

УДК ???.

ББК ??.

С44

Скопенков А. Б.

С44 Алгебраическая топология с геометрической точки зрения. — М: МЦНМО, 20??. — ??? с.

ISBN 978-5-4439-????-?

В книге рассматриваются важнейшие наглядные объекты математики, **важные для приложений**: маломерные многообразия и векторные поля на них, непрерывные отображения и их деформации. Показано, как при решении **геометрических задач** естественно возникают основные идеи, понятия и методы алгебраической топологии: группы гомологий, препятствия и инварианты, характеристические классы.

Основные идеи представлены на простейших частных случаях, свободных от технических деталей, **со** сведением к необходимому минимуму алгебраического языка. За счет этого книга доступна для начинающих, хотя содержит красивые сложные результаты. Для ее изучения желательно **минимальное знакомство** с графами, векторными полями и поверхностями, хотя все необходимые определения приводятся в начале. Часть материала преподнесена в виде задач, к большинству из которых приведены указания.

Книга предназначена **для студентов, аспирантов, работников** науки и образования, **изучающих и применяющих** алгебраическую топологию.

ISBN 978-5-4439-????-?

© Скопенков А. Б., 20??

© МЦНМО, 20??

Содержание

§ 1. Введение	8
1.1. Зачем эта книга	8
1.2. Содержание и используемый материал	11
1.3. Для специалистов	13
1.4. Благодарности	14
1.5. Обозначения и соглашения	15
1.6. Словарик по теории графов	15
1.7. Примеры поверхностей	16
§ 2. Наглядные задачи о поверхностях	21
2.1. Наглядные задачи о графах на поверхностях	21
2.2. Применения неравенства Эйлера	24
2.3. Наглядные задачи о разрезаниях	26
2.4. Топологическая эквивалентность (гомеоморфность)	27
2.5. Топологическая эквивалентность дисков с ленточками	31
Ответы, указания и решения к некоторым задачам	33
§ 3. Векторные поля на плоскости	41
3.1. Интересные примеры и теоремы	41
3.2. Гомотопность векторных полей и непрерывных отображений	43
3.3. Число оборотов вектора и его применения	46
3.4. Гомотопическая классификация векторных полей	48
Ответы, указания и решения к некоторым задачам	50
§ 4. Векторные поля на двумерных поверхностях	55
4.1. Касательные векторные поля для сферы	55
4.2. Нормальные векторные поля и гомотопии для сферы	56
4.3. Векторные поля и гомотопии для тора	58
4.4. Векторные поля и гомотопии для других поверхностей	59
4.5. Обобщение на двумерные подмногообразия	61
4.6. Касательные векторные поля общего положения	64
4.7. Построение касательных векторных полей по триангуляции	67
4.8. Нормальные векторные поля для двумерных поверхностей	71
4.9. Построение гомологического инварианта векторных полей	73

§ 10. Трехмерные многообразия	144
10.1. Трехмерные комплексы и их гомотоморфность	144
10.2. Трехмерные многообразия	145
10.3. Край, ориентируемость, эйлерова характеристика	149
10.4. Гомологии трехмерных многообразий	150
10.5. Фундаментальная группа и накрытия (набросок)	153
10.6. Конструкции трехмерных многообразий (набросок)	158
Ответы, указания и решения к некоторым задачам	159
§ 11. Наборы векторных полей	162
11.1. О существовании наборов касательных полей	162
11.2. Характеристические классы для 4-многообразий	163
11.3. Определение групп гомологий и формы пересечений	166
11.4. Характеристические классы для n -многообразий	169
Ответы, указания и решения к некоторым задачам	171
§ 12. Непогружаемость и невложимость	175
12.1. Основные результаты о непогружаемости и невложимости	175
12.2. Доказательства непогружаемости	177
12.3. Нормальные классы Уитни как препятствия (набросок)	180
12.4. Степени двойки и классы Штифеля—Уитни (набросок)	182
Ответы, указания и решения к некоторым задачам	185
§ 13. Расслоения и их применения	191
13.1. Простейшие расслоения	191
13.2. Векторные расслоения	193
13.3. Классификация расслоений (набросок)	196
13.4. Приложение: классификация сечений	199
13.5. Приложение: применение к гамильтоновым системам	202
Ответы, указания и решения к некоторым задачам	203
§ 14. Общие свойства гомологий	205
14.1. Двойственность Пуанкаре	205
14.2. Гомологии пары, вырезание и точная последовательность	208
14.3. Другие точные последовательности	210
14.4. Двойственность Александра и ее применения	212
14.5. Двойственность Александра—Понтрягина	216
Ответы, указания и решения к некоторым задачам	217
§ 15. Гомотопическая классификация и ее применения	222

15.1.	Введение. Групповая структура	222
15.2.	Точная последовательность расслоения	225
15.3.	Классификация погружений	227
15.4.	Набросок доказательства теоремы Кервера	230
15.5.	Гомотопические группы сфер (набросок)	233
15.6.	Реализация циклов подмногообразиями (набросок)	234
	Ответы, указания и решения к некоторым задачам	236
§ 16.	Препятствия к кобордантности	238
16.1.	Введение	238
16.2.	Эйлерова характеристика	239
16.3.	Сигнатура	240
16.4.	Числа Штифеля—Уитни	242
16.5.	Числа Понтрягина и формула Хирцебруха	244
16.6.	Пример сферы Милнора	245
16.7.	Набросок доказательства теоремы Кервера—Милнора	248
	Ответы, указания и решения к некоторым задачам	250
§ 17.	Заузливания и гомотопии	254
17.1.	Определение изотопии и инвариант дополнения	254
17.2.	Теоремы Уайтхеда и Гуревича	257
17.3.	Приложение: приклеивающий инвариант	259
17.4.	Приложение: другие категории и коразмерность 1	261
	Ответы, указания и решения к некоторым задачам	263
	Литература	265

§ 1. Введение

Nothing was changed, but now it made sense.

U. K. Le Guin. The Beginning Place¹

1.1. Зачем эта книга

Лучшие результаты любой математической теории — важные и интересные теоремы, в формулировках которых *нет* понятий из этой теории, но при доказательствах которых *без нее не обойтись*. К сожалению, в большинстве учебников такие результаты недостаточно доступны. Формулировки красивых результатов и важных проблем, ради которых была придумана теория, приводятся только *после* продолжительного изучения этой теории (или не приводятся совсем). Это способствует появлению представления о математике как о науке, изучающей немотивированные понятия и теории. Такое представление принижает ценность математики.

Таких блистательных результатов в алгебраической топологии много. Для удобства читателя в этой книге они выделены жирным шрифтом и, как правило, собраны в начале параграфов (вместе с краткой историей вопроса). Алгебраическая топология является фундаментальной частью математики и имеет применения за ее пределами. Как и в любой фундаментальной теории, ее основные мотивировки и идеи можно доступно изложить человеку, не имеющему глубоких специальных познаний. Такому изложению посвящена эта книга (вместе с [ST04, BE82, Pr15, An03, PS97, E84, FT07, Sk09, Sk, Sk'] и другими книгами). Ее особенность — возможность познакомиться с этими *мотивировками и идеями* на «олимпиадных» примерах, т. е. на простейших частных случаях, свободных от технических деталей, и со сведением к необходимому минимуму алгебраического языка. Благодаря этому я надеюсь сделать алгебраическую топологию более доступной и интересной — в первую очередь студентам и работающим в других областях математикам.

В книге рассматриваются важнейшие наглядные объекты математики, полезные для приложений: маломерные многообразия и векторные поля на них, непрерывные отображения и их деформации. Приводятся

¹Ничего не изменилось, но теперь все было понятно. (У. К. Ле Гуин. Изначальное место. Пер. автора.)

естественные построения для решения интересных топологических проблем и изящные доказательства красивых теорем с ясными и доступными формулировками. Показано, как при этом возникают полезные алгебраические понятия (группы гомологий, характеристические классы и т. д.)¹. Именно на таких естественных построениях и доказательствах можно по-настоящему прочувствовать более общий теоретический материал (а при наличии некоторой математической культуры — и воссоздать его). Изучение, начинающееся с длительного освоения немотивированных общих понятий и теорий, делает малодоступными замечательные методы алгебраической топологии². Часто изучившие курс могут воспроизвести сложную теорию, но не могут применить ее в простейшей ситуации, если не указано, что этой теорией нужно воспользоваться.

Новые вводимые понятия мотивированы тем, что интересно человеку, не считающему их интересными «сами по себе», и человеку, не интересующемуся специально топологией (но уже имеющему некоторое математическое образование). Например, доказательством красивой теоремы, решением важной задачи, осмыслением естественной идеи. Определения новых понятий естественно появляются (и будут четко сформулированы) в этой ситуации, и потому их не обязательно знать заранее. В то же время для тех, кто уже изучал алгебраическую топологию, ее применение к конкретным задачам обычно оказывается нетривиальным и интересным.

Изложение построено «от частного к общему», «от простого к сложному», см. п. 1.2. Путь познания в какой-то мере повторяет путь развития. Такое изложение продолжает традицию, восходящую к древно-

¹Важнейшие геометрические проблемы, ради которых была создана алгебраическая топология, в свою очередь были мотивированы предыдущим развитием математики (причем не только геометрии, но и анализа и алгебры). Мотивировать эти геометрические проблемы не входит в цели настоящей книги. Я либо привожу ссылки, либо апеллирую к непосредственной геометрической любознательности читателя.

²Приведу лишь один пример из многих. Еще в XIX веке был придуман очень простой, наглядный и полезный инвариант многообразий — форма пересечений, т. е. умножение в гомологиях поверхностей (п. 6.5, [Hi95]). Замечательным открытием Колмогорова и Александра 1930-х годов явилось обобщение этого инварианта на произвольные полиэдры (умножение в когомологиях). Умножение Колмогорова—Александра менее наглядно и определяется более громоздко, чем форма пересечений, но зато имеет более продвинутое применения. Определение формы пересечений через умножение Колмогорова—Александра делает малодоступными ее замечательные применения. Поэтому форму пересечений иногда просто переоткрывают [Mo89].

сти [Р]. В современном преподавании математики она представлена, например, журналом «Квант» и книгами «квантовых» авторов. Более подробно см. [Z09, стр. 9–14]. Интересно, что приводимое изложение мне приходилось сначала переоткрывать и лишь потом убеждаться, что первооткрыватели рассуждали так же, ср. [Hi95].

Надеюсь, принятый стиль изложения не только сделает материал более доступным, но позволит сильным студентам (для которых доступно даже абстрактное изложение) приобрести математический вкус. Он необходим, чтобы разумно выбирать проблемы для исследования, а также ясно излагать собственные открытия, не скрывая ошибок (или известности полученного результата) за чрезмерным формализмом. К сожалению, такое (непреднамеренное) сокрытие ошибок часто происходит с математиками, воспитанными на чрезмерно формальных курсах. Такое происходило и с автором этих строк; к счастью, почти все мои ошибки исправлялись *перед* публикациями.

Чтение этой книги и решение задач потребуют от читателя усилий. Однако эти усилия будут сполна оправданы тем, что вслед за великими математиками XX века в процессе изучения геометрических проблем читатель откроет некоторые основные понятия алгебраической топологии. Надеюсь, это поможет ему совершить собственные настолько же полезные открытия (не обязательно в математике)!

Основная идея. Алгебраическая топология основана на следующей простой идее, часто встречающейся при решении школьных (в частности, олимпиадных) задач. *Невозможность* некоторой конструкции можно доказывать путем построения алгебраического *препятствия* (называемого также *инвариантом*). Примером служит четность. Точно так же *неэквивалентность* конструкций часто доказывается путем построения алгебраического *инварианта*, их различающего (этот инвариант является *препятствием* к эквивалентности). Многие непохожие друг на друга задачи топологии естественно приводят к похожим *препятствиям*. В этой книге препятствия-инварианты, являющиеся целыми числами или вычетами по модулю 2, есть почти в каждом параграфе. А группы гомологий появляются только в п. 4.9 и § 6.

Таким образом, значительная часть алгебраической топологии — это изучение геометрических задач при помощи дискретных, комбинаторных (в частности, алгебраических) методов. Алгебраическую топологию раньше называли комбинаторной.

Применения теории препятствий разбиваются на два шага. Первый и обычно более простой шаг — получение необходимого условия на языке теории препятствий. Он приводится в этой книге. Второй и более

сложный шаг — вычисление появляющихся препятствий. Он приводится лишь в виде наброска, цикла задач или просто ссылки (поскольку, по моему мнению, второй шаг лучше описан в литературе, чем первый). Замечу, что в простейших ситуациях очевидно, что полученное необходимое алгебраическое условие является достаточным. А вот для более сложных геометрических проблем, которые здесь не приводятся (например, о классификации многообразий или вложений), труднее всего именно доказать *достаточность* полученного необходимого условия.

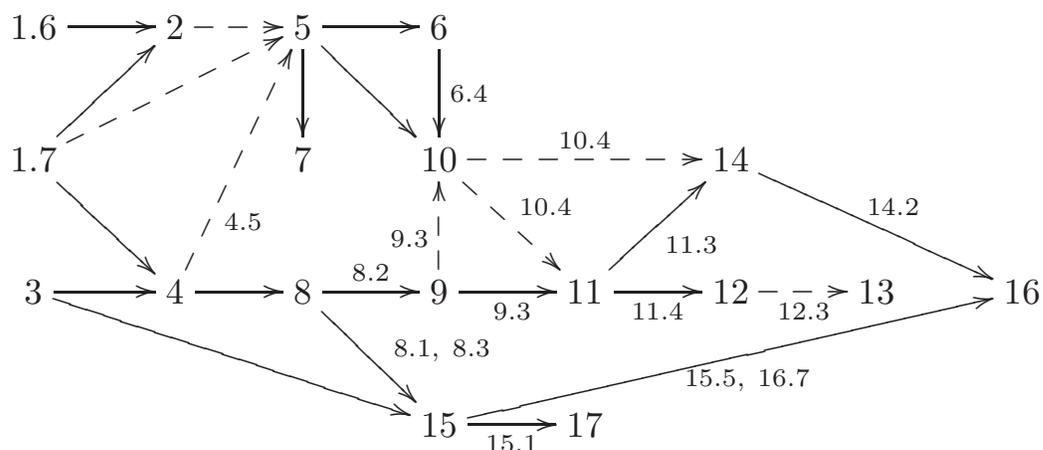
1.2. Содержание и используемый материал

Книга предназначена в первую очередь для читателей, не владеющих алгебраической топологией (хотя, возможно, часть ее будет интересна и специалистам). Все необходимые алгебраические объекты (со страшными названиями «группы гомологий», «характеристические классы» и т. д.) естественно возникают и строго *определяются* в процессе исследования геометрических проблем. Для удобства читателя в п. 1.6, 1.7 приведены определения графов и простейших поверхностей.

В книге сначала показаны те идеи, которые видны на двумерных *многообразиях* («поверхностях») (§ 2—7). Затем — идеи, которые видны на трехмерных многообразиях (§ 8—10; § 8 интересен даже для частного случая трехмерных многообразий). Только потом рассматриваются многомерные многообразия. При этом двумерные и трехмерные многообразия все-таки интересны мне не сами по себе, а как простые объекты для демонстрации идей, приносящих наиболее значительные плоды для многомерного случая. Характеристические классы по-настоящему незаменимы только для многообразий размерности выше трех.

Для многообразий методы алгебраической топологии наиболее наглядны. Это позволяет быстро добраться до по-настоящему интересных и сложных результатов. В этой книге собраны некоторые результаты и методы, касающиеся именно многообразий, а не *полиэдров* («многомерных графов»). Впрочем, для более глубокого изучения многообразий полиэдры все-таки понадобятся.

Ниже приведена схема существенной зависимости параграфов. Явные ссылки приведены и в тексте. Такие ссылки не отражены в схеме, если в одном параграфе используется результат из другого, но необходима только формулировка результата, а не более глубокое его понимание. Пунктир в схеме означает, что один параграф нужен для мотивировки другого, но формально не используется в нем. Номера пунктов у стрелки означают, что используются только эти пункты (п. 15.5 используется



только в п. 16.7 параграфа 16). Итак, начинать изучение книги можно с § 2 или § 3.

Сложность материала (и количество используемых понятий) внутри каждого параграфа растет. Поэтому вполне разумно переходить к новому параграфу, отложив на потом изучение окончания старого.

При изучении примеров, мотивирующих общее понятие групп гомологий, возникают все новые и новые частные случаи (п. 4.6, 4.7, 4.9, 5.7, 6.1—6.4, 7.3, 8.2, 8.4, 9.3, 11.2). Полезно продумать несколько таких примеров перед знакомством с абстрактным изложением этого понятия в п. 11.3. Формально п. 11.3 не зависит от многих предыдущих параграфов. Но в нем нет ответа на вопрос «зачем», важного для начала изучения любой теории.

Задачи. Большая часть материала сформулирована в виде задач. Красивые наглядные задачи, для решения которых не нужно никаких знаний, приведены уже в самом начале. Номера задач обозначаются жирным шрифтом. Если задача выделена словом «теорема» («следствие» и т. д.), то ее утверждение важное.

Обучение путем решения задач не только характерно для серьезного изучения математики, но и продолжает древнюю культурную традицию. Например, послушники дзэнских монастырей обучаются, размышляя над загадками, данными им наставниками [S].

Следует подчеркнуть, что многие задачи не используются в остальном тексте. В задачах сформулированы интересные и полезные факты или изложены идеи доказательства теорем. Читателю полезно ознакомиться с самими фактами и понимать идеи доказательств, даже если детали останутся недоступными. Приводимые формулировки задач могут быть путеводителем по другим учебникам по алгебраической то-

пологии, позволяя намечать интересные конечные цели и отбрасывать материал, не являющийся для этих целей необходимым. Полезнее всего обсуждать со специалистом как решения задач, так и возникающие при решении трудности.

Для решения каждой задачи без звездочки достаточно знакомства с настоящим текстом и *не требуется* никаких дополнительных понятий и теорий. Если используемые в задаче термины не определены в этом тексте и вам незнакомы, то соответствующую задачу следует просто игнорировать. Как правило, *формулировка* утверждения приводится перед его *доказательством*. (Часто происходит обратное, см. начало п. 1.1.) В таких случаях для доказательства утверждения могут потребоваться следующие задачи. (На занятии задача-подсказка дается только тогда, когда студент подумал над самой задачей.) К важнейшим задачам приводятся указания и решения. Они расположены в конце каждого параграфа. Однако к ним стоит обращаться после прорешивания каждой задачи.

В указаниях к некоторым задачам встречаются ссылки на **web**-страницу книги ([A] по состоянию на 20 февраля 2015 г.). Если, паче чаяния, ее адрес изменится, ее можно будет найти с помощью поисковых систем (возможно, через домашнюю страницу автора).

Общее замечание к формулировкам задач: если условие задачи является формулировкой утверждения, то подразумевается, что это утверждение требуется доказать.

1.3. Для специалистов

В § 9 приводится набросок простого доказательства теоремы Штифеля о параллелизуемости ориентируемых трехмерных многообразий. Оно получено из обычно приводимого в книгах отбрасыванием обозначений и терминов, не нужных для него, но нужных для чего-то другого. Оно проще и доказательства из [Ki89], см. п. 9.2. В § 11–13 приводится набросок простого доказательства теорем об алгебрах с делением и о невлости проективных пространств. В п. 16.2, 16.3, 16.6 приведены красивые важные задачи по основам теории гомологий, которые могут быть использованы на семинарах по этой теме.

По возможности приводятся ссылки на книги и обзоры, а не на оригинальные статьи.

Стандартная терминология теории препятствий не используется там, где (по мнению автора) она неудобна для начинающего. Приведем здесь сравнение обычной терминологии и принятой в книге. *Рас-*

становки элементов группы G на i -симплексах триангуляции T — то же самое, что i -мерные цепи на T с коэффициентами G . Группа таких расстановок обычно обозначается $C_i(T; G)$. Множество $\partial^{-1}(0)$ всех циклов образует подгруппу группы $C_i(K; G)$, обозначаемую $Z_i(T; G)$. Множество $\partial C_{i+1}(T; G)$ всех границ образует подгруппу группы $C_i(K; G)$, обозначаемую $B_i(T; G)$. Когда $G = \mathbb{Z}_2$, мы пропускаем коэффициенты в обозначениях цепей, циклов, границ и гомологий.

В этой книге препятствия лежат в группах *гомологий*, а не в группах *когомологий* (изоморфных группам гомологий для многообразий). Обозначения для характеристических классов используются для классов, двойственных им по Пуанкаре. Эта точка зрения (двойственная принятой в учебниках, но обычная для первооткрывателей) позволяет *наглядно изображать* препятствия.

1.4. Благодарности

Благодарю А. Н. Дранишникову, Д. Б. Фукса, А. Т. Фоменко и Е. В. Щепина: я учился алгебраической топологии по книге [FF89] и на семинаре Дранишникова—Щепина в Математическом институте Российской академии наук.

Настоящая книга основана на лекциях, прочитанных автором на мехмате Московского государственного университета им. М. В. Ломоносова, в Независимом московском университете, на ФОПФ и ФИВТ Московского физико-технического института, в Летней школе «Современная математика», а также в Кировской и Петербургской летних математических школах в 1994—2015 гг. (Материал статей [RS00, RS02] содержится в настоящей книге в существенно доработанном и расширенном виде.) Я признателен С. Аввакумову, Ю. М. Бурману, М. Н. Вялomu, А. А. Заславскому, С. К. Ландо, С. В. Матвееву, В. В. Прасолову, М. Б. Скопенкову, А. Б. Сосинскому, В. В. Успенскому, Б. Р. Френкину, В. В. Шувалову, а также всем слушателям этих лекций за черновые записки лекций и многочисленные обсуждения, способствовавшие улучшению изложения. Я признателен В. В. Прасолову и В. В. Шувалову за возможность использовать подготовленные ими компьютерные версии рисунков.

Эта книга посвящена памяти Юрия Петровича Соловьёва — замечательного математика, считавшего важным изложение математики на конкретном, доступном (и в то же время строгом) языке, в отличие от «птичьего» языка излишней абстракции.

Грантовая поддержка. Автор поддержан Российским Фондом Фундаментальных Исследований, Гранты номер 07-01-00648а, 06-01-72551-NCN1а, 12-01-00748-а и 15-01-06302, Грантом Президента РФ МД-4729.2007.1, стипендией П. Делиня, основанной на его Премии Бальзана 2004 года, грантами фонда Саймонса 2011–2014 годов и стипендией фонда Д. Зимина «Династия» 2014 года.

Интернет-страница автора: www.mcsme.ru/~skopenko.

1.5. Обозначения и соглашения

Если вектор обозначен одной буквой (а не указанием его начала и конца), то мы не пишем над ним знак вектора и не выделяем его жирным. Вот другие основные обозначения:

- $|X|$ — число элементов в множестве X ;
- pr_k — проекция на k -й сомножитель декартова произведения;
- ρ_2 — приведение по модулю два;
- $\mathbb{Z}_{(i)}$ — группа \mathbb{Z} для четного i и \mathbb{Z}_2 для нечетного i ;
- fx или $f(x)$ — образ элемента x при отображении f ;
- \sim — гомотопическая эквивалентность пространств (п. 16.1);
- \simeq — гомотопность отображений (п. 3.1);
- \cong — диффеоморфность многообразий (п. 4.5), кусочно линейная гомеоморфность симплициальных комплексов (п. 5.2), гомеоморфность подмножеств пространства \mathbb{R}^m (п. 3.1), изоморфизм групп.

1.6. Словарик по теории графов

Вероятно, вводимые здесь понятия знакомы читателю, но мы приводим четкие определения, чтобы фиксировать терминологию (которая бывает другой в других книгах).

Графом (без петель и кратных ребер) называется конечное множество, некоторые двухэлементные подмножества (т. е. неупорядоченные пары) которого выделены. Синоним: одномерный симплициальный комплекс (компактный). Элементы данного множества называются *вершинами*. Выделенные пары вершин называются *ребрами*. Каждое ребро соединяет различные вершины (нет петель), и любые две вершины соединены не более чем одним ребром (нет кратных ребер).

Графом (с петлями и кратными ребрами) называется квадратная таблица из целых неотрицательных чисел, симметричная относительно главной диагонали.

При работе с графами удобно пользоваться их изображениями. Вершины изображаются точками (например, на плоскости или в простран-

стве). Каждое ребро, соответствующее двухэлементному выделенному подмножеству, изображается ломаной (или кривой), соединяющей соответствующие точки. На изображении ломаные могут пересекаться, но точки пересечения (кроме двух концов ребра) не являются вершинами. Важно, что граф и его изображение — не одно и то же.



Рис. 1. Изображения различных графов (не все вершины отмечены!)

Путем в графе называется конечная последовательность вершин, в которой любые две соседние вершины соединены ребром. *Циклом* называется путь, в котором первая и последняя вершины соединены ребром. Граф называется *связным*, если любые две его вершины можно соединить путем. Граф называется *деревом*, если он связан и не содержит циклов, не проходящих дважды ни по одному ребру. Ясно, что в любом связном графе существует *максимальное дерево*, т. е. дерево, содержащее все его вершины.

Грубо говоря, *подграф* данного графа — это его часть. Формально говоря, граф G называется *подграфом* графа H , если каждая вершина графа G является вершиной графа H и каждое ребро графа G является ребром графа H . При этом две вершины подграфа, соединенные ребром в графе, не обязательно соединены ребром в подграфе.

1.7. Примеры поверхностей

В § 2, п. 4.1—4.4 и § 7 слово «поверхность» можно понимать не как математический термин (определенный в п. 4.5), а как собирательное название определенных ниже фигур.

Если вы не знакомы с декартовыми координатами в пространстве, то в начале книги координатные определения можно опустить и работать с наглядными описаниями и изображениями на рисунках.

Сферой S^2 (стандартной) называется множество точек $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, для которых $x^2 + y^2 + z^2 = 1$:

$$S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}.$$

(Это то же самое, что множество всех точек (x, y, z) вида

$$(\cos \varphi \cos \psi, \sin \varphi \cos \psi, \sin \psi).)$$

Кольцом называется любая фигура, полученная из прямоугольной полоски склейкой ее двух противоположных сторон «с одинаковым направлением», см. рис. 2. Например, боковая поверхность

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = 1, 0 \leq z \leq 1\}$$

цилиндра является кольцом.

