

QULİYEV SABİR ƏLİ oğlu

Azərbaycan Memarlıq və İnşaat Universitetinin «Nəzəri mexanika» kafedrasının professoru, texnika elmləri doktoru



Quliyev Sabir Əli oğlu 1940-cı ildə Azərbaycan Respublikasının Kəlbəcər rayonunun Otaqlı kəndində anadan olmuşdur (bu rayonun bütün ərazisi 1993-cü ildən bu günə kimi Ermənistanın işğalı altındadır). O, 1957-ci ildə Kəlbəcər rayonunun orta məktəbini medalla bitirmiş, Azərbaycan Politeknik İnstitutuna (indiki Texniki Universitet) qəbul olmuş və 1962-ci ildə də oranı qurtarmışdır (mühəndis mexanik-maşınqayırma texnologiyası ixtisası üzrə).

Quliyev S.Ə. 1963-cü ildən bu günə kimi Ali məktəbdə (1975-ci ilə kimi Azərbaycan Politeknik İnstitutunda, 1975-ci ildən isə Azərbaycan Memarlıq və İnşaat Universitetində) müəllim işləyir.

Quliyev S.Ə. 1966-cı ildə Azərbaycan Elmlər Akademiyasının Riyaziyyat və Mexanika İnstitutunun aspiranturasına (Elastiklik və plastiklik nəzəriyyəsi ixtisası üzrə) qəbul olub, 1971-ci ildə Moskva şəhərində namizədlik dissertasiyasını müdafiə edib, texnika elmləri namizədi alimlik dərəcəsini almışdır (deformasiyaya uğrayan bərk cisimlər mexanikası ixtisası üzrə).

1975-ci ildən başlayaraq, Quliyev S.Ə. öz elmi axtarırlarını, SSRİ (indiki Rusiya Federasiyasının) Elmlər Akademiyasının «Mexanikanın Problemləri» İnstitutunda dünya şöhrətli alim, prof. D.İ.Şermanın rəhbərliyi altında davam etdirmişdir.

Quliyev S.Ə. 1988-ci ildə Moskvada «Mürəkkəb həndəsəyə malik ikirəbitəli cisimlərin gərginlik vəziyyətinin müəyyən edilməsi» adlı doktorluq dissertasiyasını müdafiə edib, texnika elmləri doktoru alimlik dərəcəsini almışdır.

Deformasiyaya uğrayan bərk cisimlər mexanikası sahəsində 40 ilə yaxın elmi axtarırlar nəticəsində professor Quliyev S.Ə. 100-dən çox elmi məqalələr və 13 kitab çap etdirmişdir.

Elmi işlərin əksəriyyəti Rusiyanın Elmlər Akademiyasının akademik nəşrlərində («Механика Твердого Тела» - МТТ, «Прикладная Математика и Механика» - ПММ jurnallarında), Ukrayna EA nəşrlərində («Прикладная Механика» - ПМ), Azərbaycan Respublikasının EA nəşrlərində (Elmlər Akademiyasının Məruzələri, Elmlər Akademiyasının Xəbərləri), həmçinin ABŞ, İngiltərə, Kanada, Almaniya, Yaponiya və s. ölkələrin ən mötəbər elmi jurnallarında dərc olunub.

1991-ci ildə Moskvada prof. S.Ə.Quliyevin «Elastiklik nəzəriyyəsinin iki ölçülü məsələləri» adlı ilk monoqrafiyası çap olunub (rus dilində).

1998-ci ildə prof. S.Ə.Quliyevin Azərbaycan respublikasında Azərbaycan dilində Elastiklik nəzəriyyəsi sahəsində ilk ədəbiyyat olan «Elastiklik nəzəriyyəsi» adlı monoqrafiyası nəşr olunub (elastiklik nəzəriyyəsinin prizmatik tirlərin burulma və əyilmə məsələləri).

2001-ci ildə prof. S.Ə.Quliyevin yeni bir kitabı «Elastiklik nəzəriyyəsinin bəzi məsələləri» adlı monoqrafiyası azərbaycan dilində çapdan çıxmışdır (müstəvi məsələləri və lövhələrin əyilməsi məsələləri).

2002-ci ildə prof. S.Ə.Quliyevin «Anizotrop lövhələrin gərginlik vəziyyəti» adlı kitabı nəşr olunub (azərbaycan dilində).

2004-cü ildə prof. S.Ə.Quliyevin yeni bir monoqrafiyası «Mürəkkəb oblastların konform inikas funksiyaları» dərc olunub (rus və ingilis dillərində).

2005-ci ildə prof. S.Ə. Quliyevin yeni bir dərs vəsaiti: «Fəza və müstəvi fermalarının hesabı» çap olunub. (dos. A.F.Məmmədovla birgə)

Bunlarla yanaşı, prof. S.Ə.Quliyevin Nəzəri mexanikanın bütün bölmələri üzrə (statika, kinematika və dinamika) 5 dərs vəsaiti və 1 dərslisi "Nəzəri mexanikanın qısa kursu" (dos. E.B.Eyvazovla birgə) kitabları çap olunmuşdur.

Bu işlərdə və kitablarda, həmçinin elm aləmində ilk dəfə olaraq məhz prof. Quliyev S.Ə. tərəfindən tapılan çoxlu sayda konform inikas funksiyalar (mürəkkəb həndəsəyə malik oblastların: çevrə və ondan çıxan bir neçə düzxətli çatları olan konturların, ellips və ondan çıxan çatlara malik konturların, müxtəlif çatlara malik kvadrat və altıbucaqlı konturların və i.a. inikas funksiyaları), həmçinin çoxrəbitəli və mürəkkəb həndəsəli oblastlar üçün məşhur Kolosov-Musxelişvili potensiallarının seçilib, istifadə edilməsində konstruktiv təkliflər və tövsiyələr verilmişdir.

Prof. Quliyev S.Ə. öz rəhbəri və müəllimi olan prof. D.İ.Şermanın məşhur köməkçi funksiyalar metodunu daha da genişləndirmiş və inkişaf etdirmişdir.

Onu da qeyd etmək lazımdır ki, istər ölkəmizdə, istərsə də xarici ölkələrdə elm aləmində ilk dəfə olaraq müxtəlif düzxətli və ya əyrixətli çatlara malik çoxbucaqlı lövhələrin statiki və dinamik məsələlərinin həllərini həmçinin prizmatik tirlərin əyilmə və burulma məsələlərinin həllərini, məhz prof. Quliyev S.Ə. vermişdir.

**Quliyev S.Ə.
Kuliyev S.A.**

**ELASTİKLİK NƏZƏRİYYƏSİNİN FİZİKİ
QEYR-İXƏTTİ MƏSƏLƏLƏRİ**

**PHYSICAL NON-LINEAR PROBLEMS OF
ELASTICITY THEORY**

**BAKI-AZƏRNƏŞR –2010
BAKU-AZERNESHHR–2010**

BBK 541
Q-83

539
Q 86

Quliyev S.Ə.

Elastiklik Nəzəriyyəsinin fiziki qeyri-xətti məsələləri.

Bakı, Azərneşr, 2010, 464 səh.

Kitabda Elastiklik Nəzəriyyəsinin fiziki qeyri-xətti məsələlərinə baxılmışdır.

Klassik Elastiklik nəzəriyyəsinin – xətti qoyuluşdakı bir çox məsələləri: müstəvi məsələləri prizmatik tirlərin burulma və əyilmə məsələləri (istər xalis əyilmə, istərsə də topa yük təsirindən əyilmə) fiziki qeyri xətti qoyuluşda həll olunub, ədədi misallara baxılmışdır.

Kitab bu sahədə Azərbaycan dilində ilk ədəbiyyatdır.

Kitab geniş oxucu kütləsi – tələbələr, aspirantlar, tədqiqatçılar, müəllimlər, mühəndis-texniki işçilər və i.a. üçün nəzərdə tutulub.

Monografiya prof. **S.Ə.Quliyevin** 45 ilə yaxın apardığı elmi axtarışlar nəticəsində yazılmışdır.

Kuliyev S.A.

Physical non-linear problems of elasticity theory.

Baku, Azerneshr, 2010, 464 p.

In the book, physical non-linear problems of elasticity theory are considered.

Many problems of classic elasticity theory: plane problems, torsion and bending problems of prismatic beams (pure bending or bending under the point load) are solved in physical non-linear statement, numerical examples are given.

This book is the first book in this field in the Azerbaijan language.

The book is intended for a wide class of readers-students, post graduate students, researchers, teachers, engineers and others.

The monograph was written on the basis of scientific researches conducted during 45 years by prof. S. A. Kuliyev.

Q-83 $\frac{1708000000}{M-651(07)2010}$ qrifli nəşr

© Quliyev Sabir, 2010

M Ü N D Ə R İ C A T

MÜQƏDDİMƏ	7
GİRİŞ	8
I BÖLMƏ. Fiziki qeyri-xətti Elastiklik nəzəriyyəsinin müstəvi məsələsi	12
§ 1.1 Məsələnin qoyuluşu. Fiziki qeyri xətti müstəvi məsələlərinin əsas tənlikləri.....	12
§1.2. Mərkəzi dairəvi deşiyə və iki düzxətli çata malik çoxbucaqlı lövhənin kiçik fiziki qeyrixətti halda gərginlik vəziyyəti.....	55
1.Dairəvi deşiyə və iki düzxətli çata malik kiçik fiziki qeyrixətti materialdan olan silindrin gərginlik vəziyyəti.....	67
2.Dairəvi deşiyə və iki düzxətli çata malik altıbucaqlı lövhənin fiziki qeyrixətti qoyuluşda gərginlik vəziyyəti.....	73
3.Qalın divarlı borunun (Lyame məsələsi) kiçik fiziki qeyrixətti qoyuluşda gərginlik vəziyyəti.....	75
§1.3. İki rəbitəli çoxbucaqlı lövhənin ixtiyari fiziki qeyrixətti qoyuluşda gərginlik vəziyyəti.....	80
II BÖLMƏ. Prizmatik tirlərin fiziki qeyrixətti qoyuluşda burulması	101
§2.1. Məsələnin qoyuluşu. Gərginlik funksiyalarının seçilməsi	101

1.Dairəvi deşiyə malik kvadrat tirin fiziki qeyri xətti qoyuluşda burulması.....	116
2.Dairəvi boşluq və iki düzxətli çatla zəiflədilmiş dairəvi silindirin qeyri xətti qoyuluşda burulması.....	124
3. Kvadrat boşluqla zəiflədilmiş dairəvi silindrin fiziki qeyri xətti qoyuluşda burulması.....	127
III BÖLMƏ. Prizmatik tirlərin fiziki qeyrixətli qoyuluşda əyilməsində gərginlik vəziyyəti.....	130
§3.1. Prizmatik tirlərin xalis əyilməsi.....	130
§3.2. Topa yük təsirindən prizmatik tirlərin fiziki qeyrixətli qoyuluşda əyilməsi.....	148
1.Bütöv dairəvi silindrik əyilməsi.....	184
2.Dairəvi silindrik boşluğa malik elliptik tirin topa yükün təsirindən əyilməsi.....	187
3.Dairəvi boşluqda zəiflədilmiş kvadrat tirin topa yükədən əyilməsi.....	188
4.Dairəvi boşluq və iki düzxətli çatla zəiflədilmiş dairəvi silindirin topa yükədən əyilməsi.....	189
§3.3.Lövhlərin fiziki qeyri xətti qoyuluşda əyilməsi.....	192
ƏDƏBİYYAT.....	211

MÜQƏDDİMƏ

Monoqrafiyada Elastiklik Nəzəriyyəsinin fiziki qeyri xətti məsələlərinə (deformasiya komponentləri ilə gərginlik komponentləri arasında əlaqənin qeyri-xətti halına) baxılıb. Elastiklik nəzəriyyəsinin iki oblasta malik (sonlu oblastlar üçün) məsələləri (müstəvi məsələləri, prizmatik tirlərin burulma və əyilmə məsələləri və i.a) mövcud olan iki halda – kiçik fiziki qeyri-xətti qoyuluşda (**Koşi, Qenki, Kaudererin** nöqtəyi nəzəri) və ixtiyari fiziki qeyri-xətti qoyuluşda **Qrin, Adgins** və i.a. nöqtəyi nəzərinə həll olunmuşdur.

