\Gamma = E+\Gamma = \overline{E},\quad E_2+\Gamma = (R-E)+\Gamma = \overline{R-E},$$

доказательство которых представляется читателю.

В равенстве $R = E_1+E_2+\Gamma$ одно или два слагаемых в правой части могут оказаться пустыми множествами. Надо иметь в виду, что пустое множество и все пространство R являются одновременно открытыми и замкнутыми множествами.

Пример 5. Пусть функция $f(\mathbf{x})$ определена и непрерывна на R и c — заданное число, тогда, как нетрудно доказать, множества (точек $\mathbf{x}$, для которых выполняются указанные в скобках соотношения) $\{f(\mathbf{x}) = c\}$, $\{f(\mathbf{x}) \leqslant c\}$, $\{f(\mathbf{x}) \geqslant c\}$ замкнутые, а множества $\{f(\mathbf{x}) > c\}$, $\{f(\mathbf{x}) < c\}$ — открытые. Конечно, некоторые из этих множеств могут оказаться пустыми, но пустые множества одновременно замкнуты и открыты.

Результаты примера 4 немедленно следуют из этих утверждений. Надо иметь в виду, что если бы функция $f(\mathbf{x})$ была задана только на части R, то указанные утверждения могут и не иметь места.

Теорема 4. *Всякое открытое одномерное (лежащее на оси $(-\infty, \infty)$) множество G есть сумма конечного или счетного числа попарно не пересекающихся интервалов*:

$$G = \sum \delta_k.$$

В самом деле, пусть точка $x^0 \in G$; тогда существуют интервалы $\delta_{x^0} = (\lambda, \mu)$, покрывающие x^0 и полностью принадлежащие G. Пусть

$$\alpha = \inf \lambda,\quad \beta = \sup \mu,$$

где нижняя и верхняя грани распространены на всевозможные указанные интервалы δ_{x^0}. В частности, может случиться, что $\alpha = -\infty$ или $\beta = +\infty$ или эти равенства выполняются одновременно (и тогда $G = (-\infty, \infty)$). Каждой точке $x^0 \in G$ мы привели в соответствие максимальный интервал $\delta = (\alpha, \beta)$, ее содержащий и полностью содержащийся в G. Пусть A есть множество различных интервалов δ (очевидно, попарно не пересекающихся). Каждому из них приведем в соответствие одно принадлежащее ему рациональное число. Ясно, что A конечно или счетно, потому что оно эквивалентно некоторому подмножеству рациональных чисел. Это доказывает теорему.

Упражнения.

1. Доказать, что сумма конечного или счетного числа открытых множеств, а также пересечение конечного числа открытых множеств есть открытое множество. Привести пример счетной системы открытых множеств, пересечение которых не есть открытое множество.

2. Доказать, что сумма конечного числа замкнутых множеств, так же как пересечение конечного и счетного числа замкнутых множеств, есть множество замкнутое. Привести пример счетной системы замкнутых множеств, сумма которых не есть замкнутое множество.

§ 7.10. Функции на множестве. Свойства непрерывных функций на замкнутом ограниченном множестве

Пусть на произвольном множестве A точек n-мерного пространства ($A \subset R = R_n$) задана функция $f(\mathbf{x}) = f(x_1, \ldots, x_n)$ и $\mathbf{x}^0$ — предельная точка A. Будем говорить, что число Λ *есть предел f в точке $\mathbf{x}^0$ на множестве A, если* $\lim\limits_{\mathbf{x}^k \to \mathbf{x}^0} f(\mathbf{x}^k) = \Lambda$, какова бы ни была сходящаяся к $\mathbf{x}^0$ последовательность точек $\mathbf{x}^k \in A$, отличных от $\mathbf{x}^0$.

Это определение эквивалентно следующему: для любого $\varepsilon > 0$ найдется куб или шар с центром в $\mathbf{x}^0$, для всех точек $\mathbf{x}$ которого, содержащихся в A, но отличных от $\mathbf{x}^0$, выполняется неравенство $|f(\mathbf{x}) - \Lambda| < \varepsilon$. Эквивалентность этих определений доказывается аналогично тому, как это делается в случае предела функции f в точке $\mathbf{x}^0$ без добавления «на множестве» (см. § 4.1 и 7.2).

Аналогично доказывается условие Коши существования предела f в точке $\mathbf{x}^0$ на множестве A: *для того чтобы существовал (конечный) предел f в точке $\mathbf{x}^0$ на множестве A, необходимо и достаточно, чтобы для любого $\varepsilon > 0$ нашлось $\delta > 0$ такое, чтобы выполнялось неравенство $|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}')| < \varepsilon$ для всех $\mathbf{x}, \mathbf{x}' \in A$, для которых* $0 < |\mathbf{x} - \mathbf{x}^0| < \delta$, $0 < |\mathbf{x}' - \mathbf{x}^0| < \delta$.

Будем говорить, что определенная на A функция f непрерывна на A в точке $\mathbf{x}^0 \in A$, если

$$\lim_{\substack{\mathbf{x}^k \to \mathbf{x}^0 \\ \mathbf{x}^k \in A}} f(\mathbf{x}^k) = f(\mathbf{x}^0), \tag{1}$$

какова бы ни была сходящаяся к $\mathbf{x}^0$ последовательность точек $\mathbf{x}^k \in A$.

Обратим внимание, что если $\mathbf{x}^0$ есть *изолированная точка A*, т. е. не являющаяся предельной для A, то существует шар с центром в $\mathbf{x}^0$, содержащий в себе только одну точку множества A, а именно $\mathbf{x}^0$. Но тогда, если $\mathbf{x}^k \in A$ и $\mathbf{x}^k \to \mathbf{x}^0$, то $\mathbf{x}^k = \mathbf{x}^0$ для всех $k > N$, где N достаточно велико и равенство (1) выполняется автоматически.

Таким образом, *если $\mathbf{x}^0$ есть изолированная точка A, то функция, определенная на A, необходимо непрерывна на A в этой точке.*

Если функция f, определенная на A, непрерывна в любой точке A, то говорят, что f непрерывна на A.

Докажем две теоремы, выражающие замечательные свойства функций, непрерывных на ограниченном замкнутом множестве; они обобщают соответствующие свойства непрерывных функций от одной переменной, заданных на отрезке.

Теорема 1. *Функция f, непрерывная на замкнутом ограниченном множестве A, ограничена на нем.*

Доказательство. Допустим, что она не ограничена на A; тогда для любого натурального k найдется такая точка $\mathbf{x}^k \in A$, что

$$|f(\mathbf{x}^k)| > k \quad (k = 1, 2, \ldots). \tag{2}$$

Полученная последовательность $\{\mathbf{x}^k\}$ ограничена. Из нее можно выделить подпоследовательность $\{\mathbf{x}^{k'}\}$, сходящуюся к некоторой точке $\mathbf{x}^0 \in R_n$. Вследствие замкнутости A точка $\mathbf{x}^0 \in A$, а в силу непрерывности f в $\mathbf{x}^0$ на A $\lim\limits_{\mathbf{x}^{k'} \to \mathbf{x}^0} f(\mathbf{x}^{k'}) = f(\mathbf{x}^0)$, и мы получили противоречие с неравенствами (2).

Теорема 2. *Функция f, непрерывная на замкнутом ограниченном множестве A, достигает на нем своего максимума и минимума.*

Доказательство. Из предыдущей теоремы известно, что f ограничена на A. Поэтому она имеет на A конечные точные нижнюю и верхнюю грани:

$$m = \inf_{\mathbf{x} \in A} f(\mathbf{x}), \quad M = \sup_{\mathbf{x} \in A} f(\mathbf{x}).$$

Из свойства верхней грани следует, что для любого натурального k найдется точка $\mathbf{x}^k \in A$ такая, что

$$M - \frac{1}{k} < f(\mathbf{x}^k) \leqslant M \qquad (k = 1, 2, \ldots). \tag{3}$$

Полученная последовательность $\{x^k\}$ ограничена, и потому из нее можно выделить подпоследовательность $\{\mathbf{x}^{k_j}\}$, сходящуюся к некоторой точке $\mathbf{x}^0$. В силу замкнутости A точка $\mathbf{x}^0 \in A$ и в силу непрерывности f на A $\lim\limits_{\mathbf{x}^{k_j} \to \mathbf{x}^0} f(\mathbf{x}^{k_j}) = f(\mathbf{x}^0)$. С другой стороны, из (3) следует, что этот предел должен равняться числу M. Но тогда

$$f(\mathbf{x}^0) = M = \max_{\mathbf{x} \in A} f(\mathbf{x}).$$

Аналогично доказывается существование точки $\mathbf{y}^0 \in A$, в которой f достигает минимума на A:

$$f(\mathbf{y}^0) = m = \min_{\mathbf{x} \in A} f(\mathbf{x}).$$

Рассмотрим снова пока произвольное множество $A \subset R$ и определенную на нем не обязательно непрерывную функцию f, но ограниченную на A.

Зададим число $\delta > 0$ и введем величину

$$\omega(\delta) = \omega(\delta, f) = \sup_{\substack{|\mathbf{x}' - \mathbf{x}''| < \delta \\ \mathbf{x}', \mathbf{x}'' \in A}} |f(\mathbf{x}') - f(\mathbf{x}'')|, \tag{4}$$

называемую *модулем непрерывности f на множестве A*. В правой части (4) взята точная верхняя грань абсолютных величин разностей значений f, соответствующих всевозможным парам точек $\mathbf{x}'$, $\mathbf{x}'' \in A$, отстоящих друг от друга на расстоянии меньшем, чем δ.

Модуль непрерывности есть функция от δ, очевидно, неотрицательная. Она не убывает, потому что если $0 < \delta < \delta_1$, то

$$\omega(\delta) = \sup_{\substack{|\mathbf{x}'-\mathbf{x}''|<\delta \\ \mathbf{x}',\mathbf{x}''\in A}} |f(\mathbf{x}') - f(\mathbf{x}'')| \leqslant \sup_{\substack{|\mathbf{x}'-\mathbf{x}''|<\delta_1 \\ \mathbf{x}',\mathbf{x}''\in A}} |f(\mathbf{x}') - f(\mathbf{x}'')| = \omega(\delta_1).$$

Поэтому существует предел

$$\omega(0+0) = \lim_{\substack{\delta\to 0 \\ \delta>0}} \omega(\delta) = \lambda \geqslant 0. \tag{5}$$

По определению полагаем далее $\omega(0) = \lambda$.

Теорема 3. *Для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что каковы бы ни были $\mathbf{x}'$, $\mathbf{x}'' \in A$, $|\mathbf{x}' - \mathbf{x}''| < \delta$, выполняется неравенство*

$$|f(\mathbf{x}') - f(\mathbf{x}'')| < \lambda + \varepsilon,$$

где число λ определено в (5).

Доказательство. Допустим, что теорема неверна. Тогда существует такое $\varepsilon_0 > 0$, что для любого натурального k найдутся точки $\mathbf{x}_k'$, $\mathbf{x}_k'' \in A$ такие, что $|\mathbf{x}_k' - \mathbf{x}_k''| < 1/k$, в то время как $|f(\mathbf{x}_k') - f(\mathbf{x}_k'')| \geqslant \lambda + \varepsilon_0$. Но тогда

$$\omega(1/k) \geqslant |f(x_k') - f(x_k'')| \geqslant \lambda + \varepsilon_0$$

при любом k и $\lambda = \omega(0+0) = \lim\limits_{k\to\infty} \omega\left(\frac{1}{k}\right) \geqslant \lambda + \varepsilon_0$, что невозможно.

Введем определение:

1) Функция f называется *равномерно непрерывной* на множестве A, если ее модуль непрерывности $\omega(\delta)$ на A стремится к нулю при $\delta \to 0$, т. е.

$$\omega(0+0) = \lim_{\delta\to 0} \omega(\delta) = 0. \tag{6}$$

Приведем другое эквивалентное определение.

2) Функция f называется *равномерно непрерывной* на A, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что для любых $\mathbf{x}'$, $\mathbf{x}'' \in A$ с $|\mathbf{x}' - \mathbf{x}''| < \delta$ имеет место $|f(\mathbf{x}') - f(\mathbf{x}'')| < \varepsilon$.

Определение 1) влечет за собой 2) в силу теоремы 3, где надо положить $\lambda = 0$. Наоборот, если имеет место 2), то, задав $\varepsilon > 0$ и подобрав $\delta > 0$ так, как это сказано в 2), получим

$$\omega(\delta) = \sup_{\substack{\mathbf{x}',\mathbf{x}''\in A \\ |\mathbf{x}'-\mathbf{x}''|<\delta}} |f(\mathbf{x}') - f(\mathbf{x}'')| \leqslant \varepsilon,$$

и так как ω монотонно не убывает, то отсюда, следует (6), т. е. 1).

Докажем теперь важную теорему.

Теорема 4. *Функция f, непрерывная на ограниченном замкнутом множестве A, равномерно непрерывна на нем.*

Доказательство. Допустим, что теорема неверна. Тогда существует $\varepsilon_0 > 0$ такое, что для любого натурального k найдется пара точек

$$\mathbf{x}'_k, \mathbf{x}''_k \in A, \quad |\mathbf{x}'_k - \mathbf{x}''_k| < 1/k, \tag{7}$$

для которых

$$|f(\mathbf{x}'_k) - f(\mathbf{x}''_k)| \geqslant \varepsilon_0. \tag{8}$$

В силу ограниченности последовательности $\{\mathbf{x}'_k\}$ и замкнутости A, существует подпоследовательность $\{\mathbf{x}'_{k_j}\}$, сходящаяся к некоторой точке $\mathbf{x}^0 \in A$: $\mathbf{x}'_{k_j} \to \mathbf{x}^0$. В силу (7) тогда и $\mathbf{x}''_{k_j} \to \mathbf{x}^0$, и потому вследствие непрерывности f в $\mathbf{x}^0$,

$$\lim_{k_j \to \infty} |f(\mathbf{x}'_{k_j}) - f(\mathbf{x}''_{k_j})| = |f(\mathbf{x}^0) - f(\mathbf{x}^0)| = 0,$$

что противоречит (8).

Рассмотрим функцию f, заданную на множестве $A \in R_n$. Будем предполагать, что она ограничена на A. Пусть $\mathbf{x}^0 \in A$ и $\delta > 0$. Обозначим через V_δ шар $|\mathbf{x} - \mathbf{x}^0| \leqslant \delta$ с центром в $\mathbf{x}^0$ радиуса δ и положим $M_\delta = \sup\limits_{\mathbf{x} \in AV_\delta} f(\mathbf{x})$, $m_\delta = \inf\limits_{\mathbf{x} \in AV_\delta} f(\mathbf{x})$. Очевидно, что M_δ есть невозрастающая, а m_δ — неубывающая функции от δ, поэтому разность $M_\delta - m_\delta$ есть невозрастающая функция от δ. Следовательно, существует предел

$$\lim_{\substack{\delta \to 0 \\ \delta > 0}} (M_\delta - m_\delta) = \omega(\mathbf{x}^0),$$

который называют *колебанием функции f в точке* $\mathbf{x}^0$. Нетрудно доказать следующую теорему:

Теорема 5. *Для того чтобы определенная на замкнутом ограниченном множестве A функция f была непрерывной на A в точке $\mathbf{x}^0 \in A$, необходимо и достаточно, чтобы ее колебание в этой точке равнялось нулю* $(\omega(\mathbf{x}^0) = 0)$.

Докажем еще теорему:

Теорема 6. *Пусть A есть замкнутое ограниченное множество и $\lambda > 0$. Тогда множество E_λ тех точек $\mathbf{x} \in A$, для которых $\omega(\mathbf{x}) \geqslant \lambda$, замкнуто.*

В самом деле, если $\mathbf{x}^k \to \mathbf{x}^0$ и $\omega(\mathbf{x}^k) \geqslant \lambda$ $(k = 1, 2, \ldots)$, то $\mathbf{x}^0 \in A$ и, кроме того, если $V_\delta(\mathbf{x}_0)$ есть некоторый шар с центром в $\mathbf{x}^0$ радиуса δ, то найдется такое k, что точка $\mathbf{x}^k$ будет находиться строго внутри $V_\delta(\mathbf{x}_0)$. Но тогда можно указать шар $V_\sigma(\mathbf{x}^k)$ с центром в $\mathbf{x}^k$ и настолько малого радиуса, что

$$V_\sigma(\mathbf{x}^k) \in V_\sigma(\mathbf{x}_0),$$

и, следовательно,

$$M_\delta(\mathbf{x}_0) - m_\delta(\mathbf{x}^0) \geqslant M_\sigma(\mathbf{x}^k) - m_\sigma(\mathbf{x}^k) \geqslant \omega(\mathbf{x}^k) \geqslant \lambda.$$

Таким образом, $M_\delta(\mathbf{x}^0) - m_\delta(\mathbf{x}^0) \geqslant \lambda$ для любого шара $V_\delta(\mathbf{x}^0)$. Но тогда $\omega(\mathbf{x}^0) \geqslant \lambda$.

Пример 1. Множество Ω называется *выпуклым*, если вместе с любыми его двумя точками принадлежит Ω и отрезок, их соединяющий.

Для выпуклого множества Ω имеет место неравенство

$$\omega(\delta_1+\delta_2, f) \leqslant \omega(\delta_1, f)+\omega(\delta_2, f) \qquad 0 \leqslant \delta_1, \delta_2. \tag{9}$$

Действительно, если $\mathbf{x}', \mathbf{x}'' \in \Omega$, $|\mathbf{x}'-\mathbf{x}''| < \delta_1+\delta_2$, то на отрезке, соединяющем $\mathbf{x}'$ и $\mathbf{x}''$, можно указать точку $\mathbf{x}$ такую, что $|\mathbf{x}'-\mathbf{x}| < \delta_1$, $|\mathbf{x}''-\mathbf{x}| < \delta_2$. Поэтому для $\delta_1, \delta_2 > 0$.

$$\omega(\delta_1+\delta_2; f) = \sup_{|\mathbf{x}'-\mathbf{x}''|<\delta_1+\delta_2} |f(\mathbf{x}')-f(\mathbf{x}'')| \leqslant$$

$$\leqslant \sup_{|\mathbf{x}'-\mathbf{x}|<\delta_1} |f(\mathbf{x}')-f(\mathbf{x})| + \sup_{|\mathbf{x}''-\mathbf{x}|<\delta_2} |f(\mathbf{x}'')-f(\mathbf{x})| = \omega(\delta_1, f)+\omega(\delta_2, f),$$

где верхние грани распространяются на произвольные $\mathbf{x}, \mathbf{x}', \mathbf{x}'' \in \Omega$, удовлетворяющие написанным неравенствам. Случаи $\delta_1 = 0$ и $\delta_2 = 0$ получаются переходом к пределу. Из (9) следует неравенство

$$\omega(m\delta) \leqslant m\omega(\delta) \tag{10}$$

при любом натуральном m.

Пример 2. Из (9) и монотонности ω следуют неравенства

$$0 \leqslant \omega(\delta_2, f)-\omega(\delta_1, f) < \omega(\delta_2-\delta_1, f), \quad 0 < \delta_1 < \delta_2, \tag{11}$$

откуда видно, что $\omega(t, f)$ есть непрерывная функция от $t \geqslant 0$, если f непрерывна на замыкании ограниченной выпуклой области Ω.

Пример 3. Функция (Дирихле), равная нулю на рациональных точках отрезка $[0, 1]$ и единице на иррациональных, разрывна во всех точках $[0, 1]$ относительно $[0, 1]$, но это не мешает ей быть непрерывной на множестве A рациональных точек (относительно A).

Упражнения.

1. Показать, что модули непрерывности $\omega(t)$ функций

1) $\sqrt{x}$ $(0 \leqslant x \leqslant 1)$ (см. начало § 15.5);

2) x^2 $(0 \leqslant x \leqslant 1)$;

3) $\sin x \left(0 \leqslant x \leqslant \dfrac{\pi}{2}\right)$;

4) $\sin \dfrac{1}{x} (0 < |x| \leqslant 1)$;

5) $\sin x$ $(-\infty < x < \infty)$

определяются равенствами:

$$1)\ \omega(t) = \begin{cases} \sqrt{t} & (0 \leqslant t \leqslant 1), \\ 1 & (1 \leqslant t); \end{cases} \qquad 2)\ \omega(t) = \begin{cases} 1-(1-t)^2 & (0 \leqslant t \leqslant 1), \\ 1 & (1 \leqslant t); \end{cases}$$

$$3)\ \omega(t) = \begin{cases} \sin t & (0 \leqslant t \leqslant \pi/2), \\ 1 & (\pi/2 \leqslant t); \end{cases} \qquad 4)\ \omega(t) = 2 \qquad (0 \leqslant t);$$

$$5)\ \omega(t) = \begin{cases} 2\sin\dfrac{t}{2} & (0 \leqslant t \leqslant \pi), \\ 2 & (\pi \leqslant t). \end{cases}$$

2. Показать, что если функция $\omega(t)$ $(t \geqslant 0)$ непрерывна при $t = 0$ и удовлетворяет условиям

$$0 \leqslant \omega(\delta_2)-\omega(\delta_1) \leqslant \omega(\delta_2-\delta_1) \quad (0 < \delta_1 < \delta_2),$$

то она есть модуль непрерывности самой себя.

3. Расстоянием точки $\mathbf{x}^0 \in R$ до множества $E \subset R$ называется число

$$r(\mathbf{x}^0, E) = \inf_{\mathbf{x}\in E} |\mathbf{x}^0 - \mathbf{x}| = \inf_{\mathbf{x}\in E} \sqrt{\sum_1^n (x_j - x_j^0)^2}.$$

Здесь и далее E, E_1, E_2, F — непустые множества.

Доказать, что если E — замкнутое множество (ограниченное или неограниченное), то расстояние $r(\mathbf{x}^0, E)$ достигается в некоторой точке $\mathbf{y} \in E$, т. е. $r(\mathbf{x}^0, E) = \min_{\mathbf{x}\in E} |\mathbf{x}^0 - \mathbf{x}| = |\mathbf{x}^0 - \mathbf{y}|$.

4. Доказать, что расстояние $r(\mathbf{x}^0, E)$ есть непрерывная функция от $\mathbf{x}^0$.

5. Расстоянием между двумя множествами E_1 и E_2 называют число

$$r(E_1, E_2) = \inf_{\substack{\mathbf{x}'\in E_1\\ \mathbf{x}''\in E_2}} |\mathbf{x}' - \mathbf{x}''|.$$

Доказать, что если E_1 и E_2 — замкнутые множества и одно из них ограничено, то существуют две точки $\mathbf{y} \in E_1$ и $\mathbf{z} \in E_2$, для которых эта нижняя грань достигается, т. е. $r(E_1, E_2) = \min_{\mathbf{x}'\in E_1, \mathbf{x}''\in E_2} |\mathbf{x}' - \mathbf{x}''| = |\mathbf{y} - \mathbf{z}|$.

Таким образом, если E_1 и E_2 не пересекаются, то $r(E_1, E_2) > 0$.

6. Доказать, что если F замкнутое, а Ω открытое ограниченное множество и $F \subset \Omega$, то найдется $\varepsilon > 0$ такое, что множество F^ε точек $\mathbf{x}$, расстояние которых до F не превышает ε, принадлежит Ω.

§ 7.11. Продолжение равномерно непрерывной функции. Частная производная на границе области

Теорема 1. *Если функция f равномерно непрерывна на незамкнутом множестве A, то ее можно продолжить на $\bar{A} - A$, и притом единственным образом, так, что полученная (продолженная) определенная на $\bar{A}$ функция будет непрерывной на $\bar{A}$.*

Доказательство. Пусть $\mathbf{x}^0 \in \bar{A} - A$, таким образом, $\mathbf{x}^0$ есть предельная точка A. В силу равномерной непрерывности f на A для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta > 0$ такое, что

$$|f(\mathbf{x}') - f(\mathbf{x}'')| < \varepsilon \tag{1}$$

для всех $\mathbf{x}', \mathbf{x}'' \in A$, для которых

$$|\mathbf{x}' - \mathbf{x}''| < \delta. \tag{2}$$

Но для точек $\mathbf{x}', \mathbf{x}'' \in A$, для которых $|\mathbf{x}' - \mathbf{x}_0|$, $|\mathbf{x}'' - \mathbf{x}^0| < \delta/2$ выполняется неравенство (2), а поэтому и (1). В силу условия Коши тогда существует предел f на A в точке $\mathbf{x}^0$. Естественно его обозначить через $f(\mathbf{x}^0)$. Этим наша функция f теперь уже определена на $\bar{A}$.

Пусть теперь $\mathbf{x}_0'$ и $\mathbf{x}_0''$ — произвольные точки $\bar{A}$ такие, что

$$|\mathbf{x}_0' - \mathbf{x}_0''| < \delta. \tag{3}$$

Тогда найдутся две последовательности точек $\mathbf{x}_k', \mathbf{x}_k'' \in A$ таких, что $|\mathbf{x}_k' - \mathbf{x}_k''| < \delta$ и $\mathbf{x}_k' \to \mathbf{x}_0'$, $\mathbf{x}_k'' \to \mathbf{x}_0''$ $(k \to \infty)$. Для них для любого k выполняется неравенство $|f(\mathbf{x}_k') - f(\mathbf{x}_k'')| < \varepsilon$, которое после перехода к пределу при $k \to \infty$ превращается в соотношение

$$|f(\mathbf{x}_0') - f(\mathbf{x}_0'')| \leqslant \varepsilon. \tag{4}$$

Мы доказали, что для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta > 0$ такое, что коль скоро $\mathbf{x}_0', \mathbf{x}_0'' \in \bar{A}$ и выполняется неравенство (3), автоматически имеет место неравенство (4). Иначе говоря, мы доказали, что продолженная функция $\bar{f}$ равномерно непрерывна на $\bar{A}$. Но тогда она непрерывна в любой точке $\bar{A}$.

Другого удовлетворяющего условию теоремы продолжения не может быть, потому что если бы мы в какой-нибудь точке $\mathbf{x}^0 \in \bar{A} - A$ положили $\bar{f}$ не равной пределу $\lim\limits_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}^0} f(\mathbf{x})$, то $\bar{f}$ была бы разрывной в этой точке. Теорема доказана.

Пусть $G \subset R$ — открытое множество и $\bar{G}$ — его замыкание, а f — непрерывная на $\bar{G}$ функция. В некоторых точках границы Γ множества G может оказаться невозможным задать ту или иную частную производную от f. Например, если G есть круг σ: $x^2 + y^2 < 1$, то в точке $A = (0, 1)$ его границы не имеет смысла производная f'_x от определенной на $\bar{\sigma}$ функции $f(x, y)$,— соседние с A точки в направлении оси x не принадлежат $\bar{\sigma}$. Однако иногда можно ввести обобщенное понятие частной производной от f по непрерывности. Если наша функция f не только непрерывна на $\bar{G}$, но имеет на G частные производные $\dfrac{\partial f}{\partial x_j}$ $(j = 1, \ldots, n)$, равномерно непрерывные на G, то, пользуясь теоремой 1, эти последние можно продолжить по непрерывности и на $\bar{G} - G = \Gamma$ — границу G. Эти продолжения обычно называют соответствующими частными производными от f на Γ, хотя это уже будут, вообще говоря, *обобщенные производные*. Но если какая-нибудь точка $x^0 \in \Gamma$ допускает определение обычной односторонней производной (правой или левой), то последняя совпадает в этой точке с соответствующей обобщенной производной. Чтобы убедиться в этом, обратимся к нашему примеру с кругом σ. Для точки $B = (x^0, y^0)$, $x_0 > 0$, $|y^0| < 1$ границы σ имеет место

$$\frac{f(x^0 - h, y^0) - f(x^0, y^0)}{-h} = f'_x(\tilde{x}^0 - \theta h, y^0) \to f'_x(x^0, y^0), \quad h \to 0, \; h > 0,$$

где справа в качестве предела стоит обобщенная производная. Но тогда, очевидно, существует равная ей обычная левая производная от f в (x^0, y^0).

В дальнейшем (см. § 19.8, теоремы 1, 3, 4) доказывается, что если $(n-1)$-мерная граница Γ области G (или ее часть γ) непрерывно дифференцируема r раз, то функцию f, равномерно непрерывную на G вместе со своими производными до порядка r включительно, можно продолжить за пределы Γ (или γ) с сохранением дифференциальных свойств. В частности, во всех точках Γ (или γ) продолженная функция $\bar{f}(x)$ будет иметь обычные непрерывные частные производные до порядка r включительно.

§ 7.12. Лемма о вложенных прямоугольниках и лемма Бореля

Лемма. *Пусть задана последовательность прямоугольников*

$$\Delta_k = \{a_j^{(k)} \leqslant x_j \leqslant b_j^k, \; j = 1, \ldots, n\} \qquad (k = 1, 2, \ldots),$$

вложенных друг в друга $(\Delta_k \supset \Delta_{k+1})$, *с диаметром* $d_k = \sqrt{\sum\limits_1^n (b_j^{(k)} - a_j^{(k)})^2}$, *стремящимся к нулю* $(d_k \to 0)$. *Тогда су-*

ществует единственная точка $\mathbf{x}^0 = (x_1^0, \ldots, x_n^0) \in R$, *принадлежащая всем* Δ_k.

Доказательство. Из условия леммы следует, что при каждом $j = 1, \ldots, n$ отрезки $\left[a_j^{(k)}, b_j^{(k)}\right]$ $(k = 1, 2, \ldots)$ вложены друг в друга и длина их стремится к нулю при $k \to \infty$, поэтому в силу аксиомы о вложенных отрезках для каждого j существует единственное число x_j^0, принадлежащее всем отрезкам $\left[a_j^{(k)}, b_j^{(k)}\right]$ $(k = 1, 2, \ldots)$ одновременно. Точка $\mathbf{x}^0$, имеющая своими координатами эти числа, очевидно, и есть та, о которой говорится в лемме.

Лемма Бореля*). *Пусть некоторая бесконечная система открытых множеств* V (*например, открытых кубов или шаров*) *покрывает замкнутое ограниченное множество* $E \subset R$. *Тогда в этой системе существует конечное число указанных множеств* V, *все же покрывающих* E.

Доказательство. Так как множество E ограничено, то существует куб $\Delta \subset R$, которому принадлежит E. Допустим, что лемма неверна. Разделим Δ на 2^n равных частичных кубов. Тогда среди последних, очевидно, обязательно найдется такой, который мы обозначим через Δ_1, что теорема для множества $E\Delta_1$ также неверна (любая конечная система множеств V не покрывает $E\Delta_1$). Разделим Δ_1 на 2^n равных кубов; среди них найдется снова такой, который мы обозначим через Δ_2, что для множества $E\Delta_2$ теорема неверна. Продолжив этот процесс неограниченно, получим систему включенных друг в друга кубов $\Delta_1 \supset \Delta_2 \supset \ldots$, диаметры которых стремятся к нулю, таких, что для множества $E\Delta_k$ $(k = 1, 2, \ldots)$ теорема неверна. Существует (в силу предыдущей леммы) точка $\mathbf{x}^0 \in R$, принадлежащая всем Δ_k. В силу замкнутости E она принадлежит E и потому покрыта некоторым множеством V_0 нашей системы. Так как V_0 — открытое множество, то $\Delta_k \subset V_0$ при некотором достаточно большом k. Следовательно, $E\Delta_k \subset V_0$.

Мы пришли к противоречию, потому что, с одной стороны, $E\Delta_k$ покрывается одним множеством V_0, с другой,— не существует никакой конечной системы множеств V, покрывающих $E\Delta_k$.

§ 7.13. Формула Тейлора

Рассмотрим функцию $f(\mathbf{x}) = f(x_1, \ldots, x_n)$, заданную на открытом множестве $\Omega \subset R_n$ и имеющую на Ω непрерывные частные производные того порядка, который нужен, чтобы имели смысл формулы, о которых будет идти речь ниже.

---

*) Э. Борель (1871—1956) — французский математик.

Зафиксируем точку $\mathbf{x}^0 = (x_1^0, \ldots, x_n^0) \subset \Omega$ и пусть $\delta > 0$ есть достаточно малое число, чтобы все точки $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ из ее окрестности

$$|\mathbf{x}^0 - \mathbf{x}| = \sqrt{\sum_1^n (x_j - x_j^0)^2} < \delta \tag{1}$$

принадлежали Ω.

Введем вспомогательную функцию

$$F(t) = f(\mathbf{x}^0 + t(\mathbf{x} - \mathbf{x}^0)) = f\left(x_1^0 + t\left(x_1 - x_1^0\right), \ldots, x_n^0 + t\left(x_n - x_n^0\right)\right)$$

от переменной $t \in [0, 1]$. Таким образом, мы временно фиксируем еще точку $\mathbf{x}$ из окрестности (1). Однако впоследствии $\mathbf{x}$ будем считать переменной. Очевидно, что

$$F(0) = f(\mathbf{x}^0), \quad F(1) = f(\mathbf{x}). \tag{2}$$

Согласно теореме о производной сложной функции

$$F'(t) = \sum_{j=1}^n \left(x_j - x_j^0\right) \frac{\partial f}{\partial x_j}(\mathbf{x}^0 + t(\mathbf{x} - \mathbf{x}^0)). \tag{3}$$

Таким образом,

$$F'(0) = \sum_{j=1}^n \left(x_j - x_j^0\right) \frac{\partial f}{\partial x_j}(\mathbf{x}^0). \tag{4}$$

Далее,

$$F''(t) = \sum_{j=1}^n \left(x_j - x_j^0\right) \sum_{k=1}^n \left(x_k - x_k^0\right) \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k}(\mathbf{x}^0 + t(\mathbf{x} - \mathbf{x}^0)) =$$

$$= \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \left(x_j - x_j^0\right)\left(x_k - x_k^0\right) \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k}(\mathbf{x}^0 + t(\mathbf{x} - \mathbf{x}^0)) \tag{5}$$

и

$$F''(0) = \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \left(x_j - x_j^0\right)\left(x_k - x_k^0\right) \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k}(\mathbf{x}^0). \tag{6}$$

Рассуждая по индукции, мы придем к производной

$$F^{(l)}(t) = \sum_{j_1=1}^n \ldots \sum_{j_l=1}^n \left(x_{j_1} - x_{j_1}^0\right) \ldots \left(x_{j_l} - x_{j_l}^0\right) \frac{\partial^l f(x^0 + t(x - x^0))}{\partial x_{j_1} \ldots \partial x_{j_l}} \tag{7}$$

и ее значению при $t = 0$:

$$F^{(l)}(0) = \sum_{j_1=1}^n \ldots \sum_{j_l=1}^n \left(x_{j_1} - x_{j_1}^0\right) \ldots \left(x_{j_l} - x_{j_l}^0\right) \frac{\partial^l f(x^0)}{\partial x_{j_1} \ldots \partial x_{j_l}}. \tag{8}$$

Пусть f имеет на Ω непрерывные частные производные до порядка l включительно. Тогда F имеет непрерывные обыкновенные производные по t до того же порядка l включительно. Поэтому имеет место разложение по формуле Тейлора для одной переменной:

$$F(t) = \sum_{0}^{l-1} \frac{t^k}{k!} F^{(k)}(0) + r_l(t),$$

где $r_l(t) = (t^l/l!)F^{(l)}(\theta t)$ $(0 < \theta < 1)$ и θ зависит от x и t. Отсюда

$$F(1) = \sum_{0}^{l-1} \frac{1}{k!} F^{(k)}(0) + R_l, \quad R_l(x) = r_l(1) = \frac{1}{l!} F^{(l)}(\theta). \tag{9}$$

Следовательно,

$$f(\mathbf{x}) = \sum_{k=0}^{l-1} \frac{1}{k!} \sum_{j_1=1}^{n} \cdots \sum_{j_k=1}^{n} \left(x_{j_1} - x_{j_1}^0\right) \cdots \left(x_{j_k} - x_{j_k}^0\right) \frac{\partial^k f(x^0)}{\partial x_{j_1} \ldots \partial x_{j_k}} + R_l(\mathbf{x}), \tag{10}$$

$$R_l(\mathbf{x}) = \frac{1}{l!} \sum_{j_1=1}^{n} \cdots \sum_{j_l=1}^{n} \left(x_{j_1} - x_{j_1}^0\right) \cdots \left(x_{j_l} - x_{j_l}^0\right) \frac{\partial^l f(x^0 + \theta(\mathbf{x} - \mathbf{x}^0))}{\partial x_{j_1} \ldots \partial x_{j_l}}. \tag{11}$$

Это и есть формула Тейлора функции n переменных в окрестности точки $\mathbf{x}^0$ с остаточным членом R_l в форме Лагранжа.

Надо иметь в виду, что среди членов кратной суммы $\sum\limits_{j_1=1}^{n} \ldots \sum\limits_{j_k=1}^{n}$ в (10) имеются равные между собой. Напишем несколько членов формулы Тейлора в случае двух переменных:

$$f(x_1, x_2) = f(x_1^0, x_2^0) + \left[\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)_0 (x_1 - x_1^0) + \left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)_0 (x_2 - x_2^0)\right] +$$
$$+ \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}\right)_0 (x_1 - x_1^0)^2 + 2\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}\right)_0 (x_1 - x_1^0)(x_2 - x_2^0) +\right.$$
$$\left. + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}\right)_0 (x_2 - x_2^0)^2\right] + \ldots + \frac{1}{(l-1)!}\left((x_1 - x_1^0)\frac{\partial}{\partial x_1} +\right.$$
$$\left. + (x_2 - x_2^0)\frac{\partial}{\partial x_2}\right)_0^{l-1} f + R_l,$$

$$R_l = \frac{1}{l!}\left((x_1 - x_1^0)\frac{\partial}{\partial x_1} + (x_2 - x_2^0)\frac{\partial}{\partial x_2}\right)_\theta^l f \quad (0 < \theta < 1).$$

Здесь применено символическое обозначение:

$$\left(\xi_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \xi_2 \frac{\partial}{\partial x_2}\right)_0^k f = \sum_{j=0}^{k} C_k^j \xi_1^j \xi_2^{k-j} \left(\frac{\partial^k f}{\partial x_1^j \partial x_2^{k-j}}\right)_0.$$

Знаки $(\quad)_0$ $(\quad)_\theta$ обозначают, что в f вместо $\mathbf{x}$ подставляется $\mathbf{x}^0$, соответственно $\mathbf{x}^0 + \theta(\mathbf{x} - \mathbf{x}^0)$.

Подобным образом в случае трех переменных

$$f(x_1, x_2, x_3) = \sum_{k=0}^{l-1} \frac{1}{k!} \left[\left(x_1 - x_1^0\right) \frac{\partial}{\partial x_1} + \left(x_2 - x_2^0\right) \frac{\partial}{\partial x_2} + \right.$$

$$\left. + \left(x_3 - x_3^0\right) \frac{\partial}{\partial x_3}\right]_0^k f + R_l,$$

$$R_l = \frac{1}{l!}\left[\left(x_1 - x_1^0\right) \frac{\partial}{\partial x_1} + \ldots + \left(x_3 - x_3^0\right) \frac{\partial}{\partial x_3}\right]_\theta^l f, \qquad 0 < \theta < 1,$$

где употребляемая символика, надо полагать, уже понятна читателю.

Формулу Тейлора можно еще записать в следующей компактной форме:

$$f(x) = \sum_{|\mathbf{k}| \leqslant l-1} \frac{(x - x^0)^{\mathbf{k}}}{\mathbf{k}!} f^{(k)}(\mathbf{x}^0) + R_l,$$

$$R_l = \sum_{|\mathbf{k}| = l} \frac{(\mathbf{x} - \mathbf{x}^0)^{\mathbf{k}}}{\mathbf{k}!} f^{(k)}(\mathbf{x}^0 + \theta(\mathbf{x} - \mathbf{x}^0)), \qquad (0 < \theta < 1),$$

где $|\mathbf{k}| = \sum_{1}^{n} k_j$, $\quad \mathbf{k}! = k_1! \ldots k_n!\ (0! = 1)$, $\quad f^{(k)}(\mathbf{x}) = \dfrac{\partial^{|\mathbf{k}|} f}{\partial x_1^{k_1} \ldots \partial x_n^{k_n}}$,
$(\mathbf{x} - \mathbf{x}^0)^{\mathbf{k}} = \left(x_1 - x_1^0\right)^{k_1} \ldots \left(x_n - x_n^0\right)^{k_n}$.

Формула Тейлора очень часто употребляется в случаях $l = 1, 2$. При $l = 1$ она после переноса в левую часть равенства $f(\mathbf{x}^0)$ имеет вид

$$f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}^0) = \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\right)_{\mathbf{x}^0 + \theta(\mathbf{x} - \mathbf{x}^0)} \left(x_j - x_j^0\right), \tag{12}$$

и представляет собой обобщение одномерной формулы конечных приращений Лагранжа на n-мерный случай.

При $l = 2$ она записывается в следующем виде:

$$f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}^0) + \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\right)_0 \left(x_j - x_j^0\right) + R_2; \tag{13}$$

$$R_2 = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_l}\right)_{\mathbf{x}^0+\theta(\mathbf{x}-\mathbf{x}^0)}(x_k - x_k^0)(x_l - x_l^0) =$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_l}\right)_0 (x_k - x_k^0)(x_l - x_l^0) + \varepsilon\rho^2, \quad (14)$$

где $\varepsilon \to 0$ при $\rho^2 = \sum_{j=1}^{n}(x_j - x_j^0)^2 \to 0$.

Действительно, в силу непрерывности рассматриваемых производных

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_l}\right)_{\mathbf{x}^0+\theta(\mathbf{x}-\mathbf{x}^0)} = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_l}\right)_0 + \varepsilon_{kl},$$

где $\varepsilon_{kl} \to 0$ при $\rho \to 0$, поэтому, полагая $\eta = \max\limits_{k,l} |\varepsilon_{kl}|$, заключаем, что второе слагаемое в правой части (14) не превышает по абсолютной величине

$$\eta \sum_k \sum_l |x_k - x_k^0||x_l - x_l^0| = \eta\left(\sum_k |x_k - x_k^0|\right)^2 \leqslant \eta n \rho^2.$$

В таком случае его можно записать в виде $\varepsilon\rho^2$, где $|\varepsilon| < n\eta \to 0$ $(\rho \to 0)$.

Последнюю сумму в (14) можно записать в виде $A(\xi) = \sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n} a_{kl}\xi_k\xi_l$, где $a_{kl} = a_{lk} = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_l}\right)_0$, $\xi_k = (x_k - x_k^0)$ $(k = 1, \ldots, n)$.

Таким образом, $A(\xi)$ есть квадратическая форма от n переменных. Если считать, что $\xi_k = x_k - x_k^0 = dx_k$, то

$$A(\xi) = d^2 f_0 = \sum_k \sum_l \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_l}\right)_0 dx_k dx_l$$

есть уже знакомый нам второй дифференциал от f в точке $\mathbf{x}^0$, соответствующий независимым дифференциалам $dx_1, \ldots, dx_n$.

Заметим еще, что остаток (9) формулы Тейлора функции $F(t)$ от одной переменной можно записать в интегральной форме (см. § 9.17):

$$r_l(t) = \frac{1}{(l-1)!}\int_0^t (t-u)^{l-1} F^{(l)}(u)\,du.$$

Ему соответствует в силу (7) следующее выражение для остатка формулы Тейлора функции $f(x)$ многих переменных:

$$R_l(\mathbf{x}) = r_l(1) = \frac{1}{(l-1)!}\int_0^1 (1-u)^{l-1}\sum_{j_1=1}^{n}\cdots\sum_{j_l=1}^{n}(x_{j_1} - x_{j_1}^0)\cdots(x_{j_l} - x_{j_l}^0)\times$$

$$\times\frac{\partial^l f\left(\mathbf{x}^0+u\left(\mathbf{x}-\mathbf{x}^0\right)\right)}{\partial \mathbf{x}_{j_1}\ldots\partial \mathbf{x}_{j_l}}\,du=l\sum_{|\mathbf{k}|=l}\frac{(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0)^{\mathbf{k}}}{\mathbf{k}!}\int(1-u)^{l-1}f^{(\mathbf{k})}\left(\mathbf{x}^0+u\left(\mathbf{x}-\mathbf{x}^0\right)\right)du. \tag{15}$$

В силу непрерывности подынтегральных функций в (15) по (u, x) сами интегралы суть непрерывные функции от параметра $\mathbf{x}$ (см. § 13.14, теорема 1). Больше того, если наша функция f имеет в окрестности $\mathbf{x}^0$ непрерывные производные $(l+s)$-го порядка, то эти интегралы можно дифференцировать (под знаком интеграла) s раз (см. § 13.14, теорема 3).

§ 7.14. Формула Тейлора с остатком в форме Пеано. Единственность

Пусть в окрестности $\Omega\subset R_n$ точки $\mathbf{x}^0=\left(x_1^0, \ldots, x_n^0\right)$ задана функция $f(\mathbf{x})=f(x_1, \ldots, x_n)$ и для всех $\mathbf{x}$ из некоторого шара $|\mathbf{x}-\mathbf{x}^0|<\delta$ (принадлежащего Ω) имеет место представление

$$f(\mathbf{x})=P_N(\mathbf{x})+o\left(\rho^N\right)\quad\left(\rho=\left[\left(\sum_{j=1}^n\left(x_j-x_j^0\right)^2\right]^{1/2}\to 0\right), \tag{1}$$

где

$$P_N(\mathbf{x})=\sum_{|k|\leqslant N}a_{\mathbf{k}}\left(\mathbf{x}-\mathbf{x}^0\right)^k$$

$$\left(a_{\mathbf{k}}=a_{k_1,\ldots,k_n},\quad |\mathbf{k}|=\sum_1^n k_j,\ \left(\mathbf{x}-\mathbf{x}^0\right)^k=\prod_{j=1}^n\left(x_j-x_j^0\right)^{k_j}\right); \tag{2}$$

тогда говорят, что функция f разложена в окрестности точки $\mathbf{x}^0$ по формуле Тейлора с остаточным членом в форме Пеано. Например, мы знаем, что если функция f имеет в окрестности точки $\mathbf{x}^0$ непрерывные частные производные до порядка N включительно, то она представима по формуле (1).

Докажем, что представление функции $f(\mathbf{x})$ по формуле (1) единственно, иначе говоря, если известно, что f наряду с (1) представлена в виде

$$f(\mathbf{x})=\sum_{|\mathbf{k}|\leqslant N}a_{\mathbf{k}}'\left(\mathbf{x}-\mathbf{x}^0\right)^{\mathbf{k}}+o\left(\rho^N\right)\quad\left(\rho\to 0,\ |\mathbf{x}-\mathbf{x}^0|<\delta\right), \tag{3}$$

где $a_k'=a_{k_1,\ldots,k_n}'$ — постоянные коэффициенты, то $a_k=a_k'$ ($|\mathbf{k}|\leqslant N$). В самом деле, вычитая (3) из (1), получим равенство

$$0\equiv\sum_{|\mathbf{k}|\leqslant N}\alpha_{\mathbf{k}}\left(\mathbf{x}-\mathbf{x}^0\right)^{\mathbf{k}}+o\left(\rho^N\right)\quad\left(\rho\to 0,\ \alpha_{\mathbf{k}}=\left(a_{\mathbf{k}}-a_{\mathbf{k}}'\right)\right), \tag{4}$$

справедливое для $|\mathbf{x}-\mathbf{x}^0|<\delta$. Зафиксируем точку $\mathbf{x}$ и введем переменную точку $\mathbf{z}_t=\mathbf{x}^0+t(\mathbf{x}-\mathbf{x}^0)$, зависящую от $t\in[0, 1]$. Очевидно, что $\mathbf{z}_t-\mathbf{x}^0=t(\mathbf{x}-\mathbf{x}^0)$ и $|\mathbf{z}_t-\mathbf{x}^0|=t|\mathbf{x}-\mathbf{x}^0|$. Поэтому если в (4) заменить $\mathbf{x}$ на $\mathbf{z}_t$, то получим

$$0\equiv\sum_{|\mathbf{k}|\leqslant N}\alpha_{\mathbf{k}}\left(\mathbf{x}-\mathbf{x}^0\right)^{\mathbf{k}}t^{|\mathbf{k}|}+o\left(t^N\right)\quad(t\to 0).$$

Полученное равенство можно записать в виде

$$0 \equiv \sum_{l=0}^{N} t^l \sum_{|\mathbf{k}|=l} \alpha_{\mathbf{k}} (\mathbf{x} - \mathbf{x}^0)^{\mathbf{k}} + o\left(t^N\right) \quad (t \to 0).$$

Но тогда (см. § 5.9, лемма) имеет место

$$\sum_{|\mathbf{k}|=l} \alpha_{\mathbf{k}} (\mathbf{x} - \mathbf{x}^0)^{k} = 0 \quad (l = 0, 1, \ldots, N), \tag{5}$$

какова бы ни была точка $\mathbf{x}$ шара $|\mathbf{x} - \mathbf{x}^0| < \delta$. Итак, равенство (5) имеет место тождественно для всех $\mathbf{x}$ из указанного шара. Если от левой части (5) взять производную порядка $\mathbf{p} = (p_1, \ldots, p_n)$, $|\mathbf{p}| = l \leqslant N$, то получим $\mathbf{p}! \cdot \alpha_{\mathbf{p}} = 0$, откуда $\alpha_{\mathbf{p}} = 0$, что и требовалось доказать.

Пример. При $x, y \to 0$

$$\psi(x, y) = \frac{1}{(1-x)(1-y)} = [1 + x + x^2 + o(x^2)][1 + y + y^2 + o(y^2)] =$$
$$= 1 + (x + y) + (x^2 + xy + y^2) + o(x^2) + x^2y + xy^2 + x^2y^2 + o(y^2) =$$
$$= 1 + (x + y) + (x^2 + xy + y^2) + o(\rho^2) \quad (\rho \to 0);$$

мы получили разложение функции ψ в окрестности точки $(0, 0)$ по формуле Тейлора с остаточным членом $o(\rho^2)$, $\rho \to 0$ в форме Пеано.

§ 7.15. Локальный (абсолютный) экстремум функции

Пусть на открытом множестве $\Omega \subset R_n$ задана функция $f(\mathbf{x}) = f(x_1, \ldots, x_n)$.

Говорят, что f *достигает своего (абсолютного) локального максимума в точке* $\mathbf{x}^0 \in \Omega$, если существует положительное число $\delta > 0$ такое, что для всех точек $\mathbf{x}$, для которых

$$|\mathbf{x} - \mathbf{x}^0| = \sqrt{\sum_{j=1}^{n} (x_j - x_j^0)^2} < \delta, \tag{1}$$

функция $f(\mathbf{x})$ определена и подчиняется неравенству $f(\mathbf{x}) \leqslant f(\mathbf{x}^0)$. Аналогично, по определению, f *достигает в* $\mathbf{x}^0$ *своего (абсолютного) локального минимума*, если существует ее окрестность (1), на которой функция f определена и удовлетворяет неравенству $f(\mathbf{x}) \geqslant f(\mathbf{x}^0)$.

Локальный минимум или максимум называют *локальным экстремумом*.

Если функция f достигает в $\mathbf{x}^0$ локального экстремума и имеет в ней частные производные первого порядка, то последние должны в этой точке равняться нулю:

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\right)_0 = \frac{\partial f}{\partial x_j}\left(x_1^0, \ldots, x_n^0\right) = 0 \quad (j = 1, \ldots, n),$$

потому что тогда для каждого j функция

$$f\left(x_1^0, \ldots, x_{j-1}^0, x_j, x_{j+1}^0, \ldots, x_n^0\right)$$

от одной переменной x_j имеет локальный экстремум в x_j^0 и ее производная по x_j при $x_j = x_j^0$, равная $\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\right)_0$, должна равняться нулю.

Из сказанного следует, что если мы хотим отыскать точки $\mathbf{x}^0 \in \Omega$, где f достигает локального экстремума, мы должны их искать среди точек $\mathbf{x} \in \Omega$, где f либо не имеет какой-либо частной производной либо имеет их, но они равны нулю. Нас будет интересовать второй случай. Покажем, как можно, разлагая функцию f по формуле Тейлора, узнать, имеет ли на самом деле f в указанной точке $\mathbf{x}^0$ экстремум и какой (максимум или минимум)?

Пусть функция f имеет в окрестности $|\mathbf{x} - \mathbf{x}^0| < \delta$ непрерывные производные второго порядка и ее первые производные все обращаются в нуль в точке $\mathbf{x}^0$. Тогда ее разложение по формуле Тейлора (при $l = 2$) может быть записано так:

$$f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}^0) = \sum_{k=1}^{n} \sum_{l=1}^{n} a_{kl}\xi_k\xi_l + \varepsilon\rho^2; \tag{2}$$

$$a_{kl} = a_{lk} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_l}\right)_0; \quad \xi_k = x_k - x_k^0, \quad \varepsilon \to 0 \text{ при } \rho = \sqrt{\sum_1^n \xi_k^2} \to 0.$$

Квадратическая форма $A(\xi) = \sum_{k=1}^{n} \sum_{l=1}^{n} a_{kl}\xi_k\xi_l$ может обладать одним из следующих четырех свойств:

1) форма $A(\xi)$ строго определенна положительно, т. е. $A(\xi) > 0$ для любых $\xi = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ с $\rho > 0$;

2) форма $A(\xi)$ строго определенна отрицательно, т. е. $A(\xi) < 0$ для любых ξ с $\rho > 0$;

3) форма $A(\xi)$ определенна, но не строго, т. е. $A(\xi) \geqslant 0$ для всех ξ или $A(\xi) \leqslant 0$ для всех ξ и при этом существует точка

$$\xi' = (\xi_1', \ldots, \xi_n') \text{ с } \rho' = \sqrt{\sum_1^n \xi_k'^2} > 0 \text{ такая, что } A(\xi') = 0;$$

4) форма $A(\xi)$ не определенна, т. е. существуют такие ξ' и ξ'', что $A(\xi') > 0$, $A(\xi'') < 0$.

Докажем, что *в случае 1) функция f достигает в $\mathbf{x}^0$ локального минимума, в случае 2) — локального максимума, в случае же 4) в точке $\mathbf{x}^0$ заведомо нет экстремума. Наконец, в случае 3) вопрос остается открытым — при данной информации функция может иметь экстремум, но может и не иметь его.*

Положим для ξ с $\rho > 0$ $\eta = \xi/\rho = (\eta_1, \ldots, \eta_n)$, т. е. $\eta_j = \xi_j/\rho$ $(j = 1, \ldots, n)$. Тогда равенство (2) можно записать в виде

$$f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}^0) = \rho^2(\Phi(\eta) + \varepsilon), \tag{3}$$

где $\Phi(\eta) = \sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n} a_{kl}\eta_k\eta_l$,

$$\sum_{j=1}^{n} \eta_j^2 = \frac{1}{\rho^2}\sum_{j=1}^{n} \xi_j^2 = 1. \tag{4}$$

Таким образом, функцию $\Phi(\eta)$ мы должны рассматривать на шаровой поверхности (4), представляющей собой ограниченное замкнутое множество σ. Очевидно, что $\Phi(\eta)$ непрерывна на σ.

В случае 1) $\Phi(\eta) > 0$ на σ. В силу того, что σ — замкнутое ограниченное множество и $\Phi(\eta)$ непрерывна на нем, существует минимум $\min \Phi(\eta) = m > 0$, $\eta \in \sigma$.

Далее, так как $\varepsilon \to 0$ при $\rho \to 0$, то существует достаточно малое $\delta > 0$ такое, что для всех $\rho < \delta$ $|\varepsilon| < m/2$. На основании (3) тогда для указанных $\rho > 0$ $f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}^0) > \rho^2\left(m - \frac{m}{2}\right) = \frac{m}{2}\rho^2 > 0$, т. е. в точке $\mathbf{x}^0$ функция f достигает локального минимума.

Утверждение 2) доказывается аналогично. Если форма строго определенна отрицательно, то функция $\Phi(\eta) < 0$ на σ, следовательно она достигает своего (отрицательного) максимума на σ, который мы обозначим через $-M$ $(M > 0)$. Но для достаточно малого $\delta > 0$, если $\rho < \delta$, то $|\varepsilon| < M/2$, поэтому для $0 < \rho < \delta$

$$f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}^0) < \rho^2\left(-M + \frac{M}{2}\right) = -\frac{M}{2}\rho^2 < 0,$$

т. е. f имеет в $\mathbf{x}^0$ локальный максимум.

В случае 3) наша форма для некоторой точки $\xi' \neq 0$ обращается в нуль, но тогда в силу однородных свойств формы для любой точки вида $\mathbf{x}' = \alpha\xi'$, где α — любое число, она также должна равняться нулю. Это показывает, что для всех указанных точек $\mathbf{x}'$ наша форма равна нулю и, следовательно, $f(\mathbf{x}^0 + \mathbf{x}') - f(\mathbf{x}^0) = \varepsilon\rho^2$. Но знак ε неизвестен, поэтому мы не можем сказать, имеет f в $\mathbf{x}^0$ экстремум или нет.

Единственное, что можно сказать при этих условиях, что если форма тождественно не равна нулю и положительно (не строго) определенна, то в $\mathbf{x}^0$ не может быть максимума, или, если она тождественно не равна нулю и отрицательно (не строго) определенна, то в $\mathbf{x}^0$ не может быть минимума.

В случае 4) опять удобно обратиться к равенству (3). В этом случае, по условию, существует точка ξ', для которой форма положительна, и точка ξ'', для которой форма отрицательна, но тогда для соответствующих им точек η', η'' будут выполняться неравенства $\Phi(\eta') > 0$, $\Phi(\eta'') < 0$ и при малых ρ окажется, что $\Phi(\eta') + \varepsilon > 0$, $\Phi(\eta'') + \varepsilon < 0$, т. е. в любой малой окрестности $\mathbf{x}^0$ имеются точки $\mathbf{x}'$ и $\mathbf{x}''$, для которых $f(\mathbf{x}') > f(\mathbf{x}^0)$ и $f(\mathbf{x}'') < f(\mathbf{x}^0)$, а это означает, что в $\mathbf{x}^0$ заведомо нет экстремума.

Составим ряд главных миноров квадратической формы $A(\xi)$:

$$\Delta_1 = a_1;\ \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix};\ \ldots;\ \Delta_n = \begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Согласно теореме Сильвестра из теории квадратических форм

1) если $\Delta_1 > 0,\ \Delta_2 > 0,\ \ldots,\ \Delta_n > 0$, то форма строго положительно определенна (случай 1);

2) если $\Delta_1 < 0,\ \Delta_2 > 0,\ \Delta_3 < 0,\ \ldots,\ (-1)^n\Delta_n > 0$, то форма строго отрицательно определенна (случай 2);

3) Если $\Delta_1 \geqslant 0,\ \Delta_2 \geqslant 0,\ \ldots,\ \Delta_n \geqslant 0$ или $\Delta_1 \leqslant 0,\ \Delta_2 \geqslant 0,\ \ldots$ $\ldots,\ (-1)^n\Delta_n \geqslant 0$ и имеется j, при котором $\Delta_j = 0$, то форма заведомо не строго определенна (случай 3);

4) во всех остальных случаях форма неопределенна (случай 4).

В двумерном случае равенство (2) выглядит следующим образом:

$$f(x_1, x_2) - f(x_1^0, x_2^0) = {}^1/_2 (A\xi_1^2 + 2B\xi_1\xi_2 + C\xi_2^2) + \varepsilon\rho^2,$$

$$A = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}\right)_0, \quad B = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}\right)_0, \quad C = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}\right)_0,$$

и соответствующий сильвестров ряд состоит из двух членов:

$$\Delta_1 = A, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} = AC - B^2.$$

Следовательно,

a) если $A > 0$ и $AC - B^2 > 0$, то f имеет в $\mathbf{x}^0$ минимум;

b) если $A < 0$ и $AC - B^2 > 0$, то максимум;

c) если $AC - B^2 < 0$, то нет экстремума;

d) если $AC - B^2 = 0$, то неизвестно, есть ли экстремум.

Впрочем, эти факты легко получить непосредственно из представления ($\boldsymbol{\zeta} = (\xi, \eta) \neq 0$)

$$\Lambda(\boldsymbol{\zeta}) = A\xi^2 + 2B\xi\eta + C\eta^2 = \frac{(A\xi + B\eta)^2 + (AC - B^2)\eta^2}{A} \quad (A \neq 0).$$

В случае a), если $|\eta| > 0$, то $\Lambda(\boldsymbol{\zeta}) > 0$, а если $\eta = 0$, то должно быть $\xi \neq 0$ и тогда снова $\Lambda(\boldsymbol{\zeta}) > 0$.

В случае b), если $|\eta| > 0$, то $\Lambda(\boldsymbol{\zeta}) < 0$, а если $\eta = 0$, то должно быть $\xi \neq 0$ и тогда $\Lambda(\boldsymbol{\zeta}) < 0$.

В случае c) и $A \neq 0$ можно, с одной стороны, подобрать (ξ, η) так, что $\eta \neq 0$ и $(A\xi + B\eta) = 0$, а с другой, положить $\eta = 0$ и $\xi > 0$. В обоих случаях будет $\Lambda(\boldsymbol{\zeta}) \neq 0$, но разных знаков. Если же $A = 0$, но $C \neq 0$, то приходим к тем же фактам, заменяя A на C.

В случае d), при $A \neq 0$ $\Lambda(\zeta) = (A\xi + B\eta)^2/A$, и можно указать не нулевую точку $\zeta = (\xi, \eta)$ такую, что $A(\zeta) = 0$. Тот же факт получим при $C \neq 0$, заменяя A на C. Наконец, если $A = C = 0$, то форма $A(\zeta) = B\xi\eta$, очевидно, неопределенна.

Пример 1. $f(x, y) = x^3 + y^3 - 9xy + 1$. Уравнения $\frac{\partial f}{\partial x} = 0$, $\frac{\partial f}{\partial y} = 0$ дают два решения: $x = y = 3$ (минимум), $x = y = 0$ (нет экстремума).

Пример 2. $f(x, y) = x^4 + y^4 - 2x^2 + 4xy - 2y^2 + 1$. Три решения: $x = +\sqrt{2}$, $y = -\sqrt{2}$ (минимум); $x = -\sqrt{2}$, $y = +\sqrt{2}$ (минимум); $x = y = 0$ (случай d, но на самом деле нет экстремума).

Пример 3. $f(x, y) = x^2 - 2xy^2 + y^4 - y^5$. Решение $x = y = 0$ (сомнительный случай). С другой стороны, очевидно, $f(x, y) = (x - y^2)^2 - y^5$, и так как при любом $\varepsilon > 0$ $f(\varepsilon^2, \varepsilon) = -\varepsilon^5 < 0$, $f(\varepsilon, 0) = \varepsilon^2 > 0$, то экстремума в точке $(0, 0)$ нет. Однако при любых h, k $(h^2 + k^2 > 0)$ функция $y(t) = f(ht, kt)$ имеет минимум при $t = 0$!

§ 7.16. Теоремы существования неявной функции

Зададим произвольную функцию $f(x, y)$ от двух переменных x, y. Приравняем ее нулю:

$$f(x, y) = 0. \tag{1}$$

Множество всех точек (x, y), для которых выполняется равенство (1), обозначим через $\mathfrak{M}$. Пусть $(x_0, y_0) \in \mathfrak{M}$, т. е. $f(x_0, y_0) = 0$.

Если не накладывать никаких условий на f, то множество $\mathfrak{M}$ может иметь самую различную природу. Например, в случае $f(x, y) = (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2$ множество $\mathfrak{M}$ состоит из одной-единственной точки (x_0, y_0); в случае

$$f(x, y) = (x - x_0)^2 - (y - y_0)^2 = (x + y - x_0 - y_0)(x - y - x_0 + y_0)$$

$\mathfrak{M}$ есть пара прямых, проходящих через (x_0, y_0). Однако часто имеют место случаи, когда $\mathfrak{M}$, по крайней мере в достаточно малой окрестности (x_0, y_0), представляет собой кривую, описываемую непрерывной (однозначной) функцией

$$y = \psi(x), \quad x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta).$$

Возникает вопрос, как по свойствам функции f узнать, что имеет место именно этот случай?

Ниже доказываются две общие теоремы, отвечающие на поставленный вопрос.

Теорема 1. *Пусть задано уравнение*

$$f(x, y) = 0, \tag{1}$$

удовлетворяющее следующим свойствам.

Функция f определена на некоторой двумерной окрестности Ω точки (x^0, y^0) плоскости (x, y) и непрерывна там вместе со *своими частными производными (первого порядка); при этом*)*

$$\frac{\partial f}{\partial y} \neq 0 \tag{2}$$

и $f(x^0, y^0) = 0$.

Пусть, далее, $\mathfrak{M}$ *есть множество всех точек* (x, y), *удовлетворяющих уравнению* (1) (*в частности,* $(x^0, y^0) \in \mathfrak{M}$).

Тогда, каково бы ни было $b_0 > 0$, *найдется прямоугольник*

$$\Delta = \{|x - x^0| < a, \ |y - y^0| < b\}, \quad b < b_0, \tag{3}$$

принадлежащий Ω, *такой, что множество* $\mathfrak{M}\Delta$ *описывается непрерывно дифференцируемой функцией*

$$y = \psi(x); \quad x \in \Delta^0, \tag{4}$$

$$\Delta^0 = \{|x - x_0| < a\}. \tag{5}$$

Другими словами, прямоугольник Δ обладает тем свойством, что на его проекции Δ^0 на ось x можно определить непрерывно дифференцируемую функцию (4), удовлетворяющую уравнению (1):

$$f(x, \psi(x)) \equiv 0, \ x \in \Delta^0.$$

График ее полностью принадлежит Δ. Эта функция единственна в том смысле, что любая точка $(x, y) \in \mathfrak{M}\Delta$ имеет координаты, связанные уравнением (4). В частности, $y^0 = \psi(x^0)$, потому что $(x^0, y^0) \in \mathfrak{M}\Delta$.

Теорема 1'. *Пусть задано уравнение*

$$f(\mathbf{x}, y) = f(x_1, \ldots, x_n, y) = 0, \tag{1'}$$

удовлетворяющее следующим условиям.

Функция f *определена на некоторой окрестности* Ω *точки* $(\mathbf{x}^0, y^0) = (x_1^0, \ldots, x_n^0, y^0)$ *пространства* R_{n+1} *точек* $(\mathbf{x}, y) = (x_1, \ldots, x_n, y)$ *и непрерывна там вместе со своими частными производными (первого порядка); при этом*

$$\frac{\partial f}{\partial y} \neq 0, \quad f(\mathbf{x}^0, y^0) = 0. \tag{2'}$$

Пусть, далее, $\mathfrak{M}$ *есть множество всех точек* $(\mathbf{x}, y)$, *удовлетворяющих уравнению* (1') (*в частности,* $(\mathbf{x}^0, y^0) \in \mathfrak{M}$).

Тогда, каково бы ни было $b_0 > 0$ *найдется в* Ω *прямоугольник*

$$\Delta = \{|x_j - x_j^0| < a, \ j = 1, \ldots, n, \ |y - y^0| < b\}, \quad b < b_0, \tag{3'}$$

принадлежащий Ω, *такой, что множество* $\mathfrak{M}\Delta$ *описывается непрерывно дифференцируемой функцией (т. е. имеющей непрерывные*

*) Достаточно предполагать, что $\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_0 = f'_y(x^0, y^0) \neq 0$. Отсюда в силу непрерывности $\frac{\partial f}{\partial y}$ следует выполнение условия (2) на некоторой окрестности точки (x^0, y^0).

частные производные)

$$y=\psi(\mathbf{x})=\psi(x_1,\ \ldots,\ x_n),\ \mathbf{x}\in\Delta^0, \tag{4'}$$

$$\Delta^0=\{|x_j-x_j^0|<a,\ j=1,\ \ldots,\ n\}. \tag{5'}$$

Доказательство теоремы 1. Так как $\frac{\partial f}{\partial y}$ непрерывна на области Ω, то из (2), следует, что $\frac{\partial f}{\partial y}$ имеет один и тот же знак всюду на Ω. Для определенности пусть $\frac{\partial f}{\partial y}>0$ на Ω.

Введем замкнутый прямоугольник

$$\overline{\Delta}=\{|x-x^0|\leqslant\bar{a},\ |y-y^0|\leqslant b\},\qquad b<b_0, \tag{6}$$

принадлежащий Ω $(\overline{\Delta}\subset\Omega)$. Так как $\frac{\partial f}{\partial x}$ и $\frac{\partial f}{\partial y}$ непрерывны на $\overline{\Delta}$ и $\frac{\partial f}{\partial y}>0$, то для некоторых положительных констант m_1 и m_2

$$\frac{\partial f}{\partial y}>m_1>0,\quad \left|\frac{\partial f}{\partial x}\right|\leqslant m_2. \tag{7}$$

Функция $f(x^0,\ y)$ от переменной y строго возрастает на отрезке $[y^0-b,\ y^0+b]$, потому что $\frac{\partial f}{\partial y}>0$ на $\overline{\Delta}$, и, так как $f(x^0,\ y^0)=0$, то $f(x^0,\ y^0-b)<0$, $f(x^0,\ y^0+b)>0$. Вследствие непрерывности f на $\overline{\Delta}$, найдется положительное число $a<\bar{a}$ такое, что $f(x,\ y^0-b)<0$, $f(x,\ y^0)>0$, $x\in\Delta^0$ (см. (5)).

Рассмотрим теперь для произвольной фиксированной точки $x\in\Delta^0$ функцию $f(x,\ y)$ от y на отрезке $[y^0-b,\ y^0+b)$. В силу свойств f она непрерывна, строго возрастает $\left(\frac{\partial f}{\partial y}>0\right)$ и имеет противоположные знаки на его концах. Но тогда существует, и притом единственное, $y\in(y^0-b,\ y^0+b)$, мы его обозначим через $\psi(x)$, для которого $f(x,\ \psi(x))=0$.

Этим доказано существование определенной на Δ^0 функции $\psi(x)$, удовлетворяющей требованиям теоремы, если не считать, что пока не доказана ее непрерывная дифференцируемость.

Пусть $x,\ x+\Delta x\in\Delta^0$, $y=\psi(x)$ и

$$\Delta y=\psi(x+\Delta x)-\psi(x).$$

Тогда, применяя формулу конечных приращений Лагранжа для функции двух переменных (см. § 7.13, (12)), получим

$$0=f(x+\Delta x,\ y+\Delta y)-f(x,\ y)=$$
$$=f'_x(x+\theta\Delta x,\ y+\theta\Delta y)\,\Delta x+f'_y(x+\theta\Delta x,\ y+\theta\Delta y)\,\Delta y$$

или

$$\Delta y = -\frac{f'_x(x+\theta\Delta x,\ y+\theta\Delta y)}{f'_y(x+\theta\Delta x,\ y+\theta\Delta y)}\Delta x. \tag{8}$$

Учитывая, что $\Delta \subset \Delta$ (см. (7)), получим

$$|f'_x/f'_y| \leqslant m_2/m_1 \text{ на } \Delta, \tag{9}$$

следовательно,

$$\lim_{\Delta x\to 0} \Delta y = 0, \tag{10}$$

что показывает, что функция $y = \psi(x)$ непрерывна на Δ^0.

Но теперь, деля (8) на Δx, мы можем перейти к пределу при $\Delta x \to 0$ и получить, что для любого $x \in \Delta^0$ существует производная

$$\psi'(x) = -\frac{f'_x(x,y)}{f'_y(x,y)} = -\frac{f'_x(x,\ \psi(x))}{f'_y(x,\ \psi(x))}. \tag{11}$$

Здесь надо учесть, что f'_x и f'_y непрерывны и $f'_y > 0$ на Δ.

Мы доказали не только существование производной $\psi'(x)$, но и важную формулу (11), с помощью которой можно вычислять $\psi'(x)$. Непрерывность $\psi'(x)$ непосредственно видна из этой формулы, потому что f'_x и f'_y непрерывны на прямоугольнике, а кривая $y = \psi(x)$, непрерывность которой уже установлена, не выходит за его пределы.

Доказательство теоремы 1′ аналогично. Вместо x надо рассматривать $\mathbf{x}$ и считать, что $\mathfrak{M}$, Δ, Δ^0 определяются как в формулировке теоремы 1′ и

$$\bar\Delta = \{|x_j - x_j^0| \leqslant a,\ |y - y^0| < b\} \subset \Omega, \qquad b < b^0.$$

Теперь уже имеют место неравенства

$$|f'_{x_j}| \leqslant m_2, \quad f'_y > m_1 \text{ на } \bar\Delta, \tag{7'}$$

и по аналогии доказывается существование и единственность функции

$$y = \psi(\mathbf{x}) = \psi(x_1, \ldots, x_n) \quad \mathbf{x} \in \Delta^0, \quad (\mathbf{x}, \psi(\mathbf{x})) =$$
$$= (x_1, \ldots, x_n, \psi(\mathbf{x})) \in \Delta, \tag{12}$$

удовлетворяющей уравнению (1′). Единственность понимается в том смысле, что любая точка $(\mathbf{x}, y) \in \Delta$, удовлетворяющая уравнению (1′) имеет координаты, связанные между собой равенством (12).

