

**М.Ф.МЕХТИЕВ**

**МЕТОД ОДНОРОДНЫХ  
РЕШЕНИЙ В АНИЗОТРОПНОЙ  
ТЕОРИИ ОБОЛОЧЕК**

*Печатается в соответствии с  
постановлением Ученого Совета  
Бакинского Государственного Уни-  
верситета*

**ÇAŞIOĞLU**  
**БАКУ-2009**

**Научный редактор: Ю.А.Устинов**  
Заслуженный деятель науки Российской Федерации,  
Доктор физико-математических наук, профессор

**М.Ф.Мехтиев.** Метод однородных решений в анизотропной теории оболочек. Баку: Чашыюглу, 2009, - 336 с.

*В основу монографии легла часть результатов автора и его учеников, полученная в Бакинском Университете. Построены однородные решения в статических и динамических задачах анизотропной теории упругости для полого цилиндра. Построен асимптотический процесс для нахождения частот собственных колебаний полого цилиндра с позиции трехмерной теории упругости. Проведено качественное изучение некоторых прикладных теорий, установлены границы области их применимости.*

*Разработана общая теория трансверсально-изотропной сферической оболочки. Теория включает в себя методы построения неоднородных и однородных решений, которые позволяют вскрыть характерные особенности напряженно-деформированного состояния анизотропной сферической оболочки.*

*Разработан асимптотический метод интегрирования уравнений анизотропной теории упругости для плит и оболочек переменной толщины.*

*Монография рассчитана на специалистов в области теории упругости, теории пластин и оболочек, а также специалистов по прикладной математике.*

ISBN 978-9952-27-189-8

© М.Ф.Мехтиев, 2009

## ВВЕДЕНИЕ

Одной из важнейших областей современной механики, представляющей интерес для исследования, является теория пластин и оболочек.

Легкость в сочетании с высокой прочностью, а также аэродинамические качества привели к широкому использованию оболочек в строительных конструкциях, в авиации, ракетостроении и других областях техники.

Это явилось причиной возросшего интереса к пространственным задачам теории упругости, решение которых позволяет вычислить напряженно-деформированное состояние оболочки.

Однако решение подобных задач связано со значительными математическими трудностями. Поэтому уже в процессе развития численных методов решения задач теории упругости возникли методы приведения трехмерных задач теории упругости к двумерным задачам теории оболочек. Эти методы позволяют провести замену системы уравнений теории упругости системами приближенных уравнений, содержащих меньшее количество независимых переменных, чем исходные уравнения.

В настоящее время существуют различные методы сведения трехмерных задач теории упругости к двумерным задачам теории оболочек.

Однако, как известно [1], эти методы позволяют решить трехмерные задачи теории упругости лишь при наложении ограничений на области частот, длины волн, смещений напряжений и деформаций, на показатель изменчивости напряженного состояния и вносят в уравнения теории оболочек неустранимую погрешность, которая должна учитываться при оценке возможности различных упрощений уравнений теории оболочек.

Особенно актуальна проблемы предельного перехода в анизотропной теории упругости. Так как в настоящее время существует ряд технических теорий анизотропных оболочек, базирующихся на различных гипотезах, но практически полное отсутствует данные по их сравнительному анализу, весьма остро ставит вопрос, об установлении области применимости каждой из них на основе трехмерной теории упругости, а также новых уточненных прикладных теорий.

Решение трехмерных задач для анизотропных пластин и оболочек связано с дополнительными трудностями, обусловленными значительным увеличением числа параметров, описывающих конструкцию. Кроме этого, исследования автора и его учеников показали, что в отличие от изотропных пластин и оболочек, спектр краевых задач для анизотропных пластин и оболочек имеет точки разветвления в верхней части спектра. Это, в свою очередь, усложняет эти задачи как механически, так и математически.

Появляется счетное множество новых групп решений, которые характерны только для анизотропных пластин и оболочек. При переходе к изотропным пластинам и оболочкам они полностью исчезают.

Настоящая монография посвящена этому кругу вопросов.

Монография состоит из шести глав.

В монографии в основном рассматривается трансверсально-изотропный случай, который содержит все характерные свойства анизотропных тел. Рассмотрение общей анизотропии не составляет никакой трудности, кроме технической.

В первой главе разрабатывается общая теория трансверсально-изотропной цилиндрической оболочки. Теория включает в себя методы, построения неоднородных и однородных решений, которые позволяют вскрыть ха-

ракетные особенности напряженно-деформированного состояния анизотропной цилиндрической оболочки. Приводится сравнение асимптотического решения с решениями, полученными по прикладным теориям.

Методом однородных решений исследуется осесимметричная динамическая задача теории упругости для трансверсально-изотропного полого цилиндра. Построены однородные решения, зависящие от корней дисперсионного уравнения. Произведена классификация корней дисперсионного уравнения.

Предлагается асимптотический процесс для нахождения частот, свободных осесимметричных колебаний трансверсально-изотропного полого цилиндра.

Второй главе излагается общая теория трансверсально-изотропной сферической оболочки. Сформулирована краевая задача и приведена полная система уравнений. С помощью метода разделения переменных общая задача сведена к спектральной задаче относительно пары функций  $a(\xi)$ ,  $b(\xi)$ .

На основе одного из вариантов асимптотического метода, оперяющегося на однородные решения уравнений теории упругости, изучено поведение решений трехмерных краевых задач как во внутренней части оболочки, так и вблизи конических срезов.

Построены однородные решения, зависящие от корней характеристического уравнения. Произведена классификация корней характеристического уравнения. Основной классификации является порядок корня относительно малого параметра  $\varepsilon$ , характеризующего тонкостенность оболочки. Произведена классификация однородных решений. Каждой группе корней характеристического уравнения соответствует свой тип однородных решений. Получены асимптотические разложения однородных решений,

позволяющие рассчитать напряженно-деформированное состояние.

Доказано обобщенное условие ортогональности однородных решений для анизотропной поллой сферы, позволяющее при определенных краевых условиях на боковой поверхности сферы решить задачу для сферической оболочки точно.

В общем случае нагружений с помощью вариационного принципа Лагранжа исходная краевая задача сведена к решению бесконечных систем линейных алгебраических уравнений.

Здесь же дается метод построения частных решений уравнений анизотропной теории упругости, удовлетворяющих неоднородным граничным условиям на лицевых поверхностях оболочки.

Установлено, что напряженное состояние, соответствующее проникающему решению, эквивалентно главному вектору внешних усилий, приложенных к одному из конических срезов  $\theta_j = const$ .

Второй группе нулей соответствует решение типа краевого эффекта, аналогичное краевому эффекту в прикладной теории оболочек. В первых членах разложения по параметру тонкостенности проникающее решение, совместно с решением краевого эффекта, можно рассматривать как решения по прикладной теории оболочек.

Третьей группе нулей соответствует решение типа пограничного слоя, локализованное вблизи боковой поверхности оболочки.

Однако, погранслоиные решения для анизотропной оболочки качественно отличаются от аналогичных решений для изотропной оболочки. Построенные однородные решения не только вскрывают качественную структуру трехмерного решения анизотропной сферической оболочки, но и могут служить эффективным аппаратом решения

конкретных краевых задач, а также основой для оценки упрощенных теорий о построению уточненных прикладных теорий.

Как известно, в задачах теории упругости, большой интерес представляет оценка роли граничных условий в формировании спектра краевых задач. Поэтому разобраны все краевые условия, которые практически могут быть поставлены в пространственной теории упругости. В частности рассмотрена задача теории упругости, когда лицевые поверхности сферической оболочки жестко заделаны или шарнирно оперты. Относительно собственных значений задачи получены трансцендентные уравнения. Детально изучены корни характеристических уравнений.

Исследование собственных значений позволило установить существенные особенности напряженно-деформированного состояния анизотропной оболочки по сравнению с изотропными оболочками. Построены однородные решения. Как и в первой части главы, в общем случае нагружения краевая задача сведена к решению бесконечных систем линейных алгебраических уравнений.

С помощью обобщенного условия ортогональности однородных решений, точно решена задача для сферической оболочки, когда на конических срезах заданы смешанные краевые условия.

В третьей главе дается общее представление решений трансверсально-изотропного полого конуса переменной толщины.

Поставлена краевая задача и приведена система уравнений. Методом разделения переменных общая задача сводится к спектральной.

Доказано обобщенное условие ортогональности однородных решения для трансверсально-изотропного полого конуса переменной толщины, позволяющее точно ре-

шить задачу теории упругости при смешанных условиях на торцах.

Рассматривается вопрос об удовлетворении граничных условий на торцах конуса при помощи однородных решений с использованием вариационного принципа Лагранжа.

В четвертой главе поострена асимптотическая теория для общей конической оболочки переменной толщины, справедливая, в частности, для цилиндрической оболочки. В этой теории содержатся методы построения однородных решений, так как снятие нагрузок с боковой поверхности конуса можно осуществить с помощью приемов, предложенных в работах [4, 14]. Это дает возможность выявить особенности напряженно-деформированного состояния трансверсально-изотропного полого конуса переменной толщины. Дана численная оценка показателя изменяемости напряженного состояния в зависимости от материала, толщины оболочки и угла раствора срединной поверхности оболочки.

В последнем параграфе главы рассматривается задача кручения трансверсально-изотропного полого конуса. Сначала задача решается точно, а потом приводится асимптотический анализ полученных решений при стремлении параметра тонкостенности к нулю.

В пятой и шестой главе разработано общая теория транслопной (трансверсально-изотропной) плиты переменной толщины. Теория включает в себя методы построения однородных и неоднородных решений, которые позволяют вскрыть характерные особенности напряженно-деформированного состояния транслопной плиты переменной толщины. Изучено поведение решений трехмерных краевых задач при стремлении к нулю параметра тонкостенности. Предложена новая форма решений уравнения Лежандра, позволяющая расчленить общую задачу для

плиты на две независимые задачу растяжения-сжатия и задачу изгиба плиты.

Построены однородные решения, зависящие от корней характеристического уравнения. Произведена классификация корней характеристического уравнения, позволяющая расчленить напряженно-деформированное состояние на внутреннее и краевой эффект Сен-Венана. Предложена новая уточненная двумерная теория для транслопной плиты переменной толщины, более точно описывающая процессы, происходящие в тонких плитах, чем классическая теория Кирхгофа-Лява. Рассмотрены неосесимметричные задачи теории упругости для транслопной плиты переменной толщины.

## ГЛАВА 1

### АСИМПТОТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ

В настоящей главе разрабатывается общая теория трансверсально-изотропной цилиндрической оболочки. Теория включает в себя методы построения неоднородных и однородных решений которые позволяют вскрыть характерные особенности напряженно-деформированного состояния анизотропной цилиндрической оболочки.

Приводится сравнение асимптотического решения с решениями, полученными по прикладным теориями.

Методом однородных решений исследуется осесимметричная динамическая задача теории упругости для трансверсально-изотропного полого цилиндра. Построены однородные решения, зависящие от корней дисперсионного уравнения. Произведена классификация корней дисперсионного уравнения.

Предлагается асимптотический процесс для нахождения частот свободных осесимметричных колебаний трансверсально-изотропного полого цилиндра.

#### **§1. Построение однородных решений для трансверсально-изотропного полого цилиндра**

Рассмотрим осесимметричную задачу теории упругости для трансверсально-изотропного полого цилиндра.

1. Пусть цилиндр занимает объем  $\Gamma = [R_1, R_2] \times [0, 2\pi] \times [-l, l]$  (рис.1.1). Оболочка изготовлена из трансверсально-изотропного материала.

Уравнения равновесия в напряжениях, при отсутствии объемных сил имеют вид [38]

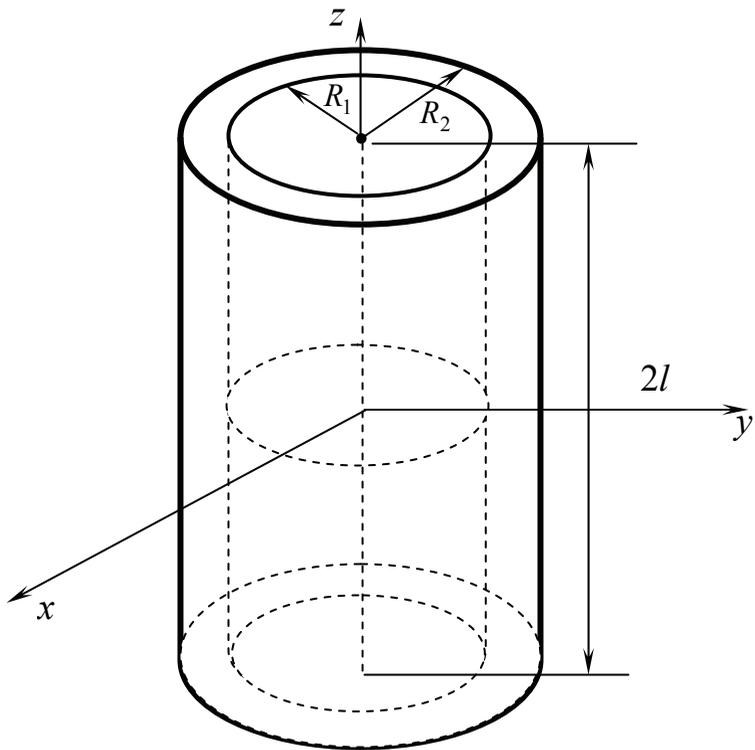


Рис.1.1

$$\begin{aligned}\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial z} + \frac{\sigma_r - \sigma_\varphi}{r} &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial r} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\tau_{rz}}{r} &= 0\end{aligned}\quad (1.1)$$

Здесь  $(\sigma_r, \sigma_\varphi, \sigma_z, \tau_{rz})$ - компоненты тензора напряжений.

Соотношения обобщенного закона Гука имеют вид:

$$\begin{aligned}\sigma_r &= G_1(b_{11}\varepsilon_r + b_{12}\varepsilon_\varphi + b_{13}\varepsilon_z) \\ \sigma_\varphi &= G_1(b_{12}\varepsilon_r + b_{11}\varepsilon_\varphi + b_{13}\varepsilon_z) \\ \sigma_z &= G_1[b_{13}(\varepsilon_r + \varepsilon_\varphi) + b_{33}\varepsilon_z] \\ \tau_{rz} &= G_1G_0\varepsilon_{rz}\end{aligned}\quad (1.2)$$

где

$$\varepsilon_r = \frac{\partial u_r}{\partial r}, \quad \varepsilon_\varphi = \frac{u_r}{r}, \quad \varepsilon_z = \frac{\partial u_z}{\partial z}, \quad \varepsilon_{rz} = \frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial r} \quad (1.3)$$

компоненты тензора деформаций,  $u_r = u_r(r, z)$ ,  $u_z = u_z(r, z)$ - компоненты вектора перемещений,  $b_{ij}, G, G_1$ - материальные константы.  $\tilde{m}b_{11} = 2G_0(1 - \nu_1\nu_2)$ ,  $\tilde{m}b_{13} = 2G_0\nu_1(1 + \nu)$ ,  $\tilde{m}b_{33} = 2G_0(1 - \nu^2)E_0$ ,  $b_{11} - b_{12} = 2G_0$ ,  $E_0 = E_1E^{-1}$ ,  $G_0 = GG_1^{-1}$ ,  $\nu_2 = E_0^{-1}\nu_1$ - безразмерные величины,  $E, G, \nu$ - материальные константы в плоскости изотропии,  $E_1, G_1, \nu_1$ - материальные константы в плоскости перпендикулярном к плоскости изотропии,  $\tilde{m} = 1 - \nu - 2\nu_1\nu_2$ .

Подставляя (1.3), (1.2) в (1.1), после несложных выкладок получим

$$\begin{aligned}b_{11}\left(\Delta_0 u_\rho - \frac{u_\rho}{\rho^2}\right) + \frac{\partial^2 u_\rho}{\partial \xi^2} + (1 + b_{13})\frac{\partial^2 u_\xi}{\partial \rho \partial \xi} &= 0 \\ (1 + b_{13})\frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{\partial u_\rho}{\partial \rho} + \frac{u_\rho}{\rho}\right) + \Delta_0 u_\xi + b_{33}\frac{\partial^2 u_\xi}{\partial \xi^2} &= 0\end{aligned}\quad (1.4)$$

Здесь  $\rho = R_0^{-1}r$ ,  $\xi = R_0^{-1}z$ ,  $u_\rho = R_0^{-1}u_r$ ,  $u_\xi = R_0^{-1}u_z$

$R_0 = 1/2(R_1 + R_2)$  - радиус срединной поверхности оболочки. Предположим, что со стороны боковых поверхностей на оболочку действует нагрузка

$$\sigma_r = Q_s(\xi), \tau_{rz} = T_s(\xi) \text{ при } \rho = \rho_s \text{ (} s = 1, 2 \text{)} \quad (1.5)$$

характер граничных условий на торцах пока уточнять не будем, однако будем считать их таковыми, что оболочка находится в равновесии.

Неоднородными решениями будем называть частное решение равновесия (1.4) которые удовлетворяют на боковых поверхностях оболочки неоднородным граничным условиями (1.5). Для построения неоднородных решений можно использовать приемы предложенные в работе [4].

Однако это не единственный прием, для снятия нагрузки с боковых поверхностей цилиндра. Один из приемов состоит в следующем. Внешние усилия, заданные на боковые поверхности раскладываются в ряд Фурье. При этом необходимо, чтобы внешние усилия  $Q_s(\xi)$ ,  $T_s(\xi)$ -удовлетворяли условий равновесия.

Для простоты будем считать их симметричными относительно плоскости  $\xi = 0$ . Тогда  $Q_s(\xi)$ -четно,  $T_s(\xi)$ -нечетно относительно среднего сечения цилиндра ( $\xi = 0$ ). Кососимметричный случай рассматривается аналогично. Тогда  $\sigma_r$ -четно,  $\tau_{rz}$ -нечетно относительно  $\xi$  их крайевые значения представимыми тригонометрическими рядами

$$Q_s(\xi) = \sum_{n=0}^{\infty} P_{sn} \cos \frac{n\pi\xi}{l}, \quad T_s(\xi) = \sum_{n=0}^{\infty} T_{sn} \sin \frac{n\pi\xi}{l} \quad (1.6)$$

$2l$  - высота цилиндра.

Тогда компоненты вектора перемещений  $u_\rho$ ,  $u_\xi$  естественно искать в виде

$$u_\rho = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(\rho) \cos \frac{n\pi\xi}{l}, \quad u_\xi = \sum_{n=0}^{\infty} w_n(\rho) \sin \frac{n\pi\xi}{l} \quad (1.7)$$

В силу, ортогональности тригонометрических функций исходная краевая задача сводится к одномерным краевым задачам относительно  $u_n(\rho)$ ,  $w_n(\rho)$

$$b_{11} \left( u'_n + \frac{u_n}{\rho} \right)' - n^2 u_n + (1 + b_{13}) w'_n n = 0 \quad (1.8)$$

$$-(1 + b_{13}) n \left( u'_n + \frac{u_n}{\rho} \right) + w''_n + \frac{1}{\rho} w'_n - b_{33} n^2 w_n = 0$$

$$\left[ b_{11} u'_n + b_{12} \frac{u_n}{\rho} + b_{13} w_n \right]_{\rho=\rho_s} = P_{sn} \quad (1.9)$$

$$\left[ w'_n - n^2 u_n \right]_{\rho=\rho_s} = T_{sn}$$

Для решения полученных краевых задач можно использовать различные методы, в том числе численные. Описанный прием построения неоднородных решений является достаточно универсальным и не зависит от различных параметров оболочки, в том числе от ее толщины.

Однако, как было показано в работе [14], если толщина оболочки достаточно мала, а нагрузка, заданная на боковых поверхностях достаточно гладкая, то для построения неоднородных решений целесообразно использовать первый итерационный процесс асимптотического метода, который менее трудоемок и позволяет быстрее достичь конечной цели. Однако, здесь на этом останавливаться не будем так, как нашей целью является построить систему однородных решений, позволяющих снять нагрузки с торцевой части цилиндра, оставляющих боковые поверхности цилиндра свободными от напряжений.

2. Переходим к построению однородных решений, оставляющих боковые поверхности цилиндра свободными от напряжений

$$Q_s(\xi) = 0, T_s(\xi) = 0$$

$$\sigma_r = 0, \tau_{rz} = 0 \text{ при } \rho = \rho_s \quad (1.10)$$

Решение (4) будем искать в виде

$$u_\rho = u(\rho) \frac{dm}{d\xi}, u_\xi = w(\rho) m(\xi) \quad (1.11)$$

где функция  $m(\xi)$  подчинена условию

$$\frac{d^2 m}{d\xi^2} - \mu^2 m(\xi) = 0 \quad (1.12)$$

Подставляя (1.11) в (1.4), (1.10) получаем следующую краевую задачу

$$b_{11} \left( u' + \frac{u}{\rho} \right) + \mu^2 u + (1 + b_{13}) w' = 0 \quad (1.13)$$

$$(1 + b_{13}) \mu^2 \left( u' + \frac{u}{\rho} \right) + w'' + \frac{1}{\rho} w' + b_{33} \mu^2 w = 0$$

$$\left[ b_{11} u' + b_{12} \frac{u}{\rho} + b_{13} w \right]_{\rho=\rho_s} = 0 \quad (1.14)$$

$$\left[ \mu^2 u + w' \right]_{\rho=\rho_s} = 0$$

Общее решение уравнение (1.13) имеет вид

$$u(\rho) = (b_{33} \mu^2 - \alpha_1^2) Z_1(\alpha_1 \rho) + (b_{33} \mu^2 - \alpha_2^2) Z_1(\alpha_2 \rho) \quad (1.15)$$

$$w(\rho) = -(b_{13} + 1) \mu^2 [\alpha_1 Z_0(\alpha_1 \rho) + \alpha_2 Z_0(\alpha_2 \rho)]$$

Здесь  $Z_k(\rho) = C_1 J_k(\rho) + C_2 Y_k(\rho)$ , функции  $J_k(\rho)$ ,  $Y_k(\rho)$  являются линейно-независимыми решениями уравнение Бесселя,  $C_1, C_2$  - произвольные постоянные.

$\alpha_n = \sqrt{\tau_n}$ ,  $\tau_n$  - корни квадратного уравнения

$$\tau^2 - 2q_1\mu^2\tau + q_2\mu^4 = 0 \quad (1.16)$$

$$q_1 = v_1[v_2(1 - v_1v_2)]^{-1}(1 + v)(G_0 - v_2) \quad (1.17)$$

$$q_2 = v_1[v_2(1 - v_1v_2)]^{-1}(1 - v^2), \quad \tau_n = \mu^2 s_n \quad (n = 1, 2)$$

Удовлетворяя однородным граничным условиям (1.14) получаем характеристическое уравнение

$$\begin{aligned} \mu^{-2}\Delta(\mu, \rho_1, \rho_2) = & 8\pi^{-2}l_1l_2a_1a_2d_1d_2 + (a_2b_1 - a_1b_2) \times \\ & \times \{a_1d_2[\rho_1^{-1}L_{10}(\alpha_2) + \rho_2^{-1}L_{01}(\alpha_2)]L_{11}(\alpha_1) - a_2d_1 \times \\ & \times [\rho_1^{-1}L_{10}(\alpha_1) + \rho_2^{-1}L_{01}(\alpha_1)]L_{11}(\alpha_2) - \mu^2(a_2b_1 - a_1b_2)^2 \times \\ & \times (\rho_1\rho_2)^{-1}L_{11}(\alpha_1)L_{11}(\alpha_2) + \mu^2a_1a_2d_1d_2[L_{01}(\alpha_1)L_{10}(\alpha_2) + \\ & + L_{01}(\alpha_2)L_{10}(\alpha_1)] - \mu^2a_1^2d_2^2L_{00}(\alpha_2)L_{11}(\alpha_1) - \mu^2a_2^2d_1^2 \times \\ & \times L_{00}(\alpha_1)L_{11}(\alpha_2) = 0 \end{aligned} \quad (1.18)$$

$$a_n = (b_{33}\mu^2 + b_{13}\alpha_n^2), \quad b_n = -2G_0(b_{33}\mu^2 - \alpha_n^2),$$

$$d_n = \alpha_n(B_0\mu^2 - b_{11}\alpha_n^2), \quad l_n = (\alpha_n\rho_n)^{-1}$$

$$B_0 = b_{11}b_{33} - b_{13}^2 - b_{13}, \quad L_{ij}(x) = J_i(x\rho_1)Y_j(x\rho_2) - J_j(x\rho_2)Y_i(x\rho_1) \\ (i, j = 0; 1, \quad n = 1, 2)$$

Левая часть уравнения (1.17), как целая функция параметра  $\mu$ , имеет счетное множество нулей с точкой сгущения на бесконечности, а соответствующие им постоянные  $C_{1k}, C_{2k}, C_{3k}, C_{4k}$  пропорциональны алгебраическим дополнениям элементов какой-либо строки определителя системы. Выбирая в качестве решения системы алгебраические дополнения элементов первой строки, получим:

$$\begin{aligned} C_{1k} = & \left[ -\frac{2}{\pi} \frac{1}{\alpha_{2k}\rho_2} a_{1k}a_{2k}d_{2k}Y_1(\alpha_{1k}\rho_1) - \alpha_{2k}^2d_{1k}Y_0(\alpha_{1k}\rho_2)L_{11}(\alpha_{2k}) - \right. \\ & \left. - \frac{a_{2k}^2b_{1k}}{\rho_2} Y_1(\alpha_{1k}\rho_2)L_{11}(\alpha_{2k}) + a_{1k}a_{2k}d_{2k}Y_1(\alpha_{1k}\rho_2)L_{10}(\alpha_{2k}) + \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{a_{1k} a_{2k} b_{2k}}{\rho_2} Y_1(\alpha_{1k} \rho_2) L_{11}(\alpha_{2k}) \Big] C_k \\
C_{2k} = & \left[ \frac{2}{\pi} \frac{1}{\alpha_{2k} \rho_2} a_{1k} a_{2k} d_{2k} J_1(\alpha_{1k} \rho_1) + \alpha_{2k}^2 d_{1k} J_0(\alpha_{1k} \rho_2) L_{11}(\alpha_{2k}) + \right. \\
& + \frac{a_{2k}^2 b_{1k}}{\rho_2} J_1(\alpha_{1k} \rho_2) L_{11}(\alpha_{2k}) - a_{1k} a_{2k} d_{2k} J_1(\alpha_{1k} \rho_2) L_{10}(\alpha_{2k}) - \\
& \left. - \frac{a_{1k} a_{2k} b_{2k}}{\rho_2} J_1(\alpha_{1k} \rho_2) L_{11}(\alpha_{2k}) \right] C_k \\
C_{3k} = & \left[ - \frac{2}{\pi} \frac{a_{1k} a_{2k} d_{1k}}{\alpha_{1k} \rho_1} Y_1(\alpha_{2k} \rho_1) - a_{1k} d_{2k} Y_0(\alpha_{2k} \rho_2) L_{11}(\alpha_{1k}) - \frac{a_{1k}^2 b_{2k}}{\rho_2} \times \right. \\
& \times Y_1(\alpha_{2k} \rho_2) L_{11}(\alpha_{1k}) + a_{1k} a_{2k} d_{1k} Y_1(\alpha_{2k} \rho_2) L_{10}(\alpha_{2k}) + \\
& \left. + \frac{a_{1k} a_{2k} b_{1k}}{\rho_2} Y_1(\alpha_{1k} \rho_2) L_{11}(\alpha_{1k}) \right] C_k \\
C_{4k} = & \left[ \frac{2}{\pi} \frac{a_{1k} a_{2k} d_{1k}}{\alpha_{1k} \rho_2} J_1(\alpha_{2k} \rho_1) + a_{1k}^2 d_{2k} J_0(\alpha_{2k} \rho_2) L_{11}(\alpha_{1k}) - \right. \\
& - \frac{a_{1k}^2 b_{2k}}{\rho_2} J_1(\alpha_{2k} \rho_2) L_{11}(\alpha_{1k}) - a_{1k} a_{2k} d_{1k} J_1(\alpha_{2k} \rho_2) L_{10}(\alpha_{1k}) - \\
& \left. - \frac{a_{1k} a_{2k} b_{1k}}{\rho_2} J_1(\alpha_{2k} \rho_2) L_{11}(\alpha_{1k}) \right] C_k
\end{aligned}$$

Подставляя (1.19) в (1.15), суммируя по всем корням и учитывая (2), получаем однородные решения следующего вида:

$$\begin{aligned}
u_\rho &= \sum_{k=1}^{\infty} C_k U_k(\rho) \frac{dm_k}{d\xi} \\
u_\xi &= \sum_{k=1}^{\infty} C_k W_k(\rho) m_k(\xi)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sigma_r &= G_1 \sum_{k=1}^{\infty} C_k Q_{rk}(\rho) \frac{dm_k}{d\xi} \\
\sigma_\varphi &= G_1 \sum_{k=1}^{\infty} C_k Q_{\varphi k}(\rho) \frac{dm_k}{d\xi} \\
\sigma_z &= G_1 \sum_{k=1}^{\infty} C_k Q_{zk}(\rho) \frac{dm_k}{d\xi} \\
\tau_{rz} &= G_1 \sum_{k=1}^{\infty} C_k T_k(\rho) m_k(\xi)
\end{aligned} \tag{1.20}$$

Здесь  $C_k$  - произвольные постоянные.

$$\begin{aligned}
u_k(\rho) &= (b_{33}\mu_k^2 - \alpha_{1k}^2) Z_1(\alpha_{1k}\rho) + (b_{33}\mu_k^2 - \alpha_{2k}^2) Z_1(\alpha_{2k}\rho) \\
w_k(\rho) &= -(b_{13} + 1)\mu_k^2 [\alpha_{1k} Z_0(\alpha_{1k}\rho) + \alpha_{2k} Z_0(\alpha_{2k}\rho)] \\
Q_{rk}(\rho) &= d_{1k} Z_0(\alpha_{1k}\rho) + \frac{b_{1k}}{\rho} Z_1(\alpha_{1k}\rho) + d_{2k} Z_0(\alpha_{2k}\rho) + \frac{b_{2k}}{\rho} Z_1(\alpha_{2k}\rho) \\
Q_{\varphi k}(\rho) &= \alpha_{1k} \left[ (b_{12}b_{33} - b_{13}^2 - b_{13})\mu_k^2 - b_{12}\alpha_{1k}^2 \right] Z_0(\alpha_{1k}\rho) - \frac{b_{1k}}{\rho} Z_1(\alpha_{1k}\rho) + \\
&+ \alpha_{2k} \left[ (b_{12}b_{33} - b_{13}^2 - b_{13})\mu_k^2 - b_{12}\alpha_{2k}^2 \right] Z_0(\alpha_{2k}\rho) - \frac{b_{2k}}{\rho} Z_1(\alpha_{2k}\rho) \\
Q_{zk}(\rho) &= -[\alpha_{1k} a_{1k} Z_0(\alpha_{1k}\rho) + \alpha_{2k} a_{2k} Z_0(\alpha_{2k}\rho)] \\
T_k(\rho) &= a_{1k} Z_1(\alpha_{1k}\rho) + a_{2k} Z_1(\alpha_{2k}\rho)
\end{aligned}$$

3. Проведем анализ корней характеристического уравнения (1.18). Как видно из формулы (1.18), характеристическое уравнение имеет весьма сложную структуру. Поэтому в дальнейшем будем считать, что оболочка тонкостенная.

Положим

$$\rho_1 = 1 - \varepsilon, \quad \rho_2 = 1 + \varepsilon, \quad \varepsilon = (2R_0)^{-1}(R_2 - R_1) \tag{1.21}$$

Считаем, что  $\varepsilon$ -малый параметр. Подставляя (1.21) в (1.18), получаем

$$D(\mu, \varepsilon) = \Delta(\mu, \rho_1, \rho_2) = 0 \tag{1.22}$$

относительно нулей функции докажем следующие утверждение:

Функция  $D(\mu, \varepsilon)$  при  $\varepsilon \rightarrow 0$  имеет три группы нулей со следующими асимптотическими свойствами

- а) первая группа состоит из двухкратного нуля  $\mu = 0$ ;
- б) вторая группа состоит из четырех нулей, которые имеют порядок  $O(\varepsilon^{-1/2})$ ;
- в) третья группа содержит счетное множество нулей, которые имеют порядок  $O(\varepsilon^{-1})$ .

Приведем схему доказательства этого утверждения.

Двухкратность нуля  $\mu = 0$  следует из (1.18).

Разложим  $D(\mu, \varepsilon)$  в ряд по  $\varepsilon$  ( $\varepsilon\mu < 1$ )

$$D(\mu, \varepsilon) = A\mu^2\varepsilon^2 \left\{ b_0 + 3^{-1} [E_0\mu^4 - 4G_0(1+\nu)(E_0G_0 - \nu_1)\mu^2 + 9b_0] \times \right. \\ \left. \times \varepsilon^2 + 45^{-1} [-8(1+\nu)b_0^{-1}(E_0G_0 - \nu_1)\mu^6 + \dots] \varepsilon^4 + \dots \right\} = 0 \quad (1.23)$$

$$b_0 = 1 - \nu_1\nu_2, \quad A = 128(1+\nu)^2 \tilde{m}^{-1} \pi^{-2} G_0^3 E_0 (\alpha_2^2 - \alpha_1^2)^2 b_{33} (b_{13} + 1)^2$$

Аналогично изотропному случаю можно доказать, что все остальные нули функция  $D(\mu, \varepsilon)$  неограниченно возрастают, когда  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

Их можно разбить на две группы в зависимости их поведения при  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

- 1)  $\varepsilon z_k \rightarrow 0$  при  $\varepsilon \rightarrow 0$ ;
- 2)  $\varepsilon z_k \rightarrow const$  при  $\varepsilon \rightarrow 0$

Как и в изотропном случае нули второй группы имеют следующие асимптотические разложения

$$\mu_k = \frac{\gamma_k}{\sqrt{\varepsilon}}, \quad \gamma_k = \mu_{k0} + \varepsilon\mu_{k2} + \dots \quad (k=1,2,3,4) \quad (1.24)$$

где

$$\mu_{k0}^4 + 3E_0^{-1}(1 - \nu_1\nu_2) = 0,$$

$$\mu_{k2} = (E_0\mu_{k0})^{-1} G_0(1+\nu)(E_0G_0 - \nu_1)(1 - 0,4E_0^{-1})$$

Для построения асимптотики нулей третьей группы отыскиваем  $\mu_n$  ( $n = k - 4, k = 5, 6, \dots$ ) в виде

$$\mu_n = \varepsilon^{-1} \delta_n + O(\varepsilon) \quad (1.25)$$

Однако, как видно из (1.16) в зависимости от характеристик материала  $\nu, \nu_1, \nu_2, G_0$  параметры  $q_1, q_2$  принимают различные значения, что влечет за собой различные записи решений через функции Бесселя, это в свою очередь приводит к различным асимптотическим представлениям функции Бесселя.

Рассмотрим следующие возможные случаи:

1)  $q_1 > 0, q_1^2 - q_2 \neq 0, \alpha_{1,2} = \pm \mu s_1, \alpha_{3,4} = \pm \mu s_2$

$$s_{1,2} = \sqrt{q_1 \pm \sqrt{q_1^2 - q_2}}, q_1^2 > q_2$$

$$s_{1,2} = x + i\beta = \sqrt{q_1 \pm i\sqrt{q_2 - q_1^2}}, q_1^2 < q_2$$

2) Корни уравнения (16) кратные

$$\alpha_{1,2} = \alpha_{3,4} = \mu p, q_1 > 0, q_1^2 - q_2 = 0, p = \sqrt{q_1}$$

3)  $q_1 < 0, q_1^2 - q_2 \neq 0$

$$\alpha_{1,2} = \pm i\mu s_1, \alpha_{3,4} = \pm i\mu s_2$$

$$s_{1,2} = \sqrt{|q_1| \pm \sqrt{q_1^2 - q_2}}, q_1^2 > q_2$$

$$s_{1,2} = \sqrt{|q_1| \pm i\sqrt{q_1 - q_1^2}}, q_1^2 < q_2$$

4)  $q_1 < 0, q_1^2 - q_2 = 0, \alpha_{1,2} = \alpha_{3,4} = \pm i\mu p, p = \sqrt{|q_1|}$

В случаях 1,2 после подстановки (1.25) в (1.18) и преобразования его с помощью асимптотических разложений  $J_\nu(x), Y_\nu(x)$  для  $\delta_n$  соответственно получаем:

$$(S_2 - S_1) \sin(S_2 + S_1) \delta_n \pm (S_2 + S_1) \sin(S_2 - S_1) \delta_n = 0 \quad (1.26)$$

$$x \sin 2\beta \delta_n \pm \beta \operatorname{sh} 2x \delta_n = 0 \quad (1.27)$$

$$\sin 2p \delta_n \pm 2p \delta_n = 0 \quad (1.28)$$

Что касается случаев 3) и 4), то для них результаты получаются из случаев 1) и 2) формальной заменой  $S_1, S_2, \rho$  на  $iS_1, iS_2, i\rho$ . Эти уравнения совпадают с уравнениями определяющими показатели краевых эффектов Сен-Венана в теории трансверсально-изотропных толстых плит [37]. Там же проведено исследование корней этих уравнений.

4. Предполагая, что  $\varepsilon$  является малым параметром, приведем асимптотическое построение однородных решений, соответствующих различным группам корней характеристического уравнения.

Двухкратному корню  $\mu_0 = 0$  соответствуют следующие перемещения и напряжения

$$u_\rho = -\nu_1 \rho C_0, u_\xi = C_0 \xi$$

$$\sigma_z = 2G_1 \nu_2^{-1} \nu_1 (1 + \nu) C_0, \sigma_r = \sigma_\varphi = \tau_{rz} = 0 \quad (1.29)$$

Таким образом, как и в изотропном случае корню первой группы  $\mu_0 = 0$  отвечает чистое растяжение вдоль оси цилиндра. Эта напряженное состояние проникает беззатухания внутрь области оболочки.

Группа 2. Функция  $m_k(\xi)$  находится из уравнения

$$\frac{d^2 m_k}{d\xi^2} - \frac{\gamma_k}{\sqrt{\varepsilon}} m_k(\xi) = 0, \gamma_k = \mu_{k0} + \varepsilon \mu_{k2} + \dots \quad (k = 1, 2, 3, 4)$$

где  $\mu_{k0}, \mu_{k2}$  дается соотношением (1.24).

Отсюда

$$m_k(\xi) = E_k \exp\left(\frac{\gamma_k}{\sqrt{\varepsilon}} \xi\right) + N_k \exp\left(-\frac{\gamma_k}{\sqrt{\varepsilon}} \xi\right)$$

$E_k, N_k$  – произвольные постоянные.

Полагая  $\rho = 1 + \varepsilon \eta$ ,  $-1 \leq \eta \leq 1$  и раскладывая по малому параметру  $\varepsilon$ , решения второй группы, найдем для них следующие асимптотические выражения:

$$\begin{aligned}
u_\rho &= \sum_{k=1}^4 \sqrt{\varepsilon} C_k [1 + O(\varepsilon)] \frac{dm_k}{d\xi} \\
u_\xi &= \sum_{k=1}^4 \sqrt{\varepsilon} C_k \left[ (2b_{33})^{-1} (b_{33} \mu_{k0}^2 - b_{13}) - \mu_{k0}^2 \eta + O(\varepsilon) \right] m_k(\xi) \\
\sigma_\varphi &= G_1 \sum_{k=1}^4 \sqrt{\varepsilon} C_k \left\{ b_{13} \left( \frac{b_{12}}{b_{11}} - 1 \right) \mu_{k0}^2 \eta + b_{11} + (2b_{33})^{-1} \times \right. \\
&\times \left. \left[ (b_{13} - b_{12})(b_{33} \mu_{k0}^2 - b_{13}) - 2b_{12}^2 \right] + O(\varepsilon) \right\} \frac{dm_k}{d\xi} \\
\sigma_z &= G_1 \sum_{k=1}^4 \sqrt{\varepsilon} C_k \left\{ \left( \frac{b_{13}^2}{b_{11}} - b_{33} \right) \mu_{k0}^2 \eta + b_{13} + (2b_{33})^{-1} \times \right. \\
&\times \left. \left[ b_{33} (b_{33} \mu_{k0}^2 - b_{13}) - b_{13} (b_{33} - b_{13} + 2b_{12}) \right] + O(\varepsilon) \right\} \frac{dm_k}{d\xi} \\
\tau_{rz} &= O(\sqrt{\varepsilon}), \quad \sigma_r = O(\varepsilon) \\
C_k &- \text{произвольные постоянные.}
\end{aligned} \tag{1.30}$$

Группа 3. В этом случае, используя первый член асимптотики функции Бесселя, для перемещений напряжений в первом приближении, получаем два класса решений, первый из которых соответствует нулем функции

$$(S_2 - S_1) \sin(S_2 + S_1) \delta_k - (S_2 + S_1) \sin(S_2 - S_1) \delta_k = 0$$

а второй – нулем функции

$$(S_2 - S_1) \sin(S_2 + S_1) \delta_k + (S_2 + S_1) \sin(S_2 - S_1) \delta_k = 0$$

Они имеют одинаковую структуру и могут быть представлены следующими выражениями

$$\begin{aligned}
u_{\rho n} &= \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} \frac{b_{33}}{b_{11}} \varepsilon B_n [A_1 \cos s_2 \delta_n \cos s_1 \delta_n \eta - \\
&- A_2 \cos s_1 \delta_n \cos s_2 \delta_n \eta + O(\varepsilon)] \frac{dm_n}{d\xi}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
u_{\xi n} &= \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} B_n \delta_n [S_1 K_2 \cos s_2 \delta_n \sin s_1 \delta_n \eta - \\
&- S_2 K_1 \cos s_1 \delta_n \sin s_2 \delta_n \eta + O(\varepsilon)] m_n(\xi) \\
\sigma_{\varphi n} &= G_1 \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} \frac{b_{33}}{b_{11}} B_n \delta_n [S_1 (b_{11} K_2 - b_{12} A_1) \cos s_2 \delta_n \sin s_1 \delta_n \eta - \\
&- S_2 (b_{11} K_1 - b_{12} A_2) \cos s_1 \delta_n \sin s_2 \delta_n \eta + O(\varepsilon)] \frac{dm_n}{d\xi}
\end{aligned} \tag{1.31}$$

$$\begin{aligned}
\sigma_{zn} &= G_1 \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} \left( \frac{b_{11} b_{33} - b_{13}^2}{b_{11}} \right) B_n \delta_n [S_1 \cos s_2 \delta_n \sin s_1 \delta_n \eta - \\
&- S_2 \cos s_1 \delta_n \sin s_2 \delta_n \eta + O(\varepsilon)] \frac{dm_n}{d\xi}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sigma_{rn} &= -G_1 \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} S_1 S_2 (b_{11} b_{33} - b_{13}^2) B_n \delta_n \times \\
&\times [S_2 \cos s_2 \delta_n \sin s_1 \delta_n \eta - S_1 \cos s_1 \delta_n \sin s_2 \delta_n \eta + O(\varepsilon)] \frac{dm_n}{d\xi}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\tau_{rzn} &= G_1 \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} \frac{b_{11} b_{33} - b_{13}^2}{\varepsilon b_{11}} B_n \delta_n \times \\
&\times [\cos s_2 \delta_n \cos s_1 \delta_n \eta - \cos s_1 \delta_n \cos s_2 \delta_n \eta + O(\varepsilon)] m_n(\xi)
\end{aligned}$$

$$K_i = b_{33} + b_{13} S_i, \quad A_i = b_{11} b_{33} - b_{13}^2 - b_{13} - b_{11} S_i \quad i = 1, 2, \quad S_1 \neq S_2$$

Аналогично в случае  $x \sin 2\beta \delta_n \pm \beta sh 2x \delta_n = 0$  имеем:

$$\begin{aligned}
u_{\rho n} &= \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} \varepsilon D_n [(b_{33} + x^2 - \beta^2) chx \delta_n \eta \cos \beta_n \eta \Delta_{1n} + \\
&+ 2x \beta shx \delta_n \eta \sin \beta \delta_n \eta \Delta_{2n} + O(\varepsilon)] \frac{dm_n}{d\xi}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
u_{\xi n} = & - \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} (b_{13} + 1) D_n \delta_n [xsh\delta_n\eta \cos \beta\delta_n\eta \Delta_{1n} + \\
& + \beta chx\delta_n\eta \sin \beta\delta_n\eta \Delta_{2n} + O(\varepsilon)] m_n(\xi) \\
\sigma_{\varphi n} = & G_1 \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} \delta_n D_n \left\{ [x(b_{12}b_{13} - b_{12}b_{13} - b_{12} + b_{12}x^2 - b_{12}\beta^2) \times \right. \\
& \times shx\delta_n\eta \cos \beta\delta_n\eta - \beta b_{12}(b_{33} + x^2 - \beta^2) chx\delta_n\eta \sin \beta\delta_n\eta] \times \\
& \times \Delta_{1n} + \beta [(2b_{12}x^2 - b_{12}b_{13} - b_{12}) chx\delta_n\eta \sin \beta\delta_n\eta + \\
& \left. + 2x\beta b_{12}shx\delta_n\eta \cos \beta\delta_n\eta] \Delta_{2n} + O(\varepsilon) \right\} \frac{dm_n}{d\xi} \quad (1.32)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sigma_{zn} = & G_1 \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} \delta_n B_n \left\{ [x(b_{13}x^2 - b_{13}\beta^2 - b_{33})shx\delta_n\eta \cos \beta\delta_n\eta - \beta b_{13} \times \right. \\
& \times (b_{33} + x^2 - \beta^2) chx\delta_n\eta \sin \beta\delta_n\eta] \Delta_{1n} + \beta [(b_{13}x^2 - b_{13}b_{33} - b_{33}) \times \\
& \times chx\delta_n\eta \sin \beta\delta_n\eta + 2x\beta b_{13}shx\delta_n\eta \cos \beta\delta_n\eta] \Delta_{2n} + O(\varepsilon) \left. \right\} \frac{dm_n}{d\xi}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sigma_{rn} = & G_1 \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} \delta_n B_n \left\{ [x(b_{11}b_{33} - b_{13}^2 - b_{13} + b_{11}x^2 - b_{11}\beta^2) \times \right. \\
& \times shx\delta_n\eta \cos \beta\delta_n\eta - \beta b_{11}(b_{33} + x^2 - \beta^2) chx\delta_n\eta \sin \beta\delta_n\eta] \Delta_{1n} + \\
& + [\beta(b_{13}^2 + b_{13} - 2b_{11}x^2) chx\delta_n\eta \sin \beta\delta_n\eta - \\
& \left. - 2x\beta^2 b_{11}shx\delta_n\eta \cos \beta\delta_n\eta] \Delta_{2n} + O(\varepsilon) \right\} \frac{dm_n}{d\xi}
\end{aligned}$$

$$\tau_{rzn} = - \frac{G_1 x \beta}{\varepsilon} [(b_{13} - 1)(b_{33} - b_{13}^2 x^2 - \beta^2) + \beta^2 (b_{13} + 1)] \times$$

$$\times \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} \delta_n^2 D_n [shx\delta_n \sin \beta\delta_n chx\delta_n\eta \cos \beta\delta_n\eta -$$

$$- chx\delta_n \cos \beta\delta_n shx\delta_n\eta \sin \beta\delta_n\eta + O(\varepsilon)] m_n(\xi)$$

$$\Delta_{1n} = -x\beta(b_{13} - 1)shx\delta_n \sin \beta\delta_n + \beta^2(b_{13} + 1)chx\delta_n \cos \beta\delta_n$$

$$\Delta_{2n} = (b_{33} - b_{13}x^2 - \beta^2)chx\delta_n \cos \beta\delta_n + x\beta(b_{13} + 1)shx\delta_n \sin \beta\delta_n$$

В случае когда  $q_1 > 0$  и корни уравнения (1.16) кратны, решения имеют вид:

$$S_1 = S_2 = p = v_1(1 + v)(G_0 - v_2)[v_2(1 - v_1v_2)]^{-1}$$

$$u_{pn} = \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} \varepsilon p C_n \left\{ [p\delta_n \sin p\delta_n - (b_{13} + 2)(b_{13} + 1)^{-1} \cos p\delta_n] \times \right.$$

$$\left. \times \cos p\delta_n \eta - \eta p \delta_n \cos p\delta_n \sin p\delta_n \eta + O(\varepsilon) \right\} \frac{dm_n}{d\xi}$$

$$u_{zn} = \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} C_n \delta_n \left\{ [p\delta_n \sin p\delta_n - (b_{13} + 1)^{-1} \cos p\delta_n] \sin p\delta_n \eta + \right.$$

$$\left. + \eta p \delta_n \cos p\delta_n \cos p\delta_n \eta + O(\varepsilon) \right\} m_n(\xi)$$

$$\sigma_{rn} = 2G_1 \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} C_n \delta_n [(\cos p\delta_n - p\delta_n \sin p\delta_n) \sin p\delta_n \eta -$$

$$- \eta p \delta_n \cos p\delta_n \cos p\delta_n \eta + O(\varepsilon)] \frac{dm_n}{d\xi}$$

$$\sigma_{zn} = 2G_1 \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} b_{11}^{-1} (b_{13} + 2) C_n \delta_n [(\cos p\delta_n + p\delta_n \sin p\delta_n) \sin p\delta_n \eta +$$

$$+ p\delta_n \eta \cos p\delta_n \cos p\delta_n \eta + O(\varepsilon)] \frac{dm_n}{d\xi} \quad (1.33)$$

$$\sigma_{qn} = \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} C_n \delta_n \left\{ [(b_{13} + 1)^{-1} (b_{12}p^2 + b_{13}) \cos p\delta_n + (b_{13} - b_{12}p^2)] \times \right.$$

$$\left. \times p\delta_n \sin p\delta_n \right\} \sin p\delta_n \eta + p\delta_n (b_{13} - b_{12}p^2) \eta \cos p\delta_n \cos \delta_n \eta + O(\varepsilon) \left\} \frac{dm_n}{d\xi}$$

$$\tau_{rzn} = 2G_1 \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} \frac{p^2 C_n \delta_n^3}{\varepsilon} [\sin p\delta_n \cos p\delta_n \eta - \eta \cos p\delta_n \times$$

$$\times \sin p\delta_n \eta + O(\varepsilon)] m_n(\xi)$$

Здесь  $B_n$ ,  $D_n$ ,  $C_n$  - произвольные постоянные.

Выражения для  $n = 2, 4, 6, \dots$  получаются из (1.31), (1.32), (1.33) заменой  $\cos x$  на  $\sin x$  и  $\sin x$  на  $\cos x$ ,  $chx$  на  $shx$  и  $shx$  на  $chx$  соответственно.

В формулах (1.31)-(1.33) заменяя  $s_1, s_2, p$  на  $is_1, is_2, is_3$  соответственно получаем решение в случае 3) и 4).

В работах [40] выполнена исследования корней уравнений (1.26)-(1.28) и разработана методика их вычисления. Характер этих корней существенно влияет на общую картину напряженно-деформированного состояния оболочки.

Как было отмечено в работе [16] в случае существенной анизотропии, имеющей место при достаточно больших значениях  $G_0$ , погранслои Сен-Венана затухают весьма слабо и решения (1.31)-(1.33) следует причислить к проникающим решениям. Поэтому в этом случае напряженно-деформированное состояние анизотропной и изотропной оболочки сильно отличаются.

Рассмотрим связь однородных решений с главным вектором напряжений  $P$ , действующих в сечении  $\xi = const$ . Имеем:

$$P = \int_0^{2\pi} \int_{R_1}^{R_2} (\sigma_z + \tau_{rz}) r dr d\varphi \quad (1.34)$$

Представим напряжения  $\sigma_z$  и  $\tau_{rz}$  в виде

$$\begin{aligned} \sigma_z &= \sigma_z^0 + \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_{zn}(r) \frac{dm_n}{d\xi} \\ \tau_{rz} &= \tau_{rz}^0 + \sum_{n=1}^{\infty} T_n(r) m_n(\xi) \end{aligned} \quad (1.35)$$

Слагаемые  $\sigma_z^0, \tau_{rz}^0$  соответствует собственным значениям  $\mu = 0$ . Во второе слагаемое включены напряжения, определяемые второй и третьей группами решений.

Подставляя (1.35) в (1.34) с учетом (1.29)-(1.33)

получаем  $P = P_0 + \sum_{n=1}^{\infty} P_n$

$$P_n = 2\pi \int_{R_1}^{R_2} \left[ \sigma_{zn}^{(r)} \frac{dm_n}{d\xi} + T_n(r) m_n(\xi) \right] r dr \quad (1.36)$$

Согласно условию разрешимости задачи теории упругости  $P_n$  не должен зависеть от переменной  $\xi$ .

Однако в соотношении (1.36) правая часть в силу линейной независимости  $m_n(\xi)$ ,  $\frac{dm_n}{d\xi}(\xi)$  зависит от  $\xi$ .

Отсюда следует, что  $P_n = 0$  для любого  $n$  ( $n = 1, 2, \dots$ ). Таким образом, для главного вектора  $P$  получаем

$$P = P_0 = 2\pi G_1 (1 + \nu) \frac{\nu_1}{\nu_2} C_0 (R_2^2 - R_1^2) \quad (1.37)$$

Напряженное состояние, соответствующие нулям второй и третьей групп является самоуравновешенным в каждом сечении  $\xi = const$ .

Решения (1.29), (1.30) определяют внутреннее напряженно-деформированное состояние оболочки. В первом члене асимптотики их можно рассматривать как решение по прикладной теории оболочек.

Напряженное состояние, соответствующее решениям (1.31)-(1.33) имеет характер пограничного слоя. Первые члены его асимптотического разложения полностью эквивалентны краевому эффекту Сен-Венана трансверсально-изотропной плиты.

Отметим, что решение (1.32) характерно только для анизотропных оболочек. При переходе к изотропной оболочке ( $G_0 = 1$ ) оно полностью исчезает. Что касается решений (1.31), (1.33) при  $G_0 = 1$  они сливаются в одно, и это решение совпадает с решением Сен-Венана для изотропной плиты.

Теперь для сравнения приведем здесь анализ характеристических уравнений, получаемых по теориям Кирхгоффа-Лява и С.А.Амбарцумяна. Следует отметить, что трансверсально-изотропная оболочка по теориям Кирхгоффа-Лява и С.А.Амбарцумяна (в системе координат  $z, \varphi, r$ ) в наших системах координат  $(r, \varphi, z)$  ведет себя как ортотропная оболочка.

В первом случае уравнения равновесия в перемещениях имеет вид [39].

$$\begin{aligned} C_{11} \frac{d^2 u}{ds^2} + C_{12} \frac{dw}{ds} &= 0 \\ C_{12} \frac{du}{ds} + \frac{D_{11}}{R_0^2} \frac{d^4 w}{ds^4} + C_{22} w &= 0 \end{aligned} \quad (1.38)$$

Здесь  $u = u(s)$ ,  $w = w(s)$  компоненты вектора перемещения вдоль образующей и по толщине соответственно.

$$\begin{aligned} C_{ij} &= hB_{ij}, \quad D_{ij} = \frac{h^3}{12} B_{ij}, \quad B_{11} = \frac{E_1}{1 - \nu_1 \nu_2} \\ B_{22} &= \frac{E}{1 - \nu_1 \nu_2}, \quad B_{12} = \frac{\nu_2 E}{1 - \nu_1 \nu_2} \end{aligned}$$

Решение системы (1.38) будем отыскивать в виде

$$u = Ae^{\mu \xi}, \quad w = Be^{\mu \xi}$$

Из условия существования нетривиальных решений получаем следующее характеристическое уравнение

$$\mu^2 \left[ \varepsilon^2 \mu^4 + 3(1 - \nu_1 \nu_2) \frac{E}{E_1} \right] = 0 \quad (1.39)$$

Из (1.39) можно получать следующие группы корней:

1)  $\mu = 0$  является двухкратным корнем (1.39).

$$2) \mu_k = \frac{\beta_k}{\sqrt{\varepsilon}}, \quad \beta_k = \beta_{k0} + \varepsilon \beta_{k2} + \dots \quad (1.40)$$

$$\beta_{k0}^4 + 3(1 - \nu_1 \nu_2) \frac{E}{E_1} = 0, \quad \beta_{k2} = 0$$

Таким образом, данная прикладная теория позволяет найти только первый член разложения показателя краевого эффекта. Последующие же члены по этой теории невозможно определить.

**Теория С.А.Амбарцуня.** Характеристическое уравнение в этом случае имеет вид [39] (стр. 309, в наших обозначениях)

$$\mu^2 \left[ 3(1 - \nu_1 \nu_2) \frac{E}{E_1} + \varepsilon^2 \left( \mu^4 - \frac{6}{5} G_1^{-1} E \mu^2 \right) \right] = 0 \quad (1.41)$$

Уравнение (1.41) имеет следующие группы нулей

1)  $\mu = 0$  является двухкратным нулем (1.41)

$$2) \mu_k = \frac{\omega_k}{\sqrt{\varepsilon}}, \quad \omega_k = \omega_{k0} + \varepsilon \omega_{k2} + \dots \quad (1.42)$$

$$\omega_{k0}^4 + 3(1 - \nu_1 \nu_2) \frac{E}{E_1} = 0, \quad \omega_{k2} = 3(10\omega_{k0})^{-1} \frac{E}{G_1}$$

Сравнивая (1.42) с точным разложением (1.24) получаем, что первые члены совпадают, вторые члены существенно различаются.

При  $G_1 \rightarrow \infty$  разложения (1.42) совпадают с разложением (1.40).

Итак, анализ существующих прикладных теорий показывает, что все они в первом члене асимптотики точно аппроксимирует решение, соответствующее нулям, определяемым формулами (1.24) и в тоже время не могут претендовать на какие-либо уточнения в последующих приближениях, так как ни в одной из этих теорий второй член приближения не совпадает с точными его значением (1.24).

Что же касается нулей характеристического уравнения, определяемых формулами (1.26), (1.27), (1.28), то их определение по теориям Кирхгоффа-Лява и С.А.Амбар-

цумяна на возможно.

А ведь именно в них проявляется качественная различия теории анизотропных оболочек от изотропного результата работы [1] и весь выше приведенный анализ показывают, что путем ввода искусственно корректирующих членов в уравнение классической теории оболочек нельзя получить уточненную теорию. Только точный анализ соответствующих трехмерных задач показать путь построения уточненных теорий, позволяющих в конкретном случае учитывать те или иное явление возникающая в тонких оболочках.

Суммируя по всем корням характеристического уравнения однородные решения можно представить в виде

$$\begin{aligned}
 u_r &= R_0 \sum_{k=1}^{\infty} C_k U_k(r) \frac{dm_k}{dz} \\
 u_z &= R_0 \sum_{k=1}^{\infty} C_k W_k(r) m_k(z) \\
 \sigma_r &= G_1 \sum_{k=1}^{\infty} C_k Q_{rk}(r) \frac{dm_k}{dz} \\
 \sigma_\varphi &= G_1 \sum_{k=1}^{\infty} C_k Q_{\varphi k}(r) \frac{dm_k}{dz} \\
 \sigma_z &= G_1 \sum_{k=1}^{\infty} C_k Q_{zk}(r) \frac{dm_k}{dz} \\
 \tau_{rz} &= G_1 \sum_{k=1}^{\infty} C_k T_k(r) m_k(z)
 \end{aligned} \tag{1.43}$$

Здесь  $C_k$  - произвольные постоянные.

Как и в изотропном случае [1] можно доказать, что система однородных решений удовлетворяет обобщенным условиям ортогональности, позволяющей решить задачи теории упругости при смешанных краевых условиях на торцах цилиндра точно.

$$\int_{R_1}^{R_2} [T_p(r)U_k(r) - Q_{zk}(r)W_p(r)]rdr = 0 \quad (k \neq p) \quad (1.44)$$

Во всех остальных случаях для удовлетворения граничных условий на торцах цилиндра приходится обращаться к различным приближенным подходам. Поэтому рассмотрим вопрос об удовлетворении граничных условий на торцах цилиндра при помощи класса однородных решений. Пусть при  $\xi = \pm l_0$  ( $l_0 = R_0^{-1}l$ ) задачи системы напряжений  $\sigma_z^i, \tau_{rz}^i$  ( $i = 1, 2$ ). При этом, как было отмечено выше достаточно рассмотреть случаи, когда нагрузка симметрична относительно плоскости  $\xi = 0$ . Кососимметричный случай рассматривается аналогично (в симметричном случае можно положить  $m_k = ch\mu_k\xi$ , в кососимметричном случае следует взять  $m_k = sh\mu_k\xi$ ).

Итак, пусть заданы следующие условия

$$\sigma_z = Q(r), \tau_{rz} = \tau(r) \text{ при } \xi = \pm l_0 \quad (1.45)$$

Будем отыскивать решение в виде (1.43). Для определения произвольных постоянных  $C_k$  ( $k = 1, 2, \dots$ ), вариации которых будем считать независимыми, используем вариационный принцип Лагранжа. Поскольку однородные решения удовлетворяют уравнение равновесия и граничные условия на цилиндрической поверхности, вариационный принцип принимает следующую форму

$$\int_{R_1}^{R_2} [(\sigma_z - Q)\delta w + (\tau_{rz} - \tau)\delta u]rdr = 0 \quad (1.46)$$

Из (1.46) получаем бесконечную систему линейных алгебраических уравнений

$$\sum_{k=1}^{\infty} M_{kp}C_k = N_p \quad (p = 1, 2, \dots) \quad (1.47)$$

где

$$M_{kp} = \int_{R_1}^{R_2} (Q_{zk} W_p + T_k U_p) r dr$$

$$N_p = \int_{R_1}^{R_2} (Q W_p + \tau U_p) r dr.$$

Используя малость параметра тонкостенности оболочки  $\varepsilon$ , можно построить асимптотическое решение системы (1.47). Этот подход общеизвестен [1], поэтому здесь на этом подробно останавливаться не будем.

В заключение отметим, что при  $G_0 = 1$  мы получаем известные результаты Н.А.Базаренко, И.И.Воровича в изотропном случае [29].

## **§2. Задача теории упругости для трансверсально-изотропного полого цилиндра с закрепленной боковой поверхностью и при смешанных граничных условиях на боковой поверхностью**

1. Пусть боковая поверхность цилиндра жестко заделана, т.е.

$$U_r = 0, U_z = 0 \text{ при } \rho = \rho_s \text{ (} s = 1, 2 \text{)} \quad (2.1)$$

Характер граничных условий на торцах цилиндра уточнять не будем. Однако будем считать их таковыми, что оболочка находится в равновесии.

Используя результаты 1.1 и удовлетворяя однородные граничные условия (2.1), получаем характеристическое уравнение

$$D(\mu, \varepsilon) = 2\pi^{-2} \rho_1^{-1} \rho_2^{-1} (b_{33} - S_1^2)(b_{33} - S_2^2) - \mu^2 S_2 (b_{33} - S_1^2)^2 \times$$

$$\times L_{00}(\alpha_2 \rho_1, \alpha_2 \rho_2) L_{11}(\alpha_1 \rho_1, \alpha_1 \rho_2) - \mu^2 S_1^2 (b_{33} - S_2^2)^2 \times$$

$$\times L_{00}(\alpha_1 \rho_1, \alpha_1 \rho_2) L_{11}(\alpha_2 \rho_1, \alpha_2 \rho_2) + \mu^2 S_1 S_2 (b_{33} - S_1^2) \times \quad (2.2)$$

$$\times (b_{33} - S_2^2) [L_{10}(\alpha_1 \rho_1, \alpha_1 \rho_2) L_{01}(\alpha_2 \rho_1, \alpha_2 \rho_2) +$$

$$+ L_{10}(\alpha_2 \rho_1, \alpha_2 \rho_2) L_{01}(\alpha_1 \rho_1, \alpha_1 \rho_2)] = 0$$

Уравнение (2.2) имеет счетное множество корней, асимптотическое поведение которых изучается ниже. Им соответствуют следующие однородные решения:

$$u_\rho = \sum_{k=1}^{\infty} C_k \left[ (b_{33} - S_1^2) Z_1(\alpha_{1k} \rho) + (b_{33} - S_2^2) Z_1(\alpha_{2k} \rho) \right] \frac{dm_k}{d\xi} \quad (2.3)$$

$$u_\xi = (b_{13} + 1) \sum_{k=1}^{\infty} C_k \left[ \alpha_{1k} Z_0(\alpha_{1k} \rho) + \alpha_{2k} Z_0(\alpha_{2k} \rho) \right] m_k(\xi)$$

где

$$Z_n(\alpha_{k1} \rho) = C_{1k} J_n(\alpha_{k1} \rho) + C_{2k} Y_n(\alpha_{k1} \rho)$$

$$Z_n(\alpha_{k2} \rho) = C_{3k} J_n(\alpha_{k2} \rho) + C_{4k} Y_n(\alpha_{k2} \rho) \quad (n = 0; 1)$$

$$C_{1k} = \pi^{-1} \rho_2^{-1} \alpha_{1k} (b_{33} - S_2^2) Y_0(\alpha_{1k} \rho_1) - \alpha_{2k}^2 (b_{33} - S_1^2) \times \\ \times Y_1(\alpha_{1k} \rho_2) L_{00}(\alpha_{2k} \rho_1, \alpha_{2k} \rho_2) + \alpha_{1k} \alpha_{2k} (b_{33} - S_2^2) \times \\ \times Y_0(\alpha_{1k} \rho_2) L_{01}(\alpha_{2k} \rho_1, \alpha_{2k} \rho_2)$$

$$C_{2k} = -\pi^{-1} \rho_2^{-1} \alpha_{1k} (b_{33} - S_2^2) J_0(\alpha_{1k} \rho_1) + \alpha_{2k}^2 (b_{33} - S_1^2) \times \\ \times J_1(\alpha_{1k} \rho_2) L_{00}(\alpha_{2k} \rho_1, \alpha_{2k} \rho_2) - \alpha_{1k} \alpha_{2k} (b_{33} - S_2^2) \times \\ \times J_0(\alpha_{1k} \rho_2) L_{01}(\alpha_{2k} \rho_1, \alpha_{2k} \rho_2)$$

$$C_{3k} = \pi^{-1} \rho_1^{-1} \alpha_{2k} (b_{33} - S_1^2) Y_0(\alpha_{2k} \rho_2) - \alpha_{1k}^2 (b_{33} - S_2^2) \times \\ \times Y_1(\alpha_{2k} \rho_2) L_{00}(\alpha_{1k} \rho_1, \alpha_{1k} \rho_2) + \alpha_{1k} \alpha_{2k} (b_{33} - S_1^2) \times \\ \times Y_0(\alpha_{2k} \rho_2) L_{01}(\alpha_{1k} \rho_1, \alpha_{1k} \rho_2)$$

$$C_{4k} = -\pi^{-1} \rho_1^{-1} \alpha_{2k} (b_{33} - S_1^2) J_0(\alpha_{2k} \rho_2) - \alpha_{1k}^2 (b_{33} - S_2^2) \times \\ \times J_1(\alpha_{2k} \rho_2) L_{00}(\alpha_{1k} \rho_1, \alpha_{1k} \rho_2) + \alpha_{1k} \alpha_{2k} (b_{33} - S_1^2) \times \\ \times J_0(\alpha_{2k} \rho_2) L_{01}(\alpha_{1k} \rho_1, \alpha_{1k} \rho_2)$$

Можно доказать, что все нули функции (2.2) неограниченно возрастают, когда  $\varepsilon \rightarrow 0$  и здесь возможен только случай  $\mu \varepsilon \rightarrow const$  при  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Отыскивая

$$\mu_k = \frac{\delta_k}{\varepsilon} + O(\varepsilon) \quad (2.4)$$

После подстановки (2.4) в (2.2) и преобразования его с помощью асимптотических разложений функций  $J_\nu(x)$ ,  $Y_\nu(x)$  в зависимости от  $q_1$ ,  $q_2$  соответственно получаем:

$$\frac{b_{33} + S_1 S_2}{b_{33} - S_1 S_2} (S_2 - S_1) \sin(S_2 + S_1) \delta_k \pm (S_2 + S_1) \times \\ \times \sin(S_2 - S_1) \delta_k = 0 \quad (2.5)$$

$$S_{1,2} = \sqrt{q_1 \pm \sqrt{q_1^2 - q_2}}$$

$$\frac{b_{13} + 3}{b_{13} + 1} \sin 2p\delta_k \pm 2p\delta_k = 0 \quad (2.6)$$

$$q_1 > 0, \quad q_1^2 - q_2 = 0 \quad p = \sqrt{q_1} \\ x(b_{13} - x^2 - \beta^2) \sin 2\beta\delta_k \pm \beta(b_{13} + x^2 + \beta^2) \operatorname{sh} 2x\delta_k = 0 \quad (2.7)$$

$$S_{1,2} = x + i\beta = \sqrt{q_1 \pm i\sqrt{q_2 - q_1^2}} \quad q_1^2 < q_2$$

Теперь приведем асимптотическое построение однородных решений, соответствующих различным группам нулей, асимптотические свойства которых изучены выше.

Раскладывая по малому параметру  $\varepsilon$ , найдем для них следующие асимптотические выражения группа 1.

$$u_r = \varepsilon R_0 \sum_{k=1,3,\dots}^{\infty} C_k [S_2 (b_{33} - S_1^2) \sin S_2 \delta_k \cos S_1 \delta_k \eta - S_1 (b_{33} - S_2^2) \times \\ \times \sin S_1 \delta_k \cos S_2 \delta_k \eta + O(\varepsilon)] \frac{dm_k}{d\xi}$$

$$u_z = R_0 (b_{13} + 1) S_1 S_2 \sum_{k=1,3,\dots}^{\infty} C_k \delta_k [\sin S_2 \delta_k \sin S_1 \delta_k \eta - \\ - \sin S_1 \delta_k \sin S_2 \delta_k \eta + O(\varepsilon)] m_k(\xi)$$

$$\begin{aligned}
\sigma_r &= G_1 S_1 S_2 \sum_{k=1,3,\dots}^{\infty} C_k \delta_k \left[ (b_{13}^2 + b_{13} - b_{11} b_{33} - b_{11} S_1^2) \sin S_2 \delta_k \sin S_1 \delta_k \eta - \right. \\
&\quad \left. - (b_{13}^2 + b_{13} - b_{11} b_{33} - b_{11} S_2^2) \sin S_1 \delta_k \sin S_2 \delta_k \eta + O(\varepsilon) \right] \frac{dm_k}{d\xi} \\
\sigma_\varphi &= G_1 S_1 S_2 \sum_{k=1,3,\dots}^{\infty} C_k \delta_k \left[ (b_{13}^2 + b_{13} - b_{12} b_{33} - b_{12} S_1^2) \sin S_2 \delta_k \sin S_1 \delta_k \eta - \right. \\
&\quad \left. - (b_{13}^2 + b_{13} - b_{12} b_{33} - b_{12} S_2^2) \sin S_1 \delta_k \sin S_2 \delta_k \eta + O(\varepsilon) \right] \frac{dm_k}{d\xi} \quad (2.8) \\
\sigma_z &= G_1 S_1 S_2 \sum_{k=1,3,\dots}^{\infty} C_k \delta_k \left[ (b_{13} b_{33} + b_{33} - b_{12} b_{33} - b_{12} S_1^2) \sin S_2 \delta_k \sin S_1 \delta_k \eta - \right. \\
&\quad \left. - (b_{13} b_{33} + b_{33} - b_{12} b_{33} - b_{12} S_2^2) \sin S_1 \delta_k \sin S_2 \delta_k \eta + O(\varepsilon) \right] \frac{dm_k}{d\xi}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\tau_{rz} &= \frac{G}{\varepsilon} \sum_{k=1,3,\dots}^{\infty} C_k \delta_k^2 \left[ S_2 (b_{33} + b_{13} S_1^2 + S_1^2 - S_1) \sin S_2 \delta_k \cos S_1 \delta_k \eta - \right. \\
&\quad \left. - S_1 (b_{33} + b_{13} S_2^2 + S_2^2 - S_2) \sin S_1 \delta_k \cos S_2 \delta_k \eta + O(\varepsilon) \right] m'_k
\end{aligned}$$

$C_k$  – произвольные постоянные. Выражения для  $n = 2, 4, \dots$  получаются из (2.8) заменой  $\cos x$  на  $\sin x$  и  $\sin x$  на  $-\cos x$ , соответственно.

Аналогично, в случае (2.6) получаем

$$\begin{aligned}
u_r &= R_0 \varepsilon \sum_{k=1,3,\dots}^{\infty} B_k \left[ \left( \frac{b_{13} + 3}{b_{13} + 1} \sin p \delta_k + p \delta_k \cos p \delta_k \right) \cos p \delta_k \eta + \right. \\
&\quad \left. + p \delta_k \eta \sin p \delta_k \sin p \delta_k \eta + O(\varepsilon) \right] \frac{dm_k}{d\xi}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
u_z &= R_0 \sum_{k=1,3,\dots}^{\infty} B_k \delta_k^2 [\cos p\delta_k \sin p\delta_k \eta - \eta \sin p\delta_k \cos p\delta_k \eta + O(\varepsilon)] m_k(\xi) \\
\sigma_r &= -G_1 \sum_{k=1,3,\dots}^{\infty} B_k \delta_k^2 \left\{ [2p\delta_k^{-1}(b_{13} + 1)^{-1} \sin p\delta_k + (b_{11}p^2 - b_{13}^2 - b_{13}) \times \right. \\
&\quad \times \cos p\delta_k] \sin p\delta_k \eta - (b_{11}p^2 - b_{13}^2 - b_{13}) \eta \sin p\delta_k \cos p\delta_k \eta + (2.9) \\
&\quad \left. + O(\varepsilon) \right\} \frac{dm_k}{d\xi} \\
\sigma_\varphi &= -G_1 \sum_{k=1,3,\dots}^{\infty} B_k \delta_k^2 \left\{ [2p\delta_k^{-1}(b_{13} + 1)^{-1} \sin p\delta_k + (b_{12}p^2 - b_{13}^2 - b_{13}) \times \right. \\
&\quad \times \cos p\delta_k] \sin p\delta_k \eta - (b_{12}p^2 - b_{13}^2 - b_{13}) \eta \sin p\delta_k \cos p\delta_k \eta + \\
&\quad \left. + O(\varepsilon) \right\} \frac{dm_k}{d\xi} \\
\sigma_z &= -G_1 \sum_{k=1,3,\dots}^{\infty} B_k \delta_k^2 \left\{ [2p\delta_k^{-1}(b_{13} + 1)^{-1} \sin p\delta_k + (b_{12}p^2 - b_{13}b_{33} - b_{33}) \times \right. \\
&\quad \times \cos p\delta_k] \sin p\delta_k \eta - (b_{12}p^2 - b_{13}b_{33} - b_{33}) \eta \sin p\delta_k \cos p\delta_k \eta + \\
&\quad \left. + O(\varepsilon) \right\} \frac{dm_k}{d\xi}
\end{aligned}$$

$B_k$  – произвольные постоянные. Выражение для  $n = 2, 4, \dots$  получаются из (2.9) заменой  $\cos x$  на  $\sin x$  и  $\sin x$  на  $-\cos x$  соответственно. В случае (1.52) соответственно получаем:

$$\begin{aligned}
u_r &= R_0 \varepsilon \sum_{k=1,3,\dots}^{\infty} D_k [F_{1k}(\eta) + O(\varepsilon)] \frac{dm_k}{d\xi} \\
u_z &= -(b_{13} + 1) R_0 \sum_{k=1,3,\dots}^{\infty} D_k \delta_k [F_{2k}(\eta) + O(\varepsilon)] m_k(\xi) \\
\sigma_r &= G_1 \sum_{k=1,3,\dots}^{\infty} D_k [b_{11} F'_{1k}(\eta) + b_{13} F_{2k}(\eta) + O(\varepsilon)] \frac{dm_k}{d\xi}
\end{aligned}$$

$$\sigma_{\varphi} = G_1 \sum_{k=1,3,..}^{\infty} D_k [b_{12} F'_{1k}(\eta) + b_{13} F_{2k}(\eta) + O(\varepsilon)] \frac{dm_k}{d\xi} \quad (2.10)$$

$$\sigma_z = G_1 \sum_{k=1,3,..}^{\infty} D_k [b_{12} F'_{1k}(\eta) + b_{33} F_{2k}(\eta) + O(\varepsilon)] \frac{dm_k}{d\xi}$$

$$\tau_{rz} = G_1 \varepsilon^{-1} \sum_{k=1,3,..}^{\infty} D_k [\delta_k^2 F_{1k}(\eta) - (b_{13} + 1) \delta_k F_{2k}(\eta) + O(\varepsilon)] m_k(\xi)$$

где

$$\begin{aligned} F_{1k}(\eta) &= [(b_{33} + \beta^2 - x^2) \cos \beta \delta_k \eta \operatorname{ch} x \delta_k \eta + \\ &+ 2x\beta \sin \beta \delta_k \eta \operatorname{sh} x \delta_k \eta] \Delta_{1k} + [2x\beta \cos \beta \delta_k \eta \operatorname{ch} x \delta_k \eta - \\ &- (b_{33} + \beta^2 - x^2) \sin \beta \delta_k \eta \operatorname{sh} x \delta_k \eta] \Delta_{2k} \\ F_{2k}(\eta) &= (x \cos \beta \delta_k \eta \operatorname{sh} x \delta_k \eta - \beta \sin \beta \delta_k \eta \operatorname{ch} x \delta_k \eta) \Delta_{1k} - \\ &- (x \sin \beta \delta_k \eta \operatorname{ch} x \delta_k \eta + \beta \cos \beta \delta_k \eta \operatorname{sh} x \delta_k \eta) \Delta_{2k} \\ \Delta_{1k} &= x \sin \beta \delta_k \operatorname{ch} x \delta_k + \beta \cos \beta \delta_k \operatorname{sh} x \delta_k \\ \Delta_{2k} &= x \cos \beta \delta_k \operatorname{sh} x \delta_k - \beta \sin \beta \delta_k \operatorname{ch} x \delta_k \\ D_k &- \text{произвольные постоянные.} \end{aligned}$$

Выражения для  $n = 2, 4, \dots$  получаются из (2.10) простой заменой  $\operatorname{ch} x \leftrightarrow \operatorname{sh} x$ .

Постоянные  $C_k$ ,  $B_k$ ,  $D_k$  определяются с помощью вариационного принципа Лагранжа.

Отметим, из условия разрешимости краевых задач теории упругости следует, что нагрузки заданные на торцах цилиндра не только удовлетворяют условию равновесия, но и должны быть самоуравновешенным в каждом сечении  $\xi = \text{const}$ .

2. Рассмотрим задачу теории упругости для трансвер-сально-изотропного полого цилиндра при однородных смешанных граничных условиях на боковой поверхности.

$$u_r = 0, \tau_{rz} = 0 \text{ при } \rho = \rho_s \quad (s = 1, 2) \quad (2.11)$$

а на остальной части границы выполняется одно из граничных условий следующего типа

$$\sigma_z = Q^\pm(\rho), \tau_{rz} = T(\rho), \text{ при } \xi = \pm l_0 \quad (2.12)$$

$$\sigma_z = Q^\pm(\rho), u_r = a_0^\pm(\rho), \text{ при } \xi = \pm l_0 \quad (2.13)$$

$$u_z = b_0^\pm(\rho), \tau_{rz} = \tau^\pm(\rho), \text{ при } \xi = \pm l_0 \quad (2.14)$$

Как и выше, используя результаты 1.1 и удовлетворяя однородные граничные условия (2.11) получаем характеристическое уравнение

$$\begin{aligned} \Delta(\mu, \rho_1, \rho_2) &= b_{33}\mu^4(S_2^2 - S_1^2)^2 \times \\ &\times L_{11}(\alpha_1\rho_1, \alpha_1\rho_2)L_{11}(\alpha_2\rho_1, \alpha_2\rho_2) = 0 \end{aligned} \quad (2.15)$$

Трансцендентное уравнение (2.15) определяет счетное множество корней  $\mu_k$ , а соответствующие им постоянные  $c_{1n}, c_{2n}, c_{3n}, c_{4n}$  пропорциональны алгебраическим дополнениям какой-либо строки определителя системы. Выбирая в качестве решения системы алгебраические дополнения элементов первой строки, решения можно представить в виде:

$$u_\rho = \sum_{n=1}^{\infty} C_n U_n(\rho) \frac{dm_n}{d\xi}, \quad u_\xi = \sum_{n=1}^{\infty} C_n W_n(\rho) m_n(\xi) \quad (2.16)$$

где  $C_n$  – произвольные постоянные.

$$\begin{aligned} U_n(\rho) &= \left[ a_1^4 (b_{33}\mu_n^2 - a_2^2)^2 - a_1^2 a_2^2 (b_{33}\mu_n - a_1^2) (b_{33}\mu_n - a_2^2) \right] \times \\ &\times L_{11}(a_2\rho, \alpha_2\rho_2)L_{11}(\alpha_1\rho_1, \alpha_1\rho_2) + \left[ a_2^4 (b_{33}\mu_n^2 - \alpha_1^2)^2 - \alpha_1^2 \alpha_2^2 \times \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \times (b_{33}\mu_n - \alpha_1^2)(b_{33}\mu_n - \alpha_2^2) \Big] L_{11}(\alpha_1\rho, \alpha_1\rho_2) L_{11}(\alpha_2\rho_1, \alpha_2\rho_2) \\ W_n(\rho) = & -(b_{13} + 1) \left\{ \alpha_1 \left[ \alpha_2^4 (b_{33}\mu_n - \alpha_1^2) - \alpha_1^2 \alpha_2^2 (b_{33} - \mu_n - \alpha_2^2) \right] \times \right. \\ & \times L_{01}(\alpha_1\rho, \alpha_1\rho_2) L_{11}(\alpha_2\rho_1, \alpha_2\rho_2) + \alpha_2 \left[ \alpha_1^4 (b_{33}\mu_n - \alpha_2^2) - \alpha_1^2 \alpha_2^2 \times \right. \\ & \left. \left. \times (b_{33}\mu_n - \alpha_1^2) \right] L_{01}(\alpha_2\rho, \alpha_2\rho_2) \right\} L_{11}(\alpha_1\rho_1, \alpha_1\rho_2) \end{aligned}$$

Что касается напряжений, то их можно определить с помощью обобщенного закона Гука.

2. Левая часть уравнений (1.10), как целая функция параметра  $\mu$ , имеет счетное множество нулей с точкой сгущения на бесконечности. Для эффективного изучения его нулей предположим, что оболочка тонкостенная.

Положим

$$\begin{aligned} \rho_1 = 1 - \varepsilon, \quad \rho_2 = 1 + \varepsilon, \quad \varepsilon = (2R_0)^{-1}(R_2 - R_1), \\ \rho = 1 + \varepsilon\eta, \quad -1 \leq \eta \leq 1 \end{aligned} \quad (2.17)$$

Считаем, что  $\varepsilon$  – малый параметр. Подставляя (2.17) в (2.15), получаем

$$D(\mu, \varepsilon) = \Delta(\mu, \rho_1, \rho_2) = 0 \quad (2.18)$$

Уравнение (1.63) имеет один ограниченный корень  $\mu = 0$ . Из (2.16) получаем, что этому корню соответствует следующее решение

$$\begin{aligned} u_\rho = 0; \quad u_\xi = m[G_0(1 + \nu)]^{-1} C_0 \xi; \\ \sigma_\varphi = \sigma_r = G_1 \nu_1 C_0; \quad \sigma_z = (1 - \nu) G_1 C_0, \quad \tau_{rz} = 0 \end{aligned} \quad (2.20)$$

$C_0$  – произвольная постоянная.

Напряженное состояние, соответствующее нулю  $\mu = 0$  эквивалентно главному вектору усилий  $P$ , направленному вдоль оси цилиндра.

$$P = \pi(1 - \nu) G_1 C_0 (R_2^2 - R_1^2)$$

Отсюда

$$C_0 = P[\pi(1-\nu)G_1(R_2^2 - R_1^2)]^{-1} \quad (2.21)$$

Докажем, что характеристическое уравнение при  $\varepsilon \rightarrow 0$  других ограниченных корней не имеет. Для этой цели разложим  $D(\mu, \varepsilon)$  в ряд по  $\varepsilon$  и ограничимся только первыми членами разложения. Получим

$$D(\mu, \varepsilon) = 16\mu^4 (s_2^2 - s_1^2)^2 \pi^{-2} \varepsilon^2 [1 + O(\varepsilon)] \quad (2.22)$$

Отсюда видно, что характеристическое уравнение не имеет других ограниченных корней кроме  $\mu = 0$ . Таким образом, все остальные корни характеристического уравнения стремятся к бесконечности при  $\varepsilon \rightarrow 0$ . В принципе здесь возможны следующие предельные случаи:

- 1)  $\varepsilon\mu_k \rightarrow 0$  при  $\varepsilon \rightarrow 0$ ; 2)  $\varepsilon\mu_k \rightarrow \infty$  при  $\varepsilon \rightarrow 0$ ;
- 3)  $\varepsilon\mu_k \rightarrow const$  при  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Как и в работе [2], можно доказать, что случаи 1 и 2 здесь не осуществимы. В третьем случае отыскиваем  $\mu_n$  в виде

$$\mu_n = \varepsilon^{-1} \delta_n + O(\varepsilon) \quad (n = 1, 2, \dots) \quad (2.23)$$

Как и в §1 здесь возможны следующие случаи:

1.  $\mu_{1,2} = \pm s_1 \delta_n$ ,  $\mu_{3,4} = \pm s_2 \delta_n$ ,  $q_1 > 0$ ,  $q_1^2 - q_2 > 0$ ,  $s_1^2 = \delta_n^2 \tau$   
( $i = 1, 2$ )

$$s_{1,2} = \sqrt{q_1 \pm \sqrt{q_1^2 - q_2}}, \quad q_1^2 > q_2$$

$$s_{1,2} = \chi + i\beta = \sqrt{q_1 \pm i\sqrt{q_2 - q_1^2}}, \quad q_1^2 < q_2.$$

2. Корни характеристического уравнения (1.9) кратные.

$$\mu_{1,2} = \mu_{3,4} = \pm \delta_n p \quad q_1 > 0 \quad q_1^2 - q_2 = 0, \quad p = \sqrt{q_1}$$

3.  $\mu_{1,2} = \pm i s_1 \delta_n$ ,  $\mu_{3,4} = \pm i s_2 \delta_n$ ,  $q_1 < 0$ ,  $q_1^2 - q_2 \neq 0$

$$s_{1,2} = \sqrt{|q_1| + \sqrt{q_1^2 - q_2}}, \quad q_1^2 > q_2$$

$$s_{1,2} = \sqrt{|q_1| + \sqrt{q_2 - q_1^2}}, \quad q_1^2 < q_2$$

4.  $\mu_{1,2} = \mu_{3,4} = \pm i\delta_n p$ ,  $q_1 < 0$ ,  $q_1^2 - q_2 = 0$ ,  $p = \sqrt{|q_1|}$ .

В случаях 1, 2 после подстановки (2.23) в (2.15) и преобразования его с помощью разложений в ряд по  $\varepsilon$  получаем

$$\cos(s_2 + s_1)\delta_n \pm \cos(s_2 - s_1)\delta_n = 0 \quad (2.24)$$

$$\cos 2p\delta_n \pm 1 = 0 \quad (2.25)$$

$$ch2x\delta_n \pm \cos 2\beta\delta_n = 0 \quad (2.26)$$

Что касается случаев 3 и 4, то для них результаты получаются из случаев 1 и 2 формальной заменой  $s_1, s_2$  на  $is_1, is_2$ ,  $p$  на  $ip$ . Эти уравнения совпадают с уравнениями, определяющими показатели краевых эффектов Сен-Венана в теории анизотропной упругости для слоя.

В таблице приведены значения коэффициентов  $q_1, q_2$  для некоторых материалов.

	Магний	Кадмий	цинк
$q_1$	1,276	0,725	0,281
$q_2$	1,032	0,425	0,378
$q_1^2 - q_2$	0,595	0,101	-0,299

3. Приведем теперь первые члены асимптотических разложений решения, соответствующего различным группам корней. Для перемещений и напряжений, в первом приближении, получаем два класса решений, первый из которых соответствует нулям

$$\begin{aligned} &\cos(s_2 + s_1)\delta_n + \cos(s_2 - s_1)\delta_n, \quad \cos 2p\delta_n + 1, \\ &ch2x\delta_n + \cos 2\beta\delta_n, \end{aligned}$$

а второй – нулям функции

$$\begin{aligned} &\cos(s_2 - s_1)\delta_n - \cos(s_2 + s_1)\delta_n, \quad \cos 2p\delta_n - 1, \\ &ch2x\delta_n - \cos 2\beta\delta_n, \end{aligned}$$

соответственно имеем

$$\begin{aligned}
u_{\rho 0} &= \varepsilon \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} C_n \left[ s_2^2 (b_{33} - s_1^2) \cos s_2 \delta_n \cos s_1 \delta_n \eta - s_1^2 \cos s_1 \delta_n \times \right. \\
&\times \left. \cos s_2 \delta_n \eta + O(\varepsilon) \right] \frac{dm_n}{d\xi} \\
u_{\xi 0} &= (b_{13} + 1) s_1 s_2 \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} C_n \delta_n \left[ s_2 \cos s_2 \delta_n \sin s_1 \delta_n \eta - s_1 \cos s_1 \delta_n \times \right. \\
&\times \left. \sin s_2 \delta_n \eta + O(\varepsilon) \right] m_n(\xi) \\
\sigma_{r0} &= G_1 s_1 s_2 \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} C_n \delta_n \left[ s_2 (b_{13}^2 + b_{13} - b_{11} b_{33} + b_{11} s_1^2) \cos s_2 \delta_n \sin s_1 \delta_n \eta - \right. \\
&- s_1 (b_{13}^2 + b_{13} - b_{11} b_{33} + b_{11} s_2^2) \cos s_1 \delta_n \sin s_2 \delta_n \eta + O(\varepsilon) \left. \right] \frac{dm_n}{d\xi} \quad (2.27) \\
\sigma_{\varphi 0} &= G_1 s_1 s_2 \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} C_n \delta_n \left[ s_2 (b_{13}^2 + b_{13} - b_{12} b_{33} + b_{12} s_1^2) \cos s_2 \delta_n \sin s_1 \delta_n \eta - \right. \\
&- s_1 (b_{13}^2 + b_{13} - b_{12} b_{33} + b_{12} s_2^2) \cos s_1 \delta_n \sin s_2 \delta_n \eta + O(\varepsilon) \left. \right] \frac{dm_n}{d\xi} \\
\sigma_{z0} &= G_1 s_1 s_2 \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} C_n \delta_n \left[ s_2 (b_{13} b_{33} + b_{33} - b_{12} b_{33} + b_{12} s_1^2) \cos s_2 \delta_n \sin s_1 \delta_n \eta - \right. \\
&- s_1 (b_{13} b_{33} + b_{33} - b_{12} b_{33} + b_{12} s_2^2) \cos s_1 \delta_n \sin s_1 \delta_n \eta + O(\varepsilon) \left. \right] \frac{dm_n}{d\xi} \\
\tau_{rz0} &= G \frac{1}{\varepsilon} \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} C_n \delta_n^2 \left[ s_2^2 (b_{13} s_1^2 + b_{33}) \cos s_2 \delta_n \cos s_1 \delta_n \eta - \right. \\
&- s_1^2 (b_{13} s_2^2 + b_{33}) \cos s_1 \delta_n \cos s_2 \delta_n \eta + O(\varepsilon) \left. \right] m_n(\xi) \\
u_{\rho 0} &= \varepsilon \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} B_n \left\{ p \left[ p \delta_n (b_{13} + 1) \sin p \delta_n - (b_{13} + 2) \cos p \delta_n \eta \right] \times \right. \\
&\times \left. \cos p \delta_n - (b_{13} + 1) p^2 \delta_n \eta \cos p \delta_n \sin p \delta_n \eta + O(\varepsilon) \right\} \frac{dm_n}{d\xi}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
u_{\xi 0} &= (b_{13} + 1)p \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} \left[ C_n \delta_n \left\{ \left[ \sin p \delta_n + \frac{\cos p \delta_n}{p \delta_n (b_{13} + 1)} \right] \times \right. \right. \\
&\times \sin p \delta_n \eta + \eta \cos p \delta_n \cos p \delta_n \eta + O(\varepsilon) \} m_n(\xi) \\
\sigma_{r0} &= G_1 \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} B_n \{ [(b_{13} + 1)p \delta_n (b_{13} - b_{11} p^2 \delta_n) \sin p \delta_n + \\
&+ (b_{13} + b_{11} p^2 \delta_n) \cos p \delta_n] \sin p \delta_n \eta + (b_{13} + 1)(b_{13} - b_{11} p^2 \delta_n) \times \\
&\times \eta \cos p \delta_n \cos p \delta_n \eta + O(\varepsilon) \} \frac{dm_n}{d\xi} \tag{2.28}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sigma_{\varphi 0} &= G_1 \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} C_n \{ [(b_{13} + 1)p \delta_n (b_{13} - b_{12} p^2 \delta_n) \sin p \delta_n + \\
&+ (b_{13} + b_{12} p^2 \delta_n) \cos p \delta_n] \sin p \delta_n \eta + (b_{13} + 1)(b_{13} - b_{12} p^2 \delta_n) \times \\
&\times \eta \cos p \delta_n \cos p \delta_n \eta + O(\varepsilon) \} \frac{dm_n}{d\xi}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sigma_{z0} &= G_1 \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} B_n \{ [(b_{13} + 1)p \delta_n (b_{33} - b_{12} p^2 \delta_n) \sin p \delta_n + \\
&+ (b_{33} + b_{12} p^2 \delta_n) \cos p \delta_n] \sin p \delta_n \eta + (b_{13} + 1)(b_{33} - b_{12} p^2 \delta_n) \times \\
&\times \eta \cos p \delta_n \cos p \delta_n \eta + O(\varepsilon) \} \frac{dm_n}{d\xi}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\tau_{rz0} &= \frac{2G(b_{13} + 1)}{\varepsilon} \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} B_n [\delta_n^3 (\sin p \delta_n \cos p \delta_n \eta - \eta \cos p \delta_n \sin p \delta_n \eta) + \\
&+ O(\varepsilon)] m_n(\xi)
\end{aligned}$$

Выражения для  $n = 2, 4, 6, \dots$  получаются из формул (2.27), (2.28) заменой  $\cos x$  на  $\sin x$  и  $\sin x$  на  $-\cos x$  соответственно.

$$u_{\rho 0} = \varepsilon \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} D_n \left\{ \left[ (b_{33} + \beta^2 - \chi^2) \cos \beta \delta_n \eta \operatorname{ch} \chi \delta_n \eta + 2 \chi \beta \sin \beta \delta_n \eta \times \right. \right. \\ \left. \left. \times \operatorname{sh} \chi \delta_n \eta \right) \Delta_{1n} - \left[ (b_{33} + \beta^2 - \chi^2) \sin \beta \delta_n \eta \operatorname{sh} \chi \delta_n \eta - 2 \chi \beta \cos \beta \delta_n \eta \times \right. \right. \\ \left. \left. \times \operatorname{ch} \chi \delta_n \eta \right) \Delta_{2n} + O(\varepsilon) \right\} \frac{dm_n}{d\xi}$$

$$u_{\xi 0} = (b_{13} + 1) \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} D_n \left[ (\beta \sin \beta \delta_n \eta \operatorname{ch} \chi \delta_n \eta - \chi \cos \beta \delta_n \eta \operatorname{sh} \chi \delta_n \eta) \Delta_{1n} + \right. \\ \left. + (\chi \sin \beta \delta_n \eta \operatorname{ch} \chi \delta_n \eta + \beta \cos \beta \delta_n \eta \operatorname{sh} \chi \delta_n \eta) \Delta_{2n} + O(\varepsilon) \right] m_n(\xi)$$

$$\sigma_{r0} = G_1 \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} D_n \left[ b_{11} F'_{n1}(\eta) + b_{13} F_{n2}(\eta) + O(\varepsilon) \right] \frac{dm_n}{d\xi} \quad (2.29)$$

$$\sigma_{\varphi 0} = G_1 \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} D_n \left[ b_{12} F'_{n1}(\eta) + b_{13} F_{n2}(\eta) + O(\varepsilon) \right] \frac{dm_n}{d\xi}$$

$$\sigma_{z0} = G_1 \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} D_n \left[ b_{12} F'_{n1}(\eta) + b_{33} F_{n2}(\eta) + O(\varepsilon) \right] \frac{dm_n}{d\xi}$$

$$\tau_{rz0} = \frac{G}{\varepsilon} \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} D_n \left[ \delta_n^2 F_{1n}(\eta) + F'_{n2}(\eta) + O(\varepsilon) \right] m_n(\xi)$$

где

$$F_{n1}(\eta) = \left[ (b_{33} + \beta^2 - \chi^2) \cos \beta \delta_n \eta \operatorname{ch} \chi \delta_n \eta + 2 \chi \beta \sin \beta \delta_n \eta \operatorname{sh} \chi \delta_n \eta \right) \Delta_{1n} - \\ - \left[ (b_{33} + \beta^2 - \chi^2) \sin \beta \delta_n \eta \operatorname{sh} \chi \delta_n \eta - 2 \chi \beta \cos \beta \delta_n \eta \operatorname{ch} \chi \delta_n \eta \right) \Delta_{2n}$$

$$F_{n2}(\eta) = (\beta \sin \beta \delta_n \eta \operatorname{ch} \chi \delta_n \eta - \chi \cos \beta \delta_n \eta \operatorname{sh} \chi \delta_n \eta) \Delta_{1n} + \\ + (\chi \sin \beta \delta_n \eta \operatorname{ch} \chi \delta_n \eta + \beta \cos \beta \delta_n \eta \operatorname{sh} \chi \delta_n \eta) \Delta_{2n}$$

$$\Delta_{1n} = - \left[ b_{33} + (b_{13} + 2)(\beta^2 - \chi^2) \right] \sin \beta \delta_n \eta \operatorname{sh} \chi \delta_n \eta + \\ + 2 \chi \beta (b_{13} + 2) \cos \beta \delta_n \eta \operatorname{ch} \chi \delta_n \eta$$

$$\Delta_{2n} = - \left[ b_{33} + (b_{13} + 2)(\beta^2 - \chi^2) \right] \cos \beta \delta_n \eta \operatorname{ch} \chi \delta_n \eta - \\ - 2 \chi \beta (b_{13} + 2) \sin \beta \delta_n \eta \operatorname{sh} \chi \delta_n \eta$$

Выражения для  $n = 2, 4, 6, \dots$  получаются из (2.29) простой заменой  $ch\chi \leftrightarrow sh\chi$ ;  $C_n, B_n, D_n$  – произвольные постоянные.

Отметим, что решение (2.29) характерно только для анизотропных оболочек. При переходе к изотропной оболочке ( $G_0 = 1$ ) оно полностью исчезает. Что касается решений (2.27) и (2.28) при  $G_0 = 1$  они сливаются в одно, и это решение совпадает с решением Сен-Венана для изотропной плиты.

В §1 доказано обобщенное условие ортогональности однородных решений для трансверсально-изотропного полого цилиндра, которое позволяет точно удовлетворить граничным условиям на торцах при специальных условиях опирания края оболочки.

С помощью обобщенных условий ортогональности рассмотрим следующую задачу: пусть на боковой поверхности цилиндра выполняется условие (2.1), а на торцах заданы следующие граничные условия:

$$\sigma_z = \lambda(1 - c\eta^2), \quad u_r = 0 \quad \text{при} \quad \xi = \pm l_0$$

$2l_0$  - безразмерная высота цилиндра.

Согласно (3.1)  $u_r, u_z, \sigma_r, \tau_{rz}$  можно представить в виде

$$\begin{aligned} u_r &= \sum_{n=1}^{\infty} C_n u_n(\eta) \frac{dm_n}{dz} & u_z &= \sum_{n=1}^{\infty} C_n W_n(\eta) m_n(z) \\ \sigma_z &= \sum_{n=1}^{\infty} C_n Q_n(\eta) \frac{dm_n}{dz} & \tau_{rz} &= \sum_{n=1}^{\infty} C_n T_n(\eta) m_n(z) \end{aligned} \quad (2.30)$$

В рядах (2.30) суммирование ведется по корням  $\mu_n$ , расположенным в верхней полуплоскости ( $\text{Im} \mu_n > 0$ ). В силу соотношений обобщенной ортогональности, искомые постоянные  $C_n$  имеют вид:

$$C_n = -\lambda \Delta_n^{-1} c h \mu_k l_0 \int_{-1}^1 (1 - c \eta^2) W_n(\eta) d\eta$$

$$\Delta_n = \int_{-1}^1 [u_n(\eta) T_n(\eta) - Q_n(\eta) W_n(\eta)] d\eta$$

Постоянная  $C_0$  определяется формулой (1.65).

В общем случае краевая задача сводится к решению систем линейных бесконечных алгебраических уравнений с помощью вариационного принципа Лагранжа.

### **§3. Асимптотический анализ динамической задачи теории упругости для трансверсально-изотропного полого цилиндра**

В работе [1] показано, что метод однородных решений не только раскрывает особенности динамического трехмерной решения в теории изотропных оболочек, но может служить эффективным аппаратом решения конкретных краевых задач, а также основой для оценки точности прикладных теорий.

Однако вопрос о соотношении двумерных задач теории упругости для анизотропных оболочек практически не изучался.

Особенно актуальна проблема предельного перехода в динамических задачах анизотропной теории упругости. Так как в настоящее время существует ряд динамических прикладных теорий анизотропных оболочек, базирующихся на различных гипотезах, но практически полной отсутствие данных по их сравнительному анализу ставит весьма остро вопрос об установлении области применимости каждой из них на основе трехмерной динамической анизотропной теории упругости.

В данной параграфе методом однородных решений исследуются вынужденные колебания трансверсально-

изотропного полого цилиндра под действием осесимметричных нагрузок. В зависимости от частоты вынуждающих сил изучается возможная форма волнообразования. Изучено асимптотическое поведение решения трехмерной динамической задачи теории упругости при стремлении параметра тонкостенности к нулю.

1. Рассмотрим осесимметричную динамическую задачи теории упругости для трансверсально-изотропного полого цилиндра.

Пусть цилиндр занимает объем

$$\Gamma = \{r \in [R_1, R_2], \varphi \in [0, 2\pi], z \in [-l, l]\}$$

Уравнения колебаний в перемещениях имеют вид [46]:

$$b_{11} \left( \Delta_0 u_\rho - \frac{u_\rho}{\rho^2} \right) + \frac{\partial^2 u_\rho}{\partial \xi^2} + (1 + b_{13}) \frac{\partial^2 u_\xi}{\partial \rho \partial \xi} + \lambda^2 u_\rho = 0 \quad (3.1)$$

$$(1 + b_{13}) \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \frac{\partial u_\rho}{\partial \rho} + \frac{u_\rho}{\rho} \right) + \Delta_0 u_\xi + b_{33} \frac{\partial^2 u_\xi}{\partial \xi^2} + \lambda^2 u_\xi = 0$$

Здесь  $\lambda^2 = gR_0^2 \omega^2 G_1^{-1}$  – параметр частоты,  $\omega$  – частота колебаний,  $g$  – плотность материала оболочки.