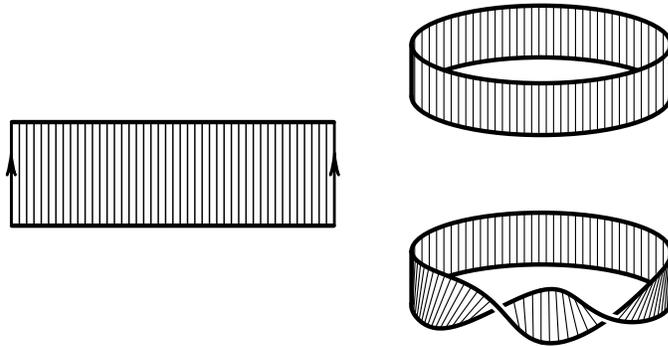


Рис. 2. Кольца

Тором T^2 (стандартным) называется фигура, образованная вращением окружности $(x - 2)^2 + y^2 = 1$ вокруг оси Oy .

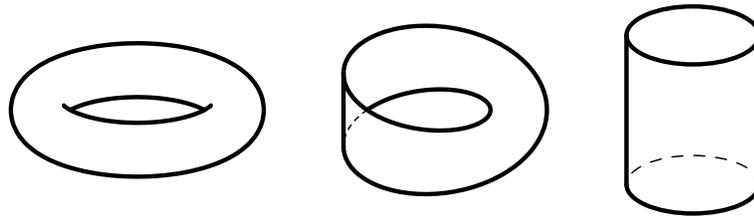


Рис. 3. Тор, лента Мёбиуса и боковая поверхность цилиндра

Наглядное описание. Тор — поверхность бублика, см. рис. 3 слева. Тор получен из (двумерного) квадрата склейкой пар его противоположных сторон «с одинаковыми направлениями», т. е. без поворота, см. рис. 4 слева.

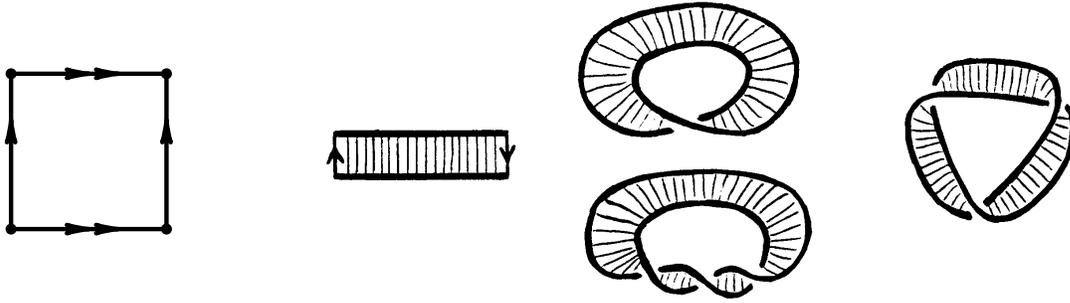


Рис. 4. Склейки прямоугольной полоски, дающие тор и ленту Мёбиуса

Лентой Мёбиуса называется любая фигура, полученная из длинной прямоугольной полоски склейкой двух ее противоположных сторон «с противоположным направлением», т. е. с поворотом на 180° , см. рис. 4 справа. *Стандартной лентой Мёбиуса* называется поверхность в \mathbb{R}^3 , заметаемая стержнем длины 1, равномерно вращающимся относительно своего центра, при равномерном движении этого центра по окружности радиуса 9, при котором стержень делает пол-оборота, см. рис. 3.

Сферой с g ручками (стандартной) S_g при $g \geq 1$ называется поверхность, заданная в \mathbb{R}^3 уравнением $x^2 + \prod_{k=1}^g ((z - 4k)^2 + y^2 - 4)^2 = 1$. *Сферой с нулем ручек* (стандартной) S_0 называется сфера S^2 .

Сфера с g ручками изображена на рис. 3 слева и на рис. 5 (для двух и трех ручек; для одной ручки это тор).

Уравнение $\prod_{k=1}^g ((z - 4k)^2 + y^2 - 4) = 0$ задает «цепочку окружностей» на плоскости Oyz (рис. 6). Сфера с g ручками является границей «трубчатой окрестности» этой цепочки в пространстве. Поэтому, неформально говоря, сфера с g ручками получена из сферы вырезанием $2g$ дисков и последующей заклейкой g пар краевых окружностей этих дисков криволинейными боковыми поверхностями цилиндров, см. рис. 7.

Сферой с дыркой (нестандартной) называется сфера, из которой удалена внутренность двумерного диска. Аналогично определяются (нестандартные) тор с дыркой, сфера с ручками и дыркой, бутылка Клейна с дыркой и т. д. Формально говоря, (стандартной) *сферой с g ручками и дыркой* $S_{g,0}$ называется часть сферы с g ручками, лежащая не выше той плоскости, которая расположена чуть ниже касательной плоскости в верхней точке (т. е. плоскости $z \leq 4g + 1$).

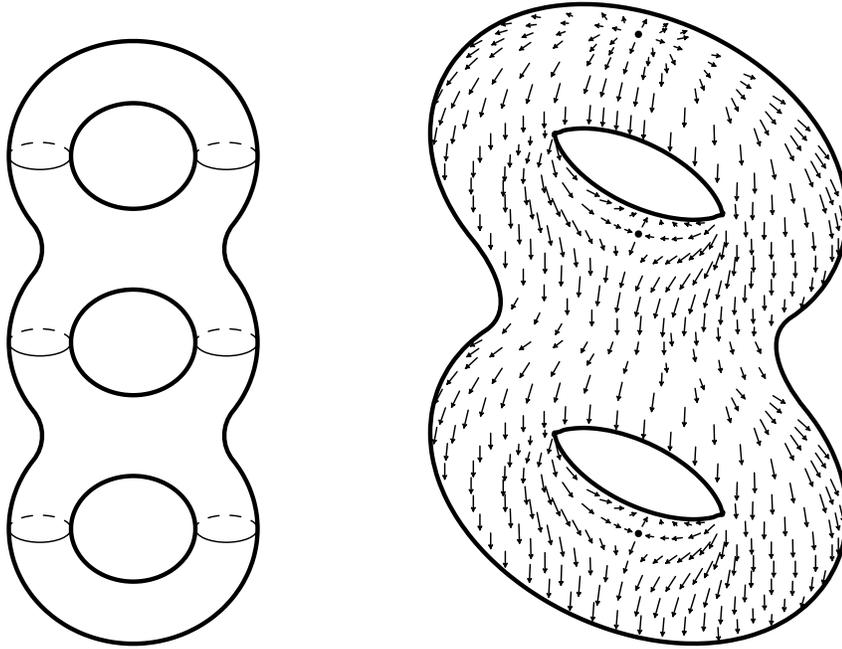


Рис. 5. Сфера с тремя ручками и поле скоростей воды, стекающей по сфере с двумя ручками

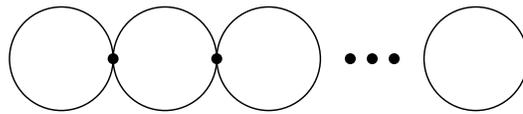


Рис. 6. «Цепочка окружностей» на плоскости

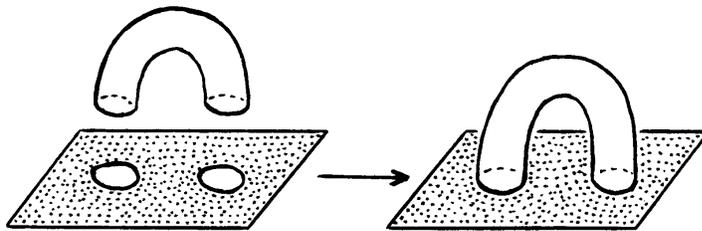


Рис. 7. Приклеивание ручки

Нижеприведенные определения и содержащий их материал можно пропустить.

Рассмотрим в \mathbb{R}^4 окружность $x^2 + y^2 = 1, z = t = 0$ и семейство ее нормальных трехмерных плоскостей. *Бутылкой Клейна* (стандартной) K называется поверхность в \mathbb{R}^4 , заметаемая окружностью ω , центр которой равномерно описывает рассматриваемую окружность, а окруж-

ность ω в то же время равномерно поворачивается на угол π (поворачивается в движущейся нормальной трехмерной плоскости относительно своего диаметра, движущегося вместе с нормальной трехмерной плоскостью). Проекция на \mathbb{R}^3 изображена на рис. 8 (b). *Бутылкой Клейна* (нестандартной) называется любая фигура, полученная такой склейкой пар противоположных сторон квадрата, при которой одна пара склеивается «с одинаковым направлением», а другая «с противоположным направлением», см. рис. 8 (a).

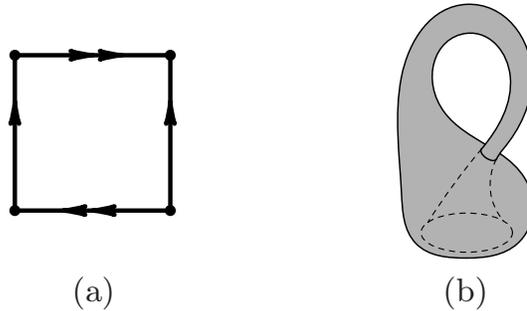


Рис. 8. Бутылка Клейна: (a) склейка квадрата; (b) изображение в \mathbb{R}^3

Неформально говоря, *проективной плоскостью* $\mathbb{R}P^2$ называется фигура, полученная из сферы S^2 склейкой диаметрально противоположных точек, или, что эквивалентно, фигура, полученная из круга склейкой диаметрально противоположных точек на его граничной окружности, или, что эквивалентно, фигура, полученная такой склейкой пар противоположных сторон квадрата, при которой каждая пара склеивается «с противоположным направлением», см. рис. 42 на с. 82.

Формально говоря, *проективной плоскостью* $\mathbb{R}P^2$ называется образ отображения $S^2 \rightarrow \mathbb{R}^4$, заданного формулой $(x, y, z) \mapsto (x^2, xy, yz, zx)$, или, что эквивалентно,

$$\mathbb{R}P^2 := \{(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4 : ac = bd, abd + b^2c + cd^2 = bd, a \geq 0\}.$$

§ 2. Наглядные задачи о поверхностях

Wissen war ein bisschen Schaum, der über eine Woge tanzt. Jeder Wind konnte ihn wegblasen, aber die Woge blieb.

E. M. Remarque. Die Nacht von Lissabon¹

2.1. Наглядные задачи о графах на поверхностях

Граф с n вершинами, любые две из которых соединены ребром, называется *полным* и обозначается K_n . Через $K_{m,n}$ обозначается *полный двудольный граф* с долями из m и из n вершин: в нем имеются все ребра между вершинами разных долей.

2.1. Нарисуйте без самопересечений граф K_5 (рис. 9) без одного из ребер на плоскости.

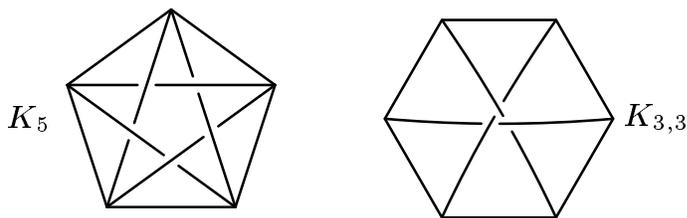


Рис. 9. Непланарные графы

Мы будем рассматривать только такие рисунки, на которых ребра изображаются ломаными, а не произвольными кривыми.

2.2. (а) Граф K_5 невозможно нарисовать без самопересечений на плоскости.

(b) То же для графа $K_{3,3}$ (рис. 9).

(c) *Картой* называется разбиение плоскости на многоугольники. Раскраска карты называется *правильной*, если разные многоугольники, имеющие общую граничную кривую, имеют разные цвета. Докажите, что любую карту на плоскости можно правильно раскрасить в 6 цветов.

¹Знание здесь — только пена, пляшущая на волне. Одно дуновение ветра — и пены нет. А волна есть и будет всегда. (Э. М. Ремарк. Ночь в Лиссабоне. Пер. Ю. Плашевского.)

(d)* То же для 5 цветов. (Знаменитая гипотеза четырех красок утверждает, что и 4 цветов хватит, но ее доказательство гораздо более сложно.)

Доказать теоремы 2.2, 2.6, 2.9, а также их неориентируемые аналоги вы сможете только после изучения следующего пункта (а теоремы 2.4 — после п. 5.6).

2.3. (а) Нарисуйте на торе замкнутую кривую, при разрезании по которой тор не распадается на куски.

(а') То же для ленты Мёбиуса.

(b) Нарисуйте две замкнутые кривые на торе, при разрезании по объединению которых тор не распадается на куски.

Оказывается, при разрезании тора по объединению любых трех замкнутых кривых на нем или любых двух непересекающихся замкнутых кривых на нем тор обязательно распадается на куски. Здесь кривые могут быть самопересекающимися. Однако интересен случай несамопересекающихся кривых (а случай самопересекающихся к нему легко сводится). Приведенные результаты для тора — частные случаи следующих.

2.4. (а) **Теорема Римана.** *Объединение любых $g + 1$ попарно непересекающихся замкнутых кривых на сфере с g ручками разбивает ее.*

(b) **Теорема Бетти.** *Объединение любых $2g + 1$ замкнутых кривых на сфере с g ручками разбивает ее.*

Тор, лента Мёбиуса (и другие фигуры) предполагаются прозрачными, т. е. точка (или подмножество), «лежащая на одной стороне поверхности», «лежит и на другой стороне». Это аналогично тому, что при изучении геометрии мы говорим, например, о треугольнике на плоскости, а не о треугольнике на верхней (или нижней) стороне плоскости.

2.5. Нарисуйте на торе без самопересечений граф

(а) K_5 ; (b) $K_{3,3}$; (c) K_6 ; (d) $K_{3,4}$; (e) K_7 ; (f) $K_{4,4}$.

Оказывается, ни граф K_8 , ни граф $K_{5,4}$ невозможно нарисовать на торе без самопересечений. Это частные случаи следующего результата.

2.6. Теорема. (а) *Граф K_n невозможно нарисовать без самопересечений на сфере менее чем с $(n - 3)(n - 4)/12$ ручками.*

(b) *Граф $K_{m,n}$ невозможно нарисовать без самопересечений на сфере менее чем с $(m - 2)(n - 2)/4$ ручками.*

2.7. Нарисуйте на ленте Мёбиуса без самопересечений граф

(а) $K_{3,3}$; (b) $K_{3,4}$; (c) K_5 ; (d) K_6 .

2.8. *Картой на торе* называется разбиение тора на (криволинейные и изогнутые) многоугольники. Раскраска карты на торе называется *правильной*, если разные многоугольники, имеющие общую граничную кривую, имеют разные цвета. Любую ли карту на торе можно правильно раскрасить в (а) 5 цветов? (б) 6 цветов?

Оказывается, любую карту на торе можно правильно раскрасить в 7 цветов. Это частный случай следующего результата.

2.9. Теорема Хивуда. *Если $0 < g < (n - 2)(n - 3)/12$, то любую карту на сфере с g ручками можно правильно раскрасить в n цветов.*

Аналог этой теоремы для $g = 0$ верен: это гипотеза четырех красок. Ввиду результатов Рингеля о вложениях графа K_n (см. замечание и ссылку перед задачей 2.15) $n - 1$ цветов не хватит при $g \geq (n - 2)(n - 3)/12$.

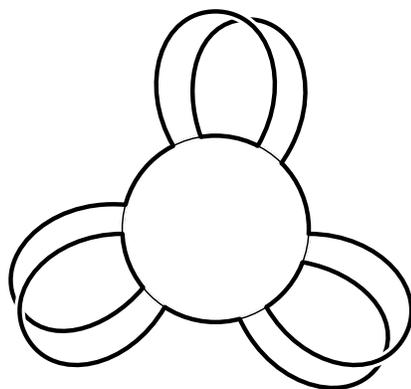


Рис. 10. Диск с лентами Мёбиуса. Краевая окружность выделена жирным.

Диском с t лентами Мёбиуса называется объединение круга и t «отделенных» ленточек, при котором каждая ленточка приклеивается двумя отрезками к граничной окружности S круга и направления на этих отрезках, задаваемые произвольным направлением на S , «сонаправлены вдоль ленточки», см. рис. 10.

2.10. Любой граф можно нарисовать без самопересечений

- (а) на сфере с некоторым количеством ручек, зависящим от графа;
- (б) на диске с некоторым количеством лент Мёбиуса, зависящим от графа.

2.2. Применения неравенства Эйлера

Плоским графом называется изображение графа на плоскости, для которого любые два ребра пересекаются только по их общим вершинам (в частности, если таких вершин нет, то ребра не пересекаются). Плоский граф делит плоскость на части, называемые *гранями* графа.

2.11. Нарисуйте без самопересечений граф на плоскости, чтобы некоторое ребро лежало только в одной грани.

Формула Эйлера. Для связного плоского графа с V вершинами, E ребрами и F гранями выполняется равенство $V - E + F = 2$.

Доказательство этой теоремы см., например, в [Pr14]. Далее этим результатом можно пользоваться без доказательства.

Строгого определения *графа, нарисованного без самопересечений на поверхности*, мы не даем. Для решения задач достаточно неформального знакомства с этим понятием, полученного в предыдущем пункте. См. формализацию в задаче 5.8 (f).

Пусть на поверхности нарисован без самопересечений граф. Назовем *гранью* каждый из связных кусков, на которые распадается поверхность при разрезании по всем ребрам графа.

Из задачи 2.3 (a) вытекает, что на торе можно нарисовать замкнутую кривую двумя способами так, чтобы при разрезаниях по ней при первом и при втором способе тор распадался на разное количество кусков. Из задачи 2.3 (a') вытекает аналогичное утверждение для ленты Мёбиуса. Итак, количество граней зависит от способа изображения графа на данной поверхности.

Тем не менее, аналог формулы Эйлера для поверхностей имеется.

2.12. (a) Неравенства Эйлера. Пусть на сфере с g ручками или на диске с t лентами Мёбиуса нарисован без самопересечений связный граф с V вершинами и E ребрами. Для диска с лентами Мёбиуса предположим, что граф не пересекает краевой окружности диска с лентами Мёбиуса (рис. 10). Обозначим через F число граней. Тогда соответственно

$$V - E + F \geq 2 - 2g \quad \text{и} \quad V - E + F \geq 2 - t.$$

(Для доказательства нужен п. 5.6.)

(b) Для $g > 0$ склейте сферу с g ручками из правильного $4g$ -угольника.

(c) Для $t > 0$ склейте диск с t лентами Мёбиуса из правильного $4t$ -угольника.

Обычно в книгах вместо *неравенства Эйлера*, достаточного для решения многих интересных задач, приводится более сложная *формула Эйлера 5.9*, для формулировки которой нужно понятие *клеточного подграфа*.

2.13. (а) На диске с m лентами Мёбиуса имеется m замкнутых несамопересекающихся попарно непересекающихся кривых, объединение которых не разбивает его.

(b) Объединение любых $m + 1$ замкнутых кривых на диске с m лентами Мёбиуса разбивает его.

2.14. (а) Граф K_8 невозможно нарисовать на торе без самопересечений.

(а') Граф K_7 невозможно нарисовать на ленте Мёбиуса без самопересечений.

(b) Для любой сферы с ручками найдется граф, который невозможно нарисовать на ней без самопересечений.

(b') То же для диска с лентами Мёбиуса.

(c) Сформулируйте и докажите аналоги задачи 2.6 для дисков с лентами Мёбиуса.

Ориентируемым родом $g(G)$ графа G называется наименьшее число g , для которого G можно нарисовать без самопересечений на сфере с g ручками. Например, у графов K_3 и K_4 ориентируемый род равен 0, у графов K_5 , K_6 и K_7 он равен 1, а у графа K_8 он равен 2.

Неориентируемым родом $m(G)$ графа G называется наименьшее число m , для которого G можно нарисовать без самопересечений на диске с m лентами Мёбиуса. Например, у графа K_6 неориентируемый род равен 1, а у графа K_7 он равен 2.

Задача 2.6 означает, что

$$g(K_n) \geq (n - 3)(n - 4)/12 \quad \text{и} \quad g(K_{m,n}) \geq (m - 2)(n - 2)/4.$$

На самом деле в этих формулах неравенство можно заменить на равенство [Pr14, 13.1].

2.15. (а) В любом плоском графе есть вершина степени не более 5.

(b) Если $0 < g < (m - 1)(m - 2)/12$, то любой граф, нарисованный без самопересечений на сфере с g ручками, имеет вершину, из которой выходит не более m ребер.

(c) Любой граф, нарисованный без самопересечений на ленте Мёбиуса, можно правильно раскрасить в 10 цветов.

(d) Сформулируйте и докажите аналог теоремы Хивуда для диска с лентами Мёбиуса.

2.16. По планете Тополога, имеющей форму тора, текут реки Меридиан и Параллель. Маленький принц и Тополог прошли по планете и вернулись в их исходные точки (которые различны). Маленький принц переходил Меридиан 9 раз и Параллель 6 раз, а Тополог — 8 раз и 7 раз соответственно. Докажите, что их пути пересекались. (При переходе реки персонаж оказывается на *другой* ее стороне. Более формально, пересечение реки и пути персонажа *транsverсально*, см. строгое определение в п. 6.5.)

См. подробнее [MT01].

2.3. Наглядные задачи о разрезаниях

2.17. Любой граф можно нарисовать без самопересечений

- (a) в пространстве;
- (b) в книжке с некоторым количеством листов, зависящим от графа;
- (c) в книжке с тремя листами (рис. 11; строгое определение дано после него).

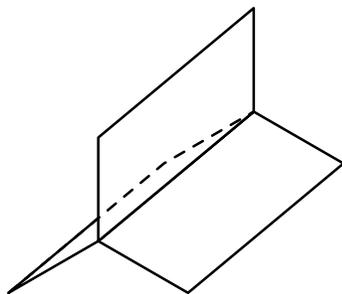


Рис. 11. Книжка с тремя листами

Возьмем в трехмерном пространстве n прямоугольников $X Y B_k A_k$, $k = 1, 2, \dots, n$, любые два из которых пересекаются только по отрезку $X Y$. *Книжкой с n листами* называется объединение этих прямоугольников, см. рис. 11 для $n = 3$.

2.18. (a) Можно ли ленту Мёбиуса разрезать так, чтобы получилось кольцо?

(b) Можно ли из ленты Мёбиуса вырезать непересекающиеся кольцо и ленту Мёбиуса?

(c) Можно ли ленту Мёбиуса разрезать на непересекающиеся кольцо и ленту Мёбиуса?

(d)* Можно ли из ленты Мёбиуса вырезать две непересекающиеся ленты Мёбиуса?

2.19. (a) Разрежьте бутылку Клейна на две ленты Мёбиуса.
 (b) Разрежьте бутылку Клейна так, чтобы получилась (одна) лента Мёбиуса.

2.20. Вырежьте из книжки с тремя листами (рис. 11)

- (a) ленту Мёбиуса;
- (b) тор с дыркой;
- (c) сферу с двумя ручками и одной дыркой;
- (d) бутылку Клейна с дыркой.

2.4. Топологическая эквивалентность (гомеоморфность)

2.21. Можно ли нарисовать без самопересечений граф K_5

- (a) на сфере; (b) на боковой поверхности цилиндра (рис. 3)?

В этом параграфе понятие *гомеоморфности* (топологической эквивалентности) не определяется строго, см. строгое определение в п. 5.2. Для «доказательства» гомеоморфности в этом параграфе нужно нарисовать цепочку картинок, аналогичную рис. 12. При этом разрешается

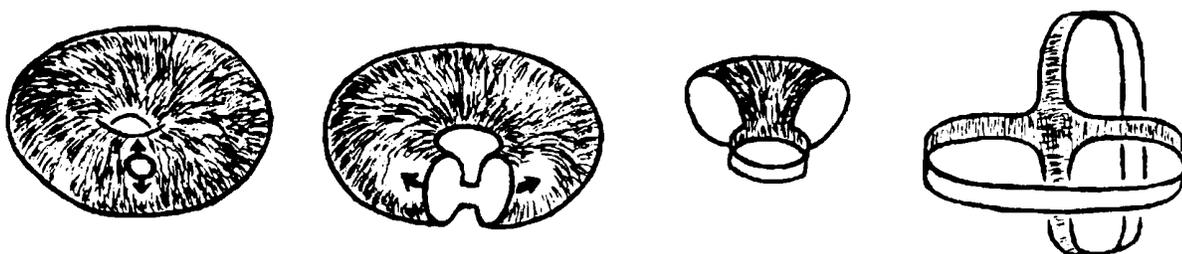


Рис. 12. Тор с дыркой гомеоморфен диску с двумя ленточками

временно *разрезать* фигуру, а потом *склеить* «берега» разреза. Например,

- сфера без точки гомеоморфна плоскости, а боковая поверхность цилиндра — кольцу на плоскости (здесь цепочку картинок можно получить из решения задачи 2.21);
- сфера с одной ручкой (рис. 7) гомеоморфна тору (рис. 3);
- диск с двумя ленточками (рис. 12 справа) гомеоморфен тору с дыркой (рис. 12 слева);
- три ленточки на рис. 4 справа гомеоморфны (здесь уже не обойтись без разрезания);
- две ленточки на рис. 2 справа гомеоморфны (и здесь не обойтись без разрезания).

Ленточки на рис. 4 справа и на рис. 2 справа не гомеоморфны. Мы займемся *негомеоморфностью* в § 5, когда появится строгое определение.

Понятие гомеоморфности следует отличать от *изотопности*, см. задачу 6.22 (b) и п. 17.1.

2.22. (a, b) Фигуры на рис. 13 гомеоморфны тору с двумя дырками.

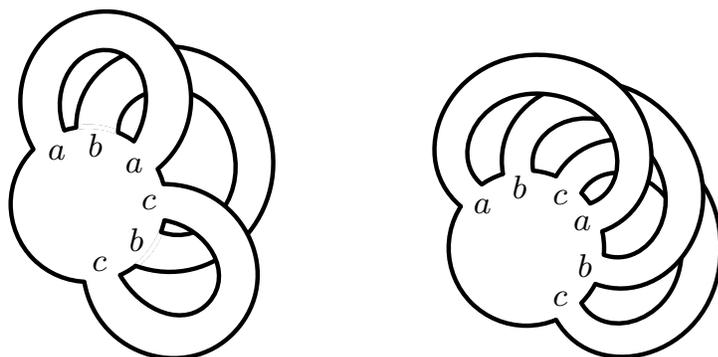


Рис. 13. Диски с ленточками, отвечающие словам $(abacbc)$ и $(abcabc)$, и их краевые окружности

(c) Фигура на рис. 14 (a) гомеоморфна тору с дыркой.