Baxılan oblastlara malik elastiklik nəzəriyyəsinin fiziki qeyri xətti qoyuluşda bir çox məsələlərinin həlli çox az işıqlandırıldığından – xüsusən də düzxətli çatlara malik oblastlar üçün belə məsələlərin həllərinin demək olar ki, heç olmadığına görə, kitab böyük əhəmiyyət kəsb edir.

Monoqrafiyada baxılan fiziki qeyri xətti qoyuluşdakı məsələlərin əksəriyyəti, xətti qoyuluşda müəllifin özü tərəfindən həll olunmuşdur.

Kitabda tədqiqatçıların başqa ədəbiyyatlara müraciət edib vaxt itirməsin deyə, bir çox lazımı riyazi çevirmələr hazır şəkildə verilmişdir. Gələcək tədqiqatçıları maraqlandıran tövsiyələr və istiqamətlər də kitabda öz yerini tapıb. Xüsusi olaraq onu qeyd etmək lazımdır ki, kitabdakı ciddi riyazi çevirmələri yaxşı mənimsəmək üçün, oxucunun müvafiq riyazi biliklərə malik olması məsləhətdir.

Monoqrafiyada **Elastiklik Nəzəriyyəsinin fiziki qeyri-xətti** məsələlərinin tam külliyatına baxılmayıb, yalnız bizi maraqlandıran bir çox məsələlərə baxılmışdır.

Burada baxılmayan bir çox məsələlərin həlləri, kitabda göstərilən yolla asan həll oluna bilər.

Monoqrafiya **fiziki qeyri xətti elastiklik nəzəriyyəsi** sahəsində **Azərbaycan dilində ilk ədəbiyyatdır.**

Kitab geniş oxucu kütləsi: tələbələr, aspirantlar, müəllimlər, tədqiqatçılar və i.a. üçün nəzərdə tutulub.

GİRİŞ

Son illərdə elm və texnikanın inkişafı klassik nəzəriyyələrin dərinləşməsini, bir çox fərziyyələrin və əsas tənliklərin (**gərginlik və deformasiya komponentləri arasında asılılıqlar**) xəttləşməsindən imtina edilməsini, həmçinin **klassik elastiklik nəzəriyyəsinin** əhatə edə bilmədiyi bir çox mühüm məsələlərin həllini və i.a. tələb edir.

Ona görə də deformasiyaya uğrayan bərk cisimlərin mexanikasında **qeyrixətti məsələlərin** həllinə geniş yer verilir.

Bu, tədqiq olunan cisimlərin gərginlik vəziyyətlərinin dəqiq analizinin vacibliyi və bu fiziki-mexaniki proseslərin xətti elastiklik nəzəriyyəsi ilə məlum olan qanunlarla izah oluna bilməməsi ilə əlaqədardır.

Bütün bu deyilənlər **qeyrixətti elastiklik nəzəriyyəsinin** inkişaf olunmasına gətirir, çünki qeyrixətti məsələlər fizikada, müasir texnikada böyük əhəmiyyət kəsb edir.

Klassik elastiklik nəzəriyyəsi qəbul olunan fərziyyə və xətalardan tam və ya bir hissəsindən imtina olunması, qeyrixətti elastiklik nəzəriyyəsinin müxtəlif variantlarının yaranmasına səbəb olur (belə ki, deformasiya tenzorunun və həmçinin gərginlik komponentləri ilə deformasiyalar arasında əlaqənin müxtəlif formaları mövcuddur.)

Klassik elastiklik nəzəriyyəsində xəttilləşmə prosesi əsasən iki istiqamətdə aparılır. **Birincisi** deformasiyaya uğrayan cismin həndəsəsi (deformasiyaların çox kiçik olduğundan onların iki və daha çox dərəcədə olan hədləri nəzərə alınmır) və **ikincisi** baxılan cismin materialının fiziki xassələridir (gərginliklərlə deformasiyalar arasında asılılıq-**Hüq** qanunu). Qeyrixətti elastiklik nəzəriyyəsinin meydana çıxmasında bu iki amildən istifadə olunmuşdur.

Deformasiyaya uğramanın fiziki qanunu-yəni gərginliklərlə deformasiyalar arasında asılılıq (başqa sözlə elastik cismin vəziyyətini ifadə edən əsas təyinedici tənliklər) **iki üsulla** ifadə olunur:

1. **Gərginliklərlə deformasiyalar arasında ümumi funksional əlaqəyə** - (iki rəngli-dərəcəli simmetrik tenzor komponentləri arasında asılılıq) əsaslanan üsul.- **O.Koşi, Qenki, Kauderer** və i.a. alimlərin nöqtəyi nəzəri.
2. **Elastiklik potensialın-deformasiya enerjisi funksiyasının** daxil edilməsi yolu – **A. Qrin, D.Adgins** və i.a. alimlərin nöqtəyi nəzəri.

Qeyd olunan hər iki nöqtəyi nəzərə uyğun, gərginlik və deformasiya komponentləri arasındakı real fiziki ifadələrin müəyyən olunması və bunlara əsasən müasir texnikanın bir çox

aktual məsələlərinin həlli, qeyrixətti elastiklik nəzəriyyəsinin ən mühüm məsələləridir.

Qeyrixətti elastiklik nəzəriyyəsinin bir çox aktual məsələləri bu sahədə işləyən dünyanın aparıcı alimləri – **N.N.Qoldenblatt, A.N.Quz, K.Z.Halimov, J.S. Erjanov, D.D. İvlev, A.A.İlyuşin, A.C.Kosmodamianski, Y.İ.Koyfman, A.İ.Lurye, X.M.Muştari. V.V.Novojilov, Y.S.Potstrigaç, Y.N.Rabotnov, O.Nemiş, X.A.Raxmatilun, L.İ. Sedov, Q.N.Savin, P. Lukaş, S.Lexnitskiy, İ.Teregulov, N.S. Sailov, L.A.Tolokonnikov, Q.S.Tarasev, D.P.Xoroşin, İ.A.Tsurpal, D.Adgins, A.Qrin, C.Trusdelli, F.İndra, Q.Kauderer** və i.a tərəfindən həll edilmişdir.

Bizim respublikada qeyrixətti elastiklik nəzəriyyəsi sahəsində görülən işlər əsasən **A.Mirzəxanzadə, Y.Əmanzadə, M.A.Babayev, Ə.İ.İsayev, H.Məmmədsadıqov, R.Kərimov, R.T. Qəribov, H.Quliyev** və i.a. alimlərin adı ilə bağlıdır.

Bu kitabda, biz həndəsi xəttləşməni saxlayıb, Hüq qanunundan nəzərə çarpacaq dərəcədə kənara çıxıb (kiçik deformasiyaların xətti qanunla dəyişməsinə qəbul edərək), gərgimliklərlə deformasiyalar arasında əlaqə ifadələrinin qeyrixətti hədlərdən ibarət olduğu hala (**fiziki qeyrixətti elastiklik nəzəriyyə**) baxırıq.

Kitab girişdən, üç bölmədən və ədəbiyyatdan ibarətdir.

Birinci fəsildə fiziki qeyrixətti elastiklik nəzəriyyəsinin müstəvi məsələsinə baxılır (sonlu çoxbucaqlı iki rəbitəli lövhələrin müxtəlif yükləmələrdən yaranan gərginlik vəziyyətinin tədqiqi).

İkinci fəsildə prizmatik tirlərin burulma məsələsi fiziki qeyrixətti qoyuluşda tədqiq olunur.

Üçüncü fəsildə prizmatik tirlərin fiziki qeyrixətti elastiklik nəzəriyyəsinin əyilmə məsələlərinə baxılmışdır (istər xalis əyilmə istərsə də topa yükün təsirindən eninə əyilmə məsələləri).

Kitab bu sahədə **Azərbaycan dilində ilk ədəbiyyat** olduğundan hər fəsildə gələcək tədqiqatçılar üçün yararlı tövsiyələr də verilir.

I BÖLMƏ

FİZİKİ QEYRİXƏTTİ ELASTİKLİK NƏZƏRİYYƏSİNİN MÜSTƏVİ MƏSƏLƏSİ

§I.1.Məsələnin qoyuluşu. Fiziki qeyrixətti müstəvi məsələlərinin əsas tənlikləri.

Məlumdur ki, klassik elastiklik nəzəriyyəsi, gərginliklərlə deformasiyalar arasında xətti asılıqla ifadə olunan **Hüq** qanununa əsaslanır.* Biz burada yalnız fiziki qeyrixətti elastiklik nəzəriyyəsinin əsas tənliklərinin çıxarılışı üçün ən vacib ifadələri veririk. Bu sahədə geniş məlumat almaq istəyən oxucu rus və ingilis dillərində olan mövcud ədəbiyyatlara müraciət edə bilər [21,22,38,63,83,94].

Məlumdur ki, fiziki qeyrixətti elastiklik nəzəriyyəsində də, müəyyən qüvvələr təsirindən cismin müvazinət tənlikləri aşağıdakı kimidir [22,38]:

* Kitabda şərh olunan bütün məsələləri başa düşmək üçün, biz hesab edirik ki, oxucu klassik elastiklik nəzəriyyəsinin əsas anlayışları və ali riyaziyatla kifayət qədər tanışdır. Oxucu öz zövqünə uyğun olaraq çoxlu sayda rus və ingilis dillərində olan "Elastiklik nəzəriyyəsi" kitabları ilə və bizim tərəfimizdən yazılan Azərbaycan dilində bu sahədə ilk ədəbiyyat olan əsərlərlə [25,26,27] tanış ola bilər.

