

**МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ ФИЗИКИ**

В книге излагаются математические методы, наиболее часто используемые при решении физических задач. В отличие от других учебников аналогичной тематики авторы делают ударение на обучение математическим методам посредством решения простых примеров. Во многих примерах содержатся нетривиальные трюки, дающие возможность быстро и красиво решить поставленную проблему. Научные сотрудники и аспиранты физических специальностей могут использовать эту книгу и как справочник, и как пособие для повторного изучения математических методов. Для студентов старших курсов инженерно-физических вузов книга может сложить пособием для самостоятельного изучения предмета.

## Содержание

Предисловие к переводу	5
<b>Глава 1. Обыкновенные дифференциальные уравнения</b>	<b>8</b>
1.1. Решение в замкнутой форме	8
1.2. Решения в виде степенных рядов	18
1.3. Приближенные методы	26
1.4. Метод ВКБ	30
<b>Глава 2. Бесконечные ряды</b>	<b>42</b>
2.1. Признаки сходимости	42
2.2. Общеизвестные ряды	44
2.3. Преобразование рядов	46
<b>Глава 3. Вычисление интегралов</b>	<b>52</b>
3.1. Элементарные методы	52
3.2. Вычисление интегралов с учетом симметрии	55
3.3. Интегрирование по контуру	58
3.4. Табулированные интегралы	65
3.5. Приближенные разложения	70
3.6. Методы седловой точки	73
<b>Глава 4. Интегральные преобразования</b>	<b>81</b>
4.1. Ряды Фурье	81
4.2. Преобразования Фурье	86
4.3. Преобразования Лапласа	92
4.4. Другие пары преобразований	95
4.5. Применения интегральных преобразований	95
<b>Глава 5. Дальнейшие применения комплексных переменных</b>	<b>105</b>
5.1. Конформные преобразования	105
5.2. Дисперсионные соотношения	110
<b>Глава 6. Векторы и матрицы</b>	<b>118</b>
6.1. Линейные векторные пространства	118
6.2. Линейные операторы	119
6.3. Матрицы	122
6.4. Преобразования координат	125

6.5. Задачи на собственные значения	128
6.6. Диагонализация матриц	136
6.7. Пространства бесконечной размерности	139
<b>Глава 7. Специальные функции</b>	<b>143</b>
7.1. Функции Лежандра	143
7.2. Функции Бесселя	153
7.3. Гипергеометрическая функция	161
7.4. Вырожденные гипергеометрические функции	168
7.5. Функции Матье	172
7.6. Эллиптические функции	177
<b>Глава 8. Дифференциальные уравнения в частных производных</b>	<b>184</b>
8.1. Примеры	184
8.2. Общее рассмотрение	185
8.3. Разделение переменных	192
8.4. Методы интегральных преобразований	202
8.5. Метод Винера—Хопфа	208
<b>Глава 9. Собственные функции, собственные значения и функции Грина</b>	<b>216</b>
9.1. Простые примеры задач на собственные значения	216
9.2. Общее рассмотрение	218
9.3. Решение краевых задач методом разложения по собственным функциям	221
9.4. Неоднородные задачи. Функции Грина	222
9.5. Функции Грина в электродинамике	232
<b>Глава 10. Теория возмущений</b>	<b>237</b>
10.1. Обычная невырожденная теория	237
10.2. Преобразование рядов	241
10.3. Теория возмущений с вырождением	243
<b>Глава 11. Интегральные уравнения</b>	<b>247</b>
11.1. Классификация	247
11.2. Вырожденные ядра	248
11.3. Ряды Неймана и Фредгольма	250
11.4. Теория Гильберта—Шмидта	254
11.5. Метод Винера—Хопфа и интегральные уравнения	259
11.6. Интегральные уравнения в дисперсионной теории	262
<b>Глава 12. Вариационное исчисление</b>	<b>264</b>
12.1. Уравнение Эйлера—Лагранжа	264
12.2. Обобщение основной задачи	268
12.3. Решение задач на собственные значения с помощью вариационного исчисления	275
<b>Глава 13. Численные методы</b>	<b>282</b>
13.1. Интерполяция	282
13.2. Численное интегрирование	286
13.3. Численное решение дифференциальных уравнений	290

13.4. Корни уравнений	293
13.5. Суммирование рядов	297
<b>Глава 14. Вероятность и статистика</b>	<b>302</b>
14.1. Введение	302
14.2. Основные законы теории, вероятностей	302
14.3. Комбинации и перестановки	305
14.4. Биномиальное распределение, распределения Пуассона и Гаусса	306
14.5. Общие свойства распределений	310
14.6. Обработка экспериментальных данных	314
<b>Глава 15. Тензорный анализ и дифференциальная геометрия</b>	<b>323</b>
15.1. Декартовы тензоры в трехмерном пространстве	323
15.2. Кривые в трехмерном пространстве. Формулы Френе	329
15.3. Общий тензорный анализ	330
<b>Глава 16. Введение в группы и представления групп</b>	<b>342</b>
16.1. Определения	342
16.2. Подгруппы и классы	344
16.3. Представления групп	346
16.4. Характеры	349
16.5. Физические применения	358
16.6. Бесконечные группы	367
16.7. Неприводимые представления $SU(2)$ , $SU(3)$ и $O^+(3)$	376
Литература	387
<b>Предметный указатель</b>	<b>389</b>

### Предметный указатель

Абелева группа 342	Бесселя интеграл 159
Абсолютный минимум 276	- уравнение 17, 153
Алгебра группы 343	- - второе решение 155
- Ли 374	Бесселя производящая функция 158
Антилинейность 127	- интегральное представление 158
Антисимметричная матрица 123	Бесселя функции 153
Антисимметричный символ Леви-Чивита 327	- - модифицированные 161
Антисимметричный тензор 334	- - ортогональность и нормировка 156
Апостериорная вероятность 302	- - рекуррентные соотношения 154
Априорная вероятность 302	- - сферические 161
Асимптотический ряд 71	Биномиальное распределение 307
Аффинор 329	Биномиальный коэффициент 305
Базис векторного пространства 119	Бинормаль 330
Бейеса теорема 304	Блоха волновые функции 174
$ber_n(x)$ , $bei_n(x)$ 161	Бора-Зоммерфельда условие квантования 41
Бернулли дифференциальное уравнение 10	Борцовское приближение 251
- числа 45	Брахистохрона 267
Бесконечная группа 367	Бэшфорта-Адамса-Милна метод 291
	Вариации постоянных метод 14

Вариационное исчисление 264  
- - для задач на собственные значения 275  
- - для интегральных уравнений 281  
- - для изопериметрических задач 272  
Вариационная производная 266  
Вейерштрасса эллиптические функции 183  
Вектор-столбец 125  
Вектор-строка 127  
Векторы 118  
- ортонормированные 128  
- собственные 129  
- базисные 119  
Вещественная матрица 123  
Вероятностей теория 302  
Винера-Хопфа метод 208, 259  
ВКБ-метод 30  
ВКБ-функции 33  
Возмущений теория 237  
Волновая функция в импульсном пространстве 91  
Волновое уравнение 188  
Вольтерра интегральное уравнение 247  
Вырожденная гипергеометрическая функция 169  
- теория возмущений 243  
Вырожденное гипергеометрическое уравнение 168  
Вырожденное собственное значение 130  
- ядро интегрального уравнения 248  
Гамильтона вариационный принцип 266  
Ганкеля функции 160  
- - сферические 194  
Гамма-функция 53  
- асимптотическое разложение 74  
Гаусса распределение 306  
Гельмгольца уравнение 193  
Генераторы группы 369  
Гиббса явление 83  
Гильберта преобразование 95, 262

Гильберта-Шмидта теория 254  
Гильберта пространство 141  
Гиперболические дифференциальные уравнения в частных производных 188  
Гипергеометрическая функция 163  
- - интегральное представление 165  
Гипергеометрический ряд 43, 161  
Гипергеометрическое уравнение 163  
Главная нормаль 330  
Гомографическое преобразование 163  
Гомоморфные группы 346  
Горнера метод для корней полиномов 295  
Грама-Шмидта ортогонализация 131  
Грина функции 223  
- - для колеблющейся мембраны 226  
- - для колеблющейся струны 224  
- - для обыкновенного дифференциального уравнения 223  
- - для уравнения Лапласа и волнового уравнения 231  
Грегори ряд 83, 300  
Группа 342  
- абелева или коммутативная 342  
- бесконечная 367  
- знакопеременная 355  
Группа класс 345  
- подгруппа 344  
- порядок 342  
- представление 346  
- симметрическая 343  
- физические применения 358  
- характеры 349  
Даламбера признак сходимости 42  
Двоякопериодическая функция 179  
Декартовы тензоры 323  
Дельта-символ Кронекера 85  
Дельта-функция Дирака 87  
- трехмерная 91  
Диагонализация матриц 136  
Диагональная матрица 123  
Диада 329

- Дирака дельта-функция 87
- трехмерная 91
- Дирихле краевое условие 186
- Дисперсионные соотношения 110, 262
  - - с вычитанием 117
- Дисперсия 311
- Дифференциальная геометрия 323
- Дифференциальные уравнения 8
  - - ВКБ-метод для решения 30
  - - в полных дифференциалах 9
  - - в частных производных 184
  - - - - методы интегральных преобразований 202
  - - - - методы разделения переменных 192
  - - - - метод Винера-Хопфа 208
  - - изобарические 11
  - - графическое решение 27
  - - линейные 12
  - - однородные 10
  - - решения в виде степенных рядов 18
  - - численные решения 290
- Диффузии уравнение 184
- Дуальное пространство 127
- Замкнутости свойство 221
- Знакопеременная группа 355
- Идемпотентная матрица 124
- Изображений метод 208
- Изоморфный 344
- Изопериметрические задачи 272
- Инвариант матрицы 133
- Инвариантная подгруппа 346
- Интеграл вероятности ошибок 68
- Интегральная показательная функция 67
- Интегральное преобразование 81
- Интегральные уравнения 247
  - - вариационный подход к решению 281
  - - в дисперсионной теории 262
- Интегральные уравнения линейные 247
- - неоднородные 249
- - однородные 249
- - с вырожденным ядром 248
- - транспонированные 249
- Интегральные синус и косинус 55
- Интервал 337
- Интерполяция 282
- Интегрирующий множитель 9
- Квадрупольный магнит 107
- Классы в группе 345
- Клеро уравнение 10
- Ковариантная производная 338
- Ковариантный вектор 332
- Ковариантный тензор 332
- Когрессиентный 126
- Колесание круглой мембраны 245
- Комбинации 305
- Коммутативная группа 342
- Коммутация операторов 120
- Компоненты линейного вектора 120
- Конгруэнтное преобразование
- Константы структуры группы Ли 374
- Контравариантный вектор 331
  - тензор 332
- Контратрессиентный 126
- Контурное интегрирование 58
- Конформное преобразование 105
- Координатные преобразования 125
  - - конгруэнтные 134
  - - подобие 126
- Координатные преобразования унитарные 338
- Корни уравнений 293
- Косинус-преобразование Фурье 89
- Коши краевое условие 186
  - интегральная формула 110
- Коши-Римана дифференциальные уравнения 105
- Коши теорема 105
- Краевые условия для уравнений в частных производных 185
- Кривизна кривой 330
- Кристоффеля символы первого и второго рода 338

Кронекера дельта-символ 85  
Кручение 330  
Куммера преобразование 171  
- функция 169  
Лагерра полином 170  
Лагранжа множитель 272  
Лапласа интегральное представление  
для полиномов Лежандра 144  
- преобразование 92  
Лежандра дифференциальное  
уравнение 19, 143  
- функции 143  
Ли алгебра 374  
- группа 368  
Линейная векторная функция 119  
- скалярная функция 126  
Линейное векторное пространство  
118  
- интегральное уравнение 247  
- дифференциальное уравнение 12  
Лиенара-Вихерта потенциал 236  
Ложного положения метод 294  
Матье функции 171  
Матрица 128  
Матрицы преобразование 125  
Меллина преобразование 95  
Метрика векторного пространства  
127  
Метрический Тензор 337  
Наискорейшего спуска метод 73  
Наименьших квадратов метод 318  
Невырожденная теория возмущений  
237  
Невырожденный оператор 121  
Неголономные условия 273  
Неймана ряд 250  
Неймана краевое условие 186  
Неоднородное интегральное  
уравнение 249  
Неполная гамма-функция 73  
Несобственное вращение 327  
Неприводимое представление 347  
Неопределенных коэффициентов  
метод 13

Неточное представление 347  
Нормальная матрица 138  
- подгруппа 346  
- форма гиперболического уравнения  
188  
Нормальное распределение 308  
Нормальные колебания 135, 197  
Обобщенная сила 335  
Обратная матрица 123  
Обратный оператор 121  
Общий тензорный анализ 330  
Обыкновенная, точка  
дифференциального уравнения 18  
Однородная функция 10  
Однородное интегральное уравнение  
247  
- обыкновенное дифференциальное  
уравнение 10  
Особое решение дифференциального  
уравнения 11  
Определяющее уравнение 20  
Ортогональная матрица 123  
Ортогональности теорема 348  
Относительный тензор 334  
Отношений закон 335  
Ошибок функция 68  
Параболическое уравнение в частных  
производных 188  
Парсеваля теорема 88  
Паули спиновые матрицы 384  
Перевала методы 73  
Перестановки 305  
Плоский источник 206  
Плотности функция 220  
Плотность тензора 334  
Подгруппа 344  
Подобия преобразование 126  
Полиада 329  
Полнота базиса собственных  
функций 221  
Порядок дифференциального  
уравнения 8  
Постоянная разделения 192  
Правдоподобия функция 315

Правильная особая точка 19  
Представления группы 346  
Преобразование конформное 105  
- рядов 46, 241  
Присоединенная функция Лежандра 26, 149  
Присоединенное дифференциальное уравнение Лежандра 149  
Проекционный оператор 121  
Производящая функция 145  
- - для функций Бесселя 158  
- - для полиномов Лежандра 145  
Простейшие дроби 48  
Псевдоскаляр 328  
Псевдотензор 328  
Пауссона распределение 308  
Расходящиеся волны 196  
Регулярное представление 354  
Резольвенты ядро 252  
Римана символ 163  
Римановой кривизны тензор 340  
Родрига формула 144  
Рунге-Кутта метод 291  
Рэля-Ритца вариационный принцип 278  
Свертки теорема 98  
Связи формулы в ВКБ-методе 32  
Седловой точки методы 73  
Секулярное уравнение 129  
Симметрическая группа 343  
Симметричная матрица 123  
Симметричное ядро 254  
Симметричный тензор 334  
Симпсона правило 286  
Синус-преобразование Фурье 89  
Скалярное произведение 127  
Сложения теорема для сферических гармоник 150  
Смежный класс группы 344  
Смещения ядро 259  
Собственное вращение 327  
Собственные векторы 129  
- - матрицы 216

Собственные векторы свойства ортогональности 217  
Собственные значения 28, 129  
- - вырожденные 130  
- - интегрального уравнения 248  
- - эрмитовой матрицы 130  
Собственные функции 216  
Соприкасающиеся параметры 14  
Сопряженная линейность 127  
Сопряженное представление группы  $SU(3)$ , 380  
Специальные функции 143  
Спиновые матрицы Паули 384  
Спинорное представление 386  
Среднее значение 310  
Стандартное отклонение 310  
Стационарной фазы метод 80  
Стирлинга формула 74  
Стокса области 37  
- явление 36  
Суммирование рядов 297  
Субматрица 124  
Существенно особая точка 19  
Сферические гармоники 150  
Сходимости признаки 42  
Таблица группы 344  
Тензор 326  
- декарттов 323  
- антисимметричный 334  
- метрический 337  
- относительный 334  
- римановой кривизны 340  
Тензорный анализ 323  
Теплопроводность в кубе 199  
- в бесконечной среде 205  
- в полубесконечной среде 207  
- в слое 201  
Точечный источник 206  
Точечное представление 346  
Транспонированная матрица 123  
Транспонированное интегральное уравнение 249  
Трапеций правило 286  
Триада 329

Уиттекера функция 171  
Унитарная матрица 123  
Унитарное представление 348  
Условная вероятность 303  
Флоке теорема 172  
Фредгольма интегральные уравнения 247  
- решение 253  
- теоремы 249  
Френе формулы 330  
Френеля интегралы 68  
Фундаментальное решение 229, 232  
Фундаментальный тензор 336  
Функционал 264  
Функциональная производная 266  
Фурье-Бесселя преобразование 95  
Фурье-преобразование 86  
- в трех измерениях 91  
Фурье-ряд 81  
- в комплексной форме 85  
Характеристики уравнения в частных производных 187  
Характеристическая функция распределения 311  
Характеры группы 349  
Хевисайда ступенчатая функция 93  
Хи-квадрат распределение 321  
Хилла уравнение 174  
Центральная предельная теорема 313  
Цепная дробь 176  
Циклоида 268  
Частный интеграл 12  
Численное дифференцирование 285

- решение дифференциальных уравнений 290  
Численные методы 282  
Шварца принцип симметрии 113  
Шлефли интегральное представление для полиномов Лежандра 144  
- интегральное представление для функций Бесселя 158  
Штурма-Лиувилля дифференциальное уравнение 219, 275  
Шура лемма 348  
Эйлера-Маклорена формула 298  
Эйлера-Лагранжа уравнение 264  
Эйлера преобразование 50, 301  
- углы 324  
Эйри интеграл 102  
Эквивалентность представлений групп 347  
Элементы матрицы 122  
Эллиптические интегралы 69  
- уравнения в частных производных 186  
- функции Вейерштрасса 183  
Эллиптические функции Якоби 177  
Эрмита дифференциальное уравнение 24  
- полиномы 24  
Эрмитов линейный оператор 218  
Эрмитово сопряженная матрица 123  
- ядро 254  
Якоби полиномы 167  
- эллиптические функции 177

## ПРЕДИСЛОВИЕ К ПЕРЕВОДУ

Можно назвать десятки книг, в которых достаточно полно излагаются математические методы, используемые в физике. Чем выделяется среди них книга Дж. Мэтьюза и Р. Уокера? В ней нет тяжеловесных математических теорем с дюжинами лемм и скучными доказательствами. Например, вместо громоздких и многочисленных условий, накладываемых обычно на функции, применяется простой термин «физически разумные функции». В то же время это и не сухой справочник для физика, а пособие, читая которое можно самостоятельно воспроизвести все выкладки, связанные с определенным методом, не обращаясь к другим источникам.

Педагогическая ценность книги состоит в том, что авторы особое внимание уделяют примерам. Научному сотруднику, желающему вспомнить математические методы, читать эту книгу легко и интересно, так как вместо единой теории в каждом методе для решения проблемы применяется тот или иной нетривиальный подход.

*В. П. Крайнов*

## ПРЕДИСЛОВИЕ

Книга написана на основе курса лекций по математическим методам физики, который авторы в течение нескольких лет читали в Калифорнийском технологическом институте.

Основное внимание уделялось современному математическому аппарату, используемому для анализа физических задач. Предполагается, что читатель знаком с курсом общей физики: механики, электричества и магнетизма, основ квантовой механики и т. д. Из этих областей физики и подбирались примеры.

Кратко говоря, это книга о математике для физиков. Уровень строгости изложения отражает современные подходы в теоретической физике.

Предполагается, что читатель имеет также представление о следующих математических дисциплинах: 1) системах линейных уравнений и определителях; 2) векторном анализе, включающем операции дифференцирования в криволинейных координатах; 3) основных дифференциальных уравнениях; 4) комплексных переменных и теореме Коши.

Сделаем ряд замечаний о более или менее необычных аспектах книги. Во-первых, представленный материал не связан логической последовательностью. Время от времени вводится новый объект, причем читатель не подготавливается к нему. Это, конечно, происходит не из-за иррациональности или раздражительности авторов — просто таков путь физики. Студентам, специализирующимся по теоретической физике, часто требуется внутренняя уверенность, прежде чем они погрузятся в середину незнакомого объекта; этот курс предназначен дать опыт и смелость при изучении задач, для которых подготовка читателя недостаточна.

В связи с этим имеется существенная неоднородность в детальности рассмотрения. Некоторые вопросы изложены схематично, в то время как другие исследуются очень подробно. Тем не менее это учебник, а не справочник; материал рассчитан на изучение в течение одного года.

Курс, из которого возник этот учебник, первоначально основывался на лекциях профессора Р. П. Фейнмана в Корнелльском университете.

*Дж. Мэтьюз*  
*Р. Уокер*

## ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ \*

### 1.1. РЕШЕНИЕ В ЗАМКНУТОЙ ФОРМЕ

Порядок и степень дифференциального уравнения определяются производной высшего порядка после того, как уравнение рационализировано. Например, уравнение

$$\frac{d^3y}{dx^3} + x \sqrt{\frac{dy}{dx}} + x^2y = 0$$

имеет третий порядок и вторую степень, так как после рационализации оно содержит член  $(d^3y/dx^3)^2$ .

Приведем сначала методы, которые наиболее эффективно применяются к решению уравнений первого порядка. Если уравнение можно записать в виде

$$A(x) dx + B(y) dy = 0, \quad (1.1)$$

то говорят, что переменные разделяются. В этом случае решение находится непосредственным интегрированием.

**Пример.**

$$\frac{dy}{dx} + \sqrt{\frac{1-y^2}{1-x^2}} = 0; \quad (1.2)$$

$$\frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} + \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = 0, \quad \arcsin y + \arcsin x = C;$$

$$x \sqrt{1-y^2} + y \sqrt{1-x^2} = \sin C = C'.$$

Можно непосредственно проинтегрировать уравнение более общего вида

$$A(x, y) dx + B(x, y) dy = 0. \quad (1.3)$$

---

\* Применение интегральных преобразований для решения дифференциальных уравнений рассматривается в гл. 4. В гл. 9 рассмотрены применения функций Грина и методов, использующих собственные функции; в гл. 13 изучают численные методы.

Если левая часть (1.3) есть полный дифференциал  $du$  от некоторой функции  $u(x, y)$ , то интегрирование дает решение  $u(x, y) = C$ . Такое уравнение называют уравнением в полных дифференциалах. Необходимое и достаточное условие того, что уравнение (1.3) является уравнением в полных дифференциалах, есть

$$\partial A / \partial y = \partial B / \partial x. \quad (1.4)$$

**Пример.**

$$(x + y) dx + x dy = 0; \quad (1.5)$$

$$A = x + y; \quad B = x; \quad \partial A / \partial y = \partial B / \partial x = 1.$$

Решение:  $xy + x^2/2 = C$ .

Иногда можно найти такую функцию  $\lambda(x, y)$ , что  $\lambda(A dx + B dy)$  будет полным дифференциалом, хотя  $A dx + B dy$  может им и не быть. Назовем такую функцию  $\lambda$  интегрирующим множителем. Можно показать, что такие множители всегда существуют (для уравнения первого порядка), однако не существует общего способа их получения.

Рассмотрим общее линейное дифференциальное уравнение первого порядка

$$\frac{dy}{dx} + f(x)y = g(x). \quad (1.6)$$

Попытаемся найти интегрирующий множитель  $\lambda(x)$ , такой, что уравнение

$$\lambda(x) [dy + f(x)y dx] = \lambda(x) g(x) dx$$

будет полным дифференциалом. С правой частью все в порядке. Критерий (1.4) того, чтобы левая часть была полным дифференциалом, имеет вид  $d\lambda(x)/dx = \lambda(x) f(x)$ . Отсюда находим интегрирующий множитель

$$\lambda(x) = \exp \left[ \int f(x) dx \right]. \quad (1.7)$$

**Пример.**

$$xy' + (1+x)y = \exp x, \quad (1.8)$$

$$y' + \frac{1+x}{x}y = \frac{\exp x}{x}.$$

Интегрирующий множитель равен  $\exp \left\{ \int [(1+x)/x] dx \right\} = x \exp x$ ;

$$x \exp x \left( y' + \frac{1+x}{x} y \right) = \exp 2x.$$

Теперь имеем уравнение в полных дифференциалах; поэтому

$$xy \exp x = \int \exp(2x) dx = \exp(2x)/2 + C;$$

$$y = \exp(x)/2x + C(\exp(-x))/x.$$

Часто можно упрощать дифференциальное уравнение, делая разумную замену переменной.

В дифференциальном уравнении

$$y' = f(ax + by + c) \quad (1.9)$$

переменные разделяются, если сделать замену  $v = ax + by + c$ .

В качестве следующего примера рассмотрим уравнение Бернулли

$$y' + f(x)y = g(x)y^n. \quad (1.10)$$

Оно становится линейным, если заменить  $v = y^{1-n}$  (эта подстановка становится очевидной, если сначала разделить уравнение на  $y^n$ ).

Функция  $f(x, y, \dots)$  любого числа переменных называется однородной функцией степени  $r$  по этим переменным, если  $f(ax, ay, \dots) = a^r f(x, y, \dots)$ . Дифференциальное уравнение первого порядка

$$A(x, y) dx + B(x, y) dy = 0 \quad (1.11)$$

называют однородным, если  $A$  и  $B$  — однородные функции одинаковой степени. Подстановка  $y = vx$  в (1.11) приводит к разделению переменных.

**Пример.**

$$y dx + (2\sqrt{xy} - x) dy = 0; \quad (1.12)$$

$$y = vx; \quad dy = v dx + x dv;$$

$$vx dx + (2x\sqrt{v} - x)(v dx + x dv) = 0;$$

$$2v^{3/2} dx + (2\sqrt{v} - 1)x dv = 0.$$

Ясно, что в последнем уравнении переменные разделяются.

Заметим, что этот подход связан с соображениями размерности, хорошо известными из физики. Если предполагать все  $x, y, \dots$  имеющими одну и ту же размерность (например, длины), то однородная функция — это просто функция, обладающая размерностью. Тогда переменная  $v = y/x$  безразмерна. Отсюда вытекает обобщение

идеи однородности. Предположим, что уравнение  $A dx + B dy = 0$  обладает размерностью, причем размерность  $y$  есть некоторая степень  $m$  с размерностью  $x$ , т. е.

$$A(ax, a^m y) = a^r A(x, y), \quad B(ax, a^m y) = a^{r-m+1} B(x, y). \quad (1.13)$$

Такие уравнения называются **изобарическими**. Подстановка  $y = vx^m$  позволяет разделить переменные.

**Пример.**

$$xy^2 (3y dx + x dy) - (2y dx - x dy) = 0. \quad (1.14)$$

Сопоставим  $x$  «вес» 1, а  $y$  — вес  $m$ . Первый член имеет вес  $3m + 2$ , а второй  $m + 1$ . Поэтому уравнение является изобарическим с весом  $m = -1/2$ . Отсюда ясно, что целесообразно ввести «безразмерную» переменную  $v = y \sqrt{x}$ . Чтобы избежать дробных степеней, положим  $v = xy^2$ ,  $x = v/y^2$ ,  $dx = dv/y^2 - 2v dy/y^3$ . Тогда уравнение (1.14) приобретает вид  $(3v - 2) y dv + 5v(1 - v) dy = 0$ , т. е. переменные разделяются.

Уравнение вида

$$(ax + by + c) dx + (ex + fy + g) dy = 0, \quad (1.15)$$

где  $a, \dots, g$  — постоянные, можно сделать однородным с помощью подстановки  $x = X + \alpha$ ,  $y = Y + \beta$ . Здесь  $\alpha$  и  $\beta$  — надлежащим образом выбранные постоянные [в случае, если  $af \neq be$ ; если  $af = be$ , уравнение (1.15) еще более тривиально].

Уравнение вида

$$y - xy' = f(y') \quad (1.16)$$

называется **уравнением Клеро**. Чтобы решить его, продифференцируем уравнение по  $x$ . В результате имеем  $y'' [f'(y') + x] = 0$ . Положим  $y'' = 0$ ; тогда  $y = ax + b$ . Подставим решение в исходное уравнение (1.16); получаем  $b = f(a)$ . Следовательно,  $y = ax + f(a)$  — общее решение. Однако есть еще возможность:  $f'(y') + x = 0$ . Исключая  $y'$  из этого и исходного уравнения (1.16), получаем решение, не содержащее произвольной константы. Оно известно как **особое решение**.

**Пример.**

$$y = xy' + (y')^2. \quad (1.17)$$

Это уравнение Клеро с общим решением  $y = cx + c^2$ . Однако мы должны также рассмотреть возможность

$2y' + x = 0$ . Находим особое решение  $x^2 + 4y = 0$ , которое является огибающей семейства линий, даваемых общим решением (рис. 1.1). Пунктирная парабола — это особое решение, а прямые линии, касательные к параболе, — общее решение.

Далее обсудим ряд методов, полезных для дифференциальных уравнений высших порядков. Важный случай представляет линейное уравнение с постоянными коэффициентами:

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_1 y' + a_0 y = f(x). \quad (1.18)$$

Если  $f(x) = 0$ , то уравнение однородно; в противном случае оно неоднородно. Заметим, что если линейное уравнение однородно, то сумма двух решений есть также решение, в то время как в случае неоднородного уравнения это неверно.

Рис. 1.1. Решения дифференциального уравнения (1.17) и их огибающая (пунктирная линия).

Общее решение неоднородного уравнения есть сумма общего решения соответствующего однородного уравнения и какого-либо решения неоднородного уравнения (так называемый частный интеграл). В действительности это утверждение верно для любого линейного дифференциального уравнения с постоянными или переменными коэффициентами.

Решения однородного уравнения (1.18) с  $f(x) = 0$  в общем случае имеют вид  $y = \exp(mx)$ . Подстановка решений в однородное уравнение дает  $a_n m^n + a_{n-1} m^{n-1} + \dots + a_0 = 0$ . Если  $n$  корней равны соответственно  $m_1, m_2, \dots, m_n$ , то общее решение равно  $c_1 \exp(m_1 x) + \dots + c_n \exp(m_n x)$ . ( $c_i$  — произвольные константы).

Предположим, что два корня совпадают ( $m_1 = m_2$ ). Тогда есть только  $(n - 1)$  решение, а нам нужно еще одно. Для его нахождения выполним предельную процедуру, в которой  $m_2$  стремится к  $m_1$ . Тогда  $[\exp(m_2 x) - \exp(m_1 x)] / (m_2 - m_1)$  есть решение. Когда  $m_2$  становится

равным  $m_1$ , это решение переходит в  $x \exp(m_1 x)$ . Это и есть дополнительное решение. Если совпадают три корня ( $m_1 = m_2 = m_3$ ), то есть три решения  $\exp(m_1 x)$ ,  $x \exp(m_1 x)$  и  $x^2 \exp(m_1 x)$  и т. д.

Найти частный интеграл, вообще говоря, труднее. Если  $f(x)$  имеет только конечное число линейно независимых производных, т. е.  $f(x)$  — линейная комбинация членов вида  $x^n$ ,  $\exp(ax)$ ,  $\sin kx$ ,  $\cos kx$  или, в более общем виде,  $x^n \exp(mx) \cos \alpha x$  и  $x^n \exp(mx) \sin \alpha x$ , то решение находится непосредственно методом неопределенных коэффициентов. В качестве  $y(x)$  возьмем линейную комбинацию  $f(x)$  и ее независимых производных и определим коэффициенты из требования, чтобы  $y(x)$  удовлетворяло дифференциальному уравнению.

$$\text{Пример.} \quad y'' + 3y' + 2y = \exp(x). \quad (1.19)$$

Общее решение однородного уравнения находится из условия  $m^2 + 3m + 2 = 0$  ( $m = -1, -2$ ):

$$y = c_1 \exp(-x) + c_2 \exp(-2x).$$

Ищем частный интеграл в виде  $y = Ae^x$ . Подстановка в уравнение (1.19) дает  $A = 1/6$ . Таким образом, общее решение есть  $y = \exp(x)/6 + c_1 \exp(-x) + c_2 \exp(-2x)$ .

Если  $f(x)$  или член в  $f(x)$  есть также часть общего решения однородного уравнения, то частный интеграл может содержать этот член и его производные, умноженные на некоторую степень  $x$ . Чтобы увидеть, как работает метод, читателю предлагается решить пример (1.19) с правой частью в виде  $\exp(-x)$ .

Есть несколько формальных способов нахождения частных интегралов. Если обозначить  $d/dx$  буквой  $D$ , то можно записать уравнение (1.18) в виде

$$(D - m_1)(D - m_2) \dots (D - m_n) y = f(x). \quad (1.20)$$

Формальное решение (1.20) имеет вид

$$y = \frac{f(x)}{(D - m_1)(D - m_2) \dots (D - m_n)}$$

или, разлагая на элементарные дроби,

$$y = A_1 \frac{f(x)}{D - m_1} + \dots + A_n \frac{f(x)}{D - m_n}. \quad (1.21)$$

Что означает  $f(x)/(D - m)$ ? Это решение линейного уравнения первого порядка  $(D - m)y = f(x)$ ; оно тривиально [см. (1.6)].

Другой способ состоит в поочередном делении (1.20) на множители, т. е.

$$\begin{aligned} (D - m_2)(D - m_3) \dots (D - m_n) y = \\ = f(x)/(D - m_1). \end{aligned} \quad (1.22)$$

После вычисления правой части делим на  $D - m_2$ , вычисляем снова и т. д.

Рассмотрим наконец очень важный метод нахождения частного интеграла — метод в а р и а ц и и п о с т о я н н ы х. Этот метод полезен еще тем, что его можно применять к линейным уравнениям с переменными коэффициентами. Прежде чем обсуждать и применять метод, рассмотрим сначала понятие с о п р и к а с а ю щ и е с я п а р а м е т р ы.

Предположим, что заданы две линейно независимые функции  $y_1(x)$  и  $y_2(x)$ . Определим двухпараметрическое семейство кривых

$$c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x). \quad (1.23)$$

Рассмотрим произвольную функцию  $y(x)$ . Ясно, что аппроксимировать ее формулой (1.23), выбрав подходящим образом  $c_1$  и  $c_2$ , в общем случае невозможно. Попытаемся осуществить более скромную задачу аппроксимации  $y(x)$  кривой семейства (1.23) в окрестности некоторой фиксированной точки  $x = x_0$ . Так как в нашем распоряжении есть два параметра, естественный выбор состоит в том, чтобы подогнать точно значение  $y(x_0)$  и наклон  $y'(x_0)$ ; т. е.  $c_1$  и  $c_2$  определяются из системы двух уравнений

$$\left. \begin{aligned} y(x_0) &= c_1 y_1(x_0) + c_2 y_2(x_0); \\ y'(x_0) &= c_1 y_1'(x_0) + c_2 y_2'(x_0). \end{aligned} \right\} \quad (1.24)$$

Величины  $c_1$  и  $c_2$ , получаемые таким способом, меняются от точки к точке (когда меняется  $x_0$ ) вдоль кривой  $y(x)$ . Они называются с о п р и к а с а ю щ и м и с я п а р а м е т р а м и, так как кривая, которую они определяют, касается  $y(x)$  в рассматриваемой точке. Это понятие, конечно, можно обобщить на произвольное число  $N$  функций  $y_i$  и параметров  $c_i$ ;  $c_i$  выбирают так, чтобы воспроизвести функцию  $y(x)$  и ее первые  $(N - 1)$  производные в точке  $x_0$ .

Возвратимся теперь к изучаемой проблеме решения линейных дифференциальных уравнений. Для простоты

ограничимся уравнениями второго порядка. Рассмотрим неоднородное уравнение

$$p(x)y'' + q(x)y' + r(x)y = s(x) \quad (1.25)$$

и предположим, что мы знаем общее решение однородного уравнения  $c_1y_1(x) + c_2y_2(x)$ . Будем искать решение (1.25) в виде

$$y = u_1(x)y_1(x) + u_2(x)y_2(x), \quad (1.26)$$

где  $u_i(x)$  — функции, подлежащие определению. Чтобы подставить (1.26) в (1.25), нужно вычислить  $y'$  и  $y''$ . Из (1.26) имеем

$$y' = u_1y_1' + u_2y_2' + u_1'y_1 + u_2'y_2. \quad (1.27)$$

Прежде чем переходить к  $y''$ , заметим, что удобно наложить условие, чтобы сумма двух последних членов в (1.27) равнялась нулю:

$$u_1'y_1 + u_2'y_2 = 0. \quad (1.28)$$

Это позволяет избежать вторых производных от  $u_i$ . Теперь

$$y' = u_1y_1' + u_2y_2', \quad (1.29)$$

и, дифференцируя, находим

$$y'' = u_1y_1'' + u_2y_2'' + u_1'y_1' + u_2'y_2'. \quad (1.30)$$

Заметим, что условие (1.28) не только упрощает последующие выкладки, но также делает величины  $u_1$  и  $u_2$  сопрягающимися параметрами [ср. (1.26) и (1.29) с (1.24)].

Окончательно, подставляя (1.26), (1.29) и (1.30) в исходное дифференциальное уравнение (1.25) и используя тот факт, что  $y_1$  и  $y_2$  — решения однородного уравнения, получаем

$$p(x)(u_1'y_1' + u_2'y_2') = s. \quad (1.31)$$

Теперь (1.28) и (1.31) — линейные уравнения относительно  $u_i$ . Их решение очевидно и предоставляется читателю.

**Пример.** Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$x^2y'' - 2y = x. \quad (1.32)$$

Общее решение соответствующего однородного уравнения

$$x^2y'' - 2y = 0 \quad (1.33)$$

легче всего найти, если заметить, что  $y = x^m$  — естественное решение. Подстановка в (1.33) дает  $m = 2$  или  $-1$ , так что общее решение имеет вид  $c_1 x^2 + c_2/x$ . Поэтому попытаемся найти решение (1.32) в виде

$$y = u_1 x^2 + u_2/x. \quad (1.34)$$

Дифференцируя, получаем

$$y' = 2xu_1 - \frac{1}{x^2} u_2 + x^2 u_1' + \frac{1}{x} u_2'.$$

Наложим условие

$$x^2 u_1' + \frac{1}{x} u_2' = 0. \quad (1.35)$$

Тогда

$$y' = 2xu_1 - \frac{1}{x^2} u_2 \quad (1.36)$$

и

$$y'' = 2u_1 + \frac{2}{x^3} u_2 + 2xu_1' - \frac{1}{x^2} u_2'. \quad (1.37)$$

Подставляя (1.34) и (1.37) снова в дифференциальное уравнение (1.32), находим  $2x^3 u_1' - u_2' = x$ . Решая его совместно с (1.35), имеем  $u_1' = \frac{1}{3x^2}$ ;  $u_2' = -\frac{x}{3}$ ;  $u_1 = -\frac{1}{3x} + c_1$ ;  $u_2 = -\frac{x^2}{6} + c_2$ .

Итак, общее решение (1.32):  $y = -\frac{x}{2} + c_1 x^2 + \frac{c_2}{x}$ .

Кратко упомянем о нескольких методах решения дифференциальных уравнений:

1. Если зависимая переменная  $y$  отсутствует, то выберем  $y' = p$  за новую независимую переменную. Это понижает порядок уравнения на единицу.

2. Если отсутствует независимая переменная  $x$ , то выберем  $y$  за новую независимую переменную, а  $y' = p$  за новую зависимую переменную. Это также понижает порядок уравнения на единицу.

3. Если уравнение однородно по  $y$ , выберем  $v = \ln y$  за новую зависимую переменную. Результирующее уравнение не содержит  $v$ , и подстановкой  $v' = p$  можно сократить порядок уравнения на единицу.

4. Если уравнение изобарическое, причем  $x$  имеет вес 1, а  $y$  — вес  $m$ , то следует ввести зависимую переменную  $y = vx^m$  и независимую переменную  $u = \ln x$ . Тогда

получается уравнение, в котором новая независимая переменная  $u$  отсутствует.

5. Всегда нужно проверять возможность, что уравнение есть полный дифференциал. Например, часто встречающееся уравнение  $y'' = f(y)$  можно сразу же проинтегрировать, если умножить обе части на  $y'$ .

6. Иногда помогает замена переменной. Рассмотрим линейное уравнение второго порядка

$$y'' + f(x) y' + g(x) y = 0. \quad (1.38)$$

Подстановка

$$y = v(x) p(x) \quad (1.39)$$

приводит к линейному уравнению для  $v(x)$ , которое легче решить, если выбрать  $p(x)$  надлежащим образом. Уравнение для  $v(x)$  имеет вид

$$v'' + \left(2 \frac{p'}{p} + f\right) v' + \left(\frac{p'' + fp' + gp}{p}\right) v = 0. \quad (1.40)$$

7. Если известно одно решение исходного уравнения (1.38), то можно взять  $p$  в качестве этого решения и тем самым исключить из (1.40) член с  $v$ . Это весьма полезно, так как общее решение находится непосредственным двойным интегрированием.

8. Другой путь состоит в том, чтобы выбрать

$$p = \exp \left[ -\frac{1}{2} \int f(x) dx \right] \quad (1.41)$$

и исключить из (1.40) член с первой производной. Это полезно при качественном анализе уравнения; такая процедура особенно важна при использовании приближенных методов решения.

**Пример.** Уравнение Бесселя имеет вид

$$x^2 y'' + xy' + (x^2 - n^2) y = 0. \quad (1.42)$$

Подстановка  $y = u(x) p(x)$  с  $p(x) = x^{-1/2}$  дает

$$u'' + \left(1 - \frac{n^2 - 1/4}{x^2}\right) u = 0. \quad (1.43)$$

Это уравнение не содержит члена с первой производной и весьма удобно для нахождения приближенного поведения функций Бесселя при больших  $x$ , например, с помощью метода ВКБ (см. разд. 1.4).

## 1.2. РЕШЕНИЯ В ВИДЕ СТЕПЕННЫХ РЯДОВ

Прежде чем изучать в общем случае решения в виде рядов, рассмотрим простое нелинейное уравнение

$$y'' = x - y^2. \quad (1.44)$$

Будем искать решение в виде  $y = c_0 + c_1x + c_2x^2 + \dots$ . Тогда (1.44) приобретает вид

$$2c_2 + 6c_3x + 12c_4x^2 + \dots = x - c_0^2 - 2c_0c_1x - (c_1^2 + 2c_0c_2)x^2 - \dots$$

Приравнивание коэффициентов при одинаковых степенях  $x$  дает

$$c_2 = -\frac{1}{2}c_0^2, \quad c_3 = \frac{1}{6} - \frac{1}{3}c_0c_1, \quad c_4 = -\frac{1}{12}c_1^2 + \frac{1}{12}c_0^3, \dots$$

Пусть, например, мы ищем решение с  $y(0) = 0$ ,  $y'(0) = 1$ . Тогда

$$c_0 = 0, \quad c_1 = 1, \quad c_2 = 0, \quad c_3 = \frac{1}{6}, \quad c_4 = -1/12, \dots \quad (1.45)$$

Этот метод решения очень полезен; однако для обоснования его следует изучить сходимость рядов и т. д.

Дадим теперь краткий обзор общей теории решений в виде степенных рядов для линейных дифференциальных уравнений. Рассмотрим уравнение

$$\frac{d^ny}{dx^n} + f_{n-1}(x) \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \dots + f_0(x)y = 0. \quad (1.46)$$

Если  $f_0(x), \dots, f_{n-1}(x)$  аналитичны в точке  $x = x_0$  (в смысле теории функций комплексных переменных), то  $x_0$  называют обыкновенной точкой дифференциального уравнения. Вблизи обыкновенной точки общее решение дифференциального уравнения можно записать в виде ряда Тейлора, радиус сходимости которого есть расстояние до ближайшей особенности дифференциального уравнения; под особенностью подразумевается точка, в которой функция неаналитична.

Ряд Тейлора — это степенной ряд

$$y = \sum_{m=0}^{\infty} c_m (x - x_0)^m, \quad (1.47)$$

коэффициенты которого удобно находить подстановкой в дифференциальное уравнение (как в рассмотренном выше примере)

Если  $x_0$  — не обыкновенная точка, но  $(x - x_0) f_{n-1}(x)$ ,  $(x - x_0)^2 f_{n-2}(x)$ , . . . ,  $(x - x_0)^n f_0(x)$  регулярны в  $x_0$ , то  $x_0$  называют правильной особой точкой дифференциального уравнения. Вблизи правильной особой точки всегда можно найти по меньшей мере одно решение вида

$$y = x^s \sum_{m=0}^{\infty} c_m (x - x_0)^m, \quad c_0 \neq 0, \quad (1.48)$$

причем показатель  $s$  первого члена не обязательно целое число. По-прежнему ряд сходится в любом круге, не включающем никаких особенностей, кроме  $x_0$ .

Алгебраические выкладки, состоящие в подстановке ряда (1.47) или (1.48) в дифференциальное уравнение, упрощаются, если  $x_0 = 0$ . Таким образом, обычно удобно сначала перейти к началу координат в точке  $x_0$ , т. е. переписать уравнение, введя новую независимую переменную  $z = x - x_0$ .

Если точка не является ни обыкновенной, ни правильной особой, то она называется существенно особой.

**Пример.** Рассмотрим сначала случай разложения в ряд около обыкновенной точки: дифференциальное уравнение Лежандра имеет вид

$$(1 - x^2) y'' - 2xy' + n(n + 1)y = 0. \quad (1.49)$$

Точки  $x = \pm 1$  — правильные особые точки. Разложим сначала решение в окрестности обыкновенной точки  $x = 0$ :

$$y = \sum_{m=0}^{\infty} c_m x^m = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \dots$$

Подстановка в дифференциальное уравнение (1.49) дает

$$c_2 = -\frac{n(n+1)}{2} c_0; \quad c_3 = \frac{2-n(n+1)}{6} c_1;$$

$$c_4 = -\frac{n(n+1)[6-n(n+1)]}{24} c_0;$$

$$c_5 = \frac{[2-n(n+1)][12-n(n+1)]}{120} c_1 \dots$$

Общее рекуррентное соотношение имеет вид

$$\frac{c_{i+2}}{c_i} = \frac{i(i+1) - n(n+1)}{(i+1)(i+2)} = \frac{(i+n+1)(i-n)}{(i+1)(i+2)}. \quad (1.50)$$

Отметим, что это двухчленное рекуррентное соотношение (оно связывает только два коэффициента). Его индексы различаются на два. Это можно получить непосредственно из вида дифференциального уравнения. Итак, общее решение дифференциального уравнения (1.49) равно

$$\begin{aligned}
 y = & c_0 \left[ 1 - n(n+1) \frac{x^2}{2!} + \right. \\
 & \left. + n(n+1)(n-2)(n+3) \frac{x^4}{4!} - \dots + \dots \right] + \\
 & + c_1 \left[ x - (n-1)(n+2) \frac{x^3}{3!} + \right. \\
 & \left. + (n-1)(n+2)(n-3)(n+4) \frac{x^5}{5!} - \dots + \dots \right]. \quad (1.51)
 \end{aligned}$$

Заметим, что если  $n$  — четное (нечетное) целое число, то четный (нечетный) ряд в (1.51) обрывается на члене  $x^n$ . В случаях, представляющих физический интерес,  $x = \cos \theta$ . Поэтому требуются решения, хорошо ведущие себя на отрезке  $-1 \leq x \leq 1$ . Позже мы увидим, что бесконечные ряды (1.51) в точках  $x = \pm 1$  расходятся; поэтому для сходимости необходимо, чтобы  $n$  было целым числом. Возникающие полиномы  $P_n(x)$ , нормированные условием  $y(1) = 1$ , называются **полиномами Лежандра**.

**Пример.** Для уравнения Бесселя

$$x^2 y'' + xy' + (x^2 - m^2)y = 0 \quad (1.52)$$

точка  $x = 0$  является правильной особой точкой. Следовательно, гарантировано существование решения в виде

$$y = x^s \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n, \quad c_0 \neq 0.$$

Из дифференциального уравнения легко увидеть, что получается двухчленное рекуррентное соотношение. Если подставить этот ряд в дифференциальное уравнение, то коэффициент при  $x^s$  равен  $c_0(s^2 - m^2) = 0$ , откуда

$$s^2 - m^2 = 0. \quad (1.53)$$

Это соотношение называется **определяющим уравнением**. Его корни равны  $s = \pm m$ .

Далее рассмотрим коэффициент при  $x^{s+1}$ :  $c_1[(s+1)^2 - m^2] = 0$ . Следовательно,  $c_1 = 0$ , за исключением простого случая  $m = 1/2$ ,  $s = -m = -1/2$ . Но

и в этом случае можно положить  $c_1 = 0$ , так как члены, опускаемые при этом, эквивалентны тем, которые входят во второе решение с  $s = \pm m = \pm 1/2$ .

Итак, ограничимся четными значениями  $n$  и напишем

$$y = x^{\pm m} (c_0 + c_2 x^2 + c_4 x^4 + \dots).$$

Легко получить рекуррентное соотношение

$$\frac{c_{n+2}}{c_n} = \frac{-1}{(s+n+2)^2 - m^2} = \frac{-1}{(n+2)(2s+n+2)}. \quad (1.54)$$

Следовательно, решение имеет вид

$$y = c_0 x^s \left[ 1 - \frac{x^2}{4(s+1)} + \frac{x^4}{4 \cdot 8(s+1)(s+2)} - \dots + \dots \right]. \quad (1.55)$$

Нормированный надлежащим образом, этот ряд называется функцией Бесселя (см. гл. 7).

Если  $m$  — не целое число, то существует два независимых решения уравнения, которые даются выражением (1.55) с  $s = \pm m$ . Если  $m$  — целое число (которое можно считать положительным или равным нулю), то можно выбрать только значение  $s = +m$ ; при  $s = -m$  все знаменатели в (1.55), начиная с некоторого, обращаются в нуль. Если, прежде чем положить  $s = -m$ , умножить решение на  $(s+m)$ , чтобы сократить обращающиеся в бесконечность множители, то получается решение, кратное решению с  $s = +m$  (это легко проверить).

Такая ситуация напоминает о трудности, возникающей при нахождении независимых решений дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами (1.18). Будем поступать аналогично. Пусть

$$y(x, s) = c_0 x^s \left[ 1 - \frac{x^2}{(s+2+m)(s+2-m)} + \frac{x^4}{(s+2+m)(s+2-m)(s+4+m)(s+4-m)} - \dots + \dots \right]. \quad (1.56)$$

Этот ряд получается, если использовать рекуррентное соотношение (1.54) для  $c_{n+2}/c_n$ , не полагая в нем  $s = \pm m$ . Обозначим  $L$  дифференциальный оператор уравнения Бесселя  $L = x^2 d^2/dx^2 + x d/dx + (x^2 - m^2)$ . Тогда  $Ly(x, s) = c_0 (s-m)(s+m)x^s$ .

Как видно, для того чтобы  $y(x, s)$  было решением уравнения Бесселя  $Ly = 0$ ,  $s$  должно равняться  $\pm m$ . Однако если  $m$  — положительное целое число, то  $[(s+m)y(x, s)]_{s=-m}$  равно  $y(x, m)$ , умноженному на

константу; поэтому нужно искать второе решение. Для этого рассмотрим результат, полученный подстановкой  $(s + m) y(x, s)$  в уравнение Бесселя. Находим  $L[(s + m) y(x, s)] = c_0 (s + m)^2 (s - m) x^s$ . Производная от правой части по  $s$  при  $s = -m$  обращается в нуль. Следовательно,

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial s} [(s + m) y(x, s)] \right\}_{s=-m} \quad (1.57)$$

есть решение уравнения Бесселя, и это не что иное, как второе решение, которое мы искали.

**Пример.** Найдем второе решение уравнения Бесселя для  $m = 2$ :

$$y(x, s) = c_0 x^s \left[ 1 - \frac{x^2}{s(s+4)} + \frac{x^4}{s(s+2)(s+4)(s+6)} - \dots + \dots \right]. \quad (1.58)$$

Имеем

$$(s+2) y(x, s) = c_0 x^s \left[ (s+2) - \frac{s+2}{s(s+4)} x^2 + \right. \\ \left. + \frac{x^4}{s(s+4)(s+6)} - \frac{x^6}{s(s+4)(s+4)(s+6)(s+8)} + \dots - \dots \right].$$

Вспоминая, что  $(d/ds) x^s = x^s \ln x$  и

$$\frac{d}{dx} \left( \frac{uv \dots}{w \dots} \right) = \frac{uv \dots}{w \dots} \left( \frac{u'}{u} + \frac{v'}{v} + \dots - \frac{w'}{w} - \dots \right),$$

получаем

$$\frac{\partial}{\partial s} [(s+2) y(x, s)] = (s+2) y(x, s) \ln x + \\ + c_0 x^s \left[ 1 - \frac{s+2}{s(s+4)} \left( \frac{1}{s+2} - \frac{1}{s} - \frac{1}{s+4} \right) x^2 + \right. \\ \left. + \frac{1}{s(s+4)(s+6)} \left( -\frac{1}{s} - \frac{1}{s+4} - \frac{1}{s+6} \right) x^4 - \dots + \dots \right].$$

Полагая  $s = -2$  и замечая, что  $[(s+2) y(x, s)]_{s=-2} = -\frac{1}{16} y(x, 2)$ , находим

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial s} [(s+2) y(x, s)] \right\}_{s=-2} = \\ = -\frac{1}{16} y(x, 2) \ln x + c_0 x^{-2} \left( 1 + \frac{x^2}{4} + \frac{x^4}{64} + \dots \right). \quad (1.59)$$

Это решение и  $y(x, 2)$  являются двумя независимыми решениями уравнения Бесселя с  $m = 2$ .

**Пример.** Рассмотрим далее дифференциальное уравнение

$$(d^2\psi/dx^2) + (E - x^2)\psi = 0. \quad (1.60)$$

Это уравнение Шредингера для одномерного гармонического осциллятора (в соответствующих единицах). Если попытаться непосредственно разлагать решение (1.60) в степенной ряд в точке  $x = 0$ , то получается трехчленное рекуррентное соотношение. Это до некоторой степени неудобно\*, так что имеет смысл отыскать преобразование переменных, которое привело бы к более простому уравнению.

Часто помогающий в таких случаях прием состоит в выделении множителей, соответствующих поведению решения вблизи некоторой особенности или особенностей. Где особенности этого уравнения? В конечной  $z$ -плоскости их нет; отвлекемся на некоторое время для рассмотрения особенностей на бесконечности.

Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0. \quad (1.61)$$

Вспомним, что 1)  $x = 0$  — обыкновенная точка, если  $P$  и  $Q$  регулярны в ней; 2)  $x = 0$  — правильная особая точка, если  $xP$  и  $x^2Q$  регулярны в ней. Положим  $z = 1/x$ . Уравнение приобретает вид

$$\frac{d^2y}{dz^2} + \left[ \frac{2}{z} - \frac{1}{z^2} p(z) \right] \frac{dy}{dz} + \frac{1}{z^4} q(z) y = 0, \quad (1.62)$$

где  $p(z) = P(x)$ ,  $q(z) = Q(x)$ . Тогда  $x = \infty$  есть обыкновенная точка или сингулярность уравнения (1.61) в зависимости от того, будет ли  $z = 0$  обыкновенной точкой или сингулярностью уравнения (1.62). Итак,  $x = \infty$  — обыкновенная точка, если  $2x - x^2P(x)$  и  $x^4Q(x)$  регулярны в ней, и  $x = \infty$  — правильная особая точка, если в этой точке регулярны  $xP(x)$  и  $x^2Q(x)$ .

Используя эти критерии, мы видим, что дифференциальное уравнение (1.60) весьма сингулярно при  $x = \infty$ . При больших  $x$  уравнение можно приближенно записать в виде

$$(d^2\psi/dx^2) - x^2\psi = 0, \quad (1.63)$$

---

\* Трехчленные рекуррентные соотношения часто можно исследовать методами ценных дробей (см. разд. 7.5).

и его решение имеет вид

$$\psi \sim \exp(\pm x^2/2), \quad (1.64)$$

так как, если подставить каждую функцию в дифференциальное уравнение (1.63), то члены, доминирующие на бесконечности, взаимно уничтожатся.

В квантовой механике физически допустимые решения не должны обращаться в бесконечность при  $x \rightarrow \infty$ ; поэтому целесообразно сделать замену

$$\psi = y \exp(-x^2/2). \quad (1.65)$$

Эта замена переменной, конечно, не обеспечивает желаемого поведения на бесконечности, и, следовательно, нужно отобрать решения  $y(x)$ , которые ведут себя правильным образом. В действительности в общем случае можно ожидать  $y(x) \rightarrow \exp(x^2)$ , чтобы расходящееся решение вело себя как  $\psi \rightarrow \exp(+x^2/2)$ .

После замены дифференциальное уравнение (1.60) приобретает вид

$$y'' - 2xy' + (E - 1)y = 0. \quad (1.66)$$

[Если обозначить  $E - 1 = 2n$ , то (1.66) называется дифференциальным уравнением Эрмита.] Можно получить общее решение этого уравнения в виде степенного ряда, сходящегося всюду, причем рекуррентное соотношение для коэффициентов будет содержать только два члена. Рекуррентное соотношение имеет вид

$$\frac{c_{m+2}}{c_m} = \frac{(2m+1) - E}{(m+1)(m+2)}, \text{ а решение}$$

$$\begin{aligned} y = & c_0 [1 + (1 - E) \cdot x^2/2! + (1 - E)(5 - E) \times \\ & \times x^4/4! + \dots] + \\ & + c_1 [x + (3 - E) \cdot x^3/3! + (3 - E)(7 - E) \times \\ & \times x^5/5! + \dots]. \end{aligned} \quad (1.67)$$

Если  $E = 2n + 1$ , где  $n$  — целое число, один из рядов обрывается после члена  $x^n$  (четный или нечетный ряд, в зависимости от  $n$ ). Возникающий при этом полином называется полиномом Эрмита  $H_n(x)$  порядка  $n$  [точное определение см. (7.103)]. Другой ряд можно исключить, полагая равным нулю его коэффициент  $c_0$  или  $c_1$ . Тогда получающееся решение (1.65) будет стремиться к нулю на бесконечности.

Если никакой из рядов (1.67) не обрывается, его поведение при больших  $x$  определяется далекими членами, для которых рекуррентное соотношение приближенно имеет вид  $c_{m+2}/c_m \approx 2/m$ . Таким образом, каждый ряд при больших  $x$  ведет себя как  $\text{ехр}(x^2)$ , и  $\psi \sim \text{ехр}(x^2/2)$ , как и следовало ожидать. Поэтому решение  $\psi$ , которое остается ограниченным при  $x \rightarrow \pm\infty$ , возможно только при  $E = 2n + 1$ , где  $n$  — целое число, т. е.  $\psi = \psi_n(x) = H_n(x) e^{-x^2/2}$  для

$$E = E_n = 2n + 1. \quad (1.68)$$

Этот пример показывает, как граничные условия могут накладывать ограничения на допустимые значения константы, содержащейся в дифференциальном уравнении. Допустимые решения  $\psi_n$  называются собственными функциями дифференциального оператора  $-(d^2/dx^2) + x^2$ , принадлежащими к собственным значениям  $E_n$  (см. гл. 9).

**Пример.** Рассмотрим теперь кратко присоединенное уравнение Лежандра

$$(1-x^2)y'' - 2xy' + \left[ n(n+1) - \frac{m^2}{1-x^2} \right] y = 0. \quad (1.69)$$

Отметим, что при  $m = 0$  оно сводится к уравнению Лежандра. Начало координат — обыкновенная точка, а  $x = \pm 1$  — правильные особенности.

Непосредственная попытка написать решение в виде степенного ряда около точки  $x = 0$  снова приводит к трехчленному рекуррентному соотношению. Попытаемся определить поведение около  $x = \pm 1$ . Положим  $x = \pm 1 + z$  и напомним приближенно дифференциальное уравнение при  $|z| \ll 1$ . Вблизи каждой особенности имеем  $zy'' + y' - (m^2/4z)y = 0$ . Это уравнение имеет решения  $y = z^{+m/2}$  и  $z^{-m/2}$ , причем первое из них имеет правильное поведение, если  $m \geq 0$ . Поэтому в (1.69) целесообразно сделать замену переменной  $y = v(1-x^2)^{m/2}$ . Тем самым выделяется поведение одновременно вблизи обеих особенностей. Уравнение приобретает вид

$$(1-x^2)v'' - 2(m+1)xv' + [n(n+1) - m(m+1)]v = 0; \quad (1.70)$$

его решение в окрестности  $x = 0$  находится непосредственным разложением в ряд. Рекуррентное соотношение

для коэффициентов имеет вид

$$\frac{c_{r+2}}{c_r} = \frac{(r+m)(r+m+1) - n(n+1)}{(r+1)(r+2)}. \quad (1.71)$$

Снова получаются решения  $v(x)$  в виде четных и нечетных рядов. Каждый из них ведет себя вблизи  $x = \pm 1$  как  $(1-x^2)^{-m}$ , если ряд не обрывается. Ограниченное решение существует только в том случае, если  $n$  и  $m$  таковы, что один из рядов обрывается после некоторого члена  $x^r$ . Из (1.71) найдем соответствующее условие

$$n - m = r \geq 0, \quad r - \text{целое число}. \quad (1.72)$$

Обычно в физических задачах  $n$  и  $m$  — целые числа. Можно проверить, что тогда  $y$  с точностью до константы совпадает с функцией

$$(1-x^2)^{|m|/2} (d/dx)^{|m|} P_n(x), \quad (1.73)$$

которая называется **присоединенной функцией Лежандра**. Более подробно эти функции будут рассматриваться в гл. 7.

### 1.3. ПРИБЛИЖЕННЫЕ МЕТОДЫ

Часто возможно качественно изучить поведение решений дифференциального уравнения с помощью графиков.

**Пример.** Для уравнения первого порядка

$$dy/dx = \exp(-2xy) \quad (1.74)$$

можно нарисовать несколько линий в плоскости  $xy$ , указывая для каждой из них наклон графического решения, проходящего через эту точку (рис. 1.2). Очевиден приближенный вид решений.

**Пример.** Рассмотрим нелинейное уравнение второго порядка

$$y'' = x - y^2. \quad (1.75)$$

Если нарисовать параболу  $x = y^2$  (рис. 1.3), то мы видим, что  $y''$  положительно внутри параболы и отрицательно вне ее. Если ограничиться решениями, начинающимися вблизи начала координат и идущими вправо, то можно установить несколько типов решений: 1) решения, осциллирующие около верхней ветви параболы; 2) критическое неосциллирующее решение, стремящееся к верхней ветви

параболы сверху; 3) решения, стремящиеся к  $-\infty$ ; 4) критическое неосциллирующее решение, стремящееся к нижней ветви параболы сверху.

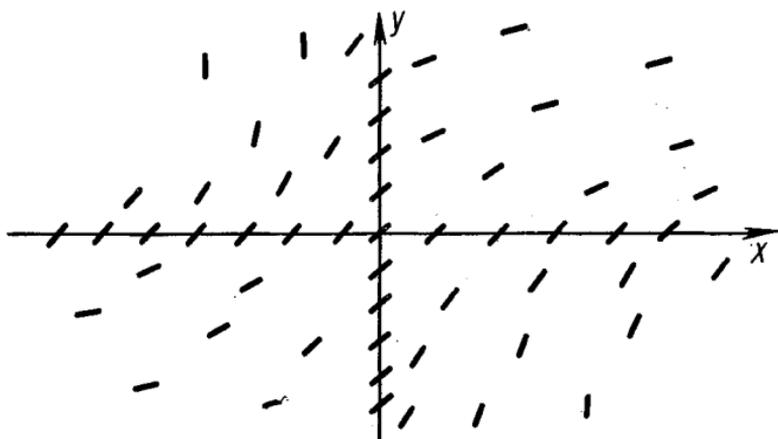


Рис. 1.2. Наклоны графических решений уравнения (1.74).

Решение (1.45) в форме степенного ряда, найденное ранее [с  $y(0) = 0$ ,  $y'(0) = 1$ ], принадлежит к первому типу.

**Пример.** Рассмотрим одномерное уравнение Шредингера для частицы с массой  $m$  в потенциале  $V(x)$ :

$$\begin{aligned} (d^2\psi/dx^2) &= \\ &= -(2m/\hbar^2) [E - V(x)] \psi. \end{aligned} \quad (1.76)$$

Если  $E > V(x)$ , то  $\psi''/\psi < 0$ , и  $\psi$  искривляется навстречу оси  $x$ , т. е.  $\psi$  имеет осцилляторный, или «синусоидальный», характер. Если  $E < V(x)$ , то  $\psi''/\psi > 0$ , и  $\psi$  искривляется от оси  $x$ , т. е.  $\psi$  имеет «экспоненциальный» характер. Если наложить граничные условия, чтобы  $\psi$  оставалась всюду конечной, то решение с неограниченно растущим «экспоненциальным» поведением неприемлемо.

Предположим, что  $V(x)$  выглядит, как показано на рис. 1.4.

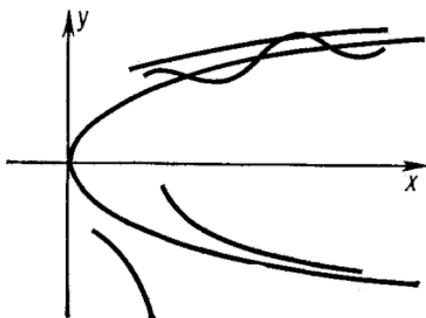


Рис. 1.3. Некоторые типы решений уравнения  $y'' = x - y^2$ .

Если  $E > V_3$ , все решения всюду осциллируют и все допустимы, т. е. ни одно из них не расходится на бесконечности.

Если  $V_2 < E < V_3$ , большинство решений расходится при  $x \rightarrow +\infty$ . Однако можно найти решение, которое

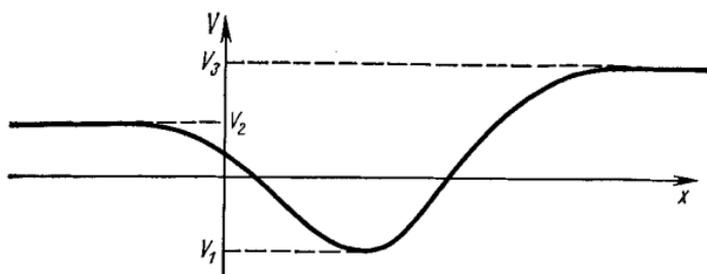


Рис. 1.4. Потенциал  $V(x)$  для уравнения Шредингера.

«экспоненциально» затухает при  $x \rightarrow +\infty$ . Это однозначно определяет допустимое решение (кроме амплитуды)

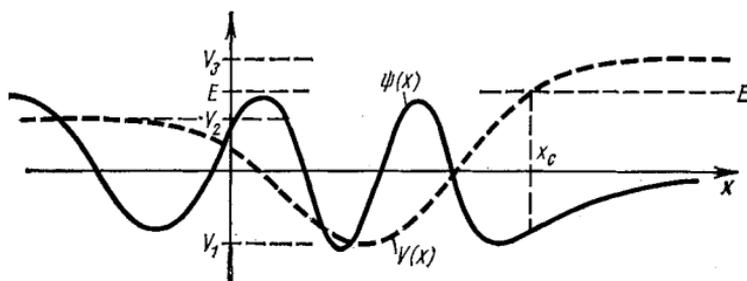


Рис. 1.5. Физически допустимое решение уравнения Шредингера для  $V_2 < E < V_3$ .

и, в частности, фиксирует фазу в левой области, где решение носит осцилляционный характер. Качественный вид решения показан на рис. 1.5.

Если  $V_1 < E < V_2$ , ситуация становится сложной;  $\psi$  ведет себя «экспоненциально» на обоих концах. Если выбрать  $\psi$  так, чтобы она не росла слева, то почти всегда  $\psi$  будет расти справа. Только для определенных значений  $E$  можно найти физически допустимые решения. Они называются собственными значениями.

Если  $E < V_1$ , то физических решений не существует.

Другой метод, который часто позволяет получить полезные приближенные решения, состоит в пренебрежении малыми членами, в итерациях и т. д.

**Пример.**

$$dy/dx = \exp(-2xy). \quad (1.77)$$

Посмотрим на решение вблизи  $x \rightarrow \infty$ . Предположим, что  $y > 0$ . Следовательно,  $dy/dx \approx 0$  и  $y \approx a = \text{const}$ . Теперь подставим это предположительное решение снова в (1.77):  $dy/dx \approx \exp(-2ax)$ . Тогда  $y \approx a - \exp(-2ax)/2a$ . Выполним еще одну итерацию

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &\approx \exp\left[-2x\left(a - \frac{\exp(-2ax)}{2a}\right)\right] \approx \\ &\approx \exp(-2ax)\left(1 + \frac{x}{a}\exp(-2ax) + \dots\right); \\ y &\approx a - \frac{\exp(-2ax)}{2a} - \frac{1}{4a^2}\left(x + \frac{1}{4a}\right)\exp(-4ax) + \dots \end{aligned} \quad (1.78)$$

Если ряд (1.78) сходится, то, вероятно, он представляет собой решение. Вообще говоря, ряд расходится.

**Пример.**

$$d^2y/dx^2 = x - y^2 \quad (1.79)$$

(см. графическое рассмотрение, рис. 1.3). Попробуем подставить  $y \approx \sqrt{x}$ . Тогда  $y'' \approx 0$ , так что  $y = ax + b$ . Это не похоже на первую попытку, так как мы не очень искусно работали с «малым» членом  $y''$ . Выберем другой путь:

$$\begin{aligned} y^2 = x - y'' &\approx x - (\sqrt{x})'' = x\left(1 + \frac{1}{4}x^{-5/2}\right), \\ y &\approx \sqrt{x} + \frac{1}{8}x^{-2}. \end{aligned}$$

Следующая итерация дает

$$y = \sqrt{x} + \frac{1}{8}x^{-2} - \frac{49}{128}x^{-9/2} + \dots \quad (1.80)$$

По указанной выше классификации это решение типа 2. Можно искать решение другим методом. Напишем

$$y = \sqrt{x} + \eta(x), \quad |\eta| \ll |\sqrt{x}|. \quad (1.81)$$

Подставляя (1.81) в дифференциальное уравнение (1.79), получаем

$$-1/4 x^{-3/2} + \eta'' = -2\eta \sqrt{x} - \eta^2. \quad (1.82)$$

Пренебрежем последним членом. Уравнение все еще остается сложным. Далее можно пренебречь первым или вторыми членом. Если предположить  $|\eta''| \ll |2\eta \sqrt{x}|$ , то получаем  $\eta \approx x^{-2}/8$ , т. е. предыдущее решение (1.80). Конечно, нужно проверять согласованность решения и приближения, сделанного при его нахождении, именно что  $(1/8 x^{-2})'' \ll 2(1/8 x^{-2}) \sqrt{x}$ . При больших  $x$  это неравенство хорошо соблюдается.

Другое решение можно получить, если пренебречь членом  $x^{-3/2}$  в уравнении (1.82) вместо  $\eta''$ ; т. е., если предположить  $|\eta''| \gg |-1/4 x^{-3/2}|$ , мы получаем дифференциальное уравнение

$$\eta'' + 2\sqrt{x}\eta = 0. \quad (1.83)$$

Приближенное решение этого уравнения можно найти методом ВКБ, который будет рассматриваться в следующем разделе. Находим

$$\eta \approx \frac{A}{x^{1/8}} \sin\left(\frac{4\sqrt{2}}{5} x^{5/4} + \delta\right). \quad (1.84)$$

Итак, получаются осцилляторные решения типа 1. Нужно только проверить согласованность предположения  $|\eta''| \gg \left|\frac{1}{4} x^{-3/2}\right|$ .

#### 1.4. МЕТОД ВКБ

Метод Вентцеля — Крамерса — Бриллюэна (ВКБ) служит для нахождения приближенных решений уравнения

$$(d^2y/dx^2) + f(x)y = 0, \quad (1.85)$$

причем на  $f(x)$  наложен ряд ограничений, рассматриваемых ниже. Вспомним, что любое линейное однородное уравнение второго порядка можно привести к этой форме посредством преобразования (1.41). Такую же форму имеет одномерное уравнение Шредингера.

Решения уравнения (1.85) с постоянной  $f(x)$  наводят на мысль о подстановке

$$y = \exp(i\phi(x)). \quad (1.86)$$

Уравнение приобретает вид

$$-(\phi')^2 + i\phi'' + f = 0. \quad (1.87)$$

Если предположить величину  $\phi''$  малой, то в первом приближении

$$\phi' = \pm \sqrt{f}; \quad \phi(x) = \pm \int \sqrt{f(x)} dx. \quad (1.88)$$

Условие применимости (малость  $\phi''$ ) имеет вид

$$|\phi''| \approx \frac{1}{2} \left| \frac{f'}{\sqrt{f}} \right| \ll |f|. \quad (1.89)$$

Из (1.86) и (1.88) видно, что  $1/\sqrt{f}$  есть, грубо говоря, одна «длина волны», или «экспоненциальная длина», для решения  $y$ . Таким образом, сделанное приближение справедливо, если изменение  $f(x)$  на одной длине волны мало по сравнению с  $|f|$ .

Следующее приближение легко найти итерацией. Положим в (1.87)  $\phi'' \approx \pm f^{-1/2} f'/2$ . Тогда

$$(\phi')^2 \approx f \pm \frac{i}{2} \cdot \frac{f'}{\sqrt{f}}; \quad \phi' \approx \pm \sqrt{f} + \frac{i}{4} \cdot \frac{f'}{f};$$

$$\phi(x) \approx \pm \int \sqrt{f(x)} dx + \frac{i}{4} \ln f.$$

Два знака соответствуют двум приближенным решениям; их можно скомбинировать для образования общего решения:

$$y(x) \approx \frac{1}{(f(x))^{1/4}} \left\{ c_+ \exp \left[ i \int \sqrt{f(x)} dx \right] + c_- \exp \left[ -i \int \sqrt{f(x)} dx \right] \right\}. \quad (1.90)$$

Таким образом, мы нашли приближение к общему решению исходного уравнения (1.85) в любой области, где выполняется условие (1.89): Метод не годится, если  $f(x)$  изменяется слишком быстро или если  $f(x)$  проходит через нуль. Последнее представляет серьезную трудность, так как часто приходится «сшивать» осцилляторное решение в области, где  $f(x) > 0$ , с «экспоненциальным» решением

в области, где  $f(x) < 0$  [см., например, обсуждение уравнения (1.76)].

Рассмотрим эту задачу подробнее, чтобы получить так называемые формулы связи, которые связывают константы  $c_+$  и  $c_-$  решений ВКБ с каждой стороны от точки, где  $f(x) = 0$ .

Предположим, что  $f(x)$  проходит через нуль в точке  $x_0$  и положительна справа от нее, как показано на рис. 1.6.

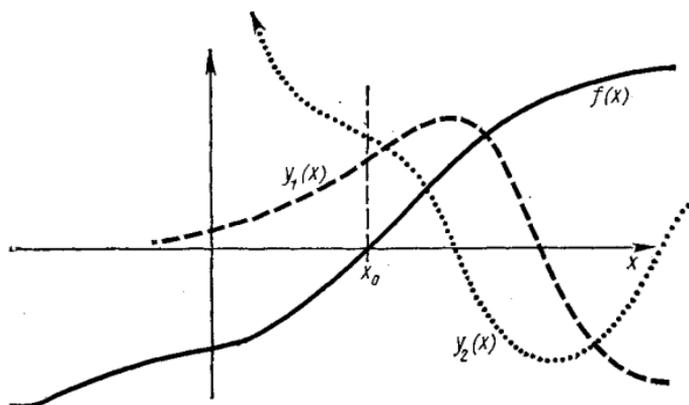


Рис. 1.6. Графики функции  $f(x)$  и двух точных решений уравнения (1.85); одно из них,  $y_1(x)$ , является особым решением: оно стремится слева к нулю.

Предположим далее, что  $f(x)$  удовлетворяет условию (1.89) в областях как слева, так и справа от  $x_0$ , так что любое частное решение  $y(x)$  можно приближенно записать в области  $x \ll x_0$  ( $f(x) < 0$ ) как

$$y(x) \approx \frac{a}{\sqrt[4]{-f(x)}} \exp \left[ + \int_x^{x_0} \sqrt{-f(x)} dx \right] + \frac{b}{\sqrt[4]{-f(x)}} \exp \left[ - \int_x^{x_0} \sqrt{-f(x)} dx \right], \quad (1.91)$$

а в области  $x \gg x_0$  ( $f(x) > 0$ )

$$y(x) \approx \frac{c}{\sqrt[4]{f(x)}} \exp \left[ + i \int_{x_0}^x \sqrt{f(x)} dx \right] + \frac{d}{\sqrt[4]{f(x)}} \exp \left[ - i \int_{x_0}^x \sqrt{f(x)} dx \right]. \quad (1.92)$$

Здесь всюду берутся положительные корни. Если  $f(x)$  вещественно, то решение, вещественное в левой области, будет также вещественно справа. Условие вещественности означает, что если  $a$  и  $b$  вещественны, то  $d = c^*$ .

Наша задача состоит в том, чтобы «шить» приближенные решения, описывающие одно и то же точное решение по разные стороны от  $x_0$ , т. е. найти  $c$  и  $d$ , если известны  $a$  и  $b$ , и решить обратную задачу. Чтобы найти такую связь, нужно использовать приближенное решение, которое было бы справедливо вдоль всего определенного пути, связывающего области  $x$  по обе стороны от  $x_0$ , на котором годилось бы приближение ВКБ. Одна процедура, использованная Крамерсом и Джеффрисом, состоит в том, чтобы использовать решение, справедливое на вещественной оси около  $x_0$  (см. обсуждение в конце разд. 4.5).

Вторая процедура, предложенная Цвааном и Кемблем, состоит в том, чтобы отойти от вещественной оси в районе точки  $x_0$  и использовать путь, огибающий  $x_0$  в комплексной плоскости, вдоль которого приближение ВКБ остается справедливым. Мы выберем эту вторую процедуру, так как она не только дает формулы связи, но и позволяет также оценить ошибки в приближении ВКБ. Кроме того, более поучительна и примененная здесь техника.

Источник ошибок важен, так как мы хотим использовать приближенные решения в широком диапазоне  $x$ , включающем много длин волн или длин изменения экспонент. Таким образом, возникают опасения, не накопятся ли постепенно ошибки и не приобретет ли приближенное решение ошибочную фазу, например, в области, где оно осциллирует.

Определим функции ВКБ для уравнения (1.85) следующим образом:

$$W_{\pm}(x) = [f(x)]^{-1/4} \exp \left[ \pm i \int_{x_0}^x \sqrt{f(x)} dx \right]. \quad (1.93)$$

Мы должны рассматривать их как функции комплексной переменной  $x$ ; чтобы избежать неоднозначности в выборе корней  $f(x)$ , нужно провести удобные разрезы в плоскости  $x$ . Функции (1.93) удовлетворяют (точно) дифференциальным уравнениям, которые можно получить дифференцированием:

$$\left. \begin{aligned} W'_{\pm} &= \left( \pm i \sqrt{f(x)} - \frac{1}{4} \cdot \frac{f'}{f} \right) W_{\pm}; \\ W''_{\pm} + \left[ f(x) + \frac{1}{4} \cdot \frac{f''}{f} - \frac{5}{16} \left( \frac{f'}{f} \right)^2 \right] W_{\pm} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (1.94)$$

Если определить

$$g(x) = \frac{1}{4} \cdot \frac{f''}{f} - \frac{5}{16} \left( \frac{f'}{f} \right)^2, \quad (1.95)$$

то  $W_{\pm}(x)$  суть точные решения уравнения

$$W_{\pm}'' + [f(x) + g(x)] W_{\pm} = 0 \quad (1.96)$$

и приближенные решения уравнения

$$y'' + f(x) y = 0 \quad (1.97)$$

пригодны в случае  $|g(x)| \ll |f(x)|$ . Уравнение (1.97) регулярно в точке  $x_0$ , в то время как уравнение (1.96) имеет в ней особенность. Соответственно  $y(x)$  регулярно в  $x_0$ , а  $W_{\pm}$  имеют особенности в ней.

Определим теперь функции  $\alpha_{\pm}(x)$ :

$$y(x) = \alpha_+(x) W_+(x) + \alpha_-(x) W_-(x); \quad (1.98)$$

$$y'(x) = \alpha_+(x) W'_+(x) + \alpha_-(x) W'_-(x), \quad (1.99)$$

где  $y(x)$  — решение (1.97), а  $\alpha_{\pm}$  — не что иное, как соприкасающиеся параметры, обсуждаемые ранее в связи с методом вариации постоянных. Приближение ВКБ соответствует простому случаю, когда  $\alpha_+$  и  $\alpha_-$  считаются постоянными.

Решим уравнения (1.98) и (1.99) относительно  $\alpha_{\pm}(x)$ :

$$\alpha_+ = \frac{yW'_- - y'W_-}{W_+W'_- - W'_+W_-}; \quad \alpha_- = -\frac{yW'_+ - y'W_+}{W_+W'_- - W'_+W_-},$$

где знаменатели представляют собой вронскиан  $W_+$  и  $W_-$ . Вронскиан постоянен, что легко можно увидеть из дифференциального уравнения (1.96). Из точных выражений (1.93) имеем  $W_+W_- - W'_+W'_- = -2i$ , так что

$$\alpha_+ = \frac{i}{2} (yW'_- - y'W_-), \quad \alpha_- = -\frac{i}{2} (yW'_+ - y'W_+). \quad (1.100)$$

Дифференцируя эти равенства и используя дифференциальные уравнения (1.96) и (1.97) для исключения  $y''$  и  $W_{\pm}''$ , получаем

$$\frac{d\alpha_{\pm}}{dx} = \pm \frac{i}{2} (yW_{\pm}'' - y''W_{\mp}) = \mp \frac{i}{2} g(x) yW_{\mp}, \quad (1.101)$$

или, вспоминая (1.93) и (1.98),

$$\frac{d\alpha_{\pm}}{dx} = \mp \frac{i}{2} \frac{g(x)}{|f(x)|^{1/2}} \left\{ \alpha_{\pm} + \alpha_{\mp} \exp \left[ \mp 2i \int_{x_0}^x \sqrt{f(x)} dx \right] \right\}. \quad (1.102)$$

Любое из выражений (1.101) или (1.102) можно использовать для оценки ошибки, которая может накопиться вдоль большого интервала  $x$  в приближении ВКБ.

**Пример.** Функции ВКБ, связанные с уравнением

$$y'' + xy = 0, \quad (1.103)$$

для  $x \gg 0$  имеют вид

$$W_{\pm}(x) = x^{-1/4} \exp\left(\pm i \int_0^x x^{1/2} dx\right) = x^{-1/4} \exp\left(\pm i \frac{2}{3} x^{3/2}\right). \quad (1.104)$$

Они точно удовлетворяют уравнению (1.96):

$$W'' + \left(x - \frac{5}{16} x^{-2}\right) W = 0,$$

т. е.  $f(x) = x$ ,  $g(x) = -5x^{-2}/16$ . Можно записать решение (1.103) в форме (1.98):

$$y(x) = \alpha_+(x) W_+(x) + \alpha_-(x) W_-(x).$$

При больших  $x$  общее решение (1.103) хорошо описывается приближением ВКБ:

$$y(x) \rightarrow Ax^{-1/4} \cos\left(\frac{2}{3} x^{3/2} + \delta\right), \quad x \rightarrow \infty, \quad (1.105)$$

так что  $\alpha_+ \rightarrow (A/2) \exp(i\delta)$ ,  $\alpha_- \rightarrow (A/2) \exp(-i\delta)$  при  $x \rightarrow \infty$ . Исследуем ошибку в этом решении ВКБ, когда величина  $x$  уменьшается; эта ошибка определяется отклонением  $\alpha_+(x)$  и  $\alpha_-(x)$  от постоянных значений, приведенных выше. Если  $\alpha_{\pm}(x)$  меняются не сильно, то из (1.102) приближенно имеем

$$\frac{d\alpha_{\pm}}{dx} \approx \mp \frac{i}{2} \left(-\frac{5}{16} x^{-2}\right) \times \\ \times x^{-1/2} \left[ \frac{A}{2} \exp(\pm i\delta) + \frac{A}{2} \exp(\mp i\delta) \exp\left(\mp 2i \frac{2}{3} x^{3/2}\right) \right],$$

и  $\Delta\alpha_{\pm}$ , т. е. изменения  $\alpha_{\pm}$  на интервале  $[x_1, \infty]$ , даются соотношениями

$$2\Delta\alpha_{\pm}/A \approx (2/A) \int_{x_1}^{\infty} (d\alpha_{\pm}/dx) dx = \pm i \frac{5}{32} \exp(\pm i\delta) \times \\ \times \left(\frac{2}{3} x_1^{-3/2} + \exp(\mp 2i\delta) \int_{x_1}^{\infty} x^{-5/2} \exp\left(\mp i \frac{4}{3} x^{3/2}\right) dx\right). \quad (1.106)$$

Второй член в скобках менее важен, чем первый, и мы видим, что относительная ошибка  $|\Delta\alpha_{\pm}|/|\alpha_{\pm}|$  лишь порядка 10—20% даже для такого малого  $x$ , как  $x_1 = 1$ . При больших  $x_1$  ошибка становится очень малой. В частности, не накапливается никакой существенной ошибки в фазе на сколь угодно большом числе «длин волн».

Возвратимся теперь к проблеме оценки изменений функций  $\alpha_{\pm}(x)$  в общем случае. Интегрируем уравнение (1.102) вдоль контура  $\Gamma$  в комплексной плоскости от  $x_1$  до  $x_2$ :

$$\begin{aligned} \alpha\Delta_{\pm} &= \int_{\Gamma} (d\alpha_{\pm}/dx) dx = \mp \frac{i}{2} \int_{\Gamma} \frac{g(x)\alpha_{\pm}}{\sqrt{f(x)}} dx \mp \\ &\mp \frac{i}{2} \int_{\Gamma} \frac{g(x)}{\sqrt{f(x)}} \alpha_{\mp} \left( \frac{W_{\mp}}{W_{\pm}} \right) dx. \end{aligned} \quad (1.107)$$

Будем рассматривать только такие контуры, для которых

$$\int_{\Gamma} \left| \frac{g(x)}{\sqrt{f(x)}} \right| ds \ll 1, \quad (1.108)$$

где  $ds = |dx|$  — элемент длины вдоль  $\Gamma$ . Обычно называют такой контур «хорошим».

Вдоль хорошего контура первый член в правой части (1.107) не производит существенного изменения  $\Delta\alpha_{\pm}$ . Второй член может быть существен в том случае, когда  $|W_{\mp}/W_{\pm}| \gg 1$ ; т. е. вдоль хорошего пути  $\alpha_{+}$  может меняться только в области, где ее функция  $W_{+}$  мала по величине по сравнению с  $W_{-}$ . Даже в этой области  $\alpha_{+}$  не может меняться, если  $\alpha_{-}$  равно нулю или близко к нулю. Аналогичные утверждения справедливы для  $\alpha_{-}$ , если всюду поменять местами знаки «+» и «-».

В областях, где  $|W_{-}/W_{+}| \gg 1$  или  $|W_{+}/W_{-}| \gg 1$ , коэффициент при малой функции может меняться весьма заметно; такое поведение называется явлением Стокса. Это изменение не оказывает никакого существенного влияния на функцию  $y(x)$  в этой области, так что нет противоречия с тем, что приближение ВКБ с постоянными  $\alpha_{+}$  и  $\alpha_{-}$  здесь предполагается законным.

Полученные выше результаты используем теперь для нахождения формул связи ВКБ. Вспомним определения (1.93) и проведем разрез вдоль вещественной оси от точки  $x_0$  до  $+\infty$ . Будем считать корни  $[f(x)]^{1/4}$  и  $[f(x)]^{1/2}$  положительными вещественными корнями на верхней сто-

роне этого разреза. Тогда для  $x < x_0$

$$W_{\pm}(x) = \exp(-i(\pi/4)) [-f(x)]^{-1/4} \exp\left(\pm \int_x^{x_0} \sqrt{-f(x)} dx\right). \quad (1.109)$$

Возвращаясь к (1.91) и (1.92), имеем

$$\left. \begin{aligned} \alpha_+ &\rightarrow a \exp(i(\pi/4)); & \alpha_- &\rightarrow b \exp(i(\pi/4)); & x &\ll x_0; \\ \alpha_+ &\rightarrow c; & \alpha_- &\rightarrow d; & x &\gg x_0. \end{aligned} \right\} \quad (1.110)$$

Для того чтобы найти области Стокса, где  $|W_+/W_-| \gg 1$  или  $|W_-/W_+| \gg 1$ , заметим, что вблизи  $x_0$  функция  $f(x) \approx K(x-x_0)$  и границы этих областей качественно схожи с границами для  $f(x) = K(x-x_0)$ .

Эти границы проходят там, где  $\int_x^{x_0} \sqrt{f(x)} dx$  — вещественное число, так как тогда  $|W_+| = |W_-|$ . Для  $f = K(x-x_0)$ , обозначая  $x-x_0 = r \exp(i\theta)$ , имеем

$$\int_x^{x_0} \sqrt{f(x)} dx = K^{1/2} \cdot \frac{2}{3} (x-x_0)^{3/2} = \frac{2}{3} K^{1/2} r^{3/2} \exp[i(3\theta/2)]. \quad (1.111)$$

Это выражение вещественно по направлениям  $\theta = 0, 2\pi/3, 4\pi/3$ , и из (1.93) легко видеть, какая из  $W_+$  или  $W_-$  доминирует в каждой области между этими границами.

На рис. 1.7 показаны области Стокса; указан также хороший путь  $\Gamma$ , связывающий области  $x \ll x_0$  и  $x \gg x_0$  на вещественной оси, где требуется связать решения ВКБ.

Теперь легко найти формулу связи для специального решения  $y_1(x)$ , которое имеет убывающее экспоненциальное поведение слева от  $x_0$ . Для этого решения  $a = 0$ , т. е.  $\alpha_+(x) = 0$  в начале пути  $\Gamma$ . Таким образом, в области 2  $\alpha_-(x)$  остается постоянной вдоль пути  $\Gamma$ , даже если  $|W_+/W_-| \gg 1$ ;  $\alpha_+$  остается близкой к нулю. В области 1  $|W_-/W_+| \gg 1$ , так что  $\alpha_-$  остается постоянной, хотя и  $\alpha_+$  может (и будет) меняться. Так как  $\alpha_-$  постоянна вдоль всего пути  $\Gamma$ , из (1.110) находим

$$d = b \exp(i(\pi/4)). \quad (1.112)$$

Если  $b$  вещественно, то из условия вещественности следует  $c = d^*$ .

Таким образом, формула связи для решения  $y_1(x)$  с убывающим экспоненциальным поведением при  $x < x_0$  (нормировано условием  $b = 1$ ) имеет вид

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\sqrt[4]{-f(x)}} \exp \left[ - \int_x^{x_0} \sqrt{-f(x)} dx \right] \rightarrow \\ & \rightarrow \frac{2}{\sqrt[4]{f(x)}} \cos \left[ \int_{x_0}^x \sqrt{f(x)} dx - \frac{\pi}{4} \right]. \end{aligned} \quad (1.113)$$

Поворот стрелки в обратную сторону — тонкий вопрос. Мы знаем только, что растущий экспоненциальный член

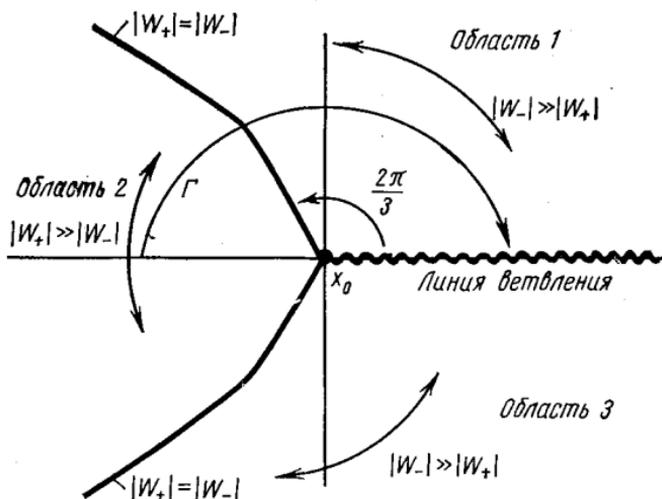


Рис. 1.7. Области Стокса на комплексной плоскости  $x$  вблизи точки  $x_0$ , где  $f(x)$  обращается в нуль.

слева будет отсутствовать для некоторой фазы вблизи точки  $-\pi/4$  справа.

Рассмотрим далее более общее решение  $y_2(x)$  с  $a \neq 0$ . Так как исходное уравнение линейно, то коэффициенты в выражениях (1.91) и (1.92) должны быть линейно связаны

$$c = Aa + Bb; \quad d = Ca + Db. \quad (1.114)$$

Из (1.112) находим, что

$$B = \exp(-i(\pi/4)); \quad D = \exp(i(\pi/4)). \quad (1.115)$$

При вещественных  $a$  и  $b$  условие вещественности  $d = c^*$  означает, что

$$C = A^*; \quad D = B^*, \quad (1.116)$$

второе из которых нам уже известно. Другое общее соотношение можно получить из того, что вронскиан  $y_1 y_2' - y_2 y_1'$  двух независимых решений уравнения  $y'' + f(x)y = 0$  постоянен. (Чтобы увидеть это, продифференцируйте вронскиан.) Напишем

$$y_1(x) = \alpha_+^{(1)} W_+ + \alpha_-^{(1)} W_-; \quad y_2(x) = \alpha_+^{(2)} W_+ + \alpha_-^{(2)} W_- \quad (1.117)$$

Вспомогая, что  $y' = \alpha_+ W_+' + \alpha_- W_-'$  и вронскиан  $W_+ W_-' - W_+' W_- = -2i$ , находим

$$\alpha_+^{(1)} \alpha_-^{(2)} - \alpha_+^{(2)} \alpha_-^{(1)} = \text{const} = K. \quad (1.118)$$

Вычисляя эту константу при  $x \ll x_0$  из (1.110), имеем  $K = \exp(i(\pi/2)) (a_1 b_2 - a_2 b_1)$ , где  $a_1$  и  $b_1$  — коэффициенты  $a$  и  $b$  приближения ВКБ (1.91) для  $y_1(x)$ , а  $a_2$  и  $b_2$  — коэффициенты для  $y_2(x)$ . Аналогично находим для  $x \gg x_0$

$$\begin{aligned} K &= c_1 d_2 - c_2 d_1 = \\ &= (AD - BC) (a_1 b_2 - a_2 b_1). \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\exp(i(\pi/2)) = i = AD - BC = AB^* - A^*B = 2i \text{Im } AB^*. \quad (1.119)$$

Но  $B = \exp(-i(\pi/4))$ , так что  $A \exp(i(\pi/4)) = R + i/2$ , где  $R$  — неопределенная вещественная постоянная. Окончательно

$$\left. \begin{aligned} A &= R \exp(-i(\pi/4)) + \frac{1}{2} \exp(i(\pi/4)); \\ B &= \exp(-i(\pi/4)); \\ C &= R \exp(i(\pi/4)) + \frac{1}{2} \exp(-i(\pi/4)); \\ D &= \exp(i(\pi/4)), \end{aligned} \right\} \quad (1.120)$$

и так как  $R$  не определено, то мы еще не можем выразить  $c$  и  $d$  через  $a$  и  $b$ . Однако это все, чего мы можем достичь:  $R$  определить нельзя. Другой путь, приводящий к этой неопределенности, состоит в том, что асимптотический вид решения типа  $y_2(x)$  на рис. 1.6 для  $x < x_0$  не определяет  $y_2(x)$  для  $x > x_0$ . Выразим теперь  $a$  и  $b$  через  $c$  и  $d$ .

Уравнения (1.114) легко обращаются, и мы находим

$$\left. \begin{aligned} a &= \exp(-i(\pi/4))c + \exp(i(\pi/4))d; \\ b &= \left[ \frac{1}{2} \exp(i(\pi/4)) - R \exp(-i(\pi/4)) \right] c + \\ &+ \left[ \frac{1}{2} \exp(-i(\pi/4)) - R \exp(i(\pi/4)) \right] d. \end{aligned} \right\} \quad (1.121)$$

Таким образом, можно найти  $a$ , но нельзя найти  $b$ . Этого можно было ожидать, так как  $\alpha_-(x)$  изменяется чрезвычайно сильно в области 2 на рис. 1.7, кроме специального случая  $\alpha_+ = 0$ . Можно было ожидать этот результат и из того, что при  $a \neq 0$  величина  $b$  неизмеримо мала, так как убывающая экспонента ничтожна по сравнению с растущей. Опуская по этой причине  $b$ , можно написать вторую формулу, связывающую два выражения (1.91) и (1.92) для  $y(x)$ . Удобно выбрать вещественное решение, полагая  $c = \frac{1}{2} \exp(i\phi)$  и  $d = \frac{1}{2} \exp(-i\phi)$ . Тогда

$$\begin{aligned} \sin\left(\phi + \frac{\pi}{4}\right) \frac{1}{\sqrt[4]{-f(x)}} \exp\left[\int_x^{x_0} \sqrt{-f(x)} dx\right] \leftarrow \\ \leftarrow \frac{1}{\sqrt[4]{f(x)}} \cos\left[\int_{x_0}^x \sqrt{f(x)} dx + \phi\right] \end{aligned} \quad (1.122)$$

в случае, если  $\phi$  не слишком близко к  $-\pi/4$ . Как мы видели, стрелку нельзя повернуть, так как фазу  $\phi$  нельзя определить, если мы знаем только, в какой мере представлена растущая экспонента.

Очень легко помнить формулы связи (1.113) и (1.122), рисуя качественные картинки типа рис. 1.6. Рассмотрим сначала  $y_1(x)$  с убывающей экспонентой слева от  $x_0$ . Справа от  $x_0$  функция  $y_1(x)$  ведет себя как косинус, для которого фаза заключена между  $-\pi/2$  и 0, если  $x = x_0$ . Вспомним, что фаза равна  $-\pi/4$ . Далее, амплитуда волны косинуса справа «выглядит» больше, чем амплитуда экспоненты слева. Вспомним, что она вдвое больше. Эти замечания воспроизводят результат (1.113). Аналогичное правило для запоминания результата (1.122) получается, если рассмотреть решение  $y_2(x)$ , которое в правой области сдвинуто по фазе с  $y_1(x)$  на  $90^\circ$ . С помощью такой же процедуры непосредственно получаются формулы связи, аналогичные (1.113) и (1.122) для случая, когда наклон  $f(x)$  в точке  $x_0$  отрицателен, а не положителен.

В заключение рассмотрим применение метода ВКБ в квантовой механике. Рассмотрим уравнение Шредингера для частицы в потенциальной яме

$$(d^2\psi/dx^2) + (2m/\hbar^2) [E - V(x)] \psi = 0 \quad (1.123)$$

с  $V(x)$ , показанным на рис. 1.8;

$$f(x) = \frac{2m}{\hbar^2} [E - V(x)] \begin{cases} \text{положительно для } a < x < b, \\ \text{отрицательно для } x < a, x > b. \end{cases}$$

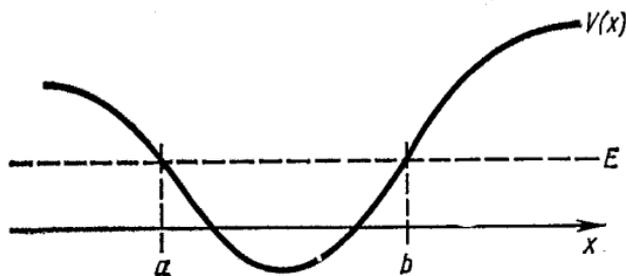


Рис. 1.8. Типичная одномерная потенциальная яма.

Если  $\psi(x)$  ограничена при  $x < a$ , то в области  $a < x < b$  формула связи (1.113) утверждает следующее:

$$\psi(x) \approx \frac{A}{(E-V)^{1/4}} \cos \left( \int_a^x \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2} (E-V)} dx - \frac{\pi}{4} \right). \quad (1.124)$$

Если  $\psi(x)$  ограничена при  $x > b$ , то в области  $a < x < b$  аналогично получаем

$$\psi(x) \approx \frac{B}{(E-V)^{1/4}} \cos \left( \int_x^b \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2} (E-V)} dx - \frac{\pi}{4} \right). \quad (1.125)$$

Эти два выражения должны совпадать, откуда вытекает условие

$$\int_a^b \sqrt{2m(E-V)} dx = \left( n + \frac{1}{2} \right) \pi \hbar. \quad (1.126)$$

Результат очень похож на правило квантования Бора — Зоммерфельда.

## Г Л А В А 2

### БЕСКОНЕЧНЫЕ РЯДЫ

#### 2.1. ПРИЗНАКИ СХОДИМОСТИ

Необходимый критерий для изучения сходимости бесконечного ряда состоит в сравнении его с рядом, о котором известно, сходится он или расходится. Например, геометрическая прогрессия

$$1/(1-x) = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots \quad (2.1)$$

сходится при  $|x| < 1$  и расходится при  $|x| > 1$ . Это приводит к признаку сходимости Даламбера: если предел отношения  $|a_{n+1}/a_n|$  последовательных членов бесконечного ряда  $a_1 + a_2 + a_3 + \dots$  при  $n \rightarrow \infty$  есть число, меньшее единицы, то ряд сходится. Если предел больше единицы, ряд расходится. Если предел равен единице, то необходимо дальнейшее исследование.

Второй критерий — это сравнение с несобственным интегралом. Ряд  $f(1) + f(2) + f(3) + \dots$  сходится или расходится одновременно с несобственным интегралом  $\int_1^{\infty} f(x) dx$ , если  $f(x)$  монотонно убывает. Рассмотрим, например, ряд для  $\zeta$ -функции Римана

$$\zeta(s) = 1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{4^s} + \dots \quad (2.2)$$

Отношение последовательных членов

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^s \approx \left(1 - \frac{1}{n}\right)^s = 1 - \frac{s}{n} + \dots \quad (2.3)$$

при  $n \rightarrow \infty$  стремится к единице. Таким образом, сравнения с геометрической прогрессией недостаточно. Однако

$$\int \frac{dx}{x^s} = \frac{-1}{s-1} \cdot \frac{1}{x^{s-1}}, \quad (2.4)$$

так что критерий для сходимости  $\zeta$ -функции есть  $s > 1$ . Это позволяет усилить признак сходимости Даламбера: если

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \rightarrow 1 - \frac{s}{n} \quad (2.5)$$

с  $s > 1$ , то ряд сходится (в случае комплексного  $s$  условие сходимости состоит в неравенстве  $\operatorname{Re} s > 1$ ).

**Пример.** Рассмотрим гипергеометрический ряд

$$F(a, b; c; x) = 1 + \frac{ab}{c} \frac{x}{1!} + \frac{a(a+1)b(b+1)}{c(c+1)} \cdot \frac{x^2}{2!} + \dots \quad (2.6)$$

Отношение последовательных членов равно

$$\begin{aligned} \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \frac{(a+n)(b+n)}{(c+n)(n+1)} x = \\ &= \frac{\left(1 + \frac{a}{n}\right) \left(1 + \frac{b}{n}\right)}{\left(1 + \frac{c}{n}\right) \left(1 + \frac{1}{n}\right)} x = \left(1 + \frac{a+b-c-1}{n} + \dots\right) x. \end{aligned}$$

Таким образом, ряд сходится, если  $|x| < 1$ , или при  $|x| = 1$  \*

$$a + b - c < 0. \quad (2.7)$$

Можно еще более усилить признак сходимости Даламбера, если рассмотреть очень медленно сходящийся ряд, такой, как

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n (\ln n)^s} = \frac{1}{2 (\ln 2)^s} + \frac{1}{3 (\ln 3)^s} + \dots \quad (2.8)$$

Сравнивая этот ряд с интегралом

$$\int \frac{dx}{x (\ln x)^s} = \frac{-1}{s-1} \cdot \frac{1}{(\ln x)^{s-1}}, \quad (2.9)$$

видим, что ряд (2.8) сходится, когда  $s > 1$ . Отношение последовательных членов в (2.8) равно

$$\begin{aligned} \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \frac{n}{n+1} \left[ \frac{\ln n}{\ln(n+1)} \right]^s = \left(1 - \frac{1}{n} + \dots\right) \times \\ &\times \left[ \frac{\ln n}{\ln n + \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)} \right]^s = \left(1 - \frac{1}{n} + \dots\right) \left[1 + \frac{1}{n \ln n} + \dots\right]^{-s} = \\ &= 1 - \frac{1}{n} - \frac{s}{n \ln n} + \dots \quad (2.10) \end{aligned}$$

\* Если  $a, b, c$  — произвольные комплексные числа, то условие (2.7) следует заменить на  $\operatorname{Re}(a + b - c) < 0$ .

**Пример.** Рассмотрим решение уравнения Лежандра в виде ряда (1.51)

$$1 - n(n+1) \frac{x^2}{2!} + n(n+1)(n-2)(n+3) \frac{x^4}{4!} - \dots + \dots$$

Отношение последовательных членов

$$\frac{a_i}{a_{i-1}} = - \frac{(n-2i+4)(n+2i-3)}{(2i-3)(2i-2)} x^2.$$

Для больших  $i$

$$\frac{a_i}{a_{i-1}} \approx \left[ 1 - \frac{1}{i} + O\left(\frac{1}{i^2}\right) \right] x^2.$$

Таким образом, если  $x^2 = 1$ , то ряд расходится.

Конечно, имеются и другие признаки сходимости; например, если знаки  $a_n$  чередуются и  $a_n$  стремится к нулю монотонно, то ряд  $\sum_n a_n$  сходится (но не обязательно абсолютно).

## 2.2. ОБЩЕИЗВЕСТНЫЕ РЯДЫ

Читатель наверняка знаком со следующими простыми рядами:

$$(1+x)^n = 1 + nx + n(n-1) \frac{x^2}{2!} + \dots = \sum_{\alpha=0}^{\infty} \frac{n!}{(n-\alpha)!} \frac{x^\alpha}{\alpha!}; \quad (2.11)$$

$$\exp(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots = \sum_{\alpha=0}^{\infty} \frac{x^\alpha}{\alpha!}. \quad (2.12)$$

Используя соотношение Эйлера  $\exp(ix) = \cos x + i \sin x$ , из (2.12) находим

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + \dots; \quad (2.13)$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots + \dots \quad (2.14)$$

Почленно интегрируя ряды для  $(1+x)^{-1}$  и  $(1+x^2)^{-1}$ , получаем

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots - \dots; \quad (2.15)$$

$$\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \dots + \dots \quad (2.16)$$

Другие элементарные функции, такие, как  $\operatorname{tg} x$ ,  $\operatorname{ctg} x$ ,  $\operatorname{sec} x$  и т. д., имеют, вероятно, менее известные разложения в ряд. Для некоторых рядов коэффициенты выражаются посредством так называемых чисел Бернулли или чисел Эйлера.

Определим числа Бернулли с помощью разложения функции  $[\exp(x) - 1]^{-1}$ , которая встречается весьма часто. Для того чтобы исключить особенность в точке  $x = 0$ , умножим функцию на  $x$ :

$$\frac{x}{\exp(x) - 1} = c_0 + c_1x + c_2x^2 + \dots \quad (2.17)$$

Отсюда

$$x = (c_0 + c_1x + c_2x^2 + \dots) \left( x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots \right),$$

а разделив на  $x$  все члены уравнения, получим

$$1 = (c_0 + c_1x + c_2x^2 + \dots) \left( 1 + \frac{x}{2!} + \frac{x^2}{3!} + \dots \right).$$

Положим  $c_n = B_n/n!$ . Тогда

$$1 = \left( B_0 + \frac{B_1x}{1!} + \frac{B_2x^2}{2!} + \dots \right) \left( 1 + \frac{x}{2!} + \frac{x^2}{3!} + \dots \right). \quad (2.18)$$

Приравнивая члены с одинаковыми степенями  $x$ , имеем

$$1 = B_0; \quad 0 = \frac{B_0}{2!} + \frac{B_1}{1!}; \quad 0 = \frac{B_0}{3!} + \frac{B_1}{2! \cdot 1!} + \frac{B_2}{1! \cdot 2!} \text{ и т. д.} \quad (2.19)$$

Кроме первого уравнения, уравнения (2.19) можно записать в краткой форме символически:  $(B + 1)^n - B^n = 0$ . Здесь под  $B^s$  понимается в действительности  $B_s$ . Несколько первых чисел Бернулли равны

$$\left. \begin{aligned} B_0 = 1; \quad B_2 = 1/6; \quad B_4 = -1/30; \quad B_6 = 1/42; \\ B_8 = -1/30, \dots; \\ B_1 = -1/2; \quad B_3 = B_5 = B_7 = \dots = 0. \end{aligned} \right\} \quad (2.20)$$

Заметим, что обозначения в различных учебниках многообразны, так что нужно быть внимательным при использовании формул.

Как пример использования чисел Бернулли в качестве коэффициентов в степенных рядах для общеизвест-

ных функций рассмотрим

$$\operatorname{ctg} x = i \frac{\exp(ix) + \exp(-ix)}{\exp(ix) - \exp(-ix)}. \quad (2.21)$$

Обозначим  $ix = y/2$ . Тогда

$$\begin{aligned} \operatorname{ctg} x &= i \frac{\exp(y/2) + \exp(-y/2)}{\exp(y/2) - \exp(-y/2)} = i \left( 1 + \frac{2}{\exp(y) - 1} \right) = \\ &= \frac{2i}{y} \left( \frac{y}{2} + \frac{y}{\exp(y) - 1} \right) = \frac{2i}{y} \sum_{n \text{ четные}} \frac{B_n y^n}{n!}. \end{aligned}$$

Заменяя  $y$  на  $2ix$ , находим

$$\operatorname{ctg} x = \frac{1}{x} \sum_{n \text{ четные}} (-1)^{n/2} \frac{B_n (2x)^n}{n!}. \quad (2.22)$$

Соотношение  $\operatorname{tg} x = \operatorname{ctg} x - 2\operatorname{ctg} 2x$  позволяет найти степенной ряд для  $\operatorname{tg} x$ .

### 2.3. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ РЯДОВ

Данный неизвестный ряд к известному можно свести различными способами.

**Пример.**

$$f(x) = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \dots \quad (2.23)$$

Почленно интегрируя, имеем

$$\int_0^x f(x) dx = x + x^2 + x^3 + \dots = \frac{1}{1-x} \cdot x$$

Далее дифференцируем:

$$f(x) = \frac{d}{dx} \left( \frac{x}{1-x} \right) = \frac{1}{(1-x)^2}.$$

[Этот результат можно было получить и непосредственно из биномиального ряда (2.11).]

**Пример.**

$$f(x) = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{x}{2 \cdot 3} + \frac{x^2}{3 \cdot 4} + \frac{x^3}{4 \cdot 5} + \dots, \quad (2.24)$$

$$x^2 f(x) = \frac{x^2}{1 \cdot 2} + \frac{x^3}{2 \cdot 3} + \frac{x^4}{3 \cdot 4} + \dots$$

Дважды дифференцируя, находим

$$(x^2 f)'' = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots = \frac{1}{1-x}.$$

Отсюда с помощью двух интегрирований получаем

$$f(x) = \frac{1}{x} + \frac{1-x}{x^2} \ln(1-x).$$

Константы интегрирования в этой процедуре нужно вычислять, рассматривая ряд при определенных значениях  $x$ ; например, при  $x = 0$  ряд (2.24) дает  $f(0) = 1/2$ .

**Пример.**

$$\begin{aligned} f(\theta) &= 1 + a \cos \theta + a^2 \cos 2\theta + \dots = \\ &= \operatorname{Re} (1 + a \exp(i\theta) + a^2 \exp(2i\theta) + \dots). \end{aligned} \quad (2.25)$$

Это простая геометрическая прогрессия; следовательно,

$$f(\theta) = \operatorname{Re} \frac{1}{1 - a \exp(i\theta)} = \frac{1 - a \cos \theta}{1 - 2a \cos \theta + a^2}.$$

**Пример.**

$$S = \frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} + \frac{3}{4!} + \dots \quad (2.26)$$

Определим

$$f(x) = \frac{x^2}{2!} + \frac{2x^3}{3!} + \frac{3x^4}{4!} + \dots$$

Тогда  $S = f(1)$ ,

$$\begin{aligned} f'(x) &= x + x^2 + \frac{x^3}{2!} + \frac{x^4}{3!} + \dots = x \exp(x), \\ f(x) &= \int_0^x x \exp(x) dx = x \exp(x) - \exp(x) + 1, \\ S &= f(1) = 1. \end{aligned}$$

**Пример.**

$$\begin{aligned} S &= 1 + m + \frac{m(m-1)}{2!} + \frac{m(m-1)(m-2)}{3!} + \dots = \\ &= \sum_n \frac{m!}{n!(m-n)!}. \end{aligned} \quad (2.27)$$

Положим  $f(x) = \sum_n \frac{m!}{n!(m-n)!} x^n$ ,  $S = f(1)$ . Но  $f(x) = (1+x)^m$ , поэтому  $S = 2^m$ .

