М.Һ.Гочаманов З.А.Бағманов

Кеодезија өлчмәләринин ријази һесабланмасы

Али мәктәбләр үчүн дәрслик

Азәрбајҹан Республикасы Тәһсил Назирлији тәрәфиндән тәсдиг едилмишдир
(21 декабр 1999-ҹу ил 911 № протокол)

БАКЫ - 2000

Елми редактор: Техники елмләри намизәди, досент **Бабајев Р.Ә.**

Рә'јчиләр: 1. Бакы Дөвләт Университетинин профессору, ч.е.д. **Иманов Ф.Ә.**

2. Азәрбајчан Иншаат-Мүһәндисләри Университетинин Мүһәндиси Кеодезија кафедрасынын досенти, т.е.н. **А.А. Атакишијев**

Гочаманов М.Һ., Бағманов З.А. Кеодезија өлчмәләринин ријази һесабланмасы. Али мәктәбләр үчүн дәрслик. -Бакы.: БДУ-нун нәшријјаты; 1999, 176 сәһ.

Дәрсликдә өлчмәләр сәһвләри нәзәријјәси вә ән кичик квадратлар методу шәрһ едилир. Китабын биринчи һиссәсиндә еһтимал нәзәријјәси вә ријази статистикадан мә'луматлар верилмишдир. Бу мә'луматлар әсасән дәрслијин нөвбәти фәсилләриндәки материалларын өјрәнилмәсинә хидмәт едир. Дәрсликдә нәзәри материаллар нүмунә мәсәлә һәлләри илә мүшаијәт олунур.

Дәрслик али мәктәбләрин кеодезија вә картографија ихтисасларында тәһсил алан тәләбәләр үчүн нәзәрдә тутулмушдур. Бу вәсаитдән кеодезија өлчмәләри илә мәшғул олан мүтәхәссисләр дә истифадә едә биләрләр.

Чәдвәл 16, шәкил 18 , әдәбијјат -10 адда.

$$\frac{1902020000-14}{658(07)-033}-33-1999$$

КИРИШ

Башга өлчмәләр кими, кеодезија өлчмәләри дә мүәјјән сәһвләрлә јеринә јетирилир. Адәтән, кеодезик өлчмәләрин дәгиглијини јүксәлтмәк мәгсәди илә онлары бир нечә тәкрар фәндләрдән тә'јин едирләр. Бундан башга, өлчүлән кәмијјәтләрин өз араларында мүәјјән гаршылыглы ријази әлагәдә олмасы, таразлашдырма мәсәләсини мејдана чыхарыр. Өлчмә нәтичәләринин биркә таразлашдырылмасындан ахтарылан кәмијјәтләр үчүн ән еһтимал вә е'тибарлы (таразлашдырылмыш) гијмәтләр тапылыр, һәмчинин, бу тапылмыш гијмәтләрин дәгиглијини тә'јин етмәк имканы јараныр.

Дәрслик «Кеодезија өлчмәләринин ријази һесабланмасы» (КӨРҺ) фәнниниин програмына ујғун јазылмыш вә шәрти олараг ики һиссәјә бөлүнүр:

I. Өлчмәләр сәһвләри нәзәријјәси;

II. Ән кичик квадратлар методу.

Дәрсликдә верилмиш материалларын өјрәнилмәси, илкин олараг, «Еһтимал нәзәријјәси» вә «Ријази статистика»дан мүәјјән биликләрә малик олмағы тәләб едир. Ријазијјат елминин бу бөлмәләри кеодезија вә картографија ихтисасында тәһсил алан тәләбәләрә ајрыча фәнн кими тәдрис едилмир, али ријазијјат курсунда исә сәтһи, үмуми анлајышлар шәклиндә чатдырылыр. Мәһз, она көрә дә, дәрслијин биринчи, икинчи вә үчүнчү фәсилләриндә «Еһтимал нәзәријјәси» вә «Ријази статистика»-нын мүвафиг теорем вә гајдалары верилмиш, онларын кеодезија ишләриндә тәтбиги конкрет мәсәлә һәлләри илә көстәрилмишдир. Дәрсликдә материалларын шәрһи заманы, тәләбәләрә али ријазијјат курсундан мә'лум олан бир сыра башга ријази апаратлардан да истифадә едилир. О ки, галды хүсуси фәнләрдән (Кеодезија вә с.) кәтирилмиш анлајышлара вә бәһсләрә, белә һесаб едирик ки, кеодезијанын биринчи һиссәси илә таныш олмуш (биринчи курсда) икинчи курс тәләбәләри үчүн бу, мөвзуларын мәнимсәнилмәсиндә чәтинликләр төрәтмәјәчәкдир.

Дәрслијин дөрдүнчү фәсли өлчмәләр сәһвләри нәзәријјәсинә һәср едилмишдир. Бу фәсилин әввәлиндә өлчмә сәһвләринин нөвләри, тәсадүфи сәһвләрин хассәләри, өлчмәләр вә онларын функсијалары дәгиглијинин гијмәтләндирилмәси үсуллары, бәрабәрдәгигликли өлчмәләр сырасынын ријази һесабланмасы, өлчмә чәкиси анлајышындан истифадә едәрәк гејри бәрабәр дәгигликли өлчмәләрин таразлашдырылмасы јоллары көстәрилмишдир.

Дәрслијин икинчи һиссәси ән кичик квадратлар методу вә онун әсас параметрик вә коррелат таразлашдырма үсулларына һәср едилмишдир.

Сонунчу фәсилдә икигруплу вә комбинәләнмиш таразлашдырма үсуллары һаггында мә'луматлар верилмишдир. Бу фәсилдә бир нечә хүсуси мәсәләләрин һәлли: илкин мә'лумларын сәһвләрини нәзәрә алмагла таразлашдырма, бир-бириндән асылы өлчмәләрин таразлашдырылмасы, чох сајлы өлчмәләрин таразлашдырылмасы вә с., өз әксини тапмышдыр.

Дәрсликдә нәзәри материаллар ујғун мәсәлә һәлли илә мүшаијәт олунур. Параметрик вә коррелат таразлашдырма үсулларына даир мәсәләләрин һәлли даһа кениш изаһларла шәрһ едилир.

Дәрслијин тәртиби заманы бир сыра мәсәләләр, статистики чәдвәлләр вә нәзәри материаллар әдәбијјат сијаһысында көстәрилмиш мәнбәләрдән көтүрүлмүшдүр [1, 3].

Нәзәрә алсаг ки, бу дәрслик азәрбајчан дилиндә КӨРҺ фәнинә даир јазылмыш илк вәсаитдир, ону өз гүсурлары илә белә, лазыми вә әһәмијјәтли һесаб етмәк олар.

Үмид едирик ки, дәрслик јалныз КӨРҺ өјрәнән тәләбәләр үчүн дејил, һәмчинин, кеодезија мүәссисәләринин мүһәндиси-техники ишчиләри үчүн дә кәрәкли олачагдыр.

I ҺИССӘ
ӨЛЧМӘЛӘР СӘҺВЛӘРИ НӘЗӘРИЈЈӘСИ

ФӘСИЛ I
ЕҺТИМАЛ НӘЗӘРИЈЈӘСИНИН ӘСАС АНЛАЈЫШЛАРЫ ВӘ ТЕОРЕМЛӘРИ

§ I. Һадисәләр вә онларын нөвләри.

Еһтимал нәзәријјәси тәсадүфи һадисәләрин кәмијјәт ганунаујғунлугларыны өјрәнән ријази елмдир. Тәсадүфи һадисәләр елә һадисәләрә дејилир ки, онлар үзәриндә апарылан тәчрүбә, мүшаһидә, сынаг дәфәләрлә тәкрарланан заман һәр дәфә бир чүр баш верир.

Лакин тәсадүфи һадисәләр күтләви шәкилдә баш вердикдә, онларын пајланмасынын мүәјјән ганунаујғунлуглары үзәрә чыхыр (мәсәлән, мүсбәт вә мәнфи ишарәли кеодезија өлчмә сәһвләринин тәгрибән ејни сајда олмасы).

Һәр бир тәчрүбәнин (мүшаһидәнин) һәјата кечирилмәсини сынаг адландыраг. Сынағын нәтичәси һадисә адланыр (мәсәлән, теодолитлә бучаг өлчәркән өлчмә сәһвләри илә бағлы ашағыдакы һадисәләр баш верә биләр: мүсбәт ишарәли өлчмә сәһви, мәнфи ишарәли өлчмә сәһви). Һадисәләри шәрти олараг елементар вә мүрәккәб һадисәләрә бөлүрләр. Елементар һадисәләр даһа садәләрә бөлүнмәси мүмкүн олмајан һадисәләрдир. Мүрәккәб һадисәләр исә ики вә даһа чох елементар һадисәләрдән ибарәт олур (мәсәлән, кәмијјәтин бир дәфә өлчүлмәси заманы мүсбәт ишарәли сәһвин баш вермәси елементар һадисә, беш өлчмәдән үчүндә мүсбәт ишарәли өлчмә сәһвинин јаранмасы исә мүрәккәб һадисәдир).

Гејд едәк ки, мүәјјән комплекс шәртләр дахилиндә ашағыдакы нөв һадисәләр баш верә биләр:

-доғру һадисәләр - елә һадисәләрдир ки, мүәјјән шәртләр дахилиндә мүтләг баш верир. (мәсәлән, теодолитин үфги даирәсиндән көтүрүлмүш һесабатын Сағ Даирә вә ја Сол Даирә вәзијјәтинә ујғун кәлмәси).

Доғру һадисәләр **U** һәрфи илә ишарә едилир;

-гејри мүмкүн һадисәләр - верилмиш шәраитдә һеч вахт баш вермир (мәсәлән, нивелирлә шагули бучағын өлчүлмәси һадисәси).

Гејри-мүмкүн һадисәләр **V** һәрфи илә ишарәләнир;

-үст-үстә дүшмәјән һадисәләр - ејни вахтда, биркә баш верә билмәзләр (мәсәлән, ики мәнтәгә арасындакы нисби јүксәклијин мүсбәт, һәм дә, мәнфи ишарәли олмасы) ;

-**үст-үстә дүшән һадисәләр** - ејни вахтда баш верирләр (мәсәлән, ики мәнтәгә арасындакы нисби јүксәклијин мүсбәт ишарәли, һәм дә, онлар арасындакы нивелир стансијаларынын чүт сајлы олмасы һадисәси);

- **там груп тәшкил едән һадисәләр** - сынаг заманы групу тәшкил едән һадисәләрдән һансыса бири мүтләг баш верир. Там груп доғру һадисәдир (мәсәлән, мүсбәт вә мәнфи ишарәли өлчмә сәһвләри там груп тәшкил едир);

- **бир-биринә әкс һадисәләр**- үст-үстә дүшмәјән вә там груп тәшкил едән ики һадисәдир.

А һадисәсинә әкс олан һадисә $\overline{A}$ шәклиндә көстәрилир (мәсәлән, А- мүсбәт ишарәли өлчмә сәһви, $\overline{A}$-мәнфи ишарәли өлчмә сәһви);

-**ејнимүмкүнатлы һадисәләр** - ејни објектив баш вермә мүмкүнлүјүнә малик һадисәләрдир (мәсәлән, үфги бучағын өлчүлмәси заманы тәсадүфи сәһвин ишарәсинин мүсбәт вә ја мәнфи олмасы һадисәләри ејни мүмкүнатлыдыр);

-**бир-бириндән асылы олмајан һадисәләр**- елә һадисәләрдир ки, онлардан һәр һансынын баш вермә мүмкүнлүјү башга һадисәләрин артыг баш вериб, вермәдијиндән асылы дејилдир (мәсәлән, рулетка илә мәсафәнин узунлуғуну тә'јин едәркән, икинчи өлчмә сәһвинин ишарәсинин мәнфи алыначағына, биринчи өлчмә нәтичәсинин һеч бир тә'сири јохдур);

-**бир-бириндән асылы һадисәләр** - бу һалда һадисәнин баш вермә мүмкүнлүјү башга һадисәләрин бу сынағадәк баш вериб-вермәмәсиндән асылыдыр (мәсәлән, теодолит кедишиндә чари мәнтәгәнин координатларындакы сәһвләрин гијмәти кедиш үзрә әввәлки мәнтәгәләрин сәһвләриндән асылыдыр).

Һадисәләр адәтән латын әлифбасынын баш һәрфләри илә ишарәләнир.

§2. Еһтималын билаваситә һесабланмасы

Һәр бир һадисәни еһтимал анлајышы илә әлагәләндирирләр. Һадисәнин еһтималы онун баш вермәсинин мүмкүнлүк дәрәчәсини көстәрән әдәддир. Елә һадисәләр вардыр ки, онларын еһтималыны мүвафиг сынағы кечирмәдән, јалныз сынағын шәртләринә әсасән тә'јин етмәк олар. Бунун үчүн һәмин елементар һадисәләр «тәсадүфләр схеми» тәшкил етмәли, јә'ни үст-үстә дүшмәјән, симметрик нәтиҹәләнән, бәрабәр мүмкүнатлы һадисәләр олмалыдырлар.

Әкәр сынаг «тәсадүфләр схеми» үзрә апарылырса, онда A һадисәсинин еһтималыны ашағыдакы дүстурла һесабламаг олар.

$$P(A)=\frac{M}{N}\ , \qquad (1.1)$$

бурада: N -тәсадүфләрин үмуми сајы; M- исә A һадисәсинин баш вермәсинә әлверишли олан тәсадүфләрин сајыдыр. A һадисәсинин баш вермәсинә сәбәб олан тәсадүф һәмин һадисә үчүн әлверишли тәсадүф алыныр. Беләликлә, $0 \leq P(A) \leq 1$. Доғру һадисәнин еһтималы P(U)=1, гејри мүмкүн һадисәнин еһтималы исә P(V)=0 - дыр.

Еһтималын (1.1) дүстуру илә тә'јини классик јол, һесабланмасы исә билаваситә һесабланма адланыр.

Мисал үчүн мәсафәнин өлчү ленти илә бир фәндлә өлчүлмәси «тәсадүфләр схеминә» ујғун кәлир. (1.1) дүстурундан истифадә етмәклә, мүсбәт ишарәли өлчмә сәһвинин еһтималыны ашағыдакы кими тапарыг:

N=2 (ики һадисә: мүсбәт вә мәнфи ишарәли өлчмә сәһвләри);

M=1 (мүсбәт сәһвин баш вердији һадисә). Онда $P_{(+)}=\frac{1}{2}$ олар.

Башга бир мисал кәтирәк. Верилмиш хәттин румб бучағынын һәр һансы ҹәһәтләндирмә рүбүнә дүшмәси «тәсадүфләр схеми»нә ујғун кәлдијиндән, онун еһтималыны да (1.1) дүстуру илә һесабламаг олар.

Билдијимиз кими, дөрд рүб вардыр, јә'ни N=4. Румб бучағынын һәр һансы рүбә дүшмәси тәсадүфи M=1. Бурадан

$$P_{румб}=\frac{M}{N}=\frac{1}{4} \qquad \text{олар.}$$

Даһа мүрәккәб мәсәләләрин һәлли заманы үмуми вә әлверишли тәсадүфләрин сајыны тә'јин етмәк үчүн комбинатор ријазијјатын бә'зи груплашмаларындан (комбинасијалардан) истифадә едирләр. Сајы ℓ олан а, в, с,..... елементләриндән ашағыдакы нөв комбинасијалар гурмаг олар:

1. **Пермутасион** (јердәјишмә)-елементләри јалныз јерләшмә ардычыллығына көрә фәргләнән комбинасијалардан ибарәтдир. Јердәјишмәләрин сајы

$$P_{\ell}=\ell! \qquad (1.2)$$

дүстуру илә тә'јин едилир.

2.**Аранжеман** - ℓ сајда елементләрдән һәр бириндә k сајда елемент олан комбинасијалар шәклиндә гурулур. Бу комбинасијалар бир-бириндән һәм елементләрин јерләшмә ардычыллығы, һәм дә, елементләрин өзләри илә фәргләнирләр. Мәсәлән, үч а,в, с елементләриндән һәр бириндә ики елемент олан аранжеман ашағыдакы комбинасијалардан ибарәтдир:

(ав); (ас); (вс);

(ва); (са); (св).

Аранжеман комбинасијаларынын үмуми сајы

$$A_\ell^k = \frac{\ell!}{(\ell - k)!} \tag{1.3}$$

3. **Комбинизон** - ℓ сајда елементләрдән һәр бириндә k сајда елемент олан вә јалныз елементләри илә фәргләнән комбинасијалардан ибарәтдир. Мәсәлән, үч а, в, с елементләриндән һәр бириндә ики елемент олан комбинасијалар (ав); (вс); (ас) шәклиндә јазылыр.

Комбинизонларын үмуми сајы

$$C_\ell^k = \frac{\ell\,!}{(\ell - k)!\cdot k\,!} \tag{1.4}$$

дүстуру илә тапылыр.

Хүсуси һалда,

$$C_\ell^0 = C_\ell^\ell = 1; \qquad C_\ell^1 = \ell; \qquad C_\ell^{\ell-k} = C_\ell^k$$

Бу бәһсә даир бир нечә мәсәлә һәлл едәк.

Мәсәлә 1.1. Дөрд нивелир мәнтәгәсинин јүксәкликләрини каталогда јазаркән, онларын сыра нөмрәләринин ујғунлуғу илә бағлы анлашылмазлыг јараныбдыр. Бу јүксәкликләрин каталогда дүзкүн ардычыллыгда јазылачағы еһтималы тапмалы.

Һәлли: Јүксәкликләрин дүзкүн јазылышы јалныз $M=1$ әлверишли һалында баш верә биләр. Бүтүн башга һалларда, јә'ни, мәнтәгәләрдән һәр һансы биринин сыра нөмрәси дүзкүн көстәрилмәзссә, јүксәкликләрин дүзүлүшү сәһв олачагдыр. Тәсадүфләрин үмуми сајы исә пермутасијон груплашмасына ујғун кәлир, јә'ни $N = P_4 = 4!$

Беләликлә, јүксәкликләрин каталогда дүзкүн ардычыллыгла јазылачағы еһтималы

$$P_{\text{дүзкүн}} = \frac{M}{N} = \frac{1}{4!} = \frac{1}{24}$$

олар.

Мәсәлә 1.2. Нивелирләмә шәбәкәси каталогунда Мәсәлә 1.1-ин шәртләри дахилиндә сонунчу үч јүксәклијин дүзкүн көстәриләчәји еһтималы тапмалы.

Һәлли: Бу һалда да әлверишли тәсадүфләрин сајы М=1-дир. Бүтүн тәсадүфләрин үмуми сајы аранжеман комбинасијасы тәшкил едир вә $N = A_4^3 = \frac{4!}{(4-3)!} = 4!$ Онда, каталогда дөрд мәнтәгәдән ахырынчы үчүнүн јүксәклијинин дүзкүн көстәриләчәји еһтимал ашағыдакы кими тапылар:

$$P_3 = \frac{M}{N} = \frac{1}{4!} = \frac{1}{24}$$

Мәсәлә 1.3. Чөл өлчмәләри журналында беш үфги бучағын гијмәти верилмишдир. Онлардан үчбучаг тәшкил едән үчүнүн дүзкүн сечиләчәји еһтималы тапмалы.

Һәлли: Јалныз бир тәсадүф нәтичәсиндә үчбучағын бучаглары дүзкүн сечилә биләр (М=1). Тәсадүфләрин үмуми сајы исә комбинизон группашмасындан тапылыр, белә ки, сечилән бучаглар истәнилән ардычыллыгла дүзүлә биләр $(N = C_5^3)$. Ахтарылан еһтимал үчүн аларыг

$$P_{\text{үчбучаг}} = \frac{M}{N} = \frac{1}{C_5^3} = \frac{1}{\dfrac{5!}{(5-3)!\,3!}} = \frac{2!\,3!}{5!} = \frac{1}{10}$$

4.**Тәкрарлы пермутасијон** - ℓ елементдән тәшкил едилмиш комбинасијаларын бә'зи ℓ_i елементләри k нөв олур. Бу һалда комбинасијаларын үмүми сајы ашағыдакы ифадә илә һесабланыр

$$P(\ell_1, \ell_2, \ldots, \ell_k) = \frac{\ell!}{\ell_1!\,\ell_2!\cdots\ell_k!} \qquad (1.5)$$

Мәсәлә 1.4. Мәсафәнин узунлуғу дөрд дәфә тәкрарән өлчүлмүшдүр. Биринчи вә үчүнчү өлчмә сәһвләринин мүсбәт ишарәли, икинчи вә дөрдүнчү өлчмә сәһвләринин исә мәнфи олачағы һадисәнин еһтималыны тапмалы.

Һәлли: Әлверишли тәсадүф М=1-дир. Үмуми тәсадүфләрин сајы

(1.5) дүстуру илә тапылмалыдыр, чүнки мүсбәт, еләчә дә, мәнфи ишарәли өлчмә сәһвләринин баш вердији һадисәләр тәкрарланыр. Тәләб олунан мүрәккәб һадисәнин еһтималы

$$P = \frac{1}{\frac{4!}{2!2!}} = \frac{2!2!}{4!} = \frac{1}{6}$$

олар.

5. Тәкрарлы аранжеман - һәр бири κ нөвдән олан s сајда елементләрин комбинасијаларындан ибарәтдир. Бу групласмада комбинасијаларын сајы

$$\overline{A}_s^k = S^k \tag{1.6}$$

Мәсәлә1.5. Базисин узунлуғу үч дәфә тәкрарән өлчүлмүшдүр. Бу өлчмәләрдән икисинин мүсбәт ишарәли өлчмә сәһвинә малик олачағы һадисәнин еһтималыны тапмалы.

Һәлли: Верилмиш шәртә көрә мүсбәт ишарәли өлчмә сәһви тәкрарландығындан, үмуми тәсадүфләрин сајы (1.6) дүстурунун көмәји илә һесабланмалыдыр, јә'ни

S=2; K=3 вә

$$N = \overline{A}_2^3 = 2^3 = 8$$

Әлверишли тәсадүфләрин сајы исә $M = C_3^2 = 3$. Үч өлчмәдән икисинин өлчмә сәһвинин мүсбәт ишарәли олачағы һадисәнин еһтималы

$$P = \frac{M}{N} = \frac{C_3^2}{\overline{A}_2^3} = \frac{3}{8} \text{ - ә}$$

бәрабәрдир.

§ 3. Нисби тезлик вә һадисәнин еһтималы.

Һәр һансы һадисәнин еһтималыны (1.1) дүстуру илә һесаблајаркән нәзәрдә тутулур ки, һәмин елементар һадисәләр «тәсадүфләр схеми» тәшкил едирләр. Лакин бүтүн һадисәләри «тәсадүфләр схеми»нә кәтирмәк мүмкүн олмадығындан, белә фәргли һалларда һадисәләрин еһтималыны тә'јин етмәк үчүн башга үсуллардан истифадә едирләр. Бу үсуллар сынаг (експеримент) вә һадисәнин нисби тезлији анлајышлары илә бағлыдыр.

Тә'риф: Һадисәнин нисби тезлији (Q) верилмиш өлчмә шәраитиндә һәмин һадисәнин баш вермә сајынын (m) сынагларын үмуми сајына (n) олан нисбәтинә дејилир, јә'ни

$$Q = \frac{m}{n} \qquad (1.7)$$

Тә'рифә әсасән истәнилән һадисәнин нисби тезлији үчүн ашағыдакы бәрабәрсизлији јаза биләрик:

$0 \le Q \le 1$, (белә ки, $0 \le \kappa \le n$).

Һадисәнин еһтималы илә онун нисби тезлији арасындакы әлагә Бернулли теореми илә ифадә олунур.

Бернулли теореми: Бөјүк сајда сынаглар заманы ваһидә јахын еһтималла көзләмәк олар ки, һадисәнин нисби тезлији онун еһтималына јахынлашачагдыр, јә'ни

$$\text{еһт.}\lim_{n\to\infty} Q = P \qquad (1.8)$$

Еһтимал лимити (еһт. $\lim\limits_{n\to\infty}$) ријази лимитдән фәргләнир вә сон һәддә јахынлашма мејллијини көстәрир. Бә'зән нисби тезлији һадисәнин статистик еһтималы адландырырлар.

Мәсәлә 1.6. Бучаг өлчмәләри заманы мә'лум олуб ки, мүсбәт ишарәли өлчмә сәһвләринин нисби тезлији Q=0,40-дыр. Әкәр мәнфи ишарәли өлчмә сәһвләринин сајы 15-ә бәрабәрдирсә, бүтүн өлчмәләрин үмуми сајыны тә'јин един.

Һәлли: Мүсбәт вә мәнфи ишарәли сәһвләр там груп тәшкил етдијиндән, онларын нисби тезликләр чәми үчүн јаза биләрик:

$$Q_{\text{мүсбәт}} + Q_{\text{мәнфи}} = 1$$

Ејни заманда $Q_{\text{мәнфи}} = \dfrac{m_{\text{мәнфи}}}{n_{\text{үмуми}}}$, онда $Q_{\text{мүс.}} + \dfrac{m_{\text{мән.}}}{n_{\text{үм.}}} = 1$

Бурадан

$$n_{\text{үмуми}} = \frac{m_{\text{мәнфи}}}{1 - Q_{\text{мүсбәт}}} = \frac{15}{1 - 0{,}40} = 25$$

тапарыг.

§ 4. Һадисәләр чәми. Үст-үстә дүшмәјән һадисәләр чәминин еһтималы

Мүрәккәб һадисәләри елементар һадисәләрин чәми вә һасили шәклиндә ифадә етмәк олар.

Тәриф: Ики вә ја бир нечә елементар A_i $(i=1,2,...,n)$ һадисәләринин чәми елә бир мүрәккәб B һадисәсинә дејилир ки, истәнилән сынаг заманы A_i һадисәләриндән һеч олмазса бири баш вермиш олсун.

Һадисәләрин чәми

$$B=(A_1, \text{ вә ја } A_2, \text{ вә ја } A_3,..., \text{ вә ја } A_n), \qquad (1.9)$$

вә јахуд

$$B=A_1+A_2+...+A_n=\sum_{i=1}^{n} A_i \qquad (1.10)$$

шәклиндә јазылыр. Садә һадисәләрин еһтималлары мә'лум оларса, онларын чәми олан мүрәккәб һадисәнин дә еһтималыны тә'јин етмәк олар.

Теорем: Ики вә ја бир нечә үст-үстә дүшмәјән елементар һадисәләр чәминин еһтималы бу һадисәләрин еһтималлары чәминә бәрабәрдир, јәни

$$P(B)=\sum_{i=1}^{n} P(A_i). \qquad (1.11)$$

Нәтичә 1. Там груп тәшкил едән һадисәләрин еһтималлары чәми ваһидә бәрабәрдир

$$\sum_{i=1}^{n} P(A_i) = P(A_1+A_2+...+A_n)=P(U)=1. \qquad (1.12)$$

Нәтичә 2. Гаршылыглы әкс олан ики һадисәнин еһтималлары чәми ваһидә бәрабәрдир,

$$P(A)+P(\bar{A})=1 \text{ вә } P(\bar{A})=1-P(A). \qquad (1.13)$$

Мәсәлә 1.7. Фәрз едәк ки, тахеометрија планалмасы заманы 100 пикет нөгтәсиндән 10-нун јүксәклији $\frac{1}{5}$h, 60-нын $\frac{1}{4}$h, 30-ун исә $\frac{1}{3}$h дәгиглији илә тапылыр. Планшетдән көтүрүлмүш һәр һансы нөгтәнин јүксәклик дәгиглијинин $\frac{1}{5}$h вә ја $\frac{1}{4}$h олачағы еһтималыны тапмалы (h-јүксәклик кәсимидир).

Һәлли: Ајдындыр ки, нөгтәнин јүксәклијинин $\frac{1}{5}$h дәгигликдә олмасы еһтималы $P(A_1)=\frac{10}{100}$; $\frac{1}{4}$ һ дәгиглик еһтималы исә $P(A_2)=\frac{60}{100}$-а бәрабәр олачагдыр.

Бу мәсәләдә баш вермә еһтималынын тапылмасы тәләб едилән һадисә мүрәккәб һадисәдир вә $B=A_1+A_2$ Она көрә дә, онун еһтималы (1.11) дүстуру илә һесабланмалыдыр, јә'ни

$$P(B)=P(A_1)+P(A_2)=\frac{10}{100}+\frac{60}{100}=0,7$$

олар.

§ 5. Һадисәләрин һасили вә һасилин еһтималы

Тә'риф: Ики вә ја бир нечә үст-үстә дүшмәјән елементар $A_i(i=1,2,...,n)$ һадисәләринин һасили еләә бир мүрәккәб С һадисәсидир ки, бу, бүтүн A_i һадисәләринин бирликдә (ејни вахтда) баш вермәсини көстәрсин.

Һадисәләрин һасили шәрти олараг белә јазылыр:

$$C=A_1,\ \text{вә}\ A_2,\ \text{вә}\ A_3,...\text{вә}\ \ A_n, \qquad (1.14)$$

вә јахуд

$$C=A_1\cdot A_2\cdots A_n=\prod_{i=1}^{n}A_i.$$

(1.15)

Теорем. Бир-бириндән асылы олмајан елементар һадисәләр һасилинин еһтималы һәмин һадисәләрин еһтималлары һасилинә бәрабәрдир.

Јә'ни, $C=\prod_{i=1}^{n}A_i$ -дирсә, онда

$$P(C)=P(A_1)\cdot P(A_2)\cdots P(A_n)=\prod_{i=1}^{n}P(A_i) \qquad (1.16)$$

Бурада П-һасил ишарәсидир.

(1.16) дүстуру илә һесабланмыш еһтимал шәртсиз еһтимал адланыр.

Бир-бириндән асылы олан һадисәләрин еһтималы исә шәртли еһтимал адланыр. Мәсәлән, $P(A_2/A_1)$ јазылышы A_1 һадисәсинин баш вердијини нәзәрә алмагла, A_2 һадисәси үчүн һесабланмыш шәрти еһтималы ифадә едир. $P(A_i/A_1,A_2,...,A_{i-1})$-јазылышы исә $A_1,A_2,......,A_{i-1}$

һадисәләринин артыг баш вердији һалда, A_i үчүн һесабланмыш шәртли еһтималы көстәрир.

Теорем: Ики вә ја бир нечә асылы һадисәләр һасилинин еһтималы бу һадисәләрдән һәр һансы биринин шәртсиз еһтималынын дикәр һадисәләрин шәртли еһтималларына олан һасилинә бәрабәрдир, јә'ни

$$P(C)=P(A_1)\cdot P(A_2/A_1)\cdot\ldots\cdot P(A_n/A_1,A_2,\ldots,A_{n-1}) \qquad (1.17)$$

Мәсәлә 1.8 Еһтималларын вурулмасы дүстурундан истифадә едәрәк, мәсәлә 1.1-и һәлл етмәли.

һәлли: Мәсәлә 1.1- ин шәртиндә тәләб едилән, јә'ни бүтүн дөрд јүксәклик гијмәтинин каталогда дүзкүн јазылачағы һадисә, мүрәккәб һадисәдир вә онун еһтималы (1.17) дүстуру илә һесабланмалыдыр. Чүнки бүтүн јүксәкликләрин каталогда өз сыра јериндә дүзкүн јазылмасы ејни вахтда баш вермәлидир. Бу исә елементар һадисәләрин һасили шәклиндә ифадә едилир. Онда,һасилин еһтималы

$$P(H)=P(H_1)\cdot P(H_2)\cdot P(H_3)\cdot P(H_4).$$

Ејни заманда бу һадисәләр бир-бириндән асылы олдуғундан, һәр бир јүксәклијин каталогда өз јериндә јазылачағы еһтималлары үчүн ашағыдакы гијмәтләри аларыг:

$$P(H_1)=\frac{1}{4}\ ; \qquad P(H_2)=\frac{1}{3}\ ;$$

$$P(H_3)=\frac{1}{2}\ ; \qquad P(H_4)=1.$$

Бурадан , һасилин еһтималы үчүн тапарыг:

$$P(H)=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot 1=\frac{1}{24}$$

Мәсәлә 1.9. Мүсбәт ишарәли өлчмә сәһвинин мәһз дөрдүнчү мәсафә өлчмәсиндә баш верәчәји еһтималы тапмалы.

Һәлли: Мәсәләнин шәртиндә верилән елементар һадисәләр (мүсбәт вә мәнфи ишарәли өлчмә сәһвләри) бир-бириндән асылы олмадығындан, (1.16) дүстуруна әсасән јаза биләрик

$$P(C)=P(\bar{A}_1)\cdot P(\bar{A}_2)\cdot P(\bar{A}_3)\cdot P(A_4)$$

Бурада: $\bar{A}_1, \bar{A}_2, \bar{A}_3$ биринчи, икинчи вә үчүнчү өлчмәләрдә мәнфи ишарәли сәһвин, A_4 исә дөрдүнчү өлчмәдә мүсбәт ишарәли сәһвин баш верәчәји һадисәләрдир. Бу елементар һадисәләрин бир өлчмәдән еһтималы $P(A_i)=P(\bar{A}_i)=\dfrac{1}{2}$ олдуғундан, һасил һадисәнин еһтималы үчүн тапарыг.

$$P(C)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{16}$$

§ 6. Үст-үстə дүшəн һадисəлəр еһтималынын тапылмасы.

Теорем: Үст-үстə дүшəн һадисəлəр чəминин еһтималы ваһидлə һəмин һадисəлəрə əкс олан һадисəлəрин еһтималлар һасили фəргинə бəрабəрдир, јə'ни

$$P(B)=1-\prod_{i=1}^{n} P(\bar{A}_i) \qquad (1.18)$$

Бурада B һадисəси белə тə'јин едилир:

$B=A_1$ вə ја A_2 ,..., вə ја A_n вə ја, бүтүн A_n ;

вə јахуд

B= һеч олмазса бир A_i .

(1.18) ифадəсинин доғрулуғуну көстəрмəк үчүн B һадисəсинə əкс олан $\overline{B}$ һеч бир A_i , вə јахуд $\overline{B}=\overline{A}_1$, вə $\overline{A}_2,\ldots$, вə $\overline{A}_n$ һадисəсинə бахаг. Еһтималларын вурулмасы теоремине көрə $P(\overline{B})=P(\overline{A}_1\cdot\overline{A}_2\cdot\ldots\cdot\overline{A}_n)$ вə $P(\bar{B})$-нин бу гијмəтини $P(B)+P(\overline{B})=1$ тəнлијиндə јеринə јазсаг, (1.18) дүстуруну аларыг. Əкəр бүтүн $P(A_i)$-лəр бир-бириндəн асылы олмајыб, ејни гијмəтə маликдирсə, онда (1.18) дүстуру ашағыдакы шəклə дүшəр

$$P(B)=1-\left\{P(\overline{A})\right\}^n \qquad (1.19)$$

Мəсəлə 1.10. Ики кеодезик өлчмəдəн һеч олмазса биринин мүсбəт ишарəли өлчмə сəһвинə малик олачағы еһтималы тə'јин етмəли.

Һəлли: A_1 илə биринчи өлчмəни, A_2 илə икинчини ишарə едəк. Онда мəсəлəнин шəртиндə гојулан мүрəккəб B һадисəсини белə ифадə едə билəрик

$$B=A_1^{(-)}\cdot A_2^{(+)}+A_1^{(+)}\cdot A_2^{(-)}+A_1^{(+)}\cdot A_2^{(+)}.$$

$P(A_i^{(-)})=P(A_i^{(+)})=\frac{1}{2}$ олдуғундан ,

мүрəккəб B һадисəсинин еһтималыны (1.11) вə (1.16) дүстурларына əсасəн тапарыг:

$$P(B)=P(A_2^-)\cdot P(A_2^+)+P(A_1^+)\cdot P(A_2^-)+(A_1^+)\cdot P(A_2^+)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=0{,}75$$

Бу мәсәлә (1.19) дүстурунун көмәји илә даһа асан һәлл едилир:

$$P(B)=1-\{P(\overline{A})\}^2=1-(\frac{1}{2})^2=\frac{3}{4}=0,75.$$

§7. Дәфәләрлә тәкрарланан сынаглар. Бернулли дүстуру.

Бир чох кеодезија ишләринин, мәсәлән, аләтләрин техники јохланмасы, јени өлчмә методларынын тәтбиги вә саирәнин јеринә јетирилмәси заманы сынаглар дәфәләрлә тәкрарланыр. Белә һалларда тәдгигатчыны сынағын бүтүн мүмкүн нәтичәләри вә онлара мүвафиг еһтимал хүсусијјәтләри марагландырыр.

Фәрз едәк ки, n сајда бир-бириндән асылы олмајан сынаглар јеринә јетирилир вә һәр бир сынагда А һадисәсинин баш вермә еһтималы сабит галыр вә Р-јә бәрабәрдир. Тәләб олунур ки, бу сынаглар заманы баш вермә ардычыллығындан асылы олмајараг, А һадисәсинин К дәфә тәкрарланачағы еһтималы тапаг. Бу мәгсәдлә Бернулли дүстурундан истифадә едирләр

$$P_n^k=C_n^k \cdot P^k \cdot q^{n-k} . \qquad (1.20)$$

Бурада:

P_n^k -тә'јин едилән еһтимал гијмәти;

C_n^k-комбинизион (n елементдән һәр бириндә к елемент олмагла);

р- бир сынаг заманы А һадисәсинин баш вермә еһтималы;

q- бир сынаг заманы А-һадисәнин баш вермәмәси еһтималыдыр.

$P_n(K)$ еһтималлар чохлуғу еһтималларын биноминал пајланмасы адланыр. А һадисәсинин 0, вә ја 1,..., вә ја n дәфә баш вермәси там груп тәшкил едән мүрәккәб һадисәдир. Она көрә дә, (1.14) дүстуруна әсасән (чәмин еһтималы дүстуру) јаза биләрик

$$\sum_{k=0}^{n} P_n(k)=1 \qquad (1.21)$$

А һадисәсинин n сајлы сынагдан ℓ дәфәдән аз олмамагла баш верәчәји еһтималы

$$P_n(k\geq \ell)=\sum_{k=\ell}^{n} P_n(k) \qquad (1.22)$$

дүстуру илә һесабланыр.

А һадисәсинин l дәфәдән чох олмајан сајда баш вермәси еһтималы исә $$P_n(k \le l) = \sum_{k=0}^{l} P_n(k) \qquad (1.23)$$

Бә'зән тәдгиг едилән n сајда, бир-бириндән асылы олмајан һадисәләрдән һансыса биринин баш вермәси еһтималы тәчрүби әһәмијјәт дашыјыр. Белә һадисәнин еһтималыны ашағыдакы дүстурла тә'јин етмәк олар

$$P(A_n) = 1 - q_1 q_2 \dots q_n \,. \qquad (1.24)$$

бурада: $q_1 q_2 \dots q_{n-1}$ мүвафиг $A_1, A_2, \dots, A_{n-1}$ һадисәләринин баш вермәмәси еһтималларыдыр.

Мәсәлә 1.11. Ики мәнтәгә арасындакы мәсафәнин узунлуғу үч дәфә өлчүлмүшдүр. Бу заман мүсбәт ишарәли өлчмә сәһвинин: 1) һәр үч һалда; 2) ики дәфәдән аз олмајан сајда баш верәчәји еһтималлары тапмалы.

Һәлли: Бернулли дүстуруна әсасән, нәзәрә алсаг ки, мүсбәт вә мәнфи ишарәли өлчмә сәһвләринин еһтималы $p=q=\frac{1}{2}$, үч мүсбәт ишарәли өлчмә сәһвинин баш верәчәји һадисәнин еһтималы үчүн јаза биләрик

$$P_3(3) = C_3^3\, p^3\, q^0 = 1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^0 = \frac{1}{8} = 0{,}125 \,.$$

Мәсәләдә тәләб олунан икинчи еһтималын һесабланмасы үчүн, илк нөвбәдә ики мүсбәт ишарәли сәһвин баш верәчәји һадисәнин еһтималыны тә'јин едәк

$$P_3(2) = C_3^2\, p^2 q^1 = \frac{3!}{2!\,1!} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^1 = \frac{3}{8} = 0{,}375.$$

Онда, мүсбәт ишарәли өлчмә сәһвинин сајынын икидән аз олмајачағы һалы мүрәккәб һадисә кими гәбул едәрәк, (1.22) дүстуруна әсасән

$$P_3(k \ge 2) = P_3(2) + P_3(3) = 0{,}125 + 0{,}375 = 0{,}50$$ тапарыг.

§8. Тәкрарланан сынагларда һадисәнин еһтимал баш вермә сајы

Бир чох експериментләр, нәзәри һесабламалар јеринә јетириләркән, елә һаллар олур ки, тәдгигатчыны һансыса һадисәнин баш вермә еһтималындан чох, онун сынаглар заманы еһтимал баш вермә сајы марагландырыр.

Дәфәләрлә тәкрарланан сынаглар заманы һадисәнин еһтимал баш вермә сајы (k_0) верилмиш шәраит үчүн ән бөјүк еһтимала малик әдәдә дејилир.

Ријази дилдә бу шәрт belә јазылыр:

$$\begin{cases} P_n(k_0) \geq P_n(k_0+1); \\ P_n(k_0) \geq P_n(k_0-1). \end{cases} \qquad (1.25)$$

Еһтимал нәзәријјәсиндә көстәрилир ки, (1.25) шәртинин доғрулуғу үчүн ашағыдакы бәрабәрсизлик өдәнмәлидир

$$np - q \leq k_0 \leq np + q\,. \qquad (1.26)$$

Сынагларын сајы бөјүк, еһтималын гијмәтинин исә сыфра чох јахын олмадығы һалларда тәчрүби мәгсәдләр үчүн еһтимал баш вермә сајынын тәгриби гијмәтләрини

$$k_0 \approx np \qquad (1.27)$$

дүстуру илә һесабламаг олар.

Мәсәлә 1.12. Фәрз едәк ки, чөл кеодезија тәчрүбәси заманы һесабат көтүрәркән, тәләбәләр $p=\frac{1}{5}$ еһтимала малик кобуд сәһвә јол верирләр ($q=\frac{4}{5}$). Нечә һесабатдан сонра 10 сајда кобуд сәһв баш верәчәкдир?

Һәлли: Вериләнләрә вә (1.26) дүстуруна әсасән ашағыдакы бәрабәрсизликләри јаза биләрик:

$$\frac{1}{5}n - \frac{4}{5} \leq 10\ ;$$

$$\frac{1}{5}n + \frac{4}{5} \geq 10\ .$$

Бурадан аларыг

$$49 \leq n \leq 54\,.$$

§9. Локал Лаплас теореми.

Мәсәләләрин биноминал пајланма ганунундан истифадә етмәклә һәлли, тәчрүби олараг, тәкрарланан сынагларын сајынын бөјүк олмадығы һалларда әлверишли вә мүмкүндүр. Лакин сынагларын сајы артдыгча биноминал пајланмадан вә онун Бернулли дүстурундан истифадә бөјүк һәчмли һесабламалара кәтириб чыхарыр. Ејни заманда сынагларын сајы n артдыгча, Бернулли дүстурундакы бә'зи топлананларын гијмәти (еһтимал топлананлары) кичиләрәк, нәзәрә алынмаз олур. Она көрә дә, чох заман һесабламаларын һәчмини кичилтмәк вә асанлашдырмаг мәгсәди илә, чүзи тәгрибилијә јол верилсә дә, һадисәнин еһтималыны нормал пајланма ганунундан истифадә етмәклә тә'јин едирләр.

Нормал пајланма ганунунун бу тәтбигдә истифадәси Локал Лаплас теореми илә әсасландырылыр.

Теорем: Әкәр А һадисәсинин бир сынагдан баш вермә еһтималы 0 вә 1-дән әһәмијјәтли фәргләнән вә бүтүн тәкрар сынаглар заманы гијмәтчә дәјишмәз галан p гијмәтинә бәрабәрдирсә, онда А һадисәсинин n сајлы сынагдан k дәфә баш верәчәји еһтималы $P_n(k)$ тәгриби олараг (n артдыгча дәгиглик дә артыр) ашағыдакы функсија илә һесаблана биләр.

$$P_n(k) \approx y_x = \frac{1}{\sqrt{npq}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}, \qquad (1.28)$$

бурада: $x = (k - np) / \sqrt{npq}$

$У_x$ функсијасынын $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}$ ифадәсинә әсасән хүсуси гијмәтләр чәдвәлләри тәртиб едилмишдир (Әлавә 1). Гејд едәк ки, $\varphi(x)$ чүт функсија олдуғундан, x аргументинин мүсбәт, еләчә дә, мәнфи гијмәтләриндә һәмин чәдвәлләрдән истифадә етмәк олар. Беләликлә, А һадисәсинин n сынагдан k дәфә баш вермә еһтималынын тәгриби гијмәтини ашағыдакы ифадәдән тапарыг

$$P_n(k) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}} \cdot \varphi(x). \qquad (1.29)$$

Мәсәлә 1.13. Ики мәнтәгә арасындакы мәсафәнин узунлуғу он дәфә өлчүлмүшдүр. Онлардан дөрдүнүн өлчмә сәһвинин мүсбәт ишарәли олачағы еһтималы тапмалы.

Һәлли: Әввәлчә x аргументинин гијмәтини һесаблајаг. Бир сынагдан мүсбәт ишарәли өлчмә сәһвинин баш вермәси, еләчә дә, баш вермәмәси еһтималларынын бәрабәр мүмкүнатлы, јә'ни $p = q = \frac{1}{2}$ олдуғуну нәзәрә алсаг, аларыг

$$x = (k - np) / \sqrt{npq} = (4 - 10 \cdot \frac{1}{2}) / \sqrt{10 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}} = -0{,}632 \cdot$$

Чәдвәлдә (әлавә 1) $x = -0{,}632$ - јә $\varphi(x) = 0{,}3261$ гијмәти ујғун кәлир. Онда, (1.29) дүстуруна әсасән тапарыг

$$P_{10}(4) = \frac{1}{\sqrt{10 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}5}} \cdot 0{,}3261 = 0{,}207.$$

Бу мәсәләнин Бернулли дүстуру илә һәллиндән исә

$$P_{10}(4) = 0{,}205$$

нәтичәси алыныр.

§10. Еһтималлар интегралы

Мә'лумдур ки, һәр һансы һадисәнин $[a,b]$ интервалында баш верәчәји P_a^b еһтималыны Бернулли дүстурунун көмәји илә тә'јин етмәк олар. Лакин әввәлки параграфда гејд едилдији кими, һесабламалары асанлашдырмаг үчүн, мүәјјән тәгрибилијә јол верилсә дә, бу мәгсәдлә нормал пајланма ганунундан истифадә етмәк даһа мәгсәдәујғундур. Башга сөзлә, һәр бир $P_n(k)$ еһтималыны ајрылыгда һесабламадан, онларын чәмини $\sum_{k=a}^{b} P_n^k$ ашағыдакы мүәјјән интеграл шәклиндә тә'јин етмәк олар

$$P_a^b = \frac{1}{2\pi} \int_{t_a}^{t_b} e^{-\frac{1}{2}t^2} dt. \qquad (1.30)$$

Бурада: a вә b һадисәнин тәкрар баш вермә сајынын ашағы вә јухары һәдләридир;

t_a вә t_b исә $t = \dfrac{k - np}{\sqrt{npq}}$ функсијасында k-нын јериндә a вә b гијмәтләрини јазмагла тә'јин едилир.

Әкәр P_a^b еһтималынын һесабланмасы У охуна нәзәрән симметрик олан $\pm\xi_0$ интервалында һәјата кечириләрсә вә бу заман интегралалты функсијанын да чүт олдуғуну нәзәрә алынарса, (1.30) дүстуру ашағыдакы шәклә дүшәр

$$P_{-\xi_0}^{+\xi_0} = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^t e^{-\frac{1}{2}t^2} dt = \Phi(t). \qquad (1.31)$$

Бурада:

$$t = h|\xi_0|; \ h = \sqrt{\frac{n}{pq}}; \quad -\xi_0 = \frac{k_0 - a}{n} - p; \quad +\xi_0 = \frac{k_0 + a}{n} - p;$$

$\pm a$ исә k әдәдинин $k_0 = np$-дән олан мејлликләридир.

Ф(t) функсијасы еһтималлар интегралы адланыр вә онун гијмәтләри үчүн хүсуси чәдвәлләр тәртиб едилмишдир(Әлавә III).

Мәсәлә 1.14. Кеодезија шәбәкәсиндә 64 сајда өлчмә јеринә јетирилмишдир. Мүсбәт ишарәли сәһвләрә малик өлчмәләр сајынын $16 \le k \le 40$ аралығында јерләшәчәји еһтималы тапмалы.

Һәлли: Мәсәләни еһтималлар интегралындан истифадә етмәклә һәлл едәк. Әввәлчә бу интегралын һәдд гијмәтләрини һесаблајаг:

$$p = q = \frac{1}{2};$$

$$t_a = \frac{k - np}{\sqrt{npq}} = \frac{16 - 64 \cdot 0{,}5}{\sqrt{64 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}5}} = -4;$$

$$t_b = \frac{b - np}{\sqrt{npq}} = \frac{40 - 64 \cdot 0{,}5}{\sqrt{64 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}5}} = 2.$$

Чәдвәлдән (Әлавә III) $t_a = -4$ вә $t_b = 2$ гијмәтләринә $F(t_a) = -0{,}4999$ вә $F(t_b) = -0{,}4772$ ујғун кәлир. (1.30) дүстуруна әсасән тапарыг

$$P_{16}^{40} = F(2) - F(-4) = 0{,}4772 - (-0{,}4999) = 0{,}977.$$

ФӘСИЛ 2

ТӘСАДҮФИ КӘМИЈЈӘТЛӘРИН ЕҺТИМАЛЛАРЫНЫН ПАЈЛАНМА ГАНУНЛАРЫ

§11. Тәсадүфи кәмиј̆јәтләрин пајланма ганунларынын формалары.

Биринчи фәсилдә тәсадүфи һадисәләрлә таныш олмушдуг. Тәсадүфи һадисәләрлә тәсадүфи кәмиј̆јәтләр арасында гаршылыглы әлагә јаратмаг чәтин дејилдир. Мәсәлән, А һадисәсинин сынағы заманы ики нәтичә алына биләр: А һадисәси баш верә биләр вә јахуд баш вермәз. А һадисәсинин баш вердији һалда онун гаршылыглы әвәзи кими X тәсадүфи кәмиј̆јәтинин ваһид гијмәтини, әкс һалда, јәни баш вермәдији һалда исә сыфыр гијмәтини әвәз гојмаг олар.Тәсадүфи кәмиј̆јәтин бүтүн мүмкүн гијмәтләр чохлуғу там груп тәсадүфи һадисәләр тәшкил едир. Һәр бир сынаг заманы әввәлчәдән мә'лум олмајан, бу вә ја башга гијмәт алан дәјишән кәмиј̆јәтә тәсадүфи кәмиј̆јәт дејилир. Мәсәлән: n- сајда кеодезик өлчмәләрдән мүсбәт ишарәли сәһвләрин сајы; һәр һансы бучағын өлчүлмә сәһви вә с.

Тәсадүфи кәмиј̆јәтләр кәсилән (дискрет) вә кәсилмәјән (фасиләсиз) олур. Ала биләчәји мүмкүн гијмәтләри әввәлчәдән көстәриләбилән тәсадүфи кәмиј̆јәтә кәсилән тәсадүфи кәмиј̆јәт дејилир(јухарыда верилмиш биринчи мисал).

Кәсилмәјән тәсадүфи кәмиј̆јәт исә мүмкүн гијмәтләри әввәлчәдән көстәрилә билмәјән вә һәр һансы аралығы (интервалы) әһатә едән тәсадүфи кәмиј̆јәтә дејилир (икинчи мисал).

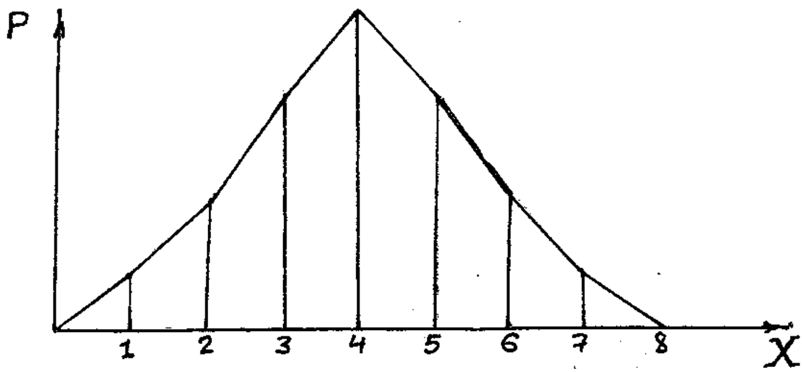
Тәсадүфи олмајан кәмиј̆јәтдән фәргли олараг, тәсадүфи кәмиј̆јәтин ала биләчәји һәр бир мүмкүн гијмәтинә онун ујғун баш вермә еһтималы көстәрилир. Тәсадүфи кәмиј̆јәтин мүмкүн гијмәтләри илә онларын ујғун еһтималлары арасында әлагәни көстәрән мүнасибәт тәсадүфи кәмиј̆јәтин пајланма гануну адланыр. Тәсадүфи кәмиј̆јәтин пајланма ганунлары үч формада ифадә едилә биләр:**1) әдәди; 2) графики; 3) аналитик.**

1. Кәсилән тәсадүфи кәмиј̆јәтләрин пајланма ганунлары чох һалларда әдәди вә графики формаларда ифадә едилир. Пајланманын әдәди формасы сыра (чәдвәл) шәклиндә көстәрилир. Мәсәлән: x_1, x_2,..... x_n гијмәтләри алан X тәсадүфи кәмиј̆јәтинин пајланма сырасыны ашағыдакы чәдвәл шәклиндә јазмаг олар.

x_i	$x_1, x_2, \ldots\ldots\ldots x_n$	(2.1)
p_i	$p_1, p_2, \ldots\ldots\ldots p_n$	

Бу чәдвәлдә X-ын һәр бир гијмәтинә ујғун P_i еһтималы көстәрилмишдир.