Пусть теперь

$$\Delta y = \psi(\mathbf{x} + \Delta\mathbf{x}) - \psi(\mathbf{x}),\ \mathbf{x},\ \mathbf{x} + \Delta\mathbf{x} \in \Delta^0,$$

где $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$, $\Delta\mathbf{x} = (\Delta x_1, \ldots, \Delta x_n)$. Тогда согласно формуле конечных приращений Лагранжа для функции многих переменных (см. § 7.13, (12))

$$0 = f(\mathbf{x} + \Delta\mathbf{x}, y + \Delta y) - f(\mathbf{x}, y) = \sum_{j=1}^{n} f'_{x_j}(\mathbf{x} + \theta\Delta\mathbf{x}, y + \\ + \theta\Delta y)\Delta x_j + f'_y(\mathbf{x} + \theta\Delta\mathbf{x}, y + \theta\Delta y)\Delta y, \qquad 0 < \theta < 1,$$

и, следовательно,

$$\Delta y = -\frac{1}{f'_y(\mathbf{x} + \theta\Delta\mathbf{x}, y + \theta\Delta y)} \sum_{i=1}^{n} f_{x_i}(\mathbf{x} + \theta\Delta\mathbf{x}, y + \theta\Delta y)\Delta x_i \tag{8'}$$

и, в силу (7′),

$$\lim_{\Delta\mathbf{x}\to 0} \Delta y = 0. \tag{10'}$$

Далее, считая, что $\Delta x_j \neq 0$, $\Delta x_i = 0$ при $j \neq i$, из (8′) получаем

$$\frac{\Delta y}{\Delta x_j} = -\frac{f_{x_j}(x_1, \ldots, x_{j-1}, x_j + \theta\Delta x_j, x_{j+1}, \ldots, x_n, y + \theta\Delta y)}{f_y(x_1, \ldots, x_{j-1}, x_j + \theta\Delta x_j, x_{j+1}, \ldots, x_n, y + \theta\Delta y)},$$

и после перехода к пределу при $\Delta x_j \to 0$, учитывая (10′) и что f_{x_i}, f_y непрерывны и $f_y > 0$, получим

$$\frac{\partial\psi}{\partial x_j} = -\frac{\dfrac{\partial f}{\partial x_j}}{\dfrac{\partial f}{\partial y}} = -\frac{\dfrac{\partial f(\mathbf{x}, \psi(\mathbf{x}))}{\partial x_j}}{\dfrac{\partial f(\mathbf{x}, \psi(\mathbf{x}))}{\partial y}} \quad (j = 1, \ldots, n). \tag{11'}$$

При этом $\dfrac{\partial\psi(\mathbf{x})}{\partial x_j}$ непрерывны по $\mathbf{x}$, потому что правая часть (11′) непрерывна по $\mathbf{x}$.

Теорема 2. *Если функция $f(x, y)$ [соответственно $f(\mathbf{x}, y)$] удовлетворяет условиям теоремы 1 (соответственно теоремы 1′) и, кроме того, имеет на Ω непрерывные частные производные порядка l, то и функция $\psi(x)$ [соответственно $\psi(\mathbf{x})$], о которой идет речь в теореме 1 (соответственно теореме 1′), имеет на Δ^0 непрерывные частные производные порядка l.*

Доказательство. Дифференцируя (11) по x, получим

$$\psi''(x) = -\frac{f'_y\left[f''_{xx} + \psi' f''_{xy}\right] - f'_x\left[f''_{yx} + \psi' f''_{yy}\right]}{f'^2_y}, \tag{13}$$

где, конечно, всюду в частные производные надо вместо (x, y) подставить $(x, \psi(x))$. Правая часть этого равенства — непрерывная функция от x, следовательно, и $\psi''(x)$ непрерывна.

Продолжая дифференцирование, наконец, получим, что производная $\psi^{(l)}(x)$ есть рациональная функция частных производных от f до порядка l включительно и производных $\psi', \ldots, \psi^{(l-1)}$, непрерывность которых установлена на предыдущем этапе дифференцирования. При этом знаменатель дроби, равной этой рациональной функции (в силу условия $f'_y \neq 0$), не равен нулю.

В случае теоремы 1' равенству (13) будут соответствовать следующие [см. (11')]:

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x_i \partial x_j} = -\frac{f'_y\left[f''_{x_i x_j} + \psi'_{x_i} f''_{y x_j}\right] - f'_{x_j}\left[f''_{x_i y} + \psi'_{x_i} f''_{yy}\right]}{f'^2_y} \qquad (i,\ j = 1, \ldots, n).$$

Пример. Левая часть уравнения $(y-x)^2 = 0$ имеет непрерывные частные производные, но производная по y при $x = y = 0$ равна нулю. Это не мешает тому, что данное уравнение имеет единственное решение $(y = x)$, равное нулю при $x = 0$. Таким образом, теорема 1 дает только достаточные условия для существования единственной неявной функции, график которой проходит через заданную точку (x^0, y^0), но не необходимые.

§ 7.17. Теорема существования решения системы уравнений

Теорема 1. *Пусть задана система уравнений*

$$f_j(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m) = f_j(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0, \quad j = 1, \ldots, m, \tag{1}$$

удовлетворяющая следующим свойствам.

*Функции f_j определены на некоторой ($(n+m)$-мерной) окрестности Ω точки $(\mathbf{x}^0, \mathbf{y}^0) = (x_1^0, \ldots, x_n^0, y_1^0, \ldots, y_m^0)$ пространства R_{n+m} точек $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m)$ и непрерывны там вместе со своими частными производными (первого порядка) с якобианом (определителем Якоби *))*

$$\frac{D(f_1, \ldots, f_m)}{D(y_1, \ldots, y_m)} = \left|\frac{\partial f_i}{\partial y_j}\right| \neq 0. \tag{2}$$

Кроме того, точка $(\mathbf{x}^0, \mathbf{y}^0)$ удовлетворяет системе (1).

Пусть $\mathfrak{M}$ есть множество всех точек $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$, удовлетворяющих системе (1) (в частности, $(\mathbf{x}^0, \mathbf{y}^0) \in \mathfrak{M}$).

Тогда, каково бы ни было $b_0 > 0$, найдется прямоугольник

$$\Delta = \{|x_i - x_i^0| < a, \quad i = 1, \ldots, n, \ |y_j - y_j^0| < b, \quad j = 1, \ldots, m\},$$
$$b < b_0, \tag{3}$$

принадлежащий Ω такой, что множество $\mathfrak{M}\Delta$ описывается непрерывно дифференцируемыми функциями

$$y_j = \psi_j(\mathbf{x}), \quad j = 1, \ldots, m, \ \mathbf{x} \in \Delta^0, \tag{4}$$

$$\Delta^0 = \{|x_i - x_i^0| < a; \quad i = 1, \ldots, n\}. \tag{5}$$

Другими словами, прямоугольник Δ обладает тем свойством, что на его проекции Δ^0 на координатное подпространство

---

*) К. Г. Якоби (1804—1851) — немецкий математик.

$(x_1, \ldots, x_n)$ можно определить непрерывно дифференцируемые функции (4), удовлетворяющие уравнениям (1):

$$f_j(\mathbf{x}, \psi_1, (\mathbf{x}), \ldots, \psi_m(\mathbf{x})) \equiv 0, \ \mathbf{x} \in \Delta^0, \ j = 1, \ldots, m \tag{6}$$

и неравенствам $|\psi_j(\mathbf{x}) - y_j^0| < b$. Эти функции единственны в том смысле, что любая точка $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \mathfrak{M}\Delta$ имеет координаты, связанные уравнениями (4).

В частности, $y_j^0 = \psi_j(\mathbf{x}^0)$, $j = 1, \ldots, m$, потому, что $(\mathbf{x}^0, \mathbf{y}^0) \in \in \mathfrak{M}\Delta$.

Замечание 1. Можно также пользоваться такой формулировкой, которая будет удобна ниже: а) точки вида

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (\mathbf{x}, \psi_1(\mathbf{x}), \ldots, \psi_m(\mathbf{x})), \quad \mathbf{x} \in \Delta^0 \tag{7}$$

принадлежат Δ и удовлетворяют уравнениям (1) (т. е. $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \in \mathfrak{M}\Delta$); других точек, удовлетворяющих уравнениям (1), в Δ нет, т. е. если точка $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \mathfrak{M}\Delta$, то она имеет вид (7) при некотором $\mathbf{x} \in \Delta^0$.

Замечание 2. В теореме можно считать, что прямоугольник Δ и его проекция Δ^0 определяются неравенствами

$$\Delta = \{|x_i - x_i^0| < a_i, \ i = 1, \ldots, n; \ |y_j - y_j^0| < b_j, \ j = 1, \ldots, m\}, \tag{3'}$$

$$\Delta^0 = \{|x_i - x_i^0| < a_i, \ i = 1, \ldots, n\}, \tag{5'}$$

с различными, вообще говоря, числами a_i, b_j. Ведь если теорема верна для прямоугольника (3′) при некоторых a_i, b_j, то, положив $b = \min b_j$, можно вследствие непрерывности функций ψ_i указать такое число $a < a_i$, $i = 1, \ldots, n$, что точки $(\mathbf{x}, \psi_1(\mathbf{x}), \ldots, \psi_m(\mathbf{x}))$ с $\mathbf{x} \in \{|x_i - x_i^0| < a, \ i = 1, \ldots, n\}$ окажутся в прямоугольнике (3).

Если теперь точка (x, y), удовлетворяющая уравнениям (1), принадлежит прямоугольнику (3), то она принадлежит и прямоугольнику (3′), и, так как для последнего теорема верна, то x связано с y соотношениями (4).

Заметим, однако, что вообще невозможно добиться, чтобы a и b в (3) были равными, в чем легко убедиться на примере одного уравнения

$$F(x, y) = y - 2x = 0, \quad x_0 = y_0 = 0.$$

Доказательство. При $m = 1$ теорема уже доказана (см. § 7.16, теорема 1′). Пусть она верна при $m - 1$ $(m > 1)$; докажем ее верность при m.

Так как якобиан (2) не равен нулю в точке $(\mathbf{x}^0, \mathbf{y}^0)$, то один из его миноров порядка $m - 1$ тоже не равен нулю в этой точке, а вследствие его непрерывности, и в некоторой достаточно малой окрестности этой точки, которую мы будем считать совпадающей с Ω, уменьшив в случае необходимости прежнюю окрестность Ω. Не нарушая общности, будем считать, что это есть минор

$$\frac{D(f_1, \ldots, f_{m-1})}{D(y_1, \ldots, y_{m-1})} \neq 0. \tag{8}$$

Но, по предположению, теорема верна для $m-1$, поэтому, учитывая (8), ее можно применить к первым $m-1$ уравнениям (1) и заключить, что для любого $b_0 > 0$ существует в R_{n+m} принадлежащий Ω прямоугольник

$$\Delta = \{|x_j - x_j^0| < \alpha,\ j = 1, \ldots, n,\ |y_m - y_m^0| < \beta,\ |y_i - y_i^0| < \gamma,$$
$$i = 1, \ldots, m-1\},\ \gamma < b_0 \tag{9}$$

такой, что множество $\mathfrak{M}'$ точек $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m)$ из Δ, удовлетворяющих первым $m-1$ уравнениям (1), описывается непрерывно дифференцируемыми функциями

$$\begin{aligned} &y_j = \varphi_j(\mathbf{x}, y_m), && j = 1, \ldots, m-1,\ (\mathbf{x}, y_m) \in \Delta', \\ &\Delta' = \{|x_i - x_i^0| < \alpha, && i = 1, \ldots, n,\ |y_m - y_m^0| < \beta\}. \end{aligned} \tag{10}$$

Таким образом, в частности,

$$y_j^0 = \varphi_j(\mathbf{x}^0, y_m^0), \qquad j = 1, \ldots, m-1. \tag{11}$$

Замечание 3. Мы могли бы на этом первом этапе рассуждений взять $\alpha = \beta$, но на втором этапе, возможно, придется числа α, β непропорционально уменьшить. Легко убедиться в том, что это уменьшение не нарушит уже доказанное.

Итак, выполняются следующие свойства:

а) Точки ($(n+m)$-мерные)

$$(\mathbf{x}, \varphi_1(\mathbf{x}, y_m), \ldots, \varphi_{m-1}(\mathbf{x}, y_m), y_m) \in \Delta, \quad (\mathbf{x}, y_m) \in \Delta'$$

и удовлетворяют первым $(m-1)$ уравнениям системы (1), т. е. выполняются тождества

$$\begin{gathered} f_i(\mathbf{x}, \varphi_1(\mathbf{x}, y_m), \ldots, \varphi_{m-1}(\mathbf{x}, y_m), y_m) \equiv 0, \\ (i = 1, \ldots, m-1), \quad (\mathbf{x}, y_m) \in \Delta'. \end{gathered} \tag{12}$$

б) Имеет место единственность: если какая-либо точка

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (x_1, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_m) \in \Delta$$

и удовлетворяет первым $(m-1)$ уравнениям системы (1), то для координат этой точки автоматически справедливы соотношения:

$$(\mathbf{x}, y_m) \in \Delta', \quad x_i = \varphi_i(\mathbf{x}, y_m) \quad (i = 1, \ldots, m-1). \tag{13}$$

Допустим, что нам удалось подобрать непрерывно дифференцируемую функцию $\lambda(\mathbf{x})$, $\mathbf{x} \in \Delta^0$, где $\Delta^0 = \{|x_i - x_i^0| < \alpha, i = 1, \ldots, n\}$, такую, что точки ($(n+1)$-мерные)

$$(\mathbf{x}, \lambda(\mathbf{x})) = (x_1, \ldots, x_n, \lambda(\mathbf{x})) \in \Delta', \quad \mathbf{x} \in \Delta^0. \tag{14}$$

Тогда функции $\varphi_i(\mathbf{x}, \lambda(\mathbf{x}))$, $\mathbf{x} \in \Delta^0$ будут непрерывно дифференцируемыми на Δ^0, и будут очевидно удовлетворяться тождества:

$$\begin{gathered} f_i(\mathbf{x}, \varphi_1(\mathbf{x}, \lambda(\mathbf{x})), \ldots, \varphi_{m-1}(\mathbf{x}, \lambda(\mathbf{x})), \lambda(\mathbf{x})) \equiv 0, \\ i = 1, \ldots, m-1, \quad \mathbf{x} \in \Delta^0. \end{gathered} \tag{15}$$

Существует бесконечное множество непрерывно дифференцируемых функций λ, которые подчиняются условию (14). Естественно попытаться среди них выбрать такую, чтобы для нее наряду с (15) выполнялось бы также тождество

$$f_m(\mathbf{x}, \varphi_1(\mathbf{x}, \lambda(\mathbf{x})), \ldots, \varphi_{m-1}(\mathbf{x}, \lambda(\mathbf{x})), \lambda(\mathbf{x})) \equiv 0, \quad \mathbf{x} \in \Delta^0. \tag{16}$$

Тогда, если положить

$$\psi_i(\mathbf{x}) = \varphi_i(\mathbf{x}, \lambda(\mathbf{x})), \quad \psi_m(\mathbf{x}) = \lambda(\mathbf{x}), \quad i = 1, \ldots, m-1, \quad \mathbf{x} \in \Delta^0, \tag{17}$$

то получим m непрерывно дифференцируемых функций

$$y_i = \psi_i(\mathbf{x}), \ \mathbf{x} \in \Delta^0, \ y_i^0 = \psi_i(\mathbf{x}^0), \qquad i = 1, \ldots, m, \tag{18}$$

удовлетворяющих системе (1).

Но это только план. Надо его осуществить.

Рассмотрим уравнение

$$F(\mathbf{x}, y_m) = f_m(\mathbf{x}, \varphi_1(\mathbf{x}, y_m), \ldots, \varphi_{m-1}(\mathbf{x}, y_m), y_m) = 0 \tag{19}$$

и отметим следующие три свойства функции $F(\mathbf{x}, y_m)$:

1) Функция $F(\mathbf{x}, y_m)$ определена на прямоугольнике Δ' и имеет там непрерывные частные производные, потому что этим свойством обладают функции (10), которые к тому же не выходят за пределы прямоугольника Δ точек $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$, где $f_m(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ непрерывно дифференцируема.

2) $$F(\mathbf{x}^0, y_m^0) = f_m(\mathbf{x}^0, \varphi_1(\mathbf{x}^0, y_m^0), \ldots, \varphi_{m-1}(\mathbf{x}^0, y_m^0), y_m^0) = f_m(\mathbf{x}^0, \mathbf{y}^0) = 0.$$

3) Частная производная

$$\frac{\partial F}{\partial y_m} \neq 0$$

на Δ'.

Свойство 3) вытекает из следующих рассуждений.

Дифференцируя (на Δ') функции (12) и (16) по y_m, получим

$$\frac{\partial f_j}{\partial y_1}\frac{\partial \varphi_1}{\partial y_m}+\ldots+\frac{\partial f_j}{\partial y_{m-1}}\frac{\partial \varphi_{m-1}}{\partial y_m}+\frac{\partial f_j}{\partial y_m}\equiv 0, \quad j=1,\ldots,m-1,$$

$$\frac{\partial F}{\partial y_m}=\frac{\partial f_m}{\partial y_1}\frac{\partial \varphi_1}{\partial y_m}+\ldots+\frac{\partial f_m}{\partial y_{m-1}}\frac{\partial \varphi_{m-1}}{\partial y_m}+\frac{\partial f_m}{\partial y_m}.$$

Поэтому, если прибавить к m-му столбцу определителя (2) i-е его столбцы, умноженные на $\frac{\partial \varphi_j}{\partial y_m}$, получим

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial y_1} \ldots \frac{\partial f_1}{\partial y_{m-1}} & \frac{\partial f_1}{\partial y_m} \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot \\ \frac{\partial f_m}{\partial y_1} \ldots \frac{\partial f_m}{\partial y_{m-1}} & \frac{\partial f_m}{\partial y_m} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial y_1} \ldots \frac{\partial f_1}{\partial y_{m-1}} & 0 \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot \\ \frac{\partial f_{m-1}}{\partial y_1} \ldots \frac{\partial f_{m-1}}{\partial y_{m-1}} & 0 \\ \frac{\partial f_m}{\partial y_1} \ldots \frac{\partial f_m}{\partial y_{m-1}} & \frac{\partial F}{\partial y_m} \end{vmatrix} \neq 0,$$

откуда, учитывая (8), $\frac{\partial F}{\partial y_m}\neq 0$.

Наша теорема при $m=1$ есть теорема 1′ § 7.16. Применим ее к функции $F(\mathbf{x}, y_m)$, заданной на области

$$\Delta' = \{|x_i - x_i^0| < \alpha, \quad i=1,\ldots,n; \quad |y_m - y_m^0| < \beta\}.$$

Условиями этой теоремы являются уже проверенные нами условия 1)—3). В силу этой теоремы, если уменьшить уже найденное $\beta>0$, то для него можно подобрать $\alpha>0$, вообще говоря, меньшее уже найденного α, так, что для полученного уменьшенного прямоугольника *) (мы его снова обозначаем через Δ') будут выполняться следующие утверждения в), г):

в) Существует на

$$\Delta^0 = \{|\mathbf{x} - x_i| < \alpha, \quad i=1,\ldots,n\}$$

непрерывно дифференцируемая функция

$$y_m = \lambda(\mathbf{x}) \qquad (\mathbf{x}\in\Delta^0, \; y_m^0 = \lambda(\mathbf{x}^0)) \tag{19}$$

такая, что точки ($(n+1)$-мерного пространства) $(\mathbf{x}, \lambda(\mathbf{x}))\in\Delta'$ $(\mathbf{x}\in\Delta^0)$ удовлетворяют уравнению $F(\mathbf{x}, \lambda(\mathbf{x}))\equiv 0$.

---

*) Утверждения а), б) сохраняются и для уменьшенного прямоугольника Δ'. Таким образом, мы считаем отныне, что уменьшенный прямоугольник Δ' фигурирует как в уже доказанных утверждениях а), б), так и в утверждениях в), г), которые формулируются ниже.

г) Если точка $(\mathbf{x}, y_m) \in \Delta'$ удовлетворяет уравнению $F(\mathbf{x}, y_m) = 0$, то необходимо: $\mathbf{x} \in \Delta^0$ и $y_m = \lambda(\mathbf{x})$.

Положим (см. (17))

$$\psi_i(\mathbf{x}) = \varphi_i(\mathbf{x}, \lambda(\mathbf{x})) \quad (i = 1, \ldots, m-1), \ \psi_m(\mathbf{x}) = \lambda(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Delta^0.$$

Тогда получим систему непрерывно дифференцируемых функций

$$y = \psi_i(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Delta^0, \quad y_i^0 = \psi_i(\mathbf{x}^0) \quad (i = 1, \ldots, m-1)$$

таких, что точки

$$(\mathbf{x}, \psi_1(\mathbf{x}), \ldots, \psi_i(\mathbf{x})) \in \Delta \quad (\mathbf{x} \in \Delta^0)$$

удовлетворяют всем уравнениям (1). Остается доказать единственность.

Пусть точка $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \Delta$ и удовлетворяет уравнениям системы (1). В частности, она удовлетворяет первым $(m-1)$ уравнениям системы (1) и потому на основании б)

$$(\mathbf{x}, y_m) \in \Delta', \ y_i = \varphi_i(\mathbf{x}, y_m) \quad (i = 1, \ldots, m-1). \tag{20}$$

В силу этого и в силу того, что точка $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ удовлетворяет и m-му уравнению системы (1),

$$f_m(\mathbf{x}, \varphi_1(\mathbf{x}, y_m), \ldots, \varphi_{m-1}(\mathbf{x}, y_m), y_m) = 0,$$

иначе говоря,

$$F(\mathbf{x}, y_m) = 0, \quad (\mathbf{x}, y_m) \in \Delta'.$$

Но тогда в силу г) имеет место связь $y_m = \lambda(\mathbf{x}) = \psi_m(\mathbf{x})$ и необходимо $\mathbf{x} \in \Delta^0$ и в силу (20) тоже необходимо

$$y_i = \varphi_i(\mathbf{x}, \lambda(\mathbf{x})) = \psi_i(\mathbf{x}) \quad (i = 1, \ldots, m-1).$$

Теорема доказана полностью, но только для прямоугольника Δ, имеющего вид (9). Переход к прямоугольнику вида (3) можно осуществить, учтя замечание 2.

Теорема 2. *Если к условиям теоремы* 1 *добавить, что функции f_j непрерывно дифференцируемы l раз на Ω, то функции $\psi_j(\mathbf{x})$, $\mathbf{x} \in \Delta^0$, $j = 1, \ldots, m$, решающие системы, непрерывно дифференцируемы l раз на Δ.*

Теорема доказывается аналогично теореме 2 § 7.16.

§ 7.18. Отображения

Пусть задана система непрерывно дифференцируемых функций

$$y_j = \varphi_j(\mathbf{x}) = \varphi_j(x_1, \ldots, x_m), \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad j = 1, \ldots, m, \tag{1}$$

где Ω — открытое множество точек $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_m)$.

Будем говорить, что система (1) определяет *непрерывно дифференцируемое отображение*

$$\mathbf{y} = A\mathbf{x}, \quad \mathbf{x} \in \Omega \tag{1'}$$

множества Ω на некоторое множество Ω' точек $y=(y_1, \ldots, y_m)$. Будем еще писать $\Omega'=A(\Omega)$, и называть Ω' *образом* Ω, а Ω — *прообразом* Ω' (посредством отображения A).

Наряду с A рассмотрим другое непрерывно дифференцируемое отображение, B:

$$z_j=\psi_j(\mathbf{y})=\psi_j(y_1, \ldots, y_m), \qquad \mathbf{y}\in\Lambda,\ j=1, 2, \ldots, m$$

открытого множества Λ точек $\mathbf{y}$ на некоторое множество точек $z=(z_1, \ldots, z_m)$. Таким образом, $\mathbf{z}=B\mathbf{y}$, $\mathbf{y}\in\Lambda$.

Если *) $\Omega'\subset\Lambda$, то имеет смысл сложное непрерывно дифференцируемое отображение $\mathbf{z}=BA\mathbf{x}$, $\mathbf{x}\in\Omega$, определяемое равенствами $z_j=\psi_j(\varphi_1(\mathbf{x}), \ldots, \varphi_m(\mathbf{x}))$, $\mathbf{x}\in\Omega$ $(j=1, \ldots, m)$.

Якобианы отображений A, B, BA связаны замечательными равенствами

$$\frac{D(z_1, \ldots, z_m)}{D(x_1, \ldots, x_m)}=\left|\frac{\partial z_i}{\partial x_j}\right|=\left|\sum_{s=1}^{m}\frac{\partial z_i}{\partial y_s}\frac{\partial y_s}{\partial x_j}\right|=$$
$$=\left|\frac{\partial z_i}{\partial y_s}\right|\left|\frac{\partial y_s}{\partial x_j}\right|=\frac{D(z_1, \ldots, z_m)}{D(y_1, \ldots, y_m)}\frac{D(y_1, \ldots, y_m)}{D(x_1, \ldots, x_m)}, \qquad (2)$$

доказательство которых, как мы видим, основано на применении формулы производной от сложной функции и правила умножения определителей.

В частности, если B обращает A на множестве точек $\mathbf{x}\in\Omega$, т. е. $\mathbf{x}=BA\mathbf{x}$, $\mathbf{x}\in\Omega$ есть тождественное отображение, то в силу того, что его якобиан равен 1, получим формулу

$$1=\frac{D(x_1, \ldots, x_m)}{D(y_1, \ldots, y_m)}\frac{D(y_1, \ldots, y_m)}{D(x_1, \ldots, x_m)}, \qquad \mathbf{x}\in\Omega. \qquad (3)$$

Будем теперь считать, что определяемое равенствами (1) непрерывно дифференцируемое отображение $\mathbf{y}=A\mathbf{x}$ имеет якобиан **) $\dfrac{D(y_1, \ldots, y_m)}{D(x_1, \ldots, x_m)}\neq 0$, $\mathbf{x}\in\Omega$, не равный нулю всюду на открытом множестве Ω. Имеют место следующие свойства:

1) $\Omega'=A(\Omega)$ — открытое множество (вместе с Ω!),

2) если Ω — область, то и Ω' — область,

3) отображение A локально взаимно однозначно, т. е. какова бы ни была точка $\mathbf{x}^0\in\Omega$, найдется шар $V\in\Omega$ с центром в ней, такой, что отображение A, рассматриваемое только на V, взаимно однозначно.

---

*) Отметим, что если $\mathbf{x}^0\in\Omega$ и $\mathbf{y}^0=A\mathbf{x}^0\in\Lambda$, то в силу непрерывности A найдется окрестность $V_{\mathbf{x}^0}$ точки $\mathbf{x}^0$, образ которой посредством A принадлежит к Λ. Уменьшая Ω, положив $\Omega=V_{\mathbf{x}^0}$, получим тогда, что $\Omega'\subset\Lambda$.

**) Случай, когда якобиан отображения (1) равен нулю, изучается в § 7.27.

Пусть $\mathbf{x}^0 \in \Omega$ и $\mathbf{y}^0 = A\mathbf{x}^0 \in \Omega'$. Введем пространство R_{2m} точек $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (x_1, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_m)$ и в нем рассмотрим уравнения

$$f_i(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \varphi_i(x_1, \ldots, x_m) - y_i = 0, \qquad i = 1, \ldots, m.$$

Точка $(\mathbf{x}^0, \mathbf{y}^0)$ удовлетворяет этим уравнениям и в ее некоторой окрестности (в R_{2m}) функции f_i непрерывно дифференцируемы и имеют якобиан

$$\frac{D(f_1, \ldots, f_m)}{D(x_1, \ldots, x_m)} = \frac{D(\varphi_1, \ldots, \varphi_m)}{D(x_1, \ldots, x_m)} \neq 0.$$

Поэтому в силу теоремы 1 предыдущего параграфа для любого $b_0 > 0$ найдутся положительные a и $b < b_0$ такие, что множество $\mathfrak{M}\Delta$ всех точек $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$, принадлежащих прямоугольнику

$$\Delta = \Delta_1 \times \Delta_2,$$

$$\Delta_1 = \{|y_j - y_j^0| < a, \quad j = 1, \ldots, m\},$$

$$\Delta_2 = \{|x_j - x_j^0| < b, \quad j = 1, \ldots, m\} \subset \Omega$$

и удовлетворяющих уравнениям (1), описывается непрерывно дифференцируемыми функциями

$$x_i = \psi_i(\mathbf{y}), \qquad \mathbf{y} \in \Delta_1 \ (i = 1, \ldots, m).$$

Поэтому $x \in \Delta_2$ при $\mathbf{y} \in \Delta_1$. Обозначим определяемое этими функциями непрерывно дифференцируемое отображение через $\mathbf{x} = B\mathbf{y}$, $\mathbf{y} \in \Delta_1$.

Сказанное можно выразить следующим образом:

а) если $\mathbf{y} \in \Delta_1$, то $\mathbf{x} = B\mathbf{y} \in \Delta_2$,

б) $\mathbf{y} = AB\mathbf{y}$, $\mathbf{y} \in \Delta_1$,

в) из того, что $\mathbf{x} \in \Delta_2$, $\mathbf{y} \in \Delta_1$ и $\mathbf{y} = A\mathbf{x}$, следует, что $\mathbf{x} = B\mathbf{y}$.

Пусть $B(\Delta_1) = \omega$. В силу а) $\omega \subset \Delta_2 \subset \Omega$. В силу б) $A(\omega) = \Delta_1 \subset \Omega'$.

Таким образом, любая точка $\mathbf{y}^0 \in \Omega'$ содержится в некотором открытом кубе $\Delta_1 \subset \Omega'$ и, следовательно, есть внутренняя точка Ω'. Мы доказали свойство 1): Ω' открытое множество.

В силу б) якобиан перехода от $\mathbf{y}$ к $\mathbf{x}$ посредством B не равен нулю [см. (3)] на открытом множестве Δ_1. Но тогда в силу уже доказанного свойства 1), которое надо применить вместо A, Ω соответственно к B, Δ_1, множество ω точек x открыто.

Итак, операция A отображает открытое множество ω на $\Delta_1 = \omega'$.

Пусть $\mathbf{x}'$ и $\mathbf{x}''$ — точки ω, для которых $A\mathbf{x}' = A\mathbf{x}'' = \mathbf{y}$. Тогда $\mathbf{x}' \in \omega \subset \Delta_2$, $\mathbf{y} \in \Delta_1$ и в силу в) $\mathbf{x}' = By$. Рассуждая аналогично, получим также $\mathbf{x}'' = By$, т. е. $\mathbf{x}' = \mathbf{x}''$. В частности, доказано

г) $BA\mathbf{x} = \mathbf{x}$, $\mathbf{x} \in \omega$.

Это показывает, что A отображает открытое множество ω на Δ_1 взаимно однозначно. В частности, A отображает любой шар $V \subset \omega$ с центром в $\mathbf{x}^0$ взаимно однозначно, что доказывает свойство 3).

Замечание. Свойства в) и г) выражают, что операции A и B взаимно обратны.

Пусть теперь Ω есть область; тогда по уже доказанному свойству 1) Ω' вместе с Ω открыто. Если теперь $\mathbf{y}'$, $\mathbf{y}'' \in \Omega'$ — произвольные точки, то им соответствуют некоторые точки $\mathbf{x}'$, $\mathbf{x}'' \in \Omega$ такие, что $A\mathbf{x}' = \mathbf{y}'$, $A\mathbf{x}'' = \mathbf{y}''$. Но Ω — связное множество, и найдется непрерывная кривая $\mathbf{x}(t) \in \Omega$, $0 \leqslant t \leqslant 1$ такая, что $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}'$, $\mathbf{x}(1) = \mathbf{x}''$, таким образом, принадлежащая Ω и соединяющая точки $\mathbf{x}'$, $\mathbf{x}$. Но тогда кривая $\mathbf{y}(t) = A[\mathbf{x}(t)]$, $0 \leqslant t \leqslant 1$ тоже, очевидно, непрерывна, принадлежит Ω' и соединяет $\mathbf{y}'$ с $\mathbf{y}''$. Следовательно, Ω' связно, т. е. область, и мы доказали свойство 2).

Свойство 3) утверждает только локальную взаимную однозначность, глобальной взаимной однозначности может и не быть. Например, преобразование $x = \rho\cos\theta$, $y = \rho\sin\theta$ полярных координат точек плоскости в декартовы при $\rho > 0$ и произвольном θ непрерывно дифференцируемо и имеет положительный якобиан, равный ρ. Оно отображает точки (ρ, θ) $(\rho > 0, -\infty < \theta < \infty)$ плоскости (ρ, θ) в точки (x, y), отличные от нулевой точки, локально взаимно однозначно. Однако каждой такой точке (x, y) соответствует хотя и одно ρ, но бесконечное число различных значений θ, отличающихся между собой на $2k\pi$ $(k = \pm 1, \pm 2, \ldots)$.

§ 7.19. Гладкая поверхность

Пусть R есть трехмерное пространство, где определена прямоугольная система координат (x, y, z).

Если G — открытое множество в плоскости (x, y) и

$$z = f(x, y) \qquad ((x, y) \in G) \tag{1}$$

— функция, имеющая на G непрерывные частные производные (первого порядка), то множество $S \subset R$, описываемое этой функцией, называется *гладкой поверхностью*.

Про эту поверхность мы будем говорить, что она проектируется на плоскость $z = 0$. Равенство (1) устанавливает взаимно однозначное соответствие $S \rightleftarrows G$ между точками $(x, y, z) \in S$ и точками $(x, y) \in G$.

Если G — ограниченная область (открытое связное множество) с границей γ, а частные производные $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$ не только непрерывны, но и равномерно непрерывны на G, то в этом случае фукцию f и ее частные производные можно продолжить по непрерывности на γ. Мы будем говорить, что продолженная таким образом функция $z = f(x, y)$ $((x, y) \in \overline{G})$ описывает *гладкий кусок* $\overline{S}$. Множество $\Gamma = \overline{S} - S$ называется *краем* S (*или* $\overline{S}$). Его проекция на плоскость $z = 0$ есть, очевидно, множество γ.

Если γ — кусочно гладкая кривая (контур)

$$x = \varphi(s), \; y = \psi(s) \qquad (0 \leqslant s \leqslant s_0),$$

то Γ есть в свою очередь кусочно гладкая кривая

$$x=\varphi(s),\quad y=\psi(s),\quad z=f(\varphi(s),\psi(s))\qquad (0\leqslant s\leqslant s_0).$$

В этом случае $\bar S$ будем называть *элементарным гладким куском.*

Если $A_0=(x_0, y_0, z_0)$ есть произвольная точка гладкой поверхности, описываемой уравнением (1), то в силу того, что G есть открытое множество, и в силу непрерывности f для любого $\delta_2>0$, можно указать такое $\delta_1>0$, что прямоугольник (прямоугольный параллелепипед)

$$\Delta=\{|x-x_0|\leqslant\delta_1,\quad |y-y_0|\leqslant\delta_1,\quad |z-z_0|\leqslant\delta_2\}\tag{2}$$

вырезает из S элементарный гладкий кусок σ:

$$z=f(x, y)\qquad ((x, y)\in\Delta'),\quad \Delta'=\{|x-x_0|\leqslant\delta_1,\quad |y-y_0|\leqslant\delta_1\}\subset G,$$

где, таким образом, Δ' есть проекция Δ на плоскость $z=0$.

Если A_0 есть точка края Γ элементарного гладкого куска S, то для нее можно только утверждать, что существует трехмерный прямоугольник Δ вида (2) с центром в A_0, вырезающий из $\bar S$ кусок ω, описываемый уравнением $z=f(x, y)$ $((x, y)\in\omega')$, где ω' — *часть* Δ'.

Понятия гладкой поверхности и гладкого куска распространяется по аналогии и на случаи, когда эти поверхности описываются уравнениями вида $x=\Psi(y, z)$ или $y=\Phi(z, x)$, т. е. когда они (взаимно однозначно) проектируются соответственно на плоскости $x=0$, $y=0$.

Распространим теперь эти понятия на поверхности, которые в целом вообще не проектируются ни на одну из координатных плоскостей.

Условимся говорить, что множество $S\subset R$ *есть гладкая поверхность*, если, какова бы ни была его точка $A^0=(x^0, y^0, z^0)$, можно указать (трехмерный) прямоугольник

$$\Delta=\{|x-x^0|\leqslant\delta_1,\ |y-y^0|\leqslant\delta_2,\ |z-z^0|\leqslant\delta_3\},$$

вырезающий из S элементарный гладкий кусок σ, который описывается по крайней мере одним из уравнений

$$\left.\begin{array}{ll} z=f_1(x, y) & \{|x-x^0|\leqslant\delta_1,\ |y-y^0|\leqslant\delta_2\},\\ x=f_2(y, z) & \{|y-y^0|\leqslant\delta_2,\ |z-z^0|\leqslant\delta_3\},\\ y=f_3(z, x) & \{|z-z^0|\leqslant\delta_3,\ |x-x^0|\leqslant\delta_1\}.\end{array}\right\}$$

Так как мы назвали σ элементарным гладким куском, то тем самым считали само собой разумеющимся, что функции f_1, f_2, f_3 имеют на соответствующих замкнутых прямоугольниках непрерывные частные производные.

Пусть, например, на открытом трехмерном множестве Ω задана произвольная функция $F(x, y, z)$, непрерывная вместе со своими частными производными первого порядка. Уравнение

$$F(x, y, z) = 0 \tag{3}$$

определяет некоторое множество S точек $(x, y, z) \in \Omega$. Если S непустое множество и

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^2 > 0 \quad \text{на} \quad S, \tag{4}$$

то S есть гладкая поверхность.

В самом деле, пусть $A_0 = (x_0, y_0, z_0) \in S$. В силу (4) одна из частных производных от F в точке A_0 не равна нулю; будем считать, что $\left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)_0 \neq 0$. Тогда в силу непрерывности частных производных от F, на основании теоремы о неявной функции (см. § 7.13, теорема 1′), существует трехмерный прямоугольник

$$\Delta = \{|x - x_0|,\ |y - y_0| \leqslant \delta;\ |z - z_0| \leqslant \lambda\}, \quad (\delta,\ \lambda > 0), \tag{5}$$

вырезающий из S часть σ, описываемую явно непрерывно дифференцируемой функцией

$$z = \psi(x, y), \qquad (x, y) \in \Delta',\ \Delta' = \{|x - x_0|,\ |y - y_0| \leqslant \delta\}, \tag{6}$$

т. е. σ — элементарный кусок.

Кусок σ (или поверхность S) имеет в точке A_0 касательную плоскость, определяемую уравнением [см. § 7.5, (13)]

$$z - z_0 = \left(\frac{\partial \psi}{\partial x}\right)_0 (x - x_0) + \left(\frac{\partial \psi}{\partial y}\right)_0 (y - y_0) \tag{7}$$

или, в силу равенств [см. § 7.16, (10′)]

$$\left(\frac{\partial \psi}{\partial x}\right)_0 = -\frac{\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_0}{\left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)_0}, \quad \left(\frac{\partial \psi}{\partial y}\right)_0 = -\frac{\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_0}{\left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)_0},$$

уравнением

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_0 (x - x_0) + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_0 (y - y_0) + \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)_0 (z - z_0) = 0. \tag{8}$$

Пример 1. Шаровая поверхность Λ

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2 \qquad (R > 0) \tag{9}$$

есть гладкая поверхность, потому что функция $F = x^2 + y^2 + z^2$ имеет непрерывные частные производные $F'_x = 2x$, $F'_y = 2y$, $F'_z = 2z$, одновременно не равные нулю на (непустом множестве) Λ. Касательная плоскость к Λ

в точке $(x_0, y_0, z_0) \in \Lambda$ имеет, очевидно, вид

$$x_0(x-x_0)+y_0(y-y_0)+z_0(z-z_0)=0.$$

Пример 2. Уравнение $x^2-y^2-z^2=0$ определяет круговой конус с вершиной в началe координат и осью, совпадающей с осью x.

Частные производные от функции $\Phi(x, y, z)=x^2-y^2-z^2$, равные $\Phi'_x=2x$, $\Phi'_y=-2y$, $\Phi'_z=-2z$, обращаются одновременно в нуль только в начале координат. Из геометрических соображений видно, что в начале координат конус не имеет касательной плоскости, во всех же остальных точках касательная плоскость к рассматриваемому конусу существует и непрерывно изменяется вместе с точкой, где она касается конуса.

С точки зрения введенной терминологии можно сказать, что круговой конус, если из него выбросить его вершину, есть гладкая поверхность.

Краем гладкой поверхности S называется множество $\Gamma=\bar{S}-S$, если оно непустое.

Функции

$$z=x^2+y^2 \qquad (-\infty<x,\ y<\infty),$$

$$z=\operatorname{tg} x \operatorname{tg} y \qquad (-\pi/2<x,\ y<\pi/2),$$

$$z=\sin x \qquad (-\infty<x<\infty)$$

описывает неограниченные гладкие поверхности без края. Третья из них определяется ограниченной функцией, но соответствующая поверхность (множество) не ограничена.

Шаровая поверхность S есть гладкое и в то же время замкнутое множество — она не имеет края. Если из S выкинуть принадлежащую ей точку A_0, то останется, очевидно, гладкая поверхность S с краем, состоящим из этой точки.

Часть поверхности S, являющуюся замыканием гладкой связной поверхности с кусочно гладким краем, будем называть *гладким куском* поверхности S.

Часть S_1 шаровой поверхности S [см. (9)], состоящая из точек (x, y, z) с $z>0$, есть гладкая поверхность. Ее край Γ есть окружность $x^2+y^2=R^2$, $z=0$. Замыкание $\bar{S}_1=S_1+\Gamma$ есть кусок (верхнее полушарие с краем), описываемый функцией $z=\sqrt{R^2-x^2-y^2}$ $(x^2+y^2\leqslant R^2)$. Эта функция непрерывна на круге $x^2+y^2\leqslant R^2$, но ее частные производные непрерывны только в открытом круге $x^2+y^2<R^2$ и неограничены вблизи его границы. Таким образом, $\bar{S}_1$, хотя и проектируется на плоскость (x, y), но соответствующая описывающая $\bar{S}_1$ функция не является непрерывно дифференцируемой вплоть до границы указанного круга. На другие координатные плоскости $\bar{S}_1$ не проектируется вовсе. Таким образом, $\bar{S}_1$ не является элементарным гладким куском. С другой стороны, легко видеть, что S (и $\bar{S}_1$) можно разрезать на конечное число элементарных гладких кусков.

Поверхность, если ее можно разрезать на конечное число элементарных гладких кусков, называется кусочно гладкой;

Поверхность *прямоугольника* (прямоугольного параллелепипеда) *кусочно гладкая*, но не гладкая.

Отметим, что гладкая поверхность определена нами так, что она есть по терминологии главы 17 двумерное дифференцируемое многообразие в R_3.

§ 7.20. Гладкая поверхность, заданная параметрически. Ориентируемая поверхность

Мы уже знаем, что гладкая поверхность может быть определена в явном (см., например, § 7.19, (1)) или неявном [см. § 7.19, (3)] виде. Больше того, произвольная гладкая поверхность по самому своему определению всегда локально выражается явно. Существует еще важный способ задания гладких поверхностей — *параметрический*.

Наряду с трехмерным пространством R, где задана прямоугольная система координат (x, y, z), введем еще плоскость W параметров u, v, где задана прямоугольная система координат (u, v). Пусть $\Omega \subset W$ — открытое множество и на нем заданы три функции от параметров u, v

$$x = \varphi(u, v), \quad y = \psi(u, v), \quad z = \chi(u, v) \quad ((u, v) \in \Omega) \tag{1}$$

или, что все равно, векторная функция

$$\mathbf{r} = \varphi\mathbf{i} + \psi\mathbf{j} + \chi\mathbf{k}. \tag{2}$$

Будем предполагать, что функции φ, ψ, χ имеют непрерывные частные производные на Ω и что выполняется неравенство

$$|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v|^2 = \left(\frac{D(x, y)}{D(u, v)}\right)^2 + \left(\frac{D(y, z)}{D(u, v)}\right)^2 + \left(\frac{D(z, x)}{D(u, v)}\right)^2 > 0 \quad ((u, v) \in \Omega). \tag{3}$$

Геометрическое место S точек (x, y, z), определяемое функциями (1), называют *поверхностью*. При этом тот факт, что S задана функциями (1) с указанными свойствами, мы будем выражать так: *поверхность S гладко задана параметрами* $(u, v) \in \Omega$.

Не всегда поверхность S, гладко заданная при помощи параметров, есть гладкая поверхность (дифференцируемое многообразие) в том смысле, как этот последний термин определен в предыдущем параграфе, но можно дать простой достаточный критерий для этого.

Именно, если уравнения (1) устанавливают взаимно однозначное соответствие $\Omega \ni (u, v) \rightleftarrows (x, y, z) \in S$, то система функций (1) определенных на любой области $\Omega' \subset \overline{\Omega}' \subset \Omega$, описывает гладкую поверхность (дифференцируемое многообразие).

Мы не доказываем здесь это утверждение. Оно не будет нужно для ближайших наших целей. Впрочем, оно доказано, даже в более общем виде, во II томе (см. § 17.1 лемма 1).

Отметим важный факт, вытекающий из неравенства (3). Пусть $(u^0, v^0) \in \Omega$ — произвольная фиксированная точка области параметров. Для нее один из определителей, входящих в (3), положителен, пусть для определенности первый. Тогда найдется окрестность $\omega \subset \Omega$ этой точки такая, что на ней первые два уравнения (1) однозначно разрешимы относительно (u, v). Подставив соответствующие функции от x, y в третье уравнение, получим, что некоторый кусок $\sigma \subset S$ описывается непрерывно дифференцируемой функцией $z = f(x, y)$, $\lambda \ni (x, y) \rightleftarrows (u, v) \in \omega$.

Этим доказано, что, какова бы ни была точка (u^0, v^0), существует ее окрестность $\omega \subset \Omega$ такая, что соответствующий ей кусок $\sigma \subset S$ проектируется (взаимно однозначно!) по крайней мере на одну из координатных плоскостей. Это локальное свойство поверхности, гладко заданной через свои параметры, является очень важным, но следует иметь в виду, что оно слабее того свойства, которому должна удовлетворять гладкая поверхность (дифференцируемое двумерное многообразие в пространстве R_3), как она была определена в предыдущем параграфе (см. пример 1).

Пример 1. На рис. 7.5 изображена поверхность S, которую можно себе представить как полученную из прямоугольного листка Δ бумаги $(0 < u < a,\ 0 < v < b)$ (рис. 7.6), который мы гладко скручиваем, позволив самопересечение по отрезкам $u = u_1$ и $u = u_2$. Реально такую поверхность можно осуществить, разрезав листок Δ на две части по прямой $u = u_2$, скрутив одну из частей и приклеив вторую часть так, как на рис. 7.5. Произвольной точке S припишем в качестве ее параметров (u, v) координаты соответствующей точки прямоугольника Δ. Но каждая точка отрезка $CD \subset S$ при этом будет соответствовать двум парам (u_1, v) и (u_2, v). Благодаря этому S может быть названа самопересекающейся (параметрически заданной) поверхностью. С точки зрения терминологии, принятой нами в предыдущем параграфе, поверхность S не является гладкой: любой прямоугольник (прямоугольный параллелепипед) с центром в какой-либо точке $P \in [C, D]$ вырезает из S часть, не проектирующуюся ни на одну из координатных плоскостей. С другой стороны, определенную точку $P \in [C, D]$ можно считать соответствующей двум точкам (u_1, v_0) и (u_2, v_0) плоскости (u, v). Обе они могут быть покрыты настолько малыми, принадлежащими плоскости (u, v), кружками с центрами в них, что им соответствуют куски $\sigma_1, \sigma_2 \subset S$, каждый из которых проектируется по крайней мере на одну из координатных плоскостей.

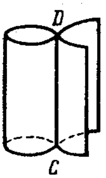

Рис. 7.5.

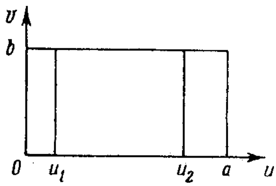

Рис. 7.6.

Интересно еще рассмотреть поверхность $S' \subset S$, соответствующую параметрам (u, v), пробегающим прямоугольник $\Delta' = \{0 < u < u_2,\ 0 < v < b\}$. Из рис. 7.5 видно, что S' есть параметрически заданная поверхность без самопересечений: имеет место взаимно однозначное соответствие $S' \rightleftarrows \Delta'$. Но все равно точки $P \in [C, D]$ являются особенными для S': в любых как угодно малых (трехмерных) окрестностях Ω таких точек принадлежащие им части $S'\Omega$ не проектируются ни на одну из координатных плоскостей. Таким образом, S', так же, как S, не является гладкой поверхностью.

Замечание. По другой терминологии гладкой поверхностью S' называют совокупность точек (x, y, z), упорядоченную при помощи параметров (u, v) посредством равенств (1), где φ, ψ, χ — непрерывно дифференцируемые функции, подчиняющиеся неравенству (3). Согласно этой терминологии точки (x, y, z), соответствующие разным парам (u, v), считаются разными элементами S, хотя, быть может, эти элементы определяют одну и ту же геометрическую точку (x, y, z).

Заменим параметры (u, v) поверхности S параметрами (u', v');

$$u = \lambda(u', v'), \qquad v = \mu(u', v') \qquad ((u', v') \in \Omega' \rightleftarrows \Omega), \tag{4}$$

где λ и μ — непрерывно дифференцируемые функции с якобианом

$$\frac{D(u', v')}{D(u, v)} \neq 0 \qquad ((u, v) \in \Omega'), \tag{5}$$

а отображение (4) приводит во взаимно однозначное соответствие открытое множество Ω' параметров (u', v') с открытым же (см. § 7.18) множеством Ω параметров (u, v). В результате получим уравнения S, выраженные через параметры (u', v'):

$$\left.\begin{aligned} x &= \varphi_1(u', v') = \varphi(\lambda(u', v'), \mu(u', v')), \\ y &= \psi_1(u', v') = \psi(\lambda(u', v'), \mu(u', v')), \\ z &= \chi_1(u', v') = \chi(\lambda(u', v'), \mu(u', v'))\ ((u', v') \subset \Omega'), \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

где φ_1, ψ_1, χ_1 — функции, непрерывно дифференцируемые на Ω', и где выполняются неравенства

$$|\dot{\mathbf{r}}_{u'} \times \dot{\mathbf{r}}_{v'}|^2 = \left(\frac{D(x, y)}{D(u', v')}\right)^2 + \left(\frac{D(y, z)}{D(u', v')}\right)^2 + \left(\frac{D(z, x)}{D(u', v')}\right)^2 =$$
$$= |\dot{\mathbf{r}}_u \times \dot{\mathbf{r}}_v| \left(\frac{D(u, v)}{D(u', v')}\right)^2 > 0 \qquad ((u', v') \in \Omega'). \tag{7}$$

Новые параметры (u', v') с указанными выше свойствами мы будем называть *допустимыми параметрами поверхности* S.

Рассмотрим гладкую поверхность S, заданную параметрически при помощи уравнений (1) с указанными там свойствами. В любой точке она имеет касательную плоскость и нормаль. Чтобы получить выражение для нормали в терминах вектора $\mathbf{r} = \varphi\mathbf{i} + \psi\mathbf{j} + \chi\mathbf{k}$, можно рассуждать следующим образом.

Вектор $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v)$ при фиксированном значении параметра v описывает кривую, соответствующую изменению параметра u. Вектор $\dot{\mathbf{r}}_u$ направлен по касательной к этой кривой. Аналогично вектор $\dot{\mathbf{r}}_v$ направлен по касательной к другой кривой, которая описывается вектором $\mathbf{r}$, когда u фиксировано, а v меняется.

Если считать векторы $\dot{\mathbf{r}}_u$, $\dot{\mathbf{r}}_v$ выходящими из точки (u, v) поверхности S, то они определяют проходящую через них плоскость, касательную к S в точке (u, v). Из условия (3) следует, что векторы $\dot{\mathbf{r}}_u$, $\dot{\mathbf{r}}_v$ не коллинеарны. Нормаль к S в точке u, v определяется вектором

$$\dot{\mathbf{r}}_u \times \dot{\mathbf{r}}_v = \left(\frac{\partial\psi}{\partial u}\frac{\partial\chi}{\partial v} - \frac{\partial\psi}{\partial v}\frac{\partial\chi}{\partial u}\right)\mathbf{i} + \left(\frac{\partial\chi}{\partial u}\frac{\partial\varphi}{\partial v} - \frac{\partial\chi}{\partial v}\frac{\partial\varphi}{\partial u}\right)\mathbf{j} + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial u}\frac{\partial\psi}{\partial v} - \frac{\partial\varphi}{\partial v}\frac{\partial\psi}{\partial u}\right)\mathbf{k}. \tag{8}$$

При этом можно определить две единичные, *непрерывно зависящие от* $(u, v) \in \Omega$ *нормали*:

$$\mathbf{n} = \pm \frac{\dot{\mathbf{r}}_u \times \dot{\mathbf{r}}_v}{\left|\dot{\mathbf{r}}_u \times \dot{\mathbf{r}}_v\right|} \qquad ((u, v) \in \Omega). \tag{9}$$

Знаку «+» соответствует одна сторона поверхности S со щеткой выпущенных в ее сторону единичных векторов, непрерывно зависящих от (u, v), а знаку «−» — другая сторона S.

Дадим следующее определение. Если из каждой точки A гладкой поверхности S можно выпустить единичную нормаль $\mathbf{n}(A)$ так, что полученная векторная функция от A будет непрерывной на всей поверхности S, то S называется *ориентируемой поверхностью*.

Поверхность, для которой определена такая функция $\mathbf{n}(A)$, называется *ориентированной* [при помощи $\mathbf{n}(A)$]. Если мы будем говорить, что S есть ориентированная гладкая поверхность, то тем самым будем считать, что S обозначает не только поверхность (множество), но и тот факт, что на ней задана указанная непрерывная на S функция $\mathbf{n}(A)$. Говорят еще, что функция $\mathbf{n}(A)$ задает определенную сторону ориентируемой гладкой поверхности [куда выходит из S щетка единичных векторов $\mathbf{n}(A)$, непрерывно зависящих от A].

Ту же поверхность, но ориентированную противоположным образом, надо уже обозначать другой буквой. Две такие противоположно ориентированные поверхности удобно обозначать буквами S_+ и S_-. Одна из них произвольно обозначается через S_+, а другая автоматически получает обозначение S_-.

Шаровая поверхность ориентируема — выпущенный из какой-либо ее точки единичный вектор во вне шара, очевидно, непрерывно продолжается на всю поверхность. Этим шаровая поверхность ориентирована. Другая, противоположная, ориентация шаровой поверхности определяется единичным нормальным к ней вектором, направленным внутрь соответствующего шара.

Выше мы видели, что если S есть гладкая поверхность, определенная параметрически уравнениями (1) с указанными там свойствами, то она ориентируема. Знаку «+» в формуле (9) соответствует некоторая ориентация S, а знаку «−» будет тогда соответствовать противоположная ориентация.

Вообще же существуют гладкие поверхности, неориентируемые (см. следующий параграф).

После сказанного можно утверждать, что *всякая неориентируемая гладкая поверхность не может быть задана параметрически при помощи единой системы уравнений* (1) *с указанными там ограничениями, налагаемыми на функции* φ, ψ, χ.

С другой стороны, мы знаем, что если S есть гладкая поверхность, то по самому ее определению для каждой ее точки A_0 найдется прямоугольник Δ с центром в ней, вырезывающий из S кусок σ, описываемый явно функцией, пусть $z = f(x, y)$, $(x, y) \in \in \Delta'$, непрерывно дифференцируемой на соответствующей проекции Δ. Ясно, что кусок σ имеет две стороны, определяемые нормалью $\mathbf{n} = (n_x, n_y, n_z)$, где

$$n_x = \mp \frac{p}{\sqrt{1+p^2+q^2}},\ n_y = \mp \frac{q}{\sqrt{1+p^2+q^2}},\ n_z = \pm \frac{1}{\sqrt{1+p^2+q^2}},$$

$$\left(p = \frac{\partial f}{\partial x},\ q = \frac{\partial f}{\partial y}\right).$$

Верхним знакам в этих равенствах соответствует верхняя сторона куска σ, а нижним — нижняя сторона.

Поэтому можно сказать, что *всякая гладкая поверхность локально ориентируема.*

Пример 2. Шаровая поверхность. Уравнения (см. § 12.19)

$$x = R\cos\theta\cos\varphi,\ y = R\cos\theta\sin\varphi,\ z = R\sin\theta,\ -\infty < \theta,\ \varphi < \infty, \tag{10}$$

где $R > 0$ — заданное число, определяют при помощи полярных угловых параметров θ, φ шаровую поверхность S радиуса R с центром в нулевой точке, в чем легко убедиться, если исключить из этих уравнений θ и φ.

Область G изменения параметров (θ, φ) является вся плоскость. Правые части уравнений (10) — непрерывно дифференцируемые функции от θ, φ. Вычисления показывают, что

$$|\dot{\mathbf{r}}_\theta \times \dot{\mathbf{r}}_\varphi| = R^2|\cos\theta|. \tag{11}$$

Из (11) мы видим, что нельзя сказать, что шаровая поверхность S задана гладко параметрами θ, φ на всей плоскости этих параметров. Из последней надо исключить точки (θ, φ), у которых $\cos\theta = 0$. Но это недостаток не поверхности, а ее параметрического представления. Как мы знаем (см. предыдущий параграф), S есть гладкая поверхность и ее полюсы, соответствующие значениям $\theta = \pm\pi/2$, не являются исключительными.

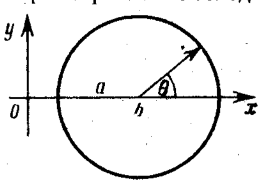

Рис. 7.7.

Параметрическое представление (10) самопересекается потому, что мы не ограничили в нем множество параметров. Более экономно считать его заданным на множестве $-\pi/2 < \theta < \pi/2$, $a \leqslant \varphi < a + 2\pi$, где a — некоторое действительное число. Это множество при помощи (10) отображается взаимно однозначно на шаровую поверхность S, из которой выколоты два ее полюса. На этом множестве $|\dot{\mathbf{r}}_\theta \times \dot{\mathbf{r}}_\varphi| > 0$.

Пример 3. Тор. В плоскости (x, y) зададим окружность радиуса a с центром в точке $(b, 0)$ $(0 < a < b)$. Вращение ее как твердого тела в пространстве (x, y, z) вокруг оси y приводит к поверхности T, называемой *тором*. Пусть θ есть величина угла, изображенного на рис. 7.7, и φ — угол, на который повернута вокруг оси y плоскость нашей окружности. Поверхность T выражается через параметры (θ, φ) так:

$$x = (b + a\cos\theta)\cos\varphi,\quad y = a\sin\theta,\quad z = (b + a\cos\theta)\sin\varphi$$
$$(0 \leqslant \theta,\ \varphi < 2\pi). \tag{12}$$

В декартовых координатах уравнение T имеет вид

$$\Phi = (\sqrt{x^2 + z^2} - b)^2 + y^2 - a^2 = 0.$$

При этом на T

$$\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\Phi}{\partial z}\right)^2 = 4\left(\sqrt{x^2 + z^2} - b\right)^2 + 4y^2 > 0.$$

Это показывает (см. § 7.19), что T есть гладкая поверхность, что, впрочем интуитивно очевидно.

§ 7.21. Пример неориентируемой поверхности. Лист Мёбиуса *)

Возьмем прямоугольный лист бумаги (рис. 7.8), который мы будем мыслить без отрезков aa', bb', составляющих части его границ. Перекрутим его один раз и его стороны ab и $a'b'$ склеим так, чтобы точки a, b' и b, a' склеились попарно (рис. 7.9). Полученная поверхность есть *лист Мёбиуса*. Интуитивно ясно, что это будет гладкая поверхность, если скручивать листок гладко, не ломая бумаги. Не так уж трудно, хотя и несколько громоздко, осуществить такую конструкцию при помощи формул, но мы это не будем делать, полагаясь на интуицию читателя. На рис. 7.8 отмечен отрезок cc' — средняя линия прямоугольного листа бумаги. Этой линии на листе Мёбиуса соответствует замкнутая кривая cc' (не изображенная на рис. 7.9), у которой точки c и c' слились

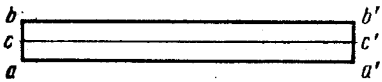

Рис. 7.8.

Рис. 7.9.

в одну точку. Выпустим из c единичную нормаль $\mathbf{n}(c)$ произвольным, но определенным образом. Раз направление $\mathbf{n}(c)$ выбрано (среди двух возможных), то этим уже детерминированно определяется выбор $\mathbf{n}(A)$ для всех точек $A \in cc'$, если мы хотим, чтобы вектор $\mathbf{n}(A)$ непрерывно зависел от A. Однако в точке c' вектор $\mathbf{n}(c')$ уже выбран — ведь c и c' совпадают. Легко видеть, что если точку средней линии прямоугольника непрерывно двигать от c к c', то единичная нормаль $\mathbf{n}(A)$, где A — точка листа Мёбиуса, соответствующая c, будет стремиться к $-\mathbf{n}(c)$, а не к $\mathbf{n}(c)$, и, следовательно, вектор-функция $\mathbf{n}(A)$ оказывается разрывной в точке $c = c' \in S$.

*) А. Ф. Мёбиус (1790—1868) — немецкий геометр.

§ 7.22. Локальный относительный экстремум

Пусть Ω есть открытое множество n-мерного пространства и $f, \varphi_1, \ldots, \varphi_m$ $(1 \leqslant m < n)$ — определенные на Ω функции.

Обозначим через E множество точек $\mathbf{x}$, для которых выполняются одновременно равенства (связи):

$$\varphi_j(\mathbf{x}) = 0 \qquad (j = 1, \ldots m;\ m < n). \tag{1}$$

По определению, точка $\mathbf{x}_0 \in \Omega$ есть *точка локального относительного максимума (минимума) функции* f при наличии связей (1), если $\mathbf{x}^0 \in E$ и существует $\delta > 0$ такое, что для всех $\mathbf{x} \in E$, удовлетворяющих неравенству $|\mathbf{x} - \mathbf{x}^0| = \sqrt{\sum_1^n (x_k - x_k^0)^2} < \delta$, имеет место $f(\mathbf{x}) \leqslant f(\mathbf{x}^0)$ (в случае максимума) и $f(\mathbf{x}) \geqslant f(\mathbf{x}^0)$ (в случае минимума).

Точка локального относительного максимума или минимума называется *точкой локального относительного экстремума.*

Займемся сначала выяснением вопроса о необходимых условиях, чтобы $\mathbf{x}^0$ была точкой локального относительного экстремума.

Будем предполагать, что в окрестности точки $\mathbf{x}^0$ функции $f, \varphi_1, \ldots, \varphi_n$ имеют непрерывные частные производные. Больше того, будем предполагать, что в точке $\mathbf{x}^0$ ранг матрицы $\left\| \left(\frac{\partial \varphi_j}{\partial x_k} \right)_0 \right\|$ $(j = 1, \ldots, m,\ k = 1, \ldots, n)$ равен m. Таким образом, среди определителей порядка m, порождаемых этой матрицей, имеется не равный нулю. Для определенности будем считать, что это есть определитель

$$\frac{D(\varphi_1, \ldots, \varphi_m)}{D(x_1, \ldots, x_m)_0} = \begin{vmatrix} \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1}\right)_0 & \ldots & \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_m}\right)_0 \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \left(\frac{\partial \varphi_m}{\partial x_1}\right)_0 & \ldots & \left(\frac{\partial \varphi_m}{\partial x_m}\right)_0 \end{vmatrix} \neq 0. \tag{2}$$

Мы считаем, что символ $(\quad)_0$ обозначает тот факт, что в функцию, стоящую в скобках, вместо $\mathbf{x}$ подставлено $\mathbf{x}^0$. На основании теоремы о неявных функциях существует прямоугольник

$$\Delta = \Delta' \times \Delta'', \tag{3}$$

$$\Delta' = \{|x_j - x_j^0| < \delta,\ j = 1, \ldots, m\},$$

$$\Delta'' = \{|x_i - x_i^0| < \sigma,\ i = m+1, \ldots, n\}$$

и (единственные) непрерывно дифференцируемые функции $x_j = \mu_j(x_{m+1}, \ldots, x_n)$ $(j = 1, \ldots, m)$, определенные на Δ'', удовлетворяющие равенствам (1):

$$\varphi_j(\mu_1, \ldots, \mu_m, x_{m+1}, \ldots, x_n) = 0 \qquad (j = 1, \ldots, m).$$

При этом $|\mu_j - x_j^0| < \delta$ $(j = 1, \ldots, m)$.

Подставим в f вместо $x_1, \ldots, x_m$ соответствующие функции $\mu_1, \ldots, \mu_m$. Тогда f будет функцией только от $(n-m)$ переменных $x_{m+1}, \ldots, x_n$, независимых между собой:

$$f(\mu_1, \ldots, \mu_m, x_{m+1}, \ldots, x_n) = \Phi(x_{m+1}, \ldots, x_n).$$

Очевидно, что если f достигает локального максимума или минимума (относительного) в $\mathbf{x}^0 = (x_1^0, \ldots, x_n^0)$, то $\Phi(x_{m+1}, \ldots, x_n)$ достигает в точке $(x_{m+1}^0, \ldots, x_n^0)$ локального абсолютного максимума (минимума). Но тогда, как мы знаем, точка $(x_{m+1}^0, \ldots, x_n^0)$ должна быть стационарной для функции Φ, т. е. выполняются равенства

$$\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x_l}\right)_0 = 0 \qquad (l = m+1, \ldots, n). \tag{4}$$

Здесь знак $(\quad)_0$ теперь уже означает, что в функции, стоящей в скобках, полагается $x_{m+1} = x_{m+1}^0, \ldots, x_n = x_n^0$. Мы думаем, что такое двоякое обозначение к путанице не приведет.

Равенства (4) эквивалентны одному равенству

$$d\Phi = \sum_{j=m+1}^{n} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x_j}\right)_0 dx_j = 0, \tag{4'}$$

которое должно быть верным для произвольных (независимых между собой) $dx_{m+1}, \ldots, dx_n$. В самом деле, из (4) следует (4′) при любых $dx_{m+1}, \ldots, dx_n$. Обратно, если верно (4′) для любых дифференциалов $dx_{m+1}, \ldots, dx_n$, то, в частности, оно верно, когда один из этих дифференциалов равен 1, а остальные равны нулю, а это приводит к равенствам (4).

По определению точка $x^0 \in E$ называется *стационарной точкой функции f при наличии связей* (1), если для нее выполняются равенства (4), или, что все равно, как мы выяснили, если выполняется одно равенство (4′) для любых независимых между собой dx_l $(l = m+1, \ldots, n)$.

Это определение, очевидно, эквивалентно следующему:

Точка $\mathbf{x}^0 \in E$ называется *стационарной точкой f при наличии связей* (1), если для нее полный дифференциал

$$df = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial x_k}\right)_0 dx_k = 0 \tag{5}$$

для всех dx_k, удовлетворяющих линейным связям

$$\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{\partial \varphi_j}{\partial x_k}\right)_0 dx_k = 0 \qquad (j = 1, \ldots, m). \tag{6}$$

В самом деле, в силу инвариантного свойства дифференциала $df = d\Phi$, где входящие в df (зависимые) дифференциалы $dx_1, \ldots$ $\ldots, dx_m$ соответственно равны

$$dx_k = \sum_{j=m+1}^{n} \frac{\partial \mu_k}{\partial x_j} dx_j \qquad (k = 1, \ldots, m).$$

Но последние вместе с независимыми дифференциалами $dx_{m+1}, \ldots$ $\ldots, dx_n$ связаны соотношениями (6).

Приведенные рассуждения попутно дают способ отыскания стационарной точки. Он сводится к решению $n - m$ уравнений (4) относительно $(x_{m+1}, \ldots, x_n)$. Однако предварительно надо было еще решить уравнения (1) относительно $x_1, \ldots, x_m$. Этот способ в сколько-нибудь сложных случаях является неудобным. Более простым является способ, называемый *методом множителей Лагранжа.*

Метод множителей Лагранжа (отыскания стационарных точек) заключается в том, что вводится вспомогательная функция

$$F(x) = f(\mathbf{x}) - \sum_{1}^{m} \lambda_i \varphi_j(\mathbf{x}) \tag{7}$$

от независимых переменных $x = (x_1, \ldots, x_n)$, *где* λ_j — *постоянные числа (множители Лагранжа), подлежащие определению вместе с координатами неизвестной стационарной точки* x^0. *Сначала задаются произвольные числа* $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ *и для соответствующей им функции* $F(x)$ *от независимых переменных (не связанных связями (1)) решается задача на абсолютный экстремум. Точнее, приравниваются к нулю все ее частные производные:*

$$\frac{\partial F}{\partial x_k} = \frac{\partial f}{\partial x_k} - \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_k} = 0 \qquad (k = 1, \ldots, n). \tag{8}$$

К полученной системе (8) *из* n *уравнений присоединяется еще система* (1) *из* m *уравнений связи. Совокупная система из* $n + m$ *уравнений решается затем относительно* $n + m$ *неизвестных* $x_1, \ldots$ $\ldots, x_n, \lambda_1, \ldots, \lambda_m$. *Оказывается, что каждому решению* $x_1^0, \ldots, x_n^0$, $\lambda_1^0, \ldots, \lambda_m^0$ *соответствует стационарная точка* $\mathbf{x}^0 = (x_1^0, \ldots, x_n^0)$ *задачи и, наоборот, если* $\mathbf{x}^0$ *есть стационарная точка, то ей соответствует единственная система множителей* $\lambda_1^0, \ldots, \lambda_m^0$ *такая, что составленные для них уравнения* (8) *удовлетворяются при* $\mathbf{x} = \mathbf{x}^0$.

Введем n-мерные векторы

$$(\operatorname{grad} f)_0 = \left\{\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)_0, \ldots, \left(\frac{\partial f}{\partial x_n}\right)_0\right\}, \tag{9}$$

$$(\operatorname{grad} \varphi_j)_0 = \left\{\left(\frac{\partial \varphi_j}{\partial x_1}\right)_0, \ldots, \left(\frac{\partial \varphi_j}{\partial x_n}\right)_0\right\} \qquad (j = 1, \ldots, m). \tag{10}$$

Факт, что $\mathbf{x}^0$ есть стационарная точка, можно выразить так. Из того, что вектор $(dx_1, \ldots dx_n)$ ортогонален ко всем векторам $(\operatorname{grad} \varphi_i)_0$ $(i = 1, \ldots, m)$, т. е. из того, что удовлетворяется система (6), следует, что удовлетворяется равенство (5), т. е. вектор $(dx_1, \ldots, dx_n)$ ортогонален к вектору $(\operatorname{grad} f)_0$. Но тогда, как известно из линейной алгебры (см. ниже лемму), существует m чисел $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ таких, что

$$(\operatorname{grad} f)_0 = \lambda_1 (\operatorname{grad} \varphi_1)_0 + \ldots + \lambda_m (\operatorname{grad} \varphi_m)_0. \tag{11}$$

Иначе говоря, при $\mathbf{x} = \mathbf{x}^0$ выполняются равенства (1) и (8) и мы доказали наше утверждение в одну сторону. Наоборот, если при $\mathbf{x} = \mathbf{x}^0$ при некоторых числах $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ выполняются равенства (8), т. е. векторное равенство $(\operatorname{grad} f)_0 = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i (\operatorname{grad} \varphi_i)_0$, то из того, что выполняются равенства (6), т. е. из того, что вектор $(dx_1, \ldots \ldots, dx_n)$ ортогонален к векторам (10), следует, очевидно, что он ортогонален к вектору (9), т. е. что выполняется равенство (5), и мы доказали утверждение в обратную сторону.

Выяснение вопроса о том, будет ли данная стационарная точка $\mathbf{x}^0$ точкой относительного экстремума и какого (максимума или минимума), тоже удобно проводить, рассматривая лагранжеву функцию F. Будем считать, что в точке $\mathbf{x}^0$ якобиан (2) не равен нулю. Тогда в силу связей (1) можно считать, что переменные $x_{m+1}, \ldots, x_n$ в окрестности $\mathbf{x}^0$ независимы (между собой), а переменные $x_1, \ldots, x_m$ от них зависят. Для симметрии можно считать, что все переменные $x_1, \ldots, x_n$ — зависимые (от $x_{m+1}, \ldots, x_n$). На основании теории локального абсолютного экстремума достаточные условия максимума можно получить, исследуя второй дифференциал $d^2 f_0$ в точке $\mathbf{x}^0$, считая $x_{m+1}, \ldots, x_n$ независимыми. Мы знаем, что $f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) - \sum_{k=1}^{m} \lambda_k \varphi_k(\mathbf{x}) = F(\mathbf{x})$ для всех $\mathbf{x}$, удовлетворяющих связям (1). Поэтому для этих $\mathbf{x}$ $df = dF = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial x_k} dx_k$ для всех dx_k, удовлетворяющих связям (6), и

$$d^2 f = d^2 F = \sum_{k=1}^{n} \sum_{l=1}^{n} \frac{\partial^2 F}{\partial x_k \partial x_l} dx_k dx_l + \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial x_k} d^2 x_k$$

для всех dx_k, $d^2 x_k$, удовлетворяющих связям (6) и вытекающим из них связям после их дифференцирования *). Подставим в эти равенства стационарную точку $\mathbf{x}^0$ и будем считать, что λ_i — ее множители Лагранжа. Тогда $\left(\frac{\partial F}{\partial x_k}\right)_0 = 0$, и мы получим равенство

$$d^2f_0 = \sum_{k=1}^{n} \sum_{l=1}^{n} \left(\frac{\partial^2 F}{\partial x_k \partial x_l}\right)_0 dx_k dx_l,$$

верное для всех dx_k, подчиняющихся связям (6).

Полученный результат можно сформулировать так. Пусть надо вычислить второй дифференциал d^2f_0 от функции f в ее стационарной точке $\mathbf{x}^0$ при наличии связей $\varphi_j = 0$ $(j = 1, \ldots, m)$. Для этого определяется лагранжева функция $F = f - \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \varphi_j$ и вычисляется ее второй дифференциал $d^2F_0 = \sum_{k=1}^{n} \sum_{l=1}^{n} \left(\frac{\partial^2 F}{\partial x_k \partial x_l}\right)_0 dx_k dx_l$, формально считая, что $x_1, \ldots, x_n$ — независимы. Тогда имеет место равенство

$$d^2f_0 = d^2F_0, \tag{12}$$

справедливое, каковы бы ни были dx_k $(k = 1, \ldots, n)$, подчиняющиеся линейным связям (6). В этом смысле исследование d^2f_0 может быть сведено к исследованию d^2F_0.