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + X = 0$$

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + Y = 0$$

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + Z = 0 \quad (\text{I.1.1})$$

Bu ifadələrdə $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{xz}, \tau_{yz}$ gərginlik komponentləri, X, Y, Z həcmi qüvvələrdir (məsələn ağırlıq və ya ətalət qüvvələri).

(I.1.1) tarazlıq şərtlərini

$$\sigma_{ij,j} = 0 \quad (\text{I.1.2})$$

kimi də kompakt şəkildə yazmaq olar (həcmi qüvvələri nəzərə almasaq).

Normal gərginliklərin σ_x, σ_y və σ_z orta qiyməti σ_0 orta gərginlik adlanır və aşağıdakı ifadə ilə müəyyən olunur:

$$\sigma_0 = \frac{1}{3}(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z). \quad (\text{I.1.3})$$

Gərginlik tenzoru T -ni $oxyz$ koordinat sisteminin ixtiyari nöqtəsində matrisa şəklində belə ifadə etmək olar.

$$T = \begin{pmatrix} \sigma_x & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_y & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_z \end{pmatrix} \quad (\text{I.1.4})$$

Onda gərginlik tenzorunun S_1, S_2 və S_3 sərbəst invariantorları bu şəkildə olar (σ_x, σ_y və σ_z normal gərginliklər, baş gərginliklər olduqda):

$$\begin{aligned} S_1 &= \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z; \quad S_2 = \sigma_x \cdot \sigma_y + \sigma_y \sigma_z + \sigma_x \sigma_z; \\ S_3 &= \sigma_x \sigma_y \sigma_z; \end{aligned} \quad (\text{I.1.5})$$

Toxunan gərginliklərin intensivliyi τ_0 aşağıdakı ifadə ilə müəyyən olunur:

$$\begin{aligned} \tau_0 &= \sqrt{\frac{1}{3}(\sigma_x - \sigma_0)^2 + (\sigma_y - \sigma_0)^2 + (\sigma_z - \sigma_0)^2} = \\ &= \sqrt{\frac{1}{3}[\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2 - \sigma_x \sigma_y - \sigma_y \sigma_z - \sigma_x \sigma_z] + \tau_{xy}^2 + \tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2} \quad (\text{I.1.6}) \end{aligned}$$

Deformasiyaların birgəlilik şərtləri (üç boyuna uzanma və üç sürüşmə deformasiyaları arasında əlaqə):

$$2 \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y \partial z} = \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} + \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} - \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} \right];$$

$$2 \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x \partial z} = \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} - \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} \right];$$

$$2 \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} - \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} \right]; \quad \frac{\partial^2 \gamma_{yz}}{\partial y \partial z} = \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial y^2};$$

$$\frac{\partial^2 \gamma_{xz}}{\partial x \partial z} = \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial z^2}; \quad \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2}; \quad (\text{I.1.7})$$

Deformasiyalar (ε_{ij}) və yerdəyişmələr u, v, w arasında əlaqə ümumən bu şəkildə olur (yerdəyişmələrin üçüncü və ondan yüksək dərəcələrini nəzərə almadıqda):

$$\varepsilon_{xx} = 2 \frac{\partial u}{\partial x} + \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \dots$$

$$\varepsilon_{yy} = 2 \frac{\partial v}{\partial y} + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 + \dots$$

$$\varepsilon_{zz} = 2 \frac{\partial w}{\partial z} + \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 + \dots$$

$$\gamma_{xy} = \varepsilon_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} + \dots$$

$$\gamma_{xz} = \varepsilon_{xz} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial z} + \dots$$

$$\gamma_{yz} = \varepsilon_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial w}{\partial z} + \dots \quad (\text{I.1.8})$$

Qeyd etmək lazımdır ki, əgər biz elastiklik nəzəriyyəsinin

müstəvi məsələsinə baxırıqsa, onda (I.1.7) və (I.1.8) ifadələri sadələşib aşağıdakı şəkil alar:

Deformasiyaların birgəlik şərtləri:

$$\varepsilon_{xx,yy} + \varepsilon_{yy,xx} - 2\varepsilon_{xy,xy} = 0; \quad \varepsilon_{xy} = \gamma_{xy} \quad (\text{I.1.9})$$

Deformasiyalarla yerdəyişmələr arasındakı əlaqə

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) \quad (\text{I.1.10})$$

Bu ifadələrdə i və j uyğun olaraq 1 və 2 qiymətlərini alırlar.

Ifadələrdəki vergül işarələri (bax. I.1.2, I.1.10 və sonrakılarına) xüsusi törəmələri göstərir. Məsələn

$$\varepsilon_{i,j} = \varepsilon_{x,x} + \varepsilon_{x,y} + \varepsilon_{y,x} + \varepsilon_{y,y} = \frac{\partial \varepsilon_x}{\partial x} + \frac{\partial \varepsilon_x}{\partial y} + \frac{\varepsilon_y}{\partial x} + \frac{\partial \varepsilon_y}{\partial y} \quad \text{və i.a. (I.1.11)}$$

Gərginlik komponentləri σ_{ij} ilə deformasiya komponentləri ε_{ij} arasında asılılıqlar üçün əksər alimlər izotrop və bircins cisimlər üçün **Q.Qrinin** nöqtəyi nəzərinə əsaslanıb, daxili qüvvələrin potensialının - enerji funksiyasının olmasını fərz edirlər [22].

$$U = U(J_1; J_2; J_3)$$

Burada J_1 , J_2 və J_3 deformasiya tenzorunun

$$D = \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{yy} & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{xz} & \varepsilon_{yz} & \varepsilon_{zz} \end{pmatrix} \quad (\text{I.1.12})$$

sərbəst dəyişən invariantlarıdır.

Belə ki,

$$J_1 = \frac{1}{2}(\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz}) = \frac{1}{2} \varepsilon_{ij}$$

$$J_2 = \frac{1}{4}[\varepsilon_{xx}\varepsilon_{yy} + \varepsilon_{yy}\varepsilon_{zz} + \varepsilon_{zz}\varepsilon_{xx} - \varepsilon_{xy}^2 + \varepsilon_{yz}^2 - \varepsilon_{xz}^2] = \frac{1}{4} \varepsilon_{ij}\varepsilon_{ij}$$

$$J_3 = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{yy} & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{xz} & \varepsilon_{yz} & \varepsilon_{zz} \end{pmatrix} = \frac{1}{8} \varepsilon_{ij}\varepsilon_{jk}\varepsilon_{ik}; \quad (\text{I.1.13})$$

J_1 invariantı **həcmi genişlənmə** adlanır. Baş gərginliklərə $(\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z)$ analogi olaraq $\varepsilon_{kk}, \varepsilon_{yy}$ və ε_{zz} **baş uzanmalar** (x, y və z koordinat oxları istiqamətindəki defotmasiyalar) adlanır.

$$\varepsilon_{xx} \leq \varepsilon_{yy} \leq \varepsilon_{zz} \quad (\text{I.1.14})$$

Əgər $oxyz$ koordinat sistemində oxlar uyğun olaraq baş uzanmalara $(\varepsilon_{xx}, \varepsilon_{yy}, \varepsilon_{zz})$ paralel olan, ixtiyari nöqtədə sürüşmələr $(\gamma_{xy} = \varepsilon_{xy}, \gamma_{xz} = \varepsilon_{xz}$ və $\gamma_{yz} = \varepsilon_{yz})$ sıfır olduğundan deformasiya tenzoru və sərbəst dəyişən invariantlar bu şəkllə düşər (əgər

(I.1.12) və (I.1.3) ifadələrində $\gamma_{xy} = \varepsilon_{xy} = 0$; $\gamma_{yz} = \varepsilon_{yz} = 0$ və $\gamma_{xz} = \varepsilon_{xz} = 0$ olduqlarını nəzərə alsaq):

$$D = \begin{vmatrix} \varepsilon_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{zz} \end{vmatrix} \quad (\text{I.1.14})$$

və

$$J_1 = \varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz}; \quad J_2 = \varepsilon_{xx}\varepsilon_{yy} + \varepsilon_{yy}\varepsilon_{zz} + \varepsilon_{xx}\varepsilon_{zz}$$

$$J_3 = \varepsilon_{xx}\varepsilon_{yy}\varepsilon_{zz} \quad (\text{I.1.15})$$

Gərginlik komponentlərinin tədqiqindəkinə analoji olaraq **orta uzanma** ε_0 belə bir ifadə ilə müəyyən olunur

$$\varepsilon_0 = \frac{1}{3}(\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz}) = \frac{1}{3}J_1 \quad (\text{I.1.16})$$

Onda deformasiyanın **kürəvi tenzoru** D_0 belə olar

$$D_0 = \begin{vmatrix} \varepsilon_0 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_0 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_0 \end{vmatrix} \quad (\text{I.1.17})$$

Bu o deməkdir ki, baxılan halda cismin həcmnin dəyişməsi, onun öz formasını dəyişmədən alır. Ona görə də D_0 - **xalis həcmi deformasiya** da adlanır. Deformasiya tenzoru D ilə kürəvi tenzor (xalis həcmi deformasiya) D_0 -nin fərqi, **deformasiya deviatoru** adlanıb D' ilə işarə olunur. Belə ki,

$$D' = D - D_0 = \begin{vmatrix} \varepsilon_{xx} - \varepsilon_0 & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{yy} - \varepsilon_0 & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{yz} & \varepsilon_{zz} - \varepsilon_0 \end{vmatrix} \quad (\text{I.1.18})$$

Deformasiya deviatoru D' - elə deformasiyadır ki, onu, cisim həcmi dəyişmədən alır (yəni cismin yalnız formasının dəyişməsidir).

Toxunan gərginliklərin intevsiyliyinə analiji olaraq **sürüşmə deformasiyası intevsiyliyi** əmsalı ψ_0 aşağıdakı ifadə ilə müəyyən olur:

$$\begin{aligned} \psi_0 &= \\ &= \frac{2}{\sqrt{3}} \sqrt{\frac{2}{3} [\varepsilon_x^2 + \varepsilon_y^2 + \varepsilon_z^2 - \varepsilon_x \varepsilon_y - \varepsilon_y \varepsilon_z - \varepsilon_x \varepsilon_z] + \frac{1}{2} (\gamma_{xy}^2 + \gamma_{yz}^2 + \gamma_{xz}^2)} \quad (\text{I.1.19}) \end{aligned}$$

Xalis həcmi deformasiya üçün ($\varepsilon_{xx} = \varepsilon_{yy} = \varepsilon_{zz} = 0$ olduqda) (I.1.19) ifadəsi sadələşib belə bir şəkil alır:

$$\psi_0 = \sqrt{\frac{2}{3} (\gamma_{xy}^2 + \gamma_{yz}^2 + \gamma_{xz}^2)} \quad (\text{I.1.20})$$

Cisimlərin materiallarının kristalik quruluşundan asılı olaraq, gərginlik və deformasiya komponentləri arasında asılılıq (əlaqə) müxtəlif şəkildə olur (ətraflı məlumat üçün **Smit** və **Rivlin** [117], **Qrin** və **Adgins** [22] və i.a. ədəbiyyatlara baxmaq olar).