Считается, что цилиндр совершает гармонические колебания и множителя  $e^{i\omega t}$  при искомым величинах отброшен.

Предполагаем, что боковая поверхность цилиндра свободна от напряжений:

$$\sigma_r = 0, \tau_{rz} = 0 \text{ при } \rho = \rho_s \quad (s = 1, 2) \quad (3.2)$$

а на торцах цилиндра заданы произвольные граничные условия, изменяющимся по времени гармоническому закону.

Решение уравнений (3.1)-(3.2) будем искать в виде

$$u_\rho = u(\rho) \frac{dm}{d\xi}, \quad u_\xi = w(\rho) m(\xi) \quad (3.3)$$

где функция  $m(\xi)$  подчинена условию

$$\frac{d^2 m}{d\xi^2} - \mu^2 m(\xi) = 0 \quad (3.4)$$

где  $\mu$  – спектральный параметр.

Подставляя (3.3) в (3.1), (3.2) с учетом (3.4) получаем

$$b_{11} \left( \Delta_0 u - \frac{u}{\rho^2} \right) + (\mu^2 + \lambda^2) u + (1 + b_{13}) w' = 0 \quad (3.5)$$

$$(1 + b_{13}) \mu^2 \left( u' + \frac{u}{\rho} \right) + \Delta_0 w + a_0^2 w = 0$$

$$\left( b_{11} u' + \frac{b_{12}}{\rho} u + b_{13} w \right) \Big|_{\rho=\rho_s} = 0 \quad (3.6)$$

$$\left( \mu^2 u + w' \right) \Big|_{\rho=\rho_s} = 0$$

Отметим, что при написании (1.80) использованы соотношения упругости для трансверсально-изотропного цилиндра из [38].

Не вдаваясь в подробности, приведем окончательное решение уравнений (3.5).

$$\begin{aligned} u(\rho) &= (a_0^2 - \alpha_1^2) Z_1(\alpha_1 \rho) + (a_0^2 - \alpha_2^2) Z_1(\alpha_2 \rho) \\ w(\rho) &= -(b_{13} + 1) [\alpha_1 Z_0(\alpha_1 \rho) + \alpha_2 Z_0(\alpha_2 \rho)] \end{aligned} \quad (3.7)$$

Здесь  $a_0^2 = b_{33} \mu^2 + \lambda^2$ ,  $Z_k(\alpha \rho) = C_1 J_k(\alpha \rho) + C_2 Y_k(\alpha \rho)$ , функции  $J_k(\alpha \rho)$ ,  $Y_k(\alpha \rho)$  линейно-независимыми решениями уравнение Бесселя;  $C_1, C_2$  – произвольные постоянные,  $\alpha_n = \sqrt{t_n}$ ,  $t_n$  – корни квадратного уравнения

$$t^2 - 2q_1 t + q_2 = 0 \quad (3.8)$$

$$q_1 = b_{11}^{-1} [(b_{11} b_{33} - b_{13}^2 - 2b_{13}) \mu^2 + (b_{11} + 1) \lambda^2]$$

$$q_2 = b_{11}^{-1} (\mu^2 + \lambda^2) a_0^2, \quad \alpha_n^2 = S_n, \quad S_n = \sqrt{q_1 - (-1)^n \sqrt{q_1^2 - q_2}}$$

Удовлетворяя однородным граничным условиям (1.80) получаем дисперсионное уравнение

$$\begin{aligned} \Delta(\mu, \lambda, \rho_1, \rho_2) = & 8\pi^{-2} l_1 l_2 a_1 a_2 g_1 g_2 + (a_2 b_1 - a_1 b_2) \{ a_1 g_2 \times \\ & \times [l_1 L_{10}(\alpha_2) + l_2 L_{01}(\alpha_2)] L_{11}(\alpha_1) - a_2 g_1 [l_1 L_{10}(\alpha_1) + l_2 L_{01}(\alpha_2)] \times \\ & \times L_{11}(\alpha_2) \} - (a_2 b_1 - a_1 b_2)^2 (\rho_1 \rho_2)^{-1} L_{11}(\alpha_1) L_{11}(\alpha_2) + a_1 a_2 g_1 g_2 \times \\ & \times [L_{10}(\alpha_1) L_{01}(\alpha_2) + L_{01}(\alpha_1) L_{10}(\alpha_2)] - a_2^2 g_1^2 L_{00}(\alpha_1) L_{11}(\alpha_2) - \\ & - a_1^2 g_2^2 L_{00}(\alpha_2) L_{11}(\alpha_1) = 0 \end{aligned} \quad (3.9)$$

где

$$\begin{aligned} a_n &= \mu^2 (a_0^2 + b_{13} \alpha_n^2), \quad b_n = -2G_0 (a_0^2 - \alpha_n^2) \\ g_n &= \alpha_n [B_0 \mu^2 + b_{11} (\lambda^2 - \alpha_n^2)], \quad \ln = (\alpha_n \rho_n)^{-1}, \\ B_0 &= b_{11} b_{33} - b_{13}^2 - b_{13} \\ L_{ij} &= J_i(x \rho_i) Y_j(x \rho_2) - J_j(x \rho_2) Y_i(x \rho_1), \quad (i, j = 0; 1) \end{aligned}$$

2. Левая часть уравнения (1.83), как целая функция параметра  $\mu$ , имеет счетное множество нулей с точкой сгущения на бесконечности. Для эффективного изучения его корней сделаем некоторые предположения относительно геометрических параметров цилиндра. Положим

$$\rho_1 = 1 - \varepsilon, \quad \rho_2 = 1 + \varepsilon, \quad 2\varepsilon = R_0^{-1} (R_2 - R_1) \quad (3.10)$$

Считаем, что  $\varepsilon$  – малый параметр. Подставляя (3.10) в (3.9), получаем

$$D(\mu, \lambda, \varepsilon) = \Delta(\mu, \lambda, \rho_1, \rho_2) = 0 \quad (3.11)$$

Относительно нулей функции  $D(\mu, \lambda, \varepsilon)$  можно сформулировать следующее утверждение: функция  $D(\mu, \lambda, \varepsilon)$  при конечных  $\lambda [\lambda = O(1)]$  при  $\varepsilon \rightarrow 0$  имеет три группы нулей со следующими асимптотическими свойствами:

- а) первая группа состоит из двух нулей  $\mu_k = O(1)$ ;
- б) вторая группа состоит из четырех нулей, которые имеют порядок  $O(\varepsilon^{-1/2})$ ;

в) третья группа содержит счетное множество нулей, которые имеют порядок  $O(\varepsilon^{-1})$ .

Приведем схему доказательства этого утверждения. Разложим  $D(\mu, \lambda, \varepsilon)$  в ряд по  $\varepsilon$

$$D(\mu, \lambda, \varepsilon) = A\varepsilon^2 [b_0 D_0(\mu, \lambda_0) + \frac{1}{3} D_1(\mu, \lambda_0) \varepsilon^2 + \frac{1}{45} D_2(\mu, \lambda_0) \varepsilon^4 + \dots] = 0 \quad (3.12)$$

где

$$\begin{aligned} A &= 128(1+\nu)^2 \tilde{m}^{-1} \pi^{-2} G_0 (\alpha_1^2 - \alpha_2^2)^2 a_0^2 b_0 (b_{13} + 1)^2, \\ b_0 &= 1 - \nu_1 \nu_2, \quad \lambda^2 = 2(1+\nu) \lambda_0^2, \\ D_0(\mu, \lambda_0) &= (G_0 - \lambda_0^2) E_0 G_0 \mu^2 + \lambda_0^2 (G_0 - b_0 \lambda_0^2) \\ D_1(\mu, \lambda_0) &= (E_0 G_0)^2 \mu^6 + 2E_0 G_0^2 \{ \lambda_0^2 [b_0 + E_1 G_1^{-1} - \nu_1(1+\nu)] - \\ &- 2(1+\nu)(E_0 G_0 - \nu_1) G_0 \} \mu^4 + \{ 9b_0 E_0 G_0^2 + 2G_0 [2\nu_1(1+\nu) + \\ &+ \nu \nu_1 + 4\nu_1^2(1+G_0) + (\nu^2 - 3)E_0 - 2(\nu+3)E_0 G_0] \lambda_0^2 + \\ &+ [4(1+\nu)b_0 E_0 G_0 (2+b_{11}^{-1}) + (b_0 - \nu_1 - \nu \nu_1)^2 G_0^{-1}] \lambda_0^4 \} \mu^2 + \\ &+ 9b_0 G_0 \lambda_0^2 + 2b_0 [2(\tilde{m} - 2b_0) G_0 + b_0^{-1} \tilde{m}^2 - 4\tilde{m} - 2b_0] \lambda_0^4 + \\ &+ 2(1+\nu) b_0 G_0^{-1} [2G_0 + 1 - \nu - 2\nu_1 \nu_2 (1+G_0)] \lambda_0^6 \\ D_2(\mu, \lambda_0) &= -8(1+\nu) b_0^{-1} (E_0 G_0 - \nu_1) E_0^2 G_0^2 \mu^8 + \dots \end{aligned}$$

Случай  $\lambda_0^2 = G_0$ ,  $\lambda_0^2 = G_0 b_0^{-1}$  и  $\mu = 0$  является особым и рассматривается отдельно.

Ищем  $\mu_k$  в виде следующего разложения

$$\mu_k = \mu_{k0} + \varepsilon \mu_{k1} + \varepsilon^2 \mu_{k2} + \dots \quad (k=1,2) \quad (3.13)$$

Подставляя (3.13) в (3.12), имеем

$$\begin{aligned} D_0(\mu_{k0}, \lambda_0) &= 0, \quad \mu_{k1} = 0, \\ \mu_{k2} &= [6(\lambda_0^2 - G_0) b_0 E_0 G_0]^{-1} D_1(\mu_{k0}, \lambda_0) \end{aligned}$$

Аналогично изотропному случаю [8], можно доказать, что все остальные нули функции  $D(\mu, \lambda, \varepsilon)$  неограниченно возрастают, когда  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Их можно разбить на две группы в зависимости от их поведения при  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

1)  $\varepsilon\mu_k \rightarrow 0$  при  $\varepsilon \rightarrow 0$ ; 2)  $\varepsilon\mu_k \rightarrow const$  при  $\varepsilon \rightarrow 0$

Отметим, что в принципе возможна ситуация, когда  $\varepsilon\mu_k \rightarrow \infty$  при  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Аналогично тому как в изотропном случае [8], можно доказать, что это ситуация несуществима.

Определим такие  $\mu_k$ , которые соответствуют случаю 1) Допустим, что главный член асимптотики имеет вид

$$\mu_k = \mu_{k0}\varepsilon^{-\beta}, \quad H_{k0} = O(1), \quad 0 < \beta < 1 \quad (3.14)$$

Подставляя (3.14) в (3.12) и сохраняя только главные члены, для  $H_{k0}$  получаем следующее предельное уравнение

$$\begin{aligned} & \left[ E_0 G_0 b_0 (G_0 - \lambda_0^2) H_{k0}^2 + O(\varepsilon^{2\beta}) \right] \varepsilon^{-2\beta} + \frac{1}{3} \left[ E_0^2 G_0^2 H_{k0}^6 + O(\varepsilon^{2\beta}) \right] \times \\ & \times \varepsilon^{2-6\beta} + O\left[ \max(\varepsilon^{4-8\beta}, \varepsilon^{2-4\beta}) \right] = 0 \end{aligned} \quad (3.15)$$

Рассмотрим три случая:  $0 < \beta < \frac{1}{2}$ ,  $\beta = \frac{1}{2}$ ,  $\frac{1}{2} < \beta < 1$ .

В первом и третьем случаях, переходя в (3.15) к пределу при  $\varepsilon \rightarrow 0$ , получаем  $H_{k0} = 0$ , что противоречит предположению (3.14). Во втором случае имеем

$$E_0 G_0 H_{k0}^2 \left[ 3(G_0 - \lambda_0^2) b_0 + E_0 G_0 H_{k0}^4 \right] = 0 \quad (3.16)$$

Отыскиваем  $\mu_k$  в виде

$$\mu_k = \varepsilon^{-1/2} (\mu_{k0} + \sqrt{\varepsilon} \mu_{k1} + \varepsilon \mu_{k2} + \dots) \quad (k = 3, 4, 5, 6) \quad (3.17)$$

После подстановки (3.17) в (3.12) получаем

$$\mu_{k0} = H_{k0}, \quad \mu_{k1} = 0,$$

$$\begin{aligned} \mu_{k2} = & \left[ 20E_0G_0(G_0 - \lambda_0^2)\mu_{k0} \right]^{-1} \left\{ [5b_0(2G_0 - 1) + 10E_1G_1^{-1} + \right. \\ & + 2(4 - 5G_0)\nu_1(1 + \nu) - 8(1 + \nu)E_0G_0] \lambda_0^4 + G_0[5 - 4(1 + \nu)E_0G_0^2 + \\ & + 14\nu_1(1 + \nu)G_0 - 10b_0G_0 - 10E_1G_0G_1^{-1}] \lambda_0^2 + 4(1 + \nu) \times \\ & \left. \times (E_0G_0 - \nu_1)(5G_0 - 2)G_0^2 \right\} \end{aligned} \quad (3.18)$$

Как видно, из (3.16), (3.18), в этом случае при  $\lambda_0^2 < G_0$  получаем четыре комплексных корня, а при  $\lambda_0^2 > G_0$  имеем два действительных и два чисто мнимых корня. Чисто мнимым корням соответствуют проникающие решения.

Для построения асимптотики нулей третьей группы отыскиваем  $\mu_k$  в виде

$$\mu_k = \delta_k \varepsilon^{-1} + \lambda^2 O(1) \quad (k = 7, 8, \dots) \quad (3.19)$$

Однако, как было отмечено в §1 в зависимости от характеристик материала  $\nu, \nu_1, \nu_2, G_0$  и параметра частоты  $\lambda$ , параметры  $q_1, q_2$  в уравнении (3.8) принимают различные значения, что влечет за собой различные записи решений через функции Бесселя. Это в свою очередь приводит к различным асимптотическим представлениям функции Бесселя. Отметим, что в данном случае

$$q_1 = b_{11}^{-1} (b_{11}b_{33} - b_{13}^2 - 2b_{13}) \delta_k^2 = \tilde{q}_1 \delta_k^2$$

$$q_2 = b_{11}^{-1} b_{33} \delta_k^4 = \tilde{q}_2 \delta_k^4$$

Рассмотрим следующие возможные случаи

а)  $\tilde{q}_1 > 0, \tilde{q}_1^2 - \tilde{q}_2 \neq 0 \quad \alpha_{1,2} = \pm s_1 \delta_k, \quad \alpha_{3,4} = \pm s_2 \delta_k$

$$s_{1,2} = \sqrt{\tilde{q}_1 \pm \sqrt{\tilde{q}_1^2 - \tilde{q}_2}}, \quad \tilde{q}_1^2 > \tilde{q}_2$$

$$s_{1,2} = \chi + i\beta = \sqrt{\tilde{q}_1 \pm i\sqrt{\tilde{q}_2 - \tilde{q}_1^2}}, \quad \tilde{q}_1^2 < \tilde{q}_2$$

б) Корни характеристического уравнения кратные

$$\alpha_{1,2} = \alpha_{3,4} = p \delta_k, \quad \tilde{q}_1 > 0, \quad \tilde{q}_1^2 - \tilde{q}_2 = 0, \quad p = \sqrt{\tilde{q}_1}$$

$$\tilde{q}_1 < 0, \tilde{q}_1^2 - \tilde{q}_2 \neq 0; \alpha_{1,2} = \pm is_1 \delta_k, \alpha_{3,4} = \pm is_2 \delta_k$$

$$s_{1,2} = \sqrt{|\tilde{q}_1| \pm \sqrt{\tilde{q}_1^2 - \tilde{q}_2}}, \tilde{q}_1^2 > \tilde{q}_2$$

$$s_{1,2} = \sqrt{|\tilde{q}_1| \pm i\sqrt{\tilde{q}_2 - \tilde{q}_1^2}}, \tilde{q}_1^2 < \tilde{q}_2$$

$$\text{с) } \tilde{q}_1 < 0, \tilde{q}_1^2 - \tilde{q}_2 = 0, \alpha_{1,2} = \alpha_{3,4} = ip \delta_k, p = \sqrt{|\tilde{q}_1|}$$

В случаях а) и б) после подстановки (3.19) в (3.9) и преобразования его с помощью асимптотических разложений  $J_k(x)$ ,  $Y_k(x)$  для  $\delta_k$  соответственно получаем

$$(s_2 - s_1)\sin(s_2 + s_1)\delta_k \pm (s_2 + s_1)\sin(s_2 - s_1)\delta_k = 0 \quad (3.20)$$

$$\chi \sin 2\beta \delta_k \pm \beta sh 2\chi \delta_k = 0 \quad (3.21)$$

$$\sin 2p \delta_k \pm 2p \delta_k = 0 \quad (3.22)$$

Что касается случаев б) и с), то для них результаты получаются из случаев а) и б) формальной заменой  $s_1, s_2 p$  на  $is_1, is_2, ip$  соответственно. Эти уравнения совпадают с уравнениями определяющими показатели краевых эффектов Сен-Венана в теории трансверсально-изотропных толстых плит [37]. Там же проведено исследование корней этих уравнений. Характер этих корней существенно влияют на общую картину напряженно-деформированного состояния оболочки. В случае существенной анизотропии, имеющей место при достаточно больших значениях  $G_0$ , погранслои Сен-Венана затухают весьма слабо и решения типа погранслоя следует причислить к проникающим решениям. Поэтому в этом случае напряженно-деформированные состояния трансверсально-изотропной и изотропной оболочки сильно отличаются.

Покажем, что уравнение (3.12) имеет еще два ограниченных нуля со следующими асимптотическими свойствами.

Допустим, что главные члены асимптотики  $\mu_k$  и  $\lambda_0$

имеют вид:

$$\mu_k = \mu_{k0} \varepsilon^\beta, \lambda_0 = \Lambda \varepsilon^q, \beta > 0, q > 0 \quad (3.25)$$

Подставляя (3.23) в (3.12), из условия непротиворечивости построенного асимптотического процесса получаем, что возможен только случай  $q = \beta$ . Ищем  $\mu_k$  в виде

$$\mu_k = \mu_{k0} \varepsilon^q + \mu_{k1} \varepsilon^{3q} + \dots, \lambda_0 = \Lambda \varepsilon^q \quad (3.26)$$

После подстановки (1.98) в (1.86) получаем

$$\mu_{k0} = \pm i \Lambda (E_0 G_0)^{1/2}, \mu_{k1} = \pm i v_1^2 2^{-1} \Lambda^3 (E_0 G_0)^{-3/2}, i = \sqrt{-1}$$

Этим корням соответствуют сверхнизкочастотные колебания цилиндра.

Рассмотрим особые случаи: а)  $\lambda_0^2 = G_0$ ; б)  $\lambda_0^2 = b_0^{-1} G_0$ ; в)  $\mu = 0$ .

Случай  $\mu = 0$  соответствует толщинным резонансам полого цилиндра, представляет самостоятельный интерес и будет рассмотрен позже.

В случае а) уравнении (3.12) надо положить  $\lambda_0^2 = G_0$ .

Отыскиваем  $\mu_p$  в виде

$$\mu_p = \mu_{p0} \varepsilon^{-1/3} + \mu_{p1} \varepsilon^{1/3} + \dots \quad (p = \overline{1,6}) \quad (3.27)$$

После подстановки (3.27) в (3.12) с учетом  $\lambda_0^2 = G_0$  имеем:

$$\mu_{p0}^6 + 3v_1 v_2 b_0 E_0^{-2} = 0$$

$$\mu_{p1} = -\left(3E_0 \mu_{p0}\right)^{-1} G_0 \left[ b_0 + v_1(1 + \nu) + E_1 G_1^{-1} - 2(1 + \nu) E_0 G_0 \right]$$

Что касается нулей, определяемых (3.20), (3.21), (3.22), то они остаются верными в этом случае. Таким образом, в случае  $\lambda_0^2 = G_0$  мы получаем шесть нулей (два из которых чисто мнимые), растущих как  $\varepsilon^{-1/3}$  при  $\varepsilon \rightarrow 0$  и счетное множество нулей, определяемые формулой (3.20), (3.21), (3.22) установим связь нулей, определяемых формулами

(1.99), с нулями, определяемыми (3.13), (3.17). Для этого изучим поведение нулей уравнения (1.86) в окрестности  $\lambda_0^2 = G_0$ .

В уравнении (3.12) полагая  $\lambda_0^2 - G_0 = C_0 \varepsilon^\alpha$  ( $\alpha > 0$ ),  $\mu_k = \mu_{k0} \varepsilon^{-\beta}$  и сохраняя только главные члены имеем

$$D(\mu, \lambda, \varepsilon) = A \left\{ -E_0 G_0 b_0 C_0 \mu_{k0}^2 \varepsilon^{\alpha-2\beta} + b_0 (1-b_0) G_0^2 + \right. \\ \left. + b_0 (1-2b_0) G_0 C_0 \varepsilon^\alpha + O(\varepsilon^{2\alpha}) + 3^{-1} \left\{ E_0^2 G_0^2 \mu_{k0}^6 \varepsilon^{2-6\beta} + \right. \right. \\ \left. \left. + 2E_0 G_0^2 \left[ b_0 + \nu_1 (1+\nu) + E_1 G_1^{-1} - 2(1+\nu) E_0 G_0 \right] \mu_{k0}^4 \varepsilon^{2-4\beta} + \right. \right. \\ \left. \left. + O \left[ \max(\varepsilon^{2-2\beta}, \varepsilon^{4-8\beta}) \right] \right\} \right\} = 0 \quad (3.28)$$

Легко установить, что здесь возможны следующие случаи:

1)  $\alpha = 2\beta$   $0 < \alpha < 2/3$

Отыскиваем  $\mu_k$  в следующем виде

$$\mu_k = \mu_{k0} \varepsilon^{-\alpha/2} + \mu_{k1} \varepsilon^{1/2} \dots \quad 0 < \alpha < \frac{1}{2} \quad (3.29)$$

$$\mu_k = \mu_{k0} \varepsilon^{-\alpha/2} + \mu_{k1} \varepsilon^{2-\frac{7\alpha}{2}} \dots \quad 0 \leq \alpha < \frac{2}{3}$$

Подставляя (3.29) в (3.28), получаем

$$\mu_{k0}^2 = \nu_1 \nu_2 G_0 (C_0 E_0)^{-1}, \quad \mu_{k1} = (1-2b_0) (2E_0 \mu_{k0})^{-1} \quad 0 < \alpha < \frac{1}{2}$$

$$\mu_{k1} = (1-2b_0) (2E_0 \mu_{k0})^{-1} + \nu_1^3 \nu_2^3 G_0^4 (6b_0 \mu_{k0} E_0^2 C_0^4)^{-1} \quad \alpha = \frac{1}{2}$$

$$\mu_{k1} = \nu_1^3 \nu_2^3 G_0^4 (6b_0 \mu_{k0} E_0^2 C_0^4)^{-1}, \quad \frac{1}{2} < \alpha < \frac{2}{3}$$

Видно, что это есть нули, определяемые (3.13), которые здесь становятся растущими при  $\lambda_0^2 = G_0$ . При этом в зависимости от знака  $C_0$  они могут быть действительными или чисто мнимыми.

2)  $\alpha = 2\beta$ ,  $\alpha = \frac{2}{3}$ . В этом случае из (3.28) получаем

$$\mu_k = \mu_{k0}\varepsilon^{-1/3} + \mu_{k1}\varepsilon^{1/3} + \dots \quad (3.30)$$

где  $\mu_{k0}^6 - 3b_0(E_0G_0)^{-1}C_0\mu_{k0}^23\nu_1\nu_2b_0E_0^{-2} = 0$

$$\mu_{k1} = \left[2\mu_{k0}(C_0b_0 - E_0G_0\mu_{k0}^4)\right]^{-1} \left\{C_0b_0(1 - 2b_0)E_0^{-1} + \frac{2}{3}G_0^2[b_0 + \nu_1(1 + \nu) + E_1G_1^{-1} - 2(1 + \nu)E_0G_0]\mu_{k0}^4\right\}$$

Здесь получаем шесть нулей, два из которых соответствуют нулям, определяемыми из (3.13). Остальные четыре нуля соответствуют нулям, определяемыми (3.17). Эти группы нулей при  $C_0 \rightarrow 0$  полностью совпадают с нулями, определяемыми из (3.27).

Если в (3.15) положить  $\lambda_0^2 - G_0 = C_0\varepsilon^\alpha$ , эти нули полностью совпадают с нулями, определяемыми из (3.17).

3)  $\alpha = 2 - 4\beta$ ,  $\frac{1}{2} < \alpha < \frac{2}{3}$

В это случае имеем

$$\mu_k = \mu_{k0}\varepsilon^{\frac{\alpha}{4}-1/2} + \mu_{k1}\varepsilon^{\frac{1}{2}-\frac{5\alpha}{4}} + \dots \quad (3.31)$$

где

$$\mu_{k0}^4 - 3G_0b_0(E_0G_0)^{-1} = 0, \mu_{k1} = -\nu_1\nu_2G_0(4C_0E_0\mu_{k0})^{-1}$$

Если в (3.15) положить  $\lambda_0^2 - G_0 = C_0\varepsilon^\alpha$ , эти нули полностью совпадают с нулями, определяемыми из (3.17).

4)  $\beta = \frac{1}{3}$ ,  $\alpha > \frac{2}{3}$

$$\mu_k = \mu_{k0}\varepsilon^{-1/3} + \mu_{k1}\varepsilon^{\alpha-1} + \dots \quad (3.32)$$

$$\mu_{k0}^6 + 3\nu_1\nu_2b_0E_0^{-2} = 0, \mu_{k1} = C_0b_0(2E_0G_0\mu_{k0})^{-1}$$

Эти группы нулей при  $C_0 \rightarrow 0$  совпадают с нулями, определяемыми из (3.27).

Отметим, что столь необычное поведение нулей дисперсионного уравнения в изотропном ( $\lambda_0^2 \rightarrow 1$ ) подробно изучено в [1]. Анализ соответствующих форм колебаний показывает, что при  $\lambda_0^2 < G_0$  характер интегралов динамической теории упругости качественно остаются таким же, как в статической теории упругости. При  $\lambda_0^2 > G_0$  характер интегралов динамической теории упругости резко отличаются от характера статических интегралов теории упругости. Поэтому естественно считать  $\lambda_0^2 = G_0$  “переходной” точкой, в которой происходит изменение характера динамических интегралов теории упругости.

В случае б)  $\lambda_0^2 = b_0^{-1}G_0$  нули, определяемые из (3.13), исчезают, а нули, определяемые из (3.17) принимают вид

$$\mu_{k0}^4 - 3\nu_2^2 = 0, \quad \mu_{k1} = 0,$$

$$\mu_{k2} = (10b_0\mu_{k0})^{-1} \left\{ 4\nu_2^2(1+\nu)(E_0G_0 - \nu_1) + \right. \\ \left. + 10(1+\nu)b_0(E_0G_0 - \nu_1)G_0E_0^{-1} - 5[b_0 + E_1G_1^{-1} - \nu_1(1+\nu)]G_0E_0^{-1} \right\}$$

Таким образом, в этом случае мы получаем четыре растущих нуля, два из которых чисто мнимые. Что касается нулей, определяемых (3.20), (3.21), (3.22) то они остаются верным и в этом случае.

Рассмотрим случай, когда параметр частоты  $\lambda^2$  безгранично растет при  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Такие колебания будем, следуя [1] называть сверхвысокочастотным. Можно показать, что все нули функции (3.11) безгранично растут, когда  $\lambda \rightarrow \infty$  при  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Здесь отдельно рассмотрим следующие предельные случаи: 1)  $\lambda\varepsilon \rightarrow 0$  при  $\varepsilon \rightarrow 0$ ; 2)  $\lambda\varepsilon \rightarrow const$  при  $\varepsilon \rightarrow 0$ ; 3)  $\lambda\varepsilon \rightarrow \infty$  при  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

Определим такие  $\mu_k$ , когда  $\varepsilon\mu_k \rightarrow 0$  при  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Допустим, что главные члены асимптотики  $\mu_k$  и  $\lambda$  имеют вид

$$\begin{aligned} \mu_k &= \mu_{k0}\varepsilon^{-\beta}, \quad \lambda_0 = \Lambda\varepsilon^{-q}, \quad \mu_{k0} = O(1), \quad \Lambda = O(1) \\ 0 &< \beta < 1, \quad 0 < q < 1 \end{aligned} \quad (3.33)$$

Легко показать, что  $q \leq \beta$ . Отдельно рассмотрим случай, когда  $q = \beta$  и  $q < \beta$ .

В первом случае ищем  $\mu_k$  в виде

$$\begin{aligned} \mu_k &= \mu_{k0}\varepsilon^{-\beta} + \mu_{k1}\varepsilon^{\beta} + \dots, \quad \lambda_0 = \Lambda\varepsilon^{-\beta} \quad 0 < \beta < \frac{1}{2} \\ \mu_k &= \mu_{k0}\varepsilon^{-\beta} + \mu_{k2}\varepsilon^{2-3\beta} + \dots \quad \frac{1}{2} \leq \beta < 1 \end{aligned} \quad (3.34)$$

После подстановки этих разложений в (3.12) получаем

$$\mu_{k0} = \pm i\Lambda(b_0 E_0^{-1} G_0^{-1})^{1/2}, \quad \mu_{k1} = \nu_2^2 (2\mu_{k0})^{-1} \quad 0 < \beta < \frac{1}{2}$$

$$\mu_{k1} = \nu_2^2 (2\mu_{k0})^{-1} + (6\mu_{k0} E_0 G_0)^{-1} \Lambda^4 \gamma_1 \quad \beta = \frac{1}{2}$$

$$\mu_{k1} = (6\mu_{k0} E_0 G_0)^{-1} \Lambda^4 \gamma_1, \quad \frac{1}{2} < \beta < 1$$

$$\begin{aligned} \gamma_1 &= E_0^{-1} b_0^2 (2 - G_0^{-1}) + 2EG_1^{-1} b_0 - 2\nu_2(1 + \nu) b_0 - 4(1 + \nu) b_0 (2 + b_{11}^{-1}) - \\ &- (1 - \nu_1 - \nu\nu_1 - \nu_1\nu_2)^2 E_0^{-1} G_0^{-2} + 2(1 - \nu^2) G_0^{-1} + 4(1 + \nu) - \\ &- 4\nu_1\nu_2(1 + \nu)(1 + G_0^{-1}) \end{aligned}$$

В случае  $q < \beta$ , подставляя (3.33) в (3.12) и сохраняя только главные члены, для  $\mu_{k0}$  и  $\Lambda$  получаем следующее предельное уравнение

$$\begin{aligned} D(\mu, \lambda, \varepsilon) &= A \left\{ \left[ -E_0 G_0 \Lambda^2 \mu_{k0}^2 + O(\varepsilon^{2\beta-2q}) \right] \varepsilon^{-2\beta-2q} + \right. \\ &+ 3^{-1} \left\{ E_0^2 G_0^2 \mu_{k0}^6 + O[\max(\varepsilon^{2-2\beta}, \varepsilon^{2\beta-2q})] \right\} \varepsilon^{2-6\beta} = 0 \end{aligned}$$

Отсюда получаем, что  $q = 2\beta - 1$ . Из условия  $q > 0$  получаем, что  $\beta > \frac{1}{2}$ . Отметим, что случай  $q = 0$ , который соответствует значению  $\beta = \frac{1}{2}$ , исследован выше.

Отыскивая  $\mu_k$  в виде

$$\mu_k = \mu_{k0}\varepsilon^{-\beta} + \mu_{k1}\varepsilon^{3\beta-2} + \dots, \quad \frac{1}{2} < \beta < \frac{2}{3}, \quad \lambda = \Lambda\varepsilon^{1-2\beta} \quad (3.35)$$

$$\mu_k = \mu_{k0}\varepsilon^{-\beta} + \mu_{k1}\varepsilon^{2-3\beta} + \dots, \quad \frac{2}{3} \leq \beta < 1$$

и после подстановки в (3.12) имеем

$$\mu_{k0}^4 - 3b_0\Lambda^2(E_0G_0)^{-1} = 0$$

$$\mu_{k1} = -(4\Lambda^2G_0)^{-1} \mu_{k0}, \quad \frac{1}{2} < \beta < \frac{2}{3}$$

$$\mu_{k1} = -(4\Lambda^2G_0)^{-1} \mu_{k0} - (20E_0G_0\mu_{k0})^{-1} \Lambda^2\gamma_2, \quad \beta = \frac{2}{3}$$

$$\mu_{k1} = -(20E_0G_0\mu_{k0})^{-1} \Lambda^2\gamma_2, \quad \frac{2}{3} < \beta < 1$$

$$\gamma_2 = 5b_0(2G_0 - 1) + 10E_1G_0G_1^{-1} - 10\nu_1(1 + \nu)G_0 - 8(1 + \nu)(E_0G_0 - \nu_1)$$

Итак, в этом случае мы получаем четыре нуля растущих как  $\varepsilon^{-\beta}$ , два из которых действительные, два — чисто мнимые. Чисто мнимые нули соответствуют так называемому нерегулярному вырождению.

Отметим, что здесь возможен еще случай

$$\mu_k = \varepsilon^{-1}\delta_k + O(\varepsilon^{1-2\beta}), \quad \lambda = \Lambda\varepsilon^{-\beta} \quad 0 < \beta < 1$$

Нетрудно видеть, что в этом случае в первом члене асимптотики получаем нули определяемые формулами (3.20), (3.21), (3.22).

Следовательно, в случаях  $\lambda = \Lambda \varepsilon^{-\beta}$  и  $\lambda = \Lambda \varepsilon^{1-2\beta}$  мы получаем, соответственно, два и четыре нуля, растущих как  $\varepsilon^{-\beta}$ , и счетное множество нулей, растущих как  $\varepsilon^{-1}$ .

Для построения асимптотики второй группы нулей, задавая  $\lambda = s \varepsilon^{-1}$ , отыскиваем  $\mu_k$  в следующем виде

$$\mu_k = \varepsilon^{-1} \delta_k + O(\varepsilon), \quad \lambda = s \varepsilon^{-1} \quad (3.36)$$

После подстановки (3.36) в (3.9) и преобразования его с помощью асимптотических разложений функции Бесселя при больших значениях аргумента для  $\delta_k$  получаем следующее уравнение

$$\begin{aligned} & (h_{1k} \chi_{21} \sinh_{1k} \cosh_{2k} - h_{2k} \chi_{12} \sinh_{2k} \cosh_{1k}) \times \\ & \times (h_{1k} \chi_{21} \cosh_{1k} \sinh_{2k} - h_{2k} \chi_{12} \sinh_{1k} \cosh_{2k}) = 0 \end{aligned} \quad (3.37)$$

где  $h_{nk} = \sqrt{\tau_{nk}}$ ,  $\tau_{nk}$  – корни квадратного уравнения

$$\begin{aligned} & b_{11} \tau^2 - \left[ (b_{11} b_{33} - b_{13}^2 - 2b_{13}) \delta_k^2 + (1 + b_{11}) s^2 \right] \tau + \\ & + (\delta_k^2 + s^2) (b_{33} \delta_k^2 + s^2) = 0 \end{aligned} \quad (3.38)$$

$$\begin{aligned} \chi_{mj} = & (b_{11} b_{33} - b_{13}^2) (h_{mk}^2 + s^2) \delta_k^2 + b_{11} s^4 - \\ & - (b_{11} h_{jk}^2 + 2b_{13} \delta_k^2 + b_{33} \delta_k^4) s^2, \quad m, j = 1, 2, \quad m \neq j. \end{aligned}$$

При выводе формул (3.37) предполагалось, что корни уравнения (3.38) действительные и простые. Как и выше аналогично рассматриваются другие случаи.

При заданных  $\lambda$  трансцендентное уравнение (3.37) определяют счетное множество корней  $\delta_k$ . Отметим, что уравнение (3.37) в изотропном случае полностью переходит в уравнение Релея-Лэмба [1].

В случае 3) обозначая  $\varepsilon \mu_k$  через  $x_k$ ,  $\varepsilon \lambda$  через  $y$ , в первом члене асимптотики опять получаем уравнения (3.37). Таким образом, и в случае  $\beta > 1$  уравнение (3.37) остается в силе.

3. Предполагая, что  $\varepsilon$  является малым параметром, приведем асимптотическое построение однородных решений, соответствующих различным группам корней дисперсионного уравнения. Решение, соответствующие группам корней, определяемым формулами (3.13), (3.17), (3.26), (3.34) и (3.35), в первом члене асимптотики совпадают с известными решениями прикладной теории оболочек, поэтому они здесь не приводятся.

В первом члене асимптотических разложений амплитудные значения решений соответствующие нулям (3.20), (3.21), (3.22) полностью совпадают с решениями (1.28), (1.29), (1.30) и поэтому здесь не приводятся.

Полагая  $\rho = 1 + \varepsilon\eta$ ,  $-1 \leq \eta \leq 1$  и раскладывая по малому параметру  $\varepsilon$ , приведем выражения для перемещений сверхвысокочастотных колебаний цилиндра. Что же касается напряжений, то они могут быть определены с помощью обобщенного закона Гука. (отметим, что здесь приводятся амплитудные значения перемещений).

$$U_{rk} = \varepsilon R_0 \left[ (b_{33}\delta_k^2 + S^2 - h_{1k}^2)(b_{33}\delta_k^2 + b_{13}h_{2k}^2 + S^2) \times \right. \\ \left. \times \cosh_{2k} \cosh_{1k} \eta - (b_{33}\delta_k^2 + S^2 - h_{2k}^2)(b_{33}\delta_k^2 + b_{13}h_{1k}^2 + S^2) \times \right. \\ \left. \times \cosh_{1k} \cosh_{2k} \eta + O(\varepsilon) \right] \frac{dm_k}{dz} \quad (3.40)$$

$$U_{zk} = R_0 (b_{13} + 1) \delta_k^2 \left[ (b_{33}\delta_k^2 + b_{13}h_{2k}^2 + S^2) \cosh_{2k} \sinh_{1k} \eta - \right. \\ \left. - (b_{33}\delta_k^2 + b_{13}h_{1k}^2 + S^2) \cosh_{1k} \sinh_{2k} \eta + O(\varepsilon) \right] m_k(z)$$

где

$(k = 3, 5, 7, \dots)$ ,  $\delta_k$  – нули функции

$$h_{1k} \chi_{21} \sinh_{1k} \cosh_{2k} - h_{2k} \sinh_{2k} \cosh_{1k}$$

Выражения для  $k = 2, 4, 6, \dots$  получаются из (3.40) заменой "cos x" на "sin x", "sin x" на –"cos x" соответственно.

Важно отметить, что решения определяемые формулами (3.40) в прикладной теории оболочек отсутствуют.

Их роль в теории оболочек в изотропном случае достаточно подробно обсуждена в работе [1]. Как и в изотропном случае, можно доказать, что и в случае трансверсально-изотропного цилиндра обобщенное условие ортогональности однородных решений (1.44) остается в силе.

При удовлетворении граничных условий на торцах цилиндра, обобщенное условия ортогональности однородных решений (1.44), не позволяют полностью решить вопрос о точном удовлетворении этих граничных условий.

По-видимому, в общем случае, кроме сведения к бесконечным системам алгебраических линейных уравнений здесь ничего нельзя предложить. Тем не менее, при специальных условиях опирания, обобщенное условие ортогональности однородных решений позволяет представить решение в форме ряда, коэффициенты которого определяются точно [1]. Кроме этого, условие (1.44) может оказаться полезным при решении бесконечных систем уравнений, так как они позволяют всегда удовлетворять одно из граничных условий на торцах цилиндра точно.

Процесс сведения краевых задач теории упругости к решениям бесконечных систем общеизвестен. Поэтому здесь на них подробно останавливаться не будем.

Отметим, что в настоящей работе построена система однородных решений для снятия нагрузки с торцевой части границы цилиндра.

Снятия нагрузки с боковых поверхностей цилиндра, когда там заданы неоднородные граничные условия можно осуществить с методами и приемами разработанными в работах [4,14].

4. Теперь для сравнения приведем здесь анализ дисперсионных уравнений, получаемых по теориям Кирхгоффа-Лява и С.А.Амбарцумяна. Следует отметить, что трансверсально-изотропная оболочка по теориям Кирхгоффа-Лява и С.А. Амбарцумяна (в системе координат

$z, \varphi, r$ ) в наших системах координат  $r, \varphi, z$  ведет себя как ортоторпная оболочка.

В первом случае уравнения движения в перемещениях имеет вид [39]

$$\begin{aligned} c_{11} \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + c_{12} \frac{\partial w}{\partial \xi} &= \frac{hgR_0^2}{G_l} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \\ c_{12} \frac{\partial u}{\partial \xi} + \left( c_{22} w + \frac{D_{11}}{R_0^2} \frac{\partial^4 w}{\partial \xi^4} \right) &= -\frac{hgR_0^2}{G_l} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \end{aligned} \quad (3.41)$$

здесь  $u = u(s, t)$ ,  $w = w(s, t)$  компоненты вектора перемещения вдоль образующей и по толщине соответственно.

$$c_{11} = 2(1 + \nu)G_0 E_0 h b_0^{-1}, \quad c_{22} = 2(1 + \nu)G_0 h b_0^{-1},$$

$$c_{12} = 2\nu_1(1 + \nu)G_0 h b_0^{-1}, \quad D_{11} = 3^{-1} h^2 c_{11}$$

Решение системы (3.41) будем отыскивать в виде

$$u = A e^{\mu \xi + i \omega t}, \quad w = B e^{\mu \xi + i \omega t}$$

Из условия существования нетривиальных решений получаем следующее дисперсионное уравнение

$$D^{(k)}(\mu, \lambda_0, \varepsilon) = b_0 D_0^{(k)}(\mu, \lambda_0) + \frac{1}{3} D_1^{(k)}(\mu, \lambda_0) \varepsilon^2 = 0 \quad (3.42)$$

где  $D_0^{(k)}(\mu, \lambda_0) = D_0(\mu, \lambda_0)$

$$D_1^{(k)}(\mu, \lambda_0) = E_0^2 G_0^2 \mu^6 + b_0 E_0 G_0 \lambda_0^2 \mu^4 \neq D_1(\mu, \lambda_0)$$

Здесь мы не будем останавливаться на всех случаях, разобранных выше. Проведем асимптотический анализ дисперсионного уравнения Кирхгоффа-Лява и С.А.Амбарцумяна для наиболее благоприятных случаев этой теории. Из (3.42) можно получить следующие группы нулей

$$1. \quad \mu_k = \mu_{k0} + \mu_{k2} \varepsilon^2 + \dots \quad (k = 1, 2) \quad (3.43)$$

$$D_0^{(k)}(\mu_{k0}, \lambda_0) = D_0(\mu_{k0}, \lambda_0) = 0$$

$$\mu_{k2} = \left[ 6b_0 E_0 G_0 (\lambda_0^2 - G_0) \mu_{k0} \right]^{-1} D_1^{(k)}(\mu_{k0}, \lambda_0) \neq$$

$$\neq \left[ 6b_0 E_0 G_0 (\lambda_0^2 - G_0) \mu_{k0} \right]^{-1} D_1 (\mu_{k0}, \lambda_0)$$

$$2. \mu_k = \mu_{k0} \varepsilon^q + \mu_{k1} \varepsilon^{3q} + \dots, \lambda_0 = \Lambda \varepsilon^q, q > 0 \quad (3.44)$$

$$\mu_{k0} = \pm i \Lambda (E_0 G_0)^{-1/2}, \mu_{k1} = \pm i v_1^2 \Lambda^3 2^{-1} (E_0 G_0)^{-3/2}$$

$$3. \mu_k = \varepsilon^{-1/2} (\mu_{k0} + \varepsilon \mu_{k2} + \dots) \quad (3.45)$$

$$\mu_{k0}^4 + 3b_0 (G_0 - \lambda_0^2) (E_0 G_0)^{-1} = 0$$

$$\mu_{k2} = v_2^2 \lambda_0^2 \left[ 4(G_0 - \lambda_0^2) \mu_{k0} \right]^{-1}$$

**Теория С.А. Амбарцумяна.** В этом случае уравнения движения имеет вид [39]

$$c_{11} \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + c_{12} \frac{\partial w}{\partial \xi} = \frac{ghR_0^2}{G_l} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (3.46)$$

$$c_{12} \frac{\partial u}{\partial \xi} + c_{22} w - \frac{h^3 R_0^2}{12} \frac{\partial \varphi}{\partial \xi} = - \frac{ghR_0^2}{G_l} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}$$

$$- D_{11} \frac{\partial^3 w}{\partial \xi^3} + \frac{h^3 R_0}{10} D_{11} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \xi^2} - \frac{h^3 R_0^3}{12} \varphi = 0$$

Отыскивая решение системы (3.46) в виде:

$$u = A e^{\mu \xi + i \omega t}, w = B e^{\mu \xi + i \omega t}, \varphi = c e^{\mu \xi + i \omega t}$$

получаем следующие дисперсионное уравнение:

$$D^{(A)}(\mu, \lambda_0, \varepsilon) = 4(1+\nu)^2 b_0^{-2} \left[ b_0 D_0^{(A)}(\mu, \lambda_0) + D_1^{(A)}(\mu, \lambda_0) \varepsilon^2 \right] = 0 \quad (3.47)$$

$$D_0^{(A)}(\mu, \lambda_0) = D_0(\mu, \lambda_0)$$

$$D_1^{(A)}(\mu, \lambda_0) = E_0 G_0 \left\{ \frac{1}{3} E_0 G_0 \mu^6 - \left[ \frac{4}{5} (1+\nu) (G_0 - \lambda_0^2) E_0 G_0 - \right. \right.$$

$$\left. - \left[ \frac{4}{5} (1+\nu) (G_0 - \lambda_0^2) E_0 G_0 - \frac{1}{3} b_0 \lambda_0^2 \right] \mu^4 - \frac{4}{5} (1+\nu) \lambda_0^2 (G_0 - b_0 \lambda_0^2) \mu^2 \right\}$$

Из (3.47) можно поучить следующие группы нулей

$$1. \mu_k = \mu_{k0} + \mu_{k2} \varepsilon^2 + \dots \quad (3.48)$$

$$D_0^{(A)}(\mu_{k0}, \lambda_0) = D_0(\mu_{k0}, \lambda_0) = 0$$

$$\mu_{k2} = \left[ 6(\lambda_0^2 - G_0) b_0 E_0 G_0 \mu_{k0} \right]^{-1} D_1^{(A)}(\mu_{k0}, \lambda_0) \neq$$

$$\neq \left[ 6(\lambda_0^2 - G_0) b_0 E_0 G_0 \mu_{k0} \right]^{-1} D_1(\mu_{k0}, \lambda_0)$$

$$2. \mu_k = \mu_{k0} \varepsilon^q + \mu_{k1} \varepsilon^{3q} + \dots, \lambda_0 = \Lambda \varepsilon^q, q > 0 \quad (3.49)$$

$$\mu_{k0} = \pm \Lambda i (E_0 G_0)^{-1/2}, \mu_{k1} = \pm i \nu_1^2 \Lambda^3 2^{-1} (E_0 G_0)^{-3/2}$$

$$3. \mu_k = \varepsilon^{-1/2} (\mu_{k0} + \varepsilon \mu_{k2} + \dots) \quad (3.50)$$

$$\mu_{k0}^4 + 3b_0 (G_0 - \lambda_0^2) (E_0 G_0)^{-1} = 0$$

$$\mu_{k2} = \nu_2^2 \lambda_0^2 \left[ 4(G_0 - \lambda_0^2) \mu_{k0} \right]^{-1} + 3(1 + \nu) (G_0 - \lambda_0^2) \left[ 5E_0 G_0 \mu_{k0} \right]^{-1}$$

Сравнивая (3.43), (3.44), (3.55) и (3.48), (3.49), (3.50) с точным разложением (3.13), (3.26), (3.17) получаем, что первые члены разложения совпадают, последующие же члены существенно различаются. Правда, в случае сверхнизкочастотных колебаний совпадают уже два члена разложений и это естественно.

Что же касается нулей дисперсионного уравнения, определяемых формулами (3.20), (3.21), (3.22) и (3.37), то их определение по теориям Кирхгоффа-Лява и С.А.Амбарцумяна не возможно. А ведь именно в них проявляется качественная различая теория анизотропных оболочек от изотропного.

Численная реализация было выполнена для полых магниево, кадмиевых цилиндров с

$$\nu = 0.357, \nu_1 = 0.252, \nu_2 = 0.226, G_0 = 1.021 \quad \text{и}$$

$$\nu = 0.116, \nu_1 = 0.254, \nu_2 = 0.722, G_0 = 2.231$$

соответственно.

Целью анализа было сравнить корни  $\mu$  уравнений дисперсии (3.12) (трехмерная теория) (3.42) (теория Кирхгоффа-Лява) и (3.47) (теория Амбарцумяна) для того чтобы оценить относительную погрешность этих прикладных

теорий. Диапазон вариации параметра  $\lambda_0$  был выбран, принимая во внимание следующие ограничения:  $\lambda_0 = O(1)$ ,  $\lambda_0^2 > G_0$ ,  $\lambda_0^2 > G_0 b^{-1}$ . Этот диапазон соответствует случаю, когда корни  $\mu_k$  ( $k=1,2$ ) уравнений (3.12), (3.42), (3.47) чисто мнимые и имеют равные модули и среди корней  $\mu_k$  ( $k=3,6$ ) с равными модулями имеются два чисто мнимых и два действительных корня (заметим, что чисто мнимые корни соответствуют проникающим решениям уравнений движения). Был принят во внимание тот факт, что для трансверсально-изотропного материала имеет место отношение  $G = E/2(1 + \nu)$

Чтобы характеризовать относительную точность прикладных теорий, представлены следующие параметры:

$$\Delta_1^{(kp)} = \left| \frac{\mu_k - \mu_k^{(kp)}}{\mu_k} \right| 100\% \quad (k=1,2),$$

$$\Delta_2^{(kp)} = \left| \frac{\mu_k - \mu_k^{(kp)}}{\mu_k} \right| 100\% \quad (k=3-6)$$

$$\Delta_1^{(A)} = \left| \frac{\mu_k - \mu_k^{(A)}}{\mu_k} \right| 100\% \quad (k=1,2),$$

$$\Delta_2^{(A)} = \left| \frac{\mu_k - \mu_k^{(A)}}{\mu_k} \right| 100\% \quad (k=3-6)$$

Здесь  $\mu_k$  ( $k=1,2$ ) и  $\mu_k$  ( $k=3-6$ ) являются корнями уравнения (3.12), определяемыми соотношениями (3.13) и (3.17) соответственно;  $\mu_k^{(kp)}$  ( $k=1,2$ ) и  $\mu_k^{(kp)}$  ( $k=3-6$ ) и являются корнями уравнения (3.42), определяемыми соотношениями (3.43) и (3.45), а  $\mu_k^{(A)}$  ( $k=1,2$ ),  $\mu_k^{(A)}$  ( $k=3-6$ ) являются корнями уравнения (3.47) определяемыми формулами (3.48) и (3.50).

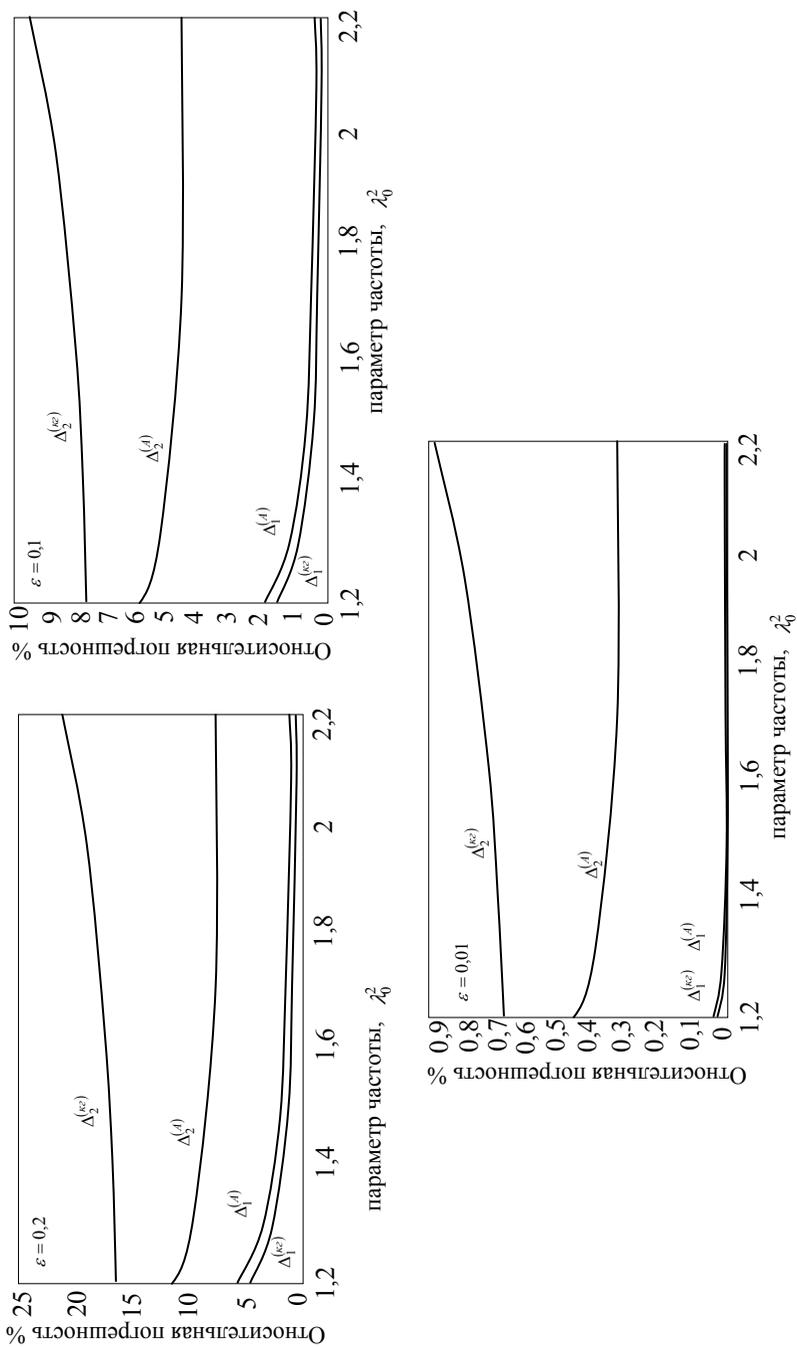


Рис. 1.2

Отсюда, величины  $\Delta_1^{(kp)}$ ,  $\Delta_2^{(kp)}$  и  $\Delta_1^{(A)}$ ,  $\Delta_2^{(A)}$  характеризуют относительную погрешность вычисляемая корней уравнения (3.12) на базе теорий Кирхгофа-Лява и Амбарцумяна соответственно.

Рисунки (1.2), (1.3) представляют результаты вычислений для магниевого полого цилиндра с различными значениями безразмерного параметра  $\varepsilon$  – толщины стенки. Подобные данные для кадмиевого цилиндра представлены на рисунках (1.3).

Из рисунка 1.3 следует, что точность в определении первых двух корней (3.13) уравнения (3.12) для магниевого цилиндра на базе теории Кирхгофа-Лява и Амбарцумяна практически идентична, в то время вычисления четырех корней (3.17) уравнения (3.12) на базе теории Амбарцумяна дает меньшую погрешность, чем на базе теории Кирхгофа-Лява. Для кадмиевых цилиндров (рис.1.3) такой же вывод может быть получен по отношению к первым двум корням (3.13) уравнения (3.12), в то время данной для четырех (3.17) уравнения (3.12) показывают, что теория Кирхгофа-Лява является более точной. Рисунки 1.2 и 1.3 также показывают, что для обоих материалов точность в определении всех шести корней (3.13), (3.17) уравнения (3.12) на базе вышеупомянутых теорий возрастает с уменьшением безразмерного параметра  $\varepsilon$ .

В заключении отметим, что в частном случае  $G_0 = 1$  эти результаты совпадают с результатами [1], где был рассмотрен соответствующий изотропный случай.

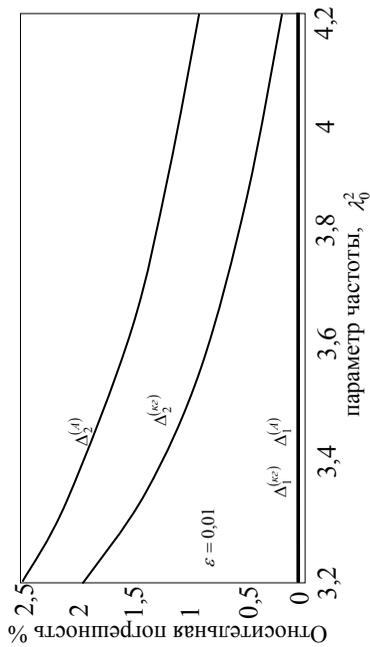
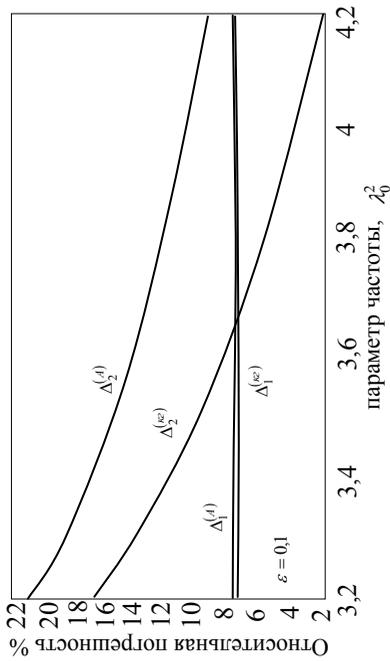
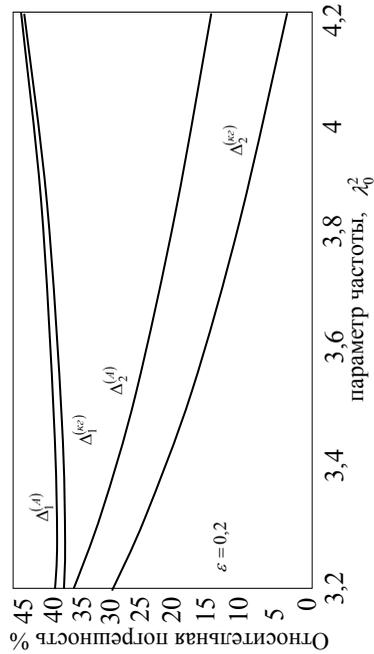


Рис. 1.3

#### **§ 4. Свободные колебания трансверсально-изотропного полого цилиндра**

В рамках данной статьи мы ограничимся лишь некоторыми сведениями в основном, использующими в своих построениях малость толщины оболочки по сравнению с другими ее размерами. Среди этих методов особое место занимает асимптотический метод, так как по самой своей сути, теория оболочек является наукой асимптотической.

В настоящем параграфе предлагается асимптотический процесс для нахождения частот свободных осесимметричных колебаний трансверсально изотропного полого цилиндра (случай наиболее благоприятный для двумерных теорий). Подробно асимптотический процесс строится для цилиндра со свободными боковыми поверхностями и шарнирно опертого по торцам.

Эта задача рассматривается как модельная, характеризующая особенности частотной характеристики анизотропной оболочки с позиции трехмерной теории упругости.

Приводится сравнение результатов, полученных по теориям Кирхгофа-Лява и С.А.Амбарцумяна, с результатами, полученными по трехмерной анизотропной теории упругости. Получены две частоты, в первом члене асимптотических разложений совпадающие с частотами, определяемыми по двумерной теории оболочек, и счетное множество частот, которые в двумерной теории оболочек отсутствуют.

1. Рассмотрим осесимметричную динамическую задачу теории упругости для трансверсально-изотропного полого цилиндра.

Пусть цилиндр занимает объем

$$\Gamma = \{r \in [R_1, R_2], \quad \varphi \in [0, 2\pi], \quad z \in [-l, l]\}$$

Уравнения колебаний в перемещениях имеют вид [16]:

$$b_{11} \left( \Delta_0 u_\rho - \frac{u_\rho}{\rho^2} \right) + \frac{\partial^2 u_\rho}{\partial \xi^2} + (b_{13} + 1) \frac{\partial^2 u_\xi}{\partial \rho \partial \xi} + \lambda^2 u_\rho = 0 \quad (4.1)$$

$$(b_{13} + 1) \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \frac{\partial u_\rho}{\partial \rho} + \frac{u_\rho}{\rho} \right) + \Delta_0 u_\xi + b_{33} \frac{\partial^2 u_\xi}{\partial \xi^2} + \lambda^2 u_\xi = 0$$

здесь  $(\rho, \xi, u_\rho, u_\xi) = R_0^{-1}(r, z, u_r, u_z)$ ,  $\lambda^2 = gR_0^2 G_1^{-1} \omega^2 -$  параметр частоты;  $\omega -$  частоты колебаний;

$R_0 = \frac{1}{2}(R_1 + R_2) -$  радиус срединной поверхности,  $g -$

плотность материала;  $mb_{11} = 2G_0(1 - \nu_1\nu_2)$ ;

$mb_{13} = 2G_0\nu_1(1 + \nu)$ ;  $mb_{33} = 2G_0\nu_1(1 - \nu^2)$ ;  $b_{12} = b_{11} - 2G_0$ ,

$E_0 = E^{-1}E_1$ ,  $G_0 = GG_1^{-1}$ ,  $\nu_2 = E_0^{-1}\nu_1 -$  безразмерные величины;  $G$ ;  $G_1, \nu, \nu_1, E, E_1 -$  упругие константы;

$$m = 1 - \nu - 2\nu_1\nu_2, \quad \Delta_0 = \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho}.$$

Предполагаем, что на границах выполняются следующие краевые условия

$$u_r = 0, \quad \tau_{rz} = 0 \quad \text{при } z = \pm l \quad (4.2)$$

$$\sigma_r = 0, \quad \tau_{rz} = 0 \quad \text{при } \rho = \rho_n \quad (n = 1, 2) \quad (4.3)$$

Решение системы (4.1)-(4.2) строим в виде

$$u_\rho = u(\rho) \sin \rho \xi, \quad u_\xi = w(\rho) \cos \rho \xi, \quad (4.4)$$

$$\rho = \frac{\pi m}{l}$$

Подставляя (4.4) в (4.1), (4.3) получаем

$$b_{11} \left( u'' + \frac{1}{\rho} u' - \frac{u}{\rho^2} \right) + (\lambda^2 - p^2) u - (b_{13} + 1) p w' = 0 \quad (4.5)$$

$$-(b_{13} + 1) p^2 \left( u' + \frac{u}{\rho} \right) + w'' + \frac{1}{\rho} w' + a_0^2 w = 0$$

$$\left( b_{11} u' + \frac{b_{12}}{\rho} u + b_{13} w \right)_{\rho=\rho_n} = 0 \quad (4.6)$$

$$(w' - p^2 u)_{\rho=\rho_n} = 0$$

Отметим, что при написании (4.6) использованы соотношения упругости для трансверсально-изотропного цилиндра [11].

Не вдаваясь в подробности, приведем окончательное решение уравнения (4.5)

$$u(\rho) = (a_0^2 - \alpha_1^2) z_1(\alpha_1 \rho) + (a_0^2 - \alpha_2^2) z_1(\alpha_2 \rho) \quad (4.7)$$

$$w(\rho) = (b_{13} + 1) [\alpha_1 z_0(\alpha_1 \rho) + \alpha_2 z_0(\alpha_2 \rho)] p^2$$

здесь  $a_0^2 = \lambda^2 - b_{33} p^2$ ,  $z_k(\alpha \rho) = C_1 J_k(\alpha \rho) + C_2 Y_k(\alpha \rho)$

функции  $J_k(\alpha \rho)$ ,  $Y_k(\alpha \rho)$  – линейно-независимые решения уравнения Бесселя;  $C_1, C_2$  – произвольные постоянные,

$\alpha_n = \sqrt{t_n}$ ,  $t_n$  – корни квадратного уравнения

$$t^2 - 2q_1 t + q_2 = 0 \quad (4.8)$$

$$q_1 = b_{11}^{-1} [(b_1 + 1) \lambda^2 - (b_{11} b_{33} - b_{13}^2 - 2b_{13})] p^2$$

$$q_2 = b_{11}^{-1} (\lambda^2 - p^2) a_0^2, \quad \alpha_n = \pm S_n, \quad S_n = \sqrt{q_1 - (-1)^n \sqrt{q_1^2 - q_2}}$$

Из условия (4.6) получаем частное уравнение относительно  $\lambda^2$ :

$$\Delta(\lambda^2, p, \rho_1, \rho_2) = 0 \quad (4.9)$$

Положим

$$\rho_1 = 1 - \varepsilon, \quad \rho_2 = 1 + \varepsilon, \quad 2\varepsilon = \frac{R_2 - R_1}{R_0} = \frac{2h}{R_0} \quad (4.10)$$

Считаем, что  $\varepsilon$  – малый параметр.

$$D(\lambda^2, p, \varepsilon) = \Delta(\lambda^2, p, \rho_1, \rho_2) = 0 \quad (4.11)$$

Случай  $p = 0$  рассматривается отдельно. Как и в изотропном случае [9], относительно нулей  $D(\lambda^2, p, \varepsilon)$  можно сформулировать следующее утверждение: для любого конечного  $p$  ( $p = O(\varepsilon^\beta)$ ,  $\beta \geq 0$  при  $\varepsilon \rightarrow 0$ ) функция  $D(\lambda^2, p, \varepsilon)$  имеет конечное число нулей со следующими асимптотическими свойствами

$$\Lambda_k = O(\varepsilon^q), \quad q \geq 0 \quad [\Lambda^2 = 2^{-1}(1 + \nu)^{-1} \lambda^2]$$

Проведем схему доказательства этого утверждения. Для этого разложим  $D(\lambda^2, p, \varepsilon)$  в ряд по  $\varepsilon$ :

$$D(\lambda^2, p, \varepsilon) = A\varepsilon^2 \left[ b_0 D_0(\lambda^2, p) + \frac{1}{3} D_1(\lambda^2, p) \varepsilon^2 + \right. \\ \left. + \frac{1}{45} D_2(\lambda^2, p) \varepsilon^4 + \dots \right] = 0 \quad (4.12)$$

Допустим, что главные члены асимптотики  $\Lambda_k$  и  $p$  имеют вид:

$$\Lambda_k = \Lambda_{k0} \varepsilon^q, \quad p = p_0 \varepsilon^q, \quad \Lambda_{k0} = O(1), \quad p_0 = O(1), \\ q \geq 0, \quad \beta \geq 0 \quad (4.13)$$

Подставляя (4.13) в (4.12) из условия непротиворечивости построенного асимптотического процесса получаем, что здесь возможен только случай  $q = 0$  и  $q = \beta$ .

Отметим, что здесь и в дальнейшем иногда основные интервалы изменения параметров  $q$  и  $\beta$  будем разбивать на подинтервалы, так как в зависимости от того, на каком интервале находятся  $q$  и  $\beta$ , нули  $D(\lambda^2, p, \varepsilon)$

имеют различные асимптотические представления (рис.1.4).

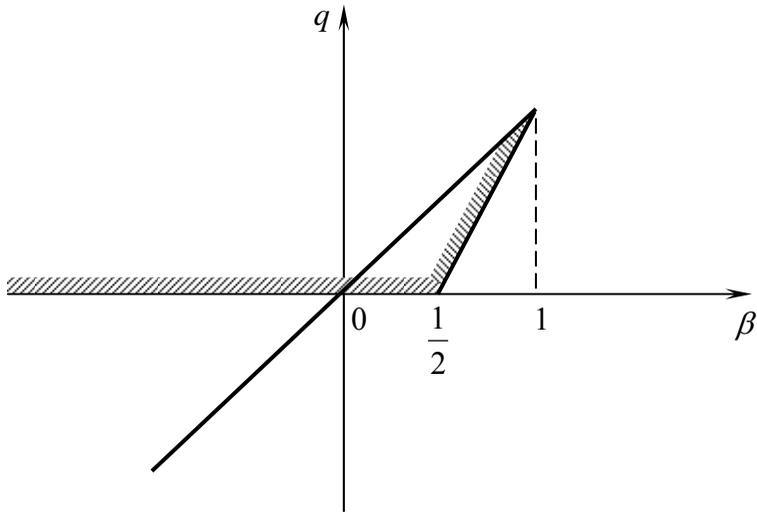


Рис.1.4

В первом случае ( $q = 0, p = p_0 \varepsilon^\beta, \beta > 0$ ) ищем  $\Lambda_k$  ( $k = 1$ ) в виде

$$\Lambda_k = \Lambda_{k0} + \varepsilon^{2\beta} \Lambda_{k2} + \dots, \quad 0 < \beta < 1 \quad (4.14)$$

$$\Lambda_k = \Lambda_{k0} + \varepsilon^2 \Lambda_{k2} + \dots, \quad \beta \geq 1$$

После подстановки (4.14) в (4.12) получаем

$$\Lambda_{k0}^2 = G_0 b_0^{-1}, \quad \Lambda_{k2} = (2\Lambda_{k0} b_0)^{-1} p_0^2 v_1 v_2 E_0 G_0, \quad 0 < \beta < 1,$$

$$\Lambda_{k2} = (2\Lambda_{k0} b_0)^{-1} \left[ v_1 v_2 E_0 p_0^2 + \frac{3v_1 v_2 + 4v + 1}{3b_0} \right] G_0, \quad \beta = 1$$

$$\Lambda_{k2} = (3v_1 v_2 + 4v + 1) G_0 (6\Lambda_{k0} b_0^2)^{-1}, \quad \beta > 1$$

Во втором случае ( $q = \beta$ ) отыскиваем  $\Lambda_k$  ( $k = 2$ ) в виде

$$\Lambda_k = \varepsilon^\beta (\Lambda_{k0} + \Lambda_{k2} \varepsilon^{2\beta} + \dots) \quad (4.15)$$

Тогда из (4.12) получим

$$\Lambda_{k0}^2 = E_0 G_0 p_0^2, \quad \Lambda_{k2} = -(2\Lambda_{k0})^{-1} \nu_1 \nu_2 E_0^2 G_0 p_0^4$$

Эти частоты являются частотами так называемых сверхнизко частотных колебаний [1].

Наконец рассмотрим случай, когда  $q = \beta = 0$ . Ищем  $\Lambda_k$  в виде:

$$\Lambda_k = \Lambda_{k0} + \varepsilon^2 \Lambda_{k2} + \dots \quad (k = 1, 2) \quad (4.16)$$

Подставляя (4.16) в (4.12) получим

$$D_0(\Lambda_{k0}, p) = 0,$$

$$\Lambda_{k2} = -[6b_0 \Lambda_{k0} (E_0 G_0 p^2 + G_0 - 2b_0 \Lambda_{k0}^2)]^{-1} D_1(\Lambda_{k0}, p)$$

Итак, доказано, что при фиксированных конечных  $p$  имеется две частоты собственных колебаний. рассмотрим случай, когда  $p$  безгранично растет при  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Здесь будем рассматривать следующие предельные случаи:  $p\varepsilon \rightarrow 0$  при  $\varepsilon \rightarrow 0$ ;  $p\varepsilon \rightarrow const$  при  $\varepsilon \rightarrow 0$ ;  $p\varepsilon \rightarrow \infty$  при  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

Определим вначале такие  $\Lambda_k$  ( $k = 1, 2$ ), когда  $p\varepsilon \rightarrow 0$  при  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Для этого опять используем разложение (4.12). Допустим, что главные члены асимптотики  $\Lambda_k$  и  $p$  имеют вид:

$$\Lambda_k = \Lambda_{k0} \varepsilon^{-q}, \quad p = p_0 \varepsilon^{-\beta}, \quad \Lambda_{k0} = O(1), \quad p_0 = O(1) \quad (4.17)$$

Нетрудно доказать, что  $q \leq \beta$ . Отдельно будем рассматривать случаи, когда  $q = 0$  и  $q = \beta$ .

В первом случае из разложения (4.12) получаем, что  $0 < \beta < \frac{1}{2}$ . Случай  $\beta = \frac{1}{2}$  рассматривается отдельно.

Отыскиваем  $\Lambda_k$  ( $k=1$ ) в виде:

$$\Lambda_k = \Lambda_{k0} + \varepsilon^{2\beta} \Lambda_{k2} + \dots \quad \left(0 < \beta \leq \frac{1}{3}\right) \quad (4.18)$$

$$\Lambda_k = \Lambda_{k0} + \varepsilon^{2-4\beta} \Lambda_{k2} + \dots \quad \left(\frac{1}{3} < \beta < \frac{1}{2}\right) \quad (4.19)$$

После подстановки этих разложений в (4.12) получаем

$$\Lambda_{k0}^2 = G_0, \quad \Lambda_{k2} = -(2\Lambda_{k0}E_0)^{-1} \nu_1 \nu_2 G_0 p_0^{-1} \quad \left(\beta \neq \frac{1}{3}\right),$$

$$\Lambda_{k2} = \frac{G_0}{2\Lambda_{k0}} \left[ \frac{E_0}{3b_0} p_0^4 - \frac{\nu_1 \nu_2}{E_0} p_0^{-2} \right] \quad \left(\beta = \frac{1}{3}\right),$$

$$\Lambda_{k0}^2 = G_0, \quad \Lambda_{k2} = \frac{G_0 E_0}{6b_0 \Lambda_{k0}} p_0^4 \quad \left(\frac{1}{3} < \beta < \frac{1}{2}\right).$$

В случае когда  $q=0$ ,  $\beta = \frac{1}{2}$ , получаем:

$$\Lambda_k = \Lambda_{k0} + \varepsilon \Lambda_{k1} + \dots \quad (k=2) \quad (4.20)$$

$$\Lambda_{k0}^2 = G_0 \left[ 1 + \frac{E_0}{3b_0} p_0^4 \right].$$

$$\begin{aligned} \Lambda_{k2} = & -(10E_0G_0)^{-1} \left\{ 5b_0(2G_0 - 1) + 10E_1G_0G_1^{-1} - 10\nu_1(1 + \nu)G_0 - \right. \\ & \left. - 8(1 + \nu)(E_0G_0 - \nu_1) \right\} \Lambda_{k0}^3 + G_0 [5 + 4(1 + \nu)(4 - 5G_0)(E_0G_0 - \nu_1) - \\ & - 10b_0G_0 - 10G_0E_1G_1^{-1} + 10\nu_1G_0(1 + \nu)] \Lambda_{k0} + 4(1 + \nu)G_0^2(E_0G_0 - \nu_1) \times \\ & \times (5G_0 - 2) \Lambda_{k0}^{-1} \} p_0^{-2} \end{aligned}$$

Аналогично в случае  $q = \beta$  из (4.12) получаем

$$\Lambda_k = \Lambda_{k0} \varepsilon^{-\beta} + \Lambda_{k2} \varepsilon^{\beta} + \dots, \quad 0 < \beta \leq \frac{1}{2}; \quad k=1, \quad (4.21)$$

$$\Lambda_k = \Lambda_{k0}\varepsilon^{-\beta} + \Lambda_{k2}\varepsilon^{2-3\beta} + \dots, \quad \frac{1}{2} < \beta < 1;$$

$$\Lambda_{k0}^2 = G_0 E_0 b_0^{-1} p_0^2, \quad \Lambda_{k2} = (2\Lambda_{k0} b_0)^{-1} \nu_1 \nu_2 G_0 \quad 0 < \beta < \frac{1}{2},$$

$$\Lambda_{k2} = (2\Lambda_{k0} b_0)^{-1} (\nu_1 \nu_2 G_0 + A_1), \quad \beta = \frac{1}{2},$$

$$\Lambda_{k2} = (2\Lambda_{k0} b_0)^{-1} A, \quad \frac{1}{2} < \beta < 1,$$

$$A_1 = (3b_0^2)^{-1} E_0 G_0 p_0^4 \left\{ b_0 [2G_0 - 1] + 2G_0 E_1 G_1^{-1} - 2\nu_1 (1 + \nu) G_0 - \right. \\ \left. - 4(1 + \nu) E_0 G_0 (1 + b_{11}^{-1}) \right\} + 2(1 + \nu) E_0 m - G_0^{-1} (b_0 - \nu_1 - \nu \nu_1)^2 \}$$

В случае  $q \neq 0$ ,  $q < \beta$ , подставив (4.17) в (4.12) и сохраняя только главные члены, для  $\Lambda_{k0}$  получаем следующие предельные уравнения.

Отсюда получаем  $q = 2\beta - 1$ . А из условия  $q > 0$  имеем  $\beta > \frac{1}{2}$ . Таким образом,  $\frac{1}{2} < \beta < 1$ . Отыскиваем

теперь  $\Lambda_k$  в виде

$$\Lambda_k = \varepsilon^{1-2\beta} (\Lambda_{k0} + \Lambda_{k2}\varepsilon^{2-2\beta} + \dots) \quad (k = 2) \quad (4.23)$$

После подстановки в (4.11) получаем

$$\Lambda_{k0}^2 = (3b_0)^{-1} E_0 G_0 p_0^4, \quad \Lambda_{k2} = B_k, \quad \beta \neq \frac{3}{2}$$

$$\Lambda_{k2} = B_k + (2\Lambda_{k0})^{-1} G_0,$$

$$B_k = 10^{-1} \Lambda_{k0}^3 \left[ 10b_0 E_0^{-1} + 10E G_1^{-1} - 10\nu_1 (1 + \nu) E_0^{-1} - \right. \\ \left. - 8(1 + \nu) (E_0 G_0 - \nu_1) E_0^{-1} G_0^{-1} - 5b_0 E_0^{-1} G_0^{-1} \right] p_0^{-2}$$

Рассмотрим второй случай, когда  $p\varepsilon \rightarrow const$  при  $\varepsilon \rightarrow 0$ . В принципе возможен случай

$$p = p_0 \varepsilon^{-1}, \quad \lambda = O(1) \quad (p \gg 1) \quad \text{при } \varepsilon \rightarrow 0 \quad (4.24)$$

Однако, как было отмечено в § 1 в зависимости от характеристик материала  $\nu, \nu_1, \nu_2, G_0$  и параметра частоты  $\lambda$  параметры  $q_1, q_2$  в уравнении (4.8) принимают различные значения, что влечет за собой различные записи решений через функции Бесселя. Это в свою очередь приводит к различным асимптотическим представлениям функции Бесселя.

Отметим, что в данном случае

$$q_1 = b_{11}^{-1} (b_{11} b_{33} - b_{13}^2 - 2b_{13}) p_0^2 = \tilde{q}_1 p_0^2$$

$$q_2 b_{11}^{-1} b_{33} p_0^4 = \tilde{q}_2 p_0^4$$

Рассмотрим следующие возможные случаи:

а)  $\tilde{q}_1 > 0, \quad \tilde{q}_1^2 - \tilde{q}_2 \neq 0, \quad \alpha_{1,2} = \pm S_1 p_0, \alpha_{3,4} = \pm S_2 p_0$

$$S_{1,2} = \sqrt{\tilde{q}_1 \pm \sqrt{\tilde{q}_1^2 - \tilde{q}_2}}, \quad \tilde{q}_1^2 > \tilde{q}_2$$

$$S_{1,2} = F + i\gamma = \sqrt{\tilde{q}_1 \pm i\sqrt{\tilde{q}_2 - \tilde{q}_1^2}}, \quad \tilde{q}_1^2 < \tilde{q}_2$$

б) Корни характеристического уравнения кратные

$$\alpha_{1,2} = \alpha_{3,4} = \delta p_0, \quad \tilde{q}_1 > 0, \quad \tilde{q}_1^2 - \tilde{q}_2 = 0, \quad \delta = \sqrt{\tilde{q}_1}$$

в)  $\tilde{q}_1 < 0, \quad \tilde{q}_1^2 - \tilde{q}_2 \neq 0, \quad \alpha_{1,2} = \pm i S_1 p_0, \alpha_{3,4} = \pm i S_2 p_0$

$$S_{1,2} = \sqrt{|\tilde{q}_1| \pm \sqrt{\tilde{q}_1^2 - \tilde{q}_2}}, \quad \tilde{q}_1^2 > \tilde{q}_2$$

$$S_{1,2} = F + i\gamma = \sqrt{|\tilde{q}_1| \pm i\sqrt{\tilde{q}_2 - \tilde{q}_1^2}}, \quad \tilde{q}_1^2 < \tilde{q}_2$$

с)  $\tilde{q}_1 < 0, \quad \tilde{q}_1^2 - \tilde{q}_2 = 0, \quad \alpha_{1,2} = \alpha_{3,4} = \pm i \delta p_0, \quad \delta = \sqrt{|\tilde{q}_1|}$

В случаях а) и б) после подстановки (4.24) в (4.9) и преобразовывая его с помощью асимптотических разложений  $J_k(x), Y_k(x)$  для  $p_0$  соответственно получаем

$$(S_2 - S_1) \sin(S_2 + S_1) p_0 \pm (S_2 + S_1) \sin(S_2 - S_1) p_0 = 0 \quad (4.25)$$

$$F \sin 2\gamma p_0 \pm \gamma sh F p_0 = 0 \quad (4.26)$$

$$\sin 2\delta p_0 \pm 2\delta p_0 = 0 \quad (4.27)$$

Что касается случаев в) и с), для них результаты получаются из случаев а) и б) формальной заменой  $S_1, S_2, \delta$  на  $iS_1, iS_2, i\delta$ . Как известно [12], [13], эти уравнения имеют только комплексные корни. Вещественные параметр  $p_0$  не может быть решением этих уравнений. Поэтому в этом случае оболочка может совершать только вынужденные колебания и  $D(\lambda^2, p, \varepsilon) \neq 0$ .

Рассмотрим случай, когда  $p\varepsilon \rightarrow const$ ,  $\lambda\varepsilon \rightarrow const$  при  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Отыскиваем  $\lambda_n (n = k - 2, k = 2, 4, \dots)$  в виде

$$\lambda_n = \varepsilon^{-1} \delta_n + O(\varepsilon), \quad p = p_0 \varepsilon^{-1} \quad (n = 1, 2, \dots) \quad (4.28)$$

После подстановки (4.28) в (4.9) и преобразования его с помощью асимптотических разложений функций  $J_\nu(x), Y_\nu(x)$  при больших значениях аргумента для  $\delta_n$  получаем уравнение:

$$\begin{aligned} & (H_{1k} N_{21} \sin H_{1k} \cos H_{2k} - H_{2k} N_{12} \sin H_{2k} \cos H_{1k}) \times \\ & \times (H_{1k} N_{21} \cos H_{1k} \sin H_{2k} - H_{2k} N_{12} \sin H_{2k} \cos H_{1k}) = 0 \end{aligned} \quad (4.29)$$

где  $H_{nk} = \sqrt{\tau_{nk}}$ ,  $\tau_{nk}$  – корни квадратного уравнения

$$\begin{aligned} & b_{11} \tau^2 - [(b_{11} b_{33} - b_{13}^2 - 2b_{13}) p_0^2 + (b_{11} + 1) \delta_k] \tau + \\ & + (p_0^2 + \delta_k^2) (b_{33} p_0^2 + \delta_k^2) = 0 \end{aligned} \quad (4.30)$$

$$\begin{aligned} N_{mj} = & (b_{11} b_{33} - b_{13}^2) (H_{mk} + \delta_k^2) + b_{11} \delta_k^4 - (b_{11} H_{jk} + 2b_{13} p_0^2 + b_{33} p_0^4) \delta_k \\ & m, j = 1, 2, \quad m \neq j \end{aligned}$$

При выводе формул (4.29) предполагалось, что корни уравнения (4.30) действительные и простые. Как и выше, аналогично рассматриваются другие случаи.

При заданных  $p$  трансцендентное уравнение (4.29) определяется счетное множество корней  $\delta_k$ . Отметим, что уравнение (4.29) в изотропном случае полностью переходит в частное уравнение Релея – Лэмба, достаточно хорошо изученное в литературе [1]. В случае 3), обозначая  $\varepsilon\lambda$  - через  $x$ ,  $\varepsilon\lambda$  - через  $y$ , в первом члене асимптотики опять получим уравнение (4.29). Таким образом, и в случае  $\beta > 1$  уравнение (2.20) остается в силе.

В случае  $p = 0$  краевая задача разбивается на две

$$u_r = a_0(p)e^{i\omega t}, u_z \equiv 0, (\tau_{rz} \equiv 0) \quad (4.31)$$

$$u_r = 0, u_z \equiv b_0(p)e^{i\omega t}, (\sigma_r = \sigma_\varphi = \sigma_z \equiv 0) \quad (4.32)$$

$$a_0'' + \frac{1}{p}a_0' + \left( \frac{\lambda^2}{b_{11}} - \frac{1}{p^2} \right) a_0 = 0 \quad (4.33)$$

$$\left( b_{11}a_0' + \frac{b_{12}}{p}a_0 \right)_{p=\rho_n} = 0 \quad (4.34)$$

$$b_0'' + \frac{1}{\rho}b_0' + \lambda^2 b_0 = 0 \quad (4.35)$$

$$b_0' \Big|_{\rho=\rho_n} = 0 \quad (4.36)$$

Краевые задачи (4.31)-(4.32) и (4.33)-(4.34) описывают толщенные колебания оболочки и с точностью до постоянного множителя совпадают с аналогичными краевыми задачами в изотропном случае [11]. Поэтому на них подробно останавливаться не будем.

3. Теперь для сравнения приведем анализ частотных уравнений, получаемых по теориям Кирхгофа-Лява и С.А.Амбарцумяна.

В первом случае частотное уравнение имеет вид [39]

$$D^{kp}(\lambda^2, p, \varepsilon) = b_0 D_0^{kp}(\lambda^2, p) + \frac{1}{3} D_1^{kp}(\lambda^2, p) \varepsilon^2 = 0 \quad (4.37)$$

где

$$D_0^{kp}(\lambda^2, p) = D_0(\lambda^2, p)$$

$$D_1^{kp}(\lambda^2, p) = -E_0^2 G_0^2 p^6 + b_0 E_0 G_0 \Lambda^2 p^4 \neq D_1(\lambda^2, p).$$

Из (4.37) можно получить следующие группы нулей.

$$1. \Lambda_k = \Lambda_{k0} + \Lambda_{k2} \varepsilon^{2\beta} + \dots \quad (p = p_0 \varepsilon^\beta, \quad k = 1, \beta > 0) \quad (4.38)$$

$$\Lambda_{k0}^2 = G_0 b_0^{-1}, \quad \Lambda_{k2} = (2\Lambda_{k0} b_0)^{-1} v_1 v_2 E_0 G_0 P_0^2$$

$$2. \Lambda_k = \Lambda_{k0} \varepsilon^\beta + \Lambda_{k2} \varepsilon^{3\beta} + \dots \quad (k = 2, \quad p = p_0 \varepsilon^\beta, \quad \beta > 0) \quad (4.39)$$

$$\Lambda_{k0}^2 = E_0 G_0 P_0^2, \quad \Lambda_{k2} = -(2\Lambda_{k0})^{-1} v_1 v_2 E_0^2 G_0 P_0^4$$

$$3. \Lambda_k = \Lambda_{k0} + \Lambda_{k2} \varepsilon^2 + \dots \quad (k = 1, 2) \quad (4.40)$$

$$D_0^{kp}(\Lambda_{k0}, P) = 0$$

$$\Lambda_{k2} = -\left[6b_0 \Lambda_{k0} (E_0 G_0 P^2 + G_0 - 2b_0 \Lambda_{k0}^2)\right]^{-1} D_1^{kp}(\Lambda_{k0}, P)$$

$$4. \Lambda_k = \Lambda_{k0} + \varepsilon^{2\beta} \Lambda_{k2} + \dots \quad \left(0 < \beta \leq \frac{1}{3}\right), \quad (P = P_0 \varepsilon^{-\beta}), \quad (k = 1) \quad (4.41)$$

$$\Lambda_k = \Lambda_{k0} + \varepsilon^{2-4\beta} \Lambda_{k2} + \dots \quad \left(\frac{1}{3} < \beta < \frac{1}{2}\right)$$

$$\Lambda_{k0}^2 = G_0, \quad \Lambda_{k2} = -(2\Lambda_{k0} E_0)^{-1} v_1 v_2 G_0 P_0^{-2}, \quad \beta \neq \frac{1}{3}$$

$$\Lambda_{k2} = \frac{G_0}{2\Lambda_{k0}} \left[ \frac{E_0}{3b_0} P_0^4 - \frac{v_1 v_2}{E_0} P_0^{-2} \right], \quad \beta = \frac{1}{3}$$

$$\Lambda_{k2} = \frac{E_0 G_0}{6b_0 \Lambda_{k0}} P_0^4, \quad \frac{1}{3} < \beta < \frac{1}{2}$$

$$5. \Lambda_k = \Lambda_{k0} + \varepsilon \Lambda_{k1} + \dots \quad (k = 1) \quad (4.42)$$

$$\Lambda_{k0}^2 = G_0 \left[ 1 + \frac{E_0}{3b_0} P_0^4 \right]$$

$$\Lambda_{k1} = -(2E_0P_0^2)^{-1} \nu_1 \nu_2 \Lambda_{k0}$$

$$6. \Lambda_k = \Lambda_{k0} \varepsilon^{-\beta} + \Lambda_{k2} \varepsilon^{\beta} + \dots, \quad 0 < \beta \leq \frac{1}{2} \quad (k=2) \quad (4.43)$$

$$\Lambda_k = \Lambda_{k0} \varepsilon^{-\beta} + \Lambda_{k2} \varepsilon^{2-3\beta} + \dots, \quad \frac{1}{2} < \beta < 1$$

$$\Lambda_{k0}^2 = E_0 G_0 b_0^{-1} P_0^2, \quad \Lambda_{k2} = (2\Lambda_{k0} b_0)^{-1} \nu_1 \nu_2 G_0 \quad 0 < \beta \leq \frac{1}{2}$$

$$\Lambda_{k0}^2 = E_0 G_0 b_0^{-1} P_0^2, \quad \Lambda_{k2} = 0 \quad \frac{1}{2} < \beta < 1$$

$$7. \Lambda_k = \Lambda_{k0} \varepsilon^{1-2\beta} + \Lambda_{k2} \varepsilon^{3-4\beta} + \dots \quad (P = P_0 \varepsilon^{-\beta}, k=2), \quad \frac{1}{2} < \beta < 1 \quad (4.44)$$

$$\Lambda_{k0}^2 = (3b_0)^{-1} E_0 G_0 P_0^4, \quad \Lambda_{k2} = 0, \quad \beta \neq \frac{2}{3}$$

$$\Lambda_{k0}^2 = (3b_0)^{-1} E_0 G_0 P_0^4, \quad \Lambda_{k2} = (2\Lambda_{k0})^{-1} G_0, \quad \beta = \frac{2}{3}$$

Частотное уравнение по теории С.А.Амбарцумяна в наших обозначениях имеет вид [39]

$$D^A(\lambda^2, p, \varepsilon) = 4(1+\nu)^2 b_0^{-2} [b_0 D_0^A(\lambda^2, p) + D_1^A(\lambda^2, p) \varepsilon^2] = 0 \quad (4.45)$$

Отметим, что

$$D_0^A(\lambda^2, p) = D_0(\lambda^2, p);$$

$$D_1^A(\lambda^2, p) = E_0 G_0 \left\{ -\frac{1}{3} E_0 G_0 P^6 - \left[ \frac{4}{5} (1+\nu) (G_0 - \Lambda^2) E_0 G_0 - \frac{1}{3} b_0 \Lambda^2 \right] P^4 + \right. \\ \left. + \frac{4}{5} (1+\nu) \Lambda^2 (G_0 - b_0 \Lambda^2) P^2 \right\} \neq D_1(\lambda^2, p).$$

Из (4.45) можно получить следующие группы нулей:

$$1. \Lambda_k = \Lambda_{k0} + \Lambda_{k2} \varepsilon^{2\beta} + \dots \quad (p = p_0 \varepsilon^{\beta}, k=1) \quad (4.46)$$

$$\Lambda_{k0}^2 = G_0 b_0^{-1}, \quad \Lambda_{k2} = (2\Lambda_{k0} b_0)^{-1} \nu_1 \nu_2 E_0 G_0 P_0^2, \quad \beta > 0$$

Сравнение (4.38) и (4.46) с точным разложением (4.14) показывает, что при  $0 < \beta < 1$  теория Кирхгофа-Лява и теория С.А.Амбарцумяна правильно определяет два члена разложений корней частотного уравнения.

При  $\beta \geq 1$  прикладная теория оболочек не только неправильно определяет второй член, но и искажает порядок второго члена разложений.

$$2. \Lambda_k = \Lambda_{k0}\varepsilon^\beta + \Lambda_{k2}\varepsilon^{3\beta} + \dots \quad (k=2) \quad P = P_0\varepsilon^\beta, \quad \beta > 0 \quad (4.47)$$

$$\Lambda_{k0}^2 = E_0 G_0 P_0^2, \quad \Lambda_{k2} = -(2\Lambda_{k0})^{-1} v_1 v_2 E_0^2 G_0 P_0^4$$

В этом случае, естественно, теория Кирхгофа-Лява и теория С.А.Амбарцумяна правильно определяют два члена разложений корней частотного уравнения.

$$3. \Lambda_k = \Lambda_{k0} + \Lambda_{k2}\varepsilon^2 + \dots \quad (k=1,2) \quad (4.48)$$

$$D^A(\Lambda_{k0}, p) = 0$$

$$\Lambda_{k2} = -\left[ 2b_0 \Lambda_{k0} (E_0 G_0 p^2 + G_0 - 2b_0 \Lambda_{k0}^2)^{-1} D_1^A(\Lambda_{k0}, p) \right].$$

Сравнение (4.40) и (4.48) с точным разложением (4.16) показывает, что теории Кирхгофа-Лява и С.А.Амбарцумяна здесь верны только в первом приближении.

$$4. \Lambda_k = \Lambda_{k0} + \Lambda_{k2}\varepsilon^{2\beta} + \dots, \quad \left( 0 < \beta \leq \frac{1}{3} \right) \quad (P = P_0\varepsilon^{-\beta}, k=1) \quad (4.49)$$

$$\Lambda_k = \Lambda_{k0} + \Lambda_{k2}\varepsilon^{2-4\beta} + \dots, \quad \left( \frac{1}{3} < \beta < \frac{1}{2} \right)$$

$$\Lambda_{k0}^2 = G_0, \quad \Lambda_{k2} = -(2\Lambda_{k0}E_0)^{-1} v_1 v_2 G_0 P_0^{-2} \quad \left( \beta \neq \frac{1}{3} \right)$$

$$\Lambda_{k2} = \frac{G_0}{2\Lambda_{k0}} \left[ \frac{E_0}{3b_0} P_0^4 - \frac{v_1 v_2}{E_0} P_0^{-2} \right] \quad \left( \beta = \frac{1}{3} \right)$$

$$\Lambda_{k2} = \frac{G_0 E_0}{6b_0 \Lambda_{k0}} P_0^4 \quad \left( \frac{1}{3} < \beta < \frac{1}{2} \right)$$

И в этом случае теории Кирхгофа-Лява и С.А. Амбарцумяна правильно определяют два члена разложений.

$$5. \Lambda_k = \Lambda_{k0} + \varepsilon \Lambda_{k1} + \dots, \quad \left( P = \frac{P_0}{\sqrt{\varepsilon}} \quad k = 2 \right) \quad (4.50)$$

$$\Lambda_{k0}^2 = G_0 \left[ 1 + \frac{E_0}{3b_0} P_0^4 \right],$$

$$\Lambda_{k1} = -(10E_0 G_0 \Lambda_{k0})^{-1} \left[ 5\nu_1 \nu_2 G_0 \Lambda_{k0}^2 + 12(1+\nu) E_0 (\Lambda_{k0}^2 - G_0)^2 \right] P_0^{-2}.$$

Сравнение (4.42) и (4.50) с точным разложением (4.20) показывает, что первые члены разложения совпадают, последующие же члены резко отличаются.

$$6. \Lambda_k = \Lambda_{k0} \varepsilon^{-\beta} + \Lambda_{k2} \varepsilon^{\beta} + \dots, \quad \left( 0 < \beta \leq \frac{1}{2} \right) \quad (k=1) \quad (4.51)$$

$$\Lambda_k = \Lambda_{k0} \varepsilon^{-\beta} + \Lambda_{k2} \varepsilon^{2-3\beta} + \dots, \quad \left( \frac{1}{2} < \beta < 1 \right)$$

$$\Lambda_{k0}^2 = E_0 G_0 b_0^{-1} P_0^2, \quad \Lambda_{k2} = -(2\Lambda_{k0} b_0)^{-1} \nu_1 \nu_2 G_0 \quad 0 < \beta \leq \frac{1}{2}$$

$$\Lambda_{k2} = 0, \quad \frac{1}{2} < \beta < 1.$$

Здесь в области  $0 < \beta \leq \frac{1}{2}$  прикладные теории правильно определяют два члена разложений. В области  $\frac{1}{2} < \beta < 1$  прикладные теории оболочек неправильно определяют даже порядок второго члена разложений.

$$7. \Lambda_k = \Lambda_{k0} \varepsilon^{1-2\beta} + \Lambda_{k2} \varepsilon^{3-4\beta} + \dots \quad \left( P = P_0 \varepsilon^{-\beta}, \quad k = 2 \right) \quad (4.52)$$

$$\Lambda_{k0}^2 = (3b_0)^{-1} E_0 G_0 P_0^4, \quad \Lambda_{k2} = -\frac{6(1+\nu)}{5E_0 G_0} \Lambda_{k0}^3 P_0^{-2}, \quad \beta \neq \frac{2}{3}$$

$$\Lambda_{k2} = -\frac{6(1+\nu)}{5E_0 G_0} \Lambda_{k0}^3 P_0^{-2} + (2\Lambda_{k0})^{-1} G_0, \quad \beta = \frac{2}{3}$$

И здесь прикладные теории верны только в первом приближении.

Что же касается частот, определяемых уравнением (2.29), то их определение по теориям Кирхгофа-Лява и С.А.Амбарцумяна невозможно. А ведь именно в них проявляется качественное различие теории анизотропных оболочек от изотропных.

Таким образом, мы получаем две частоты собственных колебаний в первом члене асимптотических разложений, совпадающих с частотами, определяемыми по прикладной теории оболочек и счетное множество частот, которые в прикладной теории оболочек отсутствуют.

Полученные качественные результаты частично подтверждаются численным расчетом. Был вычислен параметр собственных частот, определяемый по формулам (2.5), (2.7), (2.11), (2.12) (по трехмерной теории), (3.2), (3.4), (3.6), (3.7) (по теории Кирхгофа-Лява), (3.10), (3.12), (3.14), (3.15) (по теории С.А.Амбарцумяна) при различных значениях толщины для оболочек, изготовленных из магния, кадмия и цинка. Все параметры безразмерные. Результаты приведены в таблицах (1-5).

Как видно из этих таблиц, несмотря на внешние различия в разложениях теорий С.А.Амбарцумяна и Кирхгофа-Лява, в сравнении с трехмерной теорией они практически дают одинаковый результат. Для очень тонких оболочек ( $\varepsilon = 0,01$ ) они полностью согласуются с трехмерной теорией.

Единственным исключением является частота, определяемая формулой (2.7) (см. Таблица 2). В случае

$k = 2$ ,  $p = 1,2$  в отличие от двумерных теорий при уменьшении толщины для некоторых материалов (кадмий, цинк) параметр частоты увеличивается, хотя незначительно. Это различие исчезает при уменьшении толщины оболочек.

Этот эффект не связан с анизотропией оболочек, так как он обнаружен и при исследовании изотропных оболочек [9]. Скорее он связан с полным учетом поперечного сдвига.

В таблице 4-5 приведены частоты, соответствующие сверхвысокочастотным колебаниям в терминах теории оболочек [1]. Эти расчеты показывают, что при увеличении волнового числа  $P$  погрешность двумерной теории увеличивается.

Весь выше приведенный анализ показывает, что в задачах о свободных колебаниях тонких оболочек, все варианты двумерной теории оболочек практически эквивалентны.

В заключение отметим, что при  $G_0 = 1$  мы получаем результаты работ [11] в изотропном случае.

Таблица 1

	Магний			Кадмий			Цинк		
	0,2	0,1	0,01	0,2	0,1	0,01	0,2	0,1	0,01
$\varepsilon$									
$\Lambda_1$	1,0609	1,0456	1,0405	1,6822	1,6602	1,6530	1,4788	1,4639	1,4590
$\Lambda_1^{kp}$	1,0418	1,0408	1,0405	1,6550	1,6534	1,6529	1,4609	1,4594	1,4589
$\Lambda_1^A$	1,0418	1,0408	1,0405	1,6550	1,6534	1,6529	1,4609	1,4594	1,4589

Таблица 2

	Магний			Кадмий			Цинк		
	0,2	0,1	0,01	0,2	0,1	0,01	0,2	0,1	0,01
$\varepsilon$									
$\Lambda_k$	1,2049	1,1965	1,1937	1,7834	1,7387	1,7240	1,5441	1,5248	1,5184
$\Lambda_k^{kp}$	1,1963	1,1943	1,1936	1,7271	1,7246	1,7238	1,5209	1,5190	1,5184
$\Lambda_k^A$	1,1963	1,1943	1,1936	1,7271	1,7246	1,7238	1,5209	1,5190	1,5181
$\Lambda_k$	2,2231	2,2171	2,2151	2,6834	2,3112	2,1883	2,0210	1,8932	1,8510
$\Lambda_k^{kp}$	2,2163	2,2154	2,2151	2,2018	2,1908	2,1871	1,8655	1,8543	1,8506
$\Lambda_k^A$	2,2163	2,2154	2,2151	2,2018	2,1908	2,1871	1,8655	1,8543	1,8506
$\Lambda_k$	0,9350	0,9313	0,9301	0,8478	0,8491	0,8495	0,6660	0,6697	0,6709
$\Lambda_k^{kp}$	0,9354	0,9314	0,9301	0,8503	0,8497	0,8495	0,6715	0,6711	0,6709
$\Lambda_k^A$	0,9354	0,9314	0,9301	0,8503	0,8497	0,8495	0,6715	0,6711	0,6709
$\Lambda_k$	1,0971	1,0261	1,0026	1,1899	1,3018	1,3387	1,0343	1,0843	1,1008
$\Lambda_k^{kp}$	1,1283	1,0339	1,0027	1,3916	1,3522	1,3392	1,1366	1,1099	1,1011
$\Lambda_k^A$	1,1283	1,0339	1,0027	1,3916	1,3522	1,3392	1,1366	1,1099	1,1011

Таблица 3

	Магний			Кадмий			Цинк		
$\varepsilon$	0,2	0,1	0,01	0,2	0,1	0,01	0,2	0,1	0,01
$p = 1$	1,0805	1,1368	1,1874	1,2117	1,4045	1,5780	1,1032	1,2342	1,3522
$\Lambda_k^{kp}$	1,1870	1,1900	1,1928	1,5140	1,5557	1,5931	1,2622	1,3137	1,3601
$\Lambda_k^A$	1,1798	1,1864	1,1924	1,5128	1,5550	1,5931	1,2615	1,3134	1,3601

Таблица 4

	Магний			Кадмий			Цинк		
$\varepsilon$	0,2	0,1	0,01	0,2	0,1	0,01	0,2	0,1	0,01
$p_0 = 1$	2,4728	3,4858	10,9909	2,8182	3,5429	9,9437	2,0545	2,7048	7,9821
$\Lambda_k^{kp}$	2,4694	3,4834	10,9901	2,3064	3,1810	9,8293	1,9044	5,5986	7,9485
$\Lambda_k^A$	2,4694	3,4834	10,9901	2,3064	3,1810	9,8293	1,9044	2,5986	7,9485

Таблица 5

	Магний			Кадмий			Цинк		
$\varepsilon = 0,01$	21,9821			20,5357			16,1207		
$p_0 = 2$	21,9761			19,6202			15,8522		
$\Lambda_k^{kp}$	21,9761			19,6202			15,8522		
$\Lambda_k^A$	21,9761			19,6202			15,8522		

## ГЛАВА 2

### ПОСТРОЕНИЕ ОДНОРОДНЫХ РЕШЕНИЙ ДЛЯ ТРАНСВЕРСАЛЬНО-ИЗОТРОПНОЙ СФЕРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ

В настоящей главе дано решение задачи о равновесии трансверсально-изотропной сферической оболочки при однородных граничных условиях на лицевых поверхностях и заданной, симметричной относительно оси вращения системе усилий на боковой части границы. Исследуется поведение решения при малом значении параметра тонкостенности  $\varepsilon$ .