Допустим, что d^2F_0 есть строго положительная форма, т. е. $d^2F_0 > 0$, каковы бы ни были (независимые между собой) dx_k, не равные нулю одновременно. Зададим $dx_{m+1}, \ldots, dx_n$, одновременно не равные нулю; через связи (6) им соответствуют вполне определенные значения $dx_1, \ldots, dx_m$; получим систему $dx_1, \ldots, dx_n$ дифференциалов, одновременно не равных нулю; им соответствует $d^2F_0 > 0$, но тогда и $d^2f_0 > 0$, т. е. квадратичная форма d^2f_0 от переменных $dx_{m+1}, \ldots, dx_n$ (которая явно нигде не писалась) строго положительная. В таком случае f, как функция независимых между собой переменных $x_{m+1}, \ldots, x_n$, достигает в $\mathbf{x}^0$ локального абсолютного минимума или, что все равно, f, как функция от $x_1, \ldots, x_n$, достигает в $\mathbf{x}^0$ локального относительного минимума при наличии связей (1). Подобным образом можно заключить, что если d^2F_0 есть отрицательно определенная форма, то f имеет в $\mathbf{x}^0$ локальный относительный максимум.

Но могут быть более сложные случаи, когда d^2F_0 не есть определенная форма, но она делается определенной, если дифференциалы $dx_1, \ldots, dx_n$ подчиняются связям (6). В этом случае применение равенства (12) также удобно при этом методе.

---

*) Имеются в виду связи $\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 \varphi_k}{\partial x_i \partial x_j} dx_i dx_j + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_i} d^2x_i = 0$ $(k = 1, \ldots, m)$.

Схема решения задачи на относительный экстремум на области Ω сводится к следующему.

Выделяется на Ω подмножество Ω_1 точек x, в которых функции $f, \varphi_1, \ldots, \varphi_m$ имеют непрерывные частные производные, а матрица $\left\|\frac{\partial\varphi_j}{\partial x_k}\right\|$ имеет ранг m. На Ω_1 описанным выше способом находятся стационарные точки. Каждая из них затем исследуется на экстремум. Если в ней существуют непрерывные частные производные второго порядка, то может оказаться эффективным метод исследования второго дифференциала функции Лагранжа F. Если теория приводит к сомнительному случаю, то требуется специальное исследование. Конечно, и точки $\mathbf{x} \in \Omega - \Omega_1$ требуют также специального исследования.

Пример 1. Найдем локальные экстремумы функции $f(x, y) = xy$ на окружности (Г):

$$\varphi(x, y) = x^2 + y^2 - 1 = 0. \tag{13}$$

Функции f и φ дважды непрерывно дифференцируемы на всей плоскости. Кроме того, ранг матрицы

$$\left\|\frac{\partial\varphi}{\partial x}, \frac{\partial\varphi}{\partial y}\right\| = \| 2x, 2y \|$$

равен 1 (т. е. количеству связей) на всей плоскости x, y, за исключением точки $(0, 0)$. Но последняя не находится на Г. Следовательно, точки, где возможен локальный экстремум, находятся только среди стационарных точек.

Приравнивая нулю частные производные функции Лагранжа задачи $F(x, y) = xy - \lambda(x^2 + y^2 - 1)$, получим уравнения

$$\frac{\partial F}{\partial x} = y - 2\lambda x = 0; \quad \frac{\partial F}{\partial y} = x - 2\lambda y = 0. \tag{14}$$

Решая их вместе с уравнением (13), получим четыре пары стационарных точек $x = \pm 1/\sqrt{2}$, $y = \pm 1/\sqrt{2}$, соответствующих всевозможным распределениям «+» и «—». Паре $x_1 = y_1 = 1/\sqrt{2}$ соответствуют $\lambda_1 = 1/2$ и лагранжева функция

$$F(x, y) = xy - (x^2 + y^2 - 1)/2.$$

Второй дифференциал от F в точке (x_1, y_1) имеет вид $d^2F = -dx^2 + 2dx\,dy - dy^2 = -(dx - dy)^2$. В силу (13)

$$2x\,dx + 2y\,dy = 0,$$

откуда $dy = -dx$, и окончательно

$$d^2F = -(2dx)^2 = -4dx^2,$$

где dx — независимый дифференциал. Следовательно, в точке (x_1, y_1) имеет место локальный относительный максимум задачи, равный $f(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}) = 1/2$. Легко заключить, используя симметрические свойства f, что в точке $(-1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2})$ имеет место другой локальный относительный максимум, равный $1/2$.

Так как окружность Г есть ограниченное замкнутое множество и непрерывная на Г функция f должна достигать на Г своего максимума, и так как максимум на Г необходимо есть локальный максимум на Г, то $\max\limits_{\Gamma} F =$
$= f(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}) = f(-1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2}) = 1/2$ и, аналогично,

$$\min_{\Gamma} f = f(1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2}) = f(-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}) = -1/2.$$

Лемма. *Пусть* $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}^1, \ldots, \mathbf{b}^m$ — *векторы n-мерного пространства* ($m < n$). *Для того чтобы имело место представление*

$$\mathbf{a} = \sum_{j=1}^{m} \lambda_j \mathbf{b}^j, \tag{15}$$

где λ_j — *некоторые числа, необходимо и достаточно, чтобы всякий вектор* $\mathbf{c}$, *ортогональный ко всем* $\mathbf{b}^j$:

$$(\mathbf{c}, \mathbf{b}^j) = 0 \quad (j = 1, \ldots, m), \tag{16}$$

автоматически был ортогонален к $\mathbf{a}$:

$$(\mathbf{c}, \mathbf{a}) = 0. \tag{17}$$

Доказательство. Если имеет место (15), то (16) влечет

$$(\mathbf{c}, \mathbf{a}) = \left(\mathbf{c}, \sum_{j=1}^{m} \lambda_j \mathbf{b}^j\right) = \sum_{j=1}^{m} \lambda_j (\mathbf{c}, \mathbf{b}^j) = 0,$$

и мы доказали необходимость условия леммы.

Перейдем к доказательству достаточности. Ортогонализируя систему $\mathbf{b}^1, \ldots, \mathbf{b}^m$, получим ортонормированную систему $\mathbf{a}^1, \ldots, \mathbf{a}^m$, обладающую тем же свойством: из равенств

$$(\mathbf{c}, \mathbf{a}^j) = 0, \quad j = 1, \ldots, m,$$

следует, что $(\mathbf{c}, \mathbf{a}) = 0$.

Разложим вектор $\mathbf{a}$ по векторам $\mathbf{a}^j$:

$$\mathbf{a} = \sum_{j=1}^{m} \lambda_j \mathbf{a}^j + \mathbf{r}, \qquad \lambda_j = (\mathbf{a}, \mathbf{a}^j).$$

Вектор $\mathbf{r}$ ортогонален ко всем $\mathbf{a}^j$, но тогда $(\mathbf{r}, \mathbf{a}) = 0$ и, следовательно,

$$0 = (\mathbf{r}, \mathbf{a}) = \left(\mathbf{r}, \sum_{j=1}^{m} \lambda_j \mathbf{a}^j + \mathbf{r}\right) = (\mathbf{r}, \mathbf{r}).$$

Но тогда

$$\mathbf{r} = 0 \text{ и } \mathbf{a} = \sum_{j=1}^{m} \lambda_j \mathbf{a}^j.$$

§ 7.23. Особые точки кривой

Из теории неявной функции известно, что если функция $F(x, y)$, обращается в нуль в точке (x_0, y_0), имеет непрерывные частные производные в некоторой окрестности этой точки и

$$\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_0 \neq 0, \tag{1}$$

то существуют такие $\delta_1, \delta_2 > 0$, что множество E всех точек (x, y), принадлежащих прямоугольнику

$$|x - x_0| < \delta_1, \qquad |y - y_0| < \delta_2 \tag{2}$$

и удовлетворяющих равенству $F(x, y) = 0$, описывается функцией $y = \varphi(x)$ $(y_0 = \varphi(x_0))$, имеющей непрерывную производную (на $|x - x_0| < \delta_1$).

Если в этой формулировке вместо (1) предположить, что $\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_0 \neq 0$, то можно указать прямоугольник (2) такой, что соответствующее ему множество E описывается равенством $x = \psi(y)$ $(x_0 = \psi(y_0))$, где ψ — функция имеющая непрерывную производную.

Сейчас нас будет интересовать тот случай, когда наложенные на функцию F условия сохраняются, за исключением одного. Именно, будем предполагать, что обе частные производные от F в точке (x_0, y_0) равны нулю: $\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_0 = \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_0 = 0$.

Множество Γ всех точек (x, y), для которых функция $F = 0$, мы будем называть кривой, отдавая себе отчет в том, что на самом деле Γ может не быть геометрическим образом, который обычно принято называть кривой. Например, если функция F тождественно равна нулю, то Γ есть вся плоскость (x, y). Нас будет интересовать вопрос, какой вид имеет Γ в достаточно малой окрестности точки (x_0, y_0).

Не уменьшая общности, будем считать, что $x_0 = 0$, $y_0 = 0$. Будем предполагать также, что функция F имеет непрерывные частные производные четвертого порядка (за исключением одного случая, $AC - B^2 > 0$, когда достаточно существования вторых непрерывных производных).

Положим $A = \left(\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\right)_0$, $B = \left(\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}\right)_0$, $C = \left(\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\right)_0$.

Будем предполагать, что числа A, B, C одновременно не равны нулю и рассмотрим отдельно возможные случаи.

1) $AC - B^2 > 0$. Тогда на основании теории локального абсолютного экстремума функция F достигает в точке $(0, 0)$ строгого локального максимума или строгого локального минимума, откуда следует, что для точек достаточно малого круга σ с центром в нулевой точке, отличных от центра, $F(x, y) \neq 0$.

Таким образом, кривая Г, описываемая уравнением

$$F(x,\ y)=0, \tag{3}$$

в круге σ сводится к одной точке (0, 0).

В этом случае говорят, что точка (0, 0) есть *изолированная точка* Г. Сама она принадлежит к Г, но в ее достаточно малой окрестности нет других точек Г.

Уравнение $x^2+y^2=0$ может служить простым примером этого случая.

2) $AC-B^2<0$. Согласно формуле Тейлора

$$F(x,\ y)=Ax^2+2Bxy+Cy^2+\mu(x,\ y), \tag{4}$$

где μ имеет в нулевой точке вторые производные, равные нулю и

$$\mu=O(\rho^3) \qquad (\rho^2=x^2+y^2). \tag{5}$$

В первом приближении уравнение $F(x,\ y)=0$ естественно заменить уравнением $Ax^2+2Bxy+Cy^2=0$, которое в данном случае $(AC-B^2<0)$ определяет пару (не мнимых) прямых

$$(\alpha_1x+\beta_1y)(\alpha_2x+\beta_2y)=0, \tag{6}$$

$$\begin{vmatrix}\alpha_1\beta_1\\ \alpha_2\beta_2\end{vmatrix}\neq 0. \tag{7}$$

Если сделать подстановку

$$\xi=\alpha_1x+\beta_1y, \qquad \eta=\alpha_2x+\beta_2y, \tag{8}$$

то из (4) получим

$$F(x,\ y)=\Phi(\xi,\ \eta)=\xi\eta+\psi(\xi,\ \eta), \tag{9}$$

где

$$\psi=O(r^3) \qquad (r^2=\xi^2+\eta^2). \tag{10}$$

Здесь (10) следует из (5), так как в силу (7)

$$c_1\rho<r<c_2\rho,$$

где $c_1,\ c_2>0$ — некоторые константы.

В силу единственности разложения по формуле Тейлора с остатком в форме Пеано (см. § 7.14) из (10) следует, что представление (9) есть формула Тейлора функции $\Phi(\xi,\ \eta)$ в окрестности $\xi=\eta=0$ с остаточным членом порядка $l=3$. Но тогда

$$\psi(\xi,\eta)=\sum_{i=0}^{3}\xi^i\eta^{3-i}\psi_i(\xi,\eta),$$

где ψ_i имеют непрерывные частные производные первого порядка (см. конец § 7.13).

Итак,

$$\Phi(\xi, \eta) = \xi\eta + \sum_{i=0}^{3} \xi^i \cdot \eta^{3-i} \psi_i(\xi, \eta). \tag{11}$$

В плоскости (ξ, η) (рис. 7.10) проведем две биссектрисы, делящие пополам координатные углы. Для исследования части γ_1' кривой Γ' $(\Phi(\xi, \eta) = 0)$, попавшей (в достаточно малой окрестности нулевой точки) в затушеванную фигуру, сделаем замену переменных (ξ, η) на (ξ, u), где

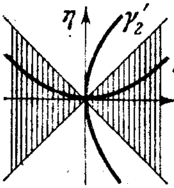

Рис. 7.10.

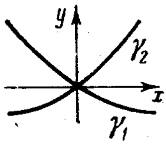

Рис. 7.11.

$$\eta = \xi u, \quad (|u| \leqslant 1). \tag{12}$$

А для исследования части γ_2' кривой Γ', попавшей в незатушеванную фигуру, заменим (ξ, η) на (u, η), где

$$\xi = u\eta \qquad (|u| \leqslant 1). \tag{13}$$

В силу (11) и (12)

$$\Phi(\xi, \eta) = \xi^2 u + \xi^3 \varphi(\xi, u) = 0, \tag{14}$$

где $\varphi(\xi, u)$ имеет непрерывные частные производные.

Сокращая на ξ^2, получим

$$\lambda(\xi, u) = u + \xi\varphi(\xi, u) = 0. \tag{15}$$

Точке $\xi = 0$, $\eta = 0$ в силу (12) могут соответствовать точки (ξ, u), где $\xi = 0$ и $|u| \leqslant 1$. Но уравнению (15) может удовлетворить только точка $\xi = 0$, $u = 0$. Левая его часть при этом имеет непрерывные частные производные в окрестности точки $\xi = 0$, $u = 0$ и $\left(\frac{\partial\lambda}{\partial u}\right)_0 = 1$. В таком случае, на основании теоремы о неявных функциях, существует, и притом единственная, функция $u = \mu(\xi)$ $(\mu(0) = 0)$, определенная на достаточно малом интервале $|\xi| < \delta$, имеющая непрерывную производную и удовлетворяющая уравнению (15), и тогда соответствующая ей функция

$$\eta = \xi\mu(\xi), \tag{16}$$

также непрерывно дифференцируемая на $|\xi| < \delta$, имеет производную $(\eta')_0 = 0$ и удовлетворяет уравнению $\Phi(\xi, \eta) = 0$. Она описывает кусок γ_1' кривой Γ'. Другой кусок γ_2' кривой Γ', касательный к оси η в нулевой точке, обнаруживается посредством подстановки (13).

Таким образом, в рассматриваемом случае кривая Γ (образ Γ' при обратной замене ξ, η на x, y) в окрестности нулевой точки плоскости x, y распадается на два пересекающиеся под углом (не равным нулю) куска γ_1 и γ_2 (рис. 7.11).

3) $AC-B^2=0$. В этом случае

$$Ax^2+2Bxy+Cy^2=(\alpha x+\beta y)^2,$$

где α и β одновременно не равны нулю. Положим $\xi=\beta x-\alpha y$, $\eta=\alpha x+\beta y$ и, рассуждая как выше, получим, что в новой (прямоугольной) системе координат $(\xi,\ \eta)$ наша кривая определится уравнением

$$\eta^2+\sum_{i=0}^{3}\xi^i\eta^{3-i}\psi_i(\xi,\eta)=0, \tag{17}$$

где ψ_i имеют непрерывные производные. Подстановка $\eta=u\xi$ приводит после сокращения на ξ^2 к уравнению

$$\varkappa(\xi,\ u)=u^2+\xi\varphi(\xi,\ u)=0. \tag{18}$$

Теперь снова $\varkappa(0,\ 0)=0$ ($\varkappa(0,\ u)\neq 0$ при $u\neq 0$). Если $(\varphi)_0=\varphi(0,\ 0)\neq 0$ [случай $(\varphi)_0=0$ исключительный], что наиболее вероятно, то $\left(\frac{\partial\varkappa}{\partial\xi}\right)_0=(\varphi)_0\neq 0$. Поэтому к равенству (18) применима теорема о неявной функции, в силу которой существует, и притом единственная, функция $\xi=\nu(u)$ $(0=\nu(0))$, имеющая непрерывную производную, удовлетворяющая в достаточно малой окрестности $u=0$ уравнению (18).

Имеем $\nu(u)=-u^2\varphi(\xi,u)$, $\nu'(u)=-\left\{2u\varphi-u^2\frac{d}{du}\varphi(\nu(u),\ u)\right\}\Big|\varphi^2$.

Пусть $(\varphi)_0<0$, тогда, очевидно, найдется $\delta>0$ такое, что

$$\nu'(u)\begin{cases}>0 & (\quad 0<u\leqslant\delta),\\ <0 & (-\delta\leqslant u<0),\\ \ \ 0 & (u=0),\end{cases}$$

и $\nu(u)$ строго убывает до нуля на $[-\delta,\ 0]$ и строго возрастает от нуля на $[0,\ \delta]$. Поэтому на каждом из этих отрезков функция

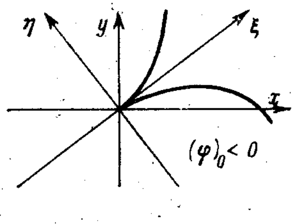

Рис. 7.12.

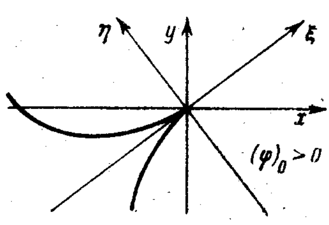

Рис. 7.13.

$\xi=\nu(u)$ обратима и имеют смысл обратные непрерывные функции, которые могут быть записаны в виде $u=\pm\sqrt{-\xi[(\varphi)_0+\varepsilon(\xi)]}$ $(\varepsilon(\xi)\to 0,\ \xi\to 0)$, где $\xi>0$.

Следовательно, мы получим два гладких куска кривой Γ':

$$\eta=\pm\xi\sqrt{-\xi[(\varphi)_0+\varepsilon]}\approx\pm\xi^{3/2}\sqrt{-(\varphi)_0}\qquad(\xi\to 0,\ 0\leqslant\xi\leqslant\delta).$$

Соответствующая исходная кривая Г изображена на рис. 7.12. Говорят в этом случае, что (0, 0) есть точка *возврата кривой* Г.

При $(\varphi)_0 > 0$ картина аналогична, но «возврат» имеет место в область $\xi < 0$ (рис. 7.13), когда подкоренное выражение положительно.

Конечно, если $(\varphi)_0 = 0$, то требуется дальнейшее исследование.

Заметим, что подстановка $\xi = u\eta$ не дает новой ветви кривой, потому что после сокращения (17) на η^2 получим уравнение $1 + \eta\gamma(\eta, u) = 0$, не имеющее решения при $\eta = 0$ и конечном u.

§ 7.24. Кривые на поверхности

Рассмотрим дважды непрерывно дифференцируемую поверхность σ:

$$z = f(x, y), \tag{1}$$

и принадлежащую ей дважды дифференцируемую гладкую кривую Г: $\mathbf{r}(s) = \varphi(s)i + \psi(s)j + \xi(s)k$, где s — длина дуги Г.

Будем пользоваться обозначениями

$$p = \frac{\partial z}{\partial x}, \quad q = \frac{\partial z}{\partial y}, \quad r = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \quad s = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \quad t = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \tag{2}$$

(мы думаем, что от того, что s обозначает длину дуги Г и производную $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$, путаницы не произойдет).

Единичная нормаль к поверхности σ в ее точке $A = (x, y, z)$, образующая острый угол с положительным направлением оси z, равна

$$\mathbf{n} = \frac{-p}{\sqrt{1+p^2+q^2}}\,\mathbf{i} + \frac{-q}{\sqrt{1+p^2+q^2}}\,\mathbf{j} + \frac{1}{\sqrt{1+p^2+q^2}}\,\mathbf{k}.$$

С другой стороны, единичный вектор главной нормали к Г в A равен (§ 6.10, (3))

$$\mathbf{v} = \frac{\ddot{\mathbf{r}}}{|\ddot{\mathbf{r}}|} = R\ddot{\mathbf{r}} = R\left(\frac{d^2x}{ds^2}\,\mathbf{i} + \frac{d^2y}{ds^2}\,\mathbf{j} + \frac{dz^2}{ds^2}\,\mathbf{k}\right) \quad (\ddot{\mathbf{r}} \neq 0),$$

где R — радиус кривизны Г ($R > 0$) и x, y, z — компоненты $\mathbf{r}$.

Обозначим через θ угол между $\mathbf{n}$ и $\mathbf{v}$. Тогда

$$\frac{\cos\theta}{R} = \frac{-p\,d^2x - q\,d^2y + d^2z}{ds^2\sqrt{1+p^2+q^2}}. \tag{3}$$

Но так как $\Gamma \subset \sigma$, то дифференциалы компонент $\mathbf{r}$ (соответствующие ds) удовлетворяют условию связи $dz = p\,dx + q\,dy$, откуда

$$d^2z = p\,d^2x + q\,d^2y + r\,dx^2 + 2s\,dx\,dy + t\,dy^2, \tag{4}$$

поэтому в силу (3)

$$\frac{\cos\theta}{R}=\frac{r\,dx^2+2s\,dx\,dy+t\,dy^2}{ds^2\sqrt{1+p^2+q^2}}=\frac{r\alpha^2+2s\,\alpha\beta+t\beta^2}{\sqrt{1+p^2+q^2}},\tag{5}$$

где $\alpha=\frac{dx}{ds}$, $\beta=\frac{dy}{ds}$ — косинусы углов касательной к Γ соответственно с осями x, y.

Из формулы (5) непосредственно следует, что *все кривые $\Gamma\subset\sigma$, имеющие в точке $A\in\sigma$ общую соприкасающуюся плоскость L, отличную от касательной плоскости к σ в A, имеют в A одну и ту же кривизну.* Ведь для всех таких кривых правая часть (5) в точке A есть одно и то же число, так же как $\cos\theta$ для них — одно и то же число, а их кривизна в A равна частному от деления правой части (5) на $\cos\theta$. Таким образом, кривизна какой-нибудь из указанных кривых равна, например, кривизне той из них, которая получается как сечение поверхности σ соприкасающейся плоскостью L.

Это утверждение, вообще говоря, неверно, если $\cos\theta=0$, т. е. когда соприкасающаяся к Γ плоскость совпадает с касательной плоскостью к σ. Чтобы убедиться в этом, достаточно заметить, что две лежащие на плоскости касающиеся друг друга кривые не обязательно имеют в точке касания равные радиусы кривизны.

Пусть Γ есть нормальное сечение поверхности σ в ее точке A, т. е. кривая, по которой пересекается σ с плоскостью, проходящей через нормаль к σ в A, а Γ' — какое-либо сечение σ плоскостью, проходящей через касательную к Γ в точке A. Тогда для кривых Γ и Γ' правые части (5) в точке A равны между собой. К тому же для Γ угол $\theta=0$ или $\theta=\pi$. Поэтому имеет место равенство

$$\pm\frac{1}{R}=\frac{\cos\theta}{R'},\tag{6}$$

где R и R' — радиусы кривизны соответственно нормального сечения и плоского сечения, имеющего с ним общую касательную.

Равенство (6) называется *формулой Менье* *). Его можно еще записать так: $R'=\pm R\cos\theta=R|\cos\theta|$ (так как $R>0$ и $R'>0$).

Формула (5) для радиуса кривизны нормального сечения имеет вид

$$\frac{1}{R}=\frac{r\alpha^2+2s\alpha\beta+t\beta^2}{\sqrt{1+p^2+q^2}},\tag{7}$$

где слева надо было бы поставить знаки «$\pm$», соответствующие случаям $\theta=0$ и $\theta=\pi$. Но мы этого делать не будем. Для дальнейшего будет более удобно разрешить радиусу кривизны иметь

---

*) Ж. Б. Менье (1754—1793) — французский математик.

как положительный, так и отрицательный знак ($R>0$ или $R<0$), в зависимости от того, будет ли вогнутость нормального сечения обращена в сторону положительной оси z или отрицательной.

Все предыдущие рассуждения, в том числе и формула (7), были выведены в предположении, что $|\ddot{\mathbf{r}}(s)|>0$, т. е. что R конечно. Ведь при $\ddot{\mathbf{r}}(s)=0$ понятие главной нормали к кривой не имеет смысла. Однако формула (7) верна и при $\ddot{\mathbf{r}}(s)=0$. В самом деле, левая часть (7) в этом случае равна нулю ($R=\infty$), но правая часть (7) тоже равна нулю. Ведь правая часть (3) равна нулю, а с ней в силу (4) и правая часть (5) или (7).

Перенесем начало прямоугольной системы координат в рассматриваемую точку A нашей поверхности σ, а ось z направим по нормали к σ. Тогда $p=q=0$, $\alpha^2+\beta^2=1$, и можно положить $\alpha=\cos\theta$, $\beta=\sin\theta$. Формула (7) радиуса кривизны нормального сечения тогда будет иметь вид

$$\frac{1}{R}=r\cos^2\theta+2s\cos\theta\sin\theta+t\sin^2\theta=\frac{r+t}{2}+\frac{r-t}{2}\cos 2\theta+s\sin 2\theta. \tag{8}$$

Кривизна $1/R$ есть непрерывная функция на отрезке $[0, 2\pi]$. Поэтому она достигает на нем максимума и минимума, которые можно найти приравниванием нулю ее производной. В результате получим уравнение

$$\operatorname{tg} 2\theta=\frac{2s}{r-t}\quad (r\neq t). \tag{9}$$

На интервалах $(\pi/4, 3\pi/4)$ и $(3\pi/4, 5\pi/4)$ функция $\operatorname{tg} 2\theta$ строго возрастает, пробегая все значения от $-\infty$ до $+\infty$. Поэтому на каждом из этих интервалов существует только по одному корню θ_1 и θ_2 уравнения (9). К тому же $\theta_2-\theta_1=\pi/2$. На периоде имеется еще два корня, $\theta_1+\pi$ и $\theta_2+\pi$, но они определяют те же сечения.

Итак, при $r\neq t$ имеется два и только два взаимно перпендикулярных направления, вдоль которых кривизна нормального сечения достигает своего максимума $1/R_1$ и минимума $1/R_2$. Если эти направления принять за оси координат x, y, то уравнение (8) будет иметь вид $1/R=r\cos^2\theta+t\sin^2\theta$, потому что в этом случае уравнение (9) должно удовлетворяться при $\theta=0$.

Имеем $1/R_1=r$, $1/R_2=t$, и мы получили формулу (Эйлера *))

$$\frac{1}{R}=\frac{\cos^2\theta}{R_1}+\frac{\sin^2\theta}{R_2}. \tag{10}$$

Числа R_1 и R_2 называются *главными радиусами кривизны* поверх-

*) Л. Эйлер (1707—1783) — великий математик, механик и физик, русский академик.

ности (в точке A). Они соответствуют *главным сечениям* поверхности (взаимно перпендикулярным между собой).

Сечению $\theta' = \theta + (\pi/2)$ соответствует согласно формулы (10) кривизна

$$\frac{1}{R'} = \frac{\sin^2\theta}{R_1} + \frac{\cos^2\theta}{R_2}.$$

Сложив (10) и последнее равенство, получим равенство

$$\frac{1}{R} + \frac{1}{R'} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2},$$

показывающее, что *сумма кривизн любых двух взаимно перпендикулярных сечений есть величина постоянная.* Она называется *средней кривизной поверхности в точке.*

Точки дважды непрерывно дифференцируемой поверхности принято классифицировать следующим образом.

1. Эллиптическая точка соответствует случаю $R_1R_2 > 0$. В этом случае R_1 и R_2 имеют одинаковые знаки, но тогда и R для любого сечения имеет тот же знак, т. е. все нормальные сечения имеют вогнутость в сторону положительной или отрицательной оси z, в зависимости от того, будет ли знак «+» или «−». Точки поверхности эллипсоида обладают этим свойством.

2. Гиперболическая точка соответствует случаю $R_1R_2 < 0$. В этом случае вогнутости главных сечений и прилегающих к ним сечений направлены в противоположные стороны. Так как кривизна $1/R$ есть непрерывная функция от θ, то должно существовать по крайней мере два сечения с кривизной, равной нулю.

На самом деле их только два, соответствующие значениям θ, для которых $\operatorname{tg}\theta = \pm\sqrt{-R_2/R_1}$; радиусы кривизны этих сечений бесконечны. Однополостный гиперболоид есть пример такой поверхности, ее точки обладают этим свойством.

3. Параболическая точка соответствует случаю $1/R_1R_2 = 0$ (но одно из чисел R_1, R_2 конечно). Таким образом, либо $R_1 > 0$, $1/R_2 = 0$ и тогда

$$\frac{1}{R} = \frac{\cos^2\theta}{R_1},$$

либо $1/R_1 = 0$, $R_2 < 0$ и тогда $1/R = \sin^2\theta/R_2$.

В этом случае имеется только одно сечение, имеющее нулевую кривизну, а все остальные сечения имеют кривизну одного и того же знака, и вогнутость их направлена в одну сторону. Точки цилиндрической поверхности — пример этого случая.

Узнать, к какой категории относится точка поверхности $z = f(x, y)$ с касательной плоскостью, не обязательно параллельной осям x, y, можно по знаку $rt - s^2$. Пусть $r > 0$ и $rt - s^2 > 0$; тогда квадратическая форма

$$r\,dx^2 + 2s\,dx\,dy + t\,dy^2 \tag{11}$$

строго положительно определена и величина $\cos\theta$ в формуле (5) для всех значений θ сохраняет знак, следовательно, рассматриваемая точка эллиптическая.

Если $rt - s^2 < 0$, то форма (11) меняет знак для некоторых двух разных пар (dx, dy), что указывает на гиперболичность точки. Если же $rt - s^2 = 0$, то форма (11) сохраняет знак для всех (dx, dy), за исключением одного направления, что показывает, что точка параболическая.

Этими рассуждениями мы косвенно доказали, что знак $rt - s^2$ есть инвариант по отношению к преобразованиям прямоугольных координат, при которых уравнение малого куска поверхности, содержащего точку A, записывается в явной форме $z = f(x, y)$. В этом можно убедиться также при помощи кропотливых выкладок связанных с заменой переменных в частных производных.

Пусть теперь $r = t$, $rt - s^2 = r^2 - s^2$; тогда формула (8) имеет вид $1/R = r + s\sin 2\theta$.

1) Если $r^2 - s^2 > 0$, то имеет место *эллиптическая точка*. При этом, если $s \neq 0$, имеется, как и в случае 1), два главных сечения с максимальным и минимальным радиусом кривизны. Если же $s = 0$, то $1/R = r = \text{const}$ — все сечения имеют одну и ту же кривизну (*точка округления*).

2) Если $r^2 - s^2 < 0$, то имеет место *гиперболическая точка*.

3) Если $r^2 - s^2 = 0$, то, очевидно, это *параболическая точка*.

Пусть гладкая поверхность S задана в параметрической форме

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k} = \varphi(u, v)\mathbf{i} + \psi(u, v)\mathbf{j} + \chi(u, v)\mathbf{k} \qquad (u, v \in \Omega), \tag{12}$$

где Ω — область. Дифференциалам du, dv соответствуют в силу (12) дифференциалы компонент

$$\begin{gathered} dx = \frac{\partial x}{\partial u}\,du + \frac{\partial x}{\partial v}\,dv, \quad dy = \frac{\partial y}{\partial u}\,du + \frac{\partial y}{\partial v}\,dv, \\ dz = \frac{\partial z}{\partial u}\,du + \frac{\partial z}{\partial v}\,dv, \end{gathered} \tag{13}$$

которым в свою очередь соответствует выражение для квадрата дифференциала дуги на S:

$$\begin{gathered} ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 = E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2, \\ E = \left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2, \quad F = \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v}, \\ G = \left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2. \end{gathered} \tag{14}$$

Выражение (14) есть квадратическая форма относительно du, dv. Для гладкой поверхности это строго определенная положительная форма, потому что ее дискриминант

$$EG - F^2 = \left(\frac{D(y, z)}{D(u, v)}\right)^2 + \left(\frac{D(z, x)}{D(u, v)}\right)^2 + \left(\frac{D(x, y)}{D(u, v)}\right)^2 = |\dot{\mathbf{r}}_u \times \dot{\mathbf{r}}_v|^2 > 0. \tag{15}$$

Определенную гладкую кривую $\Gamma \subset S$ можно задать при помощи непрерывно дифференцируемых функций

$$u = \lambda(t), \quad v = \mu(t), \quad (\lambda'^2 + \mu'^2 > 0). \tag{16}$$

Если λ и μ подставить в (12) вместо u и v, то получим гладкую кривую Γ, лежащую на S. Ведь для нее при любом t выражение

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2 = E\left(\frac{du}{dt}\right)^2 + 2F\frac{du}{dt}\frac{dv}{dt} + G\left(\frac{dv}{dt}\right)^2 > 0 \tag{17}$$

положительно — это следует из условия (16) в скобках и строгой положительности формы.

Умножая левую часть (17) на dt^2, получим (14), т. е. квадрат дифференциала нашей дуги Γ (соответствующего дифференциалу dt). Для данной дуги $\Gamma \subset S$ дифференциалы du и dv зависимы между собой, но если нас интересуют всевозможные $\Gamma \subset S$, проходящие через данную точку $A \in S$, то они, очевидно, определяют всевозможные пары дифференциалов du, dv.

Выведем формулу, соответствующую формуле (5) в параметрической форме. Для этого будем предполагать, что поверхность S не только гладкая, но и дважды непрерывно дифференцируемая.

Левую часть (5) можно еще записать так:

$$\frac{\cos\theta}{R} = \frac{(\mathbf{v}, \mathbf{n})}{R} = (\ddot{\mathbf{r}}(s), \mathbf{n}) = \left(\ddot{\mathbf{r}}(s), \frac{\dot{\mathbf{r}}_u \times \dot{\mathbf{r}}_v}{|\dot{\mathbf{r}}_u \times \dot{\mathbf{r}}_v|}\right), \tag{18}$$

где $\mathbf{n}$ — единичная нормаль поверхности S. Мы считаем, что $\dot{\mathbf{r}}(u, v)$ есть вектор точки поверхности S, а $\mathbf{r}(s)$ — вектор точки Γ. Но

$$\dot{\mathbf{r}}(s) = \dot{\mathbf{r}}_u \frac{du}{ds} + \dot{\mathbf{r}}_v \frac{dv}{ds},$$

$$\ddot{\mathbf{r}}(s) = \ddot{\mathbf{r}}_{uu}\left(\frac{du}{ds}\right)^2 + 2\ddot{\mathbf{r}}_{uv}\frac{du}{ds}\frac{dv}{ds} + \ddot{\mathbf{r}}_{vv}\left(\frac{dv}{ds}\right)^2 + \dot{\mathbf{r}}_u\frac{d^2u}{ds^2} + \dot{\mathbf{r}}_v\frac{d^2v}{ds^2},$$

и если учесть, что векторы $\dot{\mathbf{r}}_u$, $\dot{\mathbf{r}}_v$ ортогональны к $\mathbf{n}$, то

$$\frac{\cos\theta}{R} = \frac{\left(\ddot{\mathbf{r}}_{uu}du^2 + 2\ddot{\mathbf{r}}_{uv}du\,dv + \ddot{\mathbf{r}}_{vv}dv^2\right)(\dot{\mathbf{r}}_u \times \dot{\mathbf{r}}_v)}{ds^2\,|\dot{\mathbf{r}}_u \times \dot{\mathbf{r}}_v|},$$

где ds^2 можно заменить выражением (14)

§ 7.25. Криволинейные координаты в окрестности гладкой границы области

Пусть Ω — ограниченная область, граница которой есть гладкая (замкнутая) поверхность S. Из каждой точки $A \in S$ выпустим внутрь Ω нормаль и отметим на ней точку A_λ, находящуюся на расстоянии $\lambda > 0$ от A. Совокупность всех точек A_λ при данном фиксированном $\lambda > 0$ образует некоторую поверхность S_λ (рис. 7.14, где изображены сечения S, S_λ плоскостью). Если λ велико, то отдельные точки S_λ окажутся принадлежащими к разным нормалям. Другое дело, если λ достаточно мало. В этом случае можно ожидать, что в слое, находящемся между S и S_λ, нормали не пересекаются и тогда каждая его точка находится на одной и только одной нормали, выпущенной из некоторой точки $A \in S$. Это на самом деле имеет место, если поверхность S дважды дифференцируема, т. е. если описывающие ее локально функции имеют непрерывные вторые частные производные.

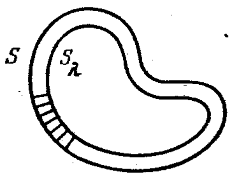

Рис. 7.14.

Ниже это утверждение доказывается в n-мерном случае.

Лемма. *Пусть непрерывная на открытом множестве $\Omega \subset R_n$ операция $y = A(x)$ отображает Ω на $\Omega' \in R_n$, вообще говоря, не взаимно однозначно. Однако некоторое замкнутое ограниченное множество F отображается взаимно однозначно; мало того, предположим, что каждой точке $x \in F$ можно указать ее окрестность $\Omega_x \subset \Omega$, отображаемую операцией A взаимно однозначно. Для любого $\lambda > 0$ введем множество F^λ, состоящее из точек Ω, каждая из которых отстоит хотя бы от одной точки F на расстоянии меньшем, чем λ. Тогда существует $\lambda_0 > 0$ такое, что A отображает F^{λ_0} взаимно однозначно: $F^{\lambda_0} \rightleftarrows \left(F^{\lambda_0}\right)'$.*

Доказательство. Зададим убывающую к нулю последовательность чисел λ_k. Если бы лемма была неверна, то для каждого k нашлись бы две различные точки $x_k,\ y_k \in F^{\lambda_k}$ такие, что $Ax_k = Ay_k$. Так как множество точек $x_k,\ y_k \in F^{\lambda_k} \subset F^{\lambda_1}$ ограничено, то для некоторой подпоследовательности индексов k, которую мы занумеруем заново, $\mathbf{x}_k \to \mathbf{x}^0 \in F$, $\mathbf{y}_k \to y^0 \in F$, $A\mathbf{x}_k \to A\mathbf{x}^0$, $A\mathbf{y}_k \to A\mathbf{y}^0$, $A\mathbf{x}^0 = A\mathbf{y}^0$, откуда $\mathbf{x}^0 = \mathbf{y}^0$, потому что A отображает F на F' взаимно однозначно. Но это невозможно, потому что точка $\mathbf{x}^0 = \mathbf{y}^0$ принадлежит определенной окрестности Ω_{x^0} и при достаточно большом k будет $\mathbf{x}_k,\ \mathbf{y}_k \in \Omega_{x^0}$, и так как $x_k \neq y_k$, то должно быть $A\mathbf{x}_k \neq A\mathbf{y}_k$.

Рассмотрим $(n-1)$-мерное многообразие S (см. § 17.1)

$$x_i = \varphi_i(\mathbf{u}), \quad (\mathbf{u} = (u_1, \ldots, u_{n-1}) \in \omega, \quad i = 1, \ldots, n). \tag{1}$$

Точке $\mathbf{x} \in S$ приведем в соответствие единичный вектор

$$\mathbf{v} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \tag{2}$$

при помощи формул

$$\alpha_i = \frac{A_i}{\sqrt{\sum\limits_1^n A_i^2}} \quad (i = 1, \ldots, n), \tag{3}$$

где A_i — алгебраические дополнения элементов первого столбца определителя ($\Delta > 0$)

$$\Delta = \begin{vmatrix} \alpha_1 \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial u_1} \cdots \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial u_{n-1}} \\ \vdots \quad \cdots \cdots \cdots \\ \alpha_n \dfrac{\partial \varphi_n}{\partial u_1} \cdots \dfrac{\partial \varphi_n}{\partial u_{n-1}} \end{vmatrix} = \sum_1^n \alpha_i A_i = \sqrt{\sum_1^n A_i^2}. \tag{4}$$

Числа A_i одновременно не равны нулю, потому что ранг матрицы $\left\| \dfrac{\partial \varphi_i}{\partial u_j} \right\|$ равен $n-1$.

Вектор $\mathbf{v}$ называется *единичным вектором нормали* к S *в точке* $\mathbf{x} \in S$. Другой единичный вектор нормали отличается от $\mathbf{v}$ знаком.

Важно, что $\mathbf{v}$ определяется эффективно по заданным уравнениям S. В этом проявляется ориентируемость многообразия S.

Для точек $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ некоторой окрестности S введем замену переменных

$$x_i = t\alpha_i + \varphi_i(u_1, \ldots, u_{n-1}) \quad (\mathbf{u} \in \omega,\ i = 1, \ldots, n), \tag{5}$$

где t — новая действительная переменная. Сами по себе функции (5) определены при любом $\mathbf{u} \in \omega$ и любом действительном t. Они непрерывно дифференцируемы, потому что φ_i дважды непрерывно дифференцируемы. Важно еще, что какова бы ни была область $\omega' \subset \overline{\omega'} \subset \omega$, найдется такое $\delta > 0$, что множество

$$S^\delta = \{|t| \leqslant \delta,\ \mathbf{u} \in \overline{\omega'}\}$$

отображается при помощи уравнений (5) с положительным якобианом взаимно однозначно и, следовательно, непрерывно дифференцируемо в обе стороны. Это следует из доказанной выше леммы, потому что операция (5), которую мы обозначим через A, непрерывно отображает открытое множество $\Omega = \{-\infty < t < \infty,\ \mathbf{u} \in \omega\}$ пространства R_n в R_n; при этом замкнутое ограниченное множество $F = \{t = 0,\ \mathbf{u} \in \overline{\omega'}\} \subset \Omega$ отображается взаимно однозначно и, кроме того, каждой точке F можно указать ее окрестность, отображаемую операцией A взаимно однозначно (ведь в такой точке якобиан преобразования (5) $\Delta > 0$).

Рассмотрим еще трижды непрерывно дифференцируемую самонепересекающуюся кривую Γ $(\dot{\mathbf{r}}(t) \times \ddot{\mathbf{r}}(t) \neq 0)$

$$\mathbf{r} = \varphi(s)\mathbf{i} + \psi(s)\mathbf{j} + \chi(s)\mathbf{k} \qquad (0 \leqslant s \leqslant s_0),$$

где s — длина ее дуги. Ее единичная главная нормаль $\boldsymbol\beta$ и бинормаль $\boldsymbol\gamma$ будут тогда непрерывно дифференцируемыми (один раз) функциями от s (см. § 6.11). Положим

$$\boldsymbol\rho = \mathbf{r} + \lambda\boldsymbol\beta + \mu\boldsymbol\gamma, \tag{6}$$

где λ, μ — произвольные действительные числа. При помощи этого равенства каждой тройке чисел (s, λ, μ) $(0 \leqslant s \leqslant s_0,\ -\infty < \lambda,\ \mu < \infty)$ приводится в соответствие тройка (ξ, η, ζ) декартовых координат вектора $\boldsymbol\rho$. Обозначим через H_p $(p > 0)$ множество точек пространства (s, λ, μ), определяемых неравенствами $0 \leqslant s \leqslant s_0$, $\lambda^2 + \mu^2 \leqslant p^2$. Координаты ξ, η, ζ вектора $\boldsymbol\rho$ суть непрерывно дифференцируемые функции от s, λ, μ с якобианом $D(s, \lambda, \mu)$, равным при $\lambda = \mu = 0$

$$D = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix} = |\boldsymbol\alpha(\boldsymbol\beta \times \boldsymbol\gamma)| = 1$$

(α_j, β_j, γ_j — соответственно компоненты единичных векторов касательной, главной нормали и бинормали). Так как кривая Γ самонепересекающаяся, то равенство (6) устанавливает взаимно однозначное соответствие между точками $(s, 0, 0)$ $(0 \leqslant s \leqslant s_0)$ замкнутого ограниченного в пространстве (s, λ, μ) множества и точками (ξ, η, ζ) кривой Γ. Но тогда на основании доказанной выше леммы найдется достаточно малое ρ, при котором операция (6) отображает множество H_ρ точек (s, λ, μ) на множество Ω точек (ξ, η, ζ) взаимно однозначно. Непрерывная дифференцируемость на Ω обратной операции имеет место на основании теоремы о неявных функциях во всяком случае при достаточно малом ρ, для которого якобиан $D(s, \lambda, \mu) > 0$.

Благодаря приведенному рассуждению нам удалось в достаточно малой окрестности Ω кривой Γ создать криволинейную систему координат (s, λ, μ), в которой Γ определяется уравнениями $\lambda = 0$, $\mu = 0$, и при этом между этими координатами и декартовыми координатами (ξ, η, ζ) точек Ω имеет место взаимно однозначное и непрерывно дифференцируемое в обе стороны соответствие $\xi = f_1(s_1, \lambda, \mu)$, $\eta = f_2(s, \lambda, \mu)$, $\zeta = f_3(s, \lambda, \mu)$ (см. еще по этому поводу § 17.2).

§ 7.26. Замена переменных в частных производных

Ограничимся рассмотрением двумерного случая. В n-мерном случае выкладки аналогичны.

1) Рассмотрим функцию

$$z = f(x, y), \tag{1}$$

где

$$x = \varphi(u, v), \quad y = \psi(u, v). \tag{2}$$

Покажем, как производные $p = \frac{\partial z}{\partial x}$, $q = \frac{\partial z}{\partial y}$ выражаются через производные от z по u и v. Для этого продифференцируем (1) по u и v:

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u}, \quad \frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v}. \tag{3}$$

Решая эти уравнения относительно p и q, получим

$$p = \frac{\dfrac{D(z, y)}{D(u, v)}}{\dfrac{D(x, y)}{D(u, v)}}, \quad q = \frac{\dfrac{D(x, z)}{D(u, v)}}{\dfrac{D(x, y)}{D(u, v)}}. \tag{4}$$

Конечно, в этих рассуждениях предполагается, что φ и ψ имеют непрерывные частные производные по u, v с неравным нулю якобианом. В дальнейшем подобные условия, обеспечивающие разрешимость соответствующих уравнений, мы будем предполагать выполненными, не оговаривая это особо.

Равенства (4) можно записать следующим образом:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = A\frac{\partial z}{\partial u} + B\frac{\partial z}{\partial v}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = C\frac{\partial z}{\partial u} + D\frac{\partial z}{\partial v}, \tag{5}$$

где важно отметить, что коэффициенты A, B, C, D зависят только от u, v, но не от z. Но тогда

$$r=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=A\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)+B\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=$$
$$=A\frac{\partial}{\partial u}\left(A\frac{\partial z}{\partial u}+B\frac{\partial z}{\partial v}\right)+B\frac{\partial}{\partial v}\left(A\frac{\partial z}{\partial u}+B\frac{\partial z}{\partial v}\right)=A^2\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}+$$
$$+2AB\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}+B^2\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}+\left(A\frac{\partial A}{\partial u}+B\frac{\partial A}{\partial v}\right)\frac{\partial z}{\partial u}+\left(A\frac{\partial B}{\partial u}+B\frac{\partial B}{\partial v}\right)\frac{\partial z}{\partial v}, \tag{6}$$

и мы получили выражение для частной производной $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ через частные производные от z по u и v.

Чтобы вычислить $s=\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$, $t=\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$, поступаем подобным образом. Производные более высокого порядка вычисляются последовательно этим же методом. Так, для вычисления $\frac{\partial^3 z}{\partial x^3}$ надо подставить в правую часть (6) $A\frac{\partial z}{\partial u}+B\frac{\partial z}{\partial v}$ вместо z и произвести нужные дифференцирования.

2) Решим теперь более общую задачу. Пусть заданы уравнения

$$F_j(x,\ y,\ z,\ u,\ v,\ w)=0\quad (j=1,\ 2,\ 3), \tag{7}$$

связывающие x, y, z и новые переменные u, v, w. Требуется производные p, q, r, s, t выразить через частные производные от w по u и v. Так как z есть функция от x, y, то u, v, w суть тоже функции от x, y.

Продифференцируем равенства (7), считая x, y независимыми переменными

$$\frac{\partial F_j}{\partial x}dx+\frac{\partial F_j}{\partial y}dy+\frac{\partial F_j}{\partial z}dz+\frac{\partial F_j}{\partial u}du+\frac{\partial F_j}{\partial v}dv+\frac{\partial F_j}{\partial w}dw=0 \tag{8}$$
$$(j=1,\ 2,\ 3),$$

и решим систему (8) относительно du, dv, dw:

$$\left.\begin{aligned} du&=A_1^1dx+A_2^1dy+A_3^1dz,\\ dv&=A_1^2dx+A_2^2dy+A_3^2dz,\\ dw&=A_1^3dx+A_2^3dy+A_3^3dz.\end{aligned}\right\} \tag{9}$$

Здесь коэффициенты A_i^j зависят от x, y, z, u, v, w. Так как $dw=\frac{\partial w}{\partial u}du+\frac{\partial w}{\partial v}dv$, то, подставляя в это равенство выражения (9) для дифференциалов du, dv, dw и решая полученное уравнение относительно dz, придем к равенству

$$dz = M\,dx + N\,dy, \tag{10}$$

где M и N зависят от x, y, z, u, v, w, $\frac{\partial w}{\partial u}$, $\frac{\partial w}{\partial v}$.

В силу независимости дифференциалов dx, dy справедливы равенства

$$p = M, \quad q = N, \tag{11}$$

решающие поставленную задачу для производных первого порядка. Чтобы ее решить для производных второго порядка, вычислим вторые дифференциалы от u, v, w, соответствующие независимым дифференциалам dx, dy.

При вычислении, кроме dx, dy, появятся дифференциалы dz, du, dv, dw, которые заменяются через dx, dy при помощи формул (9), (10); кроме того, появится дифференциал d^2z, и мы получим

$$\left.\begin{aligned} d^2u &= B_1^1dx^2 + B_2^1dx\,dy + B_3^1dy^2 + B_4^1d^2z,\\ d^2v &= B_1^2dx^2 + B_2^2dx\,dy + B_3^2dy^2 + B_4^2d^2z,\\ d^2w &= B_1^3dx^2 + B_2^3dx\,dy + B_3^3dy^2 + B_4^3d^2z.\end{aligned}\right\} \tag{12}$$

Но

$$d^2w = \frac{\partial^2 w}{\partial u^2}\,du^2 + 2\frac{\partial^2 w}{\partial u\partial v}\,du dv + \frac{\partial^2 w}{\partial v^2}\,dv^2 + \frac{\partial w}{\partial u}\,d^2u + \frac{\partial w}{\partial v}\,d^2v. \tag{13}$$

Дифференциалы, входящие в (13), заменяем соответствующими выражениями (9), (12) и полученное выражение решаем относительно d^2z:

$$d^2z = P\,dx^2 + 2Q\,dx\,dy + R\,dy^2, \tag{14}$$

откуда $r = P$, $s = Q$, $t = R$, где правые части зависят от x, y, z, u, v, w и от производных w по u, v порядков не выше 2. Конечно, в правой части (13) можно исключить x, y, z при помощи (7).

Мы применили метод замены переменных, который естественно называть *методом дифференциалов*. Этим методом можно решить и первую рассматриваемую выше задачу (см. (1), (2)), и тогда надо считать $z = w$.

Пример 1. Выразить оператор Лапласа*) (двумерный)

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \tag{15}$$

в полярных координатах. Решим эту задачу методом дифференциалов (хотя ее можно решить и методом 1).

Имеем

$$x = \rho\cos\theta, \quad y = \rho\sin\theta. \tag{16}$$

---

*) П. С. Лаплас (1749—1827) — французский астроном, математик и физик.

Считая x, y независимыми, дифференцируем (16):

$$dx = \cos\theta d\rho - \rho\sin\theta d\theta, \quad dy = \sin\theta d\rho + \rho\cos\theta d\theta.$$

Отсюда $\quad d\rho = \sin\theta dy + \cos\theta dx, \quad d\theta = (-\sin\theta dx + \cos\theta dy)\dfrac{1}{\rho}$. Далее,

$$d^2\rho = (-\sin\theta dx + \cos\theta dy)\,d\theta = \rho d\theta^2,$$

$$d^2\theta = \frac{1}{\rho}(-\cos\theta dx - \sin\theta dy)\,d\theta - \frac{d\rho}{\rho^2}(-\sin\theta dx + \cos\theta dy) =$$

$$= -\frac{d\rho d\theta}{\rho} - \frac{d\rho d\theta}{\rho} = -2\frac{d\rho d\theta}{\rho}.$$

Подставляя эти выражения в равенство

$$d^2u = \frac{\partial^2 u}{\partial\rho^2} + 2\frac{\partial^2 u}{\partial\rho\partial\theta} + \frac{\partial^2 u}{\partial\theta^2}d\theta^2 + \frac{\partial u}{\partial\rho}d^2\rho + \frac{\partial u}{\partial\theta}d^2\theta$$

и приводя подобные при dx^2, $dx\,dy$ и dy^2, получим, в частности, выражения для $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ и $\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}$, что дает

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial\rho^2} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\theta^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial u}{\partial\rho}. \tag{17}$$

Пример 2. Выразить оператор Лапласа (трехмерный)

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

в полярных координатах.

Имеем $x = \rho\cos\theta\cos\varphi$, $y = \rho\cos\theta\sin\varphi$, $z = \rho\sin\theta$. Введем вспомогательную переменную $r = \rho\cos\theta$. Тогда $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, $z = z$ и в силу формулы (17)

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}.$$

Остается в этом выражении сделать подстановку $r = \rho\cos\theta$, $z = \rho\sin\theta$, $\varphi = \varphi$, в силу которой на основании той же формулы (17)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial\rho^2} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\theta^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial u}{\partial\rho},$$

и на основании формулы (4)

$$\frac{\partial u}{\partial r} = -\frac{\dfrac{D(z,\,u)}{D(\rho,\,\theta)}}{\dfrac{D(r,\,z)}{D(\rho,\,\theta)}} = -\frac{1}{\rho}\sin\theta\frac{\partial u}{\partial\theta} + \cos\theta\frac{\partial u}{\partial\rho}.$$

Поэтому

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial\rho^2} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\theta^2} + \frac{1}{\rho^2\cos^2\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2} + \frac{2}{\rho}\frac{\partial u}{\partial\rho} - \frac{\sin\theta}{\rho^2\cos\theta}\frac{\partial u}{\partial\theta}. \tag{18}$$

Мы считали, что θ (широта) отсчитывается от экватора сферы ($-\pi/2 < \theta < \pi/2$). Подстановка $\theta' = (\pi/2) - \theta$ ($\theta < \theta' < \pi$) приводит к отсчету от северного полюса сферы. Тогда $\frac{\partial^2 u}{\partial\theta^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial\theta'^2}$, $\cos\theta' = \sin\theta$, $\sin\theta' = \cos\theta$, $\frac{\partial u}{\partial\theta} = -\frac{\partial u}{\partial\theta'}$,

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial\rho^2} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\theta'} + \frac{1}{\rho^2\sin^2\theta'}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2} + \frac{2}{\rho}\frac{\partial u}{\partial\rho} - \frac{1}{\rho^2}\frac{\cos\theta'}{\sin\theta'}\frac{\partial u}{\partial\theta'}. \tag{18'}$$

Упражнения.

1. Показать, что формула кривизны плоской кривой $y = f(x)$ в полярных координатах ($x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$) преобразуется следующим образом:

$$\frac{\left|\frac{d^2y}{dx^2}\right|}{\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{3/2}} = \frac{\left|r^2 + 2\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 - r\frac{d^2r}{d\theta^2}\right|}{\left[r^2+\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2\right]^{3/2}}.$$

2. Показать, что дифференциальное уравнение $\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta} = 0$ подстановками $\xi = x + at$, $\eta = x - at$ сводится к уравнению $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$.

§ 7.27. Система зависимых функций

Пусть задана система m ($m \leqslant n$) функций

$$y_j = f_j(x) = f_j(x_1, \ldots, x_n) \quad (x \in G;\ j = 1, \ldots, m), \tag{1}$$

непрерывно дифференцируемых на области G n-мерного пространства.

По определению, *система* (1) *зависима на* G, если по крайней мере одна из функций, например, y_m, выражается через остальные на G при помощи равенства

$$y_m = \Phi(y_1, \ldots, y_{m-1}), \tag{2}$$

где Φ — некоторая непрерывно дифференцируемая функция от $y_1, \ldots, y_{m-1}$, т. е. (2) есть тождество относительно $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ на G, если в нем положить $y_j = f_j(\mathbf{x})$ ($j = 1, \ldots, m$). В случае (2) будем еще говорить, что *функция* y_m *зависима от функций* $y_1, \ldots, y_{m-1}$ *на* G.

Теорема 1. *Если система* (1) *зависима на* G, *то все определители* m-*го порядка, порождаемые матрицей*

$$\left\| \begin{matrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \ldots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \ldots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{matrix} \right\|, \tag{3}$$

тождественно равны нулю на G.

Действительно, пусть, например, y_m зависит от $y_1, \ldots, y_{m-1}$ при помощи равенства (2). Тогда

$$\frac{\partial f_m}{\partial x_j} = \sum_{k=1}^{m-1} \frac{\partial \Phi}{\partial y_k} \frac{\partial f_k}{\partial x_j} \qquad (j = 1, \ldots, n; \text{ на } G).$$

Поэтому определитель

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \ldots & \frac{\partial f_1}{\partial x_m} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \ldots & \frac{\partial f_m}{\partial x_m} \end{vmatrix} \equiv 0 \qquad (\text{на } G),$$

потому что, если помножить его первые $(m-1)$ строки соответственно на $\frac{\partial \Phi}{\partial y_k}$ $(k = 1, \ldots, m-1)$ и вычесть полученные строки из m-й строки, то последняя будет состоять из нулей. Аналогично рассуждая, получим, что и любой другой определитель m-го порядка, порождаемый матрицей (3), тождественно равен нулю на G.

Теорема 2. *Пусть все порождаемые матрицей* (3) *определители m-го порядка тождественно равны нулю на G, а s $(s < m)$ есть наибольшее число, для которого в некоторой точке $x^0 \in G$ один из порождаемых матрицей* (3) *определителей не равен нулю. Пусть (не нарушая общности) это будет определитель*

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \ldots & \frac{\partial f_1}{\partial x_s} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\partial f_s}{\partial x_1} & \ldots & \frac{\partial f_s}{\partial x_s} \end{vmatrix}. \tag{4}$$

Тогда найдется окрестность $\Omega \subset G$ точки $\mathbf{x}^0$, где система функций $f_1, \ldots, f_s$ не является зависимой, остальные же функции $f_{s+1}, \ldots, f_n$ зависят на Ω от $f_1, \ldots, f_s$:

$$f_\lambda(x) = \Phi_\lambda(f_1(x), \ldots, f_s(x)) \quad (\lambda = s + 1, \ldots, m), \tag{5}$$

т. е. существуют непрерывно дифференцируемые функции Φ_λ, для которых на Ω выполняются тождества (5).

Доказательство. Так как, по условию, определитель (4) не равен нулю в точке $\mathbf{x}^0$, то в силу его непрерывности он не равен нулю в некоторой ее окрестности Ω_1, и по теореме 1 система $f_1, \ldots, f_s$ не является зависимой на Ω_1 и на любой содержащейся в Ω_1 окрестности точки $\mathbf{x}^0$.

Далее, в силу того, что определитель (4) на Ω_1 не равен нулю, система

$$y_j - f_j(x_1, \ldots, x_s, x_{s+1}, \ldots, x_n) = 0 \quad (j = 1, \ldots, s) \tag{6}$$

разрешима относительно $(x_1, \ldots, x_s)$, точнее, найдется прямоугольник

$$\Delta = \{|x_1 - x_1^0| \leqslant \sigma, \ldots, |x_s - x_s^0| \leqslant \sigma, |x_{s+1} - x_{s+1}^0| \leqslant \delta, \ldots$$
$$\ldots, |x_n - x_n^0| \leqslant \delta, |y_1 - y_1^0| \leqslant \delta, \ldots, |y_s - x_s^0| \leqslant \delta\},$$

и можно определить непрерывно дифференцируемые функции (единственные)

$$x_j = \mu_j(x_{s+1}, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_s) \quad (j = 1, \ldots, s) \tag{7}$$

на

$$\Delta' = \{|x_{s+1} - x_{s+1}^0| \leqslant \delta, \ldots, |x_n - x_n^0| \leqslant \delta, |y_1 - y_1^0| \leqslant \delta, \ldots$$
$$\ldots, |y_s - y_s^0| \leqslant \delta\}, \tag{8}$$

обращающие равенства (6) в тождества относительно $(x_{s+1}, \ldots$ $\ldots, x_n, y_1, \ldots, y_s)$:

$$y_j - f_j(\mu_1, \ldots, \mu_s, x_{s+1}, \ldots, x_n) = 0 \quad (j = 1, \ldots, s) \tag{9}$$

и так, что $|\mu_j - x_j^0| \leqslant \sigma$ $(j = 1, \ldots, s)$. При этом прямоугольник

$$\Delta'' = \{|x_1 - x_1^0| \leqslant \sigma, \ldots, |x_s - x_s^0| \leqslant \sigma, |x_s - x_{s+1}| \leqslant \delta, \ldots$$
$$\ldots, |x_n - x_n^0| \leqslant \delta\}$$

принадлежит Ω_1. Мало того, если какая-либо точка $(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_s) \in \Delta$ удовлетворяет системе (6), то ее координаты связаны равенствами (7) (это и есть единственность).

Нам будет удобно ввести векторы ($k > s$ — натуральное)

$$\mathbf{a}^{(l)} = \left(\frac{\partial f_l}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial f_l}{\partial x_s}, \frac{\partial f_l}{\partial x_k}\right) \quad (x \in \Delta''), \quad \mathbf{b} = \left(\frac{\partial \mu_1}{\partial x_k}, \ldots, \frac{\partial \mu_s}{\partial x_k}, 1\right).$$

Дифференцируя (9) по x_k, получим

$$\mathbf{a}^{(j)}\mathbf{b} = \sum_{i=1}^{s} \frac{\partial f_j}{\partial x_i} \frac{\partial \mu_i}{\partial x_k} + \frac{\partial f_j}{\partial x_k} \equiv 0 \quad (j = 1, \ldots, s). \tag{10}$$

Подставив μ_i в f_λ, $\lambda = (s + 1, \ldots, n)$, получим функции

$$f_\lambda(\mu_1, \ldots, \mu_s, x_{s+1}, \ldots, x_n), \tag{11}$$

зависящее (*a priori*) от $x_{s+1}, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_s$. Однако на самом деле они зависят только от $y_1, \ldots, y_s$. Докажем это. Полные производные от них по x_k равны

$$\mathbf{a}^{(\lambda)}\mathbf{b} = \sum_{i=1}^{s} \frac{\partial f_\lambda}{\partial x_i} \frac{\partial \mu_i}{\partial x_k} + \frac{\partial f_\lambda}{\partial x_k}. \tag{12}$$

Но, по условию, определитель

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_s} & \frac{\partial f_1}{\partial x_k} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\partial f_s}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_s}{\partial x_s} & \frac{\partial f_s}{\partial x_k} \\ \frac{\partial f_\lambda}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_\lambda}{\partial x_s} & \frac{\partial f_\lambda}{\partial x_k} \end{vmatrix} \equiv 0,$$

в то время как его минор s-го порядка, находящийся в верхнем левом углу, не равен нулю на Ω_1; поэтому вектор $\mathbf{a}^{(\lambda)}$ есть некоторая линейная комбинация из векторов $\mathbf{a}^{(1)}, \ldots, \mathbf{a}^{(s)}$. Но в силу (10) последние ортогональны к b; тогда и вектор $\mathbf{a}^{(\lambda)}$ ортогонален к $\mathbf{b}$, т. е. выражение (12) тождественно равно нулю на Δ'. Мы показали, что при $\lambda > s$ и $k > s$ полная производная от функций (11) по x_k тождественно равна нулю на Δ', т. е. они на самом деле не зависят от $x_{s+1}, \ldots, x_n$. Поэтому

$$f_\lambda(\mu_1, \ldots, \mu_s, x_{s+1}, \ldots, x_n) = \Phi_\lambda(y_1, \ldots, y_s) \quad (\lambda = s+1, \ldots, n), \tag{13}$$

где Φ_λ — непрерывно дифференцируемые функции от $y_1, \ldots, y_s$. Определим теперь, пользуясь непрерывностью функций $f_j(x)$ для указанных выше δ, σ, такое $\delta_1 < \delta$, σ, что коль скоро

$$|x_j - x_j^0| < \delta_1 \quad (\delta_1 < \delta, \sigma), \tag{14}$$

имеет место

$$|f_j(x) - f_j(x^0)| < \delta \quad (j = 1, \ldots, s). \tag{15}$$

Но тогда для $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$, принадлежащих кубу (14), который мы обозначим через Ω, имеет место (пояснения ниже)

$$f_\lambda(x_1, \ldots, x_n) = f_\lambda(\mu_1, \ldots, \mu_s, x_{s+1}, \ldots, x_n) = \\ = \Phi_\lambda(y_1, \ldots, y_s) = \Phi_\lambda(f_1(x), \ldots, f_s(x)), \tag{16}$$

т. е. y_λ зависит на Ω от $y_1, \ldots, y_s$.

Для $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in \Omega$ точки $(x_{s+1}, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_s) \in \Delta'$ $(y_j = f_j(\mathbf{x})$, см. (8)), поэтому

$$x_j = \mu_j(x_{s+1}, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_s) \quad (j = 1, \ldots, s),$$

что доказывает первое равенство цепи (16); второе равенство следует из (13), третье сводится к обратной замене y_j на $f_j(\mathbf{x})$.

Глава 8

НЕОПРЕДЕЛЕННЫЕ ИНТЕГРАЛЫ. АЛГЕБРА МНОГОЧЛЕНОВ

§ 8.1. Введение. Методы замены переменной и интегрирования по частям

В § 1.6 были введены понятия первообразной функции и неопределенного интеграла. Мы рекомендуем читателю возобновить в памяти все, что говорилось там, перед тем как изучать эту главу. Цель этой главы дать практические навыки вычисления неопределенных интегралов от некоторых элементарных функций.

В теории определенных интегралов будет доказана теорема, утверждающая, что непрерывная на интервале (a, b) (или на отрезке $[a, b]$) функция $f(x)$ имеет на нем первообразную $F(x)$, которая, конечно, в свою очередь непрерывна. Так как неопределенным интегралом от f на (a, b) называется произвольная первообразная для f функция и любые две первообразные для f отличаются лишь на некоторую постоянную, то неопределенный интеграл от f на (a, b) равен $\int f(x)dx = F(x) + C$, где $F(x)$ — какая-либо первообразная для f функция, а C — соответствующим образом подобранная постоянная. Таким образом, на основании указанной выше теоремы можно сказать, что всякая непрерывная на интервале функция f имеет на нем неопределенный интеграл. Однако если f есть элементарная функция (см. § 1.3), то оказывается, что далеко не всегда ее первообразная F, а следовательно, и неопределенный интеграл от нее, есть в свою очередь элементарная функция. Это может быть, а может и не быть, и в этом различие между дифференциальным и интегральным исчислением. В то время как производная от элементарной функции есть элементарная функция, обратное утверждение, вообще говоря, не верно. Имеются такие элементарные функции, которые, как говорят, не интегрируются в элементарных функциях; их неопределенные интегралы хотя и существуют, но не являются элементарными функциями.

Но все же к нашему счастью имеются классы интересных в математической практике элементарных функций, которые интегрируются в элементарных же функциях, т. е. их первообразные суть элементарные функции.

Эта глава посвящена изучению методов интегрирования функций подобных классов.

Начнем с того, что приведем таблицу неопределенных интегралов, вытекающую из основной таблицы производных от простейших элементарных функций:

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \qquad (n+1 \neq 0);$$

$$\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + C;$$

$$\int e^x dx = e^x + C;$$

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C \qquad (a > 0, \quad a \neq 1);$$

$$\int \cos x\,dx = \sin x + C;$$

$$\int \sin x\,dx = -\cos x + C;$$

$$\int \sec^2 x\,dx = \operatorname{tg} x + C;$$

$$\int \operatorname{cosec}^2 x\,dx = -\operatorname{ctg} x + C;$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C = -\arccos x + C' \qquad \left(C' = \frac{\pi}{2} + C\right);$$

$$\int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x + C;$$

$$\int \operatorname{ch} x\,dx = \operatorname{sh} x + C;$$

$$\int \operatorname{sh} x\,dx = \operatorname{ch} x + C.$$

Слева в каждом равенстве стоит произвольная (но определенная) первообразная функция для соответствующей подынтегральной функции, справа же — одна определенная первообразная, к которой еще прибавляется константа C такая, чтобы выполнялось равенство между этими функциями.

Первообразные функции в этих формулах определены и непрерывны на тех интервалах, на которых определены и непрерывны соответствующие подынтегральные функции. Эта закономерность не случайна: как отмечено выше, всякая непрерывная на интервале функция имеет на нем непрерывную первообразную.

В § 1.6 была выведена формула

$$\int (A_1 u(x) + A_2 v(x))\,dx = A_1 \int u(x)\,dx + A_2 \int v(x)\,dx + C, \tag{1}$$

выражающая линейное свойство неопределенного интеграла.

Основную роль в интегральном исчислении играет также формула замены переменной (или подстановки):

$$\int f(x)\,dx = \int f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)\,dt + C = \int f(\varphi(t))\,d\varphi(t) + C. \tag{2}$$

В этой формуле предполагается, что $x=\varphi(t)$ есть непрерывно дифференцируемая (имеющая непрерывную производную) функция на некотором интервале изменения t, а $f(x)$ — непрерывная функция на соответствующем интервале или отрезке оси x. Первое равенство (2) утверждает, что левая его часть тождественно равна правой, если в ней (после интегрирования!) сделать подстановку $x=\varphi(t)$ и подобрать соответствующую константу C. Докажем это утверждение. Слева в (2) стоит функция, которая является первообразной от $f(x)$. Ее производная по t равна

$$\frac{d}{dt}\int f(x)\,dx=\frac{d}{dx}\left(\int f(x)\,dx\right)\varphi'(t)=f(\varphi(t))\,\varphi'(t).$$

Следовательно, если ввести в этой функции подстановку $x=\varphi(t)$, то получится первообразная от функции $f(\varphi(t))\varphi'(t)$. Интеграл же справа есть, по определению, некоторая первообразная от $f(\varphi(t))\varphi(t)$. Но две первообразные для одной и той же функции отличаются на некоторую постоянную C. Это и записано в виде первого равенства (2). Что касается второго, то оно носит формальный характер — мы просто уславливаемся писать

$$\int F(t)\,\varphi'(t)\,dt=\int F(t)\,d\varphi(t). \tag{3}$$

Например,

$$\int e^{x^2}x\,dx=\frac{1}{2}\int e^{x^2}2x\,dx+C=\frac{1}{2}\int e^{x^2}d(x^2)+C=$$
$$=\frac{1}{2}\int e^u\,du+C_1=\frac{1}{2}e^u+C_2=\frac{1}{2}e^{x^2}+C_2\quad (u=x^2). \tag{4}$$

Первое равенство написано в силу (1), второе в силу (3), третье — в силу (2) (постоянная изменилась) и четвертое — в силу формулы из таблицы (постоянная изменилась). Однако в практике вычислений в членах, содержащих неопределенный интеграл, константы C не пишут и тогда цепочка (4) упрощается:

$$\int e^{x^2}x\,dx=\frac{1}{2}\int e^{x^2}2x\,dx=\frac{1}{2}\int e^{x^2}dx^2=\frac{1}{2}e^{x^2}+C,$$

к тому же мы опустили очевидные 3-е и 4-е равенства.

Вот еще примеры:

$$\int e^{3x}\,dx=\frac{1}{3}\int e^{3x}d(3x)=\frac{1}{3}e^{3x}+C,$$
$$\int \sin kx\,dx=\frac{1}{k}\int \sin kx\,d(kx)=-\frac{1}{k}\cos kx+C\qquad (k\neq 0).$$

Приведем еще примеры, которые все равно нам понадобятся в теории интегрирования рациональных дробей:

$$(m \neq 1) \int \frac{dx}{(x-a)^m} = \int \frac{d(x-a)}{(x-a)^m} = \frac{1}{(x-a)^{m-1}(1-m)} + C;$$

$$\int \frac{dx}{x-a} = \int \frac{d(x-a)}{x-a} = \ln|x-a| + C;$$

$$\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a}\int \frac{d(x/a)}{1+(x/a^2)} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} + C;$$

$$(a \neq 0) \int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a}\int\left(\frac{1}{x-a} - \frac{1}{x+a}\right)dx =$$
$$= \frac{1}{2a}(\ln|x-a| - \ln|x+a|) + C = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C;$$

$$\left(q - \frac{p^2}{4} = 0\right)\int \frac{dx}{x^2+px+q} = \int \frac{dx}{(x+(p/2))^2} =$$
$$= \int \frac{d(x+(p/2))}{(x+(p/2))^2} = -\frac{1}{x+(p/2)} + C; \quad (5)$$

$$\left(q - \frac{p^2}{4} = a^2 > 0,\ a > 0\right)\int \frac{dx}{x^2+px+q} = \int \frac{dx}{(x+(p/2))^2 + (q-(p^2/4))} =$$
$$= \int \frac{d(x+(p/2))}{(x+(p/2))^2+a^2} = \frac{1}{a}\int \frac{d\left(\dfrac{x+(p/2)}{a}\right)}{1+\left(\dfrac{x+(p/2)}{a}\right)^2}dx = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x+(p/2)}{a} + C; \quad (6)$$

$$\left(q - \frac{p^2}{4} = -a^2,\ a > 0\right)\int \frac{dx}{x^2+px+q} = \int \frac{d(x+(p/2))}{(x+(p/2))^2-a^2} =$$
$$= \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x+(p/2)-a}{x+\frac{p}{2}+a}\right| + C; \quad (7)$$

$$\int \frac{(2x+p)\,dx}{x^2+px+q} = \int \frac{d(x^2+px+q)}{x^2+px+q} = \ln|x^2+px+q| + C;$$

$$(A \neq 0) \int \frac{Ax+B}{x^2+px+q}dx = \frac{A}{2}\int \frac{2x+(2B/A)}{x^2+px+q}dx =$$
$$= \frac{A}{2}\int \frac{(2x+p)\,dx}{x^2+px+q} + \frac{A}{2}\int \frac{(2B/A)-p}{x^2+px+q}dx =$$
$$= \frac{A}{2}\ln|x^2+px+q| + D\int \frac{dx}{x^2+px+q}, \quad D = \frac{A}{2}\left(\frac{2B}{A} - p\right) \quad (8)$$

(далее см. (7)).