Məlumdur ki, əksər hallarda cisimlərin materiallarının kristalik quruluşu əsasən bu siniflərdən ibarətdir: triklin sistem (monoedrik və pinakoidalik siniflər), monoklin sistem (diedrik

oxsuz sinif, diedrik oxlu sinif və prizmatik sinif), rombik sistem (rombik piramidal sinif, rombotetraedrik sinif, rombik dipiramidal sinif), **tetraqonal sistem** - bu sistem 7 kristalik sinifdən ibarətdir

- tetraqonal – tetraedrik sinif
- tetraqonal – piramidal sinif
- tetraqonal – dipiramidal sinif
- tetraqonal – skalenoedrik sinif
- ditetraqonal – piramidal sinif
- tetraqonal – trapesedrik sinif
- ditetraqonal – dipiramidal sinif

Kub sistemi (kubik simmetriya sistemi) 5 kristalik sinifə bölünür.

- tritetraedrik sinif
- didodekaedrik sinif
- heksatetraedrik sinif
- trioktaedrik sinif
- heksaoktaedrik sinif

Heksoqonal sistemin özündə 12 kristalik sinif vardır:

- triqonal – piramidal sinif
- romboedrik sinif
- ditriqonal – piramidal sinif
- triqonal – trapesedrik sinif
- heksoqonal – skalenoedrik sinif
- triqonal – dipiramidal sinif

- heksaqonal – piramidal sinif
- heksoqonal – dipiramidal sinif
- ditriqonal – dipiramidal sinif
- diheksaqonal – piramidal sinif
- heksaqonal – trapeseedrik sinif
- diheksaqonal – dipiramidal sinif

Nəhayət **transversal – izotropik simmetriyaya** malik sistem və izotropik simmetriyaya malik sistemi qeyd etmək olar.

Biz bütün klassik siniflərin mövcud simmetriya xüsusiyyətlərinin kifayət dərəcədə ifadələrini aşağıda veririk (cismin materialının deformasiyaya uğrayana qədər olan vəziyyətində üç istiqamətinin olduğunu və bu istiqamətlərin vahid vektorlarının $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$ olduğu qəbul edilir).

Triklin sistemdə \bar{e}_1, \bar{e}_2 və \bar{e}_3 vahid vektorların istiqamətinə məhdudiyyət qoyulmur və daxili qüvvələrin potensialı U (enerji funksiyası) üzərinə heç bir məhdudiyyət qoyulmur, yəni bu funksiya

$$U = U(\varepsilon_{xx}, \varepsilon_{yy}, \varepsilon_{zz}, \varepsilon_{xy}, \varepsilon_{yz}, \varepsilon_{xz}) \quad (I.1.21)$$

şəklində deformasiya komponentlərinin polinomu (çoxhədlisi) kimi ifadə olunur.

Cari koordinat sistemi üçün ixtiyari düzbucaqlı dekart sistemini $OXYZ$ seçmək olar.

Monaklin sistem üçün \bar{e}_2 və \bar{e}_3 vahid vektorları bir-birilə düzbucaq əmələ gətirir, \bar{e}_1 vahid vektoru \bar{e}_2 \bar{e}_3 müstəvisinə perpendikulyar olur. Bu sistemdə U funksiyasının deformasiyalardan asılılığı belə olur.

$$\begin{aligned} U(\varepsilon_{xx}, \varepsilon_{yy}, \varepsilon_{zz}, \varepsilon_{xy}, \varepsilon_{yz}, \varepsilon_{xz}) &= \\ &= U(\varepsilon_{xx}, \varepsilon_{yy}, \varepsilon_{zz}, -\varepsilon_{xy}, \varepsilon_{yz}, -\varepsilon_{xz}) \end{aligned} \quad (\text{I.1.22})$$

Romb şəklində olan sistem üçün $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$ vahid vektorları bir-birinə qarşılıqlı perpendikulyar olur. Başlanğıc dekart koordinat oxları (x, y, z) vahid $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$ vektortlarına paralel götürülür. Daxili qüvvələrin potensialı U funksiyası yeddi kəmiyyətdən (deformasiyaların kombinasiyasından) asılı olur

$$U = U(\varepsilon_{xx}, \varepsilon_{yy}, \varepsilon_{zz}, \varepsilon_{xy}^2, \varepsilon_{yz}^2, \varepsilon_{xz}^2, \varepsilon_{xy} \cdot \varepsilon_{yz} \cdot \varepsilon_{xz}) \quad (\text{I.1.23})$$

Tetroqonal halda da $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$ vahid vektorları bir-birinə qarşılıqlı perpendikulyardılar. Rombik sistemdə olduğu kimi koordinat oxları vahid vektorlara paralel olur və z oxu əsas simmetriya oxu götürülür.

Bu halda U funksiyası iki cür götürülür. İlk üç sinif üçün bu ifadə belə olur:

$$\begin{aligned} U(\varepsilon_{xx}, \varepsilon_{yy}, \varepsilon_{zz}, \varepsilon_{xy}, \varepsilon_{yz}, \varepsilon_{xz}) &= \\ &= U(\varepsilon_{xx}, \varepsilon_{yy}, \varepsilon_{zz}, \varepsilon_{xy}, -\varepsilon_{yz}, -\varepsilon_{xz}) \end{aligned} \quad (\text{I.1.24})$$

Son dörd sinif üçün isə

$$\begin{aligned}
U(\varepsilon_{xx}, \varepsilon_{yy}, \varepsilon_{zz}, \varepsilon_{xy}^2, \varepsilon_{yz}^2, \varepsilon_{xz}^2, \varepsilon_{xy} \cdot \varepsilon_{yz} \cdot \varepsilon_{xz}) &= \\
= U(\varepsilon_{yy}, \varepsilon_{xx}, \varepsilon_{zz}, \varepsilon_{xy}^2, \varepsilon_{xz}^2, \varepsilon_{yz}^2, \varepsilon_{xy} \cdot \varepsilon_{yz} \cdot \varepsilon_{xz}) &
\end{aligned}$$

Kub şəklində sistemi olan halda da vahid vektorlar $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$ qarşılıqlı perpendikulyardılar. Simmetrik oxları vahid vektorlara paralel olan düzbucaqlı koordinat sistemi seçilir.

Ümumi halda **kubik simmetriya** halı üçün U funksiyası ilk iki sinif üçün belə götürülür:

$$\begin{aligned}
U(\varepsilon_{xx}, \varepsilon_{yy}, \varepsilon_{zz}, \varepsilon_{xy}^2, \varepsilon_{yz}^2, \varepsilon_{xz}^2, \varepsilon_{xy} \cdot \varepsilon_{yz} \cdot \varepsilon_{xz}) &= \\
= U(\varepsilon_{yy}, \varepsilon_{zz}, \varepsilon_{xx}, \varepsilon_{yz}^2, \varepsilon_{xz}^2, \varepsilon_{xy}^2, \varepsilon_{xy} \cdot \varepsilon_{yz} \cdot \varepsilon_{xz}) &= \quad (I.1.25) \\
= U(\varepsilon_{zz}, \varepsilon_{xx}, \varepsilon_{yy}, \varepsilon_{xz}^2, \varepsilon_{yz}^2, \varepsilon_{xy}^2, \varepsilon_{xy} \cdot \varepsilon_{yz} \cdot \varepsilon_{xz}) &
\end{aligned}$$

Yəni polinom ifadədən istifadə olunur. Sonuncu 3 sinif üçün isə U funksiyası belədir.

$$\begin{aligned}
U(\varepsilon_{xx}, \varepsilon_{yy}, \varepsilon_{zz}, \varepsilon_{xy}^2, \varepsilon_{yz}^2, \varepsilon_{xz}^2, \varepsilon_{xy} \cdot \varepsilon_{yz} \cdot \varepsilon_{xz}) &= \\
= U(\varepsilon_{xx}, \varepsilon_{zz}, \varepsilon_{yy}, \varepsilon_{xz}^2, \varepsilon_{yz}^2, \varepsilon_{xy}^2, \varepsilon_{xy} \cdot \varepsilon_{yz} \cdot \varepsilon_{xz}) &= \quad (I.1.26) \\
= U(\varepsilon_{zz}, \varepsilon_{xx}, \varepsilon_{yy}, \varepsilon_{xz}^2, \varepsilon_{yz}^2, \varepsilon_{xy}^2, \varepsilon_{xy} \cdot \varepsilon_{yz} \cdot \varepsilon_{xz}) &
\end{aligned}$$

Heksaqonal sistemdə də daxili qüvvələrin potensialı U funksiyası və deformasiya komponentləri ε_{ij} arasında asılılıq bir çox variantlarda olur. İlk iki kristal sinif üçün bu asılılıq 14 kəmiyyətdən (deformasiya komponentləri arasında

kombinasiyalardan), sonrakı 3 sinif üçün bu əlaqə 9 kəmiyyətdən vasitəsilə yaradılır və i.a.

Transversal izotrop sistemdə kristal siniflər üçün U funksiyası və deformasiya komponentləri ε_{ij} arasında əlaqə bu şəkildə olar: polinom (yəni çoxhədli şəkilində) olaraq belə olar:

$$U = U(\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy}, \varepsilon_{xy}^2 + \varepsilon_{yz}^2; \varepsilon_{zz}\varepsilon_{xx} - \varepsilon_{yy}^2, 2\varepsilon_{xy}, \varepsilon_{xz}^2 - \varepsilon_{yz}^2, 2\varepsilon_{xz} \cdot \varepsilon_{yz})$$

Nəhayət **izotrop sistemdə** kristal siniflərin hamısı üçün U funksiyasının polinomial ifadəsi

$$U = U(J_1, J_2, J_3) \quad \text{şəklində olur.}$$

Burada J_1, J_2 və J_3 sərbəst invariantlar olub (I.1.15) ifadələri ilə müəyyən olunurlar.