2. Тәсадүфи кәмијјәтин пајланма ганунун график формасы пајланма чохбучаглысы кими ифадә олунур. Бу заман чәдвәл 2.1-дә верилмиш x_i, p_i гијмәтләринә әсасән дүзбучаглы координат системиндә нөгтәләр гурулур вә бу нөгтәләр дүз хәтт парчалары илә бирләшдириләрәк, пајланма чохбучаглысы шәклинә кәтирилир (шәкил 2. I).



Шәкил 2.1.Пајланма чохбучаглысы

3. Кәсилмәјән тәсадүфи кәмијјәтләр үчүн пајланма чәдвәли јазмаг вә ја пајланма чохбучаглысы гурмаг мүмкүн дејил. Белә ки, кәсилмәјән тәсадүфи кәмијјәтләр сонсуз гијмәтләр чохлуғуна маликдир. Одур ки, кәсилмәјјән тәсадүфи кәмијјәтләрин пајланма ганунлары аналитик формада-пајланма функсијасы шәкилиндә көстәрилир. Кәсилән кәмијјәтләр үчүн дә пајланма функсијасы јазмаг олар.

Беләликлә, X тәсадүфи кәмијјәтинин һәр һансы верилмиш x гијмәтиндән кичик гијмәтләр алачағы еһтималы пајланма функсијасы адланыр. Ријази дилдә бу белә јазылыр.

$$F(x) = p(X < x), \tag{2.2}$$

$F(x)$ - пајланманын интеграл функсијасы адланыр. Пајланма функсијасы ашағыдакы хассәләрә маликдир:

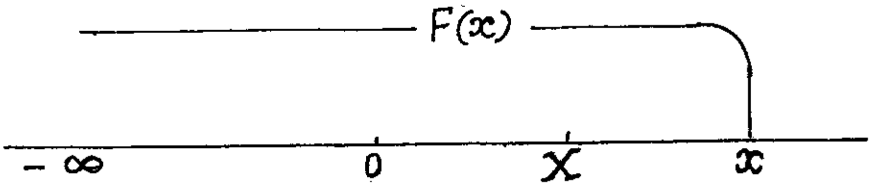
I) функсијанын гијмәтләр чохлуғу [0;1] интервалындан ибарәтдир;

2) азалмајан функсијадыр, јә'ни, әкәр $x_2 \geq x_1$ оларса,$F(x_1) \geq F(x_2)$

3) $F(-\infty) = 0$;

4) $F(+\infty) = 1$

Пајланма функсијасынын һәндәси интерпретасијасы шәкил 2.2-дә көстәрилмишдир.



Шәкил 2.2 Пајланма функсијасынын һәндәси интерпретасијасы.

Тәсадүфи кәмијјәтин верилмиш (а,в) интервалындан гијмәт алачағы еһтималы пајланма функсијасынын көмәји илә ашағыдакы кими һесабланыр.

$$P(a \le x < b) = F(b) - F(a) \qquad (2.3)$$

§12. Пајланма сыхлығы

Кәсилмәјән тәсәдүфи кәмијјәтин пајланма ганунуну пајланма сыхлығы (пајланма әјриси) шәклиндә көстәрмәк даһа мүнасибдир. Пајланма сыхлығы пајланма функсијасынын биринчи дәрәчәли төрәмәсидир, јә'ни

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{F(x + \Delta x) - F(x)}{\Delta x} = F'(x) = \varphi(x). \qquad (2.4)$$

$\varphi(x)$-диференсиал пајланма гануну да адланыр. *(F(x)* - интеграл пајланма гануну). Пајланма сыхлығы ашағыдакы хассәләрә маликдир;

1) $\varphi(x) \ge 0;$

$$2)\ \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)dx = 1; \qquad (2.5)$$

Әкәр тәсадүфи X кәмијјәтинин бүтүн мүмкүн гијмәтләри (а,в) интервалында јерләширсә, онда $\int_a^b \varphi(x)dx = 1$ олар.

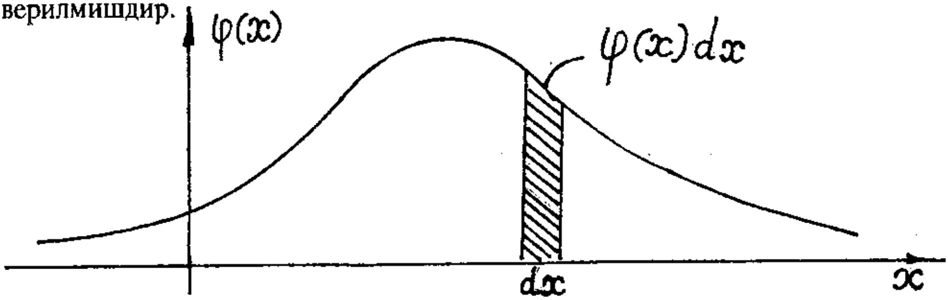
Пајланма сыхлығындан истифадә етмәклә, кәсилмәјән тәсадүфи кәмијјәтин (а,в) интервалында јерләшмә еһтималы ашағыдакы дүстурла тә'јин едилир

$$P_a^b = \int_a^b \varphi(x)dx. \tag{2,6}$$

Пајланма функсијасы (F(x)) илә пајланма сыхлығы (φ(x)) арасындакы әлагә беләифадә олунур

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} \varphi(x)dx. \tag{2,7}$$

Шәкил 2.3-дә пајланма сыхлығынын һәндәси интерпретасијасы верилмишдир.



Шәкил 2.3 Пајланма сыхлығынын һәндәси интерпретасијасы

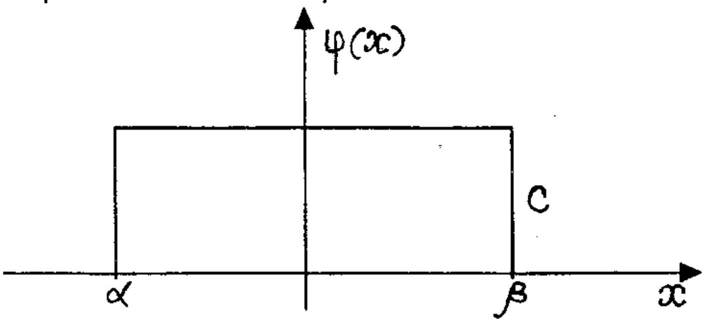
Мисал 2.1. Фәрз едәк ки, X тәсадүфи кеодезик кәмијјәти $\alpha < x < \beta$ интервалында, сыхлығы $\varphi(X) = C$ олан пајланма ганунуна табедир (бәрабәр пајланма гануну). Тәләб олунур: а) C-ни α вә β илә ифадә етмәли; б) х-ын $\alpha_1 < x < \beta_1$ интервалына дүшмә еһтималыны тапмалы; в) Ф(х) функсијасыны тә'јин етмәли

Һәлли: Ријази анализдән мә'лумдур ки, $\varphi(X) = C$ функсијасынын графики X охундан C мәсафәдә кечән вә она парале дүз хәтдән ибарәтдир (шәкил 2.4).

Пајланма сыхлығынын (2.5) хассәсинә көрә графикдәки дүзбучаглынын саһәси ваһидә бәрабәрдир, јә'ни $(\beta - \alpha) \cdot c = 1$.

Бурадан,

$$c=\frac{1}{\beta-\alpha} \quad \text{вә} \quad c=\varphi(x)=\frac{1}{\beta-\alpha}.$$



Шәкил 2.4. Бәрабәрпајланма гануну.

X кәмијјәтинин (α_1, β_1) интервалына дүшмә еһтималыны һесабламаг үчүн (2.6) дүстурундан истифадә едилир.

$$P_{\alpha_1}^{\beta_1} = \int_{\alpha_1}^{\beta_1} \varphi(x)dx = \int_{\alpha_1}^{\beta_1} c \cdot dx = c\int_{\alpha_1}^{\beta_1} dx = \frac{1}{\beta-\alpha}(\beta_1 - \alpha_1)$$

в) Нәһајәт, (2.7) дүстуруна әсасән пајланма функсијасыны тә'јин едәк

$$F(x) = \int_{\alpha}^{x} \varphi(x)dx = \frac{X-\alpha}{\beta-\alpha}$$

§13. Тәсадүфи кәмијјәтин әсас пајланма параметрләри.

Әввәлки параграфларда көстәрилдији кими, тәсадүфи кәмијјәтин пајланма гануну мүвафиг пајланма функсијасы вә ја пајланма сыхлығы илә ифадә едилир. Бунунла belә, бир чох һалларда тәсадүфи кәмијјәтин өјрәнилмәси үчүн, онун пајланма ганунуну характеризә едән әдәди параметрләри билмәк кифајәт едир. Тәсадүфи кәмијјәтин әсас әдәди параметрләри: ријази көзләмә, дисперсија, башланғыч вә мәркәзи моментләрдән ибарәтдир.

I.Ријази көзләмә пајланма мәркәзини характеризә едир вә кәсилән кәмиjjәтләр үчүн

$$M[X]=\sum_{i=1}^{n}x_i P_i\ , \qquad (2.8)$$

кәсилмәjән тәсадүфи кәмиjjәтләр үчүн исә

$$M[X]=\int_{-\infty}^{\infty}x\varphi(x)dx \qquad (2.9)$$

дүстурлары илә һесабланыр.

Еһтимал нәзәриjjәсиндә көстәрилир ки, сынагларын саjы n сонсуз артарса, $\bar{x}=\sum_{i=1}^{n}x_i Q_i$ һесаби орта гиjмәти өз еһтималы илә риjази көзләмәjә јахынлашыр. Башга сөзлә,

$$ehm.\lim_{n\to\infty}\bar{x}=M[X] \qquad (2.10)$$

Бурада, Q - тәсадүфи кәмиjjәтин нисби тезлиjидир.

Риjази көзләмә ашағыдакы хассәләрә маликдир:

1. $\mathrm{M}[\mathrm{c}]=\mathrm{c}$, (2.11)
2. $\mathrm{M}[\mathrm{cX}]=\mathrm{c}\cdot\mathrm{M}[\mathrm{x}]$; (2.12)
3. $\mathrm{M}\left[\sum \mathrm{c}_i\mathrm{X}_i\right]=\sum \mathrm{c}_i\mathrm{M}\left[X_i\right]$; (2.13)
4. $M[X_1\cdot X_2\cdots X_n]=\prod_{i=1}^{n}M[X_i]$

(X_i -ләр бир-бириндән (2.14)

асылы деjилдир.)

5.Риjази көзләмә мүсбәт вә јa мәнфи ишарәли әдәд ола биләр.

II.Дисперсиjа паjланма мәркәзинә нәзәрән тәсадүфи кәмиjjәтин гиjмәтләринин сәпәләнмә дәрәчәсини көстәрир вә үмуми шәкилдә ашағыдакы дүстурла һесабланыр

$$D=M\left[(X-M[X])^2\right] \qquad (2.15)$$

Хүсуси һалда, кәсилән тәсадүфи X кәмиjjәти үчүн дисперсиjа

$$D[X]=\sum_{i=1}^{n}(x_i-M[X])^2 p_i\ , \qquad (2.16)$$

кәсилмәjән тәсадүфи кәмиjjәтләр үчүн исә

$$D[X] = \int_{-\infty}^{\infty} (x - M[X])^2 \varphi(x) dx \qquad (2.17)$$

ифадәләриндән тапылыр.Дисперсијанын өлчүсү тәсадүфи кәмијјәтин квадратына бәрабәрдир. Она көрә дә, сәпәләнмәни әјани мүгајисә етмәк мәгсәдилә, тәсадүфи кәмијјәтлә ејни өлчүјә малик орта квадратик мејлетмәдән (о.к.м.)

$$\sigma = \sqrt{D} \qquad (2.18)$$

истифадә едилир (σ - стандарт да адланыр). Маһијјәтинә көрә σ һәмишә мүсбәт гијмәт алыр.

Дисперсија ашағыдакы хассәләрә маликдир:

$$1.\ D[C] = 0\ ; D \qquad (2.19)$$

$$2.\ D[CX] = C^2 D[X]; \qquad (2.20)$$

$$3.\ D[\sum_{i=1}^{n} C_i X_i] = \sum_{i=1}^{n} C_i^2 D[X_i], \qquad (2.21)$$

III. Моментләр тәсадүфи кәмијјәтләрин пајланмасынын даһа үмуми әдәди характеристикаларыдыр. Онлар башланғыч вә мәркәзи моментләрә бөлүнүрләр.

X тәсадүфи кәмијјәтинин S дәрәчәли башланғыч моменти һәмин кәмијјәтин S дәрәчәли ифадәсиндән көтүрүлмүш ријази көзләмәсинә дејилир, јә'ни

$$\alpha_s = M[X^S] \qquad (2.22)$$

(2.22) ифадәсиндән көрүндүјү кими С=1 олдугда $\alpha_1 = M$ [X].

Кәсилән кәмијјәтләр үчүн башланғыч момент

$$\alpha_s = \sum_{i=1}^{n} x_i^s \cdot p_i\ , \qquad (2.23)$$

кәсилмәјән кәмијјәтләр үчүн исә

$$\alpha_s = \int_{-\infty}^{\infty} x^S \varphi(x) dx \qquad (2.24)$$

дүстурлары илә һесабланыр.

X тәсадүфи кәмијјәтинин S дәрәчәли мәркәзи моменти X-ријази көзләмәсиндән олан мејллијинин дәрәчәли ријази көзләмәсинә дејилир. Ријази дилдә бу белә јазылыр

$$\mu_s = M[(X\text{-}M[X])^s].$$

Бурада, $\overset{0}{X}$ =(X-И[X]) мәркәзләшдирилмиш тәсадүфи кәмијјәт адланыр. Кәсилән тәсадүфи кәмијјәтин мәркәзи моменти

$$\mu_s = \sum_{i=1}^{n}(x_i - M[X])^s \cdot p_i \tag{2.26}$$

кәсилмәјән тәсадүфи кәмијјәтин мәркәзи моменти исә

$$\mu_s = \int_{-\infty}^{\infty}(x - M[X])^s \varphi(x)dx \tag{2.27}$$

ифадәләриндән тапылыр.

Мәркәзи моментләри башланғыч моментләрлә ифадә етмәк олар. Мәсәлән,

$$\begin{aligned} &\mu_1 = 0; \\ &\mu_2 = \alpha_2 - \alpha_1^2 = D\ . \end{aligned} \tag{2.28}$$

Пајланманы бә'зән мәркәзи мүтләг моментләрлә дә характеризә етмәк олар

$$\gamma_s = M[X\text{-}M[X]^s] \tag{2.29}$$

Мәркәзи мүтләг моментләр ичәрисиндә биринчи дәрәчәли γ моменти хүсуси әһәмијјәт кәсб едир вә орта мејлетмә адланыр. Оота мејлетмә һәрфи илә ишарә едилир.

Кәсилән кәмијјәтләр үчүн орта мејлетмә

$$\upsilon = \sum_{i=1}^{n}|x_i - M[X]| \cdot p_i \tag{2.30}$$

кәсилмәјән тәсадүфи кәмијјәтләр үчүн

$$\upsilon = \int_{-\infty}^{\infty}|x - M[X]|\varphi(x)dx \tag{2.31}$$

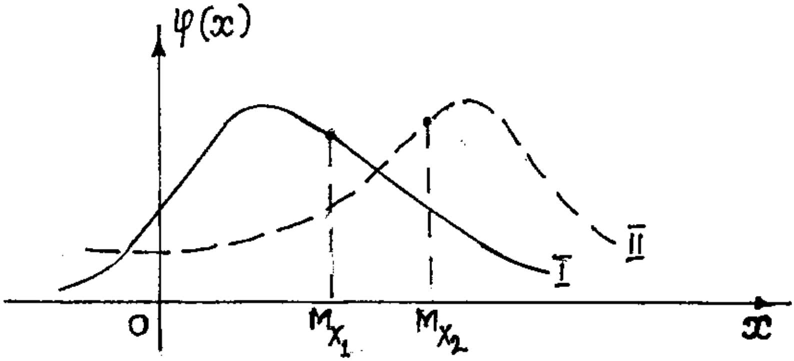
шәкилин һесабланыр.

Тәсадүфи кәмијјәтләрин пајланмасыны характеризә етмәк үчүн јухарыда көстәрилән параметрләрлә јанашы үчүнчү вә дөрдүнчү дәрәчәли мәркәзи моментләрдән дә истифадә едилир. Үчүнчү дәрәчәли мәркәзи моментә әсасән тапылан вә "ассимметрија" адланан

$$S_k = \frac{\mu^3}{\sigma^3} \qquad (2.32)$$

параметри пајланманын симметриклијини мүәјјәнләшдирир. Симметрик пајланма заманы $S_k = 0$

Шәкил 2.5-дә ики асимметрик пајланма әјриси көстәрилмишдир. Биринчи әјри мүсбәт $/ S_k > 0/$, икинчи исә мәнфи асимметријаја маликдир $(S_k > 0)$.

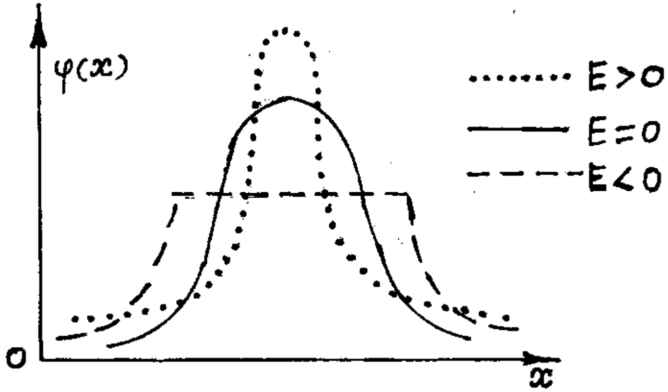


Шәкил 2.5 Асимметрик әјриләр.

Пајланманын диклији (шиш зирвәли вә ја јастызирвәли пајланмалар) "екссес" адланан Е кәмијјәти илә тә'јин едилир. Бу кәмијјәтин гијмәти ашағыдакы дүстурла һесабланыр

$$E = \frac{\mu_4}{\sigma^4}. \qquad (2.33)$$

Нормал пајланма үчүн $E=0$. Шәкил 2.6-да мүсбәт, сыфыр гијмәтли вә мәнфи екссесли үч пајланма әјриси тәсвир едилмишдир.



Шәкил 2.6 Мүхтәлиф екссесләрә мәхсус әјриләр.

Мәсәлә 2.2. X тәсадүфи кәмијјәтинин пајланма сырасы аша-ғыдакы чәдвәлдә көстәрилдији кимидир. (Бу һал мүсбәт ишарәли өлчмә сәһфинин јаранмасы һадисәсәнә ујғун кәлир)

x_i	0	1
p_i	q	p

бурада, $q = 1 - p$. Бу кәмијјәтин ријази көзләмә вә дисперсијасыны тә'јин един.

Һәлли : X кәсилән тәсадүфи кәмијјәт олдуғундан ријази көзләмә үчүн (2.8) дүстуруна әсасән јаза биләрик

$$M[X] = x_1 p_1 + x_2 p_2 = 0.q + 1 \cdot p = p.$$

Кәсилән кәмијјәтин дисперсијасы исә (2.16) дүстуру илә тә'јин едилир

$$D[X] = (x_1 - M[X])^2 \cdot p_1 + (x_2 - M[X])^2 \cdot p_2 = (0 - p)^2 \cdot q +$$

$$+ (1 - p)^2 \cdot p = p^2 q + q^2 p = pq(p + q) = pq.$$

Бурада, $q + p = 1$ олдуғу нәзәрә алынмышдыр.

§14. Лјапуновун мәркәзи һәдд теореми һаггында анлајыш

Хүсуси тәдгигатлар көстәрмишдир ки, кеодезик тәсадүфи кәмијјәтләр нормал пајланма ганунуна табедир. Үмуми һалда исә, нормал пајланма ганунуна табечилијин шәртләри Лјапуновун мәркәзи һәдд теореми илә мүәјјәнләшдирилир вә тәсадүфи кәмијјәтләр үчүн ашағыдакы кими ифадә олунур:

Теорем: Әкәр һәр һансы тәсадүфи кәмиј̃јәт кифајәт гәдәр бөјүк сајда бир-бириндән асылы олмајан дикәр кәмиј̃јәтләрин чәминдән тәшкил едилибдирсә вә бу кичик кәмиј̃јәтләр өз ријази көзләмәләриндән чәм тәсадүфи кәмиј̃јәтин мејл етмәсинә нисбәтән олдугча кичик узаглашмалара маликдирләрсә, онда чәмдән ибарәт тәсадүфи кәмиј̃јәтин пајланма гануну нормал пајланма ганунуна јахын олачагдыр.

Нормал пајланма ганунуна табе олан тәсадүфи кәмиј̃јәтин пајланма сыхлығы ашағыдакы дүстурла тә'јин едилир

$$\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot\sigma}\cdot e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} \quad . \qquad (2.34)$$

Бурада: $a=M[x]$, $\sigma=\sqrt{D[x]}$.

Тәчрүбәдән мәлумдур ки, кеодезик өлчмә нәтичәләринә бир чох амилләр (релјеф, аләтин хүсусиј̃јәтләри, атмосфер вә иглим шәраити, мүшаһидәчинин тәчрүбәси вә с.) тә'сир едир вә јекун өлчмә сәһвинин гијмәти мәһз бу кими мәнбәләрин үмуми гаршылыглы тәсириндән формалашыр.Она көрә дә, гәбул етмәк олар ки, кеодезик өлчмә сәһви чохлу сајда елементар сәһвләрин чәминдән ибарәтдир вә Љапунов теореминин шәртләринә әмәл олундуғундан нормал пајланма ганунуна табе олачагдыр

§15. Нормал пајланмада кәмиј̃јәтин верилмиш интервала дүшмә еһтималы тәјини.

Нормал пајланма һалында X тәсадүфи кәмиј̃јәтинин верилмиш интервала дүшмә еһтималы ашағыдакы ифадәдән тәјин едилир

$$p\{a<x<b\}=F(b)-F(a) \quad . \qquad (2.35)$$

Бурада F (x) -еһтимал интегралы функсијасыдыр вә

$$F(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot\sigma}\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}dx \quad . \qquad (2.36)$$

Әкәр $t=\dfrac{(x-a)}{\sigma}$ (2.37) илә ишарә етсәк, онда (2.36) ифадәси белә шәклә дүшәр

$$F(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{t} e^{-\frac{t^2}{2}}dt \quad . \qquad (2.38)$$

(2.37) әвәзетмәси (2.35) ифадәсинин дә формасыны дәјишдирәчәкдир, јәни

$$P\{t_1 < t < t_2\} = F(t_2) - F(t_1) \quad \text{олар.} \tag{2.39}$$

Бурада: $t_1 = \dfrac{a - M[x]}{\sigma}$; $t_2 = \dfrac{b - M[x]}{\sigma}$.

(2.39) ифадәси $n \geq 20$ олдуғу һалларда јахшы нәтичәләр верир. Бу дүстуру тәфсилатлы ачылышда беләјазмаг олар.

$$P(t_1 < \frac{k - np}{\sqrt{npq}} < t_2) = P(t_1 \cdot \sqrt{\frac{pq}{n}} < \frac{k}{n} - p < t_2 \cdot \sqrt{\frac{pq}{n}}). \tag{2.40}$$

Бурада: $\dfrac{k}{n} = Q$ һадисәнин нисби тезлији; $\sqrt{\dfrac{pq}{n}} = \sigma_Q$ исә, нисби тезлијин стандартыдыр.

Нормал пајланма ганунунан табе олан истәнилән тәсадүфи кәмијјәт үчүн ашағыдакы ифадә доғрудур:

$$P\{|Q - P| < \varepsilon\} = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^t e^{-\frac{t^2}{2}} dt \quad . \tag{2.41}$$

(2.41) ифадәси нисби тезлијин еһтималдан ε гијмәти гәдәр фәргләнәчәји еһтималы тәјин едир.

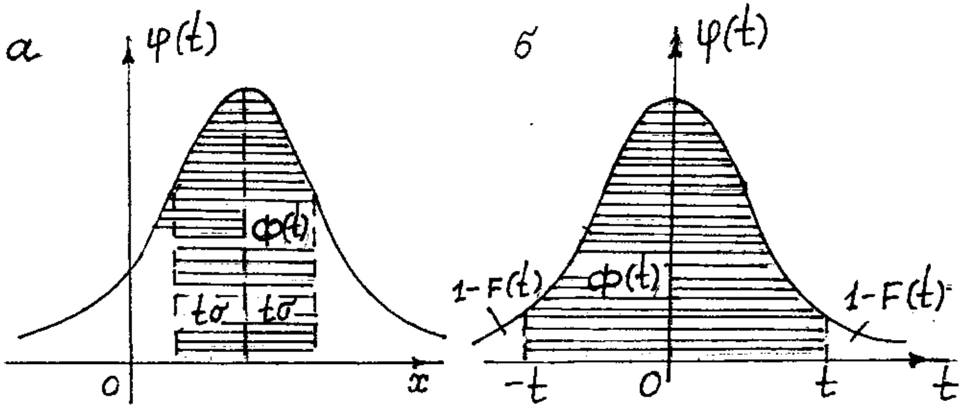
$P(a < x < b)$ еһтималыны $\Phi(t)$ функсијасындан истифадә етмәклә һесабламаг даһа әлверишлидир. $\Phi(t)$ ријази көзләмәјә нәзәрән симметрик олан функсијадыр, јәни

$$\Phi(t) = \{|X - M[X]| < t_\sigma\} \ . \tag{2.42}$$

Шәкил 2.7-дә $\Phi(t)$ функсијасынын мүхтәлиф координат системләринә нәзәрән: а) X вә $\varphi(x)$; б) t вә $\varphi(t)$ охларында һәндәси интерпретасијасы верилмишдир. Штрихләнмиш саһә $\Phi(t)$ функсијасынын әдәди гијмәтинә бәрабәрдир.Бу шәклә әсасән $F(t)$ вә $\Phi(t)$ арасындакы ашағыдакы әлагәни көстәрмәк олар

$$F(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \Phi(t) \ . \tag{2.43}$$

Чүнки, $\varphi(t)$ әјриси илә t оху арасында галан үмуми саһә ваһидә бәрабәрдир (бах,§ 12, пајланма сыхлығынын хассәләри).



Шәкил 2.7.Ф(t) функсијасынын һәндәси интерпретасијасы.

(2.43) дүстуруну (2.39) ифадәсиндә нәзәрә алсаг, белә бир ифадә аларыг

$$P(a < x < b) = P\{t_1 < t < t_2\} = \frac{1}{2}\{\Phi(t_2) - \Phi(t_1)\} \qquad (2.44)$$

Гејд едәк ки,

$$\Phi(t) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^t e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$ чүт олмајан функсијадыр, јәни

$$\Phi(-t) = -\Phi(t) \qquad (2.45)$$

Она көрә дә, Ф(t) функсијасы үчүн тәртиб едилмиш чәдвәлләрдән t -нин мәнфи гијмәтләриндә дә истифадә етмәк олар. Ф(t) функсијасы еһтималлар интегралы вә ја Лаплас функсијасы адланыр.

Мәсәлә 2.3 Јүз өлчмә хәтасындан мүтләг гијмәтчә ашағыда верилмиш һәдд гијмәтләрини ашан хәталар сајыны тәјин един:

а) бир стандарт һәдди, јәни , σ;

б) икигат стандарт һәдди ,2σ;

в) 2,5σ һәдди;

г) үчгат стандарт һәдди 3σ (n=1000 олдугда).

Һәлли: Мәсәләдә гојулмуш шәртләри ријази дилдә белә ифадә етмәк олар:

а) $|\Delta_1| > \sigma$; б) $|\Delta_2| > 2\sigma$;в) $|\Delta_3| > 2{,}5\sigma$; г) $|\Delta_4| > 3\sigma$,

бу шәртләрә ујғун еһтималлар исә ,

а) $P(|\Delta_1| > \sigma)$; б) $P(|\Delta_2| > 2\sigma)$; в) $P(|\Delta_3| > 2{,}5\sigma)$;

г) $P(|\Delta_4| > 3\sigma)$

Мәсәләнин сонракы һәлли ашағыдакы ардычыллыгда јеринә јетирилир:

1) Чәдвәлдән Ф(t) функсијасынын t=1;2;2,5;3 әмсалларына ујғун гијмәтләри сечилир(бах, әлавә III). Билдијимиз кими, Ф(t) функсијасынын бу сечилмиш гијмәтләри өлчмә хәталарынын мүвафиг интервал дахилиндә јерләшмә еһтималыны көстәрир.

2) $P(\Delta_i > t\sigma) = 1 - \Phi(t)$ дүстуру илә хәталарын гојулмуш һәддләри ашмасы еһтималы һесабланыр.

3) Нәһајәт, $k = np = n(1 - \Phi(t))$ ифадәсиндән $p(\Delta_i > t\sigma)$ еһтималына малик вә мүвафиг һәдд гијмәтләрини ашан хәталарын сајы тапылыр. Һесабламалар чәдвәл 2.1-дә верилмишдир.

Хәта-ларын сајы n	Верилмиш һәдд гијмәти $\lvert\Delta_i\rvert$	t	Ф(t)	$p(\Delta > t\sigma) = 1-\Phi(t)$	Верилмиш һәдди ашан хәталарын сајы, $k=n(1-\Phi(t))$	Верилмиш $\pm t\sigma$ һәдди дахилиндә галан хәталарын сајы	Јохлама
100	1,0	1,0	0,6827	0,3173	32	68	100
100	2,0	2,0	0,9545	0,0455	5	95	100
100	2,5	2,5	0,9876	0,0124	1	99	100
1000	3,0	3,0	0,9973	0,0027	3	997	1000

§ 16. Орта вә еһтимал мејлетмәләр.

Тәсадүфи кәмијјәтин өз ријази көзләмәси әтрафында сәпәләнмәсини стандартдан башга орта вә еһтимал мејлетмәләрлә дә характеризә етмәк олар.

Орта сәпәләнмә (ν) биринчи дәрәчәли мәркәзи мүтләг момент олуб, (2.30) вә ја (2.31) дүстурлары илә тә'јин едилир, јә'ни

$$\nu = M\left[\left|X - M[X]\right|\right] \quad . \qquad (2.46)$$

Стандартла орта мејлетмә арасындакы әлагә белә ифадә олунур

$$\sigma = 1{,}25\nu \quad . \qquad (2.47)$$

Еһтимал мејлетмә (r) исә елә бир кәмијјәтә дејилир ки, өлчмә сырасында бу кәмијјәтдән мүтләг гијмәтчә бөјүк вә кичик олан хәталар бәрабәрмүмкүнатлы олур, јә'ни

$$p\{|\Delta| < r\} = \frac{1}{2} \qquad (2.48)$$

Еһтимал мејлетмә стандартла ашағыдакы мүнасибәтдәдир

$$r = 0{,}67\sigma \quad . \qquad (2.49)$$

Тәчрүби олараг r-и тә'јин етмәк үчүн бүтүн хәталар мүтләг гијмәтчә артан вә ја азалан сырада дүзүлүр вә сыранын ортасында јерләшән хәта еһтимал мејлетмә гәбул едилир.

Мәсәлә 3.2. Кеодезик өлчмә хәтасынын гијмәтинин $\Delta_{\text{һәдд}} = 2\nu$ вә $\Delta_{\text{һәдд}} = 2r$ һәдләрини ашмајачағы еһтималларыны тә'јин етмәли.

Һәлли: Мәсәләнин шәртиндә һесабланмасы тәләб едилән биринчи еһтимал гијмәти белә бир ифадәдән тапылар

$$p\{|\Delta| < 2\nu\} = \Phi(t). \text{ Бурада, } t = \frac{\Delta_{\text{һәдд}}}{\sigma} = \frac{2\nu}{\sigma}.$$

Ејни заманда (2.47) әлагә дүстуруну нәзәрә алсаг, $t = 1{,}6$ гијмәтини аларыг. Онда, $\Phi(t)$ чәдвәлиндән $t = 1{,}6$ үчүн

$$p\{|\Delta_1| < 2\nu\} = 0{,}890 \text{ олар.}$$

б) Ејни гајда илә, икинчи еһтимал гијмәти үчүн тапарыг:

$$P\{|\Delta_2| < 2r\} = \Phi(t); t = \frac{2r}{\sigma} = 1{,}34; P\{|\Delta_2| < 2r\} = \Phi(1{,}34) = 0{,}820.$$

ФӘСИЛ 3

РИЈАЗИ СТАТИСТИКАНЫН ЕЛЕМЕНТЛӘРИ.

§17. Ријази статистиканын мәсәләләри

Чох һалларда тәсадүфи кәмијјәтләрин пајланма ганунлары вә онларын әдәди характеристикалары сынаг вә експериментләр јолу илә тә'јин едилир. Ријази статистика експеримент нәтичәләринин јазылмасы вә анализи, гејдијјатдан кечирилмәси методлары вә саирә бу кими мәсәләләрлә мәшғул олан ријази елм саһәсидир. Ријази статистика ашағыдакы нөв мәсәләләри һәлл едир:

1.Бә'зән сынаг нәтичәләринин сајы вә һәчми кифајәт дәрәчәдә олмадығындан, тәсадүфи кәмијјәтин пајланма гануну аз әһәмијјәтли факторларын тә'сириндән дүзкүн сечилмир вә ја тәһрифләрә малик олур. Бу һалда статистики мәсәләнин мәғзи јекун нәтичәни кәнар тә'сирләрдән азад едәрәк, пајланма ганунунун дүзкүн сечилмәсиндән ибарәтдир.

2.Експеримент нәтичәләринин пајланма ганунуна даир ирәли сүрүлмүш һипотезләрин ујғунлуғунун јохланмасы вә тәсадүфи кәмијјәтләр арасындакы асылылығын тә'јини («һипотезләрин охшарлығынын јохланмасы мәсәләси»).

3.Мәчһул параметрләр үчүн тапылмыш «ән еһтимал вә е'тибарлы гијмәтләрин» дәгиглијинин гијмәтләндирилмәси.

§18. Статистики сыра. Һистограмма.

Тәсадүфи кәмијјәтин мүшаһидәләрдән тапылмыш бүтүн мүмкүн гијмәтләри һәмин кәмијјәтин үмуми статистики чохлуғуну тәшкил едир. Лакин кәсилмәјән кәмијјәтләрин үмуми статистики чохлуғуну јаратмаг, үмумијјәтлә мүмкүн дејил, кәсилән кәмијјәтләр һалында исә, тәчрүби олараг һәјата кечирилмәси чох һалларда бөјүк чәтинликләрлә бағлыдыр. Она көрә дә, адәтән, сечмә методу илә мүәјјән өлчүлү статистики чохлуг өјрәнилир вә онун әсасында гојулан мәсәләнин үмуми һәлли верилир. Ајдындыр ки, бу һалда тапылан чаваблар мүәјјән тәгрибилијә малик олачагдыр. Сечмә статистики чохлугу үмуми чохлуг үзрә бәрабәр пајланыр вә бу јолла тәсадүфи кәмијјәтин хассәләринин мүмкүн гәдәр дәгиг вә әһатәли өјрәнилмәси имканы јараныр.

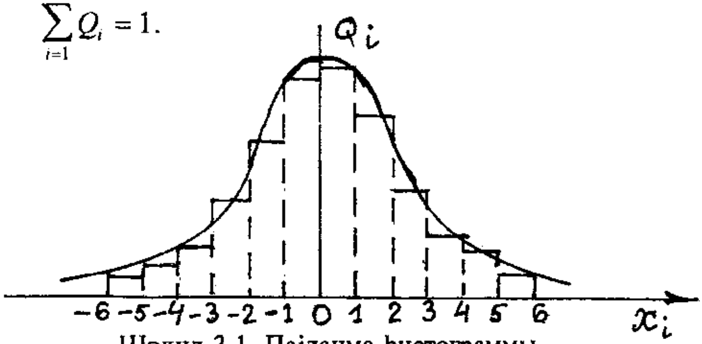
Сечмә чохлуғу статистик сыра (чәдвәл) шәклиндә көстәрилир. Бу мәгсәдлә, кәмијјәтин сечмә x_i чохлуғуну 10÷ 20 сајда интерваллара бөлүб, һәр интервал үчүн m_i сајыны тә'јин едирләр. Сонра $Q_i = m_i/n$ дүстуру илә нисби тезликләр һесабланыр (m_i - һәр бир интервала дүшән x_i гијмәтләринин сајыдыр). Һесаблама нәтичәләри чәдвәл 3.1 шәклиндә јазылыр.

Чәдвәл 3.1.

Интерваллар	$x_1;\ x_2$	$x_2\ ;\ x_3\dots$	$x_i;\ x_{i+1}$	$x_k;\ x_{k+1}$
m_i	m_1	$m_2\dots$	$m_i\dots$	m_k
Q_i	Q_1	$Q_2\dots$	$Q_i\dots$	Q_k

Статистики пајланманы даһа нәзәрә чарпан шәкилдә көстәрмәк үчүн, статистики сыранын мә'луматларына әсасән мүвафиг һистограмлар гурулур: абсис оху үзрә (x_i, x_i+1) интерваллары гејд едилир вә бу интерваллары отурачаг гәбул едәрәк, онларын үзәриндә саһәси Q, һүндүрлүјү исә $h = \dfrac{Q_i}{x_{i+1} - x_i}$ -јә бәрабәр олан дүзбучаглылар гурулур (шәкил 3.1).

Бурада, $\sum\limits_{i=1}^{k} Q_i = 1.$



Шәкил 3.1. Пајланма һистограммы

§19. Статистики пајланманын әдәди параметрләри.

Статистики пајланма да тәсадүфи кәмијјәтләрин пајланмасында гәбул едилмиш ријази көзләмә, дисперсија вә моментләрдән (бах,§13) ибарәт әдәди параметрләрлә характеризә олунур. Лакин бу һалда, параметрләрин гијмәтләри тәчрүби олараг өлчмә нәтичәләринә әсасән һесабланыр. Статистики пајланмада ријази көзләмә һесаби орта кими тә'јин едилир, јә'ни

$$M^*[X] = \bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} \quad . \tag{3.1}$$

Статистики дисперсија

$$D^*[X] = \frac{\sum_{i=1}^{n} [x_i - M^*[X]]^2}{n} \quad , \tag{3.2}$$

статистики башланғыч вә мәркәзи моментләр исә, ујғун олараг

$$\alpha_s^* = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^s}{n} \quad \text{вә} \quad \mu_s^* = \frac{\sum_{i=1}^{n} [x_i - M^*[x]]^s}{n} \tag{3.3}$$

дустурлары илә һесабланыр. Ону да гејд едәк ки, нәзәри әдәди параметрләрин хассәләри ујғун статистики параметрләр үчүн дә доғрудур (бах,§13)

§20. Статистики анализә әсасән пајланма ганунунун тә'јини.

Ајдындыр ки, експеримент вә өлчмәләр јолу илә тәсадүфи кәмијјәтин бүтүн мүмкүн гијмәтләрини тә'јин етмәк чох чәтиндир, бир чох һалларда исә, мүмкүн дејил. Она көрә дә, пајланма гануну әсасән сечмә методу (бах,§18) илә өјрәнилир, сонра исә әлдә едилмиш мә'луматларын статистики анализинә көрә кәмијјәтин үмуми пајланма гануну јазылыр. Пајланма гануну мәсәләнин мәғзи вә һистограмманын заһири көрүнүшүнә көрә сечилир.

Мәсәлән,шәкил 3.1- дәки һистограм өз заһири көрүнүшүнә көрә нормал пајланмаја јахындыр. Пајланма ганунунун нөвү һаггында фәрзијјә ирәли сүрүләндән сонра, бу ганунун әсас әдәди параметрләри : ријази көзләмә (a) вә стандарт (σ) гијмәтләри сечилир. Бу сечим методларындан биринин маһијјәти нәзәри вә статистики пајланма параметрләринин бәрабәр гәбул едилмәсиндән ибарәтдир, јә'ни

$$a = M^{*}(X); \quad \sigma = \sqrt{D^{*}[X]} \qquad (3.4)$$

Нәзәри вә статистики пајланмаларын ујғунлуғу (фәрзијјәнин һәгигәтә ујғунлуғу) чох заман К.Пирсон пајланмасындан истифадә етмәклә јохланылыр:

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{k} \frac{(m_i - np_i)^2}{np_i} \qquad (3.5)$$

Бу заман әлавә олараг «сәрбәстлик дәрәчәси әдәди» адланан (r) кәмијјәти тә'јин едилир. r әдәди k интерваллар сајы илә әлагәләр әдәди (нисби тезлијә көрә сечилир) фәргинә бәрабәрдир. Нормал пајланма һалында r=к-3.

χ^2 пајланмасы үчүн хүсуси чәдвәлләр тәртиб едилмишдир (бах, әлавә IV). Чәдвәлдән χ вә r кәмијјәтләринин гијмәтләринә ујғун Р еһтималы тапылыр. Сонра Р-нин гијмәтинә әсасән нәзәри вә статистики пајланмаларын ујғунлуғу барәдә мүлаһизәләр јүрүдүлүр. Әкәр Р>0,5 бәрабәрдирсә, онда нәзәри вә статистики пајланманын ујғунлуғу ә'ладыр; $0{,}3 \leq p \leq 0{,}5$олдугда-јахшы; $0{,}1 \leq p < 0{,}3$ - кафи; Р<0,1 исә ујғунлуғун пис олдуғуну көстәрир.

§21. Статистики әлагәләр һаггында анлајыш.

Бир чох һалларда, мәсәлән, кеодезик аләтләрин тәдгиги, јени өлчмә методларынын тәчрүби јохланмасы, өлчмә нәтичәләринин ријази һесабланмасы вә с. өлчүлмүш кәмијјәтләр арасында гаршылыглы әлагә дәрәчәсини, еләчә дә, һәмин өлчмә нәтичәләринин һансыса әсас амил, вә јахуд, хәта мәнбәјиндән асылылыг дәрәчәсини тә'јин етмәк зәрурәти доғур. Белә ки, кәмијјәтләр арасындакы гаршылыглы асылылыгдан истифадә едәрәк, хүсусилә дә, бу асылылыг дүстур шәклиндә ифадә олунубса, мәсәлән, тәдгиг едилән аләтин көзләнилән өлчмә дәгиглијини әввәлчәдән көстәрмәк олар. Ејни заманда өлчүлән кәмијјәтләр арасында әлагә дәрәчәси мә'лум оларса, бүтөвлүкдә чөл өлчмә мүшаһидәләрини вә камерал һесабламалары дүзкүн тәшкил етмәк имканы јараныр.

Кәмијјәтләр арасында асылылыг ики формада ола биләр: функсионал вә статистик (еһтимал).

Ики x вә y дәјишән кәмијјәтләри арасындакы функсионал асылылыг елә бир асылылыға дејилир ки, бу заман χ-ын һәр бир гијмәтинә y-ин мүәјјән бир гијмәти ујғун кәлир (мәсәлән, $V=\frac{4}{3}\pi R^3$).

x вә y дәјишән кәмијјәтләри арасындакы статистики асылылыг заманы исә, χ-ын һәр бир гијмәтинә, онун дәјишмәси илә дәјишән y гијмәтләр пајланмасы ујғун кәлир.Мәсәлән,x-ын дәјишмәси илә y-ин ријази көзләмәси хәтти ганун үзрә дәјишир. Белә асылылыг дүзхәтли корреләсија адланыр.

Ики x вә y тәсадүфи кәмијјәтләринин бир-бириндән асылылг дәрәчәси

$$r=\frac{K_{xy}}{\sigma_x\sigma_y} \tag{3.6}$$

дүстуру илә тә'јин едилән корреләсија әмсалы илә мүәјјәнләшдирилир. (3.6) дүстурунда K_{xy} икинчи дәрәчәли мәркәзи гарышыг моментдир вә ашағыдакы кими һесабланыр

$$K_{xy}=\mu_{1,1}=M[(x-M[x])(y-M[y])]=M[x\cdot y]-M[x]\cdot M[y] \tag{3.7}$$

Үмуми шәкилдә, $p+s$ дәрәчәли мәркәзи гарышыг момент

$$\mu_{p,s}=M\left[(x-M[x])^p(y-M[y])^s\right] \tag{3.8}$$

ифадәси илә тапылыр. Хүсуси һалда , $\mu_{2,0}=D[X]$; $\mu_{0,2}=D[У]$.

Корреләсија әмсалы $-1\le r\le 1$ интервалда гијмәтләр ала биләр. $r=+1$ вә ја $r=-1$ һалында, х вә у кәмијјәтләри арасында дүзхәтли функсионал әлагәнин мөвчудлуғуну сөјләмәк олар, јә'ни

$y=ax+c$, $x=by+d$

$r<0$ олдугда, бу кәмијјәтләр арасында мәнфи корреләсија (х-ын азалмасы (артмасы) илә у артыр(азалыр)); $r>0$ исә, мүсбәт корреләсија әлагәсинин олмасына (x азалырса(артырса), y дә азалыр (артыр)) дәлаләт едир. Х вә У арасындакы дүзхәтли корреләсија әлагәси там шәкилдә регресија тәнлији илә ифадә олунур:

$$(У-M[У])=\rho_{\frac{y}{x}}(X-M[X]) \tag{3.9}$$

вә ја

$$У=M[У]+\rho_{\frac{y}{x}}\cdot(X-M[X]) \tag{3.10}$$

Бурада, $\rho_{\frac{y}{x}}$ - әдәди У-ни Х кәмијјәтинә көрә регресија әмсалыдыр вә ашағыдакы дүстурла һесабланыр

$$\rho_{y/x} = r \cdot \frac{\sigma_y}{\sigma_x} \qquad (3.11)$$

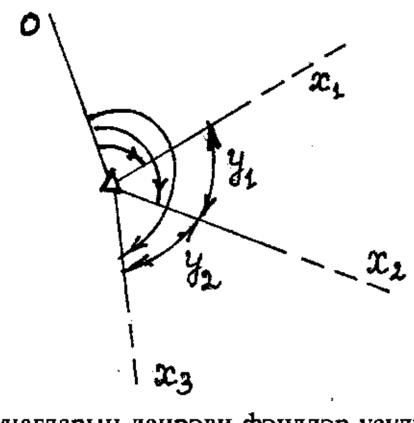
Аналожи гајда илә, Х-ын У-ә көрә регресија тәнлији јазылыр:

$$X = M[X] + \rho_{\frac{x}{y}} \cdot (У - M[У]) \qquad (3.12)$$

Бу һалда, регресија әмсалы

$$\rho_{x/y} = r \cdot \frac{\sigma_x}{\sigma_y} \quad \text{олар} \qquad (3.13)$$

Мәсәлә 3.1. Исбат един ки, даирәви фәндләр үсулу илә өлчүлмүш ики $У_1$ вә $У_2$ бучаглары арасындакы коррелјасија әмсалы r =-0,5 -ә бәрабәрдир (шәкил3.2). Бу бучаглар арасында коррелјасија әлагәсинин олмасы сәбәбини көстәрин вә мүвафиг регресија тәнлијини гурун.



Шәкил 3.2. Бучагларын даирәви фәндләр үсулу илә өлчүлмәси.

Һәлли: Шәкил 3.2-дән көрүндүјү кими, $У_1$ вә $У_2$ бучагларыны X_1, X_2 вә X_3 истигамәтләринин көмәји илә ашағыдакы ифадәләрдән тапа биләрик

$$У_1 = X_2 - X_1,$$
$$У_2 = X_3 - X_2$$

Бу бучаглар үмуми X_2 тәрәфинә малик олдуғундан , онлар арасында коррелјасија әлагәси јаранаҹагдыр вә мүвафиг r_{y_1,y_2} коррелјасија әмсалы үмуми (3.6) дүстуруна әсасән белә тапылар

$$r_{y_1y_2} = \frac{K_{y_1,y_2}}{\sigma_{y_1} \cdot \sigma_{y_2}},$$

бурада

$$K_{y_1y_2} = M[y_1y_2] - M[y_1]M[y_2].$$

Сонра ријази көзләмәнин ујғун хассәләриндән истифадә едәрәк (бах, дүстурлар(2.11)-(2.14)), мәсәләнин һәллини тә'мин едән хүсуси ријази көзләмәләр үчүн белә ифадәләр аларыг:

$$y_1 \cdot y_2 = x_2x_3 - x_1x_3 - x_2^2 + x_1x_2;$$

$$M[y_1y_2] = M[x_2x_3] - M[x_1x_3] - M[x_2^2] + + M[x_1x_2]$$

$$M[y_1] = M[x_2] - M[x_1];$$

$$M[y_2] = M[x_3] - M[x_2];$$

$$M[y_1]M[y_2] = M[x_2]M[x_3] - M[x_1]M[x_3] -$$

$$- M^2[x_2] + M[x_1]M[x_2].$$

Хүсуси ријази көзләмәләр үчүн јухарыда алынмыш ифадәләри нәзәрә алмагла, $K_{y_1y_2}$ гарышыг моментинин һесабланмасыны белә бир дүстурла һәјата кечирә биләрик.

$$K_{y_1y_2} = M[x_2]M[x_3] - M[x_1]M[x_3] - M[x_2^2] +$$

$$+ M[x_1]M[x_2] - M[x_2]M[x_3] + M[x_1]M[x_3] +$$

$$+ M^2[x_2] - M[x_1]M[x_2] = M^2[x_2] - M[x_2^2] = -D_{x_2}.$$

Нәһајәт, $-D_{x_2} = -\sigma_{x_2}^2$ олдуғундан, $K_{y_1y_2} = -\sigma_{x_2}^2$.

Ејни заманда өлчүлмүш истигамәтләр бир-бириндән асылы олмајан кәмијјәтләр олдуғундан, онларын дисперсијасы үчүн јаза биләрик:

$$\sigma_{y_1}^2 = \sigma_{x_2}^2 + \sigma_{x_1}^2 \text{ вә } \sigma_{y_2}^2 = \sigma_{x_3}^2 + \sigma_{x_2}^2 .$$

Беләликлә, $r_{y_1y_2}$ коррелјасија әмсалыны белә бир ифадәдән тапарыг

$$r_{y_1y_2}=\frac{-\sigma_{x_2}^2}{\sqrt{\sigma_{x_2}^2+\sigma_{x_1}^2}\;\sqrt{\sigma_{x_3}^2+\sigma_{x_2}^2}}.$$

Әкәр $\sigma_{x_1}=\sigma_{x_2}=\sigma_{x_3}=\sigma_x$ гәбул етсәк (үмумиjjәтлә, бүтүн истигамәтләр еjни аләтлә, еjни өлчмә шәраитиндә мүшаһидә едиләрсә, чүз'и хәта илә буну демәк олар), онда

$$r_{y_1y_2}=\frac{-\sigma_x^2}{\sqrt{\sigma_x^2+\sigma_x^2}\cdot\sqrt{\sigma_x^2+\sigma_x^2}}=\frac{-\sigma_x^2}{\sigma_x\sqrt{2}\cdot\sigma_x\cdot\sqrt{2}}=\frac{-1}{2}=-0{,}5.$$

Буну да исбат етмәк тәләб олунурду. Бучаглар арасындакы регресија тәнлиjи исә, (3.10) дүстуруна әсасән ашағыдакы шәкилдә ифадә олунар.

$$y_2=M[y_2]-0{,}5\cdot\frac{\sigma_{y_2}}{\sigma_{y_1}}(y_1-M[y_1]).$$

Бурада $\sigma_{y_1}=\sigma_{y_2}$ шәртини гәбул етсәк, онда регресија тәнлиjи белә шәклә дүшәр

$$y_2=M[y_2]-0{,}5(y_1-M[y_1]).$$

ФӘСИЛ 4
ӨЛЧМӘЛӘР СӘҺВЛӘРИ НӘЗӘРИЈЈӘСИ

§22. Өлчмәләр сәһвләри нәзәријјәсинин мәсәләләри

Башга өлчмәләр кими, кеодезија өлчмәләри дә, мүәјјән сәһвләрлә мүшајәт олунур. Өлчмә сәһви дедикдә, кәмијјәтин өлчүлмүш гијмәти илә һәгиги гијмәти арасындакы фәрг баша дүшүлүр. Өлчмә заманы даһа әлверишли өлчмә методикасы вә дәгиг аләт сечмәклә өлчмә дәгиглијини јүксәлтмәк олар, јә'ни, сәһвин гијмәтини кичилтмәк олар. Лакин там сәһвсиз өлчмә нәтиҹәси әлдә етмәк гејри-мүмкүндүр. Бу о демәкдир ки, өлчмә нәтиҹәләри һәмишә бөјүк вә јахуд кичик гијмәтли сәһвләрлә тәһриф олунурлар. Она көрә дә, хүсуси тә'лиматларда өлчмә сәһвләринин мүвафиг еһтималларла јол верилән гијмәтләри көстәрилир вә ҹөл кеодезија өлчмәләри бу тәләбләрә ујғун јеринә јетирилир.