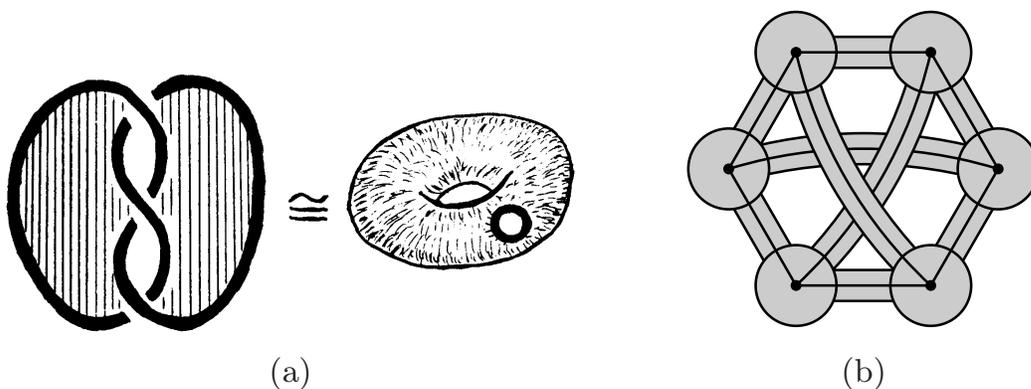


Рис. 14. Чему гомеоморфны эти фигуры?

(d) Гомеоморфна ли фигура на рис. 14 (b) сфере с ручками и дырками? Если да, то чему равно их число?

2.23. (a, b, c, d) Фигуры на рис. 15 гомеоморфны сфере с двумя ручками и одной дыркой.

2.24. (a) Лента Мёбиуса с ручкой гомеоморфна ленте Мёбиуса с вывернутой ручкой, рис. 7, 16 (a).

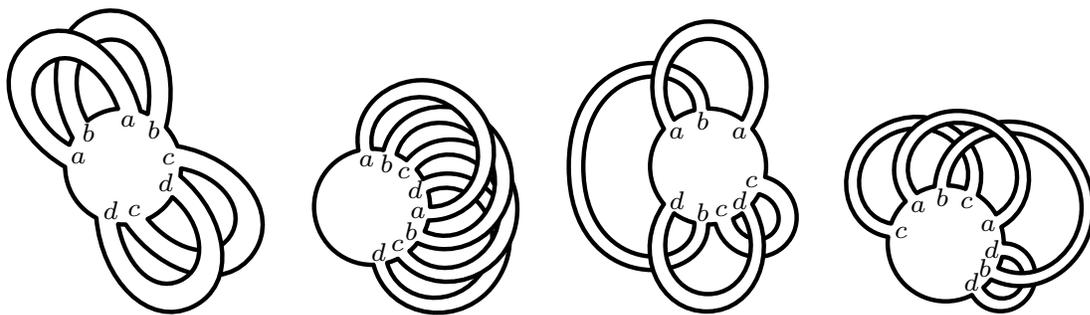


Рис. 15. Диски с четырьмя ленточками, не реализуемые на торе

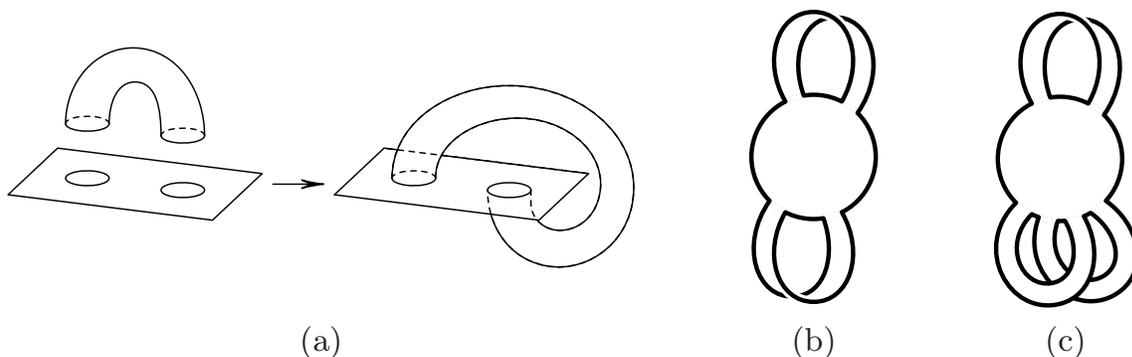


Рис. 16. (a) Приклеивание вывернутой ручки (ср. рис. 7). (b) Диск с двумя «перекрученными» «отделенными» ленточками. (c) Диск с ленточками, отвечающий слову $(abcabc)$ с соответствием $w(a) = 1$ и $w(b) = w(c) = 0$.

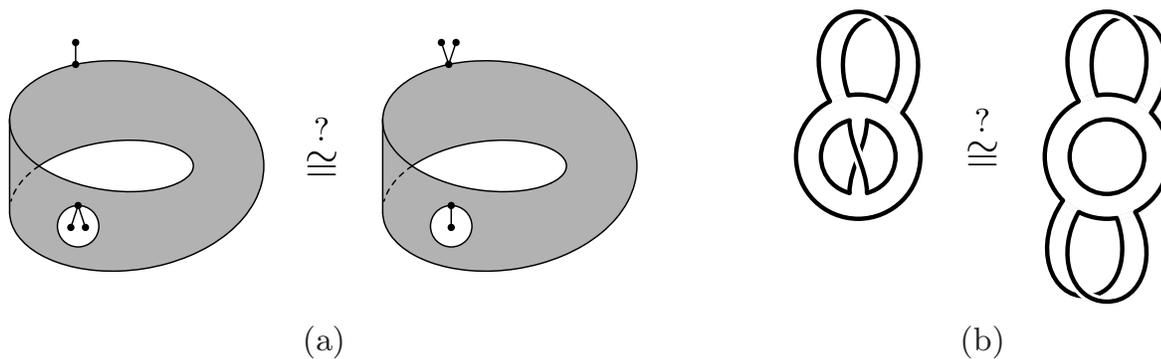


Рис. 17. (a) Равноправны ли краевые окружности ленты Мёбиуса с дыркой? (b) Гомеоморфны ли кольца с двумя лентами Мёбиуса?

(b) Фигура на рис. 16 (b) (т. е. диск с двумя «перекрученными» «отделенными» ленточками) гомеоморфна бутылке Клейна (рис. 8) с дыркой.

(с) Фигура на рис. 16 (с) гомеоморфна диску с тремя лентами Мёбиуса.

(d) Фигуры на рис. 17 (а) гомеоморфны.

(е) Фигуры на рис. 17 (b) (т. е. кольцо с двумя «перекрученными» «отделенными» ленточками, приклеенными к одной краевой окружности кольца, и кольцо с двумя «перекрученными» ленточками, приклеенными к разным краевым окружностям кольца) гомеоморфны.

Красивые примеры из задач 2.24 (d, e) важны, ибо показывают, что непохожие фигуры могут все-таки быть гомеоморфными.

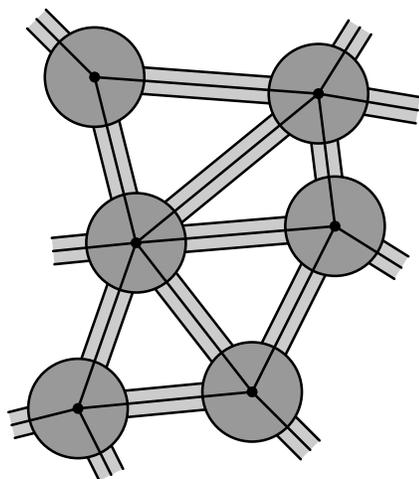


Рис. 18. Шапочки, ленточки и заплатки

Регулярной окрестностью графа в поверхности называется объединение шапочек и ленточек, соответствующих вершинам и ребрам графа, см. рис. 18 (формальное определение см. в конце п. 10.2).

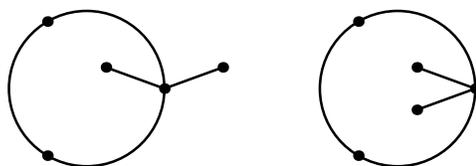


Рис. 19. Разные изображения графа на плоскости

2.25. Регулярные окрестности разных изображений без самопересечений графа на плоскости (т. е. изоморфных плоских графов, см. рис. 19) гомеоморфны.

2.5. Топологическая эквивалентность дисков с ленточками

В этом пункте, не используя даже понятия графа, мы покажем одну из основных идей доказательства теоремы о классификации 2-многообразий (п. 5.6).

Пусть имеется слово длины $2n$ из n букв, в котором каждая буква встречается дважды. Возьмем двумерный диск (например, выпуклый многоугольник на плоскости). Ориентируем его краевую (=граничную) окружность. Отметим на ней непересекающиеся отрезки, отвечающие буквам данного слова, в том порядке, в котором буквы идут в слове. Для каждой буквы соединим (не обязательно в плоскости) соответствующие ей два отрезка ленточкой-прямоугольником (так, чтобы разные ленточки не пересекались). При этом стрелки на окружности должны быть *противонаправлены* «при переносе» вдоль ленточки, см. рис. 20. Диск с n *неперекрученными ленточками*, отвечающим данному слову, называется *объединением* построенных диска и ленточек. Ср. [Sk, п. «Определение и примеры утолщений»].



Рис. 20. Стрелки, противонаправленные «при переносе» вдоль ленточки

Примеры дисков с неперекрученными ленточками приведены на рис. 12 справа, 13 и 15.

Неформально говоря, *краевая окружность* диска с ленточками — связный кусок множества его точек, к которым он подходит «с одной стороны». Краевые окружности дисков с ленточками выделены на рис. 13. В этом параграфе понятие краевой окружности (п. 5.3) не определяется строго.

2.26. (а) Сколько краевых окружностей может быть у диска с двумя неперекрученными ленточками?

(б) По слову длины $2n$ из n букв, в котором каждая буква встречается дважды, постройте граф, число компонент связности которого равно числу краевых окружностей диска с ленточками, отвечающего данному слову. (Значит, это число можно находить на компьютере, не рисуя рисунка.)

Ленточки a и b в диске с ленточками называются *перекрещивающимися*, если отрезки, по которым они приклеиваются к диску, чередуются

на его краевой окружности — идут в циклическом порядке $(abab)$, а не $(aabb)$.

2.27. (а) *Формула Эйлера.* Диск с n неперекрытыми ленточками, имеющий F краевых окружностей, гомеоморфен сфере с $(n + 1 - F)/2$ ручками и F дырками.

(b)* *Формула Мохара.* Пусть имеется диск с n ленточками. Построим $n \times n$ -матрицу следующим образом. Если $a \neq b$ и ленточки a и b пересекаются, то в клетке $a \times b$ поставим единицу. В остальных клетках поставим нули. Обозначим через r ранг над \mathbb{Z}_2 полученной матрицы. Тогда r четно и диск с ленточками гомеоморфен сфере с $r/2$ ручками и некоторым количеством дырок.

Названия «формула Эйлера» и «формула Мохара» применительно к результатам задач 2.27 и 2.29 (см. ниже) не общеприняты. Ср. с задачами 5.9 и 6.28 (f, g).

Пусть имеется слово длины $2n$ из букв $1, 2, \dots, n$, в котором каждая буква встречается дважды, и отображение $w: \{1, 2, \dots, n\} \rightarrow \{0, 1\}$. Возьмем двумерный диск. Ориентируем его краевую окружность. Отметим на ней непересекающиеся отрезки, отвечающие буквам данного слова, в том порядке, в котором буквы идут в слове. Для каждой буквы соединим (не обязательно в плоскости) соответствующие ей два отрезка ленточкой-прямоугольником (так, чтобы разные ленточки не пересекались). При этом стрелки на окружности должны быть *противонаправлены* «при переносе» вдоль ленточки k , если $w(k) = 0$, и *сонаправлены*, если $w(k) = 1$. *Диском с n ленточками*, отвечающим данным слову и отображению w , называется объединение построенных диска и ленточек.

На рис. 16 (b, c) и 10 изображены соответственно

- диск с ленточками, отвечающий слову $(aabb)$ с соответствием $w(a) = w(b) = 1$,
- диск с ленточками, отвечающий слову $(aabcba)$ с соответствием $w(a) = 1$ и $w(b) = w(c) = 0$,
- диск с n лентами Мёбиуса, т. е. диск с ленточками, отвечающий слову $(1122 \dots nn)$ с соответствием $w(1) = w(2) = \dots = w(n) = 1$.

2.28. (а) Сколько краевых окружностей может быть у диска с двумя ленточками?

(b) Чему может быть гомеоморфен диск с двумя ленточками?

2.29. (а) К одной из краевых окружностей диска с n лентами Мёбиуса и $k > 0$ дырками приклеим перекрытую (относительно этой

краевой окружности) ленточку. Полученная фигура гомеоморфна диску с $n + 1$ лентой Мёбиуса и k дырками.

(b) *Формула Эйлера.* Диск с n ленточками, среди которых есть перекрученная, имеющий F краевых окружностей, гомеоморфен диску с $n + 1 - F$ лентами Мёбиуса и $F - 1$ дыркой.

(c)* *Формула Мохара.* Пусть имеется слово длины $2n$ из букв $1, 2, \dots, n$, в котором каждая буква встречается дважды, и ненулевое отображение $w: \{1, 2, \dots, n\} \rightarrow \{0, 1\}$. Построим $n \times n$ -матрицу следующим образом. Если $a \neq b$ и ленточки a и b перекрещиваются, то в клетке $a \times b$ поставим единицу. В диагональной клетке $a \times a$ поставим число $w(a)$. В остальных клетках поставим нули. Обозначим через r ранг над \mathbb{Z}_2 полученной матрицы. Тогда соответствующий диск с ленточками гомеоморфен диску с r лентами Мёбиуса и некоторым количеством дырок.

Ответы, указания и решения к некоторым задачам

2.2. (a) Пусть граф K_5 нарисован на плоскости без самопересечений. Тогда по формуле Эйлера $5 - 10 + F = 2$. Значит, $F = 7$. Поставим около каждого ребра графа K_5 , нарисованного на плоскости, стрелки в две грани, примыкающие к ребру. Тогда число стрелок (иными словами, гранеребер) равно $2E = 20$. Поскольку граница каждой грани состоит не менее чем из трех ребер, число стрелок не меньше $3F = 21 > 20$. Противоречие.

(b) Аналогично п. (a).

(c) Утверждение следует из аналога задачи 2.15 (a) для «степеней граней». Или при помощи конструкции *двойственного графа* (ср. с п. 6.5) оно сводится к аналогичному утверждению про раскраску вершин графа, которое следует из задачи 2.15 (a).

2.4. [Pr14, § 11.4]

2.5. (a) Красивая реализация графа K_5 на торе изображена на рис. 21.

Имеются также другие решения. Например, можно нарисовать граф K_5 на плоскости с *одним* самопересечением и... (додумайте сами).

2.6. Аналогично задаче 2.14 (a).

2.7. (a) Красивая реализация графа $K_{3,3}$ на ленте Мёбиуса изображена на рис. 21.

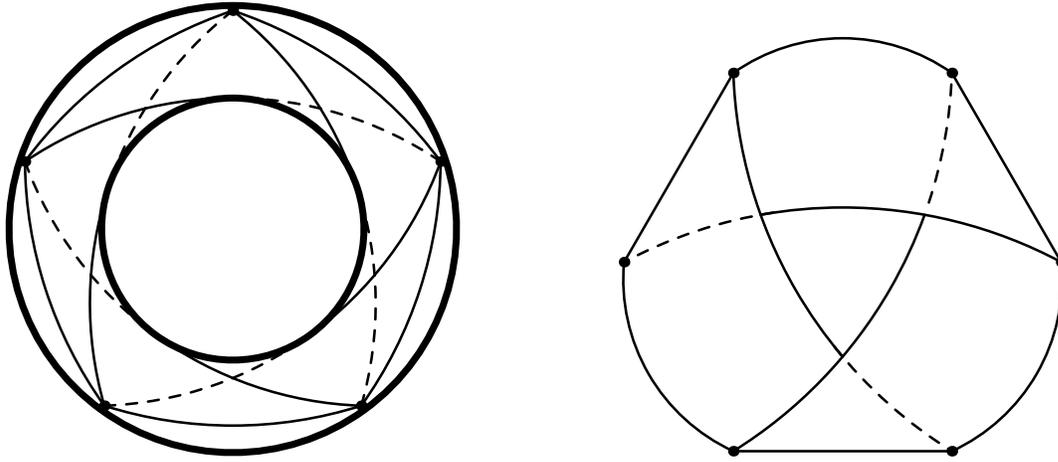


Рис. 21. Реализация непланарных графов

2.9. Утверждение следует из аналога задачи 2.15 (b) для «степеней граней». Или при помощи конструкции *двойственного графа* (ср. с п. 6.5) оно сводится к аналогичному утверждению про раскраску вершин графа, которое следует из задачи 2.15 (b).

2.10. Используйте идею решения задачи 2.17.

2.12. (a) По задаче 2.27 (a) у графа имеется окрестность, гомеоморфная сфере с $(2 - V + E - F)/2$ ручками и F дырками. По теореме Римана 2.4 (a) сферу с большим количеством ручек нельзя вырезать из сферы с меньшим количеством ручек. Поэтому $2 - V + E - F \leq 2g$.

2.14. (a) Из неравенства Эйлера и неравенства $2E \geq 3F$ получается противоречие.

(b) Аналогично п. (a) граф K_{g+15} не вложим в сферу с g ручками.

(a', b', c) Аналогично п. (a).

2.15. (a) Если степень каждой вершины не меньше 6, то $2E \geq 6V$.

Так как граф плоский, можно поставить около каждого его ребра стрелки в две грани, примыкающие к ребру. Тогда число стрелок равно $2E$. Поскольку граница каждой грани состоит не менее чем из трех ребер, имеем $2E \geq 3F$. По формуле Эйлера $V - E + F = 2$. Значит, $6 = 3(V - E + F) \leq 3V - E$, откуда $E \leq 3V - 6$. Противоречие.

(b) Аналогично п. (a) $2E \geq 3F$.

Для тора (т. е. для $g = 1$) по неравенству Эйлера $V - E + F \geq 0$. Значит, $0 = 3(V - E + F) \leq 3V - E$, откуда **следует, что** $E \leq 3V$. Поэтому наименьшая степень вершины не больше $2E/V \leq 6$.

Для произвольного $g > 0$ по неравенству Эйлера $V - E + F \geq 2 - 2g$. Значит, $E \leq 3V + 6g - 6$. Обозначим через d наименьшую степень вершины. Тогда

$$V \geq d + 1 \quad \text{и} \quad d \leq \frac{2E}{V} \leq 6 + \frac{12(g-1)}{V} \leq 6 + \frac{12(g-1)}{d+1}.$$

Поэтому $g \geq (d-2)(d-3)/12$. Так как $g < (m-1)(m-2)/12$, **неравенство** $d \geq m+1$ не **выполнено**.

2.16, 2.18 (d). Примените неравенство Эйлера (или формулу пересечений, см. п. 6.5 и фотографию в [A]).

2.17. (a) Нарисуем данный граф (возможно, с самопересечениями) на плоскости так, чтобы ребра не самопересекались. Если образовались точки пересечения (кроме вершин) более чем двух ребер, то подвинем некоторые ребра так, чтобы остались только двукратные точки пересечения. Поднимем одно из каждых двух пересекающихся ребер в пространство так, чтобы каждое пересечение пропало.

(c) Можно считать, что точки самопересечения «хорошие» и лежат на одной прямой. Прилепим третий лист по этой прямой. Теперь в малой окрестности каждой из точек пересечения ребер поднимем одно из ребер «мостиком» над другим ребром на третий лист. Так все точки пересечения будут ликвидированы.

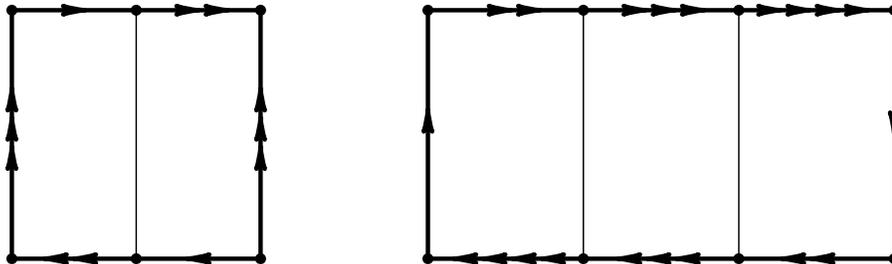


Рис. 22. Разрезы бутылки Клейна

2.19. (a) Разрежьте рис. 8 справа плоскостью симметрии. Или см. рис. 22 справа.

(b) См. рис. 22 слева.

2.21. Ответы: нельзя.

(a) Пусть граф K_5 нарисован на сфере без самопересечений. Спроецируем без самопересечений сферу без точки, не лежащей на K_5 , на плоскость. Получим плоскость, содержащую K_5 . Противоречие.

(b) Граф K_5 не планарен, а цилиндр можно спроецировать без самопересечений на плоскость.

2.22. (a, b) См. рис. 23.

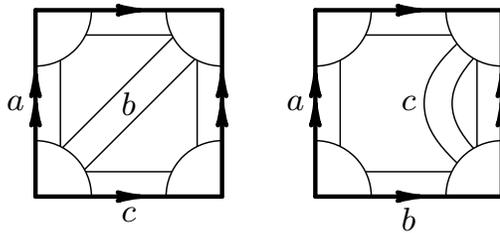


Рис. 23. Диски с ленточками, отвечающие словам $(abcabc)$ и $(abacbc)$, на торе

Другое решение. Диск с ленточками, отвечающий слову $(abab)$, гомеоморфен тору с дыркой (рис. 12). При добавлении ленточки (рис. 24 (b)) получается тор с двумя дырками. Докажите, что добавляемая ленточка не перекручена относительно той краевой окружности, к которой она крепится.

(d) Выделите максимальное дерево и докажите, что эта фигура гомеоморфна диску с четырьмя ленточками.

2.23. (b) Диск с ленточками, отвечающий слову $(abab)$, гомеоморфен тору с дыркой (рис. 12). Он лежит в диске с ленточками, отвечающем слову $(abcdabcd)$. При замене этого тора с дыркой на диск получится диск с двумя ленточками, имеющий одну краевую окружность, т. е. тор с дыркой. (Можно и непосредственно проверить, что получится диск с ленточками, отвечающий слову $(cdcd)$.) Значит, диск с ленточками, отвечающий слову $(abcdabcd)$, получен из двух торов с дырками склейкой по отрезкам краевых окружностей. Поэтому данный диск с ленточками гомеоморфен сфере с двумя ручками с дыркой.

Другое решение. Выберем диск с тремя ленточками, рассмотренный в задаче 2.22 (b), см. рис. 13 справа. Он гомеоморфен тору с двумя дырками. При добавлении четвертой ленточки добавляется ручка и удаляется дырка, см. рис. 24 (a). Докажите, что добавляемая ленточка не перекручена относительно «согласованных» ориентаций тех двух краевых окружностей, к которым она крепится.

2.24. (b) Используйте задачу 2.19 (a).

(c) Фигура на рис. 16 (c) гомеоморфна ленте Мёбиуса с ручкой. Диск с тремя лентами Мёбиуса гомеоморфен ленте Мёбиуса с вывернутой ручкой ввиду п. (b). Используйте п. (a). См. фотографию в [A].

(d) См. рис. 25 (a).

(e) См. рис. 25 (b). Или используйте (d).

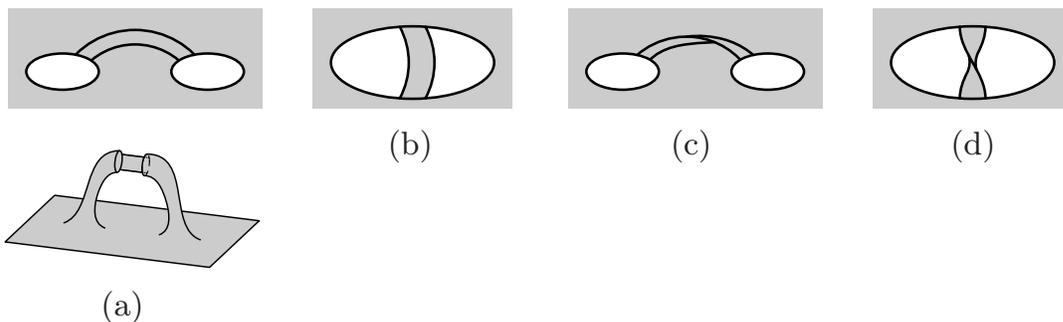


Рис. 24. Добавление ленточки

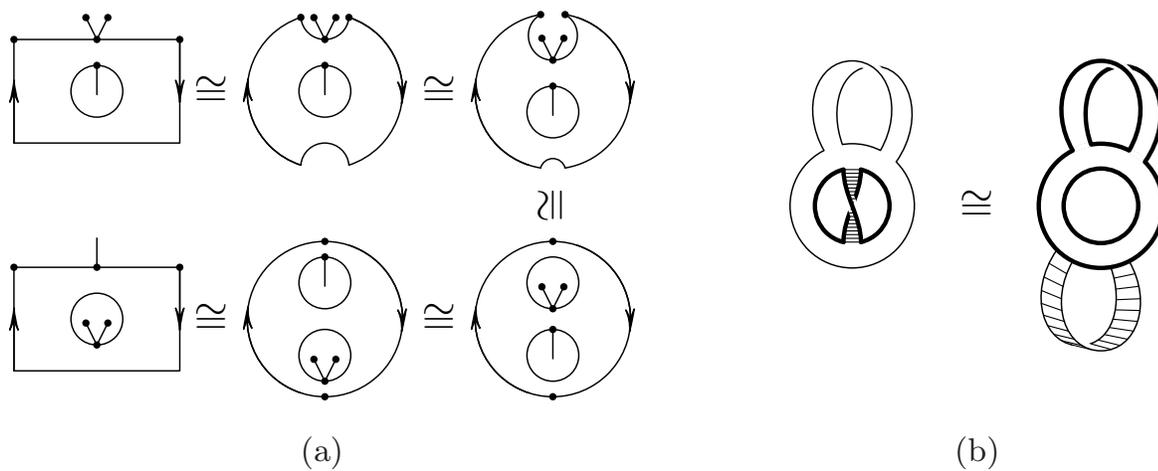


Рис. 25. (a) Краевые окружности ленты Мёбиуса с дыркой меняются местами. (b) Гомеоморфизм строится при помощи разрезания.

