M.H. QOCAMANOV

GEODEZİYA ÖLÇMƏLƏRİNİN HESABLANMASI VƏ TARAZLAŞDIRILMASI

Ali məktəblər üçün dərslik

Azərbaycan Respublikası Təhsil Nazirinin 21 fevral 2012-ci il tarixli 239 №-li əmri ilə təsdiq edilmişdir.

BAKI – 2014

Rəyçilər:

1. **R.M. Məmmədov,** AMEA-nın müxbir üzvü, texnika elmləri doktoru, professor, AMEA-nın akad. H.Əliyev adına Coğrafiya İnstitutunun Elmi İşlər üzrə müavini;
2. **F.Ə. İmanov,** coğrafiya elmləri doktoru, professor, BDU-nun Coğrafiya fakültəsinin dekanı;
3. **F.H. Rəhimov,** fizika-riyaziyyat elmləri doktoru, professor, BDU-nun Ehtimal nəzəriyyəsi və riyazi statistika kafedrası

Qocamanov M.H. Geodeziya ölçmələrinin hesablanması və tarazlaşdırılması. *Universiet tələbələri üçün dərslik.* Bakı: «Bakı Universiteti» nəşriyyatı, 2014, 280 səh.

Dərslikdə ölçmələr səhvləri nəzəriyyəsi və ən kiçik kvadratlar metodu şərh edilir. Onun birinci hissəsində ehtimal nəzəriyyəsi və riyazi statistikadan məlumatlar verilir ki, bu da növbəti fəsillərdəki materialların öyrənilməsinə xidmət edir. Dərsliyin son fəslində müasir geodeziyanın bir sıra məsələlərinin tarazlaşdırılması ilə bağlı materiallar yer tutur. Ümumən dərslikdə əksər nəzəri mövzulara dair məsələ həlli nümunələri verilir.

Dərslik ilk növbədə universitetlərdə «Geodeziya və xəritəçilik mühəndisliyi» ixtisası üzrə təhsil alan tələbələr üçün nəzərdə tutulsa da, ondan müvafiq ixtisaslı magistrant, doktorant və geodeziya ölçmələri ilə məşğul olan mütəxəssislər də istifadə edə bilər.

$$Q-\frac{1802020000}{M-658(07)}-02-2014$$

GİRİŞ

Geodeziya ölçmələrini digər sahə ölçmələri kimi səhvsiz yerinə yetirmək təcrübi olaraq qeyri-mümkündür. Adətən, geodeziya ölçmələrinin dəqiqliyini yüksəltmək məqsədi ilə onları bir neçə dəfə təkrar ölçmələrlə həyata keçirirlər. Bu zaman kəmiyyətlər, eləcə də onların ölçmə nəticələri arasında mövcud olan qarşılıqlı riyazi əlaqə hesabına tarazlaşdırma məsələsi meydana çıxır. Tarazlaşdırmadan təyin edilən kəmiyyətlər üçün ən ehtimal olunan, eyni zamanda ən etibarlı (tarazlaşdırılmış) qiymətlər tapılır, həmçinin bu ehtimal qiymətlərə dəqiqliyin göstərilməsi imkanı yaranır.

Dərslik «Geodeziya ölçmələrinin hesablanması və tarazlaşdırılması» fənninin proqramına uyğun yazılmış və şərti olaraq iki hissəyə bölünür:

I. Ölçmələr səhvləri nəzəriyyəsi.

II. Ən kiçik kvadratlar metodu.

Hər iki hissənin öyrənilməsi tələbələrdən «Ehtimal nəzəriyyəsi» və «Riyazi statistika» elmi sahələrindən müəyyən biliklərə malik olmalarını tələb edir. Lakin «Geodeziya və xəritəçilik mühəndisliyi» ixtisasında təhsil alan tələbələrə riyaziyyatın bu bölmələri ayrıca fənn kimi tədris edilmir, ali riyaziyyat kursu çərçivəsində səthi olaraq ümumi anlayışlar şəklində çatdırılır. Ona görə də təqdim edilən dərsliyin birinci, ikinci və üçüncü fəsillərində «Ehtimal nəzəriyyəsi» və «Riyazi statistika» kurslarından zəruri olan müvafiq teorem və qaydalar verilmiş, onların geodeziya hesablamalarında tətbiqi konkret məsələ həlləri ilə göstərilmişdir. Dərslikdəki mövzular şərh edilərkən ali riyaziyyat kursundan tələbələrə məlum olan bir sıra başqa riyazi aparatlardan da istifadə edilir. Dərslikdə geodeziya kursundan gətirilmiş anlayış və bəhslərlə bağlı isə düşünürük ki, birinci kursda artıq geodeziya fənnini keçmiş ikinci kurs tələbələri üçün bu istiqamətdə çətinliklər yaranmayacaqdır.

Dərsliyin dördüncü fəsli ölçmələr səhvləri nəzəriyyəsinə həsr edilmişdir. Burada ölçmə səhvləri, onların növləri, təsadüfi səhvlərin xassələri, ölçmə və ölçmə funksiyasının dəqiqliyinin qiymətləndirilməsi üsulları, bərabərdəqiqlikli ölçmələr sırasının riyazi hesablanması, ölçmə çəkisi anlayışı və ondan istifadə etməklə qeyri-bərabər dəqiqlikli ölçmələr sırasının tarazlaşdırılması yolları göstərilmiş və müvafiq məsələ həlləri nümayiş etdirilmişdir.

Dərsliyin ikinci hissəsi ən kiçik kvadratlar metodu və onun üsullarına həsr edilmişdir. Xüsusilə də, parametrik və korrelat tarazlaşdırma üsullarının nəzəri əsasları geniş şərh edilmiş və onların tətbiqi xüsusiyyətləri göstərilmişdir.

Dərslikdə ikiqruplu və kombinə edilmiş tarazlaşdırma üsulları haqqında məlumatlar verilmiş, bir sıra xüsusi məsələlərin həllinə də diqqət yetirilmişdir. Bunlara ilkin verilənlərin səhvlərini nəzərə almaqla tarazlaşdırma üsulları, bir-birindən asılı olan ölçmələrin tarazlaşdırılması, çoxsaylı ölçmələr qrupunun tarazlaşdırılması və s. misal ola bilər.

Dərsliyin sonuncu fəslində müasir geodeziyanın bir sıra məsələləri və onların tarazlaşdırılması yolları ilə bağlı materiallar yer tutur. Burada koordinat sistemləri arasında əlaqələr, peyk və yerüstü geodeziya şəbəkələrinin birgə tarazlaşdırılması, Kalman rekkurent düsturları ilə tarazlaşdırma qaydaları şərh olunur.

Onu da qeyd edək ki, dərslikdə verilmiş əksər nəzəri materiallar müvafiq məsələ həlləri ilə tamamlanır. Parametrik və korrelat tarazlaşdırma üsullarına dair məsələlər isə daha geniş izahlarla şərh edilir.

Dərsliyin tərtibi zamanı bir sıra məsələlər, statistik cədvəl və nəzəri materiallar ədəbiyyat siyahısında [2, 4] nömrəsi ilə göstərilmiş mənbələrdən götürülmüşdür.

Ümid edirik ki, dərslik yalnız universitet tələbələri üçün deyil, həmçinin geodeziya-kartoqrafiya fəaliyyəti ilə məşğul olan mühəndis-texniki işçilər üçün də gərəkli olacaqdır.

ÖLÇMƏLƏR SƏHVLƏRİ NƏZƏRİYYƏSİ

Fəsil 1
EHTİMAL NƏZƏRİYYƏSİNİN ƏSAS ANLAYIŞ VƏ TEOREMLƏRİ

§1. Hadisələr və onların növləri

Ehtimal nəzəriyyəsi təsadüfi hadisələrin kəmiyyət qanunauyğunluqlarını öyrənən riyazi elmdir. Təsadüfi hadisələr elə hadisələrə deyilir ki, onlar üzərində aparılan təcrübə, müşahidə, sınaq dəfələrlə təkrarlanan zaman hər dəfə bir cür baş verir. Lakin təsadüfi hadisələr kütləvi şəkildə baş verdikdə, onların paylanmasının müəyyən qanunauyğunluqları üzərə çıxır (məsələn, müsbət və mənfi işarəli geodeziya ölçmə səhvlərinin təqribən eyni sayda olması).

Hər bir təcrübənin (müşahidənin) həyata keçirilməsi *sınaq*, sınağın nəticəsi *hadisə* adlanır. Məsələn, teodolitlə bucağın ölçülməsi bir sınaq olarsa, onda ölçmə səhvləri onun nəticəsi olan hadisələr kimi qəbul edilə bilər (müsbət işarəli ölçmə səhvi, mənfi işarəli ölçmə səhvi). Eyni zamanda hadisələri şərti olaraq *elementar* və *mürəkkəb* hadisələrə bölürlər. *Elementar hadisələr* elə hadisələrə deyilir ki, onları daha sadələrə bölmək mümkün deyil. *Mürəkkəb hadisələr* isə iki və daha çox elementar hadisələrdən ibarət olur. Məsələn, kəmiyyətin bir dəfə ölçülməsi zamanı müsbət işarəli səhvin baş verməsi elementar hadisə, lakin beş ölçmədən üçündə müsbət işarəli ölçmə səhvinin yaranması isə mürəkkəb hadisədir .

Müəyyən şərtlər daxilində aşağıdakı növ hadisələr baş verə bilər:

–**doğru hadisələr** – müəyyən şərtlər daxilində mütləq baş verir. Məsələn, teodolitin üfqi dairəsindən götürülmüş hesabatın Sağ Dairə və yaxud Sol Dairə vəziyyətinə uyğun gəlməsi hadisəsi. Doğru hadisələr **U** hərfi ilə işarə edilir;

–qeyri-mümkün hadisələr – verilmiş şəraitdə heç vaxt baş vermir. Məsələn, nivelirlə şaquli bucağın ölçülməsi hadisəsi. Qeyri-mümkün hadisələr **V** hərfi ilə işarələnir;

–üst-üstə düşməyən hadisələr – eyni zaman anında birgə baş verə bilməzlər. Məsələn, iki məntəqə arasındakı nisbi yüksəkliyin həm müsbət, həm də mənfi işarəli olması hadisələri;

–üst-üstə düşən hadisələr – eyni zaman anında baş verməsi mümkün olan hadisələrdir. Məsələn, iki məntəqə arasındakı nisbi yüksəkliyin müsbət işarəli, eyni zamanda nivelir stansiyaları sayının da cüt rəqəmli olması hadisələri;

–tam qrup təşkil edən hadisələr – elə hadisələrə deyilir ki, sınaq zamanı qrupu təşkil edən hadisələrdən hansısa biri mütləq baş verir. Tam qrup doğru hadisədir. Məsələn, müsbət və mənfi işarəli ölçmə səhvləri tam qrup təşkil edir;

–əks hadisələr – üst-üstə düşməyən və tam qrup təşkil edən iki hadisədən ibarətdir. A hadisəsinə əks olan hadisə $\overline{A}$ şəklində göstərilir. Məsələn, A – müsbət işarəli ölçmə səhvidirsə, $\overline{A}$ – mənfi işarəli ölçmə səhvi olar;

–eynimümkünatlı hadisələr – verilmiş şəraitdə eyni baş vermə mümkünlüyünə malik hadisələrdir. Məsələn, bucağın ölçülməsi zamanı müsbət və ya mənfi işarəli ölçmə səhvlərinin baş verməsi eynimümkünatlı hadisələrdir;

–bir-birindən asılı olmayan hadisələr – elə hadisələrə deyilir ki, onlardan hər hansı birinin baş vermə mümkünlüyü digər hadisələrin artıq baş verib-verməməsindən asılı deyildir. Məsələn, məsafənin uzunluğunu təyin edərkən, ikinci ölçmə səhvinin işarəsinin mənfi olmağına birinci ölçmə nəticəsinin işarəsinin heç bir təsiri yoxdur;

–bir-birindən asılı hadisələr – bu halda hadisənin baş vermə mümkünlüyünə digər hadisələrin bu sınağadək baş verib-verməməsi təsir göstərir. Məsələn, teodolit gedişində məntəqənin koordinat dəqiqliyinə gediş üzrə özündən əvvəlki məntəqənin səhvləri təsir göstərir.

Ümumi halda hadisələr latın əlifbasının baş hərfləri ilə işarələnir.

§2. Ehtimalın bilavasitə hesablanma qaydası

Hər bir hadisə ehtimal anlayışı ilə əlaqəlidir. Hadisənin ehtimalı onun baş vermə dərəcəsini (mümkünlüyünü) göstərən ədəddir və P hərfi ilə işarə olunur. Elə hadisələr vardır ki, onların ehtimalını müvafiq sınaq keçirmədən və yalnız sınağın şərtləri əsasında təyin etmək olur. Bunun üçün həmin hadisələr elementar hadisələr olub, «təsadüflər sxemi» təşkil etməlidir. Təsadüflər sxemini isə üst-üstə düşməyən, simmetrik nəticələrə malik, bərabər mümkünatlı hadisələr yarada bilər.

Tutaq ki, sınaq «təsadüflər sxemi» üzrə aparılır. Onda A hadisəsinin ehtimalını aşağıdakı düsturla hesablanır.

$$P(A) = \frac{M}{N}, \qquad (1.1)$$

burada: $P(A)$ – hadisənin ehtimalı; N – təsadüflərin ümumi sayı; M – hadisənin baş verməsi üçün əlverişli olan təsadüflər sayıdır.

Əlverişli təsadüf A hadisəsinin baş verməsinə səbəb olan təsadüfdür. (1.1) düsturunu təhlil etsək görərik ki, hadisənin ehtimalı $0 \le P(A) \le 1$ arasında qiymətlər alır. Doğru hadisənin ehtimalı $P(U)=1$, qeyri-mümkün hadisənin ehtimalı isə $P(V)=0$ olar.

Ehtimalın (1.1) düsturu ilə təyin edilməsi onun *klassik yo-*

lu, hesablanması isə *bilavasitə hesablanma qaydası* adlanır.

Məsafənin ölçü lenti ilə bir dəfə ölçülməsi təsadüflər sxeminə uyğun gəlir. Onda (1.1) düsturuna əsasən müsbət işarəli ölçmə səhvinin baş vermə ehtimalı üçün taparıq:

N=2 (iki hadisə baş verə bilər: müsbət və mənfi işarəli ölçmə səhvləri);

M=1 (müsbət səhvin baş verdiyi əlverişli təsadüflər sayı).

Buradan $P_{(+)} = \frac{1}{2}$ olar.

Başqa bir misal göstərək. Tutaq ki, verilmiş xəttin rumb bucağının hər hansı bir cəhət rübünə düşməsi ehtimalını tapmaq tələb olunur. Bu hadisələr «təsadüflər sxemi»nə uyğun gəldiyindən, onun ehtimalını da (1.1) düsturu ilə hesablamaq olar.

Məlumdur ki, dörd cəhət rübü vardır, yəni N=4. Rumb bucağının hər hansı bir rübə düşməsi təsadüfi M=1. Buradan alarıq:

$$P_{rumb} = \frac{M}{N} = \frac{1}{4}.$$

Daha mürəkkəb məsələlərin həlli zamanı ümumi və əlverişli təsadüflərin sayını təyin etmək üçün kombinator riyaziyyatın qruplaşmalarından (kombinasiyalarından) istifadə edilir. Ona görə də, kombinator riyaziyyatdan bəzi qruplaşmalara baxaq.

Məlumdur ki, ℓ sayda *a*, *b*, *c*,..... elementlərindən aşağıdakı növ kombinasiyaları qurmaq olar:

1. Permutasion (yerdəyişmə) – elementləri yalnız yerləşmə ardıcıllığına görə fərqlənən kombinasiyalardan ibarətdir. Bu halda yerdəyişmələrin sayı

$$P_\ell = \ell! \qquad (1.2)$$

düsturu ilə təyin edilir.

2. Aranjeman – ℓ sayda elementlərdən hər birində k sayda element olan kombinasiyalar şəklində qurulur. Bu kombinasiyalarda elementlər həm yerləşmə ardıcıllığı, həm də elementlərin özləri ilə fərqlənir. Məsələn, a, b, c elementlərindən hər birində iki element olan aşağıdakı aranjeman kombinasiyalar qurmaq olar:

$$(ab), (ac), (bc), (ba); (ca); (cb).$$

Aranjeman kombinasiyalarının ümumi sayını aşağıdakı düsturla təyin edirlər:

$$A_\ell^k = \frac{\ell!}{(\ell - k)!}. \tag{1.3}$$

3. Kombinizon – ℓ sayda elementlərdən hər birində k sayda fərqli elementləri olan kombinasiyalar şəklində qurulur. Məsələn, a, b, c elementlərindən hər birində iki element olan kombinasiyalar (ab); (bc); (ac) olar.

Ümumi halda kombinizonların sayı

$$C_\ell^k = \frac{\ell\,!}{(\ell - k)!\cdot k\,!} \tag{1.4}$$

düsturu ilə təyin edilir. Xüsusi halda

$$C_\ell^0 = C_\ell^\ell = 1; \quad C_\ell^1 = \ell; \quad C_\ell^{\ell-k} = C_\ell^k$$

qəbul edirlər.

4. Təkrarlı permutasion – ℓ elementdən təşkil edilmiş kombinasiyalarda hər bir ℓ_i elementi k sayda növdən ibarətdir. Bu halda kombinasiyaların ümumi sayı belə tapılır:

$$P(\ell_1,\ell_2,...,\ell_k)=\frac{\ell!}{\ell_1!\ell_2!\cdots\ell_k!}. \qquad (1.5)$$

5. Təkrarlı aranjeman – hər biri k növ olan s sayda elementlər kombinasiyalarından ibarətdir. Bu qruplaşmada kombinasiyaların sayı:

$$\overline{A}_s^k = S^k. \qquad (1.6)$$

Kombinator riyaziyyatdan bir neçə məsələ həll edək.

Məsələ 1.1. Dörd nivelir reperinin yüksəklik qiymətlərini kataloqda yazarkən onların sıra nömrələri ilə bağlı anlaşılmazlıq yaranmışdır. Bu yüksəklik qiymətlərinin kataloqda düzgün ardıcıllıqda yazılacağı ehtimalı tapmalı.

Həlli. Aydındır ki, yüksəkliklərin düzgün yazılışı yalnız M=1 əlverişli halında mümkündür. Bütün başqa hallarda, yəni məntəqələrdən hər hansı birinin sıra nömrəsinin düzgün göstərilmədiyi halda, yüksəkliklərin düzülüşü doğru olmayacaqdır. Digər tərəfdən təsadüflərin qruplaşması permutasion qaydasına uyğun gəldiyindən, (1.2) düsturu əsasında təsadüflərin ümumi sayı üçün alarıq:

$$N = P_4 = 4!.$$

Onda yüksəklik qiymətlərinin kataloqda düzgün ardıcıllıqla yazılma ehtimalı (1.1) düsturuna görə

$$P_{düzgün}=\frac{M}{N}=\frac{1}{4!}=\frac{1}{24}$$

olar.

Məsələ 1.2. Məsələ 1.1-in şərtləri daxilində sonuncu üç yüksəklik qiymətinin yazılma ardıcıllığının düzgün göstəriləcəyi ehtimalı təyin edək.

Həlli. Məsələnin belə qoyuluşunda da əlverişli təsadüflərin sayı $M=1$. Təsadüflərin ümumi qruplaşması sayı isə aranjeman kombinasiyası təşkil edir. Onda (1.3) düsturu ilə tapırıq:

$$N = A_4^3 = \frac{4!}{(4-3)!} = 4!.$$

Əlverişli və ümumi təsadüflər sayının konkret qiymətlərini (1.1) düsturunda yazsaq, qeyd edilən mürəkkəb hadisənin ehtimalı üçün belə bir qiymət alarıq:

$$P_3 = \frac{M}{N} = \frac{1}{4!} = \frac{1}{24}.$$

Məsələ 1.3. Çöl ölçmələri jurnalında müxtəlif üçbucaqlardan beş üfüqi bucağın qiyməti verilmişdir. Eyni üçbucağa aid olan üç sayda bucağın düzgün seçiləcəyi ehtimalı tapmalı.

Həlli. Aydındır ki, üçbucağın bucaqları yalnız bir təsadüf nəticəsində düzgün seçilə bilər, yəni $M=1$. Təsadüflərin ümumi sayı isə kombinizon qruplaşması üzrə hesablanmalıdır. Çünki, bucaqlar istənilən ardıcıllıqla düzülə bilər $(N = C_5^3)$. Onda, tələb olunan hadisənin baş vermə ehtimalı üçün (1.4) düsturunu da nəzərə alsaq, belə bir qiymət taparıq:

$$P_{\text{üçbucaq}} = \frac{M}{N} = \frac{1}{C_5^3} = \frac{1}{\dfrac{5!}{(5-3)!3!}} = \frac{2!3!}{5!} = \frac{1}{10}.$$

Məsələ 1.4. Məsafənin uzunluğu dörd təkrar ölçmədən tapılır. Birinci və üçüncü ölçmələr müsbət, ikinci və dördüncü ölçmələrdə isə mənfi işarəli ölçmə səhvinin baş vermə ehtimalını hesablayın.

Həlli. Bu halda da tələb edilən təsadüfün yalnız bir şəraitdə doğru olması mümkündür, yəni $M=1$. Ümumi təsadüflər sayı (1.5) düsturu ilə təyin edilir. Çünki bu mürəkkəb hadisə zamanı həm müsbət, həm də mənfi işarəli ölçmə səhvləri baş verir və təkrarlanır. Deyilənləri nəzərə almaqla qoyulmuş mürəkkəb hadisənin ehtimal qiyməti

$$P=\frac{1}{\dfrac{4!}{2!2!}}=\frac{2!2!}{4!}=\frac{1}{6} \text{ olar.}$$

Məsələ 1.5. Bazisin uzunluğu üç dəfə təkrar ölçmələrdən tapılır. Bu ölçmələrdən ikisinin müsbət işarəli ölçmə səhvinə malik olacağı hadisənin ehtimalını təyin edin.

Həlli. Şərtə görə müsbət işarəli ölçmə səhvləri təkrarlandığından, ümumi təsadüflər sayı (1.6) düsturu ilə hesablanmalıdır. Öz növbəsində $S=2$, $K=3$ olduğundan,

$$N=\overline{A}_2^3=2^3=8.$$

Bu mürəkkəb hadisə zamanı əlverişli təsadüflərin sayı $M = C_3^2 = 3$. Onda üç ölçmədən ikisində ölçmə səhvinin müsbət işarəli olacağı ehtimalı üçün alarıq:

$$P=\frac{M}{N}=\frac{C_3^2}{\overline{A}_2^3}=\frac{3}{8}.$$

§3. Nisbi tezlik və hadisənin ehtimalı

Hadisənin ehtimalı (1.1) düsturu ilə hesablanarkən qəbul edilir ki, bu elementar hadisələr «təsadüflər sxemi» təşkil edirdır. Lakin hadisələrin «təsadüflər sxemi»nə uyğun gəlmədiyi fərqli hallarda ehtimalı təyin etmək üçün başqa üsullardan istifadə edilir. Bu üsullar sınaq (eksperiment) və hadisənin nisbi tezliyi anlayışları ilə sıx bağlıdır.

Tərif. Hadisənin nisbi tezliyi (Q) verilmiş ölçmə şəraitində həmin hadisənin baş vermə sayının (m) ümumi sınaqlar sayına (n) olan nisbətinə deyilir, yəni

$$Q=\frac{m}{n}. \tag{1.7}$$

(1.7) düsturuna əsasən hadisənin nisbi tezliyi üçün aşağıdakı bərabərsizlik doğru olar:

$$0 \le Q \le 1, \quad (0 \le m \le n).$$

Hadisənin baş verməsinin nisbi tezliyi və ehtimalı bir-birinə çox yaxın anlayışlardır. Onlar arasında əlaqə Bernulli teoremi ilə ifadə olunur.

Bernulli teoremi. Böyük sayda sınaqlar zamanı vahidə yaxın ehtimalla gözləmək olar ki, hadisənin nisbi tezliyi onun ehtimalına yaxınlaşacaqdır, yəni

$$\text{eht.}\lim_{n\to\infty} Q = P. \tag{1.8}$$

Ehtimal limiti ($\text{eht.}\lim\limits_{n\to\infty} Q = P$) riyazi limitdən fərqlənir və kəmiyyətin son həddə yaxınlaşma meylliyini göstərir. Bəzi ədəbiyyatlarda nisbi tezliyi *hadisənin statistik ehtimalı* adlandırırlar.

Məsələ 1.6. Bucaq ölçmələri zamanı məlum olub ki, müsbət işarəli ölçmə səhvlərinin nisbi tezliyi Q=0,40-dır. Əgər mənfi işarəli ölçmə səhvlərinin sayı 15-ə bərabərdirsə, ümumi ölçmələr sayını təyin edin.

Həlli. Müsbət və mənfi işarəli ölçmə səhvləri tam qrup təşkil etdiyindən onların nisbi tezliklər cəmi üçün yaza bilərik:

$$Q_{müsbət} + Q_{mənfi} = 1 .$$

Eyni zamanda nəzərə alsaq ki, $Q_{mənfi} = \dfrac{m_{mənfi}}{n_{ümumi}}$, onda

$$Q_{müsbət} + \frac{m_{mənfi}}{n_{ümumi}} = 1$$

olar. Buradan

$$n_{ümumi} = \frac{m_{mənfi}}{1 - Q_{ümumi}} = \frac{15}{1 - 0,40} = 25$$

taparıq.

§4. Hadisələr cəmi. Üst-üstə düşməyən hadisələr cəminin ehtimalı

Baş vermə şəraitindən asılı olaraq mürəkkəb hadisələri elementar hadisələrin cəmi və yaxud hasili şəklində ifadə etmək olar.

Tərif. İki və ya bir neçə elementar A_i (i=1, 2, ..., n) hadisələrinin cəmi elə bir mürəkkəb B hadisəsinə deyilir ki, istənilən sınaq zamanı A_i hadisələrindən heç olmazsa biri baş vermiş olsun.

Riyazi dildə hadisələrin cəmi

$$B=(A_1,\ \text{və ya}\ A_2,\ \text{və ya}\ A_3,\dots,\ \text{və ya}\ A_n) \tag{1.9}$$

və yaxud

$$B=A_1+A_2+\dots+A_n=\sum_{i=1}^{n} A_i \tag{1.10}$$

şəklində yazılır. Əgər sadə hadisələrdən hər birinin ehtimalı məlum olarsa, onda onların cəmi olan mürəkkəb hadisənin ehtimalını hesablamaq çətin deyildir. Bu aşağıdakı teoremlə təyin olunur.

Teorem. İki və ya bir neçə üst-üstə düşməyən elementar hadisələr cəminin ehtimalı bu hadisələrin ehtimalları cəminə bərabərdir:

$$P(B)=P(A_1)+P(A_2)+\dots+P(A_n)=\sum_{i=1}^{n} \mathrm{P}(\mathrm{A}_i)\ . \tag{1.11}$$

Nəticə 1. Tam qrup təşkil edən hadisələrin ehtimalları cəmi vahidə bərabərdir

$$\sum_{i=1}^{n} \mathrm{P}(\mathrm{A}_i)=P(A_1+A_2+\dots+A_n)=P(U)=1. \tag{1.12}$$

Nəticə 2. Bir-biri ilə qarşılıqlı əks olan iki hadisə tam qrup təşkil etdiyindən, onların ehtimalları cəmi vahidə bərabərdir:

$$P(A)+P(\overline{A})=1\ \text{və}\ P(\overline{A})=1-P(A). \tag{1.13}$$

Məsələ 1.7. Fərz edək ki, taxeometriya planalması zamanı 100 piket nöqtəsindən 10-nun yüksəkliyi $\frac{1}{2}h$, 60-nın $\frac{1}{4}h$, 30-un isə $\frac{1}{3}h$ dəqiqliyi ilə tapılır. Planşetdən götürülmüş hər hansı bir nöqtənin yüksəklik qiymətinin $\frac{1}{5}h$ və ya $\frac{1}{4}h$ dəqiqliyinə bərabər olacağı ehtimalı təyin edin (burada h – kəsmə yüksəkliyidir).

Həlli. Məsələnin şərtinə əsasən birinci hadisənin, yəni nöqtənin yüksəkliyinin $\frac{1}{5}h$ dəqiqliyində olacağı ehtimalı $P(A_1)=\frac{10}{100}$ olar. Eynilə ikinci hadisə ($\frac{1}{4}h$ dəqiqliyi) üçün ehtimal qiyməti $P(A_2)=\frac{60}{100}$ taparıq. Bütövlükdə ehtimalı təyin edilən hadisə mürəkkəb hadisə olub elementar A_1 və A_2 hadisələrinin cəmi şəklində göstərilə bilər: $B=A_1+A_2$. Ona görə də mürəkkəb B hadisəsinin ehtimalı (1.11) düsturu ilə hesablanmalıdır:

$$P(B)=P(A_1)+P(A_2)=\frac{10}{100}+\frac{60}{100}=0,7.$$

§5. Hadisələrin hasili və hasilin ehtimalı

Tərif. İki və ya bir neçə üst-üstə düşməyən elementar $A_i(i=1, 2, \ldots, n)$ hadisələrinin hasili elə bir mürəkkəb C hadisəsidir ki, bu zaman bütün A_i hadisələri birlikdə (eyni vaxtda) baş vermiş olsun.

Hadisələrin hasili şərti olaraq belə yazılır:

$$C=A_1,\text{ və } A_2,\text{ və } A_3, \ldots,\text{ və } A_n \qquad (1.14)$$

və yaxud

$$C=A_1 \cdot A_2 \cdots A_n=\prod_{i=1}^{n} A_i\,, \qquad (1.15)$$

burada П – hasil işarəsidir.

Teorem. Bir-birindən asılı olmayan elementar hadisələr hasilinin ehtimalı həmin hadisələrin ehtimalları hasilinə bərabərdir.

Əgər $C=\prod_{i=1}^{n} A_i$, onda

$$P(C)=P(A_1)\cdot P(A_2)\cdots P(A_n)=\prod_{i=1}^{n} P(A_i). \qquad (1.16)$$

(1.16) düsturu ilə hesablanmış $P(A_i)$ ehtimalları, eləcə də onların hasil ehtimalı $P(C)$ *şərtsiz ehtimal* adlanır. Bir-birindən asılı olan hadisələrin ehtimalı isə *şərtli ehtimal* adlanır. Məsələn, $P(A_2/A_1)$ yazılışı A_1 hadisəsinin artıq baş verdiyini nəzərə almaqla A_2 hadisəsi üçün hesablanmış şərti ehtimalı ifadə edir. $P(A_i/A_1, A_2, ..., A_{i-1})$ – yazılışında isə $A_1, A_2, ..., A_{i-1}$ hadisələrinin baş verdiyi göstərilir və A_i üçün şərti ehtimal hesablanır.

Teorem. İki və ya bir neçə asılı hadisələr hasilinin ehtimalı bu hadisələrdən hər hansı birinin şərtsiz ehtimalının digər hadisələrin şərtli ehtimallarına olan hasili şəklində təyin edilir, yəni:

$$P(C)=P(A_1)\cdot P(A_2/A_1)\cdot\ldots\cdot P(A_n/A_1, A_2, ..., A_{n-1}). \qquad (1.17)$$

Məsələ 1.8. Ehtimalların vurulması düsturundan istifadə edərək məsələ 1.1-i həll edin.

Həlli. Məsələ 1.1-in şərtləri daxilində bütün dörd yüksəklik qiymətinin kataloqda düzgün yazılacağı hadisəsi mürəkkəb hadisədir və onun ehtimalını (1.17) düsturu ilə hesablamaq olar. Çünki bütün yüksəkliklərin kataloqda öz yerində düzgün yazılması eyni zaman anında baş verməlidir. Bu isə o deməkdir ki, tələb edilən mürəkkəb hadisə elementar hadisələrin hasili şəklində ifadə edilməlidir. Onda hasilin ehtimalı üçün

$$P(H)=P(H_1)\cdot P(H_2)\cdot P(H_3)\cdot P(H_4)$$

yaza bilərik.

Eyni zamanda nəzərə almaq lazımdır ki, bu elementar hadisələr bir-birindən asılı hadisələrdir. Onda hər bir yüksəkliyin kataloqda öz yerində yazılacağı ehtimalları üçün aşağıdakı qiymətləri alarıq:

$$P(H_1)=\frac{1}{4};\qquad P(H_2)=\frac{1}{3};\qquad P(H_3)=\frac{1}{2};\qquad P(H_4)=1.$$

Buradan isə hasilin ehtimalı üçün taparıq

$$P(H)=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot 1=\frac{1}{24}.$$

Məsələ 1.9. Müsbət işarəli ölçmə səhvinin məhz dördüncü təkrar məsafə ölçməsində baş verəcəyi ehtimalı tapın.

Həlli. Məsələnin şərtində verilən elementar hadisələr (müsbət və mənfi işarəli ölçmə səhvləri) bir-birindən asılı olmadığından (1.16) düsturuna əsasən yaza bilərik

$$P(C)=P(\overline{A}_1)\cdot P(\overline{A}_2)\cdot P(\overline{A}_3)\cdot P(A_4).$$

Burada: $\overline{A}_1$, $\overline{A}_2$, $\overline{A}_3$ hərfləri ilə birinci, ikinci və üçüncü ölçmələrdə mənfi işarəli səhvlər, A_4-lə isə dördüncü ölçmədə müsbət işarəli səhvin baş verəcəyi hadisələr işarə edilmişdir. Eyni zamanda bu elementar hadisələrin vahid ölçmədən baş vermə ehtimalı $P(A_i)=P(\overline{A}_i)=\frac{1}{2}$ olduğundan, hasil hadisənin ehtimalı üçün yaza bilərik:

$$P(C)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{16}.$$

§6. Üst-üstə düşən hadisələr ehtimalının tapılması

Teorem. Üst-üstə düşən hadisələr cəminin ehtimalı vahid və həmin hadisələrə əks olan hadisələrin ehtimallar hasili fərqinə bərabərdir, yəni

$$P(B)=1-\prod_{i=1}^{n} P(\overline{A}_i). \qquad (1.18)$$

Burada B hadisəsi sözlə belə təyin edilir:

$B=A_1$ və ya A_2, ..., və ya A_n və ya, bütün A_n

və yaxud

$B=$ heç olmazsa bir A_i.

(1.18) ifadəsinin doğruluğunu isbat etmək üçün B hadisəsinə əks olan $\overline{B}$ hadisəsinə baxaq. Aydındar ki, əks $\overline{B}$ hadisəsi belə yazılar: heç bir A_i; yaxud $\overline{B}=\overline{A}_1$ və $\overline{A}_2$,... və $\overline{A}_n$. Bu isə o deməkdir ki, bütün əks $\overline{A}_i$ hadisələrinin hasili tapılmalıdır. Onda ehtimalların vurulması teoreminə görə $P(\overline{B})=P(\overline{A}_1\cdot\overline{A}_2\cdot\ldots\cdot\overline{A}_n)$. Eyni zamanda B düz və $\overline{B}$ əks hadisələr olub tam qrup təşkil etdiyindən, onların ehtimalları üçün yaza bilərik: $P(B)+P(\overline{B})=1$. Buradan isə (1.18) düsturu alınır.

Əgər bütün hadisələr bir-birindən asılı olmayıb eyni $P(A_i)$ qiymətinə malikdirsə, onda (1.18) düsturu aşağıdakı şəklə düşər

$$P(B)=1-\{P(\overline{A})\}^n. \qquad (1.19)$$

Məsələ 1.10. İki geodeziya ölçməsindən heç olmazsa birinin müsbət işarəli ölçmə səhvinə malik olacağı ehtimalı təyin edin.

Həlli. Birinci ölçməni A_1 ilə, ikincini isə A_2 ilə işarə edək. Onda məsələnin şərtində qoyulmuş mürəkkəb B hadisəsini belə ifadə edə bilərik:

$$B = A_1^{(-)} \cdot A_2^{(+)} + A_1^{(+)} \cdot A_2^{(-)} + A_1^{(+)} \cdot A_2^{(+)} .$$

Eyni zamanda $P(A_i^{(-)})=P(A_i^{(+)})=\frac{1}{2}$ olduğundan, mürəkkəb B hadisəsinin ehtimalı üçün (1.11) və (1.16) düsturlarına əsasən belə bir qiymət alarıq:

$$P(B) = P(A_1^-) \cdot P(A_2^+) + P(A_1^+) \cdot P(A_2^-) + P(A_1^+) \cdot P(A_2^+) =$$
$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = 0{,}75.$$

Bu məsələ (1.19) düsturunun köməyi ilə daha asan həll edilir:

$$P(B) = 1 - \{P(\overline{A})\}^2 = 1 - \left\{\frac{1}{2}\right\}^2 = \frac{3}{4} = 0{,}75 .$$

§7. Dəfələrlə təkrarlanan sınaqlar. Bernulli düsturu

Geodeziya işləri yerinə yetirilərkən, demək olar ki, həmişə kəmiyyətlərin (bucaq, məsafə) qiyməti təkrar ölçmələrlə təyin edilir. Məsələn, alətlərin texniki yoxlanması, yeni ölçmə metodikalarının istehsalatda tətbiqi və sairə hallarda sınaqların dəfələrlə təkrarlanması tələb olunur. Bu zaman tədqiqatçını sınağın baş verə biləcək bütün mümkün nəticələri və onlara uyğun gələn ehtimal qiymətləri maraqlandırır.

Fərz edək ki, bir-birindən asılı olmayan n sayda sınaq yerinə yetirilir və A hadisəsinin hər bir sınaq zamanı baş vermə ehtimalı sabit qalaraq P-yə bərabərdir. Qeyd edilən şərtlər daxilində A hadisəsinin sınaqlar zamanı baş vermə ardıcıllığından asılı olmayaraq k dəfə təkrarlanacağı ehtimalı tapaq. Qoyulmuş məsələnin məzmunu Bernulli düsturundan istifadə şərtlərinə uyğun gəlir. Ona görə də bu məqsədlə Bernulli düsturundan istifadə edək:

$$P_n^k = C_n^k \cdot p^k \cdot q^{n-k}. \qquad (1.20)$$

Burada: P_n^k – n sınaqdan k dəfə baş verəcək A hadisəsinin ehtimalı; C_n^k – kombinizion (n elementdən hər birində k element olmaqla); p – bir sınaq zamanı A hadisəsinin baş vermə ehtimalı, q – isə həmin hadisənin baş verməməsi ehtimalıdır.

$P_n(k)$ ehtimallar çoxluğu *ehtimalların binominal paylanması* adlanır. Binomial paylanmada A hadisəsinin 0, və ya 1, ..., və ya n dəfə baş verməsi tam qrup təşkil edən mürəkkəb hadisədir. Ona görə də (1.11) düsturuna əsasən yaza bilərik:

$$\sum_{k=0}^{n} P_n(k) = 1 \qquad (1.21)$$

Əgər tədqiqatçını A hadisəsinin n sayda sınaqdan ℓ dəfədən az olmayaraq baş verməsi ehtimalı maraqlandırırsa, onda aşağıdakı düsturdan istifadə edilə bilər:

$$P_n(k \geq \ell) = \sum_{k=\ell}^{n} P_n(k). \qquad (1.22)$$

A hadisəsinin ℓ dəfədən çox olmayan sayda baş verməsi ehtimalı isə

$$P_n(k \le \ell) = \sum_{k=0}^{\ell} P_n(k) \tag{1.23}$$

düsturu ilə təyin edilir.

Bəzi tədqiqatlar zamanı bir-birindən asılı olmayan n hadisədən hansısa biri xüsusi əhəmiyyət daşıyır və onun baş vermə ehtimalı təcrübi maraq daşıyır. Bu hadisənin ehtimalını aşağıdakı düsturla təyin etmək olar

$$P(A_n) = 1 - q_1 q_2 ... q_n, \tag{1.24}$$

burada: q_1, q_2, ..., q_{n-1} müvafiq A_1, A_2, ..., A_{n-1} hadisələrinin baş verməməsi, başqa sözlə desək, bu hadisələrə əks olanların baş verməsi ehtimallarıdır.

Məsələ 1.11. İki məntəqə arasında məsafənin uzunluğu üç dəfə ölçülmüşdür. Bu zaman müsbət işarəli ölçmə səhvinin: 1) hər üç halda; 2) iki dəfədən az olmamaqla baş verəcəyi ehtimalları təyin edin.

Həlli. Nəzərə alsaq ki, müsbət və mənfi işarəli ölçmə səhvlərinin ehtimalı $p = q = 1/2$, onda Bernulli düsturuna əsasən üç müsbət işarəli ölçmə səhvinin baş verəcəyi mürəkkəb hadisənin ehtimalı üçün yaza bilərik:

$$P_3(3) = C_3^3 p^3 q^0 = 1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^0 = \frac{1}{8} = 0{,}125.$$

Məsələdə verilmiş ikinci hadisənin ehtimalını hesablamaq üçün ilk növbədə iki müsbət işarəli səhvin baş vermə ehtimalını təyin etmək lazımdır:

$$P_3(2) = C_3^2 p^2 q^1 = \frac{3!}{2!1!} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^1 = \frac{3}{8} = 0{,}375.$$

Onda müsbət işarəli ölçmə səhvinin sayının ikidən az olmayacağı mürəkkəb hadisə üçün (1.22) düsturuna əsasən

$$P_3(k \geq 2) = P_3(2) + P_3(3) = 0{,}125 + 0{,}375 = 0{,}50$$

taparıq.

§8. Təkrarlanan sınaqlarda hadisənin ehtimal baş vermə sayı

Elmi-təcrübi tədqiqatlar zamanı eksperiment və nəzəri hesablamalar yerinə yetirilərkən elə hallar olur ki, tədqiqatçını hansısa hadisənin baş vermə ehtimalından çox onun sınaqlarla ehtimal olunan baş vermə sayı maraqlandırır.

Dəfələrlə təkrarlanan sınaqlarda hadisənin *ehtimal baş vermə sayı* (k_0) verilmiş sınaq şəraiti üçün ən böyük ehtimal qiymətinə malik ədədə deyilir. Riyazi dildə bu şərt belə yazılır:

$$\begin{cases} P_n(k_0) \geq P_n(k_0 + 1); \\ P_n(k_0) \geq P_n(k_0 - 1). \end{cases} \qquad (1.25)$$

Ehtimal nəzəriyyəsində göstərilir ki, (1.25) şərtinin doğruluğu üçün aşağıdakı bərabərsizlik ödənməlidir

$$np - q \leq k_0 \leq np + q\,. \qquad (1.26)$$

Sınaqların böyük sayda, ehtimalın isə sıfra çox yaxın olmayan qiymətlərində təcrübi məqsədlər üçün ehtimal baş vermə sayının təqribi qiymətlərini (1.26) düsturu əvəzində

$$k_0 \approx np \qquad (1.27)$$

ifadəsi ilə hesablamaq olar.

Məsələ 1.12. Fərz edək ki, geodeziyadan çöl təcrübəsi zamanı tələbələr hesabat götürərkən təcrübəsizllik səbəbindən $p=\frac{1}{5}$ ehtimala malik kobud səhvə yol verirlər ($q=\frac{4}{5}$). Onda neçə hesabatdan sonra 10 sayda kobud səhv baş verəcəkdir?

Həlli. Məsələnin həlli (1.26) düsturu əsasında aparılır və verilənlərə görə aşağıdakı bərabərsizlikləri yaza bilərik:

$$\frac{1}{5}n-\frac{4}{5}\leq 10, \qquad \frac{1}{5}n+\frac{4}{5}\geq 10.$$

Buradan

$$49\leq n\leq 54$$

alarıq.

§9. Lokal Laplas teoremi

Qeyd etmək lazımdır ki, binominal paylanma qanunundan istifadə etməklə məsələlərin həlli sınaqlar sayının böyük olmadığı hallarda mümkün və əlverişlidir. Lakin sınaqların sayı artdıqca binominal paylanma qanunundan, eləcə də Bernulli düsturundan istifadə çətinləşir, çünki bu böyük həcmli hesablamalara gətirib çıxarır. Digər tərəfdən sınaqların sayının artması ilə Bernulli düsturunda bəzi toplananların qiyməti nəzərə alınmaz dərəcəyədək kiçilir. Ona görə də hesablamaları asanlaşdırmaq və həcmini kiçiltmək məqsədi ilə cüzi təqribiliyə yol verilsə də hadisənin ehtimalını normal paylanma qanunundan istifadə etməklə təyin etmək məqsədəuyğun olur. Normal paylanma qanununun bu tətbiqdə istifadəsi Lokal Laplas teoremi ilə əsaslandırılır.

Teorem. Əgər A hadisəsinin vahid sınaq zamanı baş vermə ehtimalı 0 və 1 qiymətindən əhəmiyyətli fərqlənirsə və bütün təkrar sınaqlarda sabit p qiymətinə bərabərdirsə, onda A hadisəsinin n sınaqdan k dəfə baş vermə ehtimalı $P_n(k)$ təqribi olaraq aşağıdakı funksiya əsasında hesablana bilər:

$$P_n(k) \approx y_x = \frac{1}{\sqrt{npq}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}, \qquad (1.28)$$

burada $x = \dfrac{k - np}{\sqrt{npq}}$.

Qeyd edək ki, (1.28) ifadəsində n artdıqca P_n^k-nın təyin edilmə dəqiqliyi artmış olur. y_x funksiyasının $\varphi(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}$ ifadəsinə əsasən xüsusi qiymətlər cədvəlləri tərtib edilmişdir (Əlavə 1). $\varphi(x)$ funksiyası *paylanma sıxlığı funksiyası* adlanır və cüt funksiya olduğundan x arqumentinin müsbət, eləcə də, mənfi qiymətlərində həmin cədvəllərdən istifadə etmək olar.

A hadisəsinin n sınaqdan k dəfə baş vermə ehtimalının təqribi qiymətini paylanma funksiyası əsasında aşağıdakı ifadədən taparıq:

$$P_n(k) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}} \cdot \varphi(x). \qquad (1.29)$$

Məsələ 1.13. İki məntəqə arasında məsafənin uzunluğu on dəfə təkrarən ölçülmüşdür. Onlardan dördündə ölçmə səhvinin müsbət işarəli olacağı ehtimalı tapın.

Həlli. Əvvəlcə x arqumentinin qiymətini hesablayaq. Aydındır ki, bir sınaqda ölçmə səhvinin müsbət işarəli olması və yaxud olmaması hadisələri bərabər olduğundan onların ehtimalları $p = q = \frac{1}{2}$ olar. Bunları nəzərə alsaq,

$$x = \frac{k - np}{\sqrt{npq}} = (4 - 10 \cdot \frac{1}{2}) \Big/ \sqrt{10 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}} = -0{,}632.$$

taparıq. Alınmış $x = -0{,}632$ üçün əlavə 1-dəki cədvəldən müvafiq $\varphi(x) = 0{,}3261$ qiymətini seçirik. Onda (1.29) düsturuna əsasən

$$P_{10}(4) = \frac{1}{\sqrt{10 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}5}} \cdot 0{,}3261 = 0{,}207$$

olar. Bu məsələnin Bernulli düsturu ilə həllindən də eyni nəticə alınır

$$P_{10}(4) = 0{,}205.$$

§10. Ehtimallar inteqralı

Əvvəlki bölmədən məlumdur ki, Bernulli düsturunun köməyi ilə hər hansı bir hadisənin $[a, b]$ intervalında baş verəcəyi P_a^b ehtimalını təyin etmək olar. Lakin qeyd edildiyi kimi, bu zaman müəyyən təqribiliyə yol verilsə də, hesablamaları asanlaşdırmaq məqsədi ilə normal paylanma qanunundan istifadə daha məqsədəuyğundur. Başqa sözlə desək, aralığa düşən hər bir $P_n(k)$ ehtimalını ayrıca hesablamadan onların $\sum_{k=a}^{b} P_n^k$ cəmini aşağıdakı müəyyən inteqral şəklində təyin etmək mümkündür:

$$P_a^b = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{t_a}^{t_b} e^{-\frac{1}{2}t^2} dt, \qquad (1.30)$$

burada: a və b hadisənin təkrarlanma sayının aşağı və yuxarı hədləri; t_a və t_b isə $t = \frac{k - np}{\sqrt{npq}}$ funksiyasında k-nın yerində a və b qiymətlərini yazmaqla təyin edilir.

Əgər P_a^b ehtimalının hesablanması Y oxuna nəzərən simmetrik $\pm\xi_0$ intervalında həyata keçirilirsə və nəzərə alsaq ki, inteqralaltı funksiya cüt funksiyadır, onda (1.30) düsturu aşağıdakı şəklə düşər

$$P_{-\xi_0}^{+\xi_0} = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^t e^{-\frac{1}{2}t^2} dt = \Phi(t), \qquad (1.31)$$

burada:

$$t = h|\xi_0|; \quad h = \sqrt{\frac{n}{pq}}; \quad -\xi_0 = \frac{k_0 - a}{n} - p; \quad +\xi = \frac{k_0 + a}{n} - p;$$

$\pm a$ isə k ədədinin $k_0 = np$ qiymətindən olan meylliyidir.

$\Phi(t)$ funksiyası *ehtimallar inteqralı* adlanır və onun qiymətlərinin təyini üçün xüsusi cədvəllər tərtib edilmişdir (Əlavə 3).

Məsələ 1.14. Geodeziya şəbəkəsində 64 sayda ölçmə yerinə yetirilmişdir. Müsbət işarəli ölçmə səhvlərinə malik ölçmələr sayının $16 \leq k \leq 40$ aralığında yerləşmə ehtimalını tapın.

Həlli. Məsələni ehtimallar inteqralından istifadə etməklə həll edək. Əvvəlcə bu inteqralın hədd qiymətlərini hesablayaq:

$$p = q = \frac{1}{2};$$

$$t_a = \frac{k - np}{\sqrt{npq}} = \frac{16 - 64 \cdot 0{,}5}{\sqrt{64 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}5}} = -4;$$

$$t_b = \frac{b - np}{\sqrt{npq}} = \frac{40 - 64 \cdot 0{,}5}{\sqrt{64 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}5}} = 2.$$

Əlavə 3-də verilmiş cədvəldən $t_a = -4$ və $t_b = 2$ qiymətlərinə uyğun gələn $F(t_a) = -0{,}4999$ və $F(t_b) = -0{,}4772$ qiymətlərini seçirik. Sonra bu qiymətləri (1.30) düsturunda yerinə qoymaqla

$$P_{16}^{40} = F(2) - F(-4) = 0{,}4772 - (-0{,}4999) = 0{,}977$$

tapırıq.

F ə s i l 2
TƏSADÜFİ KƏMİYYƏTLƏRİN PAYLANMA QANUNLARI

§11. Paylanma qanunlarının ifadə olunma formaları

Birinci fəsildə təsadüfi hadisələrlə tanış olduq. Təsadüfi kəmiyyətlər təsadüfi hadisələrdən fərqlənsə də, onlar arasında qarşılıqlı əlaqə yaratmaq çətin deyildir. Məsələn, A hadisəsinin sınağı zamanı iki nəticə alına bilər: hadisə baş verər və yaxud baş verməz. Onda A hadisəsinin baş verdiyi halda onun qarşılıqlı əvəzi kimi X təsadüfi kəmiyyətinin vahid qiymətini, əks halda, yəni hadisə baş vermədiyi halda isə onun sıfır qiymətini yazmaq olar.

Təsadüfi kəmiyyətin bütün mümkün qiymətlər çoxluğu tam qrup təşkil edir. Ümumi halda isə *təsadüfi kəmiyyət* sınaqdan əvvəl ala biləcəyi qiyməti həm işarə, həm də modulca məlum olmayan dəyişən kəmiyyətə deyilir. Məsələn; n sayda geodezik ölçmənin müsbət işarəli səhvlərinin sayı; başqa bir misal kimi hər hansı bucağın ölçülmə səhvini göstərmək olar.

Təsadüfi kəmiyyətlər iki növ olur: *kəsilən* (*diskret*) və *kəsilməyən* (*fasiləsiz*). Ala biləcəyi mümkün qiymətləri əvvəlcədən göstərilə bilən təsadüfi kəmiyyətə kəsilən (diskret) təsadüfi kəmiyyət deyilir (məsələn, yuxarıda verilmiş birinci misal). Kəsilməyən təsadüfi kəmiyyət isə ala biləcəyi qiymətləri əvvəlcədən konkret olaraq göstərilə bilməyən, lakin mümkün qiymətləri müəyyən bir aralıq (interval) təşkil edən təsadüfi kəmiyyətə deyilir (ikinci misal).

Digər kəmiyyətlərdən fərqli olaraq təsadüfi kəmiyyətlərin hər bir mümkün qiymətinə onun baş vermə ehtimalı göstərilir. Təsadüfi kəmiyyətin mümkün qiymətləri ilə onların uyğun ehtimalları arasında əlaqəni ifadə edən münasibət təsadüfi kəmiyyətin paylanma qanunu adlanır. Təsadüfi kəmiyyətin paylanma qanunları üç formada ifadə edilə bilər: **1)** ***ədədi*****; 2)** ***qrafiki*****; 3)** ***analitik forma*****.** Mahiyyət etibarı ilə bunlar aşağıdakılardan ibarətdir.

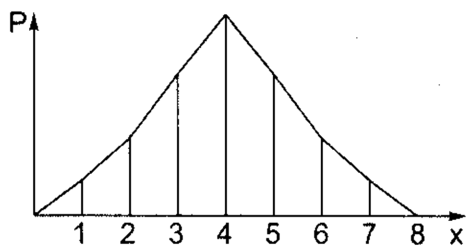
1. Paylanmanın ədədi forması sıra (cədvəl) şəklində göstərilir. Məsələn: $x_1, x_2,...,x_n$ qiymətləri alan X təsadüfi kəmiyyətinin paylanma sırasını aşağıdakı cədvəl şəklində yazmaq olar.

x_i	$x_1, x_2, ... x_n$
p_i	$p_1\ p_2, ... p_n$

(2.1)

Bu cədvəldə X-ın hər bir qiymətinə uyğun gələn p_i ehtimalı göstərilmişdir.

2. Təsadüfi kəmiyyətin qrafiki formada paylanma qanunu paylanma çoxbucaqlısı şəklində ifadə olunur. Bu məqsədlə düzbucaqlı koordinat sistemində cədvəl 2.1-də verilmiş x_i, p_i qiymətlərinə əsasən nöqtələr qurulur və öz aralarında düz xətt parçaları ilə birləşdirildikdən sonra paylanma çoxbucaqlısı alınır (şəkil 2.1).



Şəkil 2.1. Paylanma çoxbucaqlısı

Kəsilən təsadüfi kəmiyyətlərin paylanma qanunları çox hallarda ədədi və qrafiki formalarda ifadə edilir.

3. Kəsilməyən təsadüfi kəmiyyətlərin paylanma qanunlarını paylanma cədvəli və yaxud paylanma çoxbucaqlısı şəklində ifadə etmək mümkün deyil. Belə ki, kəsilməyən təsadüfi

kəmiyyətlər sonsuz qiymətlər çoxluğuna malikdir. Odur ki, kəsilməyyən təsadüfi kəmiyyətlərin paylanma qanunları analitik formada, yəni paylanma funksiyası şəklində göstərilir. Prinsip etibarı ilə kəsilən kəmiyyətlər üçün də paylanma funksiyası yazmaq mümkündür.

Beləliklə, X təsadüfi kəmiyyətinin verilmiş x qiymətindən kiçik qiymətlər alacağı ehtimalı *paylanma funksiyası* adlanır. Başqa sözlə desək, paylanma funksiyası ilə kəmiyyətin ala biləcəyi qiymətin ehtimalı təyin edilir. Riyazi dildə bu belə yazılır:

$$F(x) = p(X < x). \tag{2.2}$$

$F(x)$ – həm də paylanmanın inteqral funksiyası adlanır. Bu funksiya aşağıdakı xassələrə malikdir.

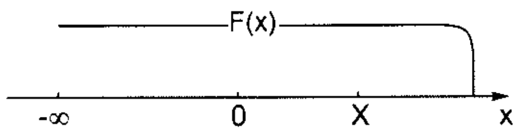
1) Funksiyanın qiymətlər çoxluğu [0; 1] intervalında yerləşir.

2) Azalmayan funksiyadır (əgər $x_2 \geq x_1$ olarsa, $F(x_1) \geq F(x_2)$);

3) $F(-\infty) = 0$.

4) $F(+\infty) = 1$.

Şəkil 2.2-də paylanma funksiyasının həndəsi interpretasiyası verilir.



Şəkil 2.2. Paylanma funksiyasının həndəsi interpretasiyası

Paylanma funksiyasının köməyi ilə təsadüfi kəmiyyətin verilmiş (a, b) intervalında yerləşmə ehtimalını hesablamaq mümkündür

$$P(a \leq x < b) = F(b) - F(a). \tag{2.3}$$

§12. Paylanma sıxlığı

Bəzi hallarda kəsilməyən təsadüfi kəmiyyətin paylanma qanununu paylanma sıxlığı ilə ifadə etmək daha məqsədəuyğundur. Paylanma sıxlığı paylanma funksiyasının birinci dərəcəli törəməsindən ibarətdir, yəni

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{F(x+\Delta x)-F(x)}{\Delta x} = F'(x) = \varphi(x). \qquad (2.4)$$

Ədəbiyyatlarda $\varphi(x)$ funksiyası *diferensial paylanma qanunu* da adlanır. Xatırladaq ki, $F(x)$ inteqral paylanma qanunudur.

Paylanma sıxlığı funksiyası aşağıdakı xassələrə malikdir:

$$1)\ \varphi(x) \geq 0;$$

$$2)\ \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)dx = 1. \qquad (2.5)$$

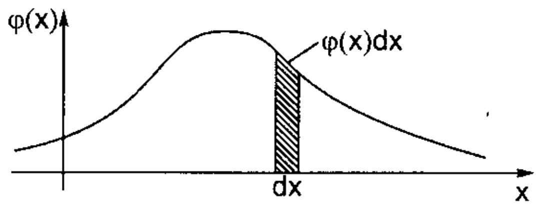
Əgər X təsadüfi kəmiyyətinin bütün mümkün qiymətlər çoxluğu (a, b) intervalında yerləşirsə, onda paylanma sıxlığının ikinci xassəsinə görə ((2.5) düsturu) $\int_a^b \varphi(x)dx = 1$ olar. Ümumi halda isə paylanma sıxlığından istifadə etməklə kəsilməyən təsadüfi kəmiyyətin (a, b) intervalında yerləşmə ehtimalı aşağıdakı düsturla təyin edilir

$$P_a^b = \int_a^b \varphi(x)dx. \qquad (2.6)$$

Təsadüfi kəmiyyətin paylanma qanunauyğunluqlarını ifadə edən paylanma funksiyası $F(x)$ və paylanma sıxlığı $\varphi(x)$ arasında əlaqə belə yazılır:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} \varphi(x)dx. \tag{2.7}$$

Şəkil 2.3-də paylanma sıxlığının həndəsi interpretasiyası verilir.



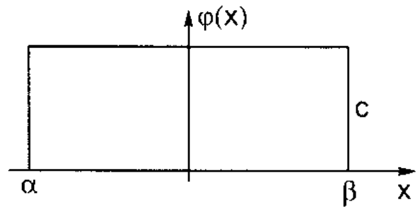
Şəkil 2.3. Paylanma sıxlığının həndəsi interpretasiyası

Misal 2.1. Fərz edək ki, təsadüfi X geodezik kəmiyyəti $\alpha < x < \beta$ intervalında sıxlığı $\varphi(X) = C$ olan paylanma qanununa tabedir (bərabər paylanma qanunu). Tələb olunur: a) C qiymətini α və β ilə ifadə edin; b) x kəmiyyətinin $\alpha_1 < x < \beta_1$ intervalına düşmə ehtimalını tapın; c) $F(x)$ funksiyasını təyin edin.

Həlli. Riyazi analizdən məlumdur ki, $\varphi(X) = C$ funksiyasının qrafiki X oxundan C məsafədə yuxarıda və ona paralel keçən düz xətdən ibarətdir (şəkil 2.4). Digər tərəfdən paylanma sıxlığının ikinci xassəsinə görə düzbucaqlının qrafikdə ayırdığı sahə vahidə bərabərdir, yəni $(\beta - \alpha) \cdot C = 1$. Buradan,

$$C = \frac{1}{\beta - \alpha}, \text{ eləcə də } \varphi(x) = \frac{1}{\beta - \alpha}$$

alarıq.



Şəkil 2.4. Bərabər paylanma qanunu

X kəmiyyətinin (α_1, β_1) intervalına düşmə ehtimalını hesablamaq üçün isə (2.6) düsturundan istifadə edək:

$$P_{\alpha_1}^{\beta_1} = \int_{\alpha_1}^{\beta_1} \varphi(x)dx = \int_{\alpha_1}^{\beta_1} C \cdot dx = C\int_{\alpha_1}^{\beta_1} dx = \frac{1}{\beta - \alpha}(\beta_1 - \alpha_1).$$

Nəhayət, (2.7) düsturuna əsasən paylanma funksiyasını təyin edirik:

$$F(x) = \int_{\alpha}^{x} \varphi(x)dx = \frac{X - \alpha}{\beta - \alpha}.$$

§13. Təsadüfi kəmiyyətin paylanmasının əsas parametrləri

Əvvəlki bölmələrdə göstərildiyi kimi, təsadüfi kəmiyyətin analitik paylanma qanunu paylanma funksiyası və ya paylanma sıxlığı ilə ifadə edilir. Bununla belə, bir çox hallarda təsadüfi kəmiyyətin öyrənilməsi üçün bütövlükdə onun paylanma qanununu deyil, yalnız bu paylanmanı səciyyələndirən əsas ədədi parametrləri bilmək kifayət edir.

Təsadüfi kəmiyyətin paylanmasının əsas ədədi parametrləri: *riyazi gözləmə, dispersiya, başlanğıc* və *mərkəzi momentlərdən* ibarətdir.

I. Riyazi gözləmə təsadüfi kəmiyyətin qiymətlər çoxluğunun paylanma mərkəzini göstərir. X təsadüfi kəmiyyətinin riyazi gözləməsi $M[X]$ şəklində yazılır. Kəsilən (diskret) kəmiyyətlər üçün riyazi gözləmə

$$M[X]=\sum_{i=1}^{n} x_i p_i\,, \tag{2.8}$$

kəsilməyən (fasiləsiz) təsadüfi kəmiyyətlər üçün isə

$$M[X]=\int_{-\infty}^{\infty} x\varphi(x)dx \tag{2.9}$$

düsturları ilə hesablanır.

Ehtimal nəzəriyyəsində göstərilir ki, sınaqların (ölçmələrin) sayı (n) sonsuzluğa doğru artarsa, onda $\bar{x}=\sum_{i=1}^{n} x_i Q_i$ hesabi orta qiyməti öz ehtimalı ilə riyazi gözləməyə yaxınlaşır, yəni

$$eht.\lim_{n\to\infty}\bar{x}=M[X]. \tag{2.10}$$

Burada Q – təsadüfi kəmiyyətin nisbi tezliyidir.

Riyazi gözləmə aşağıdakı xassələrə malikdir:

1. $\mathrm{M}[C]=C$; (2.11)
2. $\mathrm{M}[C\mathrm{X}]=C\cdot\mathrm{M}[X]$; (2.12)
3. $\mathrm{M}[\sum C_i \mathrm{X}_i]=\sum C_i \mathrm{M}[X_i]$; (2.13)
4. $M[X_1\cdot X_2;\cdots;X_n]=\prod_{i=1}^{n} M[X_i]$ (2.14)
5. Riyazi gözləmə müsbət və ya mənfi işarəli ədəd ola bilər.

Qeyd: (2.14) düsturunda x_i kəmiyyətləri bir-birindən asılı olmayan kəmiyyətlərdir.

II. Dispersiya paylanma mərkəzinə nəzərən təsadüfi kəmiyyətin qiymətlərinin səpələnmə dərəcəsini göstərir. X təsadüfi kəmiyyətinin dispersiyası $D[X]$ şəklində yazılır. Ümumi şəkildə dispersiya aşağıdakı düsturla hesablanır

$$D[X] = M[(X - M[X])^2]. \quad (2.15)$$

Xüsusi halda kəsilən təsadüfi X kəmiyyəti üçün dispersiyanın qiyməti

$$D[X] = \sum_{i=1}^{n} (x_i - M[X])^2 p_i, \quad (2.16)$$

kəsilməyən təsadüfi kəmiyyət üçün isə

$$D[X] = \int_{-\infty}^{\infty} (x - M[X])^2 \varphi(x) dx \quad (2.17)$$

ifadələrindən tapılır.

Dispersiyanın ölçü vahidi təsadüfi kəmiyyətin ölçü vahidinin kvadratına bərabərdir. Ona görə də, səpələnməni təsadüfi kəmiyyətin özü ilə müqayisə etmək üçün onunla eyni dərəcəli ölçü vahidinə gətirmək lazımdır. Bu məqsədlə orta kvadratik meyletmədən (o.k.m.)

$$\sigma = \sqrt{D} \quad (2.18)$$

istifadə edilir (σ – standart da adlanır). Aydındır ki, σ həmişə yalnız müsbət işarəli qiymət alacaqdır.

