Е. ТИТЧМАРШ

ТЕОРИЯ ФУНКЦИЙ

Е. ТИТЧМАРШ

ТЕОРИЯ ФУНКЦИЙ

Перевод с английского
В. А. РОХЛИНА

ИЗДАНИЕ ВТОРОЕ

МОСКВА «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
1980

22.161
Т 45
УДК 517.5

THE THEORY OF FUNCTIONS

BY

E. C. TITCHMARSH, M. A., F.R.S.

Savilian Professor of Geometry
in the University of Oxford
Second Edition [1939]

OXFORD UNIVERSITY PRESS

Титчмарш Е. **Теория функций**: Пер. с англ. — 2-е изд. перераб. — М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1980.

Книга видного английского математика Е. Титчмарша, написанная в 30-е годы, была впервые издана на русском языке в 1951 г. Ее безусловно можно отнести к классическим сочинениям, и она до сих пор не потеряла своего значения.

Книга содержит много материала, не входящего в распространенные у нас учебники. Ее автор — блестящий аналитик и педагог — прекрасно излагает разнообразные темы аналитической теории функций, выпукло оттеняя ведущие идеи выкладок. В книге много примеров и задач.

Наряду с темами из комплексного анализа книга содержит изложение некоторых вопросов вещественного анализа (несобственные интегралы, теория меры и интегралы Лебега, ряды Фурье и др.). Она послужит ценным дополнением к существующей на русском языке учебной литературе по теории функций.

Т $\frac{20203-046}{053(02)-80}$ БЗ-14-30-80. 1702050000

ОГЛАВЛЕНИЕ

ОТ ПЕРЕВОДЧИКА

Первое издание этой книги вышло в Англии в 1932 году, второе издание (несколько отличающееся от первого — см. предисловие автора ко второму изданию) — в 1939 году. В дальнейшем оно еще перепечатывалось (с незначительными исправлениями). Русский перевод был сделан со второго английского издания и вышел в 1951 году. Для настоящего второго издания перевода его текст был заново просмотрен и сверен с английским оригиналом.

Книга написана крупным математиком и, как увидит читатель, искусным педагогом. Ее назначение указано автором в предисловии к первому изданию: по замыслу автора она должна была «перекинуть мост от элементарных учебников к систематическим курсам теории функций». Предполагаемая подготовка читателя — знаменитый «Курс чистой математики» Харди, который действительно является элементарным учебником. Вводная глава I содержит разнообразные сведения, нужные для дальнейшего, но отсутствующие в учебнике Харди. Остальные двенадцать глав разделены на две части, не указанные в оглавлении: введение в теорию функций одного комплексного переменного (главы II—IX) и введение в метрическую теорию функций одного действительного переменного (главы X — XIII). Эти части практически независимы друг от друга и написаны совсем по-разному, хотя и с равным мастерством. Вторая часть невелика по объему, ее предмет четко очерчен, материал в указанных пределах изложен достаточно полно, доказательства убедительны. В первой части предмет кажется необъятным, о полноте или систематичности изложения говорить не приходится, доказательства и даже определения, не лежащие на главном направлении, нередко заменяются пояснениями и примерами; зато автор находит место для того, чтобы познакомить читателя с основными идеями нескольких более специальных разделов теории. Такая свобода изложения делает книгу весьма необычным учебником.

Упомянутое главное направление — аналитическое: автор учит прежде всего анализу, в котором он подлинный мастер. Геометрические и топологические аспекты теории аналитических функций представлены маленькой главой, посвященной конформным отображениям, и страницей, посвященной римановым поверхностям. Там, где топология вторгается в изложение помимо воли автора и создает осложнения, он следует классической традиции, т. е. просто обходит вопрос. Например, области нигде в книге не предполагаются односвязными (этого понятия нет вообще), из-за чего некоторые формулировки кажутся неверными; на самом же деле они скорее уклончивы, так как в книге нет определения области. Подобных умолчаний, освященных традицией и относящихся к областям, кривым, контурам и т. п., в книге немало.

Отличительной чертой книги является связанный со свободой изложения необычный для учебника выбор материала. Этот выбор особенно интересен в первой части, содержащей, наряду со старыми, и только что опубликованные результаты. Сегодня, почти через полстолетия, когда первоначальное назначение учебника Титчмарша представляет скорее исторический интерес, этот выбор делает его ценным дополнением к нашей учебной литературе: в нем много такого, что невозможно или очень трудно найти в других курсах.

Отличия настоящего издания от английского оригинала незначительны. При переводе исправлялись только явные мелкие просмотры и опечатки. Топологическая позиция автора, о которой читатель был предупрежден выше, конечно, не могла быть этим затронута; она представляет собой органическую особенность книги, и читателю придется с ней мириться. Литературные ссылки автора по возможности заменены ссылками на русские переводы; впрочем, ссылки учебного характера большей частью потеряли для русского читателя свое значение, поскольку старые учебники вышли из употребления, а в хороших новых учебниках нет недостатка.

Ленинград 1979

В. А. Рохлин

ПРЕДИСЛОВИЕ АВТОРА КО ВТОРОМУ ИЗДАНИЮ

При перепечатке первого издания в текст было внесено значительное число мелких исправлений и улучшений. Я должен поблагодарить многих коллег, которые помогли мне в пересмотре книги. Единственное крупное изменение состоит в том, что я включил в главу VIII краткое введение в теорию мероморфных функций. Это стало возможно благодаря тому, что некоторые не столь важные разделы были изложены более сжато и теория гамма-функции была перенесена в главу IV, где она содержит теперь более полное исследование формулы Стирлинга.

Лондон 1939

Е. Титчмарш

ИЗ ПРЕДИСЛОВИЯ АВТОРА К ПЕРВОМУ ИЗДАНИЮ

Эта книга возникла из лекций, которые я читал в последние годы студентам университетского колледжа в Лондоне и студентам университета в Ливерпуле. Она состоит из нескольких не очень связанных между собой введений в различные отделы теории функций — как действительного, так и комплексного переменного. Я думаю, что среднему студенту существующая литература по этим вопросам представляется трудной, и я надеюсь, что эти главы перекинут мост от элементарных учебников к систематическим курсам теории функций.

Предполагается, что читатель знаком с элементарным анализом. Под элементарным анализом мы понимаем, грубо говоря, то, что содержится в *Курсе чистой математики* Харди. В остальном книгу можно читать, не обращаясь к другим учебникам.

Порядок изучения глав в известных пределах произволен. Последние четыре главы можно читать и сразу после главы I. Если не считать отдельных ссылок вперед, предшествующая часть книги от них не зависит; но то, что они содержат, есть такая же необходимая часть снаряжения современного аналиста, как старая теория аналитических функций.

В конце каждой главы имеются примеры. Часть их требует лишь более или менее непосредственного применения изложенного в книге. Другие являются более трудными теоремами, не нашедшими места в основном тексте; они сопровождаются указаниями на способ решения и ссылками на источники.

Лондон 1932

Е. Титчмарш

ГЛАВА I

РЯДЫ, БЕСКОНЕЧНЫЕ ПРОИЗВЕДЕНИЯ, НЕСОБСТВЕННЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

Введение. В этой вступительной главе мы пополним те сведения из элементарного анализа, которые, как мы предполагаем, имеются у читателя. В частности, мы будем иметь дело с рядами, члены которых являются функциями некоторого переменного, с интегралами, содержащими переменные параметры, и с множеством тех проблем двойного предельного перехода, которые так часто встречаются во всех ветвях анализа. За отправной пункт мы, как было сказано в предисловии, берем *Чистую математику* Харди, которую обозначаем буквами *Ч. М.*, и всюду, где это возможно, ссылаемся на нее.

Мы будем пользоваться следующими названиями и обозначениями. Если в некотором рассуждении встречается число, не зависящее от основных переменных, то оно называется постоянной. Для обозначения абсолютной положительной постоянной, не обязательно все время одной и той же, мы пользуемся буквой A. Читатель может встретить утверждения вроде «$f(x) < A$, следовательно, $2f(x) < A$», которые сначала немного смущают; но скоро он к ним привыкнет. Постоянная, зависящая от одного или нескольких параметров, обычно обозначается через K.

Равенство $f(x) = O\{\varphi(x)\}$ означает вообще, что $|f(x)| < A\varphi(x)$ при значениях x, достаточно близких к заданному пределу. В частности, под $O(1)$ понимается ограниченная функция. Таким образом,

$$\sin x = O(|x|), \quad (x+1)^2 = O(1)$$

при $x \to 0$ и

$$\sin x = O(1), \quad (x+1)^2 = O(x^2)$$

при $x \to \infty$.

Однако равенство $f(x) = O\{\varphi(x)\}$ может означать также, что

$$|f(x)| < K\varphi(x);$$

обычно бывает достаточно ясно, какие параметры имеются в виду.

Равенство $f(x)=o\{\varphi(x)\}$ означает, что $\frac{f(x)}{\varphi(x)}\to 0$, когда x стремится к заданному пределу. Таким образом,

$$\sin x = o(x^2), \qquad (x+1)^2 = o(x^3)$$

при $x\to\infty$. В частности, под $o(1)$ понимается функция, стремящаяся к нулю.

Запись $f(x)\sim\varphi(x)$ означает, что $\frac{f(x)}{\varphi(x)}\to 1$, когда x стремится к заданному пределу.

Мы пользуемся буквой ε для обозначения переменной, которой можно придавать произвольно малые значения и которую следует представлять себе малой.

Под $\max(a, b, \ldots)$ мы понимаем наибольшее из чисел $a, b, \ldots$ и под $\min(a, b, \ldots)$ — наименьшее из них.

1.1. Равномерная сходимость ряда. Читатель должен быть знаком с понятием *сходящегося ряда* (*Ч. М.*, § 76). Наше обычное обозначение для бесконечного ряда есть

$$u_1+u_2+u_3+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty} u_n = \sum u_n;$$

если суммирование производится не от 1 до ∞, то его пределы точно указываются. n-я частичная сумма ряда есть $s_n=u_1+u_2+\ldots+u_n$.

Напомним сначала определение сходимости. Говорят, что ряд сходится к сумме s, если для всякого положительного числа ε, как бы мало оно ни было, можно найти такое число n_0 (зависящее от ε), что

$$|s-s_n|<\varepsilon \qquad (n>n_0).$$

Другими словами, s_n стремится к пределу s, когда n стремится к бесконечности.

Предположим теперь, что каждый член ряда является функцией действительного переменного x. Обычно предполагается, что область изменения этого переменного есть замкнутый интервал, скажем, $a\leqslant x\leqslant b$; но эта область может быть и открытым интервалом $a<x<b$, или вообще некоторым множеством точек. Рассмотрим ряд

$$u_1(x)+u_2(x)+\ldots=\sum u_n(x)$$

и его n-ю частичную сумму $s_n(x)$. Конечно, этот ряд может быть сходящимся при одних значениях x и расходящимся при других. Если он сходится при всех рассматриваемых значениях x, то его сумма является функцией от x, определенной при всех этих значениях x. Обозначим ее через $s(x)$.

Определение. *Говорят, что ряд* $\sum u_n(x)$ *равномерно сходится в интервале* (a, b), *если для всякого положительного числа* ε, *как бы мало оно ни было, можно найти такое число* n_0, *зависящее от* ε, *но не от* x, *что*

$$|s(x) - s_n(x)| < \varepsilon$$

для $n > n_0$ *и всех значений* x *в интервале* (a, b) *).

Ясно, что равномерная сходимость влечет за собой сходимость при каждом значении x в интервале; но, как мы покажем на примерах, ряд может сходиться при каждом значении x в некотором интервале и не быть равномерно сходящимся. Может случиться, что, хотя каждой паре значений x, ε отвечает такое число n_0, что $|s(x) - s_n(x)| < \varepsilon$ при $n > n_0$, это число n_0 неограниченно возрастает, когда x приближается к некоторой точке интервала. Ряд не будет тогда равномерно сходиться.

Подчеркнем, что равномерная сходимость есть свойство, ассоциированное с *интервалом* (или множеством точек), а не с отдельной точкой.

1.1.1. Признаки равномерной сходимости. Подобно тому как существуют признаки сходимости рядов с постоянными членами, существуют и признаки равномерной сходимости рядов функций. Простейший и наиболее полезный признак, указанный Вейерштрассом, состоит в следующем.

Ряд $\sum u_n(x)$ *равномерно сходится в интервале* (a, b), *если существует такой ряд* $\sum a_n$ *с положительными постоянными членами, что* $|u_n(x)| \leqslant a_n$ *для всех значений* n *и* x.

Прежде всего, ряд $\sum u_n(x)$ сходится при каждом значении x в силу обычного принципа сравнения (*Ч. М.*, §§ 173, 191). Следовательно, он имеет при каждом значении x определенную сумму $s(x)$. Далее,

$$|s(x) - s_n(x)| = |u_{n+1}(x) + u_{n+2}(x) + \dots| \leqslant a_{n+1} + a_{n+2} + \dots,$$

правую же часть можно сделать меньшей произвольно заданного ε, взяв n бóльшим некоторого n_0. Так как числа a_n не зависят от x, то и n_0 не зависит от x. Этим теорема доказана.

Заметим, что теорема остается в силе, если $|u_n(x)| \leqslant a_n$ не для *всех*, а лишь для *всех достаточно больших* значений n.

Более общий признак того же типа, который также полезен, состоит в том, что ряд $\sum u_n(x)$ равномерно сходится, если $|u_n(x)| \leqslant v_n(x)$ и ряд $\sum v_n(x)$ равномерно сходится. Доказательство мы предоставляем читателю.

---

*) Это определение является одновременно определением равномерной сходимости последовательности функций $s_n(x)$ к функции $s(x)$ и в таком понимании систематически используется в дальнейшем. (*Примечание переводчика*).

Примеры. (I) Степенной ряд $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ равномерно сходится при $a \leqslant x \leqslant b$, если $-1 < a < b < 1$. [Принять за a_n большее из чисел $|a|^n$, $|b|^n$.]

(II) Тригонометрический ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2}$ равномерно сходится в любом интервале.

(III) Ряд Дирихле $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-s}$ равномерно сходится при $a \leqslant s \leqslant b$, если $1 < a < b$.

[Положить $a_n = n^{-a}$; см. *Ч. М.*, § 181. Сумма этого важного ряда обозначается через $\zeta(s)$.]

(IV) Ряд $\{1-(1-x^2)\}^{\frac{1}{2}} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (1-x^2)^n$ равномерно сходится при $-1 \leqslant x \leqslant 1$.

(V) Подобное же определение равномерной сходимости может быть дано для таких рядов, как $\sum_{n=0}^{\infty} r^n \cos n\theta$, где общий член есть функция двух или большего числа переменных (здесь r и θ). Этот ряд равномерно сходится в любой полосе $0 \leqslant r \leqslant b < 1$ плоскости переменных r, θ.

1.1.2. Другие признаки. Всякий признак сходимости становится признаком равномерной сходимости, если его условия удовлетворяются независимо от x. Например (*Ч. М.*, § 175), ряд $\sum u_n(x)$ сходится для частного значения x, если существует такое число r, меньшее чем 1, что

$$\left|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right| \leqslant r$$

для всех значений n. Вообще говоря, это r, поскольку он существует, будет зависеть от x. Предположим, однако, что мы можем найти r, удовлетворяющее указанному условию при всех значениях x. Тогда ряд равномерно сходится, если только функция $u_1(x)$ ограничена. Действительно, повторное применение предыдущего неравенства показывает, что, если $|u_1(x)| \leqslant M$, то

$$|u_n(x)| \leqslant r^{n-1} |u_1(x)| \leqslant Mr^{n-1};$$

равномерная сходимость следует, таким образом, из принципа сравнения.

Другие признаки сходимости могут быть преобразованы так же. Рассмотрим, например, признак Дирихле (*Ч. М.*, § 196). Аналогичный ему признак равномерной сходимости состоит в следующем.

Пусть φ_n — положительная функция от n, монотонно стремящаяся к нулю при $n \to \infty$. Если существует такая постоян-

ная A, что

$$\left|\sum_{n=1}^{N} u_n(x)\right| \leqslant A$$

для всех значений N и x, то ряд $\sum \varphi_n u_n(x)$ равномерно сходится.

Читатель не встретит никаких трудностей при проведении доказательства *).

Примеры. (I) Если числа a_n положительны и последовательность $a_1, a_2, \ldots$ монотонно сходится к нулю, то ряд $\sum a_n \sin nx$ равномерно сходится в каждом замкнутом интервале, не содержащем кратных 2π.

[Воспользоваться тождеством

$$\sin x + \sin 2x + \ldots + \sin nx = \frac{\cos\frac{1}{2}x - \cos\left(n+\frac{1}{2}\right)x}{2\sin\frac{1}{2}x}.]$$

(II) При тех же условиях ряд $\sum a_n x \sin nx$ равномерно сходится в некотором интервале, содержащем точку $x=0$.

1.1.3. Необходимое и достаточное условие равномерной сходимости. *Ряд $\sum u_n(x)$ равномерно сходится в том и только в том случае, если для всякого положительного ε можно найти такое n_0, зависящее от ε, но не от x,* что

$$|s_m(x) - s_n(x)| < \varepsilon$$

при всех значениях m и n, бо́льших n_0.

Это соответствует «общему принципу сходимости» для обыкновенных рядов (*Ч. М.*, §§ 83, 84).

Как и в случае обыкновенных рядов, нетрудно проверить, что условие необходимо; действительно,

$$|s_m(x) - s_n(x)| \leqslant |s(x) - s_m(x)| + |s(x) - s_n(x)|,$$

так что условие выполнено, если ряд равномерно сходится. В случае обыкновенных рядов доказательство достаточности более трудно. Однако после того как для обыкновенных рядов эта трудность преодолена, для рядов функций она уже не возникает. Действительно, предположим, что условие выполнено. Тогда, согласно теореме об обыкновенных рядах, ряд $\sum u_n(x)$ сходится для каждого x. Пусть $s(x)$ — его сумма. Выберем по заданному ε такое n_0, что

$$|s_m(x) - s_n(x)| < \varepsilon \quad (m > n_0,\ n > n_0).$$

Оставляя m неизменным, заставим n стремиться к бесконечности. Так как $s_n(x) \to s(x)$, то мы получим неравенство

$$|s_m(x) - s(x)| \leqslant \varepsilon$$

*) См. Bromwich, *Infinite Series*, изд. 2, § 44.

в единственном предположении, что $m > n_0$. Следовательно, сходимость равномерна.

1.1.3.1. Следующая теорема *) об одном классе тригонометрических рядов дает блестящий пример применения предыдущего принципа.

Если числа b_n положительны и последовательность $b_1, b_2, \ldots$ монотонно убывает, то необходимое и достаточное условие равномерной сходимости ряда $\sum b_n \sin nx$ состоит в том, что $nb_n \to 0$.

Чтобы доказать необходимость этого условия, заметим, что при $x = \frac{\pi}{2p}$ и $n = \left[\frac{1}{2}p + 1\right]$ **)

$$b_n \sin nx + b_{n+1} \sin (n+1) x + \ldots + b_p \sin px >$$
$$> b_p (\sin nx + \ldots + \sin px) > b_p \left(\frac{1}{2} p - 1\right) \sin \frac{1}{4} \pi$$

(имеется по крайней мере $\frac{1}{2} p - 1$ членов $\sin mx$, у которых $mx > \frac{1}{4}\pi$). Так как ряд равномерно сходится, то левая часть неравенства стремится к нулю при $p \to \infty$. Следовательно, $pb_p \to 0$.

Для доказательства достаточности условия нам нужно следующее предложение, известное как лемма Абеля.

Если $b_1 \geqslant b_2 \geqslant \ldots \geqslant b_n > 0$ *и для* $k = 1, \ldots, n$

$$m \leqslant a_1 + a_2 + \ldots + a_k \leqslant M,$$

то

$$mb_1 \leqslant a_1 b_1 + a_2 b_2 + \ldots + a_n b_n \leqslant M b_1.$$

Положим $s_k = a_1 + \ldots + a_k$. Мы можем написать (ср. Ч. М., § 196):

$$a_1 b_1 + \ldots + a_n b_n = b_1 s_1 + b_2 (s_2 - s_1) + \ldots + b_n (s_n - s_{n-1}) =$$
$$= s_1 (b_1 - b_2) + s_2 (b_2 - b_3) + \ldots + s_{n-1} (b_{n-1} - b_n) + s_n b_n.$$

Так как вторые сомножители в последней строке неотрицательны, то сумма не уменьшится, если мы напишем M вместо $s_1, s_2, \ldots, s_n$, а это дает для нее верхнюю границу

$$M (b_1 - b_2) + M (b_2 - b_3) + \ldots + M b_n = M b_1.$$

Подобным же образом получается нижняя граница mb_1. Этим лемма доказана.

Возвратимся к нашему ряду. Так как каждый его член является нечетной функцией с периодом 2π, то можно ограничиться интервалом $0 \leqslant x \leqslant \pi$. Рассмотрим сумму

$$s_{n,p} = b_n \sin nx + \ldots + b_p \sin px,$$

*) Chaundy and Jolliffe [1].

**) $[x]$ есть целая часть числа x.

где n и p больше не связаны между собой, как это было выше. Положим $\mu_n = \max\limits_{m \geqslant n} (mb_m)$, так что $\mu_n \to 0$. При $x \geqslant \pi/n$ мы применяем лемму Абеля: так как для всех значений n и r

$$|\sin nx + \ldots + \sin rx| = \left| \frac{\cos\left(n - \frac{1}{2}\right)x - \cos\left(r + \frac{1}{2}\right)x}{2\sin\frac{1}{2}x} \right| \leqslant \frac{1}{\sin\frac{1}{2}x}$$

и так как $\frac{1}{\sin\frac{1}{2}x} \leqslant \frac{\pi}{x}$ (функция $\frac{\sin\theta}{\theta}$ монотонно убывает при $0 < \theta < \frac{1}{2}\pi$), то

$$|s_{n,p}| \leqslant \frac{b_n\pi}{x} \leqslant nb_n \leqslant \mu_n.$$

Если $x \leqslant \pi/p$, то $\sin\theta \leqslant \theta$ и

$$|s_{n,p}| \leqslant b_n nx + \ldots + b_p px \leqslant p\mu_n x \leqslant \pi\mu_n.$$

При $\pi/p < x < \pi/n$ мы пользуемся обоими этими приемами. Мы пишем $|s_{n,p}| \leqslant |s_{n,k}| + |s_{k+1,p}|$ и, применяя лемму Абеля ко второму члену справа и второй прием к первому члену, получаем неравенство

$$|s_{n,p}| \leqslant k\mu_n x + \frac{b_{k+1}\pi}{x} \leqslant \mu_n\left[kx + \frac{\pi}{(k+1)x}\right].$$

Полагая в нем $k = [\pi/x]$, мы видим, что

$$|s_{n,p}| \leqslant \mu_n(\pi + 1).$$

Таким образом, во всех случаях $|s_{n,p}| < A\mu_n$, и остается вспомнить, что $\mu_n \to 0$.

1.1.4. Равномерная сходимость и непрерывность. До сих пор мы не привели никаких доводов в пользу общего рассмотрения равномерно сходящихся рядов. Они важны по многим причинам, из которых не все могут быть названы в этой главе. Первая причина заключается в следующей теореме.

Сумма равномерно сходящегося ряда непрерывных функций есть непрерывная функция.

Мы пользуемся прежними обозначениями и пишем $s(x) = s_n(x) + r_n(x)$, так что $r_n(x)$ есть остаток, получающийся после удаления n первых членов ряда. Если x и $x+h$ — две произвольные точки рассматриваемого интервала, то

$$|s(x+h) - s(x)| = |s_n(x+h) - s_n(x) + r_n(x+h) - r_n(x)| \leqslant$$
$$\leqslant |s_n(x+h) - s_n(x)| + |r_n(x+h)| + |r_n(x)|.$$

Найдем по заданному ε такое n_0, что для всех значений h

$$|r_n(x+h)| < \varepsilon, \quad |r_n(x)| < \varepsilon \qquad (n > n_0),$$

и фиксируем какое-нибудь значение n, удовлетворяющее этому условию. Как сумма n непрерывных функций, $s_n(x)$ есть непрерывная функция. Мы можем поэтому найти столь малое δ, что

$$|s_n(x+h)-s_n(x)|<\varepsilon \qquad (|h|<\delta).$$

Комбинируя написанные неравенства, мы получаем неравенство

$$|s(x+h)-s(x)|<3\varepsilon \qquad (|h|<\delta),$$

которое и показывает, что функция $s(x)$ непрерывна.

Заметим, что теорема остается верной, если речь идет о непрерывности в отдельной точке x; действительно, мы пользовались только тем, что $s_n(x+h)\to s_n(x)$ при $h\to 0$ и фиксированном x. Поэтому мы можем сформулировать результат следующим образом.

Предел суммы равномерно сходящегося ряда функций, каждая из которых стремится к некоторому пределу, равен сумме ряда, составленного из пределов функций *).

1.2. Ряды с комплексными членами. Степенные ряды **). Теория равномерной сходимости может быть распространена на ряды вида

$$u_1(z)+u_2(z)+\ldots,$$

где общий член $u_n(z)$ есть комплексная функция комплексного переменного z. Место равномерной сходимости в интервале здесь занимает равномерная сходимость в некоторой области плоскости z, например в круге или квадрате. Читатель не встретит никаких трудностей при распространении определений и признаков на этот случай. Также и теорема о непрерывности суммы равномерно сходящегося ряда непрерывных функций переносится на ряды комплексных функций без осложнений.

Пример. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^{-s}$, где s — комплексное переменное, равномерно сходится во всякой конечной области, в которой $\operatorname{Re}(s)\geqslant a>1$. Функция $\zeta(s)$, определенная как сумма этого ряда, непрерывна во всех точках области $\operatorname{Re}(s)>1$. [Ср. § 1.11, пример (III).]

1.2.1. Степенные ряды. Один из простейших случаев равномерной сходимости ряда с комплексными членами есть случай степенного ряда. Мы знаем (*Ч. М.*, § 200), что степенной ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ имеет *радиус сходимости* R (который может быть, в частности, нулевым или бесконечным), такой, что ряд сходится при $|z|<R$ и расходится при $|z|>R$.

*) В действительности эта формулировка содержит дополнительный пункт: последний ряд сходится. Это также легко доказывается. (*Примечание переводчика.*)

**) *Ч. М.*, § 197.

Ряд равномерно сходится при $|z| \leqslant R'$, где R' — любое положительное число, меньшее R.

Действительно, пусть ρ — какое-нибудь число, заключенное между R' и R. Так как ряд сходится при $z=\rho$, то существует такое число K, не зависящее от n, что $|a_n\rho^n| < K$ для всех значений n. Таким образом, при $|z| \leqslant R'$

$$|a_n z^n| = \left| a_n \rho^n \left(\frac{z}{\rho}\right)^n \right| < K \left(\frac{R'}{\rho}\right)^n.$$

Правая часть не зависит от z и является общим членом сходящейся геометрической прогрессии, так что применим комплексный аналог признака § 1.1.1. Следовательно, ряд равномерно сходится.

Мы показали, таким образом, что всякий круг, внутренний к кругу сходимости, является областью равномерной сходимости. Сам круг сходимости не обязан быть областью равномерной сходимости; более того, на его границе ряд не обязан сходиться.

Пример. Для ряда $\sum \frac{z^n}{n^2}$ круг сходимости является областью равномерной сходимости.

1.2.2. Теорема Абеля. Предыдущие рассмотрения оставляют открытым следующий интересный вопрос. Предположим, чтобы взять простейший случай, что перед нами вещественный степенной ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \tag{1}$$

с радиусом сходимости 1. Предположим далее, что ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \tag{2}$$

сходится. Будет ли в этом случае интервал равномерной сходимости простираться вправо до точки $x=1$? Ответ оказывается утвердительным.

Если ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ сходится и его сумма равна s, то ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ равномерно сходится при $0 \leqslant x \leqslant 1$ и

$$\lim_{x \to 1} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = s.$$

Доказательство представляет собой непосредственное применение леммы Абеля (см. § 1.1.3.1). Положим $s_{n,p} = a_n + a_{n+1} + \ldots + a_p$. При заданном ε мы можем найти столь большое n_0, что $|s_{n,p}| \leqslant \varepsilon$ при $n_0 \leqslant n < p$. Так как числа x^n не возрастают, если

$0 \leqslant x \leqslant 1$, то, в силу леммы Абеля, при $n_0 \leqslant n < p$

$$|a_n x^n + \ldots + a_p x^p| \leqslant \varepsilon x^n \leqslant \varepsilon \qquad (0 \leqslant x \leqslant 1),$$

а это и означает равномерную сходимость.

Вторая часть теоремы получается теперь из теоремы о непрерывности (§ 1.1.4).

Пример. Из разложения (*Ч. М.*, § 220)

$$\log(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \ldots \qquad (|x| < 1)$$

вывести, что $\log 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \ldots$

1.2.3. Теорема Таубера. Прямым обращением второй части теоремы Абеля было бы утверждение, что если при $x \to 1$

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \to s,$$

то ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ сходится к сумме s. Что это утверждение не верно, показывает простой пример

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n = \frac{1}{x+1},$$

в котором $f(x) \to 1/2$ при $x \to 1$, но ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ не сходится.

Если, однако, наложить на коэффициенты a_n дополнительное ограничение, касающееся порядка их величины, то обратную теорему можно доказать.

Если $a_n = o(1/n)$ и $f(x) \to s$ при $x \to 1$, то ряд $\sum\limits_{0}^{\infty} a_n$ сходится к сумме s.

Сначала мы докажем следующую простую лемму *).

Лемма. *Если $b_n \to 0$ при $n \to \infty$, то*

$$\frac{b_0 + b_1 + \ldots + b_n}{n+1} \to 0.$$

Для доказательства достаточно заметить, что, если $|b_n| < K$ при всех значениях n и $|b_n| < \varepsilon$ при $n > n_0$, то при $n > n_0$ и

*) *Ч. М.*, гл. IV, Разные примеры, 16.

$n > (n_0+1)K/\varepsilon$

$$\left|\frac{b_0+b_1+\ldots+b_n}{n+1}\right| \leqslant \left|\frac{b_0+\ldots+b_{n_0}}{n+1}\right| + \left|\frac{b_{n_0+1}+\ldots+b_n}{n+1}\right| \leqslant$$
$$\leqslant \frac{(n_0+1)K}{n+1} + \frac{(n-n_0)\varepsilon}{n+1} < 2\varepsilon.$$

Чтобы доказать теорему Таубера, достаточно доказать, что при $N = [1/(1-x)]$ и $x \to 1$

$$\sum_0^\infty a_n x^n - \sum_0^N a_n \to 0,$$

т. е. $\sum\limits_{N+1}^\infty a_n x^n - \sum\limits_0^N a_n(1-x^n) \to 0$. Обозначим эти суммы через S_1 и S_2 и для заданного ε выберем N столь большим, что $|na_n| < \varepsilon$ при $n > N$. Очевидно,

$$|S_1| = \left|\sum_{N+1}^\infty na_n \frac{x^n}{n}\right| < \frac{\varepsilon}{N+1} \sum_{N+1}^\infty x^n < \frac{\varepsilon}{(N+1)(1-x)} < \varepsilon.$$

Далее, $1-x^n = (1-x)(1+x+\ldots+x^{n-1}) < n(1-x)$, и потому

$$|S_2| < (1-x)\sum_0^N n|a_n| \leqslant \frac{1}{N}\sum_0^N n|a_n|.$$

В силу леммы правая часть стремится к нулю, так что и $|S_2| < \varepsilon$, если N достаточно велико, а тогда $|S_1 - S_2| < 2\varepsilon$. Этим теорема доказана.

1.3. Ряды, которые не сходятся равномерно.

1.3. Ряды, которые не сходятся равномерно. До сих пор читатель мог думать, что сходимость во всех точках некоторого интервала есть то же самое, что равномерная сходимость. Мы хотим доказать примерами, что это не так.

Примеры. (I) Мы можем построить ряд, для которого

$$s_n(x) = \frac{1}{1+nx} \qquad (0 \leqslant x \leqslant 1),$$

полагая

$$u_1(x) = \frac{1}{1+x},$$

$$u_n(x) = \frac{1}{1+nx} - \frac{1}{1+(n-1)x} = \frac{-x}{(1+nx)\{1+(n-1)x\}} \qquad (n > 1).$$

Эта функция $s_n(x)$ есть *непрерывная функция, стремящаяся к разрывному пределу*. Действительно, если $x > 0$, то $s_n(x)$, очевидно, стремится к нулю при $n \to \infty$; если же $x = 0$, то $s_n(x) = 1$ для всех значений n, так что $s_n(x)$ стремится к единице. Таким образом, сумма ряда разрывна и ряд не может быть равномерно сходящимся.

(II) Рассмотрим ряд $\sum_{n=0}^{\infty} xe^{-nx}$. Здесь $s_n(0)=0$, так что $s(0)=0$. При $x>0$

$$s_n(x)=x\frac{1-e^{-nx}}{1-e^{-x}}, \qquad s(x)=\frac{x}{1-e^{-x}}$$

и $s(x)\to 1$, когда $x\to 0$. Следовательно, функция $s(x)$ разрывна, и, как и в предыдущем примере, ряд не сходится равномерно ни в каком интервале с концом $x=0$.

Последнее можно установить и непосредственно: если $x=1/n$, то $s\left(\frac{1}{n}\right)-s_n\left(\frac{1}{n}\right)=\frac{xe^{-1}}{1-e^{-x}}\to e^{-1}$, так что разность $s(x)-s_n(x)$ не является равномерно малой вблизи значения $x=0$.

(III) Рассмотреть подобным же образом ряд $\sum_{n=0}^{\infty} x^n(1-x)$.

(IV) Тем же приемом, что в примере (I), мы можем построить ряд, для которого $s_n(x)=nx(1-x)^n \quad (0\leqslant x\leqslant 1)$.

Очевидно, $s(0)=0$. Кроме того, если $x>0$, то $n(1-x)^n\to 0$ при $n\to\infty$ (*Ч. М.*, § 213). Следовательно, $s(x)=0$ для всех значений x. Таким образом, в этом случае сумма ряда непрерывна. Однако ряд не является равномерно сходящимся. Простым упражнением в дифференциальном исчислении является отыскание максимума функции $s_n(x)$; он равен $\left(\frac{n}{1+n}\right)^{1+n}$ и, таким образом, стремится к e^{-1} при $n\to\infty$ (*Ч. М.*, §§ 73, 215). Следовательно, как бы велико ни было n, функция $s_n(x)-s(x)$ принимает значения, сколь угодно близкие к e^{-1}. Таким образом, сходимость не равномерна.

Читателю следует начертить график функции $s_n(x)$. У этого графика есть горб, который приближается к началу и неограниченно уменьшается в ширину, но не в высоту.

Заметим, что сходимость может приобрести или утратить равномерность после умножения всех членов ряда на множитель, не зависящий от n. Например, если

$$s_n(x)=\frac{x}{1+nx} \qquad (0\leqslant x\leqslant 1),$$

то $|s_n(x)|\leqslant 1/n$, так что ряд равномерно сходится к нулю. Ряд же, получающийся из него после умножения на $1/x$, не является равномерно сходящимся (пример (I)).

С другой стороны, если мы умножим равномерно сходящийся ряд на *ограниченный* множитель, не зависящий от n, то ряд, полученный в результате, будет также равномерно сходиться. Это легко вывести из определения равномерной сходимости.

1.3.1. Равномерная сходимость рядов с положительными членами. Из предыдущих примеров ясно, что равномерная сходимость ряда непрерывных функций не является необходимым условием непрерывности его суммы. Существует, однако, интересный случай, когда равномерная сходимость ряда и непрерывность суммы равносильны *).

Если $\sum u_n(x)$ — ряд с положительными членами, непрерывными в замкнутом интервале, то необходимым и достаточным условием непрерывности суммы $s(x)$ является равномерная сходимость ряда в этом интервале.

Мы должны доказать, что это условие необходимо, т. е. что если функция $s(x)$ непрерывна, то ряд равномерно сходится.

Пользуясь нашими обычными обозначениями, заметим, что функция $s(x) - s_n(x)$ непрерывна и, следовательно (*Ч. М.*, § 103), имеет верхнюю грань, скажем, ε_n, которая достигается в некоторой точке x_n рассматриваемого интервала. Достаточно доказать, что $\varepsilon_n \to 0$; действительно, так как члены ряда положительны, то

$$|s(x) - s_n(x)| \leqslant |s(x) - s_N(x)| \leqslant \varepsilon_N$$

для $n \geqslant N$ и всех x; а это влечет за собой равномерную сходимость, если $\varepsilon_N \to 0$ при $N \to \infty$.

Предположим, напротив, что ε_n не стремится к нулю. Так как ε_n монотонно убывает (члены ряда положительны), то ε_n имеет положительную нижнюю грань, скажем δ. Числа же x_n имеют в интервале предельную точку (*Ч. М.*, § 19), скажем ξ. Пусть N столь велико, что $s(\xi) - s_N(\xi) < \delta$. Тогда, если ξ — внутренняя точка интервала, то существует интервал $(\xi - h, \xi + h)$, в котором $s(x) - s_N(x) < \delta$, а если ξ — концевая точка, то существует интервал $(\xi, \xi + h)$ или $(\xi - h, \xi)$ с этим свойством. Следовательно, $\varepsilon_n < \delta$ для значений n, при которых $|x_n - \xi| < h$. Это противоречие завершает доказательство.

1.4. Бесконечные произведения. Бесконечное произведение есть выражение вида

$$(1 + a_1)(1 + a_2)(1 + a_3) \ldots, \tag{1}$$

содержащее бесконечно много сомножителей. Мы обозначаем его через

$$\prod_{n=1}^{\infty} (1 + a_n).$$

Мы предполагаем, что ни одно из чисел a_n не равно -1.

Рассмотрим частичное произведение

$$p_n = \prod_{m=1}^{n} (1 + a_m).$$

Мы говорим, что *бесконечное произведение* (1) *сходится, если p_n стремится к некоторому пределу, отличному от нуля, когда $n \to \infty$.*

*) Подробное рассмотрение вопроса имеется у Hardy [11].

Мы могли бы, конечно, допустить предел 0, как всякий другой; но мы увидим ниже, что во многих случаях это было бы неудобно.

Если произведение не сходится, то говорят, что оно расходится. Если $p_n \to 0$, то говорят, что оно расходится к нулю.

Примеры. (I) Произведение

$$\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{3}\right)\left(1-\frac{1}{4}\right)\left(1+\frac{1}{5}\right)\ldots$$

сходится.

(II) Если произведение (1) сходится, то $a_n \to 0$.

1.4.1. Мы начнем с рассмотрения двух простых случаев.

Если $a_n \geqslant 0$, то произведение $\Pi(1+a_n)$ и ряд $\sum a_n$ сходятся или расходятся одновременно.

Так как в этом случае p_n есть неубывающая функция от n, то p_n стремится либо к конечному пределу, либо к положительной бесконечности. Далее,

$$a_1+a_2+\ldots+a_n \leqslant (1+a_1)\ldots(1+a_n) \leqslant e^{a_1+a_2+\ldots+a_n}.$$

Левое неравенство становится очевидным, если раскрыть скобки; правое неравенство следует из того, что $1+a \leqslant e^a$ при любом положительном a. Вместе эти неравенства показывают, что p_n и $a_1+\ldots+a_n$ ограничены или не ограничены одновременно, и это завершает доказательство.

Если $a_n \leqslant 0$ для всех значений n, то мы полагаем $a_n = -b_n$ и рассматриваем произведение $\prod\limits_{n=1}^{\infty}(1-b_n)$.

Если $b_n \geqslant 0$, $b_n \neq 1$ для всех значений n и ряд $\sum b_n$ сходится, то произведение $\Pi(1-b_n)$ сходится.

Из сходимости ряда следует существование столь большого N, что $b_N+b_{N+1}+\ldots < 1/2$ и, в частности, $b_n < 1$ при $n \geqslant N$. Очевидно,

$$(1-b_N)(1-b_{N+1}) \geqslant 1-b_N-b_{N+1},$$

$$(1-b_N)(1-b_{N+1})(1-b_{N+2}) \geqslant (1-b_N-b_{N+1})(1-b_{N+2}) \geqslant$$
$$\geqslant 1-b_N-b_{N+1}-b_{N+2},$$

и вообще

$$(1-b_N)(1-b_{N+1})\ldots(1-b_n) \geqslant 1-b_N-\ldots-b_n > \frac{1}{2}.$$

Таким образом, отношение p_n/p_{N-1} монотонно убывает при $n>N$ и имеет положительную нижнюю грань. Следовательно, оно стремится к положительному пределу. Поскольку $p_{N-1} \neq 0$, это завершает доказательство.

Если $0 \leqslant b_n < 1$ для всех n, но ряд $\sum b_n$ расходится, то произведение $\Pi(1-b_n)$ расходится к нулю.

В самом деле, $1-b \leqslant e^{-b}$, если $0 \leqslant b < 1$, так что

$$(1-b_1)(1-b_2)\dots(1-b_n) \leqslant e^{-b_1-b_2-\dots-b_n}.$$

Правая часть стремится к нулю, что и завершает доказательство.

Таким образом, *если* $0 \leqslant b_n < 1$, *то произведение* $\Pi(1-b_n)$ *и ряд* $\sum b_n$ *сходятся или расходятся одновременно.*

1.4.2. Общий случай. Пусть теперь a_n — любые вещественные или комплексные числа, отличные от -1.

Определение. *Произведение* $\Pi(1+a_n)$ *называется абсолютно сходящимся, если произведение* $\Pi(1+|a_n|)$ *сходится.*

Из первого предложения § 1.4.1 следует, что *необходимым и достаточным условием абсолютной сходимости произведения* $\Pi(1+a_n)$ *служит сходимость ряда* $\sum|a_n|$.

Покажем теперь, что *абсолютно сходящееся произведение сходится.*

Обозначим через p_n то же частичное произведение, что и выше, и положим $P_n = \prod_{m=1}^{n}(1+|a_n|)$. Так как

$$p_n - p_{n-1} = (1+a_1)\dots(1+a_{n-1})\,a_n,$$

$$P_n - P_{n-1} = (1+|a_1|)\dots(1+|a_{n-1}|)\,|a_n|,$$

то $|p_n - p_{n-1}| \leqslant P_n - P_{n-1}$. Если произведение $\Pi(1+|a_n|)$ сходится, то P_n стремится к некоторому пределу, так что ряд $\sum(P_n - P_{n-1})$ сходится. Тогда, в силу теоремы сравнения, сходится и ряд $\sum(p_n - p_{n-1})$, т. е. p_n стремится к некоторому пределу.

Этот предел не может быть нулем. Действительно, так как ряд $\sum|a_n|$ сходится и $1+a_n \to 1$, то ряд

$$\sum|a_n/(1+a_n)|$$

также сходится. Следовательно (в силу только что доказанного), произведение $\prod_{m=1}^{n}\left(1-\frac{a_m}{1+a_m}\right)$ стремится к некоторому пределу. Но это произведение равно $1/p_n$. Следовательно, предел произведения p_n отличен от нуля.

Пример. Сомножители абсолютно сходящегося произведения можно произвольно переставлять, не меняя значения произведения (ср. *Ч. М.*, § 192).

1.4.3. Логарифм бесконечного произведения. Пусть

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1+a_n) = p;$$

верно ли, что $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \log(1+a_n) = \log p$? Здесь $\log z$ — главное значение логарифма числа z, т. е. значение, мнимая часть которого лежит между $-\pi$ и π (*Ч. М.*, § 231).

Ответ будет, очевидно, утвердительным, если все числа a_n действительны и положительны, поскольку тогда все логарифмы имеют свое обычное арифметическое значение. Но в общем случае формула требует модификации.

Пусть p_n обозначает n-е частичное произведение, и пусть $p_n = \rho_n e^{i\varphi_n}$, так что p_n и ρ_n стремятся к пределам и то же относится к аргументу φ_n, если его значения выбраны надлежащим образом. Пусть $1 + a_n = r_n e^{i\theta_n}$, где $-\pi < \theta_n \leqslant \pi$; тогда, так как $a_n \to 0$ при $n \to \infty$, то и $\theta_n \to 0$ при $n \to \infty$. Положим

$$s_n = \sum_{m=1}^{n} \log(1+a_m).$$

Очевидно,

$$s_n = \log p_n + 2k_n i\pi, \tag{1}$$

где k_n — целое число, и $2k_n\pi = \theta_1 + \ldots + \theta_n - \varphi_n$, так что

$$2\pi(k_{n+1} - k_n) = \theta_{n+1} - (\varphi_{n+1} - \varphi_n).$$

Поскольку правая часть стремится к нулю, при достаточно большом n

$$|2\pi(k_{n+1} - k_n)| < 2\pi$$

и, следовательно, $k_{n+1} = k_n$ (напомним, что все k_n — целые числа). Таким образом, k_n имеет при достаточно большом n постоянное значение, скажем k, т. е. $s_n = \log p_n + 2ki\pi$ $(n > n_0)$. Следовательно, $\sum \log(1+a_n) = \log p + 2ki\pi$. Сумма ряда есть, таким образом, некоторое значение, но не обязательно главное значение, логарифма произведения.

Заметим, что в ходе доказательства мы получили для всех достаточно больших значений N равенство

$$\sum_{N+1}^{\infty} \log(1+a_n) = \log p - \log p_N.$$

Если мы начнем с ряда логарифмов и положим

$$\sum_{n=1}^{\infty} \log(1+a_n) = s,$$

то после перехода к экспоненциалам в формуле (1), мы получим равенство $e^{s_n} = p_n$, так что $p_n \to p = e^s$.

Примеры. (I) Если ряды Σa_n и $\Sigma |a_n|^2$ сходятся, то произведение $\Pi(1+a_n)$ сходится.

[Воспользоваться соотношением $\log(1+a_n)=a_n+O(|a_n|^2)$.]

(II) Если ряды $\sum a_n, \sum a_n^2, \ldots, \sum a_n^{k-1}, \sum |a_n|^k$ сходятся, то произведение $\Pi(1+a_n)$ сходится.

(III) Если числа a_n вещественны и ряд Σa_n сходится, то произведение $\Pi(1+a_n)$ сходится или расходится к нулю в зависимости от того, сходится или расходится ряд Σa_n^2.

(IV) Произведение $\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(1+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\left(1-\frac{1}{\sqrt{4}}\right)\ldots$ расходится.

(V) Показать, что если

$$a_{2n-1}=-\frac{1}{\sqrt{n+1}}, \quad a_{2n}=\frac{1}{\sqrt{n+1}}+\frac{1}{n+1}+\frac{1}{(n+1)\sqrt{n+1}},$$

то произведение $\Pi(1+a_n)$ сходится, хотя оба ряда Σa_n и Σa_n^2 расходятся.

(VI) Произведение $\prod\left(1+\frac{i}{n}\right)$ расходится, но произведение $\prod\left|1+\frac{i}{n}\right|$ сходится.

(VII) Если ряд $\Sigma |u_n|^2$ сходится, то сходится и произведение $\Pi(1-u_n)e^{u_n}$; если же ряд $\Sigma |u_n|^3$ сходится, то сходится произведение $\Pi(1-u_n)e^{u_n+\frac{1}{2}u_n^2}$.

[Если $u\to 0$, то $(1-u)e^u=1+O(u^{-2})$ и $(1-u)e^{u+\frac{1}{2}u^2}=1+O(u^{-3})$; или же можно рассмотреть ряд логарифмов, как в примере (I). Произведения этого типа имеют большое значение для главы VIII и будут рассмотрены там полнее.]

1.4.4. Равномерная сходимость бесконечных произведений. Бесконечное произведение

$$\prod_{n=1}^{\infty}\{1+u_n(z)\},$$

где сомножители — функции переменного z, вещественного или комплексного, называется равномерно сходящимся в некоторой области значений z, если частичное произведение

$$p_n(z)=\prod_{m=1}^{n}\{1+u_m(z)\}$$

равномерно сходится в этой области к некоторому пределу, нигде не равному нулю.

Вот простейший признак равномерной сходимости произведения.

Произведение $\Pi\{1+u_n(z)\}$ *равномерно сходится в каждой области, в которой ряд* $\sum|u_n(z)|$ *равномерно сходится к ограниченной функции.*

Доказательство состоит в пересмотре аргументов § 1.4.2 с точки зрения равномерности. Пусть M — верхняя грань суммы $\sum|u_n(z)|$

в рассматриваемой области. Тогда

$$\{1+|u_1(z)|\}\ldots\{1+|u_n(z)|\}<e^{|u_1(z)|+\cdots}\leqslant e^M.$$

Полагая $P_n(z)=\prod_{m=1}^{\infty}\{1+|u_m(z)|\}$, мы видим, что

$$P_n(z)-P_{n-1}(z)=\{1+|u_1(z)|\}\ldots\{1+|u_{n+1}(z)|\}\,|u_n(z)|<e^M|u_n(z)|.$$

Следовательно, ряд $\sum\{P_n(z)-P_{n-1}(z)\}$ равномерно сходится, и доказательство завершается так же, как в § 1.4.2.

Примеры. (I) Произведение $\prod\left(1-\frac{1}{\omega^s}\right)$, где ω пробегает все простые числа 2, 3, 5, ..., равномерно сходится в каждой конечной области, в которой $\mathrm{Re}(s)\geqslant a>1$; действительно, это верно для ряда $\sum|\omega^{-s}|$, который составлен из части членов ряда $\sum|n^{-s}|$ (§ 1.2, пример).

Значение произведения есть $1/\zeta(s)$. Действительно,

$$(1-2^{-s})\zeta(s)=1+3^{-s}+5^{-s}+\ldots,$$

где справа опущены члены ряда $\sum n^{-s}$ с четными n. Далее,

$$(1-2^{-s})(1-3^{-s})\zeta(s)=1+5^{-s}+7^{-s}+11^{-s}+\ldots,$$

где справа опущены члены с n, делящимися на 2 или 3. Вообще, если ω_n обозначает n-е простое число, то

$$(1-2^{-s})\ldots(1-\omega_n^{-s})\zeta(s)=1+l^{-s}+\ldots,$$

где справа опущены члены с n, делящимися на одно из чисел 2, 3 ..., ω_n. Так как все числа, не превосходящие ω_n, содержат такие множители, то

$$|(1-2^{-s})\ldots(1-\omega^{-s})\zeta(s)-1|\leqslant|(\omega_n+1)^{-s}|+|(\omega_n+2)^{-s}|+\ldots,$$

а эта сумма стремится к нулю при $n\to\infty$. Следовательно,

$$\lim\ 1-2^{-s})\ldots(1-\omega_n^{-s})\zeta(s)=1,$$

что и утверждалось.

(II) Если $\mathrm{Re}(s)\geqslant 2$, то

$$\log\zeta(s)=-\sum_{\omega}\log(1-\omega^{-s}),$$

причем всюду взяты главные значения логарифма.

[Из предыдущего примера и сказанного в § 1.4.3 мы выводим, что

$$\log\zeta(s)=-\sum\log(1-\omega^{-s})+2ki\pi,$$

где k — целое число, зависящее prima facie от s. Если значение s вещественно, то k есть, очевидно, 0. Кроме того, если $\mathrm{Re}(s)>1$, то вещественная часть числа $1-\omega^{-s}$ положительна, так что его аргумент заключен между $-\frac{1}{2}\pi$ и $\frac{1}{2}\pi$. Поэтому при $\mathrm{Re}(s)>1$ каждый член $\log(1-\omega^{-s})$ непрерывен. Следовательно, сумма ряда непрерывна, Подобным же образом функция $\log\zeta(s)$ непрерывна, если $\operatorname{Re}\zeta(s) > 0$. В частности, это верно при $\operatorname{Re}(s) \geqslant 2$, так как при $\operatorname{Re}(s) = \sigma \geqslant 2$

$$\operatorname{Re}\zeta(s) \geqslant 1 - 2^{-\sigma} - 3^{-\sigma} - \ldots \geqslant 1 - 2^{-2} - 3^{-2} - \ldots > 1 - \frac{1}{1\cdot 2} - \frac{1}{2\cdot 3} - \ldots = 0.$$

Следовательно, функция k непрерывна при $\operatorname{Re}(s) \geqslant 2$ и, таким образом, равна нулю во всей этой области.]

(III) Сходимость произведения $\Pi(1+a_n)$ не влечет за собой сходимость произведения $\Pi(1+a_n x)$, за исключением случаев $x=0$ и $x=1$ *).

(IV) Из сходимости произведения $\Pi(1+a_n)$ не следует равенство

$$\lim_{x\to 1} \prod (1+a_n x^n) = \prod (1+a_n).$$

[Харди *) указал пример, в котором

$$\lim \prod (1+a_n x^n) = 2\prod (1+a_n).$$

Этот пример резко контрастирует с теоремой Абеля о непрерывности степенных рядов.]

(V) Произведение $\prod\left(1+\frac{e^{in\theta}}{\log n}\right)$ не сходится ни при каком рациональном значении θ/π, но сходится, если θ/π есть алгебраическое число (*Ч. М.*, гл. I, пример 36), не являющееся рациональным.

[Проблема сходимости этого произведения, предложенная Харди *), была решена Литтлвудом **).]

1.5. Сходимость несобственных интегралов. Мы предполагаем, что читатель знаком с элементарными свойствами интеграла Римана от непрерывной функции (*Ч. М.*, §§ 161—169). Если функция $f(x)$ непрерывна в конечном замкнутом интервале (a, b), то интеграл Римана

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

всегда существует. Далее, при $a \leqslant x \leqslant b$ существует неопределенный интеграл $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$, и функция $F(x)$ непрерывна и имеет производную, равную $f(x)$. Мы предполагаем известными обычные правила интегрирования по частям, подстановкой и т. д., а также теоремы о среднем значении (*Ч. М.*, §§ 165, 166).

Прежде всего мы распространим определение интеграла на простейшие разрывные функции. Предположим, что интервал (a, b) может быть разбит на конечное число частей (a, x_1), (x_1, x_2), ..., (x_n, b) таким образом, что функция $f(x)$ непрерывна всюду, кроме точек $x_1, \ldots, x_n$, причем существуют пределы $f(x_1-0)$, $f(x_1+0)$, ..., $f(x_n-0)$, $f(x_n+0)$ (*Ч. М.*, § 100). Тогда интеграл функции $f(x)$ существует на каждом частичном интер-

*) Hardy [5].
**) Littlewood [2].

вале и интеграл по всему интервалу определяется как сумма интегралов по частичным интервалам:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^{x_1} f(x)\,dx + \int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx + \ldots + \int_{x_n}^{b} f(x)\,dx.$$

Напомним определение несобственного интеграла (*Ч. М.*, § 184). Если функция $f(x)$ интегрируема в интервале (a, x) при любом x и

$$\lim_{x\to\infty} \int_a^x f(t)\,dt = l,$$

то говорят, что несобственный интеграл $\int_a^\infty f(t)\,dt$ сходится и его значение есть l. Подобным же образом, если функция $f(t)$ стремится к бесконечности или колеблется при $x \to c$, но $\lim\limits_{x\to c} \int_a^x f(t)\,dt = l$, то мы полагаем интеграл функции $f(t)$ по интервалу (a, c) равным l (*Ч. М.*, § 187).

На эти случаи без всяких трудностей распространяются правила интегрирования по частям и подстановкой.

Некоторые признаки сходимости, такие как признак сравнения, для случая, когда функция $f(t)$ положительна, имеются в *Ч. М.*, § 185.

Пусть теперь $f(t)$ — функция произвольного знака. Если обе функции $f(t)$ и $|f(t)|$ интегрируемы в одном из уже указанных смыслов в любом интервале (a, x) и интеграл $\int_a^\infty |f(t)|\,dt$ сходится, то интеграл $\int_a^\infty f(t)\,dt$ называется *абсолютно сходящимся* (ср. *Ч. М.*, § 203).

Абсолютно сходящийся интеграл сходится. Действительно, если интеграл функции $|f(t)|$ сходится, то, как показывает признак сравнения, сходятся и интегралы функций

$$\varphi(t) = |f(t)| + f(t), \quad \psi(t) = |f(t)| - f(t)$$

(обе эти функции положительны). Следовательно, сходится и интеграл функции $\frac{1}{2}\{\varphi(t) - \psi(t)\} = f(t)$.

Это предложение верно и в случае, когда $f(t)$ — непрерывная комплексная функция: нужно рассмотреть порознь ее действительную часть и ее мнимую часть.

Интеграл, который сходится, но не сходится абсолютно, называется *условно сходящимся*.

Наиболее важные признаки условной сходимости интегралов являются аналогами признаков Дирихле и Абеля для рядов (*Ч. М.* § 196).

Аналог признака Дирихле. *Если функция* $\varphi(x)$ *имеет непрерывную производную и монотонно убывает до нуля при* $x \to \infty$, *а функция*

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$$

ограничена, то интеграл $\int_a^\infty \varphi(x) f(x)\,dx$ *сходится.*

Интегрируя по частям (этот процесс является для интегралов аналогом того «суммирования по частям», с помощью которого обосновывается признак Дирихле), мы получаем равенство

$$\int_a^X \varphi(x) f(x)\,dx = \varphi(X) F(X) + \int_a^X \{-\varphi'(x)\} F(x)\,dx.$$

Первый член справа стремится к нулю при $X \to \infty$, интеграл же справа абсолютно сходится согласно признаку сравнения: функция $|F(x)|$ ограничена, функция $-\varphi'(x)$ неотрицательна, и

$$\int_a^X \{-\varphi'(x)\}\,dx = \varphi(a) - \varphi(X) \to \varphi(a).$$

Этим теорема доказана.

Примеры. (I) Интегралы $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx$, $\int_1^\infty \frac{\cos x}{x}\,dx$ являются условно сходящимися.

(II) Сформулировать и доказать для интегралов аналог признака Абеля.

Укажем, наконец, *необходимое и достаточное условие* сходимости интеграла $\int_a^\infty f(x)\,dx$; оно требует, чтобы для заданного ε можно было найти такое X_0, что

$$\left| \int_X^{X'} f(x)\,dx \right| < \varepsilon,$$

если $X' > X \geqslant X_0$. Оно может быть обосновано так же, как соответствующее условие для рядов (*Ч. М.*, §§ 83, 84), или выведено из последнего.

Примеры. (I) Воспользоваться этим условием для доказательства того, что абсолютно сходящийся интеграл сходится.

(II) Получить признак сходимости Дирихле с помощью этого принципа и второй теоремы о среднем значении (*Ч. М.*, § 166, примеры 11, 12).

1.5.1. Равномерная сходимость несобственных интегралов. Теперь мы можем распространить на несобственные интегралы понятие равномерной сходимости. Пусть $f(x, y)$ — интегрируемая функция от x в интервале $a \leqslant x \leqslant b$ при $\alpha \leqslant y \leqslant \beta$ и любом значении b. Предположим, что интеграл

$$\varphi(y) = \int_a^\infty f(x, y)\,dx$$

сходится для всех значений y в интервале (α, β). *Этот интеграл называется равномерно сходящимся, если для всякого ε можно найти такое число X_0, зависящее от ε, но не от y, что*

$$\left|\varphi(y) - \int_a^X f(x, y)\,dx\right| < \varepsilon \qquad (X \geqslant X_0).$$

Подобным же образом определяется равномерная сходимость для интегралов, которые являются несобственными из-за того, что подынтегральная функция становится в интервале интегрирования бесконечной.

Простейший признак равномерной сходимости является аналогом признака § 1.1.1, относящегося к рядам. *Предыдущий интеграл заведомо равномерно сходится, если существует такая положительная функция $g(x)$, не зависящая от y, что $|f(x, y)| \leqslant g(x)$ для всех значений x и y и что интеграл $\int_a^\infty g(x)\,dx$ сходится.*

Это можно доказать так же, как упомянутую теорему о рядах.

Подобным же образом могут быть модифицированы и другие признаки. Например, если в признаке Дирихле f и φ — функции от x и y, то мы предполагаем, что производная $\frac{\partial \varphi}{\partial x}$ непрерывна, что φ стремится к нулю монотонно и равномерно относительно y и что $|F|$ меньше постоянной, не зависящей от x и y. Тогда интеграл от φf равномерно сходится.

Примеры. (I) Исследовать сходимость интеграла

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t}\,dt.$$

[Предположим сначала, что значение x вещественно. Интеграл сходится у своего правого предела для всех значений x (функция $t^{x+1}e^{-t}$ ограничена при любом x, что позволяет сравнить этот интеграл с интегралом от $1/t^2$); но чтобы обеспечить сходимость у левого конца, нужно предположить, что $x > 0$ (*Ч. М.*, § 187).

Интеграл сходится равномерно в каждом конечном интервале $a \leqslant x \leqslant b$ с $a > 0$. Чтобы доказать это, мы разбиваем интеграл на два интеграла, распространенные на интервалы $(0, 1)$ и $(1, \infty)$, и сравниваем эти интегралы с интегралами

$$\int_0^1 t^{a-1}\,dt, \quad \int_1^\infty t^{b-1}e^{-t}\,dt,$$

которые сходятся и не зависят от x.

Подобным же образом при комплексном x интеграл равномерно сходится во всякой конечной области, в которой всюду $\operatorname{Re}(x) \geqslant a > 0$; действительно, если $x=\xi+i\eta$, то $|t^{x-1}|=t^{\xi-1}$, что позволяет повторить предыдущие аргументы.]

(II) Интеграл $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin xy}{x^s}\,dx$ абсолютно сходится при $1<s<2$ и любом y. При фиксированном значении s из этого интервала он сходится равномерно в любом интервале $0<\alpha\leqslant y\leqslant\beta$.

Он сходится условно при $0<s\leqslant 1$, $y>0$ и равномерно при $0<\alpha\leqslant y\leqslant\beta$, если $0<s\leqslant 1$.

При фиксированном $y>0$ он сходится абсолютно и равномерно в любом интервале $1<s_1\leqslant s\leqslant s_2<2$ и равномерно, но не абсолютно, в любом интервале $0<s_1\leqslant s\leqslant 1$.

1.5.2. Теорема о непрерывности. В этом параграфе мы докажем для интегралов аналог теоремы, утверждающей, что сумма равномерно сходящегося ряда непрерывных функций непрерывна.

Нам потребуется следующая теорема о непрерывных функциях двух переменных, подобная теореме о функциях одного переменного, доказанной в *Ч. М.*, § 107.

Пусть $f(x, y)$ — функция от x и y, определенная и непрерывная в прямоугольнике $a\leqslant x\leqslant b$, $\alpha\leqslant y\leqslant\beta$. Тогда для всякого ε существует такое разбиение прямоугольника на конечное число частичных прямоугольников $x_\mu\leqslant x\leqslant x_{\mu+1}$, $y_\nu\leqslant y\leqslant y_{\nu+1}$, что для любых двух точек (x, y) и (ξ, η), лежащих в одном и том же частичном прямоугольнике,

$$|f(x, y)-f(\xi, \eta)|<\varepsilon.$$

Мы докажем это методом подразделения. Предположим, что сам заданный прямоугольник не обладает требуемым свойством. Тогда, если мы разделим его прямыми $x=\frac{1}{2}(a+b)$, $y=\frac{1}{2}(\alpha+\beta)$ на четыре прямоугольника, то по крайней мере один из них также не будет обладать этим свойством. Пометим его, если он один; если же он не один, пометим один из имеющихся — чтобы дать определенное правило, расположим все четыре прямоугольника в определенном порядке (скажем, левый нижний, левый верхний, правый нижний, правый верхний), — и выберем первый, не обладающий требуемым свойством.

После этого мы таким же образом разделим на четыре части выбранный прямоугольник и продолжим этот процесс подразделения неограниченно, каждый раз выбирая одну четвертушку, не обладающую требуемым свойством. Абсциссы левых сторон выбранных прямоугольников образуют возрастающую последовательность, а абсциссы правых сторон — убывающую последовательность, так что каждая из этих последовательностей имеет предел. Этот предел — общий, так как длина стороны стремится к нулю; обозначим его через X. Подобным же образом ординаты верхних и нижних сторон выбранных прямоугольников стремятся к некоторому пределу Y.

Воспользуемся теперь тем фактом, что функция $f(x, y)$ непрерывна в точке (X, Y). По заданному ε мы можем найти такое δ, что

$$|f(x, y)-f(X, Y)|<\frac{1}{2}\varepsilon \qquad (|x-X|<\delta, \ |y-Y|<\delta)$$

и что, следовательно, $|f(x, y)-f(\xi, \eta)|<\varepsilon$, если обе точки (x, y), (ξ, η) лежат в квадрате с центром (X, Y) и стороной 2δ. Таким образом, прямоугольники, выбранные при построении, обладают требуемым свойством, если они лежат в этом квадрате, а они, начиная с некоторого, действительно в нем лежат. Мы получили противоречие, которое и доказывает теорему.

Из нее мы выведем следующий важный факт: *каково бы ни было ε, можно найти такое δ, что*

$$|f(x, y)-f(\xi, \eta)|<\varepsilon,$$

если $|x-\xi|<\delta$ и $|y-\eta|<\delta$; δ зависит только от ε, но не от x, y, ξ или η.

Разобьем прямоугольник так, чтобы для любых двух точек (x, y) и (ξ, η) из одного и того же частичного прямоугольника было выполнено неравенство $|f(x, y)-f(\xi, \eta)|<\frac{1}{2}\varepsilon$. Пусть δ — длина наименьшей из сторон частичных прямоугольников. Тогда δ есть нужное число. Действительно, если $|x-\xi|<\delta$ и $|y-\eta|<\delta$, то точки (x, y) и (ξ, η) лежат либо в одном и том же частичном прямоугольнике, либо в двух соседних прямоугольниках, и в обоих случаях $|f(x, y)-f(\xi, \eta)|<\varepsilon$.

Обычно это предложение формулируют короче: *функция двух переменных, непрерывная в прямоугольнике (включая границу), равномерно непрерывна в нем.*

Теперь мы можем заняться свойствами интеграла.

Если $f(x, y)$ — функция, определенная и непрерывная в прямоугольнике $a\leqslant x\leqslant b$, $\alpha\leqslant y\leqslant\beta$, то

$$\varphi(y)=\int_a^b f(x, y)\,dx$$

есть непрерывная функция от y в интервале (α, β).

Действительно,

$$\varphi(y+k)-\varphi(y)=\int_a^b\{f(x,\ y+k)-f(x,\ y)\}\,dx,$$

и по заданному ε мы можем найти такое k_0, что

$$|f(x,\ y+k)-f(x,\ y)|\leqslant\varepsilon \qquad (|k|<k_0)$$

для всех значений x и y. Следовательно,

$$|\varphi(y+k)-\varphi(y)|\leqslant\varepsilon(b-a) \qquad (|k|<k_0),$$

что и завершает доказательство.

Если функция $f(x,\ y)$ непрерывна в прямоугольнике $a\leqslant x\leqslant b$, $\alpha\leqslant y\leqslant\beta$ при любом значении b и интеграл

$$\varphi(y)=\int_a^\infty f(x,\ y)\,dx$$

сходится равномерно относительно y в интервале $(\alpha,\ \beta)$, то $\varphi(y)$ есть непрерывная функция от y в этом интервале.

Мы можем написать:

$$\begin{aligned}|\varphi(y+k)-\varphi(y)|&=\left|\int_a^\infty\{f(x,\ y+k)-f(x,\ y)\}\,dx\right|\leqslant\\&\leqslant\left|\int_a^X\{f(x,\ y+k)-f(x,\ y)\}\,dx\right|+\\&\qquad+\left|\int_X^\infty f(x,\ y+k)\,dx\right|+\left|\int_X^\infty f(x,\ y)\,dx\right|.\end{aligned}$$

По заданному ε можно найти такое X_0, что при $X>X_0$ и любом k каждый из двух последних членов меньше ε; если же X фиксировано, то, в силу предыдущей теоремы, первый член справа стремится к нулю вместе с k. Этим теорема доказана.

В последних теоремах непрерывность функции $\varphi(y)$ в концевых точках α и β понимается как односторонняя; например, $\varphi(y)\to\varphi(\alpha)$ при $y\to\alpha$ справа.

Примеры. (I). Если интеграл $\int_0^\infty f(x)\,dx$ сходится, то интеграл $\int_0^\infty e^{-xy}f(x)\,dx$ равномерно сходится при $0\leqslant y\leqslant\beta$ и, таким образом, непрерывен при $y=0$.

[Это — аналог для интегралов теоремы Абеля о степенных рядах. Доказательство может быть проведено следующим образом.

Положим $F(x)=\int\limits_x^\infty f(t)\,dt$, так что $F(x)\to 0$ при $x\to\infty$. Пусть $|F(x)|<\varepsilon$ при $x>X_0$. Тогда

$$\left|\int\limits_X^{X'} f(x)e^{-xy}\,dx\right|=\left|F(X)e^{-Xy}-F(X')e^{-X'y}-y\int\limits_X^{X'} F(x)e^{-xy}\,dx\right|\leqslant$$
$$\leqslant\varepsilon+\varepsilon+y\varepsilon\int\limits_X^{X'} e^{-xy}\,dx<3\varepsilon$$

при $X'>X>X_0$ и $y\geqslant 0$.]

(II) Интеграл $\int\limits_0^\infty \frac{\sin xy}{x}\,dx$ сходится при любом y; однако он не сходится в окрестности точки $y=0$ равномерно, так как он разрывен в этой точке.

[Чтобы доказать это, заметим, что интеграл: (a) постоянен при $y>0$ (полагаем $x=u/y$); (b) положителен при $y=1$ (представляем его в виде ряда

$$\sum\int\limits_{(n-1)\pi}^{n\pi}\frac{\sin x}{x}\,dx,$$

с убывающими членами переменного знака); (c) является нечетной функцией от y.

Можно доказать прямо, что он не сходится равномерно, рассматривая «остаток»

$$\int\limits_X^\infty \frac{\sin xy}{x}\,dx=\int\limits_{Xy}^\infty \frac{\sin u}{u}\,du$$

и полагая, например, $X=\pi/y$.

Значение этого интеграла будет найдено позже (§ 1.7. 6).]

1.6. Двойные ряды. Двойной ряд состоит из членов, расположенных в двойном порядке, т. е. имеет вид $\sum a_{m,n}$, где каждый из индексов m, n изменяется от 1 до ∞. Не существует единственного стоящего вне конкуренции метода суммирования такого ряда, подобного «$\lim s_n$»-методу, которым пользуются для простых рядов. Образовывать частичные суммы ряда можно множеством различных способов, и каждый способ дает метод суммирования ряда. Мы можем, например, рассмотреть «прямоугольные» суммы $\sum\limits_{m=1}^{M}\sum\limits_{n=1}^{N} a_{m,n}$ и заставить M и N стремиться к бесконечности различными способами. Мы можем также рассмотреть суммы, взятые по треугольным областям, такие как $\sum\limits_{m+n\leqslant N} a_{m,n}$. Наконец, мы можем превратить двойной ряд в «повторный» ряд, образуя сначала суммы $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{m,n}$ и находя затем сумму этих сумм.

Мы записываем этот повторный ряд как $\sum\limits_{m=1}^{\infty} \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{m,n}$; внутренняя сумма должна быть найдена первой. Он называется «суммой строк». Если мы выберем противоположный порядок, то получим повторный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sum\limits_{m=1}^{\infty} a_{m,n}$, называемый «суммой столбцов».

1.6.1. Двойные ряды с положительными членами. *Если все члены двойного ряда положительны, то все методы суммирования равносильны: либо мы получаем конечный предел, один и тот же во всех случаях, либо при любом методе суммирования ряд расходится к положительной бесконечности.*

Мы докажем это, рассматривая имеющиеся возможности.

Будем называть любое множество числовых пар (m, n) областью. Пусть $\Delta_1, \Delta_2, \ldots$ — последовательность конечных областей, каждая из которых содержит предыдущую, и пусть, как бы велико ни было N, Δ_p содержит квадрат $m \leqslant N$, $n \leqslant N$, если p достаточно велико.

Возможны два случая: конечные суммы

$$a_{m_1, n_1} + a_{m_2, n_2} + \ldots + a_{m_k, n_k},$$

выбранные из ряда произвольным образом, могут иметь верхнюю грань, скажем G, и могут не иметь ее. В первом случае

$$\sum_{\Delta_p} a_{m,n} \leqslant G$$

для всех значений p, и, с другой стороны, для заданного ε можно найти конечную сумму, бо́льшую $G - \varepsilon$. Так как Δ_p содержит все члены этой суммы, если p достаточно велико, то при достаточно большом p

$$\sum_{\Delta_p} a_{m,n} > G - \varepsilon.$$

Поскольку $\sum\limits_{\Delta_p} a_{m,n}$ не убывает, это значит, что $\lim\limits_{p \to \infty} \sum\limits_{\Delta_p} a_{m,n} = G$, т. е. что при суммировании любым способом рассматриваемого вида ряд сходится и его сумма равна G. В согласии с этим в первом случае ряд называется *сходящимся*; указывать выбор последовательности областей нет необходимости.

Во втором случае для всякого положительного числа H существует конечная сумма $a_{m_1, n_1} + \ldots + a_{m_k, n_k}$, превосходящая H. Так как можно найти такое p, что Δ_p содержит все члены этой суммы, то при достаточно большом p

$$\sum_{\Delta_p} a_{m,n} > H.$$

Следовательно,

$$\sum_{\Delta_p} a_{m,n} \to \infty.$$

В этом случае ряд называется *расходящимся*.

Эти два случая являются единственными возможными. Так как результат не зависит от выбора рассматриваемых областей Δ_p, то для *конечных* частичных сумм теорема доказана.

Повторные ряды пока не охватываются нашими рассмотрениями. Чтобы охватить их, мы должны заменить наши конечные области Δ_p бесконечными областями.

Предположим сначала, что двойной ряд сходится. Пусть D — произвольная область, конечная или бесконечная. Положим $b_{m,n} = a_{m,n}$, если (m, n) есть точка области D, и $b_{m,n} = 0$ в противном случае. Очевидно, ряд $\sum b_{m,n}$ сходится, и мы полагаем $\sum\limits_D a_{m,n} = \sum b_{m,n}$. Ясно, что

$$\sum_D a_{m,n} \leqslant G.$$

Пусть теперь D_1, D_2, ... — последовательность не обязательно конечных областей, в остальном обладающая теми же свойствами, что и последовательность Δ_1, Δ_2, ... Тогда

$$\sum_{D_p} a_{m,n} \leqslant G,$$

и можно доказать в точности так же, как выше для Δ_p, что

$$\sum_{D_p} a_{m,n} > G - \varepsilon \qquad (p \geqslant p_0).$$

Следовательно, $\lim\limits_{p\to\infty} \sum\limits_{D_p} a_{m,n} = G$. В частности, если мы возьмем в качестве D_p бесконечную область, определенную неравенством $m \leqslant p$, то увидим, что сумма строк равна G. Подобным же образом сумма столбцов равна G.

Предположим теперь, что двойной ряд расходится. Может случиться, что при некотором значении p ряд $\sum\limits_{D_p} a_{m,n}$ расходится. В этом случае процесс суммирования обрывается. Если же ряд $\sum\limits_{D_p}$ сходится при любом p, то, как выше, $\sum\limits_{D_p} a_{m,n} > H$ для любого H при $p \geqslant p_0(H)$. Следовательно,

$$\sum_{D_p} a_{m,n} \to \infty.$$

В частности, если двойной ряд расходится, то либо некоторый столбец расходится, либо все столбцы сходятся, но образуют расходящийся ряд. То же верно для строк.

1.6.2. Поскольку случай повторных рядов особенно интересен, мы дадим для него и другое доказательство.

Если $a_{m,n} \geqslant 0$, *то*

$$\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_{m,n} = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} a_{m,n}; \tag{1}$$

это значит, что если одна часть равенства сходится, то сходится и другая и притом к той же сумме.

Предположим, например, что сходится левая часть. Это значит, что все ряды $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{m,n}$ сходятся, скажем, к суммам A_m и что ряд $\sum\limits_{m=1}^{\infty} A_m$ сходится, скажем, к сумме S.

Так как $a_{m,n} \leqslant A_m$ для всех значений m и n, то, согласно признаку сравнения, ряд $\sum\limits_{m=1}^{\infty} a_{m,n}$ сходится при любом n. Обозначив его сумму через $A^{(n)}$, мы можем написать:

$$\sum_{n=1}^{N} A^{(n)} = \sum_{n=1}^{N} \sum_{m=1}^{\infty} a_{m,n} = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{N} a_{m,n} \leqslant \sum_{m=1}^{\infty} A_m = S.$$

Следовательно, ряд $\sum A^{(n)}$ сходится, и если его сумма есть S', то $S' \leqslant S$. Но теперь мы можем обратить все рассуждение и, начав со сходимости правой части, доказать, что $S \leqslant S'$. Следовательно, $S = S'$.

1.6.2.1. Вот еще одно доказательство. Предположим, что левая часть равенства (1) § 1.6.2 сходится. Тогда

$$\sum_{n=1}^{N} \sum_{m=1}^{\infty} a_{m,n} = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{N} a_{m,n}, \tag{1}$$

поскольку складывается только конечное число сходящихся рядов (их сходимость следует из сходимости ряда $\sum A_m$). Достаточно доказать теперь, что при $N \to \infty$

$$\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=N+1}^{\infty} a_{m,n} \to 0. \tag{2}$$

Действительно, левая часть, сложенная с правой частью равенства (1), дает S, и если она стремится к нулю, то левая часть равенства (1) стремится к S, а это и нужно установить.

Но соотношение (2) следует из теоремы § 1.1.4 о равномерной сходимости. Действительно, ряд (2) имеет вид $\sum\limits_{m=1}^{\infty} u_m(N)$. Он сходится равномерно относительно N, так как

$$|u_m(N)| \leqslant A_m$$

и ряд $\sum A_m$ сходится. Кроме того, $u_m(N) \to 0$ для каждого значения m, что и завершает доказательство.

Этот метод представляет интерес по следующей причине. В менее простых случаях, когда не все числа $a_{m,n}$ положительны, мы можем все-таки исходить из равенства (1) и, таким образом, редуцировать проблему к доказательству равенства (2). Последнее может быть доказано в этих случаях специальными приемами — см., например, § 1.6.6, пример (XVII).

1.6.3. Признак сравнения. Ряды с положительными и отрицательными членами. Укажем сначала на признак сравнения для двойных рядов с положительными членами: *если $a_{m,n} \leqslant b_{m,n}$ и ряд $\sum b_{m,n}$ сходится, то ряд $\sum a_{m,n}$ сходится.*

Доказательство мы предоставляем читателю.

Пусть теперь некоторые из чисел $a_{m,n}$ могут быть положительными, а некоторые отрицательными. Тогда *ряд $\sum b_{m,n}$ называется абсолютно сходящимся, если ряд $\sum |a_{m,n}|$ сходится.*

Положим $\alpha_{m,n} = a_{m,n}$, если $a_{m,n} \geqslant 0$, и $\alpha_{m,n} = 0$ в противном случае; положим $\beta_{m,n} = -a_{m,n}$, если $a_{m,n} < 0$, и $\beta_{m,n} = 0$ в противном случае. Так как $0 \leqslant \alpha_{m,n} \leqslant |a_{m,n}|$, $0 \leqslant \beta_{m,n} \leqslant |a_{m,n}|$, то, согласно признаку сравнения, ряды $\sum \alpha_{m,n}$, $\sum \beta_{m,n}$ сходятся, если ряд $\sum |a_{m,n}|$ сходится. Обозначим суммы этих рядов через α и β. В обозначениях § 1.6.1

$$\sum_{\Delta_p} a_{m,n} = \sum_{\Delta_p} \alpha_{m,n} - \sum_{\Delta_p} \beta_{m,n} \to \alpha - \beta.$$

То же можно написать, заменив конечную область Δ_p бесконечной областью D_p, только в этом случае равенство служит определением своей левой части.

«Сумма» $\alpha-\beta$ не зависит от выбора последовательности областей Δ_p или D_p. Мы выражаем этот факт словами: *ряд* $\sum a_{m,n}$ *сходится*. Таким образом, *абсолютно сходящийся двойной ряд сходится*.

На ряды этого типа может быть теперь распространен признак сравнения.

1.6.4. Ряды с комлексными членами. Пусть, наконец, $a_{m,n}$ — комплексные числа, скажем, $a_{m,n}=b_{m,n}+ic_{m,n}$. Ряд $\sum a_{m,n}$ и в этом случае называется абсолютно сходящимся, если ряд $\sum |a_{m,n}|$ сходится. Так как

$$|b_{m,n}|\leqslant|a_{m,n}|,\quad |c_{m,n}|\leqslant|a_{m,n}|,$$

то абсолютная сходимость ряда $\sum a_{m,n}$ влечет за собой абсолютную сходимость и, значит, сходимость рядов $\sum b_{m,n}$ и $\sum c_{m,n}$. Если b и c — суммы этих рядов, то

$$\sum_{\Delta_p\,(\text{или } D_p)} a_{m,n}=\sum_{\Delta_p} b_{m,n}+i\sum_{\Delta_p} c_{m,n}\to b+ic,$$

и говорят, что ряд $\sum a_{m,n}$ сходится; другими словами, *абсолютно сходящийся ряд с комплексными членами сходится*.

Все наши заключения о рядах с положительными членами могут быть теперь распространены на абсолютно сходящиеся ряды с комплексными членами.

1.6.5. Перемножение рядов. Пусть

$$a_0+a_1+a_2+\ldots,\quad b_0+b_1+b_2+\ldots$$

— два ряда. Результат перемножения этих рядов по правилу Коши есть ряд $c_0+c_1+c_2+\ldots$, в котором

$$c_n=a_0b_n+a_1b_{n-1}+\ldots+a_nb_0.$$

Это правило происходит из теории степенных рядов, где $a_n=\alpha_nx^n$, $b_n=\beta_nx^n$ и где в ряде, получающемся после перемножения, собирают вместе члены с одной и той же степенью x.

Если ряды $\sum\limits_0^\infty a_n$ *и* $\sum\limits_0^\infty b_n$ *абсолютно сходятся и их суммы равны* a *и* b, *то ряд* $\sum c_n$ *абсолютно сходится и его сумма равна* ab.

Это сразу следует из предыдущих теорем о двойных рядах. Действительно, двойной ряд $\sum a_mb_n$ абсолютно сходится. Его сумма по строкам или столбцам равна ab, и так как

$$\sum_{n=0}^{N} c_n=\sum_{m+n\leqslant N} a_mb_n,$$

то левая сумма тоже стремится к пределу ab.

Если ряды $\sum\limits_0^\infty a_n$, $\sum\limits_0^\infty b_n$, $\sum\limits_0^\infty c_n$ *сходятся к суммам* a, b, c, *то* $c = ab$.

Мы применяем предыдущую теорему к рядам $\sum\limits_0^\infty a_n x^n$, $\sum\limits_0^\infty b_n x^n$, $\sum\limits_0^\infty c_n x^n$, которые абсолютно сходятся при $0 \leqslant x < 1$, а затем заставляем x стремиться к 1 и пользуемся теоремой Абеля (§ 1.2.2).

1.6.6. Различные примеры, относящиеся к двойным и повторным рядам. (I) Если $|a_{m,n}| < Am^\alpha n^\beta$, где A, α, β — постоянные, и $|x| < 1$, $|y| < 1$, то ряд $\sum a_{m,n} x^m y^n$ абсолютно сходится.

(II) Если ряд $\sum a_{m,n} x_0^m y_0^n$ абсолютно сходится, то ряд $\sum a_{m,n} x^m y^n$ абсолютно сходится при $|x| \leqslant |x_0|$, $|y| \leqslant |y_0|$.

(III) Ряд $\sum m^{-\alpha} n^{-\beta}$ сходится при $\alpha > 1$, $\beta > 1$.

(IV) Ряд $\sum (m^2+n^2)^{-\alpha}$ сходится при $\alpha > 1$.

[Сравнить часть ряда, в которой $m \leqslant n$, с рядом $\sum\limits_{n=1}^\infty \sum\limits_{m=1}^n n^{-2\alpha}$.]

То же верно для двойного ряда с такими же членами, но пределами суммирования $-\infty$, ∞; значения $m=0$, $n=0$ исключаются.

(V) Ряд $\sum (am^2+2bmn+cn^2)^{-\alpha}$ сходится, если $a > 0$, $b^2 < ac$ и $\alpha > 1$.

[Отношение $\dfrac{am^2+2bmn+cn^2}{m^2+n^2}$ имеет положительное наименьшее значение.]

(VI) Если отношение z/z' не вещественно и a не равно ни одному из чисел $-mz-nz'$, то ряд $\sum |a+mz+nz'|^{-\alpha}$ сходится при $\alpha > 2$.

(VII) Разлагая функцию

$$\log(1-2x\cos\theta+x^2) = \log(1-xe^{i\theta}) + \log(1-xe^{-i\theta})$$

в степенной ряд двумя способами, показать, что

$$\cos n\theta = 2^{n-1}\cos^n\theta - \frac{n}{1!}2^{n-3}\cos^{n-2}\theta + \frac{n(n-3)}{2!}2^{n-5}\cos^{n-4}\theta - \ldots$$

[Перестановка членов оправдывается теоремой о двойных рядах; применяется также теорема единственности степенного ряда (*Ч. М.*, § 201).]

(VIII) Если $|a| < 1$ и $|x| < 1$, то

$$\sum_{n=0}^\infty \frac{1}{n!}\frac{a^n}{1+x^2a^{2n}} = e^a - x^2e^{a^2} + x^4e^{a^6} - \ldots$$

(IX) Если x не является отрицательным целым числом, то

$$\sum_{n=0}^\infty \frac{1}{x(x+1)\ldots(x+n)} = e\left\{\frac{1}{x} - \frac{1}{1!}\frac{1}{(x+1)} + \frac{1}{2!}\frac{1}{(x+2)} - \ldots\right\}.$$

(X) Если $d(n)$ — число делителей числа n и $|x|<1$, то

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{1-x^n}=\sum_{n=1}^{\infty}d(n)x^n.$$

(XI) Перемножение по Дирихле. Если ряды $\sum a_n n^{-s}$ и $\sum b_n n^{-s}$ абсолютно сходятся и $c_n=\sum\limits_{pq=n}a_p b_q$, то

$$\sum a_n n^{-s}\cdot\sum b_n n^{-s}=\sum c_n n^{-s}.$$

В частности, $\{\zeta(s)\}^2=\sum d(n)\,n^{-s}$.

(XII) Если

$$a_{m,n}=\begin{cases}1 & \text{при } m=n+1 \text{ и } n=1,2,\ldots,\\ -1 & \text{при } m=n-1 \text{ и } n=2,3,\ldots,\\ 0 & \text{в остальных случаях,}\end{cases}$$

то $\sum\limits_{m=1}^{\infty}\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_{m,n}\neq\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sum\limits_{m=1}^{\infty}a_{m,n}$.

(XIII) Доказать то же, если $a_{m,n}=\dfrac{1}{m^2-n^2}$ $(m\neq n)$, $a_{m,n}=0$ $(m=n)$.

[Здесь (члены с $m=n$ опущены)

$$\sum_{m=1}^{\infty}{}'\frac{1}{m^2-n^2}=\lim_{N\to\infty}\frac{1}{2n}\sum_{m=1}^{N}{}'\left(\frac{1}{m-n}-\frac{1}{m+n}\right)=$$

$$=\lim_{N\to\infty}\frac{1}{2n}\left(-\sum_{\nu=1}^{n-1}\frac{1}{\nu}+\sum_{\nu=1}^{N-n}\frac{1}{\nu}-\sum_{\nu=n+1}^{N+n}\frac{1}{\nu}+\frac{1}{2n}\right)=\frac{3}{4n^2},$$

так что сумма столбцов и сумма строк равны соответственно $\pi^2/8$ и $-\pi^2/8$ *).]

(XIV) Если ряд $\sum|u_n|$ сходится, то произведение $\prod(1+u_n z)$ абсолютно и равномерно сходится во всякой конечной области и может быть преобразовано в степенной ряд по правилу

$$\prod(1+u_n z)=1+z\sum u_n+z^2\sum_{m\neq n}\sum u_m u_n+\ldots$$

[Первая часть уже была доказана (§ 1.4.4), так что остается оправдать преобразование в ряд. Пусть значение z фиксировано. Положим:

$$P_N=\prod_{1}^{N}(1+|u_n|\,|z_n|)=1+C_1^{(N)}|z|+\ldots+C_N^{(N)}|z|^N.$$

P_N сходится к некоторому пределу P, а $C_m^{(N)}$ при фиксированном m не убывает и не превосходит $P|z|^{-m}$; следовательно, и $C_m^{(N)}$ стремится к некоторому пределу, скажем C_m. Очевидно,

$$1+\sum_{m=1}^{k}C_m^{(N)}|z|^m\leqslant P_N\leqslant 1+\sum_{m=1}^{N}C_m|z|^m\qquad(k\leqslant N).$$

*) См. Hardy [3].

Заставляя стремиться к ∞ сначала N, а затем k, мы выводим из этого, что

$$P=1+\sum_{m=1}^{\infty} C_m |z|^m.$$

Положим $p_N=\prod_1^N (1+u_n z)=1+c_1^{(N)}z+\ldots+c_N^{(N)}z^N$. В силу очевидного обобщения теоремы об абсолютной сходимости на кратные ряды, $c_m^{(N)}$ стремится к некоторому пределу c_m, и ясно, что $|c_m-c_m^{(N)}|\leqslant C_m-C_m^{(N)}\leqslant C_m$. Следовательно, при $k\leqslant N$

$$\left|\sum_{m=1}^{\infty} c_m z^m-\sum_{m=1}^{N} c_m^{(N)} z^m\right|\leqslant \sum_{m=1}^{k}\left(C_m-C_m^{(N)}\right)|z|^m+\sum_{k+1}^{\infty} C_m |z|^m,$$

правую же часть можно сделать произвольно малой, взяв достаточно большим сначала k, а потом N. Это завершает доказательство.]

(XV) Из формулы $\dfrac{\sin x}{x}=\prod\limits_1^{\infty}\left(1-\dfrac{x^2}{n^2\pi^2}\right)$ вывести, что

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6},\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}=\frac{\pi^4}{90}.$$

(XVI) Пусть запись $s_{m,n}\to s$ означает, что $|s_{m,n}-s|<\varepsilon$, если m и n больше $n_0=n_0(\varepsilon)$.

Показать, что если $s_{m,n}\to s$ и $\lim\limits_{n\to\infty} s_{m,n}$ существует для каждого m, то $\lim\limits_{m\to\infty}\left(\lim\limits_{n\to\infty} s_{m,n}\right)=s$.

[Прингсгеймом было доказано, что если двойной ряд $\sum a_{m,n}$ сходится к сумме s в том смысле, что

$$\sum_{\mu=1}^{m}\sum_{\nu=1}^{n} a_{\mu,\nu}\to s,$$

и простые ряды $\sum\limits_{m=1}^{\infty} a_{m,n}$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{m,n}$ все сходятся, то сумма строк и сумма столбцов также равны s *).]

(XVII) Из формулы (*Ч. М.*, § 221) $1-\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{5}-\ldots=\dfrac{\pi}{4}$ вывести, что

$$\frac{1}{1^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\ldots=\frac{\pi^2}{8}.$$

[Это получается из равенства

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\left(m+\frac{1}{2}\right)\left(m+n+\frac{1}{2}\right)}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\sum_{m=-\infty}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\left(m+\frac{1}{2}\right)\left(m+n+\frac{1}{2}\right)}.$$

*) См. Bromwich, *Infinite Series*, § 30.

Его левая часть равна (полагаем $n=r-m$)

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m+\frac{1}{2}} \sum_{r=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^r}{r+\frac{1}{2}} = \left(\frac{2}{\frac{1}{2}} - \frac{2}{\frac{3}{2}} + \ldots\right)^2 = \pi^2.$$

Далее, если $n \neq 0$, то

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\left(m+\frac{1}{2}\right)\left(m+n+\frac{1}{2}\right)} = \frac{1}{n} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{m+\frac{1}{2}} - \frac{1}{m+n+\frac{1}{2}}\right) = 0,$$

так что правая часть равна

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\left(m+\frac{1}{2}\right)^2} = 8\left(\frac{1}{1^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots\right).$$

Остается поэтому оправдать обращение порядка суммирования. Соответствующий двойной ряд, очевидно, не сходится абсолютно, так что здесь нужен специальный прием.

При любом N

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-N}^{N} = \sum_{n=-N}^{N} \sum_{m=-\infty}^{\infty},$$

и потому (см. § 1.6.2.1) достаточно доказать, что при $N \to \infty$

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=N+1}^{\infty} \to 0, \quad \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{-N-1} \to 0.$$

Рассмотрим первую сумму. Если $m \geqslant -N-1$, то

$$\left| \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{m+n+\frac{1}{2}} \right| < \frac{1}{m+N+\frac{3}{2}}.$$

Следовательно, соответствующая часть первой суммы по абсолютной величине меньше, чем

$$\sum_{m=-N-1}^{\infty} \frac{1}{\left|m+\frac{1}{2}\right| \left(m+N+\frac{3}{2}\right)} \leqslant \sum_{-N-1 \leqslant m \leqslant -\frac{1}{2}N-\frac{1}{2}} \frac{1}{\frac{1}{2}N\left(m+N+\frac{3}{2}\right)} +$$
$$+ \sum_{-\frac{1}{2}N-\frac{1}{2} \leqslant m \leqslant N}^{\infty} \frac{1}{\left|m+\frac{1}{2}\right| \frac{1}{2}N} + \sum_{N+1}^{\infty} \frac{1}{\left(m+\frac{1}{2}\right)^2},$$

и, таким образом, стремится к нулю. В остающейся части первой суммы

$$\sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{m+n+\frac{1}{2}} = (-1)^m \pi - \sum_{n=-\infty}^{N} \frac{(-1)^n}{m+n+\frac{1}{2}}.$$

Сумма членов, содержащих π, очевидно, стремится к нулю, последний же член аналогичен уже рассмотренному, так что соответствующая сумма тоже стремится к нулю.

Наконец, вторая сумма может быть оценена тем же способом, что и завершает доказательство.]

1.7. Интегрирование рядов. Закончив рассмотрение повторного суммирования, мы обращаемся теперь к ряду аналогичных проблем, в которых одно из суммирований заменено интегрированием. Поскольку конечный интеграл, в отличие от конечной суммы, уже сам по себе является пределом, эти рассмотрения будут в каждом случае на ступень сложнее.

Сначала мы рассмотрим почленное интегрирование ряда в конечном интервале.

1.7.1. *Равномерно сходящийся ряд непрерывных функций можно интегрировать почленно. Это значит, что если функции* $u_1(x)$, $u_2(x)$, ... *непрерывны и ряд* $u_1(x)+u_2(x)+\dots$ *равномерно сходится в интервале* (a, b) *к сумме* $s(x)$, *то*

$$\int_a^b u_1(x)\,dx+\int_a^b u_2(x)\,dx+\dots=\int_a^b s(x)\,dx.$$

Поскольку функция $s(x)$ непрерывна (§ 1.1.4), она интегрируема по Риману. Сумма первых n членов ряда интегралов в наших обычных обозначениях равна $\int_a^b s_n(x)\,dx$. Мы должны доказать поэтому, что

$$\int_a^b s_n(x)\,dx\to\int_a^b s(x)\,dx,$$

т. е. что $\int_a^b \{s(n)-s_n(x)\}\,dx\to 0$. Для заданного ε мы можем найти такое n_0, что

$$|s(x)-s_n(x)|<\varepsilon$$

при $n>n_0$ и всех значениях x. Следовательно (*Ч. М.*, § 165),

$$\left|\int_a^b \{s(x)-s_n(x)\}\,dx\right|<\varepsilon(b-a),$$

что и завершает доказательство.

Примеры. (I) Если $0<x<1$, то

$$\log\frac{1}{1-x}=\int_0^x\frac{dt}{1-t}=\int_0^x(1+t+t^2+\dots)\,dt=x+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3+\dots$$

(II) Подобным же образом $\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \ldots$

(III) Доказать, что $\int_0^1 \log \frac{1+x}{1-x} \frac{dx}{x} = \frac{\pi^2}{4}$.

[Воспользоваться теоремой Абеля о непрерывности.]

(IV) Показать, что если $r < 1$ и n — положительное целое число, то

$$\int_0^\pi \frac{1-r^2}{1-2r\cos\theta+r^2} \cos n\theta \, d\theta = \pi r^n.$$

1.7.2. *Ряд можно дифференцировать почленно, если после дифференцирования получается равномерно сходящийся ряд непрерывных функций. Другими словами: пусть*

$$u_1(x) + u_2(x) + \ldots = s(x)$$

и функции $u_1(x)$, $u_2(x)$, ... *имеют непрерывные производные; если ряд* $u_1'(x) + u_2'(x) + \ldots$ *равномерно сходится в интервале* (a, b) *к* $f(x)$, *то* $f(x) = s'(x)$ *при* $a < x < b$.

Согласно предыдущей теореме второй ряд может быть проинтегрирован почленно в интервале (a, b), так что

$$\{u_1(x) - u_1(a)\} + \{u_2(x) - u_2(a)\} + \ldots = \int_a^x f(x)\, dt.$$

Но левая часть равна также $s(x) - s(a)$. Следовательно,

$$s(x) - s(a) = \int_a^x f(t)\, dt,$$

и так как функция $f(x)$ непрерывна, то $f(x) = s'(x)$.

Примеры. (I) Если $|x| < 1$, то

$$\sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)\ldots(n-k+1)\, x^{n-k} = \frac{k!}{(1-x)^{k+1}}.$$

(II) Если $s > 1$, то

$$\zeta'(s) = -\sum_{n=2}^{\infty} n^{-s} \log n.$$

1.7.3. *Вещественный степенной ряд можно интегрировать и дифференцировать внутри интервала сходимости любое число раз.* Другими словами, результат формального почленного интегрирования или дифференцирования верен, если мы находимся внутри интервала сходимости.

Пусть $f(x)=\sum\limits_{0}^{\infty} a_n x^n$ $(|x|<R)$. В силу теоремы о равномерной сходимости (§ 1.2.1) мы можем проинтегрировать этот ряд почленно. Мы получим равенство

$$\int\limits_a^x f(t)\,dt=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n+1}x^{n+1} \qquad (|x|<R).$$

Поскольку для нового ряда интервал сходимости по крайней мере так же велик, как для исходного ряда, процесс можно повторить.

Почленное дифференцирование приводит к равенству

$$f'(x)=\sum_{1}^{\infty} n a_n x^{n-1}.$$

Этот ряд также сходится при $|x|<R$. Действительно, если $0<\rho<R$, то $|a_n\rho^n|<K$, так что

$$|n a_n x^{n-1}|=n\,|a_n\rho^n|\left|\frac{x^{n-1}}{\rho^n}\right|<\frac{K}{\rho}\,n\left(\frac{|x|}{\rho}\right)^{n-1}.$$

Сходимость ряда производных следует из этой оценки и равенства

$$\sum_{1}^{\infty} n\left(\frac{|x|}{\rho}\right)^{n-1}=\frac{1}{\left(1-\frac{|x|}{\rho}\right)^2}$$

в силу признака сравнения. Таким образом, ряд производных равномерно сходится во всяком замкнутом интервале, содержащемся в интервале $|x|<R$, и почленное дифференцирование оправдано. Процесс может быть, конечно, повторен.

Мы видим, в частности, что *функция, представимая степенным рядом, имеет производные всех порядков.*

Ясно также, что ни интегрирование, ни дифференцирование не может увеличить интервал сходимости, поскольку ни один из этих процессов не может его уменьшить, а процессы эти взаимно обратны.

Пример. Маклореновское разложение функции $f(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ по степеням x есть исходный ряд.

1.7.4. *Если при вещественных значениях x*

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \qquad (|x|<R),$$

то $f(x+h)$ можно разложить при $|x|<R$ и $|h|<R-|x|$ в ряд Тейлора по степеням h.

Формальное разложение имеет вид

$$f(x+h)=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{h^m}{m!}f^{(m)}(x),$$

где, согласно предыдущей теореме,

$$f^{(m)}(x)=\sum_{n=m}^{\infty}n(n-1)(n-m+1)a_nx^{n-m}.$$

Чтобы обосновать это разложение, мы пишем:

$$\begin{aligned}f(x+h)&=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x+h)^n=\\&=\sum_{n=0}^{\infty}a_n\sum_{m=0}^{n}\frac{n(n-1)\ldots(n-m+1)}{m!}x^{n-m}h^m=\\&=\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=m}^{\infty}a_n\frac{n(n-1)\ldots(n-m+1)}{m!}x^{n-m}h^m=\\&=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{h^m}{m!}f^{(m)}(x).\end{aligned}$$

Обоснованию подлежит обращение порядка суммирования. Оно оправдывается абсолютной сходимостью, если сходится ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty}|a_n|\sum_{m=0}^{n}\frac{n(n-1)\ldots(n-m+1)}{m!}|x|^{n-m}|h|^m=\sum_{n=0}^{\infty}|a_n|(|x|+|h|)^n,$$

а он сходится, если $|x|+|h|<R$. Этим теорема доказана.

Заметим, что интервал сходимости нового ряда во всяком случае простирается до одного из концов интервала сходимости исходного ряда. Действительный интервал сходимости может и не быть больше, как, например, в случае ряда

$$f(x)=\frac{1}{1-x^2}=1+x^2+x^4+\ldots$$

Но он может простираться и дальше; например, если

$$f(x)=\frac{1}{1+x}=1-x+x^2-\ldots,$$

то

$$f^{(m)}(x)=\frac{(-1)^m m!}{(1+x)^{m+1}},$$

и, полагая $x = 1/2$, мы получаем разложение

$$f\left(\frac{1}{2}+h\right)=\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m\left(\frac{2}{3}\right)^{m+1}h^m,$$

действительное при $|h|<3/2$.

Невозможно дать удовлетворительное объяснение этого феномена, рассматривая только *вещественные* степенные ряды, и мы должны отложить дальнейшее обсуждение вопроса до того времени, когда мы познакомимся с функциями комплексного переменного.

1.7.5. Ряды, которые нельзя интегрировать почленно. Простой пример такого ряда получится, если мы положим

$$s_n(x)=n^2x(1-x)^n \qquad (0\leqslant x\leqslant 1).$$

Здесь $s(x)=0$ для всех значений x, и потому

$$\int_0^1 s(x)\,dx=0.$$

Но $\int_0^1 s_n(x)\,dx=\frac{n^2}{(n+1)(n+2)}\to 1$, так что почленное интегрирование дает неверный результат. Конечно, ряд не сходится равномерно.

С другой стороны, равномерная сходимость не является необходимым условием возможности почленного интегрирования. Некоторые из неравномерно сходящихся рядов § 1.3, например, ряды, для которых

$$s_n(x)=\frac{1}{1+nx}, \qquad s_n(x)=nx(1-x)^n,$$

можно интегрировать почленно.

Это приводит к рассмотрению более широких классов рядов, допускающих почленное интегрирование.

1.7.6. Ограниченно сходящиеся ряды. *Ряд*

$$u_1(x)+u_2(x)+\ldots$$

называется ограниченно сходящимся в интервале $(a,\ b)$, *если он сходится при всех значениях* x *в этом интервале и существует такая постоянная* M, *что* $|s_n(x)|\leqslant M$ *для всех значений* n *и* x $(a\leqslant x\leqslant b)$.

Ясно, что сумма ограниченно сходящегося ряда ограничена. Однако ограниченность сама по себе не может (пока что) обеспечить нам возможность почленного интегрирования, поскольку мы не умеем интегрировать ограниченные функции достаточно общего вида. Мы должны присоединить к ней другое условие.

Мы будем говорить, что ряд *равномерно сходится в интервале* (a, b) *вне окрестности точки* c, если он равномерно сходится в интервалах $(a, c-\delta)$, $(c+\delta, b)$, как бы мало ни было δ. Условия, при которых мы можем обосновать почленное интегрирование, состоят в следующем.

Если ряд равномерно сходится в интервале (a, b) *вне окрестностей конечного числа точек и, сверх того, ограниченно сходится во всем интервале, то его можно почленно интегрировать в этом интервале.*

Достаточно доказать это в предположении, что существует только одна исключительная точка, скажем, c. Пусть $|s_n(x)| \leqslant M$. Тогда и $|s(x)| \leqslant M$. Интеграл функции $s(x)$ существует в смысле § 1.5, и

$$\left|\int_a^b \{s(x)-s_n(x)\}\,dx\right| \leqslant \left|\int_a^{c-\delta} \{s(x)-s_n(x)\}\,dx\right| + \\ + \left|\int_{c+\delta}^b \{s(x)-s_n(x)\}\,dx\right| + \left|\int_{c-\delta}^{c+\delta} s(x)\,dx\right| + \left|\int_{c-\delta}^{c+\delta} s_n(x)\,dx\right| \leqslant \\ \leqslant \left|\int_a^{c-\delta}\right| + \left|\int_{c+\delta}^b\right| + 4\delta M.$$

Мы можем выбрать δ столь малым, чтобы последний член был меньше заданного ε, при фиксированном же δ два других члена стремятся к нулю в силу равномерной сходимости. Этим теорема доказана.

Возможны различные обобщения этой теоремы. Нет необходимости в том, чтобы ряд сходился равномерно в интервалах $(a, c-\delta)$ и $(c+\delta, b)$, если почленное интегрирование в этих интервалах может быть оправдано другим путем. Более важное замечание состоит в том, что под знак интеграла можно ввести множитель $\varphi(x)$, который интегрируем, но не обязательно ограничен. Предположим, например, что функция $\varphi(x)$ непрерывна в интервале (a, b) всюду, за исключением точки $x=a$, в окрестности которой она не ограничена, и что $\int_a^b |\varphi(x)|\,dx$ существует как несобственный интеграл. Тогда ряд можно умножить на $\varphi(x)$ и проинтегрировать почленно. Действительно,

$$\left|\int_a^{a+\delta} \{s(x)-s_n(x)\}\,\varphi(x)\,dx\right| < 2M\int_a^{a+\delta} |\varphi(x)|\,dx.$$

Правая часть меньше произвольно заданного ε, если δ достаточно мало, интеграл же по интервалу $(a+\delta, b)$ может быть оценен, как выше.

Заметим, наконец, что позже, когда мы разовьем теорию интеграла Лебега, мы сможем придать всем этим теоремам гораздо более удовлетворительный вид. Ограничения, относящиеся к непрерывности и равномерной сходимости, нужны лишь постольку, поскольку мы ограничиваемся интегралом Римана, и исчезают в окончательной формулировке теоремы.

Примеры. (I) Ряды, для которых

$$s_n(x)=\frac{1}{1+nx}, \qquad s_n(x)=nx(1-x)^n \qquad (0\leqslant x\leqslant 1),$$

ограниченно сходятся.

(II) Рассмотрим ряд $\frac{\sin x}{1}+\frac{\sin 2x}{2}+\frac{\sin 3x}{3}+\ldots$ В силу одного из общих признаков (см. § 1.1.2, пример (I)), этот ряд равномерно сходится вне окрестностей точек $x=0, \pm 2\pi, \pm 4\pi, \ldots$. Чтобы показать, что он сходится ограниченно, и найти его сумму, мы воспользуемся более специальным приемом.

Так как каждый член ряда имеет период 2π, то достаточно рассмотреть интервал $0\leqslant x<2\pi$. В нем

$$s_n(x)=\int_0^x(\cos t+\cos 2t+\ldots+\cos nt)\,dt=\int_0^x\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t-\sin\frac{1}{2}t}{2\sin\frac{1}{2}t}\,dt=$$

$$=\int_0^x\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{t}\,dt+\int_0^x\left(\frac{1}{2\sin\frac{1}{2}t}-\frac{1}{t}\right)\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t\,dt-\frac{1}{2}x=$$

$$=\int_0^{\left(n+\frac{1}{2}\right)x}\frac{\sin u}{u}\,du+\int_0^x\left(\frac{2}{2\sin\frac{1}{2}t}-\frac{1}{t}\right)\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t\,dt-\frac{1}{2}x.$$

Но интеграл $\int_0^h\frac{\sin u}{u}\,du$ всегда положителен и имеет абсолютный максимум при $h=\pi$ (*Ч. М.*, § 188, пример LXXVI, 9). Следовательно, при $0\leqslant x\leqslant\pi$

$$|s_n(x)|\leqslant\int_0^\pi\frac{\sin u}{u}\,du+\int_0^\pi\left(\frac{1}{2\sin\frac{1}{2}t}-\frac{1}{t}\right)dt+\frac{1}{2}\pi,$$

а так как все члены ряда нечетны, то это неравенство верно и в интервале $(-\pi, 0)$.

Чтобы просуммировать ряд, фиксируем x в интервале $0<x<2\pi$ и заставим n стремиться к бесконечности. Существование предела

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{\left(n+\frac{1}{2}\right)x}\frac{\sin u}{u}\,du=\int_0^\infty\frac{\sin u}{u}\,du$$

уж было установлено (§ 1.5). Обозначим последний интеграл через I. Мы можем написать:

$$\int_0^x \left(\frac{1}{2\sin\frac{1}{2}t} - \frac{1}{t}\right)\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t\,dt = -\left(\frac{1}{2\sin\frac{1}{2}x} - \frac{1}{x}\right)\frac{\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)x}{n+\frac{1}{2}} + \frac{1}{n+\frac{1}{2}}\int_0^x \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2\sin\frac{1}{2}t} - \frac{1}{t}\right)\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)t\,dt.$$

Правая часть стремится к нулю благодаря множителю $n+\frac{1}{2}$ в знаменателе другие множители ограничены), так что для суммы ряда получается формула

$$s(x) = I - \frac{1}{2}x \qquad (0 < x < 2\pi),$$

Но, очевидно, $s(\pi)=0$ и, таким образом, $I=\frac{1}{2}\pi$. Это дает одновременно сумму ряда и значение несобственного интеграла.

Читателю следует начертить график суммы ряда, обратив внимание на разрывы в точках $x=0$, $\pm 2\pi$, $\pm 4\pi$, ... [см. также гл. XIII, пример 11].

(III) Доказать, что предыдущий ряд ограниченно сходится, не пользуясь интегралами, а применяя метод, подобный методу § 1.1.3.1.

(IV) Просуммировать ряд $\frac{1}{1^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\ldots$, интегрируя предыдущий ряд по интервалу $(0, \pi)$.

(V) Доказать, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} - \frac{\pi x}{2} + \frac{x^2}{4} \qquad (0 < x < \pi).$$

1.7.7. Почленное интегрирование в случае несобственных интегралов. Мы переходим к более сложной ситуации, когда область интегрирования бесконечна или функции становятся бесконечными в области интегрирования. В обоих случаях результаты аналогичны тем, которые были получены для повторных рядов. Ради удобства мы собрали их в одной теореме.

Пусть $u_n(x) \geqslant 0$ для всех значений n и x, и пусть

$$\int_a^c \left\{\sum u_n(x)\right\} dx = \sum \int_a^c u_n(x)\,dx \tag{1}$$

для всех значений c, меньших b, в первом случае и для всех конечных значений c во втором случае. Тогда

$$\int_a^b \left\{\sum u_n(x)\right\} dx = \sum \int_a^b u_n(x)\,dx \tag{2}$$

в первом случае и

$$\int_a^\infty \left\{\sum u_n(x)\right\} dx = \sum \int_a^\infty u_n(x)\, dx \tag{2a}$$

во втором случае, если только одна из двух частей равенства сходится.

Доказательство — одно и то же в обоих случаях. Мы рассмотрим случай конечного интервала (a, b).

Предположим, что ряд в правой части равенства (2) сходится, и пусть $\sum \int_a^b u_n(x)\, dx = S$. Так как $u_n(x) \geqslant 0$, то

$$\int_a^c \left\{\sum u_n(x)\right\} dx = \sum \int_a^c u_n(x)\, dx \leqslant S$$

для всех значений c, меньших b. Следовательно (см. *Ч. М.*, § 185), интеграл в левой части равенства (2) существует как несобственный в точке b, и если его значение есть I, то $I \leqslant S$. С другой стороны,

$$\sum_{n=1}^N \int_a^b u_n(x)\, dx = \int_a^b \left\{\sum_1^N u_n(x)\right\} \leqslant \int_a^b \left\{\sum_1^\infty u_n(x)\right\} dx = I.$$

Заставляя N стремиться к бесконечности, мы видим, что $S \leqslant I$. Следовательно, $S = I$.

В случае, когда сходящейся предполагается левая часть равенства (2) или (2a), доказательство аналогично. Детали мы оставляем читателю.

Как и в случае рядов, можно отбросить условие положительности, предположив, что одна из частей равенства 2 или (2a) сходится абсолютно, т. е. остается сходящейся после замены функций $u_n(x)$ их модулями.

Предыдущая теорема сохраняет силу для любых вещественных или комплексных функций $u_n(x)$, если сходится одно из выражений

$$\int_a^b \left\{\sum |u_n(x)|\right\} dx, \qquad \sum \int_a^b |u_n(x)|\, dx$$

в первом случае и одно из выражений

$$\int_a^\infty \left\{\sum |u_n(x)|\right\} dx, \qquad \sum \int_a^\infty |u_n(x)|\, dx$$

во втором случае.

Из уже доказанной теоремы следует, что эти условия в обоих случаях равносильны. После этого остальное доказывается в точности так же, как для двойных рядов. Если $u_n(x)$ вещественны, то мы рассматриваем функции $|u_n(x)| \pm u_n(x)$, каждая из которых положительна. Если $u_n(x)$ комплексны, скажем, $u_n(x) = \alpha_n(x) + i\beta_n(x)$, то мы рассматриваем четыре функции $|u_n(x)| \pm \alpha_n(x)$, $|u_n(x)| \pm \beta_n(x)$, каждая из которых положительна.

1.7.8. Различные примеры почленного интегрирования.

(I) Доказать, что $\int\limits_0^1 \log \frac{1}{1-x}\,dx = 1$, разлагая подынтегральную функцию по степеням x и интегрируя ряд почленно. [Заметим, что в окрестности точки $x=1$ ряд не сходится ни равномерно, ни даже ограниченно.]

(II) Мы можем написать, сначала формально:

$$\int\limits_0^\infty \frac{x^{s-1}}{e^x-1}\,dx = \int\limits_0^\infty \left\{\sum x^{s-1}e^{-nx}\right\} dx = \sum \int\limits_0^\infty x^{s-1}e^{-nx}\,dx =$$

$$= \sum n^{-s} \int\limits_0^\infty y^{s-1}e^{-y}\,dy = \sum n^{-s}\Gamma(s) = \Gamma(s)\,\zeta(s).$$

Обосновать эту процедуру: (a) для $s > 1$; (b) для комплексного s при $\operatorname{Re}(s) > 1$.

(III) Доказать, что $\int\limits_0^\infty e^{-ax}\cos bx\,dx = \frac{a}{a^2+b^2}$, разлагая $\cos bx$ по степеням x.

[При $\operatorname{Re}(a) > |b|$ процедура оправдывается абсолютной сходимостью, но равенство верно и в более широкой области.]

(IV) Доказать, что при $p > 0$

$$\int\limits_0^1 \frac{x^{p-1}}{1-x}\log\frac{1}{x}\,dx = \frac{1}{p^2} + \frac{1}{(p+1)^2} + \ldots$$

(V) Доказать, что при $p > 0$

$$\int\limits_0^1 \frac{x^{p-1}}{1+x}\,dx = \frac{1}{p} - \frac{1}{p+1} + \ldots$$

[Здесь признаки, связанные с абсолютной сходимостью, не помогают. Проинтегрировать по интервалу $(0, \xi)$ с $0 < \xi < 1$ и воспользоваться теоремой Абеля.]

(VI) Доказать, что

$$\int\limits_0^\infty \frac{\operatorname{sh} ax}{\operatorname{sh} bx}\,dx = \frac{\pi}{2b}\operatorname{tg}\frac{a\pi}{2b} \qquad (0 < a < b).$$

[Разложение по степеням функции e^{-bx} приводит к ряду

$$\sum \frac{2a}{(2n-1)^2 b^2 - a^2}.$$

По поводу его суммирования мы должны отослать читателя к гл. III.]

(VII) Доказать, что

$$\int_0^\infty \frac{\operatorname{ch} ax}{\operatorname{ch} bx}\, dx = \frac{\pi}{2b} \sec \frac{a\pi}{2b} \qquad (0 < a < b).$$

[Общий признак не работает, но интеграл может быть вычислен на основе примера (V).]

(VIII) Показать, что если $u_n(x) = ae^{-nax} - be^{-nbx}$ $(0 < a < b)$, то

$$\sum \int_0^\infty u_n(x)\, dx \neq \int_0^\infty \left\{\sum u_n(x)\right\} dx.$$

[Здесь $\sum \int\limits_0^\infty u_n(x)\, dx = \sum \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n}\right) = 0$, но

$$\int_0^\infty \left\{\sum u_n(x)\right\} dx = \int_0^\infty \left(\frac{a}{e^{ax}-1} - \frac{b}{e^{bx}-1}\right) dx > 0$$

(подынтегральная функция положительна, поскольку функция $\frac{u}{e^u-1}$ монотонно убывает).

Нетрудно доказать прямо, что ряд $\sum \int\limits_0^\infty |u_n(x)|\, dx$ расходится.]

(IX) Рассмотрим интеграл $\int\limits_0^\infty e^{-x^{1/4}} \sin x^{1/4} \cos ax\, dx$. Здесь мы должны предвосхитить некоторые из результатов главы III. Если мы разложим $\cos ax$ по степеням x и произведем почленное интегрирование, то получим ряд

$$\sum_{n=0}^\infty \frac{(-1)^n a^{2n}}{(2n)!} \int_0^\infty e^{-x^{1/4}} \sin x^{1/4} x^{2n}\, dx,$$

каждый член которого равен нулю (§ 3.1.2.5). Однако исходный интеграл не равен тождественно нулю (см. § 3.1.3).

Признак § 1.7.7 здесь не работает; действительно, заменяя $u_n(x)$ через $|u_n(x)|$, мы получаем интеграл

$$\int_0^\infty e^{-x^{1/4}} |\sin x^{1/4}| \operatorname{ch} ax\, dx,$$

который расходится.

1.7.9. В качестве последнего примера почленного интегрирования при специальных условиях мы докажем следующую теорему.

Степенной ряд $\sum\limits_{n=0}^\infty a_n x^n$ *можно умножить на* e^{-x} *и проинтегрировать почленно в интервале* $(0, \infty)$, *если только полученный в результате интегрирования ряд сходится* *).

*) Hardy [1], [6].

Иначе говоря,

$$\int_0^\infty e^{-x}\left\{\sum_{n=0}^\infty a_n x^n\right\}dx=\sum_{n=0}^\infty a_n\int_0^\infty e^{-x}x^n\,dx=\sum_{n=0}^\infty a_n n!,$$

если ряд $\sum a_n n!$ сходится. Мы должны оправдать обращение порядка интегрирования и суммирования.

Положим $a_n n!=b_n$. Так как ряд $\sum b_n$ сходится, то числа b_n ограничены, скажем, $|b_n|<B$, и

$$\left|\frac{b_n x^n}{n!}\right|<B\,\frac{X^n}{n!}\qquad (0\leqslant x\leqslant X).$$

Следовательно, ряд $\sum b_n\frac{x^n}{n!}$ равномерно сходится в интервале $(0, X)$, и мы можем умножить его на e^{-x} и почленно проинтегрировать в этом интервале. Таким образом,

$$\int_0^X e^{-x}\left\{\sum_{n=0}^\infty \frac{b_n x^n}{n!}\right\}dx=\sum_{n=0}^\infty \frac{b_n}{n!}\int_0^X e^{-x}x^n\,dx. \tag{1}$$

Поскольку ряд $\sum_{n=0}^\infty \frac{b_n}{n!}\int_0^\infty e^{-x}x^n\,dx=\sum_{n=0}^\infty b_n$ сходится, равенству (1) можно придать вид

$$\int_0^X e^{-x}\left\{\sum_{n=0}^\infty \frac{b_n x^n}{n!}\right\}dx=\sum_{n=0}^\infty b_n-\sum_{n=0}^\infty \frac{b_n}{n!}\int_X^\infty e^{-x}x^n\,dx, \tag{2}$$

и остается доказать, что последний член стремится к нулю при $X\to\infty$. Но

$$\int_X^\infty e^{-x}x^n\,dx=e^{-X}(X^n+nX^{n-1}+\ldots+n!),$$

так что этот член равен

$$e^{-X}\sum_{n=0}^\infty b_n\sum_{m=0}^n \frac{X^m}{m!}. \tag{3}$$

Положим $r_n=\sum_{\nu=n}^\infty b_\nu$. Так как $r_n\to 0$ при $n\to\infty$ и $b_n=r_n-r_{n+1}$, то

$$\sum_{n=0}^N b_n\sum_{m=0}^n \frac{X^m}{m!}=\sum_{n=0}^N (r_n-r_{n+1})\sum_{m=0}^n \frac{X^m}{m!}=$$

$$=\sum_{n=0}^N r_n\frac{X^n}{n!}-r_{N+1}\left(1+X+\ldots+\frac{X^N}{N!}\right).$$

При $N \to \infty$ последний член стремится к нулю, так что ряд (3) принимает вид $e^{-X} \sum\limits_{n=0}^{\infty} r_n \frac{X^n}{n!}$. Остальное просто. Для заданного положительного ε можно найти такое N, что $|r_n| < \varepsilon$ при $n > N$. Так как $|r_n| < A$ для всех значений n, то

$$\left| e^{-X} \sum_{n=0}^{\infty} r_n \frac{X_n}{n!} \right| < Ae^{-X} \sum_0^N \frac{X^n}{n!} + \varepsilon e^{-X} \sum_{N+1}^{\infty} \frac{X^n}{n!} < Ae^{-X} \sum_0^N \frac{X^n}{n!} + \varepsilon,$$

при фиксированном же N и достаточно большом X первый член справа также меньше ε. Этим теорема доказана.

1.8. Повторные интегралы. Гамма-функция. Повторный интеграл по своей сложности стоит на ступень выше ряда интегралов. Даже если пределы обоих интегрирований конечны, мы все-таки имеем здесь дело с двумя предельными переходами, и обращение их порядка требует обоснования. Если же пределы обоих интегралов бесконечны, то перед нами четыре последовательных предельных перехода.

1.8.1. Сначала мы рассмотрим непрерывные функции и конечные пределы.

Если $f(x, y)$ — непрерывная функция от x, y в прямоугольнике $a \leqslant x \leqslant b$, $\alpha \leqslant y \leqslant \beta$, то

$$\int_a^b dx \int_\alpha^\beta f(x, y)\, dy = \int_\alpha^\beta dy \int_a^b f(x, y)\, dx.$$

Так как функция $f(x, y)$ непрерывна, то

$$F(x) = \int_\alpha^\beta f(x, y)\, dy$$

есть непрерывная функция от x (§ 1.5.2). Мы можем проинтегрировать ее по интервалу (a, b), и результатом будет левая часть равенства. Подобным же образом имеет смысл и правая часть.

Чтобы доказать равенство, разделим интервалы интегрирований точками x_μ и y_ν ($a = x_0$, $b = x_m$, $\alpha = y_0$, $\beta = y_n$), подчиненными неравенствам $x_{\mu+1} - x_\mu < \delta$, $y_{\nu+1} - y_\nu < \delta$. Пусть $m_{\mu,\nu}$ и $M_{\mu,\nu}$ — нижняя и верхняя грани функции $f(x, y)$ в прямоугольнике $(x_\mu, x_{\mu+1}; y_\nu, y_{\nu+1})$. Тогда при $y_\nu \leqslant y \leqslant y_{\nu+1}$

$$m_{\mu,\nu}(x_{\mu+1} - x_\mu) \leqslant \int_{x_\mu}^{x_{\mu+1}} f(x, y)\, dx \leqslant M_{\mu,\nu}(x_{\mu+1} - x_\mu).$$

Интегрируя эти неравенства по y, мы видим, что

$$m_{\mu,\nu}(x_{\mu+1}-x_\mu)(y_{\nu+1}-y_\nu) \leqslant \int_{y_\nu}^{y_{\nu+1}} dy \int_{x_\mu}^{x_{\mu+1}} f(x, y)\,dx \leqslant$$
$$\leqslant M_{\mu,\nu}(x_{\mu+1}-x_\mu)(y_{\nu+1}-y_\nu),$$

суммирование же по μ и ν приводит к неравенствам

$$\sum\sum m_{\mu,\nu}(x_{\mu+1}-x_\mu)(y_{\nu+1}-y_\nu) \leqslant \int_\alpha^\beta dy \int_a^b f(x, y)\,dx \leqslant$$
$$\leqslant \sum\sum M_{\mu,\nu}(x_{\mu+1}-x_\mu)(y_{\nu+1}-y_\nu).$$

Такие же неравенства верны для другого повторного интеграла. Но при $\delta \to 0$ разность между суммами стремится к нулю; действительно, для заданного ε существует столь малое δ, что наибольшая из разностей $M_{\mu,\nu}-m_{\mu,\nu}$ меньше ε, вследствие чего

$$\sum\sum (M_{\mu,\nu}-m_{\mu,\nu})(x_{\mu+1}-x_\mu)(y_{\nu+1}-y_\nu) \leqslant$$
$$\leqslant \varepsilon \sum\sum (x_{\mu+1}-x_\mu)(y_{\nu+1}-y_\nu) = \varepsilon(b-a)(\beta-\alpha).$$

Таким образом, повторные интегралы равны между собой.

1.8.2. Распространение на разрывные функции. Предположим сначала, что прямоугольник пересечен непрерывной монотонной кривой $y=\varphi(x)$ или $x=\psi(y)$ от $x=a$ до $x=c$, и пусть функция $f(x, y)$ непрерывна во всех точках, кроме точек этой кривой, и ограничена. Тогда повторные интегралы остаются равными.

Прежде всего, функция $F(x)$ остается непрерывной. Действительно,

$$F(x) = \int_\alpha^{\varphi(x)} f(x, y)\,dy + \int_{\varphi(x)}^{\beta} f(x, y)\,dy.$$

Обозначим эти интегралы через $F_1(x)$ и $F_2(x)$. Так как

$$F_1(x+h) - F_1(x) =$$
$$= \int_\alpha^{\varphi(x)} \{f(x+h, y) - f(x, y)\}\,dy + \int_{\varphi(x)}^{\varphi(x+h)} f(x+h, y)\,dy,$$

то $F_1(x+h)-F_1(x)$ стремится к нулю вместе с h. Следовательно, функция $F_1(x)$ непрерывна, и так же доказывается, что функция $F_2(x)$ непрерывна.

Таким образом, первый повторный интеграл определен. Точно так же определен второй повторный интеграл.

Чтобы доказать, что они равны, рассмотрим полосу

$$\varphi(x) - \eta < y < \varphi(x) + \eta$$

и предположим для определенности, что $\varphi(x)$ монотонно возрастает. Построим, как выше, прямоугольники $(x_\mu, x_{\mu+1}; y_\nu, y_{\nu+1})$ со сторонами, меньшими δ. Площадь, покрытая теми прямоугольниками, лежащими между прямыми $x=x_\mu$ и $x=x_{\mu+1}$, которые содержат точки указанной полосы, меньше, чем

$$(x_{\mu+1}-x_\mu)\left[\{\varphi(x_{\mu+1})+\eta\}-\{\varphi(x_\mu)-\eta\}+2\delta\right]< \\ <\delta\{\varphi(x_{\mu+1})-\varphi(x_\mu)\}+(x_{\mu+1}-x_\mu)(2\eta+2\delta);$$

общая же площадь прямоугольников, содержащих точки полосы, поэтому меньше, чем

$$\delta(\beta-\alpha)+(b-a)(2\eta+2\delta).$$

Следовательно, если $\sum_1$ обозначает суммирование по этим прямоугольникам и $|f(x, y)|\leqslant M$, то

$$\sum\nolimits_1 (M_{\mu,\nu}-m_{\mu,\nu})(x_{\mu+1}-x_\mu)(y_{\nu+1}-y_\nu)< \\ <2M\{\delta(\beta-\alpha)+(2\eta+2\delta)(b-a)\},$$

правая же часть произвольно мала вместе с η и δ. Наконец, так как функция $f(x, y)$ непрерывна в каждой из оставшихся областей, то при достаточно малом δ в остальных прямоугольниках

$$\max(M_{\mu,\nu}-m_{\mu,\nu})<\varepsilon,$$

и доказательство завершается, как выше.

Разумеется, эту теорему можно распространить на функции, которые имеют любое конечное число разрывов указанного типа. В частности, она применима к интегралу, взятому по непрямоугольной области, ограниченной кривыми указанного типа: такой интеграл можно трактовать как интеграл по прямоугольнику, в части которого, ограниченной кривыми, функция непрерывна, а в остальной части всюду равна нулю.

Укажем в заключение на следующее неравенство. Предположим, что функция $f(x, y)$ непрерывна, что $|f(x, y)|\leqslant M$ в некоторой области указанного типа и что $f(x, y)=0$ в остальных точках. Положим $F(x, y)=M$ в области и $F(x, y)=0$ в остальных точках. Тогда

$$\left|\int_\alpha^\beta dy\int_a^b f(x, y)\,dx\right|\leqslant\int_\alpha^\beta dy\int_a^b F(x, y)\,dx.$$

Читатель без труда выведет это из предыдущих рассмотрений.

1.8.3. Замена переменных в повторном интеграле. Формула, по которой заменяются переменные в повторном интеграле, может быть получена следующим образом. Рассмотрим интеграл

$$\int dy\int f(x, y)\,dx,$$

распространенный на некоторую область, и пусть

$$x=\varphi(u,\ v),\quad y=\psi(u,\ v).$$

Пусть эти функции таковы, что если y фиксировано, то x есть монотонная дифференцируемая функция от u. Заменив интегрирование по x интегрированием по u, мы получим равенство

$$\int f(x,\ y)\,dx=\int f\frac{dx}{du}\,du.$$

Но (см. *Ч. М.*, § 157)

$$\frac{dx}{du}=\frac{\partial\varphi}{\partial u}+\frac{\partial\varphi}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial u},\quad 0=\frac{\partial\psi}{\partial u}+\frac{\partial\psi}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial u},$$

так что *)

$$\frac{dx}{du}=\frac{\dfrac{\partial\varphi}{\partial u}\dfrac{\partial\psi}{\partial v}-\dfrac{\partial\varphi}{\partial v}\dfrac{\partial\psi}{\partial u}}{\dfrac{\partial\psi}{\partial v}}=\frac{\dfrac{\partial(\varphi,\ \psi)}{\partial(u,\ v)}}{\dfrac{\partial\psi}{\partial v}}.$$

Это позволяет представить повторный интеграл в виде

$$\int dy\int f\frac{\dfrac{\partial(\varphi,\ \psi)}{\partial(u,\ v)}}{\dfrac{\partial\psi}{\partial v}}\,du=\int du\int f\frac{\dfrac{\partial(\varphi,\ \psi)}{\partial(u,\ v)}}{\dfrac{\partial\psi}{\partial v}}\,dy,$$

если, конечно, порядок интегрирования может быть обращен. Наконец, рассматривая y как функцию от v (при фиксированном u) и предполагая эту функцию монотонной, мы можем написать $\frac{dy}{dv}=\frac{\partial\psi}{\partial v}$, после чего интеграл принимает вид

$$\int du\int F(u,\ v)\frac{\partial(\varphi,\ \psi)}{\partial(u,\ v)}\,dv,$$

где $F(u,\ v)=f\{\varphi(u,\ v),\ \psi(u,\ v)\}$.

Эта процедура законна, если, например, подынтегральная функция на каждом шаге непрерывна и область ограничена монотонными кривыми, как в § 1.8.2. В конкретных случаях необходима осторожность. Рассмотрим, например, интеграл

$$I=\int\limits_0^a dy\int\limits_0^{\sqrt{a^2-y^2}} f(x,\ y)\,dx,$$

где $f(x,\ y)$ — непрерывная функция, и преобразуем его к полярным координатам r, θ, определяемым формулами $x=r\cos\theta$, $y=$

---

*) Относительно обозначения якобиана см. *Ч. М.*, гл. VII, Разные примеры, 15.

$=r\sin\theta$. Переходя сначала к переменным $(r,\ y)$, мы видим, что $x=\sqrt{r^2-y^2}$ и $\frac{dx}{dr}=\frac{r}{\sqrt{r^2-y^2}}$. Чтобы обойти трудность, связанную с обращением этой производной в ∞ (при $r=y$), рассмотрим вместо I интеграл

$$I_\delta=\int\limits_0^{\sqrt{a^2-\delta^2}} dy \int\limits_0^{\sqrt{a^2-y^2}} f(x,\ y)\,dx,$$

$(0<\delta<a)$. Переходя в нем сначала к переменным $(r,\ y)$, а затем к переменным $(r,\ \theta)$, мы получаем предыдущим методом равенство

$$I_\delta=\int\limits_\delta^a r\,dr \int\limits_0^{\arccos(\delta/r)} f(r\cos\theta,\ r\sin\theta)\,d\theta.$$

Если теперь $\delta\to 0$, то $I_\delta\to I$, а интеграл справа стремится к

$$\int\limits_0^a r\,dr \int\limits_0^{\frac{1}{2}\pi} f(r\cos\theta,\ r\sin\theta)\,d\theta.$$

То и другое легко доказывается при помощи неравенства, указанного в конце § 1.8.2 *).

1.8.4. Повторные интегралы. Один из интервалов бесконечен. Здесь наиболее важная теорема аналогична теореме о почленном интегрировании равномерно сходящихся рядов.

Пусть

$$\int\limits_a^b dx \int\limits_\alpha^\beta f(x,\ y)\,dy=\int\limits_\alpha^\beta dy \int\limits_a^b f(x,\ y)\,dx$$

для всех значений b, больших чем a, и пусть интеграл $\int\limits_a^\infty f(x,\ y)\,dx$ *равномерно сходится при $\alpha\leqslant y\leqslant\beta$. Тогда*

$$\int\limits_a^\infty dx \int\limits_\alpha^\beta f(x,\ y)\,dy=\int\limits_\alpha^\beta dy \int\limits_a^\infty f(x,\ y)\,dx.$$

Действительно,

$$s_n(y)=\int\limits_a^n f(x,\ y)\,dx\to s(y)=\int\limits_a^\infty f(x,\ y)\,dx$$

равномерно в интервале $(\alpha,\ \beta)$. Поэтому из теоремы § **1.7.1**

*) Общая теория рассматриваемых преобразований имеется у Гурса, *Курс математического анализа*, т. I, гл. 6.

следует, что

$$\int_a^n dx \int_\alpha^\beta f(x, y)\, dy = \int_\alpha^\beta dy \int_a^n f(x, y)\, dx =$$

$$= \int_\alpha^\beta s_n(y)\, dy \to \int_\alpha^\beta s(y)\, dy = \int_\alpha^\beta dy \int_a^\infty f(x, y)\, dx.$$

Подобная же теорема верна для несобственных интегралов второго рода.

Эти теоремы вместе с предыдущим доказательством сохраняют силу, если интеграл не сходится равномерно в скрестности некоторых точек, но является ограниченно сходящимся.

1.8.5. Повторные несобственные интегралы. Следующая теорема о повторных интегралах является аналогом теорем § 1.6.2 и § 1.7.7 о двойных рядах и рядах интегралов.

Пусть функция $f(x, y)$ положительна, и пусть

$$\int_a^c dx \int_\alpha^\beta f(x, y)\, dy = \int_\alpha^\beta dy \int_a^c f(x, y)\, dx \tag{1}$$

для всех значений c, меньших b, и

$$\int_a^b dx \int_\alpha^\gamma f(x, y)\, dy = \int_\alpha^\gamma dy \int_a^b f(x, y)\, dx \tag{2}$$

для всех значений γ, меньших β. Тогда

$$\int_a^b dx \int_\alpha^\beta f(x, y)\, dy = \int_\alpha^\beta dy \int_a^b f(x, y)\, dx, \tag{3}$$

если одна из двух частей этого равенства сходится.

В этой формулировке одно из чисел b, β, а также оба эти числа можно заменить бесконечностью.

Возьмем, например, случай двух конечных интервалов и предположим, что сходится левая часть равенства (3). Так как $f(x, y) \geqslant 0$, то

$$\int_\alpha^\gamma f(x, y)\, dy \leqslant \int_\alpha^\beta f(x, y)\, dy \qquad (\alpha < \gamma < \beta),$$

и, следовательно,

$$\int_\alpha^\gamma dy \int_a^b f(x, y)\, dx = \int_a^b dx \int_\alpha^\gamma f(x, y)\, dy \leqslant \int_a^b dx \int_\alpha^\beta f(x, y)\, dy.$$

Заставляя γ стремиться к β, мы видим, что правая часть равенства (3) существует и что

$$\int_{\alpha}^{\beta} dy \int_{a}^{b} f(x, y)\, dx \leqslant \int_{a}^{b} dx \int_{\alpha}^{\beta} f(x, y)\, dy.$$

То же рассуждение может быть проведено теперь в обратном порядке, так что верно и обратное неравенство. Следовательно, имеет место равенство.

Это доказательство сохраняет силу, если α или β (или α и β) бесконечны.

Конечно, простота доказательства объясняется тем, что мы сделали далеко идущие предположения. Применяя эту теорему, мы должны будем выводить равенства (1) и (2) из чего-то другого, например из равномерной сходимости. В действительности их приходится каждый раз обосновывать из-за того, что мы имеем дело с интегралом Римана. Из одной ограниченности интеграла

$$\int_{\alpha}^{\beta} dy \int_{a}^{c} f(x, y)\, dx$$

при $c \to b$ нельзя вывести, что функция $\int_{a}^{b} f(x, y)\, dx$ интегрируема по Риману. Перейдя к интегралу Лебега, мы увидим, что трудности этого рода исчезают.

Теорема верна не только для положительной, но и для любой вещественной или комплексной функции $f(x, y)$, для которой сходится один из интегралов

$$\int_{a}^{b} dx \int_{\alpha}^{\beta} |f(x, y)|, \quad \int_{\alpha}^{\beta} dy \int_{a}^{b} |f(x, y)|\, dx.$$

Это обобщение производится так же, как в случае рядов. Если функция $f(x, y)$ вещественна, то мы рассматриваем функции $|f(x, y)| \pm f(x, y)$, если функция $f(x, y)$ комплексна — функции $|f(x, y)| \pm \operatorname{Re} f(x, y)$, $|f(x, y)| \pm \operatorname{Im} f(x, y)$.

1.8.6. Гамма-функция. Функция

$$\Gamma(x) = \int_{0}^{\infty} t^{x-1} e^{-t}\, dt, \tag{1}$$

как мы уже заметили (§§ 1.5.1, 1.5.2), непрерывна при $\operatorname{Re}(x) > 0$. Теперь мы в состоянии исследовать ее свойства более полно. В этом и следующем параграфах мы будем предполагать x и y вещественными, предоставляя читателю исследовать, в какой мере результаты верны при комплексных значениях переменных.

Если $x>1$, то можно интегрировать по частям, так что

$$\Gamma(x)=[-t^{x-1}e^{-t}]_0^\infty+(x-1)\int_0^\infty t^{x-2}e^{-t}\,dt.$$

Внеинтегральный член пропадает, и, таким образом,

$$\Gamma(x)=(x-1)\,\Gamma(x-1)\qquad(x>1).\tag{2}$$

Так как $\Gamma(1)=\int_0^\infty e^{-t}\,dt=1$, то при положительном целом $x=n$ повторное применение равенства (2) показывает, что

$$\Gamma(n)=(n-1)!\tag{3}$$

Эта формула позволяет считать $\Gamma(x)$ обобщением факториала.

Рассмотрим теперь произведение

$$\Gamma(x)\,\Gamma(y)=\int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}\,dt\int_0^\infty u^{y-1}e^{-u}\,du\qquad(x>0,\ y>0).$$

Мы можем трактовать его как повторный интеграл. Полагая $u=tv$ и обращая, пока формально, порядок интегрирования, мы получаем равенства:

$$\Gamma(x)\,\Gamma(y)=\int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}\,dt\int_0^\infty t^yv^{y-1}e^{-tv}\,dv=$$

$$=\int_0^\infty v^{y-1}\,dv\int_0^\infty t^{x+y-1}e^{-t(1+v)}\,dt=$$

$$=\int_0^\infty v^{y-1}\,dv\int_0^\infty \frac{w^{x+y-1}e^{-w}\,dw}{(1+v)^{x+y}}=$$

$$=\Gamma(x+y)\int_0^\infty \frac{v^{y-1}}{(1+v)^{x+y}}\,dv.$$

Из них следует, что

$$\frac{\Gamma(x)\,\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}=\varphi(x,\ y)\qquad(x>0,\ y>0),\tag{4}$$

где

$$\varphi(x,\ y)=\int_0^\infty \frac{v^{y-1}}{(1+v)^{x+y}}\,dv=2\int_0^{\frac{1}{2}\pi}(\cos\theta)^{2x-1}(\sin\theta)^{2y-1}\,d\theta=$$

$$=\int_0^1 \lambda^{x-1}(1-\lambda)^{y-1}\,d\lambda.$$

Трудность доказательства лежит в обращении повторного интеграла

$$\int_0^\infty dt \int_0^\infty t^{x+y-1} v^{y-1} e^{-t(1+v)}\, dv.$$

Поскольку каждый из двух интегралов является несобственным у каждого предела интегрирования, если показатели степеней у t и v отрицательны, здесь должна быть несколько раз применена теорема § 1.8.5. Легко проверить, что оба интеграла равномерно сходятся во всяком конечном интервале, не примыкающем к началу. Следовательно, интегралы, взятые в пределах $(0, T; v_0, V)$ и $(t_0, T; 0, V)$, могут быть обращены, если $t_0 > 0$, $v_0 > 0$. Далее, поскольку подынтегральная функция положительна, интеграл, взятый в пределах $(0, T; 0, V)$, также может быть обращен. Может быть обращен в силу равномерной сходимости и интеграл в пределах $(t_0, T; 0, \infty)$, а потому и интеграл в пределах $(0, T; 0, \infty)$. Подобным же образом может быть обращен интеграл $(0, \infty; 0, V)$ и, наконец, весь интеграл.