Для теории интегрирования рациональных дробей важно, что вычисление интегралов типа (5)—(8), где a, A, B, p, q — константы, приводит к элементарным функциям (рациональным, ln и arctg).

Перейдем к формуле интегрирования по частям:

$$\int uv'dx = uv - \int vu'dx + C \tag{9}$$

или, что все равно, $\int udv = uv - \int vdu + C$.

В этой формуле u и v — непрерывно дифференцируемые функции. Производная от ее левой части равна uv', а производная от правой части также равна $uv' = (uv)' - vu'$, поэтому они отличаются лишь на некоторую постоянную, что и записано в (9).

Например,

$$\int \ln x\, dx = x \ln x - \int dx = x(\ln x - 1) + C;$$

$$\int xe^x dx = \int x\, de^x = e^x x - \int e^x dx = e^x(x-1) + C;$$

$$\int x \sin x\, dx = \int xd(-\cos x) =$$

$$= -x\cos x + \int \cos x\, dx = -x\cos x + \sin x + C;$$

$$\int e^{ax}\cos x\, dx = e^{ax}\sin x - a\int e^{ax}\sin x\, dx =$$

$$= e^{ax}\sin x - a\left[e^{ax}(-\cos x) + a\int e^{ax}\cos x\, dx\right],$$

откуда

$$\int e^{ax}\cos x\, dx = \frac{e^{ax}(\sin x + a\cos x)}{1+a^2} + C.$$

Приведем еще пример, который будет нужен для теории интегрирования рациональных дробей.

Пусть $k > 1$ — натуральное и $a > 0$; тогда

$$\int \frac{dx}{(x^2+a^2)^{k-1}} = a^2\int \frac{dx}{(x^2+a^2)^k} + \frac{1}{2}\int \frac{x2xdx}{(x^2+a^2)^k} =$$

$$= a^2\int \frac{dx}{(x^2+a^2)^k} + \frac{1}{2}\left\{\frac{x}{(1-k)(x^2+a^2)^{k-1}} - \frac{1}{1-k}\int \frac{dx}{(x^2+a^2)^{k-1}}\right\},$$

откуда

$$a^2\int \frac{dx}{(x^2+a^2)^k} = \frac{x}{2(k-1)(x^2+a^2)^{k-1}} + \frac{3-2k}{2(1-k)}\int \frac{dx}{(x^2+a^2)^{k-1}}.$$

Теперь (если $k > 2$) к интегралу в правой части можно применить тот же процесс, приводящий к понижению на единицу показателя степени в знаменателе подынтегральной дроби. В конце концов придем к интегралу от $(x^2+a^2)^{-1}$ (приводящему к arctg).

Таким образом, при $q-(p^2/4)=a^2>0$ и натуральном k интеграл

$$\int \frac{dx}{(x^2+px+q)^k} = \int \frac{du}{(u^2+a^2)^k} + C \quad \left(u = x + \frac{p}{2}\right) \tag{10}$$

берется в элементарных функциях.

Примеры.

Замена переменной (подстановка):

1. $\displaystyle\int \frac{dx}{1+x^2} = (\operatorname{arctg} x \pm \operatorname{arctg} 1) + C = \operatorname{arctg}\frac{x \pm 1}{1 \pm x} + C \quad (a>0).$

2. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \int \frac{d(x/a)}{\sqrt{1-(x/a)^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C \quad (a>0).$

3. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sin x \cos x} = \int \frac{d(\operatorname{tg} x)}{\operatorname{tg} x} = \ln|\operatorname{tg} x| + C.$

4. $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = -\int \frac{1}{2}\frac{d(a^2-x^2)}{\sqrt{a^2-x^2}} = -\sqrt{a^2-x^2} + C.$

5. $\displaystyle\int \operatorname{tg} x\,dx = -\int \frac{d(\cos x)}{\cos x} = -\ln|\cos x| + C.$

6. $\displaystyle\int \frac{dx}{1+\cos x} = \int \frac{dx}{2\cos^2\frac{x}{2}} = \int \sec^2\frac{x}{2}\,d\left(\frac{x}{2}\right) = \operatorname{tg}\frac{x}{2} + C.$

7. $\displaystyle\int \frac{dx}{1+\cos^2 x} = \int \frac{dx}{2\cos^2 x + \sin^2 x} = \int \frac{d(\operatorname{tg} x)}{2+\operatorname{tg}^2 x} = \frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{tg} x\right) + C.$

Интегрирование по частям

8. $\displaystyle\int \arcsin x\,dx = x\arcsin x - \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = x\arcsin x + \sqrt{1-x^2} + C.$

9. $\displaystyle\int \arcsin x \frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\sqrt{1-x^2}\arcsin x + \int dx =$

$$= x - \sqrt{1-x^2}\arcsin x + C.$$

10. $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{\cos^2 x} = x\operatorname{tg} x - \int \operatorname{tg} x\,dx = x\operatorname{tg} x - \ln|\cos x| + C.$

Комбинированные способы:

11. $\displaystyle\int \operatorname{tg}^2 x\,dx = \int (\sec^2 x - 1)\,dx = \operatorname{tg} x - x + C.$

12. $\displaystyle\int \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\,dx = \int (1+x)\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = (1+x)\arcsin x -$

$$- \int \arcsin x\,dx = \arcsin x - \sqrt{1-x^2} + C.$$

§ 8.2. Комплексные числа

Формально комплексные числа можно определить как пары (α, β) действительных чисел, для которых определено равенство и арифметические действия по следующим правилам:

1) равенство $(\alpha, \beta) = (\alpha_1, \beta_1)$ имеет место тогда и только тогда, когда $\alpha = \alpha_1$ и $\beta = \beta_1$;

2) $(\alpha, \beta) \pm (\alpha_1, \beta_1) = (\alpha \pm \alpha_1, \beta \pm \beta_1)$;

$$(\alpha, \beta)(\alpha_1, \beta_1) = (\alpha\alpha_1 - \beta\beta_1, \alpha\beta_1 + \alpha_1\beta);$$

$$\frac{(\alpha, \beta)}{(\alpha_1, \beta_1)} = \left(\frac{(\alpha\alpha_1 + \beta\beta_1)}{\alpha_1^2 + \beta_1^2}, \frac{\alpha_1\beta - \alpha\beta_1}{\alpha_1^2 + \beta_1^2}\right), \quad \alpha_1^2 + \beta_1^2 > 0.$$

Для пар вида $(\alpha, 0)$ и только для них вводится понятие «$<$»:

$$(\alpha, 0) < (\beta, 0), \text{ если } \alpha < \beta. \tag{1}$$

Имеет место очевидное взаимно однозначное соответствие $\alpha \sim \sim (\alpha, 0)$ между парами $(\alpha, 0)$ и действительными числами. Важно, что оно изоморфно по отношению к арифметическим действиям и знаку «$<$»:

$$\alpha \pm \beta \sim (\alpha \pm \beta, 0) = (\alpha, 0) \pm (\beta, 0);$$
$$\alpha\beta \sim (\alpha\beta, 0) = (\alpha, 0)(\beta, 0);$$
$$\frac{\alpha}{\beta} \sim \left(\frac{\alpha}{\beta}, 0\right) = \frac{(\alpha, 0)}{(\beta, 0)} \quad (\beta \neq 0)$$

(см. также (1)).

Это показывает, что пары $(\alpha, 0)$ суть действительные числа (см. § 2.4). Они только изображены необычно — в виде пар. Поэтому будем писать $\alpha = (\alpha, 0)$.

Итак, множество наших пар содержит в себе в качестве своего подмножества множество действительных чисел. Пары же (α, β), где $\beta \neq 0$ — это уже (не действительные) комплексные числа.

Легко проверяется, что наши пары подчиняются аксиомам арифметических действий таким же, как аксиомы действительного числа (см. § 2.4, аксиомы II, III), если только выбросить из последних те из них, которые связаны со знаком $<$. Для пар же $(\alpha, 0)$ выполняются вообще все аксиомы действительного числа.

Мы уже обозначили пары $(\alpha, 0)$ через α. Обозначим еще пару $(0, 1)$ буквой $i (i = (0, 1))$.

Над действительными числами α и символом i можно производить арифметические операции — ведь это же есть пары, для которых эти операции были определены. В результате этих операций будут получаться снова пары, которые, однако, можно записывать как некоторые арифметические комбинации из действительных чисел $\alpha, \beta, \ldots$ и символа i. Это исчисление облегчается тем, что $i^2 = ii = (0, 1)(0, 1) = (-1, 0) = -1$.

Любую пару можно представить в виде арифметической комбинации из действительных чисел и i:

$$(\alpha, \beta) = (\alpha, 0) + (0, \beta) = \alpha + \beta(0, 1) = \alpha + \beta i. \qquad (2)$$

Таким образом, между парами (α, β) и выражениями $\alpha + i\beta$ имеется взаимно однозначное соответствие, выражаемое равенством (2). Это соответствие есть изоморфизм по отношению к арифметическим операциям, потому что в силу правил исчисления над действительными числами и символом i

$$(\alpha + i\beta) \pm (\alpha_1 + i\beta_1) = (\alpha \pm \alpha_1) + i(\beta \pm \beta_1),$$

$$(\alpha + i\beta)(\alpha_1 + i\beta_1) = (\alpha\alpha_1 - \beta\beta_1) + i(\alpha\beta_1 + \alpha_1\beta),$$

$$\frac{\alpha + i\beta}{\alpha_1 + i\beta_1} = \frac{\alpha\alpha_1 + \beta\beta_1}{\alpha_1^2 + \beta_1^2} + i\frac{\alpha_1\beta - \alpha\beta_1}{\alpha_1^2 + \beta_1^2} \quad (\alpha_1^2 + \beta_1^2 > 0).$$

Мы можем теперь изгнать из обращения (α, β) и оперировать представляющими их выражениями (комплексными числами) $\alpha + i\beta$. Делается еще один шаг: комплексные числа $\alpha + i\beta$, где α, β — действительные, обозначаются буквами, например, пишут $a = \alpha + i\beta$; α называется *действительной частью* (компонентой) числа a, а β — *мнимой его частью* (но β — действительно!).

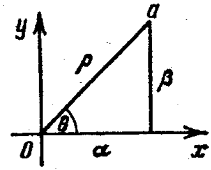

Рис. 8.1.

Обычно, когда говорят, что задано комплексное число $a = \alpha + \beta i$, не делая дополнительных оговорок, то автоматически считают α и β действительными числами.

Комплексные числа изображаются в виде (рис. 8.1) точек (комплексной) плоскости, каждому числу $a = \alpha + i\beta$ приводится в соответствие точка (точка a) с прямоугольными координатами (α, β). Обозначим через ρ длину радиус-вектора точки a и через θ (при $a \neq 0$) — угол (в радианах), образованный им с положительным направлением оси x. Ясно, что $\alpha = \rho\cos\theta$, $\beta = \rho\sin\theta$, $\rho = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} \geqslant 0$, поэтому

$$a = \alpha + i\beta = \rho(\cos\theta + i\sin\theta). \qquad (3)$$

Если $a = 0$, то $\rho = 0$ и равенство (3) сохраняется при любом θ.

Итак, мы доказали, что всякое комплексное число a можно представить в форме (3), где ρ — неотрицательное число. При этом ρ в этом (тригонометрическом) представлении есть единственное (неотрицательное) число; θ при $a \neq 0$ — также единственное число, если потребовать, чтобы оно удовлетворяло неравенствам

$$0 \leqslant \theta < 2\pi. \qquad (4)$$

Если изменить в (3) одно из чисел ρ, θ или оба (при условии (4)), то получим уже другую комплексную точку.

Число ρ называется *модулем* a и обозначается так: $|a| = \rho = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$. Если a действительное, то модуль и абсолютная величина a совпадают.

Число же θ, удовлетворяющее неравенствам $0 \leqslant \theta < 2\pi$, называется *аргументом a в приведенной форме* и обозначается так: $\arg a$ *). Но уравнению (3) удовлетворяет также любое значение θ, отличающееся от $\arg a$ на величину $2k\pi$ ($k=0, \pm 1, \ldots$). Поэтому еще вводится понятие *аргумента a*:

$$\theta = \operatorname{Arg} a = \arg a + 2k\pi \quad (k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots), \tag{5}$$

это бесконечнозначная функция от a. Любое решение уравнения (3) относительно θ может быть записано в форме (5).

Положим

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta \quad (-\infty < \theta < \infty).$$

Мы, таким образом, впервые определяем функцию e^z для чисто мнимого аргумента $z = i\theta$. Для произвольной комплексной переменной $z = x + iy$ функция e^z определяется затем при помощи равенства

$$e^z = e^x e^{iy} = e^x(\cos y + i\sin y); \tag{6}$$

$e^{i\theta}$ есть комплексная функция (принимающая комплексные значения) от действительного аргумента θ. Когда θ изменяется непрерывно на полуинтервале $0 \leqslant \theta < 2\pi$, точка $e^{i\theta}$ описывает непрерывно окружность радуса 1 с центром в 0. Таким образом, $|e^{i\theta}| = \sqrt{\cos^2\theta + \sin^2\theta} = 1$. Ясно, что $e^{i\theta}$ — периодическая функция периода 2π: $e^{i(\theta+2\pi)} = e^{i\theta}$. Она подчиняется свойствам

$$e^{i(\theta+\theta_1)} = e^{i\theta}e^{i\theta_1}, \quad e^{-i\theta} = \frac{1}{e^{i\theta}}, \tag{7}$$

каковы бы ни были θ и θ_1, потому, что

$$e^{i\theta}e^{i\theta_1} = (\cos\theta + i\sin\theta)(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1) =$$
$$= (\cos\theta\cos\theta_1 - \sin\theta\sin\theta_1) + i(\cos\theta\sin\theta_1 + \sin\theta_1\cos\theta) =$$
$$= \cos(\theta+\theta_1) + i\sin(\theta+\theta_1) = e^{i(\theta+\theta_1)},$$
$$\frac{1}{e^{i\theta}} = \frac{1}{\cos\theta + i\sin\theta} = \cos\theta - i\sin\theta = e^{-i\theta}.$$

Из (7) следует еще, что $e^{i(\theta-\theta_1)} = e^{i\theta}e^{-i\theta_1} = \dfrac{e^{i\theta}}{e^{i\theta_1}}$. Из сказанного выше следует, что всякое комплексное число представимо в (тригонометрической) форме: $a = \rho e^{i\theta}$, где $\rho \geqslant 0$ — единственное число, равное $|a|$, а $\theta = \operatorname{Arg} a$, определено с точностью до слагаемого $2k\pi$ ($k = 0, \pm 1, \ldots$).

Имеет место неравенство

$$|a+b| \leqslant |a| + |b| \tag{8}$$

*) Впрочем, иногда удобно аргументом a в приведенной форме называть число θ, определяемое равенством (3), для которого $\alpha_0 \leqslant \theta < \alpha_0 + 2\pi$ или $\alpha_0 < \theta \leqslant \alpha_0 + 2\pi$, где α_0 — произвольно выбранное число.

и вытекающее из него другое неравенство

$$||a| - |b|| \leqslant |a - b|, \tag{9}$$

каковы бы ни были комплексные a и b. Геометрически они выражают (рис. 8.2), что сторона треугольника не больше суммы его остальных сторон и не меньше их разности. На языке компонент чисел $a = \alpha + i\beta$, $b = \alpha_1 + i\beta_1$ неравенство (8) сводится к неравенству (см. § 6.2, (9))

$$\sqrt{(\alpha + \alpha_1)^2 + (\beta + \beta_1)^2} \leqslant \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} + \sqrt{\alpha_1^2 + \beta_1^2}.$$

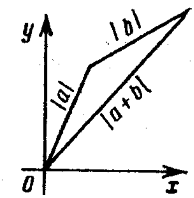

Рис. 8.2.

Справедливы также равенства

$$|ab| = |a||b|, \tag{10}$$

$$\operatorname{Arg}(ab) = \operatorname{Arg} a + \operatorname{Arg} b + 2k\pi, \tag{11}$$

$$\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}, \quad b \neq 0, \tag{12}$$

$$\operatorname{Arg}\frac{a}{b} = \operatorname{Arg} a - \operatorname{Arg} b + 2k\pi, \quad (k = 0, \pm 1, \ldots). \tag{13}$$

Равенство (11) надо понимать в том смысле, что в качестве аргументов a, b, ab можно взять любые допустимые числа θ_1, θ_2, θ, и тогда окажется, что θ отличается от $\theta_1 + \theta_2$ на величину $2k\pi$, где k — некоторое целое.

Докажем (10) и (11). Пусть $a = \rho_1 e^{i\theta_1}$, $b = \rho_2 e^{i\theta_2}$, $ab = \rho e^{i\theta}$, где θ_1, θ_2, θ — какие-то определенные (но произвольные) допустимые аргументы a, b, ab. Тогда

$$\rho e^{i\theta} = \rho_1 \rho_2 e^{i(\theta_1 + \theta_2)}$$

и на основании единственности представления комплексного числа в показательной форме $\rho = \rho_1\rho_2$, $\theta = \theta_1 + \theta_2 + 2k\pi$, где k — некоторое целое.

Если комплексное число $a = \alpha + i\beta$, то число $\bar{a} = \alpha - i\beta$ называется *сопряженным* к a. Таким образом, если $a = \alpha$ — действительное, то $\bar{a} = \alpha$.

Имеем

$$\overline{a \pm b} = \bar{a} \pm \bar{b}, \quad \overline{ab} = \bar{a}\bar{b}, \quad \overline{\left(\frac{a}{b}\right)} = \frac{\bar{a}}{\bar{b}} \quad (b \neq 0), \tag{14}$$

потому что, если $a = \alpha_1 + i\beta_1 = \rho_1 e^{i\theta_1}$, $b = \alpha_2 + i\beta_2 = \rho_2 e^{i\theta_2}$, то

$$\overline{a \pm b} = \overline{(\alpha_1 \pm \alpha_2) + (\beta_1 \pm \beta_2) i} = (\alpha_1 \pm \alpha_2) - (\beta_1 \pm \beta_2) i =$$

$$= (\alpha_1 - \beta_1 i) \pm (\alpha_2 - \beta_2 i) = \bar{a} \pm \bar{b},$$

$$\overline{ab} = \overline{\rho\rho_1 e^{i(\theta_1 + \theta_2)}} = \rho_1\rho_2 e^{-i(\theta_1 + \theta_2)} = \rho_1 e^{-i\theta_1} \rho_2 e^{-i\theta_2} = \bar{a}\bar{b}.$$

Рассмотрим задачу о вычислении корня n-й степени из числа $a = \rho e^{i\theta}$ $(\rho > 0)$. Требуется, таким образом, найти все числа $b = re^{i\varphi}$ такие, что $b^n = a$. Но тогда $r^n e^{in\varphi} = \rho e^{i\theta}$ $(r, \rho > 0)$ и, вследствие единственности представления комплексного числа в показательной форме, $\rho = r^n$, $n\varphi = \theta + 2k\pi$, $k = 0, \pm 1, \ldots$ Из первого равенства следует $r = \sqrt[n]{\rho} > 0$ (r — арифметическое значение корня n-й степени из положительного числа ρ). Из второго же, что $\varphi = \frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n}$ $(k = 0, \pm 1, \ldots)$.

Значения φ, дающие различные корни n-й степени из a, соответствуют только n значениям k:

$$\varphi_k = \frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n} \quad (k = 0, 1, \ldots, n-1). \tag{15}$$

Остальным целым k соответствуют значения φ, отличающиеся от одного из значений (15) на величину, кратную 2π.

Мы доказали, что у комплексного числа $a \neq 0$ существует n (и только n) корней степени n, записываемых по формуле:

$$\sqrt[n]{a} = \sqrt[n]{\rho e^{i\theta}} = \sqrt[n]{\rho}\, e^{i\varphi_k} \quad (k = 0, 1, \ldots, n-1),$$

где φ_k определяются равенствами (15).

Пример.

$$\frac{1}{2} + \cos x + \cos 2x + \ldots + \cos nx = \frac{\sin \frac{2n+1}{2} x}{2 \sin \frac{x}{2}} = D_n(x), \tag{16}$$

$$\sin x + \ldots + \sin nx = \frac{\cos \frac{x}{2} - \cos\left(n + \frac{1}{2}\right) x}{2 \sin \frac{x}{2}}. \tag{17}$$

Если в равенстве

$$\sum_{k=1}^{n} e^{ikx} = \frac{e^{i(n+1)x} - e^{ix}}{e^{ix} - 1} = \frac{e^{i(n+(1/2))x} - e^{ix/2}}{e^{ix/2} - e^{-ix/2}} =$$

$$= \frac{\sin(n + (1/2))x}{2\sin(x/2)} - \frac{1}{2} + i\,\frac{\cos(x/2) - \cos(n + (1/2))x}{2\sin(x/2)}$$

приравнять действительные и мнимые части, то получим (16) и (17). Обе суммы, (16) и (17), имеют большое значение в теории рядов Фурье; функция (16) называется *суммой* или *ядром Дирихле*.

§ 8.3. Предел последовательности комплексных чисел. Функция комплексного переменного

По определению, последовательность комплексных чисел $z_n = \alpha_n + i\beta_n$ $(n = 1, 2, \ldots)$ имеет своим пределом комплексное число $z_0 = \alpha_0 + i\beta_0$, если

$$|z_n - z_0| = \sqrt{(\alpha_n - \alpha_0)^2 + (\beta_n - \beta_0)^2} \to 0 \quad (n \to \infty) \tag{1}$$

или, что, очевидно, все равно, если одновременно $\alpha_n \to \alpha_0$ и $\beta_n \to \beta_0$ $(n \to \infty)$. В этом случае пишут $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = z_0$ или $z_n \to z_0$.

Нетрудно видеть, сводя вопрос к рассмотрению действительной и мнимой компонент z_n, что для последовательности $\{z_n\}$, так же как для действительных последовательностей, имеет место условие Коши существования предела: для того чтобы последовательность $\{z_n\}$ имела предел, необходимо и достаточно, чтобы для любого $\varepsilon > 0$ нашлось такое N, чтобы для всех n, $n' > N$ выполнялось неравенство $|z_n - z_{n'}| < \varepsilon$.

Легко также доказывается, что из существования предела (1) следует, что $|z_n| \to |z_0|$ $(n \to \infty)$.

Имеют место также равенства

$$\left.\begin{aligned} \lim\left(z_n \pm z_{n'}\right) &= \lim z_n \pm \lim z_{n'}, \\ \lim\left(z_n z_{n'}\right) &= \lim z_n \lim z_{n'}, \\ \lim \frac{z_n}{z_{n'}} &= \frac{\lim z_n}{\lim z_{n'}} \quad \left(\lim z_{n'} \neq 0\right), \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

причем, как обычно, предполагается существование пределов z_n и $z_{n'}$ и заключается существование пределов, стоящих в этих равенствах слева.

Пусть G есть некоторое множество комплексных чисел $z = x + iy$ (точек комплексной плоскости). Если в силу некоторого закона каждому $z \in G$ приведено в соответствие число w, вообще говоря, комплексное, то говорят, что этим определена на G *функция комплексной переменной* $w = f(z)$.

Для такой функции, так же как для функции действительной переменной, вводится понятие предела, непрерывности и производной.

Окрестностью z_0 называется множество точек z (комплексной плоскости), для которых при некотором δ выполняется неравенство

$$|z - z_0| < \delta. \tag{3}$$

Говорят, что число (комплексное) A есть *предел функции* f в точке z_0, и пишут

$$\lim_{z\to z_0} f(z) = A \quad \text{или} \quad f(z) \to A, \ z \to z_0,$$

если f определена в некоторой окрестности этой точки, за исключением, быть может, ее самой, и если для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta > 0$ такое, что $|f(z) - A| < \varepsilon$ для всех z, удовлетворяющих неравенствам $0 < |z - z_0| < \delta$.

Это определение эквивалентно следующему: какова бы ни была последовательность $\{z_n\}$, $z_n \neq z_0$, сходящаяся к z_0, $\lim f(z_n) = A$.

Имеют место свойства:

$$\left.\begin{aligned} \lim_{z\to z_0}\{u(z)\pm v(z)\} &= \lim_{z\to z_0} u(z)\pm\lim_{z\to z_0} v(z),\\ \lim_{z\to z_0}\{u(z)\,v(z)\} &= \lim_{z\to z_0} u(z)\lim_{z\to z_0} v(z),\\ \lim_{z\to z_0}\frac{u(z)}{v(z)} &= \frac{\lim\limits_{z\to z_0} u(z)}{\lim\limits_{z\to z_0} v(z)}\ \left(\lim_{z\to z_0} v(z)\neq 0\right). \end{aligned}\right\}\qquad(4)$$

Они доказываются вполне аналогично тому, как это делается для функций действительной переменной (см. § 4.1, теорема 6).

Говорят, что функция f *непрерывна в точке* z^0, если она определена в некоторой ее окрестности, в том числе и в ней самой, и если $\lim\limits_{z\to z_0} f(z) = f(z^0)$.

Конечно, из (4) следует, что сумма, разность, произведение и частное непрерывных в z^0 функций есть функция непрерывная в z^0 (при обычной оговорке для частного).

Говорят, что $f'(z_0)$ есть производная от f в точке z_0, если

$$\lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(z_0+\Delta z)-f(z_0)}{\Delta z} = f'(z_0). \qquad (5)$$

Производная k-го порядка от f в точке z определяется по индукции:

$$f^{(k)}(z) = (f^{(k-1)}(z))' \quad (k=2,\ 3,\ \ldots). \qquad (6)$$

Справедливы равенства, доказываемые в точности так же, как в действительном случае:

$$\left.\begin{aligned} [u(z)\pm v(z)]' &= u'(z)\pm v'(z),\\ [u(z)\,v(z)]' &= u(z)\,v'(z)+u'(z)\,v(z),\\ \left(\frac{u(z)}{v(z)}\right)' &= \frac{v(z)\,u'(z)-u(z)\,v'(z)}{v(z)^2}\quad (v(z)\neq 0), \end{aligned}\right.\qquad(7)$$

$$\left((z-a)^n\right)' = n(z-a)^{n-1} \quad (n=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \ldots). \qquad (8)$$

Нам придется также иметь дело с комплекснозначными функциями от действительной переменной

$$f(x) = \varphi(x) + i\psi(x) \qquad (9)$$

(φ, ψ — действительные функции, определенные на некотором множестве действительных x). Функция $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ $(-\infty<\theta<\infty)$ может служить примером такой функции. Для таких функций естественно определяется производная и неопределенный интеграл:

$$f'(x) = \varphi'(x) + i\psi'(x), \tag{10}$$

$$\int f(x)\,dx = \int \varphi(x)dx + i \int \psi(x)\,dx + C \tag{11}$$

(C — комплексная константа).

Из (11) следует равенство

$$\int (Af_1(x) + Bf_2(x))\,dx = A \int f_1(x)\,dx + B \int f_2(x)\,dx + C, \tag{12}$$

где A, B — комплексные константы, а f_1 и f_2 — комплекснозначные непрерывные функции.

Замечание. Пусть функция $f(z)$ задана на открытом множестве G точек z комплексной плоскости, пересекающемся с действительной осью x по некоторому интервалу (a, b) (рис. 8.3). Тогда f можно рассматривать также как функцию $f(x)$ от действительной переменной $x \in (a, b)$ (вообще, комплекснозначную). Если f имеет в точке $x \in (a, b)$ производную в смысле комплексного переменного, т. е. если существует предел $\lim\limits_{\Delta z \to 0} \dfrac{f(x + \Delta z) - f(x)}{\Delta z} = f'(x)$, где Δz стремится к нулю, пробегая любые комплексные значения, то тем более f имеет равную ей производную в точке x в смысле действительного переменного, где требуется, чтобы существовал предел $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = f'(x)$, когда Δx стремится к нулю, пробегая только любые действительные значения. Обратное утверждение неверно, как показывает пример функции $|z|$. Производная в смысле действительной переменной от нее в точке $x > 0$ существует и равна 1, между тем как производная от нее в той же точке в смысле комплексного переменного не существует потому, что отношение ($\Delta z = \rho e^{i\theta}$)

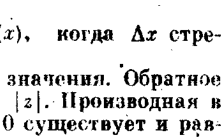

Рис. 8.3.

$$\frac{|x + \Delta z| - |x|}{\Delta z} = \frac{\sqrt{(x + \rho\cos\theta)^2 + (\rho\sin\theta)^2} - x}{\rho e^{i\theta}} =$$

$$= \frac{\sqrt{x^2 + 2x\rho\cos\theta + \rho^2} - x}{\rho e^{i\theta}} = \frac{(2x\rho\cos\theta + \rho^2)\frac{1}{2x} + o(\rho)}{\rho e^{i\theta}} = \frac{\cos\theta + o(1)}{e^{i\theta}} \to$$

$$\to \frac{\cos\theta}{e^{i\theta}} \quad (\rho \to 0) \tag{13}$$

не имеет определенного предела при $\rho = |\Delta z| \to 0$. Пределы существуют, когда $\Delta z \to 0$ по лучам, выходящим из нулевой точки, но они вообще разные для разных лучей. В третьем равенстве мы вынесли x за знак корня и затем применили равенство $\sqrt{1 + u} = 1 + \frac{u}{2} + o(u)$, $u \to 0$.

§ 8.4. Многочлены

В § 5.9 было уделено внимание многочленам степени n,

$$Q(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n \qquad (a_n \neq 0),$$

где коэффициенты a_k и переменная x считались действительными. В частности, была получена формула Тейлора

$$Q(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{Q_n^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k,$$

где производные понимались в смысле действительного переменного.

В этом парагарфе мы будем рассматривать более общие многочлены степени n,

$$Q(z) = a_0 + a_1 z + \ldots + a_n z^n \qquad (a_n \neq 0), \tag{1}$$

где a_k, вообще говоря, комплексные коэффициенты, а $z = x + iy$ — переменная, принимающая любые комплексные значения.

Если z в правой части (1) заменить на $(z - z_0) + z_0$, возвести в требуемые степени и привести подобные члены с одинаковыми степенями $(z - z_0)$, то $Q(z)$ представится в виде суммы по степеням $z - z_0$:

$$Q(z) = b_0 + b_1(z - z_0) + \ldots + b_n(z - z_0)^n. \tag{2}$$

Производная от $Q(z)$ порядка k (в комплексном смысле; см. § 8.3) равна $Q^{(k)}(z) = k! b_k + (k+1) \ldots 2(z - z_0) + \ldots$ Поэтому

$$b_k = \frac{Q^{(k)}(z_0)}{k!} \tag{3}$$

и

$$Q(z) = \sum_{k=0}^{n} \frac{Q^{(k)}(z_0)}{k!}(z - z_0)^k. \tag{4}$$

Мы получили формулу Тейлора для многочлена по степеням $(z - z_0)$. Из нее следует, что $Q(z)$ имеет единственное разложение вида (2): если два многочлена тождественно (т. е. для всех z) равны, то коэффициенты их при одинаковых степенях $(z - z_0)$ равны, потому что они определяются одними и теми же формулами (3). В частности, многочлен степени n, тождественно равный нулю, имеет все коэффициенты, равные нулю.

Если точка z_0 такова, что

$$Q(z_0) = Q'(z_0) = \ldots = Q^{(k-1)}(z_0) = 0, \quad Q^{(k)}(z_0) \neq 0, \tag{5}$$

то Q можно представить в виде

$$Q(z) = (z - z_0)^k R(z) \qquad (R(z_0) \neq 0), \tag{6}$$

где R — многочлен степени $n-k$, и наоборот. Действительно, из (5) следует (6) на основании формулы Тейлора (4); с другой стороны, если верно (6), то помножим все члены разложения $R(z)$ по степеням $(z-z_0)$ на $(z-z_0)^k$ и сложим; тогда в силу единственности получим тейлорово разложение Q по степеням $(z-z_0)$, удовлетворяющее свойствам (5).

В случае (5), или, что все равно, (6), говорят, что z_0 есть *корень многочлена Q кратности k*. Можно еще сказать, что z_0 есть корень Q кратности k, если $Q(z)$ делится на $(z-z_0)^k$, но не делится на $(z-z_0)^{k+1}$.

Имеет место основная теорема алгебры, заключающаяся в следующем: *многочлен Q степени $n>0$ имеет по меньшей мере один комплексный корень.*

Из этой теоремы легко заключить, что на самом деле Q имеет n и только n корней, если учесть их кратность. В самом деле, пусть z_1 есть корень Q степени n. Кратность его обозначим через k_1. Тогда

$$Q(z)=(z-z_1)^{k_1}Q_1(z) \quad (Q_1(z_1)\neq 0),$$

где Q_1 — степени $n-k_1$. Если $n-k_1>0$, то по той же основной теореме у многочлена Q_1 найдется корень z_2 некоторой кратности k_2, и тогда

$$Q_1(z)=(z-z_1)^{k_1}(z-z_2)^{k_2}Q_2(z) \quad (Q_2(z_1),\ Q_2(z_2)\neq 0).$$

Если Q_2 все еще будет иметь положительную степень, то продолжим эти рассуждения. После конечного числа этапов подобных рассуждений мы придем к тому, что $Q(z)$ имеет (разные) корни $z_1, \ldots, z_m$ соответственно кратностей $k_1, \ldots, k_m$, где $n=k_1+\ldots$ $\ldots+k_m$, и представляется в виде произведения

$$Q(z)=a_n(z-z_1)^{k_1}\ldots(z-z_m)^{k_m} \quad (a_n\neq 0,\ n=k_1+\ldots+k_m). \tag{7}$$

Других корней Q не имеет, потому что в силу (7) для всякого $z_0\neq z_j$ $(j=1, \ldots, m)$, очевидно, $Q(z_0)\neq 0$. Это показывает, что представление Q в виде произведения (7) единственно.

Остановимся еще на интересной связи между рассматриваемым многочленом $Q(z)$ и его производной $Q'(z)$. Она заключается в том, что *общий наибольший делитель $Q(z)$ и $Q'(z)$ есть многочлен, равный с точностью до постоянного не равного нулю множителя многочлену*

$$L(z)=(z-z_1)^{k_1-1}\ldots(z-z_m)^{k_m-1}. \tag{8}$$

В самом деле, z_j есть корень многочлена Q кратности k_j, и потому выполняются условия

$$Q(z_j)=Q'(z_j)=\ldots=Q^{(k_j-1)}(z_j)=0, \quad Q^{(k_j)}(z_j)\neq 0.$$

Отсюда для $\Lambda(z)=Q'(z)$ вытекают условия

$$\Lambda(z_j)=\ldots=\Lambda^{(k_j-2)}(z_j)=0,\quad \Lambda^{(k_j-1)}(z_j)\neq 0,$$

говорящие, что z_j есть корень $Q'(z)$ кратности k_j-1. Но в таком случае $(z-z_j)^{k_j-1}$ есть делитель как $Q(z)$, так и $Q'(z)$, а $(z-z_j)^{k_j}$ не является делителем $Q'(z)$. Так как это рассуждение *) можно провести для любого $j=1, \ldots, m$, то это и доказывает, что многочлен L есть общий наибольший делитель Q и Q'. Если $k_j=1$ при некотором j, то соответствующий множитель в (8) равен 1.

Заметим, что многочлен $L(z)$ всегда можно найти эффективно методом *алгоритма* Евклида, хотя его корни, быть может, так и останутся неизвестными.

Напомним этот метод. Пусть даны многочлены M_0 и M_1 степеней соответственно m и n, где $m\geqslant n$. Располагаем их члены по убывающим степеням z и делим M_0 на M_1. Получим частное и остаток M_2. Степень последнего ниже степени M_1. Затем делим M_1 на M_2, остаток обозначим через M_3 и т. д. Так как на каждом этапе этих рассуждений степень понижается по меньшей мере на 1, то в конце концов процесс оборвется — остаток окажется нулем. В результате получим цепочку:

$$M_0=M_1R_0+M_2,\quad M_1=M_2R_1+M_3,\ \ldots,$$
$$M_{l-2}=M_{l-1}R_{l-2}+M_l,\quad M_{l-1}=M_lR_{l-1},$$

где R_k — многочлены, а степени M_k с увеличением k понижаются. Из этих равенств, видно, что

$$\text{о. н. д. }(M_0, M_1)=\text{о. н. д. }(M_1, M_2)=\ldots=M_l,$$

и M_l есть общий наибольший делитель (о. н. д.) M_0 и M_1.

Отметим, что основная теорема алгебры доказывает только существование корня (вообще комплексного) у многочлена n-й степени, не давая эффективных методов нахождения его в общем случае. Впрочем, доказательство этой теоремы проводится методами математического анализа, а не алгебры, и если мы не доказываем здесь эту теорему, то потому, что она связана более органически с теорией функций комплексного переменного.

Существуют формулы решения общих уравнений второй, третьей и четвертой степеней. Для уравнений степени $n>4$ таких формул нет. Абель **) доказал, что они не могут существовать. Это надо понимать в том смысле, что при $n>4$ корни уравнения $a_0x^n+\ldots+a_{n-1}x+a_n=0$ $(a_0\neq 0)$ не выражаются через коэффициенты a_k посредством функций от этих коэффициентов, представляющих собой результат конечного числа операций

*) В этих рассуждениях о связи Q и Q' можно также считать, что коэффициенты Q и переменная x действительны. Именно этот случай найдет применение в § 8.7.

**) Н. Г. Абель (1802—1829) — выдающийся норвежский математик.

только следующего вида: сложения, вычитания, умножения, деления и извлечения корня.

Многочлен $Q(z)$ [см. (1)] называется *действительным*, если все его коэффициенты действительны. Действительный многочлен, если его рассматривать для действительных $z=x$, есть действительная функция $Q(x)$, т. е. принимающая действительные значения.

Важное свойство действительного многочлена выражается в равенстве

$$\overline{Q(z)} = Q(\bar{z}), \tag{9}$$

верном для любого комплексного z. Оно устанавливается на основании формул § 8.2, (14) при помощи следующих выкладок, где надо учесть, что $\bar{a}_k = a_k$ (в силу действительности a_k):

$$\overline{Q(z)} = \overline{\sum_{k=0}^{n} a_k z^k} = \sum_{k=0}^{n} \overline{a_k z^k} = \sum_{k=0}^{n} \bar{a}_k \bar{z}^k = \sum_{k=0}^{n} a_k \bar{z}^k = Q(\bar{z}).$$

Докажем теорему.

Теорема. *Если действительный многочлен* $Q(z)$ *имеет комплексный корень* $z_0 = \alpha + i\beta$ *кратности* k, *то он имеет также корень* $\bar{z}_0 = \alpha - i\beta$, *ему сопряженный той же кратности.*

Доказательство. По условию, $Q(z_0) = Q'(z_0) = \ldots$ $\ldots = Q^{(k-1)}(z_0) = 0$, $Q^{(k)}(z_0) \neq 0$. Легко видеть, что если $Q(z)$ есть действительный многочлен, то и его производная $Q^{(l)}(z)$ порядка l есть действительный многочлен. Поэтому в силу (9) $\overline{Q^{(l)}(z_0)} = Q^{(l)}(\bar{z}_0)$ для любого $l = 0, 1, 2, \ldots$ и, следовательно,

$$Q(\bar{z}_0) = Q'(\bar{z}_0) = \ldots = Q^{(k-1)}(\bar{z}_0) = 0, \quad Q^{(k)}(\bar{z}_0) \neq 0.$$

На основании этой теоремы и, принимая во внимание доказанное разложение [см. (7)] многочлена n-й степени $Q(z)$ на множители, действительный многочлен степени n ($a_n \neq 0$) можно представить в виде произведения

$$Q(z) = a_n (z-a_1)^{l_1} \ldots (z-a_r)^{l_r} (z^2 + p_1 z + q_1)^{m_1} \ldots (z^2 + p_s z + q_s)^{m_s}, \tag{10}$$

где $a_1, \ldots, a_r, p_1, \ldots, p_s, q_1, \ldots, q_s$ — действительные числа, многочлены $z^2 + p_j z + q_j$ имеют комплексные (попарно сопряженные) корни и $n = l_1 + \ldots + l_r + 2(m_1 + \ldots + m_s)$. Отметим, что числа $r, s, a_1, \ldots, a_r, p_1, \ldots, p_s, q_1, \ldots, q_s, l_1, \ldots, l_r, m_1, \ldots, m_s$ определяются многочленом $Q(z)$ однозначно.

В самом деле, обратимся к разложению (7). Если среди входящих в него корней z_k имеются действительные, то мы их заново пронумеруем, обозначив через $a_1, \ldots, a_r$. Соответствующие степени биномов обозначим через $l_1, \ldots, l_r$.

Наряду с каждым множителем $(z-z_j)^{k_\mu}$ с комплексным корнем z_j, в произведении (7) на основании доказанной теоремы обязательно имеется также множитель вида $(z-\bar{z}_j)^{k_\nu}$, где $k_\mu = k_\nu = k$. Полагая $z_j = \alpha + \beta i$, $(\bar{z}_j = \alpha - \beta i)$, получим

$$(z-z_j)^k (z-\bar{z}_j)^k = (z-\alpha-\beta i)^k (z-\alpha+\beta i)^k =$$
$$= [(z-\alpha)^2+\beta^2]^k = (z^2+pz+q)^k, \quad p=-2\alpha, \quad q=\alpha^2+\beta^2, \tag{11}$$

где p и q — действительные числа.

Теперь остается только перенумеровать множители, соответствующие разным попарно сопряженным корням Q и заменить ими соответствующие множители (7). В результате получим (10).

§ 8.5. Разложение рациональной функции на простейшие дроби

В этом параграфе мы будем рассматривать произвольную действительную рациональную функцию

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}, \tag{1}$$

представляющую собой правильную дробь. Это значит, что P и Q — действительные многочлены, причем степень P меньше степени Q. Будем считать, что P имеет степень m, а Q — степень n, следовательно, $m<n$. При этом мы будем считать, что x — действительная переменная, таким образом, $f(x)$ есть действительная функция. Для краткости будем обозначать через s_P, s_Q, ... соответственно степени многочленов P, Q, ...

Лемма 1. *Пусть a — действительный корень кратности k знаменателя $Q(x)$ дроби* (1):

$$Q(x) = (x-a)^k N(x) \qquad (N(a)\neq 0). \tag{2}$$

Тогда существует и притом единственное разложение дроби (1) *в виде*

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A}{(x-a)^k} + \frac{M(x)}{(x-a)^{k-1}N(x)}, \tag{3}$$

где A — постоянная, а второй член (3) *— правильная дробь.*

При этом A — действительное число, а $M(x)$ — действительный многочлен.

Единственность разложения (3) заключается в том, что существуют единственные числа A и многочлен $M(x)$, для которых имеет место (3).

Доказательство. Допустим, что разложение (3) имеет место, где A — некоторое постоянное число, а $M(x)$ — непрерывная функция. Приведя правую часть (3) к общему знаменателю и приравнивая полученный числитель к числителю левой части

(3), получим равенство

$$P(x) = AN(x) + (x-a)M(x) \tag{4}$$

(верное не только для значений x, для которых $Q(x) \neq 0$, но, вследствие непрерывности левой и правой частей (4), и для всех действительных x). Положив в нем $x = a$, и учтя, что $N(a) \neq 0$, получим

$$A = \frac{P(a)}{N(a)}, \tag{5}$$

число A — действительное, потому что P и N — действительные многочлены и a — действительное. Подставив найденное значение A в (4), находим (единственным образом)

$$M(x) = \frac{P(x) - AN(x)}{x-a}. \tag{6}$$

Так как числитель (6) есть многочлен, где A подобрано так, чтобы он обращался в нуль при $x = a$, то он делится на $x - a$ и $M(x)$ есть многочлен (действительный). По условию s_P, $s_N \leqslant n - 1$. Тогда в силу (6) $s_M \leqslant n - 2$, т. е. s_M меньше $(n-1)$ — степени знаменателя второй дроби правой части (3), следовательно, эта дробь правильная.

Обратно, если число A и многочлен $M(x)$ определяются по формулам (5), (6), то, очевидно, выполняется равенство (3).

З а м е ч а н и е. Для произвольной не обязательно действительной правильной дроби (1) и комплексного a лемма 1 полностью верна, за исключением последнего ее утверждения — теперь уже число A вообще комплексное, так же как $M(x)$ есть не обязательно действительная функция.

Л е м м а 2. *Пусть $Q(x)$ представляется в виде*

$$Q(x) = (x^2 + px + q)^k N(x), \tag{7}$$

где p, q — действительные, $q - \frac{p^2}{4} > 0$, k — натуральное и $N(x)$ — многочлен (действительный), не имеющий своими корнями корни $x^2 + px + q$.

Тогда существует единственное разложение дроби (1) *в виде*

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{Ax + B}{(x^2 + px + q)^k} + \frac{M(x)}{(x^2 + px + q)^{k-1} N(x)}, \tag{8}$$

где A, B — постоянные, а вторая дробь в правой части (8) *правильная.*

Числа A, B и многочлен $M(x)$ — действительные.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Обозначим через $a = \alpha + i\beta$, $\bar{a} = \alpha - i\beta$ корни многочлена $x^2 + px + q$ $(\beta \neq 0)$. Из условия леммы следует, что они еще являются корнями кратности k нашего действительного многочлена $Q(x)$. Допустим, что разложение (8) имеет место.

Приведем правую часть (8) к общему знаменателю и приравняем числитель полученной дроби числителю левой части (8). В результате получим тождество

$$P(x) = (Ax + B)N(x) + (x^2 + px + q)M(x). \tag{9}$$

Подставив в него числа a и $\bar{a}$, получим

$$P(a) = (Aa + B)N(a),\ P(\bar{a}) = (A\bar{a} + B)N(\bar{a})$$

или

$$Aa + B = \frac{P(a)}{N(a)} = \Lambda, \quad A\bar{a} + B = \frac{P(\bar{a})}{N(\bar{a})} = \overline{\left(\frac{P(a)}{N(a)}\right)} = \bar{\Lambda} \tag{10}$$

(по условию, $N(a)$, $N(\bar{a}) \neq 0$). Определитель полученной системы, которую надо решить относительно A и B,

$$\begin{vmatrix} a & 1 \\ \bar{a} & 1 \end{vmatrix} = a - \bar{a} = 2\beta i \neq 0.$$

Поэтому система разрешима; при этом A и B — действительные числа. В последнем можно убедиться, не решая системы (10). Возьмем сопряженные величины от обеих частей уравнений (10):

$$\bar{A}\bar{a} + \bar{B} = \bar{\Lambda}, \quad \bar{A}a + \bar{B} = \Lambda. \tag{10'}$$

Системы (10) и (10′) равносильны, поэтому их (единственные) решения также должны совпадать: $A = \bar{A}$, $B = \bar{B}$. Но тогда A и B — действительны.

Подставляем теперь в (9) полученные числа A и B и находим, что

$$M(x) = \frac{P(x) - (Ax + B)N(x)}{x^2 + px + q}.$$

Так как числитель полученной дроби обращается в нуль в корнях $x^2 + px + q$ (так были подобраны A и B), то он делится на знаменатель без остатка и $M(x)$ есть многочлен, очевидно, действительный. Не представляет труда выяснить, что вторая дробь в правой части (8) правильная. Лемма доказана.

С помощью лемм 1 и 2 нам удастся *разложить* нашу *действительную дробь в конечную сумму* так называемых *простейших рациональных дробей.* Напомним, что так как $Q(x)$ есть действительный многочлен степени n, то для него, как было доказано в предыдущем параграфе, справедливо разложение на множители вида § 8.4, (10). Пользуясь леммой 1 и леммой 2, на основании этого разложения можно утверждать, что наша правильная дробь может быть записана последовательно в виде (пояснения ниже)

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_{l_1}^{(1)}}{(x-a_1)^{l_1}} + \frac{M_1(x)}{(x-a_1)^{l_1-1} N_1(x)} = \tag{11}$$

$$= \frac{A_{l_1}^{(1)}}{(x-a_1)^{l_1}} + \frac{A_{l_1-1}^{(1)}}{(x-a_1)^{l_1-1}} + \frac{M_2(x)}{(x-a_1)^{l_1-2} N_1(x)} = \ldots = \tag{12}$$

$$= \frac{A_{l_1}^{(1)}}{(x-a_1)^{l_1}} + \ldots + \frac{A_1^{(1)}}{(x-a_1)} + \frac{M_{l_1}(x)}{(x-a_2)^{l_2} N_2(x)} = \tag{13}$$

$$= \ldots = \frac{A_{l_1}^{(1)}}{(x-a_1)^{l_1}} + \ldots + \frac{A_1^{(1)}}{x-a_1} + \ldots + \frac{A_{l_r}^{(r)}}{(x-a_r)^{l_r}} +$$

$$+ \ldots + \frac{A_1^{(r)}}{x-a_r} + \frac{B_{m_1}^{(1)}x + C_{m_1}^{(1)}}{(x^2+p_1x+q_1)^{m_1}} + \ldots + \frac{B_1^{(1)}x + C_1^{(1)}}{x^2+p_1x+q} + \ldots +$$

$$+ \frac{B_{m_s}^{(s)}x + C_{m_s}^{(s)}}{(x^2+p_sx+q_s)^{m_s}} + \ldots + \frac{B_1^{(s)}x + C_1^{(s)}}{x^2+p_sx+q_s}, \tag{14}$$

где константы A, B, C с соответствующими индексами *единственны и действительные.*

Соотношение (11) получено на основании леммы 1; при этом многочлен $N_1(x)$ (действительный) определен из равенства

$$Q(x) = (x-a_1)^{l_1} N_1(x) \quad (N_1(a_1) \neq 0). \tag{15}$$

Переход от (11) к (12) снова осуществляется при помощи леммы 1, что законно, потому что вторая дробь в правой части (11) действительная и правильная и $N_1(a_1) \neq 0$. В (13) процесс выделения простейших дробей, соответствующих действительному корню a_1, закончился, дальше точками ниже (13) отмечается продолжение этого процесса для других действительных корней, а затем для комплексных корней Q, где уже последовательно применяется лемма 2.

Конечно, этот процесс мы изобразили в общем случае — могло, например, случиться, что у Q простых корней вовсе нет, тогда наш процесс сразу же начался бы с применения леммы 2.

Единственность чисел A, B, C в разложении (14) пока полностью не доказана, потому что нахождение их было связано с определенным процессом. Быть может, при другом способе определения A, B, С эти числа будут другими? Мы изложим ниже метод нахождения A, B, C путем сравнения коэффициентов. При обосновании его выяснится, что эти числа образуют единственную систему.

Мы уже доказали, применяя леммы 1 и 2, что при данном многочлене $Q(x)$, каков бы ни был многочлен $P(x)$, где $s_P < s_Q$, существует система чисел A, B, C, ..., для которой имеет место тождество (14) (для всех действительных x, отличных от корней Q). Приведем (14) к общему знаменателю, соберем коэффициенты при одинаковых степенях и полученные линейные комбинации из A, B, C, ... приравняем коэффициентам многочлена $P(x)$, имеющим соответственно одинаковые степени. В результате получим систему из n *линейных* уравнений относительно неизвестных A, B, C, ... Количество уравнений и неизвестных здесь совпадает. Уже известно, что эта система имеет решение для любого многочлена $P(x)$ (т. е. для любой правой части системы!) — мы это доказали при помощи лемм 1 и 2. Поэтому определитель системы заведомо не равен нулю и, следовательно, числа A, B, C, ... образуют единственную систему.

Пример. На основании сказанного выше имеет место равенство

$$\frac{ax^3+bx^2+cx+d}{(x^2+x+1)(x-2)^2}=\frac{Ax+B}{x^2+x+1}+\frac{C}{(x-2)^2}+\frac{D}{x-2}. \tag{16}$$

Точнее, для любого многочлена третьей степени ax^3+bx^2+cx+d существуют постоянные A, B, C, D такие, что для всех $x\neq 2$ выполняется равенство (16). Чтобы найти эти постоянные, приведем правую часть (16) к общему наименьшему знаменателю. Числители обеих частей полученного равенства должны быть равны:

$$ax^3+bx^2+cx+d=(Ax+B)(x-2)^2+C(x^2+x+1)+\\+D(x^2+x+1)(x-2)$$

для $x\neq 2$, но вследствие непрерывности функций, входящих в это равенство, и для $x=2$. Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x, получим линейную систему из четырех уравнений с четырьмя неизвестными A, B, C, D:

$$a=A+D,\quad c=4A-4B+C-D,$$
$$b=B-4A+C-D,\quad d=4B+C-2D.$$

Мы уже знаем, что для любых a, b, c, d эта система имеет решение, но тогда, как известно из теории линейных уравнений, числа A, B, C, D, решающие систему, единственны.

Дадим еще другое разложение P/Q на простейшие дроби, основанное на применении только леммы 1.

Пусть $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ суть различные (комплексные и действительные) корни Q кратностей $k_1, \ldots, k_m$. Будем последовательно отделять от P/Q соответствующие этим корням простейшие дроби вида $A/(x-\lambda)^j$, применяя только лемму 1 и примечание к ней. В результате получим разложение

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{A_1^{(1)}}{(x-\lambda_1)}+\ldots+\frac{A_{k_1}^{(1)}}{(x-\lambda_1)^{k_1}}+\ldots+\frac{A_1^{(m)}}{x-\lambda_m}+\ldots+\frac{A_{k_m}^{(m)}}{(x-\lambda_m)^{k_m}}, \tag{17}$$

где числа A теперь уже, вообще говоря, комплексные.

Чтобы получить выражения для коэффициентов, соответствующих, например, корню λ_1, помножим обе части этого равенства на $(x-\lambda_1)^{k_1}$. Тогда получим

$$(x-\lambda_1)^{k_1}\frac{P(x)}{Q(x)}=$$
$$=A_{k_1}^{(1)}+A_{k_1-1}^{(1)}(x-\lambda_1)+\ldots+A_1^{(1)}(x-\lambda_1)^{k_1-1}+(x-\lambda_1)^{k_1}R(x), \tag{18}$$

где $R(x)$ — функция, имеющая производные любого порядка в точке λ_1.

Поэтому очевидно, что

$$A_{k_1-\mu}^{(1)}=\lim_{x\to\lambda_1}\frac{1}{\mu!}\frac{d^\mu}{dx^\mu}\left\{(x-\lambda_1)^{k_1}\frac{P(x)}{Q(x)}\right\}, \tag{19}$$

что, в частности, показывает, что числа A единственны. Формула (19) может быть полезной в практических вычислениях.

Отметим, что разложение (17), очевидно, имеет место (см. примечание к лемме 1) для любой правильной дроби P/Q, не обязательно действительной. Однако в случае действительной дроби P/Q имеет место определенная закономерность, которая нарушается в случае недействительной дроби. Мы имеем в виду следующий факт: в разложении (17) действительной дроби P/Q у слагаемых $A/(x-\lambda)^j$ при действительных λ константы A действительны, а при комплексном λ наряду со слагаемым $A/(x-\lambda)^j$ обязательно имеется такое слагаемое $\overline{A}/(x-\overline{\lambda})^j$. Этот факт является характерным для разложения **действительной** дроби в виде (17).

В самом деле, можно написать

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{A}{(x-\lambda)^k}+\frac{B}{(x-\overline{\lambda})^k}+\ldots \tag{20}$$

Применяя к этому равенству операцию сопряжения и учитывая, что дробь P/Q и переменная x действительные, получим

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{\overline{A}}{(x-\overline{\lambda})^k}+\frac{\overline{B}}{(x-\lambda)^k}+\ldots \tag{21}$$

В силу единственности разложения из (20) и (21) следует, что $\overline{A}=B$. Заметим, что сумма (x — действительное) $\frac{A}{(x-\lambda)^k}+$ $+\frac{\overline{A}}{(x-\overline{\lambda})^k}$ есть действительная функция от x, потому что она состоит из сопряженных друг другу слагаемых.

§ 8.6. Интегрирование рациональных дробей

Пусть нужно найти неопределенный интеграл

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)}\,dx \tag{1}$$

от рациональной действительной дроби на интервале, не содержащем в себе ни одного действительного корня $Q(x)$. На таком интервале функция $P(x)/Q(x)$ непрерывна и имеет смысл говорить о ее первообразной. Если степень s_P многочлена P не меньше степени s_Q ($s_P \geqslant s_Q$), то прежде всего разделим P на Q по известным правилам:

$$\frac{P}{Q} = R + \frac{P_1}{Q}.$$

Многочлен R интегрируется без труда, а P_1/Q — правильная действительная дробь. Все трудности сводятся к интегрированию правильной дроби, которую мы снова обозначим через P/Q.

Будем считать, что Q представляется в виде произведения § 8.4, (10). Тогда P/Q можно разложить на простейшие дроби по формуле § 8.5, (14), каждая из которых, как мы знаем, может быть проинтегрирована в элементарных функциях.

Мы доказали, что принципиально всякая рациональная функция интегрируется в элементарных функциях. Практически полное интегрирование (1) можно довести до конца в случае, если известны все корни Q и их кратности. Но мы уже говорили в § 8.4, что это не всегда удается узнать. В связи с этим всякого рода упрощения интеграла (1) являются очень ценными.

Об одном важном таком упрощении, предложенном Остроградским, будет идти речь в § 8.7.

§ 8.7. Метод Остроградского *) выделения рациональной части из интеграла

Допустим, что надо вычислить неопределенный интеграл

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)}\,dx, \tag{1}$$

где P/Q — правильная действительная рациональная функция (правильная действительная дробь) и Q степени n. Чтобы уяснить метод, проведем сначала чисто теоретические рассуждения.

Пусть $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ — разные (действительные и комплексные) корни Q кратностей соответственно $k_1, \ldots, k_m$. Разложим P/Q по схеме § 8.5, (17). Это разложение можно записать в виде

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \sum \frac{A}{(x-\lambda)^k}, \tag{2}$$

*) М. В. Остроградский (1801—1861) — выдающийся русский математик, академик.

где на самом деле, конечно, A, λ и k должны быть снабжены соответствующими индексами.

Запишем его еще в таком виде:

$$\frac{P}{Q}=\sum\frac{A}{x-\lambda}+\sum_{k>1}\frac{A}{(x-\lambda)^k}, \tag{3}$$

где в первую сумму входят дроби с первой степенью $(x-\lambda)$, а во вторую — остальные простейшие дроби. Как первая сумма, так и вторая являются действительными функциями от x, хотя отдельные их слагаемые, вообще говоря, комплексные (см. конец § 8.5).

Первую сумму приведем к общему знаменателю:

$$\frac{N(x)}{K(x)}=\sum\frac{A}{x-\lambda}=\frac{b_0+b_1x+\ldots+b_{m-1}x^{m-1}}{(x-\lambda_1)\ldots(x-\lambda_m)} \tag{4}$$

(N/K — правильная действительная дробь). Вторая сумма полностью интегрируется и притом в рациональных функциях:

$$\int\sum_{k>1}\frac{A}{(x-\lambda)^k}\,dx=\sum_{k>1}\frac{A}{(1-k)(x-\lambda)^{k-1}}+C=$$

$$=\frac{a_0+a_1x+\ldots+a_{n-m-1}x^{n-m-1}}{(x-\lambda_1)^{k_1-1}\ldots(x-\lambda_m)^{k_m-1}}+C=\frac{M(x)}{L(x)}+C. \tag{5}$$

Мы произвели почленное интегрирование, вообще говоря, комплекснозначных функций (см. § 8.3, (12)). Но в результате получили действительную функцию, потому что слагаемые, из которых она состоит, действительные или попарно сопряженные. M/L, очевидно, есть правильная дробь. C мы считаем действительной константой.

В силу сказанного, если проинтегрировать равенство (3), получим

$$\int\frac{P(x)}{Q(x)}\,dx=\frac{M(x)}{L(x)}+\int\frac{N(x)\,dx}{K(x)}, \tag{6}$$

$$K(x)=(x-\lambda_1)\ldots(x-\lambda_m), \tag{7}$$

$$L(x)=(x-\lambda_1)^{k_1-1}\ldots(x-\lambda_m)^{k_m-1} \tag{8}$$

(константу в правой части (6) относим за счет стоящего там неопределенного интеграла).

Итак, мы доказали, что при заданном Q и любом многочлене $p_0+p_1x+\ldots+p_{n-1}x^{n-1}=P(x)$ можно найти такие числа a_0, a_1, ..., a_{n-m-1}; b_0, ..., b_{m-1} (количество их n), что для многочленов $M(x)$ и $N(x)$, имеющих эти числа своими коэффициентами, выполняется равенство (6), где M/L, N/K — правильные дроби.

Покажем, как находить M и N. Для этого продифференцируем (6):

$$\frac{P}{Q}=\left(\frac{M}{L}\right)'+\frac{N}{K}=\frac{M'}{L}-\frac{1}{L}\frac{ML'}{L}+\frac{N}{K}.$$

Отсюда, приводя правую часть к общему знаменателю $Q=LK$ и приравнивая числители обеих частей, получим

$$P=KM'-\frac{MKL'}{L}+LN. \tag{9}$$

Но K и L выражаются формулами (7), (8), а L' имеет множитель $(x-\lambda_1)^{k_1-2}\ldots(x-\lambda_m)^{k_m-2}$ $(k_j>1)$, поэтому KL' делится на L и KL'/L есть многочлен.

Теперь мы складываем многочлены в правой части (9), приводим подобные при одинаковых степенях x и приравниваем их соответствующим коэффициентам p_k многочлена P. В результате получим алгебраическую линейную систему уравнений

$$\alpha_0^k a_0+\ldots+\alpha_{n-m-1}^k a_{n-m-1}+\beta_0^k b_0+\ldots+\beta_{m-1}^k b_{m-1}=p_k, \tag{10}$$
$$(k=0,\ldots,n)$$

относительно искомых a_i, b_j. Она линейная, потому что правая часть (9) линейно зависит от многочленов M', L', N, которые только и содержат a_i, b_j.

Коэффиценты α_i^k, β_j^k системы (10) известны, они определяются данным многочленом Q. Они действительны. Определитель системы (10) заведомо не равен нулю. Это следует из того факта, что каждой правой части (10) соответствует определенный многочлен $P(x)$, которому в свою очередь соответствуют числа A разложения (2), из которых при помощи (4) и (5) определяются числа a_i, b_j, о которых мы доказали, что они удовлетворяют уравнениям (10). Иначе говоря, система (10) имеет решение для каждой правой части, откуда определитель ее не равен нулю.

Заметим, что мы раскладывали Q на множители и вводили числа A, только, чтобы обосновать метод. Многочлен L можно получить при помощи алгоритма Евклида, а многочлен K — делением P на L. Для этого не нужно знать корни Q. Чтобы получить систему (10), мы записываем искомые многочлены M и N в виде

$$M(x)=a_0+a_1x+\ldots+a_{n-m-1}x^{n-m-1},$$
$$N(x)=b_0+b_1x+\ldots+b_{m-1}x^{m-1},$$

где коэффициенты a_i, b_j пока не известны, вставляем их в равенство (6), дифференцируем его и приравниваем коэффициенты числителей при одинаковых степенях x.

Что касается интеграла от N/K, то конечно, в нашем распоряжении имеются средства его полного интегрирования только при условии, что известны все корни K (они простые). С другой стороны, существуют приближенные методы интегрирования функций, не связанные с тем, интегрируется подынтегральная функция в элементарных функциях или нет. Если понадобится вычислить приближенно интеграл от рациональной функции P/Q, то чаще всего будет целесообразнее сначала выделить из него рациональную часть по методу Остроградского, а затем уже интегрировать оставшуюся часть N/K приближенно.

Отметим еще, что в разложении N/K на простейшие дроби (см. (4)) могут входить члены $A/(x-\lambda)$, соответствующие действительным λ. Их интегралы имеют вид

$$\int \frac{A}{x-\lambda}\,dx = A\ln|x-\lambda| + C.$$

Если же $\lambda = \alpha + i\beta$ — комплексное, то наряду со слагаемым $A/(x-\lambda)$ в сумму (4) входит еще слагаемое $\bar{A}/(x-\bar{\lambda})$. Их сумма

$$\frac{A}{x-\lambda} + \frac{\bar{A}}{x-\bar{\lambda}} = \frac{Bx+D}{(x-\alpha)^2+\beta^2},$$

где B, D — некоторые действительные числа. Интегрирование такой дроби, как мы знаем, приводит к ln и arctg. Таким образом, интегрирование рациональной дроби N/K приводит к трансцендентным (не рациональным) функциям (ln, arctg).

Пример. Требуется найти интеграл $\int \frac{dx}{(x^3-1)^2}$. Знаменатель в нем имеет кратные корни, и потому удобно применить метод Остроградского. Представляем интеграл в виде

$$\int \frac{dx}{(x^3-1)^2} = \frac{a_0+a_1x+a_2x^2}{x^3-1} + \int \frac{b_0+b_1x+a_2x^2}{x^3-1}\,dx,$$

где a_i, b_j — искомые постоянные. Дифференцируем это равенство и после приведения к общему знаменителю, равному $(x^3-1)^2$, приравниваем числители:

$$\frac{1}{(x^3-1)^2} = \left(\frac{a_0+a_1x+a_2x^2}{x^3-1}\right)' + \frac{b_0+b_1x+b_2x^2}{x^3-1},$$

$$1 = (x^3-1)(2a_2x+a_1) - 3x^2(a_0+a_1x+a_2x^2) + (x^3-1)(b_2x^2+b_1x+b_0).$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях, получим систему уравнений

$$b_2 = 0,\quad b_1 - a_2 = 0,\quad b_0 - 2a_1 = 0,\quad b_2 + 3a_0 = 0,$$
$$b_1 + 2a_2 = 0,\quad b_0 + a_1 = -1,$$

откуда

$$\int \frac{dx}{(x^3-1)^2} = -\frac{1}{3}\,\frac{x}{x^3-1} - \frac{2}{3}\int \frac{dx}{x^3-1}.$$

Разлагаем теперь подынтегральную функцию справа на простейшие дроби:

$$\frac{1}{x^3-1}=\frac{A}{x-1}+\frac{Bx+C}{x^2+x+1}. \tag{11}$$

После приведения к общему знаменателю получим тождество (верное для любого x)

$$1=A(x^2+x+1)+(Bx+C)(x-1).$$

Подставляя в него $x=1$, получим $A=1/3$. Сравнивая коэффициенты при высшей степени x и члены, не содержащие x, получим еще $0=A+B$, $1=A-C$, откуда $B=-1/3$, $C=-2/3$. Остается подставить найденные A, B, C в (11) и проинтегрировать.

§ 8.8. Интегрирование алгебраических иррациональностей

Рациональную функцию от $x, u, v, \ldots, w$ (букв конечное число) мы будем обозначать символом $R(x, u, v, \ldots, w)$. Она получается в результате применения к $x, u, \ldots, w$ арифметических операций (сложения, вычитания, умножения и деления), взятых в конечном числе.

Интеграл

$$\int R\left(x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\lambda}, \ldots, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\mu}\right)dx, \tag{1}$$

где $\lambda, \ldots, \mu$ — рациональные числа, имеющие общий наименьший знаменатель m, при помощи подстановки $(ad-bc\neq 0)$

$$t^m=\frac{ax+b}{cx+d} \tag{2}$$

сводится к интегралу от рациональной функции. В самом деле, x есть, очевидно, рациональная функция $\mu(t)$ от t, а вместе с ней рациональна и ее производная $\mu'(t)$. Поэтому, обозначая через $p, \ldots, q$ числители (целые числа) соответственно дробей $\lambda, \ldots$ $\ldots, \mu$, приведенных к общему знаменателю (m), получим, что интеграл после подстановки (2) сводится к следующему:

$$\int R\left(\mu(t), t^p, \ldots, t^q\right)\mu'(t)\,dt=\int R_1(t)\,dt,$$

где $R_1(t)$ — рациональная функция от t.

Примеры.

1. $\displaystyle\int\frac{x^3dx}{\sqrt{x-1}}=2\int(1+t^2)^3\,dt,\qquad t=\sqrt{x-1},\ x=1+t^2,\ dx=2t\,dt.$

2. $\displaystyle\int\frac{dx}{x^{1/2}+x^{1/3}}=\int\frac{6t^5}{t^3+t^2}\,dt=6\int\frac{t^3}{1+t}\,dt=$

$$=6\int(1-t+t^2)\,dt-6\int\frac{dt}{1+t},\quad x=t^6,\ dx=6t^5dt.$$

§ 8.9. Подстановки Эйлера

С помощью этих подстановок интеграл

$$\int R(x, y)\,dx \quad \left(y = \sqrt{a + bx + cx^2}\right) \quad (c \neq 0), \tag{1}$$

где $R(x, y)$ — рациональная функция от x, y приводится к интегралу от рациональной функции.

Первая подстановка соответствует случаю, когда корни α, β $(\alpha \neq \beta)$ трехчлена $a + bx + cx^2$ действительны. Она имеет вид

$$t = \frac{\sqrt{a + bx + cx^2}}{x - \alpha} = \frac{\sqrt{c(x-\alpha)(x-\beta)}}{x - \alpha}, \tag{2}$$

и тогда $t^2 = \dfrac{c(x-\beta)}{x-\alpha}$.

Эта подстановка совпадает с подстановкой (2), § 8,8.

Функция $x = \varphi(t)$, так же как ее производная φ', рациональная функция, поэтому

$$\int R(x, y)\,dx = \int R(\varphi(t), t[\varphi(t) - \alpha])\,\varphi'(t)\,dt = \int R_1(t)\,dt,$$

где R_1 — рациональная функция.

Обратный переход от t к x осуществляется по формуле (2).

Вторая подстановка. Корни трехчлена $a + bx + cx^2$ комплексные. Тогда надо считать, что $c > 0$, иначе трехчлен был бы отрицательным для всех x. Полагаем

$$y = t \mp x\sqrt{c}. \tag{3}$$

Возводя это равенство в квадрат и заменяя y^2 его выражением, получим

$$a + bx = t^2 \mp 2tx\sqrt{c};$$

отсюда

$$x = \frac{t^2 - a}{b \pm 2t\sqrt{c}} = \varphi(t), \quad dx = \varphi'(t)\,dt, \tag{4}$$

поэтому

$$\int R(x, y)\,dx = \int R\left(\varphi(t), t \mp \varphi(t)\sqrt{c}\right)\varphi'(t)\,dt = \int R_1(t)\,dt,$$

где $R_1(t)$ — рациональная функция от t.

Обратная подстановка

$$t = \sqrt{a + bx + cx^2} \pm x\sqrt{c}. \tag{5}$$

Отметим, что рассматриваемая подстановка годится и когда корни трехчлена $a + bx + cx^2$ действительны, лишь бы $c > 0$.

Замечание. Первой подстановке (3) $y=t-x\sqrt{c}$ соответствует функция (см. § 5.8, пример 3)

$$x=\frac{t^2-a}{b+2t\sqrt{c}}.$$

График ее распадается на две непрерывные ветви, соответствующие изменению t на интервалах $(-\infty, -b/2\sqrt{c})$ и $(-b/2\sqrt{c}, \infty)$. На обоих интервалах она строго монотонно возрастает от $-\infty$ до $+\infty$. Указанным ветвям соответствуют две обратные однозначные функции

$$t=x\sqrt{c}\pm\sqrt{a+bx+cx^2}.$$

Первая из них (со знаком $+$) была взята в качестве соответствующей подстановки (5) интеграла, а вторая отличается от другой подстановки (5) лишь знаком.

Отметим, что подстановка $x=1/z$ преобразует наш трехчлен при $a\neq 0$ в выражение $\sqrt{az^2+bz+c}/(\pm z)$, и следовательно, преобразует интеграл (1) в интеграл такого же типа. Здесь «$+$» или «$-$» ставится в зависимости от того, будет ли интервал изменения z частью луча $z>0$ или $z<0$. Вообще, эта подстановка разрывна: она переносит окрестность 0 в окрестность бесконечно удаленной точки, и наоборот. Поэтому непрерывная на оси x функция после такой подстановки делается разрывной при $z=0$, вообще с неустранимым разрывом. Если подынтегральная функция $R(x, y)$ в исходном интеграле уже имеет разрыв в точке $x=0$, то подстановка $x=1/z$ в указанном смысле не усложняет положение вещей.