2.25. Утверждение следует из формулы Эйлера.

Приведем другое решение (отредактированное решение М. Ягудина). Оно не использует формулу Эйлера (и фактически ее передоказывает). Достаточно доказать утверждение для связного графа, ибо гомеоморфность для несвязного графа следует из гомеоморфности для компонент связности. Для связного графа достаточно доказать, что каждая из данных в условии регулярных окрестностей гомеоморфна сфере с $E - V + 2$ дырками, где V и E — количества вершин и ребер графа. А для этого достаточно доказать, что каждая регулярная окрестность гомеоморфна диску с неперекрученными попарно неперекрещивающимися ленточками, число которых равно $E - V + 1$.

Докажем это. Регулярная окрестность любого изображения без самопересечений максимального (остовного) дерева на плоскости гомео-

морфна кругу. Любое ребро вне максимального дерева соединяет две вершины графа. Добавление такого ребра означает добавление к регулярной окрестности ленточки, прикрепленной к краевой окружности круга. Очевидно, ленточка не перекручена. Значит, регулярная окрестность плоского графа гомеоморфна диску с неперекрученными ленточками.

Обозначим через e и e' ребра графа, которым соответствуют произвольные две ленточки, а через P — путь по ребрам максимального дерева, соединяющий концы ребра e_1 . По теореме Жордана ребро e' полностью лежит вне или внутри области, ограниченной $P \cup e$. Значит, перекрещивание ленточек невозможно.

2.26. (а) 1 или 3.

2.27. (а) Сначала докажите утверждение для случая, когда нет перекрещивающихся ленточек. Если же есть пара перекрещивающихся ленточек, то остальные ленточки приклеиваются к краевой окружности получившегося тора с дыркой. Они не перекручены относительно нее (докажите!). Заменяем тор с дыркой на диск. При этом количество ленточек уменьшится на 2, а количество краевых окружностей не изменится. (Расположение ленточек не обязательно получается из исходного вычеркиванием двух букв.) Применим предположение индукции.

Указание к другому решению. Индукция по n (аналогично задачам 2.22 и 2.23). Диск с нулем ленточек имеет одну краевую окружность и гомеоморфен диску. При приклеивании новой ленточки возможны два случая на рис. 24 (а, б).

(б) Приведем отредактированное решение М. Григорьева.

Для диска с ленточками назовем *перетаскиванием ленточки 1 вдоль соседней ленточки 2* результат движения одного из концевых отрезков ленточки 1 по краевой окружности диска до ленточки 2, затем по ленточке 2 и потом немного по диску. Эта операция переводит диск с ленточками в гомеоморфную фигуру. Она преобразует слово, которому соответствует диск с ленточками, так:

$$x_1 x_2 \dots x_s 1 2 y_1 y_2 \dots y_t 1 \rightarrow x_1 x_2 \dots x_s y_1 y_2 \dots y_t 1 2.$$

Рассмотрим изменение матрицы скрещиваний. Изменилась только ленточка 1. Теперь она будет скрещиваться с ленточками, которые раньше скрещивались с ленточкой 1 или с ленточкой 2, но при этом не с обоими, т. е. новая матрица получается из старой прибавлением к строке 2 строки 1 и прибавлением к столбцу 2 столбца 1. Такие преобразования не меняют ранг матрицы. Достаточно доказать, что любой диск

§ 3. Векторные поля на плоскости

3.1. Интересные примеры и теоремы

Исследование векторных полей начал Анри Пуанкаре в качественной теории дифференциальных уравнений. Эта теория имеет приложения во многих областях естествознания. Сам Пуанкаре применял ее, в частности, к проблеме трех тел и небесной механике. С тех пор векторные поля являются одним из важнейших объектов топологии и ее приложений. Подробные мотивировки см. в «похвальном слове векторным полям» [Ап03].

В этом параграфе на языке векторных полей будут доказаны основная теорема топологии 3.20 и близкие красивые теоремы 3.1, 3.3.

3.1. Основная теорема алгебры. *Любой непостоянный многочлен с комплексными коэффициентами имеет комплексный корень.*

Этот результат вы сможете доказать после решения задачи 3.17.

«Нульмерной версией» основной теоремы топологии является теорема о промежуточном значении непрерывной функции.

3.2. (a) На плоскости дано $2n$ красных и $2n$ синих точек общего положения (т. е. никакие три данные точки не лежат на одной прямой). Тогда существует прямая, по каждую сторону от которой находится по n красных и синих точек.

(b) На плоскости дан выпуклый многоугольник и точка z вне него. Тогда существует прямая, содержащая z и делящая многоугольник на две части равной площади.

(c) Для любого (выпуклого) многоугольника на плоскости существует прямая, делящая его на две части с равными площадями и периметрами.

(d) Любой ли бутерброд с маслом можно разрезать прямолинейным разрезом на две равноценные части?

(e) То же для бутерброда с маслом и сыром.

(f) На неровном полу табуретку всегда можно поставить на все четыре ножки. (Ножки табуретки имеют одинаковую длину и прикреплены перпендикулярно к плоскому сиденью.)

(g) Вокруг любого выпуклого многоугольника на плоскости можно описать квадрат.

(h)* Любую плоскую выпуклую фигуру диаметра 1 можно поместить в правильном шестиугольнике, расстояние между противоположными сторонами которого равно 1.

Векторным полем на подмножестве плоскости называется семейство векторов $v(x)$ на плоскости в его точках x .

Если начало каждого вектора перенести в начало координат на плоскости, то получится отождествление свободных векторов и точек плоскости. Поэтому векторное поле на подмножестве плоскости — то же, что отображение из этого подмножества в плоскость.

Примеры векторных полей на плоскости (см. рис. 26): $a(x, y) := (x, y)$ (радиальное), $b(x, y) := (y, -x)$ (центральное), $c(x, y) := (y, x)$ (седловое), $u(x, y) := (1, 0)$ (постоянное).

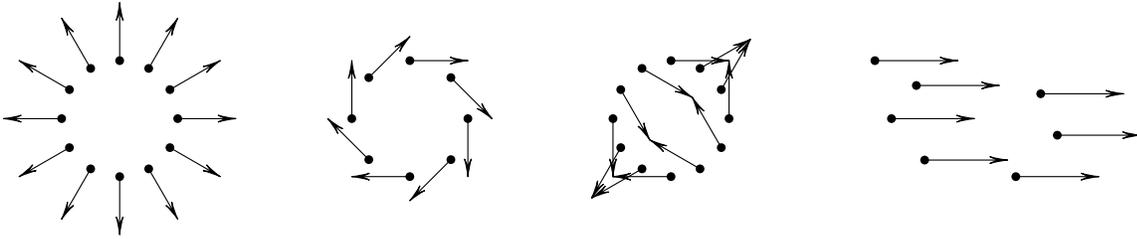


Рис. 26. Векторные поля на подмножествах плоскости

Пусть $N \subset \mathbb{R}^m$ и $Y \subset \mathbb{R}^n$. Отображение $f: N \rightarrow Y$ называется *непрерывным*, если для любых $x \in N$ и $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что при любых $y \in N$, удовлетворяющих условию $|x - y| < \delta$, выполнено неравенство $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$. Если N замкнуто и ограничено, то это условие равносильно следующему условию *равномерной непрерывности*: для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что при любых $x, y \in N$, удовлетворяющих условию $|x - y| < \delta$, выполнено неравенство $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$.

Далее все отображения и векторные поля считаются непрерывными и прилагательное «непрерывное» опускается.

Отождествим \mathbb{R}^2 и \mathbb{C} . Обозначим окружность и круг (диск) через

$$S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$$

и

$$D^2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}.$$

Векторное поле называется *ненулевым*, если все его векторы ненулевые.

3.3. Следующие утверждения эквивалентны.

(1) **Теорема непродолжаемости.** *Радиальное векторное поле $a(x, y) = (x, y)$ на граничной окружности S^1 круга D^2 не продолжается до ненулевого векторного поля на круге.*

(2) **Несминаемость круга на окружность.** *Не существует отображения круга в его граничную окружность, тождественного на этой окружности, т. е. отображения $f: D^2 \rightarrow S^1$, для которого $f(x) = x$ при $x \in S^1$.*

(Или, говоря неформально, барабан нельзя смять на его обод.)

(3) **Теорема Брауэра о неподвижной точке.** *Любое отображение $f: D^2 \rightarrow D^2$ круга в себя имеет неподвижную точку, т. е. такую точку $x \in D^2$, что $f(x) = x$.*

В этой задаче требуется именно доказать эквивалентность, доказывать сами утверждения не требуется. Утверждение (1) задачи 3.3 вытекает из задачи 3.17 (а) — см. ниже.

Два подмножества евклидова пространства называются *гомеоморфными*, если существуют взаимно обратные непрерывные отображения между ними.

3.4. (а) Отрезок не гомеоморфен квадрату.

(б) **Теорема.** *Квадрат не гомеоморфен кубу.*

Пункт (а) вы сможете решить прямо сейчас, а для пункта (б) нужны утверждения задач 3.3 и 4.6.

3.2. Гомотопность векторных полей и непрерывных отображений

Пусть на круге D^2 задано семейство v_t векторных полей, зависящее от параметра $t \in [0, 1]$. Эта зависимость называется *непрерывной*, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что при любых $x \in D^2$ и $s, t \in [0, 1]$, удовлетворяющих условию $|s - t| < \delta$, выполнено неравенство $|v_s(x) - v_t(x)| < \varepsilon$. Например, семейство $v_t(x) := tx$ непрерывно зависит от параметра t , а $v_t(x) := \{t\}x$ — нет.

По семейству $v_t, t \in [0, 1]$, векторных полей можно определить отображение $V: D^2 \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ формулой $V(x, t) := v_t(x)$.

3.5. Если зависимость от параметра непрерывная, то построенное отображение непрерывно.

Зависимость семейства $v_t, t \in [0, 1]$, векторных полей, заданных на подмножестве $N \subset \mathbb{R}^2$, называется *непрерывной*, если соответствующее отображение $V: N \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ непрерывно. Для $N = D^2$ это опреде-

ление эквивалентно вышеприведенному, а если N не замкнуто или не ограничено, то не эквивалентно.

3.6. Для любых двух векторных полей на плоскости существует непрерывная деформация одного в другое, т.е. семейство v_t векторных полей, непрерывно зависящее от параметра $t \in [0, 1]$, для которого v_0 есть первое поле и v_1 есть второе поле. (В отличие от дальнейшего, векторное поле v_t не предполагается ненулевым.)

Два ненулевых векторных поля называются *гомотопными*, если одно можно получить из другого непрерывной деформацией, в процессе которой поле остается ненулевым. Такой деформацией называется семейство v_t ненулевых векторных полей, непрерывно зависящее от параметра $t \in [0, 1]$, для которого v_0 есть первое поле и v_1 есть второе поле.

3.7. (а) Любое ненулевое векторное поле v на плоскости гомотопно полю $-v$.

(б) Радиальное векторное поле на окружности гомотопно центральному.

(Из задач 3.6 и 3.7 (б) видно, что при непрерывной деформации векторного поля его *траектории* меняются разрывно.)

3.8. Любые два ненулевых векторных поля на N гомотопны, если

(а) $N = 0 \times [0, 1]$; (б) $N = D^2$; (с) $N = 0 \times \mathbb{R}$;

(д) N — вся плоскость;

(е) N — произвольное дерево на плоскости (см. определение в п. 1.6).

3.9. (а) Каждое из утверждений задачи 3.3 равносильно тому, что (*) радиальное векторное поле на окружности S^1 не гомотопно постоянному.

(б) Ненулевое векторное поле на окружности S^1 гомотопно постоянному тогда и только тогда, когда оно продолжается на круг D^2 .

(с) Векторные поля $v(z) := 9z^3 - 2z^2 + z - 1$ и $w(z) := z^3$ на окружности S^1 гомотопны.

3.10. Для любых ненулевых векторных полей u, v, w на любой части плоскости

(а) v гомотопно v (*рефлексивность*);

(б) если u гомотопно v , то v гомотопно u (*симметричность*);

(с) если u гомотопно v и v гомотопно w , то u гомотопно w (*транзитивность*).

Векторное поле называется *единичным*, если все его векторы единичные.

3.11. (a) Любое ненулевое векторное поле гомотопно единичному.

(b) Два единичных векторных поля гомотопны тогда и только тогда, когда существует семейство v_t *единичных* векторных полей, непрерывно зависящее от параметра $t \in [0, 1]$, для которого v_0 есть первое поле и v_1 есть второе поле.

Единичное векторное поле на подмножестве плоскости — то же, что непрерывное отображение из этого подмножества в окружность. *Гомотопность* отображений определяется аналогично гомотопности векторных полей.

Два отображения $f, g: N \rightarrow S^1$ из подмножества $N \subset \mathbb{R}^2$ называются *гомотопными*, если существует семейство $h_t: N \rightarrow S^1$ отображений, непрерывно зависящее от параметра $t \in [0, 1]$, для которого $h_0 = f$ и $h_1 = g$. Непрерывная зависимость означает непрерывность соответствующего отображения $H: N \times [0, 1] \rightarrow S^1$.

Гомотопность отображений между подмножествами $N \subset \mathbb{R}^m$ и $Y \subset \mathbb{R}^n$ определяется аналогично. Для гомотопности отображений справедливы свойства, аналогичные гомотопности векторных полей. Например, гомотопность отображений — отношение эквивалентности; любые два отображения круга в окружность гомотопны.

3.12. Обозначим кольцо через $A := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leq x^2 + y^2 \leq 2\}$.

(a) Существует отображение $r: A \rightarrow S^1$, тождественное на S^1 .

(b) Любое отображение $S^1 \rightarrow S^1$ продолжается до отображения $A \rightarrow S^1$.

(c) Для любых двух отображений $A \rightarrow S^1$ любая гомотопия между их сужениями на S^1 продолжается до гомотопии между исходными отображениями.

3.13. (a) Для любого отображения $f: [0, 1] \rightarrow S^1$ любая гомотопия отображения $f|_{\{0,1\}}$ продолжается до некоторой гомотопии отображения f .

(b) Для любого отображения $f: D^2 \rightarrow S^1$ любая гомотопия отображения $f|_{S^1}$ продолжается до некоторой гомотопии отображения f .

(c) **Теорема Борсука о продолжении гомотопии.** Для любых подграфа A плоского графа N (см. определения в п. 1.6 и 2.2) и отображения $f: N \rightarrow S^1$ любая гомотопия отображения $f|_A$ продолжается до некоторой гомотопии отображения f .

(d) Приведите пример подмножеств $A \subset N$ плоскости, отображения $f: N \rightarrow S^1$ и гомотопии отображения $f|_A$, не продолжаемой до гомотопии отображения f .

3.3. Число оборотов вектора и его применения

Существует ли подмножество плоскости и негомотопные единичные векторные поля на нем? Да. Например, седловое векторное поле на окружности не гомотопно радиальному (а значит, и центральному). Доказательство негомотопности непросто. Для него, и для доказательства вышеприведенных интересных теорем, необходимо следующее понятие.

Неформально говоря, *степенью* $\deg v$ ненулевого векторного поля v на окружности S^1 называется число оборотов (против часовой стрелки) вектора $v(x)$ при однократном обходе точкой x окружности S^1 (против часовой стрелки).

Приведем строгое определение этого понятия. Отображение $S^1 \rightarrow S^1$, соответствующее единичному векторному полю v , равномерно непрерывно. Поэтому существует целое $M > 0$, для которого $|v(x) - v(y)| < 2$ при любом разбиении окружности на M равных дуг и любых точек x, y одной дуги. Для $k = 1, 2, \dots, M$ обозначим через $2\pi\Delta_k \in (-\pi, \pi)$ угол, на который нужно повернуть против часовой стрелки вектор $v(e^{2\pi i(k-1)/M})$, чтобы получить вектор $v(e^{2\pi ik/M})$. Более точно, $\Delta_k \in (-1/2, 1/2)$ однозначно определяется из условия

$$v(e^{2\pi ik/M}) = v(e^{2\pi i(k-1)/M})e^{2\pi i\Delta_k}.$$

(Заметим, что Δ_k зависят от v и M ; мы не указываем это в обозначениях.) Определим¹

$$\deg v := \sum_{k=1}^M \Delta_k \in \mathbb{Z}.$$

Аналогично определяется степень *ненулевого* векторного поля на окружности или отображения окружности в себя.

Нужно доказать корректность определения степени, т. е. то, что $\deg v$ действительно целое число, не зависящее от выбора числа M . Это можно доказать аналогично доказательству независимости определенного интеграла от выбора последовательности разбиений из его определения. Более удобный способ — задачи 3.15 (с, d).

¹Т. е.

$$\deg v := \int_0^{2\pi} ds(u) := \lim_{\max(u_{k+1} - u_k) \rightarrow 0} \left\{ \sum_{k=1}^m \Delta_k \mid 0 = u_0 < u_1 < \dots < u_{m-1} < u_m = 2\pi \right\},$$

где $\Delta_k \in (-1/2, 1/2)$ при $u_k - u_{k-1} < 1/M$ однозначно определяется из условия $v(e^{iu_k}) = v(e^{iu_{k-1}})e^{2\pi i\Delta_k}$.

3.14. (а) Найдите, хотя бы для одного M , степень *стандартной* n -намотки w_n , т. е. отображения $S^1 \rightarrow S^1$ (или, что то же самое, векторного поля на S^1), заданного формулой

$$w_n(z) = z^n.$$

(b) Если u и v — ненулевые векторные поля на окружности S^1 и для любой точки $z \in S^1$ векторы $u(z)$ и $v(z)$ симметричны относительно касательной к окружности в точке z , то $\deg u + \deg v = 2$.

Нам понадобится также непрерывная зависимость степени от векторного поля (точнее, независимость от его гомотопии). Это удобно доказать при помощи следующего обобщения определения степени.

Поднятием (или угловой функцией) отображения $s: N \rightarrow S^1$ называется отображение $\tilde{s}: N \rightarrow \mathbb{R}$, для которого $e^{i\tilde{s}} = s$.

3.15. (а) Найдите все поднятия пути (т. е. отображения отрезка) $s: [0, 2\pi] \rightarrow S^1$, $s(t) = e^{it}$.

(b) Найдите все поднятия композиции пути s из п. (а) и стандартной n -намотки w_n .

(c) По единичному векторному полю v на окружности определим путь $s_v: [0, 1] \rightarrow S^1$ формулой $s_v(t) = v(e^{2\pi it})$. Если \tilde{s}_v — поднятие пути s_v , то $\deg v = \frac{\tilde{s}_v(1) - \tilde{s}_v(0)}{2\pi}$.

(d) Поднятие единственно, т. е. если $\tilde{s}, \tilde{s}': [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ — два поднятия одного и того же пути $[0, 1] \rightarrow S^1$, причем $\tilde{s}(0) = \tilde{s}'(0)$, то $\tilde{s} = \tilde{s}'$.

3.16. (а) **Лемма о поднятии пути.** Любой путь $s: [0, 1] \rightarrow S^1$ имеет поднятие $\tilde{s}: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$.

(а') Для любых пути $s: [0, 1] \rightarrow S^1$ и точки $\tilde{x} \in \mathbb{R}$, удовлетворяющих условию $e^{i\tilde{x}} = s(0)$, существует поднятие $\tilde{s}: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ пути s , для которого $\tilde{s}(0) = \tilde{x}$.

(b) **Лемма о поднятии гомотопии.** Любая гомотопия $H: [0, 1]^2 \rightarrow S^1$ имеет поднятие.

(c) Степени гомотопных единичных векторных полей равны.

(d) Стандартная n -намотка w_n не гомотопна w_m при $m \neq n$.

(e) Существует отображение $S^1 \rightarrow S^1$, не имеющее поднятия.

3.17. (а) Ненулевое векторное поле на окружности не продолжается на круг, если число оборотов вектора при обходе этой окружности (точнее, степень) не равно нулю.

(b) Отображение $f: S^1 \rightarrow S^1$ называется *нечетным*, если $f(-x) = -f(x)$ для любого $x \in S^1$. Степень любого нечетного отображения $S^1 \rightarrow S^1$ нечетна.

(b') Никакое нечетное отображение $S^1 \rightarrow S^1$ не продолжается на круг D^2 .

(c) Если u и v — ненулевые векторные поля на окружности S^1 , причем $|u(x)| > |v(x)|$ для любой точки $x \in S^1$, то $\deg u = \deg(u + v)$.

(d) Найдите степень векторного поля $v(z) := 9z^3 - 2z^2 + z - 1$.

3.18. (a) Для любого ненулевого векторного поля на кольце степени его сужений на две граничные окружности кольца равны.

(Напомним, что при определении степени используются ориентации окружностей против часовой стрелки.)

(b) Для любого ненулевого векторного поля на круге с дырками (рис. 27) степень его сужения на внешнюю граничную окружность равна сумме степеней его сужений на внутренние граничные окружности.

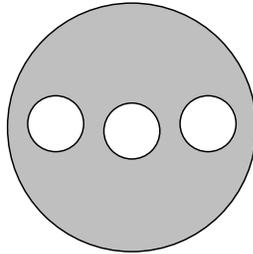


Рис. 27. Круг (диск) с дырками

3.4. Гомотопическая классификация векторных полей

3.19. (a) Любое единичное векторное поле степени n на окружности гомотопно w_n .

(b) Любые два ненулевых векторных поля на окружности равных степеней гомотопны.

(c) **Теорема продолжаемости.** *Ненулевое векторное поле продолжается с граничной окружности круга на круг тогда и только тогда, когда число оборотов вектора при обходе этой окружности (точнее, степень) равно нулю.*

Обозначим через $V_N(\mathbb{R}^2)$ множество единичных векторных полей на подмножестве N плоскости с точностью до гомотопности в классе единичных векторных полей (т. е. с точностью до непрерывной деформации, в процессе которой векторное поле остается единичным). «Нормировка» определяет взаимно однозначное соответствие между $V_N(\mathbb{R}^2)$ и множеством *ненулевых* векторных полей на N с точностью до гомотопности (задача 3.11). Множество $V_N(\mathbb{R}^2)$ находится также во взаимно

однозначном соответствии с множеством отображений $N \rightarrow S^1$ с точностью до гомотопности.

3.20. Основная теорема топологии. *Любое единичное векторное поле v на окружности гомотопно стандартной $\deg v$ -намотке, и единичные векторные поля разных степеней на окружности не гомотопны.*

Любое отображение $f: S^1 \rightarrow S^1$ гомотопно стандартной $\deg f$ -намотке, и отображения $S^1 \rightarrow S^1$ разных степеней не гомотопны.

Иными словами, степень $\deg: V_{S^1}(\mathbb{R}^2) \rightarrow \mathbb{Z}$ является взаимно однозначным соответствием, переводящим класс d -кратной намотки в число d .

Этот результат назван основной теоремой топологии по аналогии с основной теоремой алгебры (из него основная теорема алгебры и вытекает). Суть дела, конечно, лучше отражали бы названия «основная теорема алгебры полиномов» и «основная теорема одномерной топологии», но эти названия не используются. Обобщения см. в § 8.

3.21. (a) Пусть N — несвязное объединение или букет k замкнутых кривых (рис. 1 в п. 1.6). Фиксируем произвольно направление на каждой из этих кривых. Для векторного поля v на N поставим на каждой из этих кривых степень сужения поля v на нее. Полученную расстановку k целых чисел обозначим $\deg v$. Тогда \deg определяет биекцию $V_N(\mathbb{R}^2) \rightarrow \mathbb{Z}^k$.

(b) Для плоского графа N постройте биекцию $V_N(\mathbb{R}^2) \rightarrow \mathbb{Z}^{E-V+C} = \mathbb{Z}^{F-1}$. Здесь и в п. (c) используются определения из п. 1.6, 2.2; через E, V, C и F обозначаются количества ребер, вершин, компонент связности и граней графа.

(c) Для графа N (не обязательно плоского) постройте биекцию между множеством отображений $N \rightarrow S^1$ с точностью до гомотопности и \mathbb{Z}^{E-V+C} .

3.22. Опишите $V_N(\mathbb{R}^2)$ для круга N с n дырками (начните с $n = 0, 1$).

Здесь «описать» означает построить «естественное» взаимно однозначное соответствие между $V_N(\mathbb{R}^2)$ и некоторым «известным» множеством. «Известность» множества означает как минимум описание количества его элементов, а как максимум — наличие «естественных» операций на множестве и на $V_N(\mathbb{R}^2)$, сохраняемых соответствием.

3.23. Теорема гомотопности. *Любые два единичных векторных поля на диске D^2 , совпадающие на его границе, гомотопны неподвижно*

на границе (т. е. гомотопны так, что $v_t(x) = v_0(x)$ для любых $x \in S^1$ и $t \in [0, 1]$).

Поле направлений на подмножестве плоскости называется семейство прямых $l(x)$ в точках x , непрерывно зависящих от точки x . Поля направлений связаны с *лоренцевыми метриками*, возникающими в физике [Ко01].

3.24. Определите гомотопность полей направлений и классифицируйте поля направлений с точностью до гомотопности на окружности в плоскости.

Более подробное изложение приводится в [Pr15, § 6], [An03, § 4–6], [BE82, § 20, 21].

Ответы, указания и решения к некоторым задачам

3.1. Подробности см. в [Pr15, § 6], [An03, § 6], [BE82, § 24].

3.2. Приведенные задачи решаются при помощи *соображений непрерывности*.

(b) Зафиксируем любую направленную прямую, проходящую через z . Для каждого $\alpha \in [0, 2\pi]$ обозначим через $S_+(\alpha)$ (соответственно $S_-(\alpha)$) площадь пересечения многоугольника с правой (соответственно с левой) полуплоскостью относительно направленной прямой, образующей угол α с зафиксированной направленной прямой. Обозначим $f(\alpha) := S_+(\alpha) - S_-(\alpha)$. Тогда $f(0) = -f(\pi)$.

Обозначим через R радиус круга с центром в z , содержащего многоугольник. Тогда $|S_+(\alpha) - S_+(\alpha')| < |\alpha - \alpha'|R^2/2$. Поэтому функция S_+ непрерывна. Аналогично функция S_- непрерывна. Значит, функция f непрерывна. Из этого факта и равенства $f(0) = -f(\pi)$ следует, что существует α_0 , для которого $f(\alpha_0) = 0$. См. фотографию в [A].

(b–h) См. [Та87].

(g, h) См. [BE82, § 1].

3.3. (1) \Rightarrow (2), поскольку отображение $D^2 \rightarrow S^1$ — то же, что векторное поле.