Полагая в равенстве (4) $x = y = 1/2$, мы видим, что

$$\left\{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right\}^2 = 2\Gamma(1) \int_0^{\frac{1}{2}\pi} d\theta = \pi,$$

а так как значение $\Gamma(1/2)$, очевидно, положительно, то

$$\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}. \tag{5}$$

С другой стороны, при $y = x$ равенство (4) показывает, что

$$\frac{\{\Gamma(x)\}^2}{\Gamma(2x)} = \int_0^1 \lambda^{x-1}(1-\lambda)^{x-1}\, d\lambda = 2\int_0^{1/2} \lambda^{x-1}(1-\lambda)^{x-1}\, d\lambda.$$

Подстановка $\lambda = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{\mu}$, в силу которой $\lambda(1-\lambda) = \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\mu$, превращает этот интеграл в

$$\frac{1}{2}\int_0^1 \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{4}\mu\right)^{x-1} \mu^{-1/2}\, d\mu = 2^{1-2x}\int_0^1 (1-\mu)^{x-1}\mu^{-1/2}\, d\mu =$$

$$= 2^{1-2x}\frac{\Gamma(x)\Gamma(1/2)}{\Gamma\left(x+\frac{1}{2}\right)}.$$

Таким образом, мы получаем «формулу удвоения»:

$$\Gamma(2x)\,\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = 2^{2x-1}\Gamma(x)\,\Gamma\left(x+\frac{1}{2}\right). \tag{6}$$

1.8.7. Асимптотическое поведение $\Gamma(x)$ при $x \to \infty$. Рассмотрим сначала случай, когда x — натуральное число, скажем n, так что $\Gamma(x) = (n-1)!$ Мы воспользуемся хорошо известным методом сравнения суммы вида $\sum \varphi(n)$ с соответствующим интегралом $\int \varphi(t)\,dt$. Мы можем написать:

$$\log\{(n-1)!\} = \sum_{\nu=1}^{n-1} \log \nu.$$

Очевидно,

$$\int\limits_{\nu-(1/2)}^{\nu+(1/2)} \log t\,dt = \int\limits_0^{1/2} \{\log(\nu+t) + \log(\nu-t)\}\,dt =$$
$$= \int\limits_0^{1/2} \left\{\log \nu^2 + \log\left(1 - \frac{t^2}{\nu^2}\right)\right\} dt = \log \nu + C_\nu,$$

где $C_\nu = O(1/\nu^2)$. Следовательно,

$$\log \Gamma(n) = \log\{(n-1)!\} = \int\limits_{1/2}^{n-1/2} \log t\,dt - \sum_{\nu=1}^{n-1} C_\nu =$$
$$= \left(n - \frac{1}{2}\right)\log\left(n - \frac{1}{2}\right) - \left(n - \frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2}\log\frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \sum_{\nu=1}^{\infty} C_\nu + o(1) =$$
$$= \left(n - \frac{1}{2}\right)\log n - n + C + o'1), \quad (1)$$

где C — некоторая постоянная.

Этот результат можно распространить на нецелые значения x при помощи следующей леммы.

Лемма. *Если a — постоянная, то при $x \to \infty$*

$$\frac{\Gamma(x)}{\Gamma(x+a)} \sim x^{-a}. \quad (2)$$

Предположим сначала, что $a > 1$. Тогда

$$\frac{\Gamma(x)\Gamma(a)}{\Gamma(x+a)} = \int\limits_0^1 (1-\lambda)^{a-1}\lambda^{x-1}\,d\lambda = \int\limits_0^\infty (1-e^{-t})^{a-1}e^{-xt}\,dt =$$
$$= \int\limits_0^\infty t^{a-1}e^{-xt}\,dt - \int\limits_0^\infty \{t^{a-1} - (1-e^{-t})^{a-1}\}\,e^{-xt}\,dt.$$

Первый интеграл справа равен $\Gamma(a)x^{-a}$, а второй есть $O(x^{-a-1})$; действительно,

$$1 - e^{-t} < t \quad (t > 0), \qquad 1 - e^{-t} > t - \frac{1}{2}t^2 \quad (0 < t < 1),$$

из чего следует, что второй интеграл положителен и меньше, чем

$$\int_0^1 \left\{1-\left(1-\frac{1}{2}t\right)^{a-1}\right\} t^{a-1}e^{-xt}\,dt+\int_1^\infty t^{a-1}e^{-xt}\,dt<$$
$$<K\int_0^1 t^a e^{-xt}\,dt+\int_1^\infty t^a e^{-xt}\,dt<Kx^{-a-1},$$

где K зависит только от a.

Этим лемма доказана для случая $a>1$. Для других значений a она получается после этого из формулы § 1.8.6 (2).

Если теперь x — нецелое число, то $x=n+a$, где n — целое число и $0<a<1$. Из (2) и (1) следует, что

$$\begin{aligned}\log\Gamma(x)&=\log\Gamma(n+a)=\log\Gamma(n)+a\log n+o(1)=\\&=\left(n-\frac{1}{2}\right)\log n-n+C+a\log n+o(1)=\\&=\left(x-a-\frac{1}{2}\right)\log(x-a)-x+a+C+a\log(x-a)+o(1)=\\&=\left(x-\frac{1}{2}\right)\log x-x+C+o(1),\end{aligned}\tag{3}$$

а это — формула (1) с x вместо n.

Чтобы найти C, воспользуемся формулой удвоения § 1.8.6 (6). Логарифмируя ее и пользуясь соотношением (3), мы получаем равенство

$$\left(2x-\frac{1}{2}\right)\log 2x-2x+C+\log\sqrt{\pi}+o(1)=(2x-1)\log 2+$$
$$+\left(x-\frac{1}{2}\right)\log x+x\log\left(x+\frac{1}{2}\right)-2x-\frac{1}{2}+2C+o(1),$$

из которого следует, что $C=\log\sqrt{2\pi}$. Окончательно:

$$\Gamma(x)=x^{x-\frac{1}{2}}e^{-x}\sqrt{2\pi}\,\{1+o(1)\}.\tag{4}$$

Это равенство известно как теорема Стирлинга.

1.9. Дифференцирование интегралов. Две следующие теоремы достаточны в большинстве случаев, которые обычно встречаются.

Если функции $f(x, y)$ и $\frac{\partial f}{\partial y}$ непрерывны в прямоугольнике $a\leqslant x\leqslant b$, $y_0-\eta\leqslant y\leqslant y_0+\eta$ $(\eta>0)$, то при $y=y_0$

$$\frac{d}{dy}\int_a^b f(x, y)\,dx=\int_a^b \frac{\partial f}{\partial y}\,dx.\tag{1}$$

Положим $\varphi(y)=\int_a^b f(x,\ y)\,dx,\ g(x,\ y)=\frac{\partial f}{\partial y}$. Мы можем написать

$$\frac{\varphi(y_0+k)-\varphi(y_0)}{k}=$$
$$=\frac{1}{k}\int_a^b \{f(x,\ y_0+k)-f(x,\ y_0)\}\,dx=\int_a^b g(x,\ y_0+\theta k)\,dx,$$

где $0<\theta<1$. Так как функция $g(x,\ y)$ равномерно непрерывна, то (ср. § 1.5.2)

$$\lim_{k\to 0}\int_a^b g(x,\ y_0+\theta k)\,dx=\int_a^b g(x,\ y_0)\,dx,$$

что и требуется.

Пусть равенство (1) *верно для всех значений* b, *бо́льших* a. *Если интеграл* $\int_a^\infty f\,dx$ *сходится, а интеграл* $\int_a^\infty \frac{\partial f}{\partial y}\,dx$ *равномерно сходится в интервале* $(y_0-\eta,\ y_0+\eta)$, *то*

$$\frac{d}{dy}\int_a^\infty f(x,\ y)\,dx=\int_a^\infty \frac{\partial f}{\partial y}\,dx.$$

Это можно вывести из соответствующей теоремы о рядах (§ 1.7.2). Действительно, положим

$$\int_{a+n-1}^{a+n} f(x,y)\,dx=u_n(y).$$

Очевидно, $\int_a^\infty f(x,\ y)\,dx=\sum u_n(y)$, так что, в силу предыдущей теоремы,

$$\int_a^\infty \frac{\partial f}{\partial y}\,dx=\sum\int_{a+n-1}^{a+n}\frac{\partial f}{\partial y}\,dx=\sum\frac{d}{dy}\int_{a+n-1}^{a+n} f(x,\ y)\,dx=\sum\frac{d}{dy}u_n(y).$$

Теперь остается применить теорему о рядах.

РАЗЛИЧНЫЕ ПРИМЕРЫ

1. Исследовать на равномерную сходимость ряды

$$\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{x^2+n^2},\quad \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{x^2n^2},\quad \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{x^2-n^2},\quad \sum_{n=1}^\infty \frac{\sin nx}{n^\alpha}\qquad (\alpha>0).$$

2. Исследовать на равномерность сходимости ряды

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \frac{z^n}{1+z^n}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \frac{z^n}{1+z^n}$$

при положительном вещественном z и при произвольном комплексном z.

3. Исследовать на равномерную сходимость интегралы

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{x^2+y^2}, \quad \int_0^{\infty} e^{-xy}\, dx, \quad \int_0^{\infty} \operatorname{ch} xy\, e^{-x^2}\, dx.$$

4. Исследовать на равномерную сходимость интеграл $\int\limits_0^{\infty} \frac{\sin^2 xy}{x^2}\, dx$. Вычислить его дифференцированием по y.

5. Функция Бесселя $J_\nu(z)$ определяется при $\nu > -1$ формулой

$$J_\nu(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \left(\frac{1}{2} z\right)^{\nu+2n}}{n!\,\Gamma(\nu+n+1)}.$$

Доказать, что при $\nu > -1/2$

$$J_\nu(z) = \frac{z^\nu}{2^{\nu-1}\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \cos(z\cos\theta)\sin^{2\nu}\theta\, d\theta$$

и что при $\mu > -1$, $\nu > -1$

$$J_{\mu+\nu+1}(z) = \frac{z^{\nu+1}}{2^\nu \Gamma(\nu+1)} \int_0^{\frac{1}{2}\pi} J_\mu(z\sin\theta)\sin^{\mu+1}\theta\cos^{2\nu+1}\theta\, d\theta.$$

6. Доказать, что при $0 < b < a$

$$\int_0^{\infty} e^{-ax} J_0(bx)\, dx = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

и что

$$\int_0^{\infty} e^{-x} J_0(x)\, dx = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

7. Доказать, что $\int\limits_0^{\infty} J_\nu(at)\, e^{-t^2} t^{\nu+1}\, dt = \frac{a^\nu}{2^{\nu+1}} e^{-\frac{1}{4}a^2}$.

8. Доказать, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\infty} \frac{\sin nx}{n^2 x}\, dx = \int_0^{\infty} \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^2 x} \right\} dx.$$

9. Показать, что повторные интегралы

$$\int_1^\infty dx \int_1^\infty \frac{x-y}{(x+y)^3}\,dy, \qquad \int_0^1 dx \int_0^1 \frac{x-y}{(x+y)^3}\,dy,$$

$$\int_1^\infty dx \int_1^\infty \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}\,dy, \qquad \int_0^1 dx \int_1^\infty (ae^{-axy}-be^{-bxy})\,dy$$

не равны интегралам, которые получаются из них после обращения порядка интегрирования.

10. Доказать, что

$$\int_0^\infty e^{-x^2}\cos 2xy\,dx = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}\,e^{-y^2},$$

двумя способами: (i) путем разложения функции $\cos 2xy$ по степеням x и почленного интегрирования; (ii) показав, что интеграл удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\frac{dI}{dy} = -2yI.$$

11. Положим $\varphi(y) = \int\limits_0^\infty \frac{\sin xy}{x(a^2+x^2)}\,dx$. Доказать, что $\varphi''(y) - a^2\varphi(y)$ есть постоянная, и вывести из этого, что

$$\varphi(y) = \frac{\pi}{2a^2}(1-e^{-ay}) \qquad (y > 0).$$

12. Вывести из предыдущего примера значения интегралов

$$\int_0^\infty \frac{\cos xy}{a^2+x^2}\,dx, \qquad \int_0^\infty \frac{x\sin xy}{a^2+x^2}\,dx.$$

13. Положим $\varphi(p,\ q,\ a,\ b) = \Gamma(p)\int\limits_0^\infty \frac{e^{-bx}x^{q-1}}{(a+cx)^p}\,dx$, где a, b, p и q положительны. Доказать, что

$$\varphi(p,\ q,\ a,\ b) = \varphi(q,\ p,\ b,\ a).$$

14. Положим $\psi(y) = \int\limits_0^\infty e^{-x^2-\frac{y^2}{x^2}}\,dx$. Доказать, что

$$\psi(y) = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}\,e^{-2y} \qquad (y > 0),$$

двумя способами: (i) установив, что $\psi'(y) = -2\psi(y)$; (ii) с помощью подстановки $w = x - \frac{y}{x}$.

15. Показать, что повторный интеграл

$$\int_0^\infty dx \int_0^\infty \cos 2mx \cdot ye^{-y^2(1+x^2)}\, dy$$

может быть обращен, и вывести этим путем значение первого интеграла примера 12 из значений интегралов примеров 10 и 14.

16. Доказать, что при $\lambda > 0$, $\mu > 0$

$$\int_0^\infty e^{-x^2} x^{2\lambda-1}\, dx \int_0^\infty e^{-y^2} y^{2\mu-1}\, dy = \int_0^\infty e^{-r^2} r^{2\lambda+2\mu-1}\, dr \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \cos^{2\lambda-1}\theta \sin^{2\mu-1}\theta\, d\theta,$$

и получить этим путем другое доказательство формул § 1.8.6.

17. Показать, что в повторном интеграле

$$\int_0^\infty \sin ax\, dx \int_0^\infty f(y)\, e^{-xy}\, dy$$

можно обратить порядок интегрирования, если сходятся интегралы $\int_0^1 |f(y)|\, dy$, $\int_1^\infty |f(y)|\, y^{-2}\, dy$. Вывести из этого, что

$$\int_0^\infty \frac{\sin ax}{\sqrt{1+x^2}}\, dx = a \int_0^\infty \frac{J_0(y)}{a^2+y^2}\, dy.$$

[Интеграл $\int_\xi^X \sin ax\, dx \int_0^\infty f(y)\, e^{-xy}\, dy$ может быть обращен, так как внутренний интеграл равномерно сходится при $0 < \xi \leqslant x \leqslant X$. Поэтому достаточно доказать, что интегралы

$$\int_0^\infty f(y)\, dy \int_0^\xi \sin ax\, e^{-xy}\, dx, \qquad \int_0^\infty f(y)\, dy \int_X^\infty \sin ax\, e^{-xy}\, dx$$

стремятся к нулю при $\xi \to 0$ и $X \to \infty$. Можно считать, что $a > 0$. Так как $|\sin ax| \leqslant ax$, то абсолютная величина первого интеграла не превышает

$$\int_0^\infty |f(y)|\, dy \int_0^\xi axe^{-xy}\, dx < a \int_0^Y |f(y)|\, dy \int_0^\xi x\, dx +$$
$$+ a \int_Y^\infty |f(y)|\, dy \int_0^\infty xe^{-xy}\, dx = \frac{1}{2} a\xi^2 \int_0^Y |f(y)|\, dy + a \int_Y^\infty |f(y)|\, y^{-2}\, dy,$$

правую же часть можно сделать сколь угодно малой, выбрав надлежащим образом сначала Y, а затем ξ. Абсолютная величина второго интеграла допускает оценку

$$\left| \int_0^\infty f(y) \frac{y \sin aX + a \cos aX}{a^2+y^2} e^{-Xy}\, dy \right| < \frac{1}{a} \int_0^\infty |f(y)|\, e^{-Xy}\, dy,$$

так что и он стремится к нулю.]

18. При $\alpha > 0$, $\beta > 0$

$$\int_y^x (x-t)^{\alpha-1}(t-y)^{\beta-1}\,dt = \frac{\Gamma(\alpha)\,\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}(x-y)^{\alpha+\beta-1}.$$

19. Если $\alpha > 0$, $\beta > 0$ и $\lambda < y$ или $\lambda > x$, то

$$\int_y^x \frac{(x-t)^{\alpha-1}(t-y)^{\beta-1}}{|t-\lambda|^{\alpha+\beta}}\,dt = \frac{\Gamma(\alpha)\,\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)} \frac{(x-y)^{\alpha+\beta-1}}{|x-\lambda|^{\beta}\,|y-\lambda|^{\alpha}}.$$

[Применить надлежащее линейное преобразование интервала (y, x) и воспользоваться предыдущим примером.]

20. Доказать, что при $c > b > 0$, $c-a-b > 0$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a(a+1)\ldots(a+n-1)}{n!} \int_0^1 t^{b+n-1}(1-t)^{c-b-1}\,dt = \int_0^1 t^{b-1}(1-t)^{c-a-b-1}\,dt.$$

Вывести из этого, что

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a\ldots(a+n-1)\,b\ldots(b+n-1)}{n!\,c\ldots(c+n-1)} = \frac{\Gamma(c)\,\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a)\,\Gamma(c-b)}.$$

ГЛАВА II

АНАЛИТИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

2.1. Функции комплексного переменного. Построить функцию комплексного переменного $z = x + iy$ так же легко, как функцию действительного переменного x. Каждое конечное или сходящееся бесконечное выражение, содержащее z, дает такую функцию. Например, z^2, $\frac{1}{z}$, e^z — функции комплексного переменного z. Читатель *Чистой математики* Харди знаком со многими такими функциями.

В этой и следующей главах все функции предполагаются однозначными в той области, в которой они определены.

Наша первая задача — дать общее определение, охватывающее все такие функции.

Мы могли бы сказать, что w есть функция от z, если каждому значению z в некоторой области соответствует одно или более чем одно значение w. Это определение построено по образцу обычного определения функции действительного переменного. Оно совершенно законно, но, как объяснено в *Чистой математике* Харди, оно бесполезно, потому что слишком широко. Оно отождествляет функцию комплексного переменного с комплексной функцией $u(x, y) + iv(x, y)$ двух действительных переменных x и y. Конечно, это не то, что мы имели в виду, начиная говорить о функциях комплексного переменного.

Чтобы найти нужное определение, мы рассмотрим в комплексной области свойства функции, которые представляются нам желательными, и попытаемся выяснить, какие из этих свойств позволяют отличать «настоящие» функции от «ненастоящих».

2.1.1. Непрерывность. Пусть $f(z)$ — функция от z в предыдущем широком смысле. *Она называется непрерывной в точке $z = z_0$, если для всякого положительного числа ε можно найти такое положительное число δ, что при $|z - z_0| < \delta$*

$$|f(z) - f(z_0)| < \varepsilon.$$

Это определение вполне удовлетворительно, но оно ведет недалеко. Непрерывная функция от z есть просто непрерывная комплексная функция двух вещественных переменных x и y. Действительно, пусть $f(z)=u(x, y)+iv(x, y)$ и $z_0=x_0+iy_0$; тогда

$$|u(x, y)-u(x_0, y_0)| \leqslant |f(z)-f(z_0)| < \varepsilon,$$

если $|z-z_0|<\delta$, а это так, если

$$|x-x_0|<\delta/\sqrt{2}, \quad |y-y_0|<\delta/\sqrt{2}.$$

Следовательно, функция $u(x, y)$ непрерывна, и такова же функция $v(x, y)$. Обратно, если функции $u(x, y)$ и $v(x, y)$ непрерывны, то и функция $f(z)$ непрерывна.

2.1.2. Дифференцируемость. Из класса непрерывных функций мы выделяем подкласс функций, которые допускают дифференцирование. Значение этого термина в комплексной области должно быть теперь определено.

Следуя рецептам вещественного дифференциального исчисления, мы пишем

$$f'(z_0)=\lim_{z \to z_0} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}$$

и говорим, что функция $f(z)$ дифференцируема, если предел в правой части существует. Этот предел называется производной или дифференциальным коэффициентом функции $f(z)$. Как и в определении непрерывности, приближение точки z к ее пределу z_0 может происходить всевозможными способами. Более точно, предыдущая формула означает, что для всякого положительного числа ε можно найти такое положительное число δ, что при $0<|z-z_0|<\delta$

$$\left| f'(z_0)-\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} \right| < \varepsilon.$$

Таким образом, мы требуем, чтобы отношение $\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}$ стремилось к некоторому пределу, по какому бы пути точка z ни приближалась к точке z_0, и чтобы все эти пределы были равны между собой. Наше требование является поэтому весьма ограничительным.

Однако этим свойством дифференцируемости обладают многие известные функции. Постоянная дифференцируема. Целая положительная степень переменного z дифференцируема; действительно, известное доказательство, проводимое для x^n, применимо слово в слово к z^n. Подобным же образом сумма и произведение двух (и любого конечного числа) дифференцируемых функций — дифференцируемые функции, и частное двух дифференцируемых функций дифференцируемо, если знаменатель не обращается в нуль. Наконец, дифференцируемая функция от дифференцируемой функции дифференцируема. Все эти теоремы доказываются для функций от z так же, как для функций от x.

Например, всякая рациональная функция от z дифференцируема для всех значений z, не являющихся нулями ее знаменателя.

2.1.3. Мы приходим к естественному вопросу, соответствует ли это свойство дифференцируемости какому-нибудь простому свойству функций $u(x, y)$ и $v(x, y)$, которые служат действительной частью и мнимой частью функции $f(z)$.

Предположим сначала, что разность $z-z_0$ вещественна, так что $z_0=x_0+iy_0$, $z=x+iy_0$. Тогда

$$\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}=\frac{\{u(x, y_0)+iv(x, y_0)\}-\{u(x_0, y_0)+iv(x_0, y_0)\}}{x-x_0}=$$
$$=\frac{u(x, y_0)-u(x_0, y_0)}{x-x_0}+i\frac{v(x, y_0)-v(x_0, y_0)}{x-x_0}.$$

Если это выражение стремится к пределу при $x \to x_0$, то его вещественная часть стремится к пределу и его мнимая часть стремится к пределу. Но это означает просто, что в точке (x_0, y_0) существуют частные производные $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial v}{\partial x}$ и

$$f'(z_0)=\left(\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}\right)_{x=x_0,\ y=y_0}. \tag{1}$$

Подобным же образом, если разность $z-z_0$ чисто мнима, скажем, $z_0=x_0+iy_0$, $z=x_0+iy$, то

$$\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}=\frac{\{u(x_0, y)+iv(x_0, y)\}-\{u(x_0, y_0)+iv(x_0, y_0)\}}{iy-iy_0}=$$
$$=\frac{v(x_0, y)-v(x_0, y_0)}{y-y_0}-i\frac{u(x_0, y)-u(x_0, y_0)}{y-y_0}.$$

Если это выражение имеет предел при $y \to y_0$, то в точке (x_0, y_0) существуют частные производные $\frac{\partial v}{\partial y}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$ и

$$f'(z_0)=\left(\frac{\partial v}{\partial y}-i\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{x=x_0,\ y=y_0}. \tag{2}$$

Сравнивая равенства (1) и (2) и приравнивая вещественные и мнимые части, мы видим, что

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{\partial u}{\partial y} \qquad (x=x_0,\ y=y_0). \tag{3}$$

Итак, следствия предположения *дифференцируемости* являются куда более впечатляющими, чем следствия предположения *непрерывности*. Мало того, что функции $u(x, y)$ и $v(x, y)$ обладают частными производными первого порядка, эти производные связаны еще дифференциальными уравнениями (3). Последние называются уравнениями Коши — Римана.

Таким образом, даже если $u(x, y)$ и $v(x, y)$ имеют частные производные первого порядка, $u+iv$ не является, вообще говоря, дифференцируемой функцией от z.

Примеры. (I) Пусть $f(z)=\operatorname{Re}(z)=x$. Тогда

$$\frac{\partial u}{\partial x}=1, \quad \frac{\partial u}{\partial y}=0, \quad \frac{\partial v}{\partial x}=0, \quad \frac{\partial v}{\partial y}=0.$$

Таким образом, все частные производные существуют, но уравнения Коши — Римана не удовлетворяются ни при каком значении z.

(II) Пусть $f(z)=|z|^2=x^2+y^2$. Тогда

$$\frac{\partial u}{\partial x}=2x, \quad \frac{\partial u}{\partial y}=2y, \quad \frac{\partial v}{\partial x}=0, \quad \frac{\partial v}{\partial y}=0.$$

Уравнения Коши — Римана удовлетворяются только в точке $z=0$.

2.1.4. Аналитические функции. Поскольку рассмотренное нами свойство значительно превосходит то, что мы привыкли думать о дифференцируемости, мы даем ему специальное название. Функция, которая дифференцируема в этом смысле, называется *аналитической*.

Аналитичность и есть то отличительное свойство «настоящих» функций комплексного переменного, которое мы искали.

Мы видели, что соотношения Коши — Римана составляют *необходимое* условие аналитичности функции. Однако они не являются *достаточным* условием. Этого можно было ожидать, поскольку мы получили эти соотношения как всего лишь частные проявления дифференцируемости.

Рассмотрим, например, функцию $f(z)=\sqrt{|xy|}$. Она обращается в нуль на обеих осях, так что при $z=0$

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}=0$$

и уравнения Коши — Римана удовлетворяются. Но функция $f(z)$ не дифференцируема при $z=0$. Действительно, $\frac{f(z)}{z}=\frac{\sqrt{|xy|}}{x+iy}$, и если $x=\alpha r$, $y=\beta r$, где α и β — постоянные, а $r>0$, то при $r\to 0$ это отношение стремится к $\frac{\sqrt{|\alpha\beta|}}{\alpha+i\beta}$. Таким образом, предел не является единственным и функция не аналитична.

Этот пример показывает, что функция $f(z)$ может не быть аналитической, если известно только, что отношение $\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}$ стремится к пределу вдоль двух прямых, образующих прямой угол. В действительности нельзя ограничиться вообще никаким специальным классом путей. Рассмотрим, например, функцию

$$f(z)=\frac{xy^2(x+iy)}{x^2+y^4} \quad (z\neq 0), \qquad f(0)=0.$$

Легко проверить, что $\lim \frac{f(z)-f(0)}{z}=0$, если $z \to 0$ вдоль любой прямой. Но на кривой $x=y^2$

$$\frac{f(z)-f(0)}{z}=\frac{y^4}{y^4+y^4}=\frac{1}{2}.$$

Следовательно, функция $f(z)$ не аналитична при $z=0$.

2.1.5. *Предположим, однако, что все четыре частные производные первого порядка существуют в некоторой области и непрерывны во всех точках этой области. Тогда соотношения Коши — Римана составляют необходимое и достаточное условие аналитичности функции $f(z)$ во всех точках области.*

Мы уже видели, что условие необходимо. Чтобы доказать, что оно достаточно, мы воспользуемся теоремой о среднем значении функции двух переменных (*Ч. М.*, § 159).

Рассмотрим в области точку (x, y) и близкую точку $(x+\delta x, y+\delta y)$. Мы можем написать

$$\delta u = u(x+\delta x,\ y+\delta y)-u(x,\ y)=\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\varepsilon\right)\delta x+\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\eta\right)\delta y,$$

где ε и η стремятся к нулю вместе с δx и δy. Подобным же образом

$$\delta v=\left(\frac{\partial v}{\partial x}+\varepsilon'\right)\delta x+\left(\frac{\partial v}{\partial y}+\eta'\right)\delta y.$$

Пользуясь уравнениями Коши — Римана, мы выводим из этого, что

$$\delta u+i\delta v=\left(\frac{du}{dx}+i\frac{dv}{dx}\right)(\delta x+i\delta y)+\rho,$$

где $|\rho| \leqslant (|\varepsilon|+|\varepsilon'|)|\delta x|+(|\eta|+|\eta'|)|\delta y|$. Таким образом,

$$\frac{f(z+\delta z)-f(z)}{\delta z}=\frac{\delta u+i\delta v}{\delta x+i\delta y}=\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\rho}{\delta x+i\delta y},$$

где $\left|\frac{\rho}{\delta x+i\delta y}\right| \leqslant |\varepsilon|+|\varepsilon'|+|\eta|+|\eta'| \to 0$. Следовательно, функция $f(z)$ аналитична.

2.1.6. *Внутри круга сходимости степенной ряд представляет аналитическую функцию.*

Позже мы увидим, что это — всего лишь частный случай общей теоремы о рядах, представляющих аналитические функции. Но нижеследующее прямое доказательство может быть дано уже теперь. Пусть при $|z|<R$

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n.$$

Тогда при $\rho < R$ числа $a_n \rho^n$ ограничены, скажем, $|a_n \rho^n| \leqslant K$. Положим *)

$$g(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1}.$$

Если $|z| < \rho$ и $|z| + |h| < \rho$, то

$$\frac{f(z+h) - f(z)}{h} - g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \frac{(z+h)^n - z^n}{h} - n z^{n-1} \right\}.$$

Но

$$\left| \frac{(z+h)^n - z^n}{h} - n z^{n-1} \right| = \left| \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} z^{n-2} h + \ldots + h^{n-1} \right| \leqslant$$
$$\leqslant \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} |z|^{n-2} |h| + \ldots + |h|^{n-1} =$$
$$= \frac{(|z| + |h|)^n - |z|^n}{|h|} - n|z|^{n-1}.$$

Таким образом,

$$\left| \frac{f(z+h) - f(z)}{h} - g(z) \right| \leqslant K \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\rho^n} \left\{ \frac{(|z| + |h|)^n - |z|^n}{|h|} - n|z|^{n-1} \right\} =$$
$$= K \left\{ \frac{1}{|h|} \left(\frac{\rho}{\rho - |z| - |h|} - \frac{\rho}{\rho - |z|} \right) - \frac{\rho}{(\rho - |z|)^2} \right\} = \frac{K\rho |h|}{(\rho - |z| - |h|)(\rho - |z|)^2},$$

правая же часть стремится к нулю вместе с h. Следовательно, $g(z)$ есть производная функции $f(z)$.

2.1.7. Функции, аналитические в области. Функция называется аналитической в области, если она аналитична во всех точках этой области. В дальнейшем мы всегда рассматриваем функции, аналитические *в некоторой области*. Тот факт, что какая-нибудь функция (вроде $|z|^2$) оказывается аналитической в отдельной точке или даже на некоторой кривой, не представляет особого интереса. Только из того, что функция аналитична в некоторой *области*, вытекают интересные следствия.

Примеры. (I) Функция $\log(1+z) = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \ldots$ аналитична при $|z| < 1$.

(II) Функции

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}, \quad \cos z = \frac{1}{2}(e^{iz} + e^{-iz}), \quad \sin z = \frac{1}{2i}(e^{iz} - e^{-iz})$$

аналитичны при всех конечных значениях z.

---

*) Этот ряд также сходится при $|z| < R$. Доказательство таково же, как в вещественном случае; см. § 1.7.3. (*Примечание переводчика.*)

(III) Функция $f(z)=e^{-z^{-4}}$ $(z\neq 0)$, $f(0)=0$ аналитична при всех значениях z, кроме значения $z=0$. В точке $z=0$ уравнения Коши—Римана удовлетворяются; действительно, при $z=0$

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^{-x^{-4}}}{x}=0,\quad \frac{\partial v}{\partial x}=\lim_{x\to 0}\frac{0}{x}=0,$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\lim_{y\to 0}\frac{e^{-y^{-4}}}{y}=0,\quad \frac{\partial v}{\partial y}=\lim_{y\to 0}\frac{0}{y}=0,$$

так что $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}$, $\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}$. Несмотря на это, функция $f(z)$ не аналитична при $z=0$; действительно, если $z=re^{i\pi/4}$, то

$$f(z)=\exp\left\{-\left(re^{i\pi/4}\right)^{-4}\right\}=e^{r^{-4}},$$

а это выражение стремится при $r\to 0$ к бесконечности.

2.2. Комплексное дифференциальное исчисление. Читатель, возможно, ждет, что мы поступим теперь так же, как поступают при построении вещественного дифференциального исчисления. Там, выделив уже сам по себе достаточно специальный класс дифференцируемых функций, рассматривают следующий за ним еще более специальный класс функций, имеющих вторую производную. Некоторые из этих функций имеют производную третьего порядка, и т. д. Наконец, среди функций, имеющих производные всех порядков, выбирают те, которые могут быть разложены в степенной ряд по теореме Тейлора.

Подобного процесса последовательной специализации аналитических функций комплексного переменного не существует. Функция, аналитическая в некоторой области, имеет в каждой точке этой области производные всех порядков и может быть разложена в окрестности каждой точки области в степенной ряд, такой же, как в теореме Тейлора.

Все эти факты являются следствиями определения аналитической функции, в которое входит только ее первая производная.

Может быть, теперь читатель ждет, что мы прямо приступим к доказательству существования второй производной у любой аналитической функции. Мы не в состоянии это сделать.

Перечисленные теоремы были, конечно, доказаны, иначе мы не могли бы сообщить читателю, что они верны. Но до сих пор они не были доказаны непосредственно. Их доказательство основано на комплексном интегральном исчислении, и к нему мы должны теперь обратиться.

2.3. Комплексное интегрирование. Теорема Коши. Читатель *Чистой математики* Харди должен знать, что такое комплексный интеграл (*Ч. М.*, § 229). Мы, однако, введем это понятие несколько иным путем.

Пусть A и B — концы дуги C кривой, определенной уравнениями $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$, где φ и ψ — функции от t с непрерывными производными $\varphi'(t)$ и $\psi'(t)$. Предположим, что при изменении t от значения t_A до значения t_B точка (x, y) перемещается вдоль кривой от A к B.

Пусть $f(z)$ — комплексная функция от z, непрерывная вдоль C. Пусть $f(z)=u(x, y)+iv(x, y)$. Пусть $z_0, z_1, \ldots, z_n$ — точки на C, причем z_0 есть A, а z_n есть B. Рассмотрим сумму

$$\sum_{m=1}^{n} f(\zeta_m)(z_m - z_{m-1}), \tag{1}$$

где ζ_m — точка кривой, лежащая между z_{m-1} и z_m. Если положить $\zeta_m=\xi_m+i\eta_m$, $u_m=u(\xi_m, \eta_m)$, $v_m=v(\xi_m, \eta_m)$, то эта сумма примет вид:

$$\sum_{m=1}^{n}(u_m+iv_m)(x_m+iy_m-x_{m-1}-iy_{m-1}).$$

Но

$$x_m - x_{m-1} = \varphi(t_m) - \varphi(t_{m-1}) = \varphi'(\tau_m)(t_m - t_{m-1}),$$

$$y_m - y_{m-1} = \psi(t_m) - \psi(t_{m-1}) = \psi'(\tau'_m)(t_m - t_{m-1}),$$

где $t_{m-1} \leqslant \tau_m \leqslant t_m$, $t_{m-1} \leqslant \tau'_m \leqslant t_m$. Следовательно, сумма равна

$$\sum_{m=1}^{n}(u_m+iv_m)\{\varphi'(\tau_m)+i\psi'(\tau'_m)\}(t_m-t_{m-1}). \tag{2}$$

Так как все наши функции непрерывны и потому равномерно непрерывны, то мы можем по заданному ε найти такое δ, что если для всех m выполнено неравенство $|t_m - t_{m-1}| < \delta$, то для всех m

$$|u_m\varphi'(\tau_m) - u(x_m, y_m)\varphi'(t_m)| < \varepsilon.$$

Но

$$\sum_{m=1}^{n}\varepsilon(t_m - t_{m-1}) = \varepsilon(t_B - t_A);$$

следовательно, если ε и δ стремятся к нулю, то сумма

$$\sum_{m=1}^{n} u_m\varphi'(\tau_m)(t_m - t_{m-1})$$

стремится к тому же пределу, что и сумма

$$\sum_{m=1}^{n} u(x_m, y_m)\varphi'(t_m)(t_m - t_{m-1}),$$

т. е. к пределу $\int\limits_{t_A}^{t_B} u\{\varphi(t),\ \psi(t)\}\varphi'(t)\,dt$. Подобным же образом стремятся к пределам другие члены суммы (2), и мы видим, что вся сумма стремится к пределу

$$\int\limits_{t_A}^{t_B} (u+iv)\{\varphi'(t)+i\psi'(t)\}\,dt. \tag{3}$$

Последний интеграл понимается обычным образом как сумма двух вещественных интегралов, один из которых умножен на i.

Этот предел и принимается за определение интеграла функции $f(z)$ вдоль C и обозначается через $\int\limits_C f(z)\,dz$.

В частности, изложенное применимо к функции $f(z)$, аналитической в некоторой области, содержащей C.

Некоторые из наиболее очевидных свойств вещественных интегралов сразу распространяются на комплексные интегралы; например,

$$\int\limits_C \{f(z)+g(z)\}\,dz=\int\limits_C f(z)\,dz+\int\limits_C g(z)\,dz,$$

и, если k есть постоянная, $\int\limits_C kf(z)\,dz=k\int\limits_C f(z)\,dz$.

Если C' — тот же контур C, описываемый в противоположном направлении, то $\int\limits_{C'} f(z)\,dz=-\int\limits_C f(z)\,dz$.

Примеры. (I) Пусть $f(z)=k\ (=\text{const})$, и пусть C — любая кривая, соединяющая точки $z=a$ и $z=b$. Тогда

$$\sum_{m=1}^{n} f(\zeta_m)(z_m-z_{m-1})=k\sum_{m=1}^{n}(z_m-z_{m-1})=k(b-a).$$

Следовательно, $\int\limits_C k\,dz=k(b-a)$. Поскольку правая часть не зависит от выбора кривой C, мы можем представить это равенство в виде

$$\int\limits_a^b k\,dz=k(b-a).$$

(II) Пусть $f(z)=z$, и пусть C — любая кривая, соединяющая точки $z=a$ и $z=b$.

Если $\zeta_m=z_m$, то

$$\sum_{m=1}^{n} f(\zeta_m)(z_m-z_{m-1})=\sum_{m=1}^{n} z_m(z_m-z_{m-1}),$$

Если же $\zeta_m = z_{m-1}$, то сумма равна

$$\sum_{m=1}^{n} z_{m-1}(z_m - z_{m-1}).$$

Эти суммы стремятся к общему пределу; следовательно, к нему же стремится их полусумма

$$\frac{1}{2}\sum (z_m^2 - z_{m-1}^2) = \frac{1}{2}(b^2 - a^2).$$

Таким образом, $\int\limits_C z\,dz = \frac{1}{2}(b^2 - a^2)$, и интеграл опять не зависит от выбора кривой C.

(III) Вычислить интеграл $\int\limits_C \frac{dz}{z}$, где C — окружность с центром в начале и радиусом ρ.

[Здесь можно положить $x = \rho\cos\theta = \varphi(\theta)$, $y = \rho\sin\theta = \psi(\theta)$; θ изменяется от 0 до 2π. Так как

$$\varphi'(\theta) + i\psi'(\theta) = -\rho\sin\theta + \rho i\cos\theta = \rho i e^{i\theta},$$

то интеграл равен

$$\int\limits_0^{2\pi} \frac{1}{\rho e^{i\theta}} \rho i e^{i\theta} d\theta = i\int\limits_0^{2\pi} d\theta = 2\pi i.]$$

(IV) Подобным же образом доказать, что $\int\limits_C z^n dz = 0$, где n — произвольное целое число, положительное или отрицательное, но не равное -1.

2.3.1. Оценка комплексного интеграла. Длину кривой $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, где $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ — функции с непрерывными производными, можно определить интегралом

$$\int [\{\varphi'(t)\}^2 + \{\psi'(t)\}^2]^{\frac{1}{2}} dt,$$

взятым между надлежащими пределами. Это определение мотивировано в *Ч. М.*, § 149.

Если M — верхняя грань функции $|f(z)|$ на кривой C и L — длина этой кривой, то $\left|\int f(z)\,dz\right| \leqslant ML$.

Прежде всего, если $F(t)$ — непрерывная комплексная функция действительного переменного t, то

$$\left|\int\limits_a^b F(t)\,dt\right| \leqslant \int\limits_a^b |F(t)|\,dt. \tag{1}$$

Действительно, $\left|\sum F(t_m)(t_m - t_{m-1})\right| \leqslant \sum |F(t_m)|(t_m - t_{m-1})$. Неравенство (1) получается из этого неравенства после перехода к пределу.

Теперь мы можем написать в наших обычных обозначениях:

$$\left|\int_C f(z)\,dz\right| = \left|\int_{t_A}^{t_B} (u+iv)\{\varphi'(t)+i\psi'(t)\}\,dt\right| \leqslant$$
$$\leqslant \int_{t_A}^{t_B} M\left[\{\varphi'(t)\}^2+\{\psi'(t)\}^2\right]^{\frac{1}{2}} dt = ML.$$

2.3.2. Контуры. Под контуром мы понимаем непрерывную кривую, состоящую из конечного числа дуг рассмотренного выше типа, т. е. дуг, определяемых уравнениями $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$ с непрерывными производными $\varphi'(t)$ и $\psi'(t)$. Контур замкнут, если конец последней дуги совпадает с началом первой.

Пусть C — замкнутый контур. Предположим, что существует такой интервал (a, b), что при $a<x'<b$ прямая $x=x'$ пересекает C ровно в двух точках, скажем $y_1(x')$ и $y_2(x')$, где $y_1<y_2$, в то время как при $x'<a$ и при $x'>b$ прямая $x=x'$ не пересекает C. Или же предположим, что существует такой интервал (α, β), что при $\alpha<y'<\beta$ прямая $y=y'$ пересекает C ровно в двух точках, скажем, $x_1(y')$ и $x_2(y')$, где $x_1<x_2$, в то время как при $y'<\alpha$ и при $y'>\beta$ прямая $y=y'$ не пересекает C.

В первом случае точка (x, y) называется внутренней по отношению к C, если $a<x<b$ и $y_1(x)<y<y_2(x)$. Во втором случае определение аналогично. Точка, не внутренняя к C и не лежащая на C, называется внешней по отношению к C.

Контур, удовлетворяющий одному из двух предыдущих условий, называется простым замкнутым контуром. Например, окружность, контур квадрата, эллипс в любом расположении являются простыми замкнутыми контурами. Определение внутренних и внешних точек, которое мы дали, может показаться читателю излишне сложным, а рассматриваемый класс кривых — излишне ограниченным. Однако общее изучение вопросов этого рода не столь просто, как может показаться, и мы оставляем его за пределами нашего изложения *). Оно известно как «analysis situs». С другой стороны, читатель, который предпочтет игнорировать эти наши объяснения и доверится геометрической интуиции, увидит, что все идет как нельзя лучше.

Мы можем расширить класс контуров, к которым применимы наши теоремы, путем «сложения» и «вычитания» простых замкнутых контуров. Пусть C и C' — простые замкнутые контуры, имеющие общую дугу или несколько смежных общих дуг, но в остальном расположенные внешне по отношению друг к другу. Мы образуем новый замкнутый контур C'' путем удаления этих общих

*) По этим вопросам см., например, Watson, *Complex Integration and Cauchy's Theorem.*

дуг. Внутренность контура C'' состоит из внутренних областей контуров C и C' и из удаленных точек границы. Подобным же образом, если все точки, внутренние к C, являются внутренними к C', то мы образуем новый замкнутый контур C'', внутренность которого состоит из точек, внутренних к C', но внешних к C.

Часто используемый замкнутый контур описанного типа образуют верхние половины окружностей $|z|=\rho$, $|z|=R$ $(0<\rho<R)$, соединенные отрезками вещественной оси.

Путем дальнейшего сложения могут быть получены еще более сложные замкнутые контуры. Сложим, например, только что рассмотренный контур с его отражением в вещественной оси и удалим общую для них часть этой оси от $z=-R$ до $z=-\rho$. Мы получим замкнутый контур с вполне определенной внутренностью и вполне определенной внешностью; внешность состоит из областей $|z|<\rho$ и $|z|>R$. При обходе контура отрезок с концами $z=\rho$, $z=R$ проходится дважды, в противоположных направлениях.

2.3.3. Теорема Коши. Краеугольным камнем теории аналитических функций является следующая теорема Коши.

Если функция $f(z)$ аналитична внутри простого замкнутого контура C и на самом контуре, то $\int\limits_C f(z)\,dz=0$.

Чтобы доказать это, разделим область, внутреннюю к C, на большое число мелких частей сетью прямых, параллельных вещественной и мнимой осям. Пусть эта сеть разбивает внутреннюю область на M квадратов с контурами $C_1, \ldots, C_M$ и N неправильных областей с границами $D_1, \ldots, D_N$, частично входящими в C. Тогда

$$\int\limits_C f(z)\,dz=\sum_{m=1}^{M}\int\limits_{C_m} f(z)\,dz+\sum_{n=1}^{N}\int\limits_{D_n} f(z)\,dz, \tag{1}$$

где каждый из контуров проходится в положительном направлении (против часовой стрелки). Рассмотрим, например, два квадрата, $ABCD$ и $DCEF$, с общей стороной CD. В первом квадрате сторона CD описывается от C к D, во втором — от D к C. Следовательно, интегралы, взятые вдоль CD, сокращаются. Так сокращаются все интегралы, кроме тех, которые берутся вдоль частей самого контура C. Этим формула (1) доказана.

Воспользуемся теперь тем, что функция $f(z)$ аналитична. Для каждой точки z_0, лежащей внутри C или на C,

$$\left|\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}-f'(z_0)\right|<\varepsilon,$$

если только $0<|z-z_0|<\delta=\delta(z_0)$. Таким образом, при $|z-z_0|<\delta$

$$|f(z)-f(z_0)-(z-z_0)f'(z_0)|\leqslant\varepsilon|z-z_0|. \tag{2}$$

Если взять какую-нибудь определенную область, ограниченную контуром C_m или D_n, и в ней некоторую точку z_0, то, очевидно, стороны контура можно уменьшить настолько, что неравенство (2) будет выполнено для всех точек z этой области. Однако сразу не видно, что сеть прямых может быть выбрана так, чтобы условие (2) оказалось выполненным (с некоторыми z_0) одновременно во всех частичных областях. Мы покажем, что такой выбор сети действительно возможен.

Для всякого ε можно построить сеть, в каждой частичной области которой существует такая точка z_0, что неравенство (2) *выполнено для всех точек z этой частичной области.*

Это означает, по существу, что функция *равномерно дифференцируема* в области, ограниченной контуром C *).

Предположим на время, что это доказано. Рассмотрим квадрат с контуром C_m и со стороной l_m. В силу неравенства (2) функция $\varphi(z)$, определяемая равенством

$$f(z) = f(z_0) + (z - z_0) f'(z_0) + \varphi(z),$$

удовлетворяет неравенству $|\varphi(z)| \leqslant \varepsilon |z - z_0|$. Мы можем написать:

$$\int_{C_m} f(z)\, dz = \int_{C_m} \{f(z_0) + (z - z_0) f'(z_0)\}\, dz + \int_{C_m} \varphi(z)\, dz.$$

Первый интеграл справа равен нулю; см. § 2.3, примеры (I) и (II). Кроме того, так как $|z - z_0| \leqslant \sqrt{2} l_m$ и длина контура C_m равна $4l_m$, то

$$\left| \int_{C_m} \varphi(z)\, dz \right| < \varepsilon \sqrt{2}\, l_m \cdot 4l_m.$$

В случае неправильной области с контуром D_n его длина не превышает $4l_n + s_n$, где l_n — сторона квадрата, в котором лежит область, а s_n — длина кривой части контура D_n. Следовательно,

$$\left| \int_{D_n} \varphi(z)\, dz \right| < \varepsilon \sqrt{2}\, l_n (4l_n + s_n).$$

---

*) Здесь необходима осторожность. Равномерная дифференцируемость есть равномерная относительно x сходимость отношения $\frac{f(x') - f(x)}{x' - x}$ к производной $f'(x)$. Она равносильна непрерывности производной $f'(x)$ и действительно имеет место для всякой аналитической функции комплексного переменного, но, конечно, не для всякой дифференцируемой функции вещественного переменного. Рассматриваемое же свойство, как это видно из § 2.3.4, является простым следствием дифференцируемости; аналогичным свойством обладает всякая дифференцируемая функция вещественного переменного. (*Примечание переводчика.*)

Складывая интегралы по всем контурам C_m и D_n, мы получаем неравенство

$$\Bigl|\int\limits_C f(z)\,dz\Bigr| < 4\sqrt{2}\,\varepsilon\sum(l_m^2+l_n^2)+\varepsilon\sqrt{2}\,l\sum s_n, \tag{3}$$

где l — наибольшее из чисел l_n. Но сумма $\sum(l_m^2+l_n^2)$ представляет собой площадь некоторой области, лежащей внутри C, и потому ограничена; именно, если (a, b, α, β) — прямоугольник, содержащий C, то

$$\sum(l_m^2+l_n^2) \leqslant (b-a)(\beta-\alpha).$$

Сумма же $\sum s_n$ равна длине контура C. Таким образом, правая часть неравенства (3) меньше постоянной, умноженной на ε. Но левая часть не зависит от ε. Следовательно, она равна 0.

2.3.4. Мы должны еще оправдать сделанное выше предположение. Это достигается хорошо известным методом подразделения. Начнем с сети прямых, параллельных вещественной и мнимой осям, в которой соседние прямые находятся друг от друга на одном и том же расстоянии l. Некоторые частичные области этой сети могут содержать точки z_0 с требуемым свойством. Их мы в дальнейшем не меняем. Каждую из оставшихся областей мы подразделяем новыми прямыми, делящими расстояния между предыдущими прямыми пополам. Если после этого еще остаются области, не обладающие требуемым свойством, то мы таким же образом подразделяем и их. A priori возможны два случая: процесс может оборваться после конечного числа шагов, и тогда доказательство закончено, и может продолжаться неограниченно. Во втором случае среди областей первоначально взятой сети имеется по крайней мере одна, допускающая неограниченное подразделение, не приводящее к нужному результату. Обозначим эту область, включая границу, через R_1. После первого подразделения мы получим ее часть R_2, обладающую тем же свойством, и т. д. Так возникает бесконечная последовательность областей $R_1, R_2, \ldots$, которые мы рассматриваем вместе с их границами. Каждая из них содержит следующую, и ни в одной из них неравенство (2) не имеет места ни при каком выборе точки z_0.

Пусть z_0 — точка, общая всем областям R_n. Так как размеры области R_n неограниченно убывают, то при достаточно большом n, скажем при $n > n_0$, заведомо $|z-z_0| < \delta$ для всех точек z из R_n. Но функция $f(z)$ аналитична в точке z_0. Следовательно, при таком выборе точки z_0 неравенство (2) заведомо выполняется в области R_n, если $n > n_0$. Мы пришли к противоречию, и теорема доказана.

2.3.5. Теорема Коши может быть сразу распространена на замкнутые контуры более сложных типов, рассмотренных в § 2.3.2. Кроме того, она может быть представлена в несколько иной форме. Пусть, например, z_0 и z_1 — точки, соединенные двумя различными кривыми, C и C'. Предположим, что, заменив направление кривой C' противоположным и объединив C и C' в одну кривую, мы получим простой замкнутый контур или замкнутый контур одного из типов, рассмотренных в § 2.3.2. Пусть $f(z)$ — функция, аналитическая во всей области, заключенной между кривыми C и C', и на самих этих кривых. Тогда теорема Коши показывает, что

$$\int_C f(z)\,dz = \int_{C'} f(z)\,dz. \tag{1}$$

Пусть теперь C — простой замкнутый контур и C' — другой простой замкнутый контур, лежащий целиком внутри C. Пусть $f(z)$ — функция, аналитическая во всех точках кольцевидной области, заключенной между C и C'. Тогда

$$\int_C f(z)\,dz = \int_{C'} f(z)\,dz. \tag{2}$$

Действительно, мы можем соединить C и C' прямолинейным отрезком l, скажем, параллельным вещественной оси. Область, заключенная между C и C' и разрезанная вдоль l, является внутренней для замкнутого контура Γ, состоящего из кривой C, которая обходится положительно, кривой C', которая обходится отрицательно, и отрезка l, который проходится дважды, в противоположных направлениях. Мы можем написать:

$$\int_\Gamma f(z)\,dz = \int_C f(z)\,dz - \int_{C'} f(z)\,dz + \int_l f(z)\,dz - \int_l f(z)\,dz.$$

Так как интеграл вдоль Γ равен нулю, то этим равенство (2) доказано.

Подобная же теорема верна для любого конечного числа контуров C', C'', ..., лежащих внутри C, если функция $f(z)$ аналитична в области, заключенной между ними. Именно,

$$\int_C f(z)\,dz = \int_{C'} f(z)\,dz + \int_{C''} f(z)\,dz + \ldots \tag{3}$$

Другое важное замечание состоит в том, что в теореме Коши аналитичность функции $f(z)$ на C не является необходимой: достаточно, чтобы функция $f(z)$ была аналитической внутри C и непрерывной на C. Действительно, можно показать, что если функция $f(z)$ непрерывна и контур C' лежит внутри C и стремится к C, то

$$\int_C f(z)\,dz = \lim \int_{C'} f(z)\,dz. \tag{4}$$

Не стоит точно описывать, каким должно быть приближение контура C' к контуру C в общем случае; например, равенство (4) гарантировано, если C есть окружность и C' — концентрическая с ней окружность. Так как интеграл, стоящий в правой части равенства (4), равен нулю при любом расположении контура C' внутри C, то и левая часть этого равенства есть 0.

2.3.6. Комплексный интеграл как функция своего верхнего предела. Пусть $f(z)$ — функция, аналитическая в области D. Положим $F(z)=\int\limits_{z_0}^{z} f(w)\,dw$, где путь интегрирования — произвольный контур, соединяющий z_0 с z и лежащий целиком внутри D. Из теоремы Коши следует, что значение $F(z)$ зависит только от z, но не от выбора указанного пути. Это уже учтено нашим обозначением.

Функция $F(z)$ аналитична в D. Действительно,

$$F(z+\delta z)-F(z)=\int\limits_{z}^{z+\delta z} f(w)\,dw,$$

причем интеграл можно считать взятым по прямолинейному отрезку соединяющему z с $z+\delta z$. Следовательно,

$$\frac{F(z+\delta z)-F(z)}{\delta z}-f(z)=\frac{1}{\delta z}\int\limits_{z}^{z+\delta z}\{f(w)-f(z)\}\,dw.$$

Так как функция $f(z)$ непрерывна, то

$$|f(w)-f(z)|<\varepsilon \qquad (|w-z|<\delta).$$

Таким образом, при $0<|\delta z|<\delta$

$$\left|\frac{f(z+\delta z)-F(z)}{\delta z}-f(z)\right|<\varepsilon.$$

Этим доказано, что функция $F(z)$ аналитична и что ее производная есть $f(z)$.

Как и в теории функций действительного переменного, мы называем $F(z)$ *неопределенным интегралом* функции $f(z)$.

Предположим, с другой стороны, что нам известна некоторая аналитическая функция $G(z)$, всюду в области D удовлетворяющая условию $G'(z)=f(z)$. Тогда

$$\frac{d}{dz}\{F(z)-G(z)\}=0.$$

Положим $F(z)-G(z)=X+iY$. Согласно § 2.1.3,

$$\frac{\partial X}{\partial x}=0,\quad \frac{\partial X}{\partial y}=0,\quad \frac{\partial Y}{\partial x}=0,\quad \frac{\partial Y}{\partial y}=0.$$

Следовательно, X и Y — постоянные, т. е. $F-G$ есть постоянная. Таким образом, для любых a, b из D

$$\int\limits_{a}^{b} f(z)\,dz=G(b)-G(a).$$

2.3.7. Интегрирование и дифференцирование комплексных рядов. *Равномерно сходящийся ряд аналитических функций комплексного переменного можно почленно интегрировать в области равномерной сходимости вдоль любого пути.*

Это можно доказать в точности так же, как в вещественном случае (следует воспользоваться неравенством § 2.3.1).

Ряд аналитических функций можно почленно дифференцировать в любой точке внутри области, где ряд производных равномерно сходится.

И эта теорема может быть доказана так же, как в вещественном случае. Позже (§ 2.8) она будет заменена, однако, гораздо более полезной теоремой, типичной для теории функций комплексного переменного и не имеющей аналога среди теорем главы I.

2.4. Интеграл Коши. Пусть $f(z)$ — функция, аналитическая внутри простого замкнутого контура C и на самом контуре. Рассмотрим функцию $\frac{f(w)}{w-z}$ от w. Она аналитична внутри C и на C всюду, кроме точки $w=z$, где знаменатель обращается в нуль. Следовательно,

$$\int\limits_C \frac{f(w)}{w-z}\,dw = \int\limits_\gamma \frac{f(w)}{w-z}\,dw,$$

где γ — любой замкнутый контур, лежащий внутри C и охватывающий точку $w=z$. Мы берем в качестве γ окружность с центром z и радиусом ρ. Так как функция $f(w)$ непрерывна, то ρ можно взять столь малым, чтобы на γ было выполнено неравенство $|f(w)-f(z)|<\varepsilon$. Очевидно,

$$\int\limits_\gamma \frac{f(w)}{w-z}\,dw = f(z)\int\limits_\gamma \frac{dw}{w-z} + \int\limits_\gamma \frac{f(w)-f(z)}{w-z}\,dw.$$

Первый член справа равен $2\pi i f(z)$ (§ 2.3, пример (III)). Второй член, согласно § 2.3.1, по абсолютной величине не превосходит

$$\frac{\varepsilon}{\rho}\cdot 2\pi\rho = 2\pi\varepsilon.$$

Следовательно,

$$\left|\int\limits_C \frac{f(w)}{w-z}\,dw - 2\pi i f(z)\right| < 2\pi\varepsilon.$$

Но левая часть не зависит от ε. Поэтому она должна быть нулем, и, таким образом,

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_C \frac{f(w)}{w-z}\,dw.$$

Это — интегральная формула Коши. Она выражает значение функции $f(z)$ в произвольной точке, лежащей внутри C, через ее значения на C.

2.4.1. Производные аналитической функции. Пусть z — произвольная точка, лежащая внутри C, и $z+h$ — близкая точка, также лежащая внутри C. Тогда

$$f(z+h)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_C \frac{f(w)}{w-z-h}\,dw.$$

Вычитая из этой формулы предыдущую и деля на h, мы видим, что

$$\frac{f(z+h)-f(z)}{h}=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_C \frac{f(w)}{(w-z)(w-z-h)}\,dw. \qquad (1)$$

При $h\to 0$ подынтегральное выражение стремится к $\frac{f(w)}{(w-z)^2}$. Чтобы доказать, что можно перейти к пределу под знаком интеграла, рассмотрим разность

$$\int\limits_C \frac{f(w)}{(w-z)(w-z-h)}\,dw-\int\limits_C \frac{f(w)}{(w-z)^2}\,dw=h\int\limits_C \frac{f(w)}{(w-z)^2(w-z-h)}\,dw. \qquad (2)$$

Пусть $|f(w)|\leqslant M$ на C, и пусть расстояние от z до C (т. е. минимум функции $|w-z|$ на C) есть δ. Пусть длина C равна L. Тогда при $|h|<\delta$

$$\left|\int\limits_C \frac{f(w)}{(w-z)^2(w-z-h)}\,dw\right|\leqslant\frac{ML}{\delta^2(\delta-|h|)},$$

правая же часть ограничена при $|h|\to 0$. Таким образом, правая часть равенства (2) стремится к нулю вместе с $|h|$, что вместе с равенством (1) приводит к равенству

$$f'(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_C \frac{f(w)}{(w-z)^2}\,dw. \qquad (3)$$

Это — формула Коши для $f'(z)$.

Конечно, существование производной $f'(z)$ мы предполагали с самого начала. Но теперь, после того как мы получили для нее эту формулу, мы можем повторить описанную процедуру. Именно,

$$\frac{f'(z+h)-f'(z)}{h}=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_C \frac{2w-2z-h}{(w-z)^2(w-z-h)^2}\,f(w)\,dw,$$

и, рассуждая, как выше, мы видим, что при $h\to 0$ правая часть стремится к $\frac{2}{2\pi i}\int\limits_C \frac{f(w)}{(w-z)^3}\,dw$. *Следовательно,* $f''(z)$, *производная* *от* $f'(z)$, *существует и дается формулой*

$$f''(z) = \frac{2}{2\pi i} \int_C \frac{f(w)}{(w-z)^3}\, dw.$$

Это рассуждение можно, очевидно, повторять неограниченно. *Следовательно, функция* $f(z)$ *имеет производные всех порядков, и* n*-я производная дается формулой*

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_C \frac{f(w)}{(w-z)^{n+1}}\, dw.$$

2.4.2. Теорема Морера. Это своего рода обращение теоремы Коши.

Если $f(z)$ — *непрерывная функция от* z *в области* D *и интеграл*

$$\int f(z)\, dz,$$

взятый по любому лежащему в D *замкнутому контуру, равен нулю, то функция* $f(z)$ *аналитична в* D.

Не имеет значения, какой точный смысл придается в этой теореме слову «контур». Она сохраняет силу, даже если мы ограничиваемся, скажем, полигонами.

Рассмотрим функцию $F(z) = \int\limits_{z_0}^{z} f(w)\, dw$. Ее значение не зависит от пути интегрирования, и

$$\frac{F(z+h)-F(z)}{h} - f(z) = \frac{1}{h} \int\limits_{z}^{z+h} \{f(w) - f(z)\}\, dw,$$

где в качестве пути интегрирования может быть взят отрезок прямой. Так как функция $f(z)$ непрерывна, то правая часть стремится к нулю вместе с h. Следовательно, функция $F(z)$ аналитична и ее производная равна $f(z)$. Но мы только что доказали, что производная аналитической функции аналитична. Следовательно, $f(z)$ есть аналитическая функция.

2.4.3. Ряд Тейлора. Аналитическая функция может быть разложена в степенной ряд, подобный вещественному ряду Тейлора.

Пусть функция $f(z)$ *аналитична на простом замкнутом контуре* C *и внутри него, и пусть* a — *точка внутри* C. *Тогда*

$$f(z) = f(a) + (z-a) f'(a) + \ldots + \frac{(z-a)^n}{n!} f^{(n)}(a) + \ldots,$$

если $|z-a| < \delta$, *где* — δ — *расстояние точки* a *до ближайшей к ней точки контура* C.

Мы начинаем с формулы Коши

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}\frac{f(w)}{w-z}\,dw,$$

где в качестве Г взята окружность с центром a и радиусом $\rho<\delta$. Равенство имеет место, если точка z лежит внутри этой окружности, т. е. если $|z-a|<\rho$.

Мы можем написать

$$\frac{1}{w-z}=\frac{1}{w-a}+\frac{z-a}{(w-a)^2}+\ldots+\frac{(z-a)^n}{(w-a)^{n+1}}+\ldots,$$

причем ряд равномерно сходится на Г. Умножим его на $\frac{f(w)}{2\pi i}$ и проинтегрируем почленно вдоль Г. Мы получим равенство

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}\frac{f(w)}{w-a}\,dw+\frac{z-a}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}\frac{f(w)}{(w-a)^2}\,dw+\ldots+$$
$$+\frac{(z-a)^n}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}\frac{f(w)}{(w-a)^{n+1}}+\ldots,$$

которое вместе с формулами § 2.4.1 доказывает теорему. Ее называют иногда теоремой Коши — Тейлора.

Следует указать на отличие этого доказательства от соответствующих рассмотрений в области функций действительного переменного. В случае действительного переменного мы получаем первые n членов разложения и остаточный член, и необходимо специальное исследование, чтобы выяснить, стремится ли этот последний к нулю. В случае комплексного переменного тот факт, что остаточный член стремится к нулю, вытекает из исходных предположений. Такое положение вещей вполне естественно; действительно, сопоставляя доказанную теорему с теоремой § 2.1.6, мы видим, что *необходимым и достаточным условием разложимости функции в степенной ряд является ее аналитичность в некоторой области*. Аналитическую функцию действительного переменного мы не умеем определять иначе, как потребовав, чтобы она разлагалась в степенной ряд. Следует ожидать, что если мы начнем с других предположений, то встретимся с затруднениями. Например, радиус сходимости ряда зависит от размеров области, в которой функция аналитична. Поэтому он может зависеть от существования особенностей, лежащих в стороне от вещественной оси, о которых мы, если мы ограничиваемся вещественным переменным, не можем иметь никаких сведений.

Так, разложение $\frac{1}{1+x^2}=1-x^2+x^4-\ldots$ имеет смысл только при $|x|<1$. В природе этой функции, рассматриваемой как функция *вещественного* переменного x, не видно ничего, что говорило бы в пользу этого ограничения. Однако при комплексном x оно оправдывается тем, что функция не аналитична в точках $x=\pm i$.

2.5. Неравенство Коши. *Пусть*

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \qquad (|z|<R).$$

Если $M(r)$ — верхняя грань функции $|f(z)|$ на окружности $|z|=r$ $(r<R)$, то для всех значений n

$$|a_n|\, r^n \leqslant M(r).$$

Действительно, $a_n=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|z|=r}\frac{f(z)}{z^{n+1}}\,dz$, так что, в силу теоремы § 2.3.1,

$$|a_n|\leqslant \frac{M(r)}{r^n}.$$

Неравенство Коши можно доказать также следующим образом. При $r<R$

$$|f(z)|^2=f(z)\overline{f(z)}=\sum_{m=0}^{\infty} a_m r^m e^{im\theta}\sum_{n=0}^{\infty}\bar{a}_n r^n e^{-in\theta}.$$

Так как оба ряда абсолютно сходятся, то мы можем перемножить их по обычному правилу (§ 1.6.5). Ряд, получающийся в результате, равномерно сходится при $0\leqslant\theta\leqslant 2\pi$, и мы можем почленно проинтегрировать его в этом интервале. При интегрировании все члены, у которых $m\neq n$, пропадают, так что

$$\int_0^{2\pi}|f(z)|^2\,d\theta=\sum_{n=0}^{\infty}a_n\bar{a}_n r^{2n}\int_0^{2\pi}d\theta=2\pi\sum_{n=0}^{\infty}|a_n|^2 r^{2n}$$

и

$$\sum_{n=0}^{\infty}|a_n|^2 r^{2n}=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f(z)|^2\,d\theta\leqslant\{M(r)\}^2.$$

Неравенство Коши является очевидным следствием этого неравенства.

Пример. Показать, что неравенство Коши превращается в равенство в том и только в том случае, если $f(z)$ есть некоторая степень z, умноженная на постоянную.

2.5.1. Теорема Лиувилля. *Ограниченная функция, аналитическая при всех конечных значениях z, есть постоянная.*

Мы дадим два доказательства этой важной теоремы.

Первое доказательство. Если функция $f(z)$ аналитична при всех конечных значениях z, то $f(z)=\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ для всех z. Если при этом $|f(z)| \leqslant M$, то, согласно неравенству Коши, $|a_n| \leqslant \leqslant Mr^{-n}$ для всех значений n и r. При $n>0$ и $r \to \infty$ правая часть стремится к нулю. Следовательно, $a_n=0$ при $n>0$, т. е. $f(z)=a_0$.

Второе доказательство. Для любых z_1, z_2

$$f(z_1)-f(z_2)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_C \frac{f(z)}{z-z_1}\,dz-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_C \frac{f(z)}{z-z_2}\,dz=$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_C \frac{z_1-z_2}{(z-z_1)(z-z_2)}\,f(z)\,dz,$$

где C — какой-нибудь контур, охватывающий обе точки z_1, z_2. Беря в качестве C окружность с центром в начале и радиусом R, бо́льшим обоих чисел $|z_1|$, $|z_2|$, мы видим, что

$$|f(z_1)-f(z_2)| \leqslant \frac{|z_1-z_2|\,MR}{(R-|z_1|)(R-|z_2|)}.$$

При $R \to \infty$ правая часть стремится к нулю. Следовательно, $f(z_1)=f(z_2)$. Так как z_1 и z_2 произвольны, то $f(z)$ есть постоянная.

В этой теореме требование ограниченности функции можно ослабить, заменив его требованием равномерной ограниченности на какой-нибудь последовательности контуров, стремящихся к бесконечности. Это видно как из первого, так и из второго доказательства.

2.5.2. Вот более общий результат того же рода.

Если функция $f(z)$ аналитична при всех конечных значениях z и при $|z| \to \infty$

$$f(z)=O(|z|^k),$$

то $f(z)$ есть многочлен степени $\leqslant k$.

Действительно, в силу неравенства Коши

$$|a_n| \leqslant M(r)\,r^{-n}=O(r^{k-n}),$$

так что правая часть стремится к нулю при $r \to \infty$, если $n>k$. Следовательно, $a_n=0$ при $n>k$.

2.5.3. Функция $A(r)$. Обозначим через $A(r)$ верхнюю грань вещественной части функции $f(z)$ на окружности $|z|=r$. Мы начнем с доказательства одного неравенства, подобного неравенству Коши, но вместо $M(r)$ содержащего $A(r)$.

Для всех положительных n и всех r

$$|a_n|\,r^n \leqslant \max\{4A(r),\ 0\}-2\,\mathrm{Re}\,\{f(0)\}.$$

Пусть $z=re^{i\theta}$, и пусть

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = u(r,\ \theta)+iv(r,\ \theta),$$

$$a_n=\alpha_n+i\beta_n.$$

Тогда

$$u(r,\ \theta)=\sum_{n=0}^{\infty}(\alpha_n\cos n\theta-\beta_n\sin n\theta)\,r^n.$$

Ряд сходится равномерно относительно θ, что позволяет умножить его на $\cos n\theta$ или $\sin n\theta$ и почленно проинтегрировать. Следовательно,

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} u(r,\ \theta)\cos n\theta\,d\theta=\alpha_n r^n,\qquad \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} u(r,\ \theta)\sin n\theta\,d\theta=-\beta_n r^n,$$

если $n>0$, и

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(r,\ \theta)\,d\theta=\alpha_0.$$

Следовательно, при $n>0$

$$a_n r^n=(\alpha_n+i\beta_n)\,r^n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} u(r,\ \theta)\,e^{-in\theta}\,d\theta$$

и

$$|a_n|\,r^n\leqslant\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}|u(r,\ \theta)|\,d\theta,$$

так что

$$|a_n|\,r^n+2\alpha_0\leqslant\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\{|u(r,\ \theta)|+u(r,\ \theta)\}\,d\theta.$$

Но $|u|+u$ есть нуль, если $u<0$; таким образом, если $A(r)<0$, то правая часть есть нуль. Если же $A(r)\geqslant 0$, то правая часть не превышает

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} 2A(r)\,d\theta=4A(r).$$

Этим теорема доказана.

Имеются, конечно, аналогичные оценки, содержащие нижнюю грань функции $\operatorname{Re} f(r)$, а также верхнюю и нижнюю грани функции $\operatorname{Im} f(z)$.

2.5.4. Аналог теоремы Лиувилля для $A(r)$. *Если функция $f(z)$ аналитична при всех конечных значениях z и функ-*

ция $A(r)$ остается ограниченной при $r \to \infty$, то $f(z)$ есть постоянная. Если $A(r) < Ar^k$, где A и k — постоянные, то $f(z)$ есть многочлен степени $\leqslant k$.

В первом случае из предыдущей теоремы следует, что $|a_n| r^n = O(1)$ при $r \to \infty$ для любого $n > 0$, так что $a_n = 0$ при $n > 0$, т. е. $f(z) = a_0$. Подобным же образом во втором случае $a_n = 0$ при $n > k$, т. е. $f(z)$ есть многочлен степени $\leqslant k$.

Первая часть теоремы может быть доказана еще следующим образом. Модуль функции $\varphi(z) = e^{f(z)}$ определяется формулой $|\varphi(z)| = e^{u(r, \theta)}$. Поэтому, если $u(r, \theta) \leqslant A$, то $|\varphi(z)| \leqslant e^A$, так что $\varphi(z)$ есть постоянная в силу теоремы Лиувилля. Следовательно, и $f(z)$ есть постоянная.

2.6. Нули аналитической функции. Нуль аналитической функции $f(z)$ есть такое значение z, что $f(z) = 0$. Если функция $f(z)$ аналитична в окрестности точки $z = a$, то при достаточно малых значениях $|z - a|$

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-a)^n,$$

и $z = a$ есть нуль тогда и только тогда, когда $a_0 = 0$. Если $a_n = 0$ при $n < m$, но $a_m \neq 0$, то говорят, что $f(z)$ имеет в точке a нуль порядка m. Таким образом, каждый нуль имеет определенный целый порядок; функция не может иметь нуль нецелого порядка в области, где она аналитична.

Если a есть нуль порядка m, то $f(a) = f'(a) = \ldots = f^{(m-1)}(a) = 0$, в то время как $f^{(m)}(a) \neq 0$. Это следует из вида ряда Тейлора.

Нули аналитической функции — изолированные точки. Это значит, что *если функция $f(z)$ аналитична и не равна тождественно нулю в некоторой области, содержащей внутри себя точку $z = a$, то существует круг $|z - a| < \rho$ $(\rho > 0)$, в котором $f(z)$ не имеет нулей, отличных от a.*

Эта теорема может быть сформулирована еще следующим образом.

Пусть $f(z)$ — функция, аналитическая в некоторой области D. Если $f(z) = 0$ в каждой точке некоторого множества, имеющего предельную точку внутри D, то $f(z) = 0$ во всех точках области D.

Без ущерба для общности можно считать, что предельной является точка $z = 0$. Тогда функция $f(z)$ аналитична в окрестности точки $z = 0$, и потому при некотором положительном R и при $|z| < R$

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n.$$

Покажем, что все коэффициенты a_n равны нулю. Если это не так, то существует первый отличный от нуля коэффициент. Пусть это a_k. Мы можем написать:

$$f(z)=z^k(a_k+a_{k+1}z+\ldots) \qquad (|z|<R).$$

Если $0<\rho<R$, то ряд сходится при $z=\rho$, так что числа $a_n\rho^n$ ограничены. Пусть $|a_n|\rho^n<K$. Тогда

$$|f(z)|\geqslant|z^k|\left(|a_k|-\frac{K|z|}{\rho^{k+1}}-\frac{K|z|^2}{\rho^{k+2}}-\ldots\right)=|z|^k\left\{|a_k|-\frac{K|z|}{\rho^k(\rho-|z|)}\right\},$$

правая же часть положительна, если число $|z|$ достаточно мало, но отлично от нуля. Это противоречит предположению, что функция $f(z)$ имеет нули, сколь угодно близкие к точке $z=0$, но отличные от этой точки. Таким образом, все коэффициенты действительно равны нулю. Следовательно, внутри круга сходимости нашего ряда $f(z)=0$.

Мы можем повторить этот процесс, приняв за начало любую внутреннюю точку указанного круга; действительно, для такой точки теперь выполнены все условия, которыми мы пользовались в только что проведенном доказательстве. Продолжая таким образом *), можно доказать равенство $f(z)=0$ для любой точки z области D.

2.6.1. Эта теорема имеет следующие очевидные следствия.

(I) Если функция аналитична в области D и равна нулю во всех точках содержащейся в ней меньшей области или во всех точках лежащей внутри области D дуги непрерывной кривой, то она тождественно равна нулю в D.

(II) Если две функции аналитичны в некоторой области и принимают одинаковые значения на бесконечном множестве точек, имеющем предельную точку внутри области, то они всюду в этой области равны между собой.

Примеры. (I) Функция $\sin z$ имеет нули порядка 1 в точках $z=0$, $\pm\pi$, $\pm 2\pi$, ... и не имеет других нулей. Это следует из формулы $|\sin(x+iy)|=\sqrt{\sin^2 x+\operatorname{sh}^2 y}$; см. *Ч. М.*, § 240, пример 2.

(II) Функция $\cos z$ имеет нули первого порядка в точках $z=\pm\frac{1}{2}\pi$, $\pm\frac{3}{2}\pi$, ... и не имеет других нулей.

(III) Если функции $f(z)$ и $g(z)$ обе аналитичны в области D и $f(z)g(z)=0$ в D, то $f(z)=0$ всюду в D или $g(z)=0$ всюду в D.

2.7. Ряд Лорана. *Пусть функция $f(z)$ аналитична в кольцевой области, ограниченной концентрическими окружностями C и C' с центром a и радиусами R* и *R' $(R'<R)$, а также на самих*

---

*) Более детально такие цепи, составленные из кругов, будут рассмотрены в гл. IV.

окружностях. Тогда функцию $f(z)$ можно разложить в ряд по положительным и отрицательным степеням разности $z-a$, сходящийся к ней во всех точках этой области.

Мы должны напомнить читателю, что речь идет об однозначных функциях. Это предположение исключает некоторые функции, однозначные ветви которых аналитичны. Рассмотрим, например, функцию $f(z)=z^p$, где p — действительное число. Она всюду аналитична, за возможным исключением точки $z=0$. Если $z=re^{i\theta}$, то

$$f(z)=r^p e^{ip\theta}.$$

Когда мы обходим окружность $r=\text{const}$, начиная, скажем, со значения $\theta=0$, $f(z)$ изменяется от r^p до $r^p e^{2ip\pi}$ и не возвращается к своему исходному значению, если p не является целым числом.

Чтобы доказать теорему, будем считать, что z лежит в кольце, и рассмотрим интеграл

$$\frac{1}{2\pi i}\int \frac{f(w)}{w-z}\,dw,$$

взятый вдоль внешней кривой C в положительном направлении, затем вдоль радиуса-вектора (который мы можем считать не проходящим через точку z) до внутренней окружности C', затем вдоль C' в отрицательном направлении и, наконец, опять вдоль радиуса-вектора до исходной точки. Это — замкнутый контур, к которому мы можем применить наши предыдущие результаты (то, что часть его описывается дважды, ничему не мешает). Поэтому значение интеграла есть $f(z)$.

Так как функция $f(z)$ однозначна, то интегралы, взятые вдоль радиуса-вектора, соединяющего окружности, сокращаются, и мы получаем равенство

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_C \frac{f(w)}{w-z}\,dw-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C'} \frac{f(w)}{w-z}\,dw,$$

где уже оба интеграла взяты в положительном направлении. Как в доказательстве теоремы Коши — Тейлора,

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_C \frac{f(w)}{w-z}\,dw=\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-a)^n,$$

где $a_n=\dfrac{1}{2\pi i}\int\limits_C \dfrac{f(w)}{(w-a)^{n+1}}\,dw$. На этот раз, однако, коэффициент a_n не равен, вообще говоря, $\dfrac{1}{n!}f^{(n)}(a)$, поскольку функция $f(z)$ не обязана быть аналитической внутри C.

4*

Далее, $\frac{1}{z-w}=\frac{1}{z-a}+\frac{w-a}{(z-a)^2}+\ldots+\frac{(w-a)^{n-1}}{(z-a)^n}+\ldots$ Этот ряд равномерно сходится на C'. Следовательно,

$$-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C'}\frac{f(w)}{w-z}\,dw=\frac{1}{z-a}\,\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C'}f(w)\,dw+\ldots$$

$$\ldots+\frac{1}{(z-a)^n}\,\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C'}(w-a)^{n-1}f(w)\,dw+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{b_n}{(z-a)^n},$$

где $b_n=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C'}(w-a)^{n-1}f(w)\,dw$. Вместе эти два ряда и составляют разложение Лорана. Его можно представить в виде

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{n}a_n(z-a)^n,\quad \text{где}\quad a_n=\frac{1}{2\pi i}\int\frac{f(w)}{(w-a)^{n+1}}\,dw$$

для всех значений n; интеграл берется вдоль любого простого замкнутого контура, обходящего кольцо.

В том частном случае, когда функция $f(z)$ аналитична внутри C', все коэффициенты b_n обращаются в нуль (в силу теоремы Коши), и ряд сводится к ряду Тейлора.

Заметим, что часть ряда, состоящая из членов с положительными степенями $z-a$, сходится не только в кольце, но и всюду внутри окружности C. Подобным же образом часть ряда, состоящая из членов с отрицательными степенями $z-a$, сходится всюду вне C'.

Примеры. (I) Показать, что

$$e^{\frac{1}{2}c\left(z-\frac{1}{z}\right)}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}a_nz^n,$$

где $a_n=\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\cos(n\theta-c\sin\theta)\,d\theta$.

(II) Показать, что при $c>0$

$$e^{z+\frac{c^3}{2z^2}}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}a_nz^n,$$

где

$$a_n=\frac{e^{-\frac{1}{2}c}}{2\pi c^n}\int\limits_0^{2\pi}e^{c(\cos\theta+\cos^2\theta)}\cos\{c\sin\theta(1-\cos\theta)-n\theta\}\,d\theta.$$

2.7.1. Изолированные особенности аналитической функции. Предположим, что функция $f(z)$ аналитична в окрестности точки a, скажем, при $|z-a|<R$, всюду, за исклю-

чением самой точки a. Тогда a называется изолированной особой точкой функции $f(z)$.

Мы по-прежнему предполагаем, что функция $f(z)$ однозначна. Согласно § 2.7 мы можем разложить ее в ряд Лорана по степеням $z-a$, причем внутреннюю окружность C' можем взять сколь угодно малой. Таким образом,

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-a)^n+\sum_{n=1}^{\infty} b_n (z-a)^{-n} \qquad (0<|z-a|<R).$$

Возможны три случая. Первая возможность: все коэффициенты b_n могут оказаться нулями. В этом случае $f(z)$ только в точке a отличается от некоторой функции, аналитической при $|z-a|<R$; например, может случиться, что $f(z)=1$ всюду, кроме точки a, и $f(a)=0$. Это скорее искусственная особенность, не представляющая дальнейшего интереса для теории.

Вторая возможность: ряд отрицательных степеней $z-a$ может содержать только конечное число членов. В этом случае говорят, что точка $z=a$ есть *полюс* функции $f(z)$. Если b_m — последний отличный от нуля коэффициент, то

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-a)^n+\sum_{n=1}^{m} b_n (z-a)^{-n}, \ \ldots$$

и говорят, что полюс имеет порядок m. При $m=1, 2, \ldots$ полюс называется простым, двойным, ...

Если функция $f(z)$ имеет в точке a полюс порядка m, то, очевидно, функция $(z-a)^m f(z)$ аналитична и не обращается в нуль при $z=a$. Тогда и функция $\varphi(z)=\frac{1}{(z-a)^m f(z)}$ аналитична и не обращается в нуль при $z=a$. Следовательно, функция $\frac{1}{f(z)}=$ $=(z-a)^m \varphi(z)$ имеет тогда при $z=a$ нуль порядка m.

Подобные же соображения показывают, что, наоборот, нуль порядка m функции $f(z)$ есть полюс порядка m функции $1/f(z)$.

Конечный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n (z-a)^n$ называется *главной частью* функции $f(z)$ при $z=a$.

Если при $z=a$ функция $f(z)$ имеет полюс, то $|f(z)|\to\infty$ при $z\to a$.

В самом деле,

$$\left|\sum_{n=1}^{m} b_n (z-a)^{-n}\right|=|z-a|^{-m}\left|\sum_{n=1}^{m} b_n (z-a)^{m-n}\right| \geqslant$$
$$\geqslant |z-a|^{-m}\left\{|b_m|-\sum_{n=1}^{m-1} |b_n|\,|z-a|^{m-n}\right\},$$

и так как содержимое скобок стремится к $|b_m|$, то вся правая часть стремится к бесконечности. (В действительности предыдущая оценка показывает больше: функция доминируется последним членом главной части.)

Если $f(z) = O(|z-a|^{-k})$ при $|z-a| \to 0$, то особенность есть, самое большее, полюс порядка k; в частности, если $f(z) = O(1)$, то может встретиться лишь особенность описанного выше тривиального типа.

Рассуждение, аналогичное изложенному в § 2.5.2, но с b_n вместо a_n и с r, стремящимся к 0, а не к ∞, показывает, что $b_n = 0$ при $n > k$. Ясно также, что достаточно, чтобы предыдущее условие было выполнено на последовательности контуров, стягивающихся к точке.

Примеры. (I) Функции $\operatorname{ctg} z$ и $\operatorname{cosec} z$ имеют простые полюсы в точках $z = 0,\ \pm\pi,\ \pm 2\pi,\ \ldots$

(II) Функции $\operatorname{tg} z$ и $\sec z$ имеют простые полюсы в точках $z = \pm\frac{1}{2}\pi,\ \pm\frac{3}{2}\pi,\ \ldots$

(III) Найти полюсы функций $\dfrac{1}{\sin z \pm \sin a}$, $\dfrac{1}{\cos z \pm \cos a}$.

(IV) Функция $\operatorname{cosec} z^2$ имеет один двойной полюс и бесконечно много простых полюсов.

(V) Найти полюсы функций

$$\frac{1}{z^2+1},\quad \frac{1}{z^4+1},\quad \frac{1}{z^4+2z^2+1}.$$

2.7.2. Существенные особенности. Третья возможность состоит в том, что в разложении функции $f(z)$ по степеням $z-a$ ряд отрицательных степеней может оказаться бесконечным. В этом случае точка $z = a$ называется *существенно особой* и

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-a)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{(z-a)^n},$$

причем последний ряд бесконечен, но сходится при всех значениях z, кроме значения $z = a$.

Сложность поведения функции в окрестности существенно особой точки демонстрируется следующей теоремой Вейерштрасса.

Для любых положительных чисел ρ, ε и любого числа c существует точка z, лежащая в круге $|z-a| < \rho$, в которой $|f(z) - c| < \varepsilon$.

Это значит, что $f(z)$ стремится к любому наперед заданному пределу, когда z стремится к a по соответствующим образом выбранной последовательности значений.

Мы начнем с доказательства того, что для любых двух положительных чисел ρ и M в круге $|z-a| < \rho$ можно найти значения z, в которых $|f(z)| > M$. Если это неверно, то $|f(z)| \leqslant M$

при $|z-a|<\rho$, так что если радиус окружности C' есть R', то

$$|b_n| = \left| \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{C'} (w-a)^{n-1} f(w)\, dw \right| \leqslant MR'^n.$$

Это так для всех положительных значений n и R', и, заставляя R' стремиться к нулю, мы видим, что $b_n=0$ при $n \geqslant 1$. Следовательно, существенной особенности нет, а это противоречит предположению *).

Рассмотрим теперь произвольное конечное значение c. Если функция $f(z)-c$ имеет нули внутри каждой окружности $|z-a|<\rho$, то доказывать нечего; если же этого нет, то существует столь малое ρ, что $f(z)-c$ не имеет нулей при $|z-a|<\rho$. Тогда функция $\varphi(z)=\frac{1}{f(z)-c}$ аналитична при $|z-a|<\rho$, если не считать точки $z=a$. Точка же $z=a$ является для $\varphi(z)$ существенно особой; действительно, $f(z)=\frac{1}{\varphi(z)}+c$, и если бы точка $z=a$ была полюсом для $\varphi(z)$, то функция $f(z)$ была бы в ней аналитична, а если бы функция $\varphi(z)$ была аналитична в точке $z=a$, то функция $f(z)$ была бы в ней аналитична или имела бы полюс.

Теперь из первой части доказательства следует, что в круге $|z-a|<\rho$ существует точка z, в которой $|\varphi(z)|>1/\varepsilon$, т. е.

$$|f(z)-c|<\varepsilon.$$

Этим теорема доказана.

Эта теорема обнаруживает резкое различие между полюсами и существенными особенностями. В то время как вблизи полюса $f(z)$ стремится к бесконечности, вблизи существенно особой точки $f(z)$ не имеет единственного предельного значения и даже бесконечное число раз подходит сколь угодно близко к любому наперед заданному значению.

Примеры. (I) Функции $e^{1/z}$, $\sin\frac{1}{z}$, $\cos\frac{1}{z}$ имеют изолированные существенные особенности при $z=0$.

(II) Функция $\operatorname{cosec}\frac{1}{z}$ имеет особенность при $z=0$, но это не изолированная особенность, а предельная точка для полюсов, расположенных в точках $z=\frac{1}{n\pi}$. Такую точку мы также называем существенно особой.

(III) Функция $e^{1/z}$ принимает в окрестности точки $z=0$ бесконечное число раз любое значение, кроме 0. Она стремится к 0, когда $z\to 0$ вдоль вещественной оси в положительном направлении.

---

*) Предложение, высказанное и доказанное в этом абзаце, есть, конечно, частный случай последней теоремы предыдущего параграфа. Доказательство также повторяет сказанное там. (*Примечание переводчика.*)

2.7.3. «Бесконечно удаленная» точка. Мы можем рассматривать «бесконечность» как некую точку, производя подстановку $z = 1/w$. Поведение функции $f(z)$ «в бесконечности» есть поведение функции $f(1/w)$ вблизи точки $w = 0$. Мы говорим, что функция $f(z)$ аналитична, имеет простой полюс, и т. д., в бесконечности, если $f(1/w)$ обладает этим свойством при $w = 0$. Так, функция $f(z) = z^2$ имеет в бесконечности двойной полюс.

Функция $f(z)$, аналитическая всюду, включая бесконечно удаленную точку, есть постоянная.

Действительно, так как функция $f(z)$ аналитична при всех конечных значениях z, то для них

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n,$$

так что

$$f\left(\frac{1}{w}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{w^n};$$

а так как функция $f(1/w)$ аналитична при $w = 0$, то $a_n = 0$ при $n = 1, 2, \ldots$, т. е. $f(z) = a_0$.

Функция, не имеющая особенностей, отличных от полюсов, есть рациональная функция.

Прежде всего, полюсов может быть только конечное число. В противном случае полюсы имели бы предельную точку — конечную или бесконечно удаленную — и в этой предельной точке функция не могла бы быть аналитической и не могла бы иметь полюс, что противоречит предположению.

Пусть $a, b, \ldots, k$ — полюсы функции $f(z)$, расположенные в конечных точках, и $\alpha, \beta, \ldots, \varkappa$ — их кратности. Функция

$$g(z) = f(z)(z-a)^{\alpha} \ldots (z-k)^{\varkappa}$$

аналитична всюду, за возможным исключением бесконечно удаленной точки, где она, самое большее, имеет полюс. Следовательно, при всех конечных значениях z

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n, \qquad g\left(\frac{1}{w}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n w^{-n}.$$

Так как особенность функции $g(1/w)$ при $w = 0$, если она имеется, есть полюс, то ряд должен оборваться, т. е. $g(z)$ есть многочлен. Следовательно, $f(z)$ есть отношение двух многочленов, т. е. рациональная функция.

Обратно, *рациональная функция не имеет особенностей, отличных от полюсов.*

2.8. Равномерно сходящиеся ряды аналитических функций. *Пусть*:

(I) *все функции последовательности* $u_1(z), u_2(z), \ldots$ *аналитичны внутри области* D;

(II) *ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(z)$ *равномерно сходится в каждой области* D', *внутренней к* D.

Тогда функция $f(z) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(z)$ *аналитична внутри* D, *и все ее производные могут быть вычислены почленным дифференцированием* *).

Пусть C — простой замкнутый контур, лежащий внутри D, и z — точка внутри C.

Если бы уже было известно, что $f(z)$ — аналитическая функция, то можно было бы написать:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_C \frac{f(w)}{w-z}\, dw. \tag{1}$$

Мы же, наоборот, получим эту формулу из наших данных и воспользуемся ею для доказательства аналитичности функции $f(z)$.

При любом n

$$u_n(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_C \frac{u_n(w)}{w-z}\, dw.$$

Следовательно,

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2\pi i} \int\limits_C \frac{u_n(w)}{w-z}\, dw.$$

Так как ряд $\sum u_n(w)$ равномерно сходится на C, то его можно умножить на $\frac{1}{w-z}$ и почленно проинтегрировать. Таким образом,

$$\int\limits_C \left\{\sum \frac{u_n(w)}{w-z}\right\} dw = \sum \int\limits_C \frac{u_n(w)}{w-z}\, dw$$

и

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_C \left\{\sum \frac{u_n(w)}{w-z}\right\} dw = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_C \frac{f(w)}{w-z}\, dw.$$

Этим мы доказали формулу (1).

---

*) Как видно из дальнейшего, автор называет область D' внутренней к D, если она содержится в D, ограничена и находится на положительном расстоянии от границы области D. (*Примечание переводчика.*)

Теперь, как в § 2.4.1, мы можем вывести из формулы (1), что $f(z)$ имеет производную, которая дается формулой

$$f'(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_C \frac{f(w)}{(w-z)^2}\,dw.$$

Ограниченность функции $f(w)$ следует здесь из равномерной сходимости ряда. Следовательно, функция $f(z)$ аналитична.

Снова пользуясь равномерной сходимостью ряда, мы можем написать:

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_C \frac{f(w)}{(w-z)^2}\,dw=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_C \sum_{n=1}^{\infty} u_n(w)\frac{dw}{(w-z)^2}=$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2\pi i}\int\limits_C \frac{u_n(w)}{(w-z)^2}\,dw=\sum_{n=1}^{\infty} u_n'(z).$$

Следовательно, ряд можно продифференцировать почленно. Кроме того, ряд производных равномерно сходится в каждой области, внутренней к D. Действительно, если D' — такая область, то можно считать, что она лежит внутри кривой C и что расстояние любой ее точки z от C не меньше положительного числа δ. Тогда

$$\left|\sum_{n=N}^{N'} u_n'(z)\right|=\left|\sum_{N}^{N'}\frac{1}{2\pi i}\int\limits_C \frac{u_n(w)}{(w-z)^2}\,dw\right|=\left|\frac{1}{2\pi i}\int\limits_C \sum_{N}^{N'} u_n(w)\frac{dw}{(w-z)^2}\right|\leqslant\frac{\varepsilon l}{2\pi\delta^2},$$

где l — длина кривой C, а ε — максимум модуля функции $\sum\limits_{N}^{N'} u_n(w)$ на C. Правая часть не зависит от z и стремится к нулю, когда N и N' независимо друг от друга стремятся к бесконечности, что и доказывает равномерную сходимость ряда $\sum u_n'(z)$ в D'.

Всю процедуру можно теперь повторить, отправляясь от ряда производных, что доказывает теорему уже во всей полноте.

2.8.1. Замечания к предыдущей теореме. (I) Мы уже указывали (§ 2.3.7) на различие между условиями почленной дифференцируемости вещественных рядов и рядов аналитических функций. В случае вещественного ряда приходится предполагать, что ряд производных равномерно сходится. В предыдущей теореме подобные условия не нужны; ряд производных действительно равномерно сходится, но это не предполагается, а доказывается.

(II) Если бы мы предположили только, что ряд функций, аналитических на некотором простом замкнутом контуре C и внутри него, равномерно сходится на C, то и в этом случае мы могли бы доказать, как выше, что сумма $f(z)$ аналитична всюду внутри C.

(III) Нельзя доказать, что функция $f(z)$ аналитична на границе области D или что ряд производных сходится на границе, если даже предположить, что все функции $u_n(z)$ аналитичны на границе и что ряд $\sum u_n(z)$ равномерно сходится на границе. Рассмотрим, например, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^2}$. Он равномерно сходится при $|z| \leqslant 1$. Но ряд производных не является равномерно сходящимся в окрестности значения $z=1$, и функция, представляемая этим рядом, не является аналитической при $z=1$. Именно,

$$f'(z) = -\frac{\log(1-z)}{z}.$$

(IV) Теорема может быть сформулирована как теорема о последовательностях функций: если функции $f_n(z)$ аналитичны внутри D и последовательность $f_1(z), f_2(z), \ldots$ равномерно сходится к $f(z)$ в каждой области, внутренней к D, то функция $f(z)$ аналитична внутри D и последовательность $f_1'(z), f_2'(z), \ldots$ равномерно сходится к $f'(z)$ в каждой области, внутренней к D.

Примеры. (I) Функция $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s}$ аналитична при $\operatorname{Re}(s) > 1$. [Действительно, ряд равномерно сходится во всякой конечной области, в которой всюду $\operatorname{Re}(s) \geqslant a > 1$; ср. § 1.2, пример.]

(II) При $\operatorname{Re}(s) > 1$

$$\zeta'(s) = -\sum_{n=2}^{\infty} n^{-s} \log n,$$

и, вообще, $\zeta^{(k)}(s) = -(1)^k \sum_{n=2}^{\infty} n^{-s} \log^k n$.

(III) В какой области ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nz}{2^n}$ представляет аналитическую функцию?

(IV) Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nz}{n^2}$ равномерно сходится на вещественной оси, но не в какой-либо *области* плоскости z; таким образом, предыдущая теорема ничего не говорит об аналитическом характере функции, которую он представляет.

2.8.2. Другое доказательство теоремы. Первую часть теоремы § 2.8 можно вывести также из теоремы Морера (§ 2.4.2). Действительно, поскольку ряд $\sum u_n(z)$ равномерно сходится, его можно интегрировать почленно вдоль любого контура C. Таким образом,

$$\int_C f(z)\,dz = \sum_{n=1}^{\infty} \int_C u_n(z)\,dz.$$

Поскольку все функции $u_n(z)$ аналитичны, в случае замкнутого контура все члены справа равны нулю. Следовательно, в этом случае $\int\limits_C f(z)\,dz = 0$, и в силу теоремы Морера функция $f(z)$ аналитична.

2.8.3. Определение аналитических функций посредством интегралов. *Пусть $f(z, w)$ — функция комплексных переменных z и w, определенная и непрерывная для всех значений z в некоторой области D и всех значений w на некотором контуре C. Допустим, что $f(z, w)$ есть аналитическая функция от z в D для каждого значения w на C. Тогда*

$$F(z) = \int\limits_C f(z, w)\,dw$$

есть аналитическая функция от z в D и

$$F'(z) = \int\limits_C \frac{\partial f}{\partial z}\,dw.$$

Подобные же формулы верны для старших производных.

Мы можем считать, что контур C состоит из единственной регулярной кривой, на которой $w = u + iv$ и $u = u(t)$, $v = v(t)$, причем $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$ и производные $u'(t)$, $v'(t)$ непрерывны.

Пусть Γ — контур, лежащий в D, на котором $z = x + iy$ и $x = x(s)$, $y = y(s)$, причем $s_0 \leqslant s \leqslant s_1$ и производные $x'(s)$ $y'(s)$ непрерывны. Пусть ζ — точка, лежащая внутри Γ. Тогда

$$f(\zeta, w) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_\Gamma \frac{f(z, w)}{z - \zeta}\,dz,$$

$$F(\zeta) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_C dw \int\limits_\Gamma \frac{f(z, w)}{z - \zeta}\,dz.$$

Мы можем обратить порядок этих двух интегрирований. Действительно, комплексный интеграл представляется, согласно § 2.3, как комбинация вещественных интегралов, что позволяет представить предыдущий повторный комплексный интеграл в виде

$$\int\limits_{t_0}^{t_1} dt \int\limits_{s_0}^{s_1} \{\varphi(s, t) + i\psi(s, t)\}\,ds,$$

где φ и ψ — непрерывные вещественные функции от s и t; а повторный интеграл такого типа, как мы знаем (§ 1.8.1), может быть обращен. Следовательно,

$$F(\zeta) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_\Gamma \frac{dz}{z - \zeta}\int\limits_C f(z, w)\,dw = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_\Gamma \frac{F(z)}{z - \zeta}\,dz.$$

Итак, для функции $F(z)$ получена интегральная формула Коши, и теперь доказательство того, что она аналитична и что дифференцирование может быть произведено под знаком интеграла, проводится так же, как доказательство соответствующих утверждений в теореме о равномерно сходящихся рядах *).

Примеры. (I) Если функция $f(t)$ непрерывна в замкнутом интервале (a, b), то функции

$$F(z)=\int_a^b \cos ztf(t)\,dt, \quad G(z)=\int_a^b \sin ztf(t)\,dt$$

аналитичны при всех конечных значениях z.

(II) При тех же условиях функция $\int_a^b \frac{f(t)}{z-t}\,dt$ аналитична всюду, за возможным исключением вещественных значений z, лежащих в интервале (a, b).

2.8.4. Несобственные интегралы. Пусть C — *кривая, уходящая в бесконечность. Предположим, что условия предыдущей теоремы выполнены на каждой ограниченной части кривой C и что интеграл $\int_C f(z, w)\,dw$ равномерно сходится. Тогда и заключения предыдущей теоремы сохраняют силу.*

Пусть C_n — часть кривой C, лежащая внутри окружности $|z|=n$, и пусть $F_n(z)=\int_{C_n} f(z, w)\,dw$. Согласно теореме о конечных интегралах, все функции $F_n(z)$ аналитичны. Кроме того, при $n\to\infty$

$$F_n(z)\to F(z)$$

равномерно относительно z, так что, согласно теореме о равномерно сходящихся последовательностях, функция $F(z)$ аналитична. Наконец,

$$F'(z)=\lim_{n\to\infty} F'_n(z)=\lim_{n\to\infty}\int_{C_n}\frac{\partial f}{\partial z}\,dw=\int_C \frac{\partial f}{\partial z}\,dw.$$

2.8.5. Несобственные интегралы второго рода. Подобная же теорема верна в случае конечного контура C, на одном из концов которого $f(z, w)\to\infty$. Интеграл представляет аналитическую функцию, если его сходимость равномерна. Точная формулировка и доказательство вполне аналогичны предыдущим.

---

*) Оставленная читателю часть доказательства устанавливает и тот не включенный в формулировку теоремы факт, что производная $\frac{\partial f}{\partial x}$ непрерывна. Эта непрерывность придает смысл доказываемой формуле и позволяет повторить процесс дифференцирования. (*Примечание переводчика.*)

Примеры. (I) Функция

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty e^{-w} w^{z-1} dw$$

аналитична при $\mathrm{Re}(z) > 0$. [Сходимость этого интеграла изучалась в § 1.5.1, пример (I). Он равномерно сходится во всякой конечной области, в которой всюду $\mathrm{Re}(z) \geqslant a > 0$. Каждая точка, в которой $\mathrm{Re}(z) > 0$, является внутренней для такой области.]

(II) В каких областях интегралы

$$\int_0^\infty e^{-zw^2} dw, \quad \int_0^\infty \frac{\sin w}{w^z} dw, \quad \int_0^\infty \frac{\cos w}{w^z} dw$$

представляют аналитические функции?

(III) Интеграл $\int_0^\infty \frac{\sin wz}{w} dw$ равномерно сходится в некоторых интервалах вещественных значений z, но это не так ни в какой *области* плоскости z. Таким образом, предыдущие теоремы ничего не говорят об аналитическом характере функции, которую он представляет.

2.9. Замечание о рядах Лорана. Предположим, что мы каким-либо образом получили для функции $f(z)$ формулу

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n (z-a)^n \qquad (R' < z < R),$$

— например, функция может быть определена этой формулой. Должен ли непременно этот ряд совпадать с рядом Лорана функции $f(z)$? Оказывается, что это так. Действительно, если C — окружность $|z-a| < \rho$, причем $R' < \rho < R$, то коэффициент Лорана a_n определяется формулой

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}} dz = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{A_m}{2\pi i} \int_C \frac{(z-a)^m}{(z-a)^{n+1}} dz$$

(почленное интегрирование оправдывается равномерной сходимостью), правая же часть равна A_n (см. § 2.3, примеры (III) и (IV)).

ГЛАВА III

ВЫЧЕТЫ. КОНТУРНОЕ ИНТЕГРИРОВАНИЕ. НУЛИ

3.1. Вычет относительно особой точки. Мы знаем (§ 2.7.1), что в окрестности изолированной особой точки $z=a$ однозначная аналитическая функция $f(z)$ допускает разложение вида

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-a)^n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n (z-a)^{-n}.$$

Особенно важен коэффициент b_1. Он называется *вычетом* функции $f(z)$ относительно точки $z=a$. Согласно формулам для коэффициентов разложения Лорана,

$$b_1=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma} f(z)\,dz,$$

где γ — любая окружность с центром $z=a$, не охватывающая других особых точек функции. Легко проверить, что если $z=a$ — простой полюс, то

$$b_1=\lim_{z\to a}(z-a)f(z).$$

3.1.1. Теорема о вычетах. *Пусть функция $f(z)$ однозначна и аналитична на простом замкнутом контуре C и внутри него всюду, за исключением конечного числа внутренних точек $z_1, z_2, \ldots$ $\ldots, z_n$. Пусть $R_1, R_2, \ldots, R_n$ — вычеты функции $f(z)$ относительно этих точек. Тогда*

$$\int_C f(z)\,dz = 2\pi i\,(R_1+R_2+\ldots+R_n).$$

Пусть $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n$ — окружности с центрами $z_1, z_2, \ldots, z_n$ и столь малыми радиусами, что они лежат целиком внутри C и не перекрываются. Функция $f(z)$ аналитична в области, заключенной между контуром C и этими окружностями, так что, согласно теореме Коши (§ 2.3.5),

$$\int_C f(z)\,dz=\int_{\gamma_1} f(z)\,dz+\ldots+\int_{\gamma_n} f(z)\,dz.$$

Но $\int\limits_{\gamma_1} f(z)\,dz = 2\pi i R_1, \ \ldots, \ \int\limits_{\gamma_n} f(z)\,dz = 2\pi i R_n$, что и завершает доказательство.

3.1.2. Контурное интегрирование. Теорема о вычетах может быть использована для вычисления многих вещественных определенных интегралов. Обычно берут контур, часть которого проходит по вещественной оси, и заставляют остальную его часть стремиться к бесконечности. Этот процесс называется контурным интегрированием. Наилучшим образом он может быть разъяснен на примерах.

3.1.2.1. Хорошо известно, что $\int\limits_0^\infty \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{2}$.

Чтобы доказать это контурным интегрированием, рассмотрим интеграл $\int \frac{dz}{1+z^2}$, взятый по контуру, состоящему из отрезка вещественной оси от $-R$ до R и лежащей над ним полуокружности, для которой он служит диаметром. Так как

$$\frac{1}{1+z^2} = \frac{1}{2i}\left(\frac{1}{z-i} - \frac{1}{z+i}\right),$$

то подынтегральная функция имеет полюс с вычетом $1/(2i)$ в точке $z=i$, которая лежит внутри контура, если $R>1$. Применяя теорему о вычетах, мы видим, что интеграл равен π.

На полуокружности $|1+z^2| \geqslant R^2-1$, так что интеграл, взятый вдоль полуокружности, по абсолютной величине не превосходит $\frac{\pi R}{R^2-1}$ и потому стремится к нулю при $R \to \infty$. Следовательно,

$$\lim_{R\to\infty} \int\limits_{-R}^{R} \frac{dx}{1+x^2} = \pi,$$

и остается заметить, что подынтегральная функция четна.

Таким же путем может быть вычислен интеграл любой четной рациональной функции, которая надлежащим образом ведет себя в бесконечности.

Конечно, нам известен неопределенный интеграл функции $\frac{1}{1+x^2}$ (это $\operatorname{arctg} x$), и мы могли бы вычислить предыдущий интеграл, пользуясь этим. Изложенный метод оказывается наиболее полезным в тех случаях, когда неопределенный интеграл неизвестен.

3.1.2.2. В § 1.7.6 было показано, что $\int\limits_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx = \frac{\pi}{2}$. Чтобы доказать это контурным интегрированием, рассмотрим интеграл

$\int \frac{e^{iz}}{z}\,dz$, взятый по контуру, состоящему из: отрезка вещественной оси от $z=\rho$ до $z=R$, где $0<\rho<R$; полуокружности Γ радиуса R с центром в начале, лежащей над вещественной осью; отрезка вещественной оси от $-R$ до $-\rho$; и, наконец, полуокружности γ радиуса ρ с центром в начале, лежащей над вещественной осью. Мы заставим ρ уменьшаться, а R расти. Малая полуокружность нужна для того, чтобы обойти особенность подынтегральной функции при $z=0$, а большая — для того, чтобы замкнуть контур.

Функция e^{iz}/z не имеет особенностей внутри контура, и потому значение интеграла есть 0. Таким образом,

$$\int_{\rho}^{R} \frac{e^{ix}}{x}\,dx + \int_{\Gamma} \frac{e^{iz}}{z}\,dz + \int_{-R}^{-\rho} \frac{e^{-ix}}{-x}\,dx + \int_{\gamma} \frac{e^{iz}}{z}\,dz = 0.$$

Сумма интегралов, взятых по отрезкам вещественной оси, равна

$$\int_{\rho}^{R} \frac{e^{ix}-e^{-ix}}{x}\,dx = 2i\int_{\rho}^{R} \frac{\sin x}{x}\,dx.$$

Интеграл, взятый вдоль Γ, стремится к нулю при $R\to\infty$. Действительно,

$$\left|\int_{\Gamma} \frac{e^{iz}}{z}\,dz\right| = \left|\int_{0}^{\pi} e^{iRe^{i\theta}}\,i\,d\theta\right| \leqslant \int_{0}^{\pi} e^{-R\sin\theta}\,d\theta \leqslant$$

$$\leqslant \int_{\rho}^{\delta} d\theta + \int_{\delta}^{\pi-\delta} e^{-R\sin\delta}\,d\theta + \int_{\pi-\delta}^{\pi} d\theta < 2\delta + \pi e^{-R\sin\delta}.$$

Сначала мы выбираем δ произвольно малым, а затем, при фиксированном δ, делаем произвольно малым и второй член справа, выбирая R достаточно большим. Следовательно, левая часть неравенства стремится к нулю.

Наконец,

$$\int_{\gamma} \frac{e^{iz}}{z}\,dz = \int_{\gamma} \frac{dz}{z} + \int_{\gamma} \frac{e^{iz}-1}{z}\,dz.$$

Подынтегральная функция в последнем интеграле остается ограниченной при $\rho\to 0$, так что, по § 2.3.1, он стремится к нулю. Первый интеграл справа допускает явное вычисление, именно

$$\int_{\gamma} \frac{dz}{z} = \int_{\pi}^{0} i\,d\theta = -i\pi.$$

Таким образом, заставляя ρ стремиться к 0, а R к ∞, мы видим, что $2i\int\limits_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx - i\pi = 0$, а это и утверждалось.

Заметим, что интеграл, взятый вдоль полуокружности γ в отрицательном направлении, стремится к вычету относительно точки $z=0$, умноженному на $-i\pi$. Легко проверить, что это так для любого *простого* полюса, но не для полюса более высокого порядка.

Заметим еще, что мы рассмотрели вместо комплексного интеграла $\int \frac{\sin z}{z}\,dz$ другой вспомогательный интеграл потому, что функция $\sin z/z$ не ведет себя надлежащим образом в бесконечности.

3.1.2.3. *При* $0<a<1$

$$\int\limits_0^\infty \frac{x^{a-1}}{1+x}\,dx = \frac{\pi}{\sin a\pi}.$$

Рассмотрим интеграл $\int \frac{z^{a-1}}{1+z}\,dz$, взятый вдоль вещественной оси от $z=\rho$ до $z=R$, затем в положительном направлении вдоль окружности Γ радиуса R с центром в начале, затем вдоль вещественной оси в обратном направлении от $z=R$ до $z=\rho$ и, наконец, в отрицательном направлении вдоль окружности γ радиуса ρ с центром в начале. Это — замкнутый контур, не охватывающий начало. Подобный контур нужен потому, что функция не однозначна в области, содержащей начало, так что к контуру, охватывающему начало, не могла бы быть применена теорема о вычетах. Значения многозначной функции z^{a-1} определены тем, что на первой части контура они вещественны. В остальных точках они даются формулой $r^{a-1}e^{(a-1)i\theta}$, где $0\leqslant\theta\leqslant 2\pi$.

Внутри контура имеется один полюс, именно точка $z=-1$, с вычетом $e^{(a-1)i\pi}$. Следовательно,

$$\int\limits_\rho^R \frac{x^{a-1}}{1+x}\,dx + \int\limits_\Gamma \frac{z^{a-1}}{1+z}\,dz + \int\limits_R^\rho \frac{x^{a-1}e^{(a-1)2i\pi}}{1+x}\,dx + \int\limits_\gamma \frac{z^{a-1}}{1+z}\,dz = 2\pi i e^{(a-1)i\pi}.$$

Сумма двух интегралов, взятых вдоль отрезков вещественной оси, равна

$$(1-e^{2i\pi(a-1)})\int\limits_\rho^R \frac{x^{a-1}}{1+x}\,dx = -2ie^{ia\pi}\sin a\pi\int\limits_\rho^R \frac{x^{a-1}}{1+x}\,dx.$$

Два других интеграла стремятся к нулю при $R\to\infty$, $\rho\to 0$. Действительно, на Γ

$$\left|\frac{z^{a-1}}{1+z}\right| \leqslant \frac{R^{a-1}}{R-1},$$

так что $\left|\int\limits_{\Gamma}\frac{z^{a-1}}{1+z}\,dz\right|\leqslant\frac{R^{a-1}}{R-1}2\pi R=\frac{2\pi R^{a}}{R-1}$, а правая часть стремится к нулю при $R\to\infty$, поскольку $a<1$. Подобным же образом $\left|\int\limits_{\gamma}\frac{z^{a-1}}{1+z}\,dz\right|\leqslant\frac{2\pi\rho^{a}}{1-\rho}$, и правая часть стремится к нулю при $\rho\to 0$, так как $a>0$. Этим формула доказана.

3.1.2.4. Предыдущая формула имеет применение в теории Г-функции. Именно, полагая $y=1-x$ в формуле (4) из § 1.8.6, мы видим, что $\Gamma(x)\Gamma(1-x)=\int\limits_{0}^{\infty}\frac{u^{-x}}{1+u}\,du=\frac{\pi}{\sin(1-x)\pi}$, т. е.

$$\Gamma(x)\Gamma(1-x)=\frac{\pi}{\sin x\pi},$$

если $0<x<1$.

3.1.2.5. *При* $n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots$

$$\int\limits_{0}^{\infty}x^{n}e^{-x^{1/4}}\sin x^{1/4}\,dx=0.$$

При подстановке $x=t^{4}$ этот интеграл принимает вид

$$4\int\limits_{0}^{\infty}t^{4n+3}e^{-t}\sin t\,dt.$$

Рассмотрим интеграл $\int z^{4n+3}e^{(i-1)z}\,dz$, взятый вдоль вещественной оси от 0 до R, затем в положительном направлении вдоль окружности радиуса R до мнимой оси и затем вдоль мнимой оси до начала координат. На дуге окружности

$$|e^{(i-1)z}|=e^{-R\cos\theta-R\sin\theta}\leqslant e^{-R},$$

так что

$$\left|\int z^{4n+3}e^{(i-1)z}\,dz\right|\leqslant\frac{1}{2}\pi R^{4n+4}e^{-R}\to 0.$$

Следовательно,

$$\int\limits_{0}^{\infty}x^{4n+3}e^{(i-1)x}\,dx-\int\limits_{0}^{\infty}(iy)^{4n+3}e^{(i-1)iy}\,i\,dy=0.$$

Написав в последнем интеграле x вместо y, мы видим, что

$$\int\limits_{0}^{\infty}x^{4n+3}e^{-x}(e^{ix}-e^{-ix})\,dx=0,$$

откуда и получается доказываемое равенство.

3.1.2.6. *Если* $c>0$, *то*

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty}\frac{a^z}{z}\,dz=\begin{cases}1 & (a>1),\\ 0 & (0<a<1).\end{cases}$$

Если $a>1$, т. е. $\log a>0$, то мы рассматриваем интеграл вдоль контура, состоящего из отрезка прямой с концами $c-iR$, $c+iR$ и полуокружности с теми же концами, расположенной от него слева. Если радиус R достаточно велик, то этот контур охватывает полюс $z=0$ с вычетом 1, и, как в § 3.1.2.1, можно доказать, что интеграл, взятый вдоль полуокружности, стремится к нулю при $R\to\infty$.

Если $a<1$, то мы замыкаем отрезок полуокружностью, расположенной от него справа. Теперь внутри контура нет полюса, и мы получаем вторую строку формулы.

3.1.2.7. Интеграл, представляющий Г-функцию. Мы можем написать:

$$\int_0^\infty x^{p-1}e^{-ax}\,dx=\frac{\Gamma(p)}{a^p}\qquad (a>0,\ p>0):$$

Если бы мы имели право произвести в этом интеграле подстановку $x=it$, то мы получили бы формулу

$$\int_0^\infty (it)^{p-1}e^{-ait}i\,dt=\frac{\Gamma(p)}{a^p},$$

а после умножения на $e^{-\frac{1}{2}ip\pi}$ и отделения вещественной части от мнимой — формулы

$$\int_0^\infty t^{p-1}\cos at\,dt=\frac{\Gamma(p)\cos\frac{1}{2}p\pi}{a^p},\qquad \int_0^\infty t^{p-1}\sin at\,dt=\frac{\Gamma(p)\sin\frac{1}{2}p\pi}{a^p}.\tag{1}$$

Конечно, обычное правило интегрирования подстановкой не оправдывает такого рода «комплексных подстановок». Однако эту подстановку можно оправдать, применив теорему Коши. Рассмотрим интеграл $\int z^{p-1}e^{-az}\,dz$, взятый вдоль контура, состоящего из отрезка вещественной оси от $z=\rho$ до $z=R$, дуги окружности $|z|=R$ от вещественной оси до мнимой, отрезка мнимой оси от $z=iR$ до $z=i\rho$ и дуги окружности $|z|=\rho$ от $z=i\rho$ до исходной точки $z=\rho$. В силу теоремы Коши интеграл вдоль этого контура есть 0. Как и в предыдущих случаях, можно доказать, что интеграл, взятый вдоль дуги окружности $|z|=\rho$, стремится к нулю при $\rho\to 0$, если $p>0$, и что интеграл, взятый вдоль дуги окружности $|z|=R$, стремится к нулю при $R\to\infty$, если $p<1$. Следовательно, интеграл вдоль мнимой полуоси равен интегралу вдоль вещественной полуоси, взятому с обратным знаком. Вычисляя последний, мы получаем формулы (1) для $0<p<1$.

3.1.2.8. Иногда пользуются обратной процедурой и выводят значение вычета из значения интеграла.

Если p — четное положительное целое число, то вычет функции $\operatorname{tg}^{p-1}\pi z$ относительно точки $z=1/2$ равен $\frac{1}{\pi}(-1)^{\frac{1}{2}p}$.

Этот вычет может быть представлен как

$$\frac{1}{2\pi i}\left\{\int\limits_{-iR}^{1-iR}+\int\limits_{1-iR}^{1+iR}+\int\limits_{1+iR}^{iR}+\int\limits_{iR}^{-iR}\right\}\operatorname{tg}^{p-1}\pi z\,dz,$$

причем $\int\limits_{1-iR}^{1+iR}=\int\limits_{-iR}^{iR}=-\int\limits_{iR}^{-iR}$ ($\operatorname{tg}\pi z$ есть периодическая функция с периодом 1). Следовательно, вычет равен

$$\frac{1}{2\pi i}\left\{\int\limits_{-iR}^{1-iR}+\int\limits_{1+iR}^{iR}\right\}\operatorname{tg}^{p-1}\pi z\,dz.$$

Но

$$\operatorname{tg}\pi z=\frac{1}{i}\,\frac{e^{2i\pi x-2\pi y}-1}{e^{2i\pi x-2\pi y}+1}\to\begin{cases}-1/i\\ +1/i\end{cases}\quad\left(y\to\begin{matrix}+\infty\\-\infty\end{matrix}\right).$$

Следовательно, при $R\to\infty$

$$\int\limits_{-iR}^{1-iR}\operatorname{tg}^{p-1}\pi z\,dz\to\left(\frac{1}{i}\right)^{p-1},$$

$$\int\limits_{1+iR}^{iR}\operatorname{tg}^{p-1}\pi z\,dz\to-\left(-\frac{1}{i}\right)^{p-1}=\left(\frac{1}{i}\right)^{p-1},$$

и вычет равен $\frac{1}{\pi i}\left(\frac{1}{i}\right)^{p-1}=\frac{1}{\pi i^{p}}=\frac{1}{\pi}(-1)^{\frac{1}{2}p}$.

3.1.3. *Рассмотрим поведение функции*

$$f(t)=\int\limits_0^\infty e^{ixt-x^{1/4}}\sin x^{1/4}\,dx$$

при $t\to\infty$.

По причинам, которые выяснятся позже, удобно начать с интегрирования по частям. Интегрируя множитель e^{ixt} и замечая, что внеинтегральный член обращается в нуль на обоих концах интервала интегрирования, мы получаем формулу

$$f(t)=\frac{i}{4t}\int\limits_0^\infty e^{ixt-x^{1/4}}(\cos x^{1/4}-\sin x^{1/4})\,x^{-3/4}\,dx.$$

Как и в предыдущих примерах, мы заменяем круговые функции экспоненциальными и вместо функции $f(t)$ рассматриваем функцию

$$\varphi(t)=\frac{1}{4}\int\limits_0^\infty e^{ixt-x^{1/4}+ix^{1/4}}x^{-3/4}\,dx.$$

Полагая $x=u^4/t$, мы видим, что

$$\varphi(t)=t^{-1/4}\int\limits_0^\infty e^{iu^4-(1-i)\,ut^{-1/4}}\,du.$$

Повернем прямую интегрирования на угол λ, воспользовавшись теоремой Коши как в § 3.1.2.7. Мы получим равенство

$$\varphi(t)=t^{-1/4}\int\limits_0^\infty e^{iv^4e^{4i\lambda}-(1-i)\,ve^{i\lambda}t^{-1/4}}e^{i\lambda}\,dv.$$

Это преобразование законно, если вещественная часть коэффициента при v^4 отрицательна для всех значений, через которые проходит λ при вращении прямой интегрирования, т. е. если $\sin 4\lambda>0$ или $\lambda<\frac{1}{4}\pi$.

Мы положим $\lambda=\frac{1}{8}\pi$. Этим мы достигнем того, что множитель $e^{iv^4e^{4i\lambda}}$ будет с максимальной возможной скоростью стремиться к нулю при $v\to\infty$. При таком выборе λ

$$\varphi(t)=t^{-1/4}e^{i\pi/8}\int\limits_0^\infty e^{-4-(1-i)\,ve^{i\pi/8}t^{-1/4}}\,dv.$$

Если $t\to\infty$, то последний интеграл, будучи равномерно сходящимся, стремится к пределу

$$\int\limits_0^\infty e^{-v^4}\,dv=\frac{1}{4}\int\limits_0^\infty e^{-w}w^{-3/4}\,dw=\frac{1}{4}\Gamma\left(\frac{1}{4}\right).$$

Следовательно, $\varphi(t)\sim\frac{1}{4}\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)e^{i\pi/8}t^{-1/4}$. Та же асимптотическая формула и таким же образом получается для функции $\psi(t)=$ $=\frac{1}{4}\int\limits_0^\infty e^{ixt-x^{1/4}-ix^{1/4}}x^{-3/4}\,dx$, так что, окончательно,

$$f(t)=\frac{i}{t}\left\{\frac{\varphi(t)+\psi(t)}{2}-\frac{\varphi(t)-\psi(t)}{2i}\right\}\approx\frac{1}{4}\,i\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)e^{i\pi/8}t^{-5/4}.$$

Аналогичные вычисления мы могли бы, конечно, проделать и до интегрирования по частям. Читатель может проверить, что они приводят лишь к формуле $f(t)=o(t^{-1})$.

3.2. Разложение мероморфной функции. Функция называется *мероморфной* в некоторой области, если она аналитична во всякой внутренней области всюду, за возможным исключением конечного числа полюсов. Это название подчеркивает отличие таких функций от *голоморфных*, т. е. аналитических, функций.

Простейшими мероморфными функциями являются рациональные функции. Мы знаем, что рациональная функция может быть разложена на простые дроби. Подобное же представление мы получим теперь для одного более широкого класса мероморфных функций.

Пусть $f(z)$ — функция, не аналитическая только в тех точках конечной части плоскости, которые являются ее полюсами. Ради простоты мы предположим, что все эти полюсы — простые. Пусть это — точки $a_1, a_2, \ldots$, причем $0<|a_1|\leqslant|a_2|\leqslant|a_3|\leqslant\ldots$, и пусть $b_1, b_2, \ldots$ — вычеты относительно этих точек. Предположим, что существует такая последовательность замкнутых контуров C_n, что: C_n охватывает полюсы $a_1, a_2, \ldots, a_n$ и только эти полюсы; минимальное расстояние R_n точек контура C_n от начала стремится к бесконечности вместе с n; длина L_n контура C_n есть $O(R_n)$; $f(z)=o(R_n)$ на C_n. Последнее условие выполнено, если, например, функция $f(z)$ равномерно ограничена на всех контурах C_n.

При этих условиях

$$f(z)=f(0)+\sum_{n=1}^{\infty} b_n\left(\frac{1}{z-a_n}+\frac{1}{a_n}\right)$$

для всех точек z, кроме полюсов.

Чтобы доказать это, рассмотрим интеграл

$$I=\frac{1}{2\pi i}\int_{C_n}\frac{f(w)}{w(w-z)}\,dw,$$

где z — точка, лежащая внутри C_n. Подынтегральная функция имеет в точках a_m полюсы, с вычетами $\frac{b_m}{a_m(a_m-z)}$. Кроме того, она имеет в точках $w=z$ и $w=0$ вычеты $f(z)/z$ и $-f(0)/z$. Следовательно,

$$I=\sum_{m=1}^{n}\frac{b_m}{a_m(a_m-z)}-\frac{f(0)}{z}+\frac{f(z)}{z}.$$

С другой стороны,

$$|I|\leqslant\frac{L_n}{2\pi R_n(R_n-|z|)}\max_{C_n}|f(w)|.$$

В силу наших условий правая часть стремится к нулю при $n \to \infty$. Следовательно,

$$\frac{f(z)}{z} = \frac{f(0)}{z} - \lim_{n \to \infty} \sum_{m=1}^{n} \frac{b_m}{a_m (a_m - z)},$$

откуда и получается доказываемая формула.

Из доказательства видно также, что *если все полюсы лежат вне некоторого замкнутого контура, то внутри него ряд сходится равномерно.*

3.2.1. Мы предоставляем читателю изменения, которые нужно произвести, если функция $f(z)$ имеет полюсы более высокого порядка. Более важным является обобщение на функции, не удовлетворяющие на контурах C_n условию $f(z) = o(R_n)$. Пусть это условие не выполнено, но существует такое положительное целое число p, что $f(z) = O(R_n^p)$ или, хотя бы, $f(z) = o(R_n^{p+1})$ на C_n. Рассмотрим интеграл

$$I = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_n} \frac{f(w)}{w^{p+1}(w-z)} dw.$$

Вычисления проводятся, как выше, за исключением того, что вычет относительно точки $w = 0$ теперь равен

$$-\frac{1}{z}\left\{\frac{f(0)}{z^p} + \frac{f'(0)}{z^{p-1}} + \ldots + \frac{f^{(p)}(0)}{p!}\right\}.$$

Интеграл опять стремится к 0 при $n \to \infty$, и, таким образом,

$$f(z) = f(0) + zf'(0) + \ldots + \frac{z^p f^{(p)}(0)}{p!} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n z^{p+1}}{a_n^{p+1}(z-a_n)},$$

т. е.

$$f(z) = \sum_{q=0}^{p} \frac{f^{(q)}(0) z^q}{q!} + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \left(\frac{1}{z-a_n} + \frac{1}{a_n} + \frac{z}{a_n^2} + \ldots + \frac{z^p}{a_n^{p+1}}\right).$$

3.2.2. Применение к тригонометрическим функциям. Рассмотрим функцию

$$f(z) = \operatorname{cosec} z - \frac{1}{z} \quad (z \neq 0), \qquad f(0) = 0.$$

В точке $z = n\pi$, где n — любое положительное или отрицательное целое число, $\sin z$ имеет простой нуль, так что $f(z)$ имеет простой полюс. Вычет равен

$$\lim_{z \to n\pi} (z - n\pi)\left(\operatorname{cosec} z - \frac{1}{z}\right) = \lim_{\zeta \to 0} \frac{\zeta}{\sin(\zeta + n\pi)} = \lim_{\zeta \to 0} \frac{(-1)^n \zeta}{\sin \zeta} = (-1)^n.$$

Но при $z=0$ особенности нет, так как

$$\frac{z-\sin z}{z\sin z}=\frac{O(|z|^3)}{z^2+O(|z|^4)}=O(1).$$

Пусть C_n — квадрат с вершинами в точках $\left(n+\frac{1}{2}\right)(\pm 1\pm i)\pi$. Функция $1/z$, очевидно, равномерно ограничена на контурах этих квадратов. Покажем, что и функция $\operatorname{cosec} z$ равномерно ограничена на них. Для этого рассмотрим раздельно области

$$\text{(I)}\quad y>\frac{1}{2}\pi,\qquad \text{(II)}\quad -\frac{1}{2}\pi\leqslant y\leqslant\frac{1}{2}\pi,\qquad \text{(III)}\quad y<-\frac{1}{2}\pi.$$

В первой области $|\operatorname{cosec} z|=\left|\frac{2i}{e^{iz}-e^{-iz}}\right|\leqslant\frac{2}{e^{\frac{1}{2}\pi}-e^{-\frac{1}{2}\pi}}$, и то же верно в третьей области. Кроме того, так как функция $|\operatorname{cosec} z|$ ограничена на отрезке прямой, соединяющем точки $\frac{1}{2}(1-i)\pi$, $\frac{1}{2}(1+i)\pi$ и имеет период π, то она равномерно ограничена на отрезках с концами $\left(n+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i\right)\pi$, $\left(n+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i\right)\pi$. Следовательно, функция $\operatorname{cosec} z$ равномерно ограничена и на частях контуров C_n, лежащих в области (II), т. е. на всех контурах.

Теорема § 3.2 утверждает поэтому, что

$$\operatorname{cosec} z-\frac{1}{z}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}{}'(-1)^n\left(\frac{1}{z-n\pi}+\frac{1}{n\pi}\right),$$

где штрих означает, что при суммировании значение $n=0$ должно быть опущено. Поскольку при переходе от контура C_{n-1} к контуру C_n мы охватываем два новых полюса, именно $n\pi$ и $-n\pi$, мы должны были бы при суммировании взять соответствующие вычеты в одни скобки. Поскольку, однако, сходится как часть ряда с $n>0$, так и часть ряда с $n<0$, эти скобки могут быть опущены.

Если соединить члены, соответствующие значениям $\pm n$, то разложение примет вид:

$$\operatorname{cosec} z=\frac{1}{z}+2z\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2\pi^2-z^2}.$$

Примеры. (I) Получить разложения

$$\sec z = 2\pi \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \left(n+\frac{1}{2}\right)}{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2 \pi^2 - z^2},$$

$$\operatorname{tg} z = 2z \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2 \pi^2 - z^2},$$

$$\operatorname{ctg} z = \frac{1}{z} + 2z \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{z^2 - n^2\pi^2}.$$

(II) Получить соответствующие разложения для гиперболических функций.

(III) Доказать, что $\dfrac{1}{e^z-1} = \dfrac{1}{z} - \dfrac{1}{2} + 2z \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{z^2+4n^2\pi^2}$.

(IV) Доказать, что $\operatorname{cosec}^2 z = \sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} \dfrac{1}{(z-n\pi)^2}$.

3.2.3. Разложение целой функции в бесконечное произведение. Целая функция есть функция, аналитическая при всех конечных значениях z. Например, e^z, $\cos z$, $\sin z$ — целые функции. Целая функция может рассматриваться как обобщение многочлена, и подобно тому как мы распространили формулу разложения на простые дроби с рациональных функций на некоторые другие мероморфные функции, можно распространить формулу разложения на множители с многочленов на некоторые другие целые функции.

Пусть $f(z)$ — целая функция от z. Предположим, что она имеет простые нули в точках $a_1, a_2, \ldots$ и не имеет других нулей. В окрестности точки a_n

$$f(z) = (z - a_n)\, g(z),$$

причем функция $g(z)$ аналитична и не обращается в нуль. Следовательно, $\dfrac{f'(z)}{f(z)} = \dfrac{1}{z-a_n} + \dfrac{g'(z)}{g(z)}$, причем последний член аналитичен в точке a_n. Таким образом, функция $\dfrac{f'(z)}{f(z)}$ имеет при $z = a_n$ простой полюс с вычетом 1.

Предположим теперь, что $\dfrac{f'(z)}{f(z)}$ есть функция типа, рассмотренного в § 3.2. Тогда

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{f'(0)}{f(0)} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{z-a_n} + \frac{1}{a_n}\right).$$

Интегрируя от 0 до z вдоль пути, не проходящего через полюсы, мы видим, что

$$\log f(z)-\log f(0)=z\frac{f'(0)}{f(0)}+\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\log(z-a_n)-\log(-a_n)+\frac{z}{a_n}\right\}.$$

Значения логарифмов зависят от выбранного пути, но если мы перейдем к экспоненциалам, то всякая многозначность исчезнет и мы получим разложение

$$f(z)=f(0)\,e^{zf'(0)/f(0)}\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{z}{a_n}\right)e^{z/a_n}.$$

Например, нашим условиям удовлетворяет функция $f(z)=\frac{\sin z}{z}$, так что мы получаем хорошо известные формулы:

$$\frac{\sin z}{z}=\prod_{n=-\infty}^{\infty}{}'\left(1-\frac{z}{n\pi}\right)e^{\frac{z}{n\pi}},\qquad \sin z=z\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{z^2}{n^2\pi^2}\right).$$

Подобным же образом

$$\cos z=\prod_{n=1}^{\infty}\left\{1-\frac{z^2}{\left(n-\frac{1}{2}\right)^2\pi^2}\right\}.$$

Если же функция $f'(z)/f(z)$ удовлетворяет лишь условиям § 3.2.1, то для $f(z)$ получается формула вида

$$f(z)=f(0)\exp\left[c_1z+\ldots+c_{p+1}z^{p+1}\right]\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{z}{a_n}\right)\times$$
$$\times\exp\left[\frac{z}{a_n}+\frac{1}{2}\frac{z^2}{a_n^2}+\ldots+\frac{1}{p+1}\frac{z^{p+1}}{a_n^{p+1}}\right].$$

3.3. Суммирование некоторых рядов. Метод контурного интегрирования часто дает эффект при суммировании рядов вида $\sum f(n)$, где $f(z)$ — достаточно простая аналитическая функция от z.

Пусть C — замкнутый контур, охватывающий точки $m, m+1, \ldots, n$ и не охватывающий других целых точек, и пусть функция $f(z)$ аналитична на этом контуре и внутри него, за возможным исключением конечного числа полюсов, скажем, простых, расположенных в отличных от $m, m+1, \ldots, n$ внутренних точках $a_1, \ldots, a_k$, с вычетами $b_1, \ldots, b_k$. Рассмотрим интеграл $\int_C \pi\operatorname{ctg}\pi z f(z)\,dz$. Функция $\pi\operatorname{ctg}\pi z$ имеет внутри C простые полюсы $z=m, m+1, \ldots, n$, и ее вычет относительно каждого из них равен 1. Следовательно, функция $\pi\operatorname{ctg}\pi z f(z)$ имеет относительно них вычеты $f(m)$, $f(m+1)$, $\ldots$, $f(n)$. Присоединяя сюда вычеты относительно полюсов функции $f(z)$, мы видим, что

$$\int_C \pi \operatorname{ctg} \pi z f(z)\, dz = 2\pi i \{f(m)+f(m+1)+\ldots+f(n)+ \\ + b_1 \pi \operatorname{ctg} \pi a_1 + \ldots + b_k \pi \operatorname{ctg} \pi a_k\}.$$

Предположим, например, что $f(z)$ есть рациональная функция, не имеющая целочисленных полюсов, и что в бесконечности $f(z)$ есть $O(|z|^{-2})$. В качестве C_n возьмем контур квадрата с вершинами $\left(n+\frac{1}{2}\right)(\pm 1 \pm i)$. Тогда, как в § 3.2, интеграл вдоль C_n стремится к нулю при $n \to \infty$, и мы получаем формулу

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{m=-n}^{n} f(m) = -\pi \{b_1 \operatorname{ctg} \pi a_1 + \ldots + b_k \operatorname{ctg} \pi a_k\}.$$

Подобным же образом, взяв вместо $\pi \operatorname{ctg} \pi z$ функцию $\pi \operatorname{cosec} \pi z$, можно получить формулы для сумм вида $\sum (-1)^m f(m)$.

Рассмотрим, например, ряд $\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(a+n)^2}$, где a — нецелое число. Функция $f(z) = \frac{1}{(a+z)^2}$ имеет при $z=-a$ двойной полюс. Согласно теореме Тейлора,

$$\operatorname{ctg} \pi z = \operatorname{ctg}(-\pi a) + (\pi z + \pi a)\{-\operatorname{cosec}^2(-\pi a)\} + \ldots,$$

так что вычет функции $\frac{\operatorname{ctg} \pi z}{(z+a)^2}$ относительно точки $z=-a$ равен $-\pi \operatorname{cosec}^2 \pi a$. Следовательно,

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(a+n)^2} = \pi^2 \operatorname{cosec}^2 \pi a.$$

3.4. Полюсы и нули мероморфной функции. *Пусть функция $f(z)$ аналитична на замкнутом контуре C и внутри него, за возможным исключением конечного числа полюсов, расположенных во внутренних точках. Если она не обращается в нуль на контуре, то*

$$\frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f'(z)}{f(z)}\, dz = N - P,$$

где N — число нулей, а P — число полюсов, лежащих внутри контура; при этом каждый нуль и каждый полюс считается столько раз, какова его кратность.

Пусть $z=a$ — нуль порядка m. Тогда в окрестности этой точки $f(z) = (z-a)^m g(z)$, причем функция $g(z)$ аналитична и не обращается в нуль. Следовательно,

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{m}{z-a} + \frac{g'(z)}{g(z)}.$$

Последний член аналитичен при $z=a$, так что функция $f'(z)/f(z)$ имеет при $z=a$ простой полюс с вычетом m. Следовательно, сумма ее вычетов относительно нулей функции $f(z)$ равна N.

Подобным же образом сумма вычетов относительно полюсов функции $f(z)$ равна $-P$ (нужно только изменить знак у m).

Можно доказать тем же методом, что *если в предыдущих условиях нули расположены в точках $a_1, \ldots, a_m$, а полюсы в точках $b_1, \ldots, b_n$, и функция $\varphi(z)$ аналитична внутри C и на C, то*

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_C \frac{f'(z)}{f(z)} \varphi(z)\, dz = \sum_{\mu=1}^{m} \varphi(a_\mu) - \sum_{\nu=1}^{n} \varphi(b_\nu).$$

3.4.1. Если функция $f(z)$ аналитична внутри C и на C, то теорема предыдущего параграфа сводится к формуле

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_C \frac{f'(z)}{f(z)}\, dz = N.$$

Эту формулу можно представить несколько иначе. Так как

$$\frac{d}{dz} \log\{f(z)\} = \frac{f'(z)}{f(z)},$$

то $\int \frac{f'(z)}{f(z)}\, dz = \Delta_C \log\{f(z)\}$, где Δ_C обозначает изменение вдоль контура C. (С какого значения логарифма мы начинаем — безразлично.) Кроме того,

$$\log\{f(z)\} = \log|f(z)| + i \arg\{f(z)\}$$

и функция $\log|f(z)|$ однозначна. Таким образом,

$$N = \frac{1}{2\pi} \Delta_C \arg\{f(z)\}.$$

3.4.2. Теорема Руше. *Если функция $f(z)$ и $g(z)$ аналитичны внутри замкнутого контура C и на самом контуре, причем $|g(z)| < |f(z)|$ на C, то функция $f(z)$ и $f(z)+g(z)$ имеют внутри C одинаковое число нулей.*

Прежде всего ясно, что ни функция $f(z)$, ни функция $f(z)+g(z)$ не имеет нулей на C. Следовательно, если N — число нулей функции $f(z)$, а N' — число нулей функции $f(z)+g(z)$ внутри C, то

$$2\pi N = \Delta_C \arg f,$$

$$2\pi N' = \Delta_C \arg(f+g) = \Delta_C \arg f + \Delta_C \arg\left(1 + \frac{g}{f}\right).$$

Поэтому, чтобы доказать, что $N=N'$, достаточно доказать, что

$$\Delta_C \arg\left(1+\frac{g}{f}\right)=0.$$

Так как $|g|<|f|$, то точка $w=1+\frac{g}{f}$ всегда находится внутри окружности плоскости w с центром 1 и радиусом 1. Таким образом, если $w=\rho e^{i\varphi}$, то значение φ всегда заключено между $-\frac{1}{2}\pi$ и $\frac{1}{2}\pi$. Поэтому угол $\arg\left(1+\frac{g}{f}\right)=\varphi$ возвращается к своему исходному значению, когда z описывает C, — он не может увеличиться или уменьшиться на кратное числа 2π. Этим теорема доказана.

Другое доказательство состоит в следующем. Положим $\varphi(z)=g(z)/f(z)$. Мы можем написать

$$N'=\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f'(z)+g'(z)}{f(z)+g(z)}\,dz=\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f'+f'\varphi+f\varphi'}{f(1+\varphi)}\,dz=$$
$$=\frac{1}{2\pi i}\int_C\left(\frac{f'}{f}+\frac{\varphi'}{1+\varphi}\right)dz=N+\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{\varphi'}{1+\varphi}\,dz,$$

последний же интеграл равен нулю, в чем мы убеждаемся, разлагая $1/(1+\varphi)$ по степеням φ и интегрируя почленно.

3.4.3. В качестве примера рассмотрим одну из задач, которые могут быть решены с помощью предыдущих теорем.

В каких квадрантах лежат корни уравнения

$$z^4+z^3+4z^2+2z+3=0?$$

Уравнение не имеет вещественных корней. Что оно не имеет положительных корней — очевидно. После подстановки $z=-x$ оно принимает вид:

$$x^4-x^3+4x^2-2x+3=0.$$

При $0<x<1$ сумма первых трех членов положительна и такова же сумма двух последних. При $x>1$ сумма первых двух членов положительна и такова же сумма трех последних.