Теперь рассмотрим на первый взгляд очень простой случай [ср. с (2.2)]

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \dots = \zeta(2). \quad (2.28)$$

Предыдущие примеры наводят на мысль ввести функцию

$$\left. \begin{aligned} f(x) &= x + \frac{x^2}{4} + \frac{x^3}{9} + \frac{x^4}{16} + \dots, \quad S = f(1), \\ f'(x) &= 1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} + \frac{x^3}{4} + \dots = -\frac{1}{x} \ln(1-x). \end{aligned} \right\} \quad (2.29)$$

Таким образом,

$$f(x) = -\int_0^x \frac{\ln(1-x) dx}{x}; \quad S = -\int_0^1 \frac{\ln(1-x)}{x} dx. \quad (2.30)$$

К сожалению, этот интеграл так же трудно вычислить, как и ряд.

Ряд (2.28) можно выразить через числа Бернулли. Чтобы найти это соотношение, начнем с написания ряда Фурье для  $\cos kx$  (ряды Фурье обсуждаются подробнее в гл. 4):

$$\cos kx = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos nx + B_n \sin nx); \quad (2.31)$$

$\cos kx$  — четная функция, так что членов с синусами нет ( $B_n = 0$ ). Коэффициенты  $A_n$  даются формулами

$$A_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \cos nx \cdot \cos kx dx = (-1)^n \frac{2k \sin k\pi}{\pi(k^2 - n^2)}. \quad (2.32)$$

Таким образом,

$$\cos kx = \frac{2k \sin k\pi}{\pi} \left( \frac{1}{2k^2} - \frac{\cos x}{k^2 - 1} + \frac{\cos 2x}{k^2 - 4} - \frac{\cos 3x}{k^2 - 9} + \dots \right). \quad (2.33)$$

Полагая в (2.33)  $x = \pi$ , находим

$$k\pi \operatorname{ctg} k\pi = 1 + 2k^2 \left( \frac{1}{k^2 - 1} + \frac{1}{k^2 - 4} + \frac{1}{k^2 - 9} + \dots \right). \quad (2.34)$$

Это разложение котангенса на простейшие дроби.

Разлагая (2.34) в степенной ряд по  $k$ , получаем

$$\begin{aligned} k\pi \operatorname{ctg} k\pi &= 1 - 2k^2 \left( 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots \right) - \\ &- 2k^4 \left( 1 + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \dots \right) - \dots = 1 - 2 \sum_{n=1}^{\infty} \zeta(2n) k^{2n}, \end{aligned} \quad (2.35)$$

где  $\zeta(2n)$  — функция, определенная в (2.2). Сравнивая (2.35) со степенным рядом (2.22) для котангенса, выраженным через числа Бернулли, находим

$$\zeta(2n) = \frac{(-1)^{n+1} B_{2n} (2\pi)^{2n}}{2(2n)!} \quad (2.36)$$

Таким образом,

$$1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \dots = \zeta(2) = \frac{B_2 \cdot 4\pi^2}{4} = \frac{\pi^2}{6}, \quad (2.37)$$

$$1 + \frac{1}{16} + \frac{1}{81} + \dots = \zeta(4) = -\frac{B_4 \cdot 16\pi^4}{48} = \frac{\pi^4}{90} \quad (2.38)$$

и т. д.

Закончим этот раздел обсуждением преобразования, которое полезно как для аналитического, так и для численного суммирования рядов. Положим, что

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n \quad (2.39)$$

ряд, сумма которого известна, и что необходимо просуммировать ряд

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n b_n z^n. \quad (2.40)$$

Исключим из (2.40)  $b_n$ :

$$\begin{aligned} f(z) &= c_0 b_0 + c_1 b_1 z + c_2 b_2 z^2 + c_3 b_3 z^3 + \dots = c_0 g(z) + \\ &+ (c_1 - c_0) b_1 z + (c_2 - c_0) b_2 z^2 + (c_3 - c_0) b_3 z^3 + \dots = c_0 g(z) + \\ &+ (c_1 - c_0) z g'(z) + (c_2 - 2c_1 + c_0) b_2 z^2 + \\ &+ (c_3 - 3c_1 + 2c_0) b_3 z^3 + \dots = c_0 g(z) + (c_1 - c_0) z g'(z) + \\ &+ (c_2 - 2c_1 + c_0) \frac{z^2 g''(z)}{2!} + (c_3 - 3c_2 + 3c_1 - c_0) \frac{z^3 g'''(z)}{3!} + \dots \end{aligned} \quad (2.41)$$

Последовательные коэффициенты представляют собой не что иное, как крайние разности в разностной таблице коэффициентов  $c_n$ :

$c_0$	$c_1 - c_0$	$c_2 - 2c_1 + c_0$	$c_3 - 3c_2 + 3c_1 - c_0$
$c_1$	$c_2 - c_1$	$c_3 - 2c_2 + c_1$	$\dots$
$c_2$	$c_3 - c_2$	$\dots$	$\dots$
$c_3$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$

Наиболее типичный пример такого преобразования — преобразование Эйлера. Положим

$$g(z) = \frac{1}{1+z} = 1 - z + z^2 - z^3 + \dots - \dots \quad (2.42)$$

Тогда

$$b_n = (-1)^n, \quad zg'(z) = \frac{-z}{(1+z)^2}, \quad \frac{z^2 g''(z)}{2!} = \frac{z^2}{(1+z)^3}$$

и т. д. Следовательно, если  $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n c_n z^n$ , то преобразование Эйлера показывает, что

$$f(z) = \frac{1}{1+z} \left[ c_0 - (c_1 - c_0) \left( \frac{z}{1+z} \right) + \right. \\ \left. + (c_2 - 2c_1 + c_0) \left( \frac{z}{1+z} \right)^2 - \dots + \dots \right]. \quad (2.43)$$

Рассмотрим, например, ряд

$$f(z) = 1 - \frac{1}{2}z + \frac{1}{3}z^2 - \frac{1}{4}z^3 + \dots - \dots \quad (2.44)$$

[Конечно, нам уже известно, что  $f(z) = \frac{1}{z} \ln(1+z)$ .] Это очень медленно сходящийся ряд; оказывается, что при  $|z| > 1$  он расходится. Из разностной таблицы

1				
	$-\frac{1}{2}$			
$\frac{1}{2}$		$\frac{1}{3}$		
	$-\frac{1}{6}$		$-\frac{1}{4}$	
$\frac{1}{3}$		$\frac{1}{12}$		$\frac{1}{5}$
	$-\frac{1}{12}$		$-\frac{1}{20}$	
$\frac{1}{4}$		$\frac{1}{30}$		
	$-\frac{1}{20}$			
$\frac{1}{5}$				

видим, что

$$f(z) = \frac{1}{1+z} \left[ 1 + \frac{1}{2} \left( \frac{z}{1+z} \right) + \frac{1}{3} \left( \frac{z}{1+z} \right)^2 + \dots \right]. \quad (2.45)$$

Для значений  $z$ , например, вблизи единицы этот новый ряд сходится значительно лучше. Оказывается, что он сходится для всех положительных  $z$ .

Это один из приемов, с помощью которых можно преобразовать один ряд в другой, более быстро сходящийся. В гл. 13 рассмотрена важная практическая задача — нахождение суммы ряда численными методами.

Г Л А В А 3  
ВЫЧИСЛЕНИЕ  
ИНТЕГРАЛОВ

3.1. ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ МЕТОДЫ

Рассмотрим некоторые полезные приемы вычисления интегралов. Стандартный прием при расчете интеграла

$$\int_0^{\infty} \exp(-t^2) dt = \frac{1}{2} \sqrt{\pi} \quad (3.1)$$

состоит в использовании полярных координат. Полагая  $t = u \sqrt{a}$ , находим

$$\int_0^{\infty} \exp(-at^2) dt = \frac{1}{2} \sqrt{\pi/a}. \quad (3.2)$$

Если же  $t = u^2$ , то

$$\int_0^{\infty} \exp(-t^4) t dt = \frac{1}{4} \sqrt{\pi}. \quad (3.3)$$

Вычислить  $\int_0^{\infty} \exp(-t^4) dt$  не так просто. Положим

$$I_{\alpha} = \int_0^{\infty} \exp(-t^{\alpha}) dt. \quad (3.4)$$

Заменяем переменную  $t^{\alpha} = u$ ,  $t = u^{1/\alpha}$ ,  $dt = \frac{1}{\alpha} u^{(1/\alpha)-1} du$ . Тогда

$$I_{\alpha} = \frac{1}{\alpha} \int_0^{\infty} \exp(-u) u^{(1/\alpha)-1} du.$$

Определим теперь гамма-функцию  $\Gamma(z)$

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} \exp(-u) u^{z-1} du, \quad (3.5)$$

так что

$$I_{\alpha} = \frac{1}{\alpha} \Gamma\left(\frac{1}{\alpha}\right). \quad (3.6)$$

Более подробно гамма-функция рассмотрена в разд. 3.4; отметим, что из (3.1) следует  $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$ .

Другой полезный прием состоит во введении комплексных переменных.

**Пример.**

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{\infty} \exp(-ax) \cos \lambda x dx = \\ &= \operatorname{Re} \int_0^{\infty} \exp(-ax) \exp(i\lambda x) dx = \operatorname{Re} \frac{1}{a - i\lambda}. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Следовательно,  $I = a/(a^2 + \lambda^2)$ . Кроме того, используя мнимую часть, с помощью этого метода можно вычислить другой интеграл:

$$\int_0^{\infty} \exp(-ax) \sin \lambda x dx = \lambda/(a^2 + \lambda^2). \quad (3.8)$$

Очень полезен метод интегрирования по частям; он, вероятно, хорошо известен читателю.

Следующий полезный прием состоит в дифференцировании или интегрировании по параметру.

**Пример.**

$$I = \int_0^{\infty} \exp(-ax) \cos \lambda x \cdot x dx. \quad (3.9)$$

Положим  $I(a) = \int_0^{\infty} \exp(-ax) \cos \lambda x dx = a/(a^2 + \lambda^2)$ . Тогда

$$I = -\frac{d}{da} I(a) = \frac{a^2 - \lambda^2}{(a^2 + \lambda^2)^2}.$$

Мы предполагали здесь, что операции дифференцирования и интегрирования можно переставлять местами. В физических приложениях это почти всегда имеет место.

**Пример.**

$$I = \int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx. \quad (3.10)$$

Положим  $I(\alpha) = \int_0^{\infty} \frac{\exp(-\alpha x) \sin x}{x} dx$ , так что  $I = I(0)$ .

$$\frac{dI(\alpha)}{d\alpha} = - \int_0^{\infty} \exp(-\alpha x) \sin x dx = \frac{-1}{\alpha^2 + 1},$$

$$I(\alpha) = - \int \frac{d\alpha}{\alpha^2 + 1} = C - \operatorname{arctg} \alpha.$$

Но  $I(\infty) = 0$ . Следовательно,  $C = \pi/2$ ;

$$I(\alpha) = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} \alpha \quad \text{и} \quad I = I(0) = \frac{\pi}{2}. \quad (3.11)$$

Иногда можно скомбинировать некоторые производные от интеграла и образовать дифференциальное уравнение.

**Пример.**

$$I(\alpha) = \int_0^{\infty} \frac{\exp(-\alpha x)}{1+x^2} dx, \quad (3.12)$$

$$I''(\alpha) + I(\alpha) = \int_0^{\infty} \exp(-\alpha x) dx = 1/\alpha.$$

Это уравнение легко решается методом вариации постоянных (см. разд. 1.1). В результате получаем

$$I(\alpha) = -\cos \alpha \int \frac{\sin t}{t} dt + \sin \alpha \int \frac{\cos t}{t} dt.$$

Но  $I(\alpha)$  и все ее производные обращаются в нуль при  $\alpha = \infty$ . Таким образом,

$$I(\alpha) = \sin \alpha \int_{\infty}^{\alpha} \frac{\cos t}{t} dt - \cos \alpha \int_{\infty}^{\alpha} \frac{\sin t}{t} dt.$$

Определим функции интегральный косинус и интегральный синус:

$$\text{Ci } x = \int_0^x \frac{\cos t}{t} dt; \quad \text{Si } x = \int_0^x \frac{\sin t}{t} dt. \quad (3.13)$$

Таким образом,  $I(\alpha) = \sin \alpha \cdot \text{Ci } \alpha + \cos \alpha (\pi/2 - \text{Si } \alpha)$ . Функции  $\text{Si } \alpha$  и  $\text{Ci } \alpha$  табулированы [1].

Наконец, полезные интегралы  $\int_0^{\infty} \exp(-ax^2) x^n dx$  ( $n = 0, 1, 2, \dots$ ) можно вычислить, зная первые два интеграла

$$\int_0^{\infty} \exp(-ax^2) dx = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{a}}; \quad \int_0^{\infty} \exp(-ax^2) x dx = \frac{1}{2a} \quad (3.14)$$

и дифференцируя их несколько раз.

Заметим, что если параметр подынтегрального выражения содержится также и в пределах интеграла, то дифференцирование выполняется по следующему правилу:

$$\begin{aligned} & \frac{d}{d\alpha} \left[ \int_{a(\alpha)}^{b(\alpha)} f(x, \alpha) dx \right] = \\ & = \int_{a(\alpha)}^{b(\alpha)} \frac{\partial f(x, \alpha)}{\partial \alpha} dx + \frac{db}{d\alpha} f(b(\alpha), \alpha) - \frac{da}{d\alpha} f(a(\alpha), \alpha). \end{aligned} \quad (3.15)$$

### 3.2. ВЫЧИСЛЕНИЕ ИНТЕГРАЛОВ С УЧЕТОМ СИММЕТРИИ

Вычисление некоторых интегралов можно значительно упростить, используя симметрии, существующие в задаче. Проиллюстрируем принципы расчета на нескольких интегралах по телесному углу.

**Пример.** Рассмотрим интеграл

$$I_1(\mathbf{k}) = \int \frac{d\Omega}{1 + \mathbf{k}\hat{\mathbf{r}}} = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{-1}^{+1} d(\cos \theta) \frac{1}{1 + \mathbf{k}\hat{\mathbf{r}}}, \quad (3.16)$$

где  $\hat{\mathbf{r}}$  — единичный радиус-вектор и  $(\theta, \varphi)$  — обычные сферические угловые координаты:  $\hat{\mathbf{r}}_x = \sin \theta \cos \varphi$ ,  $\hat{\mathbf{r}}_y = \sin \theta \sin \varphi$ ,  $\hat{\mathbf{r}}_z = \cos \theta$ . Так как ориентация системы

координат произвольна, то можно выбрать ось  $z$  вдоль  $\mathbf{k}$  и получить (предполагая  $k < 1$ )

$$I_1(\mathbf{k}) = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{-1}^{+1} \frac{d(\cos \theta)}{1+k \cos \theta} = \frac{2\pi}{k} \ln \frac{1+k}{1-k}. \quad (3.17)$$

Интегралы

$$I_m(\mathbf{k}) = \int d\Omega / (1 + k\hat{\mathbf{r}})^m \quad (3.18)$$

можно вычислить посредством дифференцирования  $I_1$  (для этого следует заменить в знаменателе 1 на  $\alpha$ , продифференцировать по  $\alpha$  и положить  $\alpha$  равным снова 1). Например,

$$I_2(\mathbf{k}) = \int d\Omega / (1 + k\hat{\mathbf{r}})^2 = 4\pi / (1 - k^2). \quad (3.19)$$

Другой пример:

$$I_1(\mathbf{k}, \mathbf{a}) = \int \mathbf{a}\hat{\mathbf{r}} d\Omega / (1 + k\hat{\mathbf{r}}). \quad (3.20)$$

Этот интеграл сложнее по той причине, что два вектора  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{k}$  задают два направления, и поэтому нельзя выбрать полярную ось вдоль обоих направлений. Однако направление  $\mathbf{a}$  тривиально в том смысле, что его можно «выделить». Рассмотрим интеграл

$$\mathbf{J}(\mathbf{k}) = \int \hat{\mathbf{r}} d\Omega / (1 + k\hat{\mathbf{r}}). \quad (3.21)$$

Ясно, что  $I_1(\mathbf{k}, \mathbf{a}) = \mathbf{a}\mathbf{J}$ .

Вектор  $\mathbf{J}(\mathbf{k})$  должен быть направлен вдоль  $\mathbf{k}$ , так как нет другого выделенного направления. Следовательно,

$$\mathbf{J}(\mathbf{k}) = A\mathbf{k}. \quad (3.22)$$

Чтобы вычислить скаляр  $A$ , умножим на  $\mathbf{k}$  обе части (3.22). Получаем

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{k^2} \mathbf{k}\mathbf{J}(\mathbf{k}) = \frac{1}{k^2} \int \frac{\mathbf{k}\hat{\mathbf{r}}}{1+k\hat{\mathbf{r}}} d\Omega = \\ &= \frac{1}{k^2} \int d\Omega \left( 1 - \frac{1}{1+k\hat{\mathbf{r}}} \right) = \frac{4\pi}{k^2} \left( 1 - \frac{1}{2k} \ln \frac{1+k}{1-k} \right). \end{aligned}$$

Таким образом,

$$I_1(\mathbf{k}, \mathbf{a}) = A\mathbf{a}\mathbf{k} = \frac{4\pi}{k^2} \mathbf{a}\mathbf{k} \left[ 1 - \frac{1}{2k} \ln \frac{1+k}{1-k} \right]. \quad (3.23)$$

**Пример.** Чтобы вычислить интеграл

$$I_2(\mathbf{k}, \mathbf{a}) = \int \hat{\mathbf{a}} \hat{\mathbf{r}} d\Omega / (1 + \mathbf{k}\hat{\mathbf{r}})^2,$$

заменяем в интеграле  $I_1(\mathbf{k}, \mathbf{a})$  1 на  $\alpha$  и продифференцируем, как это делалось выше. Более простой метод состоит в дифференцировании  $I_1(\mathbf{k})$  по  $\mathbf{k}$ . С одной стороны,

$$\frac{\partial I_1(\mathbf{k})}{\partial \mathbf{k}} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{k}} \int \frac{d\Omega}{1 + \mathbf{k}\hat{\mathbf{r}}} = - \int \frac{d\Omega \hat{\mathbf{r}}}{(1 + \mathbf{k}\hat{\mathbf{r}})^2}. \quad (3.24)$$

С другой стороны, используя (3.17), имеем

$$\frac{\partial I_1(\mathbf{k})}{\partial \mathbf{k}} = \frac{\mathbf{k}}{k} \cdot \frac{\partial I_1(\mathbf{k})}{\partial k} = \frac{2\pi \mathbf{k}}{k^2} \left( \frac{2}{1 - k^2} - \frac{1}{k} \ln \frac{1+k}{1-k} \right). \quad (3.25)$$

Сравнивая (3.24) и (3.25), находим

$$\int \frac{d\Omega \hat{\mathbf{r}}}{(1 + \mathbf{k}\hat{\mathbf{r}})^2} = \frac{2\pi \mathbf{k}}{k^2} \left( -\frac{2}{1 - k^2} + \frac{1}{k} \ln \frac{1+k}{1-k} \right)$$

и, следовательно,

$$\int \frac{\hat{\mathbf{a}} \hat{\mathbf{r}} d\Omega}{(1 + \mathbf{k}\hat{\mathbf{r}})^2} = \mathbf{a} \int \frac{\hat{\mathbf{r}} d\Omega}{(1 + \mathbf{k}\hat{\mathbf{r}})^2} = \frac{2\pi \mathbf{k} \mathbf{a}}{k^2} \left( -\frac{2}{1 - k^2} + \frac{1}{k} \ln \frac{1+k}{1-k} \right). \quad (3.26)$$

Другие примеры использования соображений симметрии — вычисление таких интегралов, как

$$\left. \begin{aligned} \Phi_1(\mathbf{a}, \mathbf{b}) &= \int d\Omega (\hat{\mathbf{r}}\mathbf{a}) (\hat{\mathbf{r}}\mathbf{b}), \\ \Phi_2(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}) &= \int d\Omega (\hat{\mathbf{r}}\mathbf{a}) (\hat{\mathbf{r}}\mathbf{b}) (\hat{\mathbf{r}}\mathbf{c}) (\hat{\mathbf{r}}\mathbf{d}), \\ &\dots \dots \dots \end{aligned} \right\} \quad (3.27)$$

Чтобы вычислить  $\Phi_1$ , заметим, что эта величина есть скаляр, линейный по  $\mathbf{a}$  и по  $\mathbf{b}$ . Единственная возможность такова, что  $\Phi_1 = A(\mathbf{a}\mathbf{b})$ , где  $A$  — число. Чтобы найти  $A$ , положим  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$  равными  $\hat{\mathbf{z}}$ . Тогда

$$\Phi_1(\hat{\mathbf{z}}, \hat{\mathbf{z}}) = A = \int d\Omega (\hat{\mathbf{r}}\hat{\mathbf{z}})^2 = \int d\Omega \cos^2 \theta = 4\pi/3.$$

Следовательно,  $\Phi_1(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = (4\pi/3)(\mathbf{a}\mathbf{b})$ .

Расчет  $\Phi_2$  выполняется аналогично. Так как  $\Phi_2$  — скаляр, линейный по четырём векторам  $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}$  и инвариантный к любой перестановке этих векторов, то он должен иметь вид

$$\Phi_2 = B [(\mathbf{a}\mathbf{b})(\mathbf{c}\mathbf{d}) + (\mathbf{a}\mathbf{c})(\mathbf{b}\mathbf{d}) + (\mathbf{a}\mathbf{d})(\mathbf{b}\mathbf{c})],$$

где  $B$  — число;  $B$  находится, если положить  $\mathbf{a} = \mathbf{b} = \mathbf{c} = \mathbf{d} = \hat{\mathbf{z}}$ , так что

$$\Phi_2(\hat{\mathbf{z}}, \hat{\mathbf{z}}, \hat{\mathbf{z}}, \hat{\mathbf{z}}) = 3B = \int d\Omega (\hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{z}})^4 = \int d\Omega \cos^4 \theta = 4\pi/5.$$

Следовательно,  $B = 4\pi/15$  и

$$\Phi_2(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}) = \frac{4\pi}{15} [(\mathbf{ab})(\mathbf{cd}) + (\mathbf{ac})(\mathbf{bd}) + (\mathbf{ad})(\mathbf{bc})].$$

В заключение упомянем еще тождество

$$\frac{1}{ab} = \int_0^1 \frac{du}{[au + b(1-u)]^2}, \quad (3.28)$$

которое было использовано Фейнманом для упрощения вычисления интегралов, возникающих в квантовой теории поля. В качестве примера применения (3.28) вычислим интеграл

$$\psi(\mathbf{k}, \mathbf{l}) = \int \frac{d\Omega}{(1 + \mathbf{k}\hat{\mathbf{r}})(1 + \mathbf{l}\hat{\mathbf{r}})}. \quad (3.29)$$

Используя (3.28), преобразуем (3.29) к следующему виду:

$$\psi(\mathbf{k}, \mathbf{l}) = \int_0^1 du \int \frac{d\Omega}{\{1 + \hat{\mathbf{r}}[\mathbf{k}u + \mathbf{l}(1-u)]\}^2}. \quad (3.30)$$

В (3.30) интеграл по телесному углу в точности равен  $I_2[\mathbf{k}u + \mathbf{l}(1-u)]$ , причем  $I_2$  находится из (3.19). Таким образом,

$$\psi(\mathbf{k}, \mathbf{l}) = 4\pi \int_0^1 \frac{du}{1 - [\mathbf{k}u + \mathbf{l}(1-u)]^2}.$$

Это элементарный интеграл, хотя и весьма громоздкий. Ответ имеет интересную форму

$$\psi(\mathbf{k}, \mathbf{l}) = \frac{4\pi}{\sqrt{A^2 - B^2}} \operatorname{arch} \frac{A}{B}, \quad (3.31)$$

где  $A = 1 - \mathbf{k}\mathbf{l}$ ,  $B = \sqrt{(1 - k^2)(1 - l^2)}$ .

### 3.3. ИНТЕГРИРОВАНИЕ ПО КОНТУРУ

Одно из наиболее мощных средств расчета определенных интегралов вытекает из теоремы о вычетах в теории функций комплексного переменного. В этом разделе мы

проиллюстрируем метод контурного интегрирования на нескольких примерах. Перед изучением этого материала читателю, который не знаком с теорией функций комплексного переменного, рекомендуется посмотреть (или изучить) определенные разделы этой теории.

Теорема о вычетах утверждает, что если функция  $f(z)$  аналитична в области, ограниченной замкнутым контуром  $C$ , за исключением конечного числа полюсов и изолированных существенно особых точек внутри  $C$ , то интеграл  $f(z)$  вдоль контура  $C$  равен  $\int_C f(z) dz = 2\pi i \Sigma$ , где  $\Sigma$  — сумма вычетов по всем полюсам и существенным особенностям внутри  $C$ .

Вычеты в полюсах и изолированных существенно особых точках можно находить следующим способом. Если  $f(z)$  имеет простой полюс (полюс первого порядка) при  $z = z_0$ , то вычет равен

$$a_{-1} = [(z - z_0) f(z)]_{z=z_0}. \quad (3.32)$$

Если  $f(z)$  записать в виде  $f(z) = q(z)/p(z)$ , причем  $q(z)$  регулярна, а  $p(z)$  имеет простой полюс в  $z_0$ , то вычет  $f(z)$  в  $z_0$  можно вычислить по формуле

$$a_{-1} = \frac{q}{p'} \Big|_{z=z_0}. \quad (3.33)$$

Если  $z_0$  — полюс  $n$ -го порядка, то вычет

$$a_{-1} = \frac{1}{(n-1)!} \left\{ \left( \frac{d}{dz} \right)^{n-1} [(z - z_0)^n f(z)] \right\}_{z=z_0}. \quad (3.34)$$

Если  $z_0$  — изолированная существенно особая точка, то вычет находится с помощью разложения в ряд Лорана.

Проиллюстрируем на нескольких примерах метод контурного интегрирования.

**Пример.**

$$I = \int_0^{\infty} dx/(1+x^2). \quad (3.35)$$

Рассмотрим  $\oint dz/(1+z^2)$  вдоль контура, изображенного на рис. 3.1. Вдоль вещественной оси интеграл равен  $2I$ . Вдоль большого полукруга в верхней полуплоскости он

стремится к нулю, так как

$$z = R \exp(i\theta), \quad dz = iR \exp(i\theta) d\theta, \quad \frac{1}{1+z^2} \approx \frac{\exp(-2i\theta)}{R^2};$$

$$\int \frac{dz}{1+z^2} \approx \frac{i}{R} \int \exp(-i\theta) d\theta \rightarrow 0, \quad \text{когда } R \rightarrow \infty.$$

Вычет функции  $1/(1+z^2) = 1/(z+i)(z-i)$  в  $z=i$  равен  $1/2i$ . Таким образом,  $2I = 2\pi i (1/2i) = \pi$ ,  $I = \pi/2$ . Отметим, что важная часть задачи состоит в выборе такого «обратного» пути, вдоль которого вклад легко считается (предпочтительно, чтобы он равнялся нулю).

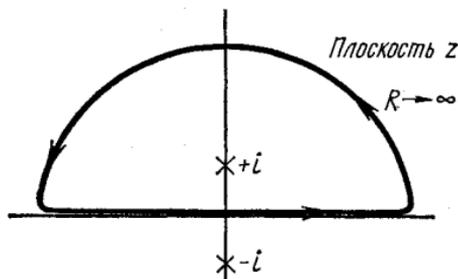


Рис. 3.1. Контур для интеграла (3.35).

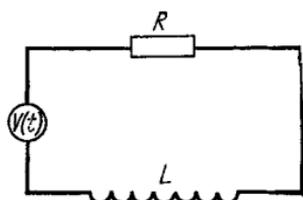


Рис. 3.2. Последовательная  $RL$ -цепь.

**Пример.** Рассмотрим последовательно соединенные сопротивление  $R$  и индуктивность  $L$  (рис. 3.2). Предположим, что  $V(t)$  — импульс напряжения, т. е. очень большой импульс, действующий очень короткое время. Как мы увидим в гл. 4, с хорошей точностью можно написать

$$V(t) = (A/2\pi) \int_{-\infty}^{\infty} \exp(i\omega t) d\omega,$$

где  $A$  — область под кривой  $V(t)$ . Ток, созданный напряжением  $\exp(i\omega t)$ , равен  $\exp(i\omega t)/(R+i\omega L)$ . Таким образом, ток, возникающий вследствие импульса напряжения, равен

$$I(t) = \frac{A}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp(i\omega t) d\omega}{R+i\omega L}. \quad (3.36)$$

Вычислим этот интеграл.

Если  $t < 0$ , подынтегральное выражение экспоненциально мало при  $\text{Im } \omega \rightarrow -\infty$ , так что можно замкнуть

онтур большим полукругом в нижней полуплоскости  $\omega$ ,  
 вдоль которого интеграл стремится к нулю (справедли-  
 ость этой процедуры обеспечивается леммой Жордана).  
 контур не содержит никаких особенностей, так что  $I(t) =$   
 $= 0$ .

Если  $t > 0$ , то контур следует замыкать большим  
 полукругом в верхней полуплоскости. Тогда

$$I(t) = 2\pi i \left( \frac{A}{2\pi} \right) \frac{\exp(-Rt/L)}{iL} = \frac{A}{L} \exp(-Rt/L).$$

**Пример.**

$$I = \int_0^{\infty} dx/(1+x^3). \quad (3.37)$$

Подынтегральное выражение не является четным, так  
 что нельзя распространить пределы до  $-\infty$ . Рассмотрим

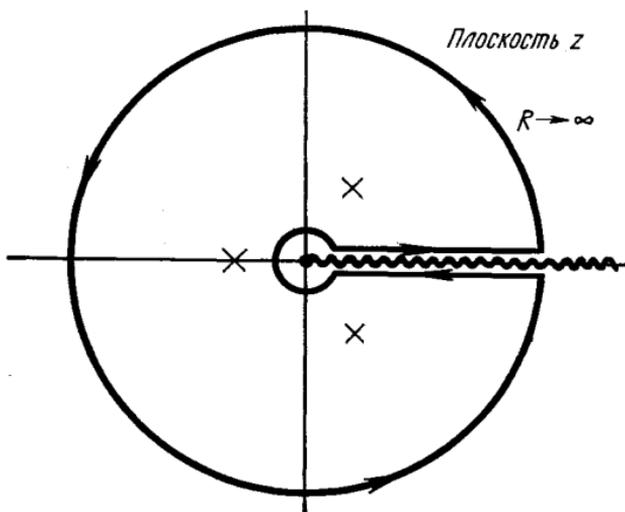


Рис. 3.3. Контур для интеграла (3.37).

интеграл  $\int \ln z dz/(1+z^3)$ . Подынтегральное выражение  
 многозначно; можно разрезать плоскость, как показано  
 на рис. 3.3, и определить  $\ln^2 z$  вещественным ( $\ln z = \ln x$ )  
 выше разреза. Тогда снизу от разреза  $\ln z = \ln x + 2\pi i$   
 и интегрирование вдоль указанного контура дает  
 $\oint \ln z dz/(1+z^3) = -2\pi i I$ . С другой стороны, используя

метод вычетов, находим

$$\oint \frac{\ln z dz}{1+z^3} = -\frac{4\pi^2 i \sqrt{3}}{9}.$$

Таким образом,  $I = (2\pi \sqrt{3})/9$ .

При интегрировании вокруг точки ветвления (как в этом примере) необходимо показать, что интеграл по бесконечно малому кругу вокруг точки ветвления равен

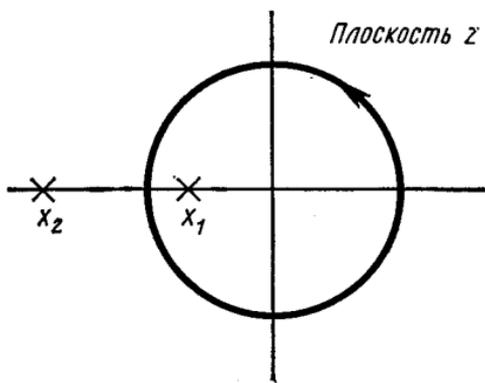


Рис. 3.4. Контур для интеграла (3.38).

нулю. В рассмотренном примере такой интеграл ведет себя как  $r \ln r$  и при  $r \rightarrow 0$  стремится к нулю.

**Пример.**

$$I = \int_0^{\pi} d\theta / (a + b \cos \theta), \quad [a] > b > 0. \quad (3.38)$$

Подынтегральное выражение четно, так что  $2I = \int_0^{2\pi} d\theta / (a + b \cos \theta)$ . Если интегрировать вдоль единичного круга, показанного на рис. 3.4, с  $z = \exp(i\theta)$ ,  $dz = i \exp(i\theta) d\theta$ ,

$$\cos \theta = \frac{\exp(i\theta) + \exp(-i\theta)}{2} = \frac{1}{2} \left( z + \frac{1}{z} \right), \quad (3.39)$$

то тогда

$$2I = \int_C \frac{dz/iz}{a + (b/2) [z + (1/z)]} = \frac{2}{i} \int_C \frac{dz}{bz^2 + 2az + b}.$$

Подынтегральное выражение имеет два полюса. Произведение корней равно единице; один из них — внутри, а другой — снаружи единичного круга. Полюса находятся в точках  $x_{1,2} = -\frac{a}{b} \pm \sqrt{\frac{a^2}{b^2} - 1}$ . Тогда

$$2I = \frac{2}{i} 2\pi i \left( \text{вычет в } x_1 = -\frac{a}{b} + \sqrt{\frac{a^2}{b^2} - 1} \right);$$

$$I = 2\pi \left( \frac{1}{2bx_1 + 2a} \right) = \frac{\pi}{\sqrt{a^2 - b^2}}.$$

**Пример.**

$$I = \int_0^{\infty} \sqrt{x} dx / (1 + x^2). \quad (3.40)$$

Рассмотрим интеграл  $\oint \sqrt{z} dz / (1 + z^2)$  вдоль контура на рис. 3.5. Выберем  $\sqrt{z}$  положительным на верхней

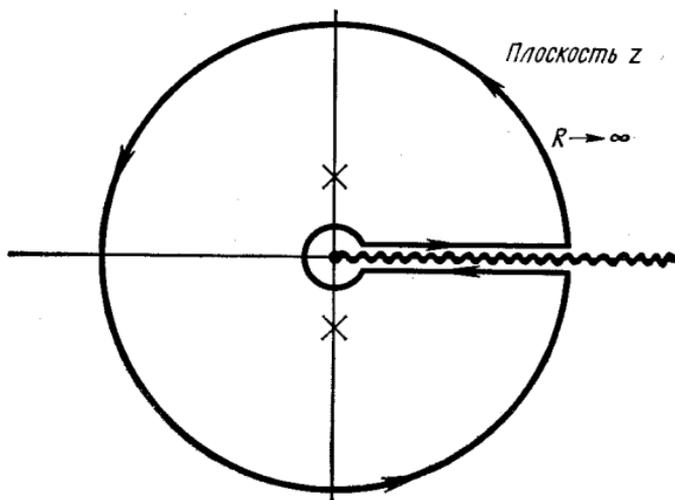


Рис. 3.5. Контур для интеграла (3.40).

части разреза. Тогда  $\oint \sqrt{z} dz / (1 + z^2) = 2I$ . С другой стороны, используя теорию вычетов, получаем  $\oint \sqrt{z} dz / (1 + z^2) = \pi \sqrt{2}$ . Следовательно,  $I = \pi / \sqrt{2}$ .

**Пример.**

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp(ax)}{\exp(x) + 1} dx \quad (0 < a < 1). \quad (3.41)$$

Целесообразно рассмотреть интеграл  $\int \frac{\exp(az) dz}{\exp(z)+1}$  вдоль некоторого контура. Один путь указан на рис. 3.6; он

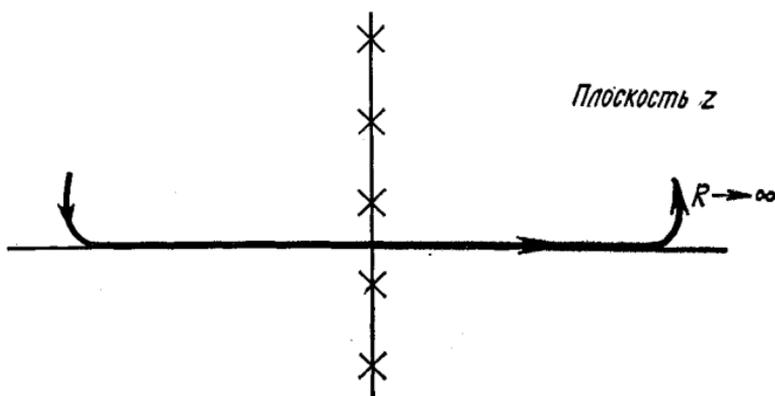


Рис. 3.6. Возможный контур для интеграла (3.41).

включает знакомый большой полукруг. Заметим, что к величине  $a$  следует добавить определенную мнимую часть, чтобы интеграл вдоль полукруга обращался в нуль. Тогда

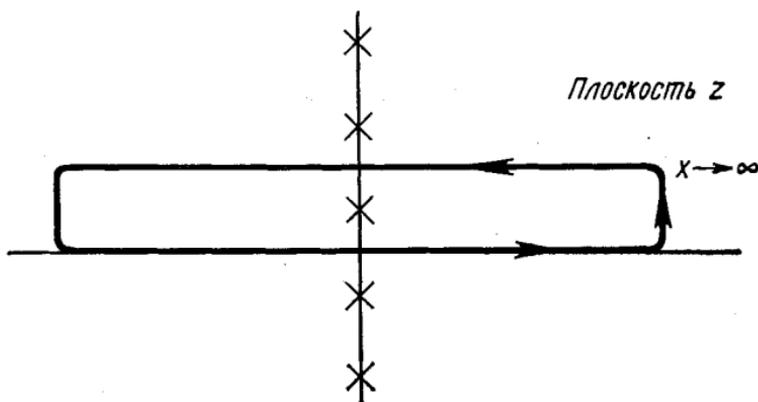


Рис. 3.7. Другой контур для интеграла (3.41).

$I = 2\pi i \Sigma$ . Здесь бесконечное число полюсов. При  $z = i\pi$  вычет равен  $-\exp(i\pi a)$ , при  $z = 3i\pi$  вычет равен  $-\exp(3i\pi a)$  и т. д. Таким образом,

$$I = -2\pi i \frac{\exp(i\pi a)}{1 - \exp(2i\pi a)} = \frac{\pi}{\sin \pi a}.$$

Теперь можно положить  $\text{Im } a \rightarrow 0$ .

Другой способ состоит в том, чтобы использовать контур, показанный на рис. 3.7. Вдоль вещественной оси мы получаем  $I$ . Вдоль  $\text{Im } z = 2\pi i$  находим

$$-\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp(a(x+2\pi i))}{\exp(x+2\pi i)+1} dx = -\exp(2\pi ia) I.$$

Итак,  $[1 - \exp(2\pi ia)] I = 2\pi i \times (\text{вычет в } z = \pi i) = -2\pi i \exp(i\pi a)$ . Как и выше, находим  $I = \pi / \sin \pi a$ .

**Пример.**

$$I = \int_{-1}^{+1} dx / \sqrt{1-x^2} (1+x^2). \quad (3.42)$$

Рассмотрим интеграл  $\oint \frac{dz}{\sqrt{1-z^2} (1+z^2)}$  вдоль контура, изображенного на рис. 3.8. На верхнем берегу разреза по-

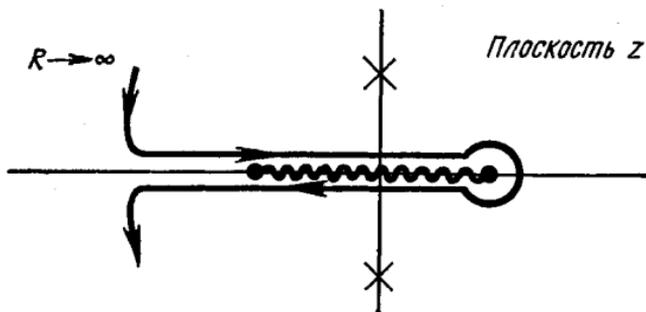


Рис. 3.8. Контур для интеграла (3.42).

лучаем  $I$ , а на нижнем берегу к нему добавляется еще  $I$ . Следовательно,  $2I = 2\pi i \left( \frac{1}{2i\sqrt{2}} + \frac{1}{2i\sqrt{2}} \right) = \pi\sqrt{2}$ ,  $I = \pi/\sqrt{2}$ .

#### 3.4. ТАБУЛИРОВАННЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

Еще раз исследуем гамма-функцию, определенную для  $\text{Re } z > 0$  с помощью интеграла

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} x^{z-1} \exp(-x) dx. \quad (3.43)$$

Интегрирование по частям дает

$$\Gamma(z) = (z-1)\Gamma(z-1), \quad \operatorname{Re} z > 1. \quad (3.44)$$

Таким образом, из  $\Gamma(1) = 1$  получаем

$$\begin{aligned} \Gamma(2) = 1, \quad \Gamma(3) = 2, \quad \Gamma(4) = 6, \quad \dots, \quad \Gamma(n) = \\ = (n-1)!. \end{aligned} \quad (3.45)$$

Гамма-функцию можно аналитически продолжить на всю комплексную плоскость с помощью рекуррентного соотношения (3.44), за исключением простых полюсов в точках  $z = 0, -1, -2, \dots$

Интересный интеграл, связанный с гамма-функцией, встречается при рассмотрении

$$\Gamma(r)\Gamma(s) = \int_0^{\infty} x^{r-1} \exp(-x) dx \int_0^{\infty} y^{s-1} \exp(-y) dy.$$

Положим  $x + y = u$ ,  $x = ut$ ,

$$\begin{aligned} \Gamma(r)\Gamma(s) &= \int_0^{\infty} du \int_0^u dx \cdot x^{r-1} (u-x)^{s-1} \exp(-u) = \\ &= \int_0^{\infty} \exp(-u) u^{r+s-1} du \int_0^1 dt \cdot t^{r-1} (1-t)^{s-1} = \Gamma(r+s) B(r, s), \end{aligned}$$

где  $B(r, s)$  — бета-функция,

$$B(r, s) = \frac{\Gamma(r)\Gamma(s)}{\Gamma(r+s)} = \int_0^1 x^{r-1} (1-x)^{s-1} dx. \quad (3.46)$$

Очевидно, что интегральное представление для  $B(r, s)$  верно только при  $\operatorname{Re} r > 0$ ,  $\operatorname{Re} s > 0$ .

Интересный случай этого соотношения имеет вид

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \Gamma(1)B(z, 1-z) = \int_0^1 x^{z-1} (1-x)^{-z} dx.$$

Положим  $x = t/(1+t)$ . Тогда

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \int_0^{\infty} t^{z-1} dt/(1+t).$$

Этот интеграл можно вычислить, используя контур на рис. 3.9. Результат равен

$$\Gamma(z) \Gamma(1-z) = \pi / \sin \pi z. \quad (3.47)$$

Такой расчет справедлив только для  $0 < \operatorname{Re} z < 1$ , однако обе части равенства (3.47) являются аналитическими функциями  $z$  (кроме  $z = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ), так что можно распространить результат на всю плоскость.

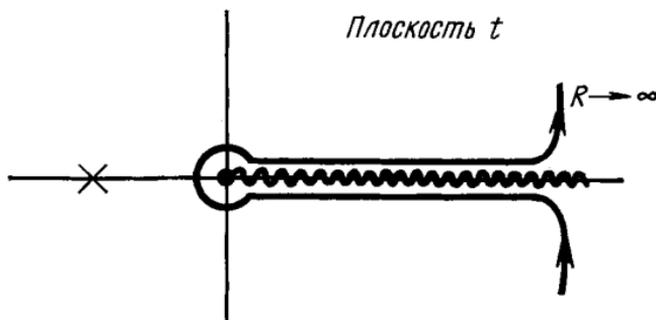


Рис. 3.9. Контур для интеграла  $\int_0^{\infty} [tz^{-1} dt / (1+t)]$ .

Другой интеграл — так называемая интегральная показательная функция

$$Ei(x) = \int_{-\infty}^x \exp(t) dt/t. \quad (3.48)$$

Это определение обычно сопровождается разрезом плоскости  $x$  вдоль положительной вещественной оси. Таким образом,  $Ei(x)$  однозначно определена для отрицательных вещественных  $x$ ; для положительных  $x$  следует различать  $Ei(x + i\epsilon)$  и  $Ei(x - i\epsilon)$ .

Две функции, связанные с  $Ei(x)$ , — это интегральные синус и косинус:

$$Si x = \int_0^x \sin t dt/t; \quad (3.49)$$

$$Ci x = \int_0^x \cos t dt/t. \quad (3.50)$$

Интеграл вероятности ошибок определяется следующим образом:

$$\operatorname{erf} x = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x \exp(-t^2) dt. \quad (3.51)$$

Связанные с ним тригонометрические интегралы известны как интегралы Френеля

$$C(x) = \int_0^x \cos(\pi t^2/2) dt, \quad S(x) = \int_0^x \sin(\pi t^2/2) dt. \quad (3.52)$$

Другой табулированный класс интегралов — эллиптические интегралы. Они представляют собой интегралы вида

$$\int dx \frac{A(x) + B(x) \sqrt{S(x)}}{C(x) + D(x) \sqrt{S(x)}}, \quad (3.53)$$

где  $A, B, C, D$  — полиномы, а  $S$  — полином третьей или четвертой степени (конечно, не точный квадрат!).

Не будем углубляться в теорию; сделаем лишь ряд замечаний, большинство которых читатель может проверить самостоятельно. В первую очередь

$$\frac{A + B \sqrt{S}}{C + D \sqrt{S}} = E + \frac{F}{\sqrt{S}}, \quad (3.54)$$

где  $E$  и  $F$  — рациональные функции (отношения полиномов). Разлагая  $F$  на множители, мы видим, что единственные неэлементарные интегралы, которые требуется вычислить, это

$$J_n = \int \frac{x^n dx}{\sqrt{S}}; \quad H_n = \int \frac{dx}{(x-c)^n \sqrt{S}}. \quad (3.55)$$

Все интегралы  $J_n$  можно вычислить, зная  $J_0, J_1$  и  $J_2$ , а все интегралы  $H_n$  — зная  $H_1, J_0, J_1$  и  $J_2$ . Следовательно, требуется вычислить лишь интегралы

$$J_0 = \int \frac{dx}{\sqrt{S}}; \quad J_1 = \int \frac{x dx}{\sqrt{S}}; \quad J_2 = \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{S}}; \quad H_1 = \int \frac{dx}{(x-c) \sqrt{S}}. \quad (3.56)$$

Из многих стандартных форм для  $S$  рассмотрим только форму Лежандра:  $S = (1-x^2)(1-k^2x^2)$ . Тогда

$$J_0 = \int dx / \sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}.$$

## Интеграл

$$F = \int_0^x dx / \sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)} \quad (3.57)$$

называется неполным эллиптическим интегралом первого рода в форме Лежандра. Обычно полагают  $x = \sin \phi$  и определяют

$$F(\phi, k) = \int_0^\phi d\phi' / \sqrt{1-k^2 \sin^2 \phi'}. \quad (3.58)$$

Если заменить  $x^2 = u$ , то  $J_1$  становится «элементарным» интегралом.

Вместо  $J_2^*$  в качестве стандартного интеграла используют неполный эллиптический интеграл второго рода в форме Лежандра:

$$E = \int_0^x \frac{\sqrt{1-k^2x^2} dx}{\sqrt{1-x^2}}. \quad (3.59)$$

Снова полагают  $x = \sin \phi$  и табулируют

$$E(\phi, k) = \int_0^\phi \sqrt{1-k^2 \sin^2 \phi'} d\phi'. \quad (3.60)$$

Интеграл  $H_1$  вычислить труднее. Определяют неполный эллиптический интеграл третьего рода в форме Лежандра

$$\Pi(\phi, n, k) = \int_0^\phi \frac{dx}{(1+nx^2) \sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} = \quad (3.61)$$

$$= \int_0^\phi \frac{d\phi'}{(1+n \sin^2 \phi') \sqrt{1-k^2 \sin^2 \phi'}}. \quad (3.62)$$

При  $\phi = \pi/2$  имеем полные эллиптические интегралы:

$$K(k) = F\left(\frac{\pi}{2}, k\right) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\phi}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \phi}}; \quad (3.63)$$

$$E(k) = E\left(\frac{\pi}{2}, k\right) = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1-k^2 \sin^2 \phi} d\phi; \quad (3.64)$$

$$\Pi(n, k) = \Pi\left(\frac{\pi}{2}, n, k\right) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\phi}{(1+n^2 \sin^2 \phi) \sqrt{1-k^2 \sin^2 \phi}}. \quad (3.65)$$

Среди многочисленных применений эллиптических интегралов отметим следующее: 1) движение простого маятника; 2) расчет индуктивности катушки; 3) расчет длин конических сечений; 4) вычисление телесных углов кругов, рассматриваемых под углом.

Большое число интегралов выражаются табулированными функциями; тогда очень полезны их интегральные представления. Например,

$$\int_0^1 \frac{\cos tx \, dt}{\sqrt{1-t^2}} = \frac{\pi}{2} J_0(x); \quad (3.66)$$

$$\int_0^\theta \frac{\cos \left( n + \frac{1}{2} \right) \phi}{\sqrt{\cos \phi - \cos \theta}} d\phi = \frac{\pi}{\sqrt{2}} P_n(\cos \theta), \quad (3.67)$$

где  $J_0(x)$  — удобным образом нормированное решение уравнения Бесселя для  $m = 0$ , известное под названием функции Бесселя;  $P_n$  — полином Лежандра. Более подробно такие интегральные представления «специальных» функций рассмотрены в гл. 7.

### 3.5. ПРИБЛИЖЕННЫЕ РАЗЛОЖЕНИЯ

Часто можно получить полезное выражение для данного интеграла посредством разложения подынтегрального выражения в ряды различного типа.

**Пример.**

$$\begin{aligned} \operatorname{erf} x &= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x \exp(-t^2) dt = \\ &= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x \left( 1 - t^2 + \frac{t^4}{2!} - \frac{t^6}{3!} + \dots - \dots \right) dt = \\ &= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left( x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5 \cdot 2!} - \frac{x^7}{7 \cdot 3!} + \dots - \dots \right). \end{aligned} \quad (3.68)$$

Этот ряд сходится для всех  $x$ , однако он полезен только при малых  $x$  ( $x \ll 1$ ).

Часто целесообразно интегрирование по частям.

**Пример.** Предположим, нужно вычислить  $\operatorname{erf} x$  для больших  $x$ . Когда  $x \rightarrow \infty$ ,  $\operatorname{erf} x \rightarrow 1$ . Выясним, насколько

эта функция отличается от единицы:

$$1 - \operatorname{erf} x = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_x^{\infty} \exp(-t^2) dt.$$

Выполним несколько раз интегрирование по частям:

$$\begin{aligned} \int_x^{\infty} \exp(-t^2) dt &= \frac{\exp(-x^2)}{2x} - \int_x^{\infty} \frac{\exp(-t^2) dt}{2t^2} = \\ &= \frac{\exp(-x^2)}{2x} - \frac{\exp(-x^2)}{4x^3} + \int_x^{\infty} \frac{3}{4} \frac{\exp(-t^2)}{t^4} dt \end{aligned}$$

и т. д. После  $n$  интегрирований по частям находим ( $n > 1$ )

$$\begin{aligned} \operatorname{erf} x &= 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \exp(-x^2) \left[ \frac{1}{2x} - \frac{1}{2^2 x^3} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1 \cdot 3}{2^3 x^5} - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2^4 x^7} + \dots - \dots \right. \\ &\quad \left. \dots + (-1)^{n-1} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-3)}{2^n x^{2n-1}} \right] + \\ &+ (-1)^n \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1)}{2^n} \cdot \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} \frac{\exp(-t^2) dt}{t^{2n}}. \end{aligned} \quad (3.69)$$

Члены в скобках приводят к бесконечному расходящемуся ряду. Ряд не сходится ни для каких  $x$ , так как его члены, начиная с некоторого, растут с ростом  $n$ . Тем не менее выражение с конечным числом членов очень полезно при больших  $x$ .

Выражение (3.69) будет точным, если включить «остаток», т. е. последний член, содержащий интеграл. «Остаток» меняет знак с ростом  $n$ . Это означает, что при учете  $n$  членов ряда ошибка по величине меньше, чем следующий член. Таким образом, точность приближенного выражения в скобках максимальна, если ограничиться суммированием до члена, предшествующего наименьшему.

Выражение в скобках в формуле (3.69) представляет собой пример асимптотического ряда. Точное определение такого ряда (Пуанкаре)

$$S(z) = c_0 + \frac{c_1}{z} + \frac{c_2}{z^2} + \dots + \frac{c_n}{z^n} + \dots \quad (3.70)$$

есть разложение  $f(z)$  в асимптотический ряд  $[f(z) \sim S(z)]$ , где  $\sim$  означает «асимптотически равно»; для любого  $n$  ошибка при обрыве ряда на члене  $c_n z^{-n}$  стремится к нулю быстрее, чем  $z^{-n}$ , когда  $|z| \rightarrow \infty$  в некотором интервале  $\arg z$ . Таким образом,

$$\lim_{|z| \rightarrow \infty} z^n [f(z) - S_n(z)] = 0 \quad (3.71)$$

для  $\arg z$  в данном интервале. [Сходящийся ряд стремится к  $f(z)$ , когда  $n \rightarrow \infty$  при фиксированном  $z$ , в то время как асимптотический ряд стремится к  $f(z)$ , когда  $z \rightarrow \infty$  при фиксированном  $n$ .]

Из этого определения легко показать, что асимптотические ряды можно складывать, перемножать и интегрировать для нахождения асимптотических рядов суммы, произведения и интеграла от соответствующих функций. Кроме того, асимптотическое разложение данной функции  $f(z)$  однозначно, однако асимптотический ряд не определяет однозначно функцию  $f(z)$ .

Мы не доказывали, что ряд в формуле (3.69) был асимптотическим рядом, но это нетрудно сделать.

**Пример.**

$$\text{Ei}(-x) = \int_{-\infty}^{-x} \exp(t) dt/t = \int_{\infty}^x \exp(-t) dt/t \quad (x > 0);$$

$$\begin{aligned} \text{Ei}(-x) &= -\exp(-x)/x - \int_{\infty}^x \exp(-t) dt/t^2 = \\ &= -\exp(-x)/x + \exp(-x)/x^2 + 2 \int_{\infty}^x \exp(-t) dt/t^3. \end{aligned}$$

Продолжая тем же способом, находим

$$\begin{aligned} -\text{Ei}(-x) &= \frac{\exp(-x)}{x} \left[ 1 - \frac{1}{x} + \frac{2!}{x^2} - \frac{3!}{x^3} + \dots - \dots \right. \\ &\quad \left. \dots + \frac{(-1)^n n!}{x^n} \right] + (-1)^n (n+1)! \int_{\infty}^x \frac{\exp(-t) dt}{t^{n+2}}. \quad (3.72) \end{aligned}$$

Можно использовать этот результат а) как асимптотический ряд для  $\text{Ei}(-x)$ :

$$-\text{Ei}(-x) \sim \frac{\exp(-x)}{x} \left( 1 - \frac{1}{x} + \frac{2!}{x^2} - \frac{3!}{x^3} + \dots - \dots \right); \quad (3.73)$$

б) как точное выражение для расчета некоторых интегралов [предполагая наличие таблицы  $Ei(x)$ ]. Из формулы (3.72) имеем

$$\int_x^{\infty} \frac{\exp(-t) dt}{t^n} = \frac{(-1)^n}{(n-1)!} Ei(-x) + \frac{(-1)^n \exp(-x)}{(n-1)! x} \left[ 1 - \frac{1}{x} + \frac{2!}{x^2} - \dots + \dots \right. \\ \left. \dots + (-1)^n \frac{(n-2)!}{x^{n-2}} \right]. \quad (3.74)$$

Этот интеграл называется **неполной гамма-функцией**.

### 3.6. МЕТОДЫ СЕДЛОВОЙ ТОЧКИ

Другие важные способы приближенного расчета интегралов известны под названием **методов седловой точки (перевала)**. Наиболее важный из

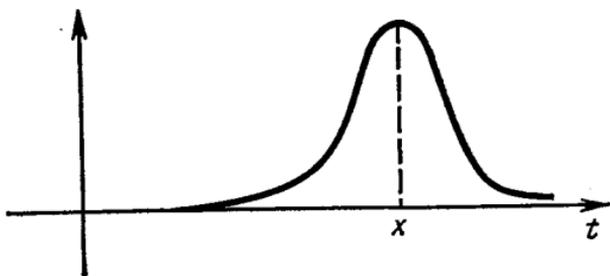


Рис. 3.10. График функции  $t^x e^{-t}$  при больших  $x$ .

них — это метод **наискорейшего спуска**. Проиллюстрируем этот метод, отыскивая приближенное выражение для  $\Gamma(x)$  при положительных и больших  $x$

$$\Gamma(x+1) = \int_0^{\infty} t^x \exp(-t) dt. \quad (3.75)$$

Вид подынтегрального выражения при больших  $x$  показан на рис. 3.10. Найдем максимум:

$$0 = \frac{d}{dt} (\exp(-t) t^x) = \exp(-t) (-t^x + x t^{x-1}), \quad t = x.$$

Теперь аппроксимируем подынтегральное выражение особым способом, записывая его в экспоненциальной форме

$\exp [f(t)]$  и используя разложение  $f(t)$  в ряд Тейлора вблизи максимума (разложение в ряд Тейлора, например, самого подинтегрального выражения было бы целесообразно, если стремиться ограничиться лишь небольшим числом членов). Подынтегральное выражение в формуле (3.75) имеет вид  $\exp [f(t)] = t^x \exp(-t) = \exp(x \ln t - t)$ , так что  $f(t) = x \ln t - t$ ;  $f'(t) = x/t - 1$ ;  $f' = 0$  при  $t = x$ ,  $f''(t) = -x/t^2$ . Далее разлагаем  $f(t)$  около точки  $t = x$ :

$$\Gamma(x+1) \approx \int_0^{\infty} \exp \left[ x \ln x - x - \frac{1}{2x} (t-x)^2 \right] dt \approx \\ \approx \exp(x \ln x - x) \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left[ -\frac{1}{2x} (t-x)^2 \right] dt$$

(если  $x \gg 1$ , то, распространяя нижний предел интегрирования до  $-\infty$ , получаем очень маленькую погрешность). Вычисление интеграла по  $t$  дает  $\Gamma(x+1) \approx \sqrt{2\pi x} x^x \exp(-x)$ . Это первый член формулы Стирлинга, которая представляет собой асимптотическое разложение  $n! = \Gamma(n+1)$ :

$$n! \sim \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n \left(1 + \frac{1}{12n} + \frac{1}{288n^2} + \dots\right). \quad (3.76)$$

К этому асимптотическому ряду мы еще возвратимся в конце главы.

В общем случае метод наискорейшего спуска применяют к интегралам вида

$$I(\alpha) = \int_C \exp(\alpha f(z)) dz, \quad (3.77)$$

где  $\alpha$  — положительное и большое число;  $C$  — такой контур в комплексной плоскости, что его концы не вносят существенного вклада в интеграл. В действительности этот метод дает первый член асимптотического разложения  $I(\alpha)$ , справедливого при больших  $\alpha$ .

Если  $f(z) = u + iv$ , то наибольший вклад в  $I(\alpha)$  ожидается от тех частей контура, где  $u$  велико. Идея метода наискорейшего спуска состоит в следующем: нужно деформировать контур  $C$  так, чтобы область большого  $u$  сжалась в столь короткий участок, сколь это возможно.

Чтобы увидеть, как надо деформировать контур, необходимо более или менее подробно исследовать поведение функций  $u$  и  $v$ . Однако некоторые общие особенности справедливы для любой регулярной функции  $f(z)$ . Ни  $u$ , ни  $v$  не могут иметь максимум или минимум нигде, кроме особенности, так как  $\nabla^2 u = 0$  и  $\nabla^2 v = 0$ . Например, если  $\partial^2 u / \partial x^2 < 0$ , то  $\partial^2 u / \partial y^2 > 0$ , так что «пологий участок» поверхности  $u(x, y)$ , где

$$\partial u / \partial x = \partial u / \partial y = 0, \quad (3.78)$$

должен быть «седловой точкой», вблизи которой поверхность похожа на седло или на горный перевал (рис. 3.11).

Из уравнений Коши — Римана  $\partial u / \partial x = \partial v / \partial y$ ,  $\partial v / \partial x = -\partial u / \partial y$  заключаем, что равенство (3.78) приводит к соотношениям  $\partial v / \partial y = 0$  и  $\partial v / \partial x = 0$ . Следовательно,  $f'(z) = 0$ . Таким образом, седловая точка функции  $u(x, y)$  есть также седловая точка функции  $v(x, y)$ , а также точка, где  $f'(z) = 0$ .

Вблизи точки  $z_0$  имеем  $f(z) \approx f(z_0) + \frac{1}{2} f''(z_0)(z - z_0)^2$ . Положим  $f''(z_0) = \rho \exp(i\theta)$ ,  $z - z_0 = s \exp(i\phi)$ . Тогда

$$\left. \begin{aligned} u &\approx u(x_0, y_0) + \frac{1}{2} \rho s^2 \cos(\theta + 2\phi), \\ v &\approx v(x_0, y_0) + \frac{1}{2} \rho s^2 \sin(\theta + 2\phi). \end{aligned} \right\} \quad (3.79)$$

Мы видим, что на поверхности  $u(x, y)$  пути наискорейшего спуска с седловой точки в долины начинаются в направлениях  $\cos(\theta + 2\phi) = -1$ . В этих направлениях величина  $v = v(x_0, y_0)$  постоянна. Если отходить дальше от точки  $z_0$ , то путь наискорейшего спуска следует в направлении  $-\text{grad } u$ , перпендикулярном линиям постоянного  $u$ . Таким образом, путь следует вдоль кривой  $v(x, y) = \text{const} = v(x_0, y_0)$ , так что множитель  $\exp(i\alpha v)$  в исходном подынтегральном выражении не дает осцилляций, которые разрушили бы всю картину. Поэтому деформируем первоначальный контур  $C$  так, чтобы он прошел по пути наискорейшего спуска. Используя в интеграле (3.77) приближение (3.79), находим

$$\left. \begin{aligned} I(\alpha) &\approx \exp(\alpha f(z_0)) \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-(\alpha/2) \rho s^2) \exp(i\phi) ds; \\ I(\alpha) &\approx \sqrt{2\pi/\alpha\rho} \exp(\alpha f(z_0)) \exp(i\phi), \end{aligned} \right\} \quad (3.80)$$

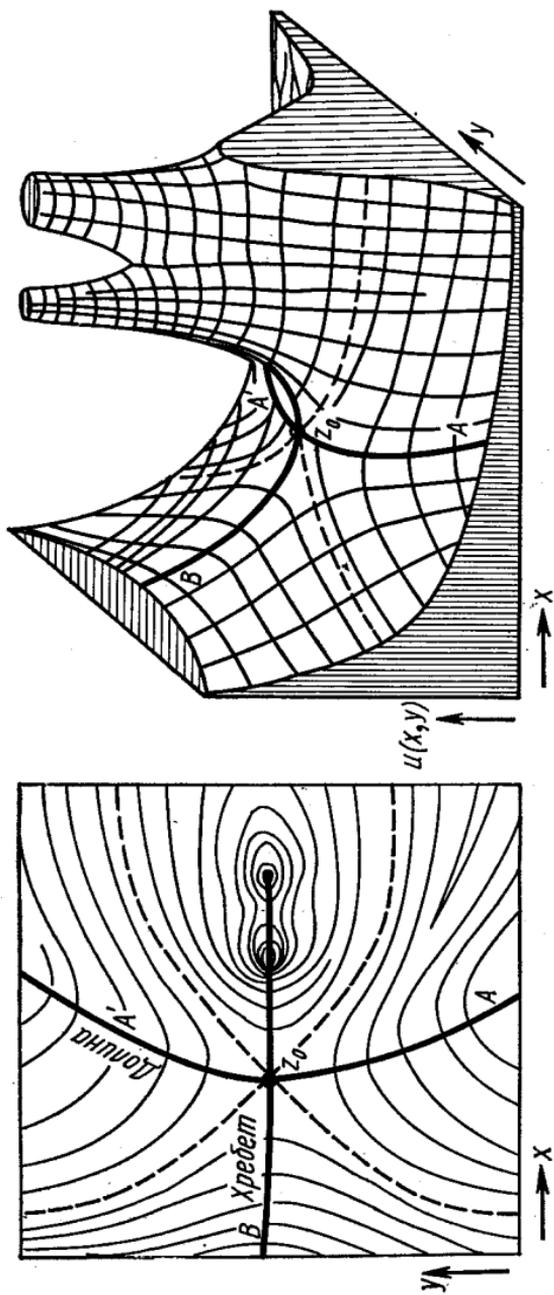
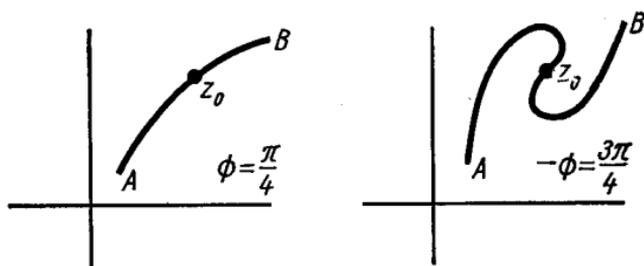


Рис. 3.11. Топография поверхности  $u = \operatorname{Re} f(z)$  для типичной функции  $f(z)$  вблизи седловой точки  $z_0$ . Жирные сплошные линии проведены из седловой точки через середины долин и хребтов; пунктирные линии — это линии уровня  $u = u(x_0, y_0) = \operatorname{const}$ . Кривая  $AA'$  — путь наискорейшего спуска.

где  $\phi$  имеет одно из значений  $-\theta/2 \pm \pi/2$  в зависимости от направления движения через перевал ( $\phi$  — угол наклона пути в седловой точке). Например, если  $\theta = \pi/2$ , есть

Рис. 3.12. Две возможности для путей наискорейшего спуска.



две возможности (рис. 3.12). Гораздо более вероятно, что правильна первая возможность; чтобы быть уверенным в этом, исследуют «участки горных цепей», которые проходятся. Если они выглядят, как показано на рис. 3.13, а,

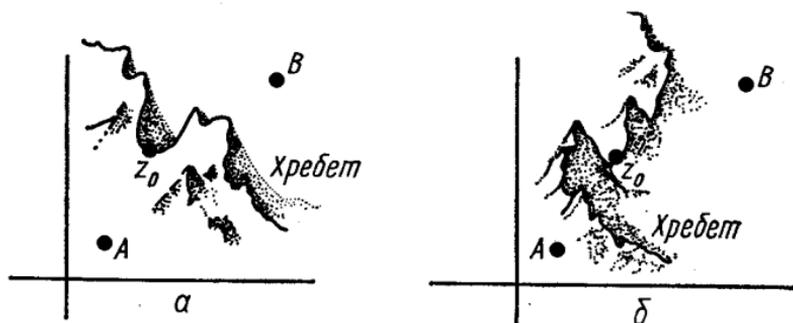


Рис. 3.13. Различное расположение «горных хребтов» для двух случаев, показанных на рис. 3.12.

то действительно правилен выбор  $\phi = \pi/4$ . С другой стороны, если горы выглядят так, как показано на рис. 3.13, б, то правилен второй выбор,  $\phi = -3\pi/4$ .

В качестве примера использования метода наискорейшего спуска с более общим контуром исследуем асимптотический вид  $\Gamma(z)$  при комплексных  $z$ , не делая никаких упрощений, основанных на наших предыдущих вычислениях этой функции:

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} \exp(-t) t^{z-1} dt;$$

$$\Gamma(z+1) = \int_0^{\infty} \exp(-t + z \ln t) dt. \quad (3.84)$$

Положим  $z = \alpha \exp(i\beta)$ . Тогда

$$\Gamma(z+1) = \int_0^{\infty} \exp \left[ \alpha \left( \ln t - \frac{t}{z} \right) \exp(i\beta) \right] dt \quad (3.82)$$

и

$$f(t) = \left( \ln t - \frac{t}{z} \right) \exp(i\beta); \quad f'(t) = \left( \frac{1}{t} - \frac{1}{z} \right) \exp(i\beta);$$

$$t_0 = z;$$

$$f''(t) = -\frac{1}{t^2} \exp(i\beta);$$

$$f(t_0) = (\ln z - 1) \exp(i\beta);$$

$$f''(t_0) = -\frac{\exp(i\beta)}{z^2} = -\frac{1}{\alpha^2} \exp(-i\beta).$$

Таким образом,  $\rho = 1/\alpha^2$ ,  $\theta = \pi - \beta$ . Чему равно  $\phi$ ? Пользуясь условием  $\cos(\theta + 2\phi) = -1$ , находим  $\phi = \beta/2$  или  $\beta/2 - \pi$ .

При рассмотрении этого примера с вещественным  $z$  мы имели  $\beta = 0$  и  $\phi = 0$ , так что наиболее разумным сейчас кажется выбор  $\phi = \beta/2$ . Однако, так как иногда нужно более подробно исследовать топографию поверхности  $u = \operatorname{Re} f(t)$ , на рис. 3.14 для рассматриваемого примера показаны хребты и долины, причем взят случай  $\beta = \pi/4$ . Этот рисунок подтверждает выбор  $\phi = \beta/2$ . Ясно, что первоначальный путь интегрирования вдоль вещественной оси  $t$  нужно деформировать так, чтобы он проходил через седловую точку  $t_0 = z$  по пути наискорейшего спуска (т. е. долинам) в направлении, определяемом углом  $\phi = \beta/2$ .

Далее из (3.80), пользуясь методом наискорейшего спуска, можно написать следующее выражение для  $\Gamma(z+1)$ :

$$\Gamma(z+1) \sim \sqrt{2\pi\alpha} \exp(z \ln z - z) \exp(i\beta/2);$$

$$\Gamma(z+1) \sim \sqrt{2\pi z^{z+1/2}} \exp(-z). \quad (3.83)$$

Первоначальное интегральное представление для  $\Gamma(z)$  действительно только в области  $\operatorname{Re} z > 0$ . Однако результат (3.83) в действительности верен для всех  $|z| \rightarrow \infty$  в случае, если точка  $z$  достаточно удалена от отрицательной вещественной оси.

Результат (3.83) является первым членом асимптотического ряда для гамма-функции. Найдем следующие члены. Сначала напомним

$$\begin{aligned} \Gamma(z) &\approx \sqrt{2\pi} (z-1)^{z-1/2} \exp[-(z-1)] \approx \\ &\approx \sqrt{2\pi} z^{z-1/2} \left(1 - \frac{1}{z}\right)^{z-1/2} \exp[-(z-1)] \approx \\ &\approx \sqrt{2\pi} z^{z-1/2} \exp(-z). \end{aligned}$$

Положим далее

$$\Gamma(z) \sim \sqrt{2\pi} z^{z-1/2} \exp(-z) \left(1 + \frac{A}{z} + \frac{B}{z^2} + \dots\right). \quad (3.84)$$

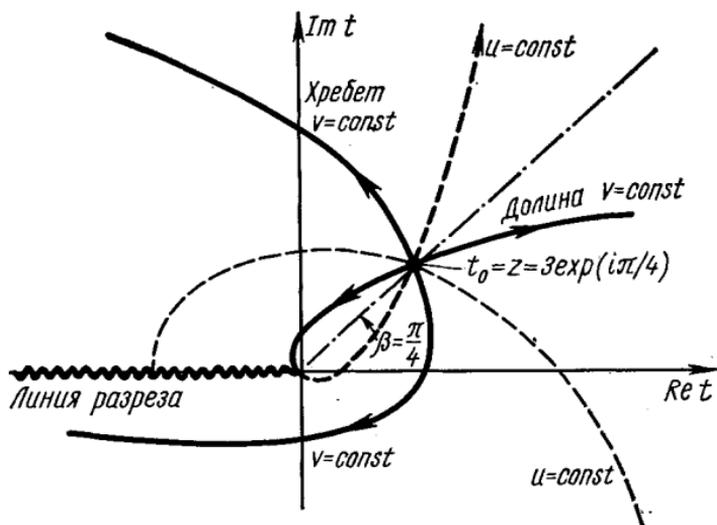


Рис. 3.14. Топография поверхности  $u = \operatorname{Re} f(t) = \operatorname{Re} (\ln t - t/z) \exp(i\beta)$  для случая  $z = 3 \exp[i(\pi/4)]$ .

Константы  $A, B, \dots$  можно найти из рекуррентного соотношения для гамма-функции  $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$ . Используя (3.84), имеем

$$\begin{aligned} \Gamma(z+1) &= \sqrt{2\pi} (z+1)^{z+1/2} \exp[-(z+1)] \times \\ &\quad \times \left[1 + \frac{A}{z+1} + \frac{B}{(z+1)^2} + \dots\right] = \\ &= \sqrt{2\pi} \exp \left[ \left(z + \frac{1}{2}\right) \ln(z+1) - (z+1) \right] \times \\ &\quad \times \left[1 + \frac{A}{z+1} + \frac{B}{(z+1)^2} + \dots\right] = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sqrt{2\pi} \exp \left[ \left( z + \frac{1}{2} \right) \ln z - z + \right. \\
&+ \left. \left( \frac{1}{12z^2} - \frac{1}{12z^3} + \frac{3}{40z^4} - \dots + \dots \right) \right] \times \\
&\quad \times \left[ 1 + \frac{A}{z+1} + \frac{B}{(z+1)^2} + \dots \right] = \\
&= \sqrt{2\pi} z^{z+1/2} \exp(-z) \left( 1 + \frac{1}{12z^2} - \frac{1}{12z^3} + \frac{113}{1440z^4} - \dots \right) \times \\
&\quad \times \left[ 1 + \frac{A}{z} + \frac{B-A}{z^2} + \frac{C-2B+A}{z^3} + \dots \right].
\end{aligned}$$

С другой стороны, (3.84) приводит также к следующему равенству:

$$z\Gamma(z) = \sqrt{2\pi} z^{z+1/2} \exp(-z) \left( 1 + \frac{A}{z} + \frac{B}{z^2} + \dots \right).$$

Сравнивая соответствующие члены в обоих рядах, получаем  $A = 1/12$ ,  $B = 1/288$ , ... Этот результат согласуется с формулой (3.76), приведенной выше для  $z = n$ . Мы не доказали справедливость этой процедуры, тем не менее она дает правильный ответ.

Рассмотрим еще один метод приближенного расчета интегралов. Это так называемый метод стационарной фазы; он относится к интегралам вида

$$I = \int_C \exp[i\alpha f(z)] dz, \quad (3.85)$$

где  $\alpha$  положительно и велико, а  $f(z)$  вещественна вдоль контура  $C$ . До тех пор пока не выполнено условие  $f'(z) = 0$ , вклады в  $I$  от соседних участков  $z$  будут сильно сокращаться из-за быстро осциллирующего характера  $\exp[i\alpha f(z)]$ . Таким образом, следует обратить внимание на точки контура, где  $f'(z) = 0$  и использовать результат

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp(i\alpha u^2) du = \sqrt{\pi/\alpha} \exp[i(\pi/4)].$$

Ясно, что этот метод весьма тесно связан с методом наискорейшего спуска. Отметим, что если подынтегральное выражение для обоих методов записать в одной и той же форме  $\exp[\alpha f(z)]$ , то в методе наискорейшего спуска путь интегрирования проходит вдоль кривой  $\text{Im } f(z) = \text{const}$ , а в методе стационарной фазы — вдоль кривой  $\text{Re } f(z) = \text{const}$ .

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ  
ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

4.1. РЯДЫ ФУРЬЕ

Начнем с рассмотрения функции  $f(\theta)$ , определенной в интервале  $0 \leq \theta < 2\pi$ . Ищем ее разложение в виде

$$f(\theta) = (A_0/2) + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos n\theta + B_n \sin n\theta). \quad (4.1)$$

Коэффициенты можно найти, если умножить обе части (4.1) на  $\cos n\theta$  (или  $\sin n\theta$ ) и проинтегрировать от 0 до  $2\pi$ .

$$A_n = (1/\pi) \int_0^{2\pi} f(\theta) \cos n\theta d\theta, \quad B_n = (1/\pi) \int_0^{2\pi} f(\theta) \sin n\theta d\theta. \quad (4.2)$$

Ряд (4.1), называемый рядом Фурье для  $f(\theta)$ , сходится во всех точках к  $\frac{1}{2} [f(\theta +) + f(\theta -)]$ , если функция  $f(\theta)$  на интервале  $0 \leq \theta < 2\pi$  ограничена [2].

Ряд Фурье периодический, так что он точно повторяет функцию  $f(\theta)$  на участках  $2\pi \leq \theta < 4\pi$ ,  $-2\pi \leq \theta < 0$  и т. д. Не обязательно начинать с интервала  $[0, 2\pi]$ ; годится любой интервал длиной  $2\pi$ . Часто более удобен интервал от  $-\pi$  до  $\pi$ .

Можно выделить типы функций, для которых некоторые члены ряда Фурье обращаются в нуль.

1. Четные функции:  $f(-\theta) = f(\theta)$  или  $f(2\pi - \theta) = f(\theta)$  и т. д. Остаются только косинусы, т. е.  $B_n = 0$ . Пример показан на рис. 4.1.

2. Нечетные функции:  $f(-\theta) = -f(\theta)$ . Остаются только синусы, т. е.  $A_n = 0$ . Пример показан на рис. 4.2.

3. Четные функции, симметричные относительно  $\pi/2$ :  $f(\pi/2 + \theta) = f(\pi/2 - \theta)$ . Остаются только косинусы с четными  $n$ , т. е.  $B_n = 0$ ,  $A_{2n+1} = 0$ . Пример показан на рис. 4.3.

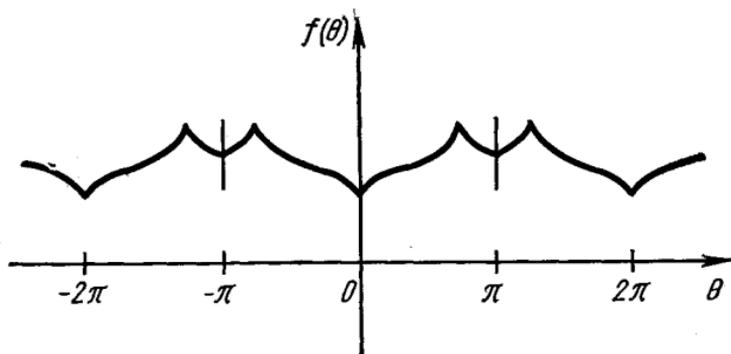


Рис. 4.1. Четная функция с периодом  $2\pi$ .

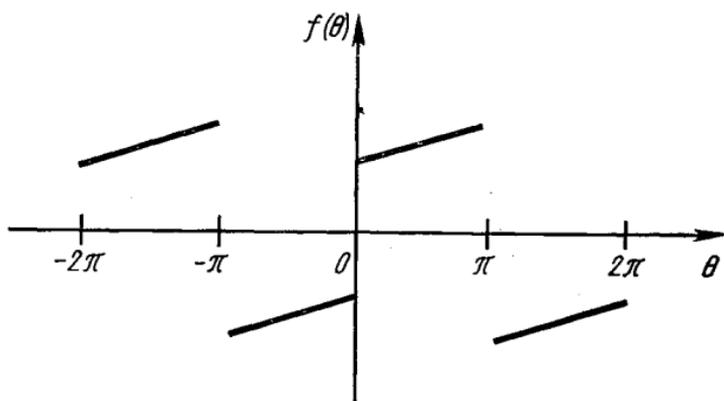


Рис. 4.2. Нечетная функция с периодом  $2\pi$ .

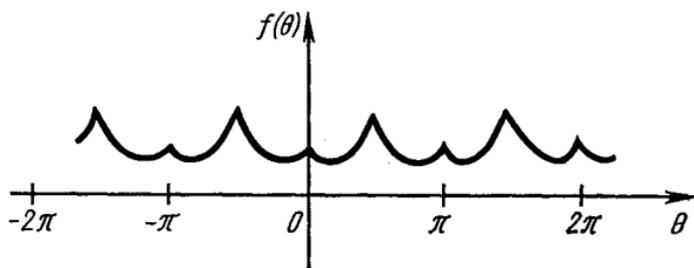


Рис. 4.3. Четная функция, симметричная относительно  $\pi/2$ .

Очевидно, существует много таких возможностей. Рассмотрим теперь несколько примеров рядов Фурье.

**Пример.**

$$f(\theta) = \begin{cases} +1, & 0 < \theta < \pi, \\ -1, & \pi < \theta < 2\pi. \end{cases} \quad (4.3)$$

Это нечетная функция, так что членов с косинусами нет. Она симметрична относительно  $\pi/2$ , откуда следует, что нет четных членов с синусами. Для нечетных  $n$  имеем

$$B_n = (1/\pi) \int_0^{2\pi} f(\theta) \sin n\theta d\theta = (4/\pi) \int_0^{\pi/2} f(\theta) \sin n\theta d\theta = 4/n\pi.$$

Следовательно,

$$f(\theta) = \frac{4}{\pi} \left( \sin \theta + \frac{\sin 3\theta}{3} + \frac{\sin 5\theta}{5} + \dots \right). \quad (4.4)$$

Этот ряд неравномерно сходится вблизи точки разрыва. Последовательные приближения показаны на рис. 4.4.

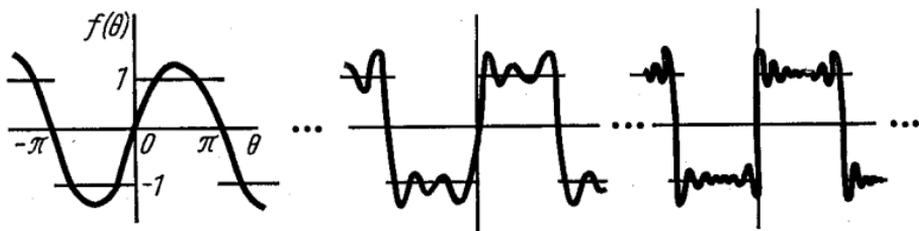


Рис. 4.4. Зависимость частичной суммы ряда Фурье (4.4) от числа членов.

Отметим всплеск, называемый явлением Гиббса. В пределе бесконечно большого числа членов всплеск остается конечным — приблизительно 0,18.

Если в ряде Фурье (4.4) положить  $\theta = \pi/2$ , получаем

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots - \dots \quad (4.5)$$

Этот ряд известен как ряд Грегори. Его можно также вывести из разложения  $\text{arctg } x = x - (x^3/3) + (x^5/5) - \dots + \dots$

**Пример.**

$$f(\theta) = \cos k\theta \quad (-\pi < \theta < \pi).$$

Ряд Фурье для  $\cos k\theta$  уже упоминался в связи с числами Бернулли. Так как  $f(\theta)$  четно, то остаются только члены

с косинусами:

$$A_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \cos k\theta \cos n\theta \, d\theta = \frac{(-1)^n \cdot 2k \sin k\pi}{\pi (k^2 - n^2)}.$$

Таким образом,

$$\cos k\theta = \frac{2k \sin k\pi}{\pi} \left( \frac{1}{2k^2} - \frac{\cos \theta}{k^2 - 1} + \frac{\cos 2\theta}{k^2 - 4} - \dots + \dots \right). \quad (4.6)$$

Конечно, можно обобщить ряды Фурье так, чтобы представить функции, периодичные с некоторым периодом  $L$ , отличным от  $2\pi$ . Положим  $x = \theta L/2\pi$ . Тогда интервал длины  $2\pi$  в переменной  $\theta$  переходит в интервал длиной  $L$  в переменной  $x$ . Наши формулы приобретают вид

$$\left. \begin{aligned} f(x) &= \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left( A_n \cos \frac{2\pi n x}{L} + B_n \sin \frac{2\pi n x}{L} \right); \\ A_n &= \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \cos \frac{2\pi n x}{L} \, dx; \\ B_n &= \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin \frac{2\pi n x}{L} \, dx. \end{aligned} \right\} \quad (4.7)$$

К этому интервалу можно также применить все сделанные выше замечания о четности, нечетности и т. д.

В данной задаче нужно исследовать, что брать за основной интервал  $L$ . Предположим, что функция  $f(x)$  задана в интервале  $0 < x < a$ . Можно разложить  $f(x)$  в ряд Фурье с периодом  $a$ :

$$f(x) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left( A_n \cos \frac{2\pi n x}{a} + B_n \sin \frac{2\pi n x}{a} \right). \quad (4.8)$$

Ясно, что для произвольной функции  $f(x)$  нужны как косинусы, так и синусы. Иными словами, отдельно косинусы или синусы не образуют полной системы.

С другой стороны, можно произвести разложение только по синусам, если определить  $f(x)$  на участке  $-a < x < 0$  равенством  $f(-x) = -f(x)$ . Возьмем теперь в качестве периода ряда Фурье величину  $2a$ . Тогда

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin (n\pi x/a). \quad (4.9)$$

Таким образом, мы выбросили косинусы, но удвоили число членов с синусами; система функций по-прежнему остается полной.

Часто удобно записывать ряды Фурье в комплексной форме

$$f(\theta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \exp(in\theta), \quad (4.10)$$

или, в более общем случае,

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \exp(2\pi i n x / L). \quad (4.11)$$

Чтобы вычислить коэффициенты  $a_n$  в (4.11), умножим обе стороны на  $\exp(-2\pi i m x / L)$  и проинтегрируем от 0 до  $L$  (или какому-нибудь другому интервалу длиной  $L$ ). Тогда мы замечаем, что

$$\int_0^L \exp(-2\pi i m x / L) \exp(2\pi i n x / L) dx = L \delta_{mn}, \quad (4.12)$$

где  $\delta_{mn}$  называется  $\delta$ -символом Кронекера и определяется равенствами

$$\delta_{mn} = \begin{cases} 0, & \text{если } m \neq n; \\ 1, & \text{если } m = n. \end{cases} \quad (4.13)$$

Следовательно,

$$(1/L) \int_0^L f(x) \exp(-2\pi i m x / L) dx = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \delta_{mn} = a_m.$$

Заметим, что знак показателя экспоненты изменился:

$$\left. \begin{aligned} f(x) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \exp(2\pi i n x / L), \\ a_n &= (1/L) \int_0^L f(x) \exp(-2\pi i n x / L) dx. \end{aligned} \right\} \quad (4.14)$$

В физических приложениях часто представляет интерес величина  $(1/L) \int_0^L |f(x)|^2 dx$ . Разлагая  $f(x)$  в комплекс-

ный ряд Фурье (4.11), получаем

$$\begin{aligned}
 (1/L) \int_0^L |f(x)|^2 dx &= \frac{1}{L} \int_0^L dx \left( \sum_n a_n \exp(2\pi i n x/L) \right) \times \\
 &\times \left( \sum_m a_m^* \exp(-2\pi i m x/L) \right) = \\
 &= \sum_{mn} a_m^* a_n \delta_{mn} = \sum_n |a_n|^2. \quad (4.15)
 \end{aligned}$$

Результат (4.15) показывает, что каждая компонента Фурье  $f(x)$  вносит вклад в интеграл  $\int_0^L |f(x)|^2 dx$  независимо от других компонент Фурье. Интерферирующих членов вида  $a_n^* a_m$  нет. [Сравните замечания, сделанные ниже в связи с примером (4.26).]

## 4.2. ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ФУРЬЕ

Начнем с комплексного ряда Фурье

$$\begin{aligned}
 f(x) &= \sum_n a_n \exp(2\pi i n x/L), \\
 a_n &= (1/L) \int_{-L/2}^{L/2} f(x) \exp(-2\pi i n x/L) dx.
 \end{aligned}$$

Рассмотрим случай  $L \rightarrow \infty$ . Тогда сумму можно преобразовать в интеграл следующим образом: определим  $2\pi n/L = y$  и  $La_n = g(y)$ . Так как  $n$  в сумме возрастает каждый раз на единицу, то  $\sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n = \int_{-\infty}^{\infty} F_n dn = (L/2\pi) \int_{-\infty}^{\infty} F(y) dy$ , где  $F(y) = F_n$ . Таким образом, полученные выше формулы приобретают вид

$$\left. \begin{aligned}
 f(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} g(y) \exp(ixy) dy, \\
 g(y) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \exp(-ixy) dx.
 \end{aligned} \right\} \quad (4.16)$$

Величина  $g(y)$  называется преобразованием Фурье от  $f(x)$  и наоборот. Положение множителя  $2\pi$  довольно произвольно; часто величины  $f$  и  $g$  определяют более симметрично:

$$\left. \begin{aligned} f(x) &= \sqrt{(1/2\pi)} \int_{-\infty}^{\infty} g(y) \exp(ixy) dy, \\ g(y) &= \sqrt{(1/2\pi)} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \exp(-ixy) dx. \end{aligned} \right\} \quad (4.17)$$

Выражения (4.16) или (4.17) можно скомбинировать следующим образом:

$$\begin{aligned} f(x) &= (1/2\pi) \int_{-\infty}^{\infty} dy \exp(ixy) \int_{-\infty}^{\infty} f(x') \exp(-ix'y) dx' = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} dx' f(x') (1/2\pi) \int_{-\infty}^{\infty} \exp[i(x-x')y] dy. \end{aligned} \quad (4.18)$$

Равенство (4.18) удовлетворяется для любой функции  $f(x)$ ; это позволяет сделать интересный вывод об интеграле  $\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp[i(x-x')y] dy$  как функции  $x'$ . Он равен нулю всюду, кроме точки  $x' = x$ , а интеграл от него по любому промежутку, включающему  $x$ , равен единице, т. е. эта функция имеет бесконечно высокий и бесконечно узкий пик в точке  $x' = x$ .

Обычно определяют  $\delta$ -функцию (Дирака)  $\delta(x)$  следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} \delta(x) &= 0, & x \neq 0; \\ \int_{-a}^{+b} \delta(x) dx &= 1, & a, b > 0. \end{aligned} \right\} \quad (4.19)$$

Из этих уравнений следует, что

$$\int f(y) \delta(x-y) dy = f(x) \quad (4.20)$$

для любой функции  $f(x)$ , в случае если интервал интегрирования включает точку  $x$ .

Проделанные выше операции над интегралами Фурье показали, что

$$\delta(x) = (1/2\pi) \int_{-\infty}^{\infty} \exp(ixy) dy. \quad (4.21)$$

Это интегральное представление  $\delta$ -функции.

Дельта-функцию можно использовать, чтобы выразить важный интеграл  $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx$  через преобразование Фурье (4.16) от  $f(x)$ :

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx &= \int_{-\infty}^{\infty} dx (1/2\pi) \int_{-\infty}^{\infty} g^*(y) \exp(-ixy) dy (1/2\pi) \times \\ &\quad \times \int_{-\infty}^{\infty} g(y') \exp(ixy') dy' = \\ &= (1/2\pi) \int_{-\infty}^{\infty} dy g^*(y) \int_{-\infty}^{\infty} dy' g(y') (1/2\pi) \int_{-\infty}^{\infty} dx \exp(i(y' - y)x) = \\ &= (1/2\pi) \int_{-\infty}^{\infty} dy g^*(y) \int_{-\infty}^{\infty} dy' g(y') \delta(y' - y) = \\ &= (1/2\pi) \int_{-\infty}^{\infty} dy g^*(y) g(y). \end{aligned} \quad (4.22)$$

Это равенство называется теоремой Парсеваля. Она полезна для понимания физической интерпретации преобразования Фурье  $g(y)$ , если известен физический смысл  $f(x)$  [см. пример (4.26)].

Предположим, что  $f(x)$  — четная функция. Тогда

$$\begin{aligned} g(y) &= \int_0^{\infty} f(x) \exp(-ixy) dx + \int_{-\infty}^0 f(x) \exp(-ixy) dx = \\ &= \int_0^{\infty} f(x) [\exp(ixy) + \exp(-ixy)] dx = \\ &= 2 \int_0^{\infty} f(x) \cos xy dx. \end{aligned} \quad (4.23)$$

Заметим теперь, что  $g(y)$  — также четная функция. Поэтому

$$f(x) = (1/\pi) \int_0^{\infty} g(y) \cos xy \, dy. \quad (4.24)$$

Функции  $f(x)$  и  $g(y)$ , определенные теперь только для положительных  $x$  и  $y$ , называются к о с и н у с-п р е о б р а з о в а н и я м и Ф у р ь е по отношению друг к другу.

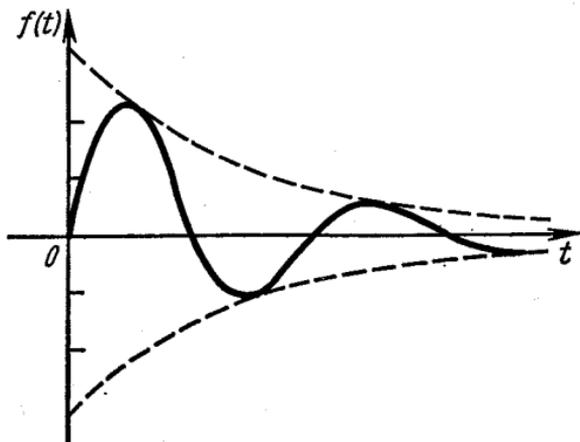


Рис. 4.5. Затухающая синусоидальная волна.

Рассматривая преобразование Фурье нечетной функции, получаем аналогичные соотношения Фурье между синус-преобразованиями Фурье:

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} g(y) \sin xy \, dy, \quad g(y) = 2 \int_0^{\infty} f(x) \sin xy \, dx. \quad (4.25)$$

Если нужно, можно симметризовать выражения, поставив множитель  $\sqrt{2/\pi}$  перед каждым интегралом в (4.23) — (4.25).

Подробные таблицы преобразований Фурье приведены в работе [3].

**Пример.**

$$f(t) = \begin{cases} 0 & (t < 0); \\ \exp(-t/T) \sin \omega_0 t & (t > 0). \end{cases} \quad (4.26)$$

Эта функция (рис. 4.5) может представлять, например, координату затухающего гармонического осциллятора

или электрическое поле в излученной волне, или ток в антенне.

Преобразование Фурье  $f(t)$  равно

$$g(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \exp(-i\omega t) dt =$$

$$= \int_0^{\infty} \exp(-t/T) \sin \omega_0 t \exp(-i\omega t) dt =$$

$$= \frac{1}{2} \left( \frac{1}{\omega + \omega_0 - i/T} - \frac{1}{\omega - \omega_0 - i/T} \right).$$

Физический смысл  $g(\omega)$  можно интерпретировать с помощью теоремы Парсеваля (4.22). Например, если

$f(t)$  — напряженность излученного электрического поля, то излученная мощность пропорциональна  $|f(t)|^2$ , а полная излученная энергия пропорциональна

$\int_0^{\infty} |f(t)|^2 dt$ . По теореме Парсеваля это равно

но  $\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |g(\omega)|^2 d\omega$ . Тогда

$|g(\omega)|^2$  имеет смысл энергии, излученной в единичном интервале частоты (с точностью до множителя).

Предположим, что  $T$  весьма велико ( $\omega_0 T \gg 1$ ). Тогда «частотный спектр»  $g(\omega)$  имеет довольно резкий пик при  $\omega = \pm \omega_0$ . Например, вблизи  $\omega = \omega_0$

$$g(\omega) \approx -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\omega - \omega_0 - i/T}; \quad |g(\omega)| \approx \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{(\omega - \omega_0)^2 + 1/T^2}}.$$

Когда  $\omega = \omega_0 \pm 1/T$ , «амплитуда»  $g(\omega)$  уменьшается в  $\sqrt{2}$  раз, а излученная энергия  $|g(\omega)|^2$  падает в два раза. Другими словами, ширина  $\Gamma$ , на которой мощность убывает до половины максимальной, равна  $\Gamma \approx 2/T$ . На рис. 4.6 показан энергетический спектр  $|g(\omega)|^2$ .

Этот результат есть типичный «принцип неопределенности», и он очень тесно связан с принципом неопределен-

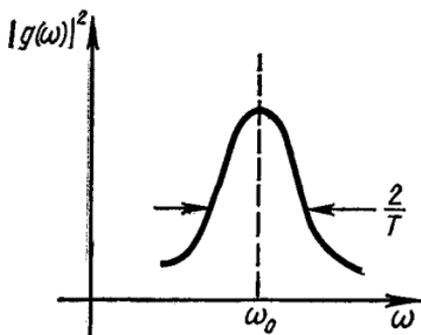


Рис. 4.6. Энергетический спектр для затухающего колебания, показанного на рис. 4.5.

ности Гейзенберга в квантовой механике. Время  $T$ , в течение которого что-либо осциллирует, обратно пропорционально ширине  $\Gamma$ , представляющей собой меру «неопределенности» частоты.

Преобразования Фурье легко обобщить на большее число измерений. Например, в трехмерном пространстве имеем пару преобразований

$$\left. \begin{aligned} \phi(\mathbf{k}) &= \int d^3x f(\mathbf{x}) \exp(-i\mathbf{kx}); \\ f(\mathbf{x}) &= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \phi(\mathbf{k}) \exp(i\mathbf{kx}). \end{aligned} \right\} \quad (4.27)$$

Как и выше, из них можно получить интегральное представление

$$\delta(\mathbf{x}) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \exp(i\mathbf{kx}), \quad (4.28)$$

причем трехмерная  $\delta$ -функция определена соотношениями  $(\delta \mathbf{x}) = 0$ ,  $\mathbf{x} \neq 0$ ;  $\int d^3x \delta(\mathbf{x}) = 1$ , в случае если начало координат лежит внутри области интегрирования; далее имеем

$$\int d^3x f(\mathbf{x}) \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}) = f(\mathbf{y}). \quad (4.29)$$

Такие пары преобразований представляют интерес в квантовой механике. Если  $f(\mathbf{x})$  — волновая функция частицы, то преобразование Фурье  $\phi(\mathbf{k})$  есть так называемая волновая функция в импульсном пространстве. Функции  $|f(\mathbf{x})|^2$  и  $|\phi(\mathbf{k})|^2$  суть распределения вероятности соответственно для координаты и импульса.

**Пример.**

$$f(\mathbf{x}) = \left( \frac{2}{\pi a^2} \right)^{3/4} \exp(-r^2/a^2) = N \exp(-r^2/a^2) \quad (r = |\mathbf{x}|). \quad (4.30)$$

Это волновая функция, приводящая к гауссовому распределению вероятности;  $|f(\mathbf{x})|^2$  имеет максимум при  $r=0$  и нормирована так, что  $\int d^3x |f(\mathbf{x})|^2 = 1$ . Преобразование Фурье равно

$$\phi(\mathbf{k}) = N \int d^3x \cdot \exp(-r^2/a^2) \exp(-i\mathbf{kx}).$$

Введем полярные координаты с осью  $z$  вдоль  $\mathbf{k}$ . Обозначим  $\cos \theta = \alpha$ . Тогда

$$\begin{aligned} \phi(\mathbf{k}) &= 2\pi N \int_0^{\infty} r^2 dr \int_{-1}^{+1} d\alpha \cdot \exp(-r^2/a^2) \exp(-ikr\alpha) = \\ &= (4\pi/k) N \int_0^{\infty} r dr \exp(-r^2/a^2) \sin kr = (4\pi/k) (N/2i) \times \\ &\times \int_{-\infty}^{\infty} r dr \exp(-r^2/a^2) \exp(ikr) = \frac{2\pi}{ik} N \exp(-k^2 a^2/4) \times \\ &\times \int_{-\infty}^{\infty} r dr \exp\left[-\frac{1}{a^2} \left(r - \frac{ika^2}{2}\right)^2\right] = \\ &= \frac{2\pi}{ik} N \exp(-k^2 a^2/4) \frac{ika^2}{2} a \sqrt{\pi}. \end{aligned}$$

Наконец, вспоминая, что  $N = (2/\pi a^2)^{3/4}$ , получаем

$$\phi(\mathbf{k}) = (2\pi a^2)^{3/4} \exp(-k^2 a^2/4). \quad (4.31)$$

Заметим, что преобразование Фурье гауссова распределения есть другое гауссово распределение. Чем уже распределение по  $x$  (т. е. чем меньше величина  $a$ ), тем шире распределение по  $\mathbf{k}$ . Ширины  $\Delta x$  и  $\Delta k$ , грубо говоря, обратно пропорциональны друг другу:  $\Delta x \Delta k \approx 1$ . Известная из квантовой механики связь  $\mathbf{p} = \hbar \mathbf{k}$  ( $\mathbf{p}$  — импульс) преобразует это равенство во второе квантовомеханическое соотношение неопределенности  $\Delta x \Delta p \sim \hbar$ .

Найденное выше распределение вероятности  $|\phi(\mathbf{k})|^2$  есть гауссово распределение с центром в точке  $\mathbf{k} = 0$ . Можно ожидать, что аналогичное распределение с центром в точке  $\mathbf{k}_0$ , выбранной произвольно, получается, если стартовать с того же распределения вероятности по пространству  $|f(\mathbf{r})|^2$ . Как легко может проверить читатель, это осуществляется просто умножением  $f(\mathbf{x})$  на  $\exp(i\mathbf{k}_0 \mathbf{x})$ .

### 4.3. ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ЛАПЛАСА

Часто нас интересуют такие функции, для которых не существует преобразования Фурье. Например, простая функция  $f(x) = A = \text{const}$  и  $f(x) = x^2$  имеют расходящиеся интегралы преобразования Фурье. Для многих

функций неприятности при  $\pm \infty$  можно устранить умножением на множитель  $\exp(-cx)$ , где  $c$  вещественно и больше некоторой минимальной величины  $\alpha$ . Хотя этот множитель может изменить весь ход функции при  $x \rightarrow -\infty$ , нас часто интересует функция лишь для положительных  $x$ . Таким образом, можно позаботиться о поведении при отрицательных  $x$ , введя второй множитель — ступенчатую функцию (Хевисайда):

$$H(x) = \begin{cases} 0, & x < 0; \\ 1, & x > 0 \end{cases} \quad (4.32)$$

$[(d/dt)H(t) = \delta(t)$ ; это можно установить, интегрируя  $\delta$ -функцию].

Теперь функция  $f(x) \exp(-cx) H(x)$  имеет преобразование Фурье:

$$\begin{aligned} g(y) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \exp(-cx) H(x) \exp(-ixy) dx = \\ &= \int_0^{\infty} f(x) \exp(-cx) \exp(-ixy) dx. \end{aligned}$$

Обратное преобразование:

$$f(x) \exp(-cx) H(x) = (1/2\pi) \int_{-\infty}^{\infty} g(y) \exp(ixy) dy.$$

Введем теперь новую переменную

$$s = c + iy \quad (4.33)$$

и определим  $F(s) = g(y)$ . Два вышеприведенных интеграла приобретают вид

$$F(s) = \int_0^{\infty} f(x) \exp(-sx) dx, \quad (4.34)$$

$$f(x) H(x) = (1/2\pi i) \int_C F(s) \exp(sx) ds, \quad (4.35)$$

причем путь интегрирования  $C$  идет вдоль прямой линии  $\operatorname{Re} s = c = \text{const}$  (рис. 4.7).

Функция  $F(s)$ , получаемая из равенства (4.34), называется преобразованием Лапласа от  $f(x)$ . Интеграл существует только в правой полуплоскости  $s$ ,  $\text{Re } s > \alpha$ , где  $\alpha$  — минимальный предел для  $s$ . В этой области преобразование  $F(s)$  аналитично; обычно  $F(s)$  в левой полуплоскости можно определить с помощью аналитического продолжения.

Второй интеграл (4.35) называется интегралом обратного преобразования Лапласа. Заметим, что для  $x > 0$  он дает  $f(x)$  {или, более точно,

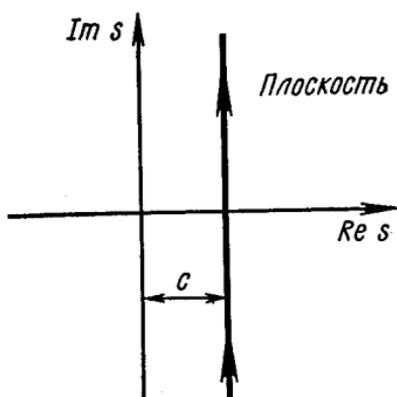


Рис. 4.7. Контур для интеграла обратного преобразования Лапласа (4.35).

$\frac{1}{2} [f(x+) + f(x-)]$ }, а для  $x < 0$  он автоматически равен нулю.

Начиная с этого места мы будем опускать  $H(x)$  в (4.35) и писать просто

$$f(x) = (1/2\pi i) \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} F(s) \exp(sx) ds, \quad (4.36)$$

подразумевая, что все функции  $f(x)$ , которые можно трансформировать по Лапласу, равны нулю для отрицательных аргументов.

### Пример.

$$f(x) = 1; \quad \left. \begin{aligned} F(s) = \int_0^{\infty} f(x) \exp(-sx) dx = \int_0^{\infty} \exp(-sx) dx = (1/s). \end{aligned} \right\} (4.37)$$

Этот интеграл существует для  $\text{Re } s > 0$  (т. е.  $\alpha = 0$ ). Заметим, что  $F(s)$  имеет особенность (в этом примере простой полюс) на граничной линии  $\text{Re } s = 0$ .

Можно проверить формулу обращения

$$f(x) = (1/2\pi i) \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} F(s) \exp(sx) ds = (1/2\pi i) \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{\exp(sx)}{s} ds,$$

где  $c > 0$ . Если  $x > 0$ , замыкаем контур большим полукругом слева и  $f(x) = 1$ . Если  $x < 0$ , замыкаем контур справа и  $f(x) = 0$ .

В конце этой главы помещена краткая таблица преобразований Лапласа. Более полные таблицы можно найти в книге [3].

#### 4.4. ДРУГИЕ ПАРЫ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ

Преобразования Фурье — Бесселя (или преобразование Ханкеля):

$$g(k) = \int_0^{\infty} f(x) J_m(kx) x dx; \quad (4.38)$$

$$f(x) = \int_0^{\infty} g(k) J_m(kx) k dk. \quad (4.39)$$

Преобразование Меллина:

$$\phi(z) = \int_0^{\infty} t^{z-1} f(t) dt; \quad (4.40)$$

$$f(t) = (1/2\pi i) \int_{-i\infty}^{i\infty} t^{-z} \phi(z) dz. \quad (4.41)$$

Преобразование Гильберта:

$$g(y) = \frac{1}{\pi} P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x) dx}{x-y}; \quad (4.42)$$

$$f(x) = \frac{1}{\pi} P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{g(y) dy}{y-x}. \quad (4.43)$$

#### 4.5. ПРИМЕНЕНИЯ ИНТЕГРАЛЬНЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ

Сначала сделаем заключения об основных свойствах преобразований Фурье и Лапласа.

1. Оба преобразования линейны.

## 2. Преобразования от производных:

$$\int_0^{\infty} \exp(-sx) f'(x) dx = \exp(-sx) f(x) \Big|_0^{\infty} + \\ + s \int_0^{\infty} \exp(-sx) f(x) dx.$$

Преобразование Лапласа от  $f(x)$  будем записывать в виде  $\mathcal{L}[f(x), s]$  или  $\mathcal{L}[f(x)]$ , а преобразование Фурье — в виде  $\mathcal{F}[f(x)]$ . Тогда найденное выше соотношение можно записать так:

$$\mathcal{L}[f'(x)] = s\mathcal{L}[f(x)] - f(0). \quad (4.44)$$

Аналогично

$$\mathcal{L}[f''(x)] = s^2\mathcal{L}[f(x)] - sf(0) - f'(0) \quad (4.45)$$

(отметим, что 0 означает на самом деле  $0+$ ). Для преобразования Фурье проинтегрированные части обращаются в нуль и

$$\mathcal{F}[f'(x)] = iy\mathcal{F}[f(x)] \text{ и т. д.} \quad (4.46)$$

## 3. Преобразования от интегралов:

$$\mathcal{L}\left[\int_0^x f(t) dt\right] = \int_0^{\infty} dx \exp(-sx) \int_0^x f(t) dt = \\ = \int_0^{\infty} dt \int_t^{\infty} dx f(t) \exp(-sx) = \frac{1}{s} \int_0^{\infty} dt f(t) \exp(-st).$$

Таким образом,

$$\mathcal{L}\left[\int_0^x f(t) dt\right] = \frac{1}{s} \mathcal{L}[f(t)]. \quad (4.47)$$

Для преобразований Фурье дела обстоят не так просто. Предположим, что  $g(x) = \int f(x) dx$  есть неопределенный интеграл от  $f(x)$ . Тогда из (4.46)  $\mathcal{F}[f(x)] = iy\mathcal{F}[g(x)]$ . Однако отсюда нельзя сразу сделать вывод, что  $\mathcal{F}[g(x)] = \mathcal{F}[f(x)]/iy$ . Почему? Можно ли из рассмотрения уравнения  $xf(x) = g(x)$  заключить, что  $f(x) = g(x)/x$ ? Нет, для точки  $x = 0$  нельзя. Общий результат

есть  $f(x) = g(x)/x + C\delta(x)$ , где  $C$  — произвольная постоянная. Таким образом,

$$\mathcal{F} \left[ \int f(x) dx \right] = \mathcal{F} [f(x)]/iy + C\delta(y). \quad (4.48)$$

Этот произвол также очевиден из того факта, что  $\int f(x) dx$  определен с точностью до произвольной аддитивной постоянной, и

$$\mathcal{F} [C] = 2\pi C\delta(y).$$

#### 4. Сдвиг

$$\begin{aligned} \mathcal{F} [f(x+a)] &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x+a) \exp(-ixy) dx = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \exp[-iy(x-a)] dx. \end{aligned}$$

Поэтому

$$\mathcal{F} [f(x+a)] = \exp(ia y) \mathcal{F} [f(x)]. \quad (4.49)$$

В случае преобразований Лапласа нужно быть более осторожным. Рассмотрим отдельно случаи  $a > 0$  и  $a < 0$ .

При  $a > 0$  функция  $f(x+a)$  показана на рис. 4.8, б.

Так как преобразование Лапласа игнорирует  $f(x)$  при  $x < 0$  (на самом деле предполагает, что функция равна нулю), то мы должны обрезать часть нашей функции, и

$$\begin{aligned} \mathcal{L} [f(x+a)] &= \int_0^{\infty} f(x+a) \exp(-sx) dx = \\ &= \int_a^{\infty} f(x) \exp[-s(x-a)] dx, \end{aligned}$$

так что

$$\mathcal{L} [f(x+a)] = \exp(as) \left\{ \mathcal{L} [f(x)] - \int_0^a f(x) \exp(-sx) dx \right\}, \quad a > 0. \quad (4.50)$$

С другой стороны,  $f(x-a)$  показана на рис. 4.8, в, и

$$\begin{aligned} \mathcal{L} [f(x-a)] &= \int_0^{\infty} f(x-a) \exp(-sx) dx = \\ &= \int_{-a}^{\infty} f(x) \exp[-s(x+a)] dx. \end{aligned}$$

Поэтому

$$\mathcal{L} [f(x - a)] = \exp(-as) \mathcal{L} [f(x)], \quad a > 0. \quad (4.51)$$

5. Умножение на экспоненту.

Легко проверить две следующие формулы:

$$\mathcal{F} [\exp(\alpha x) f(x); y] = \mathcal{F} [f(x); y + i\alpha], \quad (4.52)$$

$$\mathcal{L} [\exp(\alpha x) f(x); s] = \mathcal{L} [f(x); s - \alpha]. \quad (4.53)$$

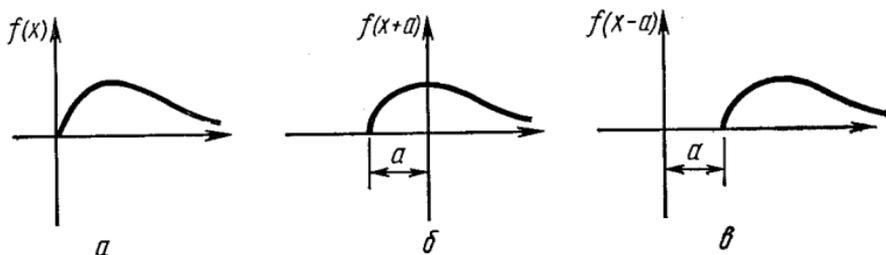


Рис. 4.8. Функция  $f(x)$ , сдвинутая влево,  $f(x + a)$ , и вправо,  $f(x - a)$ .

6. Умножение на степень  $x$ .

Если  $g(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \exp(-ixy) dx$ , то  $g'(y) = -i \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) \times \exp(-ixy) dx$ . Таким образом,

$$\mathcal{F} [x f(x)] = i (d/dy) \mathcal{F} [f(x)]. \quad (4.54)$$

Легко показать, что аналогичный результат справедлив для преобразований Лапласа

$$\mathcal{L} [x f(x)] = -(d/ds) \mathcal{L} [f(x)]. \quad (4.55)$$

7. Теоремы свертки.