Докажем, что (2) \Rightarrow (3). Пусть, напротив, отображение $f: D^2 \rightarrow D^2$ не имеет неподвижных точек. Для $z \in D^2$ обозначим через $\varphi(z) \in S^1$ точку пересечения с S^1 луча с началом в $f(z)$, проходящего через z . Иными словами, определим отображение $\varphi: D^2 \rightarrow S^1$ формулой $\varphi(z) := f(z) + (z - f(z)) \frac{-f(z) \cdot \delta + \sqrt{(f(z) \cdot \delta)^2 + |\delta|^2(1 - |f(z)|^2)}}{|\delta|^2}$, где $\delta := z - f(z)$. Противоречие с утверждением (2).

Докажем, что (3) \Rightarrow (2). Пусть, напротив, существует продолжение $f: D^2 \rightarrow S^1$ тождественного отображения $S^1 \rightarrow S^1$. Тогда $-f: D^2 \rightarrow S^1 \subset D^2$ — отображение, не имеющее неподвижных точек. Противоречие с утверждением (3).

Докажем, что (1) \Rightarrow (3) (хоть это уже и не нужно). Пусть, напротив, отображение $f: D^2 \rightarrow D^2$ не имеет неподвижных точек. Определим векторное поле v на $2D^2$ формулой $v(z) = \begin{cases} z - f(z), & |z| \leq 1. \\ z - (2 - |z|)f(z/|z|), & 1 \leq |z| \leq 2. \end{cases}$

Противоречие с утверждением (1).

Докажем, что (3) \Rightarrow (1) (хоть это уже и не нужно). Пусть, напротив, существует ненулевое векторное поле v на круге, сужение которого на краевую окружность диска является радиальным полем. Определим отображение $f: 2D^2 \rightarrow 2D^2$ формулой $f(z) = \begin{cases} z + v(z), & |z| \leq 1. \\ 2ze^{i(|z|-1)}/|z|, & 1 \leq |z| \leq 2. \end{cases}$

Противоречие с утверждением (3).

3.6. Положим $v_t(z) := tv_1(z) + (1 - t)v_0(z)$.

3.7. (а) Поле $v_t(z)$ получается из $v(z)$ поворотом на πt в положительном направлении, т. е. $v_t(z) = v(z)e^{\pi it}$.

(б) Поле $v_t(z)$ получается из $v(z)$ поворотом на $\pi t/2$ в положительном направлении, т. е. $v_t(z) = v(z)e^{\pi it/2}$.

3.8. (а, б, в, г) Формула $v_t(x) := v(tx)$ определяет гомотопию между произвольным векторным полем v и постоянным.

(е) Используйте индукцию. Шаг — удаление вершины, из которой выходит только одно ребро.

3.9. (а) Докажем, что (*) \Rightarrow (1). Пусть, напротив, v — продолжение радиального поля до ненулевого поля на D^2 . Определим гомотопию $H_t: S^1 \rightarrow S^1$ формулой $H_t(z) := v(tz)$, где $z \in S^1$ и $t \in [0, 1]$. Это гомотопия между радиальным (H_1) и постоянным (H_0) векторными полями на окружности. Противоречие с утверждением (*).

Докажем, что (1) \Rightarrow (*). Пусть, напротив, H_t — гомотопия между радиальным (H_1) и постоянным (H_0) векторными полями на окружности. Определим векторное поле на D^2 формулой $v(tz) := H_t(z)$, где $z \in S^1$ и $t \in [0, 1]$. Это продолжение радиального поля. Противоречие с утверждением (1).

(б) Аналогично (а).

3.10. (с) Положим $H(x, t) = \begin{cases} H_1(x, 2t), & 0 \leq t \leq 1/2, \\ H_2(x, 2t - 1), & 1/2 \leq t \leq 1, \end{cases}$ где H_1 и H_2 — гомотопии, соединяющие u и v , v и w соответственно.

3.11. (а) $v_t(z) := \frac{v(z)}{t|v(z)| + 1 - t}$.

3.12. (а) $r(z) := z/|z|$.

(б) Следует из п. (а).

3.13. (а, б) См. фотографию в [А].

(с) Индукция по размеру подграфа.

(д) Можно взять $N = [0, 1] \times 0$, $A = (0, 1] \times 0$, $f(x) := 0$ и $f_t(x) := t \sin(1/x)$.

3.14. (а) Ответ: n .

(б) Из рис. 28 получаем $\varphi_2 + \varphi_1 = 2\alpha + \pi$.

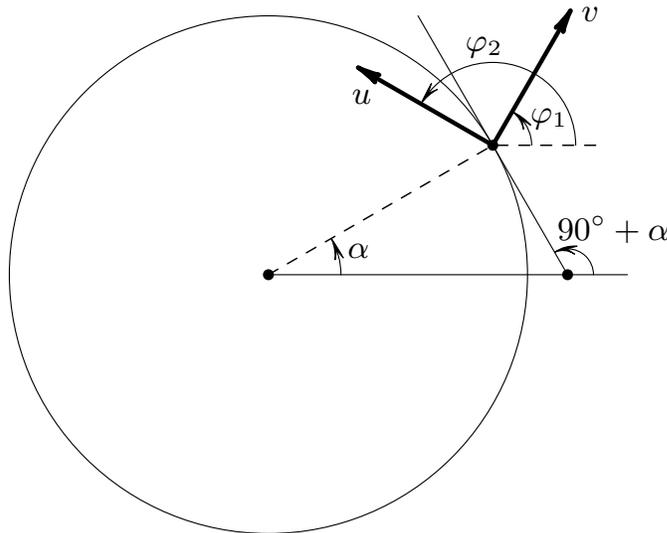


Рис. 28. Векторные поля, симметричные относительно касательной

3.15. Ответы: (а) $\tilde{s}_k(t) := t + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.

(б) $\tilde{s}_k(t) := nt + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.

(с) $\Delta_k = \tilde{s}_v(k/m) - \tilde{s}_v((k-1)/m)$.

(д) Для каждого $x \in [0, 1]$ имеем $\tilde{s}(x) - \tilde{s}'(x) = 2\pi n(x)$ для некоторого целого $n(x)$. Функция $n: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ непрерывна как разность непрерывных функций. Из этого факта и равенства $n(0) = 0$ следует, что $n(x) = 0$ для любого x , т. е. $s = \tilde{s}'$.

Другое решение: рассмотрите $\sup\{x \in [0, 1]: \tilde{s} = \tilde{s}' \text{ на } [0, x]\}$.

3.16. (а) Аналогично определению степени. Ввиду равномерной непрерывности отображения s существует $M > 0$, для которого $|s(x) - s(y)| < 1$ при $x - y < 1/M$. Для $t \in [0, 1]$ и $k = 1, 2, \dots, n$ обозначим через $\Delta_k(t) \in (-1, 1)$ угол, на который нужно повернуть против часовой стрелки точку $s(t(k-1)/n)$ окружности, чтобы получить точку $s(tk/n)$. Иными словами, $\Delta_k(t) \in (-1, 1)$ однозначно определяется из условия $s(tk/M) = s(t(k-1)/M)e^{i\Delta_k(t)}$. Определим $\tilde{s}(t) := \tilde{x} + \sum_{k=1}^M \Delta_k(t)$. Проверьте, что \tilde{s} — искомое поднятие.

Идея более короткого, но менее конструктивного решения: рассмотрите $\sup\{x \in [0, 1] : \text{существует поднятие на } [0, x]\}$. См. детали в [An03, с. 60–61].

Идея еще более короткого, но еще менее конструктивного решения: для каждого $z \in S^1$ постройте *гомеоморфизм*

$$h: p^{-1}(S^1 - z) \rightarrow (S^1 - z) \times (0, 1),$$

для которого $p|_{p^{-1}(S^1 - z)} = \text{pr}_1 \circ h$. Этот подход особенно полезен в п. (b).

(b) Рассмотрите $\sup\{t \in [0, 1] : \text{существует поднятие на } [0, t]\}$. Ср. [An03, с. 61–63].

(c) Следует из п. (b).

(d) Следует из п. (c).

3.17. (а) Следует из задачи 3.16 (c) аналогично задаче 3.9 (а).

(b') Следует из п. (а, b).

(d) Ответ: 3.

3.18. (а) [Pr15, теорема 6.5]. (b) [Pr15, теорема 7.3].

3.19. (а, b) Докажите гомотопность поднятий с закрепленными концами, используя рис. 29.

(c) Выведите из п. (b) аналогично задаче 3.9 (b).

3.20. Утверждение вытекает из задач 3.14 (а), 3.15 (c, d), 3.16 (a', d) и 3.19 (а).

3.21. (b) Для плоского графа N множество $V_N(\mathbb{R}^2)$ «не меняется» при стягивании ребра (осуществляемого в плоскости).

(b, c) См. фотографию в [A].

3.22. Ответ: \mathbb{Z}^{n-1} . В задаче 3.12 отображение сужения $V_A(\mathbb{R}^2) \rightarrow V_{S^1}(\mathbb{R}^2)$ является взаимно однозначным соответствием. Используйте двумерный аналог задачи 3.13. См. фотографию в [A].

3.23. Достаточно доказать утверждение с заменой диска D^2 на квадрат $[0, 1]^2$. По лемме о поднятии гомотопии существуют поднятия дан-

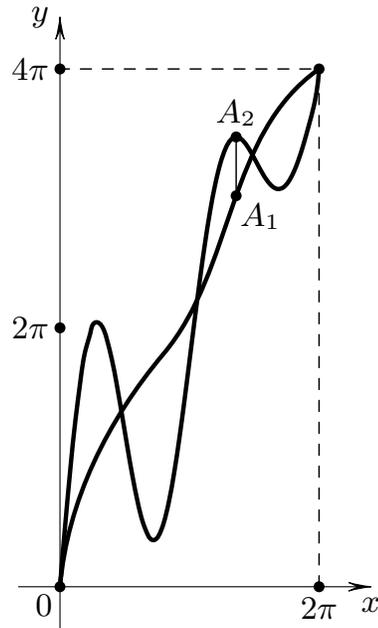


Рис. 29. Гомотопия поднятий с закрепленными концами

ных отображений. Докажите, что они гомотопны неподвижно на граничной окружности.

Если приводимых здесь указаний к доказательствам окажется недостаточно, читатель может обратиться к [Pr14, § 2].

§ 4. Векторные поля на двумерных поверхностях

4.1. Касательные векторные поля для сферы

Проблемы существования и классификации векторных полей и их наборов (вместе с близкой проблемой о гомотопической классификации отображений) определяют лицо теории препятствий. Ее методы можно применять ко многим другим задачам (см., например, другие параграфы этой книги и [Sk]).

Красивые результаты этого параграфа — теоремы о существовании (4.1 (b), 4.15, 4.29 (b), 4.33 (a)) и гомотопической классификации (4.6 (d), 4.7 (c), 4.11 (b), 4.20) векторных полей и отображений, а также теорема Борсука—Улама 4.8.

Расстоянием между касательными векторами $\overrightarrow{AA_1}$ и $\overrightarrow{BB_1}$ к сфере S^2 в точках $A, B \in S^2$ называется $|\overrightarrow{AB}| + |A_1B_1|$. С использованием этого понятия расстояния *непрерывность* отображения из S^2 в множество всех касательных векторов к S^2 определяется аналогично п. 3.1.

Касательным векторным полем на подмножестве сферы S^2 называется семейство касательных к ней векторов $v(x)$ в его точках x , непрерывно зависящих от точки x .

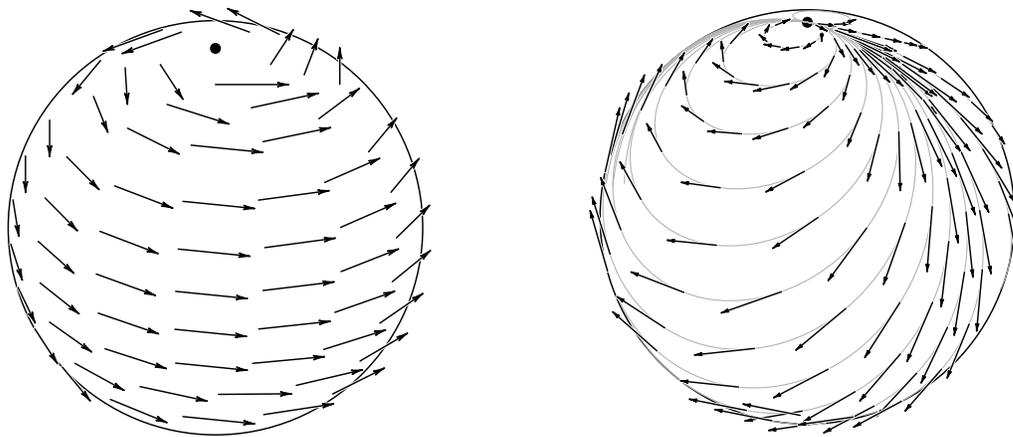


Рис. 30. Касательные векторные поля на сфере

4.1. (а) Постройте касательное векторное поле на сфере S^2 , у которого вектор нулевой только в одной точке.

(b) **Теорема о еже.** На стандартной сфере не существует ненулевого касательного векторного поля.

Два ненулевых касательных векторных поля называются *гомотопными*, если одно можно получить из другого непрерывной деформацией, в процессе которой векторное поле остается ненулевым и касательным. Такой деформацией называется семейство v_t ненулевых касательных векторных полей, непрерывно зависящее от параметра $t \in [0, 1]$, для которого v_0 есть первое поле и v_1 есть второе поле.

4.2. Любые два ненулевых касательных векторных поля на верхней полусфере $D_+^2 := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1, x \geq 0\}$ гомотопны.

Понятие *касательного векторного поля* на поверхностях вводится дословно аналогично случаю сферы. *Гомотопность* единичных касательных векторных полей на поверхности определяется дословно так же, как и на сфере. Для приложений важно уметь описывать множество $V(N)$ *единичных касательных векторных полей с точностью до гомотопности* на поверхности N . Встречаются и более сложно формулируемые проблемы, для решения которых полезно сначала научиться описывать множество $V(N)$. Здесь и далее по поводу слова «опишите» см. замечание после задачи 3.22.

4.3. Опишите $V(N)$ для

- (a) сферического слоя $\left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1, -\frac{1}{2} \leq z \leq \frac{1}{2} \right\}$;
- (b) боковой поверхности цилиндра.

4.2. Нормальные векторные поля и гомотопии для сферы

Единичным нормальным векторным полем на окружности $S^1 \subset \mathbb{R}^2 \subset \mathbb{R}^3$ в трехмерном пространстве называется семейство нормальных к ней (т.е. к касательной прямой к S^1) единичных векторов $v(x)$ в точках x окружности, непрерывно зависящих от точки $x \in S^1$.

Понятие *гомотопности* единичных нормальных векторных полей вводится дословно так же, как и для единичных касательных векторных полей.

Будем называть единичное нормальное векторное поле просто *нормальным полем*.

4.4. (a) Постройте нормальное поле на окружности S^1 .

(b) Постройте нормальное поле на окружности S^1 , не гомотопное уже построенному.

(с) Опишите нормальные поля на окружности S^1 с точностью до гомотопности.

Далее в этом параграфе можно либо считать, что $m = 4$ (даже для этого случая приводимые факты интересны), либо пропускать тот материал, в котором упоминается пространство \mathbb{R}^m (либо воспринимать задачи буквально, если вы не боитесь работать с пространством \mathbb{R}^m). Так как $\mathbb{R}^m = \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^{m-2} \supset \mathbb{R}^2 \times 0$, можно рассматривать S^1 как подмножество в \mathbb{R}^m при $m \geq 2$. Нормальные поля на $S^1 \subset \mathbb{R}^m$ определяются аналогично.

4.5. Любые два нормальных поля на $S^1 \subset \mathbb{R}^m$ гомотопны при $m \geq 4$.

Доказывать это удобнее всего на другом языке.

4.6. (а) Постройте взаимно однозначное соответствие между классами гомотопности нормальных векторных полей на $S^1 \subset \mathbb{R}^4$ и классами гомотопности отображений $S^1 \rightarrow S^2$.

(б) Любое отображение $S^1 \rightarrow S^2$, образ которого не совпадает с S^2 , гомотопен отображению в точку.

(с) Любое отображение $S^1 \rightarrow S^2$ гомотопен кусочно линейному (определите, что это такое) или гладкому (определите, что это такое).

(д) **Теорема.** Любое отображение $S^1 \rightarrow S^2$ гомотопен отображению в точку.

Единичным нормальным векторным полем на сфере $S^2 \subset \mathbb{R}^3$ называется семейство единичных нормальных к ней (т. е. к касательной плоскости к S^2) векторов $v(x)$ в точках $x \in S^2$, непрерывно зависящих от точки $x \in S^2$. Пример: $v(x) := x$. Нормальные поля на сфере $S^2 \subset \mathbb{R}^m$ определяются аналогично.

4.7. (а) Постройте взаимно однозначное соответствие между классами гомотопности нормальных векторных полей на $S^2 \subset \mathbb{R}^4$ и классами гомотопности отображений $S^2 \rightarrow S^1$.

(б) Любое отображение $S^2 \rightarrow S^1$ продолжается на трехмерный шар.

(с) **Теорема.** Любое отображение $S^2 \rightarrow S^1$ гомотопен отображению в точку.

(д) Любые два нормальных поля на сфере в \mathbb{R}^4 гомотопны.

Каждое из эквивалентных утверждений следующей задачи 4.8 является маломерным случаем **теоремы Борсука—Улама**. Отображение $f: S^2 \rightarrow S^1$ называется *эквивариантным* (или *нечетным*), если $f(-x) = -f(x)$ для любого $x \in S^2$.

4.8. (а) Для любого отображения $f: S^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ существует такое $x \in S^2$, что $f(x) = f(-x)$ (т. е. в любой момент времени на Земле най-

дуются диаметрально противоположные точки, в которых температура и давление совпадают).

(b) *Не существует эквивариантного отображения $S^2 \rightarrow S^1$.*

(c) *Если сфера S^2 является объединением трех замкнутых множеств, то одно из них содержит диаметрально противоположные точки.*

4.9. Для любых трех выпуклых многогранников в пространстве существует плоскость, делящая каждый из них на две части равных объемов.

4.3. Векторные поля и гомотопии для тора

Будем называть единичное касательное векторное поле просто полем (кроме п. 4.7).

Примеры полей на торе — «параллельное» и «меридиональное» (рис. 31).

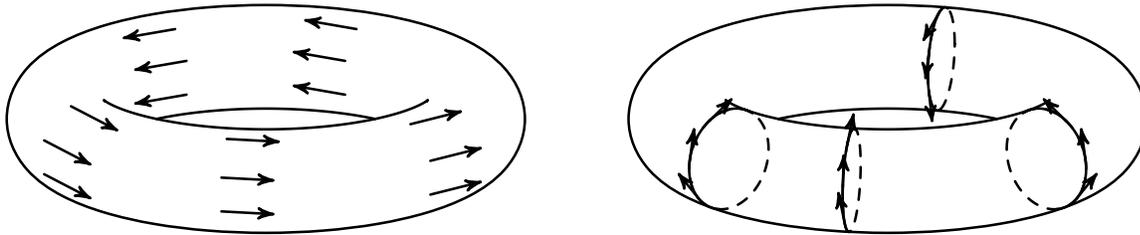


Рис. 31. «Параллельное» и «меридиональное» касательные векторные поля на торе

4.10. (a) «Параллельное» поле на торе гомотопно «меридиональному».

(b) Любое поле v на торе гомотопно полю $-v$.

(c, d) Сформулируйте и докажите аналог задачи 3.11 для тора.

(e) Приведите пример двух негомотопных полей на торе.

Доказать негомотопность полей на торе хочется при помощи числа $D_p(v)$ оборотов вектора поля v при обходе по параллели тора (т. е. по окружности $z^2 + x^2 = 9, y = 0$). Но количество оборотов вектора поля при обходе по замкнутой кривой в пространстве не определено. Поэтому для определения числа $D_p(v)$ нужно непрерывно отождествить касательные плоскости в разных точках тора (подумайте, что это значит и как это сделать). Вместо этого представим поле на торе в виде склейки единичного векторного поля на квадрате, лежащем в плоскости. Точнее, воспользуемся без доказательства наличием взаимно од-

позначного соответствия между $V(T^2)$ и множеством таких полей на квадрате $[0, 1]^2 \subset \mathbb{R}^2$, что $v(x, 0) = v(x, 1)$ и $v(0, x) = v(1, x)$ для любого x с точностью до гомотопии в классе таких полей. Для такого поля на квадрате определим $D_p(v)$ как *число оборотов вектора поля v при обходе по отрезку $[0, 1] \times 0$* (см. п. 3.3).

Наличием такого соответствия (и аналогичного соответствия для других поверхностей) можно и далее пользоваться без доказательства. (Заметим, что в [Pr15, § 7] оно используется даже без явной формулировки.) Ср. с решениями задач 4.1 (b), 4.2 и 4.3.

Аналогично определяется *число $D_m(v)$ оборотов вектора поля при обходе по меридиану тора* (меридиан — окружность $(x - 2)^2 + y^2 = 1$, $z = 0$, ср. с рис. 31). Аналогичное число можно получить, взяв другую замкнутую кривую на торе.

4.11. (a) Обозначим через T_0^2 тор с дыркой, т. е. пересечение тора T^2 с полупространством $x \leq 5/2$. Отображение $D_p \times D_m: V(T_0^2) \rightarrow \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, определенное формулой $D_p \times D_m(v) := (D_p(v), D_m(v))$, является взаимно однозначным соответствием.

(b) **Теорема классификации векторных полей на торе.** *Отображение $D_p \times D_m: V(T^2) \rightarrow \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ является взаимно однозначным соответствием.*

(c) Если на торе с дыркой заданы два поля, то их сужения на крайнюю окружность этой дырки гомотопны.

4.12. (a) Опишите множество нормальных полей на торе $T^2 \subset \mathbb{R}^4$ с точностью до гомотопности.

(b) Опишите множество отображений $T^2 \rightarrow S^1$ с точностью до гомотопности.

Поле направлений на поверхности называется семейство касательных к ней прямых $l(x)$ в точках x , непрерывно зависящих от точки x . (Определите непрерывность сами.) По поводу связи с лоренцевыми метриками см., например, [Ko01]. *Гомотопность* полей направлений определяется аналогично гомотопности полей.

4.13. Классифицируйте поля направлений на торе с точностью до гомотопности.

4.4. Векторные поля и гомотопии для других поверхностей

В каждой точке сферы с ручками S_g имеется касательная плоскость.

4.14. (a) На $S_{g,0}$ (см. п. 1.7) существует поле. (b) Опишите $V(S_{g,0})$.

(с) Сужения любых двух полей на $S_{g,0}$ на краевую окружность дырки гомотопны.

Для решения этой задачи полезно «изображение» сферы с ручками $S_{g,0}$ в виде диска с неперекрученными ленточками (см. п. 2.5, аналогично рис. 13, 15). Или можно представить поле на $S_{g,0}$ в виде склейки поля на плоском $8g$ -угольнике.

4.15. Теорема Эйлера—Пуанкаре (частный случай). Среди сфер с ручками только тор имеет ненулевое касательное векторное поле.

4.16. Подмножество $A \subset X \subset \mathbb{R}^m$ называется *ретрактом* множества X , если существует отображение $X \rightarrow A$, тождественное на A .

(а) **Теорема Хопфа.** Замкнутая гладкая кривая $S \subset S_g$ в сфере с ручками S_g является ее ретрактом тогда и только тогда, когда $S_g - S$ связно.

(b)* При каком условии замкнутая гладкая кривая в диске с ленточками является его ретрактом?

(с) $\mathbb{R}P^2$ не ретрагируется на $\mathbb{R}P^1$.

Диск с ленточками определен в п. 2.5; это то же, что сфера с ручками, пленками Мёбиуса и хотя бы одной дыркой (см. п. 5.6), или связное 2-многообразие с непустым краем (см. п. 4.5).

4.17. (а) Опишите множество отображений $S_g \rightarrow S^1$ с точностью до гомотопности.

(b) Опишите множество нормальных полей на $S_g \subset \mathbb{R}^4$ с точностью до гомотопности.

4.18. (а) Опишите множество отображений диска с n ленточками в S^1 с точностью до гомотопности.

(b) Любое отображение диска с ленточками в S^2 гомотопно отображению в точку.

4.19. (а) Постройте поле на ленте Мёбиуса.

(b) Гомотопно ли построенное вами поле v полю $-v$?

(с) Верно ли, что сужения на краевую окружность ленты Мёбиуса M любых двух полей на M гомотопны?

Для решения этой задачи представьте поле на ленте Мёбиуса в виде склейки единичного векторного поля на квадрате, лежащем в плоскости. Точнее, воспользуйтесь без доказательства наличием взаимно однозначного соответствия между $V(M)$ и множеством таких полей на квадрате $[0, 1]^2 \subset \mathbb{R}^2$, что для любого y вектор $v(0, y)$ получен из вектора

$v(1, 1 - y)$ симметрией относительно оси Ox (с точностью до гомотопии в классе таких полей).

4.20. Теорема классификации векторных полей на ленте Мёбиуса. *Существует ровно два класса гомотопности единичных касательных векторных полей на ленте Мёбиуса.*

4.21. (а) Постройте нормальное поле на стандартной ленте Мёбиуса M , рассматриваемой как подмножество в \mathbb{R}^4 .

(б) Опишите множество нормальных полей на $M \subset \mathbb{R}^4$ с точностью до гомотопности.

4.22. (а) На бутылке Клейна K существует поле.

(б) Опишите $V(K)$.

(с, d*) То же, что в задаче 4.21, для стандартной бутылки Клейна в \mathbb{R}^4 .

(е)* Любое отображение $\mathbb{R}P^2 \rightarrow S^1$ гомотопно отображению в точку.

Для решения пунктов (а, б) этой задачи представьте поле на бутылке Клейна в виде склейки единичного векторного поля на квадрате, лежащем в плоскости. Точнее, воспользуйтесь без доказательства наличием взаимно однозначного соответствия между $V(K)$ и множеством таких единичных векторных полей на квадрате $[0, 1]^2 \subset \mathbb{R}^2$, что для любого x выполняется равенство $v(x, 0) = v(x, 1)$ и $v(0, x)$ получен из $v(1, 1 - x)$ симметрией относительно оси Ox (с точностью до гомотопии в классе таких полей).

4.23. (а) Если на поверхности существует поле, то существует и поле направлений.

(б) Обратное тоже верно (даже для многомерных подмногообразий, определяемых аналогично п. 4.5).

