О.А.Сдвижков

МАТЕМАТИКА НА КОМПЬЮТЕРЕ: MAPLE 8

М.: СОЛОН-Пресс, 2003. — 176 с. (Серия «Библиотека студента»)

Книга посвящена программе Maple — новейшей системе символьной (аналитической) математики. Рассмотрены основные правила работы в ее среде, методы и способы решения задач по элементарной и высшей математике, геометрическим построениям, теории вероятностей и математической статистике. Отдельная глава посвящена математическим моделям в экономике. Книга основана на богатом опыте преподавания автора. Приведено много примеров решения задач.

Книга предназначена для научно-технических работников, студентов и преподавателей высших учебных заведений.

Содержание

Предисловие

Что такое Maple? Одним из мировых лидеров в компьютеризации математических вычислений (в том числе символьных) является корпорация Waterloo Maple Inc. (Канада), выпускающая программный продукт Maple. Последняя версия Maple 8, называемая далее Maple, охватывает почти всю математику, начиная с элементарной математики и заканчивая специальными математическими разделами. Maple — математическое windows-приложение, позволяющее решать задачи из этого широчайшего диапазона за минимальное время.

Сложно ли работать в Maple? Оказывается, нет. Программы решений основных математических задач и геометрических построений, составленные авторами Maple, предоставляются пользователю только именами, в круглых скобках после которых вводятся необходимые данные. Учитывая зависимость от данных, их называют[1] встроенными функциями [3]. Задача пользователя — выстраивать из них и операторов нужные последовательности и задавать данные. Впрочем, часто оказывается, что достаточно воспользоваться одной из встроенных функций, тем более что их в Maple более 3000. Для сравнения, в MathCAD-2000 их только около 300[2].

Можно ли доверять полученным в Maple результатам? Да, можно. Приведенные далее примеры лишний раз подтверждают это. Более того [3], Maple — первая компьютерная программа, прошедшая тестирование с результатом 100 %. Если вы решаете в Maple, например, иррациональное уравнение, то можете быть уверены, что список полученных корней содержит все корни уравнения и в нем нет посторонних корней. Компьютерная программа Maple незаменима как для проверки окончательных и промежуточных результатов, получаемых аналитически — без компьютера, так и для поиска методов решения.

Вообще, стремительное развитие уровня всех компьютерных математических приложений привело к парадоксальной ситуации, не оцененной пока должным образом. С одной стороны, аналитические решения многих задач уже нельзя считать рациональными, так как компьютерные решения проводятся быстрее, то есть часто решать аналитически все равно, что ехать из Твери в Москву через Рязань. С другой стороны, компьютерные решения не принимаются как полноценные! Однако несомненно, что такое положение временное и в недалеком будущем компьютерный способ решения станет если не основным, то равноправным с аналитическим. В Maple имеется мощная справочная система Help с пояснениями и примерами. Рекомендуется использовать ее как можно чаще, тем более что Maple достаточно жесткая система, не допускающая никаких отклонений от установленных в ней правил.

---

[1] Другой терминологии придерживается Матросов А. В. Maple 6. Решение задач высшей математики и механики. — СПб.: БХВ-Петербург, 2001. 528 с.

[2] Сдвижков О. А. MathCAD-2000: введение в компьютерную математику. — М.: Издательско-торговая корпорация «Дашков и К°», 2002. 204 с.

До последней версии Maple в пакете student, содержащем встроенные функции основных математических вычислений, необходимых в учебном процессе, была возможность получения пошаговых решений. В последней версии Maple пошаговые функции пакета student переданы пакету Student [Calculus1], хотя сам пакет student остался. Однако основное назначение Maple состоит в оптимизации математических вычислений, включающей в себя получение результата минимумом нажатий на клавиши.

В данном учебно-практическом руководстве, применяя только самые необходимые средства Maple, решаются типовые и конкурсные задачи элементарной математики, задачи высшей математики и математические модели основных экономических задач. Дублирующие действия и полные списки параметров встроенных функций, как правило, не приводятся. С ними, как и с теми средствами Maple, которые не вошли в данное руководство, желающие могут ознакомиться как в справочной системе Maple, так и в более подробных руководствах, посвященных Maple.

Условия разбираемых задач и примеров взяты, в основном, из типовых задачников. Их решения в Maple сопровождаются комментариями, которые выделены курсивом. Задачи разбиты по темам и решаются, вообще говоря, в такой последовательности, в какой они проходятся по программам средней и высшей школ. Так что данное учебно-практическое руководство вполне можно рассматривать как дополнение к учебным курсам математики.

Используемые обозначения:

СКМ — курсор мыши в форме стрелки;

ЛКМ (ПКМ) — левая (правая) кнопка мыши.

Глава 1
ЭЛЕМЕНТАРНАЯ МАТЕМАТИКА

§ 1. Основные правила работы в Maple

Окно Maple имеет типичный вид для приложения Windows (рис. 1.1).

Работа проводится по секциям «вход-выход», раскладка En. Каждая секция автоматически обозначается левой квадратной скобкой (см. рис. 1.1), объединяющей строку ввода (командную строку) и полученный результат. К сожалению, на всех представленных далее фрагментах листового поля Maple левые квадратные скобки, обозначающие вычислительные секции, отсутствуют, так как не поддаются копированию. Командные строки начинаются с оператора > и имеют красный цвет, а результаты, автоматически выравниваемые по центру, окрашены в синий. Оператор начала ввода > вставляется на листовое поле щелчком ЛКМ по кнопке > меню инструментов Maple, причем одновременно появляется левая квадратная скобка, меняющая, по мере необходимости, свою длину. Правила редактирования командных строк обычные. Второй по значимости оператор ; (точка с запятой) — оператор вывода результатов на рабочий

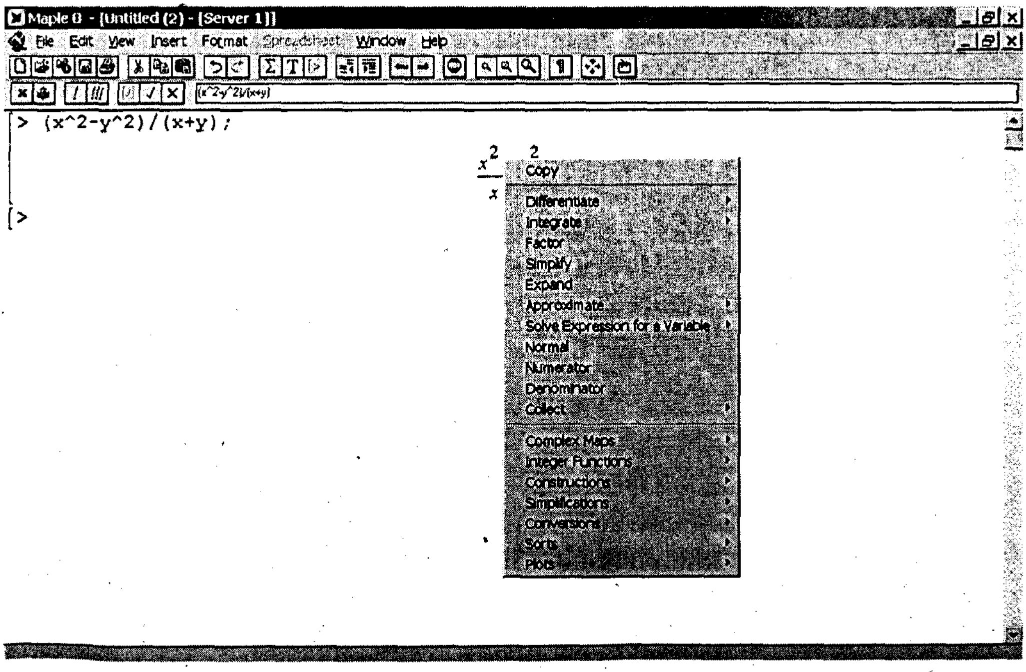

Рис. 1.1

лист. Если командная строка заканчивается им, то в каком бы месте строки ни находился курсор, после нажатия <Enter> или щелчка ЛКМ по кнопке ! панели инструментов Maple проводятся вычисления и результаты выводятся на рабочий лист. Например, так получаем:

```
> 1+2;
```

$$3$$

```
> 2*3+1;
```

$$7$$

```
> sin(Pi/6);
```

$$\frac{1}{2}$$

Следует обратить внимание на ввод числа π. Градусная мера в Maple degrees. Переход от радианной (radians) меры угла к градусной и наоборот осуществляется встроенной функцией convert. Примеры будут приведены позже. Последний, предпоследний и предпредпоследний результаты Maple сохраняет под именами %, %%, %%%, соответственно. Действительно, продолжение предыдущих вычислений дает:

```
> %+%%+%%%;
```

$$\frac{21}{2}$$

Степень x^y вводится

```
> x^y;
```

$$x^y$$

Корень квадратный (арифметический) из неотрицательного числа x обозначается sqrt(x), например,

```
> sqrt(9);
```

$$3$$

Показатели степени, имеющие вид $\frac{m}{n}$, заключаются в круглые скобки. Например,

```
> 27^(1/3);
```

$$27^{(1/3)}$$

Вычисления числовых выражений проводятся встроенной функцией evalf(α, n), где α — числовое выражение, n — необязательный параметр, определяющий число значащих цифр. По умолчанию $n = 10$, значение n переустанавливается глобальной переменной Digits. В частности, продолжение вычислений дает:

```
> evalf(%);
```

$$3.000000000$$

Необходимость скобок при вводе степени с показателем $\frac{m}{n}$ объясняется тем, что действие возведения в степень имеет приоритет выполнения перед умножением и делением, которые являются действиями одной ступени:

```
> x/y^z;
```

$$\frac{x}{y^z}$$

```
> x/y*z;
```

$$\frac{xz}{y}$$

Логарифмы $\log_a b$ набираются в виде log [a] (b), в частности:

```
> log[2](8);
```

$$\frac{\ln(8)}{\ln(2)}$$

```
> evalf(%);
```

$$3.000000000$$

В случае десятичных логарифмов квадратные скобки можно не ставить. Для натуральных логарифмов, как видно из последнего примера, сохраняется обозначение ln(x).

Задача. Вычислить

$$\sqrt{25^{\frac{1}{\log_6 5}} + 49^{\frac{1}{\log_8 7}}}$$

Решение. *После оператора > с клавиатуры вводится числовое выражение и нажимается клавиша <;>. По команде <Enter> появляется результат набора — в стандартной математической форме. Проверяется правильность ввода и встроенной функцией* evalf *находится значение числового выражения:*

```
> (25^(1/(log[6](5)))+49^(1/(log[8](7))))^(1/2);
```

$$\sqrt{25^{\left(\frac{\ln(6)}{\ln(5)}\right)} + 49^{\left(\frac{\ln(8)}{\ln(7)}\right)}}$$

```
> evalf(%);
```

$$10.00000$$

Ответ: 10.

Для ввода математических символов можно использовать также панель EXPRESSION (рис. 1.2). Щелкаете ЛКМ по кнопке View основного меню Maple, по строке Palettes переходите на строку Expression Palette и еще раз щелкаете ЛКМ — появляется данная панель. Когда надо вставить в командную

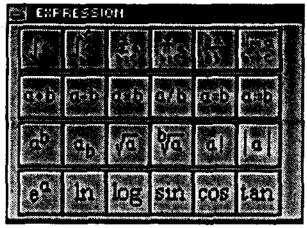

Рис. 1.2

строку один из ее символов, то щелкаете по нему ЛКМ, и его шаблон появляется на месте, занимаемом курсором ввода. Пусть требуется вычислить $\operatorname{tg}\frac{3\pi}{4}$. Щелкаете ЛКМ по кнопке tan и получаете шаблон, с приглашением ввести величину угла:

```
> tan(%?);
```

Вводите и, нажав <Enter>, приходите к результату:

```
> tan(3*Pi/4);
```

$$-1$$

Аналогичным образом открываются и применяются еще три панели, имеющиеся в Maple.

Если результат является промежуточным, не требующим вывода на рабочий лист, то ставится : (двоеточие) — отказ от вывода результата. Например,

```
> 1+2:%+5;
```

$$8$$

Оператор присваивания (запоминания) вводится <:><=>. В частности, с его помощью определяются функции. Самый простой способ задания функции f:= <аналитическое выражение>, например от переменной x. Он неудобен тем, что при таком задании Maple игнорирует запись f(a) и значение f(a) приходится вычислять встроенной функцией подстановки subs(x=a,f) — подставить x=a в f:

```
> f:=x^2;
```

$$f := x^2$$

```
> subs(x=6,f);
```

$$36$$

Более длинный способ, но не имеющий этого недостатка, называемый основным [3], с помощью «стрелки»: f:=x → <выражение от x>, где стрелка вводится как тире и знак больше. Например,

```
> f:=x->x^2;
```

$$f := x \rightarrow x^2$$

```
> f(6);
```

36

Пример ввода и вычисления значения функции двух переменных:

```
> f:=(x,y)->x+y;
```

$$f := (x, y) \to x + y$$

```
> f(1,2);
```

$$3$$

Присваивание отменяется f:=`f`, а все предыдущие присваивания, если их несколько, отменяются одновременно командой restart:

```
> x:=1:x;
```

$$1$$

```
> x:='x':x;
```

$$x$$

```
> x:=1:y:=2:z:=3:x+y+z;
```

$$6$$

```
> restart:x+y+z;
```

$$x + y + z$$

Имеется изящный способ задания функции, как процедуры программирования, завершаемый нажатием <Enter>:

<имя функции>:=proc(переменные)
аналитическое выражение
end;

Например, функция $y = x^2 + 3x - 4$ вводится им следующим образом:

```
> y:=proc(x)
x^2+3*x-4
end;
```

$$y := \mathrm{proc}(x)x\hat{\ }2 + 3 \times x - 4\,\mathrm{end\ proc}$$

Вычисление ее значения при x = 1:

```
> y(1);
```

$$0$$

Если нет необходимости в проверке правильности ввода, то после end ставится двоеточие.

При вводе функций, заданных несколькими аналитическими выражениями, можно использовать оператор условного перехода if, применяемый в следующих видах:

1) if <условие> then <следствие> fi;

Если выполнено условие, то выполняется следствие. В противном случае ничего не выполняется.

2) if <условие> then <следствие 1> else <следствие 2> fi;

Если выполнено условие, то выполняется следствие 1, в противном случае выполняется следствие 2, что задается также компактным видом:

3) `if`(<условие>,<следствие 1>,<следствие 2>);

Пусть требуется задать функцию:

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & x \le 0, \\ 2x, & 0 < x \le 1, \\ 1 - x, & x > 1. \end{cases}$$

Конструкция 3, примененная дважды, позволяет задать ее в виде:

```
> f:=`if`(x<=0,x^2,`if`(x<=1,2*x,1-x));
```

$$f := \mathrm{if}(x \le 0, x^2, \mathrm{if}(x \le 1, 2x, 1 - x))$$

Вычисление значения функции при x = 0,5:

```
> subs(x=0.5,f);
```

$$\mathrm{if}(.5 \le 0, .25, \mathrm{if}(.5 \le 1, 1.0, .5))$$

```
> evalf(%);
```

$$1.0$$

Этот принцип используется во встроенной функции piecewise. С ее помощью данная функция вводится так:

```
> f:=piecewise(x<=0,x^2,x<=1,2*x,x>1,1-x);
```

$$f := \begin{cases} x^2 & x \le 0 \\ 2x & x \le 1 \\ 1 - x & 1 < x \end{cases}$$

Имеется несколько способов задания последовательности, самый естественный seq(f(i), i=1..n). Пусть надо задать конечную последовательность: 2, 4, 6, 8, 10. В этом случае в командную строку вводится:

```
> seq(2*i,i=1..5);
```

Нажатием <Enter> проверяется правильность ввода:

$$2,\ 4,\ 6,\ 8,\ 10$$

Эту же последовательность можно задать с помощью оператора последовательности $:

```
> 2*i$i=1..5;
```

$$2,\ 4,\ 6,\ 8,\ 10$$

Бесконечные последовательности вводятся в виде seq(f(i),i=1..infinity), где учтено, что ∞ на языке Maple есть infinity.

Большую роль в Maple играют списки — пронумерованные, начиная с единицы, символы. С точки зрения Maple, введенное в последних примерах множество не является последовательностью, так как не было команды пронумеровать элементы. Такая команда отдается заключением множества в квадратные скобки. Примеры списков:

```
> [seq(2*i,i=1..5)];
```

$$[2,\ 4,\ 6,\ 8,\ 10]$$

```
> [a,b,c,d];
```

$$[a, b, c, d]$$

Список можно обозначить и при необходимости использовать любой его элемент, указав в квадратных скобках его номер:

```
> s:=[M,a,p,l,e];
```

$$s := [M, a, p, l, e]$$

```
> s[3];
```

p

Последовательность значений $f(n), n = 1\ldots k$ можно получить и оператором циклов for, используя его простейшую конструкцию:

for n from 1 to k do
f(n)
end do; (или od;)

Например,

```
> for i from 1 to 5 do
2*i
end do;
```

2

4

6

8

10

При необходимости указывается шаг, как это делается, видно из следующего примера:

```
> for i from 1 by 3 to 7 do
2*i
od;
```

2

8

14

Можно использовать циклы типа «пока», содержащие ключевое слово while:

```
> for i from 1 while i<=3 do
2*i
end do;
```

2

4

6

Символы логических операторов в Maple: and — конъюнкция, or — дизъюнкция, not — отрицание. Знак ≠ вводится <>, пустое множество обозначается {}.

Обозначения тригонометрических и гиперболических функций в системе Maple:

sin,	cos,	tan,	sec,
csc,	cot,	sinh,	cosh,
tanh,	sech,	csch,	coth

Обратные тригонометрические и обратные гиперболические функции, соответственно, обозначаются:

arcsin,	arccos,	arctan,	arcsec,	arccsc,	arccot,
arcsinh,	arccosh,	arctanh,	arcsech,	arccsch,	arccoth

С полным списком математических функций, входящих в Maple, и их обозначениями рекомендуется ознакомиться самостоятельно. Наберите inifcn, выделите и нажмите <F1>.

Если ввод на языке Maple, которым заполняется командная строка, проведен неправильно — программа не может выполнить набранное и, соответственно, вернуть результат в стандартной математической символике, а такое, к сожалению, бывает достаточно часто, то выводится сообщение об ошибке. Чаще всего не хватает скобки. В таких случаях после нажатия <Enter> курсор останавливается перед оператором вывода результата (;), в остальных — перед неверным символом. Выражение, имеющее стандартную математическую символику, можно копировать, как полностью, так и частично, и вставлять в командную строку, где оно принимает вид на языке Maple.

В зависимости от частоты применения встроенные функции разделены в Maple на внутренние, входящие в ядро системы и загружаемые в оперативную память компьютера при запуске системы, и внешние, остающиеся на жестком диске. Последние, в свою очередь, делятся на два вида. Одни вызываются командой readlib(name), другие вызовом всего пакета, в котором они находятся. Всего пакетов около 70, вызов пакета with(name). Со списком пакетов можно ознакомиться командами:

```
> ?packages;
```

Основные пакеты будут рассмотрены по мере необходимости.

Встроенные функции делятся также на исполняемые и инертные. Первые начинаются со строчной буквы и возвращают пользователю результат. Вторые, не обладающие этим свойством, начинаются с прописной буквы. Их применяют, например, для ввода формул в текстовые комментарии.

§ 2. Алгебраические преобразования

Встроенные функции элементарных преобразований:
simplify — упростить,
expand — раскрыть скобки,

factor — разложить на множители,
normal — привести к общему знаменателю,
combine — преобразовать степени (или тригонометрическое выражение),
collect — привести подобные члены.

После ключевого слова в скобках вводится аналитическое выражение или его имя — идентификатор, а также параметры, часть которых или все могут отсутствовать — быть необязательными. Например, применяя collect, чтобы не было сообщения об ошибке, необходимо указать переменную, по степеням которой приводятся подобные члены — обязательный параметр. В simplify может быть добавлена встроенная функция assume — принять, задающая условия, при которых происходит упрощение, — необязательный параметр. Встроенная функция combine также имеет необязательные параметры. Выделив ключевое слово (или установив на нем курсор) и нажав <F1>, вы попадете на страницу справочной системы, где сможете ознакомиться с соответствующим списком параметров и примерами их применения. Чтобы вывести результат после встроенной функции, ставится оператор ; и нажимается <Enter>. Рассмотрим простейшие примеры.

```
> simplify((a^3-b^3)/(a-b));
```

$$a^2+ba+b^2$$

```
> expand((a-b)*(a^2+a*b+b^2));
```

$$a^3-b^3$$

```
> factor(a^3-b^3);
```

$$(a-b)(a^2+ba+b^2)$$

```
> normal(y/x+1/(x^2));
```

$$\frac{yx+1}{x^2}$$

```
> collect(x^2+3*x^2+4*x+4*x+y,x);
```

$$4x^2+8x+y$$

```
> simplify(2*a/sqrt(a^2),assume(a<0));
```

$$-2$$

```
> combine((x^(1/2))*x^(3/2));
```

$$x^2$$

В Maple предусмотрена возможность — smart-способ, используя контекстное меню, не заниматься набором наиболее часто используемых ключевых слов. Делается это так. Вводится выражение и выводится его стандартный математический вид, который с помощью мыши выделяется. После чего, когда СКМ находится на нем, делается щелчок ПКМ — появляется контекстное меню. Именно его вы видите на рисунке окна Maple (рис. 1.1). Устанавливаете СКМ на нужном ключевом слове и щелкаете ЛКМ — происходит выполнение выбранной команды.

Пример. Упростить выражение:

$$\left(\frac{(5x)^3-(7y)^3}{(5x)^2-(7y)^2}+\frac{1}{(5x)^{-1}+(7y)^{-1}}\right)(5x+7y)^{-1}+\frac{x^2-14x+24}{x-2}.$$

Решение. *Набирается заданное выражение, выводится его стандартный математический вид, выделяется и открывается контекстное меню. По команде simplify происходит упрощение и в следующей секции появляется результат:*

```
> (((5*x)^3-(7*y)^3)/((5*x)^2-(7*y)^2)+1/((5*x)^(-
1)+(7*y)^(-1)))*(5*x+7*y)^(-1)+(x^2-14*x-25+49)/(x-7+5);
```

$$\frac{\dfrac{125x^3-343y^3}{25x^2-49y^2}+\dfrac{1}{\dfrac{1}{5}\dfrac{1}{x}+\dfrac{\frac{1}{7}}{y}}}{5x+7y}+\frac{x^2-14x+24}{x-2}$$

```
> R0 := simplify(((125*x^3-343*y^3)/(25*x^2-
49*y^2)+1/(1/5/x+1/7/y))/(5*x+7*y)+(x^2-14*x+24)/(x-2));
```

$$R0 := x-11$$

Ответ: x – 11.

Перечисленные встроенные функции прекрасно упрощают алгебраические выражения с целыми степенями, но в случае рациональных степеней они, как правило, возвращают заданное выражение. Например, ни одна из них не упрощает выражение

$$\frac{x-y}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}.$$

В частности,

```
> simplify((x-y)/(sqrt(x)+sqrt(y)));
```

$$\frac{x-y}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}$$

Поэтому, прежде чем упрощать алгебраическое выражение, содержащее степени с дробными показателями, надо встроенной функцией subs — подстановка перейти к алгебраическому выражению, содержащему степени с целыми показателями.

Пример ([11], 2.001). Упростить

$$\frac{\sqrt{x}+1}{x\sqrt{x}+x+\sqrt{x}}:\frac{1}{x^2-\sqrt{x}}.$$

Решение. *Вводится заданное выражение (как функция f) и, чтобы проверить правильность ввода, оно выводится на листовое поле — рабочий лист в стандартной математической форме:*

```
> f:=((sqrt(x)+1)/(x*sqrt(x)+x+sqrt(x)))*(x^2-sqrt(x));
```

$$f := \frac{(\sqrt{x}+1)(x^2-\sqrt{x})}{x^{(3/2)}+x+\sqrt{x}}$$

Все правильно. Переход к степеням с натуральными показателями и переобозначение:

```
> g:=subs(sqrt(x)=a,x^2=a^4,x^(3/2)=a^3,x=a^2,f);
```

$$g := \frac{(a+1)(a^4-a)}{a^3+a^2+a}$$

Упрощение:

```
> simplify(g);
```

$$a^2-1$$

Ответ: x − 1.

Решение, для наглядности, расположено в трех вычислительных секциях, но рациональнее решать в одной:

```
> f:=((sqrt(x)+1)/(x*sqrt(x)+x+sqrt(x)))*(x^2-sqrt(x)):
subs(sqrt(x)=a,x^2=a^4,x^(3/2)=a^3,x=a^2,f):simplify(%);
```

$$a^2-1$$

Пример ([11], 2.002). Упростить:

$$((\sqrt[4]{p}-\sqrt[4]{q})^{-2}+(\sqrt[4]{p}-\sqrt[4]{q})^{-2}):\frac{\sqrt{p}-\sqrt{q}}{p-q}.$$

Решение.

```
> f:=(((p^(1/4)-q^(1/4))^(-2)+((p^(1/4)+q^(1/4))^(-
2)))*(p-q)/(sqrt(p)+sqrt(q)));
```

$$f := \frac{\left(\frac{1}{(p^{(1/4)}-q^{(1/4)})^2}+\frac{1}{(p^{(1/4)}+q^{(1/4)})^2}\right)(p-q)}{\sqrt{p}+\sqrt{q}}$$

```
>g:=subs(p^(1/4)=x,q^(1/4)=y,sqrt(p)=x^2,sqrt(q)=y^2,p=x^4,q=y^4,f)
;
```

$$g := \frac{\left(\frac{1}{(x-y)^2}+\frac{1}{(x+y)^2}\right)(x^4-y^4)}{x^2+y^2}$$

```
> simplify(g);
```

$$2\,\frac{x^2+y^2}{x^2-y^2}$$

Ответ: $2\,\dfrac{\sqrt{p}+\sqrt{q}}{\sqrt{p}-\sqrt{q}}$.

Пример ([11], 2.162). Упростить:

$$\frac{a^2+4}{a\sqrt{\left(\dfrac{a^2-4}{2a}\right)^2+4}}.$$

Решение. *Вводим заданное выражение, проверяем правильность ввода и упрощаем через контекстное меню (smart-способ), что дает:*

```
> (a^2+4)/(a*sqrt(((a^2-4)/(2*a))^2+4));
```

$$2\,\frac{a^2+4}{a\sqrt{\dfrac{(a^2-4)^2}{a^2}+16}}$$

```
> 2*(a^2+4)/a/((a^2+4)^2/a^2)^(1/2);
```

$$2\,\frac{a^2+4}{a\sqrt{\dfrac{(a^2+4)^2}{a^2}}}.$$

Чтобы избавиться от квадратного корня, так как $a^2+4>0$ при любом a, решение разбивается на следующие два случая:

```
> simplify(2*(a^2+4)/a/((a^2+4)^2/a^2)^(1/2),assume(a>0));
```

$$2$$

```
> simplify(2*(a^2+4)/a/((a^2+4)^2/a^2)^(1/2),assume(a<0));
```

$$-2$$

Ответ: 2, *если* $a>0$; -2, *если* $a<0$

Замечание. Упрощаемое алгебраическое выражение набирается с клавиатуры только один раз — при первоначальном вводе. Во всех остальных случаях командные строки заполняются с помощью копирования (полного или частичного) предыдущего алгебраического выражения и вставки из буфера обмена.

Пример ([11], 2.173). Упростить:

$$\frac{x|x-3|}{(x^2-x-6)|x|}.$$

Решение. *Вводим заданное выражение и проверяем правильность ввода:*

```
> restart:x*abs(x-3)/((x^2-x-6)*abs(x));
```

$$\frac{x|x-3|}{(x^2-x-6)|x|}.$$

Смотрим, что дает встроенная функция simplify:

```
> simplify(x*abs(x-3)/((x^2-x-6)*abs(x)));
```

$$\frac{x\left|\frac{x-3}{x}\right|}{x^2-x-6}$$

Если $0 < x < 3$, то под знаком модуля отрицательное число, а если $x < 0$ или $x > 3$, то положительное. С помощью assume задается условие $0 < x < 3$, а с помощью встроенной функции принадлежности about проводится контроль правильности задания условия:

```
> assume(x>0,x<3):
about(x);
Originally x, renamed x~:
is assumed to be: RealRange(Open(0),Open(3))
```

Промежуток изменения x задан правильно, можно упрощать:

```
> simplify(x/(x^2-x-6)*abs((x-3)/x));
```

$$-\frac{1}{x\sim+2}$$

Знак тильда ~ при x указывает на то, что на переменную x наложены ограничения. Далее решение аналогичное.

```
> x:=`x`:assume(x<0):about(x);
Originally x, renamed x~:
is assumed to be: RealRange(-infinity,Open(0))
> simplify(x/(x^2-x-6)*abs((x-3)/x));
```

$$\frac{1}{x\sim+2}$$

```
> x:=`x`:assume(x>3):about(x);
Originally x, renamed x~:
is assumed to be: RealRange(Open(3),infinity)
> simplify(x/(x^2-x-6)*abs((x-3)/x));
```

$$\frac{1}{x\sim+2}$$

Ответ: $-\dfrac{1}{x+2}$, *если* $0 < x < 3$; $\dfrac{1}{x+2}$, *если* $x < 0$ *или* $x > 3$.

Достаточно эффективно упрощает алгебраические выражения, содержащие степени с рациональными показателями, встроенная функция разложения в ряд series (выражение, переменная), применяемая по каждой переменной.

Пример ([11], 2.026). Упростить:

$$\frac{\left(\sqrt[5]{a^{\frac{4}{3}}}\right)^{\frac{3}{2}}}{\left(\sqrt[5]{a^4}\right)^2}\cdot\frac{\left(\sqrt{a\sqrt[3]{a^2b}}\right)^4}{\left(\sqrt[4]{a\sqrt{b}}\right)^6}.$$

Решение.

```
>((a^(4/3))^(1/5))^(3/2)*(sqrt(a*(a^2*b)^(1/3))^4/(((a^4)^(1/5))^
3*((a*sqrt(b))^(1/4))^6));
```

$$\frac{(a^{(4/3)})^{(3/10)}a^2(a^2b)^{(2/3)}}{(a^4)^{(3/5)}(a\sqrt{b})^{(3/2)}}$$

```
> series(%,a):series(%,b);
```

$$\frac{1}{b^{(1/12)}a^{(1/6)}}$$

Ответ: $\frac{1}{\sqrt[12]{a^2b}}$.

§ 3. Тригонометрические преобразования

Естественно, в Maple заложены основные тригонометрические формулы:

```
> simplify(cos(x)^2+sin(x)^2);
```

$$1$$

```
> expand(cos(x+y));
```

$$\cos(x)\cos(y)-\sin(x)\sin(y)$$

```
> expand(sin(x+y));
```

$$\sin(x)\cos(y)+\cos(x)\sin(y)$$

```
> expand(tan(x+y));
```

$$\frac{\tan(x)+\tan(y)}{1-\tan(x)\tan(y)}$$

```
> expand(cot(x+y));
```

$$\frac{\cot(x)\cot(y)-1}{\cot(x)+\cot(y)}$$

```
> expand(cos(2*x));
```

$$2\cos(x)^2-1$$

```
> expand(sin(2*x));
```

$$2\sin(x)\cos(x)$$

```
> expand(tan(2*x));
```

$$2\frac{\tan(x)}{1-\tan(x)^2}$$

```
> expand(cot(2*x));
```

$$\frac{1}{2}\frac{\cot(x)^2-1}{\cot(x)}$$

```
> combine(cos(x)^2);
```

$$\frac{1}{2}\cos(2x)+\frac{1}{2}$$

```
> combine(sin(x)^2);
```

$$\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos(2x)$$

```
> expand(cos(3*x));
```

$$4\cos(x)^3-3\cos(x)$$

```
> expand(sin(3*x));
```

$$4\sin(x)\cos(x)^2-\sin(x)$$

```
> combine(sin(x)*cos(y));
```

$$\frac{1}{2}\sin(x+y)+\frac{1}{2}\sin(x-y)$$

```
> combine(cos(x)*cos(y));
```

$$\frac{1}{2}\cos(x-y)+\frac{1}{2}\cos(x+y)$$

```
> combine(sin(x)*sin(y));
```

$$\frac{1}{2}\cos(x-y)-\frac{1}{2}\cos(x+y)$$

Так что если вы забыли какую-либо из перечисленных формул, то ее легко получить. Только надо правильно подобрать встроенную функцию, в противном случае возвращается исходное тригонометрическое выражение. Например,

```
> simplify(sin(x)*sin(y));
```

$$\sin(x)\sin(y)$$

Удивительно, но ни одна из встроенных функций не преобразует сумму тригонометрических функций в произведение, какие бы дополнительные параметры не устанавливались. В частности,

```
> simplify(cos(x)+cos(y));
```

$$\cos(x)+\cos(y)$$

```
> factor(cos(x)+cos(y));
```

$$\cos(x)+\cos(y)$$

```
> combine(cos(x)+cos(y),trig,symbol);
```

$$\cos(x)+\cos(y)$$

Этот пробел устраняется процедурами:

```
> cpc:=proc(x,y)
2*cos((x+y)/2)*cos((x-y)/2)
end;
```

$$cpc:=\text{proc}\ (x,y)2\times\cos(1/2\times x+1/2\times y)\times\cos(1/2\times x-1/2\times y)\ \text{end proc}$$

```
> cmc:=proc(x,y)
-2*sin((x+y)/2)*sin((x-y)/2)
end;
```

$$cmc:=\text{proc}\ (x,y)-2\times\sin(1/2\times x+1/2\times y)\times\sin(1/2\times x-1/2\times y)\ \text{end proc}$$

```
> sps:=proc(x,y)
2*sin((x+y)/2)*cos((x-y)/2)
end;
```

$$sps:=\text{proc}\ (x,y)2\times\sin(1/2\times x+1/2\times x)\times\cos(1/2\times x-1/2\times y)\ \text{end proc}$$

```
> sms:=proc(x,y)
2*sin((x-y)/2)*cos((x+y)/2)
end;
```

$$sms:=\text{proc}\ (x,y)2\times\sin(1/2\times x-1/2\times y)\times\cos(1/2\times x+1/2\times y)\ \text{end proc}$$

Тогда, например, если надо свернуть в произведение сумму $\cos x+\cos 3x$, то

```
> cpc(x,3*x);
```

$$2\cos(2x)\cos(x)$$

Имеет смысл добавить также формулы, выражающие $\sin x$ и $\cos x$ через тангенс половинного аргумента:

```
> st:=proc(x)
2*tan(x/2)/(1+tan(x/2)^2)
end;
```

$$st:=\text{proc}(x)2\times\tan(1/2\times x)/(1+\tan(1/2\times x)\hat{}2)\ \text{end proc}$$

```
> ct:=proc(x)
(1-tan(x/2)^2)/(1+tan(x/2)^2)
end;
```

$$ct:=\text{proc}\ (x)(1-\tan(1/2\times x)\hat{}2)/(1+\tan(1/2\times x)\hat{}2)\ \text{end proc}$$

Теперь можно перейти к примерам.

Тригонометрические тождества, как и любые другие виды тождеств, доказываются в Maple встроенной функцией testeq.

Пример ([7], 3.1.2.) Доказать тождество:

$$\text{ctg}\alpha-\text{tg}\alpha=2\text{ctg}2\alpha.$$

Решение.

```
> testeq(cot(alpha)-tan(alpha)=2*cot(2*alpha));
```

$$true$$

Ответ: тождество верно.

Если такое рациональное решение, по каким-либо причинам, не устраивает, то можно преобразовать левую и правую части заданного равенства и убедиться, что они равны:

```
> simplify(cot(alpha)-tan(alpha));
```

$$\frac{-1+2\cos(\alpha)^2}{\cos(\alpha)\sin(\alpha)}$$

```
> expand(2*cot(2*alpha));
```

$$\frac{\cot(\alpha)^2-1}{\cot(\alpha)}$$

```
> simplify(subs(cot(alpha)=cos(alpha)/sin(alpha),%));
```

$$\frac{-1+2\cos(\alpha)^2}{\cos(\alpha)\sin(\alpha)}$$

Пример ([11], 3.005.) Доказать тождество:

$$\cos\alpha + \cos 2\alpha + \cos 6\alpha + \cos 7\alpha = 4\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{5\alpha}{2}\cos 4\alpha.$$

Решение. *Для краткости набора произведена замена* α *на* x.

```
>testeq(cos(x)+cos(2*x)+cos(6*x)+cos(7*x)=4*cos(x/2)*cos(5*x/2)*cos
(4*x));
```

$$true$$

Ответ: тождество верно.

Доказательство, преобразованием левой части:

```
> cpc(x,7*x)+cpc(2*x,6*x);
```

$$2\cos(4x)\cos(3x)+2\cos(4x)\cos(2x)$$

```
> factor(%);
```

$$2\cos(4x)(\cos(3x)+\cos(2x))$$

```
> subs(cos(3*x)+cos(2*x)=cpc(3*x,2*x),%);
```

$$4\cos(4x)\cos\left(\frac{5}{2}x\right)\cos\left(\frac{1}{2}x\right)$$

Пример ([11], 3.005.) Вычислить $2-13\cos 2\alpha+\sin^{-1} 2\alpha$, если $\mathrm{ctg}\alpha=-\dfrac{1}{5}$.

Решение.
```
> subs(cos(2*x)=ct(2*x),sin(2*x)=st(2*x),2-13*cos(2*x)+1/sin(2*x));
```

$$2-\frac{13(1-\tan(x)^2)}{1+\tan(x)^2}+\frac{\frac{1}{2}(1+\tan(x)^2)}{\tan(x)}$$

```
> subs(tan(x)=-5,%);
```

$$\frac{57}{5}$$

Ответ: $\dfrac{57}{5}$.

§ 4. Алгебраические уравнения

Встроенная функция, предназначенная для решения уравнений и неравенств, имеет вид:

solve(уравнение или неравенство, переменная),

причем в случае уравнения (неравенства) с одной переменной имя переменной можно не указывать.

Пример ([11], 6.001). Решить алгебраическое уравнение:

$$\frac{x^2+1}{x-4}-\frac{x^2-1}{x+3}=23$$

Решение. *Вводится заданное уравнение и проверяется правильность ввода:*
```
> (x^2+1)/(x-4)-(x^2-1)/(x+3)=23;
```

$$\frac{x^2+1}{x-4}-\frac{x^2-1}{x+3}=23$$

Ввод уравнения проведен правильно. Нахождение корней:
```
> solve(%);
```

$$\frac{-55}{16},\,5$$

Ответ: $\left\{\dfrac{-55}{16},5\right\}$.

Компактное решение этого же уравнения:
```
> solve((x^2+1)/(x-4)-(x^2-1)/(x+3)=23);
```

$$\frac{-55}{16},\,5$$

Пример ([11], 6.002). Решить уравнение с параметрами:

$$\frac{b}{x-a}+\frac{a}{x-b}=2$$

Решение.

```
> b/(x-a)+a/(x-b)=2;
```

$$\frac{b}{x-a}+\frac{a}{x-b}=2$$

Так как переменных несколько, то необходимо указать переменную, относительно которой решается уравнение:

```
> solve(%,x);
```

$$b+a, \frac{1}{2}b+\frac{1}{2}a$$

Ответ: $\left\{a+b, \frac{a+b}{2}\right\}$.

Еще проще решаются уравнения smart-способом — через контекстное меню:

1) в командную строку вводится уравнение и находится его стандартный математический вид (как при проверке правильности ввода);

2) щелчком ПКМ по выделенному стандартному математическому виду открывается контекстное меню;

3) после щелчка ЛКМ по строке Solve (или, если переменных несколько, по нужной переменной строки Solve Equation for a Variable) в командной строке следующей секции появляются корни.

Пример. Решить уравнение:

$$5x^2+|x+7|-13=0.$$

Решение.

```
> 5*x^2+abs(x+7)-13=0;
```

$$5x^2+|x+7|-13=0$$

Используя контекстное меню, получаем:

```
>R2 := solve({5*x^2+abs(x+7)-13 = 0});
```

$$R2:=\{x=1\},\left\{x=\frac{-6}{5}\right\}$$

Сделаем проверку:

```
> subs(x=1,5*x^2+abs(x+7)-13 );
```

$$-8+|8|$$

```
> subs(x=-6/5,5*x^2+abs(x+7)-13 );
```

$$-\frac{29}{5}+\left|\frac{29}{5}\right|$$

Ответ: $\left\{1, \frac{-6}{5}\right\}$.

Пример. Решить уравнение:

$$\frac{|x+1|-3}{|x|-2}=1$$

Решение.

```
> (abs(x+1)-3)/(abs(x)-2)=1;
```

$$\frac{|x+1|-3}{|x|-2}=1$$

Через контекстное меню получаем не решение уравнения, а решение неравенства:

```
> R3 := solve({(abs(x+1)-3)/(abs(x)-2) = 1});
```

$$R3 := \{x < 2, 0 \le x\},\ \{2 < x\}$$

Откуда делаем вывод, что корнями могут быть только числа 0, 2. Значение 2 отбрасываем, так как оно не входит в ОДЗ. Проверкой убеждаемся, что $x = 0$ корень уравнения.

Ответ: {0}.

Пример ([11], 6.033). Решить иррациональное уравнение:

$$\sqrt{15-x}+\sqrt{3-x}=6.$$

Решение (smart-способом).

```
> sqrt(15-x)+sqrt(3-x)=6;
```

$$\sqrt{15-x}+\sqrt{3-x}=6$$

```
> R4 := solve({(15-x)^(1/2)+(3-x)^(1/2) = 6});
```

$$R4 := \{x=-1\}$$

Ответ: –1.

Пример ([11], 6.037). Решить уравнение:

$$\sqrt[3]{1+\sqrt{x}}+\sqrt[3]{1-\sqrt{x}}=2.$$

Решение (smart-способом).

```
> (1+sqrt(x))^(1/3)+(1-sqrt(x))^(1/3)=2;
```

$$(1+\sqrt{x})^{(1/3)}+(1-\sqrt{x})^{(1/3)}=2$$

```
> R5 := solve({(x^(1/2)+1)^(1/3)+(1-x^(1/2))^(1/3) = 2});
```

$$R5 := \{x=0\}$$

Ответ: {0}.

Пример ([11], 7.236). Решить логарифмическое уравнение:

$$3\lg(x^2)-\lg^2(-x)=9.$$

Решение (smart-способом).

```
> 3*log10(x^2)-(log10(-x))^2=9;
```

$$3\frac{\ln(x^2)}{\ln(10)}-\frac{\ln(-x)^2}{\ln(10)^2}=9$$

```
> R0 := solve({3*ln(x^2)/ln(10)-ln(-x)^2/ln(10)^2 = 9});
```

$$R0:=\{x=-1000\},\ \{x=-1000\}$$

Ответ: $\{-1000\}$.

Пример. Решить показательное уравнение:

$$5^{x+1}-2\cdot 9^{x-1}=4\cdot 5^x+3^{2x-1}.$$

Решение. *Применение контекстного меню приводит к специфической функции RootOf, представляющей все корни уравнения, включая комплексные. Для ее преобразования используется процедура allvalues:*

```
> 5^(x+1)-2*9^(x-1)=4*5^x+3^(2*x-1);
```

$$5^{(x+1)}-2\ 9^{(x-1)}=4\ 5^x+3^{(2x-1)}$$

```
> R1 := solve({5^(x+1)-2*9^(x-1) = 4*5^x+3^(2*x-1)});
```

$$R1:=\{x=\mathrm{RootOf}(-5^{(\_Z+1)}+29^{(\_Z-1)}+45^{-\_Z}+3^{(2\_Z-1)})\}$$

```
> allvalues(%);
```

$$\{x=\mathrm{RootOf}(-5^{(\_Z+1)}+29^{(\_Z-1)}+45^{-\_Z}+3^{(2\_Z-1)},1.000000000)\}$$

Ответ: 1.

Аналогично через solve решаются системы уравнений, только уравнения, как и неизвестные, вводятся в виде множеств — в фигурных скобках.

Пример ([11], 6.075). Решить систему уравнений:

$$\begin{cases} x^2y+xy^2=6,\\ xy+x+y=5.\end{cases}$$

Решение.

```
> solve({x^2*y+x*y^2=6,x*y+x+y=5},{x,y});
```

$$\{x=2,\ y=1\},\ \{x=1,\ y=2\},$$
$$\{x=-\mathrm{RootOf}(\_Z^2-2\_Z+3)+2,\ y=\mathrm{RootOf}(\_Z^2-2\_Z+3)\}$$

Так как функция RootOf зависит от квадратного трехчлена с переменной $\_Z$, не имеющего действительных корней, то действительных решений системы только два.

Ответ: $\{(2,1),(1,2)\}$.