#### §5. Общее представление решений уравнений анизотропной теории упругости в сферических координатах

1. Пусть  $V = [R_1, R_2] \times [\theta_1, \theta_2] \times [0, 2\pi]$  – объем, занятый сферическим слоем (рис. 1.1). Слой отнесен к сферической системе координат  $r, \theta, \varphi$  (рис. 2.1),  $\theta_j = const$  ( $j = 1, 2$ ). Оболочка изготовлена из трансверсально-изотропного материала. Поверхность  $\theta = const$  является поверхностью изотропии. Сферические части границы слоя будем называть лицевыми поверхностями  $\Gamma_i$ , а остальную часть границы назовем боковой поверхностью.

Предположим, что со стороны лицевых поверхностей на слой действует нагрузка

$$\sigma_r = Q_i(\theta), \quad \tau_{r\theta} = T_i(\theta) \quad \text{при } r = R_i \quad (i = 1, 2) \quad (5.1)$$

Характер граничных условий на боковой поверхности пока уточнять не будем, однако, будем считать их таковыми, что слой находится в равновесии.

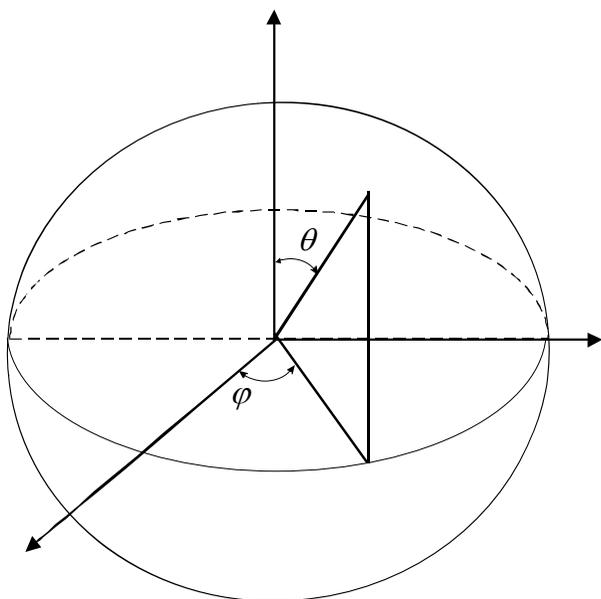


Рис. 2.1

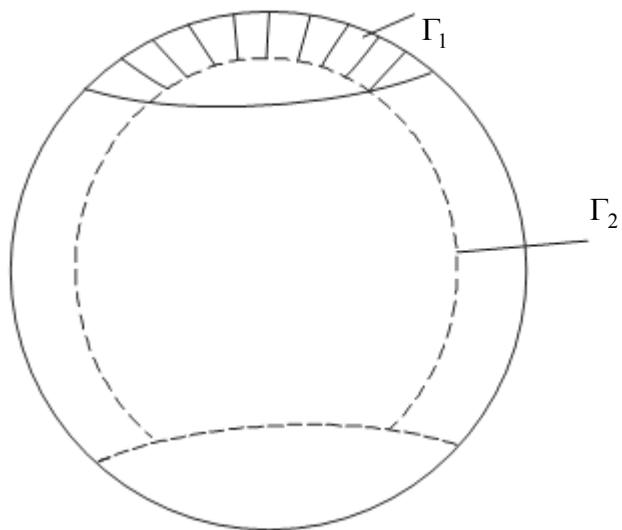


Рис.2.2

Приведем здесь полную систему уравнений, описывающих пространственное напряженно-деформированное состояние сферического слоя. Уравнения равновесия в осесимметричном случае в напряжениях, при отсутствии массовых сил, в сферической системе координат имеют вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{2\sigma_r - \sigma_\theta - \sigma_\varphi + \tau_{r\theta} \operatorname{ctg} \theta}{r} &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} + \frac{(\sigma_\theta - \sigma_\varphi) \operatorname{ctg} \theta + 3\tau_{r\theta}}{r} &= 0 \end{aligned} \quad (5.2)$$

Здесь  $\sigma_r, \sigma_\theta, \sigma_\varphi, \tau_{r\theta}$  – компоненты тензора напряжений.

Соотношения обобщенного закона Гука имеют вид:

$$\begin{aligned} \sigma_r &= G_1 [b_{11} e_r + b_{12} (e_\theta + e_\varphi)], \\ \sigma_\theta &= G_1 [b_{12} e_r + b_{22} e_\theta + b_{23} e_\varphi], \\ \sigma_\varphi &= G_1 [b_{12} e_r + b_{23} e_\theta + b_{22} e_\varphi], \\ \tau_{r\theta} &= G_1 e_{r\theta}, \end{aligned} \quad (5.3)$$

где

$$\begin{aligned} e_r &= \frac{\partial u_r}{\partial r}, \quad e_\theta = \frac{u_r}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta}, \quad e_\varphi = \frac{u_r}{r} + \frac{\operatorname{ctg} \theta}{r} u_\theta, \\ e_{r\theta} &= \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} + \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r} \end{aligned} \quad (5.4)$$

компоненты тензора деформаций,  $u_r = u_r(r, \theta)$ ,

$u_\theta = u_\theta(r, \theta)$  – компоненты вектора перемещений,  $b_{ij}$ ,  $G_1$  – материальные константы.

$$\begin{aligned} mb_{11} &= 2G_0 E_0 (1 - \nu^2), & mb_{22} &= 2G_0 (1 - \nu_1 \nu_2), \\ mb_{12} &= 2G_0 \nu_1 (1 + \nu), & mb_{23} &= 2G_0 (\nu + \nu_1 \nu_2), \\ m &= 1 - \nu - 2\nu_1 \nu_2, & G_0 &= GG_1^{-1}, \quad E_0 = E_1 E^{-1} \end{aligned}$$

Здесь  $\nu$ ,  $\nu_1$ ,  $\nu_2$ ,  $G$ ,  $G_1$ ,  $E$ ,  $E_1$  – технические константы материала.

Подставляя (5.4), (5.3) в (5.2), после несложных выкладок получим

$$\begin{aligned}
 & b_{11} \frac{\partial^2 u_r}{\partial r^2} + \frac{2b_{11}}{r} \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{2}{r^2} (b_{12} - b_{22} - b_{23}) u_r + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u_r}{\partial \theta^2} + \\
 & + \frac{ctg \theta}{r^2} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} + \frac{b_{12} + 1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + ctg \theta u_\theta \right) + \\
 & + \frac{b_{12} - b_{22} - b_{23} - 1}{r^2} \left( \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + ctg \theta u_\theta \right) = 0, \tag{5.5}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \frac{b_{12} + 1}{r} \frac{\partial^2 u_r}{\partial r \partial \theta} + \frac{b_{22} + b_{23} + 2}{r^2} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial r} + \\
 & + \frac{b_{22}}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + ctg \theta u_\theta \right) + \frac{b_{22} - b_{23} - 2}{r^2} u_\theta = 0
 \end{aligned}$$

Неоднородными решениями будем называть частные решения уравнения равновесия (5.5), которые удовлетворяют на лицевых поверхностях слоя граничным условиям (5.1). Для построения неоднородных решений можно использовать приемы, предложенные в [14]. Однако, это не единственный прием для снятия нагрузки с лицевых поверхностей. Один из известных приемов состоит в следующем: область  $V$  произвольным образом продолжается на замкнутый сферической слой  $V_0 = [R_1, R_2] \times [\theta_1, \theta_2] \times [0, 2\pi]$ , а нагрузка  $[Q_i(\theta), T_i(\theta)]$ , заданная на лицевых поверхностях  $\Gamma_i$ , достаточно произвольным образом продолжается на замкнутые сферические поверхности  $\Gamma_i^0 (r = R_1, R_2)$ . Внешние усилия, заданные на  $\Gamma_i^0$ , обозначим через  $Q_i^*, T_i^*$ . При этом для  $(\theta, \varphi) \in \Gamma_i^0$   $Q_i^* = Q_i$ ,  $T_i^* = T_i$  и кроме этого необходимо, чтобы внешние усилия  $Q_i^*, T_i^*$  удовлетворяли условиям равновесия. Представим внешнюю нагрузку в виде рядов по функциям Лежандра

$$Q_i^* = \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_{ni} P_n(\cos \theta), \quad T_i^* = \sum_{n=1}^{\infty} \tau_{ni} \frac{dP_n}{d\theta}. \quad (5.6)$$

Коэффициенты этих рядов определяются по известным формулам из анализа

$$\sigma_{ni} = \frac{2n+1}{2} \int_0^{\pi} Q_i^*(\theta) P_n(\cos \theta) \sin \theta d\theta, \quad (5.7)$$

$$\tau_{ni} = \frac{2n+1}{2n(n+1)} \int_0^{\pi} T_i^*(\theta) \frac{\partial P_n}{\partial \theta} \sin \theta d\theta.$$

Тогда компоненты вектора перемещения можно отыскивать в виде рядов:

$$u_r = \sum_{n=1}^{\infty} u_{rn}(r) P_n(\cos \theta) \quad (5.8)$$

$$u_{\theta} = \sum_{n=1}^{\infty} u_{\theta n}(r) \frac{\partial P_n}{\partial \theta}.$$

Здесь  $P_n(\cos \theta)$  – функции Лежандра первого рода. Подставляя (5.8), (5.7) в уравнения равновесия (5.2) и граничные условия (5.1) относительно  $u_{rn}(r)$ ,  $u_{\theta n}(r)$ , получаем следующие системы обыкновенных дифференциальных уравнений и граничные условия для них:

$$b_{11} u_{rn}'' + \frac{2b_{11}}{r} u_{rn}' + \frac{2}{r^2} (b_{12} - b_{22} - b_{23}) u_{rn} - \frac{n(n+1)}{r^2} u_{rn} -$$

$$- \frac{(b_{12} + 1)n(n+1)}{r} u_{\theta n}' - \frac{(b_{12} - b_{22} - b_{23} - 1)n(n+1)}{r^2} u_{\theta n} = 0, \quad (5.9)$$

$$\frac{b_{12} + 1}{r} u_{rn}' + \frac{b_{22} + b_{23} + 2}{r^2} u_{rn} + u_{\theta n}'' + \frac{2}{r} u_{\theta n}' -$$

$$- \frac{b_{22}n(n+1)}{r^2} u_{\theta n} + \frac{b_{22} - b_{23} - 2}{r^2} u_{\theta n} = 0,$$

$$G_1 \left[ b_{11} u'_m + \frac{2b_{12}}{r} u_m - \frac{n(n+1)}{r} u_{\theta n} \right]_{r=R_i} = \sigma_{ni},$$

$$G_1 \left[ \frac{1}{r} u_m - u'_{\theta n} - \frac{u_{\theta n}}{r} \right]_{r=R_i} = \tau_{ni}, \quad (i=1,2).$$
(5.10)

Штрихами обозначены производные по  $r$ .

Для решения полученных здесь задач можно использовать различные методы, в том числе и численные, например, метод ортогональной прогонки по Годунову. Описанный прием построения неоднородных решений является достаточно универсальным и не зависит от различных параметров оболочки, в том числе от ее толщины. Однако, как показано в [14], если относительная толщина оболочки достаточно мала, а нагрузка, заданная на лицевых поверхностях достаточно гладкая, то для построения неоднородных решений целесообразно использовать первый итерационный процесс асимптотического метода, который менее трудоемкий, и позволяет быстрее достичь конечной цели.

Однородным решением будем называть всякое решение уравнений равновесия (5.5), удовлетворяющее условию отсутствия напряжений на лицевых поверхностях. Асимптотический анализ однородных решений для изотропной сферической оболочки проведенный в работе [36] позволил выделить три основных типа, каждый из которых определяется видом асимптотических разложений по  $\varepsilon$ . Покажем, что у трансверсально-изотропной сферической оболочки существует три основных типа однородных решений, то есть всякое решение уравнений равновесия (5.5), удовлетворяющее однородным условиям, можно представить в виде:

$$\underline{u} = \underline{u}^{(0)} + \underline{u}^{(1)} + \underline{u}^{(2)} \tag{5.11}$$

В настоящей параграфе будем считать, что лицевые части границы свободны от напряжений.

$$\sigma_r = 0, \quad \tau_{r\theta} = 0 \quad \text{при } r = R_i \quad (i=1,2) \quad (5.12)$$

Для построения однородных решений в уравнениях равновесия делаем замену

$$\xi = \frac{1}{\varepsilon} \ln \frac{r}{r_0}, \quad r_0 = \sqrt{R_1 R_2}, \quad \xi \in [-1,1], \quad \varepsilon = \frac{1}{2} \ln \frac{R_2}{R_1} \quad (5.13)$$

Подставляя (5.13) в (5.5), (5.3) соответственно, получаем

$$\begin{aligned} & b_{11} \frac{\partial^2 u_r}{\partial \xi^2} + \varepsilon b_{11} \frac{\partial u_r}{\partial \xi} + 2\varepsilon^2 (b_{12} - b_{22} - b_{23}) u_r + \\ & + \varepsilon^2 \left( \frac{\partial^2 u_r}{\partial \theta^2} + \text{ctg} \theta \frac{\partial u_r}{\partial \theta} \right) + \varepsilon (b_{12} + 1) \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \text{ctg} \theta u_\theta \right) + \\ & + \varepsilon^2 (b_{12} - b_{22} - b_{23} - 1) \left( \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \text{ctg} \theta u_\theta \right) = 0 \end{aligned} \quad (5.14)$$

$$\begin{aligned} & \varepsilon (b_{12} + 1) \frac{\partial^2 u_r}{\partial \xi \partial \theta} + \varepsilon^2 (b_{22} + b_{23} + 2) \frac{\partial u_r}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial \xi^2} + \\ & + \varepsilon \frac{\partial u_\theta}{\partial \xi} + \varepsilon^2 b_{22} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \text{ctg} \theta u_\theta \right) + \\ & + \varepsilon^2 (b_{22} - b_{23} - 2) u_\theta = 0, \end{aligned}$$

$$\sigma_r = G_1 \varepsilon^{-1} e^{-\varepsilon \xi} \left[ b_{11} \frac{\partial u_r}{\partial \xi} + \varepsilon b_{12} \left( 2u_r + \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \text{ctg} \theta u_\theta \right) \right], \quad (5.15)$$

$$\sigma_\theta = G_1 \varepsilon^{-1} e^{-\varepsilon \xi} \left[ b_{12} \frac{\partial u_r}{\partial \xi} + \varepsilon (b_{22} + b_{23}) u_r + \varepsilon b_{22} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \varepsilon b_{23} \text{ctg} \theta u_\theta \right],$$

$$\sigma_\theta = G_1 \varepsilon^{-1} e^{-\varepsilon \xi} \left[ b_{12} \frac{\partial u_r}{\partial \xi} + \varepsilon (b_{22} + b_{23}) u_r + \varepsilon b_{23} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \varepsilon b_{22} \text{ctg} \theta u_\theta \right],$$

$$\tau_{r,\theta} = G_1 \varepsilon^{-1} e^{-\varepsilon \xi} \left[ \frac{\partial u_\theta}{\partial \xi} + \varepsilon \left( \frac{\partial u_r}{\partial \theta} - u_\theta \right) \right].$$

Решение уравнений (5.14) будем искать в виде:

$$u_r = a(\xi)m(\theta), \quad u_\theta = b(\xi) \frac{dm(\theta)}{d\theta}, \quad (5.16)$$

где  $m(\theta)$  – есть решение уравнения Лежандра

$$m''(\theta) + ctg\theta \cdot m'(\theta) + \left( z^2 - \frac{1}{4} \right) m(\theta) = 0 \quad (5.17)$$

Параметр  $z$  определяется из условия (1.12).

Подставляя (5.16) в (5.14) с учетом (5.17), после разделения переменных относительно пары функций  $a(z, \xi)$ ,  $b(z, \xi)$ , получаем следующую систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} L_1(a, b) &= b_{11}a'' + \varepsilon b_{11}a' + \varepsilon^2 \left[ 2(b_{12} - b_{22} - b_{23}) - \left( z^2 - \frac{1}{4} \right) \right] a - \\ &- \varepsilon(b_{12} + 1) \left( z^2 - \frac{1}{4} \right) b' - \varepsilon^2 (b_{12} - b_{22} - b_{23} - 1) \left( z^2 - \frac{1}{4} \right) b = 0, \\ L_2(a, b) &= \varepsilon(b_{12} + 1)a' + \varepsilon^2 (b_{22} + b_{23} + 2)a + b'' + \varepsilon b' + \\ &+ \varepsilon^2 \left[ b_{22} - b_{23} - 2 - b_{22} \left( z^2 - \frac{1}{4} \right) \right] b = 0. \end{aligned} \quad (5.18)$$

Здесь штрихами обозначены производные по  $\varepsilon$ .

Подставляя (5.16) в (5.12) с учетом (5.15) и (5.17), для функций  $a(z, \xi)$ ,  $b(z, \xi)$ , получаем следующие однородные граничные условия:

$$\begin{aligned} M_1(z)(a, b) \Big|_{r=R_i} &= \left\{ b_{11}a' + \varepsilon b_{12} \left[ 2a - \left( z^2 - \frac{1}{4} \right) b \right] \right\} \Big|_{r=R_i} = 0 \\ M_2(z)(a, b) \Big|_{r=R_i} &= [b' + \varepsilon(a - b)] \Big|_{r=R_i} = 0. \end{aligned} \quad (5.19)$$

Таким образом, система уравнений (5.18) совместно с граничными условиями (5.19) порождает спектральную задачу для пары функций  $a(z, \xi)$ ,  $b(z, \xi)$ .

Решение системы (5.18) будем отыскивать в виде:

$$a(z, \xi) = Ae^{\varepsilon\lambda\xi}, \quad b(z, \xi) = Be^{\varepsilon\lambda\xi}, \quad (5.20)$$

где  $A, B$  – постоянные. Тогда решение (5.18) представим в виде:

$$\begin{aligned} a(z, \xi) &= e^{-\frac{1}{2}\varepsilon\xi} \left[ d_1 C_1 e^{\varepsilon s_1 \xi} + d_1 C_2 e^{-\varepsilon s_1 \xi} + d_2 C_3 e^{\varepsilon s_2 \xi} + d_2 C_4 e^{-\varepsilon s_2 \xi} \right], \\ b(z, \xi) &= e^{-\frac{1}{2}\varepsilon\xi} \left[ D_{11} C_1 e^{\varepsilon s_1 \xi} + D_{21} C_2 e^{-\varepsilon s_1 \xi} + D_{12} C_3 e^{\varepsilon s_2 \xi} + D_{22} C_4 e^{-\varepsilon s_2 \xi} \right], \\ s_n &= \frac{1}{2} \sqrt{1 + 4\tau_n}, \quad \lambda_n(\lambda_n + 1) = s_n^2 - \frac{1}{4}, \end{aligned}$$

где  $\tau_n$  – корни квадратного уравнения

$$\tau^2 - 2q_1\tau + q_2 = 0, \quad (5.21)$$

где

$$2q_1 = b_{11}^{-1} \left[ (b_{11}b_{22} - b_{12}^2 - 2b_{12}) \left( z^2 - \frac{1}{4} \right) - 2(b_{12} - b_{22} - b_{23}) - 2b_{11}(G_0 - 1) \right],$$

$$q_2 = b_{11}^{-1} \left( z^2 - \frac{9}{4} \right) \left[ b_{22} \left( z^2 - \frac{1}{4} \right) - 2(b_{12} - b_{22} - b_{23})(G_0 - 1) \right],$$

$$d_k = s_k^2 - \frac{1}{4} + 2(G_0 - 1) - b_{22} \left( z^2 - \frac{1}{4} \right), \quad (k = 1, 2),$$

$$D_{1k} = - \left[ (b_{12} + 1) \left( s_k - \frac{1}{2} \right) + b_{22} + b_{23} + 2 \right],$$

$$D_{2k} = \left[ (b_{12} + 1) \left( s_k + \frac{1}{2} \right) - b_{22} - b_{23} - 2 \right].$$

$C_n$  ( $n = 1, 2, 3, 4$ ) – произвольные постоянные.

Удовлетворяя граничные условия (5.19), относительно  $C_1, \dots, C_4$  получаем следующую систему уравнений

$$\left\{ \begin{array}{l}
A_{11}e^{-\varepsilon\left(s_1+\frac{1}{2}\right)}C_1 + A_{21}e^{\varepsilon\left(s_1-\frac{1}{2}\right)}C_2 + A_{12}e^{-\varepsilon\left(s_2+\frac{1}{2}\right)}C_3 + \\
+ A_{22}e^{\varepsilon\left(s_2-\frac{1}{2}\right)}C_4 = 0 \\
B_{11}e^{-\varepsilon\left(s_1+\frac{1}{2}\right)}C_1 + B_{21}e^{\varepsilon\left(s_1-\frac{1}{2}\right)}C_2 + B_{12}e^{-\varepsilon\left(s_2+\frac{1}{2}\right)}C_3 + \\
+ B_{22}e^{\varepsilon\left(s_2-\frac{1}{2}\right)}C_4 = 0 \\
A_{11}e^{\varepsilon\left(s_1-\frac{1}{2}\right)}C_1 + A_{21}e^{-\varepsilon\left(s_1+\frac{1}{2}\right)}C_2 + A_{12}e^{\varepsilon\left(s_2-\frac{1}{2}\right)}C_3 + \\
+ A_{22}e^{-\varepsilon\left(s_2+\frac{1}{2}\right)}C_4 = 0 \\
B_{11}e^{\varepsilon\left(s_1-\frac{1}{2}\right)}C_1 + B_{21}e^{-\varepsilon\left(s_1+\frac{1}{2}\right)}C_2 + B_{12}e^{\varepsilon\left(s_2-\frac{1}{2}\right)}C_3 + \\
+ B_{22}e^{-\varepsilon\left(s_2+\frac{1}{2}\right)}C_4 = 0.
\end{array} \right. \quad (5.22)$$

Из условия существования нетривиальных решений этой системы получаем характеристическое уравнение для определения собственных значений  $z$  :

$$\Delta(z, \varepsilon) = 4 \left[ (A_{11}B_{12} - A_{12}B_{11})(A_{22}B_{21} - A_{21}B_{22})sh^2(s_2 + s_1)\varepsilon + \right. \\
\left. + (A_{11}B_{22} - A_{22}B_{11})(A_{21}B_{12} - A_{12}B_{21})sh^2(s_2 - s_1)\varepsilon \right] = 0, \quad (5.23)$$

где

$$A_k = b_{11} \left( s_k - \frac{1}{2} \right)^2 \left( s_k + \frac{1}{2} \right) + 2b_{12} \left( s_k - \frac{1}{2} \right) \left( s_k + \frac{1}{2} \right) + \\
+ \left[ (b_{12}^2 + b_{12} - b_{11}b_{22}) \left( z^2 - \frac{1}{4} \right) + 2b_{11}(G_0 - 1) \right] \left( s_k - \frac{1}{2} \right) - \\
- 2b_{12}(G_0 - 1) \left( z^2 - \frac{9}{4} \right),$$

$$\begin{aligned}
A_{2k} &= -b_{11} \left( s_k - \frac{1}{2} \right) \left( s_k + \frac{1}{2} \right)^2 + 2b_{12} \left( s_k - \frac{1}{2} \right) \left( s_k + \frac{1}{2} \right) - \\
&- \left[ (b_{12}^2 + b_{12} - b_{11}b_{22}) \left( z^2 - \frac{1}{4} \right) + 2b_{11}(G_0 - 1) \right] \left( s_k + \frac{1}{2} \right) - \\
&- 2b_{12}(G_0 - 1) \left( z^2 - \frac{9}{4} \right), \\
B_{1k} &= -b_{12} \left( s_k - \frac{1}{2} \right)^2 + (b_{12} - b_{22} - b_{23}) \left( s_k - \frac{1}{2} \right) - b_{22} \left( z^2 - \frac{9}{4} \right), \\
B_{2k} &= -b_{12} \left( s_k + \frac{1}{2} \right)^2 - (b_{12} - b_{22} - b_{23}) \left( s_k + \frac{1}{2} \right) - b_{22} \left( z^2 - \frac{9}{4} \right), \\
&(k = 1, 2).
\end{aligned}$$

Трансцендентное уравнение (5.23) определяет счетное множество корней  $z_k$ , а соответствующие им постоянные  $C_{1n}, C_{2n}, C_{3n}, C_{4n}$  пропорциональны алгебраическим дополнениям какой-либо строки определителя системы (5.22). Выбирая в качестве решения системы алгебраические дополнения элементов первой строки, получим

$$\begin{aligned}
C_{1n} &= \Delta_{11} C_n, & C_{2n} &= -\Delta_{12} C_n, \\
C_{3n} &= \Delta_{11} C_n, & C_{4n} &= -\Delta_{14} C_n,
\end{aligned} \tag{5.24}$$

где

$$\begin{aligned}
\Delta_{11} &= e^{-\frac{1}{2}\varepsilon} \left[ B_{21}(A_{12}B_{22} - A_{22}B_{12})e^{-\varepsilon s_1} + B_{12}(A_{22}B_{21} - A_{21}B_{22}) \times \right. \\
&\times e^{-\varepsilon(s_1+2s_2)} + B_{22}(A_{21}B_{12} - A_{12}B_{21})e^{\varepsilon(s_1+2s_2)} \left. \right], \\
\Delta_{12} &= e^{-\frac{1}{2}\varepsilon} \left[ B_{11}(A_{12}B_{22} - A_{22}B_{12})e^{-\varepsilon s_1} - B_{12}(A_{11}B_{22} - A_{22}B_{11}) \times \right. \\
&\times e^{\varepsilon(s_1-2s_2)} + B_{22}(A_{11}B_{12} - A_{12}B_{11})e^{\varepsilon(s_1+2s_2)} \left. \right],
\end{aligned}$$

$$\Delta_{13} = e^{-\frac{1}{2}\varepsilon} \left[ B_{22}(A_{11}B_{21} - A_{21}B_{11})e^{\varepsilon s_2} - B_{11}(A_{22}B_{21} - A_{21}B_{22}) \times \right. \\ \left. \times e^{-\varepsilon(s_2+2s_1)} + B_{21}(A_{22}B_{11} - A_{11}B_{22})e^{\varepsilon(2s_1-s_2)} \right],$$

$$\Delta_{14} = e^{-\frac{1}{2}\varepsilon} \left[ B_{12}(A_{11}B_{21} - A_{21}B_{11})e^{-\varepsilon s_2} + B_{11}(A_{21}B_{12} - A_{12}B_{21}) \times \right. \\ \left. \times e^{\varepsilon(s_2-2s_1)} + B_{21}(A_{12}B_{11} - A_{11}B_{12})e^{\varepsilon(s_2+2s_1)} \right].$$

Суммируя по всем корням уравнения (5.23) и учитывая обобщенный закон Гука, получаем однородные решения следующего вида:

$$u_r = r_0 \sum_{k=1}^{\infty} C_k u_k(\xi) m_k(\theta),$$

$$u_\theta = r_0 \sum_{k=1}^{\infty} C_k v_k(\xi) \frac{dm_k(\theta)}{d\theta},$$

$$\sigma_r = G_1 \varepsilon^{-1} e^{-\varepsilon \xi} \sum_{k=1}^{\infty} C_k Q_{rk}(\xi) m_k(\theta), \quad (5.25)$$

$$\sigma_\theta = G_1 \varepsilon^{-1} e^{-\varepsilon \xi} \sum_{k=1}^{\infty} C_k \left[ Q_{\theta k}^{(1)}(\xi) m_k(\theta) + Q_{\theta k}^{(2)}(\xi) \operatorname{ctg} \theta \frac{dm_k(\theta)}{d\theta} \right],$$

$$\sigma_\varphi = G_1 \varepsilon^{-1} e^{-\varepsilon \xi} \sum_{k=1}^{\infty} C_k \left[ Q_{\varphi k}^{(1)}(\xi) m_k(\theta) + Q_{\varphi k}^{(2)}(\xi) \operatorname{ctg} \theta \frac{dm_k(\theta)}{d\theta} \right],$$

$$\tau_{r\theta} = G_1 \varepsilon^{-1} e^{-\varepsilon \xi} \sum_{k=1}^{\infty} C_k T_k(\xi) \frac{dm_k(\theta)}{d\theta},$$

где

$$u_k(\xi) = e^{-\frac{1}{2}\varepsilon \xi} \left[ d_1 \Delta_{11} e^{\varepsilon s_1 \xi} - d_1 \Delta_{12} e^{-\varepsilon s_1 \xi} + d_2 \Delta_{13} e^{\varepsilon s_2 \xi} - d_2 \Delta_{14} e^{-\varepsilon s_2 \xi} \right],$$

$$v_k(\xi) = e^{-\frac{1}{2}\varepsilon \xi} \left[ D_{11} \Delta_{11} e^{\varepsilon s_1 \xi} - D_{21} \Delta_{12} e^{-\varepsilon s_1 \xi} + D_{12} \Delta_{13} e^{\varepsilon s_2 \xi} - D_{22} \Delta_{14} e^{-\varepsilon s_2 \xi} \right],$$

$$Q_{rk}(\xi) = b_{11} u'_k(\xi) + b_{12} \varepsilon \left[ 2u_k(\xi) - \left( z_k^2 - \frac{1}{4} \right) v_k(\xi) \right],$$

$$Q_{\theta k}^{(1)}(\xi) = b_{12}u'_k(\xi) + (b_{22} + b_{23})\varepsilon u_k(\xi) - b_{22}\left(z_k^2 - \frac{1}{4}\right)\varepsilon v_k(\xi),$$

$$Q_{\theta k}^{(2)}(\xi) = -2G_0\varepsilon \operatorname{ctg} \theta v_k(\xi),$$

$$Q_{\varphi k}^{(1)}(\xi) = b_{12}u'_k(\xi) + (b_{22} + b_{23})\varepsilon u_k(\xi) - b_{23}\left(z_k^2 - \frac{1}{4}\right)\varepsilon v_k(\xi),$$

$$Q_{\varphi k}^{(2)}(\xi) = 2G_0\varepsilon \operatorname{ctg} \theta v_k(\xi),$$

$$T_k(\xi) = v'_k(\xi) + \varepsilon[u_k(\xi) - v_k(\xi)].$$

## §6. Анализ корней характеристического уравнения

Уравнение (1.23) имеет счетное множество корней с точкой сгущения на бесконечности. Корни уравнения (5.23) могут быть найдены численно или, как показано в [3], для тонких оболочек более эффективным является асимптотический метод. Поэтому в дальнейшем будем считать, что оболочка тонкостенная,  $\varepsilon$  – является малым параметром.

Можно показать, что функция  $\Delta(z, \varepsilon)$  является четной функцией своих аргументов. Относительно нулей функции  $\Delta(z, \varepsilon)$  можно сформулировать следующее утверждение: функция  $\Delta(z, \varepsilon)$  при  $\varepsilon \rightarrow 0$  имеет три группы нулей:

а) первая группа состоит из двух нулей  $z_k = O(1)$  при  $\varepsilon \rightarrow 0$ , ( $k = 1, 2$ );

б) вторая группа корней состоит из четырех нулей, которые имеют порядок  $O(\varepsilon^{-1/2})$ ;

в) третья группа корней содержит счетное множество нулей, которые имеют порядок  $O(\varepsilon^{-1})$ .

Приведем схему доказательства этого утверждения. Для этого разложим  $\Delta(z, \varepsilon)$  в ряд по  $\varepsilon$ . После весьма сложных выкладок получим:

$$\Delta(z, \varepsilon) = 16s_1s_2(s_2^2 - s_1^2)^2 \left( z^2 - \frac{9}{4} \right) \varepsilon^2 \left[ a_1 z^2 + a_0 + \frac{1}{3} \varepsilon^2 \times \right. \\ \left. \times (b_1 z^6 + b_2 z^4 + \dots) + \frac{1}{45} (c_1 z^8 + c_2 z^6 + \dots) + \dots \right] = 0, \quad (6.1)$$

где

$$a_1 = 4b_{12}^2 b_{22} (b_{11} b_{22} - b_{12}^2 - 2b_{12}) + 2b_{22} (b_{22} + b_{23}) (b_{11} b_{22} + b_{12}^2) - \\ - 2b_{11} b_{12} b_{22} (b_{12} - b_{22} - b_{23}) - b_{11} b_{22} (b_{12} - b_{22} - b_{23})^2 - \\ - b_{12}^2 b_{22} (b_{11} + 4b_{22}) + 2b_{12}^2 (b_{22} + b_{23}) (b_{11} b_{22} - b_{12}^2 - 2b_{12}) \times \\ \times (G_0 - 1) - 8b_{12}^3 b_{22} (G_0 - 1) - 4b_{12} (b_{11} b_{22} + b_{12}^2) (b_{12} - b_{22} - b_{23}) \times \\ \times (G_0 - 1) - 4b_{12}^4 (G_0 - 1)^2, \\ a_0 = -b_{12}^2 b_{22} (b_{11} b_{22} - b_{12}^2 - 2b_{12}) + \frac{1}{2} b_{12} b_{22} (b_{11} - 16b_{12}) \times \\ \times (b_{12} - b_{22} - b_{23}) - \frac{7}{4} b_{11} b_{22} (b_{12} - b_{22} - b_{23})^2 - \frac{9}{2} b_{22} (b_{22} + b_{23}) \times \\ \times (b_{11} b_{22} + b_{12}^2) + \frac{9}{4} b_{12}^2 b_{22} (b_{11} + 4b_{22}) - \frac{1}{2} b_{12}^2 (b_{22} + b_{23}) \times \\ \times (b_{11} b_{22} - b_{12}^2 - 2b_{12}) (G_0 - 1) - 2b_{12}^2 b_{22} (4b_{11} - 9b_{12}) \times \\ \times (G_0 - 1) + 9b_{12} (b_{11} b_{22} + b_{12}^2) (b_{12} - b_{22} - b_{23}) (G_0 - 1) - \\ - 2b_{12}^2 (b_{11} + 2b_{12}) (b_{12} - b_{22} - b_{23}) (G_0 - 1) + 2b_{11} (b_{12} - b_{22} - b_{23})^3 \times \\ \times (G_0 - 1) + 4b_{12}^2 (b_{12} - b_{22} - b_{23})^2 (G_0 - 1) + 9b_{12}^4 (G_0 - 1)^2 - \\ - 4b_{11} b_{12}^2 (b_{22} + b_{23}) (G_0 - 1)^2, \\ b_1 = \frac{b_{22}}{b_{11}} \left\{ (b_{11} b_{22} + b_{12}^2)^2 + 2b_{12}^3 (b_{11} b_{22} - b_{12}^2 - 2b_{12}) + \right.$$

$$\begin{aligned}
& + \left( b_{12}^2 - 2b_{11}b_{22} \right) \left( b_{11}b_{22} - b_{12}^2 - 2b_{12} \right)^2 - b_{11}b_{22} \left( b_{12}^2 - 2b_{11}b_{22} \right) \Big\} , \\
b_2 = & \frac{21}{4} \frac{b_{12}^2 b_{22}}{b_{11}} \left( b_{11}b_{22} - b_{12}^2 - 2b_{12} \right)^2 - \frac{3}{2} \frac{b_{12} b_{22}}{b_{11}} \left( b_{11}b_{22} + b_{12}^2 \right) \times \\
& \times \left( b_{11}b_{22} - b_{12}^2 - 2b_{12} \right) + \frac{11}{2} b_{22}^2 \left( b_{11}b_{22} - b_{12}^2 - 2b_{12} \right)^2 + \frac{11}{2} b_{12} b_{22}^2 \times \\
& \times \left( b_{11}b_{22} - b_{12}^2 - 2b_{12} \right) - \frac{19}{4} \frac{b_{22}}{b_{11}} \left( b_{11}b_{22} + b_{12}^2 \right)^2 + \frac{51}{4} b_{12}^2 b_{22}^2 - \\
& - \frac{19}{2} b_{11} b_{22}^3 - 4 \frac{b_{12}^2 b_{22}}{b_{11}} \left( b_{12} - b_{22} - b_{23} \right) \left( b_{11}b_{22} - b_{12}^2 - 2b_{12} \right) - \\
& - 2b_{22} \left( b_{12} - b_{22} - b_{23} \right)^2 \left( b_{11}b_{22} - b_{12}^2 - 2b_{12} \right) - 4b_{12} b_{22} \times \\
& \times \left( b_{12} - b_{22} - b_{23} \right) \left( b_{11}b_{22} - b_{12}^2 - 2b_{12} \right) + 8b_{12} b_{22}^2 \left( b_{12} - b_{22} - b_{23} \right) - \\
& - 4 \frac{b_{12} b_{22}}{b_{11}} \left( b_{11}b_{22} + b_{12}^2 \right) \left( b_{12} - b_{22} - b_{23} \right) + b_{12} b_{22} - 2 \frac{b_{22}}{b_{11}} \times \\
& \times \left( b_{11}b_{22} + b_{12}^2 \right) \left( b_{11}b_{22} - b_{12}^2 - 2b_{12} \right) \left( b_{12} - b_{22} - b_{23} \right) + \\
& + 4b_{22}^2 \left( b_{12} - b_{22} - b_{23} \right) \left( b_{11}b_{22} - b_{12}^2 - 2b_{12} \right) - 8 \frac{b_{12}^2 b_{22}^2}{b_{11}} \times \\
& \times \left( b_{11}b_{22} - b_{12}^2 - 2b_{12} \right) + b_{22} \left( b_{11}b_{22} - b_{12}^2 - 2b_{12} \right) - 6b_{12}^2 b_{22} \times \\
& \times \left( b_{11}b_{22} - b_{12}^2 - 2b_{12} \right) \left( G_0 - 1 \right) + 4 \frac{b_{12}^2}{b_{11}} \left( b_{22} + b_{23} \right) \times \\
& \times \left( b_{11}b_{22} - b_{12}^2 - 2b_{12} \right)^2 \left( G_0 - 1 \right) + 4b_{11} b_{22}^2 \left( b_{22} + b_{23} \right) \left( G_0 - 1 \right) + \\
& + 4b_{12}^2 b_{22} \left( b_{12} - b_{22} - b_{23} \right) \left( G_0 - 1 \right) - \frac{2}{b_{11}} \left( b_{12} - b_{22} - b_{23} \right) \times \\
& \times \left( b_{11}b_{22} + b_{12}^2 \right)^2 \left( G_0 - 1 \right) - 8 \frac{b_{12}}{b_{11}} \left( b_{12} - b_{22} - b_{23} \right) \left( b_{11}b_{22} + b_{12}^2 \right) \times \\
& \times \left( b_{11}b_{22} - b_{12}^2 - 2b_{12} \right) \left( G_0 - 1 \right) + 8b_{11} b_{22}^2 \left( b_{11}b_{22} - b_{12}^2 - 2b_{12} \right) \times
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times (G_0 - 1) - 16 \frac{b_{12}^3 b_{22}}{b_{11}} (b_{11} b_{22} - b_{12}^2 - 2b_{12}) (G_0 - 1) - 8 \frac{b_{12}^4}{b_{11}} \times \\
& \times (b_{11} b_{22} - b_{12}^2 - 2b_{12}) (G_0 - 1)^2 + 2 \frac{b_{12}^2}{b_{11}} (b_{11} b_{22} + b_{12}^2) \times \\
& \times (b_{11} b_{22} - b_{12}^2 - 2b_{12}) (G_0 - 1) + 6b_{12}^3 b_{22} (G_0 - 1) - \\
& - 4b_{12} b_{22} (b_{12} - b_{22} - b_{23}) (b_{11} b_{22} - b_{12}^2 - 2b_{12}) (G_0 - 1), \\
c_1 = & - \frac{b_{12}^2}{b_{11}^2} (b_{11} b_{22} - b_{12}^2) (b_{11} b_{22} - b_{12}^2 - 2b_{12})^2 - 2 \frac{b_{12} b_{22}}{b_{11}^2} \times \\
& \times (b_{11} b_{22} - b_{12}^2 - 2b_{12})^2 (b_{11} b_{22} - b_{12}^2) + 8b_{22}^3 (b_{11} b_{22} - b_{12}^2 - 2b_{12}) + \\
& + 8 \frac{b_{12} b_{22}^2}{b_{11}} (b_{11} b_{22} - b_{12}^2 - 2b_{12})^2 - 8 \frac{b_{22}^2}{b_{11}} (b_{11} b_{22} - b_{12}^2) (b_{11} b_{22} - b_{12}^2 - 2b_{12}) + \\
& + 2 \frac{b_{22}}{b_{11}} (b_{11} b_{22} - b_{12}^2)^2 (b_{11} b_{22} - b_{12}^2 - 2b_{12}) + \frac{b_{12}^3}{b_{11}^2} (b_{11} b_{22} - b_{12}^2 - 2b_{12}).
\end{aligned}$$

Отсюда видно, что  $z = \pm \frac{3}{2}$  являются нулями функции  $\Delta(z, \varepsilon)$ . Отметим, что существование этих нулей также следует из условия равновесия сферы.

Докажем, что все остальные нули функции  $\Delta(z, \varepsilon)$  неограниченно возрастают, когда  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Исходим от противного, допуская, что  $z_k \rightarrow z_k^* \neq \infty$  при  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Тогда справедлива предельное соотношение  $\Delta(z, \varepsilon) \rightarrow \varepsilon^2 \Delta_0(z_k^*)$  при  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Таким образом, предельные точки множества корней  $z_k$  при  $\varepsilon \rightarrow 0$  определяются из уравнения  $\Delta_0(z_k^*) = 0$ . В данном случае

$$\Delta_0(z_k^*) = 16s_1 s_2 (s_2^2 - s_1^2)^2 \left( z_k^{*2} - \frac{9}{4} \right) = 0,$$

Из последнего равенства следует, что других ограниченных корней кроме  $z = \pm \frac{3}{2}$  не существует.

Итак доказано, что все остальные нули функции  $\Delta(z, \varepsilon)$  стремятся к бесконечности при  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Их можно разбить а две группы в зависимости от их поведения при  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Возможны следующие предельные соотношения:

1)  $\varepsilon z_k \rightarrow 0$  при  $\varepsilon \rightarrow 0$ ; 2)  $\varepsilon z_k \rightarrow const$  при  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

Определим в начале такие  $z_k$ , что  $\varepsilon z_k \rightarrow 0$  при  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Для этой цели опять используем разложение (6.1). Допустим, что главный член асимптотики  $z_k$  имеет вид:

$$z_k \approx \varepsilon^{-\alpha} \gamma_0, \quad \gamma_0 = O(1) \quad \text{при } \varepsilon \rightarrow 0, \quad 0 < \alpha < 1 \quad (6.2)$$

Подставляя (6.1) в (6.2) и сохраняя в нем главные члены, для  $\gamma_0$  получаем предельное уравнение:

$$\gamma_0^2 \varepsilon^{2-2\alpha} \left\{ a_1 + O(\varepsilon^{2\alpha}) + \frac{1}{3} [b_1 \gamma_0^4 O(\varepsilon^{2\alpha})] \varepsilon^{2-4\alpha} \right\} + O[\max(\varepsilon^{2-2\alpha}, \varepsilon^{4-6\alpha})] = 0. \quad (6.3)$$

Рассмотрим три случая: а)  $0 < \alpha < \frac{1}{2}$ ; б)  $\alpha = \frac{1}{2}$ ;

в)  $\frac{1}{2} < \alpha < 1$ .

В случае а), переходя (6.3) к пределу при  $\varepsilon \rightarrow 0$ , получим  $\gamma_0 = 0$ , что противоречит предположению (6.2). Аналогичным образом, в случае в) получаем  $\gamma_0 = 0$  и приходим к противоречию. И наконец в случае б) имеем

$$\gamma_0^4 + 3 \frac{a_1}{b_1} = 0, \quad (6.4)$$

отыскивая теперь  $z_k$  в виде следующего разложения

$$z_k = \varepsilon^{-\frac{1}{2}} \left[ \alpha_k + \alpha_k^{(0)} \sqrt{\varepsilon} + \beta_k \varepsilon + \dots \right], \quad (k = 1, 2, 3, 4), \quad (6.5)$$

где

$$\alpha_k = \gamma_0; \quad \alpha_k^{(0)} = 0; \quad \beta_k = \left( 20a_1 b_1^2 \right)^{-1} \left( 5a_0 b_1^2 + a_1 c_1^2 - 3a_1 b_1 b_2 \right)$$

Для построения асимптотики нулей третьей группы отыскиваем  $z_n$  ( $n = k - 4, k = 5, 6, \dots$ ) в виде

$$z_n = \varepsilon^{-1} \delta_n + O(\varepsilon), \quad (n = 1, 2, \dots) \quad (6.6)$$

Подставляя (1.31) в (1.21) имеем

$$\tau^2 - 2\tilde{q}_1 \tau \delta_n^2 + \tilde{q}_2 \delta_n^4 = 0, \quad (6.7)$$

$$2\tilde{q}_1 = b_{11}^{-1} (b_{11} b_{22} - b_{12}^2 - 2b_{12}),$$

$$\tilde{q}_2 = b_{11}^{-1} b_{22}; \quad s_i^2 = \delta_n^2 \tau_i,$$

$$s_i = \sqrt{\tilde{q}_1 - (-1)^i \sqrt{\tilde{q}_1^2 - \tilde{q}_2}}, \quad (i = 1, 2).$$

Как было отмечено в [37], в зависимости от характеристик материала  $\nu, \nu_1, \nu_2, G_0$ , параметры  $\tilde{q}_1, \tilde{q}_2$  принимают различные значения, что влечет за собой различные записи решений через функцию  $\exp x$ . Это в свою очередь приводит к различным асимптотическим представлениям.

Рассмотрим следующие возможные случаи:

$$1. \quad \lambda_{1,2} = \pm s_1 \delta_n, \quad \lambda_{3,4} = \pm s_2 \delta_n, \quad \tilde{q}_1 > 0, \quad \tilde{q}_1^2 - \tilde{q}_2 > 0,$$

$$s_{1,2} = \sqrt{\tilde{q}_1 \pm \sqrt{\tilde{q}_1^2 - \tilde{q}_2}}, \quad \tilde{q}_1^2 > \tilde{q}_2,$$

$$s_{1,2} = N + i\beta = \sqrt{\tilde{q}_1 \pm i\sqrt{\tilde{q}_2 - \tilde{q}_1^2}}, \quad \tilde{q}_1^2 < \tilde{q}_2.$$

2. Корни характеристического уравнения (6.7) кратные

$$\lambda_{1,2} = \lambda_{3,4} = \pm \delta_n p, \quad \tilde{q}_1 > 0, \quad \tilde{q}_1^2 - \tilde{q}_2 = 0, \quad p = \sqrt{\tilde{q}_1}.$$

$$3. \quad \lambda_{1,2} = \pm i s_1 \delta_n, \quad \lambda_{3,4} = \pm i s_2 \delta_n, \quad \tilde{q}_1 < 0, \quad \tilde{q}_1^2 - \tilde{q}_2 \neq 0,$$

$$s_{1,2} = \sqrt{|\tilde{q}_1| \pm \sqrt{\tilde{q}_1^2 - \tilde{q}_2}}, \quad \tilde{q}_1^2 > \tilde{q}_2,$$

$$s_{1,2} = \sqrt{|\tilde{q}_1| \pm i\sqrt{\tilde{q}_2 - \tilde{q}_1^2}}, \quad \tilde{q}_1^2 < \tilde{q}_2.$$

$$4. \lambda_{1,2} = \lambda_{3,4} = \pm i\delta_n p, \quad \tilde{q}_1 < 0, \quad \tilde{q}_1^2 - \tilde{q}_2 = 0, \quad p = \sqrt{|\tilde{q}_1|}.$$

В случаях 1,2 после подстановки (6.6) в (5.23) и преобразования его для  $\delta_n$  получаем:

$$(s_2 - s_1)sh(s_1 + s_2)\delta_n \pm (s_1 + s_2)sh(s_2 - s_1)\delta_n = 0 \quad (6.8)$$

$$Nsh2\beta\delta_n \pm \beta \sin 2N\delta_n = 0, \quad (6.9)$$

$$sh2p\delta_n \pm 2p\delta_n = 0. \quad (6.10)$$

Что касается случаев 3 и 4, то для них результаты получаются из случаев 1 и 2 формальной заменой  $s_1, s_2$  на  $is_1, is_2$ . Эти уравнения совпадают с уравнениями, определяющими показатели краевых эффектов Сен-Венана в теории трансверсально-изотропных плит.

## §7. Построение асимптотических формул для перемещений и напряжений

В этом параграфе, предполагая, что  $\varepsilon$  является малым параметром, приведем асимптотическое построение однородных решений, соответствующих трем группам нулей. При подстановке  $z = \frac{3}{2}$  в (5.25) получаем следующие выражения:

$$u_r = C_0 P_1(\cos \theta) = C_0 \cos \theta,$$

$$u_\theta = C_0 \frac{dP_1}{d\theta}(\cos \theta) = -C_0 \sin \theta, \quad (7.1)$$

$$\sigma_r = \sigma_\theta = \sigma_\varphi = \tau_{r\theta} = 0.$$

Таким образом, этому решению соответствует перемещение оболочки, как твердого тела.

Аналогично для  $z = -\frac{3}{2}$ , получаем

$$\begin{aligned} u_r &= r_0 \left( \cos \theta \ln \operatorname{ctg} \frac{\theta}{2} - 1 \right) A, \\ u_\theta &= -r_0 \left( \sin \theta \ln \operatorname{ctg} \frac{\theta}{2} + \operatorname{ctg} \theta \right) A, \\ \sigma_r &= 0, \quad \sigma_\theta = -\sigma_\varphi = \frac{G_1}{r} \frac{A}{\sin^2 \theta}, \quad \tau_{r\theta} = 0. \end{aligned} \quad (7.2)$$

Здесь  $C_0, A$  – произвольные постоянные.

Приведенные выше формулы (5.25) являются точными. На основании этих формул легко получить приближенные формулы, разложив все выражения по степеням параметра  $\varepsilon$ .

Перейдем к изучению однородных решений, соответствующих второй группе корней. Как следует из выражения (6.4) этой группе корней соответствует четыре решения. Подставляя (6.5) в (5.25) и раскладывая затем полученные таким образом формулы по степеням параметра  $\varepsilon$ , получим:

$$\begin{aligned} u_r &= r_0 \sum_{k=1}^4 C_k u_k(\xi) m_k(\theta), \\ u_\theta &= r_0 \sum_{k=1}^4 C_k v_k(\xi) \frac{dm_k(\theta)}{d\theta}, \\ \sigma_r &= O(\varepsilon), \quad \tau_{r\theta} = O(\sqrt{\varepsilon}), \\ \sigma_\theta &= G_1 \sigma(\xi) \sum_{k=1}^4 C_k Q_{\theta k}(\xi) \frac{dm_k(\theta)}{d\theta}, \\ \sigma_\varphi &= G_1 \sigma(\xi) \sum_{k=1}^4 C_k Q_{\varphi k}(\xi) \frac{dm_k(\theta)}{d\theta}, \\ \sigma(\xi) &= 1 - \varepsilon \xi + \frac{1}{2} \varepsilon^2 \xi^2 + O(\varepsilon^3), \end{aligned} \quad (7.3)$$

где  $C_k$  – произвольные постоянные;

$$u_k(\xi) = 1 - \nu - 2\nu_1\nu_2 + O(\varepsilon),$$

$$\nu_k(\xi) = 4G_0^2 E_0(1 + \nu)^2 - (1 - \nu - 2\nu_1\nu_2)\xi + O(\varepsilon),$$

$$Q_{rk} = O(\varepsilon),$$

$$Q_{\alpha k} = b_{11}^{-1}(b_{11}b_{22} - b_{12}^2)\alpha_k^2\xi - (b_{22} + b_{23}) + O(\varepsilon),$$

$$Q_{\varphi k} = (b_{11}b_{23} - b_{12}^2)[b_{11}^{-1}\alpha_k^2\xi - (b_{11}b_{22} - b_{12}^2)(b_{22} + b_{23})O(\varepsilon)].$$

Здесь следует обратить внимание на следующее обстоятельство. Решение уравнения (5.17), вообще говоря, может быть записано через функции Лежандра. Однако, как показано в [17], более удобно использовать приближенные методы. Здесь следует рассматривать отдельно два случая:

1) Оболочка не содержит ни один из полюсов  $0, \pi$ .

2) Оболочка содержит хотя бы один из этих полюсов.

В первом случае для приближенного интегрирования удобно использовать асимптотические методы, о чем подробно сказано в [1]. Что касается второго случая (рис. 2.3), здесь уже асимптотический метод интегрирования не может дать приближенного решения задачи ни при какой относительной толщине оболочки  $\varepsilon$ . Дело в том, что асимптотические приближения теряют точность в окрестности вершины  $\theta = 0$ . В данном случае необходимо отобрать лишь те из решений уравнения (5.17), которые остаются неограниченными при  $\theta = 0$ . Указанные решения построены в [36], где и даны приближенные методы их расчета. Поэтому на них останавливаться не будем.

Будем считать, что оболочка не содержит ни один из полюсов  $0, \pi$ . Приведем окончательный результат.

$$m(\theta) = A_1 e^{\frac{z_k \theta}{\sqrt{\varepsilon}}} + B_1 e^{-\frac{z_k \theta}{\sqrt{\varepsilon}}}. \quad (7.4)$$

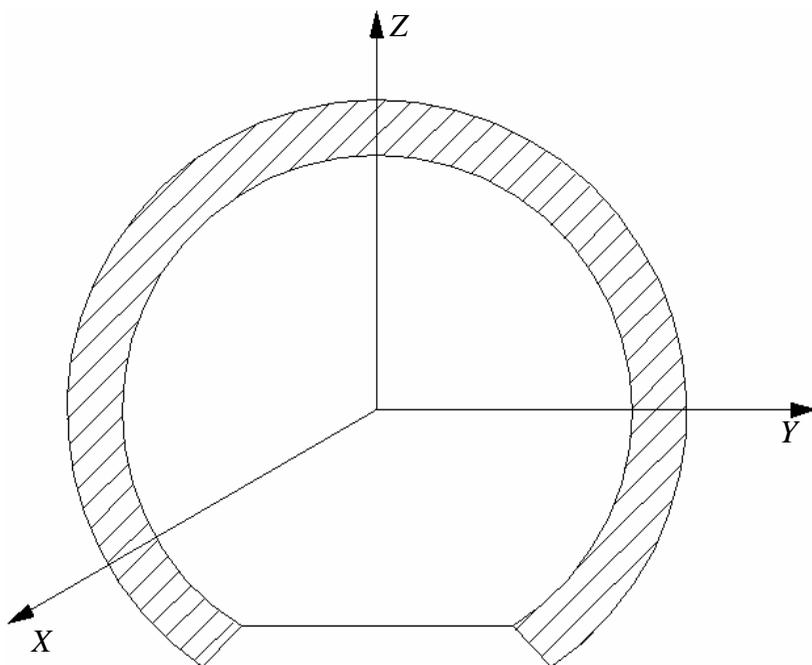


Рис. 2.3

Из (7.4) следует, что при достаточно малом  $\varepsilon$ , величина  $m(\theta)$  имеет характер краевого эффекта, изменяющегося как показательная функция с показателем  $\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$ . Таким образом, вторая группа корней определяет краевые эффекты, аналогичные краевому эффекту прикладной теории оболочек.

В случае третьей группы корней для перемещений и напряжений получаем два класса решений, первый из которых соответствует нулям функции

$$(s_2 - s_1)sh(s_1 + s_2)\delta_n + (s_1 + s_2)sh(s_2 - s_1)\delta_n,$$

а второй— нулям функции.

$$(s_2 - s_1)sh(s_1 + s_2)\delta_n - (s_1 + s_2)sh(s_2 - s_1)\delta_n.$$

Они имеют одинаковую структуру и могут быть представлены следующими выражениями:

$$\begin{aligned} u_r &= r_0 \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} B_n \delta_n \left[ (s_1^2 - b_{22})(b_{12}s_2^2 + b_{22})chs_2\delta_nchs_1\delta_n\xi - \right. \\ &\quad \left. - (s_2^2 - b_{22})(b_{12}s_1^2 + b_{22})chs_1\delta_nchs_2\delta_n\xi + O(\varepsilon) \right] m_n(\theta), \\ u_\theta &= -(b_{12} + 1)\varepsilon r_0 \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} B_n \left[ s_1(b_{12}s_2^2 + b_{22})chs_2\delta_nshs_1\delta_n\xi - \right. \\ &\quad \left. - s_2(b_{12}s_1^2 + b_{22})chs_1\delta_nshs_2\delta_n\xi + O(\varepsilon) \right] \frac{dm_n(\theta)}{d\theta}, \\ \sigma_r &= G_1(b_{12}s_1^2 + b_{22})(b_{12}s_2^2 + b_{22})\varepsilon^{-1} \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} B_n \delta_n^2 \times \\ &\quad \times [s_1chs_2\delta_nshs_1\delta_n\xi - s_2chs_1\delta_nshs_2\delta_n\xi + O(\varepsilon)] m_n(\theta), \quad (7.5) \\ \sigma_\varphi &= G_1\varepsilon^{-1} \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} B_n \delta_n^2 \left[ s_1(b_{12}s_2^2 + b_{22})(b_{12}s_1^2 - 2b_{12}G_0 + b_{23}) \times \right. \\ &\quad \times chs_2\delta_nshs_1\delta_n\xi - s_2(b_{12}s_1^2 + b_{22})(b_{12}s_2^2 - 2b_{12}G_0 + b_{23}) \times \\ &\quad \times chs_1\delta_nshs_2\delta_n\xi + O(\varepsilon) \left. \right] m_n(\theta), \\ \sigma_\theta &= G_1\varepsilon^{-1} \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} B_n \delta_n^2 \left[ s_1(b_{12}s_2^2 + b_{22})(b_{11}s_1^2 - b_{12}^2 + b_{12} - b_{11}b_{22}) \times \right. \\ &\quad \times chs_2\delta_nshs_1\delta_n\xi - s_2(b_{12}s_1^2 + b_{22})(b_{11}s_2^2 + b_{12}^2 + b_{12} - b_{11}b_{22}) \times \\ &\quad \times chs_1\delta_nshs_2\delta_n\xi + O(\varepsilon) \left. \right] m_n(\theta). \end{aligned}$$

В случае, когда  $q_1 > 0$  и корни квадратного уравнения (5.21) кратны, решения имеют вид:

$$u_r = r_0(p^2 - b_{22}) \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} D_n \delta_n \left\{ \left[ \frac{2b_{22}(b_{12} + 1)p}{p^2 - b_{22}} chp\delta_n - \right. \right.$$

$$\begin{aligned}
& -\delta_n(b_{12}p^2 + b_{22})shp\delta_n \left[ chp\delta_n\xi + \delta_n\xi(b_{12}p^2 + b_{22}) \right] \times \\
& \times chp\delta_nshp\delta_n\xi + O(\varepsilon) \} m_n(\theta), \\
u_\theta &= r_0\varepsilon(b_{12} + 1) \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} D_n \left\{ (b_{12}p^2 - b_{22})chp\delta_n + \right. \\
& + p\delta_n(b_{12}p^2 + b_{22})shp\delta_n \left. \right\} shp\delta_n\xi - p\delta_n\xi(b_{12}p^2 + b_{22}) \times \\
& \times chp\delta_nchp\delta_n\xi + O(\varepsilon) \} \frac{dm_n(\theta)}{d\theta}, \\
\sigma_r &= G_1\varepsilon^{-1}(b_{12}p^2 + b_{22})^2 \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} D_n\delta_n^2 [(chp\delta_n - p\delta_nshp\delta_n) \times \\
& \times shp\delta_n\xi + p\delta_n\xichp\delta_nchp\delta_n\xi + O(\varepsilon)] m_n(\theta), \\
\sigma_\varphi &= G_1\varepsilon^{-1} \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} D_n\delta_n^2 \left\langle \left[ 2b_{12}b_{22}(b_{12} + 1)p^2(b_{12}p^2 - b_{22}) \times \right. \right. \\
& \times (b_{12}p^2 + b_{22}) - b_{23}(b_{12} + 1)(b_{12}p^2 - b_{22}) \left. \right] chp\delta_n - p\delta_n \times \quad (7.6) \\
& \times (b_{12}p^2 + b_{22})(b_{12}p^2 - 2b_{12}G_0 + b_{23})shp\delta_n \left. \right\} shp\delta_n\xi + p\delta_n \times \\
& \times (b_{12}p^2 + b_{22})(b_{12}p^2 - 2b_{12}G_0 + b_{23})\xi chp\delta_nchp\delta_n\xi + O(\varepsilon) \} m_n(\theta), \\
\sigma_\theta &= G_1\varepsilon^{-1}(b_{12}p^2 + b_{22})(b_{12}p^2 + b_{12}^2 + b_{12} - b_{11}b_{22}) \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} D_n\delta_n^2 \times \\
& \times [(chp\delta_n + p\delta_nshp\delta_n)shp\delta_n\xi - p\delta_n\xichp\delta_nchp\delta_n\xi + O(\varepsilon)] m_n(\theta), \\
\tau_{r\theta} &= G_1(b_{12}p^2 + b_{22})^2 \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} D_n\delta_n [shp\delta_nchp\delta_n\xi - \\
& - \xi chp\delta_nshp\delta_n\xi + O(\varepsilon)] \frac{dm_n(\theta)}{d\theta}, \\
sh2p\delta_n + 2p\delta_n &= 0.
\end{aligned}$$

Аналогично в случае  $Nsh2\beta\delta_n + \beta \sin 2N\delta_n = 0$ ,

$$u_r = r_0 \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} E_n [(a_1\Delta_{1n} - a_2\Delta_{2n})ch\beta\delta_n\xi \cos N\delta_n\xi -$$

$$\begin{aligned}
& - (a_1 \Delta_{2n} + a_2 \Delta_{1n}) sh \beta \delta_n \xi \sin N \delta_n \xi + O(\varepsilon)] m_n(\theta), \\
u_\theta &= (b_{12} + 1) r_0 \varepsilon \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} E_n [(\beta \Delta_{2n} - N \Delta_{1n}) ch \beta \delta_n \xi sh N \delta_n \xi + \\
& + (N \Delta_{2n} + \beta \Delta_{1n}) sh \beta \delta_n \xi \cos N \delta_n \xi + O(\varepsilon)] \frac{dm_n(\theta)}{d\theta}, \\
\sigma_r &= G_1 \varepsilon^{-1} \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} E_n \delta_n^2 \{ [\beta b_{12} a_2 - N b_{12} a_1 - \beta N b_{22} (b_{12} + 1)] \Delta_{2n} - \\
& - [\beta b_{12} a_1 + N b_{12} a_2 + \beta^2 b_{22} (b_{12} + 1)] \Delta_{1n} \} sh \beta \delta_n \xi ch N \delta_n \xi + \\
& + \{ [N b_{12} a_1 - \beta b_{12} a_2 - N b_{22} (b_{12} + 1)] \Delta_{1n} - [N b_{12} a_2 + \beta b_{12} a_1 + \\
& + \beta b_{22} (b_{12} + 1)] \Delta_{2n} \} \cos \beta \delta_n \xi sh N \delta_n \xi + O(\varepsilon) m_n(\theta), \\
\sigma_\varphi &= G_1 \varepsilon^{-1} \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} E_n \delta_n^2 \{ [\beta b_{12} a_2 - N b_{12} a_1 - \beta N b_{23} (b_{12} + 1)] \times \\
& \times \Delta_{2n} - [\beta b_{12} a_1 + N b_{12} a_2 + \beta^2 b_{23} (b_{12} + 1)] \Delta_{1n} \} sh \beta \delta_n \xi ch N \times \quad (7.7) \\
& \times \delta_n \xi + \{ [N b_{12} a_1 - \beta b_{12} a_2 + N b_{23} (b_{12} + 1)] \Delta_{1n} - [N b_{12} a_2 + \\
& + \beta b_{12} a_1 + \beta b_{23} (b_{12} + 1)] \Delta_{2n} \} \cos \beta \delta_n \xi sh N \delta_n \xi + O(\varepsilon) m_n(\theta), \\
\sigma_\theta &= G_1 \varepsilon^{-1} \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} E_n \delta_n^2 \{ [\beta b_{11} a_2 - N b_{11} a_1 - \beta N b_{12} (b_{12} + 1)] \times \\
& \times \Delta_{2n} - [\beta b_{11} a_1 + N b_{11} a_2 + \beta^2 b_{12} (b_{12} + 1)] \Delta_{1n} \} sh \beta \delta_n \xi ch N \times \\
& \times \delta_n \xi + \{ [N b_{11} a_1 - \beta b_{11} a_2 + N b_{12} (b_{12} + 1)] \Delta_{1n} - [N b_{11} a_2 + \\
& + \beta b_{11} a_1 + \beta b_{12} (b_{12} + 1)] \Delta_{2n} \} \cos \beta \delta_n \xi sh N \delta_n \xi + O(\varepsilon) m_n(\theta), \\
\tau_{r\theta} &= G_1 (N^2 + \beta^2) \left[ b_{12}^2 + 2b_{22} (N^2 - \beta^2) + b_{22}^2 (N^2 + \beta^2)^2 \right] \times \\
& \times \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} E_n \delta_n \left[ \cos \beta \delta_n sh N \delta_n \sin \beta \delta_n \xi ch N \delta_n \xi - \right. \\
& \left. - \sin \beta \delta_n ch N \delta_n \cos \beta \delta_n \xi sh N \delta_n \xi + O(\varepsilon) \right] \frac{dm_n(\theta)}{d\theta},
\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
a_1 &= 1 - b_{22}(N^2 - \beta^2), \quad a_2 = 2b_{22}\beta N, \\
\Delta_{1n} &= N[b_{12} + b_{22}(N^2 + \beta^2)]\sin \beta\delta_n chN\delta_n + \\
&+ \beta[b_{12} - b_{22}(N^2 + \beta^2)]\cos \beta\delta_n shN\delta_n, \\
\Delta_{2n} &= -\beta[b_{12} - b_{22}(N^2 + \beta^2)]\sin \beta\delta_n chN\delta_n + \\
&+ N[b_{12} - b_{22}(N^2 + \beta^2)]\cos \beta\delta_n shN\delta_n.
\end{aligned}$$

Здесь  $B_n, D_n, E_n$  – произвольные постоянные.

$$\frac{d^2 m_n(\theta)}{d\theta^2} + \frac{\delta_n^2}{\varepsilon^2} m_n(\theta) = 0.$$

Выражения для  $n = 2, 4, 6, \dots$  получаются из формул (7.5), (7.6), (7.7) заменой  $chx$  на  $shx$  и  $shx$  на  $-chx$ ,  $\cos x$  на  $\sin x$  и  $\sin x$  на  $-\cos x$  соответственно. В формулах (7.5), (7.6), (7.7) заменяя  $s_1, s_2, p$  на  $is_1, is_2, ip$  соответственно, получаем решение случаев 3 и 4.

В работе [40] выполнены исследования корней уравнений (6.8), (6.9), (6.10) и разработана методика их вычисления. Характер этих корней существенно влияет на общую картину напряженно-деформированного состояния оболочки.

В случае существенной анизотропии, имеющей место при больших значениях  $G_0$ , погранслои Сен-Венана затухает весьма слабо и решения (7.5), (7.6), (7.7) следует причислить к проникающим решениям. Поэтому в этом случае напряженно-деформированное состояние трансверсально-изотропной и изотропной оболочки качественно отличаются.

Рассмотрим связь однородных решений с главным вектором напряжений  $P$ , действующих в сечении  $\theta = const$ . Имеем:

$$P = \int_0^{2\pi} \int_{R_1}^{R_2} (-\sigma_\theta \sin \theta + \tau_{r\theta} \cos \theta) r \sin \theta d\varphi dr. \quad (7.8)$$

Представим напряжения  $\sigma_\theta$  и  $\tau_{r\theta}$  в виде:

$$\begin{aligned}\sigma_\theta &= \sigma_\theta^0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[ Q_1^{(n)} m_n(\theta) + Q_2^{(n)} \operatorname{ctg} \theta \frac{dm_n(\theta)}{d\theta} \right], \\ \tau_{r\theta} &= \tau_{r\theta}^0 + \sum_{n=1}^{\infty} T_n(\xi) \frac{dm_n(\theta)}{d\theta}.\end{aligned}\quad (7.9)$$

Слагаемые  $\sigma_\theta^0, \tau_{r\theta}^0$  соответствуют собственным значениям

$z = -\frac{3}{2}$ . Во второе слагаемое включены напряжения второй и третьей групп решений. Подставляя (7.9) в (7.8), получаем

$$P = P_0 + 2\pi r_0^2 \sum_{n=1}^{\infty} \left( -b_{1n} \sin \theta m_n(\theta) + b_{2n} \cos \theta \frac{dm_n(\theta)}{d\theta} \right), \quad (7.10)$$

где

$$\begin{aligned}b_{1n} &= \int_{-1}^1 Q_1^{(n)}(\xi) e^{2\varepsilon\xi} d\xi, \\ b_{2n} &= \int_{-1}^1 [T_n(\xi) - Q_2^{(n)}(\xi)] e^{2\varepsilon\xi} d\xi.\end{aligned}$$

Докажем, что все  $b_{1n}$  и  $b_{2n}$  ( $n = 1, 2, 3, \dots$ ) равны нулю.

Для этого рассмотрим следующую краевую задачу при  $\theta = \theta_j$  ( $j = 1, 2$ ).

$$\begin{aligned}\sigma_\theta &= Q_1^{(k)} m_k(\theta_j) + Q_2^{(k)} \operatorname{ctg} \theta_j \frac{dm_k(\theta_j)}{d\theta}, \\ \tau_{r\theta} &= T_k(\xi) \frac{dm_k(\theta_j)}{d\theta}.\end{aligned}\quad (7.11)$$

Решением этой задачи являются  $k$ -тые слагаемые в суммах формул (7.9).

$$\sigma_{\theta} = Q_1^{(k)} m_k(\theta) + Q_2^{(k)} \operatorname{ctg} \theta \frac{dm_k(\theta)}{d\theta},$$

$$\tau_{r\theta} = T_k(\xi) \frac{dm_k(\theta)}{d\theta}.$$

Главный вектор, который соответствует напряженному состоянию задачи (7.9) в сечении  $\theta = \text{const}$ , приводится к следующему виду:

$$P_k = 2\pi r_0^2 \sin \theta \left[ -b_{1k} \sin \theta m_k(\theta) + b_{2k} \cos \theta \frac{dm_k(\theta)}{d\theta} \right] \quad (7.12)$$

Согласно условию разрешимости задачи теории упругости вектор  $P_k$  не должен зависеть от переменной  $\theta$ . Однако в соотношении (7.12) правая часть в силу линейной независимости  $\sin \theta m_k(\theta)$  и  $\cos \theta \frac{dm_k(\theta)}{d\theta}$  зависит от  $\theta$ . Отсюда следует, что  $P_k = 0$  и  $b_{1k} = b_{2k} = 0$  для любого  $k$  ( $k = 1, 2, \dots$ ). Таким образом, для главного вектора  $P$  получаем  $P = 2\pi r_0^2 G_1 A \varepsilon$ .

Напряженное состояние, соответствующее нулям второй и третьей групп, является самоуравновешенным в каждом сечении  $\theta = \text{const}$ .

Подсчитаем в сечении  $\theta = \text{const}$  изгибающий момент  $M$  и перерезывающую силу  $Q$  для второй и третьей групп решений.

Рассмотрим решение (7.3). Оно имеет характер краевого эффекта с показателем затухания порядка  $O(\varepsilon^{-1/2})$  относительно  $\varepsilon$ . Представим постоянные  $C_k$  ( $k = 1, 2, 3, 4$ ) в виде

$$C_k = C_{k0} + \varepsilon C_{k1} + \dots$$

Имеем

$$M = \int_{R_1}^{R_2} \sigma_{\theta}(r, \theta)(r - R_0)r \sin \theta dr, \quad R_0 = \frac{1}{2}(R_1 + R_2),$$

$$Q = \int_{R_1}^{R_2} \tau_{r\theta}(r, \theta)r \sin \theta dr.$$
(7.13)

Подставляя напряжения в формулы (7.13), для второй группы решений получаем выражения в переменных  $\xi, \theta$ .

$$M_2 = r_0^3 \sin \theta \sum_{k=1}^4 C_{k0} m_k(\theta) \int_{-1}^1 Q_{\theta k}(\xi)(1 - ch\xi) d\xi + O(\varepsilon),$$

$$Q_2 = r_0^2 \sin \theta \sum_{k=1}^4 C_{k0} \frac{dm_k(\theta)}{d\theta} \int_{-1}^1 T_k(\xi) d\xi + O(\varepsilon).$$
(7.14)

Аналогично для напряжений третьей группы получаем

$$M_3 \sim O(\varepsilon), \quad Q_3 \sim O(\varepsilon).$$

Таким образом, главная часть изгибающего момента и перерезывающей силы определяют решение второй группы. Разлагая изгибающие моменты  $M_j$  ( $j=1,2$ ) и перерезывающие силы  $Q_j$ , действующие на конических поверхностях  $\theta = \theta_k$ , в ряды по  $\varepsilon$

$$M_j = M_{j0} + \varepsilon M_{j1} + \dots, \quad Q_j = Q_{j0} + \varepsilon Q_{j1} + \dots,$$

для определения постоянных  $C_{k0}$  ( $k=1,2,3,4$ ), получаем систему

$$M_{j0} = r_0^3 \sin \theta_j \sum_{k=1}^4 C_{k0} m_k(\theta_j) \int_{-1}^1 Q_{\theta k}(\xi)(1 - ch\xi) d\xi,$$

$$Q_{j0} = r_0^2 \sin \theta_j \sum_{k=1}^4 C_{k0} \frac{dm_k(\theta_j)}{d\theta} \int_{-1}^1 T_k(\xi) d\xi, \quad (j=1,2).$$

Таким образом, постоянные  $C_{k0}$  определяются через главные части изгибающих моментов и перерезывающих сил на боковой поверхности слоя.

Решение (7.2), (7.3) определяют внутреннее напряженно-деформированное состояние оболочки. Первые члены их асимптотических разложений по параметру тонкостенности  $\varepsilon$  определяют безмоментное напряженное состояние. В первом члене асимптотики их можно рассматривать как решение по прикладной теории оболочек.

Напряженное состояние, соответствующее решениям (7.5), (7.6), (7.7) имеет характер пограничного слоя. Первые члены его асимптотического разложения полностью эквивалентны краевому эффекту Сен-Венана трансверсально-изотропной плиты [37].

### **§8. Обобщенные условия ортогональности однородных решений. Удовлетворение граничных условий на боковой поверхности сферы**

Как известно, соотношения ортогональности Шиффа-Папковича сыграли важную роль в разработке методов решения основных краевых задач теории упругости.

В работе [1] показано, что эти соотношения в задачах теории упругости всегда имеют место, так как они являются следствием общей теоремы взаимности работ Бетти. Ниже эти соотношения устанавливаются для трансверсально-изотропного сферического слоя, позволяющие точно решить задачу теории упругости для трансверсально-изотропного сферического слоя при смешанных граничных условиях на лицевых поверхностях.

$$\sigma_r = 0, \quad \tau_{r\theta} = 0 \quad \text{при } r = R_n \quad (n = 1, 2), \quad (8.1)$$

$$u_r = 0, \quad u_\theta = 0 \quad \text{при } r = R_n \quad (n = 1, 2), \quad (8.2)$$

$$u_r = 0, \quad \tau_{r\theta} = 0 \quad \text{при } r = R_n \quad (n = 1, 2), \quad (8.3)$$

$$\sigma_r = 0, \quad u_\theta = 0 \quad \text{при } r = R_n \quad (n = 1, 2), \quad (8.4)$$

Согласно (5.25) однородные решения имеют вид:

$$\begin{aligned}
u_r &= u_k(r)m_k(\theta), \\
u_\theta &= v_k(r)\frac{dm_k(\theta)}{d\theta}, \\
\sigma_\theta &= G_1\left[\sigma_{1k}(r)m_k(\theta) - \sigma_{2k}(r)\frac{dm_k(\theta)}{d\theta}\right], \\
\tau_{r\theta} &= G_1T_k(r)\frac{dm_k(\theta)}{d\theta},
\end{aligned} \tag{8.5}$$

где

$$\begin{aligned}
\sigma_{1k}(r) &= b_{12}u'_k(r) + \frac{1}{r}(b_{22} + b_{23})u_k(r) - \frac{b_{22}}{r}\left(z_k^2 - \frac{1}{4}\right)v_k(r), \\
\sigma_{2k}(r) &= 2G_0v_k(r), \quad T_k(r) = \frac{1}{r}u_k(r) + v'_k(r) - \frac{1}{r}v_k(r).
\end{aligned}$$

Пусть  $u_r^i, u_\theta^i, \sigma_\theta^i, \tau_{r\theta}^i$  ( $i = 1, 2$ ) перемещения и напряжения первого и второго состояний. Тогда согласно теореме Бетти для любого  $\theta$  справедливо равенство

$$\int_{R_1}^{R_2} (u_\theta^1 \sigma_\theta^2 + u_r^1 \tau_{r\theta}^2) r \sin \theta dr = \int_{R_1}^{R_2} (u_\theta^2 \sigma_\theta^1 + u_r^2 \tau_{r\theta}^1) r \sin \theta dr. \tag{8.6}$$

Подставляя (8.5) в (8.6), получаем

$$\begin{aligned}
&\cos \theta \frac{dm_k(\theta)}{d\theta} \frac{dm_n(\theta)}{d\theta} \int_{R_1}^{R_2} (\sigma_{2k} v_n - \sigma_{2n} v_k) r dr + \\
&+ \sin \theta m_n(\theta) \frac{dm_k(\theta)}{d\theta} \int_{R_1}^{R_2} (\sigma_{1n} v_k - u_n T_k) r dr + \\
&+ \sin \theta m_k(\theta) \frac{dm_n(\theta)}{d\theta} \int_{R_1}^{R_2} (u_k T_n - \sigma_{1k} v_n) r dr = 0
\end{aligned} \tag{8.7}$$

Поскольку равенство (8.7) справедливо при любых  $\theta$ , то оно достигается лишь при условии

$$\int_{R_1}^{R_2} (\sigma_{2k} v_n - \sigma_{2n} v_k) r dr = 0, \tag{8.8}$$

$$\int_{R_1}^{R_2} (\sigma_{1n} v_k - u_n T_k) r dr = 0, \quad (8.9)$$

$$\int_{R_1}^{R_2} (u_k T_n - \sigma_{1k} v_n) r dr = 0. \quad (8.10)$$

Соотношение (8.8) тождественно выполняется, условия (8.9) и (8.11) эквивалентны. Таким образом, приходим к равенству

$$\int_{R_1}^{R_2} (u_k T_n - \sigma_{1k} v_n) r dr = 0, \quad k \neq n. \quad (8.11)$$

Из (8.11) мы получаем следующее условие ортогональности для функций  $u_n(r)$ ,  $v_n(r)$

$$\int_{R_1}^{R_2} \left\{ \left( \frac{1}{r} u_n + v_n' - \frac{1}{r} v_n \right) u_k + v_n \left[ b_{12} u_k' + \frac{1}{r} (b_{22} + b_{23}) u_k - \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{b_{22}}{r} \left( z_k^2 - \frac{1}{4} \right) v_k \right] \right\} r dr = 0, \quad k \neq n. \quad (8.12)$$

Однако при удовлетворении граничных условий на боковой поверхности оболочки, здесь обобщенные условия ортогональности однородных решений, как показано в [1], не позволяют полностью решить вопрос о точном удовлетворении граничных условий на боковой поверхности сферы. По-видимому, в общем случае кроме сведения к бесконечным системам линейных уравнений здесь ничего нельзя предложить. Тем не менее, при специальных условиях опирания края оболочки, обобщенные условия ортогональности однородных решений позволяет представить решение в форме ряда, коэффициенты которого определяются точно. Кроме этого, условие (8.11) может оказаться полезным при решении бесконечных систем уравнений, так как оно позволяет всегда удовлетворять одно из гра-

нических условий на боковой поверхности сферического слоя точно.

С помощью обобщенных условий ортогональности рассмотрим следующую задачу: пусть лицевые поверхности  $r = R_s$  ( $s = 1, 2$ ) свободны от напряжений, а на конических поверхностях  $\theta = \theta_j$  ( $j = 1, 2$ ) заданы следующие смешанные граничные условия

$$\begin{aligned} u_\theta(\xi, \theta) &= a(\xi), \quad \tau_{r\theta} = \tau(\xi) \quad \text{при } \theta = \theta_1, \\ u_\theta(\xi, \theta) &= 0, \quad \tau_{r\theta} = 0 \quad \text{при } \theta = \theta_2. \end{aligned} \quad (8.13)$$

Решение будем отыскивать в виде суммы элементарных решений

$$\begin{aligned} u_r(\xi, \theta) &= r_0 e^{\varepsilon \xi} \sum_{k=1}^{\infty} u_k(\xi) m_{z_k - \frac{1}{2}}(\cos \theta), \\ u_\theta(\xi, \theta) &= r_0 e^{\varepsilon \xi} \sum_{k=1}^{\infty} v_k(\xi) m_{z_k - \frac{1}{2}}^{(1)}(\cos \theta). \end{aligned} \quad (8.14)$$

Здесь  $z_k$ ,  $[u_k(\xi), v_k(\xi)]$  – собственные значения и собственная пара функций спектральной задачи (5.18), (5.19).

$$m_n^{(1)}(\theta) = \frac{dm_n(\theta)}{d\theta}, \quad m_{z_k - \frac{1}{2}}(\theta) = A_k P_{z_k - \frac{1}{2}}(\cos \theta) + B_k Q_{z_k - \frac{1}{2}}(\cos \theta),$$

где  $P_n(\cos \theta)$ ,  $Q_n(\cos \theta)$  – функции Лежандра первого и второго рядов, соответственно  $A_n, B_n$  – неизвестные постоянные.

Суммирование рядов (8.14) ведется по корням, расположенным в верхней полуплоскости ( $\text{Im} z_k \geq 0$ ). В соответствии с соотношениями (8.14) элементарные напряженные состояния можно представить в виде:

$$\begin{aligned}\sigma_{\theta}^{(k)}(\xi, \theta) &= \sigma_{1k}(\xi) m_{z_k - \frac{1}{2}}^{-1}(\theta) + \sigma_{2k}(\xi) \operatorname{ctg} \theta m_{z_k - \frac{1}{2}}^{(1)}(\theta), \\ \tau_{r\theta}^{(k)}(\xi, \theta) &= \sigma_{3k}(\xi) T_{z_k - \frac{1}{2}}^{(1)}(\theta),\end{aligned}\quad (8.15)$$

где

$$\begin{aligned}\sigma_{1k}(\xi) &= G_1 \varepsilon^{-1} \left[ b_{12} u'_k(\xi) + (b_{22} + b_{23}) \varepsilon u_k(\xi) - b_{22} \varepsilon \left( z_k^2 - \frac{1}{4} \right) v_k(\xi) \right], \\ \sigma_{2k}(\xi) &= -2G_0 \varepsilon^{-1} v_k(\xi), \quad \sigma_{3k} = G_1 \varepsilon^{-1} [v'_k(\xi) + \varepsilon u_k(\xi)].\end{aligned}$$

Тогда удовлетворяя граничные условия (8.13), с помощью обобщенных условий ортогональности (8.11), для  $A_k, B_k$  получаем следующие алгебраические уравнения

$$\begin{aligned}A_k P_{z_k - \frac{1}{2}}^{(1)}(\cos \theta_1) + B_k Q_{z_k - \frac{1}{2}}^{(1)}(\cos \theta_1) &= H_k, \\ A_k P_{z_k - \frac{1}{2}}^{(1)}(\cos \theta_2) + B_k Q_{z_k - \frac{1}{2}}^{(1)}(\cos \theta_2) &= 0.\end{aligned}\quad (8.16)$$

где

$$\begin{aligned}H_k(\xi) &= \Delta_H^{-1} \int_{-1}^1 e^{2\varepsilon\xi} \{ a(\xi) G_1 [b_{12} u'_k(\xi) + (b_{22} + b_{23}) \varepsilon u_k(\xi) - \\ &- b_{22} \varepsilon \left( z_k^2 - \frac{1}{4} \right) v_k(\xi)] - \varepsilon e^{\varepsilon\xi} \tau(\xi) u_k(\xi) \} d\xi, \\ \Delta_H &= \int_{-1}^1 G_1 e^{3\varepsilon\xi} \{ [b_{12} u'_k(\xi) + (b_{22} + b_{23}) \varepsilon u_k(\xi) - \\ &- b_{22} \varepsilon \left( z_k^2 - \frac{1}{4} \right) v_k(\xi)] v_k(\xi) - u_k(\xi) v'_k(\xi) - \varepsilon u_k^2(\xi) \} d\xi.\end{aligned}$$

Из линейных систем (8.16) определяются постоянные  $A_k$  и  $B_k$  при любом  $k$ .

$$A_k = H_k \Delta^{-1} Q_{z_k - \frac{1}{2}}^{(1)}(\cos \theta_2), \quad B_k = -H_k \Delta^{-1} P_{z_k - \frac{1}{2}}^{(1)}(\cos \theta_2), \quad (8.17)$$

где

$$\Delta = P_{z_k - \frac{1}{2}}^{(1)}(\cos \theta_1) Q_{z_k - \frac{1}{2}}^{(1)}(\cos \theta_2) - P_{z_k - \frac{1}{2}}^{(1)}(\cos \theta_2) Q_{z_k - \frac{1}{2}}^{(1)}(\cos \theta_1).$$

Суммирование, в порядке возрастания  $Jmz_k > 0$  необходимого количества элементарных решений, позволяют находить характеристики напряженно-деформированного состояния с заданной точностью.

Как было отмечено выше, в общем случае обобщенные условия ортогональности не позволяет точно удовлетворить граничные условия на боковой поверхности сферического слоя. Здесь для удовлетворения граничных условий на боковой поверхности удобно использовать вариационный принцип Лагранжа. Согласно этому принципу, можно записать

$$\begin{aligned} \delta R = \int_V (F_x \delta u + F_y \delta v + F_z \delta w) dV dz + \\ + \int_S (F_x \delta u + F_y \delta v + F_z \delta w) dS = 0, \end{aligned} \quad (8.18)$$

где  $F_x, F_y, F_z$  – компоненты массовых сил,  $f_x, f_y, f_z$  – компоненты поверхностных сил,  $u, v, w$  – компоненты вектора перемещений.

Пусть при  $\theta = \theta_j$  ( $j=1,2$ ) заданы следующие граничные условия.

$$\sigma_\theta = Q_j(r), \quad \tau_{r\theta} = \tau_j(r), \quad (8.19)$$

где  $Q_j(r), \tau_j(r)$  – достаточно гладкие функции и удовлетворяют условиям равновесия

$$\begin{aligned} 2\pi \sin \theta_1 \int_{-1}^1 (\tau_1 \cos \theta_1 - Q_1 \sin \theta_1) r dr = \\ = 2\pi \sin \theta_2 \int_{-1}^1 (\tau_2 \cos \theta_2 - Q_2 \sin \theta_2) r dr. \end{aligned} \quad (8.20)$$

Поскольку однородные решения удовлетворяют уравнению равновесия и граничным условиям на лицевой поверхности, вариационный принцип принимает следующую форму

$$\int_{R_1}^{R_2} [(\sigma_\theta - Q_j) \delta u_\theta + (\tau_{r\theta} - \tau_j) \delta u]_{\theta=\theta_j} r dr = 0. \quad (8.21)$$

Подставляя (5.25) в (8.21), для определения  $C_k$ , вариации которых будем считать независимыми, получим следующую бесконечную систему

$$\sum_{k=1}^{\infty} H_{nk}^j C_k = N_n^j, \quad (n=1,2,\dots) \quad (8.22)$$

Здесь

$$H_{nk}^j = \left[ 2m_k(\theta) \frac{dm_n(\theta)}{d\theta} \int_{R_1}^{R_2} \sigma_{1k}(r) v_n(r) r dr - 2ctg\theta \frac{dm_k(\theta)}{d\theta} \frac{dm_n(\theta)}{d\theta} \times \right. \\ \left. \times \int_{R_1}^{R_2} \sigma_{2k}(r) v_n(r) r dr + m_n(\theta) \frac{dm_k(\theta)}{d\theta} \int_{R_1}^{R_2} T_k(r) u_n(r) r dr \right]_{\theta=\theta_j}, \quad (8.23)$$

$$N_n^j = \left[ \frac{dm_n(\theta)}{d\theta} \int_{R_1}^{R_2} Q_j(r) v_n(r) r dr + m_n(\theta) \int_{R_1}^{R_2} T_j(r) u_n(r) r dr \right]_{\theta=\theta_j}$$

Используя малость параметра тонкостенности оболочки  $\varepsilon$ , можно построить асимптотическое решение системы (8.22). Для этого надо подставить асимптотические выражения для  $\sigma_\theta, \tau_{r\theta}, u_\theta, u_r$ , соответствующие различным группам нулей характеристического уравнения в формулы (5.23).

Как было отмечено выше, несомоуравновешанную часть напряжений (8.19) можно снять при помощи проникающего решения (7.27), причем связь постоянной  $A$  с главным вектором дается равенством  $P = 2\pi_0^2 G_1 \varepsilon A$ . Постоянные  $C_k$  ( $k=1,2,3,4$ ) определяются через главные части

изгибающего моментов и перерезывающих сил на боковой поверхности слоя. Поэтому ниже будем предполагать, что  $A = 0$ ,  $C_k = 0$ .

Для простоты, предположим, что срединная поверхность представляет собой сферу с одним круговым отверстием.

Далее, используя формулы (7.5), (7.6), (7.7), неизвестные  $B_n, D_n, E_n$  будем отыскивать в виде

$$B_n = B_{n0} + \varepsilon B_{n1} + \dots, \quad D_n = D_{n0} + \varepsilon D_{n1} + \dots$$

$$E_n = E_{n0} + \varepsilon E_{n1} + \dots, \quad (n = 1, 3, 5, \dots).$$

На основе вариационного принципа, получим следующую систему уравнений относительно  $B_{n0}, D_{n0}, E_{n0}$ .

$$\sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} \Pi_{nk} B_{n0} = H_k, \quad (k = 1, 3, \dots),$$

$$\sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} g_{nk} D_{n0} = h_k, \quad (k = 1, 3, \dots), \quad (8.24)$$

$$\sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} l_{nk} E_{n0} = F_k, \quad (k = 1, 3, \dots),$$

где

$$\Pi_{nk} = G_1 (b_{12} s_1^2 + b_{22}) (b_{12} s_2^2 + b_{22}) \exp\left(\frac{\delta_n + \delta_k}{\varepsilon} \theta_1\right) \times$$

$$\times \int_{-1}^1 \left\{ -(b_{12} + 1) \delta_n^2 [s_1 c h s_2 \delta_n s h s_1 \delta_n \xi - s_2 c h s_1 \delta_n s h s_2 \delta_n \xi] \times \right.$$

$$\times [s_1 (b_{12} s_2^2 + b_{22}) c h s_2 \delta_k s h s_1 \xi - s_2 (b_{12} s_1^2 + b_{22}) c h s_1 \delta_k s h s_2 \delta_k \xi] +$$

$$+ \delta_n \delta_k [c h s_2 \delta_n c h s_1 \delta_n \xi - c h s_1 \delta_n c h s_2 \delta_n \xi] [(s_1^2 - b_{22}) (b_{12} s_2^2 + b_{22}) \times$$

$$\times c h s_2 \delta_k c h s_1 \delta_k \xi - (s_2^2 - b_{22}) (b_{12} s_1^2 + b_{22}) c h s_1 \delta_k c h s_2 \delta_k \xi] d\xi, \quad (8.25)$$

$$H_k = \exp\left(\frac{\delta_k}{\varepsilon} \theta_1\right) \int_{-1}^1 \left\{ \tau_1(\xi) [(s_1^2 - b_{22}) (b_{12} s_2^2 + b_{22}) c h s_2 \delta_k c h s_1 \delta_k \xi - \right.$$

$$\left. - (s_2^2 - b_{22}) (b_{12} s_1^2 + b_{22}) c h s_1 \delta_k c h s_2 \delta_k \xi] \delta_k - (b_{12} + 1) \sigma_1(\xi) \times \right.$$

$$\begin{aligned}
& \times \left[ s_1 (b_{12} s_2^2 + b_{22}) \text{chs}_2 \delta_k \text{shs}_1 \delta_k \xi - s_2 (b_{12} s_1^2 + b_{22}) \text{chs}_1 \delta_k \text{shs}_2 \delta_k \xi \right] d\xi, \\
g_{nk} &= \delta_n (b_{12} p^2 + b_{22})^2 \exp\left(\frac{\delta_n + \delta_k}{\varepsilon} \theta_1\right) \int_{-1}^1 \langle \delta_n (b_{12} + 1) [(chp \delta_n - \\
& - p \delta_n \text{shp} \delta_n) \text{shp} \delta_n \xi + p \delta_n \xi \text{chp} \delta_n \text{chp} \delta_n \xi] \left\{ [(b_{12} p^2 - b_{22}) \text{chp} \delta_k + \right. \\
& + p \delta_k (b_{12} p^2 + b_{22}) \text{shp} \delta_k] \text{shp} \delta_k - p \delta_k \xi (b_{12} p^2 + b_{22}) \text{chp} \delta_k \text{chp} \delta_k \xi \left. \right\} + \\
& + \delta_k [\text{shp} \delta_n \text{chp} \delta_n \xi - \xi \text{chp} \delta_n \text{shp} \delta_n \xi] \left\{ \left[ \frac{2b_{22} (b_{12} + 1)}{p^2 - b_{22}} \text{chp} \delta_k - \right. \right. \\
& \left. \left. - \delta_k (b_{12} p^2 + b_{22}) \text{shp} \delta_k \right] \text{chp} \delta_k \xi + \delta_k \xi (b_{12} p^2 + b_{22}) \text{chp} \delta_k \text{shp} \delta_k \xi \right\} \times \\
& \times (p^2 - b_{22}) \rangle d\xi, \\
h_k &= \exp\left(\frac{\delta_k}{\varepsilon} \theta_1\right) \int_{-1}^1 \langle (b_{12} + 1) \sigma(\xi) \left\{ [(b_{12} p^2 - b_{22}) \text{chp} \delta_k + \right. \\
& + p \delta_k (b_{12} p^2 + b_{22}) \text{shp} \delta_k] \text{shp} \delta_k \xi - p \delta_k \xi (b_{12} p^2 + b_{22}) \text{chp} \delta_k \text{chp} \delta_k \xi \left. \right\} + \\
& + \delta_k (p^2 - b_{22}) \tau(\xi) \left\{ \left[ \frac{2b_{22} (b_{12} + 1)}{p^2 - b_{22}} \text{chp} \delta_k - \delta_k (b_{12} p^2 + b_{22}) \text{shp} \delta_k \right] \times \right. \\
& \times \text{chp} \delta_k \xi + \delta_k \xi (b_{12} p^2 + b_{22}) \text{chp} \delta_k \text{shp} \delta_k \xi \left. \right\} \rangle d\xi, \\
l_{nk} &= \exp\left(\frac{\delta_n + \delta_k}{\varepsilon} \theta_1\right) \int_{-1}^1 \left\{ (b_{12} + 1) \delta_n^2 \left\{ [\beta b_{12} a_2 - N b_{12} a_1 - \right. \right. \\
& - \beta N b_{22} (b_{12} + 1)] \Delta_{2n} - [\beta b_{12} a_1 + N b_{12} a_2 + \beta^2 b_{22} (b_{12} + 1)] \Delta_{1n} \left. \right\} - \\
& - \text{sh} \beta \delta_n \xi \text{ch} N \delta_n \xi + [N b_{12} a_1 - \beta b_{12} a_2 + \beta N b_{22} (b_{12} + 1)] \Delta_{1n} - \\
& - [N b_{12} a_2 + \beta b_{12} a_1 + \beta b_{22} (b_{12} + 1)] \Delta_{2n} \left. \right\} \cos \beta \delta_n \xi \text{sh} N \delta_n \xi \left. \right\} \\
& \times [(a_1 \Delta_{1k} - a_2 \Delta_{2k}) \text{ch} \beta \delta_k \xi \cos N \delta_k \xi - (a_1 \Delta_{2k} + a_2 \Delta_{1k}) \times \\
& \times \text{sh} \beta \delta_k \xi \sin N \delta_k \xi] + (b_{12} + 1) (N^2 + \beta^2) \delta_n \times \\
& \times \left[ b_{12}^2 + 2b_{22} (N^2 - \beta^2) + b_{22}^2 (N^2 + \beta^2)^2 \right] \times \tag{8.27}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \times (\cos \beta \delta_n sh N \delta_n \sin \beta \delta_n \xi ch N \delta_n \xi - \sin \beta \delta_n ch N \delta_n \cos \beta \delta_n \times \\ & \times \xi sh N \delta_n \xi) [(\beta \Delta_{2k} - N \Delta_{1k}) ch \beta \delta_k \xi sh N \delta_k \xi (N \Delta_{2k} + \beta \Delta_{1k}) \times \\ & \times sh \beta \delta_k \xi \cos N \delta_n \xi] d\xi, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F_k = \exp\left(\frac{\delta_k}{\varepsilon} \theta_1\right) \int_{-1}^1 \{ & (b_{12} + 1) \sigma(\xi) [(\beta \Delta_{2k} - N \Delta_{1k}) ch \beta \delta_k \xi \times \\ & \times sh N \delta_k \xi (N \Delta_{2k} + \beta \Delta_{1k}) sh \beta \delta_k \xi \cos N \delta_k \xi + \tau(\xi) \times \\ & \times [(a_1 \Delta_{1k} - a_2 \Delta_{2k}) ch \beta \delta_k \xi \cos N \delta_k \xi - (a_1 \Delta_{2k} + a_2 \Delta_{1k}) \times \\ & \times sh \beta \delta_k \xi \sin N \delta_k \xi] \} d\xi. \end{aligned}$$

Для  $n, k = 2, 4, \dots$  соответствующие выражения  $\Pi_{nk}$ ,  $g_{nk}$ ,  $l_{nk}$ ,  $H_k$ ,  $h_k$ ,  $F_k$  получаются из (8.25), (8.26), (8.27) заменой  $\cos x$  на  $\sin x$ ,  $\sin x$  на  $-\cos x$ ,  $chx$  на  $shx$  и  $shx$  на  $-chx$  соответственно. Определение  $B_{ni}$ ,  $D_{ni}$ ,  $E_{ni}$  ( $i = 1, 2, \dots$ ) неизменно сводится к обращению одних и тех же матриц, которые совпадают с матрицами (8.24). В свою очередь элементы этих матриц не зависят от вида нагрузки на конечных срезах слоя, а потому обращение может быть произведено один раз и навсегда. Уместно отметить, что подобные системы (8.24) уже встречались в теории толстых плит и на их основе уже неоднократно проводился численный анализ различных задач. Разрешимость и сходимость метода редукции для этих систем доказана в работе [41].