Пусть  $f_1(x)$  и  $f_2(x)$  — две произвольные функции. Определим их свертку равенством

$$g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(y) f_2(x-y) dy. \quad (4.56)$$

Чему равно преобразование Фурье такой свертки? Простая замена переменной показывает, что

$$\mathcal{F} [g(x)] = \mathcal{F} [f_1(x)] \mathcal{F} [f_2(x)] \cdot \text{const.} \quad (4.57)$$

Значение константы в (4.57) зависит от нашего выбора, т. е. используем ли мы (4.16) или (4.17) и, если (4.16), то какая из функций  $f(x)$  и  $g(y)$  рассматривается как оригинал и какая — как преобразование Фурье. Читателю предлагается для одного варианта вычислить константу в формуле (4.57). Важность результата состоит в том, что с точностью до некоторой константы фурье-преобразование свертки равно произведению фурье-преобразований «множителей» свертки.

Аналогичный результат справедлив для преобразований Лапласа. Если

$$g(x) = \int_0^x dt f_1(t) f_2(x-t), \quad (4.58)$$

то

$$\mathcal{L}[g(x)] = \mathcal{L}[f_1(x)] \cdot \mathcal{L}[f_2(x)].$$

Получим интересное обратное соотношение для преобразований Лапласа. Предположим,  $\mathcal{L}[f_1] = g_1(s)$  и  $\mathcal{L}[f_2] = g_2(s)$ , причем интегралы Лапласа для  $g_1(s)$  и  $g_2(s)$  существуют соответственно для  $\operatorname{Re} s > \alpha_1$  и  $\operatorname{Re} s > \alpha_2$ . Тогда преобразование Лапласа для произведения  $f_1 f_2$  имеет вид

$$\mathcal{L}[f_1 f_2] = (1/2\pi i) \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} g_1(z) g_2(s-z) dz, \quad (4.59)$$

где путь интегрирования проходит вдоль линии  $\operatorname{Re} z = c$  с  $(\operatorname{Re} s - \alpha_2) > c > \alpha_1$ . Этот результат можно получить, подставляя обратный интеграл Лапласа для  $f_1(z)$  в интеграл  $\mathcal{L}[f_1 f_2]$ .

Соответствующее соотношение для преобразований Фурье имеет вид

$$\mathcal{F}[f_1 f_2] = (1/2\pi) \int_{-\infty}^{\infty} g_1(z) g_2(y-z) dz. \quad (4.60)$$

(Как и раньше, множитель  $1/2\pi$  зависит от выбора преобразований Фурье.)

Рассмотрим теперь несколько примеров применения интегральных преобразований. Общая процедура состоит в «преобразовании» задачи или переформулировании ее через преобразованную функцию. При этом мы надеемся, что в новой форме задачу решить легче.

### Пример.

Найти ток в цепи, показанной на рис. 4.9, если выключатель замыкается в момент времени  $t = 0$ , а начальный заряд конденсатора равен  $Q_0$ :

$$RI + L (dI/dt) + (Q/C) = E_0. \quad (4.61)$$

Строго говоря, нужно написать  $E_0 H(t)$ , где  $H(t)$  — ступенчатая функция (4.32); однако при операциях с преоб-

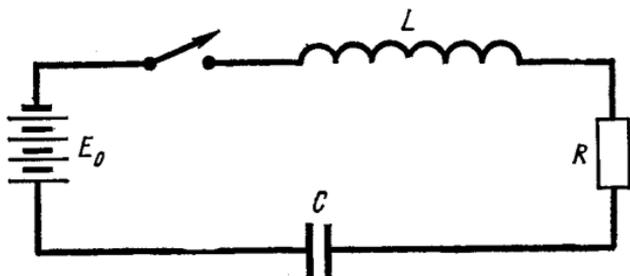


Рис. 4.9. Последовательная  $RLC$ -цепь.

разованиями Лапласа предполагается, что все функции обращаются в нуль при  $t < 0$ .

Так как  $dQ/dt = I$ , то  $Q(t) = Q_0 + \int_0^t I(t') dt'$ , и (4.61) можно записать в виде

$$RI + L \frac{dI}{dt} + \frac{1}{C} \left[ Q_0 + \int_0^t I(t') dt' \right] = E_0.$$

Применим теперь к обеим частям преобразование Лапласа. Положим  $\mathcal{L}[I(t)] = i(s)$ :

$$Ri(s) + L[si(s) - I(0)] + \frac{1}{C} \left[ \frac{Q_0}{s} + \frac{i(s)}{s} \right] = \frac{E_0}{s}.$$

Решение для  $i(s)$  находится с помощью простой алгебры:

$$i(s) = \frac{E_0 - (Q_0/C)}{L} \frac{1}{(s+a)^2 + b^2},$$

где  $a = R/2L$ ,  $b = \sqrt{1/LC - R^2/4L^2}$  [и  $I(0) = 0$ ]. Однако  $\mathcal{L}[\exp(-at) \sin bt] = \frac{b}{(s+a)^2 + b^2}$ . Поэтому

$$I(t) = \frac{E_0 - (Q_0/C)}{L} \cdot \frac{\exp(-at) \sin bt}{b}. \quad (4.62)$$

**Пример.** Рассмотрим связанные маятники, показанные на рис. 4.10. Предположим начальные условия  $x_1 = x_2 = 0$ ,  $\dot{x}_1 = v$ ,  $\dot{x}_2 = 0$  в  $t = 0$ . Уравнения Ньютона имеют вид

$$\left. \begin{aligned} m\ddot{x}_1 &= -\frac{mg}{l}x_1 + k(x_2 - x_1); \\ m\ddot{x}_2 &= -\frac{mg}{l}x_2 + k(x_1 - x_2). \end{aligned} \right\} \quad (4.63)$$

Положим  $\mathcal{L}[x_i(t)] = F_i(s)$ . Тогда преобразования Лапласа

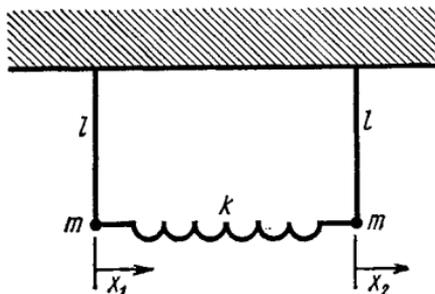


Рис. 4.10. Связанные маятники.

двух дифференциальных уравнений (4.63) суть

$$m(s^2F_1 - v) = -\frac{mg}{l}F_1 + k(F_2 - F_1),$$

$$ms^2F_2 = -\frac{mg}{l}F_2 + k(F_1 - F_2).$$

Нужно решить эту систему алгебраических уравнений относительно  $F_1$  и  $F_2$ . Находим

$$\begin{aligned} F_1 &= \frac{v \left( s^2 + \frac{g}{l} + \frac{k}{m} \right)}{\left( s^2 + \frac{g}{l} + 2\frac{k}{m} \right) \left( s^2 + \frac{g}{l} \right)} = \\ &= \frac{v}{2} \left( \frac{1}{s^2 + \frac{g}{l} + 2\frac{k}{m}} + \frac{1}{s^2 + \frac{g}{l}} \right). \end{aligned}$$

Поэтому

$$x_1(t) = \frac{v}{2} \left( \frac{\sin \sqrt{\frac{g}{l} + 2\frac{k}{m}} t}{\sqrt{\frac{g}{l} + 2\frac{k}{m}}} + \frac{\sin \sqrt{\frac{g}{l}} t}{\sqrt{\frac{g}{l}}} \right).$$

Аналогично вычисляется  $x_2(t)$ . Отметим, что  $\sqrt{g/l + 2k/m}$  и  $\sqrt{g/l}$  — угловые частоты двух нормальных колебаний.

В заключение дадим другой вывод формул связи ВКБ (1.113). Напомним, что эти формулы связывают

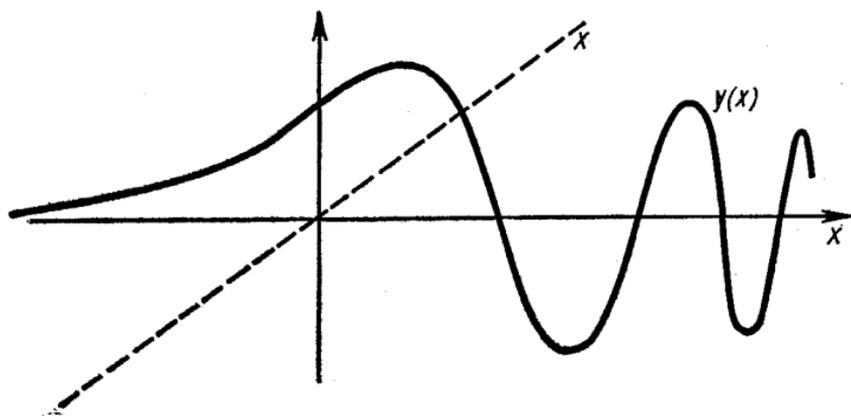


Рис. 4.11. Вид решения уравнения (4.64), экспоненциально затухающего при  $x < 0$ .

экспоненциально малое решение с одной стороны от точки поворота с осциллирующим решением с другой стороны. Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$(d^2y/dx^2) + xy = 0. \quad (4.64)$$

Это уравнение имеет решение, показанное приблизительно

на рис. 4.11. Положим  $g(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} y(x) \exp(-i\omega x) dx$ .

Тогда преобразование Фурье дифференциального уравнения (4.64) имеет вид

$$-\omega^2 g(\omega) + i dg/d\omega = 0,$$

откуда находим  $g(\omega) = A \exp(-i(\omega^3/3))$  ( $A$  — произвольная константа). Таким образом,

$$y(x) = A \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} \exp\left[i\left(\omega x - \frac{\omega^3}{3}\right)\right]. \quad (4.65)$$

Далее опустим несущественную константу  $A/2\pi$ .

К сожалению, этот интеграл нетривиален. Отчасти по этой причине он имеет свое имя — интеграл Эйри. Для применения его к нахождению формулы

связи ВКБ нам нужны лишь асимптотические выражения при больших  $|x|$ , которые можно найти методом перевала (см. разд. 3.6). Отдельно нужно рассматривать два случая  $x \rightarrow \pm \infty$ .

1. Положим  $x \rightarrow +\infty$ . Седловые точки лежат на вещественной оси; мы должны пройти обе точки. Используя обозначения, введенные в разд. 3.6, имеем

$$\begin{aligned} f(\omega) &= i(\omega - \omega^3/3x); \quad f'(\omega) = i(1 - \omega^2/x); \\ f''(\omega) &= -(2i\omega/x); \quad f'(\omega_0) = 0 \Rightarrow \omega_0 = \pm \sqrt{x}; \\ \rho \exp(i\theta) &= \mp 2i/\sqrt{x}; \quad \rho = 2/\sqrt{x}; \quad \theta = \mp \pi/2; \\ \phi &= \mp \pi/4; \quad f(\omega_0) = (\pm 2/3)i\sqrt{x}. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} y(x) &\sim \sum_{\pm} \sqrt{\frac{2\pi\sqrt{x}}{2x}} \exp\left[\pm \frac{2}{3}ix^{3/2}\right] \exp\left[\mp \frac{i\pi}{4}\right]; \\ y(x) &\sim \frac{2\sqrt{\pi}}{x^{1/4}} \cos\left(\frac{2}{3}x^{3/2} - \frac{\pi}{4}\right). \end{aligned} \quad (4.66)$$

2. Положим  $x \rightarrow -\infty$ . Теперь  $-x$  — большой параметр, и

$$\begin{aligned} f(\omega) &= -i\left(\omega - \frac{\omega^3}{3x}\right); \quad f'(\omega) = -i\left(1 - \frac{\omega^2}{x}\right), \\ f''(\omega) &= \frac{2i\omega}{x}, \\ f'(\omega_0) &= 0 \Rightarrow \omega_0 = \pm i\sqrt{-x}. \end{aligned}$$

В этом случае седловые точки лежат на мнимой оси:

$$\begin{aligned} \rho \exp(i\theta) &= \frac{2i}{x}(\pm i\sqrt{-x}) = \frac{\pm 2}{\sqrt{-x}}, \\ \rho &= \frac{2}{\sqrt{-x}}, \quad \theta = \begin{pmatrix} 0 \\ \pi \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Топография поверхности  $u = \operatorname{Re} f(\omega)$  показана на рис. 4.12. Проходится седловая точка  $\omega_2 = -i\sqrt{-x}$  с  $\phi = 0$ . Тогда

$$y(x) \sim \frac{\sqrt{\pi}}{(-x)^{1/4}} \exp\left[-\frac{2}{3}(-x)^{3/2}\right]. \quad (4.67)$$

Мы видим, что обе асимптотические формулы (4.66) и (4.67) представляют не что иное, как соответствующие ВКБ-решения и связаны формулой связи (1.113).

В табл. 4.1 приведен ряд наиболее часто употребляющихся преобразований Лапласа; для расширения этой

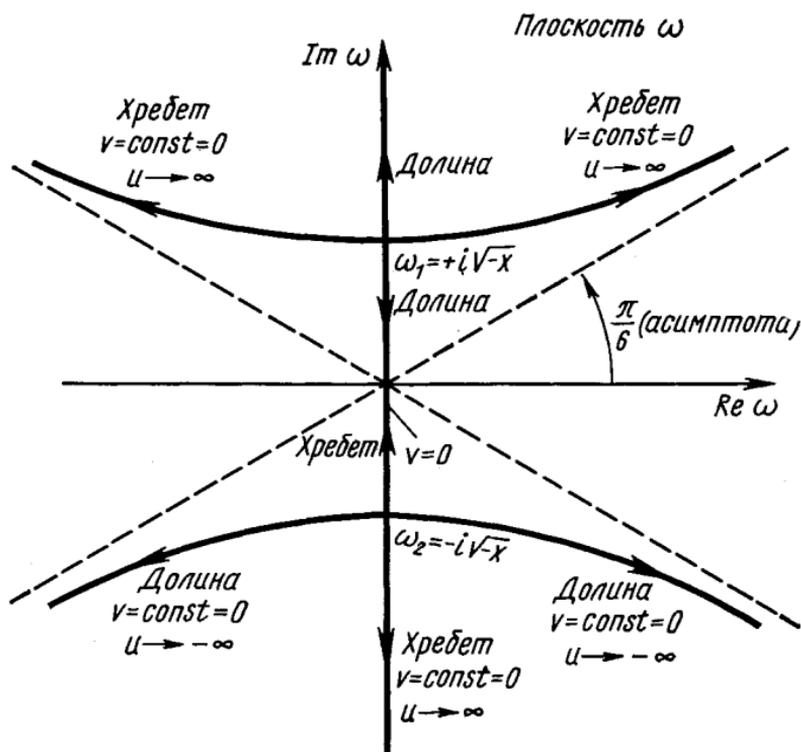


Рис. 4.12. Топография поверхности  $u = \operatorname{Re} f(\omega)$  для функции  $f(\omega) = -i \left[ \omega + \frac{\omega^3}{3(-x)} \right]$  в плоскости  $\omega$  вблизи седловых точек  $\omega_{1,2} = \pm i \sqrt{-x}$ . Если  $\omega = r \exp(i\theta)$ , то  $u = \operatorname{Re} f(\omega) = r \sin \theta + \frac{r^3}{3(-x)} \sin 3\theta$  и  $v = \operatorname{Im} f(\omega) = -r \cos \theta - \frac{r^3}{3(-x)} \cos 3\theta$ .

таблицы можно использовать результаты пунктов 1—7 в начале этого раздела.

ТАБЛИЦА 4.1	
$f(x)$	$F(s) = \int_0^{\infty} \exp(-sx) f(x) dx$
1	1/s
$\delta(x - x_0) \quad (x_0 > 0)$	$\exp(-sx_0)$
$\sin \lambda x$	$\lambda / (s^2 + \lambda^2)$
$\cos \lambda x$	$s / (s^2 + \lambda^2)$
$x^n$	$n! / s^{n+1}$
$\exp(-\lambda x)$	$1 / (s + \lambda)$

ДАЛЬНЕЙШИЕ ПРИМЕНЕНИЯ  
КОМПЛЕКСНЫХ  
ПЕРЕМЕННЫХ

5.1. КОНФОРМНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

Три свойства преобразований  $W = W(z)$ ,  $z = x + iy$ ,  $W = U + iV$  с помощью аналитических функций делают их особенно полезными для решения двумерных задач электростатики, магнитостатики, теплопередачи, гидродинамики, упругости (под двумерной задачей не имеется в виду двумерность физического пространства; предполагается только, что нет зависимости от одной из декартовых координат, скажем  $z$ ).

*Первое свойство:* из дифференциальных уравнений Коши — Римана следует, что

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = 0. \quad (5.1)$$

Таким образом, каждое из  $U$  и  $V$  есть решение двумерного уравнения Лапласа и [может представлять физические величины, удовлетворяющие этому уравнению.

*Второе свойство:* из уравнений Коши — Римана следует, что

$$\frac{\partial U}{\partial x} \cdot \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial y} \cdot \frac{\partial V}{\partial y} = (\text{grad } U) (\text{grad } V) = 0, \quad (5.2)$$

так что векторы  $\text{grad } U$  и  $\text{grad } V$  перпендикулярны друг другу. Эти векторы перпендикулярны соответственно кривым  $U = \text{const}$  и  $V = \text{const}$ , так что последние кривые, подобно предыдущим, также взаимно перпендикулярны.

*Третье свойство:* преобразование конформно. Это означает, что при преобразовании не меняется угол пересечения двух кривых. Этот факт следует из свойства аналитичности:

$$W(z) - W(z_0) \approx W'(z_0)(z - z_0) \text{ для } z \text{ вблизи } z_0. \quad (5.3)$$

Преобразование не является конформным в особой точке преобразования, т. е. в точке, где функция  $W(z)$  или обратная функция  $z(W)$  неаналитичны.

При использовании конформных преобразований ищут такое преобразование, которое дает эквивалентную задачу с более простой конфигурацией границы.

**Пример.**

Найдем решение  $\nabla^2\phi(x, y) = 0$  в первом квадранте с граничными условиями  $\phi = 0$  вдоль осей  $x = 0, y = 0$ . Положим  $\zeta = z^2$ . Тогда первый квадрант  $z$ -плоскости превращается в верхнюю полуплоскость  $\zeta$ -плоскости; граничные условия нашей задачи преобразуются в граничные

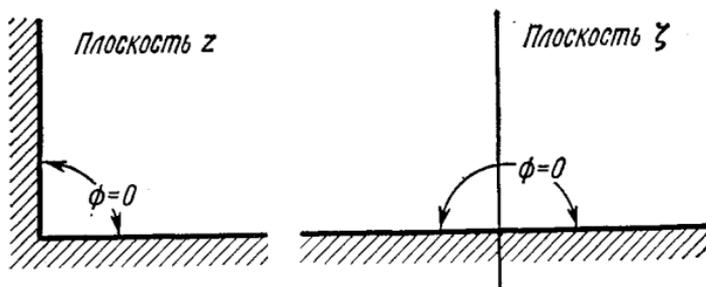


Рис. 5.1. Применение конформного преобразования  $\zeta = z^2$ .

условия на вещественной оси  $\zeta$  (рис. 5.1). Легко найти аналитическую функцию  $\zeta$ , мнимая часть которой равна нулю на вещественной оси, именно  $f(\zeta) = c\zeta$ , где  $c$  — произвольная вещественная константа. Это также аналитическая функция, мнимая часть которой и есть, таким образом, решение исходной задачи

$$\phi = \text{Im } cz^2 = 2cxy. \tag{5.4}$$

Этот пример кажется весьма академическим, хотя решение  $\phi$  может описывать электростатический потенциал вблизи внутреннего угла изогнутого проводящего листа. Однако результат применим к очень важной практической задаче построения «оптических» систем для фокусировки заряженных частиц. Эти фокусирующие системы представляют собой синхротрон с переменным градиентом магнитного поля. Последнее меняется по закону

$$B_x = Cy, \quad B_y = Cx. \tag{5.5}$$

Если решение  $\phi$  — магнитоэстатический потенциал, то получающееся поле  $B = -\nabla\phi$  имеет как раз желаемое свойство. Чтобы создать поле в опыте, поверхность полюса магнита располагают вдоль одной из гиперболических эквипотенциальных поверхностей; на этой поверхности

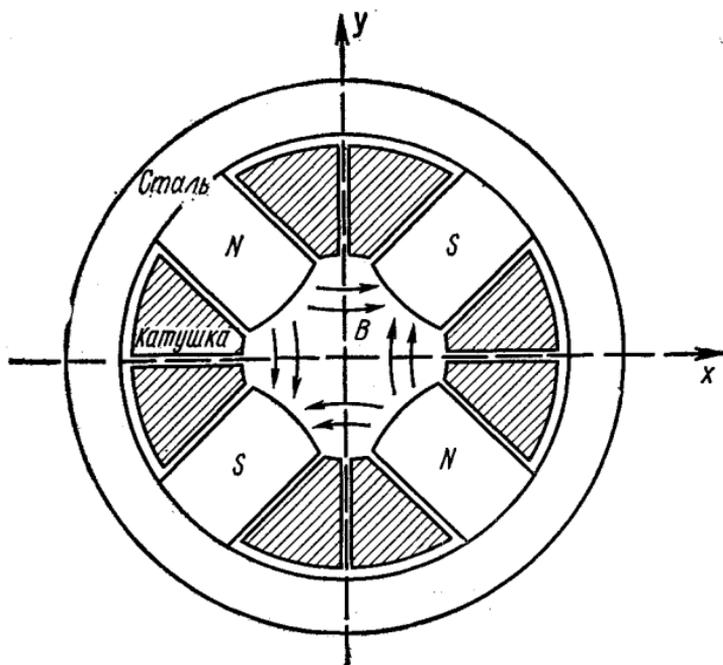


Рис. 5.2. Поперечное сечение квадрупольной магнитной фокусирующей линзы.

Гиперболические полюса создают поле  $B_x = Cy$ ,  $B_y = Cx$ . Частицы движутся перпендикулярно плоскости листа.

создают нужный потенциал. В трех других квадрантах следует симметрично расположить такие же магниты с потенциалом переменного знака. В результате получается так называемый квадрупольный магнит. Он изображен на рис. 5.2. Такой магнит фокусирует частицы, летящие в направлениях  $\pm y$ , и дефокусирует частицы, летящие в направлениях  $\pm x$ \*. Два таких последовательно расположенных магнита, повернутые на  $90^\circ$  друг к дру-

\* Предполагается, что частицы заряжены положительно и движутся перпендикулярно плоскости рисунка. Читатель может проверить фокусирующие и дефокусирующие свойства, используя правило правой руки для сил, действующих на заряды в магнитном поле.

гу относительно их общей оси, могут дать фокусировку в обоих направлениях.

Возвратимся к конформным преобразованиям. Если  $V = \text{Im } f(z)$  представляет физически интересную функцию, удовлетворяющую уравнению Лапласа, то каков смысл  $U$ ? Качественный смысл  $U$  очевиден из того факта, что кривые  $U = \text{const}$  и  $V = \text{const}$  взаимно ортогональны. Например, если  $V$  — электростатический потенциал, то линии поля или линии сил будут идти вдоль кривых  $U = \text{const}$ . Далее, из уравнений Коши — Римана следует

$$U(Q) - U(P) = - \int_P^Q (\nabla V)_n ds, \quad (5.6)$$

где  $P$  и  $Q$  — две любые точки, а интеграл берется по любому пути, соединяющему  $P$  и  $Q$ ;  $ds$  — элемент длины пути;  $(\nabla V)_n$  — компонента градиента, нормальная к пути, причем положительное направление считается вправо, если двигаться от  $P$  к  $Q$ . Аналогично

$$V(Q) - V(P) = \int_P^Q (\nabla U)_n ds. \quad (5.7)$$

Теперь если  $V$  — электростатический потенциал, то  $-(\Delta V)_n$  равен  $E_n$ -компоненте электрического поля, перпендикулярной пути. Если путь идет вдоль поверхности проводника (т. е. вдоль пересечения поверхности проводника с плоскостью  $xy$ ), то  $E_n$  — электрическое поле, перпендикулярное проводящей поверхности и пропорциональное, согласно электростатическому закону Гаусса, плотности поверхностного заряда. Так, в системе МКС плотности поверхностного заряда  $\sigma = \epsilon_0 E_n$ , а в СГС  $\sigma = E_n/4\pi$ .

Интегрируя  $\sigma$  вдоль проводящей поверхности, можно найти полный заряд в этой области (на единицу длины в  $z$ -направлении). Если определить  $C(P, Q)$  как поверхностный заряд между  $P$  и  $Q$  на единицу длины, перпендикулярной плоскости  $xy$ , то (в системе МКС)

$$C(P, Q) = -\epsilon_0 \int_P^Q (\nabla V)_n ds = \epsilon_0 [U(Q) - U(P)]. \quad (5.8)$$

**Пример.** Используем конформное преобразование  $\zeta = a \sin z$  для нахождения потенциала, создаваемого бесконечно длинной проводящей полосой. Ширина полосы —

$2a$ , а ее заряд на единицу длины —  $\lambda$ . Преобразование  $\zeta = a \sin z$  показано на рис. 5.3.

Теперь физическую проблему можно сформулировать как математическую задачу в плоскости  $\zeta$ . Заряженная полоса имеет бесконечную протяженность в направлении, перпендикулярном плоскости  $\zeta$  на рис. 5.3, а по ширине

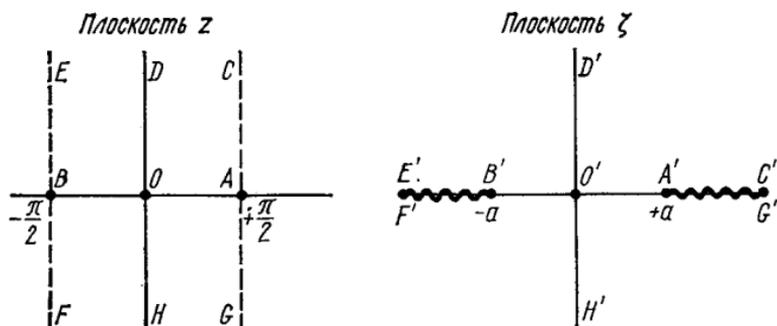


Рис. 5.3. Конформное преобразование  $\zeta = a \sin z$ .

Заметим, что плоскость  $\zeta$  «разрезана» вдоль вещественной оси при  $|\operatorname{Re} \zeta| > a$ . Вертикальная полоса  $-\frac{\pi}{2} \leq \operatorname{Re} z \leq \frac{\pi}{2}$  преобразуется во всю плоскость  $\zeta$ ; то же происходит со всеми другими вертикальными полосами шириной  $\pi$  в плоскости  $z$ .

расположена вдоль вещественной оси от  $-a$  до  $+a$ . Конечно, электростатический потенциал постоянен вдоль полосы; из соображений симметрии ясно, что линии  $O'D'$ ,  $B'E$  и  $A'C'$  направлены вдоль силовых линий, или линий поля. Итак, наша задача состоит в нахождении аналитической функции  $f(\zeta)$ , мнимая часть которой постоянна при  $\zeta$ , лежащих на вещественной оси между  $-a$  и  $+a$ . А вещественная часть  $f(\zeta)$  должна быть постоянна для  $\zeta$ , лежащих на вещественной оси вне этой полосы, а также на мнимой оси. Чтобы найти  $f(\zeta)$ , переформулируем задачу в  $z$ -плоскость. Границы преобразуются, как показано на рисунке, так что задача состоит в нахождении аналитической функции  $f(z)$ , мнимая часть которой постоянна для  $z$  на вещественной оси от  $-\pi/2$  до  $+\pi/2$ , а вещественная часть постоянна вдоль линий  $BE$ ,  $OD$  и  $AC$ . Решение тривиально, а именно  $f = Kz$  ( $K$  вещественным). Следовательно, в плоскости  $\zeta$

$$f(\zeta) = Kz = K \arcsin(\zeta/a). \quad (5.9)$$

Нужно выбрать такое  $K$ , чтобы оно соответствовало данному заряду  $\lambda$ . Если двигаться от точки  $A'$  к точке  $B'$ ,

то  $\operatorname{Re} f = Kx$  увеличивается на  $-K\lambda$ , так что заряд на верхней поверхности полосы равен  $-K\lambda\epsilon_0$ ; следовательно,  $K = -\lambda/2\lambda\epsilon_0$ . Тогда потенциал в плоскости  $\zeta$  равен  $V = (-\lambda/2\lambda\epsilon_0) \operatorname{Im} \operatorname{arcsin}(\zeta/a)$ .

Как выглядят эквипотенциальные поверхности? Отметим, что  $V = -(\lambda/2\lambda\epsilon_0) y$ . Таким образом, если  $\zeta = \xi + i\eta$ , то

$$\begin{aligned}\xi &= a \sin x \operatorname{ch} y = a \sin x \operatorname{ch}(2\lambda\epsilon_0 V/\lambda); \\ \eta &= a \cos x \operatorname{sh} y = -a \cos x \operatorname{sh}(2\lambda\epsilon_0 V/\lambda).\end{aligned}$$

Исключая  $x$  из этих двух уравнений, имеем

$$\frac{\xi^2}{a^2 \operatorname{ch}^2 \frac{2\lambda\epsilon_0 V}{\lambda}} + \frac{\eta^2}{a^2 \operatorname{sh}^2 \frac{2\lambda\epsilon_0 V}{\lambda}} = 1.$$

Эквипотенциальные поверхности представляют собой эллипсы.

## 5.2. ДИСПЕРСИОННЫЕ СООТНОШЕНИЯ

Интегральная формула Коши отражает существенный факт, что значения аналитической функции  $f(z)$  вдоль замкнутого контура внутри ее регулярной области определяют значения  $f(z)$  в любой точке внутри этого контура. Именно

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)} d\zeta,$$

где  $C$  — любой замкнутый контур, внутри которого и на котором  $f(z)$  регулярна, а  $z$  — любая точка внутри  $C$ .

Формула Коши приводит к так называемым дисперсионным соотношениям, если применить ее описанным ниже способом к определенным функциям, имеющим физический смысл на части вещественной оси. Это название обязано тому факту, что соотношения такого рода были получены впервые Крамерсом и Кронигом в теории дисперсии оптических и рентгеновских лучей. В оптике дисперсионное соотношение представляет собой интегральную связь между преломляющей и поглощающей частями коэффициента преломления при различных частотах. Так как эти части являются соответственно вещественной и мнимой частями комплексного показателя преломления, то термин «дисперсионное соотношение» используется для любого подобного интегрального соот-

ношения между вещественной и мнимой частями функции комплексной переменной.

Сейчас дисперсионные соотношения имеют обширные применения в теории взаимодействий элементарных частиц, где они применяются к амплитудам рассеяния. Это приложение тесно связано с их первоначальным применением, так как показатель преломления света тесно связан с амплитудой рассеяния. Другие применения обнаружались при анализе электрических цепей.

Рассмотрим сначала элементарную ситуацию, когда  $f(z)$  не имеет особенностей в верхней полуплоскости и  $f(z) \rightarrow 0$  при  $|z| \rightarrow \infty$ . Отметим кратко физическую сущность этого предположения.

«Отклик»  $\phi(t)$  линейной системы на «возмущение»  $g(t)$  можно записать в виде  $\phi(t) = \int dt' K(t-t') g(t')$ , где  $K(t)$  — функция Грина системы (см. разд. 9.4). Требование причинности, состоящее

в невозможности возникновения «отклика» раньше «причины», означает, что  $K(t) = 0$  при  $t < 0$ . Рассматриваемые функции  $f(z)$  представляют собой преобразования Фурье таких функций Грина (см. разд. 4.2), а условие  $K(t) = 0$  при  $t < 0$  означает, что преобразование Фурье

$f(z) = \int dt \exp(itz) K(t)$  не имеет особенностей при  $\text{Im } z > 0$  и что  $f(z) \rightarrow 0$  при  $|z| \rightarrow \infty$  в верхней полуплоскости  $z$ .

Применим далее формулу Коши, взяв в качестве контура вещественную ось и полуокружность большого радиуса в верхней полуплоскости (рис. 5.4). Интеграл по полуокружности обращается в нуль, так как при  $R \rightarrow \infty$

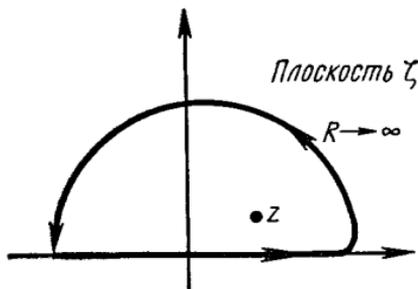


Рис. 5.4. Контур, используемый для получения дисперсионных соотношений (5.12).

$$\left| \int_{\text{полуокруг}} \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)} d\zeta \right| \leq |f(\zeta)|_{\text{макс}} \int \frac{R \exp(i\theta) i d\theta}{R \exp(i\theta)} = \\ = \pi i |f(\zeta)|_{\text{макс}} \rightarrow 0,$$

где  $|f(\zeta)|_{\text{макс}}$  — максимальная величина  $f(\zeta)$  на полуокружности, обращаемая в нуль при  $R \rightarrow \infty$ . Таким

образом,

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\text{Веществ. ось}} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)} d\zeta, \quad \text{Im } z > 0. \quad (5.10)$$

Далее предположим, что представляющая физический интерес функция есть  $f(z)$  на вещественной оси или, в случае если имеется точка ветвления, предел  $f(z)$  при  $z$ , стремящемся к вещественной оси сверху. Обозначая эту функцию  $F(x)$ , имеем

$$F(x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} f(x + i\varepsilon), \quad (5.11)$$

где  $\varepsilon$  положительно. Тогда из (5.10) следует, что

$$\begin{aligned} 2\pi i F(x) &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x')}{x' - x - i\varepsilon} dx' = \\ &= P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{F(x')}{x' - x} dx' + \pi i F(x), \end{aligned}$$

где  $P$  — символ главного значения. Таким образом,

$$\left. \begin{aligned} F(x) &= \frac{1}{\pi i} P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{F(x')}{x' - x} dx'; \\ \text{Re } F(x) &= \frac{1}{\pi} P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\text{Im } F(x')}{x' - x} dx'; \\ \text{Im } F(x) &= -\frac{1}{\pi} P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\text{Re } F(x')}{x' - x} dx'. \end{aligned} \right\} \quad (5.12)$$

Это и есть дисперсионные соотношения для физически интересной функции  $F(x)$ . Эти соотношения записаны в форме, в большинстве случаев неудобной для сравнения с экспериментом. Причина этого состоит в том, что переменная обычно имеет физический смысл только при  $x > 0$  или даже  $x > x_1 \geq 0$ , так что вышеприведенные интегралы содержат большую «нефизическую» область. Например,  $x$  может быть энергией рассеиваемой частицы, которая не меньше массы покоя. В этой ситуации можно использовать некоторую симметрию  $f(z)$ , чтобы связать интеграл по нефизической области и интеграл по физической области.

Простой случай возникает, когда физическая область  $x$  есть  $x \geq 0$ , а  $f(z)$  имеет «четную» или «нечетную» симметрию, определяемую равенством  $f(-z) = \pm f^*(z^*)$ . Для четной симметрии имеем

$$F(x) = \frac{1}{\pi i} P \int_{-\infty}^0 \frac{F^*(x') dx'}{x' + x} + \frac{1}{\pi i} P \int_0^{\infty} \frac{F(x')}{x' - x} dx';$$

$$\operatorname{Re} F(x) = \frac{2}{\pi} P \int_0^{\infty} \frac{x' \operatorname{Im} F(x')}{(x')^2 - x^2} dx'; \quad (5.13)$$

$$\operatorname{Im} F(x) = -\frac{2}{\pi} P \int_0^{\infty} \frac{x \operatorname{Re} F(x')}{(x')^2 - x^2} dx'. \quad (5.14)$$

Аналогичные результаты получаются в случае нечетной симметрии. Такой вид имеют оптические дисперсионные соотношения, причем  $x$  — оптическая частота, а  $F(x)$  — коэффициент преломления.

До сих пор мы концентрировали внимание на дисперсионных соотношениях в историческом плане. Связанный с этим вопрос состоит в том, каким способом можно однозначно определить аналитические функции по их особенностям и поведению на бесконечности. Вдоль разреза требуемая информация — это просто скачок на разрезе, т. е. разность значений функции на противоположных сторонах разреза.

Некоторые из условий, необходимых для возможности такого восстановления, пояснены следующими примерами.

**Пример.** Предположим, есть следующая информация о функции  $f(z)$ :

1)  $f(z)$  аналитична всюду, кроме полюса в точке  $z = 0$  с вычетом 1 и корневых точек ветвления от  $+1$  до  $+\infty$  и от  $-1$  до  $-\infty$  вдоль вещественной оси;

2)  $f(z) \rightarrow 0$  при  $|z| \rightarrow \infty$ ;

3)  $f(z)$  вещественна на вещественной оси от  $-1$  до  $+1$ .

Из принципа симметрии Шварца следует, что  $f(z^*) = f^*(z)$ .

Теперь применим формулу Коши, выбрав контур, показанный на рис. 5.5. Как и в предыдущем примере, интеграл вдоль большой полуокружности обращается в нуль при  $R \rightarrow \infty$ . Предположим, что вблизи точек ветвления  $\pm 1$  функция  $f(z)$  ведет себя так, что интегралы по двум маленьким окружностям вокруг этих точек также

обращаются в нуль. Тогда

$$2\pi i f(z) = 2\pi i \left( \frac{1}{z} \right) + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[ \int_1^{\infty} \frac{f(x' + i\varepsilon) dx'}{x' + i\varepsilon - z} - \int_1^{\infty} \frac{f(x' - i\varepsilon) dx'}{x' - i\varepsilon - z} + \int_{-\infty}^{-1} \frac{f(x' + i\varepsilon) dx'}{x' + i\varepsilon - z} - \int_{-\infty}^{-1} \frac{f(x' - i\varepsilon) dx'}{x' - i\varepsilon - z} \right].$$

Комбинируя первые два и последние два интеграла, мы видим, что в правую часть входит скачок  $f(z)$  на разрезе,

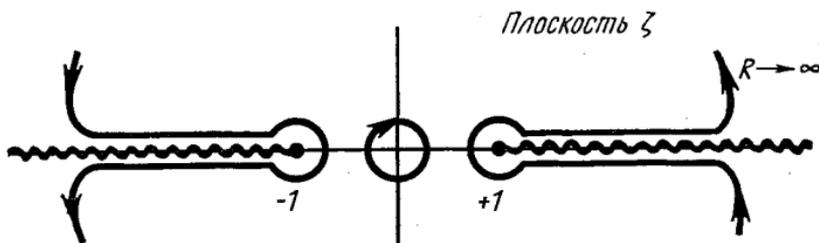


Рис. 5.5. Контур интегрирования.

о чем говорилось выше. В этом примере скачок обладает симметрией отражения  $f(x' - i\varepsilon) = f^*(x' + i\varepsilon)$ , откуда  $f(x' + i\varepsilon) - f(x' - i\varepsilon) = 2i \operatorname{Im} f(x' + i\varepsilon)$ . Таким образом,

$$f(z) = \frac{1}{z} + \frac{1}{\pi} \int_1^{\infty} \frac{\operatorname{Im} F(x')}{x' - z} dx' + \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{-1} \frac{\operatorname{Im} F(x')}{x' - z} dx', \quad (5.15)$$

где  $F(x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} f(x + i\varepsilon)$ , как и выше. Тем самым функция  $f(z)$  представлена через ее особенности.

Если  $F(x)$  — функция, представляющая физический интерес, то для нее можно написать дисперсионное соотношение, переходя к пределу  $z = x + i\varepsilon \rightarrow x$ :

$$F(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{\pi} P \int_1^{\infty} \frac{\operatorname{Im} F(x')}{x' - x} dx' + \frac{1}{\pi} P \int_{-\infty}^{-1} \frac{\operatorname{Im} F(x')}{x' - x} dx' + \frac{1}{\pi} \pi i \operatorname{Im} F(x).$$

Если  $|x| > 1$ , последний член возникает от особенности в одном из интегралов. Если  $|x| < 1$ , то  $\operatorname{Im} F(x) = 0$  по предположению, и включение последнего члена не при-

водит к ошибкам. В любом случае находим

$$\operatorname{Re} F(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{\pi} P \int_{-\infty}^{-1} \frac{\operatorname{Im} F(x') dx'}{x' - x} + \frac{1}{\pi} P \int_1^{\infty} \frac{\operatorname{Im} F(x') dx'}{x' - x}. \quad (5.16)$$

Посредством этой процедуры мы не получаем «другого» дисперсионного соотношения, выражающего  $\operatorname{Im} F(x)$  через интеграл от  $\operatorname{Re} F(x)$ .

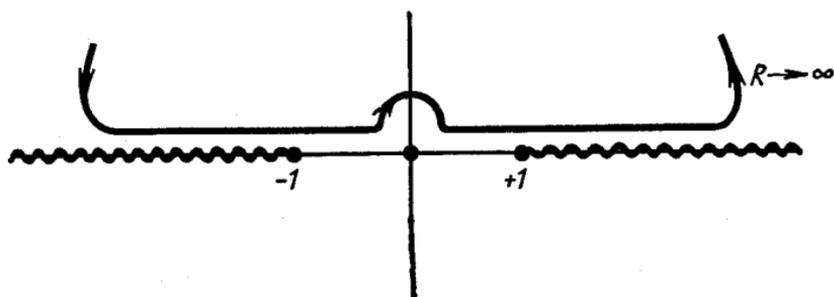


Рис. 5.6. Контур интегрирования.

Если физическая область переменной  $x$  есть  $x > 1$ , нам нужен еще принцип симметрии, чтобы связать  $\operatorname{Im} F(x)$  для  $x < -1$  с  $\operatorname{Im} F(x)$  при  $x > 1$ . Это соотношение симметрии вытекает из физики задачи.

При получении представления (5.15) был использован выбор специального контура. Однако дисперсионное соотношение (5.16) можно также получить, используя формулу Коши вдоль контура, показанного на рис. 5.6:

$$2\pi i f(z) = P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x')}{x' - z} dx' - \pi i \left( \frac{1}{-z} \right).$$

Положим  $z = x + i\varepsilon$  и  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Тогда

$$2F(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{\pi i} \left[ P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{F(x') dx'}{x' - x} + \pi i F(x) \right],$$

$$F(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{\pi i} P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{F(x') dx'}{x' - x}. \quad (5.17)$$

Этот результат переходит в (5.16), если взять вещественную часть.

**Пример.** Найдем функцию  $f(z)$ , имеющую следующие свойства:

1)  $f(z)$  аналитична всюду, за исключением корневой точки ветвления от  $z = 0$  до  $z = \infty$  вдоль вещественной оси и простого полюса в точке  $z = -1$  с вычетом 1;

2)  $f(z) \rightarrow 0$  при  $|z| \rightarrow \infty$ ;

3)  $f(z)$  вещественна на отрицательной вещественной оси;

4) при  $x \rightarrow 0$   $\text{Im } f(x + i\epsilon) = 1/(1 + x^2)$ .

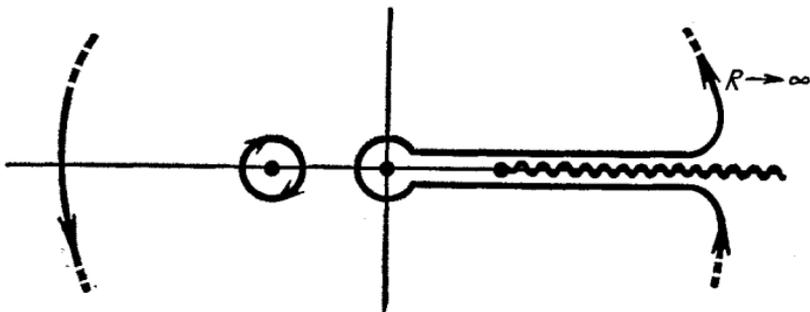


Рис. 5.7. Контур интегрирования.

Применим формулу Коши, выбирая контур, показанный на рис. 5.7. Результат можно написать, используя предыдущий пример. Вычисляя интеграл, находим

$$\begin{aligned}
 f(z) &= \frac{1}{z+1} + \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{dx'}{(1+x'^2)(x'-z)} = \\
 &= \frac{1}{z+1} - \frac{1}{\pi} \frac{\ln z}{1+z^2} - \frac{z/2-i}{1+z^2}.
 \end{aligned} \tag{5.18}$$

С многозначной функцией  $\ln z$  требуется небольшая осторожность. Ответ, приведенный в (5.18), предполагает, что функция  $\ln z$  вещественна на верхней стороне разреза.

Закончим этот раздел описанием модификаций, которые можно сделать для нахождения дисперсионных соотношений для функции, не удовлетворяющей условию  $f(z) \rightarrow 0$  при  $|z| \rightarrow \infty$ .

Если  $(1/z)f(z) \rightarrow 0$  при  $|z| \rightarrow \infty$  и  $(1/z)f(z)$ , кроме того, удовлетворяет другим условиям, поставленным в приведенных выше примерах, то дисперсионное соотношение для  $f(z)$  можно получить из дисперсионного соотношения для  $(1/z)f(z)$ .

Конечно, множитель  $1/(z - x_0)$  эквивалентен  $1/z$ . Полюс в точке  $z = x_0$ , вводимый этим множителем [или полюс, уже имеющийся в  $f(z)$ ], можно устранить вычитанием полюса в той же точке и с тем же вычетом. Например, дисперсионное соотношение для функции  $[f(z) - f(x_0)]/(z - x_0)$ , соответствующее (5.12), имеет вид

$$\operatorname{Re} \left\{ \frac{1}{x - x_0} [F(x) - F(x_0)] \right\} = \frac{1}{\pi} P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{Im} F(x') - \operatorname{Im} F(x_0)}{(x' - x_0)(x' - x)} dx'. \quad (5.19)$$

Вообще говоря,  $\operatorname{Im} F(x_0) = 0$ , и в этом случае

$$\operatorname{Re} F(x) = \operatorname{Re} F(x_0) + \frac{x - x_0}{\pi} P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{Im} F(x')}{(x' - x_0)(x' - x)} dx'. \quad (5.20)$$

Это выражение называется дисперсионным соотношением с вычитанием. Как легко видеть из приведенного примера, вычитательная процедура улучшает сходимость дисперсионного интеграла.

# ГЛАВА 6

## ВЕКТОРЫ И МАТРИЦЫ

### 6.1. ЛИНЕЙНЫЕ ВЕКТОРНЫЕ ПРОСТРАНСТВА

Общеизвестно использование обычных трехмерных векторов для описания таких величин, как положение, скорость, сила и т. д. Дадим следующее определение линейного векторного пространства:

Л и н е й н о е в е к т о р н о е п р о с т р а н с т в о — это система объектов (векторов)  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$ ,  $\mathbf{c}$ , ..., подчиняющихся двум операциям:

1) сложение коммутативно и ассоциативно:

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{a} + \mathbf{b} &= \mathbf{b} + \mathbf{a}; \\ (\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c} &= \mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c}); \end{aligned} \right\} \quad (6.1)$$

2) умножение на константу (скаляр) дистрибутивно и ассоциативно:

$$\left. \begin{aligned} \lambda (\mathbf{a} + \mathbf{b}) &= \lambda \mathbf{a} + \lambda \mathbf{b}; \\ \lambda (\mu \mathbf{a}) = (\lambda \mu) \mathbf{a}; \quad (\lambda + \mu) \mathbf{a} &= \lambda \mathbf{a} + \mu \mathbf{a}. \end{aligned} \right\} \quad (6.2)$$

Кроме того, предположим: а) существование такого нуль-вектора  $\mathbf{0}$ , что для всех  $\mathbf{a}$

$$\mathbf{a} + \mathbf{0} = \mathbf{a}; \quad (6.3)$$

б) умножение на скаляр 1 не изменяет любой вектор,  $1\mathbf{a} = \mathbf{a}$ , и, наконец, в) для любого  $\mathbf{a}$  существует вектор  $-\mathbf{a}$ , так что

$$\mathbf{a} + (-\mathbf{a}) = \mathbf{0}. \quad (6.4)$$

Систему векторов  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$ , ...,  $\mathbf{u}$  называют л и н е й н о н е з а в и с и м о й, если не существует никакого уравнения

$$\lambda \mathbf{a} + \mu \mathbf{b} + \dots + \sigma \mathbf{u} = \mathbf{0}, \quad (6.5)$$

кроме тривиального случая  $\lambda = \mu = \dots = \sigma = 0$ ,

Если в определенном векторном пространстве существует  $n$  линейно независимых векторов, но нет ни одной системы  $n + 1$  линейно независимых векторов, то пространство называют  $n$ -мерным. В этой главе рассмотрены в основном конечномерные пространства и лишь в конце кратко исследованы бесконечномерные пространства.

Пусть  $e_1, e_2, \dots, e_n$  — система  $n$  линейно независимых векторов в  $n$ -мерном векторном пространстве. Тогда если  $x$  — произвольный вектор пространства, то существует соотношение  $\lambda e_1 + \mu e_2 + \dots + \sigma e_n + \tau x = 0$ , причем не все константы равны нулю, и в частности  $\tau \neq 0$ . Таким образом,  $x$  можно записать как линейную комбинацию  $e_i$ :

$$x = \sum_{i=1}^n x_i e_i. \quad (6.6)$$

Говорят, что векторы  $e_i$  образуют базис, или координатную систему, а числа  $x_i$  — компоненты  $x$  в этой системе. Векторы  $e_i$  называют базисными.

## 6.2. ЛИНЕЙНЫЕ ОПЕРАТОРЫ

Рассмотрим линейную векторную функцию вектора, т. е. правило линейной связи каждого вектора  $x$  с вектором  $\phi(x)$

$$\phi(\lambda a + \mu b) = \lambda \phi(a) + \mu \phi(b). \quad (6.7)$$

Достаточно знать  $n$  векторов  $\phi(e_i)$ , которые удобно записывать через базис  $e_i$ , т. е.

$$\phi(e_i) = \sum_j A_{ji} e_j, \quad (6.8)$$

где  $A_{ji}$  —  $j$ -я компонента вектора  $\phi(e_i)$ .

Рассмотрим теперь произвольный вектор  $x$ . Пусть  $\phi(x) = y$ , тогда  $y = \phi\left(\sum_i x_i e_i\right) = \sum_i x_i \sum_j A_{ji} e_j$ . Следовательно, компоненты векторов  $x$  и  $y$  связаны соотношением

$$y_j = \sum_i A_{ji} x_i. \quad (6.9)$$

Полученные соотношения можно изобразить другим способом. Говорят, что связь векторов  $y$  и  $x$  обеспечивает

ся линейным оператором  $A$ , действующим на  $x$ . Символически \* можно написать

$$y = Ax. \quad (6.10)$$

Числа  $A_{ij}$  называются компонентами линейного вектора  $A$  (или векторной функции  $\phi$ ) в системе координат  $e_i$ . А именно из (6.8) находим, что  $A_{ij}$  —  $i$ -я компонента вектора  $Ae_j$ .

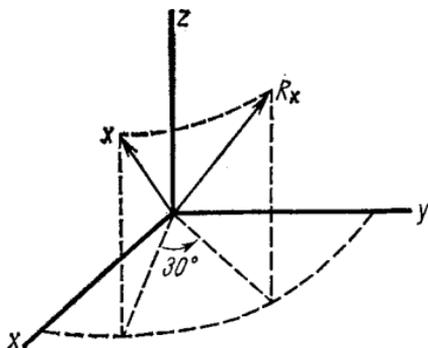


Рис. 6.1. Результат действия обычного оператора вращения.

Наряду с векторами линейный оператор часто имеет физический смысл, не зависящий от выбранной системы координат, и его можно описать, не обращаясь к конкретной системе.

**Пример.** Смысл оператора обычного вращения можно пояснить следующим образом:  $Rx$  — вектор, полученный поворотом  $x$  (скажем, на  $30^\circ$ ) вокруг вертикальной оси в положительном направлении (правило правой руки). Эта операция изображена на рис. 6.1. Координатная система совсем не обязательна для определения оператора, так как смысл понятия «вертикальный» не связан с координатными системами.

Сумма и произведение линейных операторов, а также произведение скалярного числа на оператор определяются соотношениями:

$$(A + B)x = Ax + Bx; \quad (6.11)$$

$$(AB)x = A(Bx); \quad (6.12)$$

$$(\lambda A)x = \lambda(Ax). \quad (6.13)$$

В общем случае  $AB \neq BA$ . Если, однако, равенство соблюдается, то говорят, что  $A$  и  $B$  коммутируют.

\* Символически оператор изображается обычным шрифтом, например  $A$ . Далее, в разд. 6.3 буква  $A$  использована также для обозначения матрицы, представляющей этот оператор. Из контекста должно быть ясно, какой смысл имеет символ в данном уравнении.

Нулевой и единичный операторы имеют очевидные свойства, а именно

$$0x = 0 \text{ и } 1x = x \quad (6.14)$$

для любого вектора  $x$  в нашем пространстве. Два оператора  $A$  и  $B$  равны, если для любого вектора  $x$   $Ax = Bx$ . Наконец, если существует оператор  $A^{-1}$  со свойствами

$$AA^{-1} = A^{-1}A = 1, \quad (6.15)$$

то  $A^{-1}$  называется обратным оператором по отношению к  $A$ . Об операторах, имеющих обратные, говорят как о невырожденных операторах.

В проведенном анализе, в частности в уравнении (6.8), предполагалось, что вектор  $\phi(x) = Ax$  принадлежит тому же пространству, что и вектор  $x$ . Это совсем не обязательно, что видно из следующего элементарного примера.

**Пример.** Рассмотрим пространство трехмерных радиус-векторов  $x$  и обычную систему декартовых координат  $x, y, z$  (см. рис. 6.1). Определим проекционный оператор  $P$  так, что  $Px$  — проекция  $x$  на плоскость  $xy$ , т. е.  $Px$  имеет те же самые координаты  $x$  и  $y$ , что и  $x$ , но нулевую  $z$ -компоненту. Пространство векторов  $Px$  двумерно и, таким образом, отличается от пространства векторов  $x$  \*. Ясно также, что этот оператор  $P$  не имеет обратного.

Если  $\phi(x)$  находится в другом пространстве, чем  $x$ , то единственное изменение в проведенном выше анализе состоит в том, что  $\phi(e_i)$  нужно выразить через базис  $f_j$  в  $\phi$ -пространстве. Тогда уравнение (6.8) приобретает вид

$$\phi(e_i) = \sum_j A_{ji} f_j. \quad (6.16)$$

Теперь компоненты  $A_{ji}$  оператора  $A$  относятся к двум базисам  $e_i$  и  $f_j$ . Ясно, что оба пространства могут иметь различную размерность, как и в приведенном выше примере. Если это так, то оператор  $A$  не может иметь обратного. Этот факт очевиден из примера. В общем случае доказательство следует из рассмотрения матриц.

---

\* Двумерное пространство векторов  $Px$  можно, конечно, рассматривать как подпространство исходного пространства векторов  $x$ . В общем случае это не обязательно так.

### 6.3. МАТРИЦЫ

Совокупность введенных выше чисел  $A_{ij}$  можно рассматривать как матрицу

$$A = \begin{pmatrix} A_{11}A_{12}\dots A_{1n} \\ A_{21}A_{22}\dots A_{2n} \\ \dots \dots \dots \\ A_{m1}A_{m2}\dots A_{mn} \end{pmatrix}. \quad (6.17)$$

Числа  $A_{ij}$  называют элементами матрицы.

В общем случае матрица есть прямоугольная таблица, составленная из чисел, подчиняющихся определенным правилам алгебры. Можно легко найти требуемые правила, если в векторных пространствах матрицы должны представлять линейные операторы. Например, в данной координатной системе для операторных уравнений (6.11) — (6.13)  $j$ -е компоненты имеют вид

$$\begin{aligned} \sum_i (A + B)_{ji} x_i &= \sum_i A_{ji} x_i + \sum_i B_{ji} x_i; \\ \sum_i (AB)_{ji} x_i &= \sum_l A_{jl} (Bx)_l = \sum_{li} A_{jl} B_{li} x_i; \\ \sum_i (\lambda A)_{ji} x_i &= \lambda \sum_i A_{ji} x_i. \end{aligned}$$

Так как  $x$  произволен, то отсюда непосредственно получаются следующие правила для сложения, перемножения матриц и умножения их на константу:

$$(A + B)_{ji} = A_{ji} + B_{ji}; \quad (6.18)$$

$$(AB)_{ji} = \sum_l A_{jl} B_{li}; \quad (6.19)$$

$$(\lambda A)_{ji} = \lambda A_{ji}. \quad (6.20)$$

Из этих соотношений наименее тривиально равенство (6.19). Относительно него заметим следующее:

1. Умножение матриц не коммутативно;  $AB$  не обязательно равно  $BA$ .

2.  $ji$ -й элемент  $AB$  есть сумма произведений элементов  $j$ -й строки  $A$  на элементы  $i$ -го столбца  $B$ .

3. Если произведение  $AB$  определять согласно (6.19), то число столбцов в  $A$  должно равняться числу строк в  $B$ .

Все элементы нулевой матрицы равны нулю; элементы единичной матрицы равны  $\delta_{ij}$ , т. е.  $\delta$ -символу Кронекера,

который был определен из уравнения (4.13). Иными словами, матрица  $1$  диагональна с диагональными элементами, равными единице.

Для обратной матрицы  $A^{-1}$  имеем условия

$$A^{-1}A = AA^{-1} = 1, \quad (6.21)$$

соответствующие операторным уравнениям в той же форме. Они могут удовлетворяться только в том случае, если  $A$  — квадратная матрица с ненулевым детерминантом. В этом случае

$$(A^{-1})_{ij} = \frac{\text{минор } A_{ji}}{\det A}. \quad (6.22)$$

Тогда

$$(AA^{-1})_{ij} = \sum_k A_{ik} (A^{-1})_{kj} = \sum_k A_{ik} \frac{\text{минор } A_{jk}}{\det A} = \delta_{ij}$$

и то же самое для произведения  $A^{-1}A$ , откуда следуют условия (6.21).

Ряд матриц, тесно связанных с данной матрицей  $A$ , приведен в табл. 6.1.

ТАБЛИЦА 6.1

Матрица	Компоненты	Пример
$A$	$A_{ij}$	$\begin{pmatrix} 1 & i \\ 1+i & 2 \end{pmatrix}$
Транспонированная $\tilde{A}$	$(\tilde{A})_{ij} = A_{ji}$	$\begin{pmatrix} 1 & 1+i \\ i & 2 \end{pmatrix}$
Комплексно сопряженная $A^*$	$(A^*)_{ij} = (A_{ij})^*$	$\begin{pmatrix} 1 & -i \\ 1-i & 2 \end{pmatrix}$
Эрмитово сопряженная $A^+ = (\tilde{A})^*$	$(A^+)_{ij} = (A_{ji})^*$	$\begin{pmatrix} 1 & 1-i \\ -i & 2 \end{pmatrix}$
Обратная $A^{-1}$ (только квадратные матрицы с детерминантом $\neq 0$ )	$(A^{-1})_{ij} = \frac{\text{минор } A_{ji}}{\det A}$	$\begin{pmatrix} 2 & -i \\ -1-i & 1 \end{pmatrix} \frac{1}{3-i}$

Дадим ряд дальнейших определений:  $A$  вещественна, если  $A^* = A$ ; симметрична, если  $\tilde{A} = A$ ; антисимметрична, если  $\tilde{A} = -A$ ; эрмитова, если  $A^+ = A$ ; ортогональна, если  $A^{-1} = \tilde{A}$ ; унитарна, если  $A^{-1} = A^+$ ; диагональ-

на, если  $A_{ij} = 0$  для  $i \neq j$ ; идемпотентна, если  $A^2 = A$ .

След, или шнур, квадратной матрицы  $A$  есть сумма ее диагональных элементов:  $\text{Sp } A = \sum_i A_{ii}$ .

Приведем несколько соотношений для произведений квадратных матриц, которые часто используются и могут быть легко проверены:

$$\left. \begin{aligned} (ABC)^{-1} &= C^{-1}B^{-1}A^{-1} \quad (\text{если существуют все} \\ &\quad \text{обратные матрицы}); \\ (\overline{ABC}) &= \tilde{C}\tilde{B}\tilde{A}, \quad \text{Sp}(AB) = \text{Sp}(BA); \\ \det(AB) &= (\det A) \cdot (\det B) = \det(BA). \end{aligned} \right\} \quad (6.23)$$

В заключение подчеркнем, что иногда для упрощения определенных алгебраических соотношений (и расчетов) матрицы удобно подразделять на субматрицы, или блоки.

**Пример.** Если матрицы  $A$  и  $B$  подразделить следующим способом:

$$A = \left( \begin{array}{cc|ccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ \hline a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55} \end{array} \right) = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}, \quad (6.24)$$

$$B = \left( \begin{array}{cc|ccc} b_{11} & b_{12} & b_{13} & b_{14} & b_{15} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & b_{24} & b_{25} \\ \hline b_{31} & b_{32} & b_{33} & b_{34} & b_{35} \\ b_{41} & b_{42} & b_{43} & b_{44} & b_{45} \\ b_{51} & b_{52} & b_{53} & b_{54} & b_{55} \end{array} \right) = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix}, \quad (6.25)$$

то они имеют вид матриц  $2 \times 2$  из блоков, причем элементы  $A_{ij}$  и  $B_{ij}$  также являются матрицами. Легко увидеть, что правильный результат умножения матриц  $AB$  получается при умножении блоков матриц по обычному правилу:

$$\begin{aligned} AB &= \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} A_{11}B_{11} + A_{12}B_{21} & A_{11}B_{12} + A_{12}B_{22} \\ A_{21}B_{11} + A_{22}B_{21} & A_{21}B_{12} + A_{22}B_{22} \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (6.26)$$

При этом должны иметь смысл все произведения матриц, содержащиеся в элементах последней матрицы. Это справедливо в том случае, если первоначальное разделение столбцов в первой матрице совпадает с разделением строк во второй. Следовательно, указанное в примере разделение непригодно для произведения  $BA$  при вычислении его через матричные блоки  $2 \times 2$ . (Читателю предлагается определить, есть ли другое деление матрицы  $B$ , которое позволяло бы вычислить оба произведения  $AB$  и  $BA$ .)

#### 6.4. ПРЕОБРАЗОВАНИЯ КООРДИНАТ

Как мы видели, в данной системе координат линейный оператор представляется матрицей. Правая часть уравнения (6.9)  $y_j = \sum_i A_{ji} x_i$  есть частный случай матричного произведения  $Ax$ , в котором стоящая справа матрица  $x$  (и, следовательно, произведение  $y$ ) имеет один столбец. Такие матрицы называют векторами - столбцами.

Теперь поставим вопрос: как преобразуются компоненты векторов и линейных операторов при изменении системы координат? Рассмотрим базис  $e'_j$ , выраженный через нештрихованную систему соотношением

$$e'_j = \sum_i \gamma_{ij} e_i. \quad (6.27)$$

Коэффициент  $\gamma_{ij}$  — это  $i$ -я компонента  $e'_j$  в нештрихованной системе (отметим изменение условия порядка индексов);  $n^2$  коэффициентов  $\gamma_{ij}$  образуют элементы матрицы преобразования  $\gamma$ , которая осуществляет переход из одной системы в другую. Сначала рассмотрим произвольный вектор  $x$  с компонентами  $x_i$  и  $x'_i$  в двух системах. Тогда

$$x = \sum_i x_i e_i = \sum_j x'_j e'_j = \sum_j x'_j \sum_i \gamma_{ij} e_i.$$

Следовательно,

$$x_i = \sum_j \gamma_{ij} x'_j, \quad (6.28)$$

что эквивалентно матричному уравнению

$$x = \gamma x'. \quad (6.29)$$

Линейная независимость базисных векторов  $e'_j$  обеспечивает невырожденность матрицы  $\gamma$ , так что она имеет

обратную. Умножая (6.29) на  $\gamma^{-1}$ , получаем

$$x' = \gamma^{-1}x. \quad (6.30)$$

Отметим, что компоненты  $x_i$  преобразуются иначе, чем векторы  $e_i$ . Величины, которые преобразуются как  $x_i$ , называют преобразующимися контраградиентно по отношению к величинам, которые преобразуются как  $e_i$ . Величины, которые преобразуются одинаково, называют преобразующимися коградиентно друг к другу.

Далее найдем закон преобразования для матричных операторов. Запишем операторные уравнения  $y = Ax$  как матричные уравнения в двух системах координат:  $y = Ax$ ,  $y' = A'x'$ . Выражая  $x$  и  $y$  в первом уравнении с помощью (6.29) и умножая его на  $\gamma^{-1}$ , получаем  $\gamma y' = A\gamma x'$ ,  $y' = \gamma^{-1}A\gamma x'$ . Таким образом, искомое преобразование имеет вид

$$A' = \gamma^{-1}A\gamma, \quad A = \gamma A' \gamma^{-1}. \quad (6.31)$$

Это пример преобразования подобия. Оно определяется для квадратных матриц следующим образом:

$$A' = S^{-1}AS. \quad (6.32)$$

Любое алгебраическое матричное уравнение не меняется при преобразовании подобия; например, уравнение  $ABC + \lambda D = 0$  переходит в  $S^{-1}A(SS^{-1})B(SS^{-1})CS + S^{-1}\lambda DS = 0$  или  $A'B'C' + \lambda D' = 0$ .

По причинам, которые будут ясны ниже, особенно важную роль в физике играют преобразования координат, в которых матрица преобразования  $\gamma$  ортогональна или унитарна. Рассмотрим сначала линейную скалярную функцию вектора. Это понятие, связанное с понятием линейной векторной функции, использованной выше при определении матриц. Линейная скалярная функция — это правило, которое для каждого вектора  $x$  определяет линейным образом скаляр  $\phi(x)$ :

$$\phi(\lambda x + \mu y) = \lambda \phi(x) + \mu \phi(y). \quad (6.33)$$

Если есть базис  $e_i$ , то линейную скалярную функцию удобно определить  $n$  числами  $\alpha_i = \phi(e_i)$ , которые мы назовем компонентами скалярной функции  $\phi$ . Тогда

$$\phi(x) = \phi\left(\sum_i x_i e_i\right) = \sum_i \alpha_i x_i. \quad (6.34)$$

Это выражение соответствует правилу умножения матриц, в случае если компоненты  $\alpha_i$  образуют в е к т о р-с т р о-к у, т. е. матрица состоит из одной строки. Тогда (6.34) представляет собой матричное уравнение

$$\phi(x) = \alpha x. \quad (6.35)$$

Если записывать компоненты в другой (штрихованной) системе координат, то скалярная величина  $\phi(x)$  должна остаться той же, т. е.  $\phi(x) = \alpha' x' = \alpha' \gamma^{-1} x$ . Итак, требование инвариантности определяет закон преобразования  $\alpha_i$ :

$$\alpha = \alpha' \gamma^{-1}, \quad \alpha' = \alpha \gamma \quad (6.36)$$

или  $\alpha'_j = \sum_i \alpha_i \gamma_{ij}$ .

Мы видим, что компоненты  $\alpha_i$  преобразуются контраградиентно по отношению к компонентам  $x_i$  вектора и коградиентно по отношению к базисным векторам  $e_i$ .

Линейные скалярные функции образуют векторное пространство, которое отличается от пространства первоначальных векторов, но имеет ту же самую размерность. Иногда его называют дуальным пространством.

Введем теперь понятие скалярного произведения и с помощью него метрику исходного векторного пространства. Для каждой пары векторов  $a$  и  $b$  определим скалярное (или внутреннее) произведение  $ab$ , или  $(a, b)$ , со следующими свойствами:

$$ab = (ba)^*; \quad (6.37)$$

$$a(\lambda b + \mu c) = \lambda ab + \mu ac; \quad (6.38)$$

$$aa \geq 0 \text{ и из } aa = 0 \text{ следует } a = 0. \quad (6.39)$$

Два вектора, скалярное произведение которых равно нулю, называются ортогональными; длина вектора  $a$  определяется как  $|aa|^{1/2}$ .

Отметим, что из свойств (6.37) и (6.38) следует антилинейность скалярного произведения  $ab$  (или сопряженная линейность) по первому аргументу, т. е.

$$(\lambda a + \mu b) c = \lambda^* ac + \mu^* bc. \quad (6.40)$$

Обычно скалярное произведение, удовлетворяющее аксиомам (6.37), (6.38) и (6.39), определяется следующим образом:

$$\mathbf{ab} = \sum_i a_i^* b_i, \quad (6.41)$$

где  $a_i$  и  $b_i$  — компоненты  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$  в данной координатной системе. Конечно, базисные векторы  $\mathbf{e}_i$  этой системы координат удовлетворяют условию

$$\mathbf{e}_i \mathbf{e}_j = \delta_{ji}, \quad (6.42)$$

т. е. базисные векторы ортонормированы.

Какие условия налагаются на матрицу преобразования  $\gamma$  при переходе к новому базису  $\mathbf{e}'_i$ , чтобы новая система также была ортонормированной? Требуем

$$\delta_{ij} = \mathbf{e}'_i \mathbf{e}'_j = \left( \sum_k \gamma_{ki} \mathbf{e}_k \right) \cdot \left( \sum_l \gamma_{lj} \mathbf{e}_l \right) = \sum_k \gamma_{ki}^* \gamma_{kj} = (\gamma^+ \gamma)_{ij}.$$

Таким образом,  $\gamma^+ \gamma = 1$ , и, для того чтобы вид (6.41) скалярного произведения не изменился,  $\gamma$  должна быть унитарной. В классической физике  $\gamma$  обычно также вещественна; следовательно, она ортогональна. Другие важные свойства унитарных преобразований относятся скорее к преобразованию матриц, чем векторов. Преобразование подобия над унитарной матрицей оставляет ее унитарной, а над эрмитовой матрицей — эрмитовой.

В конце раздела подчеркнем, что скалярное произведение, определенное выше, позволяет установить однозначное соответствие между векторами и линейными скалярными функциями, т. е. между исходным векторным пространством и дуальным к нему. Свяжем с каждым вектором  $\mathbf{a}$  линейную скалярную функцию  $\phi_{\mathbf{a}}(\mathbf{x})$ , определяемую равенством  $\phi_{\mathbf{a}}(\mathbf{x}) = \mathbf{ax}$ . В координатной системе, использованной в (6.41) и (6.42),  $\phi_{\mathbf{a}}$  имеет компоненты  $\phi_{\mathbf{a}}(\mathbf{e}_i) = a_i^*$ .

## 6.5. ЗАДАЧИ НА СОБСТВЕННЫЕ ЗНАЧЕНИЯ

Если оператор  $A$  действует на вектор  $\mathbf{x}$ , получающийся вектор  $A\mathbf{x}$ , вообще говоря, отличен от  $\mathbf{x}$ . Однако могут существовать определенные (ненулевые) векторы, для которых  $A\mathbf{x}$  равно  $\mathbf{x}$ , умноженному на константу  $\lambda$ , т. е.

$$A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}. \quad (6.43)$$

Такой вектор называется собственным вектором оператора  $A$ , а константа  $\lambda$  называется собственным значением. Говорят, что собственный вектор «принадлежит» собственному значению.

**Пример.** Рассмотрим оператор вращения  $R$ , показанный на рис. 6.1. Любой вектор, направленный вдоль оси вращения (ось  $z$ ), есть собственный вектор  $R$  с собственным значением, равным 1. (Есть ли какие-нибудь другие собственные векторы?)

В данной системе координат  $i$ -я компонента уравнения (6.43) есть

$$\sum_j A_{ij}x_j = \lambda x_i, \quad i = 1, 2, \dots, n; \quad (6.44)$$

в матричных обозначениях эта система уравнений имеет вид

$$Ax = \lambda x. \quad (6.45)$$

Задача нахождения собственных значений  $\lambda$ , для которых система линейных уравнений (6.44) имеет нетривиальное решение, весьма важна.

**Пример.** Если  $A$  — матрица

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix},$$

то система уравнений (6.44) имеет вид

$$\begin{aligned} (1 - \lambda)x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 0; \\ 4x_1 + (5 - \lambda)x_2 + 6x_3 &= 0; \\ 7x_1 + 8x_2 + (9 - \lambda)x_3 &= 0. \end{aligned}$$

Если эти уравнения имеют нетривиальное решение, определитель из коэффициентов должен обратиться в нуль:

$$\begin{vmatrix} 1 - \lambda & 2 & 3 \\ 4 & 5 - \lambda & 6 \\ 7 & 8 & 9 - \lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Это дает полином третьего порядка по  $\lambda$ , корни которого и есть собственные значения  $\lambda_i$ .

В общем случае собственные значения матрицы  $A$  определяются уравнением

$$\det(A - \lambda I) = 0 \quad (\text{с е к у л я р н о е} \\ \text{у р а в н е н и е}). \quad (6.46)$$

Если  $A$  — матрица порядка  $n \times n$ , то будет  $n$  корней  $\lambda$ , но не обязательно различных.

Докажем теперь две важные теоремы, касающиеся собственных значений и собственных векторов эрмитовых матриц. Пусть  $H$  — эрмитова матрица,  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  — два собственных значения,  $x_1$  и  $x_2$  — два собственных вектора, принадлежащих соответственно  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$ ,

$$Hx_1 = \lambda_1 x_1, \quad Hx_2 = \lambda_2 x_2. \quad (6.47)$$

Возьмем скалярное произведение  $x_2$  с первым уравнением и  $x_1$  со вторым:

$$x_2^+ H x_1 = \lambda_1 x_2^+ x_1, \quad x_1^+ H x_2 = \lambda_2 x_1^+ x_2. \quad (6.48)$$

Левые части комплексно сопряжены друг другу, так как

$$\begin{aligned} (x_2^+ H x_1)^* &= \sum_{ij} (x_{i2}^* H_{ij} x_{j1})^* = \\ &= \sum_{ij} x_{i2} H_{ij}^* x_{j1}^* = \sum_{ij} x_{j1}^* H_{ji} x_{i2}, \end{aligned}$$

т. е.

$$(x_2^+ H x_1)^* = x_1^+ H x_2 \quad (6.49)$$

[ $x_{ij}$  —  $i$ -я компонента  $x_j$  — см. замечания после уравнений (6.8) и (6.27)].

Это важное свойство эрмитовых матриц. Следовательно, из (6.48)

$$(\lambda_1 - \lambda_2^*) x_2^+ x_1 = 0. \quad (6.50)$$

Предположим сначала, что  $\lambda_1 = \lambda_2$ ,  $x_1 = x_2 \neq 0$ . Тогда  $x_2^+ x_1 = x_1^+ x_1 > 0$ , так что  $\lambda_1 = \lambda_1^*$ . Собственные значения эрмитовой матрицы вещественны.

Предположим, напротив,  $\lambda_1 \neq \lambda_2$ . Тогда  $x_2^+ x_1 = 0$ . Собственные векторы эрмитовой матрицы, принадлежащие различным собственным значениям, ортогональны.

Несколько собственных векторов могут принадлежать одному и тому же собственному значению; такое собственное значение называют вырожденным. Соответствующие собственные векторы также часто называют вырожденными. Выше мы видели, что собственные векторы эрмитовой матрицы, принадлежащие к различным собственным значениям, ортогональны. Будут ли ортогональны собственные векторы, принадлежащие одному и тому же (вырожденному) собственному значению?

Предположим, что есть три независимых вектора  $x_1, x_2$  и  $x_3$ , принадлежащие собственному значению  $\lambda$ . Ясно, что любая их линейная комбинация — тоже собственный вектор. Положим  $y_1 = x_1, y_2 = x_2 + \alpha y_1$ . Выберем  $\alpha$  так, чтобы  $y_1$  и  $y_2$  были ортогональны. Следовательно,

$$y_1 y_2 = 0 = y_1 x_2 + \alpha y_1 y_1, \quad \alpha = -y_1 x_2 / y_1 y_1.$$

Теперь положим  $y_3 = x_3 + \beta y_1 + \gamma y_2$ . Выберем  $\beta$  и  $\gamma$  так, чтобы  $y_3$  было ортогонально как к  $y_1$ , так и к  $y_2$ . Таким образом,

$$0 = y_1 x_3 + \beta y_1 y_1 \rightarrow \beta = -y_1 x_3 / y_1 y_1,$$

$$0 = y_2 x_3 + \gamma y_2 y_2 \rightarrow \gamma = -y_2 x_3 / y_2 y_2.$$

Итак, мы сконструировали три взаимно ортогональных вектора  $y_i$ . Конечно, эту процедуру, известную под названием процедуры ортогонализации Грама — Шмидта, можно распространить на произвольное число вырожденных собственных векторов. Итак, можно произвести такие преобразования, что все  $n$  собственных векторов эрмитовой матрицы будут взаимно ортогональны (в случае, если все  $n$  собственных векторов линейно независимы; в справедливости этого мы убедимся в разд. 6.6).

Из уравнения (6.43) ясно, что собственные значения и собственные векторы линейного оператора не зависят от выбранной системы координат, которая использовалась для их расчета. Из матричного уравнения (6.45)  $Ax = \lambda x$  следует, что  $\gamma^{-1} A \gamma \gamma^{-1} x = \lambda \gamma^{-1} x$  или  $A' x' = \lambda x'$ . Итак, если  $x$  — собственный вектор  $A$ , его преобразование  $x' = \gamma^{-1} x$  есть собственный вектор трансформированной матрицы  $A'$ , а собственные значения совпадают.

Предположим, что сделано преобразование к системе координат, в которой базисные векторы  $e'_i$  есть собственные векторы  $A$  (предполагая, что они образуют линейно независимую систему):

$$A e'_i = \lambda_i e'_i. \quad (6.51)$$

В этой системе матричный элемент  $A'_{ij}$  есть  $i$ -я компонента вектора  $A e'_j$ , которая, согласно (6.51), равна нулю или  $\lambda_j$  в зависимости от того,  $i \neq j$  или  $i = j$ , т. е.

$$A'_{ij} = \lambda_j \delta_{ij}. \quad (6.52)$$

Таким образом, матрица  $A'$  диагональна, а ее диагональные элементы — это собственные значения.

Ввиду важности этой матрицы напомним вид матрицы преобразования  $\gamma$ . Вспомним, что  $\gamma_{ij}$  —  $i$ -я компонента нового вектора  $e'_j$  в старой (нештрихованной) системе, т. е.  $j$ -й столбец  $\gamma$  состоит из компонент собственного вектора  $e'_j$ :

$$\gamma = \begin{pmatrix} e'_1 & e'_2 & \dots & e'_n \\ \downarrow & \downarrow & \dots & \downarrow \end{pmatrix}. \quad (6.53)$$

Если преобразование унитарно, собственные векторы должны быть взаимно ортогональны (если необходимо, с использованием процедуры Грама — Шмидта) и нормированы.

Выше мы видели, что собственные значения матрицы не меняются при преобразовании подобия. Они являются инвариантами матрицы. Другие инварианты — это след и определитель

$$\text{Tr } A' = \text{Tr } S^{-1}AS = \text{Tr } ASS^{-1} = \text{Tr } A; \quad (6.54)$$

$$\begin{aligned} \det A' = \det (S^{-1}AS) &= \det (S^{-1}) (\det A) (\det S) = \\ &= \det A. \end{aligned} \quad (6.55)$$

Эти инварианты не являются независимыми от собственных значений. В действительности их можно вычислить в системе, в которой  $A$  диагонально. Получаем

$$\text{Tr } A = \sum_i \lambda_i; \quad (6.56)$$

$$\det A = \prod_i \lambda_i. \quad (6.57)$$

Только собственные значения есть независимые инварианты.

В заключение этого раздела приведем пример физической задачи на собственные значения, где встречаются матрицы.

**Пример.** Рассмотрим задачу молекулярных колебаний, или, в общем случае, «малых колебаний» (классической) механической системы. Например, на рис. 6.2 схематически показана молекула воды и простая колеблющаяся система, состоящая из трех масс, связанных пружинами.

Конфигурацию, или состояние, такой системы удобно описывать  $n$ -мерным вектором  $x$ , где  $n$  — число

степеней свободы, т. е. утроенное число масс. Простая система координат состоит из базисных векторов:

$e_1$ : масса 1 смещена на единицу длины в  $x$ -направлении;

$e_2$ : масса 1 смещена на единицу длины в  $y$ -направлении;

$e_3$ : масса 1 смещена на единицу длины в  $z$ -направлении;

$e_4$ : масса 2 смещена на единицу длины в  $x$ -направлении и т. д.

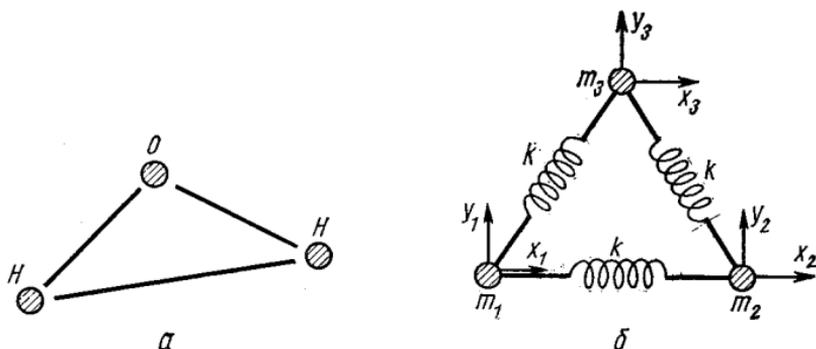


Рис. 6.2. Простые колебательные системы:  
а—молекула воды; б—три массы, связанные пружинами.

Кинетическая энергия, выраженная через компоненты в этой координатной системе, имеет вид

$$T = \frac{1}{2} \sum_i m_i \dot{x}_i^2 = \frac{1}{2} \tilde{x} M \dot{x}, \quad (6.58)$$

где  $m_i$  — масса, связанная с  $x_i$  (т. е.  $m_1 = m_2 = m_3 =$  массе частицы 1,  $m_4 = m_5 = m_6 =$  массе частицы 2 и т. д.),  $\dot{x}_i = dx_i/dt$  и  $M$  — диагональная матрица  $M_{ij} = m_i \delta_{ij}$ .

Для колебаний малой амплитуды потенциальную энергию можно разложить в ряд Тейлора

$$V = V_0 + \sum_i \left( \frac{\partial V}{\partial x_i} \right)_0 x_i + \sum_{ij} \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2 V}{\partial x_i \partial x_j} \right) x_i x_j + \dots \quad (6.59)$$

В положении равновесия сила  $(\partial V / \partial x_i)_0$  должна равняться нулю; можно выбрать, кроме того,  $V_0 = 0$ . Пренебрегая членами третьего порядка, запишем потенциальную энергию в виде

$$V = \frac{1}{2} \sum_{ij} V_{ij} x_i x_j = \frac{1}{2} \tilde{x} V x, \quad (6.60)$$

где  $V$  — вещественная симметричная матрица;  $V_{ij} = [\partial^2 V / (\partial x_i \partial x_j)]_0$ .

Выражение для кинетической энергии упрощается, если перейти к новой системе координат с базисом

$$\mathbf{e}'_i = \frac{1}{\sqrt{m_i}} \mathbf{e}_i. \quad (6.61)$$

Матрица преобразования

$$\gamma = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{m_1}} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{m_2}} & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \frac{1}{\sqrt{m_n}} \end{pmatrix} \quad (6.62)$$

не унитарна, так что, например, вид скалярного произведения не будет оставаться инвариантным. Но это как раз нам нужно для получения выражения (6.64) для  $T$ . Имеем

$$\mathbf{x} = \gamma \mathbf{x}', \quad \tilde{\mathbf{x}} = \tilde{\mathbf{x}}' \tilde{\gamma}, \quad (6.63)$$

так что

$$\left. \begin{aligned} T &= \frac{1}{2} \tilde{\mathbf{x}}' \tilde{\gamma} M \gamma \dot{\mathbf{x}}' = \frac{1}{2} \tilde{\mathbf{x}}' \dot{\mathbf{x}}'; \\ V &= \frac{1}{2} \tilde{\mathbf{x}}' \tilde{\gamma} V \gamma \mathbf{x}' = \frac{1}{2} \tilde{\mathbf{x}}' A \mathbf{x}', \end{aligned} \right\} \quad (6.64)$$

где

$$A = \tilde{\gamma} V \gamma \quad (6.65)$$

(преобразование такого типа  $\tilde{S}VS$  называется конгруэнтным преобразованием).

Теперь  $A$  вещественна и симметрична (и, таким образом, эрмитова), так что известны ее  $n$  вещественных собственных значений  $\lambda_h$  и  $n$  независимых вещественных собственных векторов  $\mathbf{u}_h$ ; последние можно сделать ортонормированными:

$$A \mathbf{u}_h = \lambda_h \mathbf{u}_h. \quad (6.66)$$

Если произвести унитарное преобразование от системы  $\mathbf{e}'_i$  к системе  $\mathbf{u}_h$  (так как  $\mathbf{u}_h$  вещественны, преобразование ортогонально и унитарно) и обозначить координаты вектора  $\mathbf{x}$  в последней системе через  $q_h$ , то получаем, что

потенциальная энергия также диагонализуется

$$\left. \begin{aligned} T &= \frac{1}{2} \dot{q} \ddot{q} = \frac{1}{2} \sum_k \dot{q}_k^2; \\ V &= \frac{1}{2} \tilde{q} \Lambda q = \frac{1}{2} \sum_k \lambda_k q_k^2, \end{aligned} \right\} \quad (6.67)$$

где  $\Lambda$  — диагональная матрица;  $\Lambda_{kl} = \lambda_k \delta_{kl}$ . Известно, что все собственные значения  $\lambda_k$  вещественны и что  $\lambda_k \geq 0$ , так как, согласно (6.59),  $V$  никогда не может быть отрицательным, если равновесное положение устойчиво.

Лагранжевы уравнения движения, записанные через обобщенные координаты  $q_k$ , имеют вид

$$\frac{d}{dt} \cdot \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} + \frac{\partial V}{\partial q_k} = 0 \quad (6.68)$$

или

$$\ddot{q}_k + \lambda_k q_k = 0. \quad (6.69)$$

Решения последнего уравнения:

$$\left. \begin{aligned} (1) \lambda_k > 0: \quad q_k &= a_k \sin(\omega_k t + \delta_k), \quad \omega_k = \sqrt{\lambda_k}; \\ (2) \lambda_k = 0: \quad q_k &= b_k t + c_k. \end{aligned} \right\} \quad (6.70)$$

Частоты  $\omega_k$  называют нормальными частотами, а  $q_k$  — нормальными координатами. Если только одно из  $q_k \neq 0$ , то в системе возбуждено нормальное колебание, при котором все исходные координаты меняются гармонически со временем с общей частотой  $\omega_k$ .

Некоторые из нулевых частот  $\lambda_k = 0$  соответствуют переносам и вращениям системы как целого. Известно, что собственные векторы, описывающие реальные колебания, ортогональны им (и друг другу). Можно показать, что условия ортогональности с трансляционными и вращательными движениями формулируются физически как неподвижность центра инерции при колебании и равенство нулю углового момента.

Наконец, перейдем обратно к исходной (нештрихованной) системе координат

$$x' = U' q, \quad x = \gamma x' = \gamma U' q, \quad (6.71)$$

где  $\gamma$  — матрица (6.62);  $U'$  — унитарная матрица преобразования от системы  $e'_i$  к  $u_k$ ;  $U'_{ik} = u_{ik} = e'_i u_k$  равно  $i$ -й компоненте собственного вектора  $u_k$  в системе  $e'_i$ . Тогда каждая декартова координата  $x_i$  представляется в виде суммы по нормальным колебаниям:

$$x_i = \sum_{jk} \gamma_{ij} U'_{jk} q_k = \sum_k \frac{1}{\sqrt{m_i}} u'_{ik} q_k = \\ = \sum_k \frac{u'_{ik}}{\sqrt{m_i}} a_k \sin(\omega_k t + \delta_k) = \sum_k u_{ik} a_k \sin(\omega_k t + \delta_k), \quad (6.72)$$

где  $u_{ik}$  —  $i$ -я компонента  $u_k$  в нештрихованной системе.

Ортогональность и нормировочные условия для собственных векторов  $u_k$ , выраженные через компоненты нештрихованной системы, имеют вид

$$\delta_{kl} = u_k u_l = \sum_j u'_{jk} u'_{jl} = \sum_j m_{jl} u_{jk} u_{jl}. \quad (6.73)$$

## 6.6. ДИАГОНАЛИЗАЦИЯ МАТРИЦ

Выше мы видели, что если собственные векторы образуют полную ортогональную систему, то квадратную матрицу можно диагонализировать с помощью унитарной матрицы, образованной из собственных векторов. Покажем сейчас, что это утверждение справедливо для эрмитовой матрицы  $H$ .

Уравнение

$$H u_1 = \lambda_1 u_1 \quad (6.74)$$

имеет по меньшей мере одно собственное значение и собственный вектор, так как секулярное уравнение (6.46) имеет по меньшей мере одно решение. Выберем ортонормированную систему координат  $e'_i$ , в которой первый член  $e'_i$  равен  $u_1$  (это можно сделать, так как существуют системы  $n$  линейно независимых векторов, включающих  $u_1$ , и, если необходимо, их можно ортогонализировать с помощью процедуры Грама — Шмидта). Преобразуя  $H$  в эту систему, получаем в первом столбце следующие элементы:

$$H'_{i1} = e'_i H u_1 = \lambda_1 \delta_{i1}. \quad (6.75)$$

Из эрмитовости  $H'$  определяется первая строка, и можно написать следующее выражение для  $H'$ :

$$H' = \left( \begin{array}{c|cccc} \lambda_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \hline 0 & & & & \\ 0 & & & & \\ \vdots & & & & \\ 0 & & & & \end{array} \right), \quad (6.76)$$

$G$

где  $G$  — эрмитова матрица размерности  $n - 1$  в векторном подпространстве, ортогональном к  $u_1$ . Повторим теперь эту же операцию с  $G$  и продолжим ее до тех пор, пока  $H$  не будет полностью диагонализировано. При этом находятся  $n$  независимых собственных векторов  $H$ , образующих унитарную матрицу преобразования, которая диагонализует  $H$ .

Предположим теперь, что есть две эрмитовы матрицы  $H_1$  и  $H_2$ . Можно ли их диагонализировать «одновременно» одним и тем же унитарным преобразованием, т. е. можно ли найти такую унитарную матрицу  $U$ , что

$$D_1 = U^{-1}H_1U, \quad D_2 = U^{-1}H_2U \quad (6.77)$$

обе диагональны?

Так как диагональные матрицы, конечно, коммутируют друг с другом, то

$$\left. \begin{aligned} 0 &= D_1D_2 - D_2D_1 = U^{-1}(H_1H_2 - H_2H_1)U; \\ H_1H_2 - H_2H_1 &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (6.78)$$

Таким образом, необходимое условие состоит в том, чтобы матрицы  $H_1$  и  $H_2$  коммутировали. Это условие также и достаточное. Предположим, что  $H_1$  и  $H_2$  коммутируют. Положим  $U^{-1}H_1U = D$  (диагонально),  $U^{-1}H_2U = M$  (может быть и не диагонально);  $D$  и  $M$  коммутируют:  $DM = MD$ . Напишем  $ij$ -й элемент этого уравнения

$$D_{ii}M_{ij} = M_{ij}D_{jj}. \quad (6.79)$$

Таким образом, если  $D_{ii} \neq D_{jj}$ , то  $M_{ij} = 0$ . Однако это не означает, что  $M$  диагонально, так как  $H_1$  может иметь несколько вырожденных собственных значений, т. е. могут совпадать несколько элементов  $D$ . Предположим,

например, что равны первые три. Тогда

$$D = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 & & & \\ 0 & \lambda & 0 & & & \\ 0 & 0 & \lambda & & & \\ \hline & & & \lambda_4 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & \ddots \\ & & & & & & 0 \\ & & & & & & & \ddots \\ & & & & & & & & 0 \end{pmatrix}, \quad M = \begin{pmatrix} a & b & c & & & \\ d & e & f & & & \\ g & h & i & & & \\ \hline & & & & & \\ & & & & & N \end{pmatrix}. \quad (6.80)$$

Итак,  $M$  диагональна по блокам. Субматрица в левом верхнем углу  $M$  эрмитова и может быть диагонализирована унитарным преобразованием, включающим только первые три строки и три столбца. При этом соответствующий блок в матрице  $D$  умножается на единичную матрицу, т. е. не меняется. Ясно, что, повторяя эту операцию, можно одновременно диагонализировать как  $M$ , так и  $D$ .

Сказанное выше ведет к общему условию, что матрицы можно диагонализировать унитарным преобразованием. Рассмотрим произвольную матрицу  $M$ . Можно написать

$$M = A + iB, \quad (6.81)$$

где  $A$  и  $B$  обе эрмитовы, если выбрать

$$A = (M + M^+)/2; \quad B = (M - M^+)/2i \quad (6.82)$$

(это аналогично разделению комплексного числа на вещественную и мнимую части). Теперь  $A$  и  $B$  можно диагонализировать по отдельности. Но чтобы можно было диагонализировать  $M$ , нужно, чтобы  $A$  и  $B$  диагонализировывались одновременно. Это выполняется, если  $A$  и  $B$  коммутируют, что эквивалентно коммутации  $M$  и  $M^+$ . Матрица, коммутирующая со своей эрмитово сопряженной, называется нормальной; матрицу  $M$  можно диагонализировать унитарным преобразованием тогда и только тогда, когда  $M$  — нормальная матрица. Отметим, что унитарные матрицы так же, как и эрмитовы, удовлетворяют этому условию.

## 6.7. ПРОСТРАНСТВА БЕСКОНЕЧНОЙ РАЗМЕРНОСТИ

В этом разделе дается обобщение соотношений, полученных выше, на бесконечномерное векторное пространство. Сначала рассмотрим задачу колебаний «нагруженной» струны, т. е. натянутой струны длиной  $L$  под напряжением  $T$  с  $n$  равными массами, закрепленными на ней через одинаковые промежутки длины. Эта система показана на рис. 6.3.

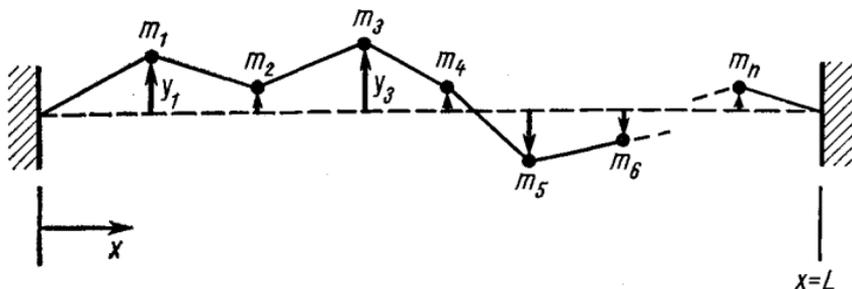


Рис. 6.3. Колебания «нагруженной» струны.  
Все массы одинаковы,  $m_l = m$ .

В конце разд. 6.5 рассматривался пример описания конфигурации или «состояния» системы посредством  $n$ -мерного вектора  $\mathbf{y}$ . Элементарный базис можно образовать из векторов  $\mathbf{e}_l$ , где  $\mathbf{e}_l$  — конфигурация с  $l$ -й массой, расположенной на расстоянии  $1/\sqrt{m_l}$ , а все остальные — в положении равновесия (в разд. 6.5 эта система координат называлась штрихованной). В этой элементарной системе координата  $y_l$  вектора  $\mathbf{y}$  есть просто смещение  $l$ -й массы в единицах  $1/\sqrt{m_l}$ . Можно показать, что собственные векторы  $\mathbf{u}_k$ , соответствующие нормальным колебаниям, имеют компоненты (в элементарной системе)

$$u_{lk} = (\mathbf{u}_k)_l = \sqrt{2a/L} \sin(lk\pi a/L), \quad (6.83)$$

где  $a$  — расстояние между массами;  $(n+1)a = L$ ; константа  $\sqrt{2a/L}$  введена для нормировки

$$\mathbf{u}_k \mathbf{u}_l = 1 = \sum_l (2a/L) \sin^2(lk\pi a/L). \quad (6.84)$$

Произвольную конфигурацию системы в любой заданный момент времени с помощью (6.71) можно выразить через нормальные координаты

$$y_l = \sum_k u_{lk} q_k = \sum_k u_{lk} a_k \sin(\omega_k t + \delta_k), \quad (6.85)$$

причем частоты оказываются равными

$$\omega_k = \sqrt{T/ma} \cdot 2 \sin(k\pi a/2L). \quad (6.86)$$

Предположим, что число масс бесконечно растет, а длина  $L$  остается фиксированной. Вместо обозначения данной массы индексом  $l$  удобно использовать переменную координату  $x = la$ , которая в пределе становится непрерывной переменной. Изменяется также ряд других обозначений.

1. Компоненты  $y$  в элементарной системе равны  $y_l \rightarrow y(x)$ ,

$$y = \sum_l y_l e_l \rightarrow y = \int y(x) e_x dx. \quad (6.87)$$

2. Элементарная система координат переходит в точечную координатную систему, т. е. базисный вектор  $e_b$  представляет собой  $\delta$ -функциональный сдвиг только в одной точке,  $b$ . Компоненты базисного вектора в элементарной системе становятся равными

$$(e_l)_m = \delta_{lm} \rightarrow (e_b)_x = \delta(x - b). \quad (6.88)$$

3. Матрица преобразования от элементарной системы к координатной системе собственных векторов имеет такие элементы, что  $k$ -й «столбец» образуется из компонент  $u_k$  элементарной системы, т. е.

$$\begin{aligned} U_{lk} = (u_k)_l &= \sqrt{2a/L} \sin(lk\pi a/L) \rightarrow \\ \rightarrow u_k(x) &= \sqrt{2/L} \sin(k\pi x/L). \end{aligned} \quad (6.89)$$

4. Условия нормировки и ортогональности для собственных функций, вычисленные в элементарной системе,

имеют вид

$$\mathbf{u}_k \mathbf{u}_l = \sum_{j=1}^n [2/(n+1)] \sin [jk\pi/(n+1)] \sin [jl\pi/(n+1)] = \delta_{kl} \rightarrow$$

$$\rightarrow \int_0^L u_k u_l dx = \int_0^L (2/L) \sin (k\pi x/L) \sin (l\pi x/L) dx = \delta_{kl}. \quad (6.90)$$

5. Разложение (6.85) элементарной компоненты через нормальные координаты приобретает вид

$$y_l = \sum_k u_{lk} q_k \rightarrow y(x) = \sum_k u_k(x) q_k =$$

$$= \sum_k \sqrt{2/L} q_k \sin (k\pi x/L). \quad (6.91)$$

Последнее выражение — это ряд Фурье (синусоидальный);  $q_k$  —  $k$ -я компонента  $y$  в системе координат  $\mathbf{u}_k$ .

6. Обратное соотношение имеет вид

$$q_k = \sum_l U_{kl}^{-1} y_l = \sum_l u_{lk}^* y_l \rightarrow$$

$$\rightarrow q_k = \int u_k^*(x) y(x) dx = \sqrt{\frac{2}{L}} \int_0^L y(x) \sin \frac{k\pi x}{L} dx, \quad (6.92)$$

т. е. представляет собой обратный интеграл Фурье.

Выше использовались два типа бесконечномерных систем координат. Одна имеет счетное бесконечное число базисных векторов  $\mathbf{u}_k$ , нормированных обычным способом,  $\mathbf{u}_k \mathbf{u}_l = \delta_{kl}$ . Другая система имеет несчетное число векторов, а нормировочное условие имеет вид

$$\mathbf{e}_a \mathbf{e}_b = \int \delta(x-a) \delta(x-b) dx = \delta(a-b). \quad (6.93)$$

Теперь, основываясь на приведенном выше простом примере, можно сделать ряд обобщений. Мы видим, что обычные функции (удовлетворяющие определенным математическим условиям «хорошего поведения», в которые мы не будем вникать) образуют линейное векторное бесконечномерное пространство. Такое векторное пространство со скалярным произведением комплексного типа, определенным выше, называется гильбертовым пространством.

Значение функции  $f(x)$  в данной точке  $x$  есть  $x$ -компонента вектора  $\mathbf{f}$  в точечной системе координат (с несчетным числом базисных векторов).

Существуют другие системы координат с базисами из полных ортогональных систем функций, как, например, тригонометрических функций, которые уже упоминались при рассмотрении рядов Фурье. Другие подобные системы будут исследованы в гл. 7 и 8.

7. Скалярное произведение, вычисленное в точечной системе координат, равно

$$\phi\psi = \int_a^b \phi^*(x) \psi(x) dx. \quad (6.94)$$

8. Ортонормированная система  $\phi_k$  полна, если «произвольный» вектор  $\psi$  можно разложить по функциям  $\phi_k$ , которые тем самым образуют базис:

$$\psi = \sum_k a_k \phi_k, \quad (6.95)$$

или, беря  $x$ -компоненту,

$$\psi(x) = \sum_k a_k \phi_k(x); \quad (6.96)$$

$a_k$  есть  $k$ -я компонента  $\psi$  в системе  $\phi_k$ :

$$a_k = \phi_k \psi = \int_a^b \phi_k^*(x) \psi(x) dx. \quad (6.97)$$

9. Линейные операторы. Предположим, что  $K$  — линейный оператор; символически  $\psi = K\phi$ . В компонентах имеем

$$\psi_i = \sum_j K_{ij} \phi_j \rightarrow \psi(x) = \int_a^b K(x, x') \phi(x') dx'. \quad (6.98)$$

Последнее выражение встречалось раньше;  $K(x, x')$  — ядро интегрального преобразования.

10. Уравнение на собственные значения  $K\psi = \lambda\psi$  приобретает вид

$$\int_a^b K(x, x') \psi(x') dx' = \lambda\psi(x). \quad (6.99)$$

Это однородное интегральное уравнение, с которым мы встретимся снова в гл. 11.

Закончим на этом обсуждение бесконечномерных пространств. Некоторые из сформулированных здесь идей появятся снова в гл. 8 и в других частях книги.

# Г Л А В А 7

## СПЕЦИАЛЬНЫЕ ФУНКЦИИ \*

### 7.1. ФУНКЦИИ ЛЕЖАНДРА

Вспомним дифференциальное уравнение Лежандра (1.49):

$$(1-x^2) \frac{d^2 y}{dx^2} - 2x \frac{dy}{dx} + n(n+1)y = 0. \quad (7.1)$$

Если  $n$  — целое число, одно из решений имеет вид полинома. Нормированное надлежащим образом, оно записывается в виде \*\*

$$\begin{aligned} P_n(x) &= \sum_{r=0}^{[\frac{1}{2}n]} \frac{(-1)^r (2n-2r)!}{2^{nr} r! (n-r)! (n-2r)!} x^{n-2r} = \\ &= \sum_{r=0}^{[\frac{1}{2}n]} \frac{(-1)^r}{2^{nr} r! (n-r)!} \left(\frac{d}{dx}\right)^n x^{2n-2r} = \\ &= \frac{1}{2^n n!} \left(\frac{d}{dx}\right)^n \sum_{r=0}^n \frac{(-1)^r n!}{r! (n-r)!} x^{2n-2r} = \\ &= \frac{1}{2^n \cdot n!} \left(\frac{d}{dx}\right)^n (x^2 - 1)^n. \end{aligned} \quad (7.2)$$

---

\* Так называемые специальные функции математической физики представляют собой решения определенных, часто встречающихся линейных дифференциальных уравнений второго порядка. Прежде всего мы изучим самые простые функции: функции Лежандра, присоединенные функции Лежандра и функции Бесселя. Эти функции имеют много представлений: в виде частных решений определенных дифференциальных уравнений, рядов, различных интегральных представлений, с помощью рекуррентных соотношений и с помощью производящих функций. Взяв за основу одно из этих представлений, можно получить остальные.

\*\* Символ  $[x]$  означает наибольшее целое, меньшее или равное  $x$ .

Это так называемая формула Родрига для полиномов Лежандра. Несколько первых полиномов равны

$$\left. \begin{aligned} P_0(x) &= 1; & P_3(x) &= \frac{1}{2}(5x^3 - 3x); \\ P_1(x) &= x; & P_4(x) &= \frac{1}{8}(35x^4 - 30x^2 + 3); \\ P_2(x) &= \frac{1}{2}(3x^2 - 1); & P_5(x) &= \frac{1}{8}(63x^5 - 70x^3 + 15x). \end{aligned} \right\} (7.3)$$

Из формулы Родрига непосредственно вытекает контурное интегральное представление. Используем формулу Коши

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{f(t) dt}{t-z},$$

считая, что  $f(t)$  регулярна внутри контура, окружающего точку  $z$  в положительном направлении. Дифференцируя  $n$  раз по  $z$ , получаем

$$\left(\frac{d}{dz}\right)^n f(z) = \frac{n!}{2\pi i} \oint \frac{f(t) dt}{(t-z)^{n+1}}. \quad (7.4)$$

Следовательно, из (7.2) находим

$$P_n(z) = \frac{1}{2^n} \cdot \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{(t^2-1)^n}{(t-z)^{n+1}} dt. \quad (7.5)$$

Это так называемое интегральное представление Шлефли для  $P_n(z)$ .

Другое интегральное представление можно получить следующим образом. Возьмем в качестве контура в интеграле Шлефли (7.5) окружность с центром в точке  $z$  и радиусом  $|\sqrt{z^2-1}|$ , т. е.  $t = z + \sqrt{z^2+1} \exp(i\phi)$ , где  $\phi$  меняется от 0 до  $2\pi$ . Непосредственные алгебраические выкладки приводят к равенствам  $t^2-1 = 2(t-z) \times (z + \sqrt{z^2-1} \cos \phi)$  и  $dt = i(t-z) d\phi$ . Подставляя их в (7.5), находим

$$P_n(z) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi (z + \sqrt{z^2-1} \cos \phi)^n d\phi. \quad (7.6)$$

Это так называемое интегральное представление Лапласа для полиномов Лежандра.

Рассмотрим далее ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} h^n P_n(z) = F(h, z). \quad (7.7)$$

Используем представление Лапласа

$$F(h, z) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} h^n (z + \sqrt{z^2 - 1} \cos \phi)^n d\phi = \\ = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{d\phi}{1 - hz - h \sqrt{z^2 - 1} \cos \phi},$$

так что

$$F(h, z) = \frac{1}{\sqrt{1 - 2hz + h^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} h^n P_n(z). \quad (7.8)$$

Функцию  $F(h, z)$  называют производящей функцией полиномов Лежандра.

В качестве примера полезности производящей функции приведем рекуррентные соотношения для полиномов Лежандра:

$$F(h, z) = \frac{1}{\sqrt{1 - 2hz + h^2}}, \quad \frac{\partial F}{\partial h} = \frac{z - h}{1 - 2hz + h^2} F, \\ (1 - 2hz + h^2) \partial F / \partial h = (z - h) F.$$

Сравнивая коэффициенты при  $h^n$ , находим

$$(n + 1) P_{n+1}(z) - 2znP_n(z) + (n - 1) P_{n-1}(z) = \\ = zP_n(z) - P_{n-1}(z),$$

или

$$(n + 1) P_{n+1}(z) - (2n + 1) zP_n(z) + nP_{n-1}(z) = 0. \quad (7.9)$$

Второе рекуррентное соотношение получается дифференцированием производящей функции (7.8) по  $z$ :  $(1 - 2hz + h^2) \partial F / \partial z = hF$ , что дает

$$P'_n(z) - 2zP'_{n-1}(z) + P'_{n-2}(z) = P_{n-1}(z). \quad (7.10)$$

Из двух рекуррентных соотношений (7.9) и (7.10) можно получить много других, например

$$P'_{n+1}(z) - zP'_n(z) = (n + 1) P_n(z); \quad (7.11)$$

$$zP'_n(z) - P'_{n-1}(z) = nP_n(z); \quad (7.12)$$

$$P'_{n+1}(z) - P'_{n-1}(z) = (2n + 1) P_n(z); \quad (7.13)$$

$$(z^2 - 1) P'_n(z) = nzP_n(z) - nP_{n-1}(z) \text{ и т. д.} \quad (7.14)$$

Другое применение производящей функции состоит в вычислении  $P_n(z)$  в различных точках. Например, при  $z = 1$  из (7.8) находим

$$\sum_{n=0}^{\infty} h^n P_n(1) = 1/(1-h) = 1 + h + h^2 + h^3 + \dots$$

Поэтому

$$P_n(1) = 1. \tag{7.15}$$

При  $z = 0$

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} h^n P_n(0) &= (1+h^2)^{-1/2} = \\ &= 1 - \frac{1}{2}h^2 + \left(-\frac{1}{2}\right) \left(-\frac{3}{2}\right) \frac{h^4}{2!} + \dots \end{aligned}$$

Следовательно,

$$P_n(0) = \begin{cases} 0, & \text{если } n \text{ нечетно,} \\ \frac{(n-1)!! (-1)^{n/2}}{2^{n/2} \left(\frac{n}{2}\right)!}, & \text{если } n \text{ четно.} \end{cases} \tag{7.16}$$

Здесь использовано обозначение  $n!! = n(n-2) \times \dots \times 5 \cdot 3 \cdot 1$  ( $n$  — двойной факториал).

Исследуем теперь свойства ортогональности и нормировки полиномов Лежандра. Для этой цели используем формулу Родрига (7.2). Рассмотрим интеграл

$$\begin{aligned} I_{mn} &= \int_{-1}^{+1} P_m(x) P_n(x) dx \quad (m < n) = \\ &= \frac{1}{2^{m+n}} \cdot \frac{1}{m!n!} \int_{-1}^{+1} \left[ \left(\frac{d}{dx}\right)^m (x^2-1)^m \right] \left[ \left(\frac{d}{dx}\right)^n (x^2-1)^n \right] dx. \end{aligned}$$

Проинтегрируем  $n$  раз по частям:

$$\begin{aligned} I_{mn} &= \frac{-1}{2^{m+n}} \cdot \frac{1}{m!n!} \int_{-1}^{+1} \left[ \left(\frac{d}{dx}\right)^{m+1} (x^2-1)^m \right] \times \\ &\quad \times \left[ \left(\frac{d}{dx}\right)^{n-1} (x^2-1)^n \right] dx = \\ &\quad \dots \dots \dots \\ &= \frac{(-1)^n}{2^{m+n} m!n!} \int_{-1}^{+1} \left[ \left(\frac{d}{dx}\right)^{m+n} (x^2-1)^m \right] (x^2-1)^n dx. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$I_{mn} = 0, \text{ так как } (d/dx)^{m+n} (x^2 - 1)^m = 0, \text{ если } m < n. \quad (7.17)$$

Предположим  $m = n$ . Тогда]

$$I_{nn} = \int_{-1}^{+1} [P_n(x)]^2 dx = \frac{1}{2^{2n} (n!)^2} \int_{-1}^{+1} \left[ \left( \frac{d}{dx} \right)^n (x^2 - 1)^n \right]^2 dx;$$

$n$ -кратное интегрирование по частям дает

$$\begin{aligned} I_{nn} &= \frac{(-1)^n}{2^{2n} (n!)^2} \int_{-1}^{+1} (x^2 - 1)^n \left( \frac{d}{dx} \right)^{2n} (x^2 - 1)^n dx = \\ &= \frac{(2n)!}{2^{2n} (n!)^2} \int_{-1}^{+1} (1 - x^2)^n dx. \end{aligned}$$

Положим  $x = 2u - 1$ ; тогда

$$I_{nn} = \frac{2(2n)!}{(n!)^2} \int_0^1 du (1-u)^n u^n = \frac{2(2n)!}{(n!)^2} B(n+1, n+1)$$

[см. (3.46)]. Следовательно,

$$I_{nn} = 2/(2n+1). \quad (7.18)$$

Мы показали, что

$$\int_{-1}^{+1} P_m(x) P_n(x) dx = 2\delta_{mn}/(2n+1). \quad (7.19)$$

Любую «разумную» функцию\* на интервале  $-1 \leq x \leq 1$  можно разложить в ряд по полиномам Лежандра

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n P_n(x). \quad (7.20)$$

Согласно гл. 6, величины  $c_n$  можно считать компонентами вектора  $\mathbf{f}$  в системе координат с базисными векторами

---

\* Условие того, чтобы функция обладала «разумным поведением», время от времени встречается в этой книге. Здесь не будет точной формулировки условия «разумности» функции. С одной стороны, если  $f(x)$  непрерывна и имеет конечное число максимумов и минимумов или если, кроме того, она имеет конечное число разрывов, то разложение (7.20) справедливо, т. е. ряд в правой части (7.20) сходится к  $f(x)$ . С другой стороны, для значительно более общих функций  $f(x)$  разложение (7.20) еще сходится в «среднем» (см. разд. 12.3).