§ 5. Тригонометрические уравнения

До тех пор пока не установлено (набрано) _EnvAllSolutions:=true, встроенная функция solve возвращает пользователю только одного представителя корней заданного тригонометрического уравнения. После данной команды она возвращает все множество корней для каждого тригонометрического уравнения. Например,

```
> solve(sin(x)=1/2,x);
```

$$\frac{1}{6}\pi$$

```
> _EnvAllSolutions:=true:solve(sin(x)=1/2,x);
```

$$\frac{1}{6}\pi+\frac{2}{3}\pi\_B1\sim+2\pi\_Z1\sim$$

Форма ответа — необычная, но корни уравнения найдены правильно. Здесь и далее, независимо от индекса, переменная _B принимает значения из множества $\{0, 1\}$, а значения _Z принадлежат множеству целых чисел. В чем нетрудно убедиться с помощью встроенной функции принадлежности about. Таким образом, полученное множество корней уравнения можно разложить в две серии

$$\frac{\pi}{6}+2\pi n,\ \frac{5\pi}{6}+2\pi n$$

и записать в привычном виде

$$(-1)^n\cdot\frac{\pi}{6}+\pi n,\ n\in Z.$$

Следующий пример, по всей видимости, вопросов не вызовет:

```
> solve(cos(2*x)=0,x);
```

$$\frac{1}{4}\pi+\frac{1}{2}\pi\_Z2\sim$$

Рассмотрим решения типовых тригонометрических уравнений.

Пример ([11], 8.035). Решить тригонометрическое уравнение:

$$3\sin^2 2x+7\cos 2x-3=0.$$

Решение.

```
> solve(3*sin(2*x)^2+7*cos(2*x)-3=0,x);
```

$$-\frac{1}{4}\pi+\pi\_Z3\sim,\ \frac{1}{4}\pi+\pi\_Z4\sim,\ \frac{1}{2}\arctan\left(\frac{2}{3}I\sqrt{10},\ \frac{7}{3}\right)+\pi\_Z5\sim,$$

$$\frac{1}{2}\arctan\left(\frac{-2}{3}I\sqrt{10},\ \frac{7}{3}\right)+\pi\_Z5\sim$$

Первые две серии решений можно записать в виде:

$$\frac{\pi}{4}(2n+1),\ n \in Z.$$

Третья и четвертая серии решений содержат мнимую единицу $I = \sqrt{-1}$, то есть эти серии комплексные и в ответ не входят.

Ответ: $\frac{\pi}{4}(2n+1),\ n \in Z.$

Пример ([11], 8.123). Решить тригонометрическое уравнение:

$$\sin 3x - 4\sin x \cos 2x = 0.$$

Решение.

```
> solve(sin(3*x)-4*sin(x)*cos(2*x)=0,x);
```

$$\pi + 2\pi\_Z6\sim,\ 2\pi\_Z7\sim,\ -\frac{1}{6}\pi + 2\pi\_Z8\sim,\ -\frac{5}{6}\pi + 2\pi\_Z8\sim,\ \frac{1}{6}\pi + 2\pi\_Z9\sim,$$

$$\frac{5}{6}\pi + 2\pi\_Z9\sim$$

Первые две серии решений записываются в виде πn, третья и шестая — в виде $-\frac{\pi}{6}+\pi n$, а четвертая и пятая — в виде $\frac{\pi}{6}+\pi n$.

Ответ: $\pi n,\ \frac{\pi}{6}(6n \pm 1),\ n \in Z.$

Посмотрим, отбрасываются ли в тригонометрических уравнениях посторонние корни. Такими в следующем примере являются значения $2\pi n,\ n \in Z$.

Пример. Решить уравнение:

$$\frac{\sin 2x}{1-\cos x} = 2\sin x.$$

Решение.

```
> solve(sin(2*x)/(1-cos(x))=2*sin(x),x);
```

$$\pi + 2\pi\_Z3\sim,\ \frac{1}{3}\pi + 2\pi\_Z4\sim,\ -\frac{1}{3}\pi + 2\pi\_Z4\sim$$

Посторонних корней нет.

Ответ: $\pi + 2\pi n,\ 2\pi n \pm \frac{\pi}{3},\ n \in Z.$

Пример. Решить иррационально-тригонометрическое уравнение:

$$\sqrt{1-\cos 2x} = \sqrt{6}\cos x.$$

Решение.

```
> solve(sqrt(1-cos(2*x))=sqrt(6)*cos(x),x);
```

$$\frac{1}{3}\pi - \frac{2}{3}\pi\_B3\sim + 2\pi\_Z17\sim$$

Подстановки _B3 = 0 и _B3 = 1 дают две серий решений:

$$\frac{\pi}{3}+2\pi n,\ -\frac{\pi}{3}+2\pi n,\ n\in Z.$$

Ответ: $\pm\frac{\pi}{3}+2\pi n,\ n\in Z.$

Удивительно, тригонометрические уравнения, содержащие модуль, не решаются или выдаются не полные ответы, но если модуль вводить через квадратный корень, используя формулу $|x|=\sqrt{x^2}$, то — решения идеальные.

Пример. Решить уравнение:

$$|\sin 2x|=\cos x.$$

Решение 1 — *не полное:*

```
> restart:_EnvAllSolutions:=true:solve(abs(sin(2*x))=cos(x),x);
```

$$-\frac{1}{2}\pi+2\pi\_Z1\sim,\ \frac{1}{2}\pi+2\pi\_Z2\sim$$

Решение 2 — *полное:*

```
> solve(sqrt(sin(2*x)^2)=cos(x),x);
```

$$-\frac{1}{2}\pi+2\pi\_Z1\sim,\ \frac{1}{2}\pi+2\pi\_Z2\sim,\ -\frac{1}{6}\pi+2\pi\_Z3\sim,\ \frac{1}{6}\pi+2\pi\_Z4\sim$$

Ответ: $\pm\frac{\pi}{2}+2\pi n,\ \pm\frac{\pi}{6}+2\pi n,\ n\in Z.$

Пример ([7], 4.23.2). Решить уравнение:

$$5\sin^2 x+8\cos x+1=|\cos x|+\cos^2 x.$$

Решение.

```
> solve(5*sin(x)^2+8*cos(x)+1=sqrt(cos(x)^2)+cos(x)^2,x);
```

$$\frac{2}{3}\pi+2\pi\_Z9\sim,\ -\frac{2}{3}\pi+2\pi\_Z9\sim$$

$$\arctan\left(\frac{1}{12}\sqrt{-98-14\sqrt{193}},\frac{7}{12}+\frac{1}{12}\sqrt{193}\right)+2\pi\_Z10\sim$$

$$\arctan\left(-\frac{1}{12}\sqrt{-98-14\sqrt{193}},\frac{7}{12}+\frac{1}{12}\sqrt{193}\right)+2\pi\_Z10\sim$$

Третья и четвертая серии решений комплексные.

Ответ: $\pm\frac{2}{3}\pi+2\pi n,\ n\in Z.$

Возникает следующий вопрос, находит ли встроенная функция solve корни систем тригонометрических уравнений? Ответ положительный.

Пример ([7], 4.29.1). Решить систему:

$$\begin{cases} \cos x + \cos y = \sqrt{3}, \\ x + y = \dfrac{\pi}{3}. \end{cases}$$

Решение.

```
> solve({cos(x)+cos(y)=sqrt(3),x+y=Pi/3},{x,y});
```

$$\{x = \frac{1}{6}\pi - 2\pi\_Z4\sim,\ y = \frac{1}{6}\pi + 2\pi\_Z4\sim\}$$

Ответ: $(\frac{\pi}{6} - 2\pi n, \frac{\pi}{6} + 2\pi n),\ n \in Z$.

§ 6. Неравенства

Рассмотрим решения типовых неравенств и систем неравенств.

Пример ([11], 9.022). Решить алгебраическое неравенство:

$$\frac{1}{2-x} + \frac{5}{2+x} < 1.$$

Решение.

```
> solve(1/(2-x)+5/(2+x)<1,x);
```

$$\text{RealRange}(-\infty, \text{Open}(-2)), \text{RealRange}(\text{Open}(2), \infty)$$

Ответ: $(-\infty, -2) \cup (2, \infty)$.

Пример ([11], 9.011). Найти целые решения системы неравенств:

$$\begin{cases} \dfrac{x-1}{2} - \dfrac{2x+3}{3} + \dfrac{x}{6} < 2 - \dfrac{x+5}{2}, \\ 1 - \dfrac{x+5}{8} + \dfrac{4-x}{2} < 3x - \dfrac{x+1}{4}. \end{cases}$$

Решение. *Находим все множество решений системы и выбираем из него целые значения:*

```
> solve({(x-1)/2-(2*x+3)/3+x/6<2-(x+5)/2,1-(x+5)/8+(4-
x)/2<3*x-(x+1)/4},x);
```

$$\{\frac{7}{9} < x, x < 2\}$$

Ответ: 1.

Ответ правильный, но решение не рациональное. В Maple имеется встроенная функция isolve, возвращающая целочисленные решения уравнений и неравенств. Решение последнего примера с ее помощью:

```
> isolve({(x-1)/2-(2*x+3)/3+x/6<2-(x+5)/2,1-(x+5)/8+(4-
x)/2<3*x-(x+1)/4},x);
```

$$\{x = 1\}$$

Пример ([11], 9.130). Решить алгебраическое неравенство, содержащее модуль:

$$\left|\frac{3x+1}{x-3}\right| < 3.$$

Решение.

```
> solve(abs((3*x+1)/(x-3))<3,x);
```

$$\mathrm{RealRange}\left(-\infty, \mathrm{Open}\left(\frac{4}{3}\right)\right)$$

Ответ: $\left(-\infty, \frac{4}{3}\right)$.

Прекрасно решаются иррациональные неравенства.

Пример ([7], 6.3.23). Решить неравенство:

$$\sqrt{24 - 10x + x^2} > x - 4.$$

Решение.

```
> solve(sqrt(24-10*x+x^2)>x-4,x);
```

$$\mathrm{RealRange}(-\infty, \mathrm{Open}(4))$$

Ответ: $(-\infty, 4)$.

Особенно впечатляет безошибочное решение логарифмических неравенств, в которых логарифмы имеют переменные основания.

Пример ([11], 9.182). Решить неравенство:

$$\log_{2x}(x^2 - 5x + 6) < 1.$$

Решение.

```
> solve(log[2*x](x^2-5*x+6)<1,x);
```

$$\mathrm{RealRange}\left(\mathit{Open}(0), \mathit{Open}\left(\frac{1}{2}\right)\right), \mathrm{RealRange}(\mathrm{Open}(1), \mathrm{Open}(2)),$$
$$\mathrm{RealRange}(\mathrm{Open}(1), \mathrm{Open}(2))$$

Ответ: $\left(0, \frac{1}{2}\right) \cup (1, 2) \cup (3, 6)$.

Понятно, что рассмотренные возможности Maple оказываются очень полезными при решении задач с параметрами.

Задача ([7], 6.17.1). Найти все целые значения параметра b, при которых значение $x = 2$ удовлетворяет неравенству

$$\frac{x^3 - x^2}{b^2x^2 + x + 2} \le \frac{x^2 - 3}{b^2x + b - 1}.$$

Решение.

```
> (x^3-x^2)/(b^2*x^2+x+2)<=(x^2-3)/(b^2*x+b-1);
```

$$\frac{x^3 - x^2}{b^2x^2 + x + 2} \le \frac{x^2 - 3}{b^2x + b - 1}$$

```
> subs(x=2,%);
```

$$4\frac{1}{4b^2 + 4} \le \frac{1}{2b^2 + b - 1}$$

```
> isolve(%,b);
```

$$\{b = -2\}, \{b = 1\}$$

Ответ: $\{-2, 1\}$.

Задача ([7], 6.17.7). Найти наименьшее целое значение a, при котором неравенство $ax^2 + 4x - 1 + 2a > 0$ выполняется при всех значениях x.

Решение. *Данное неравенство выполняется при всех значениях x, если $a > 0$ и дискриминант $D < 0$. Находим целочисленные решения этой системы неравенств:*

```
> isolve({4+a-2*a^2<0,a>0},a);
```

$$\{a = 2 + \_NN7\sim\}$$

Ответ: 2.

Задача ([7], 2.6.11). При каких значениях a корни уравнения удовлетворяют условию $|x| < 1$: $3ax^2 + (3a^3 - 12a^2 - 1)x - a(a - 4) = 0$?

Решение. *При $a = 0$ уравнение линейное и его корень $x = 0$ удовлетворяет заданному условию. Решаем уравнение при $a \ne 0$:*

```
> solve(3*a*x^2+(3*a^3-12*a^2-1)*x-a*(a-4)=0,x);
```

$$\frac{1}{3}\frac{1}{a}, -a^2 + 4a$$

Требуем выполнения заданного условия и находим a:

```
> solve({-3<1/a,1/a<3,-1<-a^2+4*a,-a^2+4*a<1},a);
```

$$\{a < \mathrm{RootOf}(-1 + \_Z^2 - 4\_Z, 4.2360), \mathrm{RootOf}(\_Z^2 - 4\_Z + 1, 3.7320) < a\}$$

```
> allvalues(%);
```

$$\{2 + \sqrt{3} < a,\ a < 2 + \sqrt{5}\}$$

Ответ: $0 \cup (2 + \sqrt{3}, 2 + \sqrt{5})$.

§ 7. Комплексные числа

Комплексные числа $x + iy$ вводятся в командную строку в виде $x + y * I$. Например,

```
> 2+3*I;
```

$$2 + 3I$$

Действительная и мнимая части комплексного числа (функции комплексного переменного) находятся встроенными функциями Re(z) и Im(z), соответственно:

```
> Re(2+3*I);Im(2+3*I);
```

$$2$$

$$3$$

Как задается комплексно-сопряженное число, понятно из примера:

```
> conjugate(2+3*I);
```

$$2 - 3I$$

Модуль и главное значение аргумента комплексного числа вычисляются встроенными функциями abs и argument, соответственно. Например,

```
> z:=1+sqrt(3)*I;
```

$$z := 1 + I\sqrt{3}$$

```
> abs(z); argument(z);
```

$$2$$

$$\frac{1}{3}\pi$$

Они одновременно выводятся на листовое поле встроенной функцией polar(z):

```
> polar(1+sqrt(3)*I);
```

$$\mathrm{polar}\left(2, \frac{1}{3}\pi\right)$$

Как производятся алгебраические действия с комплексными числами, показывается на следующих примерах:

```
> (2+3*I)*(1+2*I);
```

$$-4 + 7I$$

```
> (2-I)/(1+I);
```

$$\frac{1}{2} - \frac{3}{2}I$$

```
> (1+I)^10;
```

$$32I$$

Значения функций комплексного переменного находятся встроенной функцией evalc. Например,

```
> evalc(cos(1+I));
```

$$\cos(1)\cosh(1) - I\sin(1)\sinh(1)$$

```
> evalc(exp(x+y*I));
```

$$e^x\cos(y) + Ie^x\sin(y)$$

```
> evalc(I^I);
```

$$e^{(-1/2\pi)}$$

```
> Re(exp(x+y*I)):evalc(%);Im(exp(x+y*I)):evalc(%);
```

$$e^x\cos(y)$$

$$e^x\sin(y)$$

Встроенная функция evalc возвращает только главное значение $\sqrt[n]{z}$. Например,

```
> evalc((-1)^(1/4));
```

$$\frac{1}{2}\sqrt{2} + \frac{1}{2}I\sqrt{2}$$

Все значения $\sqrt[n]{z}$ находятся встроенной функцией fsolve, как корни уравнения $\omega^n = z$. В частности,

```
> w:=[fsolve(w^4=-1,w,complex)];
```

$$W := [-.7071067812-.7071067812I, -.7071067812+.7071067812I,$$
$$.7071067812-.7071067812I, .7071067812+.7071067812I]$$

Построение полученных значений на плоскости комплексного переменного:

```
> with(plots):complexplot(w, x=-1..1, style=point, symbol=circle);
```

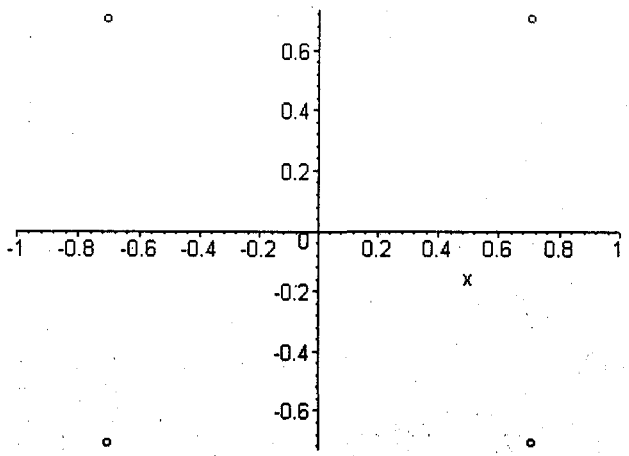

Рис. 1.3

Глава II
ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ПОСТРОЕНИЯ

§ 1. Основые построения на плоскости

Возможности геометрических построений в Maple огромны, причем некоторые скорее относятся к художественному творчеству, чем к математике. Поэтому ограничимся только основными приемами построения и форматирования графиков.

Допустим, вы забыли вид графика функции $y = \cos x$, а надо срочно вспомнить. Тогда выполняете следующие действия.

1. Открываете командную строку.
2. Вводите аналитическое выражение, определяющее функцию.
3. Выводите его в стандартной математической символике.
4. Выделяете и открываете (щелчок ЛКМ по выделенному выражению) контекстное меню.
5. Находите в нем строку Plot, переходите по ней на 2-D Plot и щелкаете ЛКМ — в следующей вычислительной секции появляется график:

```
> cos(x);
```

$$\cos(x)$$

```
> smartplot(cos(x));
```

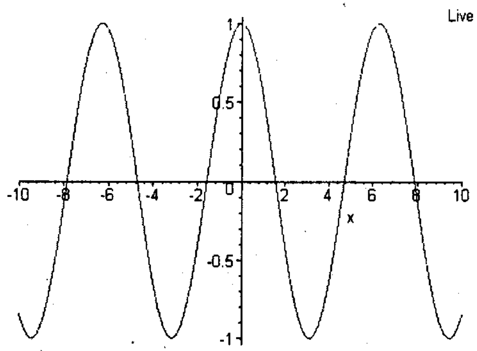

Рис. 2.1

Такой способ построения графиков, через контекстное меню, называют smart-способом, а сам график — smart-графиком. Преимущества и недостатки данного способа построения графиков очевидны.

Надпись Live в области построения графика указывает на то, что область действующая, то есть можно продолжить работу в ней. Например, можно построить график еще одной функции или удалить уже построенный график. Пусть надо дополнить ее графиком функции $y = \sin x$. Тогда в следующую командную строку вводится sin x и выводится стандартный математический вид. Полученное выражение выделяется, берется мышкой (щелчок ЛКМ по нему, но кнопка не отпускается) и перемещается в область построения графика (ЛКМ отпускается) — область построения дополняется требуемым графиком. Ниже приведён соответствующий фрагмент листового поля:

```
> smartplot(cos(x));
```

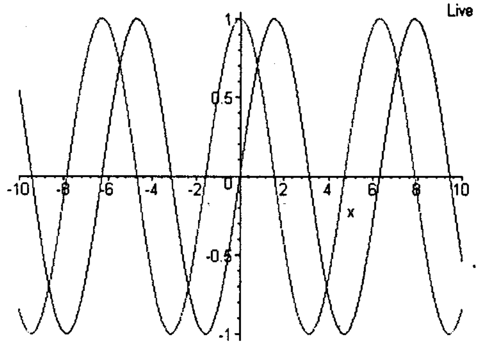

Рис. 2.2

```
> sin(x);
```

$$\sin(x)$$

Перемещение лучше проводить с нажатой клавишей <Ctrl>, как копирование. В противном случае перемещаемое выражение из последней секции будет удалено. Если требуется удалить график функции, то область выделяется (щелчок ЛКМ по ней), стрелкой курсора мыши указывается какая-либо точка графика и делается щелчок ЛКМ, но кнопка не отпускается, а проводится перемещение за пределы области, где, после того как ЛКМ будет отпущена, появится выражение, определяющее функцию, а график исчезнет. После удаления графика функции cos x таким способом получаем:

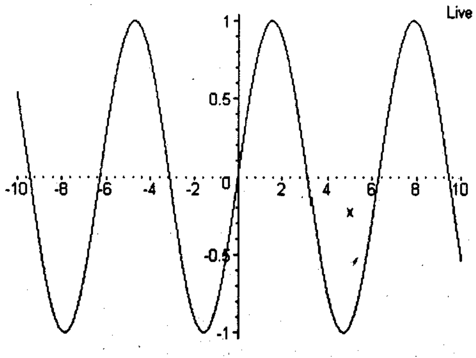

Рис. 2.3

Если в 5-м из действий, перечисленных в начале параграфа, щелкнуть ЛКМ не строке 2-D Plot, а по строке Plot Builder, то появляется возможность с помощью специальной панели заранее установить значения основных параметров графика.

Стандартное построение графика проводится встроенной функцией plot (выражение, диапазон по горизонтальной оси, диапазон по вертикальной оси — необязательный параметр, цвет, толщина линий и т. д. — необязательные параметры форматирования). Диапазон по горизонтальной оси (Ox) задается в виде x=xmin..xmax. Если надо указать его и по вертикальной оси (Oy), что часто тоже необходимо, то x=xmin..xmax,ymin..ymax или x=xmin..xmax, y=ymin..ymax. Чтобы задать цвет, например зеленый, набирается color=green. В Maple имеется 25 оттенков цветов (red, blue, grey, ...). Например,

```
> plot(1/x,x=-3..3,-3..3,color=green);
```

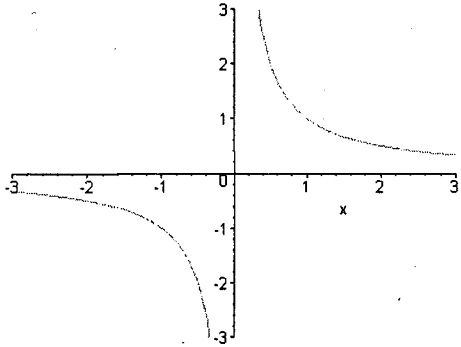

Рис. 2.4

Толщина линий графика определяется параметром thickness, принимающим целые значения от 0 до 15, по умолчанию — 0. Если вас значение 0 не устраивает, а нужно хотя бы 2, то во введенной функции plot после color=green ставите запятую и набираете thickness=2. Нажимаете <Enter>, и график перестраивается заново, принимая установленное значение параметра thickness.

Щелчок ЛКМ по графику заключает его в прямоугольную рамку с маркерами для изменения размеров графика. Подводите СКМ к маркеру — появляется двусторонняя стрелка, «хватаете» маркер мышкой и тащите в нужном направлении. Если после выделения графика — щелчка ЛКМ по нему, щелкнуть ПКМ, то появится контекстное меню для его форматирования. С его помощью график можно заключить в рамку, убрать или сдвинуть оси координат, сделать график точечным и т. д. Немного тренировки, и графики будут строиться без проблем.

Задача. Построить график функции $y = x^2 + |5|x|-6|$.

Решение.

```
> plot(x^2+abs(5*abs(x)-6),x=-3..3,-1..10);
```

График представлен на рис. 2.5.

Пусть требуется построить графики двух функций в одной декартовой системе координат. В этом случае во встроенной функции plot определяющие их аналитические выражения или их идентификаторы объединяются квадратными скобками через запятую, так же задаются управляющие параметры. Например,

```
> plot([x^2,x+1],x=-3..3,-1..3,color=[blue,red]);
```

Полученные графики показаны на рис. 2.6.

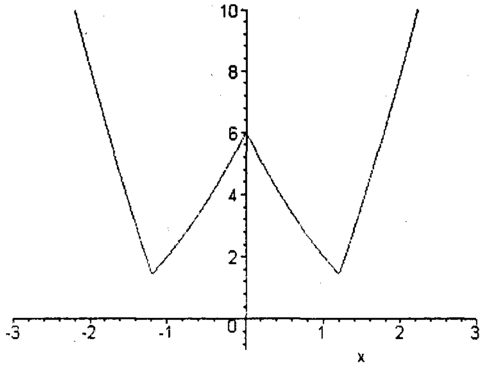

Рис. 2.5

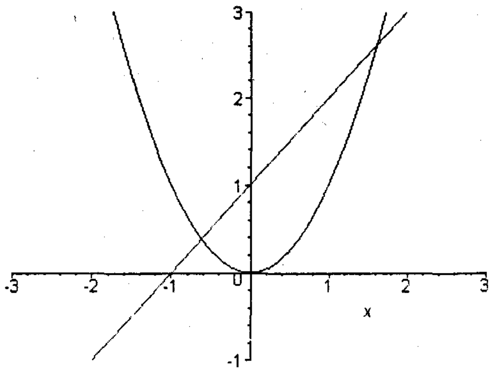

Рис. 2.6

Задача. Фигура M состоит из всех точек плоскости, координаты $(x;\ y)$ которых удовлетворяют неравенствам: $3|x| \le y \le 2|x| + 2$. Изобразить фигуру M и найти ее площадь.

Решение. *Заменяем нестрогие неравенства равенствами и строим линии, ограничивающие фигуру:*

```
> plot([3*abs(x),2*abs(x)+2],x=-3..3);
```

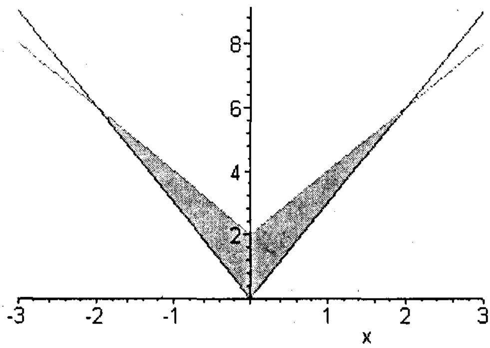

Рис. 2.7

Берем пробную точку (0, 1), ее координаты удовлетворяют заданному неравенству. Следовательно, фигура M — часть плоскости, залитая серым цветом. Ее площадь находим как сумму площадей двух равных треугольников, симметричных относительно оси Oy: $S = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2 = 4$.

Ответ: 4.

Графики функций, заданных параметрическими уравнениями

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases}$$

строятся функцией plot, с объединением квадратными скобками аналитических выражений заданных функций и диапазона изменения независимой переменной:

$[x(t), y(t), t = t\min..t\max]$. Построим окружность единичного радиуса с центром в начале координат, заданную параметрическими уравнениями:

```
> plot([cos(t),sin(t),t=0..2*Pi],color=red);
```

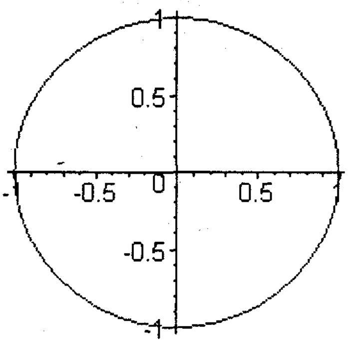

Рис. 2.8

Траектория движения точки, отмеченной на обруче, когда последний катится без скольжения по горизонтальной прямой, называется циклоидой. Параметрические уравнения циклоиды:

$$x = r(t - \sin t),\ \ y = r(1 - \cos t),$$

где r — радиус обруча (окружности). При $t = 0$ отмеченная точка имеет координаты (0, 0). Построение циклоиды при $r = 1$:

```
> plot([t-sin(t),1-cos(t),t=-Pi..3*Pi],-3..10,0..2,
title='циклоида');
```

Рис. 2.9

Циклоида имеет ряд замечательных физических свойств. Она одновременно является брахистохроной — линией кратчайшего времени (см. гл. IV, § 3) и изохроной — линией равного времени. Последнее свойство состоит в том, что в поле силы тяжести время, за которое материальная точка (шарик) пройдет путь по перевернутой арке циклоиды из состояния покоя до точки минимума, не зависит от исходного положения материальной точки. Графическая иллюстрация — рис. 2.10. Для изохронной линии $t(A, C) = t(B, C)$.

Если обруч (окружность) катится не по прямой, а по окружности, радиус которой равен радиусу обруча, то отмеченная точка движется по линии, которая называется кардиоидой.

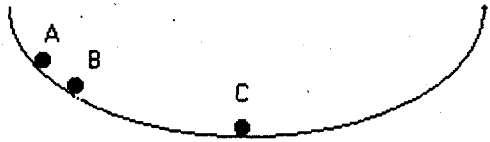

Рис. 2.10

Параметрические уравнения кардиоиды при $r = 1$:

$$\begin{cases} x = 2\cos t - \cos 2t, \\ y = 2\sin t - \sin 2t. \end{cases}$$

Проведем построение графика:

```
> plot([2*cos(t)-cos(2*t),2*sin(t)-sin(2*t),t=0..2*Pi],
title='кардиоида');
```

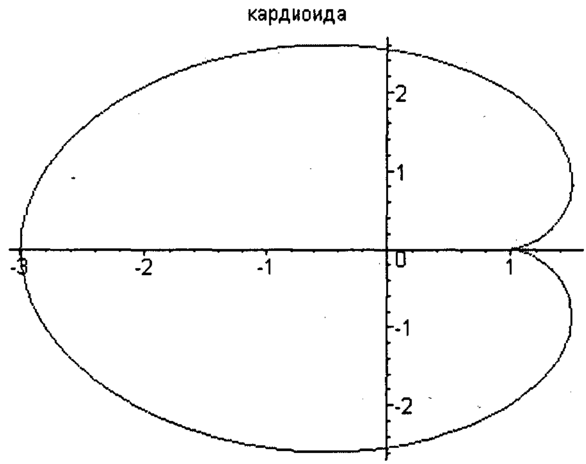

Рис. 2.11

В случае, когда обруч (окружность радиуса r) катится по окружности радиуса 4r и находится внутри ее, отмеченная точка описывает астроиду. Параметрические уравнения астроиды при $r = \frac{1}{4}$:

$$\begin{cases} x = \frac{3}{4}\cos\frac{t}{4} + \frac{1}{4}\cos\frac{3t}{4}, \\ y = \frac{3}{4}\sin\frac{t}{4} - \frac{1}{4}\sin\frac{3t}{4}. \end{cases}$$

Построение астроиды:

```
> plot([3/4*cos(t/4)+1/4*cos(3*t/4),3/4*sin(t/4)- 1/4*sin(3*t/4),
t=0..8*Pi],title='астроида');
```

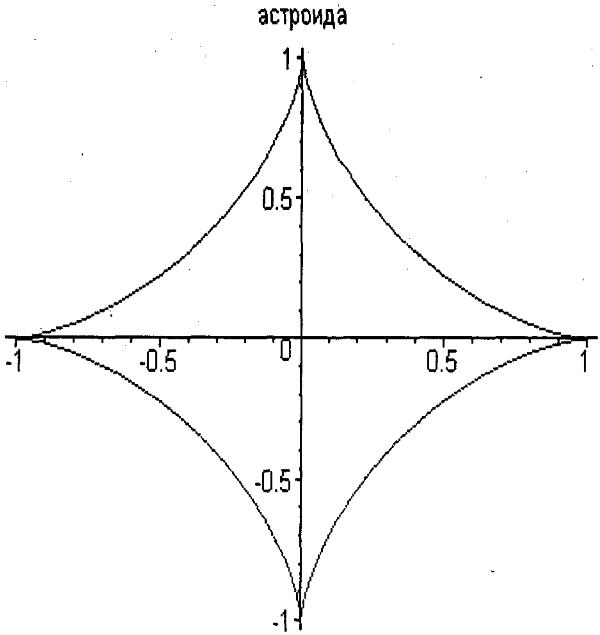

Рис. 2.12

Параметрические уравнения астроиды, по которым она строилась, можно упростить:

```
> simplify(3/4*cos(t/4)+1/4*cos(3*t/4),trig);
```

$$\cos\left(\frac{1}{4}t\right)^3$$

```
> simplify(3/4*sin(t/4)-1/4*sin(3*t/4),trig);
```

$$\sin\left(\frac{1}{4}t\right)-\sin\left(\frac{1}{4}t\right)\cos\left(\frac{1}{4}t\right)^2$$

Поэтому чаще она задается в виде

$$\begin{cases} x = a\cos^3 t, \\ y = a\sin^3 t. \end{cases}$$

Точки таблично заданной функции строятся так же, как график функции заданной параметрическими уравнениями, но с заданием дополнительных параметров: style=point, symbol=box. Последний параметр — необязательный, значение box, при котором точки изображаются квадратиками, выбрано из списка опций, с которым можно ознакомиться через контекстное меню. Перед набором функции plot задаются векторы значений функции.

Задача. Построить точки (X, Y) таблично заданной функции:

X	2	4	6	8	10
Y	3	5	4	6	5

Решение. *Задаем вектор значений переменной X и проверяем правильность ввода, выводом на листовое поле значения* x_1*:*

```
> restart:x:=vector([2,4,6,8,10]);
```

$$x := [2, 4, 6, 8, 10]$$

```
> x[1];
```

$$2$$

То же самое делаем по другой переменной:

```
> y:=vector([3,5,4,6,5]);
```

$$y := [3, 5, 4, 6, 5]$$

```
> y[1];
```

$$3$$

Строим заданные точки:

```
> plot([x[i],y[i],i=1..5],x=1..10,0..7,style=point,symbol=box);
```

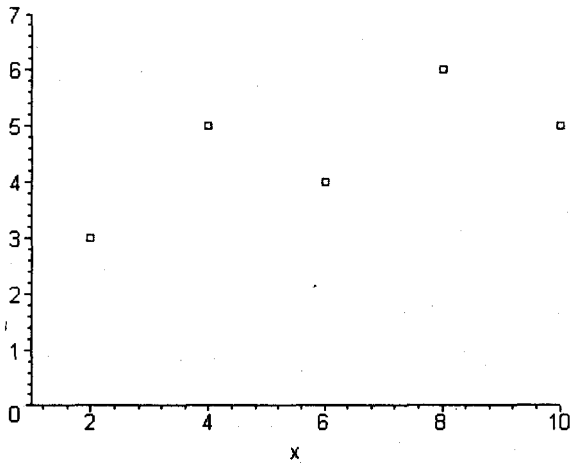

Рис. 2.13

При построении графика функции, заданной в полярных координатах, в списке параметров указывается coords=polar. Построим, например, трехлепестковую розу $r = \sin 3\varphi$:

```
> plot([sin(3*x),x,x=0..2*Pi],coords=polar);
```

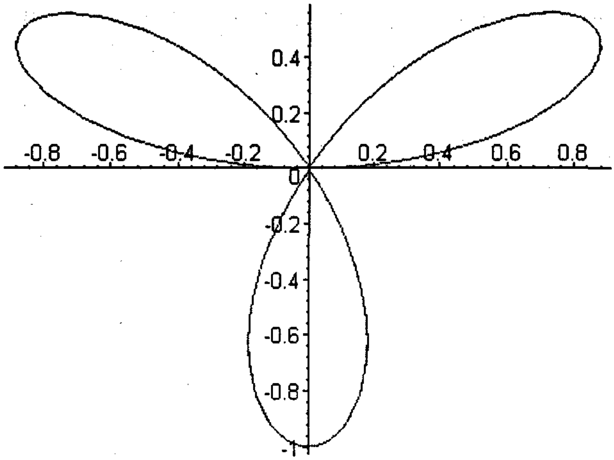

Рис. 2.14

Если вы забыли, какой вид имеет график функции, заданной в полярных координатах уравнением $r = \cos\varphi$, то легко вспомнить:

```
> plot([cos(x),x,x=0..2*Pi],coords=polar,color=blue);
```

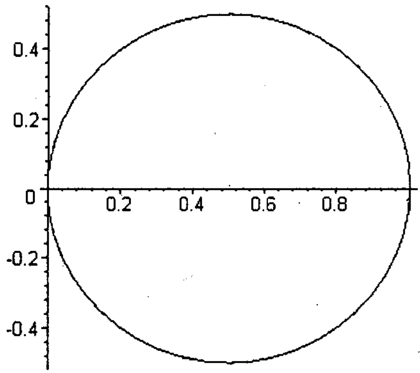

Рис. 2.15

Это окружность радиуса 0,5 с центром в точке (0,5; 0).

Функции, заданные несколькими аналитическими выражениями, например,

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & x \le 0, \\ 1 - x, & 0 < x \le 2, \\ 1, & x > 2. \end{cases}$$

вводятся, как уже говорилось, с помощью встроенной функции piecewise (условие1, выражение1, ..., условие K, выражение K), *причем каждое следующее условие по умолчанию справедливо для тех значений переменной, кото-*

рые не удовлетворяют предыдущему условию. В частности, задание функции $f(x)$ в виде

```
> f:=piecewise(x<=0,x^2,x<=2,1-x,x>2,1);
```

$$f := \begin{cases} x^2 & x \le 0 \\ 1 - x & x \le 2 \\ 1 & 2 > x \end{cases}$$

позволяет построить ее график:

```
> plot(f,x=-1..3);
```

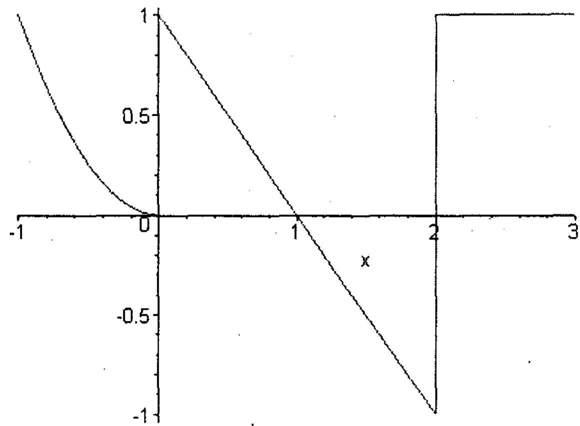

Рис. 2.16

§ 2. Дополнительные построения на плоскости

Все построения предыдущего параграфа проводились графической функцией plot, встроенной в ядро системы Maple. Посмотрим, каковы возможности графических функций пакета plots. Открываем пакет:

```
> with(plots);
```

[*animate*, *animate3d*, *animatecurve*, *arrow*, *changecoords*, *complexplot*, *complexplot3d*, *conformal*, *conformal3d*, *contourplot*, *contourplot3d*, *coordplot*, *coordplot3d*, *cylinderplot*, *densityplot*, *display*, *display3d*, *fieldplot*, *fieldplot3d*, *gradplot*, *gradplot3d*, *graphplot3d*, *implicitplot*, *implicitplot3d*, *inequal*, *interactive*, *listcontplot*, *listcontplot3d*, *listdensityplot*, *listplot*, *listplot3d*, *loglogplot*, *logplot*, *matrixplot*, *odeplot*, *pareto*, *plotcompare*, *pointplot*, *pointplot3d*, *polarplot*, *polygonplot*, *polygonplot3d*, *polyhedra_supported*, *polyhedraplot*, *replot*, *rootlocus*, *semilogplot*, *setoptions*, *setoptions3d*, *spacecurve*, *sparsematrixplot*, *sphereplot*, *surfdata*, *textplot*, *textplot3d*, *tubeplot*]

Выделив любую функцию списка и нажав <F1>, пользователь попадает на страницу системы Help с ее описанием и примерами применения. Поэтому на всех графических функциях пакета останавливаться не будем, а рассмотрим только наиболее часто используемые.

Графическая функция inequal пакета plots избавляет пользователя от необходимости самому находить и выделять области плоскости, определяемые системами линейных неравенств. Пусть требуется построить замкнутую область, заданную неравенствами: $x + y \le 1, x \ge 0, y \ge 0$. Тогда графическая секция построения имеет вид:

```
> with(plots): inequal({x+y<=1,x>=0,y>=0},x=-1..2,y=- 1..2);
```

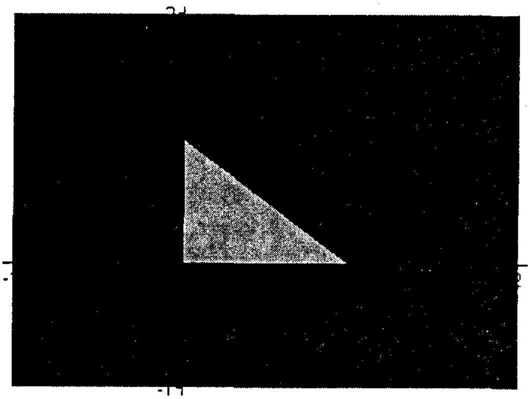

Рис. 2.17

Если цвета заливок внутренней и внешней областей, предлагаемых по умолчанию, не устраивают, то они изменяются параметрами optionsfeasible и optionsexcluded, соответственно. Например,

```
> inequal({x+y<=1,x>=0,y>=0},x=-1..2,y=- 1..2,optionsfeasible=
(color=red),optionsexcluded=(color=grey));
```

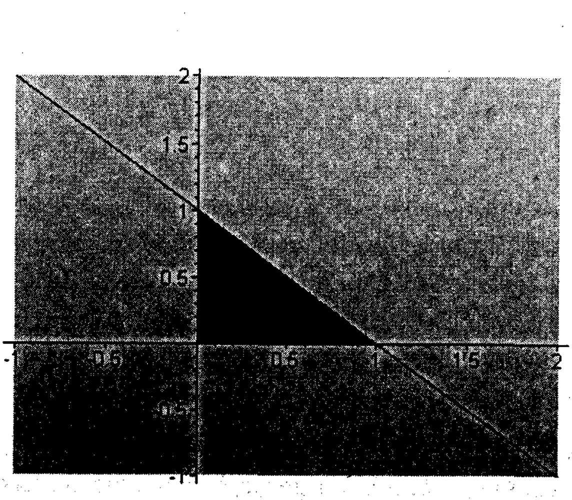

Рис. 2.18

Цвета прямых, ограничивающих область, устанавливаются параметром optionsclosed, если она замкнутая, и параметром optionsopen, если она открытая. В данном примере область замкнутая и, в частности, голубой цвет устанавливается следующим образом:

```
> inequal({x+y<=1,x>=0,y>=0},x=-1..2,y=-
1..2,optionsfeasible=(color=red),optionsexcluded=(color=grey),
optionsclosed=(color=blue,thickness=2));
```

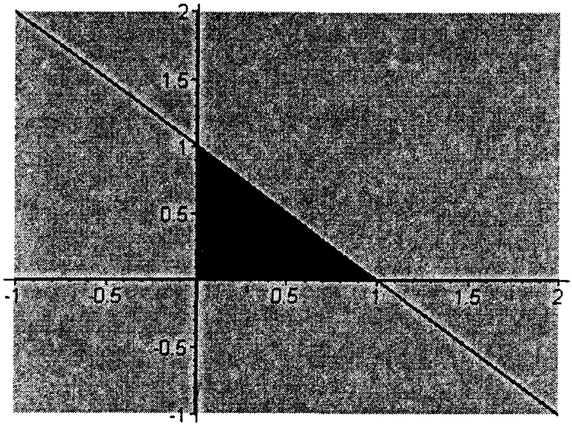

Рис. 2.19

Графики неявно заданных функций строятся графической функцией implicitplot. Построим, например, с ее помощью гиперболу $x^2 - y^2 = 1$:

```
> with(plots):implicitplot(x^2-y^2=1,x=-2..2,y=-2..2);
```

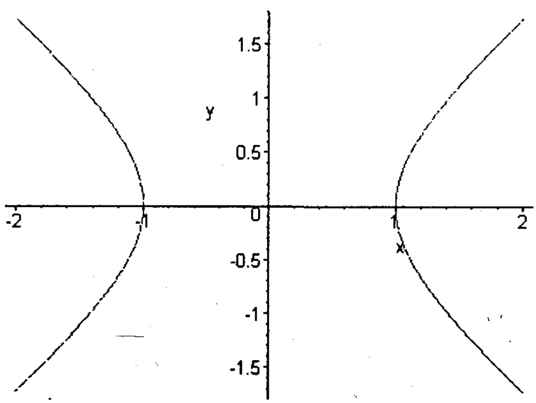

Рис. 2.20

Плоская линия называется лемнискатой (овалом Кассини), если для каждой ее точки M произведение расстояний до двух фиксированных точек F_1 и F_2 — фокусов есть величина постоянная.

Пусть координаты фокусов $(-a, 0)$ и $(a, 0)$. Тогда уравнение лемнискаты

$$[(x-a)^2 + y^2][(x+a)^2 + y^2] = p^2,$$

где $p = \text{const}$. Лемниската, соответствующая $p = a^2$, имеет форму восьмерки и называется лемнискатой Бернулли. Построение лемнискаты Бернулли при $a = 1$:

```
> with(plots):implicitplot(((x-1)^2+y^2)*((x+1)^2+y^2)=1,
x=-1.5..1.5,y=-0.5..0.5);
```

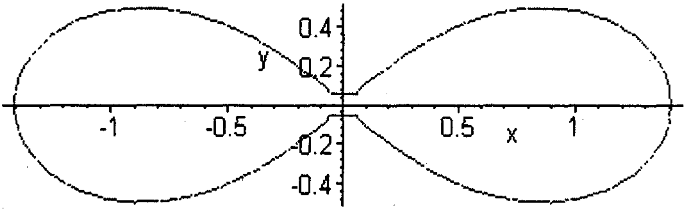

Рис. 2.21

Построение в окрестности точки (0, 0) не доведено до конца. Понятно, что точка (0, 0) принадлежит лемнискате Бернулли. Построение лемнискаты при $a = 1$, $p^2 = 0{,}9$:

```
> implicitplot(((x-1)^2+y^2)*((x+1)^2+y^2)=0.9,x=-
2..2,y=-0.5..0.5);
```

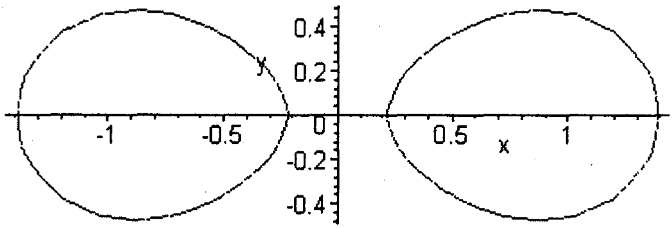

Рис. 2.22

Построение лемнискаты при $a = 1$, $p^2 = 1{,}5$:

```
> implicitplot(((x-1)^2+y^2)*((x+1)^2+y^2)=1.5,x=- 2..2,y=-1..1);
```

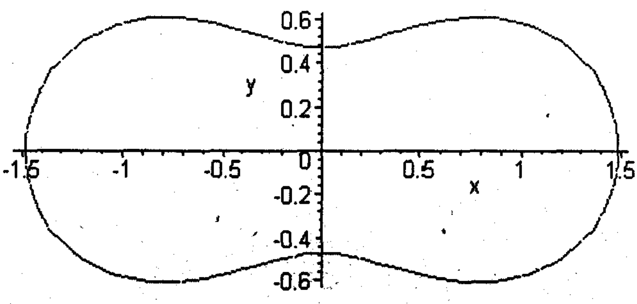

Рис. 2.23

Вывод уравнения лемнискаты Бернулли в полярных координатах:

```
> subs(x=r*cos(phi),y=r*sin(phi),((x- a)^2+y^2)*((x+a)^2+y^2)
=a^4);
```

$$((r\cos(\phi)-a)^2+r^2\sin(\phi)^2)((r\cos(\phi)+a)^2+r^2\sin(\phi)^2)=a^4$$

```
> simplify(%,trig):subs(cos(phi)^2=(1+cos(2*phi))/2,%);
```

$$-4r^2\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos(2\phi)\right)a^2+a^4+2a^2r^2+r^4=a^4$$

```
> solve(%,r);
```

$$0,\ 0,\ \sqrt{2}\sqrt{\cos(2\phi)}\,a,\ -\sqrt{2}\sqrt{\cos(2\phi)}\,a$$

Следовательно, в полярных координатах ее уравнение $r=a\sqrt{2\cos 2\phi}$.