Пример 1. (трехчлен имеет комплексные корни)

$$\int\frac{dx}{\sqrt{a+bx+x^2}}=\int\frac{dx}{t-x}=\int\frac{dt}{(b/2)+t}=\ln\left|\frac{b}{2}+x+\sqrt{a+bx+x^2}\right|+C.$$

Делаем вторую подстановку:

$$\sqrt{a+bx+x^2}=t-x,\quad a+bx=t^2-2tx,$$
$$bdx=2t\,dt-2t\,dx-2x\,dt,\quad \frac{dx}{t-x}=\frac{2\,dt}{b+2t}.$$

В частности,

1) $$\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+a}}=\ln\left|x+\sqrt{x^2+a}\right|+C,\quad (a\neq 0);$$

2) $$\int\frac{dx}{\sqrt{a+bx-x^2}}=\int\frac{dx}{\sqrt{\left(a+\frac{b^2}{4}\right)-\left(x-\frac{b}{2}\right)^2}}=\int\frac{\alpha\,dt}{\sqrt{\alpha^2-(\alpha t)^2}}=$$

$$=\int\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}=\arcsin\frac{2x-b}{\sqrt{b^2+4a}}+C,\quad a+\frac{b^2}{4}=\alpha^2>0,\quad x-\frac{b}{2}=\alpha t;$$

3) трехчлен имеет комплексные корни (верхний знак здесь и далее соответствует положительным x или z); трехчлен может иметь и действительные корни, лишь бы они были различны.

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{ax^2+bx+1}} = \mp \int \frac{dz}{\sqrt{a+bz+z^2}} =$$

$$= \mp \ln\left|\frac{b}{2}+z+\sqrt{a+bz+z^2}\right| + C = \mp \ln\left|\frac{b}{2}+\frac{1 \pm \sqrt{ax^2+bx+1}}{x}\right| + C;$$

4) $$\int \frac{dx}{x\sqrt{ax^2+bx-1}} = \mp \int \frac{dz}{\sqrt{a+bz-z^2}} =$$

$$= \mp \arcsin\frac{2z-b}{\sqrt{b^2+4a}} + C = \pm \arcsin\frac{bx-2}{x\sqrt{b^2-4a}} + C \ (b^2+4a>0);$$

в частности, $\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} = \mp \arcsin\frac{1}{x} + C;$

5) интегралы $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{a+bx+cx^2}}$, $\displaystyle\int \frac{dx}{(x-m)\sqrt{a+bx+cx^2}}$

приводятся к предыдущим, если ввести новые переменные, соответственно, $z=\sqrt{|c|}\,x$, $z=\sqrt{|c|}\,(x-m)$.

§ 8.10. Биномиальные дифференциалы. Теорема Чебышева *)

Рассмотрим интеграл

$$\int x^m (a+bx^n)^p\,dx, \tag{1}$$

где a, b — произвольные, отличные от нуля числа, а m, n, p — рациональные числа. Подынтегральное выражение в (1) называется *биномиальным дифференциалом*.

Подстановка $x^n=t$, $x=t^{1/n}$, $dx=\frac{1}{n}t^{(1/n)-1}dt$ приводит (1) к виду

$$\frac{1}{n}\int t^{(m+1/n)-1}(a+bt)^p dt. \tag{2}$$

Если положить $((m+1)/n)-1=q$, то вопрос сводится к интегралу вида

$$\int t^q (a+bt)^p\,dt, \tag{3}$$

где p и q — рациональные.

Интеграл (3) всегда берется в элементарных функциях, если одно из чисел p, q, $p+q$ — целое (положительное, нуль или отрицательное).

*) П. Л. Чебышев (1821—1894) — великий русский математик и механик, академик.

В самом деле, если p — целое, то наш интеграл имеет вид $\int R(t, t^q)dt$, где q — рациональное. Если же q — целое, то он имеет вид $\int R(t, (a+bt)^p)\,dt$, где p — рациональное. Наконец, если $p+q$ — целое, то его можно записать в виде $\int t^{p+q}\left(\frac{a+bt}{t}\right)^p dt$.

Все эти три выражения, как мы знаем (см. § 8.8) приводятся соответствующими подстановками к интегралам от рациональных функций.

П. Л. Чебышев доказал замечательную теорему, утверждающую, что *если рациональные p и q не удовлетворяют одному из перечисленных трех условий, то интеграл* (3) *не интегрируется в элементарных функциях.*

Упражнения.

Вычислить интегралы:

1. $\int \frac{x^3dx}{\sqrt{x-1}}$; 2. $\int \frac{dx}{x\sqrt{a+bx}}$; 3. $\int \frac{1+x^{1/3}}{1+x^{1/4}}\,dx$;

4. $\int \frac{dx}{x^3\sqrt{x-1}}$; 5. $\int (a+x)^{2/3}x^3\,dx$; 6. $\int \frac{dx}{(1+x)^{1/3}-(1+x)^{1/2}}$.

Показать, что

7. $\int \frac{dx}{(1+x^2)\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{x\sqrt{2}}{\sqrt{1-x^2}} + C$;

8. $\int \frac{dx}{(1-x^2)\sqrt{1+x^2}} = \frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{\sqrt{1+x^2}+x\sqrt{2}}{\sqrt{1+x^2}-x\sqrt{2}}\right| + C$.

§ 8.11. Интегрирование тригонометрических выражений

Рассмотрим интеграл

$$\int R(\cos x, \sin x)\,dx, \tag{1}$$

где

$$R(u, v) = \frac{P(u, v)}{Q(u, v)} \tag{2}$$

— рациональная функция от u, v (P и Q — многочлены от u, v).

1. Если один из многочленов P, Q четный по v, а другой — нечетный по v, то R можно представить, умножив, если это необходимо, числитель и знаменатель (1) на v, в виде $R(u, v) = \frac{M(u, v^2)\,v}{N(u, v^2)}$, где $M(\mu, \nu)$, $N(\mu, \nu)$ — многочлены от μ, ν. Поэтому подстановка $t = \cos x$ приводит интеграл (1) к виду

$$\int R(\cos x, \sin x)\,dx = -\int \frac{M(t, 1-t^2)}{N(t, 1-t^2)}\,dt = \int R(t)\,dt,$$

где $R(t)$ — рациональная функция от t.

2. Если один из многочленов P, Q — четный по u, а другой — нечетный по u, то подстановка $t=\sin x$ рационализирует наш интеграл. Это доказывается как выше.

3. Если P и Q: 1) оба не изменяются при замене u, v соответственно на $-u$, $-v$ или 2) оба меняют знак, то интеграл (1) рационализируется подстановкой

$$t=\operatorname{tg} x \tag{3}$$

(или $t=\operatorname{ctg} x$).

Рассмотрим только первый случай, потому что второй сводится к нему умножением и числителя, и знаменателя дроби (2) на u или v. Каждый член многочлена P имеет вид

$$Au^l v^m = A\left(\frac{u}{v}\right)^l v^{l+m} = Aw^l v^{l+m} \quad \left(w=\frac{u}{v}\right),$$

где A — постоянный коэффициент. Поэтому

$$P(u, v) = M(w, v^2) = \sum \alpha(w) v^{2s} \tag{4}$$

есть многочлен от w^2 и v^2 (см. конец § 5.9).

Справа в (4) сумма распространена на конечное число слагаемых, $\alpha(w)$ — некоторые многочлены только от w, а s — целые неотрицательные числа. Аналогично устанавливается, что

$$Q(u, v) = N(w, v^2) = \sum \beta(w) v^{2s}$$

есть многочлен от w и v^2.

Так как в силу подстановки (3) $\sin^2 x = t^2/(1+t^2)$, $dx = dt/(1+t^2)$, то интеграл (1) преобразуется следующим образом:

$$\int \frac{M\left(t, \dfrac{t^2}{1+t^2}\right) dt}{N\left(t, \dfrac{t^2}{1+t^2}\right)(1+t^2)} = \int r(t)\, dt,$$

где $r(t)$ — рациональная функция.

4. Для любой рациональной функции $R(u, v)$ подстановка $t=\operatorname{tg}\frac{x}{2}$ рационализирует интеграл (1). В самом деле, тогда

$$\cos x = \frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}} = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad \sin x = \frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}} = \frac{2t}{1+t^2},$$

$$dt = \frac{1}{2}\sec^2\frac{x}{2}\, dx = \frac{1}{2}(1+t^2)\, dx, \quad dx = \frac{2dt}{1+t^2}.$$

5. Функция

$$T_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos kx + b_k \sin kx), \tag{5}$$

где a_k, b_k — постоянные коэффициенты, называется *тригонометрическим полиномом порядка* (*или степени*) n. Интегрирование ее не представляет никакого труда:

$$\int T_n(x)\,dx = \frac{a_0}{2}x + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}(a_k \sin kx - b_k \cos kx) + C. \tag{6}$$

Часто встречаются выражения

$$\cos^m x \cos^l x, \quad \cos^m x \sin^l x, \quad \sin^m x \sin^l x, \tag{7}$$

где m, l — целые неотрицательные числа. Это есть тригонометрические полиномы порядка $m+l$, т. е. их можно преобразовать к виду (5), где a_k и b_k — постоянные числа. Этот факт можно доказать, применяя метод индукции.

В самом деле (пояснения ниже)

$$\cos^m x = \left(\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\right)^m = \frac{1}{2^m}\left(e^{imx} + C_m^1 e^{i(m-2)x} + \ldots + e^{-imx}\right) =$$
$$= \frac{1}{2^m}\left(\cos mx + C_m^1 \cos(m-2)x + \ldots + \cos(-mx)\right). \tag{8}$$

Надо учесть, что $\cos^m x$ — действительная функция, и потому последний член в этой цепи равенств получается из предпоследнего выделением его действительной части. Мнимая часть автоматически равна нулю. После замены в (8) x на $(x+(\pi/2))$ получим, в зависимости от того, будет ли m четным или нечетным,

$$\sin^m x = \frac{(-1)^{m/2}}{2^m}\left(\cos mx - C_m^1 \cos(m-2)x + \right.$$
$$\left. + C_m^2 \cos(m-4)x + \ldots + (-1)^{m/2}\cos(-mx)\right), \tag{9}$$

$$\sin^m x = \frac{(-1)^{m+1/2}}{2^m}\left(\sin mx - C_m^1 \sin(m-2)x + \ldots\right). \tag{10}$$

Тот факт, что выражения (7) суть тригонометрические полиномы указанной четности, следует из (8) — (10) и равенств

$$\begin{aligned} \sin\lambda x \cos\mu x &= \frac{1}{2}\left[\sin(\lambda+\mu)x + \sin(\lambda-\mu)x\right], \\ \cos\lambda x \cos\mu x &= \frac{1}{2}\left[\cos(\lambda+\mu)x + \cos(\lambda-\mu)x\right]. \end{aligned} \tag{11}$$

Примеры

1. $$\int \frac{dx}{\sin x \cos x} = \int \frac{dx}{\operatorname{tg} x \cos^2 x} = \int \frac{d(\operatorname{tg} x)}{\operatorname{tg} x} = \ln|\operatorname{tg} x| + C$$

(подстановка (3)).

2. $$\int \frac{dx}{\sin x} = \frac{1}{2}\int \frac{dx}{\operatorname{tg}(x/2)\cos^2(x/2)} = \int \frac{d(\operatorname{tg}(x/2))}{\operatorname{tg}(x/2)} = \ln|\operatorname{tg}(x/2)| + C$$

(подстановка 4 § 8.11).

3. $$\int \frac{dx}{a+b\cos x} = \int \frac{dx}{a(\cos^2(x/2)+\sin^2(x/2)) + b(\cos^2(x/2)-\sin^2(x/2))} =$$
$$= \int \frac{dx}{[a(1+\operatorname{tg}^2(x/2)) + b(1-\operatorname{tg}^2(x/2))]\cos^2(x/2)} =$$
$$= \int \frac{2dt}{a(1+t^2)+b(1-t^2)}$$

(подстановка 4 § 8.11).

4. $$\int \frac{dx}{a+b\cos x + c\sin x} = \int \frac{dx}{a+r\cos(x-\varphi)}, \quad (a^2+b^2+c^2>0),$$

где (постоянные) r и φ подобраны так, чтобы $b = r\cos\varphi$, $c = r\sin\varphi$. Таким образом, этот интеграл свелся к предыдущему.

5. $$\int \sin^5 dx = -\int (1-\cos^2 x)^2 d(\cos x) = -\int (1-t^2)^2\,dt.$$

6. $$\int \frac{dx}{\sin^6 x} = -\int (1+\operatorname{ctg}^2 x)^2 d(\operatorname{ctg} x) = -\int (1+t^2)^2\,dt.$$

7. $$\int \frac{dx}{\sin^5 x} = \int \left(\frac{1+t^2}{2t}\right)^5 \frac{2\,dt}{1+t^2} = \frac{1}{16}\int \frac{(1+t^2)^4}{t^5}\,dt \quad \left(t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}\right).$$

8. $$\int \frac{\sin^3 x}{\cos^4 x}\,dx = -\int \frac{1-t^2}{t^4}\,dt \quad (t=\cos x).$$

9. $$\int \sin^4 x\,dx = \int \left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^2 dx = \frac{1}{4}\int \left(1 - 2\cos 2x + \frac{1+\cos 4x}{2}\right)dx.$$

10. $$\int \sin^4 x\cos^2 x\,dx = \int \left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^2 \left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right) dx =$$
$$= \frac{1}{8}\int (1-\cos^2 2x)(1-\cos 2x)\,dx = \frac{1}{8}\int \left[1 - \left(\frac{1+\cos 4x}{2}\right)\right](1-\cos 2x)\,dx$$

(дальше воспользоваться формулами (11)).

11. $$\int \frac{dx}{a^2\cos^2 x + b^2\sin^2 x} = \int \frac{dx}{(a^2+b^2\operatorname{tg}^2 x)\cos^2 x} =$$
$$= \int \frac{dt}{a^2+b^2t^2} = \frac{1}{ab}\operatorname{arctg}\left(\frac{b}{a}\operatorname{tg} x\right) + C \quad (t=\operatorname{tg} x,\ a>0,\ b>0).$$

12. $$\int \frac{2-\sin x}{2+\cos x}\,dx = 2\int \frac{dx}{2+\cos^2(x/2)-\sin^2(x/2)} + \ln|2+\cos x| =$$
$$= 2\int \frac{dx}{2(\cos^2(x/2)+\sin^2(x/2)) + (\cos^2(x/2)-\sin^2(x/2))} + \ln|2+\cos x| =$$
$$= 2\int \frac{dx}{3\cos^2(x/2)+\sin^2(x/2)} + \ln|2+\cos x| = 4\int \frac{d\operatorname{tg}(x/2)}{3+\operatorname{tg}^2(x/2)} + \ln|2+\cos x|.$$

§ 8.12. Тригонометрические подстановки

Интегралы вида

1) $\int R\left(x, \sqrt{a^2-x^2}\right) dx$, 2) $\int R\left(x, \sqrt{a^2+x^2}\right) dx$,

3) $\int R\left(x, \sqrt{x^2-a^2}\right) dx$ $(a>0)$

превращаются в рациональные выражения от $\sin t$ и $\cos t$ при помощи следующих подстановок

1) $x=a\sin t$, откуда $dx=a\cos t\,dt$, $\sqrt{a^2-x^2}=a\cos t$;

2) $x=a\operatorname{tg} t$, откуда $dx=a\cos^{-2} t\,dt$, $\sqrt{a^2+x^2}=a\cos^{-1} t$;

3) $x=a\sec t$, откуда $dx=a\operatorname{tg} t\sec t\,dt$, $\sqrt{x^2-a^2}=a\operatorname{tg} t$.

Пример.

$$\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx=\int a\cos t\, a\cos t\,dt=a^2\int \frac{1+\cos 2t}{2}\,dt=\frac{a^2}{2}\left(t+\frac{\sin 2t}{2}\right)+C=$$

$$=\frac{a^2}{2}\left(t+\sin t\sqrt{1-\sin^2 t}\right)+C=\frac{a^2}{2}\left(\arcsin\frac{x}{a}+\frac{x}{a}\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}\right)+C=$$

$$=\frac{a^2}{2}\left(\arcsin\frac{x}{a}+\frac{x}{a^2}\sqrt{a^2-x^2}+C\right) \quad (x=a\sin t).$$

§ 8.13. Несколько важных интегралов, не выражаемых в элементарных функциях

Доказано, что неопределенный интеграл от функции e^{-x^2}, играющей большую роль в теории вероятностей, не выражается в элементарных функциях. Это же имеет место для функции $(\sin x)/x$, часто встречающейся в математическом анализе.

Большое значение в приложениях играют так называемые эллиптические интегралы (соответственно первого, второго и третьего рода):

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}, \quad \int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}},$$
$$\int \frac{dx}{(1+hx^2)\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} \quad (0<k<1). \tag{1}$$

Первые два из них зависят от параметра k, а третий — от k и еще от другого параметра h.

Доказано, что все три эти интеграла не берутся в элементарных функциях.

Подстановка $x = \sin\varphi$ $(0 \leqslant \varphi \leqslant \pi/2)$ сводит первый из них к виду

$$\int \frac{d\varphi}{\sqrt{(1-k^2\sin^2\varphi)}}, \tag{2}$$

второй — к виду

$$\frac{1}{k^2}\int \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}} - \frac{1}{k^2}\int \sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}\,d\varphi, \tag{3}$$

а третий — к виду

$$\int \frac{d\varphi}{(1+h\sin^2\varphi)\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}. \tag{4}$$

В выражении (3) возникает интеграл

$$\int \sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}\,d\varphi, \tag{5}$$

отличный от (2). Интегралы (2), (5), (4) называются эллиптическими интегралами соответственно 1-го, 2-го и 3-го рода в форме Лежандра *).

Эллиптическим интегралам посвящена обширная литература. Имеются подробные таблицы значений соответствующих им некоторых важных определенных интегралов, в частности, таблицы интеграла (5), взятого на интервале $(0, \pi/2)$.

---

*) А. М. Лежандр (1752—1833) — французский математик.

Глава 9

ОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ РИМАНА*)

§ 9.1. Вводная часть и определение

Понятие определенного интеграла было введено в § 1.7. Читателю, возможно, следует возобновить в памяти то, что говорилось там. Эта глава начинается с формального определения определенного интеграла по Риману, изучаются его свойства и выясняются условия, которым должна удовлетворять функция, чтобы она была интегрируемой; даются также дальнейшие приложения определенного интеграла, излагается теория несобственных интегралов. Уже сейчас подчеркнем, что определенный интеграл в узком (собственном) смысле, требующий для своего определения одного предельного перехода, имеет смысл, как будет видно ниже, только для конечного отрезка и притом для ограниченных функций, непрерывных и некоторых разрывных. Для неограниченных функций риманов интеграл заведомо не существует. Однако можно ввести понятие несобственного интеграла по Риману, требующее для своего определения двойного предельного перехода. С его помощью корректно определяется площадь фигуры с границей, не слишком быстро растущей в бесконечность.

Другой несобственный интеграл определяется для функций, заданных на всей действительной оси. С его помощью можно вычислить работу силы, действующей на неограниченном интервале.

Зададим на конечном отрезке $[a, b]$ функцию f. Отрезок $[a, b]$ разобьем на n частей точками $a=x_0<x_1<\ldots<x_n=b$, и будем говорить, что произведено *разбиение* R (отрезка $[a, b]$). На каждом частичном отрезке $[x_i, x_{i+1}]$ разбиения выберем по произвольной точке ξ_i ($\xi_i \in [x_i, x_{i+1}]$) и составим сумму

$$S_n = S_R = \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\,\Delta x_i \qquad (\Delta x_i = x_{i+1} - x_i).$$

Ее называют *интегральной суммой* (Римана) функции f на отрезке $[a, b]$, соответствующей разбиению R. Интегральная сумма определена неоднозначно, потому что зависит от выбора $\xi_i \in \in [x_i, x_{i+1}]$.

*) Б. Ф. Риман (1826—1866) — выдающийся немецкий математик.

По определению, *определенным интегралом (Римана) от f на* $[a, b]$ называется предел

$$\lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\,\Delta x_i = \int_a^b f(x)\,dx = I, \tag{1}$$

понимаемый в том смысле, что I есть такое число, что для всякого $\varepsilon > 0$ можно указать такое $\delta > 0$, что для всех разбиений R, у которых $\Delta x_i < \delta$, имеет место $|S_R - I| < \varepsilon$, независимо от выбора точек $\xi_i \in [x_i, x_{i+1}]$.

Другое эквивалентное определение предела (1) следующее: какова бы ни была последовательность разбиений $R^k = \{a = x_0^k < x_1^k < \ldots < x_{n_k}^k = b\}$ такая, что $\max \Delta x_i^k \to 0$, $k \to \infty$, при любом выборе для каждого k произвольных, но определенных точек $\xi_i^k \in [x_i^k, x_{i+1}^k]$, соответствующая интегральная сумма имеет предел

$$\lim_{k\to\infty} S_{R_k} = \lim_{k\to\infty} \sum_{i=0}^{n_k-1} f(\xi_i^k)\,\Delta x_i^k = I$$

(не зависящий от выбора указанных R^k и ξ_i^k).

Эквивалентность этих двух пониманий предела (1) доказывается аналогично тому, как устанавливается эквивалентность пониманий предела функции на языке ε, δ и на языке последовательностей.

Факт существования интеграла можно еще выразить на языке критерия Коши: для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta > 0$ такое, что для разбиений R и R' с частичными отрезками длины, не большей δ, имеет место $|S_R - S_{R'}| < \varepsilon$.

§ 9.2. Ограниченность интегрирующей функции

Теорема 1. *Если функция f интегрируема на $[a, b]$, то она ограничена на $[a, b]$.*

В самом деле, пусть f неограничена на $[a, b]$, и $S_R = \sum_{j=0}^{n-1} f(\xi_j)\Delta x_j$ — ее интегральная сумма, соответствующая произвольному разбиению R. Так как f неограничена на $[a, b]$, то она неограничена по крайней мере на одном из отрезков $[x_j; x_{j+1}]$ разбиения, пусть на $[x_{j_0}; x_{j_0+1}]$. Имеем

$$S_R = f(\xi_{j_0})\,\Delta x_{j_0} + \sum{}' f(\xi_j)\,\Delta x_j = f(\xi_{j_0})\,\Delta x_{j_0} + A,$$

где сумма Σ' распространена на все $j \neq j_0$. Мы считаем, что все входящие в нее ξ_j произвольны, но фиксированы. Отсюда $|S_R| \geqslant |f(\xi_{j_0})|\Delta x_{j_0} - |A|$. Зададим как угодно большее число N и составим неравенство

$$|f(\xi_{j_0})|\Delta x_{j_0}-|A|>N,\quad |f(\xi_{j_0})|>\frac{|A|+N}{\Delta x_{j_0}}.$$

В силу неограниченности f на $[x_{j_0}, x_{j_0+1}]$ имеется такая точка $\xi_{j_0}\in[x_{j_0}, x_{j_0+1}]$, для которой оно выполняется.

Мы получили, что если f неограничена на $[a, b]$, то каковы бы ни были число $N>0$ и разбиение R, соответствующая R интегральная сумма может быть сделана путем надлежащего выбора точек ξ_j, большей по абсолютной величине, чем N. Следовательно, f не интегрируема на $[a, b]$.

В дальнейшем будут рассматриваться только ограниченные функции.

§ 9.3. Суммы Дарбу *)

Пусть на $[a, b]$ задана ограниченная функция f и пусть $R=\{a=x_0<x_1<\ldots<x_n=b\}$ — произвольное разбиение $[a, b]$. Положим $m_j=\inf\limits_{x\in[x_j,x_{j+1}]} f(x)$, $M_j=\sup\limits_{x\in[x_j,x_{j+1}]} f(x)$. По определению числа

$$\underline{S}_R=\sum_{j=0}^{n-1} m_j\Delta x_j,\quad \overline{S}_R=\sum_{j=0}^{n-1} M_j\Delta x_j$$

называются соответственно нижней и верхней интегральными *суммами Дарбу* f, соответствующими разбиению R. Это вполне определенные числа, зависящие от f и R.

Очевидно, что $\underline{S}_R\leqslant\overline{S}_R$.

Пусть R_1, R_2, R_3 — разбиения $[a, b]$. Если все точки R_1 принадлежат R_2, то будем писать $R_1\subset R_2$ и говорить, что R_2 есть продолжение R_1. Если множество точек, из которых состоит R_3, есть теоретико-множественная сумма множеств точек, из которых состоят R_1 и R_2, то будем писать $R_3=R_1+R_2$.

Если $R\subset R'$, то

$$\underline{S}_R\leqslant\underline{S}_{R'}\leqslant\overline{S}_{R'}\leqslant\overline{S}_R. \tag{1}$$

Действительно, будем считать, что

$$R=\{x_0<x_1<\ldots<x_n\},$$

$$R'=\{x_0=x_{0,0}<x_{0,1}<\ldots<x_{0,l_0}=x_1=x_{1,0}<x_{1,1}<\ldots$$
$$\ldots<x_{n-2,l_{n-2}}=x_{n-1}=x_{n-1,0}<\ldots<x_{n-1,l_{n-1}}=x_n\}.$$

Тогда, очевидно, $M_{jk}=\sup\limits_{x\in[x_{j,k},x_{j,k+1}]} f\leqslant\sup\limits_{x\in[x_j,\,x_{j+1}]} f\leqslant M_j$ и

$$\overline{S}_{R'}=\sum_{j=0}^{n-1}\sum_{k=0}^{l_j-1} M_{jk}\Delta x_{jk}\leqslant\sum_{j=0}^{n-1} M_j\sum_{k=0}^{l_j-1}\Delta x_{jk}=\sum_{j=0}^{n-1} M_j\Delta x_j=\overline{S}_R,$$

*) Г. Дарбу (1842—1917) — французский математик.

и мы доказали последнее неравенство (1). Первое доказывается аналогично.

Каковы бы ни были разбиения R_1, R_2 имеет место $\underline{S}_{R_1} \leqslant \overline{S}_{R_2}$, потому что $\underline{S}_{R_1} \leqslant \underline{S}_{R_1+R_2} \leqslant \overline{S}_{R_1+R_2} \leqslant \overline{S}_{R_2}$.

Зафиксируем R_1 и пусть R произвольно; тогда

$$\underline{S}_{R_1} \leqslant \overline{S}_R, \quad \underline{S}_{R_1} \leqslant \inf_R \overline{S}_R = \overline{I}.$$

Число $\overline{I} = \inf\limits_R \overline{S}_R$ называется *верхним интегралом функции* f на $[a, b]$. Мы доказали его существование и тот факт, что для любого R (теперь мы заменяем R_1 на R) имеет место

$$\underline{S}_R \leqslant \overline{I}.$$

Но тогда существует точная верхняя грань

$$\underline{I} = \sup_R \underline{S}_R \leqslant \overline{I},$$

называемая *нижним интегралом функции* f на $[a, b]$. Итак, доказано существование нижнего ($\underline{I}$) и верхнего ($\overline{I}$) интегралов f на $[a, b]$ и неравенство $\underline{I} \leqslant \overline{I}$.

Лемма 1. *Если E_1, E_2 — множества чисел, то*

$$\sup_{\substack{x \in E_1 \\ y \in E_2}} (x + y) = \sup_{x \in E_1} x + \sup_{y \in E_2} y.$$

Доказательство предоставляем читателю.

Лемма 2. *Если на отрезке $[c, d]$ задана ограниченная функция f, то*

$$\sup_{\xi, \eta \in [c,d]} [f(\xi) - f(\eta)] = \sup_{\xi, \eta \in [c,d]} |f(\xi) - f(\eta)| = M - m, \tag{2}$$

где $M = M_{[c,d]} = \sup\limits_{x \in [c,d]} f(x)$, $m = m_{[c,d]} = \inf\limits_{x \in [c,d]} f(x)$.

Доказательство. Для любых ξ, $\eta \in [c, d]$

$$f(\xi) - f(\eta) \leqslant |f(\xi) - f(\eta)| \leqslant M - m. \tag{3}$$

С другой стороны, найдутся такие ξ, $\eta \in [c, d]$, что $f(\xi) > M - \varepsilon/2$; $f(\eta) < m + \varepsilon/2$; для них

$$f(\xi) - f(\eta) > (M - \varepsilon/2) - (m + \varepsilon/2) = M - m - \varepsilon.$$

Мы доказали, что первый и третий члены (2) равны. Тем более в силу (3) они равны второму члену.

Число

$$M - m = \omega = \omega_{[c, d]}$$

называется *колебанием* f *на* $[c, d]$.

Из лемм 1 и 2 следует, что

$$\sup_{\xi_j,\eta_j\in[x_j,x_{j+1}]} \sum_{j=0}^{n-1} [f(\xi_j)-f(\eta_j)]\,\Delta x_j = \sum_{j=0}^{n-1} \sup|f(\xi_j)-f(\eta_j)|\,\Delta x_j =$$

$$= \sum_{j=0}^{n-1} (M_j-m_j)\,\Delta x_j = \sum_{j=0}^{n-1} \omega_j\Delta x_j = \overline{S}_R - \underline{S}_R, \quad \omega_j=\omega_{[x_j,x_{j+1}]} \tag{4}$$

(всюду в этих соотношениях равенства!).

§ 9.4. Основная теорема

Теорема 1 (основная). *Пусть задана ограниченная на конечном отрезке $[a, b]$ функция f.*

Следующие утверждения эквивалентны:

1) $\underline{I}=\overline{I}$;

2) *для всякого $\varepsilon>0$ найдется такое разбиение R, что*

$$\overline{S}_R-\underline{S}_R<\varepsilon; \tag{1}$$

3) *для всякого $\varepsilon>0$ найдется $\delta>0$ такое, что для всех разбиений R с частичными отрезками $\Delta x_j<\delta$ имеет место неравенство* (1);

4) *существует интеграл*

$$\int_a^b f(x)\,dx = I. \tag{2}$$

При этом $I=\underline{I}=\overline{I}$.

Здесь, конечно, подразумевается, что $\underline{I}$, $\overline{I}$ — нижний и верхний интегралы f на $[a, b]$, а $\underline{S}_R$, $\overline{S}_R$ — нижняя и верхняя интегральные суммы f, соответствующие разбиению R.

Эту теорему можно перефразировать так:

Для того чтобы существовал интеграл от f на $[a, b]$, необходимо и достаточно выполнение одного из условий 1)—3). *При этом величина интеграла равна $\underline{I}=\overline{I}$.*

Доказательство. 1) $\to$ 2) (из утверждения 1) следует утверждение 2)). Из 1), где считаем $\underline{I}=\overline{I}$, следует, что найдутся разбиения R_1, R_2 такие, что $\underline{I}-(\varepsilon/2)<\underline{S}_{R_1}$, $\overline{S}_{R_2}<\overline{I}+\varepsilon/2$. Тогда

$$\underline{I}-\frac{\varepsilon}{2}<\underline{S}_{R_1}\leqslant\underline{S}_R\leqslant\overline{S}_R\leqslant\overline{S}_{R_2}\leqslant\overline{I}+\frac{\varepsilon}{2}, \quad R=R_1+R_2.$$

Отсюда в силу того, что $\underline{I}=\overline{I}$, имеет место 2).

2) $\to$ 1). Пусть R — разбиение, для которого верно (1). Тогда в силу неравенств $\underline{S}_R\leqslant\underline{I}\leqslant\overline{I}\leqslant\overline{S}_R$ имеет место $\overline{I}-\underline{I}<\varepsilon$. Но $\varepsilon>0$ как угодно мало, а $\underline{I}$ и $\overline{I}$ — определенные числа, не зависящие от ε, поэтому $\underline{I}=\overline{I}$.

4) $\to$ 3). Пусть существует интеграл (2). Из определения интеграла следует, что для любого $\varepsilon > 0$ можно указать такое $\delta > 0$, что для любого разбиения R, у которого $\Delta x_j < \delta$, имеют место неравенства

$$I - \frac{\varepsilon}{2} < \sum_j^{n-1} f(\xi_j)\,\Delta x_j < I + \frac{\varepsilon}{2},$$

каковы бы ни были точки $\xi_j \in [x_j, x_{j+1}]$. Отсюда, беря верхнюю и нижнюю грани по $\xi_j \in [x_j, x_{j+1}]$ входящей в эти неравенства суммы, получим

$$I - \frac{\varepsilon}{2} \leqslant \underline{S}_R \leqslant \overline{S}_R \leqslant I + \frac{\varepsilon}{2}, \tag{3}$$

т. е. 3).

3) $\to$ 2). Это тривиально.

2) $\to$ 3). Это самая нетривиальная часть теоремы, утверждающая, что если для любого $\varepsilon > 0$ найдется зависящее от него разбиение $R_* = \{a = x_0^* < x_1^* < \ldots < x_n^* = b\}$, для которого $\overline{S}_{R_*} - \underline{S}_{R_*} < \varepsilon$, то также найдется $\delta > 0$ такое, что для всех разбиений R с $\Delta x_j < \delta$ выполняется (1).

Именно, в качестве δ возьмем число, удовлетворяющее неравенствам $2\delta < x_{j+1}^* - x_j^*$ $(j = 0, 1, \ldots, n-1)$, $4n\delta K < \varepsilon$, где $K = \sup\limits_{x \in [a,b]} |f(x)|$.

Тогда имеем (пишем M_j, m_j, Δx_j без индексов)

$$\overline{S}_R - \underline{S}_R = \sum{}' (M - m)\,\Delta x + \sum{}'' (M - m)\,\Delta x,$$

где сумма Σ' распространена на все (замкнутые) отрезки разбиения R, каждый из которых содержит в себе одну из точек R_*, а $\sum''$ — на все остальные отрезки R.

В сумму Σ' входит не более чем $2n$ слагаемых — один отрезок покрывает точку a, другой — точку b, и каждая из точек $x_1^*, \ldots$ $\ldots, x_{n-1}^*$ покрывается одним или двумя отрезками. Имеем

$$\sum{}' (M - m)\,\Delta x \leqslant 2K\delta 2n < \varepsilon.$$

Сумму $\sum''$ запишем в виде кратной суммы $\sum'' = \sum\limits_i \sum^i$, где $\sum^i$ обозначает сумму слагаемых $\sum''$, соответствующих отрезкам R, каждый из которых попал в один и тот же интервал (x_i^*, x_{i+1}^*) старого разбиения R_*.

Имеем

$$\sum{}'' (M - m)\,\Delta x =$$
$$= \sum_i{}'' \sum{}^i (M - m)\,\Delta x \leqslant \sum_i (M_i^* - m_i^*) \sum{}^i \Delta x \leqslant \sum_i (M_i^* - m_i^*)\,\Delta x_i^* < \varepsilon.$$

Поэтому $\overline{S}_R - \underline{S}_R < 2\varepsilon$ для всех разбиений R, для которых $\Delta x < \delta$, т. е. имеет место 3).

3) $\to$ 4). Пусть имеет место 3). Тогда, как уже доказано, справедливо 2) и 1). Зададим $\varepsilon > 0$ и подберем $\delta > 0$ так, как указано в 3). Тогда для разбиений R, о которых говорится в 3),

$$\underline{S}_R \leqslant \sum f(\xi_j)\,\Delta x_j \leqslant \overline{S}_R, \qquad \underline{S}_R \leqslant \underline{I} \leqslant \overline{I} \leqslant \overline{S}_R.$$

Отсюда, полагая $I = \underline{I} = \overline{I}$, получим

$$\left| I - \sum f(\xi_j)\,\Delta x_j \right| \leqslant \overline{S}_R - \underline{S}_R < \varepsilon,$$

т. е. I есть определенный интеграл от f на $[a, b]$. Мы доказали 4). Теорема полностью доказана.

Как следствие из основной теоремы, справедлива

Теорема 2. *Пусть задана последовательность разбиений R_k*

$$a = x_0^k < x_1^k < \ldots < x_{n_k}^k = b \qquad (k = 1, 2, \ldots),$$

у которых $\max\limits_j \Delta x_j^k = \delta_k \to 0$.

Если для функции f выполняется одно из условий

$$\lim_{k\to\infty} \left(\overline{S}_{R_k}(f) - \underline{S}_{R_k}(f)\right) = 0, \tag{4}$$

$$\lim_{k\to\infty} \sum_j f\left(\xi_j^k\right) \Delta x_j^k = \lim_{k\to\infty} S_{R_k}(f) = I, \tag{5}$$

$$\lim_{k\to\infty} \overline{S}_{R_k}(f) = \lim_{k\to\infty} \underline{S}_{R_k}(f) = I, \tag{6}$$

то это влечет существование интеграла

$$I = \int_a^b f(x)\,dx. \tag{7}$$

Наоборот, существование интеграла от f на $[a, b]$ влечет выполнение условий (4) — (6).

Из (4), так же как из (6), следует, очевидно, свойство 2) основной теоремы. Из (5) же следует, что для любого $\varepsilon > 0$ найдется k такое, что

$$I - \frac{\varepsilon}{2} < S_{R_k} < I + \frac{\varepsilon}{2}, \tag{8}$$

каковы бы ни были $\xi_j^k \in \left[x_j^k, x_{j+1}^k\right]$. Беря верхнюю и нижнюю грани S_{R_k} по указанным ξ_j^k, получим

$$I - \frac{\varepsilon}{2} \leqslant \underline{S}_{R_k} \leqslant \overline{S}_{R_k} \leqslant I + \frac{\varepsilon}{2}, \tag{9}$$

откуда следует свойство 2) основной теоремы, в силу которой существует интеграл (от f на $[a, b]$), равный, очевидно, I.

Наоборот, если интеграл существует и равен I, то по его определению существует предел (5) для любой последовательности разбиений с $\delta_k \to 0$, в частности, для рассматриваемой нами последовательности. Но тогда для любого ε найдется k_0 такое, что для $k > k_0$ выполняются неравенства (8) и, следовательно, (9), имеет место (6), тем более (4).

Теорема доказана.

Из теоремы 2 следует, что *для того чтобы убедиться в существовании интеграла, достаточно убедиться, что существует предел* (5) (*при любом выборе* ξ_j^k!) *для одной какой-нибудь последовательности разбиений* R_k *с* $\delta_k \to 0$. *Например, когда* $[a, b]$ *дробится последовательно на равные части.*

Замечание. Справедлива теорема Дарбу (здесь не доказываемая), утверждающая, что для любой ограниченной на $[a, b]$ функции

$$\lim_{\delta\to 0} \overline{S}(R) = \overline{I}, \quad \lim_{\delta\to 0} \underline{S}(R) = \underline{I}, \tag{10}$$

хотя f может и не быть интегрируемой ($\underline{I} < \overline{I}$).

Пример. Для функции (Дирихле) f, равной 1 в рациональных точках отрезка $[0, 1]$ и 0 в иррациональных, при любом разбиении R отрезка $[0, 1]$ верхняя интегральная сумма $\overline{S}(R) = 1$, а нижняя $\underline{S}(R) = 0$. Таким образом, $\underline{I} = 0 < 1 = \overline{I}$, и функция Дирихле ограничена, но не интегрируема.

§ 9.5. Теоремы о существовании интеграла от непрерывной и монотонной функции на $[a, b]$

Теорема 1. *Если функция f непрерывна на $[a, b]$, то она интегрируема на $[a, b]$.*

Доказательство. Пусть f непрерывна на $[a, b]$; тогда для разбиения R, у которого частичные отрезки $\Delta x_j < \delta$, имеет место (ξ_i, $\eta_j \in [x_j, x_{i+1}]$)

$$\sum_{j=0}^{n-1} [f(\xi_j) - f(\eta_j)]\,\Delta x_j \leqslant \sum_{j=0}^{n-1} \omega(\delta)\,\Delta x_j = \omega(\delta)(b-a),$$

где $\omega(\delta) = \sup\limits_{\substack{x', x'' \in [a, b] \\ |x'-x''| < \delta}} |f(x') - f(x'')|$ есть модуль непрерывности f на $[a, b]$.

Поэтому

$$\overline{S}_R - \underline{S}_R = \sup_{\xi_j, \eta_j} \sum_{j=0}^{n-1} [f(\xi_j) - f(\eta_j)]\,\Delta x_j \leqslant \omega(\delta)(b-a).$$

Но, как мы знаем, для непрерывной на замкнутом конечном отрезке $[a, b]$ функции $\omega(\delta) \to 0$ $(\delta \to 0)$, поэтому для любого $\varepsilon > 0$ можно указать такое $\delta > 0$, что $\overline{S}_R - \underline{S}_R < \varepsilon$.

В силу эквивалентности условий 2) и 4) основной теоремы интеграл f на $[a, b]$ существует.

Теорема 2. ***Функция, определенная на отрезке** $[a, b]$ **и монотонная на нем, интегрируема на нем.***

Пусть для определенности f не убывает; тогда для произвольного разбиения R при $\Delta x_j \leqslant \delta$

$$\sum_{j=0}^{n-1} [f(\xi_j) - f(\eta_j)]\,\Delta x_j \leqslant \sum_{j=0}^{n-1} [f(x_{j+1}) - f(x_j)]\,\Delta x_j \leqslant$$

$$\leqslant \delta \sum_{j=0}^{n-1} [f(x_{j+1}) - f(x_j)] = \delta\,[f(b) - f(a)] < \varepsilon \quad (\xi_j, \eta_j \in [x_j, x_{j+1}]),$$

если δ достаточно мало́. Отсюда, взяв верхнюю грань по ξ_j, η_j, получим

$$\overline{S}_R - \underline{S}_R = \sup \sum [f(\xi_j) - f(\eta_j)]\,\Delta x_j < \varepsilon,$$

и на основании эквивалентности условий 2) и 4) основной теоремы получим, что f интегрируема на $[a, b]$.

Заметим, что монотонная на $[a, b]$ функция может иметь только конечное или счетное число точек разрыва (см. § 3.9).

Действительно, пусть $a \leqslant x_1 < x_2 < \ldots < x_N \leqslant b$ — какие-либо, может быть, не все точки разрыва (первого рода) монотонной функции $f(x)$, которую мы будем считать неубывающей. Подберем $\varepsilon > 0$ настолько малым, чтобы

$$x_1 + \varepsilon < x_2 - \varepsilon < x_2 + \varepsilon < x_3 - \varepsilon < \ldots$$

Тогда

$$\sum_{k=1}^{N} [f(x_k + \varepsilon) - f(x_k - \varepsilon)] \leqslant f(b) - f(a) = \varkappa$$

(если $x_1 = a$, то надо считать $f(a - \varepsilon) = f(a)$, а если $x_n = b$, то $f(b + \varepsilon) = f(b)$) и после перехода к пределу при $\varepsilon \to 0$

$$\sum_{k=1}^{N} [f(x_k + 0) - f(x_k - 0)] \leqslant \varkappa$$

(если $x_1 = a$, то $x_1 - 0 = a$; если $x_n = b$, то $x_n + 0 = b$). Это неравенство показывает, что функция может иметь не больше одной точки разрыва со скачком, большим $\varkappa/2$. Если такая точка есть, то припишем ей номер 1, затем пересматриваем, имеются ли точки со скачками бо́льшими, чем $\varkappa/3$; таких точек не может быть больше чем две, и если таковые среди незанумерованных на самом деле есть, приписываем им следующие номера и т. д. В результате все точки разрыва будут перенумерованы.

§ 9.6. Теорема Лебега *)

В предыдущем параграфе было доказано, что всякая непрерывная на отрезке $[a, b]$ функция интегрируема (по Риману) на этом отрезке. Там же доказано, что всякая монотонная (ограниченная!) на отрезке $[a, b]$ функция интегрируема на нем. Мо-

---

*) А. Лёбег (1875—1941) — французский математик, один из основателей современной теории функций действительного переменного.

нотонная функция может иметь разрывы, но количество точек ее разрыва конечно или счетно. Возникает вопрос, как много точек разрыва может иметь функция, чтобы она оставалась все же интегрируемой по Риману. Исчерпывающий ответ на него дает

Теорема Лебега. *Для того чтобы функция f была интегрируемой на (конечном) отрезке $[a, b]$, необходимо и достаточно, чтобы она была ограниченной на $[a, b]$ и непрерывной всюду на $[a, b]$, за исключением множества лебеговой меры нуль.*

Доказательство этой теоремы будет дано в § 12.10 для n-мерного случая.

По определению, множество e имеет лебегову меру нуль, если, каково бы ни было $\varepsilon > 0$, найдется покрывающая e счетная или конечная система интервалов, сумма длин которых меньше ε. Конечное и счетное множества точек имеют меру нуль. В самом деле, пусть точки множества перенумерованы: x_1, x_2, ... Покроем каждую из них интервалом так, чтобы длина интервала, покрывающего точку x_n, была меньше, чем $\varepsilon \cdot 2^{-n}$. Сумма длин этих интервалов будет меньше ε.

Таким образом, из теоремы Лебега следует, что всякая ограниченная на $[a, b]$ функция, имеющая конечное или счетное число разрывов, интегрируема по Риману.

Заметим, что среди множеств, имеющих лебегову меру нуль, имеются и несчетные множества.

Пример. Разделим отрезок $[0, 1]$ на три равные части и средний интервал $(1/3, 2/3)$ (открытое множество) выкинем; каждый оставшийся отрезок $[0, 1/3]$ и $[2/3, 1]$ также разделим на три равные части и средние их открытые части выкинем. Оставшиеся четыре отрезка разделим на три части и средние открытые части выкинем. В результате этого процесса, продолженного неограниченно, будет выброшено счетное число интервалов общей длины, равной $1 = (1/3) + (2/9) + (4/27) + \ldots$ Оставшееся на $[0, 1]$ множество E замкнуто.

Можно доказать (см., например, П. С. Александров и А. Н. Колмогоров. Введение в теорию функций действительного переменного, М., ГТТИ, изд. 3, 1938), что E не только замкнуто, но и совершенно — любая точка E есть предельная точка E, а также E нигде не плотно на $[0, 1]$ — любой интервал содержит в себе точки, отличные от E; кроме того, E несчетно и в то же время имеет лебегову меру нуль. E называется *канторовым множеством меры нуль.*

Зададим функцию

$$f(x) = \begin{cases} 1 & (x \in E), \\ 0 & (x \in [0, 1] - E). \end{cases}$$

Она, очевидно, непрерывна во всех точках $[0, 1] - E$ и разрывна во всех точках E.

Таким образом, функция f может служить примером интегрируемой по Риману функции, имеющей несчетное множество точек разрыва.

§ 9.7. Аддитивные и однородные свойства интеграла

Теорема 1. *Если f интегрируема на $[a, b]$ и $a < c < b$, то она также интегрируема на $[a, c]$ и $[c, b]$, и наоборот. При этом*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx. \tag{1}$$

Доказательство. Возьмем произвольную последовательность разбиений R_k, содержащих в себе точку c, со стремящимся к нулю максимальным частичным отрезком. R_k индуцирует на $[a, c]$ и $[c, b]$ соответственно разбиения R_k' и R_k'',

$$\overline{S}_{R_k} - \underline{S}_{R_k} = \left(\overline{S}_{R_k'} - \underline{S}_{R_k'}\right) + \left(\overline{S}_{R_k''} - \underline{S}_{R_k''}\right), \tag{2}$$

Если теперь интеграл от f на $[a, b]$ существует, то в силу теоремы § 9.4 левая часть (2) стремится при $k \to \infty$ к нулю, а следовательно, и каждое слагаемое (неотрицательное!) правой части стремится к нулю, что влечет по той же теореме существование интегралов от f на $[a, c]$ и $[c, b]$. Поэтому из очевидного равенства

$$S_{R_k} = S_{R_k'} + S_{R_k''}$$

следует после перехода к пределу при $k \to \infty$ равенство (1).

Наоборот, если существуют интегралы от f на отрезках $[a, c]$ и $[c, b]$, то для произвольных их разбиений R_k' и R_k'' со стремящимися к нулю максимальными частичными отрезками отдельные слагаемые правой части (2) стремятся при $k \to \infty$ к нулю, но тогда и левая часть (2) стремится к нулю, что влечет за собой существование интеграла f на $[a, b]$.

Мы определили интеграл от f на $[a, b]$, где $a < b$. Но полезно расширить это определение, считая в случае $a > b$, что

$$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx \quad \text{и} \quad \int_a^a f(x)\,dx = 0.$$

При таком расширенном понимании символа $\int_a^b$ равенство (1), как нетрудно проверить, сохраняется для любых a, b, c, если только существует интеграл на наибольшем среди отрезков $[a, b]$, $[a, c]$, $[b, c]$.

Мы считаем здесь, что $[a, b]$ — отрезок, соединяющий точки a и b, и даже называем отрезком $[a, a]$ точку a.

Теорема 2. *Пусть $f(x)$, $\varphi(x)$ — интегрируемы на $[a, b]$ функции и C — постоянная; тогда*

1) $f(x)\pm\varphi(x)$, 2) $Cf(x)$, 3) $|f(x)|$, 4) $f(x)\varphi(x)$, 5) $\frac{1}{f(x)}$, *где* $|f(x)|>d>0$ *на* $[a, b]$ — *суть интегрируемые функции. При этом*

$$\int_a^b (f(x)\pm\varphi(x))\,dx=\int_a^b f(x)\,dx\pm\int_a^b \varphi(x)\,dx, \tag{3}$$

$$\int_a^b Cf(x)\,dx=C\int_a^b f(x)\,dx. \tag{3'}$$

Заметим, что факт интегрируемости указанных функций непосредственно следует из теоремы Лебега, если принять во внимание, что лебегова мера суммы двух множеств, имеющих лебегову меру нуль, очевидно, в свою очередь равна нулю. Но можно доказать это утверждение, не прибегая к теореме Лебега.

Берем произвольное разбиение $a=x_0<x_1<\ldots<x_n=b$. Тогда

$$\lim_{\max \Delta x_j\to 0}\sum_j [f(\xi_j)\pm\varphi(\xi_j)]\,\Delta x_j=$$
$$=\lim\sum_j f(\xi_j)\,\Delta x_j\pm\lim\sum_j \varphi(\xi_j)\,\Delta x_j=\int_a^b f(x)\,dx\pm\int_a^b\varphi(x)\,dx,$$

потому что, по условию, интегралы от $f(x)$ и $\varphi(x)$ существуют. Таким образом, предел в левой части этих соотношений существует и равен правой части. Но это значит, что имеет место (3).

Подобным образом

$$\int_a^b Cf\,dx=\lim_{\max \Delta x_j\to 0}\sum Cf(\xi_j)\,\Delta x_j=C\lim\sum f(\xi_j)\,\Delta x_j=C\int_a^b f\,dx.$$

Мы доказали 1), 2), (3) и (3′).

Будем обозначать через $M_f=\sup\limits_{x\in[x_j,x_{j+1}]} f$, $m_f=\inf\limits_{x\in[x_j,x_{j+1}]} f$. Будем считать, что $K_f=\sup\limits_{x\in[a,b]}|f|$. Имеем для произвольных $\xi,\eta\in[x_j, x_{j+1}]$

$$|f(\xi)|-|f(\eta)|\leqslant|f(\xi)-f(\eta)|\leqslant M_f-m_f,$$
$$f(\xi)\varphi(\xi)-f(\eta)\varphi(\eta)\leqslant|f(\xi)||\varphi(\xi)-\varphi(\eta)|+$$
$$+|\varphi(\eta)||f(\xi)-f(\eta)|\leqslant K_f(M_\varphi-m_\varphi)+K_\varphi(M_f-m_f),$$
$$\frac{1}{f(\xi)}-\frac{1}{f(\eta)}=\frac{f(\xi)-f(\eta)}{f(\xi)f(\eta)}\leqslant\frac{1}{d^2}(M_f-m_f).$$

Беря верхние грани левых частей полученных неравенств по ξ, $\eta\in[x_j, x_{j+1}]$, умножая их на Δx_j и суммируя по j, получим

$$\sum (M_{|f|}-m_{|f|})\,\Delta x\leqslant\sum (M_f-m_f)\,\Delta x, \tag{4}$$

$$\sum (M_{f\varphi}-m_{f\varphi})\,\Delta x\leqslant K_f\sum (M_\varphi-m_\varphi)\,\Delta x+K_\varphi\sum (M_f-m_f)\,\Delta x, \tag{5}$$

$$\sum (M_{1/f}-m_{1/f})\,\Delta x\leqslant \frac{1}{d^2}\sum (M_f-m_f)\,\Delta x \tag{6}$$

(мы опустили j у Δx_j). Но вследствие интегрируемости f и φ правые части (4) — (6) при $\Delta x<\delta$, где δ достаточно мало, можно сделать как угодно малыми, но тогда и левые. В случае (5) найдем для данного ε разбиения R_1, R_2, для которых

$$\overline{S}_{R_1}(f)-\underline{S}_{R_1}(f)<\varepsilon,\quad \overline{S}_{R_2}(\varphi)-\underline{S}_{R_2}(\varphi)<\varepsilon.$$

Эти неравенства верны, если заменить R_1, R_2 на $R=R_1+R_2$.

Заметим, что из интегрируемости $|f(x)|$ не следует интегрируемость $f(x)$, как это легко видеть на примере функции, равной 1 в рациональных точках $[a, b]$ и -1 в иррациональных.

§ 9.8. Неравенства и теорема о среднем

Теорема 1. *Если f и φ интегрируемы и удовлетворяют неравенству $f(x)\leqslant\varphi(x)$ на $[a, b]$, то*

$$\int_a^b f\,dx\leqslant\int_a^b \varphi\,dx. \tag{1}$$

Существование этих интегралов уже предположено и надо доказать только само неравенство. Имеем, очевидно, для любого разбиения R

$$\sum f(\xi_j)\,\Delta x_j\leqslant\sum\varphi(\xi_j)\,\Delta x_j.$$

Переходя к пределу при $\max\Delta x_j\to 0$, получим (1).

Теорема 2. *Если f интегрируема на $[a, b]$, то*

$$\left|\int_a^b f\,dx\right|\leqslant\int_a^b |f|\,dx\leqslant K(b-a), \tag{2}$$

где $K=\sup\limits_{a<x<b}|f(x)|$.

Имеем $-|f(x)|\leqslant f(x)\leqslant|f(x)|$. Поэтому по предыдущей теореме

$$-\int_a^b |f|\,dx=\int_a^b (-|f|)\,dx\leqslant\int_a^b f\,dx\leqslant\int_a^b |f|\,dx,$$

откуда следует первое неравенство (2). Далее, $|f| \leqslant K$, поэтому

$$\int_a^b |f|\,dx \leqslant \int_a^b K\,dx = K(b-a),$$

и мы получили второе неравенство (2).

В теореме 2 имелось в виду, что $a < b$. Если $a > b$, то

$$\left|\int_a^b f\,dx\right| = \left|\int_b^a f\,dx\right| \leqslant \int_b^a |f|\,dx \leqslant (a-b)K = K|b-a|.$$

Теорема 3 (о среднем). *Если f и φ интегрируемы на $[a, b]$ и $\varphi(x) \geqslant 0$, то*

$$\int_a^b f\varphi\,dx = \Lambda \int_a^b \varphi\,dx, \tag{3}$$

где $m \leqslant \Lambda \leqslant M$, $m = \inf\limits_{a \leqslant x \leqslant b} f(x)$, $M = \sup\limits_{a \leqslant x \leqslant b} f(x)$.

Действительно, в силу того, что $\varphi(x) \geqslant 0$,

$$m\varphi(x) \leqslant f(x)\varphi(x) \leqslant M\varphi(x). \tag{4}$$

Интегрируя эти неравенства, получим

$$m\int_a^b \varphi\,dx \leqslant \int_a^b f\varphi\,dx \leqslant M\int_a^b \varphi\,dx. \tag{5}$$

Если $\int_a^b \varphi\,dx = 0$, то второй интеграл в этих соотношениях также равен 0 и равенство (3) очевидно; если же $\int_a^b \varphi\,dx > 0$, то из (5) следует

$$m \leqslant \frac{\int_a^b f\varphi\,dx}{\int_a^b \varphi\,dx} \leqslant M,$$

т. е. второй член в этих соотношениях равен числу Λ, удовлетворяющему неравенствам $m \leqslant \Lambda \leqslant M$, что и требовалось доказать.

Следствие. *Если в этой теореме f непрерывна на $[a, b]$, то найдутся точки $x_1, x_2 \in [a, b]$ такие, что $f(x_2) = M$, $f(x_1) = m$ и точка $\xi \in [x_1, x_2]$ такая, что $f(\xi) = \Lambda$, поэтому в случае непре-*

рывной на $[a, b]$ *функции* f *равенство* (3) *можно записать в виде*

$$\int_a^b f\varphi\,dx = f(\xi)\int_a^b \varphi\,dx \qquad (a \leqslant \xi \leqslant b). \tag{6}$$

Теорема 4. *Если* f — *интегрируемая неотрицательная на* $[a, b]$ *функция такая, что в некоторой точке* $x_0 \in [a, b]$ *ее непрерывности* $f(x_0) > 0$, *то*

$$\int_a^b f\,dx > 0.$$

В самом деле, из условия теоремы следует, что существует число $\lambda > 0$ и отрезок $\sigma \subset [a, b]$, содержащий в себе x_0 такие, что $f(x) \geqslant \lambda$ на σ. Пусть $\delta = \overline{[a, b] - \sigma}$ — множество (состоящее из одного или двух отрезков). Тогда

$$\int_a^b f\,dx = \int_\sigma f\,dx + \int_\delta f\,dx \geqslant \int_\sigma f\,dx \geqslant \lambda|\sigma| > 0,$$

где $|\sigma|$ — длина σ.

§ 9.9. Интеграл как функция верхнего предела. Теорема Ньютона — Лейбница

Пусть на отрезке $[a, b]$ задана интегрируемая функция f. Начнем с того, что отметим, что

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(u)\,du,$$

т. е. не имеет никакого значения, какая буква (x или u) стоит под знаком f в определенном интеграле по отрезку $[a, b]$.

Зададим произвольное значение $x \in [a, b]$ и определим новую функцию $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$. Она определена для всех значений $x \in [a, b]$, потому что мы знаем, что если существует интеграл от f на $[a, b]$, то существует также интеграл от f на $[a, x]$, где $a \leqslant x \leqslant b$. Напомним, что мы считаем, по определению,

$$F(a) = \int_a^a f\,dt = 0. \tag{1}$$

Заметим, что

$$F(b) = \int_a^b f(t)\,dt.$$

Покажем, что F *непрерывна на* $[a, b]$. В самом деле, пусть x, $x+h \in [a, b]$; тогда

$$F(x+h) - F(x) = \int_a^{x+h} f(t)\,dt - \int_a^x f(t)\,dt = \int_x^{x+h} f(t)\,dt,$$

и, если $K = \sup |f(t)|$, $a \leqslant t \leqslant b$, то

$$|F(x+h) - F(x)| \leqslant \left|\int_x^{x+h} f(t)\,dt\right| \leqslant K|h| \to 0 \quad (h \to 0).$$

Таким образом, F непрерывна на $[a, b]$ независимо от того, имеет или нет f разрывы; важно, что f интегрируема на $[a, b]$.

На рис. 9.1 изображен график f. Площадь переменной фигуры $aABx$ равна $F(x)$. Ее приращение $F(x+h) - F(x)$ равно площади фигуры $xBC(x+h)$, которая в силу ограниченности f, очевидно, стремится к нулю при $h \to 0$ независимо от того, будет ли x точкой непрерывности или разрыва f, например, точкой $x = d$.

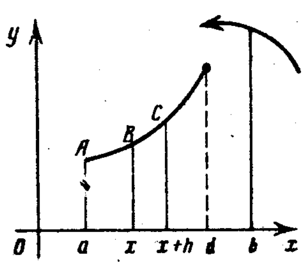

Рис. 9.1.

Пусть теперь *функция* f *не только интегрируема на* $[a, b]$, *но непрерывна в точке* $x \in [a, b]$. Докажем, что *тогда* F *имеет в этой точке производную, равную*

$$F'(x) = f(x). \qquad (2)$$

В самом деле, для указанной точки x (пояснения ниже)

$$\frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)\,dt = \frac{1}{h}\int_x^{x+h} [f(x) + \eta(t)]\,dt =$$

$$= \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(x)\,dt + \frac{1}{h}\int_x^{x+h} \eta(t)\,dt = f(x) + o(1) \quad (h \to 0). \qquad (3)$$

Мы положили $f(t) = f(x) + \eta(t)$, а так как $f(x)$ — постоянная относительно t, то $\int_x^{x+h} f(x)\,dt = f(x)h$. Далее, в силу непрерывности f в точке x для всякого $\varepsilon > 0$ можно указать такое δ, что $|\eta(t)| < \varepsilon$ для $|x - t| < \delta$. Поэтому

$$\left|\frac{1}{h}\int_x^{x+h} \eta(t)\,dt\right| \leqslant \frac{1}{|h|}|h|\varepsilon = \varepsilon \text{ для } |h| < \delta,$$

что доказывает, что левая часть этого неравенства есть $o(1)$ при $h \to 0$.

Переход к пределу в (3) при $h \to 0$ показывает существование производной от F в точке x и справедливость равенства (2). При $x = a$, b речь здесь идет соответственно о правой и левой производной.

Если функция f непрерывна на $[a, b]$, то на основании доказанного выше соответствующая ей функция

$$F(x) = \int\limits_a^x f(t)\,dt \tag{4}$$

имеет призводную, равную $f(x)$: $F'(x) = f(x)$ $[a \leqslant x \leqslant b]$. Следовательно, функция $F(x)$ есть первообразная от f на $[a, b]$.

Мы доказали, что *произвольная непрерывная на отрезке* $[a, b]$ *функция* f *имеет на этом отрезке первообразную, определенную равенством* (4). Этим *доказано существование первообразной для всякой непрерывной на отрезке функции* (см. § 8.1).

Пусть теперь $\Phi(x)$ есть произвольная первообразная функции $f(x)$ на $[a, b]$. Мы знаем, что $\Phi(x) = F(x) + C$, где C — некоторая постоянная. Полагая в этом равенстве $x = a$ и учтя, что $F(a) = 0$, получим $\Phi(a) = C$.

Таким образом, $F(x) = \Phi(x) - \Phi(a)$. Но

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = F(b).$$

Поэтому

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \Phi(b) - \Phi(a) = \Phi(x)\Big|_{x=a}^{x=b} \tag{5}$$

Мы доказали важную теорему:

Теорема 1 (Ньютона — Лейбница). *Если f непрерывна на отрезке $[a, b]$ и Φ — ее любая первообразная на этом отрезке, то имеет место равенство* (5).

Из (5) по теореме Лагранжа следует:

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = f(\xi)(b-a) \quad (a < \xi < b),$$

где $\xi \in (a, b)$ — некоторая точка. Этим уточняется равенство § 9.8, (6) при $\varphi(x) = 1$, где утверждалось, что $\xi \in [a, b]$.

Теорему 1 можно обобщить.

Теорема 2. *Для непрерывной кусочно гладкой на* $[a, b]$ *функции F имеет место*

$$F(b) - F(a) = \int\limits_a^b F'(x)\,dx. \tag{6}$$

Доказательство. Пусть (см. § 5.15)

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b,$$

где $x_1, \ldots, x_{n-1}$ — точки разрыва F' (первого рода!). Тогда (пояснения ниже)

$$F(b) - F(a) = \sum_0^{n-1} [F(x_{j+1}) - F(x_j)] =$$

$$= \sum_{j=0}^{n-1} \int_{x_j}^{x_{j+1}} F'(x)\,dx = \int_a^b F'(x)\,dx. \tag{7}$$

Второе равенство в (7) верно, потому что для любого j

$$F(x_{j+1}) - F(x_j) = \int_{x_j}^{x_{j+1}} F'(x)\,dx. \tag{8}$$

Ведь производная $F'(x)$ существует и непрерывна на интервале (x_j, x_{j+1}). Кроме того, существуют пределы $F'(x_j+0)$, $F'(x_{j+1}-0)$, которые равны соответственно правой и левой производной от F в точках $x = a, b$.

Из интегрируемости F' на каждом из отрезков $[x_j, x_{j+1}]$ следует ее интегрируемость на $[a, b]$ и последнее равенство (7).

Замечание. Функция F' не определена в точках $x_1, \ldots$ $\ldots, x_{n-1} \in [a, b]$, но это не мешает ей быть интегрируемой на $[a, b]$ (см. подробнее по этому поводу § 9.11).

Теорема 3. *Для непрерывных кусочно гладких на* $[a, b]$ *функций* $u(x)$, $v(x)$ *имеет место формула интегрирования по частям:*

$$\int_a^b u'(x)\,v(x)\,dx = u(x)\,v(x)\Big|_a^b - \int_a^b u(x)\,v'(x)\,dx. \tag{9}$$

Ведь произведение $u(x)v(x)$ есть также непрерывная кусочно гладкая на $[a, b]$ функция, имеющая, таким образом, всюду на $[a, b]$, за исключением конечного числа точек, производную, вычисляемую по формуле

$$(u(x)v(x))' = u(x)v'(x) + u'(x)v(x).$$

Если учесть еще, что функции $u'(x)v(x)$, $u(x)v'(x)$ интегрируемы на $[a, b]$, то в силу предыдущей теоремы

$$u(x)\,v(x)\Big|_a^b = \int_a^b u'(x)\,v(x)\,dx + \int_a^b u(x)\,v'(x)\,dx,$$

откуда следует (9).

Теорема 4 (о замене переменной). *Справедливо равенство*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_c^d f[\varphi(t)]\,\varphi'(t)\,dt, \tag{10}$$

где функция $x=\varphi(t)$ *непрерывно дифференцируема на* $[c, d]$, $a=\varphi(c)$, $b=\varphi(d)$ *и значения* $\varphi(t)$ $(c\leqslant t\leqslant d)$ *принадлежат отрезку* $[A, B]$, *на котором* $f(x)$ *непрерывна. (Таким образом,* $[a, b]\subset[A, B]$.)

В самом деле, пусть $F(x)$ и $\Phi(t)$ — соответственно первообразные функции $f(x)$ и $f[\varphi(t)]\varphi'(t)$. Тогда (см. § 8.1, (2)) имеет место тождество $\Phi(t)=F[\varphi(t)]+C$, $c\leqslant t\leqslant d$, где C — некоторая постоянная. Теперь (10) следует из очевидного равенства

$$F(b)-F(a)=F[\varphi(d)]-F[\varphi(c)]=\Phi(d)-\Phi(c)$$

на основании теоремы Ньютона — Лейбница.

Пример 1. $\int_0^\pi \sin x\,dx = -\cos x\Big|_0^\pi = 2$ в силу теоремы Ньютона — Лейбница: $\sin x$ непрерывна на $[0, \pi]$, $-\cos x$ ее первообразная.

Пример 2.

$$\int_a^b \operatorname{sign} t\,dt = |t|\Big|_a^b = |b|-|a| \tag{11}$$

в силу теоремы 2, потому что $|x|$ есть непрерывная кусочно гладкая (или гладкая, если $ab\geqslant 0$) функция на отрезке $[a, b]$, а $\operatorname{sign} x$ — ее производная, существующая всюду на $[a, b]$, за исключением точки $x=0$.

В частности, из (11) следует:

$$\int_0^x \operatorname{sign} t\,dt = |x|.$$

§ 9.10. Вторая теорема о среднем

Теорема. *Если функция* φ *— неотрицательная неубывающая на отрезке* $[a, b]$, *а* f *— интегрируемая на* $[a, b]$, *то существует точка* $\xi\in[a, b]$ *такая, что*

$$\int_a^b \varphi(x)\,f(x)\,dx = \varphi(b)\int_\xi^b f(x)\,dx. \tag{1}$$

Доказательство. Будем сначала считать, что φ имеет непрерывную производную на $[a, b]$. Интегрируя по частям, получим

$$\int_a^b \varphi(x)\,f(x)\,dx = -\varphi(x)\int_x^b f(u)\,du\Big|_a^b + \int_a^b \varphi'(x)\int_x^b f(u)\,du\,dx =$$

$$= \varphi(a)\int_a^b f(u)\,du + \int_a^b \varphi'(x)\int_x^b f(u)\,du\,dx. \tag{2}$$

Пусть

$$m = \min_{a \leqslant x \leqslant b} \int_x^b f(u)\,du, \quad M = \max_{a \leqslant x \leqslant b} \int_x^b f(u)\,du;$$

тогда правая часть (2), учитывая, что $\varphi(a)$, $\varphi'(x) \geqslant 0$, не больше чем $\left(\varphi(a) + \int_a^b \varphi'(x)\,dx\right) M = \varphi(b) M$, но не меньше, чем $\left(\varphi(a) + \int_a^b \varphi'(x)\,dx\right) m = \varphi(b) m$. Поэтому найдется $\xi \in [a, b]$, для которого выполняется равенство (1).

Если теперь φ — неубывающая неотрицательная функция, вообще говоря, разрывная, то она интегрируема на $[a, b]$ и существует последовательность непрерывно дифференцируемых неубывающих неотрицательных функций ψ_n, для которых (см. § 18.2, 5), том II)

$$\int_a^b |\varphi(x) - \psi_n(x)|\,dx \to 0, \quad n \to \infty. \tag{3}$$

На основании уже доказанного при любом n найдется точка $\xi_n \in [a, b]$, для которой

$$\int_a^b \psi_n(x) f(x)\,dx = \varphi(b) \int_{\xi_n}^b f(x)\,dx. \tag{4}$$

Из последовательности $\{\xi_n\}$ можно выбрать подпоследовательность, сходящуюся к некоторой точке $\xi \in [a, b]$. Но тогда в силу непрерывности интеграла справа в (4) по нижнему пределу и того факта, что

$$\left| \int_a^b \psi_n f\,dx - \int_a^b \varphi f\,dx \right| \leqslant K \int_a^b |\psi_n - \varphi|\,dx \to 0, \quad n \to \infty, \quad K \geqslant |f(x)|,$$

из (4) после перехода к пределу при $n \to \infty$ следует (1).

§ 9.11. Видоизменение функции

Теорема. *Если функция f интегрируема на $[a, b]$, то после видоизменения ее в конечном числе точек отрезка $[a, b]$ она останется интегрируемой без изменения величины интеграла.*

Доказательство. Ясно, что видоизмененная функция

$$f_1(x) = f(x) + \varphi(x),$$

где φ равна нулю всюду на $[a, b]$, за исключением указанных в условии теоремы точек. Ясно также, что интеграл от φ на $[a, b]$ равен нулю. Поэтому f_1 интегрируема и

$$\int_a^b f_1 dx = \int_a^b f\,dx + \int_a^b \varphi\,dx = \int_a^b f\,dx.$$

До сих пор при исследовании функции f на интегрируемость мы предполагали, что f задана во всех точках $[a, b]$. Из доказанной теоремы мы видим, что интегрируемость f не зависит от того, какие значения принимает f на конечной системе точек отрезка $[a, b]$. Но раз так, то можно и не предполагать, что f задана на этих точках. В этом смысле мы будем говорить об интегрируемости ограниченной функции на $[a, b]$, заданной на самом деле на множестве, полученном выбрасыванием из $[a, b]$ конечного числа точек, например, об интегрируемости $\sin(1/x)$ или $(\sin x)/x$ на $[0, 1]$. Обе эти функции непрерывны и ограничены только на $(0, 1]$, но говорят, что они интегрируемы на $[0, 1]$.

Если заданную на отрезке $[a, b]$ интегрируемую на нем функцию f видоизменить на счетном множестве точек, то видоизмененная функция f_1 сможет оказаться уже не интегрируемой. Например, функция $f(x) \equiv 1$ имеет интеграл Римана на $[0, 1]$, равный 1 (любая ее интегральная сумма равна 1). Но если ее значения в рациональных точках заменить на значения, равные 0, то получится функция f_1 Дирихле, не интегрируемая по Риману: любая ее верхняя сумма Дарбу равна 1, а нижняя равна 0. Однако это явление бывает не всегда.

Пусть e есть то множество, на котором мы видоизменили функцию f, интегрируемую на $[a, b]$, и f_1 — видоизмененная функция. Тогда $f(x) = f_1(x) + \varphi(x)$, где $\varphi(x) = 0$ на $[a, b] - e$. Если множество e такое, что для любой таким образом ему соответствующей ограниченной (!) функции φ существует интеграл $\int_a^b \varphi\,dx = 0$, то на таком множестве можно, очевидно, видоизменить функцию f, не нарушая ее интегрируемости, и тогда уже не важно, определена или нет на самом деле f на этом множестве. В таких случаях говорят, что интеграл $\int_a^b f(x)\,dx$ существует на $[a, b]$, хотя функция f определена только на $[a, b] - e$.

Пример. Функция $\psi(x) = \sin(\sin(1/x))^{-1}$ определена на $[0, 1] - e$, где e — множество, состоящее из 0 и точек $x_k = 1/k\pi$ $(k = 1, 2, \ldots)$, очевидно, счетное. Если дополнить ψ на e любыми числовыми значениями, образующими, однако, ограниченное в совокупности множество, то получим определенную на $[0, 1]$ функцию $\psi_1(x)$, интегрируемую на $[0, 1]$, потому, что она ограничена на $[0, 1]$ и непрерывна всюду на $[0, 1]$ за исключением точек множества e, имеющего лебегову меру нуль.

Интегрируемость ψ вытекает также из следующей теоремы:

Теорема. *Функция f, ограниченная на $[a, b]$ и интегрируемая на любом отрезке $[a, x]$, где $a < x < b$, интегрируема на $[a, b]$.*

В этой формулировке $[a, x]$ можно заменить на $[x, b]$.

Доказательство. Зададим $\varepsilon > 0$. Пусть $|f(x)| \leq M$ на $[a, b]$ и $\delta = \varepsilon/4M$. Так как f интегрируема на отрезке $[a, b - \delta]$, то существует его разбиение $R' = \{a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{n-1} = b - \delta\}$ такое, что

$$\overline{S}_{R'} - \underline{S}_{R'} = \sum_{j=0}^{n-2} (M_j - m_j)\,\Delta x_j < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Введем еще разбиение $R = \{a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b\}$ отрезка $[a, b]$. Тогда

$$\overline{S}_R - \underline{S}_R = \left(\overline{S}_{R'} - \underline{S}_{R'}\right) + (M_{n-1} - m_{n-1})\,\delta < \frac{\varepsilon}{2} + 2M\delta = \varepsilon,$$

что показывает (см. § 9.4, основная теорема), что f интегрируема на $[a, b]$.