Dispersiya aşağıdakı xassələrə malikdir:

1. $D[C]=0.$ (2.19)

2. $D[CX]=C^2D[X].$ (2.20)

3. $D[\sum_{i=1}^{n} C_iX_i]=\sum_{i=1}^{n} C_i^2D[X_i]$ (2.21)

III. Momentlər təsadüfi kəmiyyətlərin paylanmasını səciyyələndirən daha ümumi ədədi parametrlərdir. Onlar iki formada: *başlanğıc* və *mərkəzi momentlər* şəklində təyin edilirlər.

X təsadüfi kəmiyyətinin S dərəcəli *başlanğıc momenti* həmin kəmiyyətin S üstlü (dərəcəli) qiymətindən götürülmüş riyazi gözləməyə deyilir. Riyazi dildə bu belə yazılır:

$$\alpha_s = M[X^S]. \tag{2.22}$$

Əgər (2.22) ifadəsində S=1 olarsa, onda $\alpha_1 = M$ [X]. Başqa sözlə desək, birinci dərəcəli başlanğıc moment elə riyazi gözləmə deməkdir.

Kəsilən kəmiyyətlər üçün başlanğıc moment

$$\alpha_s = \sum_{i=1}^{n} x_i^s \cdot p_i\,, \tag{2.23}$$

kəsilməyən kəmiyyətlər üçün isə

$$\alpha_s = \int_{-\infty}^{\infty} x^S \varphi(x)dx \tag{2.24}$$

düsturları ilə hesablanır.

X təsadüfi kəmiyyətinin S dərəcəli *mərkəzi momenti* isə həmin təsadüfi kəmiyyətin öz riyazi gözləməsindən olan meylliyinin (meyletməsinin) S dərəcəli riyazi gözləməsinə deyilir. Riyazi dildə bu belə yazılır:

$$\mu_S = M[(X - M(X)^S] \tag{2.25}$$

Burada, $X^0 = (X - M[X])$ başqa adla mərkəzləşdirilmiş təsadüfi kəmiyyət adlanır.

Kəsilən təsadüfi kəmiyyətin mərkəzi momenti

$$\mu_S = \sum_{i=1}^{n} (x_i - M[X])^s \cdot p_i\,, \tag{2.26}$$

kəsilməyən təsadüfi kəmiyyətin mərkəzi momenti isə

$$\mu_s = \int_{-\infty}^{\infty} (x - M[X])^s \varphi(x)dx \tag{2.27}$$

ifadələrindən tapılır.

Mərkəzi momentləri başlanğıc momentlərlə də ifadə etmək olar. Məsələn,

$$\begin{aligned} &\mu_1 = 0; \\ &\mu_2 = \alpha_2 - \alpha_1^2 = D. \end{aligned} \tag{2.28}$$

Paylanmanı bəzi hallarda mərkəzi mütləq momentlərlə də təyin edirlər:

$$\gamma_S = M[|(X - M(X)^S|] \tag{2.29}$$

Mərkəzi mütləq momentlər içərisində birinci dərəcəli moment xüsusi əhəmiyyət kəsb edir. Onu *orta meyletmə* adlandırırlar. Orta meyletmə υ hərfi ilə işarə edilir.

Orta meyletmənin qiyməti kəsilən təsadüfi kəmiyyətlər üçün

$$\upsilon = \sum_{i=1}^{n} |x_i - M[X]| \cdot p_i\,, \tag{2.30}$$

kəsilməyən təsadüfi kəmiyyətlər üçün isə

$$\upsilon = \int_{-\infty}^{\infty} |x - M[X]| \varphi(x) dx \tag{2.31}$$

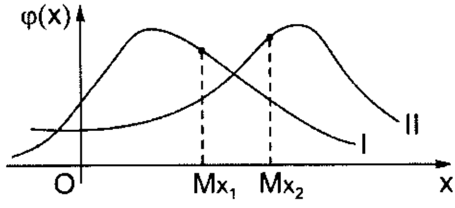
düsturu ilə hesablanır.

Təsadüfi kəmiyyətlərin paylanmasını səciyyələndirmək üçün yuxarıda göstərilən parametrlərlə yanaşı üçüncü və dördüncü dərəcəli mərkəzi momentlərdən də istifadə edilir. Üçüncü dərəcəli mərkəzi momentə əsasən tapılan parametr təsadüfi kəmiyyətin ala biləcəyi qiymətlərin riyazi gözləmə oxuna (paylanma mərkəzinə) nəzərən simmetrikliyini müəyyənləşdirir. Bu papametr *assimmetriya* adlanır və onun qiyməti aşağıdakı düsturla hesablanır:

$$S_k = \frac{\mu_3}{\sigma^3}\,, \tag{2.32}$$

burada μ_3 – üçüncü dərəcəli mərkəzi moment; σ isə standartdır. Simmetrik paylanma zamanı $S_k = 0$ qiyməti alır.

Şəkil 2.5-də iki asimmetrik paylanma əyrisi göstərilmişdir. Bunlardan birincisi müsbət $(S_k > 0)$, ikinci isə mənfi asimmetriyaya malikdir ($S_k < 0$).



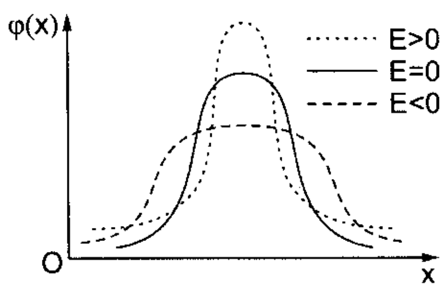
Şəkil 2.5. Asimmetrik əyrilər

Paylanmanın dikliyi (şiş zirvəli və yaxud yastı zirvəli olması) «*eksses*» adlanan E kəmiyyəti ilə təyin edilir:

$$E = \frac{\mu_4}{\sigma^4}. \tag{2.33}$$

Təsadüfi kəmiyyətlərin normal paylanma qanununa tabe olduğu halda E=0 qiymətini alır.

Şəkil 2.6-da müsbət, sıfır və mənfi eksses qiymətinə malik üç paylanma əyrisi təsvir edilmişdir.



Şəkil 2.6. Müxtəlif eksses əyriləri

Məsələ 2.2. Aşağıdakı cədvəldə X təsadüfi kəmiyyətinin paylanma sırası verilmişdir. Qeyd edək ki, bu hal müsbət işarəli ölçmə səhvinin baş verdiyi hadisəyə uyğun gəlir.

x_i	0	1
p_i	q	p

Burada $q = 1 - p$. Verilənlərə əsasən kəmiyyətin riyazi gözləməsini və dispersiyasını təyin edin.

Həlli. X kəsilən təsadüfi kəmiyyət olduğundan riyazi gözləmənin hesablanması üçün (2.8) düsturundan istifadə olunmalıdır:

$$M[X] = x_1 p_1 + x_2 p_2 = 0 \cdot q + 1 \cdot p = p.$$

Dispersiya isə (2.16) düsturu ilə təyin edilir:

$$D[X] = (x_1 - M[X])^2 \cdot p_1 + (x_2 - M[X])^2 \cdot p_2 =$$
$$(0 - p)^2 \cdot q + (1 - p)^2 \cdot p = p^2 q + q^2 p = pq(p + q) = pq.$$

Burada $(q + p) = 1$ və yuxarıda təyin edilmiş $M[X] = p$ qiyməti nəzərə alınmışdır.

§14. Lyapunovun mərkəzi hədd teoremi haqqında anlayış

Onu qeyd etmək lazımdır ki, xüsusi tədqiqatların da təsdiq etdiyi kimi, geodeziya ölçmələrinin paylanması normal paylanma qanununa tabedir. Ümumi halda normal paylanma qanununa tabeçiliyin şərtləri Lyapunovun mərkəzi hədd teoremi ilə müəyyənləşdirilir və təsadüfi kəmiyyətlər üçün aşağıdakı kimi ifadə olunur.

Teorem. Əgər hər hansı bir təsadüfi kəmiyyət kifayət dərəcədə böyük sayda bir-birindən asılı olmayan kiçik kəmiyyətlərin cəmindən təşkil olunubsa və bu kiçik kəmiyyətlərin öz riyazi gözləmələrindən meyllikləri cəm təsadüfi kəmiyyətin öz riyazi gözləməsindən olan meyletməsinə nisbətən olduqca kiçikdirsə, onda cəm təsadüfi kəmiyyətin paylanma qanunu normal paylanma qanununa yaxın olacaqdır.

Normal paylanma qanununa tabe olan təsadüfi kəmiyyətin paylanma sıxlığı aşağıdakı düsturla təyin edilir:

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma} \cdot e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}, \qquad (2.34)$$

burada: $a = M[x]$, $\sigma = \sqrt{D[x]}$.

Çöl geodeziya ölçmələri təcrübəsindən məlumdur ki, ölçmələrin aparıldığı anda onlara bir çox amillər (relyef, alətin xüsusiyyətləri, atmosfer şəraiti, müşahidəçinin iş təcrübəsi və s.) təsir edir və yekun nəticədə alınan ölçmə səhvinin qiyməti məhz bu mənbələrin ümumi qarşılıqlı təsirindən formalaşır.

Ona görə də, qəbul etmək olar ki, geodeziya ölçmə səhvi çoxsaylı elementar səhvlərin cəmindən ibarətdir və əminliklə demək olar ki, Lyapunov teoreminin şərtlərinə əməl olunduğundan geodezik ölçmələr normal paylanma qanununa tabedirlər.

§15. Normal paylanmada kəmiyyətin verilmiş intervala düşmə ehtimalı

X təsadüfi kəmiyyətinin normal paylanma qanununa tabe olduğu halda onun qiymətlərinin verilmiş intervala düşmə ehtimalı aşağıdakı kimi təyin edilir:

$$p\{a < x < b\} = F(b) - F(a)\,. \qquad (2.35)$$

Burada F (x) – ehtimal inteqralı funksiyasıdır və belə yazılır:

$$F(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot\sigma}\int_{-\infty}^{x}e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}dx. \qquad (2.36)$$

Əgər (2.36)-da

$$t=\frac{(x-a)}{\sigma} \qquad (2.37)$$

işarə etsək, (2.36) ifadəsi aşağıdakı şəklə düşər

$$F(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{t}e^{-\frac{t^2}{2}}dt. \qquad (2.38)$$

Onda (2.37) əvəzetməsi hesabına (2.35) ifadəsinin də forması dəyişəcəkdir, yəni

$$P\{t_1<t<t_2\}=F(t_2)-F(t_1) \qquad (2.39)$$

olacaqdır. Burada:

$$t_1=\frac{a-M[x]}{\sigma};\quad t_2=\frac{b-M[x]}{\sigma}.$$

Qeyd etmək lazımdır ki, (2.39) düsturu ölçmələrin sayının $n\geq 20$ olduğu hallarda daha yaxşı nəticələr verir. Bu düsturda $t=\dfrac{k-np}{\sqrt{npq}}$ yazıb bərabərsizliyin hədlərini $\sqrt{\dfrac{pq}{n}}$ əmsalına vurmaqla aşağıdakı bərabərsizliyi alırıq:

$$P\left(t_1<\frac{k-np}{\sqrt{npq}}<t_2\right)=P\left(t_1\cdot\sqrt{\frac{pq}{n}}<\frac{k}{n}-p<t_2\cdot\sqrt{\frac{pq}{n}}\right). \qquad (2.40)$$

Burada $\frac{k}{n} = Q$ – hadisənin nisbi tezliyi; $\sqrt{\frac{pq}{n}} = \sigma_Q$ – isə nisbi tezliyin standartıdır. Onda, (2.40) bərabərsizliyi əsasında normal paylanma qanununa tabe olan istənilən təsadüfi kəmiyyət üçün aşağıdakı ifadə doğru olar:

$$P\{|Q-P| < \varepsilon\} = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^t e^{-\frac{t^2}{2}} dt. \qquad (2.41)$$

Göründüyü kimi, (2.41) ifadəsi nisbi tezliyin ehtimaldan ε qədər fərqlənməsi ehtimalını təyin edir.

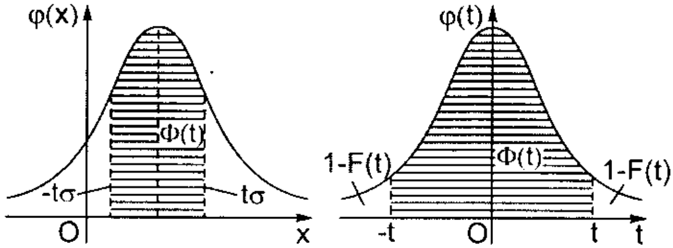
Digər tərəfdən $p(a < x < b)$ ehtimalını (1.31) düsturu ilə təyin edilən $\Phi(t)$ funksiyasından istifadə etməklə hesablamaq daha əlverişlidir. $\Phi(t)$ riyazi gözləməyə nəzərən simmetrik funksiyadır, yəni

$$\Phi(t) = \{|X\text{-}M[X]| < t_\sigma\}. \qquad (2.42)$$

Şəkil 2.7-də bu funksiyasının müxtəlif koordinat sistemlərində: a) X və $\varphi(x)$; b) t və $\varphi(t)$ oxlarına nəzərən həndəsi interpretasiyası verilmişdir. Şəkildə ştrixlənmiş fiqurun sahəsi $\Phi(t)$ funksiyasının ədədi qiymətinə bərabərdir. Onda şəklə əsasən $F(t)$ və $\Phi(t)$ funksiyaları arasında aşağıdakı əlaqəni göstərmək olar

$$F(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \Phi(t). \qquad (2.43)$$

Çünki $\varphi(t)$ əyrisi ilə t oxu arasında qalan fiqurun ümumi sahəsi vahidə bərabərdir. Bu isə paylanma sıxlığının ikinci xassəsindən irəli gəlir (bax: bölmə 12).



Şəkil 2.7. $\Phi(t)$ funksiyasının həndəsi interpretasiyası

Öz növbəsində (2.43) düsturunu (2.39)-da nəzərə alsaq belə bir ifadə alarıq

$$P(a < x < b) = P\{t_1 < t < t_2\} = \frac{1}{2}\{\Phi(t_2) - \Phi(t_1)\}. \qquad (2.44)$$

Qeyd edək ki, $\Phi(t) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_0^t e^{-\frac{t^2}{2}}dt$ cüt olmayan funksiyadır, yəni

$$\Phi(-t) = -\Phi(t). \qquad (2.45)$$

Ona görə də $\Phi(t)$ funksiyası üçün tərtib edilmiş cədvəllərdən t -nin mənfi qiymətlərində də istifadə etmək olar.

$\Phi(t)$ funksiyası ehtimallar inteqralı və ya Laplas funksiyası adlanır.

Məsələ 2.3. Yüz ölçmə səhvindən neçəsi mütləq qiymətcə aşağıda verilmiş hədd qiymətləri səddini keçəcəkdir:

a) bir standart həddi (σ);

b) ikiqat standart həddi (2σ);

c) $2{,}5\sigma$ həddini;

ç) üçqat standart həddi 3σ ($n=1000$ olduqda)?

Həlli. Məsələdə qoyulmuş şərtləri riyazi dildə belə ifadə etmək olar: a) $|\Delta_1|>\sigma$; b) $|\Delta_2|>2\sigma$; c) $|\Delta_3|>2{,}5\sigma$; ç) $|\Delta_4|>3\sigma$. Bu şərtlərə uyğun gələn ehtimal qiymətləri isə, a) $P(|\Delta_1|>\sigma)$; b) $P(|\Delta_2|>2\sigma)$; c) $P(|\Delta_3|>2{,}5\sigma)$; ç) $P(|\Delta_4|>3\sigma)$ şəklində yazılır. Beləliklə, verilmiş şərtlər daxilində məsələnin həlli aşağıdakı ardıcıllıqda yerinə yetirilir.

1. Cədvəldən $\Phi(t)$ funksiyasının $t=1$; 2; 2,5; 3 əmsallarına uyğun gələn qiymətləri seçilir (bax, əlavə III). Aydındır ki, $\Phi(t)$ funksiyasının bu seçilmiş qiymətləri ölçmə səhvlərinin müvafiq intervallar daxilində yerləşmə ehtimalını göstərir.

2. $P(\Delta_i>t\sigma)=1-\Phi(t)$ düsturu ilə səhvin qoyulmuş həddi aşması ehtimalı hesablanır.

3. Nəhayət, $k\approx np=n(1-\Phi(t))$ ifadəsindən $p(\Delta_i>t\sigma)$ ehtimalı ilə müvafiq hədd qiymətlərini aşan səhvlərin sayı tapılır. Hesablamalar yekun olaraq cədvəl 2.1-də verilmişdir.

Cədvəl 2.1. Hesablama nəticələri

Ölçmə səhvlərinin sayı, n	Hədd qiyməti, $\lvert\Delta_i\rvert$	t	$\Phi(t)$	$p(\Delta_i>t\sigma)=1-\Phi(t)$	Verilmiş həddi keçən səhvlərin sayı. $k=n(1-\Phi(t))$	Verilmiş $\pm t\sigma$ həddi daxilində qalan səhvlərin sayı	Yoxlama
100	1,0	1,0	0,6827	0,3173	32	68	100
100	2,0	2,0	0,9545	0,0455	5	95	100
100	2,5	2,5	0,9876	0,0124	1	99	100
1000	3,0	3,0	0,9973	0,0027	3	997	1000

§16. Orta və ehtimal meyletmələr

Təsadüfi kəmiyyətin öz riyazi gözləməsi ətrafında səpələnməsini standartdan başqa orta və ehtimal meyletmələrlə də səciyyələndirmək olar.

Orta meyletmə (υ) birinci dərəcəli mərkəzi mütləq moment olub (2.30) və ya (2.31) düsturları ilə təyin edilir və ümumi halda belə yazılır:

$$\upsilon = M\big[|X - M[X]|\big]. \tag{2.46}$$

Standartla orta meyletmə arasında aşağıdakı əlaqə mövcuddur:

$$\sigma = 1{,}25\upsilon . \tag{2.47}$$

Ehtimal meyletmə (r) isə elə bir kəmiyyətə deyilir ki, bütün səhvləri ölçmə sırasında düzsək, onda bu kəmiyyətə görə mütləq qiymətcə böyük, eləcə də kiçik qiymətli səhvlər bərabərmümkünatlı olacaqlar, yəni

$$p\{|\Delta| < r\} = \frac{1}{2}. \tag{2.48}$$

Ehtimal meyletmə standartla aşağıdakı münasibətdədir

$$r = 0{,}67\sigma . \tag{2.49}$$

Təcrübi olaraq r səhvini təyin etmək üçün bütün səhvlər mütləq qiymətcə artan və ya azalan sırada düzülür və sıranın ortasında yerləşən səhv qiyməti ehtimal meyletmə qəbul edilir.

Məsələ 3.2. Geodezik ölçmə səhvinin $\Delta_{hədd} = 2\upsilon$ və $\Delta_{hədd} = 2r$ hədlərini aşmadığı hala uyğun gələn ehtimalları təyin edin.

Həlli. Məsələnin şərtində tələb edilən ehtimal qiymətini belə bir ifadədən taparıq:

$$p\{|\Delta_1| < 2\upsilon\} = \Phi(t), \qquad (2.50)$$

burada $t = \frac{\Delta_{hədd}}{\sigma} = \frac{2\upsilon}{\sigma}$.

Eyni zamanda (2.47) əlaqə düsturunu (2.50)-də nəzərə alsaq, $t = 1{,}6$ olar. Onda $\Phi(t)$ cədvəlinə əsasən $t = 1{,}6$ üçün taparıq:

$$p\{|\Delta_1| < 2\nu\} = 0{,}890 .$$

Eyni qayda ilə ikinci ehtimal qiyməti üçün

$$P\{|\Delta_2| < 2r\} = \Phi(t);$$

$$t = \frac{2r}{\sigma} = 1{,}34; \quad P\{|\Delta_2| < 2r\} = \Phi(1{,}34) = 0{,}820$$

alınır.

Fəsil 3
RİYAZİ STATİSTİKANIN ELEMENTLƏRİ

§17. Riyazi statistikanın məsələləri

Məlumdur ki, elmi-təcrübi tədqiqatlar zamanı təsadüfi kəmiyyətlərin paylanma qanunları nəzəri cəhətdən analitik ifadələrlə verilməzdən əvvəl həmin kəmiyyətlərin paylanma qanunları və ədədi parametrləri sınaq və eksperimentlər yolu ilə tədqiq edilir. Riyazi statistika eksperiment nəticələrinin yazılması və təhlili, qeydiyyatdan keçirilməsi və sistemləşdirilməsi metodları və digər bu kimi məsələlərlə məşğul olan riyazi elm sahəsidir. Onun əhatə dairəsinə aşağıdakı növ məsələlər daxildir:

1. Əgər sınaq nəticələrinin sayı və həcmi kifayət dərəcədə olmazsa, onda təsadüfi kəmiyyətin paylanma qanunu az əhəmiyyətli faktorların təsirindən təhriflərə məruz qalır və nəticədə paylanma qanunu düzgün seçilmir. Bu halda statistik məsələnin mahiyyəti məhz yekun nəticəni kənar təsirlərdən azad edərək paylanma qanununun düzgün seçilməsini təmin etməkdən ibarətdir.

2. Sınaq və eksperimentlər zamanı alınmış nəticələr əsasında kəmiyyətin hansı paylanma qanununa uyğun gəlməsi haqqında fərziyyə irəli sürülür. Bu halda isə statistik məsələnin vəzifəsi həmin fərziyyənin uyğunluğunun yoxlanması («fərziyyələrin oxşarlığının yoxlanması məsələsi») və təsadüfi kəmiyyətlər arasında mövcud asılılığın təyinindən ibarətdir.

3. Tədqiq edilən kəmiyyətlərin təyin edilmiş ən ehtimal olunan və ehtibarlı qiyməti üçün dəqiqliyin qiymətləndirilməsi məsələsi.

§18. Statistik sıra. Histoqram

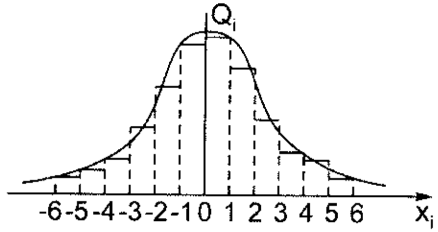
Təsadüfi kəmiyyətin sınaq və müşahidələrdən tapılmış bütün mümkün qiymətləri həmin kəmiyyətin ümumi statistik çoxluğunu təşkil edir. Qeyd etmək lazımdır ki, kəsilməyən kəmiyyətlərin ümumi statistik çoxluğunu yaratmaq, ümumiyyətlə mümkün deyil. Çünki kəsilməyən (fasiləsiz) təsadüfi kəmiyyət təyin edildiyi aralıqda sonsuz sayda əvvəlcədən məlum olmayan qiymətlər ala bilər. Ümumi statistik çoxluq yaratmaq elə kəsilən kəmiyyətlər halında da təcrübi olaraq həyata keçirilməsi çətin olan məsələlərdəndir. Ona görə də, adətən seçmə metodu ilə müəyyən ölçülü statistik çoxluq öyrənilir və onun əsasında qoyulan məsələnin ümumi həlli verilir. Aydındır ki, bu halda tapılan cavablar müəyyən təqribiliyə malik olacaqdır. Bu təqribiliyi müəyyən dərəcədə tənzimləmək məqsədi ilə seçmə statistik çoxluğu ümumi çoxluq üzrə bərabər paylanır və bunun sayəsində təsadüfi kəmiyyətin xassələrinin mümkün qədər dəqiq və əhatəli öyrənilməsi təmin olunur.

Seçmə çoxluğu əsasən statistik sıra (cədvəl) şəklində göstərilir. Bu məqsədlə X təsadüfi kəmiyyətinin seçmə çoxluğunu $10 \div 20$ sayda qiymətdən ibarət intervallara bölür və hər interval üçün m_i sayını təyin edirlər (m_i – hər bir intervala düşən x_i qiymətlərinin sayıdır). Sonra $Q_i = m_i/n$ düsturu ilə nisbi tezliklər hesablanır. Hesablama nəticələri cədvəl 3.1 şəklində yazılır.

Cədvəl 3.1

İntervallar	x_1 ; x_2	x_2 ; x_3...	x_i ; x_{i+1}	x_k ; x_{k+1}
m_i	m_1	m_2...	m_i...	m_k
Q_i	Q_1	Q_2...	Q_i...	Q_k

Statistik paylanmanı daha nəzərə çarpan şəkildə göstərmək üçün statistik sıranın məlumatlarına əsasən müvafiq histoqramlar qurulur. Absis oxu üzrə (x_i, x_i+1) intervalları qeyd edilir və bu intervalları oturacaq qəbul edərək, onların üzərində sahəsi Q, hündürlüyü isə $h=\frac{Q_i}{x_{i+1}-x_i}$-yə bərabər olan düzbucaqlılar qurulur (şəkil 3.1). Burada, $\sum_{i=1}^{k} Q_i = 1$.



Şəkil 3.1. Paylanma histoqramı

§19. Statistik paylanmanın ədədi parametrləri

Statistik paylanma da təsadüfi kəmiyyətlərin paylanmasında qəbul edilmiş riyazi gözləmə, dispersiya və momentlərdən (bax: bölmə 13) ibarət ədədi parametrlərlə səciyyələnir. Lakin bu halda parametrlərin qiymətləri ölçmə nəticələrinə əsasən hesablanır. Statistik paylanmada riyazi gözləmə orta hesabi kimi təyin edilir, yəni

$$M^*[X]=\bar{x}=\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}. \tag{3.1}$$

Statistik dispersiya

$$D*[X]=\frac{\sum_{i=1}^{n}[x_i - M*[X]]^2}{n}, \tag{3.2}$$

statistik başlanğıc və mərkəzi momentlər isə uyğun olaraq

$$\alpha_s^* = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^s}{n} \text{ və } \mu_s^* = \frac{\sum_{i=1}^{n}[x_i - M^*[X]]^s}{n} \tag{3.3}$$

düsturları ilə hesablanır. Onu da qeyd edək ki, nəzəri ədədi parametrlərin xassələri uyğun statistik parametrlər üçün də doğrudur (bax: bölmə 13)

§20. Statistik təhlilə əsasən paylanma qanununun təyini

Aydındır ki, eksperiment və ölçmələr yolu ilə təsadüfi kəmiyyətin bütün mümkün qiymətlərini təyin etmək çox çətindir, bir çox hallarda isə ümumiyyətlə mümkün deyil. Ona görə də, paylanma qanunu seçmə metodu (bax: bölmə 18) ilə öyrənilir, sonra əldə edilmiş məlumatların statistik təhlili əsasında kəmiyyətin ümumi paylanma qanunu yazılır. Paylanma qanunu məsələnin məğzi və histoqramın zahiri görünüşünə görə seçilir.

Məsələn, şəkil 3.1-də verilmiş histoqram öz zahiri görünüşünə görə normal paylanmaya yaxındır. Paylanma qanununun növü haqqında fərziyyə irəli sürüləndən sonra bu qanunun əsas ədədi parametrləri : riyazi gözləmə (a) və standart (σ) qiymətləri seçilir. Bu zaman müxtəlif seçim metodlarından istifadə edilə bilər. Bu metodlardan birinin mahiyyəti nəzəri və statistik paylanma parametrlərinin bir-birinə bərabər qəbul edilməsindən ibarətdir, yəni

$$a = \mathrm{M}^*(X); \ \sigma = \sqrt{D^*[X]}. \tag{3.4}$$

Nəzəri və statistik paylanmaların uyğunluğu (fərziyyənin doğruluğu) çox zaman K.Pirson paylanmasına əsaslanmış kriteri ilə yoxlanılır:

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{k} \frac{(m_i - np_i)^2}{np_i} \tag{3.5}$$

Bu kriteridən istifadə edərkən əlavə olaraq «sərbəstlik dərəcəsi ədədi» adlanan (r) kəmiyyətini də təyin etmək lazımdır. r ədədi seçim intervalları sayı k ilə nisbi tezliyə görə seçilən əlaqələr ədədi fərqinə bərabərdir. Normal paylanma halında $r = k - 3$.

χ^2 paylanması üçün xüsusi cədvəllər tərtib edilmişdir (bax: əlavə IV). Cədvəldən χ və r kəmiyyətlərinin qiymətlərinə uyğun P ehtimalı tapılır. Sonra P qiymətinə əsasən nəzəri və statistik paylanmaların uyğunluğu barədə mülahizələr yürüdülür. Əgər P>0,5, onda nəzəri və statistik paylanmanın uyğunluğu əladır; 0,3≤r≤0,5 olduqda – *yaxşı*; 0,1≤r<0,3 – *kafi*; P<0,1 isə uyğunluğun *pis* olduğunu göstərir.

§21. Statistik əlaqələr haqqında anlayış

Bir çox elmi-təcrübi məsələlərin həlli zamanı, o cümlədən geodeziya alətlərinin texniki tədqiqi, yeni ölçmə metodlarının təcrübi yoxlanması, ölçmə nəticələrinin riyazi hesablanması və s., hallarda ölçülmüş kəmiyyətlər arasında qarşılıqlı əlaqənin olub-olmaması, eləcə də bu əlaqənin nə dərəcədə yaxın olmasını bilmək lazım gəlir. Bundan başqa, ölçmə nəticələrinə təsir edən əsas amilləri və səhv mənbələrini, eləcə də onların yekun nəticəyə göstərdiyi təsir dərəcəsini təyin etmək zərurəti meydana çıxır. Belə ki, kəmiyyətlər arasındakı mövcud qarşılıqlı asılılıqdan istifadə edərək, xüsusilə də bu asılılıq düstur şəklində ifadə olunubsa, onda, məsələn, tədqiq edilən alətin gözlənilən ölçmə dəqiqliyini ölçmədən əvvəl göstərmək mümkündür. Bütövlükdə ölçüləcək kəmiyyətlər arasında əlaqənin dərəcəsi məlumdursa, onda çöl ölçmə müşahidələrinin, eləcə də kameral hesablamaların düzgün metodiki əsaslarla təşkil edilməsi imkanı yaranır.

Beləliklə, kəmiyyətlər arasında iki formada qarşılıqlı asılılıq ola bilər: *funksional* və *statistik* (ehtimal).

İki x və y dəyişən kəmiyyətləri arasında *funksional asılılıq* elə bir asılılığa deyilir ki, bu zaman x-ın hər bir qiymətinə y-in konkret bir qiyməti uyğun gəlir. Məsələn, $V=\frac{4}{3}\pi R^3$ funksional asılılığına əsasən hər bir R qiymətinə müvafiq V qiyməti uyğun gəlir.

x və y dəyişən kəmiyyətləri arasında statistik asılılıq halında x-ın hər bir qiymətinə y-in qiymətlər paylanması uyğun gəlir. x-in qiymətinin dəyişməsi ilə y-ə yeni qiymətlər paylanması uyğun gəlir.

Əgər x və y kəmiyyətləri arasında əlaqə xətti qanun üzrə təyin olunursa, onda bu asılılıq *düzxətli korrelyasiya* adlanır. x və y təsadüfi kəmiyyətləri arasında asılılq dərəcəsi korrelyasiya əmsalı ilə müəyyənləşdirilir. Korrelyasiya əmsalı aşağıdakı düsturla hesablanır:

$$r=\frac{K_{xy}}{\sigma_x\sigma_y}. \tag{3.6}$$

(3.6) düsturunda K_{xy} ikinci dərəcəli mərkəzi qarışıq momentdir

$$\begin{aligned} K_{xy}&=\mu_{1,1}=M[(X-M[X])(Y-M[Y])]= \\ &=M[X\cdot Y]-M[X]\cdot M[Y]. \end{aligned} \tag{3.7}$$

Ümumi şəkildə, $r+s$ dərəcəli mərkəzi qarışıq moment belə tapılır:

$$\mu_{p,s} = M[(X - M[X])^p (Y - M[Y])^s] \qquad (3.8)$$

Xüsusi halda (3.8) düsturuna əsasən alarıq:

$$\mu_{2,0} = D[X]; \quad \mu_{0,2} = D[Y].$$

Korrelyasiya əmsalı $-1 \le r \le 1$ intervalında qiymətlər alır. Əgər $r=+1$ və yaxud $r=-1$ olarsa, onda x və y kəmiyyətləri arasında düzxətli funksional əlaqənin mövcudluğunu söyləmək olar. Riyazi dildə bu belə yazılır:

$$y=ax+s, \quad x=by+d.$$

Eyni zamanda $r<0$ halında kəmiyyətlər arasında mənfi korrelyasiyanın olduğunu, yəni x-ın azalması (artması) ilə y-in artmasını (azalmasını) göstərmək olar. Korrelyasiya əmsalının $r>0$ qiymətlərində isə müsbət korrelyasiya əlaqəsinin olması qeyd edilir (x azalırsa (artırsa), y də azalır (artır)).

X və Y kəmiyyətləri arasında düzxətli korrelyasiya əlaqəsi tam şəkildə reqresiya tənliyi ilə ifadə olunur:

$$(Y - M[Y]) = \rho_{y/x}(X - M[X]) \qquad (3.9)$$

və ya

$$Y = M[Y] + \rho_{y/x}(X - M[X]). \qquad (3.10)$$

Burada, $\rho_{y/x}$ Y kəmiyyətinin X kəmiyyətinə görə təyin edilən reqressiya əmsalıdır. Bu əmsal aşağıdakı düsturla hesablanır:

$$\rho_{y/x} = r \cdot \frac{\sigma_y}{\sigma_x} \tag{3.11}$$

Analoji qayda ilə X-ın Y-ə görə reqresiya tənliyini yazmaq olar:

$$X = M[X] + \rho_{x/y}(Y - M[Y])] \tag{3.12}$$

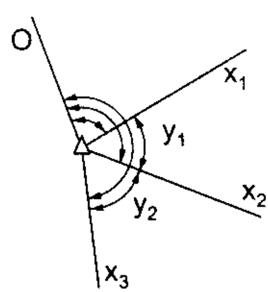
Bu halda isə reqresiya əmsalı

$$\rho_{x/y} = r \cdot \frac{\sigma_x}{\sigma_y} \tag{3.13}$$

olar.

(3.11) və (3.13) düsturlarında σ_x və σ_y uyğun olaraq X və Y kəmiyyətlərinin standartlarıdırlar.

Məsələ 3.1. İsbat edin ki, dairəvi dəfələr üsulu ilə ölçülmüş iki Y_1 və Y_2 bucaqları arasında korrelyasiya əmsalı $r = -0{,}5$ qiymətinə bərabərdir (şəkil 3.2). Eyni zamanda bu bucaqlar arasında korrelyasiya əlaqəsinin olması səbəbini göstərin və müvafiq reqresiya tənliyini qurun.



Şəkil 3.2. Bucaqların dairəvi dəfələr üsulu ilə ölçülməsi

Həlli. Şəkil 3.2-dən göründüyü kimi Y_1 və Y_2 bucaqlarını X_1, X_2 və X_3 istiqamətlərinə əsasən aşağıdakı ifadələrdən tapa bilərik:

$$\begin{aligned} Y_1 &= X_2 - X_1; \\ Y_2 &= X_3 - X_2. \end{aligned} \tag{3.14}$$

Digər tərəfdən bu bucaqların ümumi X_2 tərəfinə malik olması səbəbindən onlar arasında korrelyasiya əlaqəsi mövcud olacaqdır. Onda (3.6) düsturuna əsasən r_{y_1,y_2} korrelyasiya əmsalı üçün yaza bilərik:

$$r_{y_1 y_2} = \frac{K_{y_1,y_2}}{\sigma_{y_1} \cdot \sigma_{y_2}}, \tag{3.15}$$

burada K_{y_1,y_2} ikinci dərəcəli mərkəzi qarışıq moment olub (3.7) düsturuna əsasən

$$K_{y_1 y_2} = M[Y_1 Y_2] - M[Y_1]M[Y_2] \tag{3.16}$$

kimi təyin olunur.

(3.16) ifadəsində xüsusi riyazi gözləmələri hesablayaq. Bunun üçün riyazi gözləmənin xassələrindən istifadə edilir (bax: düsturlar (2.11)-(2.14)).

Beləliklə, məsələnin həllini təmin edən xüsusi riyazi gözləmələr üçün alarıq:

$$Y_1 \cdot Y_2 = (Y_2 - Y_1)(X_3 - X_2) = X_2 X_3 - X_1 X_3 - X_2^2 + X_1 X_2$$

olduğundan, riyazi gözləmə

$$M[Y_1Y_2] = M[X_2X_3] - M[X_1X_3] - M[X_2^2] + M[X_1X_2].$$

Digərləri üçün yaza bilərik:

$$M[Y_1] = M[X_2] - M[X_1];$$
$$M[Y_2] = M[X_3] - M[X_2];$$
$$M[Y_1]M[Y_2] =$$
$$= M[X_2]M[X_3] - M[X_1]M[X_3] - M^2[X_2] + M[X_1]M[X_2].$$

Xüsusi riyazi gözləmələr üçün yuxarıda alınmış ifadələri nəzərə almaqla $K_{y_1y_2}$ qarışıq momentinin hesablanması üçün belə bir ifadə alarıq:

$$K_{y_1y_2} = M[x_2]M[x_3] - M[x_1]M[x_3] - M[x_2^2] +$$
$$+ M[x_1]M[x_2] - M[x_2]M[x_3] + M[x_1]M[x_3] +$$
$$+ M^2[x_2] - M[x_1]M[x_2] = M^2[x_2] - M[x_2^2].$$

(2.28) düsturuna əsasən sonda alınan ifadənin $-D_{x_2}$-yə bərabər olduğunu görərik. Eyni zamanda $-D_{x_2} = -\sigma^2_{x_2}$ olduğundan, $K_{y_1y_2} = -\sigma^2_{x_2}$ yaza bilərik.

Ölçülmüş istiqamətlər bir-birindən asılı olmayan kəmiyyətlər olduğundan, onların dispersiyası belə tapılır:

$$\sigma^2_{y_1} = \sigma^2_{x_2} + \sigma^2_{x_1} \text{ və } \sigma^2_{y_2} = \sigma^2_{x_3} + \sigma^2_{x_2}.$$

Nəhayət, $r_{y_1y_2}$ korrelyasiya əmsalı aşağıdakı ifadə ilə təyin edilir:

$$r_{y_1y_2} = \frac{-\sigma_{x_2}^2}{\sqrt{\sigma_{x_2}^2 + \sigma_{x_1}^2}\sqrt{\sigma_{x_3}^2 + \sigma_{x_2}^2}}.$$

Əgər $\sigma_{x_1} = \sigma_{x_2} = \sigma_{x_3} = \sigma_x$ qəbul etsək (bütün istiqamətlərin eyni alət və ölçmə şəraitində müşahidə edildiyi halda bunu cüzi xəta ilə demək olar), onda

$$r_{y_1y_2} = \frac{-\sigma_x^2}{\sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_x^2} \cdot \sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_x^2}} = \frac{-\sigma_x^2}{\sigma_x\sqrt{2} \cdot \sigma_x \cdot \sqrt{2}} = \frac{-1}{2} = -0{,}5.$$

Qoyulmuş məsələdə məhz bunu isbat etmək tələb olunurdu.

Bucaqlar arasında reqresiya tənliyini isə (3.10) düsturuna əsasən aşağıdakı kimi ifadə etmək olar:

$$y_2 = M[y_2] - 0{,}5 \cdot \frac{\sigma_{y_2}}{\sigma_{y_1}}(y_1 - M[y_1]).$$

Burada $\sigma_{y_1} = \sigma_{y_2}$ şərtini qəbul etsək, onda reqresiya tənliyi belə şəklə düşər

$$y_2 = M[y_2] - 0{,}5(y_1 - M[y_1]).$$

Fəsil 4

ÖLÇMƏLƏR SƏHVLƏRİ NƏZƏRİYYƏSİ

§22. Ölçmələr səhvləri nəzəriyyəsinin məsələləri

Ümumi halda digər sahələrdə olduğu kimi geodeziya ölçmələri də müəyyən qiymətə malik səhvlərlə yerinə yetirilir.

Ölçmə səhvi dedikdə kəmiyyətin ölçülmüş qiyməti ilə həqiqi qiyməti arasındakı fərq başa düşülür. Ölçmə zamanı daha əlverişli ölçmə metodikası, daha dəqiq alət seçməklə ölçmə nəticəsinin dəqiqliyini yüksəltmək olar, yəni səhvin qiymətini kiçiltmək olar. Lakin tam səhvsiz ölçmə nəticəsi əldə etmək təcrübi olaraq qeyri-mümkündür. Bu isə o deməkdir ki, ölçmə nəticələri, demək olar ki, həmişə bu və ya digər qiymətə malik səhvlərlə təhrif olunurlar. Ona görə də, xüsusi təlimatlarda ölçmə səhvlərinin müvafiq baş vermə ehtimalları göstərilməklə yol verilən (mümkün) qiymətləri verilir. Çöl geodeziya ölçmələri də bu tələblərə uyğun yerinə yetirilməlidir.

Beləliklə, ölçmələr səhvləri nəzəriyyəsinin əsas məsələləri aşağıdakılardan ibarətdir:

–ölçmələrin dəqiqliyini qiymətləndirmək üçün kriteriyanın (meyarın) əsaslandırılması və seçilməsi;

–dəqiqlik kriteriləri üzrə hesablama üsullarının işlənib hazırlanması;

–seçilmiş dəqiqlik kriterilərin optimallıq dərəcəsinin qiymətləndirilməsi.

Qeyd edilən məsələlərlə yanaşı ölçmələr səhvləri nəzəriyyəsində bir sıra suallara da cavab axtarılır ki, bunlara aşağıdakıları misal göstərmək olar:

–ölçmə səhvlərinin baş vermə səbəbləri və paylanma qanunlarının tədqiqi və öyrənilməsi;

–ölçmələrdə kobud səhvlərin üzə çıxarılması məqsədi ilə müvafiq hədd qiymətlərinin əsaslandırılması və təyini;

–təkrar ölçmələrdən kəmiyyət üçün ən etibarlı və ehtimal olunan qiymətin tapılması;

–ölçmə nəticələrinin ilkin (əvvəlcədən gözlənilən) və yekun (sonradan hesablamalarla təyin edilən faktiki) dəqiqliyinin qiymətləndirilməsi;

–ölçülmüş kəmiyyətlərin tarazlaşdırılmış qiymətlərinin dəqiqliyinin tapılması.

Qoyulmuş məsələnin həll üslubu ölçmə səhvinin növünə uyğun seçilir. Bu məsələlərə növbəti bölmələrdə baxılır.

§23. Ölçmə səhvlərinin növləri

Hər hansı bir kəmiyyətin ölçülməsi bu kəmiyyətlə eyni növdən olan və ölçü vahidi qəbul edilmiş digər kəmiyyətlə tutuşdurulması deməkdir. Kəmiyyətin ölçü vahidi ilə tutuşdurulmasından tapılmış qiyməti *ölçmə nəticəsi* adlanır. Ölçmə nəticələri eyni (bərabər) və ya müxtəlif (qeyri-bərabər) dəqiqliyə malik ola bilər. Eyni ölçmə şəraitində yerinə yetirilmiş ölçmələr eyni dəqiqlikli, müxtəlif ölçmə şəraitində aparılmış ölçmələr isə müxtəlif dəqiqlikli qəbul edilir. Ölçmə şəraiti dedikdə, ölçmə nəticələrinin dəqiqliyinə təsir edən amillər, o cümlədən alətin növü, ölçmə dəfələrinin sayı, ölçmə müşahidələrini aparan müşahidəçinin təcrübəsi və s., amillər məcmusu başa düşülür. Ölçmə nəticələrinin eyni və ya müxtəlif dəqiqlikli olması, adətən onların ölçmə səhvlərinin qiymətinə əsasən müəyyənləşdirilir.

Ölçmələr, həmçinin lazımi və yaxud artıq (əlavə) sayda yerinə yetirilə bilər. Bütövlükdə geodezik məsələnin həllini təmin edən ən minimal ölçmələr sayı *lazımi say*, müvafiq kəmiyyətlər isə *lazımi kəmiyyətlər* adlanır. Məsələn, məlumdur ki, hər hansı üçbucağın həlli üçün məlum elementlərin lazımi sayı üçə bərabərdir. Bunlar isə bir tərəf və ona bitişik iki bucaq, iki tərəf və onların arasında qalan bucaq və yaxud üç tərəf ola bilər.

Artıq ölçmələr geodeziya şəbəkəsində lazımi ölçmələrdən əlavə olaraq yerinə yetirilmiş ölçmələrə deyilir və onların sayı *artıq say* adlanır. Məsələn, üçbucaqda ölçülmüş dördüncü element üçbucağın həlli üçün artıq ölçmədir.

Geodeziya işlərində artıq ölçmələr çox böyük əhəmiyyət kəsb etdiyindən mütləq qaydada yerinə yetirilir. Belə ki, artıq ölçmələrin yerinə yetirilməsi ilə ölçülmə nəticələrinin dəqiqliyi yoxlanılır və onların ölçmə keyfiyyəti haqqında mülahizələr yürütmək imkanı yaranır. Eyni zamanda artıq ölçmələrin mövcudluğu ilə ölçmə nəticələrinin tarazlaşdırılması məsələsi meydana çıxır ki, nəticədə kəmiyyətlər üçün daha çox ehtimal olunan etibarlı qiymətlər tapılmış olur.

Təcrübədən məlum olur ki, eyni kəmiyyəti bir neçə dəfə təkrarən ölçdükdə ölçmələr nə qədər dəqiq yerinə yetirilsə də, alınmış nəticələr öz aralarında fərqlənəcəkdir. Bu onunla izah edilir ki, hər bir təkrar ölçmə zamanı əvvəlkindən tamamilə fərqli (həm işarəcə, həm də qiymətcə) ölçmə səhvi baş verə bilər.

Ümumi halda ölçmənin həqiqi səhvi aşağıdakı düsturla hesablanır:

$$\theta_i = x_i - X, \quad i = 1, 2, ..., n. \tag{4.1}$$

Burada: x_i – kəmiyyətin i saylı təkrar ölçmə nəticəsi (qiyməti), X – isə həmin kəmiyyətin həqiqi qiymətidir.

Çox hallarda ölçülən kəmiyyətin həqiqi (dəqiq) qiyməti məlum olmadığından onun ölçmə səhvini təyin etmək üçün dolayı metodlardan istifadə edilir. Məsələn, ölçmə nəticələri səhvlərinin paylanma qanunları öyrənilir və sonradan bu qanunun müvafiq düstüründan istifadə etməklə ölçmə səhvinin nöqtəvi qiyməti və yaxud qiymətlər intervalı təyin edilir.

Təcrübə göstərir ki, geodeziya ölçmə nəticəsinin həqiqi qiymətdən meyllənməsi çoxsaylı mənbələrin təsirindən baş verir və Lyapunovun mərkəzi hədd teoreminin (bax, bölmə 14) şərtlərini ödəyir. Buradan belə nəticə çıxır ki, geodeziya ölçmələri normal paylanma qanununa tabedirlər. Ona görə də, geodeziya ölçmələri əsasən normal paylanma qanunu əsasında hesablanır. Digər tərəfdən yaranma qanunauyğunluqlarına görə ölçmə səhvləri *kobud*, *sistematik* və *təsadüfi* növlərə bölünür.

Əgər verilmiş ölçmə şəraitdə ölçmə səhvinin qiyməti gözlənilən səhv qiymətindən əhəmiyyətli dərəcədə böyükdürsə, onda ölçmə nəticəsində kobud səhvin olduğu göstərilir. Kobud səhvlər adətən müşahidəçinin tələsikliyi, çaşqınlığı və müşahidə zamanı buraxdığı səhv nəticəsində, eləcə də alətlərin nasazlığı, hava şəraitinin qəfildən pisləşməsi və sair səbəblərdən baş verə bilər. Ölçmələrdəki kobud səhvlər əlavə yoxlama ölçmələr və hesablamalarla aradan qaldırılır. Məsələn, yaradılmış geodeziya poliqonun açıqlıq qiymətini riyazi cəhətdən onun üçün yol verilən həddi səhv qiyməti ilə müqayisə edib kobud səhvi aradan qaldırmaq mümkündür.

Riyazi gözləməsi sıfırdan əhəmiyyətli dərəcədə fərqlənən səhvlərə isə *sistematik səhvlər* deyilir. Sistematik səhvlərin təkrar ölçmələrdə qiymət və işarələri dəyişməz qalır. Sistematik səhvlər əsasən ölçü aləti, ətraf mühit və iş icraçısı (müşahidəçi) ilə bağlı səbəblərdən baş verir. Sistematik səhvlərə misal olaraq ölçü lentinin komparatorda etalonla tutuşdurulma səhvini göstərmək olar. Bu səhv məsafənin uzunluğuna mütənasib olaraq həmişə ölçmə nəticələrinə təsir göstərir. Hər bir halda alətlərin texniki yoxlanması yolu ilə sistematik səhvin yaranma səbəbləri öyrənilir və onların ölçmə nəticələrinə təsirinin azaldılması, mümkün hallarda isə tamamilə yox edilməsi məqsədi ilə tədbirlər proqramı, ölçmə metodikası işlənib hazırlanır.

Riyazi gözləməsi sıfırdan cüzi fərqlənən elementar səhvlərə *təsadüfi səhvlər* deyilir. Sistematik səhvdən fərqli olaraq təsadüfi səhvlərin ölçmə nəticəsinə təsirini yox etmək təcrübi olaraq mümkün deyildir. Məsələn, teodolitin üfüqi dairəsindən hesabat götürərkən təsadüfi səciyyəli səhv baş verir.

Təsadüfi səhvlər də bir çox mənbələrin qarşılıqlı təsirindən yaranır. Əsas mənbələrə alət, müşahidəçi və ətraf mühitlə bağlı amilləri aid edirlər. Ona görə də ölçmə nəticələrinə təsadüfi səhvlərin təsirini azaltmaq məqsədi ilə əsas diqqəti ölçü alətlərinin işləmə keyfiyyətinin yüksəldilməsinə, ölçmə üsullarının metodiki cəhətdən təkmilləşdirilməsinə və müşahidə üçün əlverişli hava şəraitinin seçilməsinə yönəltmək tövsiyə olunur. Ölçmələrin təkrar dəfələrlə yerinə yetirilməsi də təsadüfi səhvlərin ölçmə nəticələrinə təsirini azaltmaq məqsədi güdür.

§24. Təsadüfi səhvlərin xassələri

Ölçmələr səhvləri nəzəriyyəsinin geodeziyada istifadəsinə dair iki əsas postulat qəbul edilmişdir:

–geodeziya ölçmə nəticələrində sistematik səhvlərin təsiri ya yox edilmiş (müvafiq düzəlişlər etməklə), ya da bu təsir nəzərə alınmaz dərəcədə kiçikdir. Ölçmələrdə yalnız təsadüfi səhvlər mövcuddur;

–geodeziya ölçmələrində təsadüfi səhvlər normal paylanma qanununa tabedir.

Bu iki postulatdan təsadüfi səhvlər üçün aşağıdakı xassələr alınır.

1. P ehtimalı ilə göstərmək olar ki, təsadüfi səhvlər mütləq qiymətcə $\pm t\sigma$ -yə bərabər olan intervalda yerləşəcəkdir. Burada, σ – ölçmənin standartı, t isə elə bir əmsaldır ki, onun ehtimalı $\mathrm{P} = \Phi(t)$. Məsələn, R=0,67 ehtimalı ilə, demək olar ki, 100 ölçmə səhvindən 67 ədədi bir σ qiyməti həddini aşmayacaqdır.

2. Mütləq qiymətcə bərabər, işarəcə əks olan təsadüfi səhvlər bərabərmümkünatlıdır, yəni onların ehtimalı eynidir. Riyazi dildə bu belə yazılır:

$$P(\theta > 0) = P(\theta < 0) = \frac{1}{2}.$$

3. Müşahidələrin (təkrar ölçmələrin) sayı sonsuz artdıqda təsadüfi səhvlərin hesabi orta qiyməti sıfra yaxınlaşır, yəni

$$\text{eht.} \lim_{n \to \infty} \frac{[\theta]}{n} = 0 . \tag{4.2}$$

4. Mütləq qiymətcə kiçik olan təsadüfi səhvlər böyük qiymətlilərə nisbətən daha tez-tez baş verir.

Təsadüfi səhvlərin normal paylanma qanunu qrafiki şəkildə səhvlər əyrisi (və yaxud Qauss əyrisi adlanır) ilə göstərilir (şəkil 4.1). Qauss əyrisi öz növbəsində aşağıdakı xassələrə malikdir:

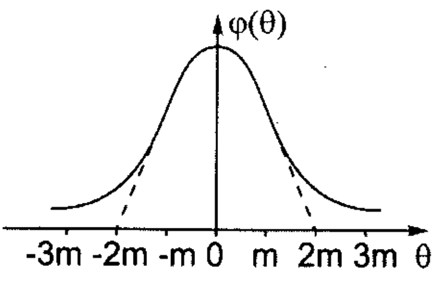
$-\varphi(\theta)$ cüt funksiyadır, yəni $\varphi(-\theta) = \varphi(\theta)$. Bu o deməkdir ki, onun qrafiki ordinat`oxuna nəzərən simmetrikdir;

–Qauss əyrisi absis oxundan yuxarıda yerləşir, yəni $\varphi(\theta)$ funksiyası həmişə müsbət qiymətlər alır;

–Qauss əyrisi $\theta = 0$ nöqtəsində maksimuma malikdir;

–Qauss əyrisi asimptotik olaraq θ oxuna yaxınlaşır. Onun iki keçid nöqtəsi vardır: biri $\varphi(\theta)$ oxundan solda, digəri isə ondan sağda yerləşir. Keçid nöqtələrinin absis qiymətləri $\theta = \pm\sigma$;

–keçid nöqtələrində əyriyə çəkilmiş toxunan xətlər absis oxunu $\theta = \pm 2\sigma$ nöqtələrində kəsirlər.



Şəkil 4.1. Qauss əyrisi

§25. Ölçmə dəqiqliyinin qiymətləndirilməsi

Ümumi halda hər hansı ölçmə nəticəsinin dəqiqliyinin qiymətləndirilməsi üçün mövcud metodikalarla həmin kəmiyyətin həqiqi qiymətindən olan meyilliyini təyin etmək lazımdır. Ölçmə nəticəsinin həqiqi meylliyi (θ) iki toplananın: ξ – təsadüfi və δ – sistematik səhvlərinin cəmindən ibarətdir, yəni

$$\theta = \xi + \delta. \tag{4.3}$$

Öz növbəsində 23-cü bölmədə verilmiş tərifə görə

$$\xi = x - M[X] \text{ və } \delta = M[X] - X.$$

Burada X – təsadüfi kəmiyyətin həqiqi qiyməti; $M[X]$ – riyazi gözləməsi; x – isə ölçmə nəticəsidir.

Ölçmələrin, xüsusi halda geodeziya ölçmələrinin, əsas dəqiqlik göstəricisi (meyarı) orta kvadratik səhvdən ibarətdir və m hərfi ilə işarə edilir. Ölçmənin həqiqi meylliyinin orta kvadratik səhvi aşağıdakı düsturla hesablanır:

$$m^2 = M[\theta^2]. \tag{4.4}$$

Bu düsturda θ-nın əvəzində (4.3) ilə verilmiş qiymətini yazıb və $M[\xi] = 0$ olduğunu nəzərə alsaq (bax, düstur (4.2)), alarıq:

$$m^2 = M[\xi^2] + M[\delta^2]. \tag{4.5}$$

(4.5) ifadəsində birinci toplanan təsadüfi kəmiyyətin standartının kvadratı, ikinci isə δ sistematik kəmiyyətin standartının kvadratıdır, yəni

$$M[\xi^2] = m_\Delta^2 \text{ və } M[\delta^2] = m_\delta^2.$$

Onda, (4.5) düsturunu bu şəkildə yaza bilərik:

$$m^2 = m_\Delta^2 + m_\delta^2 \tag{4.6}$$

və yaxud

$$m = \sqrt{m_\Delta^2 + m_\delta^2}. \tag{4.7}$$

Nəzəri cəhətdən (4.7) düsturu qoyulmuş məsələni həll etsə də, ölçülən kəmiyyətin riyazi gözləməsi və həqiqi qiyməti məlum olmadığından bu düsturla orta kvadratik səhvin dəqiq qiymətini təcrübi olaraq hesablamaq qeyri-mümkündür. Lakin ölçmə nəticələrinə əsaslanaraq orta kvadratik səhvin qiymətini müəyyən təqribiliklə aşağıdakı düsturla tapmaq olar:

$$m \approx \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} \theta_i^2}{n}}. \tag{4.8}$$

Burada n bərabərdəqiqlikli ölçmələr sayıdır.

(4.8) düstüru *Qauss düstüru* adlanır. Təsadüfi toplanan səhvinin orta kvadratik səhvini, yəni m_Δ-nın qiymətini isə Bessel düsturu ilə kifayət dərəcədə yüksək dəqiqliklə hesablamaq mümkündür:

$$m_\Delta = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x})^2}{n-1}}. \tag{4.9}$$

Burada: x_i – təkrar ölçmə nəticələri, $i = 1,2,3,...,n$; $\overline{x}$ – isə hesabi orta qiyməti olub aşağıdakı düsturla hesablanır

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}. \tag{4.10}$$

Əgər həqiqi meylliyin orta kvadratik səhvi m və təsadüfi toplananın orta kvadratik səhvi m_Δ-nin qiymətləri məlum olarsa, onda (4.6) düsturundan m_δ üçün yaza bilərik:

$$m_\delta = \sqrt{m^2 - m_\Delta^2}. \tag{4.11}$$

Qeyd edək ki, ölçmələrin dəqiqliyinin qiymətləndirilməsində bir sıra köməkçi göstəricilərdən: *orta* və *ehtimal* səhvlərdən də istifadə edilir.

Orta səhvin nəzəri qiyməti təsadüfi səhvin mütləq qiymətlərinin riyazi gözləməsindən ibarətdir:

$$\upsilon = M(|\xi|). \tag{4.12}$$

Onun təqribi qiymətini aşağıdakı düsturla hesablamaq olar:

$$\upsilon = \frac{\sum_{i=1}^{n} |\upsilon_i|}{n}. \tag{4.13}$$

Burada n – ölçmələrin sayı; $\upsilon_i = x_i - \bar{x}$ – hesabi ortadan olan meyllikdərdir.

Orta kvadratik səhvin təsadüfi toplananı ilə orta səhv arasında təqribi olaraq belə bir əlaqə mövcuddur:

$$m_\Delta \approx 1{,}12\upsilon. \tag{4.14}$$

Ehtimal səhv (r)

$$\Phi\left(\frac{r}{m_\Delta}\right) = 0{,}5 \tag{4.15}$$

ifadəsindən təyin edilir. Əgər ölçmə nəticələrinin hesabi ortadan olan υ_i meylliklərini mütləq qiymətcə artan sırada düzsək, onda bu sıranın ortasında yerləşən kəmiyyət ehtimal səhvin təqribi qiyməti olacaqdır. Burada Φ - ehtimallar inteqralı funksiyasıdır.

Ehtimal səhvlə orta kvadratik səhvin təsadüfi toplananı arasında əlaqə

$$r \approx 0{,}67 \cdot m_\Delta \tag{4.16}$$

şəklində göstərilir.

§26. Mütləq və nisbi ölçmə səhvləri

Ölçmənin orta kvadratik səhvi (m), orta səhvi (υ), ehtimal səhvi (r) və həqiqi səhvi (θ) *mütləq ölçmə səhvləri* adlanır. Mütləq səhvin həmin kəmiyyətin ölçülmüş qiymətinə olan nisbəti isə *nisbi səhv* adlanır. Elə kəmiyyətlər vardır ki, onların dəqiqliyini yalnız nisbi səhvlə ifadə etmək düzgün olar. O cümlədən xətti ölçmələr (məsafələr) yalnız nisbi səhvlə səciyyələndirilir. Belə ki, məsafənin uzunluğunun 1 *m* səhvlə ölçülməsi dəqiqliyi haqqında mülahizələr yürütmək imkanı vermir. Lakin bu səhvin məsafəyə nisbətdə verilməsi ilə (nisbi səhvlə) hər şey aydınlaşır: əgər məsafə otağın uzunluğudursa, onda 1 m səhv nəticəsi pisdir, böyük məsafələrdə isə onu yaxşı qəbul etmək olar.

Tutaq ki, hər hansı kəmiyyətin ölçmədən alınmış qiyməti x-dir. Onda, aşağıdakı nisbi səhvlər təyin edilir:

$\frac{m}{x} = \frac{1}{N_1}$ – orta kvadratik nisbi səhv;

$\frac{\upsilon}{x} = \frac{1}{N_2}$ – orta nisbi səhv;

$\frac{r}{x} = \frac{1}{N_3}$ – ehtimal nisbi səhv;

$\frac{\theta}{x} = \frac{1}{N_4}$ – həqiqi nisbi səhv.

Adətən nisbi səhvin məxrəci yuvarlaşdırılaraq ikiqiymətli rəqəm və sıfırlar şəklində yazılır. Məsələn, $\frac{m_s}{S} = \frac{1}{25000}$.

§27. Ölçmələr funksiyasının orta kvadratik səhvi

Geodeziyada bir çox lazımi kəmiyyətlər ölçmələr funksiyası şəklində təyin edilir. Məsələn, hər hansı məntəqənin koordinatları məsafə və bucaq ölçmələrinin funksiyası kimi təyin edilir. Belə olan halda həmin funksiyanın səhvi də funksiya arqumentlərinin səhvləri əsasında onların funksiyası kimi hesablanır. Ölçmələr funksiyası səhvinin qiyməti bilavasitə ölçülmüş kəmiyyətlərin səhvlərinin daxil olduğu funksiya ilə hesablanır.

Tutaq ki, bilavasitə ölçülmüş kəmiyyətlərin orta kvadratik səhvləri məlumdur və onların funksiyası üçün orta kvadratik səhvin qiymətini tapmaq tələb olunur. Bu məsələnin həlli zamanı iki hal ola bilər:

–ölçülmüş kəmiyyətlər korrelə olunmuşlar (bir-biri ilə qarşılıqlı əlaqədədirlər);

–ölçülmüş kəmiyyətlər korrelə olunmamışlar (onlar arasında əlaqə yoxdur).

Ümumi halda kəmiyyətlər arasında korrelyasiya əlaqəsinin olub-olmaması və yaxud bu əlaqənin dərəcəsi (sıxlığı) korrelyasiya əmsalı ilə təyin edilir.

Əgər iki və ya bir neçə təsadüfi kəmiyyətin hər bir cütü üçün təyin edilmiş korrelyasiya əmsalı sıfra bərabərdirsə, onda belə kəmiyyətlər arasında əlaqənin olmadığı göstərilir və onlar korrelə olunmamış kəmiyyətlər adlanır, korrelyasiya əmsalının sıfırdan fərqli qiymətlərində isə kəmiyyətlər korrelə olunmuş hesab edilir. Məsələn, x, y, z təsadüfi kəmiyyətlərinin korrelə olunmamış halında korrelyasiya əmsalları $r_{xy} = r_{xz} = r_{yz} = 0$, korrelə olunmuş halında isə $r_{xy} \neq 0; r_{xz} \neq 0; r_{yz} \neq 0$.

Beləliklə,

$$F = f(x, y, z, ..., u) \tag{4.17}$$

çoxdəyişənli funksiyasının orta kvadratik səhvini aşağıdakı düsturlarla hesablamaq olar:

a) ölçmələrin korrelə olunmadığı halda

$$m_F = \sqrt{\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_0^2 \cdot m_x^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_0^2 \cdot m_y^2 + ... + \left(\frac{\partial F}{\partial u}\right)_0^2 m_u^2} \; ; \tag{4.18}$$

b) ölçmələrin korrelə olunduğu halda

$$m_F = \sqrt{\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_0^2 \cdot m_x^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_0^2 \cdot m_y^2 + ... + \left(\frac{\partial F}{\partial u}\right)_0^2 m_u^2 +}$$

$$\overline{+2\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_0 \cdot \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_0 \cdot r_{xy} \cdot m_x \cdot m_y + \ldots} \qquad (4.19)$$

(4.18)-(4-19) düsturlarında $m_x, m_y, m_z, \ldots, m_u$ uyğun olaraq, $x, y, z, \ldots, u$ ölçmələrinin orta kvadratik səhvləri;

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_0, \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_0, \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)_0, \ldots, \left(\frac{\partial F}{\partial u}\right)_0 - F$$

funksiyasının birinci dərəcəli xüsusi törəmələridir və onların qiyməti arqumentlərin ölçülmüş qiymətlərinə əsasən hesablanır; $r_{xy}, r_{xz}, r_{yz}, \ldots$ arqument cütləri arasında korrelyasiya əmsallarıdır.

Əgər funksiya xətti şəklə malikdirsə, yəni

$$U = k_1 x \pm k_2 y \pm k_3 z \pm \ldots \pm k_n w \qquad (4.20)$$

olarsa, (4.18) düsturuna əsasən m_u üçün belə bir ifadə alarıq:

$$m_u^2 = k_1^2 m_x^2 \pm k_2^2 m_y^2 \pm k_3^2 m_z^2 \pm \ldots \pm k_n^2 m_w^2 . \qquad (4.21)$$

Burada $k_1, k_2, \ldots, k_n$ – sabit əmsallar, $x, y, z, \ldots, w$ – bir-birindən asılı olmayan ölçmə nəticələridir.