Общее решение задачи об определении напряженного и деформированного состояния оболочки может быть получено суперпозицией решений, соответствующих различным группам корней. Для простоты, будем рассматривать только те случаи, когда корни квадратного уравнения (6.7) вещественны и  $s_1 \neq s_2$ .

$$u_r = r_0 \left\langle \left( \cos \theta \ln ctg \frac{\theta}{2} - 1 \right) A + \sum_{k=1}^4 C_{k0} u_k(\xi) \exp\left(\frac{a_k}{\sqrt{\varepsilon}} \theta\right) + \right.$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} B_{n0} \delta_n \left[ (s_1^2 - b_{22}) (b_{12} s_2^2 + b_{22}) chs_2 \delta_n chs_1 \delta_n \xi - (s_2^2 - b_{22}) \right. \\
& \times \left. (b_{12} s_1^2 + b_{22}) chs_1 \delta_n chs_2 \delta_n \xi \right] \exp\left(\frac{\delta_n}{\varepsilon} \theta\right), \\
u_\theta & = r_0 \left\langle - \left( \sin \theta \ln ctg \frac{\theta}{2} + ctg \theta \right) A + \varepsilon^{-\frac{1}{2}} \sum_{k=1}^4 C_{k0} \nu_k(\xi) \times \right. \\
& \times \exp\left(\frac{a_k}{\sqrt{\varepsilon}} \theta\right) - (b_{12} + 1) \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} B_{n0} \left[ s_1 (b_{12} s_2^2 + b_{22}) chs_2 \delta_n \times \right. \\
& \times \left. shs_1 \delta_n \xi - s_2 (b_{12} s_1^2 + b_{22}) chs_1 \delta_n shs_2 \delta_n \xi \right] \exp\left(\frac{\delta_n}{\varepsilon} \theta\right) \Bigg\rangle, \\
\sigma_r & = \varepsilon^{-1} G_1 \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} B_{n0} \delta_n^2 \left[ s_1 (b_{12} s_2^2 + b_{22}) (b_{12}^2 s_1^2 + b_{12}^2 + b_{12} - b_{11} b_{22}) \times \right. \\
& \times \left. chs_2 \delta_n shs_1 \delta_n \xi - s_2 (b_{12} s_1^2 + b_{22}) (b_{12}^2 s_2^2 + b_{12}^2 + b_{12} - b_{11} b_{22}) chs_1 \times \right. \\
& \times \left. \delta_n shs_2 \delta_n \xi \right] \exp\left(\frac{\delta_n}{\varepsilon} \theta\right), \\
\sigma_\theta & = \varepsilon^{-1} G_1 \left\langle \frac{2\pi G_1 P}{\sin^2 \theta} + \sqrt{\varepsilon} \sum_{k=1}^4 C_{k0} Q_{\theta k}(\xi) \exp\left(\frac{a_k}{\sqrt{\varepsilon}} \theta\right) + \right. \\
& + (b_{12} s_1^2 + b_{22}) (b_{12} s_2^2 + b_{22}) \varepsilon^{-1} \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} B_{n0} \delta_n^2 \left[ s_1 chs_2 \delta_n shs_1 \times \right. \\
& \times \left. \delta_n \xi - s_2 chs_1 \delta_n shs_2 \delta_n \xi \right] \exp\left(\frac{\delta_n}{\varepsilon} \theta\right) \Bigg\rangle, \\
\sigma_\varphi & = \varepsilon^{-1} G_1 \left\langle \frac{2\pi G_1 P}{\sin^2 \theta} + \sqrt{\varepsilon} \sum_{k=1}^4 C_{k0} Q_{\varphi k}(\xi) \exp\left(\frac{a_k}{\sqrt{\varepsilon}} \theta\right) + \right. \\
& + \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} B_{n0} \delta_n^2 \left[ s_1 (b_{12} s_2^2 + b_{22}) (b_{12} s_1^2 - 2b_{12} G_0 + b_{23}) \times \right.
\end{aligned} \tag{8.28}$$

$$\begin{aligned} & \times chs_2\delta_n shs_1\delta_n\xi - s_2(b_{12}s_1^2 + b_{22})(b_{12}s_2^2 - 2b_{12}G_0 + b_{23}) \times \\ & \times chs_1\delta_n shs_2\delta_n\xi \exp\left(\frac{\delta_n}{\varepsilon}\theta\right) \Bigg), \end{aligned} \quad (8.29)$$

$$\begin{aligned} \tau_{r\theta} = & \varepsilon^{-1}G_1(b_{12}s_1^2 + b_{22})(b_{12}s_2^2 + b_{22}) \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} B_{n0}\delta_n^2 [chs_2\delta_n \times \\ & \times chs_1\delta_n\xi - chs_1\delta_n chs_2\delta_n\xi] \exp\left(\frac{\delta_n}{\varepsilon}\theta\right). \end{aligned}$$

В формулах (8.28), (8.29) первые и вторые члены правых частей соответствуют прикладной теории оболочек, следующие—добавки к решениям по прикладной теории. Вблизи границы  $\theta_j = const$  в напряжениях  $\sigma_\theta$ ,  $\sigma_\varphi$  добавочные члены имеют тот же порядок, что в прикладной теории, а в напряжениях  $\sigma_r$ ,  $\tau_{r\theta}$  при  $\varepsilon \rightarrow 0$  основную роль начинают играть добавочные члены.

Таким образом, выше приведенный анализ показывает, что напряженное состояние анизотропной сферической оболочки, складывается из трех типов: внутреннего напряженного состояния, простого краевого эффекта и погранслоя.

Построенные однородные решения не только вскрывают качественную структуру трехмерного решения анизотропной сферической оболочки, но и могут служить эффективным аппаратом решения конкретных задач, а также основой для оценки упрощенных теорий и построению уточненных прикладных теорий.

**§9. Асимптотический анализ решения задачи теории упругости для трансверсально-изотропной сферической оболочки при смешанных условиях на лицевой поверхности**

1. Предположим, что на лицевой поверхности слоя заданы граничные условия

$$u_r = 0, \tau_{r\theta} = 0 \text{ при } r = R_i \text{ (} i = 1, 2\text{)}. \quad (9.1)$$

Аналогично рассматривается случай, когда

$$\sigma_r = 0, u_\theta = 0 \text{ при } r = R_i \text{ (} i = 1, 2\text{)}.$$

Используя результаты первой главы и удовлетворяя однородные граничные условия (9.1), относительно  $C_1, C_2, C_3, C_4$  получаем следующую линейную систему уравнений

$$\begin{cases} d_1 e^{-\varepsilon\left(s_1+\frac{1}{2}\right)} C_1 + d_1 e^{\varepsilon\left(s_1-\frac{1}{2}\right)} C_2 + d_2 e^{-\varepsilon\left(s_2+\frac{1}{2}\right)} C_3 + d_2 e^{\varepsilon\left(s_2-\frac{1}{2}\right)} C_4 = 0 \\ B_{11} e^{-\varepsilon\left(s_1+\frac{1}{2}\right)} C_1 + B_{21} e^{\varepsilon\left(s_1-\frac{1}{2}\right)} C_2 + B_{12} e^{-\varepsilon\left(s_2+\frac{1}{2}\right)} C_3 + B_{22} e^{\varepsilon\left(s_2-\frac{1}{2}\right)} C_4 = 0 \\ d_1 e^{\varepsilon\left(s_1-\frac{1}{2}\right)} C_1 + d_1 e^{-\varepsilon\left(s_1+\frac{1}{2}\right)} C_2 + d_2 e^{\varepsilon\left(s_2-\frac{1}{2}\right)} C_3 + d_2 e^{-\varepsilon\left(s_2+\frac{1}{2}\right)} C_4 = 0 \\ B_{11} e^{\varepsilon\left(s_1-\frac{1}{2}\right)} C_1 + B_{21} e^{-\varepsilon\left(s_1+\frac{1}{2}\right)} C_2 + B_{12} e^{\varepsilon\left(s_2-\frac{1}{2}\right)} C_3 + B_{22} e^{-\varepsilon\left(s_2+\frac{1}{2}\right)} C_4 = 0 \end{cases} \quad (9.2)$$

Эта система имеет нетривиальные решения тогда и только тогда, когда

$$\Delta(z, \varepsilon) = \begin{vmatrix} d_1 e^{-\varepsilon s_1} & d_1 e^{\varepsilon s_1} & d_2 e^{-\varepsilon s_2} & d_2 e^{\varepsilon s_2} \\ B_{11} e^{-\varepsilon s_1} & B_{21} e^{\varepsilon s_1} & B_{12} e^{-\varepsilon s_2} & B_{22} e^{\varepsilon s_2} \\ d_1 e^{\varepsilon s_1} & d_1 e^{-\varepsilon s_1} & d_2 e^{\varepsilon s_2} & d_2 e^{-\varepsilon s_2} \\ B_{11} e^{\varepsilon s_1} & B_{21} e^{-\varepsilon s_1} & B_{12} e^{\varepsilon s_2} & B_{22} e^{-\varepsilon s_2} \end{vmatrix} = 0 \quad (9.3)$$

Раскрывая (9.3) получаем характеристическое уравнение для определения собственных значений  $z$  :

$$\begin{aligned} \Delta(z, \varepsilon) = & (d_2 B_{11} - d_1 B_{12})(d_2 B_{21} - d_1 B_{22})sh^2(s_2 + s_1)\varepsilon - \\ & - (d_2 B_{11} - d_1 B_{22})(d_2 B_{21} - d_1 B_{12})sh^2(s_2 - s_1)\varepsilon = 0 \end{aligned} \quad (9.4)$$

Трансцендентное уравнение (9.4) определяет счетное множество корней  $z_k$ , а соответствующие им постоянные  $C_{1n}, C_{2n}, C_{3n}, C_{4n}$  пропорциональны алгебраическим дополнениям какой-либо строки определителя системы (9.2). Выбирая в качестве решения системы алгебраические дополнения элементов первой строки, получим

$$\begin{aligned} C_{1n} = \Delta_{11}C_n, \quad C_{2n} = -\Delta_{12}C_n, \\ C_{3n} = \Delta_{13}C_n, \quad C_{4n} = -\Delta_{14}C_n \end{aligned} \quad (9.5)$$

где

$$\begin{aligned} \Delta_{11} = & B_{21}d_2(B_{22} - B_{12})e^{\varepsilon s_1} + 2^{-1}d_1B_{12}B_{22}sh2s_2\varepsilon e^{-\varepsilon s_1} - \\ & - 2^{-1}d_2B_{21}(B_{22} - B_{12})sh2s_2\varepsilon e^{-\varepsilon s_1}, \\ \Delta_{12} = & B_{11}d_2(B_{22} - B_{12})e^{-\varepsilon s_1} + 2^{-1}d_1B_{12}B_{22}sh2s_2\varepsilon e^{\varepsilon s_1} - \\ & - 2^{-1}d_2B_{11}(B_{22} - B_{12})sh2s_2\varepsilon e^{\varepsilon s_1}, \\ \Delta_{13} = & B_{22}d_1(B_{21} - B_{11})e^{\varepsilon s_2} + 2^{-1}d_2B_{11}B_{21}sh2s_1\varepsilon e^{-\varepsilon s_2} - \\ & - 2^{-1}d_1B_{22}(B_{21} - B_{11})sh2s_1\varepsilon e^{-\varepsilon s_2}, \\ \Delta_{14} = & B_{12}d_1(B_{21} - B_{11})e^{-\varepsilon s_2} + 2^{-1}d_2B_{11}B_{21}sh2s_2\varepsilon e^{\varepsilon s_2} - \\ & - 2^{-1}d_1B_{12}(B_{21} - B_{11})sh2s_1\varepsilon e^{\varepsilon s_2}. \end{aligned}$$

Суммируя по всем корням уравнения (9.4) и учитывая обобщенный закон Гука, получаем однородные решения следующего вида:

$$\begin{aligned} u_r = r_0 \sum_{k=1}^{\infty} C_k u_k(\xi) m_k(\theta), \\ u_\theta = r_0 \sum_{k=1}^{\infty} C_k v_k(\xi) \frac{dm_k(\theta)}{d\theta}, \end{aligned}$$

$$\sigma_r = G_1 \varepsilon^{-1} e^{-\varepsilon \xi} \sum_{k=1}^{\infty} C_k Q_{rk}(\xi) m_k(\theta), \quad (9.6)$$

$$\sigma_\theta = G_1 \varepsilon^{-1} e^{-\varepsilon \xi} \sum_{k=1}^{\infty} C_k \left[ Q_{\theta k}^{(1)}(\xi) m_k(\theta) + Q_{\theta k}^{(2)}(\xi) \text{ctg} \theta \frac{dm_k(\theta)}{d\theta} \right],$$

$$\sigma_\varphi = G_1 \varepsilon^{-1} e^{-\varepsilon \xi} \sum_{k=1}^{\infty} C_k \left[ Q_{\varphi k}^{(1)}(\xi) m_k(\theta) + Q_{\varphi k}^{(2)}(\xi) \text{ctg} \theta \frac{dm_k(\theta)}{d\theta} \right],$$

$$\tau_{r\theta} = G_1 \varepsilon^{-1} e^{-\varepsilon \xi} \sum_{k=1}^{\infty} C_k T_k(\xi) \frac{dm_k(\theta)}{d\theta},$$

где

$$u_k(\xi) = e^{-\frac{1}{2} \varepsilon \xi} \left[ d_1 \Delta_{11} e^{\varepsilon \Delta_{11} \xi} - d_1 \Delta_{12} e^{-\varepsilon \Delta_{11} \xi} + d_2 \Delta_{13} e^{\varepsilon \Delta_{22} \xi} - d_2 \Delta_{14} e^{-\varepsilon \Delta_{22} \xi} \right],$$

$$v_k(\xi) = e^{-\frac{1}{2} \varepsilon \xi} \left[ D_{11} \Delta_{11} e^{\varepsilon \Delta_{11} \xi} - D_{21} \Delta_{12} e^{-\varepsilon \Delta_{11} \xi} + D_{12} \Delta_{13} e^{\varepsilon \Delta_{22} \xi} - D_{22} \Delta_{14} e^{-\varepsilon \Delta_{22} \xi} \right]$$

$$Q_{rk}(\xi) = b_{11} u'_k(\xi) + b_{12} \varepsilon \left[ 2u_k(\xi) - \left( z_k^2 - \frac{1}{4} \right) v_k(\xi) \right],$$

$$Q_{\theta k}^{(1)}(\xi) = b_{12} u'_k(\xi) + (b_{22} + b_{23}) \varepsilon u_k(\xi) - b_{22} \left( z_k^2 - \frac{1}{4} \right) \varepsilon v_k(\xi),$$

$$Q_{\theta k}^{(2)}(\xi) = -2G_0 \varepsilon v_k(\xi),$$

$$Q_{\varphi k}^{(1)}(\xi) = b_{12} u'_k(\xi) + (b_{22} + b_{23}) \varepsilon u_k(\xi) - b_{23} \left( z_k^2 - \frac{1}{4} \right) \varepsilon v_k(\xi),$$

$$Q_{\varphi k}^{(2)}(\xi) = 2G_0 \varepsilon v_k(\xi),$$

$$T_k(\xi) = v'_k(\xi) + \varepsilon [u_k(\xi) - v_k(\xi)].$$

2. Дадим анализ корней характеристического уравнения. Для этой цели сначала выразим коэффициенты функции  $sh(s_1 + s_2)\varepsilon$ ,  $sh(s_2 - s_1)\varepsilon$  через  $s_1, s_2$ . Соответственно получим

$$\begin{aligned}
d_2 B_{11} - d_1 B_{12} &= (s_2 - s_1) \left\{ a_0 \left[ \left( s_1 - \frac{1}{2} \right) \left( s_2 - \frac{1}{2} \right) + a_1 \right] + (s_2 + s_1) a_2 \right\}, \\
d_2 B_{21} - d_1 B_{22} &= -(s_2 - s_1) \left\{ a_0 \left[ \left( s_1 + \frac{1}{2} \right) \left( s_2 + \frac{1}{2} \right) + a_1 \right] - (s_2 + s_1) a_2 \right\}, \\
d_2 B_{11} - d_1 B_{22} &= (s_2 + s_1) \left\{ a_0 \left[ \left( s_1 - \frac{1}{2} \right) \left( s_2 + \frac{1}{2} \right) - a_1 \right] + (s_2 - s_1) a_2 \right\}, \\
d_2 B_{21} - d_1 B_{12} &= -(s_2 + s_1) \left\{ a_0 \left[ \left( s_1 + \frac{1}{2} \right) \left( s_2 - \frac{1}{2} \right) - a_1 \right] - (s_2 - s_1) a_2 \right\},
\end{aligned} \tag{9.7}$$

где

$$\begin{aligned}
a_0 &= 2b_{12} - b_{22} - b_{23}, \quad a_1 = b_{22} \left( z^2 - \frac{1}{4} \right) - 2(G_0 - 1), \\
a_2 &= 2b_{12}(G_0 - 1) - b_{12}b_{22} \left( z^2 - \frac{1}{4} \right) - b_{22} \left( z^2 - \frac{9}{4} \right),
\end{aligned}$$

Используя (9.7), представим характеристическое уравнений в следующем виде

$$\begin{aligned}
\Delta(z, \varepsilon) &= -(s_2 - s_1)^2 \left\{ a_0^2 \left[ \left( s_1^2 - \frac{1}{4} \right) \left( s_2^2 - \frac{1}{4} \right) + \left( 2s_1s_2 + \frac{1}{2} \right) a_1 + a_1^2 \right] + \right. \\
&+ \left. (a_0 - a_2^2)(s_2 + s_1)^2 \right\} sh^2 \varepsilon (s_2 + s_1) + (s_2 + s_1)^2 \left\{ a_0^2 \left[ \left( s_1^2 - \frac{1}{4} \right) \left( s_2^2 - \frac{1}{4} \right) - \right. \\
&- \left. \left( 2s_1s_2 - \frac{1}{2} \right) a_1 + a_1^2 \right] + (a_0 - a_2^2)(s_2 - s_1)^2 \right\} sh^2 \varepsilon (s_2 - s_1) = 0 \tag{9.8}
\end{aligned}$$

Докажем, что характеристическое уравнение при  $\varepsilon \rightarrow 0$  неограниченных корней не имеет. Для этой цели разложим  $\Delta(z, \varepsilon)$  в ряд по  $\varepsilon$  и ограничимся только первыми членами разложения. Получим

$$\Delta(z, \varepsilon) \approx -4s_1s_2(s_2^2 - s_1^2)^2 \varepsilon^2 [a_0^2 + O(\varepsilon^2)] = 0 \tag{9.9}$$

Если характеристическое уравнение имело бы ограниченные корни  $z_k$ , тогда они обязательно должны быть нулями  $a_0^2$ . Но  $a_0^2$  от  $z$  не зависит, так как  $a_0^2 = (2b_{12} - b_{22} - b_{23})^2$ . Это означает, что характеристическое уравнение при  $\varepsilon \rightarrow 0$  ограниченных корней не имеет. Таким образом, все корни характеристического уравнения стремятся к бесконечности при  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

В принципе здесь возможны следующие предельные случаи:

- 1)  $\varepsilon z_k \rightarrow 0$  при  $\varepsilon \rightarrow 0$ ; 2)  $\varepsilon z_k \rightarrow \infty$  при  $\varepsilon \rightarrow 0$ ;
- 3)  $\varepsilon z_k \rightarrow const$  при  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

Как и в работе [19] можно доказать, что случаи 1 и 2 здесь не осуществимы.

В третьем случае отыскиваем  $z_n$  в виде

$$z_n = \varepsilon^{-1} \delta_n + O(\varepsilon), \quad (n=1,2,\dots) \quad (9.10)$$

Как и в первой главе, здесь возможны следующие случаи:

1.  $\lambda_{1,2} = \pm s_1 \delta_n$ ,  $\lambda_{3,4} = \pm s_2 \delta_n$ ,  $\tilde{q}_1 > 0$ ,  $\tilde{q}_1^2 - \tilde{q}_2 > 0$ ,  $s_i^2 = \delta_n^2 \tau_i$ , ( $i=1,2$ ),

$$s_{1,2} = \sqrt{\tilde{q}_1 \pm \sqrt{\tilde{q}_1^2 - \tilde{q}_2}}, \quad \tilde{q}_1^2 > \tilde{q}_2,$$

$$s_{1,2} = \alpha + i\beta = \sqrt{\tilde{q}_1 \pm i\sqrt{\tilde{q}_2 - \tilde{q}_1^2}}, \quad \tilde{q}_1^2 < \tilde{q}_2.$$

2. Корни характеристического уравнения (9.4) кратные

$$\lambda_{1,2} = \lambda_{3,4} = \pm \delta_n p, \quad \tilde{q}_1 > 0, \quad \tilde{q}_1^2 - \tilde{q}_2 = 0, \quad p = \sqrt{\tilde{q}_1}.$$

3.  $\lambda_{1,2} = \pm i s_1 \delta_n$ ,  $\lambda_{3,4} = \pm i s_2 \delta_n$ ,  $\tilde{q}_1 < 0$ ,  $\tilde{q}_1^2 - \tilde{q}_2 \neq 0$ ,

$$s_{1,2} = \sqrt{|\tilde{q}_1| + \sqrt{\tilde{q}_1^2 - \tilde{q}_2}}, \quad \tilde{q}_1^2 > \tilde{q}_2,$$

$$s_{1,2} = \sqrt{|\tilde{q}_1| \pm i\sqrt{\tilde{q}_2 - \tilde{q}_1^2}}, \quad \tilde{q}_1^2 < \tilde{q}_2.$$

$$\lambda_{1,2} = \lambda_{3,4} = \pm i \delta_n p, \quad \tilde{q}_1 < 0, \quad \tilde{q}_1^2 - \tilde{q}_2 = 0, \quad p = \sqrt{\tilde{q}_1}.$$

В случаях 1, 2 после подстановки (9.10) и (9.4) и преобразования его с помощью разложений в ряд по  $\varepsilon$  для  $\delta_n$  получаем:

$$ch(s_1 + s_2)\delta_n \pm ch(s_2 - s_1)\delta_n = 0, \quad (9.11)$$

$$ch2\alpha\delta \pm \cos 2\beta\delta_n = 0, \quad (9.12)$$

$$ch2p\delta_n \pm 1 = 0, \quad (9.13)$$

Что касается случаев 3 и 4, то для них результаты получаются из случаев 1 и 2 формальной заменой  $s_1, s_2$  на  $is_1, is_2$ ,  $p$  на  $ip$ . Эти уравнения совпадают с уравнениями, определяющими показатели краевых эффектов Сен-Венана в теории анизотропной упругости для полосы.

Приведем теперь первые члены асимптотических разложений, соответствующие различным группам корней. Для перемещений и напряжений, в первом приближении, получаем два класса решений, первое из которых соответствует нулям функции

$$ch(s_1 + s_2)\delta_n + ch(s_2 - s_1)\delta_n, \quad ch2\alpha\delta + \cos \beta\delta_n, \quad ch2p\delta_n + 1,$$

а второе нулям функции

$$ch(s_1 + s_2)\delta_n - ch(s_2 - s_1)\delta_n, \quad ch2\alpha\delta - \cos \beta\delta_n, \quad ch2p\delta_n - 1,$$

Соответственно имеем:

$$u_r^{(1)} = r_0 \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} C_n \left[ s_2^2 (s_1^2 - b_{22}) chs_2\delta_n chs_1\delta_n \xi - \right.$$

$$\left. s_1^2 (s_2^2 - b_{22}) chs_1\delta_n chs_2\delta_n \xi + O(\varepsilon) \right] m_n(\theta),$$

$$u_\theta^{(1)} = -(b_{12} + 1) \varepsilon r_0 s_1 s_2 \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} C_n \left[ s_2 chs_2\delta_n shs_1\delta_n \xi - \right.$$

$$\left. s_1 chs_1\delta_n shs_2\delta_n \xi + O(\varepsilon) \right] \frac{dm_n(\theta)}{d\theta},$$

$$\begin{aligned}
\sigma_r^{(1)} &= G_1 s_1 s_2 \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} C_n \delta_n^2 \left[ s_2 (b_{11} s_1^2 + b_{12}^2 + b_{12} - b_{11} b_{22}) \right] c h s_2 \delta_n s h s_1 \delta_n \xi - \\
&- s_1 (b_{11} s_2^2 + b_{12}^2 + b_{12} - b_{11} b_{22}) c h s_1 \delta_n s h s_2 \delta_n \xi + O(\varepsilon) \Big] m_n(\theta), \\
\sigma_\theta^{(1)} &= G_1 s_1 s_2 \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} C_n \delta_n^2 \left[ s_2 (b_{12} s_1^2 + b_{22}) \right] c h s_2 \delta_n s h s_1 \delta_n \xi - \\
&- s_1 (b_{12} s_2^2 + b_{22}) c h s_1 \delta_n s h s_2 \delta_n \xi + O(\varepsilon) \Big] m_n(\theta), \quad (9.14) \\
\sigma_\varphi^{(1)} &= G_1 s_1 s_2 \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} C_n \delta_n^2 \left[ s_2 (b_{12} s_1^2 + b_{23} + 2b_{12} - 2b_{12} G_0) \right] c h s_2 \delta_n s h s_1 \delta_n \xi - \\
&- s_1 (b_{12} s_1^2 + b_{23} + 2b_{12} - 2b_{12} G_0) c h s_1 \delta_n s h s_2 \delta_n \xi + O(\varepsilon) \Big] m_n(\theta), \\
\tau_{r\theta}^{(1)} &= -G_1 (b_{12} + 1) \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} C_n \delta_n \left[ s_2 (b_{12} s_1^2 + b_{22}) \right] c h s_2 \delta_n c h s_1 \delta_n \xi - \\
&- s_1 (b_{12} s_2^2 + b_{22}) c h s_1 \delta_n c h s_2 \delta_n \xi + O(\varepsilon) \Big] \frac{d m_n(\theta)}{d \theta}
\end{aligned}$$

Выражения для  $u_r^{(2)}, \dots, \tau_{r\theta}^{(2)}$  получаются из (9.14) простой заменой  $s_1 = \alpha + i\beta$ ,  $s_2 = \alpha - i\beta$ .

$$\begin{aligned}
u_r^{(3)} &= r_0 (b_{12} + 1) p \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} B_n \delta_n \left\{ \left[ 2b_{11} p c h p \delta_n + (b_{11} p^2 - 1) \delta_n s h p \delta_n \right] \times \right. \\
&\times c h p \delta_n \xi - (b_{11} p^2 - 1) \delta_n \xi c h p \delta_n s h p \delta_n \xi + O(\varepsilon) \Big] m_n(\theta), \\
u_\theta^{(3)} &= r_0 (b_{11} p^2 - 1)^2 \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} B_n \left[ \left( \frac{c h p \delta_n}{p} + \delta_n s h p \delta_n \right) s h p \delta_n \xi - \right. \\
&- \delta_n \xi c h p \delta_n c h p \delta_n \xi + O(\varepsilon) \Big] \frac{d m_n(\theta)}{d \theta}, \\
\sigma_r^{(3)} &= G_1 \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} B_n \delta_n^2 \left\{ \left[ (b_{11} p^4 + b_{11} p^2 + 3b_{11} b_{12} p^2 - b_{12}) \frac{c h p \delta_n}{p} + \right. \right. \\
&+ (b_{11} p^2 - 1) (b_{11} p^2 + b_{12}) \delta_n s h p \delta_n \Big] s h p \delta_n \xi - (b_{11} p^2 - 1) \times \\
&\times (b_{11} p^2 + b_{12}) \xi \delta_n c h p \delta_n c h p \delta_n \xi + O(\varepsilon) \Big] m_n(\theta), \quad (9.15)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma_{\theta}^{(3)} = & G_1 \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} B_n \delta_n^2 \left\langle \left[ \left[ b_{12}(b_{12}+1)(b_{11}p^2+1)p^2 - b_{22}(b_{11}p^2-1)^2 \right] \times \right. \right. \\ & \times \frac{chp\delta_n}{p} + \delta_n(b_{11}p^2-1) \left[ (b_{12}^2+b_{12}-b_{11}b_{22})p^2 + b_{22} \right] shp\delta_n \left. \right\rangle \times \\ & \times shp\delta_n \xi - \delta_n(b_{11}p^2-1) \left[ (b_{12}^2+b_{12}-b_{11}b_{22})p^2 + b_{22} \right] \xi chp\delta_n \times \\ & \times chp\delta_n \xi + O(\varepsilon) m_n(\theta), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma_{\varphi}^{(3)} = & G_1 \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} B_n \delta_n^2 \left\langle \left[ \left[ b_{12}(b_{12}+1)(b_{11}p^2+1)p^2 - b_{23}(b_{11}p^2-1)^2 \right] \times \right. \right. \\ & \times \frac{chp\delta_n}{p} + \delta_n(b_{11}p^2-1) \left[ (b_{12}^2+b_{12}-b_{11}b_{23})p^2 + b_{23} \right] shp\delta_n \left. \right\rangle \times \\ & \times shp\delta_n \xi - \delta_n(b_{11}p^2-1) \left[ (b_{12}^2+b_{12}-b_{11}b_{23})p^2 + b_{23} \right] \xi chp\delta_n \times \\ & \times chp\delta_n \xi + O(\varepsilon) m_n(\theta), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tau_{r\theta}^{(3)} = & G_1 \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} B_n \delta_n^2 \left[ 2b_{11}(b_{12}+1)p^2 chp\delta_n chp\delta_n \xi + p(b_{11}p^2-1) \times \right. \\ & \times (b_{11}p^2+b_{12}) (shp\delta_n chp\delta_n \xi - \xi chp\delta_n shp\delta_n \xi) + O(\varepsilon) \left. \right] \frac{dm_n(\theta)}{d\theta}, \end{aligned}$$

где  $C_n, \dots, B_n$  – неизвестные постоянные.

$$m_n''(\theta) + \frac{\delta_n^2}{\varepsilon^2} m_n(\theta) = 0.$$

Выражения для  $n = 2, 4, 6, \dots$  получаются из формул (9.14), (9.15) заменой  $chx$  на  $shx$  и  $shx$  на  $-chx$  соответственно.

Однако, как было отмечено в первой главе, при удовлетворении граничных условий на боковой поверхности оболочки, здесь обобщенные условия ортогональности однородных решений не позволяют полностью решить вопрос о точном удовлетворении граничных условий на боковой поверхности сферы. В общем случае, краевая задача сводится к решению систем линейных бесконечных алгеб-

раических уравнений. Тем не менее, при специальных условиях опирания края оболочки, обобщенные условия ортогональности однородных решений позволяют представить решение в форме ряда, коэффициенты которого определяются точно.

С помощью обобщенных условий ортогональности рассмотрим следующую задачу: пусть лицевые поверхности  $r = R_s$  ( $s = 1, 2$ ) свободны от напряжений, а на конических поверхностях  $\theta = \theta_j$  ( $j = 1, 2$ ) заданы следующие смешанные граничные условия

$$\begin{aligned} u_r(\xi, \theta) = 0, \quad \sigma_\theta = 0 & \quad \text{при } \theta = \theta_1, \\ u_r(\xi, \theta) = b(\xi), \quad \sigma_\theta = Q(\xi) & \quad \text{при } \theta = \theta_2. \end{aligned} \quad (9.16)$$

Общее решение уравнения Лежандра (1.5) имеет вид:

$$m(\theta) = A_n P_{z_n - \frac{1}{2}}(\cos \theta) + B_n Q_{z_n - \frac{1}{2}}(\cos \theta).$$

Тогда, удовлетворяя граничные условия (9.16), с помощью обобщенных условий ортогональности, для  $A_n, B_n$  получаем следующие алгебраические уравнения

$$\begin{aligned} A_k P_{z_k - \frac{1}{2}}(\cos \theta_1) + B_k Q_{z_k - \frac{1}{2}}(\cos \theta_1) &= 0 \\ A_k P_{z_k - \frac{1}{2}}(\cos \theta_2) + B_k Q_{z_k - \frac{1}{2}}(\cos \theta_2) &= H_k, \end{aligned} \quad (9.17)$$

где

$$\begin{aligned} H_k &= \Delta_k^{-1} \int_{-1}^1 e^{2\varepsilon\xi} \{b(\xi)G_1[v'_k(\xi) + \varepsilon u_k(\xi)] - Q(\xi)v_k(\xi)\} d\xi, \\ \Delta_k &= \int_{-1}^1 G_1 e^{3\varepsilon\xi} \{v_k(\xi)[b_{12}u'_k(\xi) + (b_{22} + b_{23})\varepsilon u_k(\xi) - \\ &- b_{22}\varepsilon(z_k^2 - \frac{1}{4})v_k(\xi)] - u_k(\xi)[v'_k(\xi) + \varepsilon u_k(\xi)]\} d\xi. \end{aligned}$$

Постоянные  $A_k$  и  $B_k$  определяются из линейных систем (9.17) при любом  $k$ .

$$A_k = H_k \Delta^{-1} Q_{z_k - \frac{1}{2}}(\cos \theta_2), \quad B_k = H_k \Delta^{-1} P_{z_k - \frac{1}{2}}(\cos \theta_2),$$

где

$$\Delta = P_{z_k - \frac{1}{2}}(\cos \theta_1) Q_{z_k - \frac{1}{2}}(\cos \theta_2) - P_{z_k - \frac{1}{2}}(\cos \theta_2) Q_{z_k - \frac{1}{2}}(\cos \theta_1).$$

Как и в первой главе в общем случае краевая задача сводится к решению бесконечных линейных алгебраических уравнений.

Предположим, что срединная поверхность представляет собой сферу с одним круговым отверстием. Пусть при  $\theta = \theta_1$  заданы следующие граничные условия

$$\sigma_\theta = Q(\xi), \quad \tau_{r\theta} = \tau(\xi), \quad (9.18)$$

где  $Q(\xi)$ ,  $\tau(\xi)$  – достаточно гладкие функции и удовлетворяют условиям равновесия

$$2\pi \sin \theta_1 \int_{-1}^1 (\tau \cos \theta_1 - Q \sin \theta_1) e^{2\varepsilon\xi} d\xi = P$$

Далее, используя формулы (9.14), (9.15), неизвестные  $C_n$ ,  $B_n$  будем отыскивать в виде

$$C_n = C_{n0} + \varepsilon C_{n1} + \dots, \quad B_n = B_{n0} + \varepsilon B_{n1} + \dots \quad (9.19)$$

На основе вариационного принципа, получим следующую систему уравнений относительно  $C_{n0}$ ,  $B_{n0}$ .

$$\sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} \Pi_{nk} C_{n0} = F_k, \quad (k = 1, 3, \dots),$$

$$\sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} g_{nk} B_{n0} = h_k, \quad (k = 1, 3, \dots), \quad (9.20)$$

где

$$\begin{aligned}
\Pi_{nk} &= -G_1(b_{12} + 1)\exp\left(\frac{\delta_n + \delta_k}{\varepsilon}\theta_1\right)\int_{-1}^1\{s_1^2s_2^2\delta_n^2[s_2(b_{12}s_1^2 + b_{22})\times \\
&\times chs_2\delta_nshs_1\delta_n\xi - s_1(b_{12}s_2^2 + b_{22})chs_1\delta_nshs_2\delta_n\xi][s_2chs_2\delta_kshs_1\delta_k\xi - \\
&- s_1chs_1\delta_kshs_2\delta_k\xi] + \delta_n[s_2(b_{12}s_1^2 + b_{22})chs_2\delta_nchs_1\delta_n\xi - \\
&- s_1(b_{12}s_2^2 + b_{22})chs_1\delta_nchs_2\delta_n\xi][s_2^2(s_1^2 - b_{22})chs_2\delta_kchs_1\delta_k\xi - \\
&- s_1^2(s_2^2 - b_{22})chs_1\delta_kchs_2\delta_k\xi]\}d\xi, \\
F_k &= -\exp\left(\frac{\delta_k}{\varepsilon}\theta_1\right)\int_{-1}^1\{(b_{12} + 1)s_1s_2[s_2chs_2\delta_kshs_1\delta_k\xi - s_1chs_1\delta_kshs_2\delta_k\xi]\times \\
&\times Q(\xi) - \delta_k^2[s_2^2(s_1^2 - b_{22})chs_2\delta_kchs_1\delta_k\xi - s_1^2(s_2^2 - b_{22})chs_1\delta_kchs_2\delta_k\xi]\times \\
&\times \tau(\xi)\}d\xi, \\
g_{nk} &= G_1\delta_n^2\exp\left(\frac{\delta_n + \delta_k}{\varepsilon}\theta_1\right)\int_{-1}^1\langle p\delta_k(b_{12} + 1)[2b_{11}(b_{12} + 1)p^2chp\delta_n \times \\
&\times chp\delta_n\xi + p(b_{11}p^2 - 1)(b_{11}p^2 + b_{22})(shp\delta_nchp\delta_n\xi - \xi chp\delta_nshp\delta_n\xi)]\times \\
&\times \{[2b_{11}pchp\delta_k + \delta_k(b_{11}p^2 - 1)shp\delta_k]chp\delta_k\xi - \delta_k(b_{11}p^2 - 1)\times \\
&\times \xi chp\delta_kshp\delta_k\xi\} + \left[\left[b_{12}(b_{12} + 1)(b_{11}p^2 + 1)p^2 - b_{22}(b_{11}p^2 - 1)^2\right]\times \right. \\
&\times p^{-1}chp\delta_n + \delta_n(b_{11}p^2 - 1)\left[(b_{12}^2 + b_{12} - b_{11}b_{22})p^2 + b_{22}\right]shp\delta_n\}shp\delta_n\xi - \\
&- \delta_n(b_{11}p^2 - 1)\left[(b_{12}^2 + b_{12} - b_{11}b_{22})p^2 + b_{22}\right]\xi chp\delta_nchp\delta_n\xi]\times \\
&\times (b_{11}p^2 - 1)^2\left[(p^{-1}chp\delta_k + \delta_kshp\delta_k)shp\delta_k\xi - \xi\delta_kchp\delta_kchp\delta_k\xi\right]d\xi, \\
h_k &= \exp\left(\frac{\delta_k}{\varepsilon}\theta_1\right)\int_{-1}^1\langle Q(\xi)\left[(p^{-1}chp\delta_k + \delta_kshp\delta_k)shp\delta_k\xi - \right. \\
&- \xi\delta_kchp\delta_kchp\delta_k\xi] + (b_{12} + 1)p\delta_k\tau(\xi)\{[2b_{11}pchp\delta_k + \\
&+ \delta_k(b_{11}p^2 - 1)shp\delta_k]chp\delta_k\xi - \delta_k(b_{11}p^2 - 1)\xi chp\delta_kshp\delta_k\xi\}\rangle d\xi
\end{aligned}$$

Система (9.20) решается методом урезания.

## §10. Исследование упругого равновесия трансверсально-изотропной сферической оболочки с закрепленной лицевой поверхностью

На основе метода однородных решений исследуется асимптотическое поведение решения задачи теории упругости для трансверсально-изотропной сферической оболочки при жесткой заделке лицевой поверхности.

Показано, что решение данной задачи в первом члене асимптотики совпадает с решением аналогичной задачи теории упругости для анизотропной полосы. С помощью вариационного принципа краевая задача сведена к решению бесконечных алгебраических уравнений.

Будем считать, что лицевые поверхности границы жестко заделаны

$$u_r = 0, \quad u_\theta = 0 \quad \text{при } r = R_s \quad (s = 1, 2), \quad (10.1)$$

а в остальной части границы выполняются условия

$$\sigma_\theta = f_{1n}(r), \quad \tau_{r\theta} = f_{2n}(r) \quad \text{при } \theta = \theta_n \quad (n = 1, 2), \quad (10.2)$$

где  $f_{1n}(r)$ ,  $f_{2n}(r)$  – достаточно гладкие функции и удовлетворяют условиям равновесия.

Используя результаты первой главы и удовлетворяя однородные граничные условия (10.1), относительно  $C_1, C_2, C_3, C_4$  получаем следующую линейную систему уравнений

$$\begin{cases} d_1 e^{-\varepsilon_1} C_1 + d_1 e^{\varepsilon_1} C_2 + d_2 e^{-\varepsilon_2} C_3 + d_2 e^{\varepsilon_2} C_4 = 0 \\ D_{11} e^{-\varepsilon_1} C_1 + D_{21} e^{\varepsilon_1} C_2 + D_{12} e^{-\varepsilon_2} C_3 + D_{22} e^{\varepsilon_2} C_4 = 0 \\ d_1 e^{\varepsilon_1} C_1 + d_1 e^{-\varepsilon_1} C_2 + d_2 e^{\varepsilon_2} C_3 + d_2 e^{-\varepsilon_2} C_4 = 0 \\ D_{11} e^{\varepsilon_1} C_1 + D_{21} e^{-\varepsilon_1} C_2 + D_{12} e^{\varepsilon_2} C_3 + D_{22} e^{-\varepsilon_2} C_4 = 0 \end{cases} \quad (10.3)$$

Из условия существования нетривиальных решений этой системы, получаем характеристическое уравнение для определения собственных значений  $z$  :

$$D(s_1, s_2, \varepsilon) = 4[A_1 sh^2(s_2 + s_1)\varepsilon - A_2 sh^2(s_2 - s_1)\varepsilon] = 0 \quad , \quad (10.4)$$

где

$$A_1 = (s_2 - s_1)^2 \left\{ (b_{12} + 1)^2 s_1^2 s_2^2 + 2(b_{12} + 1)E_2 s_1 s_2 - 2(b_{12} + 1)^2 \times \right. \\ \left. \times E_1 s_1 s_2 - E_2^2 (s_2 + s_1)^2 + [E_2 - (b_{12} + 1)E_1]^2 \right\} \\ A_2 = (s_2 + s_1)^2 \left\{ (b_{12} + 1)^2 s_1^2 s_2^2 - 2(b_{12} + 1)E_2 s_1 s_2 + 2(b_{12} + 1)^2 \times \right. \\ \left. \times E_1 s_1 s_2 - E_2^2 (s_2 - s_1)^2 - [E_2 - (b_{12} + 1)E_1]^2 \right\} \\ E_1 = 2(G_0 - 1) - b_{22} \left( z^2 - \frac{1}{4} \right), \quad E_2 = b_{22} = b_{23} + 2.$$

Постоянные  $C_{1n}, C_{2n}, C_{3n}, C_{4n}$  пропорциональны алгебраическим дополнениям какой-либо строки определителя системы (10.3). Выбирая в качестве решения системы алгебраические дополнения элементов первой строки, получим

$$C_{1n} = \Delta_{11} C_n, \quad C_{2n} = -\Delta_{12} C_n, \\ C_{3n} = \Delta_{13} C_n, \quad C_{4n} = -\Delta_{14} C_n,$$

где

$$\Delta_{11} = D_{21} d_2 (D_{22} - D_{12}) e^{\varepsilon s_1} + d_1 D_{12} D_{22} e^{-\varepsilon s_1} (e^{2\varepsilon s_2} - e^{-2\varepsilon s_2}) - \\ - d_2 D_{21} e^{-\varepsilon s_1} (D_{22} e^{2\varepsilon s_2} - D_{12} e^{-2\varepsilon s_2}), \\ \Delta_{12} = -D_{11} d_2 (D_{22} - D_{12}) e^{-\varepsilon s_1} - d_1 D_{12} D_{22} e^{\varepsilon s_1} (e^{2\varepsilon s_2} - e^{-2\varepsilon s_2}) + \\ + d_2 D_{11} e^{\varepsilon s_1} (D_{22} e^{2\varepsilon s_2} - D_{12} e^{-2\varepsilon s_2}), \\ \Delta_{13} = D_{22} d_2 (D_{21} - D_{11}) e^{\varepsilon s_2} + d_2 D_{11} D_{21} e^{-\varepsilon s_2} (e^{2\varepsilon s_1} - e^{-2\varepsilon s_1}) - \\ - d_1 D_{22} e^{-\varepsilon s_2} (D_{21} e^{2\varepsilon s_1} - D_{11} e^{-2\varepsilon s_1}), \\ \Delta_{14} = -D_{22} d_2 (D_{21} - D_{11}) e^{-\varepsilon s_2} - d_2 D_{11} D_{21} e^{\varepsilon s_2} (e^{2\varepsilon s_1} - e^{-2\varepsilon s_1}) + \\ + d_1 D_{22} e^{\varepsilon s_2} (D_{21} e^{2\varepsilon s_1} - D_{11} e^{-2\varepsilon s_1}).$$

Суммируя по всем корням уравнения (10.4) получаем однородные решения.

Дадим анализ корней характеристического уравнения.

Легко доказать, что уравнение (2.24) при  $\varepsilon \rightarrow 0$  ограниченных корней не имеет. В самом деле, пусть  $z_k = z_k^* \neq \infty$  при  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Тогда справедливо предельное соотношение

$$D(s_1, s_2, \varepsilon) \rightarrow \varepsilon^2 D_0(s_1, s_2, z_k^*) \text{ при } \varepsilon \rightarrow 0.$$

Таким образом, предельные точки множества  $z_k$  определяются из уравнения

$$D_0^*(s_1, s_2, z_k^*) = 0.$$

В данном случае

$$D_0^*(s_1, s_2, z_k^*) = 16s_1s_2(s_2^2 - s_1^2)^2 \left[ (b_{12} + 1)^2 b_{22} \left( z_k^{*2} - \frac{1}{4} \right) - 2(b_{12} + 1)^2(G_0 - 1) + (b_{22} + b_{23} + 2)(b_{12} - b_{22} - b_{23} - 1) \right] = 0 \quad (10.5)$$

Непосредственной проверкой можно показать, что корню  $z_k^*$  определяемому из (10.5) соответствуют тривиальные решения.

Итак, все корни уравнения (10.4) стремятся к бесконечности при  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Здесь возможен только случай  $\varepsilon z_k \rightarrow const$  при  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

Для построения асимптотики нулей, отыскиваем  $z_n$  в виде

$$z_n = \varepsilon^{-1} \delta_n + O(\varepsilon), \quad (n = 1, 2, \dots). \quad (10.6)$$

Подставляя (10.6) в (10.4) имеем

$$\begin{aligned} \tau^2 - 2q_1^* \delta_n^2 \tau + q_2^* \delta_n^4 &= 0, \\ 2q_1^* &= b_{11}^{-1} (b_{11} b_{22} - b_{12}^2 - 2b_{12}), \\ q_2^* &= b_{11}^{-1} b_{22}; \quad s_i^2 = \delta_n^2 \tau_i; \quad \lambda_i = \sqrt{\tau_i}, \end{aligned} \quad (10.7)$$

$$s_i = \sqrt{q_1^* - (-1)^i \sqrt{q_1^{*2} - q_2^*}}, \quad (i=1,2).$$

Как было отмечено ранее, в зависимости от характеристик материала  $\nu, \nu_1, \nu_2, G_0$ , параметры  $q_1^*, q_2^*$  принимают различные значения, что влечет за собой различные формы записи решений. Это в свою очередь приводит к различным асимптотическим представлениям решений.

Рассмотрим следующие возможные случаи:

$$1. \lambda_{1,2} = \pm s_1 \delta_n, \quad \lambda_{3,4} = \pm s_2 \delta_n, \quad q_1^* > 0, \quad q_1^{*2} - q_2^* > 0,$$

$$s_{1,2} = \sqrt{q_1^* \pm \sqrt{q_1^{*2} - q_2^*}}, \quad q_1^{*2} > q_2^*,$$

$$s_{1,2} = \alpha + i\beta = \sqrt{q_1^* \pm i\sqrt{q_2^* - q_1^{*2}}}, \quad q_1^{*2} < q_2^*.$$

2. Корни характеристического уравнения (10.4) кратные

$$\lambda_{1,2} = \lambda_{3,4} = \pm \delta_n p, \quad q_1^* > 0, \quad q_1^{*2} - q_2^* = 0, \quad p = \sqrt{q_1^*}.$$

$$3. \lambda_{1,2} = \pm is_1 \delta_n, \quad \lambda_{3,4} = \pm is_2 \delta_n, \quad q_1^* < 0, \quad q_1^{*2} - q_2^* \neq 0,$$

$$s_{1,2} = \sqrt{|q_1^*| \pm \sqrt{q_1^{*2} - q_2^*}}, \quad q_1^{*2} > q_2^*,$$

$$s_{1,2} = \sqrt{|q_1^*| \pm i\sqrt{q_2^* - q_1^{*2}}}, \quad q_1^{*2} < q_2^*,$$

$$4. \lambda_{1,2} = \lambda_{3,4} = \pm i \delta_n p, \quad q_1^* < 0, \quad q_1^{*2} - q_2^* = 0, \quad p = \sqrt{q_1^*}.$$

В случаях 1,2 после подстановки (10.6) в (10.4) и преобразования его с помощью разложений  $shx$  в ряд по  $\varepsilon$  для  $\delta_n$  получаем:

$$(s_2 - s_1)(s_1 s_2 + b_{22})sh(s_1 + s_2)\delta_n \mp \mp (s_1 + s_2)(s_1 s_2 - b_{22})sh(s_2 - s_1)\delta_n = 0, \quad (10.8)$$

$$\beta(\alpha^2 - \beta^2 + b_{22})sh2\alpha\delta_n \mp \alpha(\alpha^2 - \beta^2 - b_{22})\sin2\beta\delta_n = 0, \quad (10.9)$$

$$(p^2 + b_{22})sh2p\delta_n \mp 2p(p^2 - b_{22})\delta_n = 0. \quad (10.10)$$

Что касается случаев 3 и 4, то для них результаты получаются из случаев 1 и 2 формальной заменой  $s_1, s_2$  на  $is_1, is_2$ . Эти уравнения совпадают с уравнениями, определяющими показатели краевых эффектов Сен-Венана в теории толстых плит.

Приведем теперь первые члены асимптотических разложений, соответствующие различным группам корней.

Для перемещений и напряжений в первом приближении получаем два класса решений, первое из которых соответствует нулям функции

$$\begin{aligned} & (s_2 - s_1)(s_1 s_2 + b_{22})sh(s_1 + s_2)\delta_n - \\ & - (s_1 + s_2)(s_1 s_2 - b_{22})sh(s_2 - s_1)\delta_n, \\ & \beta(\alpha^2 - \beta^2 + b_{22})sh2\alpha\delta_n - \alpha(\alpha^2 - \beta^2 - b_{22})\sin 2\beta\delta_n, \\ & (p^2 + b_{22})sh2p\delta_n - 2p(p^2 - b_{22})\delta_n, \end{aligned}$$

а второе – нулям функции

$$\begin{aligned} & (s_2 - s_1)(s_1 s_2 + b_{22})sh(s_1 + s_2)\delta_n + \\ & + (s_1 + s_2)(s_1 s_2 - b_{22})sh(s_2 - s_1)\delta_n, \\ & \beta(\alpha^2 - \beta^2 + b_{22})sh2\alpha\delta_n + \alpha(\alpha^2 - \beta^2 - b_{22})\sin 2\beta\delta_n, \\ & (p^2 + b_{22})sh2p\delta_n + 2p(p^2 - b_{22})\delta_n. \end{aligned}$$

Соответственно получим

$$\begin{aligned} u_r^{(1)} = r_0 \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} C_n [s_2(s_1^2 - b_{22})shs_2\delta_n shs_1\delta_n \xi - \\ - s_1(s_2^2 - b_{22})shs_1\delta_n shs_2\delta_n \xi + O(\varepsilon)] m_n(\theta), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u_\theta^{(1)} = -r_0 \varepsilon \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} (b_{12} + 1) C_n s_1 s_2 [shs_2\delta_n chs_1\delta_n \xi - \\ - shs_1\delta_n chs_2\delta_n \xi + O(\varepsilon)] \frac{dm_n(\theta)}{d\theta}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sigma_r^{(1)} &= G_1 s_1 s_2 \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} C_n \left[ (b_{11} s_1^2 + b_{12}^2 + b_{12} - b_{11} b_{22}) s h s_2 \delta_n s h s_1 \delta_n \xi - \right. \\
&\quad \left. - (b_{11} s_2^2 + b_{12}^2 + b_{12} - b_{11} b_{22}) s h s_1 \delta_n s h s_2 \delta_n \xi + O(\varepsilon) \right] m_n(\theta), \\
\sigma_\theta^{(1)} &= G_1 s_1 s_2 \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} C_n \delta_n^2 \left[ (b_{12} s_1^2 + b_{22}) s h s_2 \delta_n s h s_1 \delta_n \xi - \right. \\
&\quad \left. - (b_{12} s_2^2 + b_{22}) s h s_1 \delta_n s h s_2 \delta_n \xi + O(\varepsilon) \right] m_n(\theta), \\
\sigma_\varphi^{(1)} &= G_1 s_1 s_2 \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} C_n \delta_n^2 \left[ (b_{12} s_1^2 + b_{23} - 2b_{12} G_0) s h s_2 \delta_n s h s_1 \delta_n \xi - \right. \\
&\quad \left. - (b_{12} s_2^2 + b_{23} - 2b_{12} G_0) s h s_1 \delta_n s h s_2 \delta_n \xi + O(\varepsilon) \right] m_n(\theta), \\
\tau_{r\theta}^{(1)} &= -G_1 \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} C_n \delta_n \left[ s_2 (b_{12} s_1^2 + b_{22}) s h s_2 \delta_n c h s_1 \delta_n \xi - \right. \\
&\quad \left. - s_1 (b_{12} s_2^2 + b_{22}) s h s_1 \delta_n c h s_2 \delta_n \xi + O(\varepsilon) \right] \frac{d m_n(\theta)}{d \theta}.
\end{aligned} \tag{10.11}$$

Выражения для  $u_r^{(2)}, \dots, \tau_{r\theta}^{(2)}$  получаются из (10.11) простой заменой  $s_1 = \alpha + i\beta$ ,  $s_2 = \alpha - i\beta$ .

$$\begin{aligned}
u_r^{(3)} &= r_0 \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} B_n \left[ s_2 (s_1^2 - b_{22}) s h s_2 \delta_n s h s_1 \delta_n \xi - \right. \\
&\quad \left. - \delta_n s_1 (s_2^2 - b_{22}) s h s_1 \delta_n c h s_2 \delta_n \xi + O(\varepsilon) \right] m_n(\theta), \\
u_\theta^{(3)} &= -r_0 (b_{12} + 1) s_1 s_2 \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} B_n \left[ s h s_2 \delta_n c h s_1 \delta_n \xi - \right. \\
&\quad \left. - \xi \delta_n s h s_1 \delta_n c h s_2 \delta_n \xi + O(\varepsilon) \right] \frac{d m_n(\theta)}{d \theta}, \\
\sigma_r^{(3)} &= G_1 s_1 s_2 \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} B_n \left[ (b_{11} s_1^2 + b_{12}^2 + b_{12} - b_{11} b_{22}) s h s_2 \delta_n s h s_1 \delta_n \xi - \right. \\
&\quad \left. - \xi \delta_n s h s_1 \delta_n c h s_2 \delta_n \xi + O(\varepsilon) \right] m_n(\theta),
\end{aligned}$$

$$\sigma_\theta^{(3)} = G_1 s_1 s_2 \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} B_n \delta_n^2 \left[ (b_{12} s_1^2 + b_{22}) shs_2 \delta_n shs_1 \delta_n \xi - \right. \quad (10.12)$$

$$\left. - \xi \delta_n shs_1 \delta_n chs_2 \delta_n \xi + O(\varepsilon) \right] m_n(\theta),$$

$$\sigma_\varphi^{(3)} = G_1 s_1 s_2 \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} C_n \delta_n^2 \left[ (b_{12} s_1^2 + b_{23} - 2b_{12} G_0) shs_2 \delta_n shs_1 \delta_n \xi - \right.$$

$$\left. - \xi \delta_n shs_1 \delta_n chs_2 \delta_n \xi + O(\varepsilon) \right] m_n(\theta),$$

$$\tau_{r\theta}^{(3)} = -G_1 \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} B_n \delta_n \left[ s_2 (b_{12} s_1^2 + b_{22}) shs_2 \delta_n chs_1 \delta_n \xi - \right.$$

$$\left. - s_1 (b_{12} s_2^2 + b_{22}) \xi shs_1 \delta_n shs_2 \delta_n \xi + O(\varepsilon) \right] \frac{dm_n(\theta)}{d\theta}.$$

где  $C_n, \dots, B_n$  – произвольные постоянные.

Для  $n = 2, 4, 6, \dots$  соответствующие выражения для  $u_r, \dots, \tau_{r\theta}$  получаются из формул (10.11), (10.12) заменой  $chx$  на  $shx$  и  $shx$  на  $-chx$  соответственно.

В общем случае нагружения, произвольные постоянные  $C_n, \dots, B_n$  могут быть определены с помощью вариационного принципа Лагранжа.

Пусть при  $\theta = \theta_1$  заданы следующие граничные условия

$$\sigma_\theta = Q(\xi), \quad \tau_{r\theta} = \tau(\xi). \quad (10.13)$$

Так как однородные решения удовлетворяют уравнению равновесия и граничным условиям на лицевой поверхности, вариационный принцип принимает следующую форму

$$\int_{R_1}^{R_2} [(\sigma_\theta - Q) \delta u_\theta + (\tau_{r\theta} - \tau) \delta u_r]_{\theta=\theta_1} r dr = 0. \quad (10.14)$$

Подставляя (10.11), (10.12) в (10.14) для определения  $C_k$ , вариации которых будем считать независимыми, получим следующую бесконечную систему

$$\sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} \Pi_{nk} C_{n0} = H_k, \quad (k = 1, 3, \dots),$$

$$\sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} g_{nk} B_{n0} = h_k, \quad (k = 1, 3, \dots),$$
(10.15)

где

$$\begin{aligned} \Pi_{nk} = & -G_1 \exp\left(\frac{\delta_n + \delta_k}{\varepsilon} \theta_1\right) \int_{-1}^1 \left\{ (b_{12} + 1) s_1^2 s_2^2 \delta_n^2 \left[ (b_{12} s_1^2 + b_{22}) \times \right. \right. \\ & \times shs_2 \delta_n shs_1 \delta_n \xi - (b_{12} s_2^2 + b_{22}) shs_1 \delta_n shs_2 \delta_n \xi \left. \right] [shs_2 \delta_k chs_1 \delta_k \xi - \\ & - shs_1 \delta_k chs_2 \delta_k \xi] + \delta_n \left[ s_2 (b_{12} s_1^2 + b_{22}) shs_2 \delta_n chs_1 \delta_n \xi - \right. \\ & - s_1 (b_{12} s_2^2 + b_{22}) shs_1 \delta_n chs_2 \delta_n \xi \left. \right] \left[ s_2^2 (s_1^2 - b_{22}) shs_2 \delta_k shs_1 \delta_k \xi - \right. \\ & \left. \left. - s_1^2 (s_2^2 - b_{22}) shs_1 \delta_k shs_2 \delta_k \xi \right] \right\} d\xi, \\ H_k = & \exp\left(\frac{\delta_k}{\varepsilon} \theta_1\right) \int_{-1}^1 \left\{ -(b_{12} + 1) s_1 s_2 [shs_2 \delta_k chs_1 \delta_k \xi - shs_1 \delta_k chs_2 \delta_k \xi] \times \right. \\ & \left. Q(\xi) + [s_2 (s_1^2 - b_{22}) shs_2 \delta_k shs_1 \delta_k \xi - s_1 (s_2^2 - b_{22}) shs_1 \delta_k shs_2 \delta_k \xi] \tau(\xi) \right\} d\xi, \\ g_{nk} = & -\exp\left(\frac{\delta_n + \delta_k}{\varepsilon} \theta_1\right) \int_{-1}^1 \left\{ (b_{12} + 1) s_1^2 s_2^2 \delta_n^2 \left[ (b_{12} s_1^2 + b_{22}) \times \right. \right. \\ & \times chs_2 \delta_n shs_1 \delta_n \xi - \xi \delta_n shs_1 \delta_n chs_2 \delta_n \xi \left. \right] [shs_2 \delta_k chs_1 \delta_k \xi - \\ & - \xi \delta_k shs_1 \delta_k shs_2 \delta_k \xi] + \delta_n \left[ s_2 (b_{12} s_1^2 + b_{22}) shs_2 \delta_n chs_1 \delta_n \xi - \right. \\ & - (b_{12} s_2^2 + b_{22}) \xi shs_1 \delta_n shs_2 \delta_n \xi \left. \right] \left[ s_2 (s_1^2 - b_{22}) shs_2 \delta_k shs_1 \delta_k \xi - \right. \\ & \left. \left. - \delta_k s_1 (s_2^2 - b_{22}) \xi shs_1 \delta_k chs_2 \delta_k \xi \right] \right\} d\xi, \\ h_k = & \exp\left(\frac{\delta_k}{\varepsilon} \theta_1\right) \int_{-1}^1 \left\{ \tau(\xi) [s_2 (s_1^2 - b_{22}) shs_2 \delta_k shs_1 \delta_k \xi - \right. \\ & \left. - \delta_k s_1 (s_2^2 - b_{22}) \xi shs_1 \delta_k chs_2 \delta_k \xi] - (b_{12} + 1) s_1 s_2 Q(\xi) \times \right. \\ & \left. \times [shs_2 \delta_k chs_1 \delta_k \xi - \xi \delta_k shs_1 \delta_k shs_2 \delta_k \xi] \right\} d\xi. \end{aligned}$$

Полученные простые асимптотические формулы позволяют рассчитать напряженно-деформированное со-

стояние сферической оболочки при любых условиях на боковой поверхности.

Отметим, что ни одна прикладная теория оболочек не в состоянии описывать такие решения.

### **§11. Неосесимметричные задачи теории упругости для трансверсально-изотропной полей сферы**

Рассматривается неосесимметричная задача теории упругости для трансверсально-изотропной полой сферы. Благодаря сферической симметрии общая краевая задача разбивается на две, одно из которых в точности совпадает с осесимметричной краевой задачей полой сферы, вторая с краевой задачей чистого кручения полой сферы.

Рассмотрим трансверсально-изотропной сферической слой, отнесенный к сферической системе координат

$$r_1 \leq r \leq r_2, \theta_1(\varphi) \leq \theta \leq \theta_2(\varphi), 0 \leq \varphi \leq 2\pi$$

Оболочка изготовлены из трансверсально-изотропного материала.

Сферические части границы слоя будем называть лицевыми поверхностями, а остальную часть границы назовем боковой поверхностью.

Приведем здесь полную систему уравнений, описывающих пространственное напряженно-деформированно состояние сферического слоя. Уравнения равновесия в напряжениях, при отсутствии массовых сил, в сферической системе координат, имеют вид:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \tau_{r\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{2\sigma_r - \sigma_\varphi - \sigma_\theta + \tau_{r\theta} \operatorname{ctg} \theta}{r} &= 0 \\
\frac{\partial \tau_{r\varphi}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{\theta\varphi}}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \sigma_{r\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{3\tau_{r\varphi} + 2\tau_{\theta\varphi} \operatorname{ctg} \theta}{r} &= 0 \quad (11.1) \\
\frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \sigma_{\theta\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{(\sigma_\theta - \sigma_\varphi) \operatorname{ctg} \theta + 3\tau_{r\theta}}{r} &= 0
\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
\sigma_r &= A_{11}\varepsilon_r + A_{12}(\varepsilon_\theta + \varepsilon_\varphi), \quad \sigma_\theta = A_{12}\varepsilon_r + A_{22}\varepsilon_\theta + A_{23}\varepsilon_\varphi \\
\sigma_\varphi &= A_{12}\varepsilon_r + A_{23}\varepsilon_\theta + A_{22}\varepsilon_\varphi, \quad \tau_{r\theta} = G_1\varepsilon_{r\theta} \\
\tau_{r\varphi} &= G_1\varepsilon_{r\varphi}, \quad \tau_{r\theta} = G\varepsilon_{\theta\varphi}
\end{aligned} \quad (11.2)$$

$$\begin{aligned}
\varepsilon_r &= \frac{\partial u_r}{\partial r}, \quad \varepsilon_\theta = \frac{u_r}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta}, \quad \varepsilon_\varphi = \frac{u_r}{r} + \frac{u_\theta}{r} \operatorname{ctg} \theta + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} \\
\varepsilon_{r\theta} &= \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} - \frac{u_\theta}{r} + \frac{\partial u_\theta}{\partial r}, \quad \varepsilon_{r\varphi} = \frac{\partial u_\varphi}{\partial r} - \frac{u_\varphi}{r} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial u_r}{\partial \varphi} \quad (11.3) \\
\varepsilon_{\theta\varphi} &= \frac{1}{r} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \theta} - \frac{u_\varphi}{r} \operatorname{ctg} \theta + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial u_\theta}{\partial \varphi}
\end{aligned}$$

$A_{ij}, G, G_1$  – материалыные константы,  $u_r, u_\theta, u_\varphi$  – компоненты вектора перемещений.

Подставляя (11.3), (11.2) в (11.1), после несложных вкладок получим:

$$\begin{aligned}
b_{11} \frac{\partial^2 u_r}{\partial r^2} + \frac{2b_{11}}{r} \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{2}{r} (b_{11} - b_{22} - b_{23}) u_r + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u_r}{\partial \theta^2} + \frac{\operatorname{ctg} \theta}{r^2} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} + \\
+ \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 u_r}{\partial \varphi^2} + \left[ \frac{b_{12} + 1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{b_{12} - b_{22} - b_{23} - 1}{r^2} \right] \left( \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \operatorname{ctg} \theta u_\theta \right) + \\
+ \frac{1}{r \sin \theta} \left[ (b_{12} + 1) \frac{\partial}{\partial r} + \frac{b_{12} - b_{22} - b_{23} - 1}{r^2} \right] \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} = 0
\end{aligned}$$

$$\frac{b_{12}+1}{r \sin \theta} \frac{\partial^2 u_r}{\partial r \partial \varphi} + \frac{b_{22}+b_{23}+2}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial u_r}{\partial \varphi} + \frac{b_{23}+G_0}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial \theta \partial \varphi} \operatorname{ctg} \theta \frac{b_{22}+G_0}{r^2 \sin \theta} \times$$

$$\times \left( \frac{\partial u_\theta}{\partial \varphi} + \frac{\partial^2 u_\varphi}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial u_\varphi}{\partial r} + \frac{G_0}{r^2} \left( \frac{\partial^2 u_\varphi}{\partial \theta^2} + \operatorname{ctg} \theta \frac{\partial \varphi_\varphi}{\partial \theta} - \frac{u_\varphi}{\sin^2 \theta} \right) \right) + \quad (11.4)$$

$$+ \frac{b_{22}}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 u_\varphi}{\partial \varphi^2} + \frac{2(G_0-1)}{r^2} u_\varphi = 0$$

$$\frac{b_{12}+1}{r} \frac{\partial^2 u_r}{\partial r \partial \varphi} + \frac{b_{22}+b_{23}+2}{r^2} \frac{\partial u_r}{\partial \varphi} + \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial r} +$$

$$+ \frac{b_{22}}{r^2} \left( \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial \theta^2} + \operatorname{ctg} \theta \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} - \frac{u_\theta}{\sin^2 \theta} \right) + \frac{2(G_0-1)}{r^2} u_\theta +$$

$$+ \frac{G_0}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial \varphi^2} + \frac{b_{23}+G_0}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial^2 u_r}{\partial \theta \partial \varphi} - \frac{b_{22}+G_0}{r^2 \sin \theta} \operatorname{ctg} \theta \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} = 0$$

$$b_{ij} = \frac{A_{ij}}{G_1}, \quad G_0 = \frac{G}{G_1}.$$

Предположим, что со стороны лицевых поверхностей на слой действует нагрузка

$$\sigma_r = q_r^{(k)}(\theta, \varphi), \quad \tau_{r\theta} = q_r^{(k)}(\theta, \varphi),$$

$$\tau_{r\varphi} = q_r^{(k)}(\theta, \varphi) \quad \text{при } r = r_k \quad (k=1,2) \quad (11.5)$$

характер граничных условий на боковой поверхности пока уточнять не будем, однако, будем считать их таковыми, что слой находится в равновесии.

Следуя [17], разобьем двумерное векторное поле  $\vec{v} = (u_\theta, u_\varphi)$  на потенциальную и вихревую части. Пологая

$$u_\theta = r \frac{\partial F}{\partial \theta} + \frac{r}{\sin \theta} \frac{\partial \psi}{\partial \varphi}, \quad u_\varphi = \frac{r}{\sin \theta} \frac{\partial F}{\partial \theta} - r \frac{\partial \psi}{\partial \varphi} \quad (11.6)$$

Подставляя (11.6) в уравнение (11.4) и граничные условия (11.5) соответственно получаем

$$L_1(u_r, F) = 0 \quad (11.7)$$

$$\frac{\partial}{\partial \theta} L_2(u_r, F) + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} L_3(\psi) = 0 \quad (11.8)$$

$$\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} L_2(u_r, F) - \frac{\partial}{\partial \theta} L_3(\psi) = 0 \quad (11.9)$$

$$M_1(u_r, F) \Big|_{r=r_k} = q_r^{(k)}(\theta, \varphi) \quad (11.10)$$

$$\left[ \frac{\partial}{\partial \theta} M_2(u_r, F) + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} M_3(\psi) \right]_{r=r_k} = q_{r\theta}^{(k)}(\theta, \varphi) \quad (11.11)$$

$$\left[ \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} M_2(u_r, F) - \frac{\partial}{\partial \theta} M_3(\psi) \right]_{r=r_k} = q_{r\varphi}^{(k)}(\theta, \varphi) \quad (11.12)$$

где

$$L_1(u, F) = b_{11} \frac{\partial^2 u_r}{\partial r^2} + \frac{2b_{11}}{r} \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{2}{r^2} (b_{12} - b_{22} - b_{23}) u_r + \\ + \frac{1}{r^2} \Delta_0 u_r + \left[ (b_{12} + 1) \frac{\partial}{\partial r} + \frac{2b_{12} - b_{22} - b_{23}}{r} \right] \Delta_0 F$$

$$L_2(u_r, F) = \frac{b_{12} + 1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{b_{22} + b_{23} + 2}{r^2} u_r + \\ + r \frac{\partial^2 F}{\partial r^2} + 4 \frac{\partial F}{\partial r} + \frac{2G_0}{r} F + \frac{b_{22}}{r} \Delta_0 F$$

$$L_3(\psi) = r \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + 4 \frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{2G_0}{r} \psi + \frac{G_0}{r} \Delta_0 \psi$$

$$M_1(u_r, F) = b_{11} \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{2b_{11}}{r} u_r + b_{12} \Delta_0 F$$

$$M_2(u_r, F) = \frac{u_r}{r} + r \frac{\partial F}{\partial r}$$

$$M_3(\psi) = r \frac{\partial \psi}{\partial r}, \quad \Delta_0 = \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \operatorname{ctg} \theta \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}$$

Соотношения (11.8), (11.9) тождественно удовлетворяются, если положить

$$L_2(u_r, F) = -\frac{\partial \chi(r, \theta, \varphi)}{\partial \varphi}, \quad L_3(F) = \sin \theta \frac{\partial \chi(r, \theta, \varphi)}{\partial \theta} \quad (11.13)$$

где функция  $\chi(r, \theta, \varphi)$  удовлетворяет уравнению

$$\Delta_0 \chi(r, \theta, \varphi) = 0 \quad (11.14)$$

Теперь  $[q_{r\theta}^{(k)}, q_{r\varphi}^{(k)}]$  представим в виде

$$q_{r\theta}^{(k)} = \frac{\partial q_2^{(k)}}{\partial \theta} + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial q_3^{(k)}}{\partial \varphi}, \quad q_{r\varphi}^{(k)} = \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial q_2^{(k)}}{\partial \varphi} - \frac{\partial q_3^{(k)}}{\partial \theta} \quad (11.15)$$

Тогда исходная краевая задача (11.4), (11.5) распадается на две

$$L_1(u_r, F) = 0, \quad L_2(u_r, F) = -\frac{\partial \chi}{\partial \varphi} \quad (11.16)$$

$$[M_1(u_r, F)]_{r=r_k} = q_r^{(k)}, \quad [M_2(u_r, F)]_{r=r_k} = q_2^{(s)} - \frac{\partial e^{(k)}}{\partial \varphi} \quad (11.17)$$

$$L_3(F) = \sin \theta \frac{\partial \chi}{\partial \theta} \quad (11.18)$$

$$[M_3(F)]_{r=r_k} = q_3^{(k)} + \sin \theta \frac{\partial e^{(k)}}{\partial \theta} \quad (11.19)$$

$e^{(k)}(\theta, \varphi)$  – произвольные функции, удовлетворяющие уравнению  $\Delta_0 e^{(k)}(\theta, \varphi) = 0$ .

Законность представления (11.6) подробно обсуждена в работе [1] и нет необходимости ее здесь обсуждать. Там же показано, что не умаляя общности, всегда можно положить  $\chi = 0$ ,  $e^{(s)} = 0$ .

2. Неоднородными решениями будем называть частные решения уравнений равновесия (11.4), которые удовлетворяют на лицевых поверхностях слоя неоднородным граничным условиям (11.5). Для построения неоднородных решений можно использовать различные приемы.

Одна из известных приемов состоит в следующем: область  $V = [r_1, r_2][\theta_1(\varphi), \theta_2(\varphi)][0, 2\pi]$  продолжается до замкнутого сферического слоя  $V_0 = [r_1, r_2][0, \pi][0, 2\pi]$ , а нагрузка  $q^{(k)} = \{q_r^{(k)}, q_{r\theta}^{(k)}, q_{r\varphi}^{(k)}\}$  заданная на лицевых поверхностях  $S^{(k)}$  достаточно произвольным образом продолжается на замкнутые сферические поверхности  $S_0^{(k)}(r = r_k)$ . Внешние усилия, заданные на  $S_0^{(k)}$ , обозначим через  $P^{(k)} = \{P_r^{(k)}, P_{r\theta}^{(k)}, P_{r\varphi}^{(k)}\}$ . При этом для  $(\theta, \varphi) \in S^{(k)}$ ,  $P_r^{(k)} = q_r^{(k)}$ ,  $P_{r\theta}^{(k)} = q_{r\theta}^{(k)}$ ,  $P_{r\varphi}^{(k)} = q_{r\varphi}^{(k)}$  и кроме этого, необходимо, чтобы внешние усилия  $P_r^{(k)}$ ,  $P_{r\theta}^{(k)}$ ,  $P_{r\varphi}^{(k)}$  удовлетворяли условиям равновесия. Представим двумерное поле  $\{P_{r\theta}^{(k)}, P_{r\varphi}^{(k)}\}$  внешней нагрузки в виде

$$P_{r\theta}^{(k)} = \frac{\partial P_2^{(k)}}{\partial \theta} + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial P_3^{(k)}}{\partial \varphi}, \quad P_{r\varphi}^{(k)} = \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial P_2^{(k)}}{\partial \varphi} - \frac{\partial P_3^{(k)}}{\partial \theta}$$

Разложим функции  $P_i^{(k)}(\theta, \varphi)$  ( $i = 1, 2, 3$ ),  $[P_1^{(k)} = P_r^{(k)}]$  в ряды по сферическим функциям в виде

$$P_i^{(k)}(\theta, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n P_{inn}^{(k)} Y_n^{(m)}(\theta, \varphi)$$

здесь  $P_{inn}^{(k)}$  известные постоянные

$$P_{inn}^{(k)} = \frac{1}{\|Y_n^{(m)}\|^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} P_i^{(k)}(\theta, \varphi) P_n^m(\cos \theta) \cos m\varphi \sin \theta d\theta d\varphi, \quad m \leq 0$$

$$P_{inn}^{(k)} = \frac{1}{\|Y_n^{(m)}\|^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} P_i^{(k)}(\theta, \varphi) P_n^m(\cos \theta) \sin m\varphi \sin \theta d\theta d\varphi, \quad m > 0$$

$$\|Y_n^{(m)}\|^2 = \frac{2\pi \varepsilon_m}{(n-m)!} \frac{(n+m)!}{2n+1}; \quad \varepsilon_m = \begin{cases} 2 & \text{при } m = 0 \\ 1 & \text{при } m < 0 \end{cases}$$

Тогда функции  $u, F, \psi$  через которые определяются компоненты вектора перемещения

$$u_r = rU, \quad u_\theta = r \left( \frac{\partial F}{\partial \theta} + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial \psi}{\partial \varphi} \right), \quad u_\varphi = r \left( \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial F}{\partial \varphi} - \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right)$$

можно отыскивать в виде рядов

$$u(r, \theta, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n u_{nm}(r) Y_n^{(m)}(\theta, \varphi)$$

$$F(r, \theta, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n F_{nm}(r) Y_n^{(m)}(\theta, \varphi)$$

$$\psi(r, \theta, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \psi_{nm}(r) Y_n^{(m)}(\theta, \varphi)$$

здесь  $Y_n^{(m)}(\theta, \varphi) = P_n^m(\cos \theta) \cos m\varphi$ , если  $m \leq 0$  и  $Y_n^{(m)}(\theta, \varphi) = P_n^m(\cos \theta) \sin m\varphi$  если  $m > 0$ . Функция  $P_n^m$  — присоединенные функции Лежандра порядка  $m$ . В силу ортогональности  $Y_n^{(m)}(\theta, \varphi)$  исходная краевая задача расчленяется на две последовательности независимых одномерных краевых задач относительно функций  $u_{nm}$ ,

$F_{nm}, \psi_{nm}$

1.

$$\left. \begin{aligned} & b_{11} r u_{nm}'' + 4b_{11} u_{nm}'' + \frac{1}{r} [2(b_{11} + b_{12} - b_{22} - b_{23}) - n(n+1)] u_{nm} - \\ & - \frac{n(n+1)}{r} \left[ (b_{12} + 1) F_{nm}' + \frac{2b_{12} - b_{22} - b_{23} - 1}{r} F_{nm} \right] = 0 \\ & (b_{12} + 1) u_{nm}' + \frac{b_{12} + b_{22} + b_{23} + 3}{r} u_{nm} + r F_{nm}'' + \\ & + 4F_{nm}' \frac{[2G_0 - n(n+1)]}{r} F_{nm} = 0 \end{aligned} \right\}$$

Граничные условия

$$\left. \begin{aligned} [b_{11}ru'_{nm} + 3b_{11}u_{nm} - b_{12}n(n+1)F_{nm}]_{r=r_k} &= P_{1nm}^{(k)} \\ [u_{nm} + rF'_{nm}]_{r=r_k} &= P_{2nm}^{(k)} \end{aligned} \right\}$$

2.

$$\left. \begin{aligned} r\psi''_{nm} + 4\psi'_{nm} + \frac{G_0}{r}[2 - n(n+1)]\Phi_{nm} &= 0 \\ [r\psi'_{nm}]_{r=r_k} &= P_{3nm}^{(k)} \end{aligned} \right\}$$

Для решения полученных задач можно использовать различные методы, в том числе и численные, например, метод прогонки.

Описанный прием построения неоднородных решений является достаточно универсальным и не зависит от различных параметров оболочки, в том числе от ее толщины.

Однако, если относительная толщина оболочки мала, а нагрузка, заданная на лицевых поверхностях достаточно гладкая, то для построения неоднородных решений целесообразно использовать первый итерационный процесс асимптотического метода [14], который менее трудоемок и позволяет быстрее достичь конечной цели.

Введем новую радиальную переменную  $\xi$ , связанную с  $r$  соотношением

$$\xi = \frac{1}{\varepsilon} \ln \frac{r}{r_0}, \quad \varepsilon = \frac{1}{2} \ln \frac{r_2}{r_1}, \quad r_0 \sqrt{r_1 r_2}, \quad \xi \in [-1, 1] \quad (11.20)$$

В дальнейшем будем предполагать, что функции  $q_i^\pm$   $i=1,2,3$  относительно  $\varepsilon$  имеют порядок  $O(1)$ .

Представление векторного поля  $\vec{v} = (u_\theta, u_\varphi)$  в виде (11.6) приводит к расчленению напряженного состояния. Индексом 1 вверху будем обозначать часть тензора напряжений, соответствующую потенциальной задаче, индексом 2–вихревой.

$$\begin{aligned}
\sigma_r^{(1)} &= G_1 \varepsilon^{-1} \left[ b_{11} \frac{\partial u}{\partial \xi} + \varepsilon (b_{11} + 2b_{12}) u + \varepsilon b_{12} \Delta_0 F \right], \quad \sigma_r^{(2)} \equiv 0 \\
\sigma_\theta^{(1)} &= G_1 \varepsilon^{-1} \left[ b_{12} \frac{\partial u}{\partial \xi} + \varepsilon (b_{11} + b_{22} + b_{23}) u + \varepsilon \times \right. \\
&\quad \left. \times \left( b_{22} \frac{\partial^2 F}{\partial \theta^2} + b_{23} \operatorname{ctg} \theta \frac{\partial F}{\partial \theta} + \frac{b_{23}}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 F}{\partial \varphi^2} \right) \right], \\
\sigma_\theta^{(2)} &= 2G \frac{\partial^2}{\partial \varphi \partial \theta} \left( \frac{\psi}{\sin \theta} \right) = -\sigma_\varphi^{(2)} \tag{11.21} \\
\sigma_\varphi^{(2)} &= G_1 \varepsilon^{-1} \left[ b_{12} \frac{\partial u}{\partial \xi} + \varepsilon (b_{12} + b_{22} + b_{23}) u + \varepsilon \times \right. \\
&\quad \left. \times \left( b_{23} \frac{\partial^2 F}{\partial \theta^2} + b_{22} \operatorname{ctg} \theta \frac{\partial F}{\partial \theta} + \frac{b_{22}}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 F}{\partial \varphi^2} \right) \right], \\
\tau_{r\varphi}^{(2)} &= G_1 \varepsilon^{-1} \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left( \frac{\partial F}{\partial \xi} + \varepsilon u \right), \quad \tau_{r\theta}^{(2)} = -G_1 \varepsilon^{-1} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi \partial \theta} \\
\tau_{r\theta}^{(2)} &= G_1 \varepsilon^{-1} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{\partial F}{\partial \xi} + \varepsilon u \right), \quad \tau_{r\varphi}^{(2)} = G_1 \varepsilon^{-1} \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \varphi \partial \xi} \\
\tau_{\theta\varphi}^{(2)} &= G \frac{\partial^2}{\partial \varphi \partial \theta} \left( \frac{F}{\sin \theta} \right), \quad \tau_{\theta\varphi}^{(2)} = G \left( \Delta_0 \psi - 2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2} \right)
\end{aligned}$$

Потенциальная задача (11.16), (11.17) подробно изучено выше. Поэтому исследуем более простую, вихревую задачу. В случае вихревой задачи краевую задачу (11.18), (11.19) в переменных  $\xi, \theta, \varphi$  запишем в виде

$$\begin{aligned}
N(\Delta_0, \varepsilon) \psi'' + 3\varepsilon \psi' + \varepsilon^2 G_0 (\Delta_0 + 2) \psi &= 0 \\
\psi' \Big|_{\xi=\pm 1} &= q_3^\pm \varepsilon
\end{aligned} \tag{11.22}$$

Штрихами обозначены производные по  $\xi$ .

Решение (11.22) будем отыскивать в виде

$$\psi = \varepsilon^{-1}(\psi_0 + \varepsilon\psi_1 + \varepsilon^2\psi_2 + \dots) \quad (11.23)$$

Коэффициенты разложения (11.23) определяются интегрированием по  $\xi$  рекуррентной системы, которая получается после подстановки (11.23) в (11.22). Приведем соотношения, определяющие три члена разложения (2.4)

$$\begin{aligned} (\Delta_0 + 2)\psi_0 &= -\frac{q_3}{G_0}, \quad (\Delta_0 + 2)\psi_1 = -\frac{3}{2} \frac{q_3^+ + q_3^-}{G_0} \\ \psi_2 &= \frac{1}{2} q_3 \xi^2 + \frac{q_3^+ + q_3^-}{2} \xi + E(\theta, \varphi) \end{aligned} \quad (11.24)$$

$$(\Delta_0 + 2)E(\theta, \varphi) = -\frac{q_3^+ + q_3^-}{2G_0} - 2q_3, \quad q_3 = q_3^+ + q_3^-$$

Формулы (11.24) дают возможность написать в асимптотических разложениях напряжений  $\sigma_\theta^{(2)}$ ,  $\sigma_\varphi^{(2)}$ ,  $\tau_{\theta\varphi}^{(2)}$  по три члена разложений, а в  $\tau_{r\theta}^{(2)}$ ,  $\tau_{r\varphi}^{(2)}$  один.

$$\begin{aligned} \sigma_\theta^{(2)} &= -\sigma_\varphi^{(2)} = 2G_1G_0 \frac{\partial^2}{\partial\varphi\partial\theta} \left[ \frac{\sigma(\xi, \theta, \varphi)}{\sin\theta} \right] \\ \tau_{\theta\varphi}^{(2)} &= G \left( \Delta_0 - 2 \frac{\partial^2}{\partial\theta^2} \right) \sigma(\xi, \theta, \varphi) \end{aligned} \quad (11.25)$$

$$\tau_{r\varphi}^{(2)} = -G_1\varepsilon^{-1} \frac{\partial^2}{\partial\varphi\partial\xi} \sigma(\xi, \theta, \varphi)$$

$$\tau_{r\theta}^{(2)} = G_1\varepsilon^{-1} \frac{1}{\sin\theta} \frac{\partial^2}{\partial\varphi\partial\xi} \sigma(\xi, \theta, \varphi)$$

$$\sigma(\xi, \theta, \varphi) = \psi_0 + \varepsilon\psi_1 + \varepsilon^2 \left[ \frac{1}{2} q_3 \xi^2 + \frac{q_3^+ + q_3^-}{2} \xi + E(\theta, \varphi) \right]$$

Из формул (11.25) следует, что напряжения  $\sigma_\theta^{(2)}$ ,  $\sigma_\varphi^{(2)}$ ,  $\tau_{\theta\varphi}^{(2)}$  имеют относительно  $\varepsilon$  порядок  $O(\varepsilon^{-1})$ , а  $\tau_{r\varphi}^{(2)}$ ,  $\tau_{r\theta}^{(2)}$  — порядок  $O(1)$ .

3. Однородным решением будем называть всякое решение уравнений равновесия (11.4), удовлетворяющие условию отсутствия напряжений на лицевых поверхностях.

Как было отмечено выше системы однородных решений для потенциальной задачи построены выше.

Поэтому переходим к асимптотическому анализу вихревой однородной задачи.

$$\begin{aligned} N(\Delta_0, \varepsilon)\psi &= \psi'' + 3\varepsilon\psi' + \varepsilon^2 G_0(\Delta_0 + 2)\psi = 0 \\ \psi' \Big|_{\xi=\pm 1} &= 0 \end{aligned} \quad (11.26)$$

После разделения переменных с помощью представления решения в виде

$$\psi(\varepsilon, \theta, \varphi) = a(\xi)V(\theta, \varphi) \quad (11.27)$$

относительно функций  $a(\xi)$  получается самосопряженная спектральная задача вида

$$N\left(\frac{1}{4} - z^2, \varepsilon\right)a(\xi) = 0 \quad a'(\pm 1) = 0 \quad (11.28)$$

Положив в формулах (11.24)  $q_3 = 0$  получаем однородные решения соответствующие первому итерационному процессу вихревой задачи. Этим решениям соответствует два собственных значения  $z_0 = \pm \frac{3}{2}$ . Последним соответствует

одна и та же собственная функция  $a_{00}(\xi) = c = const$ . Другую группу образует счетное множество собственных значений вида

$$z_t = \varepsilon^{-1}i(\gamma_{0t} + \varepsilon\gamma_{1t} + \dots), \quad t = 1, 2, \dots \quad (11.29)$$

где  $\gamma_{0t}$  в свою очередь являются ненулевыми собственными значениями спектральной задачи

$$T\psi_0 = G_0\gamma_0^2\psi, \quad T\psi_0 = \{-\psi_0'', \psi_0'(\pm 1) = 0\} \quad (11.30)$$

$$\gamma_{1t} = -\frac{3}{2G_0} \int_{-1}^1 \psi'_{0t} \psi_{0t} d\xi$$

Соответствующие собственные функции имеют вид

$$\psi_t = \psi_{0t} + \varepsilon \psi_{1t} + O(\varepsilon^2), \quad \psi_{1t} = \sum_{\substack{m=0 \\ m \neq 1}}^{\infty} l_{tm} \psi_{0m}$$

$$\int_{-1}^1 \psi_{0t} \psi_{0m} d\xi = \delta_{tm}, \quad l_{tm} = \frac{3}{G_0(\gamma_{0m}^2 - \gamma_{0t}^2)} \int_{-1}^1 \psi_{0t} \psi_{0m} d\xi$$

Собственным значением  $z_0$  соответствует следующее элементарное решение уравнения равновесия

$$u_r^{(20)} \equiv 0, \quad u_\theta^{(20)} = c \frac{r_0 e^{\varepsilon \xi}}{\sin \theta} \frac{\partial Y_0}{\partial \varphi}, \quad u_\varphi^{(20)} = -c_1 r_0 e^{\varepsilon \xi} \frac{\partial Y_0}{\partial \theta}$$

где  $Y_0(\theta, \varphi)$  – сферическая функция, удовлетворяющая уравнению  $(\Delta_0 + 2)Y_0(\theta, \varphi) = 0$ .

Остальным собственным значениям соответствуют элементарные вихревые решения вида

$$u_{rt}^{(22)} \equiv 0, \quad u_{\theta t}^{(22)} = [\psi_{0t} + \varepsilon \psi_{1t} + O(\varepsilon^2)] r_0 e^{\varepsilon \xi} \frac{\partial Y_t}{\sin \theta \partial \varphi} \quad (11.31)$$

$$u_{\varphi t}^{(22)} = -[\psi_{0t} + \varepsilon \psi_{1t} + O(\varepsilon^2)] r_0 e^{\varepsilon \xi} \frac{\partial Y_t}{\partial \varphi}$$

Дадим характеристику напряженно-деформированных состояний вихревой задачи. В соответствии с двумя группами собственных значений спектральной задачи (11.26) тензор напряжений преобразуется к виду

$$\underline{\underline{\sigma}}^{(2)} = \underline{\underline{\sigma}}^{(20)} + \underline{\underline{\sigma}}^{(22)} \quad (11.32)$$

Тензор напряжений  $\underline{\underline{\sigma}}^{(20)}$  соответствует собственным значениям  $z_0 = \pm \frac{3}{2}$  и его компоненты определяются формулами

$$\sigma_r^{(20)} = \tau_{r\theta}^{(20)} = \tau_{r\varphi}^{(20)} = 0$$

$$\sigma_\theta^{(20)} = -\sigma_\varphi^{(20)} = 2GC \frac{\partial^2}{\partial\theta\partial\varphi} \left[ \frac{Y_0(\theta, \varphi)}{\sin\theta} \right] \quad (11.33)$$

$$\tau_{\theta\varphi}^{(20)} = GC \left( \Delta_0 Y_0 - 2 \frac{\partial^2 Y_0(\theta, \varphi)}{\partial\theta^2} \right)$$

$$\sigma_\theta^{(22)} = -\sigma_\varphi^{(22)} = 2GG_0 \psi_k(\xi) \frac{\partial^2}{\partial\theta\partial\varphi} \left[ \frac{Y_k(\theta, \varphi)}{\sin\theta} \right] \quad (11.34)$$

$$\tau_{r\theta}^{(22)} = \varepsilon^{-1} \frac{G_1}{\sin\theta} \psi'_k(\xi) \frac{\partial Y_k(\theta, \varphi)}{\partial\varphi}$$

$$\tau_{r\varphi}^{(22)} = -\varepsilon^{-1} G_1 \psi'_k(\xi) \frac{\partial Y_k(\theta, \varphi)}{\partial\varphi}$$

$$\tau_{\theta\varphi}^{(22)} = G \psi_k(\xi) \left( \Delta_0 Y_k - \frac{\partial^2}{\partial\theta^2} Y_k(\theta, \varphi) \right)$$

$$\psi_k(\xi) = \psi_{0k}(\xi) + \varepsilon \psi_{1k}(\xi)$$

$$Y_0(\theta) = A_0 P_1(\cos\theta) + B_0 Q_1(\cos\theta), \quad P_1(\cos\theta) = \cos\theta$$

$$Q_1(\cos\theta) = \frac{1}{2} \cos\theta \ln \frac{1 + \cos\theta}{1 - \cos\theta} - 1$$

Разъясним картину напряженного состояния вихревой задачи.

Условия равновесия слоя имеет вид

$$2\pi \int_{\eta}^{r_2} \tau_{\theta\varphi}(r, \theta_1) r^2 \sin^2 \theta_1 dr = 2\pi \int_{\eta}^{r_2} \tau_{\theta\varphi}(r, \theta_2) r^2 \sin^2 \theta_2 r^2 dr \quad (11.35)$$

Рассмотрим связь однородных решений вихревой задачи с крутящим моментом  $M_{kp}$  напряжений, действующих в сечении  $\theta = const$ .

Имеем

$$M_{kp} = 2\pi \sin^2 \theta r_0^3 \int_{\eta}^{r_2} \tau_{\theta\varphi}(\xi, \theta) e^{3\varepsilon\xi} d\xi \quad (11.36)$$

Представим напряжений  $\tau_{\theta\varphi}$  в виде

$$\tau_{\theta\varphi} = \tau_{\theta\varphi}^{(20)} + G_1 \sum_{k=1}^{\infty} G_0 \psi_k(\xi) \left[ \left( z_k^2 - \frac{1}{4} \right) Y_k(\theta) - 2ctg\theta \frac{dY_k(\theta)}{d\theta} \right] \quad (11.37)$$

Слагаемое  $\tau_{\theta\varphi}^{(20)}$  соответствует собственным значениям  $z_0 = \pm \frac{3}{2}$  и имеет вид

$$\tau_{\theta\varphi}^{(20)} = \frac{G}{r} [A_0 P_1(\cos\theta) + B_0 Q_1(\cos\theta)] \quad (11.38)$$

Другая часть напряжений  $\tau_{\theta\varphi}$  определяется собственными функциями  $\psi_k$  и собственными значениями  $z_k$  спектральной задачи (3.5).

Преобразуем выражения  $M_{kp}$  с учетом (11.37), (11.38).

Имеем

$$\begin{aligned} M_{kp} &= 2\pi r_0^3 B_0 M_0 + 2\pi r_0^3 \sin^2 \theta G_i \times \\ &\times \sum_{k=1}^{\infty} \left[ \left( z_k^2 - \frac{1}{4} \right) Y_k(\theta) - 2ctg\theta \frac{dY_k(\theta)}{d\theta} \right] \int_{-1}^1 \psi_k(\xi) e^{3\varepsilon\xi} d\xi \\ M_0 &= G \int_{-1}^1 e^{\varepsilon\xi} d\xi = \frac{2sh\varepsilon}{\varepsilon} G_0 \end{aligned} \quad (11.39)$$

Исходя непосредственно из спектральной задачи (11.26), покажем, что в каждом слагаемом суммы в формуле (11.39) обращается в нуле множитель

$$\int_{-1}^1 \psi_k(\xi) e^{3\varepsilon\xi} d\xi = 0 \quad (11.40)$$

умножая обе части уравнения

$$\psi_k'' + 3\varepsilon\varphi_k' - G_0 \left( z_k^2 - 9/4 \right) \psi_k = 0$$

на  $e^{3\varepsilon\xi}$  интегрируя в пределах  $[-1, 1]$ , получаем

$$\int_{-1}^1 \psi_k'' e^{3\varepsilon\xi} d\xi + 3\varepsilon \int_{-1}^1 \psi_k' e^{3\varepsilon\xi} d\xi = \varepsilon^2 (z_k^2 - 9/4) \int_{-1}^1 \psi_k e^{3\varepsilon\xi} d\xi$$

Левая часть последнего равенства обращается в нуль. В этом легко убедиться с помощью интегрирования по частям с использованием граничного условия  $\psi'(\pm 1) = 0$  откуда и следует равенство (11.40).

Таким образом для  $M_{kp}$  получаем

$$M_{kp} = 2\pi r_0^3 B_0 M_0$$

Напряженное состояние, соответствующее нулям второй группы вихревой задачи, является самоуравновешенным в каждом сечении  $\theta = const$ .

Таким образом, общая задача теории упругости для сферического слоя расчлняется на две. Однако решения этих задач связаны через граничные условия на боковой поверхности. Поэтому при удовлетворении граничных условий на боковой поверхности возникает трудности, главным образом, связанные с неортогональностью однородных решений. Как было показано в §8, решения потенциальной задачи обладают свойством обобщенной ортогональности, решения вихревой задачи ортогональны. Но решения разных групп не обладают этими свойствами. Поэтому в общем случае краевая задача сводится к решению бесконечных систем линейных алгебраических уравнений как в осесимметричном случае.

## ГЛАВА 3

### ПОСТРОЕНИЕ ОДНОРОДНЫХ РЕШЕНИЙ ДЛЯ УСЕЧЕННОГО ПОЛОГО КОНУСА

#### §12. Общее представление решений уравнений анизотропной теории упругости для усеченного полого конуса

Будем рассматривать осесимметричную задачу анизотропной теории упругости для усеченного полого конуса переменной толщины.

Положение точек конуса в пространстве определяется сферическими координатами  $r, \theta, \varphi$  изменяющимися в следующих пределах (рис. 3.1).

$$r_1 \leq r \leq r_2, \theta_1 \leq \theta \leq \theta_2; \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi. \quad (12.1)$$

Сферические части границы ( $r = r_s$ ) будем называть торцами конуса, а остальную часть границы ( $\theta = \theta_n$ ) назовем боковой поверхностью.

Предполагается, что коническая часть границы свободна от напряжений, т.е.:

$$\sigma_\theta = 0, \tau_{r\theta} = 0, \text{ при } \theta = \theta_n \quad (n = 1, 2). \quad (12.2)$$

Отметим, что в настоящей главе будем рассматривать только однородные граничные условия на конической части границы, так как снятие нагрузки с боковой поверхности можно осуществить с помощью приемов, развитых в работах [4, 14].

Характер граничных условий на торцах конуса ( $r = r_s$ ) пока уточнять не будем, однако, будем считать их таковыми, что конус находится в равновесии. Приведем здесь полную систему уравнений, описывающих пространственные напряженно-деформированное состояние конической оболочки.

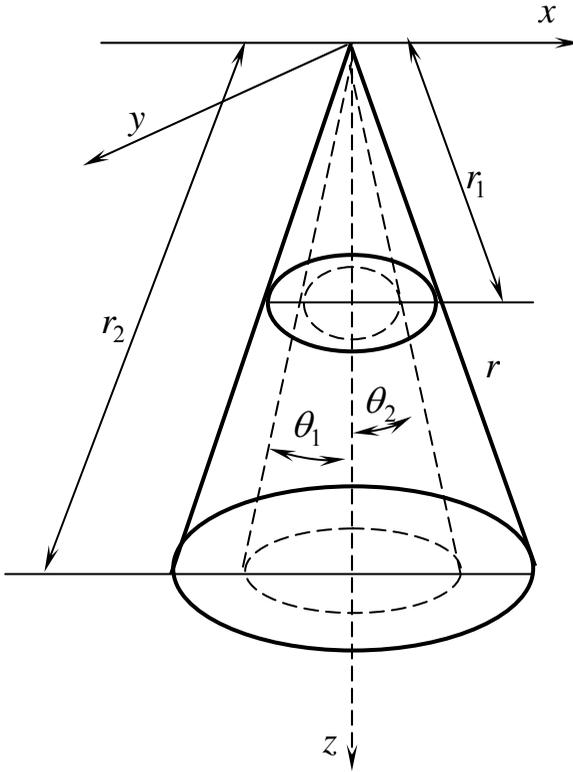


Рис.3.1

Уравнения равновесия в напряжениях, при отсутствии массовых сил, в сферической системе координат имеют вид [38]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{2\sigma_r - \sigma_\theta - \sigma_\varphi + \tau_{r\theta} \operatorname{ctg} \theta}{r} &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} + \frac{(\sigma_\theta - \sigma_\varphi) \operatorname{ctg} \theta + 3\tau_{r\theta}}{r} &= 0 \end{aligned} \quad (12.3)$$

Соотношения обобщенного закона Гука имеют вид:

$$\begin{aligned}
\sigma_r &= G_1 [b_{11}e_r + b_{12}(e_\theta + e_\varphi)] \\
\sigma_\varphi &= G_1 [b_{12}e_r + b_{23}e_\theta + b_{22}e_\varphi] \\
\sigma_\theta &= G_1 [b_{12}e_r + b_{22}e_\theta + b_{23}e_\varphi] \\
\tau_{r\theta} &= G_1 e_{r\theta},
\end{aligned} \tag{12.4}$$

где

$$\begin{aligned}
mb_{11} &= 2G_0(1-\nu^2)\frac{\nu_1}{\nu_2}, & mb_{22} &= 2G_0(1-\nu_1\nu_2) \\
mb_{22} &= 2G_0\nu_1(1+\nu), & mb_{23} &= 2G_0(\nu+\nu_1\nu_2) \\
m &= 1-\nu-2\nu_1\nu_2, & G_0 &= GG_1^{-1}, \quad E_0 = E_1E^{-1}.
\end{aligned}$$

Здесь  $\nu$ ,  $\nu_1$ ,  $\nu_2$ ,  $G$ ,  $G_1$ ,  $E$ ,  $E_1$  – технические константы материала.

Компоненты тензора деформаций

$$\begin{aligned}
e_r &= \frac{\partial u_r}{\partial r}, & e_\theta &= \frac{u_r}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta}, \\
e_\varphi &= \frac{u_r}{r} + \frac{u_\theta}{r} \operatorname{ctg} \theta, & e_{r\theta} &= \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} + \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r},
\end{aligned} \tag{12.5}$$

Подставляя (12.5), (12.4) в (12.3), получим уравнения равновесия в перемещениях:

$$\begin{aligned}
&b_{11} \frac{\partial^2 u_r}{\partial r^2} + \frac{2b_{11}}{r} \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{2}{r^2} (b_{12} - b_{22} - b_{23}) u_r + \frac{1}{r^2} \times \\
&\times \left( \frac{\partial^2 u_r}{\partial \theta^2} + \operatorname{ctg} \theta \frac{\partial u_r}{\partial \theta} \right) + \frac{(b_{12} + 1)}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \operatorname{ctg} \theta u_\theta \right) + \\
&+ \frac{b_{12} - b_{22} - b_{23} - 1}{r^2} \left( \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \operatorname{ctg} \theta u_\theta \right) = 0
\end{aligned} \tag{12.6}$$

$$\begin{aligned} & \frac{(b_{12} + 1)}{r} \frac{\partial^2 u_r}{\partial r \partial \theta} + \frac{(b_{22} + b_{23} + 2)}{r^2} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial r} + \\ & + \frac{b_{22}}{r^2} \left( \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial \theta^2} + \operatorname{ctg} \theta \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} \right) + \left( \frac{b_{22} - b_{23} - 2}{r^2} - \frac{b_{22}}{r^2 \sin^2 \theta} \right) u_\theta = 0. \end{aligned}$$

Решения уравнений (2.6) будем отыскивать в виде:

$$u_r = r^\lambda u(\lambda, \theta), \quad u_\theta = r^\lambda v(\lambda, \theta) \quad (12.7)$$

Подставляя (12.7) в (12.6), после разделения переменных относительно пары функций  $(u, v)$ , получаем следующую систему обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} L_1(\lambda)(u, v) = u'' + \operatorname{ctg} \theta \cdot u' + [b_{11} \lambda(\lambda + 1) + 2(b_{12} - b_{22} - b_{23})]u + \\ + [(b_{12} + 1)\lambda + b_{12} - b_{22} - b_{23} - 1](v' + \operatorname{ctg} \theta v) = 0 \end{aligned} \quad (12.8)$$

$$\begin{aligned} L_2(\lambda)(u, v) = [(b_{12} + 1)\lambda + b_{22} + b_{23} + 2]u' + \\ + b_{22} \left( v'' + \operatorname{ctg} \theta v' - \frac{1}{\sin^2 \theta} v \right) + [\lambda(\lambda + 1) + b_{22} - b_{23} - 2]v = 0. \end{aligned}$$

Здесь штрихами обозначены производные по  $\theta$ .

Подставляя (12.7) в (12.5) с учетом (12.4), для функций  $u(\lambda, \theta)$ ,  $v(\lambda, \theta)$  получаем следующие однородные граничные условия:

$$\begin{aligned} M_1(\lambda)(u, v) \Big|_{\theta=\theta_n} &= [(b_{12} \lambda + b_{22} + b_{23})u + b_{22}v' + b_{23} \operatorname{ctg} \theta v] \Big|_{\theta=\theta_n} = 0 \\ M_2(\lambda)(u, v) \Big|_{\theta=\theta_n} &= [u' + (\lambda - 1)v] \Big|_{\theta=\theta_n} = 0, \quad n = 1, 2. \end{aligned} \quad (12.9)$$

Таким образом, система уравнений (12.8) совместно с граничными условиями (12.9) порождает спектральную задачу для пары функций  $(u, v)$ .

Обратимся к изучению поставленной спектральной задачи.