Gərginlik və deformasiya komponentləri arasında əlaqənin, yuxarıda göstərilən bütün kristal siniflər üçün ifadələrini araşdırmaq, bir kitab çərçivəsində qeyri mümkün olduğundan biz burada yalnız kubik simmetriyaya malik sistemlər üçün olan hala baxacağıq (izotrop materiallar üçün **Hüq** qanunu klassik elastiklik nəzəriyyəsi kitablarında [2,9,19,26,30,45,67] geniş araşdırılıb).

Gərginlik və deformasiya komponentləri arasında əlaqə **kub şəkilli** sistemin kristal sinifləri üçün aşağıdakı variantlarda götürülür.

$$\varepsilon_{i,j} = \frac{k(s_0)}{3K} \sigma_0 \cdot \delta_{ij} + \frac{g(t_0^2)}{2G} (\sigma_{ij} - \sigma_0 \cdot \delta_{ij}) \quad (\text{I.1.27})$$

Bu əlaqə **O. Koşi, A. Qenki, Q.Kauderer** və i.a nöqteyi nəzərinə (ε_{ij} və σ_{ij} arasında ümumi funksional əlaqəyə əsaslanan nöqteyi nəzər) əsasəndir.

$$\varepsilon_{ij} = f_1 \cdot \delta_{ij} + f_2 \cdot \sigma_{ij} + f_3 \cdot \sigma_{ik} \cdot \sigma_{jk}; \quad f_n = \frac{\partial U}{\partial S_n}, \quad n = 1;2;3 \quad (\text{I.1.28})$$

Bu əlaqə isə **A.Qrin** və başqalarının nöqteyi nəzərinədir (deformasiyalar enerjisi funksiyasını daxil edən nöqteyi nəzər).

Bu ifadələrdə K həcmi sıxılma moduludur. G - sürüşmə modulu. f_n - materialın gərginlik funksiyasıdır. $U = U(J_1, J_2, J_3)$ - daxili qüvvələrin potensialı (enerji sıxlığı funksiyası)

S_1, S_2 və S_3 - gərginlik tenzorunun invariantlarıdır, $k(s_0)$ orta gərginlik (s_0) funksiyasıdır, $g(t_0^2)$ toxunan gərginliklərin (t_0^2) intensivlik funksiyasıdır.

$$s_0 = \frac{\sigma_0}{3k} \text{ -gətirilmiş orta gərginliyin ifadəsi}$$

$$t_0 = \frac{\tau_0}{G} \text{ gətirilmiş toxunan gərginliklərin intensivliyini}$$

ifadəsidir.

$k(s_0)$ və $g(t_0^2)$ funksiyalarını sonsuz sıra şəklində götürmək olar [38]:

$$k(s_0) = 1 + k_1 \cdot s_0 + k_2 \cdot s_0^2 + k_3 \cdot s_0^3 + \dots \quad (\text{I.1.29})$$

$$g(t_0^2) = 1 + g_2 \cdot t_0^2 + g_4 \cdot t_0^4 + g_6 \cdot t_0^6 + \dots \quad (\text{I.1.30})$$

Burada

$$\begin{aligned} k_1 &= -\chi_1; & k_2 &= 2\chi_1^2 - \chi_2; \\ k_3 &= -5\chi_1^3 + 5\chi_1 \cdot \chi_2 - \chi_3; \end{aligned} \quad \text{və i.a.} \quad (\text{I.1.31})$$

Bu (I.1.31) ifadəsinə daxil olan χ funksiyası **uzadılma funksiyasıdır** (bu uzadılma xətti ölçüyə aiddir, zamana yox).

$$g_2 = -\gamma_2; \quad g_4 = 3\gamma_2^2 - \gamma_4; \dots \quad (\text{I.1.32})$$

γ isə **sürüşmə deformasiyası** funksiyasıdır. Gətirilmiş toxunan gərginlik intevsivliyini (t_0) , $k(s_0)$ və $g(t_0^2)$ funksiyalarının köməyi ilə belə ifadə olunurlar [38]

$$s_0 = \sigma_0 \cdot k(s_0); \quad t_0 = \psi_0 \cdot \gamma(\psi_0^2) \quad (\text{I.1.33})$$

Onu da qeyd etmək lazımdır ki, (I.1.31) ifadələrində χ_i və k_i əmsallarının yerlərini dəyişməklə (yəni birini digəri ilə əvəz etməklə) bərabərliklər öz doğruluğunu saxlayır

Əgər (I.1.33) – də (I.1.3), (I.1.4), ifadələrini nəzərə alıb, orta gərginlik tenzorundan

$$T_0 = \sigma_0 \cdot E \quad (\text{I.1.34})$$

istifadə etsək bir neçə çevirmələrdən sonra gərginliklər deformasiyaların köməyi ilə belə tapılar:

$$\begin{aligned}
\sigma_x &= 3K \cdot k(s_0) \cdot \varepsilon_0 + 2G \cdot \gamma(\psi_0^2) \cdot (\varepsilon_x - \varepsilon_0) \\
\sigma_y &= 3K \cdot k(s_0) \cdot \varepsilon_0 + 2G \cdot \gamma(\psi_0^2) \cdot (\varepsilon_y - \varepsilon_0); \\
\sigma_z &= 3K \cdot k(s_0) \cdot \varepsilon_0 + 2G \cdot \gamma(\psi_0^2) \cdot (\varepsilon_z - \varepsilon_0); \quad \tau_{xy} = G \cdot \gamma(\psi_0^2) \cdot \gamma_{xy}; \\
\tau_{yz} &= G \cdot \gamma(\psi_0^2) \cdot \gamma_{yz}; \quad \tau_{xz} = G \cdot \gamma(\psi_0^2) \cdot \gamma_{xz} \quad (I.1.35)
\end{aligned}$$

Əgər (I.1.16), (I.1.17), (I.1.18) və (I.1.33) ifadələrini nəzərə alsaq, deformasiya komponentləri (ε_{ij}) gərginlik komponentləri vasitəsilə aşağıdakı kimi ifadə olar (bu ifadələrdə $\varepsilon_{xx} = \varepsilon_x$, $\varepsilon_{yy} = \varepsilon_y$; $\varepsilon_{zz} = \varepsilon_z$ kimi qəbul olunub).

$$\begin{aligned}
\varepsilon_x &= \frac{1}{3K} \cdot k(s_0) \cdot \sigma_0 + \frac{1}{2G} \cdot g(t_0^2) \cdot (\sigma_x - \sigma_0); \\
\varepsilon_y &= \frac{1}{3K} \cdot k(s_0) \cdot \sigma_0 + \frac{1}{2G} \cdot g(t_0^2) \cdot (\sigma_y - \sigma_0); \\
\varepsilon_z &= \frac{1}{3K} \cdot k(s_0) \cdot \sigma_0 + \frac{1}{2G} \cdot g(t_0^2) \cdot (\sigma_z - \sigma_0); \\
\gamma_{xy} &= \frac{1}{G} \cdot g(t_0^2) \cdot \tau_{xy}; \quad \gamma_{yz} = \frac{1}{G} \cdot g(t_0^2) \cdot \tau_{yz}; \\
\gamma_{xz} &= \frac{1}{G} \cdot g(t_0^2) \cdot \tau_{xz}; \quad (I.1.36)
\end{aligned}$$

(I.1.35) və (I.1.36) ifadələrində K - həcmi **sıxılma** modulu, G - **sürüşmə modulu**dur. Yuxarıda göstərilən 15 tənliklər toplusu – üç ədəd tarazlıq şərtləri (I.1.1), altı ədəd deformasiyaların birgəlik şərtləri (I.1.7) və altı ədəd gərginliklərin deformasiyalar

vasitəsilə tapılması (I.1.35) ifadələri (və ya deformasiyaların gərginliklər vasitəsilə tapılması ifadələri-(I.1.36)- **qeyrixətti elastiklik nəzəriyyəsinin** (kiçik deformasiyalar üçün) **əsas tənliklər sistemini** təşkil edir.

Qeyd etmək lazımdır ki, elastiklik nəzəriyyəsinin müstəvi məsələləri üçün (istər müstəvi gərginlik halı olsun, istərsə də müstəvi deformasiya halı olsun) göstərilən 15 ədəd tənliklər xeyli sadələşir.

Müstəvi gərginlik halında

$$\sigma_z \equiv 0; \tau_{xz} \equiv 0 \text{ və } \tau_{yz} \equiv 0$$

olduğundan (I.1.1), (I.1.7) və (I.1.35) tənlikləri azalır və 6 ədəd olur: onlar aşağıdakılardır:

müvazinət şərtləri

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = 0; \quad \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} = 0; \quad (\text{I.1.37})$$

deformasiyaların birgəllik şərtləri

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} \quad (\text{I.1.38})$$

deformasiyaların gərginliklərlə ifadələri:

$$\varepsilon_x = \frac{1}{3K} \cdot k(s_0) \cdot \sigma_0 + \frac{1}{2G} \cdot g(t_0^2) \cdot (\sigma_x - \sigma_0); \quad \gamma_{xy} = \frac{1}{G} \cdot g(t_0^2) \cdot \tau_{xy}$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{3K} \cdot k(s_0) \cdot \sigma_0 + \frac{1}{2G} \cdot g(t_0^2) \cdot (\sigma_y - \sigma_0) \quad (\text{I.1.39})$$

Bu σ_x, σ_y və τ_{xy} gərginliklərin ifadələrinin çıxarılışında lövhələrin z oxu istiqamətində qalınlıqlarının digər ölçülərə nisbətən çox kiçik olduğu və bu gərginliklərin yalnız x və y oxlarından asılı olduğu nəzərə alınır.