$P_n$ . Умножая обе части (7.20) на  $P_m(x)$  и интегрируя от  $-1$  до  $+1$ , находим

$$c_m = \frac{2m+1}{2} \int_{-1}^{+1} P_m(x) f(x) dx. \quad (7.21)$$

Чему равно второе, линейно независимое с  $P_n(x)$  решение уравнения Лежандра? Если в уравнении Лежандра заменить переменную [см. текст, следующий после уравнения (1.40)]

$$y = vP_n(x), \quad (7.22)$$

то получаем уравнение

$$(1-x^2)v''P_n(x) + v'[2(1-x^2)P_n'(x) - 2xP_n(x)] = 0.$$

Решение этого уравнения находится непосредственно и равно

$$v = C \int \frac{dx}{(1-x^2)[P_n(x)]^2} + C'.$$

Таким образом, найдено второе решение. Обычно его обозначают так:

$$Q_n(z) = -P_n(z) \int_{\infty}^z \frac{dz}{(z^2-1)[P_n(z)]^2}. \quad (7.23)$$

Можно показать, что

$$Q_n(z) = \frac{1}{2} P_n(z) \ln \left( \frac{z+1}{z-1} \right) + f_{n-1}(z), \quad Q_n(z) \underset{z \rightarrow \infty}{\sim} \frac{1}{z^{n+1}}, \quad (7.24)$$

где  $f_{n-1}$  — полином степени  $n-1$  по  $z$ . Отметим, что  $Q_n(z)$  — многозначная функция; чтобы сделать ее однозначной, обычно разрезают плоскость  $z$  от  $-1$  до  $+1$  вдоль вещественной оси и определяют  $Q_n(z)$  вещественной для вещественных  $z > 1$ . Тогда, если  $-1 < x < 1$ ,

$$Q_n(x \pm i\varepsilon) = \frac{1}{2} P_n(x) \left[ \ln \left( \frac{1+x}{1-x} \right) \mp i\pi \right] + f_{n-1}(x). \quad (7.25)$$

Если  $-1 < x < 1$ , то обычно под  $Q_n(x)$  подразумевают арифметическое среднее

$$\begin{aligned} Q_n(x) &= \frac{1}{2} [Q_n(x+i\varepsilon) + Q_n(x-i\varepsilon)] = \\ &= \frac{1}{2} P_n(x) \ln \left( \frac{1+x}{1-x} \right) + f_{n-1}(x). \end{aligned} \quad (7.26)$$

Полином  $f_{n-1}(x)$  определяется из условия, что при  $z \rightarrow \infty$   $Q_n(z) \xrightarrow{z \rightarrow \infty} 0$  как  $z^{-(n+1)}$ . Например,

$$Q_0(z) = \frac{1}{2} \ln \left( \frac{z+1}{z-1} \right) = \frac{1}{z} + \frac{1}{3z^3} + \frac{1}{5z^5} + \dots,$$

$$Q_1(z) = \frac{1}{2} z \ln \left( \frac{z+1}{z-1} \right) + f_0 = z \left( \frac{1}{z} + \frac{1}{3z^3} + \dots \right) + f_0.$$

Ясно, что  $f_0 = -1$  и  $Q_1(z) = \frac{1}{2} z \ln \left( \frac{z+1}{z-1} \right) - 1$  и т. д.

Присоединенное дифференциальное уравнение Лежандра имеет вид [см. формулу (1.69)]

$$(1-x^2) \frac{d^2 y}{dx^2} - 2x \frac{dy}{dx} + \left[ n(n+1) - \frac{m^2}{1-x^2} \right] y = 0. \quad (7.27)$$

Легко убедиться, что если  $y$  — решение дифференциального уравнения Лежандра, то  $(1-x^2)^{m/2} (d/dx)^m y$  — решение присоединенного уравнения. Для положительного целого числа  $m$  определим

$$P_n^m(x) = (1-x^2)^{m/2} \left( \frac{d}{dx} \right)^m P_n(x). \quad (7.28)$$

Величину  $P_n^m$  называют присоединенной функцией Лежандра.

Интеграл ортогональности и нормировки присоединенных функций Лежандра имеет вид

$$\int_{-1}^{+1} P_l^m(x) P_l^m(x) dx = \frac{(l+m)!}{(l-m)!} \frac{2}{2l+1} \delta_{ll'}. \quad (7.29)$$

Подчеркнем, что равенство (7.29) справедливо, если обе функции имеют одинаковые значения  $m$ . Это условие ортогональности можно получить тем же путем, что и (7.19).

Присоединенные функции Лежандра с фиксированным  $m$  представляют также полную систему функций в том смысле, что произвольную (разумную) функцию  $f(x)$  можно разложить в ряд вида

$$f(x) = \sum_{n=m}^{\infty} c_n P_n^m(x). \quad (7.30)$$

Комбинируя (7.30) с идеей рядов Фурье, которые уже рассматривались в гл. 4, мы видим, что функцию  $f(\Omega)$ , где  $\Omega$  обозначает совокупность углов  $\theta$  и  $\phi$ , можно раз-

ложить в ряд

$$f(\Omega) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n A_{mn} P_n^{|m|}(\cos \theta) \exp(im\phi). \quad (7.31)$$

Продолжим кратко рассмотрение основных свойств  $P_n^{|m|}$ . Обычно определяют сферические гармоники

$$Y_{lm}(\Omega) = \left[ \frac{2l+1}{4\pi} \frac{(l-|m|)!}{(l+|m|)!} \right]^{1/2} P_l^{|m|}(\cos \theta) \exp(im\phi) \times \\ \times \begin{cases} (-1)^m, & \text{если } m \geq 0, \\ 1, & \text{если } m < 0. \end{cases} \quad (7.32)$$

Предлагаем читателю проверить, что (7.32) можно записать также в виде

$$Y_{lm}(\Omega) = \frac{1}{2^{|l|}} \left[ \frac{2l+1}{4\pi} \frac{(l-m)!}{(l+m)!} \right]^{1/2} \exp(im\phi) (-\sin \theta)^m \times \\ \times \frac{d^{l+m}}{d(\cos \theta)^{l+m}} (\cos^2 \theta - 1)^l. \quad (7.33)$$

Это равенство верно как для положительных, так и для отрицательных  $m$ . Из (7.32) либо из (7.33) следует, что

$$Y_{l,-m}(\Omega) = (-1)^m Y_{lm}^*(\Omega). \quad (7.34)$$

В (7.32) нормировочная константа выбрана так, что

$$\int d\Omega Y_{lm}^*(\Omega) Y_{l'm'}(\Omega) = \delta_{ll'} \delta_{mm'}. \quad (7.35)$$

Разложение (7.31) теперь можно записать в виде

$$f(\Omega) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l B_{lm} Y_{lm}(\Omega), \quad (7.36)$$

причем  $B_{lm}$  легко находится из (7.35):

$$B_{lm} = \int d\Omega Y_{lm}^*(\Omega) f(\Omega). \quad (7.37)$$

Покажем полезность таких разложений по сферическим гармоникам на примере так называемой теоремы сложения для сферических гармоник. Подставляя (7.37) в (7.36), получаем

$$f(\Omega) = \int d\Omega' f(\Omega') \sum_{lm} Y_{lm}^*(\Omega') Y_{lm}(\Omega). \quad (7.38)$$

Так как (7.38) верно для произвольной  $f(\Omega)$ , то

$$\sum_{lm} Y_{lm}^*(\Omega') Y_{lm}(\Omega) = \delta(\Omega - \Omega'). \quad (7.39)$$

Функция  $\delta(\Omega - \Omega')$  характеризуется свойствами

$$\delta(\Omega - \Omega') = 0 \text{ при } \Omega \neq \Omega', \quad \int d\Omega \delta(\Omega) = 1. \quad (7.40)$$

Функция  $\delta(\Omega - \Omega')$ , конечно, зависит только от угла  $\gamma$  между направлениями  $\Omega$  и  $\Omega'$ . Из формул сферической тригонометрии находим

$$\cos \gamma = \cos \theta \cos \theta' + \sin \theta \sin \theta' \cos(\phi - \phi').$$

Так как функция  $\delta(\Omega - \Omega')$  зависит только от  $\gamma$ , разложим ее в ряд по полиномам Лежандра

$$\delta(\Omega - \Omega') = \sum_l B_l P_l(\cos \gamma). \quad (7.41)$$

Коэффициенты  $B_l$  даются формулой [см. формулу (7.21)]

$$\begin{aligned} B_l &= \frac{2l+1}{2} \int_{-1}^{+1} d(\cos \gamma) \delta(\Omega - \Omega') P_l(\cos \gamma) = \\ &= \frac{2l+1}{4\pi} \int d\Omega \delta(\Omega - \Omega') P_l(\cos \gamma), \end{aligned} \quad (7.42)$$

так как  $2\pi d(\cos \gamma)$  как раз равно элементу телесного угла на сфере. Используя свойства (7.40) функции  $\delta(\Omega - \Omega')$ , из (7.42) получаем

$$B_l = \frac{2l+1}{4\pi} P_l(1) = \frac{2l+1}{4\pi}. \quad (7.43)$$

Теперь, используя (7.39), (7.41) и (7.43), находим

$$\sum_{lm} Y_{lm}^*(\Omega') Y_{lm}(\Omega) = \sum_l \frac{2l+1}{4\pi} P_l(\cos \gamma). \quad (7.44)$$

Чтобы закончить вывод, постулируем свойство сферических гармоник, справедливость которого будет очевидна после прочтения гл. 8. Если произвольно повернуть оси координат, любая сферическая гармоника  $Y_{lm}(\Omega)$  становится линейной комбинацией сферических гармоник  $Y_{lm'}(\bar{\Omega})$  от новых угловых координат  $\bar{\Omega}$ . Подчеркнем, что все эти гармоники имеют одинаковый индекс  $l$ , т. е.

$$Y_{lm}(\Omega) = \sum_{m'=-l}^l C_{mm'}^l Y_{lm'}(\bar{\Omega}), \quad (7.45)$$

причем коэффициенты  $C_{mm}^l$  зависят от величины поворота  $\Omega \rightarrow \bar{\Omega}$ , а также от  $l$ ,  $m$  и  $m'$ .

Так как из (7.32)  $Y_{l0} = \sqrt{(2l+1)/4\pi} P_l(\cos \theta)$ , то член  $P_l(\cos \gamma)$  в (7.44) можно записать как  $P_l(\cos \gamma) = \sqrt{4\pi/(2l+1)} Y_{l0}(\bar{\Omega})$ , где  $\bar{\Omega}$  — угловые координаты того же направления, что и  $\Omega$ , но в другой системе координат, полярная ось которой направлена вдоль  $\Omega'$ .

Тогда из (7.45) имеем (с переставленными  $\Omega$  и  $\Omega'$ )

$$P_l(\cos \gamma) = \sum_{m'=-l}^l A_{0m'}^l(\Omega') Y_{lm'}(\Omega).$$

Сравнивая с (7.44), видим, что члены для каждого значения  $l$  равны, т. е.

$$P_l(\cos \gamma) = \frac{4\pi}{2l+1} \sum_{m=-l}^l Y_{lm}^*(\Omega') Y_{lm}(\Omega). \quad (7.46)$$

С помощью (7.32) выражение (7.46) можно переписать через присоединенные полиномы Лежандра:

$$P_l(\cos \gamma) = P_l(\cos \theta) P_l(\cos \theta') + 2 \sum_{m=1}^l \frac{(l-m)!}{(l+m)!} P_l^m(\cos \theta) P_l^m(\cos \theta') \cos m(\phi - \phi'). \quad (7.47)$$

Уравнение (7.46) [(или (7.47)] и есть искомая теорема сложения.

Закончим этот раздел формулами для нескольких первых сферических гармоник:

$$\begin{aligned} Y_{00} &= \sqrt{\frac{1}{4\pi}}; & Y_{2, \pm 2} &= \sqrt{\frac{15}{32\pi}} \sin^2 \theta e^{\pm 2i\phi}; \\ Y_{1, \pm 1} &= \mp \sqrt{\frac{3}{8\pi}} \sin \theta e^{\pm 2i\phi}; & Y_{2, \pm 1} &= \mp \sqrt{\frac{15}{8\pi}} \sin \theta \cos \theta e^{\pm 2i\phi}; \\ Y_{10} &= \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cos \theta; & Y_{20} &= \sqrt{\frac{5}{16\pi}} (3 \cos^2 \theta - 1). \end{aligned}$$

## 7.2. ФУНКЦИИ БЕССЕЛЯ

Мы уже приводили уравнение Бесселя (1.52):

$$x^2 y'' + xy' + (x^2 - m^2) y = 0 \quad (7.48)$$

и решение в виде ряда

$$y(x) = x^m \left[ 1 - \frac{1}{m+1} \left(\frac{x}{2}\right)^2 + \right. \\ \left. + \frac{1}{(m+1)(m+2)!} \frac{1}{2!} \left(\frac{x}{2}\right)^4 - \dots + \dots \right]. \quad (7.49)$$

Определим функцию Бесселя  $J_m(x)$  как

$$J_m(x) = \frac{1}{m!} \left(\frac{x}{2}\right)^m \left[ 1 - \frac{1}{m+1} \left(\frac{x}{2}\right)^2 + \right. \\ \left. + \frac{1}{(m+1)(m+2)} \frac{1}{2!} \left(\frac{x}{2}\right)^4 - \dots + \dots \right] = \\ = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r}{r! \Gamma(m+r+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{m+2r}. \quad (7.50)$$

Для целого  $m$  из этого определения находим

$$J_{-m}(x) = (-1)^m J_m(x). \quad (7.51)$$

Непосредственно из степенного ряда (7.50) можно получить рекуррентные соотношения

$$J_{m-1}(x) + J_{m+1}(x) = \\ = \sum_{r=0}^{\infty} \left[ \frac{(-1)^r}{r! \Gamma(m+r)} \left(\frac{x}{2}\right)^{m+2r-1} + \frac{(-1)^r}{r! \Gamma(m+r+2)} \left(\frac{x}{2}\right)^{m+2r+1} \right] = \\ = \left(\frac{x}{2}\right)^{m-1} \left\{ \frac{1}{\Gamma(m)} + \sum_{r=1}^{\infty} \left[ \frac{(-1)^r}{r! \Gamma(m+r)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2r} - \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{(-1)^r}{(r-1)! \Gamma(m+r+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2r} \right] \right\} = \\ = \left(\frac{x}{2}\right)^{m-1} \left[ \frac{1}{\Gamma(m)} + \sum_{r=1}^{\infty} (-1)^r \left(\frac{x}{2}\right)^{2r} \frac{m}{r! \Gamma(m+r+1)} \right] = \\ = m \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r}{r! \Gamma(m+r+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{m+2r-1}$$

Следовательно,

$$J_{m-1}(x) + J_{m+1}(x) = \frac{2m}{x} J_m(x). \quad (7.52)$$

Аналогично

$$J_{m-1}(x) - J_{m+1}(x) = 2J'_m(x). \quad (7.53)$$

Складывая и вычитая (7.52) и (7.53), имеем

$$J_{m-1}(x) = \frac{m}{x} J_m(x) + J'_m(x); \quad (7.54)$$

$$J_{m+1}(x) = \frac{m}{x} J_m(x) - J'_m(x). \quad (7.55)$$

На рис. 7.1 показаны первые три функции Бесселя целого порядка.

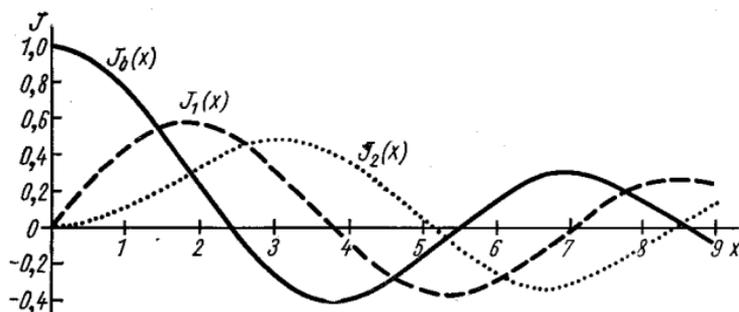


Рис. 7.1. Функции Бесселя  $J_0(x)$ ,  $J_1(x)$  и  $J_2(x)$ .

Функции Бесселя полуцелого порядка легко выразить через тригонометрические функции. Из решений в виде ряда находим

$$J_{1/2}(x) = (2/\pi x)^{1/2} \sin x,$$

$$J_{-1/2}(x) = (2/\pi x)^{1/2} \cos x.$$

Далее, из рекуррентных соотношений (7.54) и (7.55) имеем

$$J_{3/2}(x) = (2/\pi x)^{1/2} (1/x) (\sin x - \cos x);$$

$$J_{-3/2}(x) = (2/\pi x)^{1/2} (-1/x) (\cos x - \sin x).$$

С помощью рекуррентных соотношений можно получить и другие функции с полуцелым индексом.

Если  $m$  не есть целое число, то два независимых решения уравнения Бесселя суть  $J_m(x)$  и  $J_{-m}(x)$ . Однако если  $m$  — целое число, то они не являются независимы-

ми. Поэтому определяют функцию

$$Y_m(x) = \frac{\cos m\pi J_m(x) - J_{-m}(x)}{\sin m\pi}, \quad (7.56)$$

причем  $J_m(x)$  и  $Y_m(x)$  — всегда независимая пара решений. Чтобы показать это, можно вычислить вронскиан  $J_m$  и  $Y_m$  и проверить, что он отличен от нуля для всех значений  $m$  (предлагаем это в качестве упражнения).

Ряд полезных интегральных соотношений находится следующим образом. Из  $J'_0(x) = -J_1(x)$  получаем  $\int J_1(x) dx = -J_0(x)$ . Из (7.54)

$$[x^n J_n(x)]' = x^n \left[ J'_n(x) + \frac{n}{x} J_n(x) \right] = x^n J_{n-1}(x).$$

Следовательно,

$$\int x^n J_{n-1}(x) dx = x^n J_n(x). \quad (7.57)$$

Также

$$[x^{-n} J_n(x)]' = x^{-n} \left[ J'_n(x) - \frac{n}{x} J_n(x) \right] = -x^{-n} J_{n+1}(x).$$

Следовательно,

$$\int x^{-n} J_{n+1}(x) dx = -x^{-n} J_n(x). \quad (7.58)$$

Функции Бесселя обладают свойством ортогональности, аналогичным случаю полиномов Лежандра. Положим  $J_m(kx) = f(x)$ ,  $J_m(lx) = g(x)$ . Тогда

$$f'' + \frac{1}{x} f' + \left( k^2 - \frac{m^2}{x^2} \right) f = 0, \quad g'' + \frac{1}{x} g' + \left( l^2 - \frac{m^2}{x^2} \right) g = 0.$$

Умножая второе равенство на  $xf$  и вычитая первое, умноженное на  $xg$ , имеем

$$[x(fg' - gf')] = (k^2 - l^2) xfg;$$

$$\int xf(x)g(x)dx = \frac{x}{k^2 - l^2} [f(x)g'(x) - g(x)f'(x)];$$

$$\int_a^b J_m(kx)J_m(lx)x dx =$$

$$= \frac{1}{k^2 - l^2} [lxJ_m(kx)J'_m(lx) - kxJ_m(lx)J'_m(kx)]_a^b.$$

Если  $J_m(kx)$  и  $J_m(lx)$  обращаются в нуль в точках  $a$  и  $b$ , или если  $J'_m(kx)$  и  $J'_m(lx)$  обращаются в нуль в этих точках, или выполняются более общие условия (например, две функции обращаются в нуль в точке  $a$ , а две производные — в точке  $b$ ), то получаем

$$\int_a^b J_m(kx) J_m(lx) x dx = 0 \text{ в случае, если } k \neq l. \quad (7.59)$$

Чему равен интеграл при  $k = l$ ? Требуется вычислить  $\int J_m^2(kx) x dx = \frac{1}{k^2} \int J_m^2(y) y dy$ , где  $y = kx$ . Интегрируем один раз по частям

$$I = \int J_m^2(y) y dy = \frac{1}{2} y^2 J_m^2(y) - \int J_m(y) J'_m(y) y^2 dy.$$

С другой стороны, из уравнения Бесселя имеем

$$y^2 J_m(y) = m^2 J_m(y) - y J'_m(y) - y^2 J''_m(y).$$

Следовательно,

$$I = \frac{1}{2} y^2 J_m^2(y) - \int J'_m(y) [m^2 J_m(y) - y J'_m(y) - y^2 J''_m(y)] dy = \frac{1}{2} y^2 J_m^2(y) - \frac{1}{2} m^2 J_m^2(y) + \frac{1}{2} y^2 [J'_m(y)]^2.$$

Таким образом, вычислен «нормировочный интеграл»

$$\int J_m^2(kx) x dx = \frac{1}{2} \left( x^2 - \frac{m^2}{k^2} \right) J_m^2(kx) + \frac{1}{2} x^2 [J'_m(kx)]^2.$$

Если, например,  $J_m(kx)$  обращается в нуль при  $x = 0$  и  $x = b$ , то

$$\int_a^b J_m^2(kx) x dx = \frac{x^2}{2} [J'_m(kx)]^2 \Big|_a^b = \frac{x^2}{2} [J_{m+1}(kx)]^2 \Big|_a^b. \quad (7.60)$$

Эти соотношения ортогональности обычно используются для определения коэффициентов разложения функции в ряд по функциям Бесселя. Рассмотрим, например, функцию  $f(x)$  на интервале  $0 < x < a$ . Напишем

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n J_m(k_n x), \quad (7.61)$$

где  $k_n$  выбраны так, что  $J_m(k_n a) = 0$ . Тогда, так как

$$\int_0^a J_m(k_n x) J_m(k_p x) x dx = \delta_{np} \frac{a^2}{2} [J_{m+1}(k_p a)]^2, \quad (7.62)$$

то легко получить

$$c_n = \int_0^a f(x) J_m(k_n x) x dx / \frac{a^2}{2} [J_{m+1}(k_n a)]^2. \quad (7.63)$$

Если требуется представить функцию на более общем интервале  $a < x < b$ , то можно использовать, например, функции вида

$$J_m(kx) Y_m(ka) - Y_m(kx) J_m(ka) \quad (7.64)$$

с  $k$ , выбранным так, чтобы функции обращались в нуль при  $x = b$ .

Вспомним производящую функцию для полиномов Лежандра

$$1 / \sqrt{1 - 2hz + h^2} = \sum_{n=0}^{\infty} h^n P_n(z).$$

Попытаемся найти производящую функцию для функций Бесселя целого порядка, т. е. нужно найти такую функцию  $F(z, h)$ , что  $F(z, h) = \sum_n h^n J_n(z)$ . Начнем с рекуррентного соотношения

$$J_{m+1}(z) + J_{m-1}(z) = \frac{2m}{z} J_m(z).$$

Умножим его на  $h^m$  и просуммируем по всем  $m$ . Получаем

$$\left(h + \frac{1}{h}\right) F(z, h) = \frac{2h}{z} \cdot \frac{\partial F(z, h)}{\partial h}.$$

Интегрируя, находим

$$F(z, h) = \phi(z) \exp\left[\frac{z}{2} \left(h - \frac{1}{h}\right)\right],$$

где  $\phi(z)$  — некоторая функция  $z$ , которую нужно определить. Подберем  $\phi$  так, чтобы коэффициент в  $F$  при  $h^0$  равнялся  $J_0(z)$ . Непосредственной проверкой убеждаемся, что для этого необходимо  $\phi(z) = 1$ . Тогда, если написать

$$\exp\left[\frac{z}{2} \left(h - \frac{1}{h}\right)\right] = \sum_n h^n U_n(z), \quad (7.65)$$

находим

$$(1) U_0(z) = J_0(z);$$

$$(3) U_n(-z) = (-1)^n U_n(z);$$

$$(2) U_{n-1}(z) + U_{n+1}(z) = \frac{2n}{z} U_n(z); \quad (4) U_{-n}(z) = (-1)^n U_n(z).$$

Этого недостаточно, чтобы утверждать равенство  $U_n(z) = J_n(z)$ . Продифференцируем производящую функцию по  $z$ :

$$\frac{1}{2} \left( h - \frac{1}{h} \right) \exp \left[ \frac{z}{2} \left( h - \frac{1}{h} \right) \right] = \sum_n h^n U'_n(z),$$

$$\frac{1}{2} \left( h - \frac{1}{h} \right) \sum_n h^n U_n(z) = \sum_n h^n U'_n(z).$$

Приравнявая коэффициенты при  $h^n$  в левой и правой частях этого уравнения, находим  $U'_n(z) = \frac{1}{2} [U_{n-1}(z) - U_{n+1}(z)]$ . Таким образом,  $U_1 = -U'_0 = -J'_0 = J_1$ , и все остальные равенства следуют из рекуррентного соотношения.

Приведем пример, где используется эта производящая функция:

$$\begin{aligned} \sum_n J_n(x+y) h^n &= \exp \left[ \frac{x+y}{2} \left( h - \frac{1}{h} \right) \right] = \\ &= \exp \left[ \frac{x}{2} \left( h - \frac{1}{h} \right) \right] \exp \left[ \frac{y}{2} \left( h - \frac{1}{h} \right) \right] = \\ &= \sum_k h^k J_k(x) \sum_l h^l J_l(y). \end{aligned}$$

Следовательно,

$$J_n(x+y) = \sum_k J_k(x) J_{n-k}(y). \quad (7.66)$$

Зная производящую функцию, легко получить интегральное представление Шлефли

$$J_n(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{\exp \left[ \frac{z}{2} \left( t - \frac{1}{t} \right) \right]}{t^{n+1}} dt, \quad (7.67)$$

причем контур обходит начало координат в положительном направлении. Если заменить  $t = \exp(i\theta)$ , то

$$\begin{aligned} J_n(z) &= \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{\exp(iz \sin \theta)}{\exp[(n+1)i\theta]} i \exp(i\theta) d\theta = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \exp[i(z \sin \theta - n\theta)] d\theta. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$J_n(z) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos(n\theta - z \sin \theta) d\theta. \quad (7.68)$$

Это выражение называется интегралом Бесселя.

Теперь рассмотрим интегральные представления функций Бесселя в несколько более общем плане. В частности, число  $n$  далее не будет предполагаться обязательно целым. Рассмотрим интеграл

$$f_n(z) = \frac{1}{2\pi i} \int \frac{\exp\left[\frac{z}{2}\left(t - \frac{1}{t}\right)\right]}{t^{n+1}} dt \quad (7.69)$$

и посмотрим, при каком условии он является решением уравнения Бесселя. Подействуем сначала на  $f_n(z)$  дифференциальным оператором Бесселя. Получаем

$$\begin{aligned} &\left[z^2 \left(\frac{d}{dz}\right)^2 + z \frac{d}{dz} + (z^2 - n^2)\right] f_n(z) = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int \frac{dt}{t^{n+1}} \exp\left[\frac{z}{2}\left(t - \frac{1}{t}\right)\right] \left[\frac{z^2}{4}\left(t - \frac{1}{t}\right)^2 + \right. \\ &\quad \left. + \frac{z}{2}\left(t - \frac{1}{t}\right) + z^2 - n^2\right] = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int dt \frac{d}{dt} \left\{ \frac{\exp\left[\frac{z}{2}\left(t - \frac{1}{t}\right)\right]}{t^n} \left[\frac{z}{2}\left(t + \frac{1}{t}\right) + n\right] \right\} = \\ &= \frac{1}{2\pi i} [F_n(z, t)], \end{aligned}$$

причем выражение  $[F_n(z, t)]$  означает, что нужно взять разность значений функции  $F_n(z, t)$  на двух концах пути интегрирования. Если выбрать путь так, чтобы эта разность равнялась нулю, то (7.69) будет решением уравнения Бесселя. Если  $n$  — целое число, достаточно взять

любой замкнутый контур. Конечно, если контур не включает начала координат, интеграл (7.69), равен нулю.

Предположим, что  $n$  не обязательно целое число и что  $z$  вещественно и положительно. Тогда  $F_n(z, t)$  равна нулю при  $t \rightarrow 0+$  и при  $t \rightarrow -\infty$ . Таким образом, можно получить два решения, контуры для которых показаны

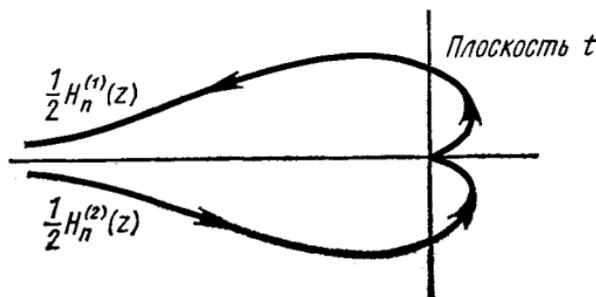


Рис. 7.2. Выбор контура для интеграла (7.69), дающего решение уравнения Бесселя.

на рис. 7.2. Они называются функциями Ганкеля первого и второго рода соответственно и всегда дают два независимых решения уравнения Бесселя.

Если  $n$  — целое число, то из рисунка ясно, что

$$\frac{1}{2} [H_n^{(1)}(z) + H_n^{(2)}(z)] = J_n(z). \quad (7.70)$$

Это соотношение верно также и в том случае, когда  $n$  не есть целое число.

Эти интегральные представления справедливы при  $|\arg z| < \pi/2$ . Если требуется найти представление, которое годилось бы при  $|\arg z - \alpha| < \pi/2$ , то нужно определенным образом повернуть контуры. Предлагаем это сделать в качестве упражнения.

Соберем вместе все найденные решения уравнения Бесселя. Включим также без доказательства ряд соотношений.

(1)  $J_n(x)$ .

(2)  $J_{-n}(x)$ . Если  $n$  — нецелое число, то это второе линейно независимое решение. Если  $n$  — целое число, то  $J_{-n}(x) = (-1)^n J_n(x)$ .

(3)  $Y_n(x) = [\cos n\pi J_n(x) - J_{-n}(x)]/\sin n\pi$ . Это всегда второе независимое решение.

$$\left. \begin{aligned} (4) \quad & H_n^{(1)}(x) = J_n(x) + iY_n(x). \\ (5) \quad & H_n^{(2)}(x) = J_n(x) - iY_n(x). \end{aligned} \right\} \quad (7.71)$$

Если  $x \rightarrow 0$ ,  $J_n(x)$  при  $n \geq 0$  конечно. Все другие решения в начале координат расходятся. Асимптотические формы решений при  $x \rightarrow \infty$  имеют вид

$$\left. \begin{aligned} J_n(x) &\sim \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos\left(x - \frac{n\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right); \\ Y_n(x) &\sim \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin\left(x - \frac{n\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right); \\ H_n^{(1)}(x) &\sim \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \exp\left[i\left(x - \frac{n\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right)\right]; \\ H_n^{(2)}(x) &\sim \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \exp\left[-i\left(x - \frac{n\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right)\right], \end{aligned} \right\} (7.72)$$

где  $J_n$ ,  $Y_n$ ,  $H_n^{(1)}$  и  $H_n^{(2)}$  подчиняются одинаковым рекуррентным соотношениям (7.52) — (7.55). Отметим далее ряд функций, связанных с функциями Бесселя.

1. Функции Бесселя от мнимого аргумента (модифицированные функции Бесселя):

$$I_n(z) = \frac{J_n(iz)}{i^n}; \quad K_n(z) = \frac{\pi i}{2} (i)^n H_n^{(1)}(iz); \quad (7.73)$$

$I_n(z) \rightarrow 0$  при  $z \rightarrow 0$  (в случае, если  $n > 0$ ;  $I_0(0) = 1$ );  $K_n(z) \rightarrow 0$  при  $z \rightarrow \infty$ .

2. Функции  $\text{ber}_n(x)$  и  $\text{bei}_n x$ , которые определяются через функции Бесселя от аргумента с фазой  $3\pi/4$ :

$$J_n(xi\sqrt{i}) = \text{ber}_n x + i \text{bei}_n x. \quad (7.74)$$

3. Сферические функции Бесселя:

$$j_l(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}} J_{l+1/2}(x), \quad n_l(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}} Y_{l+1/2}(x). \quad (7.75)$$

### 7.3. ГИПЕРГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ФУНКЦИЯ

Эта функция определяется так называемым гипергеометрическим рядом

$$\begin{aligned} {}_2F_1(a, b; c; x) &= 1 + \frac{ab}{c} \frac{x}{1!} + \frac{a(a+1)b(b+1)}{c(c+1)} \frac{x^2}{2!} + \dots = \\ &= \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(a+n)\Gamma(b+n)}{\Gamma(c+n)} \frac{x^n}{n!}. \end{aligned} \quad (7.76)$$

Обозначение  ${}_2F_1$  указывает, что есть два параметра,  $a$  и  $b$ , «идущие в числитель», и один,  $c$ , «идущий в знаменатель».

Эта функция является решением дифференциального уравнения

$$x(1-x)y'' + [c - (a+b+1)x]y' - aby = 0, \quad (7.77)$$

которое имеет правильные особенности в точках  $x = 0, 1$  и  $\infty$ . Можно использовать метод разложения в степенной ряд (см. разд. 1.2), чтобы найти поведение решения вблизи каждой из этих особых точек.

Предварительно рассмотрим общее линейное дифференциальное уравнение второго порядка с тремя правильными особенностями. Обозначим эти особенности  $\xi, \eta$  и  $\zeta$ . Запишем уравнение в виде

$$y'' + P(z)y' + Q(z)y = 0. \quad (7.78)$$

Из разд. 1.2 известно, что  $P$  и  $Q$  имеют вид

$$P = \frac{\text{полином}}{(z-\xi)(z-\eta)(z-\zeta)}; \quad Q = \frac{\text{полином}}{(z-\xi)^2(z-\eta)^2(z-\zeta)^2}. \quad (7.79)$$

Используя условие, что бесконечно удаленная точка является обыкновенной, находим

$$P = \frac{A}{z-\xi} + \frac{B}{z-\eta} + \frac{C}{z-\zeta}, \quad A+B+C=2,$$

$$Q = \frac{1}{(z-\xi)(z-\eta)(z-\zeta)} \left( \frac{D}{z-\xi} + \frac{E}{z-\eta} + \frac{F}{z-\zeta} \right).$$

Далее методом, описанным в разд. 1.2, рассмотрим решение вида  $y \approx (z-\xi)^\alpha$  вблизи точки  $z = \xi$ . Определяющее уравнение имеет вид

$$\alpha^2 + (A-1)\alpha + \frac{D}{(\xi-\eta)(\xi-\zeta)} = 0.$$

Обозначим корни  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$ . Тогда

$$\alpha_1 + \alpha_2 = 1 - A, \quad \alpha_1\alpha_2 = \frac{D}{(\xi-\eta)(\xi-\zeta)}.$$

Если решить эти два уравнения относительно  $A$  и  $D$  через  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$  и сделать то же самое с двумя другими особенностями, то дифференциальное уравнение (7.78) можно записать в следующей форме:

$$y'' + \left( \frac{1-\alpha_1-\alpha_2}{z-\xi} + \frac{1-\beta_1-\beta_2}{z-\eta} + \frac{1-\gamma_1-\gamma_2}{z-\zeta} \right) y' -$$

$$- \frac{(\xi-\eta)(\eta-\zeta)(\zeta-\xi)}{(z-\xi)(z-\eta)(z-\zeta)} \left[ \frac{\alpha_1\alpha_2}{(z-\xi)(\eta-\zeta)} + \frac{\beta_1\beta_2}{(z-\eta)(\zeta-\xi)} + \right.$$

$$\left. + \frac{\gamma_1\gamma_2}{(z-\zeta)(\xi-\eta)} \right] y = 0. \quad (7.80)$$

Здесь использовались обозначения  $\beta$  и  $\gamma$  для показателей степеней при  $\eta$  и  $\zeta$  соответственно.

Тот факт, что  $y$  является решением уравнения (7.80), часто записывают в виде

$$y = P \left\{ \begin{array}{ccc} \xi & \eta & \zeta \\ \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \end{array} z \right\} \quad (7.81)$$

( $P$  — символ Римана). Заметим, что для того, чтобы  $z = \infty$  была обыкновенной точкой, необходимо выполнение условия  $\alpha_1 + \alpha_2 + \beta_1 + \beta_2 + \gamma_1 + \gamma_2 = 1$ .

Символ Римана соответствует общему решению уравнения (7.80). Из него можно найти шесть различных специальных решений, которые ведут себя вблизи особенностей степенным образом. Например, одно из этих шести решений ведет себя при  $z$  вблизи  $\eta$  как  $(z - \eta)^{\beta_1}$ . Конечно, эти шесть специальных решений не являются независимыми.

Часто удобно помещать эти особенности в точки  $0, 1$  и  $\infty$ . Для этого сделаем гомографическое преобразование:

$$\omega = \frac{(z - \xi)(\eta - \zeta)}{(z - \zeta)(\eta - \xi)}, \quad (7.82)$$

которое переводит точки  $z = \xi, \eta, \zeta$  в точки  $\omega = 0, 1, \infty$ . Тогда оказывается, что

$$y = P \left\{ \begin{array}{ccc} 0 & 1 & \infty \\ \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \end{array} \omega \right\}. \quad (7.83)$$

Сделанное преобразование сдвинуло особенности, не изменяя показателей. Можно, наоборот, изменить показатели, не сдвигая особенностей. Например,

$$\frac{(z - \xi)^\lambda}{(z - \eta)^\lambda} P \left\{ \begin{array}{ccc} \xi & \eta & \zeta \\ \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \end{array} z \right\} = P \left\{ \begin{array}{ccc} \xi & \eta & \zeta \\ \alpha_1 + \lambda & \beta_1 - \lambda & \gamma_1 \\ \alpha_2 + \lambda & \beta_2 - \lambda & \gamma_2 \end{array} z \right\}. \quad (7.84)$$

Комбинируя эти два типа преобразований, можно свести общее уравнение (7.80) или (7.81) к уравнению

$$y = P \left\{ \begin{array}{ccc} 0 & 1 & \infty \\ 0 & 0 & a \\ 1 - c & c - a - b & b \end{array} x \right\}. \quad (7.85)$$

Легко проверить, что выражение (7.85) — не что иное, как решение гипергеометрического уравнения (7.77), написанного в начале этого раздела. Гипергеометрический ряд (7.76) есть специальное решение этого уравнения, которое ведет себя вблизи особой точки  $z = 0$  как  $(z - 0)^0 = 1$ .

Для нахождения второго решения сделаем преобразование, аналогичное (7.84), и получим

$$y = x^{1-c} P \left\{ \begin{array}{ccc} 0 & 1 & \infty \\ 0 & 0 & 1+a-c & x \\ c-1 & c-a-b & 1+b-c & \end{array} \right\}.$$

Следовательно, другое решение уравнения (7.77) дается формулой

$$y = x^{1-c} {}_2F_1(1+a-c; 1+b-c; 2-c; x). \quad (7.86)$$

Это решение, которое вблизи  $x = 0$  ведет себя как  $(x - 0)^{1-c}$ . Можно найти и другие решения. Положим, например,  $u = 1/x$ . Тогда

$$\begin{aligned} y &= P \left\{ \begin{array}{ccc} 0 & 1 & \infty \\ a & 0 & 0 & u \\ b & c-a-b & 1-c & \end{array} \right\} = \\ &= u^a P \left\{ \begin{array}{ccc} 0 & 1 & \infty \\ 0 & 0 & a & u \\ b-a & c-a-b & 1+a-c & \end{array} \right\}. \end{aligned}$$

Следовательно, величина

$$y = x^{-a} {}_2F_1(a, 1+a-c; 1+a-b; 1/x) \quad (7.87)$$

есть другое решение гипергеометрического уравнения. Это решение при  $x \rightarrow \infty$  ведет себя как  $(1/x)^a$ . Интересная задача — связать эти решения, но здесь мы этого делать не будем. Приведем типичную формулу такого рода:

$$\begin{aligned} &{}_2F_1(a, b; c; z) = \\ &= \frac{\Gamma(c) \Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a) \Gamma(c-b)} {}_2F_1(a, b; 1+a+b-c; 1-z) + \\ &\quad + \frac{\Gamma(c) \Gamma(a+b-c)}{\Gamma(a) \Gamma(b)} (1-z)^{c-a-b} \times \\ &\quad \times {}_2F_1(c-a, c-b; 1+c-a-b; 1-z). \quad (7.88) \end{aligned}$$

Интегральное представление для  ${}_2F_1(a, b; c; x)$  можно получить следующим образом:

$$\begin{aligned}
 {}_2F_1(a, b; c; x) &= \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(a+n)\Gamma(b+n)}{\Gamma(c+n)} \cdot \frac{x^n}{n!} = \\
 &= \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(b)\Gamma(c-b)} \sum_{n=0}^{\infty} \Gamma(a+n) B(c-b, b+n) \frac{x^n}{n!} = \\
 &= \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(b)\Gamma(c-b)} \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^1 dt (1-t)^{c-b-1} t^{b+n-1} \Gamma(a+n) \frac{x^n}{n!} = \\
 &= \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)} \int_0^1 dt \cdot t^{b-1} (1-t)^{c-b-1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(a+n)}{\Gamma(a)} \frac{(tx)^n}{n!} = \\
 &= \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)} \int_0^1 dt \cdot t^{b-1} (1-t)^{c-b-1} (1-tx)^{-a}. \quad (7.89)
 \end{aligned}$$

Чтобы интеграл сходил, здесь необходимо предположить, что  $\operatorname{Re} c > \operatorname{Re} b > 0$ .

Это представление наводит на мысль исследовать более общую функцию

$$f(x) = \int t^{b-1} (1-t)^{c-b-1} (1-tx)^{-a} dt \quad (7.90)$$

вдоль некоторого контура в качестве возможного решения гипергеометрического уравнения. Можно непосредственно проверить, что подстановка  $f(x)$  в гипергеометрическое уравнение (7.77) дает

$$\begin{aligned}
 0 &= x(1-x)f'' + [c - (a+b+1)x]f' - abf = \\
 &= -a \int dt \underbrace{\frac{d}{dt} [t^b (1-t)^{c-b} (1-tx)^{-a-1}]}_{F(t, x)}. \quad (7.91)
 \end{aligned}$$

Таким образом, в случае если  $F$  возвращается к своему исходному значению после обхода контура, мы действительно нашли решение. Если  $\operatorname{Re} c > \operatorname{Re} b > 0$ , то годится вещественная ось от 0 до 1, и мы возвращаемся к формуле (7.89).

Отметим, что подынтегральное выражение в (7.90) имеет три особенности: при  $t = 0, 1, 1/x$ . Для контура вокруг одной из них (или вокруг нескольких) величина  $F$ , вообще говоря, не возвращается к своему исходному значению. С другой стороны, если контур не включает особенностей, то интеграл (7.90) равен нулю по теореме Коши.



Рис. 7.3. Контур Похгаммера для интегрального представления гипергеометрической функции, содержащий две особенности.

Общий выход из положения состоит в том (следующая Похгаммеру), чтобы обходить особенности дважды, используя контуры типа, показанного на рис. 7.3.

Чтобы избежать таких сложных контуров, предположим,

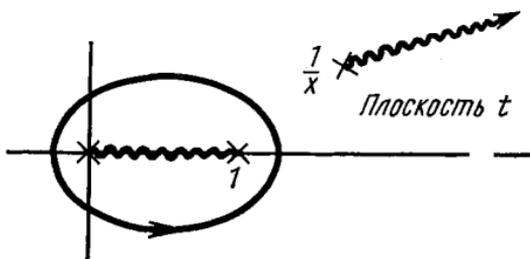


Рис. 7.4. Контур, удобный в случае, когда  $c$  — целое число.

что  $c$  — целое число. Теперь можно использовать контур, показанный на рис. 7.4, и рассмотреть интеграл

$$I = \oint dt \cdot t^{b-1} (t-1)^{c-b-1} (1-tx)^{-a}. \quad (7.92)$$

Разложим (7.92) в ряд по степеням  $x$ :

$$I = \oint dt \cdot t^{b-1} (t-1)^{c-b-1} \left[ 1 + atx + a(a+1)t^2 \frac{x^2}{2!} + \dots \right].$$

Требуется вычислить интеграл  $\int = \oint t^a (t-1)^{n-a} dt$  ( $n$  — целое число). Деформируем контур в круг большого

радиуса. Тогда

$$\begin{aligned} \int &= \oint t^n \left(1 - \frac{1}{t}\right)^{n-a} dt = \\ &= \oint t^n \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{(n-a)(n-a-1)\dots(n-a-k+1)}{k!} \frac{dt}{t^k} = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \oint dt \cdot t^{n-k} (-1)^k \frac{\Gamma(n-a+1)}{\Gamma(n-a-k+1) k!}. \end{aligned}$$

Конечно, в случае если  $n-k \neq -1$ , интеграл равен нулю по теореме о вычетах. Итак, если  $n < -1$ , то  $\int = 0$ , в то время как при  $n \geq -1$   $\int = 2\pi i (-1)^{n+1} \frac{\Gamma(n-a+1)}{\Gamma(-a)(n+1)!}$ . Предлагаем читателю проверить, что этот результат можно записать также в виде

$$\int = 2\pi i \frac{\Gamma(a+1)}{\Gamma(a-n)(n+1)!}. \quad (7.93)$$

Возвратимся теперь к интегральному представлению (7.92) и используем (7.93):

$$\begin{aligned} I &= 2\pi i \left[ \frac{\Gamma(b)}{\Gamma(1+b-c)(c-1)!} + a \frac{\Gamma(b+1)}{\Gamma(1+b-c)c!} x + \right. \\ &\quad \left. + \frac{a(a+1)\Gamma(b+2)}{\Gamma(1+b-c)(c+1)!} \cdot \frac{x^2}{2!} + \dots \right] = \\ &= \frac{2\pi i}{(c-1)!} \cdot \frac{\Gamma(b)}{\Gamma(1+b-c)} {}_2F_1(a, b; c; x). \end{aligned}$$

Следовательно, в случае, когда  $c$  — целое число (большее нуля), имеет место следующее интегральное представление для  ${}_2F_1(a, b; c; x)$ :

$$\begin{aligned} &{}_2F_1(a, b; c; x) = \\ &= (c-1)! \frac{\Gamma(1+b-c)}{\Gamma(b)} \cdot \frac{1}{2\pi i} \oint dt \cdot t^{b-1} (t-1)^{c-b-1} (1-tx)^{-a}. \end{aligned} \quad (7.94)$$

Если  $a$  или  $b$  — отрицательное целое число, гипергеометрическая функция становится полиномом (так называемый полином Якоби).

Причина столь подробного рассмотрения гипергеометрических функций состоит в том, что многие функции,

встречающиеся в математической физике, есть просто частные случаи  ${}_2F_1(a, b; c; x)$ . Например, дифференциальное уравнение Лежандра (7.1) имеет три правильные особенности: в точках  $-1$ ,  $+1$  и  $\infty$ . Отсюда следует, что функции Лежандра суть частные случаи гипергеометрической функции. Аналогично полиномы Якоби, упомянутые в предыдущем параграфе, встречаются при изучении свойств преобразования сферических гармоник, связанных с поворотом системы координат. В следующем разделе будет рассматриваться так называемая вырожденная гипергеометрическая функция, которая тесно связана с гипергеометрической функцией. Она включает в качестве частных случаев много функций, представляющих физический интерес: функции Бесселя, решения уравнения Шредингера для кулоновского потенциала (полиномы Лагерра), решения уравнения Шредингера для потенциала гармонического осциллятора (полиномы Эрмита), интегралы Френеля из классической оптики и многие другие.

#### 7.4. ВЫРОЖДЕННЫЕ ГИПЕРГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

Начнем с дифференциального уравнения для обычной гипергеометрической функции  $x(1-x)y'' + [c - (a+b+1)x]y' - aby = 0$  с тремя правильными особыми точками  $x = 0, 1, \infty$ . Положим теперь  $x = z/b$ . Это сдвигает особенности в точки  $z = 0, b, \infty$ . Устремим  $b \rightarrow \infty$ . Получаем

$$zy'' + (c - z)y' - ay = 0, \quad (7.95)$$

где штрихи означают дифференцирование по  $z$ . Это дифференциальное уравнение имеет правильную особую точку в  $z = 0$  и существенно особую точку в  $z = \infty$ , которая возникла от слияния  $b \rightarrow \infty$ .

Вспомним два решения обычного гипергеометрического уравнения

$$y_1 = {}_2F_1(a, b; c; x);$$

$$y_2 = x^{1-c} {}_2F_1(1+a-c, 1+b-c; 2-c; x).$$

Выполняя предельный процесс  $b \rightarrow \infty$ , получаем два решения вырожденного гипергеометрического уравнения:

$$\left. \begin{aligned} y_1 &= 1 + \frac{a}{c} \frac{z}{1!} + \frac{a(a+1)}{c(c+1)} \frac{z^2}{2!} + \dots = {}_1F_1(a; c; z), \\ y_2 &= z^{1-c} {}_1F_1(1+a-c; 2-c; z). \end{aligned} \right\} (7.96)$$

Функция  ${}_1F_1(a; c; z)$  называется вырожденной гипергеометрической функцией, или функцией Куммера.

Вспомним интегральное представление (7.89):

$${}_2F_1(a, b; c; x) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)} \int_0^1 dt \cdot t^{b-1} (1-t)^{c-b-1} (1-tx)^{-a}$$

$$(\operatorname{Re} c > \operatorname{Re} b > 0).$$

Меняя  $a \leftrightarrow b$  и устремляя  $b \rightarrow \infty$ , имеем

$${}_1F_1(a; c; z) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(c-a)} \int_0^1 dt \cdot t^{a-1} (1-t)^{c-a-1} \exp(tz) \quad (7.97)$$

$$(\operatorname{Re} c > \operatorname{Re} a > 0).$$

Кроме того, если  $c$  — целое число, то справедливо соотношение (7.94):

$${}_2F_1(a, b; c; x) =$$

$$= (c-1)! \frac{\Gamma(1+b-c)}{\Gamma(b)} \frac{1}{2\pi i} \oint_{(0,1)} dt \cdot t^{b-1} (t-1)^{c-b-1} (1-tx)^{-a},$$

где обозначение  $(0,1)$  под знаком интеграла означает, что контур включает точки  $t=0$  и  $1$  (см. рис. 7.4). Выполняя предельный переход, находим

$${}_1F_1(a; c; z) = (c-1)! \frac{\Gamma(1+a-c)}{\Gamma(a)} \frac{1}{2\pi i} \oint_{(0,1)} dt \cdot t^{a-1} \times$$

$$\times (t-1)^{c-a-1} \exp(tz), \quad (7.98)$$

где  $c$  по-прежнему должно быть целым числом.

Другое интегральное представление  ${}_1F_1(a; c; z)$  для случая, когда  $c$  — целое число, имеет вид

$${}_1F_1(a; c; z) = (c-1)! z^{1-c} \frac{1}{2\pi i} \oint_{(0,1)} dt \cdot (t-1)^{-a} t^{a-c} \exp(tz).$$

$$(7.99)$$

Его легко проверить, разлагая подынтегральное выражение в ряд по  $z$  и почленно интегрируя.

Многие часто встречающиеся функции являются частными случаями вырожденных гипергеометрических

функций. Приведем ряд примеров:

$$\exp z = {}_1F_1(a; a; z) \quad (a - \text{произвольное число}); \quad (7.100)$$

$$J_n(z) = \frac{1}{\Gamma(n+1)} \left(\frac{z}{2}\right)^n \exp(iz) {}_1F_1\left(n + \frac{1}{2}; 2n + 1; -2iz\right); \quad (7.101)$$

$$\operatorname{erf} z = \frac{2z}{\sqrt{\pi}} {}_1F_1\left(\frac{1}{2}; \frac{3}{2}; -z^2\right). \quad (7.102)$$

Для  $n$ -го полинома Эрмита [см. (1.67)]

$$H_n(z) = 2^n \left[ \frac{\Gamma\left(-\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(-\frac{n}{2}\right)} z {}_1F_1\left(\frac{1-n}{2}; \frac{3}{2}; z^2\right) + \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1-n}{2}\right)} {}_1F_1\left(-\frac{n}{2}; \frac{1}{2}; z^2\right) \right]. \quad (7.103)$$

Если  $a$  — отрицательное целое число, то  ${}_1F_1(a; c; z)$  становится полиномом; нормированный надлежащим образом, он называется полиномом Лагерра. Обычно определяют (для  $n = 0, 1, 2, \dots$ )

$$L_n^\alpha(z) = \frac{\Gamma(\alpha + n + 1)}{n! \Gamma(\alpha + 1)} {}_1F_1(-n; \alpha + 1; z). \quad (7.104)$$

Представляет некоторый интерес рассмотрение общего решения вырожденного гипергеометрического уравнения. Если  $c$  — не целое число, два решения имеют вид

$$y_1 = {}_1F_1(a; c; z); \quad y_2 = z^{1-c} {}_1F_1(1 + a - c; 2 - c; z). \quad (7.105)$$

Если  $c = 0, -1, -2, \dots$ , то  $y_1$  обращается в бесконечность и

$$\lim_{c \rightarrow -n} \frac{{}_1F_1(a; c; z)}{\Gamma(c)} = \frac{\Gamma(a + n + 1)}{\Gamma(a)} \frac{z^{n+1}}{(n+1)!} {}_1F_1(a + n + 1; n + 2; z). \quad (7.106)$$

Если  $c = 1$ , то  $y_1 = y_2$ . Если  $c = 2, 3, 4, \dots$ , то  $y_2$  обращается в бесконечность; разделив его на соответствующую  $\Gamma$ -функцию для устранения расходимости, находим, что  $y_2$  пропорционален  $y_1$ . Определим тогда в качестве второго

решении функцию [см. (7.56)]

$$\frac{1}{\sin \pi c} \left[ {}_1F_1(a; c; z) \frac{1}{\Gamma(c) \Gamma(1+a-c)} - \frac{z^{1-c} {}_1F_1(1+a-c; 2-c; z)}{\Gamma(2-c)} \cdot \frac{1}{\Gamma(a)} \right]. \quad (7.107)$$

Иногда в вырожденном гипергеометрическом уравнении делают замену  $y = uz^{-c/2} \exp(z/2)$ . Тогда находят

$$u'' + \left[ -\frac{1}{4} + \frac{c}{2} \frac{-a}{z} + \frac{1}{2} c \left( 1 - \frac{1}{2} c \right) \frac{1}{z^2} \right] u = 0.$$

Обычно определяют  $k = \frac{c}{2} - a$  и  $m = \frac{1}{2} (c - 1)$ , так что уравнение приобретает вид

$$u'' + \left( -\frac{1}{4} + \frac{k}{z} + \frac{\frac{1}{4} - m^2}{z^2} \right) u = 0. \quad (7.108)$$

Это уравнение имеет решения

$$\left. \begin{aligned} u_1 &= z^{m+1/2} e^{-z/2} {}_1F_1\left(m + \frac{1}{2} - k; 2m + 1; z\right); \\ u_2 &= z^{-m+1/2} e^{-z/2} {}_1F_1\left(-m + \frac{1}{2} - k; -2m + 1; z\right). \end{aligned} \right\} \quad (7.109)$$

Они неудовлетворительны (неполны) в случае, когда  $c$  — целое число, т. е. когда  $2m$  — целое число. Поэтому определяют так называемую функцию Уиттекера

$$W_{k,m} = \frac{\Gamma(-2m)}{\Gamma\left(\frac{1}{2} - m - k\right)} u_1 + \frac{\Gamma(2m)}{\Gamma\left(\frac{1}{2} + m - k\right)} u_2; \quad (7.110)$$

$W_{k,m}(z)$  и  $W_{-k,m}(-z)$  — два независимых решения уравнения Уиттекера (7.108) для всех  $k, m$ .

Без доказательства приведем два последних соотношения:

1) преобразование Куммера:

$${}_1F_1(a; c; z) = \exp z {}_1F_1(c - a; c; -z); \quad (7.111)$$

2) асимптотические формулы для больших  $|z|$

$${}_1F_1(a; c; z) \sim \begin{cases} \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)} \exp z \cdot z^{a-c} & (\operatorname{Re} z > 0); \\ \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(c-a)} (-z)^{-a} & (\operatorname{Re} z < 0). \end{cases} \quad (7.112)$$

## 7.5. ФУНКЦИИ МАТЬЕ

Уравнение Матье встречается в задачах волнового движения с эллиптическими граничными условиями; простейший пример — колебания поверхности эллиптической мембраны. К этому уравнению можно также свести трехмерные задачи, в которых граница представляет собой цилиндр эллиптического сечения; то же уравнение возникает и в ряде других задач.

Однако более важен не определенный вид уравнения Матье, а одно его свойство общего характера: линейное дифференциальное уравнение с периодическими коэффициентами. Большую часть анализа в этом разделе можно с соответствующими модификациями применить к любому подобному дифференциальному уравнению.

В качестве стандартного вида дифференциального уравнения Матье возьмем следующий:

$$(d^2y/dx^2) + (\alpha + \beta \cos 2x) y = 0. \quad (7.113)$$

Это уравнение можно преобразовать к более привычной форме с алгебраическими коэффициентами; например, замена

$$z = \cos^2 x \quad (7.114)$$

преобразует дифференциальное уравнение (7.113) в уравнение

$$4z(1-z)(d^2y/dz^2) + 2(1-2z)(dy/dz) + [\alpha + \beta(2z-1)]y = 0. \quad (7.115)$$

Точки  $z = 0$  и  $z = 1$  — правильные особенности,  $z = \infty$  — существенная особенность.

Однако уравнение Матье — не самый общий вид такого уравнения, т. е. не все дифференциальные уравнения с двумя правильными и одной существенной особыми точками могут быть сведены к уравнению Матье.

Теперь докажем важную теорему, известную под названием **теоремы Флоке**.

В уравнении Матье (7.113) переменная  $x$  обычно угол; в этом случае нужно потребовать, чтобы решение  $y(x)$  было периодическим с периодом  $2\pi$ . Для произвольных  $\alpha$  и  $\beta$  это невозможно. Пусть  $y_1(x)$  и  $y_2(x)$  — два независимых решения уравнения Матье. Конечно, так как коэффициенты уравнения периодичны по  $x$  с периодом  $2\pi$ , то  $y_1(x + 2\pi)$  и  $y_2(x + 2\pi)$  суть также решения, и поэтому их можно представить в виде **линейных комбинаций**

$y_1(x)$  и  $y_2(x)$ . Положим

$$\left. \begin{aligned} y_1(x + 2\pi) &= A_{11}y_1(x) + A_{21}y_2(x); \\ y_2(x + 2\pi) &= A_{12}y_1(x) + A_{22}y_2(x). \end{aligned} \right\} \quad (7.116)$$

Теорема Флоке утверждает, что существует такое решение  $y(x)$ , что

$$y(x + 2\pi) = ky(x), \quad (7.117)$$

где  $k$  — (комплексная) константа.

Пусть  $y(x) = C_1y_1(x) + C_2y_2(x)$ . Тогда

$$\begin{aligned} y(x + 2\pi) &= (C_1A_{11} + C_2A_{12})y_1(x) + \\ &+ (C_1A_{21} + C_2A_{22})y_2(x), \end{aligned}$$

и если выполняется (7.117), то

$$\left. \begin{aligned} C_1A_{11} + C_2A_{12} &= kC_1; \\ C_1A_{21} + C_2A_{22} &= kC_2. \end{aligned} \right\} \quad (7.118)$$

Итак,  $C = \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix}$  есть собственный вектор, а  $k$  — соответствующее собственное значение матрицы

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}, \quad (7.119)$$

т. е.

$$AC = kC. \quad (7.120)$$

Такой собственный вектор и собственное значение всегда можно найти; это завершает доказательство теоремы Флоке. Получим полезное следствие этой теоремы. Определим  $\mu$  и  $\phi(x)$  равенствами

$$k = \exp(2\pi\mu), \text{ или } \mu = \frac{1}{2\pi} \ln k, \text{ и } \phi(x) = \exp(-\mu x)y(x). \quad (7.121)$$

Тогда

$$\begin{aligned} \phi(x + 2\pi) &= \exp(-\mu x) \exp(-2\pi\mu) y(x + 2\pi) = \\ &= \exp(-\mu x) y(x) = \phi(x). \end{aligned} \quad (7.122)$$

Итак, теорема Флоке утверждает, что можно всегда найти решение уравнения Матье в виде

$$y(x) = \exp(\mu x) \phi(x), \quad (7.123)$$

где  $\phi(x)$  имеет период  $2\pi$ . Если  $\mu$  равно нулю или кратно  $i$ , то  $y(x)$  также имеет период  $2\pi$ . Если  $\mu$  мнимо, то  $y(x)$  колеблется аперiodически. Если  $\mu$  имеет вещественную

часть, то  $y(x)$  неустойчиво, т. е. обращается в бесконечность при  $x \rightarrow +\infty$  или  $x \rightarrow -\infty$ .

Из доказательства теоремы Флоке ясно, что теорема и вид решения (7.123) пригодны не только для уравнения Матье, но также и для любого дифференциального уравнения второго порядка с периодическими коэффициентами. Уравнение вида

$$(d^2y/dx^2) + f(x)y = 0, \quad (7.124)$$

где  $f(x)$  — четная периодическая функция, называется уравнением Хилла, так как он впервые исследовал это уравнение в связи с теорией движения Луны. Такие уравнения встречаются также в теории движения частиц в синхротроне с переменным градиентом (здесь периодически меняется магнитное поле); они встречаются и в квантовой теории металлов и полупроводников, так как уравнение Шредингера для электрона в периодической решетке имеет вид (7.124) или трехмерного аналога этого уравнения. В теории металлов так называемые волны Блоха есть просто решение Флоке вида (7.123). Отметим, что дифференциальное уравнение (7.113) четно по  $x$ , так что наряду с  $y(x)$  решением является и  $y(-x)$ . Итак, общее решение имеет вид:

$$y = A \exp(\mu x) \phi(x) + B \exp(-\mu x) \phi(-x) \quad [\phi(x + 2\pi) = \phi(x)]. \quad (7.125)$$

Обсудим кратко, при каких  $\alpha$  и  $\beta$  существуют периодические и другие типы решений. Предположим, что  $\beta = 0$ . Тогда уравнение (7.113) принимает вид

$$(d^2y/dx^2) + \alpha y = 0. \quad (7.126)$$

Периодические решения с периодом  $2\pi$  существуют, если  $\alpha = 0$  ( $y = 1$ ),  $\alpha = 1$  ( $y = \sin x, \cos x$ ),  $\alpha = 4$  ( $y = \sin 2x, \cos 2x$ ) и т. д. Для произвольного  $\beta$  ситуация изображена на рис. 7.5.

Линии на рис. 7.5, обозначающие границы между устойчивыми и неустойчивыми областями, соответствуют периодическим решениям ( $\mu = 0$ ). Эти решения называются функциями Матье и записываются в виде

$$\begin{aligned} & ce_0(x), ce_1(x), ce_2(x) \dots \\ & \dots se_1(x), se_2(x) \dots \end{aligned} \quad (7.127)$$

Обозначение можно понять, обращаясь к виду этих функций в предельном случае  $\beta = 0$ . Они имеют симметрии тригонометрических функций и сводятся к ним при  $\beta = 0$ , т. е.

$$ce_{2n}(x) = \sum_k A_k \cos 2kx; \quad ce_{2n+1}(x) = \sum_k A_k \cos (2k+1)x;$$

$$se_{2n}(x) = \sum_k A_k \sin 2kx; \quad se_{2n+1}(x) = \sum_k A_k \sin (2k+1)x$$

(конечно, величины  $A_k$  различны для каждой функции).

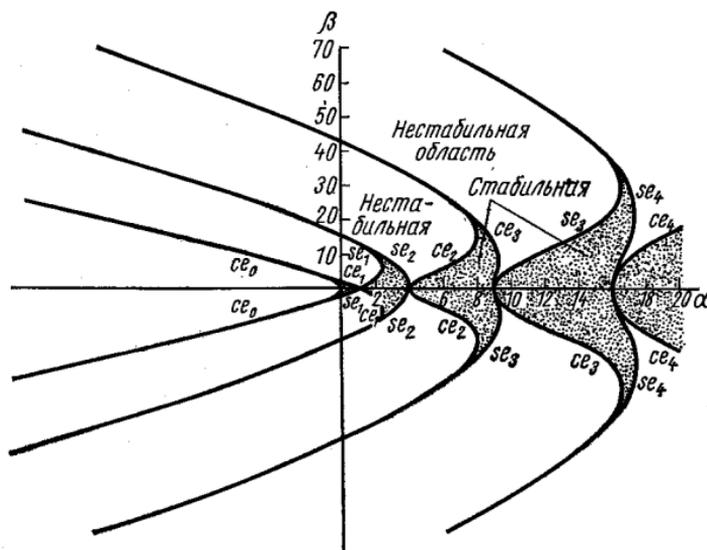


Рис. 7.5. Плоскость  $\alpha\beta$ , на которой показан характер решений уравнений Матье для различных значений  $\alpha$  и  $\beta$ .

Возможны различные нормировки. Положим, что коэффициенты при соответствующем члене в ряде Фурье равны единице. Например,

$$ce_1(x) = \cos x + \frac{\beta}{16} \cos 3x + \dots \quad (7.128)$$

Как найти уравнения кривых  $\alpha(\beta)$  для периодических решений? Подставим ряд для  $y$

$$y = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos nx + B_n \sin nx) \quad (7.129)$$

в дифференциальное уравнение Матье (7.113). Приравнивая нулю коэффициенты при различных членах левой части, находим

$$\frac{1}{2} \alpha A_0 + \frac{1}{2} \beta A_2 = 0;$$

$$(\alpha - 1) A_1 + \frac{1}{2} \beta A_1 + \frac{1}{2} \beta A_3 = 0; \quad (\alpha - 1) B_1 - \frac{1}{2} \beta B_1 + \frac{1}{2} \beta B_3 = 0;$$

$$(\alpha - 4) A_2 + \frac{1}{2} \beta A_0 + \frac{1}{2} \beta A_4 = 0; \quad (\alpha - 4) B_2 + \frac{1}{2} \beta B_4 = 0;$$

$$(\alpha - 9) A_3 + \frac{1}{2} \beta A_1 + \frac{1}{2} \beta A_5 = 0 \quad (\alpha - 9) B_3 + \frac{1}{2} \beta B_1 + \frac{1}{2} \beta B_5 = 0$$

и т. д.

и т. д.

Чтобы показать, как обращаться с такими трехчленными рекуррентными соотношениями, рассмотрим вид решения  $se_{2n}$ , в котором представлены только  $A_0, A_2, A_4, \dots$

$$\alpha A_0 + \beta A_2 = 0,$$

$$\beta A_0 + 2(\alpha - 4) A_2 + \beta A_4 = 0,$$

$$\beta A_2 + 2(\alpha - 16) A_4 + \beta A_6 = 0,$$

$$\dots$$

$$\beta A_{n-2} + 2(\alpha - n^2) A_n + \beta A_{n+2} = 0$$

$$\dots$$

( $n$  — четные).

Сначала может показаться, что для любых  $\alpha$  и  $\beta$  можно найти решение. Однако, если не позаботиться, коэффициенты  $A_n$  очень быстро растут, а именно  $A_{n+2}/A_n \sim n^2$ . Запишем рекуррентное соотношение в такой форме:

$$\beta \frac{A_{n-2}}{A_n} + 2(\alpha - n^2) + \beta \frac{A_{n+2}}{A_n} = 0.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \frac{A_n}{A_{n-2}} &= \frac{-\beta}{2(\alpha - n^2) + \beta \frac{A_{n+2}}{A_n}} = \\ &= \frac{-\beta}{2(\alpha - n^2) - \frac{\beta^2}{2[\alpha - (n+2)^2] - \dots}}. \end{aligned} \quad (7.130)$$

Это цепная дробь.

Теперь можно связать  $\alpha$  и  $\beta$ , приравняв два выражения для  $A_2/A_0$ :

$$-\frac{\alpha}{\beta} = \frac{-\beta}{2(\alpha-4) - \frac{\beta^2}{2(\alpha-16) - \dots}}$$

или

$$\alpha = \frac{\beta^2}{2(\alpha-4) - \frac{\beta^2}{2(\alpha-16) - \dots}}. \quad (7.131)$$

Предположим, например, нас интересует решение  $ce_0(x)$ . Это решение, которое начинается с  $\alpha=0$ , когда  $\beta=0$ . Итерациями получаем

$$\alpha_0 \approx -\frac{\beta^2}{8}, \quad \alpha_0 \approx \frac{\beta^2}{2\left(-\frac{\beta^2}{8}-4\right) + \frac{\beta^2}{32}} \approx -\frac{\beta^2}{8} + \frac{7\beta^4}{2048} \text{ и т. д.}$$

Тогда из рекуррентного соотношения (вспоминая, что  $A_0=2$ ) находим

$$A_2 = -\frac{2\alpha}{\beta} = \frac{\beta}{4} - \frac{7\beta^3}{1024} + \dots,$$

$$A_4 = -2 - \frac{2(\alpha-4)}{\beta} A_2 \approx \frac{\beta^2}{128} + \dots,$$

так что

$$ce_0(x) = 1 + \left(\frac{\beta}{4} - \frac{7\beta^3}{1024} + \dots\right) \cos 2x +$$

$$+ \left(\frac{\beta^2}{128} + \dots\right) \cos 4x + \dots \quad (7.132)$$

## 7.6. ЭЛЛИПТИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

Рассмотрим обычные тригонометрические функции довольно необычным способом. Исследуем функцию  $y = \sin x$ . Ее можно определить как решение одного из следующих дифференциальных уравнений:

$$(1) y'' + y = 0; \quad y = 0, \quad y' = 1 \text{ при } x = 0; \quad (7.133)$$

$$(2) (y')^2 = 1 - y^2; \quad y = 0, \quad y' > 0 \text{ при } x = 0. \quad (7.134)$$

В частности, предположим, что  $\sin x$  определяется уравнением (7.134). Что тогда известно о функции  $y = \sin x$ ? Легко видеть, что  $y(x)$  должна выглядеть как кривая

на рис. 7.6, т. е.  $y(x)$  осциллирует периодически между значениями  $\pm 1$  с периодом  $P$ , определяемым равенством

$$P = 2 \int_{-1}^{+1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = 4 \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}. \quad (7.135)$$

Аналогично можно определить косинус и получить все известные свойства тригонометрических функций.

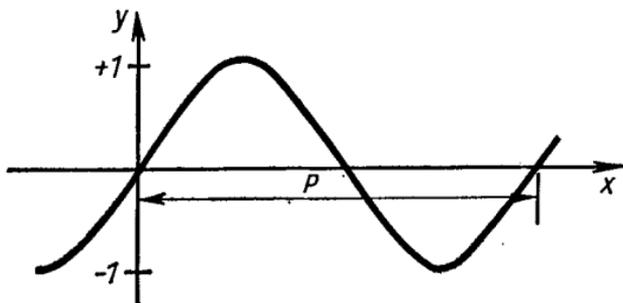


Рис. 7.6. Полуколичественное решение уравнения (7.134).

Рассмотрим теперь дифференциальное уравнение

$$(y')^2 = (1 - y^2)(1 - k^2 y^2), \quad 0 < k < 1. \quad (7.136)$$

Определим  $y = \operatorname{sn} x$  как решение, удовлетворяющее начальным условиям  $y = 0$ ,  $y' > 0$  при  $x = 0$ ;  $\operatorname{sn} x$  называется эллиптической функцией Якоби.

Так как

$$x = \int_0^y \frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-k^2 y^2)}}, \quad (7.137)$$

то эллиптические функции на самом деле представляют собой обратные функции по отношению к эллиптическим интегралам; именно если  $y = \operatorname{sn} x$ , то  $x = F(\arcsin y, k)$ , где  $F$  — эллиптический интеграл Лежандра первого рода [см. (3.57)].

По тем же причинам, что и функция  $\sin x$ , функция  $\operatorname{sn} x$  периодична с периодом

$$P = 4 \int_0^1 \frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-k^2 y^2)}} = 4K(k), \quad (7.138)$$

где  $K$  — полный эллиптический интеграл первого рода [см. (3.63)]. Таким образом,  $y = \operatorname{sn} x$  выглядит, как показано на рис. 7.7.

Интересная новая особенность  $\operatorname{sn} x$  состоит в том, что она обладает вторым (независимым) периодом  $P'$ ;  $\operatorname{sn} x$  — двоякопериодическая функция. Чтобы найти второй период, нужно перейти в комплексную плоскость.

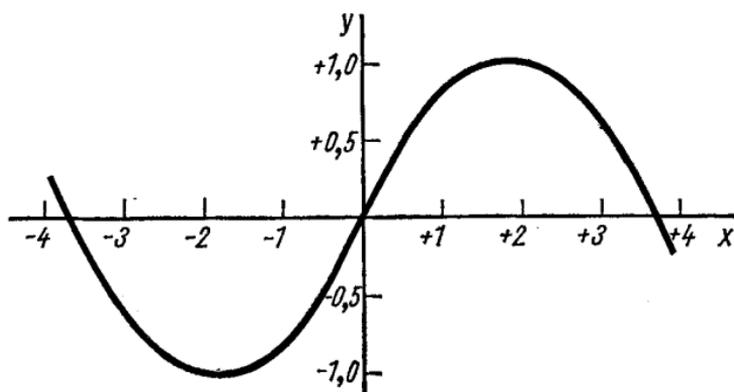


Рис. 7.7. График  $y = \operatorname{sn} x$  при  $k^2 = 0,5$   
( $K = 1, 854\dots$ ).

Рассмотрим конформное преобразование, производимое  $y = \operatorname{sn} x$  или

$$x = \int_0^y \frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-k^2y^2)}}. \quad (7.139)$$

Подынтегральное выражение имеет точки ветвления при  $y = \pm 1, \pm 1/k$ . Определим подынтегральное выражение равным  $+1$ , если начинать интегрировать с  $y = 0$ , и затем продолжить его аналитически вдоль контура интегрирования.

Это преобразование показано на рис. 7.8.

Во-первых,  $y = 0$  преобразуется в  $x = 0$ . Будем увеличивать  $y$  вдоль вещественной положительной полуоси. То же происходит с  $x$ , и, когда  $y$  достигает  $1$ ,  $x$  становится равным полному эллиптическому интегралу  $K$ . Обойдем сверху точку ветвления при  $y = 1$  и продолжим движение вдоль вещественной оси к точке  $y = 1/k$ , тогда

$$x = K + i \int_1^y \frac{dy}{\sqrt{(y^2-1)(1-k^2y^2)}}, \quad (7.140)$$

и, когда  $y$  достигает  $1/k$ ,  $x$  становится равным  $K + iK'$ , где

$$K' = \int_1^{1/k} \frac{dy}{\sqrt{(y^2-1)(1-k^2y^2)}}. \quad (7.141)$$

Случайно оказывается, что если в этом последнем интеграле заменить переменную  $z^2 = (1 - k^2y^2)/(1 - k^2)$ , то

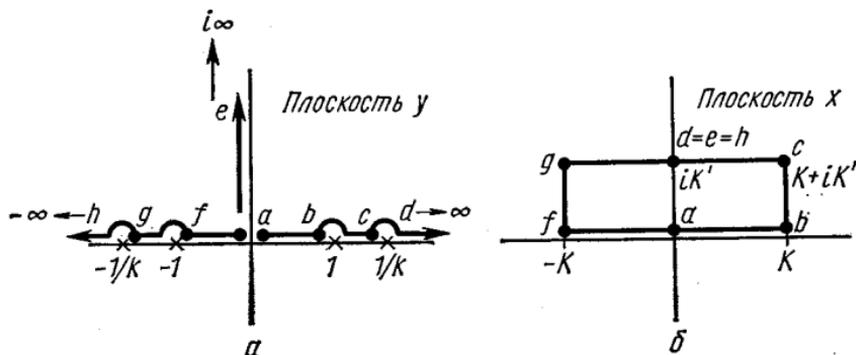


Рис. 7.8. Конформное преобразование, производимое функцией (7.139):

$x = \int_0^y \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}}$ ; верхняя полуплоскость  $y$  преобразуется в прямоугольник, изображенный на плоскости  $x$ .

получается  $K'(k) = K(k')$ , где

$$k'^2 = 1 - k^2. \quad (7.142)$$

Наконец, обойдем сверху точку  $y = 1/k$  и продолжим движение вдоль вещественной оси до бесконечности. Теперь

$$x = K + iK' - \int_{1/k}^y \frac{dy}{\sqrt{(y^2-1)(k^2y^2-1)}}, \quad (7.143)$$

и, следовательно, вещественная часть  $x$  убывает. Когда  $y$  достигает  $\infty$ , вещественная часть  $x$  равна

$K - \int_{1/k}^{\infty} \frac{dy}{\sqrt{(y^2-1)(k^2y^2-1)}}$ . Подстановка  $1/ky = z$  преобразует интеграл в  $K$ , так что  $x = iK'$  при  $y = \infty$ .

Теперь, выходя из начала координат, будем двигаться вверх вдоль мнимой оси. Когда  $y$  достигает  $i\infty$ , имеем

$$x = \int_0^{i\infty} \frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-k^2y^2)}} = i \int_0^{\infty} \frac{dy}{\sqrt{(1+y^2)(1+k^2y^2)}}. \quad (7.144)$$

Замена переменной  $(1+y^2)/(1+k^2y^2) = z^2$  преобразует этот результат в

$$x = i \int_1^{1/k} \frac{dz}{\sqrt{(z^2-1)(1-k^2z^2)}} = iK'.$$

Наконец, если  $y$  выходит из начала координат и движется к  $-\infty$  вдоль отрицательной вещественной полуоси, то  $x$  изменится от 0 до  $-K$ , затем до  $-K + iK'$  и наконец до  $iK'$ .

Собирая эти результаты, видим, что верхняя полуплоскость преобразуется во внутренность прямоугольника в плоскости  $x$  (см. рис. 7.8).

Как возникает периодичность? Предположим, что мы движемся вдоль контура типа, показанного на рис. 7.9.

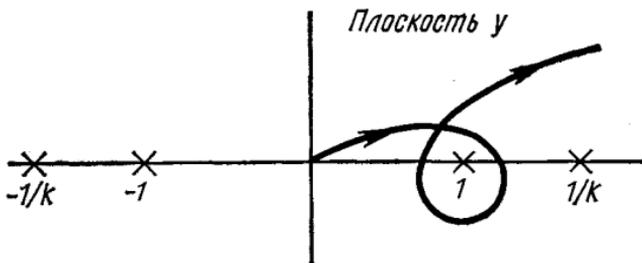


Рис. 7.9. Контур, оканчивающийся в верхней полуплоскости  $y$ , но приводящий к точке  $x$  вне прямоугольника рис. 7.8, б.

Это дает новое значение  $x$  вне прямоугольника, соответствующее одному и тому же значению  $y$ . Чтобы увидеть, как связаны оба значения  $x$ , деформируем контур рис. 7.9 в контур, показанный на рис. 7.10, б. Последний отличается от контура рис. 7.10, а только лишним обходом точки  $y = 1$ . Старое значение  $x$  из контура, эквивалентного контуру рис. 7.10, а, равно  $r + s$ . Новое значение, получаемое из рассмотрения контура рис. 7.10, б, есть  $x = r - s$ . Итак, (новое значение) =  $2r -$  (старое значение). Но  $r = K$ ; следовательно, (новое значение) =  $2K -$

(старое значение). Тем самым доказано, что

$$\operatorname{sn} x = \operatorname{sn} (2K - x). \quad (7.145)$$

Таким же способом контур на рис. 7.11 позволяет показать, что  $\operatorname{sn} x = \operatorname{sn} (x + 2iK')$ , а контур на рис. 7.12

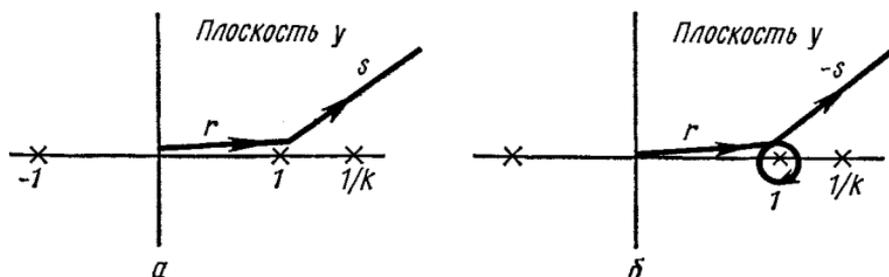


Рис. 7.10. Контур, для которого точка  $x = r + s$  лежит внутри прямоугольника (а) (см. рис. 7.8, б; заметим, что  $r = K$ ), и контур (б), отличающийся от контура (а) обходом точки  $y = 1$ . Следовательно, он дает  $x = r - s$ .

приводит к условию периодичности, с которого мы начали, т. е.

$$\operatorname{sn} x = \operatorname{sn} (x + 4K). \quad (7.146)$$

Итак, мы получили, что  $y = \operatorname{sn} x$  есть дважды периодическая функция с периодами  $4K$  и  $2iK'$ . Следовательно,

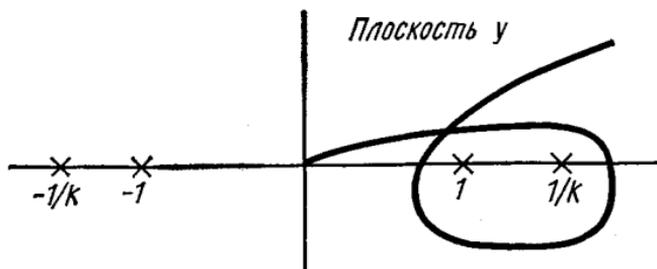


Рис. 7.11. Контур, демонстрирующий периодичность  $\operatorname{sn} x = \operatorname{sn} (x + 2iK')$ .

при рассмотрении этой функции можно ограничиться прямоугольником с углами  $x = \pm 2K - iK'$ ,  $\pm 2K + iK'$ . Функция имеет полюса в точках  $x = \pm iK'$  и в углах, а также нули в точке  $x = 0$  и точках  $x = \pm 2K$ .

Мы видели, что  $y = \operatorname{sn} x$  подчиняется дифференциальному уравнению

$$dy/dx = \sqrt{(1-y^2)(1-k^2y^2)}. \quad (7.147)$$

Определим еще две эллиптические функции

$$\operatorname{cn} x = \sqrt{1 - \operatorname{sn}^2 x}, \quad \operatorname{cn} 0 = 1; \quad (7.148)$$

$$\operatorname{dn} x = \sqrt{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 x}, \quad \operatorname{dn} 0 = 1. \quad (7.149)$$

Тогда

$$(d/dx) \operatorname{sn} x = \operatorname{cn} x \cdot \operatorname{dn} x. \quad (7.150)$$

Любая аналитическая (за исключением полюсов) двоякопериодическая функция называется эллиптической функцией. Функции  $\operatorname{sn} x$ ,  $\operatorname{cn} x$ ,  $\operatorname{dn} x$  принадлежат к классу, называемому эллиптическими

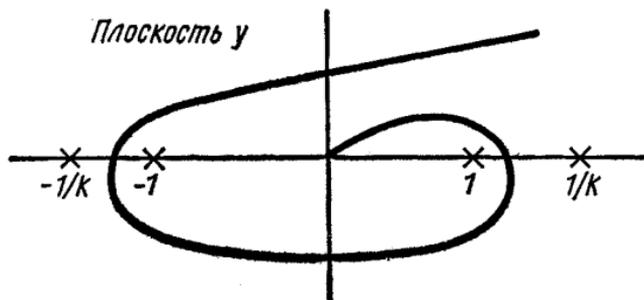


Рис. 7.12. Контур, демонстрирующий периодичность  $\operatorname{sn} x = \operatorname{sn}(x + 4K)$ .

функциями Якоби. Общее исследование двоякопериодических функций весьма естественно приводит ко второму классу эллиптических функций, называемых эллиптическими функциями Вейерштрасса.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ  
УРАВНЕНИЯ  
В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

8.1. ПРИМЕРЫ

1. Уравнение колеблющейся гибкой струны, или одномерное волновое уравнение, имеет вид

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \cdot \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}, \quad (8.1)$$

где  $c$  — скорость волн. Для гибкой струны  $c^2 = T/\rho$ , где  $T$  — натяжение, а  $\rho$  — линейная плотность.

2. Уравнение Лапласа

$$\nabla^2 \psi = \left( \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} \right) = 0. \quad (8.2)$$

3. Трехмерное волновое уравнение

$$\nabla^2 \psi - \frac{1}{c^2} \cdot \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = 0. \quad (8.3)$$

4. Уравнение диффузии

$$\nabla^2 \psi - \frac{1}{\kappa} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial t} = 0. \quad (8.4)$$

Если  $\psi$  — температура, то

$$\kappa = \frac{K}{C\rho} = \frac{\text{теплопроводность}}{(\text{удельная теплоемкость}) \times \text{плотность}}.$$

5. Уравнение Шредингера

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi + V(\mathbf{x}) \psi = i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} \quad (8.5)$$

или, подставляя  $\psi \sim \exp(-iEt/\hbar)$ ,

$$\nabla^2 \psi + \frac{2m}{\hbar^2} [E - V(\mathbf{x})] \psi = 0. \quad (8.6)$$

Это уравнения, с которыми мы будем наиболее часто встречаться. Отметим, что все они — линейные уравнения второго порядка.

Все написанные выше уравнения однородны. Это значит, что если  $\psi$  — решение, то будет решением и  $\psi$ , умноженное на любое число. Многие задачи сводятся к неоднородному уравнению с членом, соответствующим приложенным «силам» или «источникам». Например, если сила  $f(x, t)$  на единицу длины приложена к колеблющейся струне, то неоднородное уравнение имеет вид:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \cdot \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = -\frac{1}{T} f(x, t). \quad (8.7)$$

Задача может быть неоднородной как вследствие краевых условий, так и вследствие неоднородности самого уравнения. Критерий однородной краевой задачи формулировался выше: если  $\psi$  — решение уравнения, удовлетворяющее краевым условиям, то решением будет и  $\psi$ , умноженное на любое число. Пример неоднородного краевого условия встречается в задаче о колеблющейся струне, у которой конец  $x = 0$  движется заданным образом,  $\psi(0, t) = g(t)$ .

Общее решение неоднородной задачи складывается из любого частного решения задачи плюс общее решение соответствующей однородной задачи, для которой как уравнение, так и краевые условия однородны. Аналогичный случай уже обсуждался в гл. 1 при рассмотрении обыкновенных дифференциальных уравнений.

## 8.2. ОБЩЕЕ РАССМОТРЕНИЕ

Прежде чем перейти к методам решения упомянутых выше уравнений, кратко рассмотрим общее линейное дифференциальное уравнение второго порядка в частных производных.

Сделаем, однако, одно ограничение, рассматривая лишь две независимые переменные. Это делается для того, чтобы упростить рассмотрение. Большая часть результатов непосредственно обобщается на уравнения с любым числом независимых переменных.

Требуется вычислить функцию  $\psi(x, y)$  в некоторой области плоскости  $xy$ . Дифференциальное уравнение в частных производных необходимо дополнить краевыми условиями определенного вида. Предположим, что они задают значения  $\psi$  и (или) некоторых ее производных на кривой, ограничивающей область, внутри которой мы пытаемся решить уравнение.

Обычно встречаются три типа краевых условий:

- 1) условия Дирихле:  $\psi$  задается в каждой точке границы;
- 2) условия Неймана:  $(\nabla\psi)_n$ , нормальная компонента градиента задается в каждой точке границы;
- 3) условия Коши:  $\psi$  и  $(\nabla\psi)_n$  задаются в каждой точке границы.

По аналогии с обыкновенными дифференциальными уравнениями второго порядка можно было бы ожидать,

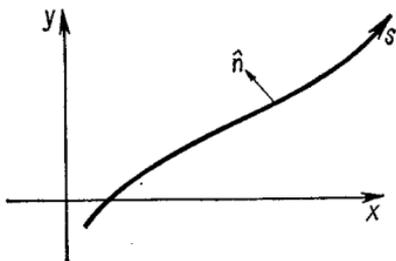


Рис. 8.1. Краевая кривая и единичный вектор  $\hat{n}$ , перпендикулярный ей.

что условия Коши вдоль линии — наиболее естественный вид краевых условий. Однако здесь дело обстоит не так просто.

Для обыкновенного (т. е. одномерного) дифференциального уравнения второго порядка для  $\psi(x)$  задание  $\psi$  и  $\psi'$  в обыкновенной точке  $x_0$  вместе с самим дифференциальным уравнением достаточно, чтобы определить все

высшие производные в точке  $x_0$  и тем самым гарантировать существование решения вблизи  $x_0$  в виде ряда Тейлора.

Исследуем теперь соответствующий вопрос для дифференциальных уравнений второго порядка в частных производных. А именно, будет ли достаточно задания  $\psi$  и  $(\nabla\psi)_n$  вдоль границы вместе с самим дифференциальным уравнением для определения второй и высших производных от  $\psi$  на краевой кривой и, следовательно, будет ли существовать решение в виде ряда Тейлора вблизи кривой?

Предположим, что краевая кривая описывается параметрически уравнениями  $x = x(s)$ ,  $y = y(s)$ , где  $s$  — длина дуги вдоль границы (рис. 8.1). Предположим, что вдоль границы задана  $\psi(s)$  и ее нормальная производная  $N(s)$ . Компоненты единичного перпендикулярного вектора  $\hat{n}$  есть  $-dy/ds$ ,  $dx/ds$ , так что

$$N(s) = -\frac{\partial\psi}{\partial x} \cdot \frac{dy}{ds} + \frac{\partial\psi}{\partial y} \cdot \frac{dx}{ds}. \quad (8.8)$$

Это уравнение вместе с

$$\frac{d}{ds} \psi(s) = \frac{\partial\psi}{\partial x} \cdot \frac{dx}{ds} + \frac{\partial\psi}{\partial y} \cdot \frac{dy}{ds} \quad (8.9)$$

можно разрешить относительно первых производных  $\psi$ :

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = -N(s) \frac{dy}{ds} + \left[ \frac{d}{ds} \psi(s) \right] \frac{dx}{ds}; \quad (8.10)$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} = N(s) \frac{dx}{ds} + \left[ \frac{d}{ds} \psi(s) \right] \frac{dy}{ds}. \quad (8.11)$$

Хлопоты возникают со вторыми производными. Их три:  $\partial^2 \psi / \partial x^2$ ,  $\partial^2 \psi / \partial x \partial y$ ,  $\partial^2 \psi / \partial y^2$ . Два уравнения для них находится дифференцированием (известных) первых производных вдоль границы:

$$\frac{d}{ds} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \cdot \frac{dx}{ds} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} \cdot \frac{dy}{ds}; \quad (8.12)$$

$$\frac{d}{ds} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial y} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} \cdot \frac{dx}{ds} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \cdot \frac{dy}{ds}. \quad (8.13)$$

Третье уравнение получается из исходного дифференциального уравнения, которое запишем в виде

$$\begin{aligned} & A \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + 2B \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} + C \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = \\ & = \text{известная функция } f \left( x, y, \frac{\partial \psi}{\partial x}, \frac{\partial \psi}{\partial y} \right). \end{aligned} \quad (8.14)$$

Эти три уравнения (неоднородных) нельзя решить относительно вторых частных производных  $\psi$  в случае, если детерминант из коэффициентов равен нулю:

$$\begin{vmatrix} dx/ds & dy/ds & 0 \\ 0 & dx/ds & dy/ds \\ A & 2B & C \end{vmatrix} = 0$$

или

$$A \left( \frac{dy}{ds} \right)^2 - 2B \frac{dx}{ds} \cdot \frac{dy}{ds} + C \left( \frac{dx}{ds} \right)^2 = 0. \quad (8.15)$$

В каждой точке это уравнение определяет два направления, называемые характеристическими направлениями в этой точке. Кривые в плоскости  $xy$ , наклон которых в каждой точке совпадает с характеристическими направлениями, называют характеристиками дифференциального уравнения в частных производных.

Итак, вторые производные определяются всюду, кроме точек, где крайняя кривая является касательной к характеристикам. Дальнейшим дифференцированием можно получить аналогичную систему совместных уравнений для третьих (и высших) производных. Условие для их разре-

шимости содержит тот же детерминант. Следовательно, краевые условия Коши определяют решение, если краевая кривая нигде не касается характеристики.

Возвратимся к уравнению (8.15) для характеристик. Если характеристики — вещественные кривые, то, конечно,  $B^2 > AC$ . Дифференциальные уравнения в частных производных, удовлетворяющие этому условию, называются **гиперболическими**. Если  $B^2 = AC$ , уравнение называется **параболическим**; если  $B^2 < AC$ , оно называется **эллиптическим**. Из примеров разд. 8.1 первый и третий — гиперболические, второй — эллиптическое, четвертый и пятый — параболические уравнения (однако пятый пример несколько необычен, так как не все его коэффициенты вещественны).

Обсудим выбор краевых условий, соответствующих каждому из трех типов уравнений. Начнем с гиперболического уравнения. Мы видели, что, вообще говоря, условия Коши вдоль кривой, не являющейся характеристикой, достаточны для определения решения вблизи кривой. Полезное представление роли характеристик и краевых условий получается, если считать характеристики кривыми, вдоль которых распространяется информация о решении. Смысл этого утверждения (и как оно работает) легче всего понять на следующем элементарном примере.

**Пример.** Рассмотрим «простейшее» гиперболическое уравнение с  $A = 1$ ,  $B = 0$ ,  $C = \text{const} = -1/c^2$ . Это одномерное волновое уравнение

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \cdot \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = 0. \quad (8.16)$$

Характеристическое уравнение (8.15) для него имеет вид  $\left(\frac{dt}{ds}\right)^2 - \frac{1}{c^2} \left(\frac{dx}{ds}\right)^2 = 0$ , или  $\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = c^2$ . Итак, характеристики представляют собой прямые линии:

$$\left. \begin{aligned} (x - ct) = \xi = \text{const}; \\ (x + ct) = \eta = \text{const}. \end{aligned} \right\} \quad (8.17)$$

На рис. 8.2 показаны семейства этих линий.

Характеристики гиперболического уравнения образуют «естественную систему координат». Например, если преобразовать уравнение (8.16) к новым координатам  $\xi$  и  $\eta$ , получается уравнение в так называемой **нормальной форме**

$$\partial^2 \psi / \partial \xi \partial \eta = 0. \quad (8.18)$$

Его решение очевидно:

$$\psi = f(\xi) + g(\eta), \quad (8.19)$$

где  $f$  и  $g$  — произвольные функции.

Теперь, если известна функция  $\psi(x)$  и ее нормальная производная  $N(x) = 1/c \cdot \partial\psi/\partial t$  вдоль отрезка прямой  $AB$

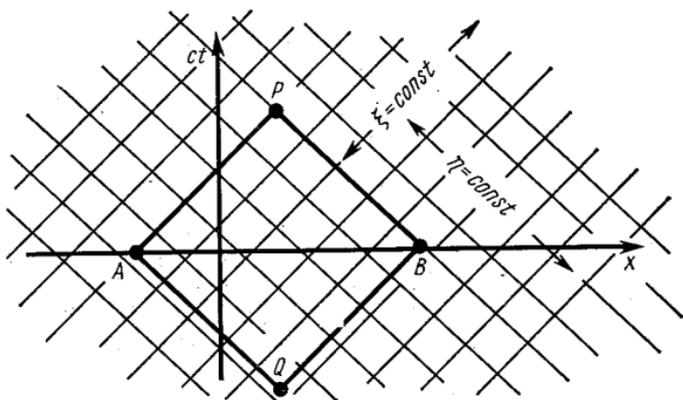


Рис. 8.2. Характеристики одномерного волнового уравнения.

(см. рис. 8.2), можно найти функции  $f(\xi)$  и  $g(\eta)$  вдоль всего отрезка, на котором они имеют значения  $f(x)$  и  $g(x)$ . Имеем

$$\begin{aligned} \psi(x, t=0) &= f(x) + g(x) \\ \text{и } \frac{1}{c} \cdot \frac{\partial\psi}{\partial t}(x, t=0) &= -f'(x) + g'(x), \end{aligned}$$

откуда

$$\left. \begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{2} \psi(x) - \frac{1}{2c} \int \frac{\partial\psi}{\partial t} dx; \\ g(x) &= \frac{1}{2} \psi(x) + \frac{1}{2c} \int \frac{\partial\psi}{\partial t} dx. \end{aligned} \right\} \quad (8.20)$$

Произвольное слагаемое интегрирования не имеет значения, так как оно сокращается всюду в сумме  $\psi = f + g$ .

Значения  $f(x)$  вдоль отрезка прямой  $AB$  определяют  $f(\xi)$  вдоль всех характеристик  $\xi = \text{const}$ , которые пересекаются с  $AB$ . Аналогично значения  $g(x)$  определяют  $g(\eta)$  вдоль всех кривых  $\eta = \text{const}$ , которые пересекаются с  $AB$ . Как  $f(\xi)$ , так и  $g(\eta)$ , а следовательно, и  $\psi(x, t)$  определяются в общей области, где пересекаются оба типа характеристик, т. е. в прямоугольнике  $AQBP$ , изображенном на рис. 8.2.

Результаты, полученные для этого простого примера, легко обобщаются на произвольное гиперболическое урав-

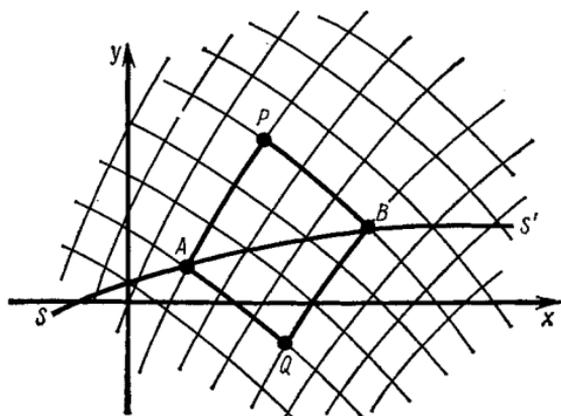


Рис. 8.3. Характеристики гиперболического уравнения и краевая кривая  $SS'$ , не касающаяся характеристик. Условия Коши вдоль дуги  $AB$  кривой  $SS'$  определяют решение внутри области  $AQB'P$ .

нение. Предположим, что система характеристик выглядит, как показано на рис. 8.3, где  $SS'$  — краевая кривая.

Условия Коши вдоль дуги  $AB$  границы определяют решение внутри «четырёхугольной» области, ограниченной характеристиками, проходящими через  $A$  и  $B$ .

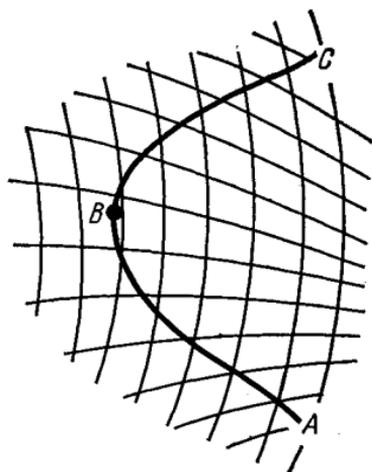


Рис. 8.4. Система характеристик с краевой кривой  $ABC$ , касающейся характеристики в точке  $B$ .

Сказанное выше позволяет исследовать теперь более сложные ситуации. Рассмотрим, например, границу и систему характеристик, показанные на рис. 8.4. Условия Коши от  $A$  до  $B$  определяют поведение вдоль всех вертикальных характеристик, которые пересекаются с границей  $ABC$ , и вдоль всех горизонтальных характеристик, пересекающих дугу  $AB$ . Чем определяется тогда поведение вдоль горизонтальных характеристик, начинающихся между  $B$  и  $C$ ? Ясно, что достаточно условий Дирихле или Неймана вдоль  $BC$ ; усло-

вия Коши здесь слишком сильны и переопределяют решение.

Перейдем теперь к эллиптическим уравнениям. Оказывается, что условия Коши на открытой границе в этом случае совершенно неудовлетворительны в отличие от гиперболических уравнений. Рассмотрим, например, двумерное уравнение Лапласа. Если известна величина потенциального и нормального поля (условия Коши) вдоль конечной части вещественной оси, то нам ничего не известно о поле в других точках. Для эллиптических уравнений информация не распространяется вдоль характеристик (нет вещественных характеристик); она, можно сказать, «диффундирует» внутрь с границ. Чтобы определить потенциал в заданной области, граница должна охватывать эту область, и нужно знать либо потенциал (условие Дирихле), либо нормальную

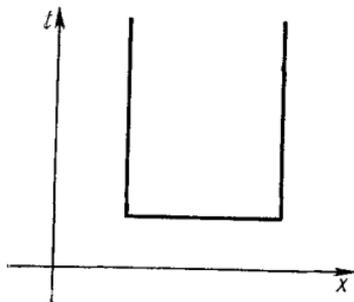


Рис. 8.5. Удобная граница для обычной задачи диффузии.

компоненту напряженности поля (условие Неймана) на всей замкнутой границе (линейная комбинация функции и ее нормальной производной также определяет решение, так как эта комбинация — одно условие вдоль границы).

Можно было бы исследовать, удобен ли такой тип условий для гиперболических уравнений. Ответ в общем отрицателен. Основная причина состоит в том, что можно найти ненулевые решения гиперболического уравнения, которые (или их нормальные производные) обращаются в нуль на определенных замкнутых границах. Существование таких типов «нормальных колебаний» вызывает трудности, если пытаться наложить условия Дирихле или Неймана на замкнутой границе.

Рассмотрим, наконец, параболические уравнения. Они всегда описывают процессы «диффузионного» типа и характеризуются необратимостью. Рассмотрим, например, одномерную задачу диффузии; в удобных единицах имеем  $\partial^2\psi/\partial x^2 = \partial\psi/\partial t$ . Физически разумным условием на границе является условие Дирихле вдоль линии постоянного  $t$  или условие Дирихле вдоль границы подобно той, что показана на рис. 8.5. В любом случае решение находится для будущих моментов времени, а  $\psi$  для прошедших мо-

ментов времени найти нельзя. Точнее говоря, решение в обратном направлении неустойчиво. Если время движется вперед, процесс диффузии сглаживает особенности; если — назад, то особенности возникают и решение продолжить невозможно

В табл. 8.1 собраны типы краевых условий, соответствующих различным типам уравнений.

ТАБЛИЦА 8.1

Уравнение	Условие	Граница
Гиперболическое Эллиптическое Параболическое	Коши Дирихле или Неймана » » »	Открытая Закрытая Открытая

### 8.3. РАЗДЕЛЕНИЕ ПЕРЕМЕННЫХ

Обратимся теперь к точному решению некоторых дифференциальных уравнений в частных производных. Наиболее употребительны методы, устраняющие члены с одной или несколькими частными производными, так что получается уравнение с меньшим числом переменных. Эту процедуру можно повторять, пока не получится обыкновенное дифференциальное уравнение. Первый метод, который мы рассмотрим, называется методом разделения переменных. Прежде чем исследовать его в общем случае, решим ряд простых примеров.

Начнем с решения волнового уравнения в сферической системе координат. Будем искать решение уравнения

$$\nabla^2 \psi - \frac{1}{c^2} \cdot \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = 0 \quad (8.21)$$

в виде

$$\psi(x, t) = X(x) T(t). \quad (8.22)$$

Подставляя это пробное решение в дифференциальное уравнение в частных производных (8.21) и деля на  $XT$ , получаем

$$\frac{\nabla^2 X}{X} = \frac{1}{c^2} \cdot \frac{1}{T} \cdot \frac{d^2 T}{dt^2}.$$

Левая часть зависит только от  $x$ , а правая — только от  $t$ . Следовательно, они должны равняться постоянной, равной, скажем,  $-k^2$  ( $-k^2$  или  $k$  называется постоянной

разделения). Таким образом, уравнение разделяется на два, из которых одно зависит от времени

$$(d^2T/dt^2) + \omega^2 T = 0, \quad (8.23)$$

где  $\omega = kc$ . Его решение

$$T = \begin{cases} \sin \omega t \\ \cos \omega t \end{cases} \quad \text{или} \quad T = \exp(\pm i\omega t). \quad (8.24)$$

Обратимся теперь ко второму уравнению, содержащему координатную функцию  $X(x)$ . Это так называемое уравнение Гельмгольца

$$\nabla^2 X + k^2 X = 0, \quad (8.25)$$

или, в сферических координатах  $r\theta\phi$ ,

$$\left[ \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \cdot \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \cdot \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \right] X + k^2 X = 0. \quad (8.26)$$

Положим  $X = R(r)\Theta(\theta)\Phi(\phi)$ . Подставляя  $X$  в (8.26) и деля на  $R\Theta\Phi$ , имеем

$$\frac{1}{r^2 R} \cdot \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{dR}{dr} \right) + \frac{1}{r^2 \Theta \sin \theta} \cdot \frac{d}{d\theta} \left( \sin \theta \frac{d\Theta}{d\theta} \right) + \frac{1}{r^2 \Phi \sin^2 \theta} \cdot \frac{d^2 \Phi}{d\phi^2} + k^2 = 0.$$

Если умножить это равенство на  $r^2 \sin^2 \theta$ , то третий член будет зависеть только от  $\phi$ , а остальные — только от  $r$  и  $\theta$ . Следовательно,

$$\frac{1}{\Phi} \cdot \frac{d^2 \Phi}{d\phi^2} = \text{const} = -m^2, \quad (8.27)$$

или

$$(d^2\Phi/d\phi^2) + m^2\Phi = 0.$$

Решение этого уравнения равно

$$\Phi = \begin{pmatrix} \sin m\phi \\ \cos m\phi \end{pmatrix}, \quad \text{или} \quad \Phi = \exp(\pm im\phi). \quad (8.28)$$

Уравнение с переменными  $r, \theta$  приобретает вид

$$\frac{1}{r^2 R} \cdot \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{dR}{dr} \right) + \frac{1}{r^2 \Theta \sin \theta} \cdot \frac{d}{d\theta} \left( \sin \theta \frac{d\Theta}{d\theta} \right) - \frac{m^2}{r^2 \sin^2 \theta} + k^2 = 0.$$

Если умножить его на  $r^2$ , то первый и четвертый члены будут зависеть только от  $r$ , а второй и третий — только от  $\theta$ . Таким образом,

$$\frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left( \sin \theta \frac{d\Theta}{d\theta} \right) - \frac{m^2}{\sin^2 \theta} \Theta = \text{const} \cdot \Theta = -l(l+1) \Theta \quad (8.29)$$

и

$$\frac{1}{r^2} \cdot \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{dR}{dr} \right) + \left[ k^2 - \frac{l(l+1)}{r^2} \right] R = 0. \quad (8.30)$$

Если заменить  $\cos \theta = x$ , уравнение (8.29) переходит в

$$(1-x^2) \frac{d^2 \Theta}{dx^2} - 2x \frac{d\Theta}{dx} + \left[ l(l+1) - \frac{m^2}{1-x^2} \right] \Theta = 0. \quad (8.31)$$

Это не что иное, как уравнение для присоединенных полиномов Лежандра (7.27). Его решения равны

$$\Theta = P_l^m(x), \quad Q_l^m(x) \quad (8.32)$$

(присоединенные функции Лежандра).

Радиальное уравнение (8.30) после замены переменной  $R = u/\sqrt{r}$  приобретает вид

$$\frac{d^2 u}{dr^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{du}{dr} + \left[ k^2 - \frac{\left( l + \frac{1}{2} \right)^2}{r^2} \right] u = 0. \quad (8.33)$$

Это не что иное, как уравнение Бесселя (7.48) с  $x = kr$ . Следовательно,

$$R = \frac{J_{l+1/2}(kr)}{\sqrt{r}}, \quad \frac{Y_{l+1/2}(kr)}{\sqrt{r}}. \quad (8.34)$$

Определим так называемые сферические функции Бесселя

$$j_l(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}} J_{l+1/2}(x); \quad n_l(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}} Y_{l+1/2}(x); \quad (8.35)$$

и сферические функции Ганкеля

$$h_l^{(1,2)}(x) = j_l(x) \pm i n_l(x). \quad (8.36)$$

Можно показать, что

$$j_l(x) = (-x)^l \left( \frac{1}{x} \cdot \frac{d}{dx} \right)^l \frac{\sin x}{x}; \quad (8.37)$$

$$n_l(x) = (-x)^l \left( \frac{1}{x} \cdot \frac{d}{dx} \right)^l \left( -\frac{\cos x}{x} \right). \quad (8.38)$$

В книге [4] приведены рекуррентные соотношения, асимптотическое поведение и другие свойства сферических функций Бесселя.

Если  $k = 0$ , так что  $\partial\psi/\partial t = 0$ , и имеем дело с уравнением Лапласа, то радиальное уравнение (8.30) приобретает вид

$$R'' + \frac{2}{r} R' - \frac{l(l+1)}{r^2} R = 0, \quad (8.39)$$

решения которого суть

$$R = \begin{cases} r^l, \\ r^{-(l+1)}. \end{cases} \quad (8.40)$$

Таким образом, найдены следующие решения:

$$\begin{aligned} \nabla^2\psi - \frac{1}{c^2} \cdot \frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = 0 \rightarrow \\ \rightarrow \psi = \begin{cases} \exp(+i\omega t) \\ \exp(-i\omega t) \end{cases} \begin{cases} \exp(+im\phi) \\ \exp(-im\phi) \end{cases} \times \\ \times \begin{cases} P_l^m(\cos\theta) \\ Q_l^m(\cos\theta) \end{cases} \begin{cases} j_l(kr) \\ n_l(kr) \end{cases}, \end{aligned} \quad (8.41)$$

$$\nabla^2\psi = 0 \rightarrow \psi = \begin{cases} \exp(+im\phi) \\ \exp(-im\phi) \end{cases} \begin{cases} P_l^m(\cos\theta) \\ Q_l^m(\cos\theta) \end{cases} \begin{cases} r^l \\ r^{-(l+1)} \end{cases}, \quad (8.42)$$

где каждая скобка представляет собой линейную комбинацию двух функций, содержащихся в ней. Вследствие линейности исходного дифференциального уравнения любая комбинация таких решений есть снова решение.