Для построения общего решения системы уравнений (12.8) будем отыскивать  $u(\lambda, \theta)$ ,  $v(\lambda, \theta)$  в следующем виде:

$$u(\lambda, \theta) = AT_\mu(\theta), \quad v(\lambda, \theta) = D \frac{dT_\mu}{d\theta}(\theta), \quad (12.10)$$

где  $T_\mu(\theta)$  удовлетворяет уравнению Лежандра.

$$T_\mu''(\theta) + ctg\theta T_\mu' + \mu(\mu+1)T_\mu = 0. \quad (12.11)$$

После подстановки (12.10) в (12.8) с учетом (12.11) относительно  $\mu$  получаем следующее характеристическое уравнение:

$$\begin{aligned} & b_{22}\mu^2(\mu+1)^2 - [(b_{11}b_{22} - b_{12}^2 - 2b_{12})\lambda(\lambda+1) + 2b_{22} + \\ & + 2(b_{12} - b_{22} - b_{23})(G_0 - 1)]\mu(\mu+1) + b_{11}\lambda^2(\lambda+1)^2 + \\ & + 2[b_{11}(G_0 - 1) + b_{12} - b_{22} - b_{23}]\lambda(\lambda+1) + \\ & + 4(b_{12} - b_{23} - b_{23})(G_0 - 1) = 0 \end{aligned} \quad (12.12)$$

Известно, что общее решение уравнения (12.11) – две линейно независимые функции  $P_\mu(\cos\theta)$ ,  $Q_\mu(\cos\theta)$ , где  $P_\mu(\cos\theta)$  – функция Лежандра первого рода,  $Q_\mu(\cos\theta)$  – функция Лежандра второго рода. Далее учитывая, что  $P_{-i-1}(\cos\theta) = P_i(\cos\theta)$

$$Q_{-i-1}(\cos\theta) = Q(\cos\theta) - \pi ctg\pi \cdot P_i(\cos\theta)$$

Общее решение системы (12.6) можно представить в виде

$$\begin{aligned} u_r &= r^\lambda [A_1\psi_{\mu_1}(\theta) + A_2\psi_{\mu_2}(\theta)] \\ u_\theta &= r^\lambda b_0 \left[ \frac{d\psi_{\mu_1}(\theta)}{d\theta} + \frac{d\psi_{\mu_2}(\theta)}{d\theta} \right] \end{aligned} \quad (12.13)$$

где

$$\psi_\mu(\theta) = C_\mu P_\mu(\cos\theta) + B_\mu Q_\mu(\cos\theta)$$

$$A_i = -b_{22}\mu_i(\mu_i+1) + \lambda(\lambda+1) + b_{22} - b_{23} - 2$$

$$b_0 = -[(b_{12}+1)\lambda + b_{22} + b_{23} + 2]$$

$C_\mu, B_\mu$  – неизвестные постоянные.

Удовлетворяя граничные условия (12.9) относительно постоянных  $C_{\mu 1}, B_{\mu 1}, C_{\mu 2}, B_{\mu 2}$ , получаем следующую систему уравнений

$$\begin{aligned} & \left[ C_{11}P_{\mu 1}(\cos \theta_n) + C_{13}ctg \theta_n \frac{dP_{\mu 1}(\cos \theta_n)}{d\theta} \right] C_{\mu 1} + \\ & + \left[ C_{11}P_{\mu 1}(\cos \theta_n) + C_{13}ctg \theta_n \frac{dQ_{\mu 1}(\cos \theta_n)}{d\theta} \right] B_{\mu 1} + \\ & + \left[ C_{12}P_{\mu 2}(\cos \theta_n) + C_{14}ctg \theta_n \frac{dP_{\mu 2}(\cos \theta_n)}{d\theta} \right] C_{\mu 2} + \\ & + \left[ C_{12}P_{\mu 2}(\cos \theta_n) + C_{14}ctg \theta_n \frac{dQ_{\mu 2}(\cos \theta_n)}{d\theta} \right] B_{\mu 2} = 0, \quad (12.14) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & d_{11} \frac{dP_{\mu 1}(\cos \theta_n)}{d\theta} C_{\mu 1} + d_{11} \frac{dQ_{\mu 1}(\cos \theta_n)}{d\theta} B_{\mu 1} + \\ & + d_{12} \frac{dP_{\mu 2}(\cos \theta_n)}{d\theta} C_{\mu 2} + d_{12} \frac{dQ_{\mu 2}(\cos \theta_n)}{d\theta} B_{\mu 2} = 0, \\ & (n = 1, 2) \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} C_{1j} &= (b_{12}\lambda + b_{22} + b_{23})A_j - \mu_j(\mu_j + 1)b_{22}b_0, \quad (j = 1, 2) \\ C_{13} &= C_{14} = (b_{23} - b_{22})b_0 \\ d_{1k} &= A_k + (\lambda - 1)b_0, \quad (k = 1, 2). \end{aligned}$$

Приравнивая нулю определитель системы (12.14) относительно  $\lambda$ , получаем следующее характеристическое уравнение

$$\Delta(\lambda, \theta_1, \theta_2) = \frac{2C_{11}C_{12}d_{11}d_{12}}{\sin \theta_1 \sin \theta_2} + d_{11}d_{12}C_{11}C_{12} \left[ D_{\mu 1}^{(1,0)}(\theta_1, \theta_2) \times \right.$$

$$\begin{aligned}
& \times D_{\mu_2}^{(0,1)}(\theta_1, \theta_2) + D_{\mu_1}^{(0,1)}(\theta_1, \theta_2) D_{\mu_2}^{(1,0)}(\theta_1, \theta_2) - C_{11}^2 d_{12}^2 \times \\
& \times \left[ D_{\mu_1}^{(0,0)}(\theta_1, \theta_2) D_{\mu_2}^{(1,1)}(\theta_1, \theta_2) - D_{\mu_1}^{(0,1)}(\theta_1, \theta_2) D_{\mu_2}^{(1,0)}(\theta_1, \theta_2) \right] - \\
& - C_{11}^2 d_{12}^2 D_{\mu_1}^{(0,0)}(\theta_1, \theta_2) D_{\mu_2}^{(1,1)}(\theta_1, \theta_2) - C_{12}^2 d_{11}^2 D_{\mu_2}^{(0,0)}(\theta_1, \theta_2) \times \\
& \times D_{\mu_1}^{(1,1)}(\theta_1, \theta_2) - C_{12}^2 (d_{12} - d_{11})^2 \operatorname{ctg} \theta_1 \operatorname{ctg} \theta_2 D_{\mu_1}^{(1,1)}(\theta_1, \theta_2) \times \\
& \times D_{\mu_2}^{(1,1)}(\theta_1, \theta_2) - C_{11} C_{13} d_{12} (d_{12} - d_{11}) \left[ \operatorname{ctg} \theta_1 D_{\mu_1}^{(1,0)}(\theta_1, \theta_2) + \right. \\
& \left. + \operatorname{ctg} \theta_2 D_{\mu_1}^{(0,1)}(\theta_1, \theta_2) \right] D_{\mu_2}^{(1,1)}(\theta_1, \theta_2) + C_{12} C_{13} d_{11} (d_{12} - d_{11}) \times \\
& \times \left[ \operatorname{ctg} \theta_1 D_{\mu_2}^{(1,0)}(\theta_1, \theta_2) + \operatorname{ctg} \theta_2 D_{\mu_2}^{(0,1)}(\theta_1, \theta_2) \right] D_{\mu_1}^{(1,1)}(\theta_1, \theta_2) = 0, \quad (12.15)
\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
D_t^{(s,l)}(\varphi, \psi) &= P_t^{(s)}(\cos \varphi) Q_t^{(l)}(\cos \psi) - P_t^{(s)}(\cos \psi) Q_t^{(l)}(\cos \varphi), \\
(s, l &= 0, 1).
\end{aligned}$$

Трансцендентное уравнение (12.15) определяет счетное множество корней  $\lambda_k$ , а соответствующее им постоянные  $C_{\mu_1}, B_{\mu_1}, C_{\mu_2}, B_{\mu_2}$  пропорциональны алгебраическим дополнениям элементов какой-либо строки определителя системы.

Выбирая в качестве решения системы (12.14) элементы первой строки, получим

$$\begin{aligned}
C_{\mu_{1k}} &= -\frac{d_{11} d_{12} C_{12}}{\sin \theta_2} Q_{\mu_{1k}}^{(1)}(\cos \theta_1) - d_{12}^2 D_{\mu_{2k}}^{(1,1)}(\theta_1, \theta_2) \times \\
& \times \left[ C_{11} Q_{\mu_{1k}}(\cos \theta_2) + C_{13} \operatorname{ctg} \theta_2 Q_{\mu_{1k}}^{(1)}(\cos \theta_2) \right] + d_{11} d_{12} \times \\
& \times Q_{\mu_{1k}}^{(1)}(\cos \theta_2) \left[ C_{12} D_{\mu_{2k}}^{(1,0)}(\theta_1, \theta_2) + C_{13} \operatorname{ctg} \theta_2 D_{\mu_{2k}}^{(1)}(\theta_1, \theta_2) \right], \\
B_{\mu_{1k}} &= \frac{d_{11} d_{12} C_{12}}{\sin \theta_2} P_{\mu_{1k}}^{(1)}(\cos \theta_1) + d_{12}^2 D_{\mu_{2k}}^{(1,1)}(\theta_1, \theta_2) \times \\
& \times \left[ C_{11} P_{\mu_{1k}}(\cos \theta_2) + C_{13} \operatorname{ctg} \theta_2 P_{\mu_{1k}}^{(1)}(\cos \theta_2) \right] - d_{11} d_{12} \times \\
& \times P_{\mu_{1k}}^{(1)}(\cos \theta_2) \left[ C_{12} D_{\mu_{2k}}^{(1,0)}(\theta_1, \theta_2) + C_{13} \operatorname{ctg} \theta_2 D_{\mu_{2k}}^{(1)}(\theta_1, \theta_2) \right],
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
C_{\mu_{2k}} &= -\frac{d_{11}d_{12}C_{12}}{\sin\theta_2} Q_{\mu_{2k}}^{(1)}(\cos\theta_1) - d_{11}^2 D_{\mu_{1k}}^{(1,1)}(\theta_1, \theta_2) \times \\
&\times \left[ C_{12} Q_{\mu_{2k}}(\cos\theta_2) + C_{13} \operatorname{ctg}\theta_2 Q_{\mu_{2k}}^{(1)}(\cos\theta_2) \right] + d_{11}d_{12} \times \\
&\times Q_{\mu_{2k}}^{(1)}(\cos\theta_2) \left[ C_{11} D_{\mu_{1k}}^{(1,0)}(\theta_1, \theta_2) + C_{13} \operatorname{ctg}\theta_2 D_{\mu_{1k}}^{(1,1)}(\theta_1, \theta_2) \right], \\
B_{\mu_{2k}} &= \frac{d_{11}d_{12}C_{11}}{\sin\theta_2} P_{\mu_{2k}}^{(1)}(\cos\theta_1) + d_{11}^2 D_{\mu_{1k}}^{(1,1)}(\theta_1, \theta_2) \times \\
&\times \left[ C_{12} Q_{\mu_{2k}}(\cos\theta_2) + C_{13} \operatorname{ctg}\theta_2 Q_{\mu_{2k}}^{(1)}(\cos\theta_2) \right] - d_{11}d_{12} \times \\
&\times Q_{\mu_{2k}}^{(1)}(\cos\theta_2) \left[ C_{11} D_{\mu_{1k}}^{(1,0)}(\theta_1, \theta_2) + C_{13} \operatorname{ctg}\theta_2 D_{\mu_{1k}}^{(1,1)}(\theta_1, \theta_2) \right].
\end{aligned}$$

Подставляя (12.16) в (12.13) и суммируя по всем корням  $\lambda_n$  и с учитывая формулы (12.4), (12.7) получаем однородные решения следующего вида:

$$\begin{aligned}
u_r &= \sum_{k=0}^{\infty} C_k r^{\lambda_k} u_{rk}(\theta), \\
u_\theta &= \sum_{k=0}^{\infty} C_k r^{\lambda_k} u_{\theta k}(\theta)
\end{aligned} \tag{12.17}$$

$$\begin{aligned}
\sigma_r &= \frac{G_1}{r} \sum_{k=0}^{\infty} C_k r^{\lambda_k} Q_{rk}(\theta), \\
\sigma_\varphi &= \frac{G_1}{r} \sum_{k=0}^{\infty} C_k r^{\lambda_k} Q_{\varphi k}(\theta) \\
\sigma_\theta &= \frac{G_1}{r} \sum_{k=0}^{\infty} C_k r^{\lambda_k} Q_{\theta k}(\theta), \\
\tau_{r\theta} &= \frac{G_1}{r} \sum_{k=0}^{\infty} C_k r^{\lambda_k} T_k(\theta).
\end{aligned} \tag{12.18}$$

Здесь  $C_k$  – произвольные постоянные;

$$u_{rk}(\theta) = u(\lambda_k, \theta) = A_1 F_1(\lambda_k, \theta) + A_2 F_2(\lambda_k, \theta),$$

$$\begin{aligned}
u_{\phi k}(\theta) &= v(\lambda_k, \theta) = b_0 \left[ \frac{dF_1(\lambda_k, \theta)}{d\theta} + \frac{dF_2(\lambda_k, \theta)}{d\theta} \right], \\
Q_{rk}(\theta) &= (b_{11}\lambda_k + 2b_{12}) [A_1 F_1(\lambda_k, \theta) + A_2 F_2(\lambda_k, \theta)] + \\
&+ \lambda_k(\lambda_k + 1) b_0 \left[ \frac{dF_1(\lambda_k, \theta)}{d\theta} + \frac{dF_2(\lambda_k, \theta)}{d\theta} \right], \\
Q_{\phi k}(\theta) &= (b_{12}\lambda_k + b_{22} + b_{23}) [A_1 F_1(\lambda_k, \theta) + A_2 F_2(\lambda_k, \theta) + b_{23}b_0 \times \\
&\times \left[ \frac{d^2 F_1(\lambda_k, \theta)}{d\theta^2} + \frac{d^2 F_2(\lambda_k, \theta)}{d\theta^2} \right] + ctg \theta b_{22} b_0 \left[ \frac{dF_1(\lambda_k, \theta)}{d\theta} + \frac{dF_2(\lambda_k, \theta)}{d\theta} \right], \\
Q_{\theta k}(\theta) &= (b_{12}\lambda_k + b_{22} + b_{23}) [A_1 F_1(\lambda_k, \theta) + A_2 F_2(\lambda_k, \theta) + b_{22}b_0 \times \\
&\times \left[ \frac{d^2 F_1(\lambda_k, \theta)}{d\theta^2} + \frac{d^2 F_2(\lambda_k, \theta)}{d\theta^2} \right] + b_{23}b_0 ctg \theta \left[ \frac{dF_1(\lambda_k, \theta)}{d\theta} + \frac{dF_2(\lambda_k, \theta)}{d\theta} \right], \\
T_k(\theta) &= [A_1 + b_0(\lambda_k - 1)] \frac{dF_1(\lambda_k, \theta)}{d\theta^2} + [A_2 + b_0(\lambda_k - 1)] \frac{dF_2(\lambda_k, \theta)}{d\theta^2}, \\
F_1(\lambda_k, \theta) &= -\frac{d_{11}d_{12}C_{12}}{\sin \theta_2} D_{\mu_{1k}}^{(0,1)}(\theta, \theta_1) - d_{12}^2 D_{\mu_{2k}}^{(1,1)}(\theta, \theta_2) \times \\
&\times [C_{11} D_{\mu_{1k}}^{(0,0)}(\theta, \theta_2) + C_{13} ctg \theta_2 D_{\mu_{1k}}^{(0,1)}(\theta, \theta_2)] + d_{11}d_{12} D_{\mu_{1k}}^{(0,1)}(\theta, \theta_2) \times \\
&\times [C_{12} D_{\mu_{2k}}^{(1,0)}(\theta_1, \theta_2) + C_{13} ctg \theta_2 D_{\mu_{2k}}^{(1,1)}(\theta_1, \theta_2)], \\
F_2(\lambda_k, \theta) &= -\frac{d_{11}d_{12}C_{11}}{\sin \theta_2} D_{\mu_{2k}}^{(0,1)}(\theta, \theta_1) - d_{11}^2 D_{\mu_{1k}}^{(1,1)}(\theta_1, \theta_2) \times \\
&\times [C_{12} D_{\mu_{2k}}^{(0,0)}(\theta, \theta_2) + C_{13} ctg \theta_2 D_{\mu_{2k}}^{(0,1)}(\theta, \theta_2)] + d_{11}d_{12} D_{\mu_{2k}}^{(0,1)}(\theta, \theta_2) \times \\
&\times [C_{11} D_{\mu_{1k}}^{(1,0)}(\theta_1, \theta_2) + C_{13} ctg \theta_2 D_{\mu_{1k}}^{(1,1)}(\theta_1, \theta_2)].
\end{aligned}$$

### §13. Удовлетворение граничных условий на торцах конуса при помощи однородных решений. Обобщенное условие ортогональности однородных решений

Как известно, соотношения ортогональности Шиффа-Папковича сыграли важную роль в разработке методов решения основных краевых задач теории упругости.

В работе [10] показано, что эти соотношения являются следствием общей теоремы взаимности Бетти. Таким образом, эти соотношения имеют место во всех упругих задачах.

Ниже доказывается обобщенное условие ортогональности однородных решений для трансверсально-изотропного полого конуса, позволяющее точно решить задачу теории упругости при смешанных граничных условиях на торцах конуса.

Рассмотрим следующие однородные граничные условия на боковых поверхностях.

$$\sigma_\theta = 0, \tau_{r\theta} = 0 \quad \text{при } \theta = \theta_1, \theta_2, \quad (13.1)$$

$$u_r = 0, u_\theta = 0 \quad \text{при } \theta = \theta_1, \theta_2, \quad (13.2)$$

$$u_r = 0, \tau_{r\theta} = 0 \quad \text{при } \theta = \theta_1, \theta_2, \quad (13.3)$$

$$\sigma_r = 0, u_\theta = 0 \quad \text{при } \theta = \theta_1, \theta_2, \quad (13.4)$$

Докажем, что при любых граничных условиях (13.1)-(13.4) справедливо следующее соотношение ортогональности

$$\int_{\theta_1}^{\theta_2} (u_{rp} \sigma_r^k + u_{\theta p} \tau_{r\theta}^k)^2 \sin \theta d\theta = 0 \quad (p \neq k). \quad (13.5)$$

Отметим, что соотношение (13.5) является прямым следствием теоремы Бетти и не зависит от вида граничных условий на боковой поверхности конуса. На самом деле, пусть  $u_r^i, u_\theta^i, \sigma_r^i, \tau_{r\theta}^i$  ( $i = 1, 2$ ) – перемещения и напряжения

первого и второго состояний. Тогда согласно теореме Бетти, для любого  $r$  справедливы равенства

$$\int_{\theta_1}^{\theta_2} (u_r^1 \sigma_r^2 + u_\theta^1 \tau_{r\theta}^2) r^2 \sin \theta d\theta = \int_{\theta_1}^{\theta_2} (u_r^2 \sigma_r^1 + u_\theta^2 \tau_{r\theta}^1) r^2 \sin \theta d\theta. \quad (13.6)$$

Подставляя (12.17), (12.18) в (13.6) получаем

$$\int_{\theta_1}^{\theta_2} (Q_{rk} u_{rp} + T_k u_{\theta p}) \sin \theta d\theta = 0 \quad (k \neq p). \quad (13.7)$$

В качестве примера рассмотрим первый вариант смешанных торцевых условий, аналогично рассматриваются другие смешанные граничные условия на торцах конуса.

Итак, пусть заданы следующие условия

$$u_r = a_s(\theta), \quad \tau_{r\theta} = \tau_s(\theta) \quad \text{при } r = r_s \quad (s = 1, 2). \quad (13.8)$$

Для удовлетворения граничным условиям (13.8) необходимо выполнить разложения

$$a_s(\theta) = \sum_{k=1}^{\infty} C_{ks} u_k(\theta), \quad \tau_s(\theta) = \sum_{k=1}^{\infty} C_{ks} T_k(\theta), \quad (s = 1, 2). \quad (13.9)$$

$C_{ks}$  – произвольные постоянные, подлежащие определению из торцевых условий.

Постоянные  $C_{ks}$  можно найти из уравнения (13.9), если использовать соотношение (13.7). Умножим первое равенство (13.9) на  $Q_p(\theta) \sin \theta$ , второе – на  $u_{\theta p} \sin \theta$ . Сложим полученные произведения и проинтегрируем по  $\theta$  от  $\theta_1$  до  $\theta_2$ .

В силу соотношений обобщенной ортогональности, искомые постоянные имеют вид

$$C_{ks} = 2^{-1} \Delta_k \int_{\theta_1}^{\theta_2} (a_s Q_{rk} + \tau_s T_k) \sin \theta d\theta \quad (s = 1, 2; k = 1, 2, \dots), \quad (13.10)$$

где  $\Delta_k$  – значение интеграла (13.4) при  $p = k$ .

Как было отмечено в [1], обобщенное условие ортогональности однородных решений позволяет точно решить задачу теории упругости только при смешанных торцевых условиях. Во всех остальных случаях приходится обращаться к различным приближенным подходам. Поэтому рассмотрим вопрос об удовлетворении граничных условий на торцах конуса при помощи класса однородных решений в общем случае.

Пусть при  $r = r_s$ , заданы системы напряжений  $\sigma_r^s$ ,  $\tau_{r\theta}^s$  ( $s = 1, 2$ ). Итак, пусть при  $r = r_s$  ( $s = 1, 2$ ) заданы

$$\sigma_r = Q_s(\theta), \quad \tau_{r\theta} = T_s(\theta). \quad (13.11)$$

Функции  $Q_s(\theta)$ ,  $T_s(\theta)$  удовлетворяют условиям равновесия конуса

$$\begin{aligned} 2\pi r_1^2 \int_{\theta_1}^{\theta_2} [Q_1(\theta) \cos \theta - T_1(\theta) \sin \theta] \sin \theta d\theta = \\ = 2\pi r_2^2 \int_{\theta_1}^{\theta_2} [Q_2(\theta) \cos \theta - T_2(\theta) \sin \theta] \sin \theta d\theta = P. \end{aligned} \quad (13.12)$$

Здесь  $P$  – главный вектор усилий, действующих в произвольном сечении  $r = const$ .

$$P = 2\pi r^2 \int_{\theta_1}^{\theta_2} [\sigma_r \cos \theta - \tau_{r\theta} \sin \theta] \sin \theta d\theta. \quad (13.13)$$

Для определения произвольных постоянных  $C_k$  в (12.17), (12.18), вариации которых будем считать независимыми, как в работе [2], используем вариационный принцип Лагранжа. Поскольку однородные решения удовлетворяют уравнению равновесия и граничным условиям на конической поверхности, вариационный принцип принимает следующую форму

$$\sum_{s=1}^{\infty} r_s^2 \int_{\theta_1}^{\theta_2} [(\sigma_r - Q_s)\delta u_r + (\tau_{r\theta} - T_s)\delta u_\theta]_{r=r_s} \sin \theta d\theta = 0. \quad (13.14)$$

Приравнивая нулю коэффициенты при независимых вариациях, получим следующую бесконечную систему

$$\sum_{k=1}^{\infty} M_{jk} C_k = N_j \quad (j = 1, 2, \dots). \quad (13.15)$$

Здесь

$$M_{jk} = \sum_{s=1}^2 \exp(\lambda_j + \lambda_k + 2) \ln r_s \int_{\theta_1}^{\theta_2} (Q_{rk} u_{rj} + T_k V_{jk}) \sin \theta d\theta,$$

$$N_j = \sum_{s=1}^2 \exp(\lambda_j + 2) \ln r_s \int_{\theta_1}^{\theta_2} (Q_s u_{rj} + T_s V_{\theta j}) \sin \theta d\theta.$$

Матрицы этих систем не зависят от вида нагрузки на торцах конуса. Поэтому обращение этих матриц может быть произведено один раз навсегда.

Построенные однородные решения, как видно из (12.17), (12.18), верны для любой трехмерной среды, ограниченной двумя сферическими и двумя коническими поверхностями.

Однако, несмотря на свою общность, такие решения имеют только теоретическую значимость.

Практическое применение таких решений, несмотря на бурное развитие вычислительной техники, в настоящее время, малоэффективно.

С другой стороны, цель диссертационной работы не является решением каких-то задач в трехмерной постановке. Это не самоцель.

Целью является нахождение связи между решениями, полученными по трехмерной теории упругости и оболочечными решениями.

Поэтому, в дальнейшем мы будем предполагать, что толщина конуса намного меньше, чем остальные размеры.

## ГЛАВА 4

### АСИМПТОТИЧЕСКОЕ ПОВЕДЕНИЕ РЕШЕНИЯ ОСЕИММЕТРИЧНОЙ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ ДЛЯ ТРАНСВЕРСАЛЬНО- ИЗОТРОПНОГО ПОЛОГО КОНУСА

В этой главе построена асимптотическая теория для общей конической оболочки переменной толщины, справедливой, в частности, для цилиндрической оболочки. В этой теории содержатся методы построения однородных решений, а также указан путь построения неоднородных решений. Это дало возможность выявить особенности напряженно-деформированного состояния трансверсально-изотропного полого конуса переменной толщины. Используя один из вариантов асимптотического метода, при помощи метода однородных решений уравнений теории упругости, изучено поведение решений трехмерных краевых задач как во внутренней части оболочки, так и около ее краев.

Показано, что напряженное состояние трансверсально-изотропного полого конуса можно разделить на три типа: внутреннее напряженное состояние, простой краевой эффект и погранслой. Построены однородные решения, которые зависят от корней характеристического уравнения. Классификация корней произведена относительно малого параметра  $\varepsilon$ , который характеризует тонкостенность оболочки.

Изучено поведение спектра краевых задач в зависимости от толщины и материальной характеристики оболочки.

С помощью вариационного принципа Лагранжа краевая задача сведена к решению бесконечных систем линейных алгебраических уравнений, которые известны из

трансверсально-изотропной теории толстых плит. Дана численная оценка показателя изменяемости напряженного состояния в зависимости от материала, толщины оболочки и угла раствора срединной поверхности оболочки.

Получены простые асимптотические формулы, позволяющие рассчитать напряженно-деформированное состояние оболочки с любой наперед заданной точностью. Как известно, при формировании спектра краевых задач теории упругости важную роль играет оценка роли граничных условий, поэтому в диссертационной работе разобраны все краевые условия, которые могут быть поставлены в пространственных задачах теории упругости.

Изучена задача кручения трансверсально-изотропного полого конуса переменной толщины. Сначала задача решается точно, а потом, предполагая тонкостенность оболочки, исследовано асимптотическое поведение решения для конической оболочки. Предложена двумерная теория для конической оболочки переменной толщины, позволяющая решить неоднородные задачи для конуса переменной толщины.

#### **§14. Анализ корней характеристического уравнения**

Рассмотрим случай, когда коническая часть границы свободна от напряжений. В этом случае характеристическое уравнение имеет вид (12.15). Как видно из формулы (12.15) характеристическое уравнение имеет очень сложную структуру и провести точный анализ его корней крайне трудно. Для эффективного изучения его корней, как и в изотропном случае, допустим, что оболочка тонкостенная. Пусть

$$\theta_1 = \theta_0 - \varepsilon, \quad \theta_2 = \theta_0 + \varepsilon, \quad (14.1)$$

где  $\theta_0$  – угол раствора срединной поверхности оболочки,  $\varepsilon$  – безразмерный параметр, характеризующий ее толщину. Далее предположим, что  $\varepsilon$  – малый параметр,  $0 < \xi_1 < \theta_0 < \xi_2 < \frac{\pi}{2}$  (где  $\xi_1, \xi_2$  – некоторые постоянные).

Случай  $\theta_0 = \frac{\pi}{2}$  является особым и соответствует плите переменной толщины, и более подробно исследованы в главе V.

Подставим (14.1) в (12.16). Тогда

$$D(z, \varepsilon, \theta_0) = \Delta(z, \theta_1, \theta_2) = 0 \quad (14.2)$$

Можно показать, что функция  $D(z, \varepsilon, \theta_0)$  является четной функцией как  $z$ , так и  $\varepsilon$ . Относительно нулей функции  $D(z, \varepsilon, \theta_0)$  докажем следующее утверждение: функция  $D(z, \varepsilon, \theta_0)$  при  $\varepsilon \rightarrow 0$  имеет три группы нулей:

а) первая группа состоит из двух нулей, и характеризуется тем, что они не зависят от малого параметра  $\varepsilon$ :  $z_{1,2} = \pm 1/2$ ;

б) вторая группа нулей состоит из четырех нулей, которые при  $\varepsilon \rightarrow 0$  имеют порядок  $O(\varepsilon^{-1/2})$ ;

в) третья группа нулей состоит из счетного множества нулей, которые при  $\varepsilon \rightarrow 0$  имеют порядок  $O(\varepsilon^{-1})$ .

Приведем схему доказательства первого утверждения. Для этой цели, предполагая, что  $\varepsilon z \rightarrow 0$  и разлагая функции  $D_z^{(s,l)}(\varphi, \psi)$  в окрестности  $\theta = \theta_0$  в ряд по  $\varepsilon$ , получим:

$$\begin{aligned}
D_z^{(0,0)}(\theta_1, \theta_2) &= \varepsilon \sin^{-1} \theta_0 \left\{ -2 + \frac{1}{3} [4z(z+1) - (1 + 2ctg^2 \theta_0)] \times \right. \\
&\times \varepsilon^2 + \frac{2}{5!} [-16z^2(1+z)^2 + (24 + 32ctg^2 \theta_0)z(z+1) - \\
&\left. - (24ctg^4 \theta_0 + 28ctg^2 \theta_0 + 5)] \varepsilon^4 + \dots \right\} \\
D_z^{(1,1)}(\theta_1, \theta_2) &= \frac{-z(z+1)}{\sin \theta_0} \varepsilon \left\{ 2 + \frac{1}{3} [5 + 6ctg^2 \theta_0 - 4z(z+1)] \times \right. \\
&\times \varepsilon^2 + \frac{2}{5!} [110ctg^4 \theta_0 + 146ctg^2 \theta_0 + 57 - (56 + 64ctg^2 \theta_0) \times \\
&\left. \times z(z+1) + 16z^2(z+1)^2] \varepsilon^4 + \dots \right\}, \tag{14.3}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
D_z^{(1,0)}(\theta_1, \theta_2) &= \sin^{-1} \theta_0 \left\{ 1 + ctg \theta_0 \varepsilon + \frac{1}{2} [1 + 2ctg^2 \theta_0 - 4z(z+1)] \times \right. \\
&\times \varepsilon^2 + \frac{1}{3!} [5 + 6ctg^2 \theta_0 - 4z(z+1)] ctg \theta \varepsilon^3 + \frac{1}{4!} [24ctg^4 \theta_0 + 28ctg^2 \theta_0 + \\
&+ 5 - (24 + 32ctg^2 \theta_0)z(z+1) + 16z^2(z+1)^2] \varepsilon^4 + \frac{1}{5!} [74ctg^4 \theta_0 + \\
&+ 101ctg^2 \theta_0 + 57 - (56 + 64ctg^2 \theta_0)z(z+1) + 16z^2(z+1)^2] ctg \theta_0 \varepsilon^5 + \\
&+ \frac{1}{6!} [394ctg^6 \theta_0 + 663ctg^4 \theta_0 + 286ctg^2 \theta_0 + 16 - (776ctg^4 \theta_0 + \\
&+ 1028ctg^2 \theta_0 + 231)z(z+1) + (288ctg^2 \theta_0 + 240)z^2(z+1)^2 - \\
&\left. - 64z^3(z+1)^3] \varepsilon^6 + \dots \right\},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
D_z^{(0,1)}(\theta_1, \theta_2) &= -\sin^{-1} \theta_0 \left\{ 1 - ctg \theta_0 \varepsilon + \frac{1}{2} [1 + 2ctg^2 \theta_0 - 4z(z+1)] \times \right. \\
&\times \varepsilon^2 + \frac{1}{3!} [5 + 6ctg^2 \theta_0 - 4z(z+1)] ctg \theta \varepsilon^3 + \frac{1}{4!} [24ctg^4 \theta_0 + 28ctg^2 \theta_0 +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + 5 - (24 + 32ctg^2\theta)z(z+1) + 16z^2(z+1)^2 \Big] \varepsilon^4 - \frac{1}{5!} [74ctg^4\theta_0 + \\
& + 101ctg^2\theta_0 + 57 - (56 + 64ctg^2\theta_0)z(z+1) + 16z^2(z+1)^2 ctg\theta_0 \varepsilon^5 + \\
& + \frac{1}{6!} [394ctg^6\theta_0 + 663ctg^4\theta_0 + 286ctg^2\theta_0 + 16 - (776ctg^4\theta_0 + \\
& + 1028ctg^2\theta_0 + 231)z(z+1) + (288ctg^2\theta_0 + 240)z^2(z+1)^2 - \\
& - 64z^3(z+1)^3] \varepsilon^6 + \dots \Big\}.
\end{aligned}$$

Подставив (14.3) в (12.5) и произведя сложные вычисления, представим функцию  $D(z, \varepsilon, \theta_0)$  в виде:

$$\begin{aligned}
D(z, \varepsilon, \theta_0) = & 2^{-1} \sin^{-2} \theta_0 C_{13}^2 (d_{22} - d_{11})^2 (1 - \nu)^2 E_0 G_0^{-1} b_{22}^{-1} \times \\
& \times \left[ z^2 + 2(G_0 - 1) \left[ z^2 - \frac{1}{4} \right] \varepsilon^2 \left\{ 2(1 - \nu_1 \nu_2) ctg^2 \theta_0 + \frac{1}{3} [2E_0 z^4 + \right. \right. \\
& + (8\nu_1 - 5E_0 - 4 - 8(1 + \nu)(G_0 - \nu_2) E_0 ctg^2 \theta_0) z^2 + 6\nu_1(\nu_2 - 1) - \\
& - 8\nu_2 + 5 + \frac{2}{E_0} + \frac{9}{8} E_0 + 10(1 - \nu_1 \nu_2) + 2(1 + \nu)(G_0 - \nu_2) E_0 \times \\
& \times ctg^2 \theta_0 + 18(1 - \nu_1 \nu_2) ctg^4 \theta_0] \varepsilon^2 + \frac{1}{45} \left[ -16E_0^2 \frac{(1 + \nu)(G_0 - \nu_2)}{1 - \nu_1 \nu_2} \times \right. \\
& \left. \left. \times z^6 + \dots \right] + \dots \right\} = 0, \quad z = \lambda - 1/2 \tag{14.4}
\end{aligned}$$

Отсюда видно, что  $z_{1,2} = \pm 1/2$  являются нулями функции  $D(z, \varepsilon, \theta_0)$ . Отметим, что существование этих нулей также следует из условия равновесия конуса.

Аналогично изотропному случаю докажем, что все остальные нули функции неограниченно возрастают при  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Исходим от противного, предположим, что  $z_k \rightarrow z_k^* \neq \infty$  при  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Тогда справедливо предельное соотношение  $D(z_k, \varepsilon, \theta_0) \rightarrow \varepsilon^2 D_0(z_k^*, \theta_0)$  при  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Следо-

вательно, предельные точки множества нулей  $z_k$  при  $\varepsilon \rightarrow 0$  определяются из уравнения

$$D_0(z_k^*, \theta_0) = 0.$$

В этом случае

$$D_0(z_k^*, \theta_0) = 2(1 - \nu_1 \nu_2) \operatorname{ctg}^2 \theta_0 \left( z_k^{*2} - \frac{1}{4} \right) = 0.$$

Из последнего равенства вытекает, что других ограниченных корней, кроме  $z_1, z_2$  не существует. Таким образом, доказано, что все остальные нули функции  $D(z, \varepsilon, \theta_0)$  стремятся к бесконечности при  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Их можно разбить на три группы в зависимости от их поведения при  $\varepsilon \rightarrow 0$ :

- 1)  $\varepsilon z_k \rightarrow 0$  при  $\varepsilon \rightarrow 0$ ;
- 2)  $\varepsilon z_k \rightarrow \operatorname{const}$  при  $\varepsilon \rightarrow 0$ ;
- 3)  $\varepsilon z_k \rightarrow \infty$  при  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

Вначале определим такие  $z_k$ , что  $\varepsilon z_k \rightarrow 0$  при  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Для этого будем использовать разложение (14.4).

Пусть главный член асимптотики  $z_k$  имеет вид:

$$z_k = \gamma_0 \varepsilon^{-\alpha}; \quad \gamma_0 = O(1) \text{ при } \varepsilon \rightarrow 0, \quad 0 < \alpha < 1. \quad (14.5)$$

Подставив (14.5) в (14.4) и оставив в нем только главные члены для  $\gamma_0$ , получим следующее предельное уравнение:

$$2(1 - \nu_1 \nu_2) \operatorname{ctg}^2 \theta_0 + \frac{1}{3} \left[ 2E_0 \gamma_0^4 + O(\varepsilon^{2\alpha}) \right] \varepsilon^{2-4\alpha} + O \left[ \max(\varepsilon^{4-6\alpha}, \varepsilon^{2-2\alpha}) \right] = 0. \quad (14.6)$$

Рассмотрим три случая:

- а)  $0 < \alpha < \frac{1}{2}$ ; б)  $\alpha = \frac{1}{2}$ ; в)  $\frac{1}{2} < \alpha < 1$ .

В случае а), переходя (14.6) к пределу при  $\varepsilon \rightarrow 0$ , получим  $\gamma_0 = 0$ , а это противоречит предположению

(14.5). Аналогичным образом, в случае в) получаем  $\gamma_0 = 0$  и приходим к противоречию. А в случае б) имеем

$$\gamma_0^4 + 3(1 - \nu_1 \nu_2) E_0^{-1} c t g^2 \theta_0 = 0. \quad (14.7)$$

Будем искать  $z_k$  в виде следующего разложения

$$z_k = \alpha_k \varepsilon^{-\frac{1}{2}} + \alpha_k^{(0)} + \alpha_k^{(1)} \varepsilon^{\frac{1}{2}} + \dots \quad (k = 3, 4, 5, 6), \quad (14.8)$$

где

$$\alpha_k = \gamma_0, \quad \alpha_k^{(0)} = 0,$$

$$\alpha_k^{(0)} = \left(40\alpha_{k_0}\right)^{-1} \left[24(1 + \nu)(G_0 - \nu_2) c t g^2 \theta_0 + 5(4 + 5E_0 - 8\nu_1) E_0^{-1}\right].$$

Для построения асимптотики нулей в случае 2) ( $\varepsilon z_k \rightarrow \text{const}$  при  $\varepsilon \rightarrow 0$ ) отыскиваем  $z_n$  ( $n = k - 6, k = 7, 8, \dots$ ) в виде

$$z_n = \varepsilon^{-1} \delta_n + O(\varepsilon). \quad (14.9)$$

Подставив (14.9) в (12.12) имеем

$$\tau^2 - 2q_1 \delta_n^2 \tau + q_2 \delta_n^4 = 0, \quad \mu_i = \sqrt{\tau_i}, \quad (14.10)$$

$$\tau_i = \delta_n^2 s_i, \quad s_i = \sqrt{q_1 - (-1)^i \sqrt{q_1^2 - q_2}}, \quad (i = 1, 2)$$

$$2q_1 = b_{22}^{-1} (b_{11} b_{22} - b_{12}^2 - 2b_{12}), \quad q_2 = b_{11} b_{22}^{-1}.$$

Параметры  $q_1, q_2$  принимают различные значения в зависимости от материальных характеристик  $\nu, \nu_1, \nu_2, G_0$ . Таким образом, приходим к различным записям решений через функции Лежандра, а это в свою очередь приводит к различным асимптотическим представлениям этой функции.

Рассмотрим следующие возможные случаи:

$$1. \quad q_1 > 0, \quad q_1^2 - q_2 > 0, \quad \mu_{1,2} = \pm s_1 \delta_n, \quad \mu_{3,4} = \pm s_2 \delta_n,$$

$$s_{1,2} = \sqrt{q_1 \pm \sqrt{q_1^2 - q_2}}, \quad q_1^2 > q_2,$$

$$s_{1,2} = \gamma \pm i\beta = \sqrt{q_1 \pm i\sqrt{q_2 - q_1^2}}, \quad q_1^2 < q_2.$$

2. Корни характеристического уравнения (3.10) кратные

$$\mu_{1,2} = \nu_{3,4} = \pm \delta_n p, \quad q_1 > 0, \quad q_1^2 - q_2 = 0, \quad p = \sqrt{q_1}.$$

3.  $q_1 < 0, \quad q_1^2 - q_2 \neq 0, \quad \mu_{1,2} = \pm is_1 \delta_n, \quad \mu_{3,4} = \pm is_2 \delta_n,$

$$s_{1,2} = \sqrt{|q_1| + i\sqrt{q_2 - q_1^2}}, \quad q_1^2 < q_2.$$

4.  $q_1 < 0, \quad q_1^2 - q_2 = 0, \quad \mu_{1,2} = \mu_{3,4} = \pm i\delta_n p, \quad p = \sqrt{|q_1|}.$

В случаях 1), 2) после подстановки (14.9) в (12.15) и преобразования его с помощью асимптотических разложений  $P_z(\cos \theta), Q_z(\cos \theta)$  [31]

$$P_z^k(\cos \theta) = \frac{\Gamma(z+k+1)}{\Gamma(z+3/2)} \left( \frac{\pi}{2} \sin \theta \right)^{-1/2} \times$$

$$\times \left\{ \cos \left[ \left( z + \frac{1}{2} \right) \theta - \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2} \right] + O(z^{-1}) \right\},$$

$$Q_z^k(\cos \theta) = \frac{\Gamma(z+k+1)}{\Gamma(z+3/2)} \left( \frac{\pi}{2 \sin \theta} \right)^{-1/2} \times$$

$$\times \left\{ \cos \left[ \left( z + \frac{1}{2} \right) \theta + \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2} \right] + O(z^{-1}) \right\},$$

для  $\delta_n$  соответственно получаем:

$$(s_2 - s_1) \sin(s_1 + s_2) \delta_n \pm (s_1 + s_2) \sin(s_2 - s_1) \delta_n = 0, \quad (14.12)$$

$$\gamma \sin 2\beta \delta_n \pm \beta sh 2\gamma \delta_n = 0, \quad (14.13)$$

$$\sin 2p \delta_n \pm 2p \delta_n = 0. \quad (14.14)$$

Результаты для случаев 3) и 4) получаются из случаев 1), 2) формальной заменой  $s_1, s_2, p$  на  $is_1, is_2, ip$ . Эти уравнения совпадают с уравнениями, определяющими показатели краевых эффектов Сен-Венана в теории трансверсально-изотропных плит.

В работе [40] получена асимптотика для корней таких уравнений. Характер этих корней существенно влияет на общую картину напряженно-деформированного состояния оболочки.

Как и в изотропном случае, можно показать, что случай  $\varepsilon z_k \rightarrow \infty$  при  $\varepsilon \rightarrow 0$  здесь невозможен.

### §15. Построение асимптотических формул для перемещений и напряжений

В этом параграфе будем также предполагать, что  $\varepsilon$  является малым параметром и учитывая этот факт, приведем асимптотическое построение однородных решений, соответствующих различным группам корней характеристического уравнения.

При  $z = \frac{1}{2}$  получаем следующие выражения:

$$u_r = C_0 \cos \theta, \quad u_\theta = -C_0 \sin \theta, \quad \sigma_r = \sigma_\theta = \sigma_\varphi = \tau_{r\theta} = 0 \quad (15.1)$$

Таким образом, этому корню соответствует перемещение канонического тела, как твердого тела. Полагая  $\theta = \theta_0 + \varepsilon \eta$  при  $-1 \leq \eta \leq 1$  и разлагая по малому параметру  $\varepsilon$ , решение, соответствующее нулю  $z = -\frac{1}{2}$ , представим в виде

$$\begin{aligned} u_r &= \frac{r_1}{\rho} C_1 [\cos \theta_0 + 2(\nu_1 - 1)\eta \sin \theta_0 \varepsilon + O(\varepsilon^2)], \\ u_\theta &= \frac{2(\nu_1 - 1)r_1}{\rho} C_1 [\sin \theta_0 + \eta \cos \theta_0 \varepsilon + O(\varepsilon^2)], \\ \sigma_r &= \frac{-2(1 + \nu)(\nu_1 / \nu_2)G}{\rho^2} C_1 [\cos \theta_0 + O(\varepsilon)], \\ \sigma_\varphi &= O(\varepsilon), \quad \sigma_\theta = O(\varepsilon^2), \quad \tau_{r\theta} = O(\varepsilon^2), \end{aligned} \quad (15.2)$$

где  $C_0, C_1$  – произвольные постоянные;

$\rho = \frac{r}{r_1}$  – безразмерная координата.

В первом члене асимптотики это решение соответствует чистому растяжению вдоль оси конуса и в изотропном случае совпадает с известным решением Мичелла-Нейбера [45].

Решение, соответствующее второй группе нулей, представим в виде:

$$\begin{aligned} u_r &= r_1 \left( \frac{\varepsilon}{\rho} \right)^{1/2} \sum_{k=3}^6 C_k u_k(\varepsilon, \eta, \rho), \\ u_\theta &= \frac{r_1}{\sqrt{\rho}} \left( \frac{\varepsilon}{\rho} \right)^{1/2} \sum_{k=3}^6 C_k v_k(\varepsilon, \eta, \rho), \\ \sigma_r &= \frac{G}{\rho \sqrt{\rho}} \left( \frac{\varepsilon}{\rho} \right)^{1/2} \sum_{k=3}^6 C_k Q_{rk}(\varepsilon, \eta, \rho), \end{aligned} \quad (15.3)$$

$$\sigma_\varphi = \frac{G}{\rho \sqrt{\rho}} \left( \frac{\varepsilon}{\rho} \right)^{1/2} \sum_{k=3}^6 C_k Q_k(\varepsilon, \eta, \rho).$$

$$\tau_{r\theta} = O(\sqrt{\varepsilon}), \quad \sigma_\theta = O(\varepsilon).$$

$$\begin{aligned} u_k(\varepsilon, \eta, \rho) &= \left\{ 2 \frac{v_1}{v_2} \alpha_{k_0}^3 \eta + 2v_1 \alpha_{k_0} \operatorname{ctg} \theta_0 + [\alpha_{k_1} \ln \rho \times \right. \\ &\times \left. \left( \frac{v_1}{v_2} \alpha_{k_0}^3 + v_1 \alpha_{k_0} \operatorname{ctg} \theta_0 \right) + (v_1 - 2) \operatorname{ctg} \theta_0 - 3 \frac{v_1}{v_2} \alpha_{k_0}^2 \eta \right] \sqrt{\varepsilon} + \dots \left. \right\} \times \\ &\times \exp \left( \frac{\alpha_{k_0}}{\sqrt{\varepsilon}} \ln \rho \right) \end{aligned}$$

$$v_k(\varepsilon, \eta, \rho) = -\frac{v_1}{v_2} \alpha_{k_0}^2 \left[ 2 + \alpha_{k_1} \ln \rho \sqrt{\varepsilon} + \dots \right] \exp \left( \frac{\alpha_{k_0}}{\sqrt{\varepsilon}} \ln \rho \right),$$

$$Q_{rk}(\varepsilon, \eta, \rho) = \left[ -6 \frac{\nu_1}{\nu_2} (1 + \nu) \eta \operatorname{ctg} \theta_0 + O(\varepsilon) \right] \exp\left( \frac{\alpha_{k_0}}{\sqrt{\varepsilon}} \ln \rho \right),$$

$$Q_{\phi k}(\varepsilon, \eta, \rho) = \left\{ -6\nu_1(1 + \nu) \eta \operatorname{ctg} \theta_0 + \left[ (2\nu_1^2 \nu + 2\nu_1^2 + \nu_1 \nu_2 - 1) \times \right. \right.$$

$$\left. \times \frac{G_0}{m} \alpha_{k_0}^2 \operatorname{ctg} \theta_0 + O(\sqrt{\varepsilon}) \right\} \exp\left( \frac{\alpha_{k_0}}{\sqrt{\varepsilon}} \ln \rho \right).$$

Здесь  $C_k$  ( $k = 3, 4, 5, 6$ ) – произвольные постоянные. Из (15.8) можно заметить, что  $u_\theta$ ,  $\sigma_r$ ,  $\sigma_\phi$  при малых  $\varepsilon$  имеет порядок 1,  $u_r$ ,  $\tau_{r\theta}$  – порядок  $\varepsilon^{1/2}$ ,  $\sigma_\theta$  – порядок  $\varepsilon$ .

Третья группа решений соответствует собственным значениям, определяемым формулами (14.12)–(14.14).

Используя асимптотическое разложение функций Лежандра при больших  $z$  (14.11), для них получены следующие асимптотические формулы:

$$u_r^1 = \frac{r_1 \varepsilon}{\rho} \sum_{n=2,4,\dots}^{\infty} B_n \left[ s_2 (b_{22} s_2^2 + b_{12}^2 + b_{12} - b_{11} b_{22}) \sin s_2 \delta_n \cos s_1 \delta_n \eta - \right.$$

$$\left. - s_1 (b_{22} s_1^2 + b_{12}^2 + b_{12} - b_{11} b_{22}) \sin s_1 \delta_n \cos s_2 \delta_n \eta + O(\varepsilon) \right] \exp\left( \frac{\delta_n}{\varepsilon} \ln \rho \right);$$

$$u_\theta^1 = \frac{r_1 \varepsilon}{\sqrt{\rho}} \sum_{n=2,4,\dots}^{\infty} B_n \left[ (b_{22} s_2^2 + b_{12}) \sin s_2 \delta_n \sin s_1 \delta_n \eta - \right.$$

$$\left. - (b_{22} s_1^2 + b_{12}) \sin s_1 \delta_n \sin s_2 \delta_n \eta + O(\varepsilon) \right] \exp\left( \frac{\delta_n}{\varepsilon} \ln \rho \right);$$

$$\sigma_r^1 = -\frac{G_1}{\rho \sqrt{\rho}} (b_{11} b_{22} - b_{12}^2) s_1 s_2 \sum_{n=2,4,\dots}^{\infty} B_n \delta_n \left[ s_1 \sin s_2 \delta_n \cos s_1 \delta_n \eta - \right.$$

$$\left. - s_2 \sin s_1 \delta_n \cos s_2 \delta_n \eta + O(\varepsilon) \right] \exp\left( \frac{\delta_n}{\varepsilon} \ln \rho \right); \quad (15.4)$$

$$\sigma_\phi^1 = \frac{G_1}{\rho \sqrt{\rho}} \sum_{n=2,4,\dots}^{\infty} B_n \delta_n \left[ s_2 (b_{11} b_{22} - b_{12}^2 - 2G_0 - 2G_0 b_{12} s_1^2) \times \right.$$

$$\begin{aligned}
& \times \sin s_2 \delta_n \cos s_1 \delta_n \eta - s_1 (b_{11} b_{22} - b_{12}^2 - 2G_0 - 2G_0 b_{12} s_2^2) \times \\
& \times \sin s_1 \delta_n \cos s_2 \delta_n \eta + O(\varepsilon)] \exp\left(\frac{\delta_n}{\varepsilon} \ln \rho\right); \\
\sigma_\theta^1 &= \frac{G_1}{\rho \sqrt{\rho}} (b_{11} b_{22} - b_{12}^2) \sum_{n=2,4,\dots}^{\infty} B_n \delta_n [s_2 \sin s_2 \delta_n \cos s_1 \delta_n \eta - \\
& - s_1 \sin s_1 \delta_n \cos s_2 \delta_n \eta + O(\varepsilon)] \exp\left(\frac{\delta_n}{\varepsilon} \ln \rho\right); \\
\tau_{r\theta}^1 &= \frac{G_1}{\rho \sqrt{\rho}} (b_{11} b_{22} - b_{12}^2) s_1 s_2 \sum_{n=2,4,\dots}^{\infty} B_n \delta_n [\sin s_2 \delta_n \sin s_1 \delta_n \eta - \\
& - \sin s_1 \delta_n \sin s_2 \delta_n \eta + O(\varepsilon)] \exp\left(\frac{\delta_n}{\varepsilon} \ln \rho\right); \\
& (s_2 - s_1) \sin(s_2 + s_1) \delta_n + (s_2 + s_1) \sin(s_2 - s_1) \delta_n = 0. \\
u_r^2 &= -\frac{r_1 \varepsilon}{\sqrt{\rho}} \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} B_n [s_2 (b_{22} s_2^2 + b_{12}^2 + b_{12} - b_{11} b_{22}) \cos s_2 \delta_n \times \\
& \times \sin s_1 \delta_n \eta - s_1 (b_{22} s_1^2 + b_{12}^2 + b_{12} - b_{11} b_{22}) \cos s_1 \delta_n \sin s_2 \delta_n \eta + \\
& + O(\varepsilon)] \exp\left(\frac{\delta_n}{\varepsilon} \ln \rho\right); \\
u_\theta^2 &= \frac{r_1 \varepsilon}{\sqrt{\rho}} \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} B_n [(b_{22} s_2^2 + b_{12}) \cos s_2 \delta_n \cos s_1 \delta_n \eta - \\
& - (b_{22} s_1^2 + b_{12}) \cos s_1 \delta_n \cos s_2 \delta_n \eta + O(\varepsilon)] \exp\left(\frac{\delta_n}{\varepsilon} \ln \rho\right); \\
\sigma_r^2 &= \frac{G_1}{\rho \sqrt{\rho}} (b_{11} b_{22} - b_{12}^2) s_1 s_2 \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} B_n \delta_n [s_1 \cos s_2 \delta_n \sin s_1 \delta_n \eta - \\
& - s_2 \cos s_1 \delta_n \sin s_2 \delta_n \eta + O(\varepsilon)] \exp\left(\frac{\delta_n}{\varepsilon} \ln \rho\right); \tag{15.5}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma_\varphi^2 = & -\frac{G_1}{\rho\sqrt{\rho}} \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} B_n \delta_n \left[ s_2 (b_{11} b_{22} - b_{12}^2 - 2G_0 - 2G_0 b_{12} s_1^2) \times \right. \\ & \times \cos s_2 \delta_n \sin s_1 \delta_n \eta - s_1 (b_{11} b_{22} - b_{12}^2 - 2G_0 - 2G_0 b_{12} s_2^2) \times \\ & \left. \times \cos s_1 \delta_n \sin s_2 \delta_n \eta + O(\varepsilon) \right] \exp\left(\frac{\delta_n}{\varepsilon} \ln \rho\right); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma_\theta^2 = & -\frac{G_1}{\rho\sqrt{\rho}} (b_{11} b_{22} - b_{12}^2) \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} B_n \delta_n \left[ s_2 \cos s_2 \delta_n \sin s_1 \delta_n \eta - \right. \\ & \left. - s_1 \cos s_1 \delta_n \sin s_2 \delta_n \eta + O(\varepsilon) \right] \exp\left(\frac{\delta_n}{\varepsilon} \ln \rho\right); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tau_{r\theta}^2 = & \frac{G_1}{\rho\sqrt{\rho}} (b_{11} b_{22} - b_{12}^2) s_1 s_2 \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} B_n \delta_n \left[ \cos s_2 \delta_n \cos s_1 \delta_n \eta - \right. \\ & \left. - \cos s_1 \delta_n \cos s_2 \delta_n \eta + O(\varepsilon) \right] \exp\left(\frac{\delta_n}{\varepsilon} \ln \rho\right). \end{aligned}$$

где

$$(s_2 - s_1) \sin(s_2 + s_1) \delta_n - (s_2 + s_1) \sin(s_2 - s_1) \delta_n = 0;$$

$$u_r = \frac{r_1}{\sqrt{\rho}} \varepsilon \sum_{n=1}^{\infty} E_n [F_{1n}(\eta) + O(\varepsilon)] \exp\left(\frac{\delta_n}{\varepsilon} \ln \rho\right);$$

$$u_\theta = \frac{r_1}{\sqrt{\rho}} \varepsilon \sum_{n=1}^{\infty} E_n [F_{2n}(\eta) + O(\varepsilon)] \exp\left(\frac{\delta_n}{\varepsilon} \ln \rho\right); \quad (15.6)$$

$$\sigma_r = \frac{G_1}{\rho\sqrt{\rho}} \sum_{n=1}^{\infty} E_n [b_{11} \delta_n F_{1n}(\eta) + b_{12} F'_{2n}(\eta) + O(\varepsilon)] \exp\left(\frac{\delta_n}{\varepsilon} \ln \rho\right);$$

$$\sigma_\varphi = \frac{G_1}{\rho\sqrt{\rho}} \sum_{n=1}^{\infty} E_n [b_{12} \delta_n F_{1n}(\eta) + b_{23} F'_{2n}(\eta) + O(\varepsilon)] \exp\left(\frac{\delta_n}{\varepsilon} \ln \rho\right);$$

$$\sigma_\theta = \frac{G_1}{\rho\sqrt{\rho}} \sum_{n=1}^{\infty} E_n [b_{12} \delta_n F_{1n}(\eta) + b_{23} F'_{2n}(\eta) + O(\varepsilon)] \exp\left(\frac{\delta_n}{\varepsilon} \ln \rho\right);$$

$$\tau_{r\theta} = \frac{G_1}{\rho\sqrt{\rho}} \sum_{n=1}^{\infty} E_n [F'_{1n}(\eta) + \delta_n F_{2n}(\eta) + O(\varepsilon)] \exp\left(\frac{\delta_n}{\varepsilon} \ln \rho\right),$$

где

$$F_{1n}(\eta) = (a_1\Delta_{1n} - a_2\Delta_{2n})\cos \beta\delta_n\eta sh\gamma\delta_n\eta - \\ (a_1\Delta_{2n} - a_2\Delta_{1n})\sin \beta\delta_n\eta ch\gamma\delta_n\eta.$$

$$F_{2n}(\eta) = (b_{12} + 1)[(\beta\Delta_{2n} - \gamma\Delta_{1n})\cos \beta\delta_n\eta ch\gamma\delta_n\eta + \\ + (\gamma\Delta_{2n} + \beta\Delta_{1n})\sin \beta\delta_n\eta ch\gamma\delta_n\eta].$$

$$a_1 = 1 - b_{22}(\gamma^2 - \beta^2), \quad a_2 = 2b_{22}\gamma\beta;$$

$$\Delta_{1n} = D_n \left\{ \gamma [b_{12} + b_{22}(\gamma^2 + \beta^2)] \sin \beta\delta_n ch\gamma\delta_n + \right. \\ \left. + \beta [b_{12} + b_{22}(\gamma^2 + \beta^2)] \cos \beta\delta_n ch\gamma\delta_n \right\}.$$

$$\Delta_{2n} = -D_n \left\{ \beta [b_{12} + b_{22}(\gamma^2 + \beta^2)] \sin \beta\delta_n sh\gamma\delta_n - \right. \\ \left. - \gamma [b_{12} - b_{22}(\gamma^2 + \beta^2)] \cos \beta\delta_n ch\gamma\delta_n \right\}. \\ \gamma \sin 2\beta\delta_n - \beta sh 2\gamma\delta_n = 0 \quad (n = 1, 3, 5, \dots).$$

$$F_{1n}(\eta) = (a_1\Delta_{1n} - a_2\Delta_{2n})\cos \beta\delta_n\eta ch\gamma\delta_n\eta - \\ - (a_1\Delta_{2n} + a_2\Delta_{1n})\sin \beta\delta_n\eta sh\gamma\delta_n\eta.$$

$$F_{2n}(\eta) = (b_{12} + 1)[(\beta\Delta_{2n} - \gamma\Delta_{1n})\cos \beta\delta_n\eta sh\gamma\delta_n\eta + \\ + (\gamma\Delta_{2n} - \beta\Delta_{1n})\sin \beta\delta_n\eta ch\gamma\delta_n\eta].$$

$$\Delta_{1n} = \gamma [b_{12} + b_{22}(\gamma^2 + \beta^2)] \sin \beta\delta_n ch\gamma\delta_n + \\ + \beta [b_{12} - b_{22}(\gamma^2 + \beta^2)] \cos \beta\delta_n sh\gamma\delta_n.$$

$$\Delta_{2n} = -\beta [b_{12} - b_{22}(\gamma^2 + \beta^2)] \sin \beta\delta_n ch\gamma\delta_n + \\ + \gamma [b_{12} + b_{22}(\gamma^2 + \beta^2)] \cos \beta\delta_n ch\gamma\delta_n.$$

$$\gamma \sin 2\beta\delta_n + \beta sh 2\gamma\delta_n = 0, \quad (n = 2, 4, \dots).$$

$$u_r^1 = \frac{p(b_{12} + 1)}{\sqrt{\rho}} \varepsilon \sum_{n=2,4,\dots}^{\infty} D_n \left\{ \left[ \cos p\delta_n - (b_{12}p^2 - b_{11})(b_{12}p^2 + b_{11})^{-1} \times \right. \right. \\ \left. \left. \times \frac{\sin p\delta_n}{p\delta_n} \right] \cos p\delta_n\eta + \eta \sin p\delta_n \sin \delta_n\eta + O(\varepsilon) \right\} \exp\left(\frac{\delta_n}{\varepsilon} \ln \rho\right).$$

$$\begin{aligned}
u_\theta^1 &= -\frac{p^2 - b_{11}}{\sqrt{\rho}} \varepsilon \sum_{n=2,4,\dots}^\infty D_n \left\{ \left[ \cos p\delta_n + 2b_{11}(b_{12} + 1)(b_{11} - p^2)^{-1} \times \right. \right. \\
&\times \left. \left. (b_{12}p^2 + 1)^{-1} \frac{\sin p\delta_n}{\delta_n} \right] \sin p\delta_n \eta + \eta \sin p\delta_n \cos p\delta_n \eta + O(\varepsilon) \right\} \\
&\times \exp\left(\frac{\delta_n}{\varepsilon} \ln \rho\right). \\
\sigma_r^1 &= \frac{G_1(b_{12}p^2 - b_{11})}{\rho\sqrt{\rho}} \sum_{n=2,4,\dots}^\infty D_n [(p\delta_n \cos p\delta_n - \sin p\delta_n) \times \\
&\times \cos p\delta_n \eta + \eta p\delta_n \sin p\delta_n \sin p\delta_n \eta + O(\varepsilon)] \exp\left(\frac{\delta_n}{\varepsilon} \ln \rho\right). \\
\sigma_\varphi^1 &= \frac{G_1}{\rho\sqrt{\rho}} \sum_{n=2,4,\dots}^\infty D_n \left\{ (b_{23}p^2 + b_{12} - b_{11}b_{23}) p\delta_n \cos p\delta_n + \right. \quad (15.7) \\
&+ \left. [b_{11}b_{23} + b_{12}^2 + b_{12} - b_{11} - b_{23}p^2 - 2b_{11}(b_{12}p^2 + 1)] \times \right. \\
&\times \left. (b_{23}p^2 + b_{12})(b_{12}p^2 + b_{11})^{-1} \sin p\delta_n \right\} \cos p\delta_n \eta + \\
&+ (b_{23}p^2 + b_{12}^2 + b_{12} - b_{11}b_{23}) \eta p\delta_n \sin p\delta_n \times \\
&\times \sin p\delta_n \eta + O(\varepsilon) \left. \right\} \exp\left(\frac{\delta_n}{\varepsilon} \ln \rho\right). \\
\sigma_\theta^1 &= \frac{G_1(b_{11}b_{22} - b_{12}^2)}{\rho\sqrt{\rho}} \sum_{n=2,4,\dots}^\infty D_n [(\sin p\delta_n + p\delta_n \cos p\delta_n) \times \\
&\times \cos p\delta_n \eta + \eta p\delta_n \sin p\delta_n \sin p\delta_n \eta + O(\varepsilon)] \exp\left(\frac{\delta_n}{\varepsilon} \ln \rho\right). \\
\tau_{r\theta}^1 &= -\frac{G_1(b_{12}p^2 + 1)}{\rho\sqrt{\rho}} \sum_{n=2,4,\dots}^\infty D_n \delta_n [\cos p\delta_n \sin p\delta_n \eta - \\
&- \eta \sin p\delta_n \cos p\delta_n \eta + O(\varepsilon)] \exp\left(\frac{\delta_n}{\varepsilon} \ln \rho\right). \\
\sin 2p\delta_n + 2p\delta_n &= 0.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
u_r^2 &= \frac{(b_{12}+1)}{\sqrt{\rho}} r_1 \varepsilon \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} D_n \left\{ \left[ \sin p\delta_n - (b_{12}p^2 - b_{11})(b_{12}p^2 + b_{11})^{-1} \times \right. \right. \\
&\times \left. \left. \frac{\cos p\delta_n}{p\delta_n} \right] \sin p\delta_n \eta + \eta \cos p\delta_n \eta + O(\varepsilon) \right\} \exp\left(\frac{\delta_n}{\varepsilon} \ln \rho\right). \\
u_\theta^2 &= -\frac{p^2 - b_{11}}{\sqrt{\rho}} r_1 \varepsilon \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} D_n \left\{ \left[ \sin p\delta_n - 2b_{11}(b_{12}+1)p(b_{11} - p^2)^{-1} \times \right. \right. \\
&\times \left. \left. (b_{12}p^2 + 1)^{-1} \frac{\cos p\delta_n}{p\delta_n} \right] \cos \delta_n \eta + \eta \cos p\delta_n \sin p\delta_n \eta + O(\varepsilon) \right\} \times \\
&\times \exp\left(\frac{\delta_n}{\varepsilon} \ln \rho\right). \\
\sigma_r^2 &= \frac{G_1(b_{12}p^2 - b_{11})}{\rho\sqrt{\rho}} \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} D_n \left[ (p\delta_n \sin p\delta_n + \cos p\delta_n) \sin p\delta_n \eta + \right. \\
&+ \left. \eta p \delta_n \cos p\delta_n \cos p\delta_n \eta + O(\varepsilon) \right] \exp\left(\frac{\delta_n}{\varepsilon} \ln \rho\right). \\
\sigma_\varphi^2 &= \frac{G_1}{\rho\sqrt{\rho}} \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} D_n \left\{ (b_{23}p^2 + b_{22} + b_{12} - b_{11}b_{23}) p\delta_n \sin p\delta_n - \right. \\
&- \left[ b_{11}b_{23} + b_{12}^2 + b_{12} - b_{11} - b_{23}p^2 - 2b_{11}(b_{12}p^2 + 1) \times \right. \\
&\left. \left. (b_{23}p^2 + b_{12})(b_{12}p^2 + b_{11})^{-1} \cos p\delta_n \right] \sin p\delta_n \eta + \right. \\
&+ \left. (b_{23}p^2 + b_{12}^2 + b_{12} - b_{11}b_{23}) \eta p \delta_n \sin p\delta_n \cos p\delta_n \eta + O(\varepsilon) \right\} \times \\
&\times \exp\left(\frac{\delta_n}{\varepsilon} \ln \rho\right). \\
\sigma_\theta^2 &= \frac{G_1(b_{11}b_{22} - b_{12}^2)}{\rho\sqrt{\rho}} \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} D_n \left[ (p\delta_n \sin p\delta_n - \cos p\delta_n) \sin p\delta_n \eta + \right. \\
&+ \left. \eta p \delta_n \cos p\delta_n \cos p\delta_n \eta + O(\varepsilon) \right] \exp\left(\frac{\delta_n}{\varepsilon} \ln \rho\right)
\end{aligned} \tag{15.8}$$

$$\tau_{r\theta}^2 = -\frac{G_1(b_{12}p^2 + 1)}{\rho\sqrt{\rho}} \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} D_n \delta_n [\sin p\delta_n \cos p\delta_n \eta - \eta \cos p\delta_n \sin p\delta_n \eta + O(\varepsilon)] \exp\left(\frac{\delta_n}{\varepsilon} \ln \rho\right)$$

$$\sin 2p\delta_n - 2p\delta_n = 0.$$

Решение (15.6) характерно только для анизотропной оболочки и при  $G_0 = 1$  исчезает, в то время как решения (15.4), (15.4), (15.7), (15.8) при  $G_0 = 1$  сливаются в одно и полностью совпадают с решениями Сен-Венана в изотропном случае [14].

Обратимся теперь к исследованию картины напряженного состояния, описываемого однородными решениями (15.4)-(15.7). Рассмотрим вначале связь однородных решений с главным вектором напряжений  $P$ , действующих в сечении  $\rho = const$ . Имеем

$$P = 2\pi r_1^2 \rho^2 \int_{\theta_1}^{\theta_2} (\sigma_r \cos \theta - \tau_{r\theta} \sin \theta) \sin \theta d\theta. \quad (15.9)$$

Как было отмечено выше решения (15.1) соответствует перемещению оболочки как твердого тела. Поэтому ниже будем предполагать, что  $C_0 = 0$ . Представим напряжения  $\sigma_r$ ,  $\tau_{r\theta}$  в виде:

$$\sigma_r = \sigma_r^0 + \rho^{-\frac{3}{2}} \sum_{n=1}^{\infty} \rho^{z_n} Q_n(\theta), \quad (15.10)$$

$$\tau_{r\theta} = \tau_{r\theta}^0 + \rho^{-\frac{3}{2}} \sum_{n=1}^{\infty} \rho^{z_n} T_n(\theta).$$

Слагаемое  $\sigma_r^0$ ,  $\tau_{r\theta}^0$  соответствует собственным значениям  $z = -\frac{1}{2}$ . Во второе слагаемое включены напряжений второй и третьей группы решений.

Подставляя (15.10) в (15.9), получаем:

$$P = C_1 \gamma_0 + \rho^{3/2} \sum_{n=1}^{\infty} C_k \rho^{z_n} \gamma_n, \quad (15.11)$$

где

$$\gamma_0 = \varepsilon G \left[ -8(1+\nu) \frac{\nu_1}{\nu_2} \sin \theta_0 \cos^2 \theta_0 + O(\varepsilon) \right]$$

$$\gamma_n = 4\pi G \int_{\theta_1}^{\theta_2} [Q_{rn} \cos \theta - T_n \sin \theta] \sin \theta d\theta. \quad (15.12)$$

Докажем, что все  $\gamma_n$  ( $n=1,2,\dots$ ) равны нулю. Для этого рассмотрим краевую задачу:

$$\sigma_r = \rho_1^{z_n - \frac{3}{2}} Q_{rs}, \quad \tau_{r\theta} = \rho_1^{z_n - \frac{3}{2}} T_s \quad (r = r_1)$$

$$\sigma_r = \rho_2^{z_n - \frac{3}{2}} Q_{rs}, \quad \tau_{r\theta} = \rho_2^{z_n - \frac{3}{2}} T_s \quad (r = r_2) \quad (15.13)$$

Легко видеть, что решение задачи (15.13) существует и получается из (12.17)-(12.18), если положить в них  $C_k = \delta_{ks}$ , где  $\delta_{ks}$  — символ Кронекера.

С другой стороны, известно, что необходимым условием разрешимости первой краевой задачи теории упругости (на поверхности тела заданы напряжения) является условие обращения в нуль главного вектора и главного момента всех внешних сил.

В рассматриваемом случае главный вектор внешних сил (15.13) в проекции на ось симметрии  $\theta = 0$  имеет вид:

$$P_s = \left( \rho_2^{z_s - \frac{3}{2}} - \rho_1^{z_s - \frac{3}{2}} \right) \gamma_s = 0. \quad (15.14)$$

Как легко видеть, последнее равенство возможно только при  $\gamma_s = 0$ . Для главного вектора окончательно получаем

$$P = C_1 \gamma_0. \quad (15.15)$$

Таким образом, напряженное состояние, соответствующее второй и третьей группам, является самоуравновешенными в каждом сечении  $\rho = const$ .

Подсчитаем в сечении  $\rho = const$  изгибающий момент и перерезывающую силу для второй и третьей групп решений. Для простоты положим  $\rho_1 = 0$ ,  $\rho_2 = 1$  ( $r = r_2\rho$ ) и подсчитаем изгибающий момент и перерезывающую силу для каждой группы решений.

$$M = r_2^2 \int_{\theta_1}^{\theta_2} \{\sigma_r \sin(\theta - \theta_0) - \tau_{r\theta} [1 - \cos(\theta - \theta_0)]\} \sin \theta d\theta \approx$$

$$\approx r_2^2 \sin \theta_0 \varepsilon^2 \int_{-1}^1 \eta \sigma_r d\eta + O(\varepsilon^3), \quad (15.16)$$

$$Q = r_2 \int_{\theta_1}^{\theta_2} \{\sigma_r \sin(\theta - \theta_0) + \tau_{r\theta} \cos(\theta - \theta_0)\} \sin \theta d\theta \approx$$

$$\approx r_2 \sin \theta_0 \varepsilon^2 \int_{-1}^1 \tau_{r\theta} d\eta + O(\varepsilon^2). \quad (15.17)$$

Подставляя выражения для напряжений для каждой группы решений, соответственно, получаем

$$M_2 = -8 \frac{\nu_1}{\nu_2} (1 + \nu) G r_2^2 \sin \theta_0 \frac{\varepsilon^2}{\rho \sqrt{\rho}} \sum_{k=3}^6 C_k \exp\left(\frac{\alpha_k}{\sqrt{\varepsilon}} \ln \rho\right),$$

$$Q_2 = -8(1 - \nu_1 \nu_2) G r_2 \sin \theta_0 \left(\frac{\varepsilon}{\rho}\right)^{3/2} \sum_{k=3}^6 C_k \alpha_k \exp\left(\frac{\alpha_k}{\sqrt{\varepsilon}} \ln \rho\right),$$

$$M_3 = O(\varepsilon^3), \quad Q_3 = O(\varepsilon^2). \quad (15.18)$$

Таким образом, главные части изгибающего момента и перерезывающей силы определяют решение второй группы.

Решение (15.2), (15.3) определяет внутреннее напряженно-деформированное состояние оболочки. Первые члены их асимптотических разложений по параметру тон-

костенности  $\varepsilon$ , определяют безмоментное напряженное состояние.

Решение (15.3) определяет краевой эффект, аналогичный простому краевому эффекту в прикладной теории оболочек. В первых членах разложения по параметру тонкостенности  $\varepsilon$  решения (15.1), (15.2) совместно с (15.3) можно рассматривать как решения по прикладной теории Кирхгофа-Лява. Напряженное состояние, определяемое (15.4)-(15.7), имеет характер пограничного слоя и локализовано вблизи поверхности  $r = const$ . Первые члены его асимптотического разложения полностью эквивалентны краевому эффекту Сен-Венана в теории трансропной плиты.

Таким образом, анализ решений показывает, что напряженное состояние трансверсально-изотропной конической оболочки, так же как и в изотропном случае [2], складывается из трех типов: внутреннего напряженного состояния, простого краевого эффекта и погранслоя.

Пусть на поверхности  $\rho = \rho_s$  ( $s = 1,2$ ) заданы изгибающие моменты и перерезывающие силы. Разлагая изгибающие моменты и перерезывающие силы  $M_s$ ,  $Q_s$  ( $s = 1,2$ ) в ряд по  $\varepsilon$

$$M_s = M_s^{(0)} + \varepsilon M_s^{(1)} + \dots, \quad Q_s = Q_s^{(0)} + \varepsilon Q_s^{(1)} + \dots \quad (15.19)$$

и отыскивая  $C_k = C_{k_0} + \varepsilon C_{k_2} + \dots$   $k = (3,4,5,6)$  для определения  $C_{k_0}$ , получаем линейную систему:

$$\begin{aligned} -8 \frac{\nu_1}{\nu_2} (1 + \nu) G r_1^2 \sin \theta_0 \rho_s^{-3/2} \sum_{k=3}^6 C_{k_0} \exp\left(\frac{\alpha_k}{\sqrt{\varepsilon}} \ln \rho_s\right) &= M_s^{(0)} \\ -8(1 - \nu_1 \nu_2) G r_1 \sin \theta_0 \rho_s^{-1} \sum_{k=3}^6 C_{k_0} \alpha_k \exp\left(\frac{\alpha_k}{\sqrt{\varepsilon}} \ln \rho_s\right) &= Q_s^{(0)}, \quad (15.20) \\ (s = 1,2) \end{aligned}$$

Таким образом, постоянные  $C_k$  ( $k = 3, 4, 5, 6$ ) определяются через изгибающие моменты и перерезывающие усилия.

В заключении параграфа приведем результаты расчета показателя изменяемости краевого эффекта для различных материалов (цинка, магния, кадмия) в зависимости от угла конусности срединной поверхности и от толщины оболочки.

Как видно из таблиц и графиков с уменьшением угла конусности и толщины оболочки показатель изменяемости краевого эффекта увеличивается и это естественно (табл. 4.1, 4.2, рис. 4.1-4.6).

По сравнению с изотропным случаем, в анизотропном случае показатель изменяемости краевого эффекта уменьшается. Это означает, что для анизотропных оболочек краевой эффект затухает медленнее, чем в изотропном случае. С увеличением угла раствора срединной поверхности показатель изменяемости краевого эффекта уменьшается. Полученные результаты представлены в виде графиков и таблиц.

## **§16. Удовлетворение граничных условий на торцах конуса**

При удовлетворении граничных условий на торцах конуса возникают трудности, главным образом, связанные с неортогональностью однородных решений.

Доказанное во второй главе обобщенное условие ортогональности однородных решений для усеченного полного конуса, позволяет точно решить задачу теории упругости для трансверсально-изотропного конуса при смешанных граничных условиях на торцах конуса.

Таблица 4.1

Результаты вычисления показателя изменяемости первого члена асимптотики  $\alpha_{k_0} / \sqrt{\varepsilon}$ , для  $\varepsilon = 0,1$ ;  $\varepsilon = 0,01$ ;  $\varepsilon = 0,001$

$\theta_0$	Zn (0,1)	Zn (0,01)	Zn (0,001)	Cd (0,1)	Cd (0,01)	Cd (0,001)	Mg (0,1)	Mg (0,01)	Mg (0,001)	изотр.сл. (0,1)	изотр.сл. (0,01)	изотр.сл.
3	12,58	39,77	125,77	13,31	42,09	133,09	18,41	58,22	184,09	17,66	55,86	176,63
6	8,88	28,08	88,81	9,40	29,72	93,98	13,00	41,11	130,00	12,47	39,44	124,72
9	7,23	22,88	72,35	7,66	24,21	75,56	10,59	33,49	105,90	10,16	32,13	101,60
12	6,24	19,75	62,45	6,61	20,90	66,09	9,14	28,91	91,41	8,77	27,73	87,71
15	5,56	17,59	55,62	5,89	18,61	58,86	8,14	25,75	81,42	7,81	24,70	78,12
18	5,05	15,97	50,51	5,35	16,90	53,45	7,39	23,38	73,93	7,09	22,43	70,94
21	4,65	14,70	46,47	4,92	15,55	49,18	6,80	21,51	68,02	6,53	20,64	65,26
24	4,31	13,65	43,15	4,57	14,44	45,66	6,32	19,97	63,16	6,06	19,16	60,60
27	4,03	12,76	40,34	4,27	13,50	42,69	5,90	18,67	59,04	5,66	17,91	56,65
30	3,79	11,98	37,89	4,01	12,68	40,10	5,55	17,54	55,46	5,32	16,83	53,22
33	3,57	11,30	35,73	3,78	11,96	37,81	5,23	16,54	52,30	5,02	15,87	50,18
36	3,38	10,68	33,78	3,57	11,30	35,75	4,94	15,64	49,44	4,74	15,00	47,44
39	3,20	10,12	31,99	3,39	10,71	33,86	4,68	14,81	46,83	4,49	14,21	44,93
42	3,03	9,60	30,34	3,21	10,15	32,11	4,44	14,04	44,41	4,26	13,48	42,61
45	2,88	9,10	28,79	3,05	9,64	30,47	4,21	13,33	42,14	4,04	12,79	40,44
48	2,73	8,64	27,32	2,89	9,14	28,91	4,00	12,65	39,99	3,84	12,13	38,37
51	2,29	8,19	25,91	2,74	8,67	27,42	3,79	11,99	37,92	3,64	11,51	36,39
54	2,45	7,76	24,54	2,60	8,21	25,97	3,59	11,36	35,92	3,45	10,90	34,47
57	2,32	7,34	23,20	2,46	7,76	24,55	3,40	10,74	33,96	3,26	10,30	32,59
60	2,19	6,92	21,88	2,32	7,32	23,15	3,20	10,13	32,02	3,07	9,72	30,72
63	2,06	6,50	20,55	2,17	6,88	21,75	3,01	9,51	30,08	2,89	9,13	28,86
66	1,92	6,08	19,21	2,03	6,43	20,33	2,81	8,89	28,12	2,70	8,53	26,98
69	1,78	5,64	17,84	1,89	5,97	18,88	2,61	8,26	26,11	2,51	7,92	25,05
72	1,64	5,19	16,41	1,74	5,49	17,37	2,40	7,60	24,02	2,30	7,29	23,05
75	1,49	4,71	14,90	1,58	4,99	15,77	2,18	6,90	21,82	2,09	6,62	20,93
78	1,33	4,20	13,27	1,40	4,44	14,05	1,94	6,14	19,43	1,86	5,90	18,64
81	1,15	3,62	11,46	1,21	3,83	12,13	1,68	5,30	16,77	1,61	5,09	16,09
84	0,93	2,95	9,33	0,99	3,12	9,88	1,37	4,32	13,66	1,31	4,15	13,11
87	1,66	2,08	6,59	0,70	2,21	6,98	0,96	3,05	9,65	0,93	2,93	9,26

Таблица 4.2

Результаты вычисления показателя изменчивости второго члена  
асимптотики  $\alpha_{k_1} \sqrt{\varepsilon}$ , для  $\varepsilon = 0,1$ ;  $\varepsilon = 0,01$ ;  $\varepsilon = 0,001$

$\theta_0$	Zn (0,1)	Zn (0,01)	Zn (0,001)	Cd (0,1)	Cd (0,01)	Cd (0,001)	Mg (0,1)	Mg (0,01)	Mg (0,001)	изотр.сл. (0,1)	изотр.сл. (0,01)	изотр.сл.
3	12,98	4,10	1,30	27,74	8,77	2,77	9,95	3,15	0,99	11,07	3,50	1,11
5	6,11	1,93	0,61	12,94	4,09	1,29	4,68	1,48	0,65	5,17	1,63	0,52
6	4,69	1,48	0,47	9,87	3,12	0,99	3,59	1,13	0,50	3,94	1,25	0,39
9	2,65	0,84	0,26	5,43	1,72	0,54	2,02	0,64	0,28	2,18	0,69	0,22
10	2,30	0,73	0,23	4,66	1,47	0,47	1,74	0,55	0,24	1,87	0,59	0,19
12	1,81	0,57	0,18	3,58	1,13	0,36	1,37	0,43	0,19	1,44	0,46	0,14
15	1,37	0,43	0,14	2,62	0,83	0,26	1,03	0,33	0,14	1,06	0,33	0,11
18	1,12	0,35	0,11	2,04	0,64	0,20	0,84	0,26	0,12	0,83	0,26	0,08
20	1,01	0,32	0,10	1,77	0,56	0,18	0,75	0,24	0,10	0,72	0,23	0,07
21	0,96	0,30	0,10	1,66	0,53	0,17	0,71	0,22	0,10	0,68	0,18	0,07
24	0,86	0,27	0,09	1,41	0,44	0,14	0,63	0,20	0,09	0,58	0,17	0,06
25	0,83	0,26	0,08	1,34	0,42	0,13	0,61	0,19	0,08	0,55	0,16	0,05
27	0,78	0,25	0,08	1,22	0,39	0,12	0,57	0,18	0,08	0,50	0,14	0,05
30	0,74	0,23	0,07	1,09	0,34	0,11	0,53	0,17	0,07	0,45	0,13	0,05
33	0,70	0,22	0,07	0,98	0,31	0,10	0,50	0,16	0,07	0,41	0,12	0,04
35	0,69	0,22	0,07	0,93	0,29	0,09	0,49	0,16	0,07	0,39	0,12	0,04
36	0,68	0,21	0,07	0,91	0,29	0,09	0,49	0,15	0,07	0,38	0,11	0,04
39	0,67	0,21	0,07	0,85	0,27	0,08	0,47	0,15	0,07	0,36	0,11	0,04
40	0,66	0,21	0,07	0,83	0,26	0,08	0,47	0,15	0,06	0,35	0,11	0,04
42	0,66	0,21	0,07	0,80	0,25	0,08	0,47	0,15	0,06	0,34	0,10	0,03
45	0,66	0,21	0,07	0,77	0,24	0,08	0,46	0,15	0,06	0,33	0,10	0,03
48	0,66	0,21	0,07	0,74	0,23	0,07	0,46	0,15	0,06	0,32	0,10	0,03
49	0,67	0,21	0,07	0,73	0,23	0,07	0,47	0,15	0,06	0,32	0,10	0,03
51	0,67	0,21	0,07	0,72	0,23	0,07	0,47	0,15	0,06	0,31	0,10	0,03
54	0,69	0,22	0,07	0,72	0,23	0,07	0,48	0,15	0,07	0,31	0,10	0,03
57	0,71	0,22	0,07	0,71	0,23	0,07	0,49	0,15	0,07	0,31	0,10	0,03
60	0,73	0,23	0,07	0,72	0,23	0,07	0,51	0,16	0,07	0,32	0,10	0,03
63	0,76	0,24	0,08	0,73	0,23	0,07	0,53	0,17	0,07	0,32	0,10	0,03

Продолжение таблицы 4.2.

66	0,80	0,25	0,08	0,75	0,24	0,07	0,55	0,17	0,08	0,33	0,11	0,03
69	0,85	0,27	0,09	0,78	0,25	0,08	0,58	0,18	0,08	0,35	0,11	0,03
72	0,91	0,29	0,09	0,82	0,26	0,08	0,63	0,20	0,09	0,37	0,12	0,04
75	1,00	0,32	0,10	0,89	0,28	0,09	0,68	0,22	0,09	0,40	0,13	0,04
78	1,11	0,35	0,11	0,98	0,31	0,10	0,76	0,24	0,11	0,44	0,14	0,04
81	1,28	0,40	0,13	1,11	0,35	0,11	0,87	0,28	0,12	0,50	0,16	0,05
83	1,45	0,46	0,14	1,25	0,40	0,13	0,99	0,31	0,14	0,57	0,18	0,06
86	1,91	0,60	0,19	1,65	0,52	0,16	1,31	0,41	0,18	0,75	0,24	0,07
87	2,21	0,70	0,22	1,90	0,60	0,19	1,51	0,48	0,21	0,86	0,27	0,09

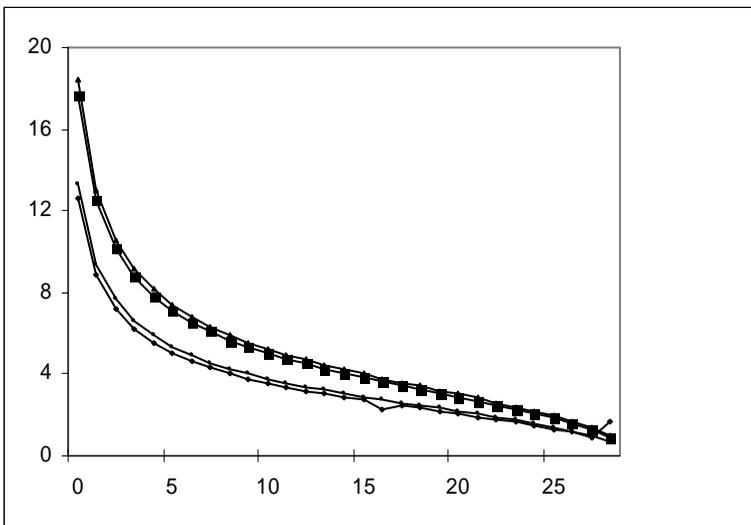


Рис. 4.1

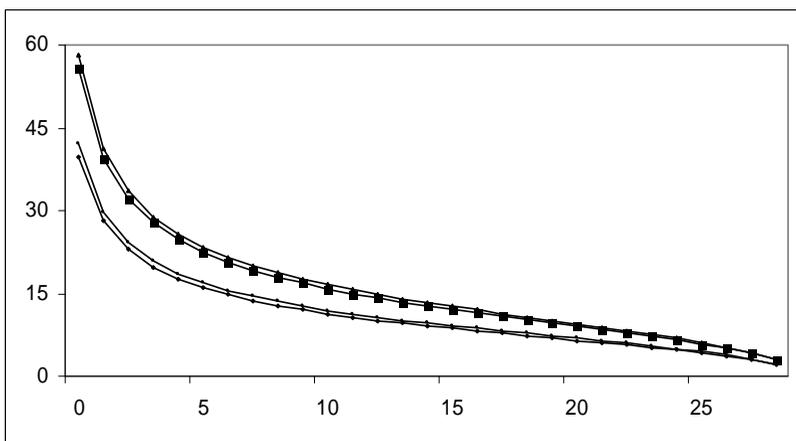


Рис.4.2

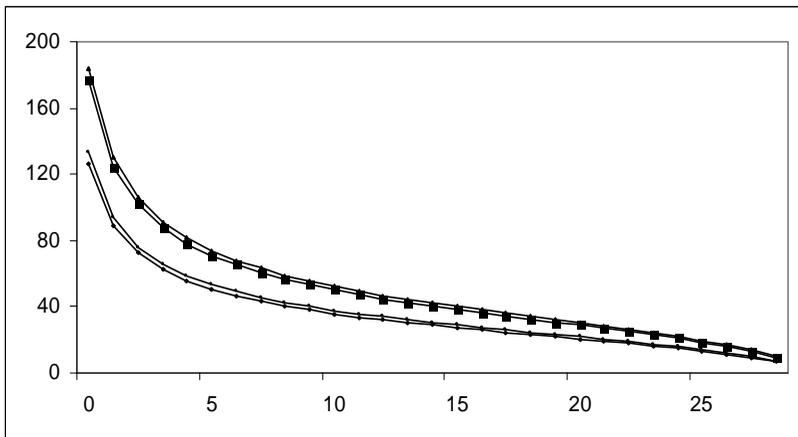


Рис.4.3

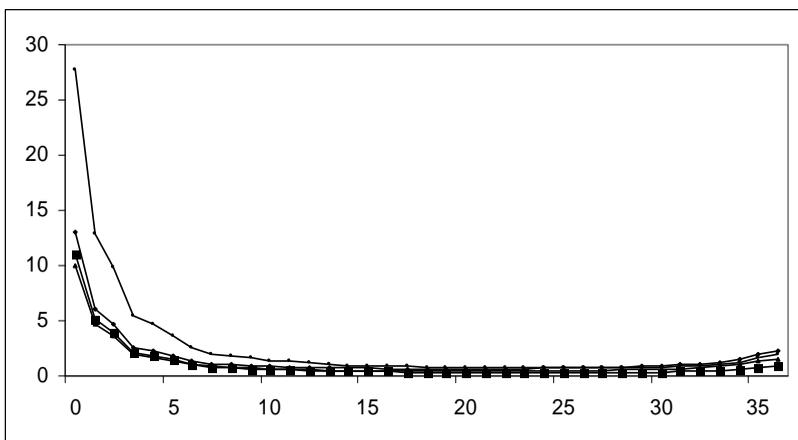


Рис.4.4

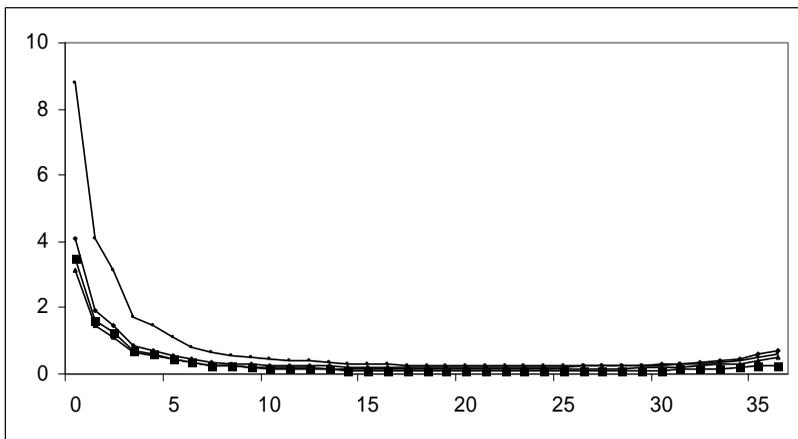


Рис.4.5

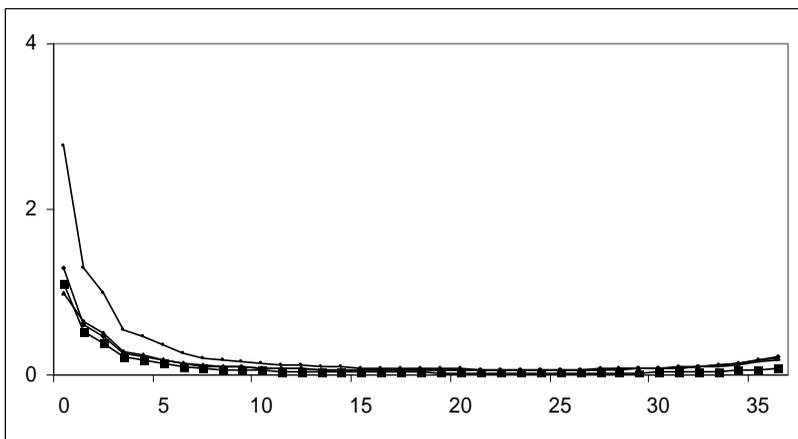


Рис.4.6

В общем случае обобщенные условия ортогональности не позволяют точно удовлетворить граничные условия на торцах конуса.

В общем случае нагружения, кроме сведения с бесконечным системам, по-видимому, ничего нового предложить нельзя.

Рассмотрим вопрос о снятии напряжений с торцевых поверхностей оболочки.

Пусть при  $r = r_s$  ( $s = 1, 2$ ) заданы напряжения

$$\sigma_r = f_{1s}(\theta), \quad \tau_{r\theta} = f_{2s}(\theta) \quad (16.1)$$

Функции  $f_{js}(\theta)$ , ( $j = 1, 2$ ) удовлетворяют условиям равновесия

$$\begin{aligned} 2\pi r_1^2 \int_{\theta_1}^{\theta_2} (f_{11} \cos \theta - f_{21} \sin \theta) \sin \theta d\theta = \\ = 2\pi r_2^2 \int_{\theta_1}^{\theta_2} (f_{12} \cos \theta - f_{22} \sin \theta) \sin \theta d\theta = P. \end{aligned} \quad (16.2)$$

Здесь  $P$  – главный вектор усилий, действующих в произвольном сечении  $r = const$ .

Как было показано выше, несомоуравновешанную часть напряжений (16.1) можно снять при помощи проникающего решения (15.2), причем, связь постоянной  $C_1$  с главным вектором дается равенством (15.15). Для определения произвольных констант  $C_k$  ( $k = 2, 3, \dots$ ), вариации которых будем считать независимыми, используем вариационный принцип Лагранжа.

Поскольку однородные решения удовлетворяют уравнению равновесия и граничным условиям на конической поверхности, вариационный принцип принимает следующую форму:

$$r_1 \sum_{s=1}^2 \rho_s^2 \int_{\theta_1}^{\theta_2} [(\sigma_r - f_{1s}) \delta u_r + (\tau_{r\theta} - f_{2s}) \delta u_\theta]_{\rho=\rho_s} \sin \theta d\theta = 0. \quad (16.3)$$

Приравнявая нулю коэффициенты при независимых вариациях  $\delta C_k$ , получим следующую бесконечную систему:

$$\sum_{k=1}^{\infty} m_{jk} C_k = N_j \quad (j = 1, 2, \dots) \quad (16.4)$$

Здесь

$$m_{jk} = \sum_{s=1}^2 \exp(z_j + z_k) \ln \rho_s \int_{\theta_1}^{\theta_2} (Q_{rk} u_{rj} + T_k u_{\theta j}) \sin \theta d\theta,$$

$$N_j = \sum_{s=1}^2 \exp(z_j + 3/2) \ln \rho_s \int_{\theta_1}^{\theta_2} (f_{1s} u_{rj} + f_{2s} u_{\theta j}) \sin \theta d\theta.$$

Используя малость параметра тонкостенности оболочки  $\varepsilon$ , можно построить асимптотическое решение системы (16.4).

Прежде всего уточним предположения относительно внешней нагрузки.

Допустим, что  $f_{1s} \sim 1$ , тогда если учесть, что  $\sigma_r$  и  $\tau_{r\theta}$ , соответствующие корням второй группы, имеют разный порядок ( $\sigma_r \sim 1$ ,  $\tau_{r\theta} \sim \sqrt{\varepsilon}$ ), то при выборе порядка  $f_{2s}$  нужно руководствоваться следующими соображениями.

Используя формулы (15.3)-(15.7), а также тот факт, что  $\tau_{r\theta}(\pm 1) = 0$ , получаем

$$\int_{-1}^1 \tau_{r\theta} d\eta = -8(1 - \nu_1 \nu_2) G \sin \theta_0 \frac{\sqrt{\varepsilon}}{\rho \sqrt{\rho}} \sum_{k=3}^6 C_k \alpha_k \exp\left(\frac{\alpha_k}{\sqrt{\varepsilon}} \ln \rho\right). \quad (16.5)$$

Если теперь заданные на границе касательные напряжения представить в виде:

$$f_{2s} = f_{2s}^{(1)} + f_{2s}^{(2)}, \quad f_{2s}^{(2)} = \frac{1}{2} \int_{\theta_1}^{\theta_2} f_{2s} d\eta \quad (16.6)$$

$$f_{2s}^{(2)} = f_{2s} - f_{2s}^{(1)},$$

то на основании асимптотической формулы (16.5) необходимо предполагать, что  $f_{2s}^{(1)}$  имеют порядок  $\sqrt{\varepsilon}$ ,  $f_{2s}^{(2)}$  могут иметь тот же порядок, что и  $f_{1s}$ , т.е.  $f_{2s}^{(2)} \sim 1$ .

Отметим, что постоянные  $C_k$  ( $k = 3, 4, 5, 6$ ) уже определены. Поэтому полагаем, что  $C_k = 0$ .