Sadə hesabi ortanın orta kvadratik səhv düsturunu (4.21) düsturuna əsasən çıxarmaq daha asandır. Bu məqsədlə (4.10) ifadəsini aşağıdakı şəklə salaq

$$\overline{x} = \frac{x_1}{n} + \frac{x_2}{n} + \ldots + \frac{x_n}{n} . \qquad (4.10')$$

(4.10')-dən göründüyü kimi $\bar{x}$ hesabi orta qiyməti x_1, x_2, x_3... kəmiyyətlərinin xətti funksiyasıdır. Fərz edək ki, bu kəmiyyətlər bir-birindən asılı deyildir. Onda (4.21) düsturuna əsasən yaza bilərik:

$$M^2 = \frac{1}{n^2} m_1^2 + \frac{1}{n^2} m_2^2 + ... + \frac{1}{n^2} m_n^2, \qquad (4.22)$$

burada: $m_1, m_2, ... m_n$ – uyğun olaraq $x_1, x_2, ... x_n$ ölçmələrinin orta kvadratik səhvləri; M – hesabi ortanın orta kvadratik səhvidir.

Əgər bütün x_i ölçmələri eyni dəqiqliklə müşahidə edilmişdirsə, yəni $m_1 = m_2 = \cdots = m_n = m$, onda (4.22) düsturu belə şəklə düşər:

$$M = \frac{m}{\sqrt{n}}. \qquad (4.23)$$

(4.23) düsturundan belə bir nəticəyə gəlinir ki, hesabi ortanın orta kvadratik səhvi tək ölçmənin səhvindən $\sqrt{n}$ dəfə kiçikdir. Başqa sözlə desək, n dəfə təkrar ölçmədən kəmiyyətin ölçülmə dəqiqliyi $\sqrt{n}$ dəfə yüksəlmiş olur.

Məsəl 4.1. Əgər üfüqi məsafə $S = 144{,}0$ m; meyl bucağı $\alpha = +2^0 30'$; h=6,23 m; $m_s = 0{,}5m$; $m_\alpha = 1{,}0'$-dirsə, nisbi yüksəkliyin m_h orta kvadratik səhvini hesablayın.

Həlli. Məlumdur ki, triqonometrik nivelirləmədə $i = \upsilon$ qəbul edilibsə, onda nisbi yüksəkliyi $h = s \cdot tg\alpha$ düsturu ilə hesablayırlar. Məsafə (S) və bucaq (α) ölçmələri öz aralarında korrelə olunmadığından (4.18) düsturuna əsasən m_h-ın hesablanması üçün belə bir ifadə alarıq

$$m_h = \sqrt{m_s^2 tg^2\alpha + \frac{s^2}{\cos^4\alpha} \cdot \frac{m_\alpha^2}{\rho^2}}\,.$$

Burada $\rho = 3438'$.

Bu düsturda arqumentlərin verilmiş qiymətlərini öz yerində yazsaq, taparıq:

$$m_h = \sqrt{0{,}5^2 \cdot 0{,}044 + \frac{144^2}{0{,}997^2} \cdot \left(\frac{1'}{3438'}\right)^2} = 4{,}8\,sm\,,$$

Nəticə: $m_h = 4{,}8\,sm$.

§28. Eyni kəmiyyətin bərabərdəqiqlikli ölçmə nəticələrinin tarazlaşdırılması

Qeyd edildiyi kimi geodeziya ölçmələri təkrarlanmaqla yerinə yetirilir. Ölçmə şəraitinin dəyişmədiyi hallarda ölçmə nəticələrini bərabərdəqiqlikli hesab edirlər. Bərabərdəqiqlikli ölçmə nəticələrinin tarazlaşdırılması məsələsinə baxaq.

Fərz edək ki, həqiqi qiyməti X olan hər hansı bir geodezik kəmiyyət n dəfə ölçülmüş, bərabərdəqiqlikli $x_1, x_2, ...x_n$ nəticələri alınmış və bu nəticələrin birgə tarazlaşdırılması yolu ilə həmin kəmiyyət üçün ən etibarlı və dəqiq qiymətin tapılması tələb olunur. Aydındır ki, X kəmiyyəti üçün etibarlı nəticə onun həqiqi qiymətinə ən yaxın ehtimal olunan qiymət olacaqdır. Kəmiyyətin bu qiyməti onun ehtimal qiyməti adlanır.

Digər tərəfdən məlumdur ki, ölçmə nəticəsinin ehtimal qiymətə yaxınlıq dərəcəsi onun ξ və δ meyllikləri ilə təyin edilir (bax; bölmə 25). Eyni zamanda δ sistematik toplananının qiymət və işarəsinin ölçmə prosesində dəyişməz qaldığını yada salsaq ehtimal qiymətin tapılması məsələsinin ξ toplananın, yəni təsadüfi səciyyəli riyazi gözləməyə nəzərən meylliyin tapılmasına gətirildiyini görərik. Lakin təcrübi olaraq riyazi gözləmənin özünün qiymətini təyin etmək mümkün olmadığından (bunun üçün kəmiyyətin həqiqi qiymətini bilmək tələb olunur) onun əvəzində ölçmə nəticələri əsasında təyin edilən hesabi orta qiymət götürülür, sonra isə bu orta qiymətinə nəzərən ξ meyllikləri hesablanır. Aydındır ki, bu halda hesablamalarda müəyyən təqribiliyə yol verilir.

Bərabərdəqiqlikli ölçmə nəticələri üçün hesabi orta qiymət aşağıdakı düsturla hesablanır:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}.$$

İndi isə bu düstur əsasında hesabi orta qiymətin hesablanma dəqiqliyini təyin edək.

Qeyd edək ki, dəqiqliyin nöqtəvi qiymətləndirilməsi mükəmməl deyil. Ümumi halda dəqiqliyin təyini dedikdə ölçülmüş kəmiyyətin həqiqi qiymətinin yerləşdiyi intervalın (etibarlılıq sərhədlərinin) göstərilməsi başa düşülür. Etibarlılıq intervalının qurulması üçün isə ehtimal qiymətin orta kvadratik səhvini (M) bilmək lazımdır, yəni

$$M^2 = M_\Delta^2 + m_\delta^2. \tag{4.24}$$

Burada: M_Δ – hesabi ortanın orta kvadratik səhvi (təsadüfi toplanan səhvi); m_δ – riyazi gözləmənin sistematik təsirə görə baş vermiş orta kvadratik səhvidir.

(4.24) düsturunda M_Δ-nın əvəzində onun (4.23) düsturu ilə təyin edilən qiymətini yazsaq alırıq

$$M^2 = \frac{m^2}{n} + m_\delta^2. \qquad (4.25)$$

(4.25) düsturundan göründüyü kimi ölçmə dəqiqliyini yüksəltmək məqsədi ilə təkrar ölçmələrin (n) sayının artırılması labüd olsa da müəyyən saydan sonra, yəni aşağıdakı bərabərsizlik yarandıqda

$$\frac{m_\Delta^2}{n} < m_\delta^2 \qquad (4.26)$$

səmərə vermir. Ona görə də ölçmə nəticələrinin müəyyən təkrarlanma sayından sonra dəqiqliyini yüksəltmək məqsədi ilə xüsusi müşahidə proqramı tutulur və burada diqqət digər səhv mənbələrinə yönəldilir. Ümumi müşahidə proqramı bir neçə sıraya bölünür. Hər bir ölçmə sırası müxtəlif ölçmə şəraitində (səhər və axşam müşahidələri, düz və əks istiqamətli ölçmələr və s.) yerinə yetirilir. Bu zaman fərz edilir ki, sistematik mənbələrin müxtəlif ölçmə sıralarına təsiri təsadüfi xarakter daşıyacaqdır. Belə olan halda ölçmələr səhvləri nəzəriyyəsinə görə yekun nəticədə sistematik təsirin qiyməti $\sqrt{k}$ dəfə azalaraq $m_\delta/\sqrt{k}$ -ya bərabər olacaqdır. Burada k – sıraların sayıdır. Onda k sayda sıralar üçün hesabi ortanın orta kvadratik səhvi ıdakı düsturla hesablanar:

$$M^2 = \frac{m_\Delta^2}{n} + \frac{m_\delta^2}{k}. \qquad (4.26)$$

Hesabi ortanın orta kvadratik səhvini (M) təyin etdikdən sonra ölçülmüş kəmiyyətin həqiqi qiyməti üçün etibarlılıq sərhədləri qurulur. Bu zaman ölçmələrin sayından asılı olaraq ya normal paylanma düsturu, ya da Styudent paylanması düsturundan istifadə edilir. Ölçmələrin sayı $n \geq 20$ olduqda, etibarlılıq sərhədləri normal paylanma qanunu ilə (4.26) düsturundan istifadə etməklə, n<20 halında isə Styudent paylanmasına görə qurulur.

Onu qeyd edək ki, tarazlaşdırma aparılarkən bütün hesablamalar müvafiq yoxlamalarla həyata keçirilir. Məsələn, hesabi ortanın hesablanmasının düzgünlüyünü yoxlamaq üçün əvvəlcə

$$\upsilon_i = x_i - \bar{x}, \quad (i = 1, 2, ..., n) \tag{4.27}$$

meyllikləri tapılır. Sonra aşağıdakı bərabərliyin doğru olması yoxlanılır:

$$[\upsilon] = [x] - \bar{x} \cdot n .$$

burada «[ ]» – K.Qauss tərəfindən qəbul edilmiş cəbri cəm işarəsidir.

Digər tərəfdən $\bar{x} \cdot n = \frac{[x]}{n} \cdot n = [x]$ olduğunu nəzərə alsaq yuxarıdakı bərabərlik belə bir şəklə düşər:

$$[\upsilon] = 0 \tag{4.28}$$

Lakin hesabi orta qiyməti hesablanarkən, müəyyən yuvarlaqlaşdırmalar aparıldığından (4.28) bərabərliyi tam dəqiqliklə yerinə yetirilmir. Ona görə də (4.28) yoxlama ifadəsinin əvəzində aşağıdakı ifadəni yazmaq daha doğru olar:

$$[\upsilon^0] = -\Delta_0 \cdot n , \tag{4.29}$$

burada:

$$\Delta_0 = \bar{x}_0 - \bar{x} \qquad (4.30)$$

– yuvarlaqlaşdırma səhvi; $\bar{x}_0$ – hesabi ortanın yuvarlaqlaşdırılmış qiyməti;

$$\upsilon_i^0 = x_i - \bar{x}_0 = \upsilon_i - \Delta_0, \quad (i = 1, 2, ..., n). \qquad (4.31)$$

Çox zaman hesablamaları asandlaşdırmaq məqsədi ilə hesabi orta qiymətini belə bir ifadədən tapırlar

$$\bar{x} = x_0 + \frac{[\varepsilon]}{n}, \qquad (4.32)$$

burada:

$$\varepsilon_i = x_i - x_0, \; (i = 1, 2, ..., n); \qquad (4.33)$$

x_0 – hesabi ortanın təqribi qiymətidir. Adətən x_0 olaraq ən kiçik qiymətə malik ölçmə nəticəsi götürülür.

Öz növbəsində (4.32) və (4.33) düsturlarından daha bir yoxlama düsturu çıxır:

$$[\upsilon_0^2] = [\varepsilon^2] - \frac{[\varepsilon]^2}{n}. \qquad (4.34)$$

Beləliklə, yuxarıda göstərilənlər əsasında bərabərdəqiqlikli ölçmə nəticələrinin tarazlaşdırılması əməliyyatı aşağıdakı ardıcılıqda həyata keçirilir:

1) x_0 qiymətinin seçilməsi və (4.33) düsturu ilə ε_i qiymətlərinin hesablaması;

2) (4.32) düsturu ilə $\bar{x}$, (4.30) ilə isə Δ_0 qiymətlərinin tapılması və hesabi ortanın yuvarlaqlaşdırılmış qiymətinin se-

çilməsi. Bu zaman $\overline{x}_0$ qiymətinin kəsr hissəsi x_i-lərdən bir pillə kiçik dərəcə vahidi ilə götürülür. Məsələn, x_i 0,1 dəqiqlikdə ölçülürsə, $\overline{x}_0$ qiyməti 0,01 pillədə götürülür;

3) υ_i^0-lərin tapılması ((4.31)) düsturu);

4) (4.29) düsturu üzrə yoxlama hesablamalarının aparılması;

5) [υ^{0^2}] və [ε^2] cəmlərinin tapılması;

6) (4.34) düsturu ilə yoxlama hesablaması;

7) vahid ölçmə üçün orta kvadratik səhvin hesablanması

$$m_\Delta = \sqrt{\frac{[\upsilon^{0^2}]}{n-1}}; \qquad (4.35)$$

8) hesabi ortanın orta kvadratik səhvinin hesablanması

$$m_{\overline{x}} = M_\Delta = \frac{m_\Delta}{\sqrt{n}}; \qquad (4.36)$$

9) Vahid ölçmə və hesabi ortanın orta kvadratik səhvləri üçün orta kvadratik səhvlərin hesablanması:

$$m_m \approx \frac{m}{\sqrt{2(n-1)}}; \qquad (4.37)$$

$$m_{M_\Delta} \approx \frac{M_\Delta}{\sqrt{2n}}. \qquad (4.38)$$

Burada: m_m – orta kvadratik səhvin orta kvadratik səhvi; m_{M_Δ} – hesabi ortanın orta kvadratik səhvinin orta kvadratik səhvidir.

10) Nəhayət, etibarlılıq intervallarının qurulması:

–kəmiyyətin həqiqi qiyməti üçün:

$$\overline{x} - t_\beta m_{\overline{x}} \le X \le \overline{x} + t_\beta m_{\overline{x}}; \qquad (4.39)$$

–standart üçün:

$$\gamma_1 m \leq \sigma \leq \gamma_2 m; \tag{4.40}$$

—-hesabi ortanın standartı üçün

$$\gamma_1 m_{\bar{x}} \leq \sigma_{\bar{x}} \leq \gamma_2 m_{\bar{x}}. \tag{4.41}$$

(4.39)-(4.41) düsturlarında t_β, γ_1 və γ_2 əmsalları ehtimalla bağlı olub müvafiq cədvəllərdən tapılır (bax, əlavə V).

Məsələ 4.2. Cədvəl 4.1-də eyni bir üfüqi bucağın on iki dəfə bərabərdəqiqlikli ölçmə nəticələri verilmişdir. Onların riyazi tarazlaşdırılmasını həyata keçirin.

Həlli. Ölçmələr eyni kəmiyyətin bərabərdəqiqlikli nəticələri olduğundan onların tarazlaşdırılması yuxarıda göstərilmiş ardıcıllıqda müvafiq düsturlarla həyata keçirilə bilər. Hesablama nəticələrini də elə həmin cədvəldə vermək daha məqsədəuyğundur.

Yoxlama:

1) $[\upsilon^0] = -\Delta_0 \cdot n = -0{,}03'' \cdot 12 \approx -0{,}4''$;

2) $[\upsilon_0^2] = [\varepsilon^2] - \dfrac{[\varepsilon]^2}{n} = 334 - \dfrac{56^2}{12} = 72$.

Dəqiqliyin qiyməti:

1) $m = \sqrt{\dfrac{72{,}9}{11}} = 2{,}6''$; $m_m = 0{,}55''$

2) $M = \dfrac{2{,}6}{\sqrt{12}} = 0{,}74''$; $m_M = 0{,}16''$.

Styudent cədvəlində β=0,90 və r=11 qiymətlərinə görə (bu misalda, sərbəstlik dərəcəsi $r=n-1=11$) t_β=2,20 əmsalı uyğun gəldiyindən bucağın həqiqi qiymətinin etibarlılıq intervalını p=0,90 ehtimalı ilə aşağıdakı şəkildə yazmaq olar:

$$57^0 23'43{,}04'' < X < 57^0 23'46{,}30''.$$

Cədvəl 4.1. Bucaq ölçmə nəticələri

Ölçmənin sıra №-si	Ölçmə nəticələri, x_i	ε_i ('')	ε_i^2	υ_i^{02}	υ_i^{02} ('')
1	57⁰2344	4	16	–0,7	0,49
2	40	0	0	–4,7	22,1
3	43	3	9	–1,7	2,89
4	45	5	25	+0,3	0,09
5	46	6	36	+1,3	1,69
6	43	3	9	–1,7	2,89
7	48	8	64	+3,3	10,9
8	45	5	25	+0,3	0,09
9	48	8	64	+3,3	10,9
10	46	6	36	+1,3	1,69
11	47	7	49	+2,3	5,29
12	41	1	1	-3,7	13,7
x_0	57⁰23'40''	+56	334	-12,5	72,9
$\bar{x}$	57⁰23'44'',666			+12,1	
$\bar{x}_0$	57⁰23'44'',70			-0,4	
$\Delta_0 \approx$	+0,03''				

σ və σ_x üçün də β=0,90 və p=11 qəbul etsək, χ^2 cədvəlindən χ_1^2=19,7 və χ_2^2=4,4 qiymətlərinə uyğun gələn γ_1=0,743 və γ_2=1,581 qiymətlərini taparıq. Buradan (4.40) və (4.41) düsturlarına əsasən aşağıdakı etibarlılıq intervallarını qura bilərik:

$$1{,}92'' < \sigma < 4{,}06'', \quad 0{,}55'' < \sigma_{\bar{x}} < 1{,}17.$$

§29. Bərabər dəqiqlikli ölçmələr fərqinə görə dəqiqliyin qiymətləndirməsi

Geodeziya təcrübəsində elə hallar olur ki, eyni növə malik kəmiyyətlərdən hər biri iki dəfə təkrarlanmaqla ölçülür. Məsələn, teodolit gedişi tərəflərindən hər birinin uzunluğu düz və əks istiqamətlərdə təkrarən ölçülür. Belə hal üçün dəqiqliyin qiymətləndirilməsi məsələsinə baxaq.

Tutaq ki, n sayda $X_1, X_2, \ldots, X_n$ geodezik kəmiyyətləri iki dəfə təkrarən ölçülmüş və

–birinci ölçmədən $x_1', x_2', x_3', \ldots, x_n'$;

–ikinci ölçmədən $x_1'', x_2'', x_3'', \ldots, x_n''$

nəticələri alınmışdır.

Bu halda ölçmə nəticələrinin dəqiqliyinin qiymətləndirilməsi məqsədi ilə onlar arasındakı

$$d_i = x_i' - x_i'' \tag{4.42}$$

fərqlərindən istifadə edilir. Burada d_i fərqlərinə sistematik səhvlərdən azad və həqiqi qiyməti sıfır olan kəmiyyətin həqiqi səhvləri kimi baxmaq olar. Onda Qauss düsturundan istifadə etmək olar və ona əsasən ölçmələr fərqinin orta kvadratik səhvi üçün yaza bilərik:

$$m_d = \sqrt{\frac{[d^2]}{n}}, \tag{4.43}$$

burada n – ölçmə fərqlərinin sayıdır.

Öz növbəsində ölçmələr fərqinin səhvindən (m_d) istifadə etməklə vahid ölçmənin orta kvadratik səhvinin hesablanması üçün belə bir düstur alarıq:

$$m_{x_i} = \frac{m_d}{\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{[d^2]}{2n}}. \tag{4.44}$$

Digər tərəfdən İki təkrar ölçmədən hesabi orta çıxarsaq yəni, $\overline{x}_i = \frac{x_i' + x_i''}{2}$ qiymətinin orta kvadratik səhvi üçün yaza bilərik:

$$m_{\overline{x}} = \frac{m_{x_i}}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{[d^2]}{n}}. \tag{4.45}$$

Qeyd edildiyi kimi (4.42) düsturu ilə alınmış nəticələr ölçmələrdə sistematik səhvlərin olmadığı hal üçün doğrudur. Lakin çox zaman ölçmələr sistematik səhvlərdən tam azad olmur. Ölçmələrdə sistematik qalığın olmasını

$$\delta = \frac{[d]}{n} \tag{4.46}$$

hesabi orta qiymətinin sıfırdan əhəmiyyətli meyllənməsi ilə təyin etmək mümkündür. Belə hallarda

$$d_i' = d_i - \delta \tag{4.47}$$

fərqləri d_i qiymətlərinin hesabi ortadan olan meylliyi kimi qəbul edilə bilər. Aydındır ki, bu halda orta kvadratik səhvin hesablanması üçün Bessel düsturundan istifadə edilir:

$$m_d = \sqrt{\frac{[d'^2]}{n-1}}. \tag{4.48}$$

(4.48) düsturuna əsasən m_d-nin qiymətini (4.44)-də yazsaq, onda vahid ölçmə nəticəsi üçün sistematik təsirin də nəzərə alındığı orta kvadratik səhv düsturu alarıq:

$$m_{x_i} = \sqrt{\frac{[d'^2]}{2(n-1)}} . \tag{4.49}$$

Yoxlama düsturu:

$$[d'] = -n\beta , \tag{4.50}$$

burada, $\beta = \delta_{\text{yuvarlaq}} - \delta$.

Əgər

$$|[d]| \le 2{,}5 \frac{[|d|]}{\sqrt{n}} \tag{4.51}$$

şərti ödənirsə, onda hesab etmək olar ki, d_i fərqləri sistematik təsirlərdən azaddır və dəqiqliyin qiymətləndirilməsi məqsədilə ((4.43)-(4.45)) düsturlarından istifadə etmək olar. Əks halda, dəqiqlik hesablamaları ((4.48)-(4.50)) düsturları ilə aparılmalıdır.

Məsələ 4.3. Cədvəl 4.2-də nivelirin iki horizontunda yerinə yetirilmiş nivelirləmə nəticələri verilmişdir. Bu ölçmələrə əsasən nivelir stansiyaları arasında yüksəlişin bir horizont, eləcə də iki horizontdan tapılan orta qiyməti üçün orta kvadratik səhvi tapın.

Həlli. İlk növbədə ölçmə nəticələrində sistematik qalığın olub-olmaması yoxlanılır. Bu məqsədlə (4.51) şərti ilə müəyyən edilir. Bizim misalda bu bərabərsizlik ödənmir, yəni $|[d]| = 24 > 19$.

Bu isə o deməkdir ki, d_i fərqlərində sistematik təsirlər mövcuddur. Ona görə də, hesablamalar (4.46)-(4.50) düsturları ilə aparılmış və sistematik təsirin $\delta = \frac{20}{10} = +2$ mm qiymətinə malik olduğu müəyyən edilmişdir. Hesablamaların qalan hissəsi yığcam şəkildə cədvəl 4.2-də verilir.

Cədvəl 4.2. İki horizontlu nivelirləmə nəticələri

Nivelirləmə stansiyaların nömrəsi	Birinci horizont, x_i', m	İkinci horizont, x_i'', m	d, mm	$d' = d - \delta$,	d'^2, mm²
1	+1,273	+1,270	+3	+1	1
2	+0,987	+0,988	-1	-3	9
3	+1,069	+1,065	+4	+2	4
4	+0,542	+0,542	0	-2	4
5	+0,768	+0,766	+2	0	0
6	+0,895	+0,891	+4	+2	4
7	+1,166	+1,167	-1	-3	9
8	+1,304	+1,302	+2	0	0
9	+1,198	+1,194	+4	+2	4
10	+0,484	+0,481	+3	+1	1
	$[\lvert d\rvert] = 24$		+22 –2 $\sum d = +20$	+8 –8 $\sum_i d' = 0$	36

Beləliklə, (4.49) düsturuna görə nisbi yüksəkliyin bir horizontdan tapılmış orta qiymətinin orta kvadratik səhvi

$$m_{x_i} = \sqrt{\frac{[d']}{2(n-1)}} = \sqrt{\frac{36}{18}} = 1{,}41 \text{ mm.}$$

İki horizontdan tapılmış orta qiymətinin orta kvadratik səhvi isə

$$m_{\bar{x}} = \frac{m_{x_i}}{\sqrt{2}} = \frac{1,41}{\sqrt{2}} = 1,00 \text{ mm}$$

təşkil edir.

§30. Ölçmə çəkisi anlayışı. Ölçmələr funksiyası çəkisinin hesablanması

Müxtəlif növ (qeyri-həmcins), eləcə də qeyri-bərabər dəqiqlikli ölçmələrin birgə tarazlaşdırılması ölçmə çəkisi adlanan köməkçi ədədlərdən istifadə etməklə həyata keçirilir. Ümumi halda ölçmə çəkisi (p_i) aşağıdakı düsturla təyin edilir

$$p_i = \frac{\sigma_0^2}{\sigma_i^2}, \tag{4.52}$$

burada: $\sigma_0^2 = c = const$ – bütün ölçmələr üçün sabit olub qiyməti ixtiyari seçilə bilər; σ_i^2 – i nömrəli ölçmənin dispersiyasıdır.

σ_0^2 -nin mahiyyətini açaq. Əgər $p_i = 1$ olarsa, onda (4.52) düsturundan $\sigma_0^2 = \sigma_i^2$ alarıq. Bu isə o deməkdir ki, σ_0^2 qiymətcə çəkisi vahid olan ölçmənin dispersiyasıdır (qısa şəkildə «vahid çəki dispersiyası» adlanır). Çəkisi p=1 olan ölçməyə təcrübədə rast gəlinə də bilər, gəlinməyə də bilər. O ki qaldı σ_i^2-nin qiymətinin təcrübi yolla təyini edilməsinə, bu mümkün deyil. Çünki bunun üçün ölçmələrin həqiqi qiymətini bilmək lazım gəlir. Məhz bu səbəblərdən ölçmə çəkisini təqribi olaraq

$$p_i = \frac{\mu^2}{m_i^2} \tag{4.53}$$

düsturu ilə hesablayırlar. Burada m_i – i nömrəli ölçmənin orta kvadratik səhvi, μ isə vahid çəkinin orta kvadratik səhvidir və σ_0-ın əvəzində təcrübi olaraq tapılır və yaxud qəbul edilir. Qeyd etmək lazımdır ki, (4.53) düsturu ilə p_i-nin təyini m_i qiymətinin etibarlı tapılmasını tələb edir. Ona görə də, m_i toplananı sistematik təsirdən azad olmaqla ən azı $n > 8$ sayda ölçmə əsasında hesablanmalıdır.

Bir çox hallarda σ_0 (və yaxud μ) qiymətinin ixtiyari seçilməsindən istifadə edərək p_i ölçmə çəkisini σ_i (və yaxud m_i) səhvini hesablamadan tapırlar. Məsələn, uzunluq ölçmələri zamanı p_{s_i} ölçmə çəkisi aşağıdakı qayda ilə təyin edilir.

Fərz edək ki, uzunluğu 1 m olan məsafənin standartı σ_{1m}-dir. Uzunluğu S_i olan məsafənin dispersiyası $\sigma_{S_i}^2 = \sigma_{1m}^2 \cdot S_i$ olar. Onda (4.52) düsturuna əsasən yaza bilərik

$$p_{s_i} = \frac{\sigma_0^2}{\sigma_{1m}^2 \cdot S_i}. \tag{4.54}$$

Vahid çəki standartının ixtiyari seçilməsindən bəhrələnərək $\sigma_0 = \sigma_{1m}$ qəbul etsək, (4.54) düsturu belə şəklə düşər

$$P_{s_i} = \frac{1}{S_i}. \tag{4.54'}$$

İndi isə ölçmələr funksiyası üçün çəki təyin edək.

Ölçmələr funksiyasının çəkisi də analoji qaydada təyin edilir. Belə ki, $F = f(x, y, z, ..., u)$ funksiyası üçün ölçmə çəkisinin hesablanma düsturu belə yazılır:

$$P_F = \frac{\mu^2}{m_F^2}, \tag{4.55}$$

burada $m_F - (F)$ funksiyasının orta kvadratik səhvidir və (4.55) düsturuna görə yaza bilərik:

$$m_F = \frac{\mu}{\sqrt{P_F}}. \tag{4.56}$$

(4.56) düsturunun təhlilindən göründüyü kimi ölçmələr funksiyasının dəqiqliyinin qiymətləndirilməsi məsələsi iki hissədən ibarətdir: vahid çəki səhvinin (μ) təyini və ölçmələr funksiya çəkisinin hesablanması (P_F).

Qeyd edək ki, funksiya çəkisinin təyini ölçmələr səhvləri nəzəriyyəsinin əsas məsələlərindəndir. Onun təyini üçün (4.18) düsturunun hər iki tərəfini μ^2-a bölüb $p_i = \frac{\mu^2}{m_i^2}$ olduğunu nəzərə alsaq, ölçmələr funksiya çəkisinin hesablanması üçün belə bir ifadə alırıq

$$\frac{1}{P_F} = \left(\frac{\partial F}{\partial X}\right)_0^2 \cdot \frac{1}{P_x} + \left(\frac{\partial F}{\partial Y}\right)_0^2 \cdot \frac{1}{P_y} + \ldots + \left(\frac{\partial F}{\partial U}\right)_0^2 \cdot \frac{1}{P_u}. \tag{4.57}$$

Ölçmə çəkisinə tərs olan kəmiyyəti isə adətən q_i hərfi ilə işarə edilir, yəni

$$q_i = \frac{1}{p_i}. \tag{4.58}$$

q_i – ədəbiyyatlarda *tərs çəki* adlanır. Tərs çəki qiymətləri ilə (4.57) düsturu belə yazılır:

$$q_F=\left(\frac{\partial F}{\partial X}\right)_0^2\cdot q_x+\left(\frac{\partial F}{\partial Y}\right)_0^2\cdot q_y+\ldots+\left(\frac{\partial F}{\partial U}\right)_0^2\cdot q_u \qquad (4.59)$$

(4.59) dusturu arqumentlərin korrelə olunmadığı hal üçün doğrudur.

Əgər funksiyanın arqumentləri öz aralarında bir-biri ilə korrelə olunmuşlarsa, onda bu hal üçün (4.19) düsturuna əsasən analoji qaydada yaza bilərik:

$$\frac{1}{P_F}=\left(\frac{\partial F}{\partial X}\right)_0^2\cdot\frac{1}{P_x}+\left(\frac{\partial F}{\partial Y}\right)_0^2\cdot\frac{1}{P_y}+\ldots+\left(\frac{\partial F}{\partial U}\right)_0^2\cdot\frac{1}{P_u}+$$
$$+2\cdot\left(\frac{\partial F}{\partial X}\right)_0\cdot\left(\frac{\partial F}{\partial Y}\right)_0\cdot r_{xy}\cdot\frac{1}{\sqrt{P_xP_y}}+\ldots \qquad (4.60)$$

və yaxud tərs çəkil qiymətləri ilə

$$q_F=\left(\frac{\partial F}{\partial X}\right)_0^2\cdot q_x+\left(\frac{\partial F}{\partial Y}\right)_0^2\cdot q_y+\ldots+\left(\frac{\partial F}{\partial U}\right)_0^2\cdot q_u+$$
$$+2\cdot\left(\frac{\partial F}{\partial X}\right)_0\cdot\left(\frac{\partial F}{\partial Y}\right)_0 r_{xy}\cdot\sqrt{q_x\cdot q_y}+\ldots \qquad (4.61)$$

olar.

Mövzunun daha yaxşı mənimsənilməsi üçün bir neçə təcrübi məsələ həll edək.

Məsələ 4.4. Ölçmələr funksiyası $F=x\sqrt{p}$ şəklində yazılır. Əgər ölçmə nəticəsinin qiyməti x, onun çəki qiyməti isə p olarsa, onda F funksiyasının çəkisini təyin edin.

Həlli. Ölçmələr korrelə olunmadığından (4.57) düsturuna əsasən

$$\frac{1}{P_F}=\left(\frac{\partial F}{\partial X}\right)^2\cdot\frac{1}{P}=(\sqrt{P})^2\cdot\frac{1}{P}=1$$

alarıq. Bu məsələnin həllindən geodeziya təcrübəsində tətbiq tapmış çox maraqlı nəticə çıxır.

Nəticə: Hər hansı ölçmə nəticəsini (x) onun kvadrat kökdən olan çəkisinə ($\sqrt{P}$) vurduqda vahid çəkiyə malik ölçmə alınır. Məhz bu nəticədən istifadə edərək qeyri-bərabər dəqiqlikli ölçmələri $\sqrt{P_i}$ kəmiyyətinə vurmaqla bərabərdəqiqli ölçmələr şəklinə salır və sonra onları bərabərdəqiqli ölçmələr qaydası ilə tarazlaşdırırlar.

Məsələ 4.5. Uzunluğu 450 m olan nivelir gedişinin ölçmə çəkisi dördə bərabərdir. Vahid çəkiyə malik gedişin uzunluğunu təyin edin.

Həlli. Tutaq ki, uzunluğu 1 km olan nivelir gedişinin dispersiyası σ^2_{1km}-ə bərabərdir. Onda L_i uzunluğa malik gedişin dispersiyası

$$\sigma^2_{L_i}=\sigma^2_{1km}\cdot L_i$$

olar. Buradan (4.52) düsturuna əsasən L_i gedişi üçün yaza bilərik:

$$P_{L_i}=\frac{\sigma_0^2}{\sigma^2_{1km}\cdot L_i}.$$

Eyni zamanda σ_0 qiymətinin ixtiyari seçilməsindən istifadə edərək $\sigma_0 = \sigma_{1km}$ qəbul etsək, yuxarıdakı düstur belə bir şəklə düşər:

$$P_{L_i} = \frac{1}{L_i}. \tag{4.62}$$

Nivelirləmə ölçmələrinin tarazlaşdırılması zamanı gedişlərin ölçmə çəkisi çox hallarda məhz (4.62) düsturu ilə hesablanır.

Vahid çəkiyə malik gedişin uzunluğunu L_1, çəkisi dördə bərabər olan gedişin uzunluğunu isə L_4 ilə işarə edək. Onda (4.62) düsturundan istifadə etməklə aşağıdakı mütənasibliyi qura bilərik:

$$\frac{P_1}{P_4} = \frac{1/L_1}{1/L_4} = \frac{L_4}{L_1},$$

buradan isə

$$L_1 = \frac{P_4}{P_1} \cdot L_4 = 4 \cdot 450\,m = 1800\,m$$

alarıq.

Məsələ 4.6. Üçbucaqda α bucağı iki dəfə və hər dəfədən isə $m_\alpha = 3{,}0''$ qiymətinə malik orta kvadratik səhvlə; β bucağı üç dəfə $m_\beta = 4{,}0''$; γ bucağı isə altı dəfə $m_\gamma = 6{,}0''$ dəqiqliyi ilə ölçülmüşdür. Əgər vahid çəki səhvinin qiyməti $\mu = 5{,}0''$ olarsa, onda üçbucağın daxili bucaqlarının orta qiymətlər cəminin çəkisini təyin edin.

Həlli. İlk növbədə (4.36) düsturu ilə üçbucağın hər bir bucağının hesabi orta qiyməti üçün orta kvadratik səhvləri hesablayaq:

$$m_{\bar{\alpha}} = \frac{m_\alpha}{\sqrt{2}} = \frac{3}{\sqrt{2}}; \; m_{\bar{\beta}} = \frac{m_\beta}{\sqrt{3}} = \frac{4}{\sqrt{3}}; \; m_{\bar{\gamma}} = \frac{m_\gamma}{\sqrt{6}} = \frac{5}{\sqrt{6}}.$$

Digər tərəfdən bucaqların orta qiymətlər cəminə ayrı-ayrı bucaqların xətti funksiyası kimi baxmaq olar:

$$\Sigma = \bar{\alpha} + \bar{\beta} + \bar{\gamma},$$

Onda (4.57) düsturuna əsasən cəm tərs ölçmə çəkisi üçün belə bir ifadə yaza bilərik:

$$\frac{1}{P_\Sigma} = \frac{1}{P_{\bar{\alpha}}} + \frac{1}{P_{\bar{\beta}}} + \frac{1}{P_{\bar{\gamma}}}.$$

Öz növbəsində

$$P_{\bar{\alpha}} = \frac{\mu^2}{m_{\bar{\alpha}}^2} = \frac{25}{9/2} = \frac{50}{9}; \quad P_{\bar{\beta}} = \frac{75}{16}; \quad P_{\bar{\gamma}} = \frac{25}{6}.$$

Nəhayət, orta qiymətlər çəminin tərs çəkisi

$$\frac{1}{P_\Sigma} = \frac{1}{50/9} + \frac{1}{75/16} + \frac{1}{25/6} = \frac{95}{150},$$

çəkisi isə $P_\Sigma = 1{,}58$ qiymətinə bərabər olar.

§31. Eyni kəmiyyətin qeyri-bərabər dəqiqliyə malik ölçmə nəticələrinin tarazlaşdırılması

Fərz edək ki, hər hansı X geodezik kəmiyyəti n dəfə ölçülmüş və $p_1, p_2, ..., p_n$ çəkilərinə malik qeyri-bərabər dəqiqlikli $x_1, x_2, ..., x_n$ ölçmə nəticələri alınmışdır.

Ölçmələr səhvləri nəzəriyyəsində göstərilir ki, bu kəmiyyət üçün yekun olaraq ən etibarlı ehtimal qiyməti onun hesablanmış ümumi hesabi orta və yaxud orta çəki adlanan qiyməti olacaqdır. Bu qiymət belə hesablanır:

$$\bar{x} = \frac{[px]}{[p]}. \tag{4.63}$$

Əgər ölçmələrdə sistematik təsir yoxdursa, onda ümumi hesabi ortanın orta kvadratik səhvi aşağıdakı düsturla təyin edilir:

$$m_{\bar{x}} = M = \frac{\mu}{\sqrt{[P]}}, \tag{4.64}$$

Əgər (δ) sistematik təsiri varsa,

$$M = m_{\bar{x}} = \sqrt{\frac{\mu^2}{[P]} + m_\delta^2} \tag{4.65}$$

olar.

(4.64) və (4.65) düsturlarında

$$\mu = \sqrt{\frac{[PV_i^2]}{(n-1)}}, \tag{4.66}$$

$V_i = x_i - \bar{x}$.

Ədəbiyyatlarda (4.66) düsturunu qeyri-bərabər dəqiqlikli ölçmələr üçün Bessel düsturu adlandırırlar. μ və M qiymətləri üçün orta kvadratik səhvlərin qiyməti isə uyğun olaraq aşağıdakı düsturlarla tapılır:

$$m_\mu \approx \frac{\mu}{\sqrt{2(n-1)}}; \qquad (4.67)$$

$$m_M \approx \frac{m_{\bar{x}}}{\sqrt{[P]}}. \qquad (4.68)$$

Qeyri-bərabər dəqiqlikli ölçmələr üçün etibarlılıq intervalları eynilə bərabərdəqiqlikli ölçmələrdə olduğu kimi (bax: bölmə 30) qurulur:

$$\bar{x} - t_\beta \cdot m_{\bar{x}} < X < \bar{x} + t_\beta \cdot m_{\bar{x}}; \qquad (4.69)$$

$$\gamma_1 \mu \leq \sigma_0 \leq \gamma_2 \cdot \mu; \qquad (4.70)$$

$$\gamma_1 m_{\bar{x}} \leq \sigma_{\bar{x}} \leq \gamma_2 m_{\bar{x}}. \qquad (4.71)$$

Beləliklə, qeyri-bərabər dəqiqlikli ölçmələr sırasının yekun tarazlaşdırılma ardıcıllığını yazaq:

1. $\bar{x}$ qiymətinin hesablanması. Bu məqsədlə (4.63) düsturunun əvəzində aşağıdakı ifadədən istifadə etmək daha məqsədəuyğundur

$$\bar{x} = x_0 + \frac{[\varepsilon p]}{[p]}. \qquad (4.72)$$

Burada $\varepsilon_i = x_i - x_0$. Onu da qeyd edək ki, x_0-ın qiyməti olaraq ölçmə nəticələrindən qiymətcə ən kiçiyi götürülür.

2. $\upsilon_i = x_i - \overline{x}_0$ meylliklərinin hesablanması və nəticələrin düzgünlüyünün $[p\upsilon] = -\beta[p]$ bərabərliyi ilə yoxlanması.

Burada, $\overline{x}_0$ – hesabi ortanın yuvarlaqlaşdırılmış qiyməti; $\beta = \overline{x}_0 - \overline{x}_{dəqiq}$ – yuvarlaqlaşdırma səhvidir.

3. $[p\upsilon^2]$ qiymətinin hesablanması və

$$[p\upsilon^2] = [p\varepsilon^2] - \frac{[p\varepsilon]^2}{[p]}$$

düsturu ilə yoxlanması.

4. (4.64), (4.66), (4.67) və (4.68) düsturları əsasında μ, M, m_μ və m_M səhvlərinin hesablanması.

5. (4.69), (4.70) və (4.71) düsturlarının köməyi ilə etibarlılıq intervallarının qurulması.

Qeyd: μ kəmiyyətinin (4.66) düsturu ilə hesablanmış qiyməti və onun tarazlaşdırmadan əvvəl qəbul edilmiş qiyməti arasındakı fərq m_μ həddini aşmamalıdır. Əgər aşırsa, onda bu ölçmələrdə sistematik təsirin olmasını göstərir.

Məsələ 4.7. M məntəqəsinin yüksəkliyini cədvəl 4.3-də verilmiş ölçmə nəticələri əsasında altı nivelir gedişindən təyin etmək olar. Nivelir şəbəkəsinin riyazi tarazlaşdırılması yolu ilə M məntəqəsi üçün ən etibarlı yüksəklik qiymətini təyin edin.

Həlli. Nivelir gedişləri müxtəlif uzunluqlara malik olduğundan M məntəqəsinin yüksəkliyi hər nivelir gedişindən bir dəqiqliklə tapılacaqdır. Başqa sözlə desək, məsələnin həlli bu bölmədə verilmiş qeyri-bərabər dəqiqlikli ölçmə nəticələrinin tarazlaşdırılması alqoritmləri ilə aparılmalıdır. Eyni zamanda hesablamaları cədvəl şəklində vermək daha məqsədəuyğundur (cədvəl 4.3).

$$\frac{[p\varepsilon]}{[p]} = +10{,}7\,;$$

Cədvəl 4.3. Nivelir gedişi ölçmələri

Nivelir gedişinin nömrəsi	Hm (m)	m_H (mm)	$P=\frac{10}{m_H^2}$	ε (mm)	$p\varepsilon$ (mm)	$p\varepsilon^2$ (mm)^2	υ (mm)	$p\upsilon$ (mm)	$p\upsilon^2$ mm^2)
1	196,529	6,3	0,25	+12	3,0	36,0	+1,3	+0,33	0,4
2	196,522	8,4	0,14	+5	0,70	3,5	-5,7	-0,80	4,6
3	196,517	9,1	0,12	0	0	0	-10,7	-1,28	13,7
4	196,532	4,3	0,54	+15	8,10	121,5	+4,3	+2,32	10,0
5	196,530	5,2	0,37	+13	4,81	62,5	+2,3	+0,85	2,0
6	196,520	7,5	0,18	+3	0,54	1,6	-7,7	-1,39	10,7
x_0=196,517			[P]=1,60		17,15			3,47 +3,50	41,4
					[pS^2]= =225,1			[Pυ]= =+0,03	

$$\frac{[p\varepsilon]}{[p]}=\frac{+17{,}15}{1{,}60}=+10{,}72\,mm;$$

$$\bar{x}=196{,}5277;$$

$$\beta=-0{,}02;\quad -[p]\cdot\beta=0{,}03;$$

$$[p\upsilon^2]=225{,}1-\frac{294{,}1}{1{,}6}=41{,}3\,;$$

(4.66) düsturuna görə $\mu=\sqrt{\frac{41{,}4}{6-1}}=2{,}9\,mm$ və tarazlaşdırmadan əvvəl $\mu^2=c=10$ qəbul edildiyindən $\sqrt{c}=\sqrt{10}=3{,}1$ olar. Digər tərəfdən

$$m_\mu=\frac{2{,}9}{\sqrt{2(6-1)}}=0{,}92\,mm$$

taparıq. Onda $\left|\mu - \sqrt{c}\right| = |2{,}9 - 3{,}1| = 0{,}2 < 0{,}92 = m_\mu$ ifadəsindən belə bir nəticəyə gəlmək olar ki, ölçmələrdə sistematik təsir nəzərə alınmaz dərəcədədir. Ona görə də (4.64) düsturundan istifadə edə bilərik və buradan $M = 2{,}9/\sqrt{1{,}6} = 2{,}3\,mm$, (4.68) düsturuna görə isə $m_M = 0{,}92/\sqrt{1{,}6} = 0{,}73\,mm$ nəticəsini alırıq.

Nəhayət, hesablamaların sonunda aşağıdakı etibarlılıq intervallarını qururuq:

$$196{,}5229\,m < X < 196{,}5325\,m;$$
$$1{,}9\,mm < \sigma_0 < 6{,}1\,mm;$$
$$1{,}5\,mm < \sigma_{\bar{x}} < 4{,}8\,mm.$$

Qeyd: Etibarlılıq intervalları qurularkən müvafiq əmsallar üçün β=0,90; t_β=2,1; γ_1=0,672 və γ_2=2,090 qiymətləri götürülmüşdür.

§32. Qeyri-bərabər dəqiqlikli ölçmələr fərqinə görə dəqiqliyin qiymətləndirilməsi

Geodeziya ölçmələri təcrübəsində elə hallarla rastlaşılır ki, eyni növə malik kəmiyyətlərdən hər biri iki dəfə təkrarən eyni dəqiqliklə ölçülsə də, bir-birinə nəzərən müxtəlif dəqiqlikli olur. Məsələn, poliqonometriya gedişinin tərəflərinin uzunluğu düz və əks istiqamətlərdə eyni dəqiqliklə, lakin tərəflər müxtəlif üsullarla – parallaktik üsulla və işıq məsafəölçənlə ölçüldüyündən müxtəlif dəqiqlikli ola bilər. Aydındır ki, bu halda hər bir X_i (i=1, 2, ..., n) kəmiyyəti üçün

$$\begin{cases} d_1 = x_1' - x_1'', \\ d_2 = x_2' - x_2'', \\ d_n = x_n' - x_n'' \end{cases} \qquad (4.73)$$

ölçmələr fərqini hesablaya bilərik. Əgər i nömrəli kəmiyyətin ölçmə çəkisini

$$p_i = p'_{x_i} = p_{x''_i} \qquad (4.74)$$

işarə etsək, onda ölçmələr fərqinin ölçmə çəkisini belə taparıq

$$\frac{1}{p_{d_i}} = \frac{1}{p_{x'_i}} + \frac{1}{p_{x''_i}} = \frac{2}{p_{x_i}}.$$

Buradan

$$p_{d_i} = \frac{p_{x_i}}{2} \qquad (4.75)$$

olar.

Ölçmələrdə sistematik səhvlərin olmadığı halda d_i fərqlərinə həqiqi qiyməti sıfra bərabər olan kəmiyyətin həqiqi ölçmə meyllikləri kimi baxmaq olar. Ona görə bu hal üçün Qauss düsturundan istifadə etmək olar:

$$\mu = \sqrt{\frac{[P_d \cdot d^2]}{n}} = \sqrt{\frac{[Pd^2]}{2n}}. \qquad (4.76)$$

Onda, hər bir kəmiyyətin hesabi orta qiyməti, yəni $x_i = \dfrac{x'_i + x''_i}{2}$ -nin orta kvadratik səhvinin hesablanma düsturu belə şəklə düşər

$$m_{\bar{x}} = \frac{\mu}{\sqrt{2p_i}}. \qquad (4.77)$$

Ölçmələr fərqinin sistematik təsirə məruz qaldığı halda, yəni

$$\theta = \frac{[pd]}{[p]} \qquad (4.78)$$

kəmiyyətinin sıfırdan əhəmiyyətli fərqləndiyi zaman, (4.76) düsturunun əvəzində aşağıdakı düsturdan istifadə edilməlidir:

$$\mu = \sqrt{\frac{[d'^2 p]}{2(n-1)}}, \qquad (4.79)$$

burada $d'_i = d_i - \theta$.

Ölçmələrdə sistematik səhvlərin təsir dərəcəsi

$$|[p_d \cdot d]| \le 2{,}5 \frac{[|p_d \cdot d|]}{\sqrt{[p_d]}} \qquad (4.80)$$

bərabərsizliyi ilə yoxlanılır. Əgər (4.80) bərabərsizliyi ödənirsə, bu ölçmələrdə sistematik təsirin olmadığını göstərir və hesablamalar (4.76) düsturu ilə yerinə yetirilir. Əks halda, yəni (4.80) bərabərsizliyi ödənmirsə, onda hesablamalar (4.79) düsturu ilə aparılmalıdır.

Məsələ 4.8. Cədvəl 4.4-də düz və əks istiqamətli nivelir gedişləri üzrə yüksəkliklər fərqi və stansiyalar sayı göstərilmişdir. Bu verilənlərə əsasən yüksəkliklərin dəqiqliyini qiymətləndirin.

Həlli. İlk növbədə ölçmələrdə sistematik təsirin olub-olmadığını yoxlayaq. Bu məqsədlə cədvəl 4.4-dən müvafiq hesablama nəticələrini götürüb (4.80) düsturunda yazsaq, belə bir bərabərsizlik alarıq: $8{,}6 \le \frac{2{,}5 \cdot 59}{\sqrt{6{,}09}} = 59{,}77$. Yazılmış bərabərsizliyin doğru olması ölçmələrdə sistematik təsirin olmamasına dəlalət edir. Doğrudan da, $\frac{[pd]}{[p]} \approx 0$, yəni səhvlərin ümumi hesabi orta qiyməti sıfıra yaxındır. Bu isə sistematik səhvlərin olmadığı halda təsadüfi səhvlərə xas olan bir xassədir. Ona görə də dəqiqliyin qiymətləndirilməsi üçün (4.76) və (4.77) düsturlarından istifadə etmək tələb olunur. Bu düsturlarla aşağıdakı nəticələr alınır:

–bütün gedişlər üzrə Qauss düsturuna əsasən orta kvadratik səhvin qiyməti $\mu = \sqrt{\frac{Pd^2}{2n}} = \sqrt{\frac{655}{2\cdot 10}} = 5{,}7\,mm$;

–yalnız birinci gediş üzrə

$$m_{\text{I gediş}} = \frac{\mu}{\sqrt{2P_1}} = \frac{5{,}7}{\sqrt{2\cdot 1{,}43}} = 3{,}4\,mm.$$

Cədvəl 4.4

Nivelir gedişinin sıra nömrəsi	Ölçmələr fərqi d_i, mm	Stansiyaların sayı, k_i	Fərqin ölçmə çəkisi, $p_i = 10/K_i$	$p_i \cdot d_i$, mm	d_i^2, mm^2	$p_i d_i^2$, mm^2
1	+4	7	1,43	+5,7	16	22,88
2	-14	27	0,37	-5,2	196	72,52
3	-9	13	0,77	-6,9	81	62,37
4	+15	25	0,40	+6,0	225	90,00
5	-12	32	0,31	-3,7	144	44,64
6	+11	15	0,67	+7,4	121	81,07
7	-12	19	0,53	-6,4	144	76,32
8	+13	18	0,56	+7,3	169	94,64
9	+12	16	0,62	+7,4	144	89,28
10	-7	23	0,43	-3,0	49	21,07
		$[p_d]$	6,09	+33,8	$[Pd^2]$	654,79
			$\lvert[p_d \cdot d]\rvert =$	$-25{,}2$ $+8{,}6$		
			$=[[p_d \cdot d]]$	+59.0		

ƏN KİÇİK KVADRATLAR METODU

Fəsil 5
PARAMETRİK TARAZLAŞDIRMA ÜSULU

§33. Ən kiçik kvadratlar metodunun mahiyyəti

Dərsliyin birinci hissəsində qeyd olunluğu kimi, ölçmələr səhvləri nəzəriyyəsi eyni bir kəmiyyətin təkrar ölçmə nəticələrinin riyazi hesablanması qaydaları öyrənilir. Lakin bu zaman ölçülən kəmiyyətlər arasında mövcud olan riyazi əlaqələr nəzərə alınmadığından geodeziya şəbəkələrində meydana çıxan həndəsi ziddiyyətlər aradan qaldırılmamış qalır. Məsələn, nivelir gedişlərindən hər birinin ayrı-ayrılıqda riyazi hesablanmasına baxmayaraq onların kəsişdiyi qovşaq məntəqəsində yüksəkliyin çoxqiymətlilik ziddiyyəti meydana çıxır. Ən kiçik kvadratlar metodu məhz belə məsələlərin həlli ilə məşğuldur və bu zaman yerinə yetirilən müvafiq hesablamalar tarazlaşdırma hesablamaları (qısaca, tarazlaşdırma) adlanır. Ümumiyyətlə, tarazlaşdırma hesablamaları şəbəkədə artıq ölçmələrin olduğu halda meydana çıxır. Əgər geodeziya şəbəkəsində yalnız lazımi sayda, yəni qoyulmuş məsələnin həllini təmin edən minimal sayda, ölçmələr yerinə yetirilmişsə (məsələn, üçbucaqda bir tərəf və iki bucaq), onda hesablamalar ölçmələr səhvləri nəzəriyyəsinin qaydaları ilə aparılır. Lakin geodeziya ölçmələri, demək olar ki, həmişə artıq sayda yerinə yetirildiyindən, onların ən kiçik kvadratlar metodu ilə tarazlaşdırılması həyata keçirilir. Tarazlaşdırma yolu ilə geodeziya şəbəkələrindəki həndəsi ziddiyyətlər aradan qaldırılır, kəmiyyətlərin ölçmələr səhvləri nəzəriyyəsinin üsulları ilə hesablanmış ehtimal qiymətlərinə müvafiq düzəlişlər tapılaraq onların qiymətləri daha da dəqiqləşdiririlir. Eyni zamanda artıq ölçmələr sayəsində müvafiq poliqon açıqlıqları hesablanır ki, bu da ölçmə nəticələrinin dəqiqlik keyfiyyəti haqqında fikir söyləmək və ölçmələrdəki kobud səhvləri üzərə çıxararaq aradan qaldırmaq imkanı yaradır.

Tarazlaşdırma hesablamaları şərti olaraq iki hissəyə ayrılır:

1. Ölçülmüş kəmiyyətlər üçün ən ehtimal qiymətlərin tapılması.
2. Ehtimal qiymətlərə dəqiqlik göstəricilərinin təyini.

Geodeziya ölçmələrinin tarazlaşdırılması əsasən ən kiçik kvadratlar metodu (ƏKKM) ilə həyata keçirilir. Bu metoda görə ölçülmüş kəmiyyətlərə elə υ_i düzəlişləri axtarılır ki, onlar

$$[p\upsilon^2] = \min \tag{5.2}$$

şərtini ödəsin. Burada p_i kəmiyyəti i nömrəli ölçmənin çəkisidir.

K.Qauss və rus riyaziyyatçısı A.Markov tərəfindən isbat edilmişdir ki, ölçmələrdə sistematik səhvlər olmazsa, onda (5.1) şərti onları ən yaxşı qiymətlərə gətirib çıxarır.

Ən kiçik kvadratlar metodunun iki əsas tarazlaşdırma üsulu vardır: ***parametrik üsul*** və ***korrelat üsulu***. Birinci üsulda lazımi kəmiyyətlərin qiymətləri bilavasitə müvafiq normal tənliklərin həllindən özlərinin, ikincidə isə əvvəlcə köməkçi əmsallar-korrelatlar, sonra bu əmsalların funksiyası şəklində lazımi kəmiyyətlərin qiymətləri hesablanır. Ümumiyyətlə, hər iki üsul eyni bir nəticəyə gətirib çıxarır, lakin hesablamaların həcmi müxtəlif ola bilər. Məsələn, on iki aralıq məntəqəyə malik poliqonometriya gedişini parametrik üsulla tarazlaşdırarkən iyirmi dörd normal tənliyin həlli tələb edildiyi halda, korrelat üsulda bu cəmi üç tənliyin həllini tələb edir. Lakin müasir dövrdə hesablamaların EHM-də yerinə yetirildiyi halda birgə həll edilən tənliklər sayının tarazlaşdırma üsulunun seçilməsində elə böyük əhəmiyyəti yoxdur. Burada əsas diqqət başlanğıc əlaqə tənliklərinin asan tərtib edilməsinə yönəldilir. Tarazlaşdırma zamanı bəzən parametrik və korrelat üsullarının üstün cəhətlərini özündə birləşdirən kombinə üsullarından da istifadə edilir.

§34. Parametrik tarazlaşdırma üsulunun nəzəri əsasları

Qeyd edildiyi kimi parametrik üsulla tarazlaşdırılmadan lazımi kəmiyyətlərin bilavasitə tarazlaşdırılmış qiymətləri tapılır. Hesablamalara lazımi kəmiyyətlərin (parametrlərin) seçilməsi və onların k sayının müəyyənləşdirilməsi ilə başlanılır. Bu zaman ona diqqət yetirilməlidir ki, seçilmiş lazımi parametrlər öz aralarında qarşılıqlı funksional asılılıqda olmasınlar. Məsələn, poliqonometriya gedişinin tarazlaşdırılması aparılarkən aralıq məntəqələrin koordinatları lazımi parametrlər qəbul edilir.

Lazımi parametrlərin dəqiq qiymətlərini X_j $(j = 1,2,...,\kappa)$, ölçmə nəticələrinin həqiqi qiymətlərini isə Y_i $(i = 1,2,...,n)$ ilə işarə etsək, onlar arasında n sayda aşağıdakı şəkildə funksional asılılıqlar yazmaq olar:

$$Y_i = \varphi_i(X_1, X_2,...X_k), \tag{5.2}$$

burada $n \geq k$.

(5.2) tənlikləri *başlanğıc əlaqələr sistemi* adlanır.

Lakin ölçmə nəticələrinin Y_i həqiqi qiymətləri heç vaxt məlum olmadığından, aydındır ki, lazımi parametlərin X_j dəqiq qiymətlərini də təyin etmək mümkün olmayacaqdır. Bununla belə, (5.2) tənliklər sistemində Y_i və X_j-nin həqiqi qiymətlərinin əvəzində onların elə $\widetilde{y}_i$ və $\widetilde{x}_j$ qiymətlərini yazmaq olar ki, bu zaman (5.2) tənlikləri doğru bərabərliyə çevrilər, yəni

$$\widetilde{y}_i = \varphi_i(\widetilde{x}_1, \widetilde{x}_2, ..., \widetilde{x}_k). \tag{5.3}$$

Burada: $\widetilde{x}_j$, $\widetilde{y}_i$ – parametrlərin və ölçmə nəticələrinin tarazlaşdırılmış qiymətləridir.

Öz növbəsində $\widetilde{y}_i$ qiymətləri aşağıdakı ifadə ilə təyin edilir:

$$\widetilde{y}_i = y_i' + \upsilon_i, \quad i = 1, 2, ..., n. \tag{5.4}$$

Burada: y_i' – kəmiyyətin ölçülmüş qiyməti, υ_i isə ölçülmüş qiymətə tarazlaşdırılmadan tapılan düzəlişdir.

(5.4) ifadəsini (5.3)-də nəzərə alsaq υ_i düzəlişi üçün belə bir ifadə alarıq:

$$\upsilon_i = \varphi_i(\widetilde{x}_1, \widetilde{x}_2, ..., \widetilde{x}_k) - y_i'. \tag{5.5}$$

Digər tərəfdən (5.5) ifadəsini ən kiçik kvadratlar metodunun (5.1) əsas şərtində yazsaq

$$\sum_{i=1}^{n} p_i \{\varphi_i(\widetilde{x}_1, \widetilde{x}_2, ..., \widetilde{x}_k) - y_i'\}^2 = min \tag{5.6}$$

alarıq. (5.6) tənliyindən göründüyü kimi onun sol tərəfində məchullar yalnız $\widetilde{x}_j$ kəmiyyətlərindən ibarətdir. Ona görə də, tənliyin sol tərəfini hər hansı $F(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, ..., \tilde{x}_n)$ funksiyası ilə ifadə etsək, onda (5.6) şərti aşağıdakı şəklə düşər

$$F(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \ldots, \tilde{x}_k) = min. \qquad (5.7)$$

(5.7) ifadəsindən demək olar ki, parametrik üsulda tarazlaşdırma məsələsinin məğzi (5.1) şərti altında $F(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, ..., \tilde{x}_k)$ funksiyasının ekstremumlarının axtarılmasından ibarətdir. Ali riyaziyyat kursundan məlumdur ki, bu məqsədlə F funksiyasının birinci törəmələrini tapıb onları sıfra bərabər etmək lazımdır, yəni

$$\frac{\partial F}{\partial \tilde{x}_j} = 0, \quad (j = 1, 2, ..., k). \qquad (5.8)$$

Sonra isə birinci törəmələrin həllindən F funksiyasının ekstremumlarını təyin edən $\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \ldots, \tilde{x}_k$ məchulları tapılır.

Beləliklə, parametrik üsulun nəzəri əsaslarını şərh etdikdən sonra tarazlaşdırma ardıcıllığında müvafiq alqoritmləri verək.

a) parametrik düzəliş tənliklərinin tərtibi. Adətən bu tənliklər xətti şəkildə yazılır. Əgər (5.2) tənliklər sistemi qeyri-xətti şəklə malikdirsə, təcrübi olaraq onun dəqiq riyazi həlli demək olar ki, mümkün deyil. Ona görə belə hallarda məsələni müəyyən təqribiliklə (hesablama dəqiqliyi həddində) aşağıdakı qaydada həll edirlər:

x_j parametrlərinin hər hansı bir yolla $x_j^{(0)}$ təqribi qiymətləri tapılır (məsələn, ölçülmüş y'_i qiymətlərinə görə və yaxud topoqrafiki xəritənin köməyi ilə və s.) və bu qiymətlərdə $\varphi(x_1, x_2, ..., x_k)$ funksiyası Teylor sırasına ayrılır. Bu zaman sıranın yalnız xətti toplananları götürülür ($x_j^{(0)}$ qiymətləri x_j -yə mümkün qədər yaxın tapıldığından Teylor sırasının ikinci və daha yüksək dərəcəli toplananlarını nəzərə almamaq olar). Onda (5.5) tənliyinin əvəzində belə bir ifadə alarıq

$$\upsilon_i = a_i\delta x_1 + b_i\delta x_2 + \ldots + g_i\delta x_k + l_i . \qquad (5.9)$$

Burada l_i – tənliyin sərbəst həddi adlanır və belə hesablanır:

$$l_i = \varphi_i(x_1^{(0)},\ x_2^{(0)},\ldots,x_k^{(0)}) - y_i' ; \qquad (5.10)$$

(5.9) tənliyində a_i, $b_i,\ldots,g_i$ isə əmsalları $y=\varphi_i(x_1,x_2,\ldots,x_k)$ funksiyasının uyğun parametrlər üzrə birinci dərəcəli xüsusi törəmələridir və $x_j^{(0)}$ qiymətlərinə əsasən hesablanır, yəni

$$a_i = \left(\frac{\partial y_i}{\partial x_i}\right)_{x_1=x_1^{(0)}},\quad b_i = \left(\frac{\partial y_i}{\partial x_2}\right)_{x_2=x_2^{(0)}},\ldots,g_i = \left(\frac{\partial y_i}{\partial x_k}\right)_{x_k=x_k^{(0)}} . \qquad (5.11)$$

(5.9) tənlikləri parametrik *düzəliş tənlikləri sistemi* (qısaca, *düzəliş tənlikləri*) adlanır.

Əgər (5.2) başlanğıc əlaqələr sistemi xətti tənliklərdən ibarətdirsə, onda onları Teylor sırasına ayırmaq lazım gəlmir və (5.9) tənliklərindəki $a_i, b_i,\ldots,g_i$ əmsalları (5.2)-də x_j məchulları qarşısında duran əmsalların eyni olacaqdır.

b) normal tənliklərin alınması. Bu məqsədlə (5.8) tənliyindən istifadə edilir. Belə ki, tənliklər sisteminin birinci tənliyi üçün (5.1) şərtinə əsasən alarıq

$$\frac{\partial F}{\partial X_1} = 2p_1 \upsilon_1 . \frac{\partial \upsilon_1}{\partial X_1} + 2p_2 \upsilon_2 \frac{\partial \upsilon_2}{\partial X_1} + ... + 2p_n \upsilon_n . \frac{\partial \upsilon_n}{\partial X_1} = 0 . \quad (5.12)$$

Burada

$$\frac{\partial \upsilon_i}{\partial X_1} = a_i, \ (i = 1, 2, ..., n)$$

olduğunu nəzərə alsaq (bax, (5.9) düsturu) və (5.12) tənliyinin hər iki tərəfini ikiyə bölsək, (5.12) belə bir şəklə düşər

$$p_1 a_1 \upsilon_1 + p_2 a_2 \upsilon_2 + ... + p_n a_n \upsilon_n = [pa\,\upsilon] = 0, \qquad (5.13)$$

burada «[ ]» – K.Qauss tərəfindən qəbul edilmiş cəbri cəm işarəsidir.