Скалярное поле $\rho=\rho(x,y)$ изображается графической функцией densityplot, а семейство линий уровня — графической функцией contourplot. Например, если $\rho=x^2-y^2$, то:

```
> with(plots):densityplot(x^2-y^2,x=-2..2,y=-2..2);
```

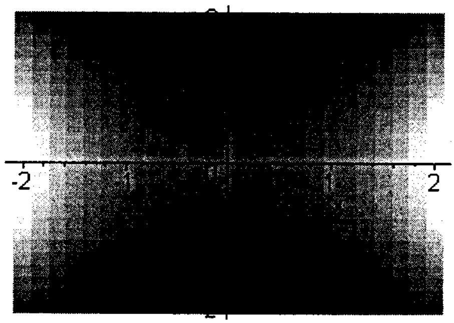

Рис. 2.24

```
> with(plots):contourplot(x^2-y^2,x=-2..2,y=-2..2);
```

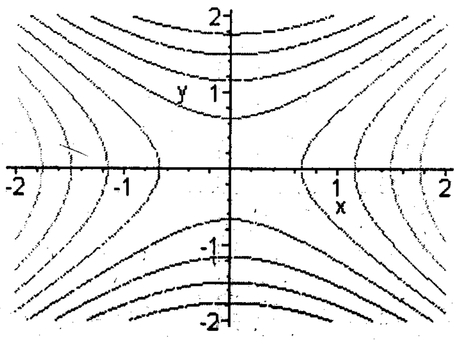

Рис. 2.25

Векторные поля изображаются графической функцией fieldplot. Например, если $\vec{a} = (x + y) \cdot \vec{i} + (x - y) \cdot \vec{j}$, то графическая секция построения векторного поля имеет вид:

```
> fieldplot([x+y,x-y],x=-2..2,y=-2..2);
```

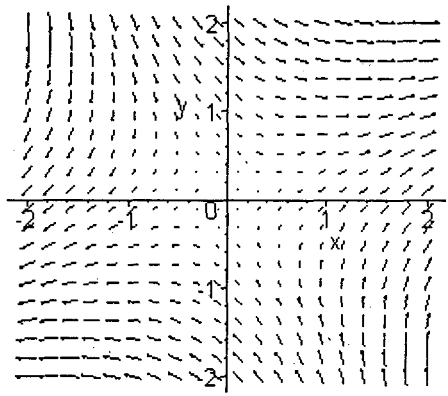

Рис. 2.26

Графическая функция gradplot проводит построение векторного поля градиента. Например, если скалярное поле $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, то соответствующая графическая секция имеет вид:

```
> gradplot(sqrt(x^2+y^2),x=-2..2,y=-2..2);
```

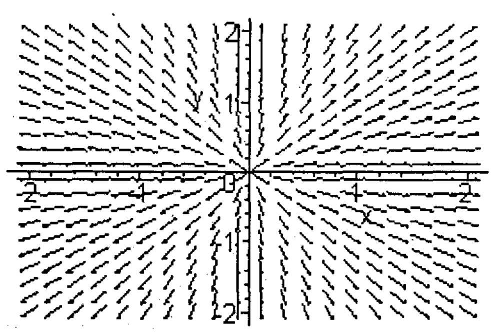

Рис. 2.27

§ 3. Геометрические построения в пространстве

Построение поверхностей происходит аналогично построению кривых на плоскости. Пусть требуется построить гиперболический параболоид, заданный уравнением $z = x^2 - y^2$. Самый простой способ — через контекстное меню (smart-способ).

1. Вводится аналитическое выражение, определяющее поверхность.

2. Выводится его стандартный математический вид, последний выделяется и щелчком ПКМ открывается контекстное меню.

3. По строке Plots переход на строку 3-D Plot, а через нее на нужный порядок переменных. Щелчок ЛКМ по переменным приводит к построению графика.

Такими шагами получаем:

```
> x^2-y^2;
```

$$x^2 - y^2$$

```
> smartplot3d[x,y](x^2-y^2);
```

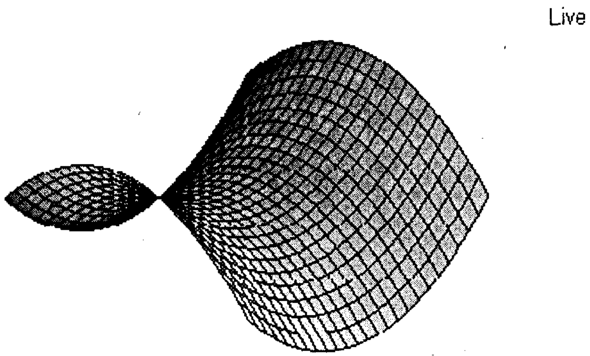

Рис. 2.28

График «сырой»: нет осей координат, плохой обзор. Щелчком ПКМ по нему открываем контекстное меню и по строке Axes (оси) переходим на строку Normal ниспадающего меню:

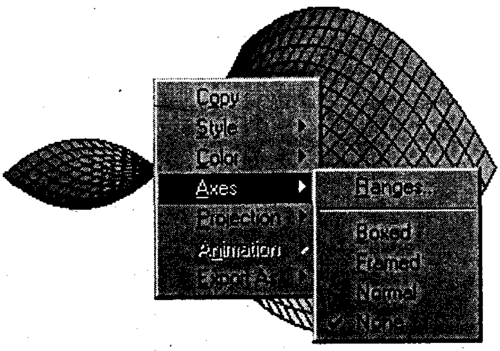

Рис. 2.29

Щелчок ЛКМ по ней дает:

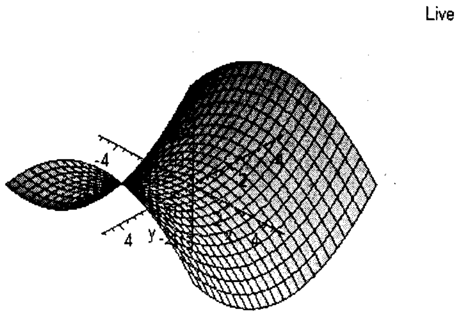

Рис. 2.30

Координатные оси появились, но угол обзора по-прежнему плохой. Поэтому щелкаем ЛКМ по графику, но кнопку не отпускаем, а двигаем мышь так, чтобы за счет вращения графика, которое при этом происходит, получить лучший угол обзора:

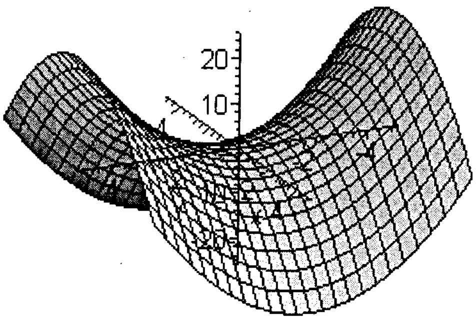

Рис. 2.31

Графическая функция ядра Maple, предназначенная для построения поверхностей, plot3d. Конструкцией plot3d(f,x=a..b,y=c..d) строятся поверхности, заданные уравнением $z = f(x, y)$, а конструкция plot3d([f1,f2,f3],u=a..b,v=c..d) позволяет построить параметрически заданные поверхности. Построим поверхность

$$z = \frac{xy(x^2 - y^2)}{\sqrt{x^2 + y^2}},$$

которая называется «обезьяньим седлом»:

```
> plot3d(x*y*(x^2-y^2)/sqrt(x^2+y^2),x=-10..10,y=- 10..10);
```

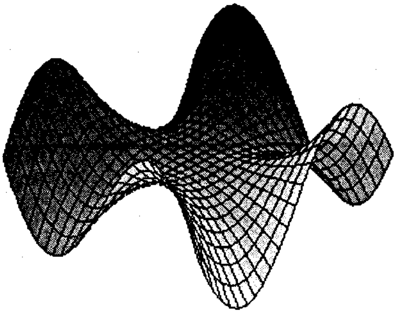

Рис. 2.32

Построим псевдосферу

$$x = \sin u \cos v,\ \ y = \sin u \sin v,\ \ z = \ln \operatorname{tg} \frac{u}{2} + \cos u$$

постоянной полной кривизны K = -1:

```
>plot3d([sin(u)*cos(v),sin(u)*sin(v),ln(tan(u/2))+cos(u)],u=-
2..10,v=0..2*Pi,axes=normal);
```

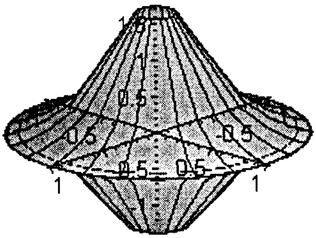

Рис. 2.33

Так же просто строится, например, катеноид

$$x = chu \cos v,\ \ y = chu \sin v,\ \ z = u,$$

поверхность вращения, принадлежащая классу минимальных поверхностей (мыльных пленок):

```
> plot3d([cosh(u)*cos(v),cosh(u)*sin(v),u],u=- 2..2,v=0..2*Pi);
```

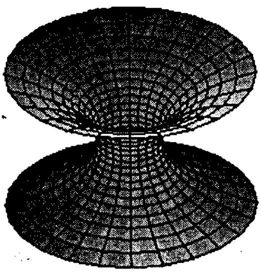

Рис. 2.34

Конструкция plot3d({f, g},x=a..b,y=c..d) позволяет построить две поверхности в одной системе координат. Заметим, что в подобной ситуации на плоскости уравнения объединялись квадратными скобками. Построим, например, пару плоскостей:

```
> plot3d({1+x+y,1+x-y},x=-2..2,y=-2..2);
```

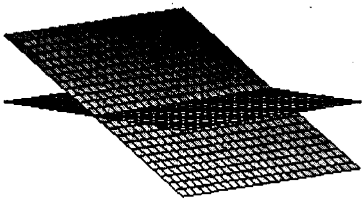

Рис. 2.35

Теперь рассмотрим некоторые графические функции пакета plots трехмерной графики. Графическая функция implicitplot3d строит поверхности, заданные неявным уравнением $F(x, y, z) = 0$. Пусть требуется построить двуполостной гиперболоид $x^2 + y^2 - z^2 = -1$. Тогда, используя данную функцию, получаем:

```
> with(plots):implicitplot3d(x^2+y^2-z^2=-1,x=-2..2,y=-
2..2,z=-3..3,axes=normal);
```

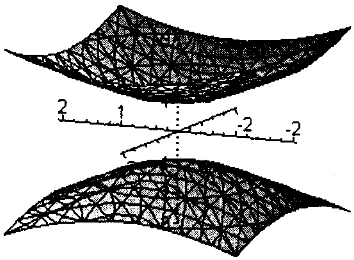

Рис. 2.36

Линии уровня высоты поверхности $z = f(x, y)$ строятся графической функцией contourplot3d(f, x=a..b, y=c..d). Например, для плоскости $z = 6 - x - y$ графическая секция имеет вид:

```
> contourplot3d(6-x- y,x=0..7,y=0..7,axes=normal,color=black);
```

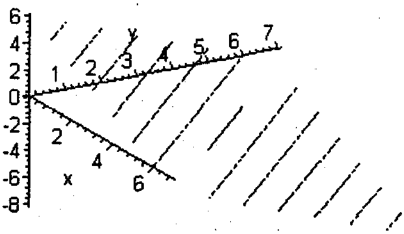

Рис. 2.37

Векторные поля изображаются графической функцией fieldplot3d. Например,

```
> fieldplot3d([z-x,x-y,x+z],x=-1..1,y=-1..1,z=-1..1,
axes=boxed,color=black);
```

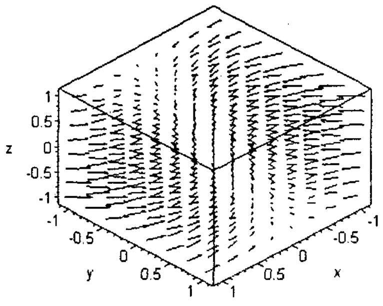

Рис. 2.38

Векторное поле градиента скалярного поля изображается графической функцией gradplot3d. Конструкция тела функции самая простая:

```
> gradplot3d(x*y*z,x=-1..1,y=-1..1,z=-1..1, color=black, axes=boxed);
```

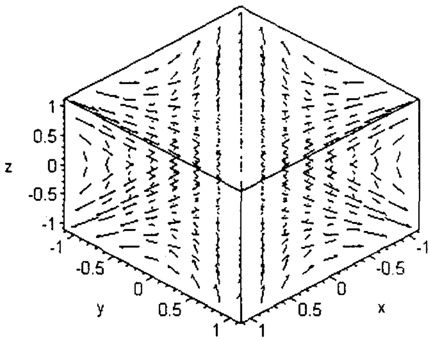

Рис. 2.39

Графическая функция spasecurve строит пространственные кривые, заданные параметрическими уравнениями. Построим, например, коническую винтовую линию $x = t\cos t$, $y = t\sin t$, $z = t$:

```
> spacecurve([t*cos(t),t*sin(t),t],t=0..5*Pi,axes=normal, color=black);
```

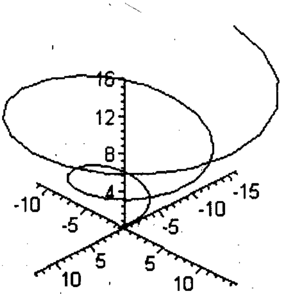

Рис. 2.40

Графическая функция pointplot3d предназначена для построения последовательности точек:

```
> with(plots):pointplot3d([seq([t+1,t-1,t+3],t=-1..5)],
color=red,axes=normal,symbol=box);
```

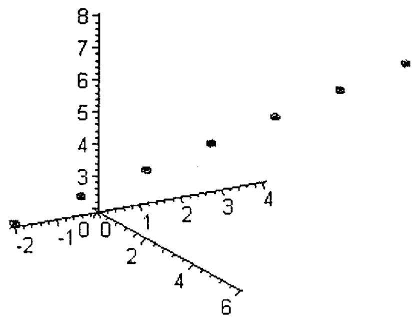

Рис. 2.41

§ 4. Сплайн-интерполяция

Согласно описанию справочной системы Maple, встроенная функция spline(X, Y, x, k) предназначена для интерполирования таблично заданных функций (X, Y) натуральными сплайнами. В ней X, Y — векторы или одномерные массивы, x — независимая переменная, k — необязательный параметр, принимающий значения 1, 2, 3, 4, которые заменяются ключевыми словами linear, quadratic, cubic, quartic, соответственно. Посмотрим, как она работает.

Пусть функция задана таблицей

X	1	2	3	4	5
Y	5	1	4	2	3

Введем векторы значений переменных:

```
> X:=vector([1,2,3,4,5]); Y:=vector([5,1,4,2,3]);
```

$$X := [1, 2, 3, 4, 5]$$

$$Y := [5, 1, 4, 2, 3]$$

При к = 1 получаем:

```
> f[1]:=spline([1, 2, 3, 4, 5],[5, 1, 4, 2, 3],x,linear);
```

$$f_1 := \begin{cases} 9-4x & x<2 \\ -5+3x & x<3 \\ 10-2x & x<4 \\ -2+x & \mathit{otherwise} \end{cases}$$

Построим интерполяционную функцию и заданные точки:

```
> plot([f[1],[X[i],Y[i],i=1..5]],x=0..5,0..5,style=[line,point],
color=[red,blue]);
```

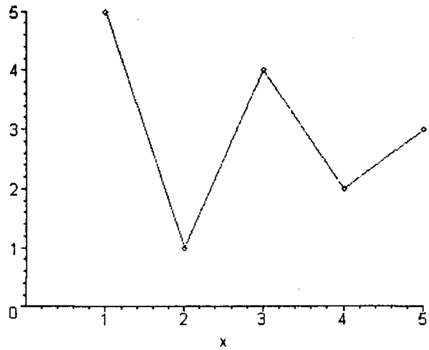

Рис. 2.42

При к = 2 получаем:

```
> f[2]:=spline([1, 2, 3, 4, 5],[5, 1, 4, 2, 3],x,quadratic);
```

$$f_2 := \begin{cases} -\frac{44}{17}+\frac{258}{17}x-\frac{129}{17}x^2 & x<\frac{3}{2} \\ \frac{505}{17}-\frac{474}{17}x+\frac{115}{17}x^2 & x<\frac{5}{2} \\ -\frac{745}{17}+\frac{526}{17}x-5x^2 & x<\frac{7}{2} \\ \frac{970}{17}-\frac{454}{17}x+\frac{55}{17}x^2 & x<\frac{9}{2} \\ -\frac{974}{17}+\frac{410}{17}x-\frac{41}{17}x^2 & \mathit{otherwise} \end{cases}$$

В этом случае график интерполяционной функции имеет вид:

```
> plot([f[2],[X[i],Y[i],i=1..5]],x=-2..5,-3..7, style
=[line,point], color=[red,blue]);
```

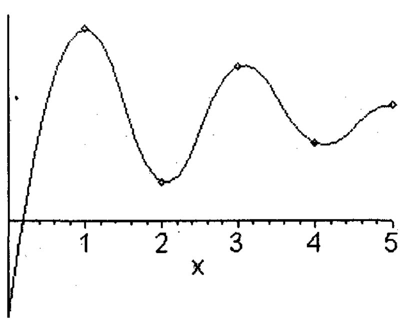

Рис. 2.43

Таким образом, имеет место гладкая интерполяция многочленами второй степени.

При к = 3 получаем:

```
> f[3]:=spline([1, 2, 3, 4, 5],[5, 1, 4, 2, 3],x,cubic);
```

$$f_3 := \begin{cases} 9+\frac{4}{7}x-\frac{48}{7}x^2+\frac{16}{7}x^3 & x<2 \\ \frac{439}{7}-80x+\frac{234}{7}x^2-\frac{31}{7}x^3 & x<3 \\ -\frac{1046}{7}+\frac{925}{7}x-\frac{261}{7}x^2+\frac{24}{7}x^3 & x<4 \\ \frac{1066}{7}-\frac{659}{7}x+\frac{135}{7}x^2-\frac{9}{7}x^3 & \mathit{otherwise} \end{cases}$$

Строим графики:

```
> plot([f[3],[X[i],Y[i],i=1..5]],x=0..5,0..7,style=[line,point],
color=[red,blue]);
```

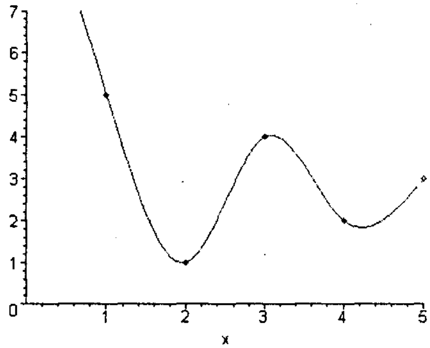

Рис. 2.44

Нетрудно проверить, что на концах промежутка интерполирования х = 1 и х = 5 значения второй производной равны нулю, то есть данная интерполяция является интерполяцией кубическими сплайнами при линейных краевых условиях. Рекомендуется не путать степени интерполирующих многочленов и степени краевых условий.

В последнем случае к = 4:

```
> f[4]:=spline([1, 2, 3, 4, 5],[5, 1, 4, 2, 3],x,quartic);
```

$$f_4 := \begin{cases} \frac{4544499}{345682}-\frac{5127313}{345682}x+\frac{2311224}{172841}x^2-\frac{1540816}{172841}x^3+\frac{385204}{172841}x^4 & x<\frac{3}{2} \\ -\frac{2079678}{172841}+\frac{18082967}{345682}x-\frac{9293916}{172841}x^2+\frac{3617024}{172841}x^3-\frac{474436}{172841}x^4 & x<\frac{5}{2} \\ \frac{72720019}{345682}-\frac{104924033}{345682}x+\frac{27608184}{172841}x^2-\frac{6223536}{172841}x^3+\frac{1660}{563}x^4 & x<\frac{7}{2} \\ -\frac{92385212}{172841}+\frac{189350759}{345682}x-\frac{35450700}{172841}x^2+\frac{5787680}{172841}x^3-\frac{348324}{172841}x^4 & x<\frac{9}{2} \\ \frac{298611251}{345682}-\frac{240321841}{345682}x+\frac{36161400}{172841}x^2-\frac{4821520}{172841}x^3+\frac{241076}{172841}x^4 & \mathit{otherwis} \end{cases}$$

```
> plot([f[4],[X[i],Y[i],i=1..5]],x=-1..5,-1..6, style=
[line,point],color=[red,blue]);
```

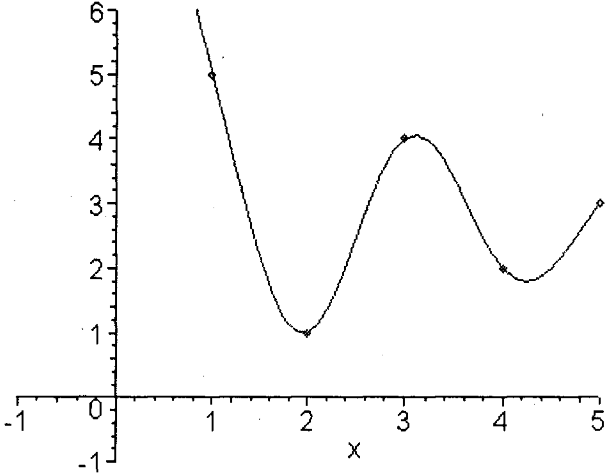

Рис. 2.45

Глава III
ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА

§ 1. Аналитическая геометрия

Откроем пакет geometry и ознакомимся со списком, входящих в него геометрических функций двумерной евклидовой плоскости:

```
> with(geometry);
```

[*Apollonius*, *AreCollinear*, *AreConcurrent*, *AreConcyclic*, *AreConjugate*, *AreHarmonic*, *AreOrthogonal*, *AreParallel*, *ArePerpendicular*, *AreSimilar*, *AreTangent*, *CircleOfSimilitude*, *CrossProduct*, *CrossRatio*, *DefinedAs*, *Equation*, *EulerCircle*, *EulerLine*, *ExteriorAngle*, *ExternalBisector*, *FindAngle*, *GergonnePoint*, *GlideReflection*, *HorizontalCoord*, *HorizontalName*, *InteriorAngle*, *IsEquilateral*, *IsOnCircle*, *IsOnLine*, *IsRightTriangle*, *MajorAxis*, *MakeSquare*, *MinorAxis*, *NagelPoint*, *OnSegment*, *ParallelLine*, *PedalTriangle*, *PerpenBisector*, *PerpendicularLine*, *Polar*, *Pole*, *RadicalAxis*, *RadicalCenter*, *RegularPolygon*, *RegularStarPolygon*, *SensedMagnitude*, *SimsonLine*, *SpiralRotation*, *StretchReflection*, *StretchRotation*, *TangentLine*, *VerticalCoord*, *VerticalName*, *altitude*, *apothem*, *area*, *asymptotes*, *bisector*, *center*, *centroid*, *circle*, *circumcircle*, *conic*, *convexhull*, *coordinates*, *detail*, *diagonal*, *diameter*, *dilatation*, *directrix*, *distance*, *draw*, *dsegment*, *ellipse*, *excircle*, *expansion*, *foci*, *focus*, *form*, *homology*, *homothety*, *hyperbola*, *incircle*, *inradius*, *intersection*, *inversion*, *line*, *medial*, *median*, *method*, *midpoint*, *orthocenter*, *parabola*, *perimeter*, *point*, *powerpc*, *projection*, *radius*, *randpoint*, *reciprocation*, *reflection*, *rotation*, *segment*, *sides*, *similitude*, *slope*, *square*, *stretch*, *tangentpc*, *translation*, *triangle*, *vertex*, *vertices*]

Список достаточно объемный, назначение многих встроенных функций пакета понятно из названий.

Плоскими геометрическими объектами, через которые задаются остальные, в Maple являются:

point (точка), segment (отрезок), dsegment (направленный отрезок — вектор), line (прямая линия), triangle (треугольник), square (квадрат), circle (окружность), parabola (парабола), ellipse (эллипс), hyperbola (гипербола), conic (кривая второго порядка, включая вырожденные случаи).

Основные конструкции их ввода, соответственно:
point(A, x_A, y_A), segment(AB,[A,B]), dsegment(AB,[A,B]),
triangle(T,[A,B,C],[x,y]), square(Sq,[A,B,C,D]),
circle(name,[A,B,C],[x,y],'centername'=O), parabola(name, equation,[x,y]),
ellipse(name, equation,[x,y]), hyperbola(name, equation,[x,y]),
conic(name, equation,[x,y]).

Первый параметр всегда имя геометрического объекта. С другими конструкциями ввода основных геометрических объектов можно ознакомиться в справочной системе, выделив ключевое слово и нажав <F1>.

Задача. Дан треугольник ABC с вершинами A(7; 8), B(6; -7) и C(-6; 7). Найти:

1) уравнения сторон треугольника;
2) величины углов A, B, C;
3) координаты точки пересечения медиан и расстояние от нее до вершины A;
4) координаты точки пересечения высот;
5) длину высоты, опущенной из вершины A;
6) площадь треугольника ABC:
7) уравнение и параметры окружности, описанной около треугольника;
8) уравнение и параметры окружности, вписанной в треугольник.

Решение. *Задание треугольника его вершинами:*

```
> restart:with(geometry):_EnvHorizontalName:=x:_EnvVerticalName=
y:triangle(T,[point(A,7,8),point(B,6,-7),point(C,-6,7)]);
```

$$T$$

Построение треугольника:

```
> draw(T,axes=normal,view=[-8..8,-8..8]);
```

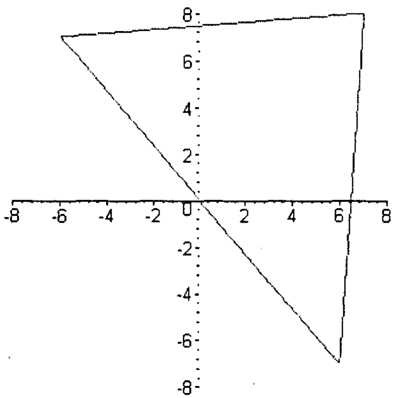

Рис. 3.1

1) *Уравнение каждой стороны треугольника, как и уравнение любого другого геометрического объекта, находится в два шага:*

— задание геометрического объекта;

— вывод уравнения командой Equation(name) или встроенной функцией detail(name).

Ввод имен переменных происходит в интерактивном режиме, по запросу Maple. Такими шагами получаем уравнения сторон треугольника T:

```
> line(l1,[A,B]);
```

```
> Equation(l1);
enter name of the horizontal axis > x;
enter name of the vertical axis > y;
```

$$-97+15x-y=0$$

```
> line(l2,[A,C]);
```

$$l2$$

```
> Equation(l2);
enter name of the horizontal axis > x;
enter name of the vertical axis > y;
```

$$97+x-13y=0$$

```
> line(l3,[B,C]);
```

$$l3$$

```
> Equation(l3);
```

$$-14x-12y=0$$

С помощью теста IsOnLine убедимся, что уравнение прямой l1 найдено правильно

```
> line(s,-97+15*x-y,[x,y]):
> IsOnLine(A,s);
```

true

```
> IsOnLine(B,s);
```

true

2) *Вычисление величины угла треугольника между прямыми l1 и l2:*

```
> FindAngle(l1,l2);
```

$$\arctan\left(\frac{97}{14}\right)$$

```
> evalf(%);
```

$$1.427456272$$

Переход от радиан к градусам:

```
> convert(%,units,radians,degrees);
```

$$81.78721982$$

Вычисления остальных углов:

```
> FindAngle(l1,l3);
```

$$\arctan\left(\frac{97}{99}\right)$$

```
> evalf(%);
```

$$.7751944359$$

```
> convert(%,units,radians,degrees);
```

$$44.41536948$$

```
> FindAngle(l2,l3);
```

$$\arctan\left(\frac{97}{71}\right)$$

```
> evalf(%);
```

$$.9389419459$$

```
> convert(%,units,radians,degrees);
```

$$53.79741071$$

Проверка:

```
> 81.78721982+44.41536948+53.79741071;
```

$$180.0000000$$

3) *Задание медианы треугольника T, проходящей через вершину C:*

```
> median(mC, C, T);
```

$$mC$$

Вывод ее уравнения, с предварительным определением типа объекта:

```
> form(mC);
```

$$line2d$$

```
> detail(mC);
assume that the names of the horizontal and vertical axes are _x
and _y, respectively
```

name of the object: mC
form of the object: line2d
*equation of the line: -97/2+13/2*_x+25/2*_y = 0*

Вычисление координат точки G пересечения медиан:

```
> intersection(G,mA,mC);
```

$$G$$

```
> coordinates(G);
```

$$\left[\frac{7}{3}, \frac{8}{3}\right]$$

Вычисление расстояния между точками A и G:

```
> distance(A,G);
```

$$\frac{1}{9}\sqrt{452}\sqrt{9}$$

4) *Задание высоты, проходящей через вершину C треугольника T:*

```
> altitude(hC,C,T);
```

$$hC$$

Вывод уравнения данной высоты:

```
> detail(hC);
assume that the names of the horizontal and vertical axes are _x
and _y, respectively
```

name of the object: hC
form of the object: line2d
*equation of the line: 99-_x-15*_y = 0*

Аналогично:

```
> altitude(hA,A,T);
```

$$hA$$

```
> detail(hA);
assume that the names of the horizontal and vertical axes are _x
and _y, respectively
```

name of the object: hA
form of the object: line2d
*equation of the line: -28-12*_x+14*_y = 0*

```
> intersection(L,hC,hA);
```

$$L$$

```
> coordinates(L);
```

$$\left[\frac{483}{97},\frac{608}{97}\right]$$

5) *Вычисление длины высоты, опущенной из вершины A:*

```
> distance(A,13);
```

$$\frac{97}{85}\sqrt{85}$$

6) *Вычисление площади треугольника T:*

```
> area(T);
```

$$97$$

7) *Уравнение и параметры окружности, описанной около треугольника:*

```
> circumcircle(Cc, T, 'centername' = E);
```

$$Cc$$

```
> detail(Cc);
assume that the names of the horizontal and vertical axes are _x
and _y, respectively
```

name of the object: Cc
form of the object: circle2d
name of the center: E
coordinates of the center: [98/97, 84/97]
*radius of the circle: 1/9409*816425^(1/2)*9409^(1/2)*
*equation of the circle: _x^2-85+_y^2-196/97*_x-168/97*_y = 0*

8) *Уравнение и параметры окружности, вписанной в треугольник:*

```
> incircle(Ic,T,'centername'=H);
```

$$Ic$$

```
> simplify(detail(Ic));
assume that the names of the horizontal and vertical axes are _x
and _y, respectively
```

name of the object: Ic
form of the object: circle2d
name of the center: H
coordinates of the center: [2(7*85^(1/2)+3*2^(1/2)*85^(1/2)-3*2^(1/2)*113^(1\
2))/(2*85^(1/2)+2^(1/2)*113^(1/2)+2^(1/2)*85^(1/2)), (-7*2^(1/2)*85^(1/2)+7*2\
^(1/2)*113^(1/2)+16*85^(1/2))/(2*85^(1/2)+2^(1/2)*113^(1/2)+2^(1/2)*85^(1/2)\
)]*
*radius of the circle: 194/(2*85^(1/2)+2^(1/2)*113^(1/2)+2^(1/2)*85^(1/2))*
equation of the circle: 4(-1190*2^(1/2)+184*_x^2+184*_y^2+8611+14*113^(1\
/2)*2^(1/2)*85^(1/2)-1022*_x-1556*_y+_y^2*113^(1/2)*85^(1/2)+_x^2*113^(1\
2)*85^(1/2)-15*_y*85^(1/2)*2^(1/2)*113^(1/2)+_y^2*85^(1/2)*2^(1/2)*113^(1/2)\
+_x^2*85^(1/2)*2^(1/2)*113^(1/2)-_x*85^(1/2)*2^(1/2)*113^(1/2)+85*_y^2*2^(\
1/2)+85*_x^2*2^(1/2)-1105*_x*2^(1/2)-85*_y*2^(1/2)-85*85^(1/2)*113^(1/2))/(\
2*85^(1/2)+2^(1/2)*113^(1/2)+2^(1/2)*85^(1/2))^2 = 0*

```
> radius(Ic);
```

$$\frac{1}{226}\left(97-\frac{30(7\sqrt{85}+3\sqrt{2}\sqrt{85}-3\sqrt{2}\sqrt{113}}{2\sqrt{85}+\sqrt{2}\sqrt{113}+\sqrt{2}\sqrt{85}}+\frac{-7\sqrt{2}\sqrt{85}+7\sqrt{2}\sqrt{113}+16\sqrt{85}}{2\sqrt{85}+\sqrt{2}\sqrt{113}+\sqrt{2}\sqrt{85}}\right)\sqrt{226}$$

```
> evalf(%);
```

$$4.171075133$$

Посмотрим, что предлагается в Maple по решению пространственных геометрических задач:

```
> with(geom3d);
```

[*Archimedean, AreCollinear, AreConcurrent, AreConjugate, AreCoplanar, AreDistinct, AreParallel, ArePerpendicular, AreSameObjects, AreSamePlane, AreSkewLines, DefinedAs, DirectionRatios, Equation, FindAngle, FixedPoint, GlideReflect, GlideReflection, GreatDodecahedron, GreatIcosahedron, GreatRhombicuboctahedron, GreatRhombiicosidodecahedron, GreatStellatedDodecahedron, HarmonicConjugate, HexakisIcosahedron, HexakisOctahedron, InRadius, IsArchimedean, IsEquilateral, IsFacetted, IsOnObject, IsQuasi, IsRegular, IsRightTriangle, IsStellated, IsTangent, MidRadius, NormalVector, OnSegment, ParallelVector, PentagonalHexacontahedron, PentagonalIcositetrahedron, PentakisDodecahedron, QuasiRegularPolyhedron, RadicalCenter, RadicalLine, RadicalPlane, RegularPolyhedron, RhombicDodecahedron, RhombicTriacontahedron, RotatoryReflect, RotatoryReflection, ScrewDisplace, ScrewDisplacement, SmallRhombicuboctahedron, SmallRhombiicosidodecahedron, SmallStellatedDodecahedron, SnubCube, SnubDodecahedron, StereographicProjection, StretchRotate, TangentPlane, TetrakisHexahedron, TrapezoidalHexecontahedron, TrapezoidalIcositetrahedron, TriakisIcosahedron, TriakisOctahedron, TriakisTetrahedron, TruncatedCuboctahedron, TruncatedDodecahedron, TruncatedHexahedron, TruncatedIcosahedron, TruncatedIcosidodecahedron, TruncatedOctahedron, TruncatedTetrahedron, altitude, area, center, centroid, circle, coordinates, cube, cuboctahedron, detail, dilate, distance, dodecahedron, draw, dsegment, duality, faces, facet, form, gtetrahedron, hexahedron, homology, homothety, icosahedron, icosidodecahedron, identity, incident, intersection, inverse, inversion, line, midpoint, octahedron, parallel, parallelepiped, plane, point, polar, pole, powerps, projection, radius, randpoint, reflect, reflection, rotate, rotation, schlafli, segment, sides, sphere, stellate, tetrahedron, tname, transform, translate, translation, transprod, triangle, unit, valuesubs, vertices, volume, xcoord, xname, ycoord, yname, zcoord, zname*]

Список еще более внушительный. Основные пространственные геометрические объекты:

point (точка), segment (отрезок), dsegment (вектор), line (прямая), triangle (треугольник), plane (плоскость), sphere (сфера), polyhedra (многогранник заданного вида).

Кроме последнего объекта, их можно ввести, соответственно, как:
point(A, x_A,y_A,z_A), segment(AB,[A,B]), dsegment(AB,[A,B]), line(l,[A,B]), triangle(name,[A,B,C]), plane(name,[A,B,C]),
sphere (name,[A,B,C,D],'centername'=).

Существуют и другие конструкции ввода. Например, для плоскости, как следует из справочной системы Maple, их 7. В задании многогранников вообще нет единой конструкции. Каждый вид, а в Maple их 8, задается только ему присущими параметрами. В следующей задаче показывается, как встроенные функции данного пакета применяются к решению задач аналитической геометрии в пространстве.

Задача. Пирамида SABC задана вершинами S(6, 7, 13), A(8, -7, -6), B(-5, 6, -7), C(-3, -4, -10). Найти:

1) уравнение плоскости, проходящей через точки A, B, C;
2) величину угла между ребром SC и гранью ABC;
3) площадь грани ABC;
4) уравнение высоты, опущенной из вершины S на грань ABC и ее длину;
5) объем пирамиды.

Решение. *Сделаем рисунок пирамиды, определяемой заданными точками:*

```
> point(S,6,7,13); point(A,8,-7,-6); point(B,-5,6,-7);
point(C,-3,-4,-10);
```

S

A

B

C

```
> gtetrahedron(T,[S,A,B,C]);
```

T

```
> draw(T,axes=normal,title='Пирамида');
```

Пирамида

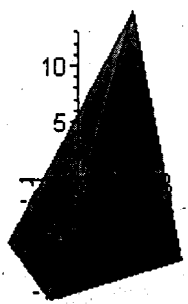

Рис. 3.2

1) *Вывод уравнения плоскости ABC:*

```
> plane(p,[A,B,C]);
```

$$p$$

```
> detail(p);
Warning, assuming that the names of the axes are _x, _y and _z
```

name of the object: p
form of the object: plane3d
*equation of the plane: 729-49*_x-41*_y+104*_z = 0*

2) *Вычисление величины угла между ребром AS и плоскостью ABC:*

```
> line(l,[A,S]);
```

$$l$$

```
> FindAngle(l, p );
```

$$\arcsin\left(\frac{250}{464321}\sqrt{928642}\right)$$

```
> evalf(%);
```

$$.5455107810$$

```
> convert(%,units,radians,degrees);
```

$$31.25546542$$

3) *Вычисление площади основания пирамиды:*

```
> triangle(ABC,[A,B,C]);
```

$$ABC$$

```
> area(ABC);
```

$$\frac{1}{2}\sqrt{14898}$$

4) *Определение уравнения высоты, проходящей через S, и расстояния от S до плоскости ABC:*

```
> line(h,[S,p]);
```

$$h$$

```
> detail(h);
Warning, assume that the parameter in the parametric equations is _t
Warning, assuming that the names of the axes are _x, _y, and _z
> distance(S,p);
```

name of the object: h
form of the object: line3d
*equation of the line: [_x = 6-49*_t, _y = 7-41*_t, _z = 13+104*_t]*

```
> distance(S,p);
```

$$\frac{250}{2483}\sqrt{14898}$$

5) *Вычисдение объема пирамиды:*

```
> volume(T);
```

$$250$$

§ 2. Линейная алгебра

Список встроенных функций пакета linalg:

```
> with(linalg);
```

[*BlockDiagonal*, *GramSchmidt*, *JordanBlock*, *LUdecomp*, *QRdecomp*, *Wronskian*, *addcol*, *addrow*, *adj*, *adjoint*, *angle*, *augment*, *backsub*, *band*, *basis*, *bezout*, *blockmatrix*, *charmat*, *charpoly*, *cholesky*, *col*, *coldim*, *colspace*, *colspan*, *companion*, *concat*, *cond*, *copyinto*, *crossprod*, *curl*, *definite*, *delcols*, *delrows*, *det*, *diag*, *diverge*, *dotprod*, *eigenvals*, *eigenvalues*, *eigenvectors*, *eigenvects*, *entermatrix*, *equal*, *exponential*, *extend*, *ffgausselim*, *fibonacci*, *forwardsub*, *frobenius*, *gausselim*, *gaussjord*, *geneqns*, *genmatrix*, *grad*, *hadamard*, *hermite*, *hessian*, *hilbert*, *htranspose*, *ihermite*, *indexfunc*, *innerprod*, *intbasis*, *inverse*, *ismith*, *issimilar*, *iszero*, *jacobian*, *jordan*, *kernel*, *laplacian*, *leastsqrs*, *linsolve*, *matadd*, *matrix*, *minor*, *minpoly*, *mulcol*, *mulrow*, *multiply*, *norm*, *normalize*, *nullspace*, *orthog*, *permanent*, *pivot*, *potential*, *randmatrix*, *randvector*, *rank*, *ratform*, *row*, *rowdim*, *rowspace*, *rowspan*, *rref*, *scalarmul*, *singularvals*, *smith*, *stackmatrix*, *submatrix*, *subvector*, *sumbasis*, *swapcol*, *swaprow*, *sylvester*, *toeplitz*, *trace*, *transpose*, *vandermonde*, *vecpotent*, *vectdim*, *vector*, *wronskian*]

Основные встроенные функции пакета и возвращаемые результаты:
angle — величина угла между векторами;
augment — матрица, объединяющая заданные матрицы по горизонтали;
crossprod — векторное произведение векторов;
charpoly — характеристический полином матрицы;
col — столбец матрицы с заданным номером;
det — определитель;
dotprod — скалярное произведение векторов;
eigenvals — собственные числа матрицы (линейного преобразования);
eigenvectors — собственные векторы матрицы (линейного преобразования);
inverse — обратная матрица;
linsolve — решение системы линейных уравнений по матрице системы и матрице свободных членов;
multiply — произведение матриц;
rank — ранг матрицы;
row — строка матрицы с заданным номером;
stackmatrix — матрица, объединяющая заданные матрицы по вертикали;
submatrix — подматрица, стоящая в пересечении указанных строк и столбцов;

trace — след матрицы;

transpose — транспонированная матрица.