После подстановки $z=iy$ уравнение принимает вид:

$$y^4-iy^3-4y^2+2iy+3=0.$$

Вещественная и мнимая части этого многочлена не обращаются в нуль одновременно. Следовательно, не существует и чисто мнимых корней.

Рассмотрим теперь $\Delta\arg(z^4+\ldots+3)$ вдоль контура, охватывающего часть первого квадранта, ограниченную дугой окружности $|z|=R$ при большом R. Изменение вдоль отрезка вещественной оси равно нулю. На дуге окружности $z=Re^{i\theta}$, так что

$$\Delta\arg(z^4+\ldots)=\Delta\arg(R^4e^{4i\theta})+\Delta\arg\{1+O(R^{-1})\}=2\pi+O(R^{-1}).$$

На отрезке мнимой оси

$$\arg(z^4+\ldots)=\operatorname{arctg}\left(\frac{-y^3+2y}{y^4-4y^2+3}\right).$$

Числитель дроби, стоящей в скобках, обращается в нуль при $y=\sqrt{2}$, знаменатель — при $y=\sqrt{3}$ и $y=1$. Следовательно, при изменении y от ∞ до 0 дробь изменяется следующим образом:

$$\begin{array}{ccccccccc} y=\infty & & \sqrt{3} & & \sqrt{2} & & 1 & & 0 \\ 0, & -, & \infty, & +, & 0, & -, & \infty, & +, & 0. \end{array}$$

Следовательно, на отрезке мнимой оси $\arg(z^4+\ldots)$ уменьшается на 2π, так что при достаточно большом R изменение функции $\arg(z^4+\ldots)$ вдоль всего контура равно нулю.

Итак, в первом квадранте нулей нет.

Так как нули распадаются на пары сопряженных, то отсюда следует, что *нулей нет и в четвертом квадранте* и что *во втором и третьем квадрантах имеется по два нуля.*

Изложенный метод применим к любому алгебраическому уравнению.

3.4.4. Основная теорема алгебры. *Всякий многочлен степени n имеет n корней.*

Прежде всего, многочлен z^n имеет n корней: все они равны нулю. Рассмотрим произвольный многочлен $a_0+a_1z+\ldots+a_nz^n$ с $a_n\neq 0$. Положим

$$f(z)=a_nz^n, \quad g(z)=a_0+a_1z+\ldots+a_{n-1}z^{n-1}$$

и возьмем в качестве контура C теоремы Руше окружность радиуса $R>1$ с центром в начале. На C

$$|f(z)|=|a_n|R^n,$$

$$|g(z)|\leqslant|a_0|+|a_1|R+\ldots+|a_{n-1}|R^{n-1}\leqslant(|a_0|+\ldots+|a_{n-1}|)R^{n-1}.$$

Следовательно, $|g|<|f|$ на C, если $R>\dfrac{|a_0|+\ldots+|a_{n-1}|}{|a_n|}$. Согласно теореме Руше функция $f(z)+g(z)$ имеет поэтому n нулей в круге с центром в начале, радиус которого удовлетворяет этому условию.

Теорема может быть доказана также следующим образом. Предположим, что наш многочлен не имеет нулей; тогда функция $\dfrac{1}{a_0+\ldots+a_nz^n}$ аналитична при всех значениях z (ее особыми точками могли бы быть только нули знаменателя). Так как она ограничена при $|z|\to\infty$, то, согласно теореме Лиувилля, она постоянна, т. е. многочлен состоит из единственного члена a_0.

Этим доказано только, что при $n\geqslant 1$ многочлен имеет по крайней мере один корень; тот факт, что число корней равно n, должен быть еще выведен отсюда обычным алгебраическим рассуждением.

3.4.5. Теорема Гурвица*). *Пусть $f_1(z)$, $f_2(z)$, ... — последовательность функций, аналитических в некоторой области D, ограниченной простым замкнутым контуром, и пусть $f_n(z) \to f(z)$ равномерно в D. Предположим, что функция $f(z)$ не равна тождественно нулю. Тогда точка z_0, лежащая внутри D, в том и только в том случае является нулем функции $f(z)$, если в D имеется такая сходящаяся к z_0 последовательность точек z_1, z_2, ..., что z_n есть нуль функции $f_n(z)$ при $n > n_0 = n_0(z_0)$.*

Это нетрудно вывести из теоремы Руше. Мы можем выбрать ρ столь малым, чтобы круг $|z - z_0| \leqslant \rho$ лежал целиком внутри D и не содержал нулей функции $f(z)$, за возможным исключением самой точки z_0. Тогда $|f(z)|$ имеет на окружности $|z - z_0| = \rho$ положительную нижнюю границу, скажем $|f(z)| \geqslant m > 0$. Фиксировав ρ и m, найдем столь большое n_0, что на окружности

$$|f_n(z) - f(z)| < m \qquad (n > n_0).$$

Так как $f_n(z) = f(z) + \{f_n(z) - f(z)\}$, то из теоремы Руше следует, что при $n > n_0$ функция $f_n(z)$ имеет в круге столько же нулей, сколько $f(z)$, т. е. что $f_n(z)$ имеет там по крайней мере один нуль, если z_0 есть нуль функции $f(z)$, и не имеет там нулей в противном случае. Этим теорема доказана.

Пример $f_n(z) = e^z/n$ доказывает необходимость предположения, что функция $f(z)$ не равна нулю тождественно. Пример, в котором $f_n(z) = 1 - \frac{z^n}{n}$, а D — единичный круг, показывает, что теорема неприменима к точкам границы области D; действительно, $f_n(z) \to 1$ равномерно в D и на границе, но каждая точка границы является предельной для нулей функций $f_n(z)$.

3.5. Функции $|f(z)|$, $\operatorname{Re}\{f(z)\}$, $\operatorname{Im}\{f(z)\}$. Пусть $f(z)$ — функция, аналитическая в некоторой области, и пусть $u(x, y)$, $v(x, y)$ — ее вещественная и мнимая части. Мы пишем:

$$u_x = \frac{\partial}{\partial x} u(x, y), \quad u_y = \frac{\partial}{\partial y} u(x, y),$$

и аналогичным образом обозначаем производные высших порядков.

Мы уже показали, что во всех точках области удовлетворяются уравнения Коши — Римана $u_x = v_y$, $u_y = -v_x$.

Так как производная $f''(z)$ существует и непрерывна, то существуют и непрерывны и все частные производные второго порядка от u и v. Следовательно,

$$u_{xx} = \frac{\partial}{\partial x}(v_y) = \frac{\partial}{\partial y}(v_x) = -u_{yy},$$

*) Hurwitz [1].

т. е. функция u удовлетворяет следующему уравнению в частных производных (уравнению Лапласа):

$$u_{xx}+u_{yy}=0.$$

Аналогично устанавливается, что тому же уравнению удовлетворяет функция v.

Функции, удовлетворяющие этому дифференциальному уравнению, называются *гармоническими* или *потенциальными функциями*. Модуль $|f(z)|$ аналитической функции $f(z)$ не является, вообще говоря, гармонической функцией; но $\log|f(z)|$ есть гармоническая функция, так как это — вещественная часть функции $\log\{f(z)\}$.

3.5.1. Множества точек, где $|f|=\text{const}$, $\operatorname{Re} f=\text{const}$, $\operatorname{Im} f=\text{const}$, являются кривыми в плоскости z.

Если $|f(z)|=\text{const}$ *всюду в области, где функция* $f(z)$ *аналитична, то в этой области* $f(z)=\text{const}$.

Действительно, если $|f(z)|=c$, то $u^2+v^2=c^2$. Следовательно, $uu_x+vv_x=0$, $uu_y+vv_y=0$, или, в силу соотношений Коши — Римана,

$$uu_x-vu_y=0, \quad uu_y+vu_x=0.$$

Исключая u_y, мы видим, что $(u^2+v^2)u_x=0$. Следовательно, $u_x=0$, и аналогично доказывается, что равны нулю u_y, v_x и v_y. Следовательно, u и v — постоянные, т. е. $f(z)$ есть постоянная.

Еще легче доказать, что если одна из функций u, v является постоянной, то и $f(z)$ — постоянная. Мы предоставляем доказательство читателю.

3.5.2. *Нули функции* $f(z)$ — *точки пересечения кривых* $u=0$ *и* $v=0$. Это очевидно.

В простом нуле кривые $u=0$ и $v=0$ пересекаются под прямым углом. Это прямо следует из уравнений Коши — Римана и видно также из следующих соображений. Пусть рассматриваемый нуль есть точка $z=0$. Мы можем написать

$$f(z)=ae^{i\alpha}z+O(|z|^2),$$

так что

$$u=ar\cos(\alpha+\theta)+O(r^2), \quad v=ar\sin(\alpha+\theta)+O(r^2).$$

Ясно, что направления касательных к кривым $u=0$, $v=0$ задаются углами $\theta=\frac{1}{2}\pi-\alpha$, $\theta=-\alpha$.

Точка, в которой значение $f(z)$ *вещественно и* $f'(z)=0$, *есть двойная точка кривой* $v=0$.

Действительно, в такой точке $v=0$, $v_x=0$, $v_y=0$, а это и есть условие, определяющее двойную точку.

Кривые $|f(z)|=\text{const}$ называются *линиями уровня*.

Пример. Доказать, что двойной нуль функции $f(z)$ является двойной точкой каждого из кривых $u=0$, $v=0$ и что эти кривые пересекаются в этой точке под углом $\pi/4$.

3.5.3. *Точка линии уровня в том и только в том случае является двойной, если это нуль функции $f'(z)$.*

Линия уровня определяется уравнением $u^2+v^2=c^2$, и ее точка является двойной в том и только в том случае, если

$$uu_x+vv_x=0, \quad uu_y+vv_y=0.$$

Оба эти условия удовлетворяются, если $f'(z)=0$. Чтобы сделать обратное заключение, представим второе уравнение в виде

$$-uv_x+vu_x=0,$$

после чего возвысим то и другое в квадрат и сложим. Мы получим равенство

$$(u_x^2+v_x^2)(u^2+v^2)=0.$$

Следовательно, $u_x=0$ и $v_x=0$, а потому и $f'(z)=0$.

3.5.4. Линии уровня и нули функции $f(z)$. *Если C — простая замкнутая линия уровня и функция $f(z)$ аналитична внутри C и на C, то $f(z)$ имеет внутри C по крайней мере один нуль.*

Пусть на C

$$f(z)=u+iv=ce^{i\varphi},$$

так что c — постоянная. Тогда

$$c=\sqrt{u^2+v^2}, \quad \varphi=\operatorname{arctg}\frac{v}{u}.$$

Пусть s — длина на C, отсчитываемая от некоторой точки этой кривой. Тогда

$$0=\frac{dc}{ds}=\left(u\frac{du}{ds}+v\frac{dv}{ds}\right)\frac{1}{c}, \tag{1}$$

$$\frac{d\varphi}{ds}=\left(u\frac{dv}{ds}-v\frac{du}{ds}\right)\frac{1}{c^2}. \tag{2}$$

Производная $\frac{d\varphi}{ds}$ не может обратиться в нуль на C. Действительно, если бы она обратилась в нуль, то, возвышая в квадрат и складывая предыдущие соотношения, мы получили бы равенство

$$(u^2+v^2)\left\{\left(\frac{du}{ds}\right)^2+\left(\frac{dv}{ds}\right)^2\right\}=0,$$

т. е. равенства $\frac{du}{ds}=0$, $\frac{dv}{ds}=0$. Но

$$\frac{du}{ds}=u_x\frac{dx}{ds}+u_y\frac{dy}{ds},$$

$$\frac{dv}{ds}=v_x\frac{dx}{ds}+v_y\frac{dy}{ds}=-u_y\frac{dx}{ds}+u_x\frac{dy}{ds},$$

так что новое возвышение в квадрат и суммирование привели бы к равенству

$$(u_x^2+u_y^2)\left\{\left(\frac{dx}{ds}\right)^2+\left(\frac{dy}{ds}\right)^2\right\}=0.$$

Второй множитель равен 1, и потому $u_x=0$, $u_y=0$ и $f'(z)=0$. Но на линии уровня без двойных точек это невозможно.

Итак, производная $\frac{d\varphi}{ds}$ имеет во всех точках кривой C один и тот же знак, т. е. вдоль этой кривой угол φ либо монотонно возрастает, либо монотонно убывает. Следовательно, его изменение вдоль контура C не равно нулю.

Но изменение угла φ вдоль контура C равно числу нулей функции $f(z)$, лежащих внутри C, умноженному на 2π. Следовательно, по крайней мере один такой нуль существует *).

3.5.5. *Если $f(z)$ имеет n нулей внутри C, то $f'(z)$ имеет $n-1$ нулей внутри C.*

Пусть на C

$$f(z)=ce^{i\varphi}.$$

Тогда $f'(z)=cie^{i\varphi}\frac{d\varphi}{dz}$, и

$$\arg\{f'(z)\}=\mathrm{const}+\varphi+\arg\frac{d\varphi}{dz}.$$

Следовательно,

$$\Delta_C\arg\{f'(z)\}=\Delta_C\arg\{f(z)\}+\Delta_C\arg\frac{d\varphi}{dz},$$

где Δ_C обозначает изменение вдоль C. Пусть n' — число нулей функции $f'(z)$. Предыдущая формула показывает, что

$$2\pi n'=2\pi n+\Delta_C\arg\frac{d\varphi}{dz}. \qquad (1)$$

Но $\frac{d\varphi}{dz}=\frac{d\varphi}{ds}\frac{ds}{dz}$, и, как мы уже видели, производная $\frac{d\varphi}{ds}$ сохраняет на C постоянный знак. Следовательно,

$$\Delta_C\arg\frac{d\varphi}{dz}=\Delta_C\arg\frac{ds}{dz}.$$

Далее, $\frac{dz}{ds}=\frac{dx}{ds}+i\frac{dy}{ds}=\cos\psi+i\sin\psi=e^{i\psi}$, где ψ — угол между касательной к C и осью x. Следовательно,

$$\Delta_C\arg\frac{ds}{dz}=-\Delta_C\psi=-2\pi,$$

и, деля равенство (1) на 2π, мы получаем равенство $n'=n-1$.

*) Читатель, которого не удовлетворят эти аргументы, может вывести доказываемую теорему из принципа максимума модуля (гл. V): поскольку максимум функции $|f(z)|$, рассматриваемой внутри C и на C, достигается на C, ее минимум достигается внутри C и потому равен нулю. (*Примечание переводчика.*)

3.5.6. Следующая теорема иногда доставляет полезные сведения о нулях функции *).

Пусть C — простой замкнутый контур, и пусть функция $f(z)$ аналитична внутри C и на C. Если $\operatorname{Re}\{f(z)\}$ обращается на C в нуль в $2k$ различных точках, то $f(z)$ имеет внутри C не более k нулей.

Если $f(z)=u+iv$ и n — число нулей функции $f(z)$ внутри C, то $n=\frac{1}{2\pi}\Delta_C\left(\operatorname{arctg}\frac{v}{u}\right)$. Взяв какую-нибудь точку, где $u\neq 0$, в качестве начальной, мы можем принять за начальное значение $\operatorname{arctg}\frac{v}{u}$ то, которое заключено между $-\frac{1}{2}\pi$ и $\frac{1}{2}\pi$. Перейти из этого интервала, скажем, в интервал $\left(\frac{1}{2}\pi, \frac{3}{2}\pi\right)$ мы можем только в случае, если u обратится в нуль, а перейти, далее, в интервал $\left(\frac{3}{2}\pi, \frac{5}{2}\pi\right)$ — только в случае, если u снова обратится в нуль. Таким образом, если u дважды обращается в нуль на C, то число $\Delta_C\operatorname{arctg}\frac{v}{u}$, самое большее, равно 2π, а n, самое большее, равно 1. Эти же соображения позволяют, очевидно, охватить общий случай.

3.6. Интеграл Пуассона. Теорема Иенсена. *Пусть функция $f(z)$ аналитична в области, содержащей круг $|z|\leqslant R$, и пусть $u(r, \theta)$ — ее вещественная часть. Тогда при $0\leqslant r<R$*

$$u(r, \theta)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{R^2-r^2}{R^2-2Rr\cos(\theta-\varphi)+r^2}\,u(R, \varphi)\,d\varphi.$$

Эта формула известна как интеграл Пуассона. Такая же формула верна для мнимой части $v(r, \theta)$ функции $f(z)$.

Эти формулы аналогичны формуле Коши, выражающей значение функции $f(z)$ в точке, лежащей внутри контура, через ее значения на контуре. Однако они не могут быть получены из формулы Коши простым отделением действительной части от мнимой.

Мы дадим два доказательства.

Первое доказательство. Можно считать без ущерба для общности, что все коэффициенты a_n разложения $f(z)=\sum a_n z^n$ вещественны. Действительно, в общем случае $a_n=\alpha_n+i\beta_n$, так что

$$f(z)=\sum\alpha_n z^n+i\sum\beta_n z^n=f_1(z)+if_2(z)$$

*) См., например, Backlund [1].

и $\operatorname{Re} f = \operatorname{Re} f_1 - \operatorname{Im} f_2$. Поскольку $|\alpha_n| \leqslant |a_n|$ и $|\beta_n| \leqslant |a_n|$, функции f_1 и f_2 аналитичны при $|z| \leqslant R$. Таким образом, общий случай сводится к нашему специальному случаю.

Заметим, что в этом специальном случае $f(re^{-i\theta}) = u - iv$, если $f(re^{i\theta}) = u + iv$.

Пусть z_1 — точка окружности $|z| = R$, и пусть $f(z_1) = u_1 + iv_1$. Согласно формуле Коши,

$$u + iv = \frac{1}{2\pi i} \int \frac{u_1 + iv_1}{z_1 - z}\, dz_1 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{(u_1 + iv_1)\, Re^{i\varphi}\, d\varphi}{Re^{i\varphi} - re^{i\theta}}. \tag{1}$$

Так как точка R^2/z лежит вне круга, то

$$0 = \frac{1}{2\pi i} \int \frac{u_1 + iv_1}{z_1 - \frac{R^2}{z}}\, dz_1 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{(u_1 + iv_1)\, Re^{i\varphi}\, d\varphi}{Re^{i\varphi} - R^2 r^{-1} e^{-i\theta}}.$$

После изменения знака φ это дает равенство

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{(u_1 - iv_1)\, Re^{-i\varphi}\, d\varphi}{Re^{-i\varphi} - R^2 r^{-1} e^{-i\theta}} = 0,$$

т. е. равенство

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{(u_1 - iv_1)\, re^{i\theta}\, d\varphi}{re^{i\theta} - Re^{i\varphi}} = 0.$$

Вычитая эту формулу из формулы (1), мы видим, что

$$u + iv = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left\{ u_1 \frac{Re^{i\varphi} + re^{i\theta}}{Re^{i\varphi} - re^{i\theta}} + iv_1 \right\} d\varphi,$$

и, отделяя вещественные части, получаем доказываемую формулу.

Второе доказательство. Пусть

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (\alpha_n + i\beta_n)\, r^n e^{in\theta} \qquad (r \leqslant R).$$

Как в § 2.5.3,

$$\alpha_n R^n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} u(R, \varphi) \cos n\varphi\, d\varphi, \quad \beta_n R^n = -\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} u(R, \varphi) \sin n\varphi\, d\varphi$$

при $n > 0$ и

$$\alpha_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(R, \varphi)\, d\varphi.$$

Следовательно,

$$u(r,\ \theta)=\sum_{n=0}^{\infty}(\alpha_n\cos n\theta-\beta_n\sin n\theta)\,r^n=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}u(R,\ \varphi)\,d\varphi+$$

$$+\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{r^n}{R^n}\int_0^{2\pi}u(R,\ \varphi)(\cos n\theta\cos n\varphi+\sin n\theta\sin n\varphi)\,d\varphi=$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}u(R,\ \varphi)\left\{\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\cos n(\theta-\varphi)\left(\frac{r}{R}\right)^n\right\}d\varphi.$$

Обращение порядка суммирования и интегрирования оправдывается равномерной сходимостью. Окончательная формула получается после суммирования ряда, стоящего в скобках.

3.6.1. Теорема Иенсена. *Пусть $f(z)$ — функция, аналитическая при $|z|<R$. Предположим, что $f(0)\neq 0$, и пусть $r_1, r_2, \ldots$ — модули нулей функции $f(z)$ в круге $|z|<R$, расположенные в неубывающем порядке. Тогда при $r_n\leqslant r\leqslant r_{n+1}$*

$$\log\frac{r^n\,|f(0)|}{r_1r_2\ldots r_n}=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log|f(re^{i\theta})|\,d\theta. \qquad (1)$$

Здесь нуль порядка p считается p раз. Формула интересна тем, что связывает модуль функции с модулями ее нулей.

Она может быть представлена в другой форме, в некоторых отношениях более полезной. Обозначим через $n(x)$ число нулей функции $f(z)$ в круге $|z|\leqslant x$. Мы можем написать:

$$\log\frac{r^n}{r_1\ldots r_n}=n\log r-\sum_{m=1}^{n}\log r_m=$$

$$=\sum_{m=1}^{n-1}m(\log r_{m+1}-\log r_m)+n(\log r-\log r_n)=$$

$$=\sum_{m=1}^{n-1}m\int_{r_m}^{r_{m+1}}\frac{dx}{x}+n\int_{r_n}^{r}\frac{dx}{x}.$$

Так как $m=n(x)$ при $r_m\leqslant x<r_{m+1}$ и $n=n(x)$ при $r_n\leqslant x<r$, то правая часть равна $\int_0^r\frac{n(x)}{x}dx$, и формула Иенсена принимает вид:

$$\int_0^r\frac{n(x)}{x}dx=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log|f(re^{i\theta})|\,d\theta-\log|f(0)|. \qquad (2)$$

Мы дадим два доказательства этой теоремы.

Первое доказательство. Если $f(z)$ не имеет нулей на окружности $|z|=r$, то

$$n(r)=\frac{1}{2\pi i}\int\frac{f'(z)}{f(z)}\,dz=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{f'(re^{i\theta})}{f(re^{i\theta})}\,re^{i\theta}\,d\theta. \qquad (3)$$

Формально формула Иенсена получается отсюда после деления на r, интегрирования по r и отделения вещественных частей. Однако законность этой процедуры не очевидна, поскольку подынтегральная функция обращается в бесконечность. Мы применим поэтому несколько иной метод.

В интервале между модулями r_n, r_{n+1} двух последовательных нулей каждая из двух частей формулы Иенсена имеет непрерывную производную. Производная левой части равна n/r, а производная правой части есть

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{d}{dr}\{\log|f(re^{i\theta})|\}\,d\theta=$$

$$=\frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi}\frac{d}{dr}\left\{\log f(re^{i\theta})+\log\overline{f(re^{-i\theta})}\right\}d\theta=$$

$$=\frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi}\left\{\frac{f'(re^{i\theta})}{f(re^{i\theta})}e^{i\theta}+\overline{\frac{f'(re^{i\theta})}{f(re^{i\theta})}}\,e^{-i\theta}\right\}d\theta=$$

$$=\operatorname{Re}\left\{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{f'(re^{i\theta})}{f(re^{i\theta})}e^{i\theta}\,d\theta\right\}.$$

В силу формулы (3) правая часть этого равенства равна n/r. Следовательно, в каждом таком интервале производные равны между собой, так что одна часть формулы Иенсена может отличаться от другой только на постоянную.

Но при $r=0$ эти части, очевидно, равны между собой. Следовательно, достаточно доказать, что они изменяются непрерывно, когда r проходит через значение r_n.

Для левой части это очевидно. Что касается правой части, то достаточно рассмотреть случай, когда имеется только один нуль с модулем r_n, причем можно считать, что его аргумент равен нулю. Тогда

$$\log|f(re^{i\theta})|=\log\left|1-\frac{r}{r_n}e^{i\theta}\right|+\psi(r,\ \theta),$$

причем функция ψ непрерывна в окрестности значения $r=r_n$. Следовательно, достаточно доказать, что интеграл

$$\int_0^{2\pi} \log\left|1-\frac{r}{r_n}e^{i\theta}\right| d\theta$$

непрерывен при $r=r_n$. Но при $r/r_n<2$

$$9 \geqslant \left|1-\frac{r}{r_n}e^{i\theta}\right|^2 = 1-2\frac{r}{r_n}\cos\theta+\frac{r^2}{r_n^2} = \sin^2\theta+\left(\cos\theta-\frac{r}{r_n}\right)^2 \geqslant \sin^2\theta;$$

следовательно, при $\delta<\pi$

$$\left|\int_{-\delta}^{\delta} \log\left|1-\frac{r}{r_n}e^{i\theta}\right| d\theta\right| < \int_{-\delta}^{\delta} \{\log 3+|\log|\sin\theta||\}\, d\theta <$$
$$< \int_{-\delta}^{\delta} \{A+|\log|\theta||\}\, d\theta < A\delta\log\frac{1}{\delta}.$$

Мы можем выбрать δ столь малым, чтобы правая часть была произвольно малой для всех значений r вблизи r_n, при фиксированном же δ остаток интеграла, очевидно, непрерывен. Следовательно, и весь интеграл непрерывен.

Второе доказательство. Оно состоит из нескольких пунктов.

(I) Если $f(z)$ не имеет нулей при $|z|\leqslant r$, то $\log f(z)$ есть аналитическая функция при $|z|\leqslant r$ и

$$\log f(0)=\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=r} \frac{\log f(z)}{z}\, dz = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log\{f(re^{i\theta})\}\, d\theta.$$

Приравнивая вещественные части, мы получаем доказываемую формулу.

(II) Если $a_1=r_1e^{i\theta_1}$ и $0<r_1<r$, то, согласно теореме Коши,

$$\int_{|w|=1/r} \log(1-w\bar{a}_1)\frac{dw}{w}=0,$$

где взято главное значение логарифма. Следовательно, при соответствующим образом выбранных значениях логарифмов,

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{|w|=1/r} \log\left(1-\frac{1}{w\bar{a}_1}\right)\frac{dw}{w} = \frac{1}{2\pi i}\int_{|w|=1/r} \log\left(-\frac{1}{w\bar{a}_1}\right)\frac{dw}{w} =$$
$$=\log\left(-\frac{1}{\bar{a}_1}\right)-\frac{1}{4\pi i}\left[\log^2 w\right]_{\arg w=0}^{\arg w=2\pi} =$$
$$=\log\left(-\frac{1}{\bar{a}_1}\right)-\frac{1}{4\pi i}\left(\log\frac{1}{r}+2\pi i\right)^2+\frac{1}{4\pi i}\log^2\frac{1}{r}.$$

Отделяя действительные части, мы получаем равенство

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log\left|1-\frac{r}{r_1}e^{i(\theta_1-\theta)}\right| d\theta = \log\frac{r}{r_1}.$$

Это — формула Иенсена для $f(z) = 1 - \frac{z}{a_1}$.

(III) Предыдущая формула может быть распространена на случай $r = r_1$ путем применения теоремы Коши к окружности $|w| = 1/r$ с небольшим круговым вырезом, исключающим точку $w = 1/\bar{a}_1$. Интеграл, взятый по границе выреза, стремится к нулю вместе с его радиусом, и доказательство завершается как выше.

(IV) В общем случае

$$f(z) = \left(1-\frac{z}{a_1}\right)\left(1-\frac{z}{a_2}\right)\dots\left(1-\frac{z}{a_n}\right)\varphi(z),$$

причем $\varphi(z)$ не имеет нулей при $|z| < r_{n+1}$ и $\varphi(0) = f(0)$. Это позволяет свести общий случай к рассмотренным специальным случаям сложением.

Теорема обобщается на функции, имеющие не только нули, но и полюсы. Пусть функция $f(z)$ удовлетворяет тем же условиям, что и выше, но пусть теперь она имеет в круге $|z| \leqslant r$ нули $a_1, \dots, a_m$ и полюсы $b_1, \dots, b_n$. Тогда

$$\log\left\{\left|\frac{b_1\dots b_n}{a_1\dots a_m}f(0)\right| r^{m-n}\right\} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log|f(re^{i\theta})|\,d\theta. \tag{4}$$

Действительно, если $f(z) = \dfrac{g(z)}{\left(1-\frac{z}{b_1}\right)\dots\left(1-\frac{z}{b_n}\right)} = \dfrac{g(z)}{h(z)}$, то

$$\log\frac{r^m g(0)}{|a_1\dots a_m|} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log|g(re^{i\theta})|\,d\theta$$

и

$$\log\frac{r^n}{|b_1\dots b_n|} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log|h(re^{i\theta})|\,d\theta,$$

так что нужно лишь вычесть вторую формулу из первой.

3.6.2. Формула Пуассона—Иенсена. *Пусть функция $f(z)$ имеет внутри круга $|z| \leqslant R$ нули в точках $a_1, a_2, \dots, a_m$ и полюсы в точках $b_1, b_2, \dots, b_n$, и пусть она аналитична и не обращается в нуль во всех остальных внутренних и граничных* *точках круга. Тогда*

$$\log|f(re^{i\theta})| = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{R^2-r^2}{R^2-2Rr\cos(\theta-\varphi)+r^2}\log|f(Re^{i\varphi})|\,d\varphi -$$

$$-\sum_{\mu=1}^{m}\log\left|\frac{R^2-\bar{a}_\mu re^{i\theta}}{R(re^{i\theta}-a_\mu)}\right| + \sum_{\nu=1}^{n}\log\left|\frac{R^2-\bar{b}_\nu re^{i\theta}}{R(re^{i\theta}-b_\nu)}\right|.$$

Эта формула содержит как специальные случаи и формулу Пуассона, и формулу Иенсена. Если нет ни нулей, ни полюсов, то она сводится к формуле Пуассона для вещественной части функции $\log f(z)$. С другой стороны, при $r=0$ мы получаем общую формулу Иенсена:

$$\log|f(0)| = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log|f(Re^{i\varphi})|\,d\varphi - \log\left\{\left|\frac{b_1b_2\ldots b_n}{a_1a_2\ldots a_n}\right|R^{m-n}\right\}.$$

Доказательство опять состоит из нескольких пунктов.

(I) Если $f(z)=z-a$, где $|a|<R$, то формула сводится к равенству

$$\log|re^{i\theta}-a| =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{R^2-r^2}{R^2-2Rr\cos(\theta-\varphi)+r^2}\log|Re^{i\varphi}-a|\,d\varphi - \log\left|\frac{R^2-\bar{a}re^{i\theta}}{R(re^{i\theta}-a)}\right|,$$

т. е. к равенству

$$\log\left|R-\frac{\bar{a}re^{i\theta}}{R}\right| = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{R^2-r^2}{R^2-2Rr\cos(\theta-\varphi)+r^2}\log|Re^{i\varphi}-a|\,d\varphi.$$

Но это — формула Пуассона для вещественной части функции $\log\left(R-\frac{\bar{a}z}{R}\right)$, которая аналитична при $|z|\leqslant R$.

(II) Подобно этому, если $f(z)=\frac{1}{z-b}$, то формула сводится к формуле Пуассона для вещественной части функции $\log\left(R-\frac{\bar{b}z}{R}\right)$.

(III) Если функция $f(z)$ аналитична и не имеет ни нулей, ни полюсов в круге $|z|\leqslant R$, то формула совпадает с формулой Пуассона для вещественной части функции $\log f(z)$.

(IV) Общий случай сводится к этим специальным случаям сложением.

3.7. Теорема Карлемана. В предыдущих теоремах рассматриваемая область была кругом. Мы заключим главу доказательством двух теорем того же типа, что и теорема Иенсена, относящихся соответственно к полуплоскости и прямоугольнику.

Теорема Карлемана*). *Пусть функция* $f(z)$ *аналитична при* $|z| \geqslant \rho$, $-\frac{1}{2}\pi \leqslant \arg z \leqslant \frac{1}{2}\pi$, *и пусть она имеет нули* $r_1 e^{i\theta_1}$, $r_2 e^{i\theta_2}$, $\ldots$, $r_n e^{i\theta_n}$ *внутри контура, состоящего из полуокружностей* $|z| = \rho$, $|z| = R$, $-\frac{1}{2}\pi \leqslant \arg z \leqslant \frac{1}{2}\pi$ *и соединяющих их отрезков мнимой оси, и не имеет нулей на контуре. Тогда*

$$\sum_{\nu=1}^{n} \left(\frac{1}{r_\nu} - \frac{r_\nu}{R^2}\right) \cos\theta_\nu = \frac{1}{\pi R} \int_{-\frac{1}{2}\pi}^{\frac{1}{2}\pi} \log|f(Re^{i\theta})| \cos\theta \, d\theta +$$

$$+ \frac{1}{2\pi} \int_{\rho}^{R} \left(\frac{1}{y^2} - \frac{1}{R^2}\right) \log|f(iy) f(-iy)| \, dy + O(1),$$

где $O(1)$ *обозначает функцию от* ρ *и* R, *которая при фиксированном* ρ *остается ограниченной, когда* $R \to \infty$.

Рассмотрим интеграл $I = \frac{1}{2\pi i} \int \log f(z) \left(\frac{1}{z^2} + \frac{1}{R^2}\right) dz$, взятый вдоль контура в положительном направлении от начальной точки $z = i\rho$ с как-либо выбранным в ней начальным значением логарифма. Интеграл, взятый вдоль малой полуокружности, ограничен. На отрезке отрицательной части мнимой оси мы полагаем $z = -iy$; соответствующая часть интеграла равна

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\rho}^{R} \log\{f(-iy)\} \left(\frac{1}{y^2} - \frac{1}{R^2}\right) dy.$$

Интеграл, взятый вдоль большой полуокружности, равен

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{-\frac{1}{2}\pi}^{\frac{1}{2}\pi} \log\{f(Re^{i\theta})\} \left(\frac{e^{-2i\theta}}{R^2} + \frac{1}{R^2}\right) iRe^{i\theta} \, d\theta =$$

$$= \frac{1}{\pi R} \int_{-\frac{1}{2}\pi}^{\frac{1}{2}\pi} \log\{f(Re^{i\theta})\} \cos\theta \, d\theta.$$

Интегрирование вдоль отрезка положительной части мнимой оси дает

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\rho}^{R} \log\{f(iy)\} \left(\frac{1}{y^2} - \frac{1}{R^2}\right) dy.$$

*) Carleman [1].

Складывая вещественные части этих интегралов, мы получаем правую часть формулы Карлемана.

С другой стороны, интегрирование по частям показывает, что

$$I=\frac{1}{2\pi i}\left[\log f(z)\left(\frac{z}{R^2}-\frac{1}{z}\right)\right]+\frac{1}{2\pi i}\int\frac{f'(z)}{f(z)}\left(\frac{1}{z}-\frac{z}{R^2}\right)dz.$$

Когда мы обходим контур, $\log f(z)$ возрастает на $2\pi i n$, и потому внеинтегральный член чисто мним. Последний же член, в силу теоремы о вычетах, равен

$$\sum_{\nu=1}^{n}\left(\frac{1}{r_\nu e^{i\theta_\nu}}-\frac{r_\nu e^{i\theta_\nu}}{R^2}\right),$$

и его вещественная часть есть правая часть формулы Карлемана.

Формула легко обобщается на случай, когда $f(z)$ имеет нули на мнимой оси: мы делаем небольшие вырезы вокруг этих нулей и переходим к пределу.

3.7.1. *Пусть функция $f(z)$ аналитична и ограничена при $x\geqslant 0$, и пусть $r_1e^{i\theta_1}$, $r_2e^{i\theta_2}$, ... — ее нули в правой полуплоскости. Тогда ряд* $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos\theta_n}{r_n}$ *сходится.*

При этих условиях правая часть формулы Карлемана ограничена сверху, скажем, $<M$. Таким образом,

$$\sum_{\nu=1}^{n}\left(\frac{1}{r_\nu}-\frac{r_\nu}{R^2}\right)\cos\theta_\nu<M$$

для всех значений R. Каждый член слева положителен, и если $r_\nu<\frac{1}{2}R$, то $\frac{1}{r_\nu}-\frac{r_\nu}{R^2}>\frac{3}{4r_\nu}$. Следовательно,

$$\sum_{r_\nu<\frac{1}{2}R}\frac{\cos\theta_\nu}{r_\nu}<\frac{4M}{3},$$

что и доказывает сходимость ряда.

Нетрудно проверить, что теорема остается верной, если мы заменим условие $f(z)=O(1)$ условием $f(z)=O\left(e^{|z|^\alpha}\right)$ с $\alpha<1$. Но при $\alpha=1$ теорема не верна, как показывает пример $f(z)=\cos z$.

3.7.2. Предыдущей теоремой можно воспользоваться для доказательства следующего предложения.

Пусть функция $f(z)$ аналитична при $x\geqslant 0$, и пусть $f(z)=O(e^{-a|z|})$ с $a>0$ равномерно при $|\arg z|\leqslant\frac{1}{2}\pi$, когда $z\to\infty$. Тогда $f(z)=0$ тождественно.

Для доказательства рассмотрим функцию $F(z)=f(z)\sin bz$, где $0<b<a$. Она аналитична и ограничена при $x\geqslant 0$, она имеет нули в точках $z=\frac{n\pi}{b}$, и ряд $\sum\frac{b}{n\pi}$ расходится. Но это несовместимо с теоремой предыдущего параграфа, если только функция $F(z)$ не равна нулю тождественно. Следовательно, $F(z)=0$ и, таким образом, $f(z)=0$.

Условия этой теоремы будут ослаблены в § 5.8.

3.8. Теорема Литтлвуда *). Пусть C — контур прямоугольника, ограниченного прямыми $x=x_1$, $x=x_2$, $y=y_1$, $y=y_2$, где $x_1<x_2$, $y_1<y_2$. Пусть функция $f(z)$ аналитична и не обращается в нуль на C и мероморфна внутри C. Положим $F(z)=\log f(z)$, определив логарифм следующим образом: мы начинаем с обычного определения при $x=x_2$ и получаем значения в других точках из значений $\log(x_2+iy)$ путем непрерывного изменения вдоль прямых $y=\text{const}$. Если, однако, мы встречаем на такой прямой нуль или полюс функции $f(z)$, то мы определяем $F(z)$ как $F(z\pm i0)$ — в зависимости от того, приближаемся ли мы к этой прямой сверху или снизу.

Пусть $\nu(x')$ обозначает избыток числа нулей функции $f(z)$ над числом ее полюсов в той части прямоугольника, где $x>x'$. Тогда

$$\int_C F(z)\,dz=-2\pi i\int_{x_1}^{x_2}\nu(x)\,dx.$$

Рассмотрим сначала функцию $f(z)=z-a$, где a — некоторая точка прямоугольника. Пусть $a=\alpha+i\beta$, и пусть C' — контур, полученный следующим образом: сначала мы перемещаемся вдоль C в положительном направлении от точки (x_2, y_1) до точки (x_1, β), затем — вдоль прямой $y=\beta$ до точки $\alpha-\varepsilon+i\beta$, затем — в отрицательном направлении вдоль полной окружности радиуса ε с центром $z=a$, затем — назад вдоль прямой $y=\beta$ и, наконец, вдоль остающейся части контура C к исходной точке. Функция $F(z)$ аналитична внутри C' и на C', так что

$$\int_{C'} F(z)\,dz=0.$$

Интеграл, взятый вдоль малой окружности, стремится к нулю вместе с ее радиусом; следовательно,

$$\int_C F(z)\,dz=-\int_{x_1}^{\alpha}\{F_1(z)-F_2(z)\}\,dx,$$

где $F_1(z)$ и $F_2(z)$ — значения функции $F(z)$ на пути от $x_1+i\beta$ к $\alpha+i\beta$ и на пути обратно. Так как F_2 получается из F_1 после

*) Littlewood [4].

обхода простого нуля $z=a$ функции $f(z)$ в отрицательном направлении, то

$$F_2(z)=F_1(z)-2\pi i.$$

Следовательно,

$$\int\limits_G F(z)\,dz=-2\pi i\int\limits_{x_1}^{\alpha}dx=-2\pi i\int\limits_{x_1}^{x_2}\nu(x)\,dx,$$

где $\nu(x)=1$ при $x_1<x<\alpha$ и $=0$ при $\alpha<x<x_2$, а это и утверждалось.

Общая формула получается из доказанной простым суммированием членов, соответствующих различным полюсам и нулям функции $f(z)$.

РАЗЛИЧНЫЕ ПРИМЕРЫ

1. Вычислить интегралы

$$\int\limits_0^\infty\frac{dx}{x^4+1},\quad\int\limits_0^\infty\frac{x^2\,dx}{x^4+1},\quad\int\limits_0^\infty\frac{dx}{x^6+1}$$

контурным интегрированием.

2. Вычислить интегралы

$$\int\limits_0^\infty\frac{\cos x}{a^2+x^2}\,dx,\quad\int\limits_0^\infty\frac{\cos x}{(a^2+x^2)^2}\,dx,\quad\int\limits_0^\infty\frac{\sin^2 x}{x^2}\,dx,\quad\int\limits_0^\infty\frac{\sin^3 x}{x^3}\,dx$$

контурным интегрированием.

3. Доказать, что при $c>0$

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{c-i\infty}^{c+i\infty}\frac{a^z}{z^2}\,dz=\begin{cases}\log a & (a>1),\\ 0 & (0<a<1).\end{cases}$$

4. Доказать, что интеграл $\int\frac{dz}{\sqrt{4z^2+4z+3}}$, взятый вдоль единичной окружности с положительным начальным значением радикала при $z=1$, равен $i\pi$.

5. Путем интегрирования функции $\frac{\log^2 z}{1+z^2}$ вдоль обычного полукругового контура доказать, что

$$\int\limits_0^\infty\frac{\log^2 z}{1+z^2}\,dz=\frac{\pi^3}{8}.$$

6. Вычисляя интеграл

$$\frac{1}{2\pi i}\int\frac{dz}{(z-a)\left(z-\frac{1}{a}\right)}$$

вдоль единичной окружности, доказать, что при $0 < a < 1$

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{1+a^2-2a\cos\theta} = \frac{2\pi}{1-a^2}.$$

Каково значение интеграла при $a > 1$?

7. Доказать, что при $b > a > -1$

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \cos^a\theta \cos b\theta \, d\theta = \frac{\pi\Gamma(a+1)}{2^{a+1}\Gamma\left(\frac{1}{2}a+\frac{1}{2}b+1\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}a-\frac{1}{2}b+1\right)}.$$

[Взять интеграл $\int \left(z+\frac{1}{z}\right)^a z^{b-1}\,dz$ вокруг правой половины единичного круга.]

8. Вычисляя интеграл $\int \frac{z\,dz}{a-e^{-iz}}$ вдоль контура прямоугольника с вершинами $-\pi$, π, $\pi+in$, $-\pi+in$ и переходя к пределу при $n\to\infty$, показать, что *)

$$\int_0^{\pi} \frac{x\sin x\,dx}{1+a^2-2a\cos x} = \frac{\pi}{a}\log(1+a) \quad (0<a<1), \qquad \frac{\pi}{a}\log\frac{1+a}{a} \quad (a>1).$$

9. Показать, что функция $f(x) = \operatorname{sech}\left(x\sqrt{\frac{1}{2}\pi}\right)$ удовлетворяет уравнению

$$f(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} f(x)\cos xt\,dx.$$

[Взять интеграл $\int \cos tz \operatorname{sech} az\,dz$ вдоль контура прямоугольника с вершинами $\pm n$, $\pm n+\frac{i\pi}{a}$ и перейти к пределу при $n\to\infty$.]

10. Показать, что функция $f(x) = \frac{1}{e^{x\sqrt{2\pi}}-1} - \frac{1}{x\sqrt{2\pi}}$ удовлетворяет уравнению

$$f(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} f(x)\sin xt\,dx.$$

[Взять интеграл $\int \frac{\sin zt}{e^{az}-1}\,dz$, где $a>0$, вдоль контура прямоугольника с вершинами 0, n, $n+\frac{2i\pi}{a}$, $\frac{2i\pi}{a}$ и перейти к пределу при $n\to\infty$.]

---

*) Lindelöf, Calcul des Résidus, стр. 48—49.

11. Доказать, что при $0<a<1$ и $0<c<1$

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{c-i\infty}^{c+i\infty}\frac{dz}{a^z\sin\pi z}=\frac{1}{\pi(1+a)}.$$

12. Доказать, что при $a>0$, $-\frac{1}{2}\pi<a\lambda<\frac{1}{2}\pi$

$$\int\limits_0^\infty e^{-r^a\cos a\lambda}\cos(r^a\sin a\lambda)\,dr=\cos\lambda\cdot\frac{1}{a}\Gamma\left(\frac{1}{a}\right),$$

$$\int\limits_0^\infty e^{-r^a\cos a\lambda}\sin(r^a\sin a\lambda)\,dr=\sin\lambda\cdot\frac{1}{a}\Gamma\left(\frac{1}{a}\right).$$

13. Просуммировать ряды $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4+a^4}$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{n^4+a^4}$.

14. Доказать, что если $-\pi<a<\pi$ и x — нецелое число, то

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n\sin na}{x^2-n^2}=\frac{1}{2}\pi\frac{\sin ax}{\sin\pi x}.$$

15. Докозать, что *)

$$\frac{\operatorname{cth}\pi}{1^7}+\frac{\operatorname{cth}2\pi}{2^7}+\frac{\operatorname{cth}3\pi}{3^7}+\ldots=\frac{19\pi^7}{56\,700}.$$

16. Доказать, что $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3\sin\sqrt{2}\,n\pi}=-\frac{13\pi^3}{360\sqrt{2}}$.

[Харди. Рассмотреть интеграл

$$\frac{1}{2\pi i}\int\frac{1}{\sin\pi z\sin\theta\pi z}\frac{dz}{z^3},$$

где $\theta=\sqrt{2}-1$. Ряд сходится; действительно, если m — ближайшее к $n\sqrt{2}$ целое число, то

$$|n\sqrt{2}-m|=\frac{|2n^2-m^2|}{n\sqrt{2}+m}\geqslant\frac{1}{n\sqrt{2}+m}>\frac{A}{n},$$

и, следовательно, $\operatorname{cosec}\sqrt{2}\,n\pi=O(n)$.]

17. Пусть $f(z)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{z^{n+1}}$ $(|z|>0)$ и C — замкнутый контур, охватывающий начало. Показать, что если функция $\varphi(x)$ регулярна в достаточно большой области, то

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_C f(w)\,\varphi(z-w)\,dw=a_0\varphi(z)-a_1\varphi'(z)+\frac{a_2}{2!}\varphi''(z)-\ldots$$

*) Рамануджан; см. Watson [1].

18. Доказать, что

$$e^{az}-e^{bz}=(a-b)\,ze^{\frac{1}{2}(a+b)z}\prod_{n=1}^{\infty}\left\{1+\frac{(a-b)^2z^2}{4n^2\pi^2}\right\}.$$

19. Показать, что, как бы мало ни было ρ, при достаточно большом n все нули функции

$$1+\frac{1}{z}+\frac{1}{2!z^2}+\ldots+\frac{1}{n!z^n}$$

лежат в круге $|z|\leqslant\rho$.

20. Если $a>e$, то уравнение $e^z=az^n$ имеет n нулей внутри единичного круга.

[Положить в теореме Руше $f(z)=az^n$, $g(z)=e^z$.]

21. Показать, что при вещественных α и β уравнение

$$z^{2n}+\alpha^2z^{2n-1}+\beta^2=0$$

имеет $n-1$ корней с положительными вещественными частями, если n нечетно, и n корней с положительными вещественными частями, если n четно.

22. Доказать, что если α не является четным целым числом, то при $t\to\infty$ вдоль вещественной оси *)

$$\int_0^{\infty}e^{-x^{\alpha}}\cos xt\,dx\sim\frac{\Gamma(\alpha+1)\sin\frac{1}{2}\pi\alpha}{t^{\alpha+1}}.$$

23. Если $f(z)=u+iv$ — аналитическая функция от $z=x+iy$ и ψ — функция от u и v, обладающая непрерывными производными двух первых порядков, то **)

$$\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)^2=\left\{\left(\frac{\partial\psi}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial\psi}{\partial v}\right)^2\right\}|f'(z)|^2$$

и

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}=\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial u^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial v^2}\right)|f'(z)|^2.$$

24. Показать, что если $f(z)=u+iv$ — аналитическая функция от $z=x+iy$, то там, где $f(z)\neq 0$,

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)|f(z)|^p=p^2|f(z)|^{p-2}|f'(z)|^2$$

и там, где $u(x, y)\neq 0$,

$$\left(\frac{\partial}{\partial x^2}+\frac{\partial}{\partial y^2}\right)|u|^p=p(p-1)|u|^{p-2}|f'(z)|^2.$$

25. Пусть $\varphi(t)$ — вещественная функция, интегрируемая в интервале (a, b), и пусть функция

$$f(z)=\int_a^b e^{zt}\varphi(t)\,dt$$

имеет нули в точках $r_1e^{i\theta_1}$, $r_2e^{i\theta_2}$, $\ldots$. Тогда ряд

$$\sum\frac{\cos\theta_n}{r_n}$$

абсолютно сходится.

[Функция $e^{-bz}f(z)$ ограничена при $x\geqslant 0$, а функция $e^{az}f(z)$ ограничена при $x\leqslant 0$.]

*) Pólya [1].

**) См. Hardy [8], стр. 270.

ГЛАВА IV

АНАЛИТИЧЕСКОЕ ПРОДОЛЖЕНИЕ

4.1. Общая теория. Естественно рассматривать агрегат всех значений, скажем, z^2 или $\log z$, взятых для всех значений z, как единое целое, и каждый такой агрегат мы описываем как *аналитическую функцию*. До сих пор мы не встречались с общим понятием аналитической функции, как целого. То, с чем мы имели дело, было понятие функции, связанной с некоторой областью и определенной в этой области некоторой формулой. Так,

$$1+z+z^2+\ldots \qquad (|z|<1) \tag{1}$$

и

$$\int_0^\infty e^{-t(1-z)}\,dt \qquad (\operatorname{Re} z<1) \tag{2}$$

выступают как различные функции, значения которых оказываются одинаковыми для некоторых значений z. Но более естественно рассматривать функцию (1) как часть функции (2), а функцию (2) — как часть функции, определенной для всех значений z, отличных от 1, формулой $\frac{1}{1-z}$.

Рассмотренная функция однозначна, т. е. принимает в точности одно значение при каждом значении z (кроме значения $z=1$). Но естественно рассматривать и два значения $\sqrt{z}$ как части одной и той же функции, и наше определение должно охватывать также и случаи такого рода.

Для того чтобы связать эти новые идеи с нашей прежней теорией, нам нужен процесс, который позволил бы продолжать функцию за пределы той области, в которой она первоначально определена. Этот процесс называется *аналитическим продолжением*. Он является типичным для аналитических функций комплексного переменного и не имеет аналога в теории функций действительного переменного.

4.1.1. Аналитическое продолжение. Пусть $f_1(z)$ и $f_2(z)$ — две функции, аналитические соответственно в областях D_1 и D_2. Предположим, что области D_1 и D_2 имеют общую часть, в которой всюду $f_1(z)=f_2(z)$. Тогда мы рассматриваем значения функций $f_1(z)$ и $f_2(z)$ в точках областей D_1, D_2 как значения одной аналитической функции $f(z)$. Таким образом, функция $f(z)$ аналитична в области $D=D_1+D_2$, и $f(z)=f_1(z)$ в D_1, $f(z)=f_2(z)$ в D_2.

Функция $f_2(z)$ может рассматриваться как расширяющая область определения функции $f_1(z)$, и она называется аналитическим продолжением функции $f_1(z)$. Конечно, таким же образом и функция $f_1(z)$ есть аналитическое продолжение функции $f_2(z)$. Процесс расширения области определения заданной функции также называется аналитическим продолжением.

Для того чтобы этот процесс представлял ценность, необходимо, чтобы он давал, при соответствующих условиях, единственный результат, и мы покажем, что дело обстоит именно так. Но прежде чем приниматься за доказательство, укажем на трудности, с которыми мы встречаемся при попытке определить подобный процесс для функций действительного переменного.

Естественно считать, что если, скажем, $f(x)=\frac{1}{2}(\pi-x)$ при $0<x<\pi$, то продолжение функции $f(x)$ на другие значения x должно происходить по той же формуле. Трудность состоит в том, что две формулы могут представлять одну и ту же функцию в одном интервале, но различные функции в другом интервале, и не существует способа, который позволил бы решить, какова «правильная» формула. Например, предыдущая функция представляется при $0<x<\pi$ также рядом

$$\frac{\sin x}{1}+\frac{\sin 2x}{2}+\ldots,$$

но если мы определим функцию как сумму этого ряда, то обнаружим, что ее значение в интервале $(-\pi, 0)$ есть $-\frac{1}{2}(\pi+x)$.

Этот ряд не является равномерно сходящимся, но такого рода явления не исчезнут, если мы ограничимся равномерно сходящимися рядами. Например, ряд

$$\frac{x\sin x}{1}+\frac{x\sin 2x}{2}+\ldots$$

равномерно сходится в некотором интервале, содержащем точку $x=0$; тем не менее, если мы воспользуемся им для продолжения его суммы с положительных значений x на отрицательные, то придем к нежелательному заключению, что продолжение функции $\frac{1}{2}x(\pi-x)$ есть функция $-\frac{1}{2}x(\pi+x)$.

4.1.2. Единственность аналитического продолжения. Предположим, что имеется область D, перекрывающаяся с областями D_1 и D_2, и пусть последние имеют общую часть D_3, которая сама перекрывается с D. Пусть функция $f(z)$ аналитична в D, и пусть $f_1(z)$ есть продолжение функции $f(z)$ на D_1, а $f_2(z)$ — продолжение функции $f(z)$ на D_2. Тогда каждая из функций $f_1(z)$, $f_2(z)$ осуществляет продолжение функции $f(z)$ на D_3. Чтобы показать, что результаты этих двух процессов продолжения совпадают, мы должны показать, что $f_1(z)=f_2(z)$ всюду в D_3. Это следует из теоремы § 2.6, доказательство которой использует тот факт, что аналитическая функция может быть разложена в степенной ряд. Функция $f_1(z)-f_2(z)$ аналитична всюду в D_3. Она равна нулю в той части области D_3, которая покрыта областью D, так как там $f_1(z)=f_2(z)=f(z)$. Следовательно, она равна нулю всюду в D_3.

Это доказательство использует существование области, общей для D и D_3, и если такой области не существует, то результат может оказаться неверным. Может случиться, что $f_1(z)=f(z)$ в DD_1, $f_2(z)=f(z)$ в DD_2, но $f_1(z)\neq f_2(z)$ в D_3. Это не противоречит принципу единственности, так как он применим только к областям, в которых функция всюду аналитична; между тем, D, D_1 и D_2 могут окружать точку, в которой функция не аналитична, не содержа ее *).

4.1.3. Во втором рассмотренном выше случае, когда $f_1(z)\neq f_2(z)$ в D_3, мы все-таки рассматриваем совокупность значений функций $f_1(z)$ и $f_2(z)$ как единую аналитическую функцию от z, только эта функция уже не однозначна, а по крайней мере двузначна в D_3. Подобным же образом разные способы продолжения могут привести ко многим различным результатам, и тогда функция многозначна.

Читатель *Чистой математики* Харди знаком с различными значениями, принимаемыми функцией $\log z$ (хотя, конечно, в книге Харди нет даже понятия функции, аналитической в точке). Свойства некоторых других многозначных функций, таких как $z^a = e^{a\log z}$, могут быть выведены из свойств функции $\log z$.

4.1.4. Определение аналитической функции как целого. Обычно аналитическая функция бывает первоначально определена в некоторой области плоскости. Принцип аналитического продолжения дает нам возможность определить *аналитическую функцию* без указания на какую-либо частную область, в которой она задана. Она состоит из первоначальной функции и всех ее продолжений, и всех продолжений этих продолжений, и т. д. Может случиться, что при таком расширении функции $f(z)$ мы сможем достигнуть всех значений z, или всех значений z, кроме некоторых специальных точек, или, наконец, только зна-

*) Этот случай можно проиллюстрировать фигурой, в которой D, D_1, D_2 — круги с центрами в вершинах равностороннего треугольника и радиусами, чуть бо́льшими половины стороны треугольника. Функция может не быть аналитической в центре треугольника.

чений z, лежащих в некоторой области плоскости, за пределы которой мы не сможем выйти. В последнем случае эта область называется *областью существования* функции, а ее граница — *естественной границей* функции. В случае многозначных функций мы получим для некоторых или всех значений z много значений функции.

Это окончательное определение функции в целом зависит в первую очередь от частичного определения, с которого мы начали. Так как, однако, отношение между двумя функциями, каждая из которых является продолжением другой, взаимно, то все процессы могут быть обращены, и от того, с какого места мы начали построение функции, ее окончательное определение не зависит.

4.1.5. Стандартный метод продолжения. Стандартный метод продолжения есть метод степенных рядов. Предположим, что мы начинаем с ряда

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-a)^n,$$

сходящегося в круге $|z-a| < R$. Взяв в этом круге какую-нибудь точку b, отличную от a, мы вычисляем значение функции $f(b)$ и значения производных $f'(b)$, $f''(b)$, ..., и, таким образом, получаем разложение функции по степеням разности $z-b$. Новый ряд будет непременно сходиться в некотором круге с центром b, лежащим в первоначальном круге, и может сходиться в большем круге; так производится некоторое аналитическое продолжение функции. Этим способом вся аналитическая функция может быть построена из степенных рядов. Каждый степенной ряд, или, что то же самое, каждая последовательность значений $f(a)$, $f'(a)$, $f''(a)$, ... называется *элементом функции*.

Выбор этого специального метода в качестве стандартного оправдывается теоремой: *все значения функции, полученные любым методом продолжения, могут быть получены посредством степенных рядов.*

Пусть C — контур, соединяющий точки $z=a$ и $z=b$, вдоль которого мы как-либо продолжили функцию $f(z)$; это значит, что имеется такая последовательность формул, определяющих $f(z)$ в некоторой последовательности областей D_1, D_2, ..., что: (I) каждая точка контура C лежит внутри по крайней мере одной из областей D_n; (II) соседние области перекрываются и в их общих частях различные определения функции $f(z)$ совпадают.

Мы попытаемся осуществить тот же процесс посредством степенных рядов, т. е. попытаемся найти на C такую последовательность точек z_1, z_2, ..., что: круг сходимости с центром в каждой из них содержит следующую; значения функции, даваемые степенными рядами, совпадают с заданными значениями; при этом точка b может быть достигнута через конечное число шагов.

Каждой точке z на C отвечает некоторый положительный радиус сходимости ρ, и ρ *есть непрерывная функция от* z. Действительно, возьмем две близкие точки z, $z+h$ и обозначим через ρ, ρ' соответствующие радиусы сходимости. Пусть $|h|<\rho$. Так как функция $f(z)$ регулярна в круге с центром $z+h$ и радиусом $\rho-|h|$, то из теоремы Коши — Тейлора следует, что

$$\rho' \geqslant \rho - |h|. \tag{1}$$

Если $|h|<\rho'$, то, меняя местами z и $z+h$, мы заключаем из тех же соображений, что $\rho \geqslant \rho' - |h|$, т. е. что

$$\rho' \leqslant \rho + |h|. \tag{2}$$

Если же неравенство $|h|<\rho'$ не имеет места, то $\rho' \leqslant |h|$, так что неравенство (2) верно во всех случаях. Но вместе неравенства (1) и (2) показывают, что $\rho' \to \rho$ при $h \to 0$, а это мы и утверждали.

Так как функция ρ непрерывна, то она достигает на C своей нижней грани, а так как она всюду положительна, то и ее нижняя грань положительна. Обозначим эту нижнюю грань через δ.

Мы начинаем теперь с точки $z=a$ и строим степенной ряд. Пусть z_1 — точка контура, лежащая от a на расстоянии $\frac{1}{2}\delta$ вдоль контура. Она лежит внутри круга сходимости с центром a, так что мы можем построить разложение по степеням $z-z_1$. Новый радиус сходимости не меньше δ, благодаря чему мы можем, перемещаясь по контуру дальше, перейти к точке z_2, лежащей от z_1 на расстоянии $\frac{1}{2}\delta$ вдоль контура. Продолжая таким образом, мы, очевидно, через конечное число шагов достигнем точки $z=b$. Тот факт, что этим методом мы получим в точке b то же значение, что и исходным методом, следует из общей теоремы единственности.

4.1.6. Ветви многозначной функции. Мы определили аналитическую функцию как агрегат всех значений, которые могут быть получены продолжением из какого-нибудь элемента функции. В общем случае функция будет многозначной; это значит, что, отправляясь, скажем, от точки z_0 и перемещаясь по соответствующим образом выбранным путям, можно прийти к точке z_1 с различными значениями $f(z_1)$. Мы можем, однако, исключить это, ограничившись некоторой частичной областью; мы скажем тогда, что в этой области определена *ветвь* функции. Рассмотрим, например, функцию $\sqrt{z}$. Система значений, определяемая формулой $\sqrt{r}\, e^{\frac{1}{2}i\theta}$ при $-\pi<\theta<\pi$, есть ветвь этой функции в области, в которую плоскость превращается надрезом вдоль отрицательной части вещественной оси от начала до бесконечности, а система $-\sqrt{r}e^{\frac{1}{2}i\theta}$ есть другая ветвь той же функции в той же области. Подобным же образом функция $\log z$ имеет в этой области бесконечное множество ветвей, определяемых формулой

$$\log r + i(\theta + 2n\pi) \qquad (-\pi < \theta < \pi);$$

каждое целое число n дает свою ветвь.

Следует иметь в виду, что не существует единственного способа разложения функции на ветви; например, мы могли бы в предыдущих случаях разрезать плоскость от начала до бесконечности вдоль любой другой полупрямой. Однако, как бы мы это ни делали, мы всегда получим одно и то же число ветвей; например, функция $\sqrt{z}$ имеет две ветви. Вопрос о числе ветвей будет еще рассмотрен позже.

4.2. Особенности аналитической функции. Единственными особыми точками, рассмотренными нами до сих пор, были изолированные особые точки функции, аналитической и однозначной в некоторой области, а также точки, предельные для таких особых точек. Они были подразделены на полюсы и существенно особые точки. Теперь эта классификация оказывается недостаточной.

Мы будем говорить теперь, что однозначная аналитическая функция *регулярна* в каждой точке, внутренней для одного из кругов, использованных при ее продолжении из начального элемента, и что она сингулярна в каждой точке, предельной для точек регулярности, которая не является сама точкой регулярности. Точка, в которой функция сингулярна, называется особой точкой. Это определение охватывает полюсы и существенные особенности, которые мы рассматривали выше; но могут встретиться и особенности, не являющиеся изолированными. В § 4.7 мы построим функцию, для которой каждая точка единичной окружности является особой. Точки этого рода обычно также называют существенно особыми.

Термин «регулярная функция», как мы его здесь употребляем, означает больше, чем термин «аналитическая функция». Согласно определению § 2.1.4 функция может быть аналитической в точке, не будучи там регулярной. Пусть, например, $f(z) = e^{-1/z}$ при $-\frac{1}{4}\pi \leqslant \arg z \leqslant \frac{1}{4}\pi$, $|z| > 0$ и $f(z) = 0$ в остальных точках. Нетрудно проверить, что $f(z)$ аналитична при $z = 0$ и что $f'(0) = 0$. Рассмотрим, однако, контур, состоящий из сторон треугольника с вершинами в точках 0 и $1 \pm \frac{1}{2}i$. Функция аналитична всюду внутри этого контура и на самом контуре, но она, очевидно, не регулярна при $z = 0$. Однако указанное различие не так уж важно, поскольку его приходится делать только для функций, в некотором роде искусственных, подобных рассмотренной.

В теории многозначных функций встречаются особые точки другого рода, известные как *точки разветвления*. Предположим, что при продолжении функции $f(z)$ вдоль любой достаточно малой окружности с центром z_0 мы возвращаемся к исходной точке со значением функции, отличным от того, с которого мы начинали. Тогда z_0 называется точкой разветвления функции $f(z)$. Например, если мы продолжим функцию $\sqrt{z}=\sqrt{r}e^{\frac{1}{2}i\theta}$ вдоль окружности с центром $z=0$ и радиусом r от $\theta=0$ до $\theta=2\pi$, то значение функции изменится от $\sqrt{r}$ до $-\sqrt{r}$. Следовательно, $z=0$ есть точка разветвления функции $\sqrt{z}$. Подобным же образом $z=0$ есть точка разветвления функций $1/\sqrt{z}$ и $\log z$.

Заметим, что точка разветвления не обязана быть точкой «бесконечности» функции.

Ветвь многозначной функции может, конечно, иметь полюсы и существенные особенности, и точка может быть особой для одной ветви функции, не будучи особой для другой ветви. Например, точка $z=1$ является полюсом для той ветви функции $1/\log z$, которая соответствует ветви функции $\log z$, обращающейся при $z=1$ в нуль, но не является полюсом ни для какой другой ветви. Для многозначных функций общее определение регулярных и особых точек не столь просто, как для однозначных функций, и обычно бывает достаточно рассматривать отдельные ветви. Мы определяем регулярную точку ветви таким же образом, как для однозначной функции; но такая особая точка, как точка разветвления, не может быть приписана отдельной ветви.

Примеры. (I) Функция z^a, определенная как $e^{a\log z}$, имеет бесконечно много значений, если только a не является рациональным вещественным числом; в последнем случае она имеет конечное число значений.

(II) Функция $z^{1/3}(1-z)^{1/2}$ имеет шесть значений.

(III) Одна из ветвей функции $\frac{1}{z}\log\frac{1}{1-z}$ представляется при $|z|<1$ рядом

$$\frac{1}{z}\left(z+\frac{1}{2}z^2+\frac{1}{3}z^3+\ldots\right),$$

и $z=0$ есть регулярная точка этой ветви; но для всякой другой ветви точка $z=0$ служит полюсом.

(IV) Функция $\left\{\log\frac{1}{1-z}\right\}^{1/2}$ имеет особенности при $z=0$ и $z=1$; $z=0$ есть точка разветвления двузначной функции, соответствующей одной из ветвей логарифма.

(V) Рассмотреть особенности функции $\log\log z$.

4.2.1. *Если радиус сходимости ряда*

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^n$$

конечен, то функция $f(z)$ имеет по крайней мере одну особенность на границе круга сходимости.

Пусть C — граница круга сходимости, R — его радиус и C' — концентрическая с C окружность радиуса $R' < R$. Пусть ρ — радиус сходимости степенного ряда, построенного для точки z, лежащей на C'. Как в § 4.1.5, ρ есть непрерывная функция от z. Кроме того, $\rho \geqslant R - R'$, так что, если δ — нижняя грань значений ρ на C', то $\delta \geqslant R - R'$.

Если $\delta > R - R'$, то круги сходимости с центрами в точках окружности C' все вместе покрывают кольцо $R' - \delta < |z| < R' + \delta$ и функция $f(z)$ оказывается регулярной в круге $|z| < R' + \delta$, большем чем круг $|z| < R$. Следовательно (теорема Коши — Тейлора), радиус сходимости ряда $\sum a_n z^n$ больше R, что заключает в себе противоречие.

Итак, $\delta = R - R'$. Поскольку непрерывная функция должна достигать на C' своей нижней грани, то на C' имеется точка, скажем $R'e^{i\alpha}$, в которой $\rho = R - R'$. Оказывается, что $Re^{i\alpha}$ есть особая точка функции $f(z)$. Действительно, если бы эта точка была регулярной, то функция $f(z)$ была бы регулярна в некотором круге с центром $z = Re^{i\alpha}$, а тогда радиус сходимости в точке $R'e^{i\alpha}$ был бы больше $R - R'$.

Этим существование особенности на границе круга сходимости установлено. Мы можем говорить о ней, как об особенности, ближайшей к началу, или как об одной из ближайших. Таким образом, можно сказать, что граница круга сходимости проходит через ближайшую к началу особую точку функции.

4.2.2. *Если при продолжении аналитической функции $f(z)$ вдоль двух путей, ведущих из z_0 в z_1, получаются различные значения $f(z_1)$, то между этими путями функция $f(z)$ должна иметь особенность.*

Мы строим две цепи областей, скажем $D_1, \ldots, D_m$ и $D'_1, \ldots$ $\ldots, D'_n$, в которых: соседние области каждой цепи перекрываются; D_1 и D'_1 содержат z_0; D_m и D'_n содержат z_1; функция $f_k(z)$ аналитична в D_k, функция $g_k(z)$ аналитична в D'_k; $f_k(z) = f_{k-1}(z)$ — в общей части областей D_k и D_{k-1}, $g_k(z) = g_{k-1}(z)$ — в общей части областей D'_k и D'_{k-1}; $f_1(z) = g_1(z)$ — в общей части областей D_1 и D'_1.

Мы должны доказать, что если функцию можно продолжить до любой точки, лежащей между путями, то $f_m(z_1) = g_n(z_1)$.

Если δ достаточно мало, то существует такая полигональная линия, ведущая из некоторой лежащей в $D_1D'_1$ точки a в некоторую лежащую в $D_mD'_n$ точку b, с вершинами в точках вида $(p\delta, q\delta)$, что круги радиуса 2δ с центрами в этих вершинах лежат целиком в первой цепи и каждый содержит центр следующего. Этой цепью кругов может быть заменена первая цепь областей. Подобной же цепью кругов, с тем же самым δ, может быть заменена и вторая цепь областей.

Теперь мы можем последовательно заменять первую цепь новыми цепями, состоящими из кругов радиуса 2δ с центрами в точках вида $(p\delta,\ q\delta)$, каждый из которых перекрывается с предыдущей цепью и с кругами своей цепи, лежащими от него по обе стороны, так что непокрытого пространства не остается. То, что все радиусы можно взять не меньшими 2δ, следует из предыдущей теоремы в силу отсутствия особенностей. Из общего принципа единственности продолжения следует, что по всем этим цепям мы придем к z_1 с одним и тем же значением $f(z_1)$. Таким образом, мы через конечное число шагов перейдем от одной из наших первоначальных цепей кругов к другой; так как функция регулярна в каждой точке между заданными путями, то процесс не может оборваться.

4.3. Римановы поверхности. Функция $\sqrt{z}$ двузначна. Но если мы положим $z = re^{i\theta}$ и условимся различать одинаковые значения z, отвечающие различным значениям θ, то ее можно представить как однозначную функцию. Допустим, что мы рассматриваем значения z, соответствующие значениям θ в интервале $\pi < \theta < 3\pi$, как отличные от значений z, соответствующих значениям θ при $-\pi < \theta < \pi$, но значения z в интервале $3\pi < \theta < 5\pi$ рассматриваем опять как те же, что в интервале $-\pi < \theta < \pi$, и т. д. Это эквивалентно замене обыкновенной плоскости z двумя плоскостями. Мы можем представлять их себе наложенными друг на друга, надрезанными вдоль отрицательной части вещественной оси и соединенными крест-накрест вдоль надреза. Полученная таким образом конфигурация называется римановой поверхностью функции $\sqrt{z}$.

Если мы будем перемещаться вдоль пути, обходящего начало, отправляясь от отрицательной части вещественной оси в верхней плоскости, то мы один раз обойдем верхнюю плоскость, потом перейдем в нижнюю плоскость, один раз обойдем ее и возвратимся в верхнюю плоскость.

Это соответствует способу, которым мы получаем два различных значения $\sqrt{z}$. В верхней плоскости $-\pi < \theta < \pi$, так что $-\frac{1}{2}\pi < \frac{1}{2}\theta < \frac{1}{2}\pi$, в нижней плоскости $\pi < \theta < 3\pi$, так что $\frac{1}{2}\pi < \frac{1}{2}\theta < \frac{3}{2}\pi$. Если θ возрастает далее, то мы возвращаемся в верхнюю плоскость и значения повторяются. Таким образом, на своей римановой поверхности $\sqrt{z}$ есть однозначная функция.

Функцию $\log z$ мы представляем подобным же образом на бесконечно многих наложенных друг на друга плоскостях, каждая из которых надрезана вдоль отрицательной части вещественной оси и соединена нижним ребром с верхним ребром плоскости, лежащей под ней. В этом случае при обходе начала возврата к исходной точке нет.

Для функции $\sqrt{(z-a)(z-b)}$ мы можем произвести разрез в каждой из двух плоскостей вдоль отрезка прямой, соединяющего точки $z=a$ и $z=b$, и соединить плоскости крест-накрест вдоль разреза.

Число ветвей многозначной функции может быть определено как минимальное число плоскостей, нужных для образования римановой поверхности, на которой функция однозначна.

Для построения римановых поверхностей более сложных функций требуется значительное искусство. Они имеют большое значение в общей теории многозначных функций, однако их дальнейшее рассмотрение выходит за рамки этой главы.

4.4. Функции, определенные интегралами. Мы знаем, что если z — положительное вещественное число, то

$$\int_0^\infty e^{-zt}\,dt = \frac{1}{z}. \tag{1}$$

Но интеграл равномерно сходится во всякой конечной области, где $\operatorname{Re}(z) \geqslant a > 0$, и потому представляет аналитическую функцию, регулярную при $\operatorname{Re}(z) > 0$. Таким образом, функция

$$F(z) = \int_0^\infty e^{-zt}\,dt - \frac{1}{z}$$

регулярна при $\operatorname{Re}(z) > 0$ и $=0$ на вещественной оси. Следовательно, $F(z)=0$ всюду, где функция $F(z)$ регулярна, т. е. формула (1) верна для всех комплексных значений z, вещественная часть которых положительна. Мы можем положить $z=x+iy$ $(x>0)$ и разделить вещественные и мнимые части; мы получим хорошо известные формулы:

$$\int_0^\infty e^{-xt}\cos yt\,dt = \frac{x}{x^2+y^2}, \qquad \int_0^\infty e^{-xt}\sin yt\,dt = \frac{y}{x^2+y^2}. \tag{2}$$

Примеры. (1) Доказать, что

$$\int_0^\infty e^{-zt^2}\,dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{z}} \qquad (\operatorname{Re}(z) > 0).$$

[Если предположить формулу известной для вещественных значений z, то общую формулу можно получить с помощью аналитического продолжения или с помощью теоремы Коши, поворачивая прямую интегрирования на угол $-\frac{1}{2}\arg z$.]

(II) Доказать, что $\int\limits_0^\pi \frac{dt}{1-z\cos t} = \frac{\pi}{\sqrt{1-z^2}}$, если только z не есть вещественное число, большее чем 1 по абсолютной величине.

4.4.1. Гамма-функция. Формула

$$\Gamma(z) = \int\limits_0^\infty e^{-w} w^{z-1}\,dw \tag{1}$$

определяет $\Gamma(z)$ как аналитическую функцию, регулярную при $\operatorname{Re}(z) > 0$ (§ 2.8.5). Сама по себе она ничего не говорит нам о поведении $\Gamma(z)$ на мнимой оси или слева от нее.

Рассмотрим, однако, функцию

$$f(z) = \int\limits_C e^{-w}(-w)^{z-1}\,dw, \tag{2}$$

где C состоит из части вещественной оси от ∞ до δ, окружности $|w| = \delta$, описываемой в положительном направлении, и той же части вещественной оси, но от δ до ∞. Значения многозначной функции $(-w)^{z-1} = e^{(z-1)\log(-w)}$ определяются тем, что при $w = -\delta$ значение $\log(-w)$ должно быть положительным. Контурный интеграл равномерно сходится в каждой конечной области плоскости z, и возникает лишь вопрос о сходимости в бесконечности; но он относится к случаю, уже рассмотренному в § 1.5.1. Следовательно, функция $f(z)$ регулярна при всех конечных значениях z.

Если $w = \rho e^{i\varphi}$, то на контуре $\log w = \log\rho + i(\varphi - \pi)$. Поэтому интегралы, взятые вдоль вещественной оси, дают в сумме

$$\int\limits_\delta^\infty \{-e^{-\rho+(z-1)(\log\rho - i\pi)} + e^{-\rho+(z-1)(\log\rho+i\pi)}\}\,d\rho = -2i\sin z\pi \int\limits_\delta^\infty e^{-\rho}\rho^{z-1}\,d\rho.$$

На окружности

$$|(-w)^{z-1}| = |e^{(z-1)\{\log\delta + i(\varphi-\pi)\}}| = e^{(x-1)\log\delta - y(\varphi-\pi)} = O(\delta^{x-1}).$$

Поэтому при $\delta \to 0$ и $x > 0$ интеграл вдоль окружности есть $O(\delta^x) = o(1)$, и, заставляя δ стремиться к нулю, мы видим, что

$$f(z) = -2i\sin z\pi \int\limits_0^\infty e^{-\rho}\rho^{z-1}\,d\rho = -2i\sin z\pi\,\Gamma(z) \qquad (\operatorname{Re}(z) > 0).$$

Но функция $\frac{1}{2}if(z)\operatorname{cosec} z\pi$ регулярна при всех значениях z, за возможным исключением полюсов функции $\operatorname{cosec} z\pi$, т. е. точек $z = 0, \pm1, \pm2, \ldots$; кроме того, при $\operatorname{Re}(z) > 0$ она равна $\Gamma(z)$. Поэтому мы можем считать эту функцию продолжением функции $\Gamma(z)$ на всю плоскость z. Мы уже знаем, что функция $\Gamma(z)$ регулярна при $z = 1, 2, \ldots$ Следовательно, единственные возможные полюсы — это точки $z = 0, -1, -2, \ldots$

Эти точки действительно являются полюсами функции $\Gamma(z)$. В самом деле, если z — отрицательное целое число или нуль, то $(-w)^{z-1}$ есть однозначная функция и интеграл (2) может быть вычислен с помощью теории вычетов. Именно,

$$f(-n) = -\frac{2\pi i}{n!},$$

так что вычет функции $\Gamma(z)$ есть

$$\lim_{z\to -n} \frac{2\pi i}{n!}\frac{z+n}{2i\sin z\pi} = \frac{(-1)^n}{n!}.$$

Все формулы, полученные нами для гамма-функции, могут быть теперь распространены на комплексные значения z. Например, функциональное соотношение

$$\Gamma(z)\ \Gamma(1-z) = \pi \operatorname{cosec} z\pi,$$

доказанное нами в предположении, что z — вещественное число и $0 < z < 1$, остается верным для всех нецелых значений z.

Одно из следствий этой формулы состоит в том, что $1/\Gamma(z)$ есть целая функция. Действительно, в силу этой формулы все полюсы функции $\Gamma(1-z)$ гасятся нулями функции $\sin z\pi$.

Мы можем теперь доказать для $\Gamma(z)$ формулу, подобную формулам §§ 3.2.2—3.2.3. Согласно формуле (4) из § 1.8.6

$$\frac{\Gamma(z-h)\Gamma(h)}{\Gamma(z)} = \frac{1}{h} + \int_0^1 \{(1-t)^{z-h-1}-1\}\, t^{h-1}\,dt =$$
$$= \frac{1}{h} + \int_0^1 \{(1-t)^{z-1}-1\}\, t^{-1}\,dt + o(1) \qquad (0<h<x)$$

при $h\to 0$. Левая часть равна

$$\frac{1}{\Gamma(z)}\left\{\Gamma(z) - h\Gamma'(z) + \ldots\right\}\left\{\frac{1}{h} + A + \ldots\right\},$$

где A — постоянная. Приравнивая постоянные члены, мы видим, что

$$\frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)} = \int_0^1 \{1-(1-t)^{z-1}\}\frac{dt}{t} - A \qquad (x>0).$$

Далее, $\frac{1}{t} = \sum (1-t)^n$, и почленное интегрирование дает:

$$\frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)} = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+z}\right) - A.$$

Эта процедура оправдана, согласно § 1.7.7, если $z>1$; но результат сохраняет силу, согласно принципу аналитического продолжения, для всех значений z, кроме неположительных целых значений.

Эту формулу нетрудно преобразовать к виду

$$\frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)} + \frac{1}{z} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+z}\right) - C,$$

где C — другая постоянная. Интегрируя и переходя к экспоненциалам, мы получаем равенство

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = e^{Cz} z \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right) e^{-z/n}.$$

При $z = 1$ оно означает, что

$$1 = e^{C} \prod_{1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right) e^{-1/n}.$$

Следовательно,

$$C = -\log \prod_{1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right) e^{-\frac{1}{n}} = \lim_{N \to \infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{N} - \log N\right) = \gamma;$$

γ есть постоянная Эйлера.

4.4.2. Формула Стирлинга для комплексных значений z. Из формулы предыдущего параграфа следует, что

$$\log \Gamma(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \left\{\frac{z}{n} - \log\left(1 + \frac{z}{n}\right)\right\} - \gamma z - \log z, \tag{1}$$

где взяты главные значения всех логарифмов. Нетрудно проверить, что

$$\int_0^N \frac{[u] - u + \frac{1}{2}}{u+z}\, du = \sum_{n=0}^{N-1} \int_n^{n+1} \left(\frac{n + \frac{1}{2} + z}{u+z} - 1\right) du =$$

$$= \sum_{n=1}^{N-1} \left\{\frac{z}{n} - \log\left(1 + \frac{z}{n}\right)\right\} - \log\{(N-1)!\} - z\left(1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{N-1}\right) -$$

$$- \left(z + \frac{1}{2}\right) \log z + \left(N - \frac{1}{2} + z\right) \log (N + z) - N.$$

Пользуясь теперь формулой (1) из § 1.8.7 и соотношениями

$$1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{N-1} = \log N + \gamma + o(1),$$

$$\log(N + z) = \log N + \frac{z}{N} + O\left(\frac{1}{N^2}\right)$$

и заставляя N стремиться к бесконечности, мы видим, что

$$\log\Gamma(z)=\left(z-\frac{1}{2}\right)\log z-z+\frac{1}{2}\log 2\pi+\int_0^\infty\frac{[u]-u+\frac{1}{2}}{u+z}\,du. \qquad (2)$$

Положим $\varphi(u)=\int_0^u\left([v]-v+\frac{1}{2}\right)dv$. Функция $\varphi(u)$ ограничена, так как при целом n, очевидно, $\varphi(n+1)=\varphi(n)$. Таким образом, последний член в формуле (2) представляется как

$$\int_0^\infty\frac{\varphi'(u)}{u+z}\,du=\int_0^\infty\frac{\varphi(u)}{(u+z)^2}\,du=O\left\{\int_0^\infty\frac{du}{u^2+r^2-2ur\cos\delta}\right\}=O\left(\frac{1}{r}\right)$$

равномерно при $-\pi+\delta\leqslant\arg z\leqslant\pi-\delta$. Это и есть обобщение формулы Стирлинга на комплексные значения z.

Примеры. (I) Для всякой постоянной a при $|z|\to\infty$

$$\log\Gamma(z+a)=\left(z+a-\frac{1}{2}\right)\log z-z+\frac{1}{2}\log 2\pi+O\left(\frac{1}{|z|}\right)$$

равномерно при $-\pi+\delta\leqslant\arg z\leqslant\pi-\delta$.

(II) Для всякого фиксированного значения x при $y\to\pm\infty$

$$|\Gamma(x+iy)|\sim e^{-\frac{1}{2}\pi|y|}\,|y|^{x-\frac{1}{2}}\sqrt{2\pi}.$$

(III) Показать, что разложение $\varphi(u)=\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{1-\cos 2\nu\pi u}{2\pi^2\nu^2}$ может быть вставлено в предыдущую формулу с последующим почленным интегрированием. Вывести из этого, что интеграл в формуле (2) равен

$$\frac{1}{12z}+O\left(\frac{1}{|z|^2}\right).$$

Этот процесс последовательного вычисления новых членов может быть продолжен неограниченно повторным интегрированием по частям.

(IV) Доказать, что при $a>0$, $c>0$

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty}\Gamma(z)\,a^{-z}\,dz=e^{-a}.$$

[Взять интеграл вдоль контура прямоугольника $x=c$, $x=-n-\frac{1}{2}$, $y=\pm Y$. При фиксированном n интегралы, взятые вдоль горизонтальных сторон, стремятся к нулю, когда $Y\to\infty$. Далее,

$$\Gamma\left(-n-\frac{1}{2}+iy\right)=$$

$$=\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}+iy\right)}{\left(-n-\frac{1}{2}+iy\right)\left(-n+\frac{1}{2}+iy\right)\dots\left(-\frac{1}{2}+iy\right)}=O\left(\frac{e^{-A|y|}}{n!}\right),$$

так что интеграл, взятый вдоль прямой $\left(-n-\frac{1}{2}-i\infty,\ -n-\frac{1}{2}+i\infty\right)$, стремится к нулю при $n\to\infty$. Остальное следует из теоремы о вычетах.]

(V) Доказать, что при $0<c<k$, $0<a<1$

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{c-i\infty}^{c+i\infty}\Gamma(z)\Gamma(k-z)a^{-z}\,dz=\frac{\Gamma(k)}{(1+a)^k}.$$

4.4.3. Дзета-функция. Функция $\zeta(z)$, первоначально определенная рядом

$$\zeta(z)=\frac{1}{1^z}+\frac{1}{2^z}+\ldots\qquad(\operatorname{Re}(z)>1),\tag{1}$$

как было показано (§ 1.7.8 (II)), представляется также формулой

$$\zeta(z)=\frac{1}{\Gamma(z)}\int\limits_0^\infty\frac{w^{z-1}}{e^w-1}\,dw\qquad(\operatorname{Re}(z)>1).\tag{2}$$

Мы можем воспользоваться этой формулой для того, чтобы продолжить $\zeta(z)$ через прямую $x=1$ таким же образом, как мы продолжили $\Gamma(z)$ через прямую $x=0$. Действительно, в точности тем же методом можно доказать, что при $\operatorname{Re}(z)>1$

$$\zeta(z)=-\frac{1}{2i\sin z\pi\Gamma(z)}\int\limits_C\frac{(-w)^{z-1}}{e^w-1}\,dw,\tag{3}$$

где, как и раньше, контур C приходит из положительной бесконечности и один раз обходит начало в положительном направлении. Единственное различие состоит в том, что теперь он должен оставлять в своей внешней области все полюсы функции $1/(e^w-1)$, отличные от точки $w=0$, т. е. все точки $w=\pm 2i\pi$, $\pm 4i\pi$, ...

Пользуясь функциональным уравнением гамма-функции, мы можем представить эту формулу в виде

$$\zeta(z)=\frac{i\Gamma(1-z)}{2\pi}\int\limits_C\frac{(-w)^{z-1}}{e^w-1}\,dw.$$

Как и в случае функции Γ, контурный интеграл есть целая функция от z. Поэтому формула осуществляет продолжение функции $\zeta(z)$ на всю плоскость. Единственными возможными особыми точками являются полюсы функции $\Gamma(1-z)$, т. е. точки $z=1, 2, \ldots$ Но мы уже знаем, что функция $\zeta(z)$ регулярна при $z=2, 3, \ldots$ Следовательно, единственный возможный полюс есть точка $z=1$. Это действительно полюс, притом простой, с вычетом 1. В самом деле, при $z=1$ контурный интеграл, согласно теореме о вычетах, равен

$$\int\limits_C \frac{dw}{e^w-1}=2\pi i,$$

а $\Gamma(1-z)$ имеет при $z=1$ простой полюс с вычетом -1.

Хорошо известно, что

$$\frac{1}{e^w-1}=\frac{1}{w}-\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}B_n w^{2n-1}}{(2n)!},$$

где B_n — рациональные числа (числа Бернулли). Пользуясь этим и теоремой о вычетах, можно вычислить $\zeta(-n)$ с любым положительным целым n. Вычисление дает:

$$\zeta(0)=-\frac{1}{2},\qquad \zeta(-2m)=0\quad (m=1,\ 2,\ \ldots),$$

$$\zeta(-2m-1)=\frac{(-1)^{m+1}B_{m+1}}{2m+2}\qquad (m=0,\ 1,\ \ldots).$$

4.4.4. Функциональное уравнение дзета-функции. Функция ζ удовлетворяет функциональному уравнению

$$\zeta(1-z)=2^{1-z}\pi^{-z}\cos\frac{1}{2}\pi z\Gamma(z)\zeta(z).$$

чтобы доказать это, воспользуемся формулой (3) предыдущего параграфа, в которой теперь z может иметь любое значение, и продеформируем контур C в контур C_n, составленный из контура квадрата с центром в начале и сторонами, параллельными осям, длина каждой из которых равна $(4n+2)\pi$, и части вещественной оси от точки $(2n+1)\pi$ до $+\infty$. В процессе деформации мы пройдем через полюсы подынтегральной функции, расположенные в точках $2i\pi$, $4i\pi$, ..., $2ni\pi$ и $-2i\pi$, ..., $-2ni\pi$. Вычет относительно точки $2\nu i\pi$ с $\nu>0$ равен

$$e^{(z-1)\left(\log 2\nu\pi-\frac{1}{2}i\pi\right)}=(2\nu\pi)^{z-1}ie^{-\frac{1}{2}i\pi z},$$

а вычет относительно точки $-2\nu i\pi$ равен

$$e^{(z-1)\left(\log 2\nu\pi+\frac{1}{2}i\pi\right)}=-(2\nu\pi)^{z-1}ie^{\frac{1}{2}i\pi z}.$$

Сумма этих двух вычетов равна $(2\nu\pi)^{z-1}2\sin\frac{1}{2}\pi z$. Таким образом, формула (3) из § 4.4.3 дает:

$$\sin\pi z\Gamma(z)\zeta(z)=-\frac{1}{2i}\int\limits_{C_n}\frac{(-w)^{z-1}}{e^w-1}dw+2\pi\sin\frac{1}{2}\pi z\sum_{\nu=1}^{n}(2\nu\pi)^{z-1}.$$

Пусть теперь $\operatorname{Re}(z)<0$. На контуре квадрата

$$|(-w)^{z-1}|=e^{(x-1)\log|w|-y\arg(-w)}=O(n^{x-1})$$

и $|e^w - 1| > A$, в то время как длина этого контура есть $O(n)$. Следовательно, соответствующая часть интеграла есть $O(n^x)$ и, значит, стремится к нулю. Остающаяся часть интеграла, очевидно, также стремится к нулю. Переходя к пределу при $n \to \infty$, мы получаем равенство

$$\sin \pi z \Gamma(z) \zeta(z) = 2\pi \sin \frac{1}{2} \pi z (2\pi)^{z-1} \sum_{\nu=1}^{\infty} \nu^{z-1} = \\ = 2\pi \sin \frac{1}{2} \pi z (2\pi)^{z-1} \zeta(1-z),$$

равносильное доказываемому. Этим последнее установлено при $\operatorname{Re}(z) < 0$ и, следовательно, для всех значений z.

4.4.5. Другое доказательство. Совершенно иначе проводится следующее доказательство *). Положим

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin(2n+1)x}{2n+1}. \tag{1}$$

Этот ряд ограниченно сходится, и $f(x) = (-1)^m \frac{1}{4} \pi$ при $m\pi < x < (m+1)\pi$ $(m = 0, 1, 2, \ldots)$; действительно,

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin 2nx}{2n},$$

так что мы можем сослаться на пример (II) § 1.7.6. Ограниченная сходимость позволяет умножить соотношение (1) на x^{p-1} $(0 < p < 1)$ и проинтегрировать почленно в любом конечном интервале $(0, X)$. Это дает:

$$\int_0^X x^{p-1} f(x)\, dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1} \int_0^X x^{p-1} \sin(2n+1) x\, dx. \tag{2}$$

Далее, мы можем заменить интервал $(0, X)$ интервалом $(0, \infty)$. Это вытекает из соотношения

$$\lim_{X \to \infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1} \int_X^{\infty} x^{p-1} \sin(2n+1) x dx = 0, \tag{3}$$

которое получается интегрированием по частям. Именно, послед-

---

*) Hardy [15].

ний интеграл равен

$$X^{p-1}\frac{\cos(2n+1)X}{2n+1}+\frac{p-1}{2n+1}\int\limits_X^\infty x^{p-2}\cos(2n+1)x\,dx=$$
$$=O\left(\frac{X^{p-1}}{2n+1}\right)+O\left(\frac{1}{2n+1}\int\limits_X^\infty x^{p-2}\,dx\right)=O\left(\frac{X^{p-1}}{2n+1}\right),$$

что и доказывает соотношение (3).

Вставляя теперь в формулу (2) значение $f(x)$ и вычисляя интегралы в правой части по § 3.1.2.7, мы получаем равенство

$$\frac{1}{4}\pi\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m\int\limits_{m\pi}^{(m+1)\pi}x^{p-1}dx=\Gamma(p)\sin\frac{1}{2}p\pi\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^{p+1}}.$$

Ряд в правой части сходится к

$$(1-2^{-p-1})\,\zeta(p+1),$$

а ряд в левой части есть

$$\frac{\pi^p}{p}\left[1+\sum_{m=1}^{\infty}(-1)^m\{(m+1)^p-m^p\}\right].$$

Ряд в скобках сходится при вещественном $p<1$ и при комплексном p с $\mathrm{Re}(p)<1$, и как показывает небольшое уточнение предыдущих рассмотрений, его сходимость равномерна при $\mathrm{Re}(p)\leqslant 1-\delta<1$. Его сумма есть поэтому аналитическая функция от p, регулярная при $\mathrm{Re}(p)<1$. Но при вещественном $p<0$ она равна

$$2(1^p-2^p+3^p-\ldots)=2(1-2^{p+1})\,\zeta(-p).$$

Согласно теории аналитического продолжения она такова же вообще при $\mathrm{Re}(p)<1$.

Итак, при $0<p<1$

$$\frac{\pi^{p+1}}{2p}(1-2^{p+1})\,\zeta(-p)=\Gamma(p)\sin\frac{1}{2}p\pi\,(1-2^{-p-1})\,\zeta(p+1),$$

и, полагая $p=z-1$, мы получаем то же функциональное уравнение, что и выше. Доказательство проходит только при $1<z<2$, но результат, полученный для этих значений, сохраняет силу, согласно теории аналитического продолжения, для всех значений z.

4.5. Принцип отражения. *Пусть $f(x)$ — аналитическая функция, регулярная в области D, пересекающейся с вещественной осью, и вещественная на вещественной оси. Тогда $f(z)$ принимает в сопряженных точках сопряженные значения.*

Пусть z_0 — внутренняя точка области D, лежащая на вещественной оси. Тогда для достаточно малых значений $|z-z_0|$

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n.$$

Все коэффициенты a_n вещественны. Действительно,

$$a_0=f(z_0), \quad a_1=f'(z_0), \ \ldots$$

Вещественность коэффициента a_0 очевидна. Коэффициент a_1 может быть вычислен как предел отношения $\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}$ при $z \to z_0$ по вещественным значениям. Следовательно, и коэффициент a_1 является вещественным, и таким же образом вещественны все коэффициенты.

Этим в круге сходимости ряда сопряженность значений функции $f(z)$ в сопряженных точках установлена. В полном объеме теорема может быть получена теперь аналитическим продолжением. Действительно, степенные разложения вокруг сопряженных точек всегда будут иметь сопряженные коэффициенты.

4.5.1. Один из методов аналитического продолжения описывается «принципом отражения» Римана — Шварца. Этот принцип содержится в следующей теореме, которая является своего рода обращением предыдущей.

Предположим, что часть границы некоторой области D плоскости z есть прямолинейный отрезок l. Пусть $w=f(z)$ — аналитическая функция, регулярная в D и непрерывная на l, и пусть w пробегает в своей плоскости прямолинейный отрезок w, когда z пробегает l. Пусть z_1 — образ точки z при отражении в l, и w_1 — образ точки w при отражении в λ. Тогда функция $w_1 = w_1(z_1)$ является аналитическим продолжением функции w.

Прежде всего, w_1 есть аналитическая функция от z_1. Действительно, нетрудно проверить, что если точке z' соответствует точка w' и z_1', w_1' — образы этих точек при отражениях, то $|z_1'-z_1| = |z'-z|$, $|w_1'-w_1|=|w'-w|$ и

$$\arg(z_1'-z_1)=2\alpha-\arg(z'-z), \quad \arg(w_1'-w_1)=2\beta-\arg(w'-w),$$

где α — угол между l и вещественной осью, а β — угол между λ и вещественной осью. Если теперь $z' \to z$, то существует предел $\lim \frac{w'-w}{z'-z}$, и следовательно, существуют оба предела *)

$$\lim \left| \frac{w'-w}{z'-z} \right|, \quad \lim \{\arg(w'-w)-\arg(z'-z)\}.$$

*) Второй предел может не существовать, если первый равен нулю, но тогда существование предела $\lim \frac{w_1'-w_1}{z_1'-z_1}$ очевидно: он равен нулю. (*Примечание переводчика.*)

Поэтому существуют пределы

$$\lim\left|\frac{w_1'-w_1}{z_1'-z_1}\right|, \quad \lim\{\arg(w_1'-w_1)-\arg(z_1'-z_1)\},$$

и с ними существует предел $\lim\frac{w_1'-w_1}{z_1'-z_1}$, а это и значит, что w_1 есть аналитическая функция от z_1.

Ясно далее, что $w_1=w$ на l.

Чтобы доказать, что эти функции являются аналитическими продолжениями друг друга, возьмем внутри l произвольную точку и опишем вокруг нее окружность C, столь малую, что ограничиваемый ею круг целиком покрывается областью D и ее образом D_1 при отражении в l. Пусть c — граница части этого круга, лежащей в D, и c_1 — граница части, лежащей в D_1. Пусть $\varphi(z)=w$ в части круга, лежащей в D, и $\varphi(z)=w_1$ в остальной части круга. Функция $\varphi(z)$ непрерывна, и достаточно доказать, что она аналитична.

Пусть z_0 — точка, лежащая внутри круга и внутри D. Тогда (см. конец § 2.3.5)

$$\varphi(z_0)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_c\frac{\varphi(z)}{z-z_0}\,dz.$$

Так как функция $\frac{\varphi(z)}{z-z_0}$ регулярна в D_1, то

$$0=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{c_1}\frac{\varphi(z)}{z-z_0}\,dz.$$

При сложении этих равенств интегралы, взятые вдоль l, сокращаются, и мы получаем формулу

$$\varphi(z_0)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_C\frac{\varphi(z)}{z-z_0}\,dz. \tag{1}$$

Ясно, что та же формула получится, если z_0 лежит внутри круга и внутри D_1, а так как обе части формулы (1) непрерывны, то она остается верной и в случае, когда z_0 есть внутренняя к C точка отрезка l. Поскольку правая часть этой формулы есть аналитическая функция от z_0, регулярная внутри C (ср. § 2.8), этим теорема доказана.

Метод доказательства в действительности дает более общую теорему: *если функции $f(z)$, $f_1(z)$ аналитичны и регулярны в областях D, D_1, разделенных контуром C, на котором они непрерывны и принимают одинаковые значения, то они являются аналитическими продолжениями друг друга.*

4.6. Мультипликационная теорема Адамара *). Следующая проблема, рассмотренная Адамаром, дает хороший пример применения принципов теории аналитического продолжения. Предположим, что ряд $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ сходится при $|z|<R$, что ряд $g(z)=\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$ сходится при $|z|<R'$ и что особенности функций $f(z)$ и $g(z)$ известны. Что можно сказать об особенностях функции

$$F(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n b_n z^n, \tag{1}$$

у которой коэффициенты ряда являются произведениями коэффициентов предыдущих рядов?

Общая теорема состоит в том, что *если $f(z)$ имеет особые точки $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$, а $g(z)$ — особые точки $\beta_1, \beta_2, \ldots$, то особые точки функции $F(z)$ находятся среди точек $\alpha_m\beta_n$.*

Предположим, чтобы рассмотреть простейший случай, что $f(z)$ имеет только одну особенность $z=\alpha$ и $g(z)$ — только одну особенность $z=\beta$.

Прежде всего, функция $F(z)$ регулярна при достаточно малых значениях z, а именно, при $|z|<RR'$. Действительно, если $\varepsilon>0$, то

$$|a_n(R-\varepsilon)^n|<K, \quad |b_n(R'-\varepsilon)^n|<K,$$

так что $|a_n b_n|<\frac{K}{\{(R-\varepsilon)(R'-\varepsilon)\}^n}$. Поскольку ε произвольно мало, радиус сходимости ряда (1) по меньшей мере равен RR'.

Теорема Адамара получается из интегральной формулы

$$F(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_C f(w)\, g\left(\frac{z}{w}\right)\frac{dw}{w}, \tag{2}$$

где C — охватывающий начало контур, на котором $|w|<R$, $|z/w|<R'$. Чтобы доказать эту формулу, подставим в интеграл ряд

$$g\left(\frac{z}{w}\right)=\sum_{n=0}^{\infty} b_n\left(\frac{z}{w}\right)^n$$

и произведем почленное интегрирование, которое возможно в силу равномерной сходимости. Мы получим:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C f(w)\, g\left(\frac{z}{w}\right)\frac{dw}{w}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{b_n z^n}{2\pi i}\int_C \frac{f(w)}{w^{n+1}}dw=\sum_{n=0}^{\infty} a_n b_n z^n,$$

*) Hadamard [3].

что и требуется. Для того чтобы были выполнены неравенства $|w|<R$, $|z/w|<R'$, необходимо, конечно, неравенство $|z|<RR'$. Если оно выполнено, то в качестве C можно взять, например, любую окружность, лежащую между окружностями $|w|=R$ и $|w|=|z|/R'$.

В рассматриваемом простейшем случае, когда функции $f(z)$, $g(z)$ имеют по одной особой точке, $R=|\alpha|$, $R'=|\beta|$.

Продолжим теперь функцию $F(z)$ за пределы круга $|z|<RR'$ путем деформации контура C. Пока C остается фиксированным, z в формуле (2) может принимать любые значения, при которых $\frac{z}{\beta}$ остается внутри C. Действительно, по § 2.8.3 правая часть формулы (2) есть аналитическая функция от z для всех указанных значений z, откуда сразу получается продолжение функции $F(z)$ на все такие значения.

Пусть контур C деформируется в другой контур, C_1, охватывающий точку $z=0$ и не охватывающий точки $z=\alpha$. Положим

$$F_1(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{C_1} f(w)\,g\left(\frac{z}{w}\right)\frac{dw}{w}. \tag{3}$$

Согласно теореме Коши $F_1(z)=F(z)$, если только точка $w=z/\beta$ лежит внутри обоих контуров C, C_1. Действительно, подынтегральная функция регулярна, как функция от w, между C и C_1.

Итак, формула (3) обеспечивает продолжение функции $F(z)$ на все значения z, для которых $\frac{z}{\beta}$ лежит внутри C_1.

Единственное ограничение, наложенное на z, состоит поэтому в том, что точка z/β должна лежать внутри контура, не охватывающего точки $z=\alpha$. Но такой контур можно найти для любого значения z, кроме значения $z=\alpha\beta$.

Итак, функция $F(z)$ регулярна при $z\neq\alpha\beta$. Однако доказательство применимо только к одной ветви функции $F(z)$, которую мы можем назвать главной, именно к той, которая получается из начального элемента без обхода точки $\alpha\beta$.

В общем случае детали доказательства становятся, конечно, более сложными, но метод остается тем же.

Примеры. (I) Если $f(z)=\frac{1}{a-z}$, $g(z)=\frac{1}{b-z}$, то $F(z)=\frac{1}{ab-z}$.

(II) Если $f(z)=\frac{1}{1-z^2}$, $g(z)=\frac{z}{1-z^2}$, то $F(z)=0$, так что точки $\alpha\beta$ *не обязательно* являются особыми для $F(z)$.

4.7. Функции с естественными границами. Положим

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} z^{n!};$$

$f(z)$ есть аналитическая функция, регулярная при $|z|<1$. Пусть $z=re^{2p\pi i/q}$; рассмотрим поведение функции $f(z)$ при $r\to 1$. Мы можем написать:

$$f(z)=\sum_{n=0}^{q-1} z^{n!}+\sum_{n=q}^{\infty} z^{n!}=f_1(z)+f_2(z).$$

$f_1(z)$ есть многочлен и при $r\to 1$ стремится к конечному пределу. Если $n\geqslant q$, то q есть делитель числа $n!$, так что $z^{n!}=r^{n!}$ и

$$f_2(z)=\sum_{n=q}^{\infty} r^{n!},$$

правая же часть при $r\to 1$ стремится к бесконечности. Следовательно, $f(z)\to\infty$ при $r\to 1$, а это означает, что $z=e^{2p\pi i/q}$ есть особая точка функции $f(z)$. Но точки этого рода лежат на единичной окружности всюду плотно, так что не существует дуги, на которой функция $f(z)$ регулярна. Поэтому продолжить функцию через единичную окружность невозможно, и, таким образом, единичная окружность является естественной границей функции.

Такое же заключение верно для функции

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} z^{2^n}$$

— мы полагаем $z=re^{2p\pi i/2^s}$ и рассуждаем как выше.

4.7.1. Ряд Ламберта*). Положим

$$f(z)=\sum_{n=1}^{\infty} d(n)\, z^n \qquad (|z|<1),$$

где $d(n)$ обозначает число делителей числа n. Мы покажем, что единичная окружность является естественной границей и этой функции.

Рассмотрим двойной ряд $\sum_{\mu=1}^{\infty}\sum_{\nu=1}^{\infty} z^{\mu\nu}$. Если мы расположим его как простой степенной ряд, то получим $f(z)$, если же просуммируем его по строкам, то придем к равенству

$$f(z)=\sum_{\mu=1}^{\infty}\frac{z^{\mu}}{1-z^{\mu}} \qquad (|z|<1).$$

Это преобразование законно, так как при $|z|<1$ двойной ряд абсолютно сходится.

---

*) См. Кнопп [1].

Пусть $z=re^{2p\pi i/q}$, где p и q — взаимно простые целые числа, причем $p>0$, а $q>1$. Мы покажем, что при $r\to 1$

$$(1-r)f(z)\to\infty.$$

Мы можем написать

$$f(z)=\sum_1 \frac{z^\mu}{1-z^\mu}+\sum_2 \frac{z^\mu}{1-z^\mu},$$

где в первой сумме $\mu\equiv 0 \pmod q$, а вторая сумма распространена на все остальные значения μ. Если $\mu=mq$, то

$$z^\mu=(re^{2\pi ip/q})^{mq}=r^{mq},$$

так что

$$(1-r)\sum_1=(1-r)\sum_{m=1}^{\infty}\frac{r^{mq}}{1-r^{mq}}=\frac{1-r}{1-r^q}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1-r^q}{1-r^{mq}}r^{mq}=$$

$$=\frac{1}{1+r+\ldots+r^{q-1}}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{r^{mq}}{1+r^q+\ldots+r^{(m-1)q}}\geqslant$$

$$\geqslant\frac{1}{q}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{r^{mq}}{m}=\frac{1}{q}\log\frac{1}{1-r^q}\to\infty.$$

С другой стороны, если $\mu\not\equiv 0 \pmod q$, то

$$|1-z^\mu|^2=|1-r^\mu e^{2\pi ip\mu/q}|^2=$$

$$=|1-r^\mu|^2+4r^\mu\sin^2\frac{p\mu\pi}{q}\geqslant 4r^\mu\sin^2\frac{\pi}{q}.$$

Таким образом,

$$\left|(1-r)\sum_2\right|\leqslant\frac{1-r}{2\sin(\pi/q)}\sum_{\mu=0}^{\infty}r^{\frac{1}{2}\mu}=\frac{1+\sqrt{r}}{2\sin(\pi/q)}\leqslant\frac{1}{\sin(\pi/q)}.$$

Следовательно, как и в предыдущих случаях, единичная окружность является естественной границей функции $f(z)$.

РАЗЛИЧНЫЕ ПРИМЕРЫ

1. Функция $f(z)=z-\frac{1}{2}z^2+\frac{1}{3}z^3-\ldots$ может быть продолжена на бо́льшую область посредством ряда

$$\log 2-\frac{1-z}{2}-\frac{(1-z)^2}{2\cdot 2^2}-\frac{(1-z)^3}{3\cdot 2^3}-\ldots$$

2. Степенные ряды

$$z+\frac{1}{2}z^2+\frac{1}{3}z^3+\ldots$$

и

$$i\pi-(z-2)+\frac{1}{2}(z-2)^2-\frac{1}{3}(z-2)^3+\ldots$$

не имеют никакой общей области сходимости, но представляют аналитические продолжения одной и той же функции.

3. Функции, определенные рядами

$$1+az+a^2z^2+\ldots$$

и

$$\frac{1}{1-z}-\frac{(1-a)z}{(1-z)^2}+\frac{(1-a)^2z^2}{(1-z)^3}-\ldots,$$

являются аналитическими продолжениями друг друга.

4. Если $f(z)$ и $g(z)$ — целые функции, то интеграл

$$\frac{1}{2\pi i}\int\left\{\frac{f(w)}{w-z}+\frac{zg\left(\frac{1}{w}\right)}{zw-w^2}\right\}dw,$$

взятый вдоль единичной окружности, представляет $f(z)$ внутри нее и $g(1/z)$ вне ее.

5. Пусть $F(\alpha, \beta; \gamma; z)$ обозначает ряд

$$1+\frac{\alpha\cdot\beta}{1\cdot\gamma}z+\frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{1\cdot2\cdot\gamma(\gamma+1)}z^2+\ldots$$

Показать: что ряды

$$f(z)=F(a, 1; c; z)$$

и

$$g(z)=\frac{1}{1-z}F\left(c-a, 1; c; \frac{z}{z-1}\right)$$

имеют некоторую общую область сходимости; что в этой области сумма каждого из этих рядов удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$z(1-z)\frac{d^2u}{dz^2}+\{c-(a+2)z\}\frac{du}{dz}-au=0;$$

что $f(0)=g(0)$ и $f'(0)=g'(0)$; что, следовательно, функции $f(z)$ и $g(z)$ являются аналитическими продолжениями друг друга.

6. Функция $\dfrac{1}{\sqrt{2-z}+1}$ допускает около точки $z=0$ два степенных разложения с радиусами сходимости 1 и 2.

7. Рассмотреть особенности функций

$$\exp\left\{\frac{1}{\sqrt{2-z}+1}\right\},\quad \log\left\{\frac{1}{\sqrt{2-z}+1}\right\}.$$

8. Показать, что формулы (2) § 4.4, которые были доказаны там для вещественных значений x и y, остаются верными при любых комплексных значениях x и y, удовлетворяющих условию $|\operatorname{Im}(y)|<\operatorname{Re}(x)$.

9. Доказать, что

$$\Gamma(z)=\int\limits_1^\infty e^{-w}w^{z-1}\,dw+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!\,(z+n)},$$

и заново установить этим путем аналитические свойства функции $\Gamma(z)$.

10. Доказать, что при $0 < \operatorname{Re}(z) < 1$

$$\int_0^\infty t^{z-1} \cos t \, dt = \Gamma(z) \cos \frac{1}{2} \pi z$$

и что при $-1 < \operatorname{Re}(z) < 1$

$$\int_0^\infty t^{z-1} \sin t \, dt = \Gamma(z) \sin \frac{1}{2} \pi z.$$

11. Доказать, что при $0 < \operatorname{Re}(z) < 1$

$$\zeta(z) = \frac{1}{\Gamma(z)} \int_0^\infty w^{z-1} \left(\frac{1}{e^w - 1} - \frac{1}{w} \right) dw$$

и что при $-1 < \operatorname{Re}(z) < 0$

$$\zeta(z) = \frac{1}{\Gamma(z)} \int_0^\infty w^{z-1} \left(\frac{1}{e^w - 1} - \frac{1}{w} + \frac{1}{2} \right) dw.$$

[Рассмотреть соответствующие контурные интегралы как в § 4.4.3.]

12. Вывести функциональное уравнение дзета-функции из первой формулы примера 11 и формулы примера 10 главы III (см. гл. III, Различные примеры).

13. Вывести функциональное уравнение дзета-функции из второй формулы примера 11 и примера III § 3.2.2.

14. Функция $L(z)$ определяется при $\operatorname{Re}(z) > 1$ формулой $L(z) = \frac{1}{1^z} - \frac{1}{3^z} + \frac{1}{5^z} - \ldots$ Показать, что $L(z)$ есть целая функция от z, удовлетворяющая функциональному уравнению

$$L(1-z) = 2^z \pi^{-z} \sin \frac{1}{2} \pi z \, \Gamma(z) L(z).$$

15. Пусть функция $f(z)$ определяется при $|z| < 1$ формулой $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{(n+1)^s}$ $(s > 0)$. Показать, что

$$f(z) = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^\infty \frac{t^{s-1}}{e^t - z} \, dt$$

и что, следовательно, функция $f(z)$ регулярна всюду, за возможным исключением положительной части вещественной оси.

Деформируя интервал интегрирования в надлежащую кривую, показать, что главная ветвь функции $f(z)$ регулярна всюду, за исключением точки $z = 1$.

16. Показать, что особенности главной ветви функции $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n z^n}{(n+1)^s}$ одни и те же для всех вещественных значений s.

17. Функции $f(x)$ и $g(x)$ связаны при вещественных значениях x соотношениями

$$f(x)=\sum_{-\infty}^{\infty} e^{ixt}g(t)\,dt, \quad g(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ixt}f(t)\,dt.$$

Показать, что не существует конечного интервала, вне которого $(x)=0$, $g(x)=0$, если только обе функции не равны нулю всюду.

[Если $f(x)=0$ при $x<a$ и при $x>b$, то функция $g(x)$ аналитична.]

18. Пусть $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} z^{2^n}$. Показать, что

$$f(z)=f(z^2)+z,$$

и вывести из этого, что окружность $|z|=1$ является естественной границей функции.

19. Если α — вещественное иррациональное число, то ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n(z-e^{2in\alpha\pi})}$$

представляет две различные аналитические функции, одну в единичном круге, другую вне его, и единичная окружность является естественной границей каждой из этих функций. Если α — рациональное число, то ряд представляет единственную рациональную функцию. [В первом случае функция не ограничена, когда $z \to e^{2in\alpha\pi}$ вдоль радиуса-вектора.]

20. Для функции $\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n^z+n}\right)$ прямая $\operatorname{Re}(z)=1$ является естественной границей.

[Каждая точка этой прямой является предельной для нулей.]

21. Пусть $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ $(|z|<1)$ и $\varphi(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n z^n}{n!}$. Тогда интеграл

$$F(z)=\int_0^{\infty} e^{-t}\varphi(zt)\,dt$$

осуществляет продолжение функции $f(z)$ через каждую дугу границы круга сходимости, на которой эта функция регулярна.

[Это — метод продолжения Бореля *). Прежде всего, $F(z)=f(z)$ всюду, где ряд для $f(z)$ сходится; действительно, согласно § 1.7.9 мы можем ввести ряд для $f(z)$ под знак интеграла и произвести почленное интегрирование. Далее, если функция $f(z)$ может быть как-либо продолжена, то $F(z)$ существует в большей области. Действительно, пусть z — регулярная точка для $f(z)$. Мы можем написать (ср. § 4.6):

$$\varphi(zt)=\frac{1}{2\pi i}\int_C f(w)\,e^{\frac{zt}{w}}\,\frac{dw}{w},$$

где C — контур, охватывающий начало и не охватывающий особенностей функции $f(w)$. Следовательно,

$$|\varphi(zt)|<Ke^{Mt},$$

*) См. Borel, *Leçons sur les séries divergentes*, стр. 94.

где K не зависит от z и t, а M есть максимум функции $\mathrm{Re}\,(z/w)$ для всех значений w на C. Для доказательства сходимости интеграла, представляющего $F(z)$, нам нужно неравенство $M < 1$. Если точка w лежит вне круга с центром $\frac{1}{2}z$ и радиусом $\frac{1}{2}|z|$, то $\mathrm{Re}\,(z/w) < 1$, и мы берем в качестве C окружность с центром $\frac{1}{2}z$ несколько большего радиуса, скажем $\frac{1}{2}|z|+\delta$; на нем $M=\frac{|z|}{|z|+\delta}$. Контур C не должен охватывать особенностей функции $f(w)$, и он не будет их охватывать, если z лежит в области D, построенной следующим образом. Через каждую особую точку функции $f(w)$ мы проводим прямую, перпендикулярную прямой, соединяющей эту точку с началом. D есть область, ограниченная этими прямыми. Ясно, что она содержит единичный круг, и нетрудно проверить, что все наши условия выполнены, если z лежит внутри D и δ достаточно мало. Теперь уже легко доказать, что интеграл Бореля продолжает $f(z)$ на всю область D.]

22. Проверить теорему Бореля для функций

$$\frac{1}{1-z}, \quad \frac{1}{1-z^2}, \quad \frac{1}{1-z^4}.$$

ГЛАВА V

ТЕОРЕМА О МАКСИМУМЕ МОДУЛЯ

5.1. Теорема о максимуме модуля. Пусть $f(z)$ — аналитическая функция, регулярная в некоторой области D и на ее границе C, которую мы предположим простым замкнутым контуром. Тогда функция $|f(z)|$ непрерывна, так как

$$||f(z+h)|-|f(z)||\leqslant|f(z+h)-f(z)|$$

и правая часть стремится к нулю вместе с h. Следовательно, $|f(z)|$ имеет максимальное значение, которое достигается по крайней мере в одной точке. Основная теорема этой главы состоит в том, что $|f(z)|$ достигает своего максимума не в какой-либо внутренней точке области D, а на ее границе C. Мы можем сказать, таким образом, что *если $|f(z)|\leqslant M$ на C, то то же неравенство верно во всех точках области D.*

Вот более точная формулировка теоремы.

Если $f(z)$ — не постоянная и $|f(z)|\leqslant M$ на C, то $|f(z)|<M$ *во всех внутренних точках области D.*

Мы дадим несколько доказательств этой теоремы.

5.1.1. Первое доказательство. Оно опирается на лемму: *если функция $\varphi(x)$ непрерывна, $\varphi(x)\leqslant k$ и*

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b \varphi(x)\,dx\geqslant k, \tag{1}$$

то $\varphi(x)=k$. Доказательство леммы: если $\varphi(\xi)<k$, то существует целый интервал $(\xi-\delta,\ \xi+\delta)$, в котором $\varphi(x)\leqslant k-\varepsilon$ с $\varepsilon>0$; но тогда

$$\int_a^b \varphi(x)\,dx\leqslant 2\delta(k-\varepsilon)+(b-a-2\delta)k=(b-a)k-2\delta\varepsilon,$$

что противоречит неравенству (1).

Чтобы доказать теорему, предположим, что $|f(z)|$ принимает в некоторой внутренней точке z_0 области D значение, не меньшее любого другого своего значения. Пусть Γ — окружность с центром

z_0, лежащая целиком в D. Тогда

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}\frac{f(z)}{z-z_0}\,dz. \tag{2}$$

Полагая $z - z_0 = re^{i\theta}$, $\frac{f(z)}{f(z_0)} = \rho e^{i\varphi}$ (ρ и φ — функции от θ), мы можем представить формулу (2) в виде

$$1 = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\rho e^{i\varphi}\,d\theta. \tag{3}$$

Следовательно, $1 \leqslant \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\rho\,d\theta$. Но, согласно предположениям, $\rho \leqslant \leqslant 1$, так что, в силу леммы, $\rho = 1$ для всех значений θ.

Переходя теперь в равенстве (3) к вещественным частям, мы видим, что $1 = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\cos\varphi\,d\theta$, так что, в силу леммы, $\cos\varphi = 1$. Следовательно, $f(z) = f(z_0)$ на Γ, а потому и всюду, т. е. $f(z)$ есть постоянная.

5.1.2. Второе доказательство. В принципе оно сходно с первым, но вместо интеграла Коши мы пользуемся тем фактом (§ 2.5), что если $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$, то

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}|f(z_0 + re^{i\theta})|^2\,d\theta = \sum_{n=0}^{\infty}|a_n|^2 r^{2n}.$$

В тех же предположениях, что и выше, левая часть не превышает $|f(z_0)|^2$, т. е. $|a_0|^2$. Таким образом,

$$|a_0|^2 + |a_1|^2 r^2 + |a_2|^2 r^4 + \ldots \leqslant a_0^2$$

при некотором положительном значении r. Следовательно, $a_1 = a_2 = \ldots = 0$, т. е. $f(z)$ есть постоянная.

5.1.3. Третье доказательство. Если z_0 — внутренняя точка области D, то мы можем разложить функцию $f(z)$ в степенной ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$ с положительным радиусом сходимости. Полагая затем $z - z_0 = re^{i\theta}$, $a_n = A_n e^{i\alpha_n}$, мы можем написать:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n r^n e^{i(\alpha_n + n\theta)}.$$

Таким образом,

$$|f(z)|^2 = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} A_m A_n r^{m+n} e^{i(\alpha_m + m\theta - \alpha_n - n\theta)}. \tag{1}$$

Предположим сначала, что $a_0 \neq 0$. Так как ряд абсолютно сходится, то его можно расположить по степеням r и полученный степенной ряд будет иметь положительный радиус сходимости. Пусть k — наименьшее из положительных значений n, для которых $a_n \neq 0$. Тогда

$$|f(z)|^2 = A_0^2 + 2A_0 A_k r^k \cos(\alpha_0 - \alpha_k - k\theta) + \sum_{n=k+1}^{\infty} c_n r^n, \tag{2}$$

причем $|c_n| < c^n$ для некоторого c. Следовательно,

$$\left| \sum_{n=k+1}^{\infty} c_n r^n \right| < \sum_{n=k+1}^{\infty} c^n r^n = \frac{c^{k+1} r^{k+1}}{1 - cr},$$

а это при достаточно малом r меньше, чем $A_0 A_k r^k$. При таком значении r разность $|f(z)|^2 - A_0^2$ принимает как положительные, так и отрицательные значения, когда θ изменяется от 0 до 2π (средний член в правой части равенства (2) меняется между $-2A_0 A_k r^k$ и $2A_0 A_k r^k$). Следовательно, A_0 не есть ни максимум, ни минимум функции $|f(z)|$.

Доказательство не проходит, если не существует отличного от нуля коэффициента a_n с $n > 0$. Но тогда $f(z) = a_0$ для всех значений z.

Наконец, если $a_0 = 0$, то $|f(z_0)| = 0$. Это значение не может быть максимумом: оно является минимумом.

Этим теорема доказана. Между прочим, мы доказали, что $|f(z)|$ *не может иметь в D минимума, отличного от нуля*. Это можно доказать также, применяя теорему о максимуме к функции $1/f(z)$.

5.1.4. Гармонические функции. Соответствующая теорема о гармонических функциях состоит в том, что *функция, гармоническая и не постоянная в некоторой области, не может иметь максимума во внутренней точке этой области*. Действительно, пусть u — вещественная часть функции $f(z)$. Если u имеет максимум в некоторой внутренней точке, то этим же свойством обладает и e^u, т. е. модуль $|e^{f(z)}|$ аналитической функции $e^{f(z)}$. Но уже было доказано, что это невозможно.

Теорема может быть доказана также рассуждением, сходным с изложенным в § 5.1.3. Мы опишем его общий ход, не вдаваясь во все детали. Пусть $u(x, y)$ — вещественная часть аналитической функции $f(z) = \sum a_n z^n$, регулярной при $z = 0$. Тогда

$$u(x, y) = \mathrm{Re} \sum a_n (x + iy)^n,$$

и мы получаем для $u(x, y)$ двойной степенной ряд. Его коэффициенты — те же, что и в теореме Тейлора, т. е.

$$u(x, y) - u(0, 0) = u_x x + u_y y + \frac{1}{2}(u_{xx}x^2 + 2u_{xy}xy + u_{yy}y^2) + \ldots$$

Необходимое условие максимума состоит в том, что $u_x = u_y = 0$. Но так как $u(x, y)$ — гармоническая функция, то $u_{xx} + u_{yy} = 0$. Следовательно, u_{xx} и u_{yy} имеют противоположные знаки, и мы можем сделать разность $u(x, y) - u(0, 0)$ сначала положительной, а затем отрицательной, беря сначала $x = 0$ и значение y малым, а затем $y = 0$ и значение x малым.

Примеры. (I) Пусть функция $f(z)$ регулярна при $|z| \leqslant a$ и $|f(z)| > m$ на окружности $|z| = a$. Если $|f(0)| < m$, то $f(z)$ имеет по крайней мере один нуль в круге $|z| < a$.

[Действительно, $|f(z)|$ имеет минимум внутри круга, и этот минимум должен быть равен нулю.]

(II) Воспользоваться предыдущим примером для доказательства того, что всякое алгебраическое уравнение имеет корень.

5.1.5. Теорема о максимуме модуля верна также для функции $f(z)$, которая регулярна, но не однозначна в области, если только функция $|f(z)|$ однозначна (пример: $f(z) = \sqrt{z}$ в кольцевой области, окружающей начало). Действительно, предыдущее доказательство сохраняет силу для любой ветви такой функции.

5.1.6. Пусть $f(z)$ — аналитическая функция, регулярная при $|z| < R$, и пусть $M(r)$ обозначает максимум $|f(z)|$ при $|z| = r$. *Тогда $M(r)$ есть монотонно возрастающая функция от r при $r < R$.* Действительно, из предыдущей теоремы сразу следует, что $M(r_1) \leqslant M(r_2)$, если $r_1 < r_2$, и что $M(r_1)$ может равняться $M(r_2)$ только в случае, когда $f(z)$ — постоянная.

Подобным же образом функция $A(r)$, определенная в 2.5.3 как максимум функции $\operatorname{Re} f(z)$ при $|z| = r$, есть возрастающая функция от r. Действительно,

$$e^{A(r)} = \max_{|z|=r} |e^{f(z)}|.$$

5.2. Лемма Шварца. Теорема Витали. Теорема Монтеля.

Пусть $f(z)$ — аналитическая функция, регулярная при $|z| \leqslant R$. Если $|f(z)| \leqslant M$ при $|z| = R$ и $f(0) = 0$, то

$$|f(re^{i\theta})| \leqslant \frac{Mr}{R} \qquad (0 \leqslant r \leqslant R).$$

Это предложение известно как лемма Шварца.

Положим $\varphi(z) = f(z)/z$. Функция $\varphi(z)$ регулярна при $|z| \leqslant R$, и $|\varphi(z)| \leqslant M/R$ на окружности $|z| = R$. То же неравенство верно поэтому и внутри круга. Поскольку $|\varphi(z)| = |f(z)|/r$, этим лемма доказана.

5.2.1. Теорема Витали о сходимости*). *Пусть $f_1(z)$, $f_2(z)$, ... — последовательность функций, регулярных в некоторой области D, и пусть $|f_n(z)| \leqslant M$ для любого n и любой точки z в D. Если эта последовательность сходится на некотором множестве точек, имеющем предельную точку внутри D, то она равномерно сходится во всякой области, внутренней к D, так что предел есть аналитическая функция от z.*

Достаточно рассмотреть случай, когда D — круг, а предельная точка — его центр. Действительно, если в этом случае теорема верна, то в общем случае равномерная сходимость гарантирована в некотором внутреннем к D круге с центром в предельной точке. Это заключение можно повторить, приняв произвольную точку круга за центр нового круга, и, таким образом, тем же методом, каким мы пользовались в теории аналитического продолжения, можно доказать, что всякая область, ограниченная контуром, внутренним к D, есть область равномерной сходимости.

Примем предельную точку за начало. Пусть R — радиус круга D. Пусть

$$f_n(z) = a_{0,n} + a_{1,n}z + \ldots \qquad (|z| \leqslant R). \tag{1}$$

Тогда $|f_n(z) - f_n(0)| \leqslant |f_n(z)| + |f_n(0)| \leqslant 2M$. Но $f_n(z) - f_n(0)$ есть нуль при $z = 0$, так что, в силу леммы Шварца,

$$|f_n(z) - f_n(0)| \leqslant 2M\,|z|/R, \qquad (|z| \leqslant R).$$

Пусть z' ($\neq 0$) — точка, в которой последовательность сходится. Тогда

$$|f_n(0) - f_{n+m}(0)| \leqslant |f_n(0) - f_n(z')| + |f_n(z') - f_{n+m}(z')| +$$
$$+ |f_{n+m}(z') - f_{n+m}(0)| \leqslant \frac{4M\,|z'|}{R} + |f_n(z') - f_{n+m}(z')|.$$

Мы можем выбрать z' таким образом, чтобы первый член справа был произвольно мал. Затем, так как $f_n(z')$ стремится к некоторому пределу, мы можем выбрать n столь большим, чтобы второй член был произвольно мал для всех положительных значений m. Следовательно, $f_n(0)$, т. е. $a_{0,n}$, стремится к некоторому пределу, скажем a_0.

Рассмотрим теперь функцию

$$g_n(z) = \frac{f_n(z) - a_{0,n}}{z} = a_{1,n} + a_{2,n}z + \ldots$$

Она также стремится к некоторому пределу в точке z', поскольку, как мы только что показали, $a_{0,n}$ имеет предел. Далее,

$$|g_n(z)| \leqslant 2M/R$$

*) Доказательство принадлежит Йенчу; см. Jentzsch [1].

при $|z|=R$, а потому и при $|z|<R$. Таким образом, функции $g_n(z)$ удовлетворяют тем же условиям, что и функции $f_n(z)$ (если не считать *значения* их верхней грани), и, следовательно, $a_{1,n}$ стремится к некоторому пределу, скажем a_1. Подобным же образом $a_{\nu,n}$ стремится к некоторому пределу при любом значении ν.

Наконец, сходимость ряда (1) равномерна относительно n и z при $|z|\leqslant R-\varepsilon$. Действительно, в силу неравенства Коши, $|a_{\nu,n}|\leqslant \leqslant M/R^\nu$, так что $|a_{\nu,n}z^n|\leqslant M((R-\varepsilon)/R)^\nu$ при $|z|\leqslant R-\varepsilon$. Следовательно, сумма ряда равномерно стремится к пределу вместе с его членами. Этим теорема доказана.

5.2.2. *Из всякой последовательности функций, регулярных и ограниченных в D в смысле предыдущей теоремы, можно выделить подпоследовательность, равномерно сходящуюся в каждой области, внутренней к D.*

Пусть $f_1(z)$, $f_2(z)$, ... — заданная последовательность функций, и пусть $|f_n(z)|\leqslant M$ в D. Пусть z_1, z_2, ... — последовательность точек, имеющих предельную точку внутри D. Все точки $w_n=f_n(z_1)$ лежат внутри круга $|w|\leqslant M$ плоскости w; следовательно, они имеют по крайней мере одну предельную точку, т. е. существует такая последовательность значений n, скажем n_1, n_2, ..., что последовательность функций

$$f_{n_1}(z),\ f_{n_2}(z),\ \ldots \tag{1}$$

сходится в точке z_1.

Подобным же образом из этой последовательности можно выбрать последовательность $f_{p_1}(z)$, $f_{p_2}(z)$, ..., сходящуюся в точке z_2, из нее — подпоследовательность $f_{q_1}(z)$, $f_{q_2}(z)$, ..., сходящуюся в точке z_3, и т. д.

Рассмотрим последовательность

$$f_{n_1}(z),\ f_{p_2}(z),\ f_{q_3}(z),\ \ldots,$$

образованную диагональными членами таблицы, составленной из предыдущих последовательностей. Каждая из этих диагональных функций принадлежит последовательности (1), и потому диагональная последовательность сходится в точке z_1; каждая функция, начиная со второй, принадлежит последовательности (2), и потому диагональная последовательность сходится в точке z_2; и т. д. Таким образом, диагональная последовательность сходится в каждой из точек z_1, z_2, ... В силу теоремы Витали она равномерно сходится поэтому в каждой области, внутренней к D.

5.2.3. Теорема Монтеля*). *Пусть $f(z)$ — аналитическая функция от z, регулярная в полуполосе S, определенной неравенствами $a<x<b$, $y>0$. Если функция $f(z)$ ограничена в S и при некотором фиксированном значении ξ переменного x (заключенном*

*) Montel [1], Hardy [18], Bohr [4].

между a и b) стремится к пределу l, когда $y \to \infty$, то $f(z)$ стремится к l на каждой полупрямой $x = x_0$ ($a < x_0 < b$); при $a + \delta \leqslant \leqslant x \leqslant b - \delta$ это стремление равномерно.

Рассмотрим в прямоугольнике R, определенном неравенствами $a < x < b$, $0 < y < 2$, последовательность функций $f_n(z) = f(z + in)$ ($n = 0, 1, 2, \ldots$). Так как $f_n(z) \to l$ в каждой точке отрезка $x = \xi$, то, согласно теореме Витали, $f_n(z) \to l$ равномерно в каждой области, внутренней к R, и, в частности, в прямоугольнике $a + \delta \leqslant x \leqslant b - \delta$, $1/2 \leqslant y \leqslant 3/2$. Этим теорема доказана.

Эту теорему можно перенести на другие области посредством конформных преобразований. Положим, например, $z = i \log w$. Тогда рассмотренная полоса плоскости z превратится в угол плоскости w, и теорема утверждает, что если аналитическая функция $\varphi(w)$ ограничена в угле $\alpha < \arg w < \beta$ и $\varphi(w) \to l$, когда $w \to \infty$ вдоль некоторой полупрямой $\arg w = \mathrm{const}$, лежащей в этом угле, то $\varphi(w) \to l$ равномерно в каждом угле $\alpha + \delta \leqslant \leqslant \arg w \leqslant \beta - \delta$.

5.2.4. Следующая теорема дает представление о другом направлении, в котором может быть применена теорема о максимуме модуля.

Пусть функция $f(z)$ регулярна в круге $|z - a| \leqslant R$, и пусть в нем $|f(z)| \leqslant M$ и $f(a) \neq 0$. Тогда число нулей функции $f(z)$ в круге $|z - a| \leqslant \frac{1}{3} R$ не превосходит $A \log \frac{M}{|f(a)|}$.

Мы можем считать, что $a = 0$. Пусть $z_1, z_2, \ldots, z_n$ — нули функции $f(z)$ при $|z| \leqslant \frac{1}{3} R$. Положим

$$g(z) = f(z) \prod_{m=1}^{n} \left(1 - \frac{z}{z_m}\right)^{-1}.$$

Функция $g(z)$ регулярна при $|z| \leqslant R$, и если $|z| = R$, то $\left|\frac{z}{z_m}\right| \geqslant \geqslant 3$ ($m = 1, 2, \ldots, n$). Следовательно,

$$|g(z)| \leqslant M \prod_{m=1}^{n} (3 - 1)^{-1} = 2^{-n} M$$

при $|z| = R$, а потому и при $|z| < R$. В частности, это верно при $z = 0$. Поскольку $g(0) = f(0)$, мы видим, что $|f(0)| \leqslant 2^{-n} M$, и, следовательно,

$$n \leqslant \frac{1}{\log 2} \log \frac{M}{|f(0)|}.$$

Это и есть оценка, которую мы хотели получить.

Множитель 1/3 может быть, конечно, заменен любым числом, меньшим 1/2. Более полный результат можно извлечь из теоремы

Иенсена (§ 3.6.1). Если $r_1, r_2, \ldots, r_N$ — нули в круге $|z| \leqslant R$, то

$$\log \frac{R^N}{r_1 r_2 \ldots r_N} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |f(Re^{i\theta})|\, d\theta - \log |f(0)| \leqslant \log M - \log |f(0)|.$$

Пусть $r_1, r_2, \ldots, r_n$ — нули в круге $|z| \leqslant \delta R$, где $0 < \delta < 1$. Тогда левая часть не меньше, чем

$$\log \frac{R^n}{r_1 r_2 \ldots r_n} \geqslant \log \left(\frac{1}{\delta}\right)^n = n \log \frac{1}{\delta}.$$

Следовательно, $n \leqslant \dfrac{1}{\log \frac{1}{\delta}} \log \dfrac{M}{|f(0)|}$.

5.3. Теорема Адамара о трех окружностях. *Пусть $f(z)$ — однозначная аналитическая функция, регулярная при $r_1 < |z| < r_3$. Пусть $r_1 < r_2 < r_3$ и пусть M_1, M_2, M_3 — максимумы функции $|f(z)|$ на окружностях $|z| = r_1$, $|z| = r_2$, $|z| = r_3$. Тогда*

$$M_2^{\log (r_3/r_1)} \leqslant M_1^{\log (r_3/r_2)} M_3^{\log (r_2/r_1)}. \tag{1}$$

Положим $\varphi(z) = z^{\lambda} f(z)$, где λ — постоянная, которая будет определена позже. Функция $\varphi(z)$ регулярна в кольцевой области $r_1 < |z| < r_3$, и функция $|\varphi(z)|$ однозначна. Следовательно, максимум функции $|\varphi(z)|$ достигается на одной из граничных окружностей, т. е.

$$|\varphi(z)| \leqslant \max (r_1^{\lambda} M_1, r_3^{\lambda} M_3).$$

Следовательно, на окружности $|z| = r_2$

$$|f(z)| \leqslant \max (r_1^{\lambda} r_2^{-\lambda} M_1, r_3^{\lambda} r_2^{-\lambda} M_3). \tag{2}$$

Выберем теперь λ наиболее выгодным образом. Это произойдет, если мы сделаем стоящие в скобках выражения равными, т. е. определим λ уравнением $r_1^{\lambda} M_1 = r_3^{\lambda} M_3$. Таким образом, $\lambda = -\dfrac{\log (M_3/M_1)}{\log (r_3/r_1)}$. При этом значении λ неравенство (2) означает, что

$$M_2 \leqslant (r_2/r_1)^{-\lambda} M_1.$$

Следовательно,

$$M_2^{\log (r_3/r_1)} \leqslant \left(\frac{r_2}{r_1}\right)^{\log (M_3/M_1)} M_1^{\log (r_3/r_1)} = M_1^{\log (r_3/r_2)} M_3^{\log (r_2/r_1)},$$

что и утверждалось.

Заметим, что равенство может встретиться только в случае, когда $\varphi(z)$ есть постоянная, т. е. когда $f(z)$ есть постоянная, умноженная на некоторую степень z.

5.3.1. Выпуклые функции. Функция $\varphi(x)$ действительного переменного x называется *выпуклой вниз* или просто *выпуклой*, если в любом интервале (x_1, x_2) кривая $y=\varphi(x)$ лежит под хордой, соединяющей точки $\{x_1, \varphi(x_1)\}$, $\{x_2, \varphi(x_2)\}$. Аналитически это условие означает, что

$$\varphi(x)<\frac{x_2-x}{x_2-x_1}\varphi(x_1)+\frac{x-x_1}{x_2-x_1}\varphi(x_2) \qquad (x_1<x<x_2). \tag{1}$$

Функция называется выпуклой в широком смысле, если допускается и равенство.

Выпуклая функция непрерывна. Действительно, при $x\to x_1$ неравенство (1) показывает, что $\varphi(x_1+0)\leqslant\varphi(x_1)$, а при $x_2\to x$ — что $\varphi(x)\leqslant\varphi(x+0)$. Следовательно, $\varphi(x)=\varphi(x+0)$ для всех значений x, и точно так же $\varphi(x-0)=\varphi(x)$ для всех значений x. Таким образом, функция непрерывна.

Полагая в неравенстве (1) $x=\frac{1}{2}(x_1+x_2)$, мы получаем неравенство

$$\varphi\left(\frac{1}{2}x_1+\frac{1}{2}x_2\right)<\frac{1}{2}\{\varphi(x_1)+\varphi(x_2)\}. \tag{2}$$

Это условие принимают иногда за определение выпуклости *) вместо неравенства (1). Оно менее ограничительно, чем определение, принятое нами, и из него не следует непрерывность.

Одно из достаточных условий выпуклости функции $\varphi(x)$ состоит в том, что $\varphi''(x)>0$. Действительно, при этом условии $\varphi'(x)$ возрастает, так что

$$\frac{1}{x-x_1}\int_{x_1}^{x}\varphi'(t)\,dt<\varphi'(x)<\frac{1}{x_2-x}\int_{x}^{x_2}\varphi'(t)\,dt \qquad (x_1<x<x_2),$$

а это дает неравенство (1).

5.3.2. Теорема о трех окружностях как теорема о выпуклости. Теорему Адамара о трех окружностях можно переформулировать, сказав, что $\log M(r)$ *есть выпуклая функция от* $\log r$. Действительно, ее можно представить в виде

$$\log M(r_2)\leqslant\frac{\log r_3-\log r_2}{\log r_3-\log r_1}\log M(r_1)+\frac{\log r_2-\log r_1}{\log r_3-\log r_1}\log M(r_3);$$

знак равенства появляется только в случае, когда функция есть постоянная, умноженная на некоторую степень z.

---

*) См., например, Полиа и Сеге, Задачи и теоремы из анализа, ч. I, стр. 75.

5.4. Средние значения функции $|f(z)|$. Средние значения

$$I_1(r)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f(re^{i\theta})|\,d\theta,\qquad I_2(r)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f(re^{i\theta})|^2\,d\theta$$

обладают свойствами, подобными свойствам функции $M(r)$.

5.4.1. *$I_2(r)$ монотонно возрастает вместе с r, и $\log I_2(r)$ есть выпуклая функция от $\log r$.*

Пусть $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^n$. То, что $I_2(r)$ монотонно возрастает, видно из формулы (см. § 2.5)

$$I_2(r)=\sum_{n=0}^{\infty}|a_n|^2r^{2n}.$$

Чтобы доказать выпуклость, положим $u=\log r$, и пусть I_2', I_2'' обозначают производные по u. Тогда

$$\frac{d^2}{du^2}(\log I_2)=\frac{I_2I_2''-I_2'^2}{I_2^2},$$

в силу же неравенства Шварца

$$I_2'^2=\left(\sum|a_n|^2\,2ne^{2nu}\right)^2\leqslant\left(\sum|a_n|^2e^{2nu}\right)\left(\sum|a_n|^2\,4n^2e^{2nu}\right)=I_2I_2'',$$

что и требовалось *).