Eyni qayda ilə (5.8) sisteminin digər tənlikləri üçün yaza bilərik

$$[pb\,\upsilon] = 0; \ [pc\,\upsilon] = 0; ...; \ [pg\,\upsilon] = 0. \qquad (5.14)$$

Əgər (5.14) tənliklərində υ_i əvəzində onların (5.9) ifadələri ilə təyin edilən qiymətlərini yazsaq, onda aşağıdakı şəkildə k sayda k məchullu xətti tənliklər sistemi alarıq:

$$\begin{aligned} &[paa]\delta x_1 + [pab]\delta x_2 + ... + [pag]\delta x_k + [pal] = 0; \\ &[pab]\delta x_1 + [pbb]\delta x_2 + ... + [pbg]\delta x_k + [pbl] = 0; \\ &...; \\ &[pag]\delta x_1 + [pbg]\delta x_2 + ... + [pgg]\delta x_k + [pgl] = 0. \end{aligned} \qquad (5.15)$$

Məchulların qarşısında duran əmsallar belə açılır:

$$
\begin{aligned}
&[paa] = p_1a_1a_1 + p_2a_2a_2 + \dots + p_na_na_n; \\
&[pab] = p_1a_1b_1 + p_2a_2b_2 + \dots + p_na_nb_n; \\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
&[pag] = p_1a_1g_1 + p_2a_2g_2 + \dots + p_na_ng_n; \\
&[pbb] = p_1b_1b_1 + p_2b_2b_2 + \dots + p_nb_nb_n; \\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
&[pgg] = p_1g_1g_1 + p_2g_2g_2 + \dots + p_ng_ng_n,
\end{aligned}
\qquad (5.15')
$$

tənliklərin sərbəst hədləri isə

$$
\begin{aligned}
&[pal] = p_1a_1l_1 + p_2a_2l_2 + \dots + p_na_nl_n; \\
&[pbl] = p_1b_1l_1 + p_2b_2l_2 + \dots + p_nb_nl_n; \\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
&[pgl] = p_1g_1l_1 + p_2g_2l_2 + \dots + p_ng_nl_n.
\end{aligned}
\qquad (5.15'')
$$

(5.15) tənlikləri *normal tənliklər*, hamısı bir yerdə isə *normal tənliklər sistemi* adlanır. Bu sistemin əmsallar matrisi

$$
R = \begin{bmatrix} [paa] & [pab] & \dots & [pag] \\ [pab] & [pbb] & \dots & [pbg] \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ [pag] & [pbg] & \dots & [pgg] \end{bmatrix} \qquad (5.16)
$$

aşağıdakı xassələrə malikdir:

1) k dərəcəli kvadrat matrisdir, yəni ölçüsü $k \times k$;

2) baş diaqonala görə simmetrikdir;

3) matrisin diaqonal elementləri (kvadrat əmsalları) sıfırdan böyükdür;

4) R matrisinin təyini (determinantı) sıfırdan böyükdür,

yəni det R >0.

R matrisinin bu xassələri çox mühüm əhəmiyyət daşıyır və ümumilikdə tənliklər sisteminin həllini olduqca asanlaşdırır.

c) normal tənliklərin Qauss üsulu ilə həlli. Parametrik üsulla tarazlaşdırmanın növbəti mərhələsi normal tənliklər sisteminin həllindən ibarətdir. Normal tənliklərin həllinin müxtəlif üsulları vardır:

–Qauss üsulu;

–Kvadrat köklər üsulu;

–Ardıcıl yaxınlaşmalar üsulu;

–Kramer üsulu və s.

Bu üsullardan Qauss üsulu hesablama asanlığı və səmərəliliyi ilə digərlərindən fərqlənir və geniş tətbiq edilir. Üsulun məğzi normal tənliklərdəki məchulları əvəzetmələr yolu ilə ardıcıl olaraq tənliklərdən çıxardaraq (5.15) başlanğıc normal tənliklərini ekvivalent tənliklər şəklinə salmaq və sonra əks gedişlə sonuncu birməchullu ekvivalent tənlikdən başlayaraq məchulların müvafiq qiymətlərini təyin etməkdən ibarətdir.

Yuxarıda göstərilən qaydalara uyğun əvəzetmələr aparsaq, (5.15) sistemindən aşağıdakı ekvivalent tənliklər sistemini alarıq:

$$\begin{aligned}
&[paa]\delta x_1 + [pab]\delta x_2 + [pac]\delta x_3 + \ldots + [pag]\delta x_k + [pal] = 0;\\
&\qquad [pbb\cdot 1]\delta x_2 + [pbc\cdot 1]\delta x_3 + \ldots + [pbg\cdot 1]\delta x_k + [pbl\cdot 1] = 0;\\
&\qquad\qquad [pcc\cdot 2]\delta x_3 + \ldots + [pcg\cdot 2]\delta x_k + [pcl\cdot 2] = 0; \quad (5.17)\\
&\qquad\qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\qquad\qquad\qquad [pgg\cdot(k-1)]\delta x_k + [pgl(k-1)] = 0.
\end{aligned}$$

Ekvivalent tənliklər sisteminin alınması Qauss üsulunun düz gedişi adlanır. Əks gedişdə isə (5.17) tənliklərini uyğun kvadrat əmsallara ([paa], [$pbb\cdot 1$] və s.) bölməklə eliminasion tənlikləri alınır ki, burada sonuncudan başlayaraq δx_i məchullarının qiymətləri hesablanır:

$$\delta x_1 = -\frac{[pab]}{[paa]}\delta x_2 - \frac{[pac]}{[paa]}\delta x_3 - .... - \frac{[pag]}{[paa]}\cdot\delta x_k - \frac{[pal]}{[paa]};$$

$$\delta x_2 = -\frac{[pbc\cdot 1]}{[pbb\cdot 1]}.\delta x_3 - .... - \frac{[pbl\cdot 1]}{[pbb\cdot 1]}; \qquad (5.18)$$

....

$$\delta x_k = -\frac{[pgl\cdot(k-1)]}{[pgg\cdot(k-1)]}.$$

ç) Qauss alqoritminin açılış qaydası. (5.14)-(5.18) tənliklərində kvadrat mötərizələr şəklində yazılmış əmsallar *Qauss alqoritmləri* adlanır. Eyni zamanda nöqtədən sonra j rəqəmi əlavə edilmiş alqoritmlər *çevrilmiş*, rəqəm yazılmamışlar isə *çevrilməmiş* Qauss alqoritmləri adlandırılır. Bu alqoritmlərdən birini digəri ilə ifadə etmək olar. Qayda aşağıdakı kimidir:

- istənilən çevrilmiş Qauss alqoritmi həmin hərfi işarələrlə yazılmış çevrilməmiş alqoritmdən çevrilmiş alqoritmdəki j rəqəmi sayda kəsrləri çıxmaqla alınır. Bu kəsrlərin məxrəcləri $(j-1)$ nömrəli ekvivalent tənliklərin birinci əmsallarından, sürətləri isə çevrilmə dərəcəsi rəqəmi məxrəcdəki alqoritmin rəqəmi ilə eyni olan iki alqoritm hasilindən ibarətdir. Bu alqoritmlərdən birincisi məxrəcin birinci hərfinin açılan alqoritmin birinci hərfinə, ikincisi isə məxrəcin ikinci hərfinin alqoritmin ikinci hərfinə vurulmasından alınır. Məsələn,

$$[bc\cdot 1] = [bc] - \frac{[ab]\cdot[ac]}{[aa]};$$

$$[cl\cdot 2] = [cl] - \frac{[ac][al]}{[aa]} - \frac{[bc\cdot 1][bl\cdot 1]}{[bb\cdot 1]}$$

və s.

Alqoritmin tam olmayan açılışı da mümkündür. Məsələn,

$$[dl\cdot 3]=[dl\cdot 2]-\frac{[cd\cdot 2][cl\cdot 2]}{[cc\cdot 2]}.$$

Qeyd: Qeyri-bərabər dəqiqlikli ölçmələrin tarazlaşdırılması zamanı Qauss alqoritmində həmin ölçmənin müvafiq ölçmə çəkisi (p) də göstərilir.

d) Qauss üsulunda hesablamaların düzgünlüyünün yoxlanması. Qauss üsulunda qəbul edilmiş işarələr sistemi öz sadəliyi ilə yanaşı hesablamaları yığcam sxemlərdə eyni növ əməliyyatları təkrar etməklə yerinə yetirmək imkanı verir. Eyni zamanda hesablamaların sxemlərdə aparılması aralıq nəticələrin düzgünlüyünün yoxlanması üçün əlverişli şərait yaradır. Bu da üsulun ən üstün cəhətlərindən biridir.

İlk yoxlama düzəliş tənliklərinin tərtib edilməsinin yoxlanması ilə bağlıdır. Bu məqsədlə hesablamalar iki əldən (iki nəfər tərəfindən) yerinə yetirilir. Normal tənliklərin tərtibi və həlli zamanı yoxlamalar cəmlər metodu ilə həyata keçirilir. Düzəliş tənlikləri üçün aşağıdakı bərabərliklər doğru olmalıdır:

$$a_i+b_i+c_i+\ldots+g_i+l_i=s_i,\quad i=(1,\ 2,\ \cdots,\ n);\qquad (5.18)$$

və

$$[a]+[b]+[c]+\ldots+[g]+[l]=[s].\qquad (5.19)$$

Normal tənliklərin əmsalları və sərbəst hədlərinin tapılmasının düzgünlüyü belə yoxlanılır:

$$[paa]+[pab]+\ldots+[pag]+[pal]=[pas];$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$[pag]+[pbg]+\ldots+[pgg]+[pgl]=[pgs];\qquad (5.20)$$

$$[pal]+[pbl]+\ldots+[pgl]+[pll]=[pls];$$
$$[pas+[pbs]+\ldots+[pgs]+[pls]=[pss].$$

Ekvivalent tənliklərin tərtibi zamanı isə aşağıdakı bərabərliklər doğru olmalıdır:

$$\begin{array}{ll} [paa]+\ldots+[pag]+[pal]=[pas]; & \\ [pbb\cdot 1]+\ldots+[pbg\cdot 1]+[pbl\cdot 1]=[pbc\cdot 1]; & \\ [pcc\cdot 2]+\ldots+[pcg\cdot 2]+[pcl\cdot 2]=[pcc\cdot 2]; & (5.21) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\ [pgg\cdot(k\text{-}1)]+[pgl\cdot(k\text{-}1)]=[pgc\cdot(k\text{-}1)]. & \end{array}$$

Qauss sxemində düz gediş üzrə yekun yoxlama

$$[pll.k]=[plc.k]=[pcc.k] \qquad (5.22)$$

bərabərliyinin doğruluğu ilə həyata keçirilir.

Əks gedişdə δx_j məchulları üçün tapılmış qiymətlərin düzgünlüyü bu qiymətləri (5.17) ekvivalent tənliklərində yerinə qoymaqla müəyyənləşdirilir.

υ_i düzəliş qiymətləri (onlar (5.9) düstürları ilə hesablanır) (5.13) və (5.14) ifadələrində yoxlanılır.

Tarazlaşdırma zamanı yuxarıda qeyd edilənlərlə yanaşı aşağıdakı yoxlamalar da aparılır:

$$[p\upsilon^2]=[pll\cdot k]=[pls\cdot k] \qquad (5.23)$$
$$[p\upsilon^2]=[pl\cdot\upsilon]=[ps\upsilon]. \qquad (5.24)$$

Tarazlaşdırma məsələsinin ən sonuncu yoxlaması $y_i'+\upsilon_i= =\varphi_i(\tilde{x}_1,\ldots,\tilde{x}_k)$ bərabərliyinin doğruluğunun yoxlanmasından ibarətdir. Lakin $\varphi_i(\tilde{x}_1,\tilde{x}_2,\ldots,\tilde{x}_k)$ funksiyasının xətti halında bu yoxlamanın əvəzində (5.13), (5.14) və (5.23) bərabərlikləri ilə kifayətlənmək olar.

e) Normal tənliklərin sxemlərdə həlli. Adətən normal tənliklərin Qauss üsülu ilə həlli üç sxemdə yerinə yetirilir.Üç parametrli normal tənliklər sistemi üçün bu sxemlər aşağıdakı kimi yazılır (cədvəl 5.1-5.3).

Cədvəl 5.1. Hesablama sxemi №1

Ölçməin nömrəsi	$a_i\ b_i\ c_i\ l_i$	S_i	p_i	$a_ip_i\ b_ip_i\ c_ip_i\ l_ip_i$	$S_i\ p_i$	υ_i
1 2 ... n	$a_1\ b_1\ c_1\ l_1$ $a_2\ b_2\ c_2\ l_2$ .... $a_n\ b_n\ c_n\ l_n$	S_1 S_2 ... S_n	p_1 .... p_n	$a_1p_1\ b_1p_1\ c_1p_1\ l_1p_1$ $a_2p_2\ b_2p_2\ c_2p_2\ l_2p_2$ .... $a_np_n\ b_np_n\ c_np_n\ l_np_n$	S_1p_1 S_2p_2 ... S_np_n	υ_1 υ_2 ... υ_n
	$[a]\ [b]\ [c]\ [l]$	$[S]$		$[ap]\ [bp]\ [cp]\ [lp]$ $\delta x_1\quad \delta x_2\quad \delta x_2$ $[pa\upsilon]\ [pb\upsilon]\ [pc\upsilon]$	$[S{\cdot}p]$	$[\upsilon]$ $[p\upsilon^2]$

Cədvəl 5.2. Hesablama sxemi №2

	$a]$	$b]$	$c]$	$l]$	$S]$	Yoxlama
$[pa$	$[paa]$	$[pab]$	$[pac]$	$[pal]$	$[pas]$	Fərqlənmə 0,01-0,02
$[pb$		$[pbb]$	$[pbc]$	$[pbl]$	$[pbs]$	
$[pc$			$[pcc]$	$[pcl]$	$[pcs]$	
$[pl$				$[pll]$	$[pls]$	
$[ps$					$[pss]$	

Tarazlaşdırma zamanı məchulların sayı $k \leq 10$ olarsa, normal tənliklərin, həmçinin ekvivalent tənliklərin əmsalları, 0,01-0,001 dəqiqliklə hesablanır. Eliminasion tənliklərin əmsalları və məchulların qiymətləri 0,01-0,001; $\frac{1}{[paa]}, \frac{1}{[pbb\cdot 1]}$, ... kəmiyyətləri isə 0,0001 dəqiqliklə hesablanmalıdır.

Cədvəl 5.3. Hesablama sxemi №1

<table>
<tr><td></td><td>δx_1</td><td>δx_2</td><td>δx_3</td><td>l</td><td>s</td><td>Yoxlama</td></tr>
<tr><td>$\left(\frac{1}{[paa]}\right)$</td><td>$[paa]$
(-1)</td><td>$[pab]$
$-\frac{[pab]}{[paa]}$</td><td>$[pac]$
$-\frac{[pac]}{[paa]}$</td><td>$[pal]$
$-\frac{[pal]}{[paa]}$</td><td>$[pas]$
$-\frac{[pas]}{[paa]}$</td><td></td></tr>
<tr><td rowspan="3">$\left(\frac{1}{[pbb\cdot 1]}\right)$</td><td rowspan="3"></td><td>$[pbb\cdot 1]$</td><td>$[pbc\cdot 1]$</td><td>$[pbl\cdot 1]$</td><td>$[pbs\cdot 1]$</td><td></td></tr>
<tr><td rowspan="2">(-1)</td><td>$-\frac{[pbc\cdot 1]}{[pbb\cdot 1]}$</td><td>$-\frac{[pbl\cdot 1]}{[pbb\cdot 1]}$</td><td>$-\frac{[pbs\cdot 1]}{[pbb\cdot 1]}$</td><td></td></tr>
<tr><td>$[pcc\cdot 2]$
(-1)</td><td>$[pcl\cdot 2]$
$-\frac{[pcl\cdot 2]}{[pcc\cdot 2]}$</td><td>$[pcs\cdot 2]$
$-\frac{[pcs\cdot 2]}{[pcc\cdot 2]}$</td><td></td></tr>
<tr><td rowspan="2">Yoxlama</td><td>δx_1</td><td>δx_2</td><td>δx_3</td><td rowspan="2">$[pll\cdot 3]$</td><td rowspan="2">$[pls\cdot 3]$
$[pss\cdot 3]$</td><td rowspan="2"></td></tr>
<tr><td>$\delta\overline{x}_1$</td><td>$\delta\overline{x}_1$</td><td>$\delta\overline{x}_1$</td></tr>
</table>

Qauss sxemində yoxlama cəmləri 0,01-0,02 həddində fərqlənə bilər. Fərqlənmə qiyməti sxem üzrə yuxarıdan aşağıya endikcə artır və axırıncı sətirlərdə icazə verilən həddə çatır.

§35. Tarazlaşdırılmış kəmiyyətlərin dəqiqliyinin qiymətləndirilməsi

Tarazlaşdırılmış kəmiyyətlərin dəqiqliyinin qiymətləndirilməsi dedikdə onların tarazlaşdırmadan sonrakı orta kvadratik səhvinin təyini başa düşülür.

Ümumi halda istənilən kəmiyyətin orta kvadratik səhvi aşağıdakı düsturla hesablanır:

$$M_{x_j} = \mu\sqrt{\frac{1}{P_{x_j}}}, \qquad (5.25)$$

burada: μ – vahid çəki səhvi, P_{x_j} – dəqiqliyi qiymətləndirilən kəmiyyətin ölçmə çəkisidir.

(5.25) düsturundan göründüyü kimi, kəmiyyətin dəqiqliyinin qiymətləndirilməsi məsələsini şərti olaraq iki hissəyə ayırmaq olar:

1) vahid çəki səhvinin təyini;
2) P_{x_j} ölçmə çəkisinin hesablanması.

Vahid çəki səhvinin qiymətini dərsliyin otuzuncu bölməsində göstərilmiş üsullarla hesablamaq və yaxud da ixtiyari qəbul etmək olar. P_{x_j} ölçmə çəkisini isə çəki əmsalları adlanan Q_{jj} kəmiyyətləri vasitəsilə hesablayırlar.

Ən kiçik kvadratlar metodunda isbat edilir ki, ölçmə çəkiləri çəki əmsalları ilə tərs mütənasibdir, yəni

$$\frac{1}{P_{x_j}} = Q_{jj}, (i = 1,\ 2, ..., k). \qquad (5.26)$$

Öz növbəsində Q_{jj} əmsalları Q matrisinin diaqonal elementləridir. Q – *çəki əmsalları matrisi* adlanır və aşağıdakı şəklə malikdir

$$Q = \begin{pmatrix} Q_{11} & Q_{12} & \dots & Q_{1k} \\ Q_{21} & Q_{22} & \dots & Q_{2k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ Q_{k1} & Q_{k2} & \dots & Q_{kk} \end{pmatrix}. \qquad (5.27)$$

Çəki əmsalları matrisi normal tənliklər sisteminin əmsallar matrisi ilə (bax, (5.16)) tərs mütənasibdir, yəni $Q = R^{-1}$. Buradan $R \cdot Q = E$ (E – vahid matrisdir).

Beləliklə, göstərilənləri nəzərə alsaq k sayda aşağıdakı şəklə malik normal tənliklər yazmaq olar

$$R \cdot Q_j = E_j, \tag{5.28}$$

burada: Q_j elementi Q matrisinin, E_j isə E matrisinin j nömrəli sütunudur.

Qeyd edək ki, (5.15) parametrik normal tənliklər sistemini də matris yazılışında vermək olar:

$$R \cdot \Delta X + A^T PL = 0\,, \tag{5.29}$$

burada:

$$\underset{n\times k}{A} = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \dots g_1 \\ a_2 & b_2 \dots g_2 \\ \dots & \dots\dots\dots \\ a_n & b_n \dots g_n \end{pmatrix}; \quad \Delta X = \begin{pmatrix} \delta x_1 \\ \delta x_2 \\ \dots \\ \delta x_k \end{pmatrix}; \quad L = \begin{pmatrix} l_1 \\ l_2 \\ \dots \\ l_n \end{pmatrix}; \quad P = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ \dots \\ p_n \end{pmatrix}.$$

$A^T - A$ matisinin çevrilmiş (transformə olunmuş) matrisidir.

Matris yazılışda verilmiş (5.28) və (5.29) tənliklərini müqayisə etdikdə görərik ki, onlar eyni R matrisinə malik olub yalnız sərbəst hədləri ilə bir-birindən fərqlənirlər. Buradan belə bir nəticə çıxır ki, Q_j elementlərini eynilə δx_j parametrlərinin tapılması qaydasında həmin düsturlarla hesablamaq olar. Lakin sonuncu halda normal tənliklərin həllində götürülən $A^T PL$ hədlərinin əvəzində E_y sütunlarını yazmaq lazımdır. Bu zaman E_j sütunu ardıcıl olaraq aşağıdakı qiymətləri alır:

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ \ldots\ldots \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ \ldots\ldots \\ 0 \end{pmatrix}, \ldots\ldots, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \ldots \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Beləliklə, (5.28) tənliklər sistemində sərbəst hədd olaraq E_j sütununun hər dəfə bir qiymətini yazmaqla tənliklərin k dəfə təkrar həll edilməsindən Q matrisinin tərkib elementləri olan k sayda Q_j sütunları tapılır. Q matrisini Qauss sxemində də almaq olar. Bu məqsədlə üçüncü sxemdə (cədvəl 5.3) «yoxlama» qrafasından sonra k sayda E_j sütunları əlavə edilir. Bu sütunlarda hesablama əməliyyatları parametrik normal tənliklərin həlli zamanı sərbəst hədlər sütununda yerinə yetirilən hesablama əməliyyatlarının eynidir və sonda sxem 3-də yazılan hesablama nəticələrinə əsasən Q_{ij} elementlərinin qiymətləri tapılır. Bu zaman hesablama nəticələrinin düzgünlüyü $Q_{ij}=Q_{ji}$ bərabərliyi ilə yoxlanılır, çünki Q matrisi simmetrik matrisdir.

Q matrisinin bütün elementləri təyin edildikdən sonra (5.25) düsturunda $\dfrac{1}{P_{xj}}$ əvəzində müvafiq Q_{jj} qiymətini yazaraq j nömrəli kəmiyyətin tarazlaşdırılmış qiymətinin orta kvadratik səhvini hesablamaq heç bir çətinlik törətmir. Matrisinin Q_{ij} əmsallarından isə i və j nömrəli kəmiyyətlər arasında korrelyasiya əmsalının tapılmasında istifadə edilir:

$$r_{ij}=\frac{Q_{ij}}{\sqrt{Q_{ii}\cdot Q_{jj}}}. \tag{5.30}$$

§36. Tarazlaşdırılmış kəmiyyətlər funksiyasının dəqiqliyinin qiymətləndirilməsi

Bildiyimiz kimi geodeziya ölçmələrinin yerinə yetirilməsində əsas məqsəd lazımi kəmiyyətlərin ehtimal qiymətlərinin təyin edilməsindən ibarətdir. Lazımi kəmiyyətlər isə çox hallarda bilavasitə ölçülmüş kəmiyyətlərin funksiyası şəklində təyin edilir. Məsələn, məntəqənin koordinatları tərəflərin uzunluğu və direksion bucaqlarının funksiyası kimi hesablanır. Bu baxımdan ölçülmüş kəmiyyətlərlə yanaşı onların funksiyalarının da dəqiqliyini müəyyənləşdirmək zərurəti meydana çıxır.

Hər hansı $F=f(x_1, x_2, ..., x_n)$ funksiyasının dəqiqliyinin qiymətləndirilməsini aşağıdakı iki üsulla həyata keçirmək olar.

Üsul 1. Bu üsul analitik üsul adlanır. Onun mahiyyəti ondan ibarətdir ki, əgər Q çəki əmsalları matrisi məlum olarsa (məsələn, 35-ci bölmədə göstərilmiş üsullarla təyin edilmişdir), onda F funksiyasının tarazlaşdırmadan sonrakı qiymətinin dəqiqliyini səciyyələndirən tərs çəki qiymətini aşağıdakı düsturla hesablaya bilərik:

$$\frac{1}{P_F} = f \cdot Q \cdot f^T, \tag{5.31}$$

bu açıq şəkildə belə yazılır:

$$\frac{1}{p_F} = \sum_{j=1}^{k} f_j^2 Q_{jj} + 2\sum_{i<j} f_i f_j Q_{ij}. \tag{5.32}$$

Burada $f = (f_1, f_2, f_3, ..., f_k)$ matris vektoru

$$f_j = \left(\frac{\partial F}{\partial x_j}\right)_{x_j = x_j^0}$$

xüsusi törəmələrindən təşkil olunmuşdur. İndeksdə $x_j = x_j^0$ yazılışı f_j xüsusi törəmələrinin x_j^0-təqribi qiymətləri ilə hesablanmasına işarədir.

k=3 olarsa, (5.32) düsturu aşağıdakı şəklə malikdir:

$$\frac{1}{P_F} = f_1^2 Q_{11} + f_2^2 Q_{22} + f_3^2 Q_{33} + 2 f_1 f_2 Q_{12} + 2 f_1 f_3 Q_{13} + 2 f_2 f_3 Q_{23}$$

Üsul 2. Bu üsuldan Q matrisi məlum olmadığı hallarda istifadə edilir və əlavə sütun üsulu adlanır. Üsulun əsasını aşağıdakı düstur təşkil edir

$$-\frac{1}{P_F} = [f_{k+1} \cdot k] =$$

$$= f_{k+1} - \frac{f_1^2}{[paa]} - \frac{[f_2 \cdot 1]^2}{[pbb \cdot 1]} - \dots - \frac{[f_k \cdot (k-1)]^2}{[pgg \cdot (k-1)]}. \qquad (5.33)$$

Bu düsturda çevrilmiş alqoritmlər belə açılır:

$$f_{k+1} = 0;$$

$$[f_2 \cdot 1] = f_2 - \frac{[pab] \cdot f_1}{[paa]};$$

$$[f_3 \cdot 2] = f_3 - \frac{[pac] f_1}{[paa]} - \frac{[pbc \cdot 1][f_2 \cdot 1]}{[pbb \cdot 1]}.$$

....

Əgər şərti olaraq normal tənliklərin sərbəst hədlərini f matris vektorunun elementləri kimi, yəni

$$\left.\begin{array}{l}[pal]=f_1;\\ [pbl]=f_2;\\ \dots\dots\dots\\ [pgl]=f_k;\\ [pll]=f_{k+1},\end{array}\right\} \tag{5.34}$$

qəbul etsək, onda $[f_{k+1}\cdot k]$ alqoritmi eynilə $[pll\cdot k]$ Qauss alqoritmi qaydasında açılacaqdır, eləcə də $[f_2\cdot 1]$, $[f_3\cdot 2]$, $\cdots$, $[f_k\cdot(k-1)]$ alqoritmlərinin açılışı $[pbl\cdot 1]$, $[pcl\cdot 2],\cdots$, $[pgl\cdot(k-1)]$ alqoritmlərinə uyğun olacaqdır. Bu o deməkdir ki, üçüncü Qauss sxemində əlavə F sütunu yerləşdirsək və onun elementləri üzərində də l sərbəst hədlər sütununda olduğu çevirmələr aparsaq k sayda çevirmədən sonra aşağıdakı şəkildə alqoritm alarıq:

$$-\frac{1}{P_F}=[f_{k+1}\cdot k]\underline{\underline{\text{şərti}}}\,[Pll\cdot k]$$

Başqa sözlə, bu, tərs çəkinin təyini ilə bağlı məsələnin həlli deməkdir.

Tarazlaşdırılmış kəmiyyətlər funksiyasının tərs çəkisini başqa bir düsturla da hesablamaq olar:

$$-\frac{1}{P_F}=[\Sigma_{k+1}\cdot k]=$$

$$=[f]-\frac{\Sigma_1\cdot f_1}{[paa]}-\frac{[\Sigma_2\cdot 1][f_2\cdot 1]}{[pbb\cdot 1]}-\dots$$

$$\dots-\frac{[\Sigma_k\cdot(k-1)][f_k(k-1)]}{[pgg\cdot(k-1)]}, \tag{5.35}$$

burada:

$$\begin{aligned}
&\Sigma_1 = [pas] - [pal] + f_1; \\
&\Sigma_2 = [pbs] - [pbl] + f_2; \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&\Sigma_k = [pgs] - [pgb] + f_k.
\end{aligned} \qquad (5.36)$$

Adətən (5.35) düsturundan hesablamaların yoxlanması məqsədi ilə istifadə edilir. Bu zaman şərti olaraq

$$\left.\begin{aligned}
&\Sigma_1 = [pas]; \\
&\Sigma_2 = [pbs]; \\
&\ldots\ldots \\
&\Sigma_k = [pgs]; \\
&\Sigma_{k+1} = [f]
\end{aligned}\right\} \qquad (5.37)$$

qəbul etsək, onda $[\Sigma_{k+1} \cdot k]$ alqoritmini Qauss sxemində $[pls \cdot k]$ alqoritmi kimi aça bilərik. Eynilə $-\frac{1}{P_F} \overset{\text{şərti}}{=\!=} [pls \cdot k]$ və $[\Sigma_2 \cdot 1]$, $[\Sigma_3 \cdot 2], \ldots,$ $[\Sigma_k \cdot (k-1)]$ alqoritmləri uyğun olaraq $[pbs \cdot 1]$, $[pcs \cdot 2]$, ..., $[pgs \cdot (k-1)]$ alqoritmləri qaydası ilə açılacaqdır. Məsələn, $[\Sigma_3 \cdot 2]$ alqoritmini çevrilməmiş alqoritmlərlə təyin edək. (5.37) əvəzetməsindən göründüyü kimi, bu alqoritmə şərti olaraq $[pcs \cdot 2]$ alqoritmi uyğun gəlir və onun açılışı aşağıdakı kimidir

$$[pcs \cdot 2] = [pcs] - \frac{[pac] \cdot [pas]}{[paa]} - \frac{[pbc \cdot 1][pbs \cdot 1]}{[pbb \cdot 1]}.$$

Onda (5.37) ifadəsinə müraciət edərək müvafiq əvəzetmələr aparsaq, $[\Sigma_3 \cdot 2]$ üçün belə bir ifadə alırıq

$$[\Sigma_3 \cdot 2] = \Sigma_3 - \frac{[pac]\Sigma_1}{[paa]} - \frac{[pbc \cdot 1][\Sigma_2 \cdot 1]}{[pbb \cdot 1]}.$$

Qeyd edilənlər onu göstərir ki, $-1/P_F$ tərs çəki qiymətinin (5.35) düsturu ilə hesablanmasını da üçüncü Qauss sxemində Σ sütunu əlavə etməklə həyata keçirmək olar.

§37. Etibarlılıq intervallarının qurulması

Əvvəlki bölmələrdə qeyd edildiyi kimi ölçülmüş kəmiyyətlərin dəqiqliyi orta kvadratik səhvlə səciyyələndirilir. Bu nöqtəvi qiymətləndirmədir. Lakin daha mükəmməl üsul ölçülmüş kəmiyyətlərin ala biləcəyi mümkün qiymətləri üçün etibarlılıq intervallarının qurulmasından ibarətdir. Bu üsulun məğzi ondan ibarətdir ki, qiymətcə vahidə yaxın β ehtimalı ilə gözləmək olar ki, ölçülmüş kəmiyyətin mümkün qiymətləri onun üçün qurulmuş etibarlılıq intervalından kənara çıxmayacaqdır.

Geodeziyada tarazlaşdırma hesablamalarının sonunda adətən lazımi kəmiyyətlər və onların funksiyaları üçün hesablanmış qiymətlərdə, eləcə də bu kəmiyyətlər və onların funksiyalarının orta kvadratik səhvləri üçün etibarlılıq intervalları qurulur. Bu zaman qəbul edilir ki, ölçmələr normal paylanma qanununa tabedir. Onda hər hansı F ölçmələr funksiyasının həqiqi qiyməti üçün aşağıdakı şəkildə etibarlılıq intervalı yazmaq olar:

$$\widetilde{F} - t_\beta \cdot m_{\widetilde{F}} < F < \widetilde{F} + t_\beta \cdot m_{\widetilde{F}}, \qquad (5.38)$$

burada: t_β – β etibarlılıq ehtimalı və r sərbəstlik dərəcəsi ədədi ilə Styudent paylanması cədvəlindən təyin edilmiş əmsal; $m_{\widetilde{F}}$ – ölçmələr funksiyasının orta kvadratik səhvidir ((4.56) düsturu ilə hesablanır); $\tilde{F}$ – isə funksiyanın tarazlaşdırılmış qiymətidir.

X_j lazımi kəmiyyəti üçün etibarlılıq intervalı belə bir bərabərsizliklə ifadə olunur:

$$\tilde{x} - t_\beta \cdot m_{x_j} < X_j < \tilde{x} + t_\beta \cdot m_{x_j}, \tag{5.39}$$

burada, $m_{x_j} = \mu\sqrt{Q_{jj}}$.

Vahid çəki standartı üçün etibarlılıq intervalı

$$\gamma_1\mu \leq \sigma_o \leq \gamma_2\mu; \tag{5.40}$$

F funksiyasının orta kvadratik səhvi üçün

$$\gamma_1 \cdot m_{\tilde{F}} \leq \sigma_{\tilde{F}} \leq \gamma_2 \cdot m_{\tilde{F}}; \tag{5.41}$$

lazımi parametrin orta kvadratik səhvi üçün isə

$$\gamma_1 \cdot m_{x_j} \leq \sigma_{x_j} \leq \gamma_2 \cdot m_{x_j} \tag{5.42}$$

şəklində qurulur.

Burada $\gamma_1 = \sqrt{\dfrac{n-k}{\chi_1^2}}$ və $\gamma_2 = \sqrt{\dfrac{n-k}{\chi_2^2}}$ əmsalları χ^2 paylanması cədvəlindən r ədədi ilə seçilir.

§38. Bərabər dəqiqlikli ölçmələrin parametrik üsulla tarazlaşdırılması

Qeyd edildiyi kimi, ölçmə nəticələri o vaxt bərabərdəqiqlikli hesab edilir ki, onların yerinə yetirildiyi ölçmə şəraiti eyni olsun, yəni ölçmələr eyni müşahidəçi tərəfindən, eyni alətlə, eyni dəfə sayında və sairə şərtləri eyni olan ölçmə şəraitində aparılmış olsun. Bu halda ölçmələrin çəkiləri bir -birinə bərabər götürülür: $p_1 = p_2 = ... = p_n = 1$.

Digər tərəfdən bərabərdəqiqlikli ölçmələrə qeyri-bərabər dəqiqlikli ölçmələrin xüsusi halı kimi də baxmaq olar. Belə ki, bərabərdəqiqlikli ölçmələrin çəkiləri $p_i = 1$ olduğundan, onlar üçün yazılmış normal tənliklərin əmsalları və sərbəst hədləri $[aa],[ab],...,[al]$ alqoritmləri şəklində olacaqdır. Bərabərdəqiqlikli ölçmələrin tarazlaşdırma alqoritmləri qeyri-bərabər dəqiqlikli ölçmələrin alqoritmlərinə nisbətən sadə olduğundan (eyni zamanda Qauss sxemi də sadələşir), bir çox hallarda hesablamaları asanlaşdırmaq məqsədilə qeyri-bərabər dəqiqlikli ölçmələri bərabərdəqiqlikli ölçmələr şəklinə gətirirlər (bölmə 30). Bundan ötrü qeyri-bərabər dəqiqlikli ölçmələr üçün yazılmış hər bir düzəliş tənliyini $\sqrt{p_i}$ əmsalına vurmaq lazımdır. Nəticədə vahid çəkiyə malik bərabərdəqiqlikli ölçmələr alınır. Bərabərdəqiqlikli ölçmələrin və onların funksiyalarının dəqiqliyinin qiymətləndirilməsi, eləcə də etibarlılıq intervallarının qurulması, eynilə qeyri-bərabər dəqiqlikli ölçmələrdə olduğu kimidir və ona görə də burada təkrarlamağa ehtiyac yoxdur (bax, 36 və 37-ci bölmələr).

§39. Normal tənliklərin ardıcıl yaxınlaşmalar üsulu ilə həlli

Normal tənliklərin sayının böyük olduğu hallarda onların həllini bilavasitə üsullarla deyil (məsələn, Qauss üsulu, kvadrat köklər üsulu və s.), ardıcıl yaxınlaşmalar üsulu ilə yerinə yetirmək daha səmərəlidir. Belə ki, bilavasitə üsullarla həll zamanı hesablamaların həcmi normal tənliklər sayının kubu dərəcəsinə düz mütənasib artdığı halda, ardıcıl yaxınlaşmalar üsulunda hesablamaların həcmi, əgər hesablama prosesi yığılandırsa, dəfələrlə kiçik olur. Ardıcıl yaxınlaşmalar üsulunun bu xüsusiyyəti onu çox əhəmiyyətli edir.

Ardıcıl yaxınlaşmalar üsulunun mahiyyəti ondan ibarətdir ki, ölçülmüş kəmiyyətlərin tarazlaşdırılmış qiymətləri bir neçə ardıcıl iterasiyadan (yaxınlaşmadan) təyin edilir və hesablama iterasiyaları o vaxtadək davam etdirilir ki, iki ardıcıl iterasiyadan qiymətlər fərqinin maksimum qiyməti hesablama dəqiqliyini səciyyələndirən müsbət ε ədədindən kiçik olsun, yəni

$$\max\left|X_j^{(m)} - X_j^{(m-1)}\right| < \varepsilon .$$

Onu da qeyd edək ki, hesablama iterasiyalarının sayını əvvəlcədən göstərmək mümkün deyil. Lakin ardıcıl yaxınlaşmalar üsulunun səmərəliliyi məhz iterasiyaların sayı ilə müəyyənləşdirilir. İterasiyaların sayı isə öz növbəsində hesablama prosesinin yığılma dərəcəsi ilə bağlıdır.

Tutaq ki, aşağıdakı şəkildə normal tənliklər sistemi tərtib edilmişdir:

$$\begin{aligned}
&[paa]x_1 + [pab]x_2 + \cdots + [pag]x_k + [pal] = 0;\\
&[pab]x_1 + [pbb]x_2 + \cdots + [pbg]x_k + [pbl] = 0;\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&[pag]x_1 + [pbg]x_2 + \cdots + [pgg]x_k + [pgl] = 0
\end{aligned}$$

və onların birgə həlli tələb edilir. Bu tənliklərdən x_j-ləri digərləri ilə təyin edək:

$$\begin{aligned}
x_1 &= 0\cdot x_1 + \alpha_{12}x_2 + \ldots + \alpha_{1k}\cdot x_k + \beta_1;\\
x_2 &= \alpha_{21}\cdot x_1 + 0\cdot x_2 + \cdots + \alpha_{2k}\cdot x_k + \beta_2;\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
x_k &= \alpha_{k1}\cdot x_1 + \alpha_{k2}\cdot x_2 + \cdots + 0\cdot x_k + \beta_k
\end{aligned} \tag{5.43}$$

Burada

$$\alpha=\begin{bmatrix} 0 & -\frac{[pab]}{[paa]} & \dots & -\frac{[pag]}{[paa]} \\ -\frac{[pab]}{[pbb]} & 0 & \dots & -\frac{[pbg]}{[pbb]} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -\frac{[pag]}{[pgg]} & -\frac{[pbg]}{[pgg]} & \dots & 0 \end{bmatrix}; \quad \beta=\begin{bmatrix} -\frac{[pal]}{[paa]} \\ -\frac{[pbl]}{[pbb]} \\ \dots \\ -\frac{[pgl]}{[pgg]} \end{bmatrix}$$

işarə etsək, onda (5.43) sistemini matris yazılışında belə vermək olar:

$$x=\alpha x+\beta . \tag{5.44}$$

Onda (5.44) ifadəsini əsas götürərək birinci yaxınlaşmada x_j kəmiyyətləri üçün aşağıdakı qiymətləri alarıq

$$x^{(1)}=\alpha x^{(0)}+\beta ,$$

ikinci yaxınlaşmadan

$$x^{(2)}=\alpha x^{(1)}+\beta ,$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

nəhayət, m-ci yaxınlaşmada

$$x^{(m)}=\alpha x^{(m-1)}+\beta .$$

Burada $x^{(0)}$ – sıfırıncı (başlanğıc) yaxınlaşma qiymətləridir və adətən $x^{(0)}=\beta$ qəbul edilir.

Nəzərdən keçirdiyimiz üsul sadə iterasiya (yaxınlaşma) üsulu adlanır. Bu üsul α matrisi elementlərinin mütləq qiymətcə kiçik qiymətlərində tez yığılan və az sayda iterasiyaya malik olur.

Ümumi halda isə hesablamaların yığılan olmasının kafi şərtləri aşağıdakılardan ibarətdir:

$$1)\ \|\alpha\|_1 = \max_i \sum_{j=1}^{k} |\alpha_{ij}| < 1;$$

və ya

$$2)\ \|\alpha\|_2 = \max_j \sum_{i=1}^{k} |\alpha_{ij}| < 1;$$

və ya

$$3)\ \|\alpha\|_3 = \sqrt{\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{k} \alpha^2_{ij}} < 1.$$

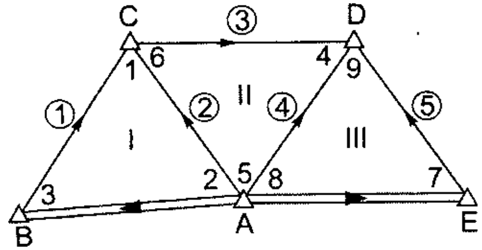
Burada $\|\alpha\|_1$, $\|\alpha\|_2$, $\|\alpha\|_3$ əmsallar matrisi α-nın birinci, ikinci və üçüncü normalarıdır.

Geniş tətbiq tapmış ardıcıl yaxınlaşmalar üsullarından biri də Zeydel üsuludur. Bu üsulun sadə iterasiya üsulundan fərqli cəhəti ondan ibarətdir ki, cari yaxınlaşmadan növbəti $x^{(m)}$ kəmiyyətləri üçün qiymətləri hesablanarkən bu yaxınlaşmadan əvvəl kəmiyyətlər üçün tapılmış $x_i^{(m-1)}(i = 1, 2, ..., j-1)$ qiymətlərindən istifadə edilir. Bu da hesablamaların yığılması prosesini sürətləndirir və iterasiyalar sayını azaldır.

§40. Parametrik üsulla məsələ həlli

Parametrik üsulun nəzəri əsasları ilə tanışlıqdan sonra bu üsulun xüsusiyyətlərini və həll ardıcıllığını əyani surətdə açmaq üçün nümunə məsələ həllində göstərək.

Fərz edək ki, sxemi şəkil 5.1-də verilmiş trianqulyasiya şəbəkəsində bütün daxili bucaqlar bərabər dəqiqliklə ölçülmüşdür, yəni $p_1 = p_2 = ... = p_9 = 1$. Tələb olunur ki, şəbəkənin parametrik üsulla tarazlaşdırılması yolu ilə tərəflərin direksion bucaqlarını təyin edin.



Şəkil 5.1. Trianqulyasiya şəbəkəsi

İlkin verilənlər:

1. Başlanğıc və son bazis tərəflərinin direksion bucaqları:

$$\alpha_{AB} = 270^0 00'00'', \quad \alpha_{AE} = 102^0 56'57{,}5''.$$

2. Bucaqların ölçülmüş qiymətləri y_i' (cədvəl 5.4).

Cədvəl 5.4

Bucaqların nömrəsi	Bucaqların ölçülmüş qiymətləri, y_i'	Bucağa düzəlişlər, υ_i''	Bucaqların tarazlaşdırılmış qiymətləri, $\widetilde{y}_i$
1 2 3	69°33'30,2" 60°35'10,5" 49°51'18,3"	–0,50 +2,0 –0,5	69°33'29,7" 60°35'12,5" 49°51'17,8"
	179°59'59,0"	+1,0	180°00'00,0"
4 5 6	66°47'38,2" 59°10'18,6" 54°02'09,3"	–2,8 –0,4 –2,9	66°47'35,4" 59°10'18,2" 54°02'06,4"
	180°00'06,1"	–6,1	180°00'00,0"
7 8 9	46°25'52,5" 73°11'24,1" 60°22'40,3"	+0,2 +2,7 +0,2	46°25'52,7" 73°11'26,8" 60°22'40,5"
	179°59'56,9"	+3,1	180°00'00,0"

Qeyd: Cədvəl (5.4)-də υ_i və $\widetilde{y}_i$ qiymətləri tarazlaşdırma başa çatdıqdan sonra hesablanıb bu cədvələ yazılır.

Məsələnin həlli. 1) İlk növbədə şəbəkədə tarazlaşdırılması tələb olunan ***lazımi kəmiyyətlər və onların sayı*** müəyyənləşdirilməlidir.

Məsələnin şərtindən aydın olur ki, şəbəkədə lazımi kəmiyyətlər tərəflərin direksion bucaqlarıdır (sxemdə oxlarla göstərilmişdir və çevrədə nömrəsi göstərilmişdir), onların sayı isə beşə bərabərdir. Direksion bucaqların həqiqi qiymətlərini X_j ilə işarə edək. Ölçmələri (ölçülmüş bucaqları) Y_i ilə göstərək. Sxemdən göründüyü kimi onların sayı doqquza bərabərdir (n=9).

2) ***Ölçülmüş kəmiyyətlər üçün parametrik düzəliş tənliklərini*** yazaq. Bildiyimiz kimi, düzəliş tənliklərinin sayı ölçmələrin sayına bərabər olur, yəni bizim məsələdə n=9. Düzəliş tənliklərinin tərtibi isə ilk növbədə (5.3) düsturu əsasında başlanğıc əlaqə tənliklərinin yazılmasını tələb edir. Məsələn, birinci bucağın əlaqə tənliyi iki müvafiq direksiyon bucağın fərqi şəklində yazılır:

$$\tilde{y}_1 = \tilde{x}_1 - \tilde{x}_2 . \tag{5.46}$$

Nəzərə alsaq ki, $\tilde{x}_1 = x_1^{(0)} + \delta x_1$, $\tilde{x}_2 = x_2^{(0)} + \delta x_2$ və $\tilde{y}_1 = y_1' + \upsilon_1$, onda (5.46) ifadəsi aşağıdakı şəklə düşər:

$$\upsilon_1 = \delta x_1 - \delta x_2 + [(x_1^{(0)} - x_2^{(0)}) - y_1' \ ], \tag{5.46'}$$

burada $[(x_1^{(0)} - x_2^{(0)}) - y_1' \ ] = l_1$ tənliyin sərbəst həddidir.

Beləliklə, $\angle 1$ bucağının son variantda düzəliş tənliyi

$$\upsilon_1 = \delta x_1 - \delta x_2 + l_1 . \tag{5.47}$$

Eyni mülahizələrlə digər bucaqlar üçün yaza bilərik:

$$\upsilon_2 = \delta x_2 + l_2 ;$$

$$
\begin{aligned}
\upsilon_3 &= -\delta x_1 + l_3; \\
\upsilon_4 &= \delta x_3 - \delta x_4 + l_4; \\
\upsilon_5 &= \delta x_4 - \delta x_2 + l_5; \\
\upsilon_6 &= \delta x_2 - \delta x_3 + l_6; \\
\upsilon_7 &= \delta x_5 + l_7; \\
\upsilon_8 &= -\delta x_4 + l_8; \\
\upsilon_9 &= \delta x_4 - \delta x_5 + l_9.
\end{aligned}
\tag{5.48}
$$

Qeyd: 1) İkinci, üçüncü, yeddinci və səkkizinci tənliklərdə AB və AE bazis tərəflərinə düzəliş axtarılmadığından toplananın sayı bir vahid azdır.

2) (5.46) və digər əlaqə tənlikləri xətti şəklə malik olduğundan, onların Teylor sırasına ayrılması tələb edilmir. Ona görə də (5.47) düzəliş tənliklərinin əmsalları müvafiq əlaqə tənliklərinin uyğun əmsalları ilə üst-üstə düşəcəkdir.

3) ***Düzəliş tənliklərinin sərbəst hədlərini*** təyin etmək üçün direksion bucaqların təqribi qiymətlərini bilmək lazımdır. Bu məqsədlə şəkil 5.1-də verilmiş sxemdən istifadə edilir:

$$
\begin{aligned}
x_1^{(0)} &= \alpha_{AB} + 180^0 - y_3' = 40^0 08' 41{,}7''; \\
x_2^{(0)} &= \alpha_{AB} + y_2' = 330^0 35' 10{,}5''; \\
x_3^{(0)} &= x_2^{(0)} + 180^0 - y_6' = 96^0 33' 01{,}2''; \\
x_4^{(0)} &= \alpha_{AE} - y_8' = 29^0 45' 33{,}4''; \\
x_5^{(0)} &= \alpha_{AE} + 180^0 + y_7' = 329^0 22' 55{,}0''.
\end{aligned}
$$

4) ***Başlanğıc əlaqə tənlikləri və direksion bucaqların*** hesablanmış təqribi qiymətlərindən istifadə edərək sərbəst hədlər hesablanır:

$$
\begin{aligned}
l_1 &= (x_1^{(0)} - x_2^{(0)}) - y_1' = +1; \\
l_2 &= (x_2^{(0)} - \alpha_{AB}) - y_2' = 0{,}0;
\end{aligned}
$$

$$l_3 = (\alpha_{AB} + 180^0 - x_1^{(0)}) - y_3' = 0{,}0;$$
$$l_4 = (x_3^{(0)} - x_4^{(0)}) - y_4' = -10{,}4;$$
$$l_5 = (x_4^{(0)} - x_2^{(0)}) - y_5' = +4{,}3;$$
$$l_6 = (x_2^{(0)} + 180^0 - x_3^{(0)}) - y_6' = 0{,}0;$$
$$l_7 = (x_5^{(0)} - \alpha_{AE} - 180^0) - y_7' = 0{,}0;$$
$$l_8 = (\alpha_{AE} - x_4^{(0)}) - y_8' = 0{,}0;$$
$$l_9 = (x_4^{(0)} - x_5^{(0)}) - y_1' = +3{,}1.$$

5) *Normal tənliklərin tərtibi.*

Qeyd edildiyi kimi, normal tənliklərin tərtibi və həllini Qauss sxemlərində yerinə yetirmək daha əlverişlidir.

Cədvəl 5.5-də birinci Qauss sxemi verilmişdir. Bu sxemdə müvafiq düzəliş tənliklərinin əmsalları, sərbəst hədləri və yoxlama cəmləri yazılmışdır.

Cədvəl 5.5

Ölçmənin nömrəsi	a_i	b_i	c_i	d_i	e_i	l_i	s_i	υ_i
1	+1	–1	0	0	0	+1	+1	–0,50
2	0	+1	0	0	0	0	+1	+2,00
3	–1	0	0	0	0	0	–1	–0,50
4	0	0	+1	–1	0	–10,4	–10,4	–2,86
5	0	–1	0	+1	0	+4,3	+4,3	–0,38
6	0	+1	–1	0	0	0	0	–2,86
7	0	0	0	0	+1	0	+1	+0,21
8	0	0	0	–1	0	0	–1	+2,69
9	0	0	0	+1	–1	+3,1	+3,1	+0,21
Yoxlama:	[a]=0 [aυ]	[b]=0 [bυ]	[c]=0 [cυ]	[d]=0 [dυ]	[e]=0 [eυ]	[l]=–2	[s]=–2	$[\upsilon^2]$=28,24 $[l\upsilon]$=28,24

Qeyd. Cədvəl (5.5)-də υ_i qiymətləri və cədvəlin aşağısında yazılmış yoxlama hesablamaları tarazlaşdırmadan sonra yazılır.

Bu cədvəldə a_i, b_i, c_i, d_i, e_i və l_i qrafalarındakı qiymətlər uyğun (5.47) və (5.48) tənliklərindən yazılır. Məsələn, (5.47) tənliyindən göründüyü kimi bir nömrəli ölçmə üçün $a_1=1$ (δx_1-in əmsalı); $b_1=-1$ (δx_2-nin əmsalı); qalan əmsallar isə sıfra bərabərdir, çünki bu tənlikdə δx_3, δx_4 və δx_5 məchulları yoxdur; $l_1=+1$ (bax, bənd 4); $S_1=+1-1+0+0+0+1=+1$ birinci sətir üzrə rəqəmlərin cəmidir.

Eyni qayda ilə cədvəl 5.5-də digər ölçmələrin düzəliş tənlikləri əmsalları yazılmışdır. Hesablamalar zamanı (5.18) və (5.19) ifadələri ilə tələb olunan yoxlamalar həyata keçirilmişdir.

Normal tənliklər və onların həlli ikinci Qauss sxemində cədvəl 5.6-da verilir. Normal tənliklər tərtib edilərkən onun elementləri sxem 1-dən istifadə etməklə tapılır. Bu zaman əsas olaraq (5.15) düsturu götürülür. Məsələn, birinci normal tənliyin birinci kvadratik əmsalını tapmaq üçün cədvəl (5.2)-də a_i sütununun hər bir elementini kvadrata yüksəldib sonra onları cəmləmək lazımdır: $[aa]=a_1a_1+a_2a_2+...+a_9a_9=+2{,}00$. Yada salaq ki, $p_1=p_2=...=p_9=1$, yəni məsələnin şərtində göstərildiyi kimi ölçmələr bərabərdəqiqlidir.

Həmin tənliyin ikinci $[ab]$ elementini tapmaq üçün cədvəl 5.5-də a_i sütununun elementlərini b_i sütununun uyğun elementlərinə vuraraq cəmləmək lazımdır. Onda, $[ab]=-1$. Bu qayda ilə normal tənliklərin bütün əmsalları və sərbəst hədləri, eləcə də cəm elementləri 0,01 dəqiqliklə hesablanaraq cədvəl 5.6-da (sxem 2) yazılmışdır. Normal tənliklərin tərtibi zamanı (5.20) düsturları ilə təyin edilən yoxlamalar aparılmışdır. Yoxlama cəmlərinin fərqlənməsi 0,01 -0,02 həddini aşmır.

Qeyd: 1) Cədvəl 5.6-da $-E_j$, f və Σ qiymətləri tarazlaşdırmanın sonunda kəmiyyətlərin dəqiqliyi qiymətləndirilərkən yazılır.

2) Normal tənliklərin *R* əmsallar matrisi simmetrik olduğundan sxem 2-də (cədvəl 5.6) həmin matrisin yuxarı üçbucaq şəkilli hissəsi (baş diaqonaldan yuxarı hissə) verilmişdir.

6) *Normal tənliklərin həlli.*

Normal tənliklərin həlli üçüncü Qauss sxemində həyata keçirilir (cədvəl 5.7). Həll iki hissədən: düz və əks gedişlərdən ibarətdir. Düz gedişdə (5.17) şəklində ekvivalent tənliklər sistemi qurulur. Bu sistemin birinci tənliyi sxem 2-dən olduğu kimi sxem 3-ə köçürülür. Sonra bu tənliyin bütün elementlərini $-[paa]$ əmsalına bölməklə (və yaxud $-1/[paa]$ köməkçi əmsalına vurmaqla, bu əmsal 0,0001 dəqiqliklə hesablanır) birinci eliminasion tənlik alınır. Bizim məsələdə $[paa]=+2$ olduğundan, $-1/[paa]=-0,5000$.

Sxem 3-də elminasion tənliklər həmişə -1 əmsalı ilə başlayan sətirlərdə yazılır. Eliminasion tənliklərin əmsalları 0,001 dəqiqliklə hesablanır.

İkinci ekvivalent tənliyin elementləri də eyni qayda ilə tapılır. (5.17) sistemindən göründüyü kimi ikinci ekvivalent tənliyin elementləri birinci dərəcəli çevrilmiş Qauss alqoritmlərindən ibarətdir. Ona görə də ilk növbədə Qauss alqoritmlərinin açılma qaydasından istifadə edərək, (bölmə 34, bənd 2) çevrilmiş alqoritmləri çevrilməmişlərlə əvəz etmək lazımdır. Sonra sxem 2-də çevrilməmiş alqoritmlərin uyğun qiymətlərini seçib onları əvəzetmə ifadələrində yerinə yazmaqla müvafiq çevrilmiş alqoritmin qiyməti tapılır. Məsələn, $[bb.1]$ əmsalının qiymətini hesablayaq.

İlk növbədə bu alqoritmi çevrilməmiş alqoritmlər şəklində açaq:

$$[bb.1]=[bb]-\frac{[ab][ab]}{[aa]}.$$

Cədvəl 5.6

	$a]$	b]	$c]$	$d]$	$e]$	$l]$	$s]$	Yoxlama	$-E_1$	$-E_2$	$-E_3$	$-E_4$	$-E_5$	f	Σ
$[a$	2,00	–1,00	0	0	0	+1,00	+2,00	+2,00	–1,00	0	0	0	0	+1,00	+2,00
$[b$		+4,00	–1,00	–1,00	0	–5,30	–4,30	–4,30	0	–1,00	0	0	0	–1,00	0
$[c$			2,00	–1,00	0	–10,4	–10,4	–10,40	0	0	–1,00	0	0	0	0
$[d$				+4,00	–1.00	+17,8	+18,8	+18,80	0	0	0	–1,00	0	0	+1,00
$[e$					2,00	–3,1	–2,10	–2,10	0	0	0	0	–1,00	0	+1,00
$[l$						137,26	137,26	137,26							
$[s$						137,26	137,26	137,26							

Cədvəl 5.7

Köməkçi əmsallar	δx_1	δx_2	δx_3	δx_4	δx_5	l	s	Yoxlama	$-E_1$	$-E_2$	$-E_3$	$-E_4$	$-E_5$	f	Σ
–0,500	2,00	–1,00	0	0	0	1,00	2,00	2,00	–1,00	0	0	0	0	1,00	2
	–1	0.500	0	0	0	–0,500	–1,000	–1,000	+0,500	0	0	0	0	–0,500	–1,000
–0,2857		3,50	–1,00	–1,00	0	–4,80	–3,30	–3,30	–0,50	–1,00	0	0	0	–0,500	+1,000
		–1	0,286	0,286	0	1,371	0,943	0,943	+0,143	+0,286	0	0	0	+0,143	–0,286
–0,5834			1,71	–1,29	0	–11,77	–11,34	–11,35	–0,14	–0,29	–1,00	0	0	–0,14	+0,29
			–1	+0,750	0	6,868	6,618	6,618	+0,083	0,167	+0,583	0	0	+0,083	–0,169
–0,3636				2,75	–1,00	+7,60	+9,35	+9,35	–0,25	–0,50	–0,75	–1,00	0	–0,25	+1,50
				–1	0,364	–2,762	–3,399	–3,399	+0,091	+0,182	+0,273	+0,364	0	+0,091	–0,545
–0,611					1,64	–0,34	–1,30	–1,30	–0,09	–0,18	–0,273	–0,36	–1,00	–0,09	+1,55
					–1	0,206	0,724	0,724	+0,056	+0,111	+0,167	+0,222	+0,611	+0,056	–0,947
δx_j	0,496	1,991	4,853	–2.687	0.206	28,22	28,22						$-1/P_F$	–0,611	–0,612
							28,22								

Cədvəl 5.6-da $[bb]=+4$; $[ab]=-1$; $[aa]=2$. Onda bu qiymətləri yuxarıdakı ifadədə yerinə qoysaq alarıq

$$[bb.1]=(+4)-\frac{(-1)(-1)}{(+2)}=3,5.$$

Ümumi halda isə ekvivalent tənliklərin elementlərini belə bir qayda ilə hesablayırlar: i nömrəli ekvivalent tənliyin j nömrəli sütunda yerləşən elementi sxem 2-də eyni koordinatlı elementinə i nömrəli sütunda eliminasion tənlik elementlərinin j sütunundakı uyğun ekvivalent tənlik elementlərinə vurulmasından alınan hasilləri əlavə etməklə tapılır. Məsələn, $[cl.2]$ elementi $i=3$, $j=6$-da yerləşir. Ona görə də $[cl]$ elementini sxem 2-dən, hasilləri isə sxem 3-dən yazsaq

$$[cl.2]=-10,4+0\cdot 1+(+0,286)\cdot(-4,8)=-11,771$$

taparıq.

İkinci ekvivalent tənliyin elementlərini tapdıqdan sonra onları kvadrat əmsala, yəni $[bb.1]=3,5$ bölsək, ikinci eliminasion tənliyi alarıq. Üçüncü ekvivalent tənliyi, onun ardınca üçüncü eliminasion tənliyi və bu ardıcıllıqda digərlərini tapırıq.

Qauss üsulu ilə tənliklərin çevrilməsi əməliyyatları (k–1) dəfə (bizim məsələdə, k–1=4), başqa sözlə desək, bir məchullu (δx_k) tənlik alınanadək davam etdirilir. Bu zaman ekvivalent tənliklərin düzgün tərtib edilməsi (5.21) ifadələri ilə yoxlanılır və alınmış nəticələr sxem 3-də «yoxlama» qrafında qeyd edilir (yoxlama zamanı 0,01-0,02 fərqlənmə həddində eyniliklər alınmalıdır). Nəhayət, düz gedişdə (5.22) ifadəsi ilə son yoxlama hesablamaları yerinə yetirilir.

Qauss sxemində düz gediş hesablamalarının düzgünlüyündə müvafiq yoxlamalarla əmin olduqdan sonra əks gediş həyata keçirilir, yəni eliminasion tənliklərdən istifadə edərək sonuncu məchuldan (δx_k) başlayaraq (δx_i) qiymətləri hesablanır. (5.18) ifadəsindən göründüyü kimi sonuncu məchulun (δx_k) qiyməti (k–1) dərəcəli çevrilmiş sərbəst həddə bərabərdir. Bizim məsələdə beşinci eliminasion tənliyin sərbəst həddi +0,206 olduğundan, δx_5=+0,206 yazırıq. δx_4 məchulunu tapmaq üçün dördüncü eliminasion tənliyin δx_5 sütununda yerləşən +0,364 əmsalını δx_5 məchulunun yuxarıda tapdığımız qiymətinə vurub həmin tənliyin sərbəst həddi ilə, yəni (–2,762) qiyməti ilə toplamaq lazımdır: δx_4=(+0,364)·(+0,206) – 2,762=–2,687. Eyni qayda ilə üçüncü eliminasion tənlikdə δx_5 və δx_4 məchullarının yerində onların artıq hesablanmış qiymətlərini yazmaqla:

$$\delta x_3 = (+0,75)\,(-2,687) + 0\,(+0,206) + 6,868 = +4,853$$

alırıq.

İkinci tənlikdən

$$\delta x_2 = +1,991$$

və nəhayət, birinci tənlikdən

$$\delta x_1 = +0,496$$

qiyməti tapılmışdır.

Beləliklə, yuxarıda qeyd edilənləri ümumiləşdirsək δx_i məchullarının qiymətinin hesablanma qaydasını aşağıdakı kimi ifadə etmək olar: hər hansı δx_i məchulunun qiyməti i nömrəli eliminasion tənlikdən tapılır. Bu zaman növbəti məchulun qiyməti artıq məlum məchulların qiymətlərini müvafiq eliminasion tənlikdə uyğun əmsallara vurub onun üzərinə həmin tənliyin sərbəst həddini əlavə etməklə təyin edilir, δx_j qiymətləri 0,001 dəqiqliklə hesablanır və nəticələrin düzgünlüyü müvafiq ekvivalent tənliklərdə onları öz yerinə yazmaqla eyniliyin alınması ilə yoxlanılır (fərqlənmə 0,005 həddini aşmamalıdır).

7) Növbəti mərhələdə δx_j-lərin qiymətlərini (5.46) və (5.47) ifadələrində yazmaqla ölçülmüş kəmiyyətlər (bizim halda bucaqlar) üçün υ_i ***düzəlişləri*** hesablanmışdır:

$$\upsilon_1 = -0{,}495\,; \quad \upsilon_4 = -2{,}860\,; \quad \upsilon_7 = +0{,}206\,;$$
$$\upsilon_2 = +1{,}991\,; \quad \upsilon_5 = -0{,}378\,; \quad \upsilon_8 = +2{,}687\,;$$
$$\upsilon_3 = -0{,}496\,; \quad \upsilon_6 = -2{,}862\,; \quad \upsilon_9 = +0{,}207\,.$$

Düzəlişlər üçün tapılmış bu qiymətlər cədvəl 5.4-də göstərilmişdir. Sonrakı mərhələdə (5.13), (5.14), (5.23) və (5.24) ifadələri ilə yoxlama hesablamaları həyata keçirilmişdir:

$$[\upsilon^2] = 28{,}274;\ [\ell\ell.5] = 28{,}22;\ [\ell s.5] = 28{,}22\,;$$
$$[\ell\upsilon] = 28{,}26;\ \ [s\upsilon] = 28{,}27$$

və alınmış nəticələrə əsasən hesablama xətası həddində

$$[\upsilon^2] \approx [\ell\ell.5] \approx [\ell\upsilon] = [s\upsilon] \approx [\ell s.5]$$

bərabərliyini qeyd etmək olar. Bu isə məsələnin düzgün həll olunduğu deməkdir (fərqlənmənin 0,04-0,05 həddində olması yol veriləndir).

8) ***Ölçülmüş kəmiyyətlərin $\tilde{y}_i$ tarazlaşdırılmış qiymətləri*** hesablanmışdır. Bu məqsədlə kəmiyyətlərin ölçülmüş y_i' qiymətlərinə yeddinci bənddə verilmiş uyğun υ_i düzəlişləri əlavə edilmişdir (bax: cədvəl 5.4). Burada da yoxlama aparılmışdır. Belə ki, şəbəkənin sxemindən də göründüyü kimi hesablamaların düzgünlüyü əlavə olaraq horizont şərtinə görə də yoxlanmışdır:

$$\widetilde{y}+\widetilde{y}_5+\widetilde{y}_8-(\alpha_{AE}-\alpha_{AB})=192^0 56'57{,}5''-192^0 56'57{,}5''=0.$$

9) ***Direksion bucaqların tarazlaşdırılmış qiymətləri*** hesablanmışdır. Bu məqsədlə $x_j^{(0)}$ qiymətlərinə (bax, bənd 3) müvafiq δx_j qiymətləri əlavə edilmiş və

$$X_1=40^0 08'42{,}2''; \quad X_4=29^0 45'30{,}7'';$$
$$X_2=330^0 35'12{,}5''; \quad X_5=329^0 22'50{,}0'';$$
$$X_3=96^0 33'06{,}05'';$$

nəticələri alınmışdır.