Eyni olaraq, müstəvi deformasiya halında, klassik nəzəriyyədə olduğu kimi qeyrixətti elastiklik nəzəriyyəsində də yuxarıda qeyd olunan tənliklər həm sadələşir, həm də sayca azalır (müstəvi deformasiya halında $\varepsilon_z = \gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0$ olduğu nəzərə alınır). Təkrar olaraq yenə qeyd edirik ki, bütün bu sadələşmə və tənliklərin sayının azalması yalnız kiçik deformasiyalar halında doğrudur. Müstəvi gərginlik vəziyyətində gətirilmiş orta gərginlik (s_0) və toxunan gərginliklərin orta intevsivliyi (t_0) aşağıdakı qiymətlər alır:

$$\sigma_0 = \frac{1}{3}(\sigma_x + \sigma_y); s_0 = \frac{1}{9K} \cdot (\sigma_x + \sigma_y) = \frac{\sigma_0}{3K};$$

$$t_0^2 = \frac{2}{9G^2} \cdot [\sigma_x^2 + \sigma_y^2 - \sigma_x \sigma_y + 3\tau_{xy}^2]; \quad (\text{I.1.40})$$

Müstəvi gərginlik halında (I.1.27) və (I.1.28) ifadələrindəki σ_{ij} gərginlikləri, klassik elastiklik nəzəriyyəsində olduğu kimi, müvazinət tənliklərini eyniylə ödəyib, **Eri gərginlik funksiyası** (F) vasitəsilə belə ifadə olunur [22,38].

$$\sigma_{ij} = F_{,kk} \cdot \delta_{ij} - F_{,ij}, \quad (\text{I.1.41})$$

Burada δ_{ij} əmsalları belə bir formula ilə müəyyən olunur:

$$\delta_{ij} = \frac{\partial J_1}{\partial \varepsilon_{ij}}; \quad (I.1.42)$$

J_1 deformasiya tenzoru (deformasiyaların birinci sərbəst invariantı) olub müstəvi gərginlik halı üçün

$$J_1 = \varepsilon_{kk} \quad (I.1.43)$$

kimi təyin olunur. (1.1.42) və (1.1.43) ifadələrinə əsasən yazıla bilər:

$i \neq j$ olduqda $\delta_{ii} = \delta_{jj} = 1$; olar $\delta_{ij} = 0$; $i \neq j$ olduqda:

Gərginlik deformasiya əlaqəsinin “**kub**” dərəcədən olan qanuna əsasən (1.28) ifadəsini belə də yazmaq olar [22].

$$\begin{aligned} \varepsilon_{ij} = & \lambda_{11} \sigma_{kk} \cdot \delta_{ij} + \lambda_{12} \cdot \sigma_{ij} + \lambda_{21} \cdot \sigma_{kk}^2 \cdot \delta_{ij} + \\ & + \lambda_{22} \sigma_{kn} \sigma_{kn} \cdot \delta_{ij} + 2\lambda_{22} \cdot \sigma_{kk} \sigma_{ij} + \\ & + \lambda_{31} \cdot \sigma_{kk}^3 \cdot \delta_{ij} + \lambda_{23} \cdot \sigma_{ik} \sigma_{jk} \cdot \delta_{ij} + \\ & + \lambda_{32} \cdot \sigma_{kn} \cdot \sigma_{kn} \cdot \sigma_{ij} \cdot \delta_{ij} + \lambda_{33} \cdot \sigma_{kk}^2 \sigma_{ij} \end{aligned} \quad (I.1.44)$$

Burada λ_{ij} - əmsalları, baxılan materialın fiziki xassələrini xarakterizə edən sabitləridir.

Qeyd edək ki, [99] işində göstərildiyi kimi (I.1.27) və (I.1.28) ifadələri elastik sabitləri olan λ_{ij} əmsallarının aşağıdakı qiymətlərində üst-üstə düşür:

$$\lambda_{11} = \frac{1}{9K} - \frac{1}{6G}; \quad \lambda_{12} = \frac{1}{4G}; \quad \lambda_{31} = -\frac{1}{27} \cdot \frac{g_2}{G_3};$$

$$\lambda_{32} = -\frac{1}{12} \cdot \frac{g_2}{G^2}; \quad \lambda_{33} = \frac{1}{18} \cdot \frac{g_2}{G^3}; \quad \lambda_{21} = \lambda_{22} = \lambda_{23} = 0 \quad (\text{I.1.45})$$

Bu ifadələrə daxil olan K (sıxılma modulu) və G (sürüşmə modulu) əmsalları, praktikada ən çox rast gəlinən E (Yung modulu - elastiklik modulu) və ν - (Puaşson əmsalı) sabitləri vasitəsilə belə tapılır (və əksinə G, K məlum olduqda, E və ν tapılır):

$$G = \frac{1}{2} \cdot \frac{\nu}{1+\nu} \cdot E; \quad K = \frac{1}{3} \cdot \frac{\nu}{\nu-2} \cdot E$$

$$E = 2 \cdot \frac{\nu+1}{\nu} \cdot G = 3 \cdot \frac{\nu-2}{\nu} \cdot K = \frac{9KG}{3K+G}$$

$$\nu = \frac{2G}{E-2G} = \frac{6}{3K-E} = 2 \cdot \frac{3K+G}{3K-2G}; \quad (\text{I.1.46})$$

Gərginlik komponentləri σ_{ij} və deformasiya komponentləri \mathcal{E}_{ij} arasında əlaqə ifadələrini (I.1.27) və ya (I.1.28) ifadələrini deformasiyaların birgəlilik şərtləri olan (I.1.7) ifadədə yerinə yazsaq, fiziki qeyri xətti elastiklik nəzəriyyəsinin müstəvi məsələsinin həlli aşağıdakı differensial tənliklərin inteqrallaanmasına gətirilir:

O. Koşi, A. Qenki, Q.Kauderer və başqaları nöqtəyi nəzərinçə:

$$\Delta \left\{ \left[\frac{1}{9K} \cdot k(s_0) + \frac{1}{3G} \cdot g(t_0^2) \right] (\sigma_x + \sigma_y) \right\} -$$

$$- \frac{1}{2G} \left[\sigma_x \cdot \frac{\partial^2 g(t_0^2)}{\partial x^2} + \sigma_y \cdot \frac{\partial^2 g(t_0^2)}{\partial y^2} + 2\tau_{xy} \cdot \frac{\partial^2 g(t_0^2)}{\partial x \partial y} \right] = 0 \quad (\text{I.1.47})$$

A.Qrin, D.Adgins və başqaları nöqtəyi nəzərinçə:

$$(\lambda_{11} + \lambda_{12}) \cdot \Delta \Delta F + \lambda_{21} \cdot \Delta[(\Delta F)] +$$

$$+ \lambda_{22} \cdot \Delta[\Delta(F_{,ij} F_{,ij}) + 2(\Delta F F_{,ij})_{,ij}] +$$

$$+ \lambda_{31} \cdot \Delta[\Delta(\Delta F)^3] + \lambda_{32} \cdot (F_{,ij} F_{,ij} F_{,kn})_{,kn} +$$

$$+ \lambda_{33} [\Delta(\Delta F F_{,ij} F_{,ij})] + \lambda_{33} [(\Delta F)^2 F_{,ij}]_{,ij} = 0 \quad (\text{I.1.48})$$

Bu ifadələrdə $F(x, y)$ **gərginliklərin Eri funksiyasıdır**:

Beləki **müstəvi gərginlik vəziyyəti** halı üçün yazmaq olar [2, 25, 43, 67] ;

$$\sigma_{xx} = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \quad \sigma_y = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \quad \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \quad (\text{I.1.49})$$

Δ isə **Laplas operatorudur**:

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \quad (\text{I.1.50})$$

Vergül işarələri xüsusi törəmələri göstərir (nəzərdə saxlamaq lazımdır ki, müstəvi gərginlik vəziyyətində i və j , həmçinin k və n indeksləri 1 və 2 qiymətlərini alır).

Əgər (I.1.49) və (I.1.50) ifadələrini (I.1.47) differensial tənliyində nəzərə alsaq yazmaq olar:

$$\Delta \left\{ \left[\frac{1}{9K} \cdot k(s_0) + \frac{1}{3G} \cdot g(t_0^2) \right] \Delta F \right\} - \frac{1}{2G} \left[\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \cdot \frac{\partial^2 g(t_0^2)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 g(t_0^2)}{\partial y^2} - 2 \cdot \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \cdot \frac{\partial^2 g(t_0^2)}{\partial x \partial y} \right] = 0 \quad (I.1.51)$$

Qeyd etmək lazımdır ki, bir çox gərginliklərin konsentrasiyası məsələlərinin həllində **polyar koordinatlardan** (ρ, θ) istifadə olunması daha əlverişlidir.

Polyar koordinatlarla dekart koordinatlar arasında əlaqə ifadələrindən

$$x = \rho \cos \theta; \quad y = \rho \sin \theta; \quad \rho = \sqrt{x^2 + y^2}; \quad \operatorname{tg} \theta = \frac{y}{x} \quad (I.1.52)$$

istifadə edərək xüsusi törəmələr üçün yaza bilərik:

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial \rho} \frac{\partial \rho}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial x}; \quad \frac{\partial \rho}{\partial x} = \frac{\partial \sqrt{x^2 + y^2}}{\partial x} = \frac{x}{\rho} = \cos \theta$$

$$\frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial \rho} \frac{\partial \rho}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial y}; \quad \frac{\partial \rho}{\partial y} = \frac{y}{\rho} = \sin \theta;$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial x} = \frac{\partial \left(\arctg \frac{y}{x} \right)}{\partial x} = -\frac{y^2}{\rho^2} = -\frac{\sin \theta}{\rho}; \quad \frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{x}{\rho^2} = \frac{\cos \theta}{\rho}$$

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} = \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2}; \quad (\text{I.1.53})$$

Bu (I.1.53) ifadələrin köməyi ilə (I.1.51) differensial tənliyini belə də yazı bilərik:

$$\Delta \left\{ \left[\frac{1}{9K} \cdot k(s_0) + \frac{1}{3G} \cdot g(t_0^2) \right] \Delta F \right\} - \frac{1}{2G} \left[\left(\frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 F}{\partial \theta^2} + \right. \right.$$

$$\left. \left. + \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial F}{\partial \rho} \cdot \frac{\partial^2 g(t_0^2)}{\partial 2} \frac{\partial^2 F}{\partial \rho^2} \cdot \left(\frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 g(t_0^2)}{\partial \theta^2} + \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial g(t_0^2)}{\partial \rho} \right) \right] - \right.$$

$$\left. - 2 \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial^2 F}{\partial \rho \partial \theta} - \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial F}{\partial \theta} \right) \cdot \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial^2 g(t_0^2)}{\partial \rho \partial \theta} - \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial g(t_0^2)}{\partial \theta} \right) = 0; \quad (\text{I.1.54})$$

Göründüyü kimi, fiziki qeyrixətti elastiklik nəzəriyyəsinin müstəvi məsələlərinin həlli (I.1.54) və (I.1.48) differensial tənliklərinin inteqrallanmasına gətirilir. Hər iki differensial tənliklərdə $F(x, y) = F(\rho, \theta)$ gərginlik funksiyasıdır.

Onu da qeyd etmək lazımdır ki, (I.1.54) differensial tənliyində $k(s_0) = 1$ və $g(t_0^2) = 1$ qəbul etsək və (I.1.48) differensial tənliyində isə λ_{11} sabitindən başqa yerdə qalanlarını

sıfır olduğun qəbul etsək, hər iki differensial tənliklər, klassik elastiklik nəzəriyyəsindən məlum olan

$$\Delta\Delta F = 0 \quad (\text{I.1.55})$$

biharmonik tənliyinə gətirilər (yəni baxılan məsələ xətti elastiklik nəzəriyyəsindəki məsələyə çevrilər).