Наиболее простой способ задания вектора, например, $\vec{x} = (1, 2, 3)$, в виде:

```
> x:=vector([1,2,3]);
```

$$x := [1, 2, 3]$$

Аналогично:

```
> y:=vector([3,2,1]);
```

$$y := [3, 2, 1]$$

Имеется тест для проверки принадлежности к векторам:

```
> type(x,vector);
```

true

Выведем на листовое поле первые элементы векторов:

```
> x[1];
```

$$1$$

```
> y[1];
```

$$3$$

Найдем величину угла между векторами:

```
> angle(x,y);
```

$$\arccos\left(\frac{5}{7}\right)$$

Наиболее простой способ задания матрицы, например

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix},$$

имеет вид:

```
> A:=matrix([[5,2],[2,2]]);
```

$$A := \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$$

Аналогично:

```
> B:=matrix([[4,3],[2,1]]);
```

$$B := \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Можно проверить, что введенные объекты являются матрицами:

```
> type(A,matrix);
```

true

```
> type(B,matrix);
```

true

Выведем на листовое поле по одному их элементу:

```
> A[1,1];
```

$$5$$

```
> B[1,2];
```

$$3$$

Понятие вектора в Maple близко понятию одномерного массива, но не совпадает с ним. Простейшая конструкция одномерного массива array(dim, list), где dim — диапазон изменения нумерации элементов массива, list — список элементов массива. Одномерные массивы, в которых нумерация списков начинается с единицы, являются векторами. Действительно,

```
> z:=array(1..3,[3,4,5]);
```

$$z := [3, 4, 5]$$

```
> type(z,vector);
```

true

```
> v:=array(0..2,[3,4,5]);
```

$$z := \mathrm{array}(0..2, [$$
$$(0) = 3$$
$$(1) = 4$$
$$(2) = 5$$
$$])$$

```
> type(v,vector);
```

false

Аналогично, 2-мерные массивы, в которых нумерация списков начинается с единицы, являются матрицами:

```
> W:=array(1..2,1..3,[[1,2,3],[4,5,6]]);
```

$$W := \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$$

```
> type(W,matrix);
```

true

```
> Q:=array(0..1,0..2,[[1,2,3],[4,5,6]]);
```

$$Q := \mathrm{array}(0..2, 0..2, [$$
$$(0, 0) = 1$$
$$(0, 1) = 2$$
$$(0, 2) = 3$$
$$(1, 0) = 4$$
$$(1,\ 1) = 5$$
$$(1,\ 2) = 6$$
$$])$$

```
> type(Q,matrix);
```

$$false$$

Следующие три секции показывают, что вектор не фиксируется (строка, столбец), а понимается из контекста проводимых вычислений:

```
> X:=vector([1,2]);
```

$$X := [1, 2]$$

```
> multiply(X,B);
```

$$[8, 5]$$

```
> multiply(B,X);
```

$$[10, 4]$$

Как можно задавать матрицы строки (столбцы) показывается в следующих двух секциях:

```
> X:=matrix(1,2,[1,3]);
```

$$X := \begin{bmatrix} 1 & 3 \end{bmatrix}$$

```
> X:=matrix(2,1,[1,3]);
```

$$X := \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Далее приведены примеры применения основных встроенных функций рассматриваемого пакета:

```
> augment(A,B);
```

$$\begin{bmatrix} 5 & 2 & 4 & 3 \\ 2 & 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

```
> x:=vector([1,2,3]):y:=vector([3,2,1]):crossprod(x,y);
```

$$[-4, 8, -4]$$

```
> charpoly(A,lambda);
```

$$\lambda^2 - 7\lambda + 6$$

```
> col(B,1);
```

$$[4, 2]$$

```
> det(A);
```

$$6$$

```
> dotprod(x,y);
```

$$10$$

```
> eigenvals(A);
```

$$6, 1$$

```
> eigenvectors(A);
```

$$[1, 1, \{[1, -2]\}], [6, 1, \{[2, 1]\}]$$

Здесь первый элемент во внешних квадратных скобках — собственное число, второй — кратность собственного числа, в фигурных скобках — собственный вектор. В следующих двух секциях проверка:

```
> multiply(A,[1,-2]);
```

$$[1, -2]$$

```
> multiply(A,[2,1]);
```

$$[12, 6]$$

Найдем матрицу обратную к матрице A и сделаем проверку:

```
> inverse(A);
```

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{-1}{3} \\ \frac{-1}{3} & \frac{5}{6} \end{bmatrix}$$

```
> multiply(A,%);
```

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Обратная матрица также находится как A^{-1}:

```
> evalm(A^(-1));
```

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{-1}{3} \\ \frac{-1}{3} & \frac{5}{6} \end{bmatrix}$$

В следующих двух секциях решается система

$$\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 6 \end{pmatrix}$$

```
> C:=matrix(2,1,[9,6]);
```

$$C := \begin{bmatrix} 9 \\ 6 \end{bmatrix}$$

```
> linsolve(A,C);
```

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Последующие секции пояснений не требуют:

```
> rank(A);
```

$$2$$

```
> row(A,1);
```

$$[5, 2]$$

```
> stackmatrix(A,B);
```

$$\begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 2 \\ 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

```
> submatrix(A,1..1,2..2);
```

$$[\,2]$$

```
> trace(A);
```

$$7$$

```
> transpose(B);
```

$$\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$$

Приведенные примеры показывают, что пакет linalg предназначен, в первую очередь, для работы с функциональными матрицами. Иначе длительность набора многих встроенных функций себя не оправдывает.

§ 3. Математический анализ

Пределы функций $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ вычисляются в Maple встроенной функцией

limit(f(x),x=a,dir),

где dir — необязательный параметр, принимающий значения left (предел слева), right (предел справа), real (действительный), complex (комплексный). Данная встроенная функция вводится в командную строку как с клавиатуры, так и с панели EXPRESSION (рис. 1.2). Шаблон встроенной функции вычисления предела имеет вид:

```
> limit(%?, %?=%?);
```

Пример ([4], 1. 290). Вычислить предел:

$$\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{x}+\sqrt{x-1}-1}{\sqrt{x^2-1}}.$$

Решение.

```
> limit((sqrt(x)+sqrt(x-1)-1)/sqrt(x^2-1),x=1);
```

$$\frac{1}{2}\sqrt{2}$$

Ответ: $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Пример ([4], 1.302). Вычислить предел:

$$\lim_{x\to\infty} x^{\frac{3}{2}}(\sqrt{x^3+2}-\sqrt{x^3-2}).$$

Решение.

```
> limit(x^(3/2)*(sqrt(x^3+2)-sqrt(x^3-2)), x=infinity);
```

$$2$$

Ответ: 2.

Пример ([4], 1.339). Найти односторонние пределы:

$$\lim_{x\to 2\pm 0}\frac{2+x}{4-x^2}.$$

Решение.

```
> limit((2+x)/(4-x^2), x=2,right);
```

$$-\infty$$

```
> limit((2+x)/(4-x^2), x=2,left);
```

$$\infty$$

Ответ: $\pm\infty$.

Встроенная функция discont(f(x),x) возвращает пользователю значения, в которых нарушается непрерывность функции f(x). Например,

```
> discont(x/((x-2)*(x+3)),x);
```

$$\{3, 2\}$$

```
> discont(tan(x),x);
```

$$\{\pi\_ZL\sim+\frac{1}{2}\pi\}$$

Встроенная функция iscont(f(x),x=a..b) возвращает true, если f(x) непрерывна на открытом промежутке (a, b), и false, если она на нем не является непрерывной. Аналогично действует встроенная функция iscont(f(x),x=a..b,`closed`), только на замкнутом промежутке. В частности,

```
> iscont(x/((x-2)*(x+3)),x=2..3);
```

true

```
> iscont(x/((x-2)*(x+3)),x=2..3,`closed`);
```

false

Задача ([4], 1.401). Исследовать на непрерывность:

$$f(x)=\begin{cases}2\sqrt{x}, & \text{если } 0\le x\le 1,\\ 4-2x, & \text{если } 1<x<2{,}5,\\ 2x-7, & \text{если } 2{,}5\le x\le 4.\end{cases}$$

Решение. *Вводим заданную функцию:*

```
> f:=piecewise(x<=1,2*sqrt(x),x<2.5,4-2*x,x<=4,2*x-7);
```

$$f := \begin{cases} 2\sqrt{x} & x \le 1 \\ 4-2x & x < 2.5 \\ 2x-7 & x \le 4 \end{cases}$$

Применение встроенной функции iscont дает:

```
> iscont(f,x=0..4,'closed');
```

$$false$$

Вычисления односторонних пределов:

```
> limit(f,x=1,left);
```

$$2$$

```
> limit(f,x=1,right);
```

$$2$$

```
> limit(f,x=2.5,left);
```

$$-1$$

```
> limit(f,x=2.5,right);
```

$$-2$$

График заданной функции имеет «скачок» при x = = 2,5:

```
> plot(f,x=0..4,thickness=2);
```

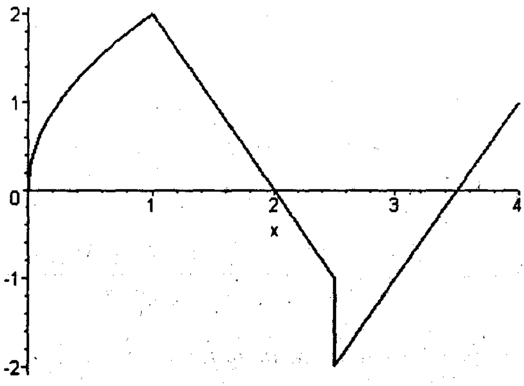

Рис. 3.3

Ответ: x = 2,5 — точка разрыва первого рода.

Находить производные и неопределенные интегралы проще всего smart-способом — через контекстное меню.

1. Вводится аналитическое выражение, определяющее функцию.

2. Выводится стандартный математический вид.

3. Обычным образом открывается контекстное меню.

4. Стрелка КМ устанавливается на строке Differentiate или Integrate соответственно.

5. В появившемся списке переменных, по которым можно произвести это действие, выбирается нужная. После щелчка ЛКМ по ней появляется результат.

Выглядят перечисленные пункты «устрашающе», но на самом деле все они, может быть кроме первого, выполняются просто и быстро. Что получается, если находить производную и неопределенный интеграл от функции x^2 таким способом, показано на следующем фрагменте листового поля:

```
> x^2;
```

$$x^2$$

```
> R0 := diff(x^2,x);
```

$$R0 := 2x$$

```
> R1 := int(x^2,x);
```

$$R1 := \frac{x^3}{3}$$

Задача ([7], 9.2.12). Вычислить производную в заданной точке:

$$f(x) = \frac{x^2 + 1 + \sin x}{\cos x}, \ x_0 = 0$$

Решение. *Набираем аналитическое выражение данной функции и smart-способом находим производную:*

```
> restart:(x^2+1+sin(x))/cos(x);
```

$$\frac{x^2 + 1 + \sin(x)}{\cos(x)}$$

```
> R0 := diff((x^2+1+sin(x))/cos(x),x);
```

$$R0 := \frac{2x + \cos(x)}{\cos(x)} + \frac{(x^2 + 1 + \sin(x))\sin(x)}{\cos(x)^2}$$

Подставляем x = 0 и вычисляем результат:

```
> subs(x=0,%):evalf(%);
```

$$1.$$

Встроенная функция дифференцирования diff(f, x). В частности,

```
> diff(x^2,x);
```

$$2x$$

Производная к-го порядка $f^{(k)}(x)$ находится как diff(f, x\$k). Например,

```
> diff(x^2,x$2);
```

$$2$$

Встроенная функция diff применима и к функциям нескольких переменных. В виде diff(f,x_1\$$k_1$,...$x_n$\$$k_n$) вычисляются частные производные $\dfrac{\partial^k f(x_1,\ldots,x_n)}{\partial x_1^{k1}\ldots\partial x_n^{k_n}}$, где $k_1+\ldots+k_n=k$.

Задача ([4], 7.80). Показать, что

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial z}=\frac{3}{x+y+z},$$

если $u=\ln(x^3+y^3+z^3-3xyz)$.

Решение.

```
> u:=ln(x^3+y^3+z^3-3*x*y*z);
```

$$u:=\ln(x^3+y^3+z^3-3xyz)$$

```
> simplify(diff(u,x)+diff(u,y)+diff(u,z));
```

$$3\,\frac{1}{x+y+z}$$

Задача. Дана функция $z=y\sqrt{\dfrac{y}{x}}$. Показать, что

$$x^2\,\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-y^2\,\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0.$$

Решение.

```
> z:=y*sqrt(y/x);
```

$$z:=y\sqrt{\frac{y}{x}}$$

```
> x^2*diff(z,x$2)-y^2*diff(z,y$2);
```

$$x^2\left(-\frac{1}{4}\,\frac{y^3}{\left(\frac{y}{x}\right)^{(3/2)}x^4}+\frac{y^2}{\sqrt{\frac{y}{x}}\,x^3}\right)-y^2\left(\frac{1}{\sqrt{\frac{y}{x}}\,x}-\frac{1}{4}\,\frac{y}{\left(\frac{y}{x}\right)^{(3/2)}x^2}\right)$$

```
> series(%,x):series(%,y);
```

$$0$$

Наибольшее и наименьшее значения функции $f(x)$ на заданном промежутке $[a, b]$ находятся встроенными функциями maximize(f, x=a..b) и minimize(f, x=a..b), соответственно. Если требуется получить и координаты точки, в которой принимается такое значение, то в списке параметров добавляется location или location=true.

Задача ([11], 15.157). Найти наибольшее и наименьшее значения функции на заданном промежутке:

$$f(x) = \frac{x}{2} - \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{3}\cos^2 x - \cos x, \left[\frac{-\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right].$$

Решение.

```
> minimize(x/2-sin(2*x)/4+cos(x)^2/3-cos(x),x=- Pi/2..Pi/2);
```

$$-\frac{1}{4}\pi$$

```
> maximize(x/2-sin(2*x)/4+cos(x)^2/3-cos(x),x=- Pi/2..Pi/2);
```

$$\frac{1}{4}\pi$$

Ответ: $\min f = -\frac{\pi}{4}$, $\max f = \frac{\pi}{4}$.

Экстремумы функции нескольких переменных находятся встроенной функцией extrema(аналитическое выражение,{},{переменные}).

Задача ([4], 7.192). Найти экстремумы функции двух переменных:

$$z = x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y.$$

Решение.

```
> extrema(x^3+3*x*y^2-15*x-12*y,{},{x,y});
```

$$\{-28, 28\}$$

```
> solve({diff(x^3+3*x*y^2-15*x-12*y,x)=0,diff(x^3+3*x*y^2-15*x-
12*y,y)=0,x^3+3*x*y^2-15*x- 12*y=-28});
```

$$\{y = 1, x = 2\}$$

```
> solve({diff(x^3+3*x*y^2-15*x-12*y,x)=0,diff(x^3+3*x*y^2-15*x-
12*y,y)=0,x^3+3*x*y^2-15*x- 12*y=28});
```

$$\{x = -2, y = -1\}$$

Ответ: -28, 28.

Задачи на условный экстремум решаются этой же встроенной функцией, с указанием в фигурных скобках ограничений на переменные.

Задача ([4], 7.209). Найти условные экстремумы функции:

$$u = xyz, \text{ при } x + y + z = 4,\ xy + yz + zx = 5.$$

Решение.

```
> extrema(x*y*z,{x+y+z=4,x*y+y*z+z*x=5},{x,y,z});
```

$$\{2, \frac{50}{27}\}$$

```
> solve({x*y*z=2,x+y+z=4,x*y+y*z+z*x=5},{x,y,z});
```

$$\{z = 1, y = 2, x = 1\},\ \{z = 1, y = 1, x = 2\},\ \{z = 2, y = 1, x = 1\}$$

```
> solve({x*y*z=50/27,x+y+z=4,x*y+y*z+z*x=5},{x,y,z});
```

$$\{z = \frac{5}{3}, y = \frac{2}{3}, x = \frac{5}{3}\},\ \{z = \frac{2}{3}, y = \frac{5}{3}, x = \frac{5}{3}\},\ \{z = \frac{5}{3}, y = \frac{5}{3}, x = \frac{2}{3}\}$$

Ответ: $\left\{2, \frac{50}{27}\right\}$.

Встроенная функция интегрирования int. Конструкцией int(f(x),x) вычисляются неопределенные интегралы:

$$\int f(x)dx,$$

C=0. Например,

```
> int(x^2,x);
```

$$\frac{1}{3}x^3$$

Конструкцией int(f(x),x=a..b) вычисляются определенные интегралы

$$\int_a^b f(x)dx.$$

Например,

```
> int(x^2,x=1..3);
```

$$\frac{26}{3}$$

Разберем решения типовых задач на интегрирование.

Задача ([11], 15.273). Найти площадь фигуры, ограниченной линиями: $y = \frac{5}{x}$, $y = 6 - x$.

Решение. *Строим заданные линии и определяем фигуру, площадь которой надо вычислить:*

```
> plot([5/x,6-x],x=-6..6,-5..6);
```

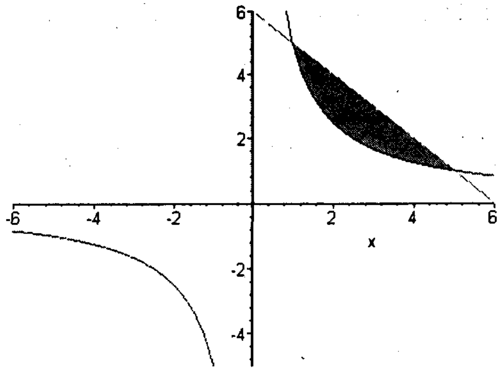

Рис. 3.4

Находим абсциссы точек пересечения графиков функций:

```
> solve(5/x=6-x,x);
```

$$5,\ 1$$

Вычисляем площадь:

```
> int(6-x-5/x,x=1..5);
```

$$-5\ln(5)+12$$

Оцениваем результат:

```
> evalf(%);
```

$$3.952810440$$

Ответ: ≈4.

Задача ([4], 6.482). Найти площадь петли кривой $x = 2t - t^2$, $y = 2t^2 - t^3$.

Решение. *Введем заданные функции и построим петлю:*

```
> x:=t->(2*t-t^2);y:=t->2*t^2-t^3;
```

$$x := t \to 2t - t^2$$

$$y := t \to 2t^2 - t^3$$

```
> plot([x(t),y(t),t=-5..5],x=-2..2,-2..2);
```

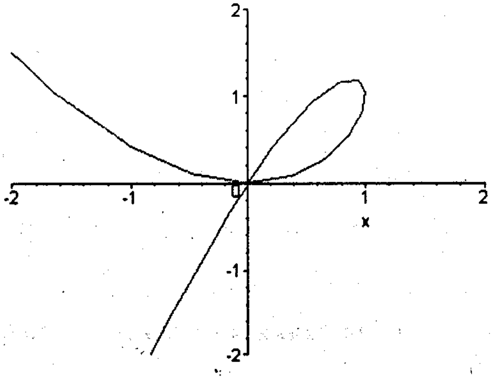

Рис. 3.5

Рисунок 3.5 «подсказывает», что точка самопересечения графика функции имеет координаты (0, 0) и соответствует значениям $t = 0$ и $t = 2$. При изменении t от 0 до 2 петля обходится против хода часовой стрелки. Интегрируя в противоположном направлении, найдем площадь петли:

```
> int(y(t)*diff(x(t),t),t=2..0);
```

$$\frac{8}{15}$$

Ответ: $\frac{8}{15}$.

Задача ([4], 6.485). Найти площадь фигуры, ограниченной (в полярных координатах) кривой: $r = a\sin 5\varphi$.

Решение. *Принимая $a = 1$, строим заданную линию:*

```
> plot([sin(5*t),t,t=0..2*Pi],coords=polar);
```

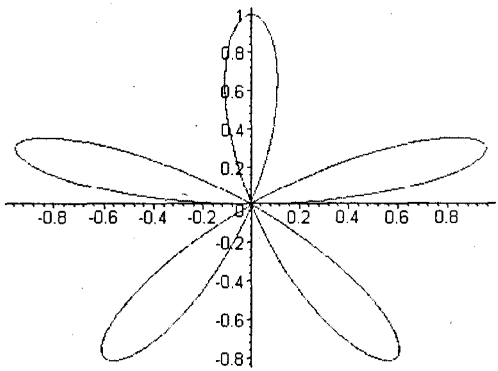

Рис. 3.6

Вычисляем площадь одного лепестка:

```
> a^2/2*int(sin(5*t)^2,t=0..Pi/5);
```

$$\frac{1}{20}a^2\pi$$

Ответ: $\frac{\pi a^2}{4}$.

Задача ([4], 6.504). Найти длину петли кривой $x = t^2$, $y = t(\frac{1}{3} - t^2)$.

Решение. *Вводим заданные функции и строим график:*

```
> restart:x:=t->t^2;y:=t->t*(1/3-t^2);
```

$$x := t \to t^2$$

$$y := t \to t\left(\frac{1}{3} - t^2\right)$$

```
> plot([x(t),y(t),t=-2..2],x=-1..1,-1..1);
```

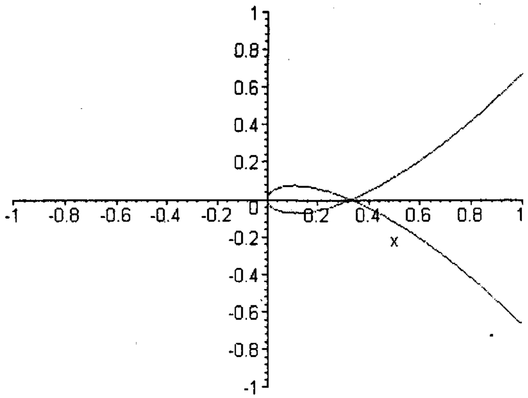

Рис. 3.7

График помогает найти значения $t = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$, которым соответствует точка самопересечения петли. Остается применить формулу вычисления длины дуги:

```
> int(sqrt(diff(x(t),t)^2+diff(y(t),t)^2),t=-1/sqrt(3)..
1/sqrt(3));
```

$$\frac{4}{9}\sqrt{3}$$

Ответ: $\frac{4}{9}\sqrt{3}$.

Разберем на задачах вычисление несобственных интегралов.

Задача ([4], 6.416). Вычислить несобственный интеграл (или установить его расходимость):

$$\int_1^\infty \frac{1+2x}{x^2(1+x)}\,dx$$

Решение.

```
> int((1+2*x)/((x^2)*(1+x)),x=1..infinity);
```

$$\int_1^\infty \frac{1+2x}{x^2(1+x)}\,dx$$

Применяем встроенную функцию evalf, вторым параметром задаем число значащих цифр результата:

```
> evalf(%,3);
```

$$1.69$$

Ответ: $\approx 1{,}69$.

Задача ([4], 6.436). Вычислить несобственный интеграл (или установить его расходимость):

$$\int_2^4 \frac{dx}{\sqrt{6x - x^2 - 8}}.$$

Решение.

```
> int(1/sqrt(6*x-x^2-8),x=2..4);
```

$$\int_2^4 \frac{1}{\sqrt{6x - x^2 - 8}}\,dx$$

```
> evalf(%,3);
```

$$3.14$$

Ответ: ≈3.14.

Задача. Трактриса $x = a(\cos t + \ln tg\,\frac{t}{2})$, $y = a\sin t$ вращается вокруг оси абсцисс. Найти площадь получающейся поверхности.

Решение. *Вводим заданные функции при $a = 1$ и строим трактрису:*

```
> x:=t->cos(t)+ln(tan(t/2));y:=t->sin(t);
```

$$x := t \to \cos(t) + \ln\left(\tan\left(\frac{1}{2}\,t\right)\right)$$

$$y := \sin$$

```
> plot([x(t),y(t),t=0..Pi],x=-2..2,-1..2);
```

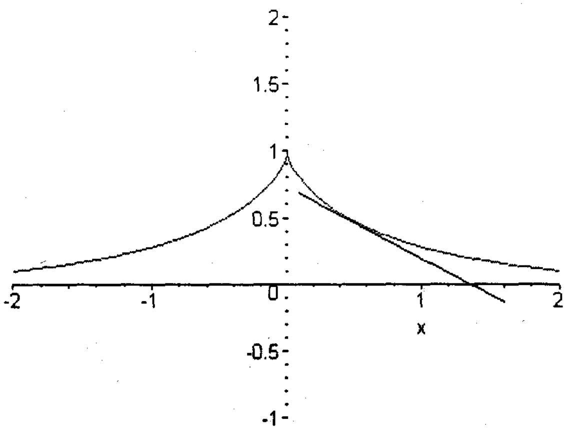

Рис. 3.8

На рисунке дополнительно построена касательная к произвольной точке трактрисы. Параметр t — угол, образованный ею с положительным на-

правлением оси Ox. Находим площадь поверхности вращения, получающейся при вращении правой части трактрисы при a = 1 вокруг оси Ox:

```
> evalf(int(2*Pi*y(t)*sqrt(diff(x(t),t)^2+diff(y(t),t)^2),
t=Pi/2..Pi));
```

$$6.283185308$$

Следовательно, так как:

```
> evalf(2*Pi);
```

$$6.283185308,$$

то результат 2π. При произвольном $a > 0$ появляется коэффициент a^2.

Ответ: $4\pi a^2$.

Таким образом, площадь поверхности псевдосферы с параметром a равна площади поверхности сферы радиуса a.

§ 4. Поверхностные интегралы

Двойные интегралы, сведенные к повторным двойным интегралам

$$\int_a^b dx \int_{y1(x)}^{y2(x)} f(x, y)dy,$$

вычисляются конструкцией int(int(f,y=y1(x)..y2(x)),x=a..b).

Задача ([5], 8.30). Вычислить

$$\iint_D (x + 2y)dxdy,$$

где область D ограничена кривыми $y = x^2$, $y = \sqrt{x}$.

Решение. *Построим область интегрирования:*

```
> plot([x^2,sqrt(x)],x=-1..1,-1..1,color=[red,green]);
```

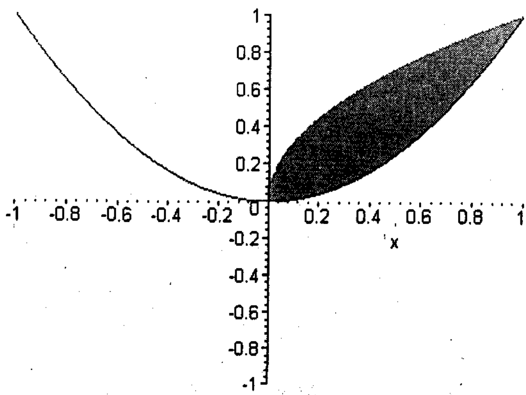

Рис. 3.9

Из рисунка 3.9 видно, что область интегрирования является правильной как по y, так и по x. Сводим двойной интеграл к повторному двойному интегралу следующим образом

$$\int_0^1 dx \int_{x^2}^{\sqrt{x}} (x+2y)dy$$

и вычисляем:

```
> int(int(x+2*y,y=x^2..sqrt(x)),x=0..1);
```

$$\frac{9}{20}$$

Ответ: $\frac{9}{20}$.

Разберем решение в Maple типовой задачи о нахождении объема цилиндрического бруса с помощью двойного интеграла.

Задача. Вычислить объем тела ограниченного поверхностями

$$z=0,\ z=(x-1)^2,\ y^2=x.$$

Решение. *Построим заданные поверхности в одной системе координат:*

```
>implicitplot3d({z=0,z=(x-1)^2,y^2=x},x=0..1,y=-
2..2,z=0..1,axes=normal);
```

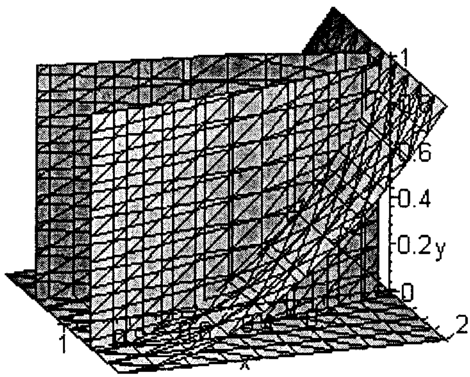

Рис. 3.10

Понять по рисунку 3.10, что представляет собою заданное тело, можно, но лучше применить оператор условного перехода if и построить тело следующим образом (рис. 3.11):

```
> plot3d(`if`(x>=y^2,(x-1)^2,0),x=0..1,y=- 1..1,axes=normal);
```

Проекция (D) тела на плоскость xOy (рис. 3.12):

```
> implicitplot({x=y^2,x=1},x=0..1,y=-1..1,axes=normal);
```

Объем тела, как следует из рисунков, равен

$$\iint_D (x-1)^2\,dxdy = \int_0^1 dx \int_{-\sqrt{x}}^{\sqrt{x}} (x-1)^2\,dy.$$

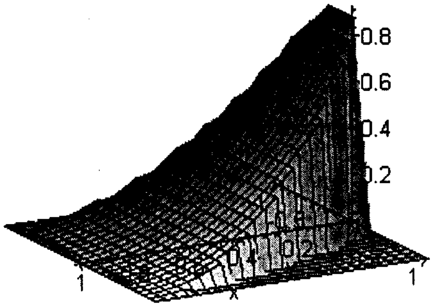

Рис. 3.11

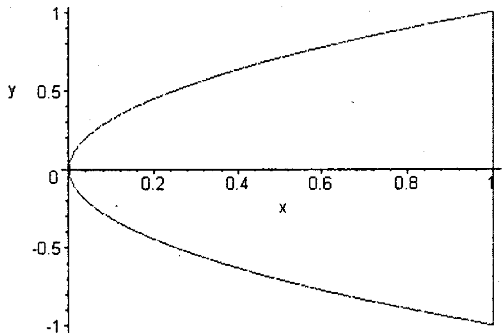

Рис. 3.12

Вычисляем объем тела:

```
> int(int((1-x)^2,y=-sqrt(x)..sqrt(x)),x=0..1);
```

$$\frac{32}{105}$$

Ответ: $\frac{32}{105}$.

Аналогично вычисляются тройные интегралы.

Задача ([5], 8.84). Найти объем тела, ограниченного указанными поверхностями

$$y = x^2,\ z = y,\ z + y = 2.$$

Решение. *Достаточно построить две поверхности, чтобы увидеть заданное тело и правильно расставить пределы интегрирования:*

```
> plot3d({`if`(y>=x^2,y,0),`if`(y>=x^2,2- y,0)},x=-1..1,
y=0..1,axes=normal);
```

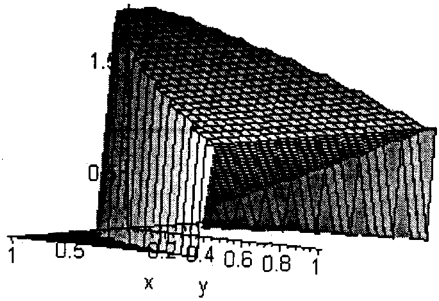

Рис. 3.13

Объем тела равен тройному интегралу от элемента объема, то есть

$$V = \iiint\limits_V dxdydz = \int_{-1}^{1} dx \int_{x^2}^{1} dy \int_{y}^{2-y} dz.$$

Вычисление объема тела:

```
> int(int(int(1,z=y..2-y),y=x^2..1),x=-1..1);
```

$$\frac{16}{15}$$

Ответ: $\frac{16}{15}$.

Обычно большие вычислительные трудности возникают при аналитических расчетах потоков векторных полей через поверхности. Посмотрим, как такие задачи решаются в Maple.

Задача. Дано векторное поле

$$\overline{F} = (y^2 - z^2)\cdot\overline{i} + (x^2 - z^2)\cdot\overline{j} + 2xy\cdot\overline{k}$$

и пирамида с вершинами O(0, 0, 0), A(1, 0, 0), B(0, 1, 0), C(0, 0, 2). Найти поток поля через внешнюю сторону поверхности пирамиды.

Решение. *Строим пирамиду с использованием оператора логического умножения and:*

```
> plot3d(`if`(x+y<=1and x>=0and y>=0,2-2*x- 2*y,0),
x=-1..1,y=-1..1,axes=normal);
```

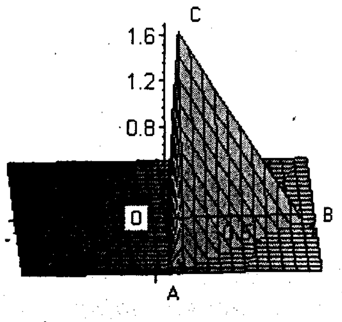

Рис. 3.14

Задаем векторное поле:

```
> F:=vector([y^2-z^2,x^2-z^2,2*x*y]);
```

$$F := [y^2 - z^2, x^2 - z^2, 2xy]$$

Поток векторного поля через ориентированную поверхность (S) вычисляется по формуле

$$\prod = \iint\limits_{(S)} \overline{F} \cdot \overline{n}^0 d\sigma,$$

где $\overline{n}^0$ *— поле единичных векторов, нормальных к поверхности, ориентированных в ту сторону, откуда видна выбранная сторона поверхности,* $d\sigma$ *— элемент площади, причем под знаком поверхностного интеграла справедливы соотношения*

$$d\sigma = \frac{dxdy}{\cos\gamma} = \frac{dxdz}{\cos\beta} = \frac{dydz}{\cos\alpha},$$

где в знаменателях — направляющие косинусы нормалей к поверхности. Для решения задачи надо вычислить потоки через грани пирамиды и найти их сумму.

1. Грань ABC является плоскостью с уравнением $2x + 2y + z = 2$*. Нормальный вектор, соответствующий заданной ориентации* $\overline{n} = (2,2,1)$*. Вводим на листовое поле* $\overline{n}^0 = \frac{\overline{n}}{|\overline{n}|} = (\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}})$ *и проводим расчеты:*

```
> n:=vector([2/sqrt(5),2/sqrt(5),1/sqrt(5)]);
```

$$n := \left[\frac{2}{5}\sqrt{5}, \frac{2}{5}\sqrt{5}, \frac{1}{5}\sqrt{5}\right]$$

```
> with(linalg):g:=dotprod(F,n);
```

$$g := \frac{2}{5}(y^2 - z^2)\sqrt{5} + \frac{2}{5}(x^2 - z^2)\sqrt{5} + \frac{2}{5}xy\sqrt{5}$$

```
> p:=subs(z=2-2*x-2*y,g)*sqrt(5);
```

$$p := \left(\frac{2}{5}(y^2 - (2 - 2x - 2y)^2\sqrt{5} + \frac{2}{5}(x^2 - (2 - 2x - 2y)^2)\sqrt{5} + \frac{2}{5}xy\sqrt{5}\right)\sqrt{5}$$

```
> int(int(p,y=0..1-x),x=0..1);
```

$$\frac{-11}{12}$$

2. Грань OAB имеет уравнение $z = 0$*, соответствующее поле нормальных векторов* $\overline{n}^0 = -\overline{k} = (0, 0, -1)$*. Подставляем последний вектор в формулу для вычисления потока и, учитывая, что при сведении поверхностного интеграла к двойному перед ним следует поставить знак минус, получаем:*

```
> n:=`n`:n:=vector([0,0,-1]);
```

$$n := [0, 0, -1]$$

```
> g:=`g`:g:=dotprod(F,n);
```

$$g := -2xy$$

```
> int(int(g,y=0..1-x),x=0..1);
```

$$\frac{-1}{12}$$

3. *Грань OAC имеет уравнение* $y = 0$, $\overline{n}^0 = -\overline{j} = (0, -1, 0)$. *Поэтому:*

```
> n:=`n`:n:=vector([0,-1,0]);
```

$$n := [0, -1, 0]$$

```
> g:=`g`:g:=dotprod(F,n);
```

$$g := -x^2 + z^2$$

```
> int(int(g,z=0..2-2*x),x=0..1);
```

$$\frac{1}{2}$$

4. *Так как грань OBC имеет уравнение* $x = 0$, $\overline{n}^0 = -\overline{i} = (-1, 0, 0)$, *то:*

```
> n:=`n`:n:=vector([-1,0,0]);
```

$$n := [-1, 0, 0]$$

```
> g:=`g`:g:=dotprod(F,n);
```

$$g := -y^2 + z^2$$

```
> int(int(g,z=0..2-2*y),y=0..1);
```

$$\frac{1}{2}$$

Суммируя полученные значения, получаем П = 0. Такой же результат получается по формуле Остроградского—Гаусса, так как дивергенция векторного поля равна нулю.

Ответ: 0.

Задача. По данным предыдущей задачи найти циркуляцию векторного поля вдоль замкнутого контура ABC, ориентированного положительно:

1) непосредственно,

2) по формуле Стокса.

Решение I. *Циркуляция вычисляется по формуле*

$$Ц = \int_{(C)} \overline{F} d\overline{r}$$

и равна сумме циркуляций по каждому участку.

1. *Ребро AB задается уравнениями z = 0, y = 1 − x, то есть dz = 0, dy = −dx. С помощью вектора $\overline{n}$ задаем подынтегральную функцию, исключаем y и интегрируем от A к B:*

```
> n:=vector([1,-1,0]);
```

$$n := [1, -1, 0]$$

```
> g:=dotprod(F,n);
```

$$g := y^2 - x^2$$

```
> p:=subs(y=1-x,g);int(p,x=1..0);
```

$$p := (1 - x)^2 - x^2$$

$$0$$

2. *Ребро BC задается уравнениями x = 0, z = 2 − 2y, то есть dx = 0, dz = −2dy:*

```
> n:=vector([0,1,-2]);
```

$$n := [0, 1, -2]$$

```
> g:=dotprod(F,n);
```

$$g := x^2 - z^2 - 4xy$$

```
> p:=subs(x=0,z=2-2*y,g);int(p,y=1..0);
```

$$p := -(2 - 2y)^2$$

$$\frac{4}{3}$$

3. *Ребро CA задается уравнениями y=0, z=2 − 2x, то есть dy = 0, dz = −2dx:*

```
> n:=vector([1,0,-2]);
```

$$n := [1, 0, -2]$$

```
> g:=dotprod(F,n);
```

$$g := y^2 - z^2 - 4xy$$

```
> p:=subs(y=0,z=2-2*x,g);int(p,x=0..1);
```

$$p := -(2 - 2x)^2$$

$$\frac{-4}{3}$$

$$Ц = 0 + \frac{4}{3} - \frac{4}{3} = 0.$$

II. *Находим ротор заданного векторного поля:*

```
> curl(F,[x,y,z]);
```

$$[2x + 2z, -2z - 2y, 2x - 2y]$$

Умножая скалярно на вектор $\overline{n}^0 = \frac{\overline{n}}{|\overline{n}|} = (\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}})$ и вычисляя поток ротации через площадку ABC, получаем:

```
> n:=vector([2/sqrt(5),2/sqrt(5),1/sqrt(5)]);
```

$$n := \left[\frac{2}{5}\sqrt{5}, \frac{2}{5}\sqrt{5}, \frac{1}{5}\sqrt{5}\right]$$

```
> dotprod(q,n);
```

$$\frac{2}{5}(3x+2z)\sqrt{5} + \frac{2}{5}(-2z-2y)\sqrt{5} + \frac{1}{5}(2x-2y)\sqrt{5}$$

```
> simplify(%);
```

$$\frac{6}{5}x\sqrt{5} - \frac{6}{5}\sqrt{5}y$$

```
> int(int(6/5*x*sqrt(5)-6/5*sqrt(5)*y,y=0..1-x),x=0..1);
```

$$0$$

Ответ: 0.

Задача ([5], 10.136). Проверить потенциальность векторного поля и найти потенциал

$$\overline{a} = (\frac{1}{z} - \frac{y}{x^2}) \cdot \overline{i} + (\frac{1}{x} - \frac{z}{y^2}) \cdot \overline{j} + (\frac{1}{y} - \frac{x}{z^2}) \cdot \overline{k}.$$

Решение.

```
> a:=[1/z-y/(x^2),1/x-z/(y^2),1/y-x/(z^2)];
```

$$a := \left[\frac{1}{z} - \frac{y}{x^2}, \frac{1}{x} - \frac{z}{y^2}, \frac{1}{y} - \frac{x}{z^2}\right]$$

```
> curl(a,[x,y,z]);
```

$$[0, 0, 0]$$

```
> potential(a,[x,y,z],`U`);
```

$$true$$

```
> U;
```

$$\frac{x}{z} + \frac{y}{x} + \frac{z}{y}$$

Ответ: $\frac{x}{z} + \frac{y}{x} + \frac{z}{y} + C$.

В Maple необозримое число систем криволинейных координат. Дифференциальные операции векторного анализа в них рекомендуется рассмотреть самостоятельно.

§ 5. Ряды

Сумма членов конечной числовой последовательности $x_n = f(n)$, где $n = 1, \ldots, k$, находится в Maple встроенной в ядро системы функцией add(f(n), n=1..k). В общем случае $n = n$min..$n$max:

```
> add(n,n=1..100);
```

$$5050$$

Хотите узнать, чему равна сумма первых пятидесяти четных натуральных чисел? Пожалуйста,

```
> add(2*n,n=1..50);
```

$$2550$$

Для функциональных последовательностей следует использовать более мощную функцию sum(f(x,n),n=1..k). Выведем с ее помощью формулу суммы первых n членов арифметической прогрессии, имеющей, как известно, вид:

$$a_1, a_1 + d, a_1 + 2d, \ldots, a_1 + (n-1)d, \ldots$$

Здесь a_1 — первый член, d — разность арифметической прогрессии. Находим данную сумму:

```
> sum(a[1]+(k-1)*d,k=1..n);
```

$$a_1(n+1) - \frac{3}{2}d(n+1) + \frac{1}{2}d(n+1)^2 - a_1 + d$$

После упрощения полученная формула принимает знакомый вид:

```
> factor(%);
```

$$\frac{1}{2}n(2a_1 - d + dn)$$

или, что тоже самое,

$$\frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$$

Пусть задана геометрическая прогрессия

$$b_1,\ b_1 \cdot q,\ b_1 \cdot q^2,\ \ldots,\ b_1 \cdot q^{n-1}, \ldots$$

Найдем сумму первых n ее членов:

```
> sum(b[1]*q^(k-1),k=1..n);
```

$$\frac{b_1 q^{(n+1)}}{q(q-1)} - \frac{b_1}{q-1}$$

```
> normal(%);
```

$$-\frac{b_1(-q^{(n+1)} + q)}{q(q-1)}$$

Приходим к известной формуле

$$\frac{b_1(1-q^n)}{1-q}$$

Рассмотрим применение встроенной функции sum к решению некоторых конкурсных задач для поступающих в вузы.

Задача ([11], 4.041). Найти целое положительное n из уравнения

$$(3+6+9+\ldots+3(n-1))+(4+5{,}5+7+\ldots+\frac{8+3n}{2})=137$$

Решение.

```
> sum(3*(k- 1),k=1..n)+sum((8+3*k)/2,k=0..n):isolve(%=137,n);
```

$$\{n=7\}$$

Ответ: 7.

Задача ([11], 4.061). Решить уравнение

$$\frac{x-1}{x}+\frac{x-2}{x}+\frac{x-3}{x}+\ldots+\frac{1}{x}=3$$

Решение.

```
> isolve(sum((x-k)/x,k=1..x-1)=3,x);
```

$$\{x=7\}$$

Ответ: 7.

Задача ([7], 8.1.13). В арифметической прогрессии 20 членов. Сумма членов, стоящих на четных местах, равна 250, а на нечетных 220. Найти десятый член прогрессии.

Решение. *По условиям задачи составляем систему, решаем ее и находим* a_{10}:

```
> solve({sum(a[1]+(2*k-1)*d,k=1..10)=250,
sum(a[1]+2*k*d,k=0..9)=220} ,{a[1],d});
```

$$\{d=3, a_1=-5\}$$

```
> -5+9*3;
```

$$22$$

Ответ: 22.

Найдем n-ю частичную сумму ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)(n+2)}$$

```
> sum(1/(k*(k+1)*(k+2)),k=1..n);
```

$$-\frac{1}{2}\frac{1}{(n+1)(n+2)}+\frac{1}{4}$$

Найдем n-ю частичную сумму гармонического ряда и убедимся, что ряд расходится:

```
> sum(1/k,k=1..n);
```

$$\Psi(n+1)+\gamma$$

```
> limit(Psi(n+1)+gamma,n=infinity);
```

$$\infty$$

Встроенная функция sum заменяет все признаки сходимости числовых рядов вместе взятые, более того, в случае сходимости ряда она находит его сумму. Если же ряд расходится, то возвращается он же или один из символов $\pm\infty$.

Задача ([5], 12.31). Пользуясь признаком Даламбера, исследовать на сходимость ряд:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+5}{2^n}.$$

Решение. *Применение признака Даламбера.*

```
> limit(((n+1)^2+5)*2^n/2^(n+1)/(n^2+5),n=infinity);
```

$$\frac{1}{2}$$

Так как $\frac{1}{2}<1$, *то ряд сходится.*

Применение встроенной функции sum дает сумму ряда:

```
> sum((n^2+5)/2^n,n=1..infinity);
```

$$11$$

Ответ: ряд сходится, S = 11.

Задача ([5], 12.32). Пользуясь признаком Даламбера, исследовать на сходимость ряд:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^n}{n!}.$$

Решение.

```
> limit((n+1)^(n+1)*n!/(n+1)!/n^n,n=infinity);
```

$$e$$

```
> sum(n^n/n!,n=1..infinity);
```

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^n}{n!}$$

Ответ: ряд расходится.

Задача ([5], 12.90). Исследовать на абсолютную и условную сходимость

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{3n-1}.$$

Решение.

```
> sum((-1)^(n+1)*1/(3*n-1),n=1..infinity);
```

$$\frac{1}{3}\ln(2)+\frac{1}{9}\pi\sqrt{3}$$

```
> sum(1/(3*n-1),n=1..infinity);
```

$$\infty$$

Ответ: ряд сходится условно.

Представление $f(x)$ в виде

$$\sum_{n=-m}^{n=k-1}a_n(x-x_0)^n+O((x-x_0)^k),$$

где $O((x-x_0)^k)$ — бесконечно малая величина к-го порядка относительно $x-x_0$, находится встроенной функцией series(f, $x = x_0$, k), по умолчанию $\kappa = 6$. Заданное значение k переустанавливается автоматически, если $a_k = \ldots = a_{k+r} = 0$ или, если коэффициенты разложения слишком малы. Слагаемое $O((x-x_0)^k)$ убирается встроенной функцией convert(%,polynom), при точном представлении оно отсутствует. Примеры:

```
> series(1/((x-1)*x),x=1,5);
```

$$(x-1)^{-1}-1+x-1-(x-1)^2+(x-1)^3-(x-1)^4+O((x-1)^5)$$

```
> convert(%,polynom);
```

$$\frac{1}{x-1}-2+x-(x-1)^2+(x-1)^3-(x-1)^4$$

```
> series(sin(x^3),x=0,7);
```

$$x^3+O(x^9)$$

```
> series(sin(x)/(x^3), x=0, 10 );
```

$$x^{-2}-\frac{1}{6}+\frac{1}{120}x^2-\frac{1}{5040}x^4+\frac{1}{362880}x^6+O(x^7)$$

При разложении $f(x)$ в ряд Тейлора по степеням $x - x_0$ можно использовать более слабую встроенную функцию taylor(f, $x = x_0$, k), в которой при $x_0 = 0$ вместо $x = x_0$ достаточно ввести x.

Задача ([4], 5.393). Написать формулу Тейлора 3-го порядка для функции $y=\dfrac{x}{x-1}$ в точке $x = 2$. Построить графики данной функции и ее многочлена Тейлора 3-й степени.