10) ***Tarazlaşdırmanın son yoxlanması*** ölçülmüş və lazımi kəmiyyətlər arasında mövcud (5.3) əlaqə tənliklərinin tarazlaşdırılmış qiymətlərlə doğru bərabərliklərə çevrilməsindən ibarətdir.

Məsələn, $\angle 1$ bucağı üçün

$$\widetilde{y}_1=\widetilde{x}_2-\widetilde{x}_1=330^0 35'12{,}5''-40^0 08'42{,}2''=69^0 33'29{,}7''$$

alarıq. Cədvəl 5.4-də də bu bucağın qiyməti $\widetilde{y}_1=69^0 33'29{,}7''$-dir. Bu isə o deməkdir ki, birinci bucağın tarazlaşdırılmış qiyməti düzgün təyin edilmişdir.

Eyni qayda ilə direksion bucaqların tarazlaşdırılmış qiymətlərinə əsasən digər bucaqlar üçün aşağıdakı qiymətlər tapılmışdır:

$$\widetilde{y}_2=60^0 35'12{,}5''; \quad y_6=54^0 02'06{,}4'';$$
$$\widetilde{y}_3=49^0 51'17{,}8''; \quad \widetilde{y}_7=46^0 25'52{,}7'';$$
$$\widetilde{y}_4=66^0 47'35{,}4''; \quad \widetilde{y}_8=73^0 11'26{,}8'';$$
$$\widetilde{y}_5=59^0 10'18{,}2''; \quad \widetilde{y}_9=60^0 22'40{,}5''.$$

Bu nəticələrin də cədvəl 5.4-də müvafiq $\tilde{y}_i$ qiymətləri ilə eyni olduğunu görürük. Buradan isə ümumi olaraq belə nəticə çıxır ki, tarazlaşdırma hesablamaları bütövlüklə düzgün yerinə yetirilmişdir.

11) Bildiyimiz kimi tarazlaşdırma iki hissədən: a) parametrlər üçün tarazlaşdırılmış (ən etibarlı) qiymətlərin hesablanması; b) ***tarazlaşdırılmış kəmiyyətlərin dəqiqliyinin qiymətləndirilməsindən*** ibarətdir. Birinci hissənin həlli 1-10 bəndlərdə yerinə yetirilmişdir. Növbəti bəndlər isə alınmış nəticələrin dəqiqliyinin qiymətləndirilməsi aparılır. Bu məqsədlə ilk növbədə ölçülmüş bucağın Bessel düsturu əsasında orta kvadratik səhvi hesablanmışdır:

$$m = \sqrt{\frac{[v^2]}{n-k}} = \sqrt{\frac{28,27}{9-5}} = 2,7''.$$

Lazımi parametlərin, eləcə də onların funksiyasının dəqiqliyinin qiymətləndirilməsi üçün qeyd edildiyi kimi Q_{ij} çəki əmsalları təyin edilməlidir. Q_{ij} əmsallarının təyini Qauss sxemində aparılmışdır. Bu zaman $k=5$ olduğundan vahid matris aşağıdakı şəklə malikdir:

$$-E = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Bizim məsələdə dəqiqliyi qiymətləndirilən ölçmələr funksiyası olaraq şəbəkənin birinci bucağı götürülmüşdür. Ümumi halda isə istənilən daxili bucağı direksiyon bucaqların funksiyası şəklində ifadə edərək dəqiqliyini qiymətləndirmək olar.

Beləliklə, birinci bucağın əlaqə funksiyası

$$F_1 = \tilde{y}_1 = \tilde{x}_1 - \tilde{x}_2$$

şəklində yazılır. Onda F_1 funksiyasının x_j üzrə xüsusi törəmələr vektoru (bax: bölmə 36):

$$f = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

olar. Bu vektor Qauss sxeminin ikinci cədvəlində (cədvəl 3.5) «Yoxlama» qrafasından sonra əlavə sütunda yazılır. Eyni zamanda burada beş sütunda $-E$ matrisi və bir sütunda Σ elementləri verilir. Bundan sonra 3-cü sxemin (cədvəl 5.7) sərbəst hədlər sütununda normal tənliklərin həlli zamanı hansı $(k-1)$ dərəcəli çevirmə əməliyyatları aparılmışdırsa, elə bu əlavə sütunlarda da həmin əməliyyatlar təkrarlanmışdır. Daha sonra çevirmə əməliyyatı nəticəsində cədvəl 5.7-də tapılmış qiymətlərdən istifadə edərək (5.33) düsturu əsasında $-1/P_F$ qiyməti hesablanmışdır:

$$-\frac{1}{P_F} = (1-1+0+0+0)+1\cdot(-0,5)+0,143\cdot(-0,5)+$$
$$+(-0,14)\cdot(0,083)+(-0,25)\cdot(0,091)+(-0,09)\cdot(0,056)=-0,611.$$

Başqa sözlə desək, $-1/P_F$ qiymətinin hesablanması üçün f funksiyasının elementlər cəminə f sütunu üzrə eyni adlı ekvivalent və eliminasion tənliklərin elementləri hasillərini əlavə etmək lazımdır.

$-1/P_F$ qiymətinin yoxlanması isə (5.35) düsturu ilə həyata keçirilir. Bunun üçün f funksiyasının elementlər cəminə Σ sütunu üzrə eliminasion tənlik elementinin f sütununda eyni adlı ekvivalent tənlik elementinə olan hasilləri əlavə etmək lazımdır:

$$-\frac{1}{P_F}=(1-1+0+0+0)+(-1{,}00)\cdot(1{,}00)+(-0{,}286)\cdot(-0{,}50)+$$
$$+(-0{,}169)\cdot(-0{,}14)+(-0{,}545)\cdot(-0{,}25)+(-0{,}947)\cdot(-0{,}09)=-0{,}612.$$

Alınmış nəticələrdən göründüyü kimi, $-1/P_F$-nin (5.33) və (5.35) düsturları ilə hesablanmış qiymətləri demək olar ki, üst-üstə düşür (0,612–0,611=0,01 fərqlənməsi hesablama səhvi həddindədir). Bu isə hesablamaların doğruluğunu təsdiq edir.

Q matrisinin Q_{ij} elementləri isə diaqonal üsulu ilə sxem 3-də (cədvəl 5.7) təyin edilmişdir. Burada qayda belədir: hər hansı Q_{ij} elementinin qiyməti əks işarə ilə $-E_i$ sütunundakı eliminasion elementlərin $-E_j$ sütununda eyni adlı ekvivalent elementlərə vurulmasından alınan hasillər cəminə bərabərdir.

Məsələn, cədvəl 5.7-yə əsasən Q_{22}, Q_{12} və Q_{21} elementləri üçün alarıq:

$$Q_{22}=-[0\cdot 0+(0{,}286)\cdot(-1{,}00)+(0{,}167)\cdot(-0{,}29)+$$
$$+(-0{,}182)\cdot(-0{,}50)+(0{,}111)\cdot(-0{,}18)]=-0{,}445;$$

$$Q_{12}=-[(+0{,}500)\cdot 0+(0{,}143)\cdot(-1{,}00)+(0{,}083)\cdot(-0{,}29)+$$
$$+(0{,}091)\cdot(-0{,}50)+(0{,}056)\cdot(-0{,}18)]=+0{,}223;$$

$$Q_{21}=-[0\cdot 1+(0{,}286)\cdot(-0{,}50)+(0{,}167)\cdot(-0{,}14)+$$

$$+(0,182)\cdot(-0,25)+(0,111)\cdot(-0,09)]=+0,222;$$

Bütövlükdə isə Q matrisinin elementləri üçün aşağıdakı qiymətlər alınmışdır:

$$Q=\begin{pmatrix} 0,611 & +0,223 & +0,166 & +0,111 & +0,056 \\ +0,222 & +0,445 & +0,334 & +0,222 & 0,111 \\ +0,165 & +0,335 & +0,833 & +0,333 & +0,167 \\ +0,111 & +0,222 & +0,333 & +0,444 & +0,222 \\ +0,056 & +0,110 & +0,167 & +0,220 & +0,611 \end{pmatrix}$$

Q matrisinin müvafiq Q_{ij} elementlərindən istifadə edərək (5.25) düsturu ilə direksion bucaqların orta kvadratik səhvləri hesablanmışdır:

$$m_{x_1}=m_{x_5}=2,7''\cdot\sqrt{0,611}=2,1'';$$
$$m_{x_2}=m_{x_4}=2,7''\cdot\sqrt{0,445}=1,8'';$$
$$m_{x_3}=2,7''\cdot\sqrt{0,833}=2,5'',$$

$\tilde{y}_1$ funksiyasının orta kvadratik səhvi isə

$$m_{\tilde{y}_1}=2,7''\cdot\sqrt{0,612}=2,1''.$$

12) ***Tarazlaşdırma hesablamaları etibarlılıq intervallarının qurulması*** ilə yekunlaşır. Etibarlılıq intervalları β etibarlılıq ehtimalı və r sərbəstlik dərəcəsi ilə əlaqəlidir. Bizim məsələdə $r=n-k=9-5=4$ və β=0,95 qəbul etsək, Styudent paylanması cədvəlindən (əlavə V) bu qiymətlərə uyğun gələn t_β=3,2

qiymətini taparıq. Onda (5.39) ifadəsinə əsasən birinci direksion bucağın tarazlaşdırılmış qiyməti üçün etibarlılıq intervalı aşağıdakı şəklə malik olacaqdır:

$$40^0 08'42{,}2'' - 3{,}2 \cdot 2{,}1'' \le X_1 \le 40^0 08'42{,}2'' + 3{,}2 \cdot 2{,}1'',$$

buradan isə $40^0 08'35{,}48'' \le X_1 \le 40^0 08'48{,}90''$.

Eyni qayda ilə digər direksiyon bucaqlar üçün yaza bilərik:

$$330^0 35'06{,}70'' \le X_2 \le 330^0 35'18{,}30'';$$
$$96^0 32'58{,}05'' \le X_3 \le 96^0 33'14{,}05'';$$
$$29^0 45'24{,}90'' \le X_4 \le 29^0 45'36{,}46'';$$
$$329^0 22'43{,}3'' \le X_5 \le 329^0 22'56{,}7''.$$

(5.38) düsturuna əsasən ölçmələr funksiya üçün

$$69^0 33'23{,}0'' \le \tilde{y}_1 \le 69^0 33'36{,}4''.$$

Ölçmələrin orta kvadratik səhvləri üçün etibarlılıq intervalları qurarkən γ_1 və γ_2 əmsallarını bilmək lazım gəlir. (5.40)' düsturundan göründüyü kimi bu məqsədlə müvafiq χ_1^2 və χ_2^2 qiymətləri müəyyənləşdirilməlidir. χ^2 qiymətləri xüsusi cədvəllərdən r sərbəstlik əmsalı və $P_1 = \frac{1-\beta}{2}$; $P_2 = 1 - P_1$ ədədlərinə əsasən seçilir (Əlavə VI).

Bizim məsələdə: $r = 4$; $\beta = 0{,}95$; $P_1 = 0{,}025$; $P_2 = 0{,}975$ olduğundan $\chi_1^2 = 12{,}031$; $\chi_2^2 = 0{,}382$ taparıq. Onda, (5.40)' düsturu ilə $\gamma_1 = 0{,}577$; $\gamma_2 = 3{,}23$ olar. Bu əmsalların qiymətlərini

(5.40) ifadəsində yazsaq

$$0{,}577 \cdot 2{,}7'' \le \sigma_0 \le 3{,}23 \cdot 2{,}7'',$$

buradan isə

$$1{,}56'' \le \sigma_0 \le 8{,}7''$$

olar. Eyni qayda ilə (5.41) və (5.42) düsturları ilə digər orta kvadratik səhv qiymətləri üçün intervallar qurulur:

$$1{,}21'' \le \sigma_{x_1} \le 6{,}78'';$$
$$1{,}04'' \le \sigma_{x_2} \le 5{,}81'';$$
$$1{,}44'' \le \sigma_{x_3} \le 8{,}08'';$$
$$1{,}03'' \le \sigma_{x_4} \le 5{,}81'';$$
$$1{,}21 \le \sigma_{x_5} \le 6{,}78'';$$
$$1{,}21'' \le \sigma_{\tilde{y}_1} \le 6{,}78''.$$

Bununla qoyulmuş tarazlaşdırma məsələsinin həlli sona çatmış olur.

Fəsil 6
KORRELAT TARAZLAŞDIRMA ÜSULU

§41. Korrelat üsulunun nəzəri əsasları

Parametrik üsuldan fərqli olaraq korrelat üsulda lazımi kəmiyyətlərin tarazlışdırılmış qiymətləri bilavasitə təyin edilmir. Əvvəlcə köməkçi əmsallar – korrelatlar, sonra onlar əsasında ölçülmüş kəmiyyətlərə düzəlişlər və nəhayət lazımi kəmiyyətlərin qiymətləri tapılır. Tarazlaşdırma ölçülmüş kəmiyyətlər üçün yazılmış xüsusi funksiyalar-şərti tənliklər əsasında yerinə yetirilir. Məsələn, üçbucağın şərti tənliyi belə yazılır:

$$\beta_1+\beta_2+\beta_3-180^0=0,$$

burada: β, β_2, β_3 üçbucağın daxili bucaqlarının həqiqi qiymətləridir.

Qapalı teodolit gedişi üçün bucaq şərti tənliyi isə aşağıdakı şəklə malikdir

$$\beta_1+\beta_2+...+\beta_n-180^0(n-2)=0,$$

burada: n – bucaqların sayı; $\beta_1,\beta_2,...,\beta_n$ – dönmə bucaqlarının həqiqi qiymətləridir.

Ümumi şəkildə şərti tənliklər belə ifadə olunur:

$$\varphi_j(X_1,X_2,...,X_n)=0, \qquad (6.1)$$

burada; X_i – ölçülmüş kəmiyyətlərin həqiqi qiymətləridir.

Məlumdur ki, ümumən bütün ölçmələr müəyyən qiymətlərə malik səhvlərlə yerinə yetirilir. Əgər (6.1) tənliklərində X_i əvəzində onların x_i – ölçülmüş qiymətlərini yazsaq, onda tənliyin sağ tərəfində sıfırdan fərqli w_j qiymətləri alınır, yəni

$$\varphi_j(x_1, x_2, ..., x_n) = w_j. \tag{6.2}$$

w_j – mahiyyətcə φ_j funksiyasının həqiqi səhvi olub şərti tənliyin poliqon açıqlığı (qısaca, poliqon açıqlığı) adlanır. Poliqon açıqlıqlarının ədədi qiyməti ölçmə səhvlərindən asılıdır. Əgər $w_j = 0$, onda bu o demək deyildir ki, ölçmələr səhvsiz yerinə yetirilmişdir. Belə hallarda fərz edilir ki, ölçmə səhvləri qarşılıqlı əks işarəli və qiymətcə yaxın olduğundan bir-birini yox etmişlər. Ona görə də korrelat tarazlaşdırma hesablamalarının əsas məqsədlərindən biri şəbəkədə meydana çıxmış poliqon açıqlıqlarını müəyyən qayda ilə ölçmələr arasında paylaşdıraraq həndəsi ziddiyyətləri aradan qaldırmaqdan ibarətdir.

Korrelat üsulla tarazlaşdırma hesablamaları aşağıdakı ardıcıllıqda yerinə yetirilir.

a) şərti tənliklərin tərtibi. Onu da qeyd edək ki, bütövlükdə tarazlaşdırma məsələsi, o cümlədən, şərti tənliklərin tərtibi geodeziya şəbəkəsində artıq ölçmələrin yerinə yetirildiyi halda mümkündür. Hər bir artıq ölçmə bir şərti tənlik yazmaq imkanı verir, şərti tənliyin forması isə tarazlaşdırılan şəbəkənin növündən asılıdır.

Tutaq ki, geodeziya şəbəkəsində n sayda $X_1, X_2, ..., X_n$ kəmiyyətləri ölçülmüş və $x_1, x_2, ..., x_n$ nəticələri alınmışdır. Ölçmələrə isə $p_1, p_2, ..., p_n$ ölçmə çəkiləri uyğun gəlir. Onda (6.1) düsturuna əsasən aşağıdakı şərti tənlikləri yaza bilərik:

$$
\begin{aligned}
&\varphi_1(X_1, X_2, ..., X_n) = 0;\\
&\varphi_2(X_1, X_2, ..., X_n) = 0;\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&\varphi_r(X_1, X_2, ..., X_n) = 0,
\end{aligned}
\tag{6.3}
$$

burada: $r = n - k$ artıq ölçmələrin sayı; k – lazımi ölçmələrin sayı; X_i – ölçülmüş kəmiyyətlərin həqiqi qiymətləridir.

Həmişə $r < n$ olduğundan (ümumi ölçmələr sayı artıq ölçmələr sayından böyükdür) ali riyaziyyat kursundan məlum olduğu kimi, (6.3) şəklində bir neçə şərti tənliklər sistemi qurmaq mümkündür. Digər tərəfdən, bu tənliklər sistemlərini «Ən kvadratlar metodu» ilə həll etsək (tarazlaşdırsaq) bütün hallarda ölçülmüş kəmiyyətlər üçün eyni nəticələr alınacaqdır.

Ona görə də (6.3) tənliklərinin tərtibi zamanı aşağıdakı iki şərtə əməl olunması tələb olunur:

1. Sistemin tənliklərində bütün ölçülmüş kəmiyyətlər arqument kimi daxil edilməlidir.

2. (6.3) tənlikləri bir-birindən asılı olmamalı, yəni onlardan hər hansı birinin digərləri vasitəsilə cəbri çevirmələr yolu ilə alınması yolverilməzdir. Bu şərt yerinə yetirilməzsə, tənliklər sisteminin əsas determinantı sıfra bərabər olar ki, bu da ümumiyyətlə, (6.3) sisteminin həllini qeyri-mümkün edər.

Tutaq ki, (6.3) tənliklər sistemi tələb edilən şərtlərə cavab verir. Onda bu tənliklərdə kəmiyyətlərin həqiqi X_i qiymətlərinin əvəzində x_i ölçülmüş qiymətlərini yazsaq (6.3) şərti tənliklər sistemi (6.2) sistemi şəklinə düşər:

$$
\begin{aligned}
&\varphi_1(x_1, x_2, ..., x_n) = W_1;\\
&\varphi_2(x_1, x_2, ..., x_n) = W_2;\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&\varphi_r(x_1, x_2, ..., x_n) = W_r,
\end{aligned}
\tag{6.4}
$$

burada W_j – şərti tənliklərin poliqon açıqlıqlarıdır.

Tarazlaşdırmanın əsas məqsədi x_i ölçülmüş qiymətlərinə (ölçmə nəticələrinə) müəyyən bir qayda ilə υ_i düzəlişlərinin hesablanmasından ibarətdir. Bu zaman υ_i üçün elə qiymətlər tapılmalıdır ki, bu qiymətləri x_i ölçmə nəticələrinə əlavə etdikdə (6.4) tənliklərinin sağ tərəfində sıfırlar alınsın, yəni

$$
\begin{aligned}
&\varphi_1(x_1+\upsilon_1, x_2+\upsilon_2, \ldots, x_n+\upsilon_n)=0;\\
&\varphi_2(x_1+\upsilon_1, x_2+\upsilon_2, \ldots, x_n+\upsilon_n)=0;\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\varphi_r(x_1+\upsilon_1, x_2+\upsilon_2, \ldots, x_n+\upsilon_n)=0.
\end{aligned}
\tag{6.5}
$$

Burada $\tilde{x}_i = x_i + \upsilon_i$ ölçülmüş kəmiyyətlərin tarazlaşdırılmış qiyməti adlanır. Tarazlaşdırılmış $\tilde{x}_i$ qiymətləri kəmiyyətlərin X_i həqiqi qiymətləri ilə üst-üstə düşmür. Lakin onların ən kiçik kvadratlar metodu ($[p\upsilon^2]=\min$) ilə hesablanmış υ_i meyllikləri ölçülmüş kəmiyyətlərin həqiqi qiymətindən olan meyllikləri sırasında (hesablanması mümkün variantlardan) ən kiçik qiymətə malik olanıdır. Bu fakt $[p\upsilon^2]=\min$ şərtinin optimallığını göstərir.

Bununla belə (6.5) tənliklərinin birgə həllinin mümkünlüyü üçün onları xətti şəklə gətirmək lazımdır. Bu məqsədlə sistemin qeyri-xətti tənlikləri Teylor sırasına ayrılır. Bu zaman υ_i düzəlişləri kiçik qiymətə malik olduğundan sıranın birinci dərəcəli hədləri ilə kifayətlənmək mümkündür:

$$
\begin{aligned}
&\varphi_1(x_1, x_2, ..., x_n) + \frac{\partial\varphi_1}{\partial x_1}\upsilon_1 + \frac{\partial\varphi_1}{\partial x_2}\cdot\upsilon_2 + ... + \frac{\partial\varphi_1}{\partial x_n}\cdot\upsilon_n = 0;\\
&\varphi_2(x_1, x_2, ..., x_n) + \frac{\partial\varphi_2}{\partial x_1}\upsilon_1 + \frac{\partial\varphi_2}{\partial x_2}\cdot\upsilon_2 + ... + \frac{\partial\varphi_2}{\partial x_n}\cdot\upsilon_n = 0;\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&\varphi_r(x_1, x_2, ..., x_n) + \frac{\partial\varphi_r}{\partial x_1}\upsilon_1 + \frac{\partial\varphi_r}{\partial x_2}\cdot\upsilon_2 + ... + \frac{\partial\varphi_r}{\partial x_n}\cdot\upsilon_n = 0.
\end{aligned}
\tag{6.6}
$$

Əgər $\frac{\partial\varphi_1}{\partial x_i} = a_i$; $\frac{\partial\varphi_2}{\partial x_i} = b_i$, ..., $\frac{\partial\varphi_r}{\partial x_2} = g_i$ işarə etsək və (6.4) sistemini nəzərə alsaq, (6.6) tənlikləri belə yazılar:

$$
\begin{aligned}
&a_1\upsilon_1 + a_2\upsilon_2 + ... + a_n\upsilon_n + W_1 = 0;\\
&b_1\upsilon_1 + b_2\upsilon_2 + ... + b_n\upsilon_n + W_2 = 0;\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&g_1\upsilon_1 + g_2\upsilon_2 + ... + g_n\upsilon_n + W_r = 0.
\end{aligned}
\tag{6.7}
$$

(6.7) düzəliş şərti tənliklər sistemi adlanır. Qauss alqoritmləri ilə bu sistem aşağıdakı kimi yazılır:

$$
\begin{aligned}
&[a\upsilon] + W_1 = 0;\\
&[b\upsilon] + W_2 = 0;\\
&\dots\dots\dots\\
&[g\upsilon] + W_r = 0,
\end{aligned}
\tag{6.8}
$$

matris yazlışında isə

$$
BV + W = 0. \tag{6.9}
$$

(6.9) ifadəsində matrislər belə açılır:

$$B=\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ b_1 & b_2 & \dots & b_n \\ . & . & . & . \\ g_1 & g_2 & \dots & g_n \end{vmatrix}; \quad V=\begin{vmatrix} \upsilon_1 \\ \upsilon_2 \\ . \\ . \\ . \\ \upsilon_n \end{vmatrix}; \quad W=\begin{vmatrix} W_1 \\ W_2 \\ . \\ . \\ . \\ W_n \end{vmatrix}.$$

b) düzəliş korrelat tənlikləri. Qeyd edildiyi kimi, (6.7) tənliklər sistemi birqiymətli təyin edilmir, başqa sözlə çoxsaylı həllə malikdir. Çünki sistemin υ_i məchul düzəlişlərinin sayı (n) həmişə tənliklər sayından (r) çoxdur. Geodeziya ölçmələrinin hesablanması nəzəriyyəsində isbat edilir ki, bu sistemin ən dəqiq və birmənalı həlli ən kiçik kvadratlar metodu ilə tapıla bilər. Ən kiçik kvadratlar metodunun əsas şərti isə əvvəlki bölmədə qeyd edildiyi kimi

$$[p\upsilon\upsilon]=\min \tag{6.10}$$

Şəklində ifadə olunur. Bu şərtə əsasən $[p\upsilon\upsilon]$ funksiyasını minimuma gətirib çıxaran υ_i düzəlişləri elə qiymətlər almalıdır ki, bu halda (6.7) tənlikləri də doğru bərabərliyə çevrilsin. Məsələnin həlli, yəni şərti ekstremumun tapılması, Laqranj metodu ilə yerinə yetirilir. Bu məqsədlə ilk növbədə Laqranj funksiyası tərtib edilir. Laqranj funksiyası (6.8) və (6.10) sistemləri əsasında yazılır:

$$\Phi=[p\upsilon\upsilon]-2k_1([a\upsilon]+W_1)-,\cdots,-2k_r([g\upsilon]+W_r)=\min, \tag{6.11}$$

burada: $k_1,k_2,\cdots,k_r$ – qeyri-müəyyən Laqranj əmsallarıdır. Bu əmsallar hesablamalarda korrelat adlandırılır.

Qeyd edək ki, (6.11) ifadəsində dairəvi mötərizədə verilmiş ifadələr (6.8) düsturundan göründüyü kimi sıfra bərabər olduğundan (6.10) şərti pozulmur.

Beləliklə, (6.11) ifadəsi əsasında Φ funksiyasının minimumunu təyin etmək üçün ali riyaziyyat kursundan məlum olduğu kimi bu funksiyanın hər bir υ_i düzəlişi üzrə xüsusi törəməsini tapıb sıfra bərabər etmək lazımdır, yəni

$$\frac{\partial\Phi}{\partial\upsilon_1}=2p_1\upsilon_1-2k_1a_1-2k_2b_1-\ldots-2k_rg_1=0;$$
$$\frac{\partial\Phi}{\partial\upsilon_2}=2p_2\upsilon_2-2k_1a_2-2k_2b_2-\ldots-2k_rg_2=0;$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\frac{\partial\Phi}{\partial\upsilon_n}=2p_n\upsilon_n-2k_1a_n-2k_2b_n-\cdots-2k_rg_n=0.$$

Buradan aşağıdakı şəkildə tənliklər sistemi alınır:

$$\begin{aligned}\upsilon_1&=q_1(a_1k_1+b_1k_2+\cdots+g_1k_r);\\ \upsilon_2&=q_2(a_2k_1+b_2k_2+\cdots+g_2k_r);\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ \upsilon_n&=q_n(a_nk_1+b_nk_2+\cdots g_nk_r),\end{aligned}\qquad(6.12)$$

burada $q_i=1/p_i$ ölçmələrin tərs çəkisidir (bəzi ədəbiyyatlarda çəki əmsalı adlanır).

(6.12) tənlikləri düzəliş korrelat tənliklər sistemi adlanır.

c) korrelat normal tənliklərin tərtibi sistemindən göründüyü kimi υ_i qiymətlərini hesablamaq üçün k_j korrelatları məlum olmalıdır. Korrelatları isə müvafiq normal tənliklərdən təyin edirlər. Ona görə də, növbəti mərhələdə korrelat normal tənlikləri tərtib edilir. Bu məqsədlə (6.12) sisteminin hər iki tərəfini birinci əmsallar sütununa, yəni a_1, a_2,..., a_n əmsallarına vurub

$$a_1v_1 = q_1a_1a_1k_1 + q_1a_1b_1k_2 + \cdots + q_1a_1q_1k_r;$$
$$a_2v_2 = q_2a_2a_2k_1 + q_2a_2b_2k_2 + \cdots + q_2a_2g_2k_r;$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$a_nv_n = q_na_na_nk_1 + q_na_nb_nk_2 + \cdots + q_na_ng_nk_r,$$

alınmış tənliklərin sağ və sol tərəflərini cəmləmək lazımdır. Eyni zamanda (6.8) ifadələrini nəzərə alsaq nəticədə belə bir normal tənlik almış olarıq:

$$[qaa]k_1 + [qab]k_2 + \cdots + [qag]k_r + W_1 = 0.$$

Eyni qayda ilə (6.12) sistemini ardıcıl olaraq digər b_i, ... g_i əmsallar sütunlarına vurmaqla növbəti normal tənlikləri, sonda isə bütövlükdə korrelat normal tənliklər sistemini tərtib etmiş olarıq:

$$\begin{aligned} &[qaa]k_1 + [qab]k_2 + \cdots + [qag]k_r + W_1 = 0; \\ &[qab]k_1 + [qbb]k_2 + \cdots + [qbg]k_r + W_2 = 0; \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ &[qag]k_1 + [qbg]k_2 + \cdots + [qgg]k_r + Wr = 0. \end{aligned} \qquad (6.13)$$

Qeyd edək ki, korrelat üsulda normal tənliklərin sayı artıq ölçmələr (şərti tənliklər) sayına bərabər olur.

ç) korrelat normal tənliklərin həlli. Normal tənliklərdə məchulların korrelatlardan və yaxud parametrlərdən ibarət olması onların həll sxeminə heç bir təsir göstərmir. Həmçinin onu da qeyd edək ki, (6.13) korrelat normal tənlikləri (5.15) parametrik normal tənliklərinin xas olduğu xassələrə malikdir. Ona görə də korrelat tənliklərin həllini parametrik normal tənliklərin həll qaydasında yerinə yetirmək olar. Fərqli cəhət ondan ibarətdir ki, bu halda (6.13) tənliklərinin həllindən k_j korrelat qiymətləri tapılır. Sonra k_j qiymətlərindən istifadə edərək (6.12) tənliklərinə əsasən υ_i düzəlişləri, daha sonra isə kəmiyyətlərin $\tilde{x}_i = x_i + \upsilon_i$ tarazlaşdırılmış qiymətləri təyin edilir. Öz növbəsində ölçülmüş kəmiyyətlərin tarazlaşdırılmış qiymətlərinə əsasən onların istənilən funksiyasının tarazlaşdırılmış qiymətini hesablamaq imkanı yaranır. Məsələn, geodeziya şəbəkəsində hər hansı məntəqənin koordinatlarının tarazlaşdırılmış qiymətlərini müvafiq bucaq və məsafənin ölçmələr funksiyası şəklində hesablamaq olar.

Onu da qeyd edək ki, korrelat normal tənliklərin həllini də parametrik üsulda olduğu kimi Qauss sxemlərində yerinə yetirmək daha əlverişlidir (cədvəl 6.1-6.3).

Cədvəl 6.1. Hesablama sxemi №1

Ölçmənin №-si	$a_i\ b_i \cdots g_i\ s_i'$	$\pi_i = \frac{1}{p_i}$	$\pi_i a_i\ \ \pi_i b_i \cdots \pi_i g_i\ \ \pi_i s_i^{©}$	υ_i	$\pi_i \upsilon_i$
1.	$a_1\ b_1 \cdots g_1\ s_1'$	π_1	$\pi_1 a_1\ \ \pi_1 b_1 \cdots \pi_1 g_1\ \ \pi_1 s_1'$	υ_1	$\pi_1 \upsilon_1$
2.	$a_2\ b_2 \cdots g_2 s_2'$	π_2	$\pi_2 a_2\ \ \pi_2 b_2 \cdots \pi_2 g_2\ \pi_2 s_2'$	υ_2	$\pi_2 \upsilon_2$
...	......	...	....	...	....
n	$a_n\ b_n \cdots g_n\ s_n'$	π_n	$\pi_n a_n\ \ \pi_n b_n \ldots\pi_n g_n\ \ \pi_n s_n'$	υ_n	$\pi_n \upsilon_n$
			$k_1 k_2 .. k_r$		

Qeyd: Cədvəl 6.1-də düzəliş şərti tənliklərinin əmsalları parametrik üsulda olduğu kimi sətirlər üzrə deyil, sütunlar (qraflar) boyunca yuxarıdan aşağıya istiqamətdə yazılır. Bundan başqa (6.1) cədvəlində l qrafası yoxdur, çünki korrelat normal tənliklərdə sərbəst hədlər poliqon açıqlıqlarından (W_i) ibarətdir. Bu cədvəldə həmçinin p_i ölçmə çəkilərinin əvəzində onların tərs çəki əmsalları (π_i) yazılır. Eyni zamanda S_i' cəm ədədi

$$S_i' = a_i + b_i + \cdots + g_i$$

hesablanır.

Cədvəl 6.2. Hesablama sxemi №2

	$a]$	$b]\ldots g]$	$s']$	yoxlama	w	Σ
$[\pi a$	$[\pi aa]$	$[\pi ab]\ldots[\pi ag]$	$[\pi as']$	fərqlənmə 0,01-0,02	w_1	Σ_1
$[\pi b$		$[\pi bb]\ldots[\pi bg]$	$[\pi bs']$		w_2	Σ_2
....						
$[\pi g$		$[\pi gg]$	$[\pi gs']$		w_r	Σ_r
$[\pi s'$			$[\pi s's']$			

Cədvəl 6.3. Hesablama sxemi №3

Köməkçi əmsallar	$k_1\ \ k_2 \ldots k_r$	w	Σ	Yoxlama
$\frac{1}{[\pi aa]}$	$[\pi aa]\,[\pi ab]\ldots[\pi aa]$ $-1-\frac{[\pi ab]}{[\pi aa]}\ldots-\frac{[\pi ag]}{[\pi aa]}$	w_i $-\frac{w_i}{[\pi aa]}$	Σ_1 $-\frac{\Sigma_1}{[\pi aa]}$	fərqlənmə 0,01-0,02
$\frac{1}{[\pi bb\cdot 1]}$	$[\pi bb\cdot 1]\ldots[\pi bg\cdot 1]$ $-1\ldots-\frac{[\pi bg\cdot 1]}{[\pi bb\cdot 1]}$	$[w_2\cdot 1]$ $-\frac{[w_2\cdot 1]}{[\pi bb\cdot 1]}$	$[\Sigma_2\cdot 1]$ $-\frac{[\Sigma_2\cdot 1]}{[\pi bb\cdot 1]}$	
...	...	...	...	...
$\frac{1}{[\pi gg\cdot(r-1)]}$	$[\pi gg\cdot(r-1)]$ -1	$[w_r\cdot(r-1)]$ $-\frac{[w_r\cdot(r-1)]}{[\pi gg\cdot(r-1)]}$	$[\Sigma_r\cdot(r-1)]$ $-\frac{[\Sigma_r\cdot(r-1)]}{[\pi gg\cdot(r-1)]}$	
	$k_1\ \ k_2\ldots k_r$	$[w_{r+1}\cdot r]=[\Sigma_{r+1}\cdot r]=-[pv^2]$		

d) Korrelat üsulda yoxlamalar. Tarazlaşdırma hesablamalarının düzgün aparılması müvafiq yoxlamalarla həyata keçirilir. Belə ki, düzəliş şərti tənliklərinin tərtibinin düzgünlüyü ikinci əldən (başqa şəxs tərəfindən) yoxlanılır. Eyni zamanda aşağıdakı bərabərliklər doğru olmalıdır:

$$a_i + b_i + \cdots + g_i = s_i', \ (i = 1,2,\cdots,n) \ ; \qquad (6.14)$$

və

$$[a] + [b] + \cdots + [g] = [s_i']. \qquad (6.15)$$

Normal tənliklərin tərtibi və həlli isə parametrik üsulda olduğu kimi cəmlər metodu ilə yoxlanılır:

$$\begin{aligned}
&[\pi aa] + [\pi ab] + \ldots + [\pi ag] = [\pi as'];\\
&[\pi ab] + [\pi bb] + \ldots + [\pi bg] = [\pi bs'];\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&[\pi ag] + [\pi bg] + \ldots + [\pi gg] = [\pi gs'];\\
&[\pi as'] + [\pi bs'] + \ldots + [\pi gs'] = [\pi s's'];\\
&\Sigma_1 = [\pi as'] + w_1;\\
&\Sigma_2 = [\pi bs'] + w_2;\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\Sigma_r = [\pi gs'] + w_r \quad .
\end{aligned} \qquad (6.16)$$

Ekvivalent tənliklərin tərtibi zamanı aşağıdakı yoxlamalar aparılır:

$$\begin{array}{lll}
[\pi aa] + [\pi ab] + \ldots + [\pi ag] & + w_1 & = \Sigma_1 \\
\quad [\pi bb \cdot 1] + \ldots + [\pi bg \cdot 1] & + [w_2 \cdot 1] & = [\Sigma_2 \cdot 1] \\
\quad\quad [\pi gg \cdot (r-1)] & + [w_r \cdot (r-1)] & = [\Sigma_r \cdot (r+1)]
\end{array} \ ; \ (6.17)$$

Sxem üzrə düz gedişin yekun yoxlaması

$$[W_{r+1} \cdot r] = [W_{r+1} \cdot r] \tag{6.18}$$

ifadəsindən ibarətdir.

Korrelat üsulda çevrilmiş, eləcə də çevrilməmiş Qauss alqoritmlərinin açılış qaydası eynilə parametrik üsulda olduğu kimidir.

Əgər şərti olaraq qəbul etsək ki,

$$\begin{aligned} W_1 &= [pal]; \\ W_2 &= [pbl]; \\ &\dots\dots\dots\dots \\ W_r &= [pgl]; \\ W_{r+1} &= [pll] = 0; \end{aligned} \tag{6.19}$$

və

$$\begin{aligned} \Sigma_1 &= [pas]; \\ \Sigma_2 &= [pbs]; \\ &\dots\dots\dots\dots \\ \Sigma_r &= [pgs]; \\ \Sigma_{r+1} &= [w] = [pls], \end{aligned} \tag{6.20}$$

onda $[w_2 \cdot 1]$, $[w_3 \cdot 2]$ və s. çevrilmiş alqoritmləri parametrik üsulda $[pbl \cdot 1]$, $[pcl \cdot 2]$ və s. kimi açılacaqdır, yəni

$$[W_2 \cdot 1] = W_2 - \frac{[\pi ab]}{[\pi aa]} \cdot w_1,$$

$$[W_3 \cdot 2] = W_3 - \frac{[\pi ac] \cdot W_1}{[\pi aa]} - \frac{[[\pi bc \cdot 1][W_2 \cdot 1]]}{[\pi bb \cdot 1]}.$$

Bu üsulda υ_i düzəlişlərinin tapılmasının düzgünlüyü isə

$$[p\upsilon^2] = -[W_{r+1} \cdot r]; \; [p\upsilon^2] = -[kw] \tag{6.21}$$

ifadələri ilə yoxlanılır.

Korrelat üsulla tarazlaşdırmanın son yoxlaması

$$\varphi_j(\widetilde{x}_1, \widetilde{x}_2, ... \widetilde{x}_n) = 0 \tag{6.22}$$

bərabərliyinin doğru olmasından ibarətdir. Burada $\widetilde{x}_i = x_i + \upsilon_i$ – ölçülmüş kəmiyyətlərin tarazlaşdırılmış qiymətləridir.

§42. Poliqon açıqlığının yol verilən qiymətinin hesablanması

Korrelat üsulun parametrik üsulla müqayisədə ən əsas üstün cəhətlərindən biri tarazlaşdırma zamanı w_j poliqon açıqlıqlarının hesablanmış və təlimatlarla yol verilən qiymətlərinin tutuşdurulması əsasında ölçmə nəticələrindəki kobud səhvlərin üzə çıxarılmasından ibarətdir.

Poliqon açıqlığının yol verilən qiymətinin hesablanma düsturunu çıxaraq. Bu məqsədlə (6.9) tənliyindən istifadə edilir:

$$W = B \cdot \Delta. \tag{6.23}$$

(6.23) düsturunda Δ vektoru $(-V)$ vektoru ilə əvəz edilmişdir. Doğrudan da ölçmə nəticələrində sistematik səhvlər yoxdursa, onda ölçmələrə hesablanmış υ_i düzəlişlərini təxminən $(-\Delta_i)$ həqiqi səhvləri kimi qəbul etmək olar. Eyni zamanda ölçmələr səhvləri nəzəriyyəsindən məlumdur ki, ölçmələrin həqiqi səhvlərinin korrelyasiya matrisi aşağıdakı düsturla hesablanır:

$$K_\Delta = \sigma_0^{\ 2} \cdot P^{-1}, \tag{6.24}$$

burada: P^{-1} – ölçmələrin tərs çəki matrisi; σ_0^2 – vahid çəki dispersiyasıdır. Onda dəqiqliyin qiymətləndirilməsi nəzəriyyəsinə əsasən W funksiyasının korrelyasiya matrisi üçün yaza bilərik

$$K_w = \sigma_0^2 B P^{-1} B^{\mathrm{T}},$$

bu düsturda

$$BP^{-1}B^{\mathrm{T}} = N$$

olduğunu nəzərə alsaq

$$K_w = \sigma_0^2 N \tag{6.25}$$

olar.

(6.25) düsturunun təhlilindən belə bir nəticə çıxır ki, poliqon açıqlığının $\sigma_{w_j}^2$ dispersiyaları K_w matrisinin əsas diaqonal elementlərindən ibarətdir və aşağıdakı kimi təyin edilir:

$$\begin{aligned} \sigma_{w_1}^2 &= \sigma_0^2[\pi aa]; \\ \sigma_{w_2}^2 &= \sigma_0^2[\pi bb]; \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots; \\ \sigma_{w_r}^2 &= \sigma_0^2[\pi gg], \end{aligned} \tag{6.26}$$

riyazi gözləməsi isə

keçək.

a) Şərti tənliklərin sayı və növlərinin təyini. Sərbəst trianqulyasiya şəbəkəsində dörd növ həndəsi şərt: *fiqur şərti, bucaqların cəmi şərti, horizont şərti, qütb şərti* meydana çıxır və bu şərtlərə uyğun tənliklər yazılır. Əvvəlki bölmələrdə qeyd edildiyi kimi, şəbəkədə yerinə yetirilmiş hər bir artıq ölçmə (tərəf və ya azimut) yeni bir həndəsi şərt meydana çıxarır ki, bu da öz növbəsində əlavə şərti tənlik yazmaq imkanı verir. Ümumən geodeziya şəbəkəsində bir-birindən asılı olmayan şərti tənliklərin sayı həmin şəbəkədə yerinə yetirilmiş artıq ölçmələr sayına bərabərdir. Trianqulyasiya qəbəkəsində tarazlaşdırma ölçülmüş istiqamətlərə görə aparılırsa, bu halda şərti tənliklərin sayı və onların növləri aşağıdakı düsturlarla təyin edilir:

$$S_i = D^* - (2k + t);\quad f = D - t - p + 1;$$
$$C = P - 2n + 3;\ r_\delta = k_\delta - 1;\ r_D = k_D - 1, \qquad (6.36)$$

burada: $D^* = D + K_s + K_\alpha$.

Tarazlaşdırmanın bucaqlar üzrə aparıldığı halda isə:

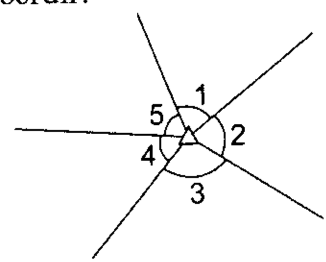
$$\begin{aligned} &S_b = N^* - 2k;\ f = N - p - q + 1;\ q = N + t - D; \\ &C = p - 2n + 3;\ r_b = k_b - 1;\ r_D = K_D - 1, \end{aligned} \qquad (6.37)$$

burada, $N^* = N + K_s + K_\alpha$.

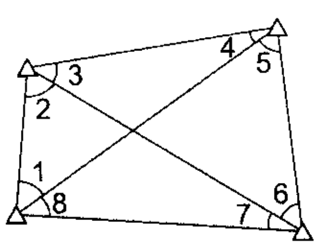
(6.36) düsturda: S_l və S_i – istiqamətlər və bucaqlar üzrə uyğun şərti tənliklərin ümumi sayı; f – fiqur şərti tənliklərinin sayı; q – horizont şərtinə görə tənliklərin sayı; c – qütb şərtlərinin sayı; r_b – bazis şərtlərinin sayı; r_D – direksion bucaq şərtlərinin sayı; D^* – şəbəkədə ölçülmüş istiqamətlərin (D), tərəflərin (K_S) və azimutların (K_α) birgə ümumi sayıdır.

(6.37) düsturunda: N^* – şəbəkədə ölçülmüş bucaqların (N), tərəflərin (K_S) və azimutların (K_α) ümumi sayı; k_b – bazislərin (məlum tərəflərin) və əlavə ölçülmüş tərəflərin ümumi sayı; K_D – məlum başlanğıc və əlavə ölçülmüş azimutların ümumi sayı; n – şəbəkədə məntəqələrin ümumi sayı; K – təyin edilən məntəqələrin sayı; p – şəbəkədəki tərəflərin ümumi sayı; t – bucaq ölçmələri yerinə yetirilmiş məntəqələrin sayıdır.

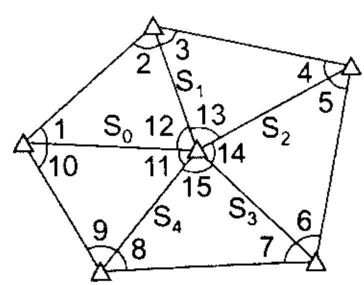
Trianqulyasiya şəbəkəsində fiqur şərtlərinin sayı şəbəkədəki üçbucaqların sayına bərabərdir. Horizont şərti isə müşahidə məntəqəsində bucaqların ümumi (ortaq) tərəflərə malik olduğu halda yazılır (şəkil 6.1). Müşahidələrin istiqamətlər üzrə aparıldığı halda horizont şərti meydana çıxmır. Horizont şərtlərinin sayı mərkəzi sistemlərdəki qütblər sayına bərabərdir. Qütb şərtləri yalnız geodezik dördbucaqlı (şəkil 6.2) və mərkəzi sistemlərdə (şəkil 6.3) meydana çıxır. Qütb şərtlərinin çayı şəbəkədə geodezik dördbucaqlı və mərkəzi sistemlərin ümumi sayına bərabərdir.



Şəkil 6.1. Horizont şərtinin meydana çıxma sxemi

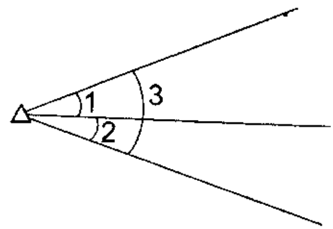


Şəkil 6.2. Geodezik dördbucaqlı



Şəkil 6.3. Mərkəzi sistem

Bucaqlar cəmi şərti bucaqların ardıcıl ölçüldüyü halda meydana çıxır (şəkil 6.4).



Şəkil 6.4. Bucaqlar cəmi şərtinin sxemi

Qeyri-sərbəst trianqulyasiya şəbəkələrində yuxarıda göstərilmiş şərtlərə əlavə olaraq direksion bucaq, bazis və koordinat şərtləri meydana çıxa bilər. Şəbəkədə meydana çıxan şərti tənliklərin növləri və ümumi sayını koordinat şərtlərini nəzərə almasaq həmin (6.36) və (6.37) düsturları ilə təyin etmək olar.

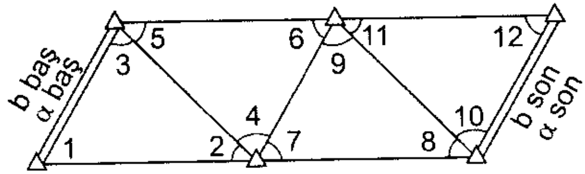
Koordinat (absis və ordinat) şərtlərinin sayı aşağıdakı düsturla hesablanır:

$$r_{x,y} = (2K_{x,y} - 1), \qquad (6.38)$$

burada $K_{x,y}$ – bir-biri ilə əlaqəsi olmayan (ən azı iki təyin edilən tərəf uzaqlığında yerləşən) koordinatları məlum məntəqələr qruplarının sayıdır.

Əgər trianqulyasiya şəbəkəsində ortaq məntəqəyə malik olmayan iki və daha artıq sayda məlum direksion bucaqlar vardırsa, onda həmin şəbəkədə direksion bucaq şərtləri meydana çıxır (şəkil 6.5).

Bazis şərti isə şəbəkədə iki və ya daha artıq sayda ölçülmüş tərəf və bazislər olduqda meydana çıxır. Məsələn, sxemi şəkil 6.5-də verilmiş şəbəkədə iki $b_{baş}$ və b_{son} bazislərinə görə bazis şərti tənliyi tərtib olunmalıdır.



Şəkil 6.5. Direksion bucaq və bazis şərtlərinin sxemi

b) şərti tənliklərin tərtibi

1. Fiqur şərti tənlikləri. Həndəsə kursundan məlumdur ki, çoxbucaqlının daxili bucaqlarının nəzəri cəmi 180°·(n–2) düsturu ilə hesablanır, burada n – bucaqların sayıdır. Üçbucaq üçün bu şərt belə yazılır:

$$X_1 + X_2 + X_3 - 180^\circ = 0,$$

burada: X_1, X_2, X_3 – üçbucağın daxili bucaqlarının həqiqi qiymətləridir.

Əgər başlanğıc əlaqə tənliyində bucaqların həqiqi qiymətlərinin əvəzində onların x_i ölçülmüş qiymətlərini yazsaq, onda tənliyin sağ tərəfində sıfrın əvəzində W, yəni üçbucağın bucaq açıqlığını göstərmək lazım gəlir:

$$x_1 + x_2 + x_3 - 180^\circ = W\,.$$

Onda (6.7) düsturuna əsasən fiqur şərtindən aşağıdakı şəkildə düzəliş tənliyinə keçə bilərik:

$$V_1 + V_2 + V_3 + W = 0\,. \qquad (6.39)$$

2. Bucaqlar cəminin şərti tənliyi. Misal üçün, şəkil 6.4-də verilmiş bucaqlar arasında belə bir bucaqlar cəmi şərti tənliyini göstərə bilərik:

$$X_1+X_2-X_3=0.$$

Onda müvafiq şərti düzəliş tənliyi

$$V_1+V_2-V_3+W=0 \qquad (6.40)$$

şəklində olar. (6.40) düsturunda sərbəst hədd W bucaqların ölçülmüş qiymətləri əsasında təyin edilir:

$$W=x_1+x_2-x_3.$$

3. Horizont şərti tənliyi. Şəkil 6.1-də göstərilmiş şəbəkədə horizont şərti belə yazılır:

$$V_1+V_2+V_3+V_4+V_5+W=0, \qquad (6.41)$$

burada $W=x_1+x_2+x_3+x_4+x_5-360°$; x_i isə bucaqların ölçülmüş qiymətləridir.

4. Direksion bucağın şərti tənliyi. Bu şərtin həndəsi mahiyyəti ondan ibarətdir ki, başlanğıc direksion bucaqlardan hər hansı birinin məlum qiyməti onun digər başlanğıc direksion bucaqdan arada qalan üçbucaqların vasitəsi ilə təyin edilmiş qiyməti ilə nəzəri cəhətdən üst-üstə düşməlidir. Onda, məsələn şəkil 6.5-də verilmiş trianqulyasiya şəbəkəsi üçün, bu şərt belə yazılır

$$\alpha_{son}=\alpha_{baş}-X_3+X_4-X_9+X_{10}\pm180°k,$$

burada: X_i – bucaqların həqiqi və yaxud tarazlaşdırılmış qiymətləri; k – son direksion bucağın hesablanmasında iştirak etmiş aralıq bucaqların sayıdır (bizim misalda k=4). Onda yuxarıdakı şərtə əsasən belə bir şərti tənlik yaza bilərik:

$$-v_3+v_4-v_9+v_{10}+w=0. \qquad (6.42)$$

(6.42)-də poliqon açıqlığı

$$w=\alpha_{baş}-x_3+x_4-x_9+x_{10}\pm180^\circ k-\alpha_{son}$$

düsturu ilə hesablanır; x_i – bucaqların ölçülmüş qiymətləridir.

Adətən (6.39)-(6.42) tənliklərini ümumi ad altında birləşdirərək *bucaq şərti tənlikləri* adlandırırlar və onlar xətti şəklə malik olur.

5. Qütb şərti tənliyi. Bu şərtin mahiyyəti ondan ibarətdir ki, geodezik dördbucaqlı və yaxud mərkəzi sistemdə hər hansı bir tərəfin uzunluğu onun şəbəkə üçbucaqlarından keçməklə hesablanmış uzunluğu ilə nəzəri cəhətdən üst-üstə düşməlidir. Başlanğıc tərəfin bağlandığı və hesablamalarda üçbucaqların istinad edildiyi məntəqə *şəbəkənin qütbü* adlanır.

Mərkəzi sistemin (şəkil 6.3) qütb nöqtəsi onun mərkəzində yerləşir. Bu şəkildə S_0 tərəfini başlanğıc qəbul etsək, onda birinci tərəf (S_1) üçün sinuslar teoreminə əsasən yaza bilərik:

$$S_1=S_0\cdot\frac{\sin 1}{\sin 2}.$$

Eyni qayda ilə ikinci tərəf (S_2) üçün

$$S_2=S_1\cdot\frac{\sin 3}{\sin 4}$$

olar.

S_1-in yuxarıda alınmış qiymətini S_2 ifadəsində yerinə yazsaq alarıq:

$$S_2 = S_0 \cdot \frac{\sin 1 \cdot \sin 3}{\sin 2 \cdot \sin 4}.$$

Bu qayda ilə ardıcıl olaraq

$$S_3 = S_0 \cdot \frac{\sin 1 \cdot \sin 3 \cdot \sin 5}{\sin 2 \cdot \sin 4 \cdot \sin 6},$$

$$S_4 = S_0 \cdot \frac{\sin 1 \cdot \sin 3 \cdot \sin 5 \cdot \sin 7}{\sin 2 \cdot \sin 4 \cdot \sin 6 \cdot \sin 8}$$

tapariq.

Üçbucaqlar sırasını başlanğıc tərəfdə qapasaq, sonda belə bir ifadə alınar

$$S_0 = S_0 \cdot \frac{\sin 1 \cdot \sin 3 \cdot \sin 5 \cdot \sin 7 \cdot \sin 9}{\sin 2 \cdot \sin 4 \cdot \sin 6 \cdot \sin 8 \cdot \sin 10}. \qquad (6.43)$$

(6.43) ifadəsi şəkil 6.3-də verilmiş şəbəkədə meydana çıxan qütb şərtinə görə yazılmış başlanğıc əlaqə tənliyidir. Qütb tənliyində tək rəqəmli nömrəyə malik bücaqların sinusları surətdə, cüt rəqəmlilərin sinusları isə məxrəcdə yazılmışdır. Bu qaydanın saxlanılması üçün uçbucaqlarda əvvəlcə irəlidə qalan tərəfin (S_1), sonra isə geridə qalan tərəf (S_0) qarşısındakı bucağı nömrələmək lazımdır.

Digər tərəfdən (6.43) tənliyi qeyri-xətti şəklə malik olduğundan həlli asandlaşdırmaq məqsədi ilə onu xətti şəklə gətirmək lazımdır.

Onu da qeyd edək ki, yaxın zamanlaradək (6.43) tənliyi loqarifmləmə yolu ilə xüsusi loqarifm cədvəllərindən istifadə etməklə hesablanırdı. Bu məqsədlə (6.43) əlaqə tənliyi əsasında aşağıdakı şəkildə xətti düzəliş tənliyi yazılır:

$$\mathrm{ctg}1'\cdot v_1+\mathrm{ctg}3'\cdot v_3+\mathrm{ctg}5'\cdot v_5+\mathrm{ctg}7'\cdot v_7+\mathrm{ctg}9'\cdot v_9-\mathrm{ctg}2'\cdot v_2-$$
$$-\mathrm{ctg}4'\cdot v_4-\mathrm{ctg}6'\cdot v_6-\mathrm{ctg}8'\cdot v_8-\mathrm{ctg}10'\cdot v_{10}+w\rho''=0.$$

Yığcam şəkildə bu şərti tənliyi belə də yazmaq olar:

$$\sum_{i=1,3,5,7}\mathrm{ctg}x_i v_i-\sum_{i=2,4,6,8}\mathrm{ctg}x_i v_i+w\cdot\rho''=0. \qquad (6.44)$$

Burada:

$$w=\frac{\sin 1'\cdot\sin 3'\cdot\sin 5'\cdot\sin 7'\cdot\sin 9'}{\sin 2'\cdot\sin 4'\cdot\sin 6'\cdot\sin 8'\cdot\sin 10'}-1;$$

$1',2',3',...,10'$ – bucaqların ölçülmüş qiymətləri; $\rho''=206265''$ – radianın bucaq saniyələri ilə qiymətidir.

Hal-hazırda bu məsələnin həlli EHM-lər vasitəsilə asanlıqla həyata keçirilir və hesablamalarda bilavasitə (6.43) düsturundan istifadə edilir.

Geodezik dördbucaqlı halında diaqonalların kəsişmə nöqtəsi sistemin qütb nöqtəsi götürülür və uçbucaqlar sırası bu nöqtə ətrafında qapanır. Geodezik dördbucaqlının da qütb şərti mərkəzi sistemdə istifadə edilmiş qaydada yazılır və formaca mərkəzi sistem üçün alınmış (6.44) tənliyi ilə eynilik təşkil edir. Məsələn, şəkil 6.2-də verilmiş geodezik dördbucaqlının qütb tənliyinin sərbəst həddi belə təyin edilir:

$$w=\frac{\sin 1'\cdot\sin 3'\cdot\sin 5'\cdot\sin 7'}{\sin 2'\cdot\sin 4'\cdot\sin 6'\cdot\sin 8'}-1.$$

6. Bazis şərti tənliyi. Bu şərtin mahiyyəti ondan ibarətdir ki, şəbəkədə bazislərin məlum uzunluq qiyməti aralıq üçbucaqlar vasitəsilə digər bazislərdən hesablanmış qiyməti ilə nəzəri cəhətdən üst-üstə düşməlidir. Bazis şərti tənliyi eynilə qütb şərti tənliyi kimi yazılır. Fərqli cəhət ondan ibarətdir ki, qütb şərtində üçbucaqlar sırası hansı tərəfdən başlanırsa həmin tərəfdə qapanır. Bazis şərtində isə üçbucaqlar sırası bir bazisdən başlayıb digərinə bağlanır.

Sxemi şəkil 6.5-də verilmiş şəbəkə üçün bazis şərti tənliyini aşağıdakı şəkildə yazıla bilər

$$\frac{b_{baş}}{b_{son}} \cdot \frac{\sin 1 \cdot \sin 5 \cdot \sin 7 \cdot \sin 11}{\sin 2 \cdot \sin 6 \cdot \sin 8 \cdot \sin 12} = 1 . \qquad (6.45)$$

7. Koordinat şərti tənlikləri. Koordinat şərti tənlikləri yazılarkən o əsas götürülür ki, bir dayaq məntəqəsinin (qrupun) məlum koordinatları onlar üçün digər dayaq məntəqəsindən (qrupdan) aralıq üçbucaqların köməyilə hesablanmış koordinatlarla eyni olmalıdır. Koordinat şərti tənlikləri mürəkkəb şəklə malik olduğundan, burada onların təfsilatlı şərhini ötürürük.

II. Poliqonometriya şəbəkəsi. Bütövlükdə poliqonometriya şəbəkəsinin tarazlaşdırılması, ona daxil olan ayrı-ayrı gedişlər üzrə tərtib edilmiş şərti tənliklər əsasında aparılır. Ona görə də xüsusi hal kimi tək poliqonometriya gedişi üzrə tarazlaşdırma məsələsinə baxaq.

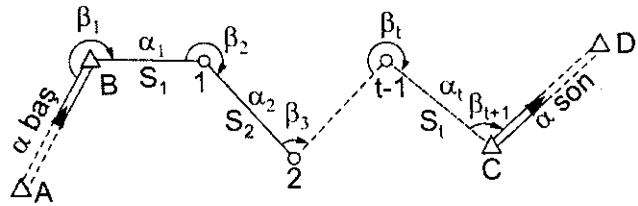
Geodeziya kursundan bilirik ki, poliqonometriya gedişində t sayda tərəf və $t+1$ sayda üfüqi dönmə bucağı ölçülür (şəkil 6.6). Ümumi ölçmələr sayı $n = t + (t+1) = (2t+1)$ təşkil edir. Lazımi kəmiyyətlərin (təyin edilən məntəqələrin absis və ordinatları) sayı isə $k = 2(t-1)$ -dir. Onda artıq ölçmələr sayı

$$r = n - k = (2t+1) - 2(t-1) = 3$$

olar.

Bildiyimiz kimi, korrelat tarazlaşdırma üsulunda şərti tənliklərin sayı şəbəkədəki artıq ölçmələr sayına bərabərdir. Buradan belə nəticə çıxır ki, hər bir poliqonometriya gedişi üçün bir-birindən asılı olmayan üç şərti tənlik yazmaq lazımdır. Onu da qeyd edək ki, tənliklərin sayına gediş üzrə aralıq məntəqələrin sayı təsir etmir.

Beləliklə, poliqonometriya gedişində meydana çıxan direksion bucaq, absis və ordinat şərtləri əsasında aşağıdakı şərti tənlikləri yaza bilərik.



Şəkil 6.6. Açıq poliqonometriya gedişinin sxemi

1. Direksion bucaq şərti. Bu şərtin mahiyyəti ondan ibarətdir ki, məsələn, şəkil 6.6-da CD tərəfinin α_{son} direksion bucağının məlum qiyməti β_i ölçülmüş bucaqları və AB tərəfinin $\alpha_{baş}$ direksion bucağına əsasən hesablanmış $\alpha_{son}^{hesab.}$ qiyməti ilə üst-üstə düşməlidir. Bu şərti ifadə edən tənlik belə yazılır:

$$\sum_{i=1}^{t+1} \upsilon_{\beta_i} + w_\beta = 0, \qquad (6.46)$$

burada

$$w_\beta = \alpha_{baş.} - \alpha_{son.} + \sum_{i=1}^{t+1} \beta_{sol,i}^{ölçl} - 180^\circ \cdot (t+1). \qquad (6.47)$$

2. Koordinat şərtləri

a) Absis şərti. Bu şərtə görə C məntəqəsinin məlum $X_C^{ver.}$ absis qiyməti s_i və β_i qiymətləri ilə B məntəqəsindən hesablanmış $X_C^{hes.}$ absisinə bərabər olmalıdır.

b) Ordinat şərti. Bu şərt də eynilə absis şərti kimi ifadə olunur. Fərqli cəhəti ondan ibarətdir ki, bu halda koordinatların bərabərliyi ordinat oxu üzrə yoxlanır, yəni

$$y_c^{hes.} = y_c^{ver.}.$$

Koordinat şərtlərinə əsasən yazılmış şərti tənliklər aşağıdakı şəklə malikdir:

$$\begin{aligned}
&\sum \upsilon_{s_i} \cdot \cos\alpha_i + \frac{1}{\rho}\sum_{i=1}^{t+1} \eta_i \upsilon_{\beta_i} + \frac{1}{\rho}\eta_{son} \cdot w_\beta + w_x = 0; \\
&\sum \upsilon_{s_i} \cdot \sin\alpha_i - \frac{1}{\rho}\sum_{i=1}^{t+1} \xi_i \upsilon_{\beta_i} - \frac{1}{\rho}\xi_{son} \cdot w_\beta + w_y = 0,
\end{aligned} \qquad (6.48)$$

burada: η_i və ξ_i – mərkəzi koordinatlar olub aşağıdakı kimi hesablanır:

$$\eta_i = y_i - y_M; \quad \xi_i = x_i - x_M,$$

x_M, y_M – ağırlıq mərkəzinin koordinatlarıdır.

Əgər bucaqlar eyni dəqiqliklə ölçülmüşdürsə, onda

$$\begin{aligned}
x_M &= \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_{t+1}}{t+1} = \frac{[x]}{t+1}, \\
y_M &= \frac{y_1 + y_2 + \cdots + y_{t+1}}{t+1} = \frac{[y]}{t+1}.
\end{aligned} \qquad (6.49)$$

$\upsilon_{s_i}, \upsilon_{\beta_i}$ – tərəflərə və bucaqlara hesablanmış düzəlişlər; w_x, w_y – poliqonometriya gedişinin x və y oxları üzrə poliqon açıqlıqlarıdır.

Qeyd: (6.46) və (6.48) tənliklərində fərz edilir ki, $\alpha_{baş}$, α_{son} və dayaq məntəqələrinin (bizim misalda, *B* və *C* məntəqələri) koordinatları heç bir səhvə malik deyildir.

Tarazlaşdırmanın sonrakı mərhələri normal tənliklərin tərtibi və həllindən ibarətdir (bax, bölmə 41).

III. Trilaterasiya şəbəkəsi. Trilaterasiya şəbəkəsində meydana çıxan həndəsi şərtləri korrelat üsuldakı şərti tənliklərə nisbətən parametrik üsulun düzəliş tənlikləri ilə ifadə etmək daha asandır. Ona görə də, trilaterasiya şəbəkəsi əsasən parametrik üsulla tarazlaşdırılır. Bununla belə trilaterasiya şəbəkələrinin tarazlaşdırılma alqoritmləri parametrik üsulla da mürəkkəb şəklə malik olduğundan və geniş izahat tələb etdiyindən, burada baxılmır. Maraqlananlar müvafiq ədəbiyyatlardan istifadə edə bilər [4, 5, 7].