Өлчмәләр сәһвләри нәзәријјәси ашағыдакы мәсәләләрин һәлли илә мәшғулдур:

- өлчмәләр үчүн дәгиглик критеријаларынын сечилмәси вә әсасландырылмасы;
- дәгиглик критеријаларынын һесабланмасы үсулларынын ишләнмәси;
- сечилмиш дәгиглик критеријаларынын оптималлыг дәрәҹәсинин гијмәтләндирилмәси.

Ејни заманда, өлчмәләр сәһвләри нәзәријјәсиндә бир сыра суаллара да ҹаваб ахтарылыр:

- өлчмә сәһвләринин јаранма сәбәбләри вә онларын пајланма ганунларынын өјрәнилмәси;
- кобуд сәһвләрин үзәрә чыхарылмасы мәгсәди илә мүвафиг һәдд гијмәтләринин тә'јини;
- тәкрар өлчмәләрдән верилмиш кәмијјәт үчүн ән е'тибарлы еһтимал гијмәтин тапылмасы;
- өлчмә нәтиҹәләринин көзләнилән вә фактики дәгиглијинин гијмәтләндирилмәси;
- кәмијјәтләрин таразлашдырылмыш гијмәтләрин дәгиглијинин тапылмасы;

§23. Өлчмә сәһвләринин нөвләри.

Һәр һансы кәмијјәтин өлчүлмәси әмәлијјаты бу кәмијјәтин һәмин нөвдән олан вә өлчү ваһиди гәбул едилмиш башга кәмијјәтлә мүгајисәси демәкдир. Кәмијјәтин өлчү ваһиди илә мүгајисәсиндән тапылмыш гијмәти өлчмә нәтиҹәси адланыр. Өлчмә нәтиҹәләри ејни (бәрабәр) вә ја мүхтәлиф (гејри-бәрабәр) дәгигликли ола биләр. Ејни өлчмә шәраитиндә јеринә јетирилмиш өлчмәләр ејни дәгигликли, дәјишән өлчмә шәраитли өлчмәләр исә мүхтәлиф дәгигликли һесаб едилир. Өлчмә шәраити дедикдә, өлчмә нәтиҹәләринин дәгиглијинә тә'сир едән амилләр: аләтин нөвү, фәндләрин сајы, мүшаһидәчиләрин ејни олмасы вә с. мәҹму баша дүшүлүр. Өлчмә нәтиҹәләринин ејни вә ја мүхтәлиф дәгигликли олмасы өлчмә сәһвләринин гијмәтләринә әсасән дә мүәјјәнләшдирилә биләр.

Өлчүлән кәмијјәтләр өз нөвбәсиндә лазыми вә артыг (вә ја әлавә) сајда олур. Кеодезик мәсәләнин үмумән һәллини тә'мин едән минимал өлчмәләр сајы лазыми сај, мүвафиг кәмијјәтләр исә лазыми кәмијјәтләр адланыр (мәсәлән, һәр һансы үчбуҹағын һәлли үчүн елементләрин лазыми сајы үчә бәрабәрдир: бир тәрәф вә она битишик ики буҹаг; ики тәрәф вә онларын арасында галан буҹаг; үч тәрәф).

Кеодезија шәбәкәсиндә лазыми кәмијјәтләрдән (өлчмәләрдән) әлавә өлчүлмүш кәмијјәтләр артыг өлчмәләр, онларын сајы исә артыг сај адланыр (мәсәлән, үчбуҹагда өлчүлмүш дөрдүнҹү елемент артыг өлчмәдир).

Кеодезија ишләриндә артыг өлчмәләр чох бөјүк әһәмијјәт кәсб едир вә мүтләг гајдада јеринә јетирилир. Белә ки, артыг өлчмәләрин сајәсиндә өлчмә нәтиҹәләринин дүзкүнлүјү јохланылыр вә онларын кејфијјәти һаггында мүлаһизәләр јүрүтмәк имканы јараныр. Ејни заманда артыг өлчмәләрин олдуғу һалда, өлчмәләрин таразлашдырылмасы мәсәләси мејдана чыхыр вә бу мәсәләнин һәллиндән таразлашдырылан кәмијјәтләр үчүн даһа еһтимал вә е'тибарлы гијмәтләр тапылыр.

Тәҹрүбә көстәрир ки, ејни кәмијјәти бир нечә дәфә тәкрарән өлчдүкдә, өлчмә әмәлијјаты нә гәдәр дәгиг јеринә јетирилсә дә, алынмыш нәтиҹәләр өз араларында фәргләнирләр. Бу онунла изаһ едилир ки, һәр тәкрар өлчмәнин өз сәһви вардыр.Өлчмәнин һәгиги сәһви ашағыдакы дүстурла һесабланыр:

$$\theta_i = x_i - X, \qquad i = 1,2,\ldots n. \qquad (4.I)$$

бурада: x_i - кәмиjjәтин өлчүлмүш гиjмәти, X-кәмиjjәтин һәгиги гиjмәтидир.

Өлчүлән кәмиjjәтин һәгиги (дәгиг) гиjмәти чох һалларда мә'лум олмадығындан, өлчмә сәһвләрини өjрәнмәк үчүн долаjы методлардан истифадә едилир (мәсәлән, өлчмә нәтичәләринин паjланма ганунларынын тапылмасы јолу илә).

Кеодезик өлчмә нәтичәсинин өз һәгиги гиjмәтиндән меjлләнмәси чохлу саjда мәнбәләрин тә'сириндән баш верир. Лjапуновун мәркәзи һәдд теореминә (§14) әсасән, бурадан belә нәтичә чыхыр ки, кеодезик өлчмәләр нормал паjланма ганунуна табедирләр. Тәчрүбә бу нәтичәни тәсдиг едир.

Јаранма ганунаујғунлугларына көрә өлчмә сәһвләри кобуд, систематик вә тәсадүфи олур. Әкәр верилмиш шәраитдә өлчмә сәһвинин гиjмәти көзләнилән гиjмәтдән әһәмиjjәтли дәрәчәдә бөjүкдүрсә, онда бу, өлчмә нәтичәсиндә кобуд сәһвин олдуғуну көстәрир. Кобуд сәһвләр мүшаһидәчинин тәләсиклиjи, чашғынлығы вә мүшаһидә сәһви нәтичәсиндә, аләтләрин насазлығы, һава шәраитинин гәфилдән писләшмәси вә саир сәбәбләрдән баш верир. Кобуд сәһвә малик өлчмәләр јохлама өлчмәләри вә һесабламалары илә арадан галдырылыр (мәсәлән, полигон ачыглығынын јол верилән һәдди илә мүгаjисәсиндән).

Риjази көзләмәси сыфырдан әһәмиjjәтли дәрәчәдә фәргләнән елементар сәһвләрә систематик сәһвләр деjилир. Хүсуси һалларда, систематик сәһвләрин тәкрар өлчмәләрдәки гиjмәт вә ишарәләри дәjишмәз галыр. Һәр бир һалда систематик сәһвин јаранма сәбәбләри өjрәнилир вә онларын өлчмә нәтичәләринә тә'сиринин азалдылмасы, мүмкүн һалларда исә, тамамилә јох едилмәси мәгсәди илә тәдбирләр програмы һазырланыр.

Систематик сәһвләр әсасән өлчмә аләти, әтраф мүһит вә иш ичрачысы илә бағлы сәбәбләрдән баш верир. Систематик сәһвләрә мисал олараг, өлчү лентинин компаратор (еталон) сәһвини көстәрмәк олар. Бу сәһв даима, еjни заманда мәсафәнин узунлуғуна мүтәнасиб олараг өлчмә нәтичәләринә тә'сир едир.

Тәсадүфи сәһвләр риjази көзләмәси сыфырдан чүз'и фәргләнән елементар сәһвләрә деjилир. Систематик сәһвдән фәргли олараг, тәсадүфи сәһвләрин өлчмә нәтичәсинә тә'сирини јох етмәк мүмкүн деjилдир. Тәсадүфи сәһвләрә теодолитин лимб даирәсиндән көтүрүлмүш һесабат сәһвини мисал көстәрмәк олар.

Тәсадүфи сәһвләр бир чох мәнбәләрин гаршылыглы тә'сириндән јараныр. Әсас тә'сир мәнбәләринә аләт, мүшаһидәчи вә әтраф мүһитлә бағлы амилләр аиддир. Она көрә дә, өлчмә нәтичәләринә тәсадүфи сәһвләрин тә'сирини азалтмаг мәгсәди илә әсас диггәти өлчү аләтләринин ишләмә кејфијјәтинин јүксәлдилмәсинә, өлчмә үсулларынын методики чәһәтдән тәкмилләшдирмәсинә вә мүшаһидәләр үчүн ән әлверишли һава шәраитинин сечилмәсинә јөнәлтмәк лазымдыр.

Бундан башга, өлчмәләрин бир нечә тәкрар фәндләрдән тә'јини дә, мәһз тәсадүфи сәһвләрин өлчмә нәтичәләринә тә'сирини азалтмаг мәгсәди күдүр.

§ 24. Тәсадүфи сәһвләрин хассәләри.

Өлчмәләр сәһвләри нәзәријјәсиндә ики әсас постулат гәбул едилмишдир:

1) өлчмә нәтичәләриндә систематик сәһвләрин тә'сири ја јох едилмишдир (мүвафиг дүзәлишләр етмәклә), ја да, нәзәрә алынмаз дәрәчәдәдир вә өлчмәләрдә јалныз тәсадүфи сәһвләр иштирак едир;

2) кеодезик тәсадүфи сәһвләр нормал пајланма ганунуна табедир.

Бу ики постулатдан тәсадүфи сәһвләр үчүн ашағыдакы хассәләр алыныр:

1. Р еһтималы илә көстәрмәк олар ки, тәсадүфи сәһвләр мүтләг гијмәтчә $\pm t\sigma$ -јә бәрәбәр интервалда јерләшәчәкдир. Бурада, t елә бир әмсалдыр ки, онун еһтималы $P=\Phi(t)$. Мәсәлән, Р=0,67 еһтималы илә демәк олар ки, 100 өлчмә сәһвиндән 67-си σ һәддини ашмајачагдыр;

2. Мүтләг гијмәтчә бәрабәр, ишарәчә әкс олан тәсадүфи сәһвләр бәрабәрмүмкүнатлыдыр, јә'ни

$$P\{\theta > o\} = P\{\theta < o\} = \frac{1}{2} ;$$

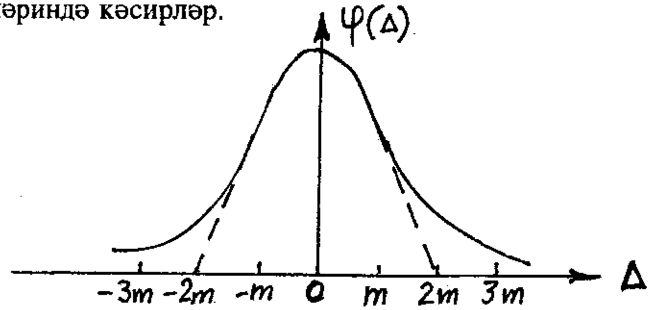
3. Мүшаһидәләрин сајы сонсуз артдыгда, тәсадүфи сәһвләрин һесаби орта гијмәти сыфра јахынлашыр, јә'ни

$$\text{еһт.}\lim_{n\to\infty}\frac{[\theta]}{n} = o \qquad ; \qquad (4.2)$$

4. Мүтләг гијмәтчә кичик олан тәсадүфи сәһвләр бөјүкләрә нисбәтән даһа тез-тез баш верир.

Тәсадүфи сәһвләрин нормал пајланма гануну графики шәкилдә сәһвләр әјриси (Гаусс әјриси) илә көстәрилир (шәкил 4.1). Гаусс әјриси ашағыдакы хассәләрә маликдир:

– $\varphi(\theta)$ чүт функсијадыр, јә'ни $\varphi(-\theta) = \varphi(\theta)$ вә онун графики ординат охуна нәзарән симметрикдир;
– Гаусс әјриси абсис охундан јухарыда јерләшир;
– Гаусс әјриси θ = о нөгтәсиндә максимум гијмәтә маликдир;
– Әјри асимптотик олараг θ охуна јахынлашыр. Онун ики кечид нөгтәси вардыр: бири $\varphi(\theta)$ охундан солда, о бири исә, сағда. Кечид нөгтәләринин абсисләри $\theta = \pm\sigma$;
– Кечид нөгтәләриндә әјријә тохунанлар абсис охуну $\theta = \pm 2\sigma$ нөгтәләриндә кәсирләр.



Шәкил 4.1. Гаусс әјриси

§ 25. Өлчмәләрин дәгиглијинин гијмәтләндирилмәси.

Һәр һансы өлчмә нәтичәсинин дәгиглијини гијмәтләндирмәк үчүн һәмин кәмијјәтин һәгиги гијмәтиндән һесабланмасы мүмкүн олан мејиллијини тә'јин етмәк лазымдыр. Өлчмә нәтичәсинин һәгиги мејллији (Θ) ики топлананын: өлчмә нәтичәсинин (x) өз ријази көзләмәсиндән $M[x]$ тапылан $\xi = x - M(x)$ вә ријази көзләмәнин өзүнүн (X) һәгиги гијмәтдән олан $\delta = M(x) - X$ мејлликләри чәминдән ибарәтдир, јә'ни

$$\theta = \xi + \delta . \qquad (4.3)$$

(4.3) дүстурунда биринчи топланан тәсадүфи, икинчи исә систематик сәһвләрин тә'сирини көстәрир.

Ҝеодезик өлчмәләрин әсас дәгиглик көстәричиси (критеријасы) орта квадратики сәһв гәбул едилмиш вә m һәрфи илә ишарә едилир. Һәгиги мејллијин орта квадратики сәһви ашағыдакы дүстурла тә'јин едилир

$$m^2 = M(\theta^2) \tag{4.4}$$

Бу дүстурда θ-нын (4.3) ифадәси илә верилмиш гијмәтини јазыб вә $M[\xi]=0$ олдуғуну нәзәрә алсаг (бах, дүстур (4.2)), аларыг

$$m^2 = M(\xi^2) + M(\delta^2) \tag{4.5}$$

Бурада, биринчи топланан тәсадүфи кәмијјәтин квадрат стандарты, икинчи исә δ систематик кәмијјәтинин стандартыдыр, јә'ни

$$M(\xi^2) = m_\Delta^2 \qquad \text{вә} \qquad M(\delta^2) = m_\delta^2 \ .$$

Бу дејиләнләрлә, (4.5) дүстуру белә шәклә дүшәр

$$m^2 = m_\Delta^2 + m_\delta^2 \tag{4.6}$$

вә јахуд

$$m = \sqrt{m_\Delta^2 + m_\delta^2} \ . \tag{4.7}$$

Өлчүлән кәмијјәтин ријази көзләмәси вә һәгиги гијмәтләри үмумән мә'лум олмадығындан, (4.7) дүстуру илә орта квадратики сәһвин дәгиг гијмәтини тәчрүби олараг һесабламаг гејри мүмкүндүр. Лакин өлчмә нәтичәләриндән истифадә етмәклә, орта квадратики сәһвин тәгриби гијмәтини ашағыдакы дүстурла тапа биләрик

$$m \approx \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} \theta_i^2}{n}}, \tag{4.8}$$

бурада, n бәрабәрдәгигликли өлчмәләрин сајыдыр. (4.8) дүстүру Гаусс дүстүру адланыр. m_Δ-нын гијмәтини исә Бессел дүстуру илә һесаблајырлар, јә'ни

$$m_\Delta = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} \left(x_i - \bar{x}\right)^2}{n-1}} \ . \tag{4.9}$$

Бурада: x_i өлчмә нәтичәләри, $i = 1,2,3,\ldots,n$;

$\bar{x}$ һесаби ортадыр вә ашағыдакы дүстурла һесабланыр

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} \ . \tag{4.10}$$

Әкәр m вә m_Δ гијмәтләри мә'лум оларса, m_δ-ны (4.6) дүстурундан

$$m_\delta = \sqrt{m^2 - m_\Delta^2} \qquad (4.11)$$

шәклиндә тапарыг.

Өлчмәләрин дәгиглијини гијмәтләндирмәк үчүн бир сыра көмәкчи характеристикалар: орта вә еһтимал сәһвләрдән дә истифадә едилир.

Орта сәһв

$$\upsilon = M(|\xi|) \qquad (4.12)$$

ифадәси илә тә'јин олунур. Онун тәгриби гијмәтини ашағыдакы дүстурла һесабламаг олар:

$$\upsilon = \frac{\sum_{i=1}^{n} |\upsilon_i|}{n}, \qquad (4.13)$$

бурада, n - өлчмәләрин сајы; $\upsilon_i = x_i - \bar{x}$.

Орта квадратики сәһвин тәсадүфи топлананы илә орта сәһв арасында белә бир әлагә вардыр

$$m_\Delta \approx 1{,}12\upsilon. \qquad (4.14)$$

Еһтималы

$$\Phi\left(\frac{r}{m_\Delta}\right) = 0{,}5 \qquad (4.15)$$

ифадәси илә тә'јин едилән мүтләг r кәмијјәти еһтимал сәһв адланыр. Бурада, Φ - еһтималлар интегралы функсијасыдыр. Еһтимал сәһвлә орта квадратики сәһвин тәсадүфи топлананы арасындакы әлагә тәнлији

$$r \approx 0{,}67 \cdot m_\Delta \qquad (4.16)$$

шәклиндә көстәрилир.

Әкәр өлчмә нәтичәләринин һесаби ортадан олан υ_i мејлликләрини мүтләг гијмәтчә артан сырада дүзсәк, онда бу сыранын ортасында јерләшән кәмијјәт еһтимал сәһвин тәгриби гијмәти олачагдыр.

§ 26. Мүтләг вә нисби өлчмә сәһвләри.

Өлчмәнин орта квадратик (m), орта (υ), еһтимал (r) вә һәгиги (θ) сәһвләри мүтләг өлчмә сәһвләри адланыр. Мүтләг сәһвин кәмијјәтин өлчүлмүш гијмәтинә олан нисбәти исә нисби сәһв адланыр.

Тутаг ки, x һәр һансы кәмијјәтин өлчмәдән алынмыш гијмәтидир. Онда,

$$\frac{m}{x} = \frac{1}{N_1}$$ - кәмијјәтин орта квадратик нисби сәһви;

$$\frac{\upsilon}{x} = \frac{1}{N_2}$$ - орта нисби сәһв;

$$\frac{r}{x} = \frac{1}{N_3}$$ - еһтимал нисби сәһв;

$$\frac{\theta}{x} = \frac{1}{N_4}$$ - һәгиги нисби сәһвидир.

Адәтән, нисби сәһвин мәхрәчи јуварлашдырылараг, ики гијмәтли рәгәм вә сыфырлар шәклиндә јазылыр.

§ 27. Өлчмәләр функсијасынын орта квадратики сәһви.

Кеодезијада бир чох кәмијјәтләр өлчмәләр функсијасы шәклиндә тә'јин едилир (мәсәлән, мәнтәгәнин координатларына мәсафә вә бучаг өлчмәләринин функсијасы кими бахмаг олар). Өлчмәләр функсијасы сәһвинин гијмәти биләваситә өлчүлмүш кәмијјәтләрин сәһвләриндән вә функсијанын өзүнүн нөвүндән асылыдыр.

Тутаг ки, өлчмәләрин орта квадратик сәһвләри мә'лумдур вә онларын функсијасынын орта квадратик сәһвини тапмаг тәләб олунур. Бу мәсәләнин һәлли заманы ики һал ола биләр:

- өлчүлмүш кәмијјәтләр коррелә олунмушлар (бир-бири илә гаршылыглы әлагәдәдирләр);
- өлчүлмүш кәмијјәтләр коррелә олунмамышлар (әлагәдә дејилдир).

Ики вә ја бир нечә тәсадүфи кәмијјәтин һәр бир чүтү үчүн тә'јин едилмиш коррелјасија әмсалы сыфра бәрабәрдирсә, онда белә кәмијјәтләр коррелә олунмамыш, әкс һалда исә, коррелә олунмуш һесаб едилир. Мәсәлән, x, y, z тәсадүфи кәмијјәтләринин коррелә олунмамыш һалында корреліасија әмсаллары $r_{xy} = r_{xz} = r_{yz} = 0$, әкс һалда исә, $r_{xó} \neq 0$; $r_{xz} \neq 0$; $r_{óz} \neq 0$ -дир.

Беләликлә,

$$F = f(x, y, z, ..., u) \qquad (4.17)$$

чохдәјишәнли функсијасынын орта квадратики сәһвини ашағыдакы дүстурла һесабламаг олар:

а)өлчмәләрин коррелә олунмадығы һалда

$$m_F = \sqrt{\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_0^2 \cdot m_x^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_0^2 \cdot m_y^2 + \ldots + \left(\frac{\partial F}{\partial u}\right)_0^2 m_u^2} \; ; \qquad (4.18)$$

б)өлчмәләрин коррелә олундуғу һалында

$$m_F = \sqrt{\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_0^2 \cdot m_x^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_0^2 \cdot m_y^2 + \ldots + \left(\frac{\partial F}{\partial u}\right)_0^2 m_u^2 + 2\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_0 \cdot \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_0 \cdot r_{xy} \cdot m_x \cdot m_y + \ldots} \qquad (4.19)$$

(4.18)-(4-19) дүстурларында $m_x, m_y, m_z, ..., m_u$ ујғун олараг, $x, y, z, ..., u$ өлчмәләринин орта квадратик сәһвләри;

$\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_0, \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_0, \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)_0, \ldots, \left(\frac{\partial F}{\partial u}\right)_0$ - F функсијасынын биринчи дәрәчәли хүсуси төрәмәләри олуб, аргументләрин өлчүлмүш гијмәтләринә әсасән һесабланыр;

$r_{xó}, r_{xz}, z_{óz}, \ldots$ аргумент чүтләри арасындакы корреліасија кореліасија әмсалларыдыр.

Әкәр функсија

$$U = k_1 x \pm k_2 y \pm k_3 z \pm \ldots \pm k_n w \qquad (4.20)$$

шәклиндәдирсә, онда (4.18) дүстуруна әсасән m_u үчүн белә бир ифадә аларыг:

$$m_u^2 = k_1^2 m_x^2 \pm k_2^2 m_y^2 \pm k_3^2 m_z^2 \pm \ldots \pm k_n^2 m_w^2, \qquad (4.21)$$

бурада: $k_1, k_2, .., k_n$ сабит әмсаллар, $x, y, z, ..., w$ бир-бириндән асылы олмајан өлчмәләрдир.

(4.21) ифадәсиндән истифадә етмәклә, садә һесаби ортаны квадратик сәһв дүстуруна чыхармаг олар. Бу мәгсәдлә (4.10) ифадәсини ашағыдакы шәкилә салаг

$$\bar{x} = \frac{x_1}{n} + \frac{x_2}{n} + \ldots + \frac{x_n}{n} \qquad (4.10')$$

$(4.10)'$ -дән көрүндүјү кими, $\bar{x}$ һесаби орта гијмәти $x_1, x_2, x_3 \ldots$ кәмијјәтләринин хәтти функсијасыдыр. Фәрз едәк ки, бу кәмијјәтләр бир-бириндән асылы дејилдир. Онда (4.21) дүстуруна әсасән аларыг

$$M^2 = \frac{1}{n^2} m_1^2 + \frac{1}{n^2} m_2^2 + \ldots + \frac{1}{n^2} m_n^2 \quad , \qquad (4.22)$$

бурада: $m_1, m_2, \ldots m_n$ - ујғун $x_1, x_2, \ldots x_n$ өлчмәләринин орта квадратики сәһвләри; M- һесаби ортанын орта квадратики сәһвидир.

Әкәр бүтүн x_i өлчмәләри ејни дәгигликлә мүшаһидә едилмишсә, јә'ни $m_1 = m_2 = \cdots = m_n = m$-дирсә, онда јаза биләрик:

$$M = \frac{m}{\sqrt{n}}. \qquad (4.23)$$

(4.23) дүстуриндан беләә нәтичә чыхыр ки, һесаби ортанын орта квадратики сәһви тәк өлчмәнин ујғун сәһвиндән $\sqrt{n}$ дәфә кичикдир.

Мәсәл 4.1. Тригонометрик нивелирләмәдә тәгриби һесабламалар заманы нисби јүксәклији $h = s \cdot tg\alpha$ дүстуру илә һесаблајырлар. Әкәр үфүги мәсафә S=143,5м; мејл бучағы $\alpha = +2^0 30^1$; h=6,23м; $m_s = 0{,}5м$; $m_\alpha = 1',0$-дирсә, нисби јүксәклијин m_h орта квадратики сәһвини тапын.

Һәлли: Мәсафә (S) вә бучаг (α) өлчмәләри өз араларында коррелә олунмадығындан, (4.18) дүстуруна әсасән m_h-ын һесабланмасы үчүн беләә бир ифадә аларыг

$$m_h = \sqrt{m_s^2 tg^2\alpha + \frac{s^2}{\cos^4\alpha} \cdot \frac{m_\alpha^2}{\rho^2}} \; .$$

Бу ифадәдә аргументләрин верилмиш гијмәтләрини јазсаг,

$$m_h = \sqrt{0{,}5^2 \cdot 0{,}044 + \frac{144^2}{0{,}997^2} \cdot \left(\frac{1'}{3438'}\right)^2} \; ,$$

$$m_h = 4{,}8см.$$

§28. Еjни кəмиjjəтин бəрабəрдəгигликлə өлчмə нəтичəлəринин таразлашдырылмасы.

Билдиjимиз кими, кеодезик өлчмəлəр тəкрарланмагла jеринə jетирилир. Өлчмə шəраитинин дəjишмəдиjи һалларда алынмыш өлчмə нəтичəлəрини бəрабəр дəгигликли һесаб едирлəр..

Фəрз едəк ки, һəгиги гиjмəти X олан һəр һансы кеодезик кəмиjjəт n дəфə өлчүлəрəк, бəрабəрдəгигликли $x_1, x_2, \ldots x_n$ нəтичəлəри алынмыш вə бу нəтичəлəрин биркə таразлашдырылмасындан һəмин кəмиjjəт үчүн əн е'тибарлы гиjмəтин тапылмасы тəлəб олунур. Аjдындыр ки, X кəмиjjəти үчүн е'тибарлы нəтичə, онун һəгиги гиjмəтинə əн jахын еһтимал олунан гиjмəт олачагдыр вə бу кəмиjjəтин еһтимал гиjмəти адланыр. Мə'лумдур ки, өлчмə нəтичəсинин еһтимал гиjмəтə jахынлыг дəрəчəси, онун ξ вə δ меjлликлəри илə характеризə едилир (бах, § 25). Еjни заманда, δ топлананынын өлчмə просесиндə дəjишмəз галдығыны jада салсаг (δ-систематик хəтадыр), əн еһтимал гиjмəтин тапылмасы мəсəлəси ξ топлананынын, jə'ни, риjази көзлəмəjə нəзəрəн меjллиjин тапылмасына кəтирилдиjини көрəрик. Лакин тəчрүби олараг, риjази көзлəмəнин өзүнү тə'jин етмəк мүмкүн олмадығындан, (кəмиjjəтин һəгиги гиjмəтини билмəк тəлəб олунур), онун əвəзиндə һесаби орта гиjмəт тапылыр вə сонра исə, орта һесабиjə нəзəрəн ξ меjилликлəри һесабланыр.

Бəрабəрдəгигликли өлчмə нəтичəлəри үчүн һесаби орта гиjмəти

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$$

дүстуру илə тə'jин едилир. Һесаби ортанын өзүнүн һесабланма дəгиглиjини мүəjjəнлəшдирəк. Үмумиjjəтлə, дəгиглиjин тə'jини дедикдə, өлчүлмүш кəмиjjəтин һəгиги гиjмəтинин jерлəшдиjи интервалын (е'тибарлылыг сəрһəдлəринин) мүəjjəнлəшдирилмəси баша дүшүлүр. Е'тибарлылыг интервалынын гурулмасы үчүн еһтимал гиjмəтин (M_1) орта квадратики сəһвинибилмəк лазымдыр, jə'ни

$$M_1^2 = M_\Delta^2 + m_\delta^2 \qquad (4.24)$$

Бурада: M_Δ - һесаби ортанын орта квадратики сəһви (тəсадүфи топланан);

m_δ - риjази көзләмәнин систематик тә'сирдән баш верән орта квадратики сәhвидир.

(4.24) дүстурунда M_Δ-нын əвәзиндә онун (4.23) дүстуру илә ифадә олунмуш гиjмәтини jазсаг, алырыг

$$M_1^2 = \frac{m_0^2}{n} + m_\delta^2. \qquad (4.25)$$

(4.25) дүстурундан көрүндүjү кими, өлчмә дәгиглиjини jүксәлтмәк мәгсәди илә тәкрар өлчмәләрин (n) саjынын артырылмасы муәjjән һәддән сонра, jә'ни

$$\frac{m_\Delta^2}{n} < m_\delta^2 \qquad (4.26)$$

олдугда, еффект вермир. Она көрә дә, үмуми мүшаһидә програмы бир нечә сыраjа бөлүнүр. Һәр бир өлчмәләр сырасы мүхтәлиф өлчмә шәраитләриндә (сәһәр вә ахшам мүшаһидәләри, дүз вә әкс истигамәтли өлчмәләр вә с.) jеринә jетирилир. Бу заман фәрз едилир ки, систематик тә'сирин мүхтәлиф өлчмә сыраларына тә'сири тәсадүфи характер дашыjыр. Белә олан һалда, сәһвләр нәзәриjjәсиндә көстәрилир ки, jекун нәтичәjә систематик тә'сирин гиjмәти $\sqrt{k}$ дәфә азалараг, $m_\delta / \sqrt{k}$ -ja бәрабәр олачагдыр. Бурада, К-сыраларын саjыдыр. Онда, К саjда сыралар үчүн һесаби ортанын орта квадратики сәһви ашағыдакы дүстурла һесабланар:

$$M^2 = \frac{m_\Delta^2}{n} + \frac{m_\delta^2}{k}. \qquad (4.26)$$

Һесаби ортанын (M) орта квадратики сәһвинитә'jин етдикдән сонра, өлчүлмүш кәмиjjәтин һәгиги гиjмәти үчүн етибарлылыг сәрһәдләри гурулур. Геjд едәк ки, өлчмәләрин саjы $n \geq 20$ олдугда, етибарлылыг сәрһәдләри нормал паjланма ганунуна әсасән (4.26) дүстурундан истифадә етмәклә, n < 20 һалында исә Стjудент паjланмасына көрә гурулур.

Таразлашдырма һесабламалары мүвафиг jохламаларла һәjата кечирилир. Һесаби ортанын һесабланма дүзкүнлүjү

$$\upsilon_i = \bar{x}_i - \bar{x}, \qquad (i = 1,2\ldots,n) \qquad (4.27)$$

меjлликләри илә муәjjәнләшдирилир. Белә ки, ашағыдакы бәрабәрлик доғру олмалыдыр

$$[\upsilon]=[x]-\bar{x}\cdot n \quad .$$

Бурада, [ ] К.Гаусс тәрәфиндән гәбул едилмиш чәбри чәм ишарәсидир.

Ејни заманда $\bar{x}\cdot n=\frac{[x]}{n}\cdot n=[x]$ олдуғундан, јухарыдакы бәрабәрлијә әсасән, белә бир јохлама ифадәси јаза биләрик

$$[\upsilon]=0 \qquad (4.28)$$

Лакин, һесаби орта һесабланаркән, јуварлаглашдырылма апарылдығындан, (4.28) бәрабәрлији дәгиг јеринә јетирилмир. Она корә дә, (4.28) јохлама ифадәсинин әвәзиндә ашағыдаки ифадә даһа доғру олачагдыр

$$[\upsilon^0]=-\Delta_0\cdot \mathrm{n} \ , \qquad (4.29)$$

бурада : $\Delta_0=\bar{x}_0-\bar{x}$ - јуваглашдырма сәһви; (4.30)

$\bar{x}_0$ -һесаби ортанын јуварлаглашдырылмыш гијмәти;

$$\upsilon_i=x_i-\bar{x}_0=\upsilon_i-\Delta_0, \qquad (i=1,2,....n). \qquad (4.31)$$

Чох заман һесабламалары асандлашдырмаг мәгсәди исә, һесаби ортаны белә бир ифадәдән тапырлар

$$\bar{x}=x_0+\frac{[\varepsilon]}{n}, \qquad (4.32)$$

бурада: $\varepsilon_i=x_i-x_0, \qquad (i=1,2,\dots,n);$ (4.33)

x_0 һесаби ортанын тәгриби гијмәтидир.

Адәтән, x_0 гијмәтчә ән кичик өлчмә нәтичәсинә бәрабәр көтүрүлүр. (4.32) вә (4.33) дүстурларындан даһа бир јохлама ифадәси чыхыр

$$[\upsilon^2]=[\varepsilon^2]-\frac{[\varepsilon]^2}{n}. \qquad (4.34)$$

Беләликлә, бәрабәрдәгигликли өлчмә нәтичәләринин таразлашдырылмасы ашағыдакы ардычылыгла һәјата кечирилир:

1) x_0 гијмәтинин сечилмәси вә (4.33) дүстуру илә ε_i-ләрин һесабламасы;
2) (4.32) дүстуру илә $\bar{x}$-нын вә (4.30) дүстуру илә исә Δ_0-ын һесабланмасы ($\bar{x}_0$ гијмәтинин кәср һиссәси x_i- дән бир пиллә

бөјүк көтүрүлүр);

3) υ_i^0-ләрин тапылмасы ((4.31)) дүстуру);

4) (4.29) дүстуру илә јохлама һесабламалары;

5)[υ^{0^2}] вә [ε^2] чәмләринин тапылмасы;

6)(4.34) дүстуру илә јохлама һесабламасы;

7) ваһид өлчмә үчүн орта квадратики сәһвин һесабланмасы

$$m_\Delta = \sqrt{\frac{[\upsilon^{0^2}]}{n-1}}; \qquad (4.35)$$

8) һесаби ортанын орта квадратики сәһвинин һесабланмасы

$$m_{\bar{x}} = M_\Delta = \frac{m_\Delta}{\sqrt{n}}; \qquad (4.36)$$

Сонра

$$m_m \approx \frac{m}{\sqrt{2(n-1)}}; \qquad (4.37)$$

$$m_{M_\Delta} \approx \frac{M_\Delta}{\sqrt{2n}}. \qquad (4.38)$$

Бурада: m_m - орта квадратик сәһвин орта квадратики сәһви;

m_{M_Δ} - һесаби ортанын орта квадратик сәһвинин орта квадратики сәһвидир.

10) Нәһајәт, етибарлылыг интерваллары гурулур:

-һәгиги гијмәт үчүн: $\tilde{x} - t_\beta m_{\bar{x}} \le X \le \bar{x} + t_\beta m_{\bar{x}}$; (4.39)

-стандарт үчүн: $\gamma_1 m \le \sigma \le \gamma_2 m$;

(4.40)

-һесаби ортанын:

стандарты үчүн: $\gamma_1 m_{\bar{x}} \le \sigma_{\bar{x}} \le \gamma_2 m_{\bar{x}}$. (4.41)

(4.39) - (4.41) дүстурларында t_β, γ_1 вә γ_2 әмсаллары еһтималла бағлы олуб, мүвафиг чәдвәлләрдән тапылыр (бах, әлавә V).

Мәсәлә 4.2. Чәдвәл 4.1-дә ејни бучағын он ики фәндлә бәрабәр дәгигликлә өлчмә нәтичәләри верилмишдир. Онларын ријази таразлашдырылмасыны һәјата кечирин.

Һәлли: Өлчмәләр ејни кәмијјәтин бәрабәр дәгигликли өлчү нәтичәләри олдуғундан, онларын таразлашдырылмасы §28-дә көстәрилмиш ардычыллыгда вә дустурларла һәјата кечирилмәлидир. Бу заман һесабламалары јығчам олараг чәдвәл 4.1 шәклиндә јазмаг даһа мәгсәдәујғундур.

Чәдвәл 4.1

Өлчмәнин сыра №-си	Өлчмә нәтичәләри x_i	ε_i ($''$)	ε_i^2	ϑ_i^{0}	ϑ_i^{02} ($''$)
1	$57^0 23' 44''$	4	16	-0,7	0,49
2	40	0	0	- 4,7	22,1
3	43	3	9	- 1,7	2,89
4	45	5	25	+0,3	0,09
5	46	6	36	+1,3	1,69
6	43	3	9	-1,7	2,89
7	48	8	64	+3,3	10,9
8	45	5	25	+0,3	0,09
9	48	8	64	+3,3	10,9
10	46	6	36	+1,3	1,69
11	47	7	49	+2,3	5,29
12	41	1	1	-3,7	13,7
x_0	$57^0 23' 40''$	+56	334	-12,5	72,9
$\bar{x}$	$57^0 23' 44,666''$			+12,1''	
$\bar{x}_0$	$57^0 23' 44,70''$			-0,4''	
$\Delta_0 \approx$	+0,03				

Һәлл:

Јохлама 1) $[\upsilon^0] = -\Delta_0 \cdot n = -0,''03 \cdot 12 \approx -0,4''$

$$2) \left[\upsilon_0^2\right] = \left[\varepsilon^2\right] - \frac{[\varepsilon]^2}{n} = 334 - \frac{56^2}{12} = 72$$

Дәгиглијин гијмәти: $1)\ m = \sqrt{\frac{72,9}{11}} = 2,6''; \ m_m = 0,55''$

$$2)\ M = 2,6/\sqrt{12} = 0,74'' \quad m_M = 0,16''$$

Стјудент чәдвәлиндә β=0,90 вә r=11 гијмәтләринә (бу мисалда, сәрбәстлик дәрәчәси r=n-1=11) t_β=2,20 әмсалы ујғун көлдијиндән,бучағын һәгиги гијмәтинин е'тибарлылыг интервалы p=0,90 еһтималла ашағыдакы шәкилдә јазылыр

$$57^0 23' 43,04'' < X < 57^0 23' 46,30''.$$

σ вә σ_x-үчүн дә, β=0,90 вә r=11 гәбул етсәк, χ^2 чәдвәлиндән χ^2_1=19,7; χ^2_2=4,4 гиjмәтләринә уjғун γ_1=0,743 вә γ_2=1,581 тапарыг. Бурадан (4.40) вә (4.41) дүстурларына әсасән ашағыдакы мүвафиг е'тибарлыг интерваллары гурулур:

$$1{,}92'' < \sigma < 4{,}06''$$

$$0{,}55'' < \sigma_{\bar{x}} < 1{,}17''.$$

§29. Бәрабәр дәгигликли олчмәләр фәргинә көрә дәгиглиjин гиjмәтләндирмәси.

Бир чох һалларда, еjнинөв кеодезик кәмиjjәтләрдән һәр бири ики дәфә тәкрарланмагла өлчүлүр. Мәсәлән, теодолит кедиши гуруларкән тәрәфләрдән һәр биринин узунлуғу дүз вә әкс истигамәтләрдә өлчүлүр.

Тутаг ки, n сајда $X_1, X_2, \ldots, X_n$ кеодезик кәмиjjәтләринин өлчүлмәсиндән ашағыдакы нәтичәләр алынмышдыр:

- биринчи өлчмәдән $x_1', x_2', x_3', \ldots, x_n'$;
- икинчи өлчмәдән $x_1'', x_2'', x_3'', \ldots, x_n''$.

Бу һалда, өлчмә нәтичәләринин дәгиглиjинин гиjмәтләндирилмәси мәгсәди илә, онлар арасындакы мүвафиг

$$d_i = x_i' - x_i'' \qquad (4.42)$$

фәргләриндән истифадә едилир. Белә ки, d_i фәргләринә систематик сәһвләрдән азад вә һәгиги гиjмәти сыфыр олан кәмиjjәтин һәгиги сәһвләри кими бахылыр. Сонра Гаус дүстуруна әсасән онларын орта квадратики сәһви һесабланыр

$$m_d = \sqrt{\frac{[d^2]}{n}} , \qquad (4.43)$$

бурада, n - өлчмә фәргләрин сајыдыр.

Өлчмәләр фәргинин m_d сәһвиндән истифадә едәрәк, ваһид өлчмәнин орта квадратик сәһвини тапмаг чәтин деjилдир:

$$m_{x_i} = \frac{m_d}{\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{[d^2]}{2n}} . \qquad (4.44)$$

Һесабы ортанын, јә'ни, $\overline{x}_i = (x_i' + x_i'') / 2$ гијмәтинин орта квадратики сәһви исә белә бир дүстур илә мүәјјән едилир

$$m_{\bar{x}} = m_{x_i} / \sqrt{2} = \frac{1}{2}\sqrt{[d^2]/n} \quad . \tag{4.45}$$

Лакин чох заман (4.42) дүстуру илә һесабланмыш d_i гијмәтләри систематик сәһвләрдән там азад олмур. Өлчмәләрдә систематик галығын олмасыны

$$\delta = [d]/n \tag{4.46}$$

һесаби орта гијмәтинин сыфырдан әһәмијјәтли мејлләнмәси илә ајырд етмәк олар. Белә һалларда,

$$d_i' = d_i - \delta \tag{4.47}$$

фәргләринә d_i гијмәтләринин һесаби ортадан олан мејллији кими баха биләрик. Ајдындыр ки, бу һалда орта квадратик сәһвин һесабланмасы үчүн Бессел дүстурундан, јә'ни

$$m_d = \sqrt{\frac{[d'^2]}{n-1}} \tag{4.48}$$

истифадә едиләчәкдир. (4.48) дүстуруну (4.44)-дә нәзәрә алсаг, систематик тә'сирин галдығы ваһид өлчмә нәтичәсиндә орта квадратик сәһв гијмәти белә тапылыр.

$$m_{x_i} = \sqrt{\frac{[d'^2]}{2(n-1)}} \quad . \tag{4.49}$$

Јохлама:

$$[d'] = -n\beta \ , \tag{4.50}$$

бурада, $\beta = \delta_{\text{јуварлаг}} - \delta$.

Әкәр

$$\|[d]\| \le 2{,}5[\|d\|] / \sqrt{n} \tag{4.51}$$

шәрти өдәнирсә, онда һесаб етмәк олар ки, d_i фәргләри систематик тә'сирләрдән азаддыр вә дәгиглијин гијмәтләндирилмәси мәгсәдилә ((4.43)-(4.45)) дүстурларындан истифадә етмәк олар. Әкс һалда, дәгиглик һесабламалары ((4.48)-(4.50)) дүстурлары илә апарылмалыдыр.

Мәсәлә 4.3 Чәдвәл 4.2-дә нивелирин ики һоризонтунда јеринә јетирилмиш нивелирләмә нәтичәләри верилмишдир. Бу өлчмә нәтичәләринә әсасән нивелир стансијалары арасында јүксәлишин бир һоризонтдан, еләчә дә, ики һоризонтдан тапылан орта гијмәти үчүн орта квадратик сәһвини тапын.

Һәлли: Өлчмә нәтичәсиндә галыг систематик сәһвләрин јохланмасы заманы, ајырд едилмишдир ки, (4.51) бәрабәрсизлији өдәнмир, јәни $\|[d]\| = 24 > 19$. Бу исә о демәкдир ки, d_i фәргләриндә систематик тә'сирләр вардыр. Она көрә дә, һесабламалар (4.46)-(4.50) дүстурлары илә апарылмышдыр. Мә'лум олмушдур ки, систематик тә'сир $\delta = \frac{20}{10} = +2$мм гијмәтинә маликдир. Һесабламаларын галан һиссәси јығчам шәкилдә чәдвәл 4.2-дә верилмишдир.

Чәдвәл 4.2

Нивелирләмә стансијаларынын нөмрәси	Биринчи һоризонт, x_i' м	Икинчи һоризонт, x_i'', м	d ,мм	$d' = d - \sigma$	d'^2 ,мм^2
1	+1,273	+1,270	+3	+1	1
2	+0,987	+0,988	-1	-3	9
3	+1,069	+1,065	+4	+2	4
4	+0,542	+0,542	0	-2	4
5	+0,768	+0,766	+2	0	0
6	+0,895	+0,891	+4	+2	4
7	+1,166	+1,167	-1	-3	9
8	+1,304	+1,302	+2	0	0
9	+1,198	+1,194	+4	+2	4
10	+0,484	+0,481	+3	+1	1
	$[\|d\|] = 24$		+22 -2 $\sum d = +20$	+8 -8 $\sum d'_i = 0$	36

Беләликлә, (4.49) дүстуруна көрә, нисби јүксәклијин бир һоризонтдан тапылмыш орта квадратик сәһви

$$m_{x_i} = \sqrt{\frac{[d'^2]}{2(n-1)}} = \sqrt{\frac{36}{18}} = 1,41 \text{ мм.}$$

Ики һоризонтдан тапылмыш орта гијмәтин орта квадратики сəhви исə

$$m_{\bar{x}} = \frac{m_{x_i}}{\sqrt{2}} = \frac{1{,}41}{\sqrt{2}} = 1{,}00 \text{ мм}$$

олар.

§30. Өлчмə чəкиси анлајышы. Өлчмəлəр функсијасы чəкисинин hесабланмасы.

Гејри јекчинс, елəчə дə, гејри-бəрабəр дəгигликли өлчмəлəрин биркə таразлашдырылмасы өлчмə чəкиси адланан көмəкчи əдəдлəрдəн истифадə етмəклə həјата кечирилир. Өлчмə чəкиси P_i ашағыдакы дүстурла тəʼјин едилир

$$p_i = \frac{\sigma_0^2}{\sigma_i^2} \quad , \tag{4.52}$$

бурада: $\sigma_0^2 = c = const$ -бүтүн өлчмəлəр үчүн сабит олуб, ихтијари сечилə билəр; σ_i^2 - өлчмəнин дисперсијасыдыр.

σ_0^2 -нин маhијјəтини ачаг. Əкəр $P_i = 1$ оларса, онда (4.52) дүстурундан $\sigma_0^2 = \sigma_i^2$ аларыг. Бу, о демəкдир ки, σ_0^2 чəкиси ваhид олан өлчмəнин дисперсијасыдыр (гыса шəкилдə «ваhид чəки дисперсијасы» адланыр). Чəкиси $p=1$ олан өлчмə həгигəтдə ола да билəр, олмаја да.

Адəтəн, σ_i^2 -нин гијмəтинин тəчрүби јолла тəʼјини мүмкүн олмадығындан (чүнки өлчмəлəрин həгиги гијмəтини билмəк лазым кəлир), өлчмə чəкиси тəгриби олараг

$$P_i = \frac{\mu^2}{m_i^2} \tag{4.53}$$

дүстуру илə hесабланыр. Бурада: m_i нөмрəси i олан өлчмəнин орта квадратик сəhви, μ исə ваhид чəкинин орта квадратик сəhвидир (σ_0-ын əвəзиндə тəчрүби олараг тапылыр вə јахуд гəбул едилир). (4.53) дүстуру илə P_i-ни hесаблајаркəн, m_i гијмəтинин еʼтибарлы тəʼјини тəлəб едилир. Она көрə дə, m_i систематик тəʼсирдəн узаг олуб, əн азы $n > 8$ сајда өлчмəдəн hесабланмалыдыр.

Бир чох hалларда, σ_0 (вə јахуд μ) гијмəтинин ихтијари сечилмəсиндəн истифадə едəрəк, P_i өлчмə чəкисини σ_i-ни (вə јахуд m_i) һесабламадан тапырлар. Мəсəлəн, узунлуг өлчмəлəри заманы P_{s_i} өлчмə чəкиси ашағыдакы гајда илə тə'јин едилир.

Фəрз едəк ки, узунлуғу 1м олан мəсафəнин стандарты σ_{1m} - дир. Онда, S_i узунлуғуна малик мəсафə үчүн $\sigma^2_{S_i} = \sigma^2_{1m} \cdot S_i$ олар. (4.52) дүстуруна əсасəн јаза билəрик

$$P_{s_i} = \frac{\sigma_0^2}{\sigma^2_{1m} \cdot S_i} \quad . \tag{4.54}$$

Бурада ваһид чəки стандартынын ихтијари сечилмəсиндəн бəһрəлəнəрəк, $\sigma_0 = \sigma_{1m}$ гəбул етсəк (4.54) дүстуру белə шəклə дүшəр

$$P_{s_i} = 1/S_i . \tag{4.54'}$$

Өлчмəлəр функсијасынын чəкиси дə аналожи гајдада тə'јин едилир. Белə ки, $F = f(x, y, z, ..., u)$ функсијасы үчүн

$$P_F = \frac{\mu^2}{m_F^2} \tag{4.55}$$

Бурада: $m_F - (F)$ функсијасынын орта квадратик сəһвидир. (4.55) дүстурундан јаза билəрик

$$m_F = \frac{\mu}{\sqrt{P_F}} . \tag{4.56}$$

Белəликлə, (4.56) дүстурундан көрүндүјү кими өлчмəлəр функсијасынын дəгиглијинин гијмəтлəндирилмəси мəсəлəси ики һиссəдəн ибарəтдир: ваһид чəки сəһвинин (μ) тə'јини вə функсија чəкисинин һесабланмасы (P_F).

Функсија чəкисинин тə'јини өлчмəлəр сəһвлəри нəзəријјəсинин əсас мəсəлəлəриндəндир. Əкəр (4.18) дүстурунун һəр ики тəрəфини μ^2-а бөлүб вə $P_i = \dfrac{\mu^2}{m_i^2}$ олдуғуну нəзəрə алсаг, функсија чəкисинин һесабланмасы үчүн белə бир ифадə алырыг

$$\frac{1}{P_F}=\left(\frac{\partial F}{\partial X}\right)_0^2\cdot\frac{1}{P_x}+\left(\frac{\partial F}{\partial Y}\right)_0^2\cdot\frac{1}{P_y}+\ldots+\left(\frac{\partial F}{\partial U}\right)_0^2\cdot\frac{1}{P_u}. \qquad (4.57)$$

Өлчмә чәкисинә тәрс олан кәмиjjәт тәрс чәки адланыр вә адәтән q_i һәрфи илә ишарә едилир, jә'ни

$$q_i=\frac{1}{P_i} \quad . \qquad (4.58)$$

Тәрс чәкиләрлә (4.57) дүстуру белә шәклә дүшәр

$$q_F=\left(\frac{\partial F}{\partial X}\right)_0^2\cdot q_x+\left(\frac{\partial F}{\partial Y}\right)_0^2\cdot q_y+\ldots+\left(\frac{\partial F}{\partial U}\right)_0^2\cdot q_u \qquad (4.59)$$

(4.59) дустуру аргументләрин коррелә олунмадығы һалында доғрудур.

Әкәр функсиjанын аргументләри өз араларында бир-бири илә коррелә олунмушларса, онда бу һал үчүн (4.19) дүстуруна әсасән jаза биләрик

$$\frac{1}{P_F}=\left(\frac{\partial F}{\partial X}\right)_0^2\cdot\frac{1}{P_x}+\left(\frac{\partial F}{\partial Y}\right)_0^2\cdot\frac{1}{P_y}+\ldots+\left(\frac{\partial F}{\partial U}\right)_0^2\cdot\frac{1}{P_u}+$$
$$+2\cdot\left(\frac{\partial F}{\partial X}\right)_0\cdot\left(\frac{\partial F}{\partial Y}\right)_0\cdot r_{xy}\cdot\frac{1}{\sqrt{P_xP_y}}+\ldots \qquad (4.60)$$

вә jахуд, тәрс чәкиләрлә

$$q_F=\left(\frac{\partial F}{\partial X}\right)_0^2\cdot q_x+\left(\frac{\partial F}{\partial Y}\right)_0^2\cdot q_y+\ldots+\left(\frac{\partial F}{\partial U}\right)_0^2\cdot q_u+$$
$$+2\cdot\left(\frac{\partial F}{\partial X}\right)_0\cdot\left(\frac{\partial F}{\partial Y}\right)_0 r_{xy}\cdot\frac{1}{\sqrt{q_x\cdot q_y}}+\ldots \qquad (4.61)$$

Мәсәлә 4.4. Өлчмәләр функсиjасы $F=x\sqrt{p}$ шәклиндә верилмишдир. Әкәр өлчмә нәтичәсинин гиjмәти x, онун чәкиси исә *p*-дирсә, онда *F* функсиjасынын чәкисини тә'jин един.

Һәлли. (4.57) дүстуруна әсасән аларыг

$$\frac{1}{P_F}=\left(\frac{\partial F}{\partial X}\right)^2\cdot\frac{1}{P}=\left(\sqrt{P}\right)^2\cdot\frac{1}{P}=1.$$

Нәтичә: $F = x\sqrt{P}$ функсијасындан көрүндүјү кими, һәр һансы өлчмә нәтичәсини онун квадрат көк алтда олан чәкисинә вурударса, ваһид чәкијә малик өлчмә алынар. Мәһз, бу нәтичә әсасында, гејрибәрабәр дәгигликли өлчмәләри гијмәтчә $\sqrt{P_i}$ дәфә бөјүдәрәк, бәрабәрдәгигли өлчмәләр шәклинә салыр вә онлары бәрабәрдәгигли өлчмәләр гајдасы илә таразлашдырырлар.

Мәсәлә 4.5. Узунлуғу 450 м олан нивелир кедишинин өлчмә чәкиси дөрдә бәрабәрдир. Ваһид чәкијә малик кедишин узунлуғуну тә'јин един.