**Пример.** Для иллюстрации полезности этих решений рассмотрим следующую краевую задачу. Исследуем звуковое излучение, создаваемое антенной в форме «расколотой пополам сферы», т. е.  $\psi$  подчиняется волновому уравнению (8.21) и при  $r = a$

$$\psi = \begin{cases} V_0 \exp(-i\omega_0 t), & 0 < \theta < \frac{\pi}{2}; \\ -V_0 \exp(-i\omega_0 t), & \frac{\pi}{2} < \theta < \pi. \end{cases} \quad (8.43)$$

С самого начала ясно, что нужны лишь решения с  $\omega = \omega_0$ , так что  $k = k_0 = \omega_0/c$ . Далее, так как краевые

Условия аксиально симметричны, то нужно брать решения только с  $m = 0$ . Так как все выражения должны хорошо вести себя при  $\cos \theta = \pm 1$ , то годятся лишь  $P_l$  с целыми  $l$ . Следовательно, пробное решение имеет вид:

$$\psi = \exp(-i\omega_0 t) \sum_l P_l(\cos \theta) [A_l j_l(k_0 r) + B_l n_l(k_0 r)].$$

Используем теперь тот факт, что на бесконечности имеются только расходящиеся волны. Для больших  $x$

$$j_l(x) \sim \frac{1}{x} \cos \left[ x - \frac{\pi}{2} (l+1) \right];$$

$$n_l(x) \sim \frac{1}{x} \sin \left[ x - \frac{\pi}{2} (l+1) \right];$$

$$h_l^{(1,2)}(x) \sim \frac{1}{x} \exp \{ \pm i [x - (l+1) \pi/2] \}.$$

Таким образом, искомые радиальные функции суть  $h_l^{(1)}(k_0 r)$ , так как тогда при  $r \rightarrow \infty$  функция  $\psi \sim \frac{1}{r} \times \exp[i(k_0 r - \omega_0 t)]$  представляет расходящуюся волну. Решение приобретает вид

$$\psi = \exp(-i\omega_0 t) \sum_l A_l P_l(\cos \theta) h_l^{(1)}(k_0 r). \quad (8.44)$$

Наложим теперь краевое условие при  $r = a$ :

$$\sum_l A_l P_l(\cos \theta) h_l^{(1)}(k_0 a) = \begin{cases} V_0, & 0 < \theta < \frac{\pi}{2}; \\ -V_0, & \frac{\pi}{2} < \theta < \pi. \end{cases}$$

Для определения  $A_l$  умножим обе части равенства на  $P_m(\cos \theta)$  и проинтегрируем от  $-1$  до  $+1$ . Тогда, так как

$$\int_0^\pi P_l(\cos \theta) P_m(\cos \theta) \sin \theta d\theta = \frac{2}{2l+1} \delta_{lm},$$

получаем

$$\begin{aligned} & \frac{2}{2l+1} A_l h_l^{(1)}(k_0 a) = \\ & = V_0 \int_0^{\pi/2} P_l(\cos \theta) \sin \theta d\theta - V_0 \int_{\pi/2}^\pi P_l(\cos \theta) \sin \theta d\theta. \end{aligned}$$

Конечно, работают лишь нечетные  $l$ . Если  $l$  нечетно, то

$$A_l = \frac{(2l+1)V_0}{h_l^{(1)}(k_0 a)} \int_0^1 P_l(x) dx.$$

Но из (7.13)

$$\int P_l(x) dx = \frac{P_{l+1}(x) - P_{l-1}(x)}{2l+1}.$$

Следовательно,

$$A_l = \frac{V_0}{h_l^{(1)}(k_0 a)} [P_{l+1}(x) - P_{l-1}(x)]_0^1.$$

Используем соотношения (7.15) и (7.16):

$$P_l(1) = 1, P_l(0) = \begin{cases} 0 & (l \text{ нечетное}); \\ (-1)^{l/2} \frac{l!}{2^l \left[ \left( \frac{l}{2} \right)! \right]^2} & (l \text{ четное}). \end{cases}$$

Результат равен

$$A_l = (-1)^{(l-1)/2} \frac{V_0}{h_l^{(1)}(k_0 a)} \cdot \frac{(l+1)(2l+1)(l-1)!}{2^{l+1} \left[ \left( \frac{l+1}{2} \right)! \right]^2},$$

так что окончательное решение имеет вид

$$\begin{aligned} \psi(r, \theta, t) = & V_0 \exp(-i\omega_0 t) \sum_{l \text{ нечет.}} (-1)^{(l-1)/2} \times \\ & \times \frac{(l+1)(2l+1)(l-1)!}{2^{l+1} \left[ \left( \frac{l+1}{2} \right)! \right]^2} \cdot \frac{h_l^{(1)}(k_0 r)}{h_l^{(1)}(k_0 a)} P_l(\cos \theta). \end{aligned} \quad (8.45)$$

**Пример.** В качестве второго примера разделения переменных рассмотрим колебания круглой мембраны. Дифференциальное уравнение, описывающее малые колебания, имеет вид

$$\nabla^2 u = \frac{1}{c^2} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}. \quad (8.46)$$

Исследуем периодические решения, описывающие нормальные колебания мембраны. Они имеют вид

$u(\mathbf{x}, t) = u(\mathbf{x}) \exp(-i\omega t)$ . Подставляя в (8.46), находим уравнение для  $u(\mathbf{x})$ :

$$\nabla^2 u + k^2 u = 0, \quad (8.47)$$

где  $k = \omega/c$  — волновое число. В двумерных полярных координатах

$$\nabla^2 = \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2}{\partial \theta^2}, \quad (8.48)$$

так что (8.47) приобретает вид

$$\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + k^2 u = 0.$$

Ищем решение в виде  $u(r, \theta) = R(r) \Theta(\theta)$ . Разделяя переменные, находим

$$\begin{cases} (d^2\Theta/d\theta^2) + n^2\Theta = 0 \rightarrow \Theta = \exp(\pm in\theta); \\ \frac{d^2R}{dr^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{dR}{dr} + \left( k^2 - \frac{n^2}{r^2} \right) R = 0. \end{cases} \quad (8.49)$$

Уравнение для  $R$  — это уравнение Бесселя, так что

$$R = \left\{ \begin{matrix} J_n(kr) \\ Y_n(kr) \end{matrix} \right\}. \quad (8.50)$$

Прежде чем искать решение задачи о колебаниях мембраны, обобщим эту процедуру разделения переменных для трехмерных цилиндрических координат. Лапласиан равен

$$\nabla^2 = \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \rho \frac{\partial}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \cdot \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}. \quad (8.51)$$

Решения уравнения Лапласа  $\nabla^2 \psi = 0$  имеют вид

$$\psi = \left\{ \begin{matrix} J_m(\alpha\rho) \\ Y_m(\alpha\rho) \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} \exp(\alpha z) \\ \exp(-\alpha z) \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} \exp(im\phi) \\ \exp(-im\phi) \end{matrix} \right\}. \quad (8.52)$$

В то же время решения уравнения Гельмгольца  $\nabla^2 \psi + k^2 \psi = 0$  даются соотношениями

$$\psi = \left\{ \begin{matrix} J_m(\sqrt{k^2 - \alpha^2}\rho) \\ Y_m(\sqrt{k^2 - \alpha^2}\rho) \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} \exp(i\alpha z) \\ \exp(-i\alpha z) \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} \exp(im\phi) \\ \exp(-im\phi) \end{matrix} \right\}. \quad (8.53)$$

При  $k = 0$  решения (8.53) сводятся к решениям уравнения Лапласа; при  $\alpha = 0$  они сводятся к решениям задачи о двумерных колебаниях мембраны (8.49), (8.50).

Возвратимся к задаче о мембране; амплитуда колебаний должна иметь вид

$$u = J_m(kr) \begin{Bmatrix} \cos m\theta \\ \sin m\theta \end{Bmatrix} \exp(\pm i\omega t). \quad (8.54)$$

Функция  $Y_m(kr)$  исключается, так как она неограниченно растет при  $r \rightarrow 0$ . Из требования однозначности решения следует, что  $m$  должно быть целым числом. Если мембрана закреплена при  $r = R$ , то при  $r = R$  должно быть  $u = 0$ . Следовательно,  $J_m(kR) = 0$ . Нули функций Бесселя табулированы в различных справочниках [1]. Некоторые из них равны (приблизительно):

$$\left. \begin{aligned} J_0(x) = 0, x &\approx 2,40; 5,52; 8,65; \dots \\ J_1(x) = 0, x &\approx 3,83; 7,02; 10,17; \dots \\ J_2(x) = 0, x &\approx 5,14; 8,42; 11,62; \dots \end{aligned} \right\} \quad (8.55)$$

Итак, колебания мембраны с наименьшими частотами описываются законами

$$k = \frac{2,40}{R}, \quad \omega = 2,40 \frac{c}{R}, \quad u \sim J_0\left(2,40 \frac{r}{R}\right);$$



$$k = \frac{3,83}{R}, \quad \omega = 3,83 \frac{c}{R}, \quad u \sim J_1\left(3,83 \frac{r}{R}\right) \begin{Bmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{Bmatrix};$$



$$k = \frac{5,14}{R}, \quad \omega = 5,14 \frac{c}{R}, \quad u \sim J_2\left(5,14 \frac{r}{R}\right) \begin{Bmatrix} \cos 2\theta \\ \sin 2\theta \end{Bmatrix};$$



$$k = \frac{5,52}{R}, \quad \omega = 5,52 \frac{c}{R}, \quad u \sim J_0\left(5,52 \frac{r}{R}\right).$$



Справа от каждого типа колебаний показан условный рисунок, указывающий на узлы, т. е. точки, в которых  $u$  всегда равно нулю.

Отметим, что вторая и третья частоты соответствуют двум независимым типам колебаний. Это пример вырождения, с которым мы встречались в гл. 6.

**Пример.** В качестве последнего примера использования метода разделения переменных для решения краевых задач найдем температуру внутри куба с ребром  $L$ . Куб при температуре  $T = 0$  в момент времени  $t = 0$  помещают в тепловую ванну с температурой  $T = T_0$ . Нужно решить уравнение

$$\nabla^2 T = \frac{1}{\kappa} \cdot \frac{\partial T}{\partial t}. \quad (8.56)$$

Предположим  $T \sim \exp(-\lambda t)$ . Тогда  $\nabla^2 T + \frac{\lambda}{\kappa} T = 0$ ,  
 $\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = -\frac{\lambda}{\kappa} T$ . Разделение переменных дает  
 $T \sim \exp(i\alpha x + i\beta y + i\gamma z)$  с  $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = \lambda/\kappa$ .

Выбирая начало координат в одном из углов куба, запишем краевое условие в виде:  $T = T_0$  для  $x = 0, L$ ;  $T = T_0$  для  $y = 0, L$ ;  $T = T_0$  для  $z = 0, L$ . Заметим, что это — хотя и очень простое — неоднородное граничное условие. Частное решение (8.56) равно  $T = T_0$ , а общее решение однородного уравнения должно удовлетворять соответствующим однородным краевым условиям:  $T = 0$  на поверхности. Итак,

$$T = T_0 + \sum_{lmn} C_{lmn} \sin \frac{l\pi x}{L} \sin \frac{m\pi y}{L} \sin \frac{n\pi z}{L} \exp(-\lambda_{lmn} t), \quad (8.57)$$

где  $\lambda_{lmn} = \kappa (\pi^2/L^2) (l^2 + m^2 + n^2)$ .

Для определения констант  $C_{lmn}$  имеется условие:  $T = 0$  при  $t = 0$ . Следовательно,

$$\sum_{lmn} C_{lmn} \sin(l\pi x/L) \sin(m\pi y/L) \sin(n\pi z/L) = -T_0.$$

Умножим на  $\sin(l'\pi x/L) \sin(m'\pi y/L) \sin(n'\pi z/L)$  и проинтегрируем по всему кубу. В результате находим

$$C_{lmn} = \begin{cases} -\frac{64T_0}{\pi^3 lmn}, & \text{если } l, m, n \text{ все нечетные;} \\ 0 & \text{во всех других случаях.} \end{cases}$$

Таким образом, при  $t > 0$

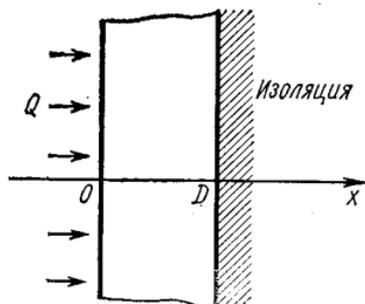
$$T = T_0 \left\{ 1 - \frac{64}{\pi^3} \sum_{\substack{lmn \\ \text{нечет.}}} \frac{1}{lmn} \sin \frac{l\pi x}{L} \sin \frac{m\pi y}{L} \sin \frac{n\pi z}{L} \times \right. \\ \left. \times \exp \left[ -(l^2 + m^2 + n^2) \kappa \frac{\pi^2 t}{L^2} \right] \right\}. \quad (8.58)$$

Для  $t \gg L^2/\kappa$  только первый член суммы существен; тогда

$$T \approx T_0 \left[ 1 - \frac{64}{\pi^3} \sin \frac{\pi x}{L} \sin \frac{\pi y}{L} \sin \frac{\pi z}{L} \exp \left( -\frac{3\kappa\pi^2}{L^2} t \right) \right]. \quad (8.59)$$

Решение (8.58) не очень удобно при малых  $t$ ; в конце разд. 8.4 будет рассмотрен метод, дающий удобное решение при малых  $t$ .

Во всех рассмотренных примерах разделение переменных достигалось представлением решения в виде произведения функций, каждая из которых зависит от меньшего числа переменных, чем в исходном уравнении. Однако для ряда задач проблема разделения переменных решается другими способами, например представлением решения в виде суммы функций, каждая из которых зависит от меньшего числа переменных.



**Пример.** Рассмотрим бесконечную пластину толщиной  $D$ , проводящую тепло и изолированную с одной стороны ( $x = D$ ). Пусть вначале температура  $T$  равнялась нулю, а затем к поверхности  $x = 0$  стало подводиться тепло (например, от излучения) с постоянной скоростью  $Q$  кал/(см<sup>2</sup>·сек). Эта ситуация показана на рис. 8.6. Найдем температуру внутри пластины в зависимости от координаты и времени.

Рис. 8.6. Бесконечная пластина толщиной  $D$ , проводящая тепло; поверхность  $x = D$  изолирована; тепло с постоянной скоростью подводится к поверхности  $x = 0$  в количестве  $Q$  кал/(см<sup>2</sup>·сек).

Нужно решить одномерное уравнение диффузии

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} - \frac{1}{\kappa} \cdot \frac{\partial T}{\partial t} = 0, \quad \kappa = \frac{K}{C\rho}, \quad (8.60)$$

с заданными неоднородными краевыми условиями. Качественная зависимость температуры от времени ясна из физических соображений. После начального переходного периода ожидается линейный рост температуры со временем в каждой точке. Следовательно, будем искать частное решение в виде

$$T_p = u(x) + \alpha t. \quad (8.61)$$

Это приводит к разделению переменных, причем уравнение для  $u$  имеет вид

$$d^2 u / dx^2 = \alpha / \kappa \quad (8.62)$$

с решением  $u(x) = (1/2)(\alpha/\kappa)x^2 + ax + b$ . Для этого частного решения величину  $b$  можно выбрать произвольно, а константы  $\alpha$  и  $a$  определяются краевыми условиями  $-Ku'(0) = Q$ ,  $u'(D) = 0$ . Решение, удовлетворяющее

этим условиям, равно

$$u(x) = 1/2 (Q/KD) (x - D)^2, \quad \alpha = Q\kappa/KD = Q/C\rho D,$$

приводя к следующему частному решению:

$$T_p = \frac{1}{2} \cdot \frac{Q}{KD} (x - D)^2 + \frac{Q}{C\rho D} t. \quad (8.63)$$

Предлагаем читателю закончить задачу, находя общее решение однородного уравнения  $T_c$  и используя его, чтобы удовлетворить начальному условию  $T(x, 0) = T_p + T_c = 0$  при  $t = 0$ .

В классической механике описанный метод разделения переменных используется главным образом при решении дифференциального уравнения Гамильтона — Якоби [5].

#### 8.4. МЕТОДЫ ИНТЕГРАЛЬНЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ

Покажем, как можно использовать различные интегральные преобразования для решения некоторых краевых задач. Основная особенность преобразований состоит в том, чтобы перейти к уравнению, содержащему производные по меньшему числу переменных. Кроме того, более автоматически учитываются граничные условия.

**Пример.** Рассмотрим распределение температуры в полубесконечной области  $x > 0$ , если сначала  $T = 0$ , а плоскость  $x = 0$  поддерживается при  $T = T_0$ . Уравнение диффузии имеет вид  $\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{1}{\kappa} \cdot \frac{\partial T}{\partial t}$ . Краевые условия: (1)  $T(x, 0) = 0$ ; (2)  $T(0, t) = T_0$ .

Тот факт, что нам нужны только времена  $t > 0$ , наводит на мысль использовать преобразование Лапласа по  $t$  (нас интересуют также лишь  $x > 0$ , но преобразование Лапласа по  $x$  нецелесообразно. Почему?). Положим

$$F(x, s) = \int_0^{\infty} \exp(-st) T(x, t) dt. \quad (8.64)$$

Преобразование Лапласа дифференциального уравнения имеет вид

$$\partial^2 F / \partial x^2 = sF / \kappa, \quad (8.65)$$

так как при  $t = 0$  величина  $T$  равна нулю.

Второе краевое условие приобретает вид

$$F(0, s) = T_0/s. \quad (8.66)$$

Итак, решая уравнение (8.65) и используя (8.66), получаем

$$F(x, s) = (T_0/s) \exp(-\sqrt{s/\kappa} x), \quad (8.67)$$

так как решение  $\sim \exp(+\sqrt{s/\kappa} x)$ , конечно, не годится.

Теперь для нахождения решения следует сделать обратное преобразование

$$T(x, t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{T_0}{s} \exp(-\sqrt{s/\kappa} x) \exp(st) ds. \quad (8.68)$$

Подынтегральное выражение многозначно. Разрежем плоскость  $s$  вдоль отрицательной вещественной полуоси и рассмотрим контур, изображенный на рис. 8.7. Так как весь

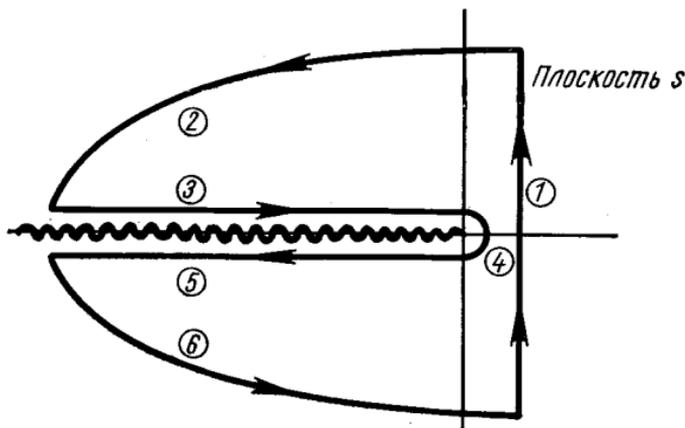


Рис. 8.7. Плоскость  $s$  с разрезом и контуром для расчета интеграла обратного преобразования Лапласа (8.68) (в кружках — номера интегралов  $J_1, J_2$  и т. д.).

интеграл по замкнутому контуру рис. 8.7 равен нулю, то вклад от  $J_1$  равен

$$J_1 = -J_2 - J_3 - J_4 - J_5 - J_6;$$

$J_2$  и  $J_6$  равны нулю,

$$J_4 = -2\pi i \frac{1}{2\pi i} T_0 = -T_0,$$

$$\begin{aligned} J_3 &= \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^0 \frac{T_0}{s} \exp(-ix \sqrt{1/\kappa} \sqrt{-s}) \exp(st) ds = \\ &= -\frac{1}{2\pi i} \int_0^{\infty} \frac{T_0}{s} \exp(-ix \sqrt{1/\kappa} \sqrt{s}) \exp(-st) ds. \end{aligned}$$

Аналогично

$$J_5 = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{\infty} \frac{T_0}{s} \exp(ix \sqrt{1/\kappa} \sqrt{s}) \exp(-st) ds,$$

поэтому

$$J_3 + J_5 = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{T_0}{s} \exp(-st) \sin(x \sqrt{s/\kappa}) ds.$$

Положим  $s = z^2$ . Тогда

$$J_3 + J_5 = \frac{2T_0}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{dz}{z} \exp(-tz^2) \sin(x \sqrt{1/\kappa} z)$$

и

$$T(x, t) = T_0 \left( 1 - \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{dz}{z} \exp(-tz^2) \sin(x \sqrt{1/\kappa} z) \right). \quad (8.69)$$

Предлагаем читателю найти этот интеграл. Результат имеет вид\*

$$T(x, t) = T_0 \left[ 1 - \operatorname{erf} \left( \frac{x}{2} \sqrt{\frac{1}{\kappa t}} \right) \right]. \quad (8.70)$$

Отметим, что ответ получен в замкнутой форме, а не в виде бесконечного ряда, возникающего обычно при использовании метода разделения переменных. Однако эта особенность возникает скорее от неограниченности области изменения  $x$ , чем от метода преобразований. Чтобы решить эту задачу методом разделения переменных, нужно было бы рассмотреть пластину конечной толщины  $D$  и после решения устремить  $D$  к  $\infty$ . При таком предельном переходе решение в виде ряда преобразуется в интеграл, вычисление которого дает результат (8.70). Читателю будет полезно выполнить эту процедуру.

**Пример.** В качестве второго примера, где используется один из методов интегральных преобразований для решения

\* Этот расчет интеграла (8.68) непосредствен и поучителен; однако существует более простой метод. Именно, если продифференцировать обе стороны (8.68) по  $x$  и заменить переменную интегрирования  $u = \sqrt{s}$ , то с помощью тривиальной деформации контура находим, что  $\partial T / \partial x = \frac{T_0}{\sqrt{\pi \kappa t}} \exp(-x^2/4\kappa t)$ , откуда вытекает (8.70).

уравнений в частных производных, рассмотрим другую задачу диффузии. Найдем распределение температуры  $T(x, t)$  в бесконечном твердом теле, если задано  $T(x, 0) = f(x)$ . Ничего не зависит от  $y$  и  $z$ , так что  $\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{1}{\kappa} \cdot \frac{\partial T}{\partial t}$ . Для разнообразия сделаем преобразование Фурье по переменной  $x$ :

$$T(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{2\pi} F(k, t) \exp(ikx); \quad (8.71)$$

$$F(k, t) = \int_{-\infty}^{\infty} dx \exp(-ikx) T(x, t). \quad (8.72)$$

Таким образом,

$$-k^2 F(k, t) = \frac{1}{\kappa} \cdot \frac{\partial F(k, t)}{\partial t}$$

с решением

$$F(k, t) = \phi(k) \exp(-k^2 \kappa t).$$

Начальное условие дает

$$F(k, 0) = \int_{-\infty}^{\infty} T(x, 0) \exp(-ikx) dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \exp(-ikx) dx.$$

Следовательно,

$$\phi(k) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \exp(-ikx) dx$$

и

$$F(k, t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx \exp(-ikx) \exp(-k^2 \kappa t). \quad (8.73)$$

Делая обратное преобразование Фурье, получаем

$$\begin{aligned} T(x, t) &= \int_{-\infty}^{\infty} (dk/2\pi) \exp(ikx) \int_{-\infty}^{\infty} dx' f(x') \exp(-ikx' - k^2 \kappa t) = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} dx' f(x') \int_{-\infty}^{\infty} (dk/2\pi) \exp[ik(x-x') - k^2 \kappa t]. \end{aligned} \quad (8.74)$$

Интеграл по  $k$  берется легко:

$$\sqrt{(1/4\pi\kappa t)} \exp[-(x-x')^2/4\kappa t].$$

Следовательно,

$$T(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} dx' f(x') \sqrt{(1/4\pi kt)} \exp [-(x-x')^2/4kt]. \quad (8.75)$$

Функция

$$G(x, t; x') = \sqrt{(1/4\pi kt)} \exp [-(x-x')^2/4kt]$$

есть функция Грина для рассмотренной задачи. В следующей главе функции Грина будут обсуждаться более подробно.

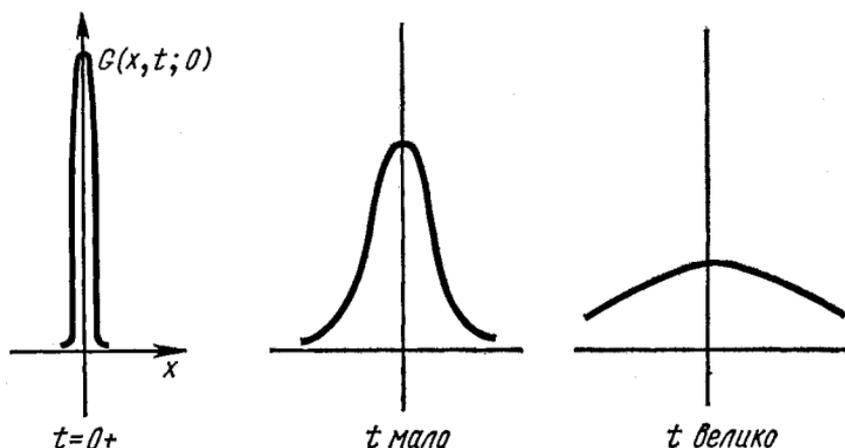


Рис. 8.8. Функция Грина  $G(x, t; 0)$  для одномерной задачи теплопроводности с заданным начальным распределением температуры.

Предположим, что первоначальный «источник» тепла  $f(x)$  (т. е. начальное распределение температуры) представляет собой плоский источник  $\delta(x)$ . Тогда

$$T(x, t) = \sqrt{(1/4\pi kt)} \exp(-x^2/4kt) = G(x, t; 0). \quad (8.76)$$

Это распределение имеет гауссову зависимость от  $x$  с шириной, растущей как  $\sqrt{t}$  (рис. 8.8).

Каково распределение, возникающее от точечного источника  $\delta(x)$  при  $t = 0$ ? Его можно найти, используя предыдущий результат. Пусть  $f(x, t)$  — отклик на плоский источник  $\delta(x)$  при  $t = 0$ . Пусть  $g(r, t)$  — отклик на точечный источник  $\delta(x)$  при  $t = 0$ .

Тогда из рис. 8.9 видно, что

$$f(x, t) = \int_0^{\infty} 2\pi y dy g(r, t) = \int_x^{\infty} 2\pi r dr g(r, t).$$

Следовательно,

$$\left. \begin{aligned} df/dx &= -2\pi x g(x, t); \\ g(r, t) &= -\frac{1}{2\pi r} \left[ \frac{\partial f(x, t)}{\partial x} \right]_{x=r}. \end{aligned} \right\} \quad (8.77)$$

Используя ранее найденную функцию  $f(x, t)$  для плоского источника (8.76), сразу получаем формулу

$$g(r, t) = (1/4\pi kt)^{3/2} \exp(-r^2/4kt), \quad (8.78)$$

представляющую отклик на точечное распределение  $T(x, 0) = \delta(x)$ .

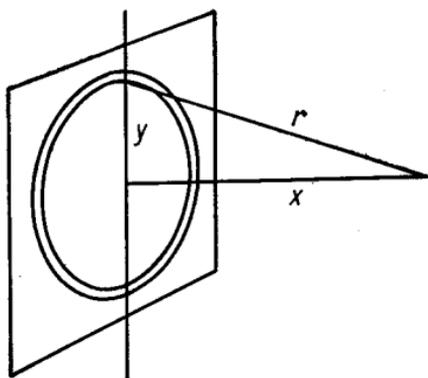


Рис. 8.9. Связь переменных  $x$  и  $r$  для задач о плоском и точечном источниках.

Это распределение от точечного источника представляет собой другой пример функции Грина; позднее мы рассмотрим ее более детально. Проиллюстрируем полезность функций Грина на двух задачах диффузии.

В первом примере рассмотрим отклик на начальное точечное распределение температуры в  $x = a, y = z = 0$  в полубесконечном твердом теле  $x > 0$ , если оно первоначально ( $t = 0$ ) поддерживалось при  $T = 0$  (кроме источника), а граница  $x = 0$  поддерживается все время при  $T = 0$ . Ответ находится с помощью суперпозиции функции

источника в  $x = a, y = z = 0$

$$\left(\frac{1}{4\pi xt}\right)^{3/2} \exp\left[-\frac{(x-a)^2 + y^2 + z^2}{4xt}\right] \quad (8.79)$$

и функции отрицательного источника в  $x = -a, y = z = 0$

$$-\left(\frac{1}{4\pi xt}\right)^{3/2} \exp\left[-\frac{(x+a)^2 + y^2 + z^2}{4xt}\right]. \quad (8.80)$$

Этот второй, «фиктивный» источник называется и з о б р а ж е н и е м.

Метод изображений, должно быть, хорошо известен читателю из электростатики, где он часто используется.

В следующем примере рассмотрим задачу о кубе, первоначально находившемся при нулевой температуре; грани куба поддерживаются при  $T = 0$ ;  $T(\mathbf{x}, t = 0) = \delta(\mathbf{x})$ , где  $\mathbf{x} = 0$  — центр куба. Температурное распределение в последующие моменты времени можно найти, либо разделяя переменные, либо складывая бесконечную систему изображений. Первое решение удобно при больших  $t$ , а второе — при малых  $t$ .

## 8.5. МЕТОД ВИНЕРА — ХОПФА

Исторически этот метод появился для решения определенного типа интегрального уравнения; однако он позволил решать ряд краевых задач, которые очень трудно поддаются обычным методам. Этот метод представляет собой обобщение метода интегральных преобразований; в нем производится аналитическое продолжение преобразований Фурье по переменной преобразования с вещественной оси в комплексную плоскость. Итак, рассматривается преобразование Фурье функции  $f(x)$

$$F(k) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \exp(-ikx) dx \quad (8.81)$$

для комплексных  $k = \omega + i\gamma$ . Тогда

$$F(k) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \exp(\gamma x) \exp(-i\omega x) dx. \quad (8.82)$$

Множитель  $\exp(\gamma x)$  может привести к расходимости интеграла либо при  $x \rightarrow +\infty$ , либо при  $x \rightarrow -\infty$  в случае, если  $f(x)$  недостаточно быстро сходится. Сходимость

интеграла может иметь место для ограниченного интервала  $\gamma$ . Этот интервал  $\gamma = \text{Im } k$  зависит от асимптотического поведения  $f(x)$  следующим образом:

1. Если

$$\left. \begin{aligned} f(x) \exp(\alpha x) &\rightarrow 0 \text{ при } x \rightarrow +\infty, \\ f(x) \exp(\beta x) &\rightarrow 0 \text{ при } x \rightarrow -\infty \text{ с } \alpha > \beta, \end{aligned} \right\} \quad (8.83)$$

то  $F(k)$  — аналитическая функция  $k$  в полосе  $\beta < \text{Im } k < \alpha$ .

2. Если  $f(x) = 0$  для всех  $x < 0$ , то, конечно,  $\beta$  может быть произвольным отрицательным числом. В этом случае не только  $F(k)$  аналитична при  $-\infty < \text{Im } k < \alpha$ , но и  $F(k) \rightarrow 0$  равномерно при  $\text{Im } k \rightarrow -\infty$ , так как теперь

$$F(k) = \int_0^{\infty} f(x) \exp(\gamma x) \exp(-i\omega x) dx.$$

Чтобы увидеть, насколько сильнее это второе утверждение, рассмотрим функцию  $\exp(-x^2)$ . Разумеется,  $\beta$  равно  $-\infty$ , и преобразование Фурье  $F(k) \sim \exp(-k^2/4)$  аналитично во всей нижней полуплоскости. Но  $f(x)$  не обращается в нуль при  $x < 0$  и, конечно,  $F(k)$  не стремится равномерно к нулю при  $\text{Im } k \rightarrow -\infty$ .

Подчеркнем кстати, что все, что говорилось о связи поведения  $f(x)$  на  $\pm\infty$  с аналитичностью  $F(k)$ , может быть переформулировано в обратном направлении; поведение  $F(k)$  на  $\pm\infty$  (в действительности при  $\text{Re } k \rightarrow \pm\infty$ ) определяет область аналитичности функции  $f(x)$ , представляющей собой обратный интеграл.

В дополнение к этим свойствам преобразований Фурье следует рассмотреть тривиальное разложение функции комплексной переменной на сумму двух функций. Это разложение является характерной особенностью любого решения по методу Винера — Хопфа, используется ли он для краевой задачи, для интегрального уравнения или для других случаев.

Предположим, что определенная функция  $F(k)$  аналитична в полосе  $\beta < \text{Im } k < \alpha$  и стремится к нулю на концах полосы ( $\text{Re } k \rightarrow \pm\infty$ ). Тогда  $F(k)$  можно записать как сумму двух функций

$$F(k) = F_+(k) + F_-(k), \quad (8.84)$$

где  $F_+(k)$  аналитична при  $\text{Im } k > \beta$  и стремится к нулю при  $\text{Im } k \rightarrow +\infty$ , в то время как  $F_-(k)$  аналитична при  $\text{Im } k < \alpha$  и стремится к нулю при  $\text{Im } k \rightarrow -\infty$ .

Для  $k$  внутри полосы по теореме Коши имеем

$$F(k) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty+i\beta}^{\infty+i\beta} \frac{F(k')}{k'-k} dk' - \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty+i\alpha}^{\infty+i\alpha} \frac{F(k')}{k'-k} dk'. \quad (8.85)$$

Первый интеграл аналитичен при  $\text{Im } k > \beta$  (также при  $\text{Im } k < \beta$ , но это нас не интересует), и его можно отождествить с функцией  $F_+(k)$ ; аналогично второй интеграл отождествляется с  $F_-(k)$ . Легко показать, что разложение однозначно. Иногда такое разложение можно осуществить, если быть достаточно внимательным. Предположим, например, что

$$F(k) = 1/(k+i)\sqrt{k-i}. \quad (8.86)$$

Эта функция имеет полюс при  $k = -i$  и корневую точку ветвления при  $k = +i$ ; она аналитична в полосе  $|\text{Im } k| < 1$ . Определим квадратный корень условием

$$\sqrt{0-i} = \exp[-i\pi/4] = (1-i)/\sqrt{2}.$$

Тогда можно написать

$$\begin{aligned} F(k) &= \frac{1}{k+i} \left( \frac{1}{\sqrt{k-i}} - \frac{1}{\sqrt{-i-i}} \right) + \frac{1}{\sqrt{-i-i}} \frac{1}{k+i} = \\ &= \underbrace{\frac{1}{k+i} \left( \frac{1}{\sqrt{k-i}} - \frac{1+i}{2} \right)}_{F_-(k)} + \underbrace{\frac{1+i}{2} \frac{1}{k+i}}_{F_+(k)}, \end{aligned} \quad (8.87)$$

причем  $F_-(k)$  находится из условия отсутствия полюса в  $k = -i$ .

Проиллюстрируем метод Винера — Хопфа. Решим двумерное уравнение Лапласа

$$\nabla^2 \phi = 0 \quad (8.88)$$

в верхней полуплоскости ( $y > 0$ ), удовлетворяющее следующим краевым условиям:

- (1)  $\phi \rightarrow 0$ , когда  $y \rightarrow \infty$ ;
- (2)  $\phi = \exp(-ax)$  ( $a > 0$ ) при  $y = 0$ ,  $x > 0$ ;
- (3)  $\partial\phi/\partial y = C \exp(bx)$  ( $b > 0$ ) при  $y = 0$ ,  $x < 0$ .

Положим

$$\phi(x, 0) = f(x); \quad (\partial\phi/\partial y)(x, 0) = g(x). \quad (8.89)$$

Тогда из (2) и (3) заключаем, что

$$f(x) = \begin{cases} \exp(-ax) & (x > 0), \\ ? & (x < 0); \end{cases} \quad g(x) = \begin{cases} ? & (x > 0), \\ C \exp(bx) & (x < 0). \end{cases} \quad (8.90)$$

Решаем уравнение (8.88) с краевым условием (1) посредством преобразования Фурье по  $x$ ; напишем

$$\phi(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{2\pi} \exp(ikx) F(k, y),$$

где преобразование  $F(k, y)$  удовлетворяет уравнению  $\partial^2 F / \partial y^2 - k^2 F = 0$ . Таким образом, для вещественных  $k$  имеем  $F(k, y) = \phi(k) \times \exp(-|k|y)$ .

Чтобы продолжить функцию  $F(k, y)$  на комплексную плоскость  $k$ , заменим для вещественных  $k$  функцию  $|k|$  на

$$\sqrt{k^2 + \lambda^2} \quad (8.91)$$

с разрезами, идущими в  $\pm i\infty$ , как показано на рис. 8.10. Корень определен как  $\sqrt{k^2 + \lambda^2} \rightarrow +k$  при  $\text{Re } k \rightarrow +\infty$ . После вычисления устремим  $\lambda$  к нулю.

Итак,

$$\phi(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} (dk/2\pi) \exp(ikx) \exp(-\sqrt{k^2 + \lambda^2}y) \Phi(k). \quad (8.92)$$

Требуется найти  $\Phi(k)$ , удовлетворяющую краевым условиям (8.90)

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} (dk/2\pi) \exp(ikx) \Phi(k), \quad (8.93)$$

$$g(x) = - \int_{-\infty}^{\infty} (dk/2\pi) \exp(ikx) \sqrt{k^2 + \lambda^2} \Phi(k). \quad (8.94)$$

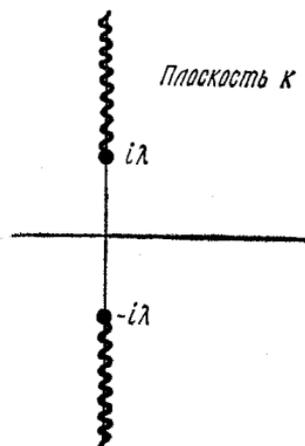


Рис. 8.10. Плоскость  $k$  с разрезами, соответствующими функции  $\sqrt{k^2 + \lambda^2}$ .

Обращение этих двух преобразований Фурье дает следующий результат:

$$\begin{aligned} \Phi(k) &= \int_{-\infty}^{\infty} dx \exp(-ikx) f(x) = \\ &= \left( \int_{-\infty}^0 + \int_0^{\infty} \right) dx \exp(-ikx) f(x) = \\ &= \Phi_+(k) + \int_0^{\infty} dx \exp(-ikx - ax) = \Phi_+(k) + \frac{1}{i} \cdot \frac{1}{k - ia} \quad (8.95) \end{aligned}$$

и аналогично

$$\Phi(k) \sqrt{k^2 + \lambda^2} = \psi_-(k) + \frac{C}{i} \cdot \frac{1}{k + ib}, \quad (8.96)$$

где  $\Phi_+(k)$  — преобразование Фурье функции, обращающейся в нуль при  $x > 0$ , в то время как  $\psi_-(k)$  — преобразование Фурье функции, обращающейся в нуль при  $x < 0$ .

Приравнивая эти два выражения для  $\Phi(k)$ , имеем

$$\sqrt{k^2 + \lambda^2} \Phi_+(k) + \frac{1}{i} \cdot \frac{\sqrt{k^2 + \lambda^2}}{k - ia} = \psi_-(k) + \frac{C}{i} \cdot \frac{1}{k + ib}.$$

Перепишем эти уравнения в виде

$$\begin{aligned} \underbrace{\frac{\sqrt{k + i\lambda} \Phi_+(k)}{F_+(k)}}_{F_+(k)} - \underbrace{\frac{\psi_-(k)}{\sqrt{k - i\lambda}}}_{F_-(k)} &= \\ = \underbrace{\frac{C}{i} \cdot \frac{1}{k + ib} \cdot \frac{1}{\sqrt{k - i\lambda}} - \frac{1}{i} \cdot \frac{\sqrt{k + i\lambda}}{k - i\lambda}}_{F(k)}. \quad (8.97) \end{aligned}$$

В этой форме оба члена в левой части удовлетворяют условиям, определенным для  $F_+(k)$  и  $F_-(k)$ . Правую часть  $F(k) = F_+(k) + F_-(k)$  следует разложить так, чтобы найти  $\Phi_+(k)$  и  $\psi_-(k)$ . Знание каждой из этих двух функций позволяет получить  $\Phi(k)$ . Эта процедура является существенным моментом метода Винера — Хопфа. Каждую часть  $F(k)$  можно разложить, если быть достаточно внимательным.

Сначала имеем

$$\begin{aligned} \frac{1}{k+ib} \cdot \frac{1}{\sqrt{k-i\lambda}} &= \frac{1}{k+ib} \left( \frac{1}{\sqrt{k-i\lambda}} - \frac{1}{\sqrt{-ib-i\lambda}} \right) + \\ + \frac{1}{\sqrt{-ib-i\lambda}} \cdot \frac{1}{k+ib} &= \frac{1}{k+ib} \left( \frac{1}{\sqrt{k-i\lambda}} - \frac{1+i}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{b+\lambda}} \right) + \\ &+ \frac{1+i}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{b+\lambda}} \cdot \frac{1}{k+ib}. \end{aligned}$$

Аналогично

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{k+i\lambda}}{k-ia} &= \frac{1}{k-ia} (\sqrt{k+i\lambda} - \sqrt{ia+i\lambda}) + \sqrt{ia+i\lambda} \cdot \frac{1}{k-ia} = \\ = \frac{1}{k-ia} \left( \sqrt{k+i\lambda} - \frac{1+i}{\sqrt{2}} \sqrt{a+\lambda} \right) &+ \frac{1+i}{\sqrt{2}} \sqrt{a+\lambda} \frac{1}{k-ia}. \end{aligned}$$

Поэтому

$$\begin{aligned} F_+(k) = \sqrt{k+i\lambda} \Phi_+(k) &= \frac{c}{i} \cdot \frac{1+i}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{b+\lambda}} \cdot \frac{1}{k+ib} - \\ - \frac{1}{i} \cdot \frac{1}{k-ia} \left( \sqrt{k+i\lambda} - \frac{1+i}{\sqrt{2}} \sqrt{a+\lambda} \right). \end{aligned} \quad (8.98)$$

Подставляя этот результат в выражение для  $\Phi(k)$  через  $\Phi_+(k)$ , находим

$$\Phi(k) = \frac{1-i}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{k+i\lambda}} \left( \frac{\sqrt{a+\lambda}}{k-ia} + \frac{c}{\sqrt{b+\lambda}} \cdot \frac{1}{k+ib} \right).$$

Теперь можно перейти к пределу  $\lambda \rightarrow 0$ . Отметим, что

$$\sqrt{k+i\lambda} \rightarrow \begin{cases} \sqrt{k} & (k > 0), \\ i\sqrt{-k} & (k < 0). \end{cases}$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} &\Phi(k) = \\ = \begin{cases} \frac{1-i}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{k}} \left( \frac{\sqrt{a}}{k-ia} + \frac{c}{\sqrt{b}} \cdot \frac{1}{k+ib} \right) & (k > 0), \\ \frac{-1-i}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{-k}} \left( \frac{\sqrt{a}}{k-ia} + \frac{c}{\sqrt{b}} \cdot \frac{1}{k+ib} \right) & (k < 0). \end{cases} \end{aligned} \quad (8.99)$$

Решение задачи дается соотношениями

$$\begin{aligned}
 \phi(x, y) &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{2\pi} \exp(ikx) \exp(-|k|y) \Phi(k) = \\
 &= \int_{-\infty}^0 \frac{-1-i}{2\pi\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{-k}} \left( \frac{\sqrt{a}}{k-ia} + \frac{C}{\sqrt{b}} \cdot \frac{1}{k+ib} \right) \exp(ikx+ky) dk + \\
 &+ \int_0^{\infty} \frac{1-i}{2\pi\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{k}} \left( \frac{\sqrt{a}}{k-ia} + \frac{C}{\sqrt{b}} \cdot \frac{1}{k+ib} \right) \exp(ikx-ky) dk = \\
 &= 2 \operatorname{Re} \int_0^{\infty} \frac{1-i}{2\pi\sqrt{2}} \cdot \frac{dk}{\sqrt{k}} \left( \frac{\sqrt{a}}{k-ia} + \frac{C}{\sqrt{b}} \cdot \frac{1}{k+ib} \right) \exp(ikx-ky).
 \end{aligned} \tag{8.100}$$

Нужно вычислить интеграл

$$\begin{aligned}
 I(u, a) &= \int_0^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}} \frac{\exp(-ux)}{x+a} = \exp(ua) \int_a^{\infty} \frac{dy}{\sqrt{y-a}} \frac{\exp(-uy)}{y} = \\
 &= \exp(ua) J(u, a),
 \end{aligned} \tag{8.101}$$

где

$$\begin{aligned}
 J(u, a) &= \int_a^{\infty} \frac{dy}{\sqrt{y-a}} \cdot \frac{\exp(-uy)}{y}, \\
 \frac{\partial J}{\partial u} &= - \int_a^{\infty} \frac{dy}{\sqrt{y-a}} \exp(-uy) = \\
 &= -2 \int_0^{\infty} dz \exp[-u(z^2+a)] = -\sqrt{\pi} \frac{\exp(-ua)}{\sqrt{u}}, \\
 J(u, a) &= -\sqrt{\pi} \int_0^u \frac{dt}{\sqrt{t}} \exp(-ta) + C(a).
 \end{aligned}$$

Если  $u=0$ , то

$$J(u, a) = \int_a^{\infty} dy/y \sqrt{y-a} = 2 \int_0^{\infty} dz/(z^2+a) = \pi/\sqrt{a}.$$

Таким образом,  $C(a) = \pi/\sqrt{a}$  и

$$\begin{aligned}
 J(u, a) &= (\pi/\sqrt{a}) - \sqrt{\pi} \int_0^u (dt/\sqrt{t}) \exp(-ta) = \\
 &= \frac{\pi}{\sqrt{a}} - \frac{2\sqrt{\pi}}{\sqrt{a}} \int_0^{\sqrt{ua}} dz \exp(-z^2) = \frac{\pi}{\sqrt{a}} (1 - \operatorname{erf} \sqrt{ua}).
 \end{aligned}
 \tag{8.102}$$

Следовательно,

$$I(u, a) = (\pi/\sqrt{a}) \exp(ua) (1 - \operatorname{erf} \sqrt{ua}). \tag{8.103}$$

Используем этот результат для нахождения интегралов в выражении (8.100) для  $\phi(x, y)$ . Получаем

$$\begin{aligned}
 \phi(x, y) &= \operatorname{Re} \left[ \exp(-az) (1 - \operatorname{erf} \sqrt{-az}) - \right. \\
 &\quad \left. - i \frac{C}{b} \exp(bz) (1 - \operatorname{erf} \sqrt{bz}) \right],
 \end{aligned}
 \tag{8.104}$$

где  $z = x + iy$ . Читателю предлагается найти (или из исходных принципов, или проверкой по крайевым условиям), какой знак нужно выбрать для каждого квадратного корня. Функция ошибок для комплексного аргумента табулирована в книге [6].

СОБСТВЕННЫЕ ФУНКЦИИ,  
СОБСТВЕННЫЕ ЗНАЧЕНИЯ  
И ФУНКЦИИ ГРИНА

9.1. ПРОСТЫЕ ПРИМЕРЫ ЗАДАЧ НА СОБСТВЕННЫЕ  
ЗНАЧЕНИЯ

Собственные значения матриц рассматривались в гл. 6. Это были значения параметра  $\lambda$ , для которого существуют нетривиальные решения  $v$  уравнения

$$Mv = \lambda v, \quad (9.1)$$

где  $M$  — рассматриваемая матрица. Обобщим теперь эту идею и рассмотрим задачу на собственные значения для любого линейного оператора  $M$ , будь то матрица, дифференциальный оператор, интегральный оператор и т. д. Основное уравнение было только что написано; при этом  $v$  — определенный объект в зависимости от вида  $M$ . Если  $M$  — матрица, то  $v$  — вектор-столбец; если  $M$  — дифференциальный оператор, то  $v$  — функция и т. д. Решения  $v$  написанного выше уравнения называются собственными функциями, собственными векторами и т. д.

Задачи на собственные значения имеют много общего, имеем ли мы дело с матрицами или с более общими линейными операторами. Наиболее важны подобные задачи в физике, где часто встречаются трехмерные операторы в частных производных второго порядка. Примеры этой главы отражают важность таких задач; однако не следует забывать, что большая часть методов может быть обобщена на любые другие типы задач на собственные значения.

**Пример.** В качестве очень простого примера рассмотрим задачу нахождения собственных значений и собственных векторов матрицы

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}. \quad (9.2)$$

Уравнение  $Mv = \lambda v$  эквивалентно двум уравнениям

$$(1 - \lambda)v_1 + v_2 = 0, \quad v_1 + (1 - \lambda)v_2 = 0,$$

где обозначено  $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$ . Собственные значения и принадлежащие им собственные векторы равны

$$\lambda_1 = 0, v^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}; \lambda_2 = 2, v^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (9.3)$$

Отметим несколько фактов.

1. Вследствие однородности исходной задачи собственные решения определены только с точностью до произвольного постоянного множителя.

2. Если  $\lambda$  равно собственному значению, то соответствующая неоднородная задача  $(M - \lambda)v = u$  ( $u \neq 0$ ), вообще говоря, не имеет решения.

3. Матричное произведение двух собственных векторов равно 0.

4. Произвольный двухкомпонентный вектор можно записать как линейную комбинацию собственных векторов.

Эти четыре свойства весьма общие; они относятся ко всем задачам на собственные значения.

**Пример.** Рассмотрим уравнение для струны, закрепленной в точках  $x = 0$  и  $x = L$  и колеблющейся с угловой частотой  $\omega$  (одномерное уравнение Гельмгольца)

$$(d^2u/dx^2) + k^2u = 0 \quad (k = \omega/c). \quad (9.4)$$

Так как при  $x = 0$  величина  $u = 0$ , то  $u = a \sin kx$ . Так как при  $x = L$   $u = 0$ , то  $k = n\pi/L$ , где  $n = 1, 2, 3, \dots$ . Это собственные значения  $k$ . Собственным значением этой задачи нужно было бы назвать величину  $-k^2$ . Конечно, это различие не очень важно, и можно называть собственным значением величины  $-k^2$ , или  $k^2$ , или  $k$ .

Отметим, что для решения задачи на собственные значения дифференциальное уравнение требует указания области изменения переменных и граничных условий, а также того, чтобы задача была однородной. Читателю предлагается во втором примере найти аналогию четырех свойств, упомянутых после первого примера.

Рассмотрим, наконец, пример трехмерной задачи.

**Пример.**

$$\nabla^2 u + k^2 u = 0 \text{ внутри сферы } r = R \quad (9.5)$$

с граничным условием:  $u = 0$  на  $r = R$ . Решения имеют вид  $u = j_l(kr) P_l^m(\cos \theta) \exp(\pm im\phi)$ ,  $m, l$  — целые числа,

$l \geq m$ . Собственные значения определяются из условия  $j_l(kR) = 0$ . Таким образом, они равны  $k \approx 3,14/R, 4,49/R, \dots$

## 9.2. ОБЩЕЕ РАССМОТРЕНИЕ

Рассмотрим линейный дифференциальный оператор  $L$  и задачу на собственные значения  $Lu(\mathbf{x}) = \lambda u(\mathbf{x})$ . Предположим, что указана область  $\Omega$  и наложены удобные граничные условия. Оператор  $L$  называют эрмитовым, если

$$\int_{\Omega} u^*(\mathbf{x}) Lv(\mathbf{x}) d^3x = \left[ \int_{\Omega} v^*(\mathbf{x}) Lu(\mathbf{x}) d^3x \right]^*,$$

где звездочка означает комплексное сопряжение, а  $u$  и  $v$  — произвольные функции, удовлетворяющие граничным условиям. Величину в левой части написанного уравнения часто называют « $u, v$ -матричным элементом  $L$ », или «матричным элементом  $L$  между  $u$  и  $v$ », или просто « $L_{uv}$ ». Очевидна связь с эрмитовыми матрицами, определенными в гл. 6.

Пусть  $L$  — эрмитов оператор. Рассмотрим некоторое собственное значение  $\lambda_i$  и собственную функцию  $u_i$ , принадлежащую к  $\lambda_i$ . Тогда  $Lu_i(\mathbf{x}) = \lambda_i u_i(\mathbf{x})$ . Соответствующее уравнение для другой пары  $\lambda_j, u_j(\mathbf{x})$  есть  $Lu_j(\mathbf{x}) = \lambda_j u_j(\mathbf{x})$ . Тогда

$$\int_{\Omega} u_j^*(\mathbf{x}) Lu_i(\mathbf{x}) d^3x = \lambda_i \int_{\Omega} u_j^*(\mathbf{x}) u_i(\mathbf{x}) d^3x;$$

$$\int_{\Omega} u_i^*(\mathbf{x}) Lu_j(\mathbf{x}) d^3x = \lambda_j \int_{\Omega} u_i^*(\mathbf{x}) u_j(\mathbf{x}) d^3x.$$

Так как  $L$  — эрмитов оператор, то левые части комплексно сопряжены. Поэтому

$$(\lambda_i - \lambda_j^*) \int_{\Omega} u_j^*(\mathbf{x}) u_i(\mathbf{x}) d^3x = 0. \quad (9.6)$$

На этом этапе становится ясным, что мы повторяем доказательство определенных свойств собственных значений и собственных векторов эрмитовых матриц из разд. 6.5. Из соотношения (9.6) следуют аналогичные выводы, если рассмотреть два случая:  $i = j$  и  $\lambda_i \neq \lambda_j$ .

1. Собственные значения эрмитова дифференциального оператора вещественны.

2. Собственные функции эрмитова дифференциального оператора, принадлежащие различным собственным значениям, ортогональны. Под ортогональностью  $u(x)$  и  $v(x)$  подразумевается равенство [см. уравнение (6.94)]

$$uv \equiv \int_{\Omega} u^*(x) v(x) d^3x = 0. \quad (9.7)$$

Наиболее известная система ортогональных функций — система тригонометрических функций. Они являются собственными функциями в следующей задаче на собственные значения:

$$\left. \begin{aligned} (d^2u/dx^2) + \lambda u &= 0; & 0 \leq x \leq 2\pi; \\ u(0) = u(2\pi); & & u'(0) = u'(2\pi). \end{aligned} \right\} \quad (9.8)$$

Эрмитов ли оператор  $d^2/dx^2$ ? Давайте проверим:

$$\int_0^{2\pi} u^* \frac{d^2}{dx^2} v dx = u^* \frac{dv}{dx} \Big|_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} \frac{du^*}{dx} \cdot \frac{dv}{dx} dx.$$

Проинтегрированная часть обращается в нуль вследствие периодичности  $u$  и  $v$ . Проинтегрируем по частям еще раз:

$$\int_0^{2\pi} u^* \frac{d^2}{dx^2} v dx = - \frac{du^*}{dx} v \Big|_0^{2\pi} + \int_0^{2\pi} v \frac{d^2}{dx^2} u^* dx.$$

Снова проинтегрированная часть исчезает, так что  $d^2/dx^2$  — действительно эрмитов оператор, если наложены периодические граничные условия (9.8).

В качестве другого примера на собственные значения, содержащего эрмитов оператор, рассмотрим так называемое дифференциальное уравнение Штурма — Лиувилля

$$\frac{d}{dx} \left[ p(x) \frac{du(x)}{dx} \right] - q(x) u(x) + \lambda \rho(x) u(x) = 0, \quad (9.9)$$

где  $p(x)$ ,  $q(x)$  и  $\rho(x)$  — вещественные функции;  $\rho(x)$  предполагается неотрицательной на изучаемом интервале. Нужно исследовать два вопроса:

1. Является ли оператор  $L = p(d^2/dx^2) + p'(d/dx) - q$  эрмитовым? Справедливость этого факта проверяется так же, как и в более простом случае оператора  $d^2/dx^2$ .

2. Каково влияние функции  $\rho(x)$  в случае, когда она не равна 1? Можно непосредственно проверить все предыдущие выкладки с так называемой **ф у н к ц и е й п л о т н о с т и**  $\rho(x)$ , присутствующей в члене, который содержит собственное значение. Единственное изменение состоит в том, что под ортогональностью теперь понимается выражение

$$u_i \cdot u_j \equiv \int_a^b u_i^*(x) u_j(x) \rho(x) dx = 0, \text{ если } \lambda_i \neq \lambda_j. \quad (9.10)$$

Часто две или более собственные функции принадлежат к одному собственному значению. Эта ситуация называется вырождением, а о рассматриваемом собственном значении говорят как о вырожденном. Отметим, что произвольная линейная комбинация собственных функций, принадлежащая к вырожденному значению, есть снова собственная функция для того же самого значения. Используя процедуру Грама — Шмидта, можно всегда сконструировать ортогональную систему собственных функций.

Итак, возможны такие преобразования, что собственные функции эрмитова оператора образуют ортогональную нормированную систему, будучи ортогональными:  $u_i \cdot u_j = 0$  ( $i \neq j$ ) и нормированными:  $u_i \cdot u_i = 1$ . Эти два условия можно записать так:

$$u_i \cdot u_j = \left[ \int d^3x u_i^*(\mathbf{x}) u_j(\mathbf{x}) \rho(\mathbf{x}) \right] = \delta_{ij}. \quad (9.11)$$

Из свойства 4, указанного в начале этой главы, вместе с примером рядов Фурье следует, что любую функцию, подчиняющуюся соответствующим условиям, можно разложить в ряд по собственным функциям. Это означает, что при очень общих условиях собственные функции эрмитова оператора образуют полную систему. Таким образом, это утверждение представляет собой обобщение теоремы, доказанной в гл. 6, на случай бесконечномерного пространства. Это свойство справедливо для всех обычно встречающихся в физике дифференциальных уравнений.

Рассмотрим разложение вида

$$f(\mathbf{x}) = \sum_n c_n u_n(\mathbf{x}). \quad (9.12)$$

Если  $u_n$  выбраны ортонормированными, то очень легко определяются  $c_n$ :

$$u_m \cdot f = \sum_n c_n u_m \cdot u_n = \sum_n c_n \delta_{nm} = c_m. \quad (9.13)$$

Подставляя этот результат снова в первоначальный ряд, получаем полезное формальное соотношение

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x}) &= \sum_n u_n(\mathbf{x}) u_n \cdot f = \\ &= \sum_n u_n(\mathbf{x}) \int_{\Omega} d^3x' u_n^*(\mathbf{x}') f(\mathbf{x}') \rho(\mathbf{x}') = \\ &= \int_{\Omega} d^3x' f(\mathbf{x}') \rho(\mathbf{x}') \sum_n u_n(\mathbf{x}) u_n^*(\mathbf{x}'). \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\rho(\mathbf{x}') \sum_n u_n(\mathbf{x}) u_n^*(\mathbf{x}') = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}'). \quad (9.14)$$

Иногда его называют соотношением полноты, а иногда — свойством замкнутости собственных функций. Отметим интересное сравнение с соотношением ортогональности (9.11).

### 9.3. РЕШЕНИЕ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ МЕТОДОМ РАЗЛОЖЕНИЯ ПО СОБСТВЕННЫМ ФУНКЦИЯМ

Есть тесная связь между разложением функции по собственным функциям дифференциального оператора и решением уравнения в частных производных, получаемого либо методом разделения переменных, либо методом интегральных преобразований.

Предположим, что уравнение в частных производных содержит дифференциальный оператор  $L$  по отношению к одной из переменных. Если представить решение в виде суммы по собственным функциям  $L$ , то комбинация производных  $L$  исключится из уравнения и заменится собственными значениями; тем самым уравнение сводится к другому уравнению с меньшим числом переменных.

**Пример.** Рассмотрим задачу с мембраной, исследованную в гл. 8, начиная с уравнения (8.46):

$$\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} - \frac{1}{c^2} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0. \quad (9.15)$$

Можно было бы сначала исключить производные по  $r$ ,  $\theta$  или  $t$ ; выберем  $\theta$ . Оператор  $L_{\theta} = d^2/d\theta^2$  имеет собственные функции  $\exp(\pm in\theta)$ , принадлежащие к собственным значениям  $-n^2$ , где  $n$  — целое число, определяемое краевы-

ми условиями  $u(2\pi) = u(0)$ ,  $u'(2\pi) = u'(0)$ . Таким образом, представим  $u$  в виде суммы

$$u = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(r, t) [\exp(in\theta) + a_n \exp(-in\theta)], \quad (9.16)$$

где коэффициенты  $f_n$  — функции оставшихся переменных  $r$  и  $t$ . Дифференциальное уравнение сводится к следующему виду:

$$\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial f_n}{\partial r} \right) - \frac{n^2}{r^2} f_n - \frac{1}{c^2} \cdot \frac{\partial^2 f_n}{\partial t^2} = 0. \quad (9.17)$$

Далее исключим производные по  $r$ , разлагая  $f_n$  по собственным функциям оператора

$$L_r = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} - \frac{n^2}{r^2} \quad (9.18)$$

с краевыми условиями:  $u(r=0)$  конечно и  $u(r=R) = 0$ . Это функции Бесселя  $J_n(k_{jn}r)$  с собственными значениями  $-k_{jn}^2$ , причем  $J_n(k_{jn}R) = 0$ . Итак,

$$f_n(r, t) = \sum_{j=1}^{\infty} g_{jn}(t) J_n(k_{jn}r), \quad (9.19)$$

где коэффициенты  $g_{jn}$  зависят от оставшейся переменной  $t$ . Дифференциальное уравнение приобретает вид

$$k_{jn}^2 g_{jn}(t) + \frac{1}{c^2} \cdot \frac{d^2 g_{jn}}{dt^2} = 0 \quad (9.20)$$

с решениями

$$g_{jn}(t) = \exp(\pm i\omega_{jn}t), \quad \omega_{jn} = ck_{jn}. \quad (9.21)$$

Собирая результаты, имеем решение (8.54), которое было найдено методом разделения переменных

$$u(r, \theta, t) = \sum_{j, n=1}^{\infty} A_{jn} J_n(k_{jn}r) (\sin n\theta + B_n \cos n\theta) \times \\ \times (\sin \omega_{jn}t + C_{jn} \cos \omega_{jn}t). \quad (9.22)$$

#### 9.4. НЕОДНОРОДНЫЕ ЗАДАЧИ. ФУНКЦИИ ГРИНА

Как подчеркивалось в гл. 8, задача может быть неоднородной вследствие дифференциального уравнения или вследствие краевых условий. В конце этого раздела увидим, что обычно возможно преобразование от одного вида неоднородности к другому.

Рассмотрим сначала неоднородное уравнение

$$Lu(\mathbf{x}) - \lambda u(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) \quad (9.23)$$

в области  $\Omega$ , где  $L$  — эрмитов дифференциальный оператор, а  $u(\mathbf{x})$  подчиняется обычным (однородным) краевым условиям;  $\lambda$  — заданная постоянная. Для решения уравнения разложим  $u(\mathbf{x})$  и  $f(\mathbf{x})$  по собственным функциям оператора  $L$ :

$$u(\mathbf{x}) = \sum_n c_n u_n(\mathbf{x}), \quad f(\mathbf{x}) = \sum_n d_n u_n(\mathbf{x}). \quad (9.24)$$

Уравнение (9.23) приобретает вид

$$\sum_n c_n (\lambda_n - \lambda) u_n(\mathbf{x}) = \sum_n d_n u_n(\mathbf{x}).$$

Следовательно, поскольку собственные функции  $u_n(\mathbf{x})$  линейно независимы, то  $c_n = d_n / (\lambda_n - \lambda)$ , или, так как  $d_n = u_n \cdot f$ , это равенство можно записать как  $c_n = u_n \cdot f / (\lambda_n - \lambda)$ . Поэтому

$$u(\mathbf{x}) = \sum_n \frac{u_n u_n \cdot f}{\lambda_n - \lambda} = \sum_n \frac{u_n(\mathbf{x})}{\lambda_n - \lambda} \int_{\Omega} u_n^*(\mathbf{x}') f(\mathbf{x}') d^3 x'. \quad (9.25)$$

Это выражение можно записать в виде

$$u(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{x}') f(\mathbf{x}') d^3 x', \quad (9.26)$$

где так называемая функция Грина определяется соотношением

$$G(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = \sum_n u_n(\mathbf{x}) u_n^*(\mathbf{x}') / (\lambda_n - \lambda). \quad (9.27)$$

Заметим, что функция Грина определяется дифференциальным оператором (почти всегда эрмитовым), заданной областью и надлежащими краевыми условиями. Иногда пишут  $G(\mathbf{x}, \mathbf{x}'; \lambda)$ , чтобы подчеркнуть зависимость  $G$  от  $\lambda$ , а не только от  $\mathbf{x}$  и  $\mathbf{x}'$ .

Найдем дифференциальное уравнение, которому удовлетворяет  $G(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$ . Предположим, что в проведенном выше расчете  $f(\mathbf{x})$  есть  $\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)$ . Тогда получаем решение

$$u(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{x}') \delta(\mathbf{x}' - \mathbf{x}_0) d^3 x = G(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0).$$

Следовательно,  $G(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$  есть решение уравнения

$$LG(\mathbf{x}, \mathbf{x}') - \lambda G(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}'), \quad (9.28)$$

удовлетворяющее надлежащим краевым условиям. Этот результат можно было бы также получить, действуя оператором  $L - \lambda$  на выражение (9.27) для  $G(x, x')$  в виде бесконечного ряда и используя условие полноты (9.14).

Таким образом, функция Грина имеет простой физический смысл. Это решение задачи для единичного точечного источника  $f(x) = \delta(x - x')$ .

В (9.27) отметим особенность, встретившуюся впервые в начале этой главы. Если  $\lambda$  равно собственному значению (так что существует нетривиальное решение однородного уравнения), то при решении неоднородного уравнения возникают серьезные трудности. Если  $\lambda$  равно собственному значению  $\lambda_n$ , функция Грина (9.27) обращается в бесконечность и не существует решения  $u(x)$  в случае, если правая часть неоднородного уравнения не подчиняется условию

$$\int u_n^*(x) f(x) d^3x = 0. \quad (9.29)$$

Рассмотрим частный пример — струну длиной  $l$ , колеблющуюся с угловой частотой  $\omega$ . Уравнение и краевые условия имеют вид

$$\begin{aligned} (d^2u/dx^2) + k^2u &= 0, & u(0) &= u(l) = 0, \\ k &= \omega/c. \end{aligned} \quad (9.30)$$

Чему равна функция Грина?

Первый метод: положим  $k^2 = -\lambda$ ,  $d^2u/dx^2 - \lambda u = 0$ . Собственные значения равны  $\lambda_n = -(n\pi/l)^2$  с  $n = 1, 2, 3, \dots$ . Нормированные собственные функции равны  $u_n = \sqrt{2/l} \sin(n\pi x/l)$ . Следовательно, общая формула

$$G(x, x') = \sum_n \frac{u_n(x) u_n^*(x')}{\lambda_n - \lambda}$$

приобретает вид

$$G(x, x') = \frac{2}{l} \sum_n \frac{\sin(n\pi x/l) \sin(n\pi x'/l)}{k^2 - (n\pi/l)^2}. \quad (9.31)$$

Полученные выше результаты иллюстрируют общее соотношение симметрии для функций Грина:

$$G(x', x) = [G(x, x')]^*. \quad (9.32)$$

Физический смысл этого результата для вещественных функций Грина есть соотношение взаимно-

с т и, т. е. отклик в точке  $x$  на единичное точечное возмущение в  $x'$  равен отклику в  $x'$  на единичное точечное возмущение в  $x$ .

В т о р о й м е т о д: попытаемся решить дифференциальное уравнение

$$(d^2u/dx^2) + k^2u = \delta(x - x'), \quad (9.33)$$

которому удовлетворяет функция  $G(x, x')$ . При физической интерпретации результата полезно иметь в виду, что (9.33) — не зависящее от времени уравнение для колеблющейся струны, на которую действует сила, пропорциональная  $-\delta(x - x') \exp(-i\omega t)$ . Для  $x$ , отличных от  $x'$ , имеем  $d^2u/dx^2 + k^2u = 0$ . Следовательно,

$$G(x, x') = \begin{cases} a \sin kx & (x < x'), \\ b \sin k(x - l) & (x > x'). \end{cases} \quad (9.34)$$

Как определить константы  $a$  и  $b$ ?

Проинтегрируем дифференциальное уравнение (9.33), которому удовлетворяет  $G(x, x')$ , от точки  $x' - \epsilon$  до  $x' + \epsilon$ , где  $\epsilon$  бесконечно мало. Результат имеет вид

$$\frac{dG}{dx} \Big|_{x'-\epsilon}^{x'+\epsilon} = 1. \quad (9.35)$$

Интегрируя еще раз, находим

$$G \Big|_{x'-\epsilon}^{x'+\epsilon} = 0, \quad (9.36)$$

т. е.  $G(x, x')$  как функция  $x$  непрерывна в точке  $x = x'$ , а ее первая производная в этой точке скачком возрастает на 1. Используя выражение (9.34) для  $G$ , из этих условий получаем

$$\begin{aligned} a \sin kx' &= b \sin k(x' - l); \\ ka \cos kx' + 1 &= kb \cos k(x' - l). \end{aligned}$$

Решение этих совместных уравнений имеет вид

$$a = \frac{\sin k(x' - l)}{k \sin kl}, \quad b = \frac{\sin kx'}{k \sin kl},$$

и функция Грина равна

$$G(x, x') = \frac{1}{k \sin kl} \begin{cases} \sin kx \cdot \sin k(x' - l) & (0 < x < x'); \\ \sin kx' \cdot \sin k(x - l) & (x' < x < l) \end{cases}$$

или, с помощью более кратких обозначений,

$$G(x, x') = \frac{-1}{k \sin kl} \sin kx_{<} \cdot \sin k(l - x)_{<}, \quad (9.37)$$

где  $x_{<} = \min(x, x')$ ;  $(l-x)_{<} = \min[(l-x), (l-x')]$ . Тот же результат получится, если решить уравнение  $d^2u/dx^2 + k^2u = f(x)$  методом вариации постоянных.

Теперь обратимся к двумерной функции Грина. Можно было бы сразу написать формальную сумму по нормированным собственным функциям аналогично (9.31); однако здесь мы используем второй подход и решим дифференциальное уравнение.

Задача совпадает с задачей для круглой мембраны; уравнение и граничные условия имеют вид

$$\left. \begin{aligned} \nabla^2 u + k^2 u &= 0, \\ u &= 0 \text{ при } r = R. \end{aligned} \right\} (9.38)$$

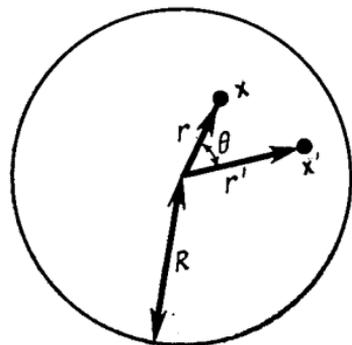


Рис. 9.1. Координаты для функции Грина круглой мембраны.

Из физических соображений ясно, что  $G(x, x')$  может зависеть только от  $r, r'$  и  $\theta$  —

угла между  $x$  и  $x'$ . Выберем  $x'$  в качестве оси сферических координат (рис. 9.1).

Теперь  $G$  — решение уравнения

$$\nabla^2 G + k^2 G = \delta(x - x'), \quad (9.39)$$

где  $\delta(x - x')$  — двумерная  $\delta$ -функция;  $\int \delta(x - x') d^2x = 1$  для любой области интегрирования, содержащей  $x'$ .

При  $x \neq x'$

$$\nabla^2 G + k^2 G = 0. \quad (9.40)$$

Решение этого уравнения, удовлетворяющее краевым условиям, можно записать в виде

$$G = \begin{cases} \sum_m A_m J_m(kr) \cos m\theta & (r < r'), \\ \sum_m B_m [J_m(kr) Y_m(kR) - Y_m(kr) J_m(kR)] \times \\ \times \cos m\theta & (r > r'). \end{cases} \quad (9.41)$$

Заметим, что решение при  $r > r'$  выбрано так, чтобы оно автоматически обращалось в нуль при  $r = R$ .

Константы  $A_m$  и  $B_m$  определяются из сшивки решений (9.41) на окружности  $r' = r$ . Подобно одномерному случаю,  $G$  непрерывна, но ее производная (т. е. ее градиент)

имеет разрыв в точке  $\mathbf{x} = \mathbf{x}'$ . Чтобы найти особенность, проинтегрируем дифференциальное уравнение (9.39) для  $G$  по области, содержащей точку  $\mathbf{x} = \mathbf{x}'$ . Находим

$$\int \nabla^2 G d^2x = \int (\nabla G)_n dl = 1, \quad (9.42)$$

где мы использовали двумерный аналог теоремы Гаусса:

$$\int_V \nabla \mathbf{u} d^3x = \int_{\Sigma} \mathbf{u} d\mathbf{S},$$

$\Sigma$  — поверхность, охватывающая объем  $V$ .

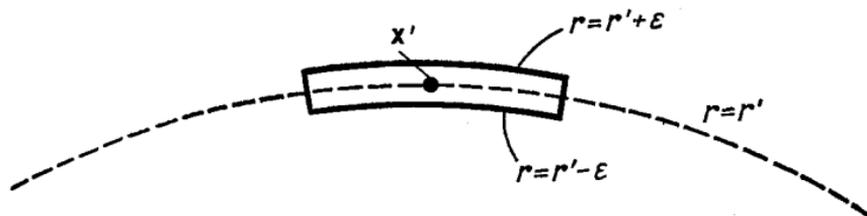


Рис. 9.2. Применение теоремы Гаусса для области вокруг точки  $x'$ .

В качестве области, включающей точку  $x'$ , выберем область, изображенную на рис. 9.2. Пренебрегая вкладом на краях области, из (9.42) получаем

$$\int_{r'+\epsilon} \frac{\partial G}{\partial r} dl - \int_{r'-\epsilon} \frac{\partial G}{\partial r} dl = 1,$$

где  $l$  — длина дуги. Так как  $dl = r'd\theta$ , то это дает

$$\int d\theta \left( \frac{\partial G}{\partial r} \Big|_{r'+\epsilon} - \frac{\partial G}{\partial r} \Big|_{r'-\epsilon} \right) = \frac{1}{r'}$$

(в случае, если интервал интегрирования включает точку  $x'$ ; в противном случае получаем нуль). Следовательно,

$$\left( \frac{\partial G}{\partial r} \Big|_{r'+\epsilon} - \frac{\partial G}{\partial r} \Big|_{r'-\epsilon} \right) = \frac{1}{r'} \delta(\theta).$$

Положим

$$\frac{\partial G}{\partial r} \Big|_{r'+\epsilon} - \frac{\partial G}{\partial r} \Big|_{r'-\epsilon} = \sum_m C_m \cos m\theta.$$

Умножим, как обычно, обе стороны на  $\cos m'\theta$  и проинтегрируем по  $\theta$  от  $-\pi$  до  $\pi$ . Результат имеет вид

$$\frac{1}{r'} = \pi C_{m'} \epsilon_{m'}, \quad (9.43)$$

где

$$\varepsilon_{m'} = \begin{cases} 2, & \text{если } m' = 0, \\ 1, & \text{если } m' > 0. \end{cases}$$

Таким образом,

$$\left. \frac{\partial G}{\partial r} \right|_{r'+\varepsilon} - \left. \frac{\partial G}{\partial r} \right|_{r'-\varepsilon} = \frac{1}{\pi r'} \sum_m \frac{1}{\varepsilon_m} \cos m\theta. \quad (9.44)$$

Это равенство — условие, накладываемое на скачок градиента  $G$ .

Теперь можно написать два совместных уравнения для коэффициентов  $A_m$  и  $B_m$  из (9.44). Из условия непрерывности  $G$  при  $r = r'$  имеем

$$A_m J_m(kr') = B_m [J_m(kr') Y_m(kR) - Y_m(kr') J_m(kR)].$$

Из условия (9.44) получаем

$$B_m [J'_m(kr') Y_m(kR) - Y'_m(kr') J_m(kR)] - A_m J'_m(kr') = \frac{1}{\pi \varepsilon_m k r'}.$$

Решение равно

$$A_m = \frac{J_m(kR) Y_m(kr') - J_m(kr') Y_m(kR)}{2\varepsilon_m J_m(kR)}, \quad (9.45)$$

$$B_m = \frac{-J_m(kr')}{2\varepsilon_m J_m(kR)}, \quad (9.46)$$

где использовано соотношение

$$J_m(x) Y'_m(x) - J'_m(x) Y_m(x) = 2/\pi x. \quad (9.47)$$

Заметим, что, как и раньше,  $G(x, x') = G(x', x)$ .

Возвратимся к исходному уравнению (9.39) для функции Грина и решим его другим методом:

$$\nabla^2 G + k^2 G = \delta(x - x'), \quad (9.48)$$

где  $\delta(x - x')$  — двумерная  $\delta$ -функция, локализованная в точке «источника»  $x'$ .

При решении появляются две трудности: одна состоит в том, чтобы обеспечить надлежащую особенность в точке источника  $x'$ ; другая — в том, чтобы удовлетворить краевым условиям. Иногда удобно разделить две трудности,

отыскивая решение в виде

$$G(x, x') = u(x, x') + v(x, x'), \quad (9.49)$$

где  $u$  имеет особенность в точке  $x'$  [т. е. подчиняется уравнению (9.48)] и не связана с краевыми условиями. В то же время функция  $v$ , имеющая «плавное» поведение в  $x'$  [т. е. удовлетворяющая однородному уравнению (9.48)], подбирается так, чтобы  $G(x, x')$  удовлетворяла краевым условиям. Иногда функцию  $u(x, x')$  называют **фундаментальным решением** (9.48).

Особенность в точке  $x'$  может быть найдена интегрированием уравнения (9.48) по малому элементу поверхности с центром в  $x'$ . Функция  $u$  ищется в форме  $u(\rho)$ , где  $\rho = |x - x'|$ . Из теоремы Гаусса [см. (9.42)] имеем

$$\int_0^{\rho} \nabla^2 G \cdot 2\pi\rho \, d\rho = 2\pi\rho \partial G / \partial \rho, \text{ так что}$$

$$2\pi\rho (\partial G / \partial \rho) + k^2 \int_0^{\rho} G \cdot 2\pi\rho \, d\rho = 1$$

и

$$G(\rho) \rightarrow (1/2\pi) \ln \rho + \text{const}, \text{ когда } \rho \rightarrow 0. \quad (9.50)$$

Тогда функция  $u(x, x')$  должна вести себя так же вблизи  $\rho = 0$ . Особое решение уравнения (9.40)  $Y_0(k\rho)$  при малых  $\rho$  имеет вид

$$Y_0(k\rho) \rightarrow (2/\pi) \ln \rho + \text{const}.$$

Таким образом,

$$G = 1/4 Y_0(k\rho) + v(x, x'). \quad (9.51)$$

Теперь напомним  $v = \sum_n A_n J_n(kr) \cos n\theta$  с  $A_n$ , выбранными так, чтобы  $G$  удовлетворяла краевым условиям, т. е.

$$G(r=R) = 0 = \frac{1}{4} Y_0(k\rho_R) + \sum_n A_n J_n(kR) \cos n\theta;$$

$$A_n = -\frac{1}{4\pi J_n(kR) \epsilon_n} \int_0^{2\pi} Y_0(k\rho_R) \cos n\theta \, d\theta,$$

где  $\rho_R^2 = R^2 + r'^2 - 2Rr' \cos \theta$  (рис. 9.3), а  $\varepsilon_n$  определено в (9.43). Результат имеет вид

$$G(x, x') = \frac{1}{4} Y_0(k\rho) - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{J_n(kr) \cos n\theta}{2\pi J_n(kR) \varepsilon_n} \int_0^{\pi} Y_0(k\rho_R) \cos n\theta d\theta. \quad (9.52)$$

Такой вид функции Грина удобен для некоторых целей; ее легко представить для низких частот  $\omega$  и положений источника  $x'$ , не слишком близких к краям.

Подытожим три выражения для функции Грина, полученные выше: 1) формальная сумма по собственным функциям (9.27); 2) решение однородного уравнения с граничными условиями на одной из сторон «поверхности», содержащей источник; два решения сшиваются на этой поверхности так, чтобы в точке источника возникла особенность; 3) форма  $G(x, x') = u(x, x') + v(x, x')$ , где  $u$  — фундаментальное решение, а  $v$  обеспечивает краевые условия.

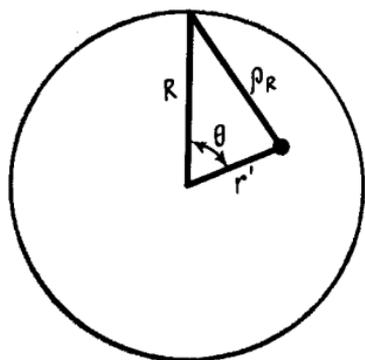


Рис. 9.3. Координата  $\rho_R$  для круглой мембраны.

Если задача неоднородна в силу краевых условий, а не вследствие самого дифференциального уравнения, то решение также можно записать через функцию Грина. По существу, примеры гл. 8, рассматривающие передачу тепла с начальными распределениями температуры, были примерами этого типа, так как начальные условия — это краевые условия по времени.

Другой путь состоит в том, что задачу с неоднородными краевыми условиями можно непосредственно преобразовать в задачу с однородными краевыми условиями и неоднородным уравнением (возможно также и обратное). Соответствующее преобразование неоднозначно, и нужно быть внимательным, чтобы выбрать то, которое ведет к простому дифференциальному уравнению.

**Пример.** Рассмотрим снова задачу о передаче тепла (см. раздел 8.3). Бесконечная пластина толщиной  $D$  и с начальной нулевой температурой имеет теплоизолирующую

поверхность  $x = D$ ; тепло подводится к поверхности  $x = 0$  с постоянной скоростью  $Q$  кал/(см<sup>2</sup>·сек). Математическая задача имеет вид

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} - \frac{1}{\kappa} \cdot \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} &= 0; \\ u(x, 0) &= 0, \quad \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=D} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=0} = -\frac{Q}{K}, \end{aligned} \right\} \quad (9.53)$$

где  $\kappa = K/C\rho$ ,  $K$  — коэффициент теплопроводности,  $C$  — удельная теплоемкость и  $\rho$  — плотность.

Заменой переменной задачу можно преобразовать к задаче с однородными краевыми условиями (по  $x$ ):  $v(x, t) = u(x, t) - w(x)$ , где  $w(x)$  удовлетворяет условиям  $\frac{dw}{dx} \Big|_{x=D} = 0$ ,  $\frac{dw}{dx} \Big|_{x=0} = -\frac{Q}{K}$ . Кроме того,  $w(x)$  подбирается так, чтобы операция  $d^2w/dx^2$  в дифференциальном уравнении легко выполнялась и давала простой результат. Простейший выбор — это, вероятно, парабола

$$w(x) = (Q/2KD)(x - D)^2. \quad (9.54)$$

Тогда дифференциальное уравнение (9.53) приобретает вид

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \frac{1}{\kappa} \cdot \frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{Q}{KD}. \quad (9.55)$$

Частное решение равно

$$v_p = \frac{Q\kappa}{KD} t, \quad u_p(x, t) = \frac{Q}{C\rho D} t + \frac{Q}{2KD}(x - D)^2. \quad (9.56)$$

Оно совпадает с решением (8.63).

В заключение покажем, как функции Грина позволяют преобразовать дифференциальное уравнение в частных производных в интегральное уравнение. Рассмотрим, например, уравнение

$$\nabla^2 u(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) u(\mathbf{x}) \quad (9.57)$$

в некоторой области  $\Omega$  с подходящими краевыми условиями. Пусть  $G(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$  — функция Грина уравнения Лапласа\* для определенной области и граничных условий. Тогда

$$\nabla^2 G(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \quad (9.58)$$

\* Можно было бы также назвать  $G(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$  функцией Грина для уравнения Пуассона. Вообще говоря, нужно указывать, для какого уравнения написана функция Грина — однородного или неоднородного.

и решение уравнения  $\nabla^2 u(\mathbf{x}) = g(\mathbf{x})$  равно

$$u(\mathbf{x}) = \int d^3x' G(\mathbf{x}, \mathbf{x}') g(\mathbf{x}'). \quad (9.59)$$

Итак, исходное дифференциальное уравнение (9.57) эквивалентно интегральному уравнению

$$u(\mathbf{x}) = \int d^3x' G(\mathbf{x}, \mathbf{x}') f(\mathbf{x}') u(\mathbf{x}'). \quad (9.60)$$

Заметим, что краевые условия включены в само интегральное уравнение. В гл. 11 дается интересный пример применения этого уравнения [см. уравнение (11.18)].

### 9.5. ФУНКЦИИ ГРИНА В ЭЛЕКТРОДИНАМИКЕ

Кратко обсудим две функции Грина, важные в электродинамике. Рассмотрим сначала уравнение Лапласа

$$\nabla^2 \phi = 0 \quad (9.61)$$

в бесконечной области. Краевое условие имеет вид  $\phi \rightarrow 0$  при  $r \rightarrow \infty$ . Чтобы найти функцию Грина, нужно решить уравнение

$$\nabla^2 \phi(\mathbf{x}) = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}'). \quad (9.62)$$

Конечно,  $\phi$  может зависеть только от скалярной величины  $r = |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|$ . Следовательно, удобно выбрать начало координат (сферических) в точке  $\mathbf{x}'$ .

При всех  $\mathbf{x} \neq \mathbf{x}'$   $\nabla^2 \phi(\mathbf{x}) = 0$ . Поэтому

$$\phi \sim \left\{ \begin{array}{l} r^l \\ r^{-(l+1)} \end{array} \right\} P_l^m(\cos \theta) \exp(\pm im\varphi).$$

Вследствие сферической симметрии и краевого условия на бесконечности единственная зависимость — это  $\phi = A/r$ . Для нахождения  $A$  проинтегрируем дифференциальное уравнение (9.62) по объему сферы радиусом  $R$ , охватывающей начало координат. Это дает

$$1 = \int dS \cdot \nabla \phi = 4\pi r^2 (-A/r^2) \rightarrow A = -1/4\pi.$$

Следовательно, функция Грина (т. е. потенциал точечного заряда или кулоновский потенциал) равна

$$G(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = \frac{-1}{4\pi |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}. \quad (9.63)$$

Заметим, что это «фундаментальное решение» уравнения (9.62).

В следующем примере рассмотрим волновое уравнение

$$\nabla^2 \phi(\mathbf{x}, t) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi(\mathbf{x}, t)}{\partial t^2} = 0 \quad (9.64)$$

в бесконечной области. Требуется решить уравнение

$$\nabla^2 \phi - \frac{1}{c^2} \cdot \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \delta(t - t'). \quad (9.65)$$

Во-первых, ясно, что решение зависит только от  $\mathbf{x} - \mathbf{x}'$  и  $t - t'$ . Поэтому можно без потери общности положить  $\mathbf{x}' = 0, t' = 0$ . Далее введем преобразование Фурье  $\Phi$  для  $\phi$ :

$$\phi(\mathbf{x}, t) = \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \int \frac{d\omega}{2\pi} \Phi(\mathbf{k}, \omega) \exp[i(\mathbf{k}\mathbf{x} - \omega t)]; \quad (9.66)$$

$$\Phi(\mathbf{k}, \omega) = \int d^3 x \int dt \phi(\mathbf{x}, t) \exp[-i(\mathbf{k}\mathbf{x} - \omega t)]. \quad (9.67)$$

Преобразование Фурье дифференциального уравнения имеет вид  $(-k^2 + \frac{\omega^2}{c^2}) \Phi = 1$ , так что

$$\Phi(\mathbf{k}, \omega) = c^2 / (\omega^2 - k^2 c^2). \quad (9.68)$$

Тогда

$$\phi(\mathbf{x}, t) = \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \int \frac{d\omega}{2\pi} c^2 \frac{\exp[i(\mathbf{k}\mathbf{x} - \omega t)]}{\omega^2 - k^2 c^2}. \quad (9.69)$$

Если выбрать полярную ось координат в  $\mathbf{k}$ -пространстве вдоль вектора  $\mathbf{x}$ , то интегрирование по углам проводится легко, и получаем

$$\begin{aligned} \phi(\mathbf{x}, t) &= \frac{1}{(2\pi)^3} \frac{c^2}{ir} \int_{-\infty}^{\infty} k dk \times \\ &\times \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \frac{\exp[i(kr - \omega t)]}{\omega^2 - k^2 c^2} \\ &(r = |\mathbf{x}|). \end{aligned} \quad (9.70)$$

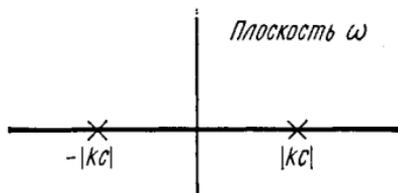


Рис. 9.4. Плоскость  $\omega$  с полюсами подынтегрального выражения для (9.70).

Возьмем теперь интеграл по  $\omega$ . Возникает проблема обхода двух полюсов на пути интегрирования (рис. 9.4). Как выбрать путь интегрирования? Возникающая неопределенность непосредственно связана с отсутствием краевых условий в исходной задаче. Чтобы увидеть это, заметим, что единственное различие между обходом над полюсом и под полюсом или через каждый полюс состоит в том,

что к  $\phi$  добавляются различные части  $\exp [ik(r \pm ct)]/r$ . Но эти функции — сферически симметричные решения однородного уравнения (9.64).

Далее, дифференциальное уравнение (9.65) содержит возмущение в точке  $\mathbf{x} = 0, t = 0$ . Весьма разумное краевое условие состоит в том, чтобы положить  $\phi = 0$  для  $t < 0$ ; т. е. до возмущения ничего нет. Чтобы удовлетворить этому условию, нужно провести контур на рис. 9.4 над обоими полюсами. Тогда при  $t < 0$  контур можно замкнуть в верхней полуплоскости, и внутри него нет полюсов.

Если  $t > 0$ , нужно замкнуть контур в нижней полуплоскости и

$$\begin{aligned} \phi(\mathbf{x}, t) &= \frac{1}{(2\pi)^3} \cdot \frac{c^2}{ir} \int_{-\infty}^{\infty} k dk \exp(ikr) \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \frac{\exp(-i\omega t)}{\omega^2 - k^2 c^2} = \\ &= \frac{1}{(2\pi)^3} \cdot \frac{c}{2} \cdot \frac{1}{ir} \int_{-\infty}^{\infty} dk \exp(ikr) \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \exp(-i\omega t) \times \\ &\quad \times \left( \frac{1}{\omega - kc} - \frac{1}{\omega + kc} \right) = \\ &= -\frac{c}{8\pi^2 r} \int_{-\infty}^{\infty} dk \exp(ikr) [\exp(-ikct) - \exp(ikct)] = \\ &= -\frac{c}{4\pi r} [\delta(r - ct) - \delta(r + ct)]. \end{aligned} \quad (9.71)$$

Вторая  $\delta$ -функция не работает, так как и  $r$  и  $t$  положительны. Следовательно,

$$G(\mathbf{x} - \mathbf{x}', t - t') = \begin{cases} 0, & \text{если } t < t'; \\ -\frac{c}{4\pi |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \delta[|\mathbf{x} - \mathbf{x}'| - \\ -c(t - t')], & \text{если } t > t'. \end{cases} \quad (9.72)$$

Покажем на примере применение этой функции Грина. Решение уравнения

$$\nabla^2 \phi - \frac{1}{c^2} \cdot \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = f(\mathbf{x}, t) \quad (9.73)$$

имеет вид

$$\phi(\mathbf{x}, t) = -\frac{c}{4\pi} \int d^3x' dt' f(\mathbf{x}', t') \frac{\delta[|\mathbf{x} - \mathbf{x}'| - c(t - t')]}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}.$$

Используя  $\delta$ -функцию, интегрируем по  $t'$  и находим

$$\phi'(\mathbf{x}, t) = -\frac{1}{4\pi} \int d^3x' \frac{f(\mathbf{x}', t - \frac{1}{c}|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|)}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}. \quad (9.74)$$

Это выражение называется запаздывающим потенциалом, так как источник в подынтегральном выражении вычисляется в предыдущий момент времени  $t - \frac{1}{c}|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|$ ; здесь  $\frac{1}{c}|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|$  — время распространения возмущения на пути  $|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|$  со скоростью  $c$ . Рассмотрим пример  $f(\mathbf{x}', t') = \delta[\mathbf{x}' - \xi(t')]$ . Он описывает точечный источник, движущийся по пути  $\xi(t)$ . Тогда

$$\phi(\mathbf{x}, t) = -\frac{1}{4\pi} \int d^3x' \int dt' \frac{\delta[\mathbf{x}' - \xi(t')] \delta(t - t' - \frac{1}{c}|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|)}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}.$$

Конечно, единственный вклад в интеграл возникает, когда  $\mathbf{x}'$  и  $t'$  удовлетворяют уравнениям  $\mathbf{x}' = \xi(t')$ ,  $t - t' = \frac{1}{c}|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|$ . Вопрос состоит в том, какой вклад возникает от этой точки?

Вычислим более общий интеграл

$$\int dx dy dz dt \delta[f_1(xyzt)] \delta[f_2(xyzt)] \times \\ \times \delta[f_3(xyzt)] \delta[f_4(xyzt)]. \quad (9.75)$$

Заменой переменных преобразуем этот интеграл от переменных  $xyzt$  к  $f_1 f_2 f_3 f_4$ . Интеграл приобретает вид

$$\int df_1 df_2 df_3 df_4 \left| \frac{\partial(xyzt)}{\partial(f_1 f_2 f_3 f_4)} \right| \delta(f_1) \delta(f_2) \delta(f_3) \delta(f_4) = \\ = \left| \frac{\partial(xyzt)}{\partial(f_1 f_2 f_3 f_4)} \right|, \quad (9.76)$$

причем последнее выражение (якобиан) вычисляется при  $f_1 = f_2 = f_3 = f_4 = 0$ . Подробнее якобиан расписывается следующим образом:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial f_1} & \frac{\partial x}{\partial f_2} & \frac{\partial x}{\partial f_3} & \frac{\partial x}{\partial f_4} \\ \frac{\partial y}{\partial f_1} & \frac{\partial y}{\partial f_2} & \frac{\partial y}{\partial f_3} & \frac{\partial y}{\partial f_4} \\ \frac{\partial z}{\partial f_1} & \frac{\partial z}{\partial f_2} & \frac{\partial z}{\partial f_3} & \frac{\partial z}{\partial f_4} \\ \frac{\partial t}{\partial f_1} & \frac{\partial t}{\partial f_2} & \frac{\partial t}{\partial f_3} & \frac{\partial t}{\partial f_4} \end{vmatrix} = \frac{\partial(xyzt)}{\partial(f_1 f_2 f_3 f_4)}. \quad (9.77)$$

Легко проверить, что

$$\frac{\partial (xyzt)}{\partial (f_1 f_2 f_3 f_4)} = \left[ \frac{\partial (f_1 f_2 f_3 f_4)}{\partial (xyzt)} \right]^{-1}. \quad (9.78)$$

Чему равен якобиан в нашем частном случае?

$$f_1 = x' - \xi_x(t'); \quad f_3 = z' - \xi_z(t');$$

$$f_2 = y' - \xi_y(t'); \quad f_4 = t - t' - \frac{1}{c} |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|.$$

Расчет определителя производится непосредственно и дает

$$\frac{\partial (f_1 f_2 f_3 f_4)}{\partial (x' y' z' t')} = -1 - \frac{1}{c} \frac{\dot{\xi} \cdot (\mathbf{x}' - \mathbf{x})}{|\mathbf{x}' - \mathbf{x}|}.$$

Следовательно,

$$\phi(\mathbf{x}, t) = -\frac{1}{4\pi} \cdot \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'| + \frac{1}{c} \dot{\xi}(t') \cdot (\mathbf{x}' - \mathbf{x})}, \quad (9.79)$$

где  $\mathbf{x}' = \xi(t')$  и  $t' = t - \frac{1}{c} |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|$ . В электродинамике это выражение называют потенциалом Лиенара — Вихерта.

# Г Л А В А 10

## ТЕОРИЯ ВОЗМУЩЕНИЙ

### 10.1. ОБЫЧНАЯ НЕВЫРОЖДЕННАЯ ТЕОРИЯ

Рассмотрим задачу на собственные значения

$$Lu = \lambda u, \quad (10.1)$$

где  $L$  может быть матрицей или линейным дифференциальным оператором. Требуется найти собственные векторы  $u_n$  и собственные значения  $\lambda_n$ :

$$Lu_n = \lambda_n u_n. \quad (10.2)$$

Предположим, что  $L$  приближенно равно  $L^0$ , собственные векторы которого  $u_n^0$  и собственные значения  $\lambda_n^0$  известны:

$$L^0 u_n^0 = \lambda_n^0 u_n^0. \quad (10.3)$$

Положим

$$L = L^0 + Q, \quad (10.4)$$

причем  $Q$  в некотором смысле мало. Тогда

$$\lambda_n = \lambda_n^0 + \lambda_n^{(1)} + \dots, \quad (10.5)$$

$$u_n = u_n^0 + \sum_m a_{mn}^{(1)} u_m^0 + \dots, \quad (10.6)$$

где  $\lambda_n^{(1)}$  и  $a_{mn}^{(1)}$  малы, как и  $Q$ . Мы также предположили, что невозмущенные собственные векторы  $u_m^0$  образуют полную систему; удобно считать их ортонормированными:

$$u_m^0 \cdot u_n^0 = \delta_{mn}. \quad (10.7)$$

Теперь подставим пробные выражения (10.5) и (10.6) для  $\lambda_n$  и  $u_n$  в исходную задачу на собственные значения (10.2). Получаем

$$\begin{aligned} & (L^0 + Q) \left( u_n^0 + \sum_m a_{mn}^{(1)} u_m^0 + \dots \right) = \\ & = (\lambda_n^0 + \lambda_n^{(1)} + \dots) \left( u_n^0 + \sum_m a_{mn}^{(1)} u_m^0 + \dots \right). \end{aligned} \quad (10.8)$$

Нулевое приближение в этом уравнении имеет вид

$$L^0 u_n^0 = \lambda_n^0 u_n^0, \quad (10.9)$$

т. е. не представляет ничего нового. Члены первого порядка дают

$$Q u_n^0 + \sum_m a_{mn}^{(1)} \lambda_m^0 u_m^0 = \lambda_n^{(1)} u_n^0 + \lambda_n^0 \sum_m a_{mn}^{(1)} u_m^0. \quad (10.10)$$

Умножим обе части (10.10) на  $u_n^0$ . Получаем очень важный результат

$$u_n^0 \cdot Q u_n^0 = \lambda_n^{(1)}. \quad (10.11)$$

Тогда исправленное собственное значение  $\lambda_n$  равно \*  $\lambda_n = \lambda_n^0 + u_n^0 \cdot Q u_n^0 + O(Q^2)$ .

Как вычислить  $a_{mn}^{(1)}$ ? Умножим уравнение первого приближения (10.10) на  $u_m^0$  ( $m \neq n$ ). Результат равен  $u_m^0 \cdot Q u_n^0 = (\lambda_n^0 - \lambda_m^0) a_{mn}^{(1)}$ . Предположим  $\lambda_m^0 \neq \lambda_n^0$ ; это случай, когда невозмущенное собственное значение не вырождено. Тогда

$$a_{mn}^{(1)} = u_m^0 \cdot Q u_n^0 / (\lambda_n^0 - \lambda_m^0). \quad (10.12)$$

Из (10.11) и (10.12) видно, что возмущение  $Q$  можно считать «малым», если числа  $u_m^0 \cdot Q u_n^0$  малы в сравнении с разностями  $\lambda_n^0 - \lambda_m^0$ .

*Замечание об обозначениях:* будем сокращенно записывать  $u_m^0 \cdot Q u_n^0 \rightarrow Q_{mn}$ . Такое представление общего линейного оператора  $Q$  матрицей  $Q_{mn}$  с помощью «системы координат»  $u_n^0$  обсуждалось в гл. 6 несколько более абстрактно (см. также разд. 9.2).

Заметим, что дифференциальный эрмитов оператор представляется эрмитовой матрицей. В этих обозначениях результаты (10.11) и (10.12) имеют вид

$$\lambda_n^{(1)} = Q_{nn} \quad (10.13)$$

и

$$a_{mn}^{(1)} = Q_{mn} / (\lambda_n^0 - \lambda_m^0) \quad (m \neq n). \quad (10.14)$$

Чему равно  $a_{nn}^{(1)}$ ? Оно не определяется из уравнения первого приближения (10.10). Предположим, что новые собственные векторы также образуют ортонормированную систему:

$$\begin{aligned} u_m \cdot u_n &= (u_m^0 + \sum_{m'} a_{m'm}^{(1)} u_{m'}^0 + \dots) \cdot (u_n^0 + \sum_{n'} a_{n'n}^{(1)} u_{n'}^0 + \dots) = \\ &= \delta_{mn} + a_{nm}^{(1)*} + a_{mn}^{(1)} + \dots \end{aligned} \quad (10.15)$$

\* Символ  $O(x)$  означает «член порядка  $x$ ».

Если  $Q$  — неэрмитов оператор, то члены первого порядка, вообще говоря, не сокращаются. Если  $Q$  — эрмитов оператор, что обычно имеет место, то при  $m \neq n$  члены первого порядка в (10.15) будут сокращаться. При  $m = n$  требование  $u_n \cdot u_n = 1$  налагает условие

$$\operatorname{Re} a_{nn}^{(1)} = 0. \quad (10.16)$$

Мнимая часть  $a_{nn}^{(1)}$  остается совершенно неопределенной. Причина этого состоит в том, что собственный вектор можно всегда умножить на комплексное число с модулем 1:

$$u_n \rightarrow \exp(i\delta)u_n = (1 + i\delta + \dots)u_n, \quad (10.17)$$

не нарушая ортонормированности собственных векторов. Рассмотрим теперь несколько примеров.

**Пример.**

$$\left. \begin{aligned} L &= \begin{pmatrix} 2 + \varepsilon & 1 - \varepsilon \\ 1 - \varepsilon & 2 + 2\varepsilon \end{pmatrix} \quad (\varepsilon \ll 1); \\ L^0 &= \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}; \quad Q = \varepsilon \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}. \end{aligned} \right\} \quad (10.18)$$

Невозмущенные нормированные собственные векторы и собственные значения равны

$$u_1^0 = \sqrt{\frac{1}{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \lambda_1^0 = 3; \quad u_2^0 = \sqrt{\frac{1}{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \lambda_2^0 = 1.$$

Тогда с помощью общего формализма получаем

$$\lambda_1^{(1)} = Q_{11} = \frac{1}{2} (1 \ 1) Q \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \varepsilon/2,$$

$$\lambda_2^{(1)} = Q_{22} = 5\varepsilon/2,$$

так что

$$\lambda_1 = 3 + \frac{\varepsilon}{2} + \dots, \quad \lambda_2 = 1 + \frac{5\varepsilon}{2} + \dots;$$

далее

$$a_{21}^{(1)} = \frac{Q_{21}}{3-1} = -\frac{\varepsilon}{4}, \quad a_{12}^{(1)} = \frac{Q_{12}}{1-3} = \frac{\varepsilon}{4},$$

откуда

$$u_1 = \sqrt{\frac{1}{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{\varepsilon}{4} \sqrt{\frac{1}{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \dots \approx \sqrt{\frac{1}{2}} \begin{pmatrix} 1 - \varepsilon/4 \\ 1 + \varepsilon/4 \end{pmatrix},$$

$$u_2 = \sqrt{\frac{1}{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \frac{\varepsilon}{4} \sqrt{\frac{1}{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \dots \approx \sqrt{\frac{1}{2}} \begin{pmatrix} 1 + \varepsilon/4 \\ -1 + \varepsilon/4 \end{pmatrix}.$$

Эти результаты можно проверить, решая возмущенную задачу точно.

**Пример.** Рассмотрим круглую мембрану радиусом  $a$  с точечной массой  $m$ , помещенной на расстоянии  $b$  от центра. Найдем сдвиг наимизшей частоты.

Основное уравнение имеет вид

$$T \nabla^2 u = \rho (\partial^2 u / \partial t^2). \quad (10.19)$$

Если  $u \sim \exp(-i\omega t)$ , то  $(T/\rho) \nabla^2 u = -\omega^2 u$ . Это стандартная задача на собственные значения с оператором  $(T/\rho) \nabla^2$  и собственным значением  $-\omega^2$ . Положим  $\rho = \rho_0 + \Delta\rho$ . Здесь  $\rho_0$  означает однородную плотность. Тогда невозмущенный оператор равен  $(T/\rho_0) \nabla^2$ , а возмущение  $Q$  равно \*

$$Q = - (T \Delta\rho / \rho_0^2) \nabla^2. \quad (10.20)$$

Наимизшее невозмущенное собственное значение и принадлежащая ему собственная функция равны

$$\lambda_0^0 = - \left( \frac{2,40}{a} \right)^2 \frac{T}{\rho_0}, \quad u_0^0 = \frac{J_0 \left( 2,40 \frac{r}{a} \right)}{\sqrt{\pi a^2} J_1(2,40)}.$$

Отметим, что  $u_0^0$  нормировано так, чтобы выполнялось исходное предположение (10.7):  $\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^a r dr (u_0^0)^2 = 1$ .

Тогда

$$\lambda_0^{(1)} = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^a r dr u_0^0 (Q u_0^0).$$

Но

$$Q u_0^0 = - (T \Delta\rho / \rho_0^2) \nabla^2 u_0^0 = - (\Delta\rho / \rho_0) \lambda_0^0 u_0^0. \quad (10.21)$$

Кроме того, в рассматриваемой задаче величина  $\Delta\rho$  равна умноженной на  $m$   $\delta$ -функции в точке  $r=b$ . Таким образом,

$$\lambda_0^{(1)} = -m (\lambda_0^0 / \rho_0) [u_0^0(r=b)]^2$$

---

\* Можно заметить, что разложение  $(\rho_0 + \Delta\rho)^{-1} \approx \rho_0^{-1} - \rho_0^{-2} \Delta\rho$ , верное для малых  $\Delta\rho$ , не очевидно, когда  $\Delta\rho$  представляет собой  $\delta$ -функцию. Тем не менее процедура корректна; читатель, который не доверяет физической интуиции, может построить строгое доказательство.

или

$$\frac{\lambda_0^{(1)}}{\lambda_0^0} = -\frac{m}{\rho_0} [u_0^0(r=b)]^2 = -\frac{m}{M} \frac{\left[ J_0\left(2, 40 \frac{b}{a}\right) \right]^2}{[J_1(2, 40)]^2},$$

где  $M = \rho_0 \pi a^2$  — полная масса мембраны. Сдвиг частоты дается формулой

$$\frac{\delta\omega}{\omega} = \frac{1}{2} \frac{\lambda_0^{(1)}}{\lambda_0^0} = -\frac{m}{2M} \frac{\left[ J_0\left(2, 40 \frac{b}{a}\right) \right]^2}{[J_1(2, 40)]^2}. \quad (10.22)$$

**Пример.** Уравнение Шредингера для атома водорода имеет вид

$$[-(\hbar^2/2m) \nabla^2 + V(\mathbf{x})] \psi(\mathbf{x}) = E\psi(\mathbf{x}),$$

где  $m$  — приведенная масса электрона,  $E$  — собственное значение энергии,  $V(\mathbf{x})$  — кулоновский потенциал  $-e^2/r$ . Рассмотрим  $2p$ -состояние с магнитным квантовым числом  $+1$ :

$$\begin{aligned} \psi_{2p}(\mathbf{x}) &= C(x + iy) \exp(-r/2a_0), \\ E_{2p} &= -e^2/8a_0, \end{aligned}$$

где  $a_0$  — боровский радиус, равный  $\hbar^2/me^2$ . Если предполагать функцию  $\psi_{2p}(\mathbf{x})$  нормированной, то константа  $C$  равняется  $1/\sqrt{64\pi a_0^3}$ . Чему равен энергетический сдвиг  $\Delta E$  при включении малого возмущения  $\Delta V = \lambda z^2/a_0^2$ ? Формула (10.13) позволяет сразу же найти ответ:

$$\begin{aligned} \Delta E &= \int d^3x \psi_{2p}^*(\mathbf{x}) (\lambda z^2/a_0^2) \psi_{2p}(\mathbf{x}) = \\ &= \frac{\lambda C^2}{a_0^2} \int_0^\infty r^2 dr \int d\Omega (x^2 + y^2) z^2 \exp(-r/a_0) = 6\lambda. \end{aligned}$$

## 10.2. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ РЯДОВ

Изложенный выше формализм, хотя и непосредствен, но довольно сложен в высших порядках. Рассмотрим кратко другой подход, который ведет к весьма элегантному «преобразованию» предыдущего ряда.

Требуется решить уравнение  $Lu = \lambda u$ ,  $(L^0 + Q)u = \lambda u$ . Запишем его в виде

$$L_0 u - \lambda u = -Qu. \quad (10.23)$$

В гл. 9 мы уже убедились в том, что решение уравнения

$$(L_0 - \lambda) u = f \quad (10.24)$$

равно

$$u(x) = \int G(x, x') f(x') d^3x' = \sum_n u_n^0 (u_n^0 \cdot f) / (\lambda_n^0 - \lambda). \quad (10.25)$$

Следовательно, задача имеет формальное решение

$$u = \sum_n u_n^0 (u_n^0 \cdot Qu) / (\lambda - \lambda_n^0). \quad (10.26)$$

Конечно, неприятность состоит в том, что в этом уравнении величина  $u$  встречается как справа, так и слева.

Предположим, что при  $Q \rightarrow 0$   $u \rightarrow u_n^0$ ,  $\lambda \rightarrow \lambda_n^0$ . Обозначим это решение  $u_n$  и выделим из суммы (10.26)  $n$ -й член. Это дает

$$u_n = cu_n^0 + \sum_{m \neq n} u_m^0 (u_m^0 \cdot Qu_n) / (\lambda_n - \lambda_m^0), \quad (10.27)$$

где

$$c = u_n^0 \cdot Qu_n / (\lambda_n - \lambda_n^0). \quad (10.28)$$

Решим теперь методом итераций точное уравнение (10.27) для  $u_n$ :

$$\begin{aligned} u_n &= cu_n^0 + \sum_{m \neq n} \frac{u_m^0 (u_m^0 \cdot Qu_n)}{\lambda_n - \lambda_m^0} + \\ &+ \sum_{m \neq n} \sum_{p \neq n} \frac{u_m^0 (u_m^0 \cdot Qu_p^0) (u_p^0 \cdot Qu_n)}{(\lambda_n - \lambda_m^0) (\lambda_n - \lambda_p^0)} + \dots = \\ &= c \left[ u_n^0 + \sum_{m \neq n} \frac{u_m^0 Q_{mn}}{\lambda_n - \lambda_m^0} + \sum_{m \neq n} \sum_{p \neq n} \frac{u_m^0 Q_{mp} Q_{pn}}{(\lambda_n - \lambda_m^0) (\lambda_n - \lambda_p^0)} + \dots \right]. \end{aligned} \quad (10.29)$$

Таким образом, из (10.28) и (10.29) имеем

$$\begin{aligned} c (\lambda_n - \lambda_n^0) &= u_n^0 \cdot Qu_n = \\ &= c \left[ Q_{nn} + \sum_{m \neq n} \frac{Q_{nm} Q_{mn}}{\lambda_n - \lambda_m^0} + \sum_{m \neq n} \sum_{p \neq n} \frac{Q_{nm} Q_{mp} Q_{pn}}{(\lambda_n - \lambda_m^0) (\lambda_n - \lambda_p^0)} + \dots \right], \end{aligned}$$

откуда получаем элегантный точный ряд для  $\lambda_n$ :

$$\lambda_n = \lambda_n^0 + Q_{nn} + \sum_{m \neq n} \frac{Q_{nm}Q_{mn}}{\lambda_n - \lambda_m^0} + \\ + \sum_{m \neq n} \sum_{p \neq n} \frac{Q_{nm}Q_{mp}Q_{pn}}{(\lambda_n - \lambda_m^0)(\lambda_n - \lambda_p)} + \dots \quad (10.30)$$

Этот ряд лучше, чем полученные ранее, так как можно сразу же написать член любого порядка; но он обладает тем недостатком, что содержит  $\lambda_n$  как справа, так и слева; возникающее уравнение для  $\lambda_n$  нужно решать либо итерациями, либо с помощью других приближений.

### 10.3. ТЕОРИЯ ВОЗМУЩЕНИЙ С ВЫРОЖДЕНИЕМ

Когда рассматриваемое собственное значение вырождено, обсуждавшиеся методы требуют некоторых изменений. Например, формула (10.12)

$$a_{mn}^{(1)} = u_m^0 \cdot Qu_n^0 / (\lambda_n^0 - \lambda_m^0)$$

приводит к бесконечному  $a_{mn}^{(1)}$ , если  $u_m^0$  вырождено с  $u_n^0$ , т. е. если  $\lambda_n^0 = \lambda_m^0$  (конечно, в том случае, если выражение  $u_m^0 \cdot Qu_n^0$  не равно нулю; ниже мы увидим, что оно действительно отлично от нуля).

Различие между вырожденной и невырожденной ситуациями начинается с собственной функции нулевого приближения  $u_n^0$ . Если  $\lambda_n^0$  не вырождено, то  $u_n^0$  с точностью до фазы однозначно определяется из условия нормировки. Однако если есть система функций  $u_\alpha^0$ , принадлежащих к одному и тому же собственному значению, то какую линейную комбинацию этих функций взять в качестве  $u_n^0$ ?

Другая постановка задачи состоит в том, чтобы рассмотреть возмущение, которое выключается постепенно. Вообще говоря, возмущение будет устранять вырождение. Вопрос: когда возмущение исчезает, а  $u_n \rightarrow u_n^0$  (по определению  $u_n^0$ ), то какая линейная комбинация  $u_\alpha^0$  образует  $u_n^0$ ?

Круглая мембрана представляет собой простой физический пример этой задачи. В гл. 8 мы видели, что вторая невозмущенная частота вырождена; она соответствует двум типам колебаний, изображенным на рис. 10.1. Предположим теперь, что исследуется влияние малой точечной массы, закрепленной на поверхности мембраны. Физиче-

ски ясно, что два решения этой задачи в нулевом приближении имеют узлы соответственно вдоль и перпендикулярно диаметру, проходящему через точечную массу.

Правильные функции нулевого приближения часто можно написать из соображений симметрии или других

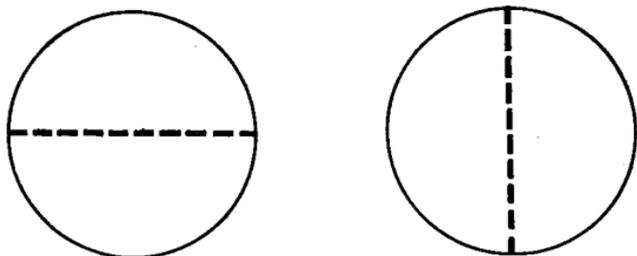


Рис. 10.1. Два типа колебаний, соответствующих второй нормальной частоте колебаний круглой мембраны.

физических соображений. Как мы сейчас убедимся, в любом случае они находятся по теории возмущений.

Представим  $u_n^0$  в виде линейной комбинации

$$u_n^0 = \sum_{\alpha=1}^N a_{\alpha n}^0 u_{\alpha}^0, \quad (10.31)$$

где  $u_{\alpha}^0$  образуют произвольно выбранную ортонормированную систему. Вспомним также уравнение первого приближения (10.10):

$$Qu_n^0 + \sum_m a_{mn}^{(1)} \lambda_m^0 u_m^0 = \lambda_n^{(1)} u_n^0 + \lambda_n^0 \sum_m a_{mn}^{(1)} u_m^0. \quad (10.32)$$

Подставляя (10.31) в (10.32) и умножая скалярно на  $u_{\beta}^0$  — член вырожденной системы (т. е.  $\lambda_{\beta}^0 = \lambda_{\alpha}^0 = \lambda_n^0$ ), получаем

$$u_{\beta}^0 \sum_{\alpha=1}^N a_{\alpha n}^0 Qu_{\alpha}^0 + a_{\beta n}^{(1)} \lambda_{\beta}^0 = \lambda_n^{(1)} \sum_{\alpha=1}^N a_{\alpha n}^0 u_{\beta}^0 \cdot u_{\alpha}^0 + \lambda_n^0 a_{\beta n}^{(1)}$$

или

$$\sum_{\alpha=1}^N Q_{\beta\alpha} a_{\alpha n}^0 = \lambda_n^{(1)} a_{\beta n}^0. \quad (10.33)$$

Это  $\beta$ -компонента матричного уравнения

$$Qa_n^0 = \lambda_n^{(1)} a_n^0 \quad (10.34)$$

в системе координат с базисными векторами  $u_{\alpha}^0$ . Таким образом, величины  $a_n^0$ , представляющие  $u_n^0$  в этой систе-

ме, есть собственные векторы  $N \times N$ -матрицы  $Q$ , а поправки первого порядка  $\lambda_n^{(1)}$  есть соответствующие собственные значения.