Hər iki halda (istər **O.Koşi**, **A.Qenki**, **Q.Kauderer** və i.a. nöqteyi nəzərinə əsaslanan (I.1.54) differensial tənliyin həllində, isrtərsə də **A.Qrin**, **J.Adqins** və i.a. alimlərin nöqteyi nəzərinə əsaslanan (I.1.48) differensial tənliyin həllində) sərhəd şərtləri, klassik elastiklik nəzəriyyəsindəki kimi müəyyən olunur.

Əgər (I.1.54) differensial tənliyinə daxil olan $k(s_0)$ və $g(t_0^2)$ funksiyalarını (I.1.29) və (I.1.30) kimi sıra şəklində götürsək, onda differensial tənliyin həlli həmçinin sərhəd şərtlərinin ödənilməsi çox ciddi riyazi çətinliklərlə qarşılaşır. Bir çox materiallar üzərində aparılan təcrübələr göstərir ki, orta gərginliklərlə (s_0), orta deformasiyalar (ε_0) arasında asılılıqları xətti qanuna yaxın ifadələrlə götürmək olar.

Ona görə də kiçik deformasiyalar üçün (I.1.29) ifadəsini konkret məsələləri həllində

$$k(s_0) \equiv 1 \quad (\text{I.1.56})$$

kimi götürürlər (kiçik – yəni az fiziki qeyri xətti elastiklik nəzəriyyəsi məsələləri). Toxunan gərginliklərin intevsivlik

funksiyası ($g(t_0^2)$) üçün isə ifadəsindəki (I.1.30) sıranın ilk iki həddi götürülür:

$$g(t_0^2) = 1 + g_2 \cdot t_0^2; \quad (\text{I.1.57})$$

Bu iki (I.1.56) və (I.1.57) xüsusi halda fiziki qeyrixətti məsələ üçün (I.1.54) differensial tənliyin həlli olduqca sadələşir.

Differensial tənliklərin həllinə aid mövcud ədəbiyyatlara istinadən, (I.1.54) və (I.1.48) differensial tənliklərin həlli (yəni inteqrallanması) üçün, $F(x, y)$ gərginlik funksiyasının kiçik parametrin qüvvət üstü sırası şəklində götürürlər:

$$F = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda F_n = F_0 + \lambda \cdot F_1 + \lambda^2 \cdot F_2 + \dots \quad (\text{I.1.58})$$

Götürülən kiçik α parametri (I.1.54) differensial tənlik üçün

$$\alpha = \lambda = \frac{K \cdot g_2}{3K + G} \cdot \frac{1}{G^2} \quad (\text{I.1.59})$$

(I.1.48) differensial tənlik üçün isə

$$\lambda = \frac{\lambda_{21}}{\lambda_{11} + \lambda_{12}} \quad (\text{I.1.60})$$

kimi ifadələrlə müəyyən olunur.

Gərginlik funksiyası F -in (I.1.58) sırası şəklində olan ifadəsini (I.1.54) və ya (I.1.48) differensial tənliklərində nəzərə alsaq və kiçik λ parametrinin eyni qüvvət üstü hədlərinin cəminin sıfıra bərabər olması şərtindən istifadə etsək, bu

differensial tənliklər hər biri n sayda differensial tənliklər sisteminə gətirilir. Bu tənliklərin birincisi (λ parametrinin sıfır qüvvətüslü hədlərdən əmələ gələn differensial tənlik) klassik elastiklik nəzəriyyəsinə uyğun gələn, xətti birincis. differensial tənlikdir. Sonrakı differensial tənliklər, xətti elastiklik nəzəriyyəsinə düzəlişlər (əlavələr) verir. Beləliklə hər iki halda (yəni istər (I.1.54) differensial tənlik, istərsə də (I.1.48) differensial tənlik olsun) alınan uyğun sistem differensial tənlikləri, yığcam şəkildə belə bir düstürlə ifadə etmək olar:

$$\Delta\Delta F^{(0)} = 0 \quad (I.1.61)$$

$$\Delta\Delta F^{(n)} + L^{(n)}[F^{(0)}, F^{(1)}, \dots, F^{(n-1)}] = 0 \quad (I.1.62)$$

Burada $L^{(n)}$ **xətti operator adlanıb**, hər bir differensial tənliyin özündən əvvəlki tənliyin həllindən alınan $F^{(0)}, F^{(1)}, F^{(2)} \dots F^{(n-1)}$ funksiyalarından və onların törəmələrindən ibarət olan ifadələrdir. Hər bir baxılan differensial tənlik həllindən alınan $F^{(n)}$ funksiyası özündən əvvəlkinə müəyyən düzəliş verir.

Ədəbiyyatdan məlumdur ki, xətti elastiklik nəzəriyyəsində (müstəvi məsələlərdə) gərginliklərin Eri funksiyası $F^{(0)}$ iki analitik funksiyalar $\varphi(z)$ və $\psi(z)$ vasitəsilə belə bir ifadə ilə müəyyən olunur [2,9,19,25,26,27,30,43,67]

$$F^{(0)} = \operatorname{Re} \left[\bar{Z} \cdot \varphi(z) + \int \psi(z) dz \right] \quad (\text{I.1.63})$$

Burada Re - simvolu onu göstərir ki, kvadrat mütərizə içindəki ifadənin həqiqi (real) hissəsinin götürmək lazımdır. Baxılan cismin (lövhə, silindr, prizmatik və i.a. şəklində olan cisimlər) sonlu və ya sonsuz olmasından və həmçinin neçərəbitəli oblasta malik olmasından asılı olaraq bu $\varphi(z)$ və $\psi(z)$ funksiyaları aşağıdakı kimi götürülür (bu barədə geniş məlumat olmaq üçün elastiklik nəzəriyyəsi sahəsində olan bir çox ədəbiyyata [2,26,43,67] baxmaq olar).

1.Sonlu bir rabitəli çoxbucaqlı kontura malik (bu kontur, çevrə, ellips, kvadrat, düzgün altıbucaqlı və i.a. formasında ola bilər) oblastlar üçün $\varphi(z)$ və $\psi(z)$ funksiyaları bu şəkildə axtarılır [2,26,43,67]:

$$\varphi(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{z}{A} \right)^k \cdot A_k ; \quad \psi(z) = \sum_{k=1}^{\infty} B_k \cdot \left(\frac{z}{A} \right)^k \quad (\text{I.1.64})$$

Burada

$$A_k = \sum_{n=k}^{\infty} \alpha_n \cdot \frac{a_{n-k}^{(n)}}{q} ; \quad B_k = \sum_{n=k}^{\infty} \beta_n \cdot \frac{a_{n-k}^{(n)}}{q}$$

2.Sonlu iki rabitəli oblastlar üçün requlyar $\varphi(z)$ və $\psi(z)$ funksiyaları belə götürülür [2,26,43,67]

$$\varphi(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \cdot \xi_1^{-k} + \sum_{k=0}^{\infty} A_k \left(\frac{z}{A} \right)^k ,$$

$$\psi(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k \cdot \xi_1^{-k} + \sum_{k=0}^{\infty} B_k \left(\frac{z}{A} \right)^k; \quad (\text{I.1.65})$$

Burada ξ_1 daxili konturun (L_1 - in) vahid çevrə ətrafına inikas funksiyasının $z = \omega(\xi_1)$ tərsi olan $\xi = \chi(z)$ funksiyadır. Bunlar barədə geniş məlumat üçün [51] ədəbiyyatlarına baxmaq olar.

Analitik funksiyaların (I.1.65) ifadələrində A_k və B_k əmsalları (I.1.64)- dəki kimi

$$A_k = \sum_{n=k}^{\infty} * a_n \cdot a_{\frac{n-k}{q}}^{(n)}; \quad B_k = \sum_{n=k}^{\infty} * b_n \cdot a_{\frac{n-k}{q}}^{(n)} \quad (\text{I.1.66})$$

(I.1.64) və (I.1.66) ifadələrinə daxil olan $a_n^{(k)}$ əmsalları hər bir baxılan konkret kontur üçün tapılıb cədvəl şəklində [51] ədəbiyyatlarında verilmişdir.[†] Ulduz işarəsi (I.1.66) sırasında növbəti həddə keçəndə indekslərin q (simmetriya oxlarının sayı – çoxbucaqlının tərəflərinin sayı) qədər artmasını göstərir.

İkirabitəli oblastlarda L_1 və L_2 konturlarının konsentrik olduqları nəzərdə tutulur.

[†] İstər bizim ölkəmizdə, istərsə də keçmiş SSRİ (indiki MDB) məkanında requlyar funksiyaları $-\varphi(z)$ və $\psi(z)$ funksiyalarını bir çox alimlər-tədqiqatçılar öz işlərində çox kobud şəkildə götürürdülər. Hərçənd ki, indi də belələri az deyil. Biz öz işlərimizdə bu funksiyaları dəqiq riyazi əməliyyatlara əsaslanan (I.1.64) və (I.1.65) şəkildə götürürük (elmi rəhbərim, dünya şöhrətli alim, mərhum D.İ.Şermanın məsləhəti ilə).

3.Çox rəbitəli sonlu oblastlar üçün analitik funksiyaları $\varphi(z)$ və $\psi(z)$ belə ifadələr şəklində axtarırlar [2,26,43,67]:

$$\begin{aligned}\varphi(z) &= \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cdot \left(\frac{z}{A}\right)^k + \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^{\infty} A_k^{(i)} \zeta_i^{-k} + \\ &+ \sum_{i=1}^n [\gamma_i \cdot z \cdot \ln(z - z_i) + \lambda_i \ln(z - z_i)]; \\ \psi(z) &= \sum_{k=1}^{\infty} B_k \cdot \left(\frac{z}{A}\right)^k + \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^{\infty} B_k^{(i)} \zeta_i^{-k} + \sum_{i=1}^n \varepsilon_i \cdot \ln(z - z_i); \quad (\text{I.1.67})\end{aligned}$$

Burada z_i sabitləri $L_i (i=1,2,\dots,n)$ konturları daxilində ixtiyari nöqtələrin koordinatlarını göstərir.

γ_i - həqiqi sabitlərdir, λ_i - kompleks sabitlərdir.

(I.1.67) ifadəsindəki ikiqat sıralar çox rəbitəli oblastın daxilindəki $i (i=1,2,\dots,n)$ sayda L_i konturlarından kənarında hər yerdə requlyar olan funksiyamı göstərir.