Һәлли: Әкәр узунлуғу 1 км олан нивелир кедишинин дисперсијасыны $\sigma^2_{1км}$ -ә бәрабәр гәбул етсәк, онда узунлуғу L_i олан кедишин дисперсијасы

$$\sigma^2_{L_i} = \sigma^2_{1км} \cdot L_i \qquad \text{олар.}$$

Бурадан, L_i кедишинин өлчмә чәкиси үчүн јаза биләрик

$$P_{L_i} = \frac{\sigma_0^2}{\sigma^2_{1км} \cdot L_i}.$$

Һәмчинин, $\sigma_0 = \sigma_{1км}$ гәбул етсәк (σ_0 ихтијари сечилир), өлчмә чәкиси үчүн белә ифадә аларыг

$$P_{L_i} = \frac{1}{L_i}. \qquad (4.62)$$

Нивелирләмә өлчмәләринин таразлашдырылмасы заманы кедишләрин өлчмә чәкиси чох һалларда, мәһз, (4.62) дүстуру илә һесабланыр.

Беләликлә, ваһид чәкили кедишин узунлуғуну L_1, чәкиси дөрдә бәрабәр олан кедишин узунлуғуну L_4 илә ишарә етсәк, (4.62) дүстуруна әсасән ашағыдакы мүтәнасиблији гура биләрик:

$$\frac{P_1}{P_4} = \frac{1/L_1}{1/L_4} = \frac{L_4}{L_1}.$$

Бурадан,

$$L_1 = \frac{P_4}{P_1} \cdot L_4 = 4 \cdot 450м = 1800м.$$

Мәсәлә 4.6. Үчбучагда α бучағы ики фәнд вә һәр фәнддән $m_\alpha = 3{,}0''$ гијмәтинә малик орта квадратики сәһв илә; β бучағы үч фәнд вә $m_\beta = 4{,}0''$; γ бучағы алты фәнд вә $m_\gamma = 6{,}0''$ дәгигликлә өлчүлмүшдүр.

Әкәр ваһид чәки сәһвинин гијмәти $\mu = 5{,}0''$ дирсә, онда үчбучағын бучагларынын орта гијмәтләри чәминин чәкисини тә'јин един.

Һәлли: Илк нөвбәдә (4.36) дүстуру илә үчбучағын һәр бир бучағынын һесаби орта гијмәти үчүн орта квадратик сәһвләрини һесаблајаг:

$$m_{\bar\alpha} = \frac{m_\alpha}{\sqrt{2}} = \frac{3}{\sqrt{2}}; \qquad m_{\bar\beta} = \frac{m_\beta}{\sqrt{3}} = \frac{4}{\sqrt{3}}; \qquad m_{\bar\gamma} = \frac{m_\gamma}{\sqrt{6}} = \frac{5}{\sqrt{6}}.$$

(4.57) дүстуруна әсасән бучагларын орта гијмәтләри чәминин , јә'ни

$$\sum = \bar\alpha + \bar\beta + \bar\gamma,$$

өлчмә чәкиси белә бир ифадә илә һесаблана билэр

$$\frac{1}{P_\sum} = \frac{1}{P_{\bar\alpha}} + \frac{1}{P_{\bar\beta}} + \frac{1}{P_{\bar\gamma}}.$$

Өз нөвбәсиндә,

$$P_{\bar\alpha} = \frac{\mu^2}{m_{\bar\alpha}^2} = \frac{25}{\frac{9}{2}} = \frac{50}{9}; \qquad P_{\bar\beta} = \frac{75}{16}; \qquad P_{\bar\gamma} = \frac{25}{6}$$

тапылдығындан, орта гијмәтләр чәминин чәкиси

$$\frac{1}{P_\sum} = \frac{1}{50/9} + \frac{1}{75/16} + \frac{1}{25/6} = \frac{95}{150}$$

олар. Бурадан, $\quad P_\sum = 1{,}58.$

§31.Ејни кәмијјәтин гејри-бәрабәр дәгигликли өлчмә нәтичәләринин таразлашдырылмасы.

Фәрз едәк ки, һәр һансы X кеодезик кәмијјәти n дәфә гејри-бәрабәр дәгигликлә өлчүләрәк, $P_1, P_2, \ldots, P_n$ чәкиләринә малик ујғун $x_1, x_2, \ldots, x_n$ өлчмә нәтичәләри алынмышдыр. Өлчмәләр сәһвләри нәзәриjjәсиндә көстәрилир ки, бу кәмиjjәт үчүн ән е'тибарлы еһтимал гиjмәт, үмуми һесаби орта вә jа орта чәки гиjмәти адланан кәмиjjәт олачагдыр, jә'ни

$$\bar{x} = [px] / [p] \tag{4.63}$$

Систематик тә'сирин олмадығы һалда, үмуми һесаби ортанын орта квадратик сәһви

$$m_{\bar{x}} = M = \mu / \sqrt{[P]}, \tag{4.64}$$

δ систематик тә'сирин олдуғу һалда исә,

$$M = m_{\bar{x}} = \sqrt{\frac{\mu^2}{[P]} + m_\delta^2} \tag{4.65}$$

дүстуру илә һесабланыр.

Бурада:

$$\mu = \sqrt{\frac{[PV^2]}{(n-1)}}\ ; \tag{4.66}$$

$$V_i = x_i - \bar{x}.$$

(4.66) дүстуру гејри-бәрабәр дәгигликли өлчмәләр үчүн Бессел дүстуру адланыр. μ вә M гиjмәтләринин орта квадратик сәһвләри исә уjғун олараг ашағыдакы дүстурларла тапылыр:

$$m_\mu \approx \mu / \sqrt{2(n-1)}\ ; \tag{4.67}$$

$$m_M \approx m_{\bar{x}} / \sqrt{[P]} \tag{4.68}$$

Гејри-бәрабәр дәгигликли өлчмәләрини е'тибарлылыг интерваллары бәрабәрдәгигликли өлчмәләрдәки (бах§30), ашағыдакы шәклә маликдир:

$$\bar{x} - t_\beta \cdot m_{\bar{x}} < X < \bar{x} + t_\beta \cdot m_{\bar{x}}; \tag{4.69}$$

$$\gamma_1 \mu \le \sigma_0 \le \gamma_2 \cdot \mu; \tag{4.70}$$

$$\gamma_1 m_{\bar{x}} \le \sigma_{\bar{x}} \le \gamma_2 m_{\bar{x}}\ . \tag{4.71}$$

Беләликлә, гејри-бәрабәр дәгигликли өлчмәләр сырасынын таразлашдырылмасы ашағыдакы ардычыллығда һәjата кечирилир:

1. $\bar{x}$ гиjмәтинин һесабланмасы. Бу мәгсәдлә, (4.63)-нүн әвәзиндә даһа әлверишли

$$\bar{x} = x_0 + \frac{[\varepsilon p]}{[p]} \tag{4.72}$$

дүстурундан истифадә едилир.Бурада, $\varepsilon_i = x_i - x_0$; x_0- өлчмә нәтичәләриндән гијмәтчә ән кичији көтүрүлүр.

2.$V_i = x_i - \bar{x}_0$ мејилликләринин һесабланмасы вә алынмыш нәтичәләрин дүзкүнлүјүнүн $[P\upsilon] = -\beta[P]$ бәрабәрлији илә јохланмасы. Бурада: $\bar{x}_0$ -һесаби ортанын јуварлаглашдырылмыш гијмәти:

$\beta = \bar{x}_0 - \bar{x}_{дәгиг}$ - јуварлаглашдырма сәһвидир.

3.$[p\upsilon^2]$-нын һесабланмасы вә ашағыдакы дүстурла јохланмасы

$$[P\upsilon^2] = [P\varepsilon^2] - \frac{[P\varepsilon]^2}{[P]}$$

4. (4.64),(4.66), (4.67) вә (4.68) дүстурлары илә ујғун олараг μ, M, m_μ вә m_M сәһвләринин һесабланмасы.

5. (4.69),(4.70) вә (4.71) дүстурларынын көмәји илә етибарлылыг интервалларынын гурулмасы.

μ-нын (4.66) дүстуру илә һесабланмыш вә таразлашдырмадан әввәл гәбул едилмиш гијмәтләри арасындакы фәргләнмә m_μ гијмәтиндән бөјүк олмамалыдыр. Әкс һал өлчмәләрдә систематик тә'сирин олмасына дәлаләт едир.

Мәсәлә 4.7. M мәнтәгәсинин јүксәклијини алты нивелир кедишиндән тә'јин етмәк олар. Мувафиг өлчмә нәтичәләри чәдвәл 4.3-дә верилмишдир. Нивелир шәбәкәсинин рijази таразлашдырылмасындан M мәнтәгәси үчүн ән е'тибарлы јүксәклик гијмәти тапын.

Һәлли: M мәнтәгәсинин јүксәклији һәр нивелир кедишиндән бир башга дәгигликлә тапылачағындан (чүнки кедишләр мүхтәлиф узунлуглара маликдир), мәсәләни §31-дә верилмиш гејри-бәрабәр дәгигликли өлчмә нәтичәләринин таразлашдырылмасы алгоритмләри илә һәлл етмәк лазымдыр. Һесабламалар чәдвәл 4.3-дә көстәрилмишдир.

Чəдвəл 4.3

Нивелир хəттинин нөмрəси	$H_м$ (м)	$m_н$ (мм)	$P=\frac{10}{m_н^2}$	ε (мм)	$P\varepsilon$ (мм)	$P\varepsilon^2$ (мм)^2	υ (мм)	$P\upsilon$ (мм)	$P\upsilon^2$ (мм^2)
1	196,529	6,3	0,25	+12	3,0	36,0	+1,3	+0,33	0,4
2	196,522	8,4	0,14	+5	0,70	3,5	-5,7	-0,80	4,6
3	196,517	9,1	0,12	0	0	0	-10,7	-1,28	13,7
4	196,532	4,3	0,54	+15	8,10	121,5	+4,3	+2,32	10,0
5	196,530	5,2	0,37	+13	4,81	62,5	+2,3	+0,85	2,0
6	196,520	7,5	0,18	+3	0,54	1,6	-7,7	-1,39	10,7
X_0=196,517			[P]=1,60		17,15			3,47 +3,50	41,4
					[$P\varepsilon^2$]=225,1			[$P\upsilon$]=+0,03	

$$\frac{[P\varepsilon]}{[P]}=+10,7 \qquad \frac{[P\varepsilon]}{[P]}=\frac{+17,15}{1,60}=+10,72мм;$$

$$\bar{x}=196,5277; \qquad \beta=-0,02;\ -[P]\cdot\beta=0,03;$$

$$\left[P\upsilon^2\right]=225,1-\frac{294,1}{1,6}=41,3;$$

(4.66) дүстуруна əсасəн, $\mu=\sqrt{\frac{41,4}{6-1}}=2,9мм;\quad \sqrt{c}=\sqrt{10}=3,1;$

$$m_\mu=\frac{2,9}{\sqrt{2(6-1)}}=0,92мм.$$

$\left|\ \mu-\sqrt{c}\ \right|=|2,9-3,1|=0,2<0,92=m_\mu$ олдуғундан, белə нəтичəјə кəлмəк олар ки, өлчмəлəрдəки систематик тə'сир нəзəрə алынмаз дəрəчəдəдир.

(4.64) дүстуру илə $M=\frac{2,9}{\sqrt{1,6}}=2,3мм$ вə (4.68)-əсасəн исə,

$$m_M=0,92/\sqrt{1,6}=0,73мм$$

нəтичəлəрини аларыг. Нəһајəт, етибарлылыг итерваллары ашағыдакы кими олачагдыр:

$$196,5229_м<X<196,5325м;$$
$$1,9мм<\sigma_0<6,1мм;$$
$$1,5мм<\sigma_{\bar{x}}<4,8мм.$$

Гејд едәк ки, е'тибарлылыг интерваллары гуруларкән әмсалларын гијмәтләри $\beta=0,90$ $t_\beta=2,1$ $\gamma_1=0,672$ вә $\gamma_2=2,090$ көтүрүлмүшдүр.

§32.Гејри-бәрабәр дәгигликли өлчмәләр фәргинә көрә дәгиглијин гијмәтләндирилмәси.

Кеодезија истеһсалатында бә'зән елә һаллар олур ки, ејни нөв кәмијјәтләрдән һәр бири ики дәфә ејни, бир-биринә нәзәрән исә, мүхтәлиф дәгигликлә өлчүлмүш олур. Мәсәлән, полигонометрија кедишинин тәрәфләринин узунлуғу дүз вә әкс истигамәтләрдә, лакин ајры-ајры тәрәфләр мүхтәлиф үсулларла : параллактик үсул, ишыг мәсафәөлчәнин көмәји илә вә с., јә'ни мүхтәлиф дәгигликлә өлчүлә биләр. Ајдындыр ки, бу һалда, һәр бир $X_i(i=1,2,...,n)$ кәмијјәти үчүн

$$\begin{cases} d_1 = x_1' - x_1''; \\ d_2 = x_2' - x_2''; \\ d_n = x_n' - x_n'', \end{cases} \tag{4.73}$$

шәклиндә өлчмәләр фәрги һесаблаја биләрик.
Әкәр i нөмрәли кәмијјәтин өлчмә чәкисини

$$P_i = P_{x_i}' = P_{x_i''} \tag{4.74}$$

ишарә етсәк, онда өлчмәләр фәргинә ујғун кәлән чәкинин гијмәтини белә тапарыг

$$\frac{1}{P_{d_i}} = \frac{1}{P_{x_i'}} + \frac{1}{P_{x_i''}} = \frac{2}{P_{x_i}}$$

Бурадан ,
$$P_{d_i} = \frac{P_{x_i}}{2} \tag{4.75}$$

Систематик сәһвләрин олмадығы һалда, d_i фәргләринә һәгиги гијмәти сыфра бәрабәр олан кәмијјәтин һәгиги өлчмә мејилликләри кими бахмаг олар. Она көрә дә, Гаусс дүстуруна әсасән јаза биләрик

$$\mu = \sqrt{\frac{[P_d \cdot d^2]}{n}} = \sqrt{\frac{[Pd^2]}{2n}}. \tag{4.76}$$

Һәр бир өлчмәнин һесаби орта гијмәтинин, јә'ни, $x_i = \dfrac{x_i' + x_i''}{2}$ -нин орта квадратик сәһви исә

$$m_{\bar{x}} = \mu / \sqrt{2P_i}\,. \tag{4.77}$$

Өлчмәләр фәргинин систематик тә'сирә мә'руз галдығы һалда, јә'ни

$$\theta = [\mathrm{P}d]/[P] \tag{4.78}$$

кәмијјәти сыфырдан әһәмијјәтли фәргләнәрсә, (4.76) дүстурунун әвәзиндә ашағыдакы дүстурдан истифадә едилир

$$\mu = \sqrt{\frac{[d'^2\mathrm{P}]}{2(n-1)}}\,, \tag{4.79}$$

бурада: $d_i' = d_i - \theta$.

Өлчмәләрдә систематик сәһвләрин тә'сир дәрәчәси

$$\left|[\mathrm{P}_d \cdot d]\right| \le 2{,}5\left[|\mathrm{P}_d \cdot d|\right] / \sqrt{[\mathrm{P}_d]} \tag{4.80}$$

бәрабәрсизлији илә јохланылыр. Әкәр (4.80) бәрабәрсизлији өдәнирсә, бу өлчмәләрдә систематик тә'сирин олмадығыны көстәрир вә һесабламалар (4.76) дүстуру илә јеринә јетирилир,әкс һалда, јә'ни (4.80) бәрабәрсизлији доғру дејилсә, онда (4.79) дүстуру көтүрүлүр.

Мәсәлә 4.8. Чәдвәл 4.4-дә дүз вә әкс истигамәтли нивелир кедишләринин јүксәкликләр фәргләри вә мүвафиг стансијалар сајы верилмишдир. Вериләнләрә әсасән јүксәкликләрин дәгиглијини гијмәтләндирин.

Һәлли. Илкин һазырлыг һесабламалары чәдвәл 4.4-дә јазылмышдыр вә онлардан истифадә едәрәк, өлчмәләрдә систематик тә'сирин олуб-олмадығыны јохлајаг. Бу мәгсәдлә чәдвәл 4.4-дән мүвафиг һесаблама нәтичәләрини (4.80) дүстурунда јазсаг, $8{,}6 \le 2{,}5 \cdot 59 / \sqrt{6{,}09} = 59{,}77$ аларыг. Бәрабәрсизлијин доғру олмасы, өлчмәләрдә систематик тә'сирин олмамасына дәлаләт едир. Доғрудан да, $[\mathrm{P}d]/[\mathrm{P}] \approx 0$, јә'ни сәһвләрин үмуми һесаби орта гијмәти сыфыра јахындыр. Бу исә, систематик сәһвләри олмадығы һалда, тәсадүфи сәһвләрә хас бир хассәдир. Она көрә дә, дәгиглијин гијмәтләндирилмәси үчүн (4.76) вә (4.77) дүстурларындан истифадә едәрәк, ашағыдакы нәтичәләри тапарыг:

Бүтүн кедишләр үзрә $\mu = \sqrt{\left[Pd^2\right]/2n} = \sqrt{655/2\cdot 10} = 5{,}7\,мм;$

Биринчи кедиш үзрә $м_{I\ кедиш} = \mu./\sqrt{2P_1} = 5{,}7/\sqrt{2\cdot 1{,}43} = 3{,}4\,мм$

Чәдвәл 4.4

Нивелир кедишинин сыра №-си	Өлчмәләр фәрги d_i, мм	Стансијалары н сајы, k_i	Фәргин өлчмә чәкиси P_i=10/K$_i$	$P_i\cdot d_i$ мм	d_i^2, мм^2	$P_i d_i^2$, мм^2
1	+4	7	1,43	+5,7	16	22,88
2	-14	27	0,37	-5,2	196	72,52
3	-9	13	0,77	-6,9	81	62,37
4	+15	25	0,40	+6,0	225	90,00
5	-12	32	0,31	-3,7	144	44,64
6	+11	15	0,67	+7,4	121	81,07
7	-12	19	0,53	-6,4	144	76,32
8	+13	18	0,56	+7,3	169	94,64
9	+12	16	0,62	+7,4	144	89,28
10	-7	23	0,43	-3,0	49	21,07
		$[P_d]$	6,09	+33,8	$[Pd^2]$	654,79
			$\left\|\left[P_d\cdot d\right]\right\| =$	$\frac{-25{,}2}{+8{,}6}$		
			$\left[\left\|P_d\cdot d\right\|\right] =$	+59.0		

II ҺИССӘ. ӘН КИЧИК КВАДРАТЛАР МЕТОДУ.

ФӘСИЛ 5. ПАРАМЕТРИК ТАРАЗЛАШДЫРМА ҮСУЛУ.

§ 33. Ән кичик квадратлар методунун мәғзи.

Билдијимиз кими, өлчмәләр сәһвләри нәзәријјәси ејни кәмијјәтин дәфәләрлә тәкрарланан өлчмә нәтичәләринин ријази һесабланмасы гајдаларыны өјрәнир. Лакин бу заман өлчүлән кәмијјәтләр арасындакы ријази әлагәләр нәзәрә алынмадығындан, кеодезик шәбәкәләрдә мејдана чыхан һәндәси зиддијјәтләр арадан галдырылмамыш галыр. Мәсәлән, нивелир кедишләринин ајры-ајрылыгда ријази һесабланмасына бахмајараг, онларын кәсишдији говшаг мәнтәгәсинин јүксәклијиндә чохгијмәтлилик зиддијјәти јараныр. Ән кичик квадратлар методу мәһз белә мәсәләләрин һәлли илә мәшғулдур вә мүвафиг һесабламалар таразлашдырма һесабламалары (гысача, таразлашдырма) адланыр. Үмумијјәтлә, таразлашдырма һесабламалары шәбәкәдә артыг өлчмәләрин олдуғу һалда мејдана чыхыр. Әкәр кеодезик шәбәкәдә јалныз лазыми сајда, јә'ни гојулмуш мәсәләни һәлл едән минимал сајда, өлчмәләр јеринә јетирилмишсә(мәсәлән, үчбучагда бир тәрәф вә ики бучаг), онда һесабламалар өлчмәләр сәһвләри нәзәријјәсинин гајдалары илә апарылыр. Лакин, кеодезик өлчмәләр, демәк олар ки, һәмишә артыг сајда јеринә јетирилдијиндән, онларын ән кичик квадратлар методу илә таразлашдырылмасы һәјата кечирилир. Таразлашдырмадан кеодезик шәбәкәләрдәки һәндәси зиддијјәтләр арадан галдырылыр, кәмијјәтләрин өлчмәләр сәһвләри нәзәријјәсинин үсуллары илә һесабланмыш еһтимал гијмәтләринә мүвафиг дүзәлишләр тапмагла, онлары даһа да дәгигләшдирирләр. Ејни заманда артыг өлчмәләр сајәсиндә мүвафиг полигон ачыглыглары һесабланыр ки, бу да, өлчмә нәтичәләринин дәгиглик кејфијјәти һаггында фикир сөјләмәк вә өлчмәләрдәки кобуд сәһвләри үзәрә чыхармаг имканы јарадыр.

Таразлашдырма һесабламаларыны шәрти олараг ики һиссәјә ајырмаг олар:

1. Өлчүлмүш кәмијјәтләрин ән еһтимал гијмәтләринин тапылмасы;
2. Еһтимал гијмәтләрин дәгиглијинин һесабланмасы.

Кеодезик өлчмәләрин таразлашдырылмасы, әсасән, ән кичик квадратлар методу (ӘККМ) илә һәјата кечирилир. Бу метода көрә, өлчүлмүш кәмиј̃јәтләрә елә υ_i дүзәлишләри ахтарылыр ки, онлар

$$\left[P\upsilon^2\right] = \min \qquad (5.2)$$

шәртини өдәсин. Бурада, P_i кәмиј̃јәти i нөмрәли өлчмәнин чәкисидир.

К.Гаусс вә рус ријазиј̃јатчысы А.Марков тәрәфиндән исбат едилмишдир ки, өлчмәләрдә систематик сәһвләр олмазса, онда (5.1) шәрти онлары ән јахшы гиј̃мәтләрә кәтириб чыхарыр.

Ән кичик квадратлар методунун ики әсас таразлашдырма үсулу вардыр: **параметрик вә коррелат**. Биринчи үсулда мүвафиг нормал тәнликләрин һәллиндән биләваситә лазыми кәмиј̃јәтләрин өзләринин гиј̃мәтләри, икинчидә исә, әввәлчә көмәкчи әмсаллар-коррелатлар, сонра бу әмсалларын функсиј̃асы шәклиндә лазыми кәмиј̃јәтләрин гиј̃мәтләри һесабланыр. Үмумиј̃јәтлә, һәр ики үсул еј̃ни нәтиҹәј̃ә кәтириб чыхарыр, лакин һесабламаларын һәчми мүхтәлиф олур. Мәсәлән, он ики аралыг мәнтәгәј̃ә малик полигонометриј̃а кедишини параметрик үсулла таразлашдыраркән иј̃ирми дөрд нормал тәнлиј̃ин һәлли тәләб едилдиј̃и һалда, коррелат үсулда бу, ҹәми үч тәнликдән ибарәтдир. Гејд едәк ки, һесабламаларын ЕҺМ-дә јеринә јетирилдиј̃и һалларда, биркә һәлл едилән тәнликләр саj̃ынын таразлашдырма үсулунун сечилмәсиндә елә бөј̃үк әһәмиј̃јәти јохдур. Бурада әсасән башланғыҹ әлагә тәнликләринин тәртибинин асанлығы көтүрүлүр. Таразлашдырма заманы бә'зән параметрик вә коррелат үсулларынын үстүн ҹәһәтләрини өзүндә бирләшдирән комбинә үсулларындан истифадә едилир.

§34. Параметрик таразлашдырма үсулунун нәзәри әсаслары

Әввәлки параграфда гејд едилдиј̃и кими, параметрик үсулла таразлашдырылмадан биләваситә лазыми кәмиј̃јәтләрин таразлашдырылмыш гиј̃мәтләри тапылыр. Таразлашдырма һесабламаларына лазыми кәмиј̃јәтләрин (параметрләрин) сечилмәси вә онларын к саj̃ынын мүәј̃јәнләшдирилмәси илә башланылыр. Сечилмиш лазыми параметрләр өз араларында гаршылыглы функсионал асылылыгда олмамалыдыр. Мәсәлән, полигонометриј̃а кедишинин таразлашдырылмасында аралыг мәнтәгәләрин координатлары лазыми параметрләр кими гәбул едилир. Лазыми параметрләрин дәгиг гиј̃мәтләрини $X_j\left(j = 1,2,\ldots,\kappa\right)$, өлчмә нәтиҹәләринин һәгиги гиј̃мәтләрини исә $У_i(i=1,2,\dots,n)$ илә ишарә етсәк, онлар арасында ашағыдакы шәкилдә n сајда функсионал асылылыглары јазмаг олар.

$$У_i = \varphi_i\left(X_1, X_2, \dots X_k\right) \tag{5.2}$$

бурада: $n \geq k$.

(5.2) тәнликләри башланғыч әлагәләр системи адланыр. Лакин өлчмә нәтичәләринин $У_i$ һәгиги гијмәтләри мә'лум олмадығындан, ајдындыр ки, лазыми параметләрин x_j дәгиг гијмәтләрини дә тә'јин етмәк мүмкүн олмајачагдыр. Бунунла белә, (5.2) тәнликләр системиндә $У_i$ вә X_j-нин һәгиги гијмәтләринин әвәзиндә, онларын елә $\widetilde{y}_i$ вә $\widetilde{x}_j$ гијмәтләрини јазмаг олар ки, бу заман (5.2) тәнликләри доғру олар, јә'ни

$$\widetilde{y}_i = \varphi_i\left(\widetilde{x}_1, \widetilde{x}_2, \dots, \widetilde{x}_k\right) \tag{5.3}$$

Бурада: $\widetilde{x}_j$, $\widetilde{y}_i$ - параметрләрин вә өлчмә нәтичәләринин таразлашдырылмыш гијмәтләридир.

$\widetilde{y}_i$ гијмәтләри ашағыдакы ифадә илә тә'јин едилир

$$\widetilde{y}_i = y'_i + \upsilon_i, \quad (i=1,2,\dots,n), \tag{5.4}$$

бурада; $у_i$ - кәмијјәтин өлчүлмүш гијмәти, υ_i исә, өлчүлмүш гијмәтә таразлашдырылмадан тапылан дүзәлишдир.

(5.4) ифадәсини (5.3) - дә нәзәрә алсаг, υ_i дүзәлиши үчүн белә бир ифадә аларыг

$$\upsilon_i = \varphi_i\left(\widetilde{x}_1, \widetilde{x}_2, \dots, \widetilde{x}_k\right) - y'_i \tag{5.5}$$

Өз нөвбәсиндә (5.5) ифадәси илә ән кичик квадратлар методунун (5.1) әсас шәрти ашағыдакы кими јазылар

$$\sum_{i=1}^{n} p_i \left\{\varphi_i\left(\widetilde{x}_1, \widetilde{x}_2, \dots, \widetilde{x}_k\right) - y'_i\right\}^2 = min \tag{5.6}$$

Ејни заманда, (5.6) тәнлијиндән көрүндүјү кими, онун сол тәрәфиндә мәчһуллар јалныз $\widetilde{x}_j$ кәмијјәтләриндән ибарәтдир. Она көрә дә, тәнлијин сол тәрәфини һәр һансы $F(\widetilde{x}_1, \widetilde{x}_2, \dots, \widetilde{x}_n)$ функсијасы илә ифадә етсәк, онда (5.6) шәрти ашағыдакы шәклә дүшәр

$$F(\widetilde{x}_1, \widetilde{x}_2, \dots, \widetilde{x}_k) = min. \tag{5.7}$$

Беләликлә, (5.7) ифадәсиндән демәк олар ки, таразлашдырма мәсәләсинин мәғзи (5.1) шәрти алтында $F(\widetilde{x}_1, \widetilde{x}_2, \ldots, \widetilde{x}_k)$ функсијасынын екстремумларынын ахтарылмасындан ибарәтдир. Али ријазијјат курсундан мә'лумдур ки, бу мәгсәдлә, F функсијасынын биринчи төрәмәләрини тапыб, сыфра бәрабәр етмәк лазымдыр, јә'ни

$$\frac{\partial F}{\partial \widetilde{x}_j} = 0 \quad , \quad (j = 1,2, \ldots, k) \; ; \tag{5.8}$$

сонра исә онларын һәллиндән F функсијасынын екстремумларыны тә'јин едән $\widetilde{x}_1, \widetilde{x}_2, \ldots, \widetilde{x}_k$ мәчһуллары мүәјјәнләшдирилир.

а) параметрик дүзәлиш тәнликләринин тәртиби.

Әкәр (5.2) тәнликләр системи гејри-хәтти шәклә маликдирсә, онун дәгиг ријази һәлли тәчрүби олараг мүмкүн дејил .

Белә һалларда мәсәләни мүәјјән тәгрибиликлә (һесаблама дәгиглији һәддиндә) ашағыдакы гајдада һәлл едирләр: x_j параметрләринин һәр һансы бир јолла $x_j^{(0)}$ тәгриби гијмәтләри тапылыр (мәсәлән, өлчүлмүш y_i' гијмәтләринә көрә, топографики хәритәнин көмәји илә вә с.) вә бу нөгтәләрдә (гијмәтләрдә) $\varphi\,(x_1, x_2, \ldots, x_k)$ функсијасы Тејлор сырасына ајрылыр. Сыранын јалныз хәтти топлананлары илә кифајәтләнсәк ($x_j^{(0)}$ гијмәтләри x_j -јә јахын тапылдығындан Тејлор сырасынын икинчи вә даһа јүксәк дәрәчәли топлананларыны нәзәрә алмамаг олар), (5.5)-ин әвәзиндә белә бир ифадә аларыг

$$\upsilon_i = a_i \delta x_1 + b_i \delta x_2 + \ldots + g_i \delta x_k + l_i \, . \tag{5.9}$$

Бурада: l_i - тәнлијин сәрбәст һәдди адланыр вә белә һесабланыр

$$l_i = \varphi_i\left(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_k^{(0)}\right) - y_i' \, ; \tag{5.10}$$

$a_i, b_i, \ldots, g_i$ әмсаллары $y = \varphi_i\left(x_1, x_2, \ldots, x_k\right)$ функсијасынын ујғун параметрләр үзрә биринчи дәрәчәли хүсуси төрәмәләридир вә $x_j^{(0)}$ гијмәтләринә әсасән һесабланыр, јә'ни

$$a_i = \left(\frac{\partial y_i}{\partial x_i}\right)_{x_1 = x_1^{(0)}} , \; b_i = \left(\frac{\partial y_i}{\partial x_2}\right)_{x_2 = x_2^{(0)}} , \ldots, g_i = \left(\frac{\partial y_i}{\partial x_k}\right)_{x_k = x_k^{(0)}} \tag{5.11}$$

(5.9) тәнликләри параметрик дүзәлиш тәнликләри системи (гысача дүзәлиш тәнликләри) адланыр.

Әкәр (5.2) башланғыч өлагәләр системи хәтти тәнликләрдән ибарәтдирсә, онда онлары Тејлор сырасына ајырмаг лазым көлмир вә (5.9) тәнликләриндәки $a_i, b_i, \ldots, g_i$ әмсаллары (5.2)-дә x_j мәчһуллары гаршысында дуран әмсалларын ејни олачагдыр.

б) нормал тәнликләрин алынмасы

Беләликлә, (5.8) тәнликләр системинин биринчи тәнлији үчүн (5.1) шәртинә әсасән белә бир ифадә аларыг

$$\frac{\partial F}{\partial X_i} = 2p_1\upsilon_1 \cdot \frac{\partial \upsilon_1}{\partial X_1} + 2p_2\upsilon_2 \frac{\partial \upsilon_2}{\partial X_1} + \ldots + 2p_n\upsilon_n \cdot \frac{\partial \upsilon_n}{\partial X_1} = 0 \quad (5.12)$$

Бурада

$$\frac{\partial \upsilon_i}{\partial X_1} = a_i, \quad (i = 1,2,\ldots,n)$$

олдуғуну нәзәрә алсаг (бах, (5.9) дүстуру) вә (5.12) тәнлијинин һәр ики тәрәфини икијә бөлсәк, (5.12) белә бир шәклә дүшәр

$$p_1a_1\upsilon_1 + p_2a_2\upsilon_2 + \ldots + p_na_n\upsilon_n = [pa\upsilon] = 0. \quad (5.13)$$

Ејни гајда илә (5.8) системинин дикәр тәнликләри үчүн јаза биләрик

$$[pb\upsilon] = 0; [pc\upsilon] = 0; \ldots; [pg\upsilon] = 0. \quad (5.14)$$

Әкәр (5.14) тәнликләриндә υ_i әвәзиндә, онларын (5.9) ифадәләри илә тә'јин едилән гијмәтләрини јазсаг, ашағыдакы шәкилдә k мәчһуллу k сајда хәтти тәнликләр системи аларыг:

$$\begin{aligned}
&[paa]\delta x_1 + [pab]\delta x_2 + \ldots + [pag]\delta x_k + [pal] = 0;\\
&[pab]\delta x_1 + [pbb]\delta x_2 + \ldots + [pbg]\delta x_k + [pbl] = 0;\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots;\\
&[pag]\delta x_1 + [pbg]\delta x_2 + \ldots + [pgg]\delta x_k + [pgl] = 0.
\end{aligned}$$

Бурада мәчһулларын гаршысында дуран әмсаллар белә ачылыр:

$$
\begin{aligned}
&[paa] = p_1a_1a_1 + p_2a_2a_2 + \ldots + p_na_na_n;\\
&[pab] = p_1a_1b_1 + p_2a_2b_2 + \ldots + p_na_nb_n;\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&[pag] = p_1a_1g_1 + p_2a_2g_2 + \ldots + p_na_ng_n;\\
&[pbb] = p_1b_1b_1 + p_2b_2b_2 + \ldots + p_nb_nb_n;\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&[pgg] = p_1g_1g_1 + p_2g_2g_2 + \ldots + p_ng_ng_n.
\end{aligned}
\qquad (5.15')
$$

Тәнликләрин сәрбәст һәдләри исә:

$$
\begin{aligned}
&[pal] = p_1a_1b_1 + p_2a_2l_2 + \ldots + p_na_nl_n;\\
&[pbl] = p_1b_1l_1 + p_2b_2l_2 + \ldots + p_nb_nl_n;\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&[pgl] = p_1g_1l_1 + p_2g_2l_2 + \ldots + p_ng_nl_n.
\end{aligned}
\qquad (5.15'')
$$

(5.15) тәнликләри нормал тәнликләр, бирликдә исә, нормал тәнликләр системи адланыр. Бу системин әмсаллар матриси

$$
R = \begin{bmatrix} [paa] & [pab] \ldots [pag] \\ [pab] & [pbb] \ldots [pbg] \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots \\ [pag] & [pbg] \ldots [pgg] \end{bmatrix} \qquad (5.16)
$$

ашағыдакы хассәләрә маликдир:

1) к дәрәчәли квадрат матрисдир, јә'ни өлчүсү $k \times k$;
2) баш диагонала көрә симметрикдир;
3) матрисин диагонал елементләри (квадрат әмсаллары) сыфырдан бөјүкдүр;
4) R матрисинин тә'јини (детерминанты) сыфырдан бөјүкдүр, јә'ни $\det R > 0$.

R матрисинин бу көстәрилән хассәләри чох мүһүм әһәмијјәт дашыјыр вә үмумиликдә, тәнликләр системинин һәллини асанлашдырыр.

в) нормал тәнликләрин Гаусс үсулу илә һәлли.

Параметрик үсулла таразлашдырманын нөвбәти мәрһәләси нормал тәнликләр системинин һәллиндән ибарәтдир. Нормал тәнликләрин һөллинин мүхтәлиф үсуллары вардыр:

- Гаусс үсулу;
- Квадрат көкләр үсулу;
- Ардычыл јахынлашма үсулу;
- Крамер үсулу вә с.

Бу үсуллардан Гаусс үсулу өз асанлығы вә сәмәрәлилији илә дикәрләриндән фәргләнир вә кениш тәтбиг едилир. Үсулун мәғзи нормал тәнликләрдәки мәчһуллары әвәзетмәләр јолу илә ардычыл олараг тәнликләрдән чыхардараг, (5.15) башланғыч нормал тәнликләрини еквивалент тәнликләр шәклинә салмаг, сонра исә тәрс кедишдә сонунчу бирмәчһуллу еквивалент тәнликдән башлајараг мәчһулларын мүвафиг гијмәтләрини тә'јин етмәкдән ибарәтдир.

Еквивалент тәнликләр системи ашағыдакы шәклә маликдир:

$$\begin{aligned}
&[paa]\delta x_1 + [pab]\delta x_2 + [pac]\delta x_3 + \ldots + [pag]\delta x_k + [pal] = 0; \\
&\qquad [pbb\cdot 1]\delta x_2 + [pbc\cdot 1]\delta x_3 + \ldots + [pbg\cdot 1]\delta x_k + [pbl\cdot 1] = 0; \\
&\qquad\qquad [pcc\cdot 2]\delta x_3 + \ldots + [pcg\cdot 2]\delta x_k + [pcl\cdot 2] = 0; \quad (5.17) \\
&\qquad\qquad\qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&\qquad\qquad\qquad [pgg\cdot (k-1)]\delta x_k + [pgl(k-1)] = 0;
\end{aligned}$$

Гаусс үсулу дүз вә әкс кедишләрдән ибарәтдир. Еквивалент тәнликләр системинин алынмасы Гаусс үсулунун дүз кедиши адланыр. Әкс кедишдә исә (5.17) тәнликләрини ујғун квадрат әмсаллара ($[paa]$, $[pbb\cdot 1]$ вә с.) бөлмәклә, елиминасијон тәнликләр алыныр вә сонунчудан башлајараг δx_i мәчһулларынын гијмәтләри һесабланыр

$$\begin{aligned}
&\delta x_1 = -\frac{[pab]}{[paa]}\delta x_2 - \ldots - \frac{[pag]}{[paa]}\cdot\delta x_k - \frac{[pal]}{[paa]}; \\
&\qquad \delta x_2 = -\frac{[pbc\cdot 1]}{[pbb\cdot 1]}.\delta x_3 - \ldots - \frac{[pbl\cdot 1]}{[pbb\cdot 1]}; \quad (5.18) \\
&\qquad\qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&\qquad\qquad \delta x_k = -\frac{[pgl\cdot (k-1)]}{[pgg\cdot (k-1)]}
\end{aligned}$$

г) Гаусс алгоритминин ачылыш гајдасы.

(5.15) вә (5.17) тәнликләр системиндә квадрат мөтәризәләр шәклиндә јазылмыш *әмсаллар* Гаусс алгоритмләри адланыр. Шәрти олараг, *j* рәгәми әлавә едилмиш алгоритмләр чеврилмиш, рәгәмсизләр исә чеврилмәмиш Гаусс алгоритмләри адланыр. Бу алгоритмләрдән бирини дикәри илә ифадә етмәк олар:

- истәнилән чеврилмиш Гаусс алгоритми һәмин һәрфи ишарәләрлә јазылмыш чеврилмәмиш алгоритмдән ачылан алгоритмдәки j рәгәми сајда кәсрләри чыхмагла алыныр. Бу кәсрләрин мәхрәчләри (j-1) нөмрәли еквивалент тәнликләрин биринчи әмсалларындан, сүрәтләри исә мәхрәчдәки алгоритмин рәгәми илә көстәрилмиш ики алгоритм һасилиндән ибарәтдир. Сүрәтдәки алгоритмләрдән бири мәхрәчин биринчи һәрфинин ачылан алгоритмин биринчи һәрфинә, икинчи исә мәхрәчин икинчи һәрфини алгоритмин икинчи һәрфинә вурулмасындан алыныр.

Мәсәлән, $$[bc\cdot 1]=[bc]-\frac{[ab]\cdot[ac]}{[aa]};$$

$$[cl\cdot 2]=[cl]-\frac{[ac][al]}{[aa]}-\frac{[bc\cdot 1][bl\cdot 1]}{[bb\cdot 1]}\quad \text{вә с.}$$

Алгоритмин там олмајан ачылышы да мүмкүндүр. Мәсәлән,

$$[dl\cdot 3]=[dl\cdot 2]-\frac{[cd\cdot 2][cl\cdot 2]}{[cc\cdot 2]}.$$

Гејд: Гејри-бәрабәр дәгигликли өлчмәләрин Гаусс алгоритминин әввәлиндә мүвафиг Р- өлчмә чәкиси дә көстәрилир.

д) Гаусс үсулунда һесабламаларын јохланылмасы

Гаусс үсулунда гәбул едилмиш ишарәләр системи өз садәлији илә јанашы, һесабламалары јығчам схемләрдә, еjни нөв әмәлијјатлары тәкрар етмәклә јеринә јетирмәк имканы верир. Еjни заманда һесабламаларын схемләрдә апарылмасы аралыг нәтичәләрин дүзкүнлүјүнүн јохланмасына әлверишли шәраит јарадыр. Бу да үсулун ән үстүн чәһәтләриндән биридир.

Илк јохлама һесабламасы дүзәлиш тәнликләринин дүзкүнлүјү илә бағлыдыр. Бу мәгсәдлә һесабламалар ики әлдән (ики нәфәр тәрәфиндән) јеринә јетирилир. Нормал тәнликләрин тәртиби вә һәлли заманы јохламалар чәмләр методу илә һәјата кечирилир. Дүзәлиш тәнликләри үчүн ашағыдакы бәрабәрликләр доғру олмалыдыр :

$$a_i+b_i+c_i+...+g_i+l_i=s_i\ , \qquad i=(1,2,\cdots n)\ ; \qquad (5.18)$$

вә

$$[a]+[b]+[c]+...+[g]+[l]=[s] \qquad (5.19)$$

Нормал тәнликләрин әмсаллары вә сәрбәст һәдләрин дүзкүнлүјү белә јохланылыр:

$$\begin{aligned}
&[paa]+[pab]+...+[pag]+[pal]=[pas];\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&[pag]+[pbg]+...+[pgg]+[pgl]=[pgs]; \qquad (5.20)\\
&[pal]+[pbl]+...+[pgl]+[pll]=[pls];\\
&[pas+[pbs]+...+[pgs]+[pls]=[pss].
\end{aligned}$$

Еквивалент тәнликләрин тәртиби заманы ашағыдакы бәрабәрликләр доғру олмалыдыр:

$$\begin{aligned}
&[paa]+...+[pag]+[pal]=[pas]\\
&[pbb\cdot 1]+...+[pbg\cdot 1]+[pbl\cdot 1]=[pbc\cdot 1]; \qquad (5.21)\\
&[pcc\cdot 2]+...+[pcg\cdot 2]+[pcl\cdot 2]=[pcs\cdot 2]\ ;\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&[pgg.(k-1)]+[pgl.(k-1)]=[pgs.(k-1)]
\end{aligned}$$

Гаусс схеминдә дүз кедиш үзрә јекун јохлама һесабламасы

$$[pll.k]=[pls.k]=[pss.k]\ . \qquad (5.22)$$

Гаусс схеминин әкс кедишиндә δx_j мәчһуллары үчүн тапылмыш гијмәтләрин дүзкүнлүјү онлары j нөмрәли (5.17) еквивалент тәнликләриндә јеринә гојмагла мүәјјәнләшдирилир.

υ_i дүзәлишләри исә (онлар (5.9) дүстүрлары илә һесабланылыр) (5.13) вә (5.14) ифадәләри илә јохланылыр.

Бундан башга таразлашдырма заманы ашағыдакы јохламалар апарылыр:

$$\left[p\upsilon^2\right]=\left[pll\cdot k\right]=\left[pls\cdot k\right] \qquad (5.23)$$

$$\left[p\upsilon^2\right]=\left[pl\cdot\upsilon\right]=\left[ps\upsilon\right]. \qquad (5.24)$$

Таразлашдырма мәсәләсинин сон јохламасы $y_i'+\upsilon_i=\varphi_i(\tilde{x}_1,...\tilde{x}_k)$ бәрабәрлијинин доғру олмасындан ибарәтдир. Лакин $\varphi_i(\tilde{x}_1,\tilde{x}_2,...,\tilde{x}_k)$ функсијасынын хәтти һалында бу јохламанын әвәзиндә (5.13), (5.14) вә (5.23) бәрабәрликләри илә кифајәтләнмәк олар.

е) Нормал тәнликләрин схемләрдә һәлли. Адәтән нормал тәнликләрин Гаусс үсулу илә һәлли үч схемдә јеринә јетирилир. Үч параметрли нормал тәнликләр һалында бу схемләр ашағыдакылардан ибарәтдир.

Схем 1.

Өлчмә-ин нөмрәси	a_i $в_i$ c_i l_i	S_i	P_i	a_ip_i $в_ip_i$ c_ip_i l_ip_i	$S_i P_i$	V_i
1	a_1 $в_1$ c_1 l_1	S_1	P_1	a_1p_1 $в_1p_1$ c_1p_1 l_1p_1	S_1P_1	V_1
2	a_2 $в_2$ c_2 l_2	S_2		a_2p_2 $в_2p_2$ c_2p_2 l_2p_2	S_2P_2	V_2
………	………………	…	….	…………………	…….	……
n	a_n b_n c_n l_n	S_n	P_n	a_np_n b_np_n c_np_n l_np_n	S_nP_n	V_n
	[a] [b] [c] [l]	[s]		[ap] [bp] [cp] [lp] δx_1 δx_2 δx_2 [paυ] [pbυ] [pcυ]	[S·P]	[υ] [pυ²]

Схем 2

	a]	b]	c]	l]	S]	Јохлама
[pa	[paa]	[pab]	[pac]	[pal]	[pas]	Фәргләнмә 0,01-0,02
[pb		[pbb]	[pbc]	[pbl]	[pbs]	
[ps			[pcc]	[pcl]	[pcs]	
[pl				[pll]	[pls]	
[ps					[pss]	

Схем 3

	δx_1	δx_2	δx_3	l	S	Јохлама
$(1/[paa])$	$[paa]$	$[pab]$	$[pac]$	$[pal]$	$[pas]$	
	(-1)	$-\frac{[pab]}{[paa]}$	$-\frac{[pac]}{[paa]}$	$-\frac{[pal]}{[paa]}$	$-\frac{[pas]}{[paa]}$	
$(1/[pbb\cdot 1])$		$[pbb\cdot 1]$	$[pbc\cdot 1]$	$[pbl\cdot 1]$	$[pbs\cdot 1]$	
		(-1)	$-\frac{[pbc\cdot 1]}{[pbb\cdot 1]}$	$-\frac{[pbl\cdot 1]}{[pbb\cdot 1]}$	$-\frac{[pbs\cdot 1]}{[pbb\cdot 1]}$	
			$[pcc\cdot 2]$	$[pcl\cdot 2]$	$[pcs\cdot 2]$	
			(-1)	$-\frac{[pcl\cdot 2]}{[pcc\cdot 2]}$	$-\frac{[pcs\cdot 2]}{[pcc\cdot 2]}$	
Јохлама	δx_1	δx_2	δx_3	$[pll\cdot 3]$	$[pls\cdot 3]$	
	$\delta \bar{x}_1$	$\delta \bar{x}_1$	$\delta \bar{x}_1$		$[pss\cdot 3]$	

Таразлашдырма заманы мәчһулларын сајы $k \le 10$ оларса, нормал тәнликләрин, һәмчинин, еквивалент тәнликләрин әмсаллары 0,01-0,001 дәгигликлә һесабланыр. Елиминасијон тәнликләрин әмсаллары вә мәчһулларын гијмәтләри 0,01-0,001; $\frac{1}{[paa]}, \frac{1}{[pbb\cdot 1]}$ кәмијјәтләри исә 0,0001 дәгигликлә һесабланмалыдыр.

Гаусс схеминдә јохлама чәмләр 0,01-0,02 һәддиндә фәргләнә биләр. Фәргләнмә гијмәти схем үзрә јухарыдан ашағыја доғру артыр вә ахырынчы сәтирдә сонунчу һәддә чатыр.

§ 35. Таразлашдырылмыш кәмијјәтләрин дәгиглијинин гијмәтләндирилмәси

Таразлашдырылмыш кәмијјәтләрин дәгиглијинин гијмәтләндирилмәси дедикдә, онларын таразлашдырмадан сонракы орта квадратик сәһвинин тә'јини баша дүшүлүр.

Үмуми һалда, истәнилән кәмијјәтин орта квадратик сәһви ашағыдакы дүстурла һесабланыр:

$$M_{x_j} = \mu\sqrt{\frac{1}{P_{x_j}}} \quad , \tag{5.25}$$

бурада: μ-ваһид чәки сәһви; P_{x_j} - дәгиглији гијмәтләндирилән кәмијјәтин өлчмә чәкисидир.

(5.25) дүстурундан көрүндүјү кими, кәмијјәтин дәгиглијинин гијмәтләндирилмәси мәсәләсини шәрти олараг ики һиссәјә ајырмаг олар: 1) ваһид чәки сәһвинин тә'јини; 2) дәгиглији гијмәтләндирилән кәмијјәтин P_{x_j} өлчмә чәкисинин һесабланмасы.

Ваһид чәки сәһвинин гијмәтини бу дәрслијин отузунчу параграфында верилмиш үсулларла һесабламаг, јахуд ихтијари гәбул етмәк олар. P_{x_j} өлчмә чәкиләрини исә чәки әмсаллары адланан Q_{jj} кәмијјәтләри васитәсилә һесаблајырлар. Ән кичик квадратлар методунда исбат едилир ки, өлчмә чәкиләри чәки әмсаллары илә тәрс мүтәнасибдир, јә'ни

$$\frac{1}{P_{x_j}} = Q_{jj}, \quad (i = 1,2,\ldots,k). \tag{5.26}$$

Өз нөвбәсиндә, Q_{jj} әмсаллары Q матрисинин диагонал елементләридир. $Q-$чәки әмсаллары матриси адланыр вә ашағыдакы шәклә маликдир

$$Q = \begin{pmatrix} Q_{11} & Q_{12}\cdots\cdots Q_{1k} \\ Q_{21} & Q_{22}\cdots\cdots Q_{2k} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots \\ Q_{k1} & Q_{k2}\cdots\cdots Q_{kk} \end{pmatrix}. \tag{5.27}$$

Чәки әмсаллары матриси нормал тәнликләр системинин әмсаллар матриси илә (бах, (5.16)) тәрс мүтәнасибдир, јә'ни $Q = R^{-1}$. Бурадан $R \cdot Q = E$ ($E-$ваһид матрисдир).

Беләликлә, көстәриләнләри нәзәрә алсаг, k сајда ашағыдакы шәклә малик нормал тәнликләр јазмаг олар

$$R \cdot Q_j = E_j \ , \tag{5.28}$$

бурада: $Q_j - Q$ матрисинин j нөмрәли сүтуну; E_j исә E матрисинин j нөмрәли сүтунудур.

Әкәр (5.15) параметрик нормал тәнликләрини дә матрис јазылышында версәк, јә'ни

$$R \cdot \Delta X + A^T PL = 0\,, \qquad (5.29)$$

бурада:

$$\underset{n\times k}{A} = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \ldots g_1 \\ a_2 & b_2 \ldots g_2 \\ \ldots & \ldots\ldots \\ a_n & b_n \ldots g_n \end{pmatrix}; \quad \Delta X = \begin{pmatrix} \delta x_1 \\ \delta x_2 \\ \ldots \\ \delta x_k \end{pmatrix}; \quad L = \begin{pmatrix} l_1 \\ l_2 \\ \ldots \\ l_n \end{pmatrix}; \; P = \begin{pmatrix} P_1 \\ P_2 \\ \ldots \\ P_n \end{pmatrix};$$

A^T-чеврилмиш матрисдир.

Онда (5.28) вә (5.29) тәнликләрини мүгајисә етдикдә көрәрик ки, онлар ејни R матрисинә малик олуб, јалныз сәрбәст һәдләри илә бир-бириндән фәргләнирләр. Бурадан белә бир нәтичә чыхыр ки, Q_j елементләрини ејнилә δx_j параметрләринин тапылмасы гајдасында, һәмин дүстурларла һесабламаг олар. Лакин сонунчу һалда, $A^T PL$ һәдләринин әвәзиндә E_j сүтунларыны јазмаг лазымдыр. E_j сүтуну ардычыл олараг ашағыдакы кими гијмәтләр алыр:

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ \ldots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ \ldots \\ 0 \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \ldots \\ -1 \end{pmatrix}$$

Беләликлә, (5.28) тәнликләр системиндә сәрбәст һәдд кими E_j сүтунунун һәр дәфә јухарыда көстәрилмиш бир гијмәтини јазмагла, тәнликләри к дәфә тәкрар һәлл едиб, Q матрисинин тәркиб елементләри олан K сајда Q_j сүтунларыны тапырлар. Q матрисини Гаусс схеминдә һәлл јолу илә дә алмаг олар. Бу мәгсәдлә, үчүнчү схемдә «Јохлама» графындан сонра K сајда - E_j сүтунлары әлавә едилир. Бу сүтунларда апарылачаг һесаблама әмәлијјатлары параметрик нормал тәнликләрин һәлли заманы сәрбәст һәдләр сүтунунда јеринә јетирилмиш һесаблама әмәлијјатларынын ејнидир. Сонра схем 3-дә јазылмыш һесаблама нәтичәләринә әсасән Q_{ij} елементләринин гијмәтләри тапылыр. Нәтичәләрин дүзкүнлүјү $Q_{ij} = Q_{ji}$ бәрабәрлији илә јохланылыр, чүнки Q матриси симметрик матрисдир.