IV. Nivelir şəbəkəsi. Nivelir şəbəkəsi üçün yazılmış şərti tənlikləri çox hallarda ***poliqon şərti tənlikləri*** adlandırırlar. Şərti tənliklərin forması nivelir poliqonunun formasından asılıdır. Nivelir poliqonları açıq və ya qapalı formalı ola bilər. Əgər nivelir gedişləri bir reperdən başlayıb digərinə bağlanırsa açıq formalı, eyni reperdən başlayıb və ona da qapandığı halda isə qapalı hesab edilir.

Ümumi halda isə poliqon şərti tənlikləri belə yazılır

$$\sum_{i\in j}(\pm\upsilon_i) + W_j = 0, \tag{6.50}$$

burada $\sum_{i\in j}(\pm\upsilon_i)$ yazılışı onu göstərir ki, cəm altda yalnız j nömrəli poliqonun yüksəliş düzəlişləri toplanmalıdır. Düzəlişin işarəsi isə belə müəyyənləşdirilir: əgər nivelir gedişi ilə poliqonun istiqamətləri üst-üstə düşürsə, onda düzəliş müsbət işarəli, əks halda mənfi işarəli qəbul edilir.

(6.50) tənliyində poliqon açıqlıqları belə hesablanır:

$$W_j = \sum_{i \in j} \pm h_i + H_{baş} - H_{son}, \tag{6.51}$$

qapalı poliqonlarda $H_{baş} = H_{son}$ olduğundan

$$W_j = \sum_{i \in j} \pm h_i \,. \tag{6.52}$$

Burada h_i – ölçülmüş nisbi yüksəkliklərdir.

Poliqon şərti tənliklərinin əmsallarının ± 1 və sıfırdan ibarət olduğu halda normal tənlikləri şərti tənliklər tərtib etmədən də almaq olar. Bunun üçün ilk növbədə nivelir şəbəkəsinin sxemini aşağıdakı qaydada hesablamaya hazırlamaq lazımdır.

1. Bütün gedişlər (1-dən n sayınadək) və poliqonlar (1-dən r sayınadək, $r=n-k$; k isə – qovşaq məntəqələrin sayıdır) ardıcıl nömrələnir;

2. Gedişlər və poliqonların istiqamətləri seçilir;

3. Ölçmə nəticələri (yüksəlişlər), gedişlər üzrə tərs ölçmə çəkiləri və gedişlərin uzunluqları sxem üzərində göstərilir;

4. Nivelir şəbəkəsi hesablanmaya hazır olduqdan sonra prof. V.V.Popovun təklif etdiyi sadə, eyni zamanda əlverişli qaydalarla normal tənliklər tərtib edilir.

Professor V.V. Popovun təklif etdiyi qaydalar aşağıdakılardan ibarətdir:

1. i nömrəli sətirdə normal tənliklərin kvadratik əmsalları i nömrəli poliqona məxsus gedişlərin tərs çəkilər cəminə bərabərdir;

2. i nömrəli sətirlə j sütunun kəsişməsində yerləşən qey-

ri-kvadratik əmsalların qiyməti i, həm də j nömrəli poliqona məxsus olan ortaq gedişin tərs çəkisinə bərabərdir, işarəsi isə poliqonlar eyni istiqamətli olduqda müsbət, əks halda mənfi götürülür;

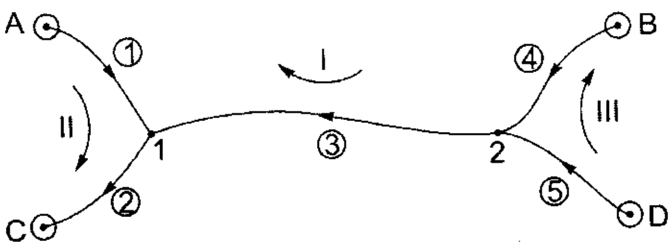
3. i normal tənliyinin sərbəst həddi i nömrəli poliqonun açıqlığına bərabərdir;

4. hər bir i poliqonuna i nömrəli korrelat uyğun gəlir.

Sonra normal tənliklərin həllindən ümumi qaydalara uyğun olaraq müvafiq korrelatlar tapılır, korrelatlara əsasən ölçülmüş kəmiyyətlərə V_i düzəlişləri hesablanır. V_i-nin qiyməti uyğun π_i tərs çəkisi ilə i nömrəli gedişin mənsub olduğu poliqonların korrelatlar cəmi hasilinə bərabərdir. Əgər gedişlə poliqonun istiqamətləri eynidirsə, onda korrelat müsbət, əks halda isə mənfi işarə ilə götürülür.

Sxemi şəkil 6.7-də verilmiş nivelir şəbəkəsi üçün V.V.Popov üsulu ilə normal tənliklər yazaq. Bu şəbəkədə n=5 və k=2 olduğundan normal tənliklərin sayı r=5–2=3 olar. Ona görə də aşağıdakı şəkildə üç tənlik yazırıq:

$$\begin{aligned}
&(\pi_1+\pi_3+\pi_4)\cdot k_1 \quad -\pi_1 k_2 \quad -\pi_4 k_3 \quad +W_1=0;\\
&-\pi_1\cdot k_1 \quad +(\pi_1+\pi_2)k_2 \quad +W_2=0; \qquad (6.53)\\
&-\pi_4\cdot k_1 \quad +(\pi_4+\pi_5)k_3 \quad +W_3=0.
\end{aligned}$$



Şəkil 6.7. İki qovşaq nöqtəli nivelir şəbəkəsinin sxemi

(6.53) tənliklərinin həllindən düzəlişlər üçün belə qiymətlər tapırıq:

$$\upsilon_1 = \pi_1 \cdot (k_2 - k_1); \qquad \upsilon_2 = \pi_2 \cdot k_2; \qquad \upsilon_3 = \pi_3 \cdot k_1;$$
$$\upsilon_4 = \pi_4 \cdot (k_1 - k_3); \qquad \upsilon_5 = \pi_5 \cdot k_3$$

§45. Korrelat üsulla məsələ həlli

Korrelat tarazlaşdırma üsulunun xüsusiyyətlərini və ardıcıllığını, eləcə də bu üsulun parametrik üsuldan fərqli cəhətlərini məsələ həllində əyani olaraq nümayiş etdirək.

Bu məqsədlə həlli 40-cı bölmədə parametrik üsulla verilmiş geodeziya məsələsini burada korrelat üsulla təkrarən həll edək. Belə olarsa, hər iki üsulun eyni nəticəyə gətirib çıxarması da aydın görünər.

Həlli: 1) İlk növbədə şəbəkədə meydana çıxan həndəsi şərtlər və onların sayını müəyyənləşdirmək lazımdır. Bildiyimiz kimi həndəsi şərtlər sayı artıq ölçmələr sayına bərabərdir. Bu məsələdə n=9; k=5 olduğundan, artıq ölçmələr sayı $r = n - k = 9 - 5 = 4$.

2) *Şərti tənliklərin tərtibi.* Birinci bənddə müəyyənləşdirildi ki, şərti tənliklərin sayı dördə bərabərdir. Bunlardan üçü fiqur şərtinə (şəbəkədə üç sayda üçbucaq vardır), biri isə bucaqlar cəmi şərtinə görə yazılır və aşağıdakı şəklə malikdir (qeyd edilən şərti tənliklərin tərtib edilmə qaydası izahlarla bölmə 44-ün 1.b bəndində verilmişdir):

$$\upsilon_1 + \upsilon_2 + \upsilon_3 - 1{,}0 = 0;$$
$$\upsilon_4 + \upsilon_5 + \upsilon_6 + 6{,}1 = 0;$$
$$\upsilon_7 + \upsilon_8 + \upsilon_9 - 3{,}1 = 0;$$
$$\upsilon_2 + \upsilon_5 + \upsilon_8 - 4{,}3 = 0.$$

Tarazlaşdırılma məqsədilə ölçmələr funksiyalası olaraq BC tərəfinin direksion bucağı seçilmişdir. Bu funksiya şəkil 5.1-ə əsasən belə təyin olunur:

$$\widetilde{F}_{x_1} = \alpha_{AB} - 180^0 - \widetilde{y}_3, \qquad (6.54)$$

burada $\widetilde{y}_3 = (y_3 + \upsilon_3)$ – üç nömrəli bucağın tarazlaşdırılmış qiymətidir.

(6.54) ifadəsini (6.31) düsturuna uyğun şəklə salsaq, alarıq:

$$\widetilde{F}_{x_1} = f_0 + f_3 \cdot \upsilon_3,$$

burada,

$$f_0 = \alpha_{AB} - 180^0 - y_3^{\text{ölç.}}; \qquad f_3 = -1.$$

Şərti tənliklər və ölçmələr funksiyası tərtib olunduqdan sonra məsələnin həlli Qauss sxemlərində həyata keçirilmişdir. Cədvəl 6.4-də həllin birinci sxemi verilir.

Cədvəl 6.4. Hesablama sxemi №1

Ölçmələrin nömrəsi	*a*	*b*	*c*	*d*	*f*	*s*	υ	[$\rho\upsilon^2$]
1	+1	0	0	0	0	+1	–0,49	0,24
2	+1	0	0	+1	0	+2	+1,99	3,96
3	+1	0	0	0	–1	0	–0,49	0,24
4	0	+1	0	0	0	+1	–2,86	8,18
5	0	+1	0	+1	0	+2	–0,38	0,14
6	0	+1	0	0	0	+1	–2,86	8,18
7	0	0	+1	0	0	+1	+0,20	0,04
8	0	0	+1	+1	0	+2	+2,69	7,24
9	0	0	+1	0	0	+1	+0,20	0,04
	+3	+3	+3	+3	–1	+11		
w=	–1	+6,1	–3,1	–4,3	[kw]=–28,26			[$\rho\upsilon^2$]=28,26
k=	–0,494	–2,860	+0,205	+2,485				
kw=	+0,494	–17,446	–0,635	–10,68				

Qeyd: a) cədvəl 6.4-də υ və $[p\upsilon^2]$ qiymətləri tarazlaşdırmadan sonra yazılır; b) ölçmələr bərabərdəqiqli olduğundan cədvəldə p (ölçmə çəkisi) qrafası yazılmamışdır;

3) Korrelat normal tənliklər parametrik üsuldakı qaydalarla tərtib edilmişdir. Təkrarlanma olmasın deyə burada həmin qaydalar gətirilmir (bax, 40-cı bölmənin 5-ci bəndi).

Korrelat normal tənliklərin tərtibi cədvəl 6.5-də verilmişdir.

Cədvəl 6.5. Hesablama sxemi №2

	$a]$	$b]$	$c]$	$d]$	$f]$	$s]$	yoxlama	W	Σ
$[a$	3	0	0	1	–1	3	3	–1	3
$[b$		3	0	1	0	4	4	+6,1	+10,1
$[c$			3	1	0	4	4	–3,1	+0,9
$[d$				3	0	6	6	-4,3	+1,7
$[f$					1	0	0		
$[s$						17	17		

4) Cədvəl 6.6-da verilmiş üçüncü sxemdə korrelat normal tənliklərin Qauss üsulu ilə həlli yerinə yetirilmişdir (bax, bölmə 40 bənd 6). Həllin düzgünlüyü (6.14)-(6.18) düsturları ilə təyin edilən yoxlama hesablamalarla həyata keçirilir. Cədvəl 6.6-da ikinci yoxlama hesablaması birinci yoxlamadan W qiymətini çıxıb üzərinə uyğun f qiymətini əlavə etməklə aparılır. Bu cədvəldə 6.-da istər sətirlər üzrə, eləcə də (6.18) düsturu ilə (yəni $[W_{r+1}\cdot r] = -28{,}29 \approx \Sigma_{r+1}r = -28{,}26$) həyata keçirilmiş yoxlamalar normal tənliklərin hesablama dəqiqliyi həddində (0,01-0,02) düzgün yerinə yetirildiyini təsdiq edir. Bu da əsas verir ki, sxem üzrə əks gedişlə korrelatların qiymətləri tapılsın:

$$k_1 = -0{,}494;\quad k_2 = -2{,}860;\quad k_3 = 0{,}205;\quad k_4 = 2{,}485.$$

Cədvəl 6.6

Köməkçi əmsallar	K_1	K_2	K_3	K_4	W	Σ	Birinci yoxlama	f	s	İkinci yoxlama
(–0,3333)	–3	0	0	1	–1	3	3	–1	3	3
	(–1)	0	0	–0,333	+0,333	–1	–1	+0,333	–1	–1
(–0,3333)		3	0	1	+6,10	+10,10	+10,10	0	4	4
		(–1)	0	–0,333	–2,033	–3,367	–3,366	0	–1,333	–1,333
(–0,3333)			3	1	–3,10	+0,90	+0,90	0	4	4
			(–1)	–0,333	+1,033	–0,300	–0,300	0	–1,333	–1,333
(–0,5000)				2	–4,97	–2,96	–2,97	+0,33	+2,340	+2,34
				(–1)	+2,485	+1,480	+1,485	–0,165	–1,170	–1,170
					–28,29	–28,26				
	K_1	K_2	K_3	K_4						
	–0,494	–2,860	+0,205	+2,485						

5) Növbəti mərhələdə (6.12) düsturları ilə υ_i düzəlişləri hesablanmışdır:

$$\upsilon_1 = -0{,}494'' \approx -0{,}5'';$$
$$\upsilon_2 = 1{,}991'' \approx 2{,}0'';$$
$$\upsilon_3 = -0{,}494'' \approx -0{,}5'';$$
$$\upsilon_4 = -2{,}86'' \approx -2{,}9'';$$
$$\upsilon_5 = -0{,}375'' \approx -0{,}4'';$$
$$\upsilon_6 = -2{,}860'' \approx -2{,}9'';$$
$$\upsilon_7 = 0{,}205'' \approx 0{,}2'';$$
$$\upsilon_8 = 2{,}690'' \approx 2{,}7'';$$
$$\upsilon_9 = 0{,}205'' \approx 0{,}2''.$$

Həmçinin hesablama nəticələrinin yoxlanmasına xidmət edən aşağıdakı cəm qiymətləri tapılmış

$$[Pv^2] = 28{,}26;$$
$$[KW] = -28{,}27;$$
$$[W_{r+1} \cdot r] = 28{,}29$$

və onlar arasında təqribi eyniliyin olması, yəni

$$[Pv^2] \approx -[W_{r+1} \cdot r] \approx -[KW]$$

belə nəticəyə gəlmək imkanı verir ki, (6.21) yoxlaması da ödənir. Bu isə o deməkdir ki, v_i qiymətləri düzgün hesablanmışdır.

6) Kəmiyyətlərin tarazlaşdırılmış qiymətləri hesablanmışdır. Bu məqsədlə ölçülmüş qiymətlərə v_i düzəlişləri əlavə edilmiş və aşağıdakı nəticələr alınmışdır:

$$\tilde{y}_1 = y_1' + v_1 = 69°33'30{,}2'' - 0{,}5'' = 69°33'29{,}7'';$$

$$\tilde{y}_2 = 60°35'12{,}5''; \qquad \tilde{y}_6 = 54°02'06{,}4'';$$
$$\tilde{y}_3 = 49°51'17{,}8''; \qquad \tilde{y}_7 = 46°25'52{,}7'';$$
$$\tilde{y}_4 = 66°47''35{,}4''; \qquad \tilde{y}_8 = 73°11'26{,}8'';$$
$$\tilde{y}_5 = 59°10'18{,}2''; \qquad \tilde{y}_9 = 60°22'40{,}5''.$$

Müqayisə etsək görərik ki, v_i və y_i kəmiyyətlərinin korrelat üsulla tapılmış qiymətləri onların parametrik üsulda alınmış qiymətlərinə bərabərdir (bax, cədvəl 5.1). Bu fakt bir daha tarazlaşdırma üsulundan asılı olmayaraq bütün üsulların eyni nəticələrə gətirib çıxarması haqqında mövcud nəzəri müddəanın doğruluğunun təcrübi təsdiqidir.

Nəhayət, korrelat tarazlaşdırma üsulunun son yoxlaması (6.22) düsturu ilə həyata keçirilir. Bu yoxlamanın məğzi ondan ibarətdir ki, başlanğıc şərti tənliklərdə ölçülmüş kəmiyyətlərin tarazlaşdırılmış qiymətləri yazılır və tənliklərin doğru bərabərliyə çevrilib-çevrilməməsi yoxlanılır. Həll etdiyimiz məsələdə hesablamalarla bu yoxlamanın da ödənildiyi göstərilmişdir.

$$\begin{aligned}
&\tilde{y}_1 + \tilde{y}_2 + \tilde{y} - 180° = 0;\\
&\tilde{y}_4 + \tilde{y}_5 + \tilde{y}_6 - 180° = 0;\\
&\tilde{y}_7 + \tilde{y}_8 + \tilde{y}_9 - 180^0 = 0;\\
&\tilde{y}_2 + \tilde{y}_5 + \tilde{y}_8 - (\alpha_{AE} - \alpha_{AB}) = 0.
\end{aligned} \tag{6.55}$$

Məsələn, birinci tənlik

$$69°33'27{,}7'' + 60°35'12{,}5'' + 49°51'17{,}8'' - 180 = 0,$$

yəni (6.22) şərti tam ödənir. Digər tənliklər üçün də (6.22) yoxlamasının doğru olduğu təsdiqlənmişdir.

7) Direksion bucaqların tarazlaşdırılmış qiymətləri hesablanmışdır:

$$\begin{aligned}
&\tilde{x}_1 = \alpha_{AB} + 180° - \tilde{y}_3 = 40°08'42{,}2'';\\
&\tilde{x}_2 = \alpha_{AB} + \tilde{y}_2 = 330°35'12{,}5'';\\
&\tilde{x}_3 = \tilde{x}_2 + 180° - \tilde{y}_6 = 96°33'06{,}1'';\\
&\tilde{x}_4 = \alpha_{AE} - \tilde{y}_8 = 29°45'30{,}7'';\\
&\tilde{x}_5 = \alpha_{AE} + 180° + \tilde{y}_7 = 329°22'50{,}2''.
\end{aligned}$$

8) Bildiyimiz kimi tarazlaşdırmanın ikinci hissəsi tarazlaşdırmadan tapılmış qiymətlərin dəqiqliyinin qiymətləndirilməsindən ibarətdir. Bu məqsədlə ilk növbədə Bessel düsturu ilə vahid çəki səhvi hesablanmışdır

$$\mu = \sqrt{\frac{[pv^2]}{r}} = \sqrt{\frac{28,27}{4}} \approx 2,7''.$$

Funksiyanın orta kvadratik səhvi ümumi halda

$$m_F = \mu\sqrt{\frac{1}{P_F}} \tag{6.56}$$

düsturu ilə hesablanır. Bizim məsələdə ölçmələr funksiyası olaraq birinci direksion bucağı seçilmiş və onun dəqiqliyini qiymətləndirmək üçün cədvəl 6.6-da f qrafasında yazılmış hesablama nəticələrindən istifadə edilmiş və (6.32) düsturuna əsasən həmin bucağın tərs ölçmə çəkisi hesablanmışdır

$$\frac{1}{P_{X_1}} = 1 + (-1)\cdot 0,333 + 0\cdot 0 + 0\cdot 0 + 0,33\cdot(-0,165) = 0,612.$$

Onda

$$m_{F_1} = 2,7''\sqrt{0,612} = 2,1''$$

olar.

F ə s i l 7
İKİQRUPLU VƏ KOMBİNƏ EDİLMİŞ TARAZLAŞDIRMA ÜSULLARI

§46. İkiqruplu Kryuger üsulu

Geodeziya şəbəkələrinin tarazlaşdırması zamanı hesablama ilə bağlı əsas çətinliklərdən biri normal tənliklərin əmsallar matrisi R-in tərsi olan R^{-1} matrisinin alınması ilə bağlıdır. Birgə həlli tələb edilən normal tənliklərin sayı artıqca R matrisinin ölçüləri də böyüyür və nəticədə R^{-1} matrisinin hesablanması bir qədər də çətinləşir. Ona görə də tarazlaşdırma zamanı elə üsullar seçməyə çalışırlar ki, birgə həll edilən normal tənliklərin sayı mümkün qədər minimuma endirilmiş olsun.

İkiqruplu Kryuger üsulu məhz göstərilən məqsədə xidmət edir. Bu üsulun mahiyyətini korrelat üsula tətbiqdə açaq.

Tutaq ki, r sayda (artıq ölçmələr sayında) tənlikdən ibarət

$$BV+W=0 \tag{7.1}$$

sistemi tərtib edilmişdir. Bu sistemi r_1 və r_2 sayda tənlikdən ibarət ($r=r_1+r_2$) iki qrupa ayıraq:

$$B_1V+W_1=0, \tag{7.2}$$
$$B_2V+W_2=0. \tag{7.3}$$

Sonra (7.3) sistemi üzərində elə ekvivalent cəbri çevirmələr aparaq ki, bunun nəticəsində alınmış (7.3) çevrilmiş tənliyini yenidən başlınğıc (7.2) sistemi ilə birgə həll etdikdə təyin edilən V düzəliş vektoru çevirmədən əvvəlki ilkin variantda yazılmış (7.2) və (7.3) sistemlərinin birgə həllindən tapıla biləcək V vektoru ilə eyni olsun. Eyni zamanda, (7.3) tənliklər sistemi ilə o vaxtadək çevirmə əməliyyatı aparırlar ki, bu sistemin (7.2) çevrilməmiş sistemi ilə ümumi korrelatları qalması. Belə bir əvəzetmə əməliyyatı nəticəsində R matrisinin ölçüləri $(r \times r)$-dən $(r_1 \times r_1)$ və $(r_2 \times r_2)$-yə qədər kiçilir $(r_1 < r;\ r_2 < r)$. Bu isə ümumən tarazlaşdırma məsələsinin asanlaşdırılmasına gətirib çıxarır.

Ekvivalent çevirmələr (əvəzetmələr) nəzəriyyəsinə görə yuxarıda göstərilən şərtlərə cavab verən çevrilmiş (7.3) tənliklər sistemini almaq üçün onu aşağıdakı şəklə salmaq lazımdır:

$$\overline{B_2}V + \overline{W_2} = 0, \tag{7.4}$$

burada:

$$\overline{B_2} = B_2 + \rho^T \cdot B_1; \tag{7.5}$$

$$\overline{W_2} = \rho^T \cdot W_1; \tag{7.6}$$

ρ isə $r_1 \times r_2$ ölçülü köməkçi matrisdir.

(7.2) və (7.4) sistemlərini bir qrupda birləşdirib normal tənliklərə keçsək alarıq:

$$\begin{aligned} N_{11}K_1 + \overline{N}_{12}K_2 + W_1 &= 0; \\ \overline{N}_{21} \cdot K_1 + \overline{N}_{22} \cdot K_2 + \overline{W_2} &= 0, \end{aligned} \tag{7.7}$$

burada:

$$N_{11} = B_1 \cdot B_1^T; \quad \overline{N}_{12} = B_1 \cdot \overline{B}_2^T; \quad \overline{N}_{22} = \overline{B}_2 \cdot \overline{B}_2^T; \quad \overline{N}_{21} = \overline{N}_{12}^T;$$

yuxarı indeksdə «T» hərfi isə transponirə edilmiş matris deməkdir.

Ümumi sistem (7.7)-dən göründüyü kimi tənliklər qruplarının ümumi korrelatlara məxsus olmaması üçün $\overline{N}_{12}$ bloku sıfra bərabər olmalıdır. Nəticədə (7.7) sistemi bir-birindən asılı olmayan iki qrupa ayrılır:

$$\begin{aligned} N_{11} \cdot K_1 + W_1 &= 0; \\ \overline{N}_{22} \cdot K_2 + \overline{W_2} &= 0. \end{aligned} \qquad (7.8)$$

$\overline{N}_{12}$ blokunu sıfra bərabər edən ρ matrisini təyin edək. $\overline{N}_{12}$ matrisində (7.5) ifadəsini də nəzərə alsaq yaza bilərik:

$$\overline{N}_{12} = B_1(B_2^T + B_1^T \cdot \rho) = 0\,.$$

Buradan isə

$$N_{11} \cdot \rho + N_{12} = 0 \qquad (7.9)$$

olar. (7.9) tənliyində $N_{12} = B_1 \cdot B_2^T$ olduğu nəzərə alınmışdır. Bu nəticə (7.2) və (7.3) sistemlərinə əsasən çıxarılır. Onda (7.9) tənliyinə əsasən

$$\rho = -N_{11}^{-1} \cdot N_{12} \qquad (7.10)$$

taparıq.

Əgər ρ matrisinin bu qiymətini (7.5) düsturunda yazsaq belə ifadə alarıq:

$$\overline{B}_2 = B_2 - N_{21} \cdot N_{11}^{-1} \cdot B_1 = B_2(E - B_1^T \cdot N_{11}^{-1} \cdot B_1)\,. \qquad (7.11)$$

Burada $Q_{\tilde{y}'} = E - B_1^T \cdot N_{11}^{-1} B_1$ – ölçmələrin ilkin tarazlaşdırılmış qiymətlərinə görə hesablanmış tərs çəkilər matrisidir. Bu matris $Q_{\tilde{y}'} = Q_{\tilde{y}'}^2$ xassəsinə malik olduğundan yaza bilərik:

$$\overline{N}_{22} = \overline{B}_2 \overline{B}_2^T = B_2 Q_{\tilde{y}} \cdot B_2^T\,. \qquad (7.12)$$

Buradan belə nəticə çıxır ki, (7.8) sisteminin ikinci tənliklər qrupunun (7.12) düsturu ilə həllinə birinci qrupda ilkin tarazlaşdırmadan tapılmış $\tilde{y}_i'$ qiymətlərinin təkrar tarazlaşdırılması əməliyyatı kimi baxmaq olar.

Beləliklə, ikiqruplu Kryuger üsulu ilə tarazlaşdırma hesablamaları aşağıdakı ardıcıllıqda yerinə yetirilir:

1) birinci qrup tənliklərin həlli;
2) ikinci qrup tənliklərin həlli;
3) ölçmələrə birinci düzəlişlərin hesablanması:

$$V_1 = Q_y B_1^T \cdot K_1, \tag{7.13}$$

burada K_1 – birinci qrup korrelatlarıdır.

4) ikinci düzəliş qiymətlərinin hesablanması

$$V_2 = Q_y \cdot \overline{B}_2^T \cdot K_2, \tag{7.14}$$

K_2 – ikinci qrup korrelatlarıdır.

5) ölçmə nəticələrinin ümumi $\upsilon = (\upsilon_1 + \upsilon_2)$ düzəliş qiymətləri ilə düzəldilməsi. Bu üsulda hesablamaların düzgünlüyü

$$[p\upsilon^2] = [p\upsilon'^2] + [p\upsilon''^2] \tag{7.15}$$

ifadəsi ilə yoxlanılır.

İkiqruplu üsulda ölçmələr funksiyalarının dəqiqliyi ikinci tənliklər qrupunun həlli zamanı qiymətləndirilir. Bu məqsədlə funksiyaların müvafiq $\tilde{f} = f \cdot Q_{\tilde{y}_i}$ əmsallar matrisi üzərində eynilə $\overline{B}_2$ matrisində olduğu kimi cəbri çevirmələr aparılır (bax, düstur (7.11)). Sonra çevrilmiş matrisdən istifadə edərək tərs çəkilər matrisi hesablanır:

$$Q_F = \overline{N}_{ff} - N_f^T \cdot \overline{N}_{22}^{-1} \cdot N_f ,$$

həmçinin hər bir funksiyanın tərs çəki qiyməti tapılır:

$$\frac{1}{P_F} = [f \cdot r_2] .$$

Daha sonra ölçmə çəkilərinə əsasən vahid ölçmənin və onların funksiyalarının orta kvadratik səhvləri hesablanır:

$$m = \sqrt{\frac{[v'^2]+[v''^2]}{r_1 + r_2}} , \qquad (7.16)$$

$$m_{\bar{F}} = \frac{m}{\sqrt{P_{\bar{F}}}} . \qquad (7.17)$$

§47. Kryuger-Urmayev üsulu

Bu üsul ikiqruplu Kryuger üsulunun trianqulyasiya şəbəkələrində tətbiqi üçün işlənib hazırlanmış xüsusi variantıdır. Professor N.A.Urmayev elmi tədqiqatlar zamanı müəyyən etmişdir ki, trianqulyasiya şəbəkəsini bucaqlara görə tarazlaşdırarkən fiqur şərti tənliklərini ayrıca qrupa daxil etməklə hesablamaları olduqca asanlaşdırmaq olar. Digər tərəfdən 46-cı bölmədə qeyd edildiyi kimi ikiqruplu tarazlaşdırma üsulu o vaxt daha səmərəli hesab edilir ki, ikinci qrup tənliklərinin ekvivalent çevrilməsi əməliyyatı asan həyata keçirilmiş olsun, başqa sözlə desək, $\rho_{r_1 \times r_2}$ çevirmə matrisi sadə yolla tapılsın.

İkiqruplu üsulun trianqulyasiya şəbəkəsinə tətbiqində $\rho_{r_1 \times r_2}$ matrisi çox sadə şəkil alır və tarazlaşdırma hesablamalarının həcmi olduqca kiçilir ki, bu da ikiqruplu üsulun bu tətbidə istifadəsini daha da əlverişli edir. Belə ki, Kryuger-Urmayev üsulunda birinci qrupa daxil edilmiş hər bir j üçbucağı üçün aşağıdakı şəkildə çox sadə fiqur şərti tənliyi yazılır:

$$\sum_{i\in j} \upsilon_i + W_j = 0. \qquad (7.18)$$

Normal tənliklərə keçsək

$$3K_j + W_j = 0 \qquad (7.19)$$

alarıq. Burada $\sum_{i\in j} \upsilon_i$ yazılışı j nömrəli uçbücağın daxili bucaqları üçün hesablanmış düzəlişlərin cəmidir.

(7.19) normal tənliklərinin həllindən taparıq

$$K_j = -\frac{W_j}{3}. \qquad (7.20)$$

Digər tərəfdən (7.18) və (7.19) tənliklərini müqayisə etsək birinci korrelatlar və birinci düzəliş qiymətlərinin bir-birinə bərabər olduğunu görərik, yəni

$$\upsilon'_{i\in j} = -\frac{W_j}{3}. \qquad (7.21)$$

(7.2) bərabərliyindən belə bir nəticə çıxır ki, birinci qrupda tarazlaşdırma əməliyyatı hər bir üçbucağın bucaq açıqlığını öz daxili bucaqları arasında bərabər bölüşdürməkdən ibarətdir.

Sonra ikinci qrup şərti tənlikləri tərtib edilir. Bu zaman tənliklərin sərbəst hədləri və müvafiq əmsalları ölçülmüş bucaqların birinci düzəlişlərlə tarazlaşdırılmış qiymətlərinə əsasən hesablanır:

$$A_i = \alpha_i - \frac{[\alpha]}{3};\quad B_i = \beta_i - \frac{[\beta]}{3};\ldots \tag{7.22}$$

(7.22) ifadələrindən göründüyü kimi, $A_i, B_i, \ldots, G_i$ əmsallarına sadə hesabi ortadan olan meylliklər kimi baxmaq olar. Ona görə də aşağıdakı bərabərliklər doğru olacaqdır:

$$[A] = [B] = \cdots = [G] = 0\,. \tag{7.23}$$

Analoji mülahizələrlə geodezik dördbucaqlıda birinci düzəliş qiymətlərinin hesablanması üçün

$$\underset{i \in j}{\upsilon} = -\frac{W_j}{4}, \tag{7.24}$$

ikinci qrup tənliklərinin əmsalları üçün isə

$$A_i = \alpha_i - \frac{[\alpha]}{4};\quad B_i = \beta_i - \frac{[\beta]}{4} \tag{7.25}$$

ifadələrini yaza bilərik. Bu üsulda ölçmələr funksiyalarının əmsalları da çox sadə düsturla tapılır

$$F_i = f_i - \frac{[f]}{3}\,. \tag{7.26}$$

İkiqruplu Kryuger üsulundan poliqonometriya gedişlərinin və şəbəkələrinin tarazlaşdırılmasında da geniş istifadə edilır. Bu zaman birinci qrupa direksion bucaq şərti daxil edilir və onun həllindən hər bir daxili dönmə bucağına $\upsilon_i' = \frac{W_\beta}{(n+1)}$ birinci düzəlişləri hesablanır. İkinci qrupa isə koordinat şərti tənlikləri aid edilir.

§48. Şərtli parametrik tarazlaşdırma üsulu

Tarazlaşdırma hesablama əməliyyatının sadələşdirilməsi, eləcə də həcminin azaldılması məqsədi ilə bir çox hallarda parametrik və korrelat üsullardan kombinə edilmiş şəklində istifadə edirlər. Belə üsullardan biri şərtli parametrik tarazlaşdırma üsulu adlanır. Bu üsulda seçilmiş parametrlərin k' sayı sadə parametrik üsulda parametrlərin k sayından böyük olur ($k < k'$).

Məsələn, poliqonometriya gedişində məntəqələrin koordinatları əvəzində onların koordinat artımları tarazlaşdırılır. Belə olan halda sadə parametrik üsulda tərtib edilən k sayda düzəliş tənliklərinə

$$V = A\Delta X + L. \qquad (7.27)$$

$r' = k' - k$ sayda aşağıdakı şəkildə əlavə şərti tənliklər yazılır:

$$B\Delta X + W = 0. \qquad (7.28)$$

Onu da qeyd edək ki, (7.28) tənlikləri ilkin seçilmiş parametrləri bir-biri ilə əlaqələndirən tənliklərdir. Poliqonometriya gedişində (7.28) şəklində şərti tənliklərin sayı ikiyə bərabərdir:

$$\sum_{i=1}^{n} \upsilon_{\Delta x_i} + W_x = 0; \qquad \sum_{i=1}^{n} \upsilon_{\Delta y_i} + W_y = 0. \qquad (7.29)$$

Poliqonometriya gedişinin şərtli parametrik üsulla tarazlaşdıralması zamanı isə şərti tənliklərin sayı iki vahid artsa da əvəzində düzəliş tənlikləri sadə parametrik üsula nisbətən daha asan tərtib edilir.

Beləliklə, (7.27) və (7.28) sistem tənliklərinin $\Phi = V^T PV =$ min şərti altında birgə həllini həyata keçirmək üçün ilk növbədə Laqranj funksiyası tərtib edib

$$\Phi = V^T PV - 2K^T(B\Delta X + W) \tag{7.30}$$

onun ΔX üzrə birinci törəməsini sıfra bərabər etmək lazımdır. Nəticədə alarıq

$$2V^T PA - 2K^T B = 0 \tag{7.31}$$

və yaxud

$$A^T PV + B^T K = 0, \tag{7.32}$$

burada K korrelatlar vektorudur.

(7.27) ifadəsini nəzərə alsaq (7.32) tənliyi aşağıdakı şəklə düşər

$$R\Delta X + B^T K + b = 0, \tag{7.33}$$

burada:

$$R = A^T PA; \qquad b = A^T PL.$$

(7.33) tənliklərinə (7.28) əlavə şərti tənliklərini də qoşsaq alarıq:

$$\left.\begin{aligned} &R\Delta X + B^T K + b = 0; \\ &B\Delta X + W = 0. \end{aligned}\right. \tag{7.34}$$

(7.34) tənliklər sistemini ümumi halda məlum üsullardan hər hansı biri ilə: əmsallar matrisinin tərsinin alınması, Qauss üsulu və s., həll etmək olar. Lakin çox zaman bu məsələdə Bessel üsulundan istifadə edilir:

1) (7.34) sisteminin birinci tənliyindən ΔX vektoru tapılır

$$\Delta X = -R^{-1}B^{T}K - R^{-1}b. \tag{7.35}$$

2) ΔX-ın bu qiyməti (7.34) sisteminin ikinci tənliyində öz yerində yazılır:

$$BR^{-1}B^{T}K - W + BR^{-1}b = 0. \tag{7.35'}$$

3) (7.35') tənliyinin həllindən korrelatlar təyin edilir:

$$K = N^{-1}W - N^{-1}BR^{-1}b$$

və yaxud $K = N^{-1}\overline{W}$. Burada:

$$N = BR^{-1}B^{T};\ \overline{W} = W - BR^{-1}b.$$

4) Nəhayət, korrelatlar üçün tapılmış bu qiymətləri (7.35) tənliyində yazmaqla ΔX vektoru hesablanır. Bu tənliklərdə ΔX vektorunu $\Delta X = \Delta X' + \Delta X''$ şəklində göstərsək,

$$\Delta X' = -R^{-1}b;\quad \Delta X'' = -R^{-1}B^{T}K = -R^{-1}B^{T}N^{-1}\overline{W}$$

olar.

Şərti parametrik üsulda vahid çəki səhvinin əsaslandığı kvadratik forma isə belə hesablanır

$$[pvv] = [p\ell\ell \cdot k'] + W^{T}K. \tag{7.36}$$

Ölçmələr funksiyasının tərs çəkilər vektoru isə

$$Q_{\tilde{F}} = f \cdot Q_{xx} f^T \qquad (7.37)$$

şəklində tapılır. Burada

$$f = \frac{\partial \widetilde{F}}{\partial x};$$

və Q_{xx} - tarazlaşdırılmış kəmiyyətlər vektorunun, yəni X vektorunun çəki əmsalları matrisidir. Digər tərəfdən Q_{xx} – matrisi tərs əmsallar matrisinin yuxarı sol blokundan ibarətdir:

$$\begin{pmatrix} R & B^T \\ B & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Q_{xx} & Q_{xk} \\ Q_{kx} & Q_{kk} \end{pmatrix}$$

Hər hansı funksiyasının tərs çəkisi isə belə bir ifadədən tapılır

$$-\frac{1}{P_F} = \left[f_{k'+r'+1} \cdot (k'+r')\right].$$

Bu alqoritmi açarkən, yəni çevrilməmiş Qauss alqoritmləri ilə verərkən

$$f_{k'+1} = f_{k'+2} = \ldots = f_{k'+r'+1} = 0\,.$$

olduğunu nəzərə almaq lazımdır.

§49. Əlavə məchullu korrelat tarazlaşdırma üsulu

Bu üsul F.Helmert üsulu da adlanır və mahiyyət etibarı ilə ondan ibarətdir ki, şərti tənliklərə əlavə məchullar daxil etməklə onları daha sadə şəkilə salmaq mümkündür. Bu isə öz növbəsində məsələnin həllini asanlaşdırır. Lakin bu zaman şərti tənliklərin sayı t qədər artmış olur: $r' = r + t$, burada t – əlavə məchulların sayıdır. Məsələn, trianqulyasiya və ya poliqonometriya şəbəkələrini tarazlaşdırarkən qovşaq məntəqələrində ölçülmüş əlavə azimut bucaqlarını həllə daxil etməklə müvafiq şərti tənlikləri daha da sadələşir.

Üsulun nəzəri əsasları ilə tanış olaq.

İlk növbədə şərti tənliklər yazılır. Onların sayı $r' = r + t$ olub aşağıdakı şəklə malikdir:

$$
\begin{aligned}
&\varphi_1(y_1, y_2, \ldots y_n, z_1, z_2, \ldots z_t) = 0;\\
&\varphi_2(y_1, y_2, \ldots y_n, z_1, z_2, \ldots z_t) = 0;\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\varphi_{r'}(y_1, y_2, \ldots y_n, z_1, z_2, \ldots z_t) = 0,
\end{aligned}
\tag{7.38}
$$

burada y_i, z_i – ölçülmüş və tənliklərə əlavə daxil edilmiş kəmiyyətlərin həqiqi qiymətləridir.

(7.38) tənliklərini xətti şəklə gətirdikdən sonra (Teylor sırasına ayırmaqla) onları matris yazılışında belə göstərə bilərik

$$
BV + \beta\Delta Z + W = 0\,, \tag{7.39}
$$

burada:

$$
\underset{r'\times n}{B} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & . & . & . & a_n \\ b_1 & b_2 & . & . & . & b_n \\ c_1 & c_2 & . & . & . & c_n \\ . & . & . & . & . & . \\ g_1 & g_2 & . & . & . & g_n \end{pmatrix}; \quad \underset{r'\times t}{\beta} = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 & . & . & . & A_t \\ B_1 & B_2 & . & . & . & B_t \\ . & . & . & . & . & . \\ G_1 & G_2 & . & . & . & G_t \end{pmatrix};
$$

$$\underset{n\times 1}{V}=\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ . \\ . \\ V_n \end{bmatrix};\quad \underset{t\times 1}{\Delta Z}=\begin{bmatrix} \delta Z_1 \\ \delta Z_2 \\ . \\ . \\ . \\ \delta Z_t \end{bmatrix};\quad \underset{r'\times 1}{W}=\begin{bmatrix} W_1 \\ W_2 \\ . \\ . \\ . \\ W_{r'} \end{bmatrix}.$$

$a_i, b_i, \ldots, g_i$ elementləri korrelat üsulda olduğu kimi $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{r'}$ funksiyalarının Y_i üzrə xüsusi törəmələri olub $Y_i = y_i^{\text{ölç.}}$ qiymətlərinə görə hesablanır:

$$A_j = \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial z_j}\right)_{z_j = z_j^0},\quad B_j = \left(\frac{\partial \varphi_2}{\partial z_j}\right)_{z_j = z_j^{(0)}}, \ldots, G_j = \left(\frac{\partial \varphi_{r'}}{\partial Z_j}\right)_{z_j = z_j^{(0)}}.$$

$z_i^{(0)}$ əlavə məchulların təqribi qiymətləridir və onun qiyməti də $y_i^{\text{ölç.}}$ ölçmə nəticələrinə əsasən hesablanır.

(7.38) tənliyində poliqon açıqlıqları isə belə təyin edilir:

$$W_j = \varphi_j(y_1^{\text{ölç.}}, y_2^{\text{ölç.}}, \ldots, y_n^{\text{ölç.}}, z_1^{(0)}, z_2^{(0)}, \ldots, z_t^{(0)}).$$

Beləliklə, (7.39) tənliklərinin həllini ən kiçik kvadratlar metodu ilə həyata keçirərkən aparsaq $\Phi = V^T PV = min$ şərti altında

$$\Phi = V^T PV - 2K^T(BV + \beta\Delta Z + W)$$

şəklində Laqranj funksiyasını tərtib edib onun minimumunu axtarmaq lazımdır. Bu məqsədlə Φ funksiyasının birinci törəmələri:

$$\frac{\partial\Phi}{\partial V} = 2V^T P - 2K^T B; \quad \frac{\partial\Phi}{\partial\Delta Z} = -2K^T\beta,$$

təyin edilir və sıfra bərabər edilir. Nəticədə aşağıdakı ifadələri alırıq:

$$V = P^{-1}B^T K; \tag{7.40}$$

$$\beta^T K = 0 \tag{7.41}$$

Əgər V vektorunun (7.40) ifadəsi ilə təyin edilən qiymətini (7.39) tənliyində nəzərə alsaq və onu sonradan (7.41) tənliyi ilə qruplaşdırsaq, onda $S = r' + t = r + 2t$ sayda tənlikdən ibarət belə bir tənliklər sistemi alarıq:

$$\begin{aligned} &NK + \beta\Delta Z + W = 0; \\ &\beta^T K = 0, \end{aligned} \tag{7.42}$$

burada $N = BP^{-1}B^T$.

Bu sistemin əmsallar matrisi simmetrik formaya malikdir:

$$N_\beta = \begin{pmatrix} N & \beta \\ \beta^T & 0 \end{pmatrix}. \tag{7.43}$$

(7.42) sisteminin həlli matris yazılışında aşağıdakı düsturlarla həyata keçirilir:

$$\mathrm{K} = -N^{-1}\beta\Delta Z - N^{-1}\cdot W; \tag{7.44}$$

$$\beta^{\mathrm{T}} N^{-1}\cdot\beta\cdot\Delta Z + \beta^T N^{-1}\cdot W = 0. \tag{7.45}$$

(7.45) tənliyini belə də yaza bilərik

$$R \cdot \Delta Z + b = 0, \tag{7.46}$$

burada:

$$R = \beta^T \cdot N^{-1}\beta; \quad \mathrm{b} = \beta^{\mathrm{T}} \cdot N^{-1} \cdot W.$$

Beləliklə, (7.46) tənliyinə əsasən $\Delta Z = -R^{-1} \cdot b$ vektoru, sonra (7.44) düsturu ilə K korrelatları və nəhayət

$$v_i = a_i \cdot k_1 + b_i \cdot k_2 + \ldots + g_i \cdot k_r, \tag{7.47}$$

ifadəsindən V_i düzəlişləri hesablanır.

Digər üsullarda olduğu kimi bu üsulda da son tarazlışdarma hesablamaları tarazlaşdırılmış kəmiyyətlərin dəqiqliyinin qiymətləndirilməsindən ibarətdir.

Belə ki, hər hansı tarazlaşdırılmış

$$\widetilde{F} = \widetilde{F}(\widetilde{y}_1, \widetilde{y}_2, \ldots, \widetilde{y}_n, \widetilde{z}_1, \widetilde{z}_2, \ldots, \widetilde{z}_t)$$

funksiyasının dəqiqliyini qiymətləndirmək üçün onu ilk növbədə xətti şəklə gətirmək lazımdır

$$\widetilde{F} = [fv] + [\Phi \delta Z] + f_0,$$

burada:

$$f_i = \left(\frac{\partial \widetilde{F}}{\partial y_i}\right)_0; \quad \Phi_j = \left(\frac{\partial F}{\partial Z_j}\right)_0.$$

Sonra Qauss sxemində əlavə **Φ** qrafası yerləşdirib, bu funksiyanın xüsusi törəmələrini:

$$\begin{pmatrix} [\pi af] \\ [\pi bf] \\ \cdots\cdots \\ [\pi gf] \\ \Phi_1 \\ \Phi_2 \\ \cdots\cdots \\ \Phi_t \\ [\pi ff] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} N_f \\ \Phi^T \\ N_{ff} \end{pmatrix}$$

yazırlar. Daha sonra üçüncü Qauss sxemində S dərəcəli ekvivalent cəbri çevirmədən sonra $\tilde{F}$ funksiyasının $\frac{1}{P_{\tilde{F}}} = [\pi ff \cdot s]$ alqoritmi ilə təyin edilən tərs çəki qiyməti hesablanır. Bu funksiyanın orta kvadratik səhvi məlum $m_{\tilde{F}} = \frac{\mu}{\sqrt{P_{\tilde{F}}}}$ düsturu ilə tapılır, burada

$$\mu = \sqrt{\frac{[p\upsilon^2]}{r-t}}\,. \qquad (7.48).$$

(7.48) düsturunda kvadratik forma aşağıdakı alqoritmlərlə hesablanır:

$$-[P'\upsilon^2] = [KW] = [W_{s+1} \cdot S] = \left[\sum{}_{s+1} \cdot S\right]. \qquad (7.49)$$

Öz növbəsində bu alqoritmlərdə

$$W_{r'+1}=W_{r'+2}=\ldots=W_{s+1}=0;\ \Sigma_{S+1}=[W]$$

qəbul edilir.

Əlavə məchullu korrelat tarazlaşdırma üsulundan ölçmələrdə sistematik səhvləri qiymətləndirmək məqsədi ilə də istifadə edirlər. Bu zaman sistematik səhvlər əlavə məchullar kimi şərti tənliklərə daxil edilir.

§50. Bir-birindən asılı ölçmələrin tarazlaşdırılması

Bilavasitə ölçülmüş geodezik kəmiyyətlər demək olar ki, bir-biri ilə qarşılıqlı əlaqədə olmurlar. Lakin tarazlaşdırmaya ölçmələr deyil onların funksiyaları daxil edildikdə müəyyən qarşılıqlı asılılığa malik kəmiyyətlərin tarazlaşdırılması məsələsi meydana çıxır. Məsələn, trianqulyasiya təbəkəsinin tarazlaşdırılması bilavasitə ölçülmüş istiqamətlər üzrə deyil onların funksiyası olan bucaqlar üzrə aparıla bilər. Eyni zamanda bucaqlar ümumi başlanğıc istiqamətə malik olduğundan da qarşılıqlı əlaqədə olurlar. Ən kiçik kvadratlar metodunun bu tətbiqdə, yəni qarşılıqlı asılı ölçmələrin tarazlaşdırılması halı üçün istifadəsində, ümumiləşdirilmiş (sadəcə, ümumi) metod, bir-birindən asılı olmayan ölçmələr halında isə klassik metod adlanır.

Ümumi metoda tarazlaşdırmanın əsas şərti (klassik metodda bu şərt $[pv^2]=\min$ belə yazılır) belə ifadə olunur:

$$V^T Q^{-1} V=\min. \tag{7.50}$$

Burada, Q klassik metoddakı diaqonal şəklə malik tərs çəkilər matrisindən fərqli olaraq aşağıdakı formaya malikdir:

$$Q = \begin{pmatrix} Q_{11} & Q_{12} & \cdots & Q_{1n} \\ Q_{21} & Q_{22} & \cdots & Q_{2n} \\ Q_{n1} & Q_{n2} & \cdots & Q_{nn} \end{pmatrix}, \qquad (7.51)$$

yəni ümumi metodda qeyri-diaqonal elementlər sıfıra bərabər deyil.

Ümumi metoda görə parametrik normal tənliklər matris yazılışında belə yazılır:

$$A^T PA \cdot \Delta x + A^T PL = 0, \qquad (7.52)$$

(7.52) tənliyində P matrisi klassik metoddakı formadan (bax, düstur (5.29)) fərqli olaraq tamdır, diaqonal deyil.

Korrelat normal tənliklər

$$BQB^T K + W = 0. \qquad (7.53)$$

şəklində yazılır. Burada: $Q = P^{-1}$; düzəlişlər vektoru isə

$$V = QB^T K \qquad (7.54)$$

ifadəsi ilə təyin edilir.

(7.52), (7.53) və (7.54) tənliklərinin həlli də klassik metodda verilmiş qayda və ardıcıllıqda Qauss sxemlərində həyata keçirilir.

§51. İlkin verilənlərin səhvlərini nəzərə almaqla şəbəkənin tarazlaşdırılması

Məlumdur ki, geodeziya gedişləri və şəbəkələri «ümumidən xüsusiyə» prinsipi ilə, yəni aşağı sinif şəbəkələrinin yuxarı sinifə məxsus məntəqələrə bağlanması ilə həyata keçirilir. Bu zaman kameral hesablamalar zamanı yuxarı sinif dayaq məntəqələrinin yüksəklik və koordinat qiymətlərini səhvsiz qəbul edirlər. Lakin həqiqətdə dayaq məntəqələri özləri də əvvəllər yerinə yetirilmiş ölçmələrdən təyin edildiyindən aydındır ki, onların da yüksəklik və koordinat qiymətləri müəyyən səhvlərə malik olacaqdır. Çünki tarazlaşdırma nəticəsində ölçmə nəticələrinin təsadüfi səhvləri tamamilə yox edilmir və onların qalıq hissəsi müəyyən şərt altında, əsasən $[Pv^2]=\min$ şərti ilə, ölçmə nəticələri arasında paylaşdırılır. Bəzən ilkin verilənlərin səhvlərinin nəzərə alınmaması şəbəkədə əhəmiyyətli deformasiyalara gətirib çıxarır. Məhz bu səbəbdən, xüsusi hallarda şəbəkənin tarazlaşdırılması ilkin verilənlərin səhvlərini nəzərə almaqla həyata keçirilir. Belə qoyuluşda məsələnin həllinin nəzəri əsasları ilə tanış olaq.

a) Parametrik üsul. İlkin verilənlərin düzəlişlər vektorunu ΔZ, təyin edilən parametrlərin artım vektorunu əvvəlki bölmələrdə olduğu kimi ΔX işarə etsək, onda parametrik düzəliş tənliklərini əlavə parametrlərlə birgə belə yaza bilərik:

$$\begin{aligned} V_1 &= A\cdot\Delta X + B\Delta Z + L; \\ V_2 &= \qquad\quad\; \Delta Z. \end{aligned} \tag{7.55}$$

(7.55) sisteminin ikinci tənliyinin sərbəst həddi sıfra bərabərdir, çünki hesablamalar zamanı ilkin verilənlərin $Z^{(0)}$ təqribi qiymətləri əvəzində onların kataloq (məlum) qiymətləri götürülür. Aydındır ki, ilkin verilənlər və yeni ölçülmüş kəmiyyətlər arasında qarşılıqlı əlaqə mövcud deyildir. Ona görə də (7.55) sistemini

$$V_1^T P_y V_1 + V_2^T P_z V_2 = \min \qquad (7.56)$$

şərti altında həll etsək, aşağıdakı şəkildə normal tənliklər alarıq

$$\begin{pmatrix} R_{11} & R_{12} \\ R_{21} & R_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta X \\ \Delta Z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = 0. \qquad (7.57)$$

Burada:

$$\overline{R} = \begin{pmatrix} R_{11} & R_{12} \\ R_{21} & \overline{R}_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A^T P_y A & A^T P_y B \\ B^T P_y A & B^T PB + P_z \end{pmatrix} \qquad (7.58)$$

əmsallar matrisi;

$$b_1 = A^T pL; \quad b_2 = B^T P_y L \qquad (7.59)$$

sərbəst həddlər vektorları; P_y – ölçmə çəkiləri matrisi; P_z – ilkin verilənlərin çəkilər matrisidir. Fərz edilir ki, P_z matrisi məlumdur.

(7.58) düsturundan göründüyü kimi $\overline{R}$ matrisi adi parametrik üsulda təyin edilən normal tənliklərin əmsallar matrisindən ($R = A^T PA$) yalnız onunla fərqlənir ki, burada $\overline{R}$ matrisinin aşağı sağ blokunda ΔZ düzəlişlərinə görə meydana çıxan əlavə P_z matrisi yazılmışdır. Bu xüsusiyyətdən $\overline{R}$ matrisinin hesablanmasında istifadə edilir. Belə ki, $\overline{R}$ matrisini ilk mərhələdə adi parametrik üsuldakı qayda ilə tərtib edir, sonra isə onun aşağı sağ blokuna P_z matrisini birləşdirirlər. Ümumi halda ilkin verilənlər bir-biri ilə əlaqəli olduğundan, P_z qeyri-diaqonal matrisdir. Lakin adətən ilkin verilənlər arasında qarşılıqlı əlaqələrin zəif olduğunu nəzərə alsaq (məsələn, dayaq məntəqələri bir-birindən əhəmiyyətli məsafələrdə yerləşir) və hesablamaların sadələşdirilməsi üçün P_z matrisini diaqonal matris qəbul edə bilərik. Onda (7.58) ifadəsinə əsasən X vektorunun Q_X tərs çəkilər matrisi üçün belə bir ifadə alarıq:

$$Q_x = R_{11}^{-1} + U[R_{22} \cdot 1]^{-1} U^T = Q_{\bar{X}} + U Q_{\bar{Z}} U^T, \qquad (7.60)$$

burada $U = R_{11}^{-1} R_{12}$; $[R_{22} \cdot 1] = R_{22} - U^T R_{12}$.

(7.60) düsturundan göründüyü kimi ilkin verilənlər səhvsiz qəbul edilərsə, onda X vektoru üçün adi parametrik üsuldan təyin edilən $Q_{\bar{X}} = R_{11}^{-1}$ qiymətini alarıq.

Eyni mülahizələrlə dispersiya üçün yaza bilərik:

$$\sigma_{x_j}^2 = \sigma_{\bar{x}_j}^2 + \Delta\sigma_{x_j}^2, \qquad (7.61)$$

burada: $\sigma_{\bar{x}_j}$ – ilkin verilənlərin səhvsiz qəbul edildiyi halda x_j üçün hesablanmış orta kvadratik meylliklər;

$\Delta\sigma_{x_j}^2$ – ilkin verilənlərin səhvlərinə görə $\sigma_{\bar{x}_j}$ meylliklərinə hesablanmış əlavə düzəliş qiymətləridir.

Tarazlaşdırma zamanı ilkin verilənlərin səhvlərinin nəzərə alınıb-alınmaması məsələsi geodeziya şəbəkəsinin gələcək istifadə xüsusiyyətlərindən asılı olaraq hər bir halda xüsusi yanaşma tələb edir. Belə ki, ilkin verilənlərin səhvlərini nəzərə almadıqda yeni yaradılmış şəbəkəni dayaq-istinad məntəqələrinə birləşdirən elementlərdə (tərəflər, direksion bucaqlar və s.) təhriflər baş verir. İlkin verilənlərə düzəlişlər hesablandığı halda isə əksinə, dayaq şəbəkəsinin elementləri təhriflərə məruz qalır. Ona görə də düzgün qərar belə bir ifadə ilə müəyyənləşdirilir

$$\Delta\sigma_{x_j}^2 \le 0{,}11 \cdot \sigma_{\bar{x}_j}^2 , \tag{7.62}$$

yəni (7.62) şərtinin ödəndiyi halda ilkin verilənlərə heç bir düzəliş axtarılmır.

b) Korrelat üsul. Adi korrelat üsuldan fərqli olaraq ilkin verilənlərin səhvlərini nəzərə almaqla korrelat tarazlaşdırma zamanı şərti tənliklər belə yazılır:

$$B_1V + B_2\Delta Z + W = 0 ,$$

burada ΔZ – ilkin verilənlərin səhvlər vektorudur.

Bu tənlikləri (7.56) şərti altında həll etsək aşağıdakı şəkildə normal tənliklər alınar:

$$NK + W = 0 .$$

Burada:

$$N = B_1QB_1^T + B_2Q_zB_2^T = N_1 + N_2; \tag{7.63}$$
$$Q = P^{-1}; \quad Q_z = P_z^{-1} .$$

Öz növbəsində $\tilde{Z}$ tarazlaşdırılmış vektorunun çəki əmsalları matrisi üçün ümumi qaydaya əsasən yaza bilərik:

$$Q_{\tilde{z}} = Q_z - Q_zB_2^TN^{-1}B_2Q_z = Q_z - \Delta Q_z . \qquad (7.64).$$

(7.64) düsturundan göründüyü kimi, $Q_{\tilde{z}}$ iki toplanandan ibarətdir: birinci toplanan Q_z qiyməti adi korrelat üsul qaydası ilə hesablanmış çəki əmsalları matrisidir. İkincisi isə (ΔQ_z toplananı) ilkin verilənlərə tarazlaşdırmadan hesablanmış düzəlişlərdir. ΔQ_z toplananının nəzərə alınmaz kiçik qiymətlərində ilkin verilənləri səhvsiz qəbul etmək olar. İdeal halda isə $Q_{\tilde{z}} = Q_z$. Ümumi şəkildə isə hədsiz kiçik səhvlər kriteriyasına görə

$$(N_2)_{jj} \leq 0{,}11(N_1)_{jj} \tag{7.65}$$

olduqda, ilkin verilənləri ölçülmüş kəmiyyətlərə nəzərən səhvsiz qəbul edirlər.

§52. Böyük sayda ölçmələrin birgə tarazlaşdırılması

Sahəcə geniş əraziyə malik geodeziya şəbəkələrinin tarazlaşdırılması zamanı böyük sayda (məsələn, Rusiya ərazisində 500000) normal tənliklərin tərtib edilməsi lazım gəlir. Bu tənliklərin birgə həllini təşkil etmək, hətta müasir EHM-in gücündən istifadə etməklə belə çətindir və çox mürəkkəb elmi, texniki və təşkilati problemlər doğurur. Müasir gücə malik hesablama texnikasının olmadığı keçmiş dövrlərdə isə belə məsələlərin birgə həlli təcrübi olaraq qeyri-mümkün sayılırdı. Ona görə də istehsalatda belə məsələlərin həlli çox qruplu üsullarla həyata keçirilir. Bu üsullardan ən geniş tətbiq olunanlardan biri prof. İ.Y.Pranis-Praneviç tərəfindən işlənib hesablanmışdır.

İ.Y.Pranis-Praneviç üsulunun üstün cəhəti ondan ibarətdir ki, ümumi şəbəkə S sayda bölməyə ayrılır və hər bölmənin həlli ayrıca aparılır ki, bununla da birgə həll edilən tənliklərin sayı azaldılır. Bu da öz növbəsində ümumən məsələnin həllini mümkün edir və yaxud da onu asanlaşdırır.

Üsulun nəzəri əsasları ilə tanış olaq. Əgər bölmədaxili ölçmələr vektorunu ΔX, bölmələri ayıran sərhəd xətləri üzərində yerləşən ortaq əlaqələndirici məntəqələrin ölçmələr vektorunu ΔX_0 ilə işarə etsək, onda üç bölmədən ibarət şəbəkə üçün aşağıdakı şəkildə ümumi normal tənliklər sistemi yaza bilərik:

$$\begin{aligned} R_1\Delta X_1 \quad + \quad & R_{1,0}\cdot\Delta X_0 + b_1 = 0; \\ R_2\Delta X_2 \quad + \quad & R_{2,0}\cdot\Delta X_0 + b_2 = 0; \\ R_3\Delta X_3 + & R_{3,0}\cdot\Delta X_0 + b_2 = 0; \\ R_{1,0}^T\cdot\Delta X_1 + R_{2,0}^T\cdot\Delta X_2 + R_{3,0}^T\cdot\Delta X_3 + & R_0\cdot\Delta X_0 + b_0 = 0. \end{aligned} \tag{7.66}$$

(7.66) sistemində birinci üç tənlik qismən asılı olmayan (qeyri-asılı), sonuncu isə əlaqələndirici tənlik adlanır.

Hər bir bölmənin müvafiq tənliyindən ΔX_i qiymətini aşağıdakı şəkildə

$$\Delta X_i = -R_i^{-1}\cdot R_{i,0}\cdot\Delta X_0 - R_i^{-1}\cdot b_i \tag{7.67}$$

təyin edib əlaqələndirici tənlikdə yerinə qoysaq alarıq:

$$[R_0\cdot 3]\Delta X_0 + [b_0\cdot 3] = 0, \tag{7.68}$$

burada:

$$[R_0\cdot 3] = R_0 - \sum_{i=1}^{S} R_{i,0}^T\cdot R_i^{-1}\cdot R_{i,0};$$

$$[b_0\cdot 3] = b_0 - \sum_{i=1}^{S} R_{i,0}^T\cdot R_i^{-1}\cdot b_i.$$

Öz növbəsində R_0 matrisi hər bir bölmə üçün ayrıca tərtib edilən $R_0^{(i)}$ matrislərinin cəmidir, yəni $R_0 = \sum_{i=1}^{S} R_0^{(i)}$. Onda

$$[R_0 \cdot S] = \sum_{i=1}^{S} [R_0^{(i)} \cdot 1], \tag{7.69}$$

burada

$$[R_0^{(i)} \cdot 1] = R_0^{(i)} - R_{i,0}^T \cdot R_i^{-1} \cdot R_{i,0}.$$

Beləliklə, ümumi şəbəkənin tarazlaşdırılmasını belə bir ardıcıllıqda həyata keçirmək olar.

1) Hər bir bölməyə müstəqil geodeziya şəbəkəsi kimi baxaraq onlar üçün ayrıca normal tənliklər tərtib edilir.

2) Hər bir bölmə tənliyində əvəzetmələr apararaq yalnız ortaq məntəqələrin məchullarından ibarət tənliklər alınır. Buradan isə onların cəbri cəmi kimi (7.68) tənliyi yazılır.

3) (7.68) tənliyinin həllindən ortaq ΔX_0 vektoru təyin edilir.

4) Tapılmış ΔX_0 qiymətlərini (7.66) sisteminin birinci üç tənliyində yazmaqla bölmələrdaxili məchullar hesablanır.

Tarazlaşdırılmış məchulların Q matrisləri isə aşağıdakı uyğun alqoritmlərlə təyin edilir:

əlaqələndirici məntəqələr üçün

$$Q_0 = [R_0 \cdot S]^{-1}; \tag{7.70}$$

bölmədaxili məntəqələr üçün

$$Q_i = R_i^{-1} + R_i^{-1} \cdot R_{i,0} Q_0 R_{i,0}^T \cdot R_i^{-1}; \qquad (7.71)$$

daxili və əlaqələndirici məntəqələr üçün

$$Q_{i,0} = -R_i^{-1} \cdot R_{i0} \cdot Q_0; \qquad (7.72)$$

müxtəlif ərazilərə malik bölmədaxili məntəqələr üçün

$$Q_{i,k} = -R_i^{-1} \cdot R_{i,0} \cdot Q_0 \cdot R_{S,0}^T \cdot R_S^{-1}, \qquad (7.73)$$

burada $(i, k = 1,\ 2,\ ...,\ S)$.