Далее, используя формулы (15.4), (15.5), (15.6), (15.7), (15.8) неизвестные постоянные  $B_n$ ,  $E_n$ ,  $D_n$  будем отыскивать в виде:

$$\begin{aligned} B_n &= B_{n0} + \varepsilon B_{n1} + \dots, \\ D_n &= D_{n0} + \varepsilon D_{n1} + \dots, \\ E_n &= E_{n0} + \varepsilon E_{n1} + \dots \end{aligned} \quad (16.7)$$

Учитывая принятый порядок относительно заданных на границе напряжений на основе вариационного принципа, получим следующую систему уравнений относительно  $B_{n0}$ ,  $E_{n0}$ ,  $D_{n0}$ .

$$\sum_{n=2,4,\dots}^{\infty} g_{tn} B_{n0} = H_t, \quad (t = 2, 4, \dots), \quad (16.8)$$

$$\sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} g_{tn} B_{n0} = H_t, \quad (t = 1, 3, \dots), \quad (16.9)$$

$$\sum_{n=2,4,\dots}^{\infty} h_{tn} E_{n0} = N_t, \quad (t = 2, 4, \dots), \quad (16.10)$$

$$\sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} h_{tn} E_{n0} = N_t, \quad (t = 1, 3, \dots), \quad (16.11)$$

$$\sum_{n=2,4,\dots}^{\infty} \Pi_m D_{n0} = l_t, \quad (t = 2, 4, \dots), \quad (16.12)$$

$$\sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} \Pi_m D_{n0} = l_t, \quad (t = 1, 3, \dots), \quad (16.13)$$

$$\begin{aligned} g_m = & -(b_{11}b_{22} - b_{12}^2) s_1 s_2 G_1 \delta_n \sum_{s=1}^2 \exp\left(\frac{\delta_n + \delta_t}{\varepsilon} \ln \rho_s\right) \times \\ & \times \int_{-1}^1 \left\{ [s_2 (b_{22}s_2^2 + b_{12}^2 + b_{12} - b_{11}b_{22}) \sin s_2 \delta_t \cos s_1 \delta_t \eta - \right. \\ & - s_1 (b_{22}s_1^2 + b_{12}^2 + b_{12} - b_{11}b_{22}) \sin s_1 \delta_t \cos s_2 \delta_t \eta] \times \\ & \times [s_1 \sin s_2 \delta_n \cos s_1 \delta_n \eta - s_2 \sin s_1 \delta_n \cos s_2 \delta_n \eta] - \\ & - [(b_{22}s_2^2 + b_{12}) \sin s_2 \delta_t \sin s_1 \delta_t \eta - (b_{22}s_1^2 + b_{12}) \sin s_1 \delta_t \sin s_2 \delta_t \eta] \times \\ & \left. \times [\sin s_2 \delta_n \sin s_1 \delta_n \eta - \sin s_1 \delta_n \sin s_2 \delta_n \eta] \right\} d\eta, \quad (t = 2, 4, \dots, n = 2, 4, \dots). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g_m = & -(b_{11}b_{22} - b_{12}^2) s_1 s_2 G_1 \delta_n \sum_{s=1}^2 \exp\left(\frac{\delta_n + \delta_t}{\varepsilon} \ln \rho_s\right) \times \\ & \times \int_{-1}^1 \left\{ [s_2 (b_{22}s_2^2 + b_{12}^2 + b_{12} - b_{11}b_{22}) \cos s_2 \delta_t \sin s_1 \delta_t \eta - \right. \\ & - s_1 (b_{22}s_1^2 + b_{12}^2 + b_{12} - b_{11}b_{22}) \cos s_1 \delta_t \sin s_2 \delta_t \eta] \times \\ & \times [s_1 \cos s_2 \delta_n \sin s_1 \delta_n \eta - s_2 \cos s_1 \delta_n \sin s_2 \delta_n \eta] - \\ & - [(b_{22}s_2^2 + b_{12}) \cos s_2 \delta_t \cos s_1 \delta_t \eta - (b_{22}s_1^2 + b_{12}) \cos s_1 \delta_t \cos s_2 \delta_t \eta] \times \\ & \left. \times [\cos s_2 \delta_n \cos s_1 \delta_n \eta - \cos s_1 \delta_n \cos s_2 \delta_n \eta] \right\} d\eta, \quad (t = 1, 3, \dots, n = 1, 3, \dots). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} H_t = & \sum_{s=1}^2 \rho_s^{3/2} \exp\left(\frac{\delta_t}{\varepsilon} \ln \rho_s\right) \int_{-1}^1 \left\{ f_{1s}(\eta) [s_2 (b_{22}s_2^2 + b_{12}^2 + b_{12} - b_{11}b_{22}) \times \right. \\ & \times \cos s_2 \delta_t \sin s_1 \delta_t \eta - s_1 (b_{22}s_1^2 + b_{12}^2 + b_{12} - b_{11}b_{22}) \cos s_1 \delta_t \sin s_2 \delta_t \eta] - \\ & - f_{2s}(\eta) [(b_{22}s_2^2 + b_{12}) \cos s_2 \delta_t \cos s_1 \delta_t \eta - (b_{22}s_1^2 + b_{12}) \cos s_1 \delta_t \times \\ & \left. \times \cos s_2 \delta_t \eta] \right\} d\eta \quad (t = 1, 3, \dots). \end{aligned}$$

$$H_t = -\sum_{s=1}^2 \rho_s^{3/2} \exp\left(\frac{\delta_t}{\varepsilon} \ln \rho_s\right) \int_{-1}^1 \{f_{1s}(\eta) [s_2(b_{22}s_2^2 + b_{12}^2 + b_{12} - b_{11}b_{22}) \times \\ \times \cos s_2 \delta_t \sin s_1 \delta_t \eta - s_1(b_{22}s_1^2 + b_{12}^2 + b_{12} - b_{11}b_{22}) \cos s_1 \delta_t \sin s_2 \delta_t \eta] - \\ - f_{2s}(\eta) [(b_{22}s_2^2 + b_{12}^2) \cos s_2 \delta_t \cos s_1 \delta_t \eta - (b_{22}s_1^2 + b_{12}^2) \cos s_1 \delta_t \times \\ \times \cos s_2 \delta_t \eta] d\eta \quad (t = 2, 4, \dots).$$

$$h_m = \sum_{s=1}^2 \exp\left(\frac{\delta_t + \delta_n}{\varepsilon} \ln \rho_s\right) \int_{-1}^1 \{F_{1t}(\eta) [b_{11} \delta_n F_{1n}(\eta) + b_{12} F'_{2n}(\eta)] f_{1s} + \\ + F_{2t}(\eta) [F'_{1n}(\eta) + \delta_n F_{2n}(\eta)] f_{2s}\} d\eta, \quad (t = 2, 4, \dots; n = 2, 4, \dots).$$

$$N_t = \sum_{s=1}^2 \rho_s^{3/2} \exp\left(\frac{\delta_t}{\varepsilon} \ln \rho_s\right) \int_{-1}^1 [f_{1s}(\eta) F_{1t}(\eta) + f_{2s}(\eta) F_{2t}(\eta)] d\eta.$$

Выражения для  $n = 1, 3, \dots$  получаются из выражения  $h_m$ ,  $N_t$  заменой  $\cos x$  на  $\sin x$ ,  $\sin x$  на  $-\cos x$ ,  $chx$  на  $shx$ ,  $shx$  на  $-chx$  соответственно.

$$\Pi_m = G_1 \sum_{s=1}^2 \exp\left(\frac{\delta_t + \delta_n}{\varepsilon} \ln \rho_s\right) \int_{-1}^1 (b_{12} + 1) p (b_{12} p^2 - b_{11}) \times \\ \times \left\{ \left[ \cos p \delta_t + \frac{b_{12} p^2 - b_{11}}{b_{12} p^2 + b_{11}} \frac{\sin p \delta_t}{p \delta_t} \right] \cos p \delta_t \eta + \eta \sin p \delta_t \times \right. \\ \times \sin p \delta_t \eta \left\{ (p \delta_n \cos p \delta_n - \sin p \delta_n) \cos p \delta_n \eta + \eta p \delta_n \times \right. \\ \times \sin p \delta_n \eta \sin p \delta_n \left. \right\} - (p^2 - b_{11}) (b_{12} p^2 + 1) \delta_n \left\{ \left[ \cos p \delta_t + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{2b_{11}(b_{12} + 1)}{(b_{11} - p^2)(b_{12} p^2 + 1)} \frac{\sin p \delta_t}{p \delta_t} \right] \sin p \delta_t \eta + \eta \sin p \delta_t \cos p \delta_t \eta \right\} \times \\ \times [\cos p \delta_n \sin p \delta_n \eta - \eta \sin p \delta_n \cos p \delta_n \eta] d\eta. \quad (n = 2, 4, \dots, t = 2, 4, \dots).$$

$$l_t = \sum_{s=1}^2 \exp\left(\frac{\delta_t}{\varepsilon} \ln \rho_s\right) \rho_s^{3/2} \int_{-1}^1 (b_{12} + 1) p f_{1s}(\eta) \left\{ \cos p \delta_t + \right.$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{b_{12}p^2 - b_{11}}{b_{12}p^2 + 1} \frac{\sin p\delta_t}{p\delta_t} \left] \cos p\delta_t\eta + \eta \sin p\delta_t \sin p\delta_t\eta \right\} + \\
& + (p^2 - b_{11})f_{2s}(\eta) \left\{ \left[ \cos p\delta_t + \frac{2b_{11}(b_{12} + 1)}{(b_{11} - p^2)(b_{12}p^2 + 1)} \times \right. \right. \\
& \times \left. \left. \frac{\sin p\delta_t}{\delta_t} \right] \sin p\delta_t\eta + \eta \sin p\delta_t \cos p\delta_t\eta \right\} d\eta, \quad (t = 2, 4, \dots) \\
\Pi_m = & G_1 \sum_{s=1}^2 \exp\left(\frac{\delta_t + \delta_n}{\varepsilon} \ln \rho_s\right) \int_{-1}^1 (b_{12} + 1)(b_{12}p^2 - b_{11}) \times \\
& \times \left\{ \left[ \sin p\delta_t + \frac{b_{12}p^2 - b_{11}}{b_{12}p^2 + b_{11}} \frac{\cos p\delta_t}{p\delta_t} \right] \sin p\delta_t\eta + \eta \cos p\delta_t \times \right. \\
& \times \cos p\delta_t\eta \left. \right\} [(p\delta_n \sin p\delta_n + \cos p\delta_n) \sin p\delta_n\eta + \eta p\delta_n \times \\
& \times \cos p\delta_n \cos p\delta_n\eta] + \delta_n (p^2 - b_{11})(b_{12}p^2 + 1) \times \\
& \times \left\{ \left[ \sin p\delta_t - \frac{2pb_{11}(b_{12} + 1)}{(b_{11} - p^2)(b_{12}p^2 + 1)} \frac{\cos p\delta_t}{p\delta_t} \right] \times \right. \\
& \times \cos p\delta_t\eta + \eta \cos p\delta_t \sin p\delta_t\eta \left. \right\} [\sin p\delta_n \cos p\delta_n\eta - \\
& - \eta \cos p\delta_n \sin p\delta_n\eta] d\eta. \quad (n = 1, 3, \dots, \quad t = 1, 3, \dots) \\
l_t = & \sum_{s=1}^2 \exp\left(\frac{\delta_t}{\varepsilon} \ln \rho_s\right) \rho_s^{3/2} \int_{-1}^1 (b_{12} + 1)f_{1s}(\eta) \left\{ \left[ \sin p\delta_t - \right. \right. \\
& - \left. \left. \frac{b_{12}p^2 - b_{11}}{b_{12}p^2 + b_{11}} \frac{\cos p\delta_t}{p\delta_t} \right] \sin p\delta_t\eta + \eta \cos p\delta_t \cos p\delta_t\eta \right\} - \\
& - (p^2 - b_{11})f_{2s}(\eta) \left\{ \left[ \sin p\delta_t - \frac{2b_{11}(b_{12} + 1)}{(b_{11} - p^2)(b_{12}p^2 + 1)} \times \right. \right. \\
& \times \left. \left. \frac{\cos p\delta_t}{p\delta_t} \right] \cos p\delta_t\eta + \eta \cos p\delta_t \sin p\delta_t\eta \right\} d\eta, \quad (t = 1, 3, \dots)
\end{aligned}$$

Определение  $B_{ni}$ ,  $E_{ni}$ ,  $D_{ni}$  ( $i = 1, 2, \dots$ ) неизменно сводится к обращению одних и тех же матриц, которые совпадают с матрицами (16.8)-(16.13). Системы уравнений (16.8)-(16.11) значительно упрощаются, если исследовать состояние полубесконечного конуса ( $\rho_1 = 1, \rho_2 \rightarrow \infty$ ), либо конуса с вершиной  $\rho_2 = 1, \rho_1 = 0$ .

В первом случае все неизвестные, соответствующие нулям, у которых  $\operatorname{Re} \delta_n > 0$ , следует положить равными нулю, во втором случае, в силу ограниченности решения в вершине конуса, следует положить нулю те неизвестные, для которых  $\operatorname{Re} \delta_n < 0$ .

Разрешимость и сходимость метода редукции для системы (15.8)-(16.11) следует из работ [41]. Общее решение задачи об определении напряженно-деформированного состояния оболочки может быть получено суперпозицией решений, соответствующих различным группам корней. В первом члене асимптотики получаем:

$$u_r = u_r^0 + u_r^1 + u_r^2 \quad (16.14)$$

$$u_\theta = u_\theta^0 + u_\theta^1 + u_\theta^2$$

$$\sigma_r = \sigma_r^0 + \sigma_r^1 + \sigma_r^2$$

$$\sigma_\varphi = \sigma_\varphi^0 + \sigma_\varphi^1 + \sigma_\varphi^2$$

$$\sigma_\theta = \sigma_\theta^0 + \sigma_\theta^1 + \sigma_\theta^2$$

$$\tau_{r\theta} = \tau_{r\theta}^0 + \tau_{r\theta}^1 + \tau_{r\theta}^2$$

$$(16.15)$$

где

$$u_r^0 = r_1 \frac{P}{\gamma_0} \frac{1}{\rho} [\cos \theta_0 + 2(\nu_1 - 1)\eta \sin \theta_0],$$

$$u_\theta^0 = \frac{2r_1(\nu_1 - 1)}{\gamma_0} \frac{P}{\rho} \sin \theta_0, \quad (16.16)$$

$$\sigma_r^0 = \frac{-2(1+\nu)P}{\rho^2} \frac{\nu_1}{\gamma_0 \nu_2} G \cos \theta_0,$$

$$\sigma_\varphi^0 = O(\varepsilon), \quad \sigma_\theta = O(\varepsilon^2), \quad \tau_{r\theta} = O(\varepsilon^2).$$

Здесь  $P$  – главный вектор внешних усилий.

$$u_r^1 = r_1 \left( \frac{\varepsilon}{\rho} \right)^{1/2} \sum_{k=3}^6 C_{k0} \left( 2 \frac{\nu_1}{\nu_2} \alpha_{k0}^3 \eta + 2\nu_1 \alpha_{k0} \operatorname{ctg} \theta_0 \right) \exp \left( \frac{\alpha_{k0}}{\sqrt{\varepsilon}} \ln \rho \right),$$

$$u_\theta^1 = -\frac{r_1}{\sqrt{\rho}} \sum_{k=3}^6 C_{k0} \frac{\nu_1}{\nu_2} \alpha_{k0}^2 \exp \left( \frac{\alpha_{k0}}{\sqrt{\varepsilon}} \ln \rho \right),$$

$$\sigma_r^1 = -\frac{G_1}{\rho \sqrt{\rho}} \sum_{k=3}^6 6 \frac{\nu_1}{\nu_2} (1+\nu) \eta \operatorname{ctg} \theta_0 C_{k0} \exp \left( \frac{\alpha_{k0}}{\sqrt{\varepsilon}} \ln \rho \right),$$

(16.17)

$$\sigma_r^1 = \frac{G_1}{\rho \sqrt{\rho}} \sum_{k=3}^6 C_{k0} \left[ -6\nu_1(1+\nu) \eta \operatorname{ctg} \theta_0 + (2\nu_1^2 \nu + 2\nu_1^2 + \nu_1 \nu_2 - 1) \times \right. \\ \left. \times \frac{G_0}{m} \alpha_{k0}^2 \operatorname{ctg} \theta_0 \right] \exp \left( \frac{\alpha_{k0}}{\sqrt{\varepsilon}} \ln \rho \right),$$

$$\sigma_\theta^1 = O(\varepsilon), \quad \tau_{r\theta}^1 = O(\sqrt{\varepsilon}).$$

$$u_r^2 = \frac{r_1 \varepsilon}{\rho} \sum_{n=2,4,\dots}^{\infty} B_{n0} \left[ s_2 (b_{22} s_2^2 + b_{12}^2 - b_{12} - b_{11} b_{22}) \sin s_2 \delta_n \cos s_1 \delta_n \eta - \right. \\ \left. - s_1 (b_{22} s_1^2 + b_{12}^2 - b_{12} - b_{11} b_{22}) \sin s_1 \delta_n \cos s_2 \delta_n \eta \right] \exp \left( \frac{\delta_n}{\varepsilon} \ln \rho \right),$$

$$u_\theta^2 = \frac{r_1 \varepsilon}{\rho} \sum_{n=2,4,\dots}^{\infty} B_{n0} \left[ (b_{22} s_2^2 + b_{12}) \sin s_2 \delta_n \sin s_1 \delta_n \eta - \right. \\ \left. - (b_{22} s_1^2 + b_{12}) \sin s_1 \delta_n \sin s_2 \delta_n \eta \right] \exp \left( \frac{\delta_n}{\varepsilon} \ln \rho \right),$$

$$\sigma_r^2 = -\frac{G_1}{\rho \sqrt{\rho}} (b_{11} b_{22} - b_{12}^2) s_1 s_2 \sum_{n=2,4,\dots}^{\infty} B_{n0} \delta_n \left[ s_1 \sin s_2 \delta_n \cos s_1 \delta_n \eta - \right.$$

$$-s_2 \sin s_1 \delta_n \cos s_2 \delta_n \eta] \exp\left(\frac{\delta_n}{\varepsilon} \ln \rho\right), \quad (16.18)$$

$$\begin{aligned} \sigma_\varphi^2 &= \frac{G_1}{\rho\sqrt{\rho}} \sum_{n=2,4,\dots}^{\infty} B_{n0} \delta_n \left[ s_2 (b_{11} b_{22} - b_{12}^2 - 2G_0 - 2G_0 b_{12} s_1^2) \times \right. \\ &\times \sin s_2 \delta_n \cos s_1 \delta_n \eta - s_1 (b_{11} b_{22} - b_{12}^2 - 2G_0 - 2G_0 b_{12} s_2^2) \times \\ &\times \left. \sin s_1 \delta_n \cos s_2 \delta_n \eta \right] \exp\left(\frac{\delta_n}{\varepsilon} \ln \rho\right), \\ \sigma_\theta^2 &= \frac{G_1}{\rho\sqrt{\rho}} (b_{11} b_{22} - b_{12}^2) s_1 s_2 \sum_{n=2,4,\dots}^{\infty} B_{n0} \delta_n \left[ s_2 \sin s_2 \delta_n \cos s_1 \delta_n \eta - \right. \\ &\left. - s_1 \sin s_1 \delta_n \cos s_2 \delta_n \eta \right] \exp\left(\frac{\delta_n}{\varepsilon} \ln \rho\right), \\ \tau_{r\theta}^2 &= \frac{G_1}{\rho\sqrt{\rho}} (b_{11} b_{22} - b_{12}^2) s_1 s_2 \sum_{n=2,4,\dots}^{\infty} B_{n0} \delta_n \left[ \sin s_2 \delta_n \sin s_1 \delta_n \eta - \right. \\ &\left. - \sin s_1 \delta_n \sin s_2 \delta_n \eta \right] \exp\left(\frac{\delta_n}{\varepsilon} \ln \rho\right), \end{aligned} \quad (16.19)$$

$$\begin{aligned} u_r^2 &= -\frac{r_1 \varepsilon}{\rho} \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} B_{n0} \left[ s_2 (b_{22} s_2^2 + b_{12}^2 + b_{12} - b_{11} b_{22}) \cos s_2 \delta_n \sin s_1 \delta_n \eta - \right. \\ &\left. - s_1 (b_{22} s_1^2 + b_{12}^2 + b_{12} - b_{11} b_{22}) \cos s_1 \delta_n \sin s_2 \delta_n \eta \right] \exp\left(\frac{\delta_n}{\varepsilon} \ln \rho\right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u_\theta^2 &= \frac{r_1 \varepsilon}{\rho} \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} B_{n0} \left[ (b_{22} s_2^2 + b_{12}) \cos s_2 \delta_n \cos s_1 \delta_n \eta - \right. \\ &\left. - (b_{22} s_1^2 + b_{12}) \cos s_1 \delta_n \cos s_2 \delta_n \eta \right] \exp\left(\frac{\delta_n}{\varepsilon} \ln \rho\right), \end{aligned}$$

$$\sigma_r^2 = \frac{G_1}{\rho\sqrt{\rho}} (b_{11} b_{22} - b_{12}^2) s_1 s_2 \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} B_{n0} \delta_n \left[ s_1 \cos s_2 \delta_n \sin s_1 \delta_n \eta - \right.$$

$$\begin{aligned}
& -s_2 \cos s_2 \delta_n \sin s_2 \delta_n \eta] \exp\left(\frac{\delta_n}{\varepsilon} \ln \rho\right), \\
\sigma_\varphi^2 &= -\frac{G_1}{\rho\sqrt{\rho}} \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} B_{n0} \delta_n \left[ s_2 (b_{11} b_{22} - b_{12}^2 - 2G_0 - 2G_0 b_{12} s_1^2) \times \right. \\
& \times \cos s_2 \delta_n \sin s_1 \delta_n \eta - s_1 (b_{11} b_{22} - b_{12}^2 - 2G_0 - 2G_0 b_{12} s_2^2) \times \quad (16.20) \\
& \left. \times \cos s_1 \delta_n \sin s_2 \delta_n \eta \right] \exp\left(\frac{\delta_n}{\varepsilon} \ln \rho\right), \\
\sigma_\theta^2 &= -\frac{G_1}{\rho\sqrt{\rho}} (b_{11} b_{22} - b_{12}^2) \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} B_{n0} \delta_n \left[ s_2 \cos s_2 \delta_n \sin s_1 \delta_n \eta - \right. \\
& \left. - s_1 \cos s_1 \delta_n \sin s_2 \delta_n \eta \right] \exp\left(\frac{\delta_n}{\varepsilon} \ln \rho\right), \\
\tau_{r\theta}^2 &= \frac{G_1}{\rho\sqrt{\rho}} (b_{11} b_{22} - b_{12}^2) s_1 s_2 \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} B_{n0} \left[ \cos s_2 \delta_n \cos s_1 \delta_n \eta - \right. \\
& \left. - \cos s_1 \delta_n \cos s_2 \delta_n \eta \right] \exp\left(\frac{\delta_n}{\varepsilon} \ln \rho\right). \\
u_r^2 &= \frac{r_1 (b_{12} + 1) \varepsilon}{\sqrt{\rho}} \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} D_{n0} \left\{ \left[ \sin p \delta_n - \frac{b_{12} p^2 - b_{11}}{b_{12} p^2 + b_{11}} \frac{\cos p \delta_n}{p \delta_n} \right] \times \right. \\
& \times \sin p \delta_n \eta + \eta \cos p \delta_n \cos p \delta_n \eta \left. \right\} \exp\left(\frac{\delta_n}{\varepsilon} \ln \rho\right), \\
u_\theta^2 &= -\frac{r_1 (p^2 - b_{11}) \varepsilon}{\sqrt{\rho}} \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} D_{n0} \left\{ \left[ \sin p \delta_n + \frac{2b_{11} (b_{12} + 1)}{(b_{11} - p^2)(b_{12} p^2 + 1)} \times \right. \right. \\
& \left. \left. \times \frac{\cos p \delta_n}{p \delta_n} \right] \cos p \delta_n \eta + \eta \cos p \delta_n \sin p \delta_n \eta \right\} \exp\left(\frac{\delta_n}{\varepsilon} \ln \rho\right), \\
\sigma_r^2 &= \frac{G_1 (b_{12} p^2 - b_{11})}{\rho\sqrt{\rho}} \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} D_{n0} \left[ (p \delta_n \sin p \delta_n + \cos p \delta_n) \times \right.
\end{aligned}$$

$$\times \sin p\delta_n\eta + \eta p\delta_n \cos p\delta_n \cos p\delta_n\eta] \exp\left(\frac{\delta_n}{\varepsilon} \ln \rho\right), \quad (16.21)$$

$$\begin{aligned} \sigma_\varphi^2 = & \frac{G_1}{\rho\sqrt{\rho}} \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} D_{n0} \left\{ (b_{23}p^2 + b_{22} + b_{12} - b_{11}b_{23}) p\delta_n \sin p\delta_n + \right. \\ & \left. + \left[ b_{11}b_{23} + b_{12}^2 + b_{12} - b_{11} - b_{23}p^2 - 2b_{11}(b_{12}p^2 + 1) \frac{b_{23}p^2 + b_{11}}{b_{12}p^2 + b_{11}} \times \right. \right. \\ & \left. \left. \times \cos p\delta_n \right\} \sin p\delta_n\eta + (b_{23}p^2 + b_{12}^2 + b_{12} - b_{11}b_{23}) \eta p\delta_n \sin p\delta_n \times \right. \\ & \left. \times \cos p\delta_n\eta \right\} \exp\left(\frac{\delta_n}{\varepsilon} \ln \rho\right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma_\theta^2 = & \frac{G_1(b_{11}b_{22} - b_{12}^2)}{\rho\sqrt{\rho}} \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} D_{n0} [(p\delta_n \sin p\delta_n - \cos p\delta_n) \times \\ & \times \sin p\delta_n\eta + \eta p\delta_n \cos p\delta_n \cos p\delta_n\eta] \exp\left(\frac{\delta_n}{\varepsilon} \ln \rho\right). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tau_{r\theta}^{(2)} = & -\frac{G_1(b_{12}p^2 + 1)}{\rho\sqrt{\rho}} \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} D_{n0} \delta_n [\sin p\delta_n \cos p\delta_n\eta - \\ & - \eta \cos p\delta_n \sin p\delta_n\eta] \exp\left(\frac{\delta_n}{\varepsilon} \ln \rho\right). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u_r^2 = & \frac{r_1(b_{12} + 1)p\varepsilon}{\sqrt{\rho}} \sum_{n=2,4,\dots}^{\infty} D_{n0} \left\{ \left[ \cos p\delta_n + \frac{b_{12}p^2 - b_{11}}{b_{12}p^2 + b_{11}} \frac{\sin p\delta_n}{p\delta_n} \right] \times \right. \\ & \left. \times \cos p\delta_n\eta + \eta \sin p\delta_n \sin p\delta_n\eta \right\} \exp\left(\frac{\delta_n}{\varepsilon} \ln \rho\right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u_\theta^2 = & -\frac{r_1(p^2 - b_{11})\varepsilon}{\sqrt{\rho}} \sum_{n=2,4,\dots}^{\infty} D_{n0} \left\{ \left[ \cos p\delta_n - \frac{2b_{11}p(b_{12} + 1)}{(b_{11} - p^2)(b_{12}p^2 + 1)} \times \right. \right. \\ & \left. \left. \times \frac{\sin p\delta_n}{p\delta_n} \right] \sin p\delta_n\eta + \eta \sin p\delta_n \cos p\delta_n\eta \right\} \exp\left(\frac{\delta_n}{\varepsilon} \ln \rho\right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sigma_r^2 &= \frac{G_1(b_{12}p^2 - b_{11})}{\rho\sqrt{\rho}} \sum_{n=2,4,\dots}^{\infty} D_{n0} [(p\delta_n \cos p\delta_n - \sin p\delta_n) \times \\
&\times \cos p\delta_n\eta + \eta p\delta_n \sin p\delta_n \sin p\delta_n\eta] \exp\left(\frac{\delta_n}{\varepsilon} \ln \rho\right), \\
\sigma_\varphi^2 &= \frac{G_1}{\rho\sqrt{\rho}} \sum_{n=2,4,\dots}^{\infty} D_{n0} \left\{ (b_{22}p^2 + b_{12} - b_{11}b_{23}) p\delta_n \cos p\delta_n - \right. \\
&- \left[ b_{11}b_{23} + b_{12}^2 + b_{12} - b_{11} - b_{23}p^2 - 2b_{11}(b_{12}p^2 + 1) \frac{b_{23}p^2 + b_{12}}{b_{12}p^2 + b_{11}} \times \right. \\
&\times \left. \sin p\delta_n \right\} \cos p\delta_n\eta + (b_{23}p^2 + b_{12}^2 + b_{12} - b_{11}b_{23}) \eta p\delta_n \sin p\delta_n \times \\
&\times \sin p\delta_n \sin p\delta_n\eta \left. \right\} \exp\left(\frac{\delta_n}{\varepsilon} \ln \rho\right), \\
\sigma_\theta^2 &= \frac{G_1(b_{11}b_{22} - b_{12}^2)}{\rho\sqrt{\rho}} \sum_{n=2,4,\dots}^{\infty} D_{n0} [(\sin p\delta_n + p\delta_n \cos p\delta_n) \times \\
&\times \cos p\delta_n\eta + \eta p\delta_n \sin p\delta_n \sin p\delta_n\eta] \exp\left(\frac{\delta_n}{\varepsilon} \ln \rho\right). \\
\tau_{r\theta}^{(2)} &= -\frac{G_1(b_{12}p^2 + 1)}{\rho\sqrt{\rho}} \sum_{n=2,4,\dots}^{\infty} D_{n0} \delta_n [\cos p\delta_n \sin p\delta_n\eta - \\
&- \eta \sin p\delta_n \cos p\delta_n\eta] \exp\left(\frac{\delta_n}{\varepsilon} \ln \rho\right). \\
u_r^2 &= \frac{r_1\varepsilon}{\sqrt{\rho}} \sum_{n=2,4,\dots}^{\infty} E_{n0} F_{1n}(\eta) \exp\left(\frac{\delta_n}{\varepsilon} \ln \rho\right), \\
u_\theta^2 &= \frac{r_1\varepsilon}{\sqrt{\rho}} \sum_{n=2,4,\dots}^{\infty} E_{n0} F_{2n}(\eta) \exp\left(\frac{\delta_n}{\varepsilon} \ln \rho\right), \\
\sigma_r^2 &= \frac{G_1}{\rho\sqrt{\rho}} \sum_{n=2,4,\dots}^{\infty} E_{n0} [b_{11}\delta_n F_{1n}(\eta) + b_{12}F'_{2n}(\eta)] \exp\left(\frac{\delta_n}{\varepsilon} \ln \rho\right),
\end{aligned}$$

$$\sigma_\varphi^2 = \frac{G_1}{\rho\sqrt{\rho}} \sum_{n=2,4,\dots}^{\infty} E_{n0} [b_{12}\delta_n F_{1n}(\eta) + b_{23}F'_{2n}(\eta)] \exp\left(\frac{\delta_n}{\varepsilon} \ln \rho\right), \quad (16.23)$$

$$\sigma_\theta^2 = \frac{G_1}{\rho\sqrt{\rho}} \sum_{n=2,4,\dots}^{\infty} E_{n0} [b_{12}\delta_n F_{1n}(\eta) + b_{22}F'_{2n}(\eta)] \exp\left(\frac{\delta_n}{\varepsilon} \ln \rho\right),$$

$$\tau_{r\theta}^2 = \frac{G_1}{\rho\sqrt{\rho}} \sum_{n=2,4,\dots}^{\infty} E_{n0} [F'_{1n}(\eta) + \delta_n F_{2n}(\eta)] \exp\left(\frac{\delta_n}{\varepsilon} \ln \rho\right).$$

В формулах (16.14), (16.15) первые и вторые члены правых частей соответствует прикладной теории оболочек, следующие являются добавками к решению по теории Кирхгофа. На границе области при  $r = r_s$  в напряжениях  $\sigma_r$ ,  $\sigma_\varphi$  добавочные члены имеют тот же порядок, что и в прикладной теории, а в напряжениях  $\sigma_\theta$ ,  $\tau_{r\theta}$  при  $\varepsilon \rightarrow 0$  основную роль начинают играть добавочные члены.

В заключение отметим, что при  $G_0 = 1$ , мы получаем результаты работ [2] в изотропном случае.

### §17. Исследование упругого равновесия трансверсально-изотропного полого конуса с закрепленной боковой поверхностью и при смешанных граничных условиях на боковой поверхности

1. Пусть боковая поверхность конуса жестко заделана, т.е.

$$u_r = 0, \quad u_\theta = 0 \quad \text{при} \quad \theta = \theta_n \quad (n=1,2). \quad (17.1)$$

Характер граничных условий на торцах конуса уточнять не будем. Однако, будем считать их таковыми, что оболочка находится в равновесии.

Используя результаты третьей главы и удовлетворяя однородные граничные условия (17.1), получаем следующую линейную систему уравнений:

$$\begin{aligned}
& A_1 P_{\gamma_1}(\cos \theta_1) C_{1k} + A_1 Q_{\gamma_1}(\cos \theta_1) C_{2k} + \\
& + A_2 P_{\gamma_2}(\cos \theta_1) C_{3k} + A_2 Q_{\gamma_2}(\cos \theta_1) C_{4k} = 0, \\
& P'_{\gamma_1}(\cos \theta_1) C_{1k} + Q'_{\gamma_1}(\cos \theta_1) C_{2k} + \\
& + P'_{\gamma_2}(\cos \theta_1) C_{3k} + Q'_{\gamma_2}(\cos \theta_1) C_{4k} = 0, \tag{17.2} \\
& A_1 P_{\gamma_1}(\cos \theta_2) C_{1k} + A_1 Q_{\gamma_1}(\cos \theta_2) C_{2k} + \\
& + A_2 P_{\gamma_2}(\cos \theta_2) C_{3k} + A_2 Q_{\gamma_2}(\cos \theta_2) C_{4k} = 0, \\
& P'_{\gamma_1}(\cos \theta_2) C_{1k} + Q'_{\gamma_1}(\cos \theta_2) C_{2k} + \\
& + P'_{\gamma_2}(\cos \theta_2) C_{3k} + Q'_{\gamma_2}(\cos \theta_2) C_{4k} = 0,
\end{aligned}$$

Приравнявая нулю определитель системы (17.2), получаем следующее характеристическое уравнение

$$\begin{aligned}
D(\lambda, \theta_1, \theta_2) = & 2A_1 A_2 \sin^{-1} \theta_1 \sin^{-1} \theta_2 - A_1^2 D_{\gamma_{1k}}^{(0,0)}(\theta_1, \theta_2) D_{\gamma_{2k}}^{(0,0)}(\theta_1, \theta_2) - \\
& - A_2^2 D_{\gamma_{2k}}^{(0,0)}(\theta_1, \theta_2) D_{\gamma_{1k}}^{(0,0)}(\theta_1, \theta_2) + A_1 A_2 \left[ D_{\gamma_{1k}}^{(0,0)}(\theta_1, \theta_2) D_{\gamma_{2k}}^{(0,0)}(\theta_1, \theta_2) + \right. \\
& \left. + D_{\gamma_{2k}}^{(0,0)}(\theta_1, \theta_2) D_{\gamma_{1k}}^{(0,0)}(\theta_1, \theta_2) \right] = 0 \tag{17.3}
\end{aligned}$$

Выбирая в качестве решения системы (17.2) элементы первой строки, получаем

$$\begin{aligned}
C_{1k} = & \left[ -A_2 \sin^{-1} \theta_2 Q'_{\gamma_{1k}}(\cos \theta_1) - A_1 Q_{\gamma_{1k}}(\cos \theta_2) D_{\gamma_{2k}}^{(1,1)}(\theta_1, \theta_2) + \right. \\
& \left. + A_2 Q'_{\gamma_{1k}}(\cos \theta_2) D_{\gamma_{2k}}^{(1,0)}(\theta_1, \theta_2) \right] C_k \\
C_{2k} = & \left[ A_2 \sin^{-1} \theta_2 P'_{\gamma_{1k}}(\cos \theta_1) + A_1 P_{\gamma_{1k}}(\cos \theta_2) D_{\gamma_{2k}}^{(1,1)}(\theta_1, \theta_2) - \right. \\
& \left. - A_2 P'_{\gamma_{1k}}(\cos \theta_2) D_{\gamma_{2k}}^{(1,0)}(\theta_1, \theta_2) \right] C_k \\
C_{3k} = & \left[ -A_1 \sin^{-1} \theta_2 Q'_{\gamma_{1k}}(\cos \theta_1) - A_2 Q_{\gamma_{1k}}(\cos \theta_2) D_{\gamma_{1k}}^{(1,1)}(\theta_1, \theta_2) + \right. \\
& \left. + A_1 Q'_{\gamma_{2k}}(\cos \theta_2) D_{\gamma_{1k}}^{(1,0)}(\theta_1, \theta_2) \right] C_k, \tag{17.4} \\
C_{4k} = & \left[ A_1 \sin^{-1} \theta_2 P'_{\gamma_{2k}}(\cos \theta_1) + A_2 P_{\gamma_{2k}}(\cos \theta_2) D_{\gamma_{1k}}^{(1,1)}(\theta_1, \theta_2) - \right.
\end{aligned}$$

$$- A_1 P'_{\gamma_{2k}} (\cos \theta_2) D_{\gamma_{1k}}^{(1,0)}(\theta_1, \theta_2) \Big] C_k.$$

Здесь  $C_k$  – произвольные постоянные.

Подставляя (17.4) в (12.13) и суммируя по все корням, получаем следующие однородные решения:

$$\begin{aligned} u_r &= \frac{r_1}{\sqrt{\rho}} \sum_{k=1}^{\infty} C_k \rho^{z_k} F_{1k}(\theta, \theta_1, \theta_2), \\ u_\theta &= \frac{r_1}{\sqrt{\rho}} \sum_{k=1}^{\infty} C_k \rho^{z_k} F_{2k}(\theta, \theta_1, \theta_2), \\ \sigma_r &= \frac{G_1}{\rho \sqrt{\rho}} \sum_{k=1}^{\infty} C_k \rho^{z_k} Q_{rk}(\theta, \theta_1, \theta_2), \\ \sigma_\varphi &= \frac{G_1}{\rho \sqrt{\rho}} \sum_{k=1}^{\infty} C_k \rho^{z_k} Q_{\varphi k}(\theta, \theta_1, \theta_2), \\ \sigma_\theta &= \frac{G_1}{\rho \sqrt{\rho}} \sum_{k=1}^{\infty} C_k \rho^{z_k} Q_{\theta k}(\theta, \theta_1, \theta_2), \\ \tau_{r\theta} &= \frac{G_1}{\rho \sqrt{\rho}} \sum_{k=1}^{\infty} C_k \rho^{z_k} T_k(\theta, \theta_1, \theta_2), \end{aligned} \quad (17.5)$$

где

$$\begin{aligned} F_{1k}(\theta, \theta_1, \theta_2) &= -A_1 A_2 \sin^{-1} \theta_2 \left[ D_{\gamma_{1k}}^{(0,1)}(\theta, \theta_1) + D_{\gamma_{2k}}^{(0,1)}(\theta, \theta_1) \right] - \\ &- A_1^2 D_{\gamma_{1k}}^{(0,0)}(\theta, \theta_2) D_{\gamma_{2k}}^{(1,1)}(\theta_1, \theta_2) - A_2^2 D_{\gamma_{2k}}^{(0,0)}(\theta, \theta_2) D_{\gamma_{1k}}^{(1,1)}(\theta_1, \theta_2) + \\ &+ A_1 A_2 \left[ D_{\gamma_{1k}}^{(0,1)}(\theta, \theta_2) D_{\gamma_{2k}}^{(1,0)}(\theta_1, \theta_2) + D_{\gamma_{2k}}^{(0,1)}(\theta, \theta_2) D_{\gamma_{1k}}^{(1,0)}(\theta_1, \theta_2) \right], \\ F_{2k}(\theta, \theta_1, \theta_2) &= \left[ -A_2 \sin^{-1} \theta_2 D_{\gamma_{1k}}^{(1,1)}(\theta, \theta_1) - A_1 \sin^{-1} \theta_1 D_{\gamma_{2k}}^{(1,1)}(\theta, \theta_1) - \right. \\ &- A_1 D_{\gamma_{1k}}^{(1,0)}(\theta, \theta_2) D_{\gamma_{2k}}^{(1,1)}(\theta_1, \theta_2) + A_2 D_{\gamma_{1k}}^{(1,1)}(\theta, \theta_2) D_{\gamma_{2k}}^{(1,0)}(\theta_1, \theta_2) - \\ &- A_2 D_{\gamma_{2k}}^{(1,0)}(\theta, \theta_2) D_{\gamma_{1k}}^{(1,1)}(\theta_1, \theta_2) + A_1 D_{\gamma_{2k}}^{(1,1)}(\theta, \theta_2) D_{\gamma_{1k}}^{(1,0)}(\theta_1, \theta_2) \Big] b_0, \\ Q_{rk}(\theta, \theta_1, \theta_2) &= a_{11} F_{1k}(\theta, \theta_1, \theta_2) + b_0 \gamma_{1k} (\gamma_{1k} + 1) \left[ A_2 \sin^{-1} \theta_2 \times \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times D_{\gamma_{1k}}^{(1,1)}(\theta, \theta_1) + A_1 D_{\gamma_{1k}}^{(1,0)}(\theta, \theta_2) D_{\gamma_{2k}}^{(1,1)}(\theta_1, \theta_2) - A_2 D_{\gamma_{1k}}^{(1,1)}(\theta, \theta_2) \times \\
& \times D_{\gamma_{2k}}^{(1,0)}(\theta_1, \theta_2) + b_0 \gamma_{2k} (\gamma_{2k} + 1) \left[ A_1 \sin^{-1} \theta_2 D_{\gamma_{2k}}^{(1,1)}(\theta, \theta_1) + \right. \\
& + A_2 D_{\gamma_{2k}}^{(1,0)}(\theta, \theta_2) D_{\gamma_{1k}}^{(1,1)}(\theta_1, \theta_2) - A_1 D_{\gamma_{2k}}^{(1,0)}(\theta, \theta_2) D_{\gamma_{1k}}^{(1,1)}(\theta_1, \theta_2), \\
Q_{\varphi k}(\theta, \theta_1, \theta_2) &= a_{12} F_{1k}(\theta, \theta_1, \theta_2) + b_0 (b_{22} - b_{23}) \operatorname{ctg} \theta F_{2k}(\theta, \theta_1, \theta_2) + \\
& + b_0 b_{23} \gamma_{1k} (\gamma_{1k} + 1) \left[ A_2 \sin^{-1} \theta_2 D_{\gamma_{1k}}^{(1,1)}(\theta, \theta_1) + A_1 D_{\gamma_{1k}}^{(1,0)}(\theta, \theta_2) \times \right. \\
& \times D_{\gamma_{2k}}^{(1,1)}(\theta_1, \theta_2) - A_2 D_{\gamma_{1k}}^{(1,1)}(\theta, \theta_2) D_{\gamma_{2k}}^{(1,0)}(\theta_1, \theta_2) \left. \right] + b_0 b_{23} \gamma_{2k} (\gamma_{2k} + 1) \times \\
& \times \left[ A_1 \sin^{-1} \theta_2 D_{\gamma_{2k}}^{(1,1)}(\theta, \theta_1) + A_2 D_{\gamma_{2k}}^{(1,0)}(\theta, \theta_2) D_{\gamma_{1k}}^{(1,1)}(\theta_1, \theta_2) - \right. \\
& - A_1 D_{\gamma_{2k}}^{(1,1)}(\theta, \theta_2) D_{\gamma_{1k}}^{(1,0)}(\theta_1, \theta_2), \\
Q_{\theta k}(\theta, \theta_1, \theta_2) &= a_{12} F_{1k}(\theta, \theta_1, \theta_2) - b_0 (b_{22} - b_{23}) \operatorname{ctg} \theta F_{2k}(\theta, \theta_1, \theta_2) + \\
& + b_0 b_{22} \gamma_{1k} (\gamma_{1k} + 1) \left[ A_2 \sin^{-1} \theta_2 D_{\gamma_{1k}}^{(1,1)}(\theta, \theta_1) + A_1 D_{\gamma_{1k}}^{(1,0)}(\theta, \theta_2) \times \right. \\
& \times D_{\gamma_{2k}}^{(1,1)}(\theta_1, \theta_2) - A_2 D_{\gamma_{1k}}^{(1,1)}(\theta, \theta_2) D_{\gamma_{2k}}^{(1,0)}(\theta_1, \theta_2) \left. \right] + b_0 b_{22} \gamma_{2k} (\gamma_{2k} + 1) \times \\
& \times \left[ A_1 \sin^{-1} \theta_2 D_{\gamma_{2k}}^{(1,1)}(\theta, \theta_1) + A_2 D_{\gamma_{2k}}^{(1,0)}(\theta, \theta_2) D_{\gamma_{1k}}^{(1,1)}(\theta_1, \theta_2) - \right. \\
& - A_1 D_{\gamma_{2k}}^{(1,1)}(\theta, \theta_2) D_{\gamma_{1k}}^{(1,0)}(\theta_1, \theta_2), \\
T_k(\theta, \theta_1, \theta_2) &= F_{1k}(\theta, \theta_1, \theta_2) + \left( z_k - \frac{3}{2} \right) F_{2k}(\theta, \theta_1, \theta_2),
\end{aligned}$$

$$a_{11} = b_{12} \left( z_k - \frac{1}{2} \right) + 2b_{12},$$

$$a_{12} = \left( z_k - \frac{1}{2} \right) b_{12} + b_{23} + b_{22}.$$

Обратимся к исследованию поведения корней уравнения (3.60) при малых значениях параметра  $\varepsilon$ .

При малых  $\varepsilon$  и конечных  $z$   $\Delta(z, \theta_1, \theta_2)$  можно представить в виде:

$$\Delta(z, \theta_1, \theta_2) = \left[ 4b_{22}\gamma_2(\gamma_2 + 1) - \gamma_1(\gamma_1 + 1)^2 \right] \left[ z^2 - \frac{9}{4} + 2G_0 \right] \times \\ \times \varepsilon^2 \left[ 1 + O(\varepsilon^2) \right] = 0. \quad (17.6)$$

Из (17.6) видно, что  $z_{1,2} = \pm \sqrt{\frac{9}{4} - 2G_0}$  являются корнями характеристического уравнения. Как в изотропном случае [14] можно доказать, что все остальные нули функции  $\Delta(z, \theta_1, \theta_2)$  безгранично растут при  $\varepsilon \rightarrow 0$  и здесь возможен только случай  $\varepsilon z_k \rightarrow const$  при  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Для построения асимптотики второй группы нулей отыскиваем их в виде:

$$z_n = \frac{\delta_n}{\varepsilon} + O(\varepsilon) \quad (n = k - 2, k = 3, 4, \dots). \quad (17.7)$$

После подстановки (17.7) в (17.3) и преобразования его с помощью асимптотических разложений  $P_z(\cos \theta)$ ,  $Q_z(\cos \theta)$  для  $\delta_n$  соответствен получаем:

$$\frac{1 + b_{22}s_1s_2}{1 - b_{22}s_1s_2} (s_2 - s_1) \sin(s_1 + s_2) \delta_n \pm (s_2 + s_1) \sin(s_2 - s_1) \delta_n = 0 \quad (17.8)$$

$$q_1 > 0, \quad q_1^2 - q_2 > 0,$$

$$\frac{p^2 + b_{11}}{p^2 - b_{11}} \sin 2p\delta_n \pm 2p\delta_n = 0 \quad (17.9)$$

$$q_1 > 0, \quad q_1^2 - q_2 = 0, \quad p = \sqrt{q_1},$$

$$\beta(1 + b_{22}\beta^2 - 3b_{22}\alpha^2) \sin 2\alpha\delta_n \pm \alpha(1 - b_{22}\alpha^2 + 3b_{22}\beta^2) \sin 2\beta\delta_n = 0$$

$$q_1^2 < q_2, \quad s_{1,2} = \alpha \pm i\beta = \sqrt{q_1 \pm i\sqrt{q_2 - q_1^2}}. \quad (17.10)$$

Эти уравнения имеют счетное множество корней и фактически совпадают с характеристическими уравнениями аналогичной задачи для трансверсально-изотропного упругого слоя.

Непосредственной проверкой можно установить, что корням  $z_{1,2} = \pm \sqrt{\frac{9}{4} - 2G_0}$  соответствует тривиальное решение.

Приведем асимптотическое построение однородных решений, соответствующих различным группам корней характеристического уравнения.

### Группа 1.

$$\begin{aligned}
 u_r^1 &= \frac{r_1 \varepsilon}{\sqrt{\rho}} \sum_{n=2,4,\dots}^{\infty} C_n u_n^1(\eta) \exp\left(\frac{\delta_n}{\varepsilon} \ln \rho\right), \\
 u_\theta^1 &= \frac{r_1 \varepsilon}{\sqrt{\rho}} \sum_{n=2,4,\dots}^{\infty} C_n w_n^1(\eta) \exp\left(\frac{\delta_n}{\varepsilon} \ln \rho\right), \\
 \sigma_r^1 &= \frac{G_1}{\rho \sqrt{\rho}} \sum_{n=2,4,\dots}^{\infty} C_n Q_m^1(\eta) \exp\left(\frac{\delta_n}{\varepsilon} \ln \rho\right), \\
 \sigma_\varphi^1 &= \frac{G_1}{\rho \sqrt{\rho}} \sum_{n=2,4,\dots}^{\infty} C_n Q_{\varphi n}^1(\eta) \exp\left(\frac{\delta_n}{\varepsilon} \ln \rho\right), \\
 \sigma_\theta^1 &= \frac{G_1}{\rho \sqrt{\rho}} \sum_{n=2,4,\dots}^{\infty} C_n Q_{\theta n}^1(\eta) \exp\left(\frac{\delta_n}{\varepsilon} \ln \rho\right), \\
 \tau_{r\theta}^1 &= \frac{G_1}{\rho \sqrt{\rho}} \sum_{n=2,4,\dots}^{\infty} C_n T_n^1(\eta) \exp\left(\frac{\delta_n}{\varepsilon} \ln \rho\right),
 \end{aligned} \tag{17.11}$$

где

$$\begin{aligned}
 u_n^1(\eta) &= s_2(1 - b_{22}s_1^2) \sin s_2 \delta_n \cos s_1 \delta_n \eta - s_1(1 - b_{22}s_2^2) \times \\
 &\times \sin s_1 \delta_n \cos s_2 \delta_n \eta, \\
 w_n^1(\eta) &= (b_{12} + 1) s_1 s_2 (\sin s_2 \delta_n \sin s_1 \delta_n \eta - \sin s_1 \delta_n \sin s_2 \delta_n \eta), \\
 Q_m^1(\eta) &= \delta_n [b_{11} u_n^{(1)} - b_{12} \delta_n w_n^{(1)}], \\
 Q_{\varphi n}^1(\eta) &= \delta_n [b_{12} u_n^{(1)} - b_{22} \delta_n w_n^{(1)}], \\
 Q_{\theta n}^1(\eta) &= \delta_n [b_{12} u_n^{(1)} - b_{23} \delta_n w_n^{(1)}],
 \end{aligned} \tag{17.12}$$

$$T_n^1 = \left[ \frac{\partial u_n^1}{\partial \eta} - \delta_n w_n^1 \right].$$

**Группа 2.**

$$\begin{aligned} u_r^2 &= \frac{r_1 \varepsilon}{\sqrt{\rho}} \sum_{n=2,4,\dots}^{\infty} E_n u_n^2(\eta) \exp\left(\frac{\delta_n}{\varepsilon} \ln \rho\right), \\ u_\theta^2 &= \frac{r_1 \varepsilon}{\sqrt{\rho}} \sum_{n=2,4,\dots}^{\infty} E_n w_n^2(\eta) \exp\left(\frac{\delta_n}{\varepsilon} \ln \rho\right), \\ \sigma_r^2 &= \frac{G_1}{\rho \sqrt{\rho}} \sum_{n=2,4,\dots}^{\infty} E_n Q_m^2(\eta) \exp\left(\frac{\delta_n}{\varepsilon} \ln \rho\right), \\ \sigma_\varphi^2 &= \frac{G_1}{\rho \sqrt{\rho}} \sum_{n=2,4,\dots}^{\infty} E_n Q_{\varphi n}^2(\eta) \exp\left(\frac{\delta_n}{\varepsilon} \ln \rho\right), \\ \sigma_\theta^2 &= \frac{G_1}{\rho \sqrt{\rho}} \sum_{n=2,4,\dots}^{\infty} E_n Q_{\theta n}^2(\eta) \exp\left(\frac{\delta_n}{\varepsilon} \ln \rho\right), \\ \tau_{r\theta}^2 &= \frac{G_1}{\rho \sqrt{\rho}} \sum_{n=2,4,\dots}^{\infty} E_n T_n^2(\eta) \exp\left(\frac{\delta_n}{\varepsilon} \ln \rho\right), \end{aligned} \quad (17.13)$$

где

$$\begin{aligned} u_n^2 &= (b_{12} + 1)(p^2 - b_{11})p \left\{ \left[ \cos p\delta_n \frac{\sin p\delta_n}{p\delta_n} \right] \cos p\delta_n \eta \right. \\ &\quad \left. + \eta \sin p\delta_n \sin p\delta_n \eta \right\}, \\ w_n^2 &= (b_{11} - p_2)^2 (\cos p\delta_n \sin p\delta_n \eta - \eta \sin p\delta_n \cos p\delta_n \eta). \end{aligned}$$

Выражения для  $Q_m^2, \dots, T_n^2$  получаются из (17.12) простой заменой  $u_n^1, w_n^1$  на  $u_n^2, w_n^2$  соответственно.

**Группа 3.**

$$u_r^3 = \frac{r_1}{\sqrt{\rho}} \varepsilon \sum_{n=2,4,\dots}^{\infty} D_n u_n^3(\eta) \exp\left(\frac{\delta_n}{\varepsilon} \ln \rho\right),$$

$$\begin{aligned}
u_\theta^3 &= \frac{r_1}{\sqrt{\rho}} \varepsilon \sum_{n=2,4,\dots}^{\infty} D_n w_n^3(\eta) \exp\left(\frac{\delta_n}{\varepsilon} \ln \rho\right), \\
\sigma_r^3 &= \frac{G_1}{\rho \sqrt{\rho}} \sum_{n=2,4,\dots}^{\infty} D_n Q_m^3(\eta) \exp\left(\frac{\delta_n}{\varepsilon} \ln \rho\right), \\
\sigma_\varphi^3 &= \frac{G_1}{\rho \sqrt{\rho}} \sum_{n=2,4,\dots}^{\infty} D_n Q_{\varphi n}^3(\eta) \exp\left(\frac{\delta_n}{\varepsilon} \ln \rho\right), \\
\sigma_\theta^3 &= \frac{G_1}{\rho \sqrt{\rho}} \sum_{n=2,4,\dots}^{\infty} D_n Q_{\theta n}^3(\eta) \exp\left(\frac{\delta_n}{\varepsilon} \ln \rho\right), \\
\tau_{r\theta}^3 &= \frac{G_1}{\rho \sqrt{\rho}} \sum_{n=2,4,\dots}^{\infty} D_n T_n^3(\eta) \exp\left(\frac{\delta_n}{\varepsilon} \ln \rho\right),
\end{aligned} \tag{17.14}$$

$$\begin{aligned}
u_n^3(\eta) &= (a_0 \cos \beta \delta_n \eta \operatorname{ch} \alpha \delta_n \eta - b_0 \sin \beta \delta_n \eta \operatorname{sh} \alpha \delta_n \eta) \Delta_{1n} + \\
&+ (b_0 \cos \beta \delta_n \eta \operatorname{ch} \alpha \delta_n \eta + a_0 \sin \beta \delta_n \eta \operatorname{sh} \alpha \delta_n \eta) \Delta_{2n}, \\
w_n^3(\eta) &= (b_{12} + 1) [(\alpha \cos \beta \delta_n \eta \operatorname{sh} \alpha \delta_n \eta + \beta \sin \beta \delta_n \eta \operatorname{ch} \alpha \delta_n \eta) \times \\
&\times \Delta_{1n} - (\beta \cos \beta \delta_n \eta \operatorname{sh} \alpha \delta_n \eta + \alpha \sin \beta \delta_n \eta \operatorname{ch} \alpha \delta_n \eta) \Delta_{2n}], \\
a_0 &= 1 - b_{22}(\alpha^2 - \beta^2), \quad b_0 = 2b_{22}\alpha\beta \\
\Delta_{1n} &= -\alpha \sin \beta \delta_n \operatorname{sh} \alpha \delta_n + \beta \cos \beta \delta_n \operatorname{ch} \alpha \delta_n, \\
\Delta_{2n} &= \beta \cos \beta \delta_n \operatorname{sh} \alpha \delta_n + \alpha \sin \beta \delta_n \operatorname{ch} \alpha \delta_n; \\
\eta &= \varepsilon^{-1}(\theta - \theta_0).
\end{aligned}$$

Выражения для  $Q_m^3, \dots, T_n^3$  получаются из (17.12) заменой  $u_n^1$  на  $u_n^3$ ,  $w_n^1$  на  $w_n^3$  соответственно,  $C_n, E_n, D_n$  – произвольные постоянные.

Для  $t = 1, 3, \dots$  соответствующие выражения  $u_r$ ,  $u_\theta$ ,  $\sigma_r$ ,  $\tau_{r\theta}$  получаются заменой в приведенных выше формулах  $\cos x$  на  $\sin x$ ,  $\sin x$  на  $-\cos x$ ,  $\operatorname{ch} x$  на  $\operatorname{sh} x$ ,  $\operatorname{sh} x$  на  $-\operatorname{ch} x$  соответственно.

Важно отметить, что решение (17.14) характерно только для анизотропных тел и при  $G_0 = 1$  полностью исчезает.

Что касается решений (17.11), (17.13), то при  $G_0 = 1$  они сливаются в одно и полностью совпадают с решением краевых эффектов Сен-Венана в теории изотропных плит.

В общем случае нагружения произвольные постоянные  $C_n, E_n, D_n$ , как и выше, могут быть определены с помощью вариационного принципа Лагранжа или принципа Кастильяно. При специальных условиях опирания края оболочки они определяются точно с помощью обобщенного условия ортогональности для конуса, которые установлены во второй главе.

Отметим, что когда на торцах конуса заданы граничные условия в усилиях, из условия разрешимости задач теории упругости необходимо, чтобы главный вектор усилий  $P$  был равным нулю, так как решение типа погранслоя в каждом сечении  $r = const$  самоуравновешанно.

В качестве примера рассмотрим первый вариант торцевых условий.

1. Пусть заданы следующие условия:

$$\sigma_r = Q_s(\theta), \quad \tau_{r\theta} = T_s(\theta) \quad \text{при} \quad \rho = \rho_s. \quad (17.15)$$

$Q_s(\theta), T_s(\theta)$  – достаточно гладкие функции и удовлетворяют условию самоуравновешанности.

$$\begin{aligned} 2\pi r_1^2 \int_{\theta_1}^{\theta_2} (Q_1 \cos \theta - T_1 \sin \theta) \sin \theta d\theta = \\ = 2\pi r_2^2 \int_{\theta_1}^{\theta_2} (Q_2 \cos \theta - T_2 \sin \theta) \sin \theta d\theta = P = 0 \end{aligned} \quad (17.16)$$

Далее, используя формулы (17.11), (17.13), (17.14) неизвестные постоянные  $C_n, E_n, D_n$ , будем отыскивать в виде:

$$\begin{cases} C_n = C_{n0} + \varepsilon C_{n1} + \dots, \\ D_n = D_{n0} + \varepsilon D_{n1} + \dots, \\ E_n = E_{n0} + \varepsilon E_{n1} + \dots, \end{cases} \quad (17.17)$$

На основе вариационного принципа получим следующую систему уравнений относительно  $C_{n0}, E_{n0}, D_{n0}$  ( $n = 1, 2, \dots$ ):

$$\sum_{n=2,4,\dots}^{\infty} \Pi_m C_{n0} = E_t, \quad (t = 2, 4, \dots), \quad (17.18)$$

$$\sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} \Pi_m C_{n0} = E_t, \quad (t = 1, 3, \dots), \quad (17.19)$$

$$\sum_{n=2,4,\dots}^{\infty} g_{tm} E_{n0} = H_t, \quad (t = 2, 4, \dots), \quad (17.20)$$

$$\sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} g_{tm} E_{n0} = H_t, \quad (t = 1, 3, \dots), \quad (17.21)$$

$$\sum_{n=2,4,\dots}^{\infty} h_{tm} D_{n0} = l_t, \quad (t = 2, 4, \dots), \quad (17.22)$$

$$\sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} h_{tm} D_{n0} = l_t, \quad (t = 1, 3, \dots), \quad (17.23)$$

где

$$P_m = \sum_{s=1}^2 \exp\left(\frac{\delta_t + \delta_n \ln \rho_s}{\varepsilon}\right) \int_{-1}^1 [u_t^1(\eta) Q_m^1(\eta) + w_t^1(\eta) T_n^1(\eta)] d\eta,$$

$$E_t = \sum_{s=1}^2 \exp\left(\frac{\delta_t}{\varepsilon} \ln \rho_s\right) \rho_s^{3/2} \int_{-1}^1 [u_t^1(\eta) Q_s(\eta) + w_t^1(\eta) T_s(\eta)] d\eta,$$

$$g_m = \sum_{s=1}^2 \exp\left(\frac{\delta_t + \delta_n}{\varepsilon} \ln \rho_s\right) \int_{-1}^1 [u_t^2(\eta) Q_m^2(\eta) + w_t^2(\eta) T_n^2(\eta)] d\eta,$$

$$H_t = \sum_{s=1}^2 \exp\left(\frac{\delta_t}{\varepsilon} \ln \rho_s\right) \rho_s^{3/2} \int_{-1}^1 [u_t^2(\eta) Q_s(\eta) + w_t^2(\eta) T_s(\eta)] d\eta,$$

$$h_m = \sum_{s=1}^2 \exp\left(\frac{\delta_t + \delta_n}{\varepsilon} \ln \rho_s\right) \int_{-1}^1 [u_t^3(\eta) Q_m^3(\eta) + w_t^3(\eta) T_n^3(\eta)] d\eta,$$

$$l_t = \sum_{s=1}^2 \exp\left(\frac{\delta_t}{\varepsilon} \ln \rho_s\right) \rho_s^{3/2} \int_{-1}^1 [u_t^3(\eta) Q_s(\eta) + w_t^3(\eta) T_s(\eta)] d\eta.$$

Аналогичный вид имеют выражения для  $n = 1, 3, \dots$

2. Теперь рассмотрим случай, когда на боковой поверхности конуса выполняется одно из граничных условий

$$u_\theta = 0, \quad \tau_{r\theta} = 0 \quad \text{при} \quad \theta = \theta_k \quad (k = 1, 2) \quad (17.24)$$

$$u_r = 0, \quad \tau_{r\theta} = 0 \quad \text{при} \quad \theta = \theta_k. \quad (17.25)$$

Будем исследовать (17.24), так как случай (17.25) исследуется аналогично.

Как и выше, используя (12.3) и удовлетворяя однородные граничные условия (17.24), получим характеристическое уравнение:

$$D(z, \varepsilon) = -b_{22}^2 [\gamma_2(\gamma_2 + 1) - \gamma_1(\gamma_1 + 1)]^2 \times \\ \times D_{\gamma_1}^{(1,1)}(\theta_1, \theta_2) D_{\gamma_2}^{(1,1)}(\theta_1, \theta_2) = 0 \quad (17.26)$$

Дадим анализ корней характеристического уравнения.

Легко доказать, что уравнение (17.26) при  $\varepsilon \rightarrow 0$  ограниченных корней не имеет и здесь возможен только случай  $\varepsilon z_n \rightarrow const$  при  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Отыскивая  $z_n$  в виде

$$z_n = \frac{\delta_n}{\varepsilon} + O(\varepsilon), \quad (n = 1, 2, \dots), \quad (17.27)$$

и повторяя вышеприведенные рассуждения для  $\delta_n$ , получаем

$$\cos(s_2 + s_1)\delta_n \pm \cos(s_2 - s_1)\delta_n = 0 \quad (17.28)$$

$$q_1 > 0, \quad q_1^2 - q_2 > 0, \\ ch2\alpha\delta_n \pm \cos\beta\delta_n = 0, \quad (17.29)$$

$$q_1^2 < q_2, \\ \cos 2p\delta_n \pm 1 = 0, \quad (17.30)$$

$$q_1^2 - q_2 = 0, \quad q_1 > 0.$$

Приведем теперь первые члены асимптотических разложений однородных решений, соответствующие различным группам корней. Здесь приводятся выражения для компонентов вектора перемещения. Что касается выражения для компонентов тензора напряжений, то их можно получить с помощью обобщенного закона Гука.

$$u_r^1 = \frac{r_1}{\sqrt{\rho}} \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} C_n \left[ s_2 (1 - b_{22}s_1^2) (b_{12} + b_{22}s_2^2) \sin s_2\delta_n \cos s_1\delta_n \xi - \right. \\ \left. - s_1 (1 - b_{22}s_2^2) (b_{12} + b_{22}s_1^2) \sin s_1\delta_n \cos s_2\delta_n \xi + O(\varepsilon) \right] \exp\left(\frac{\delta_n}{\varepsilon} \ln \rho\right),$$

$$u_\theta^1 = \frac{r_1(b_{12} + 1)}{\sqrt{\rho}} s_1 s_2 \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} C_n \left[ (b_{12} + b_{22}s_2^2) \sin s_2\delta_n \sin s_1\delta_n \xi - \right. \\ \left. - (b_{12} + b_{22}s_1^2) \sin s_1\delta_n \sin s_2\delta_n \xi + O(\varepsilon) \right] \exp\left(\frac{\delta_n}{\varepsilon} \ln \rho\right), \quad (17.31)$$

$$u_r^2 = \frac{r_1}{\sqrt{\rho}} \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} D_n \left[ (a_0 \cos \beta\delta_n \xi ch \alpha\delta_n \xi - b_0 \sin \beta\delta_n \xi sh \alpha\delta_n \xi) \Delta_{1n} - \right. \\ \left. - (b_0 \cos \beta\delta_n \xi ch \alpha\delta_n \xi + a_0 \sin \beta\delta_n \xi sh \alpha\delta_n \xi) \Delta_{2n} + \right. \\ \left. + O(\varepsilon) \right] \exp\left(\frac{\delta_n}{\varepsilon} \ln \rho\right), \quad (17.32)$$

$$u_\theta^2 = \frac{r_1(b_{12} + 1)}{\sqrt{\rho}} \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} D_n [(\beta \sin \beta \delta_n \xi \operatorname{ch} \alpha \delta_n \xi - \alpha \cos \beta \delta_n \xi \operatorname{sh} \alpha \delta_n \xi) \times \\ \times \Delta_{1n} + (\beta \cos \beta \delta_n \xi \operatorname{sh} \alpha \delta_n \xi + \alpha \sin \beta \delta_n \xi \operatorname{ch} \alpha \delta_n \xi) \times \\ \times \Delta_{2n} + O(\varepsilon)] \exp\left(\frac{\delta_n}{\varepsilon} \ln \rho\right)$$

где

$$\Delta_{1n} = [\beta(b_{12} + 1) + \beta a_0 + \alpha \beta_0] \cos \beta \delta_n \operatorname{sh} \alpha \delta_n + \\ + [\alpha(b_{12} + 1) - \beta b_0 + \alpha a_0] \sin \beta \delta_n \operatorname{ch} \alpha \delta_n, \\ \Delta_{2n} = [\beta a_0 + \alpha b_0 - \beta(b_{12} + 1)] \sin \beta \delta_n \operatorname{ch} \alpha \delta_n + \\ + [\alpha(b_{12} + 1) + \beta b_0 - \alpha a_0] \cos \beta \delta_n \operatorname{sh} \alpha \delta_n,$$

$$u_r^3 = \frac{r_1(b_{12} + 1)}{\sqrt{\rho}} \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} E_n \left\{ \left[ \frac{b_{12} p^2 - b_{11}}{p} \sin p \delta_n + \delta_n (b_{12} p^2 + b_{11}) \cos p \delta_n \right] \times \right. \\ \left. \times \cos p \delta_n \xi + \delta_n (b_{12} p^2 + b_{11}) \xi \sin p \delta_n \sin p \delta_n \xi + O(\varepsilon) \right\} \exp\left(\frac{\delta_n}{\varepsilon} \ln \rho\right),$$

$$u_\theta^3 = \frac{r_1}{\sqrt{\rho}} \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} E_n [2b_{11}(b_{12} + 1) p \sin p \delta_n \sin p \delta_n \xi + \quad (17.38) \\ + \delta_n (b_{11} - p^2)(b_{12} p^2 + b_{11}) \xi \sin p \delta_n \cos p \delta_n \xi - \\ - \cos p \delta_n \sin p \delta_n \xi] + O(\varepsilon) \exp\left(\frac{\delta_n}{\varepsilon} \ln \rho\right).$$

Выражения для  $n = 2, 4, \dots$  получаются из формул (17.31)-(17.33) заменой  $\operatorname{ch} x$  на  $\operatorname{sh} x$ ,  $\operatorname{sh} x$  на  $-\operatorname{ch} x$ ,  $\cos x$  на  $\sin x$ , и  $\sin x$  на  $-\cos x$  соответственно,  $C_n$ ,  $D_n$ ,  $E_n$  – произвольные постоянные. Как было отмечено выше, в общем случае нагружения, они определяются с помощью вариационного принципа Лагранжа. Однако, здесь на этом останавливаться не будем. Отметим, лишь что ни одна прикладная теория оболочек не в состоянии описывать такие решения.

## §18. Задача кручения трансверсально-изотропного полого конуса переменной толщины

Как известно, в осесимметричном случае общая задача теории упругости разбивается на две задачи— осесимметричное распределение напряженно-деформированного состояния и задача кручения.

Первая задача исследована выше. Ниже рассматривается вторая задача.

1. Итак, рассмотрим задачу кручения трансверсально-изотропного полого конуса переменной толщины. Уравнение равновесия в напряжениях в сферической системе координат имеет вид:

$$\frac{\partial \tau_{r\varphi}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{\theta\varphi}}{\partial \theta} + \frac{3\tau_{r\varphi} 2\tau_{\theta\varphi} \operatorname{ctg} \theta}{r} = 0 \quad (18.1)$$

Обобщенный закон Гука имеет вид:

$$\tau_{r\varphi} = G e_{r\varphi}, \quad \tau_{\theta\varphi} = G_1 e_{\theta\varphi} \quad (18.2)$$

где

$$e_{r\varphi} = \frac{\partial u_\varphi}{\partial r} - \frac{u_\varphi}{r}, \quad e_{\theta\varphi} = \frac{1}{r} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \theta} - \frac{\operatorname{ctg} \theta}{r} u_\varphi.$$

Предполагается, что боковая часть границы свободна от напряжений или жестко заделана, т.е.

$$\tau_{\theta\varphi} = 0 \quad \text{при} \quad \theta = \theta_k \quad (k = 1, 2) \quad (18.3)$$

$$u_\varphi = 0 \quad \text{при} \quad \theta = \theta_k, \quad (18.4)$$

а на остальной части границы заданы следующие граничные условия

$$\tau_{r\varphi} = \tau_s(\theta) \quad \text{при} \quad r = r_s \quad (s = 1, 2) \quad (18.5)$$

Сначала будем рассматривать случай (18.3). Подставляя (18.2) в (18.1), получим уравнение равновесия в перемещениях.

$$G_0 \left( \frac{\partial^2 u_\varphi}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial u_\varphi}{\partial r} \right) + \frac{2(1-G_0)}{r^2} u_\varphi + \frac{1}{r^2} \left( \frac{\partial^2 u_\varphi}{\partial \theta^2} + \operatorname{ctg} \theta \frac{\partial u_\varphi}{\partial \theta} - \frac{1}{\sin^2 \theta} u_\varphi \right) = 0 \quad (18.6)$$

$$G_0 = GG_1^{-1}$$

Полагая  $u_\varphi = \frac{\partial u}{\partial \theta}$ , уравнению (18.6) можно придать вид:

$$G_0 \left( \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{2(1-G_0)}{r^2} u + \frac{1}{r^2} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \operatorname{ctg} \theta \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) = 0 \quad (18.7)$$

Решения уравнения (18.7) будем искать в виде:

$$u = r^\lambda a(\theta). \quad (18.8)$$

Подставляя (18.8) в (18.7), после разделения переменных, получаем

$$a'' + \operatorname{ctg} \theta a' + \gamma(\gamma + 1)a = 0 \quad (18.9)$$

где

$$\gamma(\gamma + 1) = G_0 \lambda(\lambda + 1) + 2(1 - G_0).$$

Используя закон Гука, напряжения  $\tau_{r\varphi}$  и  $\tau_{\theta\varphi}$  можно представить в следующем виде:

$$\tau_{r\varphi} = G(\lambda - 1)r^{\lambda-1}a'(\theta) \quad (18.10)$$

$$\tau_{\theta\varphi} = -G_1 r^{\lambda-1} [2 \operatorname{ctg} \theta_0 a' + \gamma(\gamma + 1)a]$$

Общее решение (18.9) можно представить в виде

$$a(\theta) = C_{1\gamma} P_\gamma(\cos \theta) + C_{2\gamma} Q_\gamma(\cos \theta), \quad (18.11)$$

где  $P_\gamma(\cos \theta)$ ,  $Q_\gamma(\cos \theta)$  – функции Лежандра соответственно первого и второго родов,  $C_{1\gamma}, C_{2\gamma}$  – произвольные постоянные.

Удовлетворяя однородные граничные условия (18.3), получаем линейную систему алгебраических уравнений относительно  $C_{k\gamma}$  ( $k = 1, 2$ ).

$$\begin{aligned} & \left[ 2ctg\theta_1 P_\gamma^{(1)}(\cos\theta_1) + \gamma(\gamma+1)P_\gamma(\cos\theta_1) \right] C_{1\gamma} + \\ & + \left[ 2ctg\theta_1 Q_\gamma^{(1)}(\cos\theta_1) + \gamma(\gamma+1)Q_\gamma(\cos\theta_1) \right] C_{2\gamma} = 0 \quad (18.12) \\ & \left[ 2ctg\theta_2 P_\gamma^{(1)}(\cos\theta_2) + \gamma(\gamma+1)P_\gamma(\cos\theta_2) \right] C_{1\gamma} + \\ & + \left[ 2ctg\theta_2 Q_\gamma^{(1)}(\cos\theta_2) + \gamma(\gamma+1)Q_\gamma(\cos\theta_2) \right] C_{2\gamma} = 0 \end{aligned}$$

Из условий существования нетривиальных решений системы (18.12) получаем характеристическое уравнение относительно  $\lambda$ :

$$\begin{aligned} \Delta(z, \theta_1, \theta_2) = & 4ctg\theta_1 ctg\theta_2 D_\gamma^{(1,1)}(\theta_1, \theta_2) + 2ctg\theta_1 \gamma(\gamma+1) \times \\ & \times D_\gamma^{(1,0)}(\theta_1, \theta_2) + 2ctg\theta_2 \gamma(\gamma+1) D_\gamma^{(0,1)}(\theta_1, \theta_2) + \\ & + \gamma^2(\gamma+1)^2 D_\gamma^{(0,0)}(\theta_1, \theta_2) = 0 \quad (18.13) \end{aligned}$$

$$z = \lambda + \frac{1}{2}$$

Трансцендентное уравнение (18.13) определяет счетное множество  $z_n$ , а соответствующие им постоянные  $C_{1\gamma_n}$ ,  $C_{2\gamma_n}$  пропорциональны алгебраическим дополнениям элементов какой-либо строки определителя системы (18.12). Выбирая в качестве решения системы алгебраические дополнения элементов первой строки, получим:

$$\begin{aligned} C_{1\gamma_n} &= C_n \left[ 2ctg\theta_2 Q_\gamma^{(1)}(\cos\theta_2) + \gamma(\gamma+1)Q_\gamma(\cos\theta_2) \right] \\ C_{2\gamma_n} &= -C_n \left[ 2ctg\theta_2 P_\gamma^{(1)}(\cos\theta_2) + \gamma_n(\gamma_n+1)P_{\gamma_n}(\cos\theta_2) \right], \quad (18.14) \end{aligned}$$

где  $C_n$  – произвольные постоянные.

Подставляя (18.14) в (18.8), (18.10) и суммируя по всем корням, получаем однородные решения следующего вида:

$$\begin{aligned} u_\varphi &= \frac{1}{\sqrt{r}} \sum_{n=1}^{\infty} C_n r^{z_n} u_n(\theta) \\ \tau_{r\varphi} &= \frac{G}{r\sqrt{r}} \sum_{n=1}^{\infty} C_n r^{z_n} T_{1n}(\theta) \\ \tau_{\theta\varphi} &= \frac{G_1}{r\sqrt{r}} \sum_{n=1}^{\infty} C_n r^{z_n} T_{2n}(\theta) \end{aligned} \quad (18.15)$$

где

$$\begin{aligned} u_n(\theta) &= 2ctg\theta_2 D_{\gamma_n}^{(1,1)}(\theta, \theta_2) + \gamma_n(\gamma_n + 1) D_{\gamma_n}^{(1,0)}(\theta, \theta_2) \\ T_{1n}(\theta) &= (z_n - 3/2) \left[ 2ctg\theta_2 D_{\gamma_n}^{(1,1)}(\theta, \theta_2) + \gamma_n(\gamma_n + 1) D_{\gamma_n}^{(1,0)}(\theta, \theta_2) \right] \\ T_{2n}(\theta) &= 4ctg\theta ctg\theta_2 D_{\gamma_n}^{(1,1)}(\theta, \theta_2) + 2\gamma_n(\gamma_n + 1) ctg\theta D_{\gamma_n}^{(1,0)}(\theta, \theta_2) + \\ &+ 2\gamma_n(\gamma_n + 1) ctg\theta_2 D_{\gamma_n}^{(0,1)}(\theta, \theta_2) + \gamma_n^2(\gamma_n + 1)^2 D_{\gamma_n}^{(0,0)}(\theta, \theta_2) \end{aligned}$$

Определим такой оператор:

$$T\psi = \left\{ -\frac{1}{\sin\theta} \frac{d}{d\theta} \left( \sin\theta \frac{d\psi}{d\theta} \right), \left[ 2ctg\theta \frac{d\psi}{d\theta} + \gamma^2\psi \right]_{\theta=\theta_k} \right\} = 0. \quad (18.16)$$

В пространстве  $L_2(\theta_1, \theta_2)$  задачам (18.9), (18.3) можно придать операторный вид:

$$T\psi = \gamma^2\psi, \quad (18.17)$$

где  $L_2(\theta_1, \theta_2)$  – гильбертово пространство с весом  $\sin\theta$  и скалярным произведением:

$$(\psi_1, \psi_2) = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \psi_1 \psi_2 \sin\theta d\theta \quad (18.18)$$

Докажем, что оператор  $T$  – симметричный.

$$(T\psi_1, \psi_2) = - \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{d}{d\theta} \left( \sin\theta \frac{d\psi_1}{d\theta} \right) \psi_2 d\theta = - \sin\theta \frac{d\psi_1}{d\theta} \psi_2 \Big|_{\theta_1}^{\theta_2} +$$

$$\begin{aligned}
& + \int_{\theta_1}^{\theta_2} \sin \theta \frac{d\psi_1}{d\theta} \frac{d\psi_2}{d\theta} d\theta = \frac{\gamma^2}{2} \sin \theta g \theta (\psi_1 \psi_2 - \psi_2 \psi_1) \Big|_{\theta_1}^{\theta_2} - \\
& - \int_{\theta_1}^{\theta_2} \psi_1 \frac{d}{d\theta} \left( \sin \theta \frac{d\psi_2}{d\theta} \right) d\theta = - \int_{\theta_1}^{\theta_2} \psi_1 \frac{d}{d\theta} \left( \sin \theta \frac{d\psi_2}{d\theta} \right) d\theta = (\psi_1, T\psi_2).
\end{aligned}$$

Таким образом, мы показали, что  $(T\psi_1, \psi_2) = (\psi_1, T\psi_2)$  для любых  $(\psi_1, \psi_2) \in L_2(\theta_1, \theta_2)$ . Симметричность оператора доказана.

Итак, мы получаем, что спектр оператора (18.17) вещественный, а собственные функции ортогональны. Теперь рассмотрим задачу (18.6), (18.5).  $\tau_s(\theta)$  раскладываем по собственным функциям оператора (3.107).

$$\tau_s(\theta) = \sum_{k=1}^{\infty} a_{ks} \psi_k$$

где

$$\begin{aligned}
a_{ks} &= \int_{\theta_1}^{\theta_2} \tau_s \psi_k \sin \theta d\theta = (\tau_s, \psi_k) \\
\|\psi_k\|^2 &= 1 = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \psi_k^2 \sin \theta d\theta, \quad (\psi_k, \psi_n) = \delta_{kn}.
\end{aligned}$$

Переходим теперь к построению асимптотических формул для собственных чисел и собственных функций данной задачи.

Уравнение (18.13) имеет весьма сложную структуру. Для эффективного изучения его корней, как и выше, положим:

$$\theta_1 = \theta_0 - \varepsilon, \quad \theta_2 = \theta_0 + \varepsilon, \quad 0 < \xi_1 < \theta_0 < \xi_2 < \frac{\pi}{2}. \quad (18.19)$$

Подставляя (18.19) в уравнение (18.13) получим:

$$D(z, \theta_0, \varepsilon) = \Delta(z, \theta_1, \theta_2) = 0.$$

Сформулируем утверждение: функция  $D(z_1, \theta_0, \varepsilon)$  имеет две группы нулей:

- а) первая группа состоит из двух нулей, которые не зависят от малого параметра  $\varepsilon$ ;
- б) вторая группа состоит из счетного множества нулей, которые при  $\varepsilon \rightarrow 0$  стремятся к бесконечности.

Приведем схему доказательства первого утверждения.

Представим функции  $D(z, \theta_1, \theta_2)$  в следующем виде:

$$D(z, \theta_1, \theta_2) = -2\gamma(\gamma + 1)G_0 \left( z^2 - \frac{9}{4} \right) \varepsilon \left[ 1 + O(\varepsilon^2) \right] \quad (18.20)$$

Отсюда, видно, что  $z = \pm \frac{3}{2}$  являются корнями уравнения (3.103). Правда, из (18.20) следует, что  $\gamma(\gamma + 1) = 0$  тоже являются корнями уравнения (18.13). Однако, можно показать, что этим корням соответствуют тривиальные решения.

Как и в изотропном случае, можно показать, что все остальные нули функции  $D(z, \theta_1, \theta_2)$  стремятся к бесконечности при  $\varepsilon \rightarrow 0$  и здесь возможен только случай  $\varepsilon z_k \rightarrow const$  при  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

Для построения асимптотики нулей второй группы отыскиваем их в виде:

$$z_n = \frac{\delta_n}{\varepsilon} + O(\varepsilon) \quad (n = 3, 4, \dots) \quad (18.21)$$

После подстановки выражения (18.21) в характеристическое уравнение (3.103) и преобразования его с помощью асимптотических разложений функций  $P_\gamma(\cos \theta)$ ,  $Q_\gamma(\cos \theta)$  для  $\delta_n$  получим следующее уравнение.

$$\sin 2G_0 \delta_n = 0, \quad \delta_n = \frac{n\pi}{2G_0} \quad (n = 3, 4, \dots). \quad (18.22)$$

Как видно из формул (18.22), в отличие от изотропной оболочки при фиксированных  $n$  и при больших  $G_0$  (сильная анизотропия) показатель изменчивости напряженного состояния  $\delta_n$  стремится к нулю. Это, в свою очередь, означает, что в случае сильной анизотропии некоторые погранслойные решения не обладают свойством затухания, и они могут охватывать всю область, занятую оболочкой.

Предполагая, что  $\varepsilon$  является малым параметром, приведем асимптотическое построение однородных решений, соответствующих двум группам нулей. При подстановке  $z_1 = -\frac{3}{2}$ ,  $z_2 = \frac{3}{2}$  в выражения (18.15) получаем, что им соответствуют следующие группы решений:

$$\begin{aligned} u_\varphi &= \frac{C_0}{r^2} \sin \theta, \\ \tau_{r\varphi} &= -\frac{3G}{r^3} \sin \theta, \\ \tau_{\theta\varphi} &= 0. \end{aligned} \quad (18.23)$$

Полагая  $\theta = \theta_0 + \varepsilon\eta$ ,  $-1 \leq \eta \leq 1$  и используя первый член асимптотики функции Лежандра, решение, соответствующее второй группе нулей, можно представить в виде:

$$\begin{aligned} u_\varphi &= \frac{\varepsilon}{\sqrt{r}} \sum_{n=1}^{\infty} C_n \delta_n \cos \left[ \frac{\pi n}{2G_0} (\eta - 1) \right] \exp \left[ \frac{n\pi}{2G_0} \varepsilon^{-1} \ln r \right] \\ \tau_{r\varphi} &= \frac{G}{r\sqrt{r}} \sum_{n=1}^{\infty} C_n \delta_n \cos \left[ \frac{\pi n}{2G_0} (\eta - 1) \right] \exp \left[ \frac{n\pi}{2G_0} \varepsilon^{-1} \ln r \right] \\ \tau_{\theta\varphi} &= -\frac{G}{r\sqrt{r}} \sum_{n=1}^{\infty} C_n \delta_n \sin \left[ \frac{\pi n}{2G_0} (\eta - 1) \right] \exp \left[ \frac{n\pi}{2G_0} \varepsilon^{-1} \ln r \right] \end{aligned} \quad (18.24)$$

где  $C_0, C_n$  – произвольные постоянные.

Проведем анализ напряженного состояния, соответствующего каждой группе решений.

1. Рассмотрим связь однородных решений с крутящим моментом  $M_{kp}$  напряжений, действующих в сечении  $r = const$ .

$$M_{kp} = -6\pi C_0 \varepsilon G \int_{-1}^1 \sin^3(\theta_0 + \varepsilon \eta) d\eta = -12\pi C_0 G_0 \sin^3 \theta_0 \varepsilon + O(\varepsilon^3).$$

Напряженное состояние, соответствующее второй группе решение, имеет характер пограничного слоя и первые члены его асимптотического разложения эквивалентны краевому эффекту Сен-Венана в теории транслопной плиты постоянной толщины.

2. Теперь рассмотрим случай (18.4). Как и выше, общее решение имеет вид:

$$u_\varphi = C_1 P_\gamma^1(\cos \theta) + C_2 Q_\gamma^1(\cos \theta). \quad (18.25)$$

Удовлетворяя однородные граничные условия (18.4), получаем характеристическое уравнение

$$\Delta = \begin{vmatrix} P_\gamma^1(\cos \theta_1) & Q_\gamma^1(\cos \theta_1) \\ P_\gamma^1(\cos \theta_2) & Q_\gamma^1(\cos \theta_2) \end{vmatrix} = 0 \quad (18.26)$$

$$\Delta(z, \theta_1, \theta_2) = D_\gamma^{(1,1)}(\theta_1, \theta_2) = 0. \quad (18.27)$$

Соответствующие однородные решение имеют вид:

$$\begin{aligned} u_\varphi &= \frac{1}{\sqrt{r}} \sum_{n=1}^{\infty} C_n r^{z_n} D_{\gamma_n}^{(1,1)}(\theta, \theta_2) \\ \tau_{r\varphi} &= \frac{G}{r\sqrt{r}} \sum_{n=1}^{\infty} C_n r^{z_n} (z_n - 3/2) D_{\gamma_n}^{(1,1)}(\theta, \theta_2) \\ \tau_{\theta\varphi} &= -\frac{G_1}{r\sqrt{r}} \sum_{n=1}^{\infty} C_n r^{z_n} \left[ 2ctg \theta D_{\gamma_n}^{(1,1)}(\theta, \theta_2) + \gamma_n (\gamma_n + 1) D_{\gamma_n}^{(0,1)}(\theta, \theta_2) \right] \end{aligned} \quad (18.28)$$

Докажем, что характеристическое уравнение (18.27) при  $\varepsilon \rightarrow 0$  ограниченных корней не имеет. Для этой цели,

как и выше, при малых  $\varepsilon$ , представим характеристическое уравнение в виде:

$$D_\gamma^{(1,1)}(\theta_1, \theta_2) = -2\gamma(\gamma+1)\varepsilon \left[ 1 + O(\varepsilon^2) \right].$$

Отсюда видно, что  $\gamma(\gamma+1)=0$  являются корнями характеристического уравнения. Однако, как и выше, этим корням соответствуют тривиальные решения.

Таким образом, характеристическое уравнение в этом случае ограниченных нулей не имеет. Все корни характеристического уравнения стремятся к бесконечности при  $\varepsilon \rightarrow 0$ , и здесь возможен только случай  $\varepsilon z_n \rightarrow const$  при  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

Отыскиваем  $z_n$  в виде

$$z_n = \frac{\delta_n}{\varepsilon} + O(\varepsilon) \quad (18.29)$$

Подставляя (18.29) в (18.27), получаем:

$$\sin 2G_0\delta_n = 0, \quad \delta_n = \frac{n\pi}{2G_0} \quad (18.30)$$

Соответствующие решение имеют вид:

$$u_\varphi = -\frac{\varepsilon}{\sqrt{r}} \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin G_0\delta_n (\eta-1) \exp\left(\frac{\delta_n}{\varepsilon} \ln \rho\right)$$

$$\tau_{r\varphi} = -\frac{G}{r\sqrt{r}} G_0 \sum_{n=1}^{\infty} C_n \delta_n \sin G_0\delta_n (\eta-1) \exp\left(\frac{\delta_n}{\varepsilon} \ln \rho\right) \quad (18.31)$$

$$\tau_{\theta\varphi} = -\frac{G_i G}{r\sqrt{r}} \sum_{n=1}^{\infty} C_n \delta_n \cos G_0\delta_n (\eta-1) \exp\left(\frac{\delta_n}{\varepsilon} \ln \rho\right)$$

Как видно, из (18.31) и из условия  $u_\varphi(\eta = \pm 1) = 0$  следует, что  $\tau_{r\varphi}(\eta = \pm 1) = 0$ , так как условия  $u_\varphi(\eta = \pm 1) = 0$  накладывают слишком сильные ограничения на напряженное состояние.

3. Рассмотрим еще один случай, представляющий практический интерес.

Пусть на боковой поверхности заданы граничные условия.

$$\begin{aligned} \tau_{\theta\varphi} &= 0 \quad \text{при} \quad \theta = \theta_1, \\ u_\varphi &= 0 \quad \text{при} \quad \theta = \theta_2. \end{aligned} \quad (18.32)$$

Удовлетворяя однородные граничные условия (18.32), получаем линейную систему алгебраических уравнений относительно  $C_{kj}$  ( $k=1,2$ ).

$$\begin{aligned} & \left[ 2ctg\theta_1 P_\gamma^{(1)}(\cos\theta_1) + \gamma(\gamma+1)P_\gamma \right] C_{1\gamma} + \\ & + \left[ 2ctg\theta_1 Q_\gamma^{(1)}(\cos\theta_1) + \gamma(\gamma+1)Q_\gamma \right] = 0 \end{aligned} \quad (18.33)$$

$$P_\gamma^{(1)}(\cos\theta_2)C_{1\gamma} + Q_\gamma^{(1)}(\cos\theta_2)C_{2\gamma} = 0$$

Из (18.32) получаем характеристическое уравнение

$$D(z, \varepsilon) = 2ctg\theta_1 D_\gamma^{(1,1)}(\theta_1, \theta_2) + \gamma(\gamma+1)D_\gamma^{(0,1)}(\theta_1, \theta_2) = 0 \quad (18.34)$$

$$C_{1\gamma_n} = Q_\gamma^{(1)}(\cos\theta_2)C_n, \quad C_{2\gamma_n} = -P_\gamma^{(1)}(\cos\theta_2)C_n \quad (18.35)$$

Суммируя по всем корням, получаем однородные решения следующего вида:

$$\begin{aligned} u_\varphi &= \frac{1}{\sqrt{r}} \sum_{n=1}^{\infty} C_n r^{z_n} D_{\gamma_n}^{(1,1)}(\theta, \theta_2), \\ \tau_{r\varphi} &= \frac{G}{r\sqrt{r}} \sum_{n=1}^{\infty} C_n r^{z_n} (z_n - 3/2) D_{\gamma_n}^{(1,1)}(\theta, \theta_2) \end{aligned} \quad (18.28)$$

$$\tau_{\theta\varphi} = -\frac{G_1}{r\sqrt{r}} \sum_{n=1}^{\infty} C_n r^{z_n} \left[ 2ctg\theta D_{\gamma_n}^{(1,1)}(\theta, \theta_2) + \gamma_n(\gamma_n+1)D_{\gamma_n}^{(0,1)}(\theta, \theta_2) \right].$$

Характеристическое уравнение при малых  $\varepsilon$  представим в виде:

$$D(z, \varepsilon) = \gamma(\gamma+1)[-1 + O(\varepsilon)] \quad (18.37)$$

Отсюда видно, что уравнение (18.34) других ограниченных нулей, кроме  $\gamma(\gamma+1) = 0$  не имеет.

Как и выше, отыскиваем  $z_n$  в виде

$$z_n = \varepsilon^{-1} \delta_n + O(\varepsilon). \quad (18.38)$$

Подставляя (18.38) в (18.34), после преобразования его с помощью асимптотических разложений  $P_\gamma(\cos \theta)$ ,  $Q_\gamma(\cos \theta)$ , при больших  $z_n$ , получаем:

$$\cos 2G_0 \delta_n = 0, \quad \delta_n = \frac{1}{2G_0} \left[ \frac{\pi}{2} + 2\pi m \right] \quad (18.39)$$

Корням  $\gamma(\gamma+1)=0$  соответствуют тривиальные решения. Однородные решения, соответствующие нулям (18.39), имеют вид:

$$\begin{aligned} u_\varphi &= -\frac{1}{\sqrt{r}} \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cos[G_0 \delta_n (\eta + 1)] \exp\left(\frac{\delta_n}{\varepsilon} \ln \rho\right) \\ \tau_{r\varphi} &= -\frac{G_0 G}{r\sqrt{r}} \sum_{n=1}^{\infty} C_n \delta_n \cos[G_0 \delta_n (\eta + 1)] \exp\left(\frac{\delta_n}{\varepsilon} \ln \rho\right) \\ \tau_{\theta\varphi} &= -\frac{G_0 G_1}{r\sqrt{r}} \sum_{n=1}^{\infty} C_n \delta_n \sin[G_0 \delta_n (\eta + 1)] \exp\left(\frac{\delta_n}{\varepsilon} \ln \rho\right) \end{aligned} \quad (18.40)$$

Постоянные  $C_n$  определяются из торцевых граничных условий конуса с помощью ортогональности однородных решений.

4. Рассмотрим построение прикладных теорий, предназначенных для снятия напряжений с конической части границы. Продемонстрируем это на примере задачи кручения конической оболочки. Отметим, что снятие напряжений с конической части границы можно также осуществить решением задачи теории упругости для неограниченного конуса при помощи преобразования Меллина. Этот прием следует применить для негладких нагрузок. Однако, если относительная толщина оболочки достаточно мала, а нагрузка, заданная на конических поверхностях достаточно гладкая, как было

показано в работе [14]. Для построения неоднородных решений целесообразно использовать первый итерационный процесс асимптотического метода, который менее трудоемкий и позволяет быстрее достичь конечной цели.

Предположим, что на конических границах заданы условия

$$\tau_{\theta\varphi} = Q^{\mp}(r) \text{ при } \theta = \theta_k \quad (k = 1, 2). \quad (18.41)$$

После замены переменных  $\theta = \theta_0 + \varepsilon\eta$ ,  $-1 \leq \eta \leq 1$ , уравнение (18.6) принимает вид:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 u_\varphi}{\partial \eta^2} + \varepsilon \operatorname{ctg}(\theta_0 + \varepsilon\eta) \frac{\partial u_\varphi}{\partial \eta} - \frac{\varepsilon^2 u_\varphi}{\sin^2(\theta_0 + \varepsilon\eta)} + \\ & + \varepsilon^2 \left[ G_0 \left( r^2 \frac{\partial^2 u_\varphi}{\partial r^2} + 2r \frac{\partial u_\varphi}{\partial r} + 2(1 - G_0) u_\varphi \right) \right] = 0 \\ & \tau_{r\varphi} = G \left( \frac{\partial^2 u_\varphi}{\partial r} - \frac{u_\varphi}{r} \right) \end{aligned} \quad (18.42)$$

$$\tau_{\theta\varphi} = \frac{G_1}{\varepsilon} \frac{1}{r} \left[ \frac{\partial u_\varphi}{\partial \eta} - \varepsilon \operatorname{ctg}(\theta_0 + \varepsilon\eta) u_\varphi \right]$$

Решение (18.42) будем отыскивать в виде

$$u_\varphi = \varepsilon^{-1} (u_0 + \varepsilon u_1 + \varepsilon^2 u_2 + \dots) \quad (18.43)$$

Коэффициенты разложения (18.43) определяются интегрированием по  $\eta$  рекуррентной системы, которая получается после подстановки (18.43) в (18.41), (18.42).

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u_0}{\partial \eta^2} = 0 \\ \frac{\partial u_0}{\partial \eta} \Big|_{\eta=\mp 1} = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{\partial^2 u_1}{\partial \eta^2} + \operatorname{ctg} \theta_0 \frac{\partial u_1}{\partial \eta} = 0 \\ \left[ \frac{\partial u_1}{\partial \eta} - \operatorname{ctg} \theta_0 u_1 \right]_{\eta=\mp 1} = 0 \end{cases} \quad (18.44)$$

$$\left\{ \begin{aligned} & \frac{\partial^2 u_2}{\partial \eta^2} + ctg \theta_0 \frac{\partial u_1}{\partial \eta} - \sin^2 \theta_0 \frac{\partial u_0}{\partial \eta} \eta - \sin^2 \theta_0 u_0 + \\ & + \left[ G_0 \left( r^2 \frac{\partial^2 u_0}{\partial r^2} + 2r \frac{\partial u_0}{\partial r} + 2(1 - G_0) u_0 \right) \right] = 0 \\ & \left[ \frac{\partial u_2}{\partial \eta} - ctg \theta_0 u_1 + \sin^2 \theta_0 u_0 \eta \right]_{\eta=\mp 1} = \frac{r Q^\mp(r)}{G_1} \end{aligned} \right.$$

Последовательное интегрирование системы (18.44) по  $\eta$  дает соотношения для коэффициентов разложения  $u_\varphi$ .

$$u_0 = \psi_0(r), \quad u_1 ctg \theta_0 \psi_0(r) + \psi_1(r) \quad (18.45)$$

$$u_2 = -\frac{1}{2} [\psi_0 + q(r)] \eta^2 + [ctg \theta_0 \psi_1 + q_1(r)] \eta + \psi_2(r)$$

$$G_0 \left( r^2 \frac{d^2 \psi_0}{dr^2} + 2r \frac{d\psi_0}{dr} - 2\psi_0 \right) = q(r)$$

$$q(r) = \frac{r(q^- - q^+)}{2G_1}, \quad q_1(r) = \frac{r(q^- + q^+)}{2G_1}$$

Уравнение (18.45) есть классическое уравнение кручения конической оболочки. Последующие члены будут уточнением классической теории в рамках двумерной теории оболочек.

Формулы (18.45) дают возможность выписать в асимптотических разложениях напряжений  $\tau_{2\varphi}$  по три члена разложений, а в  $\tau_{\theta\varphi}$  – один.

$$\tau_{\theta\varphi} = \frac{G}{\varepsilon} \left\{ \frac{d\psi_0}{dr} - \frac{\psi_0}{r} + \varepsilon \left[ ctg \theta_0 \left( \frac{d\psi_0}{dr} - \frac{\psi_0}{r} \right) \eta + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{d\psi_1}{dr} - \frac{\psi_1}{r} \right] + O(\varepsilon^2) \right\} \quad (18.46)$$

$$\tau_{\theta\varphi} = G_1 \varepsilon [\psi_0 + ctg \theta_1 \psi_1 + q_1(r) - (\psi_0 + q_1) \eta + O(\varepsilon)]$$

Построенная прикладная теория вместе с однородными решениями позволяет решить неоднородную задачу.

## ГЛАВА 5

### АСИМПТОТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ЗАДАЧИ РАСТЯЖЕНИЯ-СЖАТИЯ ДЛЯ ТРАНСТРОПНОЙ ПЛИТЫ ПЕРЕМЕННОЙ ТОЛЩИНЫ

В этой главе методом однородных решений исследуется задача растяжения-сжатия для транстропной (трансверсально-изотропного) плиты переменной толщины под действием осесимметричных нагрузок. Изучено асимптотическое поведение решения трехмерной задачи теории упругости для транстропной плиты переменной толщины при стремления параметра тонкостенности к нулю. В общем случае нагружения с помощью вариационного принципа Лагранжа краевая задача сведена к решению бесконечных систем линейных алгебраических уравнений.

#### §19. Построение однородных решений

Рассмотрим осесимметричную задачу растяжения-сжатия для тел, ограниченных двумя коническими и двумя сферическими поверхностями (плита, толщина которой  $h = \varepsilon r$ , где  $r$  расстояние от центра плиты,  $\varepsilon$  – угловая толщина плиты) (рис. 5.1).

Плита отнесена к сферической системе координат  $r, \theta, \varphi$  изменяющихся в следующих пределах:

$$r_1 \leq r \leq r_2, \quad \frac{\pi}{2} - \varepsilon \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} + \varepsilon; \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi.$$

Коническое поверхности  $\theta = \frac{\pi}{2} \pm \varepsilon$  будем называть торцами плиты, сферические поверхности  $r = r_s$  ( $s = 1, 2$ ) – боковыми поверхностями. Плита изготовлена из трансвер

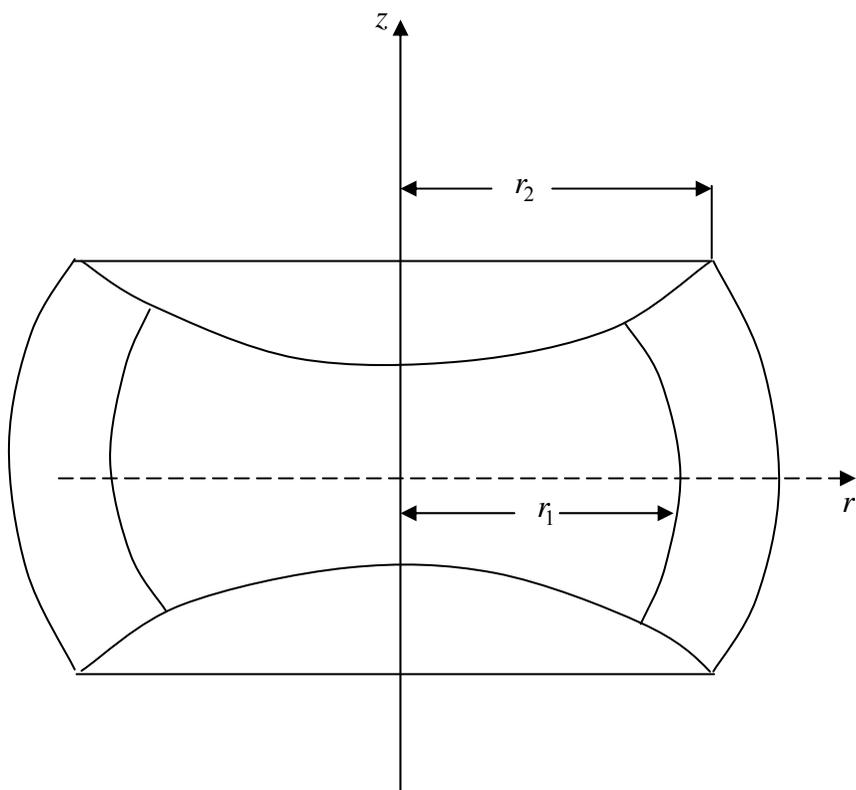


Рис. 5.1

сально-изотропного материала со сферической анизотропией.

Считаем, что начало системы координат, совпадает с центром плиты, который является полюсом анизотропии.

Предположим, что на торцах плиты заданы следующие однородные граничные условия:

$$\sigma_{\theta} = 0, \tau_{r\theta} = 0, \text{ при } \theta = \frac{\pi}{2} \pm \varepsilon \quad (19.1)$$

Отметим, что в настоящей главе будем рассматривать только однородные граничные условия на торцах плиты, так как снятие нагрузки с торцов плиты можно осуществить с помощью приемов, развитых в работах [7,45], который приведены в главе VI.

Характер граничных условий на боковой поверхности ( $r = r_s$ ) пока уточнять не будем, однако, будем считать их таковыми, что плита находится в равновесии.

Уравнения равновесия в осесимметричном случае в напряжениях, при отсутствии массовых сил, в сферической системе координат имеют вид: [38]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{2\sigma_r - \sigma_{\theta} - \sigma_{\varphi} + \tau_{r\theta} \operatorname{ctg} \theta}{r} &= 0 \\ \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{(\sigma_{\theta} - \sigma_{\varphi}) \operatorname{ctg} \theta + 3\tau_{r\theta}}{r} &= 0 \end{aligned} \quad (19.2)$$

Здесь  $\sigma_r, \sigma_{\theta}, \sigma_{\varphi}, \tau_{r\theta}$  – компоненты тензора напряжения.

Соотношения обобщенного закона Гука имеют вид:

$$\begin{aligned} \sigma_r &= G_1 [b_{11}e_r + b_{12}(e_{\theta} + e_{\varphi})] \\ \sigma_{\theta} &= G_1 [b_{12}e_r + b_{22}e_{\theta} + b_{23}e_{\varphi}] \\ \sigma_{\varphi} &= G_1 [b_{12}e_r + b_{23}e_{\theta} + b_{23}e_{\varphi}] \\ \tau_{r\theta} &= G_1 e_{r\theta} \end{aligned} \quad (19.3)$$

где

$$e_r = \frac{\partial u_r}{\partial r}, \quad e_\theta = \frac{u_r}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta}, \quad e_\varphi = \frac{u_r}{r} + \frac{\text{ctg} \theta}{r} u_\theta, \quad (19.4)$$

$e_{r\theta} = \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} - \frac{u_\theta}{r}$  – компоненты тензора деформаций,  
 $u_r = u_r(r, \theta)$ ,  $u_\theta = u_\theta(r, \theta)$  – компоненты вектора перемещений,  $b_{ij}$ ,  $G_1$  – материальные константы.

$$mb_{11} = 2G_0 E_0 (1 - \nu^2), \quad mb_{22} = 2G_0 (1 - \nu_1 \nu_2)$$

$$mb_{12} = 2G_0 \nu_1 (1 + \nu), \quad mb_{23} = 2G_0 (\nu - \nu_1 \nu_2)$$

$$m = 1 - \nu - 2\nu_1 \nu_2, \quad G_0 = GG_1^{-1}, \quad E_0 = E_1 E^{-1}.$$

Здесь  $\nu, \nu_1, \nu_2$ ,  $G, G_1$ ,  $E, E_1$  – технические константы материала.