Беләликлә, Q матриси тә'јин едилдикдән сонра, (5.25) дүстурунда $\frac{1}{P_{x_j}}$ әвәзиндә ујғун Q_{jj} гијмәтини јазараг, истәнилән таразлашдырылмыш кәмијјәтин орта квадратики сәһвини һесабламаг һеч бир чәтинлик төрәтмир. Q_{ij} әмсалларындан исә, i вә j нөмрәли кәмијјәтләр арасындакы корреләсија әмсалынын тапылмасында истифадә едилир

$$r_{ij} = \frac{Q_{ij}}{\sqrt{Q_{ii} \cdot Q_{jj}}} \tag{5.30}$$

§36 Таразлашдырылмыш кәмијјәтләр функсијасынын дәгиглијинин гијмәтләндирилмәси.

Билдијимиз кими, кеодезик өлчмәләрин јеринә јетирилмәсиндә әсас мәгсәд, һансыса лазыми кәмијјәтләрин гијмәтләринин тә'јин едилмәсиндән ибарәтдир. Лазыми кәмијјәтләр исә чох заман билаваситә өлчүлмүш кәмијјәтләрин функсијасы шәклиндә тә'јин едилир. Мәсәлән, мәнтәгәнин координатлары тәрәфләрин узунлуғу вә онларын дирексијон бучагларынын функсијасы кими һесабланыр. Бу бахымдан, өлчүлмүш кәмијјәтләрлә јанашы, онларын функсијаларынын да дәгиглијини мүәјјәнләшдирмәк зәрурәти мејдана чыхыр.

Һәр һансы $F=f(x_1,x_2,...x_n)$ функсијасынын дәгиглијинин гијмәтләндирилмәсини ашағыдакы ики үсулла һәјата кечирмәк олар.

Үсул 1. Бу үсул аналитик үсул адланыр вә мәғзи ондан ибарәтдир ки, Q чәки әмсаллары матриси мә'лум оларса (мәсәлән, §35-дә көстәрилмиш үсулларла тә'јин едилмишдир), онда F функсијасынын таразлашдырмадан сонракы гијмәтинин дәгиглијини характеризә едән тәрс чәкини ашағыдакы дүстурла һесабламаг олар

$$\frac{1}{P_F} = f \cdot Q \cdot f^T \tag{5.31}$$

вә ја, ачыг шәкилдә

$$\frac{1}{p_F} = \sum_{j=1}^{k} f_j^2 Q_{jj} + 2\sum_{i<j} f_i f_j Q_{ij} \tag{5.32}$$

Бурада: $f = (f_1, f_2, f_3, ..., f_k)$ матрис вектору

$$f_j = \left(\frac{\partial F}{\partial x_j}\right)_{x_j = x_j^0}$$

хүсуси төрәмәләриндән тәшкил олунмушдур. Индексдә $x_j = x_j^0$ јазылышы f_j хүсуси төрәмәләринин x_j^0-тәгриби гијмәтләри илә һесабланмасына ишарәдир.

K=3 һалында, (5.32) дүстуру белә шәклә дүшәр

$$\frac{1}{P_F} = f_1^2 Q_{11} + f_2^2 Q_{22} + f_3^2 Q_{33} + 2 f_1 f_2 Q_{12} + 2 f_1 f_3 Q_{13} + 2 f_2 f_3 Q_{23}$$

Үсул 2. Бу үсулдан Q матриси мә'лум олмадығы һалларда истифадә едилир вә әлавә сүтун үсулу адланыр. Үсулун әсасыны ашағыдакы дүстур тәшкил едир

$$-\frac{1}{P_F} = \left[f_{k+1} \cdot K\right] = f_{k+1} - \frac{f_1^2}{[paa]} - \frac{[f_2 \cdot 1]^2}{[pbb \cdot 1]} - \cdots - \frac{[f_k \cdot (k-1)]^2}{[pgg \cdot (k-1)]} . \quad (5.33)$$

Бу дүстурда чеврилмиш алгоритләри белә ачылыр:

$$f_{k+1} = 0;$$

$$[f_2 \cdot 1] = f_2 - \frac{[pab] \cdot f_1}{[paa]};$$

$$[f_3 \cdot 2] = f_3 - \frac{[pac] f_1}{[paa]} - \frac{[pbc \cdot 1][f_2 \cdot 1]}{[pbb \cdot 1]}.$$

......

Әкәр шәрти олараг,

$$\left.\begin{aligned} &[pal] = f_1; \\ &[pbl] = f_2; \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &[pgl] = f_k; \\ &[pll] = f_{k+1}, \end{aligned}\right\} \quad (5.34)$$

гәбул етсәк, онда $\left[f_{k+1}\cdot k\right]$алгоритми ејнилә $\left[pll\cdot k\right]$ Гаусс алгоритми кими, $\left[f_2\cdot 1\right]$, $\left[f_3\cdot 2\right]$, $\cdots$, $\left[f_k\cdot(k-1)\right]$ алгоритмләри исә ујғун олараг $\left[\mathrm{pbl}\cdot 1\right]$, $\left[\mathrm{pcl}\cdot 2\right]$, $\cdots$,$\left[\mathrm{pgl}\cdot(\mathrm{k}-1)\right]$ алгоритмләри гајдасында ачылачагдыр. Бу о демәкдир ки, Гаусс схеминдә әлавә F сүтуну јерләшдирсәк вә онун елементләри үзәриндә дә *l* сәрбәст һәдләр сүтунунда олдуғу гајдада чевирмәләр апарсаг, *K* чевирмәдән сонра ашағыдакы шәкилдә алгоритм аларыг.

$$-\frac{1}{P_F}=\left[f_{k+1}\cdot k\right]\underline{\underline{\text{шәрти}}}\left[Pll\cdot k\right]$$

Башга сөзлә, бу, тәрс чәкинин тә'јини илә бағлы мәсәләнин һәлли демәкдир.

Таразлашдырылмыш кәмиііәтләр функсијасынын тәрс чәкисини белә бир дүстурла да һесабламаг олар.

$$-\frac{1}{P_F}=\left[\Sigma_{k+1}\cdot k\right]=\left[f\right]-\frac{\Sigma_1\cdot f_1}{\left[paa\right]}-\frac{\left[\Sigma_2\cdot 1\right]\left[f_2\cdot 1\right]}{\left[pbb\cdot 1\right]}-\cdots-$$
$$\cdots-\frac{\left[\Sigma_k\cdot(k-1)\right]\left[f_k(k-1)\right]}{\left[pgg\cdot(k-1)\right]} \tag{5.35}$$

Бурада:

$$\left.\begin{aligned}\Sigma_1 &=\left[\mathrm{pas}\right]-\left[\mathrm{pal}\right]+\mathrm{f}_1;\\ \Sigma_2 &=\left[\mathrm{pbs}\right]-\left[\mathrm{pbl}\right]+\mathrm{f}_2;\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\\ \Sigma_k &=\left[\mathrm{pgs}\right]-\left[\mathrm{pgb}\right]+\mathrm{f}_k\end{aligned}\right\} \tag{5.36}$$

Адәтән, (5.35) дүстурундан һесабламаларын јохланмасы мәгсәди илә истифадә едилир. Әкәр шәрти олараг

$$\left.\begin{array}{l}\Sigma_1 = [pas];\\ \Sigma_2 = [pbs];\\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\\ \Sigma_k = [pgs];\\ \Sigma_{k+1} = [f],\end{array}\right\} \qquad (5.37)$$

гәбул етсәк, онда $[\Sigma_{k+1} \cdot k]$ алгоритмини $[pls \cdot k]$ алгоритми кими ача биләрик. Һәмчинин, $1/P_F$ шәрти $[pls \cdot k]$ вә $[\Sigma_2 \cdot 1], [\Sigma_3 \cdot 2], \ldots, [\Sigma_k \cdot (k-1)]$ алгоритмләри ујғун олараг, $[pbs \cdot 1], [pcs \cdot 2], \ldots, [pgs \cdot (k-1)]$ алгоритмләри гајдасы илә ифадә едиләчәкдир. Мәсәлән, $[\Sigma_3 \cdot 2]$ алгоритмини чеврилмәмиш алгоритмләрлә тә'јин едәк. (5.37) әвәзетмәсиндән көрүндүјү кими, бу алгоритмә шәрти олараг $[pcs \cdot 2]$ алгоритми ујғун кәлир вә онун ачылышы ашағыдакы кимидир

$$[pcs \cdot 2] = [pcs] - \frac{[pac] \cdot [pas]}{[paa]} - \frac{[pbc \cdot 1][pbs \cdot 1]}{[pbb \cdot 1]}.$$

Јенидән, (5.37) ифадәсинә мүрачиәт едәрәк, мүвафиг әвәзетмәләр апарсаг, $[\Sigma_3 \cdot 2]$ үчүн belә бир ифадә алырыг

$$[\Sigma_3 \cdot 2] = \Sigma_3 - \frac{[pac]\Sigma_1}{[paa]} - \frac{[pbc \cdot 1]\,[\Sigma_2 \cdot 1]}{[pbb \cdot 1]}.$$

Гејд едиләнләр ону көстәрир ки, $-\frac{1}{P_F}$ тәрс чәки гијмәтинин (5.35) дүстуру илә һесабланмасыны да, Гаусс схеминдә әлавә Σ сүтуну илә һәјата кечирмәк олар.

§37. Е'тибарлылыг интервалларынын гурулмасы.

Өлчүлмүш кәмијјәтләрин дәгиглијинин е'тибарлылыг интерваллары үсулу илә гијмәтләндирилмәси нөгтәви үсула (орта квадратики сәһв вә с.) нисбәтән даһа мүкәммәлдир. Бу үсулун мәғзи ондан ибарәтдир ки, гијмәтчә ваһидә јахын β еһтималы илә көзләмәк олар ки, һәр һансы a кәмијјәтинин мүмкүн гијмәтләри һәмин кәмијјәт үчүн гурулмуш е'тибарлылыг интервалындан кәнара чыхмајачагдыр.

Кеодезик шәбәкәләрин таразлашдырылмасы заманы адәтән, лазыми кәмијјәтләр вә онларын функсијаларынын гијмәтләри, еләчә дә, өлчмәләр вә онларын функсијаларынын орта квадратики сәһвләри үчүн е'тибарлылыг интерваллары гурулур. Ону гејд едәк ки, е'тибарлылыг интерваллары өлчмәләрин нормал пајланма ганунуна табе олдуғу һалда јазыла биләр.

Һәр һансы F өлчмәләр функсијасынын һәгиги гијмәти үчүн јазылмыш е'тибарлылыг интервалы ашағыдакы шәклә маликдир

$$\widetilde{F} - t_\beta \cdot m_{\widetilde{F}} < F < \widetilde{F} + t_\beta \cdot m_{\widetilde{F}} \ . \qquad (5.38)$$

Бурада: t_β әмсалы β е'тибарлылыг еһтималы вә r сәрбәстлик дәрәчәси әдәдинә әсасән Стјудент пајланмасы чәдвәлләриндән тә'јин едилир.Функсијанын орта квадратики сәһви исә

$$m_{\widetilde{F}} = \mu\sqrt{\frac{1}{P_{\widetilde{F}}}}$$

дүстуру илә һесабланыр;

$\widetilde{F}$ – функсијанын таразлашдырылмыш гијмәтидир.

X_j - лазыми кәмијјәти үчүн е'тибарлылыг интервалы исә белә бир бәрабәрсизликлә ифадә олунур

$$\widetilde{x} - t_\beta \cdot m_{x_j} < X_j < \widetilde{x} + t_\beta \cdot m_{x_j} \qquad (5.39)$$

бурада, $m_{x_j} = \mu\sqrt{Q_{jj}}$

Әлавә олараг, ашағыдакы кәмијјәтләр үчүн дә е'тибарлылыг интерваллары гурулур:

ваһид чәки стандарты үчүн -

$$\gamma_1\mu \le \sigma_o \le \gamma_2\mu \ ; \qquad (5.40)$$

F функсијасынын орта квадратики сәһви үчүн

$$\gamma_1 \cdot m_{\tilde{F}} \leq \sigma_{\tilde{F}} \leq \gamma_2 \cdot m_{\tilde{F}} \quad ; \qquad (5.41)$$

лазыми параметрин орта квадратики сәһви үчүн

$$\gamma_1 \cdot m_{x_j} \leq \sigma_{x_j} \leq \gamma_2 \cdot m_{x_j} \qquad (5.42)$$

Бурада: $\gamma_1 = \sqrt{(n-k)/\chi^2}$ вә $\gamma_2 = \sqrt{(n-k)/\chi^2}$ әмсаллары x^2 пајланмасы чәдвәлләриндән r әдәдинә әсасән сечилир.

§38. Бәрабәр дәгигликли өлчмәләрин параметрик үсулла таразлашдырылмасы.

Өлчмә нәтичәләри о вахт бәрабәр дәгигликли һесаб едилир ки, онларын јеринә јетирилдији өлчмә шәраити ејни олсун, јә'ни, өлчмәләр ејни мүшаһидәчи тәрәфиндән, ејни аләтлә, ејни сајда фәндлә вә с.һәјата кечирилмиш олсун. Бәрабәр дәгигликли өлчмәләрин чәкиләри бири-биринә бәрабәрдир, јә'ни, $p_1 = p_2 = \ldots = p_n$

Бу һала гејри-бәрабәр дәгигликли өлчмәләрин хүсуси һалы кими дә бахмаг олар. Бәрабәр дәгигликли өлчмәләрин чәкиләри $p_i = 1$ олдуғундан, онлар үчүн јазылмыш нормал тәнликләрин әмсаллары вә сәрбәст һәдләри $[aa],[ab],\ldots,[al]$ алгоритмләри шәклиндә һесабланыр. Бәрабәр дәгигликли өлчмәләрин таразлашдырма алгоритмләри гејри-бәрабәр өлчмәләрин алгоритмләринә нисбәтән садә олдуғундан (ејни заманда, Гаусс схеми дә садәләшир), бир чох һалларда, һесабламалары асанлашдырмаг мәгсәдилә гери-бәрабәр дәгигликли өлчмәләри бәрабәр дәгигликли өлчмәләр шәклинә кәтирирләр. Бундан өтрү гејри-бәрабәр дәгигликли өлчмәләр үчүн јазылмыш һәр бир дүзәлиш тәнлијини $\sqrt{p_i}$ әмсалына вурмаг лазымдыр. Нәтичәдә ваһид чәкили бәрабәр дәгигликли өлчмәләр алыныр. Бәрабәр дәгигликли өлчмәләрин вә онларын функсијаларынын дәгиглијинин гијмәтләндирилмәси, еләчә дә, е'тибарлылыг интервалларынын гурулмасы ејнилә гејри-бәрабәр дәгигликли өлчмәләрдә олдуғу кимидир.

§39. Нормал тәнликләрин ардычыл јахынлашмалар үсулу илә һәлли.

Биркә һәлл едилән нормал тәнликләрин сајынын бөјүк олдуғу һалларда, онларын һәллини билаваситә үсулларла дејил (мәсәлән, Гаусс, квадрат көкләр вә с. үсуллар), ардычыл јахынлашмалар үсуллары илә јеринә јетирмәк даһа сәмәрәлидир. Белә ки, билаваситә үсулларла һәлл заманы һесабламаларын һәчми нормал тәнликләр сајынын кубуна дүз мүтәнасиб артдығы һалда, ардычыл јахынлашмалар үсулунда һесабламаларын һәчми, әкәр һесаблама просеси јығыландырса, олдугча кичик олур. Ардычыл јахынлашмалар үсулунун бу хүсусијјәти ону чох әһәмијјәтли едир.

Бу үсулун маһијјәти ондан ибарәтдир ки, өлчүлмүш кәмијјәтләрин таразлашдырылмыш гијмәтләри бир нечә ардычыл итерасијадан (јахынлашмадан) тә'јин едилир. Һесаблама итерасијалары о вахта гәдәр давам етдирилир ки, ики ардычыл итерасијадан лазыми кәмијјәтләр үчүн тапылмыш гијмәтләр фәргинин максимум гијмәти һесаблама дәгиглијини характеризә едән мүсбәт ε әдәдиндән кичик олсун, јә'ни

$$\max\left|X_j^{(m)} - X_j^{(m-1)}\right| < \varepsilon$$

Һесаблама итерасијаларынын сајыны әввәлчәдән көстәрмәк мүмкүн дејил. Лакин ардычыл јахынлашмалар үсулунун сәмәрәлилији, мәһз, итерасијаларын сајы илә мүәјјәнләшдирилир. Итерасијаларын сајы исә өз нөвбәсиндә һесаблама просесинин јығылма дәрәчәси илә тә'јин едилир.

Тутаг ки, ашағыдакы шәкилдә нормал тәнликләр системи тәртиб едилмиш вә онларын биркә һәлли тәләб едилир:

$$\begin{aligned}
&[paa]x_1 + [pab]x_2 + \cdots + [pag]x_k + [pal] = 0;\\
&[pab]x_1 + [pbb]x_2 + \cdots + [pbg]x_k + [pbl] = 0;\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&[pag]x_1 + [pbb]x_2 + \cdots + [pgg]x_2 + [pgl] = 0.
\end{aligned}$$

Бу тәнликләрдән x_j-ләри тә'јин етсәк, аларыг

$$
\begin{aligned}
x_1 &= 0\cdot x_1 + \alpha_{12}x_2 + \cdots + \alpha_{1k}\cdot x_k + \beta_1;\\
x_2 &= \alpha_{21}\cdot x_1 + 0\cdot x_2 + \cdots + \alpha_{2k}x_k + \beta_2;\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
x_k &= \alpha_{k1}\cdot x_1 + \alpha_{k2}\cdot x_2 + \cdots + 0\cdot x_k + \beta_k.
\end{aligned}
\qquad (5.43)
$$

Бурада:

$$
\alpha = \begin{bmatrix}
0 - \frac{[pab]}{[paa]} \;\ldots\; -\frac{[pag]}{[paa]} \\
-\frac{[pab]}{[pbb]} \;\; 0\ldots -\frac{[pbg]}{[pbb]} \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
-\frac{[pag]}{[pgg]} \;\; -\frac{[pbg]}{[pgg]}\ldots\ldots 0
\end{bmatrix};
\quad
\beta = -\begin{bmatrix}
-\frac{[pal]}{[paa]} \\
-\frac{[pbl]}{[pbb]}. \\
\cdot \\
\cdot \\
\cdot \\
-\frac{[pgl]}{[pgg]}
\end{bmatrix}
$$

ишарә етсәк, (5.43) системинин матрис јазылышында ифадәси ашағыдакы кими олар.

$$
x = \alpha x + \beta \quad . \qquad (5.44)
$$

Беләликлә, (5.44) ифадәсинә әсасән, биринчи јахынлашмадан x_j кәмијјәтләри үчүн ашағыдакы гијмәтләр аларыг

$$
x^{(1)} = \alpha x^{(0)} + \beta,
$$

икинчи јахынлашмадан

$$
x^{(2)} = \alpha x^{(1)} + \beta \;,
$$

$$
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
$$

нәhајәт, m -чи јахынлашмадан

$$
x^{(m)} = \alpha x^{(m-1)} + \beta .
$$

Бурада, $x^{(0)}$ - сыфырынчы (башланғыч) јахынлашма гијмәтләридир вә $x^{(0)} = \beta$ гәбул едилир.

Јухарыда нәзәрдән кечирдијимиз үсул садә итерасија (јахынлашма) үсулу адланыр. Бу үсул α матрисинин елементләринин кичик мүтләг гијмәтләриндә тез јығылан вә аз сајда итерасијалара малик олур.

һесабламаларын јығылан олмасынын кафи шәртләри ашағыдакылардан ибарәтдир:

$$1)\quad \|\alpha\|_1 = \max_i \sum_{j=1}^{k} |\alpha_{ij}| < 1 \;;$$

вә ја

$$2)\quad \|\alpha\|_2 = \max_j \sum_{j=1}^{k} |\alpha_{ij}| < 1 \;;$$

вә ја

$$3)\quad \|\alpha\|_3 = \sqrt{\sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{k} |\alpha^2{}_{ij}|} < 1 \quad ,$$

Бурада: $\|\alpha\|_1$, $\|\alpha\|_2$, $\|\alpha\|_3$ әмсаллар матриси α -нын биринчи, икинчи вә үчүнчү нормаларыдыр.

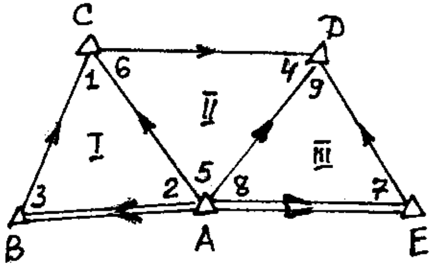
Кениш тәтбиг тапмыш ардычыл јахынлашмалар үсулларындан бири дә Зејдел үсулудур. Бу үсулун әввәлки үсулдан фәргли чәһәти ондан ибарәтдир ки, чари јахынлашмадан нөвбәти $x^{(m)}$ кәмијјәтләринин гијмәтләри һесабланаркән, елә бу јахынлашмада әввәлки кәмијјәтләр үчүн тапылмыш $x_i^{(m)}(i = 1,2,\ldots, j-1)$ гијмәтләриндән истифадә едилир. Бу да, һесабламаларын јығылмасы просесини сүр"әтләндирир вә итерасијаларын сајыны азалдыр.

§ 40.Параметрик үсулла мәсәлә һәлли

Инди исә параметрик таразлашдырма үсулунун хүсусијјәтләрини вә һесабланма ардычыллығыны конкрет мәсәлә һәллиндә көстәрәк.

Тутаг ки, схеми шәкил 5.1-дә верилмиш триангулјасија шәбәкәсиндә бүтүн дахили бучаглар бәрабәр дәгигликлә өлчүлмүшдүр, јә’ни $P_1 = P_2 = \ldots = P_9 = 1$.

Тәләб олунур ки, бу шәбәкәнин параметрик үсулла таразлашдырылмасындан онун тәрәфләринин дирексијон бучагларыны тә’јин едәк.



Шәкил 5.1 Триангулјасија шәбәкәси.

<u>**Илкин мә'луматлар:**</u>

1.Башланғыч вә сон базис тәрәфләрин дирексијон бучаглары

$\alpha_{AB} = 270^0 00' 00''$, $\alpha_{AE} = 102^0 56' 57{,}5''$

2. Бучагларын өлчүлмүш гијмәтләри y'_i (бах, чәдвәл 5.1).

Чәдвәл 5.1

Бучагларын нөмрәси	Бучаг.өлчүлмүш гијмәтләри y'_i	υ''_i	Бучаг. Таразлашды-рылмыш гијмәтләри y_i
1	69^0 33' 30,2''	-0,50	69^0 33' 29,7''
2	60 35 10,5	+2,0	60 35 12,5
3	49 51 18,3	-0,5	49 51 17,8
	179 59 59,0	+1,0	180 00 00,0
4	66 47 38,2	-2,8	66 47 35,4
5	59 10 18,6	-0,4	59 10 18,2
6	54 02 09,3	-2,9	54 02 06,4
	180 00 06,1	-6,1	180 00 00,0
7	46 25 52,5	+0,2	46 25 52,7
8	73 11 24,1	+2,7	73 11 26,8
9	60 22 40,3	+0,2	60 22 40,5
	179 59 56,9	+3,1	180 00 00,0

Гејд: Чәдвәл (5.1)-дә ϑ_i вә $\widetilde{y}_i$ гијмәтләри таразлашдырма баша чатдырылдыгдан сонра, һесабланыб бу чәдвәлә јазылыр.

Мәсәләнин һәлли: 1) Илк нөвбәдә шәбәкәдә лазыми кәмијјәтләр вә онларын сајы мүәјјәнләшдирилмәлидир. Мәсәләнин шәртиндән ајдындыр ки, шәбәкәдә лазыми кәмијјәтләр тәрәфләрин дирексијон бучаглары олуб (схемдә охларла көстәрилмишдир), сајы исә бешә бәрабәрдир. Дирексијон бучагларын һәгиги гијмәтләрини X_j илә ишарә едәк. Схемдән көрүндүјү кими, өлчмәләрин (өлчүлмүш бучагларын) сајы доггуздур (n=9). Онлары $У_i$ илә көстәрәк.

2) Өлчүлмүш кәмијјәтләр үчүн параметрик дүзәлиш тәнликләрини јазаг. Билдијимиз кими, дүзәлиш тәнликләринин сајы өлчүләрин сајына бәрабәрдир, бизим мәсәләдә n=9. Дүзәлиш тәнликләрини тәртиб етмәк үчүн, илк нөвбәдә (5.3) дүстуру әсасында башланғыч әлагә тәнликләрини јазмаг лазымдыр. Мәсәлән, биринчи бучағын әлагә тәнлији belә олар (ики мүвафиг дирексијон бучағын фәрги кими):

$$\widetilde{y}_1 = \widetilde{x}_1 - \widetilde{x}_2 . \tag{5.46}$$

Нәзәрә алсаг ки, $\widetilde{x}_1 = x_1^{(0)} + \delta x_1$, $\widetilde{x}_2 = x_2^{(0)} + \delta x_2$ вә $\widetilde{y}_1 = y_1' + \upsilon_1$, онда (5.46) ифадәсиндән аларыг :

$$\upsilon_1 = \delta x_1 - \delta x_2 + \left[(x_1^{(0)} - x_2^{(0)}) - y_1'\right], \qquad (5/46)'$$

бурада $\left[(x_1^{(0)} - x_2^{(0)}) - y_1'\right] = l_1$ тәнлијин сәрбәст һәддидир. Беләликлә, $\angle$I бучағынын сон вариантда дүзәлиш тәнлији ашағыдакы шәкилдә олачагдыр $\upsilon_1 = \delta x_1 - \delta x_2 + l_1$. (5.47)

Ејни мүлаһизәләрлә дикәр бучаглар (өлчүлмүш кәмијјәтләр) үчүн јаза биләрик:

$$\begin{aligned}
\upsilon_2 &= \delta x_2 + l_2;\\
\upsilon_3 &= -\delta x_1 + l_3;\\
\upsilon_4 &= \delta x_3 - \delta x_4 + l_4;\\
\upsilon_5 &= \delta x_4 - \delta x_2 + l_5;\\
\upsilon_6 &= \delta x_2 - \delta x_3 + l_6;\\
\upsilon_7 &= \delta x_5 + l_7;\\
\upsilon_8 &= -\delta x_4 + l_8;\\
\upsilon_9 &= \delta x_4 - \delta x_5 + l_9 .
\end{aligned} \tag{5.48}$$

Гејд: (5.46) вә дикәр әлагә тәнликләри хәтти шәклә малик олдуғундан, онларын Тејлор сырасына бөлүнмәси тәләб едилмир. Она көрә дә, (5.47) дүзәлиш тәнликләринин әмсаллары мүвафиг әлагә тәнликләринин ујғун әмсаллары илә үст-үстә дүшәчәкдир. Дүзәлиш тәнликләринин сәрбәст һәдләрини тә'јин етмәк үчүн дирексијон бучагларын тәгриби гијмәтләрини билмәк лазымдыр. Бу мәгсәдлә, шәкил 5.1-ә әсасән јаза биләрик:

$$x_1^{(0)} = \alpha_{AB} + 180^0 - y_3' = 40^0 08' 41{,}7'';$$
$$x_2^{(0)} = \alpha_{AB} + y_2' = 330^0 35' 10{,}5'';$$
$$x_3^{(0)} = x_2^{(0)} + 180^0 - y_6' = 96^0 33' 01{,}2'';$$
$$x_4^{(0)} = \alpha_{AE} - y_8' = 29^0 45' 33{,}4'';$$
$$x_5^{(0)} = \alpha_{AE} + 180^0 + y_7' = 329^0 22' 55{,}0''.$$

4) Башланғыч әлагә тәнликләри вә дирексијон бучагларын һесабланмыш тәгриби гијмәтләриндән истифадә едәрәк, сәрбәст һәдләрин гијмәтләрини һесаблајаг:

$$l_1 = (x_1^{(0)} - x_2^{(0)}) - y_1' = +1;$$
$$l_2 = (x_2^{(0)} - \alpha_{AB}) - y_2' = 0{,}0;$$
$$l_3 = (\alpha_{AB} + 180^0 - x_1^{(0)}) - y_3' = 0{,}0;$$
$$l_4 = (x_3^{(0)} - x_4^{(0)}) - y_4' = -10{,}4;$$
$$l_5 = (x_4^{(0)} - x_2^{(0)}) - y_5' = +4{,}3;$$
$$l_6 = (x_2^{(0)} + 180^0 - x_3^{(0)}) - y_6' = 0{,}0;$$
$$l_7 = (x_5^{(0)} - \alpha_{AE} - 180^0) - y_7' = 0{,}0;$$
$$l_8 = (\alpha_{AE} - x_4^{(0)}) - y_8' = 0{,}0;$$
$$l_9 = (x_4^{(0)} - x_5^{(0)}) - y_1' = +3{,}1;$$

5)Нормал тәнликләрин тәртиби.

Гејд едилдији кими, нормал тәнликләрин тәртиби вә һәллини Гаусс схемләриндә јеринә јетирмәк даһа әлверишлидир.

Чәдвәл 5.2-дә биринчи Гаусс схеми верилмишдир. Бу схемдә мүвафиг дүзәлиш тәнликләринин әмисаллары, сәрбәст һәдләри вә јохлама чәмләри јазылмышдыр.

Чәдвәл 5.2

өлчмәнин нөмрәси	a_i	b_i	c_i	d_i	e_i	l_i	s_i	υ_i
1	+1	-1	0	0	0	+1	+1	-0,50
2	0	+1	0	0	0	0	+1	+2,00
3	-1	0	0	0	0	0	-1	-0,50
4	0	0	+1	-1	0	-10,4	-10,4	-2,86
5	0	-1	0	+1	0	+4,3	+4,3	-0,38
6	0	+1	-1	0	0	0	0	-2,86
7	0	0	0	0	+1	0	+1	+0,21
8	0	0	0	-1	0	0	-1	+2,69
9	0	0	0	+1	-1	+3,1	+3,1	+0,21
Јохлама:	$[a]=0$ $[a\upsilon]$	$[b]=0$ $[b\upsilon]$	$[c]=0$ $[c\upsilon]$	$[d]=0$ $[d\upsilon]$	$[e]=0$ $[e\upsilon]$	$[l]=-2$	$[s]=-2$	$[\upsilon^2]=28{,}24$ $[l\upsilon]=28{,}24$

Гејд: Чәдвәл (5.2)-дә υ_i гијмәтләри вә чәдвәлин ашағысында јазылмыш јохлама һесабламалары таразлашдырмадан сонра јазылыр.

a_i b_i c_i d_i e_i вә l_i графларындакы гијмәтләр исә ујғун (5.47) тәнликләриндән јазылыр. Мәсәлән, (5.47) тәнлијиндән көрүндүјү кими бир нөмрәли өлчмә үчүн $a_1=1$ (δx_1-ин әмсалы);$b_1=-1$ (δx_2-нин әмсалы); галан әмсаллар сыфра бәрабәрдир. Чүнки, бу тәнликдә δx_3 δx_4 вә δx_5 мәчһуллары јохдур; $l_1=+1$,(бах, дөрдүнчү бәнд);

$S_1=+1$ (биринчи сәтир үзрә рәгәмләрин чәми), доғрудан да, $+1-1+0+0+0+1=+1$. Јәни гајда илә дикәр өлчмәләр үчүн тапылмыш дүзәлиш тәнликләри әмсаллары чәдвәл 5.2-дә јазылмышдыр. Һесабламалар заманы (5.18) вә (5.19) ифадәләри илә тә'јин едилән јохламалар һәјата кечирилмишдир.

Нормал тәнликләр икинчи Гаусс схеминдә верилир.(Чәдвәл5.3). Нормал тәнликләрин елементләри схем 1-дән истифадә етмәклә тапылыр. Бу заман (5.15)дүстуру әсас көтүрүлүр. Мәсәлән, биринчи нормал тәнлијин биринчи квадратик әмсалыны тапмаг үчүн, чәдвәл (5.2)-дә a_i сүтунунун һәр бир елементини квадрата јүксәлдиб, сонра онлары чәмләсәк аларыг: $[aa=2]$.

Јада салаг ки, $P_1 = P_2 =...= P_9 =1$, јә'ни, мәсәләнин шәртиндә көстәрилдији кими өлчмәләр бәрабәрдәгиглидир. Һәмин тәнлијин икинчи $[ab]$ елементини тапмаг үчүн чәдвәл 5.2-дә a_i сүтунунун елементләрини b_i сүтунунун ујғун елементләринә вурараг чәмләмәк лазымдыр.

Онда, [*ab*]=-1. Бу гајда илә нормал тәнликләрин бүтүн әмсаллары вә сәрбәст һәдләри, еләчә дә, чәм елементләри 0,01 дәгигликлә һесабланараг, чәдвәл 5.3-дә (схем 2) јазылмышдыр. Нормал тәнликләрин тәртиби заманы (5.20) дүстурлары илә тә'јин едилән јохламалар апарылмышдыр. Јохлама чәмләринин фәргләнмәси 0,01 -0,02 һәддини кечмәмәлидир.

Чәдвәл 5.3

	a]	b]	*c*]	*d*]	*e*]	*l*]	*s*]	Јохлама	$-E_1$	$-E_2$	$-E_3$	$-E_4$	$-E_5$	*f*	Σ
[*a*	2,00	-1,00	0	0	0	+1,00	+2,00	+2,00	-1,00	0	0	0	0	+1,00	+2,00
[*b*		+4,00	-1,00	-1,00	0	-5,30	-4,30	-4,30	0	-1,00	0	0	0	-1,00	0
[*c*			2,00	-1,00	0	-10,4	-10,4	-10,40	0	0	-1,00	0	0	0	0
[*d*				+4,00	-1.00	+17,8	+18,8	+18,80	0	0	0	-1,00	0	0	+1,00
[*e*					2,00	-3,1	-2,10	-2,10	0	0	0	0	-1,00	0	+1,00
[*l*						137,26	137,26	137,26							
[*s*						137,26	137,26	137,26							

Гејд:1) Чәдвәл 5.3-дә $-E_j$ вә f вә Σ гијмәтләри таразлашдырманын сонунда кәмијјәтләрин дәгиглији гијмәтләндириләркән јазылыр.
2) Нормал тәнликләрин R әмсаллар матриси симметрик олдуғундан схем 2-дә (чәдвәл 5.3) һәмин матрисин јухары үчбучаг шәкилли һиссәси (баш диагоналдан јухары һиссә) верилмишдир.

б) Нормал тәнликләрин һәлли.

Нормал тәнликләрин һәлли үчүнчү Гаусс схеминдә һәјата кечирилир. (чәдвәл 5.4) 34-үн в) бәндиндә гејд едилдији кими, һәлл ики һиссәдән: дүз вә тәрс кедишләрдән ибарәтдир. Дүз кедишдә (5.17) формалы еквивалент тәнликләр системи гурулур. Бу системин биринчи тәнлији схем 2-дән (чәдвәл 5.3) нечә вар , елә дә, схем 3-ә көчүрүлүр. Сонра бу тәнлијин бүтүн елементләрини -[*paa*] әмсалына бөлмәклә (вә јахуд, -1/ [*paa*]) көмәкчи әмсалына вурмагла; бу әмсал 0,0001 дәгигликлә һесабланыр), биринчи елиминасијон тәнлик алынмышдыр. Бизим мәсәләдә [*paa*]=+2; онда, -1/ [*paa*]=-0,5000.
Схем 3-дә елминасијон тәнликләр һәмишә -1 әмсалы илә башлајан сәтирләрдә јазылыр. Елиминасијон тәнликләрин әмсаллары 0,001 дәгигликлә һесабланыр.

Чәдвәл 5.4 .

Көмәкчи әмсаллар	δx_3	δx_2	δx_1	δx_4	δx_5	ℓ	в	јохлама	$-E_1$	$-E_2$	$-E_3$	$-E_4$	$-E_5$	f	$\sum$
-0,500	2,00	-1,00	0	0	0	1,00	2,00	2,00	-1,00	0	0	0	0	1,00	2
	-1	0.500	0	0	0	-0,500	-1,000	-1,000	+0,500	0	0	0	0	-0,500	-1,000
-0,2857		3,50	-1,00	-1,00	0	-4,80	-3,30	-3,30	-0,50	-1,00	0	0	0	-0,500	+1,000
		-1	0,286	0,286	0	1,371	0,943	0,943	+0,143	+0,286	0	0	0	+0,143	-0,286
-0,5834			1,71	-1,29	0	-11,77	-11,34	-11,35	-0,14	-0,29	-1,00	0	0	-0,14	+0,29
			-1	+0,750	0	6,868	6,618	6,618	+0,083	0,167	+0,583	0	0	+0,083	-0,169
-0,3636				2,75	-1,00	+7,60	+9,35	+9,35	-0,25	-0,50	-0,75	-1,00	0	-0,25	+1,50
				-1	0,364	-2,762	-3,399	-3,399	+0,091	+0,182	+0,273	+0,364	0	+0,091	-0,545
-0,611					1,64	-0,34	-1,30	-1,30	-0,09	-0,18	-0,273	-0,36	-1,00	-0,09	+1,55
					-1	0,206	0,724	0,724	+0,056	+0,111	+0,167	+0,222	+0,611	+0,056	-0,947
δx_i	0,496	1,991	4,853	-2.687	0.206	28,22	28,22 / 28,22						$-\frac{1}{P_F}$	-0,611	-0,612

Сонра икинчи еквивалент тәнлијин елементләри тапылыр.(5.17) системиндән көрүндүјү кими, икинчи тәнлијин елементләри биринчи дәрәчәли чеврилмиш Гаусс алгоритмләриндән ибарәтдир. Она көрә дә, илк нөвбәдә, Гаусс алгоритмләринин ачылма гајдасындан истифадә едәрәк (§34, бәнд 2), чеврилмиш алгоритмләри чеврилмәмишләрлә əвəз етмәк лазымдыр. Сонра схем 2-дән чеврилмәмиш алгоритмләрин ујғун гијмәтләрини сечиб, онлары әвәзетмә ифадәләриндә јеринә јазмагла, мүвафиг чеврилмиш алгоритмин гијмәтини алырлар.

Мәсәлән,[bb.1]әмсалынын гијмәти беләтапылыр. Илк нөвбәдә бу алгоритми ачаг

$$[bb.1]=[bb]-\frac{[ab][ab]}{[aa]}.$$

Чәдвәл 5.3-дә $[bb]$=+4;$[ab]$=-1;$[aa]$=2.Онда, бу гијмәтләри јухарыдакы ифадәдә јеринә гојсаг, аларыг

$$[bb.1]=(+4)-\frac{(-1)(-1)}{(+2)}=3{,}5.$$

Еквивалент тәнликләрин елементләрини ашағыдакы гајда илә дә һесабламаг олар: i нөмрәли еквивалент тәнлијин схемин j нөмрәли сүтунунда јерләшән елементи, схем 2-нин һәмин координатлы елементинә, i нөмрәли сүтунда елиминасијон тәнлик елементләринин j сүтунундакы ујғун еквивалент тәнлик елементләринә вурулмасындан алынан һасилләри әлавә етмәклә тапылыр. Мәсәлән, $[cl.2]$ елементи i=3, j=6 -да јерләшир. Она көрә дә,

$[cl.2]= -10{,}4+0\bullet 1+(+0{,}286)\bullet(-4{,}8) =-11{,}771$

олар.

Икинчи еквивалент тәнлик тәртиб едилдикдән сонра, онун бүтүн елементләрини өзүнүн квадрат әмсалына (јә'ни, $[bb.1]=3{,}5$) бөлмәклә, икинчи елиминасијон тәнлији алынмышдыр. Даhа сонра, үчүнчү еквивалент, онун ардынча исә, үчүнчү елиминасијон тәнликләр вә с.тапылыр.

Гаусс үсулу илә чевирмә әмәлијјатлары (к-1) дәрәчәјә гәдәр (бизим мәсәләдә, к-1=4), башга сөзлә десәк, бир мәчhуллу $(\delta x_к)$ тәнлик алынана кими давам етдирилир.Еквивалент тәнликләрин тәртибинин дүзкүнлүјү (5.21) ифадәләри илә јохланылыр вә алынмыш нәтичә ләр схем 3-дә «јохлама» графында гејд едилир (јохлама заманы 0,0І-0,02 hәддини ашмајан ејниликләр алынмалыдыр). Нәhајәт, дүз кедишин (5.22) ифадәсинә әсасән сон јохлама hесабланмасы јеринә јетирилмишдир.

Гаусс схеминдә дүз кедиш hесабламаларынын дүзкүнлүјүнә мүвафиг јохламаларла әмин олдугдан сонра, тәрс кедиш hәјата кечирилир. Јә'ни, елиминасион тәнликләрин көмәји илә сонунчу мәчhулдан $(\delta x_к)$ башлајараг (δx_i) гијмәтләри hесабланыр.

(5.18) ифадәсиндән көрүндүјү кими, сонунчу мәчhулун гијмәти (к-1) дәрәчәли чеврилмиш сәрбәст hәдлә бәрабәрдир. Бизим мәсәләдә бешинчи елиминасион тәнлијин сәрбәст hәдди +0,206- ја бәрабәр олдуғундан, јаза биләрик: $\delta x_5=+0{,}206$. δx_4 -ү hесабламаг үчүн дөрдүнчү елиминасијон тәнлијин δx_5 сүтунунда јерләшән +0,364 әмсалыны δx_5 -ин јухарыда тапдығымыз гијмәтинә вуруб, hәмин тәнлијин сәрбәст hәдд гијмәти илә (-2,762) топламаг лазымдыр, јә'ни $\delta x_4=(+0{,}364).(+0{,}206) -2{,}762=-2{,}687$.

Ејни гајда илә, үчүнчү елиминасјон тәнликдә δx_5 вә δx_4 мәчhулларынын јериндә онларын гијмәтләрини јазмагла,

$$\delta x_3=(+0{,}75)\bullet(-2{,}687)+0\bullet(+0{,}206)+6{,}868=+4{,}853$$

алырыг. Икинчи тәнликдән

$$\delta x_2=+1{,}991;$$

вә нәhајәт, биринчи тәнликдән

$\delta x_1=+0{,}496$ алынмышдыр.

Беләликлә, δx_i мәчhулларынын hесабланма гајдасы ашағыдакындан ибарәтдир. δx_i мәчһулунун гијмәти j нөмрәли елиминасијон тәнликдән тапылыр. Нөвбәти мәчһулун гијмәтини тапмаг үчүн артыг мә'лум мәчһулларын гијмәтләрини мүвафиг елиминасијон тәнликдә ујғун әмсаллара вуруб, онун үзәринә һәмин тәнлијин сәрбәст һәддини әлавә етмәк лазымдыр.

δx_j гијмәтләри 0,001 дәгигликлә һесабланыр вә мүвафиг еквивалент тәнликләрдә онлары өз јеринә јазмагла дүзкүнлүјү јохланылыр(фәргләнмә 0,005һәддини ашмамалыдыр).

7). Нөвбәти мәрһәләдә δx_j-ләрин һесабланмыш гијмәтләрини (5.46) вә(5.47) дүстурларында јеринә гојмагла, өлчүлмүш кәмијјәтләр (бизим һалда, бучаглар) үчүн υ_i дүзәлишләри һесабланмышдыр:

$$\upsilon_1 = -0{,}495 \ ;$$
$$\upsilon_2 = +1{,}991 \ ;$$
$$\upsilon_3 = -0{,}496 \ ;$$
$$\upsilon_4 = -2{,}860 \ ;$$
$$\upsilon_5 = -0{,}378 \ ;$$
$$\upsilon_6 = -2{,}862 \ ;$$
$$\upsilon_7 = +0{,}206 \ ;$$
$$\upsilon_8 = +2{,}687 \ ;$$
$$\upsilon_9 = +0{,}207 \ ;$$

Дүзәлишләрин бу һесабланмыш гијмәтләри чәдвәл 5.I-дә гејд едилмишдир. Сонра, (5.13),(5.14), (5.23) вә (5.24) дүстурлары илә ифадә олунмуш јохлама һесабламалары һәјата кечирилмишдир:

$$[\upsilon^2] = 28{,}274; \ [\ell\ell.5] = 28{,}22; \ [\ell s.5] = 28{,}22$$

$$[\ell\upsilon] = 28{,}26; [s\vartheta] = 28{,}27$$

Алынмыш нәтичәләрә әсасән, јаза биләрик:

$$[\upsilon^2] \approx [\ell\ell.5] \approx [\ell\upsilon] = [s\upsilon] \approx [\ell s.5],$$

јә'ни, мәсәләнин һәлли дүзкүн јеринә јетирилмишдир (фәргләнмә 0,04-0,05 һәддиндә јол вериләндир).

8) Өлчүлмүш кәмијјәтләрин $\widetilde{y}_i$ таразлашдырылмыш гијмәтләри һесабланыр. Бу мәгсәдлә, кәмијјәтләрин өлчүлмүш y_i' гијмәтләринә

једдинчи бөндлә тапылмыш ујғун υ_i дүзәлишләри әлавә едилмишдир. (Бах, чәдвәл 5.1)

Шәбәкәнин схеминдән көрүндүјү кими һесабламаларын дүзкүнлүјүнү әлавә һоризонт шәртинә көрә дә јохлаја биләрик, јә'ни:

$$\widetilde{y} + \widetilde{y}_5 + \widetilde{y}_8 - \left(\alpha_{AE} - \alpha_{AB}\right) = 192^0 56' 57{,}5'' - 192^0 56' 57{,}5'' = 0.$$

9). Дирексијон бучагларын таразлашдырылмыш гијмәтләри һесабланыр. Бу мәгсәдлә $X_j^{(0)}$ гијмәтләринә (бах, бөнд 3) мүвафиг δx_j-ләр әлавә едилмиш вә

$$x_1 = 40^0 08' 42{,}2''; \; x_2 = 330^0 35' 12{,}5''; \; x_3 = 96^0 33' 06{,}05'';$$

$$x_4 = 29^0 45' 30{,}7''; \; x_5 = 329^0 22' 50{,}0''$$

нәтичәләри алынмышдыр.

10).Таразлашдырманын сон јохланмасы өлчүлмүш вә лазыми кәмијјәтләр арасындакы (5.3) әлагә тәнликләринин таразлашдырылмыш гијмәтләрлә доғру бәрабәрликләрә чеврилмәсиндән ибарәтдир. Мәсәлән, $\angle I$ бучағы үчүн

$$\widetilde{y}_1 = \widetilde{x}_2 - \widetilde{x}_1 = 330^0 35' 12{,}5'' - 40^0 08' 42{,}2'' = 69^0 33' 29{,}7''$$

аларыг. Чәдвәл 5.1-дә дә, $\widetilde{y}_1 = 69^0 33' 29{,}7''$. Бурадан белә бир нәтичә чыхыр ки, биринчи бучағын таразлашдырылмыш гијмәти дүзкүн һесабланмышдыр.

Ејни гајда илә, дирексијон бучагларын тарազлашдырылмыш гијмәтләринә әсасән дикәр бучаглар үчүн ашағыдакы гијмәтләр тапылмышдыр:

$$\widetilde{y}_2 = 60^0 35' 12{,}5''; \qquad \widetilde{y}_6 = 54^0 02' 06{,}4'';$$

$$\widetilde{y}_3 = 49^0 51' 17{,}8''; \qquad \widetilde{y}_7 = 46^0 25' 52{,}7''';$$

$$\widetilde{y}_4 = 66^0 47' 35{,}4''; \qquad \widetilde{y}_8 = 73^0 11' 26{,}8'';$$

$$\widetilde{y}_5 = 59^0 10' 18{,}2''; \qquad \widetilde{y}_9 = 60^0 22' 40{,}5''.$$

Бу нәтичәләрин дә, чәдвәл 5.1-дәки мүвафиг $\widetilde{y}_i$ гијмәтләри илә ејни олдуғуну көрүрүк. Бурадан, белә нәтичә чыхыр ки, тарազлашдырма һесабламалары бүтөвлүклә дүзкүн јеринә јетирилмишдир.

11). Билдијимиз кими,тарազлашдырма шәрти ики һиссәдән: а). параметрләр үчүн тарazлашдырылмыш (ән е'тибарлы) гијмәтләрин һесабланмасы; б). тарazлашдырылмыш кәмијјәтләрин дәгиглијинин гиjмәтләндирилмәсиндән ибарәтдир. Биринчи һиссәнин һәлли 1-10 бәндләриндә jеринә jетирилмишдир. Нөвбәти бәндләр исә дәгиглиj-ин гиjмәтләндирилмәсинә һәср едилир.

Илк нөвбәдә өлчүлмүш бучағын Бессел дүстуру илә орта квадратики сәһви һесабланмышдыр, jә'ни

$$m = \sqrt{\frac{[\upsilon^2]}{n-k}} = \sqrt{\frac{28,27}{9-5}} = 2,7''.$$

Лазыми параметләрин, еләчә дә, онларын функсиjасынын дәгиглиjини гиjмәтләндирмәкдән өтрү, §35-дә геjд едилдиjи кими, уjғун Q_{ij} чәки әмсаллары тә'jин едилмәлидир. Бизим мәсәләдә Q_{ij} әмсаллары Гаус схеминдә һесабланмышдыр. Бу заман тәләб едилән ваһид матрис к=5 олдуғундан, ашағыдакы кими олачагдыр:

$$-E=\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Дәгиглиjи гиjмәтләндирилән өлчмәләр функсиjасы кими исә, шәбәкәнин биринчи бучағы көтүрүлмүшдүр (Үмумиjjәтлә, истәнилән дахили бучағы дирексиjон бучагларын функсиjасы шәклиндә ифадә едәрәк, дәгиглиjини гиjмәтләндирмәк олар). Бу бучағын әлагә функсиjасы ашағыдакы шәклә маликдир

$$F_1 = \widetilde{y}_1 = \widetilde{x}_1 - \widetilde{x}_2 .$$

F_1 функсиjасынын x_j үзрә хүсуси төрәмәләр вектору исә (бах, §36)

$$f=\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{олар.}$$

Беләликлә, өлчмәләр вә онларын функсиjасынын дәгиглиjини Гаусс схеми илә һесабланмасы үчүн икинчи схемдә (Чәдвәл 3.5)

«Јохлама» графындан сонра әлавә беш сүтунда -Е матриси, нөвбәти ики сүтунда исә f вә $\sum$ елементләри јазылмышдыр. Сонра 3-чү схемин (Чәдвәл 5.4) сәрбәст һәддләр сүтунунда нормал тәнликләрин һәлли заманы һансы (к-1) дәрәчәли чевирмә әмәлијјатлары апарылмышдырса, бу әлавә сүтунларда һәмин әмәлијјатлар тәкрарланмышдыр.

Даһа сонра чевирмә әмәлијјаты нәтичәсиндә чәдвәл 5.4-үн тапылмыш гијмәтләриндән истифадә едәрәк, (5.33) дүстурунун көмәји илә $-\frac{1}{P_F}$ гијмәти һесабланмышдыр.

$$-\frac{1}{P_F}=(1\text{-}1+0+0+0)+1\cdot(-0{,}5)+0{,}143\cdot(-0{,}5)+(-0{,}14)\cdot(0{,}083)+$$
$$+(-0{,}25)\cdot(0{,}091)+(-0{,}09)\cdot(0{,}056)=-0{,}611\ .$$

Башга сөзлә, $-\frac{1}{P_F}$ гијмәти f функсијасынын елементләр чәминә f сүтуну үзрә ејни адлы еквивалент вә елиминасијон тәнлик елементләринин һасилләрини әлавә етмәклә тапылыр.

$-\frac{1}{P_F}$-ин јохлама гијмәти исә (5.35) дүстуру илә һесабланыр.

Бу заман f функсијасынын елементләр чәминә $\sum$ вә f сүтунларындакы ејни адлы елиминасијон вә еквивалент тәнлик елементләринин һасилләри әлавә едилир, јә'ни

$$-\frac{1}{P_F}=\left(1-1+0+0\right)+\left(-1{,}00\right)\cdot\left(1{,}00\right)+\left(-0{,}286\right)\cdot\left(-0{,}50\right)+$$
$$\left(-0{,}169\right)\cdot\left(-0{,}14\right)+\left(-0{,}545\right)\cdot\left(-0{,}25\right)+\left(-0{,}947\right)\cdot\left(-0{,}09=-0{,}612\right)\ .$$

Көрүндүјү кими, $-\frac{1}{P_F}$-нин (5.33) вә (5.35) дүстурлары илә һесабланмыш гијмәтләри үст-үстә дүшүр (даһа доғрусу, 0,612-0,611=0,01 фәргләнмәси һесаблама сәһви һәддиндәдир).

Qматрисинин Q_{ij} елементләри диагонал үсулу илә схем 3-дән (чәдвәл 5.4) тә'јин едилир. Белә ки, һәр һансы Q_{ij} елементинин гијмәти әкс ишарә илә, - E_i сүтунундакы елиминасијон елемент-ләрин - E_j сүтунундакы ејни адлы еквивалент елементләрә вурулмасындан алынан һасилләр чәминә бәрабәрдир.