Решение.

```
> taylor(x/(x-1),x=2,4);
```

$$2-(x-2)+(x-2)^2-(x-2)^3+O((x-2)^4)$$

```
> convert(%,polynom);
```

$$4-x+(x-2)^2-(x-2)^3$$

```
> plot({x/(x-1),4-x+(x-2)^2-(x-2)^3},x=0..5,- 1..5,axes=normal);
```

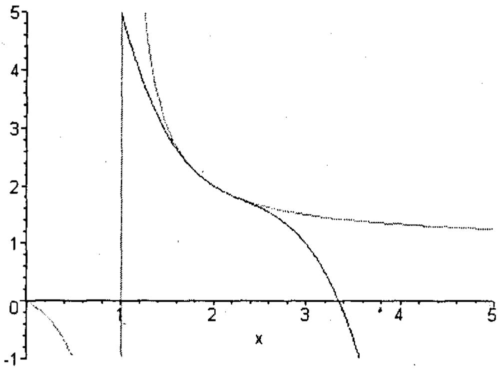

Рис. 3.15

В случае функции нескольких переменных применяется встроенная функция mtaylor, вызываемая из библиотеки встроенных функций.

Задача ([4], 7.185). Разложить по формуле Тейлора в окрестности точки (1, 1, 0) до членов второго порядка включительно функцию $f(x, y, z) = \ln(xy + z^2)$.

Решение.

```
> readlib(mtaylor);
```

$$\text{proc}()\ \ldots\ \text{end proc}$$

```
> mtaylor(ln(x*y+z^2),[x=1,y=1,z=0],3);
```

$$y-2+x-\frac{1}{2}(x-1)^2+z^2-\frac{1}{2}(y-1)^2$$

Ответ: $x-1+y-1-\frac{1}{2}(x-1)^2-\frac{1}{2}(y-1)^2+z^2$.

Асимптотические разложения находятся встроенной функцией asympt. Например,

```
> asympt(x/(x+1),x);
```

$$1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x^3}+\frac{1}{x^4}-\frac{1}{x^5}+O\left(\frac{1}{x^6}\right)$$

Разложение в ряд Лорана по степеням $z - z_0$ функции комплексного переменного $f(z)$ находится встроенной в пакет numapprox функцией laurent.

Задача ([5], 12.364). Разложить в ряд Лорана по степеням $z - z_0$:

$$\frac{z}{(z^2+1)^2},\ z_0 = i.$$

Решение.

```
> with(numapprox);
```

[*chebdeg, chebmult, chebpade, chebsort, chebyshev, confracform, hermite_pade, hornerform, infnorm, laurent, minimax, pade, remez*]

```
> laurent(z/(z^2+1)^2,z=I);
```

$$-\frac{1}{4}I(z-I)^{-2} - \frac{1}{16}I + \frac{1}{16}(z-I) + \frac{3}{64}I(z-I)^2 - \frac{1}{32}(z-I)^3 - \\ -\frac{5}{256}I(z-I)^4 + O((z-I)^5)$$

Ответ: $-\dfrac{i}{4(z-I)^2} - \dfrac{1}{8}\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{k\cdot i^k(z-i)^{k-1}}{2^k}$.

В окрестности точки $z_0 = \infty$ ряд Лорана находится командой asympt.

Задача ([5], 12.353). Найти разложение в ряд Лорана и установить область сходимости:

$$\frac{1}{z(z-1)},\ z_0 = \infty.$$

Решение.

```
> asympt(1/(z*(z-1)),z);
```

$$\frac{1}{z^2} + \frac{1}{z^3} + \frac{1}{z^4} + \frac{1}{z^5} + O\left(\frac{1}{z^6}\right)$$

Область сходимости очевидна: $|z| > 1$.

Ответ: $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{1}{z^n}$.

Глава IV
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ. РЯДЫ ФУРЬЕ

§ 1. Дифференциальные уравнения

Основной пакет методов решений дифференциальных уравнений DEtools системы Maple вызывается командой:

```
> with(DEtools);
```

Для краткости список встроенных функций пакета не приводится.

Начнем с работы классификатора дифференциальных уравнений, входящего в этот пакет. Если ввести в командную строку ключевое слова odeadvisor, выделить его и нажать <F1>, то справочная система откроется на странице, содержащей основные виды дифференциальных уравнений, различаемых Maple.

* Дифференциальные уравнения 1-го порядка:
Abel, Abel2A, Abel2C, Bernoulli, Chini,
Clairaut, dAlembert, exact, homogeneous, homogeneousB,
homogeneousC, homogeneousD, homogeneousG, linear, patterns,
quadrature, rational, Riccati, separable, sym_implicit

* Дифференциальные уравнения 2-го порядка:
Bessel, Duffing, ellipsoidal, elliptic, Emden,
erf, exact_linear, exact_nonlinear, Gegenbauer, Halm,
Hermite, Jacobi, Lagerstrom, Laguerre, Lienard,
Liouville, linear_ODEs, linear_sym, missing, Painleve,
quadrature, reducible, sym_Fx, Titchmarsh, Van_der_Pol

* Дифференциальные уравнения высших порядков:
quadrature, missing, exact_linear, exact_nonlinear, reducible,
linear_ODEs

После щелчка ЛКМ по виду дифференциального уравнения происходит переход на страницу справочной системы, где приводится общий вид дифференциального уравнения, описание и примеры. Например, щелкнув ЛКМ по ключевому слову separable, узнаем, что это класс дифференциальных уравнений с разделяющимися переменными, щелкнув по exact, выясняем, что это дифференциальные уравнения в полных дифференциалах (потенциальная функция C(x, y)) и т. д. В частности, homogeneous — однородные дифференциальные уравнения различных видов.

Пусть требуется определить тип уравнения

$$y'\sqrt{1-x^2}=1+y^2.$$

Вызываем, если только приступили к работе, встроенную функцию odeadvisor:

```
> with(DEtools,odeadvisor);
```

$$[odeadvizor]$$

Видим, что она готова к работе. Заполняем командную строку указанным ниже образом и нажимаем <Enter>:

```
> odeadvisor(diff(y(x),x)*sqrt(1-x^2)=1+y(x)^2,y(x));
```

$$[\_separable]$$

Как и следовало ожидать, это уравнение с разделяющимися переменными. Понятно, что уравнение может принадлежать нескольким классам. В таких случаях odeadvisor возвращает пользователю их список.

По существу все методы решений дифференциальных уравнений и систем таких уравнений, рассматриваемые в курсе высшей математики втузов, заменяются в Maple одной встроенной функцией dsolve, входящей в ядро системы. Ее простейшая конструкция dsolve (уравнение, неизвестная функция), причем по умолчанию решение ищется в явном виде. Формы ответов, как и методы решений, выбираются автоматически или устанавливаются пользователем с помощью экстра-аргументов, с полными списками значений которых можно ознакомиться в справочной системе Maple, выделив в командной строке dsolve и нажав <F1>. Далее приведены их основные значения и соответствующие примеры.

Задача ([5], 9.27). Найти общее решение дифференциального уравнения с разделяющимися переменными:

$$y'\sqrt{1-x^2}=1+y^2.$$

Решение.

```
> dsolve(diff(y(x),x)*sqrt(1-x^2)=1+y(x)^2,y(x));
```

$$y(x)=\tan(\arcsin(x)+\_C1)$$

Проверка:

```
> subs(y(x) = tan(arcsin(x)+_C1),1+y(x)^2-
diff(y(x),x)*sqrt(1-x^2));
```

$$1+\tan(\arcsin(x)+\_C1)^2-\left(\frac{\partial}{\partial x}\tan(\arcsin(x)+\_C1)\right)\sqrt{1-x^2}$$

```
> evalf(%);
```

$$0$$

Ответ: $y=tg(\arcsin x+C)$.

Если требуется получить не общее решение, а общий интеграл обыкновенного дифференциального уравнения, то добавляется экстра-аргумент implicit. Найдем общий интеграл последнего дифференциального уравнения:

```
> dsolve(diff(y(x),x)*sqrt(1- x^2)=1+y(x)^2,y(x),implicit);
```

$$\arcsin(x) - \arctan(y(x)) + \_C1 = 0$$

Задача ([5], 9.45). Найти частное решение дифференциального уравнения, удовлетворяющее заданному начальному условию

$$y' tgx = y, \ y(\frac{\pi}{2}) = 1.$$

Решение. *Частное решение ОДУ по заданному начальному условию находится встроенной функцией dsolve, в которой они объединяются фигурными скобками:*

```
> dsolve({diff(y(x),x)*tan(x)=y(x),y(Pi/2)=1},y(x));
```

$$y(x) = \sin(x)$$

Ответ: $y = \sin x$.

Задача ([5], 9.64). Найти частное решение однородного дифференциального уравнения 1-го порядка, удовлетворяющее заданному начальному условию

$$xy' = y \ln \frac{y}{x}, \ \ y(1) = 1.$$

Решение.

```
> dsolve({diff(y(x),x)*x=y(x)*ln(y(x)/x),y(1)=1},y(x));
```

$$y(x) = e^{(1-x)} x$$

Ответ: $y = xe^{1-x}$.

Задача ([5], 9.89). Решить уравнение Бернулли

$$y' = yctgx + \frac{y^2}{\sin x}.$$

Решение.

```
> dsolve(diff(y(x),x)=(y(x)*cos(x))/sin(x)+(y(x)^2)/sin(x),y(x));
```

$$y(x) = -\frac{\sin(x)}{x - \_C1}$$

Проверка:

```
> subs(y(x) = -sin(x)/(x-
_C1),(y(x)*cos(x))/sin(x)+(y(x)^2)/sin(x)-diff(y(x),x));
```

$$-\frac{\cos(x)}{x - \_C1} + \frac{\sin(x)}{(x - \_C1)^2} - \left(\frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{\sin(x)}{x - \_C1}\right)\right)$$

```
> evalf(%);
```

$$0$$

Ответ: $y = \dfrac{\sin x}{C - x}$.

С педагогическими целями предусмотрена возможность, с помощью экстра-аргумента useInt, вывода решения в квадратурах. Окончательный результат выводится командой value. Например, таким образом, для последнего уравнения получаем:

```
> dsolve(diff(y(x),x)=(y(x)*cos(x))/sin(x)+(y(x)^2)/sin(x),y(x),
useInt);
```

$$y(x) = \frac{e^{\left(\int \frac{\cos(x)}{\sin(x)} dx\right)}}{\int -\frac{e^{\left(\int \frac{\cos(x)}{\sin(x)} dx\right)}}{\sin x} dx + \_C1}$$

```
> value(%);
```

$$y(x) = \frac{\sin(x)}{-x + \_C1}$$

Параметрические решения находятся экстра-аргументом parametric.

Задача ([10], 1.122). Решить уравнение: $\ln y' + \sin y' - x = 0$.
Решение.

```
> dsolve(ln(diff(y(x),x))+sin(diff(y(x),x))- x=0,y(x),parametric);
```

$$[x(\_T) = \ln(\_T) + \sin(\_T),\ y(\_T) = \cos(\_T) + \_T\sin(\_T) + \_T + \_C1]$$

Ответ: $x = \ln t + \sin t,\ \ y = \cos t + t\sin t + t + C$.

Задача ([5], 9.363). Найти общее решение неоднородного линейного дифференциального уравнения 2-го порядка с постоянными коэффициентами и правой специальной частью:

$$y'' + 5y' + 6y = e^{-x} + e^{-2x}.$$

Решение.

```
> dsolve(diff(y(x),x$2)+5*diff(y(x),x)+6*y(x)=exp(-x)+exp(-
2*x),y(x));
```

$$y(x) = e^{(-3x)}\,\_C2 + e^{(-2x)}\,\_C1 + \frac{1}{2}(e^x - 2 + 2x)e^{(-2x)}$$

Убедимся, что частное решение найдено правильно:

```
> subs(y(x)=1/2*(exp(x)-2+2*x)*exp(-2*x),diff(y(x),x$2)
+5*diff(y(x),x)+6*y(x)-exp(-x)-exp(-2*x));
```

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{1}{2}(e^x - 2 + 2x)e^{(-2x)}\right)\right) + 5\left(\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{2}(e^x - 2 + 2x)e^{(-2x)}\right)\right) +$$

$$+3(e^x - 2 + 2x)e^{(-2x)} - e^{(-x)} - e^{(-2x)}$$

```
> simplify(%);
```

$$0$$

Ответ: $y = C_1 e^{-3x} + C_2 e^{-2x} + \frac{1}{2}(e^x - 2 + 2x)e^{-2x}$.

Задача ([5], 9.371). Найти частное решение дифференциального уравнения, удовлетворяющее заданным начальным условиям:

$$y''' - y' = -2x,\ y(0) = 0,\ y'(0) = 2,\ y''(0) = 2.$$

Решение. *Задавая значения производных, применяя дифференциальный оператор D, получаем:*

```
> dsolve({diff(y(x),x$3)-diff(y(x),x)=- 2*x,y(0)=0,D(y)(0)=2,
D(D(y))(0)=2},y(x));
```

$$y(x) = \mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{(-x)} + x^2$$

Ответ: $y = e^x - e^{-x} + x^2$.

Аналогично решаются системы дифференциальных уравнений, вводящиеся в общих фигурных скобках. Таким же образом вводятся неизвестные.

Задача ([5], 9.444). Найти решение системы дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = x + y - \cos(t),\ \dot{y} = -2x - y + \sin t + \cos t.$$

Решение.

```
> dsolve({diff(x(t),t)=x(t)+y(t)-cos(t),diff(y(t),t)=-
2*x(t)-y(t)+sin(t)+cos(t)},{x(t),y(t)});
```

$$\{x(t) = \sin(t)\_C2 + \cos(t)\_C1 - \cos(t)t,$$

$$y(t) = \cos(t)\_C2 - \sin(t)\_C1 + \sin(t)t - \sin(t)\_C2 - \cos(t)\_C1 + \cos^*t)t\}$$

```
> collect(%,t):collect(%,_C1):collect(%,_C2);
```

$$\{x(t) = \sin(t)\_C2 + \cos(t)\_C1 - \cos(t)t,$$

$$y(t) = (\cos(t) - \sin(t))\_C2 + (-\sin(t) - \cos(t))\_C1 + (\sin(t) + \cos(t))t\}$$

Ответ:
$x = C_1 \cos t + C_2 \sin t - t\cos t,$
$y = -C_1(\sin t + \cos t) + C_2(\cos t - \sin t) + t(\sin t + \cos t).$

Если необходимо найти частное решение системы дифференциальных уравнений, то в первые фигурные скобки добавляются начальные условия. Найдем решение последней системы при x(0) = 1, y(0) = 2:

```
> dsolve({diff(x(t),t)=x(t)+y(t)-cos(t),diff(y(t),t)=-
2*x(t)-y(t)+sin(t)+ cos(t),x(0)=1,y(0)=2},{x(t),y(t)});
```

$$\{x(t) = 3\sin(t) + \cos(t) - \cos(t)t, y(t) = 2\cos(t) - 4\sin(t) + \sin(t)t + \cos(t)t\}$$

Если требуется представить компоненты решения степенными рядами, то добавляется экстра-аргумент series. Для последней системы, в частности, получаем:

```
> dsolve({diff(x(t),t)=x(t)+y(t)-cos(t),diff(y(t),t)=-
2*x(t)-y(t)+sin(t)+ cos(t),x(0)=1,y(0)=2},{x(t),y(t)},series);
```

$$\{x(t) = 1 + 2t - \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{24}t^4 - \frac{1}{60}t^5 + O(t^6),$$

$$y(t) = 2 - 3t + \frac{1}{6}t^3 - \frac{1}{12}t^4 + \frac{1}{120}t^5 + O(t^6)\}$$

Численное решение проводится автоматически добавлением экстра-аргумента numeric. При этом результат выводится на листовое поле в виде процедуры, с которой можно обращаться как с вектор-функцией. Если задано output = listprocedure, то она выводится в виде списка, а если output = array, то в виде массива. Уберем в последней командной строке series и решим систему на отрезке [0, 1], h = 0.1 численно:

```
> restart:V:=dsolve({diff(x(t),t)=x(t)+y(t)-
cos(t),diff(y(t),t)=-2*x(t)-y(t)+sin(t)+
cos(t),x(0)=1,y(0)=2},{x(t),y(t)}, numeric,output=listprocedure);
```

$$V := [t = (\mathrm{proc}(t)\ \ldots\ \mathrm{end\ proc}),\ x(t) = (\mathrm{proc}(t)\ \ldots\ \mathrm{end\ proc}),$$

$$y(t) = (\mathrm{proc}(t)\ \ldots\ \mathrm{end\ proc})]$$

```
> X:=subs(V,x(t));
```

$$X := \mathrm{proc}(t)\ \ldots\ \mathrm{end\ proc}$$

```
> Y:=subs(V,y(t));
```

$$Y := (\mathrm{proc}(t) \ldots\ \mathrm{end\ proc})$$

```
> M1:=seq(0.1*t,t=0..10):M2:=seq(X(0.1*t),t=0..10):M3:=seq(Y(0.1*t
),t=0..10):
> M:=matrix([[M1],[M2],[M3]]):N:=transpose(M);
```

$$N := \mathrm{transpose}(M)$$

```
> evalm(N);
```

$$\begin{bmatrix} 0. & 1. & 2. \\ .1 & 1.195004145 & 1.700158193 \\ .2 & 1.380061351 & 1.401202937 \\ .3 & 1.555296339 & 1.103848927 \\ .4 & 1.720891723 & .8086402888 \\ .5 & 1.877068096 & .5159667779 \\ .6 & 2.024061784 & .2260881002 \\ .7 & 2.162105895 & -.06084465986 \\ .8 & 2.291409761 & -.3447608567 \\ .9 & 2.412141863 & -.6256446487 \\ 1.0 & 2.524413138 & -.9035062850 \end{bmatrix}$$

Построение на фазовой плоскости полученного решения:

```
> K:=evalm(N):plot([K[i,2],K[i,3],i=1..11],x=0..3,-1..3,
style=point,color=red);
```

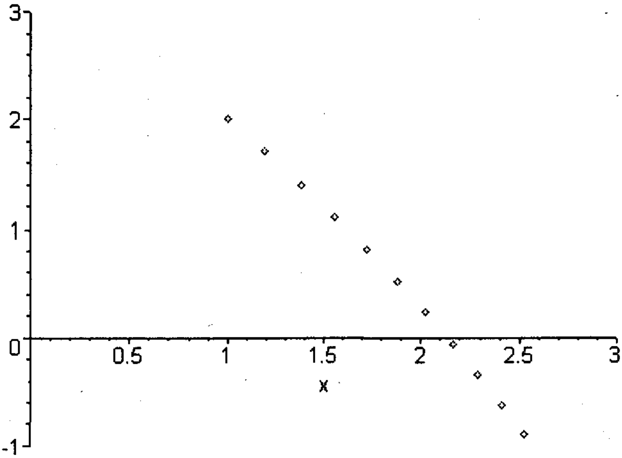

Рис. 4.1

В примерах справочной системы Maple, видимо, с учебными целями, широко практикуются обозначения математических объектов (дифференциальных уравнений, начальных условий и т. д.). Такой подход нельзя назвать рациональным, но в некоторых случаях он может оказаться полезным. Поэтому следующая задача решается именно таким способом.

Задача ([5], 9.441). Найти решение системы дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = 3x - 2y + t, \;\; \dot{y} = 3x - 4y$$

Решение.

```
> sys:={diff(x(t),t)=3*x(t)- 2*y(t)+t,diff(y(t),t)=3*x(t)-4*y(t)}:
> s:={x(t),y(t)}:
> dsolve(sys,s);
```

$$\{x(t) = \mathrm{e}^{(-3t)}\_C2 + \mathrm{e}^{(2t)}\_C1 - \frac{5}{18} - \frac{2}{3}t,$$

$$y(t) = 3\mathrm{e}^{(-3t)}\_C2 + \frac{1}{2}\mathrm{e}^{(2t)}\_C1 - \frac{1}{12} - \frac{1}{2}t\}$$

Ответ: $x = C_1e^{2t} + C_2e^{-3t} - \frac{5}{18} - \frac{2}{3}t$, $y = \frac{C_1}{2}e^{2t} + 3C_2e^{-3t} - \frac{1}{12} - \frac{1}{2}t$.

В Maple имеется операторный метод решения линейных дифференциальных уравнений и систем. Решение операторным методом системы дифференциаль-

ных уравнений задачи 9.444 при начальных условиях $x(0) = 1$, $y(0) = 1$ имеет вид:

```
> dsolve({diff(x(t),t)=x(t)+y(t)-cos(t),diff(y(t),t)=-
2*x(t)-y(t)+sin(t)+ cos(t),x(0)=1,y(0)=2},{x(t),y(t)}, laplace);
```

$$\{x(t) = \cos(t) + 3\sin(t) - t\cos(t),\ y(t) = -4\sin(t) + 2\cos(t) + t\cos(t) + \sin(t)t\}$$

Задача ([5], 13.122). Найти при нулевых начальных условиях решение дифференциального уравнения x" + x = f(t), где

$$f(t) = \begin{cases} 1 & \text{при } 0 \le t < 1 \\ -1 & \text{при } 1 \le t < 2 \\ 0 & \text{при } t \ge 2 \end{cases}$$

Решение.

```
> dsolve({diff(x(t),t$2)+x(t)=piecewise(t<0,0,t<1,1,t<2,-
1,t>=2,0),x(0)=0,D(x)(0)=0},x(t),method=laplace);
```

$$x(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ undefined & t = 0 \\ -\cos(t) + 1 & t < 1 \\ undefined & t = 1 \\ 2\cos(t-1) - \cos(t) - 1 & t < 2 \\ undefined + 2\cos(1) - \cos(2) & t = 2 \\ -\cos(t-2) + 2\cos(t-1) - \cos(t) & 2 < t \end{cases}$$

Ответ: $x(t) = 2(\sin^2 \dfrac{t}{2} \cdot H(t) - 2\sin^2 \dfrac{t-1}{2} \cdot H(t-1) + \sin^2 \dfrac{t-2}{2} \cdot H(t-2))$, $H(t-k)$ — единичная функция Хевисайда, «запаздывающая» на k.

Удивительный факт, если правую часть уравнения ввести с помощью единичных функций Хевисайда, то и ответ будет выражен через них:

```
> dsolve({diff(x(t),t$2)+x(t)=Heaviside(t)-
2*Heaviside(t-1)+Heaviside(t-
2),x(0)=0,D(x)(0)=0},x(t),method=laplace);
```

$$x(t) = -\cos(t) + 1 - 4\text{Heaviside}(t-1)\sin\left(\frac{1}{2}t - \frac{1}{2}\right)^2 + 2\text{Heaviside}(t-2)\sin\left(\frac{1}{2}t - 1\right)^2$$

Maple — исключительно понятливая система.

В Maple, если есть необходимость, можно с помощью встроенной функции reduceOrder пакета DEtools понизить порядок дифференциального уравнения, решить линейное дифференциальное уравнение методом вариации произвольных постоянных, используя встроенную функцию varparam этого же пакета, и многое-многое другое. Однако на всех этих, редко используемых возможностях, останавливаться не будем.

§ 2. Геометрические построения, связанные с ОДУ

Численные решения, получаемые функцией dsolve, имеющей экстра-аргумент numeric, графически изображаются встроенной функцией odeplot (решение, [переменные], пределы решения, необязательные параметры) пакета plots.

Пусть требуется найти численное решение задачи Коши $y' = \sin(xy)$, $y(0) = 3$ и построить график решения. Находим численное решение:

```
> V:=dsolve({diff(y(x),x)=sin(x*y(x)),y(0)=3},y(x),numeric);
```

$$V := \mathrm{proc}(rkf45\_\ x)\ \ldots\ \mathrm{end\,proc}$$

Строим график:

```
> with(plots):odeplot(V,[x,y(x)],0..3);
```

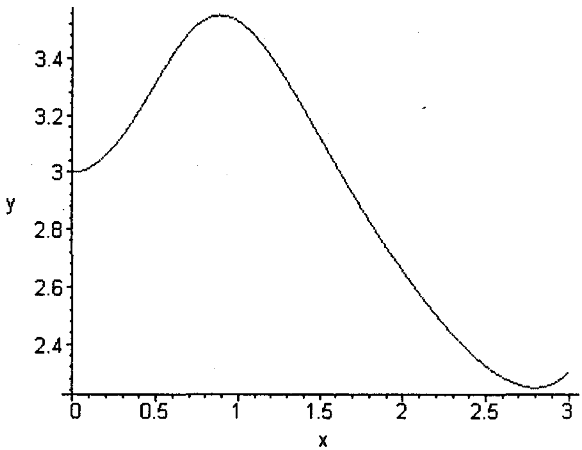

Рис. 4.2

Аналогичным образом строятся графики компонент численного решения задачи Коши системы дифференциальных уравнений.

Рассмотрим математическую модель хищники — жертвы, к которой привела необходимость объяснения колебаний рыбных уловов в Адриатическом море[3]. Имеются два биологических вида, численностью в момент времени t, соответственно, x(t) и y(t), причем особи первого вида являются пищей (жертвами) для особей второго вида (хищников). Требуется определить численности популяций в произвольный момент времени, если в начальный момент времени они известны. Математическая модель задачи — система уравнений Вольтерра-Лотка:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = (a - by)x, \\ \dfrac{dy}{dt} = (-c + dx)y, \end{cases}$$

[3] **Амелькин В. В. Дифференциальные уравнения в приложениях. — М.: Наука, 1987, —**

где a, b, c, d — положительные коэффициенты.

Задача. Провести расчет численности популяций в модели Вольтерра-Лотка, если

$$x(0) = 3,\ y(0) = 1,\ a = 4,\ b = 3,\ c = 2,\ d = 1,\ t \in [0,10].$$

Построить графики численности популяций.

Решение.

```
> V:=dsolve({diff(x(t),t)=(4- 3*y(t))*x(t),diff(y(t),t)=(-
2+x(t))*y(t),x(0)=3,y(0)=1},{x(t),y(t)},numeric);
```

$$V := \mathrm{proc}(rkf45\_\ x)\ \ldots\ \mathrm{end\,proc}$$

Построение графиков численности популяций (рис. 4.3):

```
> with(plots):odeplot(V,[[t,x(t)],[t,y(t)]],0..10);
```

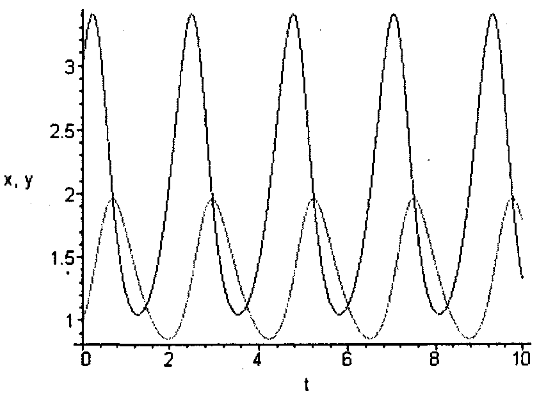

Рис. 4.3

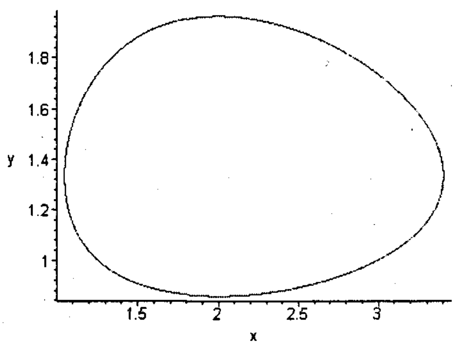

Рис. 4.4

Конструкцией odeplot(V,[x(t),y(t)],a..b) строятся фазовые кривые. Построение на фазовой плоскости решения последней задачи (рис. 4.4):

```
> odeplot(V,[x(t),y(t)],0..5);
```

Геометрические построения упрощаются графическими функциями пакета DEtools, назначения которых:

DEplot — построение плоских интегральных кривых и фазовых траекторий;

DEplot3d — построение пространственных интегральных кривых и фазовых траекторий;

dfieldplot — построение плоских полей направлений, определяемых дифференциальным уравнением или системой ДУ;

phaseportrait — построение фазовых траекторий или их проекций на координатные плоскости.

Порядок ввода параметров: дифференциальное уравнение или система ОДУ, неизвестные функции, диапазон изменения независимой переменной, начальные условия, необязательные параметры.

Начальные условия, независимо от того, строится одна интегральная кривая (фазовая траектория) или несколько, задаются списком, то есть в виде «квадратные скобки в квадратных скобках». К необязательным параметрам, кроме диапазонов изменения зависимых переменных, относятся:

arrows = <...> — тип стрелок векторного поля (SMALL, LARGE, MEDIUM, LINE);

color = <...> — цвет стрелок;

linecolor = <...> — цвет линий;

method = <...> — метод решения (\`rk4\`, \`rkf45\` и т. д.);

stepsize = <...> — шаг решения.

Последний параметр особенно важен, если программа «ленится» и появляются ломанные. Координатная плоскость, на которую проектируется фазовая кривая, задается параметром scene=[,].

Задача ([10], 1.29). Построить интегральные кривые уравнения $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{\sin y}{\sin x}$.

Решение.

```
> DEplot(D(y)(x)=sin(y(x))/sin(x),y(x),x=-4..4,y=-4..4);
```

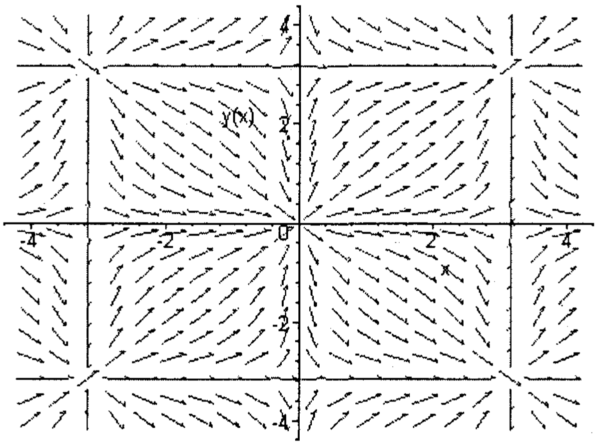

Рис. 4.5

Применение графической функции DEplot к построению фазовых траекторий разобранной задачи хищники — жертвы (рис. 4.6):

```
> DEplot([D(x)(t)=(4-3*y(t))*x(t),D(y)(t)=(- 2+x(t))*y(t)],
[x(t),y(t)],t=0..3,x=0..6,y=0..4,title=`Хищники- жертвы`);
```

Построение фазовых траекторий, соответствующих начальным условиям $x(0) = 3$, $y(0) = 1$ и $x(0) = 2$, $y(0) = 0{,}5$ (рис. 4.7):

```
> DEplot([D(x)(t)=(4-3*y(t))*x(t),D(y)(t)=(- 2+x(t))*y(t)],
[x(t),y(t)],t=0..3, [[x(0)=3,y(0)=1], [x(0)=2,y(0)=0.5]],x=0..6,
y=0..4,stepsize=0.05,method=rkf45,linecolor=[black,blue],arrows=
`MEDIUM`,title=`Хищники-жертвы`);
```

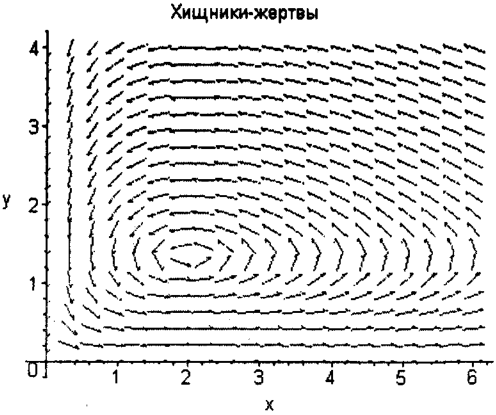

Рис. 4.6

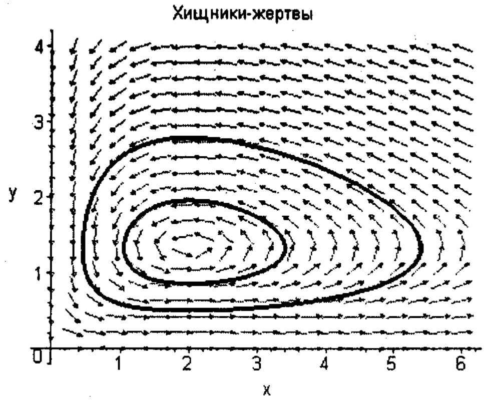

Рис. 4.7

Построение с помощью DEplot3d решения задачи Коши:

$$\frac{dx}{dt} = y + (1 - x^2 - y^2),\ \frac{dy}{dt} = -x + (1 - x^2 - y^2),\ x(0) = 1,\ y(0) = 1:$$

```
> DEplot3d({D(x)(t)=y(t)+(1-x(t)^2-
y(t)^2)*x(t),D(y)(t)=-x(t)+(1-x(t)^2-
y(t)^2)*y(t)},{x(t),y(t)},t=0..10, [[x(0)=1,y(0)=1]], stepsize=0.1
,linecolor=t/2);
```

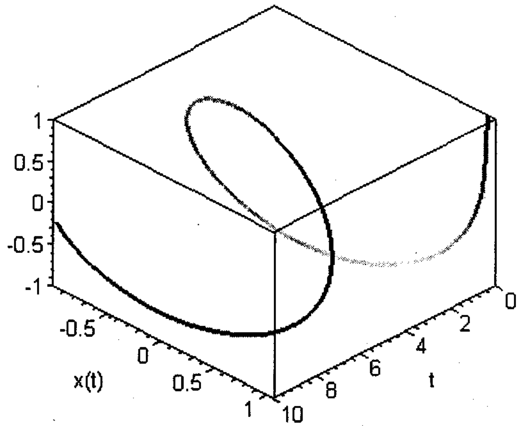

Рис. 4.8

На следующем фрагменте листового поля построены фазовые траектории системы дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{dt} = -x + z,\ \frac{dy}{dt} = -y - z,\ \frac{dz}{dt} = y - z,$$

проходящие при t = 0 через точки (0, 1,0), (0,05, 1, 0), (0,1, 1, 0):

```
> DEplot3d({D(x)(t)=-x(t)+z(t),D(y)(t)=-y(t)- z(t),D(z)(t)=y(t)-
z(t)},{x(t),y(t),z(t)},t=0..5,[[x(0)=0,y(0)=1,z(0)=0],[ x(0) =0.05,
y(0)=1, z(0)=0],[ x(0)=0.1, y(0)=1, z(0)=0]],
stepsize=0.1,linecolor=[red,blue,green]);
```

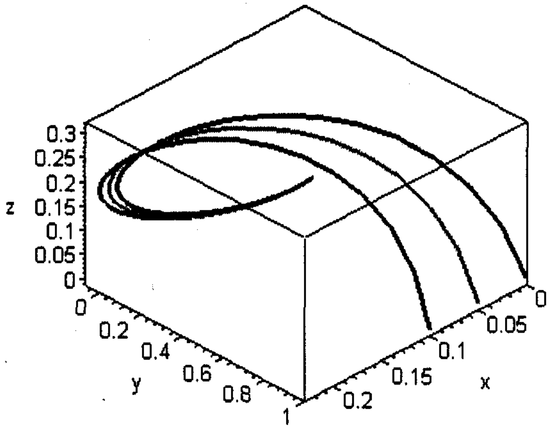

Рис. 4.9

Как видно из рис. 4.9, DEplot3d одновременно работает и как микроскоп. Найдем изображение проекции на плоскость xOy первой фазовой траектории:

```
> phaseportrait([D(x)(t)=-x(t)+z(t),D(y)(t)=-y(t)-
z(t),D(z)(t)=y(t)-z(t)],[x(t),y(t),z(t)],t=0..5,[[x(0)=0,y(0)=
1,z(0)=0]], scene=[x(t),y(t)],stepsize=0.1,linecolor=blue);
```

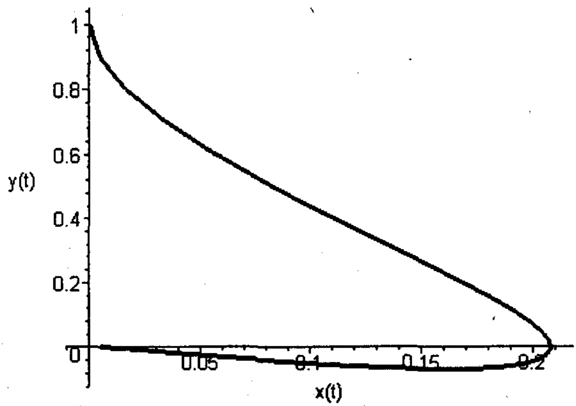

Рис. 4.10

С помощью dfieldplot построим векторное поле скоростей, определяемое системой

$$\frac{dx}{dt} = xy + 4,\ \frac{dy}{dt} = x^2 + y^2 - 17,$$

и найдем графически число точек равновесия системы:

```
> dfieldplot([D(x)(t)=x(t)*y(t)+4,D(y)(t)=x(t)^2+y(t)^2-
17],[x(t),y(t)],t=0..5,x=-6..6,y=- 6..6,arrows=MEDIUM);
```

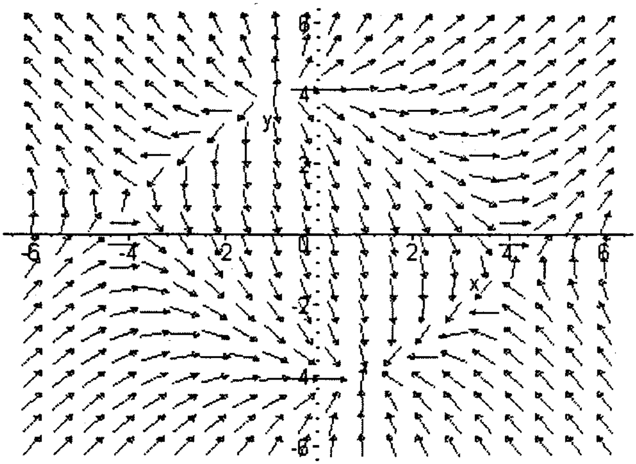

Рис. 4.11

Как видно из рисунка 4. 11, имеются четыре положения равновесия.

§ 3. Динамика материальной точки

Пусть материальная точка массы m в момент времени t_0 находится в точке $\overline{x}_0$ и имеет вектор скорости $\dot{\overline{x}}_0$. Тогда, согласно классической механике Ньютона, траектория ее движения $\overline{x} = \overline{x}(t)$ определяется системой дифференциальных уравнений 2-го порядка:

$$\overline{F} = m\ddot{\overline{x}},$$

где $\overline{F} = \overline{F}(t, \overline{x}, \dot{\overline{x}})$ — действующая на точку сила. Данная система сводится к системе дифференциальных уравнений 1-го порядка. Например, при n = 2, m = 1 она записывается в виде:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = u \\ \dfrac{du}{dt} = F_1 \\ \dfrac{dy}{dt} = v \\ \dfrac{dv}{dt} = F_2 \end{cases}$$

Если существует такая функция $U(x, y, z)$, что

$$\frac{\partial U}{\partial x} = -F_1,\ \frac{\partial U}{\partial y} = -F_2,\ \frac{\partial U}{\partial z} = -F_3,$$

то она называется потенциалом (потенциальной энергией), а силовое поле — потенциальным. Закон сохранения энергии движущейся материальной точки в потенциальном силовом поле:

$$\frac{m\left|\dot{\bar{x}}\right|^2}{2} + U = E,\ E = const$$

Окружающее нас силовое поле (локально, m = 1) имеет потенциальную функцию $U = gy \Rightarrow F_1 = 0,\ F_2 = -g$, где $g \approx 9{,}8\,\frac{м}{c^2}$ — ускорение свободного падения материальной точки. Его называют полем силы тяжести. Графические изображения потенциальной функции:

```
> with(plots):densityplot((x,y)->9.8*y,-20..20,0..20);
```

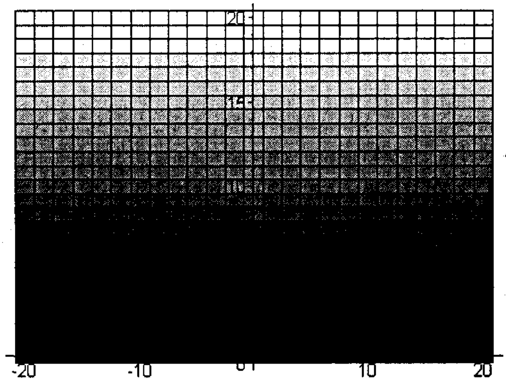

Рис. 4.12

```
> contourplot((x,y)->9.8*y,-20..20,0..200,filled=true);
```

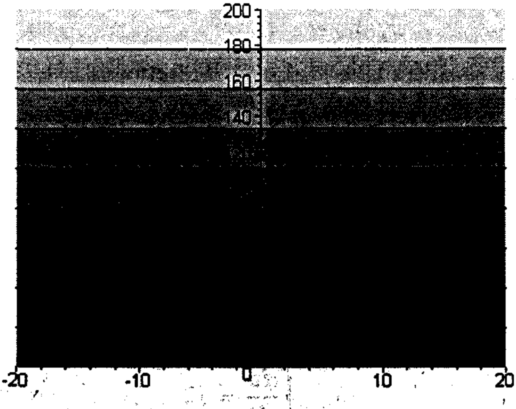

Рис. 4.13

Графическое изображение поля силы тяжести:

```
> fieldplot([(x,y)->0,(x,y)->-9.8],- 20..20,0..20,arrows=LARGE);
```

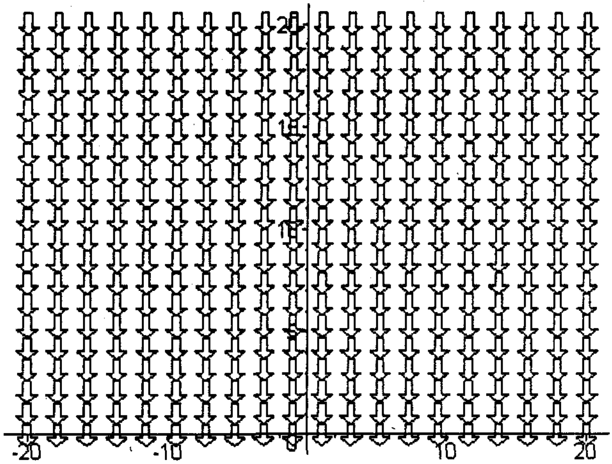

Рис. 4.14

Пусть заданы начальные условия $x(0) = 0$, $\dot{x}(0) = 20$, $y(0) = 0$, $\dot{y}(0) = 25$ и требуется найти в поле силы тяжести $U(x, y) = g \cdot y$ траекторию движения материальной точки. Решение задачи имеет вид:

```
> dsolve({diff(x(t),t$2)=0,diff(y(t),t$2)=-9.8,
x(0)=0,D(x)(0)=20,y(0)=0,D(y)(0)=25},{x(t),y(t)});
```

$$\{y(t) = -\frac{49}{10}t^2 + 25t,\ x(t) = 20t\}$$

Такой же результат получается, если перейти к системе дифференциальных уравнений 1-го порядка:

```
> dsolve({diff(x(t),t)=u(t),diff(u(t),t)=0,diff(y(t),t)=v(t),
diff(v(t),t)=-9.8,x(0)=0,u(0)=20,y(0)=0,v(0)=25},
{x(t),u(t),y(t),v(t)});
```

$$\{v(t) = -\frac{49}{5}t + 25,\ u(t) = 20,\ y(t) = -\frac{49}{10}t^2 + 25t,\ x(t) = 20t\}$$

Изменение начальных условий дает:

```
> dsolve({diff(x(t),t)=u(t),diff(u(t),t)=0,diff(y(t),t)=v(t),
diff(v(t),t)=-9.8,x(0)=0,u(0)=25,y(0)=0,v(0)=20},
{x(t),u(t),y(t),v(t)});
```

$$\{x(t) = 25,\ y(t) = -\frac{49}{10}t^2,\ v(t) = -\frac{49}{5}t + 20,\ u(t) = 25\}$$

Построение графиков полученных траекторий:

```
> phaseportrait([diff(x(t),t)=u(t),diff(u(t),t)=0,diff(y(t),t)
=v(t),diff(v(t),t)=-9.8],[x(t),u(t),y(t),v(t)],t=0..4,
[[x(0)=0,u(0)=20,y(0)=0,v(0)=25],[x(0)=0,u(0)=25,y(0)=0,v(0)=20]
],scene=[x(t),y(t)],linecolor=[red,blue]);
```

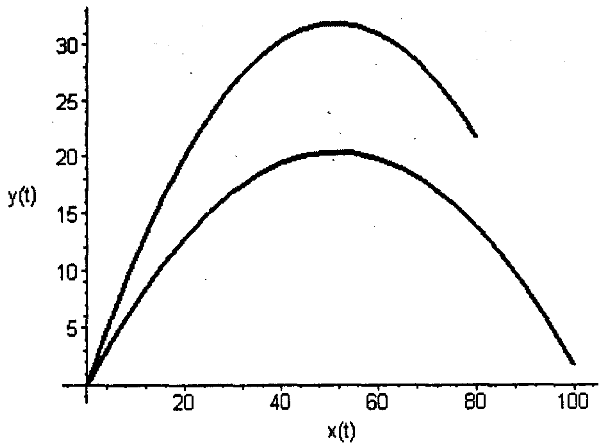

Рис. 4.15

Глобальные взаимодействия материальных тел, согласно закону всемирного тяготения, определяются полями сил тяготения, потенциалы которых имеют вид:

$$U = -\frac{k}{|\overline{x}|} \Rightarrow \overline{F} = -\frac{k\overline{x}}{|\overline{x}|^3},$$

$k > 0$. В плоском случае:

$$F_1 = -\frac{kx}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}}, \quad F_2 = -\frac{ky}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Графическое построение потенциальной функции при $k = 10$:

```
> with(plots):contourplot((x,y)->-10/sqrt(x^2+y^2),-
1..1,-1..1,filled=true);
```

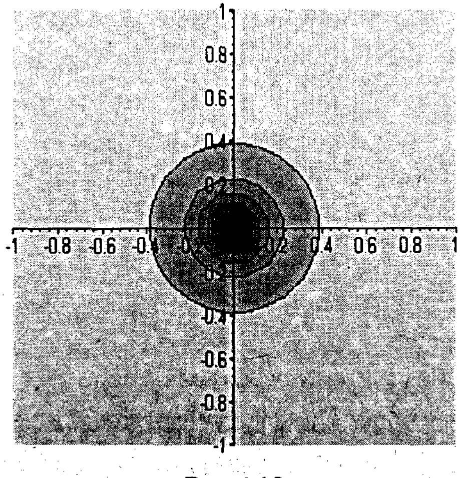

Рис. 4.16

Построение траектории движения материальной точки в поле сил тяготения при $k = 1$, $x(0) = 1$, $y(0) = 0$, $\dot{x}(0) = 0$, $\dot{y}(0) = 0{,}5$:

```
> phaseportrait([diff(x(t),t)=u(t),diff(u(t),t)=-
x(t)/(x(t)^2+y(t)^2)^(3/2),diff(y(t),t)=v(t),diff(v(t),t)=-
y(t)/(x(t)^2+y(t)^2)^(3/2)],[x(t),u(t),y(t),v(t)],t=0..Pi,[[x(0)
=1,u(0)=0,y(0)=0,v(0)=0.5]],scene=[x(t),y(t)],stepsize=0.01);
```

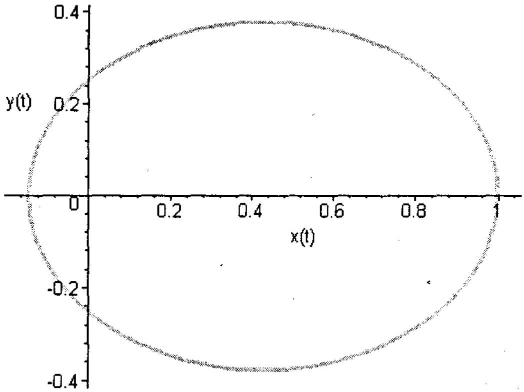

Рис. 4.17

При увеличении начальной скорости получается существенно другой рисунок:

```
> phaseportrait([diff(x(t),t)=u(t),diff(u(t),t)=-
x(t)/(x(t)^2+y(t)^2)^(3/2),diff(y(t),t)=v(t),diff(v(t),t)=-
y(t)/(x(t)^2+y(t)^2)^(3/2)],[x(t),u(t),y(t),v(t)],t=0..Pi,[[x(0)
=1,u(0)=0,y(0)=0,v(0)=2]],scene=[x(t),y(t)],stepsize=0.01);
```

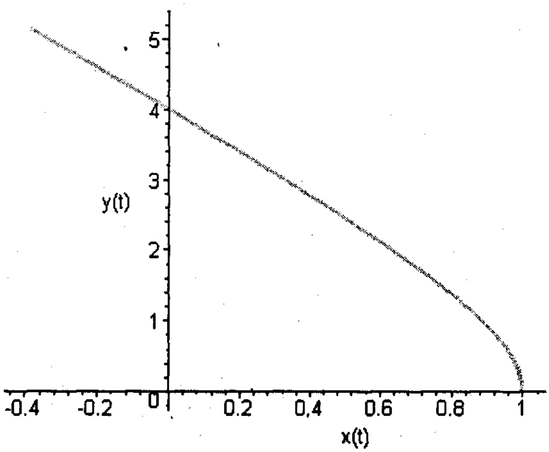

Рис. 4.18

Рисунки 4.17, 4.18 хорошо иллюстрируют то, что в поле сил тяготения траектории движения материальных тел являются коническими кривыми, один из фокусов которых находится в полюсе силового поля.