Подставляя (19.4), (19.3) в (19.2), после несложных выкладок получим

$$\begin{aligned} & \frac{b_{11}}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial u_r}{\partial r} \right) + \frac{2}{r^2} (b_{12} - b_{22} - b_{23}) u_r + \\ & + \frac{1}{r^2} \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial u_r}{\partial \theta} \right) + \frac{b_{12} + 1}{r} \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial^2}{\partial r \partial \theta} (\sin \theta u_\theta) = 0 \\ & \frac{b_{12} + 1}{r^2} \frac{\partial^2 u_r}{\partial r \partial \theta} + \frac{b_{22} + b_{23} + 2}{r^2} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial u_\theta}{\partial r} \right) + \\ & + \frac{b_{22}}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left[ \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta u_\theta) \right] + \frac{b_{22} - b_{23} - 2}{r^2} u_\theta = 0 \end{aligned} \quad (19.5)$$

Решения уравнений (19.5) будем отыскивать в виде:

$$u_r = r^\lambda u(\lambda, \theta), \quad u_\theta = r^\lambda w(\lambda, \theta) \quad (19.6)$$

Подставляя (19.6) в (19.5), после разделения переменных относительно пары функций  $(u, w)$  получаем следующую систему обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$L_1(\lambda)(u, w) = u'' + \text{ctg} \theta u' + [b_{11} \lambda(\lambda + 1) + 2(b_{12} - b_{22} - b_{23})] u +$$

$$+[(b_{12} + 1)\lambda + b_{12} - b_{22} - b_{23} - 1](w' + ctg \theta w) = 0 \quad (19.7)$$

$$L_2(\lambda)(u, w) = [(b_{12} + 1)\lambda + b_{22} - b_{23} - 2]u' + b_{22}(w' + ctg \theta w)' + \\ + [\lambda(\lambda + 1) + b_{22} - b_{23} - 2]w = 0$$

Подставляя (19.6) в (19.1) с учетом (19.3), для функций  $u(\lambda, \theta)$ ,  $w(\lambda, \theta)$  получаем следующие однородные граничные условия:

$$M_1(\lambda)(u, w) \Big|_{\theta=\frac{\pi}{2} \pm \varepsilon} = [(b_{12}\lambda + b_{22} + b_{23})u + b_{22}w' + \\ + b_{23}ctg \theta w] \Big|_{\theta=\frac{\pi}{2} \pm \varepsilon} = 0 \quad (19.8)$$

$$M_2(\lambda)(u, w) \Big|_{\theta=\frac{\pi}{2} \pm \varepsilon} = [u' + (\lambda - 1)w] \Big|_{\theta=\frac{\pi}{2} \pm \varepsilon} = 0$$

Таким образом, система уравнений (19.7) совместно с граничными условиями (19.8) порождает спектральную задачу для пары функций  $(u, w)$  со спектральным параметром  $\lambda$ , которая является предметом дальнейших исследований.

Не вдаваясь в подробности, используя результаты [7], приведем окончательное решение уравнения (19.7):

$$u = A_1 \psi_{\gamma_1}(\theta) + A_2 \psi_{\gamma_2}(\theta) \\ w = b_0 [\psi'_{\gamma_1}(\theta) + \psi'_{\gamma_2}(\theta)] \quad (19.9)$$

где

$$\psi_{\gamma}(\theta) = C_{\gamma} T_{\gamma}(\theta) + B_{\gamma} F_{\gamma}(\theta)$$

$$T_{\gamma}(\theta) = P_{\gamma}(\cos \theta) + P_{\gamma}(-\cos \theta),$$

$$F_{\gamma}(\theta) = P_{\gamma}(\cos \theta) - P_{\gamma}(-\cos \theta)$$

$$A_i = -b_{22}\gamma_i(\gamma_i + 1) + \lambda(\lambda + 1) + 2(G_0 - 1) \quad (i = 1, 2)$$

$$b_0 = -[(b_{12} + 1)\lambda + b_{22} + b_{23} + 2]$$

$P_{\gamma}(\cos \theta)$  – функция Лежандра первого рода,  $\gamma$  – корни би-квадратного уравнения:

$$\begin{aligned}
& b_{22}\gamma^2(\gamma+1)^2 - [(b_{11}b_{22} - b_{12}^2 - 2b_{12})\lambda(\lambda+1) + 2b_{22} + \\
& + 2(b_{12} - b_{22} - b_{23})(G_0 - 1)]\gamma(\gamma+1) + [(b_{11}\lambda(\lambda+1)) + \\
& + 2(b_{12} - b_{22} - b_{23})[\lambda(\lambda+1) + 2(G_0 - 1)]] = 0 \quad (19.10)
\end{aligned}$$

Отметим, что как и в работе [6], здесь вместо традиционных линейно-независимых решений уравнения Лежандра  $P_\gamma(\cos\theta)$ ,  $Q_\gamma(\cos\theta)$  для удобства введены четные  $T_\gamma(\theta) = P_\gamma(\cos\theta) + P_\gamma(-\cos\theta)$  и нечетные  $F_\gamma(\theta) = P_\gamma(\cos\theta) - P_\gamma(-\cos\theta)$  функции относительно срединной плоскости плиты, которые также являются линейно-независимыми решениями уравнения Лежандра. Такая форма решений позволяет расчленить общую задачу для плиты на две независимые задачи растяжения-сжатия плиты и задачу изгиба плиты.

В этой главе мы будем рассматривать только первую задачу, поэтому полагаем  $B_\gamma = 0$ .

Таким образом, окончательно имеем:

$$\begin{aligned}
u_r &= r^\lambda [A_1 C_{\gamma_1} T_{\gamma_1}(\theta) + A_2 C_{\gamma_2} T_{\gamma_2}(\theta)] \\
u_\theta &= r^\lambda b_0 [C_{\gamma_1} T'_{\gamma_1}(\theta) + C_{\gamma_2} T'_{\gamma_2}(\theta)] \quad (19.11)
\end{aligned}$$

Удовлетворение граничных условий на торцах плиты (19.8) дает однородную линейную алгебраическую систему второго порядка относительно постоянных  $C_{\gamma_1}$ ,  $C_{\gamma_2}$

$$\begin{aligned}
& \{[(b_{12}\lambda + b_{22} + b_{23})A_1 - b_{22}b_0\gamma_1(\gamma_1 + 1)]T_{\gamma_1}(\theta_1) + \\
& + (b_{23} - b_{22})b_0 \operatorname{tg} \varepsilon T'_{\gamma_1}(\theta_1)\} C_{\gamma_1} + \{[(b_{12}\lambda + b_{22} + b_{23})A_2 - \\
& - b_{22}b_0\gamma_2(\gamma_2 + 1)]T_{\gamma_2}(\theta_1) + (b_{23} - b_{22})b_0 \operatorname{tg} \varepsilon T'_{\gamma_2}(\theta_1)\} C_{\gamma_2} = 0 \quad (19.12) \\
& [A_1 + (\lambda - 1)b_0]T'_{\gamma_1}(\theta_1)C_{\gamma_1} + [A_2 + (\lambda - 1)b_0]T'_{\gamma_2}(\theta_1)C_{\gamma_2} = 0,
\end{aligned}$$

$$\theta = \frac{\pi}{2} - \varepsilon.$$

Из условия существования нетривиальных решений этой системы получаем характеристическое уравнение для определения собственных значений  $\lambda$  :

$$\Delta(\lambda, \theta_1) = C_{11}d_{12}T_{\gamma_1}(\theta_1)T'_{\gamma_2}(\theta_1) - C_{12}d_{12}T_{\gamma_2}(\theta_1)T'_{\gamma_1}(\theta_1) + C_{13}(d_{22} - d_{11})\text{tg}\varepsilon T'_{\gamma_1}(\theta_1)T'_{\gamma_2}(\theta_1) = 0 \quad (19.13)$$

$$C_{1p} = (b_{12}\lambda + b_{22} + b_{23})A_p - \gamma_p(\gamma_p + 1)b_{22}b_0, \quad (p = 1, 2)$$

$$C_{13} = -(b_{22} - b_{23})b_0$$

$$d_{1k} = A_k + (\lambda - 1)b_0, \quad (k = 1, 2)$$

Трансцендентное уравнение (19.13), как целая функция параметра  $\lambda$ , определяет счетное множество  $\lambda_n$  с точкой сгущения на бесконечности, а соответствующие им постоянные  $C_{\gamma_k}$  пропорциональны алгебраическим дополнением элементов какой-либо строки определителя системы. Выбирая в качестве решения системы элементы второй строки, получим

$$\begin{aligned} C_{\gamma_{1n}} = \Delta_{1n} &= [A_2 + (\lambda_n - 1)b_0]T'_{\gamma_{2n}}(\theta_1), \\ C_{\gamma_{2n}} = \Delta_{2n} &= -[A_1 + (\lambda_n - 1)b_0]T'_{\gamma_{1n}}(\theta_1) \end{aligned} \quad (19.14)$$

Подставляя (19.14) в (19.11) с учетом (19.13) и суммируя по всем корням  $\lambda_n$  получаем однородные решения следующего вида:

$$\begin{aligned} u_r &= \sum_{n=1}^{\infty} C_n r^{\lambda_n} u_n(\theta), \\ u_\theta &= \sum_{n=1}^{\infty} C_n r^{\lambda_n} w_n(\theta) \\ \sigma_r &= G_1 r^{-1} \sum_{n=1}^{\infty} C_n r^{\lambda_n} Q_{rn}(\theta), \\ \sigma_\varphi &= G_1 r^{-1} \sum_{n=1}^{\infty} C_n r^{\lambda_n} Q_{\varphi n}(\theta) \end{aligned} \quad (19.15)$$

$$\sigma_{\theta} = G_1 r^{-1} \sum_{n=1}^{\infty} C_n r^{\lambda_n} Q_{\theta n}(\theta),$$

$$\tau_{r\theta} = G_1 r^{-1} \sum_{n=1}^{\infty} C_n r^{\lambda_n} T_n(\theta)$$

Здесь  $C_n$  – произвольные постоянные.

$$u_n(\theta) = A_1 \Delta_{1n} T_{\gamma_{1n}}(\theta) + A_2 \Delta_{2n} T_{\gamma_{2n}}(\theta)$$

$$w_n(\theta) = b_0 [\Delta_{1n} T'_{\gamma_{1n}}(\theta) + \Delta_{2n} T'_{\gamma_{2n}}(\theta)]$$

$$Q_{rn}(\theta) = [A_1 b_{11} \lambda_n + 2b_{12} A_1 - b_{12} b_0 \gamma_{1n} (\gamma_{1n} + 1)] \Delta_{1n} T_{\gamma_{1n}}(\theta) +$$

$$+ [A_2 b_{11} \lambda_n + 2b_{12} A_2 - b_{12} b_0 \gamma_{2n} (\gamma_{2n} + 1)] \Delta_{2n} T_{\gamma_{2n}}(\theta)$$

$$Q_{\theta n}(\theta) = \{ [A_1 b_{12} \lambda_n + (b_{22} + b_{23}) A_1 - b_{22} b_0 \gamma_{1n} (\gamma_{1n} + 1)] T_{\gamma_{1n}}(\theta) +$$

$$+ b_0 (b_{23} - b_{22}) \operatorname{ctg} \theta T'_{\gamma_{1n}}(\theta) \} \Delta_{1n} + \{ [A_2 b_{12} \lambda_n + (b_{22} + b_{23}) A_2 -$$

$$- b_{22} b_0 \gamma_{2n} (\gamma_{2n} + 1)] T_{\gamma_{2n}}(\theta) + b_0 (b_{23} - b_{22}) \operatorname{ctg} \theta T'_{\gamma_{2n}}(\theta) \} \Delta_{2n}$$

$$Q_{\varphi n}(\theta) = \{ [A_1 b_{12} \lambda_n + (b_{22} + b_{23}) A_1 - b_{23} b_0 \gamma_{1n} (\gamma_{1n} + 1)] T_{\gamma_{1n}}(\theta) +$$

$$+ b_0 (b_{22} - b_{23}) \operatorname{ctg} \theta T'_{\gamma_{1n}}(\theta) \} \Delta_{1n} + \{ [A_2 b_{12} \lambda_n + (b_{22} + b_{23}) A_2 -$$

$$- b_{23} b_0 \gamma_{2n} (\gamma_{2n} + 1)] T_{\gamma_{2n}}(\theta) + b_0 (b_{22} - b_{23}) \operatorname{ctg} \theta T'_{\gamma_{2n}}(\theta) \} \Delta_{2n}$$

$$T_n(\theta) = [A_1 + (\lambda_n - 1) b_0] T'_{\gamma_{1n}}(\theta) \Delta_{1n} +$$

$$+ [A_2 + (\lambda_n - 1) b_0] T'_{\gamma_{2n}}(\theta) \Delta_{2n}$$

Как видно (19.13), характеристическое уравнение имеет весьма сложную структуру.

Для эффективного изучения его корней сделаем некоторые предположения относительно геометрических параметров плиты.

Именно положим

$$\theta = \frac{\pi}{2} + \varepsilon \eta, \quad -1 \leq \eta \leq 1 \quad (19.16)$$

где  $\theta = \frac{\pi}{2}$  – срединная плоскость плиты,  $\varepsilon$  – безразмерный параметр, характеризующий ее толщину,  $\eta$  – новая переменная отсчитываемая от срединной плоскости. подставляя (19.16) в уравнение (19.13), получаем

$$D(z, \varepsilon) = \Delta(\lambda, \theta_1) = 0, \quad z = \lambda + \frac{1}{2} \quad (19.17)$$

Относительно нулей функции  $D(z, \varepsilon)$  докажем следующее утверждение: функция  $D(z, \varepsilon)$  имеет две группы нулей со следующими асимптотическими свойствами при  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

Первая группа состоит из двух нулей и характеризуется тем, что все они при  $\varepsilon \rightarrow 0$  имеют конечный предел;

Вторая группа нулей состоит из счетного множества нулей, который при  $\varepsilon \rightarrow 0$  имеют порядок  $O(\varepsilon^{-1})$ .

Приведем схему доказательства первого утверждения. Для этой цели, раскладывая функции  $T_\nu(\theta)$ ,  $T'_\nu(\theta)$  в окрестности плоскости  $\theta = \frac{\pi}{2}$  в ряд по  $\varepsilon$ , получим

$$T_\nu(\theta) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{\Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right)}{\Gamma\left(1+\frac{\nu}{2}\right)} \cos\left(\nu \frac{\pi}{2}\right) \times$$

$$\times \left[ 1 - \frac{1}{2} \nu(\nu+1) \eta^2 \varepsilon^2 + \frac{1}{4!} \nu(\nu+1)(\nu-1)(\nu+2) \eta^4 \varepsilon^4 + \dots \right] \quad (19.18)$$

$$T'_\nu(\theta) = -\frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{\Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right)}{\Gamma\left(1+\frac{\nu}{2}\right)} \cos\left(\nu \frac{\pi}{2}\right) \nu(\nu+1) \eta \varepsilon \left\{ 1 - \frac{1}{3!} (\nu-1)(\nu+2) \times \right.$$

$$\times \eta^2 \varepsilon^2 + \frac{1}{5!} \left[ \nu^2 (\nu + 1)^2 (\nu - 1) - 6\nu(\nu + 1) + 16 \right] \eta^4 \varepsilon^4 + \dots \left. \vphantom{\frac{1}{5!}} \right\}$$

Подставляя (19.18) в (19.17) функции  $D(z, \varepsilon)$  представим в виде:

$$D(z, \varepsilon) = A_0 \varepsilon \left[ D_0(z) + \frac{1}{3} D_2(z) \varepsilon^2 + \dots \right] \quad (19.19)$$

$$A_0 = 4\Gamma\left(\frac{\gamma_1 + 1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{\gamma_2 + 1}{2}\right) \left[ \pi \Gamma\left(1 + \frac{\gamma_1 + 1}{2}\right) \Gamma\left(1 + \frac{\gamma_2 + 1}{2}\right) \right]^{-1} \times \\ \times \left( z^2 - \frac{9}{4} + 2G_0 \right) b_0 m^{-1} (1 + \nu) G_0^2 \cos\left(\frac{\pi}{2} \gamma_1\right) \cos\left(\frac{\pi}{2} \gamma_2\right)$$

$$D_0(z) = 4E_0 z^2 - 4(1 - \nu_1) - E_0$$

$$D_2(z) = (1 - \nu_1 \nu_2)^{-1} \left\{ -4(1 - \nu)(E_0 G_0 - \nu_1) E_0 z^4 + (1 + \nu) \times \right. \\ \times [2(E_0 G_0 - \nu_1) E_0 + 4(1 - \nu_1)(G_0 - 1) E_0 + 4(1 - \nu_1) \times \\ \times (E_0 G_0 - \nu_1) + 8(1 + \nu)(1 - \nu_1 \nu_2) E_0] z^2 - 4^{-1} (1 + \nu) \times \\ \times (E_0 + 4 - 4\nu_1)(E_0 G_0 - \nu_1 + 4 - 4G_0) - 2(1 - \nu) \times \\ \left. \times (1 - \nu_1 \nu_2) E_0 - 16(1 - \nu_1)(1 - \nu_1 \nu_2) \right\}$$

$\Gamma(x)$  – гамма функция Эйлера.

Ищем  $z_k$  в виде следующего разложения:

$$z_k = z_{k_0} + \varepsilon z_{k_2} + \dots \quad (19.20)$$

где

$$D_0(z_{k_0}) = 4z_{k_0}^2 - 4(1 - \nu_1) E_0^{-1} - 1 = 0$$

$$z_{k_2} = (3z_{k_0} E_0)^{-1} (1 - \nu)(1 - \nu_1)$$

Для построения асимптотики нулей второй группы отыскиваем  $z_n$  ( $n = 3, 4, 5, \dots$ ) в виде

$$z_n = \varepsilon^{-1} \delta_n + O(\varepsilon) \quad (19.21)$$

Подставляя (19.21) в (19.10) имеем:

$$\tau^2 - 2q_1\delta_n^2\tau + q_2\delta_n^4 = 0, \quad \gamma_1 = \sqrt{\tau_1} \quad (19.22)$$

$$\tau_i^2 = \delta_n^2 S_i, \quad S_i = \sqrt{q - (-1)^i \sqrt{q_1^2 - q_2}}, \quad i = (1,2)$$

$$2q_1 = b_{22}^{-1}(b_{11}b_{22} - b_{12}^2 - 2b_{12}), \quad q_2 = b_{11}b_{22}^{-1}$$

Как было отмечено в [37], в зависимости от характеристик материала  $\nu, \nu_1, \nu_2, G_0$  параметры  $q_1, q_2$  принимают различные значения, что влечет за собой различные записи решения через функции Лежандра. Эта в свою очередь приводит к различным асимптотическим представлениям функция Лежандра.

Рассмотрим следующие возможные случаи:

$$1. \quad q_1 > 0, \quad q_1^2 - q_2 > 0, \quad \gamma_{1,2} = \pm S_1 \delta_n, \quad \gamma_{3,4} = \pm S_2 \delta_n$$

$$S_{1,2} = \sqrt{q_1 \pm \sqrt{q_1^2 - q_2}}, \quad q_1^2 > q_2$$

$$S_{1,2} = \alpha \pm i\beta \sqrt{q_1 \pm i\sqrt{q_2 - q_1^2}}, \quad q_1^2 < q_2$$

$$2. \quad \text{Корни характеристического уравнения (19.22) кратные}$$

$$\gamma_{1,2} = \gamma_{3,4} = \pm \delta_n p, \quad q_1 > 0, \quad q_1^2 - q_2 = 0, \quad p = \sqrt{q_1}$$

$$3. \quad q_1 < 0, \quad q_1^2 - q_2 \neq 0, \quad \gamma_{1,2} = \pm i \delta_n S_1, \quad \gamma_{3,4} = \pm i \delta_n S_2$$

$$S_{1,2} = \sqrt{|q_1| \pm i\sqrt{q_1^2 - q_2}}, \quad q_1^2 > q_2$$

$$S_{1,2} = \sqrt{|q_1| \pm i\sqrt{q_2 - q_1^2}}, \quad q_1^2 < q_2$$

$$4. \quad q_1 < 0, \quad q_1^2 - q_2 = 0, \quad \gamma_{1,2} = \gamma_{3,4} = \pm \delta_n p, \quad p = \sqrt{|q_1|}$$

В случаях 1,2 после подстановки (19.21) в (19.17) и преобразования его с помощью асимптотических разложений  $T_\nu(\theta), T'_\nu(\theta)$

$$T_\nu(\theta) = 2 \left( \frac{2}{\pi} \cos \varepsilon \eta \right)^{\frac{1}{2}} \frac{\Gamma(\nu+1)}{\Gamma\left(1+\frac{1}{2}\right)} \cos\left(\nu \frac{\pi}{2}\right) \times$$

$$\times \left[ \cos\left(\nu + \frac{1}{2}\right) \eta \varepsilon + O(\nu^{-1}) \right] \quad (19.23)$$

$$T'_\nu(\theta) = -2 \left( \frac{2}{\pi} \cos \varepsilon \eta \right)^{\frac{1}{2}} \frac{\Gamma(\nu+2)}{\Gamma\left(1+\frac{3}{2}\right)} \cos\left(\nu \frac{\pi}{2}\right) \times$$

$$\times \left[ \sin\left(\nu + \frac{1}{2}\right) \eta \varepsilon + O(\nu^{-1}) \right]$$

для  $\delta_n$  получим:

$$(S_2 - S_1) \sin(S_2 + S_1) \delta_n + (S_2 + S_1) \sin(S_2 - S_1) \delta_n = 0, \quad (19.24)$$

$$\alpha \sin 2\beta + \beta sh 2\alpha \delta_n = 0, \quad (19.25)$$

$$\sin 2p \delta_n + 2p \delta_n = 0. \quad (19.26)$$

Что касается случаев 3 и 4, то для них результаты получаются из случаев 1 и 2 формальной заменой  $S_1, S_2$  на  $iS_1, iS_2, ip$ . Эти уравнения совпадают с уравнениями, определяющими показатели краевых эффектов Сен-Венана.

В работе [40] получена асимптотика для корней таких уравнений.

Характер этих корней существенно влечет на общую картину напряженно-деформированного состояния плиты.

Как и в изотропном случае [5,46] можно доказать, что функция  $D(z, \varepsilon)$ , кроме выше найденных, других нулей не имеет.

## §20. Анализ напряженно-деформированного состояния

Дадим характеристику напряженно-деформированных состояний, определяемых решениями, построенными выше.

В соответствии с двумя группами собственных значений спектральной задачи (19.7), (19.8) вектор перемещений и тензор напряжений можно представить в виде:

$$\bar{u} = \bar{u}_1 + \bar{u}_2, \quad \underline{\underline{\sigma}} = \underline{\underline{\sigma}}_1 + \underline{\underline{\sigma}}_2$$

здесь  $\bar{u}_1$ ,  $\underline{\underline{\sigma}}_1$  соответствуют первой группе собственных значений и его компоненты имеют следующие асимптотические представления:

$$\begin{aligned} u_r^{(1)} &= \frac{r_1}{\sqrt{\rho}} \sum_{k=1}^2 C_k \left[ 4\nu_1 z_{k0} + 2(\nu_1 - 2) + O(\varepsilon^2) \right] \exp(z_{k0} \ln \rho) \\ u_\theta^{(1)} &= \frac{r_1}{\sqrt{\rho}} \varepsilon \sum_{k=1}^2 C_k \eta \left[ 4(1 + \nu)(1 - \nu_1) + O(\varepsilon^2) \right] \exp(z_{k0} \ln \rho) \\ \sigma_r^{(1)} &= \frac{2G_1}{\rho\sqrt{\rho}} \sum_{k=1}^2 C_k \left[ (1 + \nu)(1 - \nu_1 - 2\nu_1^2) m^{-1} (1 - 2z_{k0}) + O(\varepsilon^2) \right] \times \\ &\times \exp(z_{k0} \ln \rho) \\ \sigma_\varphi^{(1)} &= \frac{2G_1}{\rho\sqrt{\rho}} \sum_{k=1}^2 C_k \left[ -4(1 + \nu)(1 - \nu_1) + O(\varepsilon^2) \right] \exp(z_{k0} \ln \rho) \\ \sigma_\theta^{(1)} &= O(\varepsilon^2), \quad \tau_{r\theta}^{(1)} = O(\varepsilon^3), \quad \rho = \frac{r}{r_1} \end{aligned} \quad (20.1)$$

Здесь  $C_k$  – произвольные постоянные,  $\rho = \frac{r}{r_1}$  – безразмерная координата. Из (20.1) можно заметить, что  $u_r^{(1)}$ ,  $\sigma_r^{(1)}$ ,  $\sigma_\varphi^{(1)}$  при малых  $\varepsilon$  имеют порядок 1,  $u_\theta^{(1)}$  – порядок  $\varepsilon$ ,

$\sigma_\theta^{(2)}$  – порядок  $\varepsilon^2$ ,  $\tau_{r\theta}^{(2)}$  – порядок  $\varepsilon^3$ . Вторая группа решений соответствует собственным значениям, определяемым формулами (1.24), (1.25), (1.26).

Используя асимптотическое разложение функции Лежандра при больших  $z$  (19.23), для них получены следующие асимптотические формулы:

$$\begin{aligned}
 u_r^{(2)} &= \frac{r_1 \varepsilon}{\sqrt{\rho}} \sum_{n=1}^{\infty} B_n \left[ S_2 (b_{22} S_2^2 + b_{12}^2 + b_{12} - b_{11} b_{22}) \times \right. \\
 &\times \sin S_2 \delta_n \cos S_1 \delta_n \eta - S_1 (b_{22} S_1^2 + b_{12}^2 + b_{12} - b_{11} b_{22}) \times \\
 &\times \sin S_1 \delta_n \cos S_2 \delta_n \eta + O(\varepsilon) \left. \right] \exp\left(\frac{\delta_n}{\varepsilon} \ln \rho\right). \\
 u_\theta^{(2)} &= \frac{r_1 \varepsilon S_1 S_2}{\sqrt{\rho}} \sum_{n=1}^{\infty} \left[ (b_{22} S_2^2 + b_{12}) \sin S_2 \delta_n \cos S_1 \delta_n \eta - \right. \\
 &- (b_{22} S_1^2 + b_{11}) \sin S_1 \delta_n \sin S_2 \delta_n \eta + O(\varepsilon) \left. \right] \exp\left(\frac{\delta_n}{\varepsilon} \ln \rho\right). \\
 \sigma_r^{(2)} &= \frac{-G_1}{\rho \sqrt{\rho}} (b_{11} - b_{12}^2) S_1 S_2 \sum_{n=1}^{\infty} B_n \delta_n \left[ S_1 \sin S_2 \delta_n \cos S_1 \delta_n \eta - \right. \\
 &- S_2 \sin S_1 \delta_n \cos S_2 \delta_n \eta + O(\varepsilon) \left. \right] \exp\left(\frac{\delta_n}{\varepsilon} \ln \rho\right), \\
 \sigma_\varphi^{(2)} &= \frac{G_1}{\rho \sqrt{\rho}} \sum_{n=1}^{\infty} B_n \delta_n \left[ S_2 (b_{11} b_{22} - b_{12}^2 - 2G_0 - 2G_0 b_{12} S_1^2) \times \right. \\
 &\times \sin S_2 \delta_n \cos S_1 \delta_n \eta - S_1 (b_{11} b_{22} - b_{12}^2 - 2G_0 - 2G_0 b_{12} S_2^2) \times \quad (20.2) \\
 &\times \sin S_1 \delta_n \cos S_2 \delta_n \eta + O(\varepsilon) \left. \right] \exp\left(\frac{\delta_n}{\varepsilon} \ln \rho\right), \\
 \sigma_\theta^{(2)} &= \frac{G_1}{\rho \sqrt{\rho}} (b_{11} b_{22} - b_{12}^2) S_1 S_2 \sum_{n=1}^{\infty} B_n \delta_n \left[ S_2 \sin S_2 \delta_n \cos S_1 \delta_n \eta - \right.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -S_1 \sin S_1 \delta_n \cos S_2 \delta_n \eta + O(\varepsilon)] \exp\left(\frac{\delta_n}{\varepsilon} \ln \rho\right), \\
\tau_{r\theta}^{(2)} &= \frac{G_1}{\rho\sqrt{\rho}} (b_{11}b_{22} - b_{12}^2) S_1 S_2 \sum_{n=1}^{\infty} [\sin S_2 \delta_n \sin S_1 \delta_n \eta - \\
& - \sin S_1 \delta_n \sin S_2 \delta_n \eta + O(\varepsilon)] \exp\left(\frac{\delta_n}{\varepsilon} \ln \rho\right). \\
(S_2 - S_1) \sin(S_2 + S_1) \delta_n &+ (S_2 + S_1) \sin(S_2 - S_1) \delta_n = 0. \\
u_r^{(2)} &= \frac{f_1}{\sqrt{\rho}} \sum_{n=1}^{\infty} D_n [F_{1n}(\eta) + O(\varepsilon)] \exp\left(\frac{\delta_n}{\varepsilon} \ln \rho\right). \\
u_{\theta}^{(2)} &= \frac{f_1}{\sqrt{\rho}} \varepsilon \sum_{n=1}^{\infty} D_n [F_{2n}(\eta) + O(\varepsilon)] \exp\left(\frac{\delta_n}{\varepsilon} \ln \rho\right). \\
\sigma_r^{(2)} &= \frac{G_1}{\rho\sqrt{\rho}} \sum_{n=1}^{\infty} D_n [b_{11} \delta_n F_{1n}(\eta) + b_{12} F'_{2n}(\eta) + O(\varepsilon)] \times \\
& \times \exp\left(\frac{\delta_n}{\varepsilon} \ln \rho\right) \\
\sigma_{\varphi}^{(2)} &= \frac{G_1}{\rho\sqrt{\rho}} \sum_{n=1}^{\infty} D_n [b_{12} \delta_n F_{1n}(\eta) + b_{23} F'_{2n}(\eta) + O(\varepsilon)] \times \\
& \times \exp\left(\frac{\delta_n}{\varepsilon} \ln \rho\right) \\
\sigma_{\theta}^{(2)} &= \frac{G_1}{\rho\sqrt{\rho}} \sum_{n=1}^{\infty} D_n [b_{12} \delta_n F'_{1n}(\eta) + b_{22} F'_{2n}(\eta) + O(\varepsilon)] \times \\
& \times \exp\left(\frac{\delta_n}{\varepsilon} \ln \rho\right) \\
\tau_{r\theta}^{(2)} &= \frac{G_1}{\rho\sqrt{\rho}} \sum_{n=1}^{\infty} D_n [F'_{1n}(\eta) + \delta_n F_{2n}(\eta) + O(\varepsilon)] \times \\
& \times \exp\left(\frac{\delta_n}{\varepsilon} \ln \rho\right)
\end{aligned} \tag{20.3}$$

где

$$F_{1n}(\eta) = (a_1\Delta_{1n} - a_2\Delta_{2n})\cos \beta\delta_n\eta sh\alpha\delta_n\eta - \\ - (a_1\Delta_{2n} + a_2\Delta_{1n})\sin \beta\delta_n\eta sh\alpha\delta_n\eta.$$

$$F_{2n}(\eta) = (b_{12} + 1)[(\beta\Delta_{2n} - \alpha\Delta_{1n})\cos \beta\delta_n\eta sh\alpha\delta_n\eta + \\ + (\alpha\Delta_{2n} - \beta\Delta_{1n})\sin \beta\delta_n\eta sh\alpha\delta_n\eta].$$

$$a_1 = 1 - b_{22}(\alpha^2 - \beta^2), a_2 = 2b_{22}\alpha\beta;$$

$$\Delta_{1n} = C_n \left\{ \alpha [b_{12} + b_{22}(\alpha^2 + \beta^2)] \sin \beta\delta_n ch\alpha\delta_n + \right. \\ \left. + \beta [b_{12} - b_{22}(\alpha^2 + \beta^2)] \cos \beta\delta_n sh\alpha\delta_n \right\}.$$

$$\Delta_{2n} = C_n \left\{ -\beta [b_{12} - b_{22}(\alpha^2 + \beta^2)] \sin \beta\delta_n ch\alpha\delta_n + \right. \\ \left. + \alpha [b_{12} + b_{22}(\alpha^2 + \beta^2)] \cos \beta\delta_n sh\alpha\delta_n \right\}.$$

$$\alpha \sin 2\beta\delta_n + \beta sh 2\alpha\delta_n = 0$$

$$u_r^{(2)} = \frac{(b_{12} + 1)}{\sqrt{\rho}} \varepsilon \sum_{n=1}^3 E_n \left\{ \cos \rho\delta_n + (b_{12}\rho^2 - b_{11})(b_{12}\rho^2 + b_{11})^{-1} \times \right. \\ \left. \times \frac{\sin p\delta_n}{p\delta_n} \right\} \cos p\delta_n\eta + \eta \sin p\delta_n \sin p\delta_n\eta + O(\varepsilon) \exp\left(\frac{\delta_n}{\varepsilon} \ln \rho\right).$$

$$u_\theta^{(2)} = \frac{(\rho^2 - b_{11})}{\sqrt{\rho}} \varepsilon \sum_{n=1}^3 E_n \left\{ \cos p\delta_n + 2b_{11}(b_{12} + 1)\rho(b_{11} - \rho^2)^{-1} \times \right. \\ \left. \times (b_{12}\rho^2 + 1)^{-1} \frac{\sin p\delta_n}{p\delta_n} \right\} \sin p\delta_n\eta + \eta \sin p\delta_n \cos p\delta_n\eta + O(\varepsilon) \times \\ \times \exp\left(\frac{\delta_n}{\varepsilon} \ln \rho\right).$$

$$\sigma_r^{(2)} = \frac{G_1(b_{12}\rho^2 - b_{11})}{\rho\sqrt{\rho}} \sum_{n=1}^{\infty} E_n [(p\delta_n \cos p\delta_n + \sin p\delta_n) \times \\ \times \cos p\delta_n\eta + \eta p\delta_n \sin p\delta_n \sin p\delta_n\eta + O(\varepsilon)] \exp\left(\frac{\delta_n}{\varepsilon} \ln \rho\right) \quad (20.4)$$

$$\sigma_\varphi^2 = \frac{G_1}{\rho\sqrt{\rho}} \sum_{n=1}^{\infty} E_n \left\langle \left( (b_{23}\rho^2 + b_{12} + b_{12} - b_{11}b_{23}) p\delta_n \cos p\delta_n + \right. \right. \\ \left. \left. + [b_{11}b_{23} + b_{12}^2 + b_{12} - b_{11} - b_{23}\rho^2 - 2b_{11}(b_{12}\rho^2 + 1)(b_{23}\rho^2 + b_{12}) \times \right. \right. \\ \left. \left. \times (b_{12}\rho^2 + b_{11}) \right]^{-1} \sin p\delta_n \right\rangle \cos p\delta_n \eta + (b_{23}\rho^2 + b_{12}^2 + b_{12} - b_{11}b_{23}) \times \\ \times \eta p \delta_n \sin p\delta_n \sin p\delta_n \eta + O(\varepsilon) \exp\left(\frac{\delta_n}{\varepsilon} \ln \rho\right).$$

$$\sigma_\theta^{(2)} = \frac{G_1(b_{11}b_{22} - b_{12}^2)}{\rho\sqrt{\rho}} \sum_{n=1}^{\infty} E_n [(\sin p\delta_n + p\delta_n \cos p\delta_n) \cos p\delta_n \eta + \\ + \eta p \delta_n \sin p\delta_n \sin p\delta_n \eta + O(\varepsilon)] \exp\left(\frac{\delta_n}{\varepsilon} \ln \rho\right).$$

$$\tau_{r\theta}^{(2)} = -\frac{G_1(b_{12}\rho^2 + 1)}{\rho\sqrt{\rho}} \sum_{n=1}^{\infty} E_n \delta_n [\cos p\delta_n \sin p\delta_n \eta - \\ - \eta p \delta_n \sin p\delta_n \cos p\delta_n \eta + O(\varepsilon)] \exp\left(\frac{\delta_n}{\varepsilon} \ln \rho\right).$$

$$\sin 2p\delta_n + 2p\delta_n = 0.$$

Из (20.2)-(20.4) видно, что перемещения  $u_r$  и  $u_\theta$  имеют порядок  $\varepsilon$ , а напряжения  $\sigma_r, \sigma_\varphi, \sigma_\theta, \tau_{r\theta}$  — порядок единицы.

Решение (20.1) определяет внутреннее напряженно-деформированное состояние. В первых членах разложения по параметру тонкостенности  $\varepsilon$ , решения (20.1) можно рассматривать как решение по прикладной теории плит. Напряженное состояние (20.2)-(20.4) имеет характер пограничного слоя и локализовано вблизи боковой поверхности плиты. Первые члены его асимптотического разложения полностью совпадают с краевым эффектом Сен-Венана в теории толстых плит постоянной толщины. Однако в отличие от изотропной плиты здесь возникают

трудности, которые связаны со следующими обстоятельствами:

Во первых, в зависимости от материальных характеристик спектр спектральной задачи (19.7), (19.8) имеет точку разветвления;

Во вторых, при больших  $G_0$  некоторые погранслоинные решения затухают весьма слабо, и их следует включить в проникающие решения. Естественно, эти обстоятельства усложняют краевую задачу для анизотропной плиты как математически, так и механически.

4. Обратимся теперь к исследованию картины напряженного состояния, описываемого однородными решениями (20.1)-(20.4). Рассмотрим связь однородных решений с главным вектором напряжений  $P$ , действующим в сечении  $p = const$ .

$$P = -2\pi r_1^2 \varepsilon \rho^2 \int_{-1}^1 (\sigma_r \sin \varepsilon \eta - \tau_{r\theta} \cos \varepsilon \eta) \cos \varepsilon \eta d\eta \quad (20.5)$$

Перемещения и напряжения представим в виде:

$$\begin{aligned} u_r &= \sum_{k=1}^{\infty} C_k U_k(\eta) \rho^{z_k - \frac{1}{2}}, \quad u_\theta = \sum_{k=1}^{\infty} C_k W_k(\eta) \rho^{z_k - \frac{3}{2}} \\ \sigma_r &= \sum_{k=1}^{\infty} C_k Q_{rk}(\eta) \rho^{z_k - \frac{3}{2}}, \quad \sigma_\varphi = \sum_{k=1}^{\infty} C_k Q_{\varphi k}(\eta) \rho^{z_k - \frac{3}{2}} \\ \sigma_\theta &= \sum_{k=1}^{\infty} C_k Q_{\theta k}(\eta) \rho^{z_k - \frac{3}{2}}, \quad \tau_{r\theta} = \sum_{k=1}^{\infty} C_k T_{rk}(\eta) \rho^{z_k - \frac{3}{2}} \end{aligned} \quad (20.6)$$

Подставляя (4.2) в (4.1), получаем:

$$P = -2\pi r_1^2 \varepsilon \sum_{k=1}^{\infty} C_k \rho^{z_k + \frac{1}{2}} \omega_k \quad (20.7)$$

$$\omega_k = \int_{-1}^1 [Q_{rk}(\eta) \sin \varepsilon \eta - T_k \cos \varepsilon \eta] \cos \varepsilon \eta d\eta$$

Как и в изотропном случае [3,5], из условия разрешимости задач теории упругости получаем,  $\omega_k = 0$ .

Таким образом, напряженное состояние, соответствующее первой и второй группам решений, является самоуравновешенным в каждом сечении  $\rho = const$ .

Напряженное состояние, определенное формулами (20.1) эквивалентно некоторым усилиям  $T_r$ ,  $T_\varphi$ , отнесенным к срединной плоскости плиты.

Рассмотрим вопрос о снятии напряжений с боковых поверхностей плиты. Допустим, что на сферической части границы заданы напряжения:

$$\sigma_r = f_{1\rho}(\eta), \tau_{r\theta} = f_{2\rho}(\eta), (\rho = 1,2) \text{ при } \rho = \rho_s \quad (20.8)$$

здесь  $f_{1\rho}(\eta)$ ,  $f_{2\rho}(\eta)$  – достаточно гладкие функции и удовлетворяют условиям равновесия

$$\begin{aligned} & 2\pi r_1^2 \varepsilon \int_{-1}^{+1} [f_{11}(\eta) \sin \varepsilon \eta - f_{21}(\eta) \cos \varepsilon \eta] \cos \varepsilon \eta d\eta = \\ & = 2\pi r_2^2 \varepsilon \int_{-1}^{+1} [f_{12}(\eta) \sin \varepsilon \eta - f_{22}(\eta) \cos \varepsilon \eta] \cos \varepsilon \eta d\eta = P = 0 \quad (20.9) \end{aligned}$$

Кроме того  $f_{1\rho}(\eta)$  – четны,  $f_{2\rho}(\eta)$  – нечетные функции относительно  $\eta$ .

Будем отыскивать решение в виде (20.6). Для определения произвольных констант  $C_k$ , как и в работах [3,5], используем вариационный принцип Лагранжа.

Поскольку однородные решения удовлетворяют уравнением равновесия и граничным условиям на конической поверхности, вариационный принцип принимает следующую форму:

$$r_1 \varepsilon \sum_{\rho=1}^{\infty} \rho_s^2 \int [(\sigma_r - f_{1s}) \delta u_r + (\tau_{r\theta} - f_{2s}) \delta u_\theta]_{\rho=\rho_s} \cos \varepsilon \eta d\eta = 0 \quad (20.10)$$

Считая,  $\delta C_k$  независимыми вариациями, из (20.10) получим бесконечную систему линейных алгебраических уравнений:

$$\sum_{k=1}^{\infty} M_{jk} C_k = N_j, \quad (j=1,2,\dots), \quad (20.11)$$

$$M_{jk} = \sum_{s=1}^2 \exp[(z_j + z_k) \ln \rho_s] \int_{-1}^1 (Q_{rk} u_j + T_k W_j) \cos \varepsilon \eta d\eta,$$

$$N_j = \sum_{s=1}^2 \exp[(z_j + 3/2) \ln \rho_s] \int_{-1}^1 (f_{1s} u_j + f_{2s} W_j) \cos \varepsilon \eta d\eta,$$

Разрешимость и сходимость метода редукции для систем (20.11) следует из работ [41].

Используя малость параметра тонкостенности  $\varepsilon$ , можно построить асимптотическое решение системы (20.11). Только надо учесть тот факт, что  $\sigma_r$  и  $\tau_{r\theta}$ , соответствующие корням первой группы, имеют разный порядок  $[\sigma_r \sim 1, \tau_{r\theta} \sim \varepsilon^2]$ . Поэтому уточним предположения относительно внешней нагрузки.

Допустим, что величины  $f_{1\rho}(\eta)$  имеют порядок единица. Касательные напряжения, заданные на сферических частях границы, разложим в таком виде:

$$f_{2s} = f_{2s}^{(1)} + f_{2s}^{(2)} \quad (20.12)$$

$$f_{2s}^{(2)} = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 f_{2s} d\eta; \quad f_{2s}^{(2)} = f_{2s} + f_{2s}^{(1)}$$

Можно показать, что  $f_{2s}^{(1)}$  имеют порядок  $\varepsilon^3$ . Тогда  $f_{2s}^{(2)}$  могут иметь порядок единица.

$$f_{1s} = O(1), \quad f_{2s}^{(1)} = O(\varepsilon^3), \quad f_{2s}^{(2)} = O(1)$$

Не будем разбирать все случаи, рассмотренные выше. Рассмотрим только тот случай, в котором корни харак-

теристического уравнения (19.22) комплексные. Неизвестные постоянные  $C_k$ ,  $D_n$  отыскиваем в виде:

$$C_k = C_{k_0} + \varepsilon C_{k_1} + C_{k_2} + \dots \quad (k=1,2) \quad (20.13)$$

$$D_n = D_{n_0} + \varepsilon D_{n_1} + D_{n_2} + \dots \quad (n=1,2,\dots)$$

Подставляя (20.13) в (20.11) и учитывая (20.12), получаем следующие системы бесконечных линейных алгебраических уравнений:

$$\sum_{k=1}^2 A_{kj} C_{k_0} = \tau_j \quad (j=1,2) \quad (20.14)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} M_{nj} D_{n_0} = B_i \quad (i=1,2,\dots) \quad (20.15)$$

где

$$A_{kj} = 4G \left[ (1 + \nu)(1 - \nu - 2\nu_1^2) m^{-1} (1 - 2z_{k_0}) \right] [(z_{k_0} + z_{j_0}) \ln \rho_s]$$

$$\tau_j = \sum_{s=1}^2 \exp \left[ \left( z_{j_0} + \frac{3}{2} \right) \ln \rho_s \right] \int_1^{-1} f_{1s}(\eta) [4\nu_1 z_{j_0} + 2(\nu_1 - 1)] d\eta;$$

$$m_{ni} = G_1 \sum_{s=1}^2 \exp \left[ \varepsilon^{-1} (\delta_k + \delta_\tau) \ln \rho_s \right] \int_1^{-1} \{ [b_{11} \delta_n F_{1n}(\eta) + b_{12} \delta_n F_{2n}(\eta)] \times \\ \times F_{1i}(\eta) + [F'_{1n}(\eta) + \delta_n(\eta) F_{2n}(\eta)] F_{2i}(\eta) \} d\eta;$$

$$B_i = \sum_{s=1}^2 \rho_s^{3/2} \exp \left( \frac{\delta_i}{\varepsilon} \ln \rho_s \right) \int_1^{-1} [f_{1s}(\eta) F_{1i}(\eta) + f_{2s}(\eta) F_{2i}(\eta)] d\eta$$

Матрица системы (20.15) уже встречалась в теории трансверсально-изотропной плиты постоянной толщины [37]. На основе (20.15) неоднократно проводился численный анализ различных задач. Определение  $A_{j,l}$ ,  $D_{k,l}$  ( $l=1,2,\dots$ ) неизменно сводится к обращению одних и тех же матриц, которые совпадают с матрицами (20.14), (20.15) из структуры полученной системы можно заключить, что неизвестные  $C_{k_0}$ , соответствующие первой группе нулей,

и неизвестные  $D_{n_0}$ , соответствующие второй группе нулей, находятся независимо.

Определение  $C_{k_i}$ ,  $D_{n_i}$  ( $i = 1, 2, \dots$ ) неизменно сводятся к обращению одних и тех же матриц, которые совпадают с матрицами (20.14), (20.15).

Система уравнений (20.14), (20.15) значительно упрощаются, если исследовать напряженное состояние полубесконечной плиты ( $\rho_1 = 1$ ,  $\rho_2 \rightarrow \infty$ ), либо плите с центром ( $\rho_1 = 0$ ,  $\rho_2 = 1$ ).

В первом случае все неизвестные, соответствующие нулям, у которых  $z_{k_0} > 0$ ,  $\text{Re } \delta_n > 0$  следует положить равным нулю, во втором случае в силу ограниченности решения в центре плиты следует положить нулю, те неизвестные, для которых  $z_{k_0} < 0$ ,  $\text{Re } \delta_n < 0$ .

Общее решение в первом члене асимптотики может быть получено суперпозицией решений, соответствующих различным группам корней.

$$\begin{aligned}
 u_r &= \frac{r_1}{\sqrt{\rho}} \left\{ \sum_{k=1}^2 C_{k_0} [4\nu_1 z_{k_0} + 2(\nu_1 - 2)] \exp(z_{k_0} \ln \rho) + \right. \\
 &+ \left. \varepsilon \sum_{n=1}^{\infty} D_{n_0} F_{1n}(\eta) \exp\left(\frac{\delta_n}{\varepsilon} \ln \rho\right) \right\} \\
 u_\theta &= \frac{r_1 \varepsilon}{\sqrt{\rho}} \left\{ \sum_{k=1}^2 \eta(1 + \nu)(1 - \nu_1) \eta C_{k_0} \exp(z_{k_0} \ln \rho) + \right. \\
 &+ \left. \varepsilon \sum_{n=1}^{\infty} D_{n_0} F_{2n}(\eta) \exp\left(\frac{\delta_n}{\varepsilon} \ln \rho\right) \right\} \\
 \sigma_r &= \frac{2G_1}{\rho\sqrt{\rho}} \left\{ C_k [(1 + \nu)(1 - \nu - 2\nu_1^2)] m^{-1} (1 - 2z_{k_0}) \right\} \exp(z_{k_0} \ln \rho) +
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{n=1}^{\infty} D_{n_0} [b_{11} \delta_n F_{1n}(\eta) + b_{12} F'_{2n}(\eta)] \exp\left(\frac{\delta_n}{\varepsilon} \ln \rho\right) \Big\} \quad (20.16) \\
\sigma_\varphi &= \frac{2G_1}{\rho\sqrt{\rho}} \left\{ - \sum_{n=1}^2 4(1+\nu)(1-\nu_1) \exp(z_{k_0} \ln \rho) + \right. \\
& + \sum_{n=1}^{\infty} D_{n_0} [b_{12} \delta_n F_{1n}(\eta) + b_{23} F'_{2n}(\eta)] \exp\left(\frac{\delta_n}{\varepsilon} \ln \rho\right) \Big\} \\
\sigma_\theta &= \frac{2G_1}{\rho\sqrt{\rho}} \sum_{n=1}^{\infty} D_{n_0} [b_{12} \delta_n F_{1n}(\eta) + b_{22} F'_{2n}(\eta)] \exp\left(\frac{\delta_n}{\varepsilon} \ln \rho\right) \\
\tau_{r\theta} &= \frac{2G_1}{\rho\sqrt{\rho}} \sum_{n=1}^{\infty} D_{n_0} [F'_{1n}(\eta) + \delta_n F_{2n}(\eta)] \exp\left(\frac{\delta_n}{\varepsilon} \ln \rho\right)
\end{aligned}$$

В (20.16) первые члены правых частей соответствуют прикладной теории плит, следующие – добавки к решений Кирхгофа. На границе области при  $r = r_2$  ( $i = 1, 2$ ) в напряжении  $\sigma_r$ ,  $\sigma_\varphi$  добавочные члены имеют тот же порядок, что и в прикладной теории, а в напряжении  $\sigma_\theta$ ,  $\tau_{r\theta}$  при  $\varepsilon \rightarrow 0$  основную роль начинают играть добавочные члены.

Весь выше приведенный анализ показывает, что метод однородных решений не только позволяет вскрыть характерные особенности трехмерного напряженно-деформированного состояния анизотропной плиты переменной толщины, но и может служить эталоном проверки точности двумерной теории анизотропной плиты.

В заключение отметим, что при  $G_0 = 1$ , мы получаем результаты работ [5,46] в случае растяжения-сжатия плиты.

## §21. Задача растяжения-сжатия трансропной плиты переменной толщины при жесткой заделке торцевой части границы

На основе метода однородных решений, разработанных выше, исследуется асимптотическое поведение решения задачи растяжения-сжатия трансропной плиты переменной толщины, когда торца жестко заделаны. Показано, что решения этих задач в первом члене асимптотики совпадают с решениями аналогичной задачи теории упругости для анизотропной полосы.

1. Предположим, что на торцевой поверхности плиты заданы граничные условия

$$u_r = 0, u_\theta = 0 \quad \text{при} \quad \theta = \frac{\pi}{2} \pm \varepsilon \quad (21.1)$$

Аналогично рассматривается случай, когда

$$\sigma_\theta = 0, u_\theta = 0 \quad \text{при} \quad \theta = \frac{\pi}{2} \pm \varepsilon \quad (21.2)$$

Удовлетворяя однородные граничные условия (21.1) получаем следующую линейную систему уравнений:

$$\begin{aligned} A_1 T_{\gamma_1}(\theta_1) C_{\gamma_1} + A_2 T_{\gamma_2}(\theta_1) C_{\gamma_2} &= 0 \\ T'_{\gamma_1}(\theta_1) C_{\gamma_1} + T'_{\gamma_2}(\theta_1) C_{\gamma_2} &= 0 \end{aligned} \quad (21.3)$$

Эта система имеет нетривиальные решения тогда и только тогда, когда

$$\Delta(z, \varepsilon) = \begin{vmatrix} A_1 T_{\gamma_1}(\theta_1) & A_2 T_{\gamma_2}(\theta_1) \\ T'_{\gamma_1}(\theta_1) & T'_{\gamma_2}(\theta_1) \end{vmatrix} = 0 \quad (21.4)$$

Раскрывая (21.4) получаем характеристическое уравнение для определения собственных значений  $z$ :

$$\Delta(z, \varepsilon) = A_1 T_{\gamma_1}(\theta_1) T'_{\gamma_2}(\theta_1) - A_2 T_{\gamma_2}(\theta_1) T'_{\gamma_1}(\theta_1) \quad (21.5)$$

$$\theta = \frac{\pi}{2} \pm \varepsilon$$

$\gamma_1, \gamma_2$  – корни биквадратного уравнения (19.10).

Трансцендентное уравнение (21.5) определяет счетное множество корней  $z_k$ , а соответствующие им постоянные  $C_{\gamma_1}, C_{\gamma_2}$  пропорциональны алгебраическим дополнениям какой-либо строки определителя системы (21.3).

Выбирая в качестве решения системы алгебраические дополнения элементов первой строки, получим

$$C_{\gamma_1} = C_n T'_{\gamma_{2n}}(\theta_1), \quad C_{\gamma_2} = -C_n T'_{\gamma_{1n}}(\theta) \quad (21.6)$$

Подставляя (21.6) в (9.9), суммируя по всем корням уравнения (1.47) и учитывая обобщенный закон Гука, получаем однородные решения следующего вида:

$$\begin{aligned} u_r &= \frac{r_1}{\sqrt{\rho}} \sum_{n=1}^{\infty} C_n \rho^{z_n} u_n(\theta), \\ u_\theta &= \frac{r_1}{\sqrt{\rho}} \sum_{n=1}^{\infty} C_n \rho^{z_n} w_n(\theta) \\ \sigma_r &= \frac{G_1}{\rho \sqrt{\rho}} \sum_{n=1}^{\infty} C_n \rho^{z_n} Q_m(\theta), \\ \sigma_\varphi &= \frac{G_1}{\rho \sqrt{\rho}} \sum_{n=1}^{\infty} C_n \rho^{z_n} Q_{\varphi n}(\theta) \\ \sigma_\theta &= \frac{G_1}{\rho \sqrt{\rho}} \sum_{n=1}^{\infty} C_n \rho^{z_n} Q_{\theta n}(\theta), \\ \tau_{r\theta} &= \frac{G_1}{\rho \sqrt{\rho}} \sum_{n=1}^{\infty} C_n \rho^{z_n} T_n(\theta) \end{aligned} \quad (21.7)$$

Здесь  $C_n$  – произвольные постоянные,

$$u_n(\theta) = A_1 T'_{\gamma_2}(\theta_1) T_{\gamma_1}(\theta) - A_2 T'_{\gamma_1}(\theta_1) T_{\gamma_2}(\theta)$$

$$w_n = b_0 [T'_{\gamma_2}(\theta_1) T_{\gamma_1}(\theta) - T'_{\gamma_1}(\theta_1) T_{\gamma_2}(\theta)]$$

$$\begin{aligned}
Q_m &= \left[ A_1 b_{11} \left( z_n - \frac{1}{2} \right) + 2b_{12} A_1 - b_{12} b_0 \gamma_{1n} (\gamma_{1n} + 1) \right] T'_{\gamma_{2n}} (\theta_1) T_{\gamma_{1n}} (\theta) - \\
&- \left[ A_2 b_{11} \left( z_n - \frac{1}{2} \right) + 2b_{12} A_1 - b_{12} b_0 \gamma_{2n} (\gamma_{2n} + 1) \right] T'_{\gamma_{1n}} (\theta_1) T_{\gamma_{2n}} (\theta) \\
Q_{\varphi n} &= \left\{ \left[ A_1 b_{12} \left( z_n - \frac{1}{2} \right) + (b_{22} + b_{23}) A_1 - b_{23} b_0 \gamma_{1n} (\gamma_{1n} + 1) \right] T_{\gamma_{1n}} (\theta) + \right. \\
&+ b_0 (b_{22} - b_{23}) \operatorname{ctg} \theta T'_{\gamma_{1n}} (\theta) \left. \right\} T'_{\gamma_{2n}} (\theta) - \left\{ \left[ A_2 b_{12} \left( z_n - \frac{1}{2} \right) + (b_{22} + b_{23}) A_2 - \right. \right. \\
&- b_{23} b_0 \gamma_{2n} (\gamma_{2n} + 1) \left. \right] T_{\gamma_{2n}} (\theta) + b_0 (b_{22} - b_{23}) \operatorname{ctg} \theta T'_{\gamma_{2n}} (\theta) \left. \right\} T'_{\gamma_{1n}} (\theta_1) \\
Q_{\theta n} &= \left\{ \left[ A_1 b_{12} \left( z_n - \frac{1}{2} \right) + (b_{22} + b_{23}) A_1 - b_{22} b_0 \gamma_{1n} (\gamma_{1n} + 1) \right] T_{\gamma_{1n}} (\theta) + \right. \\
&+ b_0 (b_{23} - b_{22}) \operatorname{ctg} \theta T'_{\gamma_{1n}} (\theta) \left. \right\} T'_{\gamma_{2n}} (\theta) - \left\{ \left[ A_2 b_{12} \left( z_n - \frac{1}{2} \right) + (b_{22} + b_{23}) A_2 - \right. \right. \\
&- b_{22} b_0 \gamma_{2n} (\gamma_{2n} + 1) \left. \right] T_{\gamma_{2n}} (\theta) + b_0 (b_{23} - b_{22}) \operatorname{ctg} \theta T'_{\gamma_{2n}} (\theta) \left. \right\} T'_{\gamma_{1n}} (\theta_1) \\
T_n &= \left[ A_1 + \left( z_n - \frac{3}{2} \right) b_0 \right] T'_{\gamma_{1n}} (\theta) T'_{\gamma_{2n}} (\theta_1) - \\
&- \left[ A_2 + \left( z_n - \frac{3}{2} \right) b_0 \right] T'_{\gamma_{2n}} (\theta) T'_{\gamma_{1n}} (\theta_1)
\end{aligned}$$

2. Обратимся к исследованию поведения корней уравнения (21.5) при малых значениях параметра  $\varepsilon$ .

При малых  $\varepsilon$  и конечных  $z$   $\Delta(z, \varepsilon)$  можно представить в виде

$$\begin{aligned}
\Delta(z, \varepsilon) &= 4b_{22} [\gamma_2 (\gamma_2 + 1) - \gamma_1 (\gamma_1 + 1)]^2 \times \\
&\times [z^2 - 9/4 + 2G_0] \varepsilon^2 [1 + O(\varepsilon^2)] \quad (21.8)
\end{aligned}$$

Из (21.8) видно, что  $z_{1,2} = \pm \sqrt{9/4 - 2G_0}$  являются корнями характеристического уравнения. Как в изотроп-

ном случае [5] можно доказать, что все остальные нули функции  $\Delta(z, \varepsilon)$  безгранично растут при  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Для построения асимптотики второй группы нулей отыскиваем их в виде:

$$z_n = \frac{\delta_n}{\varepsilon} + O(\varepsilon) \quad (n = k - 2, k - 3, 4, \dots) \quad (21.9)$$

В этом случае характеристическое уравнения

$$\tau^2 - 2q_1\tau + q_2 = 0, \quad \gamma_n = \sqrt{\tau_n} \quad (21.10)$$

$$2q_1 = \frac{1}{b_{22}}(b_{11}b_{22} - b_{12}^2 - 2b_{12}\delta_n^2),$$

$$q_2 = b_{11}b_{22}^{-1}\delta_n^4$$

Рассмотрим следующие возможные случаи:

$$1. \quad q_1 > 0, \quad q_1^2 - q_2 > 0, \quad \gamma_{1,2} = \pm S_1 \delta_n, \quad \gamma_{3,4} = \pm S_2 \delta_n$$

$$S_{1,2} = \sqrt{q_1 \pm \sqrt{q_1^2 - q_2}}, \quad q_1^2 > q_2$$

$$S_{1,2} = \alpha \pm i\beta \sqrt{q_1 \pm i\sqrt{q_2 - q_1^2}}, \quad q_1^2 < q_2$$

2. Корни характеристического уравнения (21.10) кратные

$$\gamma_{1,2} = \gamma_{3,4} = \pm \delta_n p, \quad q_1 > 0, \quad q_1^2 - q_2 = 0, \quad p = \sqrt{q_1}$$

$$3. \quad q_1 < 0, \quad q_1^2 - q_2 \neq 0, \quad \gamma_{1,2} = \pm i \delta_n S_1, \quad \gamma_{3,4} = \pm i \delta_n S_2$$

$$S_{1,2} = \sqrt{|q_1| \pm i\sqrt{q_1^2 - q_2}}, \quad q_1^2 > q_2$$

$$S_{1,2} = \sqrt{|q_1| \pm i\sqrt{q_2 - q_1^2}}, \quad q_1^2 < q_2$$

$$4. \quad q_1 < 0, \quad q_1^2 - q_2 = 0, \quad \gamma_{1,2} = \gamma_{3,4} = \pm i \delta_n p, \quad p = \sqrt{|q_1|}$$

В случаях 1,2 после подстановки (21.9) в (21.5) и преобразования его с помощью асимптотических разложений  $T_\nu(\theta)$ ,  $T'_\nu(\theta)$  для  $\delta_n$  соответственно получаем

$$\frac{1 + b_{22}S_1S_2}{1 - b_{22}S_1S_2} (S_2 - S_1) \sin(S_2 + S_1) \delta_n +$$

$$+(S_2 + S_1)\sin(S_2 - S_1)\delta_n = 0 \quad (21.11)$$

$$\frac{\rho^2 + b_{11}}{\rho^2 - b_{11}} = \sin 2p\delta_n + 2p\delta_n = 0 \quad (21.12)$$

$$\beta(1 + b_{22}\beta^2 - 3b_{22}\alpha^2)\operatorname{sh}2\alpha\delta_n + \alpha(1 - b_{22}\alpha^2 + 3b_{22}\beta^2)\sin 2\beta\delta_n = 0 \quad (21.13)$$

Что касается 3 и 4, то для них результаты получаются из случаев 1 и 2 формальной заменой  $S_1, S_2, p$  на  $iS_1, iS_2, ip$ .

Эти уравнения имеют счетное множество корней и фактически совпадают с характеристическими уравнениями аналогичной задачи, для трансверсально-изотропного упругого слоя.

Непосредственной проверкой можно установить, что корням  $z_{1,2} = \pm \sqrt{\frac{9}{4} - 2G_0}$  соответствует тривиальное решение.

Приведем асимптотическое построение однородных решений, соответствующих различным группам корней характеристического уравнения.

### Группа 1.

$$\begin{aligned} u_r^{(1)} &= \frac{r_1 \varepsilon}{\sqrt{\rho}} \sum_{n=1}^{\infty} C_n u_n^{(1)}(\eta) \exp\left(\frac{\delta_n}{\varepsilon} \ln \rho\right) \\ u_\theta^{(1)} &= \frac{r_1 \varepsilon}{\sqrt{\rho}} \varepsilon \sum_{n=1}^{\infty} C_n w_n^{(1)}(\eta) \exp\left(\frac{\delta_n}{\varepsilon} \ln \rho\right) \\ \sigma_r^{(1)} &= \frac{G_1}{\rho \sqrt{\rho}} \sum_{n=1}^{\infty} C_n Q_m^{(1)}(\eta) \exp\left(\frac{\delta_n}{\varepsilon} \ln \rho\right) \\ \sigma_\varphi^{(1)} &= \frac{G_1}{\rho \sqrt{\rho}} \sum_{n=1}^{\infty} C_n Q_\varphi^{(1)}(\eta) \exp\left(\frac{\delta_n}{\varepsilon} \ln \rho\right) \end{aligned} \quad (21.14)$$

$$\sigma_{\theta}^{(1)} = \frac{G_1}{\rho\sqrt{\rho}} \sum_{n=1}^{\infty} C_n Q_{\theta n}^{(1)}(\eta) \exp\left(\frac{\delta_n}{\varepsilon} \ln \rho\right)$$

$$\tau_{r\theta}^{(1)} = \frac{G_1}{\rho\sqrt{\rho}} \sum_{n=1}^{\infty} C_n T_n^{(1)}(\eta) \exp\left(\frac{\delta_n}{\varepsilon} \ln \rho\right)$$

где

$$u_n^{(1)}(\eta) = S_2(1 - b_{22}S_1^2) \sin S_2\delta_n \cos S_1\delta_n\eta -$$

$$- S_1(1 - b_{22}S_2^2) \sin S_1\delta_n \cos S_2\delta_n\eta$$

$$w_n^{(1)}(\eta) = (b_{12} + 1)S_1S_2(\sin S_2\delta_n \sin S_1\delta_n\eta - \sin S_1\delta_n \cos S_2\delta_n\eta)$$

$$Q_{rm}^{(1)}(\eta) = \delta_n [b_{11}u_n^{(1)} - b_{12}\delta_n w_n^{(1)}] \quad (21.15)$$

$$Q_{\varphi n}^{(1)}(\eta) = \delta_n [b_{12}u_n^{(1)} - b_{22}\delta_n w_n^{(1)}]$$

$$Q_{\theta n}^{(1)}(\eta) = \delta_n [b_{12}u_n^{(1)} - b_{23}\delta_n w_n^{(1)}]$$

$$T_n^{(1)} = \left[ \frac{\partial u_n^{(1)}}{\partial \eta} - \delta_n w_n^{(1)} \right]$$

### Группа 2.

$$u_r^{(2)} = \frac{r_1\varepsilon}{\sqrt{\rho}} \sum_{n=1}^{\infty} E_n u_n^{(2)}(\eta) \exp\left(\frac{\delta_n}{\varepsilon} \ln \rho\right)$$

$$u_{\theta}^{(2)} = \frac{r_1\varepsilon}{\sqrt{\rho}} \sum_{n=1}^{\infty} E_n w_n^{(2)}(\eta) \exp\left(\frac{\delta_n}{\varepsilon} \ln \rho\right)$$

$$\sigma_r^{(2)} = \frac{G_1}{\rho\sqrt{\rho}} \sum_{n=1}^{\infty} E_n Q_{rm}^{(2)}(\eta) \exp\left(\frac{\delta_n}{\varepsilon} \ln \rho\right)$$

$$\sigma_{\varphi}^{(2)} = \frac{G_1}{\rho\sqrt{\rho}} \sum_{n=1}^{\infty} E_n Q_{\varphi n}^{(2)}(\eta) \exp\left(\frac{\delta_n}{\varepsilon} \ln \rho\right) \quad (21.16)$$

$$\sigma_{\theta}^{(2)} = \frac{G_1}{\rho\sqrt{\rho}} \sum_{n=1}^{\infty} E_n Q_{\theta n}^{(2)}(\eta) \exp\left(\frac{\delta_n}{\varepsilon} \ln \rho\right)$$

$$\tau_{r\theta}^{(2)} = \frac{G_1}{\rho\sqrt{\rho}} \sum_{n=1}^{\infty} E_n T_n^{(2)}(\eta) \exp\left(\frac{\delta_n}{\varepsilon} \ln \rho\right)$$

где

$$u_n^{(2)} = (b_{12} + 1)\rho \left\{ (\rho^2 - b_{11}) \cos p\delta_n + (p\delta_n)^{-1} \times \right. \\ \left. \times (\rho^2 - b_{11}) \sin p\delta_n \right\} \cos p\delta_n \eta + \eta (\rho^2 - b_{11}) \sin p\delta_n \sin p\delta_n \eta \\ w_n^{(2)} = (b_{11} - \rho^2)^2 (\cos p\delta_n \sin p\delta_n \sin p\delta_n \eta - \eta \sin p\delta_n \cos p\delta_n \eta)$$

Выражения для  $Q_m^{(2)}$ ,  $T_n^{(2)}$  получается из (21.5) простой заменой  $u_n^{(1)}$ ,  $w_n^{(1)}$  на  $u_n^{(2)}$ ,  $w_n^{(2)}$  соответственно.

### Группа 3.

$$u_r^{(3)} = \frac{r_1}{\sqrt{\rho}} \varepsilon \sum_{n=1}^{\infty} D_n u_n^{(3)}(\eta) \exp\left(\frac{\delta_n}{\varepsilon} \ln \rho\right) \\ u_\theta^{(3)} = \frac{r_1}{\sqrt{\rho}} \varepsilon \sum_{n=1}^{\infty} D_n w_n^{(3)}(\eta) \exp\left(\frac{\delta_n}{\varepsilon} \ln \rho\right), \quad (21.17)$$

где

$$u_n^{(3)}(\eta) = (a_0 \cos \beta \delta_n \eta \operatorname{ch} \alpha \delta_n \eta - b_0 \cos \beta \delta_n \eta \operatorname{sh} \alpha \delta_n \eta) \Delta_{1n} + \\ + (l_0 \cos \beta \delta_n \eta \operatorname{ch} \alpha \delta_n \eta + a_0 \sin \beta \delta_n \eta \operatorname{sh} \alpha \delta_n \eta) \Delta_{2n}, \\ w_n^{(3)}(\eta) = (b_{12} + 1) [(\alpha \cos \beta \eta \operatorname{sh} \alpha \delta_n \eta + \beta \sin \beta \delta_n \eta \operatorname{ch} \alpha \delta_n \eta) \Delta_{1n} - \\ - (\beta \cos \beta \delta_n \eta \operatorname{sh} \alpha \delta_n \eta + \alpha \sin \beta \delta_n \eta \operatorname{ch} \alpha \delta_n \eta) \Delta_{2n}], \\ a_0 = 1 - b_{22}(\alpha^2 - \beta^2), \quad l_0 = 2b_{22}\alpha\beta, \\ \Delta_{1n} = -\alpha \cos \beta \delta_n \operatorname{sh} \alpha \delta_n + \beta \sin \beta \delta_n \operatorname{ch} \alpha \delta_n, \\ \Delta_{2n} = \beta \cos \beta \delta_n \operatorname{sh} \alpha \delta_n + \alpha \sin \beta \delta_n \operatorname{ch} \alpha \delta_n, \\ \eta = \varepsilon^{-1}(\theta - \theta_0).$$

Выражения для  $\sigma_r^{(3)}$ , ...,  $w_r^{(3)}$  получаются из (21.15) заменой  $u_r^{(1)}$  на  $u_r^{(3)}$ ,  $w_n^{(2)}$  и  $u_\theta^{(1)}$  на  $u_\theta^{(3)}$  соответственно.

$C_n, E_n, D_n$  – произвольные постоянные.

Важно отметить, что решение (21.17) характерно только для анизотропных тел при  $G_0 = 1$  полностью исчезает.

Что касается решение (21.14), (21.16) при  $G_0 = 1$  они сливаются в одну и полностью совпадают с краевых эффектов Сен-Венана в теории изотропных плит.

В общем случае нагружения произвольные постоянные  $C_n, E_n, D_n$ , как и выше, могут быть определены с помощью вариационного принципа Лагранжа. При специальных условиях опирания торца плиты они определяются точно с помощью обобщенного условия ортогональности для конуса, которые справедливы и для плит [1].

## ГЛАВА 6

### АСИМПТОТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ЗАДАЧИ ИЗГИБА ДЛЯ ТРАНСТРОПНОЙ ПЛИТЫ ПЕРЕМЕННОЙ ТОЛЩИНЫ

В настоящей главе дано решение задачи изгиба трансверсально-изотропной плиты переменной толщины. Исследуется асимптотическое поведение решения при малом значении параметра тонкостенности.

#### §22. Построение однородных решений

Рассмотрим осесимметричную задачу изгиба транс-тропной плиты, толщина которой  $h = \varepsilon r$ .

Предположим, что на торцах плиты заданы следующие граничные условия:

$$\sigma_\theta = (-1)^n \sigma(r), \quad \tau_{r\theta} = T(r) \quad \text{при} \quad \theta = \frac{\pi}{2} \pm (-1)^n \varepsilon \quad (22.1)$$

На боковой поверхности заданы напряжения:

$$\sigma_r = f_{1s}(\theta), \quad \tau_{r\theta} = f_{2s}(\theta) \quad \text{при} \quad r = r_s \quad (s = 1, 2) \quad (22.2)$$

Функция  $f_{is}$  ( $i = 1, 2$ ) удовлетворяют условиям равновесия

$$\begin{aligned} 2\pi r_1^2 \int_{\pi/2-\varepsilon}^{\pi/2+\varepsilon} [f_{11} \sin \varepsilon \eta - f_{21}(\eta) \cos \varepsilon \eta] \cos \varepsilon \eta d\eta = \\ = 2\pi r_2^2 \varepsilon \int_{\pi/2-\varepsilon}^{\pi/2+\varepsilon} [f_{12} \sin \varepsilon \eta - f_{22}(\eta) \cos \varepsilon \eta] \cos \varepsilon \eta d\eta = P \end{aligned} \quad (22.3)$$

$f_{1s}(\theta)$ ,  $f_{2s}(\theta)$  – достаточно гладкие функции. Кроме этого  $f_{1s}(\theta)$  – нечетные,  $f_{2s}(\theta)$  – четные функции относительно срединной плоскости плиты.

$P$  – главный вектор усилий, действующих в произвольном сечении  $r = const$ .

В настоящей главе будем считать, что на торцах плиты заданы однородные граничные условия ( $\sigma = \tau = 0$ ).

$$\sigma_{\theta} = 0, \tau_{r\theta} = 0 \text{ при } \theta = \frac{\pi}{2} \pm \varepsilon \quad (22.4)$$

Используя результаты пятой главы, решение задачи представим в виде:

$$\begin{aligned} u_r &= r^{\lambda} [A_1 C_{\gamma_1} F_{\gamma_1}(\theta) + A_2 C_{\gamma_2} F_{\gamma_2}(\theta)] \\ u_{\theta} &= r^{\lambda} b_0 [C_{\gamma_1} F'_{\gamma_1}(\theta) + C_{\gamma_2} F'_{\gamma_2}(\theta)] \\ F_{\gamma}(\theta) &= P_{\gamma}(\cos \theta) - P_{\gamma}(-\cos \theta) \end{aligned} \quad (22.5)$$

Остальные обозначения те же, что в первой главе.

Удовлетворение граничных условий на торцах плиты (22.4) дает однородную линейную алгебраическую систему второго порядка относительно постоянных  $C_{\gamma_1}$ ,  $C_{\gamma_2}$ .

$$\begin{aligned} &\{[(b_{12}\lambda + b_{22} + b_{23})A_1 - b_{22}b_0\gamma_1(\gamma_1 + 1)]F_{\gamma_1}(\theta_1) + (b_{23} - b_{22}) \times \\ &\times b_0 t g \varepsilon F'_{\gamma_1}(\theta_1)\} C_{\gamma_1} + \{[(b_{12}\lambda + b_{22} + b_{23})A_2 - b_{22}b_0\gamma_2(\gamma_2 + 1)] \times \\ &\times F_{\gamma_2}(\theta_1) + (b_{23} - b_{22}) b_0 t g \varepsilon F'_{\gamma_2}(\theta_1)\} C_{\gamma_2} = 0, \\ &[A_1 + (\lambda - 1)b_0]F'_{\gamma_1}(\theta_1)C_{\gamma_1} + [A_2 + (\lambda - 1)b_0]F'_{\gamma_2}(\theta_1) = 0 \end{aligned} \quad (22.6)$$

Из условия существования нетривиальных решений этой системы получаем характеристическое уравнение для определения собственных значения  $\lambda$ :

$$\begin{aligned} \Delta(\lambda, \theta_1) &= C_{11}d_{12}F_{\gamma_1}(\theta_1)F'_{\gamma_2}(\theta_1) - C_{12}d_{11}F_{\gamma_2}(\theta_1)F'_{\gamma_1}(\theta_1) + \\ &+ C_{13}(d_{12} - d_{11})t g \varepsilon T'_{\gamma_1}(\theta_1)T'_{\gamma_2}(\theta_1) = 0 \end{aligned} \quad (22.7)$$

При этом

$$\begin{aligned} \Delta_{1n} &= C_{\gamma_{1n}} = [A_2 + (\lambda_n - 1)b_0]F'_{\gamma_{2n}}(\theta_1), \\ C_{\gamma_2} &= -[A_1 + (\lambda_n - 1)b_0]F'_{\gamma_n}(\theta_1) = \Delta_{2n} \end{aligned} \quad (22.8)$$

Трансцендентное уравнение (22.7) определяет счетное множество  $\lambda_k$  с точкой сгущения на бесконечности.

Подставляя (22.8) в (22.5) с учетом (19.3) и суммируя по всем корням  $\lambda_k$  получаем однородные решения следующего вида:

$$\begin{aligned}
 u_r &= \sum_{n=1}^{\infty} C_n r^{\lambda_n} u_n(\theta), \\
 u_\theta &= \sum_{n=1}^{\infty} C_n r^{\lambda_n} w_n(\theta) \\
 \sigma_r &= G_1 \sum_{n=1}^{\infty} C_n r^{\lambda_n} Q_m(\theta), \\
 \sigma_\varphi &= G_1 r^{-1} \sum_{n=1}^{\infty} C_n r^{\lambda_n} Q_{\varphi n}(\theta) \\
 \sigma_\theta &= G_1 r^{-1} \sum_{n=1}^{\infty} C_n r^{\lambda_n} Q_{\theta n}(\theta), \\
 \tau_{r\theta} &= G_1 r^{-1} \sum_{n=1}^{\infty} C_n r^{\lambda_n} T_n(\theta)
 \end{aligned} \tag{22.9}$$

Здесь  $C_n$  – произвольные постоянные.

$$\begin{aligned}
 u_n(\theta) &= A_1 \Delta_{1n} F_{\gamma_{1n}}(\theta) + A_2 \Delta_{2n} F_{\gamma_{2n}}(\theta), \\
 w_n(\theta) &= b_0 [\Delta_{1n} F'_{\gamma_{1n}}(\theta) + \Delta_{2n} F'_{\gamma_{2n}}(\theta)], \tag{22.10}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 Q_m(\theta) &= [A_1 b_{11} \lambda_n + 2b_{12} A_1 - b_{12} b_0 \gamma_{1n} (\gamma_{1n} + 1)] \Delta_{1n} F_{\gamma_{1n}}(\theta) + \\
 &+ [A_2 b_{11} \lambda_n + 2b_{12} A_2 - b_{12} b_0 \gamma_{2n} (\gamma_{2n} + 1)] \Delta_{2n} F_{\gamma_{2n}}(\theta), \\
 Q_{\varphi n}(\theta) &= \{ [A_1 b_{12} \lambda_n + (b_{22} + b_{23}) A_1 - b_{23} b_0 \gamma_{1n} (\gamma_{1n} + 1)] F_{\gamma_{1n}}(\theta) + \\
 &+ b_0 (b_{22} - b_{23}) \text{ctg} \theta F'_{\gamma_{1n}}(\theta) \} \Delta_{2n} + \{ [A_2 b_{12} \lambda_n + (b_{22} + b_{23}) A_2 - \\
 &- b_{23} b_0 \gamma_{2n} (\gamma_{2n} + 1)] F_{\gamma_{2n}}(\theta) + b_0 (b_{22} - b_{23}) \text{ctg} \theta F'_{\gamma_{2n}}(\theta) \} \Delta_{2n}, \tag{22.11} \\
 Q_{\theta n}(\theta) &= \{ [A_1 b_{12} \lambda_n + (b_{22} + b_{23}) A_1 - b_{22} b_0 \gamma_{1n} (\gamma_{1n} + 1)] F_{\gamma_{1n}}(\theta) +
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + b_0(b_{23} - b_{22}) \operatorname{ctg} \theta F'_{\gamma_{1n}}(\theta) \Delta_{1n} + \{ [A_2 b_{12} \lambda_n + (b_{22} + b_{23}) A_2 - \\
& - b_{22} b_0 \gamma_{2n} (\gamma_{2n} + 1)] F_{\gamma_{2n}}(\theta) + b_0(b_{23} - b_{22}) \operatorname{ctg} \theta F'_{\gamma_{2n}}(\theta) \} \Delta_{2n}, \\
T_n(\theta) & = [A_1 + (\lambda_n - 1) b_0] F'_{\gamma_{1n}}(\theta) \Delta_{1n} + [A_2 + (\lambda_n - 1) b_0] F'_{\gamma_{2n}}(\theta) \Delta_{2n}.
\end{aligned}$$

Как и пятой главе для эффективного изучения корней характеристического уравнения положим

$$\theta = \frac{\pi}{2} + \varepsilon \eta, \quad -1 \leq \eta \leq 1 \quad (22.12)$$

Подставляя (22.12) в (22.7), получаем:

$$D(z, \varepsilon) = \Delta(\lambda, \theta_1) = 0 \quad (22.13)$$

Относительно нулей функции  $D(z, \varepsilon)$  докажем следующее утверждение: функция  $D(z, \varepsilon)$  имеет две группы нулей со следующими асимптотическими свойствами при  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

Первая группа состоит из четырех нулей и характеризуется тем, что все они при  $\varepsilon \rightarrow 0$  имеют конечный предел, причем двое из них не зависят от малого параметра  $\varepsilon$ .

Вторая группа состоит из счетного множества нулей, которые при  $\varepsilon \rightarrow 0$  имеют порядок  $O(\varepsilon^{-1})$ .

Для доказательства первого утверждения, раскладываем функции  $F_\nu(\theta)$ ,  $F'_\nu(\theta)$  в окрестности плоскости

$\theta = \frac{\pi}{2}$  в ряд по  $\varepsilon$ , получим

$$\begin{aligned}
F_\nu(\theta) & = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \frac{\Gamma\left(1 + \frac{\nu}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right)} \sin\left(\nu \frac{\pi}{2}\right) \varepsilon \eta \left\{ 1 - \frac{1}{3!} \eta^2 [\nu(\nu+1) - 1] \varepsilon^2 + \right. \\
& \left. + \frac{1}{5!} \eta^4 [\nu^2(\nu+1)^2 - 4\nu(\nu+1) + 5] \varepsilon^4 + \dots \right\} \quad (22.14)
\end{aligned}$$

$$F'_\nu(\theta) = -\frac{4}{\sqrt{\pi}} \frac{\Gamma\left(1 + \frac{\nu}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right)} \sin\left(\nu \frac{\pi}{2}\right) \left\{ 1 - \frac{1}{2} \eta^2 [(\nu-1)(\nu+2) - 1] \varepsilon^2 + \right. \\ \left. + \frac{1}{4!} \eta^4 [\nu^2(\nu+1)^2(\nu-1) - 4\nu(\nu+1) + 5] \varepsilon^4 + \dots \right\}$$

Подставляя (22.14) в (22.13) функции  $D(z, \varepsilon)$  представим в виде:

$$D(z, \varepsilon) = 3^{-1} A \left( z^2 - \frac{1}{4} \right) \varepsilon^3 \left[ D_0(z) + \frac{1}{5(1-\nu_1\nu_2)} D_1(z) \varepsilon^2 + \dots \right] \quad (22.15)$$

где

$$A_{kj} = 16G_0^2 [(1+\nu)E_0 b_0 [\gamma_2(\gamma_2+1) - \gamma_1(\gamma_1+1)] \times \\ \times \sin\left(\gamma_1 \frac{\pi}{2}\right) \sin\left(\gamma_2 \frac{\pi}{2}\right) \Gamma\left(1 + \frac{\gamma_1}{2}\right) \Gamma\left(1 + \frac{\gamma_2}{2}\right) \left[ \Gamma\left(1 + \frac{\gamma_1+1}{2}\right) \Gamma\left(1 + \frac{\gamma_2+1}{2}\right) \right]^{-1} \\ D_0(z) = 4z^2 + 12\nu^2 - 9 - 4E_0^{-1} \\ D_1(z) = -4(1+\nu)(G_0 - \nu_2)z^4 + 2[2(1-\nu_1\nu_2)(3-2\nu) + \\ + (1+\nu)(G_0 - \nu_2)(E_0 + 4E_0G_0 + 2 - 6\nu_1) - 2(1+\nu) \times \\ \times (2E_0G_0 - \nu_1 - 1)(G_0 - 1)]z^2 - (1-\nu_1\nu_2)(40E_0G_0 - \\ - 60\nu_1 - 2\nu + 23) - \frac{1}{2}(1+\nu)(G_0 - \nu_2) \left( 2E_0G_0 + 2 - 6\nu_1 + \frac{E_0}{2} \right) + \\ + (1+\nu)(2E_0G_0 - \nu_1 - 1)(G_0 - 1) + 4[(1+\nu)(\nu_1 - 1)(2E_0G_0 - 3\nu_1 + 1) + \\ + 2(1-\nu_1\nu_2)(3-2\nu)E_0](G_0 - 1) + 8(1+\nu)(1-\nu_1)E_0(G_0 - 1)^2 \\ \text{Здесь } \Gamma(x) \text{ — гамма функция Эйлера.}$$

Из (22.15) непосредственно видно, что  $z_{0,1} = \pm \frac{1}{2}$  являются нулями функции  $D(z, \varepsilon)$ . Отметим, что существо-

вание этих нулей также вытекает из условия равновесия плиты.

Для определения остальных нулей первой группы, ищем их в виде:

$$z_k = z_{k_0} + \varepsilon^2 z_{k_2} + \dots \quad (k = 2, 3) \quad (22.16)$$

Подставляя (22.16) в (22.15), получим:

$$z_{k_0} = \pm \frac{1}{2} (9 + 4E_0^{-1} - 12\nu_2)^{\frac{1}{2}}$$

$$z_{k_2} = -(40z_{k_0})^{-1} D_2(z_{k_0})$$

Докажем, что все остальные нули функции  $D(z, \varepsilon)$  неограниченно возрастают, когда  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Исходим от противного, допустив, что  $z_k \rightarrow z_k^* \neq \infty$  ( $k \geq 4$ ) при  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Тогда справедливо предельное соотношение  $D(z, \varepsilon) \rightarrow \varepsilon^3 D_0^*(z_k^*)$  при  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Таким образом, предельные точки множества  $z_k$  ( $k \geq 4$ ) определяются из уравнения  $D_0^*(z_k^*) = 0$ . В данном случае

$$\begin{aligned} D_0^*(z_k^*) &= \left( z_k^{*2} - \frac{1}{4} \right) (4z_k^{*2} - 12\nu_2 - 9 - 4E_0^{-1}) = \\ &= \left( z_k^{*2} - \frac{1}{4} \right) D_0(z_k^*) = 0 \end{aligned}$$

Из последнего равенства следует, что других ограниченных нулей кроме  $z_{0,1}$ ,  $z_{2,5}$  не существует.

Итак, доказано, что все остальные нули функции  $D(z, \varepsilon)$  стремятся к бесконечности при  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Их можно разбить на три группы в зависимости от их поведения при  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

Возможны следующие предельные соотношения:

- 1)  $\varepsilon z_k \rightarrow 0$ ; 2)  $\varepsilon z_k \rightarrow \infty$ ; 3)  $\varepsilon z_k \rightarrow const$  при  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

Можно доказать, что случае 1) и 2) здесь невозможны.

Для построения асимптотики нулей второй группы (случай 3) отыскиваем  $z_n$  ( $n = k - 3, k \geq 4$ ) в виде:

$$z_n = \varepsilon^{-1} \delta_n + O(\varepsilon) \quad (n = 1, 2, \dots) \quad (22.17)$$

Подставляя (1.15) в (1.7), имеем:

$$\tau^2 - 2q_1 \delta_n^2 \tau + q_2 \delta_n^4 = 0, \quad \gamma_i = \sqrt{\tau_i}, \quad (i = 1, 2) \quad (22.18)$$

$$\tau^2 - \delta_n^{22} S_i^2, \quad S_i = \sqrt{q_1 - (-1)^i \sqrt{q_1^2 - q_2}}$$

$$2q_1 = b_{22}^{-1} (b_{11} b_{22} - b_{12}^2 - 2b_{12}), \quad q_2 = b_{11} b_{22}^{-1}$$

Как было отмечено в первой главе в зависимости от характеристик материала  $\nu, \nu_1, \nu_2, G_0$  параметры  $q_1, q_2$  принимают различные значения, что влечет за собой различные записи решения через функции Лежандра. Это в свою очередь приводит к различным асимптотическим представлениям функции Лежандра.

Рассмотрим следующие возможные случаи:

1.  $q_1 > 0, q_1^2 - q_2 > 0, \gamma_{1,2} = \pm S_1 \delta_n, \gamma_{3,4} = \pm S_2 \delta_n$

$$S_{1,2} = \sqrt{q_1 \pm \sqrt{q_1^2 - q_2}}, \quad q_1^2 > q_2$$

$$S_{1,2} = \alpha \pm i\beta \sqrt{q_1 \pm i\sqrt{q_2 - q_1^2}}, \quad q_1^2 < q_2$$

2. Корни характеристического уравнения (22.18) кратные

$$\gamma_{1,2} = \gamma_{3,4} = \pm \delta_n p, \quad q_1 > 0, \quad q_1^2 - q_2 = 0, \quad p = \sqrt{q_1}$$

3.  $q_1 < 0, q_1^2 - q_2 \neq 0, \gamma_{1,2} = \pm i \delta_n S_1, \gamma_{3,4} = \pm i \delta_n S_2$

$$S_{1,2} = \sqrt{|q_1| \pm i\sqrt{q_1^2 - q_2}}, \quad q_1^2 > q_2$$

$$S_{1,2} = \sqrt{|q_1| \pm i\sqrt{q_2 - q_1^2}}, \quad q_1^2 < q_2$$

4.  $q_1 < 0, q_1^2 - q_2 = 0, \gamma_{1,2} = \gamma_{3,4} = \pm i \delta_n p, \quad p = \sqrt{|q_1|}$

В случаях 1,2 после подстановки (22.17) в (22.7) и преобразования его с помощью асимптотических разложений  $F_\gamma(\theta)$ ,  $F'_\gamma(\theta)$  для  $\delta_n$  получаем:

$$(S_2 - S_1)\sin(S_1 + S_2)\delta_n - (S_1 + S_2)\sin(S_2 - S_1)\delta_n = 0 \quad (22.19)$$

$$\alpha \sin 2\beta\delta_n - \beta sh 2\alpha\delta_n = 0; \quad (22.20)$$

$$\sin 2p\delta_n - 2p\delta_n = 0. \quad (22.21)$$

Что касается случаев 3 и 4, то для них результаты получаются из случаев 1 и 2 формальной заменой  $S_1, S_2$  на  $iS_1, iS_2$ . Эти уравнения совпадают с уравнениями, определяющими показатели краевых эффектов Сен-Венана в задачах изгиба для плиты постоянной толщины.

Как и в изотропном случае [5,6]. Можно доказать, что функция  $D(z, \varepsilon)$ , кроме выше найденных других нулей не имеет.

### §23. Анализ напряженно-деформированного состояния

Дадим характеристику напряженно-деформированных состояний, определяемых решениями, поостренными выше.

Предполагая, что  $\varepsilon$  – является малым параметром, приведем асимптотическое построение однородных решений, соответствующих различным группам нулей.

Для  $z_0 = \frac{1}{2}$  получаем следующие выражения

$$\begin{aligned} u_r &= +C_0 \sin \varepsilon\eta, \quad u_\theta = +C_0 \cos \varepsilon\eta \\ \sigma_r &= \sigma_\varphi = \sigma_\theta = \tau_{r\theta} = 0 \end{aligned} \quad (23.1)$$

Как легко видеть, этому решению соответствует перемещение плиты, как твердого тела.

Решение, соответствующее нулю  $z_1 = -\frac{1}{2}$ , имеет

следующее асимптотическое представление:

$$\begin{aligned}
 u_r &= -\frac{r_1}{\rho} \eta C_1 \left\langle 4(1 + \nu_1 \nu_2) + \frac{1}{3} \varepsilon^2 \left[ 2(1 - \nu_1 \nu_2)(\eta^2 + 3) + \right. \right. \\
 &+ 2(1 + \nu)(G_0 - 1)(\eta^2 - 3) + 2[G_0 E_0(1 + \nu)(G_0 - \nu_2) - \\
 &\left. - 2(1 + \nu)(\nu_1 - 2) - 2(1 - \nu_1 \nu_2)](G_0 - 1)\eta^2 \right\rangle + \dots \\
 u_\theta &= \frac{r_1 C_1}{\rho} \varepsilon^{-1} \left\langle 2(1 - \nu_1 \nu_2) + \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{2} (1 + \nu)(2 - \nu_1 - 3\nu) + \right. \right. \\
 &+ 2(1 - \nu_1 \nu_2) + (1 - 2\nu_1)(1 + \nu) \left. \right\} \eta^2 + 4(1 + \nu)(\nu_1 - 1) \times \\
 &\left. \times (G_0 - 1) \right\rangle \varepsilon^2 + \dots
 \end{aligned} \tag{23.2}$$

$$\sigma_r = \frac{G_1 C_1 \eta}{\rho^2} [2(3\nu_1 - 2) + O(\varepsilon^2)]$$

$$\sigma_\varphi = \frac{G_1 C_1 \eta}{\rho^2} [2(3E_0 - 2\nu_1) + O(\varepsilon^2)]$$

$$\sigma_\theta = O(\varepsilon^2), \quad \tau_{r\theta} = O(\varepsilon).$$

Остальным нулем первой группы формулы для вычисления перемещений и напряжений, если их представить рядами по степеням  $\varepsilon$ , имеют следующий вид:

$$\begin{aligned}
 u_r &= \frac{1}{\sqrt{\rho}} \eta \sum_{k=2}^4 C_k \left\langle (2z_{k_0} - 3)(1 - \nu_1 \nu_2) + \frac{1}{3!} \left\{ (1 + \nu) \left( z_{k_0}^2 + 2G_0 - \frac{9}{4} \right) \times \right. \right. \\
 &\times (2\nu_1 z_{k_0} + \nu_1 - 2)(\eta^2 - 3) + 2(z_{k_0} - 3)(1 - \nu_1 \nu_2)(\eta^2 + 3) - \\
 &\left. - \left( z_{k_0} - \frac{3}{2} \right) [4G_0 E_0(1 + \nu)(G_0 - \nu_2) z_{k_0}^2 - G_0 E_0(1 + \nu)(G_0 - \nu_2) + \right.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + 4(1 - \nu_1 \nu_2) + 4(1 + \nu)(\nu_1 - 2)(G_0 - 1)\eta^2 + 2z_{k_0}(1 - \nu_1 \nu_2)\} \varepsilon^2 + \dots \rangle (z_k \ln \rho) \\
u_\theta &= \frac{1}{\sqrt{\rho}} \varepsilon^{-1} \sum_{k=2}^4 C_k \left\langle 2(1 - \nu_1 \nu_2) + \frac{1}{2} \left\{ 2(1 - \nu_1 \nu_2) + \frac{1}{2}(1 + \nu)(2 - 3\nu) + \right. \right. \\
& + 2(2\nu_1 - 1)(1 + \nu)z_{k_0} - 2\nu_1(1 + \nu)z_{k_0}^2 \left. \right\} \eta^2 + 2(1 + \nu)(2E_0 G_0 - \nu_1) \times \\
& \times z_{k_0}^2 + 4(1 + \nu)(\nu_1 - 1)(G_0 - 1) - (1 - \nu)(E_0 G_0 - \nu_{1/2}) \left. \right\} \varepsilon^2 + \dots \rangle \exp(z_k \ln \rho) \\
\sigma_r &= \frac{G_1}{\rho \sqrt{\rho}} \eta \sum_{k=2}^3 C_k \left[ 4E_0 z_{k_0}^2 + 4(\nu_1 - 2E_0)z_{k_0} + 3E_0 - 2\nu_1 + \right. \\
& \left. + O(\varepsilon^2) \right] \exp(z_k \ln \rho) \tag{23.3} \\
\sigma_\varphi &= -\frac{G_1}{\rho \sqrt{\rho}} \eta \sum_{k=2}^3 C_k \left[ 4\nu_1 z_{k_0}^2 + 4(\nu_1 - 2\nu_1)z_{k_0} + 3\nu_1 - 2 + \right. \\
& \left. + O(\varepsilon^2) \right] \exp(z_k \ln \rho) \\
\sigma_\theta &= O(\varepsilon^2), \quad \tau_{r\theta} = O(\varepsilon) \\
\rho &= r_1^{-1} r.
\end{aligned}$$

Вторая группа нулей описывает напряженно-деформированное состояние быстро затухающее вдали от края плиты. Раскладывая по степеням малого параметра  $\varepsilon$  решения этой группы, найдем следующие асимптотические выражения:

$$\begin{aligned}
u_r &= -\frac{r_1 \varepsilon}{\sqrt{\rho}} \sum_{n=1}^{\infty} B_n \left[ S_2 (b_{22} S_2^2 + b_{12}^2 + b_{12} - b_{11} b_{22}) \cos S_2 \delta_n \times \right. \\
& \times \sin S_1 \delta_n \eta - S_2 (b_{22} S_2^2 + b_{12}^2 + b_{12} - b_{11} b_{22}) \cos S_1 \delta_n \sin S_2 \delta_n \eta + \\
& \left. + O(\varepsilon) \right] \exp\left(\frac{\delta_n}{\varepsilon} \ln \rho\right) \\
u_\theta &= -\frac{r_1 \varepsilon S_1 S_2}{\sqrt{\rho}} \sum_{n=1}^{\infty} B_n \left[ (b_{22} S_2^2 + b_{12}^2) \cos S_2 \delta_n \cos S_1 \delta_n \eta - \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - (b_{22}S_1^2 + b_{12}) \cos S_1 \delta_n \cos S_2 \delta_n \eta + O(\varepsilon) \exp\left(\frac{\delta_n}{\varepsilon} \ln \rho\right) \\
\sigma_r = & \frac{G_2}{\rho\sqrt{\rho}} (b_{11}b_{22} - b_{12}^2) S_1 S_2 \sum_{n=1}^{\infty} B_n \delta_n [S_1 \cos S_2 \delta_n \sin S_1 \delta_n \eta - \\
& - S_2 \cos S_1 \delta_n \sin S_2 \delta_n \eta + O(\varepsilon)] \exp\left(\frac{\delta_n}{\varepsilon} \ln \rho\right) \quad (23.4)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sigma_\varphi = & -\frac{G_1}{\rho\sqrt{\rho}} \sum_{n=1}^{\infty} B_n \delta_n [S_2 (b_{11}b_{22} - b_{12}^2 - 2G_0 - 2G_0 b_{12} S_1^2) \times \\
& \times \cos S_2 \delta_n \sin S_1 \delta_n \eta - S_1 (b_{11}b_{22} - b_{12}^2 - 2G_0 b_{12} S_2^2) \cos S_1 \delta_n \times \\
& \times \sin S_2 \delta_n \eta + O(\varepsilon)] \exp\left(\frac{\delta_n}{\varepsilon} \ln \rho\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sigma_r = & -\frac{G_1}{\rho\sqrt{\rho}} (b_{11}b_{22} - b_{12}^2) \sum_{n=1}^{\infty} B_n \delta_n [S_2 \cos S_2 \delta_n \sin S_1 \delta_n \eta - \\
& - S_1 \cos S_1 \delta_n \sin S_2 \delta_n \eta + O(\varepsilon)] \exp\left(\frac{\delta_n}{\varepsilon} \ln \rho\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\tau_{r\theta} = & \frac{G_2}{\rho\sqrt{\rho}} (b_{11}b_{22} - b_{12}^2) S_1 S_2 \sum_{n=1}^{\infty} B_n [\cos S_2 \delta_n \sin S_1 \delta_n \eta - \\
& - \cos S_1 \delta_n \sin S_2 \delta_n \eta + O(\varepsilon)] \exp\left(\frac{\delta_n}{\varepsilon} \ln \rho\right)
\end{aligned}$$

где

$$(S_2 - S_1) \sin(S_2 + S_1) \delta_n - (S_2 + S_1) \sin(S_1 - S_2) \delta_n = 0$$

$$u_r = \frac{r_1}{\sqrt{\rho}} \varepsilon \sum_{n=1}^{\infty} [F_{1n}(\eta) + O(\varepsilon)] \exp\left(\frac{\delta_n}{\varepsilon} \ln \rho\right)$$

$$u_\theta = \frac{r_1}{\sqrt{\rho}} \varepsilon \sum_{n=1}^{\infty} [F_{2n}(\eta) + O(\varepsilon)] \exp\left(\frac{\delta_n}{\varepsilon} \ln \rho\right)$$

$$\sigma_r = \frac{G_1}{\rho\sqrt{\rho}} \sum_{n=1}^{\infty} [b_{11} \delta_n F_{1n}(\eta) + b_{12} F'_{2n}(\eta) + O(\varepsilon)] \exp\left(\frac{\delta_n}{\varepsilon} \ln \rho\right) \quad (23.5)$$

$$\sigma_\varphi = \frac{G_1}{\rho\sqrt{\rho}} \sum_{n=1}^{\infty} [b_{12}\delta_n F_{1n}(\eta) + b_{23}F'_{2n}(\eta) + O(\varepsilon)] \exp\left(\frac{\delta_n}{\varepsilon} \ln \rho\right)$$

$$\sigma_\theta = \frac{G_1}{\rho\sqrt{\rho}} \sum_{n=1}^{\infty} [b_{12}\delta_n F_{1n}(\eta) + b_{22}F'_{2n}(\eta) + O(\varepsilon)] \exp\left(\frac{\delta_n}{\varepsilon} \ln \rho\right)$$

$$\tau_{r\theta} = \frac{G_1}{\rho\sqrt{\rho}} \sum_{n=1}^{\infty} [F'_{1n}(\eta) + \delta_n F_{2n}(\eta) + O(\varepsilon)] \exp\left(\frac{\delta_n}{\varepsilon} \ln \rho\right)$$

где

$$F_{1n}(\eta) = (a_1\Delta_{1n} - a_2\Delta_{2n}) \cos \beta\delta_n \eta \operatorname{sh} \alpha\delta_n \eta - \\ - (a_1\Delta_{2n} - a_2\Delta_{1n}) \sin \beta\delta_n \eta \operatorname{ch} \alpha\delta_n \eta .$$

$$F_{2n}(\eta) = (b_{12} + 1) [(\beta\Delta_{2n} - \alpha\Delta_{1n}) \cos \beta\delta_n \eta \operatorname{ch} \alpha\delta_n \eta + \\ + (\alpha\Delta_{2n} + \beta\Delta_{1n}) \sin \beta\delta_n \eta \operatorname{ch} \alpha\delta_n \eta] .$$

$$a_1 = 1 - b_{22}(\alpha^2 - \beta^2) , \quad a_2 = 2b_{22}\alpha\beta ;$$

$$\Delta_{1n} = D_n \left\{ \alpha [b_{12} + b_{22}(\alpha^2 + \beta^2)] \sin \beta\delta_n \eta \operatorname{sh} \alpha\delta_n \eta + \right. \\ \left. + \beta [b_{12} + b_{22}(\alpha^2 + \beta^2)] \sin \beta\delta_n \eta \operatorname{ch} \alpha\delta_n \eta \right\} .$$

$$\Delta_{2n} = -D_n \left\{ \beta [b_{12} + b_{22}(\alpha^2 + \beta^2)] \sin \beta\delta_n \eta \operatorname{sh} \alpha\delta_n \eta - \right. \\ \left. - \beta [b_{12} + b_{22}(\alpha^2 + \beta^2)] \cos \beta\delta_n \eta \operatorname{ch} \alpha\delta_n \eta \right\} .$$

$$\alpha \sin 2\beta\delta_n - \beta \operatorname{sh} 2\alpha\delta_n = 0$$

$$u_r = \frac{(b_{12} + 1)}{\sqrt{\rho}} \varepsilon \sum_{n=1}^{\infty} E_n \left\{ \left[ \sin p\delta_n - (b_{12}p^2 - b_{11})(b_{12}\rho^2 + b_{11})^{-1} \times \right. \right. \\ \left. \left. \times \frac{\cos p\delta_n}{p\delta_n} \right] \sin p\delta_n \eta + \eta \cos p\delta_n \cos p\delta_n \eta + O(\varepsilon) \right\} \exp\left(\frac{\delta_n}{\varepsilon} \ln \rho\right) .$$

$$u_\theta = -\frac{\rho^2 - b_{11}}{\sqrt{\rho}} \varepsilon \sum_{n=1}^3 E_n \left\{ \left[ \sin p\delta_n - 2b_{11}(b_{12} + 1)\rho(b_{11} - \rho^2)^{-1} \times \right. \right.$$

$$\begin{aligned}
& \times \left( b_{12} \rho^2 + 1 \right)^{-1} \frac{\cos p \delta_n}{p \delta_n} \left] \cos p \delta_n \eta + \eta \cos p \delta_n \sin p \delta_n \eta + \right. \\
& \left. + O(\varepsilon) \right\} \exp \left( \frac{\delta_n}{\varepsilon} \ln \rho \right) \\
\sigma_r = & \frac{G_1 (b_{12} \rho^2 - b_{11})}{\rho \sqrt{\rho}} \sum_{n=1}^{\infty} E_n [(p \delta_n \sin p \delta_n - \cos p \delta_n) \sin p \delta_n \eta \\
& + \eta p \delta_n \cos p \delta_n \cos p \delta_n \eta + O(\varepsilon)] \exp \left( \frac{\delta_n}{\varepsilon} \ln \rho \right) \\
\sigma_\varphi = & \frac{G_1}{\rho \sqrt{\rho}} \sum_{n=1}^{\infty} E_n \left\langle \left( b_{23} \rho^2 + b_{12} + b_{12} - b_{11} b_{23} \right) p \delta_n \sin p \delta_n - \right. \\
& - \left[ b_{11} b_{23} + b_{12}^2 + b_{12} - b_{11} - b_{23} \rho^2 - 2 b_{11} (b_{12} \rho^2 + 1) \right] \times \\
& \times \left. \left( b_{23} \rho^2 + b_{12} \right) \left( b_{12} \rho^2 + b_{11} \right) \right]^{-1} \cos p \delta_n \left. \right\rangle \sin p \delta_n \eta + \\
& + \left( b_{23} \rho^2 + b_{12}^2 + b_{12} - b_{11} b_{23} \right) \eta p \delta_n \sin p \delta_n \sin p \delta_n \eta + \\
& + O(\varepsilon) \exp \left( \frac{\delta_n}{\varepsilon} \ln \rho \right). \tag{23.6}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sigma_\theta = & \frac{G_1 (b_{11} b_{22} - b_{12}^2)}{\rho \sqrt{\rho}} \sum_{n=1}^3 E_n [(p \delta_n \sin p \delta_n - \cos p \delta_n) \sin p \delta_n \eta + \\
& + \eta p \delta_n \cos p \delta_n \cos p \delta_n \eta + O(\varepsilon)] \exp \left( \frac{\delta_n}{\varepsilon} \ln \rho \right).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\tau_{r\theta} = & - \frac{G_1 (b_{12} \rho^2 + 1)}{\rho \sqrt{\rho}} \sum_{n=1}^{\infty} E_n \delta_n [\sin p \delta_n \cos p \delta_n \eta - \\
& - \eta \cos p \delta_n \sin p \delta_n \eta + O(\varepsilon)] \exp \left( \frac{\delta_n}{\varepsilon} \ln \rho \right).
\end{aligned}$$

где

$$\sin 2 p \delta_n - 2 p \delta_n = 0.$$

$C_k, B_n, D_n, E_n$  – произвольные постоянные из сравнения решений первой и второй группы можно сделать вывод, что первая группа решений определяет основное напряженное состояние, вторая группа – краевой эффект, аналогичный краевому эффекту Сен-Венана в теории плит постоянной толщины.