В нашем примере ψ ограничена на $[0, 1]$ и интегрируема на любом отрезке $[\delta, 1]$, $\delta > 0$. Ведь на $[\delta, 1]$ она имеет не больше чем конечное число точек разрыва.

§ 9.12. Несобственные интегралы

Зададим на конечном полуинтервале $[a, b)$ функцию f. Допустим, что она интегрируема на любом отрезке $[a, b']$, где $b' < b$ и неограничена в окрестности точки b. Тогда ее интеграл на $[a, b)$ или, что все равно, на $[a, b]$ в обычном смысле (Римана), не может существовать, потому что интегрируемая на $[a, b]$ по Риману функция необходимо ограничена. Однако может случиться, что существует предел $\lim\limits_{b' \to b} \int\limits_a^{b'} f(x)\,dx$. Если это так, то этот предел называют *несобственным интегралом от f* на отрезке $[a, b]$ и записывают в виде

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \lim_{b' \to b} \int\limits_a^{b'} f(x)\,dx. \tag{1}$$

В таком случае говорят, что *интеграл* $\int\limits_a^b f\,dx$ сходится. В противном случае говорят, что он *расходится* или не существует как несобственный риманов интеграл.

Допустим теперь, что функция f задана на луче $[a, \infty)$ и интегрируема на любом конечном отрезке $[a, b']$, где $a < b' < \infty$. Если существует предел

$$\lim_{b' \to \infty} \int\limits_a^{b'} f(x)\,dx,$$

то он называется *несобственным интегралом от f на* $[a, \infty)$ и обозначается так:

$$\int\limits_a^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{b' \to \infty} \int\limits_a^{b'} f(x)\,dx.$$

Условимся в следующей терминологии. Выражение

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx \tag{2}$$

будем называть *интегралом* (*от* f) *с особенностью в точке* b, если выполняются следующие условия: если b — конечная точка, то функция f интегрируема на $[a, b']$ при любом b', удовлетворяющем неравенствам $a < b' < b$ и, кроме того, неограничена в окрестности точки b. Если же $b = +\infty$, то про функцию f предполагается лишь, что она интегрируема на $[a, b']$ при любом конечном $b' > a$.

Подобным образом определяется интеграл $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ с единственной особенностью в точке a. Теперь b — конечная точка. Если точка $a < b$ тоже конечна, то f в окрестности a неограничена и интегрируема на любом отрезке $[a', b]$, где $a < a' < b$. Если же $a = -\infty$, то функция f предполагается интегрируемой на $[a', b]$ для любого $a' < b$.

В дальнейшем мы будем для определенности рассматривать интеграл (2) с единственной особенностью в точке b, конечной или бесконечной. Все выводы по аналогии могут быть перенесены на случай интеграла с единственной особенностью в точке a.

Теорема 1. *Пусть задан интеграл* (2) *с единственной особенностью в точке* b. *Для его существования необходимо и достаточно выполнение условия* (*Коши*): *для всякого* $\varepsilon > 0$ *существует* $b_0 < b$ *такое, что*

$$\left|\int\limits_{b'}^{b''} f(t)\,dt\right| < \varepsilon, \tag{3}$$

каковы бы ни были b', b'', *удовлетворяющие неравенствам* $b_0 < b' < b'' < b$.

Доказательство. Рассмотрим функцию

$$F(x) = \int\limits_a^x f(t)\,dt \quad (a < x < b).$$

Существование интеграла (2) эквивалентно существованию предела $\lim\limits_{\substack{x\to b\\ x<b}} F(x)$, что в свою очередь эквивалентно выполнению условия Коши: для любого $\varepsilon > 0$ существует b_0, где $a < b_0 < b$, так что выполняется неравенство $|F(b'') - F(b')| < \varepsilon$ для всех b' и b'', удовлетворяющих неравенствам $b_0 < b' < b'' < b$. Но

$$F(b'') - F(b') = \int\limits_{b'}^{b''} f(t)\,dt$$

и теорема доказана.

Пример 1. Интеграл

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha}, \tag{4}$$

где $\alpha > 0$ — постоянное число, имеет, очевидно, единственную особенность в точке $x = 0$. Чтобы пояснить, сходится ли он, надо вычислить предел

$$\lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ \varepsilon>0}} \int_\varepsilon^1 \frac{dx}{x^\alpha} = \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{1}{1-\alpha}\cdot\frac{1}{x^{\alpha-1}}\Bigg|_\varepsilon^1 = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{1-\alpha}\left[1-\varepsilon^{1-\alpha}\right] = \begin{cases} \dfrac{1}{1-\alpha}, & \alpha<1,\\ \infty, & \alpha>1.\end{cases}$$

Таким образом, интеграл (4) сходится при $\alpha < 1$ и равен $(1-\alpha)^{-1}$ и расходится при $\alpha > 1$.

Если же $\alpha = 1$, то он расходится:

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_\varepsilon^1 \frac{dx}{x} = -\lim_{\varepsilon\to 0}\ln\varepsilon = +\infty.$$

Пример 2. Интеграл

$$\int_1^\infty \frac{dx}{x^\alpha} = \lim_{N\to\infty}\int_1^N \frac{dx}{x^\alpha} = \frac{1}{1-\alpha}\lim_{N\to\infty} x^{1-\alpha}\Bigg|_1^N =$$

$$= \begin{cases} \dfrac{1}{\alpha-1} & \text{при}\quad \alpha>1 \text{ (сходится)},\\ +\infty & \text{при}\quad \alpha<1 \text{ (расходится)},\end{cases}$$

$$\int_1^\infty \frac{dx}{x} = \lim_{N\to\infty}\int_1^N \frac{dx}{x} = \lim_{N\to\infty}\ln N = +\infty \text{ (расходится)}.$$

Пусть снова задан интеграл

$$\int_a^b f(x)\,dx, \tag{5}$$

имеющий единственную особенность в точке b. Тогда интеграл

$$\int_c^b f\,dx, \tag{6}$$

где $a < c < b$, также имеет единственную особенность в точке b. Условие Коши существования интегралов (5) и (6) формулируется, очевидно, совершенно одинаково. Поэтому эти интегралы одновременно сходятся или одновременно расходятся. Кроме того, при $a < c < b$, очевидно, имеет место

$$\int_a^b f\,dx = \lim_{b'\to b}\int_a^{b'} f\,dx = \lim_{b'\to b}\left(\int_a^c f\,dx + \int_c^{b'} f\,dx\right) =$$
$$= \int_a^c f\,dx + \lim_{b'\to b}\int_c^{b'} f\,dx = \int_a^c f dx + \int_c^b f\,dx, \tag{7}$$

где $\int_a^c$ — обычный риманов собственный интеграл, а интегралы $\int_a^b$ и $\int_c^b$ — несобственные.

Отметим равенство

$$\int_a^b (Af + B\,\varphi)\,dx = \lim_{b'\to b}\int_a^{b'} (Af + B\varphi)\,dx =$$
$$= A\lim_{b'\to b}\int_a^{b'} f\,dx + B\lim_{b'\to b}\int_b^{b'} \varphi\,dx = A\int_a^b f\,dx + B\int_a^b \varphi\,dx, \tag{8}$$

где A и B — постоянные. Его надо понимать в том смысле, что если существуют интегралы в правой части, то существует также интеграл в левой и имеет место равенство (8).

Говорят, что интеграл (5) (имеющий особенность в точке b) *сходится абсолютно*, если сходится интеграл

$$\int_a^b |f(x)|\,dx < \infty \tag{9}$$

от абсолютного значения $|f(x)|$.

Абсолютно сходящийся интеграл сходится. В самом деле, из сходимости интеграла (9) следует, что для любого $\varepsilon > 0$ на интервале (a, b) найдется точка b_0 такая, что если $b_0 < b' < b'' < b$, то

$$\varepsilon > \int_{b'}^{b''} |f(x)|\,dx \geqslant \left|\int_{b'}^{b''} f(x)\,dx\right|,$$

т. е. для интеграла (1) выполняется условие Коши.

Так как

$$\left|\int_a^{b'} f(x)\,dx\right| \leqslant \int_a^{b'} |f(x)|\,dx,$$

то после перехода к пределу при $b' \to b$ для абсолютно сходящегося интеграла (5) получим

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leqslant \int_a^b |f(x)|\,dx. \tag{10}$$

Несобственный интеграл может сходиться, но не абсолютно (см. далее примеры §§ 9.14 и 9.15). Конечно, несобственный интеграл от неотрицательной функции, если сходится, то абсолютно.

Отметим еще следующую очевидную теорему:

Теорема 2. *Если F непрерывна на отрезке $[a, b]$ и имеет непрерывную на $[a, b)$ производную $F'(x)$, то*

$$F(b) - F(a) = \lim_{\substack{b' \to b \\ b' < b}} [F(b') - F(a)] = \lim_{\substack{b' \to b \\ b' < b}} \int_a^{b'} F'(x)\,dx = \int_a^b F'(x)\,dx,$$

где интеграл справа может быть собственным и несобственным.

Например,

$$\sqrt{x}\Big|_0^1 = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}},$$

где особенность интеграла имеет место в левом конце $[0, 1]$.

§ 9.13. Несобственные интегралы от неотрицательных функций

Пусть задан интеграл

$$\int_a^b f(x)\,dx, \tag{1}$$

имеющий единственную особенность в точке b, и на промежутке $[a, b)$ интегрирования $f(x) \geqslant 0$.

Тогда, очевидно, функция

$$F(b') = \int_a^{b'} f(x)\,dx \qquad (a < b' < b)$$

от b' монотонно не убывает. Поэтому, если она ограничена, $F(b') \leqslant M$ $(a < b' < b)$, существует интеграл (1):

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{b' \to b} \int_a^{b'} f(x)\,dx \leqslant M.$$

Если же F неограничена, то интеграл (1) расходится:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{b' \to b} \int_b^{b'} f(x)\,dx = +\infty.$$

Если $f(x) \geqslant 0$ на $[a, b)$, то пишут

$$\int_a^b f(x)\,dx < \infty \quad \text{или} \quad \int_a^b f\,dx = \infty,$$

в зависимости от того, будет ли интеграл сходиться или расходиться.

Теорема 1. *Пусть интегралы*

$$\int_a^b f(x)\,dx, \tag{1}$$

$$\int_a^b \varphi(x)\,dx, \tag{2}$$

имеют единственную особенность в точке b и на промежутке $[a, b)$ выполняются неравенства

$$0 \leqslant f(x) \leqslant \varphi(x). \tag{3}$$

Тогда из сходимости интеграла (2) следует сходимость интеграла (1) и имеет место неравенство

$$\int_a^b f\,dx \leqslant \int_a^b \varphi\,dx,$$

а из расходимости интеграла (1) следует расходимость интеграла (2).

Доказательство. Из (3) следует, что для $a < b' < b$

$$\int_a^{b'} f\,dx \leqslant \int_a^{b'} \varphi\,dx. \tag{4}$$

Если теперь интеграл (2) сходится, то правая часть (4) ограничена числом, равным интегралу (2), но тогда ограничена и левая. И так как левая часть при возрастании b' монотонно не убывает, то она стремится к пределу (интегралу):

$$\int_a^b f\,dx = \lim_{b' \to b} \int_a^{b'} f\,dx \leqslant \int_a^b \varphi\,dx.$$

Наоборот, из расходимости интеграла (1) следует, что предел левой части (4) при $b' \to \infty$ равен ∞, а следовательно, и предел правой равен ∞.

Теорема 2. *Пусть интегралы* (1) *и* (2) *имеют единственную особенность в точке b, подынтегральные функции положительны и существует предел*

$$\lim_{x \to b} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = A > 0. \tag{5}$$

Тогда эти интегралы одновременно сходятся или одновременно расходятся.

Доказательство. Из (5) следует, что для положительного $\varepsilon < A$ можно указать такое $c \in [a, b)$, что

$$A - \varepsilon < \frac{f(x)}{\varphi(x)} < A + \varepsilon \quad (c < x < b),$$

и так как $\varphi(x) > 0$, то

$$(A - \varepsilon)\varphi(x) < f(x) < (A + \varepsilon)\varphi(x) \quad (c < x < b). \tag{6}$$

Из сходимости интеграла $\int\limits_a^b \varphi\, dx$ следует сходимость интеграла $\int\limits_c^b \varphi\, dx$ и сходимость интеграла $\int\limits_c^b (A + \varepsilon)\varphi\, dx$. Но тогда по предыдущей теореме сходится также интеграл $\int\limits_c^b f\, dx$, а вместе с ним интеграл $\int\limits_a^b f\, dx$. Наоборот, из сходимости $\int\limits_a^b f\, dx$ следует сходимость $\int\limits_c^b \varphi\, dx$ потому, что наряду с (5) имеет место равенство

$$\lim_{x \to b} \frac{\varphi(x)}{f(x)} = \frac{1}{A} > 0.$$

Замечание 1. Теорема 2 может быть обобщена следующим образом. Пусть функции f и φ по-прежнему удовлетворяют условиям этой теоремы и ψ — непрерывная и неотрицательная на (a, b) функция. Тогда интегралы $\int\limits_a^b f\psi\, dx$ и $\int\limits_a^b \varphi\psi\, dx$ одновременно сходятся или одновременно расходятся. Чтобы доказать это утверждение, надо рассмотреть вытекающие из (6) неравенства

$$(A - \varepsilon)\varphi(x)\psi(x) \leqslant f(x)\psi(x) \leqslant (A + \varepsilon)\varphi(x)\psi(x).$$

Замечание 2. Если в теореме 2 $A = 0$, то сходимость интеграла $\int\limits_a^b \varphi\, dx$ влечет сходимость интеграла $\int\limits_a^b f\, dx$, что следует из второго неравенства (6), где $\varepsilon > 0$ произвольно.

Замечание 3. В теореме 2 можно заранее считать, что только одна из функций f или φ положительна на $[a, b)$, потому что из (6) тогда следует, что и вторая положительна на $[c, b)$ при некотором c.

Примеры. Значок $\sim$ между двумя интегралами обозначает, что эти интегралы в силу теоремы 2 одновременно сходятся или одновременно расходятся.

$$1)\ \int_0^1 \frac{dx}{\ln(1+\sqrt{x})} \sim \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}+o(\sqrt{x})} \sim \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} < \infty, \quad x \to 0.$$

$$2)\ \int_0^1 \frac{dx}{x-\ln(1+x)} \sim \int_0^1 \frac{dx}{\frac{x^2}{2}+o(x^2)} \sim \int_0^1 \frac{dx}{x^2} = \infty, \quad x \to 0.$$

Интегралы 1), 2) имеют единственную особенность в точке $x = 0$ (это отмечено выше символом $x \to 0$). В знаменателях под этими интегралами мы выделили главные степенные члены (см. §§ 4.10 и 5.11) и применили теорему 2. Интеграл 1) сходится, а интеграл 2) расходится.

$$3)\ \int_1^\infty x^\alpha e^{-x^\beta}\,dx = \int_1^\infty \left(x^{\alpha+2}e^{-x^\beta}\right)\frac{1}{x^2}\,dx \leqslant K\int_1^\infty \frac{dx}{x^2} < \infty, \quad \beta > 0.$$

Функция в скобках непрерывна на $[1, \infty]$ и стремится к нулю при $x \to \infty$, поэтому она ограничена на $[1, \infty)$ некоторой константой K. Таким образом, этот интеграл, имеющий единственную особенность в $x = \infty$, сходится.

§ 9.14. Интегрирование по частям

Пусть на луче $[a, \infty)$ заданы непрерывные функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$, а ψ к тому же имеет непрерывную производную. Тогда, если обозначить через $\Phi(x)$ какую-либо первообразную от $\varphi(x)$, получим

$$\int_a^N \varphi(x)\psi(x)\,dx =$$
$$= \psi(N)\Phi(N) - \psi(a)\Phi(a) - \int_a^N \psi'(x)\Phi(x)\,dx, \qquad a < N < \infty. \tag{1}$$

Если существует несобственный интеграл

$$\int_a^\infty \psi'(x)\Phi(x)\,dx = A \tag{2}$$

и существует предел

$$\lim_{x\to+\infty} \psi(x)\Phi(x) = B, \tag{3}$$

то существует несобственный интеграл

$$\int_a^b \varphi(x)\psi(x)\,dx = B - \psi(a)\Phi(a) - A. \tag{4}$$

Отметим некоторые частные достаточные признаки существования интеграла (2) и предела (3), а следовательно, и существования интеграла (4).

1) Если функция

$$|\Phi(x)| \leqslant M \tag{5}$$

ограничена,

$$\psi(x) \to 0 \quad (x \to \infty) \tag{6}$$

и

$$\int_a^\infty |\psi'(x)|\,dx < \infty, \tag{7}$$

то интеграл (2) и предел (3) существуют.

Действительно, тогда интеграл (2) сходится, даже абсолютно:

$$\int_a^\infty |\psi'(x)\,\Phi(x)|\,dx \leqslant M \int_a^\infty |\psi'(x)|\,dx < \infty,$$

и

$$|\psi(x)\Phi(x)| \leqslant M|\psi(x)| \to 0 \quad (x \to \infty).$$

Таким образом, в данном случае интеграл (4) сходится и $B = 0$.

2) *Признак Дирихле.* Этот признак заключается в том, что для функции Φ выполняется неравенство (5), что же касается функции ψ, то она предполагается убывающей на $[a, \infty)$ и стремящейся к нулю при $x \to \infty$, и, таким образом, имеющей неположительную производную. Тогда условие (6) выполняется. Выполняется также и признак (7) потому, что существует предел

$$\lim_{N\to\infty} \int_a^N |\psi'(x)|\,dx = -\lim_{N\to\infty} \int_a^N \psi'(x)\,dx = \lim_{N\to\infty} [\psi(a) - \psi(N)] = \psi(a).$$

Таким образом, признак Дирихле есть частный случай признака 1).

Пример. Интеграл

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx \tag{8}$$

имеет единственную особенность (в «точке» ∞). Надо иметь в виду, что функция $(\sin x)/x$ имеет устранимый разрыв в точке $x = 0$. Если ее положить равной 1 в этой точке, то она станет непрерывной. Интеграл (8) сходится потому, что интеграл

$$\int_1^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx$$

сходится на основании признака Дирихле (функция $1/x$ монотонно убывает, стремится при $x \to \infty$ к нулю и имеет непрерывную производную, а функция $\sin x$ непрерывна и имеет ограниченную первообразную ($-\cos x$)). Однако интеграл (8) сходится не абсолютно (см. § 9.15, пример 1).

§ 9.15. Несобственный интеграл и ряд *)

Рассмотрим интеграл

$$\int_a^b f(x)\,dx, \tag{1}$$

имеющий единственную особенность в точке b. Пусть

$$a = b_0 < b_1 < b_2 < \ldots < b, \quad b_k \to b.$$

Тогда можно определить ряд

$$\int_{b_0}^{b_1} f\,dx + \int_{b_1}^{b_2} f\,dx + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} \int_{b_k}^{b_{k+1}} f\,dx, \tag{2}$$

k-й член которого равен

$$u_k = \int_{b_k}^{b_{k+1}} f\,dx.$$

Теорема 1. *Если интеграл* (1) *сходится, то сходится также ряд* (2) *и имеет место равенство*

$$\int_a^b f\,dx = \sum_0^{\infty} \int_{b_k}^{b_{k+1}} f\,dx. \tag{3}$$

Действительно,

$$\lim_{n\to\infty} \sum_0^n \int_{b_k}^{b_{k+1}} f\,dx = \lim_{n\to\infty} \int_{b_0}^{b_{n+1}} f\,dx = \int_a^b f\,dx,$$

Если f неотрицательна на $[a, \infty)$, то и наоборот, из сходимости ряда (2) следует сходимость интеграла (1). В самом деле, пусть ряд сходится и имеет сумму, равную S. Для любого b', где $a < b' < b$, можно указать такое n_0, что $b_n > b'$ для $n > n_0$. Поэтому, учитывая, что $f(x) \geqslant 0$,

$$\int_a^{b'} f\,dx \leqslant \int_a^{b_n} f\,dx = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{b_k}^{b_{k+1}} f\,dx \leqslant S,$$

*) Для понимания этого параграфа требуются самые элементарные понятия о ряде в пределах § 11.1.

т. е. интеграл в левой части ограничен и, следовательно, несобственный интеграл (1) существует. Но тогда, как доказано выше, справедливо равенство (3).

Если же функция f не сохраняет знак на $[a, b)$, то из сходимости ряда (2) вообще не следует сходимость интеграла. Например, ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} \int_{2k\pi}^{2(k+1)\pi} \sin x\, dx = \sum_{0}^{\infty} 0 = 0$$

сходится, интеграл же $\int_0^\infty \sin t\, dt$ расходится потому, что функция от x

$$\int_0^x \sin t\, dt = 1 - \cos x$$

не стремится к пределу при $x \to \infty$.

Теорема 2. *Если функция f непрерывна и не возрастает на $[0, \infty)$, то интеграл*

$$\int_0^\infty f(x)\, dx$$

и ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} f(k) = f(0) + f(1) + f(2) + \ldots$$

одновременно сходятся или одновременно расходятся.

Доказательство. Имеют место неравенства

$$f(k+1) \leqslant \int_k^{k+1} f(x)\, dx \leqslant f(k), \qquad (k = 0, 1, \ldots).$$

Суммируя их по k, получим

$$\sum_{1}^{n+1} f(k) = \sum_{0}^{n} f(k+1) \leqslant \int_0^{n+1} f(x)\, dx \leqslant \sum_{0}^{n} f(k). \tag{4}$$

Отсюда, учитывая, что все члены в этих соотношениях при возрастании n монотонно не убывают, следует утверждение теоремы.

Из доказанной теоремы следует, что ряд

$$1 + \frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{3^\alpha} + \ldots \tag{5}$$

сходится при $\alpha > 1$ и расходится при $\alpha \leqslant 1$ потому, что функция

$1/(1+x)^\alpha$ при $\alpha > 0$ непрерывна и монотонно убывает на $[0, \infty)$, а

$$\int\limits_0^\infty \frac{dx}{(1+x)^\alpha} \begin{cases} < \infty & (\alpha > 1), \\ = \infty & (\alpha \leqslant 1). \end{cases}$$

В случае $\alpha \leqslant 0$ непосредственно видно, что ряд (5) расходится.

Теорема 3. *Пусть в интеграле*

$$\int\limits_0^\infty \frac{\varphi(x)}{\psi(x)}\, dx \tag{6}$$

функции $\varphi(x)$ *и* $\psi(x)$ *непрерывны,* $\psi(x) > 0$ *и возрастает (не убывает),* $\varphi(x)$ *неотрицательна и периода* l *и* $\int\limits_0^l \varphi(x)\,dx > 0$. *Тогда интеграл*

$$\int\limits_0^\infty \frac{dx}{\psi(x)} \tag{7}$$

и интеграл (6) *одновременно сходятся или одновременно расходятся.*

Доказательство. Представим интеграл (6) формально в виде ряда

$$\int\limits_0^\infty \frac{\varphi(x)}{\psi(x)}\, dx = \sum_{k=0}^\infty \lambda_k, \quad \lambda_k = \int\limits_{kl}^{(k+1)l} \frac{\varphi(x)}{\psi(x)}\, dx. \tag{8}$$

В силу периодичности φ

$$\int\limits_{kl}^{(k+1)l} \varphi(x)\,dx = \int\limits_0^l \varphi(kl+u)\,du = \int\limits_0^l \varphi(u)\,du = \mu > 0,$$

и так как ψ возрастает, то, очевидно,

$$\frac{\mu}{\psi((k+1)\,l)} \leqslant \lambda_k \leqslant \frac{\mu}{\psi(kl)} \quad (k = 0, 1, \ldots). \tag{9}$$

Интеграл слева в (8) одновременно сходится с рядом справа в (8), который в силу (9) сходится одновременно с рядом $\sum\limits_{k=0}^\infty \frac{1}{\psi(kl)}$, который, наконец, по предыдущей теореме сходится одновременно с интегралом (7), и теорема доказана.

Пример 1.

$$\int\limits_\pi^\infty \frac{|\sin x|}{x}\, dx = \infty$$

по теореме 3, где надо считать $l = \pi$, $\varphi(x) = |\sin x|$, $\psi(x) = x$.

Пример 2. Рассмотрим интеграл

$$\int_1^\infty \frac{\sin x}{x^\alpha + \sin x}\, dx \qquad (\alpha > 0). \tag{10}$$

Он имеет единственную особенность в точке ∞. При $\alpha > 1$ он абсолютно сходится:

$$\int_2^\infty \frac{|\sin x|}{|x^\alpha + \sin x|}\, dx \leqslant \int_2^\infty \frac{dx}{x^\alpha - 1} < \infty,$$

потому что $x^\alpha \sim x^\alpha - 1$ $(x \to \infty)$, а $\int_2^\infty \frac{dx}{x^\alpha} < \infty$.

При $\alpha \leqslant 1$ интеграл (10) абсолютно не сходится потому, что

$$\int_\pi^\infty \frac{|\sin x|}{|x^\alpha + \sin x|}\, dx \geqslant \int_\pi^\infty \frac{|\sin x|}{x^\alpha + 1}\, dx = \infty$$

в силу последней теоремы. Ведь функция $|\sin x|$ непрерывна, периода π и $\int_0^\pi |\sin x|\, dx = \int_0^\pi \sin x\, dx = 2 > 0$, функция же $x^\alpha + 1$ непрерывно возрастает и $\int_\pi^\infty (x^\alpha + 1)^{-1}\, dx = \infty$.

Но интеграл (10) все же для $\frac{1}{2} < \alpha \leqslant 1$ сходится (не абсолютно). Действительно, применяя интегрирование по частям, получим

$$\int_1^N \frac{\sin x}{x^\alpha + \sin x}\, dx = -\cos x \frac{1}{x^\alpha + \sin x}\Bigg|_1^N - \int_1^N \frac{\cos x\,(\alpha x^{\alpha-1} + \cos x)}{(x^\alpha + \sin x)^2}\, dx.$$

Первый член правой части при $\alpha > 0$ имеет при $N \to \infty$ конечный предел, второй член есть сумма интегралов

$$I'_N = -\int_1^N \frac{\cos^2 x}{(x^\alpha + \sin x)^2}\, dx, \quad I''_N = -\alpha \int_1^N \frac{\cos x \cdot x^{\alpha-1}}{(x^\alpha + \sin x)^2}\, dx.$$

Но

$$\int_2^\infty \frac{|\cos x|\, x^{\alpha-1}}{(x^\alpha + \sin x)^2}\, dx \leqslant \int_2^\infty \frac{x^{\alpha-1}}{(x^\alpha - 1)^2}\, dx < C \int_2^\infty \frac{dx}{x^{1+\alpha}} < \infty,$$

поэтому I''_N стремится к конечному пределу при $N \to \infty$ для любого $\alpha > 0$, и вопрос свелся к исследованию I'_N.

Интеграл $\int\limits_{\pi}^{\infty} \frac{\cos^2 x}{(x^\alpha + \sin x)^2}\, dx$ при $\alpha > 0$ сходится одновременно с интегралом

$$\int\limits_{\pi}^{\infty} \frac{\cos^2 x}{x^{2\alpha}}\, dx \tag{11}$$

(см. замечание 1 в конце § 9.13) в силу того, что $x^\alpha + \sin x \sim x^\alpha (x \to \infty)$. А интеграл (11) одновременно сходится с интегралом

$$\int\limits_{\pi}^{\infty} \frac{dx}{x^{2\alpha}} \begin{cases} < \infty & (1/2 < \alpha), \\ = +\infty & (1/2 \geqslant \alpha) \end{cases}$$

(см. предыдущую теорему).

Итак, предел I'_N при $N \to \infty$ существует только при $\alpha > 1/2$, поэтому и интеграл (10) сходится только при $\alpha > 1/2$.

§ 9.16. Несобственные интегралы с особенностями в нескольких точках

Пусть (a, b) есть интервал, конечный или бесконечный, и на нем задана функция f такая, что интеграл

$$\int\limits_a^b f(x)\, dx \tag{1}$$

имеет особенности только в точках a и b. Это значит, что $a = -\infty$ или, если a — конечная точка, то в ее окрестности функция f неограничена; также $b = +\infty$ или, если b — конечная точка, то в окрестности ее f неограничена. Кроме того, функция f интегрируема на любом отрезке $[a', b']$, где $a < a' < b' < b$.

Произвольная точка c интервала (a, b) делит его на два частичных интервала (a, c), (c, b).

Интеграл

$$\int\limits_a^c f(x)\, dx \tag{2}$$

имеет единственную особенность (в точке a); интеграл

$$\int\limits_c^b f(x)\, dx \tag{3}$$

также имеет единственную особенность (в точке b). Для интегралов (2) и (3) мы уже знаем, в каком случае они существуют (сходятся) как несобственные интегралы.

По определению, несобственный интеграл (1) существует (сходится) в том и только в том случае, если каждый из интегралов (2) и (3) существует. При этом полагают

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx.$$

Это определение не зависит от c. В самом деле, если $a < c < c' < b$, то

$$\int_c^b = \int_c^{c'} + \int_{c'}^b, \tag{4}$$

где интеграл $\int_c^{c'}$ — собственный, и, аналогично,

$$\int_a^c + \int_c^{c'} = \int_a^{c'}. \tag{5}$$

Сложив (4) и (5) и сократив на $\int_c^{c'}$, получим

$$\int_a^c + \int_c^b = \int_a^{c'} + \int_{c'}^b.$$

Но может быть более сложный случай. Пусть задан, пока формально, интеграл

$$\int_a^b f(x)\,dx, \tag{6}$$

где интервал (a, b) может быть конечным и бесконечным. Пусть, далее, интервал (a, b) можно разбить точками $a = c_0 < c_1 < c_2 \ldots \ldots < c_{n-1} < c_n = b$ на конечное число частичных интервалов (c_k, c_{k+1}) таких, что каждый из интегралов

$$\int_{c_k}^{c_{k+1}} f(x)\,dx \qquad (k = 0, 1, \ldots, n-1) \tag{7}$$

имеет только одну особенность на одном из концов (c_k, c_{k+1}).

Тогда, если все несобственные интегралы (7) существуют (сходятся), то, по определению, считают существующим (сходящимся) и интеграл (6). При этом полагают

$$\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{c_k}^{c_{k+1}} f\,dx.$$

Если хотя бы один из интегралов (7) не сходится, то и интеграл (6) считается расходящимся (не существующим).

Аналогично, интеграл (6) называется абсолютно сходящимся тогда и только тогда, если все интегралы (7) абсолютно сходятся.

Мы хотим еще сделать одно замечание. Допустим для примера, что точка a конечна, $a < b < \infty$, и интеграл

$$\int_a^\infty f\,dx \tag{8}$$

имеет, кроме точки ∞, еще только одну особенность в точке b.

Пусть $b < c < \infty$. Тогда, как было определено выше, несобственный интеграл (8), который мы будем считать существующим, можно определить следующим образом ($\varepsilon_j > 0$):

$$\int_a^\infty f\,dx = \int_a^b f\,dx + \int_b^c f\,dx + \int_c^\infty f\,dx =$$

$$= \lim_{\varepsilon_1\to 0}\int_a^{b-\varepsilon_1} f\,dx + \lim_{\varepsilon_2\to 0}\int_{b+\varepsilon_2}^{c} f\,dx + \lim_{\varepsilon_3\to 0}\int_c^{1/\varepsilon_3} f\,dx =$$

$$= \lim_{\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3\to 0}\left\{\int_a^{b-\varepsilon_1} f\,dx + \int_{b+\varepsilon_2}^{c} f\,dx + \int_c^{1/\varepsilon_3} f\,dx\right\} \quad (\varepsilon_1,\ \varepsilon_2,\ \varepsilon_3 > 0), \tag{9}$$

т. е. если существует несобственный интеграл (8), то существует также предел выражения в фигурных скобках, когда положительные ε_1, ε_2, ε_3 стремятся к нулю независимо друг от друга *). Важно отметить, что обратное утверждение также верно, т. е. если существует предел правой части (9), когда положительные ε_1, ε_2, ε_3 стремятся к нулю независимо друг от друга, то существуют каждый из трех пределов, стоящих в третьем члене (9), т. е. существует несобственный интеграл (8). Чтобы доказать это, введем обозначение

$$\varphi_1(\varepsilon_1) = \int_a^{b-\varepsilon_1} f\,dx, \quad \varphi_2(\varepsilon_2) = \int_{b+\varepsilon_2}^{c} f\,dx, \quad \varphi_3(\varepsilon_3) = \int_c^{1/\varepsilon_3} f\,dx.$$

Пусть известно, что существует предел

$$\lim_{\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3\to 0}\{\varphi_1(\varepsilon_1) + \varphi_2(\varepsilon_2) + \varphi_3(\varepsilon_3)\};$$

тогда выполняется условие Коши: для всякого $\eta > 0$ должно найтись такое $\delta > 0$, что если $0 < \varepsilon_1,\ \varepsilon_2,\ \varepsilon_3,\ \varepsilon_1',\ \varepsilon_2',\ \varepsilon_3' < \delta$, то

$$|\varphi_1(\varepsilon_1) + \varphi_2(\varepsilon_2) + \varphi_3(\varepsilon_3) - \varphi_1(\varepsilon_1') - \varphi_2(\varepsilon_2') - \varphi_3(\varepsilon_3')| < \eta.$$

*) Здесь идет речь о пределе функции от трех переменных в нулевой точке на множестве точек с положительными координатами.

Но мы имеем право взять $\varepsilon_2 = \varepsilon_2'$, $\varepsilon_3 = \varepsilon_3'$, и тогда получится, что для всякого $\eta > 0$ можно подобрать $\delta > 0$ такое, что $|\varphi_1(\varepsilon_1) - \varphi_1(\varepsilon_1')| < \eta$ для $0 < \varepsilon_1$, $\varepsilon_1' < \delta$, а это показывает, что существует предел

$$\lim_{\varepsilon_1 \to 0} \varphi_1(\varepsilon_1). \tag{10}$$

Подобным образом доказывается существование остальных двух пределов:

$$\lim_{\varepsilon_2 \to 0} \varphi_2(\varepsilon_2), \quad \lim_{\varepsilon_3 \to 0} \varphi_3(\varepsilon_3). \tag{11}$$

Таким образом, доказано, что для существования интеграла (8) необходимо и достаточно существование предела в правой части (9), когда положительные ε_1, ε_2, ε_3 стремятся к нулю независимо друг от друга.

В этом утверждении существенно, что переменные ε_1, ε_2, ε_3 независимы. Если бы, например, было известно, что существует предел правой части только при $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_3 \to 0$, то этого было бы недостаточно, чтобы заключить существование каждого из пределов (10), (11) порознь.

Приведенные рассуждения распространяются понятным образом и на другие случаи расположения особенностей интеграла.

В качестве примера рассмотрим интеграл

$$\int_{-1}^{1} \frac{dx}{x}. \tag{12}$$

Он имеет единственную особенность в точке 0. Он не существует, потому что не существуют отдельно интегралы $\int_{-1}^{0} \frac{dx}{x}$ и $\int_{0}^{1} \frac{dx}{x}$.

На основании сказанного выше можно еще сказать, что интеграл (12) не существует потому, что не существует предел

$$\int_{-1}^{-\varepsilon_1} \frac{dx}{x} + \int_{\varepsilon_2}^{1} \frac{dx}{x} = \ln|x| \Big|_{-1}^{-\varepsilon_1} + \ln|x| \Big|_{\varepsilon_2}^{1} = \ln \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2},$$

когда ε_1 и ε_2 стремятся к нулю независимо друг от друга.

Итак, несобственный интеграл по Риману от функции $1/x$ на отрезке $[-1, 1]$ не существует.

Однако существует одно важное обобщение несобственного интеграла (*в смысле главного значения — по Коши*), в силу которого указанный интеграл понимается как предел

$$P.\,V. \int\limits_{-1}^{1} \frac{dx}{x} = \lim_{\varepsilon\to 0} \left\{ \int\limits_{-1}^{\varepsilon} \frac{dx}{x} + \int\limits_{\varepsilon}^{1} \frac{dx}{x} \right\} = 0$$

(т. е. здесь $\varepsilon = \varepsilon_1 = \varepsilon_2$!). Здесь $P.\ V.$ — сокращенная запись выражения Principal Value (англ.) — главное значение (см. § 16.7, (5)).

§ 9.17. Формула Тейлора с остатком в интегральной форме

Пусть функция f имеет на некотором интервале, содержащем в себе точку a, непрерывную кусочногладкую производную порядка $r-1$ включительно. Тогда на указанном интервале существует, за исключением конечного числа точек, производная $f^{(r)}(x)$, представляющая собой кусочнонепрерывную функцию (см. § 5.15). Для любого значения x из этого интервала имеет место формула Тейлора с остаточным членом в интегральной форме:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{r-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + R(x), \tag{1}$$

$$R(x) = \frac{1}{(r-1)!} \int\limits_{0}^{x} (x-t)^{r-1} f^{(r)}(t)\,dt \qquad (0! = 1). \tag{2}$$

Действительно, последовательное интегрирование $R(x)$ по частям дает

$$R(x) = -\frac{f^{(r-1)}(a)}{(r-1)!}(x-a)^{r-1} + \frac{1}{(r-2)!} \int\limits_{a}^{x} (x-t)^{r-2} f^{(r-1)}(t)\,dt =$$

$$= -\frac{f^{(r-1)}(a)}{(r-1)!}(x-a)^{r-1} - \frac{f^{(r-2)}(a)}{(r-2)!}(x-a)^{r-2} +$$

$$+ \frac{1}{(r-3)!} \int\limits_{a}^{x} (x-t)^{r-3} f^{(r-2)}(t)\,dt = \ldots = -\sum_{0}^{r-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + f(x).$$

Если в интеграле (2) сделать подстановку $t = a + (x-a)u$, $dt = (x-a)du$, то получим следующее выражение для остаточного члена:

$$R(x) = (x-a)^r\, \psi(x),$$

$$\psi(x) = \frac{1}{(r-1)!} \int\limits_{0}^{1} (1-u)^{r-1} f^{(r)}(a + (x-a)u)\,du. \tag{3}$$

Здесь, если $f^{(r)}(x)$ непрерывна, то и $\psi(x)$ — непрерывная функция от x, потому что к интегралу (3) применима теорема о непрерывности его по параметру x (см. § 12.13). Если же функция f имеет непрерывные производные более высокого порядка $f^{(r+s)}(s>0)$, то $\psi(x)$ законно дифференцировать s раз под знаком интеграла (см. § 13.12). Поэтому в этом случае $\psi(x)$ будет s раз непрерывно дифференцируема. Этот факт мы не могли бы получить, рассматривая остаточный член формулы Тейлора в форме Лагранжа, содержащей в себе функцию θ, дифференциальные свойства которой *a priori* неизвестны.

§ 9.18. Формулы Валлиса и Стирлинга *)

Формула Валлиса имеет вид

$$\sqrt{\pi} = \lim_{m\to\infty} \frac{(m!)^2\, 2^{2m}}{(2m)!\,\sqrt{m}}. \tag{1}$$

Чтобы вывести ее, проинтегрируем по частям интеграл:

$$\int_0^{\pi/2} \sin^n x\,dx = -\sin^{n-1} x\cos x\,\Big|_0^{\pi/2} + (n-1)\int_0^{\pi/2} \sin^{n-2} x\cos^2 x\,dx =$$

$$= (n-1)\int_0^{\pi/2} \sin^{n-2} x\,dx - (n-1)\int_0^{\pi/2} \sin^n x\,dx.$$

Перенося второй интеграл правой части этого равенства в левую и деля на n, получим

$$\int_0^{\pi/2} \sin^n x\,dx = \frac{n-1}{n}\int_0^{\pi/2} \sin^{n-2} x\,dx. \tag{2}$$

Отправляясь от четного и нечетного n и последовательно применяя это равенство, понижающего степень $\sin x$ на две единицы, получим

$$\int_0^{\pi/2} \sin^{2m} x\,dx = \frac{2m-1}{2m}\,\frac{2m-3}{2m-2}\cdots\frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} dx = \frac{(2m-1)!!}{2m!!}\,\frac{\pi}{2},$$

$$\int_0^{\pi/2} \sin^{2m+1} x\,dx = \frac{2m}{2m+1}\,\frac{2m-2}{2m-1}\cdots\frac{2}{3}\int_0^{\pi/2} \sin x\,dx = \frac{(2m)!!}{(2m+1)!!}.$$

---

*) Д. Валлис (1616—1703) — английский математик; Д. Стирлинг (1692—1770) — шотландский математик.

Разделив теперь эти равенства одно на другое и положив

$$\mu_m = \frac{\int\limits_0^{\pi/2} \sin^{2m} x\, dx}{\int\limits_0^{\pi/2} \sin^{2m+1} x\, dx} \qquad (m = 1, 2, \ldots),$$

приходим к равенству

$$\pi = 2\frac{[(2m)!!]^2}{(2m-1)!!(2m+1)!!}\mu_m. \tag{3}$$

Заметим, что на отрезке $[0, \pi/2]$

$$\sin^{2m+1} x \leqslant \sin^{2m} x \leqslant \sin^{2m-1} x,$$

откуда

$$\int\limits_0^{\pi/2} \sin^{2m+1} x\, dx \leqslant \int\limits_0^{\pi/2} \sin^{2m} x\, dx \leqslant \int\limits_0^{\pi/2} \sin^{2m-1} x\, dx.$$

Деля члены этой цепи на $\int\limits_0^{\pi} \sin^{2m+1} x\, dx$ и применяя равенство (2), получим

$$1 \leqslant \mu_m \leqslant \frac{\int\limits_0^{\pi/2} \sin^{2m-1} x\, dx}{\int\limits_0^{\pi/2} \sin^{2m+1} x\, dx} = \frac{2m+1}{2m} = 1 + \frac{1}{2m},$$

откуда следует, что

$$\mu_m \to 1 \qquad (m \to \infty). \tag{4}$$

Из (3) и (4) следует асимптотическое равенство

$$\pi \approx 2\frac{[(2m)!!]^2}{(2m-1)!!\,(2m+1)!!} \approx 2\left(\frac{(2m-2)!!}{(2m-1)!!}\right)^2 2m \quad (m \to \infty),$$

где мы последовательно пренебрегли множителями μ_m, $\frac{2m}{2m+1} \to 1$, откуда

$$\sqrt{\pi} \approx 2\sqrt{m}\frac{(2m-2)!!}{(2m-1)!!} = 2\sqrt{m}\frac{[(2m-2)!!]^2}{(2m-1)!} =$$

$$= 2\sqrt{m}\frac{[(2m)!!]^2}{(2m)!}\cdot\frac{1}{2m} = \frac{(m!)^2\, 2^{2m}}{(2m)!\,\sqrt{m}} \qquad (m \to \infty),$$

т. е. имеет место (1)

Формула Стирлинга представляет собой равенство:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n!}{\sqrt{2\pi}\, n^{n+1/2}e^{-n}}=1 \tag{5}$$

или, что все равно, асимптотическое равенство

$$n!\approx\sqrt{2\pi}n^{n+1/2}e^{-n}\qquad (n\to\infty). \tag{6}$$

Покажем неравенства

$$\sqrt{2\pi}\, n^{n+(1/2)}e^{-n}<n!<\sqrt{2\pi}\, n^{n+(1/2)}e^{-n+(1/4n)}, \tag{7}$$

из которых непосредственно следует (5) или (6).

Положим

$$a_n=\frac{n!}{n^{n+1/2}e^{-n}}\qquad (n=1, 2, \ldots). \tag{8}$$

Тогда

$$\frac{a_n}{a_{n+1}}=\frac{1}{e}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+(1/2)},\ \ln\frac{a_n}{a_{n+1}}=\left(n+\frac{1}{2}\right)\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)-1.$$

Функция $1/x$ монотонно убывает и выпукла книзу при $x>0$, поэтому площадь фигуры, ограниченной ее графиком, осью x и прямыми $x=n$, $x=n+1$, меньше площади трапеции $nBC(n+1)$, но больше площади трапеции $nB'C'(n+1)$, где $B'C'$ — отрезок касательной к нашей кривой в точке ее, имеющей абсциссу $x=n+(1/2)$ (рис. 9.2):

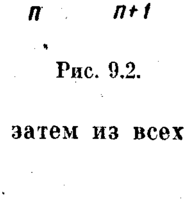

Рис. 9.2.

$$\frac{1}{n+\frac{1}{2}}<\int_n^{n+1}\frac{dx}{x}=\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)<\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}\right).$$

Умножая члены этой цепи на $n+(1/2)$ и вычитая затем из всех членов 1, получим

$$0<\left(n+\frac{1}{2}\right)\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)-1<\frac{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2}{n(n+1)}-1=\frac{1}{4n(n+1)}=$$

$$=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right),$$

т. е. $0<\ln\frac{a_n}{a_{n+1}}<\frac{1}{4}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$ или

$$1<\frac{a_n}{a_{n+1}}<e^{\frac{1}{4}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)}. \tag{9}$$

Подставляя теперь в эти неравенства $n+j$ $(j=0, 1, \ldots, k-1)$

вместо n и перемножая их, получим

$$1 < \frac{a_n}{a_{n+k}} < e^{\frac{1}{4}\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{n+k}\right)}. \tag{10}$$

Первое неравенство (9) показывает, что последовательность положительных чисел a_j $(j = 1, 2, \ldots)$ монотонно убывает и, следовательно, стремится к неотрицательному пределу, который обозначим через α. Из неравенств (10) после перехода в них к пределу при $k \to \infty$, получим

$$1 < \frac{a_n}{\alpha} \leqslant e^{1/4n} \tag{11}$$

откуда видно, что $\alpha > 0$.

Формула Валлиса на языке чисел a_n, очевидно, записывается так

$$\sqrt{\pi} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n^2}{a_{2n}\sqrt{2}} = \frac{\alpha}{\sqrt{2}}$$

и, следовательно,

$$\alpha = \sqrt{2\pi}. \tag{12}$$

Из (8), (11) и (12) следуют неравенства (7).

Глава 10

НЕКОТОРЫЕ ПРИЛОЖЕНИЯ ИНТЕГРАЛОВ. ПРИБЛИЖЕННЫЕ МЕТОДЫ

§ 10.1. Площадь в полярных координатах

Площадь S фигуры, ограниченной двумя выходящими из полярного полюса O лучами $\theta = \theta_0$, $\theta = \theta_*$ и кривой Γ, заданной в полярных координатах непрерывной функцией $\rho = f(\theta)$, может быть определена следующим образом (рис. 10.1).

Производим разбиение отрезка $[\theta_0, \theta_*]$ изменения θ:

$$\theta_0 < \theta_1 < \ldots < \theta_n = \theta_*.$$

Элемент площади фигуры, ограниченной кривой Γ и лучами $\theta = \theta_k$, $\theta = \theta_{k+1}$, приближенно выражаем площадью кругового

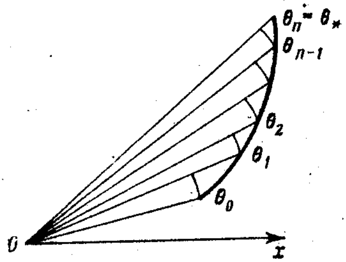

Рис. 10.1.

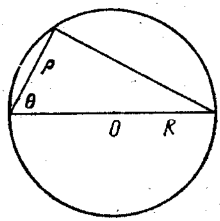

Рис. 10.2.

сектора, ограниченного теми же лучами и окружностью радиуса $\rho_k = f(\theta_k)$, равной $\frac{1}{2}\rho_k^2\Delta\theta_k$, $\Delta\theta_k = \theta_{k+1} - \theta_k$.

Естественно считать, по определению,

$$S = \lim_{\max\Delta\theta_k \to 0} \sum_{0}^{n-1} \rho_k^2 \Delta\theta_k = \frac{1}{2}\int_{\theta_0}^{\theta_*} \rho^2\, d\theta = \frac{1}{2}\int_{\theta_0}^{\theta_*} f^2(\theta)\, d\theta. \qquad (1)$$

Мы получили формулу площади фигуры в полярных координатах. Для непрерывной функции $f(\theta)$ интеграл (1), как мы знаем, существует.

Конечно, возникает вопрос, будет ли определенная таким образом величина S равна тому же числу, как если бы мы вычислили площадь нашей фигуры в декартовых координатах. Этот вопрос положительно решается на основании общей теории меры по Жордану (см. § 12.4).

Пример. Изображенная на рис. 10.2 окружность в полярных координатах определяется уравнением $\rho = 2R\cos\theta$. В силу (1) ее площадь равна

$$S = 2R^2 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2\theta \, d\theta = 4R^2 \int_0^{\pi/2} \frac{1-\cos 2\theta}{2} \, d\theta = \pi R^2.$$

§ 10.2. Объем тела вращения

Пусть Γ есть кривая, описываемая в прямоугольной системе координат x, y непрерывной положительной функцией $y = f(x)$ $(a \leqslant x \leqslant b)$. Вычислим объем V тела вращения, ограниченного плоскостями $x = a$, $x = b$ и поверхностью вращения кривой Γ вокруг оси x.

Производим разбиение отрезка $[a, b]$ на части $a = x_0 < x_1 < \ldots$ $\ldots < x_n = b$ и считаем, что элемент ΔV объема тела, ограниченный плоскостями $x = x_k$, $x = x_{k+1}$, приближенно равен объему цилиндра высоты $\Delta x_k = x_{k+1} - x_k$ и радиуса $y_k = f(x_k)$:

$$\Delta V_k \sim \pi y_k^2 \cdot \Delta x_k = \pi f(x_k)^2 \Delta x_k.$$

Величина $V_n = \pi \sum_0^{n-1} f(x_k)^2 \Delta x_k$ приближенно выражает V и

$$V = \lim_{\max \Delta x_k \to 0} \sum_0^{n-1} f(x_k)^2 \Delta x_k = \pi \int_a^b f^2(x) \, dx. \qquad (1)$$

Мы получили формулу объема тела вращения. Приведем еще другой вывод этой формулы, основанной на введении дифференциала объема. Обозначим через $V(x)$ объем части тела, заключенный между плоскостями, проходящими через точки a и x оси x, перпендикулярно к последней (рис. 10.3). Приращение $\Delta V(x)$, соответствующее приращению $\Delta x > 0$, есть объем части тела, заключенной между плоскостями, перпендикулярными к оси x, проходящими через точки x и $x + \Delta x$.

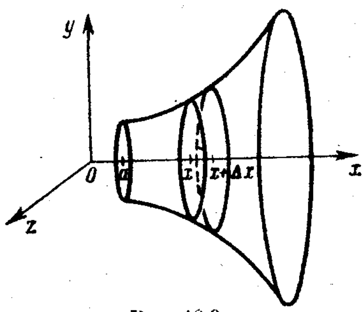

Рис. 10.3.

Докажем, что имеет место равенство

$$\Delta V = \pi f^2(x)\Delta x + o(\Delta x) \qquad (\Delta x \to 0). \qquad (2)$$

В самом деле, пусть

$$m = \min_{x \leqslant \xi \leqslant x+\Delta x} f(\xi), \quad M = \max_{x \leqslant \xi \leqslant x+\Delta x} f(\xi).$$

Тогда, очевидно,

$$\pi m^2\Delta x \leqslant \Delta V(x) \leqslant \pi M^2\Delta x, \quad \pi m^2\Delta x \leqslant \pi f^2(x)\Delta x \leqslant \pi M^2\Delta x, \tag{3}$$

и так как функция непрерывна, то $M - m \to 0$ $(\Delta x \to 0)$. Это показывает, что

$$\pi(M^2 - m^2)\Delta x = o(\Delta x) \qquad (\Delta x \to 0). \tag{4}$$

Из (3) и (4) следует (2).

Равенство (2) говорит, что первое слагаемое его правой части есть дифференциал V:

$$dV = \pi f^2(x)\Delta x = \pi f^2(x)dx.$$

На основании формулы Ньютона — Лейбница искомый объем равен

$$V = V(b) = V(b) - V(a) = \pi \int_a^b f^2(x)\,dx.$$

Пример. Эллипсоид вращения (вокруг оси x)

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2+z^2}{b^2} = 1$$

есть тело, ограниченное поверхностью вращения кривой

$$y = b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} \qquad (-a \leqslant x \leqslant a)$$

вокруг оси x, поэтому на основании формулы (1) его объем равен

$$V = \pi b^2 \int_{-a}^{a} \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) dx = \pi b^2 \left(x - \frac{x^3}{3a^2}\right)\Bigg|_{-a}^{a} = \frac{4}{3}\pi a b^2.$$

§ 10.3. Длина дуги гладкой кривой

Пусть Γ есть гладкая кривая, определенная функциями (см. § 6.5)

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t), \quad z = \chi(t), \quad a \leqslant t \leqslant b, \tag{1}$$

таким образом, имеющими на $[a, b]$ непрерывные производные. Введем разбиение $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b$ и составим сумму (см. § 6.8)

$$S_n = \sum_{0}^{n-1} \sqrt{\Delta x_k^2 + \Delta y_k^2 + \Delta z_k^2},$$

$$\Delta x_k = \varphi(t_{k+1}) - \varphi(t_k), \quad \Delta y_k = \psi(t_{k+1}) - \psi(t_k),$$
$$\Delta z_k = \chi(t_{k+1}) - \chi(t_k), \quad \delta = \max \Delta t_k, \quad \Delta t_k = t_{k+1} - t_k,$$

представляющую собой длину ломаной, вписанной в Г с вершинами в точках, соответствующих значениям t_k.

Имеем тогда ($t_k < \mu_k, \nu_k, \lambda_k < t_{k+1}$) при $\delta \to 0$

$$S_n = \sum_0^{n-1} \sqrt{\varphi'(\mu_k)^2 + \psi'(\nu_k)^2 + \chi'(\lambda_k)^2}\,\Delta t_k =$$

$$= \sum_0^{n-1} \sqrt{\varphi'(t_k)^2 + \psi'(t_k)^2 + \chi'(t_k)^2}\,\Delta t_k + \sum_0^{n-1} \varepsilon_k \Delta t_k \to$$

$$\to \int_a^b \sqrt{\varphi'(t)^2 + \psi'(t)^2 + \chi'(t)^2}\,dt.$$

В первом равенстве цепи мы воспользовались теоремой о среднем.

Чтобы обосновать, что $\sum \varepsilon_k \Delta t_k \to 0$ при $\delta \to 0$, введем вспомогательную функцию

$$\alpha(u, v, w) = \sqrt{\varphi'(u)^2 + \psi'(v)^2 + \chi'(w)^2},$$

очевидно непрерывную на кубе $\Delta = \{a \leqslant u, v, w \leqslant b\}$. Модуль ее непрерывности на Δ обозначим через $\omega(\delta)$. Так как расстояние между точками (t_k, t_k, t_k) и $(\mu_k, \nu_k, \lambda_k)$ нашего куба не превышает $\delta\sqrt{3}$, то

$$|\varepsilon_k| = |\alpha(t_k, t_k, t_k) - \alpha(\mu_k, \nu_k, \lambda_k)| \leqslant \omega(\delta\sqrt{3}),$$

и потому

$$\left|\sum_0^{n-1} \varepsilon_k \Delta t\right| \leqslant \varphi(\delta\sqrt{3}) \sum_0^{n-1} \Delta t_k = (b-a)\,\omega(\delta\sqrt{3}) \to 0, \quad \delta \to 0.$$

Мы доказали, что длина гладкой кривой (1) существует и выражается формулой

$$S = \int_a^b \sqrt{\varphi'(t)^2 + \psi'(t)^2 + \chi'(t)^2}\,dt. \tag{2}$$

При замене переменной при помощи непрерывно дифференцируемой функции $t = \lambda(\tau)$, ($\lambda'(\tau) > 0$, $c \leqslant \tau \leqslant d$) получим, очевидно,

$$S = \int_c^d \sqrt{\varphi_1'(\tau)^2 + \psi_1'(\tau)^2 + \chi_2'(\tau)^2}\,d\tau, \tag{3}$$

где $\varphi_1(\tau) = \varphi(\lambda(\tau))$, ..., что показывает инвариантность формулы (1) длины дуги.

Если кривая (плоская) задана уравнением

$$y = f(x), \qquad (a \leqslant x \leqslant b),$$

где f имеет непрерывную производную на $[a, b]$, то, очевидно, ее длина дуги выражается формулой

$$S = \int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2}\,dx$$

(надо положить в (2) $t = x$, $y = f(x)$, $z = 0$).

Пример. Длина дуги винтовой линии

$$x = a\cos\theta, \quad y = a\sin\theta, \quad z = b\theta, \quad (0 \leqslant \theta \leqslant \theta_0)$$

в силу (2) равна

$$S = \int_0^{\theta_0} \sqrt{a^2 + b^2}\,d\theta = \theta_0 \sqrt{a^2 + b^2}.$$

§ 10.4. Площадь поверхности тела вращения

Пусть Γ есть кривая, описываемая в прямоугольной системе координат x, y положительной функцией $y = f(x)$ $(a \leqslant x \leqslant b)$, имеющей на $[a, b]$ непрерывную производную.

Вычислим площадь S поверхности вращения Γ вокруг оси x. Для этого произведем разбиение $[a, b]$

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b, \tag{1}$$

впишем в кривую Γ ломанную Γ_n с вершинами $(x_k, f(x_k))$ и вычислим площадь поверхности вращения последней вокруг оси x:

$$S_n = \pi \sum_0^{n-1} [f(x_k) + f(x_{k+1})] \sqrt{\Delta x_k^2 + \Delta y_k^2}, \quad \Delta y_k = f(x_{k+1}) - f(x_k),$$

и перейдем к пределу при $\max \Delta x_k \to 0$.

В результате получим

$$S = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + f'(x)^2}\,dx = 2\pi \int_a^b y \sqrt{1 + y'^2}\,dx. \tag{2}$$

В самом деле, вынося из-под корня Δx_k $(\Delta x_k > 0)$ и применяя к Δy_k теорему о среднем, получим (пояснения ниже)

$$S_n = \pi \sum_0^{n-1} [f(x_k) + f(x_{k+1})] \sqrt{1 + f'(\xi_k)^2}\,\Delta x_k =$$

$$= 2\pi \sum_0^{n-1} f(\xi_k) \sqrt{1 + f'(\xi_k)^2}\,\Delta x_k + \alpha \to$$

$$\to 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + f'(x)^2}\,dx \quad (\max \Delta x_k \to 0, \ x_k < \xi_k < x_{k+1}),$$

где

$$\alpha = \pi \sum_{0}^{n-1} [f(x_k) + f(x_{k+1}) - 2f(\xi_k)] \sqrt{1 + f'(\xi_k)^2}\, \Delta x_k.$$

Доказательство того, что

$$\alpha \to 0 \quad \text{при} \quad \Delta x_k \to 0, \tag{3}$$

следует из соотношений:

$$|\alpha| \leqslant \pi \sqrt{1+M^2} \sum_{0}^{n-1} |f(x_k) + f(x_{k+1}) - 2f(\xi_k)|\, \Delta x_k <$$

$$< \varepsilon \sum_{0}^{n-1} \Delta x_k = \varepsilon (b-a), \quad \max_k \Delta x_k < \delta,$$

где $M = \max\limits_{a<x<b} \sqrt{1+f'(x)^2}$, и число $\delta > 0$, зависящее от $\varepsilon > 0$, настолько мало, что

$$|f(x_k) - f(\xi_k)| < \frac{\varepsilon}{2\pi\sqrt{1+M^2}} \quad \text{при} \quad \Delta x_k < \delta.$$

Такое δ существует в силу равномерной непрерывности функции f на $[a, b]$.

Общее определение площади произвольной гладкой поверхности см. § 12.23, том II.

Пример. Площадь поверхности вращения куска параболы $y = x^2$ $(0 \leqslant x \leqslant 1)$ вокруг оси x равна $S = 2\pi \int\limits_0^1 x^2 \sqrt{1+4x^2}\, dx$.

§ 10.5. Интерполяционный многочлен Лагранжа

Пусть на отрезке $[a, b]$ задана функция f и система точек

$$x_0, x_1, \ldots, x_n. \tag{1}$$

Поставим задачу: требуется найти многочлен*) $P(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n$, степени n совпадающий с $f(x)$ в указанных точках, т. е. чтобы выполнились равенства

$$f(x_k) = P(x_k) \qquad (k = 0, 1, \ldots, n). \tag{2}$$

Чтобы решить эту задачу, введем многочлены

$$Q_k(x) = \frac{(x-x_0)\ldots(x-x_{k-1})(x-x_{k+1})\ldots(x-x_n)}{(x_k-x_0)\ldots(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})\ldots(x_k-x_n)} \tag{3}$$

$$(k = 0, 1, \ldots, n).$$

*) Коэффициенты многочлена могут быть любыми числами, в частности, может быть $a_n = 0$.

Очевидно, что Q_k для каждого $k=0, 1, \ldots, n$ есть многочлен степени n, равный 1 в точке x_k и 0 в остальных точках системы (1): $Q_k(x_j)=\delta_{kj}$ $(k, j=0, 1, \ldots, n)$.

Символ δ_{kj} (Кронекера) определяется равенством:

$$\delta_{kj}=\begin{cases}1, & k=j,\\ 0, & k\neq j.\end{cases}$$

Положим

$$P(x)=\sum_0^n Q_k(x)\,f(x_k). \tag{4}$$

$P(x)$ есть многочлен степени n, обладающий свойствами

$$P(x_j)=\sum_0^n Q_k(x_j)\,f(x_k)=Q_j(x_j)\,f(x_j)=f(x_j)\quad (j=0, 1, \ldots, n),$$

т. е. он решает поставленную задачу и притом единственным образом, потому что, если допустить, что существует еще другой многочлен $P_1(x)$ степени n, решающий эту задачу, то разность $P(x)-P_1(x)$ была бы многочленом степени n, имеющим $n+1$ корней. Но тогда $P(x)-P_1(x)\equiv 0$.

Отметим, что если исходная функция f сама есть многочлен степени n, то $f(x)\equiv P(x)$ тождественно, потому что два многочлена, совпадающие в $n+1$ различных точках, тождественно равны.

§ 10.6. Квадратурные формулы прямоугольников и трапеций

Пусть надо вычислить определенный интеграл от непрерывной на отрезке $[a, b]$ функции f. Если известна ее первообразная, то для этого естественно применить формулу Ньютона — Лейбница. Но далеко не всегда первообразная известна и возникает задача о приближенном вычислении интеграла.

Простейший способ приближенного вычисления определенного интеграла вытекает из определения последнего. Делим отрезок $[a, b]$ на равные части точками

$$x_k=a+k\frac{b-a}{N}\qquad (k=0, 1, \ldots, N) \tag{1}$$

и полагаем

$$\int_a^b f(x)\,dx\approx\frac{b-a}{N}\sum_0^{N-1} f\left(\frac{x_k+x_{k+1}}{2}\right), \tag{2}$$

где знак $\approx$ выражает приближенное равенство.

Выражение (2) называется *квадратурной формулой прямоугольников*. В случае рис. 10.4 искомая площадь фигуры, ограниченной кривой $y=f(x)$, осью x и прямыми $x=a$, $x=b$, приближенно равна сумме площадей изображенных там прямоугольников.

Мы знаем, что для непрерывной на $[a, b]$ функции предел при $N \to \infty$ правой части приближенной формулы (2) точно равен левой, что дает основание считать, что при большом N ошибка квадратурной формулы (2), т. е. абсолютная величина разности правой и левой ее частей, мала.

Однако возникает вопрос об оценке ошибки. Ниже мы узнаем, как эту оценку получить, если потребовать, чтобы функция f, кроме непрерывности, удовлетворяла некоторым условиям гладкости.

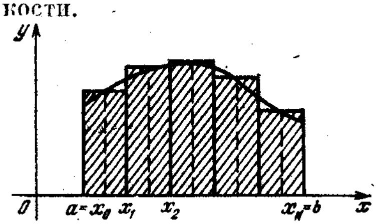

Рис. 10.4.

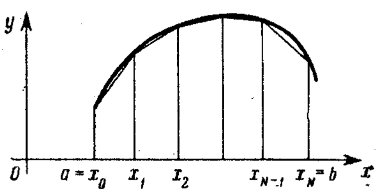

Рис. 10.5.

Очень важно заметить, что если функция $f(x) = Ax + B$ есть линейная функция, то для нее *формула* (2) *точна* — правая часть (2) в точности равна левой. Так как линейная функция есть многочлен первой степени, то мы можем сказать, что *квадратурная формула прямоугольников точна для всех многочленов не выше первой степени*.

Дадим еще второй естественный способ приближенного вычисления определенного интеграла, приводящий к *квадратурной формуле трапеций*. Он заключается в том, что отрезок $[a, b]$ делится на равные части точками системы (1) и полагается приближенно, что

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{N}\left(\frac{f(x_0)+f(x_1)}{2} + \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2} + \ldots\right.$$
$$\left.\ldots + \frac{f(x_{N-1})+f(x_N)}{2}\right) = \frac{b-a}{2N}\left(f(x_0) + 2f(x_1) + 2f(x_2) + \ldots\right.$$
$$\left.\ldots + 2f(x_{N-1}) + f(x_N)\right). \quad (3)$$

В формуле трапеций площадь рассмотренной выше криволинейной фигуры приближенно исчерпывается трапециями (рис. 10.5). Важно отметить, что *формула трапеций точна для линейных функций* $Ax + B$ (A, B — постоянные), т. е. для многочленов не выше первой степени; если подставить такую функцию в (3) вместо $f(x)$, то получится точное равенство. В этом смысле формула трапеций не имеет преимущества перед формулой прямоугольников, обе они точны для линейных функций.

§ 10.7. Общая квадратурная формула. Функционал

Понятие квадратурной формулы мы теперь обобщим. Зададим (на отрезке $[a, b]$) систему точек

$$a \leqslant x_0 < x_1 < \ldots < x_N \leqslant b \tag{1}$$

и систему чисел

$$p_0,\ p_1,\ \ldots,\ p_N. \tag{2}$$

Положим для непрерывной на $[a, b]$ функции f

$$L(f) = \sum_0^N p_k f(x_k) \tag{3}$$

и чисто формально будем считать $L(f)$ приближенным выражением нашего интеграла:

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx L(f). \tag{4}$$

Приближенное равенство (4) называется *квадратурной формулой с узлами* (1) и весами (2).

Пусть $\mathfrak{M}$ обозначает некоторое множество функций f и каждому $f \in \mathfrak{M}$ в силу определенного закона приведено в соответствие число $F(f)$; тогда говорят, что F есть *функционал*, определенный на $\mathfrak{M}$. Если $\mathfrak{M}$ есть линейное множество (см. § 6.1) и F обладает свойством

$$F(\alpha f_1 + \beta f_2) = \alpha F(f_1) + \beta F(f_2),$$

каковы бы ни были числа α, β и функции f_1, $f_2 \in \mathfrak{M}$, то говорят, что *функционал* F (определенный на $\mathfrak{M}$) — *линейный*.

Множество всех непрерывных на $[a, b]$ функций принято обозначать через $C = C(a, b)$. Это — линейное множество, потому что, если α, β — числа и $f_1, f_2 \in C$, то $\alpha f_1 + \beta f_2 \in C$. Интеграл $\int_a^b f\,dx$ есть, очевидно, линейный функционал, определенный на C. Выражение $L(f)$ (см. (3)) есть тоже, как легко видеть, линейный функционал, определенный на C. Отсюда следует, что если равенство (4) оказалось точным для непрерывных функций $f_1, \ldots, f_l$, взятых в конечном числе, то оно автоматически точно для функций $\sum_1^l \alpha_k f_k(x)$, где α_k — произвольные числа.

§ 10.8. Формула Симпсона *)

В этом параграфе мы вводим важную в прикладном анализе *квадратурную формулу Симпсона*. Она очень проста и в то же время обладает замечательным свойством: она точна для всех многочленов третьей степени.

Начнем с того, что решим задачу: требуется найти числа A, B, C такие, чтобы квадратурная формула

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx \approx Af(-1) + Bf(0) + Cf(1) \tag{1}$$

была точна для функций 1, x, x^2. Подставляя эти функции в (1) вместо f, получим систему уравнений

$$2 = A + B + C,\ 0 = -A + C,\ \frac{2}{3} = A + C,$$

откуда $A = C = 1/3$, $B = 4/3$. Но так как $A = C$, то легко проверяется, что полученная формула (1) точна и для функции x^3 и в силу линейности входящих в нее функционалов (см. предыдущий параграф) она точна для всех многочленов не выше третьей степени.

Более общая квадратурная формула имеет вид

$$\int_{a}^{b} f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{6}\left(f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right). \tag{2}$$

Это простейшая квадратурная формула Симпсона, соответствующая отрезку $[a, b]$.

Докажем, что она точна для многочленов третьей степени. В самом деле, полагая в (2)

$$x = \frac{a+b}{2} + t\frac{b-a}{2},\quad F(t) = f\left(\frac{a+b}{2} + t\frac{b-a}{2}\right),$$

и сокращая на $(b-a)/2$, получим

$$\int_{-1}^{1} F(t)\,dt \approx \frac{1}{3}(F(-1) + 4F(0) + F(1)). \tag{3}$$

Но формула (3) точна для многочленов от t не выше третьей степени, поэтому и формула (2) точна для многочленов от x не выше третьей степени — ведь подстановка $x = \frac{a+b}{2} + t\frac{b-a}{2}$ переводит многочлены не выше 3-й степени в многочлены не выше 3-й степени.

*) Т. Симпсон (1710—1761) — английский математик.

Если разделить отрезок $[a, b]$ на $2N$ равных частей точками

$$x_k = a + \frac{b-a}{2N} k \qquad (k = 0, 1, \ldots, 2N)$$

и к отрезкам $[x_0, x_2]$, $[x_2, x_4]$, ... применить формулу (2), то в результате получим (*усложненную*) *квадратурную формулу Симпсона*

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{6N}(f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + 4f(x_3) + \ldots + f(x_{2N})). \tag{4}$$

С точки зрения практических вычислений сложность вычислений по формуле Симпсона и прямоугольников одинакова. Но если функция f достаточно гладкая, то ошибка приближения по формуле Симпсона при больших N значительно меньше соответствующей ошибки при приближении методом прямоугольников (см. § 10.9).

§ 10.9. Общий метод получения оценок квадратурных формул

Формулу

$$\int_0^1 f(t)\,dt \approx \sum_0^n p_k f(t_k) = L(f) \tag{1}$$

для отрезка $[0, 1]$ мы будем называть *канонической квадратурной формулой с узлами*

$$0 \leqslant t_0 < t_1 < \ldots < t_n \leqslant 1 \tag{2}$$

и весами

$$p_0,\ p_1,\ \ldots,\ p_n. \tag{3}$$

Канонической формуле (1) соответствует квадратурная формула для отрезка $[c, d]$:

$$\int_c^d f(x)\,dx \approx (d-c)\sum_0^n p_k f(c + (d-c)t_k) =$$
$$= (d-c)\,L(f(c + (d-c)t)). \tag{4}$$

Узлы ее $c + (d-c)t_k$ делят отрезок $[c, d]$ в том же отношении, в каком узлы t_k канонической формулы делят $[0, 1]$, а веса равны $(d-c)p_k$ $(k = 0, 1, \ldots, n)$.

Если разделить отрезок $[a, b]$ на равные части точками

$$x_k = a + \frac{b-a}{N} k \quad (k = 0, 1, \ldots, N)$$

и к каждому отрезку $[x_k, x_{k+1}]$ применить формулу, соответствующую канонической,

$$\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{N} L\left(f\left(x_k + \frac{b-a}{N} t\right)\right),$$

затем просуммировать ее левые и правые части по k, то получим формулу

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{N} \sum_{k=0}^{N-1} L\left(f\left(x_k + \frac{b-a}{N} t\right)\right), \tag{5}$$

которую мы называем *усложненной квадратурной формулой, соответствующей канонической формуле* (1).

Чтобы получить оценку ошибки при помощи формулы (5), будем предполагать, что исходная каноническая формула точна для всех многочленов степени не выше $r-1$.

Обозначим через $W^r(a, b)$ класс функций f, заданных на отрезке $[a, b]$ и имеющих на нем непрерывную кусочно гладкую производную порядка $r-1$ (см. начало § 9.17).

Если функция $f \in W^r(0, 1)$, то для нее имеет место разложение по формуле Тейлора с остатком в интегральной форме (см. § 9.17)

$$f(t) = P(t) + R(t), \quad \text{где} \quad P(t) = \sum_0^{r-1} a_k t^k,$$

$$R(t) = \frac{1}{(r-1)!} \int_0^x (t-u)^{r-1} f^{(r)}(u)\,du = \int_0^1 K(t-u) f^{(r)}(u)\,du,$$

$$K(u) = \begin{cases} 0 & (u \leqslant 0), \\ \dfrac{u^{r-1}}{(r-1)!} & (u > 0). \end{cases}$$

Подставим f в каноническую формулу (1), перенеся в ней правую часть в левую. Если учесть, что формула (1) точна для многочлена $P(t)$, то получим

$$\int_0^1 f(t)\,dt - L(f) = \int_0^1 \left(\int_0^1 K(t-u) f^{(r)}(u)\,du \right) dt -$$

$$- \int_0^1 \left(\sum_0^n p_k K(t_k - u) \right) f^{(r)}(u)\,du = \int_0^1 \left(\int_0^1 K(t-u)\,dt \right) f^{(r)}(u)\,du -$$

$$- \int_0^1 \left(\sum_0^n p_k K(t_k - u) \right) f^{(r)}(u)\,du = \int_0^1 \Lambda(u) f^{(r)}(u)\,du \;{}^{*)},$$

*) Мы заменили порядок интегрирования, что обосновывается в теории кратных интегралов.

$$\int_0^1 K(t-u)\,dt = \frac{(1-u)^r}{r!},$$

$$\Lambda(u) = \frac{(1-u)^r}{r!} - \sum_0^n p_k K(t_k - u). \tag{6}$$

Отсюда, вводя обозначения

$$\varkappa = \int_0^1 |\Lambda(u)|\,du, \tag{7}$$

$$\|f^{(r)}\| = \sup_{0\leqslant u\leqslant 1} |f^{(r)}(u)|, \tag{8}$$

получим оценку

$$\left|\int_0^1 f(t)\,dt - L(f)\right| \leqslant \varkappa \|f^{(r)}\|. \tag{9}$$

Функция $\Lambda(t)$, а вместе с ней константа $\varkappa$, зависит от весов и расположения узлов в формуле (1), но не от f. Константа $\varkappa$ для данной канонической формулы может быть раз навсегда вычислена. Она точна — правая часть достигается для функции $f \in W^{(r)}(0, 1)$, имеющей производную $f^{(r)}(x) = \operatorname{sign}\Lambda(x)$.