В 1696 году И. Бернулли поставил и решил, наряду с другими выдающимися математиками своего времени, задачу о брахистохроне (кратчайшем времени), положившую начало вариационному исчислению — оптимальному управлению. Найти путь, по которому материальная точка, двигаясь под действием силы тяжести без трения и сопротивления, попадает из точки A в точку B за наименьшее время:

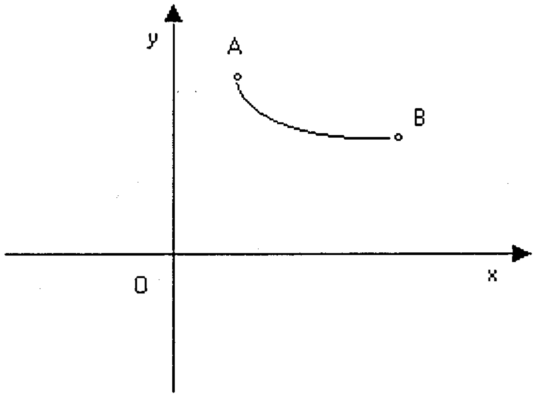

Рис. 4.19

Потенциальная функция поля силы тяжести $U = mgy$. Из закона сохранения энергии, так как в начальный момент времени скорость равна нулю, следует $E = mgy_A$, то есть:

$$\frac{v^2}{2} + gy = gy_A$$

Откуда находится скорость движения:

$$v = \sqrt{2g(y_A - y)}\ .$$

Так как $v = \dfrac{ds}{dt}$, $ds = \sqrt{1 + y'(x)}dx$, то, двигаясь по линии $y = y(x)$, материальная точка попадет из точки A в точку B за время

$$t = \int_{x_A}^{x_B} \frac{\sqrt{1 + y'(x)^2}}{\sqrt{2g(y_A - y)}}dx.$$

Остается найти линию, на которой этот интеграл (функционал) минимален. Вариация путей, соединяющих заданные точки, приводит к дифференциальному уравнению такой линии:

$$(y_A - y)(1 + y'(x)^2) = C,\ C = const$$

Приятно отметить, что Maple находит его общее решение в параметрической форме:

```
> dsolve((yA-y(x))*(1+diff(y(x),x)^2)=C,parametric);
```

$$\left[y(\_T) = -\frac{-yA - yA\_T^2 + C}{1+\_T^2}, \right.$$

$$\left. x(\_T) = \frac{C\_T + C\arctan(\_T) + C\arctan(\_T)\_T^2 + \_C1 + \_C1\_T^2}{1+\_T^2} \right]$$

Подстановка $T = ctg\,\frac{t}{2}$ дает:

```
> subs(_T=cos(t/2)/sin(t/2),%):normal(%):simplify(%);
```

$$\left[y\left(\frac{\cos\left(\frac{1}{2}t\right)}{\sin\left(\frac{1}{2}t\right)}\right) = yA - C + C\cos\left(\frac{1}{2}t\right)^2, \right.$$

$$\left. x\left(\frac{\cos\left(\frac{1}{2}t\right)}{\sin\left(\frac{1}{2}t\right)}\right) = C\cos\left(\frac{1}{2}t\right)\sin\left(\frac{1}{2}t\right) + C\arctan\left(\frac{\cos\left(\frac{1}{2}t\right)}{\sin\left(\frac{1}{2}t\right)}\right) + \_C1 \right]$$

Отсюда, с учетом

```
> simplify(arctan(cot(x)));
```

$$\frac{1}{2}\pi - arc\cot(\cot(x)),$$

следует

$$x = \pm r(t - \sin t) + x_A,\ y = y_A - r(1 - \cos t),$$

где r — произвольная неотрицательная постоянная. Полученные уравнения определяют на плоскости семейство циклоид, выходящих из точки A и обращенных выпуклостью вниз. Построение линий данного семейства при $y_A = 6$, $x_A = 0$:

```
> plot({seq([r*(t-sin(t)),6-r*(1- cos(t)),t=0..2*Pi],r=1..3)},
color=red);
```

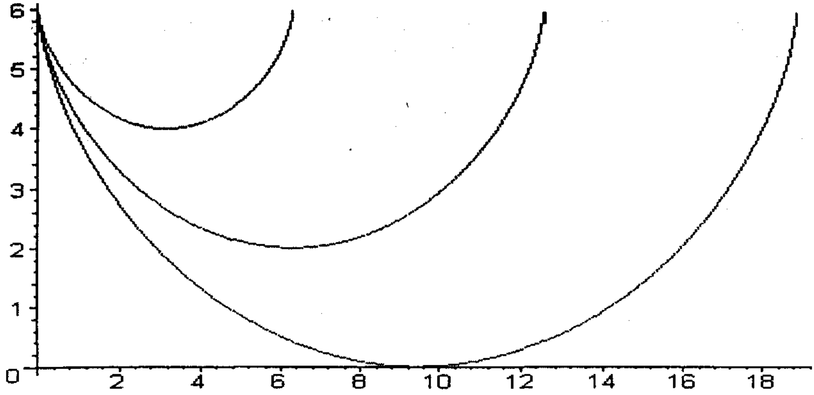

Рис. 4.20

§ 4. Ряды Фурье

Коэффициенты ряда Фурье

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

абсолютно интегрируемой на отрезке $[-\pi, \pi]$ функции $f(x)$ вычисляются по формулам:

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx, \ b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx.$$

Maple избавляет пользователя от аналитических вычислений коэффициентов и дает богатейшие возможности для графического представления результатов, включая анимацию графиков. Простейший способ — непосредственное вычисление коэффициентов ряда Фурье, используя встроенную функцию int. Например, пусть требуется разложить в ряд Фурье функцию $f(x) = x$, $x \in (-\pi, \pi)$. Тогда

```
> f:=x;
```

$$f := x$$

```
> a[0]:=int(f,x=-Pi..Pi)/Pi;a[n]:=int(f*cos(n*x),x=- Pi..Pi)/Pi;
```

$$a_0 := 0$$

$$a_n := 0$$

```
> b[n]:=int(f*sin(n*x),x=-Pi..Pi)/Pi;
```

[illegible] $\frac{\sin(\pi n) + \pi n \cos(\pi n)}{n^2 \pi}$

```
> S:=(x,k)- >a[0]/2+sum(a[n]*cos(n*x)+b[n]*sin(n*x),n=1..k);
```

$$S := (x, k) \to \frac{1}{2} a_0 + \left(\sum_{n=1}^{k} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)) \right)$$

```
> S(x,2);
```

$$2\sin(x) - \sin(2x)$$

```
> S(x,3);
```

$$2\sin(x) - \sin(2x) + \frac{2}{3}\sin(3x)$$

Построение графиков показывает, как происходит приближение:

```
> plot(S(x,2),x=-9..9);
```

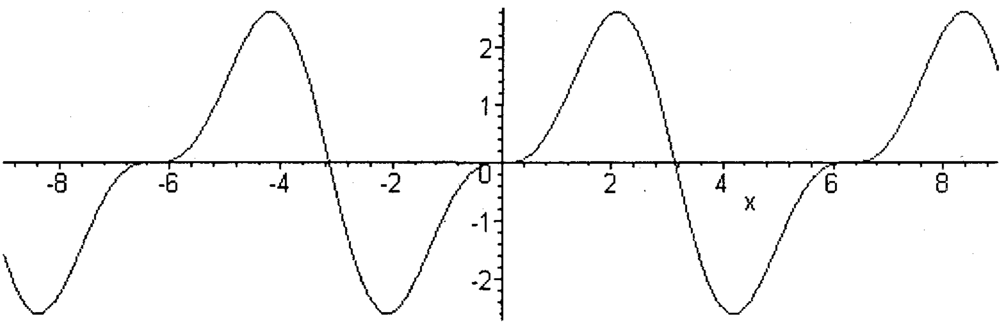

Рис. 4.21

```
> plot(S(x,3),x=-9..9);
```

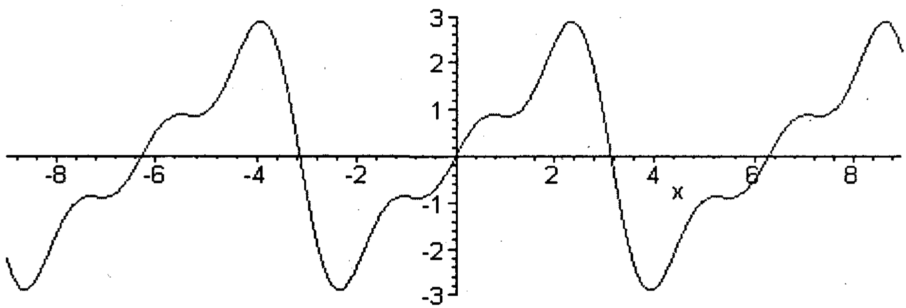

Рис. 4.22

Используя средства программирования Maple, частичные суммы рядов Фурье рациональнее задавать процедурами. В частности, заданные на промежутке $(-\pi, \pi)$ функции разлагаются в ряд Фурье процедурой:

```
> S := proc (x, n)
local k, m, a, b;
for k from 0 to n do
a[k] := int(f*cos(k*x),x = -Pi .. Pi)/Pi;
```

```
b[k] := int(f*sin(k*x)/Pi,x = -Pi .. Pi)
end do;
1/2*a[0]+sum(a[m]*cos(m*x)+b[m]*sin(m*x),m = 1 .. n)
end proc;
```

$S :=$ proc (x, n)

local $k, m, a, b;$

for k from 0 to n do

$a[k] := \mathrm{int}(f \times \cos(k \times x), x = -\pi .. \pi)/\pi;\ b[k] := \mathrm{int}(f \times \sin(k \times x)/\pi, x = -\pi .. \pi)$

end do ;

$1/2 \times a[0] + \mathrm{sum}(a[m] \times \cos(m \times x) + b[m] \times \sin(m \times x), m = 1 .. n)$

end proc

Пользователю остается задать f и ввести n. Например, возвращаясь к разобранной задаче, получаем:

```
> f:=x: y:=S(x,3);
```

$$y := 2\sin(x) - \sin(2x) + \frac{2}{3}\sin(3x)$$

Построение в одной системе координат заданной функции и S(x, 3):

```
> z:=x->modp(x,2*Pi):plot([y(x),z(x-Pi)-Pi],x=-9..9);
```

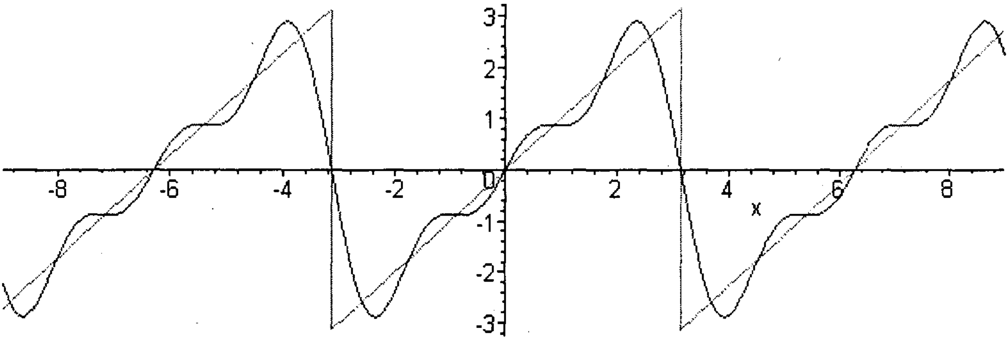

Рис. 4.23

Процедура разложения в ряд Фурье функции, заданной на промежутке $(0, 2l)$:

```
> Sp := proc (x, l, n)
local k, m, a, b;
for k from 0 to n do
a[k] := int(f*cos(Pi*k*x/l)/l,x = 0 .. 2*l);
b[k] := int(f*sin(Pi*k*x/l)/l,x = 0 .. 2*l)
end do;
1/2*a[0]+sum(a[m]*cos(Pi*m*x/l)+b[m]*sin(Pi*m*x/l),m = 1 .. n)
end proc;
```

$Sp := \text{proc}\,(x, l, n)$
local k, m, a, b;
for k from 0 to n do
$a[k] := \text{int}(f \times \cos(\pi \times k \times x/l)/l, x = 0\,..\,2 \times l)$;
$b[k] := \text{int}(f \times \sin(\pi \times k \times x/l)/l, x = 0\,..\,2 \times l)$
end do ;
$1/2 \times a[0] + \text{sum}(a[m] \times \cos(\pi \times m \times x/l) + b[m] \times \sin(\pi \times m \times x/l), m = 1\,..\,n)$
end proc

Пусть требуется найти частичную сумму $S_3(x)$ ряда Фурье функции $f(x) = \dfrac{\pi - x}{2}$, $0 < x < 2\pi$, построить график $S_3(x)$ и вычислить $S_3(\frac{\pi}{2})$. Решение первой части задачи:

```
> f:=(Pi-x)/2:Sp(x,Pi,3);
```

$$\sin(x) + \frac{1}{2}\sin(2x) + \frac{1}{3}\sin(3x)$$

Решение второй части:

```
> plot(Sp(x,Pi,3),x=-9..9);
```

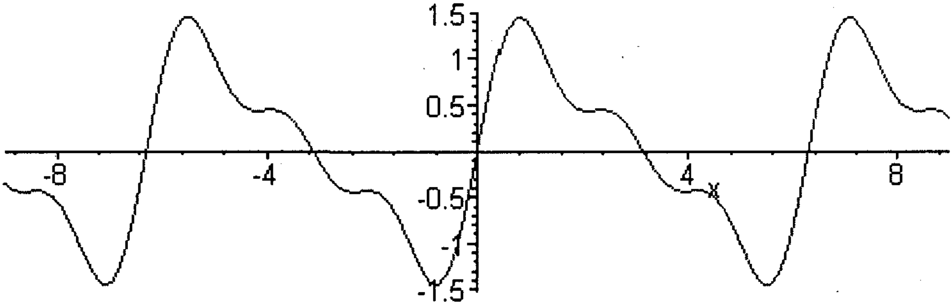

Рис. 4.24

Наконец, последнее:

```
> subs(x=Pi/2,Sp(x,Pi,3));
```

$$\sin\left(\frac{1}{2}\pi\right) + \frac{1}{2}\sin(\pi) + \frac{1}{3}\sin\left(\frac{3}{2}\pi\right)$$

```
> evalf(%);
```

$$.6666666667.$$

Процедура разложения в ряд Фурье только по синусам имеет вид::

```
> restart:Sps := proc (x, l, n)
local k, m, a, b;
for k from 0 to n do
```

```
b[k] := int(2*f*sin(Pi*k*x/l)/l,x = 0 .. l)
end do;
sum(b[m]*sin(Pi*m*x/l),m = 1 .. n)
end proc;
```

Sps := proc (*x*, *l*, *n*)
local *k*, *m*, *a*, *b*;
for *k* from 0 to *n* do *b*[*k*] := int(2×*f*×sin(π×*k*×*x*/*l*)/*l*, *x* = 0 .. *l*) end do ;
sum(*b*[*m*]×sin(π×*m*×*x*/*l*), *m* = 1 .. *n*)
end proc

Пример. Разложить в ряд Фурье по синусам $f(x) = x\sin x$, $0 \le x \le \pi$ до четвертой гармоники.

Решение.

```
> f:=x*sin(x):Sps(x,Pi,4);
```

$$\frac{1}{2}\pi\sin(x) - \frac{16}{9}\frac{\sin(2x)}{\pi} - \frac{32}{225}\frac{\sin(4x)}{\pi}.$$

Процедура разложения в ряд Фурье по косинусам имеет вид:

```
> Spc := proc (x, l, n)
local k, m, a, b;
for k from 0 to n do
a[k] := int(2*f*cos(Pi*k*x/l)/l,x = 0 .. l);
end do;
1/2*a[0]+sum(a[m]*cos(Pi*m*x/l),m = 1 .. n)
end proc;
```

Spc := proc (*x*, *l*, *n*)
local *k*, *m*, *a*, *b*;
for *k* from 0 to *n* do *a*[*k*] := int(2×*f*×cos(π×*k*×*x*/*l*)/*l*, *x* = 0 .. *l*) end do ;
1/2×*a*[0] + sum(*a*[*m*]×cos(π×*m*×*x*/*l*), *m* = 1 .. *n*)
end proc

Пример. Разложить в ряд Фурье по косинусам до третьей гармоники $f(x) = e^x$, $x \in (0,\ \ln 2)$.

Решение.

```
> f:=exp(x):Spc(x,ln(2),3);
```

$$\frac{1}{\ln(2)} - \frac{6\ln(2)\cos\left(\frac{\pi x}{\ln(2)}\right)}{\ln(2)^2 + \pi^2} + \frac{2\ln(2)\cos\left(2\,\frac{\pi x}{\ln(2)}\right)}{\ln(2)^2 + 4\pi^2} - \frac{6\ln(2)\cos\left(3\,\frac{\pi x}{\ln(2)}\right)}{\ln(2)^2 + 9\pi^2}$$

Глава V
ВЕРОЯТНОСТЬ И СТАТИСТИКА. АЛГЕБРА ЛОГИКИ

§ 1. Теория вероятностей

После команды:

```
> with(stats);
```

$$[anova, describe, fit, importdata, random, statevalf, statplots, transform]$$

можно приступать к решению задач по теории вероятностей и математической статистике. Законы распределения вероятностей, входящие в Maple, приведены в следующих двух списках.

Дискретные распределения:

binomiald[n,p]	discreteuniform[a,b]
empirical[list_prob]	hypergeometric[N1, N2, n]
negativebinomial[n,p]	poisson[mu]

Непрерывные распределения:

beta[nu1, nu2]	cauchy[a, b]	chisquare[nu]
exponential[alpha, a]	fratio[nu1, nu2]	gamma[a, b]
laplaced[a, b]	logistic[a, b]	lognormal[mu, sigma]
normald[mu, sigma]	studentst[nu]	uniform[a, b]
weibull[a, b]		

В квадратных скобках, естественно, параметры распределений. С приведенными списками распределений и достаточно подробными их описаниями можно ознакомиться на странице distributions справочной системы Maple. Интегральная функция, дифференциальная функция (закон распределения вероятностей) и квантиль дискретного распределения, соответственно, обозначаются dcdf, pf, icdf. Соответствующие обозначения для непрерывного распределения: cdf, pdf, icdf. Базовая встроенная функция (подпакет) теории вероятностей имеет вид:

statevalf[*вид функции, закон распределения*](*аргумент*),

Пусть случайная дискретная величина починяется, например, биномиальному закону распределения с параметрами n = 5, p = 3/4. Тогда закон распределения вероятностей находится следующим образом:

```
> p:=statevalf[pf,binomiald[5,3/4]]:[[m,p(m)]$m=0..5];
```

$$[[0, .0009765625000], [1, .01464843750], [2, .08789062500], [3, .2636718750], [4, .3955078125], [5, .2373046875]]$$

Построение многоугольника распределения вероятностей:

```
> plot([[m,p(m)]$m=0..5]);
```

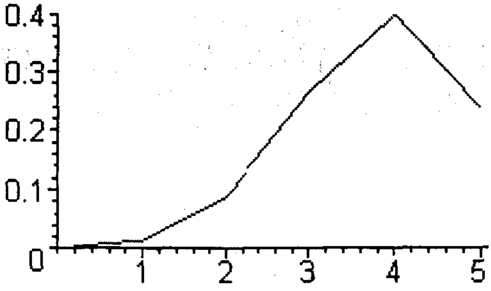

Рис. 5.1

Ввод интегральной функции данного биномиального распределения:

```
> F:=statevalf[dcdf,binomiald[5,3/4]];
```

$$F := statevalf_{dcdf, binomiald_{5, 3/4}}$$

Вычисление ее значение при x = 2:

```
> statevalf[dcdf,binomiald[5,3/4]](2);
```

$$.1035156250$$

Функция F действительно «накапливает» вероятности:

```
> F(0);F(1);F(5);
```

$$.0009765625000$$

$$.01562500000$$

$$1.$$

Однако она не совпадает с общепринятой в отечественной математической литературе интегральной функцией распределения [2]. Переопределим ее следующим образом:

```
>G:=piecewise(x<=0,0,x<=1,F(0),x<=2,F(1),x<=3,F(2),x<=4,F(3),x<=5
,F(4) ,x>5,F(5));
```

$$G := \begin{cases} 0 & x \le 0 \\ .0009765625000 & x \le 1 \\ .01562500000 & x \le 2 \\ .1035156250 & x \le 3 \\ .3671875000 & x \le 4 \\ .7626953125 & x \le 5 \\ 1. & 5 < x \end{cases}$$

Построим график:

```
> plot(G(x),x=-1..6,-1..2);
```

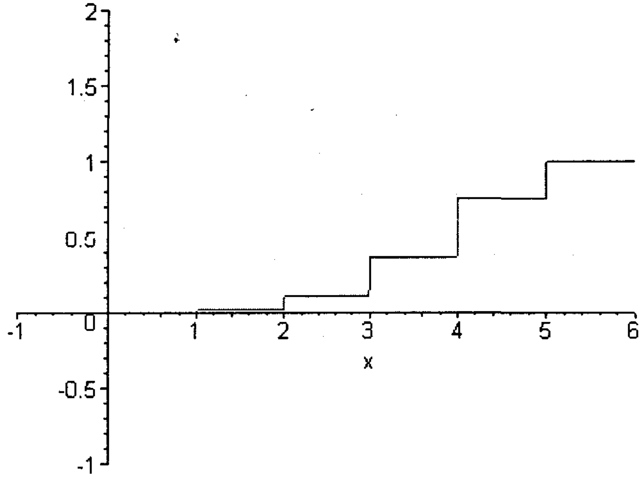

Рис. 5.2

Функция G — действительно интегральная функция распределения.

Задача ([2], 261). Случайная дискретная величина задана законом распределения

X	3	4	7	10
p	0,2	0,1	0,4	0,3

Найти интегральную функцию распределения и построить график.

Решение. *Имеет смысл задать распределение встроенной функцией empirical, принимая вероятности, соответствующие пропущенным членам последовательности [1, 2,...,10], равными нулю. Тогда интегральная функция распределения (по Maple) будет иметь вид:*

```
> F:=statevalf[dcdf,empirical[0,0,0.2,0.1,0,0,0.4,0,0,0.3]];
```

$$F := statevalf_{dcdf, empirical_{0,\,0,\,.2,\,.1,\,0,\,0,\,.4,\,0,\,0,\,.3}}$$

Переопределяем ее и приходим к типовой интегральной функции распределения:

```
> L:=piecewise(x<=3,0,x<=4,F(3),x<=7,F(4),x<=10,F(7),x>10,F(10));
```

$$L := \begin{cases} 0 & x \le 3 \\ 0.2 & x \le 4 \\ 0.3 & x \le 7 \\ 0.7 & x \le 10 \\ 1.0 & 10 < x \end{cases}$$

Строим график:

```
> plot(L(x),x=0..11,-1..2);
```

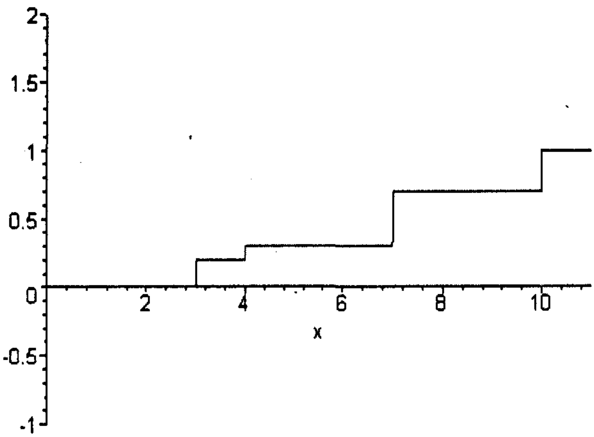

Рис. 5.3

Пусть требуется найти математическое ожидание и дисперсию, заданной в последней задаче случайной величины. Задаем закон распределения в виде:

```
> p:=statevalf[pf,empirical[0,0,0.2,0.1,0,0,0.4,0,0,0.3]];
```

$$p := statevalf_{pf,empirical_{0,\,0,\,.2,\,0,\,0,\,.4,\,0,\,0,\,.3}}$$

Вычисляем математическое ожидание с помощью встроенной функции sum:

```
> M:=sum(i*p(i),i=0..10):M;
```

$$6.8$$

Таким же образом находим дисперсию:

```
> Q:=sum((i-M)^2*p(i),i=0..10):Q;
```

$$6.760000000$$

Делаем проверку:

```
> sum(i^2*p(i),i=0..10)-M^2;
```

$$6.76$$

На странице statevalf справочной системы Maple приведено достаточное число примеров, включая графики, на нормальный закон распределения. Так что принципы работы с данным непрерывным распределением, а также с другими непрерывными распределениями, вообще говоря, должны быть понятны. Тем не менее рассмотрим несколько типовых задач.

Задача ([2], 328). Математическое ожидание и среднее квадратическое отклонение нормально распределенной случайной величины X равны 10 и 2, соответственно. Найти вероятность того, что в результате испытания случайная величина примет значение, заключенное в интервале (12, 14).

Решение. *Интегрируем дифференциальную функцию распределения:*

```
> int(statevalf[pdf,normald[10,2]](x),x=12..14);
```

$$\int_{12}^{14} statevalf_{pdf,normald_{10,2}}(x)dx$$

```
> evalf(%);
```

$$.1359051220$$

Ответ: 0,1359.

Задачу можно решить и через интегральную функцию распределения:

```
> statevalf[cdf,normald[10,2]](14)- statevalf[cdf,normald[10,2]]
(12);
```

$$.1359051220$$

Задача. Случайная величина X задана интегральной функцией распределения:

$$F(x) = \begin{cases} 0, \text{ если } x \le 0 \\ \dfrac{x^2}{25}, \text{ если } 0 < x \le 5 \\ 1, \text{ если } x > 5 \end{cases}$$

Найти:

1) дифференциальную функцию распределения;
2) математическое ожидание;
3) дисперсию.

Построить графики функций F(x) и f(x).

Решение. *Вводим заданную функцию:*

```
> F:=piecewise(x<=0,0,x<=5,x^2/25,x>5,1);
```

$$F := \begin{cases} 0 & x \le 0 \\ \dfrac{1}{25}x^2 & x \le 5 \\ 1 & 5 < x \end{cases}$$

Находим дифференциальную функцию распределения:

```
> f:=piecewise(x<=0,0,x<=5,diff(x^2/25,x),x>5,0);
```

$$f := \begin{cases} 0 & x \le 0 \\ \dfrac{2}{25}x & x \le 5 \\ 0 & 5 < x \end{cases}$$

Вычисляем математическое ожидание:

```
> M:=int(f*x,x=0..5):M;
```

$$\frac{10}{3}$$

Вычисляем дисперсию:

```
> Q:=int((x-M)^2*f,x=0..5):Q;
```

$$\frac{25}{18}$$

Делаем проверку:

```
> int(f*x^2,x=0..5)-M^2;
```

$$\frac{25}{18}$$

Строим график $F(x)$ (рис. 5.4):

```
> plot(F(x),x=-1..6);
```

Строим график $f(x)$ (рис. 5.5):

```
> plot(f(x),x=-1..6);
```

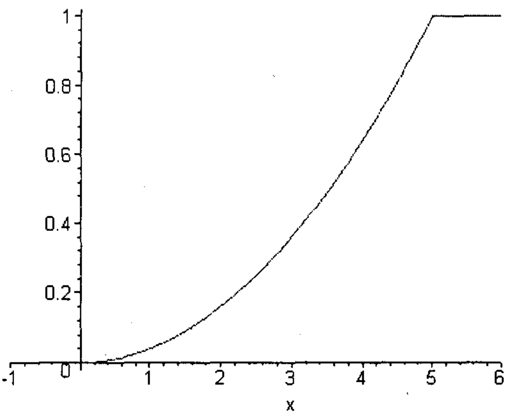

Рис. 5.4

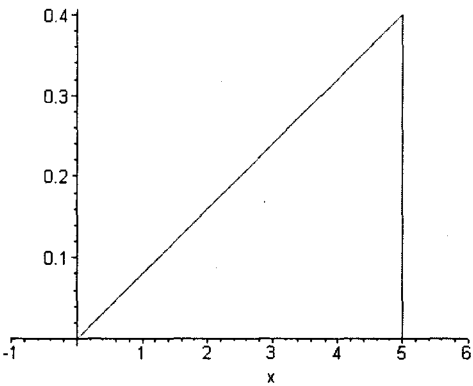

Рис. 5.5

Задача ([2], 272). Плотность распределения непрерывной случайной величины X задана на всей оси Ox равенством:

$$f(x) = \frac{2C}{1+x^2}.$$

Найти постоянный параметр C.

Решение.

```
> C:=solve(int(2*C/(1+x^2),x=-infinify..infinity)=1,C);
```

$$C := \frac{1}{\pi + 2\arctan(infinity)}$$

```
> arctan(infinity);
```

$$\frac{1}{2}\pi$$

Ответ: $C = \frac{1}{2 \cdot \pi}$.

Найдем интегральную функцию распределения по плотности распределения, заданной в последней задаче:

```
> R=int(1/((1+t^2)*Pi),t=-infinity..x);
```

$$R = \frac{1}{2}\frac{2\arctan(x)+\pi}{\pi}$$

Задача ([2], 430). Задана плотность совместного распределения случайной непрерывной двумерной величины (X, Y):

$$f(x, y) = \begin{cases} 4xye^{-x^2-y^2}, & x > 0,\ y > 0 \\ 0, & x < 0 \ \text{или} \ y < 0 \end{cases}$$

Найти:

1) математические ожидания M_X, M_Y,

2) дисперсии D_X, D_Y.

Решение. *Плотности составляющих находим следующим образом:*

```
> f:=4*x*y*exp(-x^2-y^2);
```

$$f := 4xye^{(-x^2-y^2)}$$

```
> assume(x>0, y>0):f1:=int(f,y=0..infinity);
```

$$f1 := 2x{\sim}e^{(-x{\sim}^2)}$$

```
> f2:=int(f,x=0..infinity);
```

$$f2 := 2y{\sim}e^{(-y{\sim}^2)}$$

Вычисления математического ожидания и дисперсии составляющей X:

```
> M1:=int(f1*x,x=0..infinity);
```

$$M1 := \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$$

```
> Q1:=int((x-M1)^2*f1,x=0..infinity);
```

$$Q1 := -\frac{1}{4}\pi + 1$$

Остается учесть, что $M_X = M_Y$, $D_X = D_Y$.

Ответ: $M_X = M_Y = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$, $D_X = D_Y = 1 - \frac{\pi}{4}$.

§ 2. Математическая статистика

Назначения подпакетов, вызываемых with(stats):

anova — дисперсионный анализ;
describe — вычисления числовых характеристик выборок;
fit — регрессионный анализ;
random — генерация случайных чисел с заданным законом распределения;
statevalf — теория вероятностей;
statplots — графические представления выборок;
transform — группировка (преобразование) выборочных данных.

Необходимость статистической обработки данных возникает тогда, когда есть некоторый массив данных — выборка. Поэтому естественно начать с получения случайной выборки, используя подпакет

random[distribution](quantity,uniform,method).

Параметры подпакета:

distribution — закон распределения выборки,
quantity — объем выборки,
uniform — использовать преобразование случайного равномерного распределения в данный закон, default — по умолчанию,
method — применяемый метод ('auto', 'inverse', 'builtin').

Устанавливаем, чтобы не рябило в глазах, число значащих цифр равное трем:

```
> Digits:=3;
```

$$Digits := 3$$

Генерируем выборку объема n = 50, имеющую нормальный закон распределения с математическим ожиданием a = 10 и среднеквадратическим отклонением $\sigma = 2$:

```
> x:=[random[normald[10,2]](50,'default','inverse')];
```

$x :=$ [9.19, 11.5, 10.7, 12.6, 13.0, 12.3, 7.46, 8.92, 8.80, 11.6, 11.9, 10.9, 5.82, 8.89, 9.32, 8.30, 8.76, 8.01, 15.5, 12.3, 9.46, 9.11, 12.1, 12.5, 9.33, 11.0, 10.1, 9.61, 13.7, 15.0, 12.2, 13.1, 11.7, 10.4, 11.5, 9.02, 9.23, 7.16, 12.0, 10.6, 6.39, 6.97, 9.03, 6.84, 8.29, 10.5, 11.7, 7.05, 12.1, 9.53]

Сортируем варианты в порядке возрастания:

```
> transform[statsort](x);
```

[5.82, 6.39, 6.84, 6.97, 7.05, 7.16, 7.46, 8.01, 8.29, 8.30, 8.76, 8.80, 8.89, 8.92, 9.02, 9.03, 9.11, 9.19, 9.23, 9.32, 9.33, 9.46, 9.53, 9.61, 10.1, 10.4, 10.5, 10.6, 10.7, 10.9, 11.0, 11.5, 11.5, 11.6, 11.7, 11.7, 11.9, 12.0, 12.1, 12.1, 12.2, 12.3, 12.3, 12.5, 12.6, 13.0, 13.1, 13.7, 15.0, 15.5]

Проведем группировку полученных значений, разбивая их на $k \approx 1 + 3{,}2\lg 50$ групп. Подсчитываем k:

```
> 1+3.2*log[10](50);
```

$$1+\frac{3.2\ln(50)}{\ln(10)}$$

```
> evalf(%);
```

$$6.44$$

Принимаем k = 6. Находим размах выборки:

```
> 15.5-5.82;
```

$$9.68$$

Оцениваем шаг:

```
> (%)/6;
```

$$1.61$$

Округляем (только в большую сторону) и принимаем h = 1,7. Оцениваем крайнее левое значение первого интервала:

```
> 5.82-(1.7*6-9.68)/2;
```

$$5.56$$

Округляем до 5,6 и находим интервальный вариационный ряд:

```
> transform[tallyinto](x,[5.6..7.3,7.3..9,9..10.7,10.7..12.4,
12.4..14.1,14.1..15.8]);
```

[Weight(10.7 .. 12.4, 15), Weight(12.4 .. 14.1, 5), Weight(5.6 .. 7.3, 6), Weight(7.3 .. 9.8), Weight(14.1 .. 15.8, 2), Weight(9 .. 10.7, 14)]

```
> X:=transform[statsort](%);
```

X:=[Weight(5.6 .. 7.3, 6), Weight(7.3 .. 9.8), Weight(9 .. 10.7, 14), Weight(10.7 .. 12.4, 15), Weight(12.4 .. 14.1, 5), Weight(14.1 .. 15.8, 2)]

Составляем дискретный вариационный ряд:

```
> Digits:=`Digits`:Digits:=4;
```

$$Digits := 4$$

```
> Y:=transform[classmark](X);
```

Y:=[Weight(6.450, 6), Weight(8.150, 8), Weight(9.850, 14), Weight(11.55, 15) Weight(13.25, 5), Weight(14.95, 2)]

По интервальному вариационному ряду строится гистограмма частот (рис. 5.7):

```
> with(stats[statplots]):histogram(X, colour=grey);
```

По дискретному вариационному ряду строится полигон частот:

```
> with(plottools):
> l := polygon([[6.45,6],[8.15,8],[9.85,14],[11.55,15],[13.25,5]
,[14.95,2]], color=grey);
```

$l :=$ POLYGONS(
[[6.45, 6.], [8.15, 8.], [9.85, 14.], [11.55, 15.], [13.25, 5.], [14.95, 2]],
COLOUR(RGB, .75294118, .75294118, .75294118))

```
> plots[display](l);
```

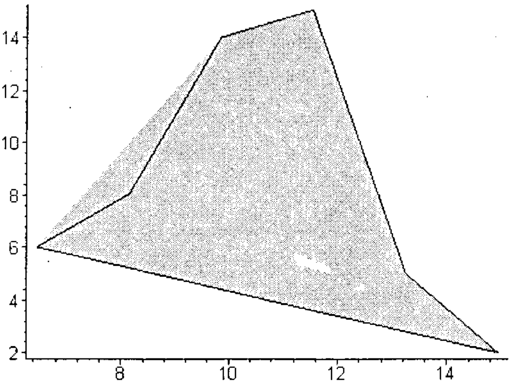

Рис. 5.6

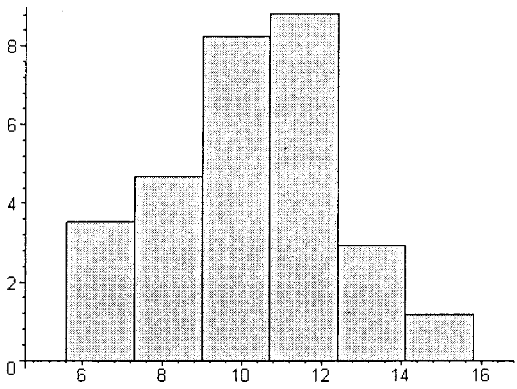

Рис. 5.7

Задача. Критерием Пирсона проверить гипотезу о нормальном законе распределения признака X генеральной совокупности, если статистическое распределение выборки имеет вид

x_i	–4,5	–2,5	–0,5	1,5	3,5	5,5	7,5
n_i	11	24	27	34	25	19	10

уровень значимости $\alpha = 0{,}05$.

Решение. *Вводим заданное статистическое распределение:*

```
> W:=[Weight(-4.5,11),Weight(-2.5,24),Weight(-.5,27),
Weight(1.5,34),Weight(3.5,25),Weight(5.5,19),Weight(7.5,10)];
```

W:=[Weight(-4.5, 11), Weight(-2.5, 24), Weight(-.5, 27), Weight(1.5, 34)
Weight(3.5, 25), Weight(5.5, 19) , We-ight(7.5, 10)]

В подпакете describe вычисляем объем выборки, выборочную среднюю и выборочное среднеквадратическое отклонение:

```
> N:=describe[count](W);
```

$$N := 150$$

```
> a:=describe[mean](W);
```

$$a := 1.300000000$$

```
> q:=describe[standarddeviation](W);
```

$$q := 3.312602199$$

Обозначаем списки вариант и частот:

```
> x:=transform[statvalue](W);
```

$$x := [-4.5, -2.5, -.5, 1.5, 3.5, 5.5, 7.5]$$

```
> n:=transform[frequency](W);
```

$$n := [11, 24, 27, 34, 25, 19, 10]$$

По формуле

$$m_i = \frac{N \cdot h}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp(-\frac{(x_i - x_B)^2}{2\sigma^2}),$$

где h *— шаг,* x_B *— выборочная средняя,* σ *— среднеквадратическое отклонение, находим список теоретических частот:*

```
> m:=[seq(150*2*exp(-(x[i]-a)^2/(2*q^2))/(q*sqrt(2*Pi)),
i=1..7)]:evalf(m);
```

[7.801399128, 18.71174140, 31.17072266, 36.06371726, 28.97911123, 16.17300008, 6.268838334]

Вычисляем наблюдаемое значение критерия χ^2*:*

```
> sum((n[i]-m[i])^2/m[i],i=1..7):evalf(%);
```

6.743417871

Так как оно меньше критического, равного для данной задачи 9,488, то есть основания принять гипотезу.

Задача ([2], 535). Найти выборочное уравнение прямолинейной регрессии Y по X по данным, приведенным в корреляционной таблице:

Y\X	20	25	30	35	40	n_y
16	4	6	–	–	–	10
26	–	8	10	–	–	18
36	–	–	32	3	9	44
46	–	–	4	12	6	22
56	–	–	–	1	5	6
n_x	4	14	46	16	20	n = 100

Решение. *Вводим данные корреляционной таблицы:*

```
> W:= [[Weight(20,4), Weight(25,6), Weight(25,8), Weight(30,10),
Weight(30,32), Weight(35,3), Weight(40,9), Weight(30,4),
Weight(35,12), Weight(40,6), Weight(35,1), Weight(40,5)],
[Weight(16,4), Weight(16,6), Weight(26,8), Weight(26,10),
Weight(36,32), Weight(36,3), Weight(36,9), Weight(46,4),
Weight(46,12), Weight(46,6), Weight(56,1), Weight(56,5)]];
```

W := [[Weight(35, 3), Weight(25, 6), Weight(25, 8), Weight(30, 10), Weight(30, 32), Weight(35, 1), Weight(40, 5)], [Weight(16, 4), Weight(16, 6), Weight(26, 8), Weight(26, 10), Weight(36, 32), Weight(36, 3), Weight(36, 9), Weight(46, 4), Weight(46, 12), Weight(46, 6), Weight(56, 1), Weight(56, 5)]]

Вывод выборочного уравнения прямолинейной регрессии Y по X:

```
> fit[leastsquare[[x,y]]](W);
```

$$y = -\frac{30274}{2861} + \frac{4168}{2861}x$$

```
> evalf(%);
```

$$y = -10.58161482 + 1.456833275x$$

Ответ: $\overline{y}_x = 1{,}45x - 10{,}58$.