Мәсәлән, диогнал үсулу илә чәдвәл (5.4)-дә јазылмыш гијмәтләрә әсасән тапарыг:

$$Q_{22}=-[0\cdot 0+(0,286)\cdot(-1,00)+(0,167)\cdot(-0,29)+$$
$$+(-0,182)\cdot(-0,50)+(0,111)\cdot(-0,18)]=+0,263;$$
$$Q_{12}=-[(+0,500)\cdot 0+(0,143)\cdot(-1,00)+(0,083)\cdot(-0,29)+$$
$$+(0,091)\cdot(-0,50)+(0,056)\cdot(-0,18)]=+0,223;$$
$$Q_{21}=-[0\cdot 1+(0,286)\cdot(-0,50)+(0,167)\cdot(-0,14)+$$
$$+(0,182)\cdot(-0,25)+(0,111)\cdot(-0,09)]=+0,222;$$

Бүтөвлүкдә Q матриси ашағыдакы шәкилдә алынмышдыр

$$Q=\begin{pmatrix} 0,611 & +0,223 & +0,166 & +0,111 & +0,056 \\ +0,222 & +0,445 & +0,334 & +0,222 & 0,111 \\ +0,165 & +0,335 & +0,833 & +0,333 & +0,167 \\ +0,111 & +0,222 & +0,333 & +0,444 & +0,222 \\ +0,056 & +0,110 & +0,167 & +0,220 & +0,611 \end{pmatrix}$$

Q матрисинин ујғун Q_{ij} елементләриндән истифадә едәрәк, (5.25) дүстуру илә дирексијон бучагларын орта квадратик сәһвләри һесабланмышдыр:

$$m_{x_1}=m_{x_5}=2,7''\cdot\sqrt{0,611}=2,1'';$$
$$m_{x_2}=m_{x_4}=2,7''\cdot\sqrt{0,445}=1,8'';$$
$$m_{x_3}=2,7''\cdot\sqrt{0,833}=2,5''.$$

$\widetilde{y}_1$ функсијасынын орта квадратики сәһви исә

$$m_{\widetilde{y}_1}=2,7''\cdot\sqrt{0,612}=2,1''.$$

12) Билдијимиз кими таразлашдырма һесабламалары е'тибарлылыг интервалларынын гурулмасы илә јекунлашдырылыр. Е'тибарлылыг интерваллары β е'тибарлылыг еһтималы вә r сәрбәстлик дәрәчәси илә тә'јин едилир. Бизим мәсәләдә

$r = n - k = 9 - 5 = 4$ вә β =0,95 гәбул етсәк, Стјудент пајланмасы чәдвәлиндән (әлавә V) бу гијмәтләрә ујғун t_β =3,2 тапарыг. Беләликлә, (5.39) ифадәсинә әсасән, биринчи дирексијон бучағын таразлашдырылмыш гијмәтинин е'тибарлылыг интервалы ашағыдакы шәклә малик олачагдыр:

$$40^0 08'42{,}2'' - 3{,}2 \cdot 2{,}1'' \le X_1 \le 40^0\,08'42{,}2'' + 3{,}2 \cdot 2{,}1'',$$

бурадан исә, $\quad 40^0 08'35{,}48'' \le X_1 \le 40^0\,08'48{,}90''$.

Ејни гајда илә , дикәр дирексијон бучаглар үчүн јаза биләрик:

$$330^0 35'06{,}70'' \le X_2 \le 330^0 35'18{,}30'';$$

$$96^0 32'58{,}05'' \le X_3 \le 96^0 33'14{,}05'';$$

$$29^0 45'24{,}90'' \le X_4 \le 29^0 45'36{,}46'';$$

$$329^0 22'43{,}3'' \le X_5 \le 329^0 22'56{,}7'' \;;$$

(5.38) - дүстуруна әсасән

$$69^0 33'23{,}0'' \le \tilde{y}_1 \le 69^0 33'36{,}4''$$

Орта квадратик сәһвләрин е'тибарлылыг интервалларыны гуракән γ_1 вә γ_2 әмсалларыны билмәк лазым кәлир. (5.40)[1] дүстурундан көрүндүјү кими, бу мәгсәдлә ујғун χ_1^2 вә χ_2^2 гијмәтләри мүәјјәнләшдирилмәлидир. χ^2 гијмәтләри хүсуси чәдвәлләрдән r сәрбәстлик әмсалы, $P_1 = \dfrac{1-\beta}{2}$ вә $P_2 = 1 - P_1$ әдәдләринә әсасән сечилир. (Әлавә VI).

Бизим мәсәләдә: $r = 4; \beta = 0{,}95; P_1 = 0{,}025; P_2 = 0{,}975$ олдуғундан, $\chi_1^2 = 12{,}031; \chi_2^2 = 0{,}382$ тапарыг. Онда, (5.40)[1] дүстуру илә $\gamma_1 = 0{,}577; \gamma_2 = 3{,}23$. Бу әмсалларын тапылмыш гијмәтләрини (5.40) ифадәсиндә јазсаг

$$0{,}577 \cdot 2{,}7'' \le \sigma_0 \le 3{,}23 \cdot 2{,}7'',$$

бурадан исә,

$$1{,}56'' \le \sigma_0 \le 8{,}7'' \quad \text{олар.}$$

Ејни гајда илә (5.41) вә (5.42) дүстурларындан:

$$1{,}21'' \le \sigma_{x_1} \le 6{,}78'';$$

$1{,}04'' \leq \sigma_{x_2} \leq 5{,}81''$;

$1{,}44'' \leq \sigma_{x_3} \leq 8{,}08''$;

$1{,}03'' \leq \sigma_{x_4} \leq 5{,}81''$;

$1{,}21 \leq \sigma_{x_5} \leq 6{,}78''$;

$1{,}21'' \leq \sigma_{\tilde{y}_1} \leq 6{,}78''$; тапылмышдыр.

ФӘСИЛ 6.
КОРРЕЛАТ ТАРАЗЛАШДЫРМА ҮСУЛУ.
§41. Коррелат үсулунун нәзәри әсаслары.

Коррелат үсулла таразлашдырма заманы илк нөвбәдә көмәкчи әмсаллар-коррелатлар, сонра исә онларын гијмәтләринә әсасән өлчүлмүш кәмијјәтләрә дүзәлишләр һесабланыр. Таразлашдырма өлчүлмүш кәмијјәтләр үчүн јазылмыш хүсуси функсијалар-шәрти тәнликләр әсасында јеринә јетирилир. Мәсәлән, үчбучағын шәрти тәнлији белә јазылыр

$$\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 - 180^0 = 0,$$

бурада: β, β_2, β_3 үчбучагда өлчүлмүш дахили бучагларын һәгиги гијмәтләридир. Ганалы теодолит кедиши үчүн бучаг шәрти тәнлији исә ашағыдакы шәклә маликдир

$$\beta_1 + \beta_2 + \ldots + \beta_n - 180^0(n-2) = 0,$$

бурада: n- бучагларын сајы; $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$-дөнмә бучагларын һәгиги гијмәтидир. Үмуми шәкилдә, шәрти тәнликләр белә ифадә олунур

$$\varphi_j(X_1, X_2, \ldots, X_n) = 0$$

бурада; X_i- өлчүлмүш кәмијјәтләрин һәгиги гијмәтләридир. Ајдындыр ки, өлчмәләр мүәјјән гијмәтләрә малик сәһвләрлә јеринә јетирилир. Әкәр (6.1) тәнликләриндә X_i-ләрин әвәзиндә кәмијјәтләрин x_i- өлчүлмүш гијмәтләрини јазсаг, онда тәнлијин сағ тәрәфиндә сыфырлардан фәргли w_j гијмәтләри алынар, јә'ни

$$\varphi_j(x_1, x_2, \ldots, x_n) = W_j \qquad (6.2)$$

W_j- маһијјәтчә, φ_j функсијаларынын һәгиги сәһвләри олуб, шәрти тәнликләрин полигон ачыглыглары (гысача, полигон ачыглығы) адланыр. Полигон ачыглыгларынын әдәди гијмәтләри өлчмә сәһвләриндән асылыдыр. Әкәр $W_j = 0$, бу о демәк дејилдир ки, өлчмәләр сәһвсиз јеринә јетирилмишләр. Белә һалларда фәрз етмәк олар ки, өлчмә сәһвләри ишарәчә әкс олдуғундан бир-бирини гаршылыглы гајдада јох етмишләр.

Таразлашдырма һесабламаларынын әсас мәгсәдләриндән бири полигон ачыглыгларыны мүәјјән гајда илә өлчмәләр арасында пајлашдыраraг, полигонлардакы һәндәси зиддијјәтләри арадан галдырмагдан ибарәтдир.

а) шәрти тәнликләрин тәртиби

Кеодезик шәбәкәдә шәрти тәнликләр артыг өлчмәләрин јеринә јетирилдији һалда тәртиб едилир. Һәр бир артыг өлчмәјә көрә бир шәрти тәнлик јазылыр, шәрти тәнлијин формасы исә таразлашдырылан шәбәкәнин нөвүндән асылыдыр.

Тутаг ки, кеодезик шәбәкәдә n сајда $X_1, X_2, ..., X_n$ кәмијјәтләри өлчүлмүш вә $x_1, x_2, ..., x_n$ нәтичәләри алынмышдыр. Онларын өлчмә чәкиләри $p_1, p_2, ..., p_n$ – јә бәрабәрдир. Онда (6.1) дүстуруна әсасән ашағыдакы шәкилдә шәрти тәнликләр јаза биләрик:

$$\begin{aligned} &\varphi_1(X_1, X_2, ..., X_n) = 0; \\ &\varphi_2(X_1, X_2, ..., X_n) = 0; \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ &\varphi_r(X_1, X_2, ..., X_n) = 0, \end{aligned} \qquad (6.3)$$

бурада: $r = n - k$ артыг өлчмәләрин сајы, k – лазыми өлчмәләрин сајы, X_i – өлчүлмүш кәмијјәтләрин һәгиги гијмәтләридир.

Лакин һәмишә $r < n$ олдуғундан (үмуми өлчмәләр сајы артыг өлчмәләр сајындан бөјүкдүр), али ријазијјат курсундан мә'лумдур ки, (6.3) шәклиндә бир нечә шәрти тәнликләр системи гурмаг мүмкүндүр. Бунунла белә, бүтүн тәнликләр системләринин ''ән квадратлар методу'' илә һәллиндән (таразлашдырылмасындан) өлчүлмүш кәмијјәтләр үчүн ејни нәтичәләр алыначагдыр.

(6.3) тәнликләринин тәртиби заманы ашағыдакы шәртләрә әмәл олунмалыдыр:

1). Системин тәнликләриндә бүтүн өлчүлмүш кәмијјәтләр аргумент кими дахил едилмәлидир;

2). (6.3) тәнликләри бир-бириндән асылы олмамалы, јә'ни, онлардан һәр һансы биринин дикәрләри васитәсилә мүәјјән һесаби чеврилмәләр јолу илә алынмасы јолверилмәздир. Бу шәрт јеринә јетирилмәзсә, тәнликләр системинин әсас детерминанты сыфра бәрәбәр олар, бу да, үмумијјәтлә, (6.3) системинин һәллини гејри-мүмкүн едәр.

Тутаг ки, (6.3) тәнликләр системи тәләб едилән шәртләрә чаваб верир. Онда бу тәнликләрдә кәмијјәтләрин һәгиги X_i гијмәтләринин әвәзинә онларын x_i өлчүлмүш гијмәтләрини јазсаг, (6.3) шәрти тәнликләр системи (6.2) тәнликләр системи шәклинә дүшәр, јә'ни

$$
\begin{aligned}
&\varphi_1(x_1,x_2,...,x_n)=W_1;\\
&\varphi_2(x_1,x_2,...,x_n)=W_2;\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&\varphi_r(x_1,x_2,...,x_n)=W_r,
\end{aligned}
\tag{6.4}
$$

бурада, W_j – шәрти тәнликләрин полигон ачыглыгларыдыр.

Таразлашдырманын әсас мәгсәди x_i өлчүлмүш гијмәтләринә (өлчмә нәтичәләринә) мүәјјән бир гајда илә υ_i дүзәлишләринин һесабланмасындан ибарәтдир. Бу заман υ_i үчүн елә гијмәтләр тапылмалыдыр ки, онлары x_i – ләрә әлавә етдикдә, (6.4) тәнликләринин сағ тәрәфиндә сыфырлар алынсын, јә'ни

$$
\begin{aligned}
&\varphi_1(x_1+\upsilon_1, x_2+\upsilon_2, ..., x_n+\upsilon_n)=0;\\
&\varphi_2(x_1+\upsilon_1, x_2+\upsilon_2, ..., x_n+\upsilon_n)=0;\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&\varphi_r(x_1+\upsilon_1, x_2+\upsilon_2, ..., x_n+\upsilon_n)=0.
\end{aligned}
\tag{6.5}
$$

Бурада: $\widetilde{x}_i = x_i + \upsilon_i$ өлчүлмүш кәмијјәтләрин таразлашдырылмыш гијмәти адланыр. Таразлашдырылмыш $\widetilde{x}_i$ гијмәтләри кәмијјәтләрин X_i һәгиги гијмәтләри илә үст-үстә дүшмүр. Лакин онларын ән кичик квадратлар методу ($[p\upsilon^2]=\min$) илә һесабланмыш υ_i мејлликләри өлчүлмүш кәмијјәтләрин һәгиги гијмәтиндән олан мејлликләри сырасында (һесабланмасы мүмкүн вариантлардан) ән кичик гијмәтлиси олур. Бу факт $[p\upsilon^2]=\min$ шәртинин оптималлығыны көстәрир.

(6.5) тәнликләринин биркә һәллинин мүмкүнлүјү үчүн онлары хәтти шәклә кәтирмәк лазымдыр. Бу мәгсәдлә системин гејри-хәтти тәнликләри Тејлор сырасына бөлүнүр. Бу заман υ_i дүзәлишләри кичик гијмәтә малик олдуғундан, сыранын биринчи һәдләри илә кифајәтләнә биләрик, јә'ни

$$\varphi_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) + \frac{\partial\varphi_1}{\partial x_1}\upsilon_1 + \frac{\partial\varphi_1}{\partial x_2}\cdot\upsilon_2 + \ldots + \frac{\partial\varphi_1}{\partial x_n}\cdot\upsilon_n = 0;$$

$$\varphi_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) + \frac{\partial\varphi_2}{\partial x_1}\upsilon_1 + \frac{\partial\varphi_2}{\partial x_2}\cdot\upsilon_2 + \ldots + \frac{\partial\varphi_2}{\partial x_n}\cdot\upsilon_n = 0; \qquad (6.6)$$

....

$$\varphi_r(x_1, x_2, \ldots, x_n) + \frac{\partial\varphi_r}{\partial x_1}\upsilon_1 + \frac{\partial\varphi_2}{\partial x_2}\cdot\upsilon_2 + \ldots + \frac{\partial\varphi_r}{\partial x_n}\cdot\upsilon_n = 0.$$

Әкәр $\frac{\partial\varphi_1}{\partial x_i} = a_i;$ $\frac{\partial\varphi_2}{\partial x_i} = b_i, \ldots,$ $\frac{\partial\varphi_r}{\partial x_2} = g_i$ ишарә етсәк вә (6.4) системини нәзәрә алсаг, (6.6) тәнликләри белә јазылар:

$$a_1\upsilon_1 + a_2\upsilon_2 + \ldots + a_n\upsilon_n + W_1 = 0;$$

$$b_1\upsilon_1 + b_2\upsilon_2 + \ldots + b_n\upsilon_n + W_2 = 0; \qquad (6.7)$$

....

$$g_1\upsilon_1 + g_2\upsilon_2 + \ldots + g_n\upsilon_n + W_r = 0.$$

(6.7) системи дүзәлиш шәрти тәнликләр системи адланыр. Гаус алгоритмләри илә бу систем ашағыдакы кими јазылар:

$$[a\upsilon] + W_1 = 0 \;;$$

$$[b\upsilon] + W_2 = 0 \;; \qquad (6.8)$$

....

$$[g\upsilon] + W_r = 0 \;;$$

матрис јазлышында исә

$$BV + W = 0 \;. \qquad (6.9)$$

Бурада матрисләр белә тә'јин едилир:

$$B=\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ b_1 & b_2 & \dots & b_n \\ . & . & . & . \\ g_1 & g_2 & \dots & g_n \end{vmatrix} \quad ; \quad V=\begin{vmatrix} \upsilon_1 \\ \upsilon_2 \\ . \\ . \\ . \\ \upsilon_n \end{vmatrix} \quad ; \quad W=\begin{vmatrix} W_1 \\ W_2 \\ . \\ . \\ . \\ W_n \end{vmatrix}$$

б)дүзәлиш коррелат тәнликләринин алынмасы.

(6.7) тәнликләр системи биргиjмәтли тә'jин едилмәjәндир, jәни, чохсаjлы һәллә маликдир. Чүнки, бу системин υ_i мәчһул дүзәлишләри нин саjы (n) һәмишә тәнликләрин саjындан (r) чохдур. КӨРҺН исбат едир ки, бу системин ән дәгиг вә биргиjмәтли һәллини ән кичик квадратлар методу илә jеринә jетирмәк олар.Билдиjимиз кими, ән кичик квадратлар методунун әсас шәрти ашағыдакы ифадәдән ибарәтдир

$$[p\upsilon\upsilon]=\min \qquad (6.10)$$

Бу шәртә әсасән, $[p\upsilon\upsilon]$ функсиjасыны минимум гиjмәтә кәтириб чыхаран υ_i дүзәлишләри үчүн елә гиjмәтләр тапылмалыдыр ки, онлар еjни заманда (6.7) тәнликләрини өдәсинләр. Коррелат үсулунда бу мәсәлә, jә'ни, шәрти екстремумун тапылмасы, Лагранж методу илә һәлл едилир.

Бу мәгсәдлә Лагранж функсиjасы тәртиб едилир, даһа дәгиг десәк,(6.8)вә (6.10) системләри биркә Лагранж функсиjасы шәклиндә jазылыр, jәни

$$\Phi=[p\upsilon\upsilon]-2k_1([a\upsilon]+W_1)-\dots-2k_r([g\upsilon]+W_r)=\min, \qquad (6.11)$$

бурада: $k_1, k_2, \dots, k_r$ -геjри-мүәjjән Лагранж әмсалларыдыр. Һесабламаларда онлар коррелатлар адланыр.

Геjд едәк ки,(6.11) ифадәсиндә даирәви мөтәризәдә верилмиш ифадәләр (6.8) дүстурундан көрүндүjү кими, сыфра бәрабәр олдуғундан,(6.10) шәрти позулмур.

Беләликлә, Ф функсиjасынын минимумуну тапмаг үчүн али риjазиjjат курсундан мә'лумдур ки, бу функсиjанын һәр бир υ_i дүзәлиши үзрә хүсуси төрәмәсини тапыб, сыфра бәрабәр етмәк лазымдыр,јә'ни

$$\frac{\partial\Phi}{\partial\upsilon_1}=2p_1\upsilon_1-2k_1a_1-2k_2b_1-\cdots-2k_rg_1=0;$$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial\upsilon_2}=2p_2\upsilon_2-2k_1a_2-2k_2b_2-\cdots-2k_rg_2=0;$$

....

$$\frac{\partial\Phi}{\partial\upsilon_n}=2p_n\upsilon_n-2k_1a_n-2k_2b_n-\cdots-2k_rg_n=0.$$

Бурадан ашағыдакы шәкилдә тәнликләр системи алынып:

$$\upsilon_1=q_1(a_1k_1+b_1k_2+\cdots+g_1k_r);$$

$$\upsilon_2=q_2(a_2k_1+b_2k_2+\cdots+g_2k_r);\qquad(6.12)$$

....

$$\upsilon_n=q_n(a_nk_1+b_nk_2+\cdots g_nk_r),$$

бурада $q_i=\dfrac{1}{p_i}$ өлчмәләрин тәрс чәкисидир.

(6.12) тәнликләри дүзәлиш коррелат тәнликләр системи адланыр.

в)коррелат нормал тәнликләрин тәртиби.

(6.12) системиндән көрүндүјү кими υ_i гијмәтләрини һесабламаг үчүн k_j коррелатлары мә'лум олмалыдыр. Коррелатлары исә мүвафиг нормал тәнликләрдән тә'јин едирләр. Она көрә дә, илк нөвбәдә коррелат нормал тәнликләри тәртиб едилмәлидир. Бу мәгсәдлә (6.12) системинин һәр ики тәрәфини биринчи әмсаллар сүтунуна, јә'ни $a_1,a_2,...,a_n$ әмсалларына вуруб, ашағыда алынмыш тәнликләрин

$$a_1\upsilon_1=q_1a_1a_1k_1+q_1a_1b_1k_2+\cdots+q_1a_1q_1k_r;$$

$$a_2\upsilon_2=q_2a_2a_2k_1+q_2a_2b_2k_2+\cdots+q_2a_2g_2k_r;$$

. . . .

$$a_n\upsilon_n=q_na_na_nk_1+q_na_nb_nk_2+\cdots+q_na_ng_nk_r,$$

сағ вә сол тәрәфләрини чәмләмәк лазымдыр. (6.8) ифадәләрини нәзәрә алсаг, нәтичәдә белә бир нормал тәнлик аларыг

$$[qaa]k_1 + [qab]k_2 + \cdots + [qag]k_r + W_1 = 0.$$

Ејни гајда илә, (6.12) системини ардычыл олараг дикәр $b_i, \ldots g_i$ әмсаллар сүтунларына вурмагла, нөвбәти нормал тәнликләри, сонда исә, бүтөвлүкдә ашағыдакы шәкилдә коррелат нормал тәнликләр системини тәртиб етмиш оларыг:

$$\begin{aligned} &[qaa]k_1 + [qab]k_2 + \cdots + [qag]k_r + W_1 = 0; \\ &[qab]k_1 + [qbb]k_2 + \cdots + [qbg]k_r + W_2 = 0; \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &[qag]k_1 + [qbg]k_2 + \cdots + [qgg]k_r + Wr = 0. \end{aligned} \qquad (6.13)$$

Гејд едәк ки, коррелат үсулда нормал тәнликләрин сајы артыг өлчмәләр (еләчә дә, шәрти тәнликләр) сајына бәрабәр олур.

г) коррелат нормал тәнликләрин һәлли.

(6.13) тәнликләри параметрик нормал тәнликләрә хас хассәләрә малик олдуғундан, онларын һәллини параметрик нормал тәнликләрин һәлл гајдасында јеринә јетирмәк олар. (6.13) тәнликләринин һәллиндән k_j коррелат гијмәтләри тапылыр. Сонра k_j гијмәтләриндән истифадә едәрәк, (6.12) тәнликләринә әсасән υ_i дүзәлишләри һесабланыр. Даһа сонра кәмиј̌јәтләрин $\tilde{x}_i = x_i + \upsilon_i$ таразлашдырылмыш гијмәтләри тәјин едилир. Өлчүлмүш кәмијјәтләрин таразлашдырылмыш гијмәтләринә әсасән, онларын истәнилән функсијасынын таразлашдырылмыш гијмәтини һесабламаг олар. Мәсәлән, кеодезија шәбәкәсиндә һәр һансы мәнтәгәнин таразлашдырылмыш координатларынын һесабланмасы.

Коррелат нормал тәнликләрин һәлли дә бешинчи фәсилдә шәһр едилмиш үсулларла һәјата кечирилир. Лакин бу үсуллардан Гаусс үсулунун схемләрдә һәлли даһа кениш истифадәјә маликдир (чәдвәл (6.1)-(6.3)).

Чәдвәл 6.1

өлчмәнин №-си	$a_i b_i \cdots g_i s'_i$	$\pi_i = \frac{1}{p_i}$	$\pi_i a_i \quad \pi_i b_i \cdots \pi_i g_i \quad \pi_i s'_i$	υ_i	$\pi_i \upsilon_i$
1	$a_1 b_1 \cdots g_1 s'_1$	π_1	$\pi_1 a_1 \quad \pi_1 b_1 \cdots \pi_1 g_1 \quad \pi_1 s'_1$	υ_1	$\pi_1 \upsilon_1$
2	$a_2 b_2 \cdots g_2 s'_2$	π_2	$\pi_2 a_2 \quad \pi_2 b_2 \cdots \pi_2 g_2 \quad \pi_2 s'_2$	υ_2	$\pi_2 \upsilon_2$
.	. . . . . .	. . .	. . . .	...	....
n	$a_n b_n \cdots g_n s'_n$	π_n	$\pi_n a_n \quad \pi_n b_n \cdots \pi_n g_n \quad \pi_n s'_n$	υ_n	$\pi_n \upsilon_n$
			$K_1 \quad K_2 \; . \; . \; . \; K_r$		

Гејд: Чәдвәл 6.1-дә дүзәлиш шәрти тәнликләринин әмсаллары параметрик үсулда олдуғу кими сәтирләр үзрә дејил, сүтунлар (графлар) бојунча јухарыдан ашағыја истигамәтдә јазылыр. Бундан башга, (6.1) чәдвәлиндә l графы јохдур, чүнки коррелат нормал тәнликләрдә сәрбәст һәдләр полигон ачыглыгларындан (W_i) ибарәтдир. Бу чәдвәлдә, һәмчинин P_i өлчмә чәкиләринин әвәзиндә, онларын тәрс чәки әмсаллары (π_i) јазылыр.

$$S'_i = a_i + b_i + \cdots + g_i .$$

Чәдвәл 6.2

	$a]$	$b] \;\; \cdots \;\; g]$	$s']$	јохлама	w	$\sum$
$[\pi a$	$[\pi a a$	$[\pi bb] \cdots [\pi a g]$	$[\pi a s']$	фәргләнмә	w_1	$\sum_1$
$[\pi b$		$[\pi bb] \cdots [\pi b g]$	$[\pi b s']$	0,01 - 0,02	w_2	$\sum_2$
. . . . .	. . . . .	. . . .	. . . . .	. . . .	. . .	. . .
$[\pi g$		$[\pi gg]$	$[\pi g s']$		w_r	$\sum_r$
$[\pi s'$			$[\pi s' s']$			

Чәдвәл 6.3

Көмәкчи әмсаллар	k_1 k_2 ... k_r	w $\sum$	Јохлама
$\left(1/[\pi aa]\right)$	$[\pi aa]$ $[\pi a в]$ ... $[\pi ag]$ -1 $-\frac{[\pi a\hat{a}]}{[\pi \grave{a}\grave{a}]}$ ... $\frac{[\pi ag]}{[\pi aa]}$	w_1 $\sum_1$ $-\frac{w_1}{[\pi a a]}$ $-\frac{\sum_1}{[\pi aa]}$	Фәргләнмә 0,01-0,02
$1/[\pi вв.1]$	$[\pi \hat{a}\hat{a}.1]$ ... $[\pi \hat{a}g.1]$ -1 ... $-\frac{[\pi \hat{a}g \cdot 1]}{[\pi \hat{a}\hat{a} \cdot 1]}$	$[w_2 \cdot 1]$ $[\sum_2 \cdot 1]$ $-\frac{[w_2 \cdot 1]}{[\pi вв \cdot 1]}$ $-\frac{[\sum_2 \cdot 1]}{[\pi вв \cdot 1]}$	
....			
$\left(1/[\pi gg(r-1)]\right)$	$[\pi gg \cdot (r-1)]$ -1	$[w_r \cdot (r-1)]$ $[\sum_r \cdot (r-1)]$ $-\frac{[w_r \cdot (r-1)]}{[\pi gg \cdot (r-1)]}$ $-\frac{[\sum_r \cdot (r-1)]}{[\pi gg \cdot (r-1)]}$	
	k_1 k_2 ... k_r	$[w_{r+1} \cdot r]$ $=$ $[\sum_{r+1} \cdot r] = -[p\upsilon^2]$	

Коррелат нормал тәнликләрин Гаус схемләриндә һәлли параметрик усулдакы ардычыллыгда јеринә јетирилир.

д/ Коррелат үсулда јохламалар.

Таразлашдырма һесабламалары мүвафиг јохламаларла һәјата кечирилир. Белә ки, дүзәлиш шәрти тәнликләринин тәртибинин дүзкүнлүјү икинчи әлдән (башга шәхс тәрәфиндән) јохланылыр. Бунунла белә, ашағыдакы бәрабәрликләр дә доғру олмалыдыр:

$$a_i + \hat{a}_i + \cdots + g_i = s_i', \qquad i = 1,2,\cdots,n \quad ; \tag{6.14}$$

вә

$$[a] + [в] + \cdots + [g] = [s_i'] \ . \tag{6.15}$$

Нормал тәнликләрин тәртиби вә һәлли исә, параметрик үсулда олдуғу кими, чәмләр методу илә јохланылыр:

$$\begin{gathered}
[\pi aa] + [\pi aв] + \ldots + [\pi ag] = [\pi as'] \quad ; \\
[\pi aв] + [\pi вв] + \ldots + [\pi вg] = [\pi вs'] \quad ; \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
[\pi ag] + [\pi вg] + \ldots + [\pi gg] = [\pi gs'] \ ; \\
[\pi as'] + [\pi вs'] + \ldots + [\pi gs'] = [\pi s's']; \\
\sum\nolimits_1 = [\pi as'] + w_1 \ ; \\
\sum\nolimits_2 = [\pi вs'] + w_2 \ ; \\
\sum\nolimits_r = [\pi gs'] + w_r \ .
\end{gathered} \tag{6.16}$$

Еквивалент тәнликләрин алынмасы заманы (чәдвәл 6.3) ашағыдакы јохламалар апарылыр:

$$\begin{gathered}
[\pi aa] + [\pi a\hat{a}] + \ldots + [\pi ag] \quad + \quad w_1 \quad = \quad \sum\nolimits_1 \quad ; \\
[\pi \hat{a}\hat{a} \cdot 1] + \ldots + [\pi \hat{a}g \cdot 1] \quad + \quad [w_2 \cdot 1] \quad = \quad \left[\sum\nolimits_2 \cdot 1\right]; \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
[\pi gg \cdot (r-1)] + [w_r \cdot (r-1)] = \left[\sum\nolimits_r \cdot (r+1)\right].
\end{gathered} \tag{6.17}$$

Схем үзрә дүз кедишин јекун јохламасы

$$[W_{r+1} \cdot r] = [W_{r+1} \cdot r] \tag{6.18}$$

Коррелат үсулда јазылмыш Гаусс алгоритмләринин (чеврилмиш, еләчә дә, чеврилмәмиш) ачылыш гајдасы ејнилә параметрик үсулдакы кимидир.

Әкәр шәрти олараг гәбул етсәк ки,

$$\begin{aligned} &W_1 = [pal]; \\ &W_2 = [pbl]; \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ &W_r = [pgl]; \\ &W_{r+1} = [pll] = 0; \end{aligned} \tag{6.19}$$

вә

$$\begin{aligned} &\sum\nolimits_1 = [pas]; \\ &\sum\nolimits_2 = [pbs]; \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ &\sum\nolimits_r = [pgs;] \\ &\sum\nolimits_{r+1} = [w] = [pls], \end{aligned} \tag{6.20}$$

онда, $[w_2 \cdot 1],[w_3 \cdot 2]$ вә с. чеврилмиш алгоритмләри параметрик үсулда $[pbl \cdot 1],[pcl \cdot 2]$ вә с. кими ачылачагдыр, јә'ни

$$[W_2 \cdot 1] = W_2 - \frac{[\pi ab]}{[\pi aa]} \cdot w_1,$$

$$[W_3 \cdot 2] = W_3 - \frac{[\pi a \cdot c] \cdot W_1}{[\pi aa]} - \frac{[\pi bc \cdot 1[W_2 \cdot 1]]}{[\pi bb \cdot 1]}.$$

Коррелат үсулда υ_i дүзәлишләринин һесабланма дүзкүнлүјү ашағыдакы ифадәләрлә мүәјјәнләшдирилир:

$$[p\upsilon^2] = -[W_{r+1} \cdot r];[p\upsilon^2] = -[kw] \; . \tag{6.21}$$

Коррелат үсулда таразлашдырманын сон јохламасы

$$\varphi_j(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \dots \tilde{x}_n) = 0 \tag{6.22}$$

бәрабәрлијинин доғру олмасындан ибарәтдир. Бурада, $\tilde{x}_i = x_i + \upsilon_i$ - өлчүлмүш кәмијјәтләрин таразлашдырылмыш гијмәтләридир.

§42. Полигон ачыглығынын јол верилән гијмәтинин һесабланмасы.

Коррелат үсулун параметрик үсулла мүгајисәдә үстүн чәһәтләриндән бири дә, таразлашдырма заманы w_j полигон ачыглыгларынын һесабланмыш јол верилән гијмәтләринә әсасән өлчмә нәтичәләриндәки кобуд сәһвләрин үзәрә чыхарылмасындан ибарәтдир.

Полигон ачыглығынын јол верилән гијмәти үчүн мүвафиг һесаблама дүстуруну чыхараг. Бу мәгсәдлә (6.9) тәнлијиндән истифадә едилир вә онун матрис јазылышында ифадәси ашағыдакы кимидир

$$W = B \cdot \Delta \ . \tag{6.23}$$

(6.23) дүстурунда Δ вектору $(-\upsilon)$ вектору илә әвәз едилмишдир. Доғрудан да, өлчмә нәтичәләриндә систематик сәһвләр јохдурса, онда υ_i дүзәлишләрини тәгриби олараг $\left(-\Delta_i\right)$ һәгиги сәһвләри кими гәбул етмәк олар. Өлчмәләр сәһвләри нәзәријјәсиндән мә'лумдур ки, өлчмәләрин һәгиги сәһвләринин коррелјасија матриси белә бир ифадә илә һесабланыр

$$K_\Delta = \sigma_0^{\ 2} \cdot P^{-1}, \tag{6.24}$$

бурада: P^1 өлчмәләрин тәрс чәки матриси, σ_0^2 ваһид чәки дисперсијасыдыр. Онда, дәгиглијин гијмәтләндирилмәси нәзәријјәсинә әсасән, W функсијасынын коррелјасија матриси үчүн јаза биләрик

$$K_w = \sigma_0^2 B P^{-1} B^{\mathrm{T}},$$

вә ја, $BP^{-1}B^{\mathrm{T}} = N$ олдуғуну нәзәрә алсаг, аларыг

$$K_w = \sigma_0^2 N. \qquad 6.25)$$

Бурадан белә бир нәтичә чыхыр ки, полигон ачыглығынын $\sigma^2_{w_j}$ дисперсијалары K_W матрисинин әсас диагонал елементләри олуб, белә тә'јин едилир:

$$\begin{aligned}
\sigma^2_{w_1} &= \sigma^2{}_0[\pi aa], \\
\sigma^2_{w_2} &= \sigma^2{}_0[\pi bb], \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\sigma^2_{w_r} &= \sigma^2{}_0[\pi gg].
\end{aligned} \tag{6.26}$$

Полигон ачыглыгларынын ријази көзләмәси үчүн е'тибарлылыг интервалларыны исә ашағыдакы шәкилдә гурурлар

$$W_j - t\sigma_{W_j} \le M_{W_j} \le W_j + t\sigma_{W_j}. \tag{6.27}$$

Әкәр өлчмәләрдә систематик сәһвләр јохдурса, онда $M_\Delta = 0$ нәтичәсиндән, (6.23) дүстуруна әсасән $M_{W_j} = 0$ алыныр. Бу исә өз нөвбәсиндә, (6.27) ифадәсиндән белә бир бәрабәрсизлик јазмаг имканы верир:

$$\left|W_j\right| \le t\sigma_{W_j},$$

вә ја

$$(W_j)\ \text{јол верилән} = \pm t\sigma_{W_j}. \tag{6.28}$$

Бурада t әмсалы мүвафиг 0,95; 0,987; 0,997 еһтималларына ујғун олараг, 2; 2,5 вә ја 3,0 гијмәтләринә бәрабәр көтүрүлүр.

Чох заман (6.26) дүстурунда σ_0 стандартынын әвәзиндә (m) орта квадратик сәһви көтүрүлүр.

§ 43. Коррелат үсулда функсијанын дәгиглијинин гијмәтләндирилмәси

Тутаг ки,

$$\widetilde{F} = \widetilde{F}(\widetilde{x}_1, \widetilde{x}_2, \ldots, \widetilde{x}_n) \tag{6.29}$$

таразлашдырылмыш функсијасынын дәгиглијини гијмәтләндирмәк тәләб олунур. Бурада, $\widetilde{x}_i = x_i + \upsilon_i$ өлчмәләрин таразлашдырылмыш гијмәтләридир. Әкәр $\widetilde{F}$ функсијасы гејри-хәтти шәклә маликдирсә, онда ону Тејлор сырасына бөлмәклә хәтти шәклә кәтирмәк лазымдыр. Бу заман биринчи дәрәчәли һәдләрлә кифајәтләнсәк, белә бир сыра аларыг

$$\widetilde{F} = \widetilde{F}(x_1, x_2, \ldots, x_n) + \left(\frac{\partial F}{\partial \widetilde{x}_1}\right) \cdot \upsilon_1 + \ldots + \left(\frac{\partial F}{\partial \widetilde{x}_n}\right) \cdot \upsilon_n. \tag{6.30}$$

Бу сырада

$\left(\dfrac{\partial F}{\partial \widetilde{x}_i}\right)_{\widetilde{x}_i = x_i} = f_i$ вә $f_0 = \widetilde{F}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ ишарә етсәк, (6.30) ифадәси ашағыдакы шәклә дүшәр

$$\widetilde{F} = f_0 + \sum_{i=1}^{n} f_i \upsilon_i . \tag{6.31}$$

Гејд: Хүсуси төрәмәнин $\widetilde{x}_i = x_i$ индекси ону көстәрир ки, f_i гијмәтләри x_i өлчмә нәтичәләринә әсасән һесабланыр.

Беләликлә, коррелат үсулда исбат едилир ки, функсијанын таразлашдырылмыш гијмәтинин тәрс чәкисини белә бир ифадә илә һесабламаг олар (чыхарышсыз):

$$\frac{1}{P_{\widetilde{F}}} = [\pi ff \cdot r] = [\pi ff] - \frac{[\pi af]^2}{[\pi aa]} - \ldots - \frac{[\pi gf \cdot (r-1)]^2}{[\pi gg \cdot (r-1)]}. \tag{6.32}$$

(6.32) дүстурунда

$$[\pi ff] = \frac{1}{P_F^{\bullet}} \tag{6.33}$$

F функсијасынын таразлашдырылмамыш гијмәтинин тәрс чәкисидир. Бу дүстурда дикәр топлананлар исә $P_{F^\bullet}$ гијмәтинин таразлашдырма нәтичәсиндә дәгигләшдирилмәсинә хидмәт едир. Ону да гејд едәк ки,

$\dfrac{1}{P_{\widetilde{F}}} \le \dfrac{1}{P_{F^\bullet}}$ бәрабәрсизлији һәмишә доғрудур.

$\dfrac{1}{P_{\widetilde{F}}}$ -нин јохлама һесаблама дүстуру исә ашағыдакы кимидир:

$$\frac{1}{P_{\widetilde{F}}} = [\pi fS \cdot r] = [\pi fS] - \frac{[\pi af][\pi aS]}{[\pi aa]} - \ldots - \frac{[\pi gf \cdot (r-1)][\pi gS \cdot (r-1)]}{[\pi gg \cdot (r-1)]}, \tag{6.34}$$

бурада: $S_i = S_i' + f_i$

$$\begin{aligned}
&[\pi as] = [\pi as'] + [\pi af];\\
&[\pi bs] = [\pi bs'] + [\pi bf];\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&[\pi gs] = [\pi gs'] + [\pi gf]
\end{aligned} \tag{6.35}$$

$Si', [\pi ac'], [\pi bs'], \cdot \cdot \cdot, [\pi gs']$

алгоритмләри исә (6.14) - (6.16) ифадәләри илә һесабланыр. F функсијасынын чәкисини Гаус схеминин көмәји илә дә тә'јин етмәк олар. Бу мәгсәдлә, схемә сәрбәст һәдләр сүтунундан сонра дәгиглији гијмәтләндирилән функсијаларын сајы гәдәр әлавә сүтунлар (графлар) дахил едилир. Сонра бу графларда да нормал тәнликләрин һәлли заманы јеринә јетирилмиш ријази чевирмәләр тәкрарланыр вә сонда схем үзрә гијмәтләрдән истифадә едәрәк, (6.33) дүстуру илә функсијанын тәрс чәкиси һесабланыр.

§ 44. Кеодезија шәбәкәләриндә дүзәлиш шәрти тәнликләринин нөвләри.

Өлчүлмүш кәмијјәтләр арасында мејдана чыхан һәндәси шәртләр вә бу шәртләрә јазылмыш дүзәлиш шәрти тәнликләринин формасы кеодезија шәбәкәсинин нөвүндән асылыдыр. Бу параграфда мүхтәлиф нөв кеодезик шәбәкәләр үчүн тәртиб едилән шәрти тәнликләрин нөвләри вә хүсусијјәтләри арашдырылыр.

I.Триангулјасија шәбәкәси. Билдијимиз кими триангулјасија шәбәкәләри сәрбәст вә гејри-сәрбәст олур. Әкәр триангулјасија шәбәкәсиндә јалныз бир башланғыч тәрәфин (базисин) уч мәнтәгәләринин координатлары мә'лумдурса, белә шәбәкә сәрбәст, координатлары мә'лум мәнтәгәләринин сајынын икидән чох олдуғу һалларда исә, гејри-сәрбәст шәбәкә адланыр. Сәрбәст шәбәкәләрдә башланғыч мә'лумларын сәһвләри өлчмә нәтичәләринин дәгиглијинә, дүзәлиш вә полигон ачыглыгларынын гијмәтләринә тә'сир етмир. Гејри-сәрбәст шәбәкәләрдә исә, әксинә олараг, башланғыч мә'лумлардакы сәһвләр һәм дүзәлиш, һәм дә, полигон ачыглыгларынын гијмәтләрини дәјишдирир. Триангулјасија шәбәкәләри өлчүлмүш истигамәтләрә, еләчә дә, бучаглара көрә таразлашдырыла биләр.

Коррелат таразлашдырма үсулунда бир-бириндән асылы олмајан шәрти тәнликләрин үмуми сајынын вә нөвләринин дүзкүн тә'јини бөјүк әһәмијјәт кәсб едир. Әкәр шәбәкәдә мејдана чыхан һәндәси шәртә көрә мүвафиг тәнлик нәзәрдән гачырылмышса, бу үмумијјәтлә, таразлашдырма мәсәләсинин там һәлл едилмәдијини көстәрәр вә шәбәкәдә һәмин шәртлә бағлы һәндәси зиддијјәт арадан галдырылмамыш галар.

а) Шәрти тәнликләрин сајы вә нөвләринин тә'јини. Сәрбәст триангулјасија шәбәкәсиндә дөрд нөв һәндәси шәрт мејдана чыхыр. Бу шәртләрә ујғун фигур, бучаглар чәми, һоризонт вә гүтб шәрти тәнликләри јазылыр. Шәбәкәдә һәр бир артыг өлчмә (тәрәф вә ја азимут) јени бир һәндәси шәрт јарадыр, бу да өз нөвбәсиндә әлавә шәрти тәнлик јазмаг имканы верир. Кеодезија шәбәкәсиндә бир-бириндән асылы олмајан шәрти тәнликләрин үмуми сајы һәмин шәбәкәдә өлчүлмүш артыг өлчмәләр сајына бәрабәрдир. Таразлашдырма өлчүлмүш истигамәтләрә көрә апарылырса, бу һалда шәрти тәнликләрин сајы вә онларын нөвләри ашағыдакы дүстурларла тә'јин едилир:

$$S_И = D^* - (2k + t);\ f = D - t - p + 1;$$

$$C = P - 2n + 3;\ r_\delta = \kappa_\delta - 1;\ r_D = \kappa_D - 1, \qquad (6.36)$$

бурада, $D^* = D + K_s + K_\alpha$.

Таразлашдырманын бучаглар үзрә апарылдығы һалда исә:

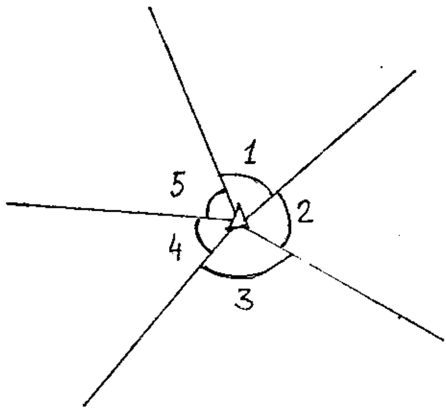
$$S_\delta = N^* - 2k;\quad f = N - p - q + 1;\ q = N + t - D;$$

$$c = p - 2n + 3;\ r_\delta = k_\delta - 1;\ r_D = K_D - 1, \qquad (6.37)$$

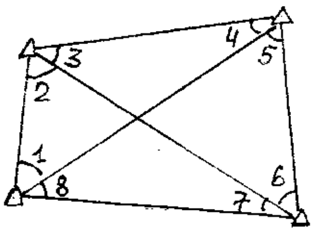
бурада, $N^* = N + K_s + K_\alpha$.

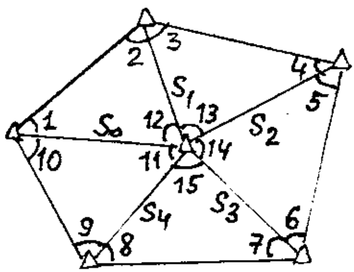
(6.36)вә (6.37) дүстурларында: $S_И$ вә S_δ истигамәтләр вә бучаглар үзрә таразлашдырма заманы шәбәкәдә мејдана чыхан шәрти тәнликләрин үмуми сајы; f-фигур шәрти тәнликләринин сајы; q - һоризонт шәртинин сајы; с-гүтб шәртләринин сајы; r_δ -. базис шәртләринин сајы; r_D- дирексијон бучаг шәртләринин сајы; Д*- шәбәкәдә өлчүлмүш (Д) истигамәтләринин, (K_S) тәрәфләринин вә (K_α) азимутларынын үмуми сајы; N*- шәбәкәдә өлчүлмүш (N) бучаглары, (K_S) тәрәфләри вә (K_α) азимутларынын сајы; K_δ-базисләрин (мә'лум тәрәфләрин) вә әлавә өлчүлмүш тәрәфләрин үмуми сајы; K_D- башланғыч мә'лум вә әлавә өлчүлмүш азимутларын үмуми сајы; n -шәбәкәдәки мәнтәгәләрин үмуми сајы; К-тә'јин едилән мәнтәгәләрин сајы; Р-шәбәкәдәки тәрәфләрин үмуми сајы; t- бучаг өлчмәләри јеринә јетирилмиш мәнтәгәләрин сајыдыр. Триангулјасија шәбәкәсиндә фигур шәртләринин сајы шәбәкәдәки үчбучагларын сајына бәрабәрдир. Һоризонт шәрти мүшаһидә мәнтәгәсиндәки бучагларын үмуми (ортаг) тәрәфләрә малик олдуғу һалда јазылыр (шәкил 6.1). Мүшаһидәләрин истигамәтләр үзрә апарылдығы һалларда һоризонт шәрти мејдана чыхмыр. Һоризонт шәртләринин сајы мәркәзи системләрдәки гүтбләр сајына бәрабәрдир.

Гүтб шәртләри јалныз кеодезик дөрдбучаглы (шәкил 6.2) вә мәркәзи системләрдә (шәкил 6.3) мејдана чыхыр.



Шәкил 6.1.Һоризонт шәртинин схеми.



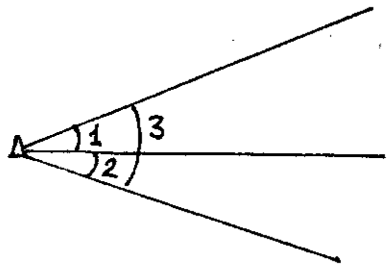


Шәкил 6.2.
Кеодезик дөрдбучаглы.

Шәкил 6.3.
Мәркәзи систем.

Онларын сајы шәбәкәдәки кеодезик дөрдбучаглы вә мәркәзи системләрин үмуми сајына бәрабәрдир.

Бучаглар чәми шәрти бучагларын мүәјјән ардычыллыгда өлчүлдүјү һалда мејдана чыхыр (шәкил 6.4.).



Шәкил 6.4. Бучаглар чәми шәртинин схеми.

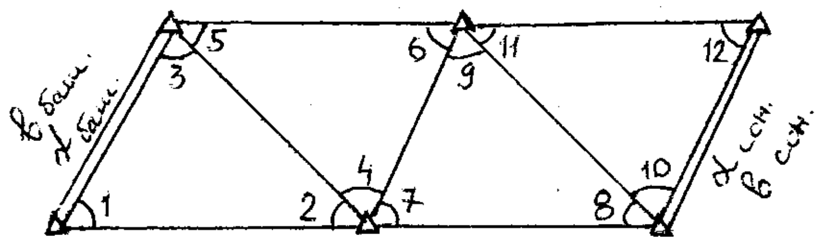
Гејри-сәрбәст трангулјасија шәбәкәләриндә јухарыда көстәрилмиш шәртләрә әлавә олараг, дирексијон бучаг, базис вә координат шәртләри мејдана чыха биләр. Координат (абсис вә ординат) шәртләринин сајы ашағыдакы ифадә илә һесабланыр

$$r_{x,y} = (2K_{x,y} - 1), \qquad (6.38)$$

бурада, K_{xy} -бир-бири илә әлагәси олмајан (ән азы, ики тә'јин едилән тәрәф узаглығында јерләшән) координатлары мә'лум мәнтәгәләр групларынын сајыдыр.

Гејри-сәрбәст триангулјасија шәбәкәләриндә мејдана чыхан шәрти тәнликләрин нөвләри вә сајыны да координат шәртләрини дә нәзәрә алсаг, (6.36) вә (6.37) дүстурлары илә тә'јин едирләр.

Әкәр триангулјасија шәбәкәсиндә ортаг мәнтәгәјә малик олмајан ики вә даһа чох мә'лум дирексијон бучаглар вардырса, онда һәмин шәбәкәдә дирексијон бучаг шәртләри јараныр (шәкил 6.5).



Шәкил 6.5. Дирексијон бучаг вә базис шәртләринин схеми.

Базис шәрти исә шәбәкәдә ики вә ја даһа чох сајда өлчүлмүш тәрәфләр вә базисләр олдугда мејдана чыхыр. Мәсәлән, схеми шәкил 6.5-дә верилмиш шәбәкәдә ики $в_{баш}$ вә $в_{сон}$ базисләринә көрә, базис шәрти јазылмалыдыр.

б) шәрти тәнликләрин тәртиби.

1. Фигур шәрти тәнликләри. Һәндәсәдән мә'лумдур ки, чохбучаглынын дахили бучагларынын нәзәри чәми 180^0 (n-2)-јә бәрабәрдир, бурада, n- бучагларын сајыдыр. Үчбучаг үчүн бу шәрт белә јазылыр

$$X_1+X_2+X_3-180^0=0,$$

бурада: X_1,X_2,X_3-дахили бучагларын һәгиги гијмәтләридир.

Әкәр башланғыч әлагә тәнлијиндә бучагларын һәгиги гијмәтләринин әвәзиндә, онларын x_i өлчүлмүш гијмәтләрини јазсаг, онда тәнлијин сағ тәрәфиндә сыфрын әвәзиндә W-јә'ни үчбучағын бучаг ачыглығы алыначагдыр

$$x_1+x_2+x_3-180^0=W.$$

Бурадан, (6.7)дүстуруна әсасән фигур шәртини ифадә едән ашағыдакы шәкилдә дүзәлиш тәнлији јазмаг олар (6.39)

$$V_1+V_2+V_3+W=0 \quad (6.39)$$

2. **Бучаглар чәминин шәрти тәнлији.** Шәкил 6.4-дә верилмиш бучаглар арасындакы әлагә тәнлијини белә көстәрә биләрик

$$X_1+X_2-X_3=0 .$$

Онда, мүвафиг шәрти тәнлик

$$V_1+V_2-V_3+W=0 \quad (6.40)$$

шәклиндә олар.(6.40) дүстурунда сәрбәст һәдд белә тә'јин едилир $W=x_1+x_2-x_3$.

3.**Һоризонт шәрти тәнлији.** Схеми шәкил 6.1.-дә көс-тәрилмиш шәбәкәнин һоризонт шәрти тәнлијини

$$V_1+V_2+V_3+V_4+V_5+W=0 \quad (6.41)$$

шәклиндә ифадә едә биләрик. Бурада,$W=x_1+x_2+x_3+x_4+x_5-360^0$.

4. Дирексијон бучағын шәрти тәнлији. Бу шәртин һәндәси мәғзи ондан ибарәтдир ки, нәзәри чәһәтдән башланғыч дирексијон бучаглардан һәр һансы биринин мә'лум гијмәти, онун дикәр башланғыч дирексијон бучагдан аралыг үчбучаглары васитәси илә һесабланмыш гијмәтинә бәрабәр олмалыдыр. Шәкил 6.5-дә верилмиш триангулјасија шәбәкәси үчүн бу шәрт белә јазылыр

$$\alpha_{сон}=\alpha_{баш}-X_3+X_4-X_9+X_{10}\pm 180^0 K,$$

Бурада: X_i- бучагларын һәгиги вә јахуд таразлашдырылмыш гијмәтләри; K-дирексијон бучағын һесабланмасында иштирак едән аралыг бучагларын сајыдыр (бизим мисалда K=4). Онда, мүвафиг шәрти тәнлик үчүн белә бир ифадә тапарыг

$$-\upsilon_3+\upsilon_4-\upsilon_9+\upsilon_{10}+w=0. \qquad (6.42)$$

(6.42)-дә полигон ачыглығы

$$w=\alpha_{баш}-x_3+x_4-x_9+x_{10}\pm 180^0 k-\alpha_{сон} \ ,$$

x_i-бучагларын өлчүлмүш гијмәтләридир.