5.4.2. *$I_1(r)$ монотонно возрастает вместе с r, и $\log I_1(r)$ есть выпуклая функция от $\log r$.*

Это можно доказать методом, подобным тому, которым мы доказали предыдущую теорему **), но доказательство не столь просто, поскольку не существует простого выражения функции I_1 через коэффициенты a_n. Мы применим совсем другой метод ***).

Пусть $0<r_1<r_2<r_3$. Определим функции $k(\theta)$ и $F(z)$ формулами

$$k(\theta)f(r_2e^{i\theta})=|f(r_2e^{i\theta})|\qquad(0\leqslant\theta\leqslant2\pi),$$

$$F(z)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(ze^{i\theta})\,k(\theta)\,d\theta.$$

---

*) В силу известного свойства неравенства Коши — Шварца оно превращается здесь в равенство только в случае, когда $f(z)=az^k$, где k — неотрицательное целое число. В этом случае $\log I_2(r)$ есть линейная функция от $\log r$. В остальных случаях производная $\frac{d^2}{du^2}\log I_2$ строго положительна и $\log I_2(r)$ действительно есть выпуклая функция от $\log r$. Аналогичное замечание относится к теореме следующего параграфа. (*Примечание переводчика.*)

**) См. Hardy [8] и Landau, *Ergebnisse der Funktionentheorie*, § 23.

***) Полиа и Сеге, *Задачи и теоремы из анализа*, Отдел 3, № 308.

Функция $F(z)$ регулярна при $|z| \leqslant r_3$, и ее модуль достигает своего максимума в этом круге на его границе, скажем, при $z = r_3 e^{i\lambda}$. Следовательно,

$$I_1(r_2) = F(r_2) \leqslant |F(r_3 e^{i\lambda})| \leqslant I_1(r_3),$$

чем доказана первая часть теоремы.

Определим теперь α условием

$$r_1^\alpha I_1(r_1) = r_3^\alpha I_1(r_3).$$

Мы можем написать

$$r_2^\alpha I_1(r_2) = r_2^\alpha F(r_2) \leqslant \max_{r_1 \leqslant |z| \leqslant r_3} |z^\alpha F(z)| \leqslant r_1^\alpha I_1(r_1) = r_3^\alpha I_1(r_3),$$

после чего доказательство заканчивается так же, как доказательство теоремы Адамара о трех окружностях.

5.5. Теорема Бореля и Каратеодори *). Эта теорема позволяет указать верхнюю границу для модуля функции на окружности $|z| = r$ по границе ее вещественной или мнимой части на большей концентрической окружности $|z| = R$.

Пусть $f(z)$ — аналитическая функция, регулярная при $|z| \leqslant R$, и пусть $M(r)$ и $A(r)$ обозначают, как обычно, максимумы функций $|f(z)|$ и $\operatorname{Re} f(z)$ на окружности $|z| = r$. Тогда при $0 < r < R$

$$M(r) \leqslant \frac{2r}{R-r} A(r) + \frac{R+r}{R-r} |f(0)|.$$

Теорема очевидна, если $f(z)$ есть постоянная. Если $f(z)$ — не постоянная, то мы предполагаем сначала, что $f(0) = 0$. Тогда $A(R) > A(0) = 0$.

Положим $\varphi(z) = \frac{f(z)}{2A(R) - f(z)}$. Функция $\varphi(z)$ регулярна при $|z| \leqslant R$, так как вещественная часть знаменателя не обращается в нуль. Кроме того, $\varphi(0) = 0$, и если $f(z) = u + iv$, то

$$|\varphi(z)|^2 = \frac{u^2+v^2}{\{2A(R)-u\}^2+v^2} \leqslant 1,$$

так как $-2A(R) + u \leqslant u \leqslant 2A(r) - u$. В силу леммы Шварца $|\varphi(z)| \leqslant r/R$, откуда следует, что

$$|f(z)| = \left| \frac{2A(R)\varphi(z)}{1+\varphi(z)} \right| \leqslant \frac{2A(R)r}{R-r},$$

а это и есть доказываемое неравенство для случая $f(0) = 0$.

---

*) См. Borel [1] и Landau, *Ergebnisse*, § 24.

Если $f(0) \neq 0$, то мы применяем уже полученный результат к функции $f(z)-f(0)$. Это дает:

$$|f(z)-f(0)| \leqslant \frac{2r}{R-r} \max_{|z|=R} \operatorname{Re}\{f(z)-f(0)\} \leqslant \frac{2r}{R-r}\{A(R)+|f(0)|\},$$

и мы снова получаем доказываемое неравенство.

При $A(R) \geqslant 0$ из него следует, что

$$M(r) \leqslant \frac{R+r}{R-r}\{A(R)+|f(0)|\}.$$

Рассматривая вместо $f(z)$ функции $-f(z)$, $if(z)$, $-if(z)$, мы получим аналогичные оценки, в которых место $A(r)$ занимают $\min \operatorname{Re} f(z)$, $\max \operatorname{Im} f(z)$, $\min \operatorname{Im} f(z)$.

Таким образом, неравенство доказано. Вид его правой части можно изменять в известных пределах. Однако она должна, наряду с $A(R)$, содержать член, подобный $|f(0)|$, так как иначе неравенство не выполнялось бы для функции $f(z)+ik$, где k — достаточно большое вещественное число. Она должна содержать также множитель, подобный $\frac{1}{R-r}$, который стремится к бесконечности при $r \rightarrow R$. Чтобы обнаружить это, рассмотрим функцию $f(z)=-i \log(1-z)$, и пусть $0<r<R<1$. Тогда $A(R)<\frac{1}{2}\pi$, как бы близко к 1 ни было R, и $f(0)=0$. Но $M(R) \rightarrow \infty$ при $r \rightarrow 1$.

5.5.1. Эти принципы могут быть распространены на производные функции $f(z)$. *В условиях предыдущей теоремы при* $A(R) \geqslant 0$

$$\max_{|z|=r} |f^{(n)}(z)| \leqslant \frac{2^{n+2} n! R}{(R-r)^{n+1}}\{A(R)+|f(0)|\}.$$

Действительно,

$$f^{(n)}(z)=\frac{n!}{2\pi i} \int_C \frac{f(w)}{(w-z)^{n+1}}\, dw, \tag{1}$$

где C — окружность с центром $w=z$ и радиусом $\delta=\frac{1}{2}(R-r)$. На этой окружности

$$|w| \leqslant r+\frac{1}{2}(R-r)=\frac{1}{2}(R+r),$$

так что, в силу теоремы Каратеодори,

$$\max|f(w)| \leqslant \frac{R+\frac{1}{2}(R+r)}{R-\frac{1}{2}(R+r)}\{A(R)+|f(0)|\}<\frac{4R}{R-r}\{A(R)+|f(0)|\}.$$

Пользуясь теперь формулой (1), мы видим, что

$$|f^{(n)}(z)| \leqslant \frac{n!}{\delta^n} \frac{4R}{R-r}\{A(R)+|f(0)|\}=\frac{2^{n+2} n! R}{(R-r)^{n+1}}\{A(R)+|f(0)|\}.$$

5.6. Теоремы Фрагмена и Линделефа *). Фрагмену и Линделефу принадлежит следующее важное обобщение теоремы о максимуме модуля.

Пусть C — простой замкнутый контур, и пусть функция $f(z)$ регулярна внутри C и на C во всех точках, за исключением одной лежащей на C точки P. Пусть $|f(z)| \leqslant M$ на C при $z \neq P$.

Предположим, далее, что существует такая функция $\omega(z)$, регулярная и не обращающаяся в нуль внутри C и на C, что $|\omega(z)| \leqslant 1$ внутри C и что для всякого положительного ε можно найти внутри C сколь угодно близко от P кривую, соединяющую точки контура C, лежащие по разные стороны от P, на которой

$$|\{\omega(z)\}^{\varepsilon} f(z)| \leqslant M.$$

Тогда $|f(z)| \leqslant M$ во всех точках, внутренних к C.

Чтобы доказать это, рассмотрим функцию

$$F(z) = \{\omega(z)\}^{\varepsilon} f(z),$$

которая регулярна внутри C и на C во всех точках, кроме P. Если z_0 — точка, внутренняя к C, то мы можем, в силу условий, наложенных на $\omega(z)$, найти кривую, охватывающую z_0, на которой $|F(z)| \leqslant M$. Следовательно, $|F(z_0)| \leqslant M$, т. е.

$$|f(z_0)| \leqslant M |\omega(z_0)|^{-\varepsilon}.$$

Ввиду произвольности ε это значит, что $|f(z_0)| \leqslant M$. Этим теорема доказана.

Нетрудно понять, что исключительная точка P может быть заменена любым конечным числом или даже бесконечным множеством точек, если только для них существуют функции $\omega(z)$ с соответствующими свойствами.

В следующих параграфах мы изложим несколько теорем этого типа. Обычно бывает проще заново построить для рассматриваемой области специальную вспомогательную функцию, чем пользоваться предыдущей теоремой. На практике исключительная точка всегда является бесконечно удаленной.

5.6.1. Предыдущая теорема позволяет получить много важных результатов, относящихся к поведению функции в окрестности существенно особой точки. Произведя надлежащее преобразование, мы всегда можем сделать исключительную точку бесконечно удаленной. Основная теорема может быть сформулирована следующим образом:

Пусть $f(z)$ — аналитическая функция от $z = re^{i\theta}$, регулярная в области D, заключенной между двумя полупрямыми, которые образуют угол $\frac{\pi}{\alpha}$ с вершиной в начале, а также на самих полу-

---

*) Phragmén и Lindelöf [1].

прямых. Пусть на полупрямых

$$|f(z)| \leqslant M \tag{1}$$

и при $r \to \infty$ равномерно во всем угле

$$f(z) = O\left(e^{r^{\beta}}\right) \tag{2}$$

с $\beta < \alpha$. Тогда неравенство (1) *выполнено во всей области D.*

Мы можем считать, без ущерба для общности, что полупрямые определяются уравнениями $\theta = \pm \frac{\pi}{2\alpha}$. Положим

$$F(z) = e^{-\varepsilon z^{\gamma}} f(z),$$

где $\beta < \gamma < \alpha$ и $\varepsilon > 0$. Ясно, что

$$|F(z)| = e^{-\varepsilon r^{\gamma} \cos \gamma\theta} |f(z)|. \tag{3}$$

Так как $\gamma < \alpha$, то на полупрямых $\cos \gamma\theta > 0$. Следовательно, на полупрямых $|F(z)| \leqslant |f(z)| \leqslant M$. Далее, на дуге $|\theta| \leqslant \frac{\pi}{2\alpha}$ окружности $|z| = R$

$$|F(z)| \leqslant e^{-\varepsilon R^{\gamma} \cos \frac{\gamma\pi}{2\alpha}} |f(z)| < A e^{R^{\beta} - \varepsilon R^{\gamma} \cos \frac{\gamma\pi}{2\alpha}},$$

и правая часть стремится к нулю при $R \to \infty$. Таким образом, если R достаточно велико, то $|F(z)| \leqslant M$ и на этой дуге. Следовательно, $|F(z)| \leqslant M$ во всей области $|\theta| \leqslant \frac{\pi}{2\alpha}$, $r \leqslant R$ (теорема о максимуме модуля), а так как R произвольно велико, то и во всей области D. В силу формулы (3) из этого следует, что в D

$$|f(z)| \leqslant M e^{\varepsilon r^{\gamma}},$$

и доказательство завершается переходом к пределу при $\varepsilon \to 0$.

Очевидно, нет необходимости предполагать, что функция $f(z)$ регулярна в области $|z| \leqslant r_0$, если существует дуга $|z| = r_1 > r_0$, на которой выполнено неравенство (1). С этой модификацией теорема верна и при $\alpha < 1/2$, когда область D покрывает часть плоскости более чем один раз и функция может не быть однозначной. Можно также заменить полупрямые кривыми, уходящими в бесконечность. Читатель не встретит трудностей при проведении деталей этих обобщений.

5.6.2. Важно указать на соотношение между фигурирующим в теореме углом и порядком роста функции $f(z)$ в бесконечности. Чем шире угол, тем ниже должен быть порядок функции $f(z)$ для того, чтобы теорема была верна.

В следующей теореме этот порядок недостаточно мал для того, чтобы было применимо предыдущее доказательство, и нужны более тонкие соображения.

Заключение предыдущей теоремы сохраняет силу, если о поведении функции $f(z)$ при $r \to \infty$ известно только, что для всякого положительного δ

$$f(z) = O\left(e^{\delta r^{\alpha}}\right)$$

равномерно во всем угле.

Как и выше, мы можем считать, что речь идет об угле $-\frac{\pi}{2\alpha} \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{2\alpha}$. Рассмотрим функцию

$$F(z) = e^{-\varepsilon z^{\alpha}} f(z).$$

Функция $|F(z)|$ стремится к нулю на вещественной оси и потому имеет там некоторую верхнюю грань M'. Положим

$$M'' = \max(M,\ M').$$

Применив к каждому из двух частичных углов $\left(-\frac{\pi}{2\alpha},\ 0\right)$, $\left(0,\ \frac{\pi}{2\alpha}\right)$ предыдущую теорему, мы видим, что во всем угле

$$|F(z)| \leqslant M''.$$

Но в действительности $M' \leqslant M$. В самом деле, $|F(z)|$ принимает значение M' в некоторой точке вещественной оси, так что предположение $M' > M$ противоречит теореме о максимуме модуля. Таким образом,

$$|F(z)| \leqslant M,$$

т. е. $|f(z)| \leqslant M\left|e^{\varepsilon z^{\alpha}}\right|$, и доказательство завершается переходом к пределу при $\varepsilon \to 0$.

5.6.3. *Пусть $f(z) \to a$ при $z \to \infty$ вдоль двух полупрямых. Если функция $f(z)$ регулярна и ограничена в заключенном между ними угле, то $f(z) \to a$ равномерно во всем угле.*

Без ущерба для общности можно считать, что $a = 0$. Можно считать также, что угол меньше π, так как к этому случаю подстановкой вида $z = w^k$ сводится общий случай. Таким образом, мы можем считать, что рассматриваются полупрямые $\theta = \pm\theta'$, причем $\theta' < \frac{1}{2}\pi$.

Положим $F(z) = \frac{z}{z+\lambda} f(z)$, где $\lambda > 0$. Очевидно,

$$|F(z)| = \frac{r}{\sqrt{r^2 + 2r\lambda\cos\theta + \lambda^2}} |f(z)| < \frac{r}{\sqrt{r^2+\lambda^2}} |f(z)|.$$

Пусть $|f(z)| \leqslant M$ всюду, и пусть $|f(z)| < \varepsilon$, если $r > r_1 = r_1(\varepsilon)$ и $\theta = \pm\theta'$. Положим $\lambda = r_1 M/\varepsilon$. При $r \leqslant r_1$

$$|F(z)| < \frac{r}{\lambda} M < \varepsilon,$$

и $|F(z)|<|f(z)|<\varepsilon$, если $r>r_1$ и $\theta=\pm\theta'$. Согласно § 5.6.1, из этого следует, что $|F(z)|\leqslant\varepsilon$ во всей области, и, таким образом,

$$|f(z)|\leqslant\left(1+\frac{\lambda}{r}\right)|F(z)|<2\varepsilon,$$

если $r>\lambda$. Этим теорема доказана.

5.6.4. *Пусть $f(z)\to a$ при $z\to\infty$ вдоль некоторой полупрямой и $f(z)\to b$ при $z\to\infty$ вдоль другой полупрямой. Если функция $f(z)$ регулярна и ограничена в угле, заключенном между этими полупрямыми, то $b=a$ и $f(z)\to a$ равномерно во всем угле.*

Пусть $f(z)\to a$ вдоль полупрямой $\theta=\alpha$ и $f(z)\to b$ вдоль полупрямой $\theta=\beta$, причем $\alpha<\beta$. Функция $\left\{f(z)-\frac{1}{2}(a+b)\right\}^2$ регулярна и ограничена в угле и стремится к $\frac{1}{4}(a-b)^2$ вдоль обеих полупрямых. Следовательно, она равномерно стремится к этому пределу во всем угле, т. е. функция

$$\left\{f(z)-\frac{1}{2}(a+b)\right\}^2-\frac{1}{4}(a-b)^2=\{f(z)-a\}\{f(z)-b\}$$

равномерно стремится к нулю. Поэтому для всякого ε существует дуга $\alpha\leqslant\theta\leqslant\beta$ окружности с центром в начале, на которой

$$|\{f(z)-a\}\{f(z)-b\}|\leqslant\varepsilon.$$

В каждой точке этой дуги верно по крайней мере одно из неравенств $|f(z)-a|\leqslant\sqrt{\varepsilon}$, $|f(z)-b|\leqslant\sqrt{\varepsilon}$, и мы можем считать, что при $\theta=\alpha$ верно первое неравенство, а при $\theta=\beta$ — второе неравенство. Пусть θ_0 — верхняя грань значений θ, для которых верно первое неравенство. θ_0 является или точкой, в которой верно первое неравенство, или точкой, предельной для таких точек, или точкой, в которой верно второе неравенство, или точкой, предельной для таких точек. Поскольку функция $f(z)$ непрерывна, из этого следует, что в точке θ_0 выполнены оба неравенства, так что в этой точке

$$|a-b|\leqslant|f(z)-a|+|f(z)-b|\leqslant2\sqrt{\varepsilon}.$$

Переходя к пределу при $\varepsilon\to0$, мы видим, что $a=b$. Наконец, согласно предыдущей теореме, $f(z)\to a$ равномерно.

Эти теоремы имеют очевидное сходство с теоремой Монтеля (§ 5.2.3). Однако в теореме Монтеля полупрямая, вдоль которой функция стремится к пределу, должна быть внутренней к области ограниченности, так что эти теоремы только в том случае становятся следствиями теоремы Монтеля, если область ограниченности предполагается несколько большей.

5.6.5. **Теорема Фрагмена—Линделефа для других областей.** Угол, фигурирующий в предыдущей теореме, может быть преобразован в другие области, например в полосу, Применим, например, теорему § 5.6.1 к области $r \geqslant 1$, $|\theta| \leqslant \frac{\pi}{2\alpha}$ и положим $s = i \log z$, $f(z) = \varphi(s)$. Если $s = \sigma + it$, то полупрямые $\arg z = \pm \frac{\pi}{2\alpha}$ переходят в параллельные прямые $\sigma = \pm \frac{\pi}{2\alpha}$, причем $t = \log|z|$. Следовательно, *если* $|\varphi(s)| \leqslant M$ *на верхних половинах этих параллельных прямых и на соединяющем их отрезке вещественной оси, причем в ограниченной ими полуполосе*

$$\varphi(\sigma + it) = O\left(e^{e^{\rho t}}\right) \qquad (\rho < \alpha), \tag{1}$$

то $|\varphi(s)| \leqslant M$ *во всей полуполосе.*

Другая теорема того же типа, которая потребуется нам в теории рядов Дирихле, состоит в следующем.

Пусть функция $\varphi(s)$ *регулярна в полосе* $\sigma_1 \leqslant \sigma \leqslant \sigma_2$ *и представляет собой там* $O(e^{\varepsilon |t|})$ *при любом положительном* ε. *Если*

$$\varphi(\sigma_1 + it) = O(|t|^{k_1}), \quad \varphi(\sigma_2 + it) = O(|t|^{k_2}),$$

то равномерно при $\sigma_1 \leqslant \sigma \leqslant \sigma_2$

$$\varphi(\sigma + it) = O(|t|^{k(\sigma)}),$$

где $k(\sigma)$ — *линейная функция от* σ, *принимающая при* $\sigma = \sigma_1$, σ_2 *значения* k_1, k_2.

В действительности теорема верна при более общих условиях вида (1). При сформулированных условиях она допускает следующее прямое доказательство.

Предположим сначала, что $k_1 = 0$, $k_2 = 0$, так что функция $\varphi(s)$ ограничена при $\sigma = \sigma_1$, $\sigma = \sigma_2$. Пусть M — верхняя граница функции $|\varphi(s)|$ на этих прямых и на соединяющем их отрезке вещественной оси. Положим $g(s) = e^{\varepsilon s i}\varphi(s)$. При $\sigma = \sigma_1$, σ_2 и $t \geqslant 0$

$$|g(s)| = e^{-\varepsilon t} |\varphi(s)| \leqslant M.$$

Кроме того, $|g(s)| \to 0$ при $t \to \infty$ и $\sigma_1 \leqslant \sigma \leqslant \sigma_2$, так что, если T достаточно велико, то $|g(s)| \leqslant M$ при $t = T$ и $\sigma_1 \leqslant \sigma \leqslant \sigma_2$. Следовательно, $g(s) \leqslant M$ во всех точках прямоугольника $\sigma_1 \leqslant \sigma \leqslant \sigma_2$, $0 \leqslant t \leqslant T$. Следовательно, $|g(s)| \leqslant M$ во всех точках полуполосы, т. е.

$$|\varphi(s)| \leqslant e^{\varepsilon t} M.$$

Заставляя ε стремиться к нулю, мы видим, что $|\varphi(s)| \leqslant M$ при $t > 0$. Подобным же образом $|\varphi(s)| \leqslant M$ при $t < 0$. Этим в рассматриваемом специальном случае теорема доказана.

Переходя к общему случаю, положим

$$\psi(s) = (-is)^{k(s)} = e^{k(s) \log(-is)},$$

где взято главное значение логарифма. Эта функция регулярна при $\sigma_1 \leqslant \sigma \leqslant \sigma_2$, $t \geqslant 1$. Кроме того, если $k(s) = as + b$, то

$$\operatorname{Re}\{k(s) \log(-is)\} = \operatorname{Re}[\{k(\sigma) + iat\} \log(t - i\sigma)] = k(\sigma) \log t + O(1).$$

Следовательно, $|\psi(s)| = t^{k(\sigma)}e^{O(1)}$. Рассмотрим функцию $\Phi(s) = \varphi(s)\{\psi(s)\}^{-1}$. Она удовлетворяет условиям, которым удовлетворяла функция $\varphi(s)$ в первой части доказательства, и потому ограничена в полосе. Таким образом,

$$\varphi(s) = O(|\psi(s)|) = O(t^{k(\sigma)}).$$

5.7. Функция Фрагмена — Линделефа $h(\theta)$. В нескольких предыдущих теоремах мы рассмотрели поведение функции при стремлении z к бесконечности в различных направлениях. Теперь мы займемся более систематическим изучением этого вопроса.

Рассмотрим сначала функцию $f(z) = e^{(a+ib)z^{\rho}}$. Мы можем написать:

$$|f(z)| = e^{r^{\rho}(a\cos\rho\theta - b\sin\rho\theta)}.$$

Поведение функции $\log|f(z)|$ зависит в первую очередь от сомножителя r^{ρ}, который не зависит от θ. Различное поведение в различных направлениях определяется сомножителем

$$h(\theta) = a\cos\rho\theta - b\sin\rho\theta = r^{-\rho}\log|f(z)|.$$

Конечно, это очень специальный случай; но общий случай отличается от него не столь значительно, как можно было бы ожидать.

В последующих параграфах мы будем предполагать, что функция $f(z)$ регулярна при $\alpha < \theta < \beta$, $|z| \geqslant r_0$ и имеет «порядок ρ» в этом угле; последнее означает, что для всякого положительного ε равномерно относительно θ

$$\overline{\lim}\,\frac{\log|f(re^{i\theta})|}{r^{\rho+\varepsilon}} = 0$$

и что это не так при отрицательных значениях ε. (Например, рассмотренная выше функция имеет порядок ρ.) Общее определение функции $h(\theta)$ содержится в формуле

$$h(\theta) = \overline{\lim_{r\to\infty}}\,\frac{\log|f(re^{i\theta})|}{V(r)},$$

причем $V(r)$ допускает известную свободу выбора. Выбор должен быть, естественно, таким, чтобы функция $h(\theta)$ была конечной и не равнялась тождественно нулю. Мы рассмотрим простейший случай $V(r) = r^{\rho}$; но те же рассуждения можно было бы почти без изменения применить к любой функции вида $r^{\rho}(\log r)^{p} \times (\log\log r)^{q}\ldots$

5.7.0.1. Здесь удобно ввести способ выражения, содержащий слово «бесконечность» или символ ∞ и не используемый в элементарном анализе. Мы будем писать $\lim\varphi_n = \infty$ в том же смысле, в каком пишем $\varphi_n \to \infty$, и будем говорить, что $\varphi(x)$ имеет бесконечное значение или $= \infty$, если функция $\varphi(x)$ определена как предел последовательности функций $\varphi_n(x)$, которая при рассматриваемом значении x расходится к бесконечности. Таким же образом мы будем пользоваться символом $-\infty$. Например, мы можем написать

$$\int_0^1 \frac{dt}{t} = \infty,$$

если левая часть определена как $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} \int\limits_{\varepsilon}^{1}$; равенство же $h(\theta) = \infty$ означает, что $r^{-\rho} \log |f(re^{i\theta})|$ принимает сколь угодно большие значения при $r \to \infty$.

Новым является здесь то, что мы пишем «$=\infty$», как будто бы мы определили число «∞». Напомним, что мы этого не делали и что «бесконечность» остается всего лишь символом *).

5.7.1. *Пусть* $\alpha < \theta_1 < \theta_2 < \beta$ *и* $\theta_2 - \theta_1 < \pi/\rho$, *и пусть* $h(\theta_1) \leqslant h_1$, $h(\theta_2) \leqslant h_2$. *Пусть* $H(\theta)$ — *функция вида* $a \cos \rho\theta + b \sin \rho\theta$, *принимающая при* $\theta = \theta_1$, θ_2 *значения* h_1, h_2. *Тогда*

$$h(\theta) \leqslant H(\theta) \qquad (\theta_1 \leqslant \theta \leqslant \theta_2).$$

Как нетрудно проверить,

$$H(\theta) = \frac{h_1 \sin \rho(\theta_2 - \theta) + h_2 \sin \rho(\theta - \theta_1)}{\sin \rho(\theta_2 - \theta_1)},$$

однако эта явная формула не нужна для доказательства.

Пусть $H_\delta(\theta) = a_\delta \cos \rho\theta + b_\delta \sin \rho\theta$ принимает при $\theta = \theta_1$, θ_2 значения $h_1 + \delta$, $h_2 + \delta$ $(\delta > 0)$. Положим $F(z) = f(z) e^{-(a_\delta - ib_\delta) z^\rho}$. Очевидно,

$$|F(z)| = |f(z)| e^{-H_\delta(\theta) r^\rho}, \tag{1}$$

так что при больших r

$$|F(re^{i\theta_1})| = O\left(e^{(h_1+\delta) r^\rho - H_\delta(\theta_1) r^\rho}\right) = O(1).$$

То же верно с θ_2, h_2 вместо θ_1, h_1. Согласно теореме § 5.6.1, из этого следует, что функция $F(z)$ ограничена в угле (θ_1, θ_2). Поэтому формула (1) показывает, что

$$f(z) = O\left(e^{H_\delta(\theta) r^\rho}\right) \tag{2}$$

равномерно в угле. Следовательно, $h(\theta) \leqslant H_\delta(\theta)$ при $\theta_1 \leqslant \theta \leqslant \theta_2$. Остается заметить, что $H_\delta(\theta) \to H(\theta)$ при $\delta \to 0$.

5.7.1.1. Предыдущая теорема верна и в случае, когда $h(\theta_1) = -\infty$ или $h(\theta_2) = -\infty$ или $h(\theta_1) = h(\theta_2) = -\infty$. Утверждение состоит тогда в том, что $h(\theta) = -\infty$ и при $\theta_1 < \theta < \theta_2$. Доказа-

---

*) *Ч. М.*, § 55.

тельство остается тем же; только по крайней мере одно из чисел h_1, h_2 теперь сколь угодно велико по абсолютной величине и отрицательно.

5.7.1.2. *Пусть* $\alpha<\theta_1<\theta_2<\theta_3<\beta$, $\theta_2-\theta_1<\frac{\pi}{\rho}$, $\theta_3-\theta_2<\frac{\pi}{\rho}$, *и пусть* $h(\theta_1)$, $h(\theta_2)$ *конечны. Пусть* $H(\theta)$ — *такая функция вида* $a\cos\rho\theta+b\sin\rho\theta$, *что*

$$h(\theta_1)\leqslant H(\theta_1),\quad h(\theta_2)=H(\theta_2).$$

Тогда

$$h(\theta_3)\geqslant H(\theta_3). \tag{1}$$

Выберем θ_1' под условиями $\theta_1<\theta_1'$, $\theta_3-\frac{\pi}{\rho}<\theta_1'<\theta_2$. Согласно § 5.7.1, $h(\theta_1')\leqslant H(\theta_1')$. Следовательно (§ 5.7.1.1), $h(\theta_3)$ не есть $-\infty$. Если неравенство (1) неверно, то можно найти такое δ, что $h(\theta_3)\leqslant\leqslant H(\theta_3)-\delta$. Положим

$$H_\delta(\theta)=H(\theta)-\delta\frac{\sin\rho(\theta-\theta_1')}{\sin\rho(\theta_3-\theta_1')}.$$

Так как $h(\theta_1')\leqslant H(\theta_1')=H_\delta(\theta_1')$, $h(\theta_3)\leqslant H(\theta_3)-\delta=H_\delta(\theta_3)$, то $h(\theta_2)\leqslant H_\delta(\theta_2)<H(\theta_2)$, что противоречит предположению.

5.7.1.3. *Если* $\theta_1<\theta_2<\theta_3$, $\theta_2-\theta_1<\pi/\rho$, $\theta_3-\theta_2<\pi/\rho$, *то*

$$h(\theta_1)\sin\rho(\theta_3-\theta_2)+h(\theta_2)\sin\rho(\theta_1-\theta_3)+h(\theta_3)\sin\rho(\theta_2-\theta_1)\geqslant 0.$$

Для всякой функции $H(\theta)$ вида $a\cos\rho\theta+b\sin\rho\theta$

$$H(\theta_1)\sin\rho(\theta_3-\theta_2)+H(\theta_2)\sin\rho(\theta_1-\theta_3)+H(\theta_3)\sin\rho(\theta_2-\theta_1)=0.$$

Выберем $H(\theta)$ под условиями $H(\theta_1)=h(\theta_1)$, $H(\theta_2)=h(\theta_2)$. Согласно предыдущей теореме, $h(\theta_3)\geqslant H(\theta_3)$, что и дает доказываемое неравенство.

Функция $h(\theta)$ *непрерывна в каждом интервале, где она конечна.*

Пусть функция $h(\theta)$ конечна в интервале $\theta_1\leqslant\theta\leqslant\theta_3$, и пусть $\theta_1<\theta_2<\theta_3$. Пусть $H_{1,2}(\theta)$ — функция вида $a\cos\rho\theta+b\sin\rho\theta$, принимающая при $\theta=\theta_1$, θ_2 значения $h(\theta_1)$, $h(\theta_2)$, и пусть $H_{2,3}(\theta)$ — функция, определенная так же по θ_2, θ_3. Согласно предыдущим теоремам,

$$H_{2,3}(\theta)\leqslant h(\theta)\leqslant H_{1,2}(\theta)\qquad(\theta_1\leqslant\theta\leqslant\theta_2),$$

$$H_{1,2}(\theta)\leqslant h(\theta)\leqslant H_{2,3}(\theta)\qquad(\theta_2\leqslant\theta\leqslant\theta_3).$$

Следовательно, в каком бы из этих двух интервалов ни лежала точка θ,

$$\frac{H_{1,2}(\theta)-H_{1,2}(\theta_2)}{\theta-\theta_2}\leqslant\frac{h(\theta)-h(\theta_2)}{\theta-\theta_2}\leqslant\frac{H_{2,3}(\theta)-H_{2,3}(\theta_2)}{\theta-\theta_2}.$$

При $\theta\to\theta_2$ крайние члены стремятся к некоторым пределам; следовательно, средний член ограничен и, таким образом, $h(\theta)\to h(\theta_2)$.

Из изложенного следует также, что $|f(re^{i\theta})| < \exp[r^\rho \{h(\theta)+\varepsilon\}]$ равномерно при $r > r_0(\varepsilon)$. (Для доказательства мы делим интервал изменения θ на $n = n(\varepsilon)$ равных частей.)

5.7.2. Геометрическая интерпретация. В случае $\rho = 1$ основное свойство функции $h(\theta)$ допускает простую геометрическую интерпретацию.

Рассмотрим для каждого значения θ в некотором интервале, где функция $h(\theta)$ конечна и положительна, радиус-вектор длины $h(\theta)$, образующий угол θ с некоторым начальным направлением, и построим перпендикуляр к этому радиусу-вектору в его конце. (Примеры: $f(z) = \operatorname{ch} z$, $f(z) = \cos z + \operatorname{ch} z$.)

Пусть h_1, h_2, h_3 — значения функции $h(\theta)$ в точках θ_1, θ_2, θ_3, причем $\theta_1 < \theta_2 < \theta_3$. Напишем уравнения трех соответствующих перпендикуляров:

$$x\cos\theta_1 + y\sin\theta_1 = h_1, \quad x\cos\theta_2 + y\sin\theta_2 = h_2,$$
$$x\cos\theta_3 + y\sin\theta_3 = h_3.$$

Первый из них пересекается с третьим в точке с координатами

$$X = \frac{h_1\sin\theta_3 - h_3\sin\theta_1}{\sin(\theta_3-\theta_1)}, \quad Y = \frac{h_3\cos\theta_1 - h_1\cos\theta_3}{\sin(\theta_3-\theta_1)}.$$

Рассмотрим условие: точка (X, Y) не лежит по ту же сторону от второго перпендикуляра, что и начало. Оно может быть представлено как неравенство

$$X\cos\theta_2 + Y\sin\theta_2 - h_2 \geqslant 0,$$

т. е. неравенство

$$h_1\sin\theta_3 - h_3\sin\theta_1)\cos\theta_2 + \\ + (h_3\cos\theta_1 - h_1\cos\theta_3)\sin\theta_2 - h_2\sin(\theta_3-\theta_1) \geqslant 0,$$

т. е. неравенство

$$h_1\sin(\theta_3-\theta_2) + h_2\sin(\theta_1-\theta_3) + h_3\sin(\theta_2-\theta_1) \geqslant 0.$$

Это в точности условие, которому удовлетворяет функция $h(\theta)$ согласно § 5.7.1.3.

Если перпендикуляры огибают некоторую кривую, то это условие означает, что точка пересечения двух касательных к кривой и начало всегда лежат по разные стороны от касательной в третьей точке, лежащей между теми, в которых взяты две первые касательные. Смысл последней формулировки геометрически очевиден: *кривая всегда вогнута к началу*.

5.8. Применения. Следующие интересные применения принципа Фрагмена — Линделефа указаны Карлсоном *).

*) См. M. Riesz [1], Hardy [14].

Пусть при $\operatorname{Re}(z) \geqslant 0$ *функция* $f(z)$ *регулярна и представляет собой* $O(e^{k|z|})$. *Если на мнимой оси* $f(z) = O(e^{-a|z|})$ *с* $a > 0$, *то* $f(z) = 0$ *тождественно.*

Мы применяем к функции $f(z)$ соображения § 5.7.1 с $\rho = 1$, $\theta_1 = 0$, $\theta_2 = \frac{1}{2}\pi$, $h_1 = k$, $h_2 = -a$; только теперь мы полагаем $\delta = 0$. Формула § 5.7.1 (2) показывает, что при $0 \leqslant \theta \leqslant \frac{1}{2}\pi$

$$f(z) = O\left\{e^{(k\cos\theta - a|\sin\theta|)r}\right\}, \tag{1}$$

и аналогичные соображения доказывают это равенство при $-\frac{1}{2}\pi \leqslant \theta \leqslant 0$.

Положим $F(z) = e^{\omega z} f(z)$, где ω — (большое) положительное число. В силу соотношения (1) существует такая постоянная M, не зависящая от ω, что

$$|F(z)| \leqslant Me^{\{(k+\omega)\cos\theta - a|\sin\theta|\}r} \qquad \left(-\frac{1}{2}\pi \leqslant \theta \leqslant \frac{1}{2}\pi\right). \tag{2}$$

В частности, если $\theta = \pm\frac{1}{2}\pi$ или $\pm\alpha$, где $\alpha = \operatorname{arctg}\frac{k+\omega}{a}$, то

$$|F(z)| \leqslant M. \tag{3}$$

Теперь мы можем применить к каждому из трех углов $\left(-\frac{1}{2}\pi, -\alpha\right)$, $(-\alpha, \alpha)$, $\left(\alpha, \frac{1}{2}\pi\right)$ теорему § 5.6.1. Из нее следует, что в действительности неравенство (3) имеет место при $-\frac{1}{2}\pi \leqslant \theta \leqslant \frac{1}{2}\pi$.

Следовательно, $|f(z)| \leqslant Me^{-\omega r\cos\theta}$, и, переходя к пределу при $\omega \to \infty$, мы видим, что $|f(z)| = 0$. Этим теорема доказана.

5.8.1. *Пусть при* $\operatorname{Re}(z) \geqslant 0$ *функция* $f(z)$ *регулярна и представляет собой* $O(e^{k|z|})$ *с* $k < \pi$. *Если* $f(z) = 0$ *при* $z = 0, 1, 2, 3, \ldots$, *то* $f(z) = 0$ *тождественно.*

Рассмотрим функцию $F(z) = f(z)\operatorname{cosec}\pi z$. Функция $\operatorname{cosec}\pi z$ ограничена на окружностях $|z| = n + \frac{1}{2}$. Следовательно, на этих окружностях $F(z) = O(e^{k|z|})$, как и на мнимой оси. Так как, сверх того, функция $F(z)$ регулярна, то при $n - \frac{1}{2} < |z| < n + \frac{1}{2}$

$$F(z) = O\left(e^{k\left(n+\frac{1}{2}\right)}\right) = O(e^{k|z|}),$$

и, таким образом, $F(z)$ есть функция этого вида во всей полуплоскости $\operatorname{Re}(z) \geqslant 0$. Кроме того, на мнимой оси

$$F(z) = O(e^{(k-\pi)|z|}),$$

что позволяет завершить доказательство ссылкой на предыдущую теорему.

РАЗЛИЧНЫЕ ПРИМЕРЫ

1. Пусть функция $f(z)$ регулярна внутри простого замкнутого контура C и на самом контуре, и пусть $|f(z)| \leqslant M$ на C. Вывести из интегральной формулы Коши для $\{f(z)\}^n$, что если z лежит внутри C, то $|f(z)|^n \leqslant KM^n$, где K — постоянная, не зависящая от n. Показать этим путем, что $|f(z)| \leqslant M$ внутри C [Ландау].

2. Воспользоваться интегралом Пуассона для доказательства того, что функция, гармоническая и не постоянная в некоторой области, не может достигать максимума во внутренней точке этой области.

3. Если при $\operatorname{Re}(z) \geqslant 0$ функция $f(z)$ регулярна и представляет собой $O\left(e^{r^{1-\varepsilon}}\right)$, причем на мнимой оси $|f(z)| \leqslant M$ и $f(1)=0$, то при $x>0$

$$|f(x+iy)| \leqslant \left\{\frac{(1-x)^2+y^2}{(1+x)^2+y^2}\right\}^{\frac{1}{2}} M.$$

$\left[\text{Рассмотреть функцию } \dfrac{1+z}{1-z} f(z).\right]$

4. Пусть в угле $\theta_1 \leqslant \theta \leqslant \theta_2$, где $\theta_2-\theta_1<\dfrac{\pi}{\rho}$, функция $f(z)$ регулярна и удовлетворяет неравенствам:

$$e^{-r^{\rho+\varepsilon}}<|f(z)|<e^{r^{\rho+\varepsilon}}.$$

Пусть при $\theta=\theta_1$, θ_2 и $r \to \infty$ функция $r^{-\rho}\log|f(z)|$ стремится к пределам h_1, h_2. Пусть $H(\theta)$ — функция вида $a\cos\rho\theta+b\sin\rho\theta$, принимающая при $\theta=\theta_1$, θ_2 значения h_1, h_2. Тогда $h(\theta)=H(\theta)$ во всем интервале $\theta_1 \leqslant \theta \leqslant \theta_2$.

5. Показать, что если в некотором угле $f(z)=O\left(e^{r^{1+\varepsilon}}\right)$, то функция

$$h(\theta)=\overline{\lim}\,\frac{\log|f(re^{i\theta})|}{r\log r}$$

обладает свойствами, подобными свойствам h-функций, рассмотренных в тексте. Показать, что если $f(z)=\dfrac{1}{\Gamma\left(\frac{1}{2}+z\right)}$, то $h(\theta)=-\cos\theta$ для всех значений θ.

6. Пусть аналитическая функция $f(z)$ регулярна и не обращается в нуль в полуполосе $a<x<b$, $y>0$. Пусть $f(z)=O\left(y^A\right)$ равномерно во всей полуполосе при $y\to\infty$, и пусть функция $|\log f(z)|$ ограничена на средней линии $x=\dfrac{1}{2}(a+b)$. Доказать, что $\log f(z)=O(\log y)$ равномерно при $a+\delta<x<b-\delta$.

$\left[\text{Применить теорему Каратеодори к } \log f(z) \text{ в круге с центром } \dfrac{1}{2}(a+b)+iy.\right]$

7. Пусть при $\operatorname{Re}(z) \geqslant 0$ функция $f(z)$ регулярна, удовлетворяет неравенству $|f(z)| \leqslant M$ и имеет нули $z_1, z_2, \ldots$ Доказать, что при $\operatorname{Re}(z)>0$

$$|f(z)| \leqslant \left|\frac{z_1-z}{\bar z_1+z}\,\frac{z_2-z}{\bar z_2+z}\cdots\frac{z_n-z}{\bar z_n+z}\right| M.$$

Вывести из этого, что если функция $f(z)$ не равна тождественно нулю, то ряд $\sum \operatorname{Re}(1/z_n)$ сходится. [См. Полиа и Сеге, *Задачи и теоремы из анализа.* Отдел III, №№ 295, 298.]

ГЛАВА VI

КОНФОРМНОЕ ОТОБРАЖЕНИЕ

6.1. Конформное отображение. Если w — аналитическая функция от z, то значениям z, которые представляются точками плоскости z, отвечают значения w, которые представляются точками плоскости w. Мы говорим, что точки плоскости z преобразуются или отображаются в соответствующие точки плоскости w и что области плоскости z отображаются на соответствующие области плоскости w. Настоящая глава посвящена более детальному рассмотрению природы этого преобразования или отображения.

Пусть w — аналитическая функция от z, регулярная и однозначная в некоторой области D плоскости z. Пусть z_0 — внутренняя точка области D, и пусть C_1 и C_2 — непрерывные кривые, проходящие через z_0 и имеющие в этой точке определенные касательные, которые образуют с осью x углы α_1 и α_2.

Посмотрим, что соответствует этой фигуре в плоскости w. Однако предварительно мы наложим на функцию ограничение, мотивы которого скоро выяснятся: *мы предположим, что* $f'(z_0)$ — *не нуль*.

Пусть z_1 и z_2 — точки кривых C_1 и C_2, близкие к z_0. Предположим, что они находятся от z_0 на одном и том же расстоянии r, так что можно написать:

$$z_1 - z_0 = re^{i\theta_1}, \quad z_2 - z_0 = re^{i\theta_2}.$$

Тогда $\theta_1 \to \alpha_1$ и $\theta_2 \to \alpha_2$ при $r \to 0$.

В плоскости w точке z_0 отвечает некоторая точка w_0, а точкам z_1 и z_2 отвечают точки w_1 и w_2, описывающие некоторые кривые C_1' и C_2'. Пусть

$$w_1 - w_0 = \rho_1 e^{i\varphi_1}, \quad w_2 - w_0 = \rho_2 e^{i\varphi_2}.$$

Тогда, согласно определению аналитической функции,

$$\lim \frac{w_1 - w_0}{z_1 - z_0} = f'(z_0).$$

Так как $f'(z_0) \neq 0$, то мы можем представить $f'(z_0)$ в виде $\mathrm{R}e^{i\delta}$, так что

$$\lim \frac{\rho_1 e^{i\varphi_1}}{re^{i\theta_1}} = \mathrm{R}e^{i\delta}.$$

В частности, $\lim(\varphi_1-\theta_1)=\delta$, т. е. $\lim\varphi_1=\alpha_1+\delta$. Таким образом, кривая C_1' имеет в точке w_0 определенную касательную, образующую с вещественной осью угол $\alpha_1+\delta$.

Подобным же образом кривая C_2' имеет в точке w_0 определенную касательную, образующую с вещественной осью угол $\alpha_2+\delta$.

Следовательно, кривые C_1' и C_2' пересекаются под тем же углом, что и кривые C_1, C_2. При этом углы в обеих фигурах отсчитываются в одном и том же направлении.

Благодаря этому свойству аналитическое отображение называется «конформным». Всякой малой фигуре в одной плоскости соответствует в другой плоскости приблизительно подобная ей фигура, так как все углы у этих фигур приблизительно одинаковы. Чтобы получить вторую фигуру из первой, мы должны повернуть первую фигуру на угол $\delta=\arg f'(z_0)$ и затем подвергнуть ее растяжению с коэффициентом $\lim\frac{\rho_1}{r}=R=|f'(z_0)|$. Проведенный анализ показывает, что растяжение одинаково во всех направлениях.

6.1.1. Случай $f'(z_0)=0$. Предположим теперь, что $f'(z)$ имеет в точке z_0 нуль порядка n. Тогда в окрестности этой точки

$$f(z)=f(z_0)+a(z-z_0)^{n+1}+\ldots,$$

причем $a\neq 0$. Таким образом, $w_1-w_0=a(z_1-z_0)^{n+1}+\ldots$, т. е.

$$\rho_1 e^{i\varphi_1}=|a|\,r^{n+1}e^{i\{\delta+(n+1)\theta_1\}}+\ldots,$$

где $\delta=\arg a$. Следовательно,

$$\lim\varphi_1=\lim\{\delta+(n+1)\theta_1\}=\delta+(n+1)\alpha_1.$$

Подобным же образом $\lim\varphi_2=\delta+(n+1)\alpha_2$. Кривые C_1', C_2' и теперь имеют определенные касательные в точке w_0, но угол между этими касательными равен

$$\lim(\varphi_2-\varphi_1)=(n+1)(\alpha_2-\alpha_1).$$

Линейное растяжение $\lim(\rho_1/r)$ равно нулю. Таким образом, на этот раз конформность нарушается.

6.1.2. Конформные отображения, которые мы рассматривали выше, сохраняют не только углы, но и направление их отсчета: если, двигаясь от C_1 к C_2, мы совершаем поворот на угол α в положительном направлении, то, двигаясь от C_1' к C_2', мы совершаем поворот на угол α тоже в положительном направлении.

Но существуют и такие конформные отображения, при которых величины углов сохраняются, а знаки их меняются. Рассмотрим, например, преобразование $w=\bar z$, где $\bar z$ — комплексное число, сопряженное с z. Это преобразование относит каждой точке ее образ при отражении в вещественной оси. Следовательно, величины углов сохраняются, но знаки их меняются. Это верно вообще для всякого отображения вида $w=f(\bar{z})$, где $f(z)$ — аналитическая функция от z с отличной от нуля производной. Действительно, такое отображение является произведением двух отображений:

$$\text{(I)}\ Z=\bar{z}, \quad \text{(II)}\ w=f(Z).$$

При отображении (I) величины углов сохраняются, но знаки их меняются. При отображении (II) сохраняются и знаки. Следовательно, результирующее отображение сохраняет величины углов и меняет их знаки.

6.2. Линейное преобразование. Функция $w=\dfrac{az+b}{cz+d}$ называется линейной функцией от z. Мы будем предполагать, что $ad-bc\neq 0$, так как в противном случае числитель и знаменатель пропорциональны между собой и w есть просто постоянная.

Каждому значению z отвечает в точности одно значение w. Единственным исключением является значение $z=-d/c$ при $c\neq 0$: в этой точке знаменатель обращается в нуль. Но если $z\to -d/c$, то $|w|\to\infty$, и мы можем отнести точке $z=-d/c$ плоскости z бесконечно удаленную точку плоскости w.

Если $c=0$, то $w=\dfrac{a}{d}z+\dfrac{b}{d}$ и бесконечно удаленные точки плоскостей z и w отвечают друг другу.

Обратно,

$$z=\frac{dw-b}{-cw+a},$$

так что и z есть линейная функция от w.

Пример. Доказать, что в общем случае имеются два значения z, для которых $w=z$ («неподвижные точки»), и что они сливаются только в случае, когда $(a-d)^2+4bc=0$.

Показать, что если имеются две различные неподвижные точки, p и q, то преобразование может быть представлено в виде

$$\frac{w-p}{w-q}=k\frac{z-p}{z-q},$$

а если имеется только одна неподвижная точка, p, то преобразование может быть представлено в виде

$$\frac{1}{w-p}=\frac{1}{z-p}+k.$$

6.2.1. Окружности. Уравнение $|z-z_0|=\rho$ есть уравнение окружности с центром z_0 и радиусом ρ.

Две точки, p и q, называются сопряженными относительно этой окружности, если они лежат на одной прямой с ее центром по одну сторону от него и произведение их расстояний от центра равно ρ^2. Таким образом, если

$$p=z_0+le^{i\lambda},$$

то

$$q=z_0+\frac{\rho^2}{l}e^{i\lambda}.$$

Если $z=z_0+\rho e^{i\theta}$, т. е. z — точка нашей окружности, то

$$\left|\frac{z-p}{z-q}\right|=\left|\frac{\rho e^{i\theta}-le^{i\lambda}}{\rho e^{i\theta}-\rho^2 l^{-1}e^{i\lambda}}\right|=\frac{l}{\rho}\left|\frac{\rho e^{i\theta}-le^{i\lambda}}{le^{i\theta}-\rho e^{i\lambda}}\right|=\frac{l}{\rho}.$$

Это — новая форма уравнения окружности.

Обратно, всякое уравнение $\left|\frac{z-p}{z-q}\right|=k$ $(k\neq 1)$ определяет окружность *), по отношению к которой точки p и q являются сопряженными. Действительно, оно означает, что

$$|z|^2-2\mathrm{Re}(\bar{p}z)+|p|^2=k^2\{|z|^2-2\mathrm{Re}(\bar{q}z)+|q|^2\},$$

т. е.

$$|z|^2-2\frac{\mathrm{Re}\{(\bar{p}-k^2\bar{q})z\}}{1-k^2}+\frac{|p|^2-k^2|q|^2}{1-k^2}=0,$$

т. е.

$$\left|z-\frac{p-k^2q}{1-k^2}\right|^2=\frac{|p-k^2q|^2}{(1-k^2)^2}-\frac{|p|^2-k^2|q|^2}{1-k^2}.$$

Но нетрудно проверить, что

$$|p-k^2q|^2-(1-k^2)(|p|^2-k^2|q|^2)=k^2|p-q|^2,$$

так что уравнение принимает вид

$$\left|z-\frac{p-k^2q}{1-k^2}\right|=\frac{k|p-q|}{|1-k^2|}.$$

Таким образом, уравнение представляет окружность с центром $z_0'=\frac{p-k^2q}{1-k^2}$ и радиусом $\rho=\frac{k|p-q|}{|1-k^2|}$. Кроме того, $p-z_0=\frac{k^2(q-p)}{1-k^2}$, $q-z_0=\frac{q-p}{1-k^2}$, так что отношение $\frac{p-z_0}{q-z_0}$ вещественно и положительно. Наконец,

$$|p-z_0||q-z_0|=\rho^2,$$

т. е. p и q — сопряженные точки.

В особом случае $k=1$ точка z равноудалена от точек p, q и потому лежит на перпендикуляре к соединяющему их отрезку, проведенном через его середину.

6.2.2. Линейное преобразование окружности. *При линейном преобразовании окружность переходит в окружность*

*) «Окружность Аполлония».

и сопряженные точки переходят в сопряженные точки. В том особом случае, когда окружность превращается в прямую, сопряженные точки превращаются в точки, симметричные относительно этой прямой.

Действительно, пусть $\left|\frac{z-p}{z-q}\right|=k$ — уравнение рассматриваемой окружности или прямой (с сопряженными точками p и q). Преобразование

$$w=\frac{az+b}{cz+d}, \qquad z=\frac{dw-b}{-cw+a}$$

превращает это уравнение в уравнение

$$\left|\frac{dw-b-p(-cw+a)}{dw-b-q(-cw+a)}\right|=k,$$

т. е. в уравнение

$$\left|\frac{w-\dfrac{ap+b}{cp+d}}{w-\dfrac{aq+b}{cq+d}}\right|=k\left|\frac{cq+d}{cp+d}\right|.$$

Этим теорема доказана.

Пример. Инверсией относительно окружности называется преобразование, переводящее каждую точку в сопряженную. Доказать, что линейное преобразование с единственной неподвижной точкой p можно получить как результат (I) инверсии относительно некоторой окружности, скажем с центром z_0, проходящей через точку p, и (II) инверсии относительно окружности, касающейся первой окружности в точке p, с центром в точке w_0, отвечающей точке z_0 при рассматриваемом линейном преобразовании.

6.2.3. *Найти все линейные отображения полуплоскости* $\operatorname{Im}(z)\geqslant 0$ *на единичный круг* $|w|\leqslant 1$.

Точкам z, $\bar{z}$, симметричным относительно вещественной оси, отвечают точки w, $\frac{1}{\bar{w}}$, сопряженные относительно единичной окружности. В частности, начало и бесконечно удаленная точка плоскости w отвечают сопряженным значениям z.

Пусть $w=\frac{az+b}{cz+d}$ — искомое отображение. Ясно, что $c\neq 0$: иначе бесконечно удаленные точки плоскостей z и w отвечали бы друг другу. Точки $w=0$ и $w=\infty$ отвечают точкам $-b/a$ и $-d/c$. Таким образом, мы можем написать

$$-\frac{b}{a}=\alpha, \qquad -\frac{d}{c}=\bar{\alpha},$$

т. е. $w=\frac{a}{c}\frac{z-\alpha}{z-\bar{\alpha}}$. Точке $z=0$ должна отвечать точка окружности $|w|=1$, так что

$$\left|\frac{a}{c}\cdot\frac{-\alpha}{-\bar{\alpha}}\right|=\left|\frac{a}{c}\right|=1.$$

Поэтому можно написать $a=ce^{i\lambda}$, где λ — вещественное число, и мы получаем:

$$w=e^{i\lambda}\frac{z-\alpha}{z-\bar{\alpha}}. \tag{1}$$

Так как $w=0$, если $z=\alpha$, то точка α должна лежать в верхней полуплоскости, т. е. $\operatorname{Im}(\alpha)>0$. При этом условии функция (1) производит требуемое отображение. Действительно, если значение z вещественно, то, очевидно, $|w|=1$, а если $\operatorname{Im}(z)>0$, то z ближе к α, чем к $\bar{\alpha}$, так что $|w|<1$.

Это преобразование зависит от трех произвольных постоянных: λ, $\operatorname{Re}(\alpha)$ и $\operatorname{Im}(\alpha)$. Поэтому существует преобразование вида (1), переводящее три заданные точки вещественной оси в три заданные точки единичной окружности.

Пример. Общее линейное отображение полуплоскости $\operatorname{Re}(z)\geqslant 0$ на круг $|w|\leqslant 1$ имеет вид

$$w=e^{i\lambda}\frac{z-\alpha}{z+\bar{\alpha}} \qquad (\operatorname{Re}(\alpha)>0).$$

6.2.4. *Найти все линейные отображения единичного круга $|z|\leqslant 1$ на единичный круг $|w|\leqslant 1$.*

Пусть $w=\dfrac{az+b}{cz+d}$. Точки $w=0$, $w=\infty$ должны отвечать некоторым сопряженным точкам $z=\alpha$, $z=\dfrac{1}{\bar{\alpha}}$ с $|\alpha|<1$. Следовательно,

$$-\frac{b}{a}=\alpha, \qquad -\frac{d}{c}=\frac{1}{\bar{\alpha}}, \qquad w=\frac{a}{c}\,\frac{z-\alpha}{z-\dfrac{1}{\bar{\alpha}}}=\frac{a\bar{\alpha}}{c}\,\frac{z-\alpha}{\bar{\alpha}z-1}.$$

Точке $z=1$ отвечает некоторая точка окружности $|w|=1$. Следовательно,

$$\left|\frac{a\bar{\alpha}}{c}\,\frac{1-\alpha}{\bar{\alpha}-1}\right|=\left|\frac{a\bar{\alpha}}{c}\right|=1,$$

так что $w=e^{i\lambda}\dfrac{z-\alpha}{\bar{\alpha}z-1}$, где λ — вещественное число.

Это и есть нужный результат. Действительно, если $z=e^{i\theta}$, $\alpha=\rho e^{i\varphi}$, то

$$|w|=\left|\frac{e^{i\theta}-\rho e^{i\varphi}}{\rho e^{i(\theta-\varphi)}-1}\right|=1;$$

если же $z=re^{i\theta}$ с $r<1$, то

$$|z-\alpha|^2-|\bar{\alpha}z-1|^2=r^2-2r\rho\cos(\theta-\varphi)+\rho^2-$$
$$-\{\rho^2r^2-2\rho r\cos(\theta-\varphi)+1\}=(r^2-1)(1-\rho^2)<0,$$

так что $|w|<1$.

Если, кроме того, точке $z=0$ отвечает точка $w=0$, то $\alpha=0$ и преобразование принимает вид

$$w=e^{i\lambda}z.$$

Если еще $\frac{dw}{dz}=1$ при $z=0$, то

$$w=z.$$

Пример. Общее линейное отображение круга $|z|\leqslant\rho$ на круг $|w|\leqslant\rho'$ имеет вид

$$w=\rho\rho' e^{i\lambda}\frac{z-\alpha}{\bar\alpha z-\rho^2} \qquad (|\alpha|<\rho).$$

6.2.5. *Пусть функция $f(z)$ регулярна при $|z|<1$. Если* $\mathrm{Re} f(z)>0$ *и* $f(0)=a>0$, *то* $|f'(0)|\leqslant 2a$.

Одна оценка этого типа получается из теоремы Каратеодори и ее следствий (§§ 5.5—5.5.1). Нижеследующее рассуждение в существенном таково же, но может быть теперь представлено в форме, которая бросает свет на общий метод.

Предположим, что при некотором линейном преобразовании $g=\varphi(f)$ прямой $\mathrm{Re} f=0$ отвечает окружность $|g|=1$, а точке $f=a$ — точка $g=0$. Тогда $|g(z)|<1$ при $\mathrm{Re} f(z)>0$, т. е. при $|z|<1$, и $g(0)=0$. С условиями такого вида уже легко иметь дело. Мы можем написать

$$|g'(0)|=\left|\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|z|=1-\varepsilon}\frac{g(z)}{z^2}\,dz\right|\leqslant\frac{1}{1-\varepsilon},$$

что ввиду произвольности ε приводит к неравенству $|g'(0)|\leqslant 1$.

Методом § 6.2.3 нетрудно установить, что нужное нам линейное преобразование есть $g(z)=\frac{f(z)-a}{f(z)+a}$, так что

$$f(z)=a\,\frac{1+g(z)}{1-g(z)}.$$

Следовательно, $f'(z)=\frac{2ag'(z)}{\{1-g(z)\}^2}$, и

$$|f'(0)|=2a|g'(0)|\leqslant 2a.$$

6.3. **Другие преобразования.** Теперь мы рассмотрим некоторые нелинейные функции.

6.3.1. Функция $w=z^2$. Если $z=re^{i\theta}$ и $w=\rho e^{i\varphi}$, то $\rho e^{i\varphi}=r^2e^{2i\theta}$. Таким образом,

$$\rho=r^2,\quad \varphi=2\theta,$$

т. е. расстояние от начала возводится в квадрат, а полярный угол удваивается. Угловая область $\alpha<\arg z<\beta$ отображается на угловую область $2\alpha<\arg w<2\beta$; если $\beta-\alpha>\pi$, то угловая область в плоскости w накрывает часть этой плоскости дважды. Возникающая из-за этого неопределенность исчезает после замены плоскости w римановой поверхностью, описанной в § 4.3.

Если $z=x+iy$, $w=u+iv$, то

$$u+iv=(x+iy)^2=x^2-y^2+2ixy,$$

т. е. $u=x^2-y^2$, $v=2xy$. Следовательно, прямые $u=a$, $v=b$ отвечают прямоугольным гиперболам

$$x^2-y^2=a, \quad 2xy=b.$$

Последние пересекаются под прямым углом, если не считать случая $a=0$, $b=0$, когда они пересекаются в начале под углом $\frac{1}{4}\pi$. Поскольку производная $\frac{dw}{dz}$ имеет в начале простой нуль, это согласуется с общими теоремами о преобразовании углов.

Примеры. (I) Доказать, что прямым $x=\text{const}$, $y=\text{const}$ отвечают системы софокусных парабол.

(II) Рассмотреть таким же образом функцию $w=z^n$ с $n=3, 4, \ldots$

6.3.2. Функция $w=\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)$. Здесь значение w становится бесконечным при $z=0$, а производная

$$\frac{dw}{dz}=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{z^2}\right)$$

обращается в нуль при $z=\pm 1$. Можно ожидать, что эти точки будут играть при преобразовании специальную роль.

Полагая $z=re^{i\theta}$, $w=u+iv$, мы видим, что

$$u=\frac{1}{2}\left(r+\frac{1}{r}\right)\cos\theta, \quad v=\frac{1}{2}\left(r-\frac{1}{r}\right)\sin\theta,$$

а после исключения θ получаем уравнение

$$\frac{u^2}{\frac{1}{4}\left(r+\frac{1}{r}\right)^2}+\frac{v^2}{\frac{1}{4}\left(r-\frac{1}{r}\right)^2}=1.$$

Это — эллипс в плоскости w, отвечающий каждой из окружностей $|z|=r$, $|z|=1/r$. При $r\to 1$ бóльшая полуось эллипса стремится к 1, а меньшая к 0. При $r\to 0$ и при $r\to\infty$ обе полуоси стремятся к бесконечности. Отсюда видно, что каждой из двух областей, на которые единичная окружность разбивает плоскость z, отвечает вся плоскость w, взрезанная вдоль вещественной оси от -1 до 1. Сamóй единичной окружности $|z|=1$ отвечает отрезок с концами -1, 1, проходимый дважды.

Разрешая уравнение относительно z, мы видим, что обратная функция есть двузначная функция от w. Можно устранить всякую многозначность, заменив плоскость w римановой поверхностью, состоящей из двух листов, разрезанных от -1 до 1 и соединенных крест-накрест вдоль разрезов. При обходе каждой из точек $w=\pm 1$ мы получаем новое значение z, но если пройти вокруг обеих этих точек, то получится исходное значение z.

Пример. Какая кривая плоскости w отвечает прямой $x=1$? Рассмотреть результат как пример к § 6.1.1.

6.3.3. Логарифмическая функция. *Если $w=\log z$, то угловой области $\alpha<\arg z<\beta$ отвечает бесконечная полоса $\alpha<v<\beta$.*

Действительно, если $z=re^{i\theta}$, то одно из значений w есть $\log r+i\theta$, так что $u=\log r$, $v=\theta$. Когда r меняется от 0 до ∞, u меняется от $-\infty$ до ∞, а это значит, что полупрямые, составляющие указанный угол, переходят в прямые, составляющие указанную полосу.

Если мы рассмотрим все значения $\log z$, т. е. значения

$$w=\log r+i(\theta+2k\pi),$$

где k — произвольное целое число, то получим не одну полосу в плоскости w, а бесконечно много полос, отвечающих всевозможным k.

При обратном отображении полосы $\alpha<v<\beta$ на угол плоскости z часть этой плоскости накрывается более чем один раз, если $\beta-\alpha>2\pi$. Мы устраним всякую неопределенность, если заменим плоскость z римановой поверхностью, состоящей из бесконечно многих листов, каждый из которых взрезан вдоль вещественной оси от 0 до $-\infty$ и соединен вдоль разреза своим верхним ребром с нижним ребром лежащего под ним листа. Тогда полосе ширины 2π в плоскости w будет отвечать один лист римановой поверхности и каждой точке римановой поверхности будет отвечать в точности одна точка плоскости w.

Примеры. (I) Исследовать свойства отображения $w=\operatorname{tg} z$, рассматривая его как композицию отображений

$$\zeta=e^{2iz}, \quad w=\frac{1}{i}\frac{\zeta-1}{\zeta+1},$$

и получить этим путем риманову поверхность обратной функции $z=\operatorname{arctg} w$.

[Курант, *Геометрическая теория функций комплексной переменной*, стр. 145.]

(II) Рассмотреть свойства отображения $w=z^{\alpha}$ при произвольном значении α.

[Функция z^{α} определена как $e^{\alpha \log z}$. Рассмотреть отдельно рациональные, иррациональные и комплексные значения α.]

6.3.4. *Если $w=\operatorname{tg}^2\frac{1}{2}z$, то полоса плоскости z, лежащая между прямыми $x=0$, $x=\frac{1}{2}\pi$, отображается на внутренность единичного круга плоскости w, взрезанную вдоль вещественной оси от $w=-1$ до $w=0$.*

Мы можем написать $w=\frac{1-\cos z}{1+\cos z}$.

Если $z=\frac{1}{2}\pi+iy$, то $\cos z=-i\,\mathrm{sh}\,y$ и $|w|=1$. Нетрудно проверить, что, когда y меняется от $-\infty$ до ∞, $\arg w$ меняется от $-\pi$ до π, так что w описывает один раз всю единичную окружность.

Если $z=iy$, то $\cos z=\mathrm{ch}\,y$ и значения w вещественны. Когда y меняется от $+\infty$ до 0, w меняется от -1 до 0, а когда y меняется от 0 до $-\infty$, w возвращается от 0 к -1.

Таким образом, граница полосы переходит в границу взрезанного круга, и нетрудно поверить, что во внутренность круга переходит внутренность полосы.

Пример. Доказать, что прямой $x=\frac{1}{4}\pi$ отвечает петля замкнутой кривой, пересекающая вещественную ось в точках $w=-1$ и $w=\frac{1}{3+2\sqrt{2}}$.

6.4. Однолистные функции. Мы будем говорить, что функция $f(z)$ *однолистна* в некоторой области D, если она аналитична и однозначна в D и принимает в D каждое свое значение только один раз.

Если функция $w=f(z)$ однолистна, то она отображает область D плоскости z на некоторую область D' плоскости w таким образом, что точки этих областей оказываются во взаимно однозначном соответствии.

Если функция $f(z)$ однолистна в D, то $f'(z)\neq 0$ в D. Действительно, предположим, что $f'(z_0)=0$. Тогда функция $f(z)-f(z_0)$ имеет в точке z_0 нуль порядка $n\geqslant 2$. Так как $f(z)$ — не постоянная, то можно найти окружность $|z-z_0|=\delta$, на которой функция $f(z)-f(z_0)$ не имеет нулей и внутри которой функция $f'(z)$ не имеет нулей, отличных от z_0. Пусть m — нижняя грань функции $|f(z)-f(z_0)|$ на этой окружности. Если $0<|a|<m$, то, согласно теореме Руше, функция $f(z)-f(z_0)-a$ имеет в круге n нулей, и она не может иметь там двойных нулей, так как $f'(z)$ не имеет там нулей, отличных от z_0. Но это противоречит тому, что $f(z)$ принимает каждое свое значение только один раз.

Однолистная функция от однолистной функции однолистна: если функция $f(z)$ однолистна в D и функция $F(w)$ однолистна в D', то функция $F\{f(z)\}$ однолистна в D. Действительно, так как функция F однолистна, то из равенства $F\{f(z_1)\}=F\{f(z_2)\}$ следует, что $f(z_1)=f(z_2)$, а так как функция f однолистна, то из равенства $f(z_1)=f(z_2)$ следует, что $z_1=z_2$.

6.4.1. Обратные функции. В условиях предыдущего параграфа каждой точке области D' отвечает в точности одна точка области D. Мы можем поэтому рассматривать z как функцию от w и написать $z=\varphi(w)$. Эта функция называется обратной по отношению к функции $w=f(z)$.

Обратная функция однолистна в D'. Действительно, она однозначна. Каждое свое значение она принимает только один раз, так как функция $f(z)$ однозначна. Наконец, она аналитична. В самом деле, если $f(z_0)=w_0$, то, как легко установить, рассматривая интеграл

$$\int \frac{f'(z)}{f(z)-w}\,dz,$$

$f(z)$ принимает в любой заданной окрестности точки z_0 каждое значение w, достаточно близкое к w_0. Следовательно, функция $z=\varphi(w)$ непрерывна, и так как $f'(z_0)\neq 0$, то при $w\to w_0$

$$\frac{\varphi(w)-\varphi(w_0)}{w-w_0}\to\frac{1}{f'(z_0)}.$$

6.4.2. Единственность конформного отображения. *Однолистная функция $w=f(z)$, отображающая единичный круг на единичный круг так, что центр круга и некоторое заданное в центре круга направление остаются неизменными, есть тождественное отображение $w=z$.*

Так как $|f(z)|\leqslant 1$ при $|z|=1$ и $f(0)=0$, то, согласно лемме Шварца (§ 5.2),

$$|w|=|f(z)|\leqslant|z|.$$

Применяя лемму Шварца к обратной функции, мы видим, что и $|z|\leqslant|w|$. Следовательно, $|w|=|z|$, т. е.

$$\left|\frac{f(z)}{z}\right|=1 \qquad (|z|\leqslant 1).$$

Так как функция, постоянная по модулю, сама постоянна, из этого следует, что $f(z)=az$, где $|a|=1$. После этого остающееся условие показывает, что $a=1$.

Заметим, что функция $w=z^2$ удовлетворяет всем предыдущим условиям, кроме условия однолистности.

Однолистная функция, отображающая единичный круг на единичный круг, есть линейная функция.

Пусть функция $w=f(z)$ отображает единичный круг на единичный круг и $f(0)=w_0$. Согласно § 6.2.4 можно найти линейную функцию $l(w)$, отображающую единичный круг на единичный круг, с $l(w_0)=0$. Функция $l\{f(z)\}$ отображает единичный круг на единичный круг, и $l\{f(0)\}=0$. Следовательно (предыдущая теорема), $l\{f(z)\}=az$. Так как функция, обратная линейной, линейна, то $f(z)$ есть линейная функция от z.

6.4.3. *Пусть функция $f(z)$ регулярна при $z=0$, и пусть $f'(0)\neq 0$. Тогда функция $f(z)$ однолистна в непосредственной окрестности точки $z=0$, т. е. в круге $|z|<\rho$ с достаточно малым ρ.*

Мы можем считать, что $f(0)=0$. Так как $f'(0)\neq 0$, то начало является для $f(z)$ простым нулем. Поэтому можно найти окружность C с центром $z=0$, на которой $f(z)\neq 0$ и внутри которой $f(z)$ не имеет нулей, отличных от точки $z=0$. Пусть m — нижняя грань функции $|f(z)|$ на C.

Так как функция $f(z)$ непрерывна и при $z=0$ обращается в нуль, то можно найти окружность $|z|=\rho$, внутри которой $|f(z)|<m$. Покажем, что функция $w=f(z)$ однолистна в круге $|z|<\rho$. Пусть w' — любое число с $|w'|<m$. В силу теоремы Руше (§ 3.4.2) число нулей функции $f(z)-w'$ внутри C равно числу нулей функции $f(z)$ внутри C, т. е. единице. Следовательно, внутри C имеется в точности одна точка z' с $f(z')=w'$. Область, составленная из таких значений z', отображается однолистно на круг $|w|<m$ и содержит круг $|z|<\rho$.

Другое доказательство можно получить, рассматривая степенной ряд $f(z)=\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, где $a_1\neq 0$. Если $f(z_1)=f(z_2)$, то

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n\left(z_1^n-z_2^n\right)=0,$$

т. е.

$$(z_1-z_2)\left\{a_1+\sum_{n=2}^{\infty} a_n\left(z_1^{n-1}+z_1^{n-2}z_2+\ldots+z_2^n\right)\right\}=0.$$

Если $|z_1|<\rho$ и $|z_2|<\rho$, то модуль второго сомножителя больше, чем $|a_1|-\sum\limits_{n=2}^{\infty} n|a_n|\rho^{n-1}$, а эта разность положительна, если ρ достаточно мало. Следовательно, $z_1=z_2$.

6.4.4. *Предел равномерно сходящейся последовательности однолистных функций есть либо однолистная функция, либо постоянная. Более полно: если функции $f_1(z)$, $f_2(z)$, ... однолистны в D и $f_n(z)\to f(z)$ равномерно в D, то функция $f(z)$ либо однолистна в D, либо постоянна.*

Что предельная функция может быть постоянной, показывает пример $f_n(z)=z/n$.

Ясно, что функция $f(z)$ аналитична и однозначна в D. Если она не однолистна, то существуют две точки, z_1 и z_2, в которых она принимает одно и то же значение w_0. Построим два круга с центрами z_1, z_2, лежащие в D, не пересекающиеся между собой и обладающие тем свойством, что на их контурах функция $f(z)-w_0$ не обращается в нуль; это возможно, если $f(z)$ — не постоянная. Пусть m — нижняя грань функции $|f(z)-w_0|$ на указанных контурах. Найдем столь большое n, что на этих контурах $|f(z)-f_n(z)|<m$. В силу теоремы Руше функция

$$f_n(z)-w_0=\{f(z)-w_0\}+\{f_n(z)-f(z)\}$$

имеет в двух взятых кругах столько же нулей, сколько функция $f(z)-w_0$, т. е. по крайней мере два. Следовательно, функция $f_n(z)$ не однолистна, что противоречит предположению. Этим теорема доказана.

6.4.5. *Пусть C — простой замкнутый контур, ограничивающий область D. Пусть $w=f(z)$ — аналитическая функция, регулярная в D и на C и принимающая каждое свое значение на C только один раз. Тогда функция $f(z)$ однолистна в D.*

В плоскости w контуру C соответствует некоторый контур C'. Он замкнут, так как функция $f(z)$ однозначна, и не имеет самопересечений, так как $f(z)$ не принимает на C ни одного значения дважды. Пусть D' — область, ограниченная контуром C'.

Пусть функция $f(z)$ принимает в точке z_0 области D значение, которого она не принимает на C. Число нулей функции $f(z)-f(z_0)$ в D равно

$$\frac{1}{2\pi}\Delta_C \arg\{f(z)-f(z_0)\},$$

где Δ_C обозначает приращение вдоль C. Это число положительно, так как по крайней мере один такой нуль существует. Но оно равно также

$$\frac{1}{2\pi}\Delta_{C'} \arg(w-w_0),$$

где $w_0=f(z_0)$, а это 0, если точка w_0 лежит вне C', и ± 1, если точка w_0 лежит внутри C'; знак зависит от направления, в котором обходится C'. Следовательно, это 1, т. е. точка w_0 лежит внутри C', C' обходится в положительном направлении и $f(z)$ принимает в D значение w_0 в точности один раз. Таким образом, D однолистно отображается на D'.

6.4.6. Обобщения. Условие предыдущей теоремы, состоящее в том, что функция $f(z)$ аналитична на контуре, может быть несколько ослаблено. Положение мало меняется, если в некоторых точках контура C функция $f(z)$ не аналитична, но непрерывна. Предположим, что на контуре C имеется особая точка z_1, и пусть C_1 — контур, в который превратится C, если мы произведем небольшой вырез около z_1. Число нулей функции $f(z)-w_0$ внутри C_1 равно

$$\frac{1}{2\pi}\Delta_{C_1} \arg\{f(z)-w_0\} = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C_1}\frac{f'(z)}{f(z)-w_0}\,dz,$$

и при стягивании выреза к точке z_1 этот интеграл стремится к такому же интегралу, взятому вдоль C, если функция $f(z)$ непрерывна и $f'(z)=O(|z-z_1|^{\alpha})$, где $\alpha>-1$. Поэтому доказательство § 6.4.5 применимо и здесь.

Функция $f(z)$ может иметь на контуре и полюс; тогда область D^* простирается в бесконечность. Теорема § 6.4.5 остается в силе, если порядок полюса равен единице и контур является достаточно простым. Предположим, например, что надлежащее преобразование переменного z перемещает область D в полуплоскость $\operatorname{Re}(z) \geqslant 0$, а полюс в точку $z=0$. Пусть

$$w = f(z) = \frac{1}{z} + g(z),$$

причем функция $g(z)$ регулярна в D. Для z из D

$$\operatorname{Re}(w) \geqslant \min \operatorname{Re} g(z);$$

обозначим этот минимум через a. Пусть $b < a$. Если z лежит в D, то $|w-b| \geqslant a-b$. Следовательно, функция

$$\zeta = \frac{1}{w-b} = \frac{z}{1+zg(z)-bz}$$

регулярна в D. К этой функции применима предыдущая теорема, и так как w есть однолистная функция от ζ, то теорема верна и для функции $w=f(z)$. В случае полюсов более высокого порядка теорема может оказаться неверной.

Примеры. (I) Пусть $w = \frac{1}{i}\frac{z+1}{z-1}$. Если $z=e^{i\theta}$, то

$$w = \frac{1}{i}\frac{e^{i\theta}+1}{e^{i\theta}-1} = -\operatorname{ctg}\frac{1}{2}\theta.$$

Таким образом, когда z описывает единичную окружность от $\theta=0$ до $\theta=2\pi$, w пробегает вещественную ось от $-\infty$ до ∞. Единственная особенность на окружности есть простой полюс. Следовательно, единичный круг плоскости z отображается однолистно на верхнюю половину плоскости w. Это, конечно, нетрудно проверить и прямо.

(II) Пусть $w = -\frac{1}{i}\left(\frac{z+1}{z-1}\right)^3$. Если $z=e^{i\theta}$, то

$$w = -\operatorname{ctg}^3\frac{1}{2}\theta.$$

Следовательно, точки единичной окружности плоскости z и точки вещественной оси плоскости w взаимно однозначно соответствуют друг другу. Но поскольку на окружности имеется тройной полюс, мы не можем вывести из этого никаких заключений о соответствии между точками областей. И действительно,

$$w = i\left(\frac{x+iy+1}{x+iy-1}\right)^3 = i\,\frac{(x^2+y^2-1)^3-12(x^2+y^2-1)\,y^2}{\{(x-1)^2+y^2\}^3} + \dots,$$

так что в вещественную ось $v=0$ отображаются три окружности:

$$(x^2+y^2-1)\left(x^2+y^2-2\sqrt{3}\,y-1\right)\left(x^2+y^2+2\sqrt{3}\,y-1\right)=0.$$

При этом $v>0$, если z лежит вне всех этих окружностей или вне одной окружности и внутри двух других.

Читателю следует начертить области плоскости z, переходящие в верхнюю половину плоскости w.

6.5. Функция $w = \int\limits_0^z \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$. Мы знаем, что эта функция равна $\arcsin z$. Посмотрим, однако, что можно сказать о соответствующем отображении плоскости z в плоскость w на основании этого интегрального представления.

Посмотрим, на какую часть плоскости w отображается первый квадрант плоскости z. Если $z = iy$ — чисто мнимое число, то $w = \int\limits_0^y \frac{i\,ds}{\sqrt{1+s^2}}$ — тоже чисто мнимое число, и если $y \to \infty$, то и $w \to \infty$. Таким образом, мнимые оси переходят друг в друга.

Когда z возрастает вдоль вещественной оси от 0 до 1, w возрастает вдоль вещественной оси от 0 до

$$\int\limits_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}.$$

Обозначим этот интеграл через I. В действительности $I = \frac{1}{2}\pi$, однако здесь нам незачем это знать.

Пусть теперь путь интегрирования обходит точку $z = 1$ сверху, скажем, по небольшой полуокружности. Тогда $\arg(1-t)$ убывает от 0 до $-\pi$, так что $\arg(1-t)^{-1/2}$ возрастает от 0 до $\frac{1}{2}\pi$. Таким образом, подынтегральная функция становится чисто мнимой, и мы можем написать:

$$w = I + i\int \frac{dt}{\sqrt{t^2-1}}.$$

Наконец, когда z стремится вдоль вещественной оси к бесконечности, w стремится к бесконечности вдоль прямой $u = I$.

Следовательно, граница первого квадранта плоскости z переходит в границу полуполосы $0 < u < I$, $v > 0$ плоскости w.

Функция однолистна в этой области. Мы не можем вывести это из § 6.4.5, не прибегая к дальнейшим рассмотрениям, так как обе области простираются в бесконечность. Но это легко усмотреть непосредственно. Действительно, если t находится в первом квадранте, то мнимая часть числа $t^2 - 1$ положительна, так что угол $\arg\sqrt{1-t^2}$ заключен между $-\frac{1}{2}\pi$ и 0. Следовательно,

$$f(z_2) - f(z_1) = \int\limits_{z_1}^{z_2} \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}},$$

и интеграл, взятый вдоль прямой, имеет вид $k\int\frac{d\lambda}{\rho e^{i\varphi}}$, где λ — действительное переменное, $\rho>0$ и $-\frac{1}{2}\pi<\varphi<0$. Очевидно, такой интеграл не может быть равен нулю. Поэтому функция не может принимать какое-либо значение дважды.

Далее, четверть окружности $|z|=R$, лежащая в первом квадранте, переходит при отображении в кривую, соединяющую стороны полосы и не имеющую (согласно только что доказанному) двойных точек, и эта кривая лежит целиком на большом расстоянии от вещественной оси, если радиус R достаточно велик. Поэтому из теоремы § 6.4.5 следует, что первый квадрант однолистно отображается на всю полуполосу.

Следующая задача состоит в продолжении функции за пределы рассмотренной области. Это продолжение можно осуществить методом отражения (§ 4.5.1). Действительно, обе области имеют кусочно-прямолинейные границы.

Как уже было сказано, мнимые оси переходят друг в друга. Применяя отражение в этих прямых, мы видим, что второму квадранту плоскости z отвечает полуполоса $-I<u<0$, $v>0$ плоскости w. Следовательно, верхней половине плоскости z отвечает полуполоса $-I<u<I$, $v>0$.

Теперь произведем отражение верхней половины плоскости z в отрезке $(0, 1)$ вещественной оси. Мы получим нижнюю половину плоскости z. В плоскости w мы получим полуполосу $-I<u<I$, $v<0$.

Таким образом, полная полоса $-I<u<I$ отвечает целой плоскости z, но при этом в точках $z=\pm 1$ имеются особенности, полный обход которых невозможен; можно, например, считать, что плоскость z взрезана вдоль вещественной оси от $-\infty$ до -1 и от 1 до ∞.

Новому отражению в интервале $(1, \infty)$ вещественной оси плоскости z соответствует отражение в прямой $u=I$ плоскости w. Следовательно, нижней половине плоскости z, в которую мы перешли справа от точки $z=1$, отвечает полуполоса $I<u<3I$, $v>0$.

Очевидно, что этот процесс можно продолжать неограниченно. Плоскость w разбивается на полосы ширины $2I$, каждая из которых служит образом всей плоскости z.

Если отразить точку w_0 полосы $-I<u<I$ сначала в прямой $u=I$, а затем в прямой $u=3I$, то получится точка w_0+4I. При этом соответствующая точка z_0, дважды отразившись в вещественной оси, возвратится в исходное положение. Следовательно, точкам w_0 и w_0+4I отвечает одно и то же значение z_0, т. е. если $z=g(w)$, то $g(w)=g(w+4I)$. Таким образом, обратная функция $g(w)$ периодична с периодом $4I$.

Пример. Доказать, что функция

$$w=\int_0^z \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}} \qquad (0<k<1)$$

отображает верхнюю половину плоскости z на прямоугольник плоскости w, ограниченный прямыми $u=-K$, $u=K$, $v=0$, $v=K'$, где

$$K=\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}}, \quad K'=\int_1^{1/k} \frac{dt}{\sqrt{(t^2-1)(1-k^2t^2)}}.$$

Доказать, что обратная функция имеет два периода: $4K$ и $2iK'$. [Курант, *Геометрическая теория функций комплексной переменной*, стр. 239—240.]

6.6. Отображение многоугольника на полуплоскость. Функции предыдущего параграфа дают примеры отображений многоугольника на полуплоскость. Такие отображения существуют для *всякого* многоугольника. Полное доказательство завело бы нас слишком далеко, но в общих чертах мы можем его описать.

Рассмотрим в плоскости w многоугольник с n сторонами и с углами $\alpha_1\pi, \alpha_2\pi, \ldots, \alpha_n\pi$ $(\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n=n-2)$. Если $\alpha_m<1$ $(m=1, 2, \ldots, n)$, то многоугольник является выпуклым. Некоторые из чисел α_m могут быть и больше единицы, но контур не должен иметь самопересечений. Будем считать, что вершины многоугольника должны отвечать точкам $a_1, a_2, \ldots, a_n$ вещественной оси плоскости z. Когда точка z перемещается по вещественной оси, точка w перемещается по контуру. Пока z не пройдет через одну из точек $a_1, \ldots, a_n$, точка w остается на одной и той же стороне многоугольника; следовательно, все это время угол $\arg\frac{dw}{dz}$ остается постоянным.

Но это условие выполняется, если

$$\frac{dw}{dz}=C(z-a_1)^{\alpha_1-1}(z-a_2)^{\alpha_2-1}\ldots(z-a_n)^{\alpha_n-1}.$$

Когда z обходит точку a_1 сверху по маленькой полуокружности, $\arg(z-a_1)$ убывает от π до 0, а аргументы других сомножителей возвращаются к своим первоначальным значениям. Следовательно, при этом $\arg\frac{dw}{dz}$ убывает на $\pi(\alpha_1-1)$, т. е. в плоскости w производится поворот на угол $\pi(1-\alpha_1)$ в положительном направлении. Это соответствует углу $\pi\alpha_1$ многоугольника.

Сказанное дает основание искать отображающую функцию в виде

$$w=C\int_{z_0}^{z}(t-a_1)^{\alpha_1-1}(t-a_2)^{\alpha_2-1}\ldots(t-a_n)^{\alpha_n-1}\,dt.$$

При $|t| \to \infty$ подынтегральная функция есть $O(1/|t|^2)$; следовательно, при $z \to \pm\infty$ интеграл сходится, притом к одному и тому же значению (интеграл, взятый по полуокружности с неограниченно раздвигающимися концами на вещественной оси, стремится к нулю). Таким образом, когда z пробегает вещественную ось, w описывает замкнутый контур, и согласно предыдущему этот контур является полигоном с углами $\alpha_1\pi, \ldots, \alpha_n\pi$. Замыкая, как выше, вещественную ось бесконечно большой полуокружностью, мы можем применить теоремы §§ 6.4.5—6.4.6, которые и показывают, что верхняя полуплоскость однолистно отображается на внутренность многоугольника.

Показать, что постоянные можно выбрать так, чтобы получился многоугольник не только с заданными углами, но и с заданными сторонами, труднее. Однако в случае треугольника все достаточно просто. Рассмотрим, например, треугольник с вершинами $w = i\sqrt{3}$, 0, 1 $\left(\text{и углами } \frac{1}{6}\pi, \ \frac{1}{2}\pi, \ \frac{1}{3}\pi\right)$ и потребуем, чтобы эти вершины отвечали точкам $z = -1$, 0, 1. Предыдущая формула принимает вид

$$w = C\int_{z_0}^{z} (t+1)^{-5/6}\, t^{-1/2}\, (t-1)^{-2/3}\, dt.$$

Если $z_0 = 0$, то точке $z = 0$ эта формула относит точку $w = 0$. Если мы представим ее в виде

$$w = C'\int_{0}^{z} (t+1)^{-5/6}\, t^{-1/2}\, (1-t)^{-2/3}\, dt,$$

где постоянная C' действительна и положительна, то положительному направлению одной вещественной оси будет отвечать положительное направление другой вещественной оси. Наконец, если мы выберем C' под условием

$$1 = C'\int_{0}^{1} (t+1)^{-5/6}\, t^{-1/2}\, (1-t)^{-2/3}\, dt,$$

то точке $z = 1$ будет отвечать точка $w = 1$, что и завершает решение задачи.

Примеры. (I) Доказать, что функция $w = \int\limits_0^z \frac{dt}{(1-t^2)^{2/3}}$ отображает полуплоскость на равносторонний треугольник.

(II) Доказать, что функция $w = \int\limits_0^z \frac{dt}{\sqrt{1-t^4}}$ отображает единичный круг плоскости z на квадрат плоскости w. [Курант, *Геометрическая теория функций комплексной переменной*, стр. 235. Положить $z = \frac{\zeta - i}{\zeta + i}$.]

6.7. Отображение произвольной области на круг. Фундаментальная теорема Римана утверждает, что *всякая область с надлежащей границей может быть отображена посредством однолистной аналитической функции на круг.* Точная формулировка условий, которым должна удовлетворять область, выходит за рамки нашего изложения. Область может быть ограничена замкнутой кривой или кривой, уходящей в бесконечность в обоих направлениях (как, например, полуплоскость); она может быть полосой, ограниченной двумя такими кривыми; она может быть даже целой плоскостью, надрезанной вдоль некоторой кривой (например, вдоль вещественной оси от 0 до ∞).

Пусть D — область одного из этих типов.

Функция, однолистно отображающая какую-либо область на ограниченную область, должна быть однолистной и ограниченной. Удостоверимся сначала в том, что такие функции существуют для D. Пусть a и b — две точки, лежащие на границе области D, и пусть

$$w=\sqrt{\frac{z-a}{z-b}}.$$

В D мы можем ограничиться одной ветвью этой функции. Такая ветвь однолистна, и ее значения покрывают только часть плоскости w, так как вся плоскость w однократно покрывается значениями обеих ветвей. Пусть w_0 — какая-нибудь точка непокрытой области. Тогда функция $\frac{1}{w-w_0}$ однолистна и ограничена в D, и с ней однолистны и ограничены все функции

$$f(z)=\frac{p}{w-w_0}+q \qquad (p\neq 0).$$

Ясно, что мы можем выбрать постоянные p и q так, чтобы в заданной точке области D имели место равенства $f(z)=0$, $f'(z)=1$.

Рассмотрим семейство всех функций $f(z)$, однолистных и ограниченных в D и удовлетворяющих в заданной точке P из D условиям $f(z)=0$, $f'(z)=1$. Пусть $M(f)$ обозначает верхнюю грань модуля функции $f(z)$. Пусть ρ — нижняя грань чисел $M(f)$, взятая по всем функциям семейства.

Существует или функция $\varphi(z)$ рассматриваемого семейства, для которой $M(\varphi)=\rho$, или последовательность $f_1(z), f_2(z), \ldots$ функций этого семейства, для которой

$$\lim M(f_n)=\rho.$$

Мы покажем, что второй случай сводится к первому. Так как последовательность $f_1(z)$, $f_2(z)$, ... ограничена в D, то, по § 5.2.2, мы можем выбрать из нее подпоследовательность, равномерно сходящуюся в каждой области, внутренней к D. Пусть $f_{n_1}(z)$, $f_{n_2}(z)$, ... — такая подпоследовательность, и пусть $\varphi(z)$ — ее предел. Функция $\varphi(z)$ также принадлежит рассматриваемому семейству: ее ограниченность и равенства $\varphi(z)=0$, $\varphi'(z)=1$ в точке P очевидны, а ее однолистность следует из теоремы § 6.4.4 (что $\varphi(z)$ — не постоянная, следует из равенства $\varphi'(z)=1$). Далее, согласно определению ρ,

$$M(\varphi)\geqslant\rho.$$

С другой стороны,

$$M(f_{n_\nu})<\rho+\varepsilon \qquad (\nu>\nu_0),$$

так что $|f_{n_\nu}(z)|<\rho+\varepsilon$ $(\nu>\nu_0)$. Следовательно,

$$|\varphi(z)|\leqslant\rho+\varepsilon,$$

т. е. $M(\varphi)\leqslant\rho$.

Этим доказано существование в нашем семействе функции $\varphi(z)$, для которой $M(\varphi)=\rho$. Так как $\varphi(z)$ — не постоянная, то $\rho>0$.

Покажем, что функция $w=\varphi(z)$ однолистно отображает D на круг $|w|<\rho$. При доказательстве мы будем считать, что $\rho=1$. Пусть Δ — область плоскости w, на которую функция $w=\varphi(z)$ отображает D. Так как $M(\varphi)=1$, то Δ лежит в круге $|w|\leqslant 1$ и по крайней мере в одной точке достигает окружности $|w|=1$.

Если наше утверждение неверно, то Δ имеет некоторую граничную точку α внутри круга (так что $|\alpha|<1$). Тогда каждая ветвь функции $w_1=\sqrt{\dfrac{w-\alpha}{\bar{\alpha}w-1}}$ регулярна в Δ. Кроме того, $|w_1|\leqslant$ $\leqslant 1$ при $|w|\leqslant 1$ (§ 6.2.4) и $w_1(0)=\sqrt{\alpha}$. Положим

$$w_2=\frac{w_1-\sqrt{\alpha}}{\overline{\sqrt{\alpha}}\,w_1-1}.$$

Если $|w_1|\leqslant 1$, то $|w_2|\leqslant 1$, а при $w=0$

$$\frac{dw_2}{dw}=\frac{dw_2}{dw_1}\,\frac{dw_1^2}{dw}\,\frac{1}{2w_1}=\frac{|\alpha|-1}{\left(\overline{\sqrt{\alpha}}\,w_1-1\right)^2}\,\frac{|\alpha|^2-1}{(\bar{\alpha}w-1)^2}\,\frac{1}{2w_1}=$$
$$=\frac{|\alpha|-1}{(|\alpha|-1)^2}\,\frac{|\alpha|^2-1}{2\sqrt{\alpha}}=\frac{|\alpha|+1}{2\sqrt{\alpha}}.$$

Модуль этого числа больше единицы. Следовательно, функция

$$w_3=\frac{2\sqrt{\alpha}}{|\alpha|+1}\,w_2$$

принадлежит нашему семейству, и

$$M(w_3) = \frac{2|\sqrt{\alpha}|}{|\alpha|+1} < 1.$$

Но это противоречит равенству $\rho = 1$, что и доказывает теорему.

6.7.1. Теорема единственности. Пусть D — область плоскости z, ограниченная простым замкнутым контуром или принадлежащая одному из других типов, рассмотренных в § 6.7. *Тогда существует однозначно определенная функция $w = f(z)$, однолистно отображающая D на внутренность единичного круга плоскости w и удовлетворяющая в заданной точке z_0 области D условиям $f(z_0) = 0$, $f'(z_0) > 0$.*

Существование такой функции $w = f(z)$ было установлено в § 6.7. Пусть $z = F(w)$ — обратная функция. Предположим, что существует другая функция, $w = g(z)$, с теми же свойствами. Тогда функция $W = g\{F(w)\}$ однолистно отображает единичный круг на единичный круг, оставляя на месте его центр и направление вещественной оси в центре. Следовательно (§ 6.4.2), $g\{F(w)\} = w$, т. е. $g(z) = f(z)$.

6.8. Дальнейшие свойства однолистных функций. Класс функций $f(z)$, однолистных в круге $|z| < 1$ и удовлетворяющих условиям $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$, изучен весьма детально. Функция $w = z$ принадлежит этому классу и отображает единичный круг на единичный круг. Оказывается, что и для всех функций этого класса образ единичного круга подчинен некоторым ограничениям *). Мы установим только простейшее свойство этого образа: *для функции рассматриваемого класса ни одна граничная точка образа единичного круга не лежит к началу ближе, чем точка* $1/4$.

Мы выведем это из двух нижеследующих теорем.

Пусть функция

$$w = z + \frac{a_1}{z} + \frac{a_2}{z^2} + \ldots$$

однолистна при $|z| > 1$ и регулярна в этой области, если не считать полюса в бесконечно удаленной точке. Тогда

$$\sum_{n=1}^{\infty} n|a_n|^2 \leqslant 1.$$

Так как функция однолистна, то окружность $|z| = r > 1$ переходит в простую замкнутую кривую, ограничивающую в плоскости w область с положительной площадью. Если на этой кривой

*) Подробности: Bieberbach, *Funktionentheorie*, II, 82—94; Landau, *Ergebnisse* (2-е изд.), 107—114; Dienes, *The Taylor Series*, гл. VIII.

$u=u(\theta)$, $v=v(\theta)$ $(u+iv=w)$, то указанная площадь равна

$$\int_0^{2\pi} u(\theta)\,v'(\theta)\,d\theta=\int_0^{2\pi}\frac{w(\theta)+\overline{w(\theta)}}{2}\,\frac{w'(\theta)-\overline{w'(\theta)}}{2i}\,d\theta=$$

$$=\frac{1}{4}\int_0^{2\pi}\left\{re^{i\theta}+re^{-i\theta}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_ne^{-in\theta}+\bar{a}_ne^{in\theta}}{r^n}\right\}\times$$

$$\times\left\{re^{i\theta}+re^{-i\theta}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{na_ne^{-in\theta}+n\bar{a}_ne^{in\theta}}{r^n}\right\}d\theta=$$

$$=\frac{1}{2}\pi\left\{\left(r+\frac{\bar{a}_1}{r}\right)\left(r-\frac{a_1}{r}\right)+\left(r+\frac{a_1}{r}\right)\left(r-\frac{\bar{a}_1}{r}\right)-\sum_{n=2}^{\infty}\frac{2na_n\bar{a}_n}{r^{2n}}\right\}=$$

$$=\pi r^2-\pi\sum_{n=1}^{\infty}n\,|a_n|^2\,r^{-2n}.$$

Так как это число положительно, то

$$\sum_{n=1}^{\infty}n\,|a_n|^2r^{-2n}\leqslant r^2,$$

и остается перейти к пределу при $r\to 1$.

Если функция $w=f(z)=z+a_2z^2+\ldots$ однолистна в круге $|z|<1$, то $|a_2|\leqslant 2$.

Функция $F(z)=\sqrt{f(z^2)}=z+\frac{1}{2}\,a_2z^3+\ldots$ также однолистна в круге $|z|<1$. Действительно, она регулярна, так как функция $f(z^2)$ имеет нуль только в точке $z=0$ и это — двойной нуль. Далее, если $F(z_1)=F(z_2)$, то $f(z_1^2)=f(z_2^2)$, а так как функция $f(z)$ однолистна, то $z_1^2=z_2^2$, т. е. $z_1=\pm z_2$. Но $F(z)$ — нечетная функция, так что при $z_1=-z_2$ должно быть $F(z_1)=-F(z_2)$. Таким образом, единственное решение уравнения $F(z_1)=F(z_2)$ есть $z_1=z_2$, а это и доказывает, что функция $F(z)$ однолистна.

Следовательно, функция

$$\left\{F\left(\frac{1}{z}\right)\right\}^{-1}=z-\frac{\frac{1}{2}a_2}{z}+\ldots$$

однолистна при $|z|>1$, и, в силу предыдущей теоремы,

$$\frac{1}{4}\,|a_2|^2+\ldots\leqslant 1.$$

Этим наше неравенство доказано.

Пусть теперь $w=f(z)=z+a_2z^2+\ldots$ — функция, удовлетворяющая условиям основной теоремы. Пусть c — значение, не принимаемое ею в единичном круге, т. е. точка, не принадлежащая образу единичного круга. Тогда функция

$$\frac{cf(z)}{c-f(z)}=z+\left(a_2+\frac{1}{c}\right)z^2+\ldots$$

регулярна и однолистна при $|z|<1$. Следовательно,

$$\left|a_2+\frac{1}{c}\right|\leqslant 2,\quad \left|\frac{1}{c}\right|\leqslant 2+|a_2|\leqslant 4,\quad |c|\geqslant\frac{1}{4},$$

что и доказывает теорему.

Пример. Функция $\frac{z}{(1-z)^2}$ принадлежит рассматриваемому классу. Для нее $a_2=2$ и образ единичной окружности проходит через точку $w=-1/4$. [Единственное решение уравнения

$$\frac{z}{(1-z)^2}=\frac{z'}{(1-z')^2}\qquad (|z|<1,\quad |z'|<1)$$

есть $z=z'$].

РАЗЛИЧНЫЕ ПРИМЕРЫ

1. Точка z_0 обладает по отношению к заданному линейному преобразованию тем свойством, что существует окружность $|z-z_0|=R$, переходящая в некоторую концентрическую окружность $|w-z_0|=R'$. Показать, что геометрическое место таких точек z_0 есть прямоугольная гипербола и что каждой точке z_0 этой гиперболы отвечает в точности одна окружность (действительная или мнимая), переходящая в концентрическую окружность.

2. Показать, что если $\frac{dz}{dw}=-2i\left(w-\frac{1}{w}\right)$ и постоянная интегрирования выбрана надлежащим образом, то верхней половине плоскости w отвечает целая плоскость z, взрезанная вдоль полупрямых $x=\pm\pi$, $y\leqslant 0$.

3. Показать, что если $\frac{dz}{dw}=\frac{w}{\sqrt{w^2-a^2}}$, причем значение корня, постоянная a и постоянная интегрирования выбраны надлежащим образом, то верхней половине плоскости w отвечает верхняя половина плоскости z, взрезанная вдоль мнимой оси от точки $z=0$ до одной из точек $z=ik$.

4. Пусть функция $f(z)$ регулярна в единичном круге и на его границе. Если на единичной окружности $|f(z)|\leqslant M$ и $f(a)=0$, причем $|a|<1$, то в круге

$$|f(z)|\leqslant M\left|\frac{z-a}{\bar{a}z-1}\right|.$$

5. Пусть функция $f(z)$ регулярна в единичном круге и на его границе. Если на единичной окружности $|f(z)|\leqslant M$ и $f(0)=a$, где $0<a<M$, то в круге

$$|f(z)|\leqslant M\frac{M|z|+a}{a|z|+M}.$$

$$\left[\text{Рассмотреть функцию } F(z)=M\frac{f(z)-a}{af(z)-M^2}.\right]$$

6. Каждая ветвь функции $\frac{z}{\sqrt{1-z}}$ однолистна при $|z|<1$.

7. Показать, что функция $\frac{z}{(1-z)^3}$ однолистна в круге $|z|<1/2$, но не однолистна ни в каком большем круге с центром в начале.

8. Показать, что если $\sum\limits_{n=2}^{\infty} n|a_n|\leqslant 1$, то функция $f(z)=z+a_2z^2+a_3z^3+\ldots$ однолистна в круге $|z|<1$.

ГЛАВА VII

СТЕПЕННЫЕ РЯДЫ С КОНЕЧНЫМ РАДИУСОМ СХОДИМОСТИ

7.1. Круг сходимости. Мы знаем, что каждый степенной ряд имеет свой круг сходимости, внутри которого он сходится и вне которого он расходится. Радиус этого круга может быть и бесконечным, т. е. круг может быть целой плоскостью. В этой главе мы рассмотрим степенные ряды, обладающие конечным радиусом сходимости.

Следующая теорема показывает, что радиус сходимости степенного ряда определяется модулями коэффициентов ряда.

Радиус сходимости ряда

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \tag{1}$$

определяется формулой

$$R = \varliminf_{n\to\infty} |a_n|^{-1/n}. \tag{2}$$

Определим R формулой (2). Если в точке z ряд сходится, то $a_n z^n \to 0$ при $n \to \infty$. Следовательно, при достаточно большом n

$$|a_n z^n| < 1, \quad \text{т. е.} \quad |z| < |a_n|^{-1/n}.$$

Заставляя n стремиться к бесконечности, мы видим, что $|z| \leqslant R$. Следовательно, радиус сходимости не превышает R. С другой стороны, для достаточно больших значений n

$$|a_n|^{-1/n} > R - \varepsilon, \quad \text{т. е.} \quad |a_n| < (R-\varepsilon)^{-n}.$$

Следовательно, ряд (1) заведомо сходится, если сходится ряд

$$\sum (R-\varepsilon)^{-n} |z|^n,$$

т. е. если $|z| < R - \varepsilon$. Поскольку ε произвольно мало, это значит, что ряд (1) сходится при $|z| < R$. Таким образом, радиус сходимости не меньше R. Сопоставляя это заключение с предыдущим, мы видим, что радиус сходимости равен R.

Примеры. (1) Найти радиусы сходимости рядов

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n!}{(n!)^2} z^n, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n} z^n, \quad \sum_{n=0}^{\infty} n!\, z^{n^2}.$$

(II) Если $R=1$ и единственными особенностями, расположенными на единичной окружности, являются простые полюсы, то коэффициенты a_n ограничены.

[Действительно,

$$f(z)=\frac{a}{1-ze^{-i\alpha}}+\frac{b}{1-ze^{-i\beta}}+\ldots+\frac{k}{1-ze^{-i\varkappa}}+g(z),$$

где $g(z)$ — функция, регулярная при $|z|<1+\delta$ $(\delta>0)$, так что $g(z)=\sum b_n z^n$ с $b_n=o(1)$.]

(III) Если $R=1$ и единственными особенностями, расположенными на единичной окружности, являются полюсы порядка p, то $a_n=O(n^{p-1})$.

7.1.1. Из теоремы Коши — Тейлора мы знаем, что граница круга сходимости ряда проходит через ближайшую к началу особую точку или ближайшие к началу особые точки функции. Следовательно, *модуль ближайшей к началу особой точки может быть определен по модулям коэффициентов ряда.*

7.2. Расположение особых точек. В то время как модуль ближайших к началу особых точек определяется совсем просто, найти их точное расположение обычно бывает не так легко. Существуют, однако, специальные случаи, в которых можно утверждать, что некоторая точка является особой.

В нижеследующих теоремах мы будем считать радиус сходимости равным единице; конечно, от этого случая можно простым преобразованием перейти к общему случаю.

7.2.1. *Если $a_n \geqslant 0$ для всех значений n, то $z=1$ есть особая точка.*

Предположим, что точка $z=1$ регулярна. Тогда, взяв на вещественной оси между точками $z=0$ и $z=1$ надлежащую точку ρ, мы сможем найти круг с центром ρ, содержащий точку $z=1$ внутри, в котором наша функция $f(z)$ регулярна. Соответствующий ряд Тейлора

$$\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{f^{(\nu)}(\rho)}{\nu!}(z-\rho)^{\nu} \tag{1}$$

сходится в некоторой точке $z=1+\delta$ $(\delta>0)$. Поскольку

$$f^{(\nu)}(\rho)=\sum_{n=\nu}^{\infty} n(n-1)\ldots(n-\nu+1)\,a_n\rho^{n-\nu}, \tag{2}$$

ряд (1) принимает вид:

$$\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{(z-\rho)^{\nu}}{\nu!}\sum_{n=\nu}^{\infty} n(n-1)\ldots(n-\nu+1)\,a_n\rho^{n-\nu}.$$

Это — двойной ряд с положительными членами, сходящийся при $z=1+\delta$. Следовательно, можно обратить порядок суммирования, и мы получаем равенство

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \sum_{\nu=0}^{n} \frac{n(n-1)\dots(n-\nu+1)}{\nu!}(z-\rho)^{\nu}\rho^{n-\nu} = \\ = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \{(z-\rho)+\rho\}^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n.$$

Таким образом, первоначальный ряд сходится при $z=1+\delta$, в противоречие с предположением, что радиус сходимости есть 1. Этим теорема доказана.

Другое окончание доказательства (принадлежащее Прингсгейму) состоит в следующем. На единичной окружности имеется по крайней мере одна особая точка, скажем, $e^{i\alpha}$. Разложение Тейлора вокруг точки $\rho e^{i\alpha}$ есть

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{f^{(\nu)}(\rho e^{i\alpha})}{\nu!}(z-\rho e^{i\alpha})^{\nu},$$

и так как $e^{i\alpha}$ — особая точка, то радиус сходимости этого ряда равен $1-\rho$. Но формула (2) показывает, что если $a_n \geqslant 0$ для всех значений n, то

$$|f^{(\nu)}(\rho e^{i\alpha})| \leqslant f^{(\nu)}(\rho).$$

Следовательно, радиус сходимости ряда (1) не превышает $1-\rho$. Следовательно, $z=1$ есть особая точка.

7.2.2. *Если все коэффициенты a_n вещественны и ряд $\sum a_n$ расходится к бесконечности, т. е.*

$$s_n = a_0 + a_1 + \dots + a_n \to \infty \quad \textit{или} \quad -\infty,$$

то $z=1$ есть особая точка.

Если $|z|<1$, то

$$\frac{f(z)}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \sum_{n=0}^{\infty} z^n = \sum_{n=0}^{\infty} s_n z^n, \tag{1}$$

(согласно § 1.6.5, ряд абсолютно сходится). Следовательно,

$$f(z) = (1-z)\sum_{n=0}^{\infty} s_n z^n = (1-z)\sum_{n=0}^{N} s_n z^n + (1-z)\sum_{n=N+1}^{\infty} s_n z^n.$$

Обозначим слагаемые справа через $f_1(z)$ и $f_2(z)$ и предположим, что $s_n \to \infty$. Тогда для заданного сколь угодно большого положительного числа G можно найти такое N, что $s_n > G$ при $n > N$, а если N выбрано под этим условием и $0 < z < 1$, то

$$f_2(z) > (1-z)\sum_{n=N+1}^{\infty} G z^n = G z^{N+1}.$$

Далее, так как $z^{N+1} \to 1$ и $f_1(z) \to 0$ при $z \to 1$, то при фиксированном N существует столь близкое к 1 значение z_0, что

$$z^{N+1} > \frac{1}{2}, \quad |f_1(z)| < \frac{1}{4} G \qquad (z > z_0).$$

Таким образом,

$$f(z) > \frac{1}{4} G \qquad (z > z_0),$$

т. е. $f(z) \to \infty$ при $z \to 1$. Этим теорема доказана.

Если известно только, что $|s_n| \to \infty$, то утверждать, что $z = 1$ есть особая точка, нельзя. Например,

$$\frac{1}{(1+z)^3} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{2} (n+1)(n+2) z^n,$$

так что $|s_n| \sim \frac{1}{4} n^2$, хотя при $z = 1$ функция регулярна.

7.2.3. Общий признак особой точки. Можно указать признак, позволяющий судить, является ли особой точка, произвольно взятая на границе круга сходимости. Однако вычисления, которых требует его применение, не являются простыми.

Можно считать, что радиус сходимости равен 1. Рассматриваемую точку мы можем надлежащим преобразованием перевести в точку $z = 1$.

Принцип, которым мы воспользуемся, заключается в следующем. Мы разлагаем функцию $f(z)$ в степенной ряд в окрестности некоторой точки вещественной оси, лежащей между точками $z = 0$ и $z = 1$; точка $z = 1$ попадает внутрь круга сходимости этого ряда, если функция $f(z)$ регулярна в этой точке, и не попадает внутрь этого круга в противном случае. По ходу дела мы произведем некоторое преобразование, приводящее к более простой формуле, чем непосредственное применение этого принципа.

Положим $F(w) = \frac{1}{1-w} f\left(\frac{w}{1-w}\right)$. Эта функция регулярна при $\operatorname{Re}(w) < 1/2$, так как $|w| < |1-w|$, если $\operatorname{Re}(w) < 1/2$. Мы можем написать

$$F(w) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{a_m w^m}{(1-w)^{m+1}} = \sum_{m=0}^{\infty} a_m w^m \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(m+r)!}{m!\, r!} w^r =$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} w^n \sum_{m=0}^{n} \frac{n!}{m!\,(n-m)!} a_m.$$

Положим $b_n = \sum_{m=0}^{n} \frac{n!}{m!\,(n-m)!} a_m$. Точка $z = 1$ в том и только в том случае является особой для $f(z)$, если точка $w = 1/2$ является особой для $F(w)$, а последнее имеет место в том и только в том случае, если

$$\varlimsup_{n\to\infty} |b_n|^{-1/n} = \frac{1}{2}.$$

Действительно, именно при этом условии на окружности $|w| = 1/2$ имеется особая точка функции $F(w)$, а все точки этой окружности, отличные от точки $w = 1/2$, заведомо регулярны.

Пользуясь другими преобразованиями, можно получить много других условий, эквивалентных этому.

Пример. Доказать, что для функции $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^{2^n}$ каждая точка единичной окружности является особой.

[Имея в виду точку $z = e^{i\theta}$, мы должны рассмотреть числа

$$b_n = \sum_{m=0}^{n} \frac{n!}{m!\,(n-m)!} a_m,$$

где $a_m = e^{i2^r\theta}$, если $m = 2^r$, и $a_m = 0$ для остальных значений m. Очевидно,

$$|b_n| \leqslant \sum_{m=0}^{n} \frac{n!}{m!\,(n-m)!} = 2^n.$$

Кроме того,

$$b_{2^n} = \sum_{m=0}^{n} \frac{2^n!}{2^m!\,(2^n-2^m)!} e^{i2^m\theta}.$$

В силу теоремы Стирлинга, модуль члена этой суммы с $m = n-1$ асимптотически равен $A \cdot 2^{2^n - \frac{1}{2}n}$. Остальные члены не играют роли: если u_m — член с номером m, то при $0 < m \leqslant n-2$

$$\left|\frac{u_m}{u_{m+1}}\right| = \frac{(2^m+1)\dots 2^{m+1}}{(2^n-2^{m+1}+1)\dots(2^n-2^m)} < \left(\frac{2^{m+1}}{2^n-2^m}\right)^{2^m} < \left(\frac{2}{3}\right)^{2^m} < \frac{4}{9}.$$

Следовательно, $\varlimsup |b_{2^n}|^{\frac{1}{2^n}} = 2.$]

7.3. Сходимость ряда и регулярность функции. Заметим, что сходимость или расходимость первоначального ряда не служила нам признаком регулярности или нерегулярности функции. В общем случае она и не может служить таким признаком, поскольку все мыслимые возможности встречаются здесь фактически. Если

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n z^n}{n} = \log\frac{1}{1+z},$$

то при $z=1$ ряд сходится и функция регулярна, а при $z=-1$ ряд расходится и функция не регулярна. С другой стороны, если

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^n=\frac{1}{1+z},$$

то при $z=1$ ряд расходится, но функция регулярна, а если

$$f(z)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n^2}=\int_0^z \frac{1}{w}\log\frac{1}{1-w}\,dw,$$

то при $z=1$ ряд сходится, но функция не регулярна.

7.3.1. Существует, однако, случай, в котором расходимость ряда указывает на наличие особенности: это случай, когда $a_n \to 0$. Верна следующая теорема.

Если $f(z)=\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ и $a_n \to 0$, то ряд сходится в каждой точке единичной окружности, в которой функция регулярна.

Были предложены два доказательства этой теоремы. Одно, принадлежащее М. Риссу, существенно пользуется методами теории функций комплексного переменного *). Нижеследующее другое доказательство, принадлежащее В. Янгу **), проводится методами теории рядов Фурье. В некоторых отношениях оно не столь просто, как доказательство Рисса, зато его нетрудно приспособить для получения более общих результатов.

Без ущерба для общности можно считать, что рассматриваемая точка есть точка $z=1$ и что $f(1)=0$. Мы должны доказать, что $s_n=a_0+\ldots+a_n \to 0$.

Из формулы § 7.2.2 (1) следует, что

$$s_n=\frac{1}{2\pi i}\int\frac{f(z)}{1-z}\frac{dz}{z^{n+1}},$$

причем в качестве контура интегрирования может быть взята окружность $|z|=r<1$. Таким образом,

$$s_n=\frac{1}{2\pi r^n}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{f(re^{i\theta})}{1-re^{i\theta}}e^{-in\theta}\,d\theta.$$

Пусть $0<\delta<\pi$, и пусть $\varphi(\theta)=\varphi(\theta, \delta, r)$ — функция, удовлетворяющая следующим условиям:

(I) $\varphi(\theta)=\dfrac{1}{1-re^{i\theta}}$ при $-\pi<\theta<-\delta$ и при $\delta<\theta<\pi$;

(II) $\varphi(\theta)$ и $\varphi'(\theta)$ непрерывны при $-\pi<\theta<\pi$;

*) Landau, *Ergebnisse*, § 18.
**) W. H. Young [7].

(III) $|\varphi(\theta)|<K$, $|\varphi'(\theta)|<K$, $|\varphi''(\theta)|<K$ при $-\pi<\theta<\pi$, где K зависит от δ, но не зависит от r.

Например, полагая $\varphi(\theta)=a\theta^3+b\theta^2+c\theta+d$ $(-\delta\leqslant\theta\leqslant\delta)$, можно определить коэффициенты так, чтобы были выполнены равенства

$$\varphi(\pm\delta)=\frac{1}{1-re^{\pm i\theta}},\quad \varphi'(\pm\delta)=\frac{ire^{\pm i\delta}}{(1-re^{\pm i\delta})^2}.$$

Тогда условие (II) будет удовлетворено. Кроме того, a, b, c, d будут линейными комбинациями чисел $\varphi(\pm\delta)$ и $\varphi'(\pm\delta)$, модули которых не превосходят $\frac{1}{2}\operatorname{coses}\frac{1}{2}\delta$ и $\frac{1}{4}\operatorname{cosec}^2\frac{1}{2}\delta$, так что будет удовлетворено и условие (III).

Мы можем написать:

$$2\pi r^n s_n=\int\limits_{-\delta}^{\delta}\frac{f(re^{i\theta})}{1-re^{i\theta}}e^{-in\theta}\,d\theta+\int\limits_{-\pi}^{\pi}f(re^{i\theta})\,\varphi(\theta)\,e^{-in\theta}\,d\theta-$$
$$-\int\limits_{-\delta}^{\delta}f(re^{i\theta})\,\varphi(\theta)\,e^{-in\theta}\,d\theta.$$

Обозначим эти интегралы через I_1, I_2, I_3.

Так как функция $f(z)$ регулярна при $z=1$ и $f(1)=0$, то в некотором интервале $|\theta|\leqslant\theta_0$

$$f(re^{i\theta})=O(|1-re^{i\theta}|)$$

равномерно при $r_0\leqslant r\leqslant 1$. Следовательно,

$$I_1=\int\limits_{-\delta}^{\delta}O(1)\,d\theta=O(\delta).$$

Предположим теперь, что δ фиксировано. В силу равномерной сходимости

$$I_2=\sum_{m=1}^{\infty}a_m r^m\int\limits_{-\pi}^{\pi}e^{i(m-n)\theta}\,\varphi(\theta)\,d\theta,$$

и, дважды применяя интегрирование по частям ко всем членам, кроме члена с номером n, мы получаем равенство

$$I_2=a_n r^n\int\limits_{-\pi}^{\pi}\varphi(\theta)\,d\theta-\sum_{m\neq n}\frac{a_m r^m}{(m-n)^2}\int\limits_{-\pi}^{\pi}e^{i(m-n)\theta}\varphi''(\theta)\,d\theta$$

(все внеинтегральные члены сокращаются). Положим $\varepsilon_\nu=\max\limits_{m\geqslant\nu}(|a_m|)$, так что $\varepsilon_\nu \to 0$. Очевидно,

$$|I_2| \leqslant 2\pi K \left\{ \varepsilon_n + \varepsilon_0 \sum_{m \leqslant \frac{1}{2}n} \frac{1}{(m-n)^2} + \varepsilon_{\frac{1}{2}n} \sum_{m > \frac{1}{2}n} \frac{1}{(m-n)^2} \right\} =$$

$$= O(\varepsilon_n) + O\left(\frac{1}{n}\right) + O\left(\varepsilon_{\frac{1}{2}n}\right).$$

Наконец,

$$I_3 = \left[\frac{f\varphi e^{-in\theta}}{-in}\right]_\delta^{-\delta} + \frac{1}{in} \int_{-\delta}^{\delta} (f'\varphi + f\varphi') e^{-in\theta}\, d\theta = O\left(\frac{1}{n}\right).$$

По заданному ε можно найти такое δ, что $|I_1| < \frac{1}{3}\varepsilon$ для всех значений n; фиксировав это значение δ, можно найти такое $n_0 = n_0(\varepsilon)$, что $|I_2| < \frac{1}{3}\varepsilon$ и $|I_3| < \frac{1}{3}\varepsilon$ при $n > n_0$. Таким образом, $2\pi r^n |s_n| < \varepsilon$ $(n > n_0)$. Так как r сколь угодно близко к 1, из этого следует, что $2\pi |s_n| \leqslant \varepsilon$ $(n > n_0)$, т. е. что $s_n \to 0$.

Читатель заметит, что регулярность функции $f(z)$ при $z = 1$ не была использована нами во всей полноте и что доказательство с небольшим изменением сохраняет силу, если например, $f(z) = O(|1-z|^\alpha)$ с $\alpha > 0$. По поводу более общей формулировки теоремы мы должны отослать читателя к работе Янга.

7.4. Сверхсходимость *). Мы знаем, что степенной ряд расходится в каждой точке, внешней к его кругу сходимости. Однако если, вместо того чтобы рассматривать всю последовательность частичных сумм ряда, мы будем рассматривать ее подпоследовательности, то в некоторых случаях мы встретимся со сходящимися последовательностями. Это можно показать на следующем примере.

Пусть

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\{z(1-z)\}^{4^n}}{p_n},$$

где p_n — наибольший из коэффициентов многочлена $\{z(1-z)\}^{4^n}$. Модули коэффициентов многочлена $\{z(1-z)\}^{4^n}/p_n$ не превосходят 1, и один из них равен 1. Старший член этого многочлена имеет степень $2 \cdot 4^n$, а младший член следующего многочлена — степень 4^{n+1}. Следовательно, каждый член разложения функции $f(z)$ в ряд по степеням z является членом в точности одного из этих многочленов, и других членов ряд не содержит. Радиус сходи-

*) Ostrowski [1], Zygmund [1], Estermann [2].

мости этого степенного ряда равен 1, так как $|a_n| \leqslant 1$ для всех значений n и $a_n = 1$ для бесконечного множества значений n.

В частности, предыдущий ряд многочленов сходится при $|z| < 1$. А так как он формально не меняется при подстановке $z = 1 - w$, то он сходится и при $|w| < 1$, т. е. при $|1 - z| < 1$. Таким образом, специальная последовательность частичных сумм ряда, которая получается, если каждый многочлен рассматривается как целое, сходится в области, лежащей частично за пределами единичного круга.

Степенной ряд, который обладает последовательностью частичных сумм, сходящейся вне круга сходимости, называется «сверхсходящимся». Конечно, степенной ряд может быть сверхсходящимися в окрестности некоторой точки границы круга сходимости только в случае, когда функция регулярна в этой точке. Мы укажем сейчас класс степенных рядов, обладающий свойством сверхсходимости в окрестности каждой точки границы круга сходимости, в которой функция регулярна.

7.4.1. *Пусть радиус сходимости степенного ряда*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

равен 1, *и пусть последовательность его коэффициентов имеет бесконечное число пропусков, т. е. пусть существуют такие последовательности значений индекса* $\{p_k\}$, $\{q_k\}$, *что* $a_n = 0$ *при* $p_k < n < q_k$; *пусть при этом* $q_k \geqslant (1 + \vartheta) p_k$, *где* ϑ — *фиксированное положительное число.*

Тогда последовательность частичных сумм

$$s_{p_k}(z) = \sum_{n=0}^{p_k} a_n z^n$$

сходится в некоторой области, содержащей все точки границы круга сходимости, в которых функция $f(z)$ *регулярна.*

При доказательстве достаточно рассмотреть точку $z = 1$. Предположим, что функция $f(z)$ регулярна в этой точке. Тогда при достаточно малом δ она регулярна в круге с центром $1/2$ и радиусом $\frac{1}{2} + \delta$, а также на его границе.

Применим теорему Адамара о трех окружностях к функции

$$\varphi(z) = f(z) - s_{p_k}(z)$$

и окружностям с центром $z = \frac{1}{2}$ и радиусами $\frac{1}{2} - \delta$, $\frac{1}{2} + \varepsilon$, $\frac{1}{2} + \delta$, где $0 < \varepsilon < \delta$. Если M_1, M_2, M_3 — максимумы модуля функции $\varphi(z)$ на этих окружностях, то

$$M_2^{\log\frac{1+2\delta}{1-2\delta}} \leqslant M_1^{\log\frac{1+2\delta}{1+2\varepsilon}} M_3^{\log\frac{1+2\varepsilon}{1-2\delta}}. \tag{1}$$

Чтобы доказать, что $s_{p_k}(z) \to f(z)$ в некоторой области, содержащей точку $z=1$, достаточно доказать, что если ε достаточно мало, то $M_2 \to 0$ при $p_k \to \infty$. Идея доказательства состоит в том, что в то время как M_3 имеет, по существу, порядок $(1+\delta)^{p_k}$, M_1 ведет себя как $(1-\delta)^{q_k}$; таким образом, поскольку p_k меньше, чем q_k, правая часть неравенства (1) при больших значениях p_k мала.

Каждому положительному числу η, которое мы предположим меньшим, чем $\frac{1}{2}\delta$, отвечает такое число K, что

$$|a_n| < K(1-\eta)^{-n}.$$

Следовательно, при $k \to \infty$

$$M_1 \leqslant \left|a_{q_k} z^{q_k}\right| + \left|a_{q_k+1} z^{q_k+1}\right| + \ldots <$$
$$< K\frac{((1-\delta)/(1-\eta))^{q_k}}{1-((1-\delta)/(1-\eta))} = O\left\{\left(\frac{1-\delta}{1-\eta}\right)^{q_k}\right\} = O\left\{\left(\frac{1-\delta}{1-\eta}\right)^{(1+\vartheta)p_k}\right\}.$$

Далее, если M есть максимум модуля функции $f(z)$ на внешней окружности, то

$$M_3 \leqslant M + |a_0| + \ldots + \left|a_{p_k} z^{p_k}\right| <$$
$$< M + K\left\{1 + \frac{1+\delta}{1-\eta} + \ldots + \left(\frac{1+\delta}{1-\eta}\right)^{p_k}\right\} = O\left\{\left(\frac{1+\delta}{1-\eta}\right)^{p_k}\right\}.$$

Следовательно, правая часть неравенства (1) есть

$$O\left[\left\{\left(\frac{1-\delta}{1-\eta}\right)^{(1+\vartheta\log\frac{1+2\delta}{1+2\varepsilon}} \left(\frac{1+\delta}{1-\eta}\right)^{\log\frac{1+2\varepsilon}{1-2\delta}}\right\}^{p_k}\right].$$

При $\varepsilon \to 0$, $\eta \to 0$ то, что стоит в фигурных скобках, стремится к $(1-\delta)^{(1+\vartheta)\log(1+2\delta)}(1+\delta)^{-\log(1-2\delta)}$, а это число меньше, чем 1, если δ достаточно мало; действительно, при $\delta \to 0$ его логарифм $\sim -2\vartheta\delta^2$, так что при малых значениях δ этот логарифм отрицателен. Следовательно, ε и η можно взять столь малыми, что содержимое фигурных скобок будет меньше, чем 1. Этим теорема доказана.

7.4.2. Пропуски не только дают удобное средство для построения сверхсходящихся рядов. Они органически связаны со сверхсходимостью. Это обнаруживается следующей теоремой, которая является своего рода обращением предыдущей.

Если последовательность частичных сумм $s_{p_k}(z)$ ряда $f(z) = \sum a_n z^n$ с радиусом сходимости, равным единице, равномерно сходится в окрестности некоторой точки единичной окружности, то

$$f(z) = g(z) + r(z),$$

где $g(z)$ — сумма степенного ряда с бесконечным числом пропусков (p_k, q_k), таких, что $q_k > (1+\vartheta) p_k$, а $r(z)$ — сумма степенного ряда с радиусом сходимости, бо́льшим единицы.

Мы не даем доказательства, которое труднее доказательства прямой теоремы.

7.4.3. Теорема Адамара о пропусках. *Если номера отличных от нуля коэффициентов степенного ряда*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

образуют последовательность $n_1, n_2, \ldots$, в которой $n_{k+1} > (1+\vartheta) n_k$ с $\vartheta > 0$, то граница круга сходимости ряда является естественной границей функции.

Это — почти непосредственное следствие теоремы о сверхсходимости. Если бы функция $f(z)$ была регулярной в некоторой точке границы, то последовательность

$$s_{n_k}(z) = \sum_{n=1}^{n_k} a_n z^n$$

сходилась бы в некоторой точке, лежащей вне круга сходимости. Но для ряда рассматриваемого вида сходимость этой последовательности частичных сумм есть то же самое, что сходимость всей последовательности частичных сумм. Таким образом, сверхсходимость невозможна и каждая точка границы круга сходимости является особой точкой функции $f(z)$.

7.4.4. Доказательство Морделла*). Это очень простое прямое доказательство. Пусть радиус сходимости равен 1. Положим $z = aw^p + bw^{p+1}$, где $0 < a < 1$, $a + b = 1$ и p — положительное целое число. Ясно, что $|z| \leqslant 1$, если $|w| \leqslant 1$, и нетрудно проверить, что $|z| < 1$ при $|w| \leqslant 1$, если не считать значения $z = 1$ при $w = 1$. Положим

$$\varphi(w) = f(z) = \sum a_n (aw^p + bw^{p+1})^n =$$
$$= \sum a_n (a^n w^{pn} + \ldots + b^n w^{(p+1)n}) = \sum b_n w^n.$$

Функция $\varphi(w)$ регулярна при $|w| \leqslant 1$ за исключением, возможно, точки $w = 1$. Мы покажем, что радиус сходимости степенного

*) Mordell [1].

ряда, полученного нами для $\varphi(w)$, равен 1 и что, следовательно, точка $w=1$ является для $\varphi(w)$ особой.

Заметим для этого, что при $p>1/\vartheta$ ряд $\sum b_n w^n$ получается из стоящего перед ним ряда простым раскрытием скобок. Действительно, никакая степень w не встречается в этом ряде со скобками дважды, если при любом k

$$(p+1)\,n_k < p n_{k+1},$$

т. е. если $p\left(\frac{n_{k+1}}{n_k}-1\right)>1$, а это условие выполнено, если $p>1/\vartheta$.

Если бы ряд $\sum b_n w^n$ имел радиус сходимости, больший единицы, то он сходился бы при некотором вещественном значении $w>1$, а тогда ряд для $f(z)$ сходился бы при некотором вещественном значении $z>1$, что невозможно. Этим теорема доказана.

Имеется еще одно доказательство *), опирающееся на критерий § 7.2.3.

Методом, подобным только что изложенному, может быть доказана и теорема § 7.4.1 **). Пусть ряд для $f(z)$ удовлетворяет условиям § 7.4.1. Тогда функция $\varphi(w)$ не имеет особых точек в круге $|w|\leqslant 1$ за возможным исключением точки $w=1$. Если функция $f(z)$ регулярна при $z=1$, то функция $\varphi(w)$ регулярна при $w=1$ и, следовательно, регулярна в некотором круге $|w|<1+\delta$ с $\delta>0$. Тогда ряд $\sum b_n w^n$ сходится при $|w|<1+\delta$ и, в частности, последовательность сумм $\sum_{n=0}^{(p+1)p_k} b_n w^n$ сходится при $|w|<1+\delta$. А тогда последовательность сумм $\sum_{n=1}^{p_k} a_n z^n$ сходится в некоторой области, для которой точка $z=1$ является внутренней.

7.5. Асимптотическое поведение функции вблизи границы круга сходимости. Если при $n\to\infty$ коэффициенты степенного ряда ведут себя достаточно просто, то для $f(z)$ можно дать асимптотическое выражение, пригодное при приближении точки z к границе круга сходимости вдоль радиуса-вектора. Следующая теорема относится к простейшему случаю такого рода.

Пусть

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n,\quad g(x)=\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n,$$

где $a_n\geqslant 0$, $b_n\geqslant 0$, *и пусть ряды сходятся при* $0<x<1$ *и расходятся при* $x=1$. *Если при* $n\to\infty$

$$a_n\sim Cb_n, \tag{1}$$

*) См. Landau, *Ergebnisse*, § 19.
**) Сообщено М. М. Крумом.

то при $x \to 1$

$$f(x) \sim Cg(x) \tag{2}$$

Для заданного ε найдем такое N, что

$$|a_n - Cb_n| < \varepsilon b_n \qquad (n > N).$$

Мы можем написать:

$$|f(x) - Cg(x)| = \left| \sum_{n=0}^{\infty} (a_n - Cb_n) x^n \right| \leqslant \left| \sum_{n=0}^{N} (a_n - Cb_n) x^n \right| +$$

$$+ \left| \sum_{n=N+1}^{\infty} (a_n - Cb_n) x^n \right| \leqslant \sum_{n=0}^{N} |a_n - Cb_n| + \varepsilon \sum_{n=N+1}^{\infty} b_n x^n \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{n=0}^{N} |a_n - Cb_n| + \varepsilon g(x).$$

Так как $g(x) \to \infty$, то при фиксированном N можно найти такое δ, что

$$\sum_{n=0}^{N} |a_n - Cb_n| < \varepsilon g(x) \qquad (x > 1 - \delta).$$

При таком выборе δ

$$|f(x) - Cg(x)| < 2\varepsilon g(x) \qquad (x > 1 - \delta),$$

что и завершает доказательство.

Эта теорема верна и при более общих условиях. *Пусть: ряды сходятся при* $0 < x < 1$; *суммы*

$$s_n = a_0 + a_1 + \ldots + a_n, \quad t_n = b_0 + b_1 + \ldots + b_n$$

положительны; ряды $\sum s_n$ *и* $\sum t_n$ *расходятся;* $s_n \sim Ct_n$. *Тогда соотношение* (2) *остается выполненным.*

Действительно, как в § 7.2.2, при $0 < x < 1$

$$f(x) = (1 - x) \sum_{n=0}^{\infty} s_n x^n, \quad g(x) = (1 - x) \sum_{n=0}^{\infty} t_n x^n.$$

Согласно предыдущей теореме

$$\sum_{n=0}^{\infty} s_n x^n \sim C \sum_{n=0}^{\infty} t_n x^n,$$

что и доказывает соотношение (2).

В частности, *если* $s_n \sim Cn$, *то*

$$f(x) \sim \frac{C}{1-x}.$$

Примеры. (I) Если $p<1$, то при $x \to 1$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^p} \sim \frac{\Gamma(1-p)}{(1-x)^{1-p}}.$$

[Мы пишем $(1-x)^{p-1} = \frac{1}{\Gamma(1-p)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(n-p+1)}{\Gamma(n+1)} x^n$ и пользуемся леммой § 1.8.7.]

(II) Положим

$$F(\alpha, \beta, \gamma, x) = 1 + \frac{\alpha \cdot \beta}{1 \cdot \gamma} x + \frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{1 \cdot 2 \cdot \gamma(\gamma+1)} x^2 + \ldots$$

Показать, что при $x \to 1$

$$F(\alpha, \beta, \gamma, x) \sim \frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\alpha+\beta-\gamma)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \frac{1}{(1-x)^{\alpha+\beta-\gamma}},$$

если $\alpha+\beta>\gamma$, и

$$F(\alpha, \beta, \alpha+\beta, x) \sim \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \log \frac{1}{1-x}.$$

7.5.1. Обратная проблема. Легко понять, что обращение предыдущих теорем в общем случае невозможно: из асимптотического поведения функции $f(x)$ нельзя вывести асимптотическое поведение чисел a_n или даже s_n. Рассмотрим, например, функцию

$$f(x) = \frac{1}{(1+x)^2(1-x)} = (1-x) \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) x^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(x^{2n} - x^{2n+1}).$$

Здесь $s_{2m+1}=0$, в то время как $s_{2m}=m+1$; таким образом, s_n неограниченно колеблется, хотя $f(x) \sim 1/4(1-x)$.

В предыдущем примере не все коэффициенты положительны, и это, в некотором смысле, является причиной ложности обратной теоремы. Предположив, что все коэффициенты положительны, можно получить точное обращение последней теоремы предыдущего параграфа.

Пусть $a_n \geqslant 0$ для всех значений n. Если при $x \to 1$

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \sim \frac{1}{1-x},$$

то при $n \to \infty$

$$s_n = \sum_{\nu=0}^{n} a_\nu \sim n.$$

Эта теорема принадлежит Харди и Литтлвуду *). Мы изложим в высшей степени изящное доказательство, которое было недавно предложено Карамата **).

7.5.2. Чтобы оценить доказательство, полезно сначала посмотреть, что можно доказать совсем простыми рассуждениями. Прежде всего,

$$f(x) \geqslant \sum_{\nu=0}^{n} a_\nu x^\nu \geqslant x^n s_n$$

для всех значений x и n. Так как, кроме того, $f(x) < A/(1-x)$, то при $x = e^{-\frac{1}{n}}$

$$e^{-1}s_n \leqslant \frac{A}{1-x} = \frac{A}{1-e^{-1/n}} < An,$$

т. е.

$$s_n < A_1 n. \tag{1}$$

С другой стороны,

$$f(x) = (1-x)\sum_{m=0}^{\infty} s_m x^m < (1-x)\, s_n \sum_{m=0}^{n-1} x^m + A_1(1-x)\sum_{m=n}^{\infty} mx^m <$$

$$< s_n + A_1 n x^n + \frac{A_1 x^{n+1}}{1-x}.$$

Полагая $x = e^{-\lambda/n}$ и пользуясь тем, что $f(x) > A/(1-x) > An/\lambda$ при $n > 2\lambda$, мы видим, что

$$\frac{An}{\lambda} < s_n + Ane^{-\lambda} + \frac{Ane^{-\lambda}}{\lambda}.$$

Следовательно, если λ достаточно велико, то

$$s_n > A_2 n. \tag{2}$$

Мы должны показать, что в действительности в качестве A_1 и A_2 можно взять $1+\varepsilon$ и $1-\varepsilon$. Предыдущие соображения слишком скудны для этого; метод, который действительно приводит к цели, далек от тривиальности.

7.5.3. Доказательство Карамата. Это доказательство опирается на известную теорему Вейерштрасса, согласно которой всякую непрерывную функцию можно равномерно аппроксимировать многочленами ***). Точнее, нам нужен следующий факт: пусть функция $g(x)$ непрерывна при $0 \leqslant x \leqslant 1$, и пусть ε — поло-

*) Hardy and Littlewood [2].

**) Karamata [1].

***) Доказательство имеется в § 13.3.3. Другое доказательство см. у Гурса, курс анализа, т. I, § 197.

жительное число; тогда существуют такие многочлены $p(x)$, $P(x)$, что

$$p(x) \leqslant g(x) \leqslant P(x) \tag{1}$$

и

$$\int_0^1 \{g(x) - p(x)\}\, dx \leqslant \varepsilon, \quad \int_0^1 \{P(x) - g(x)\}\, dx \leqslant \varepsilon. \tag{2}$$

Чтобы вывести это из теоремы Вейерштрасса, достаточно заметить, что соотношения (1), (2) выполнены, если многочлены $p(x)$, $P(x)$ отличаются не более чем на $\frac{1}{2}\varepsilon$ от функций $g(x) - \frac{1}{2}\varepsilon$, $g(x) + \frac{1}{2}\varepsilon$.

Построить многочлены, удовлетворяющие условиям (1) и (2), можно и в случае, когда функция $g(x)$ имеет в некоторой точке интервала, скажем при $x = c$, разрыв первого рода. Пусть, например, $g(c-0) < g(c+0)$. Положим $\varphi(x) = g(x) + \frac{1}{2}\varepsilon$ при $x < c - \delta$ и при $x > c$; если же $c - \delta \leqslant x \leqslant c$, то положим $\varphi(x) = \max\left\{l(x),\, g(x) + \frac{1}{4}\varepsilon\right\}$, где $l(x)$ — линейная функция от x, такая что $l(c-\delta) = g(c-\delta) + \frac{1}{2}\varepsilon$, $l(c) = g(c+0) + \frac{1}{2}\varepsilon$. Функция $\varphi(x)$ непрерывна, и $\varphi(x) > g(x)$. Легко понять, что при достаточно малом δ многочлен $P(x)$, достаточно хорошо аппроксимирующий функцию $\varphi(x)$, обладает требуемыми свойствами. Подобным же образом строится многочлен $p(x)$.

Чтобы доказать теорему Харди и Литтлвуда, мы докажем сначала, что для всякого многочлена $P(x)$

$$\lim_{x \to 1} (1-x) \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n P(x^n) = \int_0^1 P(t)\, dt. \tag{3}$$

Очевидно, достаточно рассмотреть случай, когда $P(x) = x^k$ с некоторым k. Но в этом случае

$$(1-x) \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n P(x^n) = (1-x) \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+kn} =$$
$$= \frac{1-x}{1-x^{k+1}} \left\{(1-x^{k+1}) \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x^{k+1})^n\right\} \to \frac{1}{k+1} = \int_0^1 x^k\, dx,$$

что и утверждалось.

Далее,

$$\lim (1-x) \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n g(x^n) = \int_0^1 g(t)\, dt, \tag{4}$$

где $g(t)$ — любая непрерывная функция или даже функция, имеющая разрыв первого рода. Действительно, пусть $p(x)$ и $P(x)$ — многочлены, удовлетворяющие условиям (1) и (2). Так как $g(x) \leqslant P(x)$ и коэффициенты положительны, то

$$\overline{\lim}\,(1-x)\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n g(x^n) \leqslant \overline{\lim}\,(1-x)\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n P(x^n) = \int_0^1 P(t)\,dt < \int_0^1 g(t)\,dt + \varepsilon,$$

поскольку же ε произвольно,

$$\overline{\lim}\,(1-x)\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n g(x^n) \leqslant \int_0^1 g(t)\,dt.$$

Подобным же образом, пользуясь многочленом $p(x)$, мы получаем неравенство

$$\underline{\lim}\,(1-x)\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n g(x^n) \geqslant \int_0^1 g(t)\,dt.$$

Этим равенство (4) доказано.

Положим теперь $g(t)=0$, если $0 \leqslant t < e^{-1}$, и $g(t)=\frac{1}{t}$, если $e^{-1} \leqslant t \leqslant 1$. Очевидно,

$$\int_0^1 g(t)\,dt = \int_{e^{-1}}^1 \frac{dt}{t} = 1. \tag{5}$$

Если $x = e^{-1/N}$, то

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n g(x^n) = \sum_{n \leqslant \frac{1}{\log \frac{1}{x}}} a_n = \sum_{n=0}^{N} a_n = s_N,$$

так что, в силу равенств (4) и (5), $s_N \sim \frac{1}{1-x} \sim N$. Этим теорема доказана *).