Если перейти к новой системе координат с базисом  $u_n^0$ , то  $Q$  будет диагонально, а его диагональные элементы равны изменениям в первом порядке, т. е.

$$Q_{n'n} = \lambda_n^{(1)} \delta_{n'n}. \quad (10.35)$$

Далее, умножая (10.32) скалярно на  $u_m^0$  (с  $\lambda_m^0 \neq \lambda_n^0$ ), для поправок  $u_n^0$  в первом порядке получаем то же соотношение, что и в невырожденной теории:  $a_{mn}^{(1)} = Q_{mn} / (\lambda_n^0 - \lambda_m^0)$ .

Покажем теперь, как теория возмущений применяется для решения вырожденных задач.

**Пример.** Рассмотрим упоминавшуюся выше задачу о круглой мембране. Второе невозмущенное собственное значение равно

$$\lambda_2^0 = - \left( \frac{3,83}{a} \right)^2 \frac{T}{\rho_0}, \quad (10.36)$$

а две нормированные и ортогональные собственные функции, принадлежащие к  $\lambda_2^0$ , имеют вид

$$u_a^0 = \sqrt{\frac{2}{\pi a^2}} \cdot \frac{J_1 \left( 3,83 \frac{r}{a} \right) \cos \theta}{J_0(3,83)},$$

$$u_b^0 = \sqrt{\frac{2}{\pi a^2}} \cdot \frac{J_1 \left( 3,83 \frac{r}{a} \right) \sin \theta}{J_0(3,83)}.$$

Возмущение  $Q$  дается формулой  $Q = - (T \Delta \rho / \rho_0^2) \nabla^2$ , где  $\Delta \rho$  — плотность, создаваемая точечной массой  $m$ , полярные координаты которой равны  $(b, \psi)$ . Можно непосредственно проверить, что  $Q$  представляется матрицей

$$\frac{2m}{\pi a^2 \rho_0} \cdot \frac{\left[ J_1 \left( 3,83 \frac{b}{a} \right) \right]^2}{[J_0(3,83)]^2} \cdot \frac{T}{\rho_0} \left( \frac{3,83}{a} \right)^2 \times$$

$$\times \begin{pmatrix} \cos^2 \psi & \sin \psi \cos \psi \\ \sin \psi \cos \psi & \sin^2 \psi \end{pmatrix}. \quad (10.37)$$

Матрица  $2 \times 2$  в скобках имеет собственные значения и собственные векторы

$$\lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = 0;$$

$$a_1^0 = \begin{pmatrix} \cos \psi \\ \sin \psi \end{pmatrix}, \quad a_2^0 = \begin{pmatrix} -\sin \psi \\ \cos \psi \end{pmatrix}.$$

Следовательно, правильные собственные функции нулевого порядка имеют вид

$$\left. \begin{aligned} u_1^0 &= (\cos \psi) u_\alpha^0 + (\sin \psi) u_\beta^0, \\ u_2^0 &= (-\sin \psi) u_\alpha^0 + (\cos \psi) u_\beta^0. \end{aligned} \right\} \quad (10.38)$$

В системе с этими базисными векторами  $Q$  приобретает вид

$$\frac{2m}{\pi a^2 \rho_0} \cdot \frac{\left[ J_1 \left( 3,83 \frac{b}{a} \right) \right]^2}{[J_0(3,83)]^2} \cdot \frac{T}{\rho_0} \left( \frac{3,83}{a} \right)^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Диагональные элементы равны  $\lambda_1^{(1)}$  и  $\lambda_2^{(1)}$ , а  $u_1^0$  и  $u_2^0$  — как раз функции нулевого приближения, описывающие типы колебаний, которые были угаданы ранее в этом разделе.

Эти расчеты можно обобщить, рассматривая эффекты высших порядков от возмущения на вырожденные собственные значения и собственные функции.

# Г Л А В А II

## ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

### 11.1. КЛАССИФИКАЦИЯ

Интегральное уравнение — это уравнение, в котором неизвестная функция находится под знаком интеграла. Рассмотрим несколько простых типов таких уравнений.

Общее линейное интегральное уравнение, содержащее одну неизвестную функцию  $f(x)$  под знаком интеграла, записывается в виде

$$\lambda \int_a^b K(x, y) f(y) dy + g(x) = h(x) f(x), \quad (11.1)$$

где  $h(x)$  и  $g(x)$  — известные функции  $x$ ;  $\lambda$  — постоянный параметр, часто играющий роль собственного значения;  $K(x, y)$  — ядро интегрального уравнения. Если  $h(x) = 0$ , то имеем уравнение Фредгольма первого рода; если  $h(x) = 1$  — уравнение Фредгольма второго рода. В любом случае, если  $g(x) = 0$ , уравнение однородно.

Иногда  $K(x, y)$  равно нулю при  $y > x$ . В этом случае верхний предел интегрирования равен  $x$ , и уравнение называют уравнением Вольтерра.

Часто удобно записывать уравнение (11.1) в символической форме

$$\lambda K f + g = h f, \quad (11.2)$$

где  $K$  — оператор, который означает «умножить на ядро  $K(x, y)$  и проинтегрировать по  $y$  от  $a$  до  $b$ ». Уравнения в этой форме легко сравнивать с операторными уравнениями, содержащими матрицы или дифференциальные операторы.

Вспомним, что ранее, в разд. 6.7, мы встречались с интегральными уравнениями как непосредственным обобщением матричных операторных уравнений, а в разд. 9.4 — в связи с функциями Грина.

## 11.2. ВЫРОЖДЕННЫЕ ЯДРА

Если ядро  $K(x, y)$  имеет вид

$$K(x, y) = \sum_{i=1}^n \phi_i(x) \psi_i(y), \quad (11.3)$$

то его называют вырожденным. Интегральные уравнения с вырожденными ядрами решаются элементарными методами. Вместо общего обсуждения рассмотрим простой пример.

**Пример.**

$$f(x) = x + \lambda \int_0^1 (xy^2 + x^2y) f(y) dy. \quad (11.4)$$

Определим

$$A = \int_0^1 y^2 f(y) dy, \quad B = \int_0^1 y f(y) dy. \quad (11.5)$$

Тогда (11.4) принимает вид

$$f(x) = x + \lambda Ax + \lambda Bx^2. \quad (11.6)$$

Подставим теперь (11.6) в уравнения (11.5):

$$\left. \begin{aligned} A &= \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \lambda A + \frac{1}{5} \lambda B, \\ B &= \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \lambda A + \frac{1}{4} \lambda B. \end{aligned} \right\} \quad (11.7)$$

Решение уравнений (11.7) имеет вид

$$A = \frac{60 + \lambda}{240 - 120\lambda - \lambda^2}, \quad B = \frac{80}{240 - 120\lambda - \lambda^2},$$

так что решение исходного интегрального уравнения имеет вид

$$f(x) = \frac{(240 - 60\lambda)x + 80\lambda x^2}{240 - 120\lambda - \lambda^2}. \quad (11.8)$$

Заметим, что есть два значения  $\lambda$ , при которых решение (11.8) расходится. Такая картина знакома нам;  $\lambda$  назовем собственными значениями интегрального уравнения. Однородное уравнение имеет нетривиальные решения, только если  $\lambda$  равно одному из собственных значений. Эти решения называются собственными функциями оператора  $K$ .

Итак, если ядро вырождено, то проблема решения интегрального уравнения сводится к решению системы алгебраических уравнений, т. е. к значительно более простому объекту. Если вырожденное ядро (11.3) содержит  $N$  членов, то будет  $N$  собственных значений, но не обязательно все они различны.

Замечая, что любое разумное ядро можно представить в виде бесконечной суммы вырожденных ядер, Фредгольм получил ряд теорем, которые мы приведем без доказательства. Для читателя, знакомого с уравнениями на собственные значения и алгебраическими уравнениями, они вполне очевидны\*.

1. Либо неоднородное уравнение

$$f(x) = g(x) + \lambda \int_a^b K(x, y) f(y) dy \quad (11.9)$$

имеет (однозначное) решение для любой функции  $g$  (т. е.  $\lambda$  не есть собственное значение), либо однородное уравнение

$$f(x) = \lambda \int_a^b K(x, y) f(y) dy \quad (11.10)$$

имеет по меньшей мере одно нетривиальное решение ( $\lambda$  — собственное значение, а решение — собственная функция).

2. Если  $\lambda$  не есть собственное значение (первая альтернатива), то  $\lambda$  не будет также собственным значением и для «транспонированного» уравнения

$$f(x) = g(x) + \lambda \int_a^b K(y, x) f(y) dy, \quad (11.11)$$

в то время как если  $\lambda$  — собственное значение (вторая альтернатива), то оно является также собственным значением и для «транспонированного» уравнения, т. е. уравнение

$$f(x) = \lambda \int_a^b K(y, x) f(y) dy \quad (11.12)$$

имеет по меньшей мере одно нетривиальное решение.

\* Строго говоря, теоремы годятся только для интегральных уравнений с ограниченными ядрами и конечными пределами интегрирования, т. е. для несингулярных интегральных уравнений. Теория сингулярных интегральных уравнений строится иначе.

3. Если  $\lambda$  — собственное значение, то неоднородное уравнение (11.9) имеет решение тогда и только тогда, когда

$$\int_a^b \phi(x) g(x) dx = 0 \quad (11.13)$$

для любой функции  $\phi(x)$ , которая удовлетворяет транспонированному однородному уравнению (11.12).

Заметим, что второе утверждение есть аналог того факта, что данная матрица и транспонированная к ней имеют одинаковые собственные значения. Необходимость условия (11.13) следует немедленно, если умножить (11.9) на  $\phi(x)$  и проинтегрировать по  $x$ .

### 11.3. РЯДЫ НЕЙМАНА И ФРЕДГОЛЬМА

Простейший подход к решению интегрального уравнения

$$f(x) = g(x) + \lambda \int_a^b K(x, y) f(y) dy \quad (11.14)$$

это метод итераций; начнем с приближения  $f(x) \approx g(x)$ . Подставив его в интегральное уравнение под знак интеграла, получим второе приближение, затем повторим процесс. Получающийся ряд

$$f(x) = g(x) + \lambda \int_a^b K(x, y) g(y) dy + \\ + \lambda^2 \int_a^b dy \int_a^b dy' K(x, y) K(y, y') g(y') + \dots \quad (11.15)$$

известен как ряд Неймана, или решение Неймана интегрального уравнения (11.14). В случае если ядро  $K(x, y)$  ограничено, ряд сходится при достаточно малых  $\lambda$ .

**Пример.** В квантовой механической теории рассеяния на потенциале  $V(r)$  приходится искать решение уравнения Шредингера

$$\nabla^2 \psi(\mathbf{r}) - \frac{2m}{\hbar^2} V(\mathbf{r}) \psi(\mathbf{r}) + k^2 \psi(\mathbf{r}) = 0 \quad (11.16)$$

с граничными условиями: функция  $\psi(\mathbf{r}) \exp(-iEt/\hbar)$  представляет собой сумму падающей плоской волны с волновым вектором  $\mathbf{k}_0$  и расходящейся волны при  $r \rightarrow \infty$ ;  $k^2 = k_0^2 = 2mE/\hbar^2$ .

Уравнение  $\nabla^2\psi + k^2\psi = f(\mathbf{r})$  с граничными условиями для функции  $\psi(\mathbf{r}) \exp(-i\omega t)$  в виде расходящейся волны имеет функцию Грина, равную (см. гл. 9)

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = -\frac{1}{4\pi} \cdot \frac{\exp(ik|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|)}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}. \quad (11.17)$$

Таким образом, как и в разд. 9.4, можно преобразовать задачу рассеяния к интегральному уравнению

$$\begin{aligned} \psi(\mathbf{r}) = & \exp(i\mathbf{k}_0\mathbf{r}) - \\ & - \frac{2m}{4\pi\hbar^2} \int d^3r' \frac{\exp(ik|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|)}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} V(\mathbf{r}') \psi(\mathbf{r}'), \end{aligned} \quad (11.18)$$

где член  $\exp(i\mathbf{k}_0\mathbf{r})$  — решение однородного уравнения, подбираемое так, чтобы удовлетворить граничным условиям. Решение можно записать в виде ряда Неймана (11.15). Уже первая итерация дает очень важный результат, известный как борновское приближение

$$\begin{aligned} \psi(\mathbf{r}) \approx & \exp(i\mathbf{k}_0\mathbf{r}) - \\ & - \frac{m}{2\pi\hbar^2} \int d^3r' \frac{\exp(ik|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|)}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} V(\mathbf{r}') \exp(i\mathbf{k}_0\mathbf{r}'). \end{aligned} \quad (11.19)$$

Возвратимся к интегральному уравнению (11.14). Более элегантное, но и более сложное решение в виде ряда было найдено Фредгольмом. Он разбивал интервал  $a < x < b$  на много интервалов, заменял интеграл суммой, решал получающиеся алгебраические уравнения и затем переходил к пределу бесконечно большого числа делений интервала. Результат состоит в том, что решение интегрального уравнения (11.14) равно

$$f(x) = g(x) + \lambda \int_a^b R(x, y, \lambda) g(y) dy, \quad (11.20)$$

где  $R(x, y, \lambda)$  — так называемое ядро резольвенты, т. е. отношение двух бесконечных рядов

$$R(x, y, \lambda) = D(x, y, \lambda) / D(\lambda), \quad (11.21)$$

$$D(x, y, \lambda) = K(x, y) - \lambda \int dz \begin{vmatrix} K(x, y) & K(x, z) \\ K(z, y) & K(z, z) \end{vmatrix} + \\ + \frac{\lambda^2}{2!} \int dz dz' \begin{vmatrix} K(x, y) & K(x, z) & K(x, z') \\ K(z, y) & K(z, z) & K(z, z') \\ K(z', y) & K(z', z) & K(z', z') \end{vmatrix} - \dots + \dots, \quad (11.22)$$

$$D(\lambda) = 1 - \lambda \int dz K(z, z) + \\ + \frac{\lambda^2}{2!} \int dz dz' \begin{vmatrix} K(z, z) & K(z, z') \\ K(z', z) & K(z', z') \end{vmatrix} - \dots + \dots \quad (11.23)$$

Эти, довольно сложные формулы имеют другую, более элегантную форму, которая аналогична формализмам теории возмущений, используемым в различных областях современной физики. Будем изображать каждое ядро  $K$  линией;  $K(x, y)$  будет вертикальной линией:  $K(x, y) \rightarrow |$ . Если есть два ядра  $K$  с общей переменной интегрирования, соединяем две линии, ставя крестик для обозначения соединения. Например,

$$\int dz K(x, z) K(z, y) \rightarrow * \\ \int dz K(z, z) \rightarrow \bigcirc * \\ \int dz K(x, y) K(z, z) \rightarrow | \bigcirc *$$

С помощью этих рисунков можно решать уравнение Фредгольма:

$$R = \frac{| - (| \bigcirc * - |) + \frac{1}{2} (| \bigcirc * \bigcirc * + 2 | * - | * \bigcirc * - 2 * \bigcirc *) + \dots}{1 - \bigcirc * + \frac{1}{2} (\bigcirc * \bigcirc * - \bigcirc * \bigcirc *) + \dots} \quad (11.24)$$

Здесь в последовательных членах опущены степени  $\lambda$ ; их можно учесть: каждому крестику, т. е. каждому интегрированию, должен соответствовать множитель  $\lambda$ .

Проверка подтверждает следующее правило (оно очевидно также из исходной формулировки через детерминанты): каждый член в знаменателе, кроме 1, получается «соединением концов» в предыдущем члене в числителе делением на число имеющихся  $K$  и изменением знака. Заметим также, что можно получить ряд Неймана (11.15), если в (11.24) выполнить деление

$$R = \left| + \begin{array}{c} | \\ | \\ | \end{array} + \begin{array}{c} * \\ | \\ * \end{array} + \begin{array}{c} * \\ * \\ * \end{array} + \dots \right. \quad (11.25)$$

Иными словами, произведение (11.25) и знаменателя в (11.24) дает числитель последней формулы. Два свойства, указанных в этом параграфе, полностью определяют решение Фредгольма.

Сконструируем, например, следующую связь членов. Член третьего порядка в знаменателе получается соединением концов второго порядка в числителе; результат имеет вид

$$-\frac{1}{6} \left( \bigcirc * \bigcirc * \bigcirc * + 2 \begin{array}{c} * \\ * \\ * \end{array} - 3 \bigcirc * \begin{array}{c} * \\ * \end{array} \right)$$

Для нахождения члена третьего порядка в числителе соберем члены третьего порядка в произведении знаменателя на ряд (11.25). Получаем

$$\begin{array}{c} * \\ * \\ * \end{array} - \begin{array}{c} * \\ | \\ * \end{array} \bigcirc + \frac{1}{2} \begin{array}{c} * \\ | \\ * \end{array} \bigcirc * \bigcirc - \frac{1}{2} \begin{array}{c} * \\ * \\ * \end{array} - \\ - \frac{1}{6} \begin{array}{c} | \\ | \\ | \end{array} \bigcirc * \bigcirc * \bigcirc - \frac{1}{3} \begin{array}{c} * \\ * \\ * \end{array} + \frac{1}{2} \begin{array}{c} \bigcirc * \\ * \\ * \end{array} \cdot$$

Знаменатель имеет интересный вид

$$D(\lambda) = \exp \left( - \bigcirc * - \frac{1}{2} \begin{array}{c} * \\ * \\ * \end{array} - \frac{1}{3} \begin{array}{c} * \\ * \\ * \end{array} - \dots \right), \quad (11.26)$$

что можно увидеть, если разложить в ряд это выражение.

Важность решения Фредгольма состоит в том, что как степенной ряд (11.22), так и ряд (11.23) определенно сходятся (в отличие от ряда Неймана, который часто расходится). Собственные значения можно найти, если искать нули знаменателя.

#### 11.4. ТЕОРИЯ ГИЛЬБЕРТА — ШМИДТА

Рассмотрим теперь метод, совершенно отличный от методов Неймана и Фредгольма. Этот метод основан на рассмотрении собственных функций и собственных значений однородного интегрального уравнения.

Ядро  $K(x, y)$  называют с и м м е т р и ч н ы м, если  $K(x, y) = K(y, x)$ , и э р м и т о в ы м, если  $K(x, y) = = K^*(y, x)$ . Собственные значения эрмитова ядра вещественны, а собственные функции, принадлежащие к различным собственным значениям, ортогональны; две функции  $f(x)$  и  $g(x)$  называются ортогональными, если  $\int f^*(x) g(x) dx = 0$ .

Доказательства этих утверждений практически идентичны соответствующим доказательствам в гл. 6. Сходство очевидно, если записать интегральное уравнение в символических обозначениях (11.2). Тогда уравнение на собственные значения приобретает вид

$$\lambda Kf = f. \quad (11.27)$$

Ограничимся эрмитовыми ядрами и начнем исследование с вырожденного ядра

$$K(x, x') = \sum_{\alpha=1}^N f_{\alpha}(x) f_{\alpha}^*(x'). \quad (11.28)$$

Соответствующее однородное интегральное уравнение имеет вид

$$\begin{aligned} u(x) &= \lambda \int_a^b K(x, x') u(x') dx' = \\ &= \lambda \sum_{\alpha} f_{\alpha}(x) \int f_{\alpha}^*(x') u(x') dx'. \end{aligned} \quad (11.29)$$

Определим

$$\int f_{\alpha}^*(x') u(x') dx' = c_{\alpha}, \quad (11.30)$$

так что

$$u_i^j(x) = \lambda \sum_{\alpha} c_{\alpha} f_{\alpha}(x). \quad (11.31)$$

Итак, любую собственную функцию  $u(x)$  можно представить в виде линейной комбинации  $N$  функций  $f_{\alpha}(x)$ . Ясно, например, что не может быть больше  $N$  линейно независимых собственных функций.

Подставляя выражение (11.31) в (11.30) и определяя

$$A_{\alpha\beta} = \int f_{\alpha}^*(x) f_{\beta}(x) dx = A_{\beta\alpha}^*, \quad (11.32)$$

получаем

$$c_{\alpha} = \lambda \sum_{\beta} A_{\alpha\beta} c_{\beta}. \quad (11.33)$$

Таким образом, собственные значения  $\lambda$  являются обратными величинами (ненулевым) собственным значениям эрмитовой матрицы  $A_{\alpha\beta}$ . Из гл. 6 известно, что числа  $c_{\alpha}^{(i)}$ , в которых индекс  $i$  различает собственные векторы матрицы  $A$ , удовлетворяют условию ортогональности

$$c^{(i)} \cdot c^{(j)} = \sum_{\alpha} c_{\alpha}^{(i)*} c_{\alpha}^{(j)} = 0, \quad \text{если } i \neq j. \quad (11.34)$$

Чтобы увидеть, какая нормировка удобна, обозначим  $u^{(i)}$   $i$ -ю собственную функцию; аналогично обозначается  $u^{(j)}$ . Тогда

$$\begin{aligned} \int u^{(i)*}(x) u^{(j)}(x) dx &= \lambda_i \lambda_j \sum_{\alpha\beta} c_{\alpha}^{(i)*} c_{\beta}^{(j)} \int f_{\alpha}^*(x) f_{\beta}(x) dx = \\ &= \lambda_i \lambda_j \sum_{\alpha\beta} c_{\alpha}^{(i)*} c_{\beta}^{(j)} A_{\alpha\beta} = \lambda_i \sum_{\alpha} c_{\alpha}^{(i)*} c_{\alpha}^{(j)}. \end{aligned}$$

Следовательно, выбираем

$$\sum_{\alpha} c_{\alpha}^{(i)*} c_{\alpha}^{(j)} = \delta_{ij} / \lambda_i, \quad (11.35)$$

так что

$$\int u^{(i)*}(x) u^{(j)}(x) dx = \delta_{ij}, \quad (11.36)$$

т. е. собственные функции ортонормированы.

Отметим, что, согласно (11.35), числа  $\sqrt{\lambda_i} c_{\alpha}^{(i)}$  образуют унитарную матрицу. Поэтому

$$\sum_i \lambda_i c_{\alpha}^{(i)*} c_{\beta}^{(i)} = \delta_{\alpha\beta}. \quad (11.37)$$

Это полезное свойство ортогональности; оно позволяет, например, «решить» уравнение  $u^{(i)}(x) = \lambda_i \sum c_\alpha^{(i)} f_\alpha(x)$  относительно  $f_\alpha(x)$ :

$$f_\alpha(x) = \sum_i c_\alpha^{(i)*} u^{(i)}(x). \quad (11.38)$$

В свою очередь, отсюда можно выразить ядро  $K(x, x')$  [см. (11.28)] через его собственные функции:

$$\begin{aligned} K(x, x') &= \sum_\alpha f_\alpha(x) f_\alpha^*(x') = \sum_\alpha \sum_{ij} c_\alpha^{(i)*} u^{(i)}(x) c_\alpha^{(j)} u^{(j)*}(x') = \\ &= \sum_i \frac{u^{(i)}(x) u^{(i)*}(x')}{\lambda_i}. \end{aligned} \quad (11.39)$$

Этот результат доказан здесь только для вырожденного ядра; однако он справедлив и в общем случае для эрмитовых матриц, в случае если они непрерывны и имеют конечное число собственных значений одного знака.

Такой подход можно обобщить на неоднородное уравнение. Используем теорему, которая непосредственно вытекает из (11.39). Любую функцию, которую можно представить через ядро  $K(x, y)$  как «источник», т. е. любую функцию вида

$$\phi(x) = \int K(x, y) \psi(y) dy \quad (11.40)$$

( $\psi$  произвольно, а  $K$  — эрмитов оператор), можно разложить в ряд по собственным функциям  $K(x, y)$ :

$$\phi(x) = \sum_i c_i u^{(i)}(x), \quad (11.41)$$

где

$$c_i = \int u^{(i)*}(x) \phi(x) dx = (1/\lambda_i) \int u^{(i)*}(x) \psi(x) dx. \quad (11.42)$$

В общем случае собственные функции  $u^{(i)}(x)$  не образуют полной системы функций. Не любую функцию, а только функцию, связанную с источником, можно разложить по  $u^{(i)}(x)$ . Эта ситуация не является необычной. Рассмотрим, например, трехмерные векторы и оператор  $P$ , проектирующий вектор  $\mathbf{r}$  в плоскость  $xy$ . Оператор  $P$  имеет два независимых собственных вектора, скажем  $\mathbf{e}_x$  и  $\mathbf{e}_y$ ; любой вектор вида  $\mathbf{r}' = P\mathbf{r}$  можно разложить по ним, хотя с произвольным вектором этого сделать нельзя.

Теперь можно решить неоднородное уравнение

$$\phi(x) = g(x) + \lambda \int K(x, y) \phi(y) dy. \quad (11.43)$$

Представим разность как

$$\phi(x) - g(x) = \sum_i c_i u^{(i)}(x), \quad (11.44)$$

где, согласно (11.42),

$$c_i = \int dx u^{(i)}(x)^* [\phi(x) - g(x)] = \lambda (1/\lambda_i) \int u^{(i)}(x)^* \phi(x) dx. \quad (11.45)$$

Таким образом, если определить

$$d_i = \int dx u^{(i)}(x)^* \phi(x), \quad e_i = \int dx u^{(i)}(x)^* g(x), \quad (11.46)$$

то (11.45) принимает вид  $c_i = d_i - e_i = (\lambda/\lambda_i) d_i$ . Следовательно,  $d_i = \frac{\lambda_i}{\lambda_i - \lambda} e_i$  и  $c_i = \frac{\lambda}{\lambda_i - \lambda} e_i$ . Подставляя их в (11.44), получаем следующее выражение для  $\phi(x)$ :

$$\phi(x) = g(x) + \lambda \sum_i e_i u^{(i)}(x) / (\lambda_i - \lambda)$$

или

$$\phi(x) = g(x) + \lambda \sum_i u^{(i)}(x) / (\lambda_i - \lambda) \int u^{(i)}(y)^* g(y) dy. \quad (11.47)$$

Если сравнить этот последний результат с решением (11.20), то видим, что найдено представление ядра резольвенты в виде ряда

$$R(x, y, \lambda) = \sum_i \frac{u^{(i)}(x) u^{(i)}(y)^*}{\lambda_i - \lambda}. \quad (11.48)$$

Символически исходное уравнение (11.43) записывалось в виде

$$\phi = g + \lambda K \phi, \quad (11.49)$$

формальное решение которого равно

$$\phi = (1 - \lambda K)^{-1} g. \quad (11.50)$$

Отметим, что разложение оператора в этом выражении в степенной ряд дает непосредственно ряд Неймана

$$\phi(x) = g + \lambda K g + \lambda^2 K^2 g + \lambda^3 K^3 g + \dots \quad (11.51)$$

Так как, с другой стороны, согласно (11.20),

$$\phi = (1 + \lambda R) g, \quad (11.52)$$

то получаем формальное тождество

$$(1 - \lambda K)^{-1} = 1 + \lambda R. \quad (11.53)$$

Интересно сравнить эти результаты с результатами, полученными для дифференциальных уравнений в частных производных (см. разд. 9.4). Предположим, что дифференциальный оператор  $L$  имеет собственные значения  $\kappa_i$  и собственные функции  $u^{(i)}$ , удовлетворяющие заданным краевым условиям. Неоднородное дифференциальное уравнение имеет вид

$$L\phi + f = \kappa\phi, \quad (11.54)$$

где неоднородный член  $f$  — известная функция. Согласно (9.26) и (9.27), решение записывается через функцию Грина следующим образом:

$$\phi(x) = \int G(x, x') f(x') d^3x', \quad (11.55)$$

где

$$G(x, x') = - \sum_i \frac{u^{(i)}(x) u^{(i)}(x')^*}{\kappa_i - \kappa}. \quad (11.56)$$

Отметим, что  $G(x, x')$  — интегральный оператор ядра, и уравнение (11.55) символически записывается так:

$$\phi = Gf. \quad (11.57)$$

Дифференциальное уравнение (11.54) и интегральное уравнение (11.49) имеют одинаковый символический вид, если положить  $\kappa = 1/\lambda$  и  $\lambda f = g$  и отождествить  $L$  с  $K$ . Согласно (11.57) и (11.52), решения этих уравнений равны  $\phi = (1 + \lambda R)g$  и  $\phi = Gf = \frac{1}{\lambda}Gg$ . Поэтому можно ожидать, что операторы  $(1 + \lambda R)$  и  $\frac{1}{\lambda}G$  записываются одинаково через соответствующие собственные функции и собственные значения. Чтобы проверить это, напомним (11.56) с  $\kappa_i = 1/\lambda_i$  и  $\kappa = 1/\lambda$ . Тогда

$$-\frac{1}{\kappa_i - \kappa} = \frac{\lambda\lambda_i}{\lambda_i - \lambda} = \lambda \left(1 + \frac{\lambda}{\lambda_i - \lambda}\right)$$

и (11.56) приобретает вид

$$\begin{aligned} G(x, x') &= \lambda \sum_i u^{(i)}(x) u^{(i)}(x')^* + \lambda^2 \sum_i \frac{u^{(i)}(x) u^{(i)}(x')^*}{\lambda_i - \lambda} = \\ &= \lambda \delta(x - x') + \lambda^2 \sum_i \frac{u^{(i)}(x) u^{(i)}(x')^*}{\lambda_i - \lambda}, \end{aligned}$$

где использовано соотношение полноты (9.14). Интегральное ядро  $\delta(x-x')$  эквивалентно единичному оператору, так что находим

$$\frac{1}{\lambda} G = 1 + \lambda \sum_i \frac{u^{(i)}(x) u^{(i)*}(x')}{\lambda_i - \lambda}. \quad (11.58)$$

Это выражение имеет ту же форму, что и  $1 + \lambda R$  с  $R$ , которое дается разложением (11.48).

### 11.5. МЕТОД ВИНЕРА — ХОПФА И ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Уравнения Вольтерра часто можно превратить в дифференциальное уравнение с помощью дифференцирования.

**Пример.**

$$u(x) = x + \int_0^x xyu(y) dy = x + xf(x), \quad (11.59)$$

где  $f(x) = \int_0^x yu(y) dy$ . Тогда

$$f'(x) = xu(x) = x[x + xf(x)].$$

Решение этого уравнения равно  $f(x) = -1 + C \exp(x^3/3)$ , так что

$$u(x) = Cx \exp(x^3/3). \quad (11.60)$$

Чтобы найти  $C$ , подставим решение обратно в исходное интегральное уравнение. Получаем  $C = 1$ .

Если ядро является функцией только от  $x - y$ , то оно называется ядром сдвига. Если пределы интегрирования от  $-\infty$  до  $+\infty$ , то используют преобразование Фурье. Рассмотрим уравнение

$$f(x) = \phi(x) + \lambda \int_{-\infty}^{\infty} K(x-y) f(y) dy. \quad (11.61)$$

Сделаем преобразования Фурье (они отмечены черточками сверху)

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx f(x) \exp(-ikx) = \bar{f}(k) \text{ и т. д.} \quad (11.62)$$

Преобразование интегрального уравнения имеет вид

$$\bar{f}(k) = \bar{\phi}(k) + \lambda \bar{K}(k) \bar{f}(k). \quad (11.63)$$

Следовательно,

$$\bar{f}(k) = \frac{\bar{\phi}(k)}{1 - \lambda \bar{K}(k)}. \quad (11.64)$$

Задача решается обращением этого преобразования.

Если пределы интегрирования от 0 до  $x$ , а  $K$  есть ядро смещения и, кроме того, функции обращаются в нуль при  $x < 0$ , то используется преобразование Лапласа.

Метод Винера — Хопфа, уже обсуждавшийся в связи с дифференциальными уравнениями в частных производных, также можно использовать для определенных интегральных уравнений. Их называют уравнениями типа Винера — Хопфа:

$$f(x) = \phi(x) + \int_0^{\infty} K_+(x-y) f(y) dy \quad (-\infty < x < \infty). \quad (11.65)$$

Отличительные особенности этих уравнений — ядро смещения и полубесконечный интервал интегрирования. Положим  $f(x) = f_+(x) + f_-(x)$ , где  $f_+ = 0$  при  $x > 0$  и  $f_- = 0$  при  $x < 0$ . Тогда

$$f_+(x) + f_-(x) = \phi_+(x) + \int_{-\infty}^{\infty} K(x-y) f_-(y) dy. \quad (11.66)$$

Сделаем преобразования Фурье

$$\bar{f}_+(k) + \bar{f}_-(k) = \bar{\phi}(k) + \bar{K}(k) \bar{f}_-(k).$$

Запишем их в виде

$$\bar{f}_-(k) [1 - \bar{K}(k)] + \bar{f}_+(k) = \bar{\phi}(k). \quad (11.67)$$

Предположим теперь, что

$$|K_+(x)| \ll \begin{cases} \exp(-\alpha x), & \text{когда } x \rightarrow \infty, \\ \exp(\beta x), & \text{когда } x \rightarrow -\infty. \end{cases} \quad (11.68)$$

Следовательно,  $\bar{K}(k)$  аналитична в полосе  $-\beta < \text{Im } k < \alpha$ . Предположим, что  $\phi(x)$  достаточно хорошо ведет себя на бесконечности, так что  $\bar{\phi}(k)$  также аналитична в этой полосе.

При рассмотрении исходного дифференциального уравнения (11.65) разумно предположить, что  $\bar{f}(k)$  по меньшей мере аналитична на отрезке  $-\beta < \text{Im } k < \alpha$ . Таким образом, предполагается, что все выражения в (11.67) аналитичны на некотором отрезке  $\gamma < \text{Im } k < \delta$ . Далее представим  $1 - \bar{K}(k)$  в виде отношения двух функций  $1 - \bar{K}(k) = \frac{A(k)}{B(k)}$ , где  $A(k)$  аналитична при  $\text{Im } k < \delta$ , а  $B(k)$  — при  $\text{Im } k > \gamma$ . Заметим, что такое представление существенно эквивалентно разложению функции

$$\ln [1 - \bar{K}(k)] = \ln A(k) - \ln B(k) \quad (11.69)$$

на разность двух функций, каждая из которых аналитична в надлежащей области; в принципе для любого случая нам уже известно, как сделать это [см. уравнение (8.85)].

Уравнение (11.67) принимает вид

$$\bar{f}_-(k) A(k) + \bar{f}_+(k) B(k) = B(k) \bar{\phi}(k). \quad (11.70)$$

Разложим  $B(k) \bar{\phi}(k)$  на сумму функций аналогично тому, как это делалось выше:

$$B(k) \bar{\phi}(k) = C(k) + D(k), \quad (11.71)$$

где  $C(k)$  аналитична при  $\text{Im } k > \gamma$ , а  $D(k)$  — при  $\text{Im } k < \delta$ . Итак,

$$\bar{f}_+(k) B(k) - C(k) = -\bar{f}_-(k) A(k) + D(k), \quad (11.72)$$

причем функция в левой части аналитична при  $\text{Im } k > \gamma$ , а функция в правой части — при  $\text{Im } k < \delta$ . Таким образом, обе функции должны быть равны одной функции. В действительности  $\bar{f}_+(k)$  и  $\bar{f}_-(k)$  стремятся к нулю при  $\text{Im } k = \pm \infty$ , а функции  $A, \dots, D$  ведут себя самое худшее, как полиномы. Следовательно, обе части написанного выше уравнения равны некоторому полиному. Отсюда определяются функции  $f_+$  и  $f_-$  с точностью до некоторых неизвестных констант. Последние можно определить по физическому смыслу или с помощью подстановки решения в исходное интегральное уравнение.

## 11.6. ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ В ДИСПЕРСИОННОЙ ТЕОРИИ

В гл. 5 мы получили соотношения вида

$$F(x) = \frac{1}{\pi} \int \frac{g(x') dx'}{x' - x - i\varepsilon}, \quad (11.73)$$

как называемые дисперсионные соотношения. Математики называют их преобразованиями Гильберта. Интегрирование обычно производится вдоль некоторой части вещественной оси. Функция

$$f(z) = \frac{1}{\pi} \int g(x') dx' / (x' - z) \quad (11.74)$$

аналитична всюду, кроме части вещественной оси, где проходит линия разреза. Отметим, что

$$f(x + i\varepsilon) = F(x). \quad (11.75)$$

Чтобы найти  $f(z)$  или  $F(x)$ , нужна некоторая информация о  $g(x)$ . Если  $g(x)$  вещественна, то она равна мнимой части  $F(x)$ . По физическим соображениям, в которые мы не будем углубляться, величину  $g(x)$  часто называют поглощательной частью  $F(x)$ .

В качестве первого примера решения такого интегрального уравнения рассмотрим функцию

$$g(x) = |F(x)|^2 h(x), \quad (11.76)$$

где  $h(x)$  — некоторая известная вещественная функция\*. Следовательно, нужно решить нелинейное интегральное уравнение

$$F(x) = \frac{1}{\pi} \int \frac{|F(x')|^2 h(x') dx'}{x' - x - i\varepsilon}. \quad (11.77)$$

Оно выглядит сложным. Существенное упрощение достигается введением вместо  $f(z)$  величины

$$\phi(z) = \frac{1}{f(z)}. \quad (11.78)$$

В случае если  $f(z)$  нигде не обращается в нуль (существенное предположение), то ее обратная величина аналитична всюду, кроме разреза. Далее, разрыв  $\phi$  на разрезе

---

\* Это типичное условие, налагаемое на амплитуду упругого рассеяния из унитарности. Например, из унитарности часто следует, что  $F(x)$  имеет вид  $F(x) \sim \frac{\exp[i\delta(x)]}{h(x)} \sin \delta(x)$ , причем  $\delta(x)$  и  $h(x)$  вещественны. Отсюда следует  $\text{Im} F(x) = |F(x)|^2 h(x)$ .

равен

$$\begin{aligned} \phi(x+i\epsilon) - \phi(x-i\epsilon) &= 2i \operatorname{Im} \phi(x+i\epsilon) = \\ &= -2i \frac{\operatorname{Im} f(x+i\epsilon)}{|f(x+i\epsilon)|^2} = -2i \frac{\operatorname{Im} F(x)}{|F(x)|^2} = -2ih(x). \end{aligned} \quad (11.79)$$

Таким образом, так же как и в расчете первоначальных дисперсионных соотношений, к функции

$$\phi(z) = -\frac{1}{\pi} \int \frac{h(x') dx'}{x'-z}$$

можно применить формулу Коши. Решение исходной задачи равно

$$F(x) = \frac{1}{\phi(x+i\epsilon)} = -\left[ \frac{1}{\pi} \int \frac{h(x') dx'}{x'-x-i\epsilon} \right]^{-1} \quad (11.80)$$

в случае, если  $\phi(z)$  нигде не обращается в нуль.

В качестве второго примера предположим, что функция  $g(x)$  имеет вид

$$g(x) = h^*(x) F(x), \quad (11.81)$$

причем  $h(x) = e^{i\delta} \sin \delta$ , а  $\delta(x)$  — заданная вещественная функция\*. Еще раз обратимся к соотношению

$$f(z) = \frac{1}{\pi} \int \frac{h^*(x') F(x') dx'}{x'-z}$$

и заметим, что  $f(x+i\epsilon) - f(x-i\epsilon) = 2ih^*(x) F(x)$ . Следовательно, дисперсионное соотношение можно записать в виде

$$\frac{f(x+i\epsilon) - f(x-i\epsilon)}{2ih^*(x)} = f(x+i\epsilon).$$

Вследствие тождества  $1 - 2ih^*(x) = \exp[-2i\delta(x)]$  это равенство записывается в виде

$$\frac{f(x+i\epsilon)}{f(x-i\epsilon)} = \exp[2i\delta(x)].$$

Вместо обратной величины  $f$  рассмотрим теперь логарифм  $f$ :  $L(z) = \ln f(z)$ . Тогда  $L(x+i\epsilon) - L(x-i\epsilon) = 2i\delta(x)$ , где  $L$  — аналитическая функция  $z$  (в случае если  $f$  не обращается в нуль) всюду, кроме разреза. Следовательно,

$$L(z) = \frac{1}{\pi} \int \frac{\delta(x') dx'}{x'-z}$$

и

$$F(x) = \exp[L(x+i\epsilon)] = \exp\left[\frac{1}{\pi} \int \frac{\delta(x') dx'}{x'-x-i\epsilon}\right]. \quad (11.82)$$

\* Это снова типичное условие, которое налагают на амплитуду рассеяния из унитарности.

# ГЛАВА 12

## ВАРИАЦИОННОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

### 12.1. УРАВНЕНИЕ ЭЙЛЕРА — ЛАГРАНЖА

Основная задача вариационного исчисления состоит в том, чтобы найти функцию  $y(x)$  так, чтобы функционал, или функция этой функции, не менялся при малых изменениях  $y(x)$ . Глава начинается с обычной демонстрации того факта, как простая вариационная задача приводит к дифференциальному уравнению Эйлера — Лагранжа.

Покажем на нескольких примерах основную проблему вариационных расчетов. Рассмотрим функцию

$$F(y, dy/dx, x) \quad (12.1)$$

и интеграл

$$I = \int_a^b F(y, dy/dx, x) dx = I[y(x)]. \quad (12.2)$$

Такой интеграл часто называют **функционалом**. Он представляет собой обобщение функции, так как определяет число, зависящее от функции, а не от другого числа.

Требуется выбрать такую функцию  $y(x)$ , чтобы  $I[y(x)]$  был максимален, или минимален, или (в более общем случае) стационарен, т. е. нужно найти  $y(x)$ , чтобы при замене  $y(x) \rightarrow y(x) + \xi(x)$  с достаточно малым  $\xi$  величина  $I$  не менялась в линейном приближении по  $\xi$ .

Для того чтобы привести эту задачу к задаче определения экстремума обычной функции, рассмотрим смещение

$$y(x) \rightarrow y(x) + \alpha\eta(x), \quad (12.3)$$

причем  $\alpha$  мало, а  $\eta(x)$  — произвольная функция. Если величина  $I[y(x)]$  имеет экстремум, то в этой точке

$$\left. \frac{dI}{d\alpha} \right|_{\alpha=0} = 0 \quad (12.4)$$

для всех  $\eta(x)$ .

Теперь

$$I(\alpha) = \int_a^b F(y + \alpha\eta, y' + \alpha\eta', x) dx = \\ = I(0) + \alpha \int_a^b \left( \frac{\partial F}{\partial y} \eta + \frac{\partial F}{\partial y'} \eta' \right) dx + O(\alpha^2). \quad (12.5)$$

Итак, мы требуем (для всех  $\eta$ ) выполнения равенства

$$\int_a^b \left( \frac{\partial F}{\partial y} \eta + \frac{\partial F}{\partial y'} \eta' \right) dx = 0. \quad (12.6)$$

Чтобы упростить задачу, наложим дальнейшее условие. Будем рассматривать только такие вариации, которые

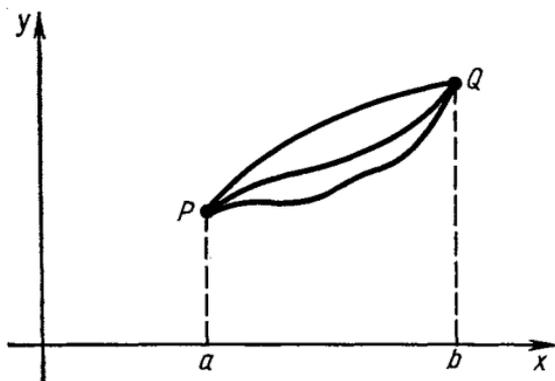


Рис. 12.1. Вариационные кривые  $y(x)$ , связывающие фиксированные конечные точки  $P$  и  $Q$ .

исчезают на концах интервала  $a$  и  $b$ , т. е. из всех функций, соединяющих две фиксированные точки  $P$  и  $Q$ , отберем функции, обеспечивающие стационарность  $I[y(x)]$  (рис. 12.1). Принимая во внимание обозначение (12.3), имеем  $\eta(a) = \eta(b) = 0$ .

Проинтегрируем теперь по частям второй член в (12.6); тогда это уравнение приобретает вид

$$0 = \eta \frac{\partial F}{\partial y'} \Big|_a^b + \int_a^b \left( \frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y'} \right) \eta dx. \quad (12.7)$$

Проинтегрированная часть обращается в нуль, так как  $\eta$  равно нулю на обоих концах. Следовательно, если инте-

грал должен равняться нулю для произвольных  $\eta(x)$ , то мы должны потребовать, чтобы

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y'} = 0. \quad (12.8)$$

Левую часть этого уравнения часто пишут в виде  $\delta F/\delta y$  и называют вариационной или функциональной производной  $F$  по  $y$  \*.

Дифференциальное уравнение (12.8) называется уравнением Эйлера — Лагранжа. Вместе с надлежащими крайними условиями оно эквивалентно исходной вариационной задаче.

Таким образом, многие законы физики можно формулировать либо с помощью дифференциального уравнения, либо посредством эквивалентного вариационного принципа. В классической механике хорошо известен следующий пример: вариационный принцип Гамильтона

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} L dt = 0 \quad (12.9)$$

эквивалентен уравнениям движения Лагранжа

$$\frac{\partial L}{\partial q_j} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} = 0. \quad (12.10)$$

Здесь лагранжиан  $L$  есть функция (обобщенных) координат  $q_i$ , скоростей  $\dot{q}_i$  и времени. В свою очередь, уравнения Лагранжа эквивалентны уравнениям Ньютона.

В определенных случаях можно один раз проинтегрировать уравнения Эйлера — Лагранжа. Предположим, например, что  $F$  не зависит от  $y$ . Тогда уравнение Эйлера — Лагранжа (12.8) имеет вид  $d/dx \cdot \partial F/\partial y' = 0$ , так что

$$\partial F/\partial y' = \text{const}. \quad (12.11)$$

Во втором примере предположим, что  $F$  не зависит от  $x$ . Снова можно свести уравнение Эйлера — Лагранжа к уравнению первого порядка

$$\frac{dF}{dx} = \frac{\partial F}{\partial x} + y' \frac{\partial F}{\partial y} + y'' \frac{\partial F}{\partial y'}. \quad (12.12)$$

||  
0

\* Иногда определяют выражение в левой части уравнения (12.8) как вариационную производную  $\delta I/\delta y$  от соответствующего функционала  $I$ .

Уравнение Эйлера — Лагранжа, умноженное на  $y'$ , имеет вид

$$y' \frac{\partial F}{\partial y} - y' \frac{d}{dx} \cdot \frac{\partial F}{\partial y'} = 0.$$

Добавляя и вычитая  $y'' (\partial F / \partial y')$ , получаем  $\frac{d}{dx} \left( F - y' \frac{\partial F}{\partial y'} \right) = 0$ . Это приводит к уравнению первого порядка

$$F - y' \frac{\partial F}{\partial y'} = \text{const.} \quad (12.13)$$

Рассмотрим пример. Пусть  $A$  и  $B$  — две точки на вертикальной плоскости, причем  $A$  выше  $B$ . Вдоль какой кривой, соединяющей  $A$  и  $B$ , частица скатится за кратчайшее время (без трения)? Эта знаменитая задача была предложена Джоном Бернулли. Кривая называется брахистохроной (по гречески «кратчайшее время»). Очевидное упрощение состоит в том, чтобы поместить точку  $A$  в начало координат и отсчитывать  $y$  вниз

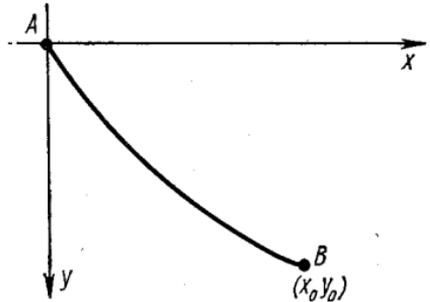


Рис. 12.2. Брахистохрона.

(рис. 12.2). Требуется минимизировать время падения. Скорость частицы равна  $v = ds/dt$ , где  $s$  обозначает длину дуги вдоль траектории. Следовательно,  $dt = ds/v$ , и полное время равно  $t = \int_A^B (ds/v)$ . Элемент длины пути равен

$ds = \sqrt{1 + y'^2} dx$ , и если частица в точке  $A$  находилась в состоянии покоя, то из закона сохранения энергии следует, что  $v = \sqrt{2gy}$ . Следовательно,

$$t = \int_0^{x_0} \sqrt{(1 + y'^2)/2gy} dx. \quad (12.14)$$

Подынтегральное выражение не содержит явно  $x$ . Опустим постоянный множитель  $\sqrt{2g}$  и обозначим  $F = \sqrt{(1 + y'^2)/y}$ . Из уравнения  $F - y' \partial F / \partial y' = \text{const}$  получаем  $y(1 + y'^2) = C$ . Выражение  $1 + y'^2$  можно упростить

подстановкой  $y' = \operatorname{ctg} \theta$ . Тогда  $y = \frac{C}{1+y'^2} = C \sin^2 \theta =$   
 $= \frac{C}{2} (1 - \cos 2\theta)$  и

$$\frac{dx}{d\theta} = \frac{1}{y'} \cdot \frac{dy}{d\theta} = C \operatorname{tg} \theta \sin 2\theta = C (1 - \cos 2\theta).$$

Интегрируя это уравнение, находим  $x = \frac{C}{2} (2\theta - \sin 2\theta)$ , где  $\theta = 0$  в начале координат,  $x = y = 0$ . Полагая  $C = 2A$  и  $2\theta = \phi$ , имеем

$$x = A (\phi - \sin \phi), \quad y = A (1 - \cos \phi). \quad (12.15)$$

Мы нашли параметрические уравнения для циклоиды. По такой кривой движется точка на окружности колеса, катящегося по оси  $x$ .

## 12.2. ОБОБЩЕНИЕ ОСНОВНОЙ ЗАДАЧИ

Довольно тривиально следующее обобщение основной задачи. Предположим, что нужно найти максимум функционала

$$I[y(x), z(x)] = \int_a^b F(y, y', z, z', x) dx, \quad (12.16)$$

причем на краях интегрирования фиксированы условия

$$y(a) = y_1, \quad y(b) = y_2; \quad z(a) = z_1, \quad z(b) = z_2.$$

Напишем уравнение Эйлера — Лагранжа для каждой зависимой переменной отдельно:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\delta F}{\delta y} &= \frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \cdot \frac{\partial F}{\partial y'} = 0, \\ \frac{\delta F}{\delta z} &= \frac{\partial F}{\partial z} - \frac{d}{dx} \cdot \frac{\partial F}{\partial z'} = 0. \end{aligned} \right\} \quad (12.17)$$

Следующим простым обобщением является включение высших производных. Предположим, что требуется найти максимум выражения

$$I[y(x)] = \int_a^b F(y, y', y'', x) dx, \quad (12.18)$$

причем  $y$  и  $y'$  фиксированы в точках  $a$  и  $b$ . Легко показать, что имеет место следующее условие:

$$\frac{\delta F}{\delta y} = \frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \cdot \frac{\partial F}{\partial y'} + \frac{d^2}{dx^2} \cdot \frac{\partial F}{\partial y''} = 0. \quad (12.19)$$

Заметим, что мы обобщили определение вариационной производной.

Приведем далее случай нескольких независимых переменных. Рассмотрим функционал

$$I[f(x, y)] = \iint_G F(f, f_x, f_y, x, y) dx dy, \quad (12.20)$$

причем  $G$  — некоторая область в плоскости  $xy$ ,  $f_x = \partial f / \partial x$  и  $f_y = \partial f / \partial y$ . Функция  $f$  должна изменяться так, чтобы ее значения на границе  $G$  оставались постоянными. Тогда условие стационарности  $I[f]$  имеет вид

$$\frac{\delta F}{\delta f} = \frac{\partial F}{\partial f} - \frac{d}{dx} \cdot \frac{\partial F}{\partial f_x} - \frac{d}{dy} \cdot \frac{\partial F}{\partial f_y} = 0. \quad (12.21)$$

Мы еще раз обобщили определение вариационной производной.

При интерпретации различных производных в уравнении (12.21) требуется некоторая осторожность. В уравнении (12.21) при расчете  $\partial F / \partial f$ ,  $\partial F / \partial f_x$  и т. д. все переменные, от которых зависит  $F$ , рассматриваются независимыми (т. е.  $f$ ,  $f_x$ ,  $f_y$ ,  $x$  и  $y$ ). При нахождении производной  $d/dx$  в  $(d/dx)(\partial F / \partial f_x)$  величины  $x$  и  $y$  являются независимыми переменными, а  $y$  считается постоянным при дифференцировании  $d/dx$ . Итак, операция  $[df(x, y)]/dx$  означает  $\partial f / \partial x$ , и уравнение Эйлера — Лагранжа (12.21) есть обычное дифференциальное уравнение в частных производных для  $f(x, y)$ .

На примере брахистохроны мы видели, что удобно выражать решение параметрически, т. е. в виде  $x = x(t)$ ,  $y = y(t)$ , где  $t$  — параметр. Следовательно, можно скорее говорить о задаче определения этих двух функций, чем о задаче определения  $y(x)$ . Если рассматривать  $x$  и  $y$  как функции  $t$ , то функционал

$$I = \int_a^b E(y, y', x) dx \quad (12.22)$$

приобретает вид

$$I = \int_{t_0}^{t_1} F\left(y, \frac{\dot{y}}{x}, x\right) \dot{x} dt = \int_{t_0}^{t_1} \mathcal{F}(x, y, \dot{x}, \dot{y}) dt, \quad (12.23)$$

где  $\dot{x} = dx/dt$ ;  $\dot{y} = dy/dt$ ;  $\mathcal{F}(x, y, \dot{x}, \dot{y}) = \dot{x}F(y, \dot{y}/\dot{x}, x)$ . Тогда уравнения Эйлера имеют вид

$$\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial x} - \frac{d}{dt} \cdot \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \dot{x}} = 0, \quad \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial y} - \frac{d}{dt} \cdot \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \dot{y}} = 0. \quad (12.24)$$

Оказывается, что уравнения (12.24) не являются независимыми: одно из них следует из другого. Предлагаем читателю доказать, что

$$\dot{x} \left( \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial x} - \frac{d}{dt} \cdot \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \dot{x}} \right) + \dot{y} \left( \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial y} - \frac{d}{dt} \cdot \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \dot{y}} \right) = 0. \quad (12.25)$$

Рассмотрим теперь очень важное обобщение на переменные концы интегрирования. Предположим, что нужно

найти максимум функционала  $I = \int_a^b F(y, y', x) dx$ , но

величина  $y(b)$  допускается произвольной. Как и выше, если к  $y$  добавить приращение  $\eta(x)$ , то изменение  $I$  равно

$$\begin{aligned} \delta I &= \int_a^b \left( \frac{\partial F}{\partial y} \eta + \frac{\partial F}{\partial y'} \eta' \right) dx = \\ &= \eta \frac{\partial F}{\partial y'} \Big|_a^b + \int_a^b \left( \frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \cdot \frac{\partial F}{\partial y'} \right) \eta dx. \end{aligned} \quad (12.26)$$

Конечно, должно удовлетворяться уравнение Эйлера — Лагранжа; в противном случае мы могли бы найти вариацию  $\eta$  с  $\eta(b) = 0$ , которая меняла бы  $I$ . Но в дополнение к этому уравнению должно быть [из условия обращения в нуль  $\delta I$  при произвольной  $\eta(b)$ ] условие

$$\frac{\partial F}{\partial y'}(x=b) = 0. \quad (12.27)$$

Если обе концевые точки не закреплены, то  $\partial F/\partial y'$ , конечно, должно обращаться в нуль на обоих концах.

Рассмотрим другую возможность. Предположим, что  $y$  фиксирован в точке  $x = a$ , а вторая концевая точка может свободно двигаться по кривой  $g(x, y) = 0$ . Теперь

$$\delta I = \frac{\partial F}{\partial y'} \eta \Big|_a^b + \int_a^b \left( \frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \cdot \frac{\partial F}{\partial y'} \right) \eta dx + F(b) \Delta x,$$

где  $\Delta x$  — смещение верхней конечной точки (рис. 12.3). Отметим, что  $\Delta y = \eta(b) + y'(b) \Delta x$ . Требование  $\Delta g = 0$  на конце кривой приводит к условию  $\frac{\partial g}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial g}{\partial y} \Delta y = 0$ ,  $\frac{\partial g}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial g}{\partial y} (\eta + y' \Delta x) = 0$ , или  $\left( \frac{\partial g}{\partial x} + y' \frac{\partial g}{\partial y} \right) \Delta x + \frac{\partial g}{\partial y} \eta = 0$ .

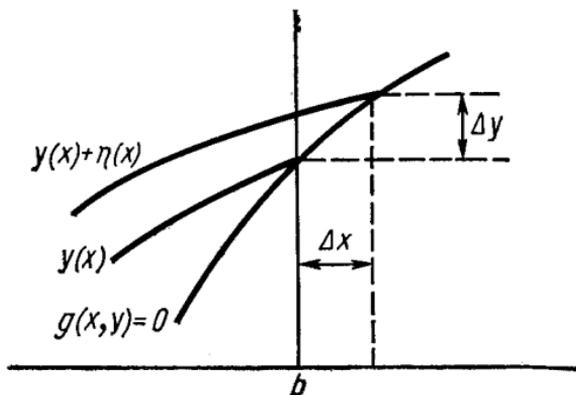


Рис. 12.3. Вариация конечной точки  $b$  вдоль кривой  $g(x, y) = 0$ .

Кроме того, из условия  $\delta I = 0$ , помимо уравнения Эйлера—Лагранжа, вытекает условие на конце  $F \Delta x + \frac{\partial F}{\partial y'} \eta = 0$  при  $x = b$ . Исключая из последних двух уравнений  $\Delta x$  и  $\eta$ , получаем искомое условие

$$\left( F - y' \frac{\partial F}{\partial y'} \right) \frac{\partial g}{\partial y} - \frac{\partial F}{\partial y'} \cdot \frac{\partial g}{\partial x} = 0. \quad (12.28)$$

Здесь все вычисляется в рассматриваемой конечной точке.

В качестве примера, где используется это условие, рассмотрим нахождение кривой, вдоль которой частица будет скатываться наиболее быстро из заданной точки на заданную кривую (а не в заданную точку, как в задаче о брахистохроне). Как и в (12.14), имеем  $F = \sqrt{(1 + y'^2)/y}$ , так что условие (12.28) в переменной конечной точке имеет вид

$$\frac{1}{\sqrt{y(1+y'^2)}} \cdot \frac{\partial g}{\partial y} - \frac{y'}{\sqrt{y(1+y'^2)}} \cdot \frac{\partial g}{\partial x} = 0,$$

или

$$y' = \left( \frac{\partial g}{\partial y} \right) \left( \frac{\partial g}{\partial x} \right)^{-1}. \quad (12.29)$$

Отсюда вытекает очевидный факт, что кривая наискорейшего спуска должна пересекать кривую «места назна-

чения» под прямым углом. Можно показать, что перпендикулярность  $y(x)$  и  $g(x)$  возникает всегда, когда подынтегральное выражение имеет вид  $f(x, y)\sqrt{1+y'^2}$ .

Рассмотрим последнее обобщение основной задачи. Оно состоит в нахождении максимума одного функционала

$$I[y(x)] = \int_a^b F(y, y', x) dx \quad (12.30)$$

при условии постоянности другого функционала

$$J[y(x)] = \int_a^b G(y, y', x) dx. \quad (12.31)$$

Иногда такие задачи называют и з о п е р и м е т р и ч е с к и м и, так как классический пример — это нахождение кривой фиксированной длины, охватывающей максимальную площадь. Другой пример — нахождение кривой  $y(x)$  заданной длины  $L$ , которая приводит к максимальному объему, получаемому вращением  $y(x)$  вокруг оси  $x$ .

Обычная техника для решения задач такого типа состоит в использовании множителей Лагранжа. Предположим, что нужно найти максимум функции двух переменных  $f(x, y)$ . Мы должны удовлетворить условиям  $f_x = 0$ ,  $f_y = 0$ . Предположим теперь, что нужно найти максимум  $f(x, y)$  при условии  $g(x, y) = \text{const}$ . Начнем с равенства  $df = 0 = f_x dx + f_y dy$ . Если бы  $dx$  и  $dy$  были независимы, то можно было бы сделать вывод  $f_x = f_y = 0$ . Однако они не являются независимыми, но подчиняются условию  $dg = g_x dx + g_y dy = 0$ . Следовательно,  $f_x/g_x = f_y/g_y$ . Если обозначить это отношение  $\lambda$ , то имеем

$$\left. \begin{aligned} f_x - \lambda g_x &= 0, \\ f_y - \lambda g_y &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (12.32)$$

Это не что иное, как уравнения, которые мы получили бы, если бы пытались найти максимум функции  $f - \lambda g$  ( $\lambda = \text{const}$ ) без дополнительных условий. Величина  $\lambda$  называется множителем Лагранжа. Конечно, решения будут зависеть от  $\lambda$ ;  $\lambda$  подбирается так, чтобы  $g(x, y)$  принимало правильное значение.

Результат имеет простой геометрический смысл. Изобразим контурную карту функции  $f(x, y)$  (рис. 12.4). Покажем также линию  $g(x, y)$ . Если бы не было никаких огра-

ничений, то решением была бы точка  $A$  («вершина горы»). А при условии, что мы должны оставаться на кривой  $g(x, y) = \text{const}$ , решением, конечно, будет точка  $B$ , где кривые  $g = \text{const}$  и  $f = \text{const}$  параллельны. Это приводит к уравнениям (12.32).

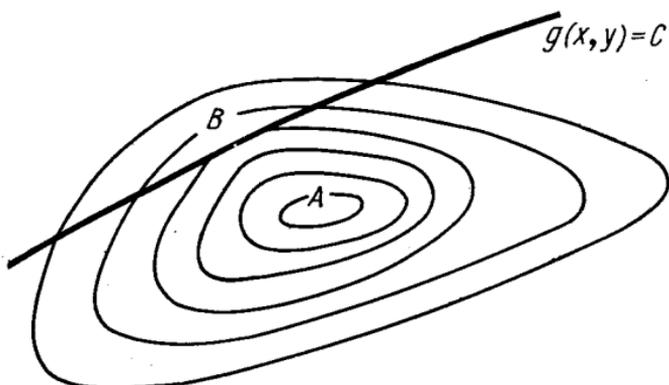


Рис. 12.4. Линии уровня для функции  $f(x, y)$  и кривая  $g(x, y) = C$ .

Эта техника применима при произвольном числе ограничений (ограничений должно быть меньше, чем независимых переменных). Если требуется найти максимум  $f(x, y, z, \dots)$  при условиях

$$\left. \begin{aligned} g_1(x, y, z, \dots) &= \text{const}, \\ g_2(x, y, z, \dots) &= \text{const}, \end{aligned} \right\} \quad (12.33)$$

нужно искать максимум функции  $f - \lambda_1 g_1 - \lambda_2 g_2 - \dots$ , где  $\lambda_i$  — неопределенные (постоянные) множители Лагранжа.

Этот метод применим также для не голономных, т. е. неинтегрируемых условий. Предположим, что на вариации наложено ограничение

$$\begin{aligned} A(x, y, \dots) dx + B(x, y, \dots) dy + \\ + C(x, y, \dots) dz + \dots = 0, \end{aligned} \quad (12.34)$$

которое нельзя проинтегрировать (или же мы не знаем, как это сделать). Тогда максимум  $f(x, y, z, \dots)$  находится из решения уравнений  $f_x = \lambda A$ ,  $f_y = \lambda B$ ,  $\dots$ .

Вернемся теперь к решению вариационной проблемы. Легко видеть, что нахождение максимума  $\int F dx$  при условии  $\int G dx = \text{const}$  состоит в решении уравнения

Эйлера — Лагранжа для  $F + \lambda G$ , где  $\lambda$  — неопределенный (постоянный) множитель Лагранжа. Для доказательства этого существует несколько способов. Рассмотрим, например, вариации двух функционалов, возникающие от изменения  $\delta y$  функции  $y(x)$ :

$$\left. \begin{aligned} \delta I &= \int \frac{\delta F}{\delta y} \delta y \, dx; \\ \delta J &= \int \frac{\delta G}{\delta y} \delta y \, dx. \end{aligned} \right\} \quad (12.35)$$

Теперь потребуем, чтобы для всех  $\delta y$ , таких, что  $\delta J = 0$ , величина  $\delta I$  также обращалась бы в нуль. Ясно, что это возможно только в том случае, когда отношения  $\delta F/\delta y$  и  $\delta G/\delta y$  постоянны и не зависят от  $x$ . Это эквивалентно требованию стационарности интеграла

$$\int (F + \lambda G) \, dx. \quad (12.36)$$

Другой способ получения сформулированного выше результата состоит в использовании следующих аргументов:

1. Мы хотим найти функцию  $y(x)$ , которая обеспечивает максимум  $I[y(x)] = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y') \, dx$ , причем вариации  $\delta y(x)$  ограничены условием

$$J[y(x)] = \int_{x_0}^{x_1} G(x, y, y') \, dx = J_0 = \text{const.}$$

2. Эквивалентная задача состоит в том, чтобы найти функцию  $y(x)$ , которая обеспечивает максимум  $I[y(x)] + \lambda J[y(x)]$  при указанных выше ограниченных вариациях. Здесь  $\lambda$  постоянна.

3. Функция  $y(x, \lambda)$ , которая обеспечивает максимум выражения  $I + \lambda J$  для произвольных вариаций  $\delta y$ , находится из обычного уравнения Эйлера — Лагранжа для подынтегрального выражения  $F + \lambda G$ .

4. Если найдено значение  $\lambda_1$ , для которого это решение  $y(x, \lambda_1)$  удовлетворяет условию  $J[y(x, \lambda_1)] = J_0$ , то оно также обеспечивает максимум  $I + \lambda J$  для ограниченных вариаций и есть не что иное, как решение всей задачи.

### 12.3. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ НА СОБСТВЕННЫЕ ЗНАЧЕНИЯ С ПОМОЩЬЮ ВАРИАЦИОННОГО ИСЧИСЛЕНИЯ

Предположим, что требуется решить определенное дифференциальное уравнение. Часто оказывается, что можно придумать функционал, для которого уравнение Эйлера — Лагранжа является рассматриваемым дифференциальным уравнением. Рассмотрим, например, уравнение Лапласа  $\nabla^2\phi = 0$  в объеме  $V$  и с  $\phi$ , заданным на границе объема  $V$ . Это эквивалентно нахождению минимума функционала

$$I[\phi(x)] = \frac{1}{2} \int_V (\nabla\phi)^2 d^3x, \quad (12.37)$$

что можно легко проверить. Подынтегральное выражение (12.37) равно

$$F = \frac{1}{2} (\nabla\phi)^2 = \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\partial\phi}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial\phi}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial\phi}{\partial z} \right)^2 \right],$$

так что  $\partial F / \partial\phi = 0$ ,  $\partial F / \partial(\partial\phi/\partial x) = \partial\phi/\partial x$  и т. д., и уравнение Эйлера — Лагранжа имеет вид

$$\sum_{xyz} \frac{d}{dx} \cdot \frac{\partial F}{\partial(\partial\phi/\partial x)} = \nabla^2\phi = 0.$$

Рассмотрим другой пример — уравнение Штурма — Лиувилля (9.9)

$$\frac{d}{dx} \left[ p(x) \frac{du}{dx} \right] - q(x) u(x) + \lambda\rho(x) u(x) = 0 \quad (a < x < b). \quad (12.38)$$

Оно является уравнением Эйлера — Лагранжа для функционала

$$I[u(x)] = \int_a^b [pu'^2 + (q - \lambda\rho)u^2] dx. \quad (12.39)$$

Однако это самая лучшая форма, так как  $\lambda$ , вообще говоря, неизвестно. Другой путь состоит в нахождении минимума

$$I[u(x)] = \int_a^b (pu'^2 + qu^2) dx \quad (12.40)$$

при условии

$$J[u(x)] = \int_a^b \rho u^2 dx = \text{const.} \quad (12.41)$$

Итак, собственное значение  $\lambda$  имеет смысл множителя Лагранжа. Так как равенство (12.41) есть нормировочное условие для  $u(x)$ , то ясно, что эта последняя вариационная процедура эквивалентна нахождению минимума

$$K[u(x)] = \frac{I[u(x)]}{J[u(x)]}. \quad (12.42)$$

Далее, если умножить уравнение (12.38) на  $u(x)$ , проинтегрировать от  $a$  до  $b$  и выполнить интегрирование по частям, то видим, что экстремальное значение  $K(u)$  в действительности равно собственному значению  $\lambda$ .

Можно также показать [7], что собственные значения  $\lambda_n$  дифференциального уравнения Штурма — Лиувилля имеют следующие свойства: 1) существует наименьшее собственное значение  $\lambda_0$ ; 2) если  $n \rightarrow \infty$ , то  $\lambda_n \rightarrow +\infty$ ; 3) более точно — если  $n \rightarrow \infty$ , то  $\lambda_n \sim \text{const} \cdot n^2$ . Теперь, согласно (12.42), экстремальные значения функционала,

$$K[u(x)] = \frac{\int_a^b (\rho u'^2 + qu^2) dx}{\int_a^b \rho u^2 dx} \quad (12.43)$$

являются собственными значениями  $\lambda_n$ . Таким образом, абсолютный минимум  $K$  равен наименьшему собственному значению  $\lambda_0$ . Это очень мощный метод для нахождения наинизшего собственного значения. Метод легко обобщается на задачи в пространстве нескольких измерений.

Отметим, что пробная функция  $u(x)$ , справедливая с точностью до членов первого порядка, при подстановке в (12.43) приводит к приближенному собственному значению, справедливому с точностью до членов второго порядка. Чтобы убедиться в этом, положим

$$u = u_0 + c_1 u_1 + c_2 u_2 + \dots, \quad (12.44)$$

где  $u_i$  — точные собственные функции, а  $c_i$  малы. Если  $u_i$  нормированы, то  $u$  также нормировано с точностью до

членов второго порядка. Тогда оценка  $\lambda_0$  имеет вид  $\int_a^b [p(u'_0 + u'_1 c_1 + \dots)^2 + q(u_0 + c_1 u_1 + \dots)^2] dx$ . Но  $\int_a^b (p u_i'^2 + q u_i^2) dx = \lambda_i$  и  $\int_a^b (p u'_i u'_j + q u_i u_j) dx = 0$  для  $i \neq j$  (докажите это!). Следовательно, оценка  $\lambda_0$  приобретает вид

$$(\lambda_0 + c_1^2 \lambda_1 + c_2^2 \lambda_2 + \dots) [1 + O(c^2)]. \quad (12.45)$$

Как утверждалось, она отличается от  $\lambda_0$  членами второго порядка. Интересно вычислить члены второго порядка.

Для этого нужно знать также  $\int_a^b p u^2 dx = 1 + c_1^2 + c_2^2 + \dots$

Оценка (12.43) приобретает в этом случае вид

$$K = \frac{\lambda_0 + c_1^2 \lambda_1 + c_2^2 \lambda_2 + \dots}{1 + c_1^2 + c_2^2 + \dots},$$

$$K = \lambda_0 + c_1^2 (\lambda_1 - \lambda_0) + c_2^2 (\lambda_2 - \lambda_0) + \dots$$

Этот результат отражает типичные особенности вариационного расчета, что  $K$  не может быть меньше  $\lambda_0$  и что  $K$  равно  $\lambda_0$  только в случае, когда все  $c_i = 0$ , т. е.  $u = u_0$ .

**Пример.** Оценим наименьшее собственное значение  $\lambda$  уравнения

$$\frac{d^2 u}{dx^2} + \lambda u = 0, \quad u = 0 \text{ при } x = 0 \text{ и } x = 1. \quad (12.46)$$

Правильный ответ, конечно,  $\lambda = \pi^2$ .

Рассмотрим пробную функцию  $u = x(1-x)$ . Тогда, согласно вариационному принципу,  $\lambda \leq \int_0^1 u'^2 dx / \int_0^1 u^2 dx = (1/3)/(1/30) = 10$ , что весьма близко к  $\pi^2$  (но больше). Можно было бы улучшить эту оценку, полагая  $u = x(1-x)(1+c_1 x + \dots)$  и варьируя параметры  $c_i$ , чтобы минимизировать  $K$ .

Трудность метода состоит в выборе пробной функции. Хорошая пробная функция должна удовлетворять трем условиям: 1) удовлетворять краевым условиям; 2) быть качественно похожей на ожидаемое решение; 3) желательно, чтобы она приводила к разумно простым расчетам при нахождении функционала  $K[u(x)]$ .

**Пример.** В качестве примера дадим оценку наимизшей частоты круглой мембраны радиусом  $a$ :

$$\left. \begin{aligned} \nabla^2 u + k^2 u &= 0; \quad k^2 = \omega^2/c^2; \\ k^2 &\leq \frac{\int (\nabla u)^2 dx dy}{\int u^2 dx dy}. \end{aligned} \right\} \quad (12.47)$$

Попытаемся искать  $u = 1 - r/a$ . Тогда вариационная оценка имеет вид  $k^2 \leq \pi/(\pi a^2/6) = 6/a^2$ . Правильное наимизшее значение равно  $k^2 = (2,405 \dots /a)^2 \approx 5,78/a^2$ .

**Пример.** В качестве последнего примера рассмотрим так называемый вариационный принцип Рэлея — Ритца для определения наимизшего собственного значения энергии в уравнении Шредингера

$$H\psi = E\psi, \quad (12.48)$$

где  $H$  — гамильтониан, или оператор энергии. Соответствующая вариационная задача состоит в нахождении минимума функционала

$$\psi \cdot H\psi / \psi \cdot \psi. \quad (12.49)$$

Например, попытаемся найти энергию основного состояния (наимизшую энергию) для квантовомеханического гармонического осциллятора; уравнение Шредингера имеет вид

$$H\psi = -\frac{d^2\psi}{dx^2} + x^2\psi = E\psi \quad (-\infty < x < \infty). \quad (12.50)$$

В качестве пробной функции возьмем  $\psi = (1 + \alpha x^2) \times \exp(-x^2)$ . Тогда

$$E \leq \frac{\psi \cdot H\psi}{\psi \cdot \psi} = \frac{\frac{5}{4} - \frac{\alpha}{8} + \frac{43\alpha^2}{64}}{1 + \frac{\alpha}{2} + \frac{3\alpha^2}{16}}.$$

Минимум находится с помощью решения квадратного уравнения  $23\alpha^2 + 56\alpha - 48 = 0$ ,  $\alpha = 0,6718$ . Это дает  $E < 1,034$  (правильный ответ  $E = 1$ ). Этот метод применим в случае, когда  $H$  — эрмитов оператор (см. разд. 9.2).

Все, что мы обсуждали, касается только наимизшего собственного значения. Но, как, например, использовать вариационный принцип для нахождения второго собственного значения? Для этого выполним такой же вариационный расчет, но ограничимся пробными функциями, орто-

гональными к собственной функции наимизшего состояния. Очевидно обобщение на собственные функции более высоких состояний.

Матрицы также имеют собственные значения. Как для них выполняются вариационные расчеты? Аналогия очевидна. Предположим, что нужно найти максимум функции

$$I(x) = \frac{\sum_{ij} M_{ij} x_i x_j}{\sum_i x_i^2}, \quad (12.51)$$

или, эквивалентно, максимум  $\sum_{ij} M_{ij} x_i x_j$  при условии  $\sum_i x_i^2 = \text{const}$ . Получающиеся уравнения можно записать в виде

$$Mx = \lambda x, \quad (12.52)$$

причем собственное значение  $\lambda$  снова выступает как множитель Лагранжа.

Вариационный подход позволяет продемонстрировать полноту собственных функций уравнения Штурма — Лиувилля. Предположим, что мы ищем функцию  $f(x)$ , которую хотим представить как линейную комбинацию собственных функций  $u_i(x)$  уравнения Штурма — Лиувилля. Функции  $u_i$  подчиняются условию ортонормированности  $\int_a^b u_i u_j \rho dx = \delta_{ij}$ . Тогда вычисляют

$$f(x) = \sum_i c_i u_i(x), \quad c_i = \int_a^b u_i f \rho dx. \quad (12.53)$$

Чтобы проверить это разложение, положим

$$\Delta_n(x) = f(x) - \sum_{i=1}^n c_i u_i(x) \quad (12.54)$$

и

$$\delta_n^2 = \int_a^b \Delta_n^2 \rho dx. \quad (12.55)$$

Тогда функция  $\psi_n(x) = \Delta_n(x)/\delta_n$  является нормированной функцией, которая ортогональна к  $u_1, u_2, \dots, u_n$ . Теперь

минимум функционала

$$I[\psi(x)] = \int_a^b (p\psi'^2 + q\psi^2) dx,$$

находимый при условии, что  $\psi$  нормирована и ортогональна к первым  $n$  собственным функциям  $u_i(x)$ , равен  $\lambda_{n+1}$ . Таким образом,  $I[\psi_n(x)] \geq \lambda_{n+1}$  или

$$\frac{I[\Delta_n(x)]}{\delta_n^2} \geq \lambda_{n+1}. \quad (12.56)$$

Но легко видеть, что  $I[\Delta_n(x)]$  остается конечным, когда  $n \rightarrow \infty$ . Сначала отметим, что для любой функции  $g(x)$ , удовлетворяющей краевым условиям, простое интегрирование по частям дает  $I[g(x)] = \int_a^b g(x) [Lg(x)] dx$ , где  $L$  — дифференциальный оператор Штурма — Лиувилля,  $L = -\frac{d}{dx} p \frac{d}{dx} + q$ . Тогда

$$\begin{aligned} I[\Delta_n] &= \int_a^b f [Lf] dx - 2 \sum_{i=1}^n c_i \int_a^b f [Lu_i] dx + \\ &+ \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n c_i c_j \int_a^b u_i [Lu_j] dx = I[f] - \sum_{i=1}^n \lambda_i c_i^2. \end{aligned}$$

Так как  $I[\Delta_n]$  положителен, как и  $\lambda_i$  для достаточно больших  $i$ , то конечность  $I[\Delta_n]$  очевидна.

Теперь из (12.56) видим, что  $\lim_{n \rightarrow \infty} \delta_n^2 = 0$ , т. е.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b \left[ f(x) - \sum_{i=1}^n c_i u_i(x) \right]^2 \rho dx = 0. \quad (12.57)$$

Обычно формулируют этот результат, говоря, что ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n u_n(x) \quad (12.58)$$

сходится «в среднем» к  $f(x)$ . Для всех физических вопросов это столь же хорошо, как и обычная («в каждой точке») сходимость.

Закончим эту главу указанием, как можно применять вариационные принципы к интегральным уравнениям. Задача нахождения максимума (или минимума) функционала

$$I[\phi(x)] = \int_a^b \int_a^b K(x, y) \phi(x) \phi(y) dx dy, \quad (12.59)$$

$$K(x, y) = K(y, x)$$

при условии нормировки

$$\int_a^b \phi^2(x) dx = \text{const} \quad (12.60)$$

дает непосредственно результат

$$\lambda \int_a^b K(x, y) \phi(y) dy = \phi(x) \quad (12.61)$$

(докажите это). Уравнение (12.61) — линейное интегральное уравнение в стандартной форме. Отметим, что для функции  $\phi(x)$ , удовлетворяющей этому интегральному уравнению, функционал

$$\frac{I[\phi(x)]}{\int_a^b \phi^2(x) dx} = \frac{1}{\lambda}. \quad (12.62)$$

Таким образом, собственные значения симметричного ядра можно характеризовать вариационным способом, подобно тому как это делалось для собственных значений дифференциального уравнения Штурма — Лиувилля.

# Г Л А В А 13

## ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ

### 13.1. ИНТЕРПОЛЯЦИЯ

Предположим, что по таблице значений некоторой функции  $f(x)$  (табл. 13.1) следует найти  $\sin x$  для значений  $x$ , не указанных в таблице, например для  $x = 0,1432$ . Можно решать задачу графически, рисуя гладкую кривую по четырем заданным точкам и находя затем значения для промежуточных величин  $x$ .

ТАБЛИЦА 13.1

$x$	0	0,1	0,2	0,3
$\sin x$	0,00000	0,09983	0,19867	0,29552

Для удобства с точки зрения аналитичности гладкую кривую обычно представляют в виде полинома

$$f(x) = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + \dots \quad (13.1)$$

и используют данные точки для вычисления коэффициентов  $A, B, C, D$ . В рассматриваемом случае заданы четыре точки, так что можно ограничиться коэффициентами по  $D$  и положить все последующие равными нулю.

Непосредственный расчет коэффициентов таким способом весьма утомителен: для нахождения интерполяции нужно решать четыре совместных линейных уравнения. Можно посоветовать несколько путей к сокращению выкладок. Отметим основную идею.

Предположим, что задана таблица значений  $y = f(x)$  (табл. 13.2), в которой значения  $x$  отстоят друг от друга

ТАБЛИЦА 13.2

$x_1$	$x_2$	$x_3$	...
$y_1$	$y_2$	$y_3$	...

на одинаковом расстоянии (как в большинстве реальных таблиц), т. е.

$$x_2 = x_1 + h, x_3 = x_2 + h = x_1 + 2h \text{ и т. д.} \quad (13.2)$$

Определим теперь оператор  $E$  равенством  $Ey_n = y_{n+1}$  и оператор  $\Delta$  равенством  $\Delta = E - 1$ . Таким образом,

$$\Delta y_n = (E - 1) y_n = y_{n+1} - y_n, \quad (13.3)$$

$$\begin{aligned} \Delta^2 y_n = \Delta y_{n+1} - \Delta y_n = (y_{n+2} - y_{n+1}) - \\ - (y_{n+1} - y_n). \end{aligned} \quad (13.4)$$

Заметим, что

$$y_2 = y(x_1 + h) = Ey_1, y_3 = y(x_1 + 2h) = E^2 y_1$$

или, в общем случае,

$$y_{n+1} = y(x_1 + nh) = E^n y_1. \quad (13.5)$$

Если в этом уравнении мы формально положим  $n$  произвольным числом (не обязательно целым), то получим интерполяционную формулу:

$$\begin{aligned} y(x_1 + \alpha h) = E^\alpha y_1 = (1 + \Delta)^\alpha y_1 = \\ = \left[ 1 + \alpha \Delta + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} \Delta^2 + \dots \right] y_1. \end{aligned} \quad (13.6)$$

В этом бесконечном ряде в общем случае удерживают только несколько первых членов; тогда получают такое же приближение для  $y(x)$ , что и приближение полиномами, упомянутое в начале этого раздела. Если, например, пренебречь третьей и более высокими разностями, то мы находим

$$\begin{aligned} y(x_1 + \alpha h) &\approx \left[ 1 + \alpha \Delta + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} \Delta^2 \right] y_1 \approx \\ &\approx \left[ 1 + \alpha(E-1) + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} (E-1)^2 \right] y_1 \approx \\ &\approx \left[ \frac{(\alpha-1)(\alpha-2)}{2} + \alpha(2-\alpha)E + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} E^2 \right] y_1 \approx \\ &\approx \frac{(\alpha-1)(\alpha-2)}{2} y_1 + \alpha(2-\alpha) y_2 + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} y_3. \end{aligned} \quad (13.7)$$

Если пользуются таблицей с первой и второй разностями, то наиболее удобна, вероятно, первая форма; в общем случае — последняя.

При внимательном исследовании последней формы видно, что ее можно было бы написать сразу из следующих

соображений. Так как мы предполагали третью и более высокие разности равными нулю, то считаем  $y$  квадратичным по  $\alpha$ . Далее, при  $x = x_2$  ( $\alpha = 1$ )  $y = y_2$ , а при  $x = x_3$  ( $\alpha = 2$ )  $y = y_3$ . В том и в другом случаях в ответе не содержится величины  $y_1$ , так что коэффициент при  $y_1$  должен равняться  $\text{const} \cdot (\alpha - 1)(\alpha - 2)$ . Константа равна  $1/2$ , так чтобы  $y = y_1$  при  $x = x_1$  ( $\alpha = 0$ ). С помощью аналогичных соображений можно найти другие коэффициенты в последней строке (13.7).

Рассмотрим другой пример, использующий такие же соображения. Напишем сразу соответствующую формулу, где удерживаются также и третьи разности

$$y = \frac{(\alpha-1)(\alpha-2)(\alpha-3)}{-6} y_1 + \frac{\alpha(\alpha-2)(\alpha-3)}{2} y_2 + \\ + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-3)}{-2} y_3 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{6} y_4. \quad (13.8)$$

Коэффициенты в формулах (13.7) и (13.8) называются интерполяционными коэффициентами Лагранжа; имеются большие таблицы, в которых они выражены как функции  $\alpha$ .

В проведенном выше анализе величины независимой переменной предполагались равноотстоящими друг от друга. Однако нетрудно написать коэффициенты Лагранжа и в общем случае. Например, из таблички

$$\begin{array}{cc} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{array}$$

можно образовать для  $y$  «приближение гладкой кривой»:

$$y(x) = \frac{(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)} y_1 + \frac{(x-x_1)(x-x_3)}{(x_2-x_1)(x_2-x_3)} y_2 + \\ + \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_1)(x_3-x_2)} y_3. \quad (13.9)$$

Иногда необходимо оценить ошибку данной интерполяционной формулы. Продемонстрируем метод оценки на формуле (13.7):

$$y = y_1 + \alpha \Delta y_1 + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} \Delta^2 y_1.$$

По теореме Тейлора

$$y_2 = y_1 + h y_1' + \frac{1}{2} h^2 y_1'' + \frac{1}{6} h^3 y_1''' + \dots,$$

$$y_3 = y_1 + 2h y_1' + 2h^2 y_1'' + \frac{4}{3} h^3 y_1''' + \dots$$

Тогда

$$\left. \begin{aligned} \Delta y_1 &= y_2 - y_1 = hy'_1 + \frac{1}{2} h^2 y''_1 + \frac{1}{6} y'''_1 h^3 + \dots, \\ \Delta^2 y_1 &= y_3 - 2y_2 + y_1 = h^2 y''_1 + h^3 y'''_1 + \dots \end{aligned} \right\} \quad (13.10)$$

Таким образом, оценкой (13.7) для величины  $y(x_1 + \alpha h)$  является ряд

$$\begin{aligned} & y_1 + \alpha \left( hy'_1 + \frac{1}{2} h^2 y''_1 + \frac{1}{6} h^3 y'''_1 + \dots \right) + \\ & + \frac{1}{2} \alpha (\alpha - 1) (h^2 y''_1 + h^3 y'''_1 + \dots) = \\ & = y_1 + \alpha hy'_1 + \frac{1}{2} \alpha^2 h^2 y''_1 + \frac{\alpha}{6} (3\alpha - 2) h^3 y'''_1 + \dots \quad (13.11) \end{aligned}$$

С другой стороны, (точный) ряд Тейлора для  $y(x_1 + \alpha h)$  имеет вид

$$y_1 + \alpha hy'_1 + \frac{1}{2} \alpha^2 h^2 y''_1 + \frac{1}{6} \alpha^3 h^3 y'''_1 + \dots, \quad (13.12)$$

и ошибка равна разности выражений (13.11) и (13.12), т. е.

$$\frac{\alpha}{6} (\alpha - 1) (\alpha - 2) h^3 y'''_1 + \text{малые члены.} \quad (13.13)$$

Более точно ошибка равна  $(\alpha/6) (\alpha - 1) (\alpha - 2) h^3 y'''$ , где третья производная вычисляется где-то внутри интервала  $x_1 \leq x \leq x_3$ .

Как оценить  $y'''$ ? Этот вопрос сводится к вопросу о численном дифференцировании, который тесно связан с интерполяцией. Самый легкий способ получения формул состоит во введении оператора  $D$ :

$$Dy_n = y'_n \quad (13.14)$$

(здесь снова рассматриваются аргументы функции, равноотстоящие друг от друга). Какова связь между операторами  $D$  и другими операторами  $E$  и  $\Delta$ ? Она находится с помощью ряда Тейлора

$$\begin{aligned} y_{n+1} &= Ey_n = y_n + hy'_n + \frac{1}{2} h^2 y''_n + \frac{1}{6} h^3 y'''_n + \dots = \\ &= \left( 1 + hD + \frac{1}{2} h^2 D^2 + \frac{1}{6} h^3 D^3 + \dots \right) y_n = \exp(hD) y_n. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$E = \exp(hD) \quad (13.15)$$

или

$$D = \frac{1}{h} \ln E = \frac{1}{h} \ln (1 + \Delta) = \frac{1}{h} \left( \Delta - \frac{\Delta^2}{2} + \frac{\Delta^3}{3} - \dots + \dots \right). \quad (13.16)$$

Чтобы ответить на поставленный выше вопрос о  $y'''$ , из равенства (13.16) заключаем

$$D^n \approx (\Delta/h)^n, \quad (13.17)$$

так что

$$y''' \approx \frac{1}{h^3} \Delta^3 y. \quad (13.18)$$

### 13.2. ЧИСЛЕННОЕ ИНТЕГРИРОВАНИЕ

Принцип численного интегрирования тот же, что и для численного дифференцирования и интерполяции; функция аппроксимируется полиномом, а полином интегрируется точно. В общем случае не пытаются подгонять всю функцию одним полиномом. Вместо этого интервал интегрирования делят на много малых подынтервалов и используют в каждом подынтервале свой аппроксимирующий полином.

Наиболее простой из этих методов основан на *п р а в и л е т р а п е ц и й*. Если исследуемый интеграл равен

$$\int_a^b f(x) dx, \quad (13.19)$$

то интервал  $a \leq x \leq b$  делят на  $n$  подынтервалов длиной  $h = (b - a)/n$ . В каждом подынтервале функция заменяется прямой линией, соединяющей значения функции на каждом из концов. Получаем

$$\int_a^b f(x) dx \approx h \left( \frac{1}{2} y_0 + y_1 + y_2 + \dots + y_{n-1} + \frac{1}{2} y_n \right), \quad (13.20)$$

где  $y_0 = f(a)$ ,  $y_1 = f(a + h)$ ,  $\dots$ ,  $y_{n-1} = f(b - h)$ ,  $y_n = f(b)$ .

Более точная и полезная формула называется *п р а в и л о м С и м п с о н а*. Интервал  $a \leq x \leq b$  делится на четное число подынтервалов. По значениям функции в точках  $a$ ,  $a + h$ ,  $a + 2h$  строится одна парабола, другая — по значениям в точках  $a + 2h$ ,  $a + 3h$ ,  $a + 4h$  и т. д.

Чему равна площадь под параболой (рис. 13.1)? Пусть площадь равна  $A = h(\alpha y_1 + \beta y_2 + \gamma y_3)$ . Требуется найти коэффициенты  $\alpha, \beta, \gamma$ . Из соображений симметрии  $\alpha = \gamma$ . Рассмотрим параболу  $y = x^2$  от  $-1$  до  $+1$ . Тогда  $y_1 = y_3 = 1, y_2 = 0$  и  $A = 2/3 = \alpha + \gamma$ . Следовательно,

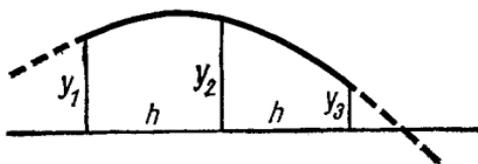


Рис. 13.1. Элемент площади в правиле Симпсона.

$\alpha = \gamma = 1/3$ . Чтобы найти  $\beta$ , рассмотрим случай  $y_1 = y_2 = y_3 = 1$ . Аппроксимирующая кривая — это горизонтальная линия  $y = 1$ , и  $A = 2h = h(1/3 + \beta + 1/3)$ . Следовательно,  $\beta = 4/3$ , и получаем формулу

$$A = (h/3)(y_1 + 4y_2 + y_3). \quad (13.21)$$

В более общем случае интервала от  $a$  до  $b$ , причем интервал разделен на  $n$  частей, результат имеет вид

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + 2y_4 + \dots + 4y_{n-1} + y_n). \quad (13.22)$$

Чтобы повысить точность, можно было бы продолжить рассмотрение и аппроксимировать функцию кубическими кривыми. Однако на практике обычно ограничиваются правилом Симпсона, а для повышения точности увеличивают число подынтервалов.

Другой путь повышения точности состоит в отказе от требования равноотстоящих абсцисс и подгонке положения точек, в которых вычисляется функция, а также коэффициентов так, чтобы аппроксимировать функцию полиномом максимально возможного порядка. Например, с помощью правила Симпсона для трех точек мы получаем формулу, точно описывающую полиномы второго порядка. Но если точки  $x_i$ , в которых вычисляется функция, являются свободными параметрами, то имеется всего шесть параметров, и можно описать любой полином до пятого порядка. Этот подход называется *интегрированием по Гауссу*. Кратко рассмотрим его.

Мы хотим сконструировать формулу для интеграла

$$\int_a^b f(x) dx \approx c_1 f(x_1) + c_2 f(x_2) + c_3 f(x_3), \quad (13.23)$$

которая была бы точной для полиномов пятого или более низкого порядка. Величины  $c_i$  и  $x_i$  можно было бы определить непосредственно из этого условия, однако получающиеся шесть уравнений с шестью неизвестными весьма сложны (например, они нелинейны по  $x_i$ ). Вместо этого используем трюк, позволяющий вычислить сразу  $x_i$  ( $c_i$  вычислим позже).

Как выбрать  $x_i$ ? Рассмотрим полином, корни которого равны  $x_i$ :

$$g(x) = (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3). \quad (13.24)$$

Тогда гауссово интегрирование по формуле (13.23), примененное к интегралу

$$\int_a^b g(x) dx, \quad (13.25)$$

конечно, дает нуль. Более того, интегрирование по Гауссу интеграла

$$\int_a^b g(x) \phi(x) dx \quad (13.26)$$

дает нуль для любой функции  $\phi(x)$ .

Рассматриваемый метод предполагается точным для полиномов до пятого порядка. Так как  $g(x)$  — третьего порядка, то равенство

$$\int_a^b g(x) dx = 0 \quad (13.27)$$

должно быть точным. Аналогично

$$\int_a^b xg(x) dx = 0 \quad (13.28)$$

и

$$\int_a^b x^2g(x) dx = 0 \quad (13.29)$$

должны быть точными равенствами. Интеграл  $\int_a^b x^3 g(x) dx$  не обязательно равен нулю, хотя и его оценка по Гауссу дает нуль. Это происходит по той причине, что  $x^3 g(x)$  — полином шестого порядка, а наша формула годится только для полиномов до пятого порядка.

Три условия «ортогональности», (13.27), (13.28) и (13.29), определяют  $g(x)$  с точностью до произвольного множителя и тем самым определяют  $x_i$ . Без потери общности можно выбрать  $a = -1$ ,  $b = +1$ . Тогда  $g(x)$  — полином Лежандра  $P_3(x)$ . Очевидно обобщение результата на случай числа точек, большего трех.

Из аналогичных соображений определяются веса, или коэффициенты  $c_i$  в (13.23), т. е. мы требуем, чтобы метод был точным для  $f(x) = 1, x, x^2$ . Это приводит к трем уравнениям

$$\left. \begin{aligned} b - a &= c_1 + c_2 + c_3; \\ \frac{1}{2}(b^2 - a^2) &= c_1 x_1 + c_2 x_2 + c_3 x_3; \\ \frac{1}{3}(b^3 - a^3) &= c_1 x_1^2 + c_2 x_2^2 + c_3 x_3^2. \end{aligned} \right\} \quad (13.30)$$

Так как  $x_i$  теперь известны как нули  $P_3(x)$ , то из этих трех уравнений можно определить  $c_1, c_2, c_3$ .

Интегрирование по Гауссу можно обобщить, введя весовую функцию  $\rho(x)$ , т. е. сконструировать формулу

$$\int_a^b f(x) \rho(x) dx \approx c_1 f(x_1) + c_2 f(x_2) + \dots + c_n f(x_n), \quad (13.31)$$

где  $2n$  констант  $c_i$  и  $x_i$  выбираются так, чтобы формула была точной для  $f(x) = 1, x, x^2, \dots, x^{2n-1}$ . Дальнейшие выкладки аналогичны приведенным выше; например, величины  $x_i$  являются корнями полинома  $g_n(x)$ , определяемого из равенств

$$\left. \begin{aligned} \int_a^b g_n(x) \rho(x) dx &= 0, \quad \int_a^b g_n(x) \rho(x) x dx = 0, \quad \dots \\ \dots, \quad \int_a^b g_n(x) \rho(x) x^{n-1} dx &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (13.32)$$

Если  $\rho \neq 1$ , то  $g_n$ , конечно, больше не будет полиномом Лежандра  $P_n$ .

Иногда требуется вычислить несобственный интеграл вида

$$I = \int_a^{\infty} f(x) dx. \quad (13.33)$$

Есть несколько способов численного расчета такого интеграла.

Прежде всего можно использовать правило Симпсона

$$I = \frac{1}{3} h \left[ f(a) + 4f(a+h) + 2f(a+2h) + \dots \right], \quad (13.34)$$

производя сложение до тех пор, пока следующие добавки не окажутся пренебрежимо малыми. Этот метод работает лучше всего, если  $f(x)$  стремится к нулю быстро и плавно.

Другой подход — это интегрирование по Гауссу с соответственно выбранной весовой функцией. Например, если подынтегральное выражение ведет себя примерно как  $\exp(-x)$ , то полезна формула

$$\int_a^{\infty} f(x) \exp(-x) dx \approx c_1 f(x_1) + c_2 f(x_2) + \dots + c_n f(x_n). \quad (13.35)$$

Наконец, часто помогает замена переменной. Например,

$$\int_0^{\infty} f(x) dx = \int_0^1 f\left(\frac{t}{1-t}\right) \frac{dt}{(1-t)^2}. \quad (13.36)$$

Если  $f(x)$  при  $x \rightarrow \infty$  стремится к нулю по меньшей мере так же быстро, как  $1/x^2$ , то новое подынтегральное выражение конечно при  $t = 1$  и может быть проинтегрировано стандартными методами.

### 13.3. ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Существует много подходов для численного интегрирования дифференциальных уравнений. Рассмотрим только одно дифференциальное уравнение первого порядка

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \quad (13.37)$$

и приведем два типичных и широко используемых метода для его решения.

Первый — метод Рунге — Кутта. Предположим, что при  $x = x_0$   $y = y_0$ . Выберем интервал  $\delta x$  и вычислим последовательно

$$\left. \begin{aligned} k_1 &= \delta x \cdot f(x_0, y_0); \\ k_2 &= \delta x \cdot f\left(x_0 + \frac{1}{2} \delta x, y_0 + \frac{1}{2} k_1\right); \\ k_3 &= \delta x \cdot f\left(x_0 + \frac{1}{2} \delta x, y_0 + \frac{1}{2} k_2\right); \\ k_4 &= \delta x \cdot f(x_0 + \delta x, y_0 + k_3). \end{aligned} \right\} \quad (13.38)$$

Тогда при  $x = x_0 + \delta x$  величина  $y \approx y_0 + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$ . (Это похоже на правило Симпсона при интегрировании  $y'$  от  $x_0$  до  $x_0 + \delta x$ .)

Точно таким же путем можно продолжить операции для нахождения  $y$  в точке  $x_0 + 2\delta x$  и т. д.

Второй метод, метод Бэшфорта — Адамса — Милна, предполагает, что решение как-нибудь

ТАБЛИЦА 13.3

$x_0$	$y_0$	$y'_0$
$x_1 (= x_0 + \delta x)$	$y_1$	$y'_1$
$x_2 (= x_1 + \delta x)$	$y_2$	$y'_2$
$x_3 (= x_2 + \delta x)$	$y_3$	$y'_3$

начинается, т. е. что есть таблица типа табл. 13.3. Продолжаем решение следующим образом:

1. «Предсказываем»  $y_4$  равенством  $y_4 = y_0 + \frac{4}{3} \delta x (2y'_1 - y'_2 + 2y'_3)$ . [Эту формулу можно получить, выражая  $y'$  посредством  $\alpha$  ( $x = x_0 + \alpha \delta x$ ), используя написанную выше интерполяционную формулу, удерживающую третьи разности, и интегрируя затем  $y'$  для нахождения  $y_4 - y_0$ .]

2. Вычисляем  $y'_4 = f(x_4, y_4)$ .

3. «Поправляем»  $y_4$  с помощью формулы  $y_4 = y_2 + \frac{1}{3} \delta x (y'_2 + 4y'_3 + y'_4)$  (правило Симпсона).

Сравнение предсказанного и поправленного значений  $y_4$  позволяет оценить точность вычислений. Именно, погрешность предсказываемого результата равна

$$\frac{28}{90} (\delta x)^5 y^{(v)}, \quad (13.39)$$

в то время как ошибка в поправленной формуле равна

$$\frac{1}{90} (\delta x)^5 y^{(v)}. \quad (13.40)$$

Таким образом, можно сформулировать следующее правило. Если разность между предсказанным и поправленным значениями  $y_4$  меньше  $\frac{1}{4}$  в последнем десятичном знаке, то на этом расчет заканчивается. В противном случае нужно либо поправить  $y$  еще раз, либо сделать интервал  $\delta x$  меньше.

Помимо малости ошибки метод численного интегрирования должен обладать другим важным свойством — стабильностью. Покажем важность этого свойства. Для этого рассмотрим способ решения дифференциального уравнения

$$y' = f(x, y), \quad (13.41)$$

в котором используется только правило Симпсона. От таблицы

$$\begin{array}{ccc} x_0 & y_0 & y'_0 \\ x_1 & y_1 & y'_1 \end{array}$$

мы переходим к точке  $x_2$  с помощью уравнения

$$y_2 = y_0 + \frac{1}{3} \delta x (y'_0 + 4y'_1 + y'_2) = y_0 + \frac{1}{3} \delta x [y'_0 + 4y'_1 + f(x_2, y_2)]. \quad (13.42)$$

Решим это уравнение для  $y_2$  методом проб и ошибок (или иным путем) и затем точно так же перейдем к точке  $y_3$ .

Чтобы показать, что в этой кажущейся на первый взгляд весьма разумной процедуре скрыт серьезный дефект, применим ее к тривиальному дифференциальному уравнению

$$y' = \alpha y \quad (\alpha = \text{const}). \quad (13.43)$$

Формула экстраполяции  $y_2 = y_0 + \frac{1}{3} \delta x (y'_0 + 4y'_1 + y'_2)$  приобретает вид

$$y_2 = y_0 + (\alpha \delta x / 3) (y_0 + 4y_1 + y_2). \quad (13.44)$$

Это линейное разностное уравнение с постоянными коэффициентами. Такие уравнения имеют много аналогий с линейными дифференциальными уравнениями с постоянными коэффициентами (см. разд. 1.1). Стандартный подход состоит в том, чтобы найти решение в виде

$$y_n = k^n, \quad (13.45)$$

где  $k$  — константа, которую нужно определить. Подставляя (13.45) в разностное уравнение (13.44), получаем для  $k$  квадратное уравнение

$$\left(1 - \frac{1}{3}\alpha\delta x\right)k^2 - \frac{4}{3}\alpha\delta xk - \left(1 + \frac{1}{3}\alpha\delta x\right) = 0.$$

При малых  $\alpha\delta x$  его решения равны

$$k \approx \begin{cases} 1 + \alpha\delta x; \\ -1 + \frac{1}{3}\alpha\delta x. \end{cases}$$

Таким образом, общее решение разностного уравнения есть произвольная линейная комбинация  $y_n \approx (1 + \alpha\delta x)^n \approx \approx \exp(\alpha x)$  и

$$y_n \approx \left(-1 + \frac{1}{3}\alpha\delta x\right)^n \approx (-1)^n \exp(-\alpha x/3) \quad (13.46)$$

В действительности первое решение является правильным решением исходного дифференциального уравнения (13.43). Если  $\alpha$  отрицательно, то второе решение (13.46) чрезвычайно сильно осциллирует и рано или поздно уйдет от правильного решения. Итак, этот метод нестабилен. Решая дифференциальное уравнение первого порядка с помощью разностного уравнения второго порядка, мы получили лишнее нестабильное решение.

#### 13.4. КОРНИ УРАВНЕНИЙ

Часто сталкиваются с проблемой более или менее точного нахождения  $x$  из равенства

$$f(x) = 0, \quad (13.47)$$

причем  $f(x)$  достаточно сложно, так что непосредственное решение невозможно.

Простой способ решения — составление таблицы, которая содержит аргументы  $x$  вблизи желаемого корня (табл. 13.4). Тогда по отношению к обратной функции

$x$	1	2	3	4
$f(x)$	1,76	0,41	-0,16	-0,32

задача представляет собой обычную интерполяцию с неодинаковыми расстояниями между соседними значениями аргумента. Здесь можно использовать метод Лагранжа. В рассматриваемом примере корень находится с помощью уравнения, аналогичного (13.9) для четырех точек

$$\begin{aligned} & \frac{(0-0,41)(0+0,16)(0+0,32)}{(1,76-0,41)(1,76+0,16)(1,76+0,32)} \times 1 + \\ & + \frac{(0-1,76)(0+0,16)(0+0,32)}{(0,41-1,76)(0,41+0,16)(0,41+0,32)} \times 2 + \\ & + \frac{(0-1,76)(0-0,41)(0+0,32)}{(-0,16-1,76)(-0,16-0,41)(-0,16+0,32)} \times 3 + \\ & + \frac{(0-1,76)(0-0,41)(0+0,16)}{(-0,32-1,76)(-0,32-0,41)(-0,32+0,16)} \times 4 = 2,37. \end{aligned}$$

Если  $f(x)$  можно рассчитать для произвольного  $x$ , то лучше применить другой метод. Он состоит в последовательных итерациях, с помощью которых можно достичь любой степени точности. В общем случае достаточно линейной интерполяции. Например, найдем положительный корень уравнения

$$f(x) = (5-x) \exp(x) - 5 = 0. \quad (13.48)$$

Сначала вычислим  $x_1 = 5$ ,  $f(5) = -5$ ;  $x_2 = 4,5$ ,  $f(4,5) \approx \approx 40$ . На рис. 13.2 показана линейная интерполяция между этими значениями. Далее интегрируем

$$x_3 = \frac{40 \cdot 5 + 5 \cdot (4,5)}{45} = 4,944, \quad f(4,944) = 2,859;$$

$$x_4 = \frac{(2,859) \cdot 5 + 5 \cdot (4,944)}{7,859} = 4,964, \quad f(4,964) = 0,154;$$

.....

(Иногда этот способ называют методом ложного положения.)

Другой путь состоит в том, что улучшение оценки  $x$  достигается методом Ньютона, в котором используется

$f(x)$  и  $f'(x)$  (см. рис.13.3):

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}. \quad (13.49)$$

Этот метод может оказаться неудачным в случае, если  $f(x)$  вблизи нуля имеет точку перегиба или какие-либо особенности.

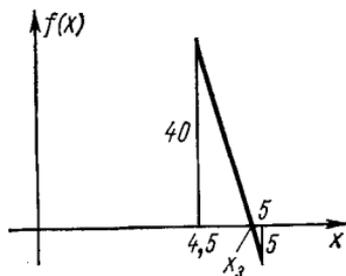


Рис. 13.2. Линейная интерполяция между точками  $(x_1, y_1)$  и  $(x_2, y_2)$  для нахождения точки  $x_3$ .

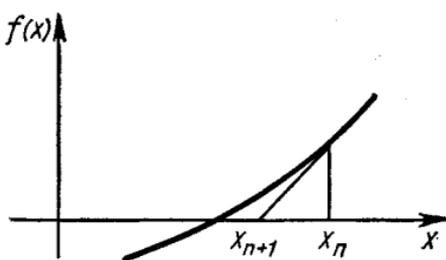


Рис. 13.3. Иллюстрация метода Ньютона для получения улучшенной оценки корня  $f(x)$ :  $x_{n+1}$ .

Очень простой способ, которым часто пытаются решать уравнение вида

$$x = f(x), \quad (13.50)$$

это непосредственная итерация

$$x_1 = f(x_0), \quad x_2 = f(x_1), \quad x_3 = f(x_2) \text{ и т. д.}$$

Если схема сходится, то часто она является самым быстрым способом оценки  $x$ . Условие сходимости требует, чтобы вблизи корня выполнялось неравенство  $|f'(x)| < 1$ .

Наконец, для нахождения корней полиномов очень полезен метод Горнера. Он основан на двух алгоритмах, первый из которых вычитает из всех корней полинома заданную константу, а второй умножает все корни полинома на 10. Наиболее удобно выполнять расчеты с отделенными коэффициентами.

Вместо подробного обсуждения метода рассмотрим пример применения этого метода.

Найдем корень уравнения

$$x^3 - 3x^2 - 2x + 7 = 0, \quad (13.51)$$

лежащий между 1 и 2. Уменьшим корни этого полинома на 1, т. е. напомним его как полином по переменной  $x' = x - 1$ . Это удобно делается с помощью повторного искусственного деления:

$$\begin{array}{r}
 1 \quad -3 \quad -2 \quad +7 \quad | \quad 1 \\
 \hline
 \phantom{1} \quad +1 \quad -2 \quad -4 \\
 \hline
 1 \quad -2 \quad -4 \quad | \quad +3 \\
 \hline
 \phantom{1} \quad +1 \quad -1 \\
 \hline
 1 \quad -1 \quad | \quad -5 \\
 \hline
 \phantom{1} \quad +1 \\
 \hline
 1 \quad | \quad 0
 \end{array}$$

(Новый полином равен  $x^3 - 5x + 3$ .) Умножим далее корни на 10. Это делается умножением коэффициента при наивысшей степени  $x$  на 1, следующего коэффициента — на 10, затем — на 100 и т. д. Таким образом, мы получаем коэффициенты

$$1 \quad +0 \quad -500 \quad +3000$$

Теперь вычтем из корней число 6

$$\begin{array}{r}
 1 \quad +0 \quad -500 \quad +3000 \quad | \quad 6 \\
 \hline
 \phantom{1} \quad +6 \quad +36 \quad -2784 \\
 \hline
 1 \quad +6 \quad -464 \quad | \quad +216 \\
 \hline
 \phantom{1} \quad +6 \quad +72 \\
 \hline
 1 \quad +12 \quad | \quad -392 \\
 \hline
 \phantom{1} \quad +6 \\
 \hline
 1 \quad | \quad +18
 \end{array}$$

Снова умножим все корни на 10 и затем вычтем из них 5:

$$\begin{array}{r}
 1 \quad +180 \quad -39\,200 \quad +216\,000 \quad | \quad 5 \\
 \quad \quad +5 \quad \quad +925 \quad -191\,375 \\
 \hline
 1 \quad +185 \quad -38\,275 \quad | \quad +24\,625 \\
 \quad \quad +5 \quad \quad +950 \\
 \hline
 1 \quad +190 \quad | \quad -37\,325 \\
 \quad \quad +5 \\
 \hline
 1 \quad | \quad +195
 \end{array}$$

Так как  $24\,625/37\,325 \approx 0,66$ , то для искомого корня получаем приближенное значение  $x \approx 1,6566$ .

### 13.5. СУММИРОВАНИЕ РЯДОВ

Прежде всего начнем с метода, в котором складывают члены ряда до тех пор, пока оставшимися членами нельзя будет пренебречь. Такой прием хорош, если ряд быстро сходится. Однако многие часто встречающиеся ряды сходятся слишком медленно, чтобы можно было применять этот метод.

Рассмотрим, например, ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^2. \quad (13.52)$$

В табл. 13.5 даны несколько первых членов. Ясно, что для получения точности в четвертом знаке после запятой нужно сложить около 100 членов.