(6.39) - (6.42) тәнликләри үмуми ад алтда бучаг шәрти тәнликләри дә адланыр вә хәтти шәклә маликдирләр.

5. Гүтб шәрти тәнлији. Бу шәртин маһијјәти ондан ибарәтдир ки, кеодезик дөрдбучаглы вә јахуд мәркәзи системдә һәр һансы тәрәфин узунлуғу онун үчбучаглардан һесабланмыш узунлуғу илә үст-үстә дүшмәлидир. Башланғыч тәрәфин бағландығы вә үчбучагларын истинадән һесабландығы мәнтәгә шәбәкәнин гүтбү адланыр.

Мәркәзи системин (шәкил 6.3) гүтб нөгтәси онун мәркәзиндә јерләшир. Әкәр мәркәзи системин S_0 тәрәфини башланғыч гәбул етсәк, онда S_1 үчүн синуслар теореминә әсасән јаза биләрик

$$S_1=S_0\cdot\frac{\sin 1}{\sin 2} \ ,$$

S_2- үчүн исә

$$S_2=S_1\cdot\frac{\sin 3}{\sin 4} \ .$$

S_1-ин јухарыдакы гијмәтини S_2 ифадәсиндә јеринә јазсаг, аларыг.

$$S_2=S_0\cdot\frac{\sin 1\cdot\sin 3}{\sin 2\cdot\sin 4}.$$

Ејни гајда илә, ардычыл олараг

$$S_3 = S_0 \cdot \frac{\sin 1 \cdot \sin 3 \cdot \sin 5}{\sin 2 \cdot \sin 4 \cdot \sin 6},$$

$$S_4 = S_0 \cdot \frac{\sin 1 \cdot \sin 3 \cdot \sin 5 \cdot \sin 7}{\sin 2 \cdot \sin 4 \cdot \sin 6 \cdot \sin 8}.$$

тапарыг.

Үчбучаглар сырасыны башланғыч тәрәфдә ғанасаг, сонда белә бир ифадә алынар

$$S_0 = S_0 \cdot \frac{\sin 1 \cdot \sin 3 \cdot \sin 5 \cdot \sin 7 \cdot \sin 9}{\sin 2 \cdot \sin 4 \cdot \sin 6 \cdot \sin 8 \cdot \sin 10}. \qquad (6.43)$$

(6.43) гүтб шәртинә көрә јазылмыш башланғыч әлагә тәнлијидир. Гүтб тәнлијиндә тәк рәгәмли бүчагларын синуслары сүрәтдә, чүт рәгәмлиләрин синуслары исә мәхрәчдә јазылмышдыр. Бу гајданын сахланылмасы үчүн учбучагларда әввәлчә ирәли тәрәфин (S_1), сонра исә кери тәрәфин (S_0) гаршы бучагларыны нөмрәләмәк лазымдыр.

(6.43) тәнлији гејри-хәтти шәклә малик олдуғундан, һәлли асандлашдырмаг мәгсәди илә ону хәтти шәклә кәтирмәк лазымдыр.

Јахын заманларадәк (6.43) тәнлијини логарифмләмә јолу илә, хүсуси логарифм чәдвәлләриндән истифадә етмәклә һесаблајырдылар. Лакин һал-һазырда бу мәсәләнин һәлли ЕҺМ-ләр васитәси илә һәјата кечирилир. Она көрә дә, (6.43) әлагә тәнлијиндән ашағыдакы шәкилдә хәтти дүзәлиш тәнлији алырлар

$$\operatorname{ctg}1' \cdot \upsilon_1 + \operatorname{ctg}3' \cdot \upsilon_3 + \operatorname{ctg}5' \cdot \upsilon_5 + \operatorname{ctg}7' \cdot \upsilon_7 + \operatorname{ctg}9' \cdot \upsilon_9 - \operatorname{ctg}2' \cdot \upsilon_2 -$$

$$- \operatorname{ctg}4' \cdot \upsilon_4 - \operatorname{ctg}6' \cdot \upsilon_6 - \operatorname{ctg}8' \cdot \upsilon_8 - \operatorname{ctg}10' \cdot \upsilon_{10} + w\rho'' = 0$$

Үмуми шәкилдә, гүтб шәрти тәнлијини белә јазмаг олар

$$\sum_{i=1,3,5,7} \operatorname{ctg}x_i \upsilon_i - \sum_{i=2,4,6,8} \operatorname{ctg}x_i \upsilon_i + w \cdot \rho'' = 0. \qquad (6.44)$$

Бурада:

$$w = \frac{\sin 1' \cdot \sin 3' \cdot \sin 5' \cdot \sin 7' \cdot \sin 9'}{\sin 2' \cdot \sin 4' \cdot \sin 6' \cdot \sin 8' \cdot \sin 10'} - 1;$$

$1', 2', 3', \ldots, 10'$ - бучагларын өлчүлмүш гијмәтләри;

$\rho'' = 206265''$ - радианын бучаг санијәләри илә гијмәтидир.

Кеодезик дөрдбучаглынын гүтбү диагоналларын кәсишмә нөгтәсиндә көтүрүлүр вә учбучаглар сырасы бу нөгтә әтрафында га-

ганыр. Кеодезик дөрдбучаглынын гүтб шәрти тәнлији мәркәзи систем үчүн алынмыш ујғун (6.44) тәнлији илә ејнилик тәшкил едир. Шәкил 6.2-дә верилмиш кеодезик дөрдбучаглысы үчүн гүтб тәнлијинин сәрбәст һәдди белә тә'јин едилир.

$$w = \frac{\sin 1' \cdot \sin 3' \cdot \sin 5' \cdot \sin 7'}{\sin 2' \cdot \sin 4' \cdot \sin 6' \cdot \sin 8'} - 1$$

6. Базис шәрти тәнлији. Бу шәртин мәғзи ондан ибарәтдир ки,шәбәкәдәки базисләрдән биринин мә'лум узунлуг гијмәти, онун аралыг үчбучаглар васитәси илә дикәр базисдән һесабланмыш гијмәтинә бәрабәр олмалыдыр. Базис шәрти тәнлији ејнилә гүтб шәрти тәнлији кими јазылыр. Фәргли чәһәт ондан ибарәтдир ки, гүтб шәртиндә үчбучаглар сырасы һансы тәрәфдән башланырса, һәмин тәрәфә дә гапаныр. Базис шәртиндә исә, үчбучаглар сырасы бир базисдән башлајыб, дикәринә бағланыр.

Схеми шәкил 6.5-дә верилмиш шәбәкә үчүн базис шәрти тәнлијини ашағыдакы шәкилдә јаза биләрик

$$\frac{b_{\text{баш}}}{b_{\text{сон}}} \cdot \frac{\sin 1 \cdot \sin 5 \cdot \sin 7 \cdot \sin 11}{\sin 2 \cdot \sin 6 \cdot \sin 8 \cdot \sin 12} = 1 \quad . \tag{6.45}$$

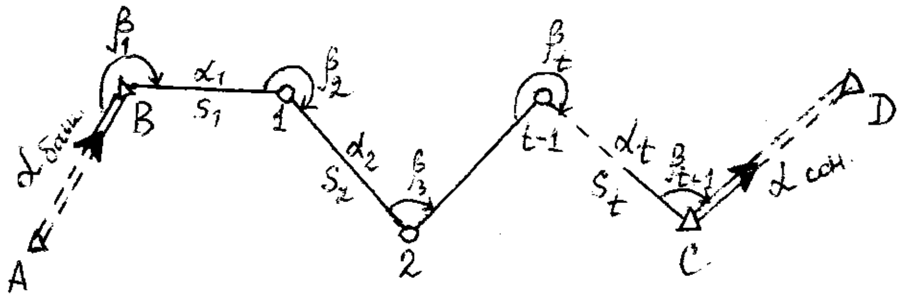
7. Координат шәрти тәнликләри. Координат шәрти тәнликләри јазыларкән, о әсас көтүрүлүр ки, бир дајаг мәнтәгәсинин (групун) мә'лум координатлары онлар үчүн дикәр дајаг мәнтәгәсиндән (групдан) аралыг үчбучагларынын көмәјилә һесабланмыш координатларына бәрабәр олмалыдыр. Координат шәрти тәнликләри мүрәккәб шәклә малик олдуғундан бурада онларын тәфсилатлы изаһыны өтүрүрүк.

II. Полигонометрија шәбәкәси. Полигонометрија шәбәкәси ики вә даһа чох кедишдән ибарәтдир вә таразлашдырылмасы бүтөвлүкдә полигонометрија шәбәкәси үчүн дејил, она дахил олан ајры-ајры кедишләр үзрә тәртиб едилмиш шәрти тәнликләр әсасында апарылыр.

Кеодезија курсундан билирик ки, полигонометрија кедишиндә t сајда тәрәф вә $t+1$ сајда үфүги дөнмә бучағы өлчүлүр (шәкил 6.6). Үмуми өлчмәләрин сајы $n = t + (t+1) = (2t+1)$-ә бәрабәрдир. Лазыми кәмијјәтләрин (тә'јин едилән мәнтәгәләрин абсис вә ординатлары) сајы исә $k = 2(t-1)$-дир. Онда, артыг өлчмәләр сајы белә тә'јин едиләр

$$r = n - k = (2t + 1) - 2(t - 1) = 3$$

Мә'лумдур ки, коррелат таразлашдырма үсулунда шәрти тәнликләрин сајы шәбәкәдәки артыг өлчмәләр сајына бәрабәрдир. Бурадан беләнәтичә чыхыр ки, һәр бир полигонометрија кедиши үчүн бир-бириндән асылы олмајан үч шәрти тәнлик јазылмалыдыр. Ејни заманда тәнликләрин сајына кедиш үзрә аралыг мәнтәгәләрин сајы тә'сир етмир. Беләликлә, полигонометрија кедишиндә дирексијон бучаг, абсис вә ординат шәртләри мејдана чыхыр.



Шәкил 6.6 Ачыг полигонометрија кедишинин схеми.

1.Дирексијон бучаг шәрти. Бу шәртин мәғзи ондан ибарәтдир ки, СД тәрәфинин мә'лум $\alpha_{сон}$ дирексијон бучаг гијмәти, онун $\widetilde{\beta}_i$ бучаг өлчмә нәтичәләри вә АВ тәрәфинин $\alpha_{баш}$ дирексијон бучағына әсасән һесабланмыш $\alpha_{сон}^{hесаб.}$ гијмәти илә үст-үстә дүшмәлидир. Бу шәрти ифадә едән шәрти тәнлик белә јазылыр:

$$\sum_{i=1}^{t+1} \upsilon_{\beta_i} + w_\beta = 0, \qquad (6.46)$$

бурада

$$w_\beta = \alpha_{баш} - \alpha_{сон} + \sum_{i=1}^{t+1} \beta_{сол\ i}^{өл.} - 180^0 \cdot (t+1). \qquad (6.47)$$

2. Координат шәртләри.

а) Абсис шәрти. Бу шәртә көрә С мәнтәгәсинин верилмиш $X_c^{верил.}$ абсис гијмәти онун s_i вә β_i -нин таразлашдырылмыш гијмәтләри илә В мәнтәгәсиндән һесабланмыш $x_c^{hесаб.}$ абсисинә бәрабәр олмалыдыр.

б) Ординат шәрти. Бу шәрт дә ејнилә абсис шәрти кими ифадә олунур. Фәргли чәһәти ондан ибарәтдир ки, бу һалда координатларын бәрабәрлији ординат оху үзрә јохланыр, јә'ни

$$y_c^{hесаб.} = y_c^{верил.}.$$

Координат шәртләринә әсасән јазылмыш шәрти тәнликләр ашағыдакы шәклә маликдир:

$$\sum \upsilon_{s_i} \cdot \cos\alpha_i + \frac{1}{\rho}\sum_{i=1}^{t+1} \eta_i \upsilon_{\beta_i} + \frac{1}{\rho}\eta_{сон} \cdot w_\beta + w_x = 0;$$

$$\sum \upsilon_{s_i} \cdot \sin\alpha_i - \frac{1}{\rho}\sum_{i=1}^{t+1} \xi_i \upsilon_{\beta_i} - \frac{1}{\rho}\xi_{сон} \cdot w_\beta + w_y = 0, \qquad (6.48)$$

бурада: η_i вә ξ - мәркәзи координатлар олуб, ашағыдакы ифадәләрлә һесабланыр:

$$\eta_i = y_i - y_м; \qquad \xi = x_i - x_м,$$

$x_м$, $y_м$ - ағырлыг мәркәзинин координатларыдыр. Әкәр бучаглар ејни дәгигликлә өлчүлмүшдүрсә, онда

$$x_M = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_{t+1}}{t+1} = \frac{[x]}{t+1},$$

$$y_M = \frac{y_1 + y_2 + \cdots + y_{t+1}}{t+1} = \frac{[y]}{t+1}. \qquad (6.49)$$

$\upsilon_{s_i}, \upsilon_{\beta_i}$ -тәрәфләрә вә бучаглара һесабланмыш дүзәлишләр; w_x, w_y – полигонометрија кедишинин х вә у охлары үзрә полигон ачыглыгларыдыр.

Гејд: (6.46) вә (6.48) тәнликләриндә фәрз едилир ки, $\alpha_{баш}$, $\alpha_{сон}$ вә дајаг мәнтәгәләринин (бизим мисалда, В вә С мәнтәгәләри) координатлары сәһвсиздир.

Таразлашдырманын сонракы мәрһәләри нормал тәнликләрин тәртиби вә һәллиндән ибарәтдир. (бах, §41).

III. **Трилатерасија шәбәкәси.** Әсасән параметрик үсулла таразлашдырылыр, чүнки трилатерасија шәбәкәсиндә мејдана чыхан һәндәси шәртләри шәрти тәнликләрә нисбәтән дүзәлиш тәнликләри илә ифадә етмәк даһа асандыр. Бунунла белә триалатерасија шәбәкәләринин таразлашдырылма алгоритләри мүрәккәб шәкилә малик олуб, кениш изаһат тәләб етдијиндән бурада бахылмыр. Мараглананлар мүвафиг әдәбијјатлардан истифадә едә биләр [4,5,7].

IV.Нивелир шәбәкәси. Нивелир шәбәкәси үчүн јазылмыш шәрти тәнликләр полигон шәрти тәнликләри адланыр. Нивелир полигонлары өз нөвбәсиндә ачыг вә ја гапалы формалы ола биләр. Әкәр нивелир кедишләри бир дајаг мәнтәгәсиндән башлајыб дикәринә бағланырса, ачыг формалы, бир дајаг мәнтәгәсиндән башлајыб она да гапандығы һалда исә, гапалы формалы һесаб едилир.

Үмуми һалда, полигон шәрти тәнликләри белә јазылыр

$$\sum_{i\in j}(\pm\upsilon_i)+W_j=0, \tag{6.50}$$

бурада, $\sum_{i\in j}(\pm\upsilon_i)$ јазылышы ону көстәрир ки, чәм алтда јалныз j нөмрәли полигонун јүксәлиш дүзәлишләри топланмалыдыр. Дүзәлишин өз ишарәси исә белә мүәјјәнләшдирилир: әкәр нивелир кедиши вә полигонун истигамәтләри ејнидирсә, онда дүзәлиш мүсбәт ишарәли, әкс һалда исә, мәнфи ишарәли олур.

(6.50) тәнлијиндә полигон ачыглыглары белә һесабланыр:

$$W_j=\sum_{i\in j}\pm h_i+H_{\text{баш.}}-\mathrm{H}_{\text{сон}}, \tag{6.51}$$

гапалы полигонларда $\mathrm{H}_{\text{баш.}}=\mathrm{H}_{\text{сон}}$ олдуғундан,

$$W_j=\sum_{i\in j}\pm h_i\ . \tag{6.52}$$

Бурада, h_i-өлчүлмүш нисби јүксәкликләрдир.

Полигон шәрти тәнликләринин әмсалларынын ± 1 вә сыфырдан ибарәт олдуғу һалда, нормал тәнликләри шәрти тәнликләр тәртиб етмәдән дә алмаг олар. Бунун үчүн илк нөвбәдә нивелир шәбәкәсинин схемини мүвафиг гајда да һесабламаја һазырламаг лазымдыр:

1) бүтүн кедишләрин (1-дән *n*-ә гәдәр) вә полигонларын (1-дән *r*-ә гәдәр, *r=n-k*, бурада, *k* -говшаг мәнтәгәләрин сајыдыр) ардычыл нөмрәләнмәси; 2) кедишләрин вә полигонларын истигамәтләринин сечилмәси; 3) өлчмә нәтичәләринин (јүксәлишләрин), кедишләр үзрә тәрс өлчмә чәкиләринин вә кедишләрин узунлугларынын схем үзәриндә көстәрилмәси; Нивелир шәбәкәсини һесабланмаја һазырландыгдан сонра проф. В.В.Поповун тәклиф етдији садә вә әлверишли гајдаларла нормал тәнликләр тәртиб едилир:

а) i сәтриндәки нормал тәнликләрин квадратик әмсаллары i нөмрәли полигона мәхсус кедишләрин тәрс чәкиләр чәминә бәрабәрдир;

б) i сәтири илә j сүтунунун кәсишмәсиндә јерләшән гејри-квадратик әмсалларын гијмәти i, һәм дә, j нөмрәли полигона аид олан ортаг кедишин тәрс чәкисинә бәрабәрдир, ишарәси исә, полигонлар ејни истигамәтли олдугда мүсбәт, әкс һалда мәнфидир;

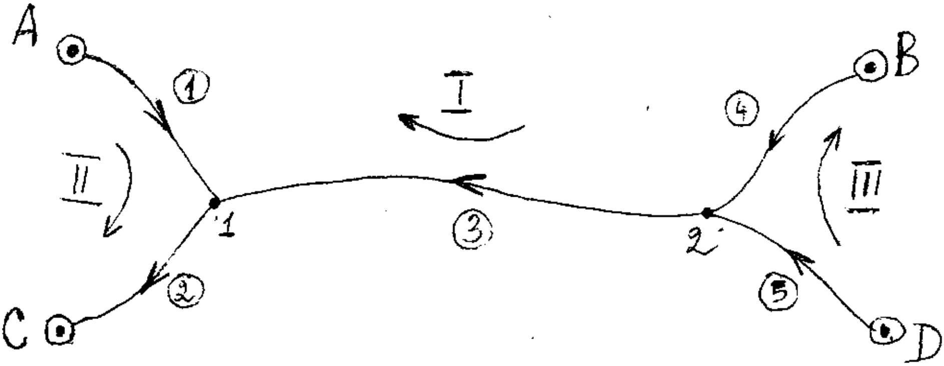
в) i нормал тәнлијинин сәрбәст һәдди i нөмрәли полигонун ачыглығына бәрабәрдир;

г) һәр бир i полигонуна i ишарәли коррелат ујғун кәлир.

Нормал тәнликләрин һәллиндән мүвафиг коррелатлар тапылыр. Сонра коррелатлара көрә өлчүлмүш кәмијјәтләрә V_i дүзәлишләри һесабланыр: V_i-нин гијмәти ујғун π_i тәрс чәкиси илә i нөмрәли кедишин мәнсуб олдуғу полигонларын коррелатлар чәминин һасилинә бәрабәрдир. Әкәр кедишлә полигонун истигамәтләри ејнидирсә, онда коррелат мүсбәт, әкс һалда исә, мәнфи ишарә илә көтүрүлүр.

Схеми шәкил 6.7-дә верилмиш нивелир шәбәкәси үчүн В.В.Попов үсулу илә ашағыдакы шәкилдә нормал тәнликләр јаза биләрик (бу шәбәкәдә n=5 вә K=2 олдуғундан, нормал тәнликләрин сајы r=5-2=3):

$$
\begin{aligned}
(\pi_1+\pi_3+\pi_4)\cdot k_1-\pi_1 k_2-\pi_4 k_3+W_1&=0;\\
-\pi_1\cdot k_1-(\pi_1+\pi_2)k_2+W_2&=0;\\
-\pi_4\cdot k_1+(\pi_4+\pi_5)k_3+W_3&=0;
\end{aligned}
\qquad (6.53)
$$



Шәкил 6.7. Ики говшаг нөгтәли нивелир шәбәкәсинин схеми.

(6.53) тәнликләринин һәллиндән, дүзәлишләр үчүн белә гијмәтләр аларыг:

$$\upsilon_1 = \pi_1 \cdot (k_2 - k_1);\ \ \upsilon_2 = \pi_2 \cdot k_2;\upsilon_3 = \pi_3 \cdot k_1;$$

$$\upsilon_4 = \pi_4 \cdot (k_1 - k_3);\ \upsilon_5 = \pi_5 \cdot k_3$$

§45.Коррелат үсулла мәсәлә һәлли.

Инди исә коррелат үсулун таразлашдырма хүсусијјәтләри вә ардычыллығыны әјани олараг көстәрәк.

Бу мәгсәдлә, §40-да һәлли параметрик үсулла верилмиш кеодезија мәсәләсини бурада тәкрарән коррелат үсулла һәлл едәк.

Һәлли: 1) Илк нөвбәдә шәбәкәдә мејдана чыхан һәндәси шәртләр сајыны мүәјјәнләшдирмәк лазымдыр. Билдијимиз кими, һәндәси шәртләр сајы артыг өлчмәләр сајына бәрабәрдир.

Бу мәсәләдә n=9; k=5 олдуғундан, артыг өлчмәләр сајы

r=n-k=9-5=4 аларыг.

2) Шәрти тәнликләрин тәртиби. Әввәлки бәнддә мүәјјәнләшдирилди ки, шәрти тәнликләрин сајы дөрдә бәрабәрдир. Бунлардан үчү фигур шәртинә (чүнки шәбәкәдә үч әдәд үчбучаг вардыр, бири исә, бучаглар чәми шәртинә көрә мејдана чыхыр. Бу тәнликләр ашағыдакы шәкилә маликдир (шәрти тәнликләрин тәртиби гајдасы изаһларла §44, бәнд I. б-дә верилмишдир):

$$\upsilon_1 + \upsilon_2 + \upsilon_3 - 1{,}0 = 0;$$

$$\upsilon_4 + \upsilon_5 + \upsilon_6 + 6{,}1 = 0;$$

$$\upsilon_7 + \upsilon_8 + \upsilon_9 - 3{,}1 = 0;$$

$$\upsilon_2 + \upsilon_5 + \upsilon_8 - 4{,}3 = 0\ .$$

Мәсәләдә таразлашдырылан өлчмәләр функсијаларына мисал кими, ВС тәрәфинин дирексијон бучағы көтүрүлмүшдүр (шәкил 5.1-дә I нөмрәли бучаг). Бу функсија белә тә'јин олунур (бах, шәкил 5.1)

$$\widetilde{F}_{x_1} = \alpha_{AB} - 180^0 - \widetilde{y}_3, \qquad (6.54)$$

бурада, $\widetilde{y}_3 = (y_3 - \upsilon_3)$ – үч нөмрәли бучағын таразлашдырылмыш гијмәтидир. (6.54) ифадәсини (6.31) дүстуруна ујғун шәкилә салсаг, аларыг:

$$\widetilde{F}_{x_1} = f_0 + f_3 \cdot \upsilon_3$$

бурада,

$$f_0 = \alpha_{AB} - 180^0 - y_3^{өлч.};$$

$$f_3 = -1 .$$

Бундан сонра мәсәләнин Гаусс схемләриндә һәлли һәјата кечирилмишдир. Чәдвәл 6.4-дә һәллин биринчи схеми јазылмышдыр.

Чәдвәл 6.4.

өлчмәләрин нөмрәси	a	в	c	d	f	s	v	[pv²]
I	+I	0	0	0	0	+I	-0,49	0,24
2	+I	0	0	+I	0	+2	+I,99	3,96
3	+I	0	0	0	-I	0	-0,49	0,24
4	0	+I	0	0	0	+I	-2,86	8,18
5	0	+I	0	+I	0	+2	-0,38	0,14
6	0	+I	0	0	0	+I	-2,86	8,18
7	0	0	+I	0	0	+I	+0,20	0,04
8	0	0	+I	+I	0	+2	+2,69	7,24
9	0	0	+I	0	0	+I	+0,20	0,04
	+3	+3	+3	+3	-I	+II		
W= K= KW=	-1 -0,494 +0,494	+6,1 -2,860 -17,446	-3,1 +0,205 -0,635	-4,3 +2,485 -10,68	[KW]=-28,26			[pv²]= =28,26

Гејд: а) Чәдвәл 6.4-дә υ вә $[p\upsilon^2]$ гијмәтләри таразлашдырмадан сонра јазылыр;

б) Өлчмәләр бәрабәрдәгигли олдуғундан чәдвәлдә р (өлчмә чәкиси) графы јохдур;

3) Параметрик үсулдакы гајдаларла коррелат нормал тәнликләри тәртиб едилмишдир. Бурада һәмин гајдалар тәкрарланма олмасын дејә кәтирилмир (бах,§40,бәнд5).

Нормал тәнликләрин әмсаллары вә сәрбәст һәдд гијмәтләри чәдвәл 6.4-дәки мә'луматлара әсасән һесабланыр (чәдвәл6.5).

Чәдвәл 6.5.

	a]	b]	c]	d]	f]	s]	јохлама	W	Σ
[a	3	0	0	1	-1	3	3	-1	3
[b		3	0	1	0	4	4	+6,1	+10,1
[c			3	1	0	4	4	-3,1	+0,9
[d				3	0	6	6	-4,3	+1,7
[f					1	0	0		
[s						17	17		

4) Чәдвәл 6.6-да коррелат нормал тәнликләрин Гаусс үсулу илә һәлли јеринә јетирилмишдир (бах,§40 бәнд 6). Бу заман (6.14)-(6.18) дүстурлары илә мүәјјәнләшдирилән јохлама һесабламалары һәјата кечирилир. Чәдвәл 6.6-да икинчи јохлама һесабламасы биринчи јохламадан W гијмәтини чыхыб, үзәринә ујғун f гијмәтини әлавә етмәклә јеринә јетирилир.

Чәдвәл 6.6.

Көмәкчи әмсаллар	K_1	K_2	K_3	K_4	W	Σ	Биринчи јохлама	f	s	Икинчи јохлама
(-0,3333)	-3	0	0	1	-1	3	3	-1	3	3
	(-1)	0	0	-0,333	+0,333	-1	-1	+0,333	-1	-1
(-0,3333)		3	0	1	+6,10	+10,10	+10,10	0	4	4
		-(1)	0	-0,333	-2,033	-3,367	-3,366	0	-1,333	-1,333
(-0,3333)			3	1	-3,10	+0,90	+0,90	0	4	4
			(-1)	-0,333	+1,033	-0,300	-0,300	0	-1,333	-1,333
(-0,5000)				2	-4,97	-2,96	-2,97	+0,33	+2,340	+2,34
				(-1)	+2,485	+1,480	+1,485	-0,165	-1,170	-1,170
					-28,29	-28,26				
	K_1	K_2	K_3	K_4						
	-0,494	-2,860	+0,205	+2,485						

Истәр сәтирләр үзрә, еләчә дә, (6.18) дүстуру илә һәјата кечирилән (јә'ни, $\left[W_{r+1}\cdot r\right] = -28,29 \approx \left[\sum_{r+1}\cdot r\right] = -28,26)$] јохламаларла көстәрилмишдир ки, нормал тәнликләрин һәлли һесаблама дәгиглији һәддиндә (0,01-0,02) дүзкүн јеринә јетирилмишдир. Һесабламаларын дүзкүнлүјүнә әмин олдугдан сонра, схем үзрә тәрс кедишиндән коррелатлар үчүн гијмәтләр тапылмышдыр:

$$K_1 = -0,494;\ K_2 = -2,860;\ K_3 = 0,205;\ K_4 = 2,485.$$

5). Бундан сонра (6.12) дүстурлары илә υ_i дүзәлишләри һесабланмышдыр:

$$\upsilon_1 = -0,494'' \approx -0,5'';$$
$$\upsilon_2 = 1,991'' \approx 2,0'';$$
$$\upsilon_3 = -0,494'' \approx -0,5'';$$
$$\upsilon_4 = -2,86'' \approx -2,9'';$$

$$\upsilon_5 = -0{,}375'' \approx -0{,}4'';$$
$$\upsilon_6 = -2{,}860'' \approx -2{,}9'';$$
$$\upsilon_7 = 0{,}205'' \approx 0{,}2'';$$
$$\upsilon_8 = 2{,}690'' \approx 2{,}7'';$$
$$\upsilon_9 = 0{,}205'' \approx 0{,}2''.$$

Көрүндүјү кими

$$\left[P\upsilon^2\right] = 28{,}26;$$
$$[KW] = -28{,}27;$$
$$\left[W_{r+1}\cdot r\right] = 28{,}29$$

олдуғундан, онлар арасында ашағыдакы тәгриби ејнилији јаза биләрик

$$\left[P\upsilon^2\right] \approx -\left[W_{r+1}\cdot r\right] \approx -[KW]$$

Бурадан исә, белә нәтичәјә кәлмәк олар ки, (6.21) јохламасы өдәнир, јә'ни, υ_i гијмәтләри дүзкүн һесабланмышдыр.

6). Кәмијјәтләрин таразлашдырылмыш гијмәтләри һесабланмышдыр. Бу мәгсәдлә, өлчүлмүш гијмәтләрә υ_i дүзәлишләри әлавә едиләрәк, ашағыдакы нәтичәләр алынмышдыр:

$$\tilde{y}_1 = y_1' + \upsilon_1 = 69°33'30{,}2'' - 0{,}5'' = 69°33'29{,}7'';$$

$$\tilde{y}_2 = 60°35'12{,}5''; \qquad \tilde{y}_6 = 54°02'06{,}4'';$$
$$\tilde{y}_3 = 49°51'17{,}8''; \qquad \tilde{y}_7 = 46°25'52{,}7'';$$
$$\tilde{y}_4 = 66°47''35{,}4''; \qquad \tilde{y}_8 = 73°11'26{,}8'';$$
$$\tilde{y}_5 = 59°10'18{,}2''; \qquad \tilde{y}_9 = 60°22'40{,}5''.$$

Мүгајисәдән көрүндүјү кими, υ_i вә y_i кәмијјәтләринин коррелат үсулла тапылмыш гијмәтләри онларын параметрик үсулда алынмыш гијмәтләринә бәрабәрдир (бах, чәдвәл 5.1). Бу факт бир даһа таразлашдырма үсулундан асылы олмајараг, бүтүн үсулларын ејни нәтичәләрә кәтириб чыхармасы һаггындакы нәзәри мүддәаны тәчрүби олараг тәсдиг едир.

Коррелат таразлашдырма үсулунун сон јохламасы (6.22) ифадәси илә һәјата кечирилир. Јә'ни башланғыч шәрти тәнликләрдә өлчүлмүш кәмијјәтләрин таразлашдырылмыш гијмәтләрини јазыб, онларын доғру бәрабәрлијә чеврилиб-чеврилмәмәси јохланылыр. Бизим мәсәләдә һесабламаларла бу јохламанын да өдәнилдији көстәрилмишдир.

$$\begin{aligned}
&\widetilde{y}_1+\widetilde{y}_2+\widetilde{y}-180°=0;\\
&\widetilde{y}_4+\widetilde{y}_5+\widetilde{y}_6-180°=0;\\
&\widetilde{y}_7+\widetilde{y}_8+\widetilde{y}_9-180^0=0;\\
&\widetilde{y}_2+\widetilde{y}_5+\widetilde{y}_8-(\alpha_{AE}-\alpha_{AB})=0.
\end{aligned} \qquad (6.55)$$

Доғрудан да, биринчи тәнлик үчүн

$$69°33'27{,}7''+60°35'12{,}5''+49°51'17{,}8''-180=0,$$

јә'ни, (6.22) шәрти там јеринә јетирилир. Еләчә дә, дикәр тәнликләр үчүн (6.22) доғру бәрабәрлијә чеврилир.

7). Дирексион бучагларын таразлашдырылмыш гијмәтләри һесабланмышдыр:

$$\begin{aligned}
&\widetilde{X}_1=\alpha_{AB}+180°-\widetilde{y}_3=40°08'42{,}2'';\\
&\widetilde{X}_2=\alpha_{AB}+\widetilde{y}_2=330°35'12{,}5'';\\
&\widetilde{X}_3=\widetilde{X}_2+180°-\widetilde{y}_6=96°33'06{,}1'';\\
&\widetilde{X}_4=\alpha_{AE}-\widetilde{y}_8=29°45'30{,}7'';\\
&\widetilde{X}_5=\alpha_{AE}+180°+\widetilde{y}_7=329°22'50{,}2''.
\end{aligned}$$

8). Билдијимиз кими, таразлашдырманын шәрти олараг икинчи һиссәси дәгиглијин гијмәтләндирилмәсиндән ибарәтдир. Бунун үчүн илк нөвбәдә Бессел дүстуру илә ваһид чәки сәһви һесабланмышдыр

$$\mu=\sqrt{\frac{[P\upsilon^2]}{r}}=\sqrt{\frac{28{,}27}{4}}\approx 2{,}7.$$

Һәр һансы функсијанын орта квадратик сәһви, үмуми һалда,

$$m_F=\mu\sqrt{\frac{1}{P_F}} \qquad (6.55)$$

дүстуру илә һесабланыр.

Хүсуси һалда, биринчи дирексион бучағын дәгиглијини гијмәтләндирмәк үчүн, чәдвәл 6.6-дакы f графында јазылмыш һесаблама нәтичәләриндән истифадә едәрәк вә (6.32) дүстуруна әсасән, һәмин бучағын тәрс чәки гијмәти һесабланмышдыр

$$\frac{1}{P_{x_1}} = 1 + (-1) \cdot 0{,}333 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 + 0{,}33 \cdot (-0{,}165) = 0{,}612 \ .$$

ФӘСИЛ 7.
ИКИГРУПЛУ ВӘ КОМБИНӘЛӘНМИШ ТАРАЗЛАШДЫРМА ҮСУЛЛАРЫ.

§ 46. Икигруплу Крјукер үсулу.

Таразлашдырма заманы әсас һесаблама чәтинликләр-индән бири нормал тәнликләрин R әмсаллар матрисинин тәрси олан R^{-1} матрисинин алынмасы илә бағлыдыр. Биркә һәлл едилән нормал тәнликләрин сајы артыгча, R матрисинин өлчүләри дә бөјүјүр вә нәтичәдә R^{-1} матрисинин һесабланмасы бир гәдәр дә чәтинләшир. Она көрә дә, таразлашдырма заманы чалышырлар елә үсул сечилсин ки, биркә һәлл едилән нормал тәнликләрин сајы минимума ендирилмиш олсун.

Икигруплу Крјукер үсулу мәһз көстәрилән мәгсәдә хидмәт едир. Бу үсулун мәғзини коррелат үсулда тәтбигиндә ачаг.

Тутаг ки, r сајда (артыг өлчмәләр сајы)

$$BV+W=0 \tag{7.1}$$

системи јазылмышдыр. Бу системи r_1 вә r_2 сајда тәнликдән ибарәт $(r=r_1+r_2)$, ики група ајыраг:

$$B_1V+W_1=0; \tag{7.2}$$

$$B_2V+W_2=0. \tag{7.3}$$

Инди исә (7.3) системи үзәриндә елә еквивалент һесаби чевирмәләр апараг ки, нәтичәдә алыначаг (7.3) чеврилмиш тәнлијинин (7.2) системи илә биркә һәллиндән тапылан V дүзәлиш вектору, илкин вариантда јазылмыш (7.2) вә (7.3) системләринин биркә һәллиндән алынан V векторуна бәрабәр олсун. Ејни заманда, чеврилмиш (7.3) вә чеврилмәмиш (7.2) системләри үмуми коррелатлара мөхсус олмасынлар. Белә бир әвәзетмә әмәлијјаты нәтичәсиндә, R матрисинин өлчүләри $(r\times r)$-дән $(r_1\times r_1)$ вә $(r_2\times r_2)$-јә гәдәр кичилир $(r_1 < r;\ r_2 < r)$. Бу исә үмумән таразлашдырма мәсәләсинин асанлашдырылмасы демәкдир.

Беләликлә, еквивалент чевирмәләр (әвәзетмәләр) нәзәријјәсинә көрә, јухарыда көстәрилән шәртләрә чаваб верән чеврилмиш (7.3) тәнликләр системини алмаг үчүн, ону ашағыдакы шәклә салмаг лазымдыр:

$$\overline{B_2}V+\overline{W_2}=0 \quad , \tag{7.4}$$

бурада:

$$\overline{B_2} = B_2 + \rho^T \cdot B_1 ; \qquad (7.5)$$

$$\overline{W_2} = \rho^T \cdot W_1 ; \qquad (7.6)$$

ρ исә $r_1 \times r_2$ өлчүлү көмәкчи матрисдир.

Сонра (7.2) вә (7.4) системләрини бир група бирләшдирәрәк, онлардан нормал тәнликләрә кечсәк , аларыг:

$$\begin{aligned} &N_{11}K_1 + \overline{N_{12}}K_2 + W_1 = 0; \\ &\overline{N_{21}} \cdot K_1 + \overline{N_{22}} \cdot K_2 + \overline{W_2} = 0, \end{aligned} \qquad (7.7)$$

бурада: $N_{11} = B_1 \cdot B_1^T$; $\overline{N_{12}} = B_1 \cdot \overline{B_2}^T; \overline{N}_{22} = \overline{B_2} \cdot \overline{B}_2^T$; $\overline{N}_{21} = \overline{N_{12}}^T$

(7.7) үмуми системләриндән көрүндүјү кими, тәнлик групларынын үмуми коррелатлара мәхсус олмасы үчүн, $\overline{N}_{12}$ блоку сыфра бәрабәр олмалыдыр. Онда (7.7) системи бир-бириндән асылы олмајан ики група ајрылар, јә'ни

$$\begin{aligned} &N_{11} \cdot K_1 + W_1 = 0 \\ &\overline{N}_{22} \cdot K_2 + \overline{W_2} = 0 \end{aligned} \qquad (7.8)$$

$\overline{N_{12}}$ блокуну сыфра бәрабәр едән ρ матрисини арашдыраг.

$$\overline{N_{12}} = B_1(B_2^T + B_1^T \cdot \rho) = 0 \qquad \text{шәртиндән,}$$

$$N_{11} \cdot \rho + N_{12} = 0 \ \text{олар.} \qquad (7.9)$$

Онда (7.9) тәнлијиндән

$$\rho = -N_{11}^{-1} \cdot N_{12} . \qquad (7.10)$$

Әкәр ρ матрисинин бу гијмәтини (7.5) дүстурунда јазсаг, белә бир ифадә аларыг.

$$\overline{B}_2 = B_2 - N_{21} \cdot N_{11}^{-1} \cdot B_1 = B_2(E - B_1^T \cdot N_{11}^{-1} \cdot B_1), \qquad (7.11)$$

Бурада, $Q_{y'} = E - B_1^T \cdot N_{11}^{-1} B_1$-өлчмәләрин илкин таразлашдырылмыш гијмәтләринә көрә һесабланмыш тәрс чәкиләр матрисидир. Бу матрис $Q_{\bar{y}} = Q_{y'}^2$ хассәсинә малик олдуғундан јаза биләрик,

$$\overline{N}_{22} = \overline{B}_2 \overline{B}_2^T = B_2 Q_{\bar{y}} \cdot B_2^T. \qquad (7.12)$$

Бурадан белə нəтичə чыхыр ки, (7.8) системинин икинчи тəнликлəр групунун (7.12) дүстуру илə һəллинə, биринчи групда илкин таразлашдырылмыш y_i' гијмəтлəринин тəкрар таразлашдырылмасы əмəлијјаты кими бахмаг олар.

Белəликлə, ики груплу Крјукер үсулу илə таразлашдырма һесабламалары ашағыдакы ардычыллыгда јеринə јетирилир:

1) биринчи груп тəнликлəрин һəлли;
2) икинчи груп тəнликлəрин һəлли;
3) өлчмəлəрə биринчи дүзəлишлəрин һесабланмасы

$$V_1 = Q_y B_1^T \cdot K_1 \quad , \qquad (7.13)$$

бурада, K_1-биринчи груп коррелатлардыр.

4) икинчи дүзəлиш гијмəтлəринин һесабланмасы

$$V_2 = Q_y \cdot \overline{B}_2^T \cdot K_2, \qquad (7.14)$$

бурада, K_2-икинчи груп коррелатлардыр.

5) өлчмəлəрин үмуми $\upsilon = \upsilon_1 + \upsilon_2$ дүзəлишлəри илə дүзəлдилмəси.

Һесабламаларын дүзкүнлүјү

$$[p\upsilon^2] = [p\upsilon'^2] + [p\upsilon''^2] \qquad (7.15)$$

ифадəси илə јохланылыр.

Икигруплу үсулда өлчмəлəр функсијаларынын дəгиглијинин гијмəтлəндирилмəси икинчи тəнликлəр групунун һəлли заманы һəјата кечирилир.

Бу мəгсəдлə, функсијаларын $f = f \cdot Q_{\bar{y}_i}$ əмсаллары матриси еjнилə $\overline{B}_2$ матриси кими ријази чевирмəлəрə мə'руз едилир (бах,(7.11) дүстуру). Сонра чеврилмиш матрисдəн истифадə едəрəк, бүтөвлүкдə тəрс чəкилəр матриси

$Q_F = \overline{N}_{ff} - N_f^T \cdot \overline{N}_{22}^{-1} \cdot N_f$, елəчə дə, һəр бир функсија үчүн ајрылыгда тəрс чəки гијмəти һесабланыр

$$\frac{1}{P_F} = [ff \cdot r_2].$$

Даһа сонра өлчмə чəкилəринə əсасəн ваһид өлчмəнин вə онларын функсијаларынын ашағыдакы дүстурларла орта квадратики сәһвләри тапылыр:

$$m=\sqrt{\frac{\left[\upsilon'^2\right]+\left[\upsilon''^2\right]}{r_1+r_2}}, \qquad (7.16)$$

$$m_{\bar{F}}=\frac{m}{\sqrt{P_{\bar{F}}}}. \qquad (7.17)$$

§47. Крјукер - Урмајев үсулу.

Бу үсул икигруплу Крјукер үсулунун триангулјасија шәбәкәләри тәтбигиндә хүсуси вариантыдыр. Профессор Н.А.Урмајев көстәрмишдир ки, трангулјасија шәбәкәсини өлчүлмүш бучаглара көрә таразлашдыраркән, фигур шәрти тәнликләрини ајрыча група дахил етмәклә, һесабламалары олдугча асанлашдырмаг олар.

§46-да гејд едилмишдир ки, икигруплу таразлашдырма үсулу биркә һәлл едилән нормал тәнликләрин сајынын азалмасына бахмајараг, әсасән, о вахт сәмәрәли һесаб едилир ки, икинчи груп тәнликләринин еквивалент чеврилмәси әмәлијјаты асанд һәјата кечирилсин, башга сөзлә, $\rho_{r_1\times r_2}$ чевирмә матриси садә јолла тапылсын.

Трангулјасија шәбәкәсинә тәтбигдә $\rho_{r_1\times r_2}$ матриси чох садә шәкил алдығындан, таразлашдырма һесабламаларынын һәчми кичилир вә она көрә дә , ики груплу үсулун бу тәтбигдә истифадәси ону даһа да әлверишли едир.

Беләликлә, биринчи група дахил едилмиш һәр бир j үчбучағы үчүн ашағыдакы шәкилдә фигур шәрти тәнлији јаза биләрик:

$$\sum_{i\in j}\upsilon_i+W_j=0; \qquad (7.18)$$

нормал тәнликләр үчүн исә

$$3K_j+W_j=0. \qquad (7.19)$$

Бурада $\sum_{i\in j}\upsilon_i$ јазылышы j нөмрәли учбүчағын бучаглары үчүн һесабланмыш дүзәлишләрин чәмини ифадә едир.

(7.19) нормал тәнликләринин һәллиндән тапарыг

$$K_j = -\frac{W_j}{3} \quad . \tag{7.20}$$

Өз нөвбәсиндә, (7.18) вә (7.19) тәнликләринин тутушдурулмасындан көрүндүјү кими, биринчи коррелатлар биринчи дүзәлиш гијмәтләринә бәрабәр олачагдыр, јә'ни

$$\upsilon^{\cdot}_{i\in j} = -\frac{W_j}{3} \quad . \tag{7.21}$$

Бурадан белә бир нәтичә чыхыр ки, биринчи група таразлашдырма әмәлијјаты һәр бир үчбучағын ачыглығыны өз дахили бучаглары арасында бәрабәр бөлүшдүрмәкдән ибарәтдир. Сонра икинчи груп шәрти тәнликләр тәртиб едилир. Бу заман тәнликләрин бучаг ачыглыглары вә мүвафиг әмсаллары бучагларын биринчи дүзәлишләрлә дүзәлдилмиш гијмәтләринә әсасән һесабланыр:

$$A_i = \alpha_i - \frac{[\alpha]}{3};\, B_i = \beta_i - \frac{[\beta]}{3};\ \ldots \tag{7.22}$$

(7.22) ифадәләриндән көрүндүјү кими, $A_i, B_i, \ldots, G_i$ әмсалларына садә һесаби ортадан олан мејлликләр кими бахмаг олар. Она көрә дә, ашағыдакы бәрабәрликләр доғру олачагдыр:

$$[A] = [B] = \cdots = [G] = 0\,. \tag{7.23}$$

Аналожи мүлаһизәләрлә кеодезик дөрдбучаглыда биринчи дүзәлиш гијмәтләринин һесабланмасы үчүн

$$\upsilon_{i\in j} = -\frac{W_j}{4}, \tag{7.24}$$

икинчи груп тәнликләрини әмсаллары үчүн исә,

$$A_i = \alpha_i - \frac{[\alpha]}{4};\ B_i = \beta_i - \frac{[\beta]}{4} \tag{7.25}$$

ифадәләрини јаза биләрик. Бу үсулда өлчмәләр функсијаларынын әмсаллары да чох садә дүстурла тапылыр

$$F_i = f_i - \frac{[f]}{3}\ . \tag{7.26}$$

Икигруплу Крјукер үсулундан полигонометријa кедишләринин вә шәбәкәләринин таразлашдырылмасында да кениш истифадә едилир. Бу заман биринчи група дирексијон бучаг шәрти дахил едилир вә онун һәллиндән һәр бир дахили дөнмә бучағына $\upsilon_i' = W_\beta / (n+1)$ биринчи дүзәлишләри һесабланыр. Икинчи група исә кооординат шәрти тәнликләри аид едилир.

§48 Шәртли параметрик таразлашдырма үсулу

Таразлашдырма һесабламаларыны садәләшдирмәк вә онларын һәчмини азалтмаг мәгсәди илә, бир чох һалларда, параметрик вә коррелат үсуллардан комбинә шәклиндә истифадә едирләр. Комбинәләнмиш үсуллардан бири шәртли параметрик таразлашдырма үсулу адланыр. Бу үсулда сечилән параметрләрин K' сајы ади параметрик үсулдакы K сајындан бөјүк олур.

Мәсәлән, полигонометрија кедишинин таразлашдырылмасы заманы мәнтәгәләрин координатлары әвәзиндә, онларын координат артымлары таразлашдырылыр. Нәтичәдә, ади параметрик үсулда тәртиб едилән K сајда дүзәлиш тәнликләринә, jә'ни

$$V = A\Delta X + L\,, \qquad (7.27)$$

$r' = K' - K$ сајда вә илкин сечилмиш параметрләри бир бири илә әлагәләндирән ашағыдакы шәкилдә әлавә шәрти тәнликләр мејдана чыхыр

$$B\Delta X + W = 0\,. \qquad (7.28)$$

Полигонометрија кедишиндә (7.28) шәрти тәнликләринин сајы икијә бәрабәрдир

$$\sum_{i=1}^{n} \upsilon_{\Delta x_i} + W_x = 0; \qquad \sum_{i=1}^{n} \upsilon_{\Delta y_i} + W_y = 0\,. \qquad (7.29)$$

Тәчрүбә көстәрир ки, полигонометрија кедишини шәртли параметрик үсулла таразлашдыраркән шәрти тәнликләрин сајы ики сајда артса да, бу һалда дүзәлиш тәнликләри ади параметрик үсула нисбәтән чох асан тәртиб едилир.

Беләликлә, (7.27) вә (7.28) систем тәнликләринин $\Phi = V^T PV = \min$ шәрти алтында биркә һәллини һәјата кечирмәк үчүн, илк нөвбәдә

$$\Phi = V^T PV - 2K^T(B\Delta X + W) \qquad (7.30)$$

функсијасынын ΔX үзрә биринчи төрәмәсини тапыб, сыфра бәрабәр етмәк лазымдыр. Нәтичәдә алырыг

$$2V^T PA - 2K^T B = 0\,, \qquad (7.31)$$

вә јахуд

$$A^T PV + B^T K = 0, \qquad (7.32)$$

бурада, K коррелатлар векторудур .

(7.27) ифадәсини нәзәрә алсаг, (7.32) тәнлији белә шәклә дүшәр

$$R\Delta X + B^T K + b = 0. \qquad (7.33)$$

Бурада :

$$R = A^T PA; \qquad b = A^T PL.$$

Нәhajәт, (7.33) тәнликләринә (7.28) әлавә шәрти тәнликләрини дә гошсаг, ашағыдакы шәкилдә нормал тәнликләр системи аларыг:

$$\begin{aligned} R\Delta X + B^T K + b &= 0; \\ B\Delta X + W &= 0. \end{aligned} \qquad (7.34)$$

Бу тәнликләр системини, үмумиjjәтлә, мә'лум үсуллардан hәр hансы бири илә: әмсаллар матрисинин тәрсинин алынмасы, Гаус үсулу вә с., hәлл етмәк олар. Лакин чох заман мәсәләдә Бессел үсулундан истифадә едилир. Бессел үсулу илә мәсәләнин hәлли ашағыдакылара әсасланмышдыр:

1) (7.34) системинин биринчи тәнлијиндән ΔX вектору тапылыр

$$\Delta X = -R^{-1}B^T K - R^{-1}b \; ; \qquad (7.35)$$

2) ΔX-ын бу гијмәтини (7.34) системинин икинчи тәнлијиндә јазмагла белә бир тәнлик алыныр

$$BR^{-1}B^T K - W + BR^{-1}b = 0. \qquad (7.35)'$$

3) $(7.35)'$ тәнлијинин hәллиндән коррелатлар тәјин едилир:

$$K = N^{-1}W - N^{-1}BR^{-1}b,$$

вә јахуд, $\quad K = N^{-1}\overline{W}$.

Бурада: $N = BR^{-1}B^T$; $\overline{W} = W - BR^{-1}b$.

4) Нәhajәт, коррелатлар үчүн тапылмыш бу гијмәтләри (7.35) тәнлијиндә јазмагла ΔX вектору hесабланыр. Бу тәнликләрдә ΔX векторуну $\quad \Delta X = \Delta X' + \Delta X''$ шәклиндә көстәрсәк,

$$\Delta X' = -R^{-1}b; \; \Delta X'' = -R^{-1}B^T K = -R^{-1}B^T N^{-1}\overline{W} \quad \text{олар.}$$

Шәрти параметрик үсулда ваhид чәки сәhвинин әсасландығы квадратик форма белә hесабланыр

$$\left[p\upsilon\upsilon\right]=\left[p\ell\ell\cdot k'\right]+W^{T}K. \qquad (7.36)$$

Өлчмәләр функсијасынын тәрс чәкиләр вектору исә

$$Q_{\tilde{F}}=f\cdot Q_{xx}f^{T} \qquad (7.37)$$

шәклиндә тапылыр. Бурада: $f=\dfrac{\partial\tilde{F}}{\partial x}$;

Q_{xx}-таразлашдырылан кәмијјәтләр векторунун, јә'ни, Х-ын чәки әмсаллары матрисидир.

Q_{xx} – матриси ашығыдакы тәрс әмсаллар матрисинин, јәни

$$\begin{pmatrix} R & B^{T} \\ B & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} Q_{xx} & Q_{xk} \\ Q_{kx} & Q_{kk} \end{pmatrix}$$

јухары сол блокундан ибарәтдир.

Һәр һансы функсијасынын тәрс чәкиси исә, белә бир ифадәдән тапылыр

$$-\frac{1}{P_{F}}=\left[f_{k'+r'+1}\cdot(k'+r')\right].$$

Бу алгоритми ачаркән, нәзәрә алмаг лазымдыр ки,

$$f_{k'+1}=f_{k'+2}=\ldots=f_{k'+r'+1}=0.$$

§49. Әлавә мәчһуллу коррелат таразлашдырма үсулу

Бу үсул Ф.Һелмерт үсулу да адланыр вә мәғзи ондан ибарәтдир ки, шәрти тәнликләрә әлавә мәчһуллар дахил етмәклә, онлары садә шәкилдә тәртиб едирләр. Бу да өз нөвбәсиндә, мәсәләнин һәллини асанлашдырыр. Лакин бу заман шәрти тәнликләрин сајы артараг $r'=r+t$ олур. Бурада, t-әлавә мәчһулларын сајыдыр (мәсәлән, триангулјасија вә ја полигонометрија шәбәкәләрини таразлашдыраркән, говшаг мәнтәгәләриндә өлчүлмүш азимут бучагларыны һәллә дахил етмәклә, мүвафиг шәрти тәнликләри садәләшдирирләр).