7.6. Теорема Абеля и ее обращение. В этом параграфе мы возвращаемся к вопросу, уже обсуждавшемуся в гл. I. В § 1.2.2 мы доказали для вещественных рядов теорему Абеля: *если ряд*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n$$

*) См. также Wielandt [1]. (*Примечание переводчика.*)

сходится к сумме s, то

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \to s,$$

когда $x\to 1$ вдоль вещественной оси. В § 1.2.3 мы доказали теорему Таубера, утверждающую, что *обратное заключение верно, если $a_n=o(1/n)$.* Теперь мы рассмотрим некоторые усиления этих теорем *).

7.6.1. *Если*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = s, \tag{1}$$

то

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \to s, \tag{2}$$

когда $z\to 1$ вдоль любого пути, лежащего между двумя хордами единичной окружности, выходящими из точки $z=1$.

Как и в § 1.2.2, достаточно доказать, что степенной ряд равномерно сходится; но теперь мы должны доказать равномерную сходимость в области, ограниченной указанными хордами и дугой окружности достаточно малого радиуса с центром в точке $z=1$.

Применим к нашим условиям соображения, использованные при доказательстве леммы Абеля (§ 1.1.3.1). Пусть

$$s_{n,p}=a_n+a_{n+1}+\ldots+a_p,$$

так что $|s_{n,p}|<\varepsilon$ $(n_0\leqslant n<p)$. Тогда

$$\sum_{\nu=n}^{m} a_\nu z^\nu =$$

$$=s_{n,n}z^n+(s_{n,n+1}-s_{n,n})\,z^{n+1}+\ldots+(s_{n,m}-s_{n,m-1})\,z^m=$$

$$=s_{n,n}(z^n-z^{n+1})+\ldots+s_{n,m-1}(z^{m-1}-z^m)+s_{n,m}z^m.$$

Следовательно, при $n\geqslant n_0$

$$\left|\sum_{\nu=n}^{m} a_\nu z^\nu\right|\leqslant\varepsilon\left\{\sum_{\nu=n}^{m-1}|z^\nu-z^{\nu+1}|+|z|^m\right\}<$$

$$<\varepsilon\left\{|1-z|\sum_{\nu=0}^{\infty}|z|^\nu+1\right\}=\varepsilon\left\{\frac{|1-z|}{1-|z|}+1\right\}.$$

Теперь доказательство заканчивается так же, как § 1.2.2, если отношение $|1-z|/(1-|z|)$ остается ограниченным, когда $z\to 1$ вдоль рассматриваемого пути. Это отношение принимает

*) Landau, *Ergebnisse*, гл. III; Hardy and Littlewood [1], [2], [3], [4].

сколь угодно большие значения в точках, сколь угодно близких к 1, но еще более близких к окружности. В этом и заключается причина ограничения, наложенного на путь.

Итак, предположим, что

$$|1-z| \leqslant k(1-|z|) \qquad (k>1). \tag{3}$$

Это неравенство удовлетворяется в области, ограниченной кривой

$$|1-z| = k(1-|z|).$$

После подстановки $1-z=\rho e^{i\varphi}$ мы получаем: $\rho = k-k|1-\rho e^{i\varphi}|$, т. е. $(\rho-k)^2 = k^2(1-2\rho\cos\varphi+\rho^2)$, т. е.

$$\rho = 2\frac{k^2\cos\varphi-k}{k^2-1}.$$

Таким образом, кривая имеет две ветви, выходящие из точки $z=1$, каждая из которых образует с вещественной осью угол $\arccos(1/k)$. При достаточно большом k эта кривая охватывает любую область интересующего нас типа. Поскольку в области, ограниченной кривой, неравенство (3) удовлетворяется, этим теорема доказана.

7.6.2. Подобное же усиление можно получить для теоремы Таубера.

Если $a_n = o(1/n)$ и $f(z)\to s$, когда $z\to 1$ вдоль некоторого пути, удовлетворяющего предыдущим условиям, то ряд $\sum a_n$ сходится к сумме s.

Доказательство, данное в § 1.2.3, нуждается лишь в небольшом изменении. Мы должны доказать, что

$$S_1 - S_2 = \sum_{n=N+1}^{\infty} a_n z^n - \sum_{n=0}^{N} a_n(1-z^n)\to 0,$$

где $N=[1/(1-|z|)]$. Как в § 1.2.3, если $|na_n|<\varepsilon$ при $n>N$, то

$$|S_1| = \left|\sum_{N+1}^{\infty} na_n\frac{z^n}{n}\right| < \frac{\varepsilon}{N+1}\sum_{N+1}^{\infty}|z|^n < \frac{\varepsilon}{(N+1)(1-|z|)} < \varepsilon.$$

Но $|1-z^n| = |(1-z)(1+z+\ldots+z^{n-1})| \leqslant |1-z|\,n$. Следовательно, если выполнено неравенство § 7.6.1 (3), то

$$|S_2| \leqslant \sum_{n=1}^{N}|na_n(1-z)| \leqslant k(1-|z|)\sum_{n=1}^{N} n|a_n| \leqslant \frac{k}{N}\sum_{n=1}^{N} n|a_n|,$$

правая же часть, согласно лемме § 1.2.3, стремится к нулю. Этим теорема доказана.

7.6.3. Теорема Таубера для регулярных путей. Теорему Абеля, по крайней мере в предыдущей формулировке, нельзя распространить на пути, касательные к единичной окружности. Например, известно*), что ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-b} e^{in^a} \qquad (0<a<1)$$

сходится при $b>1-a$, но если $b>1-\frac{1}{2}a$, то функция

$$f(z)=\sum_{n=1}^{\infty} n^{-b} e^{in^a} z^n$$

не стремится ни к какому пределу вдоль дуги некоторой окружности, касающейся единичной окружности при $z=1$.

Напротив, теорема Таубера может быть распространена на пути, касательные к окружности, которые достаточно регулярны.

Мы будем называть путь «регулярным», если он определяется уравнениями $x=x(t)$, $y=y(t)$, у которых производные $x'(t)$ и $y'(t)$ непрерывны и нигде не обращаются в нуль одновременно, так что в каждой точке имеется определенная касательная.

Если $a_n=o\left(\frac{1}{n}\right)$ *и* $f(z)\to s$, *когда* $z\to 1$ *вдоль некоторого регулярного пути, проходящего внутри круга, то ряд* $\sum a_n$ *сходится к сумме* s.

Без ущерба для общности можно считать, что $s=0$. Пусть C — рассматриваемый путь. Тогда интеграл

$$\int_z^1 f(w)\,dw,$$

взятый вдоль C, существует, и мы покажем, что при $z\to 1$ он представляет собой $o(|1-z|)$. Каково бы ни было ε, для точек w кривой C, достаточно близких к 1, выполнено неравенство $|f(w)|<\varepsilon$. Из него следует, что

$$\left|\int_z^1 f(w)\,dw\right|\leqslant \varepsilon l(z),$$

где $l(z)$ — длина кривой C от z до 1. Но $l(z)\sim|1-z|$ при $z\to 1$; действительно, если точка $z=1$ отвечает значению $t=0$, то

$$\frac{l(z)}{t}=\frac{1}{t}\int_0^t [\{x'(u)\}^2+\{y'(u)\}^2]^{1/2}\,du\to[\{x'(0)\}^2+\{y'(0)\}^2]^{1/2}$$

*) См. Hardy and Littlewood [3], стр. 207.

(функции $x'(u)$ и $y'(u)$ непрерывны) и $\frac{x-1}{t} \to x'(0)$, $\frac{y}{t} \to y'(0)$. Следовательно,

$$\int_z^1 f(w)\,dw = o(|1-z|). \tag{1}$$

Если теперь z и z' — точки, лежащие на C, то

$$\int_z^{z'} f(w)\,dw = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1}\left(z'^{n+1} - z^{n+1}\right).$$

Так как $a_n = o(1/n)$, то этот ряд сходится равномерно относительно z' при $|z'| \leqslant 1$. Следовательно, переход к пределу при $z' \to 1$ дает равенство

$$\int_z^1 f(w)\,dw = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1}(1 - z^{n+1}). \tag{2}$$

Положим $N = [1/|1-z|]$. Мы можем написать

$$\int_z^1 f(w)\,dw = \sum\nolimits_1 + \sum\nolimits_2,$$

где

$$\sum\nolimits_1 = \sum_{n=0}^{N} \frac{a_n}{n+1}(1-z^{n+1}), \quad \sum\nolimits_2 = \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{a_n}{n+1}(1-z^{n+1}).$$

Очевидно,

$$\sum\nolimits_2 = \sum_{N+1}^{\infty} o\left(\frac{1}{n^2}\right) = o\left(\frac{1}{N}\right) = o(|1-z|). \tag{3}$$

Далее,

$$\begin{aligned} 1 - z^{n+1} &= (1-z)(1+z+\ldots+z^n) = \\ &= (1-z)(n+1) - (1-z)^2\{n + (n-1)z + \ldots + z^{n-1}\} = \\ &= (1-z)(n+1) + O(|1-z|^2 n^2), \end{aligned}$$

и, следовательно,

$$\begin{aligned} \sum\nolimits_1 &= (1-z)\sum_{n=0}^{N} a_n + O\left(|1-z|^2 \sum_{n=1}^{N} n|a_n|\right) = \\ &= (1-z)s_N + o(|1-z|^2 N) = (1-z)s_N + o(|1-z|). \end{aligned} \tag{4}$$

Из формул (1), (3) и (4) следует, что $s_N = o(1)$. **Этим теорема доказана.**

7.6.4. Усиление теоремы Таубера, принадлежащее Литтлвуду. Теперь мы перейдем к усилению совсем другого рода. Во всех формах теоремы Таубера, рассмотренных до сих пор, условие $a_n = o\left(\frac{1}{n}\right)$ играет роль, которая кажется существенной. Однако Литтлвудом было открыто, что это условие может быть заменено более слабым условием $a_n = O(1/n)$. Ради простоты мы ограничимся здесь приближением вдоль вещественной оси, хотя теорему можно доказать и для комплексных путей.

7.6.5. Мы воспользуемся следующей леммой.

Пусть $f(x)$ — вещественная функция, обладающая при $0 \leqslant x < 1$ производными двух первых порядков. Если при $x \to 1$

$$f(x) = o(1), \quad f''(x) = O\left\{\frac{1}{(1-x)^2}\right\},$$

то $f'(x) = o\left(\frac{1}{1-x}\right)$.

Положим $x' = x + \delta(1-x)$, где $0 < \delta < 1/2$. Мы можем написать

$$f(x') = f(x) + \delta(1-x) f'(x) + \frac{1}{2}\delta^2(1-x)^2 f''(\xi),$$

где $x < \xi < x'$. Следовательно,

$$(1-x) f'(x) = \frac{f(x') - f(x)}{\delta} + \frac{1}{2}\delta(1-x^2) f''(\xi) = \frac{f(x') - f(x)}{\delta} + O(\delta) \qquad (1)$$

[мы воспользовались тем, что

$$f''(\xi) = O\left\{\frac{1}{(1-\xi)^2}\right\} = O\left\{\frac{1}{(1-x')^2}\right\} = O\left\{\frac{1}{(1-x)^2}\right\}\Bigg].$$

Выбирая сначала значение δ достаточно малым, а затем значение x достаточно близким к 1, мы можем сделать правую часть равенства (1) сколь угодно малой. Этим лемма доказана.

7.6.6. Теорема Литтлвуда. *Если $f(x) = \sum a_n x^n \to s$ при $x \to 1$ и $a_n = O\left(\frac{1}{n}\right)$, то ряд $\sum a_n$ сходится к сумме s.*

Доказательство*) опирается на теорему § 7.5.1, и при доказательстве последней мы уже преодолели наиболее серьезные трудности. Очевидно, мы можем считать без ущерба для общности, что предел s равен нулю. Тогда при $x \to 1$

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = o(1).$$

---

*) Это доказательство отличается от первоначального доказательства Литтлвуда; см. Littlewood [3].

Далее, так как $a_n = O(1/n)$, то

$$f''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} = O\left\{\sum_{n=2}^{\infty} (n-1) x^{n-2}\right\} = O\left\{\frac{1}{(1-x)^2}\right\},$$

и, в силу предыдущей леммы,

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} = o\left(\frac{1}{1-x}\right).$$

Пусть $|na_n| \leqslant c$. Тогда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{na_n}{c}\right) x^{n-1} = \frac{1}{1-x} - \frac{f'(x)}{c} \sim \frac{1}{1-x}.$$

Но коэффициенты этого ряда все положительны, и, таким образом, согласно теореме § 7.5.1, $\sum_{\nu=1}^{n} \left(1 - \frac{\nu a_\nu}{c}\right) \sim n$. Следовательно,

$$\sum_{\nu=1}^{n} \nu a_\nu = o(n). \tag{1}$$

Эта асимптотическая формула для конечной суммы представляет собой значительный шаг в нужном направлении. Но для завершения доказательства нужны дополнительные соображения.

Пусть w_n обозначает левую часть соотношения (1). Тогда

$$f(x) - a_0 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{w_n - w_{n-1}}{n} x^n = \sum_{n=1}^{\infty} w_n \left(\frac{x^n}{n} - \frac{x^{n+1}}{n+1}\right) =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} w_n \left\{\frac{x^n - x^{n+1}}{n+1} + \frac{x^n}{n(n+1)}\right\} =$$

$$= (1-x) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{w_n}{n+1} x^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{w_n}{n(n+1)} x^n.$$

Так как $w_n = o(n)$, то при $x \to 1$ первый член справа есть $o(1)$, а так как, сверх того, $f(x) \to 0$, то

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{w_n}{n(n+1)} x^n \to -a_0.$$

Но $\frac{w_n}{n(n+1)} = o\left(\frac{1}{n}\right)$, так что, в силу теоремы Таубера,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{w_n}{n(n+1)} = -a_0.$$

Левая часть этого равенства есть

$$\lim_{N\to\infty}\sum_{n=1}^{N}\frac{w_n}{n(n+1)}=\lim_{N\to\infty}\sum_{n=1}^{N}w_n\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)=$$

$$=\lim_{N\to\infty}\left\{\sum_{n=1}^{N}\frac{w_n-w_{n-1}}{n}-\frac{w_N}{N+1}\right\}=\lim_{N\to\infty}\sum_{n=1}^{N}a_n,$$

что вместе с предыдущим равенством заканчивает доказательство.

7.7. Частичные суммы степенного ряда *). Изучение частичных сумм степенного ряда облегчается применением формул теории рядов Фурье. Мы воспользуемся некоторыми из этих формул, взяв их из гл. XIII, но во всех случаях, в которых они будут здесь применяться, они прямо выводятся из равномерной сходимости.

Пусть

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^n \qquad (|z|<1).$$

Положим $s_n(z)=a_0+a_1z+\ldots+a_nz^n$. Пусть, далее,

$$k(r,\ \theta)=\frac{1-r^2}{2(1-2r\cos\theta+r^2)}=\frac{1}{2}+r\cos\theta+r^2\cos 2\theta+\ldots$$

и

$$k_n(r,\ \theta)=\frac{1-r^2-2r^{n+1}\{\cos(n+1)\theta-r\cos n\theta\}}{2(1-2r\cos\theta+r^2)}=$$

$$=\frac{1}{2}+r\cos\theta+\ldots+r^n\cos n\theta.$$

Тогда

$$s_n(re^{i\theta})=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(\rho e^{i(\theta-\varphi)})\,k_n\left(\frac{r}{\rho},\ \varphi\right)d\varphi \qquad (0<r<\rho<1). \qquad (1)$$

Эту формулу можно доказать прямо почленным интегрированием. Она представляет собою специальный случай формулы Парсеваля (§ 13.5.4).

В силу интегральной формулы Дирихле (§ 13.2),

$$k_n(r,\ \theta)=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)(\theta-\varphi)}{2\sin\frac{1}{2}(\theta-\varphi)}\,k(r,\ \varphi)\,d\varphi. \qquad (2)$$

*) Landau [2], [3], [4] и *Ergebnisse*, гл. I.

Таким образом, s_n можно представить повторным интегралом, содержащим f и k:

$$s_n(re^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi^2}\int_0^{2\pi} f(\rho e^{i(\theta-\varphi)})\,d\varphi \int_0^{2\pi} \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)(\varphi-\psi)}{\sin\frac{1}{2}(\varphi-\psi)}\,k\left(\frac{r}{\rho},\ \psi\right)d\psi. \quad (3)$$

Мы рассматриваем также арифметические средние частичных сумм $\sigma_n(z)=\frac{1}{n}\{s_0(z)+s_1(z)+\ldots+s_{n-1}(z)\}$. В силу формулы (1),

$$\sigma_n(re^{i\theta}) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(\rho e^{i(\theta-\varphi)})\,K_n\left(\frac{r}{\rho},\ \varphi\right)d\varphi, \quad (4)$$

где $K_n(r,\ \theta)=\frac{1}{n}\sum_{\nu=0}^{n-1} k_\nu(r,\ \theta)$; в силу же интегральной формулы Фейера (§ 13.3.1),

$$K_n(r,\ \theta)=\frac{1}{2n\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\sin^2\frac{1}{2}n(\theta-\varphi)}{\sin^2\frac{1}{2}(\theta-\varphi)}\,k(r,\ \varphi)\,d\varphi. \quad (5)$$

7.7.1. Ограниченные степенные ряды. Предположим теперь, что функция $f(z)$ ограничена в единичном круге.

Если $|f(z)|\leqslant M$ при $|z|<1$, то $|\sigma_n(z)|\leqslant M$ при $|z|<1$ для всех значений n. Обратно, если $|\sigma_n(z)|\leqslant M$ при $|z|<1$ для всех значений n, то $|f(z)|\leqslant M$ при $|z|<1$.

Из предыдущих формул мы заключаем, что при $r<1$ функции $k(r,\ \theta)$ и $K_n(r,\ \theta)$ положительны. После этого из формулы (4) следует, что если $|f(z)|\leqslant M$, то

$$|\sigma_n(re^{i\theta})|\leqslant\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} MK_n\left(\frac{r}{\rho},\ \varphi\right)d\varphi.$$

Но справа стоит то, во что превращается σ_n, если $f(z)=M$, т. е. M. Этим доказана первая часть теоремы.

Далее, при $n\to\infty$ сумма $s_n(z)$, а с нею и сумма $\sigma_n(z)$, стремится к $f(z)$. Из этого сразу следует вторая часть теоремы.

7.7.2. Соответствующие теоремы о суммах $s_n(z)$ не столь просты. Причина в том, что функции k_n, в отличие от функций K_n, не всегда положительны. Из неравенства $|f(z)|\leqslant M$ не следует, что $|s_n(z)|\leqslant M$ для всех значений n и z. Более того, известно *), что верхняя грань чисел $|s_n(z)|$, взятая по всем функциям $f(z)$, для которых $|f(z)|\leqslant M$, стремится вместе с n к бесконечности. Верна, однако, следующая теорема.

---

*) Landau, *Ergebnisse*, § 2.

Существует такая абсолютная постоянная A, что

$$|s_n(z)| < AM \log n$$

для всех функций $f(z)$, удовлетворяющих условию $|f(z)| \leqslant M$.

Если $|f(z)| \leqslant M$, то из формулы § 7.7 (3) следует, что

$$|s_n(re^{i\theta})| \leqslant \frac{M}{2\pi^2} \int_0^{2\pi} k\left(\frac{r}{\rho},\ \psi\right) d\psi \int_0^{2\pi} \left| \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)(\varphi-\psi)}{\sin\frac{1}{2}(\varphi-\psi)} \right| d\varphi.$$

Внутренний интеграл равен

$$2\int_0^{\pi} \left| \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)\alpha}{\sin\frac{1}{2}\alpha} \right| d\alpha < 2 \int_0^{1/\left(n+\frac{1}{2}\right)} \frac{\left(n+\frac{1}{2}\right)\alpha}{\sin\frac{1}{2}\alpha} d\alpha +$$

$$+ 2 \int_{1/\left(n+\frac{1}{2}\right)}^{\pi} \frac{d\alpha}{\sin\frac{1}{2}\alpha} = O(1) + O(\log n),$$

и, в силу формулы § 7.7 (2) с $n=0$,

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} k\left(\frac{r}{\rho},\ \psi\right) d\psi = \frac{1}{2}.$$

Этим теорема доказана.

7.7.3. Нетрудно проверить, что в круге радиуса r', меньшего, чем 1, суммы $s_n(z)$ равномерно ограничены; действительно, в таком круге равномерно ограничены функции $k_n(r, \theta)$. Верхняя грань модулей сумм $s_n(z)$ зависит от M и от r'. Менее очевидно, что r' можно выбрать раз навсегда так, чтобы эта верхняя грань была в точности равна M.

Если $|f(z)| \leqslant M$, то $|s_n(z)| \leqslant M$ при $|z| \leqslant \frac{1}{2}$ *).

Ясно, что

$$k_n(r,\ \varphi) \geqslant \frac{1-r^2-2r^{n+1}(1+r)}{2(1-r)^2}.$$

Если $r \leqslant \frac{1}{2}$ и $n \geqslant 1$, то числитель не меньше, чем $1-\frac{1}{4}-2\frac{1}{4}\left(1+\frac{1}{2}\right)=0$. Следовательно, $k_n(r,\ \varphi) \geqslant 0$ при $r \leqslant 1/2$, и мы можем поступить так же, как в § 7.7.1. Мы пишем

$$|s_n(re^{i\theta})| \leqslant \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} Mk_n\left(\frac{r}{\rho},\ \varphi\right) d\varphi \qquad \left(r \leqslant \frac{1}{2}\rho\right)$$

---

*) Fejer [5].

и замечаем, что правая часть есть то, во что превращается $s_n(z)$, если $f(z) = M$, т. е. M. Этим теорема доказана.

Число $1/2$ есть наибольшее из чисел, обладающих указанным свойством. Действительно, рассмотрим функцию $f(z) = \frac{z-a}{az-1}$ $(0 < a < 1)$. Здесь $|f(e^{i\theta})| = 1$, так что $|f(z)| \leqslant 1$ при $|z| \leqslant 1$. Однако $s_1(z) = a + (a^2 - 1)z$, $s_1\left(-\frac{1}{2a}\right) = \frac{a^2+1}{2a} > 1$, причем точка $-1/(2a)$, в которой $s_1(z) > 1$, сколь угодно близка к окружности $|z| = 1/2$, поскольку a может быть взято сколь угодно близким к 1.

7.8. Нули частичных сумм *). Пусть

$$f(z) = a_0 + a_1 z + \ldots \qquad (a_0 \neq 0)$$

— степенной ряд, радиус сходимости которого равен 1. Положим

$$s_n(z) = a_0 + a_1 z + \ldots + a_n z^n.$$

Если $a_n \neq 0$, то $s_n(z)$, будучи многочленом степени n, имеет n нулей.

Если функция $f(z)$ имеет нули внутри круга сходимости, то, согласно теореме Гурвица (§ 3.45), каждый такой нуль является предельной точкой для нулей многочленов $s_n(z)$.

Рассмотрим сначала простейшую функцию интересующего нас типа, именно, функцию

$$f(z) = \frac{1}{1-z} = 1 + z + z^2 + \ldots$$

Здесь $s_n(z) = 1 + z + \ldots + z^n = \frac{1 - z^{n+1}}{1-z}$. Нули многочлена $s_n(z)$ равномерно распределены по единичной окружности, и очевидно, что каждая точка окружности является предельной для таких нулей.

Замечательно, что общий случай очень похож на этот простейший случай. Это было открыто Иенчем, который доказал, что *для всякого степенного ряда каждая точка границы круга сходимости является предельной для нулей частичных сумм ряда.*

Мы выведем эту теорему из совсем простых соображений, основанных на теории алгебраических уравнений.

Пусть δ — положительное число, и n — такое число, что

$$|a_n| > \frac{|a_0|}{(1+\delta)^n}. \tag{1}$$

Это неравенство выполняется для бесконечно многих значений n, так как в противном случае радиус сходимости ряда был бы больше единицы.

*) Jentzsch [1].

Пусть $z_1, z_2, \ldots, z_n$ — нули многочлена $s_n(z)$. Тогда

$$z_1 z_2 \ldots z_n = \frac{(-1)^n a_0}{a_n},$$

так что

$$|z_1 z_2 \ldots z_n| < (1+\delta)^n.$$

Пусть $z_1, \ldots, z_k$ — нули многочлена $s_n(z)$, лежащие в круге $|z| \leqslant 1-\delta$. В силу теоремы Гурвица (§ 3.4.5), для достаточно больших значений n число k постоянно и

$$|z_1 z_2 \ldots z_k| > K,$$

где K зависит только от δ.

Пусть $z_{n-p+1}, \ldots, z_n$ — нули в области $|z| > 1+\varepsilon$. Тогда

$$(1+\varepsilon)^p < |z_{n-p+1} \ldots z_n| = \left| \frac{z_1 z_2 \ldots z_n}{z_1 \ldots z_k z_{k+1} \ldots z_{n-p}} \right| < \frac{(1+\delta)^n}{K(1-\delta)^{n-p}}.$$

Следовательно,

$$p < \frac{n\{\log(1+\delta) - \log(1-\delta)\} - \log K}{\log(1+\varepsilon) - \log(1-\delta)} < \frac{An\delta - \log K}{A\varepsilon}.$$

Выбирая сначала ε, затем δ и затем n, можно сделать отношение p/n произвольно малым.

Таким образом, для заданных δ, ε и η число нулей многочлена $s_n(z)$, лежащих в круге $|z| \leqslant 1+\varepsilon$, больше $n(1-\eta)$, если n достаточно велико и удовлетворяет неравенству (1).

7.8.1. Из доказанного следует, что *нули частичных сумм имеют по крайней мере одну предельную точку на границе круга сходимости.*

Несколько более полные сведения можно получить, рассматривая сумму

$$\sum_{\nu=1}^{n} \frac{1}{z_\nu} = -\frac{a_1}{a_0}.$$

Полагая $z_\nu = r_\nu e^{i\theta_\nu}$, мы видим, что

$$\sum_{\nu=1}^{n} \frac{\cos\theta_\nu}{r_\nu} = -\operatorname{Re}\left(\frac{a_1}{a_0}\right). \tag{1}$$

Если $|\theta_\nu| > \frac{1}{2}\pi + \alpha$ с $\alpha > 0$ для всех ν, то, согласно предыдущей теореме, левая часть равенства (1) меньше, чем

$$\frac{-n(1-\eta)\sin\alpha}{1+\varepsilon}.$$

Но при достаточно большом n это несовместимо с равенством (1). Следовательно, в каждом угле, содержащем угол $\left(-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi\right)$, имеются нули. Подобным же образом нули имеются в каждом угле, большем π.

Чтобы доказать теорему Иенча, мы должны заменить такой угол произвольно малым углом. Это достигается применением надлежащего конформного преобразования.

7.8.2. Положим

$$w=\frac{\cos\lambda-z}{z\cos\lambda-1},\quad z=\frac{w+\cos\lambda}{1+w\cos\lambda},\tag{1}$$

где $0<\lambda<\frac{1}{2}\pi$ и $f(\cos\lambda)\neq 0$. Это преобразование переводит единичный круг плоскости z в единичный круг плоскости w. Точка $z=1$ переходит в точку $w=1$. Точка $z=e^{i\lambda}$ переходит в точку

$$w=\frac{\frac{1}{2}\left(e^{-i\lambda}-e^{i\lambda}\right)}{\frac{1}{2}\left(e^{2i\lambda}-1\right)}=-e^{-i\lambda}=e^{i(\pi-\lambda)},$$

а точка $z=e^{-i\lambda}$ — в точку $w=e^{-i(\pi-\lambda)}$. Таким образом, если $z=re^{i\theta}$, $w=\rho e^{i\varphi}$, то дуга $-\lambda\leqslant\theta\leqslant\lambda$ единичной окружности преобразуется в дугу $-\pi+\lambda\leqslant\varphi\leqslant\pi-\lambda$.

Нули z_ν многочлена $s_n(z)$ преобразуются в нули $w_\nu=\rho e^{i\varphi_\nu}$ функции

$$(1+w\cos\lambda)^n s_n\left(\frac{w+\cos\lambda}{1+w\cos\lambda}\right)=s_n(\cos\lambda)+$$
$$+w\{n\cos\lambda\, s_n(\cos\lambda)+\sin^2\lambda\, s_n'(\cos\lambda)\}+\ldots=b_0+b_1w+\ldots,$$

и, согласно формуле (1) из § 7.8.1,

$$\sum_{\nu=1}^{n}\frac{\cos\varphi_\nu}{\rho_\nu}=-\operatorname{Re}\left(\frac{b_1}{b_0}\right)=-n\cos\lambda-\sin^2\lambda\operatorname{Re}\left\{\frac{s_n'(\cos\lambda)}{s_n(\cos\lambda)}\right\}.\tag{2}$$

Так как $s_n(\cos\lambda)\to f(\cos\lambda)$ и $s_n'(\cos\lambda)\to f'(\cos\lambda)$ и так как, согласно нашему предположению, $f(\cos\lambda)\neq 0$, то при $n\to\infty$ последний член соотношения (2) стремится к некоторому пределу. Следовательно, при $n\to\infty$

$$\sum_{\nu=1}^{n}\frac{\cos\varphi_\nu}{\rho_\nu}\sim -n\cos\lambda.\tag{3}$$

Допустим теперь, что область плоскости w

$$1-\varepsilon<\rho<1+\varepsilon,\quad -(\pi-\lambda+\alpha)<\varphi<\pi-\lambda+\alpha,\tag{4}$$

где $0<\varepsilon<1$, $0<\alpha<\lambda$, свободна от нулей. Мы можем написать:

$$\sum_{\nu=1}^{n}\frac{\cos\varphi_\nu}{\rho_\nu}=\sum_{\rho_\nu\leqslant 1-\varepsilon}+\sum_{1-\varepsilon<\rho_\nu<1+\varepsilon}+\sum_{\rho_\nu\geqslant 1+\varepsilon}=\sum\nolimits_1+\sum\nolimits_2+\sum\nolimits_3.\tag{5}$$

Так как окружности $\rho=1$ отвечает окружность $r=1$, то из соображений непрерывности следует, что окружностям $\rho=1-\varepsilon$, $\rho=1+\varepsilon$ отвечают кривые (в действительности тоже окружности), лежащие соответственно внутри и вне окружности $r=1$, которые можно сделать сколь угодно близкими к последней, взяв ε достаточно малым.

Число членов суммы $\sum_1$ меньше $K=K(\delta, \varepsilon, \lambda)$, и числа ρ_ν имеют положительную нижнюю грань, так как рассматриваемые нули функции $s_n(\cos\lambda)$ стремятся к нулям функции $f(\cos\lambda)$. Следовательно,

$$\sum\nolimits_1 < K. \tag{6}$$

Число членов суммы $\sum_3$, согласно § 7.8, меньше ηn, где η зависит от n, δ, ε, λ и стремится к нулю, когда $n\to\infty$ по некоторой последовательности значений. Следовательно,

$$\sum\nolimits_3 < \frac{\eta n}{1+\varepsilon}. \tag{7}$$

Число членов суммы $\sum_2$ превышает $n(1-\eta)-K$, и, в силу нашего предположения, для каждого члена этой суммы $\cos\varphi_\nu < -\cos(\lambda-\alpha)$. Следовательно,

$$\sum\nolimits_2 < \frac{n(1-\eta)-K}{1+\varepsilon}\cos(\lambda-\alpha). \tag{8}$$

Из (5), (6), (7), (8) следует, что

$$\varlimsup_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{\nu=1}^{n}\frac{\cos\varphi_\nu}{\rho_\nu} \leqslant -\frac{\sin(\lambda-\alpha)}{1+\varepsilon}.$$

Но это противоречит соотношению (3), если ε достаточно мало. Поэтому в области (4) имеются нули, а так как ε и α могут быть взяты сколь угодно малыми, то это значит, что нули имеются во всякой области, содержащей дугу $\rho=1$, $-\pi+\lambda<\varphi<\pi-\lambda$. Следовательно, в плоскости z нули имеются во всякой области, содержащей дугу $r=1$, $-\lambda<\theta<\lambda$. Наконец, так как и λ произвольно мало, то точка $z=1$ является предельной для нулей. Подобным же образом предельна для нулей каждая точка единичной окружности.

РАЗЛИЧНЫЕ ПРИМЕРЫ

1. Если $\left|\dfrac{a_n}{a_{n+1}}\right| \to R$, то радиус сходимости ряда $\sum a_n z^n$ равен R.

2. Если $\left|\dfrac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \left\{1+\dfrac{c}{n}+o\left(\dfrac{1}{n}\right)\right\}R$, где $c>1$, то ряд $\sum a_n z^n$ абсолютно сходится во всех точках границы своего круга сходимости.

3. Если $\frac{a_n}{a_{n+1}} \to 1$, то $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{s_n(z)}{a_n z^n} = \frac{z}{z-1}$ равномерно при $|z| \geqslant 1+\delta > 1$. Вывести из этого, что все точки, предельные для нулей частичных сумм, лежат внутри или на границе единичного круга *).

4. Показать, что при $x \to 1$

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^{n^2} \sim \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{1-x}}$$

и что при $z \to e^{\frac{2i\pi p}{q}}$ вдоль радиуса-вектора

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^{n^2} \sim \frac{1}{2q}\sqrt{\frac{\pi}{1-|z|}} \sum_{r=0}^{q-1} e^{\frac{2i\pi p r^2}{q}}.$$

5. Если $a_n \sim \log n$, то при $x \to 1$

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \sim \frac{1}{1-x} \log \frac{1}{1-x}.$$

[Правая часть есть $\sum \left(1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}\right) x^n$.]

6. Если $a_n \sim \frac{1}{\log n}$, то при $x \to 1$

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \sim \frac{1}{(1-x)\log \frac{1}{1-x}}.$$

[Если $\sum_p$ обозначает сумму, распространенную на значения n в интервале $\frac{\varepsilon p}{\log(1/x)} < n \leqslant \frac{\varepsilon(p+1)}{\log(1/x)}$, то

$$\sum\nolimits_p \frac{x^n}{\log n} < \frac{\varepsilon e^{-\varepsilon p}}{\log \frac{1}{x} \log \frac{1}{\log \frac{1}{x}}},$$

и т. д.]

7. Показать, что если $a_n \geqslant 0$ и

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \sim \frac{1}{(1-x)^2},$$

то $s_n \sim \frac{1}{2} n^2$.

[Так как

$$f_1(x) = \int_0^x f(t)\,dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n x^{n+1}}{n+1} \sim \frac{1}{1-x},$$

то $\sum\limits_{\nu=0}^{n} \frac{a_\nu}{\nu+1} \sim n$, и остается воспользоваться суммированием по частям.]

*) S. Isumi [1].

8. Вообще, если $a_n \geqslant 0$ и $f(x) \sim (1-x)^{-\alpha}$ с $\alpha > 1$, то $s_n \sim \frac{n^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}$.
[Действительно,

$$f_{\alpha-1}(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha-1)} \int_0^x (x-t)^{\alpha-2} f(t)\, dt = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(n+\alpha)} x^{\alpha+n-1} \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n x^n}{n^{\alpha-1}},$$

и, с другой стороны,

$$f_{\alpha-1}(x) \sim \frac{1}{\Gamma(\alpha-1)} \int_0^x (x-t)^{\alpha-2} (1-t)^{-\alpha}\, dt = \frac{x^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)(1-x)} \sim \frac{1}{\Gamma(\alpha)(1-x)}.$$

Следовательно, $\sum_{\nu=1}^{n} \frac{a_\nu}{\nu^{\alpha-1}} \sim \frac{n}{\Gamma(\alpha)}$. Остальное не представляет труда.]

9. Если функция $f(z)$ регулярна в некоторой области, содержащей начало, и $f(0) = 1$, то для достаточно малых значений z возможно разложение вида *)

$$f(z) = (1 + a_1 z)(1 + a_2 z^2)(1 + a_3 z^3) \ldots$$

[Предполагая, что разложение имеется, мы пишем $\frac{f'(z)}{f(z)} = c_1 + c_2 z + \ldots$ и последовательно определяем числа a_n, сравнивая коэффициенты двух частей уравнения

$$c_1 + c_2 z + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n a_n z^{n-1}}{1 + a_n z^n}.$$

Из получающегося рекуррентного соотношения следует, что если $\mu_n = \max_{\nu \leqslant n} |a_\nu|^{\frac{1}{\nu}}$, то $\mu_n^n \leqslant n \mu^n_{\frac{1}{2}n} + |c_n|$. Таким образом, числа μ_n ограничены, что позволяет обосновать процесс.]

10. Показать, что круг сходимости предыдущего произведения совпадает с кругом сходимости ряда $\sum a_n z^n$, но что степенной ряд для $f(z)$ может иметь больший круг сходимости.

11. Если радиус сходимости каждого из рядов

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n, \quad \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n, \quad \sum_{n=0}^{\infty} a_n b_n z^n$$

равен 1, то то же верно для рядов

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n b_n^2 z^n, \quad \sum_{n=0}^{\infty} a_n^2 b_n z^n.$$

*) Ritt [1].

12. Пусть радиус сходимости каждого из рядов

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n, \quad g(z)=\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n, \quad F(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n b_n z^n$$

равен 1. Если функция $f(z)$ регулярна во всех точках единичной окружности, за исключением точки $z=1$, и $b_n \geqslant 0$ для всех n, то функция $F(z)$ имеет особенность при $z=1$ *).

[Радиус сходимости ряда $\varphi(z)=\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 b_n z^n$ равен 1, так что (§ 7.2.1) функция $\varphi(z)$ имеет особенность при $z=1$. Согласно мультипликационной теореме Адамара (§ 4.6) особые точки функции $\varphi(z)$ являются произведениями особых точек функции $F(z)$ и функции

$$\bar{f}(z)=\sum_{n=0}^{\infty} \bar{a}_n z^n.$$

Таким образом, $1=\alpha\beta$, где α, β — особые точки функций $F(z)$, $\bar{f}(z)$, и ясно, что $\beta=1$. Следовательно, $\alpha=1$.]

13. Если сумма ряда $\sum a_n z^n$ регулярна во всех точках границы его круга сходимости, за исключением точки z_0, то сумма всякого ряда, полученного из ряда $\sum a_n z^n$ вычеркиванием некоторых членов и имеющего тот же радиус сходимости, имеет особенность при $z=z_0$.

14. Показать, что теорема § 7.2.1 верна и в случае комплексных коэффициентов a_n, если $|\arg a_n| \leqslant \alpha < \frac{1}{2}\pi$ для всех n.

[Воспользоваться неравенством $|a_n| \leqslant \sec\alpha \operatorname{Re} a_n$.]

15. Функция $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{2^n}}{n^2}$ непрерывна внутри и на границе единичного круга, но каждая точка единичной окружности является для нее особой.

16. Если функция $f(z)=\sum a_n z^n$ ограничена в единичном круге, то ряд $\sum |a_n|^2$ сходится. [См. § 2.5.]

Нижеследующие примеры относятся к области, пограничной между теорией степенных рядов и теорией функций действительного переменного. Представляется более удобным поместить их здесь, но в некоторых из них предполагается известной теория сходимости в среднем, излагаемая в § 12.5.

17. Если ряд $\sum |a_n|^2$ сходится, то

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})-f(r'e^{i\theta})|^2\, d\theta=\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 (r^n-r'^n)^2.$$

Вывести из этого, что $f(re^{i\theta})$ при $r \to 1$ стремится в среднем к некоторой предельной функции $F(\theta)$ класса $L^2(0, 2\pi)$.

18. Показать, что если в предыдущем примере $f(z)=u+iv$, $F(\theta)=\ \ +iV$, то при $r<1$ верны формулы Пуассона:

$$u(r,\ \theta)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{1-r^2}{1-2r\cos(\theta-\varphi)+r^2}\, U(\varphi)\, d\varphi,$$

$$v(r,\ \theta)-v(0)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{2r\sin(\theta-\varphi)}{1-2r\cos(\theta-\varphi)+r^2}\, U(\varphi)\, d\varphi,$$

*) Bohnenblust [1].

19. Показать, что при $r \to 1$ в предыдущих примерах $u(r, \theta) \to U(\theta)$ для всякой точки θ лебеговского множества функции $U(\theta)$. Вывести из этого, что $f(re^{i\theta}) \to F(\theta)$ при $r \to 1$ для почти всех значений θ.

[Доказательство аналогично имеющемуся в § 13.3.4.]

20. Показать, что ограниченная аналитическая функция стремится к определенному пределу при радиальном приближении к почти каждой точке границы круга сходимости.

21. Если $U(\theta) \geqslant 0$ для всех значений θ, то $u(r, \theta) \geqslant 0$ для всех значений r и θ.

22. Пусть функция $f(z)$ регулярна и ограничена при $|z| < 1$. Если $f(z) \to 0$ при $r \to 1$ для всех значений θ из некоторого интервала, то функция $f(z)$ тождественно равна нулю.

[В предположении, что упомянутый интервал содержит интервал $0 \leqslant \theta \leqslant \frac{2\pi}{p}$, рассмотреть функцию

$$g(z) = f(z)\, f\left(ze^{\frac{2i\pi}{p}}\right) \ldots f\left(ze^{\frac{2(p-1)i\pi}{p}}\right).]$$

23. Вообще, если функция $f(z)$ ограничена и при радиальном приближении к окружности стремится к нулю для значений θ, образующих множество положительной меры, то она тождественно равна нулю *).

[Пусть E — множество значений θ, для которых $f(z) \to 0$, и пусть $m(E) = \mu > 0$. Положим $u_1(\theta) = \lambda/\mu$ на E и $= -\frac{\lambda}{2\pi - \mu}$ на CE. Пусть $g(z)$ — соответствующая аналитическая функция, определенная формулами примера 18. Тогда $g(0) = 0$. Положим $h(z) = e^{g(z)}$, так что $h(0) = 1$. Мы можем написать:

$$f(0) = f(0)\, h(0) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|z|=1} f(z)\, h(z) \frac{dz}{z} = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{CE} f(z)\, h(z) \frac{dz}{z},$$

$$|f(0)| < Ae^{-\frac{\lambda}{2\pi - \mu}}.$$

Так как λ произвольно велико, то $f(0) = 0$. Применяя то же рассуждение к функции $f(z)/z$, мы видим, что $f'(0) = 0$, и т. д.]

24. Пусть $U(\theta)$ — функция, интегрируемая по Лебегу. Тогда функция

$$f(z) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} \frac{1 + ze^{-i\varphi}}{1 - ze^{i\varphi}} U(\varphi)\, d\varphi \qquad (|z| < 1)$$

стремится при $r \to 1$ к определенному пределу для почти всех значений θ **).

[Без ограничения общности можно считать, что $U(\varphi) \geqslant 0$. Тогда $\operatorname{Re} f(z) \geqslant 0$, так что функция $\frac{1}{1 + f(z)}$ ограничена в единичном круге. Следовательно, она стремится к пределу при $r \to 1$ для почти всех значений θ, и ясно, что этот предел почти всюду отличен от нуля.]

---

*) См. Bieberbach, *Funktionentheorie*, II, стр. 156.

**) Plessner [1].

ГЛАВА VIII

ЦЕЛЫЕ ФУНКЦИИ

8.1. Разложение целой функции на множители. Целая функция есть аналитическая функция, не имеющая особенностей в конечной части плоскости. Простейшими такими функциями являются многочлены. Многочлен $f(z)$, имеющий нули в точках $z_1, z_2, \ldots, z_n$, отличных от 0, может быть стандартным образом разложен на множители:

$$f(z)=f(0)\left(1-\frac{z}{z_1}\right)\left(1-\frac{z}{z_2}\right)\ldots\left(1-\frac{z}{z_n}\right).$$

Столь же важную роль играют нули целой функции в общем случае. Однако целая функция, не являющаяся многочленом, может иметь бесконечно много нулей $z_1, z_2, \ldots$, и произведение

$$\prod\left(1-\frac{z}{z_n}\right),$$

распространенное на эти нули, может быть расходящимся. Вследствие этого целую функцию не всегда можно разложить на множители таким простым способом, и мы должны рассмотреть менее простые множители, чем $1-\dfrac{z}{z_\nu}$.

Выражения

$$E(u,\ 0)=1-u,\quad E(u,\ p)=(1-u)e^{u+\frac{u^2}{2}+\ldots+\frac{u^p}{p}}\qquad (p=1,\ 2,\ \ldots)$$

называются *первичными множителями*. Всякий первичный множитель обращается в нуль при $u=1$, а его поведение при $u\to 0$ зависит от p. При $|u|<1$

$$\log E(u,\ p)=-\frac{u^{p+1}}{p+1}-\frac{u^{p+2}}{p+2}-\ldots$$

Следовательно, если $k>1$ и $|u|\leqslant\dfrac{1}{k}$, то

$$|\log E(u,\ p)|\leqslant|u|^{p+1}+|u|^{p+2}+\ldots\leqslant|u|^{p+1}\left\{1+\frac{1}{k}+\frac{1}{k^2}+\ldots\right\}=$$
$$=\frac{k}{k-1}|u|^{p+1}.$$

Как мы увидим, это неравенство определяет сходимость произведения первичных множителей.

8.1.1. Теорема Вейерштрасса. Пусть $f(z)$ — целая функция, не равная тождественно нулю. Что можно сказать о ее нулях?

Так как функция $f(z)$ аналитична при всех конечных значениях z, то нули не могут иметь предельных точек в конечной части плоскости. Ничего больше сказать о них в общем случае нельзя. Это вытекает из следующей теоремы Вейерштрасса.

Для всякой последовательности чисел $z_1, z_2, \ldots$, единственная предельная точка которой находится в бесконечности, существует целая функция, имеющая нули в этих и только в этих точках.

Можно считать точки $z_1, z_2, \ldots$ отличными от 0 и занумерованными таким образом, что $|z_1| \leqslant |z_2| \leqslant \ldots$ Пусть $|z_n| = r_n$, и пусть $p_1, p_2, \ldots$ — такая последовательность положительных чисел, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r}{r_n}\right)^{p_n}$ сходится при любом значении r. Такую последовательность всегда можно найти, например, можно положить $p_n = n$; действительно, $r_n \to \infty$, так как иначе последовательность $z_1, z_2, \ldots$ имела бы предельную точку в конечной части плоскости, и при $r_n > 2r$

$$\left(\frac{r}{r_n}\right)^n < \frac{1}{2^n}.$$

Положим

$$f(z) = \prod_{n=1}^{\infty} E\left(\frac{z}{z_n}, p_n - 1\right). \tag{1}$$

Эта функция обладает требуемыми свойствами. Действительно, если $|z_n| > 2|z|$, то

$$\left|\log E\left(\frac{z}{z_n}, p_n - 1\right)\right| \leqslant 2\left(\frac{r}{r_n}\right)^{p_n}. \tag{2}$$

Следовательно, при $|z| \leqslant R$ ряд

$$\sum_{|z_n| > 2R} \log E\left(\frac{z}{z_n}; p_n - 1\right)$$

равномерно сходится и с ним равномерно сходится произведение

$$\prod_{|z_n| < 2R} E\left(\frac{z}{z_n}, p_n - 1\right)$$

(см. § 1.4.3, конец). Следовательно, функция $f(z)$ регулярна при $|z| \leqslant R$, и ее единственными нулями в этой области являются нули функции

$$\prod_{|z_n| \leqslant 2R} E\left(\frac{z}{z_n}, p_n - 1\right),$$

т. е. точки $z_1, z_2, \ldots$ Поскольку R можно взять сколь угодно большим, этим теорема доказана.

Заметим, что $f(z)$ не определяется нулями единственным образом: имеется широкий выбор чисел p_n.

8.12. Всякая целая функция может быть следующим образом разложена на множители.

Пусть $f(z)$ — целая функция с $f(0) \neq 0$. Тогда

$$f(z) = f(0) P(z) e^{g(z)},$$

где $P(z)$ — некоторое произведение первичных множителей, а $g(z)$ — некоторая целая функция.

Мы строим $P(z)$, как в предыдущем параграфе, по нулям функции $f(z)$. Положим

$$\varphi(z) = \frac{f'(z)}{f(z)} - \frac{P'(z)}{P(z)}.$$

$\varphi(z)$ есть целая функция, так как полюсы первого члена уничтожаются полюсами второго члена. Следовательно,

$$g(z) = \int_0^z \varphi(t)\, dt = \log f(z) - \log f(0) - \log P(z)$$

также есть целая функция, и доказательство завершается переходом к экспоненциалам.

Если при $z = 0$ функция $f(z)$ имеет нуль порядка p, то должен быть введен множитель z^p.

Это разложение на множители не единственно.

8.2. Функции конечного порядка. Доказанная общая теорема о разложении на множители недостаточно определенна для применений. В общем случае числа p_n растут вместе с n неопределенно, и мы мало что можем сказать о функции $g(z)$. Существует, однако, случай, когда теорему можно представить в совершенно определенной форме: это случай функций конечного порядка.

Целая функция $f(z)$ называется функцией *конечного порядка*, если существует такое положительное число A, что при $|z| = r \to \infty$

$$f(z) = O(e^{r^A}).$$

Нижняя грань ρ чисел A, для которых выполняется это соотношение, называется *порядком* функции. Таким образом, если

$f(z)$ — функция порядка ρ, то для всякого положительного ε

$$f(z) = O(e^{r^{\rho+\varepsilon}}),$$

но ни для какого отрицательного ε это не так. Подчеркнем, что здесь и в других подобных формулировках настоящей главы ε может принимать сколь угодно малые значения и постоянная, входящая в O, зависит, вообще говоря, от ε. Если бы она не зависела от ε, то мы могли бы заменить ε нулем.

Функции конечного порядка являются простейшими после многочленов целыми функциями. Порядок многочлена равен нулю; некоторые свойства функций малых порядков подобны свойствам многочленов.

Многие известные функции имеют, как легко понять, конечный порядок. Так, e^z есть функция порядка 1, и таковы же функции $\sin z$ и $\cos z$; $\cos\sqrt{z}$ есть целая функция порядка $\frac{1}{2}$; e^{z^k} есть целая функция порядка k, если k — положительное целое число (если k — нецелое число, то эта функция не является целой). e^{e^z} есть функция бесконечного порядка.

В дальнейшем мы будем предполагать вообще, что $f(0) \neq 0$. Это несколько упрощает исследование, деление же на z^k не оказывает влияния на порядок.

8.2.1. Функция $n(r)$. Пусть $n(r)$ обозначает число нулей z_1, $z_2, \ldots$ целой функции $f(z)$, для которых $|z_n| \leqslant r$. Ясно, что $n(r)$ есть неубывающая функция от r, постоянная в целых интервалах; она равна нулю при $r < |z_1|$.

Как мы видели в § 3.6.1, эта функция связана с функцией $f(z)$ формулой Иенсена. Именно,

$$\int_0^r \frac{n(x)}{x}\,dx = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log|f(re^{i\theta})|\,d\theta - \log|f(0)|. \qquad (1)$$

Поскольку $f(z)$ — целая функция, эта формула верна для всех значений r.

Если $f(z)$ — функция порядка ρ, то $n(r) = O(r^{\rho+\varepsilon})$. Действительно,

$$\log|f(re^{i\theta})| < Kr^{\rho+\varepsilon},$$

где K зависит только от ε. Из этого следует, в силу формулы (1), что

$$\int_0^{2r} \frac{n(x)}{x}\,dx < Kr^{\rho+\varepsilon}. \qquad (2)$$

Но так как $n(r)$ не убывает, то

$$\int_r^{2r} \frac{n(x)}{x}\,dx \geqslant n(r)\int_r^{2r} \frac{dx}{x} = n(r)\log 2,$$

и, следовательно,

$$n(r) \leqslant \frac{1}{\log 2} \int_0^{2r} \frac{n(x)}{x} dx < Kr^{\rho+\varepsilon}.$$

Таким образом, чем выше порядок функции, тем, грубо говоря, больше нулей она может иметь в данной области.

8.2.2. *Если r_1, r_2, ... — модули нулей функции $f(z)$, то ряд $\sum r_n^{-\alpha}$ сходится при $\alpha > \rho$.*

Пусть β — какое-нибудь число, заключенное между α и ρ. Тогда $n(r) < Ar^\beta$, и, полагая $r = r_n$, мы видим, что $n < Ar_n^\beta$. Следовательно, $r_n^{-\alpha} < An^{-\alpha/\beta}$, что и завершает доказательство.

Нижняя грань положительных чисел α, для которых ряд $\sum r_n^{-\alpha}$ сходится, называется *показателем сходимости нулей* и обозначается через ρ_1. Мы только что доказали, что $\rho_1 \leqslant \rho$. Может случиться, что $\rho_1 < \rho$. Например, если $f(z) = e^z$, то $\rho = 1$, а $\rho_1 = 0$, так как нулей нет вовсе.

Заметим, что $\rho_1 = 0$ для всякой функции с конечным числом нулей. Таким образом, из неравенства $\rho_1 > 0$ следует, что имеется бесконечное множество нулей.

8.2.3. Канонические произведения. Важным следствием предыдущей теоремы является тот факт, что если функция $f(z)$ имеет конечный порядок, то существует такое не зависящее от n целое число p, что произведение

$$\prod_{n=1}^{\infty} E\left(\frac{z}{z_n}, p\right) \tag{1}$$

сходится для всех значений z. Доказательство: согласно § 8.1.1 это произведение сходится, если сходится ряд

$$\sum \left(\frac{r}{r_n}\right)^{p+1} \tag{2}$$

(здесь $p_n = p + 1$; ср. также § 1.4.3, пример (VII)), а этот ряд сходится для всех значений r, если $p + 1 > \rho_1$, и во всяком случае, если $p + 1 > \rho$.

Произведение (1) с наименьшим из целых p, для которых сходится ряд (2), называется *каноническим произведением*, построенным по нулям функции $f(z)$, а это наименьшее p называется его *родом*.

Если ρ_1 — нецелое число, то $p = [\rho_1]$; если ρ_1 — целое число, то $p = \rho_1$, когда ряд $\sum r_n^{-\rho}$ расходится, и $p = \rho_1 - 1$, когда ряд $\sum r_n^{-\rho_1}$ сходится. Во всех случаях $p \leqslant \rho_1 \leqslant \rho$.

8.2.4. Теорема Адамара о разложении на множители. *Если $f(z)$ — целая функция порядка ρ с нулями $z_1, z_2, \ldots$, причем $f(0) \neq 0$, то*

$$f(z) = e^{Q(z)} P(z),$$

где $P(z)$ — каноническое произведение, построенное по нулям функции $f(z)$, а $Q(z)$ — многочлен, степень которого не выше ρ.

Ясно, что в качестве функции $P(z)$ § 8.1.2 можно взять каноническое произведение, и из теоремы § 8.1.2 о разложении следует, что $f(z)$ допускает представление указанного вида с некоторой целой функцией $Q(z)$. Таким образом, остается доказать, что в рассматриваемом случае $Q(z)$ есть многочлен степени не выше ρ.

Положим $\nu = [\rho]$; тогда $p \leqslant \nu$. Логарифмируя написанное выше соотношение и затем дифференцируя $\nu+1$ раз, мы видим, что

$$\left(\frac{d}{dz}\right)^{\nu} \left\{\frac{f'(z)}{f(z)}\right\} = Q^{\nu+1}(z) - \nu! \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(z_n - z)^{\nu+1}}.$$

Чтобы доказать, что $Q(z)$ есть многочлен степени не выше ν, мы должны доказать, что $Q^{(\nu+1)}(z) = 0$.

Положим $g_R(z) = \dfrac{f(z)}{f(0)} \prod\limits_{|z_n| \leqslant R} \left(1 - \dfrac{z}{z_n}\right)^{-1}$. Так как $\left|1 - \dfrac{z}{z_n}\right| \geqslant 1$, если $|z| = 2R$ и $|z_n| \leqslant R$, то при $|z| = 2R$

$$|g_R(z)| \leqslant \left|\frac{f(z)}{f(0)}\right| = O\left(e^{(2R)^{\rho+\varepsilon}}\right), \tag{1}$$

а так как $g_R(z)$ — целая функция, то это соотношение верно и при $|z| < 2R$.

Положим $h_R(z) = \log g_R(z)$, определив логарифм условием $h_R(0) = 0$. Функция $h_R(z)$ регулярна при $|z| \leqslant R$, и, в силу формулы (1),

$$\operatorname{Re}\{h_R(z)\} < KR^{\rho+\varepsilon}. \tag{2}$$

Следовательно (§ 5.5.1), при $|z| = r < R$

$$|h_R^{(\nu+1)}(z)| \leqslant \frac{2^{\nu+2}(\nu+1)!\, R}{(R-r)^{\nu+2}} KR^{\rho+\varepsilon}.$$

При $|z| = \frac{1}{2} R$ это показывает, что

$$h_R^{(\nu+1)}(z) = O(R^{\rho+\varepsilon-\nu-1}). \tag{3}$$

Следовательно,

$$Q^{(\nu+1)}(z) = h_R^{(\nu+1)}(z) + \nu! \sum_{|z_n| > R} \frac{1}{(z_n - z)^{\nu+1}} =$$
$$= O(R^{\rho+\varepsilon-\nu-1}) + O\left(\sum_{|z_n| > R} |z_n|^{-\nu-1}\right)$$

при $|z| = \frac{1}{2}R$, а потому и при $|z| < \frac{1}{2}R$. Так как $\nu+1 > \rho$, то при $R \to \infty$ первый член справа стремится к нулю, если ε достаточно мало, а так как ряд $\sum |z_n|^{-\nu-1}$ сходится, то и второй член стремится к нулю. Но левая часть не зависит от R; следовательно, она должна быть равна нулю, и теорема доказана *).

8.2.5. *Порядок канонического произведения равен показателю сходимости его нулей.*

Мы знаем, что для всякой функции $\rho_1 \leqslant \rho$. Таким образом, мы должны доказать, что для канонического произведения $P(z)$ всегда $\rho \leqslant \rho_1$. Пусть $r_1, r_2, \ldots$ — модули нулей, и k — постоянная, бо́льшая единицы. Напишем:

$$\log|P(z)| = \sum_{r_n \leqslant kr} \log\left|E\left(\frac{z}{z_n}, p\right)\right| + \\ + \sum_{r_n > kr} \log\left|E\left(\frac{z}{z_n}, p\right)\right| = \sum\nolimits_1 + \sum\nolimits_2.$$

Из неравенства § 8.1.1 (2) следует, что

$$\sum\nolimits_2 = O\left\{\sum_{r_n > kr}\left(\frac{r}{r_n}\right)^{p+1}\right\} = O\left\{r^{p+1}\sum_{r_n > kr}\frac{1}{r_n^{p+1}}\right\}.$$

Если $p = \rho_1 - 1$, то это $O(r^{p+1}) = O(r^{\rho_1})$. В противном случае $\rho_1 + \varepsilon < p+1$, если ε достаточно мало, и тогда

$$r^{p+1}\sum_{r_n > kr} r_n^{-p-1} = r^{p+1}\sum_{r_n > kr} r_n^{\rho_1+\varepsilon-p-1} r_n^{-\rho_1-\varepsilon} < \\ < r^{p+1}(kr)^{\rho_1+\varepsilon-p-1}\sum r_n^{-\rho_1-\varepsilon} = O(r^{\rho_1+\varepsilon}).$$

В сумму же $\sum_1$ входят члены с множителями $E(u, p)$, у которых $|u| \geqslant 1/k$ и, следовательно,

$$\log|E(u, p)| \leqslant \log(1+|u|) + |u| + \ldots + \frac{|u|^p}{p} < K|u|^p,$$

где K зависит только от k. Поэтому

$$\sum\nolimits_1 = O\left(r^p \sum_{r_n \leqslant kr} r_n^{-p}\right) = O\left(r^p \sum_{r_n \leqslant kr} r_n^{\rho_1+\varepsilon-p}\, r_n^{-\rho_1-\varepsilon}\right) = \\ = O\left\{r^p (kr)^{\rho_1+\varepsilon-p}\sum r_n^{-\rho_1-\varepsilon}\right\} = O(r^{\rho_1+\varepsilon}).$$

Таким образом, $\log|P(z)| = O(r^{\rho_1+\varepsilon})$, и теорема доказана.

8.2.6. *Если ρ — нецелое число, то $\rho_1 = \rho$.*

---

*) Hadamard [2]. Это доказательство принадлежит Ландау (см. Landau [5]). Другое доказательство см. в § 8,7,2.

Во всяком случае, $\rho_1 \leqslant \rho$. Предположим, что $\rho_1 < \rho$. Тогда $P(z)$ есть функция порядка ρ_1, т. е. порядка, меньшего ρ. Далее, если $Q(z)$ — многочлен степени q, то $e^{Q(z)}$ имеет порядок q, и $q \leqslant \rho$; но в нашем случае $q < \rho$, так как q — целое число, а ρ — нецелое. Таким образом, $f(z)$ есть произведение двух функций, каждая из которых имеет порядок, меньший ρ. Следовательно, $f(z)$ имеет порядок, меньший ρ. Мы пришли к противоречию, которое показывает, что $\rho_1 = \rho$.

В частности, функция нецелого порядка должна иметь бесконечно много нулей.

Если порядок — нецелое число, то доминирующим в разложении функции является каноническое произведение $P(z)$; если же порядок — целое число, то произведение $P(z)$ может сводиться к многочлену или даже к постоянной, и тогда порядок целиком зависит от множителя $e^{Q(z)}$.

Во всех случаях, так как $P(z)$ есть функция порядка ρ_1, а $e^{Q(z)}$ — функция порядка q, то $\rho = \max(q, \rho_1)$.

8.2.7. Род. Род целой функции $f(z)$ есть большее из двух целых чисел p, q и потому целое число.

Так как $p \leqslant \rho$ и $q \leqslant \rho$, то род не превосходит порядка. Фактически определить род заданной функции не всегда легко.

Пример. Доказать, что род не меньше $\rho - 1$.

8.3. Коэффициенты разложения функции конечного порядка.

Функция

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \tag{1}$$

в том и только в том случае является целой функцией конечного порядка ρ, *если*

$$\varliminf_{n \to \infty} \frac{\log(1/|a_n|)}{n \log n} = \frac{1}{\rho}.$$

Доказательство опирается на тот факт, что сумма $\sum |a_n z^n|$ мало отличается от своего наибольшего члена и что $|f(z)|$ лежит между ними. Ниже это иллюстрируется примером.

(I) Пусть $\varliminf_{n \to \infty} \frac{\log(1/|a_n|)}{n \log n} = \mu$, так что μ — нуль, положительное число или бесконечность. Если $\mu \neq \infty$, то для всякого положительного ε

$$\log \frac{1}{|a_n|} > (\mu - \varepsilon) n \log n \qquad (n > n_0),$$

т. е. $|a_n| < n^{-n(\mu - \varepsilon)}$. Если $\mu > 0$, то из этого следует, что ряд (1) сходится для всех значений z, так что $f(z)$ есть целая функция. Далее,

$$|f(z)| < Ar^{n_0} + \sum_{n=n_0+1}^{\infty} r^n n^{-n(\mu-\varepsilon)} \qquad (r > 1).$$

Пусть $\sum_1$ — часть последнего ряда, в которой $n \leqslant (2r)^{1/(\mu-\varepsilon)}$, и $\sum_2$ — остаток. В $\sum_1$

$$r^n \leqslant \exp\{(2r)^{1/(\mu-\varepsilon)} \log r\},$$

так что

$$\sum\nolimits_1 < \exp\{(2r)^{1/(\mu-\varepsilon)} \log r\} \sum n^{-n(\mu-\varepsilon)} < K \exp\{(2r)^{1/(\mu-\varepsilon)} \log r\}.$$

В $\sum_2$ же $rn^{-(\mu-\varepsilon)} < \frac{1}{2}$, так что

$$\sum\nolimits_2 < \sum \left(\frac{1}{2}\right)^n < 1.$$

Следовательно,

$$|f(z)| < K \exp\{(2r)^{1/(\mu-\varepsilon)} \log r\},$$

т. е. $\rho \leqslant 1/(\mu-\varepsilon)$, и так как ε произвольно мало, то $\rho \leqslant 1/\mu$. При $\mu = \infty$ мы заменяем в этом рассуждении μ произвольно большим числом, и оно показывает, что $\rho = 0$.

С другой стороны, для всякого ε существует последовательность значений n, для которой

$$\log \frac{1}{|a_n|} < (\mu + \varepsilon) n \log n,$$

т. е. $|a_n| > n^{-n(\mu+\varepsilon)}$, т. е.

$$|a_n| r^n > \{rn^{-(\mu+\varepsilon)}\}^n.$$

При $r = (2n)^{\mu+\varepsilon}$ это означает, что

$$|a_n| r^n > 2^{(\mu+\varepsilon)n} = \exp\left\{\frac{1}{2}(\mu+\varepsilon) \log 2 \cdot r^{1/(\mu+\varepsilon)}\right\}.$$

Так как, в силу неравенства Коши, $M(r) \geqslant |a_n| r^n$, то из этого следует, что для некоторой стремящейся к бесконечности последовательности значений r

$$M(r) > \exp\{Ar^{1/(\mu+\varepsilon)}\}.$$

Следовательно, $\rho \geqslant 1/(\mu+\varepsilon)$, и так как ε произвольно мало, то $\rho \geqslant 1/\mu$. При $\mu = 0$ это рассуждение показывает, что $f(z)$ есть функция бесконечного порядка.

(II) Пусть $f(z)$ — функция конечного порядка ρ. Тогда $a_n \to 0$, так что число μ, определенное выше, не отрицательно. Из доказанного следует, что в этом случае $\mu = 1/\rho$.

8.4. Примеры. (I) Доказать, что порядок функции

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{(n!)^\alpha}$$

равен $1/\alpha$.

[Можно воспользоваться предыдущей теоремой или избрать следующий более прямой путь. Предположим, что z вещественно и положительно. Члены ряда возрастают, пока n не сделается равным приблизительно $z^{\frac{1}{\alpha}}$, а затем убывают. Следовательно, если $z=n^\alpha$, то максимальный член равен

$$\frac{n^{n\alpha}}{(n!)^\alpha}\sim\frac{n^{n\alpha}}{\left(n^{n+\frac{1}{2}}e^{-n}2^{1/2}\pi^{1/2}\right)^\alpha}=\frac{e^{n\alpha}}{n^{\alpha/2}\left(2^{1/2}\pi^{1/2}\right)^\alpha}=\frac{e^{\alpha z^{1/\alpha}}}{z^{1/2}\left(2^{1/2}\pi^{1/2}\right)^\alpha}.$$

Так как $|f(z)|$ больше этого члена, то порядок функции есть самое меньшее $1/\alpha$.

С другой стороны, $|f(z)|\leqslant f(|z|)$, и если z вещественно и $1<z<N^\alpha$, то

$$f(z)=\sum_{n=0}^{N}\frac{z^n}{(n!)^\alpha}+\sum_{N+1}^{\infty}\frac{z^n}{(n!)^\alpha}<$$

$$<\sum_{n=0}^{N}\frac{z^N}{(n!)^\alpha}+\sum_{N+1}^{\infty}\frac{z^n}{\{(N+1)!\,N^{n-N-1}\}^\alpha}<Az^N+\frac{z^{N+1}}{\{(N+1)!\}^\alpha\left(1-\frac{z}{N^\alpha}\right)}.$$

Полагая $N=\left[(2z)^{1/\alpha}\right]$, мы видим, что

$$f(z)=O\left(z^N\right)=O\left\{z^{(2z)^{1/\alpha}}\right\}=O\left(e^{z^{\frac{1}{\alpha}+\varepsilon}}\right),$$

так что порядок не превосходит $1/\alpha$. Следовательно, $\rho=1/\alpha$ *).]

(II) Исследовать подобным же образом функцию $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n^{\alpha n}}$.

(III) Если $\lambda\neq 0$ и $p(z)$ — многочлен, не равный тождественно нулю, то функция $e^{\lambda z}-p(z)$ имеет бесконечно много нулей.

[Если это не так, то $e^{\lambda z}-p(z)=e^{az+b}P(z)$, где $P(z)$ — многочлен. Сравнивая возрастание в различных направлениях, мы обнаруживаем, что $a=\lambda$, т. е. что функция $e^{\lambda z}$ рациональна.]

(IV) Если $f(z)$ — функция порядка ρ и $g(z)$ — функция порядка $\rho'\leqslant\rho$, причем все нули функции $g(z)$ являются нулями функции $f(z)$, то порядок функции $f(z)/g(z)$ не превосходит ρ.

[Действительно, $f(z)=P_1(z)e^{Q_1(z)}$, $g(z)=P_2(z)e^{Q_2(z)}$, и P_1/P_2 есть каноническое произведение, построенное по нулям функции f/g, или это произведение, умноженное на экспоненциальный множитель порядка, не превосходящего ρ. Следовательно, порядок функции P_1/P_2 не превосходит ρ.]

(V) $\cos z$ и $\sin z$ имеют порядок 1; формулы, полученные для них в § 3.2.3, являются частными случаями теоремы Адамара.

(VI) Функция $1/\Gamma(z)$ имеет порядок 1; вывести разложение на множители, полученное для нее в § 4.4.1, из теоремы Адамара.

---

*) См. Hardy, *Orders of Infinity*, изд. 1, стр. 55.

[В обозначениях § 4.4.1 $f(1-z)=-\frac{2i\pi}{\Gamma(z)}$ и

$$f(z)=O\left\{e^{\pi|z|}\left(1+\int_1^\infty t^{|z|}e^{-t}dt\right)\right\}=O\left\{e^{\pi|z|}(|z|+1)^{|z|+1}\right\}.]$$

(VII) $\xi(s)=\frac{1}{2}s(s-1)\pi^{-\frac{1}{2}s}\Gamma\left(\frac{1}{2}s\right)\zeta(s)$ есть целая функция с $\rho=1$, $\rho_1=1$.

[Чтобы доказать, что $\rho\leqslant 1$, мы пользуемся формулой § 4.4.3 (3) и примером (IV); $\rho\geqslant 1$, так как $\log\zeta(s)\sim 2^{-s}$, $\log\xi(s)\sim\frac{1}{2}s\log s$, когда $s\to\infty$ вдоль вещественной оси. Далее, функциональное уравнение показывает, что $\xi(s)=\xi(1-s)$. Следовательно, функция $\Xi(z)=\xi\left(\frac{1}{2}+iz\right)$ четна. Следовательно, $\Xi(\sqrt{z})$ есть целая функция порядка 1/2 и, таким образом, имеет показатель сходимости 1/2.]

(VIII) $z^{-\nu}J_\nu(z)$ есть целая функция с $\rho=1$, $\rho_1=1$. Проверить для нее теорему § 8.3. [См. стр. 70, пример 5.]

(IX) Функция $F_\alpha(z)=\int_0^\infty e^{-t^\alpha}\cos zt\,dt$ $(\alpha>1)$ имеет порядок $\frac{\alpha}{\alpha-1}$.

[Вывести это прямо из интегральной формулы или из разложения в степенной ряд.]

(X) $\vartheta_1(z)=-i\sum_{n=-\infty}^{\infty}(-1)^n q^{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2}e^{(2n+1)iz}$, где $q=e^{\pi i\tau}$ с $\operatorname{Im}(\tau)>0$, так что $|q|<1$, есть целая функция с $\rho=2$, $\rho_1=2$.

[Если $\lambda=\frac{2|z|+\log 2}{\log|1/q|}-\frac{1}{2}$, то

$$\vartheta_1(z)\leqslant 2\sum_{n\leqslant\lambda}|q|^{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2}e^{(2n+1)|z|}+2\sum_{n>\lambda}\left(\frac{1}{2}\right)^{n+\frac{1}{2}}=$$

$$=O\left(e^{(2\lambda+1)|z|}\right)=O\left(e^{K|z|^2}\right).$$

Функция $\vartheta_1(z)$ имеет простые нули в точках $z=m\pi+n\pi\tau$, где m и n — произвольные целые числа *). Следовательно, $\rho_1=2$.]

(XI) $\vartheta_1(z)$ есть целая функция от $\sin z$ порядка 0.

[Если $2\sin z=w$, $\vartheta_1(z)=g(w)$, то

$$g(w)=\sum_{n=0}^{\infty}q^{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2}\left\{w^{2n+1}-(2n+1)w^{2n-1}+\ldots\right\}=$$

$$=O\left\{\sum_{n=0}^{\infty}|q|^{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2}(|w|+1)^{2n+1}\right\}=O\left\{e^{K\log^2(|w|+1)}\right\}.$$

Полиа было доказано **), что если g и h — целые функции и $g\{h(z)\}$ —

---

*) См., например Уиттекер и Ватсон, *Курс современного анализа*, § 21.12.

**) Pólya [2].

функция конечного порядка, то либо h — многочлен, а g — функция конечного порядка, либо h — не многочлен, но имеет конечный порядок, а g — функция порядка нуль.]

(XII) Если $f(z)=\prod_{1}^{\infty}\left(1+\frac{z}{r_n}\right)$ $(r_n>0)$ — функция порядка ρ, причем $0<\rho<1$, то при $\rho<\sigma<1$

$$\int_0^\infty \frac{\log f(x)}{x^{\sigma+1}}\,dx=\frac{\pi}{\sigma\sin\pi\sigma}\sum_1^\infty \frac{1}{r_n^\sigma},$$

$$\int_0^\infty \frac{\log|f(-x)|}{x^{\sigma+1}}\,dx=\frac{\pi}{\sigma\operatorname{tg}\pi\sigma}\sum_1^\infty \frac{1}{r_n^\sigma}.$$

[Воспользоваться формулами

$$\int_0^\infty \frac{\log(1+x)}{x^{\sigma+1}}\,dx=\frac{\pi}{\sigma\sin\pi\sigma},\qquad \int_0^\infty \frac{\log|1-x|}{x^{\sigma+1}}\,dx=\frac{\pi}{\sigma\operatorname{tg}\pi\sigma}.]$$

8.5. Производная. Многие свойства производной целой функции таковы же, как свойства исходной функции. Примеры дают следующие теоремы.

8.5.1. *Производная* $f'(z)$ *имеет тот же порядок, что и* $f(z)$. Пусть $M'(r)=\max_{|z|=r}|f'(z)|$. Тогда

$$\frac{M(r)-|f(0)|}{r}\leqslant M'(r)\leqslant\frac{M(R)}{R-r}. \tag{1}$$

Действительно, $f(z)=\int_0^z f'(t)\,dt+f(0)$, где интеграл взят вдоль прямой. Следовательно, $|M(r)|\leqslant rM'(r)+|f(0)|$. С другой стороны,

$$f'(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(w)}{(w-z)^2}\,dw,$$

где C — окружность $|w-z|=R-r$ $(|z|=r<R)$, и, выбирая z под условием $|f'(z)|=M'(r)$, мы видим, что

$$M'(r)\leqslant M(R)/(R-r).$$

Чтобы закончить доказательство, достаточно положить в формуле (1), скажем, $R=2r$.

8.5.2. Известная теорема, утверждающая, что если $f(z)$ есть многочлен, все корни которого вещественны, то тем же свойством обладает $f'(z)$, может быть перенесена на более широкий класс целых функций. Результат содержится в следующей теореме Лагерра.

Пусть $f(z)$ — целая функция порядка, меньшего чем 2, вещественная при вещественных значениях z и с вещественными нулями. Тогда нули производной $f'(z)$ также все вещественны и отделены друг от друга нулями функции $f(z)$.

Мы можем написать $f(z)=cz^k e^{az}\prod\limits_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{z}{z_n}\right)e^{z/z_n}$, где k — нуль или положительное целое число, а c, a и z_1, z_2, ... — вещественные числа. Логарифмируя и дифференцируя, мы получаем формулу

$$\frac{f'(z)}{f(z)}=\frac{k}{z}+a+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{z-z_n}+\frac{1}{z_n}\right).$$

Следовательно, если $z=x+iy$, то

$$\operatorname{Im}\left\{\frac{f'(z)}{f(z)}\right\}=-y\left\{\frac{k}{x^2+y^2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(x-z_n)^2+y^2}\right\}.$$

Так как правая часть обращается в нуль только при $y=0$, то $f'(z)$ может иметь нули только на вещественной оси. Далее,

$$\frac{d}{dz}\left\{\frac{f'(z)}{f(z)}\right\}=-\frac{k}{z^2}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(z-z_n)^2}.$$

При вещественных значениях z, отличных от z_n, правая часть вещественна и отрицательна. Следовательно, функция $f'(z)/f(z)$ монотонно убывает, когда z возрастает вдоль вещественной оси от z_n до z_{n+1}, и, таким образом, между z_n и z_{n+1} она не может обратиться в нуль более одного раза. Так как она, очевидно, меняет знак в этом интервале, то она обращается в нем в нуль ровно один раз, что и доказывает теорему.

Из этой теоремы следует, что ряды

$$\sum\frac{1}{|z_n|^\alpha},\quad\sum\frac{1}{|z'_n|^\alpha},$$

где z'_1, z'_2, ... — нули производной $f'(z)$, сходятся или расходятся одновременно. Следовательно, нули производной $f'(z)$ имеют тот же показатель сходимости, что и нули функции $f(z)$. Можно показать, что $f(z)$ и $f'(z)$ имеют один и тот же род, но это уже не столь просто (см. пример 16 в конце главы).

Так как $f'(z)$ есть функция того же порядка, что и $f(z)$, и имеет только вещественные нули, то теорему можно теперь применить к ней, и мы видим, что $f''(z)$ имеет только вещественные нули. То же относится к $f'''(z)$, и т. д.

Доказательство применимо также к функции $f(z)$ порядка 2, если ее род равен 1. В этом случае, однако, мы не можем распространить результат на $f''(z)$ без предварительного рассмотрения проблемы рода производной $f'(z)$.

Нетрудно доказать примерами, что для функций рода 2 теорема неверна. Первый пример:

$$f(z)=ze^{z^2},\quad f'(z)=(2z^2+1)e^{z^2};$$

нули производной $f'(z)$ мнимы. Второй пример:

$$f(z)=(z^2-4)e^{\frac{1}{3}z^2},\quad f'(z)=\frac{2}{3}z(z^2-1)e^{\frac{1}{3}z^2};$$

нули производной $f'(z)$ вещественны, но не разделяются нулями функции $f(z)$.

Пример. Уравнение $y\dfrac{d^2y}{dt^2}=-\sin^2 t$ не имеет вещественного решения, отличного от решений $y=\pm\sin t$ и являющегося целой функцией конечного порядка.

[Пусть y — функция конечного порядка ρ. Тогда

$$y=e^{Q(t)}P(t),$$

где $P(t)$ — некоторое каноническое произведение, а $Q(t)$ — многочлен степени не выше ρ. Так как нули функции $P(t)$ являются нулями функции $\sin^2 t$, то порядок функции $P(t)$ не превосходит 1.

Далее,

$$\frac{dy}{dt}=e^{Q(t)}\{P'(t)+P(t)Q'(t)\},$$

$$\frac{d^2y}{dt^2}=e^{Q(t)}\{P''(t)+2P'(t)Q'(t)+P(t)Q'^2(t)+P(t)Q''(t)\}=e^{Q(t)}f(t).$$

Здесь $f(t)$ — функция порядка $\leqslant 1$, так что

$$f(t)=e^{at+b}P_1(t),$$

где $P_1(t)$ — некоторое каноническое произведение. Таким образом,

$$e^{2Q(t)+at+b}P(t)P_1(t)=-\sin^2 t$$

и

$$e^{2Q(t)+at+b}P(t)=-\frac{\sin^2 t}{P_1(t)}.$$

Это — функция порядка $\leqslant 1$ (§ 8.4, пример (IV)). Следовательно, $P(t)$ имеет порядок 1, а $Q(t)$ есть линейная функция. Следовательно, y есть функция порядка 1.

Теперь мы можем воспользоваться теоремой Лагерра. y есть функция порядка 1 с вещественными нулями. Нули производной $\dfrac{dy}{dt}$ разделяются нулями функции y, так что, поскольку y не имеет тройных нулей, все нули производной $\dfrac{dy}{dt}$ являются простыми. Таким образом, все нули второй производной $\dfrac{d^2y}{dt^2}$ также являются простыми. Следовательно, *все* нули функции $\sin t$ являются нулями функции y. Предположим, что при $t=k\pi$ функция y имеет двойной нуль. Тогда $\frac{dy}{dt}$ имеет нуль между $(k-1)\pi$ и $k\pi$, нуль при $t=k\pi$ и нуль между $k\pi$ и $(k+1)\pi$, а $\frac{d^2y}{dt^2}$ имеет два нуля между $(k-1)\pi$ и $(k+1)\pi$, что невозможно. Следовательно, y имеет только простые нули, такие же, как $\sin t$. Следовательно,

$$y=e^{\alpha t+\beta}\sin t.$$

Внося это выражение в наше дифференциальное уравнение, мы видим, что

$$(\alpha^2-1)\sin t+2\alpha\cos t=-e^{-2\alpha t-2\beta}\sin t.$$

Так как при вещественных значениях t левая часть ограничена, то и правая часть ограничена. Следовательно, $\alpha=0$, а $\beta=0$ или πi.]

8.6. Функции, все нули которых вещественны. Многие важные функции не имеют невещественных нулей; например, все нули функции $1/\Gamma(z)$ вещественны. С другой стороны, иногда бывает очень трудно узнать, вещественны ли нули; например, Риман в 1859 г. высказал предположение, что все нули функции $\Xi(z)$ (§ 8.4, пример (VII)) вещественны, но это до сих пор не доказано.

8.6.1. Теоремы Лагерра. В некоторых случаях вопрос решается следующими теоремами Лагерра.

Пусть все нули многочлена

$$f(z)=a_0+a_1z+\ldots+a_pz^p$$

вещественны, и пусть $\varphi(w)$ — целая функция рода 0 или 1, вещественная при вещественных значениях w, все нули которой вещественны и отрицательны. Тогда все нули многочлена

$$g(z)=a_0\varphi(0)+a_1\varphi(1)z+\ldots+a_p\varphi(p)z^p$$

вещественны и среди них столько же положительных, равных нулю и отрицательных, сколько среди нулей многочлена $f(z)$.

Мы можем написать

$$\varphi(w)=ae^{kw}\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{w}{\alpha_n}\right)e^{-w/\alpha_n},$$

где $\alpha_n>0$ для всех значений n. Рассмотрим функцию

$$g_1(z)=f(z)+\frac{z}{\alpha_1}f'(z)=\frac{z^{1-\alpha_1}}{\alpha_1}\frac{d}{dz}\{z^{\alpha_1}f(z)\}=$$
$$=a_0+a_1\left(1+\frac{1}{\alpha_1}\right)z+\ldots+a_p\left(1+\frac{p}{\alpha_1}\right)z^p \qquad (z>0).$$

Очевидно, она имеет при $z=0$ столько же нулей, сколько их имеет $f(z)$, и второе написанное для нее выражение показывает (в силу теоремы Ролля), что она имеет столько же положительных нулей, сколько $f(z)$. Точно так же она имеет столько же отрицательных нулей, сколько их имеет $f(z)$.

Повторяя это рассуждение, мы устанавливаем то же для функции

$$g_n(z)=a_0+a_1\varphi_n(1)z+\ldots+a_p\varphi_n(p)z^p,$$

где $\varphi_n(w)=\left(1+\frac{w}{\alpha_1}\right)\ldots\left(1+\frac{w}{\alpha_n}\right)$.

Далее, преобразование $z=e^{k_n}z'$, где $k_n=k-\sum\limits_1^n\alpha_\nu^{-1}$, показывает, что то же верно для функции

$$G_n(z)=a_0\Phi_n(0)+a_1\Phi_n(1)z+\ldots+a_p\Phi_n(p)z^p,$$

где $\Phi_n(w)=ae^{kw}\prod\limits_{\nu=1}^{n}\left(1+\frac{w}{\alpha_\nu}\right)e^{-w/\alpha_\nu}=ae^{k_n w}\varphi_n(w)$.

Наконец, $\Phi_n(w)\to\varphi(w)$ равномерно в каждой конечной области. Следовательно, $G_n(z)\to g(z)$ равномерно в каждой конечной области. В силу теоремы Гурвица (§ 3.4.5), нули функции $g(z)$ — в точности пределы нулей функции $G_n(z)$, и ясно, что $g(z)$ имеет столько же нулей при $z=0$, сколько их имеет $f(z)$. Этим теорема доказана.

8.6.2. *Предположим, что $\varphi(w)$ удовлетворяет условиям предыдущей теоремы, и пусть $f(z)$ — целая функция вида*

$$f(z)=e^{az+b}\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{z}{z_n}\right),$$

где a и все z_n положительны. Если

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^n,$$

то

$$g(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n\varphi(n)z^n$$

есть целая функция, все нули которой вещественны и отрицательны.

Прежде всего, $g(z)$ есть целая функция. Действительно, так как $(1+x)e^{-x}\leqslant 1$ при $x\geqslant 0$, то

$$|\varphi(n)|\leqslant ae^{kn},$$

вследствие чего ряд для $g(z)$ сходится всюду.

Положим

$$f_p(z)=e^b\left(1+\frac{az}{p}\right)^p\prod_{n=1}^{p}\left(1+\frac{z}{z_n}\right)=\sum_{n=0}^{2p}a_{n,p}z^n.$$

Все нули этой функции вещественны и отрицательны, и таковы же, в силу предыдущей теоремы, нули функции

$$g_p(z)=\sum_{n=0}^{2p} a_{n,\,p}\varphi(n)\,z^n.$$

Наконец, $g_p(z)\to g(z)$ равномерно в каждой конечной области. Действительно, формула

$$\left(1+\frac{az}{p}\right)^p=1+az+\left(1-\frac{1}{p}\right)\frac{a^2z^2}{2!}+\ldots+\frac{a^pz^p}{p^p}$$

показывает, что $a_{n,\,p}\to a_n$ при $p\to\infty$ (и фиксированном n) и что $|a_{n,\,p}|\leqslant a_n$ при всех значениях n и p. Следовательно, при $N<2p$

$$|g(z)-g_p(z)|\leqslant$$
$$\leqslant\left|\sum_{n=1}^{N}(a_n-a_{n,\,p})\,z^n\right|+\left|\sum_{N+1}^{\infty}a_nz^n\right|+\left|\sum_{N+1}^{2p}a_{n,\,p}z^n\right|\leqslant$$
$$\leqslant\left|\sum_{n=1}^{N}(a_n-a_{n,\,p})\,z^n\right|+2\sum_{N+1}^{\infty}|a_nz^n|.$$

Мы можем выбрать N столь большим, чтобы второй член справа был равномерно меньше заданного ε, при фиксированном же N первый член справа равномерно стремится к нулю.

Как и в предыдущем параграфе, доказательство завершается применением теоремы Гурвица.

8.6.3. Простейшим является случай функции $f(z)=e^z$. В этом случае предыдущая теорема утверждает, что *если функция* $\varphi(w)$ *удовлетворяет условиям теоремы* § 8.6.1, *то*

$$F(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\varphi(n)}{n!}z^n$$

есть целая функция, все нули которой вещественны и отрицательны.

Примеры. (I) Положим

$$\varphi(w)=\frac{1}{\Gamma(w+\nu+1)}\qquad(\nu>-1).$$

Это — целая функция рода 1 с нулями в точках $w=-\nu-1,\ -\nu-2,\ \ldots$ Все они вещественны и отрицательны, так что и все нули функции

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!\,\Gamma(n+\nu+1)}=\frac{J_\nu(2i\sqrt{z})}{(i\sqrt{z})^\nu}$$

вещественны и отрицательны. Следовательно, все нули функции $J_\nu(z)$ вещественны,

(II) Функция *)

$$F_\alpha(z)=\int_0^\infty e^{-t^\alpha}\cos zt\,dt$$

не имеет нулей, если $\alpha=2$, и имеет бесконечно много вещественных нулей, но не имеет невещественных нулей, если $\alpha=4, 6, 8, \ldots$

[Разлагая косинус в степенной ряд и интегрируя, мы видим, что

$$F_\alpha(z)=\frac{1}{\alpha}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{\Gamma((2n+1)/\alpha)}{\Gamma(2n+1)}z^{2n}.$$

Если $\alpha=2$, то, как в примере 10 главы I,

$$F_\alpha(z)=\frac{1}{2}\sqrt{\pi}\,e^{-\frac{1}{4}z^2};$$

эта функция не имеет нулей.

При $\alpha=2k$, где k — положительное целое число, мы полагаем

$$\varphi(w)=\frac{\Gamma\left(\frac{2w+1}{2k}\right)\Gamma(w+1)}{\Gamma(2w+1)}.$$

$\varphi(w)$ есть целая функция, удовлетворяющая условиям теорем Лагерра из § 8.6. Следовательно, все нули функции

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\varphi(n)}{n!}z^n=2kF_{2k}(i\sqrt{z})$$

вещественны и отрицательны, так что все нули функции $F_{2k}(z)$ вещественны. Далее, $\rho=\frac{2k}{2k-1}$ (§ 8.4, пример (IX)), так что $1<\rho<2$ и нулей бесконечно много.

Если α не является четным целым числом, то, как можно показать, комплексных нулей бесконечно много, а вещественных нулей конечное число.]

8.6.4. Функции с отрицательными вещественными нулями. Если все нули функции вещественны и отрицательны, то модуль функции связан с распределением ее нулей особенно просто.

Пусть $f(z)$ — такая функция, и пусть ее порядок ρ меньше 1. Тогда

$$f(z)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{z}{z_n}\right).$$

*) Pólya [1].

Следовательно, при вещественном z

$$\log f(z)=\sum_{n=1}^{\infty}\log\left(1+\frac{z}{z_n}\right)=$$
$$=\sum_{n=1}^{\infty}n\left\{\log\left(1+\frac{z}{z_n}\right)-\log\left(1+\frac{z}{z_{n+1}}\right)\right\}^{*)}=$$
$$=\sum_{n=1}^{\infty}n\int_{z_n}^{z_{n+1}}\frac{z\,dt}{t(z+t)}=z\int_0^{\infty}\frac{n(t)\,dt}{t(z+t)},$$

где $n(t)$ имеет свое обычное значение.

Предположим теперь, что $n(t)\sim\lambda t^{\rho}$ при $t\to\infty$. Тогда

$$\log f(x)\sim\pi\lambda\operatorname{cosec}\pi\rho x^{\rho}.$$

Действительно, $(\lambda-\varepsilon)t^{\rho}<n(t)<(\lambda+\varepsilon)t^{\rho}$, если $t>t_0(\varepsilon)$, так что

$$\log f(x)<x\int_0^{t_0}\frac{n(t)\,dt}{t(x+t)}+x\int_{t_0}^{\infty}\frac{(\lambda+\varepsilon)t^{\rho}}{t(x+t)}dt=$$
$$=x\int_0^{t_0}\frac{n(t)-(\lambda+\varepsilon)t^{\rho}}{t(x+t)}dt+x\int_0^{\infty}\frac{(\lambda+\varepsilon)t^{\rho}}{t(x+t)}dt.$$

Первый член справа есть, очевидно, $O(1)$, второй же член, как показывает подстановка $t=xu$, равен

$$x^{\rho}(\lambda+\varepsilon)\int_0^{\infty}\frac{u^{\rho-1}\,du}{1+u}=x^{\rho}(\lambda+\varepsilon)\pi\operatorname{cosec}\pi\rho$$

(см. § 3.1.2.3). Подобная же оценка снизу (с $\lambda-\varepsilon$ вместо $\lambda+\varepsilon$) завершает доказательство.

Более общим образом **),

$$\log f(re^{i\theta})\sim e^{i\rho\theta}\pi\lambda\operatorname{cosec}\pi\rho r^{\rho}$$

для любого фиксированного значения θ в интервале $(-\pi,\pi)$; $\log f(z)$ обозначает ту ветвь логарифма, которая вещественна на положительной части вещественной оси.

Действительно, предыдущее выражение функции $\log f(z)$ через интеграл, полученное для вещественных значений z, распространяется с помощью аналитического продолжения на область

---

*) Читатель оправдает этот переход, представляющий собою простой пример суммирования по частям.

**) Полиа и Сеге, *Задачи и теоремы из анализа*, ч. II, отдел IV, № 61.

$-\pi < \arg z < \pi$. Благодаря этому, как и выше,

$$\log f(re^{i\theta}) \sim re^{i\theta} \int_0^\infty \frac{\lambda t^\rho\, dt}{t(re^{i\theta}+t)},$$

поворачивая же прямую интегрирования до положения $t = ue^{i\theta}$, мы видим, что правая часть равна

$$\lambda re^{\rho i\theta} \int_0^\infty \frac{u^\rho\, du}{u(r+u)} = \lambda r^\rho e^{\rho i\theta} \pi \operatorname{cosec} \pi\rho.$$

Имеются также теоремы обратного типа: можно делать заключения об асимптотическом поведении функции $n(r)$, зная асимптотическое поведение функции $\log f(z)$. Наиболее интересным является тот факт, что *если* $\log f(x) \sim \pi\lambda \operatorname{cosec} \pi\rho x^\rho$, *когда* $x \to \infty$ *вдоль вещественной оси, то* $n(r) \sim \lambda r^\rho$. Эта теорема *) тесно связана с тауберовскими результатами §§ 7.4.1 — 7.4.4, но ее доказательство не может быть изложено здесь из-за своей сложности.

8.7. Минимум модуля. Пусть $m(r)$ обозначает минимум функции $|f(r)|$ на окружности $|z| = r$.

Нельзя ожидать, что функция $m(r)$ будет вести себя столь же просто, как $M(r)$, поскольку она обращается в нуль, если r есть модуль нуля функции $f(z)$. Но мы увидим, что если оставить в стороне непосредственные окрестности этих исключительных точек, то для $m(r)$ можно установить некоторый нижний предел, и что, вообще говоря, $m(r)$ стремится к нулю в некотором смысле так же, как $\frac{1}{M(r)}$.

8.7.1. Рассмотрим сначала каноническое произведение $P(z)$ порядка ρ с нулями $z_1, z_2, \ldots$

Если вокруг каждого нуля z_n ($|z_n| > 1$) *описан круг радиуса* $|z_n|^{-h}$, *где* $h > \rho$, *то в области, внешней по отношению ко всем этим кругам,*

$$|P(z)| > e^{-r^{\rho+\varepsilon}} \qquad (r > r_0(\varepsilon)).$$

Пользуясь методом § 8.2.5, мы видим, что

$$\log|P(z)| \geqslant \sum_{r_n \leqslant kr} \log\left|1 - \frac{z}{z_n}\right| - \sum_{r_n \leqslant kr} O\left\{\left(\frac{r}{r_n}\right)^p\right\} - \sum_{r_n > kr} O\left\{\left(\frac{r}{r_n}\right)^{p+1}\right\} = \sum_{r_n \leqslant kr} \log\left|1 - \frac{z}{z_n}\right| - O(r^{\rho+\varepsilon}).$$

*) См. Valiron [1] и Titchmarsh [5], [6].

Так как ряд $\sum r_n^{-h}$ сходится, т. е. сумма ряда радиусов кругов конечна, то существуют окружности сколь угодно большого радиуса с центром в начале, лежащие целиком во внешней области. Пусть z лежит вне всех окружностей $|z-z_n|=r_n^{-h}$. Если $r_n \leqslant kr$, то

$$\left|1-\frac{z}{z_n}\right| > r_n^{-1-h} > (kr)^{-1-h}.$$

Следовательно,

$$\sum_{1<r_n\leqslant kr} \log\left|1-\frac{z}{z_n}\right| > -(1+h)\log kr\cdot n(kr) >$$
$$> -K\log kr\cdot r^{\rho+\varepsilon} > -r^{\rho+2\varepsilon}.$$

Наконец,

$$\sum_{r_n\leqslant 1} \log\left|1-\frac{z}{z_n}\right| > 0 \qquad (r>2),$$

что и завершает доказательство.

8.7.1.1. *Если $f(z)$ — функция порядка ρ, то существуют окружности сколь угодно большого радиуса, на которых*

$$m(r) > e^{-r^{\rho+\varepsilon}}.$$

Действительно,

$$f(z)=P(z)\,e^{Q(z)},$$

где $Q(z)$ — многочлен степени $q\leqslant\rho$. При достаточно больших значениях r

$$|e^{Q(z)}| > e^{-Ar^q} > e^{-Ar^\rho},$$

и, согласно предыдущей теореме, на окружностях сколь угодно большого радиуса

$$|P(z)| > e^{-r^{\rho_1+\varepsilon}} > e^{-r^{\rho+\varepsilon}}.$$

Этим теорема доказана.

8.7.2. Другое доказательство теоремы Адамара о разложении на множители. Теорема § 8.7.1 приводит к другому доказательству теоремы Адамара о разложении на множители. Пусть

$$f(z)=P(z)\,e^{Q(z)},$$

где $P(z)$ — каноническое произведение, построенное по нулям функции $f(z)$. Тогда $Q(z)$ есть целая функция. Пусть ρ — порядок функции $f(z)$ и ρ_1 — показатель сходимости. Так как $P(z)$ имеет порядок ρ_1, то $\rho_1\leqslant\rho$. Следовательно, на окружностях сколь угодно большого радиуса

$$|P(z)| > e^{-r^{\rho_1+\varepsilon}} > e^{-r^{\rho+\varepsilon}}.$$

Кроме того, $f(z)=O\left(e^{r^{\rho+\varepsilon}}\right)$. Таким образом, на окружностях сколь угодно большого радиуса

$$\operatorname{Re} Q(z)=\log\left|\frac{f(z)}{P(z)}\right|=\log\left\{O\left(e^{r^{\rho+\varepsilon}}\right)\right\}<Kr^{\rho+\varepsilon},$$

и, в силу теоремы § 2.5.4, $Q(z)$ есть многочлен степени $\leqslant\rho$.

8.7.3. В специальных случаях можно получить результаты, более точные, чем теорема § 8.7.1.1.

Если $f(z)$ — не постоянная и $\rho<1/2$, то существует стремящаяся к бесконечности последовательность значений r, по которой $m(r)\to\infty$.

Прежде всего, не существует полупрямой $\arg z=\text{const}$, на которой функция $f(z)$ была бы ограничена. Действительно, плоскость, надрезанная вдоль такой полупрямой, представляет собой угол величиной в 2π, а $2\pi<\pi/\rho$, если $\rho<1/2$; следовательно § 5.6.1), если функция $f(z)$ ограничена на такой полупрямой, то она ограничена всюду и, таким образом, сводится к постоянной. Пусть теперь

$$f(z)=cz^k\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{z}{z_n}\right).$$

Положим $\varphi(z)=cz^k\prod\limits_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{z}{r_n}\right)$, где $r_n=|z_n|$. Так как при любом n

$$\left|1-\frac{z}{z_n}\right|\geqslant\left|1-\frac{r}{r_n}\right|,$$

то

$$\min_{|z|=r}|f(z)|\geqslant|\varphi(-r)|.$$

Но функция $\varphi(-r)$ не ограничена, так как $\varphi(z)$ есть целая функция того же порядка, что и $f(z)$. Этим теорема доказана.

8.7.4. Следующая теорема является еще более точной.

Если $0<\rho<1$, то существуют сколь угодно большие значения r, для которых

$$m(r)>\{M(r)\}^{\cos\pi\rho-\varepsilon}.$$

Нижеследующее доказательство принадлежит Полиа *). Пусть $f(z)$ и $\varphi(z)$ определяются теми же формулами, что и выше; очевидно, можно считать, что $c=1$, $k=0$. Достаточно провести доказательство для $\varphi(z)$. Если $0<\rho<1/2$, так что $\cos\pi\rho>0$, то это сразу следует из неравенств $m(r)\geqslant|\varphi(-r)|$, $M(r)\leqslant\varphi(r)$.

---

*) Pólya [3].

В любом случае, если z' — точка с $|f(z')| = m(r)$, то

$$|\varphi(r)\varphi(-r)| = \left|\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{r^2}{r_n^2}\right)\right| \leqslant |f(z')f(-z')| \leqslant m(r)M(r).$$

Следовательно, если для $\varphi(z)$ теорема верна, то

$$m(r)M(r) \geqslant |\varphi(r)|^{1+\cos\pi\rho-\varepsilon} \geqslant \{M(r)\}^{1+\cos\pi\rho-\varepsilon}$$

при сколь угодно больших значениях r, так что теорема верна и для $f(z)$.

Если теорема не верна для $\varphi(z)$, то существуют такие положительные постоянные ε и a, что

$$\log|\varphi(-x)| < (\cos\pi\rho-\varepsilon)\log\varphi(x) \qquad (x>a).$$

Согласно § 8.4 (пример (XII)), при $\rho<s<1$, а потому и при $\rho<\mathrm{Re}(s)<1$

$$\int_0^{\infty}\{\cos\pi s\log\varphi(x)-\log|\varphi(-x)|\}x^{-s-1}\,dx = 0.$$

Так как интеграл, взятый по интервалу $(0, a)$, является регулярной функцией от s при $0<\mathrm{Re}(s)<1$, то таков же интеграл, взятый по интервалу (a, ∞). Следовательно, функция

$$F(s) = \int_{\alpha}^{\infty}\{\varphi_1(e^{\xi})+\psi(s)\varphi_2(e^{\xi})\}e^{-s\xi}\,d\xi,$$

где

$$\varphi_1(x) = (\cos\pi\rho-\varepsilon)\log\varphi(x)-\log|\varphi(-x)|, \quad \varphi_2(x) = \log\varphi(x),$$

$$\psi(s) = \cos\pi s-\cos\pi\rho+\varepsilon, \qquad \alpha = \log a,$$

регулярна при $0<\mathrm{Re}(s)<1$ и, в частности, при $s=\rho$. Заметим, что функции φ_1 и φ_2 положительны при $x>0$, а функция ψ положительна при вещественных значениях s, достаточно близких к ρ.

Пусть $h>0$. Положим $D=\frac{d}{ds}$. При достаточно малых h и $s-\rho$

$$\left|\left(1-\frac{hD}{m}\right)^m F(s)\right| = \left|\sum_{\mu=0}^{m}\frac{(-h)^{\mu}}{\mu!}\,\frac{m(m-1)\ldots(m-\mu+1)}{m^{\mu}}F^{\mu}(s)\right| \leqslant$$

$$\leqslant |F(s)|+\frac{h}{1!}|F'(s)|+\frac{h^2}{2!}|F''(s)|+\ldots = M.$$

Далее,

$$\left(1-\frac{hD}{m}\right)^m \psi(s)\,e^{-s\xi}=e^{-s\xi}\left(1+\frac{h\xi-hD}{m}\right)^m \psi(s)=$$

$$=e^{-s\xi}\left(1+\frac{h\xi}{m}\right)^m \psi(s)+e^{-s\xi}\sum_{\mu=1}^{m}\binom{m}{\mu}\left(1+\frac{h\xi}{m}\right)^{m-\mu}\left(\frac{-h}{m}\right)^{\mu}\psi^{(\mu)}(s)\geqslant$$

$$\geqslant e^{-s\xi}\left(1+\frac{h\xi}{m}\right)^m \psi(s)-e^{-s\xi}\left(1+\frac{h\xi}{m}\right)^m\sum_{\mu=1}^{m}\frac{h^{\mu}}{\mu!}\,|\psi^{(\mu)}(s)|.$$

Так как $|\psi^{(\mu)}(s)|\leqslant\pi^{\mu}$ при вещественных s, то при достаточно малых h правая часть, очевидно, больше, чем

$$\frac{1}{2}e^{-s\xi}\left(1+\frac{h\xi}{m}\right)^m \psi(s).$$

Следовательно,

$$\left(1-\frac{hD}{m}\right)^m F(s)\geqslant\frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\infty}\{\varphi_1(e^{\xi})+\psi(s)\,\varphi_2(e^{\xi})\}\left(1+\frac{h\xi}{m}\right)^m e^{-s\xi}\,d\xi.$$

В частности, при $\omega>\alpha$

$$\int_{\alpha}^{\omega}\varphi_2(e^{\xi})\left(1+\frac{h\xi}{m}\right)^m e^{-s\xi}\,d\xi\leqslant\frac{2M}{\psi(s)}.$$

Заставляя стремиться к ∞ сначала m, а затем ω, мы видим, что интеграл

$$\int_{\alpha}^{\infty}\varphi_2(e^{\xi})\,e^{(h-s)\xi}\,d\xi=\int_{a}^{\infty}\frac{\log\varphi(x)}{x^{s-h+1}}\,dx$$

сходится при некотором значении $s-h$, меньшем ρ. Но тогда сходится и ряд $\sum r_n^{-s+h}$, что противоречит § 8.2.6. Этим теорема доказана.

8.7.5. Аналогичная теорема верна для функций порядка 1, принадлежащих экспоненциальному типу, т. е. удовлетворяющих условию $f(z)=O(e^{k|z|})$.

Если $f(z)=O(e^{k|z|})$, то существуют сколь угодно большие значения r, для которых $m(r)>e^{-(k+\varepsilon)r}$.

Пусть $r_1, r_2, \ldots$ — модули нулей функции $f(z)$. Как в § 8.2.1, мы видим, что $n(r)=O(r)$, $1/r_n<K/n$. Следовательно,

$$\varphi(z)=\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{z}{r_n^2}\right)=O\left\{\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{K^2r}{n^2}\right)\right\}=O\left\{\frac{\operatorname{sh}(\pi K\sqrt{r})}{\pi K\sqrt{r}}\right\}.$$

Определим $h(\theta)$ (§ 5.7) для $\varphi(z)$, полагая $V(r)=\sqrt{r}$. Ясно, что $h(\theta)\leqslant\pi K$ для всех значений θ. Так как $|\varphi(z)|\geqslant 1$ при

$\operatorname{Re}(z) \geqslant 0$, то функция $h(\theta)$ конечна при $-\frac{1}{2}\pi \leqslant \theta \leqslant \frac{1}{2}\pi$, а потому и всюду (§ 5.7.1.2). Далее, $h(-\theta) = h(\theta)$ и, по § 5.7.1.3, $h(\pi) \geqslant 0$ (нужно положить $\theta_1 = -\pi$, $\theta_2 = 0$, $\theta_3 = \pi$, $\rho = 1/2$). Следовательно, существуют сколь угодно большие значения r, для которых

$$|f(z) f(-z)| \geqslant |f(0)|^2 |\varphi(-r^2)| > e^{-\varepsilon r},$$

что и доказывает теорему.

8.8. *а*-точки целой функции. До сих пор наше изучение целых функций концентрировалось вокруг распределения нулей функции. Более общим является вопрос о распределении точек, в которых функция принимает произвольно заданное значение a. Мы будем называть их «a-точками».

Для одного случая мы уже получили в этом направлении весьма точные результаты: это — случай функции конечного нецелого порядка. Если функция $f(z)$ имеет порядок ρ, причем ρ — нецелое число, то она имеет бесконечно много нулей и показатель сходимости этих нулей равен ρ. Но ясно, что функция $f(z) - a$, где a — постоянная, также имеет порядок ρ. Следовательно, функция $f(z)$ имеет бесконечно много a-точек и показатель их сходимости равен ρ. Таким образом, грубо говоря, они имеют одну и ту же плотность при всех значениях a.

Подобное же доказательство применимо к функциям рода нуль. Такая функция имеет бесконечно много нулей, если только она не является многочленом, разность же $f(z) - a$ либо является многочленом при любом значении a, либо не является многочленом ни при каком значении a.

Если $f(z)$ — функция положительного целого порядка, нигде не равная a, то $f(z) - a = e^{Q(z)}$, где $Q(z)$ — многочлен. Если $b \neq a$, то $Q(z) = \log(b - a)$ при некотором z, так что $f(z) = b$. Следовательно, $f(z)$ принимает все значения, за исключением, возможно, одного.

8.8.1. Теорема Пикара. Основная теорема теории принадлежит Пикару; она не связана с понятием порядка.

Целая функция, не являющаяся многочленом, принимает бесконечное число раз каждое значение, за исключением, возможно, одного.

Пикаровское доказательство этой теоремы использует свойства эллиптической модулярной функции. Эта функция, которую мы обозначим через $\omega(z)$, обладает следующими двумя свойствами: *она регулярна во всех точках, кроме точек $z = 0$, 1, ∞; ее мнимая часть нигде не отрицательна.*

Пользуясь этой функцией, легко доказать, что *целая функция, не являющаяся постоянной, по крайней мере один раз принимает каждое значение, за исключением, возможно, одного.*

Пусть $f(z)$ — целая функция, не принимающая значений a, b $(a \neq b)$. Тогда $g(z)=\dfrac{f(z)-a}{b-a}$ есть целая функция, не принимающая значений 0, 1. Рассмотрим функцию $\omega\{g(z)\}$. Она регулярна во всех точках, кроме бесконечно удаленной, так как функция $g(z)$ не принимает конечных значений, при которых функция ω не регулярна. Кроме того, ее мнимая часть неотрицательна. Следовательно, она является постоянной. Но ω — не постоянная, так что постоянной должна быть функция $g(z)$. Этим теорема доказана.

Поскольку мы не рассмотрели конструкции модулярной функции, мы не будем доводить до конца это доказательство теоремы Пикара, а дадим более прямое доказательство, основанное на одной теореме Шоттки *).

8.8.2. Характерная особенность теоремы Пикара состоит в том, что она допускает существование исключительного значения. Это исключительное значение действительно может существовать; например, функция e^z нигде не принимает значения 0. Значение, обладающее этим свойством, называется «исключительным P».

Существует и другой смысл, в котором значение может быть исключительным. Функция может принимать значение a, но только в точках, показатель сходимости которых меньше ρ; например, функция $e^z\cos\sqrt{z}$, порядок которой равен 1, имеет нули, но их показатель сходимости равен 1/2. Значение, обладающее этим свойством, называется исключительным в смысле Бореля или «исключительным B». Ясно, что значение, исключительное P, является a fortiori исключительным B.

8.8.3. Для функций положительного целого порядка теорема Пикара является следствием нижеследующей теоремы Бореля, которая показывает, что не только значение, исключительное P, но и значение, исключительное B, не может не быть единственным.

Теорема Бореля. *Если порядок функции $f(z)$ есть положительное целое число, то показатель сходимости а-точек функции $f(z)$ равен ее порядку для всех значений a, за исключением, возможно, одного.*

Предположим, что существуют два исключительных значения, a и b. Тогда

$$f(z)-a=z^{k_1}e^{Q_1(z)}P_1(z), \tag{1}$$

$$f(z)-b=z^{k_2}e^{Q_2(z)}P_2(z), \tag{2}$$

где $Q_1(z)$ и $Q_2(z)$ — многочлены степени ρ, а $P_1(z)$ и $P_2(z)$ — канонические произведения порядка, меньшего ρ.

*) Другое прямое доказательство основано на одной теореме Блоха. См. Landau, *Ergebnisse*, 2-е изд., 1929, гл. VII, и Dienes, *The Taylor Series*, гл. VIII.

Вычитая (2) из (1), мы видим, что

$$b-a=z^{k_1}e^{Q_1(z)}P_1(z)-z^{k_2}e^{Q_2(z)}P_2(z), \tag{3}$$

т. е. что $z^{k_1}P_1(z)e^{Q_1(z)-Q_2(z)}=z^{k_2}P_2(z)+(b-a)e^{-Q_2(z)}$. Так как степень многочлена $Q_2(z)$ равна ρ, то правая часть имеет порядок ρ. Таков же, следовательно, порядок левой части, поскольку же порядок произведения $P_1(z)$ меньше ρ, многочлен $Q_1(z)-Q_2(z)$ имеет степень ρ.

Дифференцируя равенство (3), мы получаем равенство

$$(z^{k_1}P_1Q_1'+k_1z^{k_1-1}P_1+z^{k_1}P_1')e^{Q_1}= \\ =(z^{k_2}P_2Q_2'+k_2z^{k_2-1}P_2+z^{k_2}P_2')e^{Q_2}. \tag{4}$$

Но порядок производной P_1' равен порядку произведения P_1 и, таким образом, меньше ρ. Следовательно, функция, стоящая в скобках перед e^{Q_1}, имеет порядок, меньший ρ, и тем же свойством обладает функция, стоящая в скобках перед e^{Q_2}. Следовательно, равенство (4) можно представить в виде

$$z^{k_3}P_3e^{Q_1+Q_3}=z^{k_4}P_4e^{Q_2+Q_4},$$

где Q_3 и Q_4 — многочлены, степени которых не выше $\rho-1$, а P_3 и P_4 — канонические произведения. Обе части равенства должны иметь одинаковые нули, так что $k_3=k_4$, $P_3=P_4$ и, следовательно, $Q_1+Q_3=Q_2+Q_4$. Таким образом, $Q_1-Q_2=$ $=Q_4-Q_3$, т. е. мы пришли к заключению, что многочлен степени ρ равен многочлену, степень которого не выше $\rho-1$. Это противоречие и доказывает теорему.

8.8.4. Для доказательства теоремы Шоттки нам нужна следующая лемма.

Пусть $\varphi(z)$ — вещественная функция, определенная в интервале $0\leqslant r\leqslant R_1$, и пусть

$$0\leqslant\varphi(r)\leqslant M \qquad (0<r\leqslant R_1) \tag{1}$$

и

$$\varphi(r)<\frac{C\sqrt{\varphi(R)}}{(R-r)^2} \qquad (0<r<R\leqslant R_1). \tag{2}$$

Тогда

$$\varphi(r)<\frac{AC^2}{(R_1-r)^4} \qquad (0<r<R_1). \tag{3}$$

Форма неравенства (3) сама по себе не особенно существенна. Важно, что правая часть зависит только от r, R_1 и C (но не от M).

Из неравенств (1) и (2) следует неравенство

$$\varphi(r)<\frac{C\sqrt{M}}{(R-r)^2} \qquad (0<r<R\leqslant R_1), \tag{4}$$

так что верхняя граница M, указываемая неравенством (1), сразу заменяется кратным радикала $\sqrt{M}$. Если повторить эту операцию, воспользовавшись сначала неравенством (4) с r_1, r_2 вместо r, R и затем неравенством (2) с r_1 вместо R, то получится неравенство

$$\varphi(r) < \frac{C}{(r_1-r)^2}\left\{\frac{C}{(r_2-r_1)^2}\right\}^{1/2} M^{1/4} \qquad (0 < r < r_1 < r_2 \leqslant R_1).$$

Вообще

$$\varphi(r) < \frac{C}{(r_1-r)^2}\left\{\frac{C}{(r_2-r_1)^2}\right\}^{1/2} \cdots \left\{\frac{C}{(r_n-r_{n-1})^2}\right\}^{1/2^{n-1}} M^{1/2^n}.$$

При $r_1 = \frac{1}{2}(R_1+r)$, $r_2 = \frac{1}{2}(R_1+r_1)$, ... это означает, что

$$\varphi(r) < 4^{1+1+\frac{3}{4}+\ldots+\frac{n}{2^{n-1}}}\left\{\frac{C}{(R_1-r)^2}\right\}^{1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{2^{n-1}}} M^{\frac{1}{2^n}}.$$

Неравенство (3) получается отсюда после предельного перехода при $n \to \infty$.

8.8.5. Теорема Шоттки. *Если при* $|z| \leqslant R_1$ *функция* $f(z)$ *регулярна и не принимает ни значения* 0, *ни значения* 1, *то при* $|z| \leqslant R < R_1$

$$|f(z)| < \exp\left\{\frac{KR_1^4}{(R_1-R)^4}\right\},$$

где K *зависит только от* $f(0)$. *Для всех функций, удовлетворяющих указанным условиям и условиям* $\delta < f(0) < 1/\delta$, $|1-f(0)| > \delta$, *можно взять одно и то же значение* K, *которое зависит, таким образом, только от* δ.

Предыдущая формула для верхней границы функции $|f(z)|$ (которая, в случае необходимости, может быть еще значительно улучшена) не будет нам нужна. Важно, что верхняя грань зависит только от $f(0)$, притом указанным выше образом, и от R/R_1.

Положим

$$g_1(z) = \log f(z), \quad g_2(z) = \log\{1-f(z)\},$$

где взяты значения логарифмов, главные при $z=0$. Функции $g_1(z)$ и $g_2(z)$ регулярны при $|z| \leqslant R_1$. Пусть $M_1(r)$ и $M_2(r)$ — максимумы функций $|g_1(z)|$ и $|g_2(z)|$ на окружности $|z|=r$, и пусть

$$M(r) = \max\{M_1(r),\ M_2(r)\}.$$

Положим $B_1(r) = -\min\limits_{|z|=r} \operatorname{Re} g_1(z) = \max\limits_{|z|=r} \log\frac{1}{|f(z)|}$. Применяя к функции $g_1(z)$ теорему Каратеодори (§ 5.5), мы видим, что

$$M_1(\rho) \leqslant \frac{2r}{r-\rho}\{B_1(r) + |g_1(0)|\} \qquad (0 < \rho < r). \qquad (1)$$

Теперь возможны два случая. Либо значение $B_1(r)$ невелико, скажем $B_1(r) \leqslant 1$, и тогда неравенство (1) дает оценку нужного типа; либо же значение $B_1(r)$ велико, и тогда на окружности $|z|=r$ имеется точка z', в которой значение $|f(z')|$ мало. Но при малом значении $|f(z')|$ значение $g_2(z')$, если не считать члена $2n\pi i$, приблизительно равно $-f(z')$, а тогда теорема Каратеодори, примененная к функции $\log g_2$, дает слева M_1 (не $\log M_1$, как можно было бы ожидать), а справа $\log M_2 = O(\sqrt{M_2})$. Мы получаем, таким образом, неравенство типа, рассмотренного в доказанной выше элементарной лемме. Это — общий план доказательства, и теперь мы обращаемся к деталям.

Предположим, что $B_1(r) > 1$, и пусть z' — точка с

$$B_1(r) = \log \frac{1}{|f(z')|}.$$

Тогда

$$|f(z')| = e^{-B_1(r)} < e^{-1} < \frac{1}{2}. \tag{2}$$

Поэтому существует такое целое n, что

$$g_2(z') - 2n\pi i = -\sum_{m=1}^{\infty} \frac{\{f(z')\}^m}{m}.$$

Из этой формулы следует, что

$$|g_2(z') - 2n\pi i| < \sum_{m=1}^{\infty} 2^{-m} = 1,$$

так что

$$2|n|\pi < 1 + |g_2(z')| \leqslant 1 + M_2(r). \tag{3}$$

Положим $h(z) = \log\{g_2(z) - 2n\pi i\}$, где взято значение логарифма, главное при $z=0$. Функция $h(z)$ регулярна при $|z| \leqslant R_1$; действительно, $f(z) \neq 0$, вследствие чего $g_2(z) \neq 2n\pi i$. Теорема Каратеодори дает:

$$\max_{|z|=r} |h(z)| \leqslant \frac{2R}{R-r}\left(\max_{|z|=R} \log|g_2(z) - 2n\pi i| + |h(0)|\right). \tag{4}$$

Левая часть не меньше, чем

$$\log\left|\frac{1}{g_2(z')-2n\pi i}\right| \geqslant \log \frac{1}{|f(z')|+|f(z')|^2+|f(z')|^3+\ldots} \geqslant$$

$$\geqslant \log \frac{1}{2|f(z')|} = B_1(r) - \log 2$$

(см. неравенство (2)). Чтобы оценить сверху правую часть неравенства (4), заметим, что

$$\max_{|z|=R} \log|g_2(z) - 2n\pi i| \leqslant \log\{M_2(R) + 2|n|\pi\} < \log\{2M_2(R) + 1\}$$

(см. неравенство (3)) и (поскольку $|\operatorname{Im} h(0)| \leqslant \pi$)

$$|h(0)| \leqslant \log|g_2(0) - 2n\pi i| + \pi \leqslant \log\{|g_2(0)| + 1 + M_2(r)\} + \pi.$$

Следовательно,

$$B_1(r) < \frac{2R}{R-r}[\log\{2M_2(R)+1\} + \log\{M_2(R) + |g_2(0)| + 1\} + \pi] + \\ + \log 2 < \frac{4R}{R-r}[\log\{2M_2(R) + |g_2(0)| + 1\} + \pi]. \qquad (5)$$

Это неравенство, доказанное при $B_1(r) > 1$, верно, очевидно, и при $B_1(r) \leqslant 1$. Во всех случаях из неравенств (1) и (5) следует, что

$$M_1(\rho) < \frac{8Rr}{(R-r)(r-\rho)}[\log\{2M_2(R) + |g_2(0)| + 1\} + |g_1(0)| + \pi]. \qquad (6)$$

Так как во всем рассуждении функции $g_1(z)$ и $g_2(z)$ можно поменять местами, то это неравенство останется в силе, если мы поменяем в нем местами индексы 1 и 2. Комбинируя получающееся неравенство с (6), мы видим, что

$$M(\rho) < \frac{8Rr}{(R-r)(r-\rho)}[\log\{2M(R) + |g_1(0)| + \\ + |g_2(0)| + 1\} + |g_1(0)| + |g_2(0)| + \pi]. \qquad (7)$$

При $r = \frac{1}{2}(R+\rho)$ неравенство (7) дает:

$$M(\rho) < \frac{32R_1^2}{(R-\rho)^2}\{\log M(R) + K\} < \frac{KR_1^2\sqrt{M(R)}}{(R-\rho)^2};$$

действительно, $\log M(R) = O\{\sqrt{M(R)}\}$. Наконец, в силу леммы,

$$M(\rho) < \frac{KR_1^4}{(R-\rho)^4},$$

и, следовательно,

$$|f(z)| \leqslant e^{M(r)} < \exp\left\{\frac{KR_1^4}{(R-r)^4}\right\}.$$

Поскольку K зависит только от $|g_1(0)|$ и $|g_2(0)|$, этим доказана и заключительная часть теоремы.

8.8.6. Первая теорема Пикара. *Целая функция, не являющаяся постоянной, принимает, по крайней мере один раз, каждое значение, за исключением, возможно, одного.*

Предположим, что функция $f(z)$ не принимает ни одного из двух значений a, b $(a \neq b)$. Тогда функция $g(z) = \frac{f(z) - f(a)}{b-a}$ не принимает ни значения 0, ни значения 1, так что, в силу теоремы Шоттки,

$$|g(z)| < \exp\left\{\frac{KR_1^4}{(R_1-R)^4}\right\} \qquad (|z| \leqslant R < R_1).$$

Полагая $R_1=2R$, мы видим, что $|g(z)|<K$. Следовательно, $g(z)$ есть постоянная.

8.8.7. Мы докажем также следующую теорему, обобщающую теорему Пикара.

Теорема Ландау *). *Пусть α — произвольное число и β — число, отличное от нуля. Существует такое число $R=R(\alpha, \beta)$, что всякая функция*

$$f(z)=\alpha+\beta z+a_2z^2+a_3z^3+\ldots,$$

регулярная при $|z|\leqslant R$, принимает в этом круге либо значение 0, либо значение 1.

Можно предположить, что $\alpha\neq 0$ и $\alpha\neq 1$, поскольку в противном случае теорема очевидна. Если функция $f(z)$ не принимает значений 0, 1, то, согласно теореме Шоттки, $|f(z)|<K(\alpha)$ при $|z|\leqslant\frac{1}{2}R$. Следовательно,

$$|\beta|=\left|\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|z|=\frac{1}{2}R}\frac{f(z)}{z^2}\,dz\right|\leqslant\frac{K(\alpha)}{R/2},$$

так что $R\leqslant 2K(\alpha)/|\beta|$. Этим теорема доказана.

8.8.8. Мы сформулировали и доказали теорему Пикара для целых функций, т. е., если оставить в стороне многочлены, для функций, единственная особенность которых есть существенная особенность в бесконечности. Но подобная же теорема верна для любой функции с изолированной существенной особенностью.

Вторая теорема Пикара. *В окрестности изолированной существенно особой точки однозначная функция бесконечное число раз принимает каждое значение, за исключением, возможно, одного.*

Другими словами, *если функция $f(z)$ регулярна при $0<|z-z_0|<\rho$ и не принимает при $|z-z_0|<\rho$ двух различных значений a, b, то точка z_0 не является для нее существенно особой.*

Можно считать, что $z_0=0$, $\rho=1$, $a=0$, $b=1$. Мы покажем, что существует последовательность окружностей $|z|=r_n$ с $r_n\to 0$, на которых функция $f(z)$ равномерно ограничена. Это будет противоречить существованию особенности при $z=0$; см. § 2.7.1.

Мы начнем с теоремы Вейерштрасса, согласно которой функция в окрестности своей существенно особой точки бесконечно много раз сколь угодно близко подходит к любому заданному значению. Существует, таким образом, последовательность точек $z_1, z_2, \ldots$, для которой $|z_1|>|z_2|>\ldots$, $|z_n|\to 0$ и

$$|f(z_n)-2|<\frac{1}{2}. \qquad (1)$$

---

*) Landau [1] и *Ergebnisse*, § 25.

Ясно, что теорема Шоттки позволяет нам построить последовательность окружностей с центрами в точках z_1, $z_2, \ldots$, на которых функция $f(z)$ равномерно ограничена. Конечно, эти окружности не будут охватывать начало, и, поскольку мы доказали теорему Шоттки только для окружностей, мы встречаемся здесь с трудностью. Эту трудность можно устранить с помощью конформного преобразования, переводящего окружность в вытянутую кривую, которая, правда, тоже не содержит начала в своей внутренней области, но окружает его, пересекая себя в стороне от него.

Положим $z = e^w$, $w = u + iv$ и рассмотрим в плоскости w полуполосу $u < 0, -\pi \leqslant v \leqslant \pi$. Ей отвечает круг $|z| < 1$. Положим, далее, $f(z) = g(w)$, и пусть $w_n = \log z_n$ $(-\pi < \operatorname{Im} w_n \leqslant \pi)$, так что $\operatorname{Re} w_n \to -\infty$.

Мы применяем теорему Шоттки к функции

$$h(w') = g(w_n + w').$$

Эта функция регулярна при $|w'| \leqslant 4\pi$, если n достаточно велико, и не принимает значений 0, 1. Следовательно,

$$|h(w')| < K = K\{h(0)\} \qquad (|w'| \leqslant 2\pi),$$

поскольку же числа $h(0) = g(w_n) = f(z_n)$ удовлетворяют условию (1), мы можем заменить правую часть абсолютной постоянной. Таким образом, $|g(w)| < A$ при $|w - w_n| \leqslant 2\pi$ и, в частности, при $u = \operatorname{Re}(w_n)$, $-\pi \leqslant v \leqslant \pi$. Поэтому $|f(z)| < A$ $(|z| = |z_n|)$, что и доказывает теорему.

8.8.9. Асимптотические значения. Число a называется асимптотическим значением функции $f(z)$, если существует непрерывная кривая, ведущая из некоторой точки в бесконечность, вдоль которой $f(z) \to a$ при $z \to \infty$. Например, 0 есть асимптотическое значение функции e^z, так как $e^z \to 0$, когда $z \to \infty$ вдоль отрицательной части вещественной оси. Функция $\int_0^z e^{-t^q}\,dt$, где q — положительное целое число, имеет q асимптотических значений

$$e^{2\pi ik/q} \int_0^\infty e^{-t^q}\,dt \qquad (k = 0, \ldots, q-1),$$

которые появляются, когда $z \to \infty$ вдоль полупрямых $\arg z = e^{2\pi ik/q}$.

Подобным же образом определяется «асимптотическое значение ∞».

Мы докажем следующие теоремы.

Всякая функция с изолированной существенной особенностью в бесконечности имеет асимптотическое значение ∞.

В силу теоремы Лорана такая функция представляется в виде $f(z)+g(z)$, где $f(z)$ — целая функция, а $g(z)$ стремится к нулю при $|z|\to\infty$. Следовательно, достаточно рассмотреть целые функции. Для целой функции, не являющейся постоянной, максимум $M(r)$ модуля $|f(z)|$ монотонно стремится к бесконечности. Рассмотрим неограниченно возрастающую последовательность чисел $X_1=M(r_1)$, $X_2=M(r_2),\ldots$ Из теоремы Лиувилля следует, что вне окружности $|z|=|r_1|$ имеется точка, в которой $|f(z)|>X_1$. Точки, в которых $|f(z)|>X_1$, составляют внутренности областей, ограниченных кривыми, на которых $|f(z)|=X_1$, и эти области должны быть внешними по отношению к окружности $|z|=r_1$. Пусть D_1 — одна из них. Ясно, что область D_1 простирается в бесконечность: в противном случае это была бы конечная область, на границе которой $|f(z)|=X_1$ и внутри которой $|f(z)|>X_1$, что, согласно теореме о максимуме модуля, невозможно. Далее, функция $f(z)$ не ограничена в D_1: в противном случае из принципа Фрагмена и Линделефа следовало бы, что $|f(z)|\leqslant X_1$ во всех точках области D_1 (здесь применимо доказательство § 5.6 с P в бесконечности и с $\omega(z)=r_1/z$). Следовательно, в D_1 имеется точка, где $|f(z)|>X_2$, и с ней некоторая область D_2, внутренняя к D_1, во всех точках которой $|f(z)|>X_2$. Повторяя это рассуждение, мы получим последовательность областей $D_1, D_2, \ldots$, каждая из которых лежит внутри предыдущей и которые обладают тем свойством, что $|f(z)|>X_m$ в D_m и $|f(z)|=X_m$ на границе области D_m. Возьмем на границе области D_1 какую-нибудь точку и соединим ее непрерывной кривой, лежащей в D_1, с какой-нибудь точкой границы области D_2, затем соединим эту вторую точку непрерывной кривой, лежащей в D_2, с какой-нибудь точкой границы области D_3, и т. д. Мы получим, очевидно, непрерывную кривую, вдоль которой $f(z)\to\infty$.

Если целая функция, не являющаяся постоянной, не принимает значения a, то a есть асимптотическое значение.

Действительно, функция $1/(f(z)-a)$ является целой и не постоянной и потому имеет асимптотическое значение ∞.

Рассмотрения § 5.6.4 показывают, что если целая функция имеет асимптотические значения на двух кривых, между которыми она ограничена, то эти асимптотические значения должны совпадать. Асимптотические значения, не связанные между собой таким образом, мы будем рассматривать как различные — независимо от того, равны они или нет.

Данжуа было высказано предположение, что *целая функция конечного порядка ρ не может иметь более 2ρ асимптотических значений*. Карлеман доказал, что такая функция не может иметь более 5ρ асимптотических значений, и в конце концов Альфорс доказал гипотезу Данжуа полностью. Общее доказательство не является легким. Однако легко показать, что существует не более

2ρ полупрямых, выходящих из точки $z=0$, вдоль которых функция порядка ρ имеет различные асимптотические значения. Действительно, согласно § 5.6.1 угол между двумя такими полупрямыми не может быть меньше π/ρ.

8.9. Мероморфные функции. Мы дадим теперь краткое введение в теорию мероморфных функций, т. е. функций, единственными особенностями которых, лежащими в конечной части плоскости, являются полюсы.

Эта теория в значительной степени основывается на общей формуле Иенсена § 3.6.1 (4). Пусть $f(z)$ — мероморфная функция с отличными от 0 нулями $a_1, a_2, \ldots$ и отличными от 0 полюсами $b_1, b_2, \ldots$; те и другие мы будем считать расположенными по неубывающим значениям модулей. Пусть в окрестности начала $f(z)$ имеет вид $cz^k+\ldots$; k может быть любым целым числом. Согласно формуле Иенсена для функции $z^{-k}f(z)$

$$\log\left|\frac{b_1\ldots b_n}{a_1\ldots a_m}\right|r^{m-n}+\log|c|=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log|f(re^{i\theta})|\,d\theta-k\log r.$$

Как в § 3.6.1,

$$\log\frac{r^m}{|a_1\ldots a_m|}=\sum_{\nu=1}^{m-1}\nu\int_{|a_\nu|}^{|a_{\nu+1}|}\frac{dx}{x}+m\int_{|a_m|}^{r}\frac{dx}{x}.$$

Пусть $n(r, 0)$ — число нулей функции $f(z)$ при $|z|\leqslant r$. Если $k>0$, то $\nu=n(x, 0)-k$ при $|a_\nu|\leqslant x<|a_{\nu+1}|$, так что

$$\log\frac{r^m}{|a_1\ldots a_m|}=\int_0^r\frac{n(x, 0)-k}{x}\,dx.$$

Если $n(r, \infty)$ — число полюсов функции $f(z)$ при $|z|\leqslant r$, то подобным же образом

$$\log\frac{r^n}{|b_1\ldots b_n|}=\int_0^r\frac{n(x, \infty)}{x}\,dx.$$

Если $k<0$, то k появляется не в первом интеграле, а во втором. Полагая

$$N(r, a)=\int_0^r\frac{n(x, a)-n(0, a)}{x}\,dx+n(0, a)\log r,$$

мы видим, что во всех случаях

$$N(r, 0)-N(r, \infty)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log|f(re^{i\theta})|\,d\theta-\log|c|. \qquad (1)$$

Введем для положительного α обозначение

$$\log^+ \alpha = \max(\log \alpha,\ 0),$$

вследствие которого

$$\log \alpha = \log^+ \alpha - \log^+ \frac{1}{\alpha},$$

и положим:

$$m(r,\ a) = m\left(r,\ \frac{1}{f-a}\right) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log^+ \left|\frac{1}{f(re^{i\theta})-a}\right| d\theta,$$

$$m(r,\ \infty) = m(r,\ f) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log^+ |f(re^{i\theta})|\, d\theta.$$

Теперь формулу (1) можно представить в виде

$$m(r,\ 0) + N(r,\ 0) = m(r,\ \infty) + N(r,\ \infty) - \log|c|. \qquad (2)$$

Применим эту формулу к функции $f(z)-a$, где a — произвольное число. Если в окрестности начала $f(z)-a = c_a z^k + \ldots$, то

$$m(r,\ a) + N(r,\ a) = m(r,\ f-a) + N(r,\ \infty) - \log|c_a|;$$

член $N(r,\ \infty)$ остается неизменным, так как функция $f(z)-a$ имеет при всех значениях a одни и те же полюсы.

Очевидно, $|f|+|a| \leqslant 2|fa|$, $2|f|$, $2|a|$ или 2, смотря по тому, имеют ли место неравенства $|f| \geqslant 1$ и $|a| \geqslant 1$, $|f| \geqslant 1$ и $|a| < 1$, $|f| < 1$ и $|a| \geqslant 1$ или $|f| < 1$ и $|a| < 1$. Следовательно,

$$\log(|f|+|a|) \leqslant \log^+|f| + \log^+|a| + \log 2,$$

и потому

$$\log^+|f-a| \leqslant \log^+|f| + \log^+|a| + \log 2.$$

Совершенно так же

$$\log^+|f| \leqslant \log^+|f-a| + \log^+|a| + \log 2.$$

Следовательно,

$$|m(r,\ f-a) - m(r,\ f)| \leqslant \log^+|a| + \log 2.$$

Мы видим, таким образом, что

$$m(r,\ a) + N(r,\ a) = m(r,\ \infty) + N(r,\ \infty) + \varphi(r,\ a),$$

где $|\varphi(r,\ a| \leqslant |\log|c_a|| + \log^+|a| + \log 2$. Следовательно, если $f(z)$ — мероморфная функция, не являющаяся постоянной, то значения суммы $m(r,\ a) + N(r,\ a)$, соответствующие двум заданным значениям постоянной a, отличаются друг от друга на ограниченную функцию от r.

Поскольку в этом смысле все такие суммы эквивалентны, мы можем представить их одной из них, скажем суммой с $a=\infty$. *Полагая, таким образом,*

$$T(r)=m(r, \infty)+N(r, \infty), \tag{3}$$

мы видим, что для всех значений a

$$m(r, a)+N(r, a)=T(r)+\varphi(r, a),$$

где $\varphi(r, a)$ — *функция, ограниченная при* $r\to\infty$ *для каждого значения* a.

$T(r)$ называется *характеристической функцией* функции $f(z)$.

Мы покажем, что $T(r)$ *есть возрастающая выпуклая функция от* $\log r$.

Формула Иенсена для функции $f(z)-e^{i\lambda}$, где λ — вещественное число, дает, если $f(0)\neq e^{i\lambda}$:

$$N(r, e^{i\lambda})-N(r, \infty)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\log|f(re^{i\theta})-e^{i\lambda}|\,d\theta-\log|f(0)-e^{i\lambda}|. \tag{4}$$

Кроме того, при любом a

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\log|e^{i\theta}-a|\,d\theta=\log^+|a|;$$

это следует, например, из теоремы Иенсена, если положить $f(z)=z-a$, $r=1$. Умножая соотношение (4) на $1/(2\pi)$ и интегрируя его по λ в интервале $(0, 2\pi)$, мы видим, что

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}N(r, e^{i\lambda})\,d\lambda-N(r, \infty)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\log^+|f(re^{i\theta})|\,d\theta-\log^+|f(0)|,$$

т. е. что

$$T(r)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}N(r, e^{i\lambda})\,d\lambda+\log^+|f(0)|.$$

Но $N(r, a)$ есть при любом a возрастающая выпуклая функция от $\log r$; действительно, $\dfrac{dN(r, a)}{d\log r}=n(r, a)$, а $n(r, a)$ есть неотрицательная и неубывающая функция от r. Следовательно, теми же свойствами обладает и $T(r)$.

В предыдущих формулах $N(r, a)$ измеряет, сколько раз функция $f(z)$ принимает значение a. Поскольку наибольший вклад в $m(r, a)$ поступает от дуг, на которых функция $f(z)$ близка к a, $m(r, a)$ измеряет, в известном смысле, близость функции $f(z)$ к a. Сумму $m(r, a)+N(r, a)$ можно рассматривать как тотальную меру близости функции $f(z)$ к значению a.

Некоторые значения могут быть для данной функции исключительными в том смысле, что функция не принимает этих значений. Предыдущая теорема показывает, что в смысле тотальной близости исключительных значений не существует, т. е. что тотальная близость функции к данному значению, с точностью до ограниченных функций от r, одна и та же для всех значений.

Примеры. (I) Пусть $f(z)$ — рациональная функция, скажем, $f(z)=P(z)/Q(z)$, где $P(z)$ — многочлен степени μ, $Q(z)$ — многочлен степени ν и $P(z)$ и $Q(z)$ не имеют общих делителей. Если $\mu>\nu$, то для всякого конечного значения a

$$m(r,\ a)=O(1),\quad N(r,\ a)=\mu\log r+O(1),$$

в то время как

$$m(r,\ \infty)=(\mu-\nu)\log r+O(1),\quad N(r,\ \infty)=\nu\log r+O(1).$$

Если $\mu<\nu$, то при $a\neq 0$

$$m(r,\ a)=O(1),\quad N(r,\ a)=\nu\log r+O(1),$$

в то время как

$$m(r,\ 0)=(\nu-\mu)\log r+O(1),\quad N(r,\ 0)=\mu\log r+O(1).$$

Если $\mu=\nu$ и a_0, b_0 — коэффициенты при z^μ у $P(z)$, $Q(z)$, то при $a\neq a_0/b_0$

$$m(r,\ a)=O(1),\quad N(r,\ a)=\mu\log r+O(1),$$

в то время как

$$m\left(r,\ \frac{a_0}{b_0}\right)=(\mu-\alpha)\log r+O(1),\quad N\left(r,\ \frac{a_0}{b_0}\right)=\alpha\log r+O(1),$$

где α — степень многочлена $a_0Q(z)-b_0P(z)$. Во всех случаях $T(r)=O(\log r)$.

(II) Функция e^z не принимает значений 0, ∞; с другой стороны, они являются предельными значениями функции при $z\to\infty$. Здесь

$$N(r,\ 0)=N(r,\ \infty)=0,\quad m(r,\ 0)=m(r,\ \infty)=\frac{r}{\pi},$$

в то время как при $a\neq 0,\ \infty$

$$m(r,\ a)=O(1),\quad N(r,\ a)=\frac{r}{\pi}+O(1).$$

В частности, $T(r)=r/\pi$.

(III) Изучить подобным же образом функцию $\operatorname{tg} z$ (исключительными являются значения $\pm i$).

8.9.1. Порядок мероморфной функции. Говорят, что мероморфная функция $f(z)$ имеет порядок ρ, если

$$\varlimsup_{r\to\infty}\frac{\log T(r)}{\log r}=\rho,$$

так что для всякого положительного ε

$$T(r)=O(r^{\rho+\varepsilon}),$$

в то время как ни для какого отрицательного ε это соотношение не выполняется.

Чтобы установить, что для целых функций это определение согласуется с определением порядка, данным выше, мы докажем следующую теорему.

Если $f(z)$ — целая функция, то при $0<r<R$

$$T(r)\leqslant \log^+ M(r)\leqslant \frac{R+r}{R-r}T(r).$$

Для целой функции $N(r, \infty)=0$ и $T(r)=m(r, \infty)$. Поэтому левое неравенство означает, что

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log^+ |f(re^{i\theta})|\, d\theta \leqslant \log^+ \max |f(re^{i\theta})|,$$

и, таким образом, очевидно. Далее, согласно формуле Пуассона — Иенсена,

$$\log|f(re^{i\theta})| =$$
$$=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{R^2-r^2}{R^2-2Rr\cos(\theta-\varphi)+r^2}\log|f(Re^{i\varphi})|\,d\varphi-\sum_{\mu=1}^{m}\log\left|\frac{R^2-\bar{a}_\mu re^{i\theta}}{R(re^{i\theta}-a_\mu)}\right|.$$

Все члены этой суммы положительны, и кроме того,

$$R^2-2Rr\cos(\theta-\varphi)+r^2\geqslant (R-r)^2.$$

Выбирая θ так, чтобы левая часть равенства получила наибольшее значение, мы видим, что

$$\log M(r)\leqslant \frac{R+r}{R-r}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log|f(Re^{i\varphi})|\,d\varphi\leqslant \frac{R+r}{R-r}T(r).$$

Этим доказано и второе неравенство.