Получим теперь оценку ошибки в формуле (4), соответствующей отрезку $[c, d]$, в предположении, что $f \in W^r(c, d)$. Перенеся второй член в (4) в левую часть и сделав подстановку

$$x = c + (d-c)t,\ F(t) = f(c + (d-c)t),$$

и учтя, что $F^{(r)}(t) = (d-c)^r f^{(r)}(x)$, получим

$$\left|\int_c^d f(x)\,dx - (d-c)\,L(f(c+(d-c)\,t))\right| =$$

$$= (d-c)\left|\int_0^1 F(t)\,dt - L(F)\right| \leqslant (d-c)\,\varkappa \|F^{(r)}\|_{(0,1)} =$$

$$= (d-c)^{r+1}\varkappa \|f^{(r)}\|_{(c,d)}, \tag{10}$$

где $\|\varphi\|_{(c,d)} = \sup\limits_{c\leqslant x\leqslant d} |\varphi(x)|$.

В оценку (10) входит в виде множителя прежняя константа $\varkappa$ и, кроме того, появился новый множитель $(d-c)^{r+1}$, зависящий от длины $d-c$ отрезка $[c, d]$. Последний стремится к нулю вместе с $d-c$, и тем более быстро, чем больше r.

Дадим, наконец, оценку для усложненной формулы (5) в предположении, что $f \in W^r(a, b)$. Так как в таком случае

$f \in W^r_-(x_k, x_{k+1})$ при любом k, то в силу (10)

$$\left| \int_a^b f(x)\,dx - \frac{b-a}{N} \sum_{k=0}^{N-1} L\left(f\left(x_k + \frac{b-a}{N} t\right)\right) \right| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_0^{N-1} \left| \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x)\,dx - \frac{b-a}{N} L\left(f\left(x_k + \frac{b-a}{N} t\right)\right) \right| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{k=0}^{N-1} \left(\frac{b-a}{N}\right)^{r+1} \varkappa \| f^{(r)} \|_{(x_k, x_{k+1})} \leqslant \frac{(b-a)^{r+1}\varkappa}{N^r} \| f^{(r)} \|_{(a,b)}. \quad (11)$$

Будем говорить, что усложненная квадратурная формула имеет свойство T^{r-1}, если она точна для многочленов степени $r-1$. Мы только что доказали, что если функция $f \in W^r(a, b) = W^r$ и ее интеграл на $[a, b]$ приблизить при помощи усложненной квадратурной формулы (5) со свойством T^{r-1}, то оценка приближения имеет порядок N^{-r}.

Отметим без доказательства, что если $f \in W^k$ и формула имеет свойство T^{r-1}, то оценка приближения при $k < r$ и $k \geqslant r$ имеет соответственно порядок N^{-k}, N^{-r}.

Например, усложненная формула Симпсона имеет свойство T^3, поэтому при приближении при ее помощи функций $f \in W^k$ при $k \geqslant 4$ оценка имеет порядок N^{-4}, а при $k < 4$ — порядок N^{-k}.

В заключение сделаем еще следующее замечание. Зададим систему узлов $x_0 < x_1 < \ldots < x_r$. Произвольный многочлен $P(x)$ степени r можно представить тождественно при помощи интерполяционной формулы Лагранжа (3), (4) § 10.5, где надо считать $n = r$.

Если положить

$$\lambda_k = \int_a^b Q_k(x)\,dx \qquad (k = 0, 1, \ldots, r),$$

то мы получим квадратурную формулу

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \sum_0^r \lambda_k f(x_k),$$

точную для любого многочлена степени r.

§ 10.10. Еще о длине дуги

В дальнейшем без пояснений предполагается, что Γ есть непрерывная самонепересекающаяся кривая, определенная непрерывными функциями

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t), \quad z = \chi(t), \quad a \geqslant t \geqslant b, \quad (1)$$

Введем обозначения: ρ есть некоторое разбиение

$$a = t_0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_N = b \quad (2)$$

отрезка $[a, b]$.

$$\delta_\rho = \max_k \Delta t_k, \quad \sigma_\rho = \max_k \sqrt{\Delta x_k^2 + \Delta y_k^2 + \Delta z_k^2},$$

Γ_ρ — вписанная в Γ ломаная с вершинами, соответствующими значениям $t_j \in \rho$, и, наконец, $|\Gamma|$, $|\Gamma_\rho|$ — длины соответственно Γ и Γ_ρ. Если Γ не спрямляема, то считаем $|\Gamma| = \infty$.

Отметим свойства:

1. *Соотношения*

$$\delta_\rho \to 0, \tag{3}$$

$$\sigma_\rho \to 0 \tag{4}$$

вытекает одно из другого и, следовательно, длину непрерывной кривой Γ можно определить при помощи одного из двух равенств

$$|\Gamma| = \lim_{\delta_\rho \to 0} |\Gamma_\rho| = \lim_{\sigma_\rho \to 0} |\Gamma_\rho|. \tag{5}$$

В самом деле, из (3) следует (4), потому что функции φ, ψ, χ равномерно непрерывны на $[a, b]$. Далее, уравнения (1) определяют операцию, отображающую отрезок $[a, b]$ значений t на множество Γ точек (x, y, z). Она непрерывна, и потому Γ ограничено и замкнуто (см. теорему 1 § 12.20). В силу же самонепересекаемости Γ эта операция устанавливает взаимно однозначно соответствие $[a, b] \rightleftarrows \Gamma$, и потому (см. ту же теорему) обратная ей операция непрерывна, т. е. представляет собой непрерывную функцию $t = \Phi(x, y, z)$ на замкнутом ограниченном множестве Γ, следовательно, равномерно непрерывную на Γ.

2. *Если $\rho \subset \rho'$, т. е. все точки $t_j \in \rho$ принадлежат также ρ', то*

$$|\Gamma_\rho| \leqslant |\Gamma_{\rho'}|. \tag{6}$$

Это очевидно. Добавление к ρ еще одной точки t_j приводит к тому, что некоторое звено ломаной Γ_ρ заменяется на два звена, образующие с ним треугольник (возможно, и вырожденный).

3. *Справедливы соотношения*

$$\sup_\rho |\Gamma_\rho| = \lim_{\delta_\rho \to 0} |\Gamma_\rho| = |\Gamma|. \tag{7}$$

Число $|\Gamma|$, которое они определяют, может быть конечным, и тогда кривая Γ спрямляема и $|\Gamma|$ — ее длина (см. § 6.7). Если же $|\Gamma| = +\infty$, то кривая Γ не спрямляема.

Чтобы доказать (7), положим $\Lambda = \sup |\Gamma_\rho|$ и зададим произвольные числа Λ', Λ'' такие, что $\Lambda' < \Lambda'' < \Lambda$. В силу свойства точной верхней грани существует разбиение $\rho_* = \{a = t_0^* < t_1^* < \ldots < t_N^* = b\}$ такое, что $\Lambda'' < |\Gamma_{\rho*}|$.

Зададим положительное $\varepsilon < \Lambda'' - \Lambda'$ и подберем, пользуясь равномерной непрерывностью функций $\varphi(t)$, $\psi(t)$, $\chi(t)$ на $[a, b]$, такое $\delta > 0$, что для всех t, $t + \Delta t \in [a, b]$, $|\Delta t| < \delta$, выполняется неравенство

$$\lambda = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2} < \varepsilon/2N,$$

где λ — длина хорды, соединяющей точки Γ, соответствующие t и $t + \Delta t$.

Для произвольного разбиения ρ отрезка $[a, b]$ с $\delta_\rho < \delta$ имеют место неравенства (пояснения ниже)

$$\Lambda'' < |\Gamma_{\rho*}| < |\Gamma_{\rho+\rho*}| < |\Gamma_\rho| + \varepsilon, \tag{8}$$

или $\Lambda' < |\Gamma_\rho|$.

Третье неравенство в цепи (8) объясняется следующим образом.

Пусть AA' — хорда, соединяющая две соседние вершины Γ_ρ, а дуга $\smile{AA'} \subset \Gamma$ содержит внутри себя вершины $\Gamma_{\rho*}$, число которых пусть будет ν. Впишем в $\smile{AA'}$ ломаную $\gamma_{AA'}$ с вершинами, совпадающими с указанными вершинами $\Gamma_{\rho*}$. Количество звеньев этой ломаной равно $\nu+1$, а каждое звено имеет длину, не превышающую $\varepsilon/2N$, поэтому длина $\gamma_{AA'}$ не больше чем $\dfrac{\varepsilon(\nu+1)}{2N}$.

Если произвести такую замену хорд $\overline{AA'} \subset \Gamma_\delta$ на соответствующие ломаные $\gamma_{AA'}$ для всех дуг $\smile{AA'}$, внутри которых имеются точки $\Gamma_{\rho*}$, то в результате Γ_ρ превратится в $\Gamma_{\rho+\rho*}$, и, так как количество вершин $\Gamma_{\rho*}$, которые могут попасть в ту или иную дугу $\gamma_{AA'}$, не больше чем N, то

$$|\Gamma_{\rho+\rho*}| < |\Gamma_\rho| + \varepsilon,$$

т. е. выполняется третье неравенство (8).

Мы доказали, что для любого числа $\Lambda' < \Lambda$ найдется $\delta > 0$ такое, что выполняются неравенства $\Lambda' < |\Gamma_\rho| \leqslant \Lambda$ для всех Γ_δ с $\delta_\rho < \delta$.

Этим доказано (7), где $|\Gamma| = \Lambda$.

4. *Если Γ спрямляема на $[a, b]$, то и на $[a, c]$ и на $[c, b]$, $a < c < b$; и наоборот, если Γ спрямляема на $[a, c]$ и $[c, b]$, то и на $[a, b]$. При этом*

$$|\Gamma| = |\Gamma_{ac}| + |\Gamma_{cb}|. \tag{9}$$

Доказательство. Зададим последовательность разбиений ρ^k отрезка $[a, b]$ с $\delta_{\rho^k} \to 0$ $(k \to \infty)$. Предполагаем, что Γ_{ρ^k} при любом k содержит в себе точку c. Тогда Γ_{ρ^k} индуцирует на $[a, c]$ и $[c, b]$ соответственно разбиения ρ_1^k и ρ_2^k с $\delta_{\rho_1^k}$, $\delta_{\rho_2^k} \to 0$ $(k \to \infty)$ и

$$|\Gamma_{\rho^k}| = |\Gamma_{\rho_1^k}| + |\Gamma_{\rho_2^k}| \quad (k = 1, 2, \ldots). \tag{10}$$

Если Γ спрямляема, то $|\Gamma| < \infty$ и $|\Gamma_{\rho_k}| \to |\Gamma|$. Но тогда последовательности $|\Gamma_{\rho_1^k}|$ и $|\Gamma_{\rho_2^k}|$ ограничены, и так как $\delta_{\rho_1^k}$, $\delta_{\rho_2^k} \to 0$, то они стремятся соответсвенно к конечным пределам $|\Gamma_{ac}|$, $|\Gamma_{cb}|$. Таким образом, Γ_{ac} и Γ_{cb} спрямляемы и из (10) после перехода к пределу при $k \to \infty$ следует (9).

Наоборот, если Γ_{ac} и Γ_{cb} спрямляемы, то $|\Gamma_{\rho_1^k}| \to |\Gamma_{ac}|$, $|\Gamma_{\rho_2^k}| \to |\Gamma_{cb}|$, но тогда в силу (10) существует предел $|\Gamma_{\rho^k}|$, и так как $\delta_{\rho^k} \to 0$, то в силу свойства 3 кривая Γ спрямляема.

5. *Пусть $\Gamma_\varepsilon \left(0 < \varepsilon < \dfrac{b-a}{2}\right)$ обозначает дугу Γ, соответствующую отрезку $[a+\varepsilon, b-\varepsilon]$. Если Γ_ε спрямляема при любом указанном ε, то*

$$\lim_{\varepsilon \to 0} |\Gamma_\varepsilon| = |\Gamma|. \tag{11}$$

Таким образом, для спрямляемости Γ необходима и достаточна конечность предела в (11).

Доказательство. Впишем в Γ_ε ломаную Γ'_ε со звеньями, не превышающими ε, такую, что

$$|\Gamma_\varepsilon| - \varepsilon < |\Gamma'_\varepsilon| \leqslant |\Gamma_\varepsilon|, \tag{12}$$

и пусть Γ''_ε — полученная добавлением к Γ'_ε двух звеньев ломаная, вписанная в Γ.

В силу непрерывности Γ

$$|\Gamma''_\varepsilon| - |\Gamma'_\varepsilon| \to 0, \quad \varepsilon \to 0. \tag{13}$$

Очевидно, что $|\Gamma_\varepsilon|$ не убывает при монотонном стремлении ε к нулю. Поэтому предел (11), конечный или бесконечный, существует и равен на основании (12), (13)

$$\lim_{\varepsilon\to 0} |\Gamma_\varepsilon| = \lim_{\varepsilon\to 0} |\Gamma'_\varepsilon| = \lim_{\varepsilon\to 0} |\Gamma''_\varepsilon| = |\Gamma|,$$

где последнее равенство следует из (7).

§ 10.11. Число π. Тригонометрические функции

Рассмотрим окружность $x^2 + y^2 = 1$. Верхняя ее полуокружность Γ описывается непрерывной функцией $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$, $-1 \leqslant x \leqslant 1$. Но производная $f'(x) = -x/\sqrt{1 - x^2}$ непрерывна только на интервале $(-1, 1)$. Поэтому формулу длины дуги § 10.3, (4) в данном случае законно пока применить только к отрезку $[-1 + \varepsilon, 1 - \varepsilon]$ $(0 < \varepsilon < 1)$, на котором f непрерывна вместе со своей производной:

$$|\Gamma_\varepsilon| = \int_{-1+\varepsilon}^{1-\varepsilon} \sqrt{1 + f'(x^2)^2}\, dx = \int_{-1+\varepsilon}^{1-\varepsilon} \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

Но функция $(1 - x^2)^{-1/2}$ интегрируема на отрезке $[-1, +1]$, если интеграл понимать в несобственном смысле, поэтому по свойству § 10.10, (11)

$$|\Gamma| = \lim_{\varepsilon\to 0} |\Gamma_\varepsilon| = \int_{-1}^{+1} \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}} < \infty, \tag{1}$$

и мы доказали, что полуокружность Γ спрямляема и длина ее выражается числом, равным интегралу справа (1). Это число называется числом π:

$$\pi = \int_{-1}^{+1} \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}}. \tag{2}$$

Мы дали обоснование существования этого важного предела со всей строгостью, предъявляемой в современном математическом анализе. В элементарной геометрии дается корректное определение длины дуги окружности, но существование ее обосновывается в общем при помощи интуитивных соображений, хотя и сопровождается логическими выкладками. Функция $\arccos x$ может быть определена при помощи равенства

$$\theta = \arccos x = \int_x^1 \frac{dt}{\sqrt{1 - t^2}}, \quad -1 \leqslant x \leqslant 1, \tag{3}$$

где θ есть длина дуги $\smile{AB}$ (рис. 10.6), а x есть абсцисса точки B верхней полуокружности Γ.

Мы видим, что в силу свойств интеграла как функции нижнего предела функция $\arccos x$ непрерывна, строго убывает на отрезке $[-1, +1]$ и имеет производную

$$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad -1 < x < 1.$$

Ясно также, что $\arccos 1 = 0$, $\arccos 0 = \pi/2$, $\arccos(-1) = \pi$.

В таком случае существует обратная к $\arccos x$, определенная на отрезке $[0, \pi]$ непрерывная, монотонно убывающая функция $x = \cos\theta$, называемая косинусом дуги θ (выраженной в радианах!).

Понятие длины дуги θ окружности обычным образом распространяется на всю действительную ось $(-\infty < \theta < \infty)$. Соответственно распространяется $\cos\theta$. Именно, мы полагаем, что $\cos\theta(-\infty < \theta < \infty)$ есть четная периода 2π функция, определенная на $[0, \pi]$ как выше. Это определение соответствует обычному определению, в силу которого $\cos\theta$ есть абсцисса

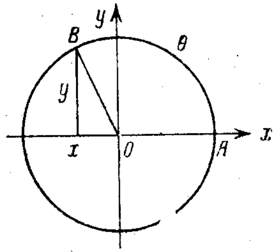

Рис. 10.6.

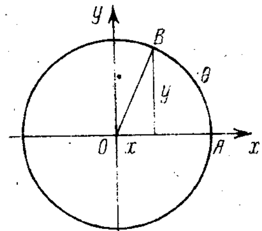

Рис. 10.7.

точки B окружности, имеющей дуговую координату θ. Из этого определения и свойств $\cos\theta$ на $[0, \pi]$ легко следует непрерывная дифференцируемость $\cos\theta$ на всей оси $(-\infty < \theta < \infty)$. Кроме того, из формулы (3) легко устанавливается, что $\cos\theta$ есть функция нечетная относительно $\theta = \frac{\pi}{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}+u\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{2}-u\right)\right)$.

Будем теперь считать, что подвижная точка B принадлежит правой половине окружности (рис. 10.7),

$$x = \sqrt{1-y^2}, \quad -1 \leqslant y \leqslant 1.$$

Функция

$$\theta = \arcsin y = \int_0^y \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}, \quad -1 \leqslant y \leqslant 1 \tag{4}$$

выражает длину дуги $\smile{AB}$ с соответствующим знаком. Она, очевидно, непрерывна, нечетна, строго возрастает на $[-1, +1]$ и удовлетворяет свойствам $\theta(-1) = -\pi/2$, $\theta(0) = 0$, $\theta = \pi/2$. При этом она непрерывно дифференцируема на $(-1, +1)$. Обратная к ней функция

$$y = \sin\theta$$

строго возрастает и непрерывна на $[-\pi/2, +\pi/2]$. Ее продолжают на всю действительную ось, полагая четной относительно прямой $x = \pi/2(\sin((\pi/2)+u) = \sin((\pi/2)-u))$ и периодической периода 2π. Легко проверяется, что $\sin\theta$ есть непрерывная на $(-\infty, \infty)$ функция, равная ординате точки B единичной окружности, имеющей дуговую координату θ.

Ясно, что $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$, $-\infty < \theta < \infty$, ведь $\cos\theta$ и $\sin\theta$ суть соответственно абсцисса и ордината одной и той же точки единичной окружности.

Имеет место равенство

$$\arcsin x + \arccos x = \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} + \int_x^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \frac{\pi}{2},$$
$$-1 \leqslant x \leqslant 1, \tag{5}$$

выражающее геометрически, что для любого $x \in [-1, +1]$ дуга, принадлежащая $[-\pi/2, \pi/2]$, синус которой равен x, плюс дуга, принадлежащая $[0, \pi]$, косинус которой равен x, составляют в сумме число $\pi/2$.

Если $\theta \in [0, \pi]$ и $x = \cos\theta$, то $\theta = \arccos x$, а в силу (5) $\arcsin x = (\pi/2) - \theta$, следовательно,

$$\cos\theta = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right). \tag{6}$$

Аналогично, если $\theta \in [-\pi/2, \pi/2]$ и $x = \sin\theta$, то $\theta = \arcsin x$, $\frac{\pi}{2} - \theta = \arccos x$, следовательно,

$$\sin\theta = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right). \tag{7}$$

Равенства (6), (7), если воспользоваться симметрическим и периодическим свойствами $\cos\theta$ и $\sin\theta$, легко распространить на любые θ.

Справедливы также равенства

$$(\sin\theta)' = \cos\theta, \quad (\cos\theta)' = -\sin\theta, \quad -\infty < \theta < \infty. \tag{8}$$

Ведь, например, из (4) следует $\frac{d\theta}{dy} = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$ $(-1 \leqslant y \leqslant 1)$, откуда и получается первое равенство (8):

$$(\sin\theta)' = \frac{dy}{d\theta} = \sqrt{1 - \sin^2\theta} = \cos\theta$$

для $-\pi/2 \leqslant \theta \leqslant \pi/2$, но тогда и для всех θ в силу указанных периодических и симметрических свойств функций $\sin\theta$ и $\cos\theta$.

Пользуясь формулами (8) и тем фактом, что $\cos 0 = 1$, $\sin 0 = 0$, можно вычислить производные высших порядков от функций $\cos\theta$, $\sin\theta$ в точке $\theta = 0$ и представить эти функции по формуле Тейлора с остаточными членами, соответствующими как угодно большому n, как это уже делалось в § 5.10. К тому же, пользуясь ограниченностью высших производных от наших функций $\left(\left|\frac{d^n\cos\theta}{d\theta^n}\right|, \left|\frac{d^n\sin\theta}{d\theta^n}\right| \leqslant 1\right)$, мы, как в § 5.10, можем заключить, что их тейлоровы остаточные члены стремятся при $n \to \infty$ к нулю для любого θ. Но тогда мы приходим к разложениям наших функций в степенные ряды

$$\sin\theta = \theta - \frac{\theta^3}{3!} + \ldots, \quad \cos\theta = 1 - \frac{\theta^2}{2!} + \ldots, \tag{9}$$

с помощью которых можно получить (см. далее § 11.13) основные тригонометрические формулы

$$\begin{aligned} \cos(\alpha+\beta) &= \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta, \\ \sin(\alpha+\beta) &= \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta. \end{aligned} \tag{10}$$

Конечно, формулы (10) можно получить и непосредственно из (3) и (4).

Пусть, например $0 < \alpha$, β и $\alpha+\beta \leqslant \pi$. Тогда (пояснения ниже: $\varkappa = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$)

$$\beta = \int\limits_{\cos\beta}^{1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \int\limits_{\varkappa}^{\cos\alpha} \frac{dx'}{\sqrt{1-x'^2}} = \int\limits_{\varkappa}^{1} \frac{dx'}{\sqrt{1-x'^2}} - \int\limits_{\cos\alpha}^{1} \frac{dx'}{\sqrt{1-x'^2}} \tag{11}$$

и $\alpha+\beta = \int\limits_{\varkappa}^{1} \frac{dx'}{\sqrt{1-x'^2}}$. Отсюда в силу (3) получим первую формулу для указанных α, β.

Второе равенство цепи (11) получено путем замены переменной $x' = x\cos\alpha - \sqrt{1-x^2}\sin\alpha$. Равенство

$$\frac{dx'}{\sqrt{1-x'^2}} = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

следует из того, что

$$dx' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\left(\cos\alpha\sqrt{1-x^2} + x\sin\alpha\right)dx$$

и $1 - x'^2 = \left(\cos\alpha\sqrt{1-x^2} + x\sin\alpha\right)^2$. Надо еще учесть, что в этом равенстве выражение в скобках неотрицательное. Полагая $x = \cos u$, $0 \leqslant u \leqslant \beta$, запишем это выражение в виде $\cos\alpha\sin u + \cos u\sin\alpha$. Ясно, что оно не отрицательное, если α, $u \leqslant \pi/2$. Если же $\alpha < \pi/2$, $u > \pi/2$, то, учитывая, что $\sin t$ и $\cos t$ убывают на $[u, \pi-\alpha]$, получим

$$\cos\alpha\sin u + \cos u\sin\alpha \geqslant \cos\alpha\sin(\pi-\alpha) + \cos(\pi-\alpha)\sin\alpha = \\ = \cos\alpha\sin\alpha - \cos\alpha\sin\alpha = 0.$$

Другой случай, $u < \pi/2$, $\alpha > \pi/2$, доказывается также путем замены местами u и α.

В заключение отметим, что в приведенном здесь изложении неравенство (см. § 4.2, пример 5)

$$|\sin\theta| \leqslant |\theta| \tag{12}$$

можно доказать так:

$$|\theta| = \left|\int\limits_0^{\sin\theta} \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}\right| \geqslant \int\limits_0^{|\sin\theta|} 1\,dt = |\sin\theta|, \quad |\theta| \leqslant \frac{\pi}{2},$$

и так как $\pi = \int\limits_{-1}^{1} \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} \geqslant \int\limits_{-1}^{1} dt = 2$ и $|\sin\theta| \leqslant 1$, то (12) верно и для всех θ. Далее неравенство (см. § 4.9) $\theta \leqslant \operatorname{tg}\theta$, $0 \leqslant \theta \leqslant \pi/2$ можно получить, воспользовавшись теоремой Лагранжа: $\operatorname{tg}\theta - \theta = \theta(\sec^2\theta_1 - 1) \geqslant 0$,

$$0 \leqslant \theta_1 \leqslant \theta \leqslant \pi/2.$$

Глава 11

РЯДЫ

§ 11.1. Понятие ряда

Выражение

$$u_0+u_1+u_2, \ldots, \tag{1}$$

где числа u_k (*члены ряда*), вообще комплексные, зависят от индексов $k=0, 1, 2, \ldots$, называется *рядом*. Этому выражению мы не приписали никакого числа, потому что сложение бесконечного числа слагаемых не имеет смысла. Ряд (1) еще записывают так:

$$\sum_{k=0}^{\infty} u_k = \sum_{0}^{\infty} u_k. \tag{2}$$

Эта чисто формальная запись часто более удобна, чем запись (1).

Числа

$$S_n = u_0+u_1+\ldots+u_n \quad (n=0, 1, \ldots)$$

называются *n-ми частичными суммами ряда* (1).

По определению, ряд (1) сходится, если существует предел

$$\lim_{n\to\infty} S_n = S.$$

В этом случае пишут

$$S = u_0+u_1+u_2+\ldots = \sum_{k=0}^{\infty} u_k \tag{3}$$

и называют S суммой ряда, т. е. выражениям (1) или (2) приписывают число S. Говорят еще, что ряд (3) сходится к S.

В силу условия Коши (верного и для комплексных чисел) *для того чтобы ряд* (1) *сходился, необходимо и достаточно, чтобы для всякого* $\varepsilon>0$ *нашлось такое* N, *чтобы для всех натуральных* $n>N$ *и любого натурального* p *выполнялось неравенство*

$$|u_{n+1}+\ldots+u_{n+p}| = |S_{n+p}-S_n| < \varepsilon.$$

Отсюда, в частности (полагая $p=1$), следует, что если ряд (1) сходится, то его общий член стремится к нулю:

$$\lim_{n\to\infty} u_n = 0. \tag{4}$$

Но условие (4), будучи необходимым, не является достаточным для сходимости ряда, как это будет видно из дальнейших примеров.

Рассмотрим еще ряд

$$u_{n+1}+u_{n+2}+\ldots = \sum_{k=1}^{\infty} u_{n+k}. \tag{5}$$

Так как условие Коши сходимости рядов (1) и (5) формулируется совершенно одинаково, то они одновременно либо сходятся либо расходятся (не сходятся). Если они сходятся, то сумма ряда (5) равна

$$\lim_{m\to\infty}\sum_{k=1}^{m} u_{n+k} = \lim_{m\to\infty}(S_{n+m}-S_n) = S - S_n.$$

Если члены ряда (1) неотрицательны (таким образом, действительны), то его частичные суммы образуют неубывающую последовательность $S_1 \leqslant S_2 \leqslant S_3 \leqslant \ldots$, поэтому, если эта последовательность ограничена,

$$S_n \leqslant M \quad (n = 1, 2, \ldots),$$

ряд сходится и его сумма удовлетворяет неравенству

$$\lim_{n\to\infty} S_n = S \leqslant M.$$

Если же она неограничена, то ряд расходится:

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \infty.$$

В этом случае пишут

$$\sum_{k=0}^{\infty} u_k = \infty.$$

Пример 1. Ряд

$$1 + z + z^2 + \ldots \tag{6}$$

имеет (при $z \neq 1$) частичную сумму $S_n(z) = (1 - z^{n+1})/(1 - z)$. Если $|z| < 1$, то $|z^{n+1}| = |z|^{n+1} \to 0$, т. е. $z^{n+1} \to 0$ $(n \to \infty)$; если $|z| > 1$, то $|z^{n+1}| \to \infty$ и наконец, если $|z| = 1$, то ряд (6) расходится, потому что в этом случае его общий член, имеющий модуль, равный единице ($|z^{n+1}| = 1$), не стремится к нулю при $n \to \infty$.

Таким образом, ряд (6) сходится и имеет сумму, равную $(1 - z)^{-1}$ на открытом круге $|z| < 1$, а для остальных точек z комплексной плоскости он расходится.

§ 11.2. Действия с рядами

Если ряды $\sum\limits_0^\infty u_k$ *и* $\sum\limits_0^\infty v_k$ *сходятся и* α *— число, то ряды* $\sum\limits_0^\infty \alpha u_k$, $\sum\limits_0^\infty (u_k \pm v_k)$ *также сходятся и*

$$\sum_0^\infty \alpha u_k = \alpha \sum_0^\infty u_k, \tag{1}$$

$$\sum_0^\infty (u_k \pm v_k) = \sum_0^\infty u_k \pm \sum_0^\infty v_k. \tag{2}$$

Действительно,

$$\sum_0^\infty \alpha u_k = \lim_{n\to\infty} \sum_0^n \alpha u_k = \alpha \lim_{n\to\infty} \sum_0^n u_k = \alpha \sum_0^\infty u_k,$$

$$\sum_0^\infty (u_k \pm v_k) = \lim_{n\to\infty} \sum_0^n (u_k \pm v_k) = \lim_{n\to\infty} \sum_0^n u_k \pm \lim \sum_0^n v_k =$$

$$= \sum_0^\infty u_k \pm \sum_0^\infty v_k.$$

Подчеркнем, что из сходимости ряда, стоящего слева в (2), вообще не следует сходимость каждого из рядов, стоящих справа в (2). Например, ряд

$$(1-1)+(1-1)+\ldots, \tag{3}$$

сходится (все его члены равны 0), но выражение $\sum\limits_0^\infty 1 - \sum\limits_0^\infty 1$ не имеет смысла — ряды, входящие в него, расходятся.

Если ряд

$$u_0+u_1+u_2+\ldots \tag{4}$$

сходится и имеет сумму S, то члены его можно любым образом сгруппировать скобками (однако не переставляя их), например, так:

$$u_0+(u_1+u_2)+(u_3+u_4+u_5)+\ldots,$$

образуя новый ряд, члены которого равны суммам чисел, стоящих в скобках. Новый ряд будет сходящимся и притом к S, потому что его частичные суммы образуют подпоследовательность сходящейся последовательности частичных сумм ряда (4).

Наоборот, раскрывать скобки в ряду, вообще говоря, незаконно, например, после раскрытия скобок в сходящемся ряду (3) получается расходящийся ряд $1-1+1-\ldots$ Впрочем, если внутри скобок всюду стоят только неотрицательные или неположительные числа, то раскрытие в таком ряду скобок не изменяет сходимости ряда и величины его суммы.

§ 11.3. Ряды с неотрицательными членами

Теорема 1 (признаки сравнения рядов). *Пусть даны два ряда:*

$$1)\ \sum_0^\infty u_k, \qquad 2)\ \sum_0^\infty v_k$$

с неотрицательными членами

а) *Если* $u_k \leqslant v_k$ $(k=0, 1, 2, \ldots)$, *то из сходимости ряда* 2) *следует сходимость ряда* 1), *а из расходимости ряда* 1) *следует расходимость ряда* 2).

б) *Если*

$$\lim_{k\to\infty}\frac{u_k}{v_k}=A>0, \qquad (1)$$

то ряды 1) и 2) одновременно сходятся или расходятся.

Доказательство. Пусть ряд 2) сходится и S — его сумма. Тогда

$$\sum_0^n u_k \leqslant \sum_0^n v_k \leqslant S \qquad (n=0, 1, \ldots),$$

т. е. частичные суммы ряда 1) ограничены и ряд 1) сходится. Его сумма S' удовлетворяет неравенству $S' \leqslant S$.

Пусть теперь ряд 1) расходится: тогда (см. § 11.1) его частичная сумма неограниченно возрастает вместе с n, что в силу неравенства

$$\sum_0^n u_k \leqslant \sum_0^n v_k \qquad (n=0, 1, \ldots)$$

влечет также неограниченное возрастание частичных сумм ряда 2), т. е. расходимость последнего.

Пусть теперь имеет место равенство (1). Тогда на самом деле $v_k>0$, и для положительного $\varepsilon<A$ найдется N такое, что $A-\varepsilon<u_k/v_k<A+\varepsilon$ $(k>N)$, откуда

$$v_k(A-\varepsilon)<u_k<(A+\varepsilon)v_k. \qquad (2)$$

Если ряд 2) сходится, то сходится также ряд $\sum\limits_{N+1}^{\infty}(A+\varepsilon)v_k$, в силу второго неравенства (2) сходится также ряд $\sum\limits_{N+1}^{\infty}u_k$, а вместе с ним и ряд 1). Если же ряд 2) расходится, то расходится также ряд $\sum\limits_{N+1}^{\infty}v_k(A-\varepsilon)$, а вместе с ним ряд $\sum\limits_{N+1}^{\infty}u_k$. Но тогда расходится также ряд (1).

Теорема доказана.

Теорема 2 (признаки Даламбера). *Пусть дан ряд*

$$\sum_0^{\infty} u_k \qquad (3)$$

с положительными членами.

а) *Если*

$$\frac{u_{k+1}}{u_k}\leqslant q<1 \qquad (k=0, 1, 2, \ldots), \qquad (4)$$

то ряд (3) *сходится; если же*

$$\frac{u_{k+1}}{u_k} \geqslant 1 \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots), \tag{5}$$

то расходится.

б) *Если*

$$\lim_{k\to\infty} \frac{u_{k+1}}{u_k} = q, \tag{6}$$

то ряд (3) *при* $q < 1$ *сходится, а при* $1 < q \leqslant \infty$ *расходится, и его общий член* $u_k \to \infty$.

Доказательство. Имеем

$$u_n = u_0 \frac{u_1}{u_0} \frac{u_2}{u_1} \cdots \frac{u_n}{u_{n-1}} \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots),$$

поэтому из (4) следует, что

$$u_n \leqslant u_0 q^n, \quad q < 1 \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots),$$

и так как ряд $\sum\limits_1^\infty u_0 q^n$ сходится, то вместе с ним и ряд (3). Из (5) следует, что

$$u_n \geqslant u_0 \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots),$$

и так как ряд $u_0 + u_0 + \ldots$ расходится, то и ряд (3) расходится.

Если теперь выполняется свойство (6) и $q < 1$, то для положительного ε такого, что $q + \varepsilon < 1$, $u_{k+1}/u_k < q + \varepsilon < 1$ $(k \geqslant N)$, где N достаточно велико. В силу признака (4) в таком случае ряд $\sum\limits_N^\infty u_k$ сходится, а вместе с ним и ряд (3).

Если же $q > 1$, то возьмем $\varepsilon > 0$ такое, что $q - \varepsilon > 1$. Но $u_{k+1}/u_k > q - \varepsilon$ $(k \geqslant N)$ при достаточно большом N, поэтому для $N \leqslant n_0 < n$ получим

$$u_n = \frac{u_n}{u_{n-1}} \frac{u_{n-1}}{u_{n-2}} \cdots \frac{u_{n_0+1}}{u_{n_0}} u_{n_0} > (q - \varepsilon)^{n-n_0} u_{n_0} \to \infty \qquad (n \to \infty).$$

Это показывает, что $u_n \to \infty$ и ряд (3) расходится.

Теорема 3 (признаки Коши). *Пусть дан ряд* (3) *с положительными членами.*

а) *Если*

$$\sqrt[k]{u_k} < q < 1 \qquad (k = 0, 1, \ldots), \tag{7}$$

то он сходится; если же

$$\sqrt[k]{u_k} \geqslant 1 \qquad (k = 0, 1, \ldots), \tag{8}$$

то он расходится.

б) *Если*

$$\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{u_k} = q \qquad (0 \leqslant q \leqslant \infty), \tag{9}$$

то при $q < 1$ ряд (3) *сходится, а при $q > 1$ расходится, и при этом $u_k \to \infty$.*

в) *Если верхний предел*

$$\overline{\lim_{k\to\infty}} \sqrt[k]{u_k} = q \qquad (0 \leqslant q \leqslant \infty), \tag{9'}$$

то ряд (3) *при $q < 1$ сходится, а при $q > 1$ расходится и при этом общий член u_k ряда не ограничен.*

Доказательство. Из неравенства (7) следует, что $u_k < q^k$ ($k = 0, 1, 2, \ldots$), и так как в случае $q < 1$ ряд $\sum\limits_0^\infty q^k$ сходится, то сходится и ряд (3). Из неравенства же (8) следует, что $u_k \geqslant 1$ ($k = 1, 2, \ldots$), и так как ряд $1 + 1 + \ldots$ расходится, то расходится и ряд (3). Утверждение а) доказано.

Пусть $q < 1$. Тогда найдется $\varepsilon > 0$ такое, что $q < q + \varepsilon < 1$. Из свойства (9) при $q < 1$ следует, что

$$\sqrt[k]{u_k} < q + \varepsilon < 1 \qquad (k \geqslant N) \tag{10}$$

при достаточно большом N, откуда

$$u_k < (q + \varepsilon)^k \quad (k \geqslant N),$$

и так как ряд $\sum\limits_N^\infty (q+\varepsilon)^k$ сходится, то сходится и ряд $\sum\limits_N^\infty u_k$, а вместе с ним ряд (3). Если же $q > 1$, то можно указать q' такое, что $q > q' > 1$. Тогда из свойства (9) при $q > 1$ вытекает, что $u_k > (q')^k$ ($k \geqslant N$) при достаточно большом N. Следовательно, $u_k \to \infty$ и ряд (3) расходится. Мы доказали б).

Из свойства (9′) так же, как из свойства (9) при $q < 1$, вытекает (10). Далее рассуждения ведутся как при доказательстве б) при $q < 1$. Если же $q > 1$, то берем q' такое, что $q > q' > 1$ и из (9′) заключаем, что $\sqrt[k_s]{u_{k_s}} > q'$ для некоторой подпоследовательности последовательности $\{u_k\}$. Но тогда

$$u_{k_s} > (q')^{k_s} \qquad (s = 0, 1, 2, \ldots), \qquad u_{k_s} \to \infty \ (s \to \infty).$$

Это показывает, что ряд (3) расходится и его общий член не ограничен. Этим утверждение в) доказано.

Замечание 1. Ряд с общим членом $u_n = n^{-\alpha}$ $(\alpha > 0)$ сходится при $\alpha > 1$ и расходится при $\alpha \leqslant 1$ (см. § 9.15, (5) *)). При этом в обоих случаях

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = 1, \tag{11}$$

так же как

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = 1. \tag{12}$$

Таким образом, существуют как сходящиеся, так и расходящиеся ряды с признаками (11) или (12).

Ряд $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots$ называется *гармоническим рядом.*

Замечание 2. Если для последовательности положительных чисел u_n существует предел

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = q, \qquad 0 \leqslant q \leqslant \infty, \tag{13}$$

то отсюда автоматически вытекает, что

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = q. \tag{14}$$

Поэтому, рассуждая теоретически, предельный признак Даламбера (т. е. (6)) ничего нового сравнительно с предельным признаком Коши (т. е. (9)) не дает. Но на практике признак Даламбера часто очень удобен.

Докажем высказанное утверждение. Пусть имеет место (13) пока для $q > 0$ конечного. Тогда для любого положительного $\varepsilon < q$ найдется такое n, что $q - \varepsilon < u_{n+k}/u_{n+k-1} < q + \varepsilon$ $(k = 0, 1, \ldots)$. Но тогда

$$(q-\varepsilon)^p < \frac{u_{n+1}}{u_n}\,\frac{u_{n+2}}{u_{n+1}} \cdots \frac{u_{n+p}}{u_{n+p-1}} < (q+\varepsilon)^p,$$

т. е. $(q-\varepsilon)^p < \dfrac{u_{n+p}}{u_n} < (q+\varepsilon)^p$, откуда

$$u_n^{1/(n+p)} (q-\varepsilon)^{p/(n+p)} < \sqrt[n+p]{u_{n+p}} < u_n^{1/(n+p)} (q+\varepsilon)^{p/(n+p)},$$

и после перехода к пределу при $p \to \infty$ получим

$$q - \varepsilon \leqslant \varliminf \sqrt[n]{u_n} \leqslant \varlimsup \sqrt[n]{u_n} \leqslant q + \varepsilon.$$

Но $\varepsilon > 0$ произвольно мало и потому

$$q = \varliminf \sqrt[n]{u_n} = \varlimsup \sqrt[n]{u_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n}.$$

Если $q = 0$, то в этих выкладках всюду в левых частях неравенств надо формально заменить $q - \varepsilon$ на 0, а в правых — считать $q = 0$.

---

*) В § 9.15 мы пользовались понятием ряда только в пределах сведений, изложенных в § 11.1.

Если же $q = \infty$, то надо всюду в правых частях неравенств заменить $q + \varepsilon$ на ∞, а в левых частях считать, что $q - \varepsilon$ есть произвольное положительное число. Далее, выражение «но $\varepsilon > 0$ произвольно мало» надо заменить на «но $q - \varepsilon$ произвольно велико».

Обратное утверждение уже неверно: предел (14) может существовать, а предел (13) — нет. Например, пусть $u_n = q^{n \pm \sqrt{n}}$, где «+» ставится при n четном, а «—» — при n нечетном. Тогда $\sqrt[n]{u_n} = q^{1 \pm n^{-1/2}} \to q\ (n \to \infty)$, а с другой стороны,

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \begin{cases} q^{1+\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} & \text{(при } n \text{ нечетном)}, \\ q^{1-\sqrt{n+1}-\sqrt{n}} & \text{(при } n \text{ четном)}. \end{cases}$$

При $q \neq 1$ отношение u_{n+1}/u_n не ограничено и, таким образом, не стремится к конечному пределу.

Примеры.

$$1)\ \sum_{0}^{\infty} \frac{x^k}{k!};\quad 2)\ \sum_{1}^{\infty} \frac{x^k}{k^{\alpha}}\ (\alpha > 0);\quad 3)\ \sum_{1}^{\infty} (e^{1/k} - 1);$$

$$4)\ \sum_{1}^{\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right);\quad 5)\ \sum_{1}^{\infty} q^{k+\sqrt{k}}\quad (q > 0).$$

Ряды 1), 2), очевидно, сходятся при $x = 0$. Но ряд 1) также сходится для любого $x > 0$, потому что тогда $u_{k+1}/u_k = x/(k+1) \to 0$, $k \to \infty$. Ряд же 2) сходится при $0 < x < 1$ и расходится для $x > 1$, потому что для него $u_{k+1}/u_k = x(k/(k+1))^{\alpha} \to x$, $k \to \infty$; при $x = 1$ см. выше замечание 1. Ряды 3) и 4) расходятся, потому что $e^{1/k} - 1 \approx 1/k$ $(k \to \infty)$ и $\ln(1 + (1/k)) \approx 1/k$ $(k \to \infty)$ («$\approx$» — знак асимптотического равенства, см. § 4.10), а ряд $\sum\limits_{0}^{\infty} \frac{1}{k}$ расходится. Ряд 5) сходится при $0 \leqslant q < 1$ и расходится при $q > 1$, потому что для него $\sqrt[k]{u_k} = q^{1+k^{-1/2}} \to q$ $(k \to \infty)$. При $q = 1$ он тоже расходится — общий его член в этом случае равен 1.

Теорема 4. *Пусть ряд*

$$u_0 + u_1 + u_2 + \ldots, \tag{15}$$

с неотрицательными членами сходится и имеет сумму S. Тогда полученный в результате произвольной перестановки его членов новый (заново перенумерованный) ряд

$$u_0' + u_1' + u_2' + u_3' + \ldots \tag{16}$$

также сходится и имеет ту же сумму S.

Доказательство. Пусть

$$S_n' = u_0' + u_1' + \ldots + u_n'$$

— частичная сумма ряда (16). Члены ее находятся в ряде (15) под некоторыми номерами $k_0, \ldots, k_n$. Пусть N — наибольшее число среди них и S_N есть N-я частичная сумма его. Очевидно,

$S'_n \leqslant S_N \leqslant S$, и так как n произвольно, то ряд (16) сходится и имеет сумму $S' \leqslant S$. Но теперь приведенное рассуждение можно провести еще раз, поменяв ряды (15) и (16) местами, и получить, что $S \leqslant S'$. Поэтому $S = S'$.

§ 11.4. Ряд Лейбница

Ряд вида

$$a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + \ldots, \qquad (1)$$

где числа $a_k > 0$, монотонно убывая, стремятся к нулю ($a_k \geqslant a_{k+1}$; $a_k \to 0$, $k \to \infty$), называется *рядом Лейбница*.

Покажем, что ряд Лейбница сходится и его сумма $S \leqslant a_0$.

В самом деле, частичная его сумма S_{2n+1} с нечетным номером $2n+1$ может быть записана в виде

$$S_{2n+1} = a_0 - (a_1 - a_2) - (a_3 - a_4) - \ldots - (a_{2n-1} - a_{2n}) - a_{2n+1},$$

откуда очевидно следует, что она ограничена сверху числом a_0:

$$S_{2n+1} \leqslant a_0.$$

С другой стороны, она может быть записана в виде

$$S_{2n+1} = (a_0 - a_1) + (a_2 - a_3) + \ldots + (a_{2n} - a_{2n+1}),$$

откуда следует, что она монотонно не убывает. Но в таком случае существует предел

$$\lim_{n\to\infty} S_{2n+1} = S \leqslant a_0.$$

Очевидно также, что

$$\lim_{n\to\infty} S_{2n} = \lim_{n\to\infty} (S_{2n+1} - a_{2n+1}) = S - 0 = S.$$

Теорема доказана.

Пример. Ряд $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \ldots$ есть, очевидно, ряд Лейбница. Таким образом, он сходится и его сумма S не превышает 1 (на самом деле, $S = \ln 2$, см. § 5.11, (5)).

§ 11.5. Абсолютно сходящиеся ряды

Ряд с комплексными членами

$$u_0 + u_1 + u_2 + \ldots \qquad (1)$$

называется *абсолютно сходящимся*, если сходится ряд

$$|u_0| + |u_1| + |u_2| + \ldots \qquad (2)$$

модулей его членов.

Абсолютно сходящийся ряд сходится. В самом деле, пусть ряд (1) абсолютно сходится, тогда сходится ряд (2) и в силу признака Коши для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое N, что $\varepsilon > |u_{n+1}| + \ldots + |u_{n+p}|$ для всех значений p и $n > N$. Тем более, тогда $\varepsilon > |u_{n+1} + \ldots + u_{n+p}|$. Поэтому в силу критерия Коши ряд (1) сходится.

Сходящиеся ряды с неотрицательными членами тривиальным образом сходятся абсолютно. Ряд $1 - \frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{3^\alpha} - \ldots (\alpha > 0)$ сходится, потому что он есть ряд Лейбница. Однако абсолютно он сходится только при $\alpha > 1$.

Теорема 1. *Если ряд абсолютно сходится, то при любой перестановке его членов абсолютная сходимость полученного нового ряда не нарушается и его сумма остается прежней.*

Доказательство. Сначала докажем теорему в случае, когда члены ряда u_k действительные числа.

Положим (для действительных u_k)

$$u_k^+ = \begin{cases} u_k, & \text{если } u_k \geqslant 0, \\ 0, & \text{если } u_k < 0, \end{cases} \quad u_k^- = \begin{cases} -u_k, & \text{если } u_k \leqslant 0, \\ 0, & \text{если } u_k > 0; \end{cases} \tag{3}$$

числа u_k^+ и u_k^-, очевидно, неотрицательные и

$$u_k = u_k^+ - u_k^-. \tag{4}$$

Наряду с рядом (1) будем рассматривать два ряда,

$$\sum_0^\infty u_k^+ \text{ и } \sum_0^\infty u_k^- \tag{5}$$

(с неотрицательными членами).

Пусть ряд (1) абсолютно сходится и члены его — действительные числа u_k. Тогда ряды (5) также сходятся, потому что, очевидно, $u_k^+ \leqslant |u_k|$, $u_k^- \leqslant |u_k|$.

Пусть ряд, полученный после перестановки исходного ряда (1), имеет вид $v_1 + v_2 + v_3 + \ldots$ Для его членов введем, как выше, числа v_k^+ и v_k^-. Тогда (пояснения ниже)

$$\sum_0^\infty u_k = \sum_0^\infty (u_k^+ - u_k^-) = \sum_0^\infty u_k^+ - \sum_0^\infty u_k^- =$$
$$= \sum_0^\infty v_k^+ - \sum_0^\infty v_k^- = \sum_0^\infty (v_k^+ - v_k^-) = \sum_0^\infty v_k.$$

Первое равенство в этой цепи следует из (4), второе — из § 11.2, (2), если учесть, что ряды (5) сходятся, третье следует из того, что сходящиеся ряды с неотрицательными членами перестановочны, четвертое из § 11.2, (2) и, наконец, пятое,— потому, что $v_k = v_k^+ - v_k^-$. Теорема для действительных u_k доказана.

Пусть теперь $u_k = \alpha_k + i\beta_k$ — комплексные числа, а числа v_k имеют прежний смысл. Так как $|\alpha_k| \leqslant |u_k|$, $|\beta_k| \leqslant |u_k|$, то ряды с (действительными членами) $\sum\limits_0^\infty \alpha_k$ и $\sum\limits_0^\infty \beta_k$ абсолютно сходятся, и члены их, как сейчас было доказано, можно переставлять, поэтому, считая, что $v_k = \gamma_k + i\delta_k$, получим

$$\sum_0^\infty u_k = \sum_0^\infty (\alpha_k + i\beta_k) = \sum_0^\infty \alpha_k + i\sum_0^\infty \beta_k =$$
$$= \sum_0^\infty \gamma_k + i\sum_0^\infty \delta_k = \sum_0^\infty (\gamma_k + i\delta_k) = \sum_0^\infty v_k.$$

Теорема доказана полностью.

Теорема 2. *Пусть ряды* $\sum\limits_0^\infty u_k$ *и* $\sum\limits_0^\infty v_l$ *абсолютно сходятся и произведения* $u_k v_l$ $(k, l = 0, 1, \ldots)$ *перенумерованы каким-либо способом (при помощи одного индекса) и обозначены* $w_0, w_1, w_2, \ldots$ *Тогда справедливо равенство*

$$\sum_0^\infty u_k \times \sum_0^\infty v_l = \sum_0^\infty w_k,$$

где ряд справа абсолютно сходится.

Доказательство.. Положим

$$s_n = \sum_{k=0}^n u_k, \quad \tilde{s}_n = \sum_{k=0}^n |u_k|, \quad \sigma_n = \sum_{l=0}^n v_l, \quad \tilde{\sigma}_n = \sum_{l=0}^n |v_l|.$$

Имеем (пояснения ниже)

$$\sum_0^\infty |u_k| \times \sum_0^\infty |v_l| = \lim_{n\to\infty} \tilde{s}_n \cdot \lim_{n\to\infty} \tilde{\sigma}_n = \lim_{n\to\infty} (\tilde{s}_n \tilde{\sigma}_n) =$$
$$= \tilde{s}_0\tilde{\sigma}_0 + (\tilde{s}_1\tilde{\sigma}_1 - \tilde{s}_0\tilde{\sigma}_0) + (\tilde{s}_2\tilde{\sigma}_2 - \tilde{s}_1\tilde{\sigma}_1) + \ldots =$$
$$= |u_0v_0| + (|u_0v_1| + |u_1v_1| + |u_1v_0|) + (|u_0v_2| +$$
$$+ |u_1v_2| + |u_2v_2| + |u_2v_1| + |u_2v_0|) + \ldots =$$
$$= |u_0v_0| + |u_0v_1| + |u_1v_1| + |u_1v_0| + |u_0v_2| + |u_1v_2| + \ldots =$$
$$= |w_0| + |w_1| + |w_2| + \ldots \qquad (6)$$

Ряды с членами $|u_k|$, $|v_l|$ по условию сходятся и потому первое равенство (6) имеет смысл. Так как пределы $\tilde{s}_n$ и $\tilde{\sigma}_n$ (при $n \to \infty$) существуют, то существует предел $\tilde{s}_n\tilde{\sigma}_n$ и равен их произведению — это выражено вторым равенством. В третьем предел $\tilde{s}_n\tilde{\sigma}_n$ заменен на сумму соответствующего ряда, членами которого являются выражения в скобках. В четвертом равенстве эти выражения записываются через суммы произведений $|u_k v_l|$. При составлении этих сумм может помочь рис. 11.1 (в скобки попадают слагаемые $|u_k v_l|$, соответствующие целочисленным точкам (k, l), лежащим на непрерывных жирных линиях вида ABC). В пятом раскрываются скобки. В силу того, что внутри скобок стоят суммы неотрицательных слагаемых, после их раскрытия полученный ряд продолжает сходиться к той же сумме. В последнем, шестом равенстве в ряду с неотрицательными членами переставлены члены, что законно.

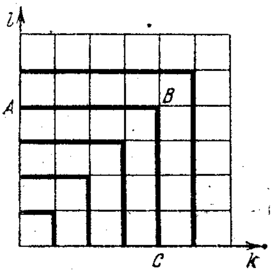

Рис. 11.1.

Подобные преобразования сделаем для исходных рядов:

$$\sum_0^\infty u_k \times \sum_0^\infty v_l = \lim_{n\to\infty} s_n \lim_{n\to\infty} \sigma_n = \lim_{n\to\infty} (s_n\sigma_n) =$$
$$= s_0\sigma_0 + (s_1\sigma_1 - s_0\sigma_0) + \ldots = u_0v_0 + (u_0v_1 + u_1v_1 + u_1v_0) + \ldots =$$
$$= u_0v_0 + u_0v_1 + u_1v_1 + u_1v_0 + u_0v_2 + \ldots = w_0 + w_1 + w_2 + \ldots \tag{6'}$$

В предпоследнем равенстве после формального раскрытия скобок получается сходящийся, даже абсолютно, ряд, как это выяснено при рассмотрении (6). В последнем равенстве переставлены члены в абсолютно сходящемся ряде, что законно.

Важный пример (пояснения ниже):

$$\sum_0^\infty \frac{z^k}{k!} \times \sum_0^\infty \frac{v^l}{l!} = 1 + \frac{z}{1} + \frac{v}{1} + \frac{z^2}{2!} + zv + \frac{v^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} +$$
$$+ \frac{z^2v}{2!} + \frac{zv^2}{2!} + \frac{v^3}{3!} + \ldots = 1 + \frac{1}{1!}(z+v) + \frac{1}{2!}(z+v)^2 +$$
$$+ \frac{1}{3!}(z+v)^3 + \ldots = \sum_{k=0}^\infty \frac{(z+v)^k}{k!}.$$

Перемножаемые ряды абсолютно сходятся для любых комплексных z и v, поэтому их можно (на основании теоремы 2) перемножить, как если бы это были многочлены. При этом произведения $\frac{z^k v^l}{k!\,l!}$ можно расположить в любом порядке, составленный из них ряд абсолютно сходится. В данном случае выгодно члены $\frac{z^k}{k!}\frac{v^l}{l!}$ сгруппировать так, чтобы в n-ю группу попали произведения, соответствующие целочисленным парам (k, l), где $k + l = n$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$.

§ 11.6. Условно и безусловно сходящиеся ряды с действительными членами

Пусть задан ряд

$$u_0 + u_1 + u_2 + \ldots \tag{1}$$

с действительными членами. Определим для него, как в предыдущем параграфе, два ряда,

$$\sum_0^\infty u_k^+ \text{ и } \sum_0^\infty u_k^- \tag{2}$$

(с неотрицательными членами).

Если ряд (1) абсолютно сходится, то, как мы знаем, сходятся также ряды (2). Очевидно, и наоборот,— из сходимости двух рядов (2) следует абсолютная сходимость ряда (1), потому что

$$|u_k| = u_k^+ + u_k^- .$$

Таким образом, для того чтобы ряд (1) абсолютно сходился, необходимо и достаточно, чтобы порождаемые им ряды (2) оба сходились.

Пусть теперь ряд (1) сходится, но не абсолютно. Тогда один из рядов (2), пусть для определенности первый, расходится, т. е. $\sum\limits_0^\infty u_k^+ = \infty$ $\left(\text{ведь } u_k^+ \geqslant 0\right)$. Но

$$\sum_0^n u_k^- = \sum_0^n u_k^+ - \sum_0^n u_k. \tag{3}$$

Первая сумма в правой части (3) неограниченно возрастает вместе с n, а вторая стремится к конечному пределу, потому что ряд (1) сходится, поэтому левая часть (3) неограниченно возрастает вместе с n. Таким образом, оба ряда (2) расходятся.

Заметим еще, что из сходимости ряда (1) следует, что $u_k \to 0$, а тогда, очевидно, и u_k^+, $u_k^- \to 0$.

Мы показали, что если ряд (1) сходится, но не абсолютно, то порождаемые им ряды (2) оба расходятся, но при этом u_k^+, $u_k^- \to 0$.

Это утверждение можно еще переформулировать так:

1) *Для того чтобы ряд был абсолютно сходящимся, необходимо и достаточно чтобы ряды, составленные только из положительных и только из отрицательных его членов, были сходящимися.*

Впрочем, может оказаться, что один из этих рядов на самом деле есть конечная сумма или вообще отсутствует.

2) *Если ряд сходится не абсолютно, то ряды, составленные только из положительных и только из отрицательных его членов, расходятся, а их общие члены стремятся к нулю.*

Существует следующая терминология. Говорят, что ряд сходится *безусловно*, если он сходится и любая перестановка его членов не нарушает его сходимости, и ряд сходится условно, если он сходится, но существует перестановка его членов, нарушающая его сходимость, т. е. делающая переставленный ряд расходящимся.

Из доказанной в предыдущем параграфе теоремы о перестановочности абсолютно сходящегося ряда следует, что а) *абсолютно сходящийся ряд сходится безусловно.*

Из утверждения же 2) и теоремы, которую мы доказываем ниже, следует, что б) *сходящийся не абсолютно ряд сходится условно.*

Из утверждений а) и б) тогда следует, что *для того, чтобы ряд сходился безусловно, необходимо и достаточно, чтобы он был абсолютно сходящимся.*

После сказанного самому понятию безусловной сходимости можно дать другую, эквивалентную формулировку: *сходящийся ряд называется безусловно сходящимся, если ряд, полученный после любой перестановки его членов, продолжает сходиться и имеет прежнюю сумму.*

Но перейдем к теореме, о которой шла речь.

Теорема 1 (Римана). *Пусть заданы два расходящихся ряда $\sum\limits_0^\infty \alpha_k$ и $\sum\limits_0^\infty \beta_k$ с положительными членами, стремящимися к нулю при $k\to\infty$ $(\alpha_k\to 0,\ \beta_k\to 0)$.*

Тогда, каково бы ни было $S(-\infty\leqslant S\leqslant\infty)$, можно сконструировать ряд вида

$$\alpha_0+\alpha_1+\ldots+\alpha_{k_1}-\beta_0-\ldots-\beta_{k_1'}+\alpha_{k_1+1}+\ldots$$
$$\ldots+\alpha_{k_2}-\beta_{k_1'+1}-\ldots-\beta_{k_2'}+\alpha_{k_2+1}+\ldots, \qquad (4)$$

имеющий сумму S.

Таким образом, при $S=+\infty$, $-\infty$ он будет расходиться. В этот ряд входят все α_k и β_k, и притом по одному разу.

Доказательство. Пусть для определенности S положительное число конечное. Числа $k_1<k_2<\ldots$, $k_1'<k_2'<\ldots$ подбираются как наименьшие натуральные числа, для которых выполняются последовательно неравенства:

$$1)\ A_1=\sum_0^{k_1}\alpha_j>S, \qquad 2)\ A_2=A_1-\sum_0^{k_1'}\beta_j<S,$$

$$3)\ A_3=A_2+\sum_{k_1+1}^{k_2}\alpha_j>S, \quad 4)\ A_4=A_3-\sum_{k_1'+1}^{k_2'}\beta_j<S.$$

Возможность подобрать такие числа k_l, k'_l каждый раз следует из расходимости рядов $\sum_0^\infty \alpha_j$ и $\sum_0^\infty \beta_j$. Теперь тот факт, что ряд (4) сходится к S, следует из того, что α_k, $\beta_k \to 0$ $(k \to \infty)$.

Чтобы получить теорему при $S = \infty$, можно в правых частях неравенств 1), 2) ... поставить вместо S соответственно числа 2, 1, 4, 3, 6, 5, ...

§ 11.7. Последовательности и ряды функций. Равномерная сходимость

Рассмотрим последовательность функций $\{f_k(\mathbf{x})\}$, определенных на некотором множестве точек $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ n-мерного пространства. Они могут принимать комплексные значения $(f_k(\mathbf{x}) = \alpha_k(\mathbf{x}) + i\beta_k(\mathbf{x}))$. Можно считать также, что $\mathbf{x}$ — коплексные точки $(\mathbf{x} = \xi + i\eta)$, пробегающие множество E точек комплексной плоскости и тогда $f_k(x)$ — функции комплексной переменной $\mathbf{x}$.

Пусть для каждого $\mathbf{x} \in E$ последовательность $\{f_k(\mathbf{x})\}$ стремится к числу $f(\mathbf{x})$ (функции от x). Обозначим через

$$\rho_n = \sup_{x \in E} |f(\mathbf{x}) - f_n(\mathbf{x})| \tag{1}$$

верхнюю грань модулей уклонений $f_n(\mathbf{x})$ от $f(\mathbf{x})$, распространенную на множество E. Будем предполагать, что ρ_n для каждого n конечно $(\rho_n < \infty)$.

Говорят, что *последовательность* $\{f_n(\mathbf{x})\}$ *равномерно сходится на* E *к* $f(\mathbf{x})$, если $\rho_n \to 0$ $(n \to \infty)$.

Дадим другое эквивалентное определение: последовательность $\{f_n(\mathbf{x})\}$ равномерно сходится к $f(\mathbf{x})$ на E, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое N, что для $n > N$ выполняется неравенство

$$|f(\mathbf{x}) - f_n(\mathbf{x})| < \varepsilon \text{ для всех } \mathbf{x} \in E. \tag{2}$$

Если выполняется первое определение, то для любого $\varepsilon > 0$ можно найти такое N, что $\rho_n < \varepsilon$ для всех $n > N$. Но тогда

$$|f(\mathbf{x}) - f_n(\mathbf{x})| \leqslant \rho_n < \varepsilon \tag{3}$$

для всех $\mathbf{x} \in E$ и $n > N$, т. е. выполняется второе определение. Если же выполняется второе определение, то для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое N, что для $n > N$ выполняется неравенство (2). Взяв верхнюю грань его левой части по $\mathbf{x} \in E$, получим $\rho_n \leqslant \varepsilon$ $(n > N)$, откуда $\rho_n \to 0$, т. е. выполняется первое определение.

Верно также третье (эквивалентное) определение: последовательность $\{f_n(\mathbf{x})\}$ равномерно сходится на E к $f(x)$, если существует последовательность $\{\alpha_n\}$ положительных чисел (не зависящих от $\mathbf{x}$) такая, что $\alpha_n \to 0$ и $|f_n(x) - f(x)| \leqslant \alpha_n$ для всех $\mathbf{x} \in E$, $n = 0, 1, 2, \ldots$.

В самом деле, если верно первое определение, то, положив $\alpha_n = \rho_n$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$, получим третье определение. Обратно, из третьего определения, следует

$$\rho_n = \sup_{\mathbf{x}\in E} \left| f_n(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}) \right| \leqslant \alpha_n$$

и $\rho_n \to 0$, $n \to \infty$.

Например, пусть функции $f(x)$, $f_n(x)$ определены и непрерывны на отрезке $[a, b]$. График функции $y = f(x)$ изображен на чертеже (рис. 11.2). Кроме того, там изображена полоска Π_ε толщиной 2ε

$$f(x) - \varepsilon < y < f(x) + \varepsilon \quad (a \leqslant x \leqslant b),$$

состоящая из точек (x, y), удаленных от этого графика в направлении оси y на величину меньшую, чем $\varepsilon > 0$.

Последовательность функций $\{f_n(x)\}$ равномерно на $[a, b]$ стремится к $f(x)$, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется N такое, что все графики Γ_n функций f_n с $n > N$ попадут полностью в Π_ε.

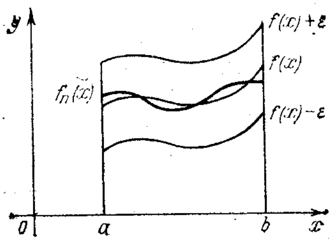

Рис. 11.2.

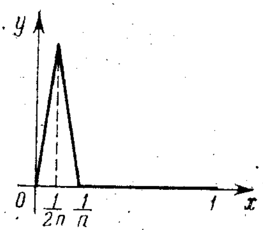

Рис. 11.3.

Но могут быть такие последовательности $\{f_n(x)\}$, сходящиеся к $f(x)$ для любого $x \in [a, b]$, что для некоторых $\varepsilon > 0$ не существует такое N, чтобы графики $f_n(x)$ с $n > N$ попадали полностью в Π_ε. В этом случае мы говорим, что последовательность $\{f_n\}$ сходится к f на $[a, b]$ неравномерно (см. далее пример 2 и рис. 11.3).

Можно еще дать четвертое определение равномерной сходимости в духе Коши: последовательность $\{f_n(\mathbf{x})\}$ равномерно сходится на E, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое N, что выполняется неравенство

$$|f_{n+p}(\mathbf{x}) - f_n(\mathbf{x})| < \varepsilon \tag{4}$$

при любых $n > N$ и $p > 0$ и для всех $\mathbf{x} \in E$.

Из того, что последовательность равномерно сходится в смысле второго определения, следует, что для всякого $\varepsilon > 0$ найдется такое N, что для $n > N$ и любых p выполняется неравенство

$$|f_{n+p}(\mathbf{x}) - f_n(\mathbf{x})| \leqslant |f_{n+p}(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x})| + |f(\mathbf{x}) - f_n(\mathbf{x})| < 2\varepsilon$$

$$\text{для всех } \mathbf{x} \in E,$$

т. е. выполняется четвертое определение. С другой стороны, пусть выполняется четвертое определение; тогда для каждого отдельного значения $x \in E$ выполняется, очевидно, обычный признак Коши сходимости последовательности, поэтому она сходится к некоторой функции $f(\mathbf{x})$. Зададим теперь $\varepsilon > 0$, и подберем N так, как указано в четвертом определении. В неравенстве (4), где $n > N$ фиксировано, перейдем к пределу при $p \to \infty$; в результате получим

$$|f(\mathbf{x}) - f_n(\mathbf{x})| \leqslant \varepsilon \quad (\mathbf{x} \in E),$$

откуда

$$\rho_n = \sup_{x \in E} |f(\mathbf{x}) - f_n(\mathbf{x})| \leqslant \varepsilon,$$

и так как $n > N$ можно взять любым, то $\rho_n \to 0$ $(n \to \infty)$, т. е. выполняется первое определение.

Нетрудно видеть, что если α — число, а $\{f_k(\mathbf{x})\}$ и $\{\varphi_k(\mathbf{x})\}$ — две последовательности функций, равномерно сходящиеся на E, то последовательности $\{\alpha f_k(\mathbf{x})\}$ и $\{f_k(\mathbf{x}) \pm \varphi_k(\mathbf{x})\}$ также равномерно сходятся на E. Нетрудно также видеть, что если последовательность функций равномерно сходится на E, то она равномерно сходится и на $E' \subset E$. Обратное утверждение, вообще говоря, не верно.

Заметим еще, что каждой последовательности функций $\{f_n(\mathbf{x})\}$ соответствует ряд

$$f_0(\mathbf{x}) + (f_1(\mathbf{x}) - f_0(\mathbf{x})) + (f_2(\mathbf{x}) - f_1(\mathbf{x})) + \ldots,$$

n-е частичные суммы которого соответственно равны $f_n(\mathbf{x})$.

Пусть теперь задан ряд

$$u_0(\mathbf{x}) + u_1(\mathbf{x}) + u_2(\mathbf{x}) + \ldots, \tag{5}$$

члены которого, вообще говоря, комплексные функции от $\mathbf{x} \in E$, где E — по-прежнему некоторое множество точек n-мерного пространства или комплексной плоскости.

По определению, *ряд* (5) *равномерно сходится на множестве E к функции $S(\mathbf{x})$*, если последовательность $\{S_k(\mathbf{x})\}$ его частичных сумм равномерно сходится на E к $S(\mathbf{x})$.

В частности, определение равномерной сходимости ряда, очевидно, можно высказать так: ряд (5) равномерно сходится на множестве E, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое N, что для $n > N$ и $p > 0$ и всякого $\mathbf{x} \in E$ выполняется неравенство $|u_{n+1}(\mathbf{x}) + \ldots + u_{n+p}(\mathbf{x})| < \varepsilon$.

Следующая теорема дает важный критерий равномерной сходимости ряда.

Теорема 1 (Вейерштрасса). *Если члены ряда* (5) *удовлетворяют неравенствам*

$$|u_k(\mathbf{x})| \leqslant \alpha_k \quad (k = 0, 1, \ldots), \tag{6}$$

где $\mathbf{x} \in E$, а α_k — числа (не зависящие от x), и если ряд с члена-

ми α_k сходится, то ряд (5) *сходится на множестве E абсолютно и равномерно.*

В самом деле, из сходимости ряда с членами α_k и из (6) следует, что для любого $\varepsilon>0$ найдется такое N, что при любых $n>N$ и $p>0$ и произвольном $\mathbf{x}\in E$

$$\varepsilon>\alpha_{n+1}+\ldots+\alpha_{n+p}\geqslant|u_{n+1}(\mathbf{x})|+\ldots+|u_{n+p}(\mathbf{x})|\geqslant$$
$$\geqslant|u_{n+1}(\mathbf{x})+\ldots+u_{n+p}(\mathbf{x})|,$$

а это и значит, что ряд (5) равномерно сходится на E. Абсолютная его сходимость очевидна.

Докажем лемму, которая нам пригодится в дальнейшем.

Лемма 1. *Пусть комплекснозначная функция $F(\mathbf{x})$, определенная на множестве $E\subset R_n$, в точке $\mathbf{x}^0\in E$ обладает следующим свойством: для любого $\varepsilon>0$ можно указать окрестность $U(\mathbf{x}^0)\subset\subset E$ (например, $U(\mathbf{x}^0)$ есть пересечение E с некоторым открытым шаром $V_{\mathbf{x}^0}$ с центром в $\mathbf{x}^0$, т. е. $U(\mathbf{x}^0)=EV_{\mathbf{x}^0}$) такую, что $F(\mathbf{x})$ можно представить в виде суммы двух функций*

$$F(\mathbf{x})=F_1(\mathbf{x})+F_2(\mathbf{x}),\tag{7}$$

из которых F_1 непрерывна в $\mathbf{x}^0$ (относительно E), а F_2 удовлетворяет неравенству

$$|F_2(\mathbf{x})|<\varepsilon\quad \text{для всех}\quad \mathbf{x}\in U(\mathbf{x}^0).$$

Тогда функция F непрерывна в $\mathbf{x}^0$.

Доказательство. Зададим $\varepsilon>0$ и найдем разложение (7) и окрестность $U(\mathbf{x}^0)$, как это сказано в формулировке леммы; так как функция F_1 непрерывна в $\mathbf{x}^0$, то найдется окрестность $U_1(\mathbf{x}^0)$, которую можно считать принадлежащей $U(x^0)$ ($U_1(x^0)\subset\subset U(\mathbf{x}^0)$), такая, что

$$|F_1(\mathbf{x})-F_1(\mathbf{x}^0)|<\varepsilon,\quad \mathbf{x}\in U_1(\mathbf{x}^0).$$

Но тогда

$$|F(\mathbf{x})-F(\mathbf{x}^0)|\leqslant|F_1(\mathbf{x})-F_1(\mathbf{x}^0)|+|F_2(\mathbf{x})-F_2(\mathbf{x}^0)|\leqslant$$
$$\leqslant|F_1(\mathbf{x})-F_1(\mathbf{x}^0)|+|F_2(\mathbf{x})|+|F_2(\mathbf{x}^0)|<$$
$$<\varepsilon+\varepsilon+\varepsilon=3\varepsilon,\quad x\in U_1(\mathbf{x}^0),$$

а это доказывает непрерывность F в $\mathbf{x}^0$.

Докажем вторую важную теорему.

Теорема 2. *Если последовательность функций $\{f_n\}$ равномерно сходится на множестве E к функции f, и f_n непрерывны в точке $\mathbf{x}^0$ (относительно E), то f также непрерывна в $\mathbf{x}^0$.*

На языке рядов эта теорема гласит: *сумма равномерно сходящегося на E ряда функций, непрерывных в точке $\mathbf{x}^0\in E$, есть непрерывная функция в этой точке.*

Доказательство. Функцию f представим в виде

$$f(\mathbf{x})=f_n(\mathbf{x})+[f(\mathbf{x})-f_n(\mathbf{x})],$$

где n — некоторое натуральное число. В силу равномерной сходимости f_n к f на E существует n такое, что

$$|f(\mathbf{x}) - f_n(\mathbf{x})| < \varepsilon$$

для всех $\mathbf{x} \in E$, тем более для всех x, принадлежащих некоторой окрестности $U(\mathbf{x}^0) \subset E$ точки $\mathbf{x}^0$. При этом, по условию, f_n непрерывна в $\mathbf{x}^0$. Но тогда на основании доказанной леммы и функция f непрерывна в $\mathbf{x}^0$.