Fəsil 8
TARAZLAŞDIRILMANIN ƏLAVƏ MƏSƏLƏLƏRİ

§53. Koordinat sistemləri arasında əlaqələr

Ümumi şəkildə iki (1) və (2) geodeziya koordinat sistemləri arasında əlaqə doqquz parametrlə təyin edilir:

$$T = [X_0, Y_0, Z_0, \omega_x, \omega_y, \omega_z, \Delta m, \Delta a, \Delta e^2]^T, \qquad (8.1)$$

burada: $T-$ əlaqə parametrləri vektoru; $X_0, Y_0, Z_0 -$ ikinci koordinat sisteminin başlanğıc nöqtəsinin birinci sistemdə koordinatları; $\omega_x, \omega_y, \omega_z -$ ikinci koordinat sisteminin oxlarının birinci sistemə nəzərən dönmə bucaqları; $\Delta m -$ koordinat sistemlərində qəbul edilmiş miqyaslar fərqi; $\Delta a = a_1 - a_2$ – birinci və ikinci sistemlərdə istifadə edilən ellipsoidlərin böyük yarımoxlarının fərqi; $\Delta e^2 = e_1^2 - e_2^2 -$ bu ellipsoidlərin ekssentrisitetlərinin kvadratlar fərqi (burada ellipsoidlərin basıqlıqlar fərqi ($\Delta\alpha = \alpha_1 - \alpha_2$) də götürülə bilərdi, lakin hesablamalarda adətən Δe^2 parametri istifadə edilir). Onda iki geodeziya koordinat sistemləri arasında diferensial əlaqə belə yazılır:

$$\begin{bmatrix} \Delta B \\ \Delta L \\ \Delta H \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_1 - B_2 \\ L_1 - L_2 \\ H_1 - H_2 \end{bmatrix} = \frac{\partial(B, L, H)}{\partial T} \cdot T \qquad (8.2)$$

və ya açıq şəkildə

$$\begin{bmatrix} dB \\ dL \\ dH \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\rho''}{(M+H)}\cdot\frac{N}{a}e^2\sin B\cos B & \frac{1}{2}\left(\frac{N^2}{a^2}+1\right)N\sin B\cos B\cdot\frac{\rho''}{(M+H)} & -e^2\rho''\sin B\cos B \\ 0 & 0 & 0 \\ -\frac{a}{N} & \frac{N}{2}\sin^2 B & \frac{a^2}{N}+H \end{bmatrix}\times$$

$$\times\begin{bmatrix} \Delta a \\ \Delta e^2 \\ \Delta m \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\sin L(1+e^2\cos 2B) & \cos L(1+e^2\cos 2B) & 0 \\ tgB(1-e^2)\cos L & tgB(1-e^2)\sin L & -1 \\ -\frac{Ne^2\sin B\cos B\sin L}{\rho''} & +\frac{Ne^2\sin B\cos B\cos L}{\rho''} & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix} +$$

$$+\begin{bmatrix} -\sin B\cos L\cdot\frac{\rho''}{(M+H)} & -\sin B\sin L\cdot\frac{\rho''}{(M+H)} & \cos B\cdot\frac{\rho''}{(M+H)} \\ -\sin L\cdot\frac{\rho''}{(N+H)\cos B} & \cos L\cdot\frac{\rho''}{(N+H)\cos B} & 0 \\ \cos B\cos L & \cos B\sin L & \sin B \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{bmatrix}.$$

Bu düsturlarda: N, M – uyğun olaraq birinci vertikal və meridianın əyrilik radiusları; H – geodezik yüksəklikdir.

Ümumi şəkildə bir sistemdən digərinə düz və əks keçid aşağıdakı kimi ifadə olunur:

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}_2 = R\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}_1 + \begin{bmatrix} X_0 \\ Y_0 \\ Z_0 \end{bmatrix} \qquad (8.4)$$

və

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}_1 = R^T\begin{bmatrix} X_2 - X_0 \\ Y_2 - Y_0 \\ Z_2 - Z_0 \end{bmatrix}, \qquad (8.5)$$

burada: R – çevirici (keçid) matris, R^T – transponirə olunmuş R matrisidir. Öz növbəsində R matrisi belə təyin olunur:

$$R = \begin{bmatrix} l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \\ l_3 & m_3 & n_3 \end{bmatrix}, \tag{8.6}$$

burada: l_i, m_i, n_i – ikinci (2 nömrəli) sistemin oxlarının birinci (1 nömrəli) sistemdə hesablanmış istiqamətləndirici kosinuslarıdır.

Əgər oxların dönmə bucaqları $\omega_x, \omega_y, \omega_z$ kiçik qiymətlərə (bir neçə saniyə, hətta onlarla saniyə) malik olarsa, geodeziya təcrübəsində belə hallara çox rast gəlinir, onda çevirmə matrisi belə şəklə düşər:

$$R = \begin{bmatrix} 1 & \omega_z & -\omega_y \\ -\omega_z & 1 & \omega_x \\ \omega_y & -\omega_x & 1 \end{bmatrix}. \tag{8.7}$$

Digər tərəfdən məlumdur ki, düzbucaqlı koordinatlar sistemi heç bir ellipsoidlə bağlı deyil. Onda (8.6) ifadəsini, eləcə də miqyaslar fərqini Δm nəzərə alsaq, (8.4) düsturuna əsasən yaza bilərik:

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}_2 = \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}_1 + \begin{bmatrix} \Delta m & \omega_z & -\omega_y \\ -\omega_z & \Delta m & \omega_x \\ \omega_y & -\omega_x & \Delta m \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}_1 + \begin{bmatrix} X_0 \\ Y_0 \\ Z_0 \end{bmatrix}. \tag{8.8}$$

Bununla belə (8.3) və (8.8) düsturlarını sadələşdirmək olar. Belə ki, ümumən ellipsoidlərin yarımoxları və ekssentrisitetlərinin qiymətləri yaxşı məlumdur, geodeziya şəbəkələrində isə miqyas bütün ölkələrdə işıq sürətinə əsasən təyin edilir. Ona görə də üç – $\Delta a = a_1 - a_2$, $\Delta e^2 = e_1^2 - e_2^2$ və $\Delta m = m_1 - m_2$ parametrlərini (8.1) vektorundan xaric etmək olar. Lakin birgə tarazlaşdırılan geodeziya şəbəkəsində müxtəlif dövrlərə aid məntəqələr daxil edilmişsə (məsələn,XX əsrin 40-50-ci illərində salınmış şəbəkələr), onda belə hallarda miqyaslardakı fərq əhəmiyyətli ola bilər ki, bu da (8.1) vektoruna Δm parametrini əlavə etməyi tələb edir.

Müasir geodeziyanın bir sıra məsələlərinin həlli zamanı müxtəlif koordinat sistemlərindən istifadə etmək lazım gəlir. Məsələn, ellipsoid səthində aparılan ölçmələr üçün əyrixətli koordinatlar, peyk ölçmələri – düzxətli fəza, yerüstü ölçmələr isə düzxətli müstəvi koordinat sistemində yerinə yetirilir. Odur ki, bu ölçmələri vahid sistemə gətirmək üçün çox hallarda diferensial koordinat əlaqələrindən istifadə etmək əlverişlidir.

Müxtəlif diferensial koordinat dəyişmələrini aşağıdakı kimi işarə edək:

düzbucaqlı fəza koordinatları

$$X = [dx, dy, dz]^T, \quad (8.9)$$

üfüqi koordinatlar

$$K = [dx', dy', dz']^T, \quad (8.10)$$

müstəvi koordinatlar

$$G = [dx_n, dy_n]^T, \quad (8.11)$$

əyrixətli koordinatlar

$$Q = [dB, dL, dH]^T, \quad (8.12)$$

xordanın sferik koordinatları

$$T = [d\Lambda, d\Phi, dD]^T. \quad (8.13)$$

Ümumi şəkildə i sistemindən j sisteminə keçid matrisini R_{ij} ilə işarə etsək, yaza bilərik:

$$\begin{array}{ll}
X = R_{QX} \times Q;\ Q = R_{XQ} \times X = R_{QX}^{-1} \times X; & (B,L,H) \leftrightarrow (x,y,z); \\
X = R_{KX} \times K;\ K = R_{XK} \times X = R_{KX}^{-1} \times X; & (x,y,z) \leftrightarrow (x',y',z'); \\
K = R_{QK} \times Q;\ Q = R_{KQ} \times K = R_{KQ}^{-1} \times K; & (x',y',z') \leftrightarrow (B,L,H); \quad (8.14) \\
G = R_{QG} \times Q;\ Q = R_{GQ} \times G = R_{QG}^{-1} \times G; & (B,L) \leftrightarrow (x_{\Pi}, y_{\Pi}); \\
\Delta X = R_{T\Delta X} T;\ T = R_{\Delta XT} \Delta X = R_{T\Delta X}^{-1} \times \Delta X; & (\Phi, \Lambda, D) \leftrightarrow (\Delta x, \Delta y, \Delta z).
\end{array}$$

(8.9)-(8.14) düsturlarında koordinatların standart işarələrindən istifadə edilmişdir.

Ən sadə əlaqə üfüqi və əyrixətli geodeziya koordinatları arasında qurulur, çünki birinci koordinatların diferensialları ellipsoid üzərində koordinat xətlərinin diferensiallarına bərabərdir:

$$\begin{aligned}
dx' &= MdB; \\
dy' &= N\cos BdL; \quad (8.15) \\
dz' &= dH.
\end{aligned}$$

H yüksəkliyində (fəzada) (8.15) düsturu belə yazılır:

$$\begin{aligned}
dx' &= (M + H)dB; \\
dy' &= (N + H)\cos BdL; \quad (8.16) \\
dz' &= dH.
\end{aligned}$$

Onda bu iki sistem arasında keçid matrisi aşağıdakı sadə şəklə malik olacaqdır.

$$R_{QK.} = \begin{pmatrix} M+H & 0 & 0 \\ 0 & (N+H)\cos B & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \qquad (8.17)$$

Düzbucaqlı geodeziya və üfüqi koordinatlar arasında əlaqə matrisi isə:

$$R_{KX} = \begin{pmatrix} -\sin B\cos L & -\sin L & \cos B\cos L \\ -\sin B\sin L & \cos L & \cos B\sin L \\ \cos B & 0 & \sin B \end{pmatrix}. \qquad (8.18)$$

(8.18) matrisi ortoqonal olduğundan, əks keçid üçün yaza bilərik:

$$R_{XK} = R_{KX}^{-1} = R_{KX}^{T}. \qquad (8.19)$$

Düzbucaqlı və ayrixətli koordinatlar arasında əlaqələri (8.14) düsturu ilə yanaşı belə də ifadə etmək olar:

$$X = R_{KX}K,$$

burada $K = R_{QK}Q$. Onda

$$X = R_{QX}Q = R_{KX}R_{QK}Q. \qquad (8.20)$$

Əks keçid üçün isə (8.19) ifadəsini nəzərə alsaq

$$Q = (R_{KX}R_{QK})^{-1}X = R_{QK}^{-1}R_{KX}^{T}X \qquad (8.21)$$

münasibətini alarıq. Buradan belə nəticə çıxır ki, yuxarıda verilmiş çevirmələri aparmaq üçün yalnız R_{KX} və R_{QX} matrislərini bilmək kifayətdir.

Qauss-Kryuger proyeksiyasında verilmiş müstəvi düzbucaqlı koordinatlar və əyrixətli koordinatlar arasında əlaqəni aşağıdakı kimi ifadə edə bilərik:

$$G = R_{QG} \cdot Q,$$

və ya

$$\begin{bmatrix} dx_{\Pi} \\ dy_{\Pi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{dx}{dB} & \dfrac{dx}{dL} \\ \dfrac{dy}{dB} & \dfrac{dy}{dL} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} dB \\ dL \end{bmatrix}. \tag{8.22}$$

Qauss proyeksiyasının konform olması şərtini, yəni

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dB} &= \frac{M}{N\cos B} \cdot \frac{dy}{dL}, \\ \frac{dy}{dB} &= \frac{-M}{N\cos B} \cdot \frac{dx}{dL} \end{aligned} \tag{8.23}$$

və bu proyeksiyasının düsturlarını

$$\begin{aligned} x_m &= X + a_2 l^2 + ...; \\ y_m &= b_1 l + b_3 l^3 + ..., \end{aligned} \tag{8.24}$$

burada:

$$b_1 = N\cos B, \quad a_2 = 0.5N \cdot \cos B \cdot \sin B, \quad l = L - L_0,$$

L_0 – ox meridianının geodezik enliyidir, nəzərə alsaq, R_{QG} matrisi üçün alarıq:

$$R_{QG} = \begin{bmatrix} M & N\cos B \sin B \cdot l \\ -M\sin B \cdot l & N\cos B \end{bmatrix}. \tag{8.25}$$

(8.15) ifadəsinin diferensiallanması zamanı yalnız birinci hədlər nəzərə alınmışdır, belə ki, matrislərin əlaqəsi üçün bu kifayətdir.

Göstərilən koordinat sistemlərində əks keçid matrisi isə belə şəklə malik olar:

$$R_{GQ} = R_{QG}^{-1} = \frac{1}{\Delta}\begin{bmatrix} N\cos B & -N\cos B\sin B\cdot l \\ M\sin B\cdot l & M \end{bmatrix}, \quad (8.26)$$

burada

$$\Delta = MN\cos B(1+\sin^2 B\cdot l^2)$$

– matrisin determinantıdır (təyini). Əgər $q = 1+\sin^2 B\cdot l^2$ işarə etsək, onda (8.26) düsturu belə yazılar:

$$R_{GQ} = \frac{1}{q}\begin{bmatrix} \frac{1}{M} & \frac{-\sin B\cdot l}{M} \\ \frac{\sin B\cdot l}{N\cos B} & \frac{L}{N\cos B} \end{bmatrix}. \quad (8.27)$$

Nəhayət, vətərin sferik koordinatları Λ, Φ, D və düzbucaqlı koordinatlar fərqləri arasında belə bir əlaqə mövcuddur:

$$R_{T\Delta X} = \frac{\partial(\Delta x, \Delta y, \Delta z)}{\partial(\Lambda, \Phi, D)} = \begin{bmatrix} -DM & DL' & L \\ DL & DM' & M \\ O & DN' & N \end{bmatrix} \quad (8.28)$$

və

$$R_{\Delta XT} = R_{T\Delta X}^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{M}{D\cos^2\Phi} & \frac{L}{D\cos^2\Phi} & O \\ \frac{L'}{D} & \frac{M'}{D} & \frac{N'}{D} \\ L & M & N \end{bmatrix}, \quad (8.29)$$

burada

$$L = \cos\Phi \cos\Lambda,\ M = \cos\Phi \sin\Lambda,\ N = \sin\Phi; \qquad (8.30)$$

$$\Delta x = DL,\quad \Delta y = DM,\quad \Delta z = DN; \qquad (8.31)$$

$$L' = -\sin\Phi\cos\Lambda,\quad M' = -\sin\Phi\sin\Lambda,\quad N' = \cos\Phi. \qquad (8.32)$$

Qeyd edək ki, (8.1) əlaqə vektorunun parametrlərinin qiymətləri müxtəlif koordinat sistemləri arasında qlobal, regional və ya lokal ölçülərdə təyin edə bilər və bu qiymətlər müxtəlif olacaqdır. Rusiyada istifadə edilən CK-42, CK-95, П3-90 və WGS-84 koordinat sistemləri arasında qlobal əlaqə parametrlərinin ədədi qiymətləri aşağıdakı kimidir:

a) CK-42 və П3-90 koordinat sistemləri

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}_{П3-90} = \begin{bmatrix} 1 & -3{,}3\cdot10^{-6} & +1{,}8\cdot10^{-6} \\ +3{,}3\cdot10^{-6} & 1 & 0 \\ -1{,}8\cdot10^{-6} & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}_{CK-42} + \begin{bmatrix} 25 \\ -141 \\ -80 \end{bmatrix}$$

b) П3-90 və CK-42

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}_{CK-42} = \begin{bmatrix} 1 & +3{,}3\cdot10^{-6} & -1{,}8\cdot10^{-6} \\ -3{,}3\cdot10^{-6} & 1 & 0 \\ +1{,}8\cdot10^{-6} & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}_{П3-90} - \begin{bmatrix} 25 \\ -141 \\ -80 \end{bmatrix}.$$

c) CK-95 və П3-90

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}_{П3-90} = \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}_{CK-95} + \begin{bmatrix} 25{,}90 \\ -130{,}94 \\ -81{,}76 \end{bmatrix}.$$

ç) П3-90 və CK-95

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}_{CK-95} = \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}_{\Pi 3-90} - \begin{bmatrix} 25,90 \\ -130,94 \\ -81,76 \end{bmatrix}.$$

d) ПЗ-90 və WGS-84

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}_{WGS-84} = (1-0,12\cdot 10^{-6})\begin{bmatrix} 1 & -0,82\cdot 10^{-6} & 0 \\ 0,82\cdot 10^{-6} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}_{\Pi 3-90} + \begin{bmatrix} -1,1 \\ -0,3 \\ -0,9 \end{bmatrix}.$$

e) WGS-84 və ПЗ-90

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}_{\Pi 3-90} = (1+0,12\cdot 10^{-6})\begin{bmatrix} 1 & 0,82\cdot 10^{-6} & 0 \\ -0,82\cdot 10^{-6} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}_{WGS-84} - \begin{bmatrix} -1,1 \\ -0,3 \\ -0,9 \end{bmatrix}.$$

ə) CK-95 və CK-42

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}_{CK-42} = (1-0,15\cdot 10^{-6})\begin{bmatrix} 1 & +4,12\cdot 10^{-6} & -1,84\cdot 10^{-6} \\ -4,12\cdot 10^{-6} & 1 & -0,01\cdot 10^{-6} \\ +1,84\cdot 10^{-6} & +0,01\cdot 10^{-6} & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}_{CK-95} - \begin{bmatrix} +1,8 \\ -9,0 \\ +6,8 \end{bmatrix}.$$

f) CK-42 və CK-95

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}_{CK-95} = (1+0,15\cdot 10^{-6})\begin{bmatrix} 1 & -4,12\cdot 10^{-6} & +1,84\cdot 10^{-6} \\ +4,12\cdot 10^{-6} & 1 & +0,01\cdot 10^{-6} \\ -1,84\cdot 10^{-6} & -0,01\cdot 10^{-6} & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}_{CK-42} + \begin{bmatrix} +1,8 \\ -9,0 \\ +6,8 \end{bmatrix}.$$

Keçid matrislərində $\omega_x, \omega_y, \omega_z$ dönmə bucaqlarının qiymətləri radianlarla ifadə olunur. Qeyd etmək lazımdır ki, bir sistemdən digərinə keçid zamanı baş verən səhv əsasən şəbəkələrdəki deformasiyalarla bağlıdır. Məsələn, CK-94 koordinat sistemindən CK-42-yə keçid təxminən 3,5 m səhvlə həyata keçirilir ki, bu da əsasən CK-42-də mövcud olan deformasiya ilə əlaqədardır. Digər tərəfdən yuxarıda gətirilmiş keçid düsturları qlobal xarakter daşıyır, lokal ərazilər üçün bu heç də doğru nəticələrə gətirib çıxarmır. Məsələn, yuxarıda verilmiş ə) düsturuna əsasən Azərbaycan Respublikası ərazisində CK-42-nin CK-95-ə nəzərən sürüşmə qiymətləri $dx = +18{,}14$ m, $dy = -22{,}10$ m; oxlar arasında dönmə bucaqları nəzərə alınmazsa, $dx = +8{,}70$ m, $dy = -7{,}34$ m hesablanmışdır. Lakin MDB ölkələri astronomik-geodeziya şəbəkəsinin ümumi tarazlaşdırılmasından AR ərazisində müvafiq sürüşmələr $dx = +3{,}02$ m, $dy = +4{,}15$ m təyin edilmişdir. Buradan belə nəticəyə gəlmək olar ki, hər bir lokal ərazidə keçid parametrlərinin qiymətləri ayrılıqda təyin edilməlidir. Bu məqsədlə bir neçə üsuldan istifadə edilə bilər.

Hər iki koordinat sistemində təyin edilmiş ümumi məntəqələrin mütləq koordinatlarına əsasən əlaqə parametrlərinin tapılması üsulu ən sadə və məntiqi üsuldur. Bu məqsədlə hər iki sistemdə təyin edilmiş bir neçə (ən azı üç) ümumi məntəqə məlum olmalıdır. Eyni zamanda koordinat sistemləri arasında etibarlı əlaqə parametrlərinin tapılması üçün iki əsas vacib faktor vardır: 1) məsələyə daxil edilən məntəqələrin coğrafi baxımdan optimal yerləşməsi və sayı; 2) bu məntəqələrin koordinatlarının sistemlərdə təyin edilmə dəqiqliyi.

Beləliklə, ümumi məntəqələrdən istifadə edərək doqquz və ya yeddi məchullu (əgər $\Delta a = a_1 - a_2$ və $\Delta e^2 = e_1^2 - e_2^2$ məchullar sırasına daxil edilmirsə) doqquz və daha çox sayda (8.4) və ya (8.8) şəklində təkliklər sistemi qurulur.

Onda ümumi nəticələrin hər biri üçün (8.4) sisteminin birinci tənliklərini ayırıb və onlara istiqamətləndirici kosinusların məlum şərtini əlavə etsək, aşağıdakı şəkildə dörd məchullu, dörd tənlikdən ibarət sistem alarıq:

$$
\begin{aligned}
&l_X X_{11} + m_X Y_{11} + n_X Z_{11} + X_0 = X_{21};\\
&l_X X_{12} + m_X Y_{12} + n_X Z_{12} + X_0 = X_{22};\\
&l_X X_{13} + m_X Y_{13} + n_X Z_{13} + X_0 = X_{23};\\
&l_X^2 + m_X^2 + n_X^2 = 1,
\end{aligned} \tag{8.33}
$$

burada: X_{1i}, Y_{1i}, Z_{1i} və X_{1j}, Y_{1j}, Z_{1j} – ümumi nöqtələrin uyğun olaraq 1-ci və 2-ci koordinat sistemlərində məlum koordinatları; X_0, Y_0, Z_0 – yeni koordinat sistemi başlanğıcının köhnə sistemdə koordinatları; l_i, m_i, n_i – köhnə sistemin *OX, OY, OZ* oxlarının yeni sistemdə (i=*X, Y, Z*) istiqamətləndirici kosinuslarıdır.

Analoji qaydada (8.4) sisteminin ikinci tənliklərindən istifadə etsək alarıq:

$$
\begin{aligned}
&l_y X_{11} + m_y Y_{11} + n_y Z_{11} + Y_0 = Y_{21};\\
&l_y X_{12} + m_y Y_{12} + n_y Z_{12} + Y_0 = Z_{22};\\
&l_y X_{13} + m_y Y_{13} + n_y Z_{13} + Y_0 = Y_{23};\\
&l_y^2 + m_y^2 + n_y^2 = 1.
\end{aligned} \tag{8.34}
$$

Üçüncü tənlikləri də bu qayda ilə istifadə etmək olar, lakin bu halda koordinat ortaları arasındakı məlum münasibətdən istifadə edərək:

$$
\begin{aligned}
&\bar{i}_1 = l_X \times \bar{i}_2 + m_X \times \bar{j}_2 + n_X \times \bar{k}_2;\\
&\bar{j}_1 = l_Y \times \bar{i}_2 + m_Y \times \bar{j}_2 + n_Y \times k_2;\\
&\bar{k}_1 = \bar{i}_1 \times \bar{j}_1,
\end{aligned} \tag{8.35}
$$

(8.35) tənliyini belə də yazmaq olar:

$$\overline{K}_1 = \begin{pmatrix} \bar{i}_2 & \bar{j}_2 & \bar{k}_2 \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{pmatrix} = l_Z\bar{i}_2 + m_Z\bar{j}_2 + n_Z\bar{k}_2 \qquad (8.36)$$

Onda, (8.36)-dan birinci sətir elementləri üzrə alarıq:

$$l_Z = \begin{bmatrix} m_X & n_X \\ m_Y & n_Y \end{bmatrix}, \quad m_Z = \begin{bmatrix} n_X & l_X \\ n_Y & l_Y \end{bmatrix}, \quad n_Z = \begin{bmatrix} l_X & m_X \\ l_Y & m_Y \end{bmatrix} \qquad (8.37)$$

və (8.33) tənliklər sistemini həll edək. Bu məqsədlə sistemin birinci üç tənliyini aşağıdakı şəkildə yazaq:

$$\begin{aligned} m_x Y_{11} + n_x Z_{11} + X_0 &= X_{21} - l_x \times X_{11} = p_1; \\ m_x Y_{12} + n_x Z_{12} + X_0 &= X_{22} - l_x \times X_{12} = p_2; \\ m_x Y_{13} + n_x Z_{13} + X_0 &= X_{23} - l_x \times X_{13} = p_3, \end{aligned} \qquad (8.38)$$

və ya

$$\begin{bmatrix} Y_{11} & Z_{11} & 1 \\ Y_{12} & Z_{12} & 1 \\ Y_{13} & Z_{13} & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} m_X \\ n_X \\ X_0 \end{bmatrix} = R_X \begin{bmatrix} m_x \\ n_X \\ X_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{bmatrix}. \qquad (8.39)$$

Buradan

$$\begin{bmatrix} m_X \\ n_X \\ X_0 \end{bmatrix} = R_x^{-1} \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_{11} & q_{12} & q_{13} \\ q_{21} & q_{22} & q_{23} \\ q_{31} & q_{32} & q_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{bmatrix}. \qquad (8.40)$$

Sonra

$$\begin{aligned} m_X &= q_{11} \times p_1 + q_{12} \times p_2 + q_{13} \times p_3; \\ n_X &= q_{21} \times p_1 + q_{22} \times p_2 + q_{23} \times p_3. \end{aligned} \qquad (8.41)$$

(8.38) ifadələrini nəzərə alsaq,

$$m_X = q_{11} \times X_{21} + q_{12} \times X_{22} + q_{13} \times X_{23} - \\ -(q_{11} \times X_{11} + q_{12} \times X_{12} + q_{13} \times X_{13}) l_X = C_1 - K_1 l_X ; \quad (8.42)$$

$$n_X = q_{21} \times X_{21} + q_{22} \times X_{22} + q_{23} \times X_{23} - \\ (q_{21} \times X_{11} + q_{22} \times X_{12} + q_{23} \times X_{23}) l_X = C_2 - K_2 l_X ; \quad (8.43)$$

$$x_0 = q_{31} \times X_{21} + q_{32} \times X_{22} + q_{33} \times X_{23} - \\ -(q_{31} \times X_{11} + q_{32} \times X_{12} + q_{33} \times X_{13}) l_X = C_3 - K_3 l_X \quad (8.44)$$

Burada (8.33) tənliklər sisteminin dördüncü tənliyini cəlb edib (8.42) və (8.43)-ü də qəbul etsək, taparıq:

$$m_X^2 + n_X^2 = 1 - l_X^2 = (C_1 - K_1 l_X)^2 + (C_2 - K_2 l_X)^2 . \quad (8.45)$$

Oxşar hədləri ümumiləşdirib belə bir kvadrat tənliyə gəlirik:

$$P l_X^2 - 2Q l_X + T = 0 , \quad (8.46)$$

burada

$$P = 1 + K_1^2 + K_2^2 ; \\ Q = C_1 K_1 + C_2 K_2 ; \quad (8.47) \\ T = C_1^2 + C_2^2 - 1 .$$

Onda l_X məlum düsturla təyin olunur:

$$l_X = \frac{Q \pm \sqrt{Q^2 - PT}}{P} . \quad (8.48)$$

(8.48)-da ikiqiymətliliyi aradan qaldırmaq çətin deyildir.

Belə ki, l_X O_1X_1 və O_2X_2 oxları arasında qalan bucağın kosinusudur və onun təqribi qiyməti demək olar ki, həmişə məlumdur. Bunu O_1Z_1 və O_2Z_2 oxları üçün də demək olar, lakin O_1Y_1 və O_2Y_2 arasında qalan bucağı təyin etmək çətindir. Ona görə də, növbəti mərhələdə (8.34) tənliklər sistemini deyil, (8.4)-ün üçüncü tənliklərini həll edək, l_Z, m_Z və n_Z qiymətlərini təyin edək. Onda O_2Y_2 oxunun vəziyyətini aşağıdakı kimi tapa bilərik:

$$\bar{j}_1 = \bar{k}_1 \times \bar{i}_1 \tag{8.49}$$

və ya koordinat formada

$$l_Y = \begin{bmatrix} m_Z & n_Z \\ m_X & n_X \end{bmatrix}, \quad m_Y = \begin{bmatrix} n_Z & l_Z \\ n_X & l_X \end{bmatrix}, \quad n_Y = \begin{bmatrix} l_Z & m_Z \\ l_X & m_X \end{bmatrix}. \tag{8.50}$$

Burada onu da qeyd edək ki, geodeziya təcrübəsində sol koordinat sistemlərinə də (məsələn, üfüqi sistemdə) rast gəlinir. Bu halda (8.50) tənliklərinin sol tərəfində mənfi işarəsi qoymaq lazımdır.

Çıxarışın asanlığı üçün qəbul edək ki, 1 və 2 sistemləri arasında dönmə bucaqları kiçik qiymətə malikdir. Bu halda (8.8) sistemi başlanğıc olacaqdır və üç ümumi məntəqə üçün onun birinci tənliklərini seçsək alarıq:

$$\begin{aligned} X_{21} &= x_{11}(1+\Delta m) + y_{11}\omega_Z - z_{11}\omega_y + x_0; \\ X_{22} &= x_{12}(1+\Delta m) + y_{12}\omega_Z - z_{12}\omega_y + x_0; \\ X_{23} &= x_{13}(1+\Delta m) + y_{13}\omega_Z - z_{13}\omega_y + x_0, \end{aligned} \tag{8.51}$$

və ya

$$\begin{bmatrix} y_{11} & -z_{11} & 1 \\ y_{12} & -z_{12} & 1 \\ y_{13} & -z_{13} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_Z \\ \omega_y \\ x_0 \end{bmatrix} = W_X \begin{bmatrix} \omega_Z \\ \omega_y \\ x_0 \end{bmatrix} =$$

$$
=\begin{bmatrix} x_{21} & -x_{11} & (1+\Delta m) \\ x_{22} & -x_{12} & (1+\Delta m) \\ x_{23} & -x_{13} & (1+\Delta m) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Delta x_1 \\ \Delta x_2 \\ \Delta x_3 \end{bmatrix} \qquad (8.52)
$$

İkinci sətirlər üçün

$$
\begin{bmatrix} -x_{11} & z_{11} & 1 \\ -x_{12} & z_{12} & 1 \\ -x_{13} & z_{13} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_Z \\ \omega_X \\ y_0 \end{bmatrix} = W_Y \begin{bmatrix} \omega_Z \\ \omega_X \\ y_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Delta y_1 \\ \Delta y_2 \\ \Delta y_3 \end{bmatrix}. \qquad (8.53)
$$

Üçüncülər üçün isə

$$
\begin{bmatrix} x_{11} & -y_{11} & 1 \\ x_{12} & -y_{12} & 1 \\ x_{13} & -y_{13} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_y \\ \omega_X \\ z_0 \end{bmatrix} = W_Z \begin{bmatrix} \omega_y \\ \omega_X \\ z_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Delta z_1 \\ \Delta z_2 \\ \Delta z_3 \end{bmatrix}. \qquad (8.55)
$$

olar.

Bu məsələdə meydana çıxan bütün tənliklər xətti şəklə malikdir və onların (8.52)-(8.54) sistemləri istənilən əlverişli üsulla həll edilə bilər.

Əgər ümumi məntəqələrin sayı üçdən çox olarsa, onda (8.8) tənliklər sisteminin həlli ən kiçik kvadratlar metodu ilə həyata keçirilir.

§54. Peyk və yerüstü geodeziya şəbəkələrinin birgə tarazlaşdırılması

Peyk və yerüstü geodeziya şəbəkələrinin birgə tarazlaşdırılması nəticəsində birincinin dəqiqliyinin əhəmiyyətli artımı baş vermir. Çünki peyk şəbəkələrində məntəqələrin qarşılıqlı vəziyyətini xarakterizə edən orta kvadratik səhvin qiyməti (2-3 sm) yerüstü şəbəkələrdə uyğun səhvdən (5-20 sm) on və daha çox dəfə kiçikdir. Bu mülahizələrlə ümumi halda peyk və yerüstü geodeziya şəbəkələrinin birgə tarazlaşdırılması məsləhət görülmür. Bununla belə bir sıra hallarda, o cümlədən peyk və yerüstü şəbəkələr arasında qarşılıqlı keçid etmək lazım gəldikdə, xüsusilə də təkmilləşdirilmiş şəbəkə hissələrinin (peyk texnologiyası ilə) Dövlət Geodeziya şəbəkəsinə birləşdirildiyi zaman və bunu oxşar məsələlərdə peyk və yerüstü geodeziya şəbəkələrinin birgə tarazlaşdırılması lazım gəlir. Bu zaman peyk şəbəkəsi məntəqələri dayaq (əsas) məntəqələr qəbul ediləreк yerüstü şəbəkə ona bağlanır (oturdulur). Onu da qeyd edək ki, bu şəbəkələrin birgə tarazlaşdırılması müxtəlif koordinat sistemlərində aparıla bilər.

I. Peyk və yerüstü geodeziya şəbəkələrinin düzbucaqlı fəza koordinat sistemində birgə tarazlaşdırılması. Məlumdur ki, yerüstü geodeziya şəbəkələrində ölçülən kəmiyyətlər (zenit məsafəsi, azimut, üfüqi bucaq, məsafə) müxtəlif fiziki mahiyyətə malikdir. Ona görə də fəza koordinat sistemində onlara yazılmış tənliklər sistemini iki qrupa ayıraq

$$\alpha\gamma + A_1X + L_1 = \upsilon_1, \text{ çəki matrisi } P_1; \qquad (8.55)$$
$$A_2X + L_2 = \upsilon_2, \text{ çəki matrisi } P_2,$$

burada

$$\gamma = [\xi_1, \eta_1, \ldots \xi_K, \eta_K]^T$$

– şaqul xətlərinin meyllikləri alt vektoru;

$$X = [dx_1, dy_1, dz_1, \ldots, dx_K, dy_K, dz_K]^T$$

– məntəqələrin təqribi koordinatlarına hesablanmış düzəlişlərin alt vektorudur.

«Yerüstü şəbəkədə ölçülmüş hansı kəmiyyətləri tarazlaşdırmaya qəbul etmək daha əlverişlidir» sualına cavab xüsusi tədqiqatlar tələb edir. Ümumi hal üçün aşağıdakı alqoritmdən istifadə etmək olar:

1. Ölçülmüş zenit məsafələrinin atmosfer refraksiyasına görə düzəldilməsi.

2. Məntəqələrin ilkin təqribi koordinatlarının və fəza yerüstü şəbəkəsinin elementlərinin hesablanması.

3. Digər məchulları sıfıra bərabər qəbul etməklə şaqul meyllikləri üçün düzəliş tənliklərinin tərtibi:

$$\lambda\gamma + L = \upsilon . \qquad (8.56)$$

(8.56) əsasında alınmış normal tənliklərin həllindən şaqul meylliyi qiymətləri tapılır.

4. Alınmış şaqul meylliyinə görə ölçülmüş kəmiyyətlərin qiymətlərinin düzəldilməsi.

5. Bütün ölçmələr üçün yalnız *dx, dy, dz* koordinat düzəlişlərinin daxil edildiyi düzəliş tənliklərinin tərtibi. Bu tənliklər aşağıdakı şəkildə yazılır:

$$[a_{ki}, b_{ki}, c_{ki}, \ldots] \begin{bmatrix} dx_k \\ dy_k \\ dz_k \\ \vdots \\ \end{bmatrix} + l_{ki} = \upsilon_{ki} , \qquad (8.57)$$

(8.57) tənlikləri quruluşuna görə peyk ölçmələri üçün yazılmış tənliklərin analoqudur.

Beləliklə, peyk və yerüstü geodeziya şəbəkələrini birgə tarazlaşdırarkən iki başlanğıc düzəliş tənliklər sistemi meydana çıxır:

yerüstü şəbəkədə

$$A_H X_H + B_H X + L_H = \upsilon_H , \; P_H ; \qquad (8.58)$$

peyk şəbəkəsində

$$A_S X_S + B_S X + L_S = \upsilon_S, \; P_S, \tag{8.59}$$

burada: X – ümumi məntəqələrin fəza koordinatlarına hesablanmış düzəlişlər vektoru; X_H, X_S – yerüstü və peyk şəbəkələrinin ümumi olmayan məntəqələrinin koordinatlarına hesablanmış düzəlişlər vektorlarıdır.

(8.58) və (8.59) tənlikləri əsasında ümumi tənliklər sistemi tərtib edilərək həll edilir:

$$\begin{bmatrix} A_H & 0 & B_H \\ 0 & A_S & B_S \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_H \\ X_S \\ X \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} L_H \\ L_S \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \upsilon_H \\ \upsilon_S \end{bmatrix}; \tag{8.60}$$

çəki matrisi isə

$$P = \begin{bmatrix} P_H & 0 \\ 0 & P_S \end{bmatrix}.$$

Bundan sonra həll ən kiçik kvadratlar metodunun ümumi qaydaları ilə davam etdirilir.

Yerüstü və peyk şəbəkələri üçün yazılmış başlanğıc düzəliş tənliklərinin qəbul edilmiş koordinat sisteminə diferensial reduksiyası əsasında birgə tarazlaşdırılması. Bu yanaşma mahiyyət etibarı ilə çox sadə ideyaya əsaslanır.

Tutaq ki, geodeziya şəbəkəsində müəyyən ölçmələr yerinə yetirilmişdir. Onda X sistemində onların düzəliş tənlikləri belə yazıla bilər:

$$AX + L_X = \upsilon_X, \text{ çəki matrisi } P_X. \tag{8.61}$$

Tutaq ki, sonra bu şəbəkənin bütün və yaxud bir hissəsində yerləşən məntəqələrində birinci qrupda olan növ və yaxud da başqa növdə ölçmələr yerinə yetirilmiş və onlara tənliklər Y sistemində yazılmışdır, yəni

$$BY + L_Y = \upsilon_Y, \text{ çəki əmsalı } P_Y. \qquad (8.62)$$

Əgər R çevirmə matrisi məlum olarsa, onda X sistemində yazılmış düzəliş tənliklərindən Y sisteminə və əksinə keçid etməklə, yəni

$$Y = R_{xy}X\ ;\ X = R_{yx}Y = R_{xy}^{-1}Y \qquad (8.63)$$

qaydasında (8.11) və (8.62) sistemlərini birləşdirmək çətin deyildir. Məsələn, ümumi tənliklər sistemi X koordinat sistemində aşağıdakı kimi yazılır:

$$\begin{aligned} &AX + L_X = \upsilon_X, \text{ çəki matrisi } P_X; \\ &BR_{xy}Y + L_Y = \upsilon_Y, \text{ çəki matrisi } P_Y, \end{aligned} \qquad (8.64)$$

Y sistemində isə

$$\begin{aligned} &AR_{yx}Y + L_X = \upsilon_X, \text{ çəki matrisi } P_X; \\ &BY + L_Y = \upsilon_Y, \text{ çəki matrisi } P_Y. \end{aligned} \qquad (8.65)$$

(8.1) bölməsində verilmiş diferensial reduksiya əlaqələrindən istifadə edərək yerüstü və peyk şəbəkələrinin birgə tarazlaşdırılmasının bəzi variantları ilə tanış olaq.

A variantı

Tutuq ki, şəbəkədə yerüstü və peyk ölçmələri yerinə yetirilmişdir. Birinci ölçmələr Qauss-Kryuger proyeksiyasında müstəviyə reduksiya olunmuş və onlar üçün aşağıdakı düzəliş tənlikləri tərtib olunmuşdur:

$$B_H G_H + BG + L_H = \upsilon_H \text{ çəki matrisi } P_H, \qquad (8.66)$$

burada G – ümumi məntəqələrin müstəvi koordinatlarına hesablanmış düzəlişlər vektorudur.

Peyk ölçmələri üçün isə düzəliş tənlikləri aşağıdakı şəklə malik olacaqdır:

$$A_S X_S + AX + L_S = \upsilon_S \text{, çəki matrisi } P_S \text{,} \qquad (8.67)$$

burada X – ümumi məntəqələrin fəza düzbucaqlı koordinatlarına hesablanmış düzəlişlər vektorudur.

Birgə tarazlaşdırmanı müstəvi koordinatlar sistemində aparaq. Bunun üçün X vektorunu G vektoruna çevirmək lazımdır. Bu zaman aşağıdakı diferensial əlaqələrdən istifadə edilir:

$$X = R_{QX} Q \,;\; Q = R_{GQ} G \,;\; X = R_{QX} R_{GQ} G \,. \qquad (8.68)$$

$AR_{QX} R_{GX} = C$ işarəsini qəbul etsək, (8.67) sistemi belə şəklə düşər:

$$C_S G_S + CG + L_S = \upsilon_S \text{, çəki matrisi } P_S \,. \qquad (8.69)$$

Sonra (8.69) və (8.66) sistemlərini birləşdirsək, alarıq:

$$\begin{bmatrix} B_H & 0 & B \\ 0 & C_S & C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} G_H \\ G_S \\ G \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} L_H \\ L_S \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \upsilon_H \\ \upsilon_S \end{bmatrix}, \qquad (8.70)$$

çəki matrisi $P = \begin{bmatrix} P_H & 0 \\ 0 & P_S \end{bmatrix}$.

(8.70) düzəliş tənliklərinə aşağıdakı normal tənliklər sistemi uyğun gəlir:

$$\begin{bmatrix} B_H^T P_H B_H & 0 & B_H^T P_H B \\ 0 & C_S^T P_S C_S & C_S^T P_S C \\ B^T P_H B_H & B^T P_S C_S & B^T P_H B + C^T P_S C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} G_H \\ G_S \\ G \end{bmatrix} +$$

$$+ \begin{bmatrix} B_H^T P_H & 0 \\ 0 & C_S^T P_S \\ B^T P_H & C^T P_S \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L_H \\ L_S \end{bmatrix} = 0. \quad (8.71)$$

(8.71) normal tənliklərinin həllindən bilavasitə (8.70) düzəlişlərini almaq olar. Eyni zamanda (8.66) və (8.69) sistemlərini ayrı-ayrılıqda həll etmək mümkündür. Bu halda iki normal tənliklər sistemi meydana çıxır və onlardan G_H və G_S xüsusi vektorlarını xaric edib qalıq ekvivalent tənlikləri toplamaq lazımdır. Onda cəm sistemdə yalnız G ümumi vektoru olacaqdır və onu standart qaydada həll edirlər.

B variantı

Birgə tarazlaşdırma fəza düzbucaqlı koordinatlar sistemində aparılır. Bu halda müstəvi koordinatlarda yazılmış düzəliş tənlikləri əvvəlcə $G = R_{QG}Q = R_{GQ}^{-1}Q$ əyrixətli koordinatlar sisteminə, sonra isə $Q = R_{XQ}X = R_{QX}^{-1}X$ düzxətli koordinatlar sisteminə reduksiya olunur. Birgə tarazlaşdırmanın sonrakı mərhələləri A variantında gətirilmiş qaydalardan heç nə ilə fərqlənmir.

C variantı

Tarazlaşdırma əyrixətli koordinatlar sistemində həyata keçirilir. Bu zaman başlanğıc olaraq yerüstü şəbəkənin (8.66) düzəliş tənlikləri və peyk şəbəkəsinin (8.67) tənlikləri götürülür. Müvafiq reduksiya aparıldıqdan sonra bu tənliklər aşağıdakı formaya düşür:

$$B_H R_{QG} Q_H + B R_{QG} Q + L_H = \upsilon_H, \text{ çəki matrisi } P_H; \quad (8.72)$$

$$A_S R_{QX} Q_S + A R_{QX} Q + L_S = v_S \text{, çəki matrisi } P_S. \qquad (8.73)$$

Nəticədə quruluşca (8.70) sistemi ilə tam üst-üstə düşən ümumi düzəliş tənlikləri sistemi alırıq. Ona görə də, bu halda da birgə tarazlaşdırma üzrə sonrakı əməliyyatlar A variantında verilmiş ardıcıllıqla aparılacaqdır.

Ç variantı

Tutaq ki, müəyyən bir ərazidə artıq Qauss proyeksiyası müstəvisində tarazlaşdırılmış yerüstü şəbəkə mövcuddur. Sonradan bu ərazidə əlavə olaraq peyk ölçmələri yerinə yetirilmişdir. Tələb edilir ki, bu nəticələr öz aralarında uyğunlaşdırılsın və yaxud birləşdirilsin.

Onda müstəvi üzərində verilmiş şəbəkə üçün yaza bilərik:

$$G = v_G \text{, çəki matrisi } P_G = Q_G^{-1}. \qquad (8.74)$$

Peyk şəbəkəsində düzəliş tənliklər sistemi isə

$$AX + L_S = v_S \text{, çəki matrisi } P_S. \qquad (8.75)$$

Burada nəzərə alaq ki, tarazlaşdırılmış vektorun çəki matrisi birinci mərhələdə alınmış normal tənliklər matrisinə bərabərdir, yəni $P_G = N_G$.

Birgə tarazlaşdırmanı əyrixətli koordinatlar sistemində aparsaq yaza bilərik:

$$\begin{aligned} R_{QG} Q &= v_G \text{, çəki matrisi } P_G = N_G; \\ A R_{QX} Q + L_S &= v_S \text{, çəki matrisi } P_S. \end{aligned} \qquad (8.76)$$

(8.76) düzəliş tənlikləri əsasında aşağıdakı normal tənliklər yazılır:

$$\left[R_{QG}^T(AR_{QX})^T\right]\begin{bmatrix} N_G & 0 \\ 0 & P_S \end{bmatrix}\begin{bmatrix} R_{QG} \\ AR_{QX} \end{bmatrix}Q+$$

$$+\left[R_{QG}^T(AR_{QX})^T\right]\begin{bmatrix} N_G & 0 \\ 0 & P_S \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ L_S \end{bmatrix}=0, \qquad (8.77)$$

və ya açıq şəkildə

$$[R_{QG}^T N_G R_{QG} + R_{QX}^T N_S R_{QX}]Q + R_{QG}^T A^T P_S L_S = 0, \qquad (4.34)$$

burada $N_S = A^T P_S A$.

Qeyd edək ki, yerüstü və peyk şəbəkələrinin birgə tarazlaşdırılmasının digər variantları da mümkündür.

§55. Kalman rekkurent düsturları ilə tarazlaşdırma

Kalman rekkurent düsturlarından (başqa sözlə Kalman filtri adlanır) dinamik sistemin zamandan asılı olaraq dəyişən vəziyyət (parametrlər) vektorunun optimal qiymətləndirilməsində (tarazlaşdırılmasında) istifadə edilir. Məsələn, dənizdə hərəkət edən gəminin yerini xarakterizə edən vəziyyət vektoru və onun parametrləri zamandan asılı dəyişir. Bu dəyişmələri təyin etmək üçün müxtəlif texniki vasitələrdən (peyk naviqasiya sistemləri, radiogeodeziya sistemləri, naviqasiya qurğuları və s.) daxil olan informasiyaları qəbul edərək, onları birgə tarazlaşdırmaq tələb olunur. Bu məqsədlə məhz Kalman filtrindən istifadə edilir.

Kalman filtrinin tətbiqi üçün tədqiq edilən sistemin dəyişmələri birinci dərəcəli diferensial və yaxud fərq tənlikləri ilə ifadə olunmalıdır (burada hansı tənliyin seçilməsi sistemin fasiləsiz və ya diskret rejimdə tədqiqindən asılıdır). Əgər diskret (kəsilən) vaxt rejimli xətti modeli qəbul etsək, onda fərq tənliyi aşağıdakı şəklə malik olar:

$$X_{t+1} = F_t X_t + W_t, \qquad (8.79)$$

Burada: X_t – sistemin vəziyyət vektorunun t zaman anına uyğun gələn halı; F_t – sistemin (n×n) ölçülü dinamik (hərəkət) matrisi; W_t – modelin t zaman anına uyğun səhvlər vektorudur. (8.79) sistemi ölçmələr tənliyi (düzəliş tənlikləri sistemi) ilə aşağıdakı əlaqəyə malikdir:

$$Y_t = H_t X_t + V_t, \qquad (8.80)$$

burada: Y_t – ölçmələr vektoru; H_t – əmsallar matrisi (ölçüsü m×n, m<n); V_t – ölçmə səhvləri vektorudur.

(8.79) və (8.80) sistemlərinin kovariasion matrisləri uyğun olaraq

$$Q = M[W_t W_t^T],\ R = M[V_t V_t^T], \qquad (8.81)$$

olar. Burada M – riyazi gözləmədir.

(8.79) və (8.80) sistem tənliklərinin birgə həlli bir sıra məsələlərin həllini mümkün edir. Bu məsələlər arasında ikisi xüsusi əhəmiyyət kəsb edir:

1. Filtr Kalman məsələsində təyin edilən Y_t dəyişmələr vektorundan istifadə edərək W_t və V_t meyletmələri əsasında X_t vəziyyət vektorunun t zaman anına uyğun gələn qiymətinin təyin edilməsi;

2. Proqnoz (ekstrapolyasiya) məsələsi. Bu zaman Y_t ölçmələr vektorundan S gələcək zaman anına uyğun gələn X_s vəziyyət vektorunun qurulması (qiymətləndirilməsi) modelində istifadə edilir ($S>t$).

Bu iki məsələnin Kalman rekkurent düsturları ilə həlli onları real vaxt rejimində qiymətləndirmək imkanı verir ki, bu da olduqca əhəmiyyətlidir.

Kalman filtrinin həyata keçirilməsinin əsas mərhələlərini göstərək.

Tutaq ki, X_t proqnoz qiyməti əvvəlki sikldəki X_{t-1} kəmiyyətinin nəticəsi əsasında aparılır. Bu proqnoz qiymətini $X_{t-1/t}$ işarə edək, burada (t/t-1) indeksi t zamanı proqnozunun (t-1) anına uyğun gələn informasiyadan istifadə etməklə verildiyini göstərir.

Həmçinin, tutaq ki, sonradan t zamanında yerinə yetirilmiş yeni Y_t ölçmə nəticəsi daxil oldu. Aydındır ki, bu ölçmə vektoru ilə yeni X_t vəziyyət vektoru təyin edilir, lakin bu vektorda müəyyən qiymətə malik ölçmə səhvləri mövcud olacaqdır. Onda bu iki vəziyyət vektorundan ($X_{t-1/t}$ və X_{t-1}) xətti kombinasiya şəklində aşağıdakı optimal qiyməti tapmaq olar:

$$X_{t/t\text{-}1} = L_t X_{t/t-1} + K_t Y_t. \tag{8.82}$$

Burada L_t və K_t matrisləri aşağıdakı əlaqəyə malikdir:

$$L_t = E - K_t H_t, \tag{8.83}$$

E – vahid matrisdir.

(8.83) ifadəsini (8.82)-də yerinə qoyub qruplaşdırma aparsaq, alarıq

$$X_{t/1} = X_{t/t-1} + K_t(Y_t - H_t X_{t/t-1}). \tag{8.84}$$

(8.82)-(8.84) ifadələrində K_t ***Kalman filtrinin gücləndirmə əmsalı***,

$$V_t = Y_t - H_t X_{t/t-1} \tag{8.85}$$

ifadəsi isə ***yeniləşdirici əməliyyat*** adlanır.

(8.85) ifadəsi ona görə yeniləşdirici əməliyyat adlanır ki, burada yeni Y_t ölçmə nəticəsi iştirak edir.

Bəzi hallarda yeniləşdirici əməliyyatın fərq forması daha əhəmiyyətli ola bilər:

$$h_t = Y_t - Y_{t-1} - H_t(X_t - X_{t/t-1}). \tag{8.86}$$

Kalman filtrinin K gücləndirmə matrisinin tərtib edilmə metodları ilə tanış olaq. Bu məqsədlə $X_{t/t}$ və $X_{t/t\text{-}1}$ kəmiyyətlərinin təsadüfi səhvlər vektorlarını uyğun olaraq $\delta X_{t/t}$ və $\delta X_{t/t\text{-}1}$ ilə işarə edək. Onların kovariasiya matrisləri aşağıdakı kimi olar:

$$P_{t/t} = M[\delta X_{t/t} \delta X_{t/t}^T], \tag{8.87}$$

$$P_{t/t\text{-}1} = M[\delta X_{t/t\text{-}1} \delta X_{t/t\text{-}1}^T]. \tag{8.88}$$

(8.82) və (8.83) ifadələrindən istifadə etsək, onda (8.87) və (8.88) arasında əlaqə belə yazılar:

$$P_{t/t}=LP_{t/t\text{-}1}L_t^T+K_tRK_t^T=(E\text{-}K_tH_t)P_{t/t\text{-}1}(E\text{-}K_tH_t^T)+K_tRK_t^T, \tag{8.89}$$

burada R – (8.81) ifadəsi ilə təyin edilən Y_t ölçmələrinin kovariasiya matrisidir.

(8.89) bərabərliyindən K_t əmsalı üçün alarıq:

$$K_t = P_{t/t\text{-}1}H_t^T(H_tP_{t/t\text{-}1}H_t^T+R)^{-1} \tag{8.90}$$

və ya

$$K_t = P_{t/t}H_t^TR. \tag{8.91}$$

Əgər (8.90) ifadəsini (8.89)-da yerinə yazsaq aşağıdakı şəkildə rekkurent münasibət alarıq:

$$P_{t/t}=L_tP_{t/t\text{-}1}=(E\text{–}K_tH_t)P_{t/t\text{-}1}. \tag{8.92}$$

(8.92) ifadəsi t zaman anında yerinə yetirilmiş ölçmələri nəzərə almaqla vəziyyət vektorunun kovariasiya vektorunu hesablamaq imkanı verir.

Əgər vəziyyət vektorunun proqnozuna yalnız «köhnə» ölçmələr əsasında baxılırsa, onda (8.79) və (8.81) ifadələrindən taparıq

$$P_{t+1/t}=F_t P_{t/t} F_t^T+Q, \qquad (8.93)$$

burada da $P_{t+1/t}$ vektoru $P_{t/t}$ vektorundan rekkurent qaydada hesablanır.

Beləliklə, qısa şəkildə nəzəri əsaslarla tanış olduqdan sonra diskret xətti Kalman filtrinin alqoritmini yazaq.

Başlanğıc tənliklər

Sistemin tənlikləri:

$X_{t+1}=F_t X_t+W_t$, kovariasiya matrisləri $P_{t/t}$ və Q. (8.94)

Ölçmələr tənlikləri

$Y_t=H_t X_t+V_t$, kovariasiya matrisi R (8.95)

Filtrləmə

Gücləndirmə matrisi:

$$K_t=P_{t/t-1}H_t^T(H_t P_{t/t-1}H_t^T+R)^{-1}. \qquad (8.96)$$

Vəziyyət vektorunun dəqiqləşdirilməsi:

$$X_{t/t}=X_{t/t-1}+K_t V_t. \qquad (8.97)$$

Vəziyyət vektoru koordinatlarının səhvlərini səciyyələndirən kovariasiya matrisi:

$$P_{t/t}=(E-K_t H_t)P_{t/t-1} \qquad (8.98)$$

Proqnoz

Vəziyyət vektorunun proqnozu:

$$X_{t+1/t}= F_t X_{t/t}. \qquad (8.99)$$

Proqnoz vektorunun kovariasiya matrisi:

$$P_{t+1/t}=F_t P_{t/t} F_t^T+Q. \quad (8.100)$$

Burada bir daha qeyd edək ki, yuxarıda verilmiş düsturların ən əhəmiyyətli cəhəti onların rekkurent xarakterli olmasıdır. Digər tərəfdən Kalman filtrinin rekkurent prosedurda həyata keçirilməsi üçün vəziyyət vektorunun başlanğıc qiymətini $X_{0/0}=X_0$, həmçinin onun səhvlərini səciyyələndirən P kovariasiya matrisini bölmək lazımdır. Adətən bu başlanğıc məlumatlar həmin an üçün öncədən məlum olan bütün informasiyaları cəlb etməklə əldə edilir.

Burada Kalman filtrinin imkanlarını nümayiş etdirən məsələ həll edək.

İlkin verilənlər

Tutaq ki, iki stansiyadan ibarət *Seledis* (Fransa) tipli radiogeodeziya sistemi məsafə rejimində işləyir, yəni gəmiyədək olan geodezik xətlərin uzunluğu ölçülür və sonradan bu xətlər Qauss-Kryuger proyeksiyasında (koordinat başlanğıcı şərti seçilmişdir) müstəviyə gətirilir. Sistemin stansiyalarının qurulmuş olduğu məntəqələrin koordinatları cədvəl 8.1-də verilir.

Cədvəl 8.1

Başlanğıc məntəqələrin koordinatları

Məntəqələrin nömrəsi	X, m	Y, m
1	6000.00	20000.00
2	1000.00	36000.00

Gəmiyədək ölçülmüş nəticələr

Fərz edək ki, gəmiyədək olan məsafələr hər 5 saniyədən bir intervalda (sonrakı hesablamalarda bu vahid vaxt ölçüsü götürülür) ölçülür (cədvəl 8.2).

Cədvəl 8.2

Ölçülmüş məsafələr

Məsafələrin (ölçmə vaxtının) nömrəsi	S_1, m	S_2, m
C	13066.35	5017.14
0	13093.20	5038.08
1	13122.32	5056.06
2	13148.70	5077.10

Hesablama prosedurunun sonrakı mərhələlərində ölçmələrə iki nömrəli indeks yazılacaqdır (ki), burada K – ölçmələrin aparıldığı başlanğıc məntəqənin nömrəsi, i isə ölçmə vaxtını (anını) göstərir. Məsələn, hər iki stansiyadan birinci ölçülmüş məsafələr S_{11} və S_{21} işarə edilir. O ki qaldı C və O nömrələrinə, onların mənası aşağıdakı mərhələdə açılır.

Həmçinin fərz edək ki, məsafələr $m = 1{,}5$ m orta kvadratik səhvlə ölçülür; bu səhvi həm də vahid çəki səhvi qəbul edək: $M = m = 1{,}5m$. Eyni zamanda qəbul edək ki, gəmi bərabərsürətli hərəkət edir.

Bu şərtlərlə hesablamalar aşağıdakı ardıcıllıqla aparılır.

Hesablama ardıcıllığı

1. İki başlanğıc məntəqədən müstəvi xətti kəsdirməsi ilə t_c=1, t_0=2 zaman anlarında gəminin koordinatlarının hesablanması. İzahedici sxem şəkil 8.1-də verilir.

Müstəvi üzərində xətti kəsdirmənin həll düsturları:

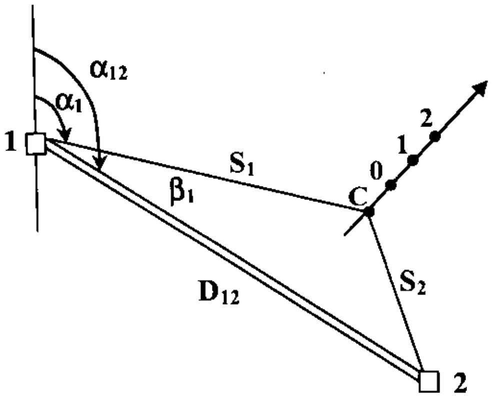
$$x_Q = x_1 + S_1 \cos\alpha_1; \quad y_Q = y_1 + S_1 \sin\alpha_1 \qquad (8.101)$$

və ya

$$x_Q = x_2 + S_2 \cos\alpha_2; \quad y_Q = y_2 + S_2 \sin\alpha_2, \qquad (8.102)$$

burada: x_1, y_1; x_2, y_2 – başlanğıc məntəqələrin koordinatları;

x_Q, y_Q – təyin edilən məntəqənin koordinatları; S_i – ölçülmüş məsafə; α_i – direksion bucaqlarıdır.



Şəkil 8.1. Müstəvi xətti kəsdirməsi ilə gəminin vəziyyətinin təyini

İlk növbədə başlanğıc tərəfin uzunluğu və direksion bucağı hesablanır:

$$D = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}, \qquad (8.103)$$

$$\operatorname{tg}\alpha_{12} = (y_2 - y_1)/(x_2 - x_1). \qquad (8.104)$$

12C üçbucağı üzrə kosinuslar teoreminə əsasən β_1 bucağı üçün alırıq:

$$\cos\beta_1 = (D_{12}^2 + S_1^2 - S_2^2)/(2S_1D_{12}). \qquad (8.105)$$

α_1 direksion bucağının qiyməti isə

$$\alpha_1 = \alpha_{12} - \beta. \qquad (8.106)$$

(8.101) düsturu ilə Q məntəqəsinin əsas koordinatları, (8.102) düsturu ilə ($2Q$ xətti üzrə) onun yoxlama koordinatları hesablanır. Məsələn, aşağıda $t = t_c(S_{11}, S_{21})$ zaman anında xətti kəsdirmənin həlli verilir.

$$x_2 - x_1 = \Delta x_{12} = -5000 \text{ m};$$

$$y_2 - y_1 = \Delta y_{12} = 16000 \text{ m};$$

$$D = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} = 16763.05 \text{ m};$$

$$\alpha_{12} = arctg(\Delta y_{12} / \Delta x_{12}) = 107.354^0;$$

$$\beta_1 = \arccos(D^2 + S_1^2 - S_2^2)/2S_1 D = 13.161^0;$$

$$\alpha_{11} = \alpha_{12} - \beta_1 = 94.193^0;$$

$$\Delta x_{1Q} = -955.40 \text{ m}, \quad \Delta y_{1Q} = 13031.37 \text{ m};$$

$$x_{Q1} = 5044.60 \text{ m}, \quad y_{Q1} = 33031.37 \text{ m}.$$

Eyni qayda ilə t_0 anı üçün gəminin koordinatları hesablanır. Alınmış nəticələr cədvəl 8.3-də verilmişdir.

Cədvəl 8.3

Gəminin hesablanmış koordinatları

t	X, m	Y, m
S	5044.60	33031.40
0	5092.50	33061.74
1	5140.40	33092.05

2. Filtrləmə əməliyyatının təşkili üçün başlanğıc C və O nöqtələrində yazılmış düzəliş tənliklərinin əmsallarının hesablanması. Bu məqsədlə məsafəyə görə düzəliş tənliyini yada salaq:

$$\cos x \cdot dx + \sin\alpha \cdot dy + l = V, \tag{8.107}$$

burada, sərbəst hədd $l = d^0 - d^{ölç.}$.

Matris yazılışında (8.107) belə verilir:

$$AX + L = V\,, \tag{8.108}$$

Burada

$$A = \begin{bmatrix} \cos\alpha_1 & \sin\alpha_1 \\ \cos\alpha_2 & \sin\alpha_2 \end{bmatrix}\,, \tag{8.109}$$

α_1, α_2 – gəmidən 1 və 2 saylı məntəqələrə olan istiqamətlərin direksion bucaqlarıdır.

Cədvəl 8.4-də məsafə kəsdirməsinin həllindən bu direksion bucaqların hesablanmış qiymətləri verilir.

Cədvəl 8.4

Direksion bucaqların qiyməti

İstiqamətin adı	**$t = t_c$**	**$t = t_0$**
1Q	94,193350°	93,974600°
2Q	323,722700°	324,323200°

Onda $t = t_c$ anı üçün

$$A_c = \begin{bmatrix} \cos\alpha_{1C} & \sin\alpha_{1C} \\ \cos\alpha_{2C} & \sin\alpha_{2C} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0{,}073 & 0{,}997 \\ 0{,}806 & -0{,}592 \end{bmatrix},$$

$t = t_0$ üçün

$$A_0 = \begin{bmatrix} \cos\alpha_{10} & \sin\alpha_{10} \\ \cos\alpha_{20} & \sin\alpha_{20} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0{,}069 & 0{,}998 \\ 0{,}812 & -0{,}583 \end{bmatrix}.$$

alarıq.

3. Növbəti mərhələdə normal tənlikləri yazaq:

$$N_c = A_c^T A_s = \begin{bmatrix} 0{,}655 & -0{,}549 \\ -0{,}549 & 1{,}344 \end{bmatrix};$$

$$N_o = A_0^T A_o = \begin{bmatrix} 0{,}664 & -0{,}542 \\ -0{,}542 & 1{,}346 \end{bmatrix}.$$

4. $t=0$ anında gəminin koordinat səhvlərinin kovariasiya matrisinin hesablanması.

$$N_c^{-1} = (A_c^T A_c)^{-1} = \begin{bmatrix} 2{,}322 & 0{,}948 \\ 0{,}948 & 1{,}131 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_{11} & q_{12} \\ q_{21} & q_{22} \end{bmatrix};$$

$$N_0^{-1} = (A_0^T A_o)^{-1} = \begin{bmatrix} 2{,}243 & 0{,}903 \\ 0{,}903 & 1{,}107 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{q}_{11} & \bar{q}_{12} \\ \bar{q}_{21} & \bar{q}_{22} \end{bmatrix}.$$

Nəzərə almaq lazımdır ki, gəminin vəziyyət vektoru dörd hərəkət: iki koordinat (x_0, y_0) və iki sürət $(\dot{x}_0 = x_0 - x_C;\ \dot{y}_0 = y_0 - y_C)$ parametrindən ibarətdir. Ona görə də, $P_{C/0}$ kovariasiya matrisi üçün alarıq:

$$P_{C/0} = P_0 = \mu^2 \times \begin{bmatrix} \bar{q}_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (\bar{q}_{11} + q_{11}) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \bar{q}_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (\bar{q}_{22} + q_{22}) \end{bmatrix} =$$

$$= 2{,}25 \times \begin{bmatrix} 2{,}243 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4{,}565 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1{,}107 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2{,}238 \end{bmatrix} =$$

$$=\begin{bmatrix} 5,047 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 10,271 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2,491 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5,036 \end{bmatrix}, \qquad (8.110)$$

burada $\mu = 1.5\ m$, $\mu^2 = 2,25\ m^2$.