Решение можно дополнить. Построение корреляционного поля двумерной выборки, заданной в последней задаче:

```
> statplots[scatterplot](W[1],W[2],color=red,axes=normal);
```

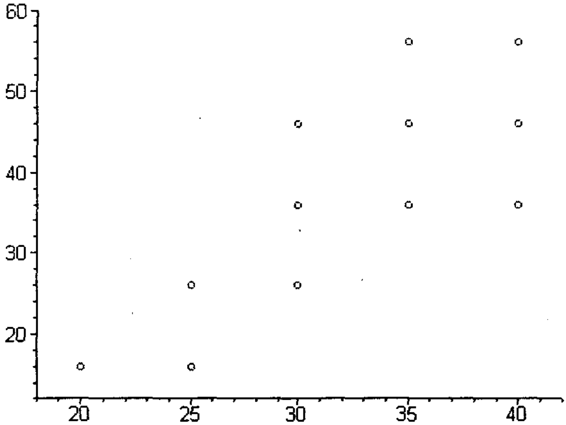

Рис. 5.8

Построение в одной системе координат и корреляционного поля, и полученного выборочного уравнения прямолинейной регрессии:

```
> x:=vector(transform[statvalue](W[1]));
```

$$x := [20,\ 25,\ 25,\ 30,\ 30,\ 35,\ 40,\ 30,\ 35,\ 40,\ 35,\ 40]$$

```
> y:=vector(transform[statvalue](W[2]));
```

$$y := [16,\ 16,\ 26,\ 26,\ 36,\ 36,\ 46,\ 46,\ 46,\ 56,\ 56]$$

```
> plot([[x[i],y[i],i=1..12], -
10.58161482+1.456833275*x],x=0..60,0..60,style=[point,line]);
```

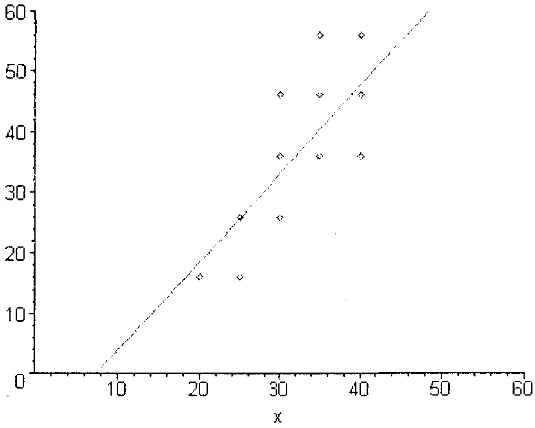

Рис. 5.9

Аналогичным образом находится выборочное уравнение параболической регрессии.

Задача ([2], 537). Найти выборочное уравнение регрессии $\overline{y}_x = Ax^2 + Bx + C$ по данным, приведенным в корреляционной таблице:

Y\X	2	3	5	n_y
25	20	–	–	20
45	–	30	1	31
110	–	1	48	49
n_x	20	31	49	n = 100

Решение. *Вводим на листовое поле данные корреляционной таблицы:*

```
> W:= [[Weight(2,20), Weight(3,30), Weight(5,1), Weight(3,1),
Weight(5,48)], [Weight(25,20), Weight(45,30), Weight(45,1),
Weight(110,1), Weight(110,48)]];
```

W := [[Weight(2, 20), Weight(3, 30), Weight(5, 1), Weight(3, 1), Weight(5, 48), Weight(25, 20), Weight(45, 30)], [Weight(45, 1), Weight(110, 1), Weight(110, 48)]]

Вывод выборочного уравнения параболической регрессии Y по X:

```
> fit[leastsquare[[x,y], y=a*x^2+b*x+c]](W);
```

$$y = \frac{26405}{9114}x^2 + \frac{69365}{9114}x - \frac{2750}{1519}$$

```
> evalf(%);
```

$$y = 2.897191135x^2 + 7.610818521x - 1.810401580$$

Ответ: $\overline{y}_x = 2{,}90x^2 + 7{,}61x - 1{,}81$.

Построение заданных точек:

```
> statplots[scatterplot](W[1],W[2],color=red,axes=normal);
```

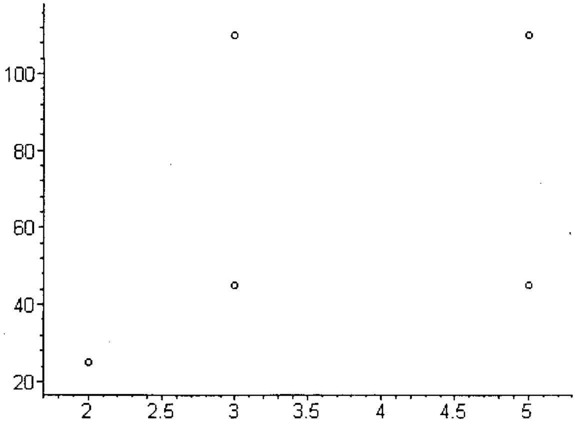

Рис. 5.10

Построение точек вместе с выборочным уравнением параболической регрессии:

```
> x:=vector(transform[statvalue](W[1]));
```

$$x := [2,\ 3,\ 5,\ 3,\ 5]$$

```
> y:=vector(transform[statvalue](W[2]));
```

$$y := [25,\ 45,\ 45,\ 110,\ 110]$$

```
> plot([[x[i],y[i],i=1..5],26405/9114*x^2+69365/9114*x- 2750/1519
],x=0..8,0..111,style=[point,line]);
```

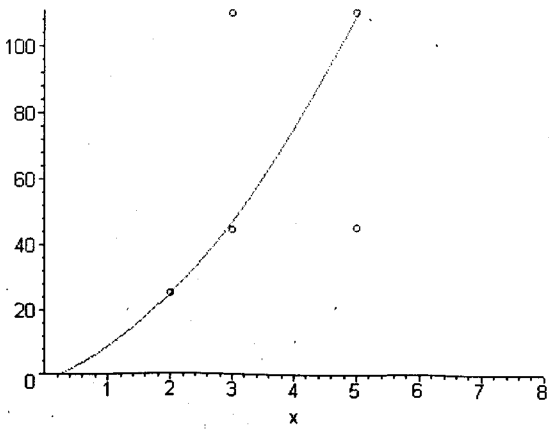

Рис. 5.11

§ 3. Алгебра логики

Зададим процедурами программирования наиболее часто используемые элементарные функции двузначной логики и для проверки вычислим по одному их значению. Конъюнкция:

```
> con:=proc(x,y)
min(x,y)
end;
```

$$con := \operatorname{proc}(x, y)\min(x, y)\text{ end proc}$$

```
> con(0,1);
```

$$0$$

Дизъюнкция:

```
> diz:=proc(x,y)
max(x,y)
end;
```

$$diz := \operatorname{proc}(x, y)\max(x, y)\text{ end proc}$$

```
> diz(0,1);
```

$$1$$

Отрицание:

```
> no:=proc(x)
1-x
end;
```

$$no := \operatorname{proc}(x)\,1 - x\text{ end proc}$$

```
> no(1);
```

$$0$$

Сложение по модулю 2:

```
> mo:=proc(x)
x mod 2
end;
```

$$mo := \operatorname{proc}(x)\; x \bmod 2\text{ end proc}$$

```
> mo(3);
```

$$1$$

Следствие (импликация):

```
> im:=proc(x,y)
`if`(x<=y,1,0)
end;
```

$$im := \operatorname{proc}(x, y)\;\text{`if}(x \le y,\ 1,\ 0)\text{ end proc}$$

```
> im(0,1);
```

$$1$$

Эквивалентность:

```
> iqv:=proc(x,y)
`if`(x=y,1,0)
end;
```

$$iqv := \mathrm{proc}(x, y)\ \grave{}\mathrm{if}(x = y,\ 1,\ 0)\ \mathrm{end\ proc}$$

```
> iqv(0,1);
```

$$0$$

Задача. Проверить равенство $x \sim y = (\overline{x} \vee y) \wedge (x \vee \overline{y})$

Решение. *Таблица истинности левой части равенства очевидна. Достаточно составить таблицу истинности правой части:*

```
> g:=proc(x,y)
con(diz(no(x),y),diz(x,no(y)))
end;
```

$$g := \mathrm{proc}(x, y)\ \mathrm{con}(\mathrm{diz}(\mathrm{no}(x), y), \mathrm{diz}(x, \mathrm{no}(y)))\ \mathrm{end\ proc}$$

```
> g(0,0);g(0,1);g(1,0);g(1,1);
```

$$1$$
$$0$$
$$0$$
$$1$$

Ответ: равенство верно.

Задача. Применяя таблицу истинности, доказать тождественную истинность формулы: $((x \sim y) \wedge \overline{x}) \rightarrow \overline{y}$.

Решение.

```
> g:=proc(x,y)
im(con(iqv(x,y),no(x)),no(y));
end;
```

$$g := \mathrm{proc}(x, y)\ \mathrm{im}(\mathrm{con}(\mathrm{iqv}(x, y), \mathrm{no}(x)), \mathrm{no}(y))\ \mathrm{end\ proc}$$

```
> g(0,0);g(0,1);g(1,0);g(1,1);
```

$$1$$
$$1$$
$$1$$
$$1$$

Тождественная истинность формулы доказана.

Задача. Составить таблицу истинности функции $x \oplus (y \vee \overline{z})$.

Решение. *Ввод заданной функции:*

```
> f:=proc(x,y,z)
mo(x+diz(y,no(z)))
end;
```

$$f := \mathrm{proc}(x, y, z)\ \mathrm{mo}(x + \mathrm{diz}(y, \mathrm{no}(z)))\ \mathrm{end\ proc}$$

Таблица истинности функции алгебры логики (булевой функции) 3-х переменных содержит 8 строк и 4 столбца. Первые три столбца имеют стандартный вид, соответствующий записи чисел от 0 до 7 в двоичной системе исчисления. Поэтому вводим:

```
> a:=[0,0,0,0,1,1,1,1];
```

$$a := [0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 1,\ 1,\ 1,\ 1]$$

```
> b:=[0,0,1,1,0,0,1,1];
```

$$b := [0,\ 0,\ 1,\ 1,\ 0,\ 0,\ 1,\ 1]$$

```
> c:=[0,1,0,1,0,1,0,1];
```

$$c := [0,\ 1,\ 0,\ 1,\ 0,\ 1,\ 0,\ 1]$$

Вывод списка элементов четвертого столбца — значений заданной функции:

```
> p:=[seq(f(a[i],b[i],c[i]),i=1..8)];
```

$$p := [1,\ 0,\ 1,\ 1,\ 0,\ 1,\ 0,\ 0]$$

Вывод таблицы истинности:

```
> evalm(transpose(matrix([a,b,c,p])));
```

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Пусть надо найти совершенную дизъюнктивную нормальную форму (СДНФ) последней функции f. Определяем степень с булевым показателем:

```
> s:=proc(x,y)
`if`(y=1,x,no(x))
end;
```

$$s := \text{proc}(x,\ y)\ \text{`if}(y = 1,\ x,\ \text{no}(x))\ \text{end proc}$$

Находим СДНФ заданной функции:

```
> add(add(add(f(i,j,k)*(s(x,i)*s(y,j)*s(z,k)),i=0..1),j=0..1),
k=0..1);
```

$$(1-x)(1-y)(1-z)y(1-z) + x(1-y)z + (1-x)yz,$$

где произведение следует понимать как конъюнкцию, а сумму как дизъюнкцию.

Аналогично составляется совершенная конъюнктивная нормальная форма:

```
> mul(mul(mul(`if`(f(i,j,k)=0,no(f(i,j,k))*(s(x,no(i))+s (y,no(j))
+s(z,no(k))),1),i=0..1),j=0..1),k=0..1);
```

$$(1-x+y+z)(2-x-y+z)(x+y+1-z)(3-x-y-z)$$

Глава VI
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ В ЭКОНОМИКЕ

§ 1. Линейное программирование

Задачи линейного программирования решаются встроенными функциями minimize и maximize, входящими в пакет simplex, вызываемый обычным образом:

```
> with(simplex);
```

[*basis*, *convexhull*, *cterm*, *define_zero*, *display*, *dual*, *feasible*, *maximize*, *minimize*, *pivot*, *pivoteqn*, *pivotvar*, *ratio*, *setup*, *standardize*]

Вызов пакета обязателен, так как входящие в ядро системы Maple встроенные функции minimize и maximize отличаются от рассматриваемых наборами параметров.

Будем придерживаться такой конструкции:

minimize(целевая функция, {ограничения}, NONNEGATIVE).

Последний параметр показывает, что входящие переменные неотрицательны. Соответственно в такой конструкции включать условия неотрицательности переменных в ограничения не надо.

Пример. Решить задачу линейного программирования

$$z = x_1 + 3x_2 + x_3 \to \min$$

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 + 3x_3 \le 12 \\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 \ge 6 \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0,\ x_3 \ge 0 \end{cases}$$

Решение.

```
> z:=x1+3*x2+x3;
```

$$z := x1 + 3x2 + x3$$

```
> minimize(z,{x1+4*x2+3*x3<= 12,3*x1-2*x2+x3>=6},NONNEGATIVE);
```

$$\{x1 = 2,\ x2 = 0,\ x3 = 0\}$$

```
> subs(%,z);
```


Ответ: (2, 0, 0), minz = 2.

- Пример. Решить задачу линейного программирования

$$z = 5 + x_1 + 3x_2 \to \max,$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \le 10 \\ x_1 \le 6 \\ x_2 \le 8 \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0 \end{cases}$$

Решение.

```
> maximize(5+x1+3*x2 , {x1+x2<= 10, x1<=6,x2<=8}, NONNEGATIVE);
```

$$\{x1 = 2,\ x2 = 8\}$$

```
> subs(%,5+x1+3*x2);
```

$$31$$

Ответ: (2, 8), maxz = 31.

Рассмотрим графическое решение последней задачи. Построение области (многоугольника) допустимых решений:

```
> with(plots):
> inequal({x1+x2<= 10, x1<=6,x2<=8},x1=0..7,x2=0..9);
```

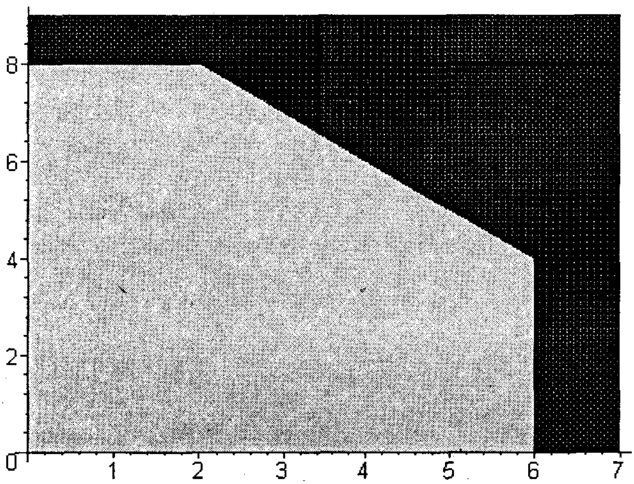

Рис. 6.1

Однако дополнить рисунок линией уровня целевой функции, в данной графической встроенной функции, нельзя. Поэтому поступаем следующим образом. Отсекаем линией уровня часть многоугольника допустимых решений (рис. 6.2):

```
> inequal({x1+x2<= 10, x1<=6,x2<=8,5+x1+3*x2>=7}, x1=0..7,x2=0..9);
```

Из рисунка 6.2 видно, что точкой выхода линий уровня целевой функции из многоугольника допустимых решений является точка **(2, 8)**.

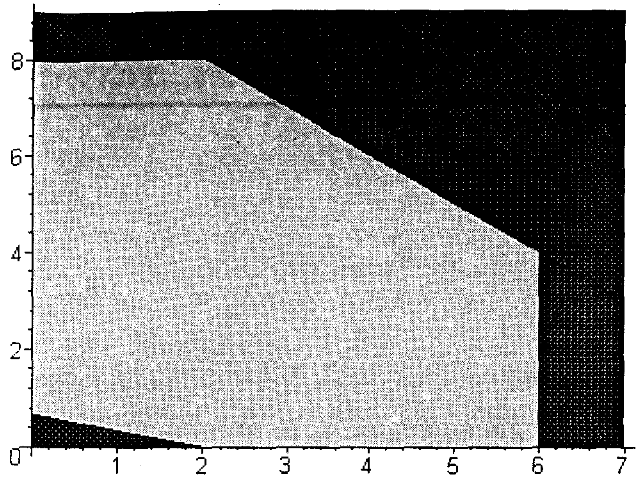

Рис. 6.2

Задача. Целевая функция $z = 300x_1 + 500x_2$. Найти графически max z при ограничениях

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 \le 1200 \\ 2x_1 + x_2 \le 1000 \\ x_1 + 2x_2 \le 1550 \\ x_1 + x_2 \ge 780 \\ 3x_1 + 5x_2 \ge 3500 \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0 \end{cases}$$

Решение. *Построение многоугольника допустимых решений:*

```
> with(plots):inequal({3*x1+x2<=1200,2*x1+x2<=1000,x1+2*x2<=1550
,x1+x2>=780,3*x1+5*x2>=3500},x1=0..300,x2=500..800);
```

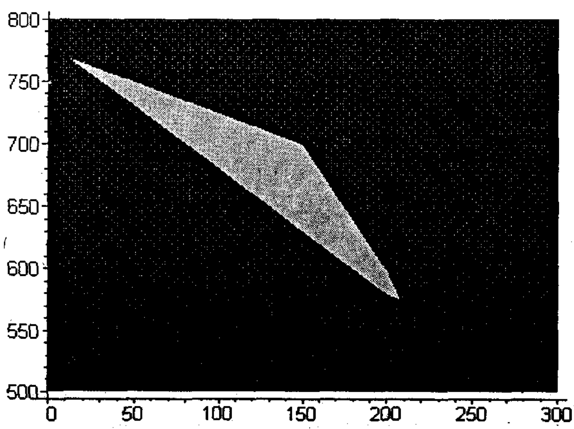

Рис. 6.3

Удаление части многоугольника допустимых решений:

```
> inequal({3*x1+x2<=1200,2*x1+x2<=1000,x1+2*x2<=1550,x1+x2>=
780,3*x1+5*x2>=3500,3*x1+5*x2>=3900},x1=0..300,x2=500..800);
```

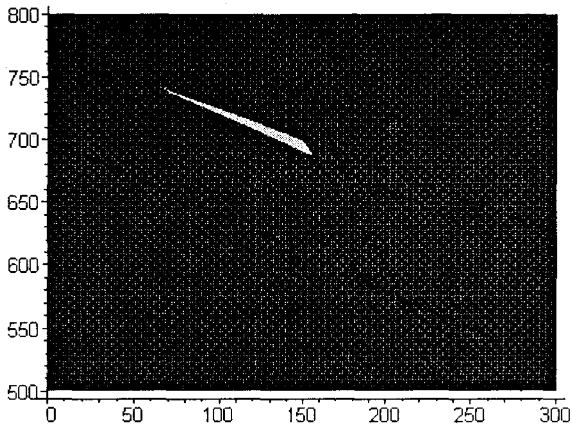

Рис. 6.4

Из рисунка 6.4 видно, что точкой выхода линий уровня из многоугольника допустимых решений является точка пересечения прямых, определяемых вторым и третьим неравенствами. Вычисление координат точки пересечения этих прямых:

```
> solve({2*x1+x2=1000,x1+2*x2=1550},{x1,x2});
```

$$\{x1 = 150,\ x2 = 700\}$$

Вычисление значения целевой функции в данной точке:

```
> 300*150+500*700;
```

$$395000$$

Ответ: maxz = 395000.

§ 2. Матричные игры

Задачи линейного программирования имеют многочисленные приложения. Рассмотрим, например, матричную игру с платежной матрицей

$$\mathrm{A} := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -3 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

Максимум от минимума по строкам $\alpha = 1$ — нижняя цена игры, минимум от максимума по столбцам $\beta = 2$ — верхняя цена игры. Игра седловой точки не имеет и решается в смешанных стратегиях. Пусть для игрока с горизонтальными стратегиями соответствующие частоты p_1, p_2, p_3. Тогда они выбираются им так, что

$$\begin{gathered} p_1 - 3p_2 + 2p_3 \ge V, \\ 2p_1 + p_2 - p_3 \ge V, \\ 3p_1 + 2p_2 + 3p_3 \ge V, \\ p_1 + p_2 + p_3 = 1, \end{gathered}$$

где V — цена игры. Делением соотношений на V, как известно [6], делается переход к задаче линейного программирования: найти минимум функции

$$\frac{1}{V} = x_1 + x_2 + x_3$$

(максимум функции V) при ограничениях

$$\begin{gathered} x_1 - 3 \cdot x_2 + 2 \cdot x_3 \ge 1, \\ 2 \cdot x_1 + x_2 - x_3 \ge 1, \\ 3 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 + 3 \cdot x_3 \ge 1, \\ x_1 \ge 0 \quad x_2 \ge 0 \quad x_3 \ge 0, \end{gathered}$$

где

$$x_1 = \frac{p_1}{V}, \; x_2 = \frac{p_2}{V}, \; x_3 = \frac{p_3}{V}$$

Решение полученной задачи линейного программирования:

```
> minimize(x1+x2+x3,{x1-3*x2+2*x3>=1,2*x1+x2-x3>=1,
3*x1+2*x2+3*x3>=1},NONNEGATIVE);
```

$$\{x1 = \frac{3}{5}, \; x2 = 0, \; x3 = \frac{1}{5}\}$$

Следовательно, цена игры

$$V = \frac{1}{\frac{3}{5} + \frac{1}{5}} = \frac{5}{4},$$

оптимальные частоты

$$p_1 = \frac{3}{5} \cdot \frac{5}{4} = \frac{3}{4}, \; p_2 = 0, \; p_3 = \frac{1}{5} \cdot \frac{5}{4} = \frac{1}{4}$$

Задача ([6], 273). Предприятие может выпускать три вида продукции (А, Б и В), получая при этом прибыль, зависящую от спроса. Спрос в свою очередь может принимать одно из четырех состояний (I, II, III, IV). В следующей матрице элементы a_{ij} характеризуют прибыль, которую получит предприятие при выпуске i-й продукции и κ-м состоянии спроса:

	I	II	III	IV
А	8	3	6	2
Б	4	5	6	5
В	1	7	4	7

Определить оптимальные пропорции выпускаемой продукции, считая состояние спроса полностью неопределенным, гарантируя при этом среднюю величину прибыли при любом состоянии спроса.

Указание. Оптимальные пропорции можно определить как оптимальную смешанную стратегию для «игрока», играющего против «природы» (спроса).

Подобный принцип выбора оптимальной стратегии получил название «максиминного критерия».

Решение. *Задача седловой точки не имеет и решается в смешанных стратегиях. Пусть пропорции выпускаемой продукции* p_1, p_2, p_3, $p_1 + p_2 + p_3 = 1$. *Тогда*

$$8p_1 + 4p_2 + p_3 \geq V,$$

$$3p_1 + 5p_2 + 7p_3 \geq V,$$

$$6p_1 + 6p_2 + 4p_3 \geq V,$$

$$2p_1 + 5p_2 + 7p_3 \geq V,$$

где V — *гарантированная прибыль. Соответствующая задача линейного программирования:*

$$x_1 + x_2 + x_3 \to \min$$

$$\begin{cases} 8x_1 + 4x_2 + x_3 \geq 1, \\ 3x_1 + 5x_2 + 7x_3 \geq 1, \\ 6x_1 + 6x_2 + 4x_3 \geq 1, \\ 2x_1 + 5x_2 + 7x_3 \geq 1, \\ x_1 \geq 0, \ x_2 \geq 0, \ x_3 \geq 0, \end{cases}$$

$x_1 = \dfrac{p_1}{V}$, $x_2 = \dfrac{p_2}{V}$, $x_3 = \dfrac{p_3}{V}$. *Ее решение в Maple:*

```
> minimize(x1+x2+x3,{8*x1+4*x2+x3>=1,3*x1+5*x2+7*x3>=1,6*x1+
6*x2+4*x3>=1, 2*x1+5*x2+7*x3>=1},NONNEGATIVE);
```

$$\{x2 = \frac{3}{16},\ x1 = \frac{1}{32},\ x3 = 0\}$$

Ответ: $V = \dfrac{32}{7}$, пропорции выпуска продукции $(\dfrac{1}{7}, \dfrac{6}{7}, 0)$.

В Maple имеются графические средства, которые очень хорошо подходят для графического решения матричных игр $2 \times n$ и $m \times 2$.

Задача ([6], 266). Найти (графически) решение и цену игры с матрицей

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 & 3 \\ 1 & 3 & 4 & 0{,}5 \end{pmatrix}$$

Решение. *Пусть* x *и* $1 - x$ *частоты применения первым игроком (с горизонтальными стратегиями), соответственно, первой и второй стратегий. Тогда его выигрыш, в зависимости от «чистых» стратегий, применяемых вторым игроком, соответственно составляет:*

$$y_1(x) = 2x + (1 - x), \quad y_2(x) = x + 3(1 - x)$$
$$y_3(x) = 5x + 4(1 - x), \quad y_4(x) = 3x + 0.5(1 - x)$$

Проведем геометрические построения:

```
> inequal({y<=2*x+(1-x),y<=x+3*(1-x),y<=5*x+4*(1- x),y<=3*x+
0.5*(1-x),x>=0,x<=1},x=0..1,y=-1..4);
```

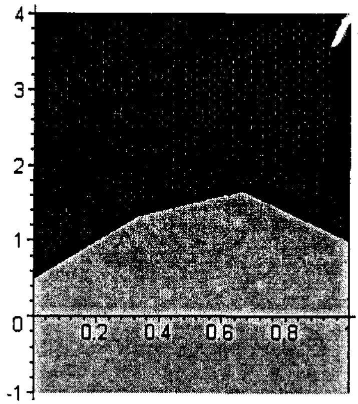

Рис. 6.5

Ординаты точек ломаной, разделяющей черную и серую области, — минимальный выигрыш первого игрока, в зависимости от применяемой им стратегии. Минимальный выигрыш максимален для точки пересечения первой и второй прямых. Остается решить уравнение:

```
> solve(2*x+(1-x)=x+3*(1-x),x);
```

$$\frac{2}{3}$$

Следовательно, оптимальная стратегия $x_1 = \frac{2}{3}$, $x_2 = \frac{1}{3}$. *Цена игры* $V = 2 \cdot \frac{2}{3} + 1 - \frac{2}{3} = \frac{5}{3}$.

Для второго игрока оптимальными являются первая и вторая стратегии. Пусть частоты их применения y и $1 - y$. Находим y:

```
> solve(2*y+(1-y)=y+3*(1-y),y);
```

$$\frac{2}{3}$$

Значит, для него оптимальные частоты $(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, 0, 0)$.

Задача ([6], 267.6). Найти графически решение следующей игры:

$$\begin{pmatrix} 7 & -1 \\ 5 & 4 \\ 1 & 5 \\ 3 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Решение. *Пусть* x *и* $1 - x$ *частоты применения игроком с вертикальными стратегиями, соответственно, первой и второй стратегий. Проводим геометрические построения:*

```
> inequal({y>=7*x-(1-x),y>=5*x+4*(1-x),y>=x+5*(1-
x),y>=3*x-2*(1-x),y>=2*x+(1-x),x>=0,x<=1},x=0..1,y=-1..10);
```

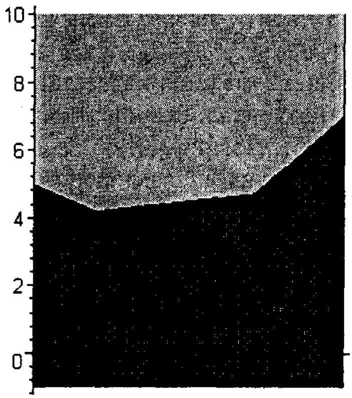

Рис. 6.6

Минимакс равен ординате точки пересечения второй и третьей прямых. Абсцисса этой точки вычисляется в следующей секции:

```
> solve(5*x+4*(1-x)=x+5*(1-x),x);
```

$$\frac{1}{5}$$

Следовательно, оптимальная стратегия $(\frac{1}{5}, \frac{4}{5})$, *цена игры* $V = \frac{21}{5}$. *Для другого игрока оптимальными являются вторая и третья стратегии. Зная цену игры, получаем:*

```
> solve(5*y+(1-y)=21/5,y);
```

$$\frac{4}{5}$$

Таким образом, для него оптимальная стратегия $(0, \frac{4}{5}, \frac{1}{5}, 0, 0)$.

§ 3. Транспортная задача

На складах A_1, A_2, A_3 хранится $a_1 = 100$, $a_2 = 200$, $a_3 = 120$ единиц одного и того же груза, соответственно. Требуется доставить его трем потребителям B_1, B_2, B_3, заказы которых составляют $b_1 = 190$, $b_2 = 120$, $b_3 = 60$ единиц груза, соответственно. Стоимости перевозки c_{ij} единицы груза с i-го склада j-му потребителю указаны в левых верхних углах клеток транспортной таблицы:

	$b_1 = 190$	$b_2 = 120$	$b_3 = 60$
$a_1 = 100$	4	2	6
$a_2 = 200$	7	5	3
$a_3 = 120$	1	7	6

1. Установить, является ли модель транспортной задачи, заданная таблицей, открытой или закрытой. Если модель является открытой, то ее необходимо закрыть.

2. Составить план перевозок, обеспечивающий минимальную стоимость перевозок.

3. Найти минимальную стоимость перевозок.

Решение. 1. *Суммарные запасы груза 420, а суммарные потребности 370. Следовательно, задача является задачей открытого типа и ее необходимо закрыть, вводя фиктивного потребителя с потребностями 50 единиц груза, при нулевых стоимостях перевозок. Приходим к задаче:*

	$b_1 = 190$	$b_2 = 120$	$b_3 = 60$	$b_4 = 50$
$a_1 = 100$	4	2	6	0
$a_2 = 200$	7	5	3	0
$a_3 = 120$	1	7	6	0

2. Задаем матрицу перевозок, матрицу стоимостей и целевую функцию:

```
> x:=matrix(3,4);
```

$$x := \mathrm{array}(1..3, 1..4, [\ ])$$

```
> C:=matrix([[4,2,6,0],[7,5,3,0],[1,7,6,0]]);
```

$$C := \begin{bmatrix} 4 & 2 & 6 & 0 \\ 7 & 5 & 3 & 0 \\ 1 & 7 & 6 & 0 \end{bmatrix}$$

```
> z:=sum(sum(C[i,j]*x[i,j],i=1..3),j=1..4);
```

$$z := 4x_{1,1} + 2x_{1,2} + 6x_{1,3} + 7x_{2,1} + 5x_{2,2} + 3x_{2,3} + x_{3,1} + 7x_{3,2} + 6x_{3,3}$$

Решаем задачу линейного программирования:

```
> with(simplex);
```

[***basis, convexhull, cterm, define_zero, display, dual, feasible, maximize, minimize, pivot, pivoteqn, pivotvar, ratio, setup, standardize***]

```
> minimize(z,{sum(x[1,j],j=1..4)=100,sum(x[2,j],j=1..4)=200,
sum(x[3,j],j=1..4)=120,sum(x[i,1],i=1..3)=190,sum(x[i,2],i=1..3)
=120,sum(x[i,3],i=1..3)=60,sum(x[i,4],i=1..3)=50},NONNEGATIVE);
```

$$\{x_{3,4}=0,\ x_{1,4}=0,\ x_{1,3}=0,\ x_{1,1}=0,\ x_{3,3}=0,\ x_{3,2}=0,\ x_{2,3}=60,\ x_{2,4}=50,\ x_{2,1}=70,\ x_{3,1}=120,\ x_{2,2}=20,\ x_{1,2}=100\}$$

Матричный вид полученного решения:

```
> v:=matrix([[0,100,0,0],[70,20,60,50],[120,0,0,0]]);
```

$$v:=\begin{bmatrix}0 & 100 & 0 & 0\\ 70 & 20 & 60 & 50\\ 120 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

3. Минимальная стоимость перевозок:

```
> sum(sum(C[i,j]*v[i,j],i=1..3),j=1..4);
```

$$1090$$

Ответ: 1090, план перевозок

$$\begin{pmatrix}0 & 100 & 0\\ 70 & 20 & 60\\ 120 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

Если убрать требование перехода к задаче закрытого типа, то решение будет иметь вид:

```
> x:=matrix(3,3);
```

$$x:=\operatorname{array}(1..3,1..3,[\ ])$$

```
> C:=matrix([[4,2,6],[7,5,3],[1,7,6]]);
```

$$C:=\begin{bmatrix}4 & 2 & 6\\ 7 & 5 & 3\\ 1 & 7 & 6\end{bmatrix}$$

```
> z:=sum(sum(C[i,j]*x[i,j],i=1..3),j=1..3);
```

```
> with(simplex):
> minimize(z,{sum(x[1,j],j=1..3)<=100,sum(x[2,j],j=1..3)<=200,
sum(x[3,j],j=1..3)<=120,sum(x[i,1],i=1..3)=190,sum(x[i,2],i=1..
3)=120,sum(x[i,3],i=1..3)=60},NONNEGATIVE);
```

$$\{x_{3,3}=0,\ x_{3,2}=0,\ x_{1,1}=0,\ x_{3,1}=120,\ x_{2,1}=70,\ x_{1,2}=100,\ x_{2,3}=60,\ x_{2,2}=20,\ x_{1,3}=0\}$$

Рассмотрим транспортную задачу с ограничениями на пропускные способности.

Задача ([6], 158). Решить транспортную задачу по следующим исходным данным: $a_1 = 25$, $a_2 = 55$, $a_3 = 20$, $b_1 = 45$, $b_2 = 15$, $b_3 = 20$, $b_4 = 20$

$$C = \begin{pmatrix} 9 & 5 & 3 & 10 \\ 6 & 3 & 3 & 2 \\ 3 & 8 & 4 & 8 \end{pmatrix}, \qquad (d_{ik}) = \begin{pmatrix} \infty & \infty & 15 & \infty \\ 15 & \infty & \infty & 10 \\ \infty & \infty & \infty & \infty \end{pmatrix}$$

Символ ∞ в матрице (d_{ik}) указывает, что для данной коммуникации нет ограничений по пропускной способности.

Решение.

```
> x:=matrix(3,4);
```

$$x := \text{array}(1..3, 1..4, [\ ])$$

```
> C:=matrix([[9,5,3,10],[6,3,3,2],[3,8,4,8]]);
```

$$C := \begin{bmatrix} 9 & 5 & 3 & 10 \\ 6 & 3 & 3 & 2 \\ 3 & 8 & 4 & 8 \end{bmatrix}$$

```
> z:=sum(sum(C[i,j]*x[i,j],i=1..3),j=1..4);
```

$$z := 9x_{1,1} + 6x_{2,1} + 3x_{3,1} + 5x_{1,2} + 3x_{2,2} + 8x_{3,2} + 3x_{1,3} + 3x_{2,3} + 4x_{3,3} + 10x_{1,4} + 2x_{2,4} + 8x_{3,4}$$

```
> with(simplex):
> minimize(z,{sum(x[1,j],j=1..4)=25,sum(x[2,j],j=1..4)=55,
sum(x[3,j],j=1..4)=20,sum(x[i,1],i=1..3)=45,sum(x[i,2],i=1..3)=1
5,sum(x[i,3],i=1..3)=20,sum(x[i,4],i=1..3)=20,x[1,3]<=15,x[2,1]
<=15,x[2,4]<=10},NONNEGATIVE);
```

$$\{x_{3,3} = 0,\ x_{3,2} = 0,\ x_{2,2} = 15,\ x_{2,4} = 10,\ x_{2,1} = 15,\ x_{1,3} = 5,\ x_{2,3} = 15,\ x_{1,4} = 10,\ x_{1,1} = 10$$
$$x_{3,4} = 0,\ x_{3,1} = 20,\ x_{1,2} = 0\}$$

Ответ: план перевозок

$$\begin{pmatrix} 10 & 0 & 5 & 10 \\ 15 & 15 & 15 & 10 \\ 20 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Транспортной задачей с фиксированными доплатами называется ([6], стр. 201) транспортная задача, в которой дополнительно задана матрица доплат d_{ij} за

проезд от i-го поставщика к j-му потребителю и требуется минимизировать суммарные расходы. Математическая модель задачи:

$$z = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} (c_{ij} x_{ij} + d_{ij} y_{ij}) \to \min,$$

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i, \\ \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j, \quad y_{ij} = \begin{cases} 0, & \textit{если } x_{ij} = 0 \\ 1, & \textit{если } x_{ij} > 0 \end{cases} \\ x_{ij} \ge 0, \end{cases}$$

Пусть числовые данные задачи: $a_1 = 50$, $a_2 = 30$, $a_3 = 120$, $b_1 = 60$, $b_2 = 40$, $b_3 = 100$,

$$(c_{ij}) = \begin{pmatrix} 7 & 5 & 12 \\ 4 & 6 & 8 \\ 10 & 9 & 6 \end{pmatrix}, \quad (d_{ij}) = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 4 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Ввод данных:

```
> c:=matrix([[7,5,12],[4,6,8],[10,9,6]]);
```

$$c := \begin{bmatrix} 7 & 5 & 12 \\ 4 & 6 & 8 \\ 10 & 9 & 6 \end{bmatrix}$$

```
> d:=matrix([[2,3,3],[4,0,5],[0,1,4]]);a:=[50,30,120];
b:=[60,40,100];
```

$$d := \begin{bmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 4 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

$$a := [50,\ 30,\ 120]$$

$$b := [60,\ 40,\ 100]$$

Ввод матрицы планируемых перевозок:

```
> x:=matrix([[x11,x12,x13],[x21,x22,x23],[x31,x32,x33]]);
```

$$x := \begin{bmatrix} x11 & x12 & x13 \\ x21 & x22 & x23 \\ x31 & x32 & x33 \end{bmatrix}$$

Ввод целевой функции:

```
> z:=sum(sum(c[i,j]*x[i,j]+d[i,j]*signum(x[i,j]),i=1..3),j=1..3):
```

$$z := 7\,x11 + 2\,\mathrm{signum}(x11) + 4\,x21 + 4\,\mathrm{signum}(x21) + 10\,x31 + 5\,x12 + 3\,\mathrm{signum}(x12) + 6\,x22 + 9\,x32 + \mathrm{signum}(x32) + 12\,x13 + 3\,\mathrm{signum}(x13) + 8\,x23 + 5\,\mathrm{signum}(x23) + 6\,x33 + 4\,\mathrm{signum}(x33)$$

С помощью ограничений-равенств можно уменьшить число переменных:

```
> p:=seq(sum(x[i,j],j=1..3)=a[i],i=1..3);
q:=seq(sum(x[i,j],i=1..3)=b[j],j=1..3);
```

$$p := x11 + x12 + x13 = 50,\ x21 + x22 + x23 = 30,\ x31 + x32 + x33 = 120$$

$$q := x11 + x21 + x31 = 60,\ x12 + x22 + x32 = 40,\ x13 + x23 + x33 = 100$$

```
> r:=solve({p,q});
```

$$r := \{x22 = x22, x23 = x23, x32 = x32, x33 = x33, x11 = -90 + x22 + x32 + x23 + x33, x21 = 30 - x22 - x23, x12 = 40 - x22 - x32, x31 = 120 - x32 - x33, x13 = 100 - x23 - x33\}$$

Тогда целевая функция принимает вид:

```
> w:=subs(r,z);
```

$$w := 2090 + 4\,x22 - x23 + x32 - 9\,x33 + 5\,\mathrm{signum}(x23) + 4\,\mathrm{signum}(x33) + \mathrm{signum}(x32) + 2\,\mathrm{signum}(-90 + x22 + x32 + x23 + x33) + 4\,\mathrm{signum}(30 - x22 - x23) + 3\,\mathrm{signum}(40 - x22 - x32) + 3\,\mathrm{signum}(100 - x23 - x33)$$

Программа вычисления minw:

```
> m[1]:=5000:
for v22 from 0 to 30 do
for v23 from 0 to 30 do
for v32 from 0 to 40 do
for v33 from 0 to 100 do
u := 2090+signum(v32)+4*signum(v33)+5*signum(v23)+3*signum(40-v22-
v32)+3*signum(100-v23-v33)+2*signum(-
90+v22+v32+v23+v33)+4*signum(30-v22-v23)+4*v22-v23+v32-9*v33;
if 40-v22-v32>=0 and 100-v23-v33>=0 and - 90+v22+v32+v23+v33>=0 and
30-v22-v23>=0 and u<m[1] then m:=[u,v22,v23,v32,v33] fi;
od od od od;
```

Вывод результатов:

```
> m;
```

$$[1203, 0, 0, 0, 100]$$

```
> subs(x22=m[2],x23=m[3],x32=m[4],x33=m[5],r);
```

$$\{0 = 0, x21 = 30, x12 = 40, 100 = 100, x13 = 0, x31 = 20, x11 = 10\}$$

```
> subs(%,x22=m[2],x23=m[3],x32=m[4],x33=m[5],matrix(x));
```

$$\begin{bmatrix} 10 & 40 & 0 \\ 30 & 0 & 0 \\ 20 & 0 & 100 \end{bmatrix}$$

В частности, замена в матрице доплат $d_{11} = 2$ на $d_{11} = 100$ дает следующие результаты:

```
> m;
```

$$[1294, 0, 0, 0, 90]$$

```
> subs(x22=m[2],x23=m[3],x32=m[4],x33=m[5],r);
```

$$\{x21 = 30, x12 = 40, x13 = 10, x11 = 0, x31 = 30, 90 = 90, 0 = 0\}$$

```
> subs(%,x22=m[2],x23=m[3],x32=m[4],x33=m[5],matrix(x));
```

$$\begin{bmatrix} 0 & 40 & 10 \\ 30 & 0 & 0 \\ 30 & 0 & 90 \end{bmatrix}$$

§ 4. Балансовые модели

Математическим аппаратом решения балансовых моделей в экономике является линейная алгебра. Поэтому балансовые модели легко рассчитываются в Maple.

Задача. Три отрасли промышленности являются производителями и в тоже время потребителями некоторой продукции. Их взаимосвязи определяет матрица А коэффициентов прямых затрат

$$\begin{pmatrix} 0.2 & 0.6 & 0.1 \\ 0 & 0.2 & 0.4 \\ 0.3 & 0.1 & 0.2 \end{pmatrix},$$

вычисляемых по формуле

$$a_{ij} = \frac{x_{ij}}{X_j},$$

где x_{ij} — объем продукции из i-й отрасли в j-ю, а X_j — валовой объем продукции j-й отрасли (все объемы продукции выражаются в единицах стоимости). Сектор конечного спроса потребляет y_i продукции i-й отрасли, и потребление задано матрицей

$$\begin{pmatrix} 1000 \\ 500 \\ 800 \end{pmatrix}$$

1. Составить уравнение межотраслевого баланса.

2. Решить систему уравнений межотраслевого баланса, то есть найти объемы валовой продукции каждой отрасли, обеспечивающие потребности всех отраслей и сектора конечного спроса.

3. Составить матрицу X потоков средств x_{ij}.

4. Определить доходы каждой отрасли $P_j = X_j - \sum_{i=1}^{3} x_{ij}$.

5. Найти матрицу коэффициентов полных (внутрипроизводственных) затрат по формуле $A_n = (E - A)^{-1}$, где E — единичная матрица 3-го порядка.

Решение. 1. *Из постановки задачи следуют «соотношения баланса»*

$$X_i = \sum_{j=1}^{3} x_{ij} + y_i$$

Замена $x_{ij} = a_{ij} X_j$ *приводит их к системе уравнений межотраслевого баланса*

$$X_i = \sum_{j=1}^{3} a_{ij} X_j + y_i,$$

матричный вид которой

$$(E - A)X = Y,$$

где E — единичная матрица 3-го порядка.

2. Вводим данные и находим объемы валовой продукции отраслей:

```
> A:=matrix([[0.2,0.6,0.1],[0,0.2,0.4],[0.3,0.1,0.2]]);
```

$$A := \begin{bmatrix} .2 & .6 & .1 \\ 0 & .2 & .4 \\ .3 & .1 & .2 \end{bmatrix}$$

```
> y:=matrix([[1000],[500],[800]]);
```

$$y := \begin{bmatrix} 1000 \\ 500 \\ 800 \end{bmatrix}$$

```
> E:=Matrix(3,3,shape=identity);
```

$$E := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

```
> with(linalg):
> X:=multiply(inverse(evalm(E-A)),y);
```

$$X := \begin{bmatrix} 2867.187501 \\ 1773.437501 \\ 2296.875001 \end{bmatrix}$$

3. Расчет матрицы (x_{ij}) потоков средств:

```
> M1:=evalm(col(A,1)*X[1,1]);
```

$$M1 := [573.4375002, 0., 860.1562503]$$

```
> M2:=evalm(col(A,2)*X[2,1]);
```

$$M2 := [1064.062501, 354.6875002, 177.3437501]$$

```
> M3:=evalm(col(A,3)*X[3,1]);
```

$$M3 := [229.6875001, 918.7500004, 459.3750002]$$

```
> x:=concat(M1,M2,M3);
```

$$x := \begin{bmatrix} 573.4375002 & 1064.062501 & 229.6875001 \\ 0. & 354.6875002 & 918.7500004 \\ 860.1562503 & 177.3437501 & 459.3750002 \end{bmatrix}$$

4. Вычисления общих доходов отраслей:

```
> X[1,1]-sum(x[i,1],i=1..3);
```

$$1433.593751$$

```
> X[2,1]-sum(x[i,2],i=1..3);
```

$$177.343750$$

```
> X[3,1]-sum(x[i,3],i=1..3);
```

$$689.062501$$

5. Вывод матрицы коэффициентов полных затрат:

```
> inverse(evalm(E-A));
```

$$\begin{bmatrix} 1.562500000 & 1.276041667 & .8333333333 \\ .3125000000 & 1.588541667 & .8333333333 \\ .6250000000 & .6770833333 & 1.666666667 \end{bmatrix}$$

Задача ([6], 23). Предприятие выпускает три вида продукции в количестве, характеризующемся вектор-планом $\overline{X} = (10, 7, 4)$. Для его изготовления используются 5 видов сырья. Известна матрица А:

$$\begin{pmatrix} 5 & 10 & 3 & 9 & 2 \\ 4 & 8 & 5 & 6 & 8 \\ 6 & 12 & 4 & 3 & 10 \end{pmatrix}$$

где a_{ik} характеризует расход к-го вида сырья на 1 единицу i-го вида продукции. Наконец, вектор $\overline{C} = (7, 4, 5, 10, 2)$ задает стоимость 1 единицы каждого вида сырья.