$n$	$1/n^2$	$\Sigma$
1	1,0000	1,0000
2	0,2500	1,2500
3	0,1111	1,3611
4	0,0625	1,4236
5	0,0400	1,4636

Для оценки бесконечных рядов можно использовать несобственные интегралы. Например,

$$\int_6^{\infty} dx/x^2 < \sum_{n=6}^{\infty} 1/n^2 < \int_5^{\infty} dx/x^2. \quad (13.53)$$

Эти неравенства очевидны из рис. 13.4. Таким образом,

$$0,1667 < \sum_{n=6}^{\infty} 1/n^2 < 0,2000,$$

а комбинируя этот результат с пятью первыми членами, находим

$$1,6303 < \sum_{n=1}^{\infty} 1/n^2 < 1,6636. \quad (13.54)$$

Ситуация все еще неудовлетворительна; среднее из двух пределов 1,6470 определено не очень точно. Правильный ответ известен [см. формулу (2.37)]:  $\pi^2/6 = 1,6449 \dots$

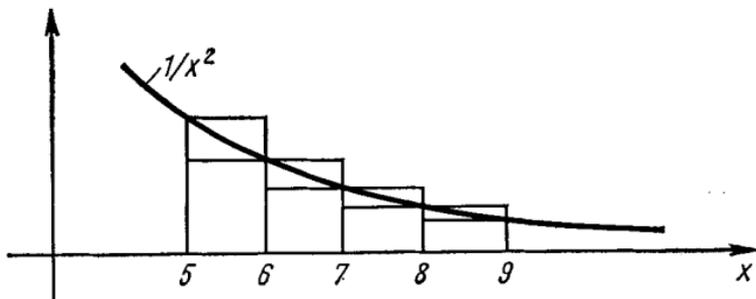


Рис. 13.4. Соотношения между рядом и интегралом, демонстрирующие неравенства (13.53).

Более точное сравнение ряда и соответствующего интеграла дает формула Эйлера — Маклорена. Ее проще всего получить с помощью операторов  $E$  и  $D$ , рассмотренных в разд. 13.1. Прежде всего напишем приближение трапеций

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) dx &\approx h \left[ \frac{1}{2} f(a) + f(a+h) + f(a+2h) + \dots \right. \\ &\dots + f(a+(n-1)h) + \left. \frac{1}{2} f(b) \right] \approx h \left[ \frac{1}{2} + E + E^2 + \dots \right. \\ &\dots + E^{n-1} + \left. \frac{1}{2} E^n \right] f(a) \approx h (E^n - 1) \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{E-1} \right) f(a). \end{aligned} \quad (13.55)$$

С другой стороны, точное значение интеграла равно

$$\int_a^b f(x) dx = g(b) - g(a), \text{ где } g(x) = \int f(x) dx. \text{ Тогда } Dg(a) = f(a) \text{ и}$$

$$\int_a^b f(x) dx = g(b) - g(a) = (E^n - 1) g(a) = \frac{(E^n - 1)}{D} f(a).$$

(13.56)

Итак,

$$\begin{aligned} (\text{интеграл}) - (\text{приближение}) &= \\ &= \frac{(E^n - 1)}{D} \left[ 1 - hD \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{E-1} \right) \right] f(a) = \\ &= \left( \frac{E^n - 1}{D} \right) \left[ 1 - hD \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{e^{hD} - 1} \right) \right] f(a) = \\ &= \frac{E^n - 1}{D} \left[ -\frac{B_2}{2!} (hD)^2 - \frac{B_4}{4!} (hD)^4 - \dots \right] f(a) = \\ &= -\frac{B_2}{2!} h^2 f'(x) \Big|_a^b - \frac{B_4}{4!} h^4 f'''(x) \Big|_a^b - \dots, \end{aligned}$$

где  $B_n$  — числа Бернулли, рассмотренные в гл. 2 [см. формулы (2.17) и (2.20)]. Окончательный результат можно записать в виде

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) dx &= h \left[ \frac{1}{2} f(a) + f(a+h) + \dots + f(b-h) + \right. \\ &\left. + \frac{1}{2} f(b) \right] - \frac{B_2}{2!} h^2 f'(x) \Big|_a^b - \frac{B_4}{4!} h^4 f'''(x) \Big|_a^b - \dots \end{aligned} \quad (13.57)$$

Улучшая приближение трапеций, можно применять эту формулу для оценки как интегралов, так и рядов. Продемонстрируем последнее применение. Полагая  $a = 6$ ,  $b = \infty$ ,  $h = 1$  и  $f(x) = 1/x^2$ , из (13.57) имеем

$$\begin{aligned} \int_6^{\infty} \frac{dx}{x^2} &= \left[ \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6^2} + \frac{1}{7^2} + \frac{1}{8^2} + \dots \right] + \frac{1}{6x^3} \Big|_6^{\infty} - \\ &\quad - \frac{1}{30x^5} \Big|_6^{\infty} + \dots - \dots \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \sum_{n=6}^{\infty} \frac{1}{n^2} &= \int_6^{\infty} \frac{dx}{x^2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6^2} - \frac{1}{6x^3} \Big|_6^{\infty} + \frac{1}{30x^5} \Big|_6^{\infty} - \dots + \dots = \\ &= \frac{1}{6} + \frac{1}{72} + \frac{1}{1296} = 0,1814. \end{aligned}$$

Добавляя этот результат к сумме  $\sum_{n=1}^5 1/n^2$ , получаем

$$\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^2 \approx 1,6450, \quad (13.58)$$

что лишь на единицу в последнем знаке отличается от правильного ответа.

Предположим, что мы хотим избежать вычисления любой суммы вручную

$$\begin{aligned} \int_1^{\infty} \frac{dx}{x^3} &= \left[ \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1} + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \dots \right] + \frac{1}{6x^3} \Big|_1^{\infty} - \frac{1}{30x^5} \Big|_1^{\infty} + \\ &+ \frac{1}{42x^7} \Big|_1^{\infty} - \frac{1}{30x^9} \Big|_1^{\infty} + \frac{5}{66x^{11}} \Big|_1^{\infty} - \dots + \dots; \\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} - \frac{1}{30} + \frac{1}{42} - \frac{1}{30} + \frac{5}{66} - \dots + \dots \quad (13.59) \end{aligned}$$

Последний ряд расходится. Причина в том, что формула Эйлера — Маклорена обычно приводит к асимптотическому ряду (см. разд. 3.5), а не к сходящемуся ряду. Вообще говоря, в этом случае численные расчеты не годятся, если члены начинают быстро расти.

Закончим эту главу демонстрацией трюков, которые можно использовать для резкого улучшения сходимости. Предположим, что требуется вычислить число  $\pi$ . Для этого используем ряд

$$\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \dots + \dots \quad (13.60)$$

Полагая  $x=1$ , находим

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \dots + \dots \quad (\text{ряд Грегори}).$$

Он сходится очень медленно. Положим теперь  $x = \sqrt{1/3}$ . Тогда

$$\frac{\pi}{6} = \sqrt{\frac{1}{3}} \left( 1 - \frac{1}{3 \cdot 3} + \frac{1}{5 \cdot 9} - \frac{1}{7 \cdot 27} + \dots - \dots \right).$$

Он сходится, конечно, лучше. Еще лучше сходится ряд, если положить  $x = 1/5$ :

$$\alpha = \operatorname{arctg} \frac{1}{5} = \frac{1}{5} - \frac{1}{3 \cdot 5^3} + \frac{1}{5 \cdot 5^5} - \dots + \dots,$$

$$2\alpha = \operatorname{arctg} \frac{5}{12}, \quad 4\alpha = \operatorname{arctg} \frac{120}{119} \quad \left( \approx \frac{\pi}{4} \right).$$

На самом деле  $4\alpha = \pi/4 + \beta$ , где (беря тангенсы)

$$\frac{120}{119} = \frac{1 + \operatorname{tg} \beta}{1 - \operatorname{tg} \beta} \rightarrow \beta = \operatorname{arctg} \frac{1}{239}.$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} \pi = 16\alpha - 4\beta &= 16 \operatorname{arctg} \frac{1}{5} - 4 \operatorname{arctg} \frac{1}{239} = 16 \left( \frac{1}{5} - \frac{1}{3 \cdot 5^3} + \right. \\ &+ \left. \frac{1}{5 \cdot 5^5} - \dots + \dots \right) - 4 \left( \frac{1}{239} - \frac{1}{3 \cdot 239^3} + \dots - \dots \right). \end{aligned} \quad (13.61)$$

Итак, число  $\pi$  выражается через два быстро сходящихся ряда.

В качестве второго примера вычислим  $\ln 2$ . Можно было бы начать с ряда

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots + \dots, \quad (13.62)$$

откуда находим  $\ln 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \dots + \dots$ . Этот ряд сходится очень медленно. Чтобы улучшить сходимость, заметим, что

$$\ln \left( \frac{1+x}{1-x} \right) = 2 \left( x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \dots \right).$$

Полагая  $x = 1/3$ , имеем

$$\ln 2 = 2 \left( \frac{1}{3} + \frac{1}{3 \cdot 3^3} + \frac{1}{5 \cdot 3^5} + \dots \right).$$

Этот ряд сходится значительно лучше.

Если мы хотим, чтобы ряды сходились быстро, нужно брать числа порядка 1. Например,

$$\ln 3 - \ln 2 = \ln \frac{3}{2} \quad (x = 1/5);$$

$$2 \ln 3 - 3 \ln 2 = \ln \frac{9}{8} \quad (x = 1/17).$$

Эти соотношения выражают  $\ln 2$  и  $\ln 3$  через два очень быстро сходящихся ряда.

Для улучшения сходимости ряда иногда можно использовать также преобразование Эйлера (см. разд. 2.3).

ВЕРОЯТНОСТЬ  
И СТАТИСТИКА

## 14.1. ВВЕДЕНИЕ

Из эксперимента известно, что если обычную монету бросать  $N$  раз и «орел» выпадает  $N_h$  раз, то отношение  $N_h/N$  приблизительно равно  $1/2$ . Чем больше  $N$ , тем ближе отношение к  $1/2$ . Этот результат сформулируем в виде следующего утверждения. Вероятность «орла» равна  $1/2$ . В более общем случае, если эксперимент выполняется  $N$  раз, а  $N_s$  — число «успешных событий» и если отношение  $N_s/N$  имеет предел при  $N \rightarrow \infty$ , то говорят, что вероятность успеха равна  $N_s/N$ .

Такой тип вероятности называют а п о с т е р и о р н о й в е р о я т н о с т ь ю, т. е. нет попытки предсказать результат, его просто измеряют.

Если пытаться предсказать результат, то это приводит к определению а п р и о р н о й в е р о я т н о с т и. Если эксперимент имеет  $N$  возможных исходов, причем все они равноправны, а  $N_s$  событий из них приводят к «успеху», то априорная вероятность успеха равна  $N_s/N$ . Конечно, слово «равноправны» очень важно. Мы не будем определять, когда два события равноправны; просто предположим, что существуют равновероятные явления.

Конечно, два типа вероятности должны всегда давать один и тот же ответ. Если апостериорная вероятность оказывается отличной от априорной, то мы заключаем, что некоторые события ошибочно предполагались равновероятными. В дальнейшем мы не будем различать эти типы вероятности.

## 14.2. ОСНОВНЫЕ ЗАКОНЫ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Пусть  $P(A)$  — вероятность какого-либо события  $A$ , происходящего при выполнении эксперимента. Конечно,  $P(A)$  лежит между 0 и 1. Если событие  $A$  происходит, то  $P(A) = 1$ ; если нет, то  $P(A) = 0$ .

Чтобы продемонстрировать некоторые более сложные вероятности, рассмотрим эксперимент с  $n$  равновероятными исходами, включающими два события:  $A$  и  $B$ . Положим

$n_1$  — число актов, в которых происходит событие  $A$ , но не  $B$ ;

$n_2$  — число актов, в которых происходит событие  $B$ , но не  $A$ ;

$n_3$  — число актов, в которых происходят события и  $A$  и  $B$ ;

$n_4$  — число актов, в которых не происходит ни события  $A$ , ни  $B$ .

Так как исчерпаны все возможности, то  $n_1 + n_2 + n_3 + n_4 = n$ .

Очевидно, вероятности событий  $A$  и  $B$  даются формулами

$$P(A) = \frac{n_1 + n_3}{n}, \quad P(B) = \frac{n_2 + n_3}{n}. \quad (14.1)$$

Определим более сложные вероятности. Вероятность того, что случается либо  $A$ , либо  $B$ , либо оба события, равна

$$P(A + B) = \frac{n_1 + n_2 + n_3}{n}. \quad (14.2)$$

Вероятность того, что одновременно происходят события  $A$  и  $B$ , называется одновременной вероятностью  $A$  и  $B$ :

$$P(AB) = \frac{n_3}{n}. \quad (14.3)$$

Наконец, можно определить условные вероятности; вероятность того, что происходит событие  $A$  при условии, что событие  $B$  произошло, равна

$$P(A|B) = \frac{n_3}{n_2 + n_3}. \quad (14.4)$$

Аналогично

$$P(B|A) = \frac{n_3}{n_1 + n_3}. \quad (14.5)$$

Из этого простого примера можно извлечь два важных правила. В действительности легко увидеть, что они верны и в общем случае

$$P(A + B) = P(A) + P(B) - P(AB); \quad (14.6)$$

$$P(AB) = P(B) \cdot P(A|B) = P(A) \cdot P(B|A). \quad (14.7)$$

Пример формулы (14.6) представляет вероятность, что при вытаскивании одной карты из каждой из двух колод

по меньшей мере одна будет тузом. Ответ равен

$$P = \frac{1}{13} + \frac{1}{13} - \frac{1}{169} = \frac{25}{169}$$

(отметим, что предполагается, что каждую карту из колоды можно вытащить с одинаковой вероятностью).

В качестве примера применения (14.7) рассмотрим вероятность вытащить две карты бубновой масти при последовательном вытаскивании двух карт из одной колоды:  $P(2 \text{ бубны}) = P(1 \text{ бубна}) \cdot P(1 \text{ бубна} \mid 1 \text{ бубна}) = \frac{1}{4} \cdot \frac{12}{51} = \frac{1}{17}$ .

Если два события взаимно исключают друг друга, что означает  $P(AB) = 0$ , то из (14.6) следует

$$P(A + B) = P(A) + P(B). \quad (14.8)$$

Если  $P(AB) = P(A) \cdot P(B)$ , то говорят, что события  $A$  и  $B$  статистически независимы. Отметим, что отсюда следует, согласно (14.7),

$$P(A \mid B) = P(A), \quad P(B \mid A) = P(B). \quad (14.9)$$

Для условных вероятностей можно получить несколько интересных соотношений. Например, из

$$P(AB) = P(B) P(A \mid B) \quad (14.10)$$

и  $P(AB) = P(A) P(B \mid A)$  выводим

$$P(B \mid A) = \frac{P(B)}{P(A)} P(A \mid B). \quad (14.11)$$

Записывая аналогичное соотношение для  $A$  и  $C$  и деля их, получаем так называемую теорему Бейеса

$$\frac{P(B \mid A)}{P(C \mid A)} = \frac{P(B)}{P(C)} \frac{P(A \mid B)}{P(A \mid C)}. \quad (14.12)$$

В качестве простого примера этой теоремы рассмотрим старую задачу о трех ящиках  $A$ ,  $B$ ,  $C$ , содержащих соответственно две золотые монеты, одну золотую и одну серебряную и две серебряные монеты. Произвольно выбирается ящик, и из него произвольно вынимается монета. Монета золотая. Какова вероятность, что вторая монета также золотая? Если обозначить  $D$  событие вытаскивания первой золотой монеты, то требуется вычислить  $P(A \mid D)$ .

Имеем  $P(C|D) = 0$  и

$$\frac{P(A|D)}{P(B|D)} = \frac{P(A)P(D|A)}{P(B)P(D|B)} = \frac{1/3}{1/3} \cdot \frac{1}{1/2} = 2.$$

Так как  $P(A|D) + P(B|D) + P(C|D) = 1$ , то получаем

$$P(A|D) = \frac{2}{3}; \quad P(B|D) = \frac{1}{3}; \quad P(C|D) = 0. \quad (14.13)$$

### 14.3. КОМБИНАЦИИ И ПЕРЕСТАНОВКИ

Число перестановок  $n$  объектов равно  $n!$ , так как первое положение можно занять любой из  $n$  частиц, второе — любой из оставшихся  $n - 1$  частиц и т. д. С помощью аналогичных соображений находим, что число упорядоченных подсистем, содержащих  $m$  объектов из  $n$ , равно

$$n(n-1) \dots (n-m+1) = n!/(n-m)!. \quad (14.14)$$

Если искать просто число подсистем, содержащих  $m$  объектов из  $n$ , не думая о порядке, в котором они появляются («число комбинаций  $m$  объектов, взятых из  $n$ »), то мы должны разделить полученный выше результат на  $m!$ , так как каждую комбинацию можно переставить  $m!$  способами и столько раз она появляется в выражении (14.14). Итак, число комбинаций  $m$  объектов из  $n$  есть биномиальный коэффициент

$$\binom{n}{m} = \frac{n!}{m!(n-m)!} = \binom{n}{n-m}. \quad (14.15)$$

Можно задать более сложные вопросы. Например, сколько различных перестановок можно сделать среди  $n$  объектов, если имеется  $n_1$  тождественных объектов одного сорта,  $n_2$  тождественных объектов другого сорта и т. д. Полное число перестановок равно  $n!$ , но каждая различимая перестановка встречается  $n_1!$ ,  $n_2!$ , ... раз. Следовательно, число различных перестановок равно

$$n!/n_1! n_2! \dots \quad (14.16)$$

В качестве следующего примера вычислим, сколько комбинаций можно составить из  $n$  объектов, если каждый раз берется  $m$  объектов и допускаются повторения. Например, число комбинаций из трех объектов, взятых каждый раз по два, причем допускаются повторения, равно шести: 11 12 13 22 23 33. Для получения общей формулы заметим, что число комбинаций из  $n$  объектов, взятых

каждый раз по  $m$ , причем допускаются повторения, равно числу способов, сколькими можно распределить  $m$  одинаковых шаров в  $n$  ящиках. В приведенном выше примере было три ящика. Обозначая два шара крестиками, получаем шесть распределений. Они показаны в табл. 14.1.

ТАБЛИЦА 14.1

1	××	×	×	—	—	—
2	—	×	—	××	×	—
3	—	—	×	—	×	××

Эти распределения соответствуют приведенным выше шести комбинациям, причем соблюдается тот же порядок.

Чтобы пронумеровать теперь число способов, сколькими можно распределить  $m$  тождественных объектов среди  $n$  ящиков, напишем в любом порядке  $m$  крестиков и  $n - 1$  вертикальных линий. Например, если  $m = 6$  и  $n = 4$ , то размещение  $×× | | ×××× |$  соответствует двум шарам в первом ящике, ни одного во втором, четырем в третьем и ни одного в четвертом. Полное число размещений  $m$  (тождественных) крестиков и  $n - 1$  (тождественных) линий дается формулой (14.16):

$$\frac{(n+m-1)!}{(n-1)! m!} = \binom{n+m-1}{m}. \quad (14.17)$$

В приведенном выше примере  $n = 3$  и  $m = 2$ , так что это число равно  $\binom{4}{2} = 6$ , как и должно быть.

Сравнительно простые примеры, рассмотренные здесь, полезны для нахождения так называемых функций распределения (Бозе — Эйнштейна, Ферми — Дирака, Максвелла — Больцмана) в статистической механике систем невзаимодействующих частиц.

#### 14.4. БИНОМИАЛЬНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ, РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ПУАССОНА И ГАУССА

Возвратимся к теории вероятности. Вычислим вероятность того, что при бросании монеты  $n$  раз «орел» (о) выпадает точно  $m$  раз. Результаты последовательных  $n$  бросаний монеты можно представить в виде последователь-

ности  $n$  чисел «о» или «р» (решка)

$$\text{ооро} \dots \text{р.} \quad (14.18)$$

Вероятность каждого такого исхода равна  $(1/2)^n$ ; число подобных размещений с  $m$  «орлами» равно  $\frac{n!}{m!(n-m)!} = \binom{n}{m}$ , так что искомая вероятность равна

$$P(m) = \binom{n}{m} \left(\frac{1}{2}\right)^n. \quad (14.19)$$

Слегка обобщая задачу, можно поставить вопрос: какова вероятность  $m$  «успехов» и  $n - m$  «неудач» при  $n$  повторениях эксперимента, если вероятность успеха равна  $p$ , а вероятность неудачи  $1 - p$ ? Нетрудно получить ответ

$$P(m) = \binom{n}{m} p^m (1-p)^{n-m}. \quad (14.20)$$

Это распределение вероятности называется **биномиальным распределением**.

Практическое значение имеют два различных предела биномиального распределения при больших  $n$ . Сначала предположим, что  $n$  и  $np$  велики. Конечно,  $P(m)$  будет иметь пик вблизи  $m = np$ . Используя формулу Стирлинга (3.76) для факториалов, перепишем вероятность  $m$  успехов в виде

$$\begin{aligned} P(m) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi n}} \left(\frac{m}{n}\right)^{-m-1/2} \left(\frac{n-m}{n}\right)^{-n+m-1/2} p^m (1-p)^{n-m} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi n}} \exp \left[ -\left(m + \frac{1}{2}\right) \ln \frac{m}{n} - \left(n - m + \frac{1}{2}\right) \ln \frac{n-m}{n} + \right. \\ &\quad \left. + m \ln p + (n-m) \ln (1-p) \right]. \end{aligned} \quad (14.21)$$

Положим теперь  $m = np + \xi$ , где  $\xi \ll np$ . Удерживая только главные члены, получаем

$$P(m) = \frac{1}{\sqrt{2\pi n}} \cdot \frac{1}{\sqrt{p(1-p)}} \exp \left[ -\frac{1}{2} \cdot \frac{\xi^2}{np(1-p)} \right]. \quad (14.22)$$

Это распределение обычно записывают в виде

$$P(m) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} \exp \left( -\frac{1}{2} \cdot \frac{\xi^2}{\sigma^2} \right), \quad (14.23)$$

где  $\sigma = \sqrt{np(1-p)}$  — мера ширины распределения. Формула (14.23) — так называемое гауссово, или нормальное распределение. Оно является весьма хорошим приближением даже при довольно небольших значениях  $n$ . Например, в табл. 14.2 мы взяли  $n = 10$  и  $p = 0,4$  и сравнили величины гауссова и биномиального распределений.

ТАБЛИЦА 14.2

$m$	$P(m)_{\text{бином.}}$	$P(m)_{\text{гаусс.}}$	$m$	$P(m)_{\text{бином.}}$	$P(m)_{\text{гаусс.}}$
0	0,0060	0,0092	6	0,1115	0,1119
1	0,0403	0,0395	7	0,0425	0,0395
2	0,1209	0,1119	8	0,0106	0,0092
3	0,2150	0,2091	9	0,0016	0,0014
4	0,2508	0,2575	10	0,0001	0,0001
5	0,2006	0,2091			

Второй предел биномиального распределения, представляющий интерес, относится к случаю, когда  $n \rightarrow \infty$  и  $p \rightarrow 0$  таким образом, что произведение  $np = a$  остается постоянным. Согласно (14.20), вероятность  $m$  успехов равна

$$P(m) = \frac{n!}{m!(n-m)!} p^m (1-p)^{n-m}.$$

Учитывая наложенные условия и считая  $m \ll n$ , имеем

$$\frac{n!}{(n-m)!} \rightarrow n^m \text{ и } (1-p)^{n-m} \rightarrow (1-p)^{a/p} \rightarrow \exp(-a).$$

Следовательно,

$$P(m) = \frac{a^m \exp(-a)}{m!}. \quad (14.24)$$

Это распределение называется распределением Пуассона. Отметим, что, как и следовало ожидать,

$$\sum_{m=0}^{\infty} P(m) = 1.$$

Распределение Гаусса (14.23) возникает, когда эксперимент с конечной вероятностью успеха повторяется очень большое число раз. Это распределение показано на рис. 14.1. Оно имеет ширину порядка  $\sqrt{np(1-p)}$  (в зависимости от того, на каком уровне измерять шири-

ну); важный результат состоит в том, что ширина пропорциональна  $\sqrt{n}$ . При  $n \rightarrow \infty$  распределение становится все шире и шире, но относительная ширина, т. е. (ширина)/ $n$ , стремится к нулю.

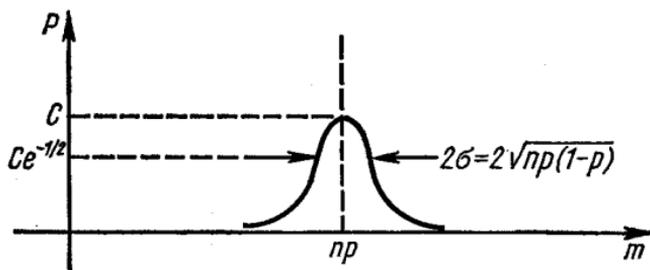


Рис. 14.1. Распределение Гаусса. Максимальное значение  $P(m)$  равно  $C/\sqrt{2\pi}\sigma$ , ширина  $2\sigma = 2\sqrt{np(1-p)}$ .

С другой стороны, распределение Пуассона (14.24) применяется в случае очень большого числа экспериментов, а вероятность успеха в каждом эксперименте очень

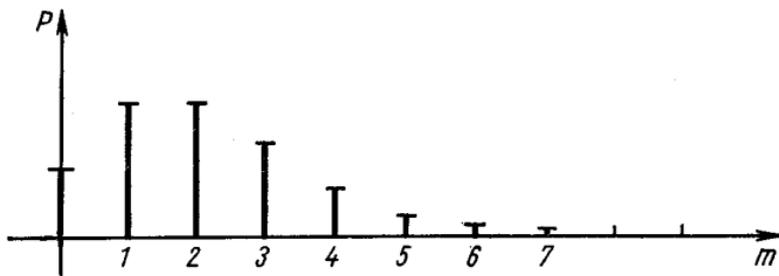


Рис. 14.2. Распределение Пуассона для  $a = 2$ .

мала, так что ожидаемое число успехов  $a$  является конечной величиной. Классический пример распределения Пуассона — это вероятность того, что в течение заданного отрезка времени на распределительный щит станции поступит  $m$  телефонных вызовов. Можно считать, что каждая секунда обозначает отдельный эксперимент, а успехом называть телефонный вызов в течение этой секунды. Более интересный пример (по крайней мере, для физиков) — это распределение по времени числа космических частиц (или отсчетов, производимых любым другим случайным явлением). Для достаточно малого  $a$  распределение Пуас-

сона весьма асимметрично. На рис. 14.2 оно показано для  $a = 2$ . Конечно, если  $a \gg 1$ , то распределение переходит в гауссово распределение. Тогда полуширина равна  $\sigma = \sqrt{np(1-p)} \approx \sqrt{a}$ .

#### 14.5. ОБЩИЕ СВОЙСТВА РАСПРЕДЕЛЕНИЙ

До сих пор мы обсуждали вероятности только дискретных событий, вероятность одного успеха, двух успехов и т. д. Можно также определять непрерывные распределения вероятности. Например, если  $x$  — переменная, которая может принимать любое вещественное значение, то можно определить  $p(x)$  — вероятность распределения величины  $x$  — с помощью следующего определения:  $p(x) dx$  — вероятность, что  $x$  лежит в малом интервале  $dx$  около  $x$ . Когда на рис. 14.1 мы показывали распределение Гаусса в виде гладкой кривой, то мы в действительности имели в виду непрерывное распределение вероятности. Более точно, если заменить дискретную переменную  $m$  непрерывной переменной  $x$ , среднее значение которой равно  $\bar{x} = np$ , то, так как  $m$  меняется скачками на единицу, в пределе больших  $n$  следует написать

$$P(m) = p(x) \Delta x \text{ с } \Delta x = 1.$$

Таким образом, распределение Гаусса по  $m$  переходит в непрерывное распределение Гаусса по  $x$ :

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp \left[ -\frac{1}{2} \cdot \frac{(x-\bar{x})^2}{\sigma^2} \right], \quad (14.25)$$

где использовалось уравнение (14.23) с  $\xi = m - np \rightarrow x - \bar{x}$ . Как и раньше,  $\sigma = \sqrt{np(1-p)}$ .

Среднее значение (или ожидаемое значение) величины  $x$  равно

$$\langle x \rangle = \sum_x P(x) x, \quad (14.26)$$

если  $x$  принимает только дискретные значения. В непрерывном случае

$$\langle x \rangle = \int p(x) x dx. \quad (14.27)$$

Среднее значение любой функции от  $x$  равно

$$\langle f(x) \rangle = \int p(x) f(x) dx. \quad (14.28)$$

**Пример.** Для распределения Гаусса (14.25) среднее значение  $x$  равно

$$\langle x \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp \left[ -\frac{1}{2} \frac{(x-\bar{x})^2}{\sigma^2} \right] x dx = \bar{x}, \quad (14.29)$$

а среднеквадратическое отклонение  $x$  от его среднего равно

$$\langle (x-\bar{x})^2 \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp \left[ -\frac{1}{2} \frac{(x-\bar{x})^2}{\sigma^2} \right] (x-\bar{x})^2 dx = \sigma^2. \quad (14.30)$$

В общем случае величина  $\langle (x-\bar{x})^2 \rangle$  называется дисперсией  $x$ , а ее квадратный корень — стандартным отклонением, обычно обозначаемым  $\sigma$ . Мы видим, что для распределения Гаусса стандартное отклонение равно полуширине  $\sigma$ , а  $n$ -й момент распределения  $p(x)$  определяется как среднее значение  $x^n$ :

$$\langle x^n \rangle = \int p(x) x^n dx. \quad (14.31)$$

Попутно отметим полезное соотношение между вторым моментом, средним значением и его дисперсией. Имеем

$$\begin{aligned} \langle (x-\bar{x})^2 \rangle &= \langle x^2 - 2x\bar{x} + \bar{x}^2 \rangle = \\ &= \langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2, \end{aligned}$$

т. е.

$$\sigma^2 = \langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2. \quad (14.32)$$

Часто распределение характеризуют его моментами. Это приводит к определению функции, производящей моменты, так называемой характеристической функции распределения. Она равна преобразованию Фурье от плотности вероятности

$$\phi(k) = \int dx \cdot \exp(ikx) p(x). \quad (14.33)$$

Напишем, как возникают моменты, когда функцию  $\phi(k)$  разлагают в ряд по  $k$ :

$$\begin{aligned} \phi(k) &= \int dx p(x) \left( 1 + ikx - \frac{1}{2!} k^2 x^2 - \frac{i}{3!} k^3 x^3 + \dots \right) = \\ &= 1 + ik \langle x \rangle - \frac{k^2}{2!} \langle x^2 \rangle + \dots + \frac{(ik)^n}{n!} \langle x^n \rangle + \dots \end{aligned} \quad (14.34)$$

Таким образом, характеристическая функция есть производящая функция для моментов.

**Пример.** Характеристическая функция для распределения Гаусса равна

$$\begin{aligned} \phi(k) &= \int_{-\infty}^{\infty} dx \cdot \exp(ikx) \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left[-\frac{(x-\bar{x})^2}{2\sigma^2}\right] = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ -\frac{1}{2} \left[ \frac{x}{\sigma} - \left( \frac{\bar{x}}{\sigma} + ik\sigma \right) \right]^2 \right\} \times \\ &\quad \times \exp\left( ik\bar{x} - \frac{k^2\sigma^2}{2} \right) dx; \\ \phi(k) &= \exp(ik\bar{x}) \exp(-k^2\sigma^2/2). \end{aligned} \quad (14.35)$$

Гауссов множитель в  $\phi(k)$  означает, что существенны только малые  $k$ ;  $\phi(k)$  очень мало при  $|k| \gg 1/\sigma$  (ср. с принципом неопределенности из разд. 4.2).

Теперь продемонстрируем применение характеристических функций. Предположим, что  $x$  — случайная переменная с распределением вероятности  $p(x)$ , а  $y$  — независимая случайная переменная с распределением вероятности  $q(y)$ . Рассмотрим теперь некоторую величину  $z$ , которая является функцией  $x$  и  $y$ :  $z = f(x, y)$ . Что можно сказать о вероятности распределения  $z$ ; например, чему равна вероятность того, что  $z$  лежит в некотором интервале  $dz$  около  $z_0$ ?

Рассмотрим различные моменты распределения  $z$ . Имеем

$$\begin{aligned} \langle z \rangle &= \iint f(x, y) p(x) dx q(y) dy, \\ \langle z^2 \rangle &= \iint [f(x, y)]^2 p(x) dx q(y) dy \text{ и т. д.} \end{aligned} \quad (14.36)$$

Таким образом, характеристическая функция  $z$ -распределения равна

$$\phi(k) = \iint \exp[ikf(x, y)] p(x) dx q(y) dy. \quad (14.37)$$

Если  $f(x, y)$  есть просто  $x + y$ , то имеем

$$\begin{aligned} \phi(k) &= \iint \exp[ik(x + y)] p(x) dx q(y) dy = \\ &= \int \exp(ikx) p(x) dx \int \exp(iky) q(y) dy. \end{aligned} \quad (14.38)$$

Это очень важный результат. Характеристическая функция для суммы двух независимых переменных равна произведению отдельных характеристических функций. Конечно, можно обобщить этот вывод на произвольное число переменных.

Наиболее важное следствие этой теоремы — это так называемая центральная предельная теорема. Предположим, что случайная переменная  $x$  имеет распределение вероятности  $p(x)$ , причем первый и второй моменты равны  $\bar{x}$  и  $\langle x^2 \rangle$ . Предположим далее, что сделано  $n$  «измерений»  $x$  и образовано среднее

$$a = \frac{1}{n} (x_1 + x_2 + \dots + x_n). \quad (14.39)$$

Каково распределение  $P(a)$  случайной переменной  $a$ ? Вместо  $P(a)$  исследуем распределение  $Q(a - \bar{x})$  переменной  $a - \bar{x}$ , среднее значение которой равно нулю. Оба распределения эквивалентны, так как  $P(a) = Q(a - \bar{x})$ . Характеристическая функция  $Q(a - \bar{x})$  равна

$$\begin{aligned} \Phi(k) &= \int \exp[ik(a - \bar{x})] Q(a - \bar{x}) da = \\ &= \int \exp\left\{\frac{ik}{n} [(x_1 - \bar{x}) + (x_2 - \bar{x}) + \dots + (x_n - \bar{x})]\right\} \times \\ &\quad \times p(x_1) dx_1 \dots p(x_n) dx_n = \\ &= \int \exp\left[\frac{ik}{n} (x_1 - \bar{x})\right] p(x_1) dx_1 \times \\ &\quad \times \int \exp\left[\frac{ik}{n} (x_2 - \bar{x})\right] p(x_2) dx_2 \dots = \left[\phi\left(\frac{k}{n}\right)\right]^n, \end{aligned} \quad (14.40)$$

где  $\phi(k)$  — характеристическая функция переменной  $(x - \bar{x})$ , которая по определению  $x$  и  $\sigma$  имеет первый и второй моменты 0 и  $\sigma^2$ . Итак,

$$\phi(k) = \int \exp[ik(x - \bar{x})] p(x) dx = 1 - \frac{1}{2} k^2 \sigma^2 + O(k^3), \quad (14.41)$$

и из (14.40)

$$\Phi(k) = \left[1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{k^2 \sigma^2}{n^2} + O\left(\frac{k^3}{n^3}\right)\right]^n,$$

что в пределе большого  $n$  переходит в

$$\Phi(k) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \exp[-k^2 \sigma^2 / 2n]. \quad (14.42)$$

Обращая это преобразование Фурье или ссылаясь на (14.35), для большого  $n$  находим

$$Q(a - \bar{x}) = P(a) = \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left[-\frac{n}{2} \frac{(a - \bar{x})^2}{\sigma^2}\right]. \quad (14.43)$$

Следовательно, распределение среднего из большого числа измерений  $x$  имеет гауссову форму с центром в точке  $\bar{x}$  и стандартным отклонением в  $n^{1/2}$  раз меньше, чем для распределения  $x$ .

Выше мы предполагали, что величины  $\bar{x}$  и  $\sigma$  каким-то образом известны. Обычно это не имеет места. Задача оценки  $\bar{x}$  (и иногда  $\sigma$ ) из экспериментальных данных составляет часть общего вопроса об интерпретации экспериментов и обсуждается в следующем разделе.

#### 14.6. ОБРАБОТКА ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫХ ДАННЫХ

При интерпретации экспериментальных результатов мы используем идею относительного правдоподобия. Его можно «вычислить» по теореме Бейеса следующим образом.

Пусть  $A$  — возможная теория,  $B$  — альтернативная теория,  $E$  — экспериментальный результат. Мы хотим сравнить  $P(A | E)$  и  $P(B | E)$  — вероятности, что  $A$  и  $B$  выполняются при условии, что имеется экспериментальный результат  $E$ . Теорема Бейеса утверждает, что

$$\frac{P(A | E)}{P(B | E)} = \frac{P(A)}{P(B)} \frac{P(E | A)}{P(E | B)}. \quad (14.44)$$

Предположим теперь, что  $P(A) = P(B)$ ; это означает, что две теории априори «равновероятны». Иногда это не выполняется, и тогда следует применять уравнение (14.44) как оно есть. Но если это предположение выполняется, то

$$\frac{P(A | E)}{P(B | E)} = \frac{P(E | A)}{P(E | B)}. \quad (14.45)$$

Величины справа имеют простой смысл: это вероятности получить результат  $E$ , если правильны соответственно теория  $A$  или  $B$ . Таким образом, относительная вероятность двух теорий определяется отношением вероятностей, предсказываемых этими двумя теориями, при условии, что действительно получается результат. Конечно, наиболее вероятная теория та, для которой вероятность максимальна.

Предположим, что мы хотим в теории определить параметр  $\alpha$ . Мы выполняем эксперимент и получаем ответ. Если вероятность  $L(\alpha)$  получения этого ответа как функция  $\alpha$  выглядит подобно кривой на рис. 14.3, а, то мы имеем «хороший» эксперимент, и  $\alpha$  определяется с хорошей точностью. С другой стороны, если кривая вероятности выглядит как на рис. 14.3, б, то мы не уверены в результате  $\alpha = \alpha^*$ .

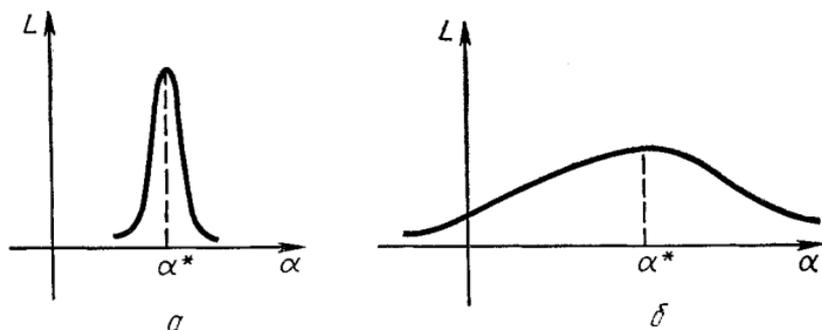


Рис. 14.3. Функции относительного правдоподобия  $L(\alpha)$  для параметра  $\alpha$ , находимого из «хорошего» эксперимента (а) и статистически «плохого» эксперимента (б).

Если кривая относительно узка, то она часто имеет гауссову форму. Тогда экспериментальные результаты можно описать, задавая значение максимального правдоподобия  $\alpha^*$  и стандартное отклонение

$$\Delta\alpha = \left[ \frac{\int (\alpha - \alpha^*)^2 L(\alpha) d\alpha}{\int L(\alpha) d\alpha} \right]^{1/2}. \quad (14.46)$$

Заметим, что  $\Delta\alpha$  совпадает со стандартным отклонением  $\sigma$ , если  $\alpha$  — случайная переменная со средним значением  $\alpha^*$  и распределением  $L(\alpha)$ . Конечно,  $L(\alpha)$  не есть истинное распределение вероятности  $\alpha$ ; истинным распределением является  $\delta$ -функция, если  $\alpha$  — параметр, имеющий определенное (хотя и неизвестное) значение.

Если  $L(\alpha)$  имеет гауссову форму, то

$$L(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp \left[ -\frac{(\alpha - \alpha^*)^2}{2\sigma^2} \right],$$

$$\frac{d}{d\alpha} \ln L(\alpha) = -(\alpha - \alpha^*)/\sigma^2, \quad (14.47)$$

и стандартное отклонение равно

$$\Delta\alpha = \sigma = \left[ -\frac{d^2}{d\alpha^2} \ln L(\alpha) \right]^{-1/2} \quad (14.48)$$

Если в эксперименте не набрана статистика или функция правдоподобия отличается от гауссовой по какой-либо другой причине, то лучше всего нарисовать график функции правдоподобия.

Продемонстрируем на примере принцип максимального правдоподобия. Определим среднее время  $\tau$  жизни нестабильной частицы. Экспериментально наблюдается несколько частиц. Первые живут время  $t_1$ , вторые  $t_2$  и т. д. Как из этих результатов получить наиболее вероятное время?

Вероятность распада частицы, имеющей среднее время жизни  $\tau$ , в момент  $t$  за время  $dt$  равна

$$p(t) dt = \frac{1}{\tau} \exp(-t/\tau) dt. \quad (14.49)$$

Таким образом, вероятность удачи в эксперименте пропорциональна

$$\begin{aligned} L(\tau) &= \frac{1}{\tau} \exp(-t_1/\tau) \frac{1}{\tau} \exp(-t_2/\tau) \times \\ &\times \frac{1}{\tau} \exp(-t_3/\tau) \dots \frac{1}{\tau} \exp(-t_n/\tau); \\ L(\tau) &= \exp\left(-\frac{1}{\tau} \sum_{i=1}^n t_i - n \ln \tau\right). \end{aligned} \quad (14.50)$$

Максимум  $L(\tau)$  находится с помощью дифференцирования по  $\tau$ :

$$\frac{d}{d\tau} \ln L(\tau) = \frac{1}{\tau^2} \sum_{i=1}^n t_i - \frac{n}{\tau} = 0.$$

Следовательно, значение максимальной вероятности равно

$$\tau^* = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n t_i, \quad (14.51)$$

т. е. просто среднее из наблюдаемых времен  $t_i$ .

Если число частиц достаточно велико, так что  $L(\tau)$  приближенно имеет гауссову форму, то можно также найти стандартное отклонение. Согласно (14.48), имеем

$$\Delta\tau = \left[ -\frac{d^2}{d\tau^2} \ln L(\tau) \right]^{-1/2} = \left( \frac{2}{\tau^3} \sum_{i=1}^n t_i - \frac{n}{\tau^2} \right)^{-1/2}.$$

Это выражение не является независимым от  $\tau$ , как это было бы для точного гауссова распределения. Вычисляя его в точке  $\tau^*$ , получаем \*

$$\Delta\tau = \tau^*/\sqrt{n}. \quad (14.52)$$

Другое применение принципа максимального правдоподобия состоит в определении числа параметров в теории в случае, когда экспериментальных точек больше, чем параметров. Кроме того, вследствие экспериментальных ошибок невозможно идеальное согласие теории и эксперимента. В качестве примера такой задачи рассмотрим данные, показанные на рис. 14.4. Угловое распределение в ядерной реакции исследовалось посредством измерения дифференциального сечения на различные углы (указаны ошибки). Мы хотим согласовать данные с «теоретической» кривой вида

$$\sigma(\theta) = a_0 + a_1 \cos \theta + a_2 \cos^2 \theta + a_3 \cos^3 \theta \quad (14.53)$$

и найти наиболее вероятные значения параметров  $a_m$ .

В более общем случае предположим, что измеряется  $N$  величин, для которых получаются экспериментальные значения  $x_i$  со стандартными ошибками  $\sigma_i$ . Предположим, что имеются также «теоретические» выражения для этих величин и что эти выражения содержат систему  $n$  параметров  $a_m$ , значения которых требуется подогнать так, чтобы получить наилучшее согласие с экспериментом. Назовем  $\xi_i(a_1, a_2, \dots, a_n)$  «теоретическим» выражением для  $x_i$ .

Рассмотрим случай, когда распределения вероятности для экспериментальных результатов являются гауссо-

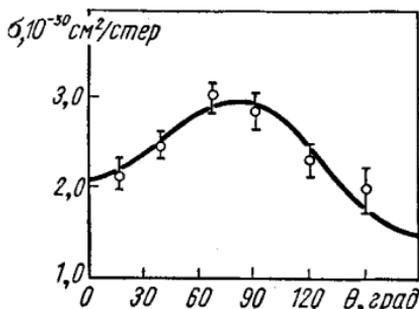


Рис. 14.4. Типичное угловое распределение в ядерной реакции. Показаны экспериментальные данные и обработка по методу наименьших квадратов.

\* В этой процедуре ошибка обычно переоценивается; более удобная процедура состоит в усреднении  $\left[ -\frac{d^2}{d\tau^2} \ln L(\tau) \right]^{-1/2}$  по функции правдоподобия. Однако если разница велика, то, вероятно, лучше прежде всего начертить график функции правдоподобия.

выми. Тогда функция правдоподобия пропорциональна

$$L(a_1, a_2, \dots, a_n) = \frac{1}{(2\pi)^{N/2} \sigma_1 \sigma_2 \dots} \exp \left[ - \sum_{i=1}^N \frac{(x_i - \xi_i)^2}{2\sigma_i^2} \right], \quad (14.54)$$

и мы хотим подогнать параметры  $a_m$  так, чтобы получить максимальное правдоподобие. Это эквивалентно минимизации показателя экспоненты

$$\sum_{i=1}^N \frac{(x_i - \xi_i)^2}{2\sigma_i^2} = \frac{1}{2} \chi^2(a_m), \quad (14.55)$$

и результат по этой причине называется методом наименьших квадратов. Величина  $\chi^2$ , определяемая равенством (14.55), будет далее использована [см. (14.71)].

Чтобы найти наиболее вероятные значения  $a_m^*$  величин  $a_m$ , возьмем производные (14.55) по этим параметрам:

$$\sum_{i=1}^N \frac{x_i - \xi_i}{\sigma_i^2} \cdot \frac{\partial \xi_i}{\partial a_m} = 0, \quad m = 1, 2, \dots, n. \quad (14.56)$$

Решение этих уравнений получается в красивой форме, если  $\xi_i$  — линейные функции параметров  $a_j$ , т. е. если

$$\xi_i = \sum_{m=1}^n c_{im} a_m \quad (14.57)$$

с известными коэффициентами  $c_{im}$ . Тогда условия максимального правдоподобия (14.56) приобретают вид

$$\sum_i \frac{c_{im}}{\sigma_i^2} x_i = \sum_{i,l} \frac{c_{im} c_{il}}{\sigma_i^2} a_l. \quad (14.58)$$

Определим теперь «вектор данных»  $X$  и «матрицу измерения»  $M$  следующими формулами:

$$X_m = \sum_{i=1}^N \frac{c_{im}}{\sigma_i^2} x_i; \quad (14.59)$$

$$M_{ml} = \sum_{i=1}^N \frac{c_{im} c_{il}}{\sigma_i^2} = M_{lm}. \quad (14.60)$$

заметим, что  $X$  зависит от экспериментальных результатов  $x_i$  и ошибок  $\sigma_i$ , в то время как  $M$  зависит только от ошибок ( $M$  — симметричная матрица).

Тогда условия (14.58) можно записать в виде матричного уравнения

$$X = Ma \quad (14.61)$$

с решением

$$a = M^{-1}X. \quad (14.62)$$

Далее исследуем ошибки, связанные с определенными выше параметрами  $a_m$ . Есть два подхода к этой проблеме; оба они приводят к одинаковой алгебре и одинаковым результатам. Один из них состоит в том, чтобы рассматривать функцию (14.54) как функцию вероятности параметров  $a_m$  и с помощью нее вычислять среднеквадратические отклонения  $\langle (a_m - a_m^*)^2 \rangle$ . Другой подход заключается в том, чтобы представить себе повторения всего эксперимента большое число раз одним и тем же путем (т. е. с теми же ошибками  $\sigma_i$ ) и затем вычислить среднеквадратические отклонения  $a_m$ , получаемые в индивидуальных экспериментах из глобального среднего по всем экспериментам  $\bar{a}_m$ . Черта сверху обозначает среднее по всем мыслимым экспериментам. Конечно, значение такого среднего неизвестно, но оно и не требуется.

Чтобы найти ошибки в параметрах, требуется вычислить ожидаемое среднеквадратическое отклонение  $\langle (a_m - \bar{a}_m)^2 \rangle$  или, в более общем случае,  $\langle (a_m - \bar{a}_m)(a_l - \bar{a}_l) \rangle$ . Из (14.62) и (14.59) имеем

$$\begin{aligned} (a_m - \bar{a}_m) &= \sum_k (M^{-1})_{mk} (X_k - \bar{X}_k) = \\ &= \sum_{kj} (M^{-1})_{mk} \frac{c_{jk}}{\sigma_j^2} (x_j - \bar{x}_j), \end{aligned} \quad (14.63)$$

$$\langle (x_j - \bar{x}_j)(x_i - \bar{x}_i) \rangle = \sigma_i^2 \delta_{ij}, \quad (14.64)$$

так как индивидуальные эксперименты  $x_i$  предполагаются статистически независимыми. Следовательно,

$$\begin{aligned} \langle (a_m - \bar{a}_m)(a_l - \bar{a}_l) \rangle &= \sum_{hjpi} (M^{-1})_{mh} \frac{c_{jh}}{\sigma_j^2} (M^{-1})_{lp} \frac{c_{ip}}{\sigma_i^2} \sigma_i^2 \delta_{ij} = \\ &= \sum_{hp} (M^{-1})_{mh} (M^{-1})_{lp} (M)_{ph} = (M^{-1})_{ml}, \end{aligned} \quad (14.65)$$

и стандартное отклонение в  $a_m$  равно

$$\Delta a_m = \langle (a_m - \bar{a}_m)^2 \rangle^{1/2} = \sqrt{(M^{-1})_{mm}}. \quad (14.66)$$

Далее, в общем случае перекрестные члены  $\langle (a_m - \bar{a}_m) \times (a_l - \bar{a}_l) \rangle$  с  $l \neq m$  не равны нулю. Это означает, что параметры  $a_m$  не являются статистически независимыми и их ошибки коррелируют. (Конечно, можно было бы диагонализировать матрицу  $M^{-1}$  и тем самым найти систему статистически независимых комбинаций  $a_m$ .)

Ошибка, связываемая с каждой величиной, зависящей от параметров  $a_m$ , может быть найдена из матрицы ошибок  $M^{-1}$ .

**Пример.** Найдем ошибку в  $z = a_1 + 2a_2$ . Флуктуация, или среднеквадратическое отклонение, равна

$$\begin{aligned} \langle (z - \bar{z})^2 \rangle &= \langle [(a_1 - \bar{a}_1) + 2(a_2 - \bar{a}_2)]^2 \rangle = \\ &= \langle (a_1 - \bar{a}_1)^2 \rangle + 4 \langle (a_1 - \bar{a}_1)(a_2 - \bar{a}_2) \rangle + 4 \langle (a_2 - \bar{a}_2)^2 \rangle = \\ &= (M^{-1})_{11} + 4(M^{-1})_{12} + 4(M^{-1})_{22}. \end{aligned} \quad (14.67)$$

До сих пор мы предполагали, что теоретические выражения  $\xi_i$  правильны для некоторых значений параметров. [Они могли бы быть значениями больших средних  $\bar{a}_m$ , если нет «систематических» экспериментальных ошибок. Тогда мы бы имели  $\bar{x}_i = \xi_i(\bar{a}_m)$ .] Найденные выше ошибки  $\Delta a_m$  чувствительны к этому предположению и не дают указания на его правильность. По этой причине далее мы рассмотрим вопрос: хороша ли форма используемых теоретических выражений? Ответ однозначен: нельзя делать вывода, что данная теория правильна, лишь потому, что она дает хорошее согласие с экспериментом; с другой стороны, если согласие плохое, то либо неудачны теоретические выражения, либо экспериментатор недооценил своих ошибок (или сделал ошибку).

Рассмотрим один количественный критерий хорошего согласия, известный под названием *проверка на  $\chi$ -к в а д р а т*. Проверка состоит в определении, будет ли показатель (14.55) в функции правдоподобия больше, чем ожидаемый статистически.

Если  $\bar{x}_i$  — истинное среднее  $x_i$ , то (нормированная) вероятность наблюдения  $x_1$  в  $dx_1$ ,  $x_2$  в  $dx_2$  и т. д. равна

$$\begin{aligned} P(x_1, x_2, \dots, x_N) dx_1 dx_2 \dots dx_N = \\ = \prod_{i=1}^N \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_i}} \exp \left[ -\frac{1}{2\sigma_i^2} (x_i - \bar{x}_i)^2 \right] dx_i. \end{aligned} \quad (14.68)$$

Определим

$$q_i = \frac{1}{\sigma_i} (x_i - \bar{x}_i) \quad (14.69)$$

и

$$Q(q_i) dq_1 \dots dq_N = P(x_i) dx_1 \dots dx_N.$$

Тогда

$$Q(q_i) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{N/2} \exp\left[-\frac{1}{2} \sum_{i=1}^N q_i^2\right] \quad (14.70)$$

и  $Q$  зависит от  $q_i$  только через

$$\sum_{i=1}^N q_i^2 = \chi^2, \quad (14.71)$$

причем  $\chi^2$  — квадрат «радиуса», т. е. расстояние в  $N$ -мерном евклидовом пространстве от начала координат до точки с декартовыми координатами  $q_1 \dots q_N$ .

Так как  $Q(q_i)$  зависит только от  $\chi^2$ , оно имеет одно и то же значение всюду на «сферической» поверхности в  $N$  измерениях. Распределение вероятности  $\chi^2$  должно иметь вид

$$F(\chi^2) d\chi^2 = \int_{\substack{\text{сферическая} \\ \text{оболочка, } \chi, d\chi}} Q(q_i) dq_1 \dots dq_N = \\ = 2C \exp(-\chi^2/2) \chi^{N-1} d\chi = C \exp(-\chi^2/2) \chi^{N-2} \cdot 2\chi d\chi. \quad (14.72)$$

Определим константу  $C$  из нормировки

$$\int_0^{\infty} F(\chi^2) d\chi^2 = 1 = C \int_0^{\infty} \exp(-z/2) z^{(N/2)-1} dz.$$

Отсюда  $C = [2^{N/2} \Gamma(N/2)]^{-1}$ . Таким образом, из (14.72)

$$F(\chi^2) d\chi^2 = \frac{1}{2^{N/2} \Gamma(N/2)} \exp(-\chi^2/2) (\chi^2)^{(N/2)-1} d\chi^2. \quad (14.73)$$

Это распределение  $\chi^2$  известно как хи-квадрат ( $\chi^2$ ) распределение с  $N$  степенями свободы. Вероятность, что  $\chi^2$  больше наблюдаемого значения  $\chi_0^2$ , равна

$$P_N(\chi^2 > \chi_0^2) = \int_{\chi_0^2}^{\infty} F(\chi^2) d\chi^2. \quad (14.74)$$

Таблицы этой функции приведены в различных справочниках. Если эта вероятность велика, то, конечно, согласие теории с экспериментом хорошее.

При обсуждениях распределения  $\chi^2$  предполагалось, что известны истинные параметры  $\bar{a}_m$  и, следовательно, истинные средние величины  $\bar{x}_i$ . Однако на практике это не так: мы подгоняем параметры  $a_m$  к наиболее вероятным значениям  $a_m^*$ , которые дают наилучшее согласие с экспериментальными данными. Используя эти наилучшие значения  $a_m^*$  для вычисления наблюдаемого  $\chi^2$  [согласно (14.55)], мы, конечно, получаем меньшее значение, чем получили бы с фиксированными  $\bar{a}_m$ . Например, если число подгоняемых параметров  $n$  равно числу экспериментальных точек  $N$ , возможно идеальное согласие и  $\chi^2 = 0$ . Если  $N > n$ , то оказывается, что в качестве числа степеней свободы в  $\chi^2$ -проверке (14.74) нужно использовать число  $N' = N - n$  вместо  $N$ .

Закончим эту главу замечанием о роли априорных вероятностей. Нужно иметь в виду, что использование функций правдоподобия предполагает равными априорные вероятности для различных «теорий», т. е.  $P(A)/P(B) \approx \approx 1$ . Вообще говоря, это разумное предположение, и для хорошего эксперимента нет большой разницы. В тех случаях, когда известно, что данная «теория» невозможна, соответствующая вероятность  $P(A) = 0$ . Кроме того, предыдущие эксперименты могут сделать априорную вероятность некоторых теорий больше, чем других. Влияние неравных априорных вероятностей можно учесть, если возвратиться к основному уравнению (14.44), основанному на теореме Бейеса.

ТЕНЗОРНЫЙ АНАЛИЗ  
И ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ  
ГЕОМЕТРИЯ

15.1. ДЕКАРТОВЫ ТЕНЗОРЫ В ТРЕХМЕРНОМ  
ПРОСТРАНСТВЕ

Сначала опишем влияние вращения декартовых координат на векторы в обычном трехмерном пространстве. Рассмотрим, что происходит, если повернуть систему

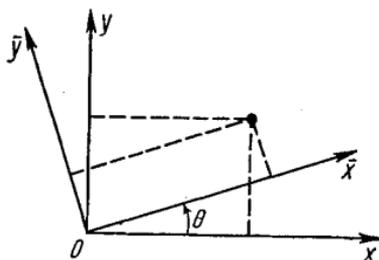


Рис. 15.1. Две системы координат, повернутые одна относительно другой на угол  $\theta$  вокруг оси  $z$ .

координат на угол  $\theta$  в положительном направлении вокруг оси  $z$  (рис. 15.1). Новые компоненты вектора выражаются через старые с помощью соотношений

$$\begin{aligned} \bar{A}_x &= A_x \cos \theta + A_y \sin \theta, \\ \bar{A}_y &= -A_x \sin \theta + A_y \cos \theta, \quad \bar{A}_z = A_z, \end{aligned}$$

которые можно записать в виде  $\bar{A} = MA$ , причем матрица  $M$  определяется как

$$M = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (15.1)$$

По аналогии легко найти матрицы, описывающие вращения вокруг оси  $x$  или  $y$ .

Если рассматривается более одного вращения, то используется более детальное обозначение; например,  $M_z(\theta)$ , где индекс  $z$  показывает ось вращения, а аргумент  $\theta$  — угол вращения.

Произвольную ориентацию системы координат можно получить, делая три последовательных поворота вокруг осей координат. Обычно их производят следующим образом:

1. Вращение  $(xyz)$  на угол  $\alpha$  вокруг оси  $z$  дает  $(x'y'z')$ . Матрица, описывающая это вращение, есть  $M_z(\alpha)$ .

2. Вращение  $(x'y'z')$  на угол  $\beta$  вокруг оси  $y'$  дает  $(x''y''z'')$ . Матрица, соответствующая этому вращению, есть  $M_{y'}(\beta)$ .

3. Вращение  $(x''y''z'')$  на угол  $\gamma$  вокруг оси  $z''$  дает  $(\overline{xyz})$ . Матрица, связанная с этим, есть  $M_{z''}(\gamma)$ .

На рис. 15.2 показаны эти последовательные вращения. Отметим, что  $\beta$  и  $\alpha$  — обычные полярные координаты, задающие направление окончательной оси  $z$  относительно исходной системы координат. Углы  $(\alpha, \beta, \gamma)$  называются углами Эйлера. Матрица преобразования, описывающая все вращение, равна \*

$$\begin{aligned}
 M(\alpha, \beta, \gamma) &= M_{z''}(\gamma) M_{y'}(\beta) M_z(\alpha) = \\
 &= \begin{pmatrix} \cos \gamma & \sin \gamma & 0 \\ -\sin \gamma & \cos \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \beta & 0 & -\sin \beta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \beta & 0 & \cos \beta \end{pmatrix} \times \\
 &\quad \times \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 \\ -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \\
 &= \begin{pmatrix} \cos \beta \cos \alpha \cos \gamma - \cos \beta \sin \alpha \cos \gamma + & -\sin \beta \cos \gamma \\ -\sin \alpha \sin \gamma & +\cos \alpha \sin \gamma & \\ -\cos \beta \cos \alpha \sin \gamma - & -\cos \beta \sin \alpha \sin \gamma + & \sin \beta \sin \gamma \\ -\sin \alpha \cos \gamma & +\cos \alpha \cos \gamma & \\ \sin \beta \cos \alpha & \sin \beta \sin \alpha & \cos \beta \end{pmatrix}.
 \end{aligned}
 \tag{15.2}$$

\* Для некоторых целей удобно описать реориентацию системы координат через вращения вокруг исходной системы. Можно показать, что та же реориентация координат, что на рис. 15.2, может быть осуществлена тремя вращениями (читай справа налево):  $M(\alpha, \beta, \gamma) = M_z(\alpha) M_{y'}(\beta) M_{z''}(\gamma)$ .

Компоненты вектора относительно новой системы ( $\bar{A}$ ) связаны с компонентами в старой системе ( $A$ ) соотношением

$$\bar{A} = MA. \quad (15.3)$$

Отметим, что  $M$  — ортогональная матрица:  $M^{-1} = \bar{M}$ . Также  $\det M = 1$ .

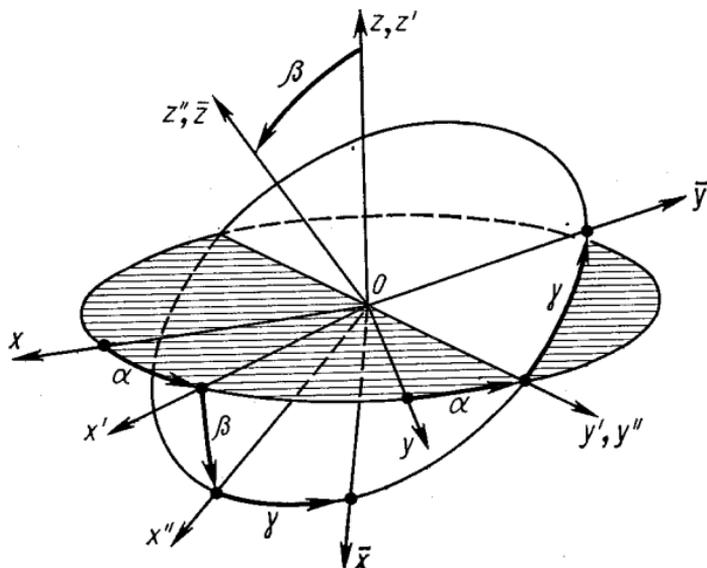


Рис. 15.2. Диаграмма, показывающая три последовательных поворота на углы Эйлера  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ .

Определим теперь вектор в трехмерном пространстве: это любой объект  $A$ , который имеет три компоненты в декартовой системе координат и преобразуется по формулам

$$\bar{A} = MA \quad (15.4)$$

при вращении координат, где  $M$  — матрица (15.2).

Матрица преобразования  $M$ , определенная здесь, является обратной (или транспонированной) к матрице  $\gamma$ , используемой в гл. 6. Это легко увидеть, сравнивая уравнения (15.4) и (6.30). Называть ли матрицу  $M$  матрицей преобразования или ее обратную матрицу — это, конечно, вопрос определения. Наиболее «естественное» определение зависит от способа, которым определяется преобразование. В гл. 6 это делалось с помощью представления новых базисных векторов  $e'_i$  в виде линейных комбинаций ста-

рых векторов  $e_j$ . С другой стороны, здесь преобразование определяется заданием новых компонент  $\bar{A}_i$  вектора  $A$  в виде линейных комбинаций старых компонент  $A_j$ .

Отметим разницу между определением вектора (15.4) и постулатами, приведенными в разд. 6.1 для абстрактного векторного пространства. Рассмотрим, например, уравнение

$$E = \frac{e}{r^3} \mathbf{r} \quad (\text{закон Кулона}), \quad (15.5)$$

определяющее электрическое поле  $E$  в точке  $\mathbf{r}$ , создаваемое точечным зарядом  $e$  в начале координат. Величины  $E$  и  $\mathbf{r}$  в этой главе являются векторами, так как они удовлетворяют условию (15.4). Однако их нельзя считать частью одного абстрактного векторного пространства; их сумма, не имеющая смысла по соображениям размерности, ничего физически не значит.

Рассмотрим далее объекты со свойствами преобразований, отличными от векторов. Например, если  $A_i$  и  $B_j$  — компоненты двух векторов, то можно образовать комбинацию с девятью компонентами («внешнее» произведение двух векторов)

$$T_{ij} = A_i B_j. \quad (15.6)$$

Из (15.4) непосредственно следует способ, которым преобразуются эти компоненты при вращении системы координат

$$\bar{T}_{ij} = \sum_{kl} M_{ik} M_{jl} T_{kl}. \quad (15.7)$$

Любой объект, который имеет девять компонент и преобразуется таким образом, называется тензором второго ранга.

**Пример.** Тензор инерции твердого тела имеет компоненты

$$I_{jk} = \delta_{jk} \int_{\text{объем тела}} r^2 \rho d^3x - \int_{\text{объем тела}} r_j r_k \rho d^3x, \quad (15.8)$$

где  $\rho$  — плотность;  $r$  — длина радиус-вектора  $\mathbf{r}$ , компоненты которого равны  $r_i$ . Заметим, что второй интеграл содержит внешнее произведение  $\mathbf{r}$  с самим собой и, таким образом, является тензором второго ранга.

Что можно сказать о символе Кронекера, который умножается на первый (скалярный) интеграл в  $I_{jk}$ ?

$$\delta_{ij} \stackrel{\epsilon}{=} \begin{cases} 0, & \text{если } i \neq j, \\ 1, & \text{если } i = j \end{cases} \quad (\text{во всех системах координат}). \quad (15.9)$$

Будет ли  $\delta_{ij}$ , определенный таким образом, тензором? Преобразование (15.7) требует

$$\bar{\delta}_{ij} = \delta_{ij} \stackrel{?}{=} \sum_{kl} M_{ik} M_{jl} \delta_{kl} = \sum_k M_{ik} M_{jk} = (M\tilde{M})_{ij} = \delta_{ij}.$$

Таким образом,  $\delta_{ij}$  есть тензор второго ранга.

Очевидным обобщением определения тензора второго ранга получаются тензоры третьего и более высокого рангов. Тензор ранга  $n$  имеет  $3^n$  компонент, которые при вращениях системы координат преобразуются как произведение  $A_i B_j \dots G_l$  компонент  $n$  векторов, т. е. преобразование содержит  $n$  множителей  $M_{ik} \dots$ . «Внешнее» произведение двух тензоров рангов  $n$  и  $m$ , конечно, дает тензор ранга  $n + m$ . Вектор — это тензор ранга 1, а скаляр — тензор ранга 0.

Рассмотрим теперь так называемый а н т и с и м м е т р и ч е с к и й с и м в о л Л е в и — Ч и в и т а

$$\varepsilon_{ijk} = \begin{cases} 1, & \text{если } ijk = 123, 231, 312, \\ -1, & \text{если } ijk = 321, 213, 132, \\ 0 & \text{в остальных случаях} \end{cases} \left. \vphantom{\varepsilon_{ijk}} \right\} \text{ во всех системах координат.} \quad (15.10)$$

Является ли  $\varepsilon_{ijk}$  тензором? Т. е.,  $\bar{\varepsilon}_{ijk} \stackrel{?}{=} \varepsilon_{ijk} \stackrel{?}{=} \sum_{lmn} M_{il} M_{jm} M_{kn} \varepsilon_{lmn}$ . Заметим, что для произвольной матрицы  $A_{ij} 3 \times 3$

$$\sum_{lmn} A_{il} A_{jm} A_{kn} \varepsilon_{lmn} = \varepsilon_{ijk} \det A. \quad (15.11)$$

Итак, поскольку при всех вращениях  $\det M = 1$ , то  $\varepsilon_{ijk}$  действительно тензор (третьего ранга).

Преобразование, матрица которого  $M$  ортогональна, но имеет определитель  $-1$ , часто называют н е с о б с т в е н н ы м в р а щ е н и е м. Несобственное вращение получается из собственного вращения ( $\det M = +1$ ) после отражения или инверсии. Если применить несобственное вращение к системе координат, то правая система становится левой.

Теперь мы видим, что  $\varepsilon_{ijk}$  в действительности не является тензором, если допустить возможность  $\det M = -1$ . Тензор, закон преобразования для которого есть

$$\bar{A}_{ij\dots} = \sum_{kl\dots} M_{ik} M_{jl} \dots A_{kl} \dots \det M, \quad (15.12)$$

называется псевдотензором;  $(\epsilon_{ijk})$  — псевдотензор. Внешнее произведение тензора и псевдотензора есть псевдотензор, а произведение двух псевдотензоров есть тензор, так как  $(\det M)^2 = 1$ .

Закон преобразования (15.7) для тензора второго ранга можно записать в виде

$$\bar{T} = MTM^{-1}. \quad (15.13)$$

Итак, если  $A$  — вектор, то

$$\bar{T}\bar{A} = (MTM^{-1})(MA) = MTA, \quad (15.14)$$

так что  $TA$  — также вектор. Это пример свертки; если два индекса в тензоре положить равными друг другу и просуммировать от 1 до 3, то получается новый тензор с числом индексов, меньшим на два. Например,

$$\begin{aligned} \left(\sum_i \bar{T}_{iijk\dots}\right) &= \sum_i \sum_{lmnp\dots} M_{il}M_{im}M_{jn}M_{kp}\dots T_{lmnp\dots} = \\ &= \sum_{lmn\dots} \delta_{lm}M_{jn}M_{kp}\dots T_{lmnp\dots} = \\ &= \sum_{n\dots} M_{jn}M_{kp}\dots \left(\sum_l T_{llnp\dots}\right), \end{aligned} \quad (15.15)$$

и можно написать  $\left(\sum_l T_{llnp\dots}\right) = S_{np\dots}$ , где  $S$  — тензор, содержащий на два индекса меньше, чем  $T$ . В частности, вектор  $TA$  образуется из тензора  $T$  и вектора  $A$  посредством следующих операций.

1. Умножение тензора на вектор дает тензор третьего ранга  $T_{ij}A_k$ .

2. Свертка второго и третьего индексов дает вектор

$$(TA)_i = \sum_j T_{ij}A_j. \quad (15.16)$$

Свертка  $AB$  двух векторов  $A$  и  $B$  инвариантна при вращениях:

$$\bar{A}\bar{B} = (MA)(MB) = A\tilde{M}MB = AB. \quad (15.17)$$

Конечно, такой объект является скаляром, т. е. тензором нулевого ранга. Векторное произведение

$$\sum_{ij} \epsilon_{ijk}A_iB_j = (\mathbf{A} \times \mathbf{B})_k \quad (15.18)$$

есть псевдовектор, а величина

$$\sum_{ijk} \epsilon_{ijk}A_iB_jC_k = \mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) \quad (15.19)$$

есть псевдоскаляр.

Тензор второго ранга  $T_{ij} = A_j B_i$ , образованный внешним произведением двух векторов, иногда обозначается символом, называемым д и а д о й АВ, а линейная комбинация диад  $\sum \lambda_h A_h B_h$  называется а ф ф и н о р о м. Заметим, что важен порядок векторов в диаде:  $AB \neq BA$ . Если  $T = AB$ , то свертка

$$V_i = \sum_{j=1}^3 T_{ij} C_j \quad (15.20)$$

может быть записана в виде

$$V = AB \cdot C = (B \cdot C) A. \quad (15.21)$$

Аналогично т р и а д а АВС есть тензор третьего ранга с компонентами  $T_{ijk} = A_i B_j C_k$ ; аналогично определяются п о л и а д ы.

## 15.2. КРИВЫЕ В ТРЕХМЕРНОМ ПРОСТРАНСТВЕ. ФОРМУЛЫ ФРЕНЕ

В предыдущем разделе обсуждался частный тип преобразования координат, а именно вращение декартовых координат в трехмерном пространстве. Сейчас мы перейдем к рассмотрению общих преобразований координат. Однако прежде сделаем краткое отступление об аналитическом описании кривых в трех измерениях.

Кривую можно описать уравнением

$$\mathbf{x} = \boldsymbol{\phi}(t), \quad (15.22)$$

где  $\mathbf{x}$  — вектор, выходящий из начала координат в точку кривой, а  $t$  — параметр, меняющийся вдоль кривой.

Квадрат элемента длины дуги равен

$$ds^2 = d\mathbf{x}^2 = (d\boldsymbol{\phi}/dt)^2 (dt)^2. \quad (15.23)$$

Можно решить это уравнение и получить  $t(s)$  или  $s(t)$ . Таким образом, длина дуги вдоль кривой используется как параметр. Обычно мы делаем эту операцию, так как она приводит к наиболее простым формулам; очевидно обобщение на произвольный параметр.

Запишем далее уравнение кривой в виде

$$\mathbf{x} = \boldsymbol{\phi}(s) \quad (15.24)$$

и образуем вектор

$$\boldsymbol{\alpha}(s) = d\boldsymbol{\phi}/ds. \quad (15.25)$$

Легко видеть, что  $\alpha$  — единичный вектор вдоль касательной к кривой.

Из равенства  $\alpha^2 = 1$  получаем

$$\alpha \cdot (d\alpha/ds) = 0. \quad (15.26)$$

Итак,  $d\alpha/ds$  перпендикулярно  $\alpha$ ; определим величину

$$d\alpha/ds = \kappa\beta, \quad (15.27)$$

где  $\beta$  — единичный вектор, а  $\kappa$  положительно. Заметим, что  $\beta$  называется главной нормалью кривой, а  $\kappa$  — кривизной.

Как вычислить  $d\beta/ds$ ? Из  $\beta \cdot \beta = 1$  мы видим, что  $d\beta/ds$  перпендикулярно  $\beta$ . Напишем

$$\frac{d\beta}{ds} = C_1\alpha + C_2\gamma \quad (\gamma = \alpha \times \beta). \quad (15.28)$$

Вектор  $\gamma$  называется биномалью кривой. Заметим, что  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  образуют в каждой точке кривой правую систему координат. Из  $\alpha \cdot \beta = 0$  получаем

$$\alpha \cdot d\beta/ds + \beta \cdot d\alpha/ds = 0 \quad (15.29)$$

или

$$C_1 + \kappa = 0, \quad C_1 = -\kappa. \quad (15.30)$$

Величина  $-\kappa$  обычно записывается как  $\tau$  и называется кручением.

Рассмотрим, наконец,  $d\gamma/ds$ :

$$\alpha \cdot \gamma = 0 \rightarrow \alpha \cdot \frac{d\gamma}{ds} + \gamma \cdot \frac{d\alpha}{ds} = 0 \rightarrow \alpha \cdot \frac{d\gamma}{ds} = 0;$$

$$\beta \cdot \gamma = 0 \rightarrow \beta \cdot \frac{d\gamma}{ds} + \gamma \cdot \frac{d\beta}{ds} = 0 \rightarrow \beta \cdot \frac{d\gamma}{ds} = \tau;$$

$$\gamma \cdot \gamma = 1 \rightarrow \gamma \cdot \frac{d\gamma}{ds} = 0.$$

Следовательно,

$$d\gamma/ds = \tau\beta. \quad (15.31)$$

Собирая полученные выражения, находим три уравнения

$$d\alpha/ds = \kappa\beta; \quad d\beta/ds = -\kappa\alpha - \tau\gamma; \quad d\gamma/ds = \tau\beta. \quad (15.32)$$

Они называются формулами Френе.

### 15.3. ОБЩИЙ ТЕНЗОРНЫЙ АНАЛИЗ

Обобщим основные положения первого раздела этой главы на случай произвольного преобразования координат [были рассмотрены только линейные ортогональные пре-

образования (вращения) в трех измерениях], т. е. предположим, что новые координаты  $\bar{x}$  являются произвольными функциями старых координат  $x$ :

$$\bar{x}_i = \bar{x}_i(x_1, x_2, \dots) \quad (15.33)$$

или, более кратко,  $\bar{x} = \bar{x}(x)$ .

Рассмотрим точку  $P$  с координатами  $x$  и соседнюю точку  $Q$  с координатами  $x + dx$ . Можно предположить, что величины  $dx$  суть компоненты малого вектора от  $P$  до  $Q$ ; такое представление не обязательно, но оно поясняет дальнейшее обсуждение.

Предположим, что система координат меняется. Теперь  $P$  имеет координаты  $\bar{x}$ , а  $Q$  — координаты  $\bar{x} + d\bar{x}$ , и  $d\bar{x}_i = \sum_j (\partial \bar{x}_i / \partial x_j) dx_j$ . Следуя Эйнштейну, используем всюду далее следующее условие суммирования: по всякому индексу, повторяющемуся в одном и том же члене дважды, производится суммирование. Итак,

$$d\bar{x}_i = (\partial \bar{x}_i / \partial x_j) dx_j. \quad (15.34)$$

Любой объект  $A^i$ , преобразующийся по закону

$$\bar{A}^i = (\partial \bar{x}_i / \partial x_j) A^j, \quad (15.35)$$

называется **контравариантным вектором**. Согласно (15.34), дифференциалы координат  $dx_i$  являются контравариантным вектором.

Закон преобразования (15.35) совпадает с законом  $\bar{A} = MA$  (15.3) для декартовых координат, за исключением того факта, что теперь матрица преобразования  $M_{ij} = \partial \bar{x}_i / \partial x_j$  может меняться в зависимости от положения точки в пространстве.

Второй тип векторов образуется величинами

$$\partial \phi / \partial x_i, \quad (15.36)$$

где  $\phi$  — скаляр, т. е. величина, которая не меняется при преобразовании координат. Более точно, величина  $\phi$  не меняется в каждой точке. Функциональная зависимость  $\phi$  от координат, конечно, меняется при переходе от одной системы координат к другой. Далее, согласно правилам дифференцирования,

$$\frac{\partial \phi}{\partial \bar{x}_i} = \frac{\partial \phi}{\partial x_j} \cdot \frac{\partial x_j}{\partial \bar{x}_i}. \quad (15.37)$$

Любой объект, который преобразуется согласно закону

$$\bar{B}_i = (\partial x_j / \partial \bar{x}_i) B_j, \quad (15.38)$$

называется к о в а р и а н т н ы м в е к т о р о м. Замечим, что контравариантные индексы ставятся вверху, а ковариантные — внизу. Чтобы полностью перейти к этому обозначению, начиная с этого момента мы будем на всех координатах ставить индексы вверху, так как дифференциалы  $dx^i$  образуют контравариантный вектор.

Сравним уравнения (15.38) и (6.36):  $\alpha'_i = \alpha_j \gamma_{ji}$ . Вспоминая, что теперь  $\gamma = M^{-1}$  [см. абзац, следующий за формулой (15.4)], находим, что законы преобразования те же, что создаются обратной матрицей  $M^{-1}$ :

$$(M^{-1})_{ji} = \partial x^j / \partial \bar{x}^i. \quad (15.39)$$

Это легко проверить:

$$M_{kj} (M^{-1})_{ji} = \frac{\partial \bar{x}^k}{\partial x^j} \cdot \frac{\partial x^j}{\partial \bar{x}^i} = \frac{\partial \bar{x}^k}{\partial \bar{x}^i} = \delta_{ki}$$

и

$$(M^{-1})_{kj} M_{ji} = \frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^j} \cdot \frac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^i} = \frac{\partial x^k}{\partial x^i} = \delta_{ki}. \quad (15.40)$$

Таким образом, мы показали, что компоненты линейной скалярной функции, которые, как мы видели в разд. 6.4, преобразуются контраградиентно к компонентам вектора, образуют ковариантный вектор.

Тензоры более высокого ранга, определенные в разд. 15.1, имеют те же законы преобразования, что и произведения векторов. Например, для тензоров второго ранга имеется три различных закона преобразования:

$$\left. \begin{aligned} \text{контравариантный тензор: } \bar{T}^{ij} &= \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^k} \cdot \frac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^l} T^{kl}; \\ \text{смешанный тензор: } \bar{T}^i_j &= \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^k} \cdot \frac{\partial x^l}{\partial \bar{x}^j} T^k_l; \\ \text{ковариантный тензор: } \bar{T}_{ij} &= \frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^i} \cdot \frac{\partial x^l}{\partial \bar{x}^j} T_{kl}. \end{aligned} \right\} \quad (15.41)$$

Конечно, можно продолжить такие рассуждения и определить тензоры с произвольным числом ковариантных и контравариантных индексов.

Вспомним, что декартовы тензоры можно было свертывать, полагая два индекса равными и суммируя по ним. То же самое можно сделать и с более общими тензорами в случае, если один индекс сверху, а другой — внизу. Положим, например, что  $A^{ij}$  и  $B_k$  — тензоры, а  $C^i = A^{ij}B_j$ . Тогда

$$\begin{aligned} \bar{C}^i &= \bar{A}^{ij} \bar{B}_j = \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^k} \cdot \frac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^l} A^{kl} \frac{\partial x^m}{\partial \bar{x}^j} B_m = \\ &= \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^k} A^{kl} B_l = \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^k} C^k, \end{aligned} \quad (15.42)$$

так что  $C^i$  — действительно контравариантный вектор.

Как и в декартовых координатах, символ Кронекера оказывается тензором, если записать его как  $\delta_j^i$  с одним индексом наверху, а другим внизу (проверка предоставляется читателю). Аналогично, как и выше, антисимметричный символ  $\varepsilon_{ij\dots}$  оказывается «не совсем» тензором.

В этом разделе мы рассматриваем произвольное число измерений. Однако  $\varepsilon_{ijk}$  определен равенством (15.10) только для трех измерений. В общем случае символ определяется следующим образом:

$$\underbrace{\varepsilon_{ij\dots}}_{n \text{ индексов}} = \begin{cases} +1, & \text{если индексы образованы четной} \\ & \text{перестановкой } 12 \dots n; \\ -1, & \text{если индексы образованы нечетной} \\ & \text{перестановкой } 12 \dots n; \\ 0 & \text{в других случаях.} \end{cases} \quad (15.43)$$

Упорядочение чисел  $12 \dots n$  называется четной (нечетной) перестановкой  $12 \dots n$ , если оно отличается от стандартного порядка четным (нечетным) числом перестановок пар чисел.

Объект с законом преобразования

$$\bar{A}^{ij\dots}_{kl\dots} = \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^\alpha} \frac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^\beta} \dots \frac{\partial \bar{x}^\gamma}{\partial x^k} \frac{\partial x^\delta}{\partial \bar{x}^l} \dots A^{\alpha\beta\dots}_{\gamma\delta\dots} \left| \frac{\partial x}{\partial \bar{x}} \right|^w, \quad (15.44)$$

где  $\left| \frac{\partial x}{\partial \bar{x}} \right|$  — якобиан преобразования

$$\left| \frac{\partial x}{\partial \bar{x}} \right| = \begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial \bar{x}_1} & \frac{\partial x_2}{\partial \bar{x}_1} & \dots & \frac{\partial x_n}{\partial \bar{x}_1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \frac{\partial x_n}{\partial \bar{x}_n} \end{vmatrix} \quad (15.45)$$

называется относительным тензором с весом  $w$ . Читателю предлагается проверить, что  $\varepsilon_{ijk\dots}$  — относительный ковариантный тензор с весом  $-1$ , а  $\varepsilon^{ijk\dots}$ , который численно равен  $\varepsilon_{ijk\dots}$ , — относительный контравариантный тензор с весом  $+1$ .

**Пример.** Элемент «объема»  $d^n x = dx^1 dx^2 \dots dx^n$  преобразуется согласно закону

$$d^n \bar{x} = d^n x \left| \frac{\partial \bar{x}}{\partial x} \right| = d^n x \left| \frac{\partial x}{\partial \bar{x}} \right|^{-1}. \quad (15.46)$$

Таким образом,  $d^n x$  — относительный скаляр с весом  $-1$ .

Относительный тензор с весом  $+1$  называется плотностью тензора. Причина такого названия состоит в том, что интеграл  $\int d^n x A(x)$  есть абсолютный скаляр (скаляр с весом нуль), если  $A$  — скалярная плотность.

Кроме  $\varepsilon_{ijk\dots}$ , другие тензоры и относительные тензоры тоже могут иметь определенные свойства симметрии. Тензор может быть симметричным или антисимметричным относительно перестановки двух или более индексов. Если все эти индексы ковариантные или контравариантные, то свойство симметрии инвариантно относительно преобразования системы координат.

Символ  $\varepsilon_{ijk\dots}$  можно использовать для образования антисимметричных тензоров. Например, если  $A_{ij}$  — тензор, то

$$A_{ij} \varepsilon^{ijkl\dots} = R_i^{kl\dots} \quad (15.47)$$

есть относительный тензор с весом  $+1$ , который антисимметричен по своим контравариантным индексам. Или если  $R^{ij}$  — относительный тензор с весом  $+1$ , то

$$R^{ij} \varepsilon_{jkl\dots} = T_{kl\dots}^i \quad (15.48)$$

есть абсолютный тензор, который антисимметричен по своим ковариантным индексам.

**Пример.** Если  $V_i$  — относительный вектор с весом  $-1$  в трех измерениях (псевдовектор), то

$$V_i \varepsilon^{ijk} = T^{jk} \quad (15.49)$$

есть антисимметричный тензор. Таким образом, имеется однозначное соответствие между ковариантными псевдовекторами веса  $-1$  и антисимметричными контравариантными тензорами второго ранга.

Рассмотрим далее важную теорему, так называемый закон отношений. Сначала продемонстрируем ее на простом примере. Пусть  $A_{ij}$  — такой объект, что  $A_{ij}u^j$  — ковариантный вектор для каждого контравариантного вектора  $u^j$ . Отсюда следует, что  $A_{ij}$  — ковариантный тензор.

*Доказательство.*  $\bar{A}_{ij}\bar{u}^j = (\partial x^k / \partial \bar{x}^i) A_{kl}u^l$  согласно гипотезе. Преобразуем теперь вектор  $\bar{u}^j$  в левой стороне:

$$\bar{A}_{ij} \frac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^m} u^m = \frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^i} A_{kl} u^l.$$

Так как это справедливо для произвольного  $u^m$ , то отсюда следует, что  $\bar{A}_{ij} \frac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^m} = \frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^i} A_{km}$ . Умножая обе сто-

роны на  $\frac{\partial x^m}{\partial \bar{x}^l}$ , получаем доказательство утверждения:

$$\bar{A}_{il} = \frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^i} \cdot \frac{\partial x^m}{\partial \bar{x}^l} A_{km}. \text{ Это доказательство легко обобщить.}$$

Если произведение  $AB = C$  — тензор, причем  $B$  — произвольный тензор, то  $A$  — тензор. Произведение может содержать любое число сверток пар верхних и нижних индексов между  $A$  и  $B$  (но не внутри  $A$  или  $B$ ; то, что  $A_i^i$  — скаляр, еще не означает, что  $A_j^i$  — тензор).

**Пример.** Обобщенная сила — это объект с  $n$  компонентами, причем для произвольного смещения  $dx^i$  точки приложения силы произведение

$$f_i dx^i = W \quad (15.50)$$

является скаляром, а именно работой, производимой силой. Следовательно,  $f_i$  — ковариантный вектор.

Продemonстрируем применение этой теоремы на следующем примере. Обратный к ковариантному тензору второго ранга есть контравариантный тензор второго ранга. Это означает, что, задавая ковариантный тензор  $A_{ij}$ , определим объект  $B^{ij}$  равенством  $A_{ij}B^{jk} = \delta_i^k$ . Доказанную выше теорему нельзя применить к этому уравнению непосредственно, так как  $A$  — не произвольный тензор, а определенный. Вместо этого рассмотрим произвольный контравариантный вектор  $u^i$ . Тогда  $A_{ij}u^j$  — произвольный ковариантный вектор  $v_i$ . Но  $B^{ij}v_j = B^{ij}A_{jk}u^k = \delta_k^i u^k = u^i$ . Таким образом, умножение произвольного вектора  $v$  на  $B$  дает вектор  $u$ . Следовательно,  $B$  есть тензор.

Выберем некоторый определенный симметричный несингулярный ковариантный тензор  $g_{ij}$  и назовем его фундаментальным ковариантным тензором. В действительности не требуется, чтобы он был симметричным, но если это так, то выкладки и результаты удобнее. Тензор, обратный к  $g_{ij}$ , запишем в виде  $g^{ij}$ :

$$g_{ij}g^{jk} = \delta_i^k. \quad (15.51)$$

Используя фундаментальный тензор  $g_{ij}$ , можно установить однозначное соответствие между ковариантными и контравариантными векторами. Для каждого ковариантного вектора  $u_i$  имеется контравариантный вектор  $u^i$ , определяемый равенством

$$u^i = g^{ij}u_j. \quad (15.52)$$

Аналогично

$$u_i = g_{ij}u^j. \quad (15.53)$$

Имея в виду это соответствие, в общем случае  $u_i$  и  $u^j$  называют ковариантными и контравариантными компонентами вектора  $u$ .

Опускание или поднятие индексов применимо также и к тензорам:

$$A_{ij} = g_{ik}A_j^k = g_{ik}g_{jl}A^{kl}. \quad (15.54)$$

Фундаментальный тензор можно использовать также для получения относительного тензора из тензора и наоборот, или, в общем случае, чтобы изменить вес относительного тензора. Для этого используют вид преобразования  $\det g$ , который мы сейчас найдем. Обозначим  $\partial x^i / \partial \bar{x}^j = \gamma_{ij}$ . Тогда

$$\bar{g}_{lm} = \frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^l} \cdot \frac{\partial x^j}{\partial \bar{x}^m} g_{ij} = \gamma_{il} \gamma_{jm} g_{ij}$$

или, в матричном обозначении,  $\bar{g} = \tilde{\gamma} g \gamma$ . Следовательно,

$$\det \bar{g} = (\det \gamma)^2 \det g,$$

$$(\det \bar{g})^{1/2} = \det \gamma \cdot (\det g)^{1/2} = \left| \frac{\partial x}{\partial \bar{x}} \right| (\det g)^{1/2}. \quad (15.55)$$

Итак,  $(\det g)^{1/2}$  есть относительный скаляр с весом  $+1$ , и его можно использовать как фактор, повышающий вес относительного тензора на 1.

В геометрии Римана фундаментальный тензор связан с так называемым интервалом  $ds$  соотношением

$$ds^2 = g_{ij} dx^i dx^j, \quad (15.56)$$

где  $ds^2$  — скаляр; тензор  $g_{ij}$  подбирается определенным образом и называется метрическим тензором.

Из (15.56) видим, что для обычной декартовой системы координат метрический тензор равен  $\delta_{ij}$ , так что не требуется делать различие между контравариантными и ковариантными тензорами.

Ранее мы отмечали [см. (15.37)], что производная от скаляра есть (ковариантный) вектор. Однако легко видеть, что дифференцирование тензора, отличного от скаляра не производит тензора. Например, если  $\bar{v}_i = \frac{\partial x^j}{\partial x^i} v_j$ , то

$$\frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x^k} = \frac{\partial^2 x^j}{\partial x^i \partial x^k} v_j + \frac{\partial x^j}{\partial x^i} \cdot \frac{\partial x^l}{\partial x^k} \cdot \frac{\partial v_j}{\partial x^l}. \quad (15.57)$$

Если бы справа был только второй член, то величина  $\partial v_j / \partial x^k$  была бы тензором. Однако первый член усложняет ситуацию. Этот член возникает, так как матрица преобразования  $\partial \bar{x}^i / \partial x^j$  меняется в зависимости от положения в пространстве. В декартовой системе координат этот член отсутствует, и в этом заключается трудность.

Покажем теперь, как можно преодолеть эту трудность, используя фундаментальный тензор  $g_{ij}$ . Рассмотрим производную от фундаментального тензора

$$\begin{aligned} \bar{g}_{ij} &= \frac{\partial x^k}{\partial x^i} \cdot \frac{\partial x^l}{\partial x^j} g_{kl}, \\ \frac{\partial \bar{g}_{ij}}{\partial x^m} &= \frac{\partial^2 x^k}{\partial x^i \partial x^m} \cdot \frac{\partial x^l}{\partial x^j} g_{kl} + \frac{\partial x^k}{\partial x^i} \cdot \frac{\partial^2 x^l}{\partial x^j \partial x^m} g_{kl} + \\ &+ \frac{\partial x^k}{\partial x^i} \cdot \frac{\partial x^l}{\partial x^j} \cdot \frac{\partial x^n}{\partial x^m} \cdot \frac{\partial g_{kl}}{\partial x^n}. \end{aligned} \quad (15.58)$$

Напишем еще два уравнения, полученных перестановкой индексов в последнем уравнении (пишем только индексы):

$$\begin{aligned} \begin{matrix} m i & k & l & k l \\ j & m j & i & \end{matrix} &+ \begin{matrix} k & l & k l \\ m & i j & \end{matrix} &+ \begin{matrix} k & l & n & k l \\ m & i & j & n \end{matrix}; \\ \begin{matrix} j m & k & l & k l \\ i & j i & m & \end{matrix} &+ \begin{matrix} k & l & k l \\ j & m i & \end{matrix} &+ \begin{matrix} k & l & n & k l \\ j & m & i & n \end{matrix} \end{aligned}$$

Если вычесть последнее уравнение из суммы первых двух и определить символ Кристоффеля первого рода

$$[ij, k] = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} \right), \quad (15.59)$$

то получаем

$$\begin{aligned} \overline{[ij, k]} &= \frac{\partial x^l}{\partial \bar{x}^i} \cdot \frac{\partial x^m}{\partial \bar{x}^j} \cdot \frac{\partial x^n}{\partial \bar{x}^k} [sm, n] + \\ &+ g_{lm} \frac{\partial x^l}{\partial \bar{x}^k} \cdot \frac{\partial^2 x^m}{\partial \bar{x}^i \partial \bar{x}^j}. \end{aligned} \quad (15.60)$$

Это уравнение можно решить относительно второй производной; находим

$$\frac{\partial^2 x^s}{\partial \bar{x}^i \partial \bar{x}^j} = \frac{\partial x^s}{\partial \bar{x}^p} \overline{\left\{ \begin{matrix} p \\ ij \end{matrix} \right\}} - \frac{\partial x^l}{\partial \bar{x}^i} \cdot \frac{\partial x^m}{\partial \bar{x}^j} \left\{ \begin{matrix} s \\ lm \end{matrix} \right\}, \quad (15.61)$$

где введен символ Кристоффеля второго рода

$$\left\{ \begin{matrix} i \\ jk \end{matrix} \right\} = g^{il} [jk, l]. \quad (15.62)$$

Теперь можно определить так называемую ковариантную производную ковариантного вектора. Подставим выражение (15.61) для второй производной  $x$  через  $\bar{x}$  в уравнение (15.57) для  $\partial v_i / \partial x^k$ . Имеем

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{v}_i}{\partial \bar{x}^k} &= \frac{\partial x^j}{\partial \bar{x}^i} \cdot \frac{\partial x^l}{\partial \bar{x}^k} \cdot \frac{\partial v_j}{\partial x^l} + \\ &+ v_j \left[ \frac{\partial x^j}{\partial \bar{x}^l} \overline{\left\{ \begin{matrix} l \\ ik \end{matrix} \right\}} - \frac{\partial x^l}{\partial \bar{x}^i} \cdot \frac{\partial x^m}{\partial \bar{x}^k} \left\{ \begin{matrix} j \\ lm \end{matrix} \right\} \right], \end{aligned}$$

что можно также записать в виде

$$\frac{\partial \bar{v}_i}{\partial \bar{x}^k} - \overline{\left\{ \begin{matrix} l \\ ik \end{matrix} \right\}} \bar{v}_l = \frac{\partial x^j}{\partial \bar{x}^i} \frac{\partial x^l}{\partial \bar{x}^k} \left[ \frac{\partial v_j}{\partial x^l} - \left\{ \begin{matrix} m \\ jl \end{matrix} \right\} v_m \right]. \quad (15.63)$$

Итак,

$$v_{i;j} = \frac{\partial v_i}{\partial x^j} - \left\{ \begin{matrix} k \\ ij \end{matrix} \right\} v_k \quad (15.64)$$

есть ковариантный тензор второго ранга, так называемая ковариантная производная от  $v_i$ .

Оказывается, что ковариантная производная контравариантного вектора равна

$$v^i_{;j} = \frac{\partial v^i}{\partial x^j} + \left\{ \begin{matrix} i \\ jk \end{matrix} \right\} v^k. \quad (15.65)$$

Как и в обычных расчетах, ковариантная производная от произведения образуется почленным дифференцированием множителей. По аналогии с приведенными выше выражениями для ковариантных производных векторов образуется ковариантная производная тензора \*:

$$A^{ij\dots; \alpha} = \frac{\partial A^{ij\dots}}{\partial x^\alpha} + \left\{ \begin{matrix} i \\ \alpha\beta \end{matrix} \right\} A^{\beta j\dots} + \left\{ \begin{matrix} i \\ \alpha\beta \end{matrix} \right\} A^{i\beta\dots} - \\ - \left\{ \begin{matrix} \beta \\ \alpha\kappa \end{matrix} \right\} A^{ij\dots} - \left\{ \begin{matrix} \beta \\ \alpha\lambda \end{matrix} \right\} A^{ij\dots} - \dots \quad (15.66)$$

Ковариантную производную относительного тензора определяют следующим образом. Пусть  $A^{ij\dots}$  — относительный тензор с весом  $w$ . Определим абсолютный тензор  $B^{ij\dots} = A^{ij\dots} (\det g)^{-w/2}$ . Ковариантная производная  $B^{ij\dots; \alpha}$  от  $B^{ij\dots}$  образуется по формуле (15.66), а ковариантная производная  $A^{ij\dots; \alpha}$  определяется как

$$A^{ij\dots; \alpha} = B^{ij\dots; \alpha} (\det g)^{w/2}.$$

Мы видим, что в общем случае ковариантная производная тензора усложнена присутствием символов Кристоффеля. Однако существуют некоторые ковариантные производные, которые не содержат их. Ниже приводятся некоторые из таких простых производных.

1. Ковариантная производная от скаляра есть обычная частная производная, определенная в (15.36):

$$\phi_{;k} = \partial\phi/\partial x^k. \quad (15.67)$$

2. Если  $A_i$  — ковариантный вектор, то операция  $\text{rot } A$

$$(\text{rot } A)_{ij} = A_{i;j} - A_{j;i} = \frac{\partial A_i}{\partial x^j} - \frac{\partial A_j}{\partial x^i} \quad (15.68)$$

дает антисимметричный ковариантный тензор. Символы Кристоффеля сокращаются из  $A_{i;j}$  и  $A_{j;i}$  по соображениям симметрии. Тот факт, что  $\partial A_i/\partial x^j - \partial A_j/\partial x^i$  есть

\* Ковариантная производная любого тензора или относительного тензора есть относительный тензор с тем же весом, но с дополнительным ковариантным индексом.

тензор, можно непосредственно увидеть из уравнения (15.57), так как члены со вторыми производными сокращаются.

3. Если  $R^i$  — относительный тензор с весом  $+1$ , то свернутая ковариантная производная, представляющая собой относительный скаляр с весом  $+1$ , имеет простую форму

$$R^i_{; i} = \partial R^i / \partial x^i (= \text{«div } R\text{»}). \quad (15.69)$$

4. Особенно проста, а именно равна нулю, ковариантная производная от фундаментального тензора:

$$g_{ij}; k = 0. \quad (15.70)$$

Читателю рекомендуется проверить свойства 3 и 4.

Предположим, что мы дифференцируем дважды ковариантно ковариантный вектор  $u_i; jk = (u_i; j); k$ . Это не равно  $u_i; hj$ ; действительно,

$$u_i; jk - u_i; kj = R^l_{ijk} u_l, \quad (15.71)$$

где

$$R^l_{ijk} = \left\{ \begin{matrix} l \\ mj \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} m \\ ik \end{matrix} \right\} - \left\{ \begin{matrix} l \\ mk \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} m \\ ij \end{matrix} \right\} + \\ + \frac{\partial}{\partial x^j} \left\{ \begin{matrix} l \\ ik \end{matrix} \right\} - \frac{\partial}{\partial x^k} \left\{ \begin{matrix} l \\ ij \end{matrix} \right\}. \quad (15.72)$$

Из сформулированной выше теоремы следует, что  $R^l_{ijk}$  должен быть тензором. Он называется тензором Римановой кривизны.

Рассмотрим теперь задачу нахождения кривой  $x_i = x_i(t)$ , которая минимизирует интеграл

$$I = \int \sqrt{g_{ij} dx^i dx^j} = \int \sqrt{g_{ij} \frac{dx^i}{dt} \cdot \frac{dx^j}{dt}} dt. \quad (15.73)$$

Если, как и в (15.56), рассматривать  $\sqrt{g_{ij} dx^i dx^j}$  как элемент интервала, то интеграл определяет расстояние вдоль пути. В этом случае для такой кривой употребляется название «геодезическая». Однако мы рассмотрим аналитическую задачу нахождения минимума  $I$  независимо от геометрического или физического смысла.

Напишем уравнения Эйлера — Лагранжа для подынтегрального выражения

$$F \left( x^i, \frac{dx^i}{dt} \right) = \sqrt{g_{ij}(x) \frac{dx^i}{dt} \cdot \frac{dx^j}{dt}}$$

[ср. уравнение (12.17)]. Непосредственной проверкой можно убедиться, что результат записывается в виде

$$\frac{d^2x^i}{dt^2} + \left\{ \begin{matrix} i \\ jk \end{matrix} \right\} \frac{dx^j}{dt} \cdot \frac{dx^k}{dt} = \frac{s''}{s'} \cdot \frac{dx^i}{dt}, \quad (15.74)$$

где  $s$  — «длина дуги», определенная равенством

$$s' = \frac{ds}{dt} = \sqrt{g_{ij} \frac{dx^i}{dt} \cdot \frac{dx^j}{dt}}. \quad (15.75)$$

Если рассматривать  $s$  как параметр,  $s' = 1$ ,  $s'' = 0$ , то дифференциальное уравнение (15.74) для геодезической кривой приобретает вид

$$\frac{d^2x^i}{ds^2} + \left\{ \begin{matrix} i \\ jk \end{matrix} \right\} \frac{dx^j}{ds} \cdot \frac{dx^k}{ds} = 0. \quad (15.76)$$

Символы Кристоффеля появились как при ковариантном дифференцировании, так и в геодезии. Отсюда следует, что можно установить связь между обоими понятиями: ковариантным дифференцированием и геодезией. На самом деле имеется много различных соотношений. Например, рассмотрим ковариантную производную «касательного» вектора  $u^i = dx^i/ds$  вдоль геодезической линии. Ковариантная производная вдоль геодезической линии равна

$$u^i{}_{;j} \frac{dx^j}{ds} = \frac{d^2x^i}{ds^2} + \left\{ \begin{matrix} i \\ jk \end{matrix} \right\} \frac{dx^k}{ds} \cdot \frac{dx^j}{ds} = 0 \quad (15.77)$$

[согласно уравнению (15.76)]

Итак, геодезическая кривая — это кривая с «постоянной» касательной, т. е. касательным вектором с нулевой ковариантной производной вдоль кривой. Геометрически это означает, что геодезические кривые являются «прямыми линиями» в пространстве.

ВВЕДЕНИЕ В ГРУППЫ  
И ПРЕДСТАВЛЕНИЯ  
ГРУПП

16.1. ОПРЕДЕЛЕНИЯ

Группа  $G$  — это система элементов  $g_1, g_2, \dots$  вместе с правилом для комбинирования («умножения») любых двух из них в «произведение». При этом должны выполняться следующие четыре условия:

1. Произведение  $g_i g_j$  любых двух элементов группы должно быть элементом группы.

2. Умножение элементов ассоциативно:  $(g_i g_j) g_k = g_i (g_j g_k)$ .

3. Имеется единичный элемент группы  $g_1 = I$ , называемый единичным элементом, так что для всех  $g_i$  в  $G$  выполняется  $I g_i = g_i I = g_i$ .

4. Каждый элемент имеет единственный обратный, т. е. для каждого  $g_i$  имеется единственный элемент группы  $g_i^{-1}$  — такой, что  $g_i g_i^{-1} = g_i^{-1} g_i = I$ .

Группа с конечным числом элементов называется конечной группой; число элементов в конечной группе есть порядок группы. Мы сосредоточим наше внимание на конечных группах; в последних двух разделах этой главы будут кратко рассмотрены некоторые бесконечные группы.

Групповое умножение не обязательно коммутативно; т. е.  $g_i g_j$  не обязательно равно  $g_j g_i$ . Если  $g_i g_j = g_j g_i$  для каждой пары элементов в группе, то ее называют коммутативной, или абелевой группой.

Если  $S$  — любая подсистема группы  $G$ , то  $S g_i$  будет обозначать систему элементов, которая получается, если каждый элемент в  $S$  умножить на  $g_i$  слева. Аналогичное обозначение используется для умножения справа. Отметим, что число элементов в  $S g_i$  равно числу элементов в  $S$ . Если  $a g_i = b g_i$  ( $a$  и  $b$  в  $S$ ), то, умножая слева на  $g_i^{-1}$ , имеем  $a = b$ . В частности,  $G g = G$ ; если всю группу умножить слева (или справа) на любой элемент, то результат представляет некоторую перестановку в группе.

Часто обобщают группу, чтобы образовать алгебру. Алгебра — это система элементов, образующих линейное векторное пространство, в котором, помимо сложения, операция умножения определена так, чтобы удовлетворялись постулаты групп. Исключение представляет нуль алгебры, для которого нет обратного. Например, данная группа  $G$  с элементами  $g_i$  ( $i = 1, \dots, h$ ) приводит к линейной комбинации  $\sum_{i=1}^h c_i g_i$  элементов групп с вещественными коэффициентами  $c_i$ ; совокупность таких линейных комбинаций образует алгебру. Произведение определяется очевидным образом:

$$\left(\sum_{i=1}^h c_i g_i\right) \left(\sum_{j=1}^h d_j g_j\right) = \sum_{j=1}^h \sum_{i=1}^h c_i d_j g_i g_j.$$

Так как  $G$  — группа, то каждое произведение  $g_i g_j$  есть элемент  $g_h$  группы  $G$ ; следовательно, произведение является элементом алгебры.

Закончим это введение несколькими примерами для конечных групп.

1. Группа перестановок  $n$  объектов. Эта группа называется симметрической группой  $n$  объектов и обозначается  $S_n$ . Типичный элемент  $S_5$  можно записать в виде [2 4 1 5 3]; это означает, что второй объект следует поставить первым, четвертый объект — вторым и т. д. Умножение двух элементов осуществляется посредством перестановки сначала справа, а затем слева. Например,

$$\begin{aligned} [2\ 4\ 1\ 5\ 3] [5\ 1\ 2\ 3\ 4] abcde &= [2\ 4\ 1\ 5\ 3] eabcd = \\ &= acedb = [1\ 3\ 5\ 4\ 2] abcde. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$[2\ 4\ 1\ 5\ 3] [5\ 1\ 2\ 3\ 4] = [1\ 3\ 5\ 4\ 2]. \quad (16.1)$$

Очевидно, порядок  $S_n$  равен  $n!$ . Отметим следующую очень полезную операцию для симметрической группы  $S_n$ : разложение перестановки на циклы. Например, перестановка [3 1 2 5 4] помещает первый объект вторым, второй объект третьим, а третий объект первым; это составляет один цикл, который можно обозначить (1 2 3). Кроме того, обмен четвертого и пятого объектов образует цикл из двух цифр (4 5); итак, в циклических обозначениях перестановку можно написать в виде (1 2 3) (4 5). Другой пример:

перестановка [1 3 5 4 2] в циклических обозначениях выглядит как (1) (2 5 3) (4).

Очевидно, что порядок, в котором пишут циклы, несуществен и что можно циклически переставлять числа внутри каждого цикла.

2. Группа целых чисел 0, 1, 2, 3. «Умножение» групп есть сложение (по модулю 4). Например,  $1 \times 2 = 3$ ,  $2 \times 3 = 1$ .

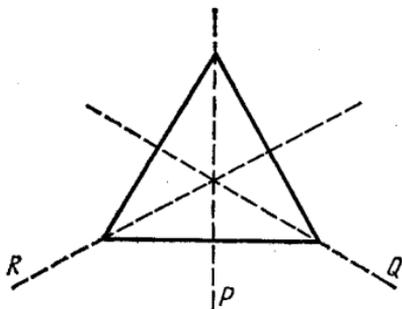


Рис. 16.1. Равносторонний треугольник.

3. Группа преобразований равностороннего треугольника в себя (группа симметрии равностороннего треугольника). Эта группа содержит шесть элементов (рис. 16.1):  $I$  — тождество, треугольник в покое;  $A$  — треугольник поворачивается на  $120^\circ$  по часовой стрелке;  $B$  — треугольник поворачивается на  $240^\circ$  по часовой стрелке;  $C$  — тре-

угольник отражается относительно линии  $P$ ;  $D$  — треугольник отражается относительно линии  $Q$ ;  $E$  — треугольник отражается относительно линии  $R$ . Эта группа совпадает с  $S_3$ ; изменяются лишь наименования у элементов группы. Мы говорим, что эта группа и з о м о р ф н а с  $S_3$ . Они имеют одинаковую таблицу умножения или таблицу группы.

## 16.2. ПОДГРУППЫ И КЛАССЫ

Подсистема группы  $G$ , которая сама является группой, называется подгруппой  $G$ . Пусть  $S$  — подгруппа  $G$ ; рассмотрим системы  $Sg_1, Sg_2, \dots, Sg_n$ , получаемые посредством умножения  $S$  последовательно на каждый элемент группы слева. Эти системы называются п р а в ы м и с м е ж н ы м и к л а с с а м и  $S^*$ .

Заметим теперь, что две системы  $Sg_1$  и  $Sg_2$  либо тождественны, либо не имеют ни одного общего элемента. Предположим, что они имеют общий элемент, т. е.  $s_1g_1 = s_2g_2 = g$  ( $s_1$  и  $s_2$  в  $S$ ). Тогда  $g_2 = s_2^{-1}s_1g_1$ ,  $Sg_2 = Ss_2^{-1}s_1g_1 = Sg_1$ . При этом учитывается, что  $s_2^{-1}s_1$  имеется в  $S$ , и  $Ss = S$ , если  $s$  в  $S$  (так как  $S$  — группа).

\* Некоторые авторы исключают  $S$  из системы смежных классов.

Итак, если  $Sg_1 = Sg_2$ , то мы видим, что  $g_2g_1^{-1} = s_2^{-1}s_1$ , что содержится в  $S$ . В действительности это критерий того, что два смежных класса одинаковы.

Если отметить два следующих факта: 1) каждый элемент группы появляется по меньшей мере в одном смежном классе  $S$  и 2) каждый смежный класс имеет  $h'$  элементов, причем  $h'$  — порядок  $S$ , то из этих фактов следует, что вся группа  $G$  расщепляется на смежные классы  $S$ , причем каждая имеет  $h'$  элементов. Следовательно, если  $h$  — порядок  $G$ , то  $h$  должно равняться  $h'$ , умноженному на некоторое целое число. Итак, *порядок подгруппы равен делителю порядка группы.*

Если  $A$  — какой-нибудь элемент конечной группы, то последовательность элементов (называемая периодом  $A$ )

$$A, A^2, \dots, A^p = I \quad (16.2)$$

образует абелеву подгруппу порядка  $p$ , где  $p$  — наименьшее целое число, для которого  $A^p = I$ . Число  $p$  называется порядком  $A$ . Заметим, что все элементы в этой последовательности различны, так как если  $A^l = A^k$  для  $l < k < p$ , то умножение на  $(A^l)^{-1}$  дает  $A^{k-l} = I$  в противоположность гипотезе.

**Пример.** Рассмотрим элемент  $A$  группы симметрии треугольника, причем период  $A$  содержит элементы

$$A, A^2 = B, A^3 = I, \quad (16.3)$$

так что порядок  $A$  равен 3. Каждый из элементов  $C$ ,  $D$  и  $E$  имеет порядок 2.

Представляет интерес также и другой путь разбиения группы на подсистемы. Назовем два элемента  $a$ ,  $b$  группы  $G$  эквивалентными, если существует такой элемент группы  $g$ , что

$$g^{-1}ag = b. \quad (16.4)$$

Теперь можно разбить группу на подсистемы так, что все элементы в каждой подсистеме эквивалентны друг другу. Такие подсистемы называются классами.

Если рассматривать элементы группы как преобразования, то уравнение (16.4) имеет простой «физический» смысл. Преобразование  $b$  получается выполнением сначала преобразования  $g$ , затем  $a$  и наконец  $g^{-1}$ . Иными словами,  $b$  — то же самое, что и  $a$ , но в другой системе координат.

Например, циклические обозначения дают элегантно разбиение симметрической группы  $S_n$  на классы. Два элемента  $S_n$  принадлежат к одному классу тогда и только тогда, когда они имеют одинаковую циклическую структуру, а отличаются только числами, возникающими внутри квадратных скобок. Например, элементы  $[4\ 6\ 1\ 3\ 5\ 2]$  и  $[3\ 6\ 1\ 4\ 2\ 5]$  в  $S_6$  одного и того же класса, так как их разбиение в циклы дает соответственно  $(1\ 3\ 4)(2\ 6)(5)$  и  $(2\ 5\ 6)(1\ 3)(4)$ . Две перестановки эквивалентны, исключая нумерацию переставляемых объектов. Читателю предлагается найти элемент группы  $G$ , который преобразует одну из этих перестановок в другую посредством уравнения (16.4).

Отметим, что по определению в классе содержится тождественный элемент. Далее, два элемента различных порядков не могут быть в одном и том же классе, так как равенство  $a^h = I$  означает  $b^h = (g^{-1}ag)^h = I$ .