5. $t_0 = t_2$ anı üçün başlanğıc vəziyyət vektorunun hesablanması

$$X_{0/0}^T = [x_0 = x_2,\ \dot{x}_0,\ y = y_2,\ \dot{y}_2], \qquad (8.111)$$

burada: x_2, y_2 – ikinci seansdan gəminin koordinatlarıdır;

$$\begin{aligned} \dot{x}_0 &= x_2 - x_1, \\ \dot{y}_0 &= y_2 - y_1 \end{aligned} \qquad (8.112)$$

isə gəminin hərəkət sürəti vektorunun koordinat oxlarına proyeksiyasıdır (yada salaq ki, hərəkət bərabərsürətli qəbul edilir).

6. (8.79) tənliyi əsasında sistemin hərəkət (dinamik) matrisini tərtib edək:

$$X_{1/0} = FX_{0/0} + W_1. \qquad (8.113)$$

Birinci an üçün hərəkət modelinin səhvlər matrisi W, məlum olmadığından, $W_1 = 0$ qəbul edək. Onda

$$\begin{aligned} x_{1/0} &= x_0 + \dot{x}_0; \\ \dot{x}_{1/0} &= \dot{x}_0; \\ &\dots\dots\dots\dots \\ y_{1/0} &= \dot{y}_0 \end{aligned} \qquad (8.114)$$

və F funksiyası

$$F = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad (8.115)$$

7. $t = 1$ zaman anı üçün vəziyyət vektorunun proqnoz qiymətini, yəni $X_{1/0}$-ı hesablayaq:

$$X_{1/0} = FX_{0/0} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ \dot{x}_0 \\ y_0 \\ \dot{y}_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5140{,}40 \\ 47{,}90 \\ 33092{,}05 \\ 30{,}34 \end{bmatrix}. \qquad (8.116)$$

8. İki zaman anlarına (1 və 0) uyğun vəziyyət vektorları fərqinin hesablanması:

$$\Delta X_{1/0} = X_{1/0} - X_{0/0} = \Delta X_{1/0} = \begin{bmatrix} 5140{,}40 \\ 47{,}90 \\ 33092{,}05 \\ 30{,}34 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 5092{,}50 \\ 47{,}90 \\ 33061{,}71 \\ 30{,}34 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 47{,}90 \\ 0 \\ 30{,}34 \\ 0 \end{bmatrix}. \qquad (8.117)$$

9. 0 və 1 zaman anlarında 1 və 2 stansiyalarından ölçülmüş məsafələr fərqlərinin hesablanması və ΔS_1 vektorunun tərtibi:

$$\Delta S_1 = \begin{bmatrix} S_{11} - S_{10} \\ S_{21} - S_{20} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13122{,}32 - 13093{,}20 \\ 5056{,}06 - 5038{,}08 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 29{,}12 \\ 17{,}98 \end{bmatrix}. \qquad (8.118)$$

10. $t=1$ zaman anında yerinə yetirilmiş ölçmələr üçün düzəliş tənliklərinin tərtibi. Doğrudur, təyin edilən parametrlər sırasına dörd parametr ($x, \dot{x}, y, \dot{y}$) daxil olsa da, ölçülmüş məsafələrə görə yalnız gəminin koordinatlarnı təyin etmək olar. Ona görə də tənliklərin əmsallar matrisi aşağıdakı şəklə malik olacaqdır:

$$H_1 = \begin{bmatrix} \cos\alpha_{11} & 0 & \sin\alpha_{11} & 0 \\ \cos\alpha_{21} & 0 & \sin\alpha_{21} & 0 \end{bmatrix}. \qquad (8.119)$$

α_{11} və α_{21} direksion bucaqlarının qiymətini adi xətti kəsdirmə düsturları ilə hesablamaq mümkündür, lakin aşağıdakı düsturlardan istifadə etmək daha səmərəlidir:

$$d\alpha^0 = \frac{\rho^0}{S}\cos\alpha\,\dot{y} - \frac{\rho^0}{S}\sin\alpha\dot{x}. \qquad (8.120)$$

Onda alarıq

$$\alpha_{11} = \alpha_{10} + d\alpha_{11} = 93{,}957^\circ,$$
$$\alpha_{21} = \alpha_{20} + d\alpha_{21} = 324{,}923^\circ.$$

Beləliklə, H_1 əmsallar matrisi üçün tapırıq:

$$H_1 = \begin{bmatrix} -0{,}069 & 0 & 0{,}998 & 0 \\ 0{,}818 & 0 & -0{,}575 & 0 \end{bmatrix} \qquad (8.121)$$

11. (8.86) düsturu əsasında qurulacaq yeniləşdirici proses üçün (8.117) və (8.118) ifadələrindən istifadə etməklə h_1 kəmiyyətinin hesablanması ($h_1 = \Delta S_1 - H_1 \Delta X_{1/0}$):

$$H_1 \Delta X_{1/0} = \begin{bmatrix} -0,069 & 0 & 0,998 & 0 \\ 0,818 & 0 & -0,575 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 47,90 \\ 0 \\ 30,34 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 26,97 \\ 21,74 \end{bmatrix}; \quad (8.122)$$

və

$$h_1 = \begin{bmatrix} 29,12 \\ 17,98 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 26,97 \\ 21,74 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2,15 \\ -3,76 \end{bmatrix}.$$

12. (8.93) düsturu ilə t=1 zaman anına hesablanmış $P_{1/0}$ koordinatlar səhvi üçün proqnoz kovariasiya matrisinin hesablanması:

$$P_{1/0} = F_1 P_{C/0} \cdot F_1^T. \quad (8.123)$$

(8.123) düsturu əsasında $P_{1/0}$ üçün alarıq:

$$P_{1/0} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 5,047 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 10,271 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2,491 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5,036 \end{bmatrix} \times$$

$$\times \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15,318 & 10,271 & 0 & 0 \\ 10,271 & 10,271 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 7,527 & 5,036 \\ 0 & 0 & 5,036 & 5.036 \end{bmatrix}. \quad (8.124)$$

13. (8.90) düsturu ilə Kalman gücləndirmə matrisinin hesablanması:

$$K_1 = P_{1/0} H_1^T (H_1 P_{1/0} H_1^T + R)^{-1}. \quad (8.125)$$

$$H_1 P_{1/0} H_1^T = \begin{bmatrix} -0{,}069 & 0 & 0{,}998 & 0 \\ 0{,}818 & 0 & -0{,}575 & 0 \end{bmatrix} \times$$

$$\times \begin{bmatrix} 15{,}318 & 10{,}271 & 0 & 0 \\ 10{,}271 & 10{,}271 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 7{,}527 & 5{,}036 \\ 0 & 0 & 5{,}036 & 5{,}036 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -0{,}069 & 0{,}818 \\ 0 & 0 \\ 0{,}998 & -0{,}575 \\ 0 & 0 \end{bmatrix};$$

$$\mathrm{R} = \begin{bmatrix} m^2 & 0 \\ 0 & m^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2{,}25 & 0 \\ 0 & 2{,}25 \end{bmatrix};$$

$$(H_1 P_{1/0} H_1^T + R) = \mathrm{T} = \begin{bmatrix} 9{,}820 & -5{,}184 \\ -5{,}184 & 14{,}988 \end{bmatrix}; \qquad (8.126)$$

$$\mathrm{T}^{-1} = \begin{bmatrix} 0{,}102 & 0{,}035 \\ 0{,}035 & 0{,}067 \end{bmatrix}. \qquad (8.127)$$

Sonra (8.125) düsturuna qayıdırıq:

$$P_{1/0} H_1^T = \begin{bmatrix} 15{,}318 & 10{,}271 & 0 & 0 \\ 10{,}271 & 10{,}271 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 7{,}527 & 5{,}036 \\ 0 & 0 & 5{,}036 & 5{,}036 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -0{,}069 & 0{,}818 \\ 0 & 0 \\ 0{,}998 & -0{,}575 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} -1{,}057 & 12{,}530 \\ -0{,}709 & 8{,}402 \\ 7{,}512 & -4{,}328 \\ 5{,}026 & -2{,}896 \end{bmatrix}. \qquad (8.128)$$

Nəhayət

$$K_1 = P_{1/0} H_1^T T^{-1} = \begin{bmatrix} 0{,}331 & 0{,}802 \\ 0{,}222 & 0{,}538 \\ 0{,}615 & -0{,}027 \\ 0{,}411 & -0{,}018 \end{bmatrix}. \qquad (8.129)$$

14. (8.84) düsturu ilə $t = 1$ zaman anına uyğun gələn vəziyyət vektorunun yekun qiymətinin hesablanması:

$$X_{1/1} = X_{1/0} + k_1 h_1;$$

$$X_{1/1} = \begin{bmatrix} 5140{,}40 \\ 47{,}90 \\ 33092{,}05 \\ 30{,}34 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0{,}331 & 0{,}802 \\ 0{,}222 & 0{,}538 \\ 0{,}615 & -0{,}027 \\ 0{,}411 & -0{,}018 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2{,}15 \\ -3{,}76 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 5140{,}40 \\ 47{,}90 \\ 33092{,}05 \\ 30{,}34 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2{,}30 \\ -1{,}550 \\ 1{,}42 \\ 0{,}95 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5138{,}10 \\ 46{,}35 \\ 33093{,}47 \\ 31{,}29 \end{bmatrix}. \qquad (8.130)$$

15. (8.92) düsturu əsasında t=1 anına uyğun gələn koordinatların səhvləri üçün kovariasiya matrisinin yekun qiymətinin hesablanması:

$$P_{1/1} = (E - K_1 H_1) P_{1/0}. \qquad (8.131)$$

Əvvəlcə mötərizənin içində verilmiş ifadəni hesablayaq:

$$(E-K_1H_1)=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}0{,}331&0{,}802\\0{,}222&0{,}538\\0{,}615&-0{,}027\\0{,}411&-0{,}018\end{bmatrix}\times$$

$$\times\begin{bmatrix}-0{,}069&0&0{,}998&0\\0{,}818&0&-0{,}575&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0{,}367&0&0{,}131&0\\-0{,}425&1&0{,}088&0\\0{,}064&0&0{,}371&0\\0{,}043&0&-0{,}420&1\end{bmatrix}. \quad (8.132)$$

(8.131) ifadəsində (8.124) nəticəsini də nəzərə alsaq taparıq:

$$P_{1/1}=\begin{bmatrix}5{,}622&3{,}769&0{,}986&0{,}660\\3{,}761&5{,}906&0{,}662&0{,}443\\0{,}980&0{,}657&2{,}792&1{,}868\\0{,}043&0{,}442&1{,}875&2{,}921\end{bmatrix} \quad (8.133)$$

Bununla birinci sikl (dövrə) başa çatır və sonra $t=2$ zaman anına uyğun hesablamalar təkrarlanır:

$$X_{2/1}=FX_{1/1};$$

$$\Delta X_{2/1}=X_{2/1}-X_{1/1};$$

$$\Delta S_2=\begin{bmatrix}S_{12}&-&S_{11}\\S_{22}&-&S_{21}\end{bmatrix};$$

$$H_2=\begin{bmatrix}\cos\alpha_{12}&0&\sin\alpha_{12}&0\\\cos\alpha_{22}&0&\sin\alpha_{22}&0\end{bmatrix},$$

Burada α_{12}, α_{22} – başlanğıc 1 və 2 stansiyalarından t=1 anında gəmiyə ölçülmüş istiqamətlərin direksion bucaqlarıdır. Bu direksion bucaqların qiymətı tərs geodeziya məsələsinin həllindən başlanğıc stansiyalar və t=1 anında (birinci sikldə) gəminin hesablanmış koordinatları əsasında təyin edilir. Daha sonra

$$h_2 = \Delta S_2 - H_2 \Delta X_{2/1};$$

$$P_{2/1} = F \cdot P_{1/1} F^T;$$

$$k_2 = P_{2/1} H_2^T (H_2 P_{2/1} H_2^T + R)^{-1};$$

$$X_{2/2} = X_{2/1} + k_2 h_2;$$

$$P_{2/2} = (E - k_2 h_1) \cdot P_{2/1}.$$

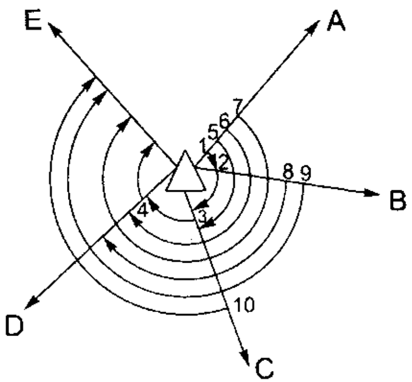
Əgər t=3, 4, 5, ... zaman anlarında ölçmələr aparılarsa, onda hesablamalar yuxarıda verilmiş alqoritm üzrə həmin sayda sikldə təkrarlanır.

ƏLAVƏLƏR

Əlavə 1

Yoxlama işlər

1.1. Cədvəl Ə.1.1*-də bucaqların kombinasiyalar üsulu ilə ölçülmə nəticələri verilmişdir (şəkil Ə.1.1). Bu bucaqları parametrik üsulla tarazlaşdırın və AOB, BOC. COD, DOE bucaqlarının orta kvadratik səhvlərini təyin edin.



Şəkil Ə.1.1 Bucağın kombinasiya üsulu ilə ölçülməsi

* «Ə» – əlavə deməkdir.

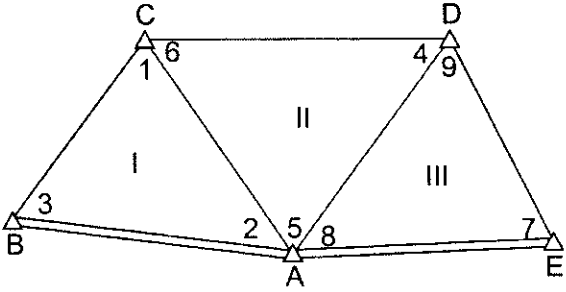
CədvəlƏ.1.1

Bucaqlar	Bucaqların qiymәti	VARİANTLAR											
		Bucaqların saniyә qiymәti											
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
AOB	32°26′	17,3	16,5	16,0	15,5	15,0	18,0	18,5	19,0	19,5	17,0	20,2	18,0
BOC	51 15	50,2	50,4	50,7	51,1	51,4	49,8	49,4	49,0	48,7	50,0	45,8	43,8
COD	61 42	21,1	21,5	21,9	22,4	22,8	23,1	23,5	23,8	24,0	24,3	20,8	20,1
DOE	89 31	46,4	46,1	45,8	45,4	45,7	45,3	45,4	44,6	44,0	45,0	40,5	39,7
AOC	83 42	08,0	08,5	08,9	08,7	09,1	09,3	09,8	10,5	10,7	10,1	06,5	05,8
BOD	112 58	13,9	13,6	14,3	15,0	14,7	15,4	15,9	16,2	16,5	17,0	02,4	07,5
COE	151 14	10,5	10,7	10,9	11,1	11,3	11,4	11,6	11,8	11,5	12,2	02,6	03,4
AOD	145 24	26,3	26,1	25,8	25,5	25,3	26,5	26,8	27,1	27,4	27,8	21,5	26,1
BOE	202 29	56,8	56,8	57,0	57,1	57,2	57,3	57,4	57,5	57,6	57,7	42,5	43,5
AOE	234 56	15,6	15,3	15,0	14,7	14,4	16,0	16,3	16,6	16,9	15,8	06,8	05,7

CədvəlƏ.1.1-in davamı

VARİANTLAR												
13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
Bucaqların saniyә qiymәti												
17,8	17,5	19,1	18,9	15,2	17,5	17,3	16,6	15,2	16,2	13,9	14,5	12,9
46,6	45,9	48,6	48,8	49,6	51,6	47,5	52,4	32,4	31,4	32,4	33,2	34,1
18,1	18,0	17,5	19,2	16,9	17,9	17,7	17,8	28,1	30,8	29,5	27,8	28,4
42,6	45,5	44,2	40,9	45,2	45,3	41,8	43,9	12,6	13,2	14,6	14,6	15,2
07,3	06,8	07,5	08,4	03,6	04,5	03,5	05,3	43,7	44,3	42,5	43,0	43,8
03,4	07,6	02,2	10,3	07,4	06,4	08,5	08,1	11,1	08,5	09,4	10,1	10,7
04,3	01,2	04,2	03,2	00,1	01,2	01,9	02,8	43,8	43,0	42,6	42,9	43,4
22,2	24,8	21,0	25,4	24,5	27,7	21,4	23,2	19,6	20,5	21,7	20,4	21,0
46,3	50,2	46,2	44,9	54,3	56,2	45,3	56,2	12,2	11,1	12,9	13,3	13,9
08,2	07,5	05,3	04,6	06,4	08,4	07,6	10,3	24,3	25,6	27,0	26,1	26,6

1.2. Sxemi şəkil Ə.1.2-də verilmiş trianqulyasiya şəbəkəsinin tərəflərinin direksion bucaqlarını tarazlaşdırın. Bazis AB və AE tərəflərinin direksion bucaqları: $\alpha_{AB}=270°00'00,00''$, $\alpha_{AE}=102°56'57,5''$, bucaqölçmə nəticələri isə cədvəl Ə.1.2-də verilmişdir.



Şəkil Ə.1.2. Trianqulyasiya şəbəkəsinin sxemi.

Cədvəl Ə.1.2

Üçbucağın nömrəsi	Bucağın nömrəsi	Bucaqların qiyməti	VARİANTLAR									
			1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
		...°...′	Bucaqların saniyə qiyməti									
I	1	66 33	31,5	32,2	28,5	32,0	29,4	27,3	32,1	25,6	26,7	30,2
	2	60 35	12,6	10,5	09,3	10,1	08,5	10,2	12,2	15,3	17,8	18,4
	3	49 51	20,1	18,6	17,1	22,4	17,4	16,5	22,4	15,3	18,8	19,3
II	4	66 47	36,5	36,2	34,9	33,2	35,2	34,3	30,1	32,8	34,3	31,2
	5	59 10	19,8	18,6	20,1	17,5	18,9	19,5	17,8	16,5	19,2	17,5
	6	54 02	07,9	09,5	08,2	05,5	10,3	11,8	09,0	14,3	15,1	08,1
III	7	46 25	53,8	51,5	51,7	50,9	42,5	45,2	47,3	46,2	46,8	43,4
	8	73 11	22,5	24,4	23,0	24,1	26,6	21,4	21,3	20,5	25,3	29,2
	9	60 22	41,3	41,3	42,2	38,5	43,2	42,6	44,2	45,1	43,2	42,3

Cədvəl Ə.1.2-in ardı.

VARİANTLAR														
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
28,1	31,2	30,2	28,7	29,1	30,4	29,5	31,1	28,5	29,3	30,7	29,7	30,5	29,4	28,7
16,4	19,3	14,3	15,1	13,7	13,1	11,4	16,5	17,3	14,9	11,3	12,8	15,3	14,8	16,4
18,6	18,2	19,1	20,2	21,2	18,5	19,3	17,3	20,1	21,4	18,4	19,1	17,8	19,1	18,3
30,1	28,6	31,1	32,0	29,5	32,7	31,4	33,0	33,0	29,7	33,8	32,0	29,8	30,4	31,5
15,2	16,5	18, 2	17,2	19,0	17,2	18,7	19,4	19,1	17,8	16,5	18,3	16,8	18,5	17,2
07,3	06,2	08,2	07,8	09,3	08,1	07,1	08,2	09,3	11,4	09,1	09,4	08,1	08,7	10,1
45,6	44,8	48,9	44,1	46,3	46,4	44,2	45,8	48,4	48,1	51,7	47,4	46,4	45,9	50,1
22,3	24,5	20,7	22,1	23,4	21,2	25,4	22,4	20,7	23,1	26,4	23,7	27,1	25,4	22,8
44,9	46,1	42,4	43,2	42,6	42,9	43,0	45,1	45,2	41,6	41,7	41,8	42,2	44,1	46,3

Əlavə 2

$Y' = e^{-t^2/2} \Big/ \sqrt{\pi}$ **funksiyasının qiymətlər cədvəli** $t = (X - M[X])/\sigma$

t	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,5641	0,5641	0,5641	0,564	0,5637	0,5634	0,5631	0,5629	0,5624	0,5619
0,1	0,5614	0,5607	0,5602	0,5595	0,5588	0,5579	0,5571	0,5561	0,5551	0,5541
0,2	0,558	0,5518	0,5507	0,5494	0,5481	0,5469	0,5455	0,544	0,5425	0,5409
0,3	0,5394	0,5377	0,536	0,5343	0,5325	0,5306	0,5288	0,5268	0,525	0,5228
0,4	0,5209	0,5187	0,5166	0,5143	0,5121	0,5098	0,5076	0,5052	0,5028	0,5003
0,5	0,4979	0,4954	0,4929	0,4903	0,4876	0,4849	0,4822	0,4796	0,4769	0,474
0,6	0,4712	0,4684	0,4656	0,4626	0,4598	0,4568	0,4538	0,4507	0,4477	0,4446
0,7	0,4417	0,4385	0,4354	0,4322	0,4291	0,4258	0,4227	0,4195	0,4162	0,4129
0,8	0,4097	0,4064	0,403	0,3998	0,3964	0,3932	0,3898	0,3864	0,3831	0,3797
0,9	0,3763	0,3729	0,3695	0,3661	0,3627	0,3594	0,3558	0,3524	0,349	0,3456
1,0	0,342	0,339	0,336	0,332	0,329	0,326	0,322	0,318	0,315	0,312
1,1	0,308	0,304	0,302	0,298	0,295	0,292	0,288	0,284	0,282	0,278
1,2	0,275	0,272	0,268	0,265	0,262	0,258	0,256	0,252	0,248	0,246
1,3	0,242	0,24	0,236	0,233	0,23	0,227	0,224	0,221	0,218	0,214
1,4	0,212	0,209	0,206	0,203	0,2	0,197	0,194	0,192	0,189	0,186
1,5	0,183	0,18	0,178	0,175	0,172	0,17	0,167	0,165	0,162	0,169
1,6	0,156	0,154	0,152	0,149	0,147	0,145	0,142	0,14	0,138	0,135
1,7	0,133	0,131	0,129	0,126	0,124	0,122	0,12	0,118	0,116	0,114
1,8	0,112	0,11	0,108	0,106	0,104	0,102	0,1	0,098	0,096	0,094
1,9	0,093	0,091	0,09	0,088	0,086	0,084	0,083	0,081	0,08	0,078
2,0	0,076	0,076	0,075	0,073	0,072	0,069	0,068	0,066	0,065	0,063
2,1	0,062	0,061	0,06	0,058	0,057	0,056	0,055	0,053	0,052	0,051
2,2	0,05	0,049	0,048	0,047	0,046	0,045	0,044	0,043	0,042	0,041
2,3	0,04	0,039	0,038	0,038	0,037	0,036	0,036	0,034	0,033	0,032
2,4	0,032	0,031	0,03	0,03	0,029	0,028	0,027	0,027	0,026	0,025
2,5	0,025	0,024	0,024	0,023	0,022	0,022	0,021	0,021	0,02	0,02
2,6	0,01	0,019	0,018	0,018	0,017	0,017	0,016	0,016	0,016	0,015
2,7	0,015	0,014	0,014	0,014	0,013	0,017	0,012	0,012	0,012	0,011
2,8	0,011	0,011	0,011	0,01	0,01	0,01	0,0096	0,0094	0,0092	0,009
2,9	0,0085	0,0082	0,008	0,0078	0,0076	0,0074	0,0071	0,0069	0,0067	0,0066
3,0	0,0063									

Əlavə 3

$$\Phi(t)=\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_0^t e^{\frac{x^2}{2}}\cdot dx$$ ehtimallar inteqralının

qiymətlər cədvəli ($0 \le \Phi(t) < 1$)

t	$\Phi(t)$	t	$\Phi(t)$	t	$\Phi(t)$
0,00	0,00000	1,25	0,78870	2,50	0,98758
0,05	0,03988	1,30	0,80640	2,55	0,58922
0,10	0,07906	1,35	0,82298	1,60	0,99068
0,15	0,11924	1,40	0,83849	2,65	0,99195
0,20	0,15852	1,45	0,85294	2,70	0,99307
0,25	0,19741	1,50	0,86639	2,75	0,99404
0,30	0,23582	1,55	0,87886	2,80	0,99489
0,35	0,27365	1,60	0,89040	2,85	0,99563
0,40	0,31084	1,65	0,90106	2,90	0,99627
0,45	0,34729	1,70	0,9.1087	2,95	0,99682
0,50	0,38292	1,75	0,91988	3,00	0,59730
0,55	0-,41768	1,80	0,92814	3,10	0,99803
0,60	0,45149	1,85	0,93569	3,20	0,99863
0,65	0,48431	1,90`	0,94257	3,30	0,99903
0,70	0,51607	1,95	0,94882	3,40	0,99933
0,75	0,54675	2,00	0,95450	3,50	0,99953
0,80	0,57629	2,05	0,95964	3,60	0,99968
0,85	0,60468	2,10	0,96427	3,70	0,99978
0,90	0,63188	2,15	0,96844	3,80	0,99986
0,95	0,65789	2,20	0,:97219	3,90	0,44440
1,00	0,68269	2,25	0,97555	4,00	0,99994
1,05	0,70628	2,30	0,97855	4,10	0,99996
1,10	0,72867	2,35.	0,98123	4,20	0,99997
1,15	0,74986	2,40	0,98360	4,40	0,99999
1,20	0,76986	.2,45	0,98571	4,50	0,99999

Əlavə 4

$\gamma_1 \cdot m^2 \le \sigma^2 \le \gamma_2 \cdot m^2$ ifadəsində γ_1 və γ_2 əmsallarının tapılması cədvəli

γ	β							
	0,99		0,98		0,95		0,90	
	γ_1	γ_2	γ_1	γ_2	γ_1	γ_2	γ_1	γ_2
1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	0,356	159,00	0,388	79,80	0,446	31,900	0,510	15,900
2	0,434	14,10	0,466	9,97	0,521	6,280	0,578	4,400
3	0,483	6,47	0,514	5,11	0,566	3,730	0,620	2,920
4	0,519	4,39	0,459	3,67	0,599	2,870	0,649	2,370
5	0,546	3,48	0,576	3,00	0,624	2,450	0,672	2,090
6	0,569	2,98	0,597	2,62	0,644	2,202	0,690	1,916
7	0,588	2,66	1,616	2,38	0,661	2,035	0,705	1,797
8	0,604	2,44	0,631	2,21	0,675	1,916	0,718	1,711
9	0,618	2,28	0,644	2,08	0,688	1,826	0,729	1,645
10	0,630	2,12	0,656	1,98	0,609	1,755	0,739	1,593
11	0,641	2,06	0,667	1,70	0,708	1,698	0,748	1,550
12	0,651	1,98	0,677	1,83	0,717	1,651	0,755	1,515
13	0,660	1,91	0,685	1,78	0,725	1,611	0,762	1,485
14	0,669	1,85	0,693	1,73	0,732	1,577	0,769	1,460
15	0,676	1,81	0,700	1,69	0,739	1,548	0,775	1,437
16	0,683	1,76	0,707	1,66	0,745	1,522	0,780	1,418
17	0,690	1,73	0,713	1,63	0,750	1,490	0,785	1,400
18	0,696	1,695	0,719	1,620	0,756	1,479	0,790	1,385
19	0,702	1,666	0,725	1,578	0,760	1,460	0,794	1,370
20	0,707	1,640	0,730	1,556	0,765	1,444	0,798	1,358

1	2	3	4	5	6	7	8	9
21	0,712	1,617	0,734	1,536	0,769	1,429	0,802	1,310
22	0,717	1,595	0,739	1,519	0,773	1,419	0,805	1,335
23	0,722	1,576	0,743	1,502	0,777	1,402	0,809	1,326
24	0,726	1,558	0,747	1,487	0,781	1,391	0,812	1,316
25	0,730	1,541	0,751	1,473	0,784	1,380	0,815	1,308
26	0,734	1,526	0,755	1,460	0,788	1,371	0,818	1,300
27	0,737	1,512	0,758	1,448	0,791	1,361	0,820	1,293
28	0,741	1,499	0,762	1,436	0,794	1,352	0,823	1,286
29	0,744	1,487	0,765	1,426	0,796	1,344	0,825	1,279
30	0,748	1,475	0,768	1,417	0,799	1,337	0,828	1,274
40	0,774	1,390	0,792	1,344	0,821	1,279	0,847	1,228
50	0,793	1,336	0,810	1,297	0,837	1,243	0,861	1,199
60	0,808	1,299	0,824	1,265	0,849	1,217	0,871	1,179
70	0,820	1,272	0,835	1,241	0,858	1,198	0,879	1,103
80	0,829	1,250	0,844	1,222	0,866	1,183	0,886	1,151
90	0,838	1,233	0,852	1,207	0,873	1,771	0,892	1,141
100	0,845	1,219	0,858	1,195	0,878	1,161	0,897	1,133
200	0,887	1,150	0,897	1,130	0,912	1,110	0,925	1,090

Styudent əmsalları t_β

$\Phi'(t) = \beta$

r	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	0,95	0,98	0,99	0,999
2	0,16	0,33	0,51	0,73	1,00	1,38	2,0	3,1	6,3	12,7	31,8	63,7	636,6
3	14	29	45	52	0,82	1,06	1,3	1,9	2,9	4,3	7,0	9,9	31,6
4	14	28	42	58	77	0,98	1,3	1,6	2,4	3,2	4,5	5,8	12,9
5	13	27	41	57	74	94	1,2	1,5	2,1	2,8	3,7	4,6	8,6
6	13	27	41	56	73	92	1,2	1,5	2,0	2 6	3,4	4,0	6,9
7	13	27	40	55	72	90	1,1	1,4	1,9	2,4	3,1	3,7	6,0
8	13	26	40	55	71	90	1,1	1,4	1,9	2,4	3,0	3,5	5,4
9	13	26	40	54	71	90	1,1	1,4	1,9	2,3	2,9	3,4	5,0
10	13	26	40	54	70	88	1,1	1,4	1,8	2,3	2,8	3,3	4,8
11	13	26	40	54	70	88	1,1	1,4	1,8	2,2	2,8	3,2	4,6
12	13	26	40	54	70	87	1,1	1,4	1,8	2,2	2,7	3,1	4,5
13	13	26	40	54	70	87	1,1	1,4	1,8	2,2	2,7	3,1	4,3
14	13	26	39	54	69	87	1,1	1,4	1,8	2,2	2,7	3,0	4,2
15	13	26	39	54	69	87	1,1	1,3	1,8	2,1	2,6	3,0	4,1
16	13	26	39	54	69	87	1,1	1,3	1,8	2,1	2,6	2,9	4,0
17	13	26	39	54	69	86	1,1	1,3	1,7	2,1	2,6	2,9	4,0
18	13	26	39	53	69	86	1,1	1,3	1,7	2,1	2,6	2,9	4,0
19	13	26	39	53	69	86	1,1	1,3	1,7	2,1	2,6	2,9	3,9
20	13	26	39	53	69	86	1,1	1,3	1,7	2,1	2,5	2,9	3,9
21	13	26	39	53	69	86	1,1	1,3	1,7	2,1	2,5	2,8	3,8
22	13	26	39	53	69	86	1,1	1,3	1,7	2,1	2,5	2,8	3,8
23	13	26	39	53	69	86	1,1	1,3	1,7	2,1	2,5	2,8	3,8
24	13	26	39	53	69	86	1,1	1,3	1,7	2,1	2,5	2,8	3,8
25	13	26	39	53	69	86	1,1	1,3	1,7	2,1	2,5	2,8	3,7
26	13	26	39	53	68	86	1,1	1,3	1,7	2,1	2,5	2,8	3,7
27	13	26	39	53	68	86	1,1	1,3	1,7	2,1	2,5	2,8	3,7
28	13	26	39	53	68	86	1,1	1,3	1,7	2,0	2,5	2,8	3,7
29	13	26	39	53	68	86	1,1	1,3	1,7	2,0	2,5	2,8	3,7
30	13	26	39	53	63	85	1,1	1,3	1,7	2,0	2,5	2,8	3,7
40	13	26	39	53	68	85	1,1	1,3	1,7	2,0	2,4	2,7	3,6
60	13	25	39	53	68	85	1.0	1,3	1,7	2,0	2 4	2,7	3,5
120	13	25	39	53	68	65	1,0	1,3	1,7	2,0	2,4	2,6	3,4
	13	25	39	52	67	84	1.0	1,3	1,6	2,0	2,3	2,6	3,3

Əlavə 6

χ^2 və $\lambda = \sqrt{\dfrac{\chi^2}{r}}$ əmsallarının yol verilən qiymətlərini tapılması cədvəli

Ehtimal $P(\chi^2 > \chi_q^2)$

Sərb.dər.	0,98	0,95	0,90	0,80	0,70	0,50	0,30	0,20	0,10	0,05	0,02	0,01	0,005	0,002	0,001
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
1	0,0006	0,0039	0,016	0,064	0,148	0,455	1,07	1,64	2,7	3,8	5,4	6,6	7,9	9,5	10,83
2	0,04	0,103	0,211	0,446	0,713	1,386	2,41	3,22	4,6	6	7,8	9,2	11,6	12,4	13,8
3	0,185	0,352	0,584	1,005	1,424	2,366	3,66	4,64	6,3	7,8	9,8	11,3	12,8	14,8	16,3
4	0,43	0,71	1,06	1,65	2,19	3,36	4,9	6,0	7,8	9,5	11,7	13,3	14,9	16,9	18,5
5	0,75	1,14	1,61	2,34	3,0	4,35	6,1	7,3	9,2	11,1	13,4	15,1	16,3	18,9	20,5
6	1,13	1,03	2,2	3,07	3,83	5,35	7,2	8,6	10,6	12,6	15	16,8	18,6	20,7	22,5
7	1,56	2,17	2,83	3,82	4,67	6,35	8,4	9,8	12	14,1	16,6	18,5	20,3	22,6	24,3
8	2,03	2,73	3,49	4,59	5,53	7,34	9,5	11,0	13,4	15,5	18,2	20,1	21,9	24,3	26,1
9	2,53	3,32	4,17	5,38	6,39	8,34	10,7	12,2	14,7	16,9	19,7	21,7	23,6	26,1	27,9
10	3,06	3,94	4,86	6,18	7,27	9,34	11,8	13,4	16	18	21,2	23,2	25,2	27,7	29,6
11	3,6	4,6	5,6	0,7	8,1	10,3	12,9	14,6	17,3	19,7	22,6	24,7	26,8	29,4	31,3
12	4,2	5,2	6,3	7,8	0,9	11,3	14	15,8	18,5	21	24,1	26,2	28,3	31	32,9
13	4,8	5,9	7	8,6	9,9	12,3	15,1	17	19,8	22,4	25,5	27,7	29,8	32,5	34,5
14	5,4	6,6	7,8	9,5	10,8	13,3	16,2	18,2	21,1	23,7	26,9	29,1	31	34	36,1
15	6	7,3	8,5	10,3	11,7	14,3	17,3	19,3	22,3	25	28,3	30,6	32,5	35,5	37,7
16	6,6	8	9,3	11,2	12,6	15,3	18,4	20,5	23,5	26,3	29,6	32	34	37	39,2
17	7,3	8,7	10,1	12	13,5	16,3	19,5	21,6	24,8	27,6	31	33,4	35,5	38,5	40,8
18	7,9	9,4	10,9	12,9	14,4	17,3	20,6	22,8	26	28,9	32,3	34,8	37	40	42,3
19	8,6	10,1	11,7	13,7	15,4	18,3	21,7	23,9	27,2	30,1	33,7	36,2	38,5	41,5	43,8
20	9,2	10,9	12,4	14,6	16,3	19,3	22,8	25	28,4	31,4	35	37,6	40	43	45,3
21	9,9	11,6	13,2	15,4	17,2	20,3	23,9	26,2	29,6	32,7	36,3	38,9	41,5	44,5	46,8
22	10,6	12,3	14	16,3	18,1	21,3	24,9	27,3	30,8	33,9	37,7	40,3	42,5	46	48,3
23	11,3	13,1	14,8	17,2	19	22,3	26	28,4	32	35,2	39	41,6	44	47,5	49,7

Əlavə 6-nın davamı

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
24	12	13,8	15,7	18,1	19,9	23,3	27,1	29,6	33,2	36,4	40,3	43	45,5	48,5	51,2
25	12,7	14,6	16,5	18,9	20,9	24,3	28,1	30,7	34,4	37,7	41,6	44,3	47	0,5	52,6
26	13,4	15,4	17,3	19,8	21,8	25,3	29,3	31,8	35,6	38,9	42,9	45,6	48	51,5	54,1
27	14,1	16,2	18,1	20,7	22,7	26,3	30,3	32,9	36,7	40,1	44,1	47	49,5	53	55,5
28	14,8	16,9	18,9	21,6	23,6	27,3	31,4	34	37,9	41,3	45,4	48,3	51	54,5	56,9
29	15,6	17,7	19,8	22,5	24,6	28,3	32,5	35,1	39,1	42,6	46,7	49,6	52,6	56	58,3
30	16,3	18,5	20,6	23,4	25,5	29,3	33,5	36,3	40,3	43,8	48	50,9	54	57,5	59,7

Əlavə 7

$Z = \frac{1}{2}\ln\frac{1+r}{1-r}$ **funksiyasının qiymətlər cədvəli**

r	Yüzdə bir hissələr									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,0000	0,0100	0,0200	0,0300	0,0400	0,0500	0,0601	0,0701	0,0802	0,0902
0,1	0,1003	0,1104	0,1206	0,1307	0,1409	0,1511	0,1614	0,1717	0,1820	0,1923
0,2	0,2027	0,2132	0,2237	0,2342	0,2448	0.2554	0,2661	0.2769	0,2877	0,2986
0,3	0,3095	0,3205	0,3316	0,3428	0,3541	0,3654	0,3769	0,3884	0,4001	0,4118
0,4	0,4236	0,4356	0,4477	0,4599	0,4722	0,4847	0,4973	0,6475	0,5230	0,5361
0,5	0,5493	0,5627	0,5763	0,5901	0,6042	0,6184	0,6328	0,6475	0,6625	0,6777
0,6	0,6931	0,7089	0,7250	0,7414	0,7582	0,7753	0,7928	0,8107	0,8291	0,8480
0,7	0,8673	0,8872	0,9076	0,9287	0,9505	0,9730	0,9962	1,0203	1,0454	1,0714
0,8	1,0986	1,1270	1,1568	1,1881	1,2212	1.2562	1,2933	1,3331	1,3758	1.4219
0,9	1,4722	1,5275	1,5890	1,6584	1,7380	1,8318	1,9459	2,0923	2,2976	2,6466
0,99	2,6466	2,6996	2,7587	2,8257	2,9031	2,9945	3,1063	3,2504	3.4534	3,8002

*axırıncı sətirdə mində bir hissələr götürülmüşdür

Matrislər cəbrindən məlumatlar

Geodeziya ölçmələrinin riyazi hesablanması və tarazlaşdırılması nəzəriyyəsində, eləcə də hesabında matrislər cəbrindən istifadə cəbri ifadələrin çevrilməsi zamanı mürəkkəb və zəhmət tələb edən çıxarışlardan yan keçmək imkanı verir, bəzi hallarda isə bu prinsip etibarilə yeni anlayışlar və nəticələrə gətirib çıxarır. Ona görə də matrislər cəbrindən bəzi məlumatlarla tanış olaq.

İlk növbədə qeyd edək ki, aşağıdakı şəkildə

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{vmatrix} \qquad (Ə.8.1)$$

ədədlərdən ibarət düzbucaqlı cədvəl ***matris*** adlanır.

Adətən matrislər böyük hərflərlə işarə edilir. Məsələn, yuxarıda verilmiş matrisi A hərfi ilə işarə etmək olar. A matrisinin ölçüləri $m \times n$ şəklində yazılır, burada m – matrisin sətirlərinin sayı, n isə onun sütunları sayılır. Bəzi hallarda matris ölçülərini göstərməklə $A_{m\times n}$ şəklində verilir.

Əgər matrisin sətirlərinin sayı sütunları sayına bərabərdirsə, yəni $m = n$, onda onu n dərəcəli *kvadrat matris*, bu matrisin a_{11}, a_{22}, ..., a_{nn} elementlərini isə *diaqonal elementləri* adlandırırlar.

Matrisləri cəbri cəhətdən toplamaq, çıxmaq və vurmaq olar. Lakin matrislərin bölünməsi əməliyyatı ümumi qəbul edilmiş mənada yerinə yetirilmir.

Eyni $m \times n$ ölçüsünə malik iki A və B matrislərinin cəmi həmin ölçülərə malik elə C matrisi olacaqdır ki, bu matrisin hər bir elementi toplanan matrislərin uyğun elementlərinin cəbri cəmi şəklində təyin edilsin, yəni $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$. Ümumi şəkildə matrislərin toplanması belə yazılır:

$$C = A + B \qquad (Ə.8.2)$$

Əgər A və B matrislərinin ölçüləri eyni olmazsa, onda toplama əməliyyatı öz mənasını itirir (həyata keçirilə bilməz).

Matrislərin çıxılması da analoji qaydada yerinə yetirilir.

İki $A_{m\times n}$ və $B_{n\times q}$ matrislərinin *hasili* elə C matrisi olacaqdır ki, onun hər bir c_{ij} elementi A matrisinin i nömrəli sətrinin elementlərinin B matrisinin j nömrəli sütununun uyğun elementlərinə olan hasilləri cəminə bərabər olsun, yəni

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \ldots + a_{in}b_{nj}, \qquad (i = \overline{1,m};\ j = \overline{1,q}). \qquad (Ə.8.3)$$

Matrislərin vurulması əməliyyatı o vaxt məna daşıyır (yerinə yetirilməsi mümkündür) ki, birinci matrisin sütunlar sayı ikincinin sətirlər sayına bərabər olsun. Matrislərin vurulması əməliyyatı belə yazılır:

$$C = A \times B = AB\,. \qquad (Ə.8.4)$$

Matrislərin vurulmasında *assosiativlik*, yəni $ABC = (AB)C = A(BC)$, eləcə də *distributivlik* $(A + B + C)D = AD + BD + CD$ xassələrindən istifadə etmək olar.

Lakin ümumi halda kommutativlik xassəsi təmin olunmur, yəni $AB \neq BA$. Xüsusilə də matrislərdən biri qeyri-kvadrat formaya malik olarsa, onda onların yerini (vurulma ardıcıllığını) dəyişməklə bir-birinə vurulan sətir və sütunların ölçüləri də dəyişmiş olar ki, bu halda matrislərin BA hasili mənasını itirər. Əgər $AB = BA$ bərabərliyi doğrudursa, onda A və B kvadrat matrisləri *yerdəyişən (kommutativ) matrislər* adlanır. Onu da qeyd edək ki, $AB = 0$ bərabərliyindən $A = 0$ və yaxud $B = 0$ demək olmaz.

A kvadrat matrisinin elementləri $a_{ij} = a_{ji}$ münasibətində olarsa, onda bu matris *simmetrik matris* adlanır.

Əgər A matrisində sətir və sütunların yerini dəyişsək, alınan matris $n \times m$ ölçülü iransponirə olunmuş matris, yəni

$$A^T = A' = A^* = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \ldots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \ldots & a_{m2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{1n} & a_{2n} & \ldots & a_{mn} \end{vmatrix} \qquad (Ə.8.5)$$

alarıq.

Simmetrik matrislər üçün aşağıdakı bərabərlik doğrudur:

$$A = A^T\,. \qquad (Ə.8.6)$$

Diaqonal elementlərdən başqa bütün elementləri sıfıra bərabər olan kvadrat matris *diaqonal matris* adlanır. Diaqonal matrisin yazılışında aşağıdakı formalardan biri istifadə edilir:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & & & 0 \\ & a_{22} & & \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = (a_{11}a_{22}\dots a_{nn}) \qquad (Ə.8.7)$$

Əgər diaqonal matrisin elementləri $a_{11} = a_{22} = \dots = a_{nn} = 1$ münasibətində olarsa, belə matris *vahid matris* adlanır və aşağıdakı şəklə malik olur:

$$\begin{vmatrix} 1 & & & 0 \\ & 1 & & \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & & \dots & 1 \end{vmatrix} = E \qquad (Ə.8.8)$$

Vahid sütundan ibarət matris, yəni

$$A = \begin{vmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ a_n \end{vmatrix}, \qquad (Ə.8.9)$$

n -ölçülü vektor adlanır.

Qeyd edildiyi kimi matrislər cəbrində matrislərin bölünməsi anlayışı yoxdur. Lakin bu cəbri əməliyyatı tərs matrisə vurulma əməliyyatı ilə əvəz etmək olar. Əgər

$$AQ = QA = E \qquad (Ə.8.10)$$

bərabərliyi doğrudursa, onda Q kvadrat matrisini verilmiş A kvadrat matrisinin *tərs matrisi* adlandırırlar.

Çox zaman tərs matrisi düz (verilmiş) matrisin işarəsi ilə, lakin yuxarı indeksdə -1 yazmaqla işarə edirlər, yəni: A^{-1}.

Tərs matrisin elementləri düz matrisin elementləri əsasında aşağıdakı üsulla təyin edilir.

İlk növbədə (Ə.8.10) bərabərliyində matrisləri açıq şəkildə yazaq:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} q_{11} & q_{12} & \dots & q_{1n} \\ q_{21} & q_{22} & \dots & q_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ q_{n1} & q_{n2} & \dots & q_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{vmatrix} = E \quad (Ə.8.11)$$

(Ə.8.11) ifadəsinə əsasən A matrisinin bütün elementlərini Q matrisinin birinci sütununa vursaq E vahid matrisinin birinci sütununu alarıq. Bu belə yazılır:

$$\begin{aligned} &a_{11} \cdot q_{11} + a_{12} \cdot q_{21} + \dots + a_{1n} \cdot q_{n1} = 1; \\ &a_{21} \cdot q_{11} + a_{22} \cdot q_{21} + \dots + a_{2n} \cdot q_{n1} = 0; \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ &a_{n1} \cdot q_{11} + a_{n2} \cdot q_{21} + \dots + a_{nn} \cdot q_{n1} = 1. \end{aligned} \quad (Ə.8.12)$$

(Ə.8.12) xətti tənliklər sistemini həll etməklə Q tərs matrisinin birinci sütun elementləri təyin edilir. Eyni qayda ilə Q matrisinin digər sütun elementləri də hesablanır. Bunun üçün n məchullu n sayda tənlikdən ibarət sistemi həll etmək lazım gəlir. Onu da qeyd edək ki, həll edilən sistemlər öz aralarında yalnız sərbəst hədd sütunu ilə fərqlənəcəkdir. Verilmiş A matrisinin determinantı sıfırdan fərqlidir. Bu da tərs matrisin alınması üçün kafi şərtdir.

Əgər A diaqonal matrisdirsə, yəni $A = (a_{11}a_{22}\dots a_{nn})$, onda onun tərs matrisi də diaqonal olar və aşağıdakı şəklə malikdir:

$$A^{-1} = \left(\frac{1}{a_{11}} \frac{1}{a_{22}} \dots \frac{1}{a_{nn}} \right) = (a_{11}^{-1} a_{22}^{-1} \dots a_{nn}^{-1}). \quad (Ə.8.13)$$

Matrislər arasında aşağıdakı bərabərliklər mövcuddur:

$$\begin{aligned} &1)\ (AB)^T = B^T A^T; \\ &2)\ EA = AE = A; \\ &3)\ (A^T)^T = A; \\ &4)\ (A^{-1})^{-1} = A; \\ &5)\ (AB)^{-1} = B^{-1} A^{-1}, \end{aligned} \quad (Ə.8.14)$$

burada A və B kvadrat matrislərdir.

Açıq şəkildə verilmiş xətti tənliklər sistemini matris yazılışında çox sadə ifadə etmək olur. Məsələn,

$$\begin{aligned} &a_{11}\cdot x_1 + a_{12}\cdot x_2 + \ldots + a_{1n}\cdot x_n + l_1 = 0; \\ &a_{21}\cdot x_{11} + a_{22}\cdot x_{21} + \ldots + a_{2n}\cdot x_n + l_2 = 0; \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &a_{m1}\cdot x_1 + a_{m2}\cdot x_{21} + \ldots + a_{mn}\cdot x_n + l_m = 0. \end{aligned} \qquad (\text{Ə}.8.15)$$

tənliklər sistemi yığcam şəkildə belə yazılır:

$$AX + L = 0, \qquad (\text{Ə}.8.16)$$

burada

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{vmatrix}; \quad X = \begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{vmatrix}; \quad L = \begin{vmatrix} l_1 \\ l_2 \\ \ldots \\ l_m \end{vmatrix}.$$

Səhvlər nəzəriyyəsi və ən kiçik kvadratlar metodunda məlum olduğu kimi aşağıdakı kvadrat formadan istifadə edilir.

$$p_1 \upsilon_1^2 + p_2 \upsilon_2^2 + \ldots + p_n \upsilon_n^2 = \sum_{i=1}^{n} p_i \upsilon_i^2 = [p\upsilon\upsilon]. \qquad (\text{Ə}.8.17)$$

Tənliyin cağ tərəfində Qauss simvollarından istifadə edilmişdir. Matris yazılışında bu forma belə şəkil alır:

$$[p\upsilon\upsilon] = V^T P V, \qquad (\text{Ə}.8.18)$$

burada

$$V = \begin{vmatrix} \upsilon_1 \\ \upsilon_1 \\ . \\ . \\ \upsilon_n \end{vmatrix}; \quad P = \begin{vmatrix} p_1 & & & 0 \\ & p_2 & & \\ . & . & . & . \\ 0 & & & p_n \end{vmatrix}.$$

Həqiqətən də, V və P matrislərinin açıq şəkildə verilmiş ifadələrini (Ə.8.18) düsturunda yerinə qoyub matrislərin vurulmasını həyata keçirdikdən sonra (Ə.8.17) ifadəsini alarıq.

Tutaq ki, aşağıdakı şəkildə xətti tənliklər sistemi verilmişdir

$$\begin{array}{l} y_1 = a_{11} \cdot x_1 + a_{12} \cdot x_2 + \ldots + a_{1n} \cdot x_n; \\ y_2 = a_{21} \cdot x_1 + a_{22} \cdot x_2 + \ldots + a_{2n} \cdot x_n; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y = a_{m1} \cdot x_1 + a_{m2} \cdot x_2 + \ldots + a_{nn} \cdot x_n. \end{array} \qquad (Ə.8.19)$$

Bu sistemi ümumi şəkildə belə təsvir etmək olar:

$$y = AX. \qquad (Ə.8.20)$$

(Ə.8.20) düsturunun köməyilə $x_i (i = \overline{1, n})$ kəmiyyətlərinin $y_i (j = \overline{1, n})$ kəmiyyətlərinə çevrilməsi *xətti çevirmə*, A isə *xətti çevirmə matrisi* adlanır.

Xətti çevirmə zamanı matris ifadələrinin diferensiallanması zərurəti meydana çıxır. (Ə.8.20) düsturuna əsasən Y vektorunun X vektoru üzrə törəməsi dedikdə Y vektoru elementlərinin X vektoru elementləri üzrə xüsusi törəmələri matrisi başa düşülür, yəni

$$\frac{\partial Y}{\partial X} = \begin{vmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \frac{\partial y_1}{\partial x_2} & \ldots & \frac{\partial y_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial y_2}{\partial x_1} & \frac{\partial y_2}{\partial x_2} & \ldots & \frac{\partial y_2}{\partial x_n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{\partial y_m}{\partial x_1} & \frac{\partial y_m}{\partial x_2} & \ldots & \frac{\partial y_m}{\partial x_n} \end{vmatrix}.$$

Onda (Ə.8.19) düsturuna əsasən Y vektorunun X vektoru üzrə törəməsi üçün yaza bilərik:

$$\frac{\partial Y}{\partial X} = \frac{\partial (Ax)}{\partial x} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{vmatrix} = A \qquad (Ə.8.21)$$

Tutaq ki, matris aşağıdakı şəklə malikdir:

$$Y^T = X^T B. \qquad (Ə.8.22)$$

Bu matrisin transponirə olunmuş matrisi

$$Y = B^T X.$$

olar. (Ə.8.21) ifadəsini nəzərə alsaq, yaza bilərik

$$\frac{\partial Y}{\partial X} = B^T.$$

Əgər Y vektoru kvadratik formaya malikdirsə, yəni

$$Y = X^T AX, \tag{Ə.8.23}$$

onda bu funksiyanın X vektoru üzrə törəməsi aşağıdakı kimi tapılır (A matrisi kvadrat formaya malikdir):

$$\frac{\partial Y}{\partial X} = \frac{\partial (X^T A)X}{\partial X} + \frac{\partial X^T (AX)}{\partial X} =$$
$$= X^T A + (AX)^T = X^T A + X^T A^T = X^T (A + A^T).$$

Əgər X simmetrik matris olarsa, yəni $A = A^T$, onda yuxarıdakı ifadə belə şəklə düşər:

$$\frac{\partial Y}{\partial X} = 2X^T A. \tag{Ə.8.24}$$

(Ə.8.23) ifadəsinin X^T vektoru üzrə diferensiallanması nəticəsində alarıq:

$$\frac{\partial Y}{\partial X} = \frac{\partial X^T (AX)}{\partial X^T} + \frac{\partial (X^T A)X}{\partial X^T} = AX + (X^T A)^T =$$
$$= AX + A^T X = (A + A^T)X.$$

Yuxarıda qəbul edildiyi kimi A matrisi simmetrik olarsa, yaza bilərik:

$$\frac{\partial Y}{\partial X} = 2AX. \tag{Ə.8.25}$$

Matrislər cəbrindən yuxarıda gətirilmiş məlumatlarla yanaşı faydalı ola biləcək aşağıdakı riyazi düstur və ifadələrin də verilməsi məqsədəuyğundur.

Silsilə, sıra və triqanometrik münasibətlər

***Ədədi silsilə*:**

$$\sum_{k=0}^{n-1}(a+kr)=na+\frac{n(n-1)r}{2}=\frac{n(a+l)}{2},$$

l – silsilənin sonuncu həddidir.

***Həndəsi silsilə*:**

$$\sum_{k=1}^{n}aq^{k-1}=\frac{a(q^n-1)}{q-1},$$

$$\sum_{k=1}^{n}k=\frac{n(n+1)}{2},$$

$$\sum_{k=0}^{n}(2k+1)=(n+1)^2,$$

$$\sum_{k=1}^{n}(2k-1)=n^2,$$

$$\sum_{k=1}^{n}k^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6},$$

$$\sum_{k=1}^{n}(2k-1)^2=\frac{n(4n^2-1)}{3},$$

$$\sum_{k=1}^{n}k^3=\left[\frac{n(n+1)}{6}\right]^2,$$

***Üstlü sıralar*:**

$$(1+x)^q=1+qx+\frac{q(q+1)}{2!}x^2+\ldots+\frac{q(q-1)\ldots(q-k+1)}{k!}x^k+\ldots$$

$$(1+x)^{-1}=1-x+x^2-x^3+\ldots=\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\cdot k\cdot x^{k-1}$$

$$(1+x)^{1/2}=1+\frac{1}{2}x-\frac{1\cdot 1}{2\cdot 4}x^2+\frac{1\cdot 2\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 6}x^3-\frac{1\cdot 1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}x^4+\ldots$$

$$(1+x)^{-1/2}=1-\frac{1}{2}x+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}x^2-\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}x^3+\ldots$$

$$\sin x=\frac{1}{2}(e^{ix}-e^{-ix})=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}.$$

$$\cos x=\frac{1}{2}(e^{ix}+e^{-ix})=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{x^{2k}}{(2k)!}.$$

İrsi sıranın tərsinin tapılması:

$$\beta=\sum_{k=1}^{n}\alpha_k\tau^k, \qquad \tau=\sum_{k=1}^{n}A_k\beta^k.$$

$$A_1=\frac{1}{\alpha_1}, \qquad A_2=-\frac{\alpha_2}{\alpha_1^3}, \qquad A_3=-\frac{2\alpha_2^2-x_1\alpha_3}{\alpha_1^3},$$

$$A_4=\frac{5\alpha_1\alpha_2\alpha_3-\alpha_1^2\alpha_4-5\alpha_2^3}{\alpha_1^7},$$

$$A_5=\frac{6\alpha_1^2\alpha_2\alpha_4-\alpha_1^3\alpha_5+3\alpha_1^2\alpha_3^2-21\alpha_1\alpha_2^2\alpha_3+14\alpha_2^4}{\alpha_1^9},$$

$$\arcsin x=x+\frac{1}{2\cdot 3}x^3+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 5}x^5+\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 7}x^7,$$

$$\mathrm{arctg}x=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}.$$

Teylor sırası:

$$f(x)=f(x_0)+\frac{x-x_0}{1!}f'(x_0)+\frac{(x-x_0)^2}{2!}f''(x_0)+$$

$$+\frac{(x-x_0)^3}{3!}f'''(x_0)+\ldots$$

Sıranın qalıq həddi:

$$R_n=\frac{1}{n!}\int_{x_0}^{x}f^{(n+1)}(t)(x-t)^n\,dt.$$

Furye sırası

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{m=1}^{\infty}a_m\cos\frac{m\pi x}{2}+b_m\sin\frac{m\pi x}{2},$$

burada $f(x)$ funksiyası $(-l,l)$ aralığında inteqrallanan və periodu 2ℓ olan funksiyadır. Əmsallar aşağıdakı ifadələrlə təyin edilir:

$$a_m=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(t)\cos\frac{m\pi t}{l}dt, \quad (m=0,1,2,\ldots),$$

$$b_m = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(t)\sin\frac{m\pi t}{l}dt, \quad (m = 0,1,2,...),\ m = 0 \text{ olduqda, } b_m = 0\,,$$

Əgər $f^2(x)$ funksiyası $(-l, l)$ aralığında inteqrallanırsa, onda A.M.Lyapunov bərabərliyini yazmaq olar:

$$\frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f^2(x)dx = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{m=1}^{\infty}(a_m^2 + a_m^2)\,.$$

Əsas triqanometrik münasibətlər

$\sin(x \pm y) = \sin x \cos y \pm \sin y \cos x$;

$\cos(x \pm y) = \cos x \cos y \pm \sin x \cdot \sin y$;

$\sin x \pm \sin y = 2\sin\frac{1}{2}(x \pm y)\cos\frac{1}{2}(x \mp y)$;

$\cos x + \cos y = 2\cos\frac{1}{2}(x + y)\cos\frac{1}{2}(x - y)$;

$\cos x - \cos y = -2\sin\frac{1}{2}(x + y)\sin\frac{1}{2}(x - y)$;

$$\sin^{2n} x = \frac{1}{2^{2n}}\left[\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^{n-k} \cdot 2\binom{2n}{k}\cos 2(n-k)\cdot x + \binom{2n}{n}\right];$$

$$\cos^{2n} x = \frac{1}{2^{2n}}\left[\sum_{k=0}^{n-1}2\binom{2n}{k}\cos 2(n-k)\cdot x + \binom{2n}{n}\right];$$

$$\sin^{2n-1} x = \frac{1}{2^{2n-2}}\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^{n+k-1}\cdot\binom{2n-1}{k}\sin(2n-2k-1)\cdot x\,;$$

$$\cos^{2n-1} x = \frac{1}{2^{2n-2}}\sum_{k=0}^{n-1}\binom{2n-1}{k}\cos(2n-2k-1)\cdot x\,,$$

burada

$$\binom{n}{0} = 1,\ \binom{n}{k} = \frac{n(n-1)...(n-k+1)}{k!}\,.$$

$$\sin 2nx = 2n\sin x\cos x\left(1-\frac{a_1}{3!}+\frac{a_2}{5!}-\frac{a_3}{7!}+\ldots\right);$$

$$\sin(2n-1)x = (2n-1)\sin x\left(1-\frac{b_1}{3!}+\frac{b_2}{5!}-\frac{b_3}{7!}+\ldots\right);$$

$$\cos 2nx = 1-4n^2\sin^2 x\left(\frac{1}{2!}-\frac{a_1}{4!}+\frac{a_2}{6!}-\frac{a_3}{8!}+\ldots\right);$$

$$\cos(2n-1)x = \cos x\left(1-\frac{b_1}{2!}+\frac{b_2}{4!}-\frac{b_3}{6!}+\ldots\right),$$

burada əmsallar

$$a_1=(4n^2-2^2)\sin^2 x, \qquad b_1=[(2n-1)^2+1^2]\sin^2 x,$$
$$a_2=(4n^2-4^2)a_1\sin^2 x, \qquad b_2=[(2n-1)^2-3^2]b_1\sin^2 x,$$
$$a_3=(4n^2-6^2)a_1a_2\sin^2 x, \qquad b_3=[(2n-1)^2-5^2]b_1b_2\sin^2 x,$$
$$a_4=(4n^2-8^2)a_1a_2a_3\sin^2 x, \qquad b_4=[(2n-1)^2-7^2]b_1b_2b_3\sin^2 x.$$

Sfera üzərində inteqral düstur

$$\int_\Sigma\frac{d\sigma}{\rho}=2\pi R\int_0^\pi\frac{\sin\psi}{\psi}d\psi=2\pi R\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{\pi^{(2n-1)}}{(2n-1)(2n-1)!},$$

burada $d\sigma=R^2\sin\psi d\psi dA$, $\rho=R\psi$ – sferik məsafə, $d\sigma$ – radiusu R olan Σ sferasının elementi, ψ – mərkəzi bucaq, A isə $d\sigma$ elementinin azimutudur ($0\le A\le 2\pi$).

ƏDƏBİYYAT

1. *Qocamanov M.H., Bağmanov Z.A.* Geodeziya ölçmələrinin riyazi hesablanması. Bakı, Bakı Universiteti nəşriyyatı, 2000
2. *Большаков В.Д., Гайдаев П.А.* Теория математической обработки геодезических измерений. М.: Недра, 1977
3. *Большаков В.Д.* Теория ошибок наблюдений М.: Недра, 1983.
4. *Большаков В.Д., Маркузе Ю.И.* Практикум по теории математической обработки геодезических измерений. Учебное пособие для вузов. М.: Недра, 1984, 352с.
5. *Большаков В.Д., Маркузе Ю.И.* Городская полигонометрия. И.: Недра, 1979.
6. *Большаков В.Д., Маркузе Ю.И., Голубев В.В.* Уравнивание геодезических построений: Справочное пособие. М.: Недра, 989, 413с.
7. *Морозов В.А.* Курс сферической геодезии. М.: Недра, 1979
8. *Воеводин В.В., Кузнецов Ю.А.* Матрицы и вычисления. М: Наука, 1984
9. *Годжаманов М.Г.* Реконструкция и развитие геодезичеких сетей с использованием спутниковых технологий. Мосва-Баку. Изд.-во МБМ, 2008
10. *Годжаманов М.Г.* Особенности геодезического обесечения и мониторинга работ на море. Москва-Баку. Изд.-во МБИ, 2009
11. *Гудков В.М., Хлебников А.В.* Математическая обрабтка маркшейдерско-геодезических измерений: Учеб. Для вузв. М.: Недра, 1990, 335с.
12. *Линник Ю.В.* Метод наименьших квадратов и осно обработки измерений. М.: Физматгиз, 1962
13. *Маркузе Ю.И.* Основы уравнительных вычислени Учеб. пособие для вузов. М.: Недра, 1990, 240с.
14. *Маркузе Ю.И., Голубев В.В.* Теория математичеой обработки геодезических измерений: Учебное пособие для узов. М.: Академический Проект; Альма Матер, 2010, 247с.
15. *Маркузе Ю.И., Бойко Е.Г., Голубев В.В.* Геодези Вычисления и уравнивание геодезических построений. М.: Ктгеоцентр-Гео-

дезиздат, 1994

16. *Машимов М.М.* Уравнивание геодезических сетей. М.: Недра, 1979, 367с.

17. *Большаков В.Д., Левчук Г.П., Клюшин Е.Б. и др.* Справочное пособие по прикладной геодезии / *Под ред. В.Д.Большакова.* М.; Недра, 1987, 343с.

18. Справочник геодезиста: В 2-х книгах. Кн. I / *Под ред. В.Д. Большакова, Г.П.Левчука.* М.: Недра, 1985, 455с.

19. *Чеботарев А.С.* Способ наименьших квадратов с основами теории вероятностей. М.: Геодезиздат, 1958

20. *Huaan Fan.* Theory of Errors and Least Squares Adjustment. Stockholm, Sweden, 1997, p.220

MÜNDƏRİCAT

Məqsəd Hüseyn oğlu QOCAMANOV

GEODEZİYA ÖLÇMƏLƏRİNİN HESABLANMASI VƏ TARAZLAŞDIRILMASI

Ali məktəblər üçün dərslik

Çapa imzalanmışdır 08.04.2014. Kağız formatı 60x84 1/16.
Sifariş 16. Həcmi 17,5 ç.v. Sayı 250.

«Bakı Universiteti» nəşriyyatı, Bakı, AZ 1148, Z.Xəlilov, 23.