Определить необходимое количество единиц сырья каждого вида для обеспечения плана, стоимость сырья для единицы каждого вида продукции и общую стоимость всего сырья для всей продукции.

Решение. *Ввод данных:*

```
> A:=matrix([[5,10,3,9,2],[4,8,5,6,8],[6,12,4,3,10]]);
```

$$A := \begin{bmatrix} 5 & 10 & 3 & 9 & 2 \\ 4 & 8 & 5 & 6 & 8 \\ 6 & 12 & 4 & 3 & 10 \end{bmatrix}$$

```
> X:=matrix([[10],[7],[4]]);
```

$$X := \begin{bmatrix} 10 \\ 7 \\ 4 \end{bmatrix}$$

```
> C:=matrix([[7],[4],[5],[10],[2]]);
```

$$C := \begin{bmatrix} 7 \\ 4 \\ 5 \\ 10 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Необходимое количество сырья каждого вида:

```
> multiply(transpose(A),X);
```

$$\begin{bmatrix} 102 \\ 204 \\ 81 \\ 144 \\ 116 \end{bmatrix}$$

Стоимость сырья для единицы каждого вида продукции:

```
> multiply(A,C);
```

$$\begin{bmatrix} 184 \\ 161 \\ 160 \end{bmatrix}$$

Общая стоимость сырья:

```
> multiply(transpose(X),%);
```

$$[3607]$$

§ 5. Потоки в сетях

Пусть задана ориентированная 2-полюсная сеть, один полюс — вход, другой — выход, весовые коэффициенты дуг — максимальные пропускные способности дуг. Требуется определить максимальную пропускную способность сети.

Геометрическое решение данной задачи основано на теореме Форда-Фалкерсона, согласно которой максимальная пропускная способность сети равна минимальной пропускной способности сечений сети. Аналитически задача решается сведением ее к задаче ЛП. Рассмотрим сеть, представленную на рисунке:

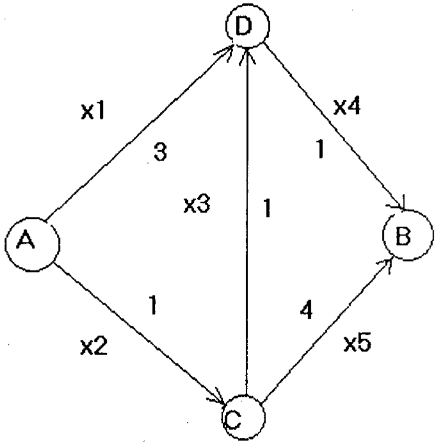

Рис. 6.7

Цифры рядом с дугами — максимальные пропускные способности дуг, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 — планируемые потоки в дугах. Аналитическая постановка задачи о максимальном потоке для данной сети имеет вид:

$$x_4 + x_5 \to \max,$$

при условиях

$$0 \le x_1 \le 3,\ 0 \le x_2 \le 1,\ 0 \le x_3 \le 1,\ 0 \le x_4 \le 1,\ 0 \le x_5 \le 4,$$

а также

$$x_1 + x_3 = x_4,\ x_2 = x_3 + x_5,$$

так как входящие и выходящие потоки в каждом транзитном узле (C и D) должны быть равны. Ее решение в Maple:

```
> maximize(x4+x5,{0<=x1,x1<=1,0<=x2,x2<=1,0<=x3,x3<=1,
0<=x4,x4<=1,0<=x5,x5<=4,x1+x3=x4,x2=x3+x5});
```

$$\{x3 = 0, x2 = 1, x5 = 1, x4 = 1, x1 = 1\}$$

Следовательно, максимальная пропускная способность сети равна 2.

Задача ([1], 19.4). 1. Чему равен максимальный поток автомашин (количество машин в час) для системы автодорог, представленной на рис. 6.8.

2. Рассматривается возможность введения секции E-D, с пропускной способностью 3 тыс. автомашин в час. Насколько увеличится величина максимального потока автомашин?

Решение. 1. Заданная сеть частично ориентирована. Необходимо перейти к ориентированной сети или к системе ориентированных сетей. На участке C-D пропускная способность 2 тыс. автомашин в час как в одну сторону, так и в дру-

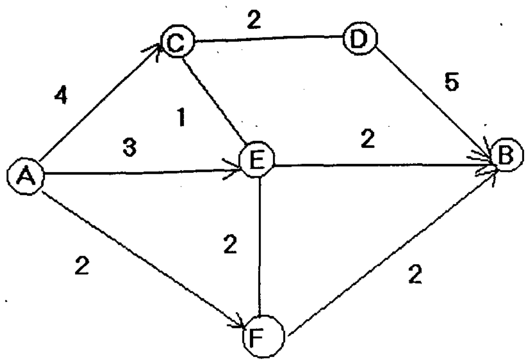

Рис. 6.8

гую (двустороннее движение). Не нарушая общности решения, можно считать участок ориентированным от С к D. Ориентация участков C-E и E-F, как видно из числовых значений, представленных на схеме, на пропускную способность потока автомашин от А к В не влияет. Приходим к ориентированной сети

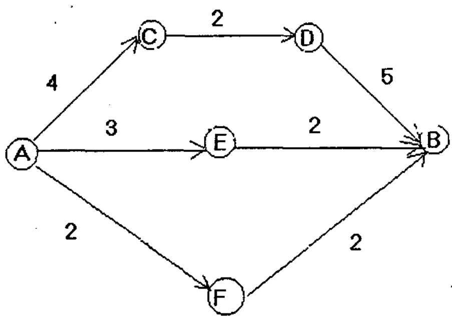

Рис. 6.9

Ответ становится геометрически очевидным: 6. Сечение с минимальной пропускной способностью: CD, BE, FB.

2. Добавляем в предпоследней схеме дорог участок ED:

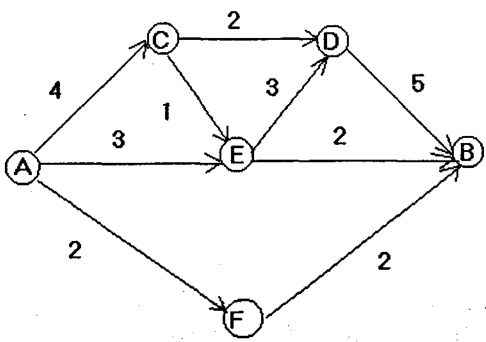

Рис. 6.10

Вводим обозначения планируемых потоков автомашин x_1, x_2, ..., x_8, x_9 на каждом из участков схемы — AC, AF, CD, DB, AE, EB, FB, ED, CE, соответственно. Составляем и решаем задачу линейного программирования::

```
maximize(x4+x6+x7,{0<=x1,x1<=4,0<=x2,x2<=2,0<=x3,x3<=2,
0<=x4,x4<=5,0<=x5,x5<=3,0<=x6,x6<=2,0<=x7,x7<=2,0<=x8,x8<=3,0<=x9,
x9<=1,x1=x3+x9,x3+x8=x4,x5+x9=x6+x8,x2=x7});;
```

$$\{x4 = 4, x7 = 2, x5 = 3, x2 = 2, x3 = 2, x6 = 2, x1 = 3, x8 = 2, x9 = 1\}$$

```
> subs(%,x4+x6+x8);
```

$$8$$

Ответ: 1) 6; 2) 2.

§ 6. Сетевое планирование

Пусть задана ориентированная 2-полюсная (A_1 — вход, A_N — выход) сеть $S[A_1, A_2, ..., A_N, u_{ij}]$, весовые коэффициенты c_{ij} дуг $u_{ij} = A_iA_j$ которой являются длинами дуг, и требуется определить кратчайший путь из A_1 в A_N. Сопоставим [6, 12] каждой дуге u_{ij} булеву (альтернативную) переменную $\delta_{ij} \in \{0,1\}$ и наложим на переменные следующие условия. Для переменных, соответствующих дугам с началом A_1:

$$\sum_{j_1} \delta(1, j_1) = 1.$$

Для переменных, соответствующих дугам с концом A_N:

$$\sum_{i_N} \delta(i_N, N) = 1.$$

Для переменных, соответствующих дугам с началом или с концом в A_K ($K = 2, ..., N-1$):

$$\sum_{i_K} \delta(i_K, K) = \sum_{j_K} \delta(K, j_K).$$

В силу первого условия — только одна из переменных $\delta(1, j_1)$ равна 1, в силу второго условия — только одна из переменных $\delta(i_N, N)$ равна 1. В силу третьего условия, если для фиксированного K все $\delta(i_K, K)$ равны нулю, то все $\delta(K, j_K)$ тоже нулевые, а если одно из $\delta(i_K, K)$ равно 1, то одно из $\delta(K, j_K)$ также 1. Поэтому при этих условиях значения функции

$$\sum_i \sum_j c_{ij} \delta_{ij}$$

равны длинам простых путей из A_1 в A_N и задача нахождения кратчайшего пути сводится к задаче линейного программирования. Следовательно, задача нахождения кратчайшего пути решается в Maple встроенной функцией minimize.

Посмотрим, как в Maple находится кратчайший из трех параллельных путей из А в В, представленных на рисунке:

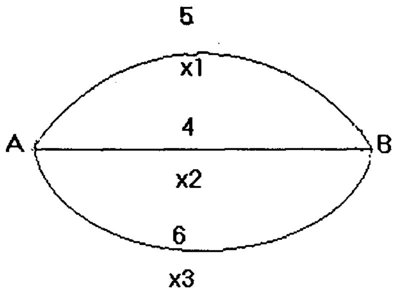

Рис. 6.11

Ставим в соответствие верхнему пути булеву переменную x_1, среднему — x_2, нижнему — x_3. Так как из трех путей должен быть выбран только один, то дополнительное условие $x_1 + x_2 + x_3 = 1$. Целевая функция $z = 5x_1 + 4x_2 + 6x_3$. Применение функции minimize дает:

```
> minimize(5*x1+4*x2+6*x3,{x1<=1,x2<=1,x3<=1,x1+x2+x3=1},
NONNEGATIVE);
```

$$\{x3 = 0, x1 = 0, x2 = 1\}$$

Таким образом, как и следовало, ожидать, кратчайший путь — средний.

Добавим еще два пути и найдем кратчайший маршрут из А в С:

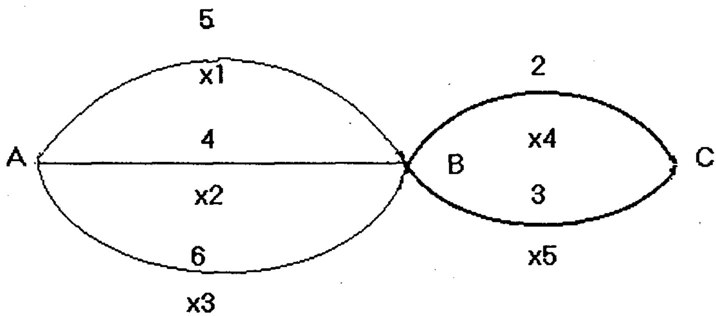

Рис. 6.12

В этом случае вычислительная секция имеет вид:

```
> minimize(5*x1+4*x2+6*x3+2*x4+3*x5,{x1<=1,x2<=1,x3<=1,x4<=1,
x5<=1,x1+x2+x3=1,x4+x5=1},NONNEGATIVE);
```

$$\{x1 = 0, x3 = 0, x5 = 0, x4 = 1, x2 = 1\}$$

Кратчайший путь: x_2, x_4. Путь, имеющий наибольшую длину, находится аналогично:

```
> maximize(5*x1+4*x2+6*x3+2*x4+3*x5,{x1<=1,x2<=1,x3<=1,x4<=1,
x5<=1,x1+x2+x3=1,x4+x5=1},NONNEGATIVE);
```

$$\{x4 = 0, x1 = 0, x2 = 0, x3 = 1, x5 = 1\}$$

Рассмотрим типовую задачу управления проектом с детерминированным временем выполнения работ.

Задача ([1], 14.3.1). Сеть проекта представлена следующими данными

Работа	Предшественник	Продолжительность
A	–	5
B	–	3
C	A	7
D	A	6
E	B	7
F	D, E	3
G	D, E	10
H	C, F	8

Найдите критический путь (максимальный по времени). Сколько времени потребуется для завершения проекта?

Решение. *В соответствии с условиями задачи строим ориентированную сеть:*

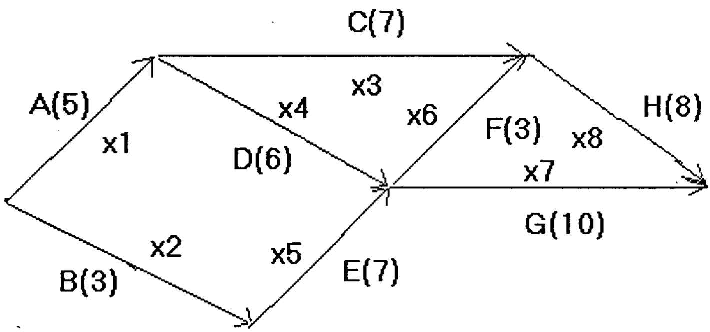

Рис. 6. 13

По ней составляем целевую функцию, задаем ограничения на переменные и получаем:

```
> maximize(5*x1+3*x2+7*x3+6*x4+7*x5+3*x6+10*x7+8*x8,{x1<=1,
x2<=1,x3<=1,x4<=1,x5<=1,x6<=1,x7<=1,x8<=1,x1+x2=1,x1=x4+x
3,x2=x5,x4+x5=x6+x7,x3+x6=x8,x7+x8=1},NONNEGATIVE);
```

$$\{x7 = 0, x8 = 1, x1 = 1, x6 = 1, x3 = 0, x5 = 0, x4 = 1, x2 = 0\}$$

```
> subs(%,5*x1+3*x2+7*x3+6*x4+7*x5+3*x6+10*x7+8*x8);
```

$$22$$

Ответ: критический путь ADFH, t = 22.

Разберем решение в Maple задачи «коммивояжера» ([6], стр. 197). Имеются $n + 1$ пунктов ($i = 0, ..., n$) с заданными расстояниями d_{ik} между i-м и k-м пунктами. Требуется составить оптимальный маршрут из условия минимизации суммарного пробега для машины, выходящей из «нулевого» пункта, которая должна побывать в каждом пункте по одному и только по одному разу и вернуться в «нулевой» пункт. Задача «коммивояжера» сводится к частично целочисленной задаче линейного программирования относительно n^2 булевых переменных x_{ik} и переменных u_i, связанных с x_{ik} дополнительными n^2 ограничениями-неравенствами, обеспечивающими «непрерывность» маршрута [6]. Заметим, что дополнительные ограничения-неравенства можно заменить условиями на мощности сечений (сечений нулевой мощности быть не должно). Не имеет смысла включать их все в систему ограничений. Рациональнее решать задачу без них и только в случае появления подциклов, вводить дополнительные условия в систему ограничений, причем именно на те сечения, дуги которых не вошли в предполагаемый маршрут. С учётом сказанного решаются следующие две задачи.

Задача ([6], 297). Составить математическую модель и решить задачу коммивояжера при следующих числовых данных:

$$n = 3,\ d_{01} = 25,\ d_{02} = 40,\ d_{03} = 30,\ d_{12} = 50,\ d_{13} = 20,\ d_{23} = 60.$$

Решение. *Делаем чертеж к задаче:*

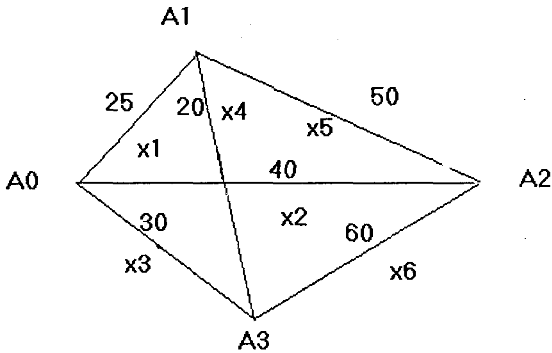

Рис. 6.14

Каждому ребру построенного графа сопоставляем свою булеву переменную x_i, $i = 1, 2, ..., 6$, значение которой равно 1, если ребро входит в кратчайший путь, и равно 0, в противном случае. Для каждой вершины сумма значений переменных, соответствующих ребрам, выходящим из нее, должна быть равна 2, так как по условию задачи коммивояжер в каждый пункт въезжает, а значит, и выезжает из него. Составляем математическую модель задачи и находим ее решение:

```
> minimize(25*x1+40*x2+30*x3+20*x4+50*x5+60*x6,{x1<=1,x2<=1,
x3<=1,x4<=1,x5<=1,x6<=1,x1+x2+x3=2,x1+x4+x5=2,x3+x4+x6=2,x2+
x5+x6=2},NONNEGATIVE);
```

$$\{x6 = 0, x1 = 0, x4 = 1, x2 = 1, x3 = 1, x5 = 1\}$$

```
> subs(%,25*x1+40*x2+30*x3+20*x4+50*x5+60*x6);
```

$$140$$

Ответ: $A_0 - A_3 - A_1 - A_2 - A_0$, $z_{\min} = 140$.

Замечание. Небольшие и достаточно очевидные изменения ограничений, в решении последней задачи, приводят к кратчайшему остовному дереву графа, представленного на рисунке 6.14:

```
> minimize(25*x1+40*x2+30*x3+20*x4+50*x5+60*x6,{x1<=1,x2<=1,
x3<=1,x4<=1,x5<=1,x6<=1,x1+x2+x3>=1,x1+x4+x5>=1,x3+x4+x6>
=1,x2+x5+x6>=1,x1+x2+x3+x4+x5+x6=3 },NONNEGATIVE);
```

$$\{x1 = 1, x5 = 0, x3 = 0, x6 = 0, x4 = 1, x2 = 1\}$$

```
> subs(%,25*x1+40*x2+30*x3+20*x4+50*x5+60*x6);
```

$$85$$

В случае, когда среди расстояний d_{ij} и d_{ji} есть не равные $(i \neq j)$, решение задачи о коммивояжере несущественно отличается от предыдущего.

Задача. Решить задачу о коммивояжере с матрицей расстояний между пунктами

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 9 & 6 & 1 \\ 2 & 0 & 9 & 2 & 10 \\ 11 & 11 & 0 & 8 & 1 \\ 5 & 4 & 3 & 0 & 8 \\ 1 & 11 & 1 & 8 & 0 \end{pmatrix}.$$

Решение.

```
> c:=matrix([[0,4,9,6,1],[2,0,9,2,10],[11,11,0,8,1],[5,4,3,0,8],
[1,11,1,8,0]]);
```

$$c := \begin{bmatrix} 0 & 4 & 9 & 6 & 1 \\ 2 & 0 & 9 & 2 & 10 \\ 11 & 11 & 0 & 8 & 1 \\ 5 & 4 & 3 & 0 & 8 \\ 1 & 11 & 1 & 8 & 0 \end{bmatrix}$$

```
> x:=matrix([[0,x12,x13,x14,x15],[x21,0,x23,x24,x25],[x31,x32,0,
x34,x35],[x41,x42,x43,0,x45],[x51,x52,x53,x54,0]]);
```

$$x := \begin{bmatrix} 0 & x12 & x13 & x14 & x15 \\ x21 & 0 & x23 & x24 & x25 \\ x31 & x32 & 0 & x34 & x35 \\ x41 & x42 & x43 & 0 & x45 \\ x51 & x52 & x53 & x54 & 0 \end{bmatrix}$$

```
> z:=sum(sum(c[i,j]*x[i,j],i=1..5),j=1..5);
```

$$z := 2x21 + 11x31 + 5x41 + x51 + 4x12 + 11x32 + 4x42 + 11x52 + 9x13 + 9x23$$
$$+ 3x43 + x53 + 6x14 + 2x24 + 8x34 + 8x54 + x15 + 10x25 + x35 + 8x45$$

```
> minimize(z,{seq(sum(x[i,j],j=1..5)=1,i=1..5),seq(sum(x[i,j],
i=1..5)=1,j=1..5),seq(x[1,j]<=1,j=1..5),seq(x[2,j]<=1,j=1..5),
seq(x[3,j]<=1,j=1..5),seq(x[4,j]<=1,j=1..5),seq(x[5,j]<=1,j=1
..5),sum(sum(x[i,j],i=1..5),j=1..5)=5},NONNEGATIVE);
```

$$\{x31 = 0, x32 = 0, x34 = 0, x41 = 0, x13 = 0, x14 = 0, x15 = 0, x21 = 0, x42 = 0, x45 = 0, x53 = 0, x54 = 0, x23 = 0, x25 = 0, x52 = 0, x51 = 1, x12 = 1, x24 = 1, x35 = 1, x43 = 1\}$$

Ответ: $A_1 - A_2 - A_4 - A_3 - A_5 - A_1$.

§ 7. Целочисленное программирование

Частично целочисленные задачи линейного программирования можно решать сравнением оптимальных значений целевой функции при тех целых значениях указанных целочисленных переменных, которые удовлетворяют системе ограничений.

Задача ([6], 288.4). Решить частично целочисленную задачу

$$z = x_1 + x_2 \to \max$$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \le 4, \\ x_1 + 2x_2 \le 4, \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0,\ x_2 \text{ — целочисл.}$$

Решение. *Из ограничений находится диапазон [0, 2] изменения x_2 и с помощью оператора цикла for последовательно вычисляются наибольшие значения z при целых значениях x2 из данного диапазона. Из них выбирается наибольшее:*

```
> restart:with(simplex):for x2 from 0 to 2 do
w:=[subs(maximize(x1+x2,{2*x1+x2<=4,x1+2*x2<=4},NONNEGATIVE),x
1+x2),maximize(x1+x2,{2*x1+x2<=4,x1+2*x2<=4},NONNEGATIVE),x2];
od;
```

$$w := [2, \{x1 = 2\}, 0]$$

$$w := \left[\frac{5}{2}, \{x1 = \frac{3}{2}\}, 1\right]$$

$$w := [2, \{x1 = 0\}, 2]$$

Ответ: $(\frac{3}{2}, 1)$, $\max z = \frac{5}{2}$.

Полностью целочисленная задача ЛП решается программным модулем, сравнивающим каждое следующее значение z , в целочисленной точке, удовлетворяющей системе ограничений, с предыдущим, используя вложенные циклы и оператор условного перехода if, причем без пакета simplex. Поскольку в программный модуль входит система ограничений, то определяя диапазоны изменения переменных, необходимо следить только за тем, чтобы они не оказались меньше возможных.

Задача ([6], 284.1). Найти полностью целочисленное решение

$$z = 3x_1 + 3x_2 \to \max,$$

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 \ge 6 \\ 3x_1 + 2x_2 \le 36 \\ x_2 \le 13 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

Решение.

```
> z[1]:=0:
> for x1 from 0 to 12 do
for x2 from 0 to 13 do 3*x1+3*x2; if 3*x1+3*x2>z[1] and x1+3*x2>=6
and 3*x1+2*x2<=36 and x2<=13 then z:=[3*x1+3*x2,x1,x2] fi;
od od;
> z.;
```

$$[48,\ 3,\ 13]$$

Ответ: $\max z = 48,\ (3,13)$.

Аналогичным образом решаются задачи на минимум.

Задача ([6], 284.1). Найти полностью целочисленное решение

$$z = x_1 + 2x_2 + x_5 \to \min$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 5, \\ \quad x_2 + x_3 + x_4 - x_5 = 2, \\ \quad\quad x_3 - x_4 + x_5 = 1, \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_3 \ge 0, x_4 \ge 0, x_5 \ge 0. \end{cases}$$

Решение.

```
> m[1]:=20:
> for x1 from 0 to 5 do
for x2 from 0 to 5 do
for x3 from 0 to 5 do
for x4 from 0 to 5 do
for x5 from 0 to 5 do
x1+2*x2+x5; if x1+2*x2+x5<m[1] and x1+x2+x3+x4+x5=5 and
x2+x3+x4-x5=2 and x3-x4+x5=1 then m:=[x1+2*x2+x5, x1,x2,x3,x4,x5]
fi;
od od od od od;
> m;
```

$$[4,\ 1,\ 1,\ 1,\ 1,\ 1]$$

Ответ: $\min z = 4,\ (1,1,1,1,1)$.

Задача ([1], 20.1). Руководство завода предполагает провести комплекс организационно-технических мероприятий с целью модернизации производства. Мероприятия предполагают затраты производственных, трудовых и финансовых ресурсов.

Мероприятие	Трудовые ресурсы, чел-дней	Финансовые ресурсы, млн руб.	Производствен. площади, м. кв.	Экономический эффект, млн р.
Закупка станков с ЧПУ	350	400	130	13000
Текущий ремонт	250	90	–	3000
Монтаж транспортного конвейера	100	60	300	8000
Установка рельсового крана	200	300	150	12000
Ввод системы контроля качества	130	–	150	2500
Разработка АСУП	800	500	100	15000

На реализацию всех мероприятий завод может выделить: трудовых ресурсов 1300 чел-дней, финансовых — 1 млрд руб., производственных площадей — 700 м. кв.

Какие мероприятия следует провести, чтобы общий экономический эффект был максимальным?

1) Каков максимальный экономический эффект от проведения мероприятий (млн руб.)?

2) Какое количество мероприятий следует провести?

Решение. *Делим все показатели на 100, обозначаем мероприятия: закупка станков —* x_1, ..., *разработка АСУП —* x_6. *Приходим к целочисленной задаче линейного программирования с булевыми (альтернативными) переменными:*

$$z = 130x_1 + 30x_2 + 80x_3 + 120x_4 + 25x_5 + 150x_6 \to \max,$$

$$\begin{cases} 3.5x_1 + 2.5x_2 + x_3 + 2x_4 + 1.3x_5 + 8x_6 \le 13, \\ 4x_1 + 0.9x_2 + 0.6x_3 + 3x_4 + 5x_6 \le 10, \\ 1.3x_1 + 3x_3 + 1.5x_4 + 1.5x_5 + x_6 \le 7. \end{cases}$$

Программный модуль вычисления maxz имеет вид:

```
> m[1]:=0:
> for x1 from 0 to 1 do
for x2 from 0 to 1 do
for x3 from 0 to 1 do
for x4 from 0 to 1 do
for x5 from 0 to 1 do
for x6 from 0 to 1 do
130*x1+30*x2+80*x3+120*x4+25*x5+150*x6; if
130*x1+30*x2+80*x3+120*x4+25*x5+150*x6>m[1] and
3.5*x1+2.5*x2+x3+2*x4+1.3*x5+8*x6<=13 and
4*x1+0.9*x2+0.6*x3+3*x4+5*x6<=10 and
```

```
1.3*x1+3*x3+1.5*x4+1.5*x5+x6<=7 then
m:=[130*x1+30*x2+80*x3+120*x4+25*x5+150*x6, x1,x2,x3,x4,x5,x6] fi;
od od od od od od;
> m;
```

$$[375, 0, 0, 1, 1, 1, 1]$$

Ответ: 1) 37500 млн руб., 2) 4.

Задача ([6], 308). Общую сумму капиталовложений K = 1200 необходимо разделить между пятью объектами, потребности которых 420, 180, 240, 560, 300, а ожидаемые прибыли 80, 65, 90, 210, 150. На каждый объект капиталовложения или выделяются в необходимой сумме, или вообще не выделяются. Составить математическую модель задачи целочисленного программирования, заключающейся в оптимальном распределении капиталовложений, и найти ее решение.

Решение. *Задача также сводится к целочисленной задаче линейного программирования с булевыми переменными:*

$$z = 80x_1 + 65x_2 + 90x_3 + 210x_4 + 150x_5 \to \max,$$

$$420x_1 + 180x_2 + 240x_3 + 560x_4 + 300x_5 \le 1200.$$

Составляем программный модуль и выводим результаты:

```
> m[1]:=0:
> for x1 from 0 to 1 do
for x2 from 0 to 1 do
for x3 from 0 to 1 do
for x4 from 0 to 1 do
for x5 from 0 to 1 do
80*x1+65*x2+90*x3+210*x4+150*x5; if
80*x1+65*x2+90*x3+210*x4+150*x5>m[1] and
420*x1+180*x2+240*x3+560*x4+300*x5<=1200 then
m:=[80*x1+65*x2+90*x3+210*x4+150*x5, x1,x2,x3,x4,x5] fi;
od od od od od ;
> m;
```

$$[450, 0, 0, 1, 1, 1]$$

Ответ. (0; 0; 1; 1; 1), $z_{\max} = 450$.

Возможны различные варианты данной задачи. Пусть, например, задано дополнительное условие: капиталовложения обязательно вкладываются или в 4-й, или в 5-й объект. Добавляя в программный модуль условие $x_4 + x_5 = 1$, получаем:

```
> m[1]:=0:
> for x1 from 0 to 1 do
for x2 from 0 to 1 do
for x3 from 0 to 1 do
for x4 from 0 to 1 do
for x5 from 0 to 1 do
80*x1+65*x2+90*x3+210*x4+150*x5; if
80*x1+65*x2+90*x3+210*x4+150*x5>m[1] and
```

```
420*x1+180*x2+240*x3+560*x4+300*x5<=1200 and x4+x5=1 then
m:=[80*x1+65*x2+90*x3+210*x4+150*x5, x1,x2,x3,x4,x5] fi;
od od od od od ;
> m;
```

$$[385, 1, 1, 1, 0, 1]$$

Аналогичным образом решается задача об оптимальном назначении ([6], стр. 196). Имеется n работ и m механизмов, способных выполнять эти работы. Известна матрица эффективностей выполнения работ. При условиях, что каждый механизм должен выполнять только одну работу и каждая работа должна выполняться только одним механизмом, требуется составить оптимальный план размещения механизмов.

Пусть матрица эффективностей выполнения трех работ четырьмя механизмами имеет вид

$$\begin{pmatrix} 5 & 2 & 3 \\ 4 & 2 & 4 \\ 4 & 3 & 3 \\ 3 & 4 & 4 \end{pmatrix}.$$

Тогда решение задачи об оптимальном назначении имеет вид:

```
> c:=matrix([[5,2,3],[4,2,4],[4,3,3],[3,4,4]]);
```

$$c := \begin{bmatrix} 5 & 2 & 3 \\ 4 & 2 & 4 \\ 4 & 3 & 3 \\ 3 & 4 & 4 \end{bmatrix}$$

```
> x:=matrix(4,3);
```

$$x := \mathrm{array}(1..4, 1..3, [\,])$$

```
> m[1]:=0:
for x[1,1] from 0 to 1 do
for x[1,2] from 0 to 1 do
for x[1,3] from 0 to 1 do
for x[2,1] from 0 to 1 do
for x[2,2] from 0 to 1 do
for x[2,3] from 0 to 1 do
for x[3,1] from 0 to 1 do
for x[3,2] from 0 to 1 do
for x[3,3] from 0 to 1 do
for x[4,1] from 0 to 1 do
for x[4,2] from 0 to 1 do
for x[4,3] from 0 to 1 do
n:=sum(sum(c[i,j]*x[i,j],i=1..4),j=1..3);
if
n>m[1] and sum(x[1,j],j=1..3)<=1 and sum(x[2,j],j=1..3)<=1 and
sum(x[3,j],j=1..3)<=1 and sum(x[4,j],j=1..3)<=1 and
```

```
sum(x[i,1],i=1..4)=1 and sum(x[i,2],i=1..4)=1 and
sum(x[i,3],i=1..4)=1 then m:=[n,matrix(x)] fi;
od od od od od od od od od od od od ;
> m;
```

$$\left[13, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}\right]$$

§ 8. Задача Эрланга

1. Пусть S_0, S_1, ..., S_n возможные состояния физической системы S, причем переходы из одного состояния S_i в другое S_j происходят под действием простейшего потока событий с интенсивностью λ_{ij} ($\frac{1}{\lambda_{ij}}$ — среднее число переходов за единицу времени). Если схема состояний системы S имеет вид, представленный на рисунке 6.15, то она называется схемой «гибели и размножения».

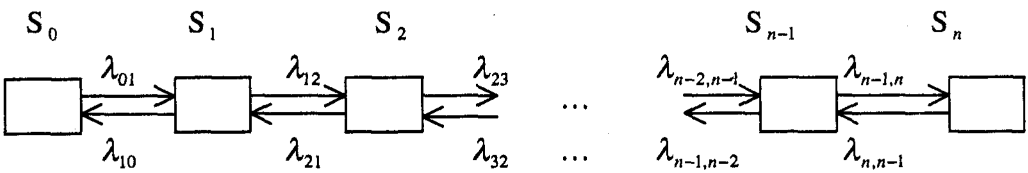

Рис. 6.15

Название схемы объясняется тем, что она определяет численности популяций в каждом следующем поколении через интенсивности рождения и гибели предыдущих поколений. Обозначим вероятности $p(S = S_i) = p_i$ и сделаем допущение, что они не зависят от рассматриваемого момента времени. Тогда, так как среднее время пребывания системы в состоянии S_i постоянно (и равно $\frac{1}{p_i}$), для схемы «гибели и размножения» должны выполняться соотношения

$$\lambda_{01}p_0 = \lambda_{10}p_1$$

$$(\lambda_{12} + \lambda_{10})p_1 = \lambda_{01}p_0 + \lambda_{21}p_2$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$(\lambda_{k,k+1} + \lambda_{k,k-1})p_k = \lambda_{k-1,k}p_{k-1} + \lambda_{k+1,k}p_{k+1}$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$\lambda_{n-1,n}p_{n-1} = \lambda_{n,n-1}p_n.$$

Откуда

$$p_1 = \frac{\lambda_{01}}{\lambda_{10}} p_0$$

$$p_2 = \frac{\lambda_{12}}{\lambda_{21}} \frac{\lambda_{01}}{\lambda_{10}} p_0$$

....

$$p_n = \frac{\lambda_{n-1,n} \ldots \lambda_{12}\lambda_{01}}{\lambda_{n,n-1} \ldots \lambda_{21}\lambda_{10}} p_0.$$

Складывая полученные соотношения и учитывая

$$p_0 + p_2 + \ldots + p_n = 1$$

находим

$$p_0 = (1 + \frac{\lambda_{01}}{\lambda_{10}} + \frac{\lambda_{12}\lambda_{01}}{\lambda_{21}\lambda_{10}} + \ldots + \frac{\lambda_{n-1,n}}{\lambda_{n,n-1}} \frac{\ldots\lambda_{12}\lambda_{01}}{\ldots\lambda_{21}\lambda_{10}})^{-1}.$$

В Maple полученные вероятности, называемые финальными, рассчитываются приведенными ниже командными строками:

```
> p[0]:=(1+sum( product (lambda[k,k+1],k=0..i)/ product
(lambda[k+1,k], k=0..i),i=0..n-1))^(-1);
```

$$p_0 := \frac{1}{1 + \left(\sum_{i=0}^{n-1} \frac{\prod_{k=0}^{i} \lambda_{k,k+1}}{\prod_{k=0}^{i} \lambda_{k+1,k}} \right)}$$

```
> p:=p[0]*product(lambda[k,k+1],k=0..i-1)/product
(lambda[k+1,k],k=0..i-1);
```

$$p := \frac{\prod_{k=0}^{i-1} \lambda_{k,k+1}}{\left(1 + \left(\sum_{i=0}^{n-1} \frac{\prod_{k=0}^{i} \lambda_{k,k+1}}{\prod_{k=0}^{i} \lambda_{k+1,k}} \right) \right) \left(\prod_{k=0}^{i-1} \lambda_{k+1,k} \right)}$$

Например, пусть:

$$\lambda_{0,1} = 1 \qquad \lambda_{1,2} = 2 \qquad \lambda_{2,3} = 3$$

$$\lambda_{1,0} = 0.5 \qquad \lambda_{2,1} = 1.5 \qquad \lambda_{3,2} = 2.5$$

Подстановка данных значений дает:

```
> restart:lambda[0,1]:=1;lambda[1,2]:=2;lambda[2,3]:=3
;lambda[1,0]:=0.5;lambda[2,1]:=1.5;lambda[3,2]:=2.5;n:=3;p[0]:=(
1+sum( product (lambda[k,k+1],k=0..i)/ product (lambda[k+1,k],
k=0..i),i=0..n-1))^(-1);
```

$$\lambda_{0,1} := 1$$

$$\lambda_{1,2} := 2$$

$$\lambda_{2,3} := 3$$

$$\lambda_{1,0} := .5$$

$$\lambda_{2,1} := 1.5$$

$$\lambda_{3,2} := 2.5$$

$$n := 3$$

$$p_0 := .1127819549$$

```
> p:=p[0]*product(lambda[k,k+1],k=0..i-1)/product(lambda[k+1,k],
k=0..i-1);
```

$$p := .1127819549\,\frac{\prod_{k=0}^{i-1}\lambda_{k,k+1}}{\prod_{k=0}^{i-1}\lambda_{k+1,k}}$$

```
> [subs(i=1,p),subs(i=2,p),subs(i=3,p)];
```

$$\left[.1127819549\,\frac{\prod_{k=0}^{0}\lambda_{k,k+1}}{\prod_{k=0}^{0}\lambda_{k+1,k}},\ .1127819549\,\frac{\prod_{k=0}^{1}\lambda_{k,k+1}}{\prod_{k=0}^{1}\lambda_{k+1,k}},\ .1127819549\,\frac{\prod_{k=0}^{2}\lambda_{k,k+1}}{\prod_{k=0}^{2}\lambda_{k+1,k}}\right]$$

```
> evalf(%);
```

$$[.2255639098,\ .3007518798,\ .3609022557]$$

2. Задача Эрланга о n-канальной системе массового обслуживания (СМО) с отказами — одна из первых задач теории массового обслуживания. Имеется n каналов (линий связи), на которые случайным образом поступает поток заявок с интенсивностью λ, обслуживаемых с интенсивностью μ ($\mu = \dfrac{1}{\bar{t}_{обс}}$). Найти финальные вероятности СМО и характеристики ее эффективности:

A — абсолютную пропускную способность, то есть среднее число заявок, обслуживаемых в единицу времени;

Q — относительную пропускную способность, то есть вероятность того, что заявка будет обслужена;

$P_{отк}$ — вероятность отказа;

$\bar{k}$ — среднее число занятых каналов.

Состояния S_0, S_1, ..., S_n такой системы — число занятых каналов (S_0 — все свободны, S_1 — один занят, ..., S_n — все заняты). Схема состояний системы:

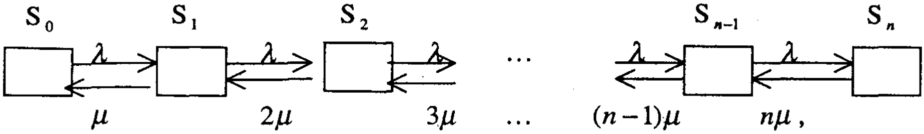

Рис. 6.16

Такой вид схемы состояний системы следует из того, что поток заявок переводит систему из любого левого состояния в правое с интенсивностью λ, а обратные интенсивности зависят от числа каналов, которые могут освободиться. Она является частным случаем схемы «гибели и размножения». Согласно предыдущему пункту

$$p_0 = (1 + \frac{\lambda}{\mu} + \frac{\lambda^2}{2\mu^2} + \frac{\lambda^3}{2\cdot 3\cdot \mu^3} + \ldots \frac{\lambda^n}{n!\,\mu^n})^{-1}.$$

Обозначение $\rho = \dfrac{\lambda}{\mu}$ приводит к формулам Эрланга:

$$p_0 = (1 + \rho + \frac{\rho^2}{2!} + \ldots + \frac{\rho^n}{n!})^{-1}$$

$$p_1 = \rho\cdot p_0,\ p_2 = \frac{\rho^2}{2!}\cdot p_0,\ \ldots,\ p_n = \frac{\rho^n}{n!}\cdot p_0.$$

Задание их в форме процедуры программирования:

```
> p:=proc(ro,n)
local q;
q[0]:=(sum(ro^i/i!,i=0..n))^(-1);
[q[0],[seq(q[0]*ro^i/i!,i=1..n)]];
end;
```

$p := \mathrm{proc}\,(ro, n)$

local q;

$q[0] := 1/\mathrm{sum}(ro\verb|^|i/i!, i = 0 \,..\, n)$; $[q[0], [\mathrm{seq}(q[0]\times ro\verb|^|i/i!, i = 1 \,..\, n)]]$

end proc

Определим характеристики эффективности системы. Вероятность отказа равна вероятности того, что все каналы заняты, то есть

$$P_{отк} = p_n = \frac{\rho^n}{n!}\cdot p_0$$

Относительная пропускная способность — вероятность, что заявка будет обслужена, находится как вероятность противоположного события

$$Q = 1 - P_{отк} = 1 - \frac{\rho^n}{n!}\cdot p_0.$$

Абсолютная пропускная способность

$$A = \lambda \cdot Q = \lambda(1 - \frac{\rho^n}{n!} \cdot p_0),$$

а среднее число занятых каналов

$$\bar{k} = \rho \cdot (1 - \frac{\rho^n}{n!} \cdot p_0).$$

Задача. В парикмахерский салон, который обслуживают два мастера, заходит в среднем 8 клиентов в час, причем если мастера заняты, то клиенты уходят. Среднее время обслуживания одного клиента $1/6$ часть часа. Содержание одного рабочего места составляет 100 рублей за 1 час, а доход от обслуживания одного клиента 50 рублей.

1. Найти характеристики эффективности работы салона.
2. Определить доход, полученный за час работы двумя мастерами.
3. Найти характеристики эффективности работы салона, если его будут обслуживать три мастера. Выгодно ли принять на работу третьего мастера с точки зрения общего дохода, получаемого за 1 час работы салона?

Решение. 1. *По условию задачи* $n = 2, \lambda = 8, \mu = 6, \rho = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{4}{3}$. *С помощью введенной процедуры находим:*

```
> p(4/3,2);
```

$$\left[\frac{9}{29}, \left[\frac{12}{29}, \frac{8}{29}\right]\right]$$

```
> evalf(%);
```

$$[.3103448276, [.4137931034, .2758620690]]$$

Следовательно, вероятность отказа $P_{отк} = 0.276$, *относительная пропускная способность* $Q = 0.724$, *абсолютная пропускная способность* $A = 5.792$, *среднее число занятых мастеров 0.965.*

2. *Средний доход за один час* $D = 50A = 299{,}6$ *рублей.*

3. *Замена в процедуре* $n = 2$ *на* $n = 3$ *дает:*

```
> p(4/3,3);
```

$$\left[\frac{81}{293}, \left[\frac{108}{293}, \frac{72}{293}, \frac{32}{293}\right]\right]$$

```
> evalf(%);
```

$$[.2764505119, [.3686006826, .2457337884, .1092150171]]$$

В этом случае доход, получаемый мастерами за один час:

```
> 50*8*(1-p(4/3,3)[2,3]);
```

$$\frac{104400}{293}$$

```
> evalf(%);
```

$$356.3139932$$

Прием на работу третьего мастера не выгоден, так как $D_3 - D_2 < 100$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Аронович А. Б., Афанасьев М. Ю., Суворов Б. П. Сборник задач по исследованию операций. М: Изд-во МГУ, 1997. 256 с.

2. Гмурман В. Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике: Учеб. Пособие для студентов втузов. Изд. 4-е, М.: ВШ, 1998. 400 с.: ил.

3. Дьяконов В. Maple 7: учебный курс. — СПб: Питер, 2002. 672 с., ил.

4. Ефимов А. В., Демидович Б. П. и др. Сборник задач по математике для втузов. Линейная алгебра и основы математического анализа. — М.: Наука, 1993. 480 с.

5. Ефимов А. В., Демидович Б. П. и др. Сборник задач по математике для втузов. Специальные разделы математического анализа. — М.: Наука, 1986. 368 с.

6. Калихман И. Л. Сборник задач по математическому программированию. Изд. 2-е, доп. и перераб. М., «Высшая школа», 1975.

7. Куланин Е.Д. и др. 3000 конкурсных задач по математике. 3-е изд., испр. и доп. — М.: Рольф, 1999. 624 с., с илл.

8. Рыжиков Ю. И. Решение научно-технических задач на персональном компьютере. — СПб.: КОРОНА принт, 2000. 272 с.

9. Рычков В., Дьяконов В., Новиков Ю. Компьютер для студента. Самоучитель — СПб.: Питер, 2001. 592 с.: ил.

10. Самойленко А. М., Кривошея С. А., Перестюк Н. А. Дифференциальные уравнения: примеры и задачи. Учеб. пособие. 2-е изд., перераб. — М.: Высш. шк., 1989. 383 с.: илл.

11. Сканави М. И., Егерев В. К., Кордемский Б. А., Зайцев В. В. и др. Сборник задач по математике для поступающих во втузы: Учеб. пособие. Изд. 5-е, перераб. и доп. — М.: ВШ, 1998. 431 с.: ил.

12. Шелобаев С. И. Математические методы и модели в экономике, финансах, бизнесе: Учебное пособие для вузов. — М.: ЮНИТИ ДАНА, 2000. 376 с.

Содержание