Полагая в этих неравенствах $R=2r$, мы убеждаемся в равносильности предыдущих определений порядка целой функции.

Пусть теперь $r_1(a)$, $r_2(a)$, ... — модули нулей функции $f(z)-a$ и $r_1(\infty)$, $r_2(\infty)$ — модули полюсов функции $f(z)$.

Если $f(z)$ — функция порядка ρ, то для всякого значения a

$$m(r, a)=O(r^{\rho+\varepsilon}),\quad N(r, a)=O(r^{\rho+\varepsilon}),\quad n(r, a)=O(r^{\rho+\varepsilon})$$

и ряд $\sum\left(\frac{1}{r_n(a)}\right)^{\rho+\varepsilon}$ *сходится.*

Первые два соотношения следуют из того, что

$$m(r, a)\leqslant T(r)+O(1),\quad N(r, a)\leqslant T(r)+O(1).$$

После этого остальное доказывается так же, как в случае целых функций *).

8.9.2. Разложение мероморфной функции на множители. Пусть $f(z)$ — мероморфная функция порядка ρ с ну-

*) Более точные теоремы этого рода имеются у Неванлинны: Nevanlinna, *Fonctions Méromorphes*, гл. II.

лями a_n и полюсами b_n, и пусть $f(0) \neq 0$. Из предыдущего следует, что существуют целые числа p_1 и p_2, не превосходящие ρ, для которых произведения

$$P_1(z)=\prod_{n=1}^{\infty} E\left(\frac{z}{a_n}, p_1\right), \quad P_2(z)=\prod_{n=1}^{\infty} E\left(\frac{z}{b_n}, p_2\right)$$

сходятся при всех значениях z. Эти произведения являются целыми функциями, порядки которых не превосходят ρ. Сверх того, функция $f_1(z)=f(z)P_2(z)$ является целой и

$$T(r, f_1)=m(r, \infty, f_1) \leqslant m(r, \infty, f)+m(r, \infty, P_2) \leqslant$$
$$\leqslant T(r, f)+T(r, P_2)=O(r^{\rho+\varepsilon})+O(r^{\rho+\varepsilon}).$$

Следовательно, порядок функции $f_1(z)$ не превосходит ρ. Следовательно, $f_1(z)=e^{Q(z)}P_1(z)$, где $Q(z)$ — многочлен степени $\leqslant \rho$.

Мы доказали, таким образом, что $f(z)=e^{Q(z)}\dfrac{P_1(z)}{P_2(z)}$. Это — обобщение на мероморфные функции теоремы Адамара о разложении на множители.

Несколько более глубокая теорема, в которой числитель и знаменатель могут не сходиться раздельно, была доказана Неванлинной *).

Дальнейшее развитие теории мероморфных функций в значительной степени связано с обобщениями теорем Пикара и Бореля. Тут мы должны отослать читателя к книгам Неванлинны.

РАЗЛИЧНЫЕ ПРИМЕРЫ

1. Доказать, что если a не кратно π, то

$$\sin(a-z)=\sin a e^{-z \operatorname{ctg} a} \prod_{n=-\infty}^{\infty}\left(1-\frac{z}{a+n\pi}\right)e^{z/(a+n\pi)}.$$

2. Доказать, что каждое из уравнений $\sin z=z^2$, $\log z=z^3$, $\operatorname{tg} z=az+b$, где a и b — произвольные комплексные числа, имеет бесконечно много корней.

3. Найти все нули функции $e^{e^z}-1$ и показать, что они не имеют конечного показателя сходимости.

4. Показать, что если $f(z)=\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ — функция нецелого порядка, то коэффициенты многочлена $Q(z)=b_1 z+\ldots+b_q z^q$ теоремы Адамара могут быть выражены через $a_1, a_2, \ldots, a_q$.

[Если ρ — нецелое число, то $q<p+1$ и $P(z)=1+O(z^{p+1})$ при $z \to 0$. Следовательно, $P(z)$ не участвует в уравнениях, которые получаются при сравнении коэффициентов.]

5. Каков порядок функции $F(z)=\sum |a_n|^p z^n$, если порядок функции $f(z)=\sum a_n z^n$ есть ρ?

*) Nevanlinna, *Fonctions Méromorphes*, гл. III.

6. Обобщенная гипергеометрическая функция определяется формулой

$$ {}_pF_q(\alpha_1, \ldots, \alpha_p; \beta_1, \ldots, \beta_q; z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha_1)_n \ldots (\alpha_p)_n}{(\beta_1)_n \ldots (\beta_q)_n} \frac{z^n}{n!}, $$

где $(\alpha)_n = \alpha(\alpha+1) \ldots (\alpha+n)$, $(\alpha)_0 = 1$. Показать, что она является целой, если $q \geqslant p$, и найти ее порядок.

7. Показать, что при $|q| < 1$, $k > 1$ функция

$$ f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} q^{n^k} e^{inz} $$

является целой, и найти ее порядок.

8. Если $\sigma > 1$, то $P_\sigma(z) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z}{n^\sigma}\right)$ есть целая функция порядка $1/\sigma$ *).

9. Функция $\prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z}{e^n}\right)$ является целой, и ее порядок равен нулю.

10. Показать, что при $\alpha > 0$ функция

$$ f_\alpha(z) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{e^z}{e^{n^\alpha}}\right) $$

является целой и имеет порядок $1 + \frac{1}{\alpha}$. Найти для нее стандартное разложение на множители при $\alpha = 1$ и $\alpha = 2$.

11. Если $a > 0$, то $E_a(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\Gamma(1+an)}$ есть целая функция порядка $1/a$ **).

12. Если a — вещественное число, то все корни уравнения $\Gamma'(z) = a\Gamma(z)$ вещественны.

13. Показать, что $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\operatorname{ch}\sqrt{n}}{n!} z^n$ есть целая функция порядка 1, что она имеет бесконечно много нулей и что все ее нули вещественны и отрицательны.

14. Пусть функция $f(z)$ порядка $1/2$ имеет только вещественные отрицательные нули, и пусть $n(r) \sim k\sqrt{r}\log r$. Определить асимптотическое поведение функции $M(r)$.

[Воспользоваться методом § 8.6.4.]

15. Показать, что если $f(z)$ есть каноническое произведение с такими нулями z_n, что ряд $\sum (1/|z_n|)$ сходится, то: $f(z) = O(e^{\varepsilon|z|})$; на окружностях со сколь угодно большими радиусами $|f(z)| > e^{-\varepsilon|z|}$.

---

*) О дальнейших свойствах этой функции см. Hardy [4].

**) Несколько мемуаров, посвященных этой функции, можно найти в Acta Math., 29.

[Мы можем написать

$$|f(z)| \leqslant \sum_{n=1}^{N}\left(1+\left|\frac{z}{z_n}\right|\right)\exp\left(\sum_{N+1}^{\infty}\left|\frac{z}{z_n}\right|\right),$$

из чего легко следует первое. Второе следует после этого из теоремы § 8.7.5.]

16. Показать, что в теореме Лагерра (§ 8.5.2) $f'(z)$ имеет тот же род, что и $f(z)$.

[Доказательства требует только случай $\rho=1$, когда род может быть равен 0 или 1. Следует воспользоваться тем, что ряды $\sum(1/|z_n|)$ и $\sum(1/|z'_n|)$ сходятся или расходятся одновременно, сравнить, как в § 8.5.1, $M'(r)$ с $M(r)$ и применить предыдущий пример.]

17. Показать, что род функции экспоненциального типа (§ 8.7.5) равен 1.

18. Показать, что если $f(z)=\sum a_n z^n$ — функция экспоненциального типа, то $f^{(n)}(0)=O(e^{An})$ и, следовательно, $\varphi(z)=\sum n!\, a_n z^n$ имеет конечный радиус сходимости.

19. Для того чтобы функция $f(z)$ принадлежала экспоненциальному типу, необходимо и достаточно, чтобы она была представима в форме

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_C e^{zw}\chi(w)\,dw,$$

где $\chi(w)$ — функция, регулярная при достаточно больших значениях w (включая бесконечно удаленную точку), а C — окружность достаточно большого радиуса с центром в начале.

$\left[\chi(w)=\frac{1}{w}\varphi\left(\frac{1}{w}\right)\right.$, где φ — функция, определенная в предыдущем примере.$\left.\right]$

20. Пусть $f(z)$ — функция экспоненциального типа, и пусть $h(\theta)$ — функция Фрагмена — Линделефа, ассоциированная с $f(z)$, причем $V(r)=r$. Предположим, что $h(\theta)\geqslant 0$, и рассмотрим радиусы-векторы длины $h(\theta)$, образующие углы $-\theta$ с вещественной осью, и перпендикуляры к этим радиусам-векторам, проведенные через их концы (ср. § 5.7.2). Показать, что функция $\chi(w)$ регулярна в каждой точке w, лежащей с точкой $w=0$ по разные стороны от одного из этих перпендикуляров.

[Если значение $|z|$ достаточно мало, то почленное интегрирование дает:

$$\varphi(z)=\int_0^\infty e^{-t} f(zt)\,dt.$$

Поворачивая контур на угол λ, мы видим, что

$$\varphi(z)=\int_0^\infty e^{-te^{i\lambda}} f(zte^{i\lambda})\,e^{i\lambda}\,dt.$$

Здесь подынтегральная функция есть

$$O\left(e^{-t\cos\lambda+rt\{h(\theta+\lambda)+\varepsilon\}}\right),$$

и интеграл сходится, если

$$rh(\theta+\lambda)<\cos\lambda. \qquad (1)$$

Следовательно, функция $\varphi(z)$ регулярна при $z=re^{i\theta}$, если неравенство (1) выполнено при некотором значении λ. Если $w=r'e^{i\theta'}$, то функция $\chi(w)$ регулярна в точке w при условии, что $r' > h(\lambda - \theta')\sec\lambda$ для некоторого значения λ, а это равносильно высказанному утверждению *).]

21. Функция

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{(n+a)^s\, n!}$$

принадлежит экспоненциальному типу **).

22. Показать, что функция

$$f(z) = \int_a^b e^{izt} g(t)\, dt,$$

где $g(t)$ — непрерывная функция, принадлежит экспоненциальному типу и что соответствующая функция $\chi(w)$ регулярна всюду вне интервала (ia, ib) мнимой оси.

23. Показать, что функция $f(z)$ предыдущего примера стремится к нулю, когда $z \to \pm\infty$ вдоль вещественной оси, и вывести из этого, что $f(z)$ имеет бесконечно много нулей.

24. Говорят, что $f(z)$ есть функция нулевого типа, если $f(z) = O(e^{\varepsilon r})$.

Для того чтобы функция $f(z)$ принадлежала нулевому типу, необходимо и достаточно, чтобы существовало представление вида

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C e^{zw} \chi(w)\, dw,$$

где $\chi(w)$ — целая функция от $1/w$.

[Положение подобно тому, с которым мы встретились в примерах 18, 19, но здесь $f^{(n)}(0) = O(e^{\varepsilon n})$.]

25. Для того чтобы функция $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ была целой функцией от $1/(1-z)$, необходимо и достаточно, чтобы существовала такая целая функция $g(z)$ нулевого типа, что $a_n = g(n)$ при $n = 1, 2, \ldots$ ***).

[Пусть такая целая функция $g(z)$ существует, и пусть

$$g(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C e^{zw} \chi(w)\, dw.$$

Тогда

$$f(z) - a_0 = \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{ze^w}{1 - ze^w} \chi(w)\, dw,$$

где C — охватывающий начало контур, на котором $\operatorname{Re} w < \log|1/z|$. Это — интеграл того типа, который был использован в § 4.6, и путем деформации контура можно показать, что любая ветвь функции $f(z)$ регулярна во всей

---

*) Подробности: Pólya [4].

**) О дальнейших свойствах этой функции см. Hardy [2].

***) Carlson [1], Wigert [1], Hardy [14].

точках, кроме точки $z=1$ (контур зажат между 0 и $\log 1/z$). Далее,

$$f(z)-a_0=\chi\left(\log\frac{1}{z}\right)+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C'}\frac{ze^w}{1-ze^w}\chi(w)\,dw,$$

где C' — контур, охватывающий точку $w=\log(1/z)$. Это показывает, что функция $f(z)$ однозначна в окрестности точки $z=1$ и, таким образом, является целой функцией от $1/(1-z)$.

Обратно, если функция $f(z)$ принадлежит указанному типу, то

$$a_n=\frac{1}{2\pi i}\int\frac{f(z)}{z^{n+1}}\,dz,$$

и мы можем положить $z=e^{-w}$ и продеформировать преобразованный контур в простой замкнутый контур, охватывающий начало и лежащий целиком внутри окружности $|w|=2\pi$. Наконец, функция $f(e^{-w})$ регулярна во всех точках, кроме точек $w=0$ и $w=\pm 2k\pi i$ $(k=1, 2, \ldots)$, так что $f(e^{-w})=g(w)+\psi(w)$, где $g(w)$ — целая функция от $1/w$, а $\psi(w)$ — функция, регулярная при $|w|<2\pi$. Остальное очевидно.]

ГЛАВА IX

РЯДЫ ДИРИХЛЕ

9.1. Введение. Под рядом Дирихле мы понимаем в этой главе ряд вида

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s}, \tag{1}$$

где коэффициенты a_n — заданные числа, а s — комплексное переменное. Ряды более общего типа

$$\sum a_n e^{-\lambda_n s}$$

также известны как ряды Дирихле. Наш специальный тип получается, если положить $\lambda_n = \log n$ *).

На протяжении всей главы мы будем писать $s = \sigma + it$, где σ и t — вещественные числа. Если ряд Дирихле сходится, то его сумму мы будем обозначать через $f(s)$. Один важный ряд Дирихле мы уже рассматривали: это — дзета-функция Римана

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}. \tag{2}$$

Ряды Дирихле не столь важны для общего анализа, как степенные ряды, поскольку они представляют лишь очень специальный класс аналитических функций. Однако они чрезвычайно важны для приложений анализа к теории чисел. В некоторых отношениях их теория гораздо сложнее теории степенных рядов. Например, в теории степенных рядов круг сходимости и круг абсолютной сходимости совпадают с кругом регулярности суммы ряда. В теории рядов Дирихле, где эти круги должны быть заменены полуплоскостями, все три соответствующие полуплоскости могут быть различными.

9.1.1. Указанные полуплоскости связывают с рядом Дирихле на основании следующей теоремы.

---

*) О рядах Дирихле общего типа см. Hardy and Riesz, *General Theory of Dirichlet's Series.*

Если ряд Дирихле сходится при $s=s_0$, то он равномерно сходится в угловой области плоскости s, определяемой неравенством

$$|\arg(s-s_0)|\leqslant\frac{1}{2}\pi-\delta,$$

где δ — любое положительное число, меньшее $\frac{1}{2}\pi$.

Достаточно рассмотреть случай $s_0=0$. Действительно,

$$\sum\frac{a_n}{n^s}=\sum\frac{a'_n}{n^{s'}},$$

где $a'_n=a_n n^{-s_0}$, $s'=s-s_0$, последний же ряд сходится при $s'=0$.

Мы предполагаем, таким образом, что ряд $\sum a_n$ сходится. Положим $r_n=a_{n+1}+a_{n+2}+\ldots$, так что $r_n\to 0$. Мы можем написать:

$$\sum_{n=M}^{N}\frac{a_n}{n^s}=\sum_{M}^{N}\frac{r_{n-1}-r_n}{n^s}=\sum_{M}^{N}r_n\left\{\frac{1}{(n+1)^s}-\frac{1}{n^s}\right\}+\frac{r_{M-1}}{M^s}-\frac{r_N}{(N+1)^s}. \quad (1)$$

Но

$$\left|\frac{1}{(n+1)^s}-\frac{1}{n^s}\right|=\left|s\int\limits_n^{n+1}\frac{du}{u^{s+1}}\right|\leqslant|s|\int\limits_n^{n+1}\frac{du}{u^{\sigma+1}}=\frac{|s|}{\sigma}\left\{\frac{1}{n^\sigma}-\frac{1}{(n+1)^\sigma}\right\}, \quad (2)$$

а $|r_n|<\varepsilon$ при $n\geqslant n_0=n_0(\varepsilon)$, причем n_0 не зависит от s. Следовательно, при $M>n_0$

$$\left|\sum_{n=M}^{N}\frac{a_n}{n^s}\right|<\frac{\varepsilon|s|}{\sigma}\sum_{n=M}^{N}\left\{\frac{1}{n^\sigma}-\frac{1}{(n+1)^\sigma}\right\}+\frac{\varepsilon}{M^\sigma}+\frac{\varepsilon}{(N+1)^\sigma}=$$

$$=\frac{\varepsilon|s|}{\sigma}\left\{\frac{1}{M^\sigma}-\frac{1}{(N+1)^\sigma}\right\}+\frac{\varepsilon}{M^\sigma}+\frac{\varepsilon}{(N+1)^\sigma}<\frac{2\varepsilon|s|}{\sigma}+2\varepsilon.$$

Если $|\arg s|\leqslant\frac{1}{2}\pi-\delta$, т. е. $\frac{t}{\sigma}\leqslant\operatorname{tg}\left(\frac{1}{2}\pi-\delta\right)=\operatorname{ctg}\delta$, то

$$\frac{|s|}{\sigma}=\sqrt{1+\frac{t^2}{\sigma^2}}\leqslant\operatorname{cosec}\delta.$$

Таким образом, в предыдущих условиях

$$\sum_{n=M}^{N}\frac{a_n}{n^s}<2\varepsilon(\operatorname{cosec}\delta+1).$$

Правая часть не зависит от s и стремится к нулю вместе с ε. Этим равномерная сходимость ряда доказана.

В частности, *если ряд сходится в точке $s_0=\sigma_0+it_0$, то он сходится во всех точках $s=\sigma+it$ с $\sigma>\sigma_0$.* Действительно, всегда существует столь малое δ, что $|\arg(s-s_0)|<\frac{1}{2}\pi-\delta$.

9.1.2. *Область сходимости ряда есть полуплоскость* *). Действительно, разобьем все значения σ' на два класса: на значения, для которых при $\sigma > \sigma'$ ряд сходится, и остальные значения. Согласно предыдущей теореме каждое число первого класса лежит правее любого числа второго класса. Пусть σ_0 — число, определяемое этим сечением. Ясно, что ряд сходится при $\sigma > \sigma_0$ и расходится при $\sigma < \sigma_0$.

Число σ_0 называется *абсциссой сходимости* ряда.

Ряд может сходиться при всех значениях s (пример: $a_n = 1/n!$) и может не сходиться ни при каком значении s (пример: $a_n = n!$).

Сумма ряда, $f(s)$, есть аналитическая функция от s, регулярная при $\sigma > \sigma_0$. Действительно, каждый член ряда является аналитической функцией, и каждая точка s, для которой $\sigma > \sigma_0$, содержится в некоторой области равномерной сходимости.

Вопросы, касающиеся сходимости ряда и регулярности функции на прямой $\sigma = \sigma_0$, остаются открытыми; как и в случае степенных рядов, возможны различные случаи.

Однако верна теорема, аналогичная теореме Абеля о степенных рядах: *если ряд сходится при $s = s_0$ к сумме $f(s_0)$, то $f(s) \to f(s_0)$, когда $s \to s_0$ вдоль любого пути, лежащего целиком в некоторой области вида* $|\arg\ (s - s_0)| \leqslant \frac{1}{2}\ \pi - \delta$.

Это сразу следует из теоремы о равномерной сходимости.

9.1.3. Абсолютная сходимость. *Область абсолютной сходимости ряда Дирихле есть полуплоскость.*

Действительно, абсолютная сходимость ряда § 9.1 (1) есть сходимость ряда $\sum\limits_{1}^{\infty} \frac{|a_n|}{n^\sigma}$. Если последний сходится при некотором значении σ, то он сходится, очевидно, и при всяком большем значении σ. Следовательно, существует такое число $\bar{\sigma}$, что он сходится при $\sigma > \bar{\sigma}$ и расходится при $\sigma < \bar{\sigma}$.

Следовательно, исходный ряд является абсолютно сходящимся при $\sigma > \bar{\sigma}$ и не является абсолютно сходящимся при $\sigma < \bar{\sigma}$.

Число $\bar{\sigma}$ называется *абсциссой абсолютной сходимости.*

Числа σ_0 и $\bar{\sigma}$ могут быть различными, т. е. может существовать полоса, в которой ряд сходится, но не абсолютно.

Это показывает следующий пример. Если $\sigma > 1$, то

$$\left(1 - \frac{1}{2^{s-1}}\right)\zeta(s) = \left(\frac{1}{1^s} + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \ldots\right) - 2\left(\frac{1}{2^s} + \frac{1}{4^s} + \ldots\right) = \\ = \frac{1}{1^s} - \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} - \frac{1}{4^s} + \ldots$$

*) Автор причисляет к полуплоскостям всю плоскость и пустое множество. (*Примечание переводчика.*)

Последний ряд сходится при $\sigma > 0$ (и равномерно сходится во всякой конечной области, в которой всюду $\sigma \geqslant a > 0$). Действительно, в силу хорошо известной теоремы *) он сходится, если значение s вещественно и положительно. (Согласно принципу аналитического продолжения формула верна, следовательно, при $\sigma > 0$.) Здесь $\sigma_0 = 0$, $\bar{\sigma} = 1$.

Во всех случаях $\bar{\sigma} - \sigma_0 \leqslant 1$.

Действительно, если ряд $\sum a_n n^{-s}$ сходится, то числа $|a_n| n^{-\sigma}$ ограничены и, следовательно, ряд $\sum \frac{a_n}{n^{s+1+\delta}}$ абсолютно сходится при $\delta > 0$; но это и значит, что $\bar{\sigma} - \sigma_0 \leqslant 1$.

В предыдущем примере $\bar{\sigma} - \sigma_0 = 1$, так что полоса неабсолютной сходимости может фактически иметь ширину 1.

9.1.4. Абсцисса сходимости. Формула для σ_0, аналогичная формуле § 7.1 для радиуса сходимости степенного ряда, имеет две различные формы, одна из которых применима, когда ряд $\sum a_n$ расходится, а другая — когда он сходится. Положим

$$s_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n,$$

и, если ряд $\sum a_n$ сходится, $r_n = a_{n+1} + a_{n+2} + \ldots$ Положим, далее,

$$\alpha = \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\log |s_n|}{\log n}, \quad \beta = \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\log |r_n|}{\log n};$$

β определено только в случае, когда ряд $\sum a_n$ сходится.

Если ряд $\sum a_n$ расходится, то $\sigma_0 = \alpha$; в противном случае $\sigma_0 = \beta$.

В первом случае $\sigma_0 \geqslant 0$, во втором случае $\sigma_0 \leqslant 0$; действительно, сходимость ряда $\sum a_n$ означает, что ряд § 9.1 (1) сходится при $s = 0$.

(I) Пусть ряд $\sum a_n$ расходится, и пусть s — произвольное положительное вещественное значение, при котором ряд $\sum a_n n^{-s}$ сходится. Положим

$$b_n = a_n n^{-s}, \qquad B_n = b_1 + b_2 + \ldots + b_n, \qquad B_0 = 0.$$

Числа B_n ограничены; пусть $|B_n| \leqslant B$. Тогда

$$s_N = \sum_{n=1}^{N} b_n n^s = \sum_{n=1}^{N} (B_n - B_{n-1}) n^s = \sum_{n=1}^{N-1} B_n \{n^s - (n+1)^s\} + B_N N^s.$$

Следовательно,

$$|s_N| \leqslant B \sum_{n=1}^{N-1} \{(n+1)^s - n^s\} + BN^s < 2BN^s,$$

$$\log |s_N| < s \log N + \log 2B,$$

и, значит, $\alpha \leqslant s$. Таким образом, $\alpha \leqslant \sigma_0$.

*) Ч.М., § 188.

Аналогичное рассуждение приводит к цели и в случае, когда ряд $\sum a_n$ сходится. Пусть s — произвольное отрицательное вещественное значение, при котором ряд $\sum a_n n^{-s}$ сходится. Тогда

$$r_N = \sum_{n=N+1}^{\infty} b_n n^s = \sum_{n=N+1}^{\infty} (B_n - B_{n-1}) n^s =$$
$$= \sum_{n=N}^{\infty} B_n \{n^s - (n+1)^s\} - B_N N^s,$$

так что $|r_N| \leqslant B \sum_{n=N}^{\infty} \{n^s - (n+1)^s\} + BN^s = 2BN^s$. Следовательно, в этом случае $\beta \leqslant \sigma_0$.

(II) Так как $s_n = O(n^{\alpha+\varepsilon})$ и так как при вещественных значениях s

$$\frac{1}{n^s} - \frac{1}{(n+1)^s} = s \int_n^{n+1} \frac{du}{u^{s+1}} = O(n^{-s-1}),$$

то

$$\sum_{n=M+1}^{N} \frac{a_n}{n^s} = \sum_{n=M+1}^{N} \frac{s_n - s_{n-1}}{n^s} =$$
$$= \sum_{n=M+1}^{N} s_n \left\{\frac{1}{n^s} - \frac{1}{(n+1)^s}\right\} + \frac{s_N}{(N+1)^s} - \frac{s_M}{(M+1)^s}. \tag{1}$$

Следовательно, если $s > \alpha$ и ε достаточно мало, то

$$\sum_{n=M+1}^{N} \frac{a_n}{n^s} = \sum_{M+1}^{N} O(n^{\alpha+\varepsilon-s-1}) + O(N^{\alpha+\varepsilon-s}) + O(M^{\alpha+\varepsilon-s}) =$$
$$= O(M^{\alpha+\varepsilon-s}) = O(1).$$

Таким образом, ряд $\sum a_n n^{-s}$ сходится, если $s > \alpha$, а это значит, что $\sigma_0 \leqslant \alpha$. Если ряд $\sum a_n$ сходится, то $a_n = r_{n-1} - r_n$ и мы обнаруживаем подобным же образом, что $\sigma_0 \leqslant \beta$. Этим теорема доказана.

Если $\alpha = \infty$, то ряд не сходится нигде; если $\beta = -\infty$, то он сходится всюду. Это легко выводится из предыдущего.

9.1.5. Абсцисса абсолютной сходимости. Она может быть вычислена по формуле

$$\bar{\sigma} = \overline{\lim_{n \to \infty}} \frac{\log(|a_1| + |a_2| + \ldots + |a_n|)}{\log n}$$

или формуле

$$\bar{\sigma} = \overline{\lim_{n \to \infty}} \frac{\log(|a_{n+1}| + |a_{n+2}| + \ldots)}{\log n}$$

в зависимости от того, расходится или сходится ряд $\sum |a_n|$. Это — частный случай предыдущей теоремы.

Пример. Определить σ_0 и $\bar{\sigma}$ для рядов, у которых $a_n = 1$, $(-1)^n$, $n^{-\frac{1}{2}}$, $(-1)^n n^{-\frac{1}{2}}$, a^n $(0 < a < 1)$, $\log n$, $\frac{1}{\log n}$, и для ряда, у которого $a_n = 1$, если n — точный квадрат, и $a_n = 0$ в противном случае.

9.2. Сходимость ряда и регулярность функции. Область сходимости степенного ряда совсем просто определяется аналитическим характером функции, которую он представляет: граница круга сходимости проходит через ближайшую к центру особую точку. В случае рядов Дирихле положение не столь просто. На прямой, ограничивающей полуплоскость сходимости, может не быть особых точек, и более того, $f(s)$ может оказаться целой функцией, несмотря на то, что абсцисса сходимости ряда конечна. Именно таково положение в приведенном выше примере $(1 - 2^{1-s})\zeta(s)$. Это — целая функция, так как полюс функции $\zeta(s)$ в точке $s = 1$ уничтожается нулем функции $1 - 2^{1-s}$. Однако соответствующий ряд сходится только при $\sigma > 0$.

С другой стороны, функция $\zeta(s)$ имеет особенность на границе полуплоскости сходимости ряда § 9.1 (2). Это — частный случай следующей теоремы.

Если $a_n \geqslant 0$ для всех значений n, то вещественная точка прямой, ограничивающей полуплоскость сходимости, является особой точкой функции $f(s)$.

Доказательство аналогично доказательству соответствующей теоремы о степенных рядах (§ 7.2.1).

Без ущерба для общности можно считать, что $\sigma_0 = 0$. Если $s = 0$ — регулярная точка, то ряд Тейлора функции $f(s)$ в точке $s = 1$ имеет радиус сходимости, больший чем 1. Следовательно, можно найти отрицательное значение s, при котором

$$f(s) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(s-1)^\nu}{\nu!} f^{(\nu)}(1) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(1-s)^\nu}{\nu!} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\log n)^\nu a_n}{n}.$$

Поскольку все члены этого повторного ряда положительны, порядок суммирования может быть обращен, т. е.

$$f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(1-s)^\nu (\log n)^\nu}{\nu!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n} e^{(1-s)\log n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s}.$$

Таким образом, наш ряд Дирихле сходится при некотором отрицательном значении s, а это противоречит равенству $\sigma_0 = 0$.

9.3. Асимптотическое поведение функции при $t\to\infty$. *Функция $f(s)$ ограничена во всякой полуплоскости, лежащей внутри полуплоскости абсолютной сходимости.*

Действительно, при $\sigma\geqslant\alpha>\bar\sigma$ и любом значении t

$$|f(s)|\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|a_n|}{n^{\sigma}}\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|a_n|}{n^{\alpha}}.$$

Если сходится и ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|a_n|}{n^{\bar\sigma}},$$

то можно положить $\alpha=\bar\sigma$, так что функция ограничена в полуплоскости абсолютной сходимости. Это имеет место, например, для функции $f(s)=\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^s\log^2 n}$. Но в общем случае полуплоскость абсолютной сходимости не будет областью, в которой функция $f(s)$ ограничена, даже если мы исключим окрестности особых точек, расположенных на прямой $\sigma=\bar\sigma$ (см. § 9.3.2).

Более того, в полуплоскости абсолютной сходимости поведение функции $f(\sigma+it)$ при $t\to\infty$ в общем случае довольно сложно. Рассмотрим, например, ряд с положительными вещественными коэффициентами, у которого при некотором значении σ

$$\sum_{n=3}^{\infty}a_n n^{-\sigma}<a_2 2^{-\sigma}.$$

При $t=2m\pi/\log 2$ $(m=1,\ 2,\ \ldots)$

$$\operatorname{Re}f(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n\cos(t\log n)}{n^{\sigma}}>a_1+\frac{a_2}{2^{\sigma}}-\sum_{n=3}^{\infty}\frac{a_n}{n^{\sigma}},$$

в то время как при $t=(2m+1)\pi/\log 2$ $(m=1,\ 2,\ \ldots)$

$$\operatorname{Re}f(s)<a_1-\frac{a_2}{2^{\sigma}}+\sum_{n=3}^{\infty}\frac{a_n}{n^{\sigma}}.$$

Таким образом, при $t\to\infty$ функция $\operatorname{Re}f(s)$ колеблется.

9.3.1. Дирихле принадлежит теорема: *каковы бы ни были действительные числа $c_1,\ \ldots,\ c_N$ и положительные числа q и τ, существуют такие целые числа $x_1,\ \ldots,\ x_N$ и такое число t, лежащее в интервале $\tau\leqslant t\leqslant\tau q^N$, что*

$$|tc_n-x_n|\leqslant\frac{1}{q}\qquad(n=1,\ \ldots,\ N).$$

Доказательство основывается на том, что если в m областях имеется $m+1$ точек, то по крайней мере в одной области должны лежать по крайней мере две точки.

Рассмотрим N-мерный единичный куб, одна из вершин которого находится в начале координат, с ребрами на координатных осях. Разделим каждое ребро на q равных частей. Тогда куб разобьется на q^N кубиков. Рассмотрим в кубе точки

$$(\lambda c_1-[\lambda c_1],\ \lambda c_2-[\lambda c_2],\ \ldots,\ \lambda c_N-[\lambda c_N]),$$

где λ принимает значения $0, \tau, \ldots, \tau q^N$. Число таких точек равно q^N+1, и потому по крайней мере две из них лежат в одном и том же кубике. Если эти две точки отвечают значениям $\lambda=\lambda_1$ и $\lambda=\lambda_2$ $(\lambda_1<\lambda_2)$, то существуют такие целые числа $x_1, \ldots, x_N$, что $(\lambda_2-\lambda_1)c_n-x_n\leqslant 1/q$ $(n=1, \ldots, N)$, и остается положить $t=\lambda_2-\lambda_1$.

9.3.2. Теперь мы можем доказать следующую теорему.

Пусть $f(s)=\sum a_n n^{-s}$, *причем* $a_n\geqslant 0$ *для всех значений* n, *и пусть ряд* $\sum a_n n^{-\bar\sigma}$ *расходится. Тогда функция* $f(s)$ *не ограничена при* $\sigma>\bar\sigma$, $|t|\geqslant t_0>0$.

Что на границе такой области может не быть особенностей, показывает пример функции $\zeta(s)=\sum n^{-s}$, которая регулярна при $s\neq 1$. Назначение условия $|t|\geqslant t_0$ — исключить окрестность точки $s=\bar\sigma$, где имеется особенность.

Если $\sigma>\bar\sigma$, то при любом N

$$f(s)=\sum_{n=1}^{N}\frac{a_n}{n^\sigma}e^{-it\log n}+\sum_{N+1}^{\infty}\frac{a_n}{n^s},$$

так что

$$|f(s)|\geqslant \operatorname{Re}\sum_{n=1}^{N}\frac{a_n}{n^\sigma}e^{-it\log n}-\left|\sum_{N+1}^{\infty}\frac{a_n}{n^s}\right|\geqslant\sum_{n=1}^{N}\frac{a_n}{n^\sigma}\cos(t\log n)-\sum_{N+1}^{\infty}\frac{a_n}{n^\sigma}.$$

Согласно теореме Дирихле, для заданных N и q существуют такие целые числа $x_1, \ldots, x_N$ и такое t $(\tau\leqslant t\leqslant\tau q^N)$, что

$$\left|\frac{t\log n}{2\pi}-x_n\right|\leqslant\frac{1}{q}\qquad(n=1, \ldots, N).$$

В силу этих неравенств $\cos(t\log n)\geqslant\cos(2\pi/q)$, так что

$$\sum_{n=1}^{N}\frac{a_n}{n^\sigma}\cos(t\log n)\geqslant\cos\frac{2\pi}{q}\sum_{n=1}^{N}\frac{a_n}{n^\sigma}>\cos\frac{2\pi}{q}f(\sigma)-\sum_{N+1}^{\infty}\frac{a_n}{n^\sigma}.$$

Положим $q=6$. Тогда $\cos(2\pi/q)=1/2$, и мы видим, что

$$|f(s)|>\frac{1}{2}f(\sigma)-2\sum_{N+1}^{\infty}\frac{a_n}{n^\sigma}.$$

Так как ряд $\sum a_n n^{-\bar\sigma}$ расходится, то $f(\sigma)\to\infty$ при $\sigma\to\bar\sigma$, и потому для всякого положительного H можно найти значение σ, столь близкое к $\bar\sigma$, что $f(\sigma)>4H$. После того как такое σ фиксировано, можно найти столь большое N, что $\sum\limits_{N+1}^{\infty}\frac{a_n}{n^\sigma}<\frac{1}{2}H$. Из этих неравенств следует, что $|f(s)|>H$, чем доказательство и заканчивается.

9.3.3. В полуплоскости сходимости функция может расти по неограниченно возрастающей последовательности значений t так же быстро, как некоторая степень t. Например, функция $f(s)=(1-2^{1-s})\zeta(s)$, рассмотренная в § 9.1.3, удовлетворяет при некоторых сколь угодно больших значениях t и значениях σ, заключенных между 0 и 1/2, неравенству *)

$$|f(s)|>At^{\frac{1}{2}-\sigma}.$$

С другой стороны, функция не может иметь значений, растущая быстрее любой степени t. Это показывает следующая теорема.

Для всякого значения σ, заключенного между σ_0 и σ_0+1,

$$f(s)=O(|t|^{1-(\sigma-\sigma_0)+\varepsilon})\qquad(|t|\to\infty).$$

Если $\sigma=\alpha$ — такое значение, то $f(s)=O(|t|^{1-(\alpha-\sigma_0)+\varepsilon})$ равномерно относительно σ в полуплоскости $\sigma\geqslant\alpha$.

Предположим сначала, что ряд $\sum a_n$ сходится. Тогда числа a_n и s_n ограничены. В силу формулы § 9.1.4 (1)

$$\sum_1^N\frac{a_n}{n^s}=\sum_1^M\frac{a_n}{n^s}+\sum_{M+1}^N s_n\left\{\frac{1}{n^s}-\frac{1}{(n+1)^s}\right\}-\frac{s_M}{(M+1)^s}+\frac{s_N}{(N+1)^s}.$$

Если $\sigma>0$, то при $N\to\infty$ последний член стремится к нулю, и мы получаем равенство

$$f(s)=\sum_1^M\frac{a_n}{n^s}+\sum_{M+1}^\infty s_n\left\{\frac{1}{n^s}-\frac{1}{(n+1)^s}\right\}-\frac{s_M}{(M+1)^s}.$$

Теперь оценка § 9.1.1 (2) дает при $0<\sigma<1$:

$$|f(s)|<A\sum_1^M\frac{1}{n^\sigma}+A\frac{|s|}{\sigma}\sum_{M+1}^\infty\left\{\frac{1}{n^\sigma}-\frac{1}{(n+1)^\sigma}\right\}+\frac{A}{(M+1)^\sigma}<$$
$$<AM^{1-\sigma}+A|t|M^{-\sigma}+A.$$

Полагая $M=[|t|]$, мы видим, что

$$f(s)=O(|t|^{1-\sigma})\qquad(0<\sigma<1)$$

и что $f(s)=O(|t|^{1-\alpha})$, если $0<\alpha<1$ и $\sigma\geqslant\alpha$.

---

*) См. Различные примеры, 18.

В общем случае ряд $\sum a_n n^{-s}$ сходится при $s=\sigma_0+\varepsilon$, и, перенося начало в эту точку, мы приходим к рассмотренному случаю. Этим теорема доказана.

9.4. Функции конечного порядка. Теперь мы встанем на несколько иную точку зрения. До сих пор мы считали функцию $f(s)$ определенной рядом $\sum a_n n^{-s}$, и наше внимание было ограничено полуплоскостью сходимости этого ряда. Может, однако, случиться, что функция продолжаема за пределы этой полуплоскости. Продолженная функция может оказаться регулярной в большей полуплоскости или в большей полуплоскости, из которой удалена некоторая конечная область. Мы рассмотрим отношения между функцией, определенной таким образом, и рядом Дирихле, который ее породил.

Теорема § 9.3.3 наводит на мысль, что особый интерес должны представлять функции, удовлетворяющие условию $f(s)=O(|t|^A)$, где A — некоторое положительное число. Функция, удовлетворяющая этому условию при некотором значении σ, называется функцией конечного порядка при этом значении σ. Если условие выполнено равномерно при $\sigma_1 \leqslant \sigma \leqslant \sigma_2$, то мы говорим, что функция имеет конечный порядок в этой полосе. Подобным же образом мы определяем функцию конечного порядка в полуплоскости $\sigma \geqslant \sigma_1$.

Мы видели, что всякая функция, определенная рядом Дирихле, имеет конечный порядок в некоторой полуплоскости, содержащейся в полуплоскости сходимости. Но она может иметь конечный порядок и за пределами полуплоскости сходимости. Для функции $\zeta(s)$, например, $\sigma_0=1$; между тем (§ 9.1.3),

$$\zeta(s)=(1-2^{1-s})^{-1}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^s} \qquad (\sigma>0),$$

и, следовательно (§ 9.3.3),

$$\zeta(s)=O(|t|^{1-\sigma+\varepsilon}) \qquad (0<\sigma\leqslant 1).$$

9.4.1. Ф у н к ц и я $\mu(\sigma)$. Наименьшее из чисел μ, для которых $f(s)=O(|t|^{\xi})$, если $\xi>\mu$, называется *порядком* функции $f(s)$ при взятом значении σ и обозначается через $\mu(\sigma)$.

Основные свойства функции $\mu(\sigma)$ выводятся из теоремы Фрагмена — Линделефа, доказанной в § 5.6.5. Допустим, что при $\sigma_1 \leqslant \sigma \leqslant \sigma_2$, $t \geqslant t_0$ функция $f(s)$ регулярна и имеет конечный порядок, и положим $\mu(\sigma_1)=\mu_1$, $\mu(\sigma_2)=\mu_2$. Тогда для всякого положительного ε

$$f(\sigma_1+it)=O(t^{\mu_1+\varepsilon}), \quad f(\sigma_2+it)=O(t^{\mu_2+\varepsilon}).$$

Применяя упомянутую теорему, мы видим, что

$$f(s)=O(t^{k(\sigma)}) \qquad (\sigma_1\leqslant\sigma\leqslant\sigma_2),$$

где $k(\sigma)=\frac{(\sigma_2-\sigma)(\mu_1+\varepsilon)+(\sigma-\sigma_1)(\mu_2+\varepsilon)}{\sigma_2-\sigma_1}$. Поскольку ε произвольно, из этого следует, что

$$\mu(\sigma)\leqslant\frac{(\sigma_2-\sigma)\mu_1+(\sigma-\sigma_1)\mu_2}{\sigma_2-\sigma_1}\qquad(\sigma_1\leqslant\sigma\leqslant\sigma_2).\tag{1}$$

Таким образом, *функция* $\mu(\sigma)$ *выпукла*.

В частности, *функция* $\mu(\sigma)$ *непрерывна* (§ 5.3.1).

Далее, $\mu(\sigma)=0$ при достаточно больших значениях σ. Действительно, так как функция $f(s)$ ограничена при $\sigma>\bar{\sigma}$, то $\mu(\sigma)\leqslant 0$ при $\sigma>\bar{\sigma}$. С другой стороны, если a_m — первый отличный от нуля коэффициент ее ряда Дирихле, то

$$|f(s)|\geqslant\frac{|a_m|}{m^\sigma}-\sum_{n=m+1}^{\infty}\frac{|a_n|}{n^\sigma},$$

правая же часть при достаточно больших значениях σ положительна. Это значит, что при достаточно больших σ модуль $|f(s)|$, рассматриваемый как функция от t, имеет положительную нижнюю грань. Следовательно, если σ достаточно велико, то $\mu(\sigma)\geqslant 0$ и, таким образом, $\mu(\sigma)=0$.

Допустим теперь, что функция $\mu(\sigma)$ отрицательна при некотором значении $\sigma=\sigma_1$ в области, где $f(s)$ есть функция конечного порядка. Взяв в качестве σ_2 значение σ, при котором $\mu_2=0$, мы заключаем из неравенства (1), что $\mu(\sigma)<0$ при $\sigma_1<\sigma<\sigma_2$. Между тем, мы знаем, что это невозможно, если σ_2 достаточно велико. *Следовательно, функция* $\mu(\sigma)$ *нигде не отрицательна.*

В частности, $\mu(\sigma)=0$ при $\sigma>\bar{\sigma}$. Действительно, мы уже показали, что $\mu(\sigma)\leqslant 0$ при $\sigma>\bar{\sigma}$.

Пусть, наконец, $\sigma_2>\bar{\sigma}$, так что $\mu_2=0$. Если $\mu_1>0$, то, в силу неравенства (1),

$$\mu(\sigma)\leqslant\frac{\sigma_2-\sigma}{\sigma_2-\sigma_1}\mu_1<\mu_1\qquad(\sigma>\sigma_1).$$

Следовательно, $\mu(\sigma)$ *есть монотонно убывающая функция от* σ.

9.4.2. Формула Перрона. В дальнейшем нам потребуется одно интегральное представление сумм s_n. Оно является частным случаем следующей теоремы.

Если x — нецелое число и c — любое положительное число, то при $\sigma>\sigma_0-c$

$$\sum_{n<x}\frac{a_n}{n^s}=\frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty}f(s+w)\frac{x^w}{w}\,dw.\tag{1}$$

Пусть сначала $\sigma > \bar{\sigma} - c$. Тогда ряд для $f(s+w)$ абсолютно и равномерно сходится и

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{c-iU}^{c+iT} f(s+w)\frac{x^w}{w}\,dw = \frac{1}{2\pi i}\int_{c-iU}^{c+iT}\sum_{1}^{\infty}\frac{a_n}{n^{s+w}}\frac{x^w}{w}\,dw =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\sum_{1}^{\infty}\frac{a_n}{n^s}\int_{c-iU}^{c+iT}\left(\frac{x}{n}\right)^w\frac{dw}{w}. \quad (2)$$

Но, согласно § 3.1.2.6,

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty}\left(\frac{x}{n}\right)^w\frac{dw}{w} = \begin{cases}1 & (n < x),\\ 0 & (n > x).\end{cases}$$

Поэтому достаточно доказать, что в формуле (2) можно вместо U и T написать ∞, т. е. что

$$\lim_{T\to\infty}\sum_{1}^{\infty}\frac{a_n}{n^s}\int_{c+iT}^{c+i\infty}\left(\frac{x}{n}\right)^w\frac{dw}{w} = 0$$

и что то же верно с $-i$ вместо i.

При фиксированном x

$$\int_{c+iT}^{c+i\infty}\left(\frac{x}{n}\right)^w\frac{dw}{w} = -\left(\frac{x}{n}\right)^{c+iT}\frac{1}{\log\frac{x}{n}\,(c+iT)} + \frac{1}{\log\frac{x}{n}}\int_{c+iT}^{c+i\infty}\left(\frac{x}{n}\right)^w\frac{dw}{w^2} =$$

$$= O\left(\frac{1}{n^cT}\right) + O\left(\frac{1}{n^c}\int_T^{\infty}\frac{dv}{c^2+v^2}\right) = O\left(\frac{1}{n^cT}\right).$$

Следовательно,

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n^s}\int_{c+iT}^{c+i\infty}\left(\frac{x}{n}\right)^w\frac{dw}{w} = O\left(\frac{1}{T}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|a_n|}{n^{\sigma+c}}\right),$$

чем для случая $\sigma > \bar{\sigma} - c$ теорема доказана.

Пусть теперь $\sigma_0 - c < \sigma \leqslant \bar{\sigma} - c$. Предположим, что $\alpha > \bar{\sigma} - \sigma$, и рассмотрим интеграл $\int f(s+w)\frac{x^w}{w}\,dw$, взятый по контуру прямоугольника, образованного прямыми $\mathrm{Re}\,w = c$, $\mathrm{Re}\,w = \alpha$, $\mathrm{Im}\,w = -U$, $\mathrm{Im}\,w = T$. Согласно теореме § 9.3.3, подынтегральная функция есть $O(t^{-(\sigma+c-\sigma_0)+\varepsilon})$, так что интегралы, взятые по горизонтальным сторонам, стремятся к нулю при $U\to\infty$, $T\to\infty$. Так как подынтегральная функция регулярна в прямоугольнике, то, в силу теоремы Коши,

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} f(s+w)\frac{x^w}{w}\,dw = \frac{1}{2\pi i}\int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty} f(s+w)\frac{x^w}{w}\,dw.$$

Но так как $\sigma > \bar{\sigma} - \alpha$, то, согласно уже доказанному, правая часть равна $\sum\limits_{n<x} a_n n^{-s}$. Этим доказательство доведено до конца.

В частности, при $s = 0$ мы получаем равенство

$$\sum_{n<x} a_n = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{c-i\infty}^{c+i\infty} f(w) \frac{x^w}{w}\, dw \qquad (c > \sigma_0). \tag{3}$$

Это и есть формула Перрона.

9.4.3. Имеется несколько других формул того же типа, что и формула Перрона. Одна из них, нужная для дальнейшего, имеет вид

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s} e^{-(n\delta)^{\lambda}} = \frac{1}{2\pi i\lambda} \int\limits_{c-i\infty}^{c+i\infty} \Gamma\left(\frac{w}{\lambda}\right) f(s+w)\, \delta^{-w}\, dw,$$

где $\delta > 0$, $\lambda > 0$ и $c > 0$, $c > \bar{\sigma} - \sigma$. Чтобы доказать ее, представим правую часть как

$$\frac{1}{2\pi i\lambda} \int\limits_{c-i\infty}^{c+i\infty} \Gamma\left(\frac{w}{\lambda}\right) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^{s+w}}\, \delta^{-w}\, dw$$

и обратим, пользуясь абсолютной сходимостью, порядок суммирования и интегрирования. Мы получим

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s} \frac{1}{2\pi i\lambda} \int\limits_{c-i\infty}^{c+i\infty} \Gamma\left(\frac{w}{\lambda}\right) (n\delta)^{-w}\, dw,$$

и остается применить формулу примера (IV) § 4.4.2.

9.4.4. Формула § 9.4.2 позволяет получить результат, противоположный по своему характеру предыдущим: зная порядок функции, мы можем сделать заключение о сходимости ряда.

Ряд Дирихле заведомо сходится в полуплоскости, где функция $f(s)$ регулярна и $\mu(\sigma) = 0$.

Пусть s — внутренняя точка этой полуплоскости и δ — положительное число, столь малое, что точка $\sigma - \delta$ лежит в той же полуплоскости. Пусть $c > \bar{\sigma} - \sigma + 1$ (так что можно воспользоваться более простым случаем теоремы § 9.4.2). Мы деформируем контур формулы § 9.4.2 (1) в прямоугольный контур $c - i\infty$, $c - iT$, $-\delta - iT$, $-\delta + iT$, $c + iT$, $c + i\infty$ с $T > |t|$. При этом мы проходим через полюс, расположенный в точке $w = 0$, с вычетом $f(s)$. Следовательно,

$$\sum_{n<x} \frac{a_n}{n^s} - f(s) =$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \left\{ \int\limits_{c-i\infty}^{c-iT} + \int\limits_{c-iT}^{-\delta-iT} + \int\limits_{-\delta-iT}^{-\delta+iT} + \int\limits_{-\delta+iT}^{c+iT} + \int\limits_{c+iT}^{c+i\infty} \right\} f(s+w) \frac{x^w}{w}\, dw.$$

Так как мы находимся в полуплоскости, где $\mu(\sigma)=0$, то $f(s)=O(|t|^{\varepsilon})$ при любом положительном ε. Следовательно,

$$\int_{-\delta-iT}^{-\delta+iT} f(s+w)\frac{x^w}{w}\,dw=\int_{-T}^{T} O\{(|t|+|v|)^{\varepsilon}\}\frac{x^{-\delta}\,dv}{\sqrt{\delta^2+v^2}}=O(x^{-\delta}T^{\varepsilon})$$

и

$$\int_{-\delta+iT}^{c+iT} f(s+w)\frac{x^w}{w}\,dw=\int_{-\delta}^{c} O(T^{\varepsilon})\frac{x^c}{T}\,du=O(x^cT^{\varepsilon-1}).$$

Подобная же формула верна для интервала интегрирования $(c-iT,\ -\delta-iT)$. Наконец (ср. § 9.4.2),

$$\int_{c+iT}^{c+i\infty} f(s+w)\frac{x^w}{w}\,dw=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n^s}\int_{c+iT}^{c+i\infty}\left(\frac{x}{n}\right)^w\frac{dw}{w}=O\left(\frac{x^c}{T}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|a_n|}{n^{\sigma+c}\left|\log\frac{x}{n}\right|}\right).$$

Без ущерба для общности можно предположить, что x есть половина нечетного целого числа. Тогда

$$\left|\log\frac{x}{n}\right|\geqslant\log\frac{n+(1/2)}{n}>\frac{A}{n}.$$

Эта оценка вместе с неравенством $\sigma+c-1>\bar{\sigma}$ показывает, что правая часть предыдущей формулы есть

$$O\left(\frac{x^c}{T}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|a_n|}{n^{\sigma+c-1}}\right)=O\left(\frac{x^c}{T}\right).$$

Подобная же формула верна для интервала интегрирования $(c-i\infty,\ c-iT)$, и, таким образом,

$$\sum_{n<x}a_nn^{-s}-f(s)=O(x^{-\delta}T^{\varepsilon})+O(x^cT^{\varepsilon-1}).$$

Положим $T=x^{2c}$. Тогда правая часть превратится в

$$O(x^{-\delta+2c\varepsilon})+O(x^{-c+2c\varepsilon})$$

и, следовательно, будет стремиться к нулю при $x\to\infty$, если $\varepsilon<\frac{\delta}{2c}$ и $\varepsilon<\frac{1}{2}$. Этим теорема доказана *).

9.4.5. Пусть σ_{ε} — абсцисса границы полуплоскости, в которой функция $f(s)$ регулярна и представляет собою $O(t^{\varepsilon})$. Мы доказали, что

$$\sigma_0\leqslant\sigma_{\varepsilon}\leqslant\bar{\sigma}.$$

*) Более общая теорема этого типа: Landau, *Handbuch*, § 238, Satz 57.

Нелегко дать пример, в котором все эти числа были бы различными. Есть основания думать, что для функции $(1-2^{1-s})\zeta(s)$, которая уже не раз упоминалась, $\sigma_{\varepsilon}=1/2$, так что указанные числа равны соответственно 0, 1/2 и 1. Но это не доказано.

9.5. Формула для среднего значения. *Если $\sigma>\bar{\sigma}$, то*

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}|f(s)|^2\,dt=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|a_n|^2}{n^{2\sigma}}.$$

Действительно,

$$|f(s)|^2=\sum_{m=1}^{\infty}\frac{a_m}{m^{\sigma+it}}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\bar{a}_n}{n^{\sigma-it}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|a_n|^2}{n^{2\sigma}}+\sum_{m\neq n}\sum\frac{a_m\bar{a}_n}{m^{\sigma}n^{\sigma}}\left(\frac{n}{m}\right)^{it},$$

причем ряды сходятся абсолютно и равномерно в каждом конечном интервале изменения t. Почленное интегрирование дает:

$$\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}|f(s)|^2\,dt=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|a_n|^2}{n^{2\sigma}}+\sum_{m\neq n}\sum\frac{a_m\bar{a}_n}{m^{\sigma}n^{\sigma}}\,\frac{2\sin\left(T\log\frac{n}{m}\right)}{2T\log\frac{n}{m}}.$$

Множитель, зависящий от T, ограничен для всех значений T, m, n, так что двойной ряд сходится равномерно относительно T. Так как при $T\to\infty$ каждый член этого ряда стремится к нулю, то и его сумма стремится к нулю, что и доказывает формулу.

9.5.1. Полуплоскость со средними значениями. Обозначим через σ_m наименьшее из таких чисел σ', что при $\sigma>\sigma'$ функция $f(s)$ регулярна и имеет конечный порядок и для ее среднего значения верна формула предыдущего параграфа. Мы называем полуплоскость $\sigma>\sigma_m$ полуплоскостью со средними значениями. Это название оправдывается следующей теоремой *):

Пусть при $\sigma\geqslant\alpha$ функция $f(s)$ регулярна и имеет конечный порядок. Если осреднение

$$\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}|f(\alpha+it)|^2\,dt \tag{1}$$

остается ограниченным при $T\to\infty$, то при $\sigma>\alpha$

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}|f(\sigma+it)|^2\,dt=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|a_n|^2}{n^{2\sigma}} \tag{2}$$

равномерно в каждой полосе вида $\alpha<\sigma_1\leqslant\sigma\leqslant\sigma_2$.

*) Carlson [1]. Эта теорема аналогична теореме Парсеваля о рядах Фурье (§ 13.5.4).

Отправляясь от формулы § 9.4.3, переместим прямую интегрирования в положение $\operatorname{Re}(w)=\alpha-\sigma$ с $\sigma>\alpha$. Мы пройдем через полюс, находящийся в точке $w=0$, с вычетом $\lambda f(s)$, и притом только через этот полюс, если $\lambda>\sigma-\alpha$. Следовательно,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s} e^{-(n\delta)^\lambda}-f(s)=\frac{1}{2\pi i\lambda}\int_{\alpha-\sigma-i\infty}^{\alpha-\sigma+i\infty} \Gamma\left(\frac{w}{\lambda}\right) f(s+w)\,\delta^{-w}\,dw=$$

$$=O\left\{\delta^{\sigma-\alpha}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-A|v|}\,|f\{\alpha+i(t+v)\}|\,dv\right\}$$

(мы воспользовались асимптотической формулой для гамма-функции — см. § 4.4.2, пример (I)). Но при $|t|<T$

$$\int_{2T}^{\infty} e^{-Av}\,|f\{\alpha+i(t+v)\}|\,dv=O\left(\int_{2T}^{\infty} e^{-Av}v^A\,dv\right)=O(e^{-AT}),$$

и подобное же равенство верно для интеграла, взятого по интервалу $(-\infty,\ -2T)$. Далее, в силу неравенства Шварца (см. ниже § 12.4.1),

$$\left\{\int_{-2T}^{2T} e^{-A|v|}\,|f\{\alpha+i(t+v)\}|\,dv\right\}^2\leqslant$$

$$\leqslant\int_{-2T}^{2T} e^{-A|v|}\,|f\{\alpha+i(t+v)\}|^2\,dv\int_{-2T}^{2T} e^{-A|v|}\,dv<$$

$$<A\int_{-2T}^{2T} e^{-A|v|}\,|f\{\alpha+i(t+v)\}|^2\,dv.$$

Следовательно,

$$\left|\sum \frac{a_n}{n^s} e^{-(n\delta)^\lambda}-f(s)\right|^2<$$

$$<A\delta^{2\sigma-2\alpha}\int_{-2T}^{2T} e^{-A|v|}\,|f\{\alpha+i(t+v)\}|^2\,dv+A\delta^{2\sigma-2\alpha}e^{-AT},$$

и, интегрируя по t в интервале $(-T,\ T)$, мы получаем оценку

$$\int_{-T}^{T}\left|\sum \frac{a_n}{n^s} e^{-(n\delta)^\lambda}-f(s)\right|^2 dt<$$

$$<A\delta^{2\sigma-2\alpha}\int_{-2T}^{2T} e^{-A|v|}\,dv\int_{-T}^{T} |f\{\alpha+i(t+v)\}|^2\,dt+O(\delta^{2\sigma-2\alpha}).$$

Но

$$\int_{-T}^{T} |f\{\alpha+i(t+v)\}|^2\,dt=\int_{-T+v}^{T+v} |f(\alpha+it)|^2\,dt=O(T)$$

равномерно при $|v| < 2T$. Следовательно,

$$\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}\left|\sum \frac{a_n}{n^s}e^{-(n\delta)^\lambda} - f(s)\right|^2 dt = O(\delta^{2\sigma-2\alpha})$$

равномерно относительно T. Следовательно *),

$$\left\{\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}\left|\sum \frac{a_n}{n^s}e^{-(n\delta)^\lambda}\right|^2 dt\right\}^{1/2} - \left\{\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}|f(s)|^2 dt\right\}^{1/2} = O(\delta^{\sigma-\alpha}) \quad (3)$$

равномерно относительно T.

Если $\delta > 0$, то ряд $\sum a_n n^{-s} e^{-(n\delta)^\lambda}$ абсолютно сходится, так что, согласно § 9.5,

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}\left|\sum \frac{a_n}{n^s}e^{-(n\delta)^\lambda}\right|^2 dt = \sum \frac{|a_n|^2}{n^{2\sigma}}e^{-2(n\delta)^\lambda}, \quad (4)$$

Полагая $\delta = 1$, мы заключаем из формул (3) и (4), что

$$\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}|f(s)|^2 dt < A,$$

обращаясь же снова к формуле (3), видим, что при любом положительном δ

$$\sum \frac{|a_n|^2}{n^{2\sigma}}e^{-2(n\delta)^\lambda} < A.$$

Поскольку δ произвольно мало, из этого следует, что ряд $\sum |a_n|^2/n^{2\sigma}$ сходится и

$$\lim_{\delta\to 0}\sum \frac{|a_n|^2}{n^{2\sigma}}e^{-2(n\delta)^\lambda} = \sum \frac{|a_n|^2}{n^{2\sigma}}.$$

Каково бы ни было ε, существует такое δ, что абсолютное значение левой части равенства (3) меньше ε для всех значений T и что

$$\left|\left\{\sum \frac{|a_n|^2}{n^{2\sigma}}e^{-2(n\delta)^\lambda}\right\}^{1/2} - \left\{\sum \frac{|a_n|^2}{n^{2\sigma}}\right\}^{1/2}\right| < \varepsilon.$$

Если такое δ фиксировано, то мы можем, согласно формуле (4), найти столь большое T_0, что при $T > T_0$

$$\left|\left\{\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}\left|\sum \frac{a_n}{n^s}e^{-(n\delta)^\lambda}\right|^2 dt\right\}^{1/2} - \left\{\sum \frac{|a_n|^2}{n^{2\sigma}}e^{-2(n\delta)^\lambda}\right\}^{1/2}\right| < \varepsilon.$$

*) В силу неравенства Минковского (§ 12.4.3), которое применяется здесь, однако, лишь при $p=2$ и лишь к непрерывным функциям.

Если T_0 выбрано таким образом, то при $T > T_0$

$$\left| \left\{ \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} |f(s)|^2 \, dt \right\}^{1/2} - \left\{ \sum \frac{|a_n|^2}{n^{2\sigma}} \right\}^{1/2} \right| < 3\varepsilon,$$

что и завершает доказательство.

9.5.2. *Если при $\sigma = \alpha$ функция $|f(s)|^2$ имеет среднее значение, то при $\sigma > \alpha + (1/2)$ ряд Дирихле абсолютно сходится. В наших обозначениях:*

$$\bar{\sigma} \leqslant \sigma_m + \frac{1}{2}.$$

Из предыдущей теоремы следует, что ряд $\sum \frac{|a_n|^2}{n^{2\alpha+2\varepsilon}}$ сходится при любом положительном ε. Но

$$\left\{ \sum_{n=1}^{N} \left| \frac{a_n}{n^s} \right| \right\}^2 \leqslant \sum_{n=1}^{N} \frac{|a_n|^2}{n^{2\alpha+2\varepsilon}} \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^{2\sigma-2\alpha-2\varepsilon}},$$

и ясно, что правая часть ограничена, если $\sigma - \alpha > 1/2$ и значение ε достаточно мало *).

9.5.3. *Если при $\sigma > \alpha$ функция $f(s)$ ограничена, то ряд $\sum |a_n|^2 n^{-2\alpha}$ сходится; если $|f(s)| \leqslant M$, то*

$$\sum \frac{|a_n|^2}{n^{2\alpha}} \leqslant M^2.$$

Это также следует из теоремы § 9.5.1. Действительно, при $\sigma > \alpha$

$$\sum \frac{|a_n|^2}{n^{2\sigma}} = \lim \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} |f(s)|^2 \, dt \leqslant M^2,$$

и нужно лишь перейти к пределу при $\sigma \to \alpha$.

В случае ограниченной функции $f(s)$ рассмотрения § 9.5.1 могут быть, конечно, значительно упрощены.

9.5.4. Другое следствие изложенных теорем состоит в том, что ширина полосы, в которой функция $f(s)$ ограничена, но ряд Дирихле не является абсолютно сходящимся, не может быть больше, чем 1/2.

9.5.5. *Ряд Дирихле заведомо сходится в полуплоскости, где функция $f(s)$ регулярна и имеет конечный порядок и где существует предел*

$$\lim_{T \to \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} |f(s)|^2 \, dt.$$

В наших обозначениях: $\sigma_0 \leqslant \sigma_m$.

---

*) Этот результат был другим путем получен Hardy [10].

Сначала мы должны вывести из предыдущего оценку порядка функции $f(s)$.

$f(s)=O(|t|^{1/2})$ *равномерно во всякой полосе* $\alpha\leqslant\sigma\leqslant\beta$, *для которой* $\alpha>\sigma_m$.

Пусть s — точка полосы (α, β) и R — постоянная, которая меньше, чем 1 и чем $\alpha-\sigma_m$. При $0<\rho<R$

$$f(s)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|z-s|=\rho}\frac{f(z)}{z-s}\,dz=\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}f(s+\rho e^{i\varphi})\,d\varphi.$$

Следовательно (неравенство Шварца),

$$|f(s)|^2\leqslant\frac{1}{4\pi^2}\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^{2\pi}|f(s+\rho e^{i\varphi})|^2\,d\varphi=\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}|f(s+\rho e^{i\varphi})|^2\,d\varphi.$$

Умножая это неравенство на ρ и интегрируя по ρ от 0 до R, мы получаем неравенства

$$\frac{1}{2}R^2|f(s)|^2\leqslant\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^R\int\limits_0^{2\pi}|f(s+\rho e^{i\varphi})|^2\rho\,d\rho\,d\varphi<$$

$$<\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\sigma-R}^{\sigma+R}\int\limits_{t-R}^{t+R}|f(x+iy)|^2\,dx\,dy<\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\sigma-R}^{\sigma+R}dx\int\limits_{-|t|-1}^{|t|+1}|f(x+iy)|^2\,dy.$$

Но $\int\limits_{-|t|-1}^{|t|+1}|f(x+iy)|^2\,dy=O(|t|)$ равномерно относительно x. Следовательно,

$$\frac{1}{2}R^2|f(s)|^2=O(|t|),$$

что и утверждалось.

Чтобы доказать теорему, мы воспользуемся тем же контурным интегралом, что и в § 9.4.4, только теперь точки s и $\sigma-\delta$ будут находиться в полуплоскости $\sigma>\sigma_m$. Мы можем написать:

$$\left|\int\limits_{-\delta-iT}^{-\delta+iT}f(s+w)\frac{x^w}{w}\,dw\right|\leqslant x^{-\delta}\left\{\int\limits_{-T}^{T}\frac{|f(s+w)|^2}{\sqrt{\delta^2+v^2}}\,dv\int\limits_{-T}^{T}\frac{dv}{\sqrt{\delta^2+v^2}}\right\}^{1/2}.$$

Положим

$$\varphi(v)=\int\limits_0^v|f(\sigma+u+iy)|^2\,dy.$$

Очевидно, $\varphi(v) = O(v)$, так что

$$\int_0^T \frac{|f|^2}{\sqrt{\delta^2+v^2}}\,dv = \frac{\varphi(T)}{\sqrt{\delta^2+T^2}} + \int_0^T \frac{v\varphi(v)}{(\delta^2+v^2)^{\frac{3}{2}}}\,dv =$$

$$= O(1) + \int_{-T}^{T} \frac{O(v^2)}{(\delta^2+v^2)^{\frac{3}{2}}}\,dv = O(\log T).$$

Подобным же образом интеграл, взятый по интервалу $(-T,\ 0)$, есть $O(\log T)$. Следовательно,

$$\int_{-\delta-iT}^{-\delta+iT} f(s+w)\frac{x^w}{w}\,dw = O(x^{-\delta}\log T).$$

Далее, согласно предыдущей оценке,

$$\int_{-\delta+iT}^{c+iT} f(s+w)\frac{x^w}{w}\,dw = \int_{-\delta}^{c} O\left(\sqrt{T}\right)\frac{x^c}{T}\,du = O(x^cT^{-1/2}),$$

и подобное же равенство имеет место для интеграла, взятого по интервалу $(c-iT,\ -\delta-iT)$. Остающиеся интегралы представляют собой $O(x^cT^{-1})$ (ср. § 9.4.4). Следовательно,

$$\sum_{n<x}\frac{a_n}{n^s} - f(s) = O(x^{-\delta}\log T) + O(x^cT^{-1/2}),$$

и если положить $T = x^{2c+1}$, то правая часть будет стремиться к нулю при $x\to\infty$. Этим теорема доказана.

9.6. Теорема единственности. Нули. Функция $f(s)$ может быть представлена рядом Дирихле только одним способом. Точнее: *если в некоторой области значений* s

$$\sum_1^\infty \frac{a_n}{n^s} = \sum_1^\infty \frac{b_n}{n^s},$$

то $a_n = b_n$ *для всех значений* n.

Действительно, ряд $\sum(a_n-b_n)n^{-s}$ равномерно сходится в некоторой области, содержащей часть указанной области и неограниченно простирающейся вправо. Его сумма аналитична во всей этой области и потому всюду равна в ней нулю. Но если m — первое из значений n, для которых $a_n \neq b_n$, то

$$\left|\sum(a_n-b_n)n^{-s}\right| \geqslant |a_m-b_m|\,m^{-\sigma} - \sum_{m+1}^\infty |a_n-b_n|\,n^{-\sigma},$$

а эта разность положительна, если σ достаточно велико (ср. § 9.4.1). Это противоречие доказывает теорему.

9.6.1. Нули функции $f(s)$. Предыдущее рассуждение показывает, что *всегда существует полуплоскость, в которой функция $f(s)$ не имеет нулей.*

Проблема распределения нулей заданной функции $f(s)$ обычно бывает очень трудной, и для разных функций результаты могут быть весьма различны. Например, имеется гипотеза, что все невещественные нули функции

$$\frac{1}{1^s}-\frac{1}{2^s}+\frac{1}{3^s}-\ldots=(1-2^{1-s})\,\zeta(s)$$

лежат на прямой $\sigma=1$ (нули функции $1-2^{1-s}$) и прямой $\sigma=1/_2$ (нули функции $\zeta(s)$). Нули на прямой $\sigma=1$ определить легко, но то, что относится к нулям функции $\zeta(s)$, не доказано.

С другой стороны, известно, что функция $\zeta'(s)/\zeta(s)$, которая представляется при $\sigma>1$ абсолютно сходящимся рядом Дирихле, не имеет нулей в некоторой полуплоскости $\sigma>E$ с $E>1$ и имеет нули на прямых $\sigma=\sigma'$, расположенных всюду плотно в полосе $1<\sigma<E$.

Интересно сравнить эту общую проблему с ее частным случаем, в котором $a_n=0$, если n — не степень двойки. В этом частном случае функция имеет вид

$$f(s)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{b_n}{2^{ns}}=\sum_{n=0}^{\infty}b_nz^n,$$

где $z=2^{-s}$, так что ряд может рассматриваться не только как ряд Дирихле, но и как степенной ряд. Каждому нулю z_ν степенного ряда отвечает последовательность нулей

$$s_{\mu,\nu}=-\frac{\log z_\nu+2\mu\pi i}{\log 2}\qquad(\mu=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \ldots)$$

функции $f(s)$. Если z_0 — нуль с наименьшим положительным модулем, то функция $f(s)$ не имеет нулей справа от прямой

$$\sigma=\frac{\log(1/|z_0|)}{\log 2},$$

в то время как на этой прямой имеется бесконечно много нулей.

9.6.2. Функция $N(\sigma,T)$. Пусть t_0 — такое положительное число, что функция $f(s)$ регулярна при $t\geqslant t_0$ и достаточно больших значениях σ. Обозначим через $N(\sigma,T)$ число нулей $\sigma'+it'$ функции $f(s)$, для которых $\sigma'>\sigma$, $t_0<t'<T$. Мы докажем следующие теоремы.

9.6.2.1. *Если при $\sigma\geqslant\alpha$ функция $f(s)$ имеет конечный порядок, то*

$$N(\sigma,T)=O(T\log T)\qquad(\sigma>\alpha).$$

Существует столь большое β, что функция $|f(s)|$ заключена на прямой $\sigma=\beta$ между двумя положительными пределами. Пусть $0<\delta<\frac{1}{2}(\beta-\alpha)$. Применим теорему Иенсена к кругу с центром $\beta+in\delta$ и радиусом $\beta-\alpha$. Если $n(r)$ — число нулей функции $f(s)$ в круге $|s-(\beta+in\delta)|\leqslant r$, то согласно этой теореме

$$\int_0^{\beta-\alpha}\frac{n(r)}{r}\,dr=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log|f\{\beta+in\delta+(\beta-\alpha)e^{i\theta}\}|\,d\theta-\log|f(\beta+in\delta)|.$$

Но $f(s)=O(t^A)$ при $\sigma\geqslant\alpha$, так что

$$\log|f\{\beta+in\delta+(\beta-\alpha)e^{i\theta}\}|=\log|O\{(n\delta+\beta-\alpha)^A\}|<K\log n,$$

где K зависит только от α, β, $\delta\ldots$ А так как

$$\log|f(\beta+in\delta)|=O(1),$$

то

$$\int_0^{\beta-\alpha}\frac{n(r)}{r}\,dr<K\log n.$$

С другой стороны,

$$\int_0^{\beta-\alpha}\frac{n(r)}{r}\,dr\geqslant n(\beta-\alpha-\delta)\int_{\beta-\alpha-\delta}^{\beta-\alpha}\frac{dr}{r}>Kn(\beta-\alpha-\delta),$$

а $n(\beta-\alpha-\delta)$ при достаточно малом δ больше числа нулей в полуполосе $\sigma\geqslant\beta-\alpha-2\delta$, $\left(n-\frac{1}{2}\right)\delta\leqslant t<\left(n+\frac{1}{2}\right)\delta$. Обозначив это число через ν_n, мы можем поэтому написать $\nu_n<K\log n$. Следовательно,

$$N(\beta-\alpha-2\delta,\ T)\leqslant\sum_{\frac{t_0}{\delta}<n<\frac{T}{\delta}}\nu_n<KT\log T,$$

что и завершает доказательство.

9.6.2.2. *Если функция $f(s)$ ограничена при $\sigma\geqslant\alpha$, то*

$$N(\sigma,\ T)=O(T)\qquad(\sigma>\alpha).$$

Доказательство аналогично предыдущему, но здесь множитель $\log T$, очевидно, не появляется. Пример, приведенный в конце § 9.6.1, показывает, что случай $N(\sigma,\ T)>AT$ возможен.

9.6.2.3. *Если при $\sigma=\alpha$ функция $f(s)$ имеет среднее значение, а при $\sigma\geqslant\alpha$ — конечный порядок, то*

$$N(\sigma,\ T)=O(T)\qquad(\sigma>\alpha).$$

Мы воспользуемся следующей леммой.

Если функция $\varphi(t)$ *положительна и непрерывна в интервале* (a, b), *то*

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b \log\varphi(t)\,dt \leqslant \log\left\{\frac{1}{b-a}\int_a^b \varphi(t)\,dt\right\}.$$

Разобьем интервал (a, b) на n равных частей точками $a = x_0, x_1, \ldots, x_n = b$. Так как

$$\{\varphi(x_1)\varphi(x_2)\ldots\varphi(x_n)\}^{1/n} \leqslant \frac{1}{n}\{\varphi(x_1)+\varphi(x_2)+\ldots+\varphi(x_n)\},$$

то $\frac{1}{n}\sum\log\varphi(x_\nu) \leqslant \log\left\{\frac{1}{n}\sum\varphi(x_\nu)\right\}$, т. е.

$$\frac{1}{b-a}\sum(x_\nu - x_{\nu-1})\log\varphi(x_\nu) \leqslant \log\left\{\frac{1}{b-a}\sum(x_\nu - x_{\nu-1})\varphi(x_\nu)\right\}.$$

Переходя к пределу при $n\to\infty$, мы и получаем доказываемое неравенство.

Обратимся к теореме. Она может быть выведена из теоремы Иенсена посредством уточнения рассуждений § 9.6.2.1, но удобнее воспользоваться теоремой § 3.8. Применяя последнюю к функции $f(s)$ и прямоугольнику $(\alpha, \beta; t_0, T)$, мы видим после отделения вещественных частей, что

$$2\pi\int_\alpha^\beta N(\sigma, T)\,d\sigma = \int_{t_0}^T \log|f(\alpha+it)|\,dt - \int_{t_0}^T \log|f(\beta+it)|\,dt + \\ + \int_\alpha^\beta \arg f(\sigma+iT)\,d\sigma - \int_\alpha^\beta \arg f(\sigma+it_0)\,d\sigma. \qquad (1)$$

Применим к первому члену правой части равенства (1) нашу лемму. Мы можем написать:

$$\frac{1}{T-t_0}\int_{t_0}^T \log|f(\alpha+it)|\,dt = \frac{1}{2}\frac{1}{T-t_0}\int_{t_0}^T \log|f(\alpha+it)|^2\,dt \leqslant \\ \leqslant \frac{1}{2}\log\left\{\frac{1}{T-t_0}\int_{t_0}^T |f(\alpha+it)|^2\,dt\right\} < A.$$

Таким образом, первый член справа меньше AT.

Далее, функция $\log|f(\beta+it)|$ ограничена, если β достаточно велико (ср. § 9.6.2.1). Следовательно, при надлежащем выборе β второй член правой части равенства (1) также есть $O(T)$.

Переходя к третьему члену, предположим сначала, что при вещественных значениях s функция $f(s)$ вещественна. Возьмем значение β столь большим, чтобы при $\sigma=\beta$ функция $\operatorname{Re} f(s)$ не обращалась в нуль. Тогда (ср. § 3.5.6) функция $\arg f(s)$ будет ограничена на прямой $\sigma=\beta$; что касается прямой $t=T$, то на ней $\arg f(s)=O(q)$, где q — число нулей функции $\operatorname{Re} f(s)$ при $t=T$, $\alpha\leqslant\sigma<\beta$. Но при $t=T$

$$\operatorname{Re} f(s)=\frac{1}{2}\{f(\sigma+iT)+f(\sigma-iT)\}=g(\sigma),$$

так что q есть число нулей функции $g(z)$, лежащих в интервале $\alpha\leqslant z\leqslant\beta$ вещественной оси плоскости z. Поскольку $g(z)=O(T^A)$, из теоремы Иенсена следует, что $q=O(\log T)$ (ср. § 9.6.2.1). Следовательно, третий член правой части равенства (1) есть $O(\log T)$.

Если функция $f(s)$ не вещественна на вещественной оси, то вместо нее мы можем рассмотреть функцию

$$f_1(s)=\sum\frac{a_n}{n^s}\sum\frac{\bar a_n}{n^s}=f(s)\bar f(s),$$

к которой предыдущее доказательство применимо.

Наконец, последний член правой части равенства (1) есть постоянная. Таким образом,

$$\int_\alpha^\beta N(\sigma, T)\,d\sigma=O(T).$$

Но

$$\int_a^\beta N(\sigma, T)\,d\sigma\geqslant\int_\alpha^{\alpha+\delta} N(\sigma, T)\,d\sigma\geqslant\delta N(\alpha+\delta, T),$$

что и завершает доказательство.

9.7. Представление функций рядами Дирихле. Какого рода функции представимы рядами Дирихле?

Попытка ответить на этот вопрос сколько-нибудь полно завела бы нас слишком далеко, но некоторые указания могут быть даны. Легко понять, что рядами Дирихле представимы только функции очень специального вида.

Если функция $f(s)$ представима рядом Дирихле, то она должна быть, прежде всего, регулярна и ограничена в некоторой полуплоскости (именно, при $\sigma\geqslant\bar\sigma+\varepsilon$). Она должна иметь среднее значение

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}|f(\sigma+it)|^2\,dt$$

для всех достаточно больших значений σ, и это среднее значение должно монотонно убывать при возрастании σ.

Далее, если $f(s)=\sum a_n n^{-s}$ и x — вещественное число, то при $\sigma>\bar{\sigma}$

$$\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} f(s)\,x^s\,dt=\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n^s}\right)x^s\,dt=\frac{x^\sigma}{2T}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n^\sigma}\int_{-T}^{T}\left(\frac{x}{n}\right)^{it}dt=$$

$$=a_x+x^\sigma\sum_{n\neq x}\frac{a_n}{n^\sigma}\,\frac{2\sin\left(T\log\frac{x}{n}\right)}{2T\log\frac{x}{n}},$$

где $a_x=0$, если x не является положительным целым числом. Сумма последнего ряда, так как он сходится равномерно относительно T, стремится к нулю при $T\to\infty$. Следовательно,

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} f(s)\,x^s\,dt=a_x.$$

Это — необходимое условие представимости функции $f(s)$ рядом $\sum a_n n^{-s}$ (формула принадлежит Адамару). Оно не является достаточным. Тем не менее, оно показывает, насколько специальными являются свойства функции, представимой рядом Дирихле.

Если ряд Дирихле содержит только один член, скажем, $f(s)=$ $=ak^{-s}$, то функция $f(s)$ периодична и имеет период $2\pi i/\log k$. Ряд Дирихле самого общего вида с периодом $2\pi i/\log k$ есть $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n k^{-ns}$. Если появляются другие члены, то периодичность пропадает; однако функция $f(s)$ всегда сохраняет некоторое более общее свойство, близкое к периодичности и называемое «почти периодичностью». В теории почти периодических функций и следует искать ответ на наш вопрос. Из-за недостатка места мы не можем входить в его дальнейшее рассмотрение. Мы можем лишь грубо сказать, что если почти периодическая функция принимает некоторое значение, то она повторяет это значение не *точно*, но *приближенно*, бесконечное число раз и что точки, в которых это происходит, распределены примерно так же, как периоды a, $2a$, $3a$, ... периодической функции.

Теория почти периодических функций была построена Г. Бором *).

*) H. Bohr [1], [2], [3].

РАЗЛИЧНЫЕ ПРИМЕРЫ

1. Пусть $\varphi(x)=\sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-nx}$. Доказать, что

$$f(s)=\frac{1}{\Gamma(s)}\int_0^{\infty} x^{s-1}\varphi(x)\,dx$$

(I) при $\sigma>0$, $\sigma>\bar\sigma$, (II) при $\sigma>0$, $\sigma>\sigma_0$.

2. Если $0<\theta<2\pi$, то функция $f(s)$, определяемая при $\sigma>0$ формулой $f(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{in\theta}}{n^s}$, является целой.

[Пользуемся примером 1 и действуем как в случае функции $\zeta(s)$.]

3. Функции, определяемые при $\sigma>0$ рядами

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{ain^b}}{n^s}\ (a>0,\ 0<b<1),\qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{ai(\log n)^2}}{n^s}\qquad (a>0),$$

являются целыми *).

4. Если функция, представимая рядом Дирихле, не является постоянной, то в полуплоскости абсолютной сходимости она не может стремиться к пределу при $t\to\infty$.

[Если $f(s)=\sum_1^{\infty} a_n n^{-s}$, то при $\sigma>\bar\sigma$

$$\lim\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} f(s)\,dt=a_1,\qquad \lim\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}|f(s)|^2\,dt=\sum|a_n|^2.$$

Следовательно, если $f(s)\to a$, то $a_1=a$ и $\sum|a_n|^2=|a|^2$, так что $|a_2|^2+|a_3|^2+\ldots=0$, т. е. $a_2=0$, $a_3=0$, ... Таким образом, $f(s)=a_1$.]

5. Показать, что $\frac{1}{\zeta(s)}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mu(n)}{n^s}$ $(\sigma>1)$, где: $\mu(1)=1$, $\mu(n)=(-1)^r$, если n есть произведение r различных простых чисел, $\mu(n)=0$ в остальных случаях. Показать также, что $\frac{\zeta(s)}{\zeta(2s)}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|\mu(n)|}{n^s}$.

[Разложение функции $\zeta(s)$ в бесконечное произведение имеется в § 1.4.4, пример 1.]

6. Проверить формулы **)

$$\{\zeta(s)\}^2=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{d(n)}{n^s},\qquad \frac{\{\zeta(s)\}^3}{\zeta(2s)}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{d(n^2)}{n^s},\qquad \frac{\{\zeta(s)\}^4}{\zeta(2s)}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\{d(n)\}^2}{n^s},$$

в которых $d(n)$ обозначает число делителей числа n и $\sigma>1$.

---

*) Hardy [7], [10].

**) Несколько других формул этого рода можно найти у Полиа и Сеге, *Задачи и теоремы анализа*, отдел 8, №№ 49—64.

[Если $n=p_1^{m_1}p_2^{m_2}\ldots p_r^{m_r}$ — разложение числа n на простые множители, то

$$d(n)=(m_1+1)(m_2+1)\ldots(m_r+1).$$

Следовательно,

$$\sum \frac{d(n^2)}{n^s}=\prod_p \sum_{m=0}^{\infty} \frac{2m+1}{p^{ms}}$$

и

$$\sum \frac{\{d(n)\}^2}{n^s}=\prod_p \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(m+1)^2}{p^{ms}}.]$$

7. Проверить формулу

$$\zeta(s)\zeta(s-a)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sigma_a(n)}{n^s} \qquad (\sigma>1,\ \sigma>a+1)$$

и формулу *)

$$\frac{\zeta(s)\zeta(s-a)\zeta(s-b)\zeta(s-a-b)}{\zeta(2s-a-b)}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sigma_a(n)\sigma_b(n)}{n^s}$$

$$(\sigma>1,\ \sigma>a+1,\ \sigma>b+1,\ \sigma>a+b+1),$$

где $\sigma_a(n)$ обозначает сумму a-х степеней делителей числа n.

[Вторая формула получается из тождества

$$\frac{1-p^{a+b-2s}}{(1-p^{-s})(1-p^{a-s})(1-p^{b-s})(1-p^{a+b-s})}=$$

$$=\frac{1}{(1-p^a)(1-p^b)}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(1-p^{(m+1)a})(1-p^{(m+1)b})}{p^{ms}}.]$$

8. Пусть $d_k(n)$, где $k=2,\ 3,\ \ldots$, обозначает число способов, которыми n можно разложить в произведение k множителей (порядок множителей принимается во внимание). Тогда **)

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{d_k(n)}{n^s}=\{\zeta(s)\}^k \qquad (\sigma>1)$$

и

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\{d_k(n)\}^2}{n^s}=\{\zeta(s)\}^k\prod_p\left\{P_{k-1}\left(\frac{1+p^{-s}}{1-p^{-s}}\right)\right\} \qquad (\sigma>1),$$

где p пробегает все простые числа, а $P_n(z)$ есть многочлен Лежандра степени n.

---

*) Ramanujan [1], B. M. Wilson [1].

**) Titchmarsh [8].

9. В случае, когда функция $f(s)$ имеет период $2\pi i/\log k$, формулы Адамара для коэффициентов a_n (§ 9.7) легко преобразуются в формулы Лорана для коэффициентов степенного ряда.

10. Для того чтобы функция $f(s)$ допускала разложение вида $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{b_n}{k^{ns}}$, необходимо и достаточно, чтобы она была регулярной и ограниченной при достаточно больших значениях σ и имела период $2\pi i/\log k$.

11. Если $a_n = 0$ для всех значений n, не являющихся степенями некоторого k, то $\sigma_0 = \bar{\sigma} = \sigma_{\varepsilon} = \sigma_m$.

12. Для функции $f(s) = \sum\limits_{m=0}^{\infty} 2^{-m!s}$ прямая $\sigma = 0$ является естественной границей. [См. § 4.7.]

13. Для функции $f(s) = \sum p^{-s}$, где p пробегает все простые числа, прямая $\sigma = 0$ является естественной границей *).

14. Функция $f(s) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\{d_k(n)\}^r}{n^s}$ мероморфна, если $r = 1$, а также если $r = 2$, $k = 2$; при других значениях r и k прямая $\sigma = 0$ является ее естественной границей **).

15. Показать, что для $\zeta(s)$

$$\mu(\sigma) = \begin{cases} 0 & (\sigma \geqslant 1), \\ 1 - 2\sigma & (\sigma \leqslant 0) \end{cases}$$

и $\mu(\sigma) \leqslant 1 - \sigma$, если $0 < \sigma < 1$.

[При $\sigma < 0$ равенство следует из функционального уравнения для $\zeta(s)$. Значения $\mu(\sigma)$ в интервале $0 < \sigma < 1$ неизвестны.]

16. Вычислить среднее значение

$$\lim_{T \to \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} |f(s)|^2 \, dt \qquad (\sigma > 1)$$

для функций $f(s) = \zeta(s)$, $\frac{1}{\zeta(s)}$, $\{\zeta(s)\}^2$.

17. Показать, что если функция $f(s)$ не ограничена на прямой $\sigma = \alpha$, лежащей в полуплоскости, где она имеет конечный порядок, то она не ограничена и на всякой прямой $\sigma = \beta$ с $\beta < \alpha$, лежащей в той же полуплоскости.

18. Показать, что: функция $f(s) = (1 - 2^{1-s})\zeta(s)$ не ограничена на каждой прямой $\sigma = \alpha$ с $\alpha \leqslant 1$; функция $t^{\sigma - \frac{1}{2}} f(s)$ не ограничена на каждой прямой $\sigma = \alpha$ с $0 < \alpha < 1/2$.

[Теорема § 9.3.2 показывает, что функция $\zeta(s)$, а с ней и функция $(1 - 2^{1-s})\zeta(s)$, не ограничена при $\sigma > 1$, $|t| > 1$. После этого первый факт получается из теоремы § 9.4.1, а второй — из функционального уравнения § 4.4.4 для $\zeta(s)$ и асимптотической формулы § 4.4.2 для гамма-функции.]

---

*) Этот пример сложнее предыдущего; см. Landau und Walfisz [1].
**) Estermann [1].

19. Если числа $s_n = \sum_{\nu=1}^{n} a_\nu$ ограничены, то функция $f(s) = \sum a_n n^{-s}$ регулярна при $\sigma > 0$; если при этом $f(s)$ имеет на прямой $\sigma = 0$ полюс, то он является простым.

[Если $\varphi(u) = \sum_{\nu \leqslant u} a_\nu$, то

$$f(s) = s\int_1^\infty \frac{\varphi(u)}{u^{s+1}}\,du = O\left(s\int_1^\infty \frac{du}{u^{\sigma+1}}\right) = O\left(\frac{s}{\sigma}\right).\,]$$

20. Если $s_n \sim n$, то $f(s) \sim 1/(s-1)$, когда $s \to 1$ по вещественным значениям, бо́льшим чем 1.

Если $s_n \sim n \log^k n$, где k — положительное целое число, то $f(s) \sim \dfrac{k!}{(s-1)^{k+1}}$.

ГЛАВА X

ТЕОРИЯ МЕРЫ И ИНТЕГРАЛ ЛЕБЕГА

10.1. Интегрирование по Риману. В теории аналитических функций мы пользовались хорошо известным определением интеграла, принадлежащим Риману. В теории функций действительного переменного римановское определение почти полностью вытеснено более общим определением, принадлежащим Лебегу.

Лебеговское определение позволяет интегрировать функции, к которым римановский метод неприменим; но это только одно из его преимуществ. Новая теория дает нам мощные универсальные средства, которых прежде этой области недоставало. Она справляется, так сказать, автоматически со многими предельными процессами, представлявшими трудности для римановской теории. На начальной ступени изучения трудно сказать об этом что-либо более точное.

Мы начнем с того, что напомним определение интеграла Римана от ограниченной функции. Пусть функция $f(x)$ ограничена в интервале (a, b). Разобьем этот интервал на частичные интервалы с помощью точек $x_0, x_1, \ldots, x_n$, удовлетворяющих условию $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$. Пусть m_ν и M_ν — нижняя и верхняя грани функции $f(x)$ в интервале $x_\nu < x \leqslant x_{\nu+1}$. Положим

$$s = \sum_{\nu=0}^{n-1} m_\nu (x_{\nu+1} - x_\nu), \quad S = \sum_{\nu=0}^{n-1} M_\nu (x_{\nu+1} - x_\nu).$$

Когда число точек деления неограниченно возрастает, притом так, что наибольшая из разностей $x_{\nu+1} - x_\nu$ стремится к нулю, каждая из сумм s, S стремится к некоторому пределу. Если эти пределы совпадают, то их общее значение есть интеграл Римана

$$\int_a^b f(x)\,dx.$$

В известных случаях, например, если функция $f(x)$ непрерывна, этот интеграл заведомо существует.

Предположим теперь, что функция $f(x)$ принимает только значения 0 и 1: пусть $f(x) = 1$ на некотором множестве E и $f(x) = 0$

в остальных точках. Тогда, как это очевидно, s есть сумма длин тех интервалов, на которых всюду $f(x)=1$, т. е. интервалов, целиком состоящих из точек множества E, а S — сумма длин интервалов, содержащих хотя бы по одной точке множества E. Если множество E состоит из конечного числа неперекрывающихся интервалов, то, как нетрудно доказать, суммы s и S стремятся к одному и тому же пределу, именно, к сумме длин этих интервалов.

Интеграл Римана от такой функции ($f(x)=1$ на E и 0 в остальных точках) может быть назван *протяженностью* множества E. *Протяженность* есть, таким образом, обобщение *длины* интервала. Протяженность множества E, если она существует, обозначается через $e(E)$, так что

$$e(E)=\int_a^b f(x)\,dx.$$

Пределы s и S существуют всегда, независимо от того, существует ли протяженность. Эти пределы называются внутренней и внешней протяженностями множества E и обозначаются через $e_i(E)$ и $e_e(E)$.

Функция $f(x)$ называется *характеристической функцией* множества E.

Легко указать множество, не имеющее протяженности. Пусть E — множество всех рациональных значений x в интервале (a, b). Так как всякий интервал содержит как рациональные, так и иррациональные числа, то $m_\nu=0$, $M_\nu=1$ при любом подразделении интервала (a, b) и для всех значений ν. Следовательно, $s=0$, $S=b-a$ и

$$e_i(E)=0, \quad e_e(E)=b-a.$$

Таким образом, протяженность этого множества не определена и его характеристическая функция не имеет интеграла Римана.

В общем случае мы можем сказать, что определение протяженности множества E основывается на рассмотрении некоторых наборов связанных с E интервалов, причем число интервалов в наборе всегда конечно.

Лебеговское обобщение есть в первую очередь обобщение протяженности; и заключается оно главным образом в том, что отбрасывается ограничение конечности рассматриваемых наборов интервалов. Прежде чем дать соответствующее формальное определение, мы должны сделать несколько дальнейших замечаний о множествах точек.

10.2. Множества точек. Мера. По поводу основных понятий, относящихся к точечным множествам, мы отсылаем читателя к *Чистой математике* Харди (глава I).

Обычно мы обозначаем множества точек через E, $E_1, \ldots$ и предполагаем, что все они лежат в некотором конечном интервале (a, b). Мы обозначаем через CE дополнение множества E, т. е. множество всех точек интервала (a, b), не принадлежащих к E.

Если E_1 и E_2 — два множества, то через E_1+E_2 мы обозначаем множество всех точек, принадлежащих к E_1 или к E_2, и через E_1E_2 — множество всех точек, принадлежащих к E_1 и к E_2. Эти обозначения подсказаны тем обстоятельством, что если $f_1(x)$ и $f_2(x)$ — характеристические функции множеств E_1 и E_2, то $f_1(x)f_2(x)$ есть характеристическая функция множества E_1E_2, а если при этом множества E_1 и E_2 не имеют общих точек, то $f_1(x)+f_2(x)$ есть характеристическая функция множества E_1+E_2.

Заметим, что

$$C(E_1+E_2)=CE_1 \cdot CE_2.$$

Эти обозначения распространяются очевидным образом на любое конечное число множеств; если имеется бесконечная последовательность множеств $E_1, E_2, \ldots$, то через $E_1+E_2+\ldots$ обозначается множество точек, принадлежащих (каждая) по крайней мере одному из этих множеств, и через $E_1E_2\ldots$ — множество точек, принадлежащих каждому из этих множеств.

Формула $E_1 \subset E_2$ обозначает, что каждая точка множества E_1 есть точка множества E_2. Два множества, имеющие общие точки, называются «пересекающимися».

Бесконечное множество точек называется *счетным*, если точки этого множества можно поставить во взаимно однозначное соответствие с целыми числами 1, 2, 3, ...; это значит, что мы должны быть в состоянии расположить эти точки в последовательность $x_1, x_2, \ldots$, в которой каждая точка найдет определенное место. Например, множество чисел 1, 1/2, 1/3, 1/4, ... счетно, и таково же множество чисел 1/2, 1/4, 1/8, ...

Множество всех правильных рациональных дробей счетно. Действительно, их можно перенумеровать, принимая во внимание сначала величину знаменателя, а затем величину числителя, следующим образом:

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \ldots$$

«Сумма» двух счетных множеств счетна. Действительно, если множество E_1 состоит из точек $x_1, x_2, \ldots$, а множество E_2 — из точек $\xi_1, \xi_2, \ldots$, то все точки множества E_1+E_2 содержатся в последовательности $x_1, \xi_1, x_2, \xi_2, \ldots$

Подобное же доказательство применимо к сумме любого конечного числа счетных множеств. Но и *сумма счетного бесконечного множества счетных множеств счетна*. Действительно, пусть E_1, $E_2, \ldots$ — такие множества, и пусть E_n состоит из точек $x_{1,n}, x_{2,n}, \ldots$

Есть много способов занумеровать двойную последовательность точек $x_{m,n}$ в простую последовательность. Например, можно собрать вместе точки, для которых $m+n=k$ $(k=2, 3, \ldots)$, и внутри каждой такой группы расположить точки в порядке возрастания индекса m; мы получим последовательность

$$x_{1,1},\ x_{1,2},\ x_{2,1},\ x_{1,3},\ x_{2,2},\ x_{3,1},\ x_{1,4},\ \ldots,$$

что и доказывает теорему.

Наконец, *подмножество счетного множества счетно.* Действительно, всякое подмножество множества x_1, x_2, x_3, ... имеет, очевидно, первый член, второй член, третий член и т. д., что и дает требуемую нумерацию.

10.2.0.1. Читатель может подумать, что все множества счетны. Но это не так. *Множество всех действительных чисел, заключенных между* 0 *и* 1, *несчетно.*

Чтобы доказать это, предположим, напротив, что все эти числа можно расположить в последовательность x_1, x_2, ... Пусть каждое из них представлено в виде бесконечной десятичной дроби. «Конечные» десятичные дроби мы дополняем до бесконечных нулями; этим исключаются дроби, оканчивающиеся последовательностью девяток. Построим новую десятичную дробь ξ по следующему правилу: ее n-й десятичный знак $(n=1, 2, \ldots)$ на единицу больше n-го десятичного знака дроби x_n, если последний равен 0, 1, ..., 7; если же последний равен 8 или 9, то n-й десятичный знак дроби ξ есть 0. Этим правилом дробь ξ определена полностью, и она не оканчивается последовательностью девяток. Но ξ есть число, заключенное между 0 и 1 и отличное от всех чисел x_n, а это противоречит предположению, что последовательность x_1, x_2, ... содержит все действительные числа, заключенные между 0 и 1.

Подобное же доказательство применимо к любому интервалу. Совокупность всех точек интервала мы называем *континуумом.* Наша теорема утверждает, что *континуум несчетен.*

10.2.0.2. Точка ξ называется «предельной точкой» множества E, если для всякого положительного числа δ в интервале $(\xi-\delta, \xi+\delta)$ имеются точки множества E, отличные от ξ (см. *Ч. М.*, § 18, где предельные точки называются «точками накопления»).

Множество, содержащее все свои предельные точки, называется «замкнутым». Так, интервал, взятый вместе со своими концами, есть замкнутое множество. Такой интервал называется замкнутым интервалом.

Открытый интервал есть интервал, не содержащий своих концов. *Открытое* множество есть дополнение замкнутого множества относительно некоторого открытого интервала.

Всякое открытое множество состоит из конечного или счетного множества попарно непересекающихся открытых интервалов. Действительно, пусть E — открытое множество и x — точка множества E.

При достаточно малом δ интервал $(x, x+\delta)$ целиком состоит из точек множества E, так как если бы это было неверно, то точка x была бы предельной для множества CE и последнее не было бы замкнутым. Пусть δ_1 — верхняя грань значений δ, обладающих этим свойством. Если $x \leqslant \xi < x+\delta_1$, то точка ξ принадлежит к E, но точка $x+\delta_1$ уже не принадлежит к E, так как в противном случае, согласно предыдущему, некоторый интервал, состоящий из точек множества E, простирался бы вправо дальше этой точки.

Подобным же образом существует такое число δ_2, что при $x-\delta_2 < \xi \leqslant x$ точка ξ принадлежит к E, но точка $x-\delta_2$ уже не принадлежит к E.

Итак, точка x лежит в открытом интервале $(x-\delta_2, x+\delta_1)$, состоящем из точек множества E, концы которого не принадлежат к E.

Таким образом, все точки множества E распределяются по попарно непересекающимся открытым интервалам. Чтобы занумеровать эти интервалы в последовательность, возьмем сначала интервал, длина которого превосходит $\frac{1}{2}(b-a)$, если такой интервал существует; затем возьмем интервалы, длина которых $\leqslant \frac{1}{2}(b-a)$, но $> \frac{1}{3}(b-a)$, если такие существуют, и занумеруем их в том порядке, в каком они расположены на прямой; и т. д. Каждый интервал из E получит в этой последовательности определенное место.

«Сумма» двух открытых множеств есть открытое множество. Действительно, если E_1 и E_2 — открытые множества и $E = E_1 + E_2$, то каждая точка множества E является внутренней для некоторого интервала, состоящего из точек множества E.

То же рассуждение показывает, что *сумма любого конечного числа или счетного бесконечного множества открытых множеств есть открытое множество.* В частности (обращение доказанной выше теоремы), *сумма конечного или счетного множества открытых интервалов есть открытое множество.*

Если E_1 и E_2 — *открытые множества, то и множество* E_1E_2 *открыто.* Действительно, точка множества E_1E_2 является внутренней как для некоторого интервала из E_1, так и для некоторого интервала из E_2. Следовательно, она не является предельной для множества $C(E_1E_2)$, которое состоит из точек множества CE_1 и точек множества CE_2.

Это доказательство не может быть распространено на бесконечную последовательность множеств; например, если E_n — открытый интервал $-\frac{1}{n} < x < \frac{1}{n}$, то пересечение $E_1E_2\ldots$ состоит из единственной точки $x=0$.

10.2.1. Мера множества точек. Теперь мы в состоянии дать понятию «длина» новое обобщение. Вместо того чтобы начинать с конечного числа интервалов, мы начнем с открытого множества, которое может содержать бесконечно много интервалов.

Мера открытого множества определяется как сумма длин его интервалов. Эта сумма есть, в общем случае, сумма бесконечного ряда. Он всегда сходится, так как сумма любого конечного числа его членов есть сумма длин конечного числа попарно непересекающихся интервалов, лежащих в интервале (a, b), и потому не превосходит $b-a$. В силу этого же обстоятельства мера любого открытого множества, лежащего в интервале (a, b), не превосходит $b-a$.

Внешняя мера множества E есть нижняя грань мер всех открытых множеств, содержащих E. Она обозначается через $m_e(E)$. Ясно, что

$$0 \leqslant m_e(E) \leqslant b-a$$

и что если $E_1 \subset E_2$, то $m_e(E_1) \leqslant m_e(E_2)$.

Внутренняя мера $m_i(E)$ множества E определяется формулой

$$m_i(E) = b - a - m_e(CE).$$

Если $m_i(E) = m_e(E)$, то множество E называется измеримым и общее значение внешней меры $m_e(E)$ и внутренней меры $m_i(E)$ называется его мерой и обозначается через $m(E)$.

Ясно, что

$$m_i(CE) = b - a - m_e(E).$$

Из этого следует, что если множество E измеримо, то и множество CE измеримо и

$$m(E) + m(CE) = b - a.$$

Заметим, что мы дали два определения меры открытого множества: прямое и косвенное. Вскоре окажется, что они эквивалентны. Пока же в доказательствах, использующих открытые множества, мы будем пользоваться прямым определением.

10.2.2. *Для всякого множества E*

$$m_iE \leqslant m_e(E).$$

Действительно, согласно определению внешней меры существуют такие открытые множества O и O', содержащие соответственно E и CE, что

$$m(O) < m_e(E) + \varepsilon, \quad m(O') < m_e(CE) + \varepsilon.$$

Каждая точка интервала $(a+\varepsilon, b-\varepsilon)$ является внутренней для некоторого интервала из O или O', так что, согласно теореме Гейне — Бореля (*Ч. М.*, § 105), можно найти конечное число таких интервалов, вместе покрывающих интервал $(a+\varepsilon, b-\varepsilon)$. Если Q — сумма этих интервалов, то, очевидно, $m(Q) \geqslant b-a-2\varepsilon$ и $m(Q) \leqslant m(O)+m(O')$. Вместе эти неравенства показывают, что

$$b-a \leqslant m_e(E)+m_e(CE)+4\varepsilon.$$

Так как ε произвольно мало, то это значит, что

$$b-a \leqslant m_e(E)+m_e(CE),$$

т. е. что $m_i(E) \leqslant m_e(E)$.

Из доказанного следует, что если $m_e(E)=0$, то $m_i(E)=0$. Таким образом, *если $m_e(E)=0$, то множество E измеримо и его мера равна нулю.*

В частности, *всякое счетное множество измеримо, и мера такого множества равна нулю.* Действительно, пусть множество состоит из точек $x_1, x_2, \ldots$ Заключим точку x_1 в интервал длины ε, точку x_2 — в интервал длины $\frac{\varepsilon}{2}$ и, вообще, точку x_n — в интервал длины $\frac{\varepsilon}{2^{n-1}}$. Тогда множество окажется заключенным в открытое множество, мера которого не превосходит 2ε. Поскольку ε может быть взято произвольно малым, это значит, что внешняя мера нашего множества равна нулю.

10.2.3. Мы пришли к двум основным теоремам теории меры.

Первая основная теорема. *Если множества $E_1, E_2, \ldots$ измеримы, то множество $E=E_1+E_2+E_3+\ldots$ также измеримо и*

$$m(E) \leqslant m(E_1)+m(E_2)+\ldots$$

Если при этом множества $E_1, E_2, \ldots$ попарно не пересекаются, то имеет место равенство.

Вторая основная теорема. *Если множества $E_1, E_2, \ldots$ измеримы, то множество $E_1E_2E_3\ldots$ также измеримо.*

Таким образом, множество точек, принадлежащих по крайней мере одному из множеств $E_1, E_2, \ldots$, измеримо, и таково же множество точек, принадлежащих всем этим множествам.

Мы начнем с доказательства двух лемм об открытых множествах, первая из которых — не что иное, как первая основная теорема, сформулированная для открытых множеств. Затем мы докажем одну общую теорему о внешней мере и выведем из нее первую основную теорему для случая непересекающихся множеств. После этого мы получим вторую основную теорему для случая двух множеств и воспользуемся ею для того, чтобы завершить доказательство первой теоремы. Наконец, пользуясь первой теоремой, мы доведем до конца доказательство второй теоремы.

10.2.4. *Если $O_1, O_2 \ldots$ — открытые множества (пересекающиеся или не пересекающиеся) и $O=O_1+O_2+O_3+\ldots$, то*

$$m(O) \leqslant m(O_1)+m(O_2)+m(O_3)+\ldots \tag{1}$$

Мы предполагаем, что ряд справа сходится; в противном случае утверждение бессодержательно.

Пусть $(a_{m,n}, b_{m,n})$ $(m=1, 2, \ldots)$ — интервалы множества O_n и (A_k, B_k) $(k=1, 2, \ldots)$ — интервалы множества O. Пусть, далее, ε — положительное число, меньшее $\frac{1}{2}(B_k - A_k)$. Каждая точка интервала $(A_k+\varepsilon, B_k-\varepsilon)$ является внутренней для одного из интервалов $(a_{m,n}, b_{m,n})$, покрывающих интервал (A_k, B_k). Если $\sum_k$ обозначает суммирование по этим интервалам, то, как это следует из теоремы Гейне — Бореля (ср. доказательство в § 10.2.2),

$$B_k - A_k - 2\varepsilon \leqslant \sum\nolimits_k (b_{m,n} - a_{m,n}).$$

Ввиду произвольности ε это значит, что

$$B_k - A_k \leqslant \sum\nolimits_k (b_{m,n} - a_{m,n}), \tag{2}$$

и, суммируя по k, мы получаем неравенство

$$m(O) \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \sum\nolimits_k (b_{m,n} - a_{m,n}). \tag{3}$$

Так как сходящийся двойной ряд с положительными членами можно суммировать любым способом, то правая часть неравенства (3) может быть представлена в виде

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} (b_{m,n} - a_{m,n}) = \sum_{n=1}^{\infty} m(O_n).$$

Этим теорема доказана.

Если множества O_n попарно не пересекаются, то каждый из интервалов (A_k, B_k) совпадает с одним из интервалов $(a_{m,n}, b_{m,n})$ и неравенства (2), (3), а с ними и неравенство (1), превращаются в равенства.

10.2.4.1. *Если O и O' — открытые множества, покрывающие вместе интервал (a, b), то*

$$m(OO') \leqslant m(O) + m(O') - (b-a).$$

Согласно теореме Гейне — Бореля можно найти такое конечное множество интервалов из O и O', что сумма Q тех из этих интервалов, которые принадлежат к O, и сумма Q' тех из них, которые принадлежат к O', вместе покрывают интервал $(a+\varepsilon, b-\varepsilon)$. Присоединив, если это необходимо, к Q и Q' дальнейшие интервалы, мы можем считать, что

$$O = Q + R, \quad O' = Q' + R',$$

где $m(R) < \varepsilon$, $m(R') < \varepsilon$. Так как

$$OO' \subset QQ' + R + R',$$

то, в силу предыдущей леммы,

$$m(OO') \leqslant m(QQ') + m(R) + m(R') < m(QQ') + 2\varepsilon.$$

Но из элементарных соображений следует, что

$$m(Q) + m(Q') - m(QQ') \geqslant b - a - 2\varepsilon.$$

Кроме того, $m(O) \geqslant m(Q)$ и $m(O') \geqslant m(Q')$. Из этих четырех неравенств и получается доказываемое неравенство, если принять во внимание произвольность ε *).

10.2.5. *Пусть E_1, E_2, ... — произвольные множества. Если*

$$E = E_1 + E_2 + \ldots,$$

то

$$m_e(E) \leqslant m_e(E_1) + m_e(E_2) + \ldots$$

Мы можем заключить E_n в такое открытое множество O_n, что

$$m(O_n) < m_e(E_n) + \frac{\varepsilon}{2^n}.$$

Суммируя эти неравенства по n и пользуясь теоремой § 10.2.4, мы видим, что

$$m(O) \leqslant m(O_1) + m(O_2) + \ldots < m_e(E_1) + m_e(E_2) + \ldots + \varepsilon.$$

Но O есть открытое множество, содержащее E. Следовательно, $m_e(E) \leqslant m(O)$, и потому

$$m_e(E) < m_e(E_1) + m_e(E_2) + \ldots + \varepsilon.$$

Доказываемое неравенство получается отсюда при $\varepsilon \to 0$.

10.2.6. *Пусть E_1, E_2, ... — попарно непересекающиеся измеримые множества. Тогда множество*

$$E = E_1 + E_2 + \ldots$$

измеримо и

$$m(E) = m(E_1) + m(E_2) + \ldots$$

Можно считать, что все рассматриваемые множества лежат в интервале (a, b).

(I) Рассмотрим сначала случай двух множеств: $E = E_1 + E_2$. Мы уже знаем, что $m_e(E) \leqslant m_e(E_1) + m_e(E_2) = m(E_1) + (E_2)$. Таким образом, достаточно доказать, что

$$m_i(E) \geqslant m(E_1) + m(E_2),$$

т. е. что

$$m_e(CE) \leqslant m(CE_1) + m(CE_2) - (b - a).$$

---

*) В действительности левая часть этого неравенства равна правой. Это следует из первой основной теоремы.

Мы можем заключить CE_1 и CE_2 в такие открытые множества O_1 и O_2, что

$$m(O_1) < m(CE_1) + \varepsilon, \quad m(O_2) < m(CE_2) + \varepsilon.$$

Так как E_1 и E_2 не имеют общих точек, то CE_1 и CE_2 вместе покрывают весь интервал, и тем же свойством обладают, следовательно, O_1 и O_2. Таким образом,

$$m(O_1 O_2) \leqslant m(O_1) + m(O_2) - (b - a).$$

Но множество $O_1 O_2$ содержит CE. Следовательно,

$$m_e(CE) \leqslant m(O_1 O_2) \leqslant m(O_1) + m(O_2) - (b - a) <$$
$$< m(CE_1) + m(CE_2) + 2\varepsilon - (b - a).$$

Доказываемое неравенство получается отсюда при $\varepsilon \to 0$.

(II) На случай любого конечного числа множеств теорема распространяется повторным применением доказанного.

(III) В случае бесконечного числа множеств при любом значении n

$$m(E_1) + m(E_2) + \ldots + m(E_n) = m(E_1 + \ldots + E_n) \leqslant b - a.$$

Следовательно, ряд $\sum m(E_n)$ сходится.

Положим $S_n = E_1 + \ldots + E_n$. Так как $CE \subset CS_n$, то

$$m_e(CE) \leqslant m_e(CS_n) = m(CS_n) = b - a - m(E_1) - \ldots - m(E_n).$$

При $n \to \infty$ из этого следует, что $m_e(CE) \leqslant b - a - \sum m(E_n)$, т. е.

$$m_i(E) \geqslant \sum m(E_n).$$

Сопоставление последнего неравенства с неравенством § 10.2.5 завершает доказательство.

В частности, беря в качестве $E_1, E_2, \ldots$ открытые интервалы, мы видим, что всякое открытое множество измеримо в общем смысле и что для открытых множеств наше прямое определение меры совпадает с общим. Замкнутые множества, как дополнения открытых множеств, также измеримы.

Если множества E_1 и E_2 измеримы и E_1 содержится в E_2, то множество $E_2 - E_1$ (состоящее из точек множества E_2, не принадлежащих E_1) измеримо.

Действительно,

$$C(E_2 - E_1) = E_1 + CE_2.$$

10.2.7. *Если множества E и F измеримы, то множество EF также измеримо.*

Пусть оба множества содержатся в интервале (a, b). Предположим сначала, что F — некоторый интервал (α, β). Пусть E_1 — часть множества E, лежащая в интервале (α, β), и E_2 — остаток. Пусть $O = O_1 + O_2$ — подобное же разложение открытого множества O, содержащего E. Если пренебречь точками α и β, что мы, очевидно, вправе сделать, то можно считать, что O_1 и O_2 — открытые множества, содержащие E_1 и E_2, и ясно, что

$$m(O)=m(O_1)+m(O_2).$$

Переходя к нижним граням, мы видим, что

$$m_e(E)=m_e(E_1)+m_e(E_2). \tag{1}$$

Если, подобным же образом, $CE=e_1+e_2$, то

$$m_e(CE)=m_e(e_1)+m_e(e_2). \tag{2}$$

Так как множество E измеримо, то

$m_e(E)+m$ [illegible] $=b-a.$ (3)

Наконец, по § 10.2.5,

$$m_e(E_2)+m_e(e_2)\geqslant m_e(E_2+e_2)=b-a-(\beta-\alpha). \tag{4}$$

Из (1), (2), (3) и (4) следует, что $m_e(E_1)+m_e(e_1)\leqslant\beta-\alpha$. Таким образом, множество E_1 измеримо.

Этим теорема доказана для случая, когда F — интервал. В силу предыдущей теоремы она верна поэтому и в случае, когда F — открытое множество. В общем случае мы можем заключить F в такое открытое множество O, а CF — в такое открытое множество O', что $m(O)+m(O')<b-a+\varepsilon$. Так как

$$EF\subset EO,\quad C(EF)=CF+F\cdot CE\subset O'+O\cdot CE,$$

то

$$\begin{aligned} m_e(EF)+m_e\{C(EF)\}\leqslant m(EO)+m(O')+m(O\cdot CE)&=\\ =m(O)+m(O')&<b-a+\varepsilon.\end{aligned}$$

Ввиду произвольности ε из этого следует, что $m_e(EF)+ m_e\{C(EF)\}\leqslant b-a$, чем доказательство и завершается.

Если множества E_1 и E_2 измеримы, то множество E, составленное из точек, принадлежащих E_2, но не E_1, измеримо.

Действительно, $E=E_2\cdot CE_1$.

10.2.8. Теперь мы можем закончить доказательство основных теорем. Пусть E_1, E_2, ... — любые измеримые множества, пересекающиеся или непересекающиеся, и пусть E — их сумма. Положим

$$E_2'=E_2\cdot CE_1,\quad E_3'=E_3\cdot C(E_1+E_2'),\quad E_4'=E_4\cdot C(E_1+E_2'+E_3'),$$

и т. д. Множества E_1, E_2', E_3', ... измеримы и попарно не пересекаются, и $E=E_1+E_2'+E_3'+\ldots$ Следовательно, множество E измеримо (§ 10.2.6), и имеет место неравенство $m(E)\leqslant m(E_1)+ m(E_2)+\ldots$ (§ 10.2.5). Этим доказательство первой основной теоремы доведено до конца.

Если $F = E_1 E_2 E_3 \ldots$, то $CE = CF_1 + CE_2 + \ldots$ Согласно только что доказанному множество CF измеримо, а с ним измеримо и множество F. Этим доказана и вторая основная теорема.

10.2.9. Предельные множества. *Пусть $E_1, E_2, \ldots$ — измеримые множества, каждое из которых содержится в следующем, и пусть E — их сумма. Тогда*

$$\lim_{n\to\infty} m(E_n) = m(E).$$

Действительно, множества $E_2 - E_1$, $E_3 - E_2$, ... измеримы и не пересекаются, и $E = E_1 + (E_2 - E_1) + (E_3 - E_2) + \ldots$ Следовательно,

$$m(E) = m(E_1) + m(E_2 - E_1) + \ldots =$$
$$= \lim_{n\to\infty} \{m(E_1) + m(E_2 - E_1) + \ldots + m(E_n - E_{n-1})\} = \lim_{n\to\infty} m(E_n).$$

Множество E называется *внешним предельным множеством последовательности* $E_1, E_2, \ldots$

Если каждое из множеств $E_1, E_2, \ldots$ содержит следующее и $E = E_1 E_2 \ldots$, то

$$\lim_{n\to\infty} m(E_n) = m(E).$$

Эта теорема получается из предыдущей после перехода к дополнительным множествам. Множество E называется *внутренним предельным множеством последовательности* $E_1, E_2, \ldots$

В отличие от большинства теорем о мере множеств, первая из этих теорем останется в силе, если мы заменим в ней меру внешней мерой, отбросив предположение, что рассматриваемые множества измеримы. Это замечание окажется полезным в следующей главе, где проверка измеримости некоторых множеств будет представлять неудобства.

Если E — внешнее предельное множество последовательности $E_1, E_2, \ldots$, то

$$\lim_{n\to\infty} m_e(E_n) = m_e(E).$$

Заключим E_n в открытое множество O_n, для которого

$$m(O_n) < m_e(E_n) + \varepsilon.$$

Пусть $S_n = O_n O_{n+1} O_{n+2} \ldots$ и $S = S_1 + S_2 + \ldots$ Тогда $E_n \subset S_n \subset O_n$, $E \subset S$ и $S_n \subset S_{n+1}$, так что S есть внешнее предельное множество для множеств S_n (включения $O_n \subset O_{n+1}$ могут не иметь места, что и побудило нас ввести множества S_n). Следовательно,

$$m_e(E) \leqslant m(S) = \lim m(S_n) < \lim m_e(E_n) + \varepsilon,$$

и, ввиду произвольности ε, $m_e(E) \leqslant \lim m_e(E_n)$. С другой стороны, так как всякое множество, содержащее E, содержит и все множества E_n, то $m_e(E) \geqslant m_e(E_n)$ при любом n. Этим теорема доказана.

10.2.9.1. Канторово множество. Следующее множество, построенное Кантором, обладает многими интересными свойствами.

Разделим интервал $(0, 1)$ на три равные части и удалим внутренность средней части; затем разделим каждую из двух оставшихся частей на три равные части и удалим внутренности обеих средних частей, и продолжим этот процесс неограниченно. На p-м шаге мы удаляем, таким образом, 2^{p-1} интервалов. Эти интервалы мы обозначаем, слева направо, через $\delta_{p,k}$ (k изменяется от 1 до 2^{p-1}). При любом k длина интервала $\delta_{p,k}$ есть 3^{-p}.

Пусть E — множество тех точек, которые останутся. E есть множество точек, представимых бесконечными троичными дробями

$$0,\ a_1a_2 \dots (3)$$

(на их троичность указывает тройка, стоящая в скобках), у которых $a_1, a_2, \dots$ принимают значения 0 и 2, но не значение 1; например, множество E содержит $2/3 = 0{,}200\dots$, а также $1/3 = 0{,}0222\dots$ Действительно: первый шаг, описанный выше, удаляет из интервала все точки, у которых первый знак есть 1 (кроме точки $0{,}100\dots = 0{,}022\dots$); второй шаг удаляет из оставшихся точек все те, у которых второй знак есть 1 (кроме точек $0{,}010\dots = 0{,}0022\dots$ и $0{,}210\dots = 0{,}2022\dots$); и т. д. Заметим еще, что концами интервалов $\delta_{p,k}$ служат те троичные дроби $0, a_1a_2\dots(3)$, у которых все знаки, начиная с некоторого, — только нули или только единицы. Для интервала $\delta_{1,1}$ это очевидно; чтобы получить концы интервалов $\delta_{2,1}$, $\delta_{2,2}$, нужно взять в качестве первого троичного знака 0 или 2, а в качестве остатков — дроби, представляющие концы интервала $\delta_{1,1}$, и т. д. Таким образом, общий вид концевых точек интервала $\delta_{p,k}$ есть

$$0,\ a_1 \dots a_m0222 \dots (3), \quad 0,\ a_1 \dots a_m2000 \dots (3).$$

Множество E несчетно; это можно доказать таким же способом, каким была доказана несчетность континуума. Однако мера множества E равна нулю; действительно,

$$m(E) = 1 - \sum m(\delta_{p,k}) = 1 - \sum_{p=1}^{\infty} \frac{2^{p-1}}{3^p} = 0.$$

Мы вернемся к этому множеству в § 11.7.2.

Пример. Доказать, что мера множества тех точек интервала $(0, 1)$, для которых представляющие их десятичные дроби не содержат некоторого десятичного знака (скажем, 7,) равна нулю.

10.3. Измеримые функции. Пусть $f(x)$ — действительная функция от x, определенная и ограниченная в интервале (a, b). Обозначим через $E(f>c)$ множество тех точек интервала (a, b), в которых $f(x)>c$, и условимся подобным же образом пользоваться для обозначения множеств другими неравенствами.

Функция $f(x)$ называется измеримой, если каждое из множеств

$$E(f \geqslant c), \quad E(f<c), \quad E(f>c), \quad E(f \leqslant c)$$

измеримо при любом значении c.

Измеримость одного из этих множеств при всех значениях c влечет за собою измеримость трех других.

Предположим, например, что измеримо первое множество. Тогда второе множество измеримо как дополнение первого. Следовательно, измеримы все множества

$$E_n = E\left(f<c+\frac{1}{n}\right) \qquad (n=1,\ 2,\ \ldots),$$

а с ними измеримо и множество

$$(E_1-E_2)+(E_2-E_3)+\ldots = E(c<f<c+1).$$

Поэтому измеримо также множество

$$E(f=c)=E(f \geqslant c)-E(f \geqslant c+1)-E(c<f<c+1),$$

что позволяет завершить доказательство.

10.3.1. Общие свойства измеримых функций.

(I) *Пусть f — измеримая функция и k — постоянная. Тогда функции $k+f$, kf и, в частности, $-f$ измеримы.*

Это очевидно.

(II) *Если функции f и φ измеримы, то множество $E(f>\varphi)$ измеримо.*

Если $f(x)>\varphi(x)$, то существует такое рациональное число r, что $f(x)>r>\varphi(x)$. Следовательно,

$$E(f>\varphi)=\sum_r E(f>r)\,E(\varphi<r),$$

где r пробегает множество всех рациональных чисел, что и доказывает измеримость множества $E(f>\varphi)$.

(III) *Если функции f и φ измеримы, то и функции $f+\varphi$ и $f-\varphi$ измеримы.*

Действительно,

$$E(f+\varphi>c)=E(f>c-\varphi),$$

и остается сослаться на (II). Аналогичное доказательство применимо к функции $f-\varphi$.

(IV) *Если функции f и φ измеримы, то функция $f\varphi$ также измерима.*

Функция $\{f(x)\}^2$ измерима, так как при $c>0$

$$E(f^2>c)=E\left(f>\sqrt{c}\right)+E\left(f<-\sqrt{c}\right).$$

Остается заметить, что в общем случае

$$f\varphi = \frac{1}{4}(f+\varphi)^2 - \frac{1}{4}(f-\varphi)^2.$$

(V) *Если $f_1(x)$, $f_2(x)$, ... — измеримые функции, то функции*

$$\underline{\lim}_{n \to \infty} f_n(x), \quad \overline{\lim}_{n \to \infty} f_n(x),$$

которые мы предполагаем конечными, измеримы. В частности, если последовательность $f_1(x)$, $f_2(x)$, ... сходится к некоторому пределу, то этот предел измерим.

Положим $f(x) = \overline{\lim} f_n(x)$. Пусть c — произвольное вещественное число, пусть

$$E_{m,n} = E\left(f_n > c + \frac{1}{m}\right) + E\left(f_{n+1} > c + \frac{1}{m}\right) + \ldots,$$

и пусть $E_m = E_{m,1}E_{m,2}E_{m,3}\ldots$ В силу основных теорем теории меры, множества $E_{m,n}$ и E_m измеримы. E_m есть множество точек, общих всем множествам $E_{m,n}$ с данным m, т. е. множество точек, в которых $f_\nu > c + \frac{1}{m}$ для сколь угодно больших значений ν. Следовательно, на E_m

$$f = \overline{\lim} f_\nu \geqslant c + \frac{1}{m} > c.$$

Положим $E = E_1 + E_2 + E_3 + \ldots$ Множество E измеримо, и $f > c$ во всех его точках. Обратно, если $f(x) > c$, то существует такое натуральное число m, что $f_\nu(x) > c + \frac{1}{m}$ для сколь угодно больших значений ν, так что x принадлежит одному из множеств E_m. Следовательно, $E = E(f > c)$, что и доказывает теорему.

(VI) *Непрерывная функция измерима.*

Действительно, нетрудно проверить, что если функция $f(x)$ непрерывна, то множество $E(f \leqslant c)$ замкнуто. Следовательно, множество $E(f > c)$ открыто и, значит, измеримо.

Все обычные функции анализа могут быть получены предельными процессами из непрерывных функций и потому измеримы. То же справедливо и для некоторых более искусственных функций. Например,

$$\lim_{n \to \infty} \{\cos m!\pi x\}^{2n}$$

есть предел последовательности непрерывных функций, который равен 1, если $m!x$ — целое число, и 0 в противном случае. Если x — рациональное число, то $m!x$ есть при достаточно большом m целое число. Следовательно, функция

$$f(x) = \lim_{m \to \infty} \lim_{n \to \infty} \{\cos m!\pi x\}^{2n}$$

равна 1, если x — рациональное число, и 0 в противном случае. Тот факт, что она измерима, может быть, конечно, установлен и более прямым путем (§ 10.2.2).

10.4. Интеграл Лебега от ограниченной функции. Теперь мы в состоянии определить интеграл Лебега произвольной ограниченной измеримой функции.

Если $f(x)$ — характеристическая функция множества E, т. е. $f(x)=1$ на E и $f(x)=0$ вне E, то естественное определение интеграла содержится в формуле

$$\int_a^b f(x)\,dx = m(E).$$

Если $f(x)=k$ на E и $f(x)=0$ вне E, то мы полагаем:

$$\int_a^b f(x)\,dx = km(E).$$

Переходя к общему случаю, обозначим через α и β нижнюю и верхнюю грани функции $f(x)$. Как и в случае интегрирования по Риману, интеграл определяется как предел сумм; но на этот раз суммы получаются путем подразделения интервала изменения функции $f(x)$. Возьмем какие-нибудь числа $y_0, y_1, \ldots, y_n$, удовлетворяющие условию

$$\alpha = y_0 < y_1 < \ldots < y_{n-1} < y_n = \beta,$$

и обозначим через e_ν ($\nu=0, \ldots, n-1$) множество тех точек x, в которых $y_\nu \leqslant f(x) < y_{\nu+1}$, и через e_n — множество тех точек x, в которых $f(x)=\beta$. Так как функция $f(x)$ измерима, то все множества e_ν измеримы. Положим

$$s=\sum_{\nu=0}^{n} y_\nu m(e_\nu), \quad S=\sum_{\nu=0}^{n} y_{\nu+1} m(e_\nu),$$

где $y_{n+1}=\beta$. *Интеграл Лебега функции $f(x)$ в интервале (a, b) есть общий предел, к которому стремятся суммы s и S, когда число точек деления y_ν неограниченно возрастает, причем наибольшая из разностей $y_{\nu+1}-y_\nu$ стремится к нулю.*

Чтобы оправдать это определение, мы должны доказать, что оба предела существуют и что они равны между собой.

Предположим, что интервал (α, β) подразделен двумя различными способами, причем каждая из разностей $y_{\nu+1}-y_\nu$ в каждом из этих подразделений меньше ε. Пусть s, S и s', S' — суммы, соответствующие этим подразделениям. Тогда

$$S-s=\sum_{\nu=0}^{n}(y_{\nu+1}-y_\nu)\,m(e_\nu) \leqslant \varepsilon \sum_{\nu=0}^{n} m(e_\nu) = \varepsilon(b-a),$$

и подобным же образом $S'-s' \leqslant \varepsilon(b-a)$.

Рассмотрим теперь новое подразделение интервала (α, β), определяемое всеми точками деления обоих подразделений. Мы получим две новые суммы, s'' и S''. Введение новых точек деления не уменьшает нижних сумм и не увеличивает верхних сумм; если, например, между точками y_ν и $y_{\nu+1}$ вставляется новая точка η, то

$$y_\nu m(e_\nu) \leqslant y_\nu m\{E(y_\nu \leqslant f < \eta)\} + \eta m\{E(\eta \leqslant f < y_{\nu+1})\},$$

так что нижняя сумма не уменьшается. Применяя это заключение повторно, мы видим, что $s \leqslant s''$, $s' \leqslant s''$ и, подобным же образом, $S'' \leqslant S$, $S'' \leqslant S'$.

Из сказанного следует, что интервалы (s, S) и (s', S') имеют общие точки: это все точки интервала (s'', S''). Поэтому все числа s, s', S, S' лежат в интервале длины $2\varepsilon(b-a)$, и существование и равенство пределов сумм s и S следуют из общего принципа сходимсти.

10.4.1. Сравнение с определением Римана. Для начинающего наиболее очевидным различием является, пожалуй, то, что в определении Лебега подразделяется не интервал интегрирования, а интервал изменения функции. Однако в действительности это не так уж важно. Существенно то, что мы пользуемся общей теорией меры вместо более ограниченной теории протяженности. Можно было бы построить интеграл из интегралов характеристических функций, пользуясь не мерой, а протяженностью, и по существу это было бы эквивалентно определению Римана. С другой стороны, можно определить интеграл, эквивалентный интегралу Лебега, путем надлежащего подразделения интервала интегрирования.

Как в определении Римана, так и в определении Лебега имеются верхние и нижние суммы, которые стремятся к пределам. В римановском случае эти пределы могут не совпадать, и функция интегрируема только тогда, когда они совпадают. В лебеговском случае пределы всегда совпадают; их равенство есть следствие измеримости функции.

Определение Лебега является более общим, чем определение Римана. Действительно, характеристическая функция множества рациональных точек имеет интеграл Лебега, но не имеет интеграла Римана, и позже мы увидим, что если функция имеет интеграл Римана, то она имеет и интеграл Лебега и эти интегралы равны между собой.

Мы пользуемся для интеграла Лебега тем же обозначением

$$\int_a^b f(x)\,dx,$$

что и для интеграла Римана. Если возникнет необходимость подчеркнуть, что речь идет об интеграле Римана, а не об интеграле

Лебега, мы будем обозначать первый через

$$(R)\int_a^b f(x)\,dx.$$

10.4.2. Интеграл по произвольному измеримому множеству. Пусть E — произвольное измеримое множество точек, лежащее в интервале (a, b). Интеграл функции $f(x)$ по множеству E может быть определен так же, как интеграл по интервалу. Множество e_ν (§ 10.4) состоит теперь из тех точек множества E, в которых $y_\nu \leqslant f(x) < y_{\nu+1}$. Доказательство существования интеграла фактически остается без изменений. Интеграл обозначается через

$$\int_E f(x)\,dx.$$

Интеграл по множеству меры нуль всегда равен нулю. Действительно, все множества e_ν имеют меру нуль, и потому суммы s и S всегда равны нулю.

Интеграл можно определить также, полагая $f(x)=0$ на CE и пользуясь определением интеграла по интервалу. Нетрудно проверить, что это определение эквивалентно предыдущему.

10.4.3. В дальнейшем мы всегда будем предполагать, не оговаривая это каждый раз, что все рассматриваемые множества и функции измеримы.

10.4.4. Элементарные свойства интеграла ограниченной функции.

(I) Теорема о среднем значении. *Если* $\alpha \leqslant f(x) \leqslant \beta$, *то*

$$\alpha m(E) \leqslant \int_E f(x)\,dx \leqslant \beta m(E).$$

Действительно, нетрудно проверить, что $\alpha m(E) \leqslant s \leqslant \beta m(E)$. Наше неравенство получается отсюда предельным переходом.

(II) *Интеграл аддитивен по отношению к любому конечному или счетному бесконечному набору попарно непересекающихся множеств, содержащихся в конечном интервале. Это значит, что если* $E = E_1 + E_2 + \ldots$, *то*

$$\int_E f(x)\,dx = \int_{E_1} f(x)\,dx + \int_{E_2} f(x)\,dx + \ldots$$

Предположим сначала, что имеются два множества, E_1 и E_2. Точки деления y_ν определяют разложение множеств E, E_1, E_2 на подмножества e_ν, e_ν^1, e_ν^2, причем

$$m(e_\nu) = m(e_\nu^1) + m(e_\nu^2).$$

Следовательно,

$$\int_{E_1} + \int_{E_2} = \lim \sum y_\nu m(e_\nu^1) + \lim \sum y_\nu m(e_\nu^2) = \lim \sum y_\nu m(e_\nu) = \int_E.$$

Подобным же образом обстоит дело в случае любого конечного числа множеств.

Если множеств бесконечно много, то пусть S_n — сумма первых n из них и R_n — остаток. Согласно уже доказанному,

$$\int_E = \int_{S_n} + \int_{R_n}.$$

Если $|f(x)| \leqslant M$, то, в силу теоремы о среднем значении,

$$\left| \int_{R_n} f(x)\,dx \right| \leqslant Mm(R_n),$$

правая же часть стремится к нулю при $n \to \infty$, так как ряд $\sum m(E_m)$ сходится. Следовательно,

$$\int_E = \lim \int_{S_n} = \int_{E_1} + \int_{E_2} + \ldots$$

(III) *Если* $f(x) \leqslant \varphi(x)$ *на множестве* E, *то*

$$\int_E f(x)\,dx \leqslant \int_E \varphi(x)\,dx.$$

Построим для функции $f(x)$ по точкам деления y_ν множества e_ν. На e_ν всюду $\varphi(x) \geqslant f(x) \geqslant y_\nu$. Следовательно,

$$\int_E \varphi(x)\,dx = \sum \int_{e_\nu} \varphi(x)\,dx \geqslant \sum y_\nu m(e_\nu).$$

Правая часть стремится к интегралу $\int_E f(x)\,dx$, и мы получаем доказываемое неравенство.

(IV) *Интеграл суммы конечного числа ограниченных измеримых функций равен сумме интегралов слагаемых.*

Прежде всего, если k — постоянная, то

$$\int_E (f+k)\,dx = \int_E f\,dx + \int_E k\,dx = \int_E f\,dx + km(E).$$

Действительно, вычислим сумму s для $f(x)$ по шкале $y_0, y_1, \ldots$ и сумму s' для $f(x)+k$ по шкале $y_0+k, y_1+k, \ldots$ Очевидно,

$$s' = \sum (y_\nu + k)\, m(e_\nu) = s + km(E).$$

Доказываемая формула получается отсюда предельным переходом.

Рассмотрим теперь случай двух произвольных ограниченных измеримых функций $f(x)$ и $\varphi(x)$. Пользуясь уже доказанным, мы можем написать:

$$\int_E \{f(x)+\varphi(x)\}\,dx=\sum\int_{e_\nu}(f+\varphi)\,dx\geqslant\sum\int_{e_\nu}(y_\nu+\varphi)\,dx=s+\int_E\varphi\,dx.$$

Подобным же образом, но взяв $y_{\nu+1}$ вместо y_ν, мы получим неравенство

$$\int_E(f+\varphi)\,dx\leqslant S+\int_E\varphi\,dx.$$

Доказываемая формула выводится из этих двух неравенств предельным переходом.

Для произвольного конечного числа функций теорема доказывается повторным применением этого своего частного случая.

(V) *Если k — постоянная, то*

$$\int_E kf(x)\,dx=k\int_E f(x)\,dx.$$

Это очевидно, если $k=0$. Если $k>0$, то мы вычисляем второй интеграл по шкале $y_0, y_1, \ldots$, а первый интеграл — по шкале $ky_0, ky_1, \ldots$ В обоих случаях мы приходим к одним и тем же множествам e_ν, из чего и следует доказываемая формула.

(VI) *Во всех случаях*

$$\left|\int_E f(x)\,dx\right|\leqslant\int_E|f(x)|\,dx.$$

Пусть E_1 — множество точек, в которых $f(x)\geqslant 0$, и E_2 — множество точек, в которых $f(x)<0$. Неравенство (VI) становится очевидным, если сопоставить формулу

$$\int_E f\,dx=\int_{E_1}f\,dx-\int_{E_2}|f|\,dx$$

с формулой

$$\int_E|f|\,dx=\int_{E_1}f\,dx+\int_{E_2}|f|\,dx.$$

(VII) Говорят, что некоторое соотношение выполняется *почти всюду*, если оно выполняется всюду вне некоторого множества меры нуль.

Две функции, равные почти всюду, имеют один и тот же интеграл.

Пусть $f(x)=\varphi(x)$ во всех точках множества E, лежащих вне множества e меры нуль. Тогда

$$\int_E(f-\varphi)\,dx=\int_e(f-\varphi)\,dx+\int_{E\cdot Ce}(f-\varphi)\,dx.$$

Первый член справа равен нулю потому, что $m(e)=0$, а второй — потому, что подынтегральная функция всюду равна нулю. Следовательно,

$$\int_E f\,dx = \int_E \varphi\,dx.$$

(VIII) *Если* $f(x)\geqslant 0$ *и* $\int_E f(x)\,dx=0$, *то* $f(x)=0$ *почти всюду на* E.

Положим $E_0=E(f=0)$ и

$$E_n=E\left(\frac{M}{n+1}<f\leqslant\frac{M}{n}\right),$$

где M — верхняя грань функции f. Очевидно, $E=E_0+E_1+$ $+E_2+\ldots$ и

$$m(E_m)\leqslant\frac{n+1}{M}\int_{E_n} f\,dx\leqslant\frac{n+1}{M}\int_E f\,dx=0.$$

Таким образом, $m(E_n)=0$ при $n=1, 2, \ldots$, что и доказывает теорему.

10.5. Теорема Лебега о сходимости (теорема об ограниченной сходимости). *Пусть* $f_1(x)$, $f_2(x)$, ... — *такая последовательность измеримых функций, что* $|f_n(x)|\leqslant M$ *для всех значений* n *и всех точек* x *множества* E, *и пусть*

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x)=f(x)$$

во всех точках x *множества* E. *Тогда*

$$\lim_{n\to\infty}\int_E f_n(x)\,dx=\int_E f(x)\,dx.$$

Поскольку при вычислении интегралов множествами меры нуль можно пренебрегать, достататочно, чтобы указанные условия были выполнены *почти всюду*.

Так как $|f_n(x)|\leqslant M$ при любом n, то $|f(x)|\leqslant M$. Следовательно, функция $f(x)$ интегрируема, и доказательству подлежит равенство

$$\lim\int_E \{f(x)-f_n(x)\}\,dx=0.$$

Положим $g_n=|f-f_n|$, и пусть ε — произвольное положительное число. Введем обозначения:

$$E_1=E(\varepsilon>g_1,\ g_2,\ \ldots),\quad E_2=E(g_1\geqslant\varepsilon>g_2,\ g_3,\ \ldots),$$
$$E_3=E(g_2\geqslant\varepsilon>g_3,\ g_4,\ \ldots),\ \ldots$$

Множества E_k измеримы, и они попарно не пересекаются; действительно, $g_k \geqslant \varepsilon$ на E_{k+1}, но не на $E_1, \ldots, E_k$, так что E_{k+1} не имеет общих точек с $E_1, \ldots, E_k$. Каждая точка множества E принадлежит одному из множеств E_k; действительно, $g_n(x) \to 0$ в каждой точке x, вследствие чего каждой точке x отвечает наименьший номер k, для которого $g_k(x) < \varepsilon$, $g_{k+1}(x) < \varepsilon, \ldots$, так что x принадлежит E_k.

Из сказанного следует, что

$$\int_E g_n\,dx = \int_{E_1} g_n\,dx + \int_{E_2} g_n\,dx + \ldots$$

Но $g_n < \varepsilon$ на $E_1, \ldots, E_n$ и $g_n \leqslant 2M$ всюду. Следовательно,

$$\int_E g_n\,dx \leqslant \varepsilon\,\{m(E_1) + \ldots + m(E_n)\} + 2M\,\{m(E_{n+1}) + \ldots\}.$$

Переходя к пределу при $n \to \infty$, мы видим, что

$$\overline{\lim} \int_E g_n\,dx \leqslant \varepsilon m(E).$$

Ввиду произвольности ε это значит, что

$$\lim \int_E g_n\,dx = 0,$$

откуда и следует доказываемое соотношение.

Теорема не верна для интегралов Римана, так как $f(x)$ может не быть интегрируемой по Риману и в случае, когда все функции $f_n(x)$ интегрируемы по Риману. Пусть, например, $r_1, r_2, \ldots$ — все рациональные точки интервала $(0, 1)$, и пусть $f_n(x) = 1$ при $x = r_1, \ldots, r_n$ и $f(x) = 0$ при остальных значениях x. При любом n

$$(R)\int_0^1 f_n(x)\,dx = 0,$$

а между тем $f(x) = 1$ при рациональных x и $f(x) = 0$ при иррациональных x, так что функция $f(x)$ не интегрируема по Риману.