4.5. Обобщение на двумерные подмногообразия

Обозначим $I := [0, 1]$. *Гладкой регулярной параметризованной двумерной поверхностью* называется бесконечно дифференцируемое отображение $r: I^2 \rightarrow \mathbb{R}^m$ (т. е. упорядоченный набор m отображений $x_1, x_2, \dots, x_m: I^2 \rightarrow \mathbb{R}$), для которого частные производные не равны одновременно нулю; в точках границы одна или обе частные производные берутся односторонними. (Или, более учено, *производная* которого невырождена в любой точке.)

Двумерным гладким подмногообразием в \mathbb{R}^m называется подмножество $N \subset \mathbb{R}^m$, для любой точки $x \in N$ которого существует такая ее замкнутая окрестность Ox в \mathbb{R}^m , что $N \cap Ox$ является образом $r(I^2)$ неко-

торой инъективной гладкой регулярной параметризованной двумерной поверхности $r: I^2 \rightarrow \mathbb{R}^m$. Двумерные гладкие подмногообразия мы будем коротко называть 2-многообразиями или 2-поверхностями.

4.24. Следующие подмножества в \mathbb{R}^3 (определения и рисунки см. в п. 1.7) являются 2-многообразиями в \mathbb{R}^3 :

- (а) $D^2 \subset \mathbb{R}^2 \subset \mathbb{R}^3$; (б) боковая поверхность цилиндра;
- (с) сфера; (д) тор; (е) лента Мёбиуса;
- (ф) прообраз нуля при бесконечно дифференцируемой функции $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, производная (т. е. градиент) которой ненулевая в каждой точке.

4.25. Следующие подмножества в \mathbb{R}^4 являются 2-многообразиями в \mathbb{R}^4 :

- (а) любое 2-многообразие в \mathbb{R}^3 (если рассматривать \mathbb{R}^3 как подмножество в \mathbb{R}^4);
- (б) бутылка Клейна; (с) проективная плоскость $\mathbb{R}P^2$.

4.26. Не являются 2-многообразиями ни объединение двух (или трех) координатных плоскостей в \mathbb{R}^3 , ни конус $z^2 = x^2 + y^2$ в \mathbb{R}^3 .

Касательной плоскостью $T_P N = T_P$ к 2-многообразию N в точке P называется плоскость, содержащая векторы $\frac{\partial r}{\partial a}(u, v), \frac{\partial r}{\partial b}(u, v)$ для некоторого отображения $r: I^2 \rightarrow \mathbb{R}^m$ из определения 2-многообразия, для которого $r(u, v) = P$ (или, более учено, образ плоскости \mathbb{R}^2 при производной в точке (u, v) отображения r ; производная — отображение, у него есть образ).

4.27. Это определение корректно, т. е. не зависит от выбора отображения r .

Теперь касательные и нормальные векторные поля на 2-многообразиях, обычные и единичные, определяются аналогично п. 4.1.

Подмногообразие в \mathbb{R}^m называется *связным*, если любые две его точки можно соединить лежащим в нем путем. (Это свойство называют *линейной связностью*, но для подмногообразий оно равносильно связности.)

4.28. Опишите единичные нормальные поля с точностью до гомотопности для заузленной гладкой замкнутой кривой в \mathbb{R}^3 (т. е. на линейно связном замкнутом 1-подмногообразии в \mathbb{R}^3 ; определение аналогично вышеприведенному; см. замечание после задачи 3.22).

Множество всех тех точек x 2-многообразия N , для которых существуют такие $Ox \subset \mathbb{R}^m$ и $r: I^2 \rightarrow \mathbb{R}^m$ из определения 2-многообразия,

что $x \in r((0, 1)^2)$, называется *внутренностью* $\text{Int } N$ 2-многообразия N . Если N компактно (т. е. замкнуто в общетопологическом смысле и ограничено [Pr14, § 4]) и $\text{Int } N = N$, то N называется *замкнутым* (в смысле многообразий). *Краем* 2-многообразия N называется $\partial N := N - \text{Int } N$.

Примеры замкнутых 2-многообразий: сфера, тор и сфера с g ручками в \mathbb{R}^3 , а также бутылка Клейна в \mathbb{R}^4 .

Примеры 2-многообразий с непустым краем: кольцо, цилиндр, лента Мёбиуса, тор с дыркой.

Примеры некомпактных 2-многообразий без края: плоскость, внутренность 2-многообразия с непустым краем.

4.29. (а) На любом связном 2-многообразии с непустым краем существует ненулевое касательное векторное поле.

(б) **Теорема Эйлера—Пуанкаре.** *На замкнутом связном 2-многообразии имеется ненулевое касательное векторное поле тогда и только тогда, когда эйлерова характеристика этого 2-многообразия нулевая.*

Определим эйлерову характеристику 2-многообразия.

Для плоского выпуклого многоугольника Δ *гладкая регулярная параметризованная двумерная поверхность* $r: \Delta \rightarrow \mathbb{R}^m$ определяется аналогично вышеприведенному определению с заменой I^2 на Δ и — в точках границы $\partial\Delta$ — частных производных на производные по двум неколлинеарным направлениям. Если r инъективно, то образ $r(\Delta)$ называется *криволинейным многоугольником* или *гранью*. Образы вершин и ребер многоугольника Δ называются *вершинами* и *ребрами* грани. *Разбиением 2-многообразия на многоугольники* называется такой набор граней, что его объединение есть данное 2-многообразие и любые две грани пересекаются либо по пустому множеству, либо по вершине, либо по ребру.

Теорема о триангулируемости. [MS74, теорема 10.6 из дополнения; Pr14, 17.2] *Для любого 2-многообразия и любого числа $\varepsilon > 0$ существует такое разбиение 2-многообразия на многоугольники, что расстояние между любыми двумя точками любой одной грани меньше ε .*

Эйлеровой характеристикой разбиения T 2-многообразия N на многоугольники называется число $\chi(T) := V - E + F$, где V, E, F — количества вершин, ребер и граней. *Эйлеровой характеристикой* $\chi(N)$ 2-многообразия N называется эйлерова характеристика произвольного его разбиения на многоугольники. Это определение корректно ввиду п. (а) теоремы на с. 84 и задач 5.7 (с), 5.9. Важно, что существуют простые способы вычислять эйлерову характеристику (см. п. 5.5). (*Триангуляция*

ей 2-многообразия называется его разбиение на многоугольники, каждый из которых является треугольником. При определении можно было бы обойтись триангуляциями, но разбиения на многоугольники понадобятся уже в п. 4.7.)

Теорема Эйлера—Пуанкаре доказана в следующих двух пунктах. Мы приводим два независимых (но по сути эквивалентных) доказательства. Первое более простое, но использует общее положение (те, кто не владеют этой техникой, могут считать это доказательство эвристическим рассуждением). Второе доказательство элементарно, но более громоздко (поскольку фактически повторяет технические доказательства свойств общего положения).

Далее, если не оговорено противное, все многообразия считаются компактными.

Замечание (не используемое в дальнейшем). Взаимно однозначное соответствие $f: N \rightarrow M$ между замкнутыми 2-многообразиями $N \subset \mathbb{R}^n$ и $M \subset \mathbb{R}^m$ называется *диффеоморфизмом*, если для любой точки $x \in N$ найдутся окрестности $Ox \subset \mathbb{R}^n$ точки x и $Of(x) \subset \mathbb{R}^m$ точки $f(x)$, а также отображения $r: I^2 \rightarrow \mathbb{R}^n$ и $q: I^2 \rightarrow \mathbb{R}^m$ из определения замкнутого 2-многообразия, для которых $fr = q$. Замкнутые 2-многообразия $N \subset \mathbb{R}^n$ и $M \subset \mathbb{R}^m$ называются *диффеоморфными*, если существует диффеоморфизм $f: N \rightarrow M$. Соответствие между классами диффеоморфности 2-многообразий и классами кусочно линейной гомеоморфности кусочно линейных 2-многообразий (см. п. 5.2), определяемое триангулируемостью, корректно определено и взаимно однозначно. Поэтому и по кусочно линейной теореме классификации (см. п. 5.6) эйлерова характеристика замкнутого 2-многообразия нулевая тогда и только тогда, когда это 2-многообразие диффеоморфно тору или бутылке Клейна. Впрочем, проверять эту диффеоморфность проще всего именно при помощи подсчета эйлеровой характеристики. Теорема Эйлера—Пуанкаре для *ориентируемых* 2-многообразий (см. п. 4.8) вытекает из их классификации, *увлекательности* векторных полей диффеоморфизмами и частного случая этой теоремы для стандартных сфер с ручками (задача 4.15). Красивая идея доказательства этого частного случая приведена в [Pr15, § 7]. Я не знаю полной реализации этой идеи, которая была бы проще общего доказательства.

4.6. Касательные векторные поля общего положения

Не существует одной теоремы или одного определения, формализующего идею *общего положения*. Для каждого конкретного доказатель-

ства формальное определение общего положения выбирается по-своему — так, чтобы доказательство получилось. Подробнее см. [Ru73, 1.6.D], [RS72]. (Впрочем, в тех книгах в основном рассматривается кусочно линейное общее положение, а в этой — гладкое.)

В этом пункте v — касательное векторное поле на 2-многообразии N .

Окрестность произвольной точки $x \in N$ в N назовем *малой*, если ортогональная проекция на касательную плоскость T_x переводит ненулевые касательные векторы в ненулевые. Эта проекция переводит поле v на окрестности в касательное векторное поле v_x на части τ_x касательной плоскости T_x . Ясно, что любая точка $x \in N$ имеет малую окрестность.

Поле v называется *гладким*, если для любой точки $x \in N$ существует такая ее малая окрестность, что поле v_x , т. е. отображение $\tau_x \rightarrow T_x$, бесконечно дифференцируемо.

Напомним, что производная отображения $\tau_x \rightarrow T_x$ в точке $y \in \tau_x$ является линейным оператором $T_x \rightarrow T_x$; она представляется 2×2 -матрицей в базисе в T_x .

Гладкое касательное векторное поле v называется *полем общего положения*, если для любой такой точки x , что $v(x) = 0$, и ее малой окрестности производная отображения $\tau_x \rightarrow T_x$ невырождена в любой точке $y \in \tau_x$.

Ясно, что ненулевое постоянное векторное поле на плоскости является полем общего положения на плоскости, а нулевое постоянное — не является. Другие нарисованные примеры касательных векторных полей (рис. 5 справа и др.) являются полями общего положения. Полями общего положения являются

- ненулевое касательное векторное поле (если оно существует);
- непостоянные векторные поля на рис. 26, см. также рис. 32, 33.

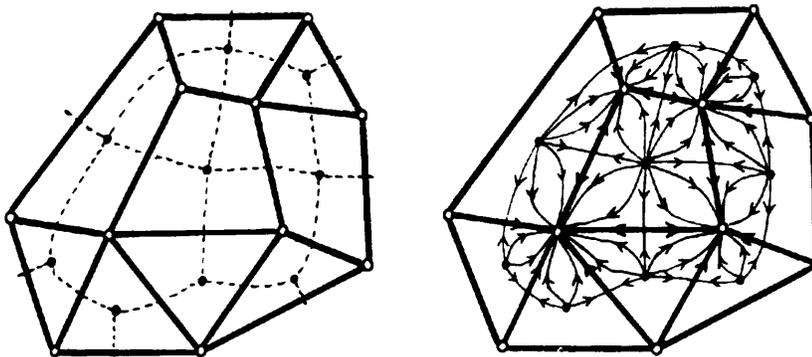


Рис. 32. Построение поля общего положения по разбиению на многоугольники

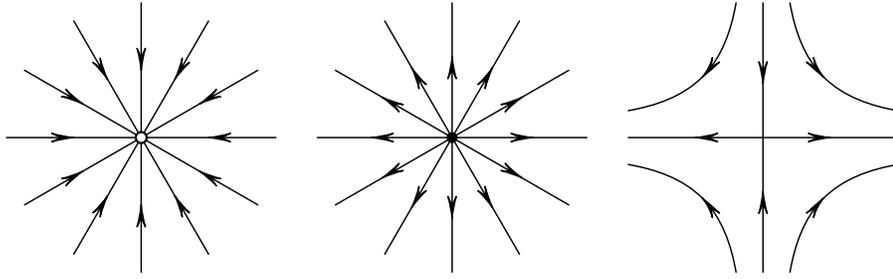


Рис. 33. Векторное поле в окрестности вершины, особых точек внутри грани и на ребре

Определение числа Эйлера $e(N)$. Возьмем на N поле общего положения. Существование такого поля доказано (на более сложном языке) в [DNF79, Ч. II, § 13], [Pr14, V]. Из общности положения вытекает конечность числа нулей поля. *Числом Эйлера $e(N)$* называется сумма знаков определителей производной в нулях поля. (Для определения знака нужна ориентация в T_x , но при обращении ориентации получается такой же знак.)

Набросок доказательства корректности определения числа Эйлера, т. е. независимости от выбора поля общего положения. Обоснование утверждений, приведенных в этом наброске без доказательства, можно найти, например, в [DNF79, Ч. II, § 13], [Pr14, 18.1]. Существует *гладкая* гомотопия *общего положения* между двумя полями v и v' общего положения на N . Ее можно представлять себе как касательное векторное поле общего положения на $N \times I \subset \mathbb{R}^m \times I$, векторы которого параллельны гиперплоскости $\mathbb{R}^3 \times 0$. *Гладкость* определяется аналогично предыдущему. Производная в точке является линейным оператором $\tau_x \times \mathbb{R} \rightarrow T_x$; он представляется 3×2 -матрицей. *Общность положения* означает, что в любой точке, в которой вектор нулевой, производная поля имеет ранг 2. Из общности положения (и подразумеваемой всюду компактности) вытекает, что множество нулей является несвязным объединением замкнутых и незамкнутых кривых. На них можно ввести ориентацию (подумайте как). Если одна из этих незамкнутых кривых соединяет *разные* основания $N \times 0$ и $N \times 1$, то в соответствующих нулях полей v и v' определители производных имеют одинаковый знак, а если *одинаковые*, то разный. Поэтому $e(v) = e(v')$.

В двух примерах на с. 65 $e(N) = 0$ и $e(N) = E - V + F = \chi(N)$ соответственно. Первое очевидно, поясним второе. Знаки определителей производной в нулях касательных векторных полей на рис. 33 равны $+1$,

+1 и -1 соответственно. Можно рассмотреть новую достаточно мелкую триангуляцию, для которой особые точки изображенного на рис. 32 векторного поля лежат внутри ее граней. (Кроме того, из рис. 5 (b) видно, что $e(S_g) = 2 - 2g$.)

Отсюда следует необходимость в теореме Эйлера—Пуанкаре 4.29 (b). Для доказательства достаточности нужно при $e(N) = 0$ получить ненулевое касательное векторное поле из касательного векторного поля общего положения «сокращением» точек разных знаков. Это делается аналогично [Pr14, § 18.3].

4.7. Построение касательных векторных полей по триангуляции

Приведем определение числа Эйлера через триангуляции и соответствующее доказательство теоремы Эйлера—Пуанкаре 4.29 (b). Оно похоже на [BE82, § 14], ср. [Pr14, § 18]. Его идея в том, чтобы сначала построить ненулевое касательное векторное поле на вершинах некоторой триангуляции, затем продолжить его на ребра и потом продолжить его на грани¹. Аналогичная идея работает для нормальных векторных полей на 2-многообразиях (п. 4.8) и многомерных многообразий (п. 8.2). При развитии этой идеи *числовой* инвариант обобщается до *групповых*, см. п. 4.9, 5.7, 6.1—6.4 (рассматриваемая в этих пунктах проблема в чем-то даже проще проблем о векторных полях), 7.3, 8.2, 8.4, 9.3, 11.2.

Замечание. Роль теории препятствий состоит в сведении топологических задач на произвольном многообразии к похожим задачам для простейших, модельных многообразий. Важно, что для применения теории препятствий можно воспользоваться *результатом* решения этих простейших задач, не вникая в его доказательство. Указанные простейшие задачи могут решаться, в частности, средствами теории препятствий. Мы будем использовать понятие количества оборотов (п. 3.3) и теорему продолжаемости 3.19 (c).

Определение двойственного разбиения на многоугольники для разбиения U на многоугольники некоторого 2-многообразия (рис. 34). Выберем внутри каждой грани разбиения U точку. Обозначим полученное множество точек через U_0^* . Для каждого ребра a разбиения U соединим кривой a^* точки множества U_0^* , соответствующие соседним вдоль

¹Эта идея реализуется с использованием определенного ниже двойственного разбиения на многоугольники. Можно было бы реализовать ее и для исходного разбиения, но тогда возникающие объекты будут менее естественны — см. определение границы в этом пункте и правило Кирхгофа в п. 4.9.

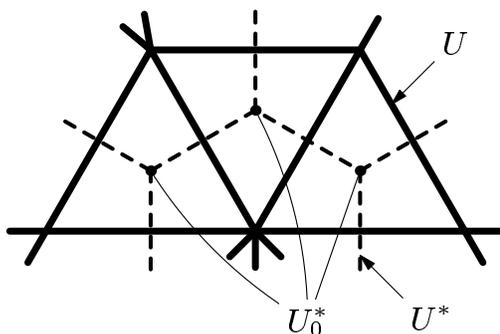


Рис. 34. Двойственное разбиение на многоугольники

ребра a граням. Сделаем это так, чтобы разные кривые пересекались (если вообще пересекались) только по общим концам. Кривая a^* называется *двойственным ребром* к a . Объединение кривых a^* разбивает 2-многообразие на многоугольники. Получится разбиение 2-многообразия на многоугольники. Это разбиение называется *двойственным* к U и обозначается U^* .

Для сферы следующие рассуждения иллюстрируются рисунком 35.

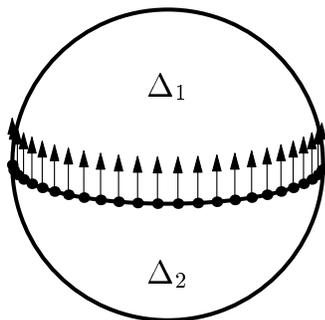


Рис. 35. Векторное поле на объединении ребер разбиения на многоугольники

Начало доказательства теоремы Эйлера—Пуанкаре 4.29 (b). Возьмем некоторое разбиение U 2-многообразия N на многоугольники. Обозначим через U^* двойственное разбиение. Выберем U настолько мелким, чтобы касательные плоскости в любых двух точках любой грани разбиения U^* не были ортогональны.

В этом пункте слово «поле» означает «ненулевое касательное векторное поле». Очевидно, что можно построить поле на U_0^* . Ясно, что это поле единственно (с точностью до гомотопии в классе полей на

U_0^*). Поэтому и ввиду аналога для векторных полей теоремы Борсука о продолжении гомотопии 3.13 (с) *существование поля на N равносильно продолжаемости построенного поля с U_0^* на N .*

Построение препятствующей расстановки. Возьмем произвольное ребро a разбиения U^* . Ввиду мелкости разбиения U ортогональная проекция касательной плоскости в произвольной точке этого ребра на касательную плоскость T_a в некоторой фиксированной точке этого ребра переводит ненулевые векторы в ненулевые. Значит, касательные плоскости в разных точках этого ребра можно отождествить с одной плоскостью T_a . Если на плоскости лежит отрезок и в его концах заданы ненулевые векторы (лежащие в плоскости), то это поле из двух векторов можно продолжить до поля на всем отрезке. Поэтому построенное на U_0^* поле можно продолжить на объединение U_1^* ребер двойственного разбиения, см. рис. 35. Заметим, что такое продолжение неоднозначно даже с точностью до гомотопии в классе полей на U_1^* . Обозначим полученное на U_1^* поле через v .

Попробуем теперь продолжить поле v с U_1^* на все N . Возьмем произвольную грань Δ разбиения U^* . Ввиду мелкости разбиения U ортогональная проекция касательной плоскости в произвольной точке этой грани на касательную плоскость T_Δ в некоторой фиксированной точке этой грани переводит ненулевые векторы в ненулевые.

Возьмем ориентацию грани Δ , т. е. направление на замкнутой кривой $\partial\Delta$. Оно дает ориентацию на T_Δ . При обходе этой замкнутой кривой $\partial\Delta$ вдоль взятого направления ортогональная проекция вектора поля v на T_Δ повернется на некоторое целое число оборотов (п. 3.3). Ясно, что полученное число оборотов не зависит от ориентации грани Δ . Поставим это число в вершину Δ^* исходного разбиения U , лежащую в грани Δ . (Например, для случая на рис. 35 в обеих вершинах будут стоять единицы. Придумайте, как придать смысл этому утверждению, несмотря на то что для этого разбиения не выполнено условие неортогональности касательных плоскостей из начала доказательства.) Полученная расстановка целых чисел в вершинах разбиения U называется *препятствующей* и обозначается $\varepsilon(v)$. По теореме о продолжаемости 3.19 (с)

продолжение поля v с U_1^ на N возможно тогда и только тогда, когда $\varepsilon(v) = 0$.*

Определение различающей расстановки $d(u, v)$. Если $\varepsilon(v) \neq 0$, то поле v не продолжается на N , но еще не все потеряно: можно попытаться так изменить поле v на U_1^* , чтобы препятствующая расстановка стала нулевой. Для этого выясним, как $\varepsilon(v)$ зависит от v .

Различие между полями v и u на U_1^* , совпадающими на U_0^* , можно измерять (и задавать) так. Возьмем направленное ребро a разбиения U . Выберем также ориентацию на объединении двух граней разбиения U , в которых лежит a . Возьмем такое направленное ребро a^* разбиения U^* , пересекающее ребро a ровно в одной точке, что «базис (a, a^*) » положительный в точке $a \cap a^*$. Пусть точка x движется по ребру a^* вдоль направления, а потом обратно. При движении «туда» будем рассматривать вектор $u(x)$, а при движении «обратно» — вектор $v(x)$. Поставим на направленном ребре a разбиения U число оборотов ортогональной проекции рассматриваемого вектора на $T_{a \cap a^*}$ при этом движении. (Например, для поля u на рис. 36 и поля v , направленного вертикально вверх, на ребре, направленном вправо, стоит -1 .) Полученную расстановку целых чисел на направленных ребрах разбиения U назовем *различающей* и обозначим $d(v, u)$.

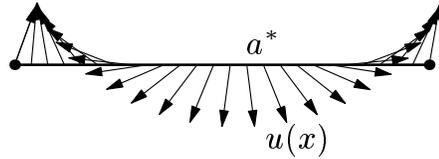


Рис. 36. Подкручивание векторного поля, направленного вверх, на один оборот

При изменении ориентации на объединении двух граней разбиения U , в которых лежит a , меняются и направление ребра a^* , и положительное направление отсчитываемых оборотов. Поэтому число на ребре a не зависит от выбора ориентации. А вот при замене направления на ребре a^* это число меняет знак.

Изменение препятствующей расстановки и определение границы ребра. При изменении поля на ребре a^* «на $+1$ оборот» (рис. 36) к $\varepsilon(v)$ прибавляется расстановка $+1$ в начале ребра a и -1 в его конце (и 0 на всех остальных вершинах). Эта расстановка называется *границей ребра a* и обозначается ∂a . Нетрудно проверить, что если

$$d(v, v') = n_1 a_1 + \dots + n_s a_s,$$

то

$$\varepsilon(v) - \varepsilon(v') = n_1 \partial a_1 + \dots + n_s \partial a_s.$$

Завершение доказательства. Из последней формулы вытекает, что *сумма* чисел препятствующей расстановки не зависит от v . Из рис. 32 видно, что эта сумма равна $\chi(N)$, см. пояснение в конце п. 4.6. \square

Приведем другое завершение доказательства. Оно длиннее предыдущего, но является иллюстрацией общего подхода теории препятствий.

Определение группы $H_0(U; \mathbb{Z})$, класса $e(U)$ и другое завершение доказательства. Назовем *границей* сумму с целыми коэффициентами $n_1 da_1 + \dots + n_s da_s$ границ нескольких ребер разбиения U . Назовем расстановки ε_1 и ε_2 целых чисел в вершинах *гомологичными*, если $\varepsilon_1 - \varepsilon_2$ есть граница. Ясно, что

(i) при изменении поля v на U_1^* препятствующая расстановка $\varepsilon(v)$ заменяется на гомологичную расстановку;

(ii) если $\varepsilon(v)$ является границей, то можно так изменить v на v' (на U_1^* , не меняя на U_0^*), чтобы получилось $\varepsilon(v') = 0$;

(iii) гомологичность является отношением эквивалентности на множестве расстановок.

(Для доказательства утверждения (ii) заметим, что если $\varepsilon(v) = n_1 da_1 + \dots + n_s da_s$, то можно взять поле v' на U_1^* , для которого $d(v, v') = n_1 a_1 + \dots + n_s a_s$, тогда получим $\varepsilon(v') = 0$.)

Нульмерной группой гомологий $H_0(U; \mathbb{Z})$ разбиения U (с коэффициентами \mathbb{Z}) называется группа расстановок целых чисел в вершинах с точностью до гомологичности.

Классом Эйлера разбиения U называется класс гомологичности препятствующего цикла:

$$e(U) := [\varepsilon(v)] \in H_0(U; \mathbb{Z}).$$

Это определение корректно ввиду утверждения (i).

Теперь теорема Эйлера—Пуанкаре вытекает из утверждений (i) и (ii) вместе с нижеследующей задачей 4.30 (b). \square

4.30. Возьмем произвольное разбиение U на многоугольники замкнутого связного 2-многообразия N .

(a) Определите группу $H_0(U; \mathbb{Z})$ независимо от рассуждений, в которых она появилась.

(b) Существует изоморфизм $H_0(U; \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$, при котором $e(U)$ переходит в $\chi(U) = \chi(N)$.

4.8. Нормальные векторные поля для двумерных поверхностей

2-многообразию N называется *ориентируемым*, если существует семейство ориентаций касательных плоскостей к N в точках $x \in N$, непрерывно зависящих от точки $x \in N$.

§ 5. Двумерные многообразия

5.1. Гомеоморфность графов

Графы G_1 и G_2 называются *изоморфными*, если существует взаимно однозначное отображение f множества V_1 вершин графа G_1 на множество V_2 вершин графа G_2 , удовлетворяющее следующему условию: *вершины $A, B \in V_1$ соединены ребром в том и только в том случае, если вершины $f(A), f(B) \in V_2$ соединены ребром.*

Неформально говоря, *телом $|G|$ графа G* называется фигура, получающаяся из конечного числа отрезков отождествлением некоторых их концов в соответствии с графом G . Формально тело определяется в [Sk, параграф «Реализуемость двумерных комплексов»].