Бу үсулун нәзәри әсаслары илә таныш олаг. Илк нөвбәдә шәрти тәнликләри јазаг. Гејд едилдији кими, онларын сајы $r'=r+t$ -јә бәрабәр олуб, ашағыдакы шәклә маликдир:

$$
\left.\begin{aligned}
&\varphi_1(y_1, y_2, \ldots y_n, z_1, z_2, \ldots . z_t,) = 0;\\
&\varphi_2(y_1, y_2, \ldots y_n, z_1, z_2, \ldots . z_t,) = 0;\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\varphi_{r'}(y_1, y_2, \ldots y_n, z_1, z_2, \ldots . z_t,) = 0,
\end{aligned}\right. \qquad (7.38)
$$

бурада: y_i, z_i – өлчүлмүш вә тәнликләрә әлавә дахил едилмиш кәмиjjәтләрин һәгиги гиjмәтләридир.

(7.38) тәнликләрини хәтти шәклә кәтирдикдән сонра (Теjлор сырасына бөлмәклә), онлары матрис jазылышында беlә көстәрә биләрик

$$BV + \beta\Delta Z + W = 0, \qquad (7.39)$$

бурада:

$$
\underset{r'\times n}{B} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & . & . & . & a_n \\ b_1 & b_2 & . & . & . & b_n \\ c_1 & c_2 & . & . & . & c_n \\ . & . & . & . & . & . \\ g_1 & g_2 & . & . & . & g_n \end{pmatrix}; \qquad \underset{r'\times t}{\beta} = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 & . & . & . & A_t \\ B_1 & B_2 & . & . & . & B_t \\ . & . & . & . & . & . \\ G_1 & G_2 & . & . & . & G_t \end{pmatrix};
$$

$$
\underset{n\times 1}{V} = \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ . \\ . \\ . \\ V_n \end{bmatrix}; \qquad \underset{t\times 1}{\Delta Z} = \begin{bmatrix} \delta Z_1 \\ \delta Z_2 \\ . \\ . \\ . \\ \delta Z_n \end{bmatrix}; \qquad \underset{r'\times 1}{W} = \begin{bmatrix} W_1 \\ W_2 \\ . \\ . \\ . \\ W_{r'} \end{bmatrix};
$$

$a_i, b_i, \ldots g_i$ елементләри коррелат үсулда олдуғу кими, $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ функсиjаларынын Y_i үзрә хүсуси төрәмәләри олуб, $Y_i = y_i^{өл}$ гиjмәтләринә көрә һесабланыр;

$$
A_j = \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial z_j}\right)_{z_j = z_j^0}; \quad B_j = \left(\frac{\partial \varphi_2}{\partial z_j}\right)_{z_j = z_j^{(0)}}; \ldots, G_j = \left(\frac{\partial \varphi_{z'}}{\partial Z_j}\right)'_{z_j = z_j^{(0)}}.
$$

$z_i^{(0)}$ əlavə məчһулларын тəгриби гијмəтлəридир вə əсасəн, $y_i^{\text{өл}}$ гијмəтлəри илə һесабланыр.

Полигон ачыглары исə белə тə'јин едилир:

$$W_j = \varphi_j\left(y_1^{\text{өл.}}, y_2^{\text{өл.}}, \dots, y_n^{\text{өл.}}, z_1^{(0)}, z_2^{(0)}, \dots, z_i^{(0)}\right)$$

Белəликлə, (7.39) тəнликлəринин һəллини əн кичик квадратлар методу илə апарсаг, $\Phi = V^T PV = \min$ шəртинə көрə,

$$\Phi = V^T PV - 2K^T\left(BV + \beta\Delta Z + W\right)$$

шəклиндə Лагранж функсијасы јазыб, онун минимумуну ахтармаг лазымдыр. Ејни заманда Ф функсијасынын минимумуну тə'јин етмəк үчүн, онун биринчи төрəмəлəрини тапыб, јə'ни

$$\frac{\partial\Phi}{\partial V} = 2V^T P - 2K^T B; \quad \frac{\partial\Phi}{\partial\Delta Z} = -2K^T\beta,$$

сонра онлары сыфра бəрабəр етмəк лазымдыр. Нəтичəдə ашағыдакы шəкилдə ифадəлəр аларыг:

$$V = P^{-1}B^T K \quad ; \qquad (7.40)$$

вə

$$\beta^T K = 0 \qquad (7.41)$$

Əкəр (7.39) тəнлијиндə V векторунун (7.40) гијмəтини нəзəрə алдыгдан сонра, ону (7.41) тəнлији илə груплашдырсаг, $S = r' + t = r + 2t$ сајда тəнликдəн ибарəт белə бир систем тəнлик аларыг:

$$\left.\begin{aligned} &NK + \beta\Delta Z + W = 0\,; \\ &\beta^T K = 0 \quad , \end{aligned}\right. \qquad (7.42)$$

бурада, $N = BP^{-1}B^T$

Бу системин əмсаллар матриси-

$$N_\beta = \begin{pmatrix} N & \beta \\ \beta^T & 0 \end{pmatrix} \qquad (7.43)$$

симметрик формаја маликдир.

(7.42) системинин һəлли матрис јазылышында ашағыдакы дүстурларла һəјата кечирилир:

$$K = -N^{-1}\beta\Delta Z - N^{-1}\cdot W; \qquad (7.44)$$

$$\beta^T N^{-1}\cdot\beta\cdot\Delta Z + \beta^T N^{-1}\cdot W = 0. \qquad (7.45)$$

(7.45) тәнлијини беlә дә јаза биләрик

$$R \cdot \Delta Z + b = 0, \qquad (7.46)$$

Бурада:

$$R = \beta^T \cdot N^{-1}\beta\,; \qquad b = \beta^T \cdot N^{-1} \cdot W\,.$$

Беләликлә, һесабламалардан (7.46) тәнлијинә әсасән $\Delta Z = -R^{-1} \cdot b$ вектору тә'јин едилир, сонра (7.44) дүстуру илә K коррелатлары вә нәһајәт

$$\vartheta_i = a_i \cdot k_1 + b_i \cdot k_2 + \ldots + g_i \cdot k_\eta \qquad (7.47)$$

ифадәсинә көрә V_i дүзәлишләри һесабланыр.

Башга үсулларда олдуғу кими,бу үсулун да сон һесабланмалары таразлашдырылмыш кәмијјәтләрин дәгиглијинин гијмәтләндирилмәсиндән ибарәтдир.

Белә ки, һәр һансы таразлашдырылмыш

$$\widetilde{F} = \widetilde{F}(\widetilde{Y}_1, \widetilde{Y}_2, \ldots, \widetilde{Y}_n, \widetilde{Z}_1, \widetilde{Z}_2, \ldots, \widetilde{Z}_t)$$

функсијасынын дәгиглијини гијмәтләндирмәк үчүн, ону илк нөвбәдә хәтти шәклә кәтирмәк лазымдыр:

$$\widetilde{F} = [f\upsilon] + [\Phi\delta Z] + f_0,$$

бурада:

$$f_i = \left(\frac{\partial\widetilde{F}}{\partial y_i}\right)_0; \quad \Phi_j = \left(\frac{\partial F}{\partial Z_j}\right)_0.$$

Сонра Гаусс схеминдә әлавә F графы јерләшдириб, бу функсијанын хүсуси төрәмәләрини, јә'ни,

$$\begin{pmatrix} (\pi af] \\ [\pi bf] \\ \cdots\cdots \\ [\pi gf] \\ \phi_1 \\ \phi_2 \\ \cdots\cdots \\ \phi_t \\ [\pi ff] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} N_f \\ \Phi^T \\ N_{ff} \end{pmatrix}$$

елементләрини јазырлар. Даһа сонра, үчүнчү Гаусс схеминдә S дәрәчәли еквивалент ријази чевирмәдән $\tilde{F}$ функсијасынын $\frac{1}{P_{\tilde{F}}} = [\pi ff \cdot s]$ алгоритми илә тәрс чәки гијмәти һесабланыр. Бу функсијанын орта квадратики сәһви исә мә'лум $m_{\tilde{F}} = \frac{\mu}{\sqrt{P_{\tilde{F}}}}$ дүстуру илә тапылыр.

Бурада $\mu = \sqrt{\frac{[p\upsilon^2]}{r-t}}$.

(7.48) дүстурунда квадратик форма ашағыдакы алгоритмләрлә һесабланыр:

$$-[P'\upsilon^2] = [KW] = [W_{s+1} \cdot S] = \left[\sum{}_{S+1} \cdot S\right] \qquad (7.49)$$

Бурада:

$$W_{r'+1} = W_{r'+2} = \ldots = W_{s+1} = 0; \;\; \sum{}_{S+1} = [W].$$

Әлавә мәчһуллу коррелат таразлашдырма үсулундан өлчмәләрдәки систематик сәһвләри гијмәтләндирмәк мәгсәди илә дә истифадә едирләр. Бу заман систематик сәһвләри әлавә мәчһуллар кими шәртi тәнликләрә дахил едирләр.

§50. Бир-бириндән асылы өлчмәләрин таразлашдырылмасы.

Билаваситә өлчүлмүш кеодезик кәмијјәтләр чох заман бир-бири илә гаршылыглы әлагәдә олмурлар. Лакин елә һаллар да олур ки, таразлашдырмаја өлчмәләр дејил онларын өз араларында мүәјјән асылылыг әлагәләринә малик функсијалары дахил едилир. Мәсәлән, триангулјасија тәбәкәсинин таразлашдырылмасы билаваситә өлчүлмүш истигамәтләрә көрә дејил, онларын функсијасы олан бучаглар үзрә апарыла биләр. Ејни заманда, бу бучаглар үмуми башланғыч истигамәтә малик олдуғундан, гаршылыглы әлагәдә олурлар. Ән кичик квадратлар методунун бу тәтбигдә, јә'ни, гаршылыглы асылы өлчүләрин таразлашдырылмасында, истифадәси үмумиләшдирилмиш (садәчә, үмуми) метод, бир-бириндән асылы олмајан өлчмәләр һалында исә, классик метод адланыр. Үмуми методла таразлашдырманын әсас шәрти (классик методда $[p\upsilon^2] = \min$) белә јазылыр:

$$V^T Q^{-1} V = min, \tag{7.50}$$

бурада, Q классик методда тә'јин едилән диагонал шәкилли тәрс чәкиләр матрисиндән фәргли олараг, ашағыда шәклә маликдир

$$Q = \begin{pmatrix} Q_{11} Q_{12} \cdots Q_{1n} \\ Q_{21} Q_{22} \cdots Q_{2n} \\ Q_{n1} Q_{n2} \cdots Q_{nn} \end{pmatrix}. \tag{7.51}$$

Үмуми методун нәзәри әсаслары матрис јазылышында белә ифадә олунур.

а) параметрик үсулда нормал тәнликләрин формасы

$$A^T PA \cdot \Delta x + A^T PL = 0, \tag{7.52}$$

Бурада, Р матриси классик методдакы формадан (бах,(5.29) онунла фәргләнир ки, бу һалда Р матриси тамдыр /диагонал дејил/.

б)Коррелат нормал тәнликләр

$$BQB^T K + W = 0, \text{бурада } Q = P^{-1}; \tag{7.53}$$

дүзәлишләр вектору исә,

$$V = QB^T K \tag{7.54}$$

шәклиндә тапылыр.

О ки галды, (7.52), (7.53) вә (7.54) тәнликләринин һәллинә, онлары әсасән, Гаусс үсулу илә классик методда көстәрилмиш гајда вә ардычыллыгда һәјата кечирирләр.

§51. Илкин мә'лумларын сәһвләрини нәзәрә алмагла шәбәкәнин таразлашдырылмасы.

Билдијимиз кими, кеодезик кедиш вә шәбәкәләр гуруларкән,онлары јүксәк синифли кеодезик дајаг мәнтәгәләринә бағлајырлар. Камерал һесабламалар заманы дајаг мәнтәгәләринин јүксәклик вә координат гијмәтләрини сәһвсиз гәбул едирләр. Лакин, һәгигәтдә, дајаг мәнтәгәләринин өзләринин јери әввәлләр јеринә јетирилмиш өлчмәләрдән тәјин едилмиш олдуғундан,ајдындыр ки,онларын јүксәклик вә координат гијмәтләри дә, мүәјјән сәһвләрә малик олачагдыр. Чүнки таразлашдырма нәтичәсиндә өлчмә нәтичәләринин тәсадүфи сәһвләри тамамилә јох едилмир вә онларын галыг һиссәси мүәјјән шәрт алтында (әсасән, $\left[P\upsilon^2\right] = \min$ өлчмә нәтичәләри арасында пајлашдырылыр. Бә'зән, илкин мә'лумларын сәһвләринин нәзәрә алынмамасы, шәбәкәдә деформасијалара кәтириб чыхарыр.

Məhз бу сəбəбдəн, бə'зи һалларда, шəбəкəнин таразлашдырылмасыны илкин мə'лумларын сəһвлəрини нəзəрə алмагла һəјата кечирилəр. Белə гојулушда мəсəлəнин һəллинин нəзəри əсаслары илə таныш олаг.

а) Параметрик үсул: Илкин мə'лумларын дүзəлишлəр векторуну ΔZ, тə'јин едилəн параметрлəрин артым векторуну исə, əввəлки параграфларда көстəрилдији кими ΔX илə ишарə етсəк, онда параметрик дүзəлиш тəнликлəрини, əлавəлəрлə биркə, V белə јаза билəрик

$$V_1 = A \cdot \Delta X + B\Delta Z + L;$$
$$V_2 = \Delta Z. \qquad (7.55)$$

(7.55) системинин икинчи тəнлијинин сəрбəст һəдди сыфра бəрабəрдир. Чүнки һесабламалар заманы илкин мə'лумларын $Z^{(0)}$ тəгриби гијмəтлəри əвəзиндə, онларын каталог (мə'лум) гијмəтлəри көтүрүлүр. Ајдындыр ки, илкин мə'лумлар вə јени өлчүлмүш кəмијјəтлəр бир-бири илə əлагəли дејилдир. Она көрə дə, (7.55) системи өлчүлмүш кəмијјəтлəр

$$V_1^T P_y V_1 + V_2^T P_z V_2 = min \qquad (7.56)$$

шəрти алтында һəлл етсəк, ашағыдакы шəкилдə нормал тəнликлəр системи аларыг

$$\begin{pmatrix} R_{11} R_{12} \\ R_{21} R_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta X \\ \Delta Z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} в_1 \\ в_2 \end{pmatrix} = 0, \qquad (7.57)$$

Бурада: əмсаллар матриси.

$$\overline{R} = \begin{pmatrix} R_{11} R_{12} \\ R_{21} R_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A^T P_y A & A^T P_y B \\ B^T P_y A & B^T PB + P_z \end{pmatrix}; \qquad (7.58)$$

сəрбəст һəдлəр векторлары

$$b_1 = A^T pL; \quad b_2 = B^T P_y L; \qquad (7.59)$$

P_y-өлчмə чəкилəри матриси; P_z-илкин мə'лумларын чəкилəр матрисидир (фəрз едилир ки, мə'лумдур). (7.58) дүстурундан көрүндүјү кими, $\overline{R}$ матриси ади параметрик үсулда тə'јин едилəн нормал тəнликлəрин əмсаллар матриси $R = A^T PA$ – дəн јалныз онунла фəрглəнир ки,бурада $\overline{R}$ -ин ашағы сағ блокунда ΔZ дүзəлишлəринə көрə әлавә P_z матриси јазылмышдыр. $\overline{R}$ матрисинин һесабланмасында мәһз бу хүсусијјәтдән истифадә едилир. Белә ки, $\overline{R}$ матрисини илк нөвбәдә ади параметрик үсул гајдасы илә тәртиб едир,сонра онун ашағы сағ блокуна P_z матрисини бирләшдирирләр. Үмуми һалда, илкин мә'умлар бир-бири илә әлагәли олдуғундан, P_z гејри-диагонал матрисдир. Лакинилкин мө'лумлар арасында гаршылыглы әлагәләрин зәиф олдуғуну нәзәрә алсаг (мәсәлән, дајаг мәнтәгәләри бир-бириндән әһәмијјәтли мәсафәләрдә јерләшир) вә һесабламаларын садәләшдирилмәси хәтринә, P_z матрисини диагонал матрис гәбул едә биләрик. Онда, X векторунун $Q_{\overline{X}}$ тәрс чәкиләр матриси (7.58) ифадәсинә әсасән белә тә'јин едиләчәкдир:

$$Q_x = R_{11}^{-1} + U[R_{22}\cdot 1]^{-1}U^T = Q_{\overline{X}} + UQ_{\overline{Z}}U^T, \qquad (7.60)$$

бурада: $U = R_{11}^{-1}R_{12}; [R_{22}\cdot] = R_{22} - U^T R_{12}$.

(7.60) дүстурундан көрүндүјү кими, илкин мә'лумларын сәһвсиз гәбул едилдији һалда, X вектору үчүн ади параметрик үсулдан тапылан $Q_{\overline{X}} = R_{11}^{-1}$ гијмәтини аларыг.

Ејни мүлаһизәләрлә дисперсија үчүн јаза биләрик.

$$\sigma_{x_j}^2 = \sigma_{\overline{x}_j}^2 + \Delta\sigma_{x_j}^2, \qquad (7.61)$$

бурада: $\sigma_{\overline{x}_j}$ -илкин мә'лумларын сәһвсиз һалында x_j кәмијјәтләри үчүн һесабланмыш орта квадратик мејлликләр;

$\Delta\sigma_{x_j}^2$ исә, илкин мә'лумларын сәһвләринә көрә, бу мејлликләрә едилән әлавә дүзәлиш гијмәтләридир.

Таразлашдырма заманы илкин мә'лумлардакы сәһвләрин нәзәрә алыныб алынмамасы мәсәләси, кеодезија шәбәкәсинин кәләчәк истифадә хүсусијјәтләриндән асылы олараг, һәр бир һалда хүсуси һәлл тәләб едир. Белә ки, илкин мә'лумларын сәһвләрини нәзәрә алмадыгда јени јарадылан шәбәкәни дајаг мәнтәгәләринә бирләшдирән елементләрдә (тәрәфләр, дирексијон бучаглар) тәһрифләр баш верир. Әкс һалда исә, дајаг шәбәкәсинин елементләри тәһрифләрә мә'руз галыр. Дүзкүн гәрар белә бир ифадә илә мүәјјәнләшдирилир

$$\Delta\sigma_{x_j}^2 \le 0{,}11\cdot\sigma_{\overline{x}_j}^2 \quad . \qquad (7.62)$$

Белә ки, (7.62) шәртинин өдәндиjи һалда, илкин мә'лумлара һеч бир дүзәлиш ахтарылмыр.

б) Коррелат үсулу. Ади коррелат үсулундан фәргли фәргли олараг, бу һалда, шәрти тәнликләр белә jазылыр:

$B_1V + B_2\Delta Z + W = 0$,

бурада, ΔZ -илкин мәлумларын сәһвләр векторудур.

Бу тәнликләри (7.56) шәрти алтында һәлл етсәк, ашағыдакы шәкилдә

$NK + W = 0$

нормал тәнликләри аларыг. Бурада:

$$N = B_1QB_1^T + B_2Q_zB_2^T = N_1 + N_2; \qquad (7.63)$$

$$Q = P^{-1}; \qquad Q_z = P_z^{-1}$$

Өз нөвбәсиндә $\tilde{Z}$ таразлашдырылмыш векторунун чәки әмсаллары матриси үчүн үмуми гаjдаjа әсасән jаза биләрик:

$$Q_{\tilde{z}} = Q_z - Q_zB_2^TN^{-1}B_2Q_z = Q_z - \Delta Q_z . \qquad (7.64).$$

(7.64)-дән көрүндүjү кими, $Q_{\tilde{z}}$ -ики топланандан ибарәтдир. Бурада, биринчи Q_z гиjмәти ади коррелат үсулла һесабланан чәки әмсаллары матрисидир. Икинчи ΔQ_z топлананы исә таразлашдырмадан илкин мә'лумлара һесабланмыш дүзәлишләрдир.

Бу топлананын нәзәрә алынмаз кичик гиjмәтләриндә илкин вериләнләри сәһвсиз гәбул етмәк олар. Идеал һалда $Q_{\tilde{z}} = Q_z$. Үмуми шәкилдә исә, һәдсиз кичик сәһвләр критериjасына көрә,

$$(N_2)_{jj} \leq 0{,}11(N_1)_{jj} \qquad (7.65)$$

олдугда, илкин мә'лумлары өлчүлмүш кәмиjjәтләрә нәзарән сәһвсиз гәбул едирләр.

§52. Чохсаjлы өлчмәләрин таразлашдырылмасы.

Кениш әһатәли кеодезиjа шәбәкәләринин таразлашдырылмасы заманы бөjүк саjда (мәсәлән: Русиjа әразисиндә 500000-дәк) нормал тәнликләр тәртиб едилир. Бу тәнликләрин биркә һәллини тәшкил етмәк, һәтта мүасир ЕҺМ-ин күчүндән истифадә етмәклә белә, олдугча чәтиндир вә чох мүрәккәб елми вә техники проблемләр доғурур.

Она көрә дә, белә мәсәләләрин һәлли чох груплу үсулларла һәjата кечирилир. Бу үсуллардан ән кениш тәтбиг тапмышы проф.И.Ј.Пранис-Праневич тәрәфиндән ишләнмиш чох груплу таразлашдырма үсулудур.

И.Ј.Пранис-Праневич үсулунун үстүн ҹәһәти ондан ибарәтдир ки, үмуми шәбәкә бир нечә S сајда бөлмәјә ајрылараг, биркә һәлл едилән тәнликләрин сајы азалдылыр. Бу да өз нөвбәсиндә, үмумән, мәсәләнин һәллини мүмкүн едир вә ону асанлашдырыр.

Әкәр бөлмә дахили өлчмәләр векторуну ΔX, бөлмә сәрһәдләриндә јерләшән ортаг әлагәләндириҹи мәнтәгәләрин өлчмәләр векторуну исә ΔX_0 илә ишарә етсәк, онда үч бөлмәдән ибарәт шәбәкә үчүн ашағыдакы шәкилдә үмуми нормал тәнликләр системи јаза биләрик:

$$
\begin{aligned}
&R_1\Delta X_1 + R_{1,0}\cdot\Delta X_0 + b_1 = 0;\\
&R_2\Delta x_2 + R_{2,0}\cdot\Delta X_0 + b_2 = 0;\\
&R_3\Delta x_3 + R_{3,0}\cdot\Delta X_0 + b_3 = 0;\\
&R_{1,0}^T\cdot\Delta X_1 + R_{2,0}^T\cdot\Delta X_2 + R_{3,0}^T\cdot\Delta X_3 + R_0\cdot\Delta X_0 + b_0 = 0.
\end{aligned}
\tag{7.66}
$$

(7.66) системиндә биринҹи үч тәнлик гисмән асылы олмајан (гејри-асылы), сонунҹу исә әлагәләндириҹи тәнлик адланыр. Һәр бир бөлмәнин мүвафиг тәнлијиндән ΔX_i гијмәтини ашағыдакы шәкилдә

$$\Delta X_i = -R_i^{-1}\cdot R_{i,0}\cdot\Delta X_0 - R_i^{-1}\cdot b_i \tag{7.67}$$

тә'јин едиб, әлагәләндириҹи тәнликдә јеринә гојсаг, аларыг:

$$\left[R_0\cdot 3\right]\Delta X_0 + \left[b_0\cdot 3\right] = 0, \tag{7.68}$$

бурада:

$$\left[R_0\cdot 3\right] = R_0 - \sum_{i=1}^{S} R_{i,0}^T\cdot R_i^{-1}\cdot R_{i,0};$$

$$\left[b_0\cdot 3\right] = b_0 - \sum_{i=1}^{S} R_{i,0}^T\cdot R_i^{-1}\cdot b_i$$

Өз нөвбәсиндә, R_0 матриси һәр бир бөлмә үчүн ајрыҹа тәртиб едилән $R_0^{(i)}$ матрисләринин ҹәмидир, јә'ни $R_0 = \sum_{i=1}^{S} R_0^{(i)}$

Онда,

$$\left[R_0\cdot S\right] = \sum_{i=1}^{S}\left[R_0^{(i)}\cdot 1\right], \tag{7.69}$$

бурада:

$$\left[R_0^{(i)}\cdot 1\right] = R_0^{(i)} - R_{i0}^T\cdot R_i^{-1}\cdot R_{i0}$$

Беләликлә, үмуми шәбәкәнин таразлашдырылмасыны белә бир ардычыллыгда һәјата кечирмәк олар.

1)Һәр бир бөлмәјә мүстәгил кеодезија шәбәкәси кими бахараг, онлар үчүн ајрыча ујғун нормал тәнликләр тәртиб едилир;

2) Сонра бөлмә тәнликләриндә әвәзетмәләр апарараг, јалныз ортаг мәнтәгәләрин мәчһулларындан ибарәт тәнликләр алыныр. Бурадан исә онларын чәбри чәми кими (7.68) тәнлији јазылыр;

3) (7.68) тәнлијинин һәллиндән ортаг ΔX_0 вектору тә'јин едилир;

4) Нәһајәт, тапылмыш ΔX_0 гијмәтләрини (7.66) системинин биринчи үч тәнлијиндә јазмагла, мүвафиг бөлмәләр дахили мәчһуллар һесабланыр.

Таразлашдырылмыш мәчһулларын Q матрисләри ашағыдакы ујғун алгоритмләрлә тә'јин едилир:

әлагәләндиричи мәнтәгәләр үчүн

$$Q_0 = \left[R_0 \cdot S\right]^{-1}; \qquad (7.70)$$

бөлмәдахили мәнтәгәләр үчүн

$$Q_i = R_i^{-1} + R_i^{-1} \cdot R_{i0} Q_0 R_{i0}^T \cdot R_i^{-1}; \qquad (7.71)$$

дахили вә әлагәләндиричи мәнтәгәләр үчүн

$$Q_{i,0} = -R_i^{-1} \cdot R_{i0} \cdot Q_0; \qquad (7.72)$$

мүхтәлиф әразиләрә малик бөлмәдахили мәнтәгәләр үчүн

$$Q_{i,k} = -R_i^{-1} \cdot R_{i,0} \cdot Q_0 \cdot R_{S,0}^T \cdot R_S^{-1}, \qquad (7.73)$$

бурада, $(i,k = 1,2,...S)$.

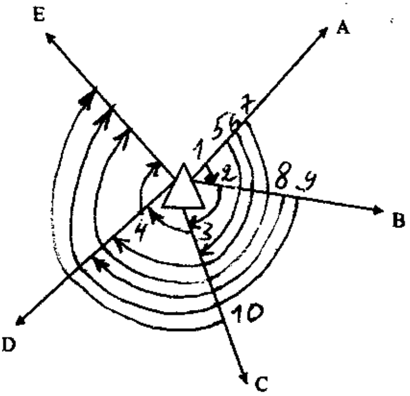
ӘДӘБИЈЈАТ.

1. Большаков В.Д., Гайдаев П.А. Теория математической обработки геодезических измерений. М., Недра, 1977.
2. Большаков В.Д. Теория ошибок наблюдений М., Недра, 1983.
3. Большаков В.Д., Д. Маркузе Ю.И. Практикум по теории математической обработки геодезических измерений. Учебное пособие для вузов. М. Недра, 1984, 352 с.
4. Большаков В.Д. , Маркузе Ю.И. Городская полигонометрия. М., Недра, 1979.
5. Большаков В.Д., Маркузе Ю.И., Голубев В.В. Уравнивание геодезических построений: Справочное пособие. М.Недра, 1989, - 413 с.
6. Гудков В.М., Хлебников А.В. Математическая обработка маркшейдерско-геодезических измерений: Учеб. Для вузов- М. Недра, 1990- 335 с.
7. Маркузе Ю.И. Основы уравнительных вычислений: Учеб. Пособие для вузов. М. Недра, 1990-240 с.
8. Машимов М.М. Уравнивание геодезических сетей. М.Недра, 1979, с. 367.
9. Справочное пособие по прикладной геодезии. /В.Д.Большаков, Г.П.Левчук, Е.Б.Клюшин и др.; Под ред. В.Д.Большакова. М.; Недра, 1987- 343 с.
10. Справочник геодезиста: В 2-х книгах. Кн I/Под ред. В.Д. Большакова, Г.П.Левчука.- М.: Недра, 1985-455 с.

Әлавә I.

Јохлама ишләр.

I.1. Чәдвәл (I.1)-дә комбинасијалар үсулу илә бучаг өлчмә нәтичәләри верилмишдир (шәкил I.1). Бу бучаглары мүхтәлиф вариантларда параметрик үсулла таразлашдырмалы вә AOB, BOC. COД, ДОЕ бучагларынын орта квадратик сәһвләрини һесабламалы.



Шәкил 1.1 Бучағын комбинасија үсулу илә өлчүлмәси

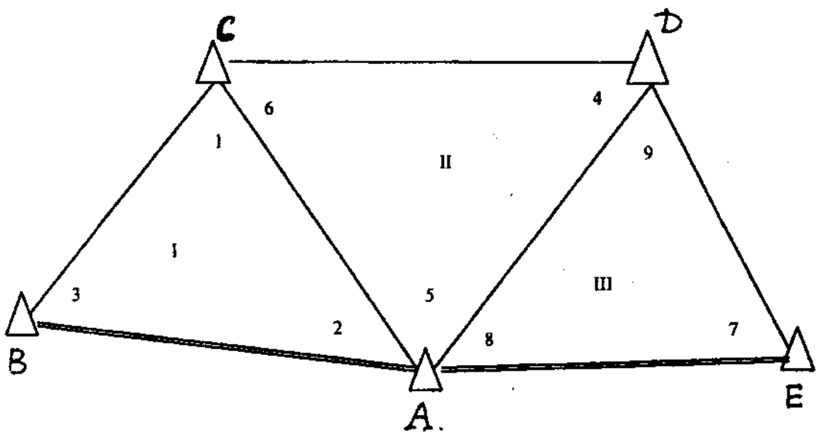
Чәдвәл I.1

Бучаглар	Бучаг-рын сан-ләрсиз гијмәтләри	ВАРИАНТЛАР											
		Бучагларын санијәләри											
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
АОВ	32° 26′	17,3	16,5	16,0	15,5	15,0	18,0	18,5	19,0	19,5	17,0	20,2	18,0
ВОС	51 15	50,2	50,4	50,7	51,1	51,4	49,8	49,4	49,0	48,7	50,0	45,8	43,8
СОД	61 42	21,1	21,5	21,9	22,4	22,8	23,1	23,5	23,8	24,0	24,3	20,8	20,1
ДОЕ	89 31	46,4	46,1	45,8	45,4	45,7	45,3	45,4	44,6	44,0	45,0	40,5	39,7
АОС	83 42	08,0	08,5	08,9	08,7	09,1	09,3	09,8	10,5	10,7	10,1	06,5	05,8
ВОД	112 58	13,9	13,6	14,3	15,0	14,7	15,4	15,9	16,2	16,5	17,0	02,4	07,5
СОЕ	151 14	10,5	10,7	10,9	11,1	11,3	11,4	11,6	11,8	11,5	12,2	02,6	03,4
АОД	145 24	26,3	26,1	25,8	25,5	25,3	26,5	26,8	27,1	27,4	27,8	21,5	26,1
ВОЕ	202 29	56,8	56,8	57,0	57,1	57,2	57,3	57,4	57,5	57,6	57,7	42,5	43,5
АОЕ	234 56	15,6	15,3	15,0	14,7	14,4	16,0	16,3	16,6	16,9	15,8	06,8	05,7

Чәдвәл I.1-ин давамы

ВАРИАНТЛАР												
13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
Бучагларын санијәләри												
17,8	17,5	19,1	18,9	15,2	17,5	17,3	16,6	15,2	16,2	13,9	14,5	12,9
46,6	45,9	48,6	48,8	49,6	51,6	47,5	52,4	32,4	31,4	32,4	33,2	34,1
18,1	18,0	17,5	19,2	16,9	17,9	17,7	17,8	28,1	30,8	29,5	27,8	28,4
42,6	45,5	44,2	40,9	45,2	45,3	41,8	43,9	12,6	13,2	14,6	14,6	15,2
07,3	06,8	07,5	08,4	03,6	04,5	03,5	05,3	43,7	44,3	42,5	43,0	43,8
03,4	07,6	02,2	10,3	07,4	06,4	08,5	08,1	11,1	08,5	09,4	10,1	10,7
04,3	01,2	04,2	03,2	00,1	01,2	01,9	02,8	43,8	43,0	42,6	42,9	43,4
22,2	24,8	21,0	25,4	24,5	27,7	21,4	23,2	19,6	20,5	21,7	20,4	21,0
46,3	50,2	46,2	44,9	54,3	56,2	45,3	56,2	12,2	11,1	12,9	13,3	13,9
08,2	07,5	05,3	04,6	06,4	08,4	07,6	10,3	24,3	25,6	27,0	26,1	26,6

I.2 Шәкил (1.2)-дә көстәрилмиш триангулјасија шәбәкәсинин тәрәфләринин дирексијон бучагларыны таразлашдырмалы.
Бучагөлчмә нәтичәләри Чәдвәл I.2-дә верилмишдир. Башланғыч дирексијон бучаглары : $\alpha_{AB}=270^{\circ}00'00{,}00''$, $\alpha_{AE}=102^{\circ}56'57{,}5''$.



Шәкил I.2. Триангулјасија шәбәкәси.

Əлавə II

$Y' = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}}$ **функсиjасынын гиjмəтлəр чəдвəли,** $t = \frac{X - M[X]}{\sigma}$

t	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,5641	0,5641	0,5641	0,5640	0,5637	0,5634	0,5631	0,5629	0,5624	0,5619
0,1	0,5614	0,5607	0,5602	0,5595	0,5588	0,5579	0,5571	0,5561	0,5551	0,5541
0,2	0,5580	0,5518	0,5507	0,5494	0,5481	0,5469	0,5455	0,5440	0,5425	0,5409
0,3	0,5394	0,5377	0,5360	0,5343	0,5325	0,5306	0,5288	0,5268	0,5250	0,5228
0,4	0,5209	0,5187	0,5166	0,5143	0,5121	0,5098	0,5076	0,5052	0,5028	0,5003
0,5	0,4979	0,4954	0,4929	0,4903	0,4876	0,4849	0,4822	0,4796	0,4769	0,4740
0,6	0,4712	0,4684	0,4656	0,4626	0,4598	0,4568	0,4538	0,4507	0,4477	0,4446
0,7	0,4417	0,4385	0,4354	0,4322	0,4291	0,4258	0,4227	0,4195	0,4162	0,4129
0,8	0,4097	0,4064	0,4030	0,3998	0,3964	0,3932	0,3898	0,3864	0,3831	0,3797
0,9	0,3763	0,3729	0,3695	0,3661	0,3627	0,3594	0,3558	0,3524	0,3490	0,3456
1,0	0,342	0,339	0,336	0,332	0,329	0,326	0,322	0,318	0,315	0,312
1,1	0,308	0,304	0,302	0,298	0,295	0,292	0,288	0,284	0,282	0,278
1,2	0,275	0,272	0,268	0,265	0,262	0,258	0,256	0,252	0,248	0,246
1,3	0,242	0,240	0,236	0,233	0,230	0,227	0,224	0,221	0,218	0,214
1,4	0,212	0,209	0,206	0,203	0,200	0,197	0,194	0,192	0,189	0,186
1,5	0,183	0,180	0,178	0,175	0,172	0,170	0,167	0,165	0,162	0,169
1,6	0,156	0,154	0,152	0,149	0,147	0,145	0,142	0,140	0,138	0,135
1,7	0,133	0,131	0,129	0,126	0,124	0,122	0,120	0,118	0,116	0,114
1,8	0,112	0,110	0,108	0,106	0,104	0,102	0,100	0,098	0,096	0,094
1,9	0,093	0,091	0,090	0,088	0,086	0,084	0,083	0,081	0,080	0,078
2,0	0,076	0,076	0,075	0,073	0,072	0,069	0,068	0,066	0,065	0,063
2,1	0,062	0,061	0,060	0,058	0,057	0,056	0,055	0,053	0,052	0,051
2,2	0,050	0,049	0,048	0,047	0,046	0,045	0,044	0,043	0,042	0,041
2,3	0,040	0,039	0,038	0,038	0,037	0,036	0,036	0,034	0,033	0,032
2,4	0,032	0,031	0,030	0,030	0,029	0,028	0,027	0,027	0,026	0,025
2,5	0,025	0,024	0,024	0,023	0,022	0,022	0,021	0,021	0,020	0,020
2,6	0,010	0,019	0,018	0,018	0,017	0,017	0,016	0,016	0,016	0,015
2,7	0,015	0,014	0,014	0,014	0,013	0,017	0,012	0,012	0,012	0,011
2,8	0,011	0,011	0,011	0,010	0,010	0,010	0,0096	0,0094	0,0092	0,0090
2,9	0,0085	0,0082	0,0080	0,0078	0,0076	0,0074	0,0071	0,0069	0,0067	0,0066
3,0	0,0063									

Eһтималлар интервалы $\Phi(t) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_0^t e^{-\frac{x^2}{2}}dx$ -ин гиј̌мәтләр чәдвәли . $0 \le \Phi(t) < 1$ **Әлавә III**

t	$\Phi(t)$	t	$\Phi(t)$	t	$\Phi(t)$
0,00	0,00000	1,25	0,78870	2,50	0,98758
0,05	0,03988	1,30	0,80640	2,55	0,98922
0,10	0,07966	1,35	0,82298	2,60	0,99068
0,15	0,11924	1,40	0,83849	2,65	0,99195
0,20	0,15852	1,45	0,85294	2,70	0,99307
0,25	0,19741	1,50	0,86639	2,75	0,99404
0,30	0,23582	1,55	0,87886	2,80	0,99489
0,35	0,27366	1,60	0,89040	2,85	0,99563
0,40	0,31084	1,65	0 90106	2,90	0,99627
0,45	0,34729	1,70	0,91087	2,95	0,99682
0,50	0,38292	1,75	0,91988	3,00	0,99730
0,55	0,41768	1,80	0,92814	3,10	0,99806
0,60	0,45149	1,85	0,93569	3,20	0,99863
0,65	0,48431	1,90	0,94257	3,30	0,99903
0,70	0,51607	1,95	0,94882	3,40	0,99933
0,75	0,54675	2,00	0,95450	3,50	0,99953
0,80	0,57629	2,05	0,95964	3,60	0,99968
0,85	0,60468	2,10	0,96427	3,70	0,99978
0,90	0,63188	2,15	0,96844	3,80	0,99986
0,95	0,65789	2,20	0,97219	3,90	0,44440
1,00	0,68269	2,25	0,97555	4,00	0,99994
1,05	0,70628	2,30	0,97855	4,10	0,99996
1,10	0,72867	2,35	0,98123	4,20	0,99997
1,15	0,74986	2,40	0,98360	4,40	0,99999
1,20	0,76986	2,45	0,98571	4,50	0,999994

$\gamma_1 \cdot m^2 \leq \sigma^2 \leq \gamma_2 \cdot m^2$ **ifadəsində** γ_1 **və** γ_2 **əmsallarının tapılması cədvəli**

γ	β: 0,99		0,98		0,95		0,90	
	γ_1	γ_2	γ_1	γ_2	γ_1	γ_2	γ_1	γ_2
1	0,356	159	0,388	79,8	0,446	31,9	0,510	15,9
2	0,434	14,1	0,466	9,97	0,521	6,28	0,578	4,40
3	0,483	6,47	0,514	5,11	0,566	3,73	0,620	2,92
4	0,519	4,39	0,459	3,67	0,599	2,87	0,649	2,37
5	0,546	3,48	0,576	3,00	0,624	2,45	0,672	2,090
6	0,569	2,98	0,597	2,62	0,644	2,202	0,690	1,916
7	0,588	2,66	1,616	2,377	0,661	2,035	0,705	1,797
8	0,604	2,440	0,631	2,205	0,675	1,916	0,718	1,711
9	0,618	2,277	0,644	2,076	0,688	1,826	0,729	1,645
10	0,630	2,154	0,656	1,977	0,699	1,755	0,739	1,593
11	0,641	2,056	0,667	1,698	0,708	1,698	0,748	1,550
12	0,651	1,976	0,677	1,833	0,717	1,651	0,755	1,515
13	0,660	1,910	0,685	1,779	0,725	1,611	0,762	1,485
14	0,669	1,854	0,693	1,733	0,732	1,577	0,769	1,460
15	0,676	1,806	0,700	1,694	0,739	1,548	0,775	1,437
16	0,683	1,764	0,707	1,659	0,745	1,522	0,780	1,418
17	0,690	1,727	0,713	1,629	0,750	1,499	0,785	1,400

18	0,696	1,695	0,719	1,620	0,756	1,479	0,790	1,385
19	0,702	1,666	0,725	1,578	0,760	1,460	0,794	1,370
20	0,707	1,640	0,730	1,556	0,765	1,444	0,798	1,358
21	0,712	1,617	0,734	1,536	0,769	1,429	0,802	1,346
22	0,717	1,595	0,739	1,519	0,773	1,419	0,805	1,335
23	0,722	1,576	0,743	1,502	0,777	1,402	0,809	1,326
24	0,726	1,558	0,747	1,487	0,781	1,391	0,812	1,316
25	0,730	1,541	0,751	1,473	0,784	1,380	0,815	1,308
26	0,734	1,526	0,755	1,460	0,788	1,371	0,818	1,300
27	0,737	1,512	0,758	1,448	0,791	1,361	0,820	1,293
28	0,741	1,499	0,762	1,436	0,794	1,352	0,823	1,286
29	0,744	1,487	0,765	1,426	0,796	1,344	0,825	1,279
30	0,748	1,475	0,768	1,417	0,799	1,337	0,828	1,274
40	0,774	1,390	0,792	1,344	0,821	1,279	0,847	1,228
50	0,793	1,336	0,810	1,297	0,837	1,243	0,861	1,199
60	0,808	1,299	0,824	1,265	0,849	1,217	0,871	1,179
70	0,820	1,272	0,835	1,241	0,858	1,198	0,879	1,163
80	0,829	1,250	0,844	1,222	0,866	1,183	0,886	1,151
90	0,838	1,233	0,852	1,207	0,873	1,771	0,892	1,141
100	0,845	1,219	0,858	1,195	0,878	1,161	0,897	1,133
200	0,887	1,15	0,897	1,13	0,912	1,11	0,925	1,09

Стјудент әмсаллары t_β. Әлавә V

$\Phi'(t) = \beta$

r	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	0,95	0,98	0,99	0,999
2	0,16	0,33	0,51	0,73	1,00	1,38	2,0	3,1	6,3	12,7	31,8	63,7	636,6
3	14	29	45	52	0,82	1,06	1,3	1,9	2,9	4,3	7,0	9,9	31,6
4	14	28	42	58	77	0,98	1,3	1,6	2,4	3,2	4,5	5,8	12,9
5	13	27	41	57	74	94	1,2	1,5	2,1	2,8	3,7	4,6	8,6
6	13	27	41	56	73	92	1,2	1,5	2,0	2,6	3,4	4,0	6,9
7	13	27	40	55	72	90	1,1	1,4	1,9	2,4	3,1	3,7	6,0
8	13	26	40	55	71	90	1,1	1,4	1,9	2,4	3,0	3,5	5,4
9	13	26	40	54	71	90	1,1	1,4	1,9	2,3	2,9	3,4	5,0
10	13	26	40	54	70	88	1,1	1,4	1,8	2,3	2,8	3,3	4,8
11	13	26	40	54	70	88	1,1	1,4	1,8	2,2	2,8	3,2	4,6
12	13	26	40	54	70	87	1,1	1,4	1,8	2,2	2,7	3,1	4,5
13	13	26	40	54	70	87	1,1	1,4	1,8	2,2	2,7	3,1	4,3
14	13	26	39	54	69	87	1,1	1,4	1,8	2,2	2,7	3,0	4,2
15	13	26	39	54	69	87	1,1	1,3	1,8	2,1	2,6	3,0	4,1
16	13	26	39	54	69	87	1,1	1,3	1,8	2,1	2,6	2,9	4,0
17	13	26	39	54	69	86	1,1	1,3	1,7	2,1	2,6	2,9	4,0
18	13	26	39	53	69	86	1,1	1,3	1,7	2,1	2,6	2,9	4,0
19	13	26	39	53	69	86	1,1	1,3	1,7	2,1	2,6	2,9	3,9
20	13	26	39	53	69	86	1,1	1,3	1,7	2,1	2,5	2,9	3,9
21	13	26	39	53	69	86	1,1	1,3	1,7	2,1	2,5	2,8	3,8
22	13	26	39	53	69	86	1,1	1,3	1,7	2,1	2,5	2,8	3,8
23	13	26	39	53	69	86	1,1	1,3	1,7	2,1	2,5	2,8	3,8
24	13	26	39	53	69	86	1,1	1,3	1,7	2,1	2,5	2,8	3,8
25	13	26	39	53	69	86	1,1	1,3	1,7	2,1	2,5	2,8	3,7
26	13	26	39	53	68	86	1,1	1,3	1,7	2,1	2,5	2,8	3,7
27	13	26	39	53	68	86	1,1	1,3	1,7	2,1	2,5	2,8	3,7
28	13	26	39	53	68	86	1,1	1,3	1,7	2,0	2,5	2,8	3,7
29	13	26	39	53	68	86	1,1	1,3	1,7	2,0	2,5	2,8	3,7
30	13	26	39	53	68	85	1,1	1,3	1,7	2,0	2,5	2,8	3,7
40	13	26	39	53	68	85	1,1	1,3	1,7	2,0	2,4	2,7	3,6
60	13	25	39	53	68	85	1,0	1,3	1,7	2,0	2,4	2,7	3,5
120	13	25	39	53	68	85	1,0	1,3	1,7	2,0	2,4	2,6	3,4
	13	25	39	52	67	84	1,0	1,3	1,6	2,0	2,3	2,6	3,3

Әлавә VI

χ^2 вә $\lambda = \sqrt{\dfrac{\chi^2}{r}}$ әмсалларынын јол верилән гијмәтләринин тапылмасы чәдвәли

Ehtimal P $(\chi^2 > \chi_q^2)$

Сәрбәстлик дәрәчә әмсалы k	0,99	0,98	0,95	0,90	0,80	0,70	0,50	0,30	0,20	0,10	0,05	0,02	0,01	0,005	0,002	0,001
1	0,00016	0,0006	0,0039	0,016	0,064	0,148	0,455	1,07	1,64	2,7	3,8	5,4	6,6	7,9	9,5	10,83
2	0,020	0,040	0,103	0,211	0,446	0,713	1,386	2,41	3,22	4,6	6,0	7,8	9,2	11,6	12,4	13,8
3	0,115	0,185	0,352	0,584	1,005	1,424	2,366	3,66	4,64	6,3	7,8	9,8	11,3	12,8	14,8	16,3
4	0,30	0,43	0,71	1,06	1,65	2,19	3,36	4,9	6,0	7,8	9,5	11,7	13,3	14,9	16,9	18,5
5	0,55	0,75	1,14	1,61	2,34	3,00	4,35	6,1	7,3	9,2	11,1	13,4	15,1	16,3	18,9	20,5
6	0,87	1,13	1,63	2,20	3,07	3,83	5,35	7,2	8,6	10,6	12,6	15,0	16,8	18,6	20,7	22,5
7	1,24	1,56	2,17	2,83	3,82	4,67	6,35	8,4	9,8	12,0	14,1	16,6	18,5	20,3	22,6	24,3
8	1,65	2,03	2,73	3,49	4,59	5,53	7,34	9,5	11,0	13,4	15,5	18,2	20,1	21,9	24,3	26,1
9	2,09	2,53	3,32	4,17	5,38	6,39	8,34	10,7	12,2	14,7	16,9	19,7	21,7	23,6	26,1	27,9
10	2,56	3,06	3,94	4,86	6,18	7,27	9,34	11,8	13,4	16,0	18,0	21,2	23,2	25,2	27,7	29,6
11	3,1	3,6	4,6	5,6	7,0	8,1	10,3	12,9	14,6	17,3	19,7	22,6	24,7	26,8	29,4	31,3
12	3,6	4,2	5,2	6,3	7,8	9,0	11,3	14,0	15,8	18,5	21,0	24,1	26,2	28,3	31	32,9
13	4,1	4,8	5,9	7,0	8,6	9,9	12,3	15,1	17,0	19,8	22,4	25,5	27,7	29,8	32,5	34,5
14	4,7	5,4	6,6	7,8	9,5	10,8	13,3	16,2	18,2	21,1	23,7	26,9	29,1	31	34	36,1
15	5,2	6,0	7,3	8,5	10,3	11,7	14,3	17,3	19,3	22,3	25,0	28,3	30,6	32,5	35,5	37,7
16	5,8	6,6	8,0	9,3	11,2	12,6	15,3	18,4	20,5	23,5	26,3	29,6	32,0	34	37	39,2
17	6,4	7,3	8,7	10,1	12,0	13,5	16,3	19,5	21,6	24,8	27,6	31,0	33,4	35,5	38,5	40,8
18	7,0	7,9	9,4	10,9	12,9	14,4	17,3	20,6	22,8	26,0	28,9	32,3	34,8	37	40	42,3
19	7,6	8,6	10,1	11,7	13,7	15,4	18,3	21,7	23,9	27,2	30,1	33,7	36,2	38,5	41,5	43,8
20	8,3	9,2	10,9	12,4	14,6	16,3	19,3	22,8	25,0	28,4	31,4	35,0	37,6	40	43	45,3
21	8,9	9,9	11,6	13,2	15,4	17,2	20,3	23,9	26,2	29,6	32,7	36,3	38,9	41,5	44,5	46,8
22	9,5	10,6	12,3	14,0	16,3	18,1	21,3	24,9	27,3	30,8	33,9	37,7	40,3	42,5	46	48,3
23	10,2	11,3	13,1	14,8	17,2	19,0	22,3	26,0	28,4	32,0	35,2	39,0	41,6	44,0	47,5	49,7
24	10,9	12,0	13,8	15,7	18,1	19,9	23,3	27,1	29,6	33,2	36,4	40,3	43,0	45,5	48,5	51,2
25	11,5	12,7	14,6	16,5	18,9	20,9	24,3	28,1	30,7	34,4	37,7	41,6	44,3	47	50	52,6
26	12,2	13,4	15,4	17,3	19,8	21,8	25,3	29,3	31,8	35,6	38,9	42,9	45,6	48	51,5	54,1
27	12,9	14,1	16,2	18,1	20,7	22,7	26,3	30,3	32,9	36,7	40,1	44,1	47,0	49,5	53	55,5
28	13,6	14,8	16,9	18,9	21,6	23,6	27,3	31,4	34,0	37,9	41,3	45,4	48,3	51	54,5	56,9
29	14,3	15,6	17,7	19,8	22,5	24,6	28,3	32,5	35,1	39,1	42,6	46,7	49,6	52,6	56	58,3
30	15,0	16,3	18,5	20,6	23,4	25,5	29,3	33,5	36,3	40,3	43,8	48,0	50,9	54	57,5	59,7

Әлавә VII

$Z = \frac{1}{2} \ln \frac{1+r}{1-r}$ функсијасынын гијмәтләр чәдвәли

r	Јүздә бир һиссәләр 0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,0000	0,0100	0,0200	0,0300	0,0400	0,0500	0,0601	0,0701	0,0802	0,0902
0,1	0,1003	0,1104	0,1206	0,1307	0,1409	0,1511	0,1614	0,1717	0,1820	0,1923
0,2	0,2027	0,2132	0,2237	0,2342	0,2448	0,2554	0,2661	0,2769	0,2877	0,2986
0,3	0,3095	0,3205	0,3316	0,3428	0,3541	0,3654	0,3769	0,3884	0,4001	0,4118
0,4	0,4236	0,4356	0,4477	0,4599	0,4722	0,4847	0,4973	0,6475	0,5230	0,5361
0,5	0,5493	0,5627	0,5763	0,5901	0,6042	0,6184	0,6328	0,6475	0,6625	0,6777
0,6	0,6931	0,7089	0,7250	0,7414	0;7582	0,7753	0,7928	0,8107	0,8291	0,8480
0,7	0,8673	0,8872	0,9076	0,9287	0,9505	0,9730	0,9962	1,0203	1,0454	1,0714
0,8	1,0986	1,1270	1,1568	1,1881	1,2212	1,2562	1,2933	1,3331	1,3758	1,4219
0,9	1,4722	1,5275	1,5890	1,6584	1,7380	1,8318	1,9459	2,0923	2,2976	2,6466
0,99	2,6466	2,6996	2,7587	2,8257	2,9031	2,9945	3,1063	3,2504	3,4534	3,8002

*ахырынчы сәтирдә миндә бир һиссәләр көтүрүлмүшдүр

МҮНДӘРИЧАТ

М.Һ.Гочаманов З.А.Багманов

Кеодезија өлчмәләринин ријази һесабланмасы

Јығылмаға верилиб 10.09.99
Чапа имзаланыб 21.12.99
Кағыз форматы 70x90 1/32
Шәрти чап вәрәги 1.9 Тираж 800
Гијмәти мүгавилә илә