Если подгруппа  $S$  для каждого элемента  $g$  в группе  $G$  обладает свойством

$$g^{-1}Sg = S, \quad (16.5)$$

то  $S$  называется **инвариантной**, или **нормальной подгруппой**. Иными словами, инвариантная подгруппа образована из классов; если она содержит часть какого-либо класса, то она содержит весь класс.

### 16.3. ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ГРУПП

Представлением группы  $G$  называется система квадратных несингулярных матриц  $M_1, M_2, \dots$ , по одной матрице для каждого элемента  $g$ , причем

$$\text{равенство } g_i g_j = g_k \text{ означает } M_i M_j = M_k. \quad (16.6)$$

Другими словами, это система матриц, которые умножаются так же, как и элементы группы и по этой причине также образуют группу. Если матрицы имеют порядок  $n \times n$ , то имеем  $n$ -мерное представление. Каждая группа имеет одномерное представление, в котором каждый элемент группы представлен числом 1.

Если матрицы, соответствующие различным элементам  $G$ , различны, то обе группы **изоморфны**, а представление называется **точным**.

Если одна матрица  $M$  представляет более одного элемента группы  $G$ , то группа  $G$  называется **гомоморф-**

ной матричной группой, и представление неточно.

Рассмотрим некоторое представление  $D$ . Будем записывать матрицу, соответствующую элементу группы  $g$ , символом  $D(g)$ . Довольно тривиальным путем можно образовать представление  $D'$ :

$$D'(g) = S^{-1}D(g)S, \quad (16.7)$$

где  $S$  — любая несингулярная матрица. Матрицы  $D(g)$  и  $D'(g)$  связаны преобразованием эквивалентности. Такие представления называются эквивалентными. В дальнейшем они будут рассматриваться как одно представление.

Рассмотрим два представления  $D^{(1)}(g)$  и  $D^{(2)}(g)$ . Можно образовать новое представление

$$D(g) = D^{(1)}(g) \oplus D^{(2)}(g) = \begin{pmatrix} D^{(1)}(g) & 0 \\ 0 & D^{(2)}(g) \end{pmatrix}. \quad (16.8)$$

Если  $D^{(1)}$  и  $D^{(2)}$  имеют размерности  $n_1$  и  $n_2$ , то, разумеется, размерность  $D^{(1)} \oplus D^{(2)}$  равна  $n_1 + n_2$ . Представление  $D$  называется приводимым и делится на два меньших представления  $D^{(1)}$  и  $D^{(2)}$  \*.

Представление  $D(g)$ , не имеющее вида (16.8) и неприводимое к такой форме с помощью преобразования эквивалентности, называется неприводимым представлением. Неприводимые представления группы — это «строительные кирпичи» для исследования представлений этой группы, так как произвольное представление можно разложить на линейную комбинацию неприводимых представлений. Например, если можно привести преобразование подобия  $D(g)$  к виду

$$\begin{pmatrix} D^{(1)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & D^{(1)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & D^{(2)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & D^{(3)} \end{pmatrix},$$

то часто пишут

$$D(g) = 2D^{(1)}(g) \oplus D^{(2)}(g) \oplus D^{(3)}(g). \quad (16.9)$$

\* Строго говоря, представление называется приводимым, если оно эквивалентно представлению вида  $\begin{pmatrix} D^{(1)}(g) & Y(g) \\ 0 & D^{(2)}(g) \end{pmatrix}$  и полностью приводимым, если оно эквивалентно виду (16.8). Для унитарного представления нет различия между обоими определениями.

Сформулируем несколько очень важных теорем о представлениях групп. Они справедливы для конечных групп и для всех рассмотренных в этой главе бесконечных групп. Доказательства их можно найти в математических книгах, посвященных теории представлений групп.

1. Каждое представление эквивалентно унитарному представлению, т. е. представлению, в котором каждый элемент группы представлен унитарной матрицей. Итак, без потери общности в дальнейшем можно рассматривать только унитарные представления.

2. Матрица, коммутирующая с каждой матрицей неприводимого представления, кратна единичной матрице. Иными словами, если  $D(g)$  неприводима и если  $D(g)A = AD(g)$  для всех элементов  $g$  в группе, то  $A$  кратно единичной матрице.

3. (*Лемма Шура*). Пусть  $D^{(1)}$  и  $D^{(2)}$  — два неприводимых представления размерности  $n_1$  и  $n_2$ . Предположим, что существует такая матрица  $A$ , что  $AD^{(1)}(g) = D^{(2)}(g)A$  для всех  $g$  в группе  $G$ . Тогда либо  $A = 0$ , либо  $n_1 = n_2$ ,  $\det A \neq 0$ , и представления  $D^{(1)}$  и  $D^{(2)}$  эквивалентны одно другому.

4. (*Теорема ортогональности*.) Пусть группа  $G$  содержит  $h$  элементов, и пусть ее неэквивалентные неприводимые (унитарные) представления суть  $D^{(1)}$  (размерности  $n_1$ ),  $D^{(2)}$  (размерности  $n_2$ ) и т. д.;  $D^{(i)}(g)$  — матрица; обозначим типичный матричный элемент  $D_{\alpha\beta}^{(i)}(g)$ . Тогда

$$\sum_g [D_{\alpha\beta}^{(i)}(g)]^* [D_{\gamma\delta}^{(j)}(g)] = \frac{h}{n_i} \delta_{ij} \delta_{\alpha\gamma} \delta_{\beta\delta}. \quad (16.10)$$

Сумма пробегает по всем  $g$  в  $G$ .

Теорема ортогональности — очень удобный прием. Рассмотрим  $\alpha\beta$  — матричный элемент в  $i$ -м неприводимом представлении. Когда  $g$  пробегает  $h$  элементов группы  $G$ , то  $D_{\alpha\beta}^{(i)}$  принимает  $h$  значений; можно рассматривать их как вектор с  $h$  компонентами. Теорема ортогональности утверждает, что этот вектор, «умноженный на себя», равен  $h/n_i$ , и в то же время он ортогонален любому подобному вектору другого представления, и более того любому вектору другого направления в том же представлении.

Сколько таких векторов? Представление  $D^{(i)}$  размерности  $n_i$  образовано матрицами с  $n_i$  строками и  $n_i$  столбцами и, следовательно, содержит  $n_i^2$  таких векторов. Итак,

полное число векторов равно

$$n_1^2 + n_2^2 + \dots = \sum n_i^2, \quad (16.11)$$

причем сумма пробегает по всем (неэквивалентным) неприводимым представлениям. Но очевидно, что не может быть более  $h$  независимых векторов с  $h$  компонентами. Следовательно,

$$\sum n_i^2 \leq h. \quad (16.12)$$

В действительности можно показать, что выполняется равенство.

Простой пример, который можно использовать для проверки высказанных утверждений, дается группой  $S_3$ , т. е. симметрической группой из трех объектов. Эта группа имеет три неприводимых представления, показанных в табл. 16.1.

ТАБЛИЦА 16.1

$g$	$D^{(1)}$ $n_i = 1$	$D^{(2)}$ 1	$D^{(3)}$ 2
[1 2 3]	1	1	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
[2 3 1]	1	1	$\frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & \sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & -1 \end{pmatrix}$
[3 1 2]	1	1	$\frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & -1 \end{pmatrix}$
[3 2 1]	1	-1	$\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & -1 \end{pmatrix}$
[2 1 3]	1	-1	$\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & -1 \end{pmatrix}$
[1 2 3]	1	-1	$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

#### 16.4. ХАРАКТЕРЫ

Характеристика представлений матрицами, которые соответствуют различным элементам группы, до некоторой степени произвольна. Можно было бы сделать преобразование подобия

$$D(g) \rightarrow D'(g) = S D(g) S^{-1}, \quad (16.13)$$

которое привело бы совершенно к другой системе матриц; однако два представления эквивалентны, т. е. одинаковы

для большинства физических целей. Желательно идентифицировать представление с чем-то, что было бы инвариантно при преобразованиях подобия.

Оказывается, что для этой цели весьма удобную систему чисел представляет след матриц представления. Они, конечно, не меняются при преобразованиях подобия, и посредством их различают представления.

Следовательно, определим характер  $\chi^{(i)}(g)$  как след матрицы  $D^{(i)}(g)$ :

$$\chi^{(i)}(g) = \sum_{\alpha} D_{\alpha\alpha}^{(i)}(g). \quad (16.14)$$

Из матриц, представленных в табл. 16.1 для трех неприводимых представлений группы  $S_3$ , можно образовать таблицу характеров (табл. 16.2).

ТАБЛИЦА 16.2

$g$	$\chi^{(1)}$	$\chi^{(2)}$	$\chi^{(3)}$
[1 2 3]	1	1	2
[2 3 1]	1	1	-1
[3 1 2]	1	1	-1
[3 2 1]	1	-1	0
[2 1 3]	1	-1	0
[1 3 2]	1	-1	0

Отметим некоторые особенности этой таблицы. Характер единичного элемента — который в этой группе есть [1 2 3] — дает размерность представления, так как шпур единичной матрицы  $n \times n$  равен  $n$ . Итак, в таблице характеров можно прочесть размерности различных неприводимых представлений.

Другая важная особенность рассматриваемой таблицы состоит в том, что некоторые системы элементов группы имеют одинаковые характеры, т. е. [2 3 1] и [3 1 2] имеют одинаковый характер в каждом представлении; то же относится к [3 2 1], [2 1 3] и [1 3 2]. Общий результат таков, что два элемента группы, принадлежащие одному классу, имеют одинаковый характер в любом представлении.

*Доказательство.* Пусть  $g_1$  и  $g_2$  принадлежат одному классу. Тогда  $g_1 = hg_2h^{-1}$ , где  $h$  — некоторый элемент

группы  $G$ . Следовательно, в любом представлении

$$\begin{aligned} D(g_1) &= D(h) D(g_2) D(h^{-1}); \quad \chi(g_1) = \\ &= \text{Tr } D(g_1) = \text{Tr} [D(h) D(g_2) D(h^{-1})] = \\ &= \text{Tr} [D(h^{-1}) D(h) D(g_2)] = \text{Tr} [D(I) D(g_2)] = \\ &= \text{Tr } D(g_2) = \chi(g_2), \end{aligned} \quad (16.15)$$

причем  $I$  обозначает единичный элемент группы  $G$ .

Таким образом, характеры являются функциями класса; для данного представления имеется один характер для каждого класса; характеры для  $S_3$  записаны в табл. 16.3.

ТАБЛИЦА 16.3

Класс	$\chi^{(1)}$	$\chi^{(2)}$	$\chi^{(3)}$
$C_1$	1	1	2
$C_2$	1	1	-1
$C_3$	1	-1	0

Матрица  $S_3$  была разделена на три класса:

$$\underbrace{[1 \ 2 \ 3]}_{C_1} \quad \underbrace{[2 \ 3 \ 1] \ [3 \ 1 \ 2]}_{C_2} \quad \underbrace{[3 \ 2 \ 1] \ [2 \ 1 \ 3] \ [1 \ 3 \ 2]}_{C_3} \quad (16.16)$$

Из сформулированного соотношения ортогональности (16.10) для матричных элементов неприводимых представлений непосредственно вытекает важное соотношение ортогональности для характеров групп. Если  $\chi^{(1)}, \chi^{(2)}, \dots$  — характеры неприводимых представлений,  $C_1, C_2, \dots, C_s$  — различные классы, а  $p_k$  обозначает число элементов группы в классе  $C_k$ , то

$$\sum_{k=1}^s p_k \chi^{(i)}(C_k)^* \chi^{(j)}(C_k) = h \delta_{ij}. \quad (16.17)$$

Как обычно, здесь  $h$  равно числу элементов в группе.

Если рассматривать характеры каждого неприводимого представления как  $s$ -мерный вектор, имеющий по одной компоненте для каждого класса, то тот факт, что они все ортогональны, означает, что не может быть более  $s$  различных неприводимых представлений. В действительности (это можно показать) их всегда точно  $s$ , так что таблица характеров квадратна; неприводимых представлений столько же, сколько и классов.

Компактный способ выражения соотношения ортогональности для характеров состоит в том, что матрица с  $(ij)$ -м элементом

$$\sqrt{p_j/h} \chi^{(i)}(C_j) \quad (16.18)$$

является унитарной.

Рассмотрим теперь приводимое представление  $D$ , т. е. представление, которое после надлежащей замены координат (преобразование подобия) выглядит как

$$D(g) = \begin{pmatrix} D^{(a)}(g) & & & 0 \\ & D^{(b)}(g) & & \\ & & D^{(c)}(g) & \\ 0 & & & \ddots \end{pmatrix}. \quad (16.19)$$

В другой форме

$$D(g) = D^{(a)}(g) \oplus D^{(b)}(g) \oplus \dots, \quad (16.20)$$

где  $D^{(a)}$ ,  $D^{(b)}$  ... — различные неприводимые представления. Очевидно, что шпур  $D$  равен сумме шпуров различных субматриц, содержащихся в  $D$ , т. е.

$$\chi(C) = \chi^{(a)}(C) + \chi^{(b)}(C) + \dots \quad (16.21)$$

Предположим, что  $D$  содержит первое неприводимое представление  $D^{(1)}$   $c_1$  раз, второе —  $c_2$  раз и т. д. Можно написать

$$D = c_1 D^{(1)} \oplus c_2 D^{(2)} \oplus \dots \quad (16.22)$$

Тогда для характера  $D$  получаем

$$\chi(C_k) = \sum_i c_i \chi^{(i)}(C_k). \quad (16.23)$$

Умножая обе стороны на  $p_k \chi^{(j)}(C_k)^*$  и суммируя по  $k$ , находим (с учетом соотношения ортогональности для характеров групп)

$$c_i = \frac{1}{h} \sum_k p_k \chi^{(i)}(C_k)^* \chi(C_k) = \overline{\chi^{(i)}(g)^* \chi(g)}. \quad (16.24)$$

Здесь черта сверху означает усреднение по всей группе.

Последний результат демонстрирует применение характеров. Если задано любое представление  $D$ , то все, что нам

нужно для разложения  $D$  по неприводимым представлениям, это вычислить  $\chi$ -шпуры. Тогда формула (16.24) показывает, сколько раз содержится каждое неприводимое представление  $D^{(i)}$  в  $D$ .

В качестве примера разложим представление  $S_3$ . Представление  $D$  образуется посредством представления матрицами перестановок (образующих  $S_3$ ). Например, единичный элемент [1 2 3] представляется единичной матрицей  $3 \times 3$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Элемент группы [2 1 3], который обменивает первый и второй объекты, представляется матрицей

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

так как

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ a \\ c \end{pmatrix}$$

и т. д. Читателю предлагается написать все шесть матриц; приведем здесь только таблицу характеров нового представления

<i>Класс</i>	$C_1$	$C_2$	$C_3$	(16.25)
$\chi$	3	0	1	

Теперь можно найти коэффициенты  $c_i$  в разложении

$$D = c_1 D^{(1)} \oplus c_2 D^{(2)} \oplus c_3 D^{(3)} \quad (16.26)$$

с помощью общей формулы (16.24) и таблицы характеров для  $S_3$  (табл. 16.3):

$$c_1 = \overline{\chi^{(1)*}(g) \chi(g)} = \frac{1}{6} [1 \cdot 1 \cdot 3 + 2 \cdot 1 \cdot 0 + 3 \cdot 1 \cdot 1] = 1;$$

$$c_2 = \overline{\chi^{(2)*}(g) \chi(g)} = \frac{1}{6} [1 \cdot 1 \cdot 3 + 2 \cdot 1 \cdot 0 + 3 \cdot (-1) \cdot 1] = 0;$$

$$c_3 = \overline{\chi^{(3)*}(g) \chi(g)} = \frac{1}{6} [1 \cdot 2 \cdot 3 + 2 \cdot (-1) \cdot 0 + 3 \cdot 0 \cdot 1] = 1.$$

Следовательно,

$$D = D^{(1)} \oplus D^{(3)}. \quad (16.27)$$

Рассмотрим следующий пример. Каждая группа порядка  $h$  имеет  $h \times h$ -представление, называемое регулярным представлением. Оно образуется перестановками элементов группы, вызванными умножением справа на каждый отдельный элемент группы. Используя для модели снова  $S_3$ , обозначим элементы группы следующим образом:

$$\begin{aligned} g_1 &= [1\ 2\ 3], & g_2 &= [2\ 3\ 1], & g_3 &= [3\ 1\ 2], \\ g_4 &= [3\ 2\ 1], & g_5 &= [2\ 1\ 3], & g_6 &= [1\ 3\ 2]. \end{aligned}$$

Конечно,  $g_1$  представляется единичной матрицей  $6 \times 6$ . Умножим на  $g_2$  справа

$$\left. \begin{aligned} g_1 &\rightarrow g_2, & g_2 &\rightarrow g_3, & g_3 &\rightarrow g_1, \\ g_4 &\rightarrow g_5, & g_5 &\rightarrow g_6, & g_6 &\rightarrow g_4. \end{aligned} \right\} \quad (16.28)$$

Теперь рассмотрим каждый элемент группы как вектор-столбец

$$g_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad g_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{и т. д.} \quad (16.29)$$

Тогда матрица, осуществляющая перестановку (16.28), равна

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (16.30)$$

Эта матрица представляет  $g_2$  в регулярном представлении  $S_3$ . Более формальное определение этого представления имеет вид

$$D_{ij}(g_k) = \begin{cases} 1, & \text{если } g_k g_j = g_i; \\ 0 & \text{в других случаях.} \end{cases} \quad (16.31)$$

Чему равен характер  $\chi(g)$  для этого представления? Конечно,  $\chi(g_1) = 6$ , в то время как все остальные  $\chi(g)$  равны нулю. Таблица характеров имеет вид

$$\begin{array}{cccc} \text{Класс} & C_1 & C_2 & C_3 \\ \chi & 6 & 0 & 0 \end{array} \quad (16.32)$$

Если  $D = c_1 D^{(1)} \oplus c_2 D^{(2)} \oplus c_3 D^{(3)}$ , то

$$c_1 = \frac{1}{6} [1 \times 6] = 1, \quad c_2 = \frac{1}{6} [1 \times 6] = 1, \quad c_3 = \frac{1}{6} [2 \times 6] = 2.$$

Тогда

$$D = D^{(1)} \oplus D^{(2)} \oplus 2D^{(3)}. \quad (16.33)$$

Регулярное представление произвольной группы столь же просто исследовать, как и этот тривиальный пример. Используем два элементарных факта.

1. Характер  $\chi$  регулярного представления для произвольной группы порядка  $h$  равен

$$\chi(g) = \begin{cases} h & \text{если } g = I; \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

2. Характер  $\chi^{(i)}(I)$  для неприводимого представления  $D^{(i)}$  равен  $n_i$  размерности  $D^{(i)}$ .

Отсюда следует, что регулярное представление содержит каждое неприводимое представление  $D^{(i)}$   $n_i$  раз, где  $n_i$  — размерность  $D^{(i)}$ . Кстати, этот вывод подтверждает сделанное ранее заключение:

$$\sum_i n_i^2 = h. \quad (16.34)$$

Закончим этот раздел примером конструирования таблицы характеров для группы. Рассмотрим  $A_4$  — группу четных перестановок четырех объектов, называемую часто знакопеременной группой четырех объектов. Выпишем  $\frac{1}{2} \cdot 4! = 12$  элементов

$$\begin{array}{llll} [1234] = J & [1342] = A & [1423] = B & [3241] = C \\ [4213] = D & [2431] = E & [4132] = F & [2314] = G \\ [3124] = H & [2143] = J & [3412] = K & [4321] = L \end{array} \quad (16.35)$$

Разобьем далее группу на классы эквивалентных элементов. Непосредственный расчет дает четыре класса:

$$\left. \begin{aligned} C_1 &= I, & C_2 &= A, D, E, H, \\ C_3 &= B, C, F, G, & C_4 &= J, K, L. \end{aligned} \right\} (16.36)$$

Так как число неприводимых представлений равно числу классов, то имеется четыре неприводимых представления  $D^{(1)}, D^{(2)}, D^{(3)}, D^{(4)}$  и четыре характера  $\chi^{(1)}, \chi^{(2)}, \chi^{(3)}, \chi^{(4)}$ .

Размерности  $n_i$  этих представлений можно найти из условия  $\sum_{i=1}^4 n_i^2 = h = 12$ . Только одна система четырех квадратов при сложении дает число 12, именно

$$1^2 + 1^2 + 1^2 + 3^2 = 12, \quad (16.37)$$

так что  $n_1 = n_2 = n_3 = 1, n_4 = 3$ , и эти числа представляют собой четыре характера класса  $C_1$  (единичный элемент). Известно также, что одно представление (назовем его  $D^{(1)}$ ) тривиально;  $\chi^{(1)} = 1$  для всех  $C_i$ . Итак, имеется начало таблицы характеров. Оно показано в табл. 16.4.

ТАБЛИЦА 16.4

Класс	$\chi^{(1)}$	$\chi^{(2)}$	$\chi^{(3)}$	$\chi^{(4)}$
$C_1$	1	1	1	3
$C_2$	1	—	—	—
$C_3$	1	—	—	—
$C_4$	1	—	—	—

Другое соображение, помогающее найти характеры, можно получить следующим образом. Предположим, что  $g$  — элемент группы порядка  $m$  [см. (16.2)], а  $D(g)$  — матрица, представляющая  $g$  в  $n$ -мерном представлении. Тогда равенство  $g^m = I$  означает

$$[D(g)]^m = I. \quad (16.38)$$

Если для диагонализации  $D(g)$  выполнить преобразование подобия, то последнее уравнение приобретает вид

$$\begin{pmatrix} \lambda_1^m & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2^m & 0 & & \vdots \\ \vdots & & & & \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \lambda_n^m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 1 \end{pmatrix}, \quad (16.39)$$

так что величины  $\lambda_k$ , т. е. собственные значения  $D(g)$ , равны  $m$ -м корням из единицы.

Тогда характер равен

$$\chi(g) = \text{Tr } D(g) = \sum_{k=1}^n \lambda_k, \quad (16.40)$$

т. е. характер  $\chi$  равен сумме  $n$   $m$ -х корней из единицы.

Применим теперь этот результат для одномерных представлений  $D^{(2)}$  и  $D^{(3)}$  группы  $A_4$ . Порядки элементов в классах  $C_1, C_2, C_3, C_4$  равны соответственно 1, 3, 3, 2. Итак,  $\chi(C_4)$  может быть только  $\pm 1$ , в то время как  $\chi(C_2)$  и  $\chi(C_3)$  могут иметь значения 1,  $\omega$  или  $\omega^2$ , где  $\omega$  — кубический корень из единицы,  $\omega = \exp(2\pi i/3)$ . Эти соображения вместе с требованием (16.17) ортогональности с  $\chi^{(1)}$  определяют  $\chi^{(2)}$  и  $\chi^{(3)}$ . В частности, если  $\chi^{(2)}(C_2) = \omega$ , то  $\chi^{(2)}(C_3)$  должно равняться  $\omega^2$ , чтобы сократить мнимую часть в соотношении ортогональности. Выбор  $\chi^{(2)}(C_2) = \chi^{(2)}(C_3) = 1$  несовместен с требованием ортогональности, так что должно быть  $\chi^{(2)}(C_2) = \omega$  и  $\chi^{(2)}(C_3) = \omega^2$  (или наоборот). Далее,  $\chi^{(2)}(C_4) = 1$ . Эти же выводы справедливы для  $\chi^{(3)}$ , так что теперь характеры имеют вид, изображенный в табл. 16.5.

ТАБЛИЦА 16.5

Класс	$\chi^{(1)}$	$\chi^{(2)}$	$\chi^{(3)}$	$\chi^{(4)}$
$C_1$	1	1	1	3
$C_2$	1	$\omega$	$\omega^2$	—
$C_3$	1	$\omega^2$	$\omega$	—
$C_4$	1	1	1	—

Последний столбец легче всего заполнить, если использовать его ортогональность с остальными тремя столбцами. Если обозначить числа в последнем столбце  $3, x, y, z$ , то [отметим  $\omega^* = \omega^2$  и  $(\omega^2)^* = \omega$ ]

$$\left. \begin{aligned} 3 + 4x + 4y + 3z &= 0; \\ 3 + 4\omega x + 4\omega^2 y + 3z &= 0; \\ 3 + 4\omega^2 x + 4\omega y + 3z &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (16.41)$$

Непосредственное решение этой системы уравнений приводит к окончательной таблице характеров (табл. 16.6).

ТАБЛИЦА 16.6

Класс	$\chi^{(1)}$	$\chi^{(2)}$	$\chi^{(3)}$	$\chi^{(4)}$
$C_1$	1	1	1	3
$C_2$	1	$\omega$	$\omega^2$	0
$C_3$	1	$\omega^2$	$\omega$	0
$C_4$	1	1	1	-1

### 16.5. ФИЗИЧЕСКИЕ ПРИМЕНЕНИЯ

Продemonстрируем применение методов теории групп на паре примеров.

Рассмотрим задачу на собственные значения для дифференциального оператора в частных производных в случае двух или трех измерений. В гл. 8 мы видели, что часто возникает вырождение; несколько колебаний, т. е. собственных функций, могут принадлежать одному собственному значению. Иногда это может быть случайным, однако часто это связано с некоторой симметрией рассматриваемой системы.

Например, второе и третье колебания квадратной мембраны вырождены; любая линейная комбинация

$$\begin{array}{|c|} \hline \phantom{0} \\ \hline \phantom{0} \\ \hline \end{array} \quad \text{и} \quad \begin{array}{|c|} \hline \phantom{0} \\ \hline \phantom{0} \\ \hline \end{array} \quad (16.42)$$

представляет собой колебание с той же частотой. Очевидно, это не случайно, а следует из того факта, что квадратная мембрана переходит в себя при повороте ее на  $90^\circ$ .

Чтобы более точно сформулировать эту идею симметрии, рассмотрим симметрическую группу нашей физической системы, а именно систему всех преобразований объекта, которые оставляют его динамически неизменным. Одна часть мембраны может быть, конечно, закрашена красным цветом, а верх, скажем, зеленым, так что вращение не оставляет ее неизменной; однако вращение не влияет на динамику.

Рассмотрим теперь определенную собственную функцию. Если применить некоторый элемент нашей симмет-

рической группы к этой функции, то мы должны получить другую собственную функцию с тем же собственным значением. Этот факт очевиден, хотя его можно доказать математически. Если элемент группы, действующий на собственную функцию, не приводит к другой собственной функции с тем же собственным значением, то система не инвариантна к такому преобразованию, т. е. в симметрическую группу включено некоторое преобразование, не относящееся к ней.

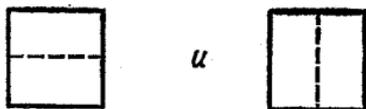
Все эти вырожденные собственные функции можно рассматривать как векторное пространство, причем элементы группы производят линейные преобразования в этом пространстве. Выбирая систему координат, можно представить эти преобразования матрицами; таким образом, мы получаем представление нашей симметрической группы. Следовательно, можно использовать результаты теории представлений групп, найденные ранее в этой главе. Отметим два следующих момента.

1. Следует использовать нормированные ортогональные функции для базисных векторов так, чтобы представления были унитарны. В противном случае большинство результатов этой главы непригодно.

2. Если имеется несколько различных ортонормированных систем базисных векторов, то неважно, какой из них пользоваться; так как отдельные допустимые представления различаются лишь эквивалентным преобразованием.

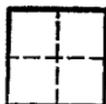
Применим эти идеи к наинизшим собственным функциям квадратной мембраны. Наинизшая собственная функция, не имеющая узлов, остается неизменной под действием всех элементов симметрической группы. Следовательно, это колебание приводит к представлению, которое ставит в соответствие каждому элементу группы число 1.

Два колебания:



смешиваются элементами группы и производят двумерное представление. (Эта симметрическая группа имеет только одно двумерное представление.)

Следующее колебание не вырождено:



Следовательно, оно производит одномерное представление, однако это представление имеет  $-1$  на некоторых местах, так что это — нетривиальное представление, производимое наимизшим колебанием. Читателю предлагается написать это представление и всю таблицу характеров.

В качестве другого примера рассмотрим уравнение Шредингера для  $n$  тождественных частиц, например электронов в атоме с  $n$  электронами. Пусть  $\psi(x_1, x_2, \dots, x_n)$  — собственная функция с определенной энергией  $E$ . Тогда  $\psi(x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_n})$ , где  $i_1, i_2, \dots, i_n$  — произвольные перестановки  $1, \dots, n$ , должна также быть собственной функцией с той же энергией  $E$ , так как мы поменяли динамически эквивалентные частицы. Таким образом, система всех собственных функций с энергией  $E$  порождает представление симметрической группы  $n$  объектов. Если рассматриваемые частицы — электроны, то принцип Паули утверждает, что допустимо только одно представление, а именно полностью антисимметричное представление, в котором любой обмен двух электронов меняет знак волновой функции  $\psi$ .

Как применить этот формализм к определенной задаче? Простейший тип задачи, которую можно обсудить, касается снятия вырождения возмущением, понижающим симметрию физической системы. Рассмотрим систему с высокой степенью симметрии, для которой задача на собственные значения имеет вид

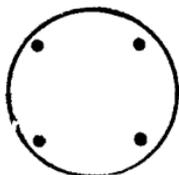
$$L^0\psi = \lambda\psi. \quad (16.43)$$

Система собственных функций  $\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n$ , принадлежащих к некоторому собственному значению  $\lambda$ , производит представление симметрической группы  $S$  оператора  $L^0$ .

Мы хотим узнать, как расщепляется эта вырожденная система при наложении возмущения  $Q$ , причем ему соответствует симметрическая группа  $S'$ , которая является подгруппой  $S$ . Процедура очевидна из предшествующего обсуждения. Система  $\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n$  производит некоторое

представление  $S'$ . Если разложить это представление на неприводимые представления, то базисные векторы для каждого неприводимого представления под действием оператора  $L^0 + Q$  остаются еще вырожденными, однако собственные функции, принадлежащие к различным неприводимым представлениям, не обязательно будут иметь одно и то же возмущенное собственное значение.

Вместо подробного рассмотрения общего случая приведем частный пример. Рассмотрим круглую мембрану, возмущенную четырьмя массами в вершинах центрального квадрата:



В отсутствие возмущения колебания мембраны либо невырождены, либо двукратно вырождены. Теория групп ничего не может сказать нам о невырожденных колебаниях, но возникает следующий интересный вопрос. Будет ли возмущение снимать вырождение пары вырожденных колебаний?

Начнем с рассмотрения симметрической группы и ее таблицы характеров. Симметрическая группа — это группа симметрии квадрата; она содержит восемь элементов:  $I$  (единичный),  $R$  (вращение на  $90^\circ$ ),  $R^2$ ,  $R^3$ ,  $P$  (отражение относительно линии, проходящей через центр),  $PR$ ,  $PR^2$ ,  $PR^3$ . Легко получить, что классы имеют вид

$$\left. \begin{array}{ll} C_1: I, & C_4: P, PR^2, \\ C_2: R, R^3 & C_5: PR, PR^3. \\ C_3: R^2, & \end{array} \right\} \quad (16.44)$$

Методами, аналогичными тем, что использовались ранее в этой главе, находим таблицу характеров для нашей группы (табл. 16.7).

Рассмотрим теперь вырожденную пару невозмущенных собственных функций:

$$\psi_1 \sim \sin m\theta, \quad \psi_2 \sim \cos m\theta. \quad (16.45)$$

Нужно решить, будет ли приводимо или неприводимо двумерное представление  $D$  симметрической группы, порождаемое  $\psi_1$  и  $\psi_2$ .

Класс	$\chi^{(1)}$	$\chi^{(2)}$	$\chi^{(3)}$	$\chi^{(4)}$	$\chi^{(5)}$
$C_1$	1	1	1	1	2
$C_2$	1	1	-1	-1	0
$C_3$	1	1	1	1	-2
$C_4$	1	-1	-1	1	0
$C_5$	1	-1	1	-1	0

Начнем с равенств  $I\psi_1 = \psi_2$ ,  $I\psi_2 = \psi_1$ . Тогда  $I$  представляется матрицей

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (16.46)$$

и  $\chi(C_1) = 2$ .

Далее, действие  $R$  на  $\psi_1$  или  $\psi_2$  эквивалентно уменьшению  $\theta$  на  $\pi/2$ . Таким образом,

$$\left. \begin{aligned} R\psi_1 &\sim \sin m \left( \theta - \frac{\pi}{2} \right) = \left( \cos \frac{m\pi}{2} \right) \psi_1 - \left( \sin \frac{m\pi}{2} \right) \psi_2, \\ R\psi_2 &\sim \cos m \left( \theta - \frac{\pi}{2} \right) = \left( \sin \frac{m\pi}{2} \right) \psi_1 + \left( \cos \frac{m\pi}{2} \right) \psi_2. \end{aligned} \right\} \quad (16.47)$$

Следовательно,  $R$  представляется матрицей

$$\begin{pmatrix} \cos \frac{m\pi}{2} & -\sin \frac{m\pi}{2} \\ \sin \frac{m\pi}{2} & \cos \frac{m\pi}{2} \end{pmatrix} \quad (16.48)$$

и  $\chi(C_2) = 2 \cos(m\pi/2)$ . Продолжая таким же путем, находим, что представление  $D$  имеет следующий характер:

$$\left. \begin{aligned} \chi(C_1) &= 2, \quad \chi(C_2) = 2 \cos \frac{m\pi}{2}, \\ \chi(C_3) &= 2 \cos m\pi, \quad \chi(C_4) = \chi(C_5) = 0. \end{aligned} \right\} \quad (16.49)$$

Теперь можно разложить  $D$  на неприводимые представления; результат имеет вид

$$\begin{aligned} D &= \frac{1}{4} \left[ 1 + 2 \cos \frac{m\pi}{2} + \cos m\pi \right] [D^{(1)} + D^{(2)}] + \\ &+ \frac{1}{4} \left[ 1 - 2 \cos \frac{m\pi}{2} + \cos m\pi \right] [D^{(3)} + D^{(4)}] + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{1}{2} [1 - \cos m\pi] D^{(6)} = \\
 & = \begin{cases} D^{(1)} + D^{(2)}, & m = 4, 8, 12, \dots, \\ D^{(3)} + D^{(4)}, & m = 2, 6, 10, \dots, \\ D^{(6)}, & m = 1, 3, 5, 7, \dots \end{cases} \quad (16.50)
 \end{aligned}$$

Итак, если  $m$  чётно, то представление приводимо и равно сумме двух одномерных представлений, так что возмущение может снять вырождение. С другой стороны, если  $m$

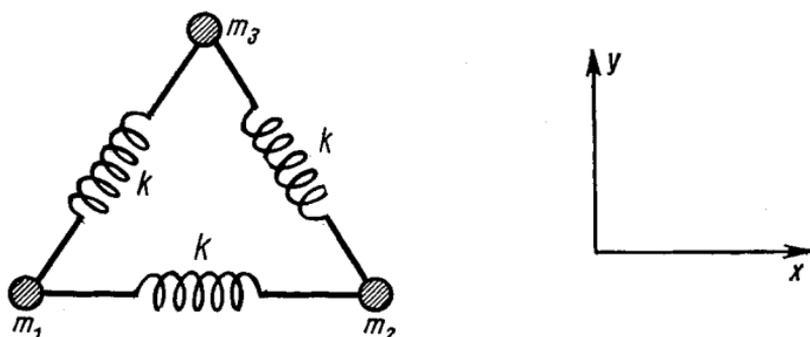


Рис. 16.2. Колеблющийся треугольник.

нечётно, то представление неприводимо и невозможно никакое расщепление, так как симметрия связывает все состояния.

Отметим, что в этом примере мы из теории групп сделали качественные заключения; величина расщепления, производимого возмущением, не исследовалась. Это общая особенность аргументов теории групп. Однако теперь мы перейдем к проблеме, в которой применение теории групп позволяет реально рассчитать числа.

Рассмотрим три массы  $m$  в вершинах равностороннего треугольника, связанные пружинами. Пусть постоянная пружин равна  $k$  (рис. 16.2). Как найти нормальные колебания этой механической системы? Предположим, что массы могут двигаться только в плоскости листа.

Пронумеруем массы, как показано на рисунке. Пусть координаты массы  $m_1$  относительно ее равновесного положения равны  $x_1, y_1$ ; аналогично обозначим координаты для остальных масс. Представим конфигурацию системы шестимерным «вектором состояния»  $\xi$ . В «элементарной

системе координат», показанной на рис. 6.2,  $\xi$  имеет компоненты

$$\xi = (x_1, y_1, x_2, y_2, x_3, y_3). \quad (16.51)$$

Кинетическая и потенциальная энергии системы равны [ср. уравнения (6.58) и (6.60)]

$$\begin{aligned} T = \frac{1}{2} m \sum_i \dot{\xi}_i^2, \quad V = \frac{1}{2} k \left\{ (x_2 - x_1)^2 + \right. \\ \left. + \left[ -\frac{1}{2} (x_3 - x_2) + \frac{1}{2} \sqrt{3} (y_3 - y_2) \right]^2 + \right. \\ \left. + \left[ \frac{1}{2} (x_1 - x_3) + \frac{1}{2} \sqrt{3} (y_1 - y_3) \right]^2 \right\} = \frac{1}{2} k \sum_{ij} V_{ij} \xi_i \xi_j. \end{aligned} \quad (16.52)$$

Второй закон Ньютона дает уравнение

$$m \ddot{\xi}_i = -\partial V / \partial \xi_i = -k \sum_j V_{ij} \xi_j. \quad (16.53)$$

Для нормального колебания имеем  $\xi \sim \exp(-i\omega t)$ . Тогда (16.53) приобретает вид

$$\sum_j V_{ij} \xi_j = \lambda \xi_i, \quad \text{где } \lambda = m\omega^2/k. \quad (16.54)$$

Нормальные колебания описываются собственными векторами матрицы  $V$ , а собственные значения дают частоты.

Разберем, как теория групп позволяет найти эти частоты. Во-первых, каждый собственный вектор производит неприводимое представление, когда мы действуем на него всеми элементами симметрической группы. Таким образом, в координатной системе, диагонализующей  $V$ , имеем

$$V = \left( \begin{array}{cccccc} \lambda_a & & & & & \\ & \cdot & & & & \\ & & \cdot & & & \\ & & & \lambda_a & & \\ & & & & \lambda_b & \\ & & & & & \cdot \\ & & & & & & \lambda_b \\ & & & & & & & \cdot \\ & & & & & & & & \lambda_b \\ & & & & & & & & & \cdot \\ & & & & & & & & & & \lambda_b \\ & & & & & & & & & & & \cdot \\ & & & & & & & & & & & & \lambda_b \\ & & & & & & & & & & & & & \cdot \\ & & & & & & & & & & & & & & \lambda_b \\ & & & & & & & & & & & & & & & \cdot \\ & & & & & & & & & & & & & & & & \lambda_b \end{array} \right) \left. \begin{array}{l} \} D^{(a)} \\ \\ \\ \\ \} D^{(b)} \\ \\ \\ \\ \} \text{и т. д.} \end{array} \right. \quad (16.55)$$

Первые  $n_a$  новых координатных векторов являются собственными векторами, принадлежащими к собственному значению  $\lambda_a$ , они преобразуются один в другой согласно неприводимому представлению  $D^{(a)}$ ; следующие  $n_b$  собственных векторов принадлежат к  $\lambda_b$  и преобразуются согласно  $D^{(b)}$  и т. д.

Следует кратко рассмотреть симметрическую группу. Она состоит из шести элементов:  $I, R, R^2, P, PR, PR^2$ , где  $I$  — единичный элемент,  $R$  поворачивает треугольник на  $120^\circ$  в положительном направлении (против часовой стрелки) и  $P$  отражает относительно вертикальной линии, проходящей через центр. Характеры группы показаны в табл. 16.8. Эта группа симметрии — не что иное, как  $S_3$  (ср. табл. 16.1 и 16.3).

Класс	$\chi^{(1)}$	$\chi^{(2)}$	$\chi^{(3)}$
$C_1(I)$	1	1	2
$C_2(R, R^2)$	1	1	-1
$C_3(P, PR, PR^2)$	1	-1	0

Когда различные элементы группы действуют на треугольник, они производят линейные преобразования  $\xi_i$ . Например, если  $R$  действует на треугольник, то

$$\xi' = D(R) \xi, \quad (16.56)$$

где матрица  $D(R)$  равна

$$D(R) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & r \\ r & 0 & 0 \\ 0 & r & 0 \end{pmatrix}, \quad r = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}. \quad (16.57)$$

Аналогично

$$D(P) = \begin{pmatrix} 0 & p & 0 \\ p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p \end{pmatrix}, \quad p = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (16.58)$$

Какие представления включает в себя  $D$ ? Его характер равен

$$\chi(C_1) = 6, \quad \chi(C_2) = 0, \quad \chi(C_3) = 0,$$

и отсюда следует [ср. (16.32) и (16.33)]

$$D = D^{(1)} \oplus D^{(2)} \oplus 2D^{(3)}. \quad (16.59)$$

Заметим, что  $D$  эквивалентно регулярному представлению нашей симметрической группы. Эта частная особенность случайна; в общем случае ее нет.

Далее в координатной системе с собственными векторами  $V$  в качестве базиса можно написать

$$V = \left( \begin{array}{cccc} \lambda_1 & & & 0 \\ & \lambda_2 & & \\ & & \lambda_{31} & \\ & & & \lambda_{31} \\ & & & & \lambda_{32} \\ & & & & & \lambda_{32} \\ 0 & & & & & & \end{array} \right) \left. \begin{array}{l} D^{(1)} \\ D^{(2)} \\ \left. \begin{array}{l} D^{(31)} \\ D^{(32)} \end{array} \right\} \end{array} \right\} \quad (16.60)$$

Здесь указаны трансформационные свойства различных собственных векторов. Отметим, что две пары собственных векторов, преобразующихся как  $D^{(3)}$ , не обязательно имеют одно и то же собственное значение.

Как выглядит матрица  $D(G)V$  в этой специальной системе координат ( $G$  — произвольный элемент симметрической группы)? Ответ очевиден:

$$D(G)V = \left( \begin{array}{cccc} \lambda_1 D^{(1)}(G) & & & \\ & \lambda_2 D^{(2)}(G) & & \\ & & \lambda_{31} D^{(3)}(G) & \\ & & & \lambda_{32} D^{(3)}(G) \end{array} \right). \quad (16.61)$$

Конечно, ее нельзя использовать непосредственно, так как мы не знаем, какова эта координатная система (неизвестны собственные векторы). Однако шпур этой матрицы инвариантен по отношению к координатным преобразованиям, так что

$$\text{Tr } D(G)V = \lambda_1 \chi^{(1)}(G) + \lambda_2 \chi^{(2)}(G) + (\lambda_{31} + \lambda_{32}) \chi^{(3)}(G) \quad (16.62)$$

в любой системе координат.

Теперь шпур можно вычислить непосредственно, используя частные формы (16.52), (16.57) и (16.58) соответственно для  $V$ ,  $D(R)$  и  $D(P)$ :

$$\text{Tr } D(I)V = 6, \quad \text{Tr } D(H)V = \frac{3}{2}, \quad \text{Tr } D(P)V = 3. \quad (16.63)$$

Следовательно, собственные значения удовлетворяют уравнениям

$$\begin{aligned} \lambda_1 + \lambda_2 + 2(\lambda_{31} + \lambda_{32}) &= 6, \quad \lambda_1 + \lambda_2 - \\ - (\lambda_{31} + \lambda_{32}) &= 3/2, \quad \lambda_1 - \lambda_2 = 3, \end{aligned}$$

откуда

$$\lambda_1 = 3, \quad \lambda_2 = 0, \quad \lambda_{31} + \lambda_{32} = 3/2. \quad (16.64)$$

Можно было бы определить отдельно  $\lambda_{31}$  и  $\lambda_{32}$ , рассматривая величины типа  $\text{Tr } V^2 = \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + 2(\lambda_{31}^2 + \lambda_{32}^2)$ . Однако более простой способ состоит в том, что три степени свободы должны иметь нулевое собственное значение: две трансляционные и одна вращательная. Таким образом,

$$\lambda_{31} = 0, \quad \lambda_{32} = 3/2. \quad (16.65)$$

Мы определили все собственные значения, не решая никакого секулярного уравнения.

## 16.6. БЕСКОНЕЧНЫЕ ГРУППЫ

Закончим эту главу кратким обсуждением групп с бесконечным числом элементов. Приведем некоторые примеры бесконечных групп, встречающихся в физике, и рассмотрим их неприводимые представления. Доказательства утверждений можно найти в книге [8].

Будем рассматривать бесконечные группы, элементы которых будут нумероваться вещественными параметрами, меняющимися непрерывно; типичный элемент группы будет записываться в виде  $g(x_1, x_2, \dots, x_n) = g(x)$ . Если требуется  $n$  таких параметров, то группа называется  $n$ -параметрической группой. Очевидно, для бесконечной группы нельзя написать в обычном смысле таблицу умножения. Если произведение  $g(x)$  и  $g(y)$  есть  $g(z)$ , т. е.

$$\begin{aligned} g(x_1, x_2, \dots, x_n) g(y_1, y_2, \dots, y_n) &= \\ &= g(z_1, z_2, \dots, z_n), \end{aligned}$$

то  $n$  параметров  $z_1, z_2, \dots, z_n$  являются функциями от параметров  $x_1, x_2, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n$ . «Таблица умножения» для бесконечной группы состоит из  $n$  вещественных функций, причем каждая зависит от  $2n$  вещественных аргументов

$$z_1 = f_1(x_1, \dots, y_n), \quad (16.66)$$

$$\dots \dots \dots$$

$$z_n = f_n(x_1, \dots, y_n).$$

Разумеется, бесконечная группа должна удовлетворять общим постулатам о группах, данным в разд. 16.1. Наиболее жесткое требование накладывается ассоциативностью:

$$[g(x)g(y)]g(z) = g(x)[g(y)g(z)]. \quad (16.67)$$

Из требования (16.67), выраженного через функции  $f_i(x, y)$  (16.66), следует, что равенство

$$f_i(f(x, y), z) = f_i(x, f(y, z)) \quad (16.68)$$

выполняется для всех  $x, y, z$ . Если функции  $f_i(x, y)$  (16.66), кроме совместности с постулатами о группах, непрерывны и обладают производными всех порядков, то мы говорим о г р у п п е Л и. Ниже приведены несколько примеров.

1. Группа двумерных линейных преобразований координат вида

$$\left. \begin{aligned} x' &= ax + by + c, \\ y' &= dx + ey + f. \end{aligned} \right\} \quad (16.69)$$

Требование существования обратного преобразования означает, что параметры  $a, \dots, f$ , появляющиеся в (16.69), должны удовлетворять условию  $ae - bd \neq 0$ . Разумеется, эта группа является шестипараметрической группой.

2. Группа всех унимодулярных унитарных матриц  $n \times n$ , т. е. группа всех  $n \times n$ -унитарных матриц с детерминантом 1. Эта группа обычно называется  $SU(n)$ . Можно показать, что  $SU(n)$  имеет  $n^2 - 1$  параметр. Например, общий элемент группы  $SU(2)$  можно записать в виде

$$\begin{pmatrix} \exp(i\xi) \cos \eta & \exp(i\zeta) \sin \eta \\ -\exp(-i\zeta) \sin \eta & \exp(-i\xi) \cos \eta \end{pmatrix} \quad (16.70)$$

с тремя вещественными параметрами  $\xi, \eta, \zeta$ .

3. Группа всех вещественных ортогональных  $n \times n$ -матриц, обычно обозначаемая  $O(n)$ . Если хотят ограничиться матрицами  $O(n)$  с детерминантом  $+1$  (а не  $-1$ ), то говорят о группе  $O^+(n)$ . Например,  $O(3)$  — это группа вращений в трехмерном пространстве;  $O^+(3)$  — группа собственных вращений. Так как для определения вращения требуется три параметра (например, три угла Эйлера),  $O(3)$  — трехпараметрическая группа. В общем случае число параметров в  $O(n)$  равно  $\frac{1}{2}n(n-1)$ .



менной  $x$ . На последнюю, в свою очередь, действует преобразование  $R$ . Определим  $O_R$  так, что  $O_R$ , действующий на произвольную функцию  $f(x)$ , дает новую функцию  $g(x)$ , которая численно равна  $f(Rx)$ , т. е.

$$O_R f(x) = f(Rx). \quad (16.73)$$

Рассмотрим физический смысл (16.73) в частном случае, когда  $R$  — обычное пространственное вращение.

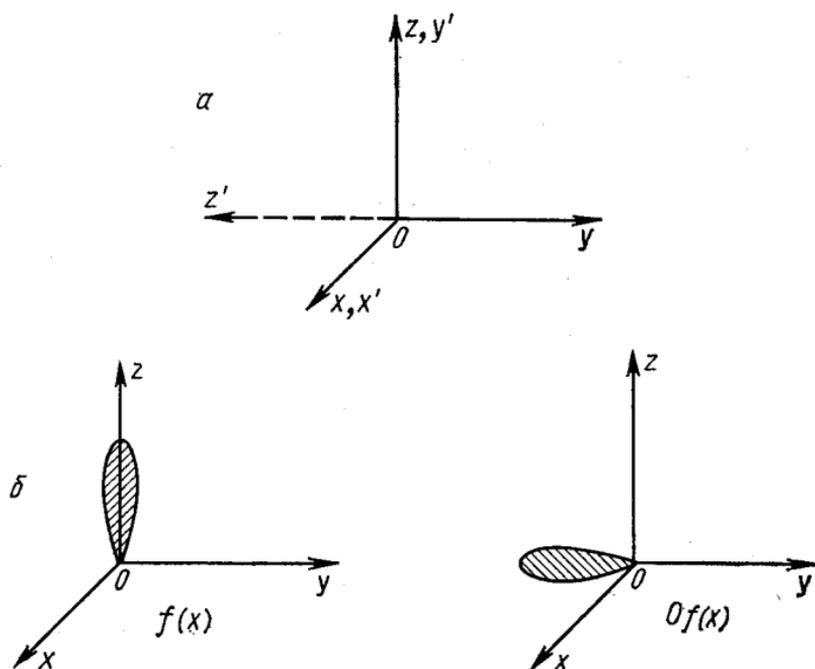


Рис. 16.3. Вращение осей координат вокруг оси  $x$  на  $90^\circ$  (а) и действие соответствующего оператора вращения  $O$  на функцию  $f(x)$ , «сконцентрированную» вдоль положительной оси  $z$  (б).

Уравнение (16.73) показывает, что новая функция  $O_R f$ , вычисленная в любой точке, равна первоначальной функции  $f$ , вычисленной для трансформированных координат. Например, если  $R$  — вращение на  $90^\circ$  вокруг оси  $x$ , определенное формулами (16.72), то (16.73) дает  $O_R f(x, y, z) = f(x, z, -y)$ . Предположим, что  $f(x, y, z)$  имеет некоторую определенную особенность на положительной оси  $z$  ( $x = y = 0, z > 0$ ). Тогда  $O_R f$  обладает той же особенностью при  $x = z = 0, y < 0$ , т. е. на отрицательной оси  $y$  (рис. 16.3). Таким образом, можно рассматривать

оператор  $O_R$  как поворачивающий функцию  $f$  на  $90^\circ$  вокруг оси  $x$ , причем оси координат не изменяются.

В последующих рассуждениях не всегда будут различаться преобразования координат  $R$  и операторов  $O_R$ , однако читатель должен ясно понимать различие; мы попытаемся во всех местах указывать, какой тип объектов рассматривается. Чтобы увидеть, что требуется определенная осторожность, рассмотрим влияние последовательных операций  $O_R$  и  $O_S$ . Повторно используя (16.73), получаем

$$O_R O_S f(x) = O_S f(Rx) = f(SRx). \quad (16.74)$$

Уравнение (16.74) утверждает, что оператор  $O_R O_S$  связан с преобразованием координат  $SR$ ; когда переходят от одного к другому, порядок операций переставляется.

Отметим заблуждение, которое часто возникает при выполнении манипуляций типа (16.74). Из (16.73) следует, что

$$O_S f(x) = f(Sx). \quad (16.75)$$

Подействуем на обе стороны (16.75) оператором  $O_R$ . Слева получаем  $O_R O_S f(x)$ ; справа, так как (16.73) утверждает, что действие  $O_R$  на функцию сводится просто к действию  $R$  на аргумент, получаем  $f(RSx)$ . Таким образом,

$$O_R O_S f(x) = f(RSx). \quad (16.76)$$

Этот результат противоречит (16.74) и является ошибочным.

Ошибка заключена в последнем шаге, когда мы действовали на обе части равенства (16.75) оператором  $O_R$ ;  $O_R$  действует на функции, но не на числа; две части равенства (16.75) могут быть равны численно, но они — различные функции. Приведем простой пример. Определим оператор  $O$  равенством  $O f(x) = f(x^2)$  и рассмотрим две функции  $g(x) = x$ ,  $h(x) = 2x$ . Теперь, разумеется,

$$h(x) = g(2x), \quad (16.77)$$

но действие оператора  $O$  на обе стороны (16.77) приводит к неправильному результату  $Oh(x) = Og(2x) = g(4x^2) = 4x^2$ . Правильный результат:  $Oh(x) = h(x^2) = 2x^2$ .

Перестановка операторов (16.74) уже встречалась раньше. Например, если  $R$  — матрица, описывающая вращение координат, то можно рассмотреть соответствующую матрицу  $T_R$ , которая вращает также вектор,

оставляя координаты фиксированными. Хорошо известно, что  $T_R = R^{-1}$ , так что если выполняются два таких вращения, то мы получаем

$$T_R T_S = R^{-1} S^{-1} = (SR)^{-1} = T_{SR}. \quad (16.78)$$

Перестановки порядка в матрицах (15.2) и матрицах, приведенных в сноске к этой формуле, — тесно связаны.

Возвратимся к определению генераторов (16.71). Имея в виду сделанное отступление, следует решить, рассматривать ли преобразования как операции над координатами или над функциями от этих координат. Примем последнее соглашение. Тогда можно точно найти генераторы для некоторых типичных групп Ли.

1. Рассмотрим шестипараметрическую группу, определенную выражениями (16.69). Отметим, что единичный элемент этой группы имеет параметры  $a = 1, b = 0, c = 0, d = 0, e = 1, f = 0$ . Если обозначить типичный элемент группы как  $g(a, b, c, d, e, f)$ , то, согласно (16.71), первый генератор равен

$$X_a = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{g(1 + \varepsilon, 0, 0, 0, 1, 0) - g(1, 0, 0, 0, 1, 0)}{\varepsilon}.$$

Таким образом, действуя генератором  $X_a$  на произвольную функцию  $f(x, y)$ , имеем

$$X_a f(x, y) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} \{f[(1 + \varepsilon)x, y] - f(x, y)\} = x \frac{\partial}{\partial x} f(x).$$

Следовательно, генератор  $X_a$  есть дифференциальный оператор  $x(\partial/\partial x)$ :

$$X_a = x \cdot \partial/\partial x. \quad (16.79)$$

Аналогично

$$\begin{aligned} X_b f(x, y) &= \left[ \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{g(1, \varepsilon, 0, 0, 1, 0) - g(1, 0, 0, 0, 1, 0)}{\varepsilon} \right] f(x, y) = \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} [f(x + \varepsilon y, y) - f(x, y)] = y \frac{\partial}{\partial x} f(x, y). \end{aligned}$$

Следовательно,

$$X_b = y \cdot \partial/\partial x. \quad (16.80)$$

Аналогичными рассуждениями находим остальные генераторы

$$\begin{aligned} X_c &= \partial/\partial x, \quad X_d = x \cdot \partial/\partial y, \quad X_e = y \cdot \partial/\partial y, \\ X_f &= \partial/\partial y. \end{aligned} \quad (16.81)$$

2. Рассмотрим группу  $SU(2)$ , типичный элемент которой дается формулой (16.70). Обозначим две переменные, преобразуемые этой  $2 \times 2$ -матрицей, через  $u_1$  и  $u_2$ . Тогда, применяя (16.71), непосредственно находим два генератора  $X_\xi$ ,  $X_\eta$ :

$$\begin{aligned} X_\xi f(u_1, u_2) &= \left[ \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{g(\varepsilon, 0, 0) - g(0, 0, 0)}{\varepsilon} \right] f(u_1, u_2) = \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} \{ f[(1 + i\varepsilon)u_1, (1 - i\varepsilon)u_2] - f(u_1, u_2) \} = \\ &= i \left( u_1 \frac{\partial}{\partial u_1} - u_2 \frac{\partial}{\partial u_2} \right) f(u_1, u_2) \end{aligned} \quad (16.82)$$

и аналогично

$$X_\eta = u_2 \cdot \partial / \partial u_1 - u_1 \cdot \partial / \partial u_2. \quad (16.83)$$

Однако непосредственное вычисление  $X_\xi$  с помощью (16.71) невозможно. Неудобство состоит в том, что  $\xi$  не является хорошим параметром при пользовании им вблизи начала координат, так как если  $\eta = 0$ , то  $g(\xi, \eta, \zeta)$  становится независимым от  $\zeta$ . Это известный недостаток; рассмотрим, например, выделение направлений в пространстве с помощью обычных полярных углов  $\theta$ ,  $\phi$ . Вдоль полярной оси ( $\theta = 0$ )  $\phi$  теряет смысл. Точнее говоря, если брать градиенты на единичной сфере, то  $\partial / \partial \theta$  — весьма разумный оператор вблизи  $\theta = 0$ ; однако здесь  $\partial / \partial \phi$  всегда обращается в нуль. Чтобы получить оператор с конечным градиентом, нужно разделить  $\partial / \partial \phi$  на  $\sin \theta$  (или  $\theta$ , что то же самое вблизи  $\theta = 0$ ).

Итак, имеется две возможности. Мы могли бы исходить из другого набора параметров в (16.70), так что ничто не было бы сингулярным вблизи единичного элемента группы. Однако вместо этого мы поступим так, как рекомендуется в предыдущем абзаце, т. е. вычислим  $X_\xi$  с  $\eta$ , не равным нулю. Получаем  $X_\xi = i \sin \eta \times \times \left( u_2 \frac{\partial}{\partial u_1} + u_1 \frac{\partial}{\partial u_2} \right)$ . В качестве третьего генератора возьмем

$$X'_\xi = X_\xi / \sin \eta = i (u_2 \cdot \partial / \partial u_1 + u_1 \cdot \partial / \partial u_2). \quad (16.84)$$

3. Рассмотрим, наконец,  $O(3)$  — группу вращений в трех измерениях. Чтобы избежать трудностей, с которыми мы встретились при рассмотрении группы  $SU(2)$ , не будем пользоваться углами Эйлера для характеристики бесконечно малых вращений. Вместо этого заметим, что

любое бесконечно малое вращение можно составить из вращений  $\theta_x$  вокруг оси  $x$ , вращений  $\theta_y$  вокруг оси  $y$  и вращений  $\theta_z$  вокруг оси  $z$ . Вычислим соответствующие генераторы:

$$X_x f(x, y, z) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} [f(x, y \cos \varepsilon + z \sin \varepsilon, z \cos \varepsilon - y \sin \varepsilon) - f(x, y, z)] = \left( z \frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\partial}{\partial z} \right) f(x, y, z).$$

Таким образом,

$$X_x = \left( z \frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\partial}{\partial z} \right). \quad (16.85)$$

Циклическая перестановка  $x, y, z$  дает два других генератора

$$X_y = x \frac{\partial}{\partial z} - z \frac{\partial}{\partial x}, \quad X_z = y \frac{\partial}{\partial x} - x \frac{\partial}{\partial y}. \quad (16.86)$$

Сделаем некоторые замечания о важности понятия генератора группы. Во-первых, коммутатор  $[X_i, X_j] = X_i X_j - X_j X_i$  двух генераторов всегда есть линейная комбинация генераторов:

$$[X_i, X_j] = \sum_k c_{ij}^k X_k. \quad (16.87)$$

Вещественные константы  $c_{ij}^k$  в (16.87) называются константами структуры группы Ли.

Соотношение (16.87) приводит к понятию алгебры Ли, связанной с данной группой Ли. Эта алгебра образуется всеми линейными комбинациями генераторов

$$c_1 X_1 + c_2 X_2 + \dots + c_n X_n \quad (16.88)$$

с вещественными коэффициентами  $c_i$ . В качестве «произведения» двух элементов алгебры берется их коммутатор. Например, «произведение» двух элементов  $X_1 + X_2$  и  $X_3 - 2X_4$  определяется как

$$[X_1, X_3] - 2[X_1, X_4] + [X_2, X_3] - 2[X_2, X_4]. \quad (16.89)$$

Из (16.87) следует, что выражение (16.89) имеет форму (16.88), т. е. само есть элемент алгебры.

Ясно, что группа Ли полностью определяет структуру соответствующей алгебры Ли. Существенно, что верно также и обратное; локальная структура (структура в некоторой окрестности единичного элемента) группы Ли пол-

ностью определяется алгеброй Ли, т. е. константами структуры  $c_{ij}^k$  в (16.87).

Наконец, отметим, что для данной матричной группы [например,  $SU(2)$  или  $O(3)$ ] легко сформировать генераторы. Элементы группы представляют собой матрицы, а не операторы преобразования (16.73). В этом представлении мы просто вставляем соответствующие матрицы прямо в определяющие уравнения (16.71); разность, а на самом деле производная — это хорошо известная операция над матрицами. Например, из вида (16.70) типичного члена  $SU(2)$  дифференцированием немедленно получаем

$$X_{\xi} = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, \quad X_{\eta} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (16.90)$$

Чтобы найти  $X'_{\xi}$ , вспомним, что нужно разделить  $X_{\xi}$  на  $\sin \eta$ ; получаем

$$X'_{\xi} = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}. \quad (16.91)$$

Предоставляем читателю проверить дальнейшие утверждения.

1. Алгебры Ли, определенные формулами (16.82), (16.83) и (16.84) для  $SU(2)$  и формулами (16.85) и (16.86) для  $O(3)$ , являются изоморфными. Это означает, что если произвести однозначное соответствие

$$X'_{\xi} \leftrightarrow 2X_x, \quad X_{\eta} \leftrightarrow 2X_y, \quad X_{\xi} \leftrightarrow 2X_z, \quad (16.92)$$

то две алгебры будут одинаковы. Это вытекает из правил коммутации в обеих алгебрах

$$\left. \begin{aligned} [X_{\xi}, X'_{\xi}] &= 2X_{\eta}; & [X'_{\xi}, X_{\eta}] &= 2X_{\xi}; & [X_{\eta}, X_{\xi}] &= 2X'_{\xi}; \\ [X_x, X_y] &= X_z; & [X_y, X_z] &= X_x; & [X_z, X_x] &= X_y. \end{aligned} \right\} \quad (16.93)$$

Возможны различные варианты соответствия (16.92).

2. Генераторы матриц (16.90) и (16.91) для группы  $SU(2)$  не удовлетворяют соотношениям коммутации (16.93), которые были получены для представлений дифференциальными операторами (16.82), (16.83) и (16.84). В действительности из факта обращения порядка операций в (16.74) для двух типов объектов следует, что знаки всех коммутаторов должны меняться при переходе от одной картины к другой. Коммутаторы матриц (16.90) и (16.91)

с точностью до знака минус совпадают с коммутаторами (16.93).

3. Матричные представления генераторов  $O(3)$ , интерпретированные как преобразования координат, по аналогии с (16.90) и (16.91) записываются в виде

$$X_x = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad X_y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad X_z = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (16.94)$$

По-прежнему коммутаторы матриц (16.94) равны по величине и обратны по знаку коммутаторам (16.93).

### 16.7. НЕПРИВОДИМЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ $SU(2)$ , $SU(3)$ И $O^+(3)$

**$SU(2)$ .** Начнем рассмотрение с неприводимых матричных представлений группы  $SU(2)$ . Прежде всего имеется тривиальное одномерное представление  $D^1$ , в котором каждый элемент группы представлен числом 1.

Далее, имеется двумерное представление  $D^2$ , состоящее из самих матриц (16.70). Как и в предыдущем разделе, можно рассматривать двумерные векторы, на которые действуют эти матрицы; такой вектор будем записывать в виде  $u_\alpha$  ( $\alpha = 1, 2$ ).

Можно также рассмотреть представление из матриц, комплексно сопряженных исходным матрицам (16.70), т. е. каждая матрица в  $SU(2)$  представляется своей комплексно сопряженной. Вектор, который трансформируется этой сопряженной матрицей, будем записывать с индексом сверху, например  $v^\alpha$ .

Далее можно продолжить и определить тензоры; если, например,  $u_\alpha$  и  $v_\alpha$  — векторы, преобразуемые (16.70), а  $w^\alpha$  — сопряженный вектор, преобразуемый матрицами, комплексно сопряженными (16.70), то объект  $u_{\alpha\beta}^\gamma$ , преобразующийся как  $u_\alpha v_\beta w^\gamma$ , есть тензор. Ясно, что тензоры можно определить с произвольным числом верхних и нижних индексов.

Преобразования различных компонент тензора одна в другую для каждого элемента группы  $SU(2)$  образуют представление группы. Будем говорить, что представление генерируется тензором. Например, вектор  $u_\alpha$  генерирует представление  $D^2$ , а скаляр генерирует представле-

ние  $D^1$ . Все тензоры генерируют представления, но некоторые из них приводимы, а некоторые эквивалентны другим представлениям.

Рассмотрим объект с двумя индексами  $\epsilon_{\alpha\beta}$ , определенный как

$$\epsilon_{12} = 1, \quad \epsilon_{21} = -1, \quad \epsilon_{11} = \epsilon_{22} = 0. \quad (16.95)$$

Это двумерный знакопеременный символ Леви — Чивита; сравните с (15.10). Будет ли  $\epsilon_{\alpha\beta}$  тензором? Пусть  $A$  — произвольная матрица  $SU(2)$ . Тогда  $\epsilon_{\alpha\beta}$  преобразуется в

$$A_{\alpha\gamma}A_{\beta\delta}\epsilon_{\gamma\delta} = A_{\alpha 1}A_{\beta 2} - A_{\alpha 2}A_{\beta 1} \text{ (сумма по повторяющимся индексам)} =$$

$$= \begin{cases} 0, & \text{если } \alpha = \beta; \\ A_{11}A_{22} - A_{12}A_{21} = \det A = 1, & \text{если } \alpha = 1, \\ & \beta = 2; \\ A_{21}A_{12} - A_{22}A_{11} = -\det A = -1, & \text{если } \alpha = 2, \\ & \beta = 1. \end{cases}$$

Итак,  $\epsilon_{\alpha\beta}$  — тензор относительно  $SU(2)$ . Аналогично  $\epsilon^{\alpha\beta}$ , численно равный  $\epsilon_{\alpha\gamma}$ , — также тензор.

Далее заметим, что по верхнему индексу и по нижнему индексу можно просуммировать (свернуть); это приводит к тензору с числом индексов, меньшим на два (аналогично контравариантным и ковариантным индексам разд. 15.3). Например, если  $u_\alpha$  и  $v^\beta$  — векторы, то величина  $u_\alpha v^\alpha$  после какого-либо преобразования  $A$  группы  $SU(2)$  приобретает вид  $A_{\alpha\beta}u_\beta A_{\alpha\gamma}^*v^\gamma = A_{\gamma\alpha}^+A_{\alpha\beta}u_\beta v^\gamma = u_\alpha v^\alpha$ , так что  $u_\alpha v^\alpha$  инвариантно, как и следовало ожидать. Аналогично из тензора  $u_{\alpha\beta}^\gamma$  можно образовать вектор  $v_\alpha = u_{\alpha\beta}^\beta$ , а из тензоров  $u_{\alpha\beta}$  и  $v^{\gamma\delta}$  можно образовать тензор  $w_\alpha^\beta = u_{\alpha\gamma}v^{\gamma\beta}$  и т. д.

Теперь мы в состоянии сконструировать неприводимые представления группы  $SU(2)$ . Во-первых, не пренебрегая никакими представлениями, можно ограничиться тензорами со всеми индексами внизу. Например, тензор  $u_{\alpha\beta}^{\gamma\delta}$  образуется линейными комбинациями компонент тензора  $v_{\alpha\beta\gamma\delta} = \epsilon_{\gamma\lambda}\epsilon_{\delta\mu}u_{\alpha\beta}^{\lambda\mu}$  и наоборот, так что представления, генерируемые  $u_{\alpha\beta}^{\gamma\delta}$  и  $v_{\alpha\beta\gamma\delta}$ , эквивалентны. Отметим, что тензор  $\epsilon_{\alpha\beta}$  выполняет роль «понижающего» тензора, по аналогии с фундаментальным тензором  $g_{ij}$ , приведенным в разд. 15.3.

Далее заметим, что тензор  $u_{\alpha\beta\gamma\dots}$  должен быть полностью симметричным по всем своим индексам, если он гене-

рирует неприводимое представление. Предположим обратное, что тензор  $u_{\alpha\beta\gamma\dots}$  не симметричен, скажем, по первым двум индексам,  $u_{\alpha\beta\gamma\dots} \neq u_{\beta\alpha\gamma\dots}$ . Тогда можно было бы образовать тензор  $v_\gamma = \varepsilon^{\alpha\beta} u_{\alpha\beta\gamma\dots} = u_{12\gamma\dots} - u_{21\gamma\dots}$  с числом индексов на два меньшим. Представление, генерируемое  $u_{\alpha\beta\gamma\dots}$ , было бы тогда приводимо, так как оно содержало бы (меньшее) представление, генерируемое  $v_\gamma\dots$ .

Таким образом, общее неприводимое представление  $SU(2)$  характеризуется полностью симметричным тензором  $u_{\alpha\beta\gamma\dots}$ , который генерирует это представление. Если тензор  $u$  имеет  $n$  индексов, то имеется  $n + 1$  независимых компонент, и, следовательно, соответствующее представление имеет размерность  $n + 1$ . Результаты такого анализа собраны в табл. 16.9.

ТАБЛИЦА 16.9

Представление	Тензор (полностью симметричный)	Представление	Тензор (полностью симметричный)
$D^1$	1	$D^4$	$u_{\alpha\beta\gamma}$
$D^2$	$u_\alpha$	$\vdots$	$\vdots$
$D^3$	$u_{\alpha\beta}$		

**$SU(3)$ .** Большая часть анализа, выполненного для группы  $SU(2)$ , верна и для группы  $SU(3)$ . Снова вводим векторы  $u_\alpha$ , где  $\alpha$  теперь пробегает значения от 1 до 3. Унитарные унимодулярные  $3 \times 3$ -матрицы, образующие  $SU(3)$ , действуют на вектор  $u_\alpha$ . Таким образом, можно говорить, что вектор  $u_\alpha$  генерирует трехмерное представление  $D^3$ , в котором каждый элемент группы представлен самим собой.

Как и выше, можно определить векторы  $u^\alpha$  с верхними индексами, которые преобразуются как комплексно сопряженные векторов с нижними индексами. Они генерируют представление  $\overline{D^3}$ , в котором каждая матрица  $SU(3)$  представлена своей комплексно сопряженной. В противоположность аналогичной ситуации в группе  $SU(2)$  это представление  $\overline{D^3}$  не эквивалентно представлению  $D^3$ .

Снова определим тензоры с произвольным числом верхних и нижних индексов. Например, если вектор  $u_\alpha$  подвергается преобразованию

$$u'_\alpha = A_{\alpha\beta} u_\beta, \quad (16.96)$$

то тензор  $u_{\alpha\beta}^{\gamma}$  преобразуется следующим образом:  $u_{\alpha\beta}^{\gamma'} = A_{\alpha\rho} A_{\beta\sigma} A_{\gamma\tau}^* u_{\rho\sigma}^{\tau}$ , где  $A$  — произвольная матрица в  $SU(3)$ .

Знакопеременный символ по-прежнему является тензором, но теперь, конечно, он имеет три индекса, т. е. два численно равных объекта

$$\varepsilon^{\alpha\beta\gamma} = \varepsilon_{\alpha\beta\gamma} = \begin{cases} 1, & \text{если } \alpha\beta\gamma = 123, 231 \text{ или } 312; \\ 1, & \text{если } \alpha\beta\gamma = 321, 213 \text{ или } 132; \\ 0 & \text{в остальных случаях,} \end{cases} \quad (16.97)$$

вследствие условия унимодулярности являются тензорами в  $SU(3)$ . Доказать это предоставляем читателю.

Наконец, свертывание индексов по-прежнему является законной операцией, как и в случае  $SU(2)$ , если один индекс суммируется сверху, а другой — снизу. Доказательство, которое мы опускаем, следует непосредственно из унитарности матриц  $SU(3)$ .

Теперь можно пронумеровать неприводимые представления  $SU(3)$ . Верхние и нижние индексы более не эквивалентны, так как знакопеременный символ теперь имеет три индекса вместо двух, и его нельзя использовать для увеличения или уменьшения одного индекса.

Поэтому следует рассматривать тензоры как с верхними индексами, так и с нижними. Если такой тензор должен производить неприводимое представление  $SU(3)$ , то необходимо выполнение двух условий.

1. Он должен быть отдельно симметричен по всем своим верхним и нижним индексам. Если, например,  $u_{\alpha\beta\dots}^{\gamma\delta\dots} \neq u_{\alpha\beta\dots}^{\delta\gamma\dots}$ , то можно образовать тензор  $v_{\lambda\alpha\beta}^{\mu\gamma\delta} = \varepsilon_{\lambda\mu\delta} u_{\alpha\beta}^{\gamma\delta}$  с числом индексов, меньшим на один, и представление было бы приводимо. Конечно, нет требования симметрии, связывающего верхние и нижние индексы.

2. Он должен обладать нулевым следом; любая свертка верхнего индекса с нижним должна давать нуль. В противном случае можно было бы образовать тензор с числом индексов на два меньше, и представление было бы приводимо. Следы, образованные суммированием двух верхних индексов или двух нижних индексов, не обязательно должны равняться нулю, так как это не инвариантная свертка.

Таким образом, общее неприводимое представление группы  $SU(3)$  генерируется тензором с  $m$  верхними и  $n$  нижними индексами; тензор должен быть полностью симметричным по всем своим верхним индексам, полностью

симметричен по всем своим нижним индексам, и все свертки одного верхнего индекса с одним нижним индексом должны давать нуль. В табл. 16.10 приведены некоторые неприводимые представления  $SU(3)$ . Можно показать, что размерность общего неприводимого представления  $SU(3)$  равна  $\frac{1}{2}(m+1)(n+1)(m+n+2)$ . Представления  $D^3$ ,  $\overline{D^3}$ ,  $D^6$  и  $\overline{D^6}$  и т. д. называются сопряженными представлениями.

ТАБЛИЦА 16.10

$m$	$n$	Представление	Тензор	$m$	$n$	Представление	Тензор
0	0	$D^1$	1	0	3	$D^{10}$	$u_{\alpha\beta\gamma}$
0	1	$D^3$	$u_\alpha$	1	2	$D^{15}$	$u_{\beta\gamma}^\alpha$
1	0	$\overline{D^3}$	$u_\alpha$	2	1	$\overline{D^{15}}$	$u_\alpha^{\beta\gamma}$
0	2	$D^6$	$u_{\alpha\beta}$	3	0	$\overline{D^{10}}$	$u^{\alpha\beta\gamma}$
1	1	$D^8$	$u_\alpha^\beta$				
2	0	$\overline{D^6}$	$u_{\alpha\beta}$				

$O^+(3)$ . В заключение рассмотрим важный вопрос нахождения неприводимых представлений  $O^+(3)$  — группы вещественных унимодулярных ортогональных  $3 \times 3$ -матриц, которые описывают вращения в трехмерном евклидовом пространстве. Как и в предыдущих случаях, задача решается методом конструирования тензоров; в данном случае — это декартовы тензоры разд. 15.1.

В действительности после исследования групп  $SU(2)$  и  $SU(3)$  должно быть ясно, что общее неприводимое представление  $O^+(3)$  генерируется симметричным тензором ранга  $n$  с нулевым следом. Например, скаляр приводит к тривиальному представлению  $D^1$ . Вектор ( $n = 1$ ) генерирует трехмерное представление  $D^3$ , в котором каждое вращение представлено обычной  $3 \times 3$ -ортогональной матрицей. Симметричный тензор  $T_{ij}$  имеет шесть независимых компонент; исключение шпура оставляет пять. Эти пять величин генерируют пятимерное неприводимое представление  $D^5$  и т. д. Можно показать, что симметричный тензор ранга  $n$  с нулевым следом имеет  $2n + 1$  независимых компонент, так что соответствующее представление имеет размерность  $2n + 1$ .

Эти представления наиболее элегантны, когда оперируют со сферическими гармониками  $Y_{lm}(\theta, \phi)$  (см.

разд. 7.1), т. е. тривиальное представление  $D^l$  состоит из преобразований  $Y_{00}(\Omega)$  в себя, «векторное представление»  $D^3$  описывает преобразования трех сферических гармоник  $Y_{1m}(\Omega)$  ( $m = 1, 0, -1$ ) в их линейные комбинации при вращении. В общем случае преобразования  $2n + 1$  функций  $Y_{nm}(\Omega)$  с данным  $n$  друг в друга генерируют неприводимое представление  $D^{2n+1}$  группы  $O^+(3)$ .

Так как сейчас мы рассматриваем влияние вращения на функции, именно на сферические гармоники (а не на координаты), то операторы вращения определяются согласно формуле (16.73). Таким образом, действие вращения  $R$  на данную сферическую гармонику  $Y_{lm}(\Omega)$  определяется как  $O_R Y_{lm}(\Omega) = Y_{lm}(R\Omega)$ , где  $R\Omega$  обозначает новые значения  $\theta, \phi$ , связанные с направлением  $\Omega$ , после того как на оси координат подействовал оператор вращения  $R$  ( $R$  сохраняет фиксированное в пространстве направление  $\Omega$ ). Иными словами, новая функция  $O_R Y_{lm}(\Omega)$  — это функция, получаемая вращением  $Y_{lm}(\Omega)$  вместо осей координат (ср. рис. 16.3).

Обычно определяют матрицу вращения  $D_{m'm}^l(R)$  формулой

$$Y_{lm}(R\Omega) = \sum_{m'} D_{m'm}^l(R) Y_{lm'}(\Omega). \quad (16.98)$$

Обратим внимание на порядок индексов  $D_{m'm}^l$  в (16.98). Он выбирается вполне определенным. Чтобы понять, почему — рассмотрим влияние двух последовательных операторов вращения  $O_R, O_S$  на сферическую гармонику

$$\begin{aligned} O_R O_S Y_{lm}(\Omega) &= Y_{lm}(SR\Omega) \text{ [из формулы (16.74)]} = \\ &= \sum_{m'} D_{m'm}^l(S) Y_{lm'}(R\Omega) = \sum_{m'} D_{m'm}^l(S) \sum_{m''} D_{m''m'}^l(R) Y_{lm''}(\Omega) = \\ &= \sum_{m''} \left[ \sum_{m'} D_{m''m'}^l(R) D_{m'm}^l(S) \right] Y_{lm''}(\Omega). \end{aligned} \quad (16.99)$$

Из уравнения (16.99) следует, что матрицы вращения  $D_{m'm}^l(R)$  образуют матричное представление операторов вращения  $O_R$ .

В табл. 16.11 приведены элементы матрицы вращения  $D_{m'm}^l(\alpha\beta\gamma)$  в зависимости от углов Эйлера  $\alpha, \beta, \gamma$ . Сделаем несколько замечаний.

1. Обзор табл. 16.11 приводит к общему заключению, что зависимость  $D_{m'm}^l(\alpha\beta\gamma)$  от  $\alpha$  и  $\gamma$  довольно тривиальна.

$m'$	$m = 1$	0	-1
1	$\exp(-i\alpha) \frac{1+\cos\beta}{2} \exp(-i\gamma)$	$-\exp(-i\alpha) \frac{\sin\beta}{\sqrt{2}}$	$\exp(-i\alpha) \frac{1-\cos\beta}{2} e^{i\gamma}$
0	$\frac{\sin\beta}{\sqrt{2}} \exp(-i\gamma)$	$\cos\beta$	$-\frac{\sin\beta}{\sqrt{2}} \exp(i\gamma)$
-1	$\exp(i\alpha) \frac{1-\cos\beta}{2} \exp(-i\gamma)$	$\exp(i\alpha) \frac{\sin\beta}{\sqrt{2}}$	$\exp(i\alpha) \frac{1+\cos\beta}{2} \exp(i\gamma)$

Можно показать, что

$$D_{m'm}^l(\alpha\beta\gamma) = \exp(-im'\alpha) d_{m'm}^l(\beta) \exp(-im\gamma), \quad (16.100)$$

причем «приведенная матрица вращения»  $d_{m'm}^l(\beta)$  дана, например, в книге [8]. На самом деле свойство (16.100) непосредственно вытекает из определения (16.98) и того факта, что сферическая гармоника  $Y_{lm}(\theta, \phi)$  зависит от  $\phi$  только через множитель  $\exp(im\phi)$  [см. (7.32) или (7.33)].

2. Если в (16.98) положить  $m = 0$ , то получаем

$$\sqrt{(2l+1)/4\pi} P_l(R\Omega) = \sum_{m'} D_{m'0}^l(\alpha\beta\gamma) Y_{lm'}(\Omega). \quad (16.101)$$

Рассмотрим теперь аргумент  $R\Omega$  полинома Лежандра в левой части (16.101). Пусть направление  $\Omega$  имеет полярные координаты  $\theta, \phi$ . После действия оператора вращения на оси координат ось  $z$  оказывается направленной вдоль линии с полярными координатами  $\beta, \alpha$  (относительно первоначальных осей). Итак, полярный угол  $R\Omega$  — это угол  $\chi$  между этими двумя направлениями:

$$\cos \chi = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta \cos(\phi - \alpha). \quad (16.102)$$

Следовательно, (16.101) приобретает вид

$$\sqrt{(2l+1)/4\pi} P_l(\cos \chi) = \sum_{m'} D_{m'0}^l(\alpha\beta\gamma) Y_{lm'}(\theta, \phi). \quad (16.103)$$

Сравнение (16.103) и теоремы сложения (7.46) для сферических гармоник приводит к следующему соотношению:

$$D_{m'0}^l(\alpha\beta\gamma) = \sqrt{4\pi/(2l+1)} Y_{lm'}^*(\beta, \alpha). \quad (16.104)$$

3. Тот факт, что сферические гармоники ортонормированы на единичной сфере [см. (7.35)], означает, что наши представления унитарны:

$$D_{m'm}^l(R^{-1}) = D_{mm'}^l(R)^*. \quad (16.105)$$

Закончим эту главу кратким исследованием изоморфизма, отмеченного в предыдущем разделе, между алгебрами Ли групп  $O^+(3)$  и  $SU(2)$ . Начнем с  $O^+(3)$ .

Произвольный элемент  $O^+(3)$  вблизи начала координат (единичный элемент) можно записать в виде  $1 + \theta_x X_x + \theta_y X_y + \theta_z X_z$ , где  $X_x, X_y, X_z$  — генераторы, подчиняющиеся условиям коммутации (16.93), а  $\theta_\alpha$  бесконечно малы. Определим  $X_\alpha = -iJ_\alpha$  ( $\alpha = 1, 2, 3$ ), так что элемент группы приобретает вид

$$1 - i\theta_x J_x - i\theta_y J_y - i\theta_z J_z = 1 - i\theta \cdot \mathbf{J}. \quad (16.106)$$

Каков смысл бесконечно малого вектора  $\theta$ ? Можно сделать вывод, что элемент (16.106) описывает бесконечно малое вращение, величина которого равна величине вектора  $\theta$ , в то время как ось вращения направлена вдоль направления  $\theta$ .

Как получить оператор конечного вращения? Конечное вращение можно рассматривать как последовательность бесконечно малых вращений. Следовательно, оператор для конечного вращения равен

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{i}{n} \theta \cdot \mathbf{J}\right) \left(1 - \frac{i}{n} \theta \cdot \mathbf{J}\right) \dots \left(1 - \frac{i}{n} \theta \cdot \mathbf{J}\right) \times \\ \times (n \text{ множителей}) = \exp(-i\theta \cdot \mathbf{J}). \quad (16.107)$$

Конечно, экспонента в (16.107) — это только формальный прием, так как аргумент является оператором. Можно рассматривать экспоненту как сокращение ее ряда Тейлора или ее представления в виде произведения.

Обратимся теперь к  $SU(2)$  и произведем взаимное соответствие (16.92), т. е. для  $J_x$  в (16.107) вместо  $iX_x$  возьмем оператор  $\frac{i}{2} X'_\xi$ . То же сделаем для  $J_y$  и  $J_z$ . Таким образом, элемент (16.107) группы  $O^+(3)$  идентифицируется с элементом

$$\exp[-(i/2) \theta \cdot \mathbf{S}] \quad (\mathbf{S} = iX'_\xi, iX'_\eta, iX'_\xi) \quad (16.108)$$

группы  $SU(2)$ . Это позволяет сделать однозначное соответствие элементов  $O^+(3)$  с элементами  $SU(2)$  (по меньшей мере, в окрестности единичного элемента). Как мы увидим при рассмотрении целой группы, соответствие имеет вид не один на один, а два на один.

Из этого соответствия непосредственно вытекает матричное представление для  $O^+(3)$ , которое отличается от

тензорных представлений, найденных ранее в этом разделе. Мы уже отмечали, что матрицы (16.90) и (16.91) дают представление генераторов  $SU(2)$ , за исключением того факта, что знаки коммутаторов изменены на обратные. Итак, матрицы, обратные по знаку к (16.90), (16.91), дают представление. Вспоминая  $i$  в определении  $S$  [см. (16.108)], получаем

$$S_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad S_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad S_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (16.109)$$

Эти матрицы называются спиновыми матрицами Паули.

Рассмотрим вращение вокруг одной из координатных осей, например вращение  $\theta$  вокруг оси  $x$ . Согласно (16.108) в представлении  $SU(2)$  это можно отождествить с матрицей  $\exp[-(i/2)\theta S_x]$ . Экспоненту легко вычислить. Квадраты матриц Паули равны единице:  $S_x^2 = S_y^2 = S_z^2 = 1$ ; следовательно,

$$\begin{aligned} e^{-(i/2)\theta S_x} &= 1 - i \frac{\theta}{2} S_x - \frac{1}{2!} \left(\frac{\theta}{2}\right)^2 + \frac{i}{3!} \left(\frac{\theta}{2}\right)^3 S_x + \dots = \\ &= \left[ 1 - \frac{1}{2!} \left(\frac{\theta}{2}\right)^2 + \frac{1}{4!} \left(\frac{\theta}{2}\right)^4 - \dots + \dots \right] - \\ &\quad - i S_x \left[ \frac{\theta}{2} - \frac{1}{3!} \left(\frac{\theta}{2}\right)^3 + \dots - \dots \right] = \\ &= \cos \frac{\theta}{2} - i S_x \sin \frac{\theta}{2} = \begin{pmatrix} \cos \frac{\theta}{2} & -i \sin \frac{\theta}{2} \\ -i \sin \frac{\theta}{2} & \cos \frac{\theta}{2} \end{pmatrix}. \quad (16.110) \end{aligned}$$

Комбинируя три таких вращения, можно выразить элемент  $SU(2)$ , соответствующий произвольному вращению, через углы Эйлера  $\alpha, \beta, \gamma$ . Однако нужно быть внимательным к порядку выполнения операции вращения. Если рассматривать вращения как преобразования координат, то следует использовать (15.2). Однако мы используем операторы вращения, применяя, в частности, соотношения коммутации (16.93). Следовательно, порядок вращений должен совпадать с порядком, приведенным в примечании к формуле (15.2). Таким образом, с вращением  $R(\alpha\beta\gamma)$  для  $O^+(3)$  сопоставляется матрица

$$\exp[-(i/2)\alpha S_z] \exp[-(i/2)\beta S_y] \exp[-(i/2)\gamma S_z] \quad (16.111)$$

группы  $SU(2)$ . Вычисление этого произведения предлагаем читателю в качестве упражнения; результат имеет вид

$$\begin{pmatrix} e^{-i(\alpha/2)\cos\frac{\beta}{2}}e^{-i(\gamma/2)} & -e^{-i(\alpha/2)\sin\frac{\beta}{2}}e^{i(\gamma/2)} \\ e^{i(\alpha/2)\sin\frac{\beta}{2}}e^{-i(\gamma/2)} & e^{i(\alpha/2)\cos\frac{\beta}{2}}e^{i(\gamma/2)} \end{pmatrix}. \quad (16.112)$$

Отметим, что (16.112) — действительно общий элемент  $SU(2)$  [ср. с (16.70)].

Мы получили весьма интересное двумерное представление группы  $O^+(3)$ , которое было полностью опущено в нашей предыдущей нумерации представлений. Используем матрицы (16.112), т. е. векторное представление  $D^2$  группы  $SU(2)$ . При этом возникает трудность, тесно связанная с половинными углами в (16.112). Имеются две матрицы, обратные по знаку. Обе нужно связать с каждым вращением в  $O^+(3)$ . Рассмотрим, например, вращение на угол  $\alpha$  вокруг оси  $z$ . Согласно (16.112), это представляется матрицей

$$\begin{pmatrix} \exp[-i(\alpha/2)] & 0 \\ 0 & \exp[i(\alpha/2)] \end{pmatrix}. \quad (16.113)$$

Когда  $\alpha$  возрастает от 0 до  $2\pi$ , оператор вращения, конечно, возвращается к единичному элементу, в то время как (16.113) превращается в матрицу

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

т. е. в умноженный на  $-1$  единичный элемент  $SU(2)$ .

В рамках ограничений, налагаемых этим соответствием «два на один», мы на самом деле получили значительно больше, чем только новое представление  $O^+(3)$ . Все представления  $SU(2)$ , приведенные в табл. 16.9, можно теперь рассматривать как представления  $O^+(3)$ , так как установлено соответствие между элементами групп  $SU(2)$  и  $O^+(3)$  \*. Представления группы  $SU(2)$ :  $D^1, D^3, D^5, \dots$

---

\* На языке математики такое соответствие называется гомоморфизмом. Если бы оно было взаимнооднозначным, то оно представляло бы изоморфизм.

оказываются не чем иным, как представлениями группы  $O^+(3)$ : скаляром, вектором, симметричным тензором со следом нуль и т. д. Другие представления называются спинорными представлениями, а двухкомпонентный «вектор»  $u_\alpha$  часто называется спинором. Эти двузначные представления имеют одинаковый физический смысл с однозначными представлениями в квантовой механике, где операторы вращения отождествляются с угловым моментом.

## ЛИТЕРАТУРА\*

1. Янке Е., Эмде Ф., Лёш Ф. Специальные функции. Перев. с 6-го, перераб. нем. изд. Изд. 2, стереотипное. М., «Наука», 1968.
2. Уиттекер Э., Ватсон Дж. Курс современного анализа. Перев. с англ. Изд. 2. Ч. 1 и 2. М., Физматгиз, 1962—1963.
3. Бейтмен Г., Эрдейи А. Таблицы интегральных преобразований. Перев. с англ. М., «Наука», 1969.
4. Шифф Л. Квантовая механика. Перев. с англ. М., Изд-во иностр. лит., 1959.
5. Голдстейн А. Классическая механика. Перев. с англ. М., Изд-во иностр. лит., 1956.
6. Фаддеева В. Н., Терентьев Н. В. Таблицы функции  $w(z) = e^{-z^2} \left( 1 + \frac{2i}{\sqrt{\pi}} \int_0^z e^{t^2} dt \right)$  для комплексных аргументов. М., Гостехиздат, 1954.
7. Морс Ф., Фешбах Г. Методы теоретической физики. Т. 1, 2. Перев. с англ. М., Изд-во иностр. лит., 1958—1960.
8. Вигнер Е. Теория группы и ее приложения к квантовой механической теории атомных спектров. Перев. с англ. М., Изд-во иностр. лит., 1961.
9. Арсенин В. Я. Математическая физика. Основные уравнения и специальные функции. М., «Наука», 1966.
10. Арфкен Г. Математические методы в физике. Перев. с англ. М., Атомиздат, 1970.
11. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. Функции Бесселя, функции параболического цилиндра, ортогональные многочлены. Перев. с англ. М., «Наука», 1966.
12. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. Гипергеометрическая функция. Функции Лежандра. Перев. с англ. М., «Наука», 1965.
13. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. Эллиптические и автоморфные функции. Функции Ламе и Матье. Перев. с англ. М., «Наука», 1967.
14. Градштейн И. С., Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. Изд. 5. М., «Наука», 1971.
15. Двайт Г. Б. Таблицы интегралов и другие математические формулы. Перев. с англ. Изд. 3. М., «Наука», 1969.

---

\* Составлена переводчиком.

16. Джеффрис Г., Свирлс Б. Методы математической физики. Вып. 1—3. Перев. с англ. М., «Мир», 1969.
17. Копсон Э. Асимптотические разложения. Перев. с англ. М., «Мир», 1966.
18. Курант Р., Гильберт Д. Методы математической физики. Т. 4, 2. Перев. с нем. М., Гостехиздат, 1951.
19. Лаврентьев М. А., Шабат Б. В. Методы теории функций комплексного переменного. Изд. 3. М., «Наука», 1965.
20. Ли Цзун-дао. Математические методы в физике. Перев. с англ. М., «Мир», 1965.
21. Сигал И. Математические проблемы релятивистской физики. Перев. с англ. М., «Мир», 1968.
22. Снеддон И. Преобразования Фурье. Перев. с англ. М., Изд-во иностр. лит., 1955.
23. Титчмарш Е. Введение в теорию интегралов Фурье. Перев. с англ. М.—Л., Гостехиздат, 1948.
24. Функции математической физики. Справочное руководство. Перев. с франц. М., Физматгиз, 1963.
25. Шварц Л. Математические методы для физических наук. Перев. с франц. М., «Мир», 1965.
26. Эрдейи А. Асимптотические разложения. Перев. с англ. М., Физматгиз, 1962.

## ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

- Абелева группа 342  
 Абсолютный минимум 276  
 Алгебра группы 343  
 — Ли 374  
 Антилинейность 127  
 Антисимметричная матрица 123  
 Антисимметричный символ  
 Леви-Чивита 327  
 Антисимметричный тензор 334  
 Апостериорная вероятность 302  
 Априорная вероятность 302  
 Асимптотический ряд 71  
 Аффинор 329
- Базис векторного пространства  
 119  
 Бейеса теорема 304  
 $be_n(x)$ ,  $be'_n(x)$  161  
 Бернулли дифференциальное  
 уравнение 10  
 — числа 45  
 Веконечная группа 367  
 Бесселя интеграл 159  
 — уравнение 17, 153  
 — — второе решение 155  
 Бесселя производящая функция  
 158  
 — интегральное представление  
 158  
 Бесселя функции 153  
 — — модифицированные 161  
 — — ортогональность и норми-  
 ровка 156  
 — — рекуррентные соотноше-  
 ния 154  
 — — сферические 161  
 Биномиальное распределение  
 307  
 Биномиальный коэффициент  
 305  
 Бинормаль 330
- Блоха волновые функции 174  
 Бора — Зоммерфельда условие  
 квантования 41  
 Борновское приближение 251  
 Брахистохрона 267  
 Бэшфорта — Адамса — Милна  
 метод 291
- Вариации постоянных метод 14  
 Вариационное исчисление 264  
 — — для задач на собственные  
 значения 275  
 — — для интегральных урав-  
 нений 281  
 — — для изопериметрических  
 задач 272  
 Вариационная производная 266  
 Вейерштрасса эллиптические  
 функции 183  
 Вектор-столбец 125  
 Вектор-строка 127  
 Векторы 118  
 — ортонормированные 128  
 — собственные 129  
 — базисные 119  
 Вещественная матрица 123  
 Вероятностей теория 302  
 Винера — Хопфа метод 208, 259  
 ВКБ-метод 30  
 ВКБ-функции 33  
 Возмущений теория 237  
 Волновая функция в импульсном  
 пространстве 91  
 Волновое уравнение 188  
 Вольтерра интегральное урав-  
 нение 247  
 Вырожденная гипергеометриче-  
 ская функция 169  
 — теория возмущений 243  
 Вырожденное гипергеометриче-  
 ское уравнение 168

- Вырожденное собственное значение 130  
 — ядро интегрального уравнения 248
- Гамильтона вариационный принцип 266
- Ганкеля функции 160  
 — — сферические 394
- Гамма-функция 53  
 — асимптотическое разложение 74
- Гаусса распределение 306
- Гельмгольца уравнение 193
- Генераторы группы 369
- Гиббса явление 83
- Гильберта преобразование 95, 262
- Гильберта — Шмидта теория 254
- Гильберта пространство 141
- Гиперболические дифференциальные уравнения в частных производных 188
- Гипергеометрическая функция 163  
 — — интегральное представление 165
- Гипергеометрический ряд 43, 161
- Гипергеометрическое уравнение 163
- Главная нормаль 330
- Гомографическое преобразование 163
- Гомоморфные группы 346
- Горнера метод для корней полиномов 295
- Грама — Шмидта ортогонализация 131
- Грина функции 223  
 — — для колеблющейся мембраны 226  
 — — для колеблющейся струны 224  
 — — для обыкновенного дифференциального уравнения 223  
 — — для уравнения Лапласа и волнового уравнения 231
- Грегори ряд 83, 300
- Группа 342  
 — абелева или коммутативная 342  
 — бесконечная 367  
 — знакопеременная 355
- Группа класс 345  
 — подгруппа 344  
 — порядок 342  
 — представление 346  
 — симметрическая 343  
 — физические применения 358  
 — характеры 349
- Даламбера признак сходимости 42
- Двокопериодическая функция 179
- Декартовы тензоры 323
- Дельта-символ Кронекера 85
- Дельта-функция Дирака 87  
 — трехмерная 91
- Диагонализация матриц 136
- Диагональная матрица 123
- Диада 329
- Дирака дельта-функция 87  
 — трехмерная 91
- Дирихле краевое условие 186
- Дисперсионные соотношения 110, 262  
 — — с вычитанием 117
- Дисперсия 311
- Дифференциальная геометрия 323
- Дифференциальные уравнения 8  
 — — ВКБ-метод для решения 30  
 — — в полных дифференциалах 9  
 — — в частных производных 184  
 — — — — методы интегральных преобразований 202  
 — — — — методы разделения переменных 192  
 — — — — метод Винера — Хопфа 208  
 — — изобарические 11  
 — — графическое решение 27  
 — — линейные 12  
 — — однородные 10  
 — — решения в виде степенных рядов 18  
 — — численные решения 290
- Диффузии уравнение 184
- Дуальное пространство 127
- Замкнутости свойство 221
- Знакопеременная группа 355

- Идемпотентная матрица 124  
 Изображений метод 208  
 Изоморфный — 344  
 Изопериметрические задачи 272  
 Инвариант матрицы 133  
 Инвариантная подгруппа 346  
 Интеграл вероятности ошибок 68  
 Интегральная показательная функция 67  
 Интегральное преобразование 81  
 Интегральные уравнения 247  
 — — вариационный подход к решению 281  
 — — в дисперсионной теории 262  
 Интегральные уравнения линейные 247 C  
 — — неоднородные 249  
 — — однородные 249  
 — — с вырожденным ядром 248  
 — — транспонированные 249  
 Интегральные синус и косинус 55  
 Интервал 337  
 Интерполяция 282  
 Интегрирующий множитель 9
- Квадрупольный магнит 107  
 Классы в группе 345  
 Клеро уравнение 10  
 Ковариантная производная 338  
 Ковариантный вектор 332  
 Ковариантный тензор 332  
 Когрдиентный — 126  
 Колебание круглой мембраны 245  
 Комбинации 305  
 Коммутативная группа 342  
 Коммутация операторов 120  
 Компоненты линейного вектора 120  
 Конгруэнтное преобразование 134  
 Константы структуры группы Ли 374  
 Контравариантный вектор 331  
 — тензор 332  
 Контрагredientный — 126  
 Контурное интегрирование 58  
 Конформное преобразование 105  
 Координатные преобразования 125  
 — — конгруэнтные 134  
 — — подобие 126
- Координатные преобразования унитарные 338  
 Корни уравнений 293  
 Косинус-преобразование Фурье 89  
 Коши краевое условие 186  
 — интегральная формула 110  
 Коши — Римана дифференциальные уравнения 105  
 Коши теорема 105  
 Краевые условия для уравнений в частных производных 185  
 Кривизна кривой 330  
 Кристоффеля символы первого и второго рода 338  
 Кронекера дельта-символ 85  
 Кручение 330  
 Куммера преобразование 171  
 — функция 169
- Лагерра полином 170  
 Лагранжа множитель 272  
 Лапласа интегральное представление для полиномов Лежандра 144  
 — преобразование 92  
 Лежандра дифференциальное уравнение 19, 143  
 — функции 143  
 Ли алгебра 374  
 — группа 368  
 Линейная векторная функция 119  
 — скалярная функция 126  
 Линейное векторное пространство 118  
 — интегральное уравнение 247  
 — дифференциальное уравнение 12  
 Лиенара — Вихерта потенциал 236  
 Ложного положения метод 294
- Матье функции 171  
 Матрица 128  
 Матрицы преобразование 125  
 Меллина преобразование 95  
 Метрика векторного пространства 127  
 Метрический тензор 337
- Наискорейшего спуска метод 73  
 Наименьших квадратов метод 318

- Невырожденная теория возмущений 237  
 Невырожденный оператор 121  
 Неголономные условия 273  
 Неймана ряд 250  
 Неймана краевое условие 186  
 Неоднородное интегральное уравнение 249  
 Неполная гамма-функция 73  
 Несобственное вращение 327  
 Неприводимое представление 347  
 Неопределенных коэффициентов метод 13  
 Неточное представление 347  
 Нормальная матрица 138  
 — подгруппа 346  
 — форма гиперболического уравнения 188  
 Нормальное распределение 308  
 Нормальные колебания 135, 197
- Обобщенная сила** 335  
**Обратная матрица** 123  
**Обратный оператор** 121  
**Общий тензорный анализ** 330  
**Обыкновенная точка дифференциального уравнения** 18  
**Однородная функция** 10  
**Однородное интегральное уравнение** 247  
 — обыкновенное дифференциальное уравнение 10  
**Особое решение дифференциального уравнения** 11  
**Определяющее уравнение** 20  
**Ортогональная матрица** 123  
**Ортогональности теорема** 348  
**Относительный тензор** 334  
**Отношений закон** 335  
**Ошибка функция** 68
- Параболическое уравнение в частных производных** 188  
**Парсеваля теорема** 88  
**Паули спиновые матрицы** 384  
**Перевала методы** 73  
**Перестановки** 305  
**Плоский источник** 206  
**Плотности функция** 220  
**Плотность тензора** 334  
**Подгруппа** 344  
**Подобия преобразование** 126
- Полнада** 329  
**Полнота базиса собственных функций** 221  
**Порядок дифференциального уравнения** 8  
**Постоянная разделения** 192  
**Правдоподобия функция** 315  
**Правильная особая точка** 19  
**Представления группы** 346  
**Преобразование конформное** 105  
 — рядов 46, 241  
**Присоединенная функция Лежандра** 26, 149  
**Присоединенное дифференциальное уравнение Лежандра** 149  
**Проекционный оператор** 121  
**Производящая функция** 145  
 — — для функций Бесселя 158  
 — — для полиномов Лежандра 145  
**Простейшие дроби** 48  
**Псевдоскаляр** 328  
**Псевдотензор** 328  
**Пауссова распределение** 308
- Расходящиеся волны** 196  
**Регулярное представление** 354  
**Резольвенты ядро** 252  
**Римана символ** 163  
**Римановой кривизны тензор** 340  
**Родрига формула** 144  
**Рунге—Кутта метод** 291  
**Рэля — Ритца вариационный принцип** 278
- Свертки теорема** 98  
**Связи формулы в ВКБ-методе** 32  
**Седловой точки методы** 73  
**Секулярное уравнение** 129  
**Симметрическая группа** 343  
**Симметричная матрица** 123  
**Симметричное ядро** 254  
**Симметричный тензор** 334  
**Симпсона правило** 286  
**Синус-преобразование Фурье** 89  
**Скалярное произведение** 127  
**Сложения теорема для сферических гармоник** 150  
**Смежный класс группы** 344  
**Смещения ядро** 259  
**Собственное вращение** 327  
**Собственные векторы** 129  
 — — матрицы 216

- Соосвенные векторы свойства ортогональности 217  
 Собственные значения 28, 129  
 — — вырожденные 130  
 — — интегрального уравнения 248  
 — — эрмитовой матрицы 130  
 Собственные функции 216  
 Соприкасающиеся параметры 14  
 Сопряженная линейность 127  
 Сопряженное представление группы  $SU(3)$  380  
 Специальные функции 143  
 Спинорные матрицы Паули 384  
 Спинорное представление 386  
 Среднее значение 310  
 Стандартное отклонение 310  
 Стационарной фазы метод 80  
 Стирлинга формула 74  
 Стокса области 37  
 — явление 36  
 Суммирование рядов 297  
 Субматрица 124  
 Существенно особая точка 19  
 Сферические гармоники 150  
 Сходимости признаки 42
- Таблица группы 344**  
 Тензор 326  
 — декартов 323  
 — антисимметричный 334  
 — метрический 337  
 — относительный 334  
 — римановой кривизны 340  
 Тензорный анализ 323  
 Теплопроводность в кубе 199  
 — в бесконечной среде 205  
 — в полубесконечной среде 207  
 — в слое 201  
 Точечный источник 206  
 Точечное представление 346  
 Транспонированная матрица 123  
 Транспонированное интегральное уравнение 249  
 Трапеций правило 286  
 Триада 329
- Уиттекера функция 171**  
 Унитарная матрица 123  
 Унитарное представление 348  
 Условная вероятность 303
- Флоке теорема 172**  
 Фредгольма интегральные уравнения 247  
 — решение 253  
 — теоремы 249  
 Френе формулы 330  
 Френеля интегралы 68  
 Фундаментальное решение 229, 232  
 Фундаментальный тензор 336  
 Функционал 264  
 Функциональная производная 266  
 Фурье—Бесселя преобразование 95  
 Фурье-преобразование 86  
 — в трех измерениях 91  
 Фурье-ряд 81  
 — в комплексной форме 85
- Характеристики уравнения в частных производных 187  
 Характеристическая функция распределения 311  
 Характеры группы 349  
 Хевисайда ступенчатая функция 93  
 Хи-квадрат распределение 321  
 Хилла уравнение 174
- Центральная предельная теорема 313**  
 Цепная дробь 176  
 Циклоида 268
- Частный интеграл 12**  
 Численное дифференцирование 285  
 — решение дифференциальных уравнений 290  
 Численные методы 282
- Шварца принцип симметрии 113**  
 Шлефли интегральное представление для полиномов Лежандра 144  
 — интегральное представление для функций Бесселя 158  
 Штурма—Лиувилля дифференциальное уравнение 219, 275  
 Шура лемма 348

- Эйлера—Маклорена формула 298  
Эйлера—Лагранжа уравнение 264  
Эйлера преобразование 50, 301  
— углы 324  
Эйри интеграл 102  
Эквивалентность представлений групп 347  
Элементы матрицы 122  
Эллиптические интегралы 69  
— уравнения в частных производных 186  
— функции Вейерштрасса 183
- Эллиптические функции Якоби 177  
Эрмита дифференциальное уравнение 24  
— полиномы 24  
Эрмитов линейный оператор 218  
Эрмитово сопряженная матрица 123  
— ядро 254
- Якоби полиномы 167  
— эллиптические функции 177

# О Г Л А В Л Е Н И Е

Предисловие к переводу . . . . .	5
Предисловие . . . . .	6
<b>Глава 1. Обыкновенные дифференциальные уравнения . . . . .</b>	<b>8</b>
1.1. Решение в замкнутой форме . . . . .	8
1.2. Решения в виде степенных рядов . . . . .	18
1.3. Приближенные методы . . . . .	26
1.4. Метод ВКБ . . . . .	30
<b>Глава 2. Бесконечные ряды . . . . .</b>	<b>42</b>
2.1. Признаки сходимости . . . . .	42
2.2. Общеизвестные ряды . . . . .	44
2.3. Преобразование рядов . . . . .	46
<b>Глава 3. Вычисление интегралов . . . . .</b>	<b>52</b>
3.1. Элементарные методы . . . . .	52
3.2. Вычисление интегралов с учетом симметрии . . . . .	55
3.3. Интегрирование по контуру . . . . .	58
3.4. Табулированные интегралы . . . . .	65
3.5. Приближенные разложения . . . . .	70
3.6. Методы седловой точки . . . . .	73
<b>Глава 4. Интегральные преобразования . . . . .</b>	<b>81</b>
4.1. Ряды Фурье . . . . .	81
4.2. Преобразования Фурье . . . . .	86
4.3. Преобразования Лапласа . . . . .	92
4.4. Другие пары преобразований . . . . .	95
4.5. Применения интегральных преобразований . . . . .	95
<b>Глава 5. Дальнейшие применения комплексных переменных . . . . .</b>	<b>105</b>
5.1. Конформные преобразования . . . . .	105
5.2. Дисперсионные соотношения . . . . .	110

<b>Глава 6. Векторы и матрицы</b> . . . . .	118
6.1. Линейные векторные пространства . . . . .	118
6.2. Линейные операторы . . . . .	119
6.3. Матрицы . . . . .	122
6.4. Преобразования координат . . . . .	125
6.5. Задачи на собственные значения . . . . .	128
6.6. Диагонализация матриц . . . . .	136
6.7. Пространства бесконечной размерности . . . . .	139
<b>Глава 7. Специальные функции</b> . . . . .	143
7.1. Функции Лежандра . . . . .	143
7.2. Функции Бесселя . . . . .	153
7.3. Гипергеометрическая функция . . . . .	161
7.4. Вырожденные гипергеометрические функции . . . . .	168
7.5. Функции Матье . . . . .	172
7.6. Эллиптические функции . . . . .	177
<b>Глава 8. Дифференциальные уравнения в частных производных</b> . . . . .	184
8.1. Примеры . . . . .	184
8.2. Общее рассмотрение . . . . .	185
8.3. Разделение переменных . . . . .	192
8.4. Методы интегральных преобразований . . . . .	202
8.5. Метод Винера — Хопфа . . . . .	208
<b>Глава 9. Собственные функции, собственные значения и функции Грина</b> . . . . .	216
9.1. Простые примеры задач на собственные значения . . . . .	216
9.2. Общее рассмотрение . . . . .	218
9.3. Решение краевых задач методом разложения по собственным функциям . . . . .	221
9.4. Неоднородные задачи. Функции Грина . . . . .	222
9.5. Функции Грина в электродинамике . . . . .	232
<b>Глава 10. Теория возмущений</b> . . . . .	237
10.1. Обычная невырожденная теория . . . . .	237
10.2. Преобразование рядов . . . . .	241
10.3. Теория возмущений с вырождением . . . . .	243
<b>Глава 11. Интегральные уравнения</b> . . . . .	247
11.1. Классификация . . . . .	247
11.2. Вырожденные ядра . . . . .	248
11.3. Ряды Неймана и Фредгольма . . . . .	250
11.4. Теория Гильберта — Шмидта . . . . .	254
11.5. Метод Винера — Хопфа и интегральные уравнения . . . . .	259
11.6. Интегральные уравнения в дисперсионной теории . . . . .	262

Глава 12. Вариационное исчисление . . . . .	264
12.1. Уравнение Эйлера — Лагранжа . . . . .	264
12.2. Обобщение основной задачи . . . . .	268
12.3. Решение задач на собственные значения с помощью вариационного исчисления . . . . .	275
Глава 13. Численные методы . . . . .	282
13.1. Интерполяция . . . . .	282
13.2. Численное интегрирование . . . . .	286
13.3. Численное решение дифференциальных уравнений . . . . .	290
13.4. Корни уравнений . . . . .	293
13.5. Суммирование рядов . . . . .	297
Глава 14. Вероятность и статистика . . . . .	302
14.1. Введение . . . . .	302
14.2. Основные законы теории вероятностей . . . . .	302
14.3. Комбинации и перестановки . . . . .	305
14.4. Биноминальное распределение, распреде- ления Пуассона и Гаусса . . . . .	306
14.5. Общие свойства распределений . . . . .	310
14.6. Обработка экспериментальных данных . . . . .	314
Глава 15. Тензорный анализ и дифференци- альная геометрия . . . . .	323
15.1. Декартовы тензоры в трехмерном про- странстве . . . . .	323
15.2. Кривые в трехмерном пространстве. Фор- мулы Френе . . . . .	329
15.3. Общий тензорный анализ . . . . .	330
Глава 16. Введение в группы и представле- ния групп . . . . .	342
16.1. Определения . . . . .	342
16.2. Подгруппы и классы . . . . .	344
16.3. Представления групп . . . . .	346
16.4. Характеристики . . . . .	349
16.5. Физические применения . . . . .	358
16.6. Бесконечные группы . . . . .	367
16.7. Неприводимые представления $SU(2)$ , $SU(3)$ и $O^+(3)$ . . . . .	376
Литература . . . . .	387
Предметный указатель . . . . .	389