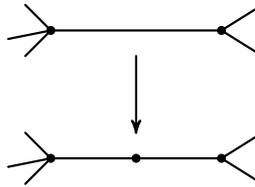


Рис. 39. Подразделение ребра

Операция *подразделения ребра* графа показана на рис. 39. Два графа называются *гомеоморфными*, если от одного можно перейти к другому при помощи операций подразделения ребра и обратных к ним. Это эквивалентно существованию графа, который можно получить из каждого из данных графов операциями подразделения ребра.

Определение гомеоморфности подмножеств евклидова пространства приведено в п. 3.1. Оказывается, *графы G_1 и G_2 гомеоморфны тогда и только тогда, когда фигуры $|G_1|$ и $|G_2|$ гомеоморфны.* Этот критерий является *мотивировкой* для определения гомеоморфности графов, которое позволяет перевести изучение некоторых фигур на чисто комбинаторный язык.

Одномерным полиэдром (или *графом в топологическом смысле*) называется класс гомеоморфности графов. Одномерные полиэдры часто называют графами, опуская слова «в топологическом смысле». Представляющий граф называется *триангуляцией* соответствующего одномерного полиэдра.

Топологу интересны именно полиэдры. Но графы и тела — удобные средства изучения полиэдров и хранения их в компьютере. А комбинаторщику и дискретному геометру интересны графы и тела. Но и полиэдры оказываются для них полезными.

5.2. Двумерные симплициальные комплексы и их гомеоморфность

Наша цель — дать комбинаторное определение кусочно линейного двумерного многообразия. Оно удобно как для теории, так и для хранения в памяти компьютера.

Двумерным симплициальным комплексом называется семейство двухэлементных и трехэлементных подмножеств конечного множества, которое вместе с каждым трехэлементным множеством содержит все три его двухэлементных подмножества. (Похожие объекты в комбинаторике называются гиперграфами.) Будем сокращенно называть двумерный симплициальный комплекс просто *2-комплексом*. См. примеры на рис. 40 (трехэлементные подмножества изображаются треугольниками).

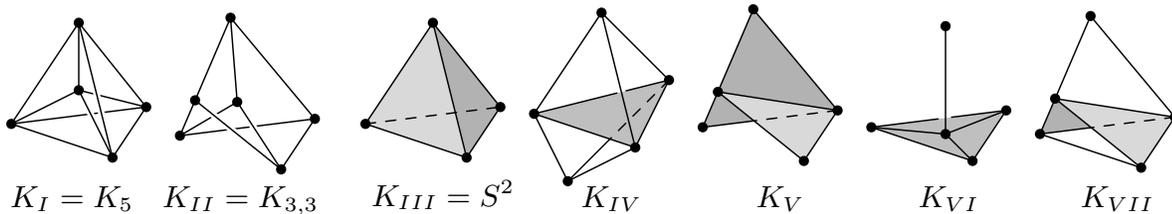


Рис. 40. Двумерные комплексы, не вложимые в плоскость

Элементы данного конечного множества называются *вершинами* 2-комплекса, выделенные двухэлементные подмножества — *ребрами* 2-комплекса, а выделенные трехэлементные подмножества — *гранями* 2-комплекса.

Кнопкой называется 2-комплекс с вершинами $c, 0, 1, 2, 3$, в котором выделены трехэлементные подмножества $\{0, 1, 2\}$, $\{0, 1, 3\}$ и $\{0, 2, 3\}$; выделены все их двухэлементные подмножества и $\{c, 0\}$. См. рис. 40, K_{VI} .

Книжкой с n листами называется 2-комплекс с вершинами $a, b, 1, 2, \dots, n$, в котором выделены трехэлементные подмножества $\{a, b, 1\}$, $\{a, b, 2\}, \dots, \{a, b, n\}$ и все их двухэлементные подмножества. Для $n = 3$ см. комплекс K_V на рис. 40, а также рис. 11.

Полным 2-комплексом с n вершинами (или двумерным остовом $(n - 1)$ -мерного симплекса) называется 2-комплекс с вершинами $1, 2, \dots, n$, в котором все двухэлементные и трехэлементные подмножества выделены. См. рис. 40, K_{III} для $n = 4$ (этот 2-комплекс называется также сферой) и рис. 41 для $n = 5$.

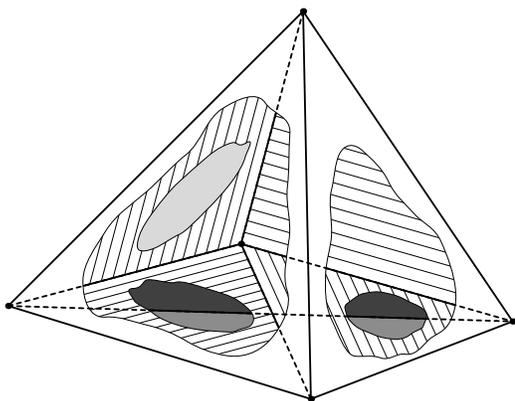


Рис. 41. Полный 2-комплекс с 5 вершинами

Важные неформальные замечания о 2-комплексах. 2-комплекс можно строить при помощи «склейки» сторон квадрата или даже многоугольника. См. первую и вторую строки на рис. 42. Эта конструкция формализуется понятием *клеточного разбиения* (см. п. 6.2).

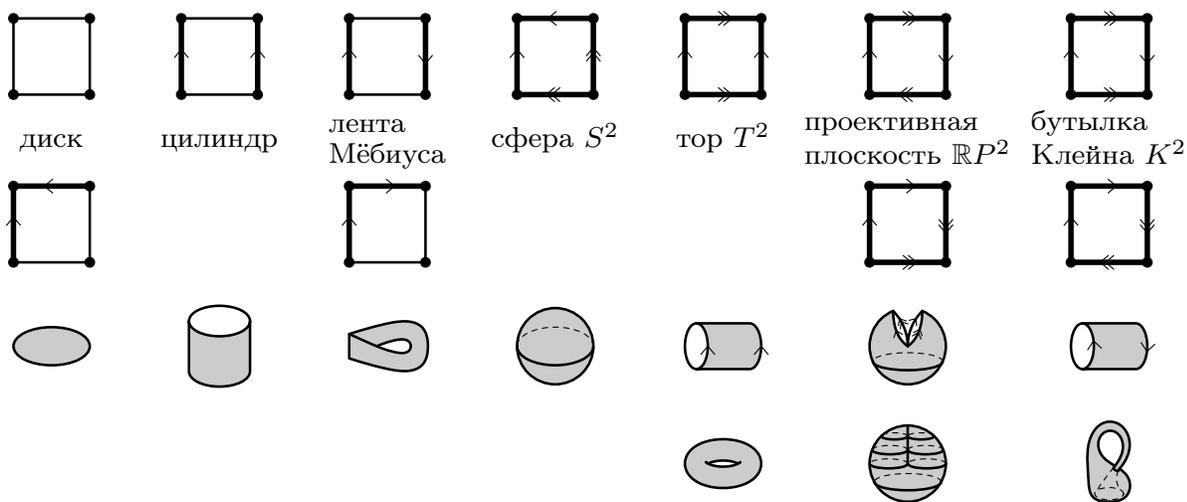


Рис. 42. Простейшие 2-комплексы (и соответствующие фигуры-тела)

Шутовской колпак Зимана получается такой склейкой сторон треугольника ABC , при которой стороны склеиваются с направлениями $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BC}$.

Как и по графу, по 2-комплексу естественно строится геометрическая фигура, называемая его *телом*. Неформально говоря, эта фигура получена склейкой треугольников и отрезков, соответствующих ребрам и граням 2-комплекса. Склейка осуществляется не обязательно в трехмерном пространстве: либо в многомерном пространстве, либо даже абстрактно, независимо от объемлющего пространства.

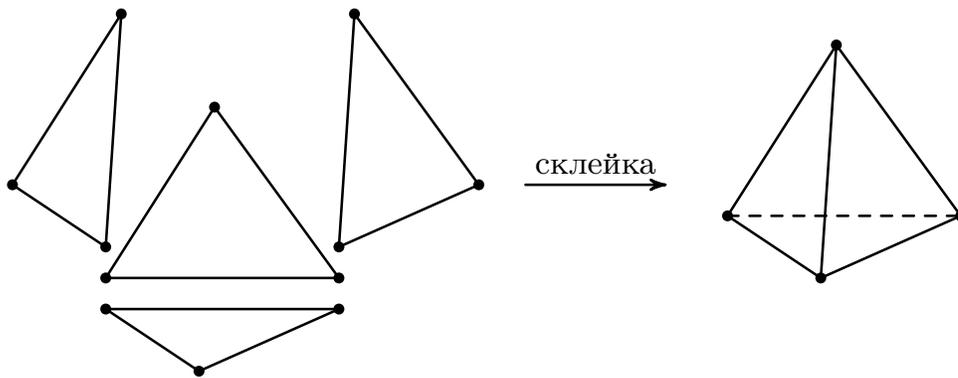


Рис. 43. Построение тела 2-комплекса

Например, на рис. 43 изображено построение тела полного 2-комплекса с 4 вершинами. По триангуляции 2-многообразия в \mathbb{R}^m (см. п. 4.5) естественно строится 2-комплекс, тело которого есть заданное подмногообразие. Любой 2-комплекс, тело которого есть поверхность, будем обозначать так же, как эту поверхность. Более общим образом, 2-комплексы, как и графы, можно задавать *фигурами*, в том числе «гладкими» и самопересекающимися, т. е. их *телами*. См. третью и четвертую строки на рис. 42.

2-комплекс — комбинаторный объект. Невозможно, например, взять точку на его грани. Однако «взятие точки на грани тела 2-комплекса» формализуется «взятием новой вершины нового 2-комплекса, образовавшегося при подразделении этой грани», см. рис. 44 справа. Как правило, мы не будем доводить наглядные рассуждения до такого формализма.

Операция *подразделения ребра* изображена на рис. 44 слева.

5.1. Операция *подразделения грани* на рис. 44 справа выражается через операцию подразделения ребра и обратную к ней.

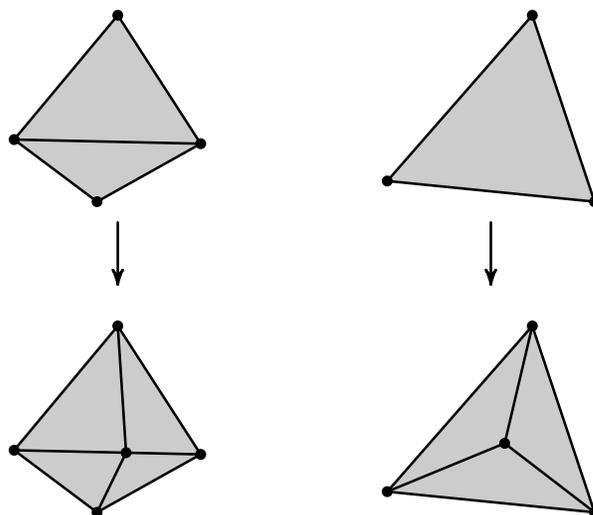


Рис. 44. Подразделения ребра и грани 2-комплекса

Два 2-комплекса *гомеоморфны*, если от одного можно перейти к другому при помощи операций подразделения ребра и обратных к ним.

5.2. 2-комплексы в каждой одной колонке на рис. 42 гомеоморфны между собой, а из разных колонок — нет. (*Указание*: негомеоморфность можно доказывать по мере чтения следующих пунктов.)

Теорема. (а) 2-комплексы, соответствующие двум триангуляциям одного гладкого 2-подмногообразия в \mathbb{R}^m (см. определение в п. 4.5), гомеоморфны.

(б) 2-комплексы гомеоморфны тогда и только тогда, когда их тела гомеоморфны.

Заметим, что

- аналог результата п. (а) верен и для n -многообразий,
- аналог части «только тогда» в п. (б) верен и для n -комплексов, но при этом

- аналог части «тогда» в п. (б) неверен для 5-комплексов.

(Определения n -многообразий и n -комплексов аналогичны случаю $n = 2$, ср. п. 10.1.)

Двумерным полиэдром называется класс гомеоморфности 2-комплекса. Представляющий 2-комплекс называется *триангуляцией* соответствующего двумерного полиэдра. Для 2-комплексов справедливы замечания, аналогичные сделанным в конце п. 5.1.

5.3. Локально евклидовы двумерные комплексы

2-комплекс называется *локально евклидовым*, если для любой его вершины v любое ребро, ее содержащее, содержится в некоторой грани и все грани, ее содержащие, образуют цепочку

$$\{v, a_1, a_2\}, \{v, a_2, a_3\}, \dots, \{v, a_{n-1}, a_n\} \quad \text{или} \\ \{v, a_1, a_2\}, \{v, a_2, a_3\}, \dots, \{v, a_{n-1}, a_n\}, \{v, a_n, a_1\}$$

для некоторых попарно различных вершин a_1, \dots, a_n . Если для всех v имеет место второй случай, то локально евклидов 2-комплекс называется *замкнутым*.

Например, 2-комплексы на рис. 42 локально евклидовы. Из них замкнуты только последние четыре. 2-комплекс, определенный диском с ленточками (см. п. 2.5), локально евклидов. «Заклеив» каждую краевую окружность диска с ленточками диском, получим замкнутый локально евклидов 2-комплекс.

5.3. (а) Существует не локально евклидов 2-комплекс, к каждому ребру которого примыкают две грани.

(б) 2-комплекс, гомеоморфный локально евклидову, сам локально евклидов.

Кусочно линейным двумерным многообразием называется класс гомеоморфности локально евклидова 2-комплекса. Если не будет путаницы с понятием 2-многообразия из п. 4.5, то мы будем называть кусочно линейное двумерное многообразие просто *2-многообразием*.

Вместо термина «локально евклидов 2-комплекс» обычно используется термин «триангуляция 2-многообразия». Это неудобно для начинающего, поскольку при изучении 2-многообразий с кусочно линейной точки зрения изначальным объектом являются 2-комплексы и через них определяются 2-многообразия. В этом параграфе мы используем термин «локально евклидов 2-комплекс», а в дальнейшем — «триангуляция 2-многообразия» или даже «2-многообразие», если речь идет о свойстве 2-комплексов, инвариантном относительно гомеоморфности.

Краем (или границей) ∂N локально евклидова 2-комплекса N называется объединение всех таких его ребер, которые содержатся только в одной грани.

5.4. (а) Край является несвязным объединением окружностей, т. е. графов, гомеоморфных треугольнику.

(б) Количество краевых окружностей одинаково для гомеоморфных локально евклидовых 2-комплексов.

(с) 2-комплексы, «представляющие» цилиндр и ленту Мёбиуса, не гомеоморфны.

5.4. Ориентируемость локально евклидовых 2-комплексов

Ориентация двумерного плоского треугольника — упорядочение его вершин с точностью до четной перестановки. Ориентацию удобно задавать замкнутой кривой со стрелкой, лежащей в треугольнике (или упорядоченной парой неколлинеарных векторов).

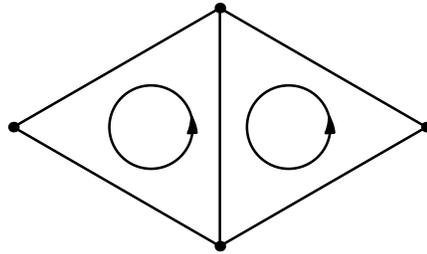


Рис. 45. Согласованные ориентации

Ориентацией локально евклидова 2-комплекса называется набор ориентаций на всех его гранях, которые *согласованы* вдоль каждого ребра, лежащего в двух гранях, т. е. задают с двух сторон этого ребра *противоположные* направления (рис. 45).

Локально евклидов 2-комплекс называется *ориентируемым*, если у него существует ориентация. 2-многообразие называется *ориентируемым*, если оно имеет ориентируемого представителя. Нетрудно сообразить, что *гладкое 2-многообразие является ориентируемым в смысле п. 4.8 тогда и только тогда, когда оно имеет триангуляцию, ориентируемую в смысле п. 5.4.*

Понятие ориентируемости невозможно ввести для произвольных 2-комплексов (подумайте почему), но можно ввести для 2-комплексов, каждое ребро которых содержится не более чем в двух гранях.

5.5. (а) Гомеоморфные локально евклидовы 2-комплексы ориентируемы или нет одновременно.

(б) Сфера, тор и сфера с ручками ориентируемы, а лента Мёбиуса, бутылка Клейна и проективная плоскость (рис. 42) не ориентируемы.

(с) Тор не гомеоморфен бутылке Клейна.

5.6. (а) Ориентируемость и неориентируемость сохраняются при вырезании дырки.

(b) Диск с ленточками (см. п. 2.5) ориентируем тогда и только тогда, когда нет перекрученных ленточек.

(c)* Локально евклидов 2-комплекс ориентируем тогда и только тогда, когда он не содержит подкомплекса, гомеоморфного ленте Мёбиуса.

5.5. Эйлерова характеристика 2-комплексов

Эйлеровой характеристикой 2-комплекса K с V вершинами, E ребрами и F гранями называется число

$$\chi(K) := V - E + F.$$

5.7. (a) Найдите эйлеровы характеристики 2-комплексов, изображенных на рис. 42.

(b) Сформулируйте и докажите формулу для эйлеровой характеристики объединения.

(c) Эйлеровы характеристики гомеоморфных 2-комплексов одинаковы.

5.8. (a) Эйлерова характеристика сферы с g ручками равна $2 - 2g$.

(b) Сферы с разными количествами ручек не гомеоморфны. (Этот факт неочевиден ввиду гомеоморфности фигур, кажущихся совсем разными, см. п. 2.4.)

(c) Эйлерова характеристика сферы с g ручками, m пленками Мёбиуса и h дырками равна $2 - 2g - m - h$.

(d) Эйлерова характеристика равна $2 - 2g$, $1 - 2g$ и $-2g$ для сферы, проективной плоскости или бутылки Клейна с g ручками соответственно.

(e) Какие 2-комплексы из п. (d) гомеоморфны, а какие — нет?

(f) Эйлерова характеристика ориентируемого локально евклидова 2-комплекса, имеющего пустой край, четна. (Это утверждение следует из теоремы классификации (1), п. 5.6. Доказательство, не использующее классификации, существует, но оно не столь просто, см. п. 6.5.)

Подграф в графе называется *клеточным*, если каждый связный кусок дополнения «гомеоморфен» открытому отрезку. Приведем формальное комбинаторное определение. Обозначим через G' граф, полученный из G операцией подразделения каждого ребра. Дополнение $G - H$ в графе G до подграфа H образовано всеми вершинами графа G , не лежащими в H , и всеми ребрами графа G , ни один конец которых не лежит в H . Подграф H в графе G называется *клеточным*, если каждая связная компонента дополнения $G' - H'$ гомеоморфна отрезку.

Подкомплекс (например, граф) в 2-комплексе называется *клеточным*, если каждый связный кусок дополнения гомеоморфен открытому диску. Приведем формальное комбинаторное определение.

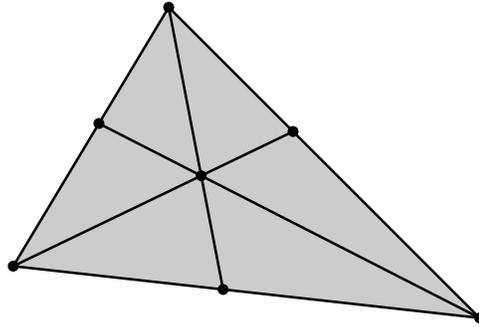


Рис. 46. Барицентрическое подразделение

Назовем *барицентрическим подразделением грани 2-комплекса* замену ее на шесть новых граней, полученных проведением «медиан» в треугольнике, представляющем эту грань (рис. 46). *Барицентрическим подразделением 2-комплекса* назовем результат барицентрического подразделения всех его граней. Так как барицентрическое подразделение можно осуществить с помощью конечного числа подразделений ребер, этот результат гомеоморфен исходному 2-комплексу.

Обозначим через G подкомплекс (например, граф) в 2-комплексе K , а через K' — 2-комплекс, полученный из K операцией барицентрического подразделения каждой грани и подразделения каждого ребра, не лежащего ни в одной грани. Дополнение $K - G$ в 2-комплексе K до подкомплекса G образовано всеми симплексами 2-комплекса K , не пересекающими G . Подкомплекс G в 2-комплексе K называется *клеточным*, если каждая связная компонента дополнения $K'' - G''$ гомеоморфна диску (или, формально, полному 2-комплексу с **тремя** вершинами)¹. Например,

- точка в сфере клеточна, а в торе — нет;
- объединение ребер 2-комплекса клеточно;
- по разбиению 2-подмногообразия в \mathbb{R}^m на многоугольники (см. п. 4.5) можно построить клеточный подграф (тело которого есть объедине-

¹Это эквивалентно, тому, что компонента C разбивается любой ломаной с концами на границе компоненты. Из этого следует, что $\chi(C) = 1$. Во многих применениях клеточности можно заменить условие $C \cong D^2$ на более слабое и проще проверяемое условие $\chi(C) = 1$.

ние ребер многоугольников) в 2-комплексе (тело которого есть заданное подмножество).

Клеточным разбиением 2-комплекса называется клеточный граф в этом 2-комплексе. Этот граф называется *одномерным остовом* клеточного разбиения. См. примеры «склейки из многоугольников» в п. 5.2. Многие построения удобно проделывать не для 2-комплексов, а для клеточных разбиений, ибо у «интересных» 2-комплексов «много» граней, но можно найти их «экономные» клеточные разбиения. Для вычислений удобнее рисовать клеточные разбиения, что менее громоздко, чем разбиения на многоугольники.

5.9. Формула Эйлера. Пусть $G \subset K$ — клеточный подкомплекс в 2-комплексе. Тогда $\chi(G) + F = \chi(K)$, где F — количество связных кусков дополнения $K'' - G''$.

В частности, если G — связный граф с V вершинами и E ребрами, то $V - E + F = \chi(K)$.

5.6. Классификация двумерных многообразий

Из локально евклидовых 2-комплексов можно получить новые операциями приклеивания ручки $N \rightarrow N \# T^2$, приклеивания пленки Мёбиуса $N \rightarrow N \# \mathbb{R}P^2$ и вырезания круга, см. рис. 47.

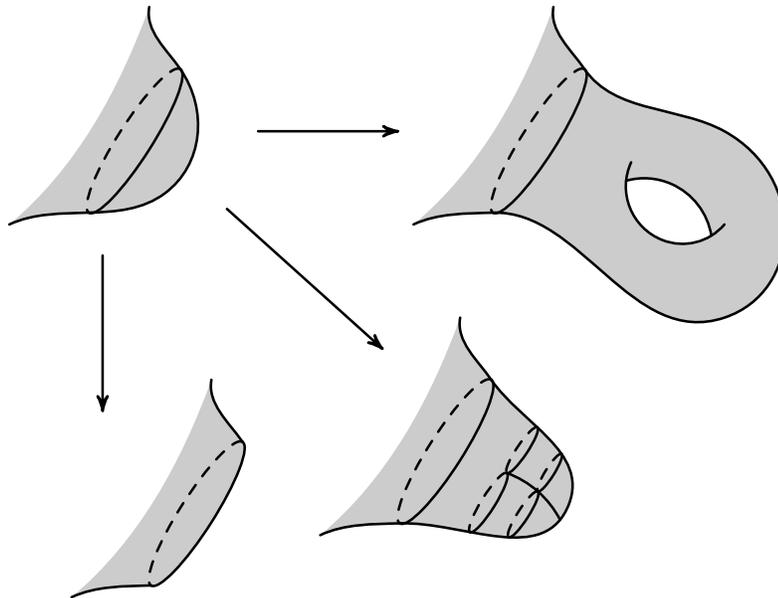


Рис. 47. Приклеивание ручки и пленки Мёбиуса; вырезание дырки

5.10. (а) $\mathbb{R}P^2$ с дыркой гомеоморфно ленте Мёбиуса.

(b) Тор с дыркой, на краевой окружности которого задано направление, гомеоморфен тору с дыркой, на краевой окружности которого задано противоположное направление.

(b') То же для ленты Мёбиуса.

(c) Операции приклеивания ручки или пленки Мёбиуса корректно определены.

(d) Результат приклеивания пленки Мёбиуса гомеоморфен результату вырезания круга и склейки диаметрально противоположных точек на его краевой окружности.

(d') Результат приклеивания ручки гомеоморфен результату вырезания квадрата $ABCD$ и склейки отрезков AB и DC , AD и BC .

(e) $\mathbb{R}P^2 \# \mathbb{R}P^2$ гомеоморфно K .

(f) $\mathbb{R}P^2 \# K$ гомеоморфно $\mathbb{R}P^2 \# T^2$.

(Эту задачу достаточно решить при помощи цепочки рисунков, как в п. 2.4.)

Теорема классификации. (1) *Любой связный ориентируемый локально евклидов 2-комплекс гомеоморфен сфере с ручками и дырками. Сферы с g ручками и h дырками не гомеоморфны для различных пар (g, h) .*

(2) *Любой связный неориентируемый локально евклидов 2-комплекс гомеоморфен сфере с пленками Мёбиуса и дырками. Сферы с t пленками Мёбиуса и h дырками не гомеоморфны для различных пар (t, h) .*

Число g ручек называется *ориентируемым родом* и находится из равенства $2 - 2g - h = \chi(N)$ (ср. с задачами 5.8 (с, g)). Число t пленок Мёбиуса называется *неориентируемым родом* и находится из равенства $2 - t - h = \chi(N)$.

Набросок доказательства теоремы классификации. Негомеоморфность (вторые предложения) доказывается путем подсчета количества связных компонент края и эйлеровой характеристики, см. задачи 5.4 (b), 5.7 (c) и 5.8 (c).

Докажем гомеоморфность (первые предложения). Построим *шапочки, ленточки и заплатки*, как на рис. 18. Приведем более аккуратное построение (которое читатель легко сможет совсем формализовать). Обозначим через T'' 2-комплекс, полученный из данного 2-комплекса T двукратным применением операции барицентрического подразделения. Назовем

- *шапочкой* объединение всех граней 2-комплекса T'' , содержащих некоторую вершину 2-комплекса T ;

- *ленточкой* объединение всех граней 2-комплекса T'' , пересекающих некоторое ребро 2-комплекса T , но не содержащих никакой вершины 2-комплекса T ;
- *заплаткой* компоненту связности объединения оставшихся граней 2-комплекса T'' .