Однако, при больших  $G_0$  некоторые погранслойные решения затухают весьма слабо, и их следует включить в проникающие решения.

5. Обратимся теперь к исследованию картины напряженного состояния, описываемого однородными решениями (23.2)-(23.6). Рассмотрим связь однородных решений с главным вектором напряжений  $P$ , действующим в сечении  $\rho = const$ .

$$P = -2\pi r_1^2 \varepsilon \rho^2 \int_{-1}^1 (\sigma_r \sin \varepsilon \eta - \tau_{r\theta} \cos \varepsilon \eta) \cos \varepsilon \eta d\eta \quad (23.7)$$

Полагая  $C_0 = 0$ , перемещения и напряжения представим в виде:

$$\begin{aligned} u_r &= u_1 + \sum_{k=1}^{\infty} C_k U_k(\eta) \rho^{z_k - \frac{1}{2}}, \\ u_\theta &= w_k + \sum_{k=1}^{\infty} C_k W_k(\eta) \rho^{z_k - \frac{1}{2}}, \\ \sigma_r &= Q_{r1} + \sum_{k=1}^{\infty} C_k Q_{rk}(\eta) \rho^{z_k - \frac{3}{2}}, \\ \sigma_\varphi &= Q_{\varphi1} + \sum_{k=1}^{\infty} C_k Q_{\varphi k}(\eta) \rho^{z_k - \frac{3}{2}}, \\ \sigma_\theta &= Q_{\theta1} + \sum_{k=1}^{\infty} C_k Q_{\theta k}(\eta) \rho^{z_k - \frac{3}{2}}, \end{aligned} \quad (23.8)$$

$$\tau_{r\theta} = T_1 + \sum_{k=1}^{\infty} C_k T_k(\eta) \rho^{z_k - \frac{3}{2}}$$

В формулах  $u_1, \dots, T_1$  соответствуют собственным значениям  $z_1 = -\frac{1}{2}$ . Во второе слагаемое включены остальные решения.

Подставляя (23.8) в (23.7), получаем:

$$P = C_1 \gamma_1 + \rho^{1/2} \sum_{k=2}^{\infty} C_k \rho^{z_k - \frac{3}{2}} \gamma_k \quad (23.9)$$

где

$$\gamma_1 = 16G_1 \pi (v_1 - E_0) r_1^2 \varepsilon^2 + O(\varepsilon^3)$$

$$\gamma_k = -\pi G_1 \varepsilon \int_{-1}^1 [Q_{rk}(\eta) \sin \varepsilon \eta - T_k(\eta) \cos \varepsilon \eta] \cos \varepsilon \eta d\eta.$$

Докажем, что все  $\gamma_k$  ( $k = 2, 3, \dots$ ) равны нулю. Для этого рассмотрим следующую краевую задачу:

$$\sigma_r = \rho_1^{z_k - \frac{3}{2}} Q_{rs}, \quad \tau_{r\theta} = \rho_1^{z_k - \frac{3}{2}} T_s(\rho = \rho_1) \quad (23.10)$$

$$\sigma_r = \rho_2^{z_k - \frac{3}{2}} Q_{rs}, \quad \tau_{r\theta} = \rho_2^{z_k - \frac{3}{2}} T_s(\rho = \rho_2)$$

Легко видеть, что решение задачи (23.10) существует и получается из формул (23.8), если положить в них  $C_k = \delta_{ks}$ , где  $\delta_{ks}$  – символ Кронекера.

С другой стороны, известно, что необходимым условием разрешимости первой краевой задачи теории упругости является условия обращения в нуль главного вектора и главного момента всех внешних сил.

В рассматриваемом случае главный вектор внешних сил (23.10) в проекции на ось симметрии  $\theta = 0$  имеет вид:

$$P_s = \left( \rho_2^{z_k - \frac{3}{2}} - \rho_1^{z_k - \frac{3}{2}} \right) \gamma_s = 0 \quad (23.11)$$

Последнее равенство возможно только при  $\gamma_s = 0$ .

Для главного вектора окончательно получаем

$$P = C_1 \gamma_1 \quad (23.12)$$

Таким образом, напряженное состояние (23.3)-(23.6) является самоуравновешенным в каждом сечении  $\rho = const$ .

Разъясним теперь картину напряженного состояния, соответствующую нулям  $z_k$  ( $k \geq 2$ ). Для этого подсчитаем изгибающий момент в сечении  $\rho = const$ .

$$\begin{aligned} M &= 2\pi_1^2 \rho^2 \varepsilon \int_{-1}^1 [\sigma_r \sin \varepsilon \eta - \tau_{r\theta} (1 - \cos \varepsilon \eta)] \cos \varepsilon \eta d\eta \approx \\ &\approx \pi_1^2 \rho^2 \varepsilon^2 \int_{-1}^1 \eta \sigma_r d\eta + O(\varepsilon^4) \end{aligned} \quad (23.13)$$

Подсчитаем изгибающий момент для напряжений (23.8).

Имеем

$$\begin{aligned} M_1 &= \frac{2}{3} \pi_1^2 G \rho^{1/2} \varepsilon^2 \sum_{k=2}^3 C_k \left[ 4E z_{k0}^2 + 4(\nu_1 - 2E_0) z_{k0} + \right. \\ &\left. + 3E_0 - 2\nu_1 + O(\varepsilon^2) \right] \exp(z_k \ln \rho) \end{aligned} \quad (23.14)$$

Докажем, что главная часть изгибающего момента для напряжений, соответствующих второй группе нулей, равна нулю. Рассмотрим решение, определяемое формулой (23.4).

Аналогично рассматриваются другие случаи.

$$\begin{aligned} M_2 &= 2\pi_1^2 \rho^2 \varepsilon^2 \int_{-1}^1 \eta \sigma_r d\eta + O(\varepsilon^4) = 2\pi_1^2 \varepsilon^2 G_1 (b_{11} b_{22} - b_{12}^2) \times \\ &\times \rho^2 \rho^{-3/2} (S_2 \cos S_2 \delta_n \sin S_1 \delta_n - S_1 \cos S_1 \delta_n \sin S_2 \delta_n) \times \end{aligned}$$

$$\times \exp\left(\frac{\delta_n}{\varepsilon} \ln \rho\right) + O(\varepsilon^4) = 2\pi_1^2 \rho^2 \varepsilon^2 \sigma_\theta(\pm 1) + O(\varepsilon^4)$$

Так как  $\sigma_\theta(\pm 1) = 0$ , окончательно получаем  $M_2 \approx O(\varepsilon^4)$ .

Таким образом, главные части изгибающего момента определяют решению первой группы.

Разлагая изгибающие моменты  $M_k^s$  ( $k = 2, 3$ ), действующие на поверхности  $\rho = \rho_s$ , в ряды по  $\varepsilon$

$$M_k^s = M_{k_0}^s + M_{k_2}^s \varepsilon^2 + \dots \quad (23.15)$$

и отыскивая  $C_k$  в виде  $C_k = C_{k_0} + \varepsilon^2 C_{k_2} + \dots$  для определения  $C_{k_0}$ , получаем линейную систему:

$$\frac{3}{2} \pi_1^2 G_1 \rho_s^{1/2} \sum_{k=2}^3 C_{k_0} \left[ 4E_0 z_{k_0}^2 + 4(\nu_1 - 2E_0) z_{k_0} 3E_0 - 2\nu_1 \right] \times \\ \times \exp(z_{k_0} \ln \rho_s) = M_{k_0}^s \quad (s = 1, 2) \quad (23.16)$$

Таким образом, постоянные  $C_k$  определяются через главные части изгибающих моментов на боковой поверхности плиты.

Первый член разложения (23.2), совместно с первым членом разложений (23.8) можно рассматривать как решение по прикладной теории. Из (23.14), (23.16) следует, что первому члену асимптотики (23.4), (23.5), (23.6) соответствует самоуравновешенное в сечении  $\rho = const$  напряженное состояние, а само решение имеет характер краевого эффекта, эквивалентного краевому эффекту Сен-Венана в теории плит постоянной толщины.

4. Рассмотрим вопрос о снятии напряжений с боковых поверхностей плиты при помощи класса однородных решений. Пусть на боковой поверхности заданы условия (1.2).

Как было показано выше, главные части главного вектора и изгибающего момента определяются решением первой группы.

Поэтому ниже будем предполагать, что  $C_k = 0$  ( $k = 1, 2, 3$ ) и рассмотрим случай (23.4). Аналогично рассматриваются другие случаи.

Будем отыскивать решение в виде (23.4). Для определения произвольных констант  $B_n$ , как в первой главе, используем вариационный принцип Лагранжа.

Поскольку однородные решения удовлетворяют уравнениям равновесия и граничным условиям на конической поверхности, вариационный принцип принимает форму:

$$r_1 \varepsilon \sum_{s=1}^2 \rho_s^2 \int_{-1}^1 [(\sigma_r - f_{1s}) \delta u_r + (\tau_{r\theta} - f_{2s}) u_\theta]_{\rho=\rho_s} \cos \varepsilon \eta d\eta = 0 \quad (23.17)$$

Считая  $\delta B_n$  независимыми вариациями, из (23.17) получим бесконечную систему линейных алгебраических уравнений:

$$\sum_{k=1}^{\infty} M_{kn} B_k = N_n \quad (k = 1, 2, \dots), \quad (23.18)$$

$$M_{kn} = \sum_{s=1}^2 \exp(z_k + z_n) \ln \rho_s \int_{-1}^1 (Q_{rn} u_k + T_n w_k) \cos \varepsilon \eta d\eta,$$

$$N_k = \sum_{s=1}^2 \exp \left[ \left( z_k + \frac{3}{2} \right) \ln \rho_s \right] \int_{-1}^1 (f_{1s} u_k + f_{2s} w_k) \cos \varepsilon \eta d\eta.$$

Разрешимость и сходимость метода редукции систем (23.18) следует из работ [41].

Неизвестные постоянные  $B_n$  отыскиваем в виде:

$$B_n = B_{n_0} + \varepsilon B_{n_1} + \dots \quad (23.19)$$

Подставляя (23.19) в (23.18), получаем следующие системы бесконечных линейных алгебраических уравнений относительно  $B_{n_0}$ .

$$\sum_{n=1}^{\infty} M_{kn} B_{n_0} = H_k \quad (k=1,2,\dots) \quad (23.20)$$

$$\begin{aligned} M_{kn} = &+G(b_{11}b_{22} - b_{12}^2)S_1S_2 \sum_{s=1}^2 \exp[\varepsilon^{-1}(\delta_n + \delta_n)\ln \rho_s] \times \\ &\times \int_{-1}^1 \{ \delta_n (S_1 \cos S_2 \delta_n \sin S_1 \delta_n \eta - S_2 \cos S_1 \delta_n \sin S_2 \delta_n \eta) \times \\ &\times [S_2 (b_{22}S_2^2 + b_{12}^2 + b_{12} - b_{11}b_{22}) \cos S_2 \delta_k \sin S_1 \delta_k \eta] - \\ &- [S_1 (b_{22}S_2^2 + b_{12}^2 + b_{12} - b_{11}b_{22}) \cos S_1 \delta_k \sin S_2 \delta_k \eta] - \\ &- (\cos S_2 \delta_n \sin S_1 \delta_n \eta - \cos S_1 \delta_n \sin S_2 \delta_n \eta) S_2 S_1 \times \\ &\times [(b_{22}S_2^2 + b_{12}) \cos S_2 \delta_k \cos S_1 \delta_k \eta - (b_{22}S_1^2 + b_{12}) \times \\ &\times \cos S_1 \delta_k \cos S_2 \delta_k \eta] \} d\eta; \end{aligned} \quad (23.21)$$

$$\begin{aligned} H_k = &\sum_{s=1}^2 \rho_s^{3/2} \exp\left(\frac{\delta_k}{\varepsilon} \ln \rho_s\right) \int_{-1}^1 \{ f_{1s} [S_2 (b_{22}S_2^2 + b_{12}^2 + b_{12} - b_{11}b_{22}) \times \\ &\times \cos S_2 \delta_k \sin S_1 \delta_k \eta] - [S_1 (b_{22}S_1^2 + b_{12}^2 + b_{12} - b_{11}b_{22}) \times \\ &\times \cos S_1 \delta_k \sin S_2 \delta_k \eta] - f_{2k} S_2 S_1 [(b_{22}S_2^2 + b_{12}) \cos S_2 \delta_k \times \\ &\times \cos S_1 \delta_k \eta - (b_{22}S_1^2 + b_{12}) \cos S_1 \delta_k \cos S_2 \delta_k \eta] \} d\eta. \end{aligned}$$

Матрица системы (23.20) уже встречалась в теории транстропной плиты постоянной толщины.

Определение  $B_{n_i}$  ( $i=1,2,\dots$ ) неизменно сводится к обращению одних и тех же матриц, которые совпадают с матрицей (23.20).

В заключение отметим, что при  $G_0 = 1$ , мы получаем результаты [5,46] в случаях изгиба изотропной плиты переменной толщины.

## §24. Построение прикладных теорий для транстропной плиты переменной толщины

В этом параграфе настоящей главы предлагается двумерная прикладная теория для снятия напряжений с конической поверхности транстропной плиты переменной толщины.

Выше были построены однородные решения, позволяющие снять нагрузки со сферической части границы транстропной плиты переменной толщины.

В настоящей работе методами развитых в работах [4, 7] строится прикладная теория, предназначенных для снятия напряжений с конической поверхности плиты.

Проиллюстрируем построение таких теорий для определения перемещений  $u_r$ ,  $u_\theta$ , а что же касается напряжений, то они могут быть определены с помощью обобщенного закона Гука.

Пусть плита отнесена к сферической системе координат  $r, \theta, \varphi$

$$r_1 \leq r \leq r_2, \quad \frac{\pi}{2} - \varepsilon \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} + \varepsilon, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi$$

Выпишем уравнения равновесия в перемещениях

$$\begin{aligned} & b_{11} \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial}{\partial t} + 1 \right) u_r + 2(b_{12} - b_{22} - b_{23}) u_r + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial u_r}{\partial \theta} \right) + \\ & + (b_{12} + 1) \frac{\partial^2}{\partial t \partial \theta} (\sin \theta u_\theta) + (b_{12} - b_{22} - b_{23}) \frac{1}{\sin \theta} (\sin \theta u_\theta) = 0 \quad (24.1) \\ & (b_{12} + 1) \frac{\partial^2 u_r}{\partial t \partial \theta} + (b_{22} + b_{23} + 2) u_r + \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial}{\partial t} + 1 \right) u_\theta + \\ & + b_{22} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta u_\theta) \right) + (b_{22} - b_{23} - 2) u_\theta = 0 \end{aligned}$$

где  $t = \ln r$ .

Пусть на конических границах заданы условия  $\sigma_\theta = Q_n(t)$ ,  $\tau_{r\theta} = \tau_n(t)$  при

$$\theta = \frac{\pi}{2} + (-1)^n \varepsilon \quad (n = 1, 2) \quad (24.2)$$

Характер граничных условий на сферических границах уточнять не будем.

Полагая  $\frac{\partial}{\partial t} = \lambda$  и используя результаты пятой главы, общее решение данной задачи представим в виде:

$$\begin{aligned} u_r &= [A_1 \psi_{\gamma_1}(\theta) + A_2 \psi_{\gamma_2}(\theta)] \\ u_\theta &= b_0 [\psi'_{\gamma_1}(\theta) + \psi'_{\gamma_2}(\theta)] \end{aligned} \quad (24.2)$$

где

$$\begin{aligned} \psi_\gamma(\theta) &= C_\gamma T_\gamma(\theta) + B_\gamma F_\gamma(\theta) \\ T_\gamma(\theta) &= P_\gamma(\cos \theta) + P_\gamma(-\cos \theta) \\ F_\gamma(\theta) &= P_\gamma(\cos \theta) - P_\gamma(-\cos \theta) \\ A_i &= -b_{22} \gamma_2 (\gamma_2 + 1) + \lambda(\lambda + 1) + 2(G_0 - 1) \\ b_0 &= -[(b_{12} + 1)\lambda + b_{22} + b_{23} + 2] \end{aligned}$$

$P_\gamma(\cos \theta)$  – функции Лежандра,  $\gamma$  – корни биквадратного уравнения:

$$\begin{aligned} &b_{22} \gamma^2 (\gamma + 1)^2 - [(b_{11} b_{22} + b_{12}^2 - 2b_{12})\lambda(\lambda + 1) + 2b_{22} + \\ &+ 2(b_{12} - b_{22} - b_{23})(G_0 - 1)]\gamma(\gamma + 1) + [\lambda(\lambda + 1) + 2(G_0 - 1)] \times \\ &\times [b_{11} \lambda(\lambda + 1) + 2(b_{12} - b_{22} - b_{23})] = 0, \end{aligned} \quad (24.4)$$

$b_{ij}$  – материальные константы,  $G_0 = GG_1^{-1}$ ,  $E_0 = E_1 E^{-1}$ .

Такая форма решения позволяет разбить общую задачу для плиты на две самостоятельные задачи.

Введем в рассмотрение величины

$$q_1 = \frac{1}{2}(Q_1 + Q_2), \quad q_2 = \frac{1}{2}(Q_2 + Q_1) \quad (24.5)$$

$$S_1 = \frac{1}{2}(\tau_1 + \tau_2), \quad S_2 = \frac{1}{2}(\tau_2 + \tau_1)$$

В с их помощью разобьем общую краевую задачу на две:

**Задача А.**

$$\sigma_\theta = q_1, \tau_{r\theta} = (-1)^n S, \text{ при } \theta = \frac{\pi}{2} + (-1)^n \varepsilon \quad (24.6)$$

$$\sigma_\theta = (-1)^n q_2, \tau_{r\theta} = S_2, \text{ при } \theta = \frac{\pi}{2} + (-1)^n \varepsilon$$

По характеру симметрии относительно плоскости  $\theta = \frac{\pi}{2}$  задачу А можно называть задачей растяжения-сжатия плиты, а задачу В—задачей изгиба плиты.

Произвольные постоянные  $C_{\gamma_1}, C_{\gamma_2}, B_{\gamma_1}, B_{\gamma_2}$  определяются из граничных условий (24.6), (24.7)

$$C_{\gamma_1} = \Delta_1^{-1} \Delta_{11}, \quad C_{\gamma_2} = \Delta_1^{-1} \Delta_{12} \quad (24.8)$$

$$B_{\gamma_1} = \Delta_2^{-1} \Delta_{21}, \quad B_{\gamma_2} = \Delta_2^{-1} \Delta_{22} \quad (24.9)$$

Подставляя (24.8), (24.9) в (24.3) соответственно получаем для задачи А

$$\begin{aligned} \Delta_1 u_r &= A_1 T_{\gamma_1}(\theta) \Delta_{11} + A_2 T_{\gamma_2}(\theta) \Delta_{12} \\ \Delta_1 u_\theta &= b_0 [T'_{\gamma_1}(\theta) \Delta_{11} + T'_{\gamma_2}(\theta) \Delta_{12}] \end{aligned} \quad (24.10)$$

для задачи В

$$\begin{aligned} \Delta_2 u_r &= A_1 F_{\gamma_1}(\theta) \Delta_{21} + A_2 F_{\gamma_2}(\theta) \Delta_{22} \\ \Delta_2 u_\theta &= b_0 [F'_{\gamma_1}(\theta) \Delta_{21} + F'_{\gamma_2}(\theta) \Delta_{22}] \end{aligned} \quad (24.11)$$

где

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= C_{11} d_{11} T_{\gamma_1}(\theta_1) T'_{\gamma_2}(\theta_1) - C_{12} d_{11} T_{\gamma_2}(\theta_1) T'_{\gamma_1}(\theta_1) + \\ &+ C_{13} (d_{12} - d_{11}) \operatorname{ctg} \theta_1 T'_{\gamma_1}(\theta_1) T'_{\gamma_2}(\theta_1) \\ \Delta_2 &= C_{11} d_{12} F_{\gamma_1}(\theta_1) F'_{\gamma_2}(\theta_1) - C_{12} d_{11} F_{\gamma_2}(\theta_1) F'_{\gamma_1}(\theta_1) + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + C_{13}(d_{12} - d_{11})\text{ctg}\theta_1 F'_{\gamma_1}(\theta_1)F'_{\gamma_2}(\theta_1) \\
\Delta_{11} & = d_{22}T'_{\gamma_2}(\theta_1)q_1 - [C_{12}T_{\gamma_2}(\theta_1) + C_{13}\text{ctg}\theta_1 T'_{\gamma_2}(\theta_1)]S_1 \\
\Delta_{12} & = -d_{11}T'_{\gamma_1}(\theta_1)q_1 - [C_{12}T_{\gamma_1}(\theta_1) + C_{13}\text{ctg}\theta_1 T'_{\gamma_2}(\theta_1)]S_1 \quad (24.12) \\
\Delta_{21} & = d_{22}F'_{\gamma_2}(\theta_1)q_2 - [C_{12}F_{\gamma_2}(\theta_1) + C_{13}\text{ctg}\theta_1 F'_{\gamma_2}(\theta_1)]S_2 \\
\Delta_{22} & = -d_{11}F'_{\gamma_1}(\theta_1)q_2 - [C_{12}F_{\gamma_1}(\theta_1) + C_{13}\text{ctg}\theta_1 F'_{\gamma_1}(\theta_1)]S_2 \\
C_{1p} & = (b_{12}\lambda + b_{22} + b_{23})A_p - b_{22}b_0\gamma_p(\gamma_p + 1) \quad (p = 1, 2) \\
C_{13} & = -(b_{22} - b_{23})b_0, \quad d_{1k} = A_k + (\lambda - 1)b_0 \quad (k = 1, 2) \\
\theta & = \frac{\pi}{2} - \varepsilon.
\end{aligned}$$

Подставляя (24.12), (24.13) в (24.10), (24.11) и раскладывая по  $\varepsilon$ , соответственно получаем:

$$\begin{aligned}
G_1\Delta_1 u_r & = 2(1 - \nu_1\nu_2)(1 + \nu)^{-1}S_1(t) + (2 - \nu_1 - 2\nu_1z)q_1(t)\varepsilon + \dots \\
G_1\Delta_1 u_\theta & = \varepsilon\eta\{(2\nu_1z + 2 - \nu_1)S_1(t) + \\
& + [2E_0(1 - \nu)z^2 - \frac{(1 - \nu)}{2}E_0 - 4(1 - \nu_1)]q_1(t)\varepsilon + \dots\} \quad (24.14)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
G_1\Delta_2 u_r & = (1 - \nu_1\nu_2)\varepsilon\eta\left[(2z - 3)q_2(t) - 2(z^2 - 9/4)S_2(t)\varepsilon^2 + \dots\right] \\
G_1\Delta_2 u_r & = (1 - \nu_1\nu_2)[-2q_2(t) + (2z + 3)S_2(t)\varepsilon + \dots] \quad (24.15)
\end{aligned}$$

где

$$\theta = \frac{\pi}{2} + \varepsilon, \quad -1 \leq \eta \leq 1, \quad z = \lambda - \frac{1}{2}.$$

$$\begin{aligned}
\Delta_1 & = \varepsilon G_0 \left\{ 4E_0z^2 - 4(1 - \nu_1) - E_0^2 + 3^{-1}(1 - \nu_1\nu_2)^{-1} \times \right. \\
& \times \left\{ -4(1 + \nu)(E_0G_0 - \nu_1)E_0z^4 + (1 + \nu)[2(E_0G_0 - \nu_1)E_0 + \right. \\
& + 4(1 + \nu_1)(E_0G_0 - \nu_1) + 8(1 - \nu)(1 - \nu_1\nu_2)E_0]z^2 + 4^{-1}(1 + \nu) \times \\
& \times (E_0 + 4 - 4\nu_1)(E_0G_0 - \nu_1 + 4 + 4G_0) + 2(1 - \nu)(1 - \nu_1\nu_2)E_0 +
\end{aligned}$$

$$+ 16(1 - \nu_1)(1 - \nu_1\nu_2)\} + \dots\}$$

$$\begin{aligned} \Delta_2 = & G3^{-1}(z^2 - 1/4)\varepsilon^3 \left\langle 4z^2 + 2\nu_2 - 9 - 4E_0^{-1} + \frac{1}{5(1 - \nu_1\nu_2)}\varepsilon^2 \times \right. \\ & \times \left\{ -4(1 + \nu)(G_0 - \nu_2)z^4 + 2[2(1 - \nu_1\nu_2(3 - 2\nu)) + (1 + \nu)(G_0 - \nu_2)] \times \right. \\ & \times (E_0 + 4E_0G_0 + 2 - 6\nu_1) - 2(1 + \nu)(2E_0G_0 - \nu_1 - 1)(G_0 - 1) \Big] z^2 - \\ & - (1 - \nu_1\nu_2)(40E_0G_0 - 60\nu_1 - 2\nu + 23) - \frac{1}{2}(1 + \nu)(G_0 - \nu_2) \times \\ & \times \left( 2E_0G_0 + 2 - 6\nu_1 + \frac{E_0}{2} \right) + (1 + \nu)(2E_0G_0 - \nu_1 - 1)(G_0 - 1) + \\ & + 4[(1 + \nu)(\nu_1 - 1)(2E_0G_0 - 3\nu_1 + 1) + 2(1 - \nu_1\nu_2)(3 - 2\nu)E_0] \times \\ & \left. \times (G_0 - 1) + 8(1 + \nu)(1 - \nu_1)E_0(G_0 - 1)^2 \right\}. \end{aligned}$$

Как было отмечено в [7], соотношения (24.14), (24.15) можно использовать для построения приближенных теорий, предназначенных для снятия напряжений с конической части границы плиты. Зная  $t = \ln r$  и  $z = r \frac{d}{dr} + \frac{1}{2}$ , получим следующие системы обыкновенных

дифференциальных уравнений:

для задачи А

$$\begin{aligned} G\varepsilon D_{1u_r} = & 2(1 - \nu_1\nu_2)(1 + \nu)^{-1} S_1(r) + \left( 2 - 2\nu_1 - 2\nu_1 r \frac{d}{dr} q_1(r) \varepsilon + \dots \right) \\ G\varepsilon D_{1u_\theta} = & \varepsilon \eta \left\{ \left( 2\nu_1 r \frac{d}{dr} + 2 \right) S_1(r) + \left[ 2E_0(1 - \nu) \left( r^2 \frac{d^2}{dr^2} + 2r \frac{d}{dr} \right) - \right. \right. \\ & \left. \left. - 4(1 - \nu_1) \right] q_1(r) \varepsilon + \dots \right\} \end{aligned} \quad (24.16)$$

для задачи В

$$GD_2u_r = \varepsilon \eta (1 - \nu_1\nu_2) \left[ \left( 2r \frac{d}{dr} - 2 \right) q_2(r) - \right.$$

$$-2\left[r^2 \frac{d^2}{dr^2} + 2r \frac{d}{dr} - 2\right]S_2(r)\varepsilon + \dots \quad (24.17)$$

$$GD_2u_\theta = (1 - \nu_1\nu_2)\left[-2q_2(r) + 2\left(r \frac{d}{dr} + 2\right)S_2(r)\varepsilon + \dots\right]$$

$$D_1 = 4E_0\left(r^2 \frac{d^2}{dr^2} + 2r \frac{d}{dr}\right) - 4(1 - \nu_1) + 3^{-1}(1 - \nu_1\nu_2)^{-1} \times \\ \times \left\{ 4(1 + \nu)(E_0G_0 - \nu_1)E_0d_1^2 + (1 + \nu)[2(E_0G_0 - \nu_1)E_0 + \right. \\ \left. + 4(1 - \nu_1)(G_0 - 1)E_0 + 4(1 - \nu_1)(E_0G_0 - \nu_1) + 8(1 - \nu) \times \right. \\ \left. \times (1 - \nu_1\nu_2)E_0\right]d_1 + 4^{-1}(1 + \nu)(E_0 + 4 - 4\nu_1)(E_0G_0 - \nu_1 + \\ \left. + 4 - 4G_0) + 2(1 - \nu)(1 - \nu_1\nu_2)E_0 + 16(1 - \nu_1)(1 - \nu_1\nu_2)\right\}\varepsilon^2 + \dots$$

$$D_2 = G3^{-1}\left(r^2 \frac{d^2}{dr^2} + 2r \frac{d}{dr}\right)\left(4\left(r^2 \frac{d^2}{dr^2} + 2r \frac{d}{dr}\right) + 2\nu_1 - 8 - \right. \\ \left. - 4E_0^{-1} + 5^{-1}(1 - \nu_1\nu_2)^{-1}\left\{ 4(1 + \nu)(G_0 - \nu_2)d_1^2 + 2[2(1 - \nu_1\nu_2) \times \right. \right. \\ \left. \left. \times (3 - 2\nu) + (1 + \nu)(G_0 - \nu_2)(E_0 + 4E_0 + 2 - 6\nu_1) - 2(1 + \nu) \times \right. \right. \\ \left. \left. \times (2E_0G_0 - \nu_1 - 1)(G_0 - 1)\right]d_1 - (1 - \nu_1\nu_2)(40E_0G_0 - 60\nu_1 - \right. \\ \left. - 2\nu + 23) - \frac{1}{2}(1 + \nu)(G_0 - \nu_2)\left(2E_0G_0 + 2 - 6\nu_1 + \frac{E_0}{2}\right) + (1 + \nu) \times \right. \\ \left. \times (2E_0G_0 - \nu_1 - 1)(G_0 - 1) + 4[(1 - \nu)(\nu_1 - 1)(2E_0G_0 - 3\nu_1 + 1) + \right. \\ \left. + 2(1 + \nu_1\nu_2)(3 - 2\nu)E_0\right](G_0 - 1) + 8(1 + \nu)(1 - \nu_1)E_0(G_0 - 1)^2\left.\right\}\varepsilon^2 + \dots$$

$$d_1 = r^2 \frac{d^2}{dr^2} + 2r \frac{d}{dr} + \frac{1}{4}.$$

Отбросив слева и справа члены более высокого порядка малости, чем  $\varepsilon^n$ , получим прикладную теорию транстропной плиты переменной толщины. Таким образом, получаем серию прикладных теорий, имеющих любую наперед заданную точность по  $\varepsilon$ .

Удерживая в (24.16), (24.17) большее число членов будем получать и более точные теории.

Отметим, что данные прикладные теории, всеобщее говоря, предназначены лишь для снятия напряжений с конической части границы, так как снятие напряжений с сферической части границы производится однородными решениями.

В заключение отметим, что при  $G_0 = 1$  мы получаем результаты [7] и в изотропном случае.

### **§25. Построение однородных решений неосесимметричной задачи теории упругости для трансформной плиты переменной толщины**

Плита отнесена к сферической системе координат  $r, \theta, \varphi$  изменяющихся в следующих пределах:

$$r_1 \leq r \leq r_2, \quad \pi/2 - \varepsilon \leq \theta \leq \pi/2 + \varepsilon, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi$$

Предположим, что на торцах плиты заданы следующие однородные граничные условия

$$\sigma_\theta = 0, \quad \tau_{r\theta} = 0, \quad \tau_{\theta\varphi} = 0 \quad \text{при } \theta = \theta_n \quad (n=1,2) \quad (25.1)$$

Со стороны боковых поверхностей на плиту действует нагрузка

$$\sigma_r = q_r^{(s)}(\theta, \varphi), \quad \tau_{r\theta} = q_{r\theta}^{(s)}(\theta, \varphi), \quad \tau_{r\varphi} = q_{r\varphi}^{(s)}(\theta, \varphi), \quad (25.2)$$

при  $r = r_s \quad (s=1,2)$ .

Используя результаты второй главы §11, решение системы (11.16-11.19) ищем в виде:

$$\begin{aligned} u_r &= r^\lambda u(\theta) e^{im\varphi} \\ \phi &= r^{\lambda-1} v(\theta) e^{im\varphi} \\ \psi &= ir^{\lambda-1} w(\theta) e^{im\varphi} \\ i &= \sqrt{-1} \end{aligned} \quad (25.3)$$

Подставляя (25.3) в (11.16)-(11.19), (25.1) после разделения переменных соответственно получаем

$$[b_{11}\lambda(\lambda+1)+2(b_{12}-b_{22}-b_{23})]u+u''+ctg\theta u'-\frac{m^2}{\sin^2\theta}u+ \\ +[(b_{12}+1)\lambda+b_{12}-b_{22}-b_{23}]\left(v''+ctg\theta v'-\frac{m^2}{\sin^2\theta}v\right)=0 \quad (25.4)$$

$$[(b_{12}+1)\lambda+b_{22}+b_{23}+2]u+[\lambda(\lambda+1)+2(G_0-1)]v+b_{22}\times \\ \times\left(v''+ctg\theta v'-\frac{m^2}{\sin^2\theta}v\right)=0$$

$$[\lambda(\lambda+1)2(G_0-1)]w+G_0\left(w''+ctg\theta w'-\frac{m^2}{\sin^2\theta}w\right)=0$$

$$\left[(b_{12}\lambda+b_{22}+b_{23})u+b_{22}v''+b_{23}ctg\theta v'-\frac{b_{23}}{\sin^2\theta}m^2v- \right. \\ \left.-2G_0m\left(\frac{w}{\sin\theta}\right)\right]_{\theta=\theta_n}=0 \quad (25.5)$$

$$\left[u'+(\lambda-1)v'-\frac{(\lambda-1)}{\sin^2\theta}w\right]_{\theta=\theta_n}=0$$

$$\left[2m\left(\frac{1}{\sin^2\theta}v\right)'-\sin\theta\left(\frac{w'}{\sin^2\theta}\right)'-\frac{m^2}{\sin^2\theta}w\right]_{\theta=\theta_n}=0$$

Не вдаваясь в подробности, приведем окончательно решение уравнений (25.4)

$$u(\theta)=A_1Z_{\gamma_1}(\theta)+A_2Z_{\gamma_2}(\theta) \\ v(\theta)=b_0[Z_{\gamma_1}(\theta)+Z_{\gamma_2}(\theta)]-\frac{m}{\sin\theta}F_{\gamma_2}(\theta) \quad (25.6) \\ w(\theta)=Z_{\gamma_3}(\theta)$$

Здесь

$$\begin{aligned}
Z_\gamma(\theta) &= C_\gamma T_\gamma(\theta) + B_\gamma F_\gamma(\theta) \\
T_\gamma(\theta) &= P_\gamma^{(m)}(\cos \theta) + P_\gamma^{(m)}(-\cos \theta) = \\
&= P_\gamma^{(m)}(\sin \varepsilon \eta) + P_\gamma^{(m)}(-\sin \varepsilon \eta) \\
F_\gamma(\theta) &= P_\gamma^{(m)}(\cos \theta) - P_\gamma^{(m)}(-\cos \theta) = \\
&= -[P_\gamma^{(m)}(\sin \varepsilon \eta) - P_\gamma^{(m)}(-\sin \varepsilon \eta)] \\
\theta &= \pi/2 + \varepsilon \eta, \quad -1 \leq \eta \leq 1
\end{aligned}$$

$\gamma_1, \gamma_2$  – корни биквадратного уравнения

$$\begin{aligned}
&b_{22}\gamma^2(\gamma+1)^2 - \left[ (b_{11}b_{22} - b_{12}^2 - 2b_{12}) \left( z^2 - \frac{1}{4} \right) + \right. \\
&+ 2b_{22} + 2(b_{12} - b_{22} - b_{23})(G_0 - 1) \left. \right] \gamma(\gamma+1) + \\
&+ \left[ b_{11} \left( z^2 - \frac{1}{4} \right) + 2(b_{12} - b_{22} - b_{23}) \right] \left[ z^2 - \frac{1}{4} + 2(G_0 - 1) \right] = 0 \quad (25.7)
\end{aligned}$$

$$A_k = b_{22}\gamma_k(\gamma_k + 1) + z^2 - \frac{1}{4} + 2(G_0 - 1)$$

$$b_0 = - \left[ (b_{12} + 1) \left( z - \frac{1}{2} \right) + b_{22} + b_{23} + 2 \right]$$

$$z = \lambda + \frac{1}{2}; \quad \gamma_3 = \frac{1}{G_0} \left[ z^2 - \frac{1}{4} + 2(G_0 - 1) \right]$$

$C_\gamma, B_\gamma$  – произвольные постоянные.

$P_\gamma^{(m)}(\sin \varepsilon \eta)$  – присоединенная функция Лежандра.

Выбранная форма решений позволяет расчленить общую задачу для плиты на две независимые:

задачу растяжения-сжатия плиты и задачу изгиба плиты.

В первом случае в (25.3) следует положить  $C_{\gamma_3} = B_{\gamma_1} = B_{\gamma_2} = 0$ , во втором случае  $C_{\gamma_1} = C_{\gamma_2} = B_{\gamma_3} = 0$ .

Ниже будем рассматривать только первый случай. В этом

случае компоненты вектора перемещений можно представить в виде:

$$\begin{aligned}
 u_r &= r^\lambda [A_1 T_{\gamma_1}(\theta) + A_2 T_{\gamma_2}(\theta)] e^{i\omega\varphi} \\
 u_\theta &= r^\lambda \left\{ b_0 \left[ \frac{dT_{\gamma_1}(\theta)}{d\theta} + \frac{dT_{\gamma_2}(\theta)}{d\theta} \right] - \frac{m}{\sin\theta} F_{\gamma_3}(\theta) \right\} e^{i\omega t} \quad (25.8.) \\
 u_\varphi &= ir^\lambda \left\{ \frac{mb_0}{\sin\theta} [T_{\gamma_1}(\theta) + T_{\gamma_2}(\theta)] - \frac{dF_{\gamma_3}(\theta)}{d\theta} \right\} e^{im\varphi}
 \end{aligned}$$

Удовлетворяя однородные граничные условия (25.1), получаем характеристическое уравнение относительно собственных значений  $z$ :

$$\begin{aligned}
 D(z, \theta_1) &= \left[ d_{12} D_{11}(\theta_1) \frac{dT_{\gamma_2}(\theta_1)}{d\theta} - d_{11} D_{12}(\theta_1) \frac{dT_{\gamma_1}(\theta_1)}{d\theta} \right] L(\theta_1) + \\
 &+ 2m^2 (z - 3/2) b_0 (\sin\theta_1)^{-2} F_{\gamma_3}(\theta_1) [l_2(\theta_1) D_{11}(\theta_1) - l_1(\theta_1) D_{12}(\theta_1)] - \\
 &- 2m^2 b_0 G_0 (\sin\theta_1)^{-2} \left[ \frac{dT_{\gamma_2}(\theta_1)}{d\theta} - \text{ctg}\theta_1 F_{\gamma_3}(\theta_1) \right] H(\theta_1) = 0 \quad (25.9)
 \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
 D_{1k}(\theta) &= \left( C_{1k} + \frac{2b_0 G_0 m^2}{\sin^2\theta} \right) T_{\gamma_k} - 2b_0 G_0 \text{ctg}\theta \frac{dT_{\gamma_k}(\theta)}{d\theta} \quad (k=1,2) \\
 L(\theta) &= 2\text{ctg}\theta \frac{dF_{\gamma_3}(\theta)}{d\theta} + \left[ \gamma_3(\gamma_3 + 1) - \frac{2m^2}{\sin^2\theta} \right] F_{\gamma_3}(\theta) \\
 l_k(\theta) &= \frac{dT_k(\theta)}{d\theta} - \text{ctg}\theta T_{\gamma_k}(\theta) \\
 H(\theta) &= (d_{11} - d_{12}) \frac{dT_{\gamma_1}(\theta)}{d\theta} + \text{ctg}\theta \times \\
 &\times \left[ d_{12} T_{\gamma_1}(\theta) \frac{dT_{\gamma_2}(\theta)}{d\theta} - d_{11} T_{\gamma_2}(\theta) \frac{dT_{\gamma_1}(\theta)}{d\theta} \right]
 \end{aligned}$$

$$C_{1k} = \left[ b_{12} \left( z - \frac{1}{2} \right) + b_{22} + b_{23} \right] A_k - b_{22} b_0 \gamma_k (\gamma_k + 1)$$

$$d_{1k} = A_k + \left( z - \frac{3}{2} \right) b_0, \quad C_{13} = -G_0 b_0$$

Трансцендентное уравнение (25.9), как целая функция параметра  $z_1$ , определяет счетное множество  $z_n$  с точкой сгущения на бесконечности. Суммируя по всем корням получаем однородные решения следующего вида:

$$u_r = \frac{1}{\sqrt{r}} \sum_{n=1}^{\infty} C_n r^{z_n} u_{1n}(\theta) e^{im\varphi}$$

$$u_\theta = \frac{1}{\sqrt{r}} \sum_{n=1}^{\infty} C_n r^{z_n} u_{2n}(\theta) e^{im\varphi}$$

$$u_\varphi = \frac{1}{\sqrt{r}} \sum_{n=1}^{\infty} C_n r^{z_n} u_{3n}(\theta) e^{im\varphi}$$

$$\sigma_r = \frac{G_1}{r\sqrt{r}} \sum_{n=1}^{\infty} C_n r^{z_n} Q_{1n}(\theta) e^{im\varphi}$$

$$\sigma_\varphi = \frac{G_1}{r\sqrt{r}} \sum_{n=1}^{\infty} C_n r^{z_n} Q_{2n}(\theta) e^{im\varphi}$$

$$\sigma_\theta = \frac{G_1}{r\sqrt{r}} \sum_{n=1}^{\infty} C_n r^{z_n} Q_{3n}(\theta) e^{im\varphi} \quad (25.10)$$

$$T_{r\theta} = \frac{G_1}{r\sqrt{r}} \sum_{n=1}^{\infty} C_n r^{z_n} T_{1n}(\theta) e^{im\varphi}$$

$$T_{r\varphi} = \frac{G_1}{r\sqrt{r}} \sum_{n=1}^{\infty} C_n r^{z_n} T_{2n}(\theta) e^{im\varphi}$$

$$T_{\theta\varphi} = \frac{G_1}{r\sqrt{r}} \sum_{n=1}^{\infty} C_n r^{z_n} T_{3n}(\theta) e^{im\varphi}$$

где

$$u_{1n}(\theta) = A_1 \Delta_{1n} T_{\gamma_{1n}}(\theta) - A_2 \Delta_{2n} T_{\gamma_{2n}}(\theta)$$

$$\begin{aligned}
u_{2n}(\theta) &= b_0 \left[ \Delta_{1n} \frac{dT_{\gamma_{1n}}(\theta)}{d\theta} - \Delta_{2n} \frac{dT_{\gamma_{2n}}(\theta)}{d\theta} \right] - \frac{m}{\sin \theta} \Delta_{3n} F_{\gamma_{3n}}(\theta) \\
u_{3n}(\theta) &= \frac{mb_0}{\sin \theta} \left[ \Delta_{1n} T_{\gamma_{1n}}(\theta) - \Delta_{2n} T_{\gamma_{2n}}(\theta) \right] - \Delta_{3n} \frac{dF_{\gamma_{3n}}(\theta)}{d\theta} \\
Q_{1n}(\theta) &= \left\{ \left[ b_{12} \left( z_n - \frac{1}{2} \right) + 2b_{12} \right] A_1 - b_0 b_{12} \gamma_{1n} (\gamma_{1n} + 1) \right\} \Delta_{1n} T_{\gamma_{1n}}(\theta) - \\
&- \left\{ \left[ b_{12} \left( z_n - \frac{1}{2} \right) + 2b_{12} \right] A_2 - b_0 b_{12} \gamma_{2n} (\gamma_{2n} + 1) \right\} \Delta_{2n} T_{\gamma_{2n}}(\theta) \\
Q_{2n}(\theta) &= \left\langle \left\{ \left[ b_{12} \left( z_n - \frac{1}{2} \right) + b_{22} + b_{23} \right] A_1 - b_{13} b_0 \gamma_{1n} (\gamma_{1n} + 1) - \right. \right. \\
&- \left. \frac{2m^2 G_0 b_0}{\sin^2 \theta} \right\} T_{\gamma_{1n}}(\theta) - 2G_0 b_0 \text{ctg} \theta \frac{dT_{\gamma_{1n}}(\theta)}{d\theta} \right\rangle \Delta_{1n} - \left\langle \left\{ \left[ b_{12} \left( z_n - 1/2 \right) + \right. \right. \right. \\
&+ \left. \left. b_{22} + b_{23} \right] A_2 - b_0 b_{13} \gamma_{2n} (\gamma_{2n} + 1) - \frac{2m^2 G_0 b_0}{\sin^2 \theta} \right\} T_{\gamma_{2n}}(\theta) - 2G_0 b_0 \text{ctg} \theta \times \right. \\
&\times \left. \frac{dT_{\gamma_{2n}}(\theta)}{d\theta} \right\rangle \Delta_{2n} - \frac{2G_0 m}{\sin \theta} \Delta_{3n} \left[ \frac{dF_{\gamma_{3n}}(\theta)}{d\theta} - \text{ctg} \theta F_{\gamma_{3n}}(\theta) \right] \\
Q_{3n}(\theta) &= D_{11}(\theta) \Delta_{1n} - D_{12}(\theta) \Delta_{2n} - \frac{2G_0 m}{\sin \theta} \times \\
&\times \Delta_{3n} \left[ \frac{dF_{\gamma_{3n}}(\theta)}{d\theta} - \text{ctg} \theta F_{\gamma_{3n}}(\theta) \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
T_{1n}(\theta) &= d_{11}\Delta_{1n} \frac{dT_{\gamma_{1n}}(\theta)}{d\theta} - d_{12}\Delta_{2n} \frac{dT_{\gamma_{2n}}(\theta)}{d\theta} - \frac{m\left(z_n - \frac{3}{2}\right)}{\sin\theta} \Delta_{3n} F_{\gamma_{3n}}(\theta) \\
T_{2n}(\theta) &= \frac{m}{\sin\theta} \left[ d_{11}\Delta_{1n} T_{\gamma_{1n}}(\theta) - d_{12}\Delta_{2n} T_{\gamma_{2n}}(\theta) \right] - \left( z_n - \frac{3}{2} \right) \Delta_{3n} \frac{F_{\gamma_{3n}}(\theta)}{d\theta} \\
T_{3n}(\theta) &= \frac{2mb_0}{\sin\theta} \left[ l_1(\theta)\Delta_{1n} - l_2(\theta)\Delta_{2n} \right] - L(\theta)\Delta_{3n} \\
\Delta_{1n} &= d_{12} \frac{dT_{\gamma_{2n}}(\theta_1)}{d\theta} L(\theta_1) + \frac{2m^2(z_n - 3/2)b_0}{\sin\theta_1} F_{\gamma_{3n}}(\theta_1) l_2(\theta_1) \\
\Delta_{2n} &= d_{11} \frac{dT_{\gamma_{1n}}(\theta_1)}{d\theta} L(\theta_1) + \frac{2m^2(z_n - 3/2)b_0}{\sin\theta_1} F_{\gamma_{3n}}(\theta_1) l_1(\theta_1) \\
\Delta_{3n} &= \frac{2mb_0}{\sin^2\theta_1} H(\theta_1).
\end{aligned}$$

Решение задачи изгиба получается из (25.10) заменой  $T_\gamma \leftrightarrow F_\gamma$ . В случае тонкостенности плиты из вышеприведенных формул можно получить простые асимптотические формулы, позволяющие рассчитать напряженно-деформированное состояние плиты. Продемонстрируем это на примере задачи растяжения-сжатия плиты, когда торцах плиты жестко заделаны:

$$u_r = 0, \quad u_\theta = 0, \quad u_\varphi = 0 \quad \text{при } \theta = \pi/2 \mp \varepsilon \quad (25.11)$$

В этом случае характеристическое уравнение имеет вид:

$$\begin{aligned}
D(z, \theta_1) &= \frac{dF_{\gamma_3}(\theta_1)}{d\theta} \left[ A_1 T_{\gamma_2}(\theta_1) \frac{dT_{\gamma_1}(\theta_1)}{d\theta} - A_2 T_{\gamma_1}(\theta_1) \frac{dT_{\gamma_2}(\theta_1)}{d\theta} \right] + \\
&+ \frac{m^2}{\sin^2\theta_1} (A_1 - A_2) T_{\gamma_1}(\theta_1) T_{\gamma_2}(\theta_1) F_{\gamma_3}(\theta_1) = 0 \quad (25.12)
\end{aligned}$$

Докажем, что функция  $D(z, \varepsilon)$  при  $\varepsilon \rightarrow 0$  ограниченных нулей не имеет. Для этой цели полагая  $\theta = \theta_0 + \varepsilon\eta$ ,

$-1 \leq \eta \leq 1$  и раскладывая функции  $T_\gamma(\theta)$ ,  $\frac{dT_\gamma}{d\theta}(\theta)$ ,  $F_\gamma(\theta)$ ,  $\frac{dF_\gamma}{d\theta}(\theta)$  в окрестности плоскости  $\pi/2$  в ряд по  $\varepsilon$ , получим

$$T_\gamma(\theta) = \frac{2^{m+1}}{\sqrt{\pi}} \frac{\Gamma\left(\frac{1+\gamma+m}{2}\right)}{\Gamma\left(1+\frac{\gamma-m}{2}\right)} \cos \pi/2(\gamma+m) \times \\ \times \left\{ 1 - \frac{1}{2} \eta^2 \varepsilon^2 [\gamma(\gamma+1) - m^2] + \dots \right\} \quad (25.13)$$

$$\frac{dT_\gamma(\theta)}{d\theta} = \frac{2^{m+1}}{\sqrt{\pi}} \frac{\Gamma\left(\frac{1+\gamma+m}{2}\right)}{\Gamma\left(1+\frac{\gamma-m}{2}\right)} \cos \pi/2(\gamma+m) \varepsilon \eta \times \\ \times \left\langle \gamma(\gamma+1) - m^2 \frac{1}{3} \left\{ [\gamma(\gamma+1) - m^2] [\gamma(\gamma+1) - 2 - m^2] + 2m^2 \right\} \eta^2 \varepsilon^2 + \dots \right\rangle$$

$$F_\gamma(\theta) = \frac{2^{m+1}}{\sqrt{\pi}} \frac{\Gamma\left(\frac{1+\gamma+m}{2}\right)}{\Gamma\left(1+\frac{\gamma-m}{2}\right)} \sin \pi/2(\gamma+m) \times \\ \times \eta \varepsilon \left\{ 1 - \frac{1}{3!} [\gamma(\gamma+1) - m^2 - 1] \eta^2 \varepsilon^2 + \dots \right\} \quad (25.14)$$

$$\frac{dF_\gamma(\theta)}{d\theta} = \frac{2^{m+1}}{\sqrt{\pi}} \frac{\Gamma\left(\frac{1+\gamma+m}{2}\right)}{\Gamma\left(1+\frac{\gamma-m}{2}\right)} \sin \pi/2(\gamma+m) \times \\ \times \left\{ 1 - \frac{1}{2} [\gamma(\gamma+1) - m^2 - 1] \eta^2 \varepsilon^2 + \dots \right\}$$

Подставляя (25.13), (25.14) в (25.12), получаем

$$D(z, \varepsilon) = \frac{2^{3m+3}}{\pi\sqrt{\pi}} \frac{\Gamma\left(\frac{\gamma_1 + m + 1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{\gamma_2 + m + 1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{\gamma_3 + m + 1}{2}\right)}{\Gamma\left(1 + \frac{\gamma_1 - m}{2}\right) \Gamma\left(1 + \frac{\gamma_2 - m}{2}\right) \Gamma\left(1 + \frac{\gamma_3 - m}{2}\right)} \times$$

$$\times \cos \pi/2(\gamma_1 + m) \cos \pi/2(\gamma_2 + m) \sin \pi/2(\gamma_3 + m) \times$$

$$\times \left[ \gamma_2(\gamma_2 + 1) - \gamma_1(\gamma_1 + 1) \right] \varepsilon \left[ z^2 - \frac{1}{4} + 2(G_0 - 1) + O(\varepsilon^2) \right] \quad (25.15)$$

$\Gamma(x)$  – гамма функция Эйлера

Из (25.15) видно, что  $z = \pm \sqrt{\frac{9}{4} - 2G_0}$  является корнями характеристического уравнения.

Непосредственной проверкой можно установить, что корням  $z = \pm \sqrt{\frac{9}{4} - 2G_0}$  соответствует тривиальное решение. Как и в осесимметричном случае, можно доказать, что все остальные нули функции  $D(z, \varepsilon)$  безгранично растут при  $\varepsilon \rightarrow 0$  и здесь возможен только случай  $\varepsilon z_n \rightarrow const$  при  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

Для построения асимптотики второй группы нулей отыскиваем их в виде

$$z_n = \frac{\delta_n}{\varepsilon} + O(\varepsilon) \quad (25.16)$$

В этом случае характеристическое уравнение (25.7) принимает вид:

$$\tau^2 - 2q_1\tau + q_2 = 0 \quad \gamma_n = \sqrt{\tau_n} \quad (25.17)$$

$$2q_1 = \frac{1}{b_{22}} (b_{11}b_{22} - b_{12}^2 - 2b_{12}) \delta_n^2, \quad q_2 = b_{11}b_{22}^{-1} \delta_n^4$$

Рассмотрим следующие случаи:

$$1. \quad q_1 > 0, \quad q_1^2 - q_2 > 0, \quad \gamma_{1,2} = \pm s_1 \delta_n, \quad \gamma_{3,4} = \pm s_2 \delta_n,$$

$$s_{1,2} = \sqrt{q_1 \pm \sqrt{q_1^2 - q_2}}, \quad q_1^2 > q_2$$

$$s_{1,2} = \alpha + i\beta = \sqrt{q_1 \pm i\sqrt{q_2 - q_1^2}}, \quad q_1^2 < q_2.$$

2. Корни характеристического уравнения (25.17) – кратные.

$$\gamma_{1,2} = \pm p\delta_n, \quad q_1 > 0, \quad q_1^2 - q_2 = 0 \quad p = \sqrt{q_1}.$$

3.  $q_1 < 0, \quad q_1^2 - q_2 \neq 0, \quad \gamma_{1,2} = \pm i\delta_n s_1, \quad \gamma_{3,4} = \pm i\delta_n s_2$

$$s_{1,2} = \sqrt{|q_1| \pm \sqrt{q_1^2 - q_2}} \quad q_1^2 > q_2$$

$$s_{3,4} = \sqrt{|q_1| \pm i\sqrt{q_1 - q_1^2}} \quad q_1^2 < q_2$$

4.  $q_1 < 0, \quad q_1^2 - q_2 = 0, \quad \gamma_{1,2} = \gamma_{3,4} = \pm ip\delta_n, \quad p = \sqrt{|q_1|}.$

В случаях 1,2 подставляя (25.17) в (25.12) и преобразовывая его с помощью асимптотического разложения

$T_\gamma(\theta), \frac{dT_\gamma}{d\theta}(\theta), F_\gamma(\theta), \frac{dF_\gamma}{d\theta}(\theta)$  для  $\delta_n$ , соответственно получаем

Для вихревой задачи

$$\cos \frac{\delta_n}{\sqrt{b_{22}}} = 0 \quad (25.18)$$

Для потенциальной задачи

$$\frac{1 + b_{22}s_1s_2}{1 - b_{22}s_1s_2} (s_2 - s_1)\sin(s_2 + s_1)\delta_n + (s_2 + s_1)\sin(s_2 - s_1)\delta_n = 0 \quad (25.19)$$

$$\frac{p^2 + b_{11}}{p^2 - b_{11}} \sin 2p\delta_n + 2p\delta_n = 0 \quad (25.20)$$

$$\begin{aligned} & \beta(1 + b_{22}\beta^2 - 3b_{22}\alpha^2)\sin \alpha\delta_n + \\ & + \alpha(1 - b_{22}\alpha^2 - 3b_{22}\beta^2)\sin 2\beta\delta_n = 0 \end{aligned} \quad (25.21)$$

Что касается 3 и 4, то для них результаты получаются из случаев 1 и 2 формальной заменой  $s_1, s_2, p$  на  $is_1, is_2, ip$ .

Эти уравнения имеют счетное множество корней и фактически совпадают с характеристическими уравнениями аналогичной задачи для трансверсально-изотропного упругого слоя.

Приведем асимптотическое построение однородных решений, соответствующих различным группам корней характеристического уравнения.

### Группа 1.

$$\begin{aligned}
 u_r^{(1)} &= \frac{r_1 \varepsilon}{\sqrt{\rho}} \sum_{n=1}^{\infty} C_n U_n^{(1)}(\eta) \exp\left(\frac{\delta_n}{\varepsilon} \ln \rho\right) e^{im\varphi} \\
 u_\theta^{(1)} &= \frac{r_1 \varepsilon}{\sqrt{\rho}} \sum_{n=1}^{\infty} C_n U_n^{(1)}(\eta) \exp\left(\frac{\delta_n}{\varepsilon} \ln \rho\right) e^{im\varphi} \\
 u_\varphi^{(1)} &= 0 \\
 \sigma_r^{(1)} &= \frac{G_1}{\rho \sqrt{\rho}} \sum_{n=1}^{\infty} C_n Q_m^{(1)}(\eta) \exp\left(\frac{\delta_n}{\varepsilon} \ln \rho\right) e^{im\varphi} \\
 \sigma_\varphi^{(1)} &= \frac{G_1}{\rho \sqrt{\rho}} \sum_{n=1}^{\infty} C_n Q_{\varphi n}^{(1)}(\eta) \exp\left(\frac{\delta_n}{\varepsilon} \ln \rho\right) e^{im\varphi} \\
 \sigma_\theta^{(1)} &= \frac{G_1}{\rho \sqrt{\rho}} \sum_{n=1}^{\infty} C_n Q_{\theta n}^{(1)}(\eta) \exp\left(\frac{\delta_n}{\varepsilon} \ln \rho\right) e^{im\varphi} \\
 \tau_{r\theta}^{(1)} &= \frac{G_1}{\rho \sqrt{\rho}} \sum_{n=1}^{\infty} C_n T_n^{(1)}(\eta) \exp\left(\frac{\delta_n}{\varepsilon} \ln \rho\right) e^{im\varphi} \\
 \tau_{r\varphi}^{(1)} &\approx 0, \quad \tau_{\theta\varphi}^{(1)} \approx 0
 \end{aligned} \tag{25.22}$$

где

$$\begin{aligned}
 \rho &= r r_1^{-1} \\
 u_n^{(1)} \eta &= s_2 (1 - b_{22} s_1^2) \sin s_2 \delta_n \cos s_1 \delta_n \eta - \\
 &- s_1 (1 - b_{22} s_2^2) \sin s_1 \delta_n \cos s_2 \delta_n \eta \\
 v_n^{(1)}(\eta) &= (b_{12} + 1) s_1 s_2 (\sin s_2 \delta_n \sin s_1 \delta_n \eta - \sin s_1 \delta_n \sin s_2 \delta_n \eta) \\
 Q_m^{(1)}(\eta) &= \delta_n [b_{11} U_n^{(1)} - \delta_n b_{12} v_n^{(1)}]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 Q_{\varphi n}^{(1)}(\eta) &= \delta_n [b_{11} U_n^{(1)} - \delta_n b_{22} \nu_n^{(1)}] \\
 Q_{\theta n}^{(1)}(\eta) &= \delta_n [b_{11} U_n^{(1)} - \delta_n b_{23} \nu_n^{(1)}] \\
 Q_n^{(1)}(\eta) &= [U_n^{(1)} - \delta_n \nu_n^{(1)}]
 \end{aligned}$$

### Группа 2.

$$\begin{aligned}
 u_r^{(2)}(\eta) &= \frac{r_1 \varepsilon}{\sqrt{\rho}} \sum_{n=1}^{\infty} E_n U_n^{(2)} \exp\left(\frac{\delta_n}{\varepsilon} \ln \rho\right) e^{im\varphi} \\
 u_{\theta}^{(2)}(\eta) &= \frac{r_1 \varepsilon}{\sqrt{\rho}} \sum_{n=1}^{\infty} E_n \nu_n^{(2)} \exp\left(\frac{\delta_n}{\varepsilon} \ln \rho\right) e^{im\varphi} \\
 \sigma_r^{(2)}(\eta) &= \frac{G_1}{\rho \sqrt{\rho}} \sum_{n=1}^{\infty} E_n Q_{rn}^{(2)} \exp\left(\frac{\delta_n}{\varepsilon} \ln \rho\right) e^{im\varphi} \quad (25.23) \\
 \sigma_{\varphi}^{(2)}(\eta) &= \frac{G_1}{\rho \sqrt{\rho}} \sum_{n=1}^{\infty} E_n Q_{\varphi n}^{(2)} \exp\left(\frac{\delta_n}{\varepsilon} \ln \rho\right) e^{im\varphi} \\
 \sigma_{\theta}^{(2)}(\eta) &= \frac{G_1}{\rho \sqrt{\rho}} \sum_{n=1}^{\infty} E_n Q_{\theta n}^{(2)} \exp\left(\frac{\delta_n}{\varepsilon} \ln \rho\right) e^{im\varphi} \\
 T_{r\theta}^{(2)}(\eta) &= \frac{G_1}{\rho \sqrt{\rho}} \sum_{n=1}^{\infty} E_n T_n^{(2)} \exp\left(\frac{\delta_n}{\varepsilon} \ln \rho\right) e^{im\varphi} \\
 \tau_{r\varphi}^{(2)} &\approx 0, \quad \tau_{\theta\varphi}^{(2)} \approx 0, \quad u_{\varphi}^{(2)} \approx 0; \\
 u_n^{(2)} &= (b_{12} + 1) \left\{ (p^2 - b_{11}) \cos p\delta_n + (p\delta_n)^{-1} (p^2 + b_{11}) \sin p\delta_n \right\} \times \\
 &\times \cos p\delta_n \eta + \eta (p^2 - b_{11}) \sin p\delta_n \sin p\delta_n \eta \} \\
 \nu_n^{(2)}(\eta) &= (b_{11} - p^2) (\cos p\delta_n \sin p\delta_n \eta - \eta \sin p\delta_n \cos p\delta_n \eta).
 \end{aligned}$$

Выражения для  $Q_{rn}^{(2)}$ ,  $Q_{\varphi n}^{(2)}$ , ...,  $T_n^{(2)}$  получаются из (25.22) простой заменой  $u_n^{(1)}$ ,  $\nu_n^{(1)}$  на  $u_n^{(2)}$ ,  $\nu_n^{(2)}$ , соответственно.

### Группа 3.

$$u_r^{(3)} = \frac{r_1 \varepsilon}{\sqrt{\rho}} \sum_{n=1}^{\infty} D_n u_n^{(3)} \exp\left(\frac{\delta_n}{\varepsilon} \ln \rho\right) e^{im\varphi}$$

$$u_{\theta}^{(3)} = \frac{r_1 \varepsilon}{\sqrt{\rho}} \sum_{n=1}^{\infty} D_n v_n^{(3)} \exp\left(\frac{\delta_n}{\varepsilon} \ln \rho\right) e^{im\varphi} \quad (25.24)$$

$$u_{\varphi}^{(3)} \approx 0,$$

$$u_n^{(3)} = (a_0 \cos \beta \delta_n \eta \operatorname{ch} \alpha \delta_n \eta - b_0 \sin \beta \delta_n \eta \operatorname{sh} \alpha \delta_n \eta) \Delta_{1n} + \\ + (b_0 \cos \beta \delta_n \eta \operatorname{ch} \alpha \delta_n \eta + a_0 \sin \beta \delta_n \eta \operatorname{sh} \alpha \delta_n \eta) \Delta_{2n}$$

$$v_n^{(3)} = (b_{12} + 1) [(\alpha \cos \beta \delta_n \eta \operatorname{sh} \alpha \delta_n \eta + \beta \sin \delta_n \eta \operatorname{ch} \alpha \delta_n \eta) \Delta_{1n} - \\ - (\beta \cos \beta \delta_n \eta \operatorname{sh} \alpha \delta_n \eta + \alpha \sin \delta_n \eta \operatorname{ch} \alpha \delta_n \eta) \Delta_{2n}]$$

$$a_0 = 1 - b_{22}(\alpha^2 - \beta^2), \quad b_0 = 2b_{22}\alpha\beta$$

$$\Delta_{1n} = -\alpha \cos \beta \delta_n \operatorname{sh} \alpha \delta_n + \beta \sin \beta \delta_n \operatorname{ch} \alpha \delta_n$$

$$\Delta_{2n} = \beta \cos \beta \delta_n \operatorname{sh} \alpha \delta_n + \alpha \sin \beta \delta_n \operatorname{ch} \alpha \delta_n$$

Выражения для  $Q_m^{(3)}, \dots, T_n^{(3)}$  получаются из (25.22) заменой  $u_n^{(1)}$  на  $u_n^{(3)}$ ,  $v_n^{(1)}$  на  $v_n^{(3)}$  соответственно. Важно отметить, что решение (25.24) характерно только для анизотропных тел, при  $G_0 = 1$  оно полностью исчезает.

Что касается решений (25.21), (25.22), то при  $G_0 = 1$  они сливаются в одно и полностью совпадают с краевым эффектом Сен-Венана в теории изотропных плит.

$C_n, E_n, D_n$  – произвольные постоянные.

Аналогично для вихревой задачи получаем

$$u_r \approx 0, \quad u_{\theta} \approx 0, \quad \sigma_r \approx 0, \quad \sigma_{\theta} \approx 0, \quad \tau_{r\theta} \approx 0.$$

$$u_{\varphi} = \frac{r_1 i \varepsilon}{\sqrt{\rho}} \sum_{k=1}^{\infty} B_k \cos \frac{\delta_k}{\sqrt{b_{22}}} \eta \exp\left(\frac{\delta_k}{\varepsilon} l_n \rho\right) e^{im\varphi}$$

$$\tau_{r\varphi} = \frac{G_1 i}{\rho \sqrt{\rho}} \sum_{k=1}^{\infty} \delta_k B_k \cos \frac{\delta_k}{\sqrt{b_{22}}} \eta \exp\left(\frac{\delta_k}{\varepsilon} l_n \rho\right) e^{im\varphi} \quad (25.25)$$

$$\tau_{\theta\varphi} = \frac{G_1 i}{\rho \sqrt{\rho}} \sum_{k=1}^{\infty} B_k \frac{\delta_k}{\sqrt{b_{22}}} \sin \frac{\delta_k}{\sqrt{b_{22}}} \eta \exp\left(\frac{\delta_k}{\varepsilon} l_n \rho\right) e^{im\varphi}$$

В общем случае нагружения произвольные постоянные  $C_n, E_n, D_n, B_k$  могут быть определены с помощью вариационного принципа Лагранжа. При специальных условиях опирания края плиты они определяются точно с помощью обобщенного условия ортогональности.

## ЛИТЕРАТУРА

1. М.Ф.Мехтиев. Асимптотический анализ некоторых пространственных задач теории упругости для полых тел. Баку, “Элм”, 2008, 320с.
2. Мехтиев М.Ф., Устинов Ю.А. Асимптотическое поведение решения осесимметричной задачи теории упругости для полого конуса // Тр. VII Всесоюз. конф. по теории оболочек и пластинок, М., Наука, 1970, с.425-427.
3. Мехтиев М.Ф., Устинов Ю.А. Асимптотическое исследование решения задачи теории упругости для полого конуса. // ПММ, 1971, т.35, вып. 6, с. 1108-1115.
4. Мехтиев М.Ф. Построение уточненных прикладных теорий для усеченного полого конуса. //Изв. АН Азерб. ССР, серия физ.-тех. и матем. наук, 1972, вып. 4, с.17-21.
5. Мехтиев М.Ф., Устинов Ю.А. Асимптотическое поведение решения теории упругости для плиты переменной толщины. // Тр. VIII Всесоюз. конф. по теории оболочек и пластинок. М., Наука, 1973, с.58-60.
6. Мехтиев М.Ф., Устинов Ю.А. Асимптотический анализ некоторых неосесимметричных задач для плиты переменной толщины. //Изв. АН СССР, МТТ, 1976, вып. 6, с.165-169.
7. Мехтиев М.Ф. Построение уточненных прикладных теорий для плиты переменной толщины //Изв. АН Азерб. ССР, серия физ.-тех. и матем. наук, 1979, вып. 3, с.47-52.
8. Мехтиев М.Ф. Асимптотический анализ динамической задачи теории упругости для полого цилиндра

- конечной длины. // Изв. АН Азерб. ССР, серия физ.-тех. и матем. наук, 1982, вып. 5, с.62-67.
9. Мехтиев М.Ф. Асимптотическое исследование напряженно-деформированного состояния динамической задачи теории упругости для полого цилиндра конечной длины. //Изв. АН Азерб. ССР, серия физ.-тех. матем. наук, 1982, с.28-32.
  10. Мехтиев М.Ф. Сверхвысокочастотные колебания изотропного полого цилиндра. //Изв. АН Азерб. ССР, серия физ.-тех. и матем. наук, 1983, с.50-54.
  11. Мехтиев М.Ф. Свободные колебания изотропного полого цилиндра. //Изв. АН ССР, МТТ, 1985, вып.5, с.83-88.
  12. Мехтиев М.Ф. Неосесимметричные динамические задачи теории упругости для полой сферы. // Межвузов. сб. нелинейные задачи гидроаэромеханики и теории упругости. Днепродзержинск. Университет. 1987, с.135-138.
  13. Мехтиев М.Ф. Построение динамической уточненной теории для полого цилиндра. // Межвузов. сб. Прикладная механика, Ленинград, МГУ, 1988, с.207-211.
  14. Ахмедов Н.К., Мехтиев М.Ф. Анализ трехмерной задачи теории упругости для неоднородного усеченного конуса. // РАН, ПММ, 1993, т.57, вып. 5, с.113-119.
  15. Мехтиев М.Ф., Магсудов Д.Т., Садыхов П.М. Асимптотическая теория для трансверсально-изотропного полого цилиндра. /Тр. V Межд. конф. "Современные проблемы механики сплошной среды", Ростов на Дону, 2000, т.2, с.134-139.
  16. Мехтиев М.Ф., Фомина Н.И. Свободные колебания трансверсально-изотропного полого цилиндра.

- //Механика композитных материалов, Рига, 2002, т.38, №1, с.81-98.
17. Мехтиев М.Ф., Гюльмамедов М.Х. Динамическая задача теории упругости для сферического слоя. Сборник трудов I респуб. конф. по механике математике АН Азербайджана, Баку 5-15 июля, 1995, с.120-124.
  18. Мехтиев М.Ф., Сардарова Н.А. Построение однородных решений задачи теории упругости для трансверсально-изотропного полого конуса переменной толщины. Труды ИММ АН Азербайджана, 1997, том 6, с.239-244.
  19. Мехтиев М.Ф., Марданов И.Д., Амрахова А.Р. Асимптотический анализ задачи растяжения-сжатия для транслопной плиты переменной толщины. // Механика-Машиностроение, Баку, 2001, №1, с.25-31.
  20. Мехтиев М.Ф., Амрахова А.Р. Задачи изгиба для транслопной плиты переменной толщины. Тр. Всероссийской конференции по теории упругости Международным участием (г. Азов, 2003), Ростов на-Дону, 2004, с.265-267.
  21. Мехтиев М.Ф., Амрахова А.Р. Задача растяжения-сжатия для транслопной плиты переменной толщины. //Известия высших учебных заведений Северо-Кавказский регион. Естественные науки, Ростов на Дону, 2004, Спецвыпуск, с.72-77.
  22. Мехтиев М.Ф., Сардарова Н.А., Фомина Н.И. Асимптотическое поведение решения осесимметричной задачи теории упругости для трансверсально-изотропного полого конуса //Изв. РАН, МТТ, М., Наука, 2003, №2, с.61-70.
  23. Сардарлы Н.А. Исследование упругого равновесия трансверсально-изотропного полого конуса с за-

- крепленной боковой поверхностью и при смешанных граничных условиях на боковой поверхности. //Механика, Машиностроение, Баку, 2003, №3, с.27-29.
24. Гусейнов Ф.С. Задача теории упругости для трансверсально-изотропной сферической оболочки // Механика, Машиностроение, Баку, 2002, №3-4, с.9-13.
  25. Гусейнов Ф.С. Исследование упругого равновесия трансверсально-изотропной сферической оболочки с закрепленной лицевой поверхностью. // Механика, Машиностроение, Баку, 2002, №1, с.17-19.
  26. Мехтиев М.Ф., Фомина Н.И. Построение однородных решений неосесимметричной задачи растяжения теории упругости для трансверсальной плиты переменной толщины при жесткой заделке торцевой части границы. // Вестник Бакинского Университета, 2007, №1, с.45-53.
  27. Мехтиев М.Ф., Амрахова А.Р., Садыхов П.М. Построение однородных решений неосесимметричной задачи изгиба теории упругости для трансверсально-изотропной плиты переменной толщины. // Вестник Бакинского Университета, 2006, №3, с.77-87.
  28. Мехтиев М.Ф., Фомина Н.И. Построение однородных решений для трансверсально-изотропного полого цилиндра при смешанных граничных условиях на боковой поверхности. // Вестник Бакинского Университета, 2008, №4.
  29. Базаренко Н.А., Ворович И.И. Асимптотическое поведение решения задачи теории упругости для полого цилиндра конечной длины при малой толщине. //ПММ, 1965 т.29, вып.6, с.1035-1052.

30. Бейтмен Г., Эрдейн А. Высшие трансцендентные функции. М., Наука, 1965, т.1. 294с.
31. Бейтмен Г., Эрдейн А., Высшие трансцендентные функции. М., Наука, 1966, т.2, 295с.
32. Биргер И.А., Пановко Я.Г. Прочность, устойчивость, колебания. Справочник, т.3, М., Машиностроение, 1968, 567с.
33. Гольденвейзер А.Л., Лидский В.Б., Товстик П.Е. Свободные колебания тонких упругих оболочек. М.Наука, 1979, 383с.
34. Гринченко В.Т., Мелешко В.В. Гармонические колебания и волны в упругих телах. Киев: Наукова думка, 1981, 283с.
35. Гонткевич В.С. Собственные колебания пластинок и оболочек. Киев: Наукова думка, 1964, 102с.
36. Виленская Т.В., Ворович И.И. Асимптотическое поведение решения задачи теории упругости для сферической оболочки малой толщины. //ПММ, 1966, т.30, вып.2, с.278-295.
37. Космодамианский А.С., Шалдырван В.А. Толстые многосвязные пластины, Киев, Наукова думка, 1978, 239с.
38. Лехницкий С.Г. Теория упругости анизотропного тела, М., Наука, 1977, 415с.
39. Амбарцумян С.А. Общая теория анизотропных оболочек, М., Наука, 1974, 448с.
40. Лидский В.Б., Садовничий В.А. Асимптотические формулы для корней одного класса целых функций. Мат. сборник, 1968, №4, с.556-566.
41. Устинов Ю.А., Юдович В.И. О полноте системы элементарных решений бигармонического уравнения в полуполосе //ПММ, 1973, т.37, вып. 4, с.706-714.

42. Устинов Ю.А. О некоторых особенностях асимптотического метода при применении его к изучению колебаний неоднородных упругих плит. //Мат. I Всесоюзн. школы по теории и численным методам расчета оболочек и пластин. Тбилиси, 1975, с.395-403.
43. Мехтиев М.Ф. Свободные колебания замкнутой поллой сферы малой толщины. // Изв.АН СССР, МТТ, 1986, №6, с.159-164.
44. Ониашвили О.Д. Некоторые динамические задачи теории оболочек. Изд. АН СССР, 1957, 195с.
45. Лурье А.И. Пространственные задачи теории упругости. М., Гостехиздат, 1965, 491с.
46. Мехтиев М.Ф. Осесимметричная задача теории упругости для плиты переменной толщины. Темат. сб. научных трудов СКБСОП при ИММ АН Аз. ССР "Некоторые вопросы матем. моделивания", Баку, 1988, с.157-172.
47. Maqsudov F.G., Mekhtiev M.F., Sadikov P.M. Construction of homogeneous solutions for a transversally-isotropic hollow cylinder. Proceedings of IMM of Azerbaijan AS, 1999, vol.X, p.199-209.
48. Mekhtiev M.F., Fomina N.I. Asymptotic of the natural frequencies of oscillations of the transtrop hollow cylinder. Trans. of ASA, series of phys.-tech. and math. sciences, Baku, 1999, №5, p.192-199.
49. Mekhtiev M.F., Fomina N.I. Free vibrations of transversely isotropic hollow cylinders. Mechanics of Composite materials. New-York, 2002, vol. 38, №1, p.55-67.
50. Mekhtiev M.F., Bergman R.M. Asymptotic analysis of the dynamic problem of the theory of elasticity for a transverse isotropic hollow cylinder. Journal of Sound

- and Vibration, Academic Press, London, 2001, 244(2), p.177-194.
51. Mekhtiev M.F., Mardanov I.D., Amrahova A.R. Asymptotic analysis of bending problem for transversal-isotropic plate of variable thickness. Trans. of NAS of Azerbaijan, series of phys.-tech. and math. Baku, 2002, №4, p.223-236.
  52. Mekhtiev M.F., Guseynov F.S. The construction of homogeneous solutions for transversally isotropic hollow sphere. Trans. of NASA, series of phys.-tech. and math., sciences, Baku, 2002, vol. XXII, №1, p.206-210.
  53. M.F.Mekhtiev. Asymptotic analysis of anisotropic elasticity theory problem for finite length hollow cylinder. Trans. of NASA, series of phys.-tech. and math. sciences, vol. XXIII, №1, Baku, 2003, p.219-228.
  54. M.F.Mekhtiev, N.I.Fomina, N.A.Sardarli. Torsion problem of transversely isotropic hollow cone of variable thickness. Proc. of IMM of NAS of Azerbaijan, XXIII, Baku, 2005, p.199-206.
  55. M.F.Mekhtiev. Construction of homogeneous solutions of a non-axially-symmetric tension problem of elasticity theory for transversely isotropic plates of variable thickness. Trans. of NAS of Azerbaijan, series of phys.-tech. and math., XXVI, №1, Baku, 2006, p.177-185.
  56. Mekhtiev M.F. Non-axially symmetric problem of elasticity theory for transversally isotropic hollow sphere. Trans. of NAS Azerbaijan, series of phys.-tech. and math. sciences, Baku, 2007, XXVII, №1, p.155-164.

## СПИСОК НАУЧНЫХ ТРУДОВ

Члена-корреспондента НАН Азербайджана, доктора  
физико-математических наук, профессора  
**МЕХТИЕВА МАГОМЕДА ФАРМАН** оглы,  
опубликованных до 2009 года

1. Мехтиев М.Ф., Устинов Ю.А. Асимптотическое поведение решения осесимметричной задачи теории упругости для полого конуса. //Тр. VII Всесоюз. конф. по теории оболочек и пластинок (Днепропетровск), 1969, М., Наука, с.425-427.
2. Мехтиев М.Ф., Устинов Ю.А. Асимптотическое исследование решения задачи теории упругости для полого конуса. //ПММ, 1971, вып.6, с.1108-1115.
3. Мехтиев М.Ф. Построение уточненных прикладных теории для усеченного полого конуса переменной толщины. //Изв. АН Аз. ССР, сер. физ.-тех. и матем. наук, 1972, вып.4, с.17-21.
4. Мехтиев М.Ф., Устинов Ю.А. Асимптотическое поведение решение теории упругости для плиты переменной толщины. //Тр. VIII Всесоюз. конф. по теории оболочек и пластинок (Ростов на Дону), 1971, М., Наука, с.58-60.
5. Мехтиев М.Ф. Асимптотический анализ трехмерного напряженно-деформированного состояния для конических оболочек и круглой плиты переменной толщины. // Автореферат кандидатский, диссертации, Ростов-на-Дону, 1974, 21с.
6. Мехтиев М.Ф. Исследование концентрации напряжений в плите с круговым отверстием при

- нагрузке степенного вида. // Изв. АН Аз. ССР, сер. физ.-тех. и матем. наук, 1976, вып.5, с.111-117.
7. Мехтиев М.Ф., Устинов Ю.А. Асимптотический анализ решения некоторых неосесимметричных задач для плиты переменной толщины. // Изв. АН СССР, МТТ 1976, вып.6, с.165-169.
  8. Мехтиев М.Ф. Задача Криша для плиты переменной толщины. // Изв. АН Аз. ССР, сер. физ.-тех. и матем. наук, 1976, вып.5, с.116-122.
  9. Мехтиев М.Ф. Построение уточненных прикладных теории для плиты переменной толщины // Изв. АН Аз. ССР, сер. физ.-тех. и матем. наук, 1979, вып.3, с.47-52.
  10. Мехтиев М.Ф. Асимптотический анализ динамической задачи теории упругости для полого цилиндра конечной длины. // Изв. АН Аз. ССР, сер. физ.-тех. и матем. наук, 1982, вып.5, с.62-67.
  11. Мехтиев М.Ф., Максудов Ф.Г., Ализаде А.Н., Кадыров Т.М. Об одном уравнении поперечных колебаний двухслойной балки. // Изв. АН Аз. ССР, сер. физ.-тех. и матем. наук, 1982, вып.2, с.117-120.
  12. Мехтиев М.Ф., Максудов Ф.Г., Ализаде А.Н. Об одном методе решения уравнения поперечных колебаний двухслойной балки. // Изв. АН Аз. ССР, сер. физ.-тех. и матем. наук, 1982, вып.5, с.3-6.
  13. Мехтиев М.Ф. Асимптотическое исследование напряженно-деформированного состояния динамической задачи теории упругости для полого цилиндра конечной длины. // Изв. АН Аз. ССР, сер. физ.-тех. и матем. наук, 1982, вып.6, с.28-32.

14. Мехтиев М.Ф. Сверхвысокочастотное колебание изотропного полого цилиндра. // Изв. АН Аз. ССР, сер. физ.-тех. и матем. наук, 1983, вып.4, с.50-54.
15. Мехтиев М.Ф., Максудов Ф.Г., Искендерзаде Ф. Подводный резервуар. //А.С.№1025191 от 22.02.83.
16. Мехтиев М.Ф. Асимптотический анализ динамической задачи теории упругости для полой сферы. // Изв. АН Аз. ССР, сер. физ.-тех. и матем. наук, 1983, вып.5, с.56-63.
17. Мехтиев М.Ф. Свободные колебания изотропного полого цилиндра // Изв. АН СССР, МТТ,1985, вып.5, с.83-88.
18. Мехтиев М.Ф., Бергман Р.М., Латифов Ф.С. Асимптотический анализ задачи о свободных колебаниях сферической оболочки, контактирующей с упругим заполнителем. // Изв. АН СССР, МТТ,1985, вып.5, с.174-176.
19. Мехтиев М.Ф., Салманов В.С. Крутильные колебания конической оболочки переменной толщины. //Темат. сб. науч.тр. АзПИ им. Ч.Ильдырыма, 1985, с.22-25.
20. Мехтиев М.Ф., Ахмедов Н.К. Колебания изотропного полого цилиндра с заземленной боковой поверхностью. // Изв. АН Аз. ССР, сер. физ.-тех. и матем. наук, 1985, вып.4, с.125-128.
21. Мехтиев М.Ф., Салманов В.С. Равновесия упругого полого конуса с заземленной боковой поверхностью. // Изв. АН Аз. ССР, сер. физ.-тех. и матем. наук, 1985, №5, с.144-147.
22. Мехтиев М.Ф. Свободные колебания замкнутой сферы малой толщины. // Изв. АН СССР, МТТ, 1986, с.159-164.

23. Мехтиев М.Ф. Крутильные колебания изотропного полого цилиндра. // Изв. АН Аз. ССР, сер. физ.-тех. и матем. наук, 1987, №1, с.56-60.
24. Мехтиев М.Ф. Крутильные волны в конической оболочке переменной толщины. //Деп. в ВИНТИ № 2405-В87.
25. Мехтиев М.Ф. Неосесимметричные динамические задачи теории упругости для полой сферы. //Межвуз. сб. «Нелинейные задачи гидроаэромеханики и теории упругости», Днепропетровск, 1987, с.135-138.
26. Мехтиев М.Ф. Построение динамической уточненной теории для полого цилиндра. // Межвуз. сб. «Прикладная механика», Ленинград, 1988, с. 207-211.
27. Мехтиев М.Ф. Осесимметричная задача теории упругости для плиты переменной толщины. // Темат. сб. науч.тр. СКБ с ОП при ИММ АН Аз.ССР «Некоторые вопросы матем. модел.» Баку, 1988, с.157-172.
28. Мехтиев М.Ф.Динамическое кручение сферического пояса. // Изв. АН Аз. ССР, сер. физ.-тех. и матем. наук, 1988, вып.3, с.43-48.
29. Мехтиев М.Ф. Асимптотический анализ некоторых пространственных задач теории упругости для полых тел // Автореферат докторский диссертации, Ленинград, 1989, 30 с.
30. Мехтиев М.Ф. Асимптотический анализ некоторых пространственных задач теории упругости для полых тел. / Изв. РАН МТТ (тезис доклада) 1991, вып.3

31. Мехтиев М.Ф., Ахмедов Н.К. Анализ трехмерной задачи теории упругости для неоднородного конуса. // РАН ПММ, 1993, т.57, вып.5, с.113-119
32. Mekhtiev M.F. Apalesis of three-dimensional problem of the theory of elasticity for an inhomogeneous truncated hollow cone. // JAPP Maths. Mechs., 1994, vol. 57, №5, p.871-877.
33. Мехтиев М.Ф., Ахмедов Н.К. Осесимметричная задача теории упругости неоднородной плиты переменной толщины. // РАН ПММ, 1995, вып.3, с.518-523.
34. Mekhtiev M.F. The axisymmetric problem of the theory of elasticity for a non-uniform plate of variable thickness. // JAPP Maths. Mechs., 1995, vol. 59, №5, p.491-495.
35. Мехтиев М.Ф., Гюльмамедов М.Х. Динамическая задача теории упругости для сферического слоя. // Сбор. труд в I респуб. конф. по мех. и мат. АН Азерб., Баку, 5-15 июня 1995, с.120-124.
36. Мехтиев М.Ф., Муталлимов К.Ш. Поперечный удар клином по упругопластической нити при наличии трения. // Труды ИММ АН Азерб., Баку, 1996, т. XIII, с.124-127.
37. Мехтиев М.Ф., Сардарова Н.А. Построение однородных решений задачи теории упругости для трансверсально-изотропного полого конуса. // Труды ИММ АН Азерб., Баку, 1997, №6, с.239-244.
38. Mekhtiev M.F., Gyulmamedov M.Kh. Dynamic problems of elasticity theory for spherical shell. // Transactions of NAS Azerbaijan, mathematics and mechanics, Baku, "Elm", 1998, v.XVIII, №3-4, p. 195-205.

39. Mekhtiev M.F., Maksudov F.G., Sadikov P.M. Construction of homogeneous solutions for a transvers isotropic hollow cylinder. // Transactions of NAS Azerbaijan, mathematics and mechanics, Baku, "Elm", 1999, v.X, p. 199-209.
40. Mekhtiev M.F., Fomina N.I. Asymptotics of the natural frequencies of oscillations of the transverse hollow cylinder. // Transactions of NAS Azerbaijan, mathematics and mechanics, Baku, "Elm", 1999, №5, p. 192-199.
41. Мехтиев М.Ф., Максудов Ф.Г., Садыхов П.М. Асимптотическая теория для трансверсально-изотропного полого цилиндра. //Труды V Межд. конф. «Современные проблемы механики сплошной среды», Ростов-на Дону, 2000, с.134-139.
42. Mekhtiev M.F., Bergman R.M. Asymptotic analysis of the dynamic problem of the theory of elasticity for transvers isotropic hollow cylinder. // Journal of Sound and Vibration, London, 2001, №2, p.177-194.
43. Профессору Ш.М.Муталлимову 60 лет. // Изв. НАНА, серия физ.-тех. и матем. наук, Баку, 2001.
44. Мехтиев М.Ф., Марданов И.Д., Амрахова А.Р. Асимптотический анализ задачи растяжения-сжатия для трансверсальной плиты переменной толщины. // Механика Машиностроение, Баку, 2001, №1, с.25-31.
45. Мехтиев М.Ф., Фомина Н.И. Свободные колебания трансверсально-изотропного полого цилиндра. // Механика Композитных Материалов, Рига, 2002, №1, с.81-98.

46. Mekhtiev M.F., Fomina N.I. Free vibration of transversely isotropic hollow cylinders. // Mechanics of composite materials, New-york, 2002, №2, p.55-68.
47. Mekhtiev M.F., Guseynov F.S. The construction of homogeneous solutions for transversal-isotropic hollow sphere. //Trans. of NASA, series of phys.-mech. and math. sciences, Baku, 2002, vol. XXII, №1, p.206-210.
48. Mekhtiev M.F., Mardanov I.D., Amraxova A.R. Asymptotic analysis of bending problem for transversal-isotropic plate of variable thickness. // Trans. of NASA, series of phys.-mech. and math. sciences, Baku, 2002, №4, p.223-236.
49. Mekhtiev M.F. Asymptotic analysis of anisotropic elasticity theory problem for finite length hollow cylinder. // Trans. of NASA, series of phys.-mech. and math. sciences, Baku, 2003, №1, p.219-228.
50. Мехтиев М.Ф., Фомина Н.И., Сардарова Н.А. Асимптотическое поведение решения осесимметричной задачи теории упругости для трансверсально-изотропного полого конуса. // Изв. РАН МТТ, 2003, №2, с.61-70.
51. Мехтиев М.Ф., Шарифов Я.А. Об условиях существования седловой точки в детерминированных играх с импульсными воздействиями. //Вестник Бакинского Университета, серия физ.-мат. наук, 2003, №2, с.83-93.
52. Мехтиев М.Ф., Амрахова А.Я. Задача изгиба для трансропной плиты переменной толщины. // Тр. III Всероссийский конф. по теории упругости, Ростов на Дону-Азов, 13-16 октябрь, 2003, Ростов на Дону, «Новая книга», 2004, с.216-219.

53. Ədədi və funksional sıralar. // Bakı, 2004, 98s.
54. Mekhtiev M.F., Gadjiev A.D., Iskenderov B.A., Kerimov N.V. Binali Isa oglu Musayev (to the 60-th anniversary). // Trans. of NASA, series of phys.-mech. and math. sciences, Baku, 2004, №1, p.267-268.
55. Мехтиев М.Ф., Амрахова А.Р. Задача растяжения-сжатия для транслопной плиты переменной толщины. // Изв. высш. учебн. заведений, Северо-Кавказский Регион, Спецвып., Ростов на Дону, 2004, с.216-219.
56. Мехтиев М.Ф. Последний звонок из Баку. //Вспоминая об академике И.И.Воровиче Ростов на Дону, 2004, с.216-219.
57. Мехтиев М.Ф., Шарифов Я.А., Сардарова Р.А. О посироении минимизирующих последовательностей в задаче оптимального управления с многоточечными граничными условиями. //Вестник Бакинского Университета, серия физ.-мат. наук, 2005, №1, с.75-81.
58. Мехтиев М.Ф., Шарифов Я.А., Моллан Г.Г. Об одной задаче оптимального управления для нелинейных систем с интегральными условиями. // Известия НАН Азербайджана, Баку, 2005, №5, с.191-198.
59. Mekhtiev M.F., Sardarli N.A. Torson problem of transversely isotropic hollow cone of variable thickness. // Proceedings of Institute of Mathematics and Mechanics, Baku, 2005, v. XXIII, p.199-206.
60. Мехтиев М.Ф. Теория анизотропной конической оболочки переменной толщины. / Тезисы Межд. науч. конф. по мат. и мех., посвящ. 50-летию со дня

- рожд. чл. корр. НАНА, проф. И.Т.Мамедова, Баку, 2005, с.140.
61. Мехтиев М.Ф., Шарифов Я.А., Ширинов Т.В. Об условиях оптимальности в задаче оптимального управления для гиперболических систем с не локальными условиями. // Доклады НАН Азербайджана, Баку, 2005, №2, с.22-29.
  62. Мехтиев М.Ф. Неосесимметричная задача теории упругости для трансверсально-изотропной плиты переменной толщины. / Тезисы XII Межд. науч. конф. по мат. и мех., посвящ. 70-летию со дня рожд. чл. корр. НАНА, проф. Б.А.Искендерова, Баку, 2006, с.128.
  63. Mekhtiev M.F. Ganbar Kazim oglu Namazov (to the 70-th anniversary). Proc. Inst. Math. Mech. Nat. Acad. Sci. Azerb. 16(2002), p.204-205.
  64. Mekhtiev M.F. Construction of homogeneous solutions of a non-axially symmetric tension problem of elasticity theory for transversally isotropic plates of variable thickness. // Trans. of NASA, series of phys.-tech. and math. sciences, Baku, "Elm" 2006, v.XXVI, №1, p.177-186.
  65. Мехтиев М.Ф., Амрахова А.Р., Садыков П.М. Построение однородных решений неосесимметричной задачи изгиба теории упругости для трансверсально-изотропной плиты переменной толщины. // Вестник Бакинского Университета, 2006, №3, с.77-87.
  66. Mekhtiev M.F. Forced vibrations of a spherical shell when tangential displacements and radial strains don't exists on its face. // Transactions of NAS Azerbaijan,

- mathematics and mechanics, Baku, "Elm", 2006, №4, p. 225-238.
67. Мехтиев М.Ф., Фомина Н.И. Построение однородных решений неосесимметричной задачи растяжения теории упругости для трансверсально-изотропной плиты переменной толщины при жесткой заделки торцевой части границы. // Вестник Бакинского Университета, 2007, №1, с.45-53.
  68. Mekhtiev M.F. Non-axially symmetric problems of elasticity theory for transversally isotropic hollow sphere. Transactions issue mathematics and mechanics series of physical-technical-mathematical science. XXVII, №1, 2007, p.155-164.
  69. Мехтиев М.Ф. Асимптотическая теория анизотропных оболочек. / Тезисы Межд. симпозиума «Современные проблемы математики, механики и информатики», Нахчывань, 2007, с.66.
  70. Мехтиев М.Ф., Сардарлы Н.А. Вопрос об удовлетворении граничных условий на торцах конуса. / Тезисы Межд. конференции по математики и механики, Баку, 2007, с.109.
  71. Мехтиев М.Ф. Асимптотический анализ некоторых пространственных задач теории упругости для полых тел (монография). «Элм», Баку, 2008, 320с.
  72. Mehdiyev M., Əhmədov R., Eyvazov E., Şərifov Y. Ədədi üsullar, Ali məktəblər üçün dərslik. //Bakı, 2008, 376s.
  73. Мехтиев М.Ф., Фомина Н.И. Построение однородных решений для трансверсально-изотропного полого цилиндра при смешанных граничных

- условиях на боковой поверхности. // Вестник Бакинского Университета, 2008, №4.
74. Мехтиев М.Ф., Ш.М.Муталлимов, Э.А.Мамедов. Об одной модели разрушения гибкой мембраны при ударе конусом. // Доклады НАНА, 2008, т. LXIV, №2, с.29-34.
75. Мехтиев М.Ф., Ахмедов Н.К. О структуре погранслоя в задаче кручения радиально-слоистых цилиндрах. Prof. İ.A.Vəxtiyarovun 80 illik yubileyinə həsr olunmuş elmi konfransın materialları. Bakı, 2008, s.123-128.

## ОГЛАВЛЕНИЕ

<b>ВВЕДЕНИЕ</b> .....	3
<b>ГЛАВА 1. АСИМПТОТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ</b> .....	10
§1. Построение однородных решений для трансверсально-изотропного полого цилиндра.....	10
§2. Задача теории упругости для трансверсально- изотропного полого цилиндра с закрепленной боковой поверхностью и при смешанных граничных условиях на боковой поверхности.....	32
§3. Асимптотический анализ динамической задачи теории упругости для трансверсально- изотропного полого цилиндра.....	46
§ 4. Свободные колебания трансверсально- изотропного полого цилиндра.....	70
<b>ГЛАВА 2. ПОСТРОЕНИЕ ОДНОРОДНЫХ РЕШЕНИЙ ДЛЯ ТРАНСВЕРСАЛЬНО- ИЗОТРОПНОЙ СФЕРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ</b> .....	89
§5. Общее представление решений уравнений анизотропной теории упругости в сферических координатах.....	89
§6. Анализ корней характеристического уравнения.....	101
§7. Построение асимптотических формул для перемещений и напряжений.....	107
§8. Обобщенные условия ортогональности однородных решений. Удовлетворение граничных условий на боковой	

поверхности сферы.....	118
§9. Асимптотический анализ решения задачи теории упругости для трансверсально-изотропной сферической оболочки при смешанных условиях на лицевой поверхности.....	130
§10. Исследование упругого равновесия трансверсально-изотропной сферической оболочки с закрепленной лицевой поверхностью.....	141
§11. Неосесимметричные задачи теории упругости для трансверсально-изотропной полей сферы.....	149
<b>ГЛАВА 3. ПОСТРОЕНИЕ ОДНОРОДНЫХ РЕШЕНИЙ ДЛЯ УСЕЧЕННОГО ПОЛОГО КОНУСА.....</b>	<b>164</b>
§12. Общее представление решений уравнений анизотропной теории упругости для усеченного полого конуса.....	164
§13. Удовлетворение граничных условий на торцах конуса при помощи однородных решений. Обобщенное условие ортогональности однородных решений.....	173
<b>ГЛАВА 4. АСИМПТОТИЧЕСКОЕ ПОВЕДЕНИЕ РЕШЕНИЯ ОСЕИММЕТРИЧНОЙ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ ДЛЯ ТРАНСВЕРСАЛЬНО-ИЗОТРОПНОГО ПОЛОГО КОНУСА.....</b>	<b>177</b>
§14. Анализ корней характеристического уравнения.....	178

§15. Построение асимптотических формул для перемещений и напряжений.....	185
§16. Удовлетворение граничных условий на торцах конуса.....	197
§17. Исследование упругого равновесия трансверсально-изотропного полого конуса с закрепленной боковой поверхностью и при смешанных граничных условиях на боковой поверхности.....	216
§18. Задача кручения трансверсально-изотропного полого конуса переменной толщины.....	229

**ГЛАВА 5. АСИМПТОТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ЗАДАЧИ РАСТЯЖЕНИЯ-СЖАТИЯ ДЛЯ ТРАНСТРОПНОЙ ПЛИТЫ ПЕРЕМЕННОЙ ТОЛЩИНЫ.....**

§19. Построение однородных решений.....	243
§20. Анализ напряженно-деформированного состояния.....	255
§21. Задача растяжения-сжатия транстропной плиты переменной толщины при жесткой заделке торцевой части границы.....	266

**ГЛАВА 6. АСИМПТОТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ЗАДАЧИ ИЗГИБА ДЛЯ ТРАНСТРОПНОЙ ПЛИТЫ ПЕРЕМЕННОЙ ТОЛЩИНЫ.....**

§22. Построение однородных решений.....	274
§23. Анализ напряженно-деформированного состояния.....	281

§24. Построение прикладных теорий для транстропной плиты переменной толщины.....	293
§25. Построение однородных решений неосесимметричной задачи теории упругости для транстропной плиты переменной толщины.....	299
<b>ЛИТЕРАТУРА.....</b>	<b>313</b>

**МЕХТИЕВ МАГОМЕД  
ФАРМАН ОГЛЫ**

**МЕТОД ОДНОРОДНЫХ РЕШЕНИЙ В  
АНИЗОТРОПНОЙ ТЕОРИИ ОБОЛОЧЕК**

Директор издательства  
Директор типографии  
Технический редактор

Э.А.Алиев  
С.О.Мустафаев  
М.Г.Ханбабаева

---

Сдано в набор 30.05.2009. Подписано в печать 21.07.2009  
Формат 60x90 <sup>1</sup>/<sub>16</sub>. Ф.п.л. 21. У.п.л. 21. Тираж 300 экз.

---

Издательство «Чашыюглу»,  
Типография «Чашыюглу»,  
г. Баку, ул. М.Мушфига, 2а