Приведем еще более тонкие признаки равномерной сходимости рядов, основанные на применении к ряду так называемого *преобразования Абеля* (аналога операции интегрирования по частям).

Рассмотрим ряд

$$\alpha_0\beta_0 + \alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 + \ldots, \tag{8}$$

где α_k, β_k — функции от $x \in E$ (или постоянные числа).

Положим $B_k = \beta_{n+1} + \beta_{n+2} + \ldots + \beta_{n+k}$ и к усеченной сумме ряда (8) применим преобразование (Абеля):

$$\alpha_{n+1}\beta_{n+1} + \ldots + \alpha_{n+p}\beta_{n+p} =$$
$$= \alpha_{n+1}B_1 + \alpha_{n+2}(B_2 - B_1) + \ldots + \alpha_{n+p}(B_p - B_{p-1}) = (\alpha_{n+1} - \alpha_{n+2})B_1 +$$
$$+ (\alpha_{n+2} - \alpha_{n+3})B_2 + \ldots + (\alpha_{n+p-1} - \alpha_{n+p})B_{p-1} + \alpha_{n+p}B_p =$$
$$= \sum_{k=1}^{p-1} (\alpha_{n+k} - \alpha_{n+k+1})B_k + \alpha_{n+p}B_p. \tag{9}$$

Легко теперь установить следующие два критерия равномерной сходимости (в случае постоянных α_k, β_k — просто сходимости) ряда (8).

Теорема 3 (признак Дирихле равномерной сходимости ряда). *Если частные суммы ряда*

$$\beta_0 + \beta_1 + \beta_2 + \ldots \tag{10}$$

ограничены в совокупности, а действительная функция $\alpha_k(\mathbf{x})$ *(с возрастанием k) равномерно (относительно* $\mathbf{x}$*) на E стремится к нулю, убывая, то ряд* (8) *сходится равномерно.*

В самом деле, пусть константа M превышает модули частных сумм σ_n ряда (10). Тогда при любых n и k,

$$|B_k| = |\sigma_{n+k} - \sigma_n| \leqslant |\sigma_{n+k}| + |\sigma_n| \leqslant 2M.$$

Поэтому в силу (9) и того факта, что α_s равномерно стремится к нулю, убывая, выполняется неравенство

$$\left|\sum_{1}^{p} \alpha_{n+k}\beta_{n+k}\right| \leqslant 2M \sum_{k=1}^{p-1} (\alpha_{n+k} - \alpha_{n+k+1}) + \alpha_{n+p}2M = 2M\alpha_{n+1} < \varepsilon,$$

для любых $n > N$ и p и любых $\mathbf{x} \in E$, если только N достаточно велико. Следовательно, ряд (8) равномерно сходится. Последнее неравенство в этой цепи верно для всех $x \in E$ в силу равномерного стремления $\alpha_{n+1}(x)$ к нулю:

Теорема 4 (признак Абеля равномерной сходимости ряда). *Если действительные функции α_k монотонно убывают (с возрастанием k) и ограничены в совокупности, а ряд (10) равномерно сходится на E, то и ряд (8) сходится равномерно на E.*

В самом деле, пусть $M \geqslant |\alpha_k|$ $(k = 0, 1, \ldots)$ (функции α_k могут быть и отрицательными!). В силу равномерной сходимости ряда (10) для любого $\varepsilon > 0$ можно указать такое N, что $|B_k| < \varepsilon$ для любых $n > N$ и k. Поэтому в силу (9) и монотонности α_s для любых $n > N$ и p

$$\left|\sum_1^p \alpha_{n+k}\beta_{n+k}\right| \leqslant \varepsilon \sum_{k=1}^{p-1}(\alpha_{n+k} - \alpha_{n+k+1}) + \varepsilon|\alpha_{n+p}| =$$

$$= \varepsilon(\alpha_{n+1} - \alpha_{n+p}) + \varepsilon|\alpha_{n+p}| \leqslant 3\varepsilon M,$$

т. е. ряд (8) равномерно сходится.

Пример 1. Ряд

$$1 + (x-1) + (x^2 - x) + (x^3 - x^2) + \ldots \quad (0 \leqslant x \leqslant 1) \tag{11}$$

сходится на отрезке $[0, 1]$, но неравномерно. В самом деле, n-я его частичная сумма равна $S_n(x) = x^n$ и

$$\lim_{n\to\infty} S_n(x) = S(x) = \begin{cases} 1 & (x = 1), \\ 0 & (0 \leqslant x < 1). \end{cases}$$

Поэтому $\rho_n = \sup\limits_{x\in[0,1]} |S(x) - S_n(x)| = \sup\limits_{x\in[0,1)} |x^n| = 1$, и ρ_n не стремится к нулю при $n \to \infty$.

С другой стороны, ряд (11) равномерно сходится на любом отрезке $[0, q]$, где $0 < q < 1$, так как в этом случае

$$\rho_n = \sup_{x\in[0,q]} |S(x) - S_n(x)| = \sup_{x\in[0,q]} |x^n| = q^n \to 0 \quad (n \to \infty).$$

Сумма ряда (11) разрывна в точке $x = 1$, хотя члены ряда — непрерывные функции на $[0, 1]$. Это показывает, что сумма неравномерно сходящегося ряда непрерывных функций не обязательно есть непрерывная функция. Однако существуют неравномерно сходящиеся ряды (последовательности) непрерывных функций, сходящиеся к непрерывным же функциям, как показывает следующий пример.

Пример 2. Пусть (рис. 11.3) функция

$$f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad x = 0 \text{ и } 1/n \leqslant x \leqslant 1, \\ n & \text{при} \quad x = 1/2n \end{cases} \tag{12}$$

линейна и непрерывна на $[0, 1/2n]$ и $[1/2n, 1/n]$. Очевидно, $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = 0$ $(0 \leqslant x \leqslant 1)$.

С другой стороны, сходимость на отрезке $[0, 1]$ неравномерна, потому что $\rho_n = \sup\limits_{x\in[0,1]} |f_n(x) - 0| = n \to \infty$. На всяком же отрезке $[\varepsilon, 1]$ сходимость равномерна, потому что $f_n(x) \equiv 0$ на $[\varepsilon, 1]$ при $n > 1/\varepsilon$.

Пример 3. Ряды

$$\sum_{1}^{\infty} \frac{\cos kx}{k^{\alpha}}, \quad \sum_{1}^{\infty} \frac{\sin kx}{k^{\alpha}} \qquad (\alpha > 0) \tag{13}$$

при $\alpha > 1$ равномерно и абсолютно сходятся на всей действительной оси $(-\infty < x < \infty)$, потому что абсолютные величины их k-х членов не превышают $k^{-\alpha}$, а при $\alpha > 1$ ряд $\sum k^{-\alpha}$ сходится. В этом рассуждении мы применили признак Вейерштрасса. При $\alpha \leqslant 1$ он уже не применим, так как в этом случае ряд $\sum k^{-\alpha}$ расходится. Однако при $0 < \alpha \leqslant 1$ наши ряды равномерно сходятся на отрезке $[\varepsilon, 2\pi - \varepsilon]$, каково бы ни было положительное ε, где $0 < \varepsilon < 2\pi - \varepsilon < 2\pi$. В самом деле, частные суммы рядов

$$\frac{1}{2} + \cos x + \cos 2x + \cos 3x + \ldots, \quad \sin x + \sin 2x + \ldots$$

соответственно равны (см. примеры в конце § 8.2)

$$D_n(x) = \frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)x}{2\sin\frac{x}{2}}, \quad K_n(x) = \frac{\cos\frac{x}{2} - \cos\left(n + \frac{1}{2}\right)x}{2\sin\frac{x}{2}} \qquad (n = 1, 2, \ldots).$$

Они ограничены в совокупности на $[\varepsilon, 2\pi - \varepsilon]$:

$$|D_n(x)| \leqslant \frac{1}{2\sin(\varepsilon/2)}, \quad |K_n(x)| \leqslant \frac{1}{\sin(\varepsilon/2)} \qquad (n = 1, 2, \ldots);$$

кроме того, $n^{-\alpha} \geqslant (n+1)^{-\alpha}$ и $n^{-\alpha} \to 0$, поэтому по признаку Дирихле ряды (13) равномерно сходятся на $[\varepsilon, 2\pi - \varepsilon]$.

§ 11.8. Интегрирование и дифференцирование равномерно сходящихся рядов на отрезке

Теорема 1. *Пусть на отрезке $[a, b]$ задана последовательность $\{f_n\}$ (комплекснозначных) непрерывных функций, сходящаяся к функции f. Если сходимость равномерна на $[a, b]$, то*

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^x f_n(t)\,dt = \int_a^x f(t)\,dt \tag{1}$$

равномерно на $[a, b]$. В частности (при $x = b$),

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(t)\,dt = \int_a^b f(t)\,dt. \tag{2}$$

Доказательство. Из условий теоремы следует (см. § 11.7, теорема 2), что предельная функция f непрерывна на $[a, b]$ и

$$\max_{a \leqslant t \leqslant b} |f_n(t) - f(t)| = r_n \to 0 \quad (n \to \infty).$$

Поэтому

$$\left|\int_a^x f_n(t)\,dt-\int_a^x f(t)\,dt\right|\leqslant\int_a^x\left|f_n(t)-f(t)\right|dt\leqslant\int_a^b r_n\,dt=(b-a)\,r_n,$$

где правая часть не зависит от x и стремится при $n\to\infty$ к нулю, а это доказывает теорему.

Теорема 2. *Равномерно сходящийся на отрезке $[a, b]$ ряд (комплекснозначных) непрерывных функций*

$$S(x)=u_0(x)+u_1(x)+u_2(x)+\ldots \tag{3}$$

можно почленно интегрировать $(a\leqslant x_0\leqslant b)$:

$$\int_{x_0}^x S(t)\,dt=\int_{x_0}^x u_0(t)\,dt+\int_{x_0}^x u_1(t)\,dt+\ldots \tag{4}$$

Полученный при этом ряд (4) *равномерно сходится на* $[a, b]$. *В частности,*

$$\int_a^b S(t)\,dt=\int_a^b u_0(t)\,dt+\int_a^b u_1(t)\,dt+\ldots \tag{5}$$

Доказательство. По условию сумма

$$S_n(x)=\sum_0^n u_k(x)$$

равномерно сходится к $S(x)$ на $[a, b]$. Поэтому на основании теоремы 1 выполняется равенство

$$\int_{x_0}^x S(t)\,dt=\lim_{n\to\infty}\int_{x_0}^x S_n(t)\,dt=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^n\int_{x_0}^x u_k(t)dt$$

равномерно относительно $x\in[a, b]$. Это показывает, что ряд (4) сходится равномерно относительно $x\in[a, b]$.

Теорема 3. *Пусть на отрезке $[a, b]$ задана последовательность (комплекснозначных) функций $\{f_n\}$, имеющих непрерывную производную. Если она сходится в точке $x_0\in[a, b]$ и, кроме того, соответствующая последовательность производных $\{f'_n\}$ равномерно сходится на отрезке $[a, b]$ к функции φ, то последовательность $\{f_n\}$ тоже сходится равномерно на этом отрезке к некоторой функции f и*

$$f'(x)=\varphi(x),\quad x\in[a, b]. \tag{6}$$

Доказательство. Имеют место равенства

$$f_n(x)=f_n(x_0)+\int_{x_0}^x f'_n(t)\,dt\qquad (n=0, 1, 2, \ldots, x\in[a, b]), \tag{7}$$

потому что функции f_n непрерывно дифференцируемы на $[a, b]$.

По условию существует предел

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x_0) = A,$$

который мы обозначаем через A. Так как $f'_n(t) \rightrightarrows \varphi(t)$ при $n\to\infty$ равномерно на $[a, b]$ и функции $f'_n(t)$ непрерывны, то и $\varphi(t)$ непрерывна на $[a, b]$ (см. § 11.7, теорему 2) и, кроме того, (см. теорему 1)

$$\lim_{n\to\infty}\int_{x_0}^{x} f'_n(t)\,dt = \int_{x_0}^{x}\varphi(t)\,dt$$

равномерно на $[a, b]$. Но тогда правая часть (7) при $n\to\infty$ равномерно на $[a, b]$ стремится к некоторой функции $f(x)$, определяемой равенством

$$f(x) = A + \int_{x_0}^{x}\varphi(t)\,dt, \quad x\in[a, b]. \tag{8}$$

Таким образом, $f_n(x)\to f(x)$ при $n\to\infty$ равномерно на $[a, b]$. Если учесть, что $\varphi(t)$ непрерывна на $[a, b]$, то из равенства (8) следует, что (см. § 9.9 (2)) $f(x)$ имеет производную на отрезке $[a, b]$, равную $\varphi(x)$, т. е. выполняется равенство (6).

Теорема доказана.

Отметим следствие из теоремы 3.

Следствие. *Если функции $f_n(x)$ непрерывно дифференцируемы на $[a, b]$, $n = 1, 2, \ldots, n$, и выполняются свойства $f_n(x)\to f(x)$, $f'_n(x)\to\varphi(x)$, $n\to\infty$, равномерно на $[a, b]$, то*

$$f'(x) = \varphi(x), \quad x\in[a, b].$$

На языке рядов теорема 3 имеет следующий аналог:

Теорема 3′. *Пусть на отрезке $[a, b]$ задан ряд*

$$u_0(x) + u_1(x) + u_2(x) + \ldots \tag{9}$$

(комплекснозначных) функций, имеющих непрерывную производную.

Если ряд (9) сходится в некоторой точке $x_0\in[a, b]$ и, кроме того, формально продифференцированный ряд

$$u'_0(x) + u'_1(x) + u'_2(x) + \ldots \tag{10}$$

равномерно сходится на $[a, b]$, то ряд (9) равномерно сходится на $[a, b]$, и производная от его суммы $S(x)$ есть сумма ряда (10).

Таким образом,

$$S(x) = u_0(x) + u_1(x) + u_2(x) + \ldots, \tag{11}$$

$$S'(x) = u'_0(x) + u'_1(x) + u'_2(x) + \ldots \quad (a\leqslant x\leqslant b) \tag{12}$$

Доказательство. Пусть $u_0(x)+\ldots+u_n(x)=S_n(x)$, тогда

$$u_0'(x)+\ldots+u_n'(x)=S_n'(x).$$

На языке сумм S_n и S_n' условие теоремы 3′ гласит: существует предел $\lim\limits_{n\to\infty} S_n(x_0)$, и последовательность непрерывных производных $\{S_n'(x)\}$ сходится равномерно на отрезке $[a, b]$. Но тогда по теореме 3 последовательность $\{S_n(x)\}$, а вместе с ней ряд (11) сходится равномерно на этом отрезке к некоторой дифференцируемой функции $S(x)$ и производная $S'(x)=\lim\limits_{n\to\infty} S_n'(x)$, т. е. $S'(x)$, есть сумма ряда (12).

Пример 1. Рассмотрим ряд

$$\Lambda_\alpha(x)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos\left(kx+\frac{\alpha\pi}{2}\right)}{k^\alpha} \quad (k=1, 2, \ldots). \tag{13}$$

При α четном это ряд вида

$$\text{а)} \quad \pm\sum_{1}^{\infty}\frac{\cos kx}{k^\alpha},$$

а при α нечетном — вида

$$\text{б)} \quad \pm\sum_{1}^{\infty}\frac{\sin kx}{k^\alpha}.$$

Так как $\frac{d}{dx}\cos\left(kx+\frac{\alpha\pi}{2}\right)=-k\cos\left(kx+(\alpha-1)\frac{\pi}{2}\right)$, то формально

$$\frac{d}{dx}\Lambda_\alpha(x)=-\Lambda_{\alpha-1}(x). \tag{14}$$

Но это равенство верно и по существу при $\alpha=3, 4, \ldots$ для любого действительного x, а при $\alpha=2$ — при любом действительном

$$x\neq 2k\pi \quad (k=0, \pm1, \pm2, \ldots), \tag{15}$$

что следует из теоремы 3 и разобранных в примере 3 § 11.7 свойств рядов а), б). При доказательстве равенства (14) при $\alpha=2$ для какого-либо фиксированного x, удовлетворяющего неравенствам (15), берем отрезок $[a, b]$, содержащий строго внутри точку x, но не содержащий точки вида $2k\pi$ $(k=0, \pm1, \ldots)$. На $[a, b]$ оба ряда (13) при $\alpha=1, 2$ сходятся равномерно, что дает возможность применить теорему 3.

Пример 2. Пусть функция

$$f_n(x)=\begin{cases}0 & \left(x=0,\ \frac{1}{n}\leqslant x\leqslant 1\right),\\ \alpha_n & \left(x=\frac{1}{2n}\right)\end{cases} \tag{16}$$

— линейная и непрерывная на $[0, 1/2n]$ и $[1/2n, 1/n]$, где a_n — любая последовательность чисел. Тогда, очевидно, $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)=0$ для всех

$x \in [0, 1]$, а

$$\int_0^1 f_n(x)\,dx = \int_0^{1/2n} 2n\alpha_n x\,dx - \int_{1/2n}^{1/n} 2n\alpha_n\left(\frac{1}{n} - x\right)dx = \frac{\alpha_n}{2n}.$$

Очевидно, далее, что

$$r_n = \sup_{0\leqslant x\leqslant 1} |f_n(x) - 0| = \alpha_n.$$

Последовательность $\{f_n(x)\}$ равномерно сходится на $[0, 1]$ тогда и только тогда, когда $\alpha_n \to 0$. Равенство

$$\int_0^1 f_n(x)\,dx \to \int_0^1 f(x)\,dx \qquad (f(x) \equiv 0) \tag{17}$$

выполняется тогда и только тогда, когда $\frac{\alpha_n}{2n} \to 0$ $(n \to \infty)$.

Мы видим, что из равномерной сходимости f_n к $f = 0$ на $[0, 1]$ следует сходимость интегралов (17), что согласуется с теоремой 2. Но последовательность $\{f_n\}$ может сходиться неравномерно, в то время как свойство (17) все же соблюдается, например, при $\alpha_n = 1$. Но уже, например, при $\alpha_n = n$ последовательность $\{f_n\}$ не только сходится к нулю неравномерно, но и свойство (17) не соблюдается.

Пример 3. Из равенства $(1 - z)^{-1} = 1 + z + z^2 + \ldots$ $(z = \rho e^{i\theta}$, $\rho < 1)$ следует, что

$$\frac{1 + \rho e^{i\theta}}{2(1 - \rho e^{i\theta})} = \frac{1}{2} + \rho e^{i\theta} + \rho^2 e^{i2\theta} + \ldots,$$

и отделяя действительную и мнимую части, получим

$$P_\rho(\theta) = \frac{1}{2}\,\frac{1 - \rho^2}{1 - 2\rho\cos\theta + \rho^2} = \frac{1}{2} + \rho\cos\theta + \rho^2\cos 2\theta + \ldots,$$

$$Q_\rho(\theta) = \frac{\rho\sin\theta}{1 - 2\rho\cos\theta + \rho^2} = \rho\sin\theta + \rho^2\sin 2\theta + \ldots$$

Функция $P_\rho(\theta)$ называется *ядром Пуассона*, а $Q_\rho(\theta)$ — *ему сопряженной функцией*.

Упражнение. Показать, что $P_\rho(\theta)$ и $Q_\rho(\theta)$ — гармонические функции (для $\rho < 1$), т. е. удовлетворяют дифференциальному уравнению Лапласа ($\Delta u = 0$; см. § 7.26, (15) и (17)). Для этого проверить, что $\rho^n\cos n\theta$ при любых n и $\rho \geqslant 0$ — гармоническая функция и применить теорему о почленном дифференцировании равномерно сходящихся рядов (то же для $\rho^n \sin n\theta$).

Пример 4. Будем исходить из равенства

$$\frac{1}{1 - x} = 1 - x + x^3 - \ldots \qquad (-1 < x < 1), \tag{18}$$

где ряд справа есть сумма убывающей геометрической прогрессии со знаменателем $(-x)$.

На основании теоремы Вейерштрасса ряд (18) равномерно сходится на любом отрезке $[-q, q]$, где $0 < q < 1$, потому что на этом отрезке

$$|(-1)^k x^k| \leqslant q \quad \text{и} \quad \sum_{k=0}^{\infty} q^k < \infty.$$

Поэтому в силу теоремы 2 ряд (18) законно проинтегрировать на $[0, x]$, где $x \in [-q, q]$:

$$\ln(1+x) = \int_0^x \frac{dt}{1+t} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots \tag{19}$$

Так как положительное число $q < 1$ произвольно, то равенство (19) справедливо для всех $x \in (-1, 1)$.

При $x = -1$ обе части (19) не имеют смысла. Однако при $x = 1$ они имеют смысл: левая часть равна $\ln 2$, а правая есть сумма сходящегося ряда $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \ldots$ Возникает вопрос, верно ли равенство

$$\ln 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \ldots$$

и, таким образом, верно ли равенство (19) не только на интервале $(-1, +1)$, но и на полуинтервале $(-1, +1]$.

Покажем, что это так. Ряд (19) на самом деле равномерно сходится на всем отрезке $[0, 1]$. Это следует из признака равномерной сходимости Абеля (см. теорему 4, § 11.7).

Действительно, общий член ряда (19) можно записать в виде

$$(-1)^{k-1}\frac{x^k}{k} = \alpha_k\beta_k, \quad \alpha_k = \frac{(-1)^{k-1}}{k}, \quad \beta_k = x^k \quad (k = 0, 1, \ldots).$$

При этом числовой ряд $\sum \alpha_k$ сходится. Но его можно рассматривать как равномерно сходящийся ряд постоянных функций. С другой стороны, функции $\beta_k = x^k$ ограничены ($|x^k| \leqslant 1$, $x \in [0, 1]$) и образуют при возрастании k монотонную последовательность.

Итак, ряд (19) равномерно сходится на $[0, 1]$. Его члены непрерывные функции, поэтому его сумма есть некоторая непрерывная на $[0, 1]$ функция, которую мы обозначим через $\psi(x)$.

Возникла следующая ситуация. Функция $\psi(x)$ и $\ln(1+x)$ непрерывны на $[0, 1]$ и совпадают на $[0, 1)$. Тогда, очевидно, они совпадают при $x = 1$ тоже, т. е. $\ln 2 = \psi(1) = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \ldots$.

Другое доказательство этих фактов было дано в §§ 5.10, 5.11.

§ 11.9. Кратные ряды. Перемножение абсолютно сходящихся рядов

Выражение

$$\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty} a_{kl}, \tag{1}$$

где a_{kl} — числа (действительные или комплексные), зависящие от пар индексов k, $l = 0, 1, 2, \ldots$, называется *двойным* или *двукратным рядом*. Числа a_{kl} называются *членами*, а числа

$$S_{mn} = \sum_{k=0}^{m}\sum_{l=0}^{n} a_{kl} \quad (m, n = 0, 1, 2, \ldots) \tag{2}$$

— *частичными суммами ряда* (1).

По определению, ряд (1) сходится к числу S, называемому *суммой ряда* (1), если существует

$$\lim_{m,n\to\infty} S_{mn} = S, \tag{3}$$

т. е. если для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое N, что

$$|S - S_{mn}| < \varepsilon$$

для всех m, $n > N$. В этом случае пишут

$$S = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} a_{kl}.$$

Остановимся на случае, когда члены ряда (1) неотрицательны ($a_{kl} \geqslant 0$). Положим

$$\Lambda = \sup_{m,n} S_{mn}. \tag{4}$$

Если $\Lambda < \infty$ — конечное число, то для любого $\varepsilon > 0$ найдется пара m_0, n_0 такая, что $\Lambda - \varepsilon < S_{m_0 n_0} \leqslant \Lambda$, а вследствие неотрицательности a_{kl}

$$S_{m_0 n_0} \leqslant S_{mn}, \quad m, n > N = \max(m_0, n_0).$$

Поэтому $\Lambda - \varepsilon < S_{mn} < \Lambda + \varepsilon$, m, $n > N$, и существует предел $\lim\limits_{m,n\to\infty} S_{mn} = S = \Lambda$.

Если же $\Lambda = \infty$, то, очевидно (при $a_{kl} \geqslant 0$!), $\lim\limits_{m,n\to\infty} S_{mn} = S = \infty$. В этом случае пишут

$$\sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} a_{kl} = \infty.$$

Ряд (1) называется *абсолютно сходящимся*, если сходится ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \sum\limits_{l=0}^{\infty} |a_{kl}|$. Как и в случае обычных рядов, доказывается (прибегая к условию Коши), что абсолютно сходящийся ряд сходится.

Наряду с рядом (1) можно рассматривать еще выражение

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{l=0}^{\infty} a_{kl} \right),$$

которому естественно приписать число A (если только оно существует), получаемое следующим образом: если для каждого $k = 0, 1, \ldots$ ряд, заключенный в скобки, сходится и имеет сумму A_k и ряд $\sum\limits_{0}^{\infty} A_k$ сходится к числу A, то полагаем

$$A = \sum_{k=0}^{\infty} A_k = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{l=0}^{\infty} a_{kl} \right). \tag{5}$$

Теорема 1. *Если ряд* (1) *абсолютно сходится, то имеет место равенство*

$$\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty} a_{kl} = \sum_{k=0}^{\infty}\left(\sum_{l=0}^{\infty} a_{kl}\right). \tag{6}$$

Доказательство. Допустим сначала, что a_{kl} неотрицательны. Пусть левая часть (6) (имеющая смысл!) равна числу S.

Для любых неотрицательных s и n при $s \leqslant m$

$$\sum_{l=0}^{n} a_{sl} \leqslant \sum_{k=0}^{m}\sum_{l=0}^{n} a_{kl} \leqslant S, \tag{7}$$

откуда ряды $\sum\limits_{l=0}^{\infty} a_{sl}$ $(s = 0, 1, 2, \ldots)$ сходятся; поэтому, если во втором неравенстве зафиксировать m и перейти к пределу при $n \to \infty$, получим, что

$$\sum_{k=0}^{m}\left(\sum_{l=0}^{\infty} a_{kl}\right) \leqslant S$$

для любого m, откуда следует существование числа A (см. (5)) и тот факт, что $A \leqslant S$.

С другой стороны, если число A конечно, то при любых m, n

$$S_{mn} = \sum_{k=0}^{m}\sum_{l=0}^{n} a_{kl} \leqslant \sum_{k=0}^{m}\left(\sum_{l=0}^{\infty} a_{kl}\right) \leqslant A,$$

и потому

$$S = \sup_{m,n} S_{mn} \leqslant A.$$

Равенство (6) при $a_{kl} \geqslant 0$ доказано.

Пусть теперь a_{kl} действительны. Положим

$$a_{kl}^{+} = \begin{cases} a_{kl} & (a_{kl} \geqslant 0), \\ 0 & (a_{kl} < 0), \end{cases} \qquad a_{kl}^{-} = \begin{cases} -a_{kl} & (a_{kl} \leqslant 0), \\ 0 & (a_{kl} > 0). \end{cases}$$

Тогда

$$a_{kl} = a_{kl}^{+} - a_{kl}^{-}, \quad a_{kl}^{+} + a_{kl}^{-} = |a_{kl}|.$$

Поэтому из сходимости ряда $\sum\sum |a_{kl}|$ следует сходимость рядов $\sum\sum a_{kl}^{+}$, $\sum\sum a_{kl}^{-}$ с неотрицательными членами и потому

$$\sum\sum a_{kl} = \sum\sum a_{kl}^{+} - \sum\sum a_{kl}^{-} =$$
$$= \sum_{k}\left(\sum_{l} a_{kl}^{+}\right) - \sum_{k}\left(\sum_{l} a_{kl}^{-}\right) = \sum_{k}\left(\sum_{l} a_{kl}\right).$$

Наконец, если $a_{kl} = \alpha_{kl} + i\beta_{kl}$ — комплексные числа и ряд $\sum\sum |a_{kl}|$ сходится, то сходятся также ряды $\sum\sum |\alpha_{kl}|$, $\sum\sum |\beta_{kl}|$, где α_{kl} и β_{kl} — действительные числа, поэтому

$$\sum\sum a_{kl} = \sum\sum \alpha_{kl} + i\sum\sum \beta_{kl} =$$
$$= \sum_k\Bigl(\sum_l \alpha_{kl}\Bigr) + i\sum_k\Bigl(\sum_l \beta_{kl}\Bigr) = \sum_k\Bigl(\sum_l a_{kl}\Bigr).$$

Теорема доказана полностью.

Рассмотрим еще новый вопрос. Пусть задан двойной ряд (1), сходящийся и притом абсолютно. Его сумму S, так же как сумму S' ряда, составленного из абсолютных величин его членов, можно записать в виде пределов последовательностей

$$S = \lim_{n\to\infty}\sum_0^n\sum_0^n a_{kl} = \lim_{n\to\infty} S_{nn}, \quad S' = \lim_{n\to\infty}\sum_0^n\sum_0^n |a_{kl}| = \lim_{n\to\infty} S'_{nn},$$

обычных, зависящих только от одного индекса n. Последовательностям $\{S_{nn}\}$, $\{S'_{nn}\}$ соответствуют сходящиеся ряды

$$S = a_{00} + (a_{10} + a_{11} + a_{01}) +$$
$$+ (a_{20} + a_{21} + a_{22} + a_{12} + a_{02}) + (a_{30} + \ldots) + \ldots, \tag{8}$$

$$|a_{00}| + (|a_{10}| + |a_{11}| + |a_{01}|) +$$
$$+ (|a_{20}| + |a_{21}| + |a_{22}| + |a_{12}| + |a_{02}|) + \ldots \tag{9}$$

с членами, равными суммам чисел, стоящих в скобках. Но в скобках второго ряда стоят неотрицательные числа, поэтому сходимость его не изменится, если в нем скобки вычеркнуть:

$$|a_{00}| + |a_{10}| + |a_{01}| + |a_{20}| + \ldots \tag{10}$$

Но тогда ряд

$$a_{00} + a_{10} + a_{01} + a_{20} + \ldots, \tag{11}$$

полученный вычеркиванием в (8) всех скобок, абсолютно сходится, следовательно, сходится, очевидно к S.

Мы доказали, что если двойной ряд (1) сходится к числу S и притом абсолютно, то полученный из него обычный (однократный) ряд (11) сходится тоже к S и тоже абсолютно. Но члены абсолютно сходящегося ряда можно переставлять как угодно, не нарушая его сходимости и не изменяя суммы.

Этим доказана следующая теорема:

Теорема 2. *Если члены двойного ряда* (1), *сходящегося к числу S и притом абсолютно, перенумеровать любым способом* ($v_0, v_1, v_2, \ldots$) *при помощи одного индекса, и составить ряд $v_0 + v_1 + v_2 + \ldots$, то последний будет сходиться к тому же числу S* (*абсолютно*).

В заключение заметим, что можно рассматривать трех-, четырех- и вообще n-кратные ряды

$$\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} a_{klm}, \ \ldots, \ \sum_{k_1=0}^{\infty}\ldots\sum_{k_n=0}^{\infty} a_{k_1, \ldots, k_n}.$$

Для них могут быть доказаны по аналогии теоремы, аналогичные теоремам 1—3.

§ 11.10. Суммирование рядов и последовательностей методом средних арифметических

Пусть задан числовой ряд

$$u_0 + u_1 + u_2 + \ldots \tag{1}$$

Положим

$$S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_n, \tag{2}$$

$$\sigma_n = \frac{S_0 + S_1 + \ldots + S_n}{n+1} \quad (n = 0, 1, 2, \ldots). \tag{3}$$

По определению, ряд (1) (или последовательность $\{S_n\}$) суммируется методом средних арифметических к числу σ, если существует предел

$$\lim_{n\to\infty} \sigma_n = \sigma. \tag{4}$$

Теорема. *Если ряд* (1) *сходится к числу S, то он суммируется методом средних арифметических и притом к тому же числу S.*

Доказательство. Пусть ряд (1) сходится; тогда существует такое $M > 0$, что

$$|S_j| \leqslant M \quad (j = 0, 1, \ldots), \tag{5}$$

и такое достаточно большое натуральное n, которое мы будем считать фиксированным (а k, и в дальнейшем p — переменными), что

$$|S_{n+k} - S| < \varepsilon \quad (k = 1, 2, \ldots). \tag{6}$$

Имеем, далее,

$$S - \sigma_{n+p} = \\ = \left(S - \frac{1}{p}\sum_{k=1}^{p} S_{n+k}\right) + \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{n+p+1}\right)\sum_{k=1}^{p} S_{n+k} - \frac{1}{n+p+1}\sum_{k=0}^{n} S_k,$$

откуда, учитывая, что $\frac{1}{p} - \frac{1}{n+p+1} = \frac{n+1}{p(n+p+1)}$, получим

$$|S - \sigma_{n+p}| < \varepsilon + \frac{n+1}{n+p+1}M + \frac{n+1}{n+p+1}M < \varepsilon + \varepsilon + \varepsilon = 3\varepsilon \ (p > p_0),$$

если p_0 достаточно велико. Следовательно, $\sigma_{n+p} \to S$ $(p \to \infty)$ или, что все равно, $\sigma_j \to S$ $(j \to \infty)$, т. е. теорема верна.

Пример. Ряд $1 - 1 + 1 - \ldots$ расходится, но он суммируется к числу $1/2$ методом средних арифметических.

§ 11.11. Степенные ряды

Ряд вида
$$a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots, \tag{1}$$
где a_k $(k = 0, 1, 2, \ldots)$ — постоянные, вообще говоря, комплексные числа, а z — комплексная переменная, называется *степенным рядом* с коэффициентами a_k.

В теории степенных рядов центральное место занимает следующая основная теорема.

Теорема 1 (основная). *Для степенного ряда* (1) *существует неотрицательное число R, конечное или бесконечное* $(0 \leqslant R \leqslant \infty)$, *обладающее следующими свойствами:*

1) *ряд сходится, и притом абсолютно, в открытом круге $|z| < R$ и расходится в точках z с $|z| > R$,*

2) *число R определяется по формуле*
$$R = \frac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|}}, \tag{2}$$
где в знаменателе стоит верхний предел (*см.* § 3.7).

Мы позволяем себе при этом считать, что $1/0 = \infty$, $1/\infty = 0$. Таким образом, если указанный верхний предел равен 0, то $R = \infty$, если же он равен ∞, то $R = 0$.

Открытый круг $|z| < R$ называется *кругом сходимости степенного ряда*. При $R = \infty$ он превращается во всю комплексную плоскость. При $R = 0$ степенной ряд имеет только одну точку сходимости, именно, точку $z = 0$.

Замечание 1. Число R, удовлетворяющее утверждению 1) теоремы 1, очевидно, единственно.

Замечание 2. Если для степенного ряда (1) существует обычный предел $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$, то он равен верхнему пределу $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|}$. Поэтому в этом случае
$$R = 1 \Big/ \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}.$$

Читатель, не ознакомившийся с понятием верхнего предела, может проследить за ходом доказательства теоремы 1, предположив, что для рассматриваемого степенного ряда указанный предел существует. В этом случае всюду в проводимых ниже рассуждениях надо заменить $\overline{\lim}$ на $\lim$.

Доказательство теоремы 1. Пусть число R определяется по формуле (2). В точке $z = 0$ степенной ряд сходится, поэтому теорема при $z = 0$, $|z| = 0 < R$, верна.

Будем далее считать, что $|z|>0$. Наряду с рядом (1) введем второй ряд, составленный из его модулей,

$$|a_0|+|a_1z|+|a_2z^2|+\ldots. \tag{1'}$$

Общий член второго ряда обозначим через

$$u_n=|a_nz^n| \quad (n=0,1,2,\ldots). \tag{3}$$

Согласно обобщенному признаку Коши сходимости ряда (см. § 11.3 теорема 3, в)), если $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\sqrt[n]{u_n}<1$, то ряд (1′) сходится, если же $\overline{\lim}\sqrt[n]{u_n}>1$, то ряд (1) расходится и его общий член не ограничен. Но

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{u_n}=\overline{\lim}\sqrt[n]{|a_nz^n|}=\overline{\lim}\left(|z|\sqrt[n]{|a_n|}\right)=$$

$$=|z|\,\overline{\lim}\sqrt[n]{|a_n|}=|z|/R.$$

Здесь мы вынесли за знак верхнего предела конечное число $|z|>0$ (см. § 3.7, теорема 6).

Из сказанного следует:

Если $|z|<R$, т. е. $|z|/R<1$, то ряд (1′) сходится, а вместе с ним сходится, и притом абсолютно, ряд (1).

Если же $|z|>R$, т. е. $|z|/R>1$, то ряд (1) расходится и его общий член $|a_nz^n|$ не ограничен, поэтому общий член ряда (1) a_nz^n не стремится к нулю при $n\to\infty$ и для него не выполняется необходимый признак (см. § 11.1 (4)). Это показывает, что ряд (1) расходится.

Итак, мы доказали, что определяемое из равенства (2) число R обладает следующим свойством: если $|z|<R$, то ряд (1) сходится, если же $|z|>R$, то ряд (1) расходится.

Основная теорема доказана.

Будем в дальнейшем для краткости обозначать через σ_q замкнутый круг $|z|\leqslant q$ комплексной плоскости. Заметим, что наш степенной ряд сходится на открытом круге $|z|<R$, вообще говоря, неравномерно. Однако, верна следующая теорема:

Теорема 2. *Степенной ряд* (1) *абсолютно и равномерно сходится на любом круге* $\sigma_q=\{z\colon |z|\leqslant q\}$, *где* $q<R$, *а* R — *радиус сходимости ряда* (1).

Доказательство. В самом деле, пусть $q<R$, тогда q есть действительная, т. е. лежащая на оси x, точка, принадлежащая открытому кругу сходимости ряда (1). Поэтому в этой точке наш степенной ряд абсолютно сходится, т. е. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}|a_nq^n|<\infty$. С другой стороны,

$$|a_nz^n|\leqslant|a_nq^n| \quad (n=0,1,2,\ldots), \quad z\in\sigma_q.$$

Так как правые части этих неравенств не зависят от $z \in \sigma_q$, и ряд, составленный из правых частей, сходится, то по признаку Вейерштрасса (см. § 11.7, теорема 1) степенной ряд (1) сходится на σ_q абсолютно и равномерно.

Из теоремы 2 как следствие вытекает

Теорема 3. *Сумма*

$$s(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots$$

степенного ряда есть непрерывная функция на его открытом круге сходимости $|z| < R$.

В самом деле, члены нашего ряда — непрерывные функции от z, а сам ряд равномерно сходится на круге σ_q, $q < R$. Следовательно, по известной теореме из теории равномерно сходящихся рядов (см. § 11.7, теорема 2) сумма ряда $s(z)$ есть непрерывная функция на σ_q, но тогда и на всем круге $|z| < R$, потому что $q < R$ произвольно.

Для вычисления радиуса сходимости степенного ряда в нашем распоряжении имеется формула (2), но часто на практике при вычислении R удобно бывает воспользоваться признаком Даламбера.

Пусть существует предел (конечный или бесконечный)

$$\lim_{n\to\infty} |a_{n+1}/a_n|, \tag{4}$$

который мы пока обозначим через $1/R_1$. Тогда (см. (3))

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim \frac{|a_{n+1}z^{n+1}|}{|a_n z^n|} = |z| \lim \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{|z|}{R_1},$$

и, согласно признаку Даламбера (§ 11.3, теорема 2), если $|z| < R_1$, то ряд (1′), а вместе с ним и ряд (1), сходится, если же $|z| > R_1$, то $|u_n| \to \infty$ и ряд (1) расходится.

Но число R с такими свойствами может быть единственным, поэтому $R_1 = R$ (см. теорему 1).

Итак, мы доказали, что *если существует предел* (4), *то он равен* $1/R$:

$$\lim_{n\to\infty} |a_{n+1}/a_n| = 1/R, \tag{5}$$

где R — радиус сходимости степенного ряда (1).

Заметим, что мы окольным путем доказали, что если предел (4) (конечный или бесконечный) существует, то он равен верхнему пределу $\overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n|}$. На самом деле имеет место более сильное утверждение, которое доказано в § 11.3 (замечание 2): существование предела (4) (конечного или бесконечного) влечет за собой существование равного ему предела $\lim \sqrt[n]{|a_n|}$.

Замечание 3. В учебной литературе (также как в первом и втором изданиях нашего курса) обычно начинают изложение степенных рядов с теоремы Абеля, которая гласит:

Теорема Абеля. *Если степенной ряд* (1) *сходится в точке* $z_0 \neq 0$ *комплексной плоскости, то он сходится абсолютно и равномерно в замкнутом круге* $|z| \leqslant q$, *где* q — *любое число, удовлетворяющее неравенствам* $0 < q < |z_0|$.

Доказательство. Эта теорема теперь уже является следствием из теорем 1 и 2. В самом деле, так как z_0 есть точка сходимости ряда (1), то $|z_0|$ не может быть бо́льшим, чем R. Поэтому $|z_0| \leqslant R$, $0 < q < |z_0| \leqslant R$ и $q < R$. Но тогда по теореме 2 степенной ряд (1) сходится на круге $|z| \leqslant q$ абсолютно и равномерно.

Примеры.

$$1 + z + z^2 + \ldots, \tag{6}$$

$$1 + \frac{z}{1^\alpha} + \frac{z^2}{2^\alpha} + \ldots \quad (\alpha > 0), \tag{7}$$

$$1 + z + 2!z^2 + 3!z^3 + \ldots, \tag{8}$$

$$1 + \frac{z}{1} + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \ldots \tag{9}$$

С помощью формулы (2) заключаем, что радиус сходимости рядов (6) и (7) равен 1; для ряда (8) он равен 0 и для ряда (9) равен ∞.

Сумма ряда (6) (геометрической прогрессии) в открытом круге $|z| < 1$ равна $(1-z)^{-1}$, а остаток

$$r_n(z) = \frac{z^{n+1}}{1-z} \to 0 \quad (n \to \infty).$$

Однако сходимость на указанном круге неравномерна. Неравномерность сходимости имеет место уже для положительных $z = x$ на интервале $0 < x < 1$; неравенство

$$\varepsilon > \frac{x^{n+1}}{1-x}$$

при любом заданном n нельзя удовлетворить для всех указанных x.

Ряд (7) при $\alpha > 1$ равномерно сходится на замкнутом круге $|z| \leqslant 1$ его сходимости, так как

$$z^k/k^\alpha \leqslant k^{-\alpha} \quad \text{и} \quad \sum k^{-\alpha} < \infty \quad (|z| \leqslant 1).$$

Если же $0 < \alpha \leqslant 1$, то в точке $z = 1$ ряд (7), очевидно, расходится. Остальные точки z с $|z| = 1$ запишем следующим образом: $z = e^{i\theta}$, $0 < \theta < 2\pi$,

$$z^n = e^{in\theta} = \cos n\theta + i \sin n\theta$$

и

$$1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^\alpha} = \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\theta}{n^\alpha}\right) + i \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\theta}{n^\alpha}.$$

Оба полученные ряда (по косинусам и по синусам) для $0 < \theta < 2\pi$ сходятся (см. § 11.8 пример 3). Таким образом, ряд (7) сходится во всех точках окружности $|z| = 1$, кроме $z = 1$.

Ряд (8) сходится только в точке $z = 0$, а ряд (9) схдоится во всех точках z комплексной плоскости, притом равномерно на любом круге $|z| \leqslant q < \infty$.

§ 11.12. Дифференцирование и интегрирование степенных рядов

Теорема 1. *Радиусы сходимости степенного ряда*

$$a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots \tag{1}$$

и ряда, полученного из него формальным дифференцированием

$$a_1 + 2a_2 z + 3a_3 z^2 + \ldots, \tag{2}$$

совпадают.

Доказательство. Пусть R есть радиус сходимости ряда (1), а R_1 — радиус сходимости ряда (2). Тогда (см. § 3.7, теорема 6)

$$\frac{1}{R_1} = \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|(n+1)a_n|} = \overline{\lim} \left(\sqrt[n]{n+1},\ \sqrt[n]{|a_n|}\right) =$$

$$= \lim \sqrt[n]{n+1} \cdot \overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n|} = 1 \cdot \frac{1}{R} = \frac{1}{R}$$

и $R = R_1$.

Теорема 2. *Степенной ряд*

$$f(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots \qquad |z| < R \tag{3}$$

законно формально дифференцировать в пределах его (открытого) круга сходимости $|z| < R$, т. е. верна формула

$$f'(z) = a_1 + 2a_2 z + 3a_3 z^2 + \ldots, \qquad |z| < R. \tag{4}$$

Доказательство. Эту теорему мы докажем сначала в предположении, что $z = x$ есть действительная переменная; это даст нам возможность свести вопрос к хорошо известному факту из теории действительных рядов. Итак, степенной ряд (3) для действительной переменной $z = x$ имеет вид:

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots, \qquad -R < x < R. \tag{3'}$$

Этот ряд теперь уже имеет не круг, а интервал сходимости $(-R, R)$.

Соответствующий формально продифференцированный ряд имеет вид

$$\varphi(x) = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \ldots \tag{4'}$$

Его сумму мы пока обозначили через $\varphi(x)$. Он сходится на интервале $(-R, R)$ на основании предыдущей теоремы.

Оба ряда, как мы знаем, равномерно сходятся на отрезке $[-q, q]$, где $q < R$. При этом члены второго ряда непрерывны и являются производными от соответствующих членов первого. Но тогда на основании известной теоремы из теории равномерно сходящихся рядов (см. § 11.8, теорема 3) выполняется равенство

$$\varphi(x) = f'(x) \tag{5}$$

на отрезке $[-q, q]$, следовательно, и на интервале $(-R, R)$, потому что $q < R$ произвольно.

Переходим к доказательству теоремы в общем случае — для комплексного z. Оно, конечно, годится и для действительных x. Пусть z — произвольная точка круга

$$|z| < R$$

и число (конечное!) R_1 удовлетворяет неравенству

$$|z| < R_1 < R.$$

Будем рассматривать только такие комплексные h, для которых

$$|h| < R_1 - |z| = \delta.$$

Тогда

$$|z + h| < R_1$$

и

$$\frac{f(z+h) - f(z)}{h} = \alpha_1(h) + \alpha_2(h) + \ldots, \tag{6}$$

где

$$\alpha_n(h) = a_n \frac{(z+h)^n - z^n}{h} = a_n\left((z+h)^{n-1} + (z+h)^{n-2}z + \ldots + z^{n-1}\right)$$

$$(|h| > 0, \ n = 1, 2, \ldots).$$

Положим еще

$$\alpha_n(0) = a_n \lim_{h \to 0} \frac{(z+h)^n - z^n}{h} = n a_n z^{n-1}. \tag{7}$$

В силу этого допущения члены ряда (6) определены не только для $|h| > 0$, но и для $h = 0$, и притом они оказываются непрерывными функциями от h на круге

$$|h| \leqslant \delta.$$

Для них имеет место оценка

$$|\alpha_n(h)| \leqslant |a_n| \left(R_1^{n-1} + R_1^{n-2}R_1 + \ldots + R_1^{n-1}\right) = n|a_n| R_1^{n-1} \quad (|h| \leqslant \delta).$$

Положительные числа, стоящие в правых частях неравенства, не зависят от h, а ряд, составленный из них, сходится. Ведь R — радиус сходимости ряда (2), а $R_1 < R$. Но в таком случае по теореме Вейерштрасса ряд (6) функций, непрерывных на круге

$|h| \leqslant \delta$, равномерно сходится на этом круге. Это показывает, что сумма ряда (6) есть также непрерывная функция от h на этом круге, в частности, при $h=0$. Но тогда существует предел

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(z+h)-f(z)}{h}=\alpha_1(0)+\alpha_2(0)+\ldots$$

при любом способе стремления комплексных h к нулю. Таким образом, для любого z с

$$|z|<R$$

существует производная $f'(z)$ (в смысле комплексного переменного), равная

$$f'(z)=a_1+2a_2z+3a_3z^2+\ldots,$$

что доказывает теорему для комплексных z.

Отметим, что в силу теоремы 1 ряд (1) законно почленно дифференцировать сколько угодно раз. На k-м этапе мы получим равенство

$$f^{(k)}(z)=k!a_k+(k+1)k\ldots 2a_{k+1}z+\ldots,$$

справедливое для всех z с $|z|<R$. Если положить в нем $z=0$, то получим $f^{(k)}(0)=k!a_k$ или

$$a_k=\frac{f^k(0)}{k!}\qquad(k=0,1,2,\ldots).$$

Отсюда, в частности, следует, что *разложение функции* $f(z)$ *в степенной ряд* (см. (1)) *в некотором круге* $|z|<R$ (*или в интервале* $(-R<x<R)$, *если речь идет о функции* $f(x)$ *действительного переменного* x) *единственно.*

Вопрос о почленном интегрировании степенных рядов во всей его полноте потребовал бы введения криволинейного интеграла от функции комплексной переменной. Мы ограничимся здесь рассмотрением этого вопроса только для степенных рядов

$$f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots \tag{8}$$

от действительной переменной x $(z=x)$.

Если по-прежнему $R=1\Big/\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|a_n|}$ и $R>0$, то для всех x, принадлежащих интервалу $(-R,\ R)$, называемому интервалом сходимости степенного ряда (8), этот ряд сходится, и притом абсолютно. Для всех же x с $|x|>R$ (при конечном R) общий член ряда не ограничен, и ряд расходится. Конечно, если $R=0$, то ряд (8) имеет единственную точку сходимости $x=0$.

Итак, пусть задан степенной ряд (8), сходящийся на интервале $-R<x<R$, где $0<R\leqslant\infty$. Числа a_k могут быть действительными и комплексными. Зададим фиксированную точку $x_0\in(-R,\ R)$ и переменную точку $x\in(-R,\ R)$ и подберем $q>0$

так, чтобы $-R<-q<x_0$, $x<q<R$. Степенной ряд (8) равномерно сходится на отрезке $[-q, q]$, находящемся строго внутри интервала сходимости ряда. Но тогда его можно почленно интегрировать (§ 11.8, теорема 2) на отрезке, соединяющем x_0 с x:

$$\int_{x_0}^{x} f(t)\,dt = a_0(x-x_0)+\frac{a_1}{2}(x^2-x_0^2)+\frac{a_2}{3}(x^3-x_0^3)+\dots$$

$$(-R<x, x_0<R). \tag{9}$$

В частности, при $x_0=0$ получим

$$\int_{0}^{x} f(t)\,dt = a_0x+\frac{a_1}{2}x^2+\frac{a_2}{3}x^3+\dots \quad (-R<x<R). \tag{10}$$

Примеры.

$$\operatorname{arctg} x = x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\dots\ (-1\leqslant x\leqslant 1), \tag{11}$$

$$\arcsin x = x+\frac{x^3}{2\cdot 3}+\frac{1\cdot 3}{2!}\frac{x^5}{2^2 5}+\frac{1\cdot 3\cdot 5}{3!}\frac{x^7}{2^3 7}+\dots\ (-1\leqslant x\leqslant 1). \tag{12}$$

Для $x\in(-1, 1)$ эти равенства получаются соответственно почленным интегрированием на отрезке, соединяющем 0 и x известных равенств

$$\frac{1}{1+x^2}=1-x^2+x^4-\dots,$$

$$\frac{1}{(1-x^2)^{1/2}}=1+\frac{x^2}{2}+\frac{1\cdot 3}{2!}\frac{x^4}{2^2}+\frac{1\cdot 3\cdot 5}{3!}\frac{x^6}{2^3}+\dots \tag{13}$$

Ряд (11) при $x=1, -1$ сходится по признаку Лейбница. Само же равенство (11) справедливо на основании доказываемой ниже второй теоремы Абеля.

Ряд (13) при $x=1, -1$ не может сходиться, иначе его сумма по второй теореме Абеля была бы непрерывной функцией на $[-1, +1]$. Все же ряд (12) при $x=1, -1$ сходится, потому что в этом случае абсолютная величина его общего члена равна (пояснения ниже)

$$|u_n|=\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!\,(2n+1)}=\frac{(2n-1)!!\,(2n)!!}{((2n)!!)^2(2n+1)}=\frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2(2n+1)}\approx$$

$$\approx\frac{\sqrt{2\pi}\,(2n)^{2n+(1/2)}e^{-2n}}{2^{2n}2\pi n^{2n+1}e^{-2n}(2n+1)}=\sqrt{\frac{1}{\pi}}\,\frac{1}{\sqrt{n}\,(2n+1)}\quad(n\to\infty).$$

Мы пользуемся обозначениями, которые уже употреблялись в § 9.18. В четвертом соотношении ($\approx$) применена формула Стирлинга (§ 9.18, (6)). Ряд, общий член которого равен правой части нашей цепи, сходится, но тогда сходится и ряд $\sum u_n$ (см. § 11.3, (1)).

В силу второй теоремы Абеля сходимость ряда (12) при $x=\pm 1$ влечет непрерывность на $[-1, +1]$ его суммы $S(x)$. Но имеет место равенство $S(x)=\arcsin x$ на $(-1, +1)$, а $\arcsin x$ непрерывна на $[-1, +1]$, поэтому это равенство верно и на $[-1, +1]$.

Вторая теорема Абеля. *Если степенной ряд*

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots \tag{14}$$

имеет радиус сходимости $R < \infty$ и ряд (14) сходится при $x = R$, то функция $f(x)$ непрерывна не только на интервале $(-R, R)$, но и на полуинтервале $(-R, R]$.

В самом деле, общий член ряда (14) можно записать в виде

$$a_n x^n = a_n R^n (x/R)^n,$$

где (постоянные) числа $a_n R^n$ можно рассматривать как члены сходящегося ряда, а функции $(x/R)^n$ образуют невозрастающую на $[0, R]$ ограниченную последовательность $(1 \geqslant (x/R)^n \geqslant (x/R)^{n+1}$, $n = 0, 1, \ldots)$. Поэтому согласно признаку Абеля (см. § 11.7, теорема 4) ряд (14) непрерывных на отрезке $[0, R]$ функций сходится на нем равномерно, и следовательно, его сумма $f(x)$ есть непрерывная функция на $[0, R]$.

§ 11.13. Степенные ряды функций e^z, $\cos z$, $\sin z$ комплексной переменной

Функции e^z, $\cos z$, $\sin z$ комплексной переменной z определяются как суммы рядов:

$$\exp z = e^z = 1 + \frac{z}{1} + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \ldots, \tag{1}$$

$$\cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \ldots, \tag{2}$$

$$\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \ldots \tag{3}$$

Эти ряды сходятся для любого комплексного z, потому что радиус сходимости каждого из них равен ∞. Таким образом, функции e^z, $\cos z$, $\sin z$ определены на всей комплексной плоскости. Для действительных

$$z = x$$

это определение приводит к известным действительным функциям e^x, $\cos x$, $\sin x$ (см. § 5.11).

Функция e^z обладает важным функциональным свойством:

$$e^{z+u} = e^z e^u \tag{4}$$

для любых комплексных z, u (см. пример в § 11.9).

Очевидно, что

$$e^{iz} = \cos z + i \sin z, \tag{5}$$

$$\cos z = \frac{1}{2}\left(e^{iz} + e^{-iz}\right), \quad \sin z = \frac{1}{2i}\left(e^{iz} - e^{-iz}\right), \tag{6}$$

для любого комплексного z.

Равенства (6) называются *формулами Эйлера*. Из (6) и (4) следуют обобщения известных тригонометрических формул:

$$\sin(z+u) = \sin z \cos u + \cos z \sin u,$$

$$\cos(z+u) = \cos z \cos u - \sin z \sin u,$$

теперь уже справедливых для произвольных z и u.

Наконец, из (4) следует, что при $z = x + iy$

$$e^z = e^x e^{iy} = e^x(\cos y + i \sin y). \tag{7}$$

Функция $z = \ln w$ от комплексной переменной w определяется как обратная функция к функции

$$w = e^z. \tag{8}$$

Если записать $w \neq 0$ в показательной форме

$$w = \rho e^{i\theta} \qquad (\rho = |w| > 0),$$

то равенство (8) запишется в виде

$$\rho e^{i\theta} = e^x e^{iy} \qquad (z = x + iy).$$

Поэтому

$$z = \ln w = \ln|w| + i \operatorname{Arg} w = \ln|w| + i \arg w + i\, 2k\pi \tag{9}$$
$$(k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots),$$

где $\ln|w|$ ($|w| > 0$) понимается в обычном смысле. Из (9) видно, что $\ln w$ ($w \neq 0$) есть многозначная функция от w вместе с $\operatorname{Arg} w$, независимо от того, будет ли w действительным или комплексным.

Например, с точки зрения этой теории (функций комплексного переменного) $\ln 1$ равен одному из чисел

$$2k\pi i \qquad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots).$$

В действительном анализе для выражения $\ln 1$ выбирают среди этих чисел единственное действительное число 0.

Но мы не будем углубляться дальше в теорию функций комплексного переменного — это не наша задача. Сделаем только замечание по поводу формулы

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots \qquad (-1 < x \leqslant 1), \tag{10}$$

которая была выведена в § 5.11 для действительных x. Если подставить в ряд в правой части (10) вместо x комплексное z с

$$|z| < 1,$$

то ряд останется сходящимся. Можно сказать, что его сумма равна $\ln(1+z)$, так как мы его определили выше, точнее, равна одной из однозначных ветвей многозначной функции

$$\ln(1+z).$$

Функции комплексного переменного, разлагающиеся в степенные ряды (ряды Тейлора), называются *аналитическими функциями*. Они изучаются в разделе математики, называемом теорией аналитических функций или теорией функций комплексного переменного.

В заключение отметим, что если в степенном ряде (по степеням u)

$$a_0 + a_1u + a_2u^2 + \ldots \tag{11}$$

с кругом сходимости $|u| < R$ положить $u = z - z_0$, где z_0 — фиксированное число (вообще говоря, комплексное), то получим ряд

$$a_0 + a_1(z - z_0) + a_2(z - z_0)^2 + \ldots, \tag{12}$$

называемый *степенным рядом по степеням* $z - z_0$. Он сходится в круге (сходимости) $|z - z_0| < R$ и расходится для z, удовлетворяющих неравенству $|z - z_0| > R$.

Дополнение

ПРИБЛИЖЕННОЕ ВЫЧИСЛЕНИЕ ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ФУНКЦИЙ

Функции e^x, $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{ch} x$, $\operatorname{sh} x$ разлагаются в ряд Тейлора по степеням x для любых значений x $(-\infty < x < \infty)$. Эти ряды весьма быстро сходятся к порождающим их функциям.

Например, остаточный член ряда Тейлора функции e^x оценивается, как мы знаем (см. § 5.10), следующим образом:

$$|R_n(x)| = \left|\frac{x^n}{n!} e^{\theta x}\right| \leqslant M(x) \frac{|x|^n}{n!},$$

$$M(x) = \begin{cases} e^x, & x \geqslant 0, \\ 1, & x < 0, \end{cases} \quad 0 < \theta < 1.$$

Если $|x| \leqslant 1$, то остаток $R_n(x)$ при неограниченном возрастании n стремится к нулю очень быстро. В случае, когда $|x| > 1$, убывание к нулю остатка хотя и имеет место, но много медленнее.

Остаточный член ряда Тейлора функции $\sin x$ по степеням x оценивается следующим образом (см. § 5.10):

$$|R_n(x)| < \frac{|x|^{2\nu+1}}{(2\nu+1)!}.$$

Снова, если $|x| < 1$, остаток при $\nu \to \infty$ стремится к нулю очень быстро. Если же нам понадобится вычислить $\sin x$ для $1 \leqslant x \leqslant \pi/2$, то можно воспользоваться разложением

$$\sin x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = 1 - \frac{(\pi - x)^2}{2!} + \frac{(\pi - x)^4}{4!} - \ldots$$

по степеням $\pi/2 - x$, сходящимся для $|\pi/2 - x| < 1$ весьма быстро.

Перейдем теперь к вопросу о вычислении логарифмов и корней.

Ф у н к ц и я $\ln x$. Зададим число $A > 1$. Если $1 < A < 2$, то представим A в виде

$$A = 1 + u \quad (0 < u < 1)$$

и вычислим $\ln A$, воспользовавшись рядом Тейлора функции $\ln(1+u)$ по степеням u:

$$\ln A = \ln(1+u) = u - \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{3} - \ldots \tag{1}$$

Если считать приближенно

$$\ln(1+u) \sim u - \frac{u^2}{2} + \ldots + (-1)^n \frac{u^{n-1}}{n-1}, \tag{2}$$

то ошибка приближения будет равна

$$R_n(u) = (-1)^{n+1} \frac{u^n}{n} + (-1)^{n+2} \frac{u^{n+1}}{n+1} + \ldots,$$

и так как в правой части этого равенства стоит ряд Лейбница (с точностью до знака), то

$$|R_n(u)| \leqslant \frac{u^n}{n}. \tag{3}$$

Правая часть этого неравенства быстро стремится к нулю при $n \to \infty$, например, если $u < 0{,}1$. Чтобы получить при этом условии ошибку, меньшую, чем 10^{-k}, достаточно в приближенном равенстве (2) положить $n = k$. Однако, если бы мы пожелали достигнуть точности, равной 10^{-4} при $u = 1/2$, надо было бы взять $n = 10$:

$$\left|R_n\left(\frac{1}{2}\right)\right| < \frac{(1/2)^{10}}{10} = \frac{1}{10240} < 10^{-4}.$$

Получается много вычислений. А ведь каждый их этап сопровождается еще ошибками другого рода — ошибками вычисления.

Ниже дается способ вычисления натурального логарифма любого числа $A > 1$. Этот способ, даже когда $A < 2$, имеет преимущество перед способом (2).

Имеем

$$\ln\frac{1+x}{1-x} = \left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots\right) - \left(-x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \ldots\right) = 2\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^{2k+1}}{2k+1} \quad (|x| < 1),$$

откуда следует приближенное равенство

$$\ln\frac{1+x}{1-x} \sim 2\sum_{k=0}^{n}\frac{x^{2k+1}}{2k+1} \quad (0 < x < 1) \tag{4}$$

с ошибкой

$$|R_{2n+1}(x)| \leqslant \left(\frac{1}{2n+2} + \frac{1}{1-x}\right)x^n, \tag{5}$$

которая выводится следующим образом.

Приближенные равенства

$$\ln(1+x) \approx x - \frac{x^2}{2} + \ldots + (-1)^{2n}\frac{x^{2n+1}}{2n+1},$$

$$\ln(1-x) \approx -x - \frac{x^2}{2} - \ldots - \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

имеют место с ошибками, не превышающими соответственно

$$\frac{x^{2n+2}}{2n+2}, \quad \frac{x^{2n+2}}{1-x}$$

(см. § 5.10, функция $\ln(1+x)$). Сложив эти ошибки, получим неравенство (5).

Заметим, что функция

$$\psi(x) = \frac{1+x}{1-x} \quad (0 \leqslant x < 1)$$

строго монотонно возрастает на полуинтервале $[0, 1)$ и при этом

$$\psi(0) = 1, \quad \lim_{x\to 1-0}\psi(x) = +\infty.$$

Приближенный метод (4) можно порекомендовать и в случае $1 < A < 2$. Например, чтобы вычислить $\ln(3/2)$, решаем уравнение

$$\frac{3}{2} = \frac{1+x}{1-x}$$

на полуинтервале [0, 1). Получим

$$x = \frac{1}{5} \quad \left(\frac{1}{2} > \frac{1}{5}\ !\right).$$

На основании (4) запишем для примера два приближенных равенства

$$\ln\frac{3}{2} \sim \frac{2}{5} + \frac{2}{3}\left(\frac{1}{5}\right)^3, \tag{6}$$

$$\ln\frac{3}{2} \sim \frac{2}{5} + \frac{2}{3}\left(\frac{1}{5}\right)^3 + \frac{2}{5}\left(\frac{1}{5}\right)^5 \tag{7}$$

с ошибками соответственно

$$(n = 1) \qquad \left|R_3\left(\frac{1}{5}\right)\right| \leqslant \frac{1}{935}, \tag{6'}$$

$$(n = 2) \qquad \left|R_5\left(\frac{1}{5}\right)\right| \leqslant \frac{1}{11025}. \tag{7'}$$

Ряд (3), как мы видим, на этом примере сходится весьма быстро. Для сравнения применим метод (2), где надо положить $u = 1/2$. Имеем, например,

$$\ln\frac{3}{2} \sim \frac{1}{2} - \frac{1}{8} + \frac{1}{24} - \frac{1}{64} + \frac{1}{60}$$

с ошибкой, не превышающей (см. (3))

$$(n = 6) \qquad \left|R_6\left(\frac{1}{2}\right)\right| \leqslant \frac{(1/2)^6}{6} = \frac{1}{384}.$$

Здесь при вычислении $\ln(3/2)$ было использовано 6 членов ряда Тейлора и при этом получена ошибка, не превышающая 1/384, что в 3 раза хуже ошибки (6), полученной с использованием только двух членов.

Заметим, что $u > x$. Ведь

$$u = \frac{1+x}{1-x} - 1 > 1 + x - 1 = x.$$

Число $\sqrt[k]{A}$. Пусть надо вычислить $\sqrt[k]{A}$ $(A > 0)$ для некоторого натурального числа k. Пусть пока

$$A = 1 + x,$$

где $0 < x < 1$. Тогда мы можем для вычисления данного корня

$$\sqrt[k]{A} = \sqrt[k]{1+x}$$

воспользоваться рядом Тейлора

$$\sqrt[k]{1+x} = 1 + \frac{1}{k}x + \frac{1/k\,(1/k - 1)}{2!}x^2 + \ldots \qquad (0 < x < 1). \tag{8}$$

Заметим, что n-й член этого ряда получается из $(n-1)$-го члена умножением последнего на

$$\frac{(1/k) - n + 1}{n}\,x < 0 \qquad (n > 1).$$

Это число отрицательное, и модуль его меньше 1:

$$\frac{|(1/k) - n + 1|}{n}\,x = \frac{n - 1 - (1/k)}{n} < 1.$$

Поэтому ряд (8) есть ряд Лейбница и его n-й остаточный член

$$R_n(x) = \frac{\frac{1}{k}\left(\frac{1}{k} - 1\right)\ldots\left(\frac{1}{k} - n + 1\right)}{n!}x^n + \frac{\frac{1}{k}\left(\frac{1}{k} - 1\right)\ldots\left(\frac{1}{k} - n\right)}{(n+1)!}x^{n+1} + \ldots$$

оценивается следующим образом:

$$|R_n(x)| \leqslant$$
$$\leqslant \left|\frac{\frac{1}{k}\left(\frac{1}{k}-1\right)\ldots\left(\frac{1}{k}-n+1\right)}{n!}\right| x^n = \frac{\frac{1}{k}\left(1-\frac{1}{k}\right)\left(2-\frac{1}{k}\right)\ldots\left(n-1-\frac{1}{k}\right)}{n!} x^n \leqslant x^n.$$

Таким образом, если считать приближенно, что

$$\sqrt[k]{1+x} \approx 1+\frac{1}{k}x+\frac{(1/k)((1/k)-1)}{2!}x^2+\ldots+$$
$$+\frac{(1/k)((1/k)-1)\ldots((1/k)-n+2)}{(n-1)!}x^{n-1} \quad (|x|<1), \tag{9}$$

то ошибка приближения будет удовлетворять неравенству

$$|R_n(x)| \leqslant x^n.$$

Если x достаточно мало, например $x < 0{,}1$, то полученный результат вполне удовлетворительный. Если, например, надо вычислить $\sqrt[k]{1+x}$ с точностью до 10^{-5}, можно воспользоваться для этой цели приближенной формулой (9), положив в ней $n=5$. Мы, таким образом, должны взять сумму первых 5 членов разложения (8).

Однако, если $x = 1/2$, то для получения точности 10^{-5} пришлось бы оставить в ряду (8) 15 членов, потому что

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{14} > 10^{-5}, \qquad \left(\frac{1}{2}\right)^{15} < 10^{-5}.$$

Это очень много. Не надо еще забывать, что с каждым отдельным этапом вычислений накапливается еще ошибка другого рода — ошибка вычислений.

Ниже дается метод решения поставленной задачи, годный для любого положительного числа A. Этот метод заключается в том, что число A записывается в виде произведения

$$A = (1+x)B^k \quad (0 < x < 1),$$

где B подбирается так, чтобы число x было меньше наперед заданного числа $\varepsilon > 0$. Тогда

$$\sqrt[k]{A} = \sqrt[k]{(1+x)B^k} = B\sqrt[k]{1+x}$$

и вопрос сведется к приближенному вычислению $\sqrt[k]{1+x}$ при $0 < x < \varepsilon$.

Рассуждения можно расположить следующим образом. Задано произвольное натуральное число N. Рассматривая последовательно числа

$$1^k,\ 2^k,\ 3^k,\ 4^k,\ \ldots, \tag{10}$$

находим среди них число M_N^k такое, что

$$M_N^k \leqslant AN^k < (M_N+1)^k.$$

Если в левом неравенстве этого соотношения на самом деле $M_N^k = AN^k$, то поставленная задача решена:

$$A = \frac{M_N}{N}.$$

Будем считать далее, что

$$M_N^k < AN^k < (M_N+1)^k \tag{11}$$

или

$$1 < A\left(\frac{N}{M_N}\right)^k < \left(\frac{M_N+1}{M_N}\right)^k.$$

Так как $M_N^k < AN^k < A(N+1)^k$ и M_{N+1}^k есть наибольшее число в последовательности (10), не превышающее $A(N+1)^k$, то

$$M_N^k \leqslant M_{N+1}^k \quad (N = 1, 2, \ldots).$$

Далее из второго неравенства (11) следует

$$N\sqrt[k]{A} < M_N + 1, \quad N\sqrt[k]{A} - 1 < M_N,$$

откуда $\lim\limits_{N\to\infty} M_N = \infty$. Но тогда

$$\lim_{N\to\infty} \frac{M_N + 1}{M_N} = 1. \tag{12}$$

Имеем

$$\sqrt[k]{A} = \sqrt[k]{A\left(\frac{N}{M_N}\right)^k \left(\frac{M_N}{N}\right)^k} = \frac{M_N}{N}\sqrt[k]{A\left(\frac{N}{M_N}\right)^k} = \frac{M_N}{N}\sqrt[k]{1+x}, \tag{13}$$

где мы положили

$$1 + x = A\left(\frac{N}{M_N}\right)^k. \tag{14}$$

Вопрос свелся к вычислению $\sqrt[k]{1+x}$.

В наших рассуждениях N есть произвольное натуральное число. Неравенства (11) можно записать следующим образом:

$$1 < 1 + x < \left(\frac{M_N + 1}{M_N}\right)^k,$$

где $x = x_N$ зависит от N. Из свойства (12) следует, что при достаточно большом N всегда можно $x = x_N$ сделать меньшим наперед заданного числа $\varepsilon > 0$, например $\varepsilon = 0{,}1$.

Пример. Надо вычислить $\sqrt[3]{17}$ с точностью до 4-го знака.

Возьмем $N = 10$. Очевидно,

$$8000 < 17N^3 = 1700 < 27\,000.$$

Ясно, что число M_N надо искать, перебирая кубы натуральных чисел, находящиеся между 8000 и 27 000. Произведя эту переборку, получим

$$M_N^3 = 25^3 = 15625, \quad (M_N + 1)^3 = 17578,$$

$$M_N^3 < 17N^3 \leq (M_N + 1)^3.$$

Имеем

$$\sqrt[3]{17} = \sqrt[3]{17\cdot\left(\frac{10}{25}\right)^3\left(\frac{25}{10}\right)^3} = 2{,}5\sqrt[3]{17\cdot\left(\frac{10}{25}\right)^3} \sim 2{,}5\sqrt[3]{1 + 0{,}1}.$$

Полагая в формуле (9) $n = 5$, получим приближенное равенство

$$\sqrt[3]{17} \approx 1 + \frac{1}{3}(0{,}1) + \frac{(1/3)((1/3) - 1)}{2!}(0{,}1)^2 +$$

$$+ \frac{(1/3)((1/3) - 1)((1/3) - 2)}{3!}(0{,}1)^3 + \frac{(1/3)((1/3)-1)((1/3)-2)((1/3)-3)}{4!}(0{,}1)^4$$

с ошибкой

$$R_5 < 10^{-5}.$$

Замечание. В § 5.10 мы исследовали сходимости ряда Тейлора функции $(1+x)^m$ на интервале $(-1, +1)$. Но при некоторых m ряд Тейлора

$$(1+x)^m = 1 + mx^m + \frac{m(m-1)}{1\cdot 2} x^{m-1} + \ldots \tag{15}$$

может сходиться также на том или ином конце этого интервала -1 или $+1$.

На основании 2-й теоремы Абеля, если степенной ряд (15) сходится при $x = 1$, то обязательно к 2^m.

Сходимость же ряда (14) при $x = -1$ указывает на тот факт, что функция $(1+x)^m$ должна быть непрерывна при $x = -1$. Это может быть лишь если $m \geqslant 0$, и тогда сумма ряда (14) при $x = -1$ равна нулю.

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

Сергей Михайлович Никольский

КУРС МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

Том I

Редактор *М. М. Горячая*
Техн. редактор *Л. В. Лихачева*
Корректор *Н. Б. Румянцева*

ИБ № 11783

Сдано в набор 15.12.82. Подписано к печати 20.06.83. Формат 60×90[1]/16. Бумага тип. № 3. Обыкновенная гарнитура. Высокая печать. Условн. печ. л. 29. Уч.-изд. л. 30,22. Тираж 40 000 экз. Заказ № 438. Цена 1 р. 30 к.

Издательство «Наука»
Главная редакция физико-математической литературы
117071, Москва, В-71, Ленинский проспект, 15

4-я типография издательства «Наука»
630077, Новосибирск, 77, Станиславского, 25