10.5.1. Теорема об ограниченной сходимости может быть сформулирована как теорема о почленном интегрировании рядов.

Если ряд

$$u_1(x) + u_2(x) + \ldots$$

сходится на некотором множестве E к сумме $s(x)$ и его частичные суммы

$$s_n(x) = u_1(x) + \ldots + u_n(x)$$

ограничены для всех значений n и всех точек x множества E, то

$$\int_E s(x)\,dx = \int_E u_1(x)\,dx + \int_E u_2(x)\,dx + \ldots$$

Это — окончательная форма теоремы об ограниченной сходимости, доказанной для интегралов Римана в § 1.7.6.

10.5.2. Теорема Егорова*). *Если последовательность функций почти всюду на множестве E сходится к конечному пределу, то для всякого δ можно найти множество меры, большей $m(E)-\delta$, на котором она сходится равномерно.*

Пусть $f_1(x)$, $f_2(x)$, ... — рассматриваемая последовательность, E' — множество, на котором она сходится, $f(x)$ — ее предел на этом множестве и $g_n=|f-f_n|$.

Пусть ε_1, ε_2, ... — последовательность положительных чисел, сходящаяся к нулю. Обозначим через $S_{n,r}$ подмножество множества E', состоящее из точек, в которых $g_\nu<\varepsilon_r$ при $\nu \geqslant n$. Каждое из множеств $S_{1,r}$, $S_{2,r}$, ... содержится в следующем, и их внешнее предельное множество (§ 10.2.9) есть E', так как $g_\nu \to 0$ всюду на E'. Следовательно, существуют такие числа $n(r)$, что

$$m(E'-S_{n(r),r})<\frac{\delta}{2^r}.$$

Положим

$$S=S_{n(1),1}S_{n(2),2}\dots$$

При $n \geqslant n(r)$ и любом r на S выполняется неравенство $g_n<\varepsilon_r$. Это значит, что на S последовательность g_1, g_2, ... равномерно сходится к нулю. Наконец,

$$m(E-S)=m(E'-S)\leqslant\sum_{r=1}^{\infty}m(E'-S_{n(r),r})<\sum_{r=1}^{\infty}\frac{\delta}{2^r}=\delta,$$

что и завершает доказательство.

Пример. Воспользоваться теоремой Егорова для доказательства теоремы Лебега о сходимости.

10.6. Сравнение интеграла Лебега с интегралом Римана.

Если функция $f(x)$ имеет в интервале (a, b) интеграл Римана, то она имеет в нем и интеграл Лебега и эти интегралы равны между собой.

Если предположить, что функция $f(x)$ измерима, то это доказать легко. Подразделим интервал (a, b) точками x_0, x_1, ..., x_n. Обозначив через m_ν и M_ν нижнюю и верхнюю грани функции $f(x)$ при $x_\nu<x\leqslant x_{\nu+1}$, мы можем написать, пользуясь теоремой § 10.4.4(I):

$$\sum_{\nu=0}^{n-1}m_\nu(x_{\nu+1}-x_\nu)\leqslant\sum_{\nu=0}^{n-1}\int_{x_\nu}^{x_{\nu+1}}f(x)\,dx\leqslant\sum_{\nu=0}^{n-1}M_\nu(x_{\nu+1}-x_\nu).$$

*) Egoroff [1].

Средний член есть интеграл Лебега, а крайние стремятся к интегралу Римана. Следовательно, эти интегралы равны между собой.

Чтобы доказать, что из интегрируемости функции $f(x)$ по Риману следует ее измеримость, положим:

$$\varphi(x)=m_\nu \quad (x_\nu<x\leqslant x_{\nu+1}), \qquad \Phi(x)=M_\nu \quad (x_\nu<x\leqslant x_{\nu+1}).$$

Очевидно,

$$\sum_{\nu=0}^{n-1} m_\nu(x_{\nu+1}-x_\nu)=\int_a^b \varphi(x)\,dx, \qquad \sum_{\nu=0}^{n-1} M_\nu(x_{\nu+1}-x_\nu)=\int_a^b \Phi(x)\,dx.$$

Рассмотрим какую-нибудь бесконечную последовательность подразделений интервала (a, b), для которой $\max(x_{\nu+1}-x_\nu)\to 0$ и все точки деления каждого подразделения являются точками деления следующего подразделения. Пусть E — множество всех точек деления. E есть счетное множество, и потому оно имеет меру нуль и может не приниматься во внимание при интегрировании. Когда мы переходим от подразделения к следующему подразделению, функция $\varphi(x)$ не убывает, а функция $\Phi(x)$ не возрастает в каждой точке, не принадлежащей E. Следовательно, $\varphi(x)\to m(x)$, $\Phi(x)\to M(x)$, где $m(x)$ и $M(x)$ — нижний и верхний пределы функции $f(x)$ в точке x, т. е. пределы нижней и верхней граней в бесконечно малом интервале, содержащем x. Так как функции $\varphi(x)$ и $\Phi(x)$ измеримы, то таковы же функции $m(x)$ и $M(x)$, и, в силу теоремы Лебега о сходимости,

$$\lim\int_a^b \varphi(x)\,dx=\int_a^b m(x)\,dx, \qquad \lim\int_a^b \Phi(x)\,dx=\int_a^b M(x)\,dx.$$

Но если функция $f(x)$ интегрируема по Риману, то каждый из этих пределов равен ее интегралу. Следовательно,

$$\int_a^b \{M(x)-m(x)\}\,dx=0.$$

Так как $M(x)\geqslant m(x)$, то, согласно § 10.4.4 (VIII), $M(x)=m(x)$ почти всюду, а так как $M(x)\geqslant f(x)\geqslant m(x)$, то $f(x)=m(x)$ почти всюду. Этим измеримость функции $f(x)$ доказана.

10.7. Интеграл Лебега от неограниченной функции. Пусть $f(x)$ — неограниченная измеримая функция. Предположим сначала, что $f(x)\geqslant 0$. Пусть $\{f(x)\}_n$, или просто $(f)_n$, обозначает $f(x)$ в точках, где $f(x)\leqslant n$, и n в точках, где $f(x)>n$. Функция $\{f(x)\}_n$ ограничена и измерима и, таким образом, интегрируема. Мы определяем интеграл функции $f(x)$ по множеству E как предел интеграла функции $\{f(x)\}_n$, т. е. равенством

$$\int_E f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \int_E \{f(x)\}_n\,dx,$$

если этот предел существует.

Очевидно, для интегрируемости положительной функции $f(x)$ по множеству E необходимо и достаточно, чтобы интегралы $\int_E \{f(x)\}_n\,dx$ были ограничены.

Подобным же образом определяется интеграл отрицательной функции. В общем случае мы вводим множество E_1, на котором $f(x) \geqslant 0$, и множество E_2, на котором $f(x) < 0$, и определяем интеграл функции $f(x)$ формулой

$$\int_E f(x)\,dx = \int_{E_1} f(x)\,dx + \int_{E_2} f(x)\,dx.$$

Функция, интегрируемая в этом смысле, является «абсолютно интегрируемой»; это значит, что функция $|f(x)|$ также интегрируема. Очевидно,

$$\int_E |f(x)|\,dx = \int_{E_1} f(x)\,dx - \int_{E_2} f(x)\,dx.$$

Можно было бы, конечно, определить интегралы, не сходящиеся абсолютно. Но, как мы увидим, предыдущие интегралы сохраняют все характеристические свойства интегралов ограниченных функций, тогда как для неабсолютно сходящихся интегралов это было бы не так.

В дальнейшем мы будем называть *интегрируемой* всякую функцию, ограниченную или неограниченную, которая имеет интеграл в предыдущем смысле.

Здесь очень удобно пользоваться выражением «бесконечность», введенным в § 5.7.0.1. Если, например, интеграл

$$\int_F \{f(x)\}_n\,dx$$

стремится к бесконечности вместе с n, то мы пишем

$$\int_E f(x)\,dx = \infty.$$

Примеры. (I) Показать, что интеграл $\int_0^1 x^{-a}\,dx$, рассматриваемый как интеграл Лебега, существует и равен $1/(1-a)$, если $0 < a < 1$, но бесконечен, если $a \geqslant 1$.

[По Лебегу этот интеграл определен как

$$\lim_{n\to\infty} \left\{ \int_0^{n^{-1/a}} n\,dx + \int_{n^{-1/a}}^1 x^{-a}\,dx \right\},$$

и мы приходим к такому же результату, как в элементарной теории.]

(II) Более общим образом, пусть функция $f(x)$ неотрицательна, и пусть она ограничена в интервале $(\varepsilon, 1)$ при любом положительном ε. Тогда

$$\int_0^1 f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_\varepsilon^1 f(x)\,dx$$

в том смысле, что либо обе части конечны и равны между собой, либо обе части бесконечны.

(III) Функция

$$f(x) = \frac{d}{dx}\left(x^2 \sin\frac{1}{x^2}\right) = 2x\sin\frac{1}{x^2} - \frac{2}{x}\cos\frac{1}{x^2}$$

не интегрируема по Лебегу в интервале $(0, 1)$.

[Функция непрерывна в любом интервале $(\varepsilon, 1)$, и $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\int_\varepsilon^1 f(x)\,dx$ существует. Но

$$\int_0^1 |f(x)|\,dx = \infty;$$

действительно, в каждом из интервалов $\left\{\left(2n+\frac{1}{3}\right)\pi\right\}^{-1/2} \leqslant x \leqslant \left\{\left(2n-\frac{1}{3}\right)\pi\right\}^{-1/2}$

$$|f(x)| \geqslant \frac{2}{x}\left|\cos\frac{1}{x^2}\right| - 2x \geqslant \frac{1}{x} - 2x,$$

из чего нетрудно вывести, что

$$\int_0^1 \{|f(x)|\}_n\,dx > A\log n.\Big]$$

(IV) Пусть функция $f(x)$ измерима, и пусть e_n — подмножество множества E, состоящее из точек, в которых $n-1 \leqslant f(x) < n$. Необходимое и достаточное условие интегрируемости функции $f(x)$ на множестве E состоит в сходимости ряда $\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} |n|\,m(e_n)$.

(V) Можно определить интеграл положительной неограниченной функции $f(x)$, полагая $\{f(x)\}^n = f(x)$, если $f(x) \leqslant n$, и $\{f(x)\}^n = 0$, если $f(x) > n$, и заменяя в определении Лебега функцию $\{f(x)\}_n$ функцией $\{f(x)\}^n$. Показать, что это определение равносильно определению Лебега.

(VI) Если функция $f(x)$ измерима, $|f(x)| \leqslant \varphi(x)$ и функция $\varphi(x)$ интегрируема на E, то функция $f(x)$ также интегрируема на E.

(VII) Если функция $f(x)$ интегрируема на E и E_n есть часть множества E, на которой $|f(x)| \geqslant n$, то $m(E_n) = o(1/n)$.

(VIII) Если $f(x) = 0$ в каждой точке канторова троичного множества и $f(x) = p$ в каждом смежном интервале длины 3^{-p}, то интеграл

$$\int_0^1 f(x)\,dx$$

существует в смысле Лебега и равен 3.

10.7.1. Элементарные свойства интеграла. *Интеграл аддитивен, т. е. если E_1, E_2, ... — попарно непересекающиеся* *множества и* $E = E_1 + E_2 + \ldots$, *то*

$$\int_E f\,dx = \int_{E_1} f\,dx + \int_{E_2} f\,dx + \ldots$$

Без ущерба для общности можно считать, что $f \geqslant 0$. Действительно, если теорема верна для положительных функций, то она верна, точно так же, для отрицательных функций, общий же случай сводится к этим двум случаям сложением. Это замечание упростит многие наши доказательства.

Мы определяем функцию $(f)_n$, как выше. Интеграл от $(f)_n$ аддитивен, так что

$$\int_E (f)_n\,dx = \sum_k \int_{E_k} (f)_n\,dx \leqslant \sum_k \int_{E_k} f\,dx.$$

Пусть теперь $n \to \infty$. Если множеств только конечное число, то доказываемое равенство сразу получается из предыдущего равенства. Если же множеств бесконечно много, то из предыдущего неравенства следует, что

$$\int_E f\,dx \leqslant \sum \int_{E_k} f\,dx.$$

Но при любом K

$$\int_E (f)_n\,dx \geqslant \sum_{k=1}^{K} \int_{E_k} (f)_n\,dx,$$

и, переходя к пределу сначала при $n \to \infty$, а затем при $K \to \infty$, мы получаем неравенство

$$\int_E f\,dx \geqslant \sum \int_{E_k} f\,dx.$$

Этим теорема доказана. (Обращаем внимание читателя на сходство между этим доказательством и данным в § 1.6.2 доказательством того, что для двойного ряда с положительными членами сумма строк равна сумме столбцов.)

10.7.2. *Сумма конечного числа интегрируемых функций интегрируема, и интеграл суммы равен сумме интегралов слагаемых.*

Достаточно рассмотреть две функции, скажем $f(x)$ и $g(x)$. Предположим сначала, что обе они неотрицательны, и пусть $\varphi = f + g$. Тогда $(\varphi_n) \leqslant (f)_n + (g)_n \leqslant (\varphi)_{2n}$. Следовательно,

$$\int_E (\varphi)_n\,dx \leqslant \int_E (f)_n\,dx + \int_E (g)_n\,dx \leqslant \int_E (\varphi)_{2n}\,dx,$$

и, заставляя n стремиться к ∞, мы видим, что

$$\int_E \varphi\,dx \leqslant \int_E f\,dx + \int_E g\,dx \leqslant \int_E \varphi\,dx.$$

Этим для положительных функций теорема доказана. Если $f \geqslant 0$, $g < 0$, то мы рассматриваем множество, на котором $\varphi \geqslant 0$. Так как

$$f = \varphi + (-g),$$

то на нем доказываемое равенство является следствием уже доказанного. Совершенно так же на множестве, где $\varphi < 0$, мы пользуемся равенством $-g = f + (-\varphi)$.

Поскольку теорема доказана, таким образом, для сумм и разностей положительных функций, она верна и для функций произвольного знака.

10.7.3. Нижеследующие теоремы легко выводятся из соответствующих теорем об ограниченных функциях.

(I) *Если k — постоянная, то*

$$\int_E kf\,dx = k\int_E f\,dx.$$

(II)
$$\left|\int_E f\,dx\right| \leqslant \int_E |f|\,dx.$$

(III) *Две функции, равные почти всюду, имеют один и тот же интеграл.*

(IV) *Если $f(x) \geqslant 0$ и $\int_E f(x)\,dx = 0$, то $f(x) = 0$ почти всюду на E.*

(V) *Если функция $f(x)$ интегрируема на E и E_1, E_2, ... — последовательность содержащихся в E множеств, для которой $m(E_k) \to 0$, то*

$$\int_{E_k} f(x)\,dx \to 0;$$

при этом для всех таких последовательностей сходимость равномерна.

Мы можем считать, что $f(x) \geqslant 0$. Для всякого ε существует такое n, что

$$\int_E [f(x) - \{f(x)\}_n]\,dx < \varepsilon.$$

При фиксированном n

$$\int_{E_k} \{f(x)\}_n\,dx \leqslant nm(E_k) < \varepsilon \qquad (k > k_0).$$

Следовательно,

$$\int_{E_k} f(x)\,dx = \int_{E_k} \{f(x)\}_n\,dx + \int_{E_k} [f(x) - \{f(x)\}_n]\,dx \leqslant$$
$$\leqslant \int_{E_k} \{f(x)\}_n\,dx + \int_E [f(x) - \{f(x)\}_n]\,dx < 2\varepsilon \qquad (k > k_0),$$

что и завершает доказательство.

Пример *). Пусть функция $f(x)$ интегрируема в интервале (a, b), а функция $\varphi(x)$ интегрируема в этом интервале по Риману. Доказать, что если интервал (a, b) подразделен точками x_ν, как в § 10.1, то при $\max(x_{\nu+1}-x_\nu)\to 0$

$$\lim \sum_{\nu=0}^{n-1} \varphi(x_\nu) \int_{x_\nu}^{x_{\nu+1}} f(x)\,dx = \int_a^b \varphi(x) f(x)\,dx.$$

10.8. Общая теорема Лебега о сходимости. *Пусть $f_1(x), f_2(x), \ldots$ — такая последовательность функций, что существует интегрируемая на множестве E функция $F(x)$, для которой $|f_n(x)| \leqslant F(x)$ во всех точках x множества E и при всех значениях n. Если во всех точках x множества E*

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x),$$

то

$$\lim_{n\to\infty} \int_E f_n(x)\,dx = \int_E f(x)\,dx.$$

Как обычно, достаточно, чтобы условия были выполнены почти всюду. Доказательство почти не отличается от доказательства теоремы об ограниченной сходимости. Мы определяем функции g_n и множества E_n так же, как там. Согласно § 10.7.1 ряд

$$\sum \int_{E_n} F(x)\,dx$$

сходится, и мы можем написать:

$$\int_E g_n\,dx \leqslant \varepsilon\{m(E_1)+\ldots+m(E_n)\} + 2\int_{E_{n+1}} F(x)\,dx + 2\int_{E_{n+2}} F(x)\,dx + \ldots$$

Из этого следует, что

$$\overline{\lim} \int_E g_n\,dx \leqslant \varepsilon m(E),$$

после чего доказательство доводится до конца так же, как в случае ограниченной сходимости.

Эта теорема позволяет доказать новую теорему о почленном интегрировании рядов. *Ограниченно сходящийся ряд можно умножить на любую интегрируемую функцию и проинтегрировать почленно.* Действительно, пусть $s_n(x)$ есть n-я частичная сумма ряда, и пусть $\varphi(x)$ — интегрируемая функция. Если $|s_n(x)| \leqslant M$, то

$$|\varphi(x) s_n(x)| \leqslant M |\varphi(x)|,$$

и так как стоящая справа функция интегрируема, то она может быть принята за функцию $F(x)$ предыдущей теоремы.

---

*) Titchmarsh [1].

10.8.1. Нижеследующая теорема часто бывает полезна. В своей первоначальной форме она принадлежит Фату *).

Пусть $f_n(x) \geqslant 0$ *для всех значений* n *и всех точек* x *множества* E. *Если* $f_n(x) \to f(x)$ *при* $n \to \infty$, *то*

$$\int_E f(x)\,dx \leqslant \varliminf_{n\to\infty} \int_E f_n(x)\,dx.$$

В частности, этим утверждается, что если правая часть конечна, то функция $f(x)$ почти всюду конечна и интегрируема; если же функция $f(x)$ не интегрируема или бесконечна на множестве положительной меры, то

$$\lim_{n\to\infty} \int_E f_n(x)\,dx = \infty.$$

Нетрудно проверить, что

$$\lim_{n\to\infty} \{f_n(x)\}_k = \{f(x)\}_k.$$

В силу теоремы об ограниченной сходимости из этого следует, что $\lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_E \{f_n(x)\}_k\,dx = \int\limits_E \{f(x)\}_k\,dx$. Но

$$\int_E \{f_n(x)\}_k\,dx \leqslant \int_E f_n(x)\,dx,$$

и, таким образом,

$$\varliminf_{n\to\infty} \int_E f_n(x)\,dx \geqslant \int_E \{f(x)\}_k\,dx.$$

Пусть теперь $k \to \infty$. Если функция $f(x)$ почти всюду конечна, то мы удаляем из E множество, на котором она бесконечна, и сразу получаем доказываемое неравенство. Если же $f(x) = \infty$ на некотором множестве e положительной меры, то при любом k

$$\int_E \{f(x)\}_k\,dx \geqslant km(e),$$

так что обе части доказываемого равенства равны ∞.

10.8.2. Теорема о сходимости для монотонных последовательностей. *Пусть* $f_1(x), f_2(x), \ldots$ — *последовательность положительных интегрируемых функций, не убывающая в каждой точке* x *множества* E. *Пусть* $f(x)$ — *ее предел, конечный или бесконечный. Тогда*

$$\lim_{n\to\infty} \int_E f_n(x)\,dx = \int_E f(x)\,dx$$

в следующем смысле:

---

*) Fatou [1], стр. 375.

(I) *если левая часть конечна, то функция $f(x)$ почти всюду конечна и интегрируема и имеет место равенство;*

(II) *если правая часть конечна, то и левая часть конечна и имеет место равенство;*

(III) *если левая часть бесконечна, то функция $f(x)$ неинтегрируема или бесконечна на множестве положительной меры;*

(IV) *если функция $f(x)$ неинтегрируема или бесконечна на множестве положительной меры, то левая часть бесконечна.*

Если левая часть конечна, то такова же, в силу теоремы Фату, правая часть. Равенство в случаях (I) и (II) следует из теоремы Лебега о сходимости, так как $f_n(x) \leqslant f(x)$. После этого (III) следует из (II), а (IV) — из (I).

10.8.3. Теперь мы можем придать более удовлетворительную форму теореме § 1.7.7 об интегрировании рядов.

Если $u_n(x) \geqslant 0$ для всех значений n и x, то

$$\int_a^b \left\{\sum u_n(x)\right\} dx = \sum \int_a^b u_n(x)\, dx$$

в предположении, что одна из частей этого равенства сходится.

Действительно, частичные суммы $s_n(x) = u_1(x) + \ldots + u_n(x)$ положительны и не убывают при любом значении x.

В частности, сходимость правой части влечет за собой сходимость ряда $\sum u_n(x)$ для почти всех значений x.

Мы не рассмотрели случая, когда область интегрирования бесконечна. Поскольку бесконечные интегралы Лебега этого рода не были еще определены, мы должны отложить полное изложение результатов до конца следующего параграфа.

10.9. Интегралы по бесконечному интервалу. Пусть $f(x)$ — функция, интегрируемая в интервале (a, b) при любом конечном значении b. Положим $f_1(x) = f(x)$, если $f(x) \geqslant 0$, и $f_1(x) = 0$ в противном случае; положим $f_2(x) = -f(x)$, если $f(x) < 0$, и $f_2(x) = 0$ в противном случае. Тогда

$$\int_a^b f(x)\, dx = \int_a^b f_1(x)\, dx - \int_a^b f_2(x)\, dx.$$

Каждый из стоящих справа интегралов является неубывающей функцией от b и потому стремится к конечному пределу или к положительной бесконечности, когда $b \to \infty$. Если оба предела конечны, то мы пишем

$$\int_a^\infty f_1(x)\, dx = \lim_{b\to\infty} \int_a^b f_1(x)\, dx, \quad \int_a^\infty f_2(x)\, dx = \lim_{b\to\infty} \int_a^b f_2(x)\, dx$$

и определяем интеграл функции $f(x)$ в интервале (a, ∞) формулой

$$\int_a^\infty f(x)\,dx = \int_a^\infty f_1(x)\,dx - \int_a^\infty f_2(x)\,dx.$$

Из определения видно, что сходящийся интеграл этого рода абсолютно сходится; действительно,

$$\int_a^\infty |f(x)|\,dx = \int_a^\infty f_1(x)\,dx + \int_a^\infty f_2(x)\,dx.$$

Таким образом, интеграл $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx$ не является, строго говоря, интегралом Лебега, поскольку он не сходится абсолютно.

Многие свойства интегралов с конечными пределами естественно переносятся на интегралы с бесконечными пределами. Обычно бывает вполне ясно, возможно ли такое перенесение, и мы оставляем детали читателю.

Теорема § 10.8.3 допускает прямое обобщение: *если* $u_n(x) \geqslant 0$, *то*

$$\int_a^\infty \left\{\sum u_n(x)\right\} dx = \sum \int_a^\infty u_n(x)\,dx,$$

в предположении, что одна из частей этого равенства сходится.

Сходимость одной из частей этого равенства влечет за собой сходимость такого же выражения с конечным верхним пределом b. Следовательно (§ 10.8.3), равенство будет обеспечено, если мы заменим в обеих частях бесконечный верхний предел конечным пределом b. После этого доказываемое равенство получается как в § 1.7.7.

Заметим в заключение, что примеры §§ 1.7.5, 1.7.8, в которых

$$\sum \int \neq \int \sum,$$

столь же убедительны в случае интеграла Лебега, как в случае интеграла Римана. Ограничения, обеспечивающие равенство, сохраняют свой характер, хотя в целом теорема упрощается.

ГЛАВА XI

ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ И ИНТЕГРИРОВАНИЕ

11.1. Введение. «Основная теорема интегрального исчисления» состоит в том, что дифференцирование и интегрирование — взаимно обратные операции. Этот общий принцип можно трактовать двумя различными способами. Если функция $f(x)$ интегрируема, то функция

$$F(x)=\int_a^x f(t)\,dt \tag{1}$$

называется ее неопределенным интегралом и принцип состоит в том, что

$$F'(x)=f(x). \tag{2}$$

С другой стороны, если $F(x)$ — заданная функция и функция $f(x)$ определена формулой (2), то принцип состоит в том, что

$$\int_a^x f(t)\,dt=F(x)-F(a). \tag{3}$$

Главная задача настоящей главы — выяснить, в каком смысле верны эти формулировки.

Как и в элементарной теории, соотношение (2) является следствием соотношения (1) в каждой точке x, в которой функция $f(x)$ непрерывна. Действительно, для всякого ε существует столь малое h_0, что $|f(t)-f(x)|<\varepsilon$ при $|t-x|<h_0$. В силу теоремы о среднем значении

$$\left|\frac{F(x+h)-F(x)}{h}-f(x)\right|=\left|\frac{1}{h}\int_x^{x+h}\{f(t)-f(x)\}dt\right|<\varepsilon \qquad (|h|<h_0),$$

откуда и получается соотношение (2).

Однако в теории Лебега мы имеем дело с функциями, которые, вообще говоря, разрывны. К ним предыдущее рассуждение неприменимо. К тому же действительный интерес представляет не то, выполняется ли соотношение (2) в отдельных точках, а то, выполняется ли оно вообще. Мы можем дать на этот вопрос удовлетворительный ответ.

Какова бы ни была интегрируемая функция $f(x)$, ее неопределенный интеграл $F(x)$ имеет почти всюду производную, равную $f(x)$.

Гораздо более трудной проблемой является вывод соотношения (3) из соотношения (2). Необходимо, прежде всего, чтобы производная $F'(x)$ существовала, по меньшей мере, почти всюду, а это, как мы увидим в § 11.22, может не иметь места. Далее, если производная $F'(x)$ существует, необходимо, чтобы она была интегрируемой. Именно здесь мы встретили бы основную трудность в рамках теории Римана: как показывает пример *), построенный Вольтерра, производная $F'(x)$ может существовать всюду и быть ограниченной, не будучи интегрируемой по Риману. В теории Лебега производная всегда интегрируема, если она ограничена, так как она всегда измерима. Но если она не ограничена, то она может не быть интегрируемой по Лебегу. Проблема получила удовлетворительное решение, но для него потребовался более общий процесс, называемый тотализацией или интегрированием по Данжуа, для рассмотрения которого мы не имеем здесь места. Результат состоит в том, что если функция $F'(x)$ всюду конечна, то соотношение (3), в котором интеграл понимается в смысле Данжуа, является следствием соотношения (2).

11.2. Дифференцируемость. Недифференцируемые функции. Обычные функции анализа в общем дифференцируемы, т. е. дифференцируемы для большинства значений переменного. Могут существовать точки, в которых они не дифференцируемы, но эти исключительные точки обычно бывают изолированными. По-видимому, этим обстоятельством было одно время создано впечатление, что непрерывная функция обязательно дифференцируема. Однако Вейерштрасс показал, что это впечатление совершенно ошибочно. *Существуют непрерывные функции, нигде не имеющие производной.*

Тем не менее, мысль, что «обычная функция» имеет производную, оказывается в общем правильной, если это не вполне ясное выражение применяется к другому классу функций. Как мы увидим, она правильна в том смысле, что *монотонная функция имеет почти всюду конечную производную.*

Сначала мы рассмотрим недифференцируемые функции, а затем перейдем к положительной части теории.

11.2.1. Непрерывные недифференцируемые функции. Существует много простых примеров непрерывных функций, недифференцируемых в отдельных точках. Так, если $f(x)=|x|$, то отношение $\frac{f(h)-f(0)}{h}$ стремится при $h\to 0$ к двум различным пределам: к 1, если $h>0$, то и к -1, если $h<0$. Для функции

*) Hobson, т. I, стр. 461.

же $f(x) = x \sin \frac{1}{x}$ $(x \neq 0)$, $f(0) = 0$ это отношение не стремится ни к какому определенному пределу ни при $h > 0$, ни при $h < 0$.

Далее, методом, который называется сгущением особенностей, можно строить функции, не дифференцируемые на всюду плотном множестве, например на множестве рациональных точек. Пусть $r_1, r_2, \ldots$ — последовательность, состоящая из всех рациональных чисел, заключенных между 0 и 1. Положим

$$F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n f(x - r_n),$$

где $f(x)$ — функция, имеющая указанную особенность при $x = 0$, а коэффициенты a_n достаточно быстро стремятся к нулю. Функция $F(x)$ имеет эту особенность в каждой рациональной точке. Например, функция $F(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{|x - r_n|}{3^n}$ непрерывна, так как ряд равномерно сходится. Но она не дифференцируема ни в какой рациональной точке. Действительно,

$$\frac{F(r_k + h) - F(r_k)}{h} = \sum_{n=1}^{k-1} \frac{|r_k + h - r_n| - |r_k - r_n|}{h \cdot 3^n} + \frac{|h|}{h \cdot 3^k} +$$

$$+ \sum_{k+1}^{\infty} \frac{|r_k + h - r_n| - |r_k - r_n|}{h \cdot 3^n},$$

и при $h \to 0$ первый член стремится к некоторому пределу, второй член стремится к 3^{-k}, если $h > 0$, и к -3^{-k}, если $h < 0$, а третий член по абсолютной величине не превосходит

$$\sum_{k+1}^{\infty} \frac{1}{3^n} = \frac{1}{2 \cdot 3^k}.$$

Следовательно, производной $F'(r_k)$ не существует.

Чтобы получить *нигде* не дифференцируемую функцию, нужно применить совсем другие методы. Первый пример такой функции был указан Вейерштрассом.

11.2.2. Недифференцируемая функция Вейерштрасса. Эта функция определяется рядом

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b^n \cos(a^n \pi x),$$

где $0 < b < 1$, а a — нечетное натуральное число. Ряд равномерно сходится в любом интервале, так что функция $f(x)$ всюду непрерывна. С другой стороны, если $ab > 1$, то ряд, который получается при почленном дифференцировании этого ряда, расходится. Само по себе это не доказывает, что функция не дифференцируема, однако это указывает на такую возможность. Мы покажем, что *если* $ab > 1 + \frac{3}{2}\pi$, *то функция* $f(x)$ *не имеет конечной производной ни при каком значении* x.

Мы можем написать:

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \sum_{n=0}^{\infty} b^n \frac{\cos\{a^n\pi(x+h)\} - \cos(a^n\pi x)}{h} =$$

$$= \sum_{n=0}^{m-1} + \sum_{m}^{\infty} = S_m + R_n.$$

Так как

$$|\cos\{a^n\pi(x+h)\} - \cos(a^n\pi x)| = |a^n\pi h \sin\{a^n\pi(x+\theta h)\}| \leqslant a^n\pi|h|,$$

то

$$|S_m| \leqslant \sum_{n=0}^{m-1} \pi a^n b^n = \pi\frac{a^m b^m - 1}{ab-1} < \pi\frac{a^m b^m}{ab-1}.$$

Теперь мы оценим снизу $|R_m|$, придав h специальное значение. Именно, $a^m x = \alpha_m + \xi_m$, где α_m — целое число и $-1/2 \leqslant \xi_m < 1/2$, и мы полагаем

$$h = \frac{1-\xi_m}{a^m}.$$

Ясно, что $0 < h \leqslant 3/(2a^m)$ и

$$a^n\pi(x+h) = a^{n-m}\cdot a^m\pi(x+h) = a^{n-m}\pi(\alpha_m+1).$$

Так как a — нечетное число, из этого следует, что

$$\cos\{a^n\pi(x+h)\} = (-1)^{a^{n-m}(\alpha_m+1)} = (-1)^{\alpha_m+1}.$$

Далее,

$$\cos(a^n\pi x) = \cos\{a^{n-m}\pi(\alpha_m+\xi_m)\} =$$

$$= \cos(a^{n-m}\pi\alpha_m)\cos(a^{n-m}\pi\xi_m) = (-1)^{\alpha_m}\cos(a^{n-m}\pi\xi_m).$$

Следовательно,

$$R_m = \frac{(-1)^{\alpha_m+1}}{h}\sum_{n=m}^{\infty} b^n\{1+\cos(a^{n-m}\pi\xi_m)\}.$$

Все члены этого ряда положительны, так что, отбрасывая все члены, кроме первого, мы получаем оценку

$$|R_m| > \frac{b^m}{|h|} > \frac{2}{3}a^m b^m.$$

Таким образом,

$$\left|\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\right| \geqslant |R_m| - |S_m| > \left(\frac{2}{3} - \frac{\pi}{ab-1}\right) a^m b^m.$$

Если $ab > 1 + \frac{3}{2}\pi$, то число, стоящее в скобках, положительно, и если $m \to \infty$, то $h \to 0$ и правая часть стремится к бесконечности. Следовательно, отношение $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ принимает значения, сколь угодно большие по абсолютной величине, и конечной производной $f'(x)$ не существует.

График этой функции можно описать как состоящий из бесконечного числа бесконечно малых извилин, но почти невозможно дать о нем наглядное представление, не исказив его существенных черт *).

11.2.3. Нижеследующий пример непрерывной недифференцируемой функции принадлежит Ван-дер-Вардену**). Функция подобна функции Вейерштрасса, но результат получается совсем другим путем.

Пусть $f_n(x)$ — расстояние между точкой x и ближайшей к ней точкой вида $\frac{m}{10^n}$, где m — целое число. Функция

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$$

непрерывна, но не дифференцируема.

Каждая из функций $f_n(x)$ непрерывна, и $|f_n(x)| < 10^{-n}$, так что ряд равномерно сходится. Следовательно, функция $f(x)$ непрерывна.

Пусть x — произвольное число из интервала (0, 1). Представим x десятичной дробью и положим $x' = x - 10^{-q}$, если q-й десятичный знак этой дроби есть 4 или 9, и $x' = x + 10^{-q}$ в остальных случаях. Если $n < q$, то x и x' имеют одно и то же ближайшее число вида $\frac{m}{10^n}$ и лежат по одну сторону от него; если же $n \geqslant q$, то числа $\frac{m}{10^n}$ и $\frac{m'}{10^n}$, соответствующие числам x и x', отличаются друг от друга на $x - x'$. Эти правила можно проверить на простых примерах, таких, как $q = 2$, $x = 0{,}326$, 0,346 или 0,396.

---

*) О дальнейших свойствах этой функции см. Hardy [7], где тот же результат получен при $ab > 1$. Общий метод построения непрерывных недифференцируемых функций был указан Кноппом; см. Knopp [2].

**) Van der Waerden [1].

Из изложенного следует, что

$$f_n(x')-f_n(x)=\begin{cases}\pm(x'-x) & (n<q),\\ 0 & (n\geqslant q).\end{cases}$$

Таким образом,

$$f(x')-f(x)=\sum_{n=1}^{q-1}\pm(x'-x)=p(x'-x),$$

где p — целое число, четное или нечетное вместе с $q-1$. Следовательно, отношение $(f(x')-f(x))/(x'-x)$ не может стремиться к конечному пределу, когда $x'\to x$,

11.3. Производные числа функции. В то время как производная

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

может существовать или не существовать, каждое из четырех выражений

$$\overline{\lim_{h\to+0}}\frac{f(x+h)-f(x)}{h},\quad \underline{\lim_{h\to+0}}\frac{f(x+h)-f(x)}{h},$$

$$\overline{\lim_{h\to-0}}\frac{f(x+h)-f(x)}{h},\quad \underline{\lim_{h\to-0}}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

всегда имеет определенный смысл: это конечное число, $+\infty$ или $-\infty$. Эти выражения называются производными числами функции: верхним справа, нижним справа, верхним слева и нижним слёва. Мы обозначаем их через

$$D^+f(x),\ D_+f(x),\ D^-f(x),\ D_-f(x);$$

знак $+$ или $-$ есть знак числа h в допредельном отношении, и он стоит сверху или снизу в зависимости от того, какой берется предел. Если $D^+f=D_+f$, то говорят, что функция имеет правую производную, если $D^-f=D_-f$ — левую производную. Необходимое и достаточное условие существования обыкновенной производной заключается в равенстве всех производных чисел.

Мы обозначаем левую и правую производные, если они существуют, через $f'_-(x)$ и $f'_+(x)$.

Примеры. (I) Функция $\sqrt{x^2}$, где всегда берется положительное значение корня, имеет при $x=0$ различные производные $f'_-(x)$ и $f'_+(x)$.

(II) Пусть $f(x)=x\sin\frac{1}{x}$ $(x\neq 0)$, 0 $(x=0)$. Тогда при $x=0$

$$D_+f=-1,\quad D^+f=1,\quad D_-f=-1,\quad D^-f=1,$$

(III) Пусть

$$f(x)=\begin{cases} ax\sin^2\frac{1}{x}+bx\cos^2\frac{1}{x} & (x>0),\\ 0 & (x=0),\\ a'x\sin^2\frac{1}{x}+b'x\cos^2\frac{1}{x} & (x<0),\end{cases}$$

где $a<b$, $a'<b'$. Тогда при $x=0$

$$D_+f=a,\quad D^+f=b,\quad D_-f=a',\quad D^-f=b'.$$

(IV) Если функция $f(x)$ непрерывна в интервале (a, b) и одно из ее производных чисел не отрицательно в этом интервале, то $f(a)\leqslant f(b)$.

[Пусть, например, $D^+f\geqslant 0$. Предположим, что $f(b)-f(a)<-\varepsilon(b-a)$, и положим $\varphi(x)=f(x)-f(a)+\varepsilon(x-a)$. Тогда $\varphi(b)<0$ и, кроме того, $\varphi(x)>0$ для некоторых значений x (так как $D^+f(a)\geqslant 0$). Следовательно, $\varphi(x)=0$ при некоторых значениях x, заключенных между a и b. Если ξ — наибольшее из таких значений, то $D^+\varphi(\xi)\leqslant 0$ и $D^+f(\xi)+\varepsilon\leqslant 0$, что противоречит условиям. Следовательно, $f(b)-f(a)\geqslant -\varepsilon(b-a)$ при любом положительном ε, и, таким образом, $f(b)\geqslant f(a)$.]

(V) Допредельное отношение и производные числа непрерывной функции имеют в любом интервале одни и те же границы; это значит, что если одно из производных чисел удовлетворяет условию $\alpha\leqslant Df\leqslant\beta$, то $\alpha\leqslant\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}\leqslant\beta$, и наоборот.

[Рассмотреть функцию $\varphi(x)=f(x)-\alpha x$ и воспользоваться предыдущим примером.]

(VI) Если одно из производных чисел функции $f(x)$ непрерывно в некоторой точке, то функция $f(x)$ имеет в этой точке производную.

11.4. Функции ограниченной вариации. Говорят, что функция $f(x)$ имеет в интервале (a, b) ограниченную вариацию, если она может быть представлена в этом интервале в виде $\varphi(x)-\psi(x)$, где φ и ψ — неубывающие ограниченные функции.

Нетрудно проверить, что сумма, разность и произведение двух функций ограниченной вариации — также функции ограниченной вариации.

Другое определение функции ограниченной вариации состоит в том, что сумма $\sum\limits_{\nu=0}^{n-1}|f(x_{\nu+1})-f(x_\nu)|$, отвечающая подразделению интервала (a, b) произвольными точками $a=x_0<x_1<\ldots<x_n=b$, предполагается ограниченной некоторой постоянной, не зависящей от выбора подразделения. Верхняя грань всех таких сумм называется полной вариацией функции.

Нетрудно проверить, что если выполнено первое условие, то выполнено и второе. Действительно,

$$|f(x_{\nu+1})-f(x_\nu)|\leqslant\varphi(x_{\nu+1})-\varphi(x_\nu)+\psi(x_{\nu+1})-\psi(x_\nu),$$

так что

$$\sum_{\nu=0}^{n-1}|f(x_{\nu+1})-f(x_\nu)|\leqslant\varphi(b)-\varphi(a)+\psi(b)-\psi(a).$$

Докажем обратное. Пусть p — сумма положительных и $-n$ — сумма отрицательных разностей $f(x_{\nu+1})-f(x_\nu)$. Если

$$v=\sum |f(x_{\nu+1})-f(x_\nu)|,$$

то $v=p+n$, $f(b)-f(a)=p-n$, так что

$$v=2p+f(a)-f(b), \quad v=2n+f(b)-f(a).$$

Следовательно, если суммы v ограничены, то таковы же суммы p и n. Если V, P и N — верхние грани сумм v, p и n, то

$$V=2P+f(a)-f(b), \quad V=2N+f(b)-f(a).$$

Пусть $V(x)$, $P(x)$ и $N(x)$ — соответствующие числа для интервала (a, x). Очевидно, это — неубывающие ограниченные функции от x, причем

$$V(x)=2P(x)+f(a)-f(x), \quad V(x)=2N(x)+f(x)-f(a).$$

Таким образом,

$$f(x)=f(a)+P(x)-N(x).$$

Это — требуемое представление функции $f(x)$.

Функции $V(x)$, $P(x)$ и $N(x)$ называются *полной вариацией*, *положительной вариацией* и *отрицательной вариацией* функции $f(x)$ в интервале (a, x).

Если функция $f(x)$ непрерывна и имеет ограниченную вариацию, то ее вариация $V(x)$ непрерывна.

Действительно, существует подразделение интервала (a, x), для которого

$$v>V(x)-\varepsilon,$$

причем одну из точек деления, x', можно считать столь близкой к x, что $|f(x)-f(x')|<\varepsilon$. Положим

$$v'=v-|f(x)-f(x')|.$$

v' есть одна из сумм, соответствующих интервалу (a, x'), вследствие чего

$$V(x')\geqslant v'>V(x)-2\varepsilon.$$

Так как V — неубывающая функция, то из этого следует, что $V(x')\to V(x)$, когда $x'\to x$ слева. Подобным же образом $V(x')\to\to V(x)$, когда $x'\to x$ справа. Следовательно, $V(x)$ есть непрерывная функция.

Непрерывная функция ограниченной вариации есть разность двух непрерывных неубывающих функций.

Действительно, если функция $f(x)$ непрерывна, то таковы же $P(x)$ и $N(x)$.

11.4.1. Производная функции ограниченной вариации. Целью ближайших трех параграфов является доказательство того, что *функция ограниченной вариации почти всюду имеет конечную производную.*

Наше доказательство основывается на нижеследующих леммах, принадлежащих Серпинскому *). Это — предложения типа теоремы Гейне — Бореля, но применимые к множествам, которые не предполагаются даже измеримыми.

Лемма 1. *Пусть E — множество, лежащее в интервале (a, b), и H — семейство интервалов. Предположим, что каждая точка x из E служит левым концом по крайней мере одного интервала $(x, x+h)$ из H. Тогда существует конечное число неперекрывающихся интервалов из H, сумма S которых покрывает подмножество E' множества E с внешней мерой $m_e(E') > m_e(E) - \varepsilon$.*

Пусть E_n — множество тех точек $x \in E$, для которых существуют интервалы $(x, x+h)$ из H с $h > 1/n$. Очевидно, E есть внешнее предельное множество для множеств E_n; следовательно, $\lim m_e(E_n) = m_e(E)$ (§ 10.2.9), и существует столь большое n, что $m_e(E_n) > m_e(E) - \frac{1}{2}\varepsilon$.

Пусть a_1 и b_1 — нижняя и верхняя грани множества E_n, и пусть $l = b_1 - a_1$. Положим $\eta = \frac{\varepsilon}{2(nl+1)}$ и найдем в E_n точку x_1 слева от точки $a_1 + \eta_1$. Пусть $(x_1, x_1 + h_1)$ — ассоциированный с ней интервал длины $h_1 > 1/n$.

Если в E_n имеются точки, лежащие справа от $x_1 + h_1$, то пусть a_2 — их нижняя грань. Пусть x_2 — точка множества E_n, лежащая в интервале $(a_2, a_2 + \eta)$, и $(x_2, x_2 + h_2)$ — ассоциированный с ней интервал длины $h_2 > 1/n$.

Продолжая этот процесс, мы через конечное число шагов достигнем точки b_1. Действительно, каждый шаг приближает нас к ней по крайней мере на $1/n$. Если указанное число шагов равно N, то $(N-1)/n < l$, т. е. $N < nl + 1$.

Пусть S — сумма построенных таким образом интервалов $(x_\nu, x_\nu + h_\nu)$ и T — сумма интервалов $(x_\nu - \eta, x_\nu)$. Тогда $E_n \subset S + T$ и $m(T) < N\eta < \frac{1}{2}\varepsilon$. Следовательно,

$$m_e(E) - \frac{1}{2}\varepsilon < m_e(E_n) \leq m_e(E_n S) + m_e(E_n T) < m_e(E_n S) + \frac{1}{2}\varepsilon,$$

так что множество $E' = E_n S$ обладает требуемым свойством.

Лемма 2. *Предположим, сверх того, что для каждой точки x из E существуют сколь угодно малые интервалы $(x, x+h)$ из H. Тогда интервалы, составляющие S, можно выбрать так, чтобы было выполнено еще и неравенство*

$$m(S) < m_e(E) + \varepsilon.$$

*) Sierpinski [1]. Близкая лемма: W. H. Young and G. C. Young [1].

Дополнительное условие необходимо. Возьмем, например, в качестве E единственную точку x, а в качестве H единственный интервал $(x, x+1)$. Тогда заключение леммы 1 будет верно, но заключение леммы 2 неверно.

Пусть O — такое открытое множество, содержащее E, что

$$m(O) < m_e(E) + \varepsilon.$$

Пусть H_1 — подсемейство семейства H, состоящее из тех интервалов, которые лежат в O. В силу нашего дополнительного предположения, каждая точка множества E является левым концом по крайней мере одного из интервалов семейства H_1. Поэтому мы можем применить лемму 1 к семейству H_1, и мы получим новый конечный набор интервалов с тем же свойством. Но теперь эти интервалы лежат в O, так что

$$m(S) \leqslant m(O) < m_e(E) + \varepsilon.$$

Этим лемма доказана.

В этих леммах интервалы, из которых состоит множество S, можно считать открытыми или замкнутыми в зависимости от того, что более удобно в каждом случае. Действительно, если множество S получено как сумма замкнутых интервалов, то мы можем заменить эти интервалы открытыми, удалив их концевые точки, т. е. множество меры нуль, что, очевидно, не окажет влияния на результат.

Лемма 3. *В предыдущих условиях интервалы, составляющие S, можно выбрать в произвольно заданном открытом множестве G, содержащем E.*

Действительно, при построении множества S можно вместо O взять OG.

11.4.2. *Если функция $f(x)$ не убывает в интервале (a, b), то она имеет почти всюду в этом интервале конечную производную $f'(x)$.*

Пусть *) E — множество, на котором $D_+f < D^+f$. Прежде всего мы покажем, что $m_e(E) = 0$.

Пусть u, v — рациональные числа и $E(u, v)$ — множество, на котором

$$D_+f < u < v < D^+f.$$

E есть сумма всех множеств $E(u, v)$ $(u < v)$. Следовательно, достаточно доказать, что $m_e\{E(u, v)\} = 0$ для любой пары u, v.

Предположим, в противоположность этому, что одно из множеств $E(u, v)$ имеет положительную внешнюю меру, скажем, μ. Каждая точка x этого множества является левым концом сколь

*) Это доказательство принадлежит Райхману и Саксу; см. Rajchman et Saks [1].

угодно малых интервалов $(x, x+h)$, для которых

$$f(x+h)-f(x)<hu.$$

Следовательно (лемма 2), существует такой конечный набор неперекрывающихся интервалов $(x, x+h)$, что их сумма S покрывает часть E' множества $E(u, v)$ с внешней мерой $m_e(E')>\mu-\varepsilon$ и что $\sum_1 h<\mu+\varepsilon$, где $\sum_1$ обозначает суммирование по этим интервалам. Очевидно,

$$\textstyle\sum_1 \{f(x+h)-f(x)\}<u\sum_1 h<u(\mu+\varepsilon).$$

Но каждая точка множества E' служит левым концом интервалов $(x, x+k)$, для которых

$$f(x+k)-f(x)>kv,$$

так что, в силу леммы 3, можно найти конечное число неперекрывающихся интервалов $(x, x+k)$, лежащих в S, сумма которых имеет внешнюю меру, бо́льшую $m_e(E')-\varepsilon>\mu-2\varepsilon$. Если $\sum_2$ обозначает суммирование по этим интервалам, то

$$\textstyle\sum_2 \{f(x+k)-f(x)\}>v\sum_2 k>v(\mu-2\varepsilon).$$

Так как $f(x)$ не убывает и интервалы $(x, x+k)$ лежат в интервалах $(x, x+h)$, то

$$\textstyle\sum_2 \{f(x+k)-f(x)\}\leqslant \sum_1 \{f(x+h)-f(x)\}.$$

Следовательно, $v(\mu-2\varepsilon)<u(\mu+\varepsilon)$, чего не может быть, если ε достаточно мало. Таким образом, $f'_+(x)$ существует почти всюду. Подобным же образом $f'_-(x)$ существует почти всюду.

Такое же рассуждение можно провести, взяв D^- вместо D^+: каждая точка множества E' служит правым концом сколь угодно малых интервалов $(x-k, x)$, для которых $f(x)-f(x-k)>kv$, и, поступая, как выше, мы приходим к заключению, что почти всюду $D_+f\geqslant D^-f$, т.е. почти всюду $f'_+(x)\geqslant f'_-(x)$. Так же можно установить обратное неравенство, что и завершает доказательство.

11.4.3. Существует более общая теорема о множестве, на котором может иметь место неравенство $f'_-(x)\neq f'_+(x)$: результат не зависит от того, монотонна ли функция.

Множество точек, в которых правая и левая производные какой-либо функции существуют и различны, конечно или счетно.

Пусть E — множество, на котором $f'_-(x)<f'_+(x)$. Занумеруем все рациональные числа в последовательность $r_1, r_2, \ldots$ Если x — точка множества E, то существует такой номер k, что

$$f'_-(x)<r_k<f'_+(x);$$

будем считать, что k — наименьший из таких номеров. Далее, существует такой номер m, что $r_m<x$ и что при $r_m<\xi<x$

$$\frac{f(\xi)-f(x)}{\xi-x}<r_k;$$

будем считать, что m — наименьший из таких номеров. Наконец, существует такой номер n, что $r_n > x$ и что при $x < \xi < r_n$

$$\frac{f(\xi) - f(x)}{\xi - x} > r_k;$$

будем считать, что n — наименьший из таких номеров. Из выбора m и n следует, что

$$f(\xi) - f(x) > r_k(\xi - x) \qquad (r_m < \xi < r_n;\ \xi \neq x). \tag{1}$$

Итак, каждой точке x множества E отвечает вполне определенная тройка натуральных чисел (k, m, n). При этом различным точкам отвечают различные тройки; действительно, если точкам x_1 и x_2 отвечает одна и та же тройка, то, полагая в неравенстве (1) $x = x_1$, $\xi = x_2$, мы видим, что $f(x_2) - f(x_1) > r_k(x_2 - x_1)$, полагая же $x = x_2$, $\xi = x_1$, получаем обратное неравенство.

Так как множество троек (k, m, n) счетно, то из этого следует, что множество E конечно или счетно. Подобным же образом множество, на котором $f'_+(x) < f'_-(x)$, конечно или счетно, что и завершает доказательство теоремы.

Поскольку мера счетного множества равна нулю, этой теоремой можно воспользоваться для того, чтобы закончить другим способом доказательство теоремы предыдущего параграфа.

11.5. Интегралы. Функция, являющаяся неопределенным интегралом Лебега от другой функции, называется *интегралом.*

Интеграл непрерывен. Действительно, если $F(x)$ — интеграл от $f(x)$, то

$$F(x+h) - F(x) = \int_x^{x+h} f(t)\,dt,$$

правая же часть, согласно теореме § 10.7.3. (V), стремится к нулю вместе с h.

Интеграл положительной функции есть неубывающая функция. Действительно, если $f(x) \geqslant 0$ и $h > 0$, то

$$F(x+h) - F(x) = \int_x^{x+h} f(t)\,dt \geqslant 0.$$

Интеграл есть функция ограниченной вариации. Действительно, пусть $F(x) = F(a) + \int_a^x f(t)\,dt$. Положим $f_1(x) = f(x)$, если $f(x) \geqslant 0$, и $f_1(x) = 0$, если $f(x) < 0$. Тогда $f_1(x) \geqslant 0$, $f_2(x) = f_1(x) - f(x) \geqslant 0$ и

$$F(x) = F(a) + \int_a^x f_1(t)\,dt - \int_a^x f_2(t)\,dt,$$

так что $F(x)$ есть разность двух ограниченных неубывающих функций.

11.5.1. Дифференцирование неопределенного интеграла. Пусть функция $f(x)$ интегрируема в интервале (a, b), и пусть

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt.$$

Так как функция $F(x)$ имеет ограниченную вариацию, то она почти всюду имеет конечную производную $F'(x)$. Нашей ближайшей целью является доказательство того, что почти всюду $F'(x) = f(x)$.

11.5.2. Доказательство основывается на следующей лемме.

Если функция $\varphi(x)$ интегрируема и $\int_a^x \varphi(t)\,dt = 0$ для любого значения x в интервале (a, b), то $\varphi(x) = 0$ почти всюду в этом интервале.

Если это не так, то по крайней мере одно из неравенств $\varphi(x) > 0$, $\varphi(x) < 0$ имеет место на множестве положительной меры. Пусть, например, это первое неравенство. Всякое множество положительной меры содержит замкнутое множество положительной меры; действительно, его дополнение может быть заключено в открытое множество, мера которого меньше длины интервала (a, b). Таким образом, $\varphi(x) > 0$ на некотором замкнутом множестве E положительной меры.

Но интеграл от φ по любому интервалу есть нуль. Следовательно (§ 10.7.1), и интеграл по любому открытому множеству есть нуль. Следовательно, и интеграл по любому замкнутому множеству есть нуль и, в частности, $\int_E \varphi(x)\,dx = 0$. Следовательно (§ 10.7.3), $\varphi(x) = 0$ почти всюду на E, что противоречит определению E. Этим лемма доказана.

11.5.3. *Если функция $f(x)$ ограничена и $F(x)$ есть ее неопределенный интеграл, то почти всюду $F'(x) = f(x)$.*

Пусть $|f(x)| \leqslant M$. Тогда

$$\left|\frac{F(x+h) - F(x)}{h}\right| = \left|\frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)\,dt\right| \leqslant M$$

и почти всюду $\lim\limits_{h\to 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = F'(x)$. Применяя теорему об ограниченной сходимости*), мы видим, что при $h \to 0$

$$\int_a^x \frac{F(t+h) - F(t)}{h}\,dt \to \int_a^x F'(t)\,dt.$$

*) Чтобы применить эту теорему в том виде, в каком она изложена в § 10.5, мы берем какую-нибудь стремящуюся к нулю *последовательность* значений h. То же относится к следующему параграфу.

Но левая часть равна

$$\frac{1}{h}\int_{a+h}^{x+h} F(t)\,dt - \frac{1}{h}\int_{a}^{x} F(t)\,dt = \frac{1}{h}\int_{x}^{x+h} F(t)\,dt - \frac{1}{h}\int_{a}^{a+h} F(t)\,dt,$$

и так как функция F непрерывна, то эта разность стремится к $F(x) - F(a)$. Следовательно,

$$\int_{a}^{x} F'(t)\,dt = F(x) - F(a), \tag{1}$$

т. е.

$$\int_{a}^{x} \{F'(t) - f(t)\}\,dt = 0 \tag{2}$$

для всех значений x. В силу леммы из этого следует, что $F'(x) = f(x)$ почти всюду.

11.5.4. Чтобы распространить теорему на неограниченные функции, мы докажем еще одну лемму.

Если функция $\varphi(x)$ непрерывна и не убывает в интервале (a, b), то производная $\varphi'(x)$ интегрируема и

$$\int_{a}^{b} \varphi'(x)\,dx \leqslant \varphi(b) - \varphi(a).$$

Так как $\frac{\varphi(x+h) - \varphi(x)}{h} \geqslant 0$ и при $h \to 0$ это отношение почти всюду стремится к $\varphi'(x)$, то, в силу теоремы Фату (§ 10.8.1),

$$\varliminf_{h \to a} \int_{a}^{b} \frac{\varphi(x+h) - \varphi(x)}{h}\,dx \geqslant \int_{a}^{b} \varphi'(x)\,dx.$$

Но функция φ непрерывна. Следовательно, левая часть равна $\varphi(b) - \varphi(a)$ (см. предыдущее доказательство), что и завершает доказательство.

11.5.5. $F'(x) = f(x)$ *почти всюду для всякой интегрируемой функции* $f(x)$.

Как обычно, мы можем считать, что $f(x) \geqslant 0$. Мы определяем $\{f(x)\}_n$, как в § 10.7. Так как $f(t) - \{f(t)\}_n \geqslant 0$, то функция $\int_{a}^{x} [f(t) - \{f(t)\}_n]\,dt$ не убывает, и потому ее производная неотрицательна. Следовательно,

$$\frac{d}{dx}\left\{\int_{a}^{x} f(t)\,dt\right\} \geqslant \frac{d}{dx}\left\{\int_{a}^{x} \{f(t)\}_n\,dt\right\}$$

всюду, где эти производные существуют. Следовательно (§ 11.5.3), $F'(x) \geqslant \{f(x)\}_n$ почти всюду. Заставляя n стремиться к бесконечности, мы видим, что почти всюду $F'(x) \geqslant f(x)$. Из этого следует, что

$$\int_a^b F'(x)\,dx \geqslant \int_a^b f(x)\,dx.$$

Но из только что доказанной леммы следует обратное неравенство. Таким образом, имеет место равенство, т. е.

$$\int_a^b \{F'(x) - f(x)\}\,dx = 0.$$

Так как подынтегральная функция неотрицательна, то она почти всюду равна нулю. Этим теорема доказана.

11.6. Лебеговское множество. Предыдущая теорема была следующим образом обобщена Лебегом.

Если функция $f(x)$ интегрируема, то для всех значений x, не принадлежащих некоторому множеству меры нуль, и всех значений α

$$\lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \int_x^{x+h} |f(t) - \alpha|\,dt = |f(x) - \alpha|.$$

Другими словами, $|f(x) - \alpha|$ есть производная своего неопределенного интеграла для всех значений α и почти всех значений x.

Если бы значение α было фиксированным, то тут нечего было бы доказывать: поскольку функция $|f(x) - \alpha|$ интегрируема, равенство следовало бы из предыдущей основной теоремы.

Рассмотрим сначала все рациональные значения α, занумеровав их в последовательность $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ Множества, на которых доказываемая формула не верна при $\alpha = \alpha_1, \alpha_2, \ldots$, все имеют меру нуль, так что и их сумма имеет меру нуль. Следовательно, $|f(x) - \alpha|$ есть производная своего неопределенного интеграла при всех рациональных значениях α во всех точках x, не принадлежащих некоторому множеству E меры нуль.

Пусть теперь x — любая точка, не принадлежащая E, α — любое иррациональное число и β — близкое к нему рациональное число. Так как $||f(t) - \alpha| - |f(t) - \beta|| \leqslant |\beta - \alpha|$, то

$$\left| \frac{1}{h} \int_x^{x+h} |f(t) - \alpha|\,dt - \frac{1}{h} \int_x^{x+h} |f(t) - \beta|\,dt \right| \leqslant |\beta - \alpha|.$$

Но $\left| \frac{1}{h} \int_x^{x+h} |f(t) - \beta|\,dt - |f(x) - \beta| \right| \leqslant \varepsilon$, если $|h| \leqslant h_0\ (\beta, \varepsilon)$.

Следовательно,

$$\left|\frac{1}{h}\int_{x}^{x+h}|f(t)-\alpha|\,dt-|f(x)-\alpha|\right|\leqslant$$
$$\leqslant\left|\frac{1}{h}\int_{x}^{x+h}|f(t)-\alpha|\,dt-\frac{1}{h}\int_{x}^{x+h}|f(t)-\beta|\,dt\right|+$$
$$+\left|\frac{1}{h}\int_{x}^{x+h}|f(t)-\beta|\,dt-|f(x)-\beta|\right|+\left||f(x)-\beta|-|f(x)-\alpha|\right|\leqslant$$
$$\leqslant|\beta-\alpha|+\varepsilon+|\beta-\alpha|,$$

правую же часть можно сделать сколь угодно малой, выбрав соответствующим образом сначала β, а затем ε. Таким образом, во всякой точке x, не принадлежащей к E, $|f(x)-\alpha|$ есть производная своего неопределенного интеграла и при всех иррациональных значениях α. Этим теорема доказана.

Полагая, в частности, $\alpha=f(x)$, мы видим, что при $h\to 0$

$$\int_{0}^{h}|f(x+t)-f(x)|\,dt=o(h)$$

для почти всех значений x. Множество значений x, для которых имеет место это соотношение, называется *лебеговским множеством.*

Лебеговскому множеству принадлежат, конечно, все точки непрерывности.

Значение лебеговского множества состоит в том, что многие теоремы, доказанные ранее для точек непрерывности, оказались верными и для всех точек лебеговского множества и, таким образом, верными почти всюду. Примеры будут даны в главе, посвященной рядам Фурье.

Заметим в заключение, что если мы опустим в формуле знак абсолютной величины, то α исчезнет и теорема сведется к теореме предыдущего параграфа.

11.7. Абсолютно непрерывные функции. *Функция $f(x)$ называется абсолютно непрерывной в интервале (a, b), если для всякого ε можно найти такое δ, что*

$$\sum_{\nu=1}^{n}|f(x_\nu+h_\nu)-f(x_\nu)|\leqslant\varepsilon$$

для любых неперекрывающихся интервалов $(x_1, x_1+h_1), \ldots, (x_n, x_n+h_n)$, у которых $\sum h_\nu\leqslant\delta$.

Абсолютно непрерывная функция непрерывна, так как в качестве предыдущей последовательности интервалов можно взять последовательность, составленную из одного интервала.

Абсолютно непрерывная функция имеет ограниченную вариацию. Действительно, ее полная вариация в любом интервале длины δ не превосходит ε, вследствие чего ее полная вариация в интервале (a, b) не превосходит $(b-a)\,\varepsilon/\delta$.

Существуют, однако, непрерывные функции ограниченной вариации, не являющиеся абсолютно непрерывными. Пример такой функции будет дан в § 11.7.2.

11.7.1. *Для того чтобы функция была интегралом, необходимо и достаточно, чтобы она была абсолютно непрерывна.*

Если $F(x)$ — интеграл от $f(x)$, то

$$\sum_{\nu=1}^{n} |F(x_\nu+h_\nu)-F(x_\nu)| \leqslant \sum_{\nu=1}^{n} \int_{x_\nu}^{x_\nu+h_\nu} |f(x)|\,dx = \int_E |f(x)|\,dx,$$

где E — сумма интервалов $(x_\nu, x_\nu+h_\nu)$. Согласно теореме § 10.7.3 (V), правая часть стремится к нулю вместе с $\sum h_\nu$, как этого требует определение предыдущего параграфа. Следовательно, функция $F(x)$ абсолютно непрерывна.

Для доказательства обратного утверждения нам нужна следующая лемма.

Если функция $\varphi(x)$ абсолютно непрерывна и почти всюду $\varphi'(x)=0$, то $\varphi(x)$ есть постоянная.

Пусть E — множество, на котором $\varphi'(x)=0$. Каждая точка x из E является левым концом сколь угодно малых интервалов $(x, x+h)$, для которых

$$|\varphi(x+h)-\varphi(x)| < \varepsilon h.$$

В силу лемм § 11.4.1 мы можем найти конечное число неперекрывающихся интервалов $(x, x+h)$, которые покрывают все множество E, за исключением некоторой его части с мерой, меньшей δ, и следовательно, весь интервал (a, b), за исключением некоторой его части с мерой, меньшей δ.

Пусть $x_1, x_2, \ldots$ — концы выбранных интервалов, и пусть $\sum_1$ обозначает суммирование по этим интервалам, а $\sum_2$ — суммирование по дополнительным интервалам. Тогда

$$|\varphi(b)-\varphi(a)| \leqslant \sum\nolimits_1 |\varphi(x_{\nu+1})-\varphi(x_\nu)| + \sum\nolimits_2 |\varphi(x_{\nu+1})-\varphi(x_\nu)|.$$

Но

$$\sum\nolimits_1 |\varphi(x_{\nu+1})-\varphi(x_\nu)| < \varepsilon \sum\nolimits_1 (x_{\nu+1}-x_\nu) \leqslant \varepsilon(b-a),$$

а

$$\sum\nolimits_2 |\varphi(x_{\nu+1})-\varphi(x_\nu)|$$

стремится к нулю вместе с δ (в силу определения абсолютной непрерывности), так как $\sum_2 (x_{\nu+1}-x_\nu) < \delta$. Таким образом, переходя к пределу при $\delta \to 0$, мы видим, что

$$|\varphi(b)-\varphi(a)| \leqslant \varepsilon(b-a),$$

откуда следует, благодаря произвольности ε, что $\varphi(b)=\varphi(a)$. Подобным же образом $\varphi(x)=\varphi(a)$ при любом значении x.

Пусть теперь $F(x)$ — абсолютно непрерывная функция. Так как она непрерывна и имеет ограниченную вариацию, то мы можем представить ее в виде $F(x)=F_1(x)-F_2(x)$, где $F_1(x)$ и $F_2(x)$ — неубывающие непрерывные функции. В силу леммы § 11.5.4, производные $F_1'(x)$ и $F_2'(x)$ интегрируемы, и, следовательно, такова же производная $F'(x)$. Рассмотрим функцию $\int\limits_a^x F'(t)\,dt$. Она абсолютно непрерывна, и, следовательно, такова же функция

$$\varphi(x)=F(x)-\int\limits_a^x F'(t)\,dt.$$

Но $\varphi'(x)=0$ почти всюду, так что, в силу леммы, $\varphi(x)$ есть постоянная. Таким образом,

$$F(x)-\int\limits_a^x F'(t)\,dt=F(a),$$

т. е. $F(x)$ есть интеграл от $F'(x)$.

11.7.2. Неубывающая непрерывная функция, не являющаяся интегралом*). Такую функцию можно построить, пользуясь канторовым троичным множеством (§ 10.2.9.1).

Пусть a_n принимает значение 0, 2, и пусть $b_n=\frac{1}{2}a_n$, так что b_n всегда есть 0 или 1. Если $x=0, a_1a_2a_3\ldots(3)$ — точка канторова множества E, то мы полагаем, пользуясь двоичными дробями:

$$f(x)=0, b_1b_2b_3\ldots(2).$$

На концах интервала $\delta_{p,k}$ функция $f(x)$ принимает значения

$$0, b_1\ldots b_m 0111\ldots(2), \qquad 0, b_1\ldots b_m 1000\ldots(2),$$

которые равны между собой. Мы определяем функцию $f(x)$ в интервале $\delta_{p,k}$, полагая ее равной ее значению на концах этого интервала.

$f(x)$ есть неубывающая функция. Так как на интервалах множества CE функция $f(x)$ постоянна, то при доказательстве можно ограничиться рассмотрением точек множества E. Пусть

$$x'=0, a_1'a_2'\ldots(3), \qquad x''=0, a_1''a_2''\ldots(3)$$

*) Подробности об этой функции: Hille and Tamarkin [1].

— две такие точки, и пусть $x'' > x'$. Тогда существует такой номер n, что $a'_m = a''_m$ при $m < n$, но $a'_n < a''_n$, и ясно, что

$$f(x') = 0, b'_1 \dots b'_{n-1} b'_n \dots (2) \leqslant 0, b''_1 \dots b''_{n-1} b''_n \dots (2) = f(x'').$$

$f(x)$ есть непрерывная функция. Мы должны доказать, что $f(x') \to f(x)$, когда $x' \to x$, и опять-таки можно ограничиться рассмотрением точек x, x' из E. Пусть

$$x = 0, a_1 a_2 \dots (3), \quad x' = 0, a'_1 a'_2 \dots (3).$$

Если $x' \to x$, то существует такая стремящаяся к бесконечности функция $n = n(x')$, что $a'_m = a_m$ при $m < n$, и мы видим, что

$$f(x) - f(x') = 0, 0 0 \dots 0 b_n \dots - 0, 0 0 \dots b'_n \dots \to 0.$$

Однако $\int\limits_0^1 f'(x)\, dx \neq f(1) - f(0)$. Действительно, правая часть равна единице, так как

$$f(1) = 0, 111 \dots (2) = 1, \quad f(0) = 0;$$

левая же часть равна нулю, так как функция $f(x)$ постоянна в интервалах $\delta_{p,k}$, вследствие чего $f'(x) = 0$ во всех этих интервалах, т. е. почти всюду.

Таким образом, функция $f(x)$ не является интегралом своей производной и, значит, не является абсолютно непрерывной. Последнее легко усмотреть и непосредственно. Рассмотрим сумму

$$\sum |f(\beta_k) - f(\alpha_k)|,$$

распространенную на интервалы (α_k, β_k), которые сохраняются после p-го шага, т. е. после удаления интервалов $\delta_{p,k}$. Она равна

$$\sum \{f(\beta_k) - f(\alpha_k)\} = f(1) - f(0) = 1.$$

Но сумма $\sum (\beta_k - \alpha_k) = 1 - \frac{1}{3} - \frac{2}{9} - \dots - \frac{2^{p-1}}{3^p} = \left(\frac{2}{3}\right)^p$ стремится к нулю, когда $p \to \infty$. Следовательно, функция $f(x)$ не является абсолютно непрерывной.

11.8. Интегрирование производной. Формула

$$\int\limits_a^x f'(t)\, dt = f(x) - f(a) \qquad (a \leqslant x \leqslant b) \tag{1}$$

может оказаться неверной не только для функции, имеющей производную почти всюду, но и для функции, имеющей производную всюду в интервале (a, b). Это может объясняться двумя обстоятельствами. Возьмем, например, функцию

$$f(x) = x^2 \sin \frac{1}{x^2} \quad (x \neq 0), \qquad f(0) = 0,$$

уже рассмотренную в § 10.7. Для нее

$$f'(x) = 2x \sin \frac{1}{x^2} - \frac{2}{x} \cos \frac{1}{x^2} \quad (x \neq 0), \qquad f'(0) = 0,$$

так что производная $f'(x)$ существует всюду; однако, как мы видели в § 10.7, она не интегрируема по Лебегу, вследствие чего формула (1) не имеет смысла в лебеговской теории.

Если мы представим себе функцию, у которой особенности такого рода распределены по всему интервалу, то мы получим некоторое представление о существе проблемы интегрирования производной. Проблема эта была решена при помощи интеграла Данжуа, представляющего собой неабсолютно сходящийся интеграл чрезвычайно общего типа. Рассмотрение его свойств завело бы нас слишком далеко. Результат состоит в том, что *формула* (1), *в которой интеграл есть интеграл Данжуа, верна для всякой функции со всюду конечной производной.*

Если предположить, что $f'(x)$ существует не всюду, а только почти всюду, то формула (1) может потерпеть еще более полное крушение. Интеграл слева может существовать как интеграл Лебега, но не быть равным правой части. Пример уже был приведен в § 11.7.2; это — пример, в котором $f'(x) = 0$ почти всюду, но $f(x)$ не есть постоянная.

Поэтому, чтобы получить формулу (1) в теории Лебега, мы должны наложить на $f(x)$ или на $f'(x)$ дальнейшие ограничения. Здесь имеется несколько теорем различной степени трудности, зависящей от того, что предполагается. Общим для них является то, что производная $f'(x)$ предполагается существующий всюду. Пример § 11.7.2 показывает, что никакие условия, выполненные почти всюду, не являются достаточными.

11.8.1. *Формула* § 11.8 (1) *верна, если производная* $f'(x)$ *существует всюду и ограничена.*

Если $|f'(x)| \leqslant M$, то (*Ч. М.*, § 126) существует такое число θ, заключенное между 0 и 1, что

$$\left| \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \right| = |f'(x + \theta h)| \leqslant M. \tag{1}$$

Таким образом, стоящее слева отношение ограниченно сходится к $f'(x)$, и доказательство может быть проведено так же, как доказательство формулы § 11.5.3 (1) (с $f(x)$ вместо $F(x)$).

Другое доказательство: из неравенства (1) следует, что

$$\sum_{\nu=1}^{n} |f(x_\nu + h_\nu) - f(x_\nu)| \leqslant M \sum_{\nu=1}^{n} h_\nu.$$

Таким образом, функция $f(x)$ абсолютно непрерывна, и остается сослаться на § 11.7.1.

11.8.2. *Формула § 11.8 (1) верна, если производная $f'(x)$ всюду конечна и интегрируема.*

Из этого, в частности, следует, что формула § 11.8 (1) верна, если $f(x)$ есть функция ограниченной вариации и производная $f'(x)$ всюду конечна. Действительно, если функция $f(x)$ имеет ограниченную вариацию, то производная $f'(x)$ интегрируема (см. § 11.5.4 и пример 12 ниже).

Нижеследующее доказательство совпадает в основном с доказательством Шлезингера и Плеснера*). Оно опирается на две леммы.

Лемма 1. *Пусть E — множество меры нуль, лежащее в интервале (a, b), и ε — положительное число. Существует такая неубывающая абсолютно непрерывная функция $\chi(x)$, что $\chi'(x) = +\infty$ на E и $\chi(b) - \chi(a) < \varepsilon$.*

Заключим E в такую последовательность открытых множеств $O_1, O_2, \ldots$, что $O_1 \supset O_2 \supset \ldots$, $m(O_n) < \varepsilon_n$ и $\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \ldots = \varepsilon$. Пусть $f_n(x)$ — характеристическая функция множества O_n. Тогда

$$\int_a^b f_n(t)\,dt = m(O_n) < \varepsilon_n.$$

Положим $\varphi_n(x) = f_1(x) + f_2(x) + \ldots + f_n(x)$. При любом значении t последовательность чисел $\varphi_n(t)$ не убывает, и

$$\int_a^x \varphi_n(t)\,dt < \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \ldots + \varepsilon_n < \varepsilon.$$

Следовательно (§ 10.8.2), $\varphi_n(t)$ почти всюду стремится к некоторому конечному пределу $\varphi(t)$ и

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^x \varphi_n(t)\,dt = \int_a^x \varphi(t)\,dt.$$

Покажем, что функция $\chi(x) = \int_a^x \varphi(t)\,dt$ обладает требуемыми свойствами. Так как она является интегралом неотрицательной функции, то она абсолютно непрерывна и не убывает. Далее,

$$\chi(b) - \chi(a) = \int_a^b \varphi(t)\,dt < \varepsilon.$$

Наконец, на O_n

$$\frac{d}{dx} \int_a^x f_\nu(t)\,dt = 1,$$

*) Schlesinger und Plessner, *Lebesguesche Integrale*, 166—174.

так что, если $\chi_n(x)=\int\limits_a^x \varphi_n(t)\,dt$, то на O_n

$$\chi_n'(x)=\sum_{\nu=1}^{n}\frac{d}{dx}\int\limits_a^x f_\nu(t)\,dt=n.$$

Следовательно, на O_n

$$\frac{\chi(x+h)-\chi(x)}{h}\geqslant\frac{\chi_n(x+h)-\chi_n(x)}{h}>n-\delta,$$

если $|h|<h_0(\delta)$, так что $D\chi\geqslant n$ для каждого из четырех производных чисел функции χ. Поскольку каждая точка множества E принадлежит всем множествам O_n, из этого следует, что $\chi'(x)=+\infty$ на E.

Лемма 2. *Пусть функция $f(x)$ непрерывна в интервале (a, b). Если почти всюду в этом интервале $D^+f\geqslant 0$ и нигде не имеет места равенство $D^+f=-\infty$, то $f(x)$ есть неубывающая функция.*

Достаточно доказать, что $f(b)\geqslant f(a)$, так как интервал (a, b) можно заменить любым меньшим интервалом.

Пусть E — множество, на котором $D^+f<0$. В силу леммы 1, существует такая неубывающая абсолютно непрерывная функция $\chi(x)$, что $\chi'(x)=+\infty$ на E и $\chi(b)-\chi(a)<\varepsilon$.

Положим $g(x)=f(x)+\chi(x)$. Так как $D^+g\geqslant D_+\chi+D^+f$, причем $D^+f\neq-\infty$, а $D_+\chi=+\infty$ на E, то $D^+g=+\infty$ на E. Далее, так как χ есть неубывающая функция, то на CE

$$D^+g\geqslant D^+f.$$

Таким образом, $D^+g\geqslant 0$ всюду, и, следовательно (§ 11.3, пример (IV)), $g(b)\geqslant g(a)$, т. е.

$$f(b)-f(a)\geqslant-\{\chi(b)-\chi(a)\}>-\varepsilon.$$

Ввиду произвольности ε из этого следует, что $f(b)\geqslant f(a)$.

11.8.3. Теперь мы можем доказать теорему, сформулированную в § 11.8.2. Пусть n — произвольное положительное число. Положим

$$g_n(x)=\min\{f'(x),\ n\},\qquad G_n(x)=\max\{f'(x),\ -n\}.$$

Так как функция $f'(x)$ интегрируема, то таковы же функции $g_n(x)$, $G_n(x)$, и $g_n(x)\leqslant f'(x)\leqslant G_n(x)$. Положим, далее,

$$f_n(x)=\int\limits_a^x g_n(t)\,dt,\qquad F_n(x)=\int\limits_a^x G_n(t)\,dt.$$

Очевидно,

$$\lim_{n\to\infty}f_n(x)=\lim_{n\to\infty}F_n(x)=\int\limits_a^x f'(t)\,dt.$$

Но

$$D^+\{F_n(x)-f(x)\}\geqslant D^+F_n-D^+f,$$

последняя же разность почти всюду равна $G_n(x)-f'(x)$. Таким образом, почти всюду

$$D^+\{F_n(x)-f(x)\}\geqslant 0.$$

Кроме того, всюду

$$\frac{F_n(x+h)-F_n(x)}{h}\geqslant\frac{1}{h}\int\limits_x^{x+h}(-n)\,dt=-n,$$

так что $D^+F_n\geqslant -n$ и $D^+(F_n-f)\neq-\infty$. Следовательно (лемма 2), $F_n(x)-f(x)$ есть неубывающая функция, и, в частности,

$$F_n(x)-f(x)\geqslant F_n(a)-f(a)=-f(a).$$

Заставляя n стремиться к ∞, мы видим, что

$$\int\limits_a^x f'(t)\,dt\geqslant f(x)-f(a).$$

Аналогично, взяв $f_n(x)$ вместо $F_n(x)$, мы получаем обратное неравенство. Этим теорема доказана.

РАЗЛИЧНЫЕ ПРИМЕРЫ

1. При $x=\frac{1}{3}$ функция $f(x)$, определенная в § 11.2.3, имеет производную, равную $+\infty$.

2. Плотность множества E в точке x может быть определена как

$$\lim_{h\to\infty}\frac{m(EH)}{2h},$$

где H — интервал $(x-h,\ x+h)$.

Доказать, что плотность множества почти всюду на нем равна 1 и почти всюду вне его равна 0.

[Рассмотреть интеграл характеристической функции множества E.]

3. Пусть E — множество, лежащее в интервале $(0,\ 1)$. Показать, что если существует такое положительное число δ, что для всякого интервала $(\alpha,\ \beta)$

$$m\{E\,(\alpha,\ \beta)\}\geqslant\delta\,(\beta-\alpha),$$

то $m(E)=1$.

4. Если при $h\to 0$

$$\int\limits_a^b|f(x+h)-f(x)|=o(h),$$

то функция $f(x)$ почти всюду равна некоторой постоянной.

$\left[\text{Рассмотреть } \int\limits_{x_1}^{x_2}\{f(x+h)-\ (x)\}\,dx\ ^{*)}.\right]$

*) См. Titchmarsh [7], где, однако, доказательство излишне сложно.

5. Пусть α и β — положительные числа, и пусть $f(x)=x^{\alpha}\sin x^{-\beta}$ $(0<x\leqslant 1)$, $f(0)=0$. Доказать, что $f(x)$ имеет в интервале $(0, 1)$ ограниченную вариацию, если $\alpha>\beta$, и не имеет в нем ограниченной вариации, если $\alpha\leqslant\beta$.

6. Пусть функция $f(x)$, определенная при $0\leqslant x<1$, абсолютно непрерывна в любом интервале $(0, \xi)$ с $\xi<1$, и пусть ее полная вариация в интервале $(0, \xi)$ остается ограниченной, когда $\xi\to 1$. Показать, что $f(x)$ стремится к некоторому пределу, когда $x\to 1$, и что если мы примем значение $f(1)$ равным этому пределу, то функция $f(x)$ будет абсолютно непрерывной во всем интервале $(0, 1)$.

[Этот пример показывает, что различие между непрерывностью и ограниченностью вариации, с одной стороны, и абсолютной непрерывностью, с другой стороны, связано с целым интервалом и не может быть обнаружено по поведению функции в окрестности какой-либо отдельной точки.]

7. Теорема § 11.8.2 остается верной, если $f'(x)=+\infty$ на некотором счетном множестве.

8. Для того чтобы функция была выпуклой в интервале (a, b) в смысле § 5.3.1, необходимо и достаточно, чтобы она была интегралом некоторой ограниченной возрастающей функции в каждом интервале, внутреннем к интервалу (a, b).

9. Если функция $f(x)$ абсолютно непрерывна, то такова же при $p\geqslant 1$ функция $|f(x)|^p$.

10. Для того чтобы функция $f(x)$ почти всюду в интервале (a, b) была равна некоторой функции ограниченной вариации, необходимо и достаточно, чтобы при $h\to 0$ имело место соотношение

$$\int_a^b |f(x+h)-f(x)|\,dx=O(h)$$

(вне интервала (a, b) можно положить, например, $f(x)=0$) *).

[Если $f(x)$ — функция ограниченной вариации, то существуют такие положительные неубывающие и ограниченные в интервале (a, b) функции φ и ψ, что $f(x)=\varphi(x)-\psi(x)$. При $h>0$

$$\int_a^b |f(x+h)-f(x)|\,dx\leqslant\int_a^b \{\varphi(x+h)-\varphi(x)\}\,dx+\int_a^b \{\psi(x+h)-\psi(x)\}\,dx=$$
$$=\int_b^{b+h}\varphi(t)\,dt-\int_a^{a+h}\varphi(t)\,dt+\int_b^{b+h}\psi(t)\,dt-\int_a^{a+h}\psi(t)\,dt=O(h),$$

так что предыдущее условие выполнено.

Предположим теперь, что это условие выполнено, и положим

$$\varphi_n(x)=n\int_x^{x+\frac{1}{n}} f(t)\,dt.$$

*) Hardy and Littlewood [5], стр. 599—601 и [6], стр. 619.

Мы можем написать:

$$\int_a^b |\varphi_n(x+h)-\varphi_n(x)|\,dx = n\int_a^b dx \left| \int_{x+h}^{x+h+\frac{1}{n}} f(t)\,dt - \int_x^{x+\frac{1}{n}} f(t)\,dt \right| =$$

$$= n\int_a^b dx \left| \int_0^{\frac{1}{n}} \{f(x+t+h)-f(x+t)\}\,dt \right| \leqslant n\int_a^b dx \int_0^{\frac{1}{n}} |f(x+t+h)-f(x+t)|\,dt =$$

$$= n\int_0^{\frac{1}{n}} dt \int_a^b |f(x+t+h)-f(x+t)|\,dx = O(h).$$

С другой стороны, для всякого конечного набора неперекрывающихся интервалов $(x_\nu,\ x_\nu+h_\nu)$

$$\sum |\varphi_n(x_\nu+h_\nu)-\varphi_n(x_\nu)| = \sum \left| \int_{x_\nu}^{x_\nu+h_\nu} \varphi_n'(x)\,dx \right| \leqslant$$

$$\leqslant \sum \int_{x_\nu}^{x_\nu+h_\nu} |\varphi_n'(x)|\,dx \leqslant \int_a^b |\varphi_n'(x)|\,dx,$$

в силу же теоремы Фату и только что доказанного

$$\int_a^b |\varphi_n'(x)|\,dx \leqslant \varliminf \int_a^b \left| \frac{\varphi_n(x+h)-\varphi_n(x)}{h} \right| dx = O(1).$$

Таким образом,

$$\sum |\varphi_n(x_\nu+h_\nu)-\varphi_n(x_\nu)| = O(1).$$

Но $\varphi_n(x) \to f(x)$ почти всюду. Следовательно,

$$\sum |f(x_\nu+h_\nu)-f(x_\nu)| < A,$$

если ни одна из точек x_ν, $x_\nu+h_\nu$ не принадлежит некоторому множеству E меры нуль. Если a не принадлежит E, то мы выводим отсюда методом § 11.4, что $f(x)=f(a)+P(x)-N(x)$ на CE, где $P(x)$ и $N(x)$ ограничены и не убывают на CE. На E мы можем определить $P(x)$ как предел, к которому стремится $P(x')$, когда $x' \to x$ слева по множеству CE. После этого доказательство заканчивается без затруднений.]

11. В § 11.4 из существования $f'(x)$ в некоторой точке не следует существование $V'(x)$.

[Рассмотреть функцию $f(x)=x^2\cos x^{-\alpha}$ $(0<x\leqslant 1)$, $f(0)=0$; $1<\alpha<2$.]

12. В § 11.5.4 условие непрерывности функции $\varphi(x)$ может быть отброшено.

[Из имеющегося там доказательства видно, что если α и β — любые точки непрерывности, то

$$\int_\alpha^\beta \varphi'(x)\,dx \leqslant \varphi(\beta)-\varphi(\alpha).$$

Но точки непрерывности неубывающей функции расположены всюду плотно, и, переходя к пределу при $\alpha \to a+0$, $\beta \to b-0$ по множеству таких точек, мы видим, что

$$\int_a^b \varphi'(x)\,dx \leqslant \varphi(b-0)-\varphi(a+0).]$$

13. Множество, состоящее из интервалов $\left(\frac{1}{2n+1}, \frac{1}{2n}\right)$ $(n=1, 2, \ldots)$, имеет в точке $x=0$ плотность 1/4.

14. Сходящийся ряд неубывающих функций можно почти всюду дифференцировать почленно *).

[Пусть

$$u_1(x)+u_2(x)+\ldots+u_n(x)=s_n(x) \to s(x) \qquad (a \leqslant x \leqslant b).$$

$s(x)$ есть неубывающая функция, и при любом N

$$\frac{s(x+h)-s(x)}{h}=\sum_{n=1}^{\infty} \frac{u_n(x+h)-u_n(x)}{h} \geqslant \sum_{n=1}^{N} \frac{u_n(x+h)-u_n(x)}{h}.$$

Из этого следует, что почти всюду

$$s'(x) \geqslant \sum_{n=1}^{N} u_n'(x).$$

Таким образом, ряд $\sum u_n'(x)$ почти всюду сходится к некоторой сумме $\varphi(x)$ и $\varphi(x) \leqslant s'(x)$.

Предположим, что множество $E(u, v)$, на котором $\varphi(x)<u<v<s'(x)$, имеет положительную меру μ. При любом n почти всюду на $E(u, v)$

$$s_n'(x)<u<v<s'(x),$$

так что при достаточно малом h

$$s_n(x+h)-s_n(x)<hu<hv<s(x+h)-s(x).$$

Эти неравенства можно написать для некоторого конечного набора попарно неперекрывающихся интервалов $(x, x+h)$ с суммой длин $l>\frac{1}{2}\mu>0$. Так как $s(x)-s_n(x)$ — неубывающая функция, то суммирование по этим интервалам дает:

$$l(v-u)<\sum\{s(x+h)-s_n(x+h)\}-\{s(x)-s_n(x)\} \leqslant$$
$$\leqslant \{s(b)-s_n(b)\}-\{s(a)-s_n(a)\}.$$

Заставляя n стремиться к ∞, мы приходим к неравенству $l \leqslant 0$, которое противоречит предыдущему неравенству $l>0$. Следовательно, $\varphi(x)=s'(x)$ почти всюду.]

15. Если производная $f'(x)$ всюду конечна и почти всюду равна некоторой непрерывной функции, то она равна ей всюду.

16. Показать, что

$$\lim_{\delta \to 0} \int_{\delta}^{1} \frac{f(x+t)-f(x-t)}{t}\, dt,$$

где $f(x)$ — недифференцируемая функция Вейерштрасса, существует при любом значении x.

Показать, что для (непрерывной) функции $f(x)=0$ $(x \leqslant 0)$, $\frac{1}{\log \frac{1}{x}}$ $(x>0)$ этот предел при $x=0$ не существует.

[Этот предел существует почти всюду для всякой интегрируемой функции $f(x)$ **).]

*) Фубини; см. Rajchman et Saks [1].

**) См. Титчмарш. *Введение в теорию интегралов Фурье*, теорема 105.

ГЛАВА XII

ДАЛЬНЕЙШИЕ ТЕОРЕМЫ ОБ ИНТЕГРИРОВАНИИ ПО ЛЕБЕГУ

12.1. Интегрирование по частям. В двух предыдущих главах мы построили в нужном нам объеме общую теорию определенных и неопределенных интегралов. В этой главе мы встанем на несколько более практическую точку зрения и докажем несколько теорем, полезных при оперировании с интегралами.

12.1.1. Формула интегрирования по частям в теории Лебега, конечно, такова же, как и в обычной теории: если $G(x)$ — неопределенный интеграл от $g(x)$, то

$$\int_a^b f(x) g(x)\, dx = [f(x) G(x)]_a^b - \int_a^b f'(x) G(x)\, dx.$$

Эта формула верна для всякой интегрируемой функции $g(x)$ *и всякого интеграла* $f(x)$.

Доказательство основано на том, что *произведение двух абсолютно непрерывных функций есть абсолютно непрерывная функция.* Пусть $\varphi(x)$ и $\psi(t)$ — функции, абсолютно непрерывные в интервале (a, b), и пусть M и M' — верхние грани их модулей $|\varphi(x)|$ и $|\psi(x)|$. Пусть $(x_1, x_1+h_1), \ldots, (x_n, x_n+h_n)$ — попарно неперекрывающиеся интервалы, лежащие в интервале (a, b). Тогда

$$\begin{aligned}\sum |\varphi_\nu(x_\nu+h_\nu)\psi(x_\nu+h_\nu) - \varphi(x_\nu)\psi(x_\nu)| &= \\ = \sum |\varphi(x_\nu+h_\nu)\{\psi(x_\nu+h_\nu) - \psi(x_\nu)\} + \psi(x_\nu)\{\varphi(x_\nu+h_\nu) - \varphi(x_\nu)\}| &\leqslant \\ \leqslant M \sum |\psi(x_\nu+h_\nu) - \psi(x_\nu)| + M' \sum |\varphi(x_\nu+h_\nu) - \varphi(x_\nu)|&.\end{aligned}$$

Две последние суммы стремятся к нулю вместе с $\sum h_\nu$, из чего и следует, что функция $\varphi(x)\psi(x)$ абсолютно непрерывна.

Так как в доказываемой формуле функции $f(x)$ и $G(x)$ абсолютно непрерывны, то такова же функция $f(x)G(x)$, и потому

$$\int_a^b \frac{d}{dx}\{f(x) G(x)\}\, dx = [f(x) G(x)]_a^b.$$

Но

$$\frac{d}{dx}\{f(x) G(x)\} = f'(x) G(x) + f(x) g(x)$$

всюду, где $f'(x)$ и $G'(x)$ существуют и $G'(x)=g(x)$, т. е. почти всюду. Этим формула доказана.

12.2. Аппроксимация интегрируемой функции. Следующая теорема часто бывает полезна.

Пусть $f(x)$ — функция, измеримая в конечном интеграле. Для любых двух положительных чисел δ и ε можно найти такую абсолютно непрерывную функцию $\varphi(x)$, что $|f-\varphi|<\delta$ всюду вне некоторого множества с мерой, меньшей ε.

Предположим сначала, что функция $f(x)$ ограничена. Без ущерба для общности можно считать, что $f(x)\geqslant 0$. Пусть n — такое натуральное число, что $f(x)<n\delta$. Разделим интервал изменения функции $f(x)$ точками

$$0,\ \delta,\ 2\delta,\ \ldots,\ n\delta,$$

обозначим через e_ν множество, на котором $\nu\delta\leqslant f(x)<(\nu+1)\delta$, и положим $\psi_\nu(x)=\nu\delta$ на e_ν, $\psi_\nu(x)=0$ вне e_ν. Очевидно, функция

$$\psi(x)=\psi_0(x)+\ldots+\psi_{n-1}(x)$$

отличается от $f(x)$ меньше, чем на δ.

Пусть E_ν — открытое множество, содержащее e_ν, с мерой, меньшей $m(e_\nu)+\frac{\varepsilon}{3n}$. Пусть S_ν — сумма такого конечного множества интервалов из E_ν, что $m(E_\nu-S_\nu)<\frac{\varepsilon}{3n}$. Положим $\varphi_\nu(x)=\nu\delta$ на S_ν и $\varphi_\nu(x)=0$ вне S_ν. Ясно, что $\varphi_\nu=\psi_\nu$ всюду вне некоторого множества меры, меньшей $2\varepsilon/(3n)$, и что функция φ_ν разрывна только в конечном числе точек, именно, в концевых точках интервалов из S_ν. Устраним эти разрывы, соединив график функции на концах интервалов с осью x прямолинейными отрезками, притом так, чтобы вся модификация произошла на множестве меры, меньшей $\varepsilon/(3n)$. Модифицированная функция φ'_ν абсолютно непрерывна и может отличаться от ψ_ν только на множестве меры, меньшей ε/n.

Положим $\varphi=\varphi'_0+\varphi'_1+\ldots+\varphi'_{n-1}$. Функция $\varphi(x)$ абсолютно непрерывна, и $\varphi(x)=\psi(x)$ всюду вне некоторого множества меры, меньшей ε. Таким образом, $\varphi(x)$ обладает требуемыми свойствами.

Если функция $f(x)$ не ограничена, то мы полагаем $\{f(x)\}_k=f(x)$, если $|f(x)|\leqslant k$, и $\{f(x)\}_k=0$, если $|f(x)|>k$. Пусть k — столь большое число, что $\{f(x)\}_k=f(x)$ вне множества меры, меньшей $\frac{1}{2}\varepsilon$. В силу уже доказанного, можно найти такую абсолютно непрерывную функцию $\varphi(x)$, что $|\{f(x)\}_k-\varphi(x)|<\delta$ вне множества меры, меньшей $\frac{1}{2}\varepsilon$. Функция $\varphi(x)$ обладает требуемыми свойствами.

Заметим, что если функция $f(x)$ ограничена, то функцию $\varphi(x)$ можно построить так, чтобы она была заключена между теми же границами, что и $f(x)$.

Если функция $f(x)$ интегрируема, то функцию $\varphi(x)$ можно построить так, чтобы она удовлетворяла еще и неравенству

$$\int_a^b |f(x)-\varphi(x)|\,dx<\eta, \tag{1}$$

где η — произвольно малое число. Действительно, если $|f(x)|\leqslant M$, то можно считать, что и $|\varphi(x)|\leqslant M$; тогда

$$\int_a^b |f(x)-\varphi(x)|\,dx\leqslant\delta(b-a)+2\varepsilon M,$$

чем в этом случае доказательство и заканчивается. Если функция $f(x)$ не ограничена, то мы определяем функции $\{f(x)\}_k$ так же, как выше, но k выбираем так, чтобы интеграл функции $|f(x)-\{f(x)\}_k|$ в интервале (a, b) был меньше $\frac{\eta}{2}$, а функцию $\varphi(x)$ строим так, чтобы всюду вне некоторого множества меры $\frac{\varepsilon}{2k}$ было выполнено неравенство $|\{f(x)\}_k-\varphi(x)|<\delta$ и всюду — неравенство $|\varphi(x)|\leqslant k$. Так как

$$\int_a^b |f(x)-\varphi(x)|\,dx\leqslant\int_a^b |f(x)-\{f(x)\}_k|\,dx+\int_a^b |\{f(x)\}_k-\varphi(x)|\,dx$$

и так как первый член справа меньше $\eta/2$, а второй не превосходит $\delta(b-a)+\varepsilon$, то правая часть меньше η, если $\delta(b-a)+\varepsilon<\eta/2$.

Пример. Если функция $f(x)$ интегрируема в интервале $(a-\varepsilon,\ b+\varepsilon)$, то

$$\lim_{n\to 0}\int_a^b |f(x+h)-f(x)|\,dx=0.$$

12.2.1. Замена независимого переменного. Здесь опять-таки формула обычна, но условия, в которых она верна, являются новыми.

Пусть $f(x)$ и $g(x)$ — интегрируемые функции, причем $g(x)\geqslant 0$, и пусть $G(x)$ — неопределенный интеграл от $g(x)$. Тогда

$$\int_a^b f(t)\,dt=\int_\alpha^\beta f\{G(x)\}\,g(x)\,dx,$$

где α и β таковы, что $a=G(\alpha)$, $b=G(\beta)$.

Функция, обратная к $t=G(x)$, значениями которой являются α и β, может не быть однозначной, так как функция $G(x)$ может быть постоянной в некоторых интервалах. Но если некоторому значению t отвечает более чем одно значение x, то такие значения x образуют замкнутый интервал и мы можем сделать обратную функцию однозначной, приняв за ее значение, например, левый конец этого интервала.

Заметим, прежде всего, что *если $F(x)$ и $G(x)$ — абсолютно непрерывные функции и функция $G(x)$ монотонна, то функция $F\{G(x)\}$ абсолютно непрерывна.* Действительно, так как функция F абсолютно непрерывна, то сумма

$$\sum |F\{G(x_\nu + h_\nu)\} - F\{G(x_\nu)\}|$$

стремится к нулю вместе с суммой

$$\sum |G(x_\nu + h_\nu) - G(x_\nu)|,$$

а последняя, в силу абсолютной непрерывности функции $G(x)$, стремится к нулю вместе с $\sum h_\nu$.

Из этого замечания следует, что если $F(x)$ и $G(x)$ — интегралы от $f(x)$ и $g(x)$, то $F\{G(x)\}$ имеет конечную производную при почти всех значениях x и

$$\int_\alpha^\beta \frac{d}{dx}[F\{G(x)\}]\,dx = F\{G(\beta)\} - F\{G(\alpha)\} = \int_a^b f(t)\,dt.$$

Доказываемая формула следует отсюда, если для почти всех значений x

$$\frac{d}{dx}[F\{G(x)\}] = f\{G(x)\}\,g(x). \tag{1}$$

Однако последнее не очевидно. Именно,

$$\frac{F\{G(x+h)\} - F\{G(x)\}}{h} = \frac{F\{G(x+h)\} - F\{G(x)\}}{G(x+h) - G(x)}\,\frac{G(x+h) - G(x)}{h},$$

и второй сомножитель справа стремится к $g(x)$ для почти всех значений x, а первый — к $f\{G(x)\}$ для почти всех значений $G(x)$. Трудность заключается в том, что исключительное множество значений $G(x)$, имеющее меру нуль, не обязательно соответствует множеству значений x, имеющему меру нуль.

Предположим сначала, что функция $f(x)$ ограничена, скажем, $|f(x)| \leqslant M$. Разобьем следующим образом интервал (α, β) на множества E_1, E_2, E_3, E_4: E_1 есть множество, на котором $G'(x) = g(x) > 0$ и первый сомножитель справа стремится к $f\{G(x)\}$; E_2 — множество, на котором $G'(x) = g(x) > 0$, но первый сомножитель справа не стремится к $f\{G(x)\}$; E_3 — множество, на котором $G'(x) = g(x) = 0$; E_4 — множество, на котором $G'(x) \neq g(x)$ или $G'(x)$ не существует. Очевидно, что на E_1 соотношение (1) выполнено. Оно выполнено и на E_3, так как там обе его части равны нулю; действительно,

$$\left|\frac{F\{G(x+h)\}-F\{G(x)\}}{h}\right| = \left|\frac{1}{h}\int\limits_{G(x)}^{G(x+h)} f(t)\,dt\right| \leqslant M\left|\frac{G(x+h)-G(x)}{h}\right| \to 0.$$

Далее, $m(E_4)=0$, и остается доказать, что $m(E_2)=0$.

Пусть $E_{2,n}$ — часть множества E_2, на которой $G'(x)>1/n$. Заключим соответствующее множество значений t в открытое множество O меры, меньшей заданного ε. Сопоставим с каждой точкой x множества $E_{2,n}$ такой интервал $(x, x+h_x)$, что $G(x+h_x)-G(x)>h_x/n$ и что интервал с концами $G(x)$, $G(x+h_x)$ лежит в O. В силу леммы 1 § 11.4.1 можно найти такое конечное число неперекрывающихся интервалов $(x, x+h_x)$, что

$$m_e(E_{2,n})<m(S)+\varepsilon=\textstyle\sum_S h_x+\varepsilon,$$

где S — сумма выбранных интервалов. Это меньше, чем

$$n\textstyle\sum_S\{G(x+h_x)-G(x)\}+\varepsilon\leqslant nm(O)+\varepsilon<(n+1)\varepsilon.$$

Следовательно, $m(E_{2,n})=0$, и так как E_2 есть внешнее предельное множество для множеств $E_{2,n}$, то $m(E_2)=0$.

Пусть, наконец, $f(x)$ — произвольная интегрируемая функция. Без ущерба для общности можно считать, что она неотрицательна. Определим для нее обычным образом функции $\{f(x)\}_n$. Для них теорема верна, и остается доказать, что

$$\lim\int\limits_{\alpha}^{\beta}[f\{G(x)\}]_n\,g(x)\,dx=\int\limits_{\alpha}^{\beta}f\{G(x)\}\,g(x)\,dx.$$

Но

$$\int\limits_{\alpha}^{\beta}[f\{G(x)\}]_n\,g(x)\,dx=\int\limits_{a}^{b}\{f(t)\}_n\,dt\leqslant\int\limits_{a}^{b}f(t)\,dt,$$

так что нужное равенство получается из теоремы § 10.8.2 о сходимости (если $f\{G(x)\}=\infty$, $g(x)=0$, то произведение $f\{G(x)\}\,g(x)$ считается равным нулю).

12.3. Вторая теорема о среднем значении. *Если функция $f(x)$ интегрируема в интервале (a, b), а функция $\varphi(x)$ положительна, ограничена и не возрастает, то*

$$\int\limits_{a}^{b}f(x)\,\varphi(x)\,dx=\varphi(a+0)\int\limits_{a}^{\xi}f(x)\,dx,$$

где ξ — некоторое число, заключенное между a и b.

Оставляя в стороне тривиальный случай, когда $\varphi(a+0)=\varphi(b-0)$, фиксируем какое-нибудь положительное число ε, меньшее чем $\varphi(a+0)-\varphi(b-0)$. Пусть x_1 — такая точка, что

$$\begin{aligned}\varphi(a+0)-\varphi(x) &< \varepsilon \qquad (a<x<x_1),\\ &\geqslant \varepsilon \qquad (x>x_1).\end{aligned}$$

Будем строить последовательно точки $x_2, x_3, \ldots$ такие, что

$$\begin{aligned}\varphi(x_{\nu-1}+0)-\varphi(x) &< \varepsilon \qquad (x_{\nu-1}<x<x_\nu),\\ &\geqslant \varepsilon \qquad (x>x_\nu),\end{aligned}$$

пока не придем к неравенству $\varphi(x_{n-1}+0)-\varphi(b-0)\leqslant\varepsilon$; в последнем случае положим $x_n=b$. Мы достигнем точки b через конечное число шагов потому, что вариация функции $\varphi(x)$ в каждом интервале $(x_{\nu-1}, x_\nu)$ не меньше ε.

Положим $\psi(x)=\varphi(x_\nu+0)$ при $x_\nu\leqslant x<x_{\nu+1}$. Ясно, что $0\leqslant\psi(x)-\varphi(x)<\varepsilon$ при всех значениях x, за возможным исключением значений $a=x_0, x_1, x_2, \ldots, b$, и что

$$\int_a^b \psi(x) f(x)\,dx=\sum_{\nu=0}^{n-1}\varphi(x_\nu+0)\int_{x_\nu}^{x_{\nu+1}} f(x)\,dx.$$

Обозначим через m и M нижнюю и верхнюю грани функции $F(x)=\int_a^x f(t)\,dt$. Из леммы Абеля (§ 1.1.3.1) следует, что

$$m\varphi(a+0)\leqslant\int_a^b \psi(x) f(x)\,dx\leqslant M\varphi(a+0).$$

Но

$$\left|\int_a^b \psi(x) f(x)\,dx-\int_a^b \varphi(x) f(x)\,dx\right|\leqslant\varepsilon\int_a^b |f(x)|\,dx,$$

и, пользуясь произвольностью ε, мы получаем неравенства

$$m\varphi(a+0)\leqslant\int_a^b \varphi(x) f(x)\,dx\leqslant M\varphi(a+0).$$

Так как функция $F(x)$ непрерывна, то она принимает все значения, заключенные между m и M. Следовательно, в некоторой точке ξ она принимает значение

$$\frac{1}{\varphi(a+0)}\int_a^b \varphi(x) f(x)\,dx,$$

что и завершает доказательство.

Соответствующая формула для случая, когда функция $\varphi(x)$ положительна и не убывает, имеет вид

$$\int_a^b f(x)\,\varphi(x)\,dx=\varphi(b-0)\int_\xi^b f(x)\,dx.$$

В случае произвольной монотонной функции $\varphi(x)$ существует такое число ξ, заключенное между a и b, что

$$\int_a^b f(x)\varphi(x)\,dx = \varphi(a+0)\int_a^\xi f(x)\,dx + \varphi(b-0)\int_\xi^b f(x)\,dx.$$

Эта формула получается из предыдущих, если рассмотреть функцию $\varphi(x)-\varphi(a+0)$ или функцию $\varphi(x)-\varphi(b-0)$.

12.4. Лебеговские классы L^p*). Мы обозначаем через $L^p(a, b)$ с $p>0$ класс функций $f(x)$, определенных и измеримых в интервале (a, b), у которых степень $|f(x)|^p$ интегрируема в интервале (a, b). Если нет необходимости указывать, какой интервал имеется в виду, то мы обозначаем этот класс просто через L^p. Класс L^1 состоит из функций, интегрируемых в интервале (a, b), и обозначается также через L.

Подобным же образом определяются классы L^p для функций, заданных на произвольном измеримом множестве или в бесконечном интервале. Например, при $p>2$ функция $(1+x)^{-\frac{1}{2}}$ принадлежит к $L^p(0, \infty)$.

Если $f(x)$ принадлежит к L^p и $|g(x)|\leqslant|f(x)|$, то, очевидно, $g(x)$ также принадлежит к L^p.

Примеры. (I) Если (a, b) — конечный интервал, то всякая ограниченная функция принадлежит к $L^p(a, b)$ при любом p.

(II) Если (a, b) — конечный интервал и $f(x)$ принадлежит к $L^p(a, b)$, то $f(x)$ принадлежит и к $L^q(a, b)$ при $q<p$.

(III) Если $f(x)$ принадлежит к $L^p(0, \infty)$ и к $L^q(0, \infty)$, причем $p<q$, то $f(x)$ принадлежит и к $L^r(0, \infty)$ при $p<r<q$.

[Рассмотреть раздельно множества, где $|f(x)|\leqslant 1$ и $|f(x)|>1$.]

(IV) Сумма двух функций из L^p принадлежит к L^p.

[Действительно, $|f(x)+g(x)|^p\leqslant\max\{2^p|f(x)|^p, 2^p|g(x)|^p\}$.]

(V) Функция $\left\{x\log^2\frac{1}{x}\right\}^{-1}$ принадлежит к $L\left(0, \frac{1}{2}\right)$, но не принадлежит к $L^p\left(0, \frac{1}{2}\right)$ с $p>1$.

(VI) Функция $\left\{x^{\frac{1}{2}}(1+|\log x|)\right\}^{-1}$ принадлежит к $L^2(0, \infty)$, но не принадлежит к $L^p(0, \infty)$ ни при каком другом значении p.

12.4.1. Неравенство Шварца. *Если $f(x)$ и $g(x)$ принадлежат к L^2, то $f(x)g(x)$ принадлежит к L и*

$$\left|\int f(x)\,g(x)\,dx\right|\leqslant\left\{\int|f(x)|^2dx\int|g(x)|^2dx\right\}^{\frac{1}{2}}.$$

Интервал интегрирования может быть как конечным, так и бесконечным.

---

*) См., в частности, F. Riesz [2].

Так как $2|fg|\leqslant f^2+g^2$, то fg принадлежит к L. Следовательно, интеграл

$$\int\{\lambda f(x)+\mu g(x)\}^2\,dx=$$
$$=\lambda^2\int\{f(x)\}^2\,dx+2\lambda\mu\int f(x)\,g(x)\,dx+\mu^2\int\{g(x)\}^2\,dx$$

существует для всех значений λ и μ, и ясно, что он всегда неотрицателен. Но необходимое и достаточное условие неотрицательности трехчлена $a\lambda^2+2h\lambda\mu+b\mu^2$ при всех значениях λ и μ состоит в том, что $h^2\leqslant ab$, $a\geqslant 0$, $b\geqslant 0$, а это дает доказываемое неравенство.

Примеры. (I) Равенство в предыдущей теореме имеет место только в случае, когда $f(x)$ и $g(x)$ отличаются друг от друга почти всюду постоянным множителем.

(II) Если $f(x)$ и $g(x)$ принадлежат к L^p с $p>2$, то $f(x)g(x)$ принадлежит к $L^{\frac{1}{2}p}$.

12.4.2. Неравенство Гельдера. Это — обобщение неравенства Шварца.

Если $f(x)$ принадлежит к L^p с $p>1$, а $g(x)$ — к $L^{\frac{p}{p-1}}$, то $f(x)\,g(x)$ принадлежит к L и

$$\left|\int f(x)\,g(x)\,dx\right|\leqslant\left\{\int|f(x)|^p\,dx\right\}^{1/p}\left\{\int|g(x)|^{\frac{p}{p-1}}\,dx\right\}^{1-\frac{1}{p}}. \tag{1}$$

Интервал интегрирования может быть как конечным, так и бесконечным.

Пусть E — множество, на котором $|g(x)|\leqslant|f(x)|^{p-1}$. Тогда на E

$$|f(x)\,g(x)|\leqslant|f(x)|^p,$$

так что на E функция $f(x)\,g(x)$ интегрируема. На дополнительном множестве $|f(x)|<|g(x)|^{\frac{1}{p-1}}$, и следовательно,

$$|f(x)\,g(x)|<|g(x)|^{\frac{p}{p-1}}.$$

Таким образом, функция $f(x)\,g(x)$ интегрируема и на CE, а потому и на всем рассматриваемом интервале.

Этим же рассуждением можно воспользоваться для того, чтобы получить неравенство (1), но с дополнительным множителем 2 справа. Положим

$$I=\int|f(x)|^p\,dx,\quad J=\int|g(x)|^{\frac{p}{p-1}}\,dx.$$

В силу предыдущего

$$\left|\int fg\,dx\right| \leqslant \int\limits_E |fg|\,dx + \int\limits_{CE} |fg|\,dx \leqslant \int\limits_E |f|^p\,dx + \int\limits_{CE} |g|^{\frac{p}{p-1}}\,dx \leqslant I + J. \tag{2}$$

Если оставить в стороне тривиальные случаи, когда $I=0$ или $J=0$, и заменить в этом неравенстве функции $f(x)$, $g(x)$ функциями

$$\left(\frac{J}{I}\right)^{\frac{p-1}{p^2}} f(x), \quad \left(\frac{I}{J}\right)^{\frac{p-1}{p^2}} g(x),$$

то его левая часть не изменится, а каждый член правой части превратится в $I^{\frac{1}{p}} J^{1-\frac{1}{p}}$. Следовательно,

$$\left|\int fg\,dx\right| \leqslant 2I^{\frac{1}{p}} J^{1-\frac{1}{p}}. \tag{3}$$

Неравенство (1) можно вывести из известного неравенства

$$x^m - 1 < m(x-1) \qquad (x>1,\ 0<m<1). \tag{4}$$

Полагая в нем $x=\frac{a}{b}$ $(a>b)$, мы получаем после умножения на b неравенство

$$a^m b^{1-m} < b + m(a-b).$$

Если положить еще $m=\alpha$, $1-m=\beta$, так что $\alpha+\beta=1$, то неравенство примет вид

$$a^\alpha b^\beta < a\alpha + b\beta. \tag{5}$$

Благодаря своей симметрии неравенство (5) верно для любых двух различных положительных чисел a, b. При $a=b$ наступает равенство.

Пользуясь неравенством (5), мы видим, что если $F(x)\geqslant 0$, $G(x)\geqslant 0$, то

$$\int \left(\frac{F(x)}{\int F(t)\,dt}\right)^\alpha \left(\frac{G(x)}{\int G(t)\,dt}\right)^\beta dx \leqslant \int \left(\frac{\alpha F(x)}{\int F(t)\,dt} + \frac{\beta G(x)}{\int G(t)\,dt}\right) dx = \alpha+\beta = 1,$$

т. е.

$$\int \{F(x)\}^\alpha \{G(x)\}^\beta\,dx \leqslant \left\{\int F(x)\,dx\right\}^\alpha \left\{\int G(x)\,dx\right\}^\beta.$$

Наконец, полагая $\alpha=\frac{1}{p}$, $F(x)=|f(x)|^p$ и $G(x)=|g(x)|^{\frac{p}{p-1}}$, мы получаем неравенство (1) *).

Пример. Равенство может наступить только в случае, когда $|f(x)|^p$ и $|g(x)|^{\frac{p}{p-1}}$ отличаются друг от друга лишь почти всюду постоянным множителем.

*) Это доказательство принадлежит Харди (H a r d y [20]).

12.4.2.1. Неравенство Гельдера для сумм. Это — неравенство

$$|\sum a_n b_n| \leqslant (\sum |a_n|^p)^{\frac{1}{p}} (\sum |b_n|^{\frac{p}{p-1}})^{1-\frac{1}{p}}.$$

Доказательство аналогично доказательству интегрального неравенства. Из неравенства § 12.4.2 (5) следует, что

$$\sum \left\{ \left(\frac{A_n}{\Sigma A_n} \right)^{\alpha} \left(\frac{B_n}{\Sigma B_n} \right)^{\beta} \right\} \leqslant \sum \left(\alpha \frac{A_n}{\Sigma A_n} + \beta \frac{B_n}{\Sigma B_n} \right) = \alpha + \beta = 1,$$

т. е.

$$\sum A_n^{\alpha} B_n^{\beta} \leqslant (\sum A_n)^{\alpha} (\sum B_n)^{\beta}.$$

Полагая здесь $\alpha = \frac{1}{p}$, $A_n = |a_n|^p$, $B_n = |b_n|^{\frac{p}{p-1}}$, мы и получаем доказываемое неравенство.

12.4.3. Неравенство Минковского. *Если $f(x)$ и $g(x)$ принадлежат к L^p с $p > 1$, то*

$$\left\{ \int |f(x) + g(x)|^p \, dx \right\}^{\frac{1}{p}} \leqslant \left\{ \int |f(x)|^p \, dx \right\}^{\frac{1}{p}} + \left\{ \int |g(x)|^p \, dx \right\}^{\frac{1}{p}}. \tag{1}$$

Действительно, в силу неравенства Гельдера,

$$\int |f+g|^p \, dx \leqslant \int |f| \cdot |f+g|^{p-1} \, dx + \int |g| \cdot |f+g|^{p-1} \, dx \leqslant$$

$$\leqslant \left\{ \int |f|^p \, dx \right\}^{\frac{1}{p}} \left\{ \int |f+g|^p \, dx \right\}^{1-\frac{1}{p}} + \left\{ \int |g|^p \, dx \right\}^{\frac{1}{p}} \left\{ \int |f+g|^p \, dx \right\}^{1-\frac{1}{p}},$$

и, деля обе части на $\left\{ \int |f+g|^p \, dx \right\}^{1-\frac{1}{p}}$, мы получаем неравенство (1).

Подобным же образом может быть доказано соответствующее неравенство для сумм:

$$(\sum |a_n + b_n|^p)^{1/p} \leqslant (\sum |a_n|^p)^{1/p} + (\sum |b_n|^p)^{1/p}. \tag{2}$$

12.4.4. Интеграл функции класса L^p. В предыдущей главе было показано, что функция является интегралом в том и только в том случае, если она абсолютно непрерывна. Существует и соответствующее условие, необходимое и достаточное для того, чтобы функция была интегралом некоторой функции класса L^p.

Функция $F(x)$ в том и только в том случае является интегралом некоторой функции класса $L^p(a, b)$ с $p > 1$, если сумма

$$\sum |F(x_\nu + h_\nu) - F(x_\nu)|^p h_\nu^{1-p},$$

взятая по любой системе попарно неперекрывающихся интервалов $(x_\nu, x_\nu + h_\nu)$, ограничена.

Теорема останется верной, если мы заменим слово «ограничена» словами «ограничена и стремится к нулю вместе с $\sum h_\nu$». В таком виде она верна и при $p=1$ и содержит как частный случай теорему об абсолютной непрерывности. При $p>1$ эти два условия, одно из которых кажется менее ограничительным, чем другое, равносильны.

Чтобы доказать необходимость условия, предположим, что

$$F(x)=F(a)+\int_a^x f(t)\,dt,$$

где $f(t)$ принадлежит к L^p. Тогда

$$|F(x_\nu+h_\nu)-F(x_\nu)|=\left|\int_{x_\nu}^{x_\nu+h_\nu} f(t)\,dt\right|\leqslant$$

$$\leqslant\left\{\int_{x_\nu}^{x_\nu+h_\nu}|f(t)|^p\,dt\right\}^{\frac{1}{p}}\left\{\int_{x_\nu}^{x_\nu+h_\nu}dt\right\}^{1-\frac{1}{p}}=h_\nu^{1-\frac{1}{p}}\left\{\int_{x_\nu}^{x_\nu+h_\nu}|f(t)|^p\,dt\right\}^{\frac{1}{p}}.$$

Следовательно,

$$\sum|F(x_\nu+h_\nu)-F(x_\nu)|^p h_\nu^{1-p}\leqslant\sum\int_{x_\nu}^{x_\nu+h_\nu}|f(t)|^p\,dt\leqslant\int_a^b|f(t)|^p\,dt.$$

Таким образом, условие действительно необходимо. Так как сумма $\sum\int_{x_\nu}^{x_\nu+h_\nu}|f(t)|^p\,dt$ стремится к нулю вместе с $\sum h_\nu$, то и усиленное условие необходимо.

Предположим теперь, что условие выполнено, и пусть M — верхняя грань указанных сумм. В силу неравенства Гельдера для сумм,

$$\sum|F(x_\nu+h_\nu)-F(x_\nu)|=\sum|F(x_\nu+h_\nu)-F(x_\nu)|h_\nu^{\frac{1}{p}-1}\cdot h_\nu^{1-\frac{1}{p}}\leqslant$$

$$\leqslant\left\{\sum|F(x_\nu+h_\nu)-F(x_\nu)|^p h_\nu^{1-p}\right\}^{\frac{1}{p}}\left(\sum h_\nu\right)^{1-\frac{1}{p}}\leqslant M^{\frac{1}{p}}\left(\sum h_\nu\right)^{1-\frac{1}{p}},$$

правая же часть стремится к нулю вместе с $\sum h_\nu$. Следовательно, функция $F(x)$ абсолютно непрерывна, т. е. является интегралом некоторой функции $f(t)$:

$$F(x)=F(a)+\int_a^x f(t)\,dt.$$

Остается доказать, что $f(t)$ принадлежит к L^p. Рассмотрим какую-нибудь последовательность подразделений интервала конечными системами точек $x_{m,1}, x_{m,2}, \ldots, x_{m,n}$ $(m=1, 2, \ldots)$, в которой

$$\lim_{m\to\infty}\max_\nu(x_{m,\nu+1}-x_{m,\nu})=0.$$

Если, например, речь идет об интервале (0, 1), то можно взять $x_{m,\nu}=\frac{\nu}{2^m}$. Положим в интервале $x_{m,\nu}\leqslant x<x_{m,\nu+1}$

$$f_m(x)=\frac{F(x_{m,\nu+1})-F(x_{m,\nu})}{x_{m,\nu+1}-x_{m,\nu}}.$$

Если точка x отлична от всех точек $x_{m,\nu}$ и в этой точке существует производная $F'(x)$, то при $x_{m,\nu}<x<x_{m,\nu+1}$

$$f_m(x)=\frac{F(x_{m,\nu+1})-F(x)}{x_{m,\nu+1}-x}\,\frac{x_{m,\nu+1}-x}{x_{m,\nu+1}-x_{m,\nu}}+\frac{F(x_{m,\nu})-F(x)}{x_{m,\nu}-x}\,\frac{x-x_{m,\nu}}{x_{m,\nu+1}-x_{m,\nu}}=$$

$$=\{F'(x)+\delta_1\}\frac{x_{m,\nu+1}-x}{x_{m,\nu+1}-x_{m,\nu}}+\{F'(x)+\delta_2\}\frac{x-x_{m,\nu}}{x_{m,\nu+1}-x_{m,\nu}}=F'(x)+\delta_3,$$

где $|\delta_3|\leqslant|\delta_1|+|\delta_2|$ и δ_1 и δ_2 стремятся к нулю, когда $x_{m,\nu+1}-x_{m,\nu}\to 0$. Следовательно,

$$\lim_{m\to\infty}f_m(x)=F'(x)=f(x)$$

почти всюду. А так как

$$\int_a^b|f_m(x)|^p\,dx=\sum|F(x_{m,\nu+1})-F(x_{m,\nu})|^p(x_{m,\nu+1}-x_{m,\nu})^{1-p}\leqslant M,$$

то, в силу теоремы Фату (§ 10.8.1), $f(x)$ принадлежит к L^p и

$$\int_a^b|f(x)|^p\,dx\leqslant\underline{\lim}\int_a^b|f_m(x)|^p\,dx\leqslant M.$$

12.5. Сходимость в среднем. При рассмотрении последовательности чисел, скажем, s_n, нам обычно приходится изучать поведение разности s_n-s между s_n и с данным числом s. При рассмотрении последовательности функций, скажем, $f_n(x)$, часто представляет интерес не сама разность между $f_n(x)$ и данной функцией $f(x)$, а среднее значение этой разности. Последнее может быть определено различными способами. Если функции принадлежат классу L^p с $p\geqslant 1$, то рассматривают интеграл

$$\int_a^b|f_n(x)-f(x)|^p\,dx. \qquad (1)$$

Если при $n\to\infty$ этот интеграл стремится к нулю, то говорят, что последовательность $f_1(x)$, $f_2(x)$, ... сходится к $f(x)$ в среднем степени p.

Если интеграл

$$\int_a^b|f_m(x)-f_n(x)|^p\,dx \qquad (2)$$

стремится к нулю, когда m и n независимо друг от друга стремятся к бесконечности, то мы говорим, что последовательность $f_1(x)$, $f_2(x)$, ... сходится в среднем степени p. В это определение не входит какая-либо предельная функция $f(x)$.

Основная теорема*) теории утверждает, что *если последовательность $f_1(x)$, $f_2(x)$, ... сходится в среднем степени p, то существует функция $f(x)$ класса L^p, однозначно определенная с точностью до множества меры нуль, к которой эта последовательность сходится в среднем степени p.*

Эта теорема аналогична «общему принципу сходимости», утверждающему, что если $s_m - s_n \to 0$, то существует такое число s, что $s_n \to s$.

Необходимо разъяснить, в каком смысле «единственна» предельная функция $f(x)$. Предположим, что мы нашли функцию $f(x)$, которая удовлетворяет поставленным условиям. Очевидно, что тогда этим условиям будет удовлетворять и всякая функция, равная $f(x)$ почти всюду. Таким образом, значение функции $f(x)$ не является определенным ни в какой отдельной точке, хотя весь комплекс ее значений в некотором смысле определен. Функция должна рассматриваться как представитель класса функций, каждые две из которых почти всюду равны между собой; при интегрировании все функции этого класса ведут себя одинаково.

Для конечного интервала при $p > 1$ теорема может быть доказана следующим образом. Каждому натуральному числу ν отвечает такое натуральное число n_ν, что

$$\int_a^b |f_m(x) - f_n(x)|^p\,dx < \frac{1}{3^\nu} \qquad (m \geqslant n_\nu,\ n \geqslant n_\nu).$$

В частности,

$$\int_a^b |f_{n_{\nu+1}}(x) - f_{n_\nu}(x)|^p\,dx < \frac{1}{3^\nu} \qquad (\nu = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots).$$

Из этого неравенства следует, что мера множества E_ν, на котором $|f_{n_{\nu+1}}(x) - f_{n_\nu}(x)| > 2^{-\frac{\nu}{p}}$, меньше $\left(\frac{2}{3}\right)^\nu$. Таким образом, ряд

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} |f_{n_{\nu+1}}(x) - f_{n_\nu}(x)|$$

(как показывает его сравнение с рядом $\sum 2^{-\frac{\nu}{p}}$) сходится, если x не принадлежит при некотором значении N множеству $E_{N+1} +$

*) Fischer [1], F. Riesz [1], [2]; W. H. Young and G. C. Young [2], где имеется несколько доказательств; и Hobson [1].

$+E_{N+2}+\ldots$ Поскольку мера этого множества стремится к нулю при $N\to\infty$, это значит, что указанный ряд сходится при почти всех значениях x. Поэтому и ряд

$$\sum_{\nu=1}^{\infty}\{f_{n_{\nu+1}}(x)-f_{n_\nu}(x)\}$$

сходится при почти всех значениях x, т. е. существует такая функция $f(x)$ (определенная почти всюду), что почти всюду

$$\lim_{\nu\to\infty} f_{n_\nu}(x)=f(x).$$

Эта функция $f(x)$ обладает требуемым свойством. Действительно, в силу теоремы Фату

$$\underline{\lim}_{\nu\to\infty}\int_a^b |f_{n_\mu}(x)-f_{n_\nu}(x)|^p\,dx \geqslant \int_a^b |f_{n_\mu}(x)-f(x)|^p\,dx,$$

а так как

$$\int_a^b |f_{n_\mu}(x)-f_{n_\nu}(x)|^p\,dx<\varepsilon \qquad (\mu>\nu_0,\ \nu>\nu_0),$$

то

$$\int_a^b |f_{n_\mu}(x)-f(x)|^p\,dx\leqslant\varepsilon \qquad (\mu>\nu_0),$$

т. е.

$$\lim\int_a^b |f_{n_\mu}(x)-f(x)|^p\,dx=0.$$

Таким образом, последовательность $f_{n_1}(x)$, $f_{n_2}(x)$, ... сходится в среднем к $f(x)$.

Далее, в силу неравенства Минковского

$$\left\{\int_a^b |f(x)-f_n(x)|^p\,dx\right\}^{1/p}\leqslant$$

$$\leqslant\left\{\int_a^b |f(x)-f_{n_\mu}(x)|^p\,dx\right\}^{1/p}+\left\{\int_a^b |f_{n_\mu}(x)-f_n(x)|^p\,dx\right\}^{1/p},$$

правая же часть, в силу уже доказанного, стремится к нулю, когда n и n_μ стремятся к бесконечности. Таким образом, и вся последовательность $f_1(x)$, $f_2(x)$, ... сходится в среднем к $f(x)$.

Предположим, наконец, что последовательность $f_1(x)$, $f_2(x)$, ... сходится в среднем к $f(x)$ и к $g(x)$. Тогда

$$\left(\int_a^b |f-g|^p\,dx\right)^{\frac{1}{p}}\leqslant\left(\int_a^b |f-f_n|^p\,dx\right)^{\frac{1}{p}}+\left(\int_a^b |g-f_n|^p\,dx\right)^{\frac{1}{p}}\to 0.$$

Следовательно, левая часть равна нулю, т. е. $f(x)=g(x)$ почти всюду.

При $p=1$ доказательство упрощается, поскольку не нужно пользоваться неравенством Минковского.

12.5.1. То же доказательство применимо почти без изменений к бесконечному интервалу. Рассмотренные выше ряды сходятся почти всюду в интервале (a, b) при любом значении b, т. е. почти всюду в интервале (a, ∞). Теорема Фату также верна для бесконечного интервала; действительно, беря в § 10.8.1 в качестве E интервал (a, b), мы видим, что

$$\int_a^b f(x)\,dx \leqslant \underline{\lim} \int_a^b f_n(x)\,dx \leqslant \underline{\lim} \int_a^\infty f_n(x)\,dx,$$

и, заставляя b стремиться к бесконечности, получаем теорему Фату для интервала (a, ∞). После этого доказательство доводится до конца так же, как выше.

12.5.2. *В тех же условиях (как для конечного, так и для бесконечного интервала)*

$$\lim_{n\to\infty} \int |f_n(x)|^p\,dx = \int |f(x)|^p\,dx.$$

Действительно, в силу неравенства Минковского,

$$\left\{\int |f_n(x)|^p\,dx\right\}^{1/p} \leqslant \left\{\int |f(x)|^p\,dx\right\}^{1/p} + \left\{\int |f(x)-f_n(x)|^p\,dx\right\}^{1/p},$$

и

$$\left\{\int |f(x)|^p\,dx\right\}^{1/p} \leqslant \left\{\int |f_n(x)|^p\,dx\right\}^{1/p} + \left\{\int |f(x)-f_n(x)|^p\,dx\right\}^{1/p}.$$

Следовательно,

$$\lim_{n\to\infty} \left\{\int |f_n(x)|^p\,dx\right\}^{1/p} = \left\{\int |f(x)|^p\,dx\right\}^{1/p},$$

что и доказывает теорему.

12.5.3. *Пусть последовательность* $f_1(x)$, $f_2(x)$, ... *сходится к* $f(x)$ *в среднем степени* p. *Если* $g(x)$ *принадлежит к* $L^{\frac{p}{p-1}}$, *то*

$$\lim_{n\to\infty} \int f_n(x)\,g(x)\,dx = \int f(x)\,g(x)\,dx. \tag{1}$$

Действительно,

$$\left|\int \{f_n(x)-f(x)\}\,g(x)\,dx\right| \leqslant \left\{\int |f_n(x)-f(x)|^p\,dx\right\}^{\frac{1}{p}} \left\{\int |g(x)|^{\frac{p}{p-1}}\right\}^{1-\frac{1}{p}},$$

правая же часть стремится к нулю.

В частности,

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^x f_n(t)\,dt = \int_a^x f(t)\,dt \tag{2}$$

для всех значений x *в рассматриваемом интервале.*

Действительно, функция $g(t)=1$ $(a\leqslant t\leqslant x)$, $=0\,(t>x)$ принадлежит к $L^{\frac{p}{p-1}}$.

Примеры. (I) Если $f_n(x)\to f(x)$ ограниченно в конечном интервале, то имеет место сходимость в среднем любой степени.

(II) Рассмотрим замкнутые интервалы $\left(0, \frac{1}{2}\right)$, $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$, $\left(0, \frac{1}{3}\right)$, $\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$, $\left(\frac{2}{3}, 1\right)$, $\left(0, \frac{1}{4}\right)$ и т. д. Положим $f_n(x)=1$ в n-м интервале и $f_n(x)=0$ в остальной части интервала $(0, 1)$. Последовательность $f_1(x)$, $f_2(x)$, ... сходится в интервале $(0, 1)$ к нулю в среднем любой степени, но не сходится к нулю ни при каком значении x.

(III) Если последовательность $f_1(x)$, $f_2(x)$, ... сходится в среднем к $f(x)$ и $f_n(x)\to g(x)$ почти всюду, то $f(x)=g(x)$ почти всюду. [Воспользоваться теоремой Егорова.]

(IV) Если последовательность $f_1(x)$, $f_2(x)$, ... сходится в среднем степени p к $f(x)$, а последовательность $g_1(x)$, $g_2(x)$, ...—в среднем степени $\frac{p}{p-1}$ к $g(x)$, то $\int f_n g_n\,dx\to\int fg\,dx$.

12.6. Повторные интегралы. Соотношение

$$\int_a^b dx\int_\alpha^\beta f(x, y)\,dy=\int_\alpha^\beta dy\int_a^b f(x, y)\,dx, \tag{1}$$

установленное в § 1.8 для элементарных случаев, верно, вообще говоря, и в лебеговской теории. Его общее рассмотрение опирается, однако, на теорию двойного интеграла

$$\iint f(x, y)\,dx\,dy,$$

которая, в свою очередь, основана на теории двумерных точечных множеств. Поэтому детальное изучение вопроса завело бы нас слишком далеко.

Имеется, однако, специальный тип повторных интегралов, который охватывает много интересных случаев и может быть изучен средствами уже построенной теории.

Пусть функция $f(x)$ интегрируема по Лебегу в интервале (a, b), а функция $g(x)$ — в интервале (α, β), и пусть $k(x, y)$ — функция двух переменных, непрерывная или имеющая разрывы, описанные в § 1.8.2. Тогда

$$\int_a^b f(x)\,dx\int_\alpha^\beta g(y)\,k(x, y)\,dy=\int_\alpha^\beta g(y)\,dy\int_a^b f(x)\,k(x, y)\,dx. \tag{2}$$

Предположим сначала, что функции $f(x)$ и $g(y)$ ограничены: $|f(x)|\leqslant M$, $|g(y)|\leqslant M$. Пусть $|k(x, y)|\leqslant K$.

Пусть $\varphi(x)$ — непрерывная функция, удовлетворяющая условию § 12.2 (1) и условию $|\varphi(x)|\leqslant M$, и пусть $\psi(y)$ — непрерывная функция, связанная таким же образом с функцией $g(y)$.

Обозначим левую часть равенства (2) через I и положим:

$$I' = \int_a^b \varphi(x)\,dx \int_\alpha^\beta \psi(y)\,k(x, y)\,dy.$$

Так как

$$I - I' = \int_a^b \{f(x) - \varphi(x)\}\,dx \int_\alpha^\beta g(y)\,k(x, y)\,dy + \\ + \int_a^b \varphi(x)\,dx \int_\alpha^\beta \{g(y) - \psi(y)\}\,k(x, y)\,dy,$$

то

$$|I - I'| \leqslant \int_a^b |f(x) - \varphi(x)|\,(\beta - \alpha)\,MK\,dx + (b - a)\,M\eta \leqslant \\ \leqslant MK\,(\beta - \alpha + b - a)\,\eta.$$

Подобным же образом, обозначив правую часть равенства (2) через J и положив

$$J' = \int_\alpha^\beta \psi(y)\,dy \int_a^b \varphi(x)\,k(x, y)\,dx,$$

мы видим, что $|J - J'|$ стремится к нулю вместе с η.

Но так как функция $\varphi(x)\,\psi(y)\,k(x, y)$ непрерывна или имеет лишь разрывы, описанные в § 1.8.2, то $I' = J'$. Следовательно, $I = J$.

Распространение теоремы на неограниченные функции мы оставляем читателю. Сначала следует предположить, что функции $f(x)$ и $g(x)$ положительны, и ввести, как обычно, функции $\{f(x)\}_n$ и $\{g(x)\}_n$.

12.6.1. *Если функция* $f(x)$ *интегрируема в интервале* $(0, 1)$, *а функция* $g(x)$ — *в интервале* $(0, 2)$, *то интеграл*

$$\int_0^1 f(x)\,g(x + t)\,dx$$

существует для почти всех значений t *в интервале* $(0, 1)$ *и представляет интегрируемую функцию от* t.

Достаточно рассмотреть случай, когда функции f и g положительны. Определим $\{f(x)\}_n$ как обычно и положим:

$$F_n(t) = \int_0^1 \{f(x)\}_n\,g(x + t)\,dx.$$

Этот интеграл существует для всех значений t, при фиксированном n функция $F_n(t)$ ограничена, и при каждом значении t она является неубывающей функцией от n. Кроме того,

$$\int_0^1 F_n(t)\,dt = \int_0^1 dt \int_0^1 \{f(x)\}_n g(x+t)\,dx = \int_0^1 \{f(x)\}_n\,dx \int_0^1 g(x+t)\,dt, \qquad (1)$$

если обращение порядка интегрирования возможно.

Чтобы оправдать его, аппроксимируем функцию g непрерывной функцией ψ, как в предыдущем доказательстве, и положим:

$$\chi(t) = \int_0^1 \{f(x)\}_n \psi(x+t)\,dx.$$

В силу предыдущей теоремы

$$\int_0^1 \chi(t)\,dt = \int_0^1 \{f(x)\}_n\,dx \int_0^1 \psi(x+t)\,dt. \qquad (2)$$

Но

$$|F_n(t) - \chi(t)| \leqslant \int_0^1 \{f(x)\}_n\,|g(x+t) - \psi(x+t)|\,dx < n\eta,$$

так что левая часть равенства (1) отличается от левой части равенства (2) меньше, чем на $n\eta$. Подобным же образом и правые части этих равенств отличаются друг от друга меньше, чем на $n\eta$, и, заставляя η стремиться к нулю, мы получаем равенство (1).

Из (1) следует, что

$$\int_0^1 F_n(t)\,dt \leqslant \int_0^1 f(x)\,dx \int_0^2 g(y)\,dy,$$

и потому (§ 10.8.2), когда $n \to \infty$, $F_n(t)$ стремится к конечному пределу для почти всех значений t. Доказательство завершается теперь ссылкой на теорему § 10.8.2.

12.6.2. Повторные несобственные интегралы. *Пусть $f(x)$, $g(x)$ и $k(x, y)$ положительны и удовлетворяют условиям § 12.6 при всех значениях $b > a$ и $\beta > \alpha$. Тогда*

$$\int_a^\infty f(x)\,dx \int_\alpha^\infty g(y)\,k(x, y)\,dy = \int_\alpha^\infty g(y)\,dy \int_a^\infty f(x)\,k(x, y)\,dx, \qquad (1)$$

если только одна из частей этого равенства сходится.

Эта теорема аналогична теореме § 1.8.5, но имеющиеся там дополнительные условия являются теперь следствиями основных предположений.

Предположим, что сходится правая часть равенства (1). Так как

$$\int_a^X f(x)\,k(x, y)\,dx \leqslant \int_a^\infty f(x)\,k(x, y)\,dx \qquad (2)$$

и так как левая часть равенства (2) есть измеримая (даже непрерывная) функция от y, то из этого предположения следует, что интеграл

$$\int_{\alpha}^{\infty} g(y)\,dy \int_{a}^{X} f(x)\,k(x,\ y)\,dx$$

сходится. Таким образом, предел

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\alpha}^{n} g(y)\,dy \int_{a}^{X} f(x)\,k(x,\ y)\,dx = \lim_{n\to\infty} \int_{a}^{X} f(x)\,dx \int_{\alpha}^{n} g(y)\,k(x,\ y)\,dy$$

конечен. Сверх того,

$$F_n(x) = f(x) \int_{\alpha}^{n} g(y)\,k(x,\ y)\,dy$$

есть при любом значении x неубывающая функция от n. Поэтому из теоремы § 10.8.2 следует, что $F_n(x)$ стремится при $n\to\infty$ к конечному пределу для почти всех значений x в интервале $(a,\ X)$, т. е. что интеграл

$$\int_{\alpha}^{\infty} g(y)\,k(x,\ y)\,dy$$

сходится для почти всех значений x в этом интервале. Далее, согласно теореме § 10.8.2,

$$\int_{a}^{X} f(x)\,dx \int_{\alpha}^{\infty} g(y)\,k(x,\ y)\,dy = \lim_{n\to\infty} \int_{a}^{X} f(x)\,dx \int_{\alpha}^{n} g(y)\,k(x,\ y)\,dy =$$
$$= \lim_{n\to\infty} \int_{\alpha}^{n} g(y)\,dy \int_{a}^{X} f(x)\,k(x,\ y)\,dx = \int_{\alpha}^{\infty} g(y)\,dy \int_{a}^{X} f(x)\,k(x,\ y)\,dx. \qquad (3)$$

В силу неравенства (2) правая часть соотношения (3) остается ограниченной, когда $X\to\infty$. Следовательно, ограничена и левая часть, и потому левая часть равенства (1) сходится.

Подобным же образом можно доказать обратимость порядка интегрирования в интеграле

$$\int_{\alpha}^{Y} g(y)\,dy \int_{a}^{\infty} f(x)\,k(x,\ y)\,dx.$$

После этого окончательный результат получается, как в § 1.8.5.

РАЗЛИЧНЫЕ ПРИМЕРЫ

1. Если функция $f(x)$ интегрируема в интервале (a, b) и $a=x_0<x_1<x_2<\ldots$ $\ldots<x_n=b$, то

$$\sum_{\nu=0}^{n-1}\left|\int_{x_\nu}^{x_{\nu+1}} f(t)\,dt\right| \to \int_a^b |f(t)|\,dt,$$

когда длина наибольшего частичного интервала стремится к нулю.

[Для непрерывных функций доказательство элементарно. Общий случай может быть сведен к этому специальному случаю с помощью теоремы § 12.2.]

2. Если функция $F(x)$ абсолютно непрерывна в интервале (a, b), то ее полная вариация в этом интервале равна

$$\int_a^b |F'(x)|\,dx.$$

[Воспользоваться теоремой предыдущего примера.]

3. Показать, что если функции $f(x)$ и $g(x)$ принадлежат к L^2, то

$$\int \{f(x)\}^2\,dx \int \{g(x)\}^2\,dx - \left\{\int f(x)\,g(x)\,dx\right\}^2 =$$
$$= \frac{1}{2}\int dy \int \{f(x)\,g(y) - f(y)\,g(x)\}^2\,dx,$$

и получить этим путем другое доказательство неравенства Шварца.