Рассмотрим граф, являющийся объединением всех ребер 2-комплекса T . Пусть G_0 — максимальное дерево этого графа. Через T_0 обозначим объединение шапочек и ленточек, пересекающихся с G_0 . Можно проверить, что T_0 гомеоморфно двумерному диску (т. е. полному комплексу с тремя вершинами). Если мы будем последовательно добавлять ленточки и заплатки к T_0 , то получим последовательность 2-комплексов $T_0 \subset T_1 \subset T_2 \subset \dots \subset T_p = T$. Таким образом, T получается из несвязного объединения дисков (возможно, из одного диска) приклеиванием ленточек и заклеиванием дырок. Поэтому гомеоморфность вытекает из задач 2.27 (а), 2.29 (b) и 5.6 (а, b). \square

5.11. (а) Если связный граф вложим в сферу с g ручками, то он клеточно вложим в сферу с не более чем g ручками.

(b) Если связный граф вложим в диск с m лентами Мёбиуса, то он клеточно вложим в диск с не более чем m лентами Мёбиуса.

(Было бы интересно решить эти задачи без использования теоремы классификации.)

5.7. Препятствие Уитни к вложимости

Бутылка Клейна не реализуема без самопересечений в \mathbb{R}^3 (четко проще сформулировать более общий факт: не существует замкнутого неориентируемого 2-многообразия в \mathbb{R}^3). Это можно доказать с использованием трехмерного аналога теоремы Жордана. Если бы бутылка Клейна была реализована в \mathbb{R}^3 , то она разбивала бы \mathbb{R}^3 на две части. Тогда существует ненулевое нормальное поле, направленное во внешнюю часть. Значит, бутылка Клейна ориентируема (задача 4.31 (b)) — противоречие.

Так же доказывается невложимость неориентируемых n -многообразий в \mathbb{R}^{n+1} , см. задачу 8.16. Но так не получается доказать невложимость n -многообразий в \mathbb{R}^m для $m > n + 1$. Для последнего нужны препятствия к «старшей ориентируемости», т. е. препятствия Уитни. Мы продемонстрируем идею построения препятствия Уитни на примере *другого* доказательства невложимости бутылки Клейна в \mathbb{R}^3 , которое получается применением нижеследующих задач 5.12 (а), 5.13 и 5.14 (d). Ср. с п. 4.9, § 6, 12. Кроме того, в другом доказательстве не исполь-

§ 6. Гомологии двумерных многообразий

I should say it meant something simple and obvious, but then I am no philosopher!

I. Murdoch. The Sea, the Sea¹

6.1. Критерий ориентируемости

Определения кусочно линейного 2-многообразия, его ориентируемости и его триангуляции приведены в п. 5.2—5.4. Определения гладкого 2-многообразия и его триангуляции приведены в п. 4.5; определение ориентируемости его триангуляции дается аналогично п. 5.4. В этом параграфе можно пользоваться любым из двух подходов. Однако некоторые наглядные понятия и рассуждения формализованы только на кусочно линейном языке.

Существует красивый и простой критерий ориентируемости 2-многообразия: «не содержит ленты Мёбиуса» (четкая формулировка на кусочно линейном языке приведена в задаче 5.6 (с)). Существует следующий простой алгоритм распознавания ориентируемости связного 2-многообразия. Сначала ориентируем произвольно одну грань триангуляции. Затем на каждом шаге будем ориентировать грань, соседнюю с некоторой уже ориентированной, пока не ориентируем все грани триангуляции или не получим несогласованности ориентаций вдоль некоторого ребра.

В этом параграфе мы приведем алгебраический критерий ориентируемости, который по сути является лишь переформулировкой определения ориентируемости на алгебраическом языке. Но он важен не сам по себе, а как иллюстрация теории препятствий. Кроме того, похожие соображения применяются для *классификации утолщений*, см. [Sk, п. «Ориентируемость и классификация утолщений»]. Ср. с п. 5.7, 4.9.

Теорема ориентируемости. *Замкнутое 2-многообразие N ориентируемо тогда и только тогда, когда его первый класс Штифеля—Уитни $w_1(N) \in H_1(N)$ нулевой.*

Группа $H_1(N)$ и класс $w_1(N)$ будут определены позже. Они естественно возникают и строго определяются в процессе *придумывания*

¹Должен бы сказать, что это означает нечто простое и очевидное, однако я не философ! (А. Мёрдок. Море, море. Пер. автора.)

теоремы ориентируемости, к которому мы сейчас перейдем. Вычисления группы $H_1(N)$ приведены в п. 6.4.

В этом параграфе слово «группа» можно рассматривать как синоним слова «множество» (кроме задач 6.4, 6.17 и п. 6.5). И теорема ориентируемости, и приводимые построения останутся интересными.

6.2. Ориентируемость: циклы

Неформально говоря, *клеточным разбиением* 2-многообразия называется его разрезание на части, топологически эквивалентные диску. Формально, *клеточным разбиением* 2-комплекса T называется пара $T_0 \subset T_1 \subset T$ его подкомплексов, для которой T_1 — клеточный граф в T и T_0 — клеточный набор вершин в T_1 (см. определения в п. 5.5). Граф T_1 называется *одномерным остовом* клеточного разбиения. См. примеры «склейки из многоугольников» в п. 5.2. Многие построения удобно проделывать не для 2-комплексов, а для клеточных разбиений, ибо у «интересных» 2-комплексов «много» граней, но можно найти их «экономные» клеточные разбиения. Для вычислений удобнее рисовать клеточные разбиения, что менее громоздко, чем разбиения на многоугольники. Триангуляция является частным случаем клеточного разбиения. В нижеследующих рассуждениях, кроме примеров, читатель может заменить клеточные разбиения на триангуляции.

Определение препятствующего цикла. Возьмем произвольное клеточное разбиение T данного 2-многообразия N . Возьмем набор o ориентаций на гранях разбиения T . Покрасим ребро разбиения T в красный цвет, если ориентации граней, примыкающих к ребру с двух сторон, не согласованы вдоль этого ребра, т. е. задают на этом ребре одинаковые направления.

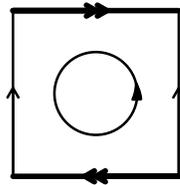


Рис. 48. Набор o ориентаций и препятствующий цикл $\omega(o)$

Например, на рис. 48 бутылка Клейна представлена в виде склейки сторон квадрата, т. е. разбита на один многоугольник. Грани, примыкающие к горизонтальному ребру с двух сторон, совпадают. Но их (точнее, ее) ориентации не согласованы вдоль этого ребра. Кроме того,

ориентация единственной грани согласована с собой вдоль вертикального ребра.

Итак, если разбиение не является триангуляцией, то, даже если две грани, примыкающие к ребру, совпадают, их ориентации могут быть не согласованы вдоль этого ребра. Кроме того, для одной пары граней (совпадающих или нет) их ориентации могут быть согласованы вдоль одного ребра и не согласованы вдоль другого.

6.1. Для каждого ребра клеточного разбиения проективной плоскости на один многоугольник (т. е. ее представления в виде склейки сторон квадрата, см. рис. 42) выясните, согласована ли вдоль этого ребра с собой ориентация единственной грани.

Объединение красных ребер называется *препятствующим циклом* $\omega(o)$.

На рис. 48 препятствующий цикл состоит из горизонтального ребра (жирные линии).

Многие из приведенных ниже фактов (например, задачи 6.2 (b, c, d)) можно сначала доказать для триангуляций, а затем для клеточных разбиений.

6.2. (a) Изобразите препятствующий цикл для клеточного разбиения проективной плоскости на один многоугольник, см. рис. 42.

(b) Набор o ориентаций граней определяет ориентацию клеточного разбиения тогда и только тогда, когда $\omega(o) = \emptyset$.

(c) Если N замкнуто, то из каждой вершины выходит четное число красных ребер (при этом считается, что каждая петля выходит из вершины дважды).

(d) Дополнение до препятствующего цикла $\omega(o)$ (или, формально, объединение граней второго барицентрического подразбиения, п. 5.5, не пересекающих $\omega(o)$) ориентируемо.

Гомологическим циклом по модулю 2 в графе называется набор его ребер, для которого из каждой вершины выходит четное число ребер набора. Например, объединение ребер клеточного разбиения бутылки Клейна на один многоугольник (рис. 48) является «восьмеркой», поэтому в этом графе четыре гомологических цикла по модулю 2. Слова «гомологический» и «по модулю 2» далее опускаются. Циклы в смысле теории графов будем называть «замнутыми кривыми».

6.3. (a) Сумма по модулю 2 (т. е. симметрическая разность) циклов есть цикл.

(b) Найдите число циклов в связном графе с V вершинами и E ребрами.

6.4. (Эта задача не используется в дальнейшем.) Группа $H_1(G)$ всех циклов в графе G с операцией суммы по модулю 2 называется *группой гомологий графа G* (одномерной с коэффициентами \mathbb{Z}_2).

(a) Одномерные группы гомологий гомеоморфных графов изоморфны.

(b) Для связного графа G с V вершинами и E ребрами имеет место изоморфизм $H_1(G) \cong \mathbb{Z}_2^{E-V+1}$.

(c) Несамопересекающиеся замкнутые кривые в графе порождают $H_1(G)$.

6.3. Ориентируемость: гомологичность циклов

Изменение препятствующего цикла и определение границы грани. Если $\omega(o) \neq \emptyset$, то o не определяет ориентации клеточного разбиения T . Но еще не все потеряно: можно попытаться изменить o так, чтобы препятствующий цикл стал пустым. Для этого выясним, как $\omega(o)$ зависит от o . Ответ удобно сформулировать с использованием суммы по модулю 2 (т. е. симметрической разности) наборов ребер в произвольном графе.

Если T — триангуляция (или 2-комплекс), то назовем *гомологической границей да грани a* набор ребер геометрической границы этой грани.

Для произвольного клеточного разбиения T 2-многообразия определение границы более сложное. Назовем *гомологической границей да грани a* набор всех тех ребер геометрической границы этой грани, к которым грань примыкает с одной стороны (рис. 49).

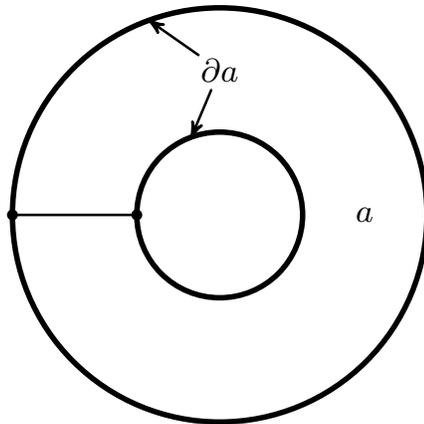


Рис. 49. Гомологическая (алгебраическая) граница сложной грани

Как и для циклов, слово «гомологическая» будем опускать. Для клеточного разбиения бутылки Клейна на один многоугольник (рис. 48) граница единственной грани пуста.

6.5. (а) Что будет границей единственной грани клеточного разбиения проективной плоскости на один многоугольник (см. рис. 42)?

(b) Граница грани является циклом.

(c) При изменении ориентации одной грани a цикл $\omega(o)$ изменяется на сумму по модулю 2 с границей этой грани: для полученного набора o' ориентаций выполняется равенство $\omega(o') - \omega(o) = \partial a$.

(d) При изменении ориентации *нескольких граней* a_1, \dots, a_k цикл $\omega(o)$ изменяется на сумму по модулю 2 границ этих граней: для полученного набора o' ориентаций выполняется равенство

$$\omega(o') - \omega(o) = \partial a_1 + \dots + \partial a_k.$$

Назовем *границей* сумму границ нескольких граней. Назовем циклы *гомологичными* (или *сравнимыми по модулю грани*), если их разность есть граница.

6.6. (а) При изменении набора o ориентаций препятствующий цикл $\omega(o)$ заменяется на гомологичный цикл.

(b) Если $\omega(o)$ является границей, то можно изменить o на o' так, чтобы получилось $\omega(o') = \emptyset$.

6.7. (а) Любые два цикла для клеточного разбиения сферы на один многоугольник (см. рис. 42) гомологичны.

(b) Краевые окружности на торе с двумя дырками гомологичны (для любого клеточного разбиения).

(c) Краевая окружность ленты Мёбиуса гомологична пустому циклу (для любого клеточного разбиения).

6.8. Для клеточного разбиения тора на один многоугольник (см. рис. 42)

(а) цикл «меридиан» не гомологичен пустому;

(b) различные циклы не гомологичны.

6.9. Для клеточного разбиения проективной плоскости на один многоугольник (см. рис. 42) различные циклы не гомологичны.

6.10. (а) Гомологичность является отношением эквивалентности на множестве циклов.

(b) Любой цикл в 2-комплексе гомологичен некоторому циклу в произвольном клеточном графе в этом 2-комплексе (см. определение в п. 6.4).

(с) Если два цикла в клеточном разбиении 2-комплекса гомологичны в 2-комплексе, то они гомологичны и в этом клеточном разбиении.

(d) Любой цикл становится гомологичным циклу, представленному замкнутой несамопересекающейся кривой, после некоторого *измельчения* клеточного разбиения связного 2-многообразия.

6.4. Ориентируемость: гомологии и первый класс Штифеля—Уитни

Напомним, в немного более общем виде, определения, мотивированно введенные в предыдущих пунктах. Набор ребер клеточного разбиения некоторого 2-комплекса называется *циклом*, если из каждой вершины выходит четное число ребер набора. (Слова «гомологический» и «по модулю 2» в этом и следующих определениях опущены.) Для данного клеточного разбиения на множестве циклов рассматривается операция сложения по модулю 2.

Границей да грани a называется набор всех тех ребер геометрической границы этой грани, к которым грань примыкает с нечетного числа сторон (рис. 49). Назовем *границей* сумму границ нескольких граней. Два цикла называются *гомологичными*, если их разность есть граница. *Одномерной группой гомологий $H_1(T)$ с коэффициентами \mathbb{Z}_2 клеточного разбиения T* называется группа циклов с точностью до гомологичности.

6.11. Для вышерассмотренных клеточных разбиений на один многоугольник сферы, шутовского колпака Зимана, тора, проективной плоскости, бутылки Клейна (рис. 42, рис. 48) число элементов группы $H_1(T)$ равно 1, 1, 4, 2, 4 соответственно.

6.12. Любые два цикла гомологичны для клеточного разбиения шутовского колпака Зимана на один многоугольник (см. определение в замечании в п. 5.2).

Важно, что группа гомологий, возникающая при решении конкретной задачи об ориентируемости (и других задач!), коротко определяется независимо от этой задачи.

В рассуждениях с классами гомологичности циклов удобно сначала работать с представляющими их циклами, а потом доказывать независимость от выбора представляющих циклов.

6.13. (а) Если T — клеточное разбиение 2-комплекса T' , то $|H_1(T)| = |H_1(T')|$.

(b) Одномерные группы гомологий гомеоморфных 2-комплексов находятся во взаимно однозначном соответствии друг с другом.

Первым классом Штифеля—Уитни клеточного разбиения T некоторого замкнутого локально евклидова 2-комплекса называется класс гомологичности препятствующего цикла:

$$w_1(T) := [\omega(o)] \in H_1(T).$$

Это определение корректно ввиду утверждения 6.6 (а).

Первым классом Штифеля—Уитни замкнутого 2-многообразия N называется первый класс Штифеля—Уитни любого клеточного разбиения T любого 2-комплекса, представляющего N : $w_1(N) := w_1(T)$. Это определение корректно в следующем смысле.

6.14. При «естественных» биекциях (построенных вами при решении задач 6.13 (а, б)) групп гомологий клеточных разбиений гомеоморфных 2-комплексов первый класс Штифеля—Уитни одного клеточного разбиения переходит в первый класс Штифеля—Уитни другого.

Набросок доказательства теоремы ориентируемости. Ясно, что условие $w_1(N) = 0$ необходимо для ориентируемости. Обратное, пусть $w_1(N) = 0$. Возьмем 2-комплекс T , представляющий N . Тогда $w_1(T) = 0$. Значит, существует такой набор o ориентаций граней 2-комплекса T , что $\omega(o)$ есть граница. Поэтому можно изменить o на o' так, чтобы выполнялось условие $\omega(o') = 0$. Тогда T ориентируем. Следовательно, N ориентируемо. \square

В следующих задачах «найти группу гомологий» означает «найти количество элементов в ней», а если вы знакомы с понятием группы, то «найти известную группу, изоморфную группе гомологий»; групповая операция определена в задаче 6.18. Группа гомологий конечно порожденная абелева, поэтому данную задачу легко формализовать.

6.15. Найдите группу гомологий

- (а) сферы с g ручками;
- (б) сферы с g ручками и h дырками;
- (с) сферы с t пленками Мёбиуса;
- (д) сферы с t пленками Мёбиуса и h дырками.

6.16. (а) Для замкнутых 2-многообразий M и N выполняется равенство $|H_1(M \# N)| = |H_1(M)| \cdot |H_1(N)|$ (операция $\#$ определяется аналогично рис. 47).

(б) Верна ли эта формула для незамкнутых 2-многообразий M и N ?

6.17. Пусть T — клеточное разбиение связного замкнутого 2-многообразия.

- (a) Сумма по модулю 2 границ всех граней разбиения T пуста.
- (b) Сумма по модулю 2 границ любого собственного подмножества множества всех граней разбиения T непуста.
- (c) $|H_1(T)| = 2^{2-\chi(T)} (= 2^{2-V+E-F})$.

6.18. Пусть T — клеточное разбиение 2-комплекса T' .

- (a) В множестве $H_1(T)$ корректно определена операция суммы формулой $[\alpha] + [\beta] = [\alpha + \beta]$.
- (b) Множество $H_1(T)$ с этой операцией является группой.
- (c) $H_1(T) \cong H_1(T')$.
- (d) Одномерные группы гомологий гомеоморфных 2-комплексов изоморфны.
- (e) Если T' есть триангуляция связного замкнутого 2-многообразия, то $H_1(T) \cong \mathbb{Z}_2^{2-\chi(T)}$.

6.19. Придумайте определение препятствующего цикла для клеточного разбиения локально евклидова 2-комплекса, не являющегося замкнутым. Нарисуйте препятствующий цикл для разбиения ленты Мёбиуса на один многоугольник.

Пусть T — клеточное разбиение локально евклидова 2-комплекса (не обязательно замкнутого). *Циклом по модулю края* в T называется набор ребер в T , из каждой вершины которого, не лежащей в крае, выходит четное число ребер. Границы определяются дословно так же, как и в начале п. 6.4. Два цикла по модулю края называются *гомологичными по модулю края*, если их разность есть сумма границы и некоторого набора ребер края. Группа $H_1(T, \partial)$ гомологий по модулю края и класс $w_1(T) \in H_1(T, \partial)$ определяются аналогично началу п. 6.4.

6.20. Найдите группу гомологий по модулю края

- (a) сферы с g ручками и h дырками;
- (b) сферы с t пленками Мёбиуса и h дырками.

6.21. Теорема ориентируемости. *Локально евклидов 2-комплекс T ориентируем тогда и только тогда, когда его первый класс Штифеля—Уитни $w_1(T) \in H_1(T, \partial)$ нулевой.*

6.5. Форма пересечений

Форма пересечений — один из важнейших инструментов и объектов исследования для топологии и ее приложений. См. [DZ93]. Она естественно появляется, например, при решении задач 2.16, 6.22 (c) и 6.23. (Если вам непонятны используемые в них слова или не получается решить, то пропустите их и читайте дальше. Задачи 6.22 (a, b) можно ре-

пить и без формы пересечений.) См. также формулу Мохара — задачи 2.27 (b) и 2.29 (c).

6.22. (a) Регулярные окрестности (см. рис. 18) изоморфных графов в одной поверхности не обязательно гомеоморфны.

(b) Регулярные окрестности образов изотопных вложений данного графа в поверхность гомеоморфны.

Два вложения $f_0, f_1: G \rightarrow N$ называются *изотопными*, если существует семейство $U_t: N \rightarrow N$ *гомеоморфизмов*, непрерывно зависящее от параметра $t \in [0, 1]$, для которого $U_1 \circ f_0 = f_1$.

(c) Регулярные окрестности образов гомотопных вложений данного графа в поверхность гомеоморфны. (Определение гомотопности аналогично данному в п. 3.2.)

6.23. Пусть N — 2-многообразие и a, b — замкнутые кривые на нем. Будем считать, что a и b

- являются подграфами некоторого 2-комплекса, представляющего N ;
- *общего положения*, т. е. трансверсально (рис. 50) пересекаются в конечном числе точек, никакая из которых не является ни точкой самопересечения кривой a , ни точкой самопересечения кривой b .

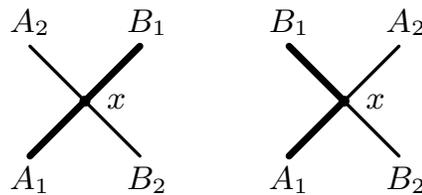


Рис. 50. Трансверсальное пересечение и нетрансверсальное пересечение

Точка x пересечения двух кривых на 2-многообразии называется *трансверсальной*, если кривые несамопересекающиеся в окрестности этой точки и любая достаточно малая замкнутая кривая S_x на 2-многообразии, обходящая вокруг x , пересекает кривые по парам точек, *чередующимся* вдоль S_x (т. е. если обозначить через A_1, B_1 точки пересечения первой кривой с S_x и через A_2, B_2 — точки пересечения второй кривой с S_x , то эти точки пересечения расположены на S_x в порядке $A_1 A_2 B_1 B_2$). Иными словами, для трансверсальности два «отрезка» одной кривой, выходящие из точки пересечения, должны находиться по разные стороны от другой кривой в малой окрестности точки пересечения, см. рис. 50.

Докажите, что

(a) $|a \cap b| \bmod 2$ не меняется при замене a и b на гомологичные им кривые, удовлетворяющие тем же условиям (подграфы, соответствующие кривым, являются гомологическими циклами; это определяет «гомологичность» кривых);

(b) в случае, когда b «близко» к a , число $|a \cap b|$ нечетно, если при обходе вдоль a «меняется ориентация» 2-многообразия, и четно, если не меняется.

Построение из задачи 6.23 легко доработать до определения формы пересечений, использующего понятие трансверсальности. Но мы приведем другое определение. В нем вместо понятия трансверсальности используется следующее более простое понятие двойственного клеточного разбиения. Определение клеточного разбиения и объяснение его преимущества над разбиением на многоугольники см. в начале п. 6.2.

Определение двойственного клеточного разбиения для клеточного разбиения U замкнутого 2-многообразия N . Оно получается из определения двойственного разбиения на многоугольники (см. п. 4.7) наложением дополнительного условия: ребро a^* пересекает объединение ребер U_1 клеточного разбиения U в одной точке, лежащей на ребре a . Ребро a^* называется *двойственным* к a . Полученный граф U_1^* клеточно вложен в 2-многообразии N (точнее, в некоторый представляющий его 2-комплекс; этот 2-комплекс может быть отличен от того, клеточным разбиением которого является U). Полученное клеточное разбиение U^* называется *двойственным* к U . (В графе U_1^* могут быть петли и кратные ребра, даже если в графе U_1 их нет.)

Определение пересечений наборов ребер. Возьмем некоторое клеточное разбиение U 2-многообразия N (точнее, некоторого представляющего его 2-комплекса). Возьмем двойственное клеточное разбиение U^* . Для наборов ребер X разбиения U и Y разбиения U^* положим $X \cap Y$ равным количеству их точек пересечения по модулю 2.

6.24. (a) Пересечение наборов ребер симметрично и билинейно: $\alpha \cap \beta = \beta \cap \alpha$ и $(\alpha + \beta) \cap \gamma = \alpha \cap \gamma + \beta \cap \gamma$.

(b) Пересечение цикла и границы равно нулю.

(c) Билинейное умножение $\cap: H_1(U) \times H_1(U^*) \rightarrow \mathbb{Z}_2$ корректно определено формулой $[X] \cap [Y] := X \cap Y$ для цикла X разбиения U и цикла Y разбиения U^* .

(d) Если $f: H_1(T) \rightarrow H_1(T')$ и $f^*: H_1(T^*) \rightarrow H_1((T')^*)$ — (канонические) изоморфизмы, построенные в решениях задач 6.18 (c, d), то $\alpha \cap \beta = f(\alpha) \cap f^*(\beta)$.

Ввиду задач 6.24 (а, с, d) получается билинейная форма пересечений

$$\cap: H_1(N) \times H_1(N) \rightarrow \mathbb{Z}_2.$$

6.25. (а) Найдите форму пересечений сферы с g ручками (т. е. найдите матрицу этой формы в некотором базисе группы гомологий).

(b) Найдите форму пересечений сферы с m пленками Мёбиуса.

6.26. Пусть N — замкнутое 2-многообразие. Определение первого класса Штифеля—Уитни $w_1(N) \in H_1(N)$ приведено в п. 6.4.

(а) Для любого $a \in H_1(N)$ выполняется равенство $w_1(N) \cap a = a \cap a$.

(b) $w_1(N) \cap w_1(N) = \rho_2 \chi(N)$.

6.27. Двойственность Пуанкаре. Форма пересечений любого замкнутого 2-многообразия N невырождена, т. е. для любого $\alpha \in H_1(N) - \{0\}$ существует такое $\beta \in H_1(N)$, что $\alpha \cap \beta = 1$.

6.28. (а—d) Определите форму пересечений $H_1(N) \times H_1(N) \rightarrow \mathbb{Z}_2$ для 2-многообразия N с непустым краем. Сформулируйте и докажите аналоги задач 6.24.

(e) Форма пересечений может быть вырождена.

(f) Найдите форму пересечений и ее ранг для сферы с g ручками и h дырками.

(g) Найдите форму пересечений и ее ранг для сферы с m пленками Мёбиуса и h дырками.

(h) 2-многообразия гомеоморфны тогда и только тогда, когда их формы пересечений изоморфны.

(i)* Любая ли билинейная симметричная форма $\mathbb{Z}_2^k \times \mathbb{Z}_2^k \rightarrow \mathbb{Z}_2$ является формой пересечений некоторого 2-многообразия?

6.29. (а—d, e, f) Определите билинейное умножение пересечения

$$H_1(N, \partial) \times H_1(N) \rightarrow \mathbb{Z}_2.$$

Сформулируйте и докажите аналоги задач 6.24, 6.26 (а) и 6.27 для этого умножения.

Подумайте, почему не получается аналогично определить умножение $H_1(N, \partial) \times H_1(N, \partial) \rightarrow \mathbb{Z}_2$.

Ответы, указания и решения к некоторым задачам

6.3. (b) Выделим в графе максимальное дерево, тогда вне этого дерева $E - V + 1$ ребер.

Ответ: 2^{E-V+1} .