4. Положим $\log' x = \log x$, если $x \geqslant e$, и $\log' x = 1$, если $x < e$. Показать, что если функции $\{f(x)\}^2 \log' f(x)$ и $\dfrac{\{g(x)\}^2}{\log' g(x)}$ интегрируемы в интервале (a, b), то и функция $f(x)\,g(x)$ интегрируема в интервале (a, b).

[Пусть E — множество, где $f \leqslant \dfrac{g}{\log' g}$. Тогда

$$\int_E fg\,dx \leqslant \int_E \frac{\{g(x)\}^2}{\log' g(x)}\,dx.$$

На CE, наоборот, $g < f\log' g$. Если $g \leqslant e$, то из этого неравенства следует, что

$$g \leqslant f \leqslant f\log' f.$$

Если $g > e$, то $\sqrt{g} < \dfrac{Ag}{\log' g} < Af$, $\log g < A\log f$ и $g < Af\log' f$. Следовательно,

$$\int_{CE} fg\,dx \leqslant A \int_{CE} \{f(x)\}^2 \log' f(x)\,dx.]$$

5. Если функции $f^p(\log' f)^q$ и $g^{\frac{p}{p-1}}(\log' g)^{-\frac{q}{p-1}}$ интегрируемы, то и функция $f(x)\,g(x)$ интегрируема.

6. Доказать, что

$$uv \leqslant u\log u + e^{v-1} \qquad (u > 1,\ v > 1).$$

Вывести из этого, что если функции $f(x)\log' f(x)$ и $e^{g(x)}$ интегрируемы, то такова же функция $f(x)\,g(x)$ *).

[Неравенство можно проверить при помощи подстановки $u = e^x$, $v = y + 1$.]

---

*) W. H. Young [4].

7. Если $\alpha>0,\ \beta>0,\ \gamma>0,\ \alpha+\beta+\gamma=1$, то

$$\left|\int fgh\,dx\right|\leqslant\left(\int|f|^{1/\alpha}dx\right)^{\alpha}\left(\int|g|^{1/\beta}dx\right)^{\beta}\left(\int|h|^{1/\gamma}dx\right)^{\gamma}.$$

8. Если $\lambda>0,\ \mu>0,\ \lambda\mu<1$ и функции $f(x)$ и $g(x)$ принадлежат соответствующим L-классам, то *)

$$\left|\int fg\,dx\right|^{\frac{(1+\lambda)(1+\mu)}{1-\lambda\mu}}\leqslant$$

$$\leqslant\int|f|^{1+\lambda}|g|^{1+\mu}dx\left(\int|f|^{1+\lambda}dx\right)^{\frac{\mu(1+\lambda)}{1-\lambda\mu}}\left(\int|g|^{1+\mu}dx\right)^{\frac{\lambda(1+\mu)}{1-\lambda\mu}}.$$

[Это неравенство можно получить из примера 7 при помощи надлежащих подстановок.]

9. Если $F(x)$ — интеграл функции класса L^p с $p>1$, то при $h\to0$

$$F(x+h)-F(x)=o\left(h^{1-\frac{1}{p}}\right).$$

[Если $F(x)$ — интеграл от $f(x)$, то

$$|F(x+h)-F(x)|=\left|\int\limits_x^{x+h}f(t)\,dt\right|\leqslant$$

$$\leqslant\left\{\int\limits_x^{x+h}|f(t)|^p\,dt\right\}^{\frac{1}{p}}\left\{\int\limits_x^{x+h}dt\right\}^{1-\frac{1}{p}}=h^{1-\frac{1}{p}}\left\{\int\limits_x^{x+h}|f(t)|^p\,dt\right\}^{\frac{1}{p}},$$

последний же интеграл стремится к нулю вместе с h.]

10. Если $f(x)$ принадлежит к $L^p(0,\infty)$ с $p>1$, то интеграл $\int\limits_0^{\infty}f(x)\,\frac{\sin xy}{x}\,dx$ равномерно сходится во всяком конечном интервале.

11. Если $f(x)$ принадлежит к L^p с $p>1$ и $\varphi(y)$ есть интеграл, определенный в предыдущем примере, то при $h\to0$

$$\varphi(y+h)-\varphi(y)=o\left(h^{1/p}\right).$$

[Действительно,

$$\varphi(y+h)-\varphi(y)=\int\limits_0^{\infty}\frac{f(x)}{x}\left[\sin\{x(y+h)\}-\sin xy\right]dx=$$

$$=2\int\limits_0^{\infty}\frac{f(x)}{x}\sin\frac{1}{2}xh\cos x\left(y+\frac{1}{2}h\right)dx,$$

и, следовательно,

$$|\varphi(y+h)-\varphi(y)|\leqslant2\int\limits_0^{\infty}\left|f(x)\,\frac{\sin\frac{1}{2}xh}{x}\right|dx\leqslant$$

$$\leqslant2\left\{\int\limits_0^{\infty}|f(x)|^p\,dx\right\}^{\frac{1}{p}}\left\{\int\limits_0^{\infty}\left|\frac{\sin\frac{1}{2}xh}{x}\right|^{\frac{p}{p-1}}dx\right\}^{1-\frac{1}{p}}.$$

*) W. H. Young [2].

В первых скобках стоит постоянная, а последний сомножитель, как показывает подстановка $x=\frac{\xi}{h}$, кратен $h^{1/p}$. Это дает то, что нужно, но с O вместо o. Если, однако, применить предыдущие соображения к интегралам, взятым по интервалам $(0, \delta)$ и (Δ, ∞), где δ мало, а Δ велико, и принять во внимание, что при фиксированных δ и Δ

$$\left|\int_{\delta}^{\Delta}\frac{f(x)}{x}\sin\frac{1}{2}xh\cos x\left(y+\frac{1}{2}h\right)dx\right|\leqslant\int_{\delta}^{\Delta}\frac{|f(x)|}{x}\left|\sin\frac{1}{2}xh\right|dx=O(h),$$

то получится доказываемая формула.]

12. Пусть $f(x)$ принадлежит к $L^p(0, \infty)$, причем $1<p<2$. Показать, что интеграл

$$\varphi(y)=\int_0^{\infty}f(x)\frac{\sin xy}{\sqrt{x}}dx$$

абсолютно сходится и что при $y\to 0$

$$\varphi(y)=o\left(y^{\frac{1}{p}-\frac{1}{2}}\right).$$

13. Если функция $f(x)$ равномерно непрерывна в интервале $(0, \infty)$ и принадлежит одному из классов $L^p(0, \infty)$, то $f(x)\to 0$ при $x\to\infty$.

14. Если $f(x)$ принадлежит к $L^p(0, \infty)$ с $p>1$, то тому же классу принадлежат функции *)

$$\varphi(x)=\frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,dt,\qquad \psi(x)=\int_x^{\infty}\frac{f(t)}{t}\,dt.$$

[Рассмотрим, например, функцию $\varphi(x)$. Она ограничена при $0<a<x<<b<\infty$. Следовательно, интеграл

$$\int_a^b|\varphi(x)|^p\,dx$$

существует при $0<a<b<\infty$, и достаточно доказать, что он остается ограниченным, когда $a\to 0$, $b\to\infty$.

Без ограничения общности можно считать, что $f(t)\geqslant 0$. Положим

$$f_1(x)=\int_0^x f(t)\,dt$$

и покажем, что $x^{1-p}\{f_1(x)\}^p\to 0$ как при $x\to 0$, так и при $x\to\infty$. Первое следует из неравенства

$$\{f_1(x)\}^p\leqslant\int_0^x\{f(t)\}^p\,dt\left(\int_0^x dt\right)^{p-1}=x^{p-1}\int_0^x\{f(t)\}^p\,dt.$$

Подобная же оценка показывает, что при $x>\xi$

$$f_1(x)\leqslant\int_0^{\xi}f(t)\,dt+\left[x^{p-1}\int_{\xi}^{x}\{f(t)\}^p\,dt\right]^{1/p},$$

*) Hardy [17] и [19].

последний же интеграл сколь угодно мал, если ξ достаточно велико и $x > \xi$. Этим доказано и второе.

Так как

$$\int_a^b \{\varphi(x)\}^p\, dx = \int_a^b \{f_1(x)\}^p x^{-p}\, dx,$$

то интегрирование по частям дает:

$$\left[\frac{\{f_1(x)\}^p x^{1-p}}{1-p}\right]_a^b + \frac{p}{p-1}\int_a^b \{f_1(x)\}^{p-1} f(x)\, x^{1-p}\, dx =$$

$$= o(1) + \frac{p}{p-1}\int_a^b \{\varphi(x)\}^{p-1} f(x)\, dx.$$

Таким образом,

$$\int_a^b \{\varphi(x)\}^p\, dx \leqslant o(1) + \frac{p}{p-1}\left\{\int_a^b \{\varphi(x)\}^p\, dx\right\}^{1-\frac{1}{p}} \left\{\int_a^b \{f(x)\}^p\, dx\right\}^{\frac{1}{p}},$$

и после деления на $\left\{\int_a^b \{\varphi(x)\}^p\, dx\right\}^{1-\frac{1}{p}}$ и перехода к пределу при $a \to 0$, $b \to \infty$ мы получаем неравенство

$$\left\{\int_0^\infty \{\varphi(x)\}^p\, dx\right\}^{1/p} \leqslant \frac{p}{p-1}\left\{\int_0^\infty \{f(x)\}^p\, dx\right\}^{1/p}.$$

Соответствующее доказательство для $\psi(x)$ мы предоставляем читателю.]

15. Доказать, что в условиях предыдущего примера интегралы

$$\int_0^\infty |\varphi(x)|^q x^{\frac{q}{p}-1}\, dx, \qquad \int_0^\infty |\psi(x)|^q x^{\frac{q}{p}-1}\, dx$$

сходятся при $q \geqslant p$.

16. Если функция $f(x)$ принадлежит к $L^p(0, \infty)$ с $p > 1$ и

$$\varphi(x) = \int_0^\infty e^{-xy} f(y)\, dy,$$

то и функция $x^{1-\frac{2}{p}}\varphi(x)$ принадлежит к $L^p(0, \infty)$.

[Поскольку

$$|\varphi(x)| \leqslant \int_0^{1/x} |f(y)|\, dy + \int_{1/x}^\infty \frac{|f(y)|}{xy}\, dy,$$

это получается из примера 14.]

17. Если $f(x)$ принадлежит к $L^p(a, b)$, то для всякого положительного ε существует такая непрерывная функция $g(x)$, что $\int_a^b |f(x) - g(x)|^p\, dx < \varepsilon$.

[Если функция $f(x)$ ограничена, то это сразу следует из § 12.2. Общий случай может быть сведен к случаю ограниченной функции.]

18. Если $f(x)$ принадлежит к L^p в некотором интервале, внутри которого лежит интервал (a, b), то

$$\lim_{h\to 0}\int_a^b |f(x+h)-f(x)|^p\,dx=0.$$

[Это получается сразу, если функция $f(x)$ непрерывна. В общем случае можно воспользоваться предыдущим примером.]

19. Если $f(x)$ принадлежит к $L^p(-\infty, \infty)$, то

$$\lim_{h\to 0}\int_{-\infty}^{\infty} |f(x+h)-f(x)|^p\,dx=0.$$

20. Если $f(x)$ принадлежит к $L^p(-\infty, \infty)$, а $g(x)$ — к $L^{\frac{p}{p-1}}(-\infty, \infty)$, то

$$F(t)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x+t)\,g(x)\,dx$$

есть непрерывная функция от t.

[Действительно,

$$|F(t+h)-F(t)|\leqslant$$

$$\leqslant\left\{\int_{-\infty}^{\infty} |f(x+t+h)-f(x+t)|^p\,dx\right\}^{\frac{1}{p}}\left\{\int_{-\infty}^{\infty} |g(x)|^{\frac{p}{p-1}}\,dx\right\}^{1-\frac{1}{p}}.]$$

21. Функция $F(t)$ предыдущего примера стремится к нулю в бесконечности.

[Воспользоваться разложением

$$\int_{-\infty}^{\infty}=\int_{-\infty}^{-\frac{1}{2}t}+\int_{-\frac{1}{2}t}^{\infty}.]$$

22. Если функция $f(x)$ принадлежит к $L^p(-\infty, \infty)$, то функция

$$F(x)=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f(t)}{1+(x-t)^2}\,dt$$

непрерывна и принадлежит к $L^p(-\infty, \infty)$.

[Воспользоваться неравенством

$$|F(x)|^p\leqslant\int_{-\infty}^{\infty}\frac{|f(t)^p|\,dt}{\{1+(x-t)^2\}^{\frac{1}{2}p}}\left\{\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dt}{\{1+(x-t)^2\}^{\frac{p}{2(p-1)}}}\right\}^{p-1}.]$$

23. Если функция $f(x)$ интегрируема, то интеграл

$$f_\alpha(x)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^x (x-t)^{\alpha-1} f(t)\,dt \qquad (\alpha>0)$$

существует почти всюду и функция $f_\alpha(x)$ интегрируема.

[Функция $f_\alpha(x)$ есть интеграл от $f(x)$ порядка α *).]

24. Показать, пользуясь методом примера 20, что если $f(x)$ принадлежит к L^p с $p>1$ и $\alpha>\frac{1}{p}$, то функция $f_\alpha(x)$ непрерывна.

25. Если $f_{\alpha,\beta}(x)$ — интеграл порядка β от $f_\alpha(x)$, то $f_{\alpha,\beta}(x)=f_{\alpha+\beta}(x)$ ($\alpha>0$, $\beta>0$) всюду, где правая часть существует.

[Нужно обратить повторный интеграл

$$\int_0^x (x-t)^{\beta-1}\,dt\int_0^t (t-u)^{\alpha-1} f(u)\,du$$

и воспользоваться примером 18 гл. I. Интеграл $\int\limits_\delta^x\int\limits_0^{t-\delta}$ можно обратить согласно § 12.6. После этого можно перейти к пределу при $\delta\to 0$ и воспользоваться теоремой § 10.8.2.]

---

*) О некоторых свойствах таких интегралов см. Hardy [12] и Hardy and Littlewood [5].

ГЛАВА XIII

РЯДЫ ФУРЬЕ

13.1. Тригонометрические ряды и ряды Фурье. Тригонометрический ряд есть ряд вида

$$\frac{1}{2}a_0+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx), \tag{1}$$

где коэффициенты a_0, a_1, $b_1, \ldots$ не зависят от x. С проблемой представления заданной функции $f(x)$ таким рядом впервые встретился Фурье в одной задаче о распространении тепла. Впоследствии эти ряды стали играть важную роль в теории функций действительного переменного, и именно с этой точки зрения мы будем рассматривать их здесь.

Мы начнем, естественно, с попытки найти формулы, выражающие коэффициенты a_n, b_n через $f(x)$. Предположим, что ряд сходится к $f(x)$ равномерно или хотя бы ограниченно. Умножим его на $\cos mx$, где m — положительное целое число, и проинтегрируем почленно в интервале $(0, 2\pi)$. Так как

$$\int_0^{2\pi}\cos mx\cos nx\,dx=\begin{cases}\pi & (n=m),\\ 0 & (n\neq m)\end{cases}$$

и

$$\int_0^{2\pi}\cos mx\sin nx\,dx=0$$

для всех значений n, то мы получим формулу

$$a_m=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(x)\cos mx\,dx. \tag{2}$$

Эта формула дает и a_0. Подобным же образом, умножая ряд на $\sin mx$ и интегрируя его почленно, мы видим, что

$$b_m=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(x)\sin mx\,dx. \tag{3}$$

Формулы (2) и (3) известны как формулы Эйлера — Фурье.

A priori нет, однако, никаких оснований предполагать, что заданная функция может быть разложена в ограниченно сходящийся тригонометрический ряд. Поэтому предыдущая процедура не является доказательством того, что коэффициенты всегда имеют указанный вид. Но она наводит на мысль, что здесь возможна другая точка зрения. Вместо того чтобы начинать с ряда и делать предположения о его свойствах, мы начнем с функции и определим коэффициенты формулами (2), (3). Свойства построенного таким образом ряда мы будем затем изучать.

Итак, имеется функция $f(x)$, интегрируемая в интервале $(0, 2\pi)$ по Лебегу. Тогда существуют интегралы (2) и (3). Определяемые ими числа a_m, b_m называются *коэффициентами Фурье* функции $f(x)$. Тригонометрический ряд (1) с этими коэффициентами называется *рядом Фурье функции* $f(x)$.

Глава построена по следующему плану. Сначала мы попытаемся найти условия, при которых ряд Фурье сходится к $f(x)$; имеется несколько таких условий, но все они носят специальный характер (§§ 13.1.1 — 13.2.5). Затем мы рассмотрим один обобщенный вид сходимости (суммируемость (С, 1)) и окажемся в состоянии привести всю теорию в более систематический вид (§§ 13.3 — 13.3.5). В последующих параграфах мы рассмотрим некоторые проблемы, касающиеся почленного интегрирования; это приведет нас к изучению коэффициентов Фурье самих по себе, вне связи с рядами Фурье. В §§ 13.8 — 13.8.6 мы вернемся к вопросу о том, каково отношение рядов Фурье к тригонометрическим рядам общего вида. В заключение мы изложим кое-что из соответствующей теории интегралов Фурье.

13.1.1. Проблема сходимости. Первая проблема, которую мы должны рассмотреть, состоит в том, сходится ли ряд, построенный описанным выше способом, и если да, то равна ли его сумма $f(x)$.

В то время, когда ряды Фурье только начали входить в употребление, многим математикам казалось парадоксальным утверждение, что «произвольная» функция может быть представлена рядом функций, каждая из которых непрерывна и периодична. Читатель, познакомившийся в гл. I с особенностями некоторых рядов, пожалуй, готов будет поверить, что даже это возможно. И мы покажем, что *в существенном* ряд Фурье дает такое представление. Не следует, однако, ожидать слишком многого.

Прежде всего, каждый член ряда имеет период 2π; следовательно, сумма ряда, если она существует, также имеет период 2π. Поэтому мы будем считать функцию $f(x)$ определенной первоначально в интервале $0 \leqslant x < 2\pi$; за пределами этого интервала мы определяем ее по периодическому закону, т. е. соотношением

$$f(x+2\pi) = f(x).$$

Далее, не для всякой функции $f(x)$ ряд Фурье сходится при всех значениях x к сумме $f(x)$. Рассмотрим, например, две функции, $f(x)$ и $g(x)$, отличающиеся друг от друга только в одной точке. Такие функции имеют один и тот же ряд Фурье, так что последний не может представлять обе функции в каждой точке. Более общим образом, всякие две «эквивалентные», т. е. почти всюду равные, функции имеют один и тот же ряд Фурье, так что последний не может представлять обе эти функции, если они различны.

Мы увидим, что в действительности ряд Фурье представляет функцию, если она не слишком сложна, и что в основных чертах он, в некотором смысле, представляет ее даже в самых сложных случаях.

13.1.2. Ряд Фурье и ряд Лорана. Существует тесная формальная связь между рядами Фурье и рядами Лорана. Пусть $F(z)$ — однозначная аналитическая функция, регулярная при $R' < |z| < R$. Тогда

$$F(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n z^n,$$

где $c_n = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|z|=r} \frac{F(z)}{z^{n+1}} dz$ $(R' < r < R)$. Полагая $z = re^{i\theta}$, мы видим, что

$$F(re^{i\theta}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n e^{in\theta},$$

где $A_n = \int\limits_0^{2\pi} F(re^{i\varphi}) e^{-in\varphi} d\varphi$. Это разложение можно представить также в виде

$$F(re^{i\theta}) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \{(A_n + A_{-n}) \cos n\theta + i(A_n - A_{-n}) \sin n\theta\},$$

где

$$A_0 = \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} F(re^{i\varphi}) d\varphi, \quad A_n + A_{-n} = \frac{1}{\pi} \int\limits_0^{2\pi} F(re^{i\varphi}) \cos n\varphi \, d\varphi,$$

$$i(A_n - A_{-n}) = \frac{1}{\pi} \int\limits_0^{2\pi} F(re^{i\varphi}) \sin n\varphi \, d\varphi.$$

Итак, мы представили ряд Лорана в форме ряда Фурье. То, что здесь ряд представляет функцию и даже сходится к ней равномерно, следует из теории аналитических функций. Но в общем случае мы не предполагаем функцию аналитической, и проблема требует совсем других методов.

13.2. Интеграл Дирихле. Пусть $0 \leqslant x < 2\pi$; положим

$$s_n = s_n(x) = \frac{1}{2} a_0 + \sum_{m=1}^{n} (a_m \cos mx + b_m \sin mx). \tag{1}$$

Эта частичная сумма может быть нижеследующим образом представлена в виде определенного интеграла. Мы можем написать:

$$s_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t)\, dt +$$
$$+ \frac{1}{\pi} \sum_{m=1}^{n} \left\{ \cos mx \int_0^{2\pi} f(t) \cos mt\, dt + \sin mx \int_0^{2\pi} f(t) \sin mt\, dt \right\} =$$
$$= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \left\{ \frac{1}{2} + \sum_{m=1}^{n} \cos m(x-t) \right\} f(t)\, dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)(x-t)}{\sin \frac{1}{2}(x-t)} f(t)\, dt.$$

Подстановка $t = x + u$ показывает, что

$$s_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-x}^{2\pi - x} \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right) u}{\sin \frac{1}{2} u} f(x+u)\, du,$$

и так как подынтегральная функция имеет период 2π, то

$$s_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right) u}{\sin \frac{1}{2} u} f(x+u)\, du. \tag{2}$$

Эта формула известна как *интеграл Дирихле*. Она может быть представлена в виде

$$s_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right) u}{\sin \frac{1}{2} u} \{f(x+u) + f(x-u)\}\, du. \tag{3}$$

Действительно, если в интервале $(\pi, 2\pi)$ положить $u = -v$ и воспользоваться периодичностью, то соответствующая часть интеграла (2) примет вид

$$\int_{-2\pi}^{-\pi} \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right) v}{\sin \frac{1}{2} v} f(x-v)\, dv = \int_0^{\pi} \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right) u}{\sin \frac{1}{2} u} f(x-u)\, du.$$

Если, в частности, $f(x) = 1$ при всех значениях x, то $a_0 = 2$, а все остальные коэффициенты Фурье равны нулю, так что $s_n = 1$

при $n>0$. Поэтому предыдущая формула показывает, что

$$1=\frac{1}{2\pi}\int_0^\pi \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)u}{\sin\frac{1}{2}u}\,2\,du.$$

Умножая это равенство на s и вычитая из равенства (3), мы получаем формулу

$$s_n-s=\frac{1}{2\pi}\int_0^\pi \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)u}{\sin\frac{1}{2}u}\{f(x+u)+f(x-u)-2s\}\,du. \qquad (4)$$

Таким образом, необходимое и достаточное условие сходимости ряда к сумме s заключается в сходимости этого интеграла к нулю. «Проблема сходимости» есть проблема отыскания условий, при которых этот интеграл стремится к нулю, и условий, при которых $s=f(x)$. Мы можем рассматривать проблему сходимости для некоторого частного значения x, для всех значений x, для почти всех значений x или для какого-нибудь множества значений x. Мы начнем с частного значения x.

13.2.1. Теорема Римана—Лебега. Следующая теорема является основной для всей теории.

Если функция $f(x)$ интегрируема в интервале (a, b), то при $\lambda\to\infty$

$$\int_a^b f(x)\cos\lambda x\,dx\to 0,\quad \int_a^b f(x)\sin\lambda x\,dx\to 0.$$

Рассмотрим, например, первый интеграл. Если $f(x)$ есть некоторый интеграл, то можно интегрировать по частям, так что

$$\int_a^b f(x)\cos\lambda x\,dx=\left[f(x)\frac{\sin\lambda x}{\lambda}\right]_a^b-\frac{1}{\lambda}\int_a^b f'(x)\sin\lambda x\,dx.$$

Последний интеграл ограничен, и потому правая часть есть $O\left(\frac{1}{\lambda}\right)$.

В общем случае мы можем (§ 12.2) найти для заданного ε такую абсолютно непрерывную функцию $\varphi(x)$, что

$$\int_a^b |f(x)-\varphi(x)|\,dx<\varepsilon.$$

Так как при любом значении λ

$$\left|\int_a^b \{f(x)-\varphi(x)\}\cos\lambda x\,dx\right|\leqslant\int_a^b |f(x)-\varphi(x)|\,dx<\varepsilon$$

и так как, в силу уже доказанного,

$$\left|\int_a^b \varphi(x)\cos\lambda x\,dx\right| < \varepsilon \qquad (\lambda > \lambda_0),$$

то

$$\left|\int_a^b f(x)\cos\lambda x\,dx\right| < 2\varepsilon \qquad (\lambda > \lambda_0),$$

и первое соотношение доказано. Аналогичное доказательство применимо ко второму интегралу.

Имеется также доказательство в духе § 13.7.2, использующее пример § 12.2.

13.2.2. Теорема Римана — Лебега имеет нижеследующие важные следствия.

Коэффициенты Фурье любой интегрируемой функции стремятся к нулю.

Это — частный случай теоремы, который получается, если $\lambda = n$, $a = 0$, $b = 2\pi$.

Поведение ряда Фурье в некоторой точке x зависит только от поведения функции в сколь угодно малой окрестности этой точки.

Пусть δ — положительное число, меньшее π, и пусть $g(t) = f(t)$ в интервале $x - \delta < t < x + \delta$ и $g(t) = 0$ в остальной части интервала $(x - \pi,\ x + \pi)$. Обозначим частичные суммы ряда Фурье функции $g(t)$ через S_n. Мы можем написать:

$$S_n = \frac{1}{2\pi}\int_0^\pi \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)u}{\sin\frac{1}{2}u}\{g(x+u)+g(x-u)\}\,du =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^\delta \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)u}{\sin\frac{1}{2}u}\{f(u+u)+f(x-u)\}\,du.$$

Таким образом,

$$s_n - S_n = \frac{1}{2\pi}\int_\delta^\pi \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)u}{\sin\frac{1}{2}u}\{f(x+u)+f(x-u)\}\,du.$$

Но функция

$$\operatorname{cosec}\frac{1}{2}u\,\{f(x+u)+f(x-u)\}$$

интегрируема в интервале (δ, π), если $\delta > 0$, так что, в силу теоремы Римана — Лебега,

$$s_n - S_n \to 0.$$

Следовательно, как бы мало ни было δ, поведение суммы s_n зависит только от свойств функции $f(t)$ в интервале $(x-\delta,\ x+\delta)$; значения, которые она принимает вне этого интервала, не играют роли.

Именно это свойство делает возможным представление рядами Фурье произвольных функций. В действительности ряд представляет лишь некоторого рода предел среднего значения функции в интервале $(x-\delta,\ x+\delta)$, и этот предел равен $f(x)$ только в случае, когда поведение функции достаточно просто. Как уже было замечено в § 13.1.1, значение функции в самой точке x не оказывает на ряд никакого влияния.

13.2.3. Признаки сходимости. Сначала мы представим «необходимое и достаточное условие сходимости к сумме s» в более удобной форме. Положим

$$\varphi(u) = f(x+u) + f(x-u) - 2s.$$

Указанное условие (см. формулу § 13.2 (4)) состоит в том, что

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^{\pi} \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)u}{\sin\frac{1}{2}u}\,\varphi(u)\,du = 0. \tag{1}$$

Это условие можно заменить условием

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^{\delta} \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)u}{\sin\frac{1}{2}u}\,\varphi(u)\,du = 0, \tag{2}$$

где $0<\delta\leqslant\pi$; действительно, в силу теоремы Римана — Лебега разность между интегралами в формулах (1) и (2) стремится к нулю. Далее, условие (2) можно заменить условием

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^{\delta} \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)u}{u}\,\varphi(u)\,du = 0; \tag{3}$$

действительно, функция $\left(\operatorname{cosec}\frac{1}{2}u - \frac{2}{u}\right)\varphi(u)$ интегрируема в интервале $(0,\ \delta)$, так что, в силу теоремы Римана — Лебега,

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^{\delta} \sin\left(n+\frac{1}{2}\right)u \left\{\frac{1}{\sin\frac{1}{2}u} - \frac{2}{u}\right\}\varphi(u)\,du = 0.$$

Теперь мы в состоянии указать некоторые признаки сходимости.

13.2.3.1. Признак Дини. *Если функция* $\frac{\varphi(u)}{u}$ *интегрируема в интервале* $(0,\ \delta)$, *то ряд сходится к сумме* s.

Это сразу следует из формулы (3) и теоремы Римана — Лебега. Следует, конечно, помнить, что интегрируемость функции $\frac{\varphi(u)}{u}$ по Лебегу есть абсолютная интегрируемость. Существование предела

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\varepsilon}^{\delta}\frac{\varphi(u)}{u}\,du$$

не является достаточным условием сходимости.

Примеры. (I) Ряд сходится к сумме $f(x)$ в каждой точке, где функция $f(x)$ дифференцируема.

[В такой точке x функция $\varphi(u)/u$ ограничена.]

(II) Более общим образом, если функция $f(x)$ удовлетворяет «условию Липшица»

$$f(x+h)-f(x)=O(|h^{\alpha}|)\qquad (0<\alpha<1),$$

то ряд сходится к сумме $f(x)$.

13.2.3.2. Признак Жордана. *Если функция $f(t)$ имеет в окрестности точки $t=x$ ограниченную вариацию, то ряд сходится к сумме $\frac{1}{2}\{f(x+0)+f(x-0)\}$.*

Так как ограниченность вариации есть условие, всегда относящееся к некоторому интервалу, то в действительности этот признак является признаком сходимости в некотором интервале.

Мы знаем, что если $f(x)$ есть функция ограниченной вариации, то пределы $f(x+0)$ и $f(x-0)$ существуют. Функция

$$\varphi(u)=f(x+u)+f(x-u)-f(x+0)-f(x-0)$$

имеет ограниченную вариацию в некотором интервале справа от точки $u=0$, и $\varphi(u)\to 0$ при $u\to 0$. Следовательно,

$$\varphi(u)=\varphi_1(u)-\varphi_2(u),$$

где φ_1 и φ_2 — положительные неубывающие функции от u, стремящиеся при $u\to 0$ к одному и тому же пределу; вычитая из обеих функций одну и ту же постоянную, мы можем добиться того, чтобы этот предел был равен нулю.

Пусть δ столь мало, что в интервале $(0, \delta)$ функция $\varphi(u)$ имеет ограниченную вариацию. Тогда

$$\int_0^{\delta}\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)u}{u}\varphi(u)\,du=$$

$$=\int_0^{\delta}\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)u}{u}\varphi_1(u)\,du-\int_0^{\delta}\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)u}{u}\varphi_2(u)\,du.$$

Обозначим два последних интеграла через I_1 и I_2 и рассмотрим интеграл I_1. Для заданного ε существует столь малое η, что

$\varphi_1(\eta) < \varepsilon$, и, в силу второй теоремы о среднем значении,

$$\int_0^\eta \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)u}{u}\varphi_1(u)\,du =$$

$$= \varphi_1(\eta)\int_\xi^\eta \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)u}{u}\,du = \varphi_1(\eta)\int_{\left(n+\frac{1}{2}\right)\xi}^{\left(n+\frac{1}{2}\right)\eta}\frac{\sin v}{v}\,dv.$$

Последний интеграл ограничен для всех значений n, ξ и η, так что

$$\left|\int_0^\eta \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)u}{u}\varphi_1(u)\,du\right| < A\varepsilon.$$

В силу теоремы Римана — Лебега, при фиксированном η

$$\left|\int_\eta^\delta \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)u}{u}\varphi_1(u)\,du\right| < \varepsilon \qquad (n > n_0).$$

Следовательно, $I_1 \to 0$, и подобным же образом $I_2 \to 0$. Теорема доказана.

В частности, *если функция* $f(x)$ *имеет в интервале* $(0, 2\pi)$ *только конечное число максимумов и минимумов и конечное число точек разрыва, то ее ряд Фурье сходится при всех значениях* x *к сумме* $\frac{1}{2}\{f(x+0)+f(x-0)\}$. Действительно, такая функция имеет ограниченную вариацию во всем интервале $(0, 2\pi)$.

Эти условия известны как *условия Дирихле*. Конечно, они выполнены во многих случаях; однако они представляют то неудобство, что сумма двух функций, которые им удовлетворяют, может им не удовлетворять.

В связи с признаком Жордана представляет интерес тот факт, что *если функция* $f(x)$ *имеет в интервале* $(0, 2\pi)$ *ограниченную вариацию, то ее ряд Фурье сходится ограниченно.*

Для доказательства представим интеграл Дирихле для $s_n(x)$ при $0 \leqslant x < \pi$ в виде

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\frac{1}{2}\pi}^{\frac{3}{2}\pi}\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)(x-t)}{\sin\frac{1}{2}(x-t)}f(t)\,dt.$$

Так как функция

$$\frac{1}{\sin\frac{1}{2}(x-t)}-\frac{1}{\frac{1}{2}(x-t)}$$

ограничена при $-\frac{3}{2}\pi<x-t<\frac{3}{2}\pi$, то этот интеграл отличается от интеграла

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\frac{1}{2}\pi}^{\frac{3}{2}\pi}\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)(x-t)}{x-t}f(t)\,dt$$

на ограниченную функцию. Воспользуемся представлением $f(t)=f_1(t)-f_2(t)$, где f_1 и f_2 положительны и не убывают в интервале $\left(-\frac{1}{2}\pi,\ \frac{3}{2}\pi\right)$. В силу второй теоремы о среднем значении,

$$\int\limits_{-\frac{1}{2}\pi}^{\frac{3}{2}\pi}\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)(x-t)}{x-t}f_1(t)\,dt=f_1\left(\frac{3}{2}\pi\right)\int\limits_{\xi}^{\frac{3}{2}\pi}\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)(x-t)}{x-t}\,dt$$

$$\left(-\frac{1}{2}\pi<\xi<\frac{3}{2}\pi\right),$$

а этот интеграл ограничен для всех значений n и x (ср. предыдущее доказательство). Такое же заключение верно для f_2. Следовательно, ряд ограниченно сходится в интервале $(0,\ \pi)$, и то же верно для интервала $(\pi,\ 2\pi)$.

13.2.3.3. Признак Валле-Пуссена*). *Если функция*

$$\psi(t)=\frac{1}{t}\int\limits_0^t\varphi(u)\,du$$

имеет ограниченную вариацию в некотором интервале с левым концом $t=0$, то ряд сходится. Если значение s выбрано так, что $\psi(t)\to 0$ при $t\to 0$, то сумма ряда равна s.

Действительно,

$$\varphi(t)=\frac{d}{dt}\{t\psi(t)\}=\psi(t)+t\psi'(t),$$

так что интеграл § 13.2.3 (3) распадается на две части. Если $\psi(t)$ имеет ограниченную вариацию и стремится к нулю, то часть,

*) Этот признак был указан ранее Дюбуа-Реймоном, но, конечно, с интегралом Римана вместо интеграла Лебега.

содержащая $\psi(t)$, стремится к нулю, как в признаке Жордана. Часть же, содержащая $t\psi'(t)$, стремится к нулю, как в признаке Дини, поскольку функция $\psi'(t)$ интегрируема (§ 11.5.4).

13.2.4. Отношения между признаками*). Рассмотрим функцию

$$f(x)=\frac{1}{\log\frac{1}{x}}\quad(0<x<\pi),\qquad =0\quad(\pi\leqslant x\leqslant 2\pi).$$

Она ограничена и монотонна в окрестности точки $x=0$, так что условие Жордана выполнено и ряд сходится. Но условие Дини не выполнено, так как интеграл $\int\limits_0^\delta \frac{dt}{t\log\frac{1}{t}}$ расходится. Таким образом, *признак Жордана не содержится в признаке Дини.*

Но и *признак Дини не содержится в признаке Жордана.* Действительно, рассмотрим функцию

$$f(x)=x^\alpha\sin\frac{1}{x}\quad(0<x<\pi),\qquad =0\quad(\pi\leqslant x\leqslant 2\pi),$$

где $0<\alpha<1$. В точке $x=0$ для нее, очевидно, выполнено условие Дини. Однако эта функция не имеет ограниченной вариации (гл. XI, пример 5), так что условие Жордана не выполнено.

Наконец, *как признак Дини, так и признак Жордана содержится в признаке Валле-Пуссена.* Это значит, что если выполнено условие Дини или условие Жордана, то выполнено и условие Валле-Пуссена.

Заметим, прежде всего, что *если функция $g(x)$ имеет в интервале $(0, \delta)$ ограниченную вариацию, то тем же свойством обладает функция $G(x)=\frac{1}{x}\int\limits_0^x g(t)\,dt$.*

Действительно, $g(x)=g_1(x)-g_2(x)$, где $g_1(x)$ и $g_2(x)$ положительны, не убывают и ограничены, так что

$$G(x)=\frac{1}{x}\int\limits_0^x g_1(t)\,dt-\frac{1}{x}\int\limits_0^x g_2(t)\,dt=G_1(x)-G_2(x).$$

Нетрудно проверить, что обе функции $G_1(x)$, $G_2(x)$ положительны, не убывают и ограничены. Следовательно, $G(x)$ есть функция ограниченной вариации.

---

*) Подробности: Hardy [13].

Отношение признака Жордана к признаку Валле-Пуссена определяется этим непосредственно: если $\varphi(t)$ — функция ограниченной вариации, то такова же функция $\psi(t)$.

Рассмотрим теперь признак Дини. Если $\varphi(u)/u$ — интегрируемая функция, то

$$\chi(t)=\int_0^t \frac{\varphi(u)}{u}\,du$$

есть функция ограниченной вариации. Такова же тогда, в силу предыдущего замечания, и функция

$$\psi(t)=\frac{1}{t}\int_0^t u\,\frac{d}{du}\{\chi(u)\}\,du=\chi(t)-\frac{1}{t}\int_0^t \chi(u)\,du.$$

Следовательно, условие Валле-Пуссена выполнено.

13.2.5. Сходимость в целом интервале. Если одно из предыдущих условий выполнено во всех точках некоторого интервала, то, конечно, ряд будет сходиться во всем этом интервале. Если же условие выполнено равномерно, то и сходимость будет равномерной. Вот простейший случай такого рода.

Если функция $f(x)$ непрерывна и имеет ограниченную вариацию в некотором интервале, то во всяком внутреннем интервале ряд Фурье функции $f(x)$ равномерно сходится к $f(x)$.

Действительно, в указанном интервале $f(x)=f_1(x)-f_2(x)$, где $f_1(x)$ и $f_2(x)$ непрерывны и не убывают. В силу равномерной непрерывности функции $f_1(x)$ существует такое η, что

$$|f_1(x+h)-f_1(x)|<\varepsilon \qquad (|h|<\eta),$$

причем выбор η зависит только от ε, т. е. на зависит от значения x в рассматриваемом интервале. Из доказательства достаточности условия Жордана видно, что оцениваемый там интеграл сходится тогда равномерно. Остается еще проверить, что часть интеграла Дирихле, которая, как было показано в § 13.2.3, стремится к нулю, в действительности стремится к нулю равномерно; здесь читатель не встретит никаких трудностей.

В случае рядов Фурье равномерная сходимость, однако, не столь важна, как можно было бы ожидать, так как проблема почленного интегрирования решается для них в более общих условиях (§ 13.5).

Простые ограничения, относящиеся к функции $f(x)$, которые обеспечивали бы сходимость ряда Фурье *почти всюду*, но при этом не обеспечивали бы очевидным образом нечто большее, по-видимому, неизвестны. Можно предположить, например, что таким условием является непрерывность, однако ничего подобного доказать не удалось. С другой стороны, условие, относящееся не к самой функции, а к ее коэффициентам Фурье, было найдено *): *если ряд*

$$\sum (a_n^2 + b_n^2) \log n$$

сходится, то ряд § 13.1 (1) *сходится почти всюду* **).

13.3. Суммирование ряда арифметическими средними. Если некоторый ряд $u_1 + u_2 + \ldots$ не сходится, т. е. если $s_n = u_1 + \ldots + u_n$ не стремится к пределу, то иногда бывает возможно приписать ряду некоторую «сумму» менее прямым способом. Простейшим из таких способов является «суммирование арифметическими средними». Речь идет об арифметических средних

$$\sigma_n = \frac{s_1 + s_2 + \ldots + s_n}{n}$$

частичных сумм ряда. Если $s_n \to s$, то и $\sigma_n \to s$; действительно, если $s_n = s + \delta_n$, то

$$\sigma_n = s + \frac{\delta_1 + \delta_2 + \ldots + \delta_n}{n},$$

и в силу леммы § 1.2.3 последний член стремится к нулю, если $\delta_n \to 0$.

Но σ_n может стремиться к некоторому пределу и тогда, когда s_n не стремится ни к какому пределу. Рассмотрим, например, ряд

$$1 - 1 + 1 - 1 + \ldots$$

Здесь частичные суммы s_n равны попеременно 1 и 0, но, как нетрудно проверить, $\sigma_n \to \frac{1}{2}$.

Ряд, для которого σ_n стремится к некоторому пределу, называется суммируемым арифметическими средними или чезаровскими средними первого порядка, а также суммируемым $(C, 1)$.

Примеры. (I) Ряд $1 + 0 - 1 + 1 + 0 - 1 + \ldots$ суммируем $(C, 1)$ к сумме 2/3.

(II) Ряд $\sin x + \sin 2x + \sin 3x + \ldots$ суммируем $(C, 1)$ при всех значениях x; сумма равна $\frac{1}{2} \operatorname{ctg} \frac{1}{2} x$, если x не есть четное кратное π, и 0 в противном случае.

(III) Если x не есть четное кратное π, то ряд $\frac{1}{2} + \cos x + \cos 2x + \cos 3x + \ldots$ суммируем $(C, 1)$ к нулю.

(IV) Если ряд $\sum u_n$ суммируем $(C, 1)$, то $s_n = o(n)$.

[Действительно, $s_n = n\sigma_n - (n-1)\sigma_{n-1}$.]

---

*) Plessner [2].

**) Положение изменилось: теперь известно, что ряд Фурье функции из L^p с $p > 1$ сходится почти всюду; см. Carleson [1] и Hunt [1], а также Fefferman [1]. (*Примечание переводчика.*)

(V) Пусть $t_n = u_1 + 2u_2 + \ldots + nu_n$. Если ряд $\sum u_n$ суммируем $(C, 1)$, то он сходится тогда и только тогда, когда $t_n = o(n)$.

[Действительно, $t_n = (n+1)s_n - n\sigma_n$.]

(VI) Если ряд $\sum u_n$ суммируем $(C, 1)$ и $u_n = o(1/n)$, то ряд $\sum u_n$ сходится. [В силу леммы § 1.2.3, $t_n = o(n)$. Теорема аналогична теореме Таубера.]

(VII) Для того чтобы ряд $\sum u_n$ был суммируем $(C, 1)$, необходимо и достаточно, чтобы ряд $\sum \frac{t_n}{n(n+1)}$ был сходящимся.

[Действительно,

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{t_n}{n(n+1)} = \frac{N}{N+1} \sigma_N.\Bigr]$$

(VIII) Если ряд $\sum u_n$ суммируем $(C, 1)$ и $u_n = O\left(\frac{1}{n}\right)$, то ряд $\sum u_n$ сходится.

[Харди; это — аналог литтлвудовского усиления теоремы Таубера. Если ряд $\sum u_n$ не сходится, то $t_N > A_1 N$ или $t_N < -A_1 N$ для бесконечного числа значений N. Будем считать, что имеет место первое. Так как $t_{n+1} = t_n + (n+1)u_n > t_n - A_2$, то $t_{N+\nu} > \frac{1}{2} A_1 N$ $\left(0 \leqslant \nu < \frac{NA_1}{2A_2}\right)$. Следовательно,

$$\sum_{n=N}^{N+\frac{NA_1}{2A_2}} \frac{t_n}{n(n+1)} > A,$$

так что (см. пример (VII)) ряд не суммируем $(C, 1)$.]

(IX) Ряд с положительными членами суммируем $(C, 1)$ только в случае, когда он сходится.

[Если $s_n \to \infty$, то $\sigma_n \to \infty$.]

13.3.1. Суммируемость рядов Фурье. Фейером было открыто*), что метод суммирования арифметическими средними особенно плодотворен в применении к рядам Фурье. Мы полагаем

$$\sigma_n = \frac{s_0 + s_1 + \ldots + s_{n-1}}{n},$$

где s_n определяется формулой § 13.2 (3). Таким образом,

$$\sigma_n = \frac{1}{2n\pi} \int_0^\pi \frac{\sin\frac{1}{2}u + \ldots + \sin\left(n - \frac{1}{2}\right)u}{\sin\frac{1}{2}u} \{f(x+u) + f(x-u)\}\, du =$$

$$= \frac{1}{2n\pi} \int_0^\pi \frac{\sin^2\frac{1}{2}nu}{\sin^2\frac{1}{2}u} \{f(x+u) + f(x-u)\}\, du. \qquad (1)$$

*) Fejér [1].

Эта формула известна как *интеграл Фейера*. Она обязана своим значением тому факту, что множитель $\dfrac{\sin^2\frac{1}{2}nu}{\sin^2\frac{1}{2}u}$ положителен. Эта положительность делает обращение с интегралом Фейера значительно более простым, чем обращение с интегралом Дирихле, в котором соответствующий множитель $\dfrac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)u}{\sin\frac{1}{2}u}$ колеблется между положительными и отрицательными значениями.

В том частном случае, когда $f(x)=1$, формула принимает вид

$$1=\frac{1}{2n\pi}\int_0^\pi \frac{\sin^2\frac{1}{2}nu}{\sin^2\frac{1}{2}u}\,2du;$$

действительно, здесь $\sigma_n=1$ при $n>0$. Умножая это равенство на s и вычитая из равенства (1), мы видим, что

$$\sigma_n-s=\frac{1}{2n\pi}\int_0^\pi \frac{\sin^2\frac{1}{2}nu}{\sin^2\frac{1}{2}u}\{f(x+u)+f(x-u)-2s\}\,du. \qquad (2)$$

Таким образом, ряд в том и только в том случае суммируем $(C,\ 1)$ к сумме s, если интеграл (2) стремится к нулю.

Это условие может быть упрощено так же, как соответствующее условие в проблеме сходимости. Мы полагаем

$$\varphi(u)=f(x+u)+f(x-u)-2s,$$

как выше. Пусть δ — произвольное положительное число, меньшее π. Так как

$$\left|\frac{1}{n}\int_\delta^\pi \frac{\sin^2\frac{1}{2}nu}{\sin^2\frac{1}{2}u}\varphi(u)\,du\right|\leqslant\frac{1}{n}\int_\delta^\pi \frac{|\varphi(u)|}{\sin^2\frac{1}{2}u}\,du$$

и так как правая часть стремится к нулю, то ряд в том и только в том случае суммируем $(C,\ 1)$ к сумме s, если

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\int_0^\delta \frac{\sin^2\frac{1}{2}nu}{\sin^2\frac{1}{2}u}\varphi(u)\,du=0. \qquad (3)$$

Наконец, это условие может быть представлено в виде

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\int_0^\delta \frac{\sin^2\frac{1}{2}nu}{u^2}\varphi(u)\,du=0. \tag{4}$$

Действительно,

$$\left|\frac{1}{n}\int_0^\delta \sin^2\frac{1}{2}nu\left\{\frac{1}{\sin^2\frac{1}{2}u}-\frac{1}{\left(\frac{1}{2}u\right)^2}\right\}\varphi(u)\,du\right|\leqslant$$

$$\leqslant\frac{1}{n}\int_0^\delta\left\{\frac{1}{\sin^2\frac{1}{2}u}-\frac{1}{\left(\frac{1}{2}u\right)^2}\right\}|\varphi(u)|\,du,$$

а правая часть стремится к нулю.

13.3.2. Теорема Фейера. *Ряд Фурье функции $f(x)$ суммируем $(C, 1)$ к сумме $\frac{1}{2}\{f(x+0)+f(x-0)\}$ в каждой точке x, в которой это выражение имеет смысл. В частности, ряд суммируем $(C, 1)$ к сумме $f(x)$ всюду, где функция $f(x)$ непрерывна.*

Мы полагаем в предыдущей формуле $s=\frac{1}{2}\{f(x+0)+f(x-0)\}$. Тогда $\varphi(u)\to 0$ вместе с u, и мы должны доказать, что выполняется соотношение § 13.3.1 (4). Пусть $|\varphi(u)|\leqslant\varepsilon$ при $u\leqslant\eta$. Тогда

$$\left|\frac{1}{n}\int_0^\delta\frac{\sin^2\frac{1}{2}nu}{u^2}\varphi(u)\,du\right|\leqslant\frac{1}{n}\int_0^\eta\frac{\sin^2\frac{1}{2}nu}{u^2}\varepsilon\,du+$$

$$+\frac{1}{n}\int_\eta^\delta\frac{\sin^2\frac{1}{2}nu}{u^2}|\varphi(u)|\,du\leqslant\frac{\varepsilon}{n}\int_0^\eta\frac{\sin^2\frac{1}{2}nu}{u^2}du+\frac{1}{n}\int_\eta^\delta\frac{|\varphi(u)|}{u^2}du=I_1+I_2.$$

Но

$$\frac{1}{n}\int_0^\eta\frac{\sin^2\frac{1}{2}nu}{u^2}du=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{1}{2}n\eta}\frac{\sin^2 v}{v^2}dv<\frac{1}{2}\int_0^\infty\frac{\sin^2 v}{v^2}dv.$$

Справа стоит постоянная, и, следовательно, $I_1<A\varepsilon$. Наконец, очевидно, что если η фиксировано, то $I_2\to 0$ при $n\to\infty$. Этим теорема доказана.

13.3.3. Суммируемость в целом интервале. Следующая теорема является почти непосредственным следствием изложенного в предыдущем параграфе.

Ряд Фурье функции $f(x)$ равномерно суммируем к $f(x)$ во всяком интервале, внутреннем к интервалу непрерывности.

Действительно, в таком интервале функция $f(x)$ равномерно непрерывна, так что выбор η в предыдущем доказательстве зависит только от ε, т. е. не зависит от x. В остальном доказательство остается прежним.

Аппроксимационная теорема Вейерштрасса. *Для всякой функции $f(x)$, непрерывной в интервале (a, b), и всякого положительного числа ε существует такой многочлен $p(x)$, что*

$$|f(x)-p(x)|<\varepsilon \qquad (a\leqslant x\leqslant b).$$

Надлежащим предварительным преобразованием можно добиться того, чтобы рассматриваемый интервал лежал внутри интервала $(0, 2\pi)$. В силу предыдущей теоремы существует такой «тригонометрический многочлен» $\sigma_n(x)$, что $|f(x)-\sigma_n(x)|<\frac{1}{2}\varepsilon$ во всем интервале. Если мы заменим теперь в этом многочлене каждый синус и каждый косинус достаточно большим числом членов соответствующего степенного ряда, то мы получим такой многочлен $p(x)$, что $|\sigma_n(x)-p(x)|<\frac{1}{2}\varepsilon$ во всем интервале. Этим теорема доказана.

13.3.4. Суммируемость почти всюду. Пока мы ограничивались обычной сходимостью, мы не могли доказать, что ряд Фурье представляет функцию в целом, не налагая на функцию сильных ограничений. Теория суммируемости устраняет этот недостаток.

Теорема Фейера—Лебега. *Ряд Фурье функции $f(x)$ суммируем $(C, 1)$ к сумме $f(x)$ при каждом значении x, для которого*

$$\int_0^t |f(x+u)-f(x)|\,du=o(t). \tag{1}$$

В частности, он суммируем $(C, 1)$ к $f(x)$ почти всюду.

В § 11.6 было доказано, что условие (1) выполнено почти всюду для всякой интегрируемой функции. Благодаря этому вторая часть теоремы сразу получается из первой.

Пусть x — точка, в которой условие (1) выполнено. Положим в формулах § 13.3.1 $s=f(x)$. Мы можем написать:

$$\int_0^t |\varphi(u)|\,du=\int_0^t |f(x+u)+f(x-u)-2f(x)|\,du\leqslant$$
$$\leqslant\int_0^t |f(x+u)-f(x)|\,du+\int_0^t |f(x-u)-f(x)|=o(t).$$

Положим

$$\Phi(t)=\int_0^t |\varphi(u)|\,du$$

и найдем для заданного ε такое η, что $\Phi(t)<\varepsilon t$ при $t\leqslant\eta$. Далее, предполагая, что $n>\frac{1}{\eta}$, напишем:

$$\int_0^\delta \frac{\sin^2\frac{1}{2}nu}{u^2}\varphi(u)\,du=\int_0^{\frac{1}{n}}+\int_{\frac{1}{n}}^{\eta}+\int_\eta^\delta=I_1+I_2+I_3.$$

Так как $\sin^2\theta\leqslant\theta^2$, то

$$|I_1|\leqslant\left(\frac{1}{2}n\right)^2\int_0^{\frac{1}{n}}|\varphi(u)|\,du<\frac{1}{4}\varepsilon n,$$

$$|I_2|\leqslant\int_{\frac{1}{n}}^{\eta}\frac{|\varphi(u)|}{u^2}\,du=\frac{\Phi(\eta)}{\eta^2}-n^2\Phi\left(\frac{1}{n}\right)+2\int_{\frac{1}{n}}^{\eta}\frac{\Phi(u)}{u^3}\,du<$$

$$<\frac{\varepsilon}{\eta}+2\varepsilon\int_{\frac{1}{n}}^{\eta}\frac{du}{u^2}<\frac{\varepsilon}{\eta}+2\varepsilon n<3\varepsilon n$$

и, очевидно,

$$|I_3|<\frac{A}{\eta^2}.$$

Следовательно,

$$\left|\frac{1}{n}\int_0^\delta\frac{\sin^2\frac{1}{2}nu}{u^2}\varphi(u)\,du\right|<\frac{1}{4}\varepsilon+3\varepsilon+\frac{A}{n\eta^2},$$

и, чтобы закончить доказательство, остается выбрать надлежащим образом сначала ε, затем η и, наконец, n.

13.3.5. Непосредственным следствием доказанной теоремы является тот факт, что *тригонометрический ряд не может быть рядом Фурье двух функций, отличающихся друг от друга на множестве положительной меры.* Действительно, если он является рядом Фурье функции $f(x)$ и функции $g(x)$, то он почти всюду суммируем $(C, 1)$ как к $f(x)$, так и к $g(x)$, а тогда $f(x)=g(x)$ почти всюду.

13.4. Непрерывная функция с расходящимся рядом Фурье. Мы видели, что непрерывность функции является достаточным условием суммируемости $(C, 1)$ ее ряда Фурье. Однако для сходимости ряда мы должны были искать другие условия. Что это соответствует действительному положению вещей, показывает следующий пример, построенный Фейером *). Это — пример ряда Фурье, который расходится в некоторой точке, несмотря на то, что породившая его функция непрерывна.

13.4.1. Прежде всего нам нужна одна лемма.

Сумма

$$\varphi(n, r, x) = \frac{\cos(r+1)x}{2n-1} + \frac{\cos(r+2)x}{2n-3} + \ldots + \frac{\cos(r+n)x}{1} - \\ - \frac{\cos(r+n+1)x}{1} - \frac{\cos(r+n+2)x}{3} - \ldots - \frac{\cos(r+2n)x}{2n-1}$$

ограничена для всех значений n, r и x.

Действительно,

$$\varphi(n, r, x) = \sum_{\nu=1}^{n} \frac{\cos(r+n-\nu+1)x}{2\nu-1} - \sum_{\nu=1}^{n} \frac{\cos(r+n+\nu)x}{2\nu-1} =$$

$$= 2\sin\left(r+n+\frac{1}{2}\right)x \sum_{\nu=1}^{n} \frac{\sin\left(\nu-\frac{1}{2}\right)x}{2\nu-1} =$$

$$= 2\sin\left(r+n+\frac{1}{2}\right)x \left\{ \sum_{\lambda=1}^{2n} \frac{\sin\frac{1}{2}\lambda x}{\lambda} - \frac{1}{2}\sum_{\mu=1}^{n} \frac{\sin \mu x}{\mu} \right\},$$

суммы же, стоящие в скобках, ограничены (§ 1.7.6).

13.4.2. Пусть G_n — последовательность $2n$ чисел

$$\frac{1}{2n-1}, \frac{1}{2n-3}, \ldots, \frac{1}{3}, 1, -1, -\frac{1}{3}, \ldots, -\frac{1}{2n-1}$$

и λ_1, λ_2, ... — какая-нибудь возрастающая последовательность целых положительных чисел. Расположим в одну последовательность все числа всех групп G_{λ_1}, G_{λ_2}, ..., умножив все числа группы G_{λ_ν} на ν^{-2}. Мы получим последовательность

$$\frac{1}{1^2}\frac{1}{2\lambda_1-1}, \ldots, -\frac{1}{1^2}\frac{1}{2\lambda_1-1}, \frac{1}{2^2(2\lambda_2-1)}, \frac{1}{2^2(2\lambda_2-3)}, \ldots,$$

члены которой обозначим по порядку через α_1, α_2, ...

Рассмотрим ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \cos nx. \tag{1}$$

Предположим сначала, что члены, отвечающие каждой из групп G_n, взяты в скобки. Тогда получится ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi(\lambda_n, 2\lambda_1+2\lambda_2+\ldots+2\lambda_{n-1}, x)}{n^2}, \tag{2}$$

---

*) Fejér [2], [3], [4].

который в силу леммы абсолютно и равномерно сходится. Сумма $f(x)$ ряда (2) есть, таким образом, непрерывная функция.

Покажем, что (1) есть ряд Фурье функции $f(x)$. Так как ряд (2) равномерно сходится, то его можно умножить на $\cos mx$ с $m \geqslant 1$ и почленно проинтегрировать. Интегралы всех членов, кроме члена, содержащего $\alpha_m \cos mx$, будут равны нулю, и мы получим равенство

$$\int_0^{2\pi} f(x) \cos mx \, dx = \pi \alpha_m.$$

Таким образом, α_m есть коэффициент Фурье функции $f(x)$, стоящий при $\cos mx$. Аналогично доказывается, что остальные коэффициенты Фурье равны нулю.

Покажем, наконец, что числа λ_n можно выбрать так, чтобы ряд (1) расходился в точке $x=0$, т. е. чтобы расходился ряд $\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots$ Обозначим n-ю частичную сумму этого ряда через s_n. Мы можем написать:

$$s_{2\lambda_1+2\lambda_2+\ldots+2\lambda_{\nu-1}+\lambda_\nu} = \frac{1}{\nu^2}\left(\frac{1}{2\lambda_\nu - 1} + \frac{1}{2\lambda_\nu - 3} + \ldots + \frac{1}{3} + 1\right) \sim \frac{\log \lambda_\nu}{2\nu^2}.$$

Следовательно, если λ_ν стремится к бесконечности достаточно быстро, например, если $\lambda_\nu = \nu^{\nu^2}$, то $s_n \to \infty$, когда $n \to \infty$ по некоторой последовательности значений. В этом случае ряд расходится.

13.4.3. Пример Фейера, соединенный с простым рассуждением, основанным на интегральной формуле Дирихле, позволяет судить о том, как велики могут быть частичные суммы s_n ряда Фурье непрерывной функции.

Если функция $f(x)$ непрерывна, то

$$s_n = o(\log n).$$

Ничего большего утверждать нельзя: для всякой монотонно стремящейся к нулю положительной функции $\psi(n)$ существует такая непрерывная функция $f(x)$, что для бесконечного множества значений n

$$s_n > \psi(n) \log n.$$

Чтобы доказать первую часть, мы покажем, что

$$\int_0^{\delta} \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)u}{u} \varphi(u) \, du = o(\log n),$$

если $\varphi(u)\to 0$ при $u\to 0$. Пусть $|\varphi(u)|<\varepsilon$ при $u\leqslant\eta$. Если $n+\frac{1}{2}>\frac{1}{\eta}$, то

$$\int_0^\delta \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)}{u}\varphi(u)\,du=\int_0^{\frac{1}{n+1/2}}+\int_{\frac{1}{n+1/2}}^{\eta}+\int_\eta^\delta=I_1+I_2+I_3,$$

и остается воспользоваться неравенствами

$$|I_1|\leqslant\left(n+\frac{1}{2}\right)\int_0^{\frac{1}{n+1/2}}|\varphi(u)|\,du<\varepsilon,$$

$$|I_2|\leqslant\int_{\frac{1}{n+\frac{1}{2}}}^{\eta}\frac{\varepsilon}{u}\,du<\varepsilon\log\left(n+\frac{1}{2}\right),\qquad |I_3|\leqslant\frac{1}{\eta}\int_\eta^\delta|\varphi(u)|\,du.$$

Чтобы доказать вторую часть, нужно лишь взять числа λ_ν в примере Фейера достаточно большими. Пусть $\lambda_\nu>2\nu$, и пусть

$$n=2\lambda_1+2\lambda_2+\ldots+2\lambda_{\nu-1}+\lambda_\nu.$$

Тогда

$$\lambda_\nu<n<2\nu\lambda_\nu<\lambda_\nu^2$$

и $s_n>\psi(n)\log n$ для достаточно больших значений ν, если

$$\frac{\log\lambda_\nu}{2\nu^2}>\psi(n)\log n.$$

Так как $\psi(n)\log n<\psi(\lambda_\nu)\log\lambda_\nu^2$, то это условие выполнено, если

$$\psi(\lambda_\nu)<\frac{1}{4\nu^2},$$

последнее же обеспечено, если λ_ν достаточно быстро стремится к бесконечности.

13.5. Интегрирование рядов Фурье. *Всякий ряд Фурье можно интегрировать в любых пределах — независимо от того, сходится он или не сходится. Это значит, что сумма ряда интегралов членов ряда всегда равна интегралу функции, для которой он служит рядом Фурье.*

Пусть a_n, b_n — коэффициенты Фурье функции $f(x)$. Положим:

$$F(x)=\int_0^x\left\{f(t)-\frac{1}{2}a_0\right\}dt.$$

Функция $F(x)$ периодична с периодом 2π, непрерывна и имеет ограниченную вариацию. Следовательно, она может быть разложена при всех значениях x в ряд Фурье:

$$F(x)=\frac{1}{2}A_0+\sum_{n=1}^{\infty}(A_n\cos nx+B_n\sin nx).$$

Здесь

$$A_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}F(x)\cos nx\,dx=$$

$$=\frac{1}{\pi}\left[F(x)\frac{\sin nx}{n}\right]_0^{2\pi}-\frac{1}{n\pi}\int_0^{2\pi}\left\{f(x)-\frac{1}{2}a_0\right\}\sin nx\,dx=$$

$$=-\frac{1}{n\pi}\int_0^{2\pi}f(x)\sin nx\,dx=-\frac{b_n}{n},$$

$$B_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}F(x)\sin nx\,dx=$$

$$=\frac{1}{\pi}\left[-F(x)\frac{\cos nx}{n}\right]_0^{2\pi}+\frac{1}{n\pi}\int_0^{2\pi}\left\{f(x)-\frac{1}{2}a_0\right\}\cos nx\,dx=$$

$$=\frac{1}{n\pi}\int_0^{2\pi}f(x)\cos nx\,dx=\frac{a_n}{n};$$

внеинтегральные члены пропадают, так как $F(2\pi)=F(0)=0$. Таким образом,

$$F(x)=\frac{1}{2}A_0+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n\sin nx-b_n\cos nx}{n}.$$

Полагая $x=0$, мы видим, что $\frac{1}{2}A_0=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{b_n}{n}$. Окончательно:

$$F(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n\sin nx+b_n(1-\cos nx)}{n}.$$

Этим теорема доказана.

13.5.1. Интересный факт, содержащийся в доказанной теореме, состоит в том, что *ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{b_n}{n}$ *сходится*. Это замечание дает нам возможность строить сходящиеся тригонометрические ряды, не являющиеся рядами Фурье. Простым примером служит ряд $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sin nx}{\log n}$. Он сходится при всех значениях x, но не может быть рядом Фурье своей суммы, так как ряд $\sum \frac{1}{n \log n}$ расходится. Сумма этого тригонометрического ряда не интегрируема по Лебегу, и нетрудно доказать непосредственно, что сумма проинтегрированного ряда $\sum \frac{\cos nx}{n \log n}$ стремится к бесконечности, когда $x \to 0$.

13.5.2. Нижеследующее другое доказательство предыдущей теоремы об интегрировании также представляет интерес. Мы знаем, что ряд

$$\frac{\sin(x-t)}{1} + \frac{\sin 2(x-t)}{2} + \ldots$$

ограниченно сходится к своей сумме $\varphi(t)$. Умножим его на $\frac{1}{\pi} f(t)$ и проинтегрируем почленно в интервале $(0, 2\pi)$. Мы получим:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\pi} \int_0^{2\pi} \sin n(x-t) f(t)\, dt = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n \sin nx - b_n \cos nx}{n}.$$

С другой стороны,

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \varphi(t) f(t)\, dt = \frac{1}{\pi} \int_{x-2\pi}^{x} \varphi(t) f(t)\, dt =$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_{x-2\pi}^{x} \frac{1}{2}(\pi - x + t) f(t)\, dt = \frac{1}{2\pi} \left[(\pi - x + t) F(t)\right]_{x-2\pi}^{x} -$$

$$- \frac{1}{2\pi} \int_{x-2\pi}^{x} F(t)\, dt = F(x) - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F(t)\, dt,$$

где $F(x)$ обозначает то же, что в § 13.5. Мы воспользовались тем, что $F(x-2\pi) = F(x)$. Заканчивается доказательство так же, как в § 13.5.

13.5.3. Близкий метод приводит к следующей более общей теореме об интегрировании.

Ряд Фурье можно умножить на любую функцию ограниченной вариации и почленно проинтегрировать в любых конечных пределах.

Пусть

$$g(x) = \frac{1}{2}\alpha_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (\alpha_n \cos nx + \beta_n \sin nx)$$

— функция ограниченной вариации. Так как ряд ограниченно сходится (§ 13.2.3.2), то его можно умножить на любую интегрируемую функцию $f(x)$ и почленно проинтегрировать в интервале $(0, 2\pi)$. Мы получим равенство

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\,g(x)\,dx = \frac{1}{2}a_0\alpha_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\alpha_n + b_n\beta_n), \tag{1}$$

где a_n, b_n — коэффициенты Фурье функции $f(x)$. Это — как раз то, что мы получили бы, если бы умножили ряд Фурье функции $f(x)$ на $g(x)$ и проинтегрировали его почленно в интервале $(0, 2\pi)$.

Чтобы получить тот же результат для других областей интегрирования, достаточно заменить вне области интегрирования функцию $g(x)$ нулем.

13.5.4. Теорема Парсеваля. Если $f(x)$ — функция ограниченной вариации, то в формуле § 13.5.3 (1) можно положить $g(x) = f(x)$, и, следовательно,

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\{f(x)\}^2\,dx = \frac{1}{2}a_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2 + b_n^2).$$

Это соотношение известно как теорема Парсеваля. Мы покажем в § 13.6.3, что оно верно при гораздо более широких условиях.

13.6. Функции класса L^2. Пусть $f(x)$ — функция класса $L^2(0, 2\pi)$ с коэффициентами Фурье a_n, b_n. Тогда функция

$$\varphi(x) = f(x) - \frac{1}{2}a_0 - \sum_{m=1}^{n}(a_m\cos mx + b_m\sin mx)$$

также принадлежит к L^2, и, согласно формуле Эйлера — Фурье,

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\{\varphi(x)\}^2\,dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\{f(x)\}^2\,dx + \frac{1}{2}a_0^2 + \sum_{m=1}^{n}(a_m^2 + b_m^2) -$$
$$- \frac{a_0}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\,dx - \frac{2}{\pi}\sum_{m=1}^{n}\int_0^{2\pi}(a_m\cos mx + b_m\sin mx)\,f(x)\,dx =$$
$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\{f(x)\}^2\,dx - \frac{1}{2}a_0^2 - \sum_{m=1}^{n}(a_m^2 + b_m^2).$$

Так как левая часть неотрицательна, то из этого равенства следует, что при любом значении n

$$\frac{1}{2}a_0^2 + \sum_{m=1}^{n}(a_m^2 + b_m^2) \leqslant \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\{f(x)\}^2\,dx. \tag{1}$$

Это соотношение известно как неравенство Бесселя.

Так как правая часть неравенства (1) не зависит от n, то из него следует, что *ряд*

$$\frac{1}{2}a_0^2+\sum_{m=1}^{\infty}(a_m^2+b_m^2) \tag{2}$$

сходится и

$$\frac{1}{2}a_0^2+\sum_{m=1}^{\infty}(a_m^2+b_m^2)\leqslant\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\{f(x)\}^2\,dx. \tag{3}$$

13.6.1. Теорема Парсеваля для непрерывных функций. Мы видели, что для функций ограниченной вариации предыдущее неравенство превращается в равенство (равенство Парсеваля). Следующие соображения показывают, что это равенство верно и для непрерывных функций. Если функция $f(x)$ непрерывна, то $\sigma_n(x)$ равномерно стремится к $f(x)$ и, следовательно,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\{f(x)-\sigma_n(x)\}f(x)\,dx=0.$$

Но

$$\sigma_n(x)=\frac{1}{2}a_0+\sum_{m=1}^{n-1}(a_m\cos mx+b_m\sin mx)\left(1-\frac{m}{n}\right),$$

и вычисляя интеграл, как в предыдущем параграфе, мы видим, что

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\{f(x)\}^2\,dx-\frac{1}{2}a_0^2-\sum_{m=1}^{n-1}(a_m^2+b_m^2)\left(1-\frac{m}{n}\right)\to 0.$$

Этим доказана формула, в которую переходит равенство Парсеваля при замене сходимости ряда суммированием $(C,\ 1)$. Но так как (согласно § 13.6) этот ряд сходится, то (согласно § 13.3) формула верна и в обычном смысле.

Это доказательство нетрудно распространить на функции, имеющие простые разрывы. В действительности же теорема Парсеваля верна для всех функций класса L^2. Мы выведем это из теоремы следующего параграфа.

13.6.2. Теорема Рисса—Фишера. Пусть

$$\frac{1}{2}a_0+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx) \tag{1}$$

— тригонометрический ряд, коэффициенты которого удовлетворяют тому единственному условию, что ряд § 13.6 (2) сходится.

До сих пор мы не доказали в настоящей главе ничего, что позволило бы решить, является ли такой ряд рядом Фурье. Проблема решается с помощью теории сходимости в среднем (§ 12.5). Именно для решения этой проблемы и была первоначально построена указанная теория.

Нижеследующая теорема была почти одновременно доказана Ф. Риссом и Фишером *).

Если числа a_n, b_n таковы, что ряд § 13.6 (2) сходится, то (1) есть ряд Фурье некоторой функции $f(x)$ класса L^2. В этом случае частичная сумма ряда сходится в среднем к $f(x)$.

Обозначив n-ю частичную сумму ряда (1) через $s_n(x)$, мы можем написать:

$$\int_0^{2\pi} \{s_n(x) - s_m(x)\}^2\,dx = \int_0^{2\pi} \left\{ \sum_{\nu=m+1}^{n} (a_\nu \cos \nu x + b_\nu \sin \nu x) \right\}^2 dx = \\ = \pi \sum_{\nu=m+1}^{n} (a_\nu^2 + b_\nu^2);$$

все остальные члены исчезают при интегрировании. Когда m и n независимо друг от друга стремятся к бесконечности, правая часть стремится к нулю. Следовательно, $s_n(x)$ сходится в среднем к некоторой функции $f(x)$ класса L^2.

Согласно § 12.5.3

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^{2\pi} s_n(x) \cos \nu x\,dx = \int_0^{2\pi} f(x) \cos \nu x\,dx.$$

Но при $n \geqslant \nu$ интеграл, стоящий слева, равен πa_ν. Следовательно, $a_\nu = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos \nu x dx$, т. е. a_ν есть коэффициент Фурье функции $f(x)$, стоящий при $\cos \nu x$. Точно так же b_ν есть коэффициент Фурье функции $f(x)$, стоящий при $\sin \nu x$. Таким образом, исходный тригонометрический ряд есть ряд Фурье функции $f(x)$.

Важное замечание: мы достигли пункта, где, впервые в излагаемой теории, переход от интеграла Римана к интегралу Лебега становится неизбежным. Бо́льшая часть предыдущего верна для интегралов Римана и элементарно определенных абсолютно сходящихся интегралов. Здесь же, как показывает теорема Рисса — Фишера, лебеговское обобщение интеграла действительно необходимо.

13.6.3. Теорема Парсеваля для функций класса L^2. Пусть $f(x)$ — функция, принадлежащая к $L^2(0, 2\pi)$, и a_n, b_n —

*) F. Riesz [1], Fischer [1].

ее коэффициенты Фурье. Тогда ряд § 13.6 (2) сходится. Следовательно (теорема Рисса — Фишера), частичные суммы $s_n(x)$ сходятся в среднем к некоторой функции $g(x)$ с рядом Фурье § 13.6.2 (1). Согласно § 13.3.5, $g(x)=f(x)$ почти всюду. Наконец, согласно § 12.5.2,

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{2\pi}\{s_n(x)\}^2\,dx=\int_0^{2\pi}\{f(x)\}^2\,dx,$$

и, вычисляя стоящий слева интеграл, мы получаем формулу Парсеваля.

Более общая формула § 13.5.3 (1) *также верна для любых функций класса* L^2. Действительно, если $f(x)$ и $g(x)$ принадлежат к L^2, то формула Парсеваля верна для $f(x)+g(x)$ и $f(x)-g(x)$, откуда формула § 13.5.3 (1) получается вычитанием.

13.7. Свойства коэффициентов Фурье. Первоначально коэффициенты Фурье были только материалом, из которого строился ряд Фурье. Но эти коэффициенты и сами по себе обладают интересными свойствами. Неравенство Бесселя и теоремы Парсеваля и Рисса — Фишера привлекают внимание к проблеме поведения коэффициентов Фурье функций данных классов и дают о нем некоторые важные сведения.

Первая теорема этого рода (§ 13.2.2) состоит в том, что *коэффициенты Фурье всякой интегрируемой функции стремятся к нулю.* Однако нельзя указать никакого определенного порядка стремления их к нулю. Это значит, что всякая теорема вроде «$a_n=O\left(\frac{1}{\log n}\right)$ для всех интегрируемых функций» заведомо неверна. Действительно, рассмотрим ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos k_n x}{n^2},$$

где k_1, k_2, ... — положительные целые числа. Ряд равномерно сходится и потому является рядом Фурье своей суммы. При этом

$$a_{k_n}=\frac{1}{n^2},$$

чем и опровергается любая теорема указанного типа, поскольку последовательность k_1, k_2, ... может стремиться к бесконечности как угодно быстро.

13.7.1. Предположим теперь, что $f(x)$ принадлежит классу L^2. Это не позволяет нам доказать что-либо большее о порядке коэффициентов; действительно, функция, определенная предыдущим рядом, непрерывна и потому принадлежит к L^2. Но мы получаем определенный результат, касающийся *среднего* порядка: ряд

$$\sum (a_n^2 + b_n^2)$$

сходится (§ 13.6).

Этот результат был обобщен применительно к другим лебеговским классам: *если $f(x)$ принадлежит к L^p, где $1 < p \leqslant 2$, то ряд*

$$\sum \left(|a_n|^{\frac{p}{p-1}} + |b_n|^{\frac{p}{p-1}}\right)$$

сходится.

Доказательство этой теоремы, однако, слишком длинно для того, чтобы мы могли изложить его здесь *).

Имеется также соответствующее обобщение теоремы Рисса — Фишера: *если ряд $\sum (|a_n|^p + |b_n|^p)$, где $1 < p \leqslant 2$, сходится, то числа a_n, b_n являются коэффициентами Фурье некоторой функции класса $L^{\frac{p}{p-1}}$.*

Обе эти теоремы перестают быть верными при $p > 2$, так что при $p \neq 2$ они не являются обратными по отношению друг к другу.

13.7.2. Мы получим новые теоремы о коэффициентах, если наложим на функцию еще более специальные ограничения. *Пусть $f(x)$ удовлетворяет условию Липшица порядка α, т. е. пусть при $h = 0$*

$$f(x+h) - f(x) = O(|h|^\alpha) \qquad (0 < \alpha \leqslant 1)$$

равномерно относительно x. Тогда

$$a_n = O(n^{-\alpha}), \quad b_n = O(n^{-\alpha}).$$

Действительно,

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos nx\,dx = -\frac{1}{\pi}\int_{-\frac{\pi}{n}}^{2\pi-\frac{\pi}{n}} f\left(\frac{\pi}{n}+t\right)\cos nt\,dt =$$

$$= -\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f\left(\frac{\pi}{n}+t\right)\cos nt\,dt,$$

и, следовательно,

$$a_n = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left\{f(x) - f\left(\frac{\pi}{n}+x\right)\right\}\cos nx\,dx = \int_0^{2\pi} O\left(\frac{1}{n^\alpha}\right) = O\left(\frac{1}{n^\alpha}\right).$$

Подобным же образом получается нужная оценка для b_n.

---

*) W. H. Young [2], [3], [5], [6]; Hausdorff [1]; F. Riesz [4].

13.7.3. Следующая теорема того же типа состоит в том, что *если $f(x)$ — функция ограниченной вариации, то*

$$a_n = O\left(\frac{1}{n}\right), \quad b_n = O\left(\frac{1}{n}\right).$$

Воспользуемся представлением $f(x) = f_1(x) - f_2(x)$, где $f_1(x)$ и $f_2(x)$ положительны и не убывают. В силу второй теоремы о среднем значении

$$\int_0^{2\pi} f_1(x) \cos nx\, dx = f_1(2\pi) \int_\xi^{2\pi} \cos nx\, dx = -f_1(2\pi) \frac{\sin n\xi}{n} = O\left(\frac{1}{n}\right),$$

и аналогично оцениваются остальные интегралы.

Из этой теоремы можно получить другое доказательство теоремы Жордана (§ 13.2.3.2). Если $f(x)$ — функция с ограниченной вариацией, то (по § 13.3.2) ее ряд Фурье суммируем $(C, 1)$ к сумме $\frac{1}{2}\{f(x+0) + f(x-0)\}$. А так как $a_n = O(1/n)$, $b_n = O(1/n)$, то в действительности ряд сходится к этой сумме (§ 13.3, пример (VIII)).

Если $f(x)$ есть интеграл и имеет период 2π, то

$$a_n = o(1/n), \quad b_n = o(1/n).$$

Действительно, если

$$f(x) = f(0) + \int_0^x \varphi(t)\, dt \qquad (x \geqslant 0),$$

то

$$\pi a_n = \left[f(x) \frac{\sin nx}{n}\right]_0^{2\pi} - \frac{1}{n} \int_0^{2\pi} \varphi(x) \sin nx\, dx,$$

$$\pi b_n = \left[-f(x) \frac{\cos nx}{n}\right]_0^{2\pi} + \frac{1}{n} \int_0^{2\pi} \varphi(x) \cos nx\, dx.$$

Так как $f(2\pi) = f(0)$, то внеинтегральные члены равны нулю, интегралы же стремятся к нулю в силу теоремы Римана — Лебега. Этим теорема доказана.

Если производная $f'(x)$ удовлетворяет специальным условиям, подобным условию Липшица, то можно, конечно, получить и дальнейшие результаты этого рода.

13.8. Единственность тригонометрических рядов. В начале главы мы связали с каждой интегрируемой функцией особый тригонометрический ряд, называемый ее рядом Фурье, и показали, что ряд Фурье представляет, различными способами, свою функцию. Читатель может на это возразить, что мы, возможно, придали рядам Фурье чрезмерное значение и что, возможно, существуют другие типы тригонометрических рядов, в которые разлагается данная функция.

Трудно дать полное решение этой проблемы. Однако, при надлежащих предположениях о множестве точек, в которых ряд сходится, можно показать, что к данной функции может сходиться только один ряд и что, следовательно, функция, разложимая в сходящийся ряд Фурье, не может быть разложена в сходящийся ряд другого вида.

Теория была построена Риманом, Дюбуа-Реймоном и Кантором. Теорема, которую мы докажем, заключается в следующем.

Если два тригонометрических ряда сходятся к одной и той же сумме во всех точках интервала $(0, 2\pi)$ *за возможным исключением конечного числа точек, то коэффициенты этих рядов равны, т. е. ряды тождественны.*

Это не все, что известно; имеются более общие теоремы *). Однако некоторые обобщения, могущие показаться естественными, не верны; если вместо «сходятся» мы скажем «суммируемы $(C, 1)$», то, как показывает пример (III) § 13.3, теорема окажется неверной.

Вопрос о том, является ли данный тригонометрический ряд рядом Фурье, есть проблема, относящаяся к интегральным уравнениям. Заданы числа $a_0, a_1, b_1, \ldots$, и требуется узнать, существует ли интегрируемая функция $f(x)$, удовлетворяющая уравнениям Эйлера — Фурье § 13.1 (2) и (3). Этот вопрос не решается простой сходимостью ряда, так как тригонометрический ряд может всюду сходиться и не быть рядом Фурье (§ 13.5.1). Но если он сходится равномерно или ограниченно, или в среднем степени $p \geqslant 1$, то он является рядом Фурье. При этом теоремы §§ 13.6.2—13.7.1 дают условия сходимости в среднем степени $p \geqslant 2$.

Другая представляющаяся естественной теорема состояла бы в том, что если тригонометрический ряд почти всюду сходится к интегрируемой функции, то он является рядом Фурье этой функции. Однако в общем случае это неверно, и действительное положение вещей довольно сложно.

Доказательство сформулированной выше теоремы опирается на несколько лемм.

13.8.1. Лемма Кантора. *Если* $a_n \cos nx + b_n \sin nx$ *стремится к нулю при всех значениях* x *в некотором интервале, то* a_n *и* b_n *стремятся к нулю.*

Пусть $a_n \cos nx + b_n \sin nx \to 0$ в интервале (α, β). Если лемма не верна, то существуют постоянная $A > 0$ и последовательность значений n, для которых $a_n^2 + b_n^2 > A$. Когда $n \to \infty$ по этой по-

*) Hobson, *Theory of Functions*, §§ 420—450.

следовательности, функция

$$f_n(x)=\frac{(a_n\cos nx+b_n\sin nx)^2}{a_n^2+b_n^2}$$

ограниченно стремится в интервале (α, β) к нулю, так что, в силу теоремы об ограниченной сходимости,

$$\int_\alpha^\beta f_n(x)\,dx\to 0.$$

Но вычисление показывает, что

$$\int_\alpha^\beta f_n(x)\,dx=\frac{1}{2}(\beta-\alpha)+O\left(\frac{1}{n}\right).$$

Полученное противоречие доказывает лемму.

13.8.2. Предположим теперь, что ряд

$$\frac{1}{2}a_0+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx) \tag{1}$$

сходится к сумме $f(x)$ в интервале (a, b) всюду, за возможным исключением конечного числа точек. Положим:

$$F(x)=\frac{1}{4}a_0x^2-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n\cos nx+b_n\sin nx}{n^2}. \tag{2}$$

Так как (в силу леммы Кантора) a_n и b_n стремятся к нулю, то этот ряд равномерно сходится и функция $F(x)$ непрерывна при всех значениях x. Если бы мы могли произвести двукратное почленное дифференцирование, то нашли бы, что $F''(x)=f(x)$. Однако в общем случае это невозможно, и приходится действовать иначе.

Первая теорема Римана. *Положим*

$$G(x, h)=\frac{F(x+2h)+F(x-2h)-2F(x)}{4h^2}. \tag{3}$$

При всяком значении x, для которого ряд (1) *сходится к* $f(x)$, $G(x, h)\to f(x)$, *когда* $h\to 0$.

Так как

$$\cos n(x+2h)+\cos n(x-2h)-2\cos nx=-4\cos nx\sin^2 nh,$$

$$\sin n(x+2h)+\sin n(x-2h)-2\sin nx=-4\sin nx\sin^2 nh,$$

то

$$G(x, h)=\frac{1}{2}a_0+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)\frac{\sin^2 nh}{n^2h^2}. \tag{4}$$

При $h \to 0$ n-й член ряда (4) стремится к n-му члену ряда (1). Поэтому достаточно доказать, что ряд (4) сходится равномерно относительно h. Пусть r_n — остаток ряда (1), состоящий из всех членов, начиная с $a_n \cos nx + b_n \sin nx$. Так как ряд сходится, то $|r_n| < \varepsilon$ при $n \geqslant N$ и

$$\sum_{n=N}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \frac{\sin^2 nh}{n^2h^2} = \sum_{n=N}^{\infty} (r_n - r_{n+1}) \left(\frac{\sin nh}{nh}\right)^2 =$$
$$= r_N \left(\frac{\sin Nh}{Nh}\right)^2 - \sum_{N+1}^{\infty} r_n \left[\left(\frac{\sin nh}{nh}\right)^2 - \left\{\frac{\sin (n+1) h}{(n+1) h}\right\}^2\right].$$

Абсолютная величина правой части не превосходит

$$\varepsilon + \varepsilon \sum_{N+1}^{\infty} \sum_{nh}^{(n+1)h} \left| \frac{d}{dt} \left(\frac{\sin^2 t}{t^2}\right) \right| dt < \varepsilon + \varepsilon \int_0^{\infty} \left| \frac{d}{dt} \left(\frac{\sin^2 t}{t^2}\right) \right| dt,$$

последний же интеграл сходится. Таким образом, ряд (4) равномерно сходится.

13.8.3. Вторая теорема Римана. *Если a_n и b_n стремятся к нулю, то при всех значениях x*

$$\lim_{h \to 0} \frac{F(x+2h) + F(x-2h) - 2F(x)}{2h} = 0.$$

Мы должны доказать, что сумма

$$a_0 h + 2 \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \frac{\sin^2 nh}{n^2 h}$$

стремится к нулю. Так как при заданном ε

$$|a_n \cos nx + b_n \sin nx| < \varepsilon \qquad (n > N)$$

и так как $\sin^2 nh \leqslant n^2h^2$, то при $n \leqslant 1/h$ абсолютная величина указанной суммы не превосходит

$$A|h| + 2 \sum_{n=1}^{N} A|h| + 2 \sum_{N < n \leqslant 1/h} \varepsilon h + 2 \sum_{n > 1/h} \frac{\varepsilon}{n^2 h} <$$
$$< AN|h| + 2\varepsilon + \frac{2\varepsilon}{h} \int_{1/h}^{\infty} \frac{du}{(u-1)^2} < AN|h| + A\varepsilon.$$

Чтобы завершить доказательство, остается выбрать достаточно малым сначала ε, а затем h.

13.8.4. Теорема Шварца. *Если функция $F(x)$ непрерывна в некотором интервале (a, b) и*

$$\lim_{h\to 0}\frac{F(x+h)+F(x-h)-2F(x)}{h^2}=0$$

при всех значениях x в этом интервале, то $F(x)$ есть линейная функция.

Выражение, стоящее слева, называется обобщенной второй производной функции $F(x)$. Если $F(x)$ имеет обыкновенную вторую производную, то обобщенная вторая производная равна ей и доказывать нечего.

Чтобы доказать теорему, рассмотрим функцию

$$\varphi(x)=F(x)-F(a)-\frac{x-a}{b-a}\{F(b)-F(a)\}.$$

Заметим, что $\varphi(a)=0$ и $\varphi(b)=0$. Покажем, что $\varphi(x)=0$ при всех значениях x. Пусть, например, $\varphi(x)$ принимает положительные значения: пусть $\varphi(c)>0$. Положим

$$\psi(x)=\varphi(x)-\frac{1}{2}\varepsilon(x-a)(b-x),$$

где ε — положительное число, столь малое, что $\psi(c)>0$. Функция $\psi(x)$ имеет положительную верхнюю грань и достигает ее, в силу своей непрерывности, в некоторой точке $x=\xi$. Очевидно,

$$\psi(\xi+h)+\psi(\xi-h)-2\psi(\xi)\leqslant 0.$$

Но

$$\frac{\psi(\xi+h)+\psi(\xi-h)-2\psi(\xi)}{h^2}=\frac{F(\xi+h)+F(\xi-h)-2F(\xi)}{h^2}+\varepsilon,$$

и при $h\to 0$ правая часть стремится к ε. Мы получили противоречие, и к подобному же противоречию приводит предположение, что $\varphi(x)$ принимает отрицательные значения. Следовательно, $\varphi(x)=0$ при всех значениях x, и $F(x)$ есть линейная функция.

13.8.5. Доказательство нашей главной теоремы основано на теореме Шварца. Достаточно доказать, что если тригонометрический ряд сходится к нулю всюду в интервале $(0, 2\pi)$, за возможным исключением конечного числа точек, то все его коэффициенты — нули. Если ряд § 13.8.2 (1) сходится в этом смысле к нулю, то функция $F(x)$ непрерывна и ее обобщенная вторая производная равна нулю всюду, за возможным исключением конечного числа точек. Следовательно, функция $F(x)$ линейна в интервалах с концами в соседних исключительных точках, и отрезки, образующие ее график, соединяются при исключительных значениях x. Беря теперь во второй теореме Римана в качестве x исключительную точку, мы видим, что эти отрезки имеют один и тот же наклон по обе стороны от этой точки. Таким образом, функция $F(x)$ линейна во всем интервале $(0, 2\pi)$, скажем

$$F(x) = ax + b,$$

и

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n \cos nx + b_n \sin nx}{n^2} = \frac{1}{4} a_0 x^2 - ax - b.$$

Так как сумма этого ряда периодична, то a_0 и a должны быть нулями. Далее, так как ряд равномерно сходится, то его можно умножить как на $\cos mx$, так и на $\sin mx$, и почленно проинтегрировать. Следовательно, при $m > 0$

$$\frac{\pi a_m}{m^2} = -b \int_0^{2\pi} \cos mx\, dx = 0, \quad \frac{\pi b_m}{m^2} = -b \int_0^{2\pi} \sin mx\, dx = 0,$$

что и завершает доказательство.

13.9. Интегралы Фурье. До сих пор все наши ряды представляли функции с периодом 2π. Ряд вида

$$f(x) = \frac{1}{2} a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{nx}{\lambda} + b_n \sin \frac{nx}{\lambda}\right)$$

представляют функцию с периодом $2\pi\lambda$. Коэффициенты могут быть вычислены, как выше; мы получаем формулы:

$$a_n = \frac{1}{\pi\lambda} \int_{-\pi\lambda}^{\pi\lambda} f(t) \cos \frac{nt}{\lambda}\, dt, \quad b_n = \frac{1}{\pi\lambda} \int_{-\pi\lambda}^{\pi\lambda} f(t) \sin \frac{nt}{\lambda}\, dt.$$

К таким рядам применима, конечно, вся изложенная теория.

13.9.1. Интегральная формула Фурье. Предыдущее разложение можно преобразовать к виду

$$f(x) = \frac{1}{2\pi\lambda} \int_{-\pi\lambda}^{\pi\lambda} f(t)\, dt + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\pi\lambda} \int_{-\pi\lambda}^{\pi\lambda} f(t) \cos \frac{n(x-t)}{\lambda}\, dt.$$

Представим себе, что $\lambda \to \infty$. Стоящий справа ряд имеет много общего с суммами, при помощи которых определяется интеграл Римана. Он может быть записан как

$$\sum_{n=1}^{\infty} (u_{n+1} - u_n)\, \varphi(u_n),$$

где $\varphi(u) = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi\lambda}^{\pi\lambda} f(t) \cos u(x-t)\, dt$. Если мы решимся игнорировать такие затруднения, как то, что $\varphi(u)$ зависит от λ и что аппроксимирующие суммы являются бесконечными рядами, то получим после предельного перехода формулу

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \int\limits_{0}^{\infty} du \int\limits_{-\infty}^{\infty} \cos u(x-t) f(t)\, dt.$$

Это — интегральная формула Фурье. Она представляет функцию, определенную в бесконечном интервале $(-\infty, \infty)$, так же, как ряд Фурье представляет функцию с конечным периодом.

Мы встретились бы со значительными трудностями, если бы попытались провести на этом пути строгое доказательство. Но прямое изучение формулы сравнительно несложно.

13.9.2. Предположим, что функция $f(x)$ интегрируема по Лебегу в интервале $(-\infty, \infty)$. Тогда интеграл

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \cos u(x-t) f(t)\, dt$$

сходится равномерно относительно u в любом конечном интервале. Поэтому мы можем проинтегрировать его по u в интервале $(0, U)$ и обратить порядок интегрирования. Это приводит к равенству

$$\int\limits_{0}^{U} du \int\limits_{-\infty}^{\infty} \cos u(x-t) f(t)\, dt = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin U(x-t)}{x-t} f(t)\, dt.$$

Для заданного ε существует столь большое T, что

$$\int\limits_{-\infty}^{-T} |f(t)|\, dt < \varepsilon, \quad \int\limits_{T}^{\infty} |f(t)|\, dt < \varepsilon;$$

при этом можно считать, что $T > |x| + 1$, где x — фиксированное значение. При всех значениях U

$$\left| \int\limits_{-\infty}^{-T} \frac{\sin U(x-t)}{x-t} f(t)\, dt \right| < \varepsilon, \quad \left| \int\limits_{T}^{\infty} \frac{\sin U(x-t)}{x-t} f(t)\, dt \right| < \varepsilon.$$

Кроме того, при фиксированном T интегралы

$$\int\limits_{-T}^{x-\delta} \frac{\sin U(x-t)}{x-t} f(t)\, dt, \quad \int\limits_{x+\delta}^{T} \frac{\sin U(x-t)}{x-t} f(t)\, dt$$

стремятся, в силу теоремы Римана — Лебега, к нулю, когда $U \to \infty$. Следовательно,

$$\frac{1}{\pi}\int_0^U du \int_{-\infty}^{\infty} \cos u(x-t) f(t)\,dt = \frac{1}{\pi}\int_{x-\delta}^{x+\delta} \frac{\sin U(x-t)}{x-t} f(t)\,dt + o(1) =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{\delta} \frac{\sin Ut}{t}\{f(x+t)+f(x-t)\}\,dt + o(1).$$

Значение предела (при $U \to \infty$) зависит поэтому только от поведения функции $f(t)$ вблизи точки $t=x$, и проблема сводится к изучению интеграла, подобного интегралу Дирихле. К этой проблеме применимы все критерии сходимости, имеющиеся в §§ 13.2.3.1 — 13.2.3.3. *В частности,*

$$\lim_{U\to\infty} \frac{1}{\pi}\int_0^U du \int_{-\infty}^{\infty} \cos u(x-t) f(t)\,dt = \frac{1}{2}\{f(x+0)+f(x-0)\},$$

если функция $f(t)$ интегрируема в интервале $(-\infty, \infty)$ и имеет ограниченную вариацию в некотором интервале, содержащем точку $t=x$.

13.9.3. Преобразования Фурье. Если $f(x)$ — четная функция, то интеграл Фурье принимает вид

$$f(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty} \cos xu\,du \int_0^{\infty} \cos ut\, f(t)\,dt; \tag{1}$$

член, содержащий $\sin ut$, тождественно равен нулю. Это — косинус-формула Фурье. Подобным же образом для нечетной функции получается синус-формула Фурье:

$$f(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty} \sin xu\,du \int_0^{\infty} \sin ut\, f(t)\,dt. \tag{2}$$

Если положить

$$g(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\infty} \cos xt\, f(t)\,dt, \tag{3}$$

то формула (1) примет вид

$$f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\infty} \cos xt\, g(t)\,dt. \tag{4}$$

Отношения функций $f(x)$ и $g(x)$ друг к другу являются, таким образом, взаимно обратными. О двух функциях, связанных между собой в том или ином смысле формулами (3), (4), говорят, что они получаются друг из друга *косинус-преобразованием Фурье.* Если, например, $f(x)$ принадлежит к $L(0, \infty)$ и имеет ограниченную вариацию во всяком конечном интервале, то интеграл (3) абсолютно сходится и формула (4) верна в том смысле, что ее правая часть сходится (не обязательно абсолютно) к

$$\frac{1}{2}\{f(x+0)+f(x-0)\}.$$

Подобным же образом из соотношения (2) получаются взаимно обратные формулы

$$h(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty \sin xt\, f(t)\,dt, \qquad f(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty \sin xt\, h(t)\,dt; \tag{5}$$

функции $f(x)$ и $h(x)$ связаны между собой *синус-преобразованием Фурье.*

13.9.4. Интегрирование интегралов Фурье. Докажем теперь теорему, аналогичную теореме § 13.5: *формула*

$$\int_0^\xi f(x)\,dx=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\sin \xi u}{u}\,du\int_0^\infty \cos ut\, f(t)\,dt,$$

получающаяся при интегрировании соотношения § 13.9.3 (1), *верна для всякой функции* $f(t)$, *интегрируемой в интервале* $(0, \infty)$.

В силу равномерной сходимости,

$$\int_0^U \frac{\sin \xi u}{u}\,du\int_0^\infty \cos ut\, f(t)\,dt=\int_0^\infty f(t)\,dt\int_0^U \frac{\sin \xi u\,\cos ut}{u}\,du.$$

Внутренний интеграл справа ограничен для всех значений U и t; действительно, он равен

$$\frac{1}{2}\int_0^U \frac{\sin(\xi+t)u}{u}\,du+\frac{1}{2}\int_0^U \frac{\sin(\xi-t)u}{u}\,du=$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{U(\xi+t)} \frac{\sin v}{v}\,dv \pm \frac{1}{2}\int_0^{U|\xi-t|} \frac{\sin v}{v}\,dv$$

(знак есть знак разности $\xi-t$), а $\int_0^V \frac{\sin v}{v}\,dv$ есть ограниченная функция от V. Согласно теореме Лебега об ограниченной сходимости, мы можем перейти под знаком интеграла к пределу при

$U \to \infty$. Так как

$$\int_0^\infty \frac{\sin \xi u \cos ut}{u}\, du = \begin{cases} \frac{1}{2}\pi & (t < \xi), \\ 0 & (t > \xi), \end{cases}$$

это дает доказываемую формулу.

Аналогичную теорему можно получить из синус-формулы Фурье.

13.9.5. Преобразования Фурье в классе L^2. Исследование, проведенное в § 13.9.3, дает условия, при которых справедливы взаимно обратные формулы Фурье. Полученные там результаты страдают, однако, тем недостатком, что, в то время как формулы симметричны относительно функций $f(x)$ и $g(x)$, условия, которым удовлетворяют эти функции, совершенно различны. Другие условия, уже вполне симметричные, можно получить, рассматривая функции класса L^2 и пользуясь теорией сходимости в среднем *).

Пусть функция $f(x)$ принадлежит классу $L^2(0, \infty)$. Тогда формулы § 13.9.3 (3) и (4) верны в том смысле, что при $a \to \infty$ интеграл

$$g_a(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^a \cos xt\, f(t)\, dt \tag{1}$$

сходится в среднем к некоторой функции $g(x)$ класса $L^2(0, \infty)$, а интеграл

$$f_a(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^a \cos xt\, g(t)\, dt \tag{2}$$

сходится в среднем к $f(x)$.

Мы докажем это методом, подсказанным формальной процедурой § 13.9.1. Положим:

$$a_n = \int_{n/\lambda}^{(n+1)/\lambda} f(x)\, dx \qquad (n = 1,\ 2,\ \ldots).$$

Когда $\lambda \to \infty$, сумма $\Phi_{m,n} = \sum\limits_{\nu=m+1}^{n} a_\nu \cos \frac{\nu x}{\lambda}$ стремится к интегралу $\int\limits_a^b \cos ux\, f(u)\, du$, если $0 \leqslant a < b$ и $m = [\lambda a]$, $n = [\lambda b] - 1$. Действи-

---

*) Plancherel [1], [2], [3]; Titchmarsh [1], [3]; Hardy [12]; Pollard [1].

тельно, разность между этим интегралом и $\Phi_{m,n}$ равна

$$\sum_{\nu=m+1}^{n} \int_{\nu/\lambda}^{(\nu+1)/\lambda} \left(\cos ux - \cos\frac{\nu x}{\lambda}\right) f(u)\,du + \\ + \int_{a}^{(m+1)/\lambda} \cos ux\, f(u)\,du + \int_{(n+1)/\lambda}^{b} \cos ux\, f(u)\,du;$$

так как $\left|\cos ux - \cos\frac{\nu x}{\lambda}\right| \leqslant \frac{|x|}{\lambda}$, то сумма есть $O(1/\lambda)$, последние же два интеграла, очевидно, стремятся к нулю. Очевидно также, что сходимость равномерна относительно x при $0 \leqslant x \leqslant X$.

Теперь мы можем применить к $\Phi_{m,n}$ рассуждение, подобное тому, которым мы пользовались при доказательстве теоремы Рисса — Фишера. Так как

$$a_n^2 \leqslant \int_{n/\lambda}^{(n+1)/\lambda} \{f(x)\}^2\,dx \int_{n/\lambda}^{(n+1)/\lambda} dx = \frac{1}{\lambda} \int_{n/\lambda}^{(n+1)/\lambda} \{f(x)\}^2\,dx,$$

то

$$\int_0^{\pi\lambda} \Phi_{m,n}^2\,dx = \frac{1}{2}\pi\lambda \sum_{\nu=m+1}^{n} a_\nu^2 \leqslant \frac{1}{2}\pi \int_{(m+1)/\lambda}^{(n+1)/\lambda} \{f(x)\}^2\,dx \leqslant \\ \leqslant \frac{1}{2}\pi \int_a^b \{f(x)\}^2\,dx,$$

и є ли $\pi\lambda > X$, то и подавно

$$\int_0^X \Phi_{m,n}^2\,dx \leqslant \frac{1}{2}\pi \int_a^b \{f(x)\}^2\,dx.$$

Фиксируя X и заставляя λ стремиться к ∞, мы видим, что

$$\int_0^X \{g_b(x) - g_a(x)\}^2\,dx \leqslant \int_a^b \{f(x)\}^2\,dx.$$

Заставляя теперь X стремиться к ∞, мы получаем неравенство

$$\int_0^\infty \{g_b(x) - g_a(x)\}^2\,dx \leqslant \int_a^b \{f(x)\}^2\,dx. \qquad (3)$$

Правая часть, а с ней и левая часть стремится к нулю, когда $a \to \infty$, $b \to \infty$. Таким образом, $g_a(x)$ сходится в среднем к некоторой функции $g(x)$ класса $L^2(0, \infty)$.

Совершенно так же интеграл (2) сходится в среднем к некоторой функции класса L^2, скажем, $\varphi(x)$. Мы должны доказать, что $\varphi(x) = f(x)$ почти всюду. Для этого достаточно доказать, что при любом значении ξ

$$\int_0^\xi \varphi(x)\,dx = \int_0^\xi f(x)\,dx. \tag{4}$$

Мы можем написать:

$$\int_0^\xi \varphi(x)\,dx = \lim_{a\to\infty}\int_0^\xi f_a(x)\,dx = \lim_{a\to\infty}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\xi dx\int_0^a \cos xt\, g(t)\,dt =$$

$$= \lim_{a\to\infty}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^a \frac{\sin \xi t}{t} g(t)\,dt = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty \frac{\sin \xi t}{t} g(t)\,dt.$$

С другой стороны, так как функция $f(x)$ интегрируема в интервале $(0, a)$, то, согласно § 13.9.4, при $0<\xi<a$

$$\int_0^\xi f(x)\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\sin \xi u}{u}\,du\int_0^a \cos ut\, f(t)\,dt = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty \frac{\sin \xi u}{u} g_a(u)\,du.$$

Переходя к пределу при $a\to\infty$ и замечая, что функция $\frac{\sin \xi u}{u}$ принадлежит к L^2, мы получаем равенство (см. § 12.5.3)

$$\int_0^\xi f(x)\,dx = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty \frac{\sin \xi u}{u} g(u)\,du.$$

Этим равенство (4) доказано и доказательство теоремы доведено до конца.

Конечно, такая же теорема верна для формул § 13.9.3 (5).

13.9.6. Можно получить также формулу, соответствующую теореме Парсеваля. Полагая в неравенстве § 13.9.5 (3) $a=0$, мы видим, что

$$\int_0^\infty \{g_b(x)\}^2\,dx \leqslant \int_0^b \{f(x)\}^2\,dx \leqslant \int_0^\infty \{f(x)\}^2\,dx.$$

Заставляя затем b стремиться к ∞, мы получаем неравенство (см. § 12.5.1)

$$\int_0^\infty \{g(x)\}^2\,dx \leqslant \int_0^\infty \{f(x)\}^2\,dx.$$

Так как $f(x)$ и $g(x)$ равноправны, то верно и обратное неравенство. Таким образом, в действительности

$$\int_0^\infty \{g(x)\}^2\,dx = \int_0^\infty \{f(x)\}^2\,dx. \tag{1}$$

Наконец, если $\varphi(x)$ также принадлежит к L^2 и $\psi(x)$ получается из $\varphi(x)$ преобразованием Фурье, то $g(x)+\psi(x)$ получается преобразованием Фурье из $f(x)+\varphi(x)$. Следовательно,

$$\int_0^\infty \{g(x)+\psi(x)\}^2\,dx=\int_0^\infty \{f(x)+\varphi(x)\}^2\,dx,$$

и, вычитая из этого равенства равенство (1) и такое же равенство для φ и ψ, мы видим, что

$$\int_0^\infty g(x)\,\psi(x)\,dx=\int_0^\infty f(x)\,\varphi(x)\,dx. \tag{2}$$

РАЗЛИЧНЫЕ ПРИМЕРЫ

1. Пусть функция $f(x)$ определена первоначально в интервале $(0, \pi)$, затем — в интервале $(-\pi, 0)$ по закону $f(-x)=f(x)$ и далее — как периодическая функция с периодом 2π. Показать, что ряд Фурье функции $f(x)$ имеет вид

$$\frac{1}{2}a_0+\sum_{n=1}^\infty a_n\cos nx$$

с $a_n=\dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^\pi f(t)\cos nt\,dt$.

Подобным же образом, если $f(-x)=-f(x)$, то ряд Фурье имеет вид

$$\sum_{n=1}^\infty b_n\sin nx$$

с $b_n=\dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^\pi f(t)\sin nt\,dt$.

2. Показать, что

$$e^{ax}=\frac{e^{2\pi a}-1}{\pi}\left\{\frac{1}{2a}+\sum_{n=1}^\infty\frac{a\cos nx-n\sin nx}{a^2+n^2}\right\}\quad(0<x<2\pi),$$

$$e^{ax}=\frac{e^{a\pi}-1}{a\pi}+\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^\infty\{(-1)^n e^{a\pi}-1\}\frac{a\cos nx}{a^2+n^2}\quad(0<x<\pi),$$

$$e^{ax}=\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^\infty\{1-(-1)^n e^{a\pi}\}\frac{n\sin nx}{a^2+n^2}\quad(0<x<\pi).$$

Найти суммы этих рядов при $x=0$.

3. Просуммировать ряды

$$\sum_{n=1}^\infty\frac{a\cos nx}{a^2+n^2},\quad \sum_{n=1}^\infty\frac{n\sin nx}{a^2+n^2}\quad(0<x<2\pi).$$

4. Разложить в ряд Фурье в интервале $(0, 2\pi)$, а также в ряд Фурье по косинусам и в ряд Фурье по синусам в интервале $(0, \pi)$ функции

$$1,\ x,\ x^2,\ x^3,\ \cos ax,\ \sin ax,\ \operatorname{ch} ax,\ \operatorname{sh} ax,$$

$$e^{ax}\cos bx,\ e^{ax}\sin bx,\ [x/\pi],\ [2x/\pi].$$

Рассмотреть значения x, при которых ряды сходятся к значениям, отличным от значений разлагаемых функций.

5. Доказать, что при $-1<r<1$ для всех значений θ

$$\frac{1-r^2}{1-2r\cos\theta+r^2}=1+2\sum_{n=1}^{\infty} r^n\cos n\theta.$$

6. Если a_n, b_n — коэффициенты Фурье функции $f(x)$, то при $-1<r<1$

$$a_0+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)\,r^n=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{1-r^2}{1-2r\cos(x-t)+r^2}\,f(t)\,dt.$$

7. Доказать, что

$$\lim_{r\to 1}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{1-r^2}{1-2r\cos(x-t)+r^2}\,f(t)\,dt=\frac{1}{2}\{f(x+0)+f(x-0)\}$$

при всех значениях x, для которых существует правая часть.

[Изучение этого интеграла подобно изучению интеграла Фейера.]

8. Показать, что если функция $f(x)$ ограничена, то

$$s_n=O(\log n).$$

9. Показать, что если $m\leqslant f(x)\leqslant M$, то

$$m\leqslant\sigma_n(x)\leqslant M$$

при всех значениях n и x.

10. Показать, что если $m\leqslant f(x)\leqslant M$ и

$$|a_n|\leqslant\frac{A_1}{n},\quad |b_n|\leqslant\frac{A_2}{n},$$

то $m-A_1-A_2\leqslant s_n\leqslant M+A_1+A_2$.

[Воспользоваться формулой

$$s_n=\sigma_{n+1}-\frac{1}{n+1}\sum_{\nu=1}^{n}\nu\,(a_\nu\cos\nu x+b_\nu\sin\nu x).\Big]$$

11. Показать, что

$$\frac{\pi-x}{2}=\frac{\sin x}{1}+\frac{\sin 2x}{2}+\frac{\sin 3x}{3}+\ldots\qquad(0<x<2\pi),$$

и вывести из этого, что при всех значениях n и x

$$\left|\frac{\sin x}{1}+\frac{\sin 2x}{2}+\ldots+\frac{\sin nx}{n}\right|\leqslant\frac{1}{2}\pi+1.$$

[Ср. § 1.7.6. Точная верхняя грань частичных сумм равна

$$\int_0^{\pi} \frac{\sin x}{x}\,dx = 1{,}85\ldots\ {}^{*}).\Bigr]$$

12. Воспользоваться теоремой Парсеваля для суммирования рядов

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2},\quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(a^2+n^2)^2},\quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{(a^2+n^2)^2}.$$

13. Для того чтобы соотношения

$$a_n = O\left(e^{-(k-\varepsilon)n}\right),\qquad b_n = O\left(e^{-(k-\varepsilon)n}\right),$$

где $k>0$, выполнялось при всех положительных значениях ε, необходимо и достаточно, чтобы значения функции $f(x)$ почти всюду совпадали со значениями на вещественной оси некоторой аналитической функции $f(z)$, регулярной при $-k<y<k$ и имеющей период 2π.

14. Построить ряд Фурье, у которого

$$s_n(0) > \frac{\log n}{\log\log n}$$

для бесконечного множества значений n.

15. Показать, что если в ряде Фурье из § 13.4.2 написать $\nu!x$ вместо x в членах, отвечающих группе G_{λ_ν}, то получится ряд Фурье непрерывной функции, расходящийся во всех точках x с рациональным отношением x/π.

16. Показать, что если ряд

$$\sum_{m=0}^{\infty} \alpha_m \cos(2^m x)$$

является рядом Фурье, то он сходится почти всюду.

[В этом случае формула из примера 10 принимает вид

$$\sigma_{2^k} - s_{2^k} = \frac{1}{2^k} \sum_{m=1}^{k-1} 2^m \alpha_m \cos(2^m x),$$

и так как $\alpha_m \to 0$, то правая часть стремится к нулю при всех значениях x. Следовательно, s_{2^k} стремится к пределу там же, где σ_{2^k}, т. е. почти всюду **).]

17. Показать, что для функции $f(x)=x^{-\alpha}$ $(0<x\leqslant 2\pi)$, где $0<\alpha<1$, при $n\to\infty$

$$a_n \sim \frac{n^{\alpha-1}}{2\Gamma(\alpha)\cos\frac{1}{2}\pi\alpha},\qquad b_n \sim \frac{n^{\alpha-1}}{2\Gamma(\alpha)\sin\frac{1}{2}\pi\alpha}.$$

Показать, что если $p<1/\alpha$, то $f(x)$ принадлежит к L^p, и что если $q<\frac{1}{1-\alpha}$, то ряд $\sum(|a_n|^q+|b_n|^q)$ расходится ***).

---

*) См. Gronwall [1].

**) См. Kolmogoroff [1].

***) См. Bromwich, Infinite Series (2-е изд.), § 174, пример 5, и Haslam—Jones [1].

[Этот пример следует сравнить с обобщенной теоремой Рисса — Фишера, упомянутой в § 13.7.1. Он обнаруживает, что указанный там показатель сходимости ряда коэффициентов является наилучшим возможным.]

18. В интервале

$$\frac{\pi}{(\nu+1)^{\beta}} < x \leqslant \frac{\pi}{\nu^{\beta}} \qquad (\nu = 1, 2, \ldots)$$

функция $f(x)$ равна $\nu^{\alpha}\cos(\nu^2 x)$ $(0 < \alpha < \beta < 1)$, а в интервале $(-\pi, 0)$ определяется соотношением

$$f(-x) = -f(x).$$

Показать, что она интегрируема по Лебегу и что ее коэффициенты Фурье при синусах удовлетворяют соотношению

$$b_n = O\left(n^{\frac{1}{2}\alpha - \frac{1}{2}} \log n\right).$$

Выбирая α достаточно малым, а β/α достаточно близким к 1, показать, что при $q > 2$ сходимость ряда $\sum |b_n|^q$ не может обеспечить принадлежность функции $f(x)$ к L^p с $p = p(q) > 1$.

[Главная мысль этого примера: в то время как при $q = 2$ сходимость ряда $\sum |b_n|^2$ влечет за собою принадлежность функции $f(x)$ к L^2, положение вещей резко меняется, когда q становится большим, чем 2.

Мы можем написать:

$$b_n = \frac{1}{\pi}\sum_{\nu=1}^{\infty} \nu^{\alpha} \int\limits_{\pi/(\nu+1)^{\beta}}^{\pi/\nu^{\beta}} \{\sin(n+\nu^2)x + \sin(n-\nu^2)x\}\, dx.$$

Сумма членов, для которых $\sqrt{n} - 2 \leqslant \nu \leqslant \sqrt{n} + 2$, есть

$$O(\nu^{\alpha-\beta-1}) = O\left(n^{\frac{1}{2}(\alpha-\beta-1)}\right),$$

сумма членов, для которых $\nu \leqslant \sqrt{n} - 2$, есть

$$O\left(\sum_{\nu \leqslant \sqrt{n}-2} \frac{\nu^{\alpha}}{n-\nu^2}\right) = O\left(n^{\frac{1}{2}\alpha} \int\limits_0^{\sqrt{n}-1} \frac{du}{n-u^2}\right) =$$

$$= O\left(n^{\frac{1}{2}\alpha - \frac{1}{2}} \int\limits_0^{1-n^{-\frac{1}{2}}} \frac{dv}{1-v^2}\right) = O\left(n^{\frac{1}{2}\alpha - \frac{1}{2}} \log n\right)$$

и аналогично оценивается сумма остальных членов *).]

19. Показать, что функция

$$f(x) = -x + \lim_{m\to\infty} \int\limits_0^x (1+\cos t)(1+\cos 4t)\ldots(1+\cos 4^{m-1}t)\, dt$$

имеет период 2π, непрерывна и имеет ограниченную вариацию, но что nb_n, где b_n — ее коэффициент Фурье при $\sin nx$, не стремится к нулю, так что $f(x)$ не является интегралом.

*) См. также Titchmarsh [2].

[Этот пример принадлежит Ф. Риссу *). Обозначим подынтегральную функцию через $\tau_m(x)$. Это — многочлен от $\cos x$ степени

$$1+4+\ldots+4^{m-1}=\frac{1}{3}(4^m-1).$$

При умножении на $1+\cos 4^m x$ появляются новые члены, первый из которых содержит

$$\cos\left\{4^m-\frac{1}{3}(4^m-1)\right\}x=\cos\frac{1}{3}(2\cdot 4^m+1)x.$$

Степень этого члена, таким образом, выше степени любого члена многочлена $\tau_m(x)$. Следовательно, $\tau_{m+1}(x)$ получается из $\tau_m(x)$ добавлением новых членов без изменения имеющихся. Ясно также, что все коэффициенты лежат между 0 и 1.

Пусть α_m — число отличных от нуля членов многочлена τ_m. Легко проверить, что $\alpha_{m+1}=3\alpha_m-1$. Таким образом, $\alpha_{m+1}-\alpha_m=3(\alpha_m-\alpha_{m-1})$, $\alpha_{m+1}-\alpha_m=3^m$. Следовательно, при $0<x\leqslant 2\pi$

$$\left|\int_0^x\{\tau_{m+1}(t)-\tau_m(t)\}\,dt\right|\leqslant 2\pi\frac{3^m}{\frac{1}{3}(2\cdot 4^m+1)}.$$

Следовательно, $\int\limits_0^x\tau_m(t)\,dt$ равномерно стремится к некоторому пределу. Следовательно, функция $f(x)$ непрерывна. Так как, далее, $\int\limits_0^x\tau_m(t)\,dt$ есть неубывающая функция от x, то таков же ее предел. Следовательно, $f(x)$ есть функция ограниченной вариации. Наконец, $b_{4^m}=1/4^m$.]

20. Показать, что если $a_n\cos nx+b_n\sin nx$ стремится к нулю на множестве положительной меры, то $a_n\to 0$ и $b_n\to 0$.

21. Показать, что взаимно обратные формулы

$$F(x)=\int_{-\infty}^{\infty}e^{ixt}f(t)\,dt,\qquad f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-ixt}F(t)\,dt$$

верны в тех же условиях, что и интегральная формула Фурье.

22. Вывести в соответствующих условиях формулы обращения Меллина

$$\varphi(s)=\int_0^{\infty}x^{s-1}\psi(x)\,dx,\qquad \psi(x)=\frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty}\varphi(s)\,x^{-s}\,ds$$

из формул предыдущего примера.

23. Показать, что функции $x^{-\frac{1}{2}}$, $e^{-\frac{1}{2}x^2}$, $\operatorname{sech} x\sqrt{\frac{1}{2}\pi}$ переводятся сами в себя косинус-преобразованием Фурье, а функции $x^{-\frac{1}{2}}$, $xe^{-\frac{1}{2}x^2}$,

*) F. Riesz [3].

$\frac{1}{e^{x\sqrt{2\pi}}-1}-\frac{1}{x\sqrt{2\pi}}$ переводятся сами в себя синус-преобразованием Фурье.

24. Представить функцию $e^{-a|x|}$, где $a>0$, интегралом Фурье. Проверить формулу § 13.9.6 (2) для функций

$$f(x)=e^{-ax},\quad \varphi(x)=e^{-bx}.$$

25. Вычислить интеграл

$$\int_0^\infty \frac{\sin ax \sin bx}{x^2}\,dx$$

с помощью формулы § 13.9.6 (2).

26. Пусть $f(x)$ — принадлежащая к $L(0, \infty)$ непрерывная функция, монотонно убывающая и стремящаяся к нулю при $x\to\infty$ (или разность двух функций такого типа). Пусть $\alpha>0$, $\alpha\beta=2\pi$, и пусть $g(x)$ — функция, получающаяся из $f(x)$ косинус-преобразованием Фурье. Тогда

$$\sqrt{\alpha}\left\{\frac{1}{2}f(0)+\sum_{n=1}^{\infty}f(n\alpha)\right\}=\sqrt{\beta}\left\{\frac{1}{2}g(0)+\sum_{n=1}^{\infty}g(n\beta)\right\}.$$

[Это соотношение известно как формула Пуассона. Нетрудно проверить, что

$$\sqrt{\beta}\left\{\frac{1}{2}g(0)+\sum_{m=1}^{n}g(m\beta)\right\}=\frac{\sqrt{\alpha}}{2\pi}\int_0^\pi f\left(\frac{t}{\beta}\right)\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{\sin\frac{1}{2}t}\,dt+$$
$$+\frac{\sqrt{\alpha}}{2\pi}\sum_{m=1}^{\infty}\int_{(2m-1)\pi}^{(2m+1)\pi}f\left(\frac{t}{\beta}\right)\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{\sin\frac{1}{2}t}\,dt.$$

Это выражение отличается от левой части формулы Пуассона на

$$\frac{\sqrt{\alpha}}{2\pi}\int_0^\pi\left\{f\left(\frac{t}{\beta}\right)-f(0)\right\}\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{\sin\frac{1}{2}t}\,dt+$$
$$+\frac{\sqrt{\alpha}}{2\pi}\sum_{m=1}^{\infty}\int_{(2m-1)\pi}^{(2m+1)\pi}\left\{f\left(\frac{t}{\beta}\right)-f\left(\frac{2m\pi}{\beta}\right)\right\}\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{\sin\frac{1}{2}t}\,dt.$$

Поставленные нами условия обеспечивают равномерную относительно n сходимость этого ряда; действительно, из второй теоремы о среднем значении нетрудно вывести, что его общий член есть $O\left[f\left\{\frac{(2m-1)\pi}{\beta}\right\}\right]$ равномерно относительно n. Далее, каждый член ряда стремится к нулю при $n\to\infty$ (как в доказательстве достаточности признака Жордана), что и завершает доказательство *).]

27. Поверить формулу Пуассона для функции $f(x)=\frac{1}{1+x^2}$. [Она совпадает в существенном с формулой примера (III) § 3.2.2.]

28. Вывести из формулы Пуассона, что при $x>0$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-n^2x^2}=\frac{\sqrt{\pi}}{x}\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-\frac{n^2\pi^2}{x^2}}.$$

29. Просуммировать ряд $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-\nu}J_\nu(n\beta)$, где $\beta>0$, $\nu>\frac{1}{2}$, пользуясь формулой Пуассона и первой формулой примера 5 гл. I.

---

*) О других условиях, в которых верна эта формула, см. Linfoot [1], Mordell [2].

БИБЛИОГРАФИЯ

Это — список книг (составленный по возможности из книг, имеющихся на английском языке), по которым читатель может продолжить знакомство с затронутыми вопросами.

К ГЛАВЕ I

Bromwich T. J. I'A. Theory of infinite series.—ed. 2.—London, 1926.
Knopp K. Theory and application of infinite series.—London, 1928.
Chaundy T. W. The differential calculus.—Oxford, 1935.

К ГЛАВАМ II—V

Copson E. T. Theory of functions of a complex variable.—Oxford, 1935.
Dienes P. The Taylor series.—Oxford, 1931.
Whittaker E. T. and Watson G. N. Modern analysis.—ed. 4.—Cambridge, 1927 (Уиттекер Е. Т. и Ватсон Г. Н. Курс современного анализа.—М.: ГТТИ, 1933—1934).
Watson G. N. Complex integration and Cauchy's theorem.—Cambridge tracts, 1914, **15**.

К ГЛАВЕ VI

Dienes P.—См. выше.
Carathéodory C. Conformal representation.—Cambridge tracts, 1932, **28** (Каратеодори К., Конформное отображение.—М.; Л., 1934).

К ГЛАВЕ VII

Dienes P.—См. выше.
Landau E. Darstellung und Begründung einiger neuerer Ergebnisse der Funktionentheorie.—Berlin, 1929.

К ГЛАВЕ VIII

Valiron G. Lectures on the general theory of integral functions.—Toulouse, 1923.
Nevanlinna R. Le théorème de Picard—Borel et la théorie des fonctions méromorphes.—Paris, 1929.
Nevanlinna R. Eindeutige analytische Funktionen.—Berlin, 1936 (Неванлинна Р. Однозначные аналитические функции.—М.; L.; 1941).

К ГЛАВЕ IX

Hardy G. H. and Riesz M. The general theory of Dirichlet's series.—Cambridge tracts, 1915, № 18.
Besicovitch A. S. Almost periodic functions.—Cambridge, 1932.

К ГЛАВАМ X—XII

Hobson E. W. The theory of functions of a real variable.—ed. 2.—Cambridge, 1921—6.
Kestelman H. Modern theories of integration.—Oxford, 1937.
Littlewood J. E. The elements of the theory of real functions.—ed. 2.—Cambridge, 1926.
Saks S. Theory of the integral.—Warsaw, 1937 (Сакс С. Теория интеграла.—М., 1949).
Young L. C. The theory of integration.—Cambridge tracts, 1927, **21**.

К *ГЛАВЕ XIII*

Carlslaw H. S. Introduction to the theory of Fourier's series and integrals.—ed. 3.—London, 1930.
Paley R. and Wiener N. Fourier transforms in the complex domain.—New York, 1934.
Titchmarsh E. C. Introduction to the theory of Fourier integrals.—Oxford, 1937 (Титчмарш Е. К., Введение в теорию интегралов Фурье.—М.; Л., 1948).
Wiener N. The Fourier integral and certain of its applications.—Cambridge, 1933.
Zygmund A. Trigometrical series.—Warsaw, 1935 (Зигмунд А. Тригонометрические ряды.—М.: Мир, 1965).
Hobson E. W.—См. выше.

ОРИГИНАЛЬНЫЕ РАБОТЫ,
на которые имеются ссылки в тексте

Backlund R. J. [1] Über die Nullstellen der Riemannschen Zetafunktion.—Acta Math., 1918, **41**, 345—375.
Besicovitch A. [1] Über die Beziehung zwischen dem Maximum und Minimum des Moduls einer ganzen Funktion von der Ordnung < 1.—Bull. Acad. Sc. Russ., 1924, 17—28.
Bohnenblust H. F. [1] Note on singularities of power series.—Proc. Nat. Acad. Science U. S. A., 1930, **16**, 752—754.
Bohr H. [1], [2], [3] Zur Theorie der Fastperiodischen Funktionen.—Acta Math., 1924, **45**, 29—127; 1925, **46**, 101—214; 1925, **47**, 237—281.
[4] On the limit values of analytic functions.—Journal London Math. Soc., 1927, **2**, 180—181.
Borel E. [1] Sur les zéros des fonction entieres.—Acta Math., 1897, **20**, 357—396.
Carleman T. [1] Über die Approximation analytischer Funktionen durch lineare Aggregate von vorgegebenen Potenzen.—Arkiv för Mat. Astr. o. Fys., 1922, **17**, № 9.
Carlson F. [1] Sur une classe de séries de Taylor. Thesis.—Upsala 1914.
[2], [3] Contributions à la théorie des séries de Dirichlet.—Arkiv för Mat. Astr. o. Fys., 1922, **16**, № 18; 1926, **19**, № 25.
Chandy T. W. and Jolliffe A. F. [1] The uniform convergence of a certain class of trigonometrical series.—Proc. London Math. Soc., Ser. 2, 1916, **15**, 214—216.
Egoroff D. T. [1] Sur les suites de fonctions mesurables.—Comptes Rendus, 1911, **152**, 244—246.
Estermann T. [1] On certain functions represented by Dirichlet series.—Proc. London Math. Soc., Ser. 2, 1928, **27**, 435—448.
[2] On Ostrowski's gap theorem.—Journal London Math. Soc., 1932, **7**, 19—20.

Fatou P. [1] Séries trigonométriques et séries de Taylor. — Acta Math., 1906, **30**, 335—400.

Fejér L. [1] Untersuchungen über Fouriersche Reihen. — Math. Annalen, 1904, **58**, 51—69.

[2] Beispiele stetiger Funktionen mit divergenter Fourierreihe. — Journal für Math., 1910, **137**, 1—5.

[3] Eine stetige Funktion, deren Fouriersche Reihe divergiert. — Rendiconti di Palermo, 1910, **18**, 402—404.

[4] Über gewisse Potenzreihen an der Konvergenzgrenze. — Münchener Bericht., 1910, **40**, № 3.

[5] Über die Positivität von Summen, die nach trigonometrischen oder Legendreschen Funktionen fortschreiten. — Acta Reg. Univ. Hungaricae Francisco-Josephinae, 1925, **2**, 75—86.

Fischer E. [1] Sur la convergence en moyenne. — Comptes Rendus, 1907, **144**, 1022—1024.

Gronwall T. H. [1] Über die Gibbssche Erscheinung und die trigonometrischen Summen $\sin x + \frac{1}{2}\sin 2x + \ldots + \frac{1}{n}\sin x$. — Math. Annalen, 1912, **72**, 228—243.

Hadamard J. [1] Essai sur l'étude des fonctions données par leur développement de Taylor. — Journal de Math., Ser. 4, 1892, **8**, 101—186.

[2] Étude sur les propriétés des fonctions entiéres et en particulier d'une fonction considérée par Riemann. — Journal de Math., Ser. 4, 1893, **9**, 171—215.

[3] Théorème sur les séries entières. — Acta Math., 1899, **22**, 55—64.

Hardy G. H. [1] On differentiation and integration of divergent series. — Trans. Camb. Phil. Soc., 1904, **19**, 297—321.

[2] On the zeros of certain classes of integral Taylor series. — Proc. London Math. Soc., Ser. 2, 1905, **2**, 332—339, 401—431.

[3] On double Fourier series. — Quart. J. of Math., 1905, **37**, 53—79.

[4] On the function $P_s(x)$. — Quart. J. of Math., 1905, **37**, 146—172.

[5] A note on the continuity or discontinuity of a function defined by an infinite product. — Proc. London Math. Soc., Ser. 2, 1908, **7**, 40—48.

[6] Further researches in the theory of divergent series and integrals. — Trans. Camb. Phil. Soc., 1908, **21**, 1—48.

[7] Theorems connected with Maclaurin's test for the convergence of series. — Proc. London Math. Soc., Ser. 2, 1909, **9**, 126—144.

[8] The mean value of the modulus of an analytic function. — Proc. London Math. Soc., Ser. 2, 1914, **14**, 269—277.

[9] Weierstrass's non-differentiable function. — Trans. Amer. Math. Soc., 1916, **17**, 301—325.

[10] The application of Abel's method of summation to Dirichlet series. — Quart. J. of Math., 1916, **47**, 176—192.

[11] Sir George Stokes and the concept of uniform convergence. — Proc. Camb. Phil. Soc., 1918, **19**, 148—156.

[12] On some properties of integrals of fractional order. — Messenger of Math., 1918, **47**, 145—150.

[13] On certain criteria for the convergence of the Fourier series of a continuous function. — Messenger of Math., 1920, **49**, 149—155.

[14] On two theorems of F. Carlson and S. Wigert. — Acta Math., 1920, **42**, 327—339.

[15] On the integration of Fourier series. — Messenger of Math., 1922, **51**, 186—192.

[16] On Fourier transforms. — Messenger of Math., 1924, **53**, 135—142.

[17] An inequality between integrals. — Messenger of Math., 1925, **54**, 150—156.

[18] A theorem concerning harmonic functions. — Journal London Math. Soc., 1926, **1**, 130—131.
[19] Further inequalities between integrals. — Messenger of Math., 1927, **57**, 12—16.
[20] Prolegomena to a chapter on inequalities. — Journal London Math. Soc., 1929, **4**, 61—78.

Hardy G. H. and Littlewood J. E. [1] Contributions to the arithmetic theory of series. — Proc. London Math. Soc., Ser. 2, 1911, **11**, 411—478.
[2] Tauberian theorems concerning power series and Dirichlet's series whose coefficients are positive. — Proc. London Math. Soc., Ser. 2, 1914, **13**, 174—191.
[3] Abel's theorem and its converse. — Proc. London Math. Soc., Ser. 2, 1918, **18**, 205—235.
[4] Abel's theorem and its converse II. — Proc. London Math. Soc., Ser. 2, 1923, **22**, 254—269.
[5] Some properties of fractional integrals. — Math. Zeitschrift, 1928, **27**, 565—606.
[6] A convergence criterion for Fourier series. — Math. Zeitschrift. 1928, **28**, 612—634.

Haslam-Jones U. S. [1] A note on the Fourier coefficients of unbounded functions. — Journal London Math. Soc., 1927, **2**, 151—154.

Hausdorff F. [1] Eine Ausdehnung des Parsevalschen Satzes über Fourierreihen. — Math. Zeitschrift, 1923, **16**, 163—169.

Hille E. and Tamarkin J. D. [1] Remarks on a known example of a monotone continuous function. — American Math. Monthly, 1929, **36**, 255—264.

Hobson E. W. [1] Generalization of a theorem of F. Riesz. — Journal London Math. Soc., 1926, **1**, 211—218.

Hurwitz A. [1] Ueber die Nullstellen der Bessel'schen Funktion. — Math. Annalen, 1889, **33**, 246—266.

Izumi S. [1] On the distribution of the zero points of sections of a power series. — Japanese Journal of Math., 1927, **4**, 29—32.

Jentzsch R. [1] Untersuchungen zur Theorie der Folgen analytischer Funktionen. — Acta Math., 1917, **41**, 219—270.

Karamata J. [1] Über die Hardy — Littlewoodschen Umkehrungen des Abelschen Stetigkeitssatzes. — Math. Zeitschrift, 1930, **32**, 319—320.

Knopp K. [1] Über Lambertsche Reihen. — Journal für Math., 1912, **142**, 283—315.
[2] Ein einfaches Verfahren zur Bildung stetiger, nirgends differenzierbarer Funktionen. — Math. Zeitschrift, 1918, **2**, 1—26.

Kolmogoroff A. [1] Une contribution à l'étude de la convergence des séries de Fourier. — Fundamenta Math., 1924, 5, 96—97.

Landau E. Über eine Verallgemeinerung des Picardschen Satzes. — Sitzungsber. Preuss. Akad. Wissensch., 1904, 1118—1133.
[2], [3], [4] Abschätzung der Koeffizientensumme einer Potenzreihe. — Archiv der Math. und Phys., Ser. 3, 1913, **21**, 42—50, 250—255; Ser. 3, 1916, **24**, 250—260.
[5] Über die Zetafunktion und die Hadamardsche Theorie der ganzen Funktionen. — Math. Zeitschrift, 1927, **26**, 170—175.

Landau E. und Walfisz A, [1] Über die Nichtfortsetzbarkeit einiger durch Dirichetsche Reihen definierter Funktionen. — Rendiconti di Palermo, 1919, **44**, 82—86.

Linfoot E. H. [1] A sufficiency condition for Poisson's formula. — Journal London Math. Soc., 1928, **4**, 54—61.

Littlewood J. E. [1] A general theorem on integral functions of finite order. — Proc. London Math. Soc., Ser. 2, 1908, **6**, 189—204.
[2] On a class of coditionally convergent infinite products. — Proc London Math. Soc., Ser. 2, 1910, **8**, 195—199,

[3] The converse of Abel's theorem on power series.—Proc. London Math. Soc., Ser. 2, 1911, **9**, 434—448.
[4] On the zeros of the Riemann zeta-function.—Proc. Camb. Phil. Soc., 1924, 22, 295—318.

Montel P. [1] Sur les familles de fonctions analytiques qui admettent des valeurs exceptionnelles dans un domaine.—Annales de l'Ecole Normale, Ser. 3, 1912, **23**, 487—535.

Mordell L. J. [1] On power series with the circle of convergence as a line of essential singularities.—Journal London Math. Soc., 1927, **2**, 146—148.
[2] Poisson's summation formula and the Riemann zeta-function.—Journal London Math. Soc., 1928., **4**, 285—291.

Ostrowski A. [1] On representation of analytical functions by power series.—Journal London Math. Soc., 1926, **1**, 251—263.

Phragmén E. and Lindelöf E. [1] Sur une extension d'un princip classique de l'analyse.—Acta Math., 1908, **31**, 381—406.

Plancherel M. [1] Contribution à l'étude de la représentation d'une fonction arbitraire par des intégrales définies.—Rend. di Palermo, 1910, **30**, 289—335.
[2] Sur la convergence et sur la sommation par les moyennes de Cesàro de $\lim\limits_{z=\infty}\int\limits_a^z f(x)\cos xy\,dx$.—Math. Annalen, 1915, **76**, 315—326.
[3] Sur les formules d'inversion de Fourier et de Hankel.—Proc. London Math. Soc., Ser. 2, 1925, **24**, 62—70.

Plessner A. [1] Zur Theorie der konjugierten trigonometrischen Reihen.—Mitteilungen des Math. Seminars der Univ. Giessen, 1923.
[2] Über Konvergenz von trigonometrischen Reihen.—Journal für Math., 1926, **155**, 15—25.

Pollard S. [1] On Fourier's integral.—Proc. London Math. Soc., Ser. 2, 1927, **26**, 12—24.

Pólya G. [1] On the zeros of an integral function represented by Fourier's integral.— Messenger of Math., 1923, **52**, 185—188.
[2] On an integral function of an integral function.—Journal London Math. Soc., 1926, **1**, 12—15.
[3] On the minimum modulus of integral functions.—Journal London Math. Soc., 1926, **1**, 78—86.
[4] Untersuchungen über Lücken und Singularitäten von Potenzreihen.—Math. Zeitschrift, 1929, **29**, 549—640.

Rajchman A. et Saks S. [1] Sur la dérivabilité des fonctions monotones.—Fundamenta Math., 1923, **4**, 204—213.

Ramanujan S. [1] Some formulae in the analytic theory of numbers.—Messenger of Math., 1915, **45**, 81—84.

Riesz F. [1] Über orthogonale Funktionensysteme.—Göttinger Nachrichten 1907, 116—122.
[2] Untersuchungen über Systeme integrierbarer Funktionen.—Math. Annalen, 1910, **69**, 449—497.
[3] Über die Fourierkoeffizienten einer stetigen Funktion von beschränkter Schwankung.—Math. Zeitschrift, 1918, **2**, 312—315.
[4] Über eine Verallgemeinerung der Parsevalschen Formel.—Math. Zeitschrift, 1923, **18**, 117—124.

Riesz M. [1] Sur le principe de Phragmén—Lindelöf.— Proc. Camb. Phil. Soc., 1920, **20**, 205—207; и поправка там же, 1921, **21**, 6.

Ritt J. F. [1] Representation of analytic functions as infinite products.—Math. Zeitschrift, 1930, **32**, 1—3.

Sierpinski W. [1] Un lemme métrique.—Fundamenta Math., 1923, **4**, 201—203.

Titchmarsh E. C. [1] Hankel transforms.—Proc. Camb. Phil. Soc., 1923, **21**, 463—473.

[2] A note on the Riesz — Fisher theorem in the theory of trigonometrical series. — Proc. London Math. Soc., Ser. 2, 1923, **22**, Records for February.
[3] A contribution to the theory of Fourier transforms. — Proc. London Math. Soc., Ser. 2, 1924, **23**, 279—289.
[4] Conjugate trigonometrical series. — Proc. London Math. Soc., Ser. 2, 1925, **24**, 109—130.
[5] A theorem on infinite products. — Journal London Math. Soc., 1926, **1**, 35—37.
[6] On integral functions with real negative zeros. — Proc. London Math. Soc., Ser. 2, 1927, **26**, 185—200.
[7] A theorem on Lebesgue integrals. — Journal London Math. Soc., 1927, **2**, 36—37.
[8] On an inequality satisfied by the zeta-function of Riemann. — Proc. London Math. Soc., Ser. 2, 1929, **28**, 70—80.

Valiron G. [1] Sur les fonctions entières d'ordre nul et d'ordre fini. — Annales de Toulouse, Ser. 3, 1913, **5**, 117—257.

Waerden B. L. van der [1] Ein einfaches Beispiel einer nicht differenzierbaren stetigen Funktion. — Math. Zeitschrift, 1930, **32**, 474—475.

Watson G. N. [1] Theorems stated by Ramanujan (II): Theorems on summation of series. — Journal London Math. Soc., 1928, **3**, 216—225.

Wigert S. [1] Sur um théorème concernant les fonctions entières. — Arkiv för Mat. Astr. o. Fys., 1916, **11**, № 22.

Wilson B. M. [1] Proofs of some formulae enunciated by Ramanujan. Proc. London. Math. Soc., Ser. 2, 1922, **21**, 235—255.

Wiman A. [1] Über eine Eigenschaft der ganzen Funktionen von ber Höhe Null. — Manth. Annalen, 1915, **76**, 197—211.

Young W. H. [1] On the integration of Fourier series. — Proc. London Math. Soc., Ser. 2, 1910, **9**, 449—462.
[2] Sur la généralisation du tréorème de Parseval. — Comptes Rendus, 1912, **155**, 30—33.
[3] Sur la sommabilité d'une fonction dont la série de Fourier est donnée. — Comptes Rendus, 1912, **155**, 472—475.
[4] On classes of summable functions and their Fourier series. — Proc. Royal Soc., Ser. A, 1912, **87**, 225—229.
[5] On the multiplication of successions of Fourier constants. — Proc. Royal Soc., Ser. A, 1912, **87**, 331—339.
[6] On the determination of the summability of a function by means of its Fourier constants. — Proc. London Math. Soc., Ser. 2, 1913, **12**, 71—88.
[7] On restricted Fourier series and the convergence of power series. — Proc. London Math. Soc., 1918, **17**, 353—366.

Young W. H. and Young G. C. [1] On the existence of a differential coefficient. — Proc. London Math. Soc., Ser. 2, 1910, **9**, 325—335.
[2] On the theorem of Riesz — Fischer. — Quart. J. of Math., 1913, **44**, 49—88.

Zygmund A. [1] On a theorem of Cstrowski. — Journal London Math. Soc., 1931, **6**, 162—163.

ДОБАВЛЕНИЕ ПЕРЕВОДЧИКА

Carleson L. [1] On convergence and growth of partial sums of Fourier series. — Acta Math., 1966, **116**, 135—157.

Fefferman Ch. [1] Pointwise convergence of Fourier series. — Annals of Math., 1973, **98**, № 3, 551—572.

Hunt R. A. [1] On the convergence of Fourier series, orthogonal expansions and their continuous analogues (Proc. Conf. Edwardsville, Ill., 1967), 235—255, Southern Illinois Univ. Press., Carbondale, Ill., 1968.

Wielandt H. [1] Zur Umkehrung des Abelschen Stetigkeitssatzes. — Math. Zeitschrift, 1952, **56**, 206—207.

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