4.Sonsuz berrəbitəli oblastlar üçün $\varphi(z)$ və $\psi(z)$ analitik funksiyalar belə bir şəkildə axtarılır [2,26,43,67]:

$$\begin{aligned}\varphi(z) &= \varphi(\xi) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cdot \xi^{-k} \\ \psi(z) &= \psi(\xi) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \cdot \xi^{-k} \quad (\text{I.1.68})\end{aligned}$$

5.Sonsuz ikirabitəli oblastlar üçün requlyar funksiyalar $\varphi(z)$ və $\psi(z)$ aşağıdakı şəkildə axtarılır [2,26,43,67]:

$$\begin{aligned}\varphi(z) &= \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cdot \xi_1^{-k} + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \cdot \xi_2^{-k}; \\ \psi(z) &= \sum_{k=1}^{\infty} c_k \cdot \xi_1^{-k} + \sum_{n=1}^{\infty} d_n \cdot \xi_2^{-k}\end{aligned}\quad (\text{I.1.69})$$

ξ_1 və ξ_2 dəyişmələri sonsuz oblastı (S) daxildən məhdudlaşdıran L_1 və L_2 konturlarının inikas funksiyaları olan $z = \omega(\xi_1)$ və $z = \omega(\xi_2)$ funksiyalarının tərsi (əksi) olan $\xi_1 = \chi_1(z)$ və $\xi_2 = \chi_2(z)$ funksiyalardır.

Yuxarıda göstərilən (I.1.64) – (I.1.69) ifadələrində z kompleks dəyişən olduğundan aşağıda bir neçə çevirmə düsturlarını veririk ki, oxucu və ya tədqiqatçı başqa ədəbiyyata müraciət edib vaxt itirməsin.

Belə ki, $z = x + iy$ və onun qoşması olan $z = x - iy$ olduğundan yazmaq olar.

$$x = \frac{1}{2}(z + \bar{z}); \quad y = -\frac{i}{2}(z - \bar{z}) \quad (\text{I.1.70})$$

Xüsusi törəmələr:

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \cdot \frac{\partial \bar{z}}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial \bar{z}}$$

$$\frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \cdot \frac{\partial \bar{z}}{\partial y} = i \left(\frac{\partial}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \right) \quad (\text{I.1.71})$$

Bunların tərsi olan ifadələr (törəmələr):

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial z} &= \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial z} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \right); \\ \frac{\partial}{\partial \bar{z}} &= \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \bar{z}} + \frac{\partial}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right) \end{aligned} \quad (\text{I.1.72})$$

Laplas operatoru Δ isə, z kompleks dəyişənlərlə belə ifadə olunur

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} = 4 \frac{\partial^2}{\partial z \partial \bar{z}} \quad (\text{I.1.73})$$

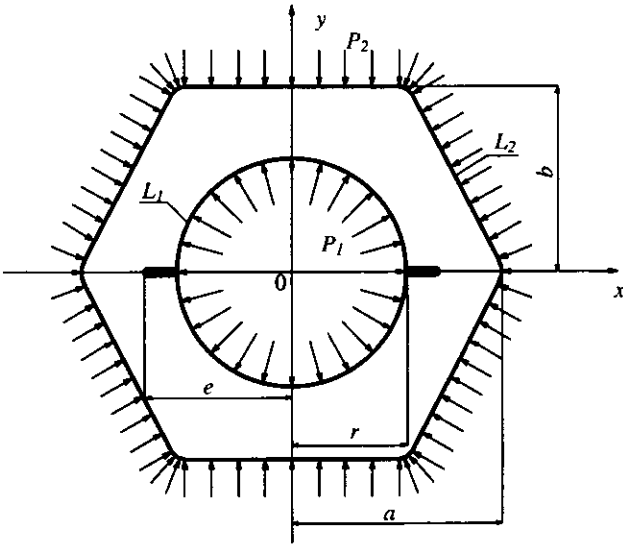
Yuxarıda deyilənlərə əsasən, hər hansı biharmonik tənliyi

$$\Delta \Delta f = 0$$

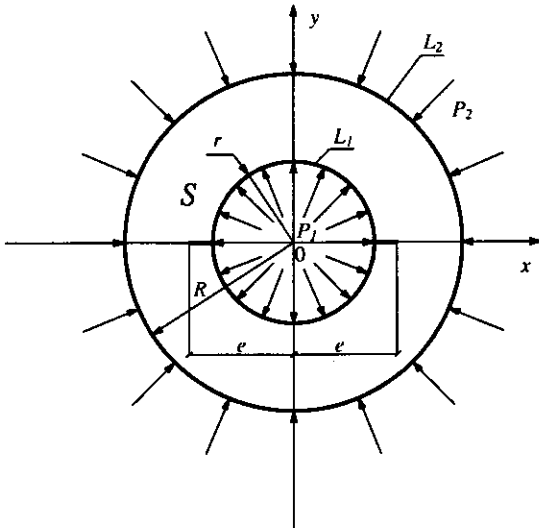
kompleks dəyişənlərlə aşağıdakı kimi ifadə etmək olar:

$$\Delta \Delta f = \frac{\partial^4 f}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 f}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 f}{\partial y^4} = 16 \frac{\partial^4 f}{\partial z^2 \cdot \partial(\bar{z})^2} = 0 \quad (\text{I.1.74})$$

Elastiklik nəzəriyyəsinin bütün məsələlərində konform inikas funksiyaların böyük və əsas rol oynadığını nəzərə alaraq, texnikada ən çox rast gələn oblastlar üçün $z = \omega(\xi)$ və onun tərsi $\xi = \chi(z)$ funksiyalar və uyğun konturlar üçün tapılmış $a_n^{(k)}$ əmsallarını aşağıda cədvəl şəklində veririk. (bax. cədvəl №1.1, №1.2)



Şek.1.1.



Şek.1.2.

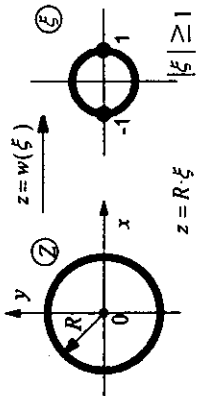
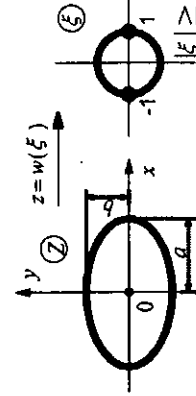
$a_n^{(1)}$ əmsalları

Cədvəl №1.1a

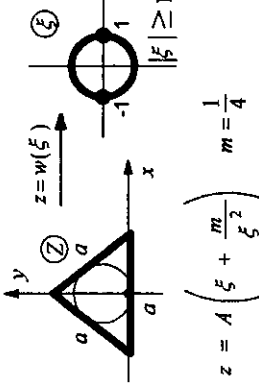
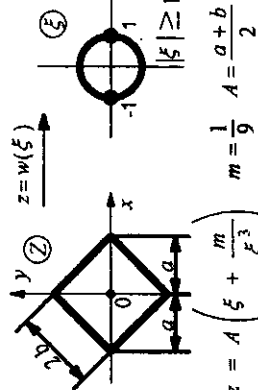
Kontur Əmsal	Ellips $q = 2$	Kvadrat $q = 4$	Ardtibucaqlı $q = 6$
$a_0^{(1)}$	1	1	1
$a_1^{(1)}$	$-m$	$-m$	$-m$
$a_2^{(1)}$	$-2m^2$	$-3m^2$	$-5m^2$
$a_3^{(1)}$	$-5m^3$	$-15m^3$	$-40m^3$
$a_4^{(1)}$	$-14m^4$	$-92m^4$	$-385m^4$
$a_5^{(1)}$	$-42m^5$	$-612m^5$	$-4095m^5$

Konform inikas və onların əksi olan funksiyalar cədvəli

Cədvəl №1.1

Konturlar	Inikas funksiyalar	Inikas funksiyalara əks olan funksiyalar $\xi = \chi(z)$
1. R radiuslu çevrə	 <p style="text-align: center;">$z = R \cdot \xi$</p>	$\xi = \frac{z}{R}$
2. Yarım-oxları a və b olan ellips	 <p style="text-align: center;">$z = A \left(\xi + \frac{m}{\xi} \right)$ $A = \frac{a+b}{2}$ $m = \frac{a-b}{a+b}$</p>	$\xi = \frac{1}{2A} \left[z + \sqrt{z^2 - 4m^2} \right] =$ $= \frac{z}{A} \sum_{n=0}^{\infty} a_n \left(\frac{A}{z} \right)^{2n}$ <p style="text-align: right;">$a_n = a_n^{(1)}$ əmsalları cədvəl № verilib</p>

Cədvəl №1.1

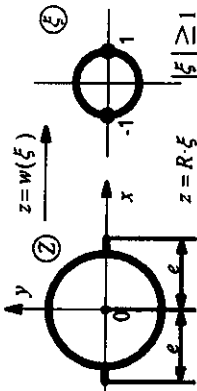
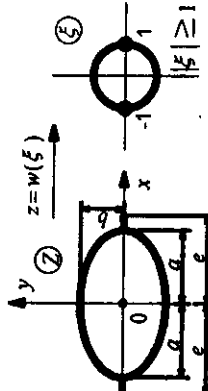
<p>3. Bərabər- refli üçbucaq</p>	 <p> $z = A \left(\xi + \frac{m}{\xi^2} \right) \quad m = \frac{1}{4}$ </p>	$\xi = \frac{z}{A} \sum_{n=0}^{\infty} a_n \left(\frac{A}{z} \right)^{3n}$ <p> $a_0 = 1; a_1 = -m; a_2 = -2m^2$ $a_3 = -7m^2; a_4 = -30m^4$ $a_5 = 56m^2$ </p>
<p>4. Kvadrat</p>	 <p> $z = A \left(\xi + \frac{m}{\xi^3} \right) \quad m = \frac{1}{9} \quad A = \frac{a+b}{2}$ </p>	$\xi = \frac{z}{A} \sum_{n=0}^{\infty} a_n \left(\frac{A}{z} \right)^{4n}$ <p> $a_n^{(1)}$ əmsalları cədvəl № verilib </p>

Cədvəl №1.1

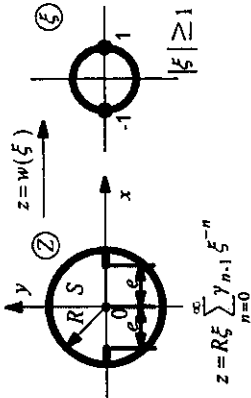
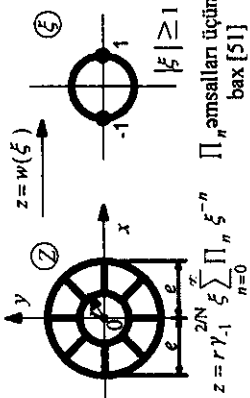
<p>5. Beşbucaqlı</p>	<p> $z = A \left(\xi + \frac{m}{\xi^4} \right)$ $m = \frac{1}{16}$ $A = \frac{a+b}{2}$ $\xi > 1$ </p>	$\xi = \frac{z}{A} \sum_{n=0}^{\infty} a_n \left(\frac{A}{z} \right)^{5n}$ <p> $a_0 = 1; a_1 = -m; a_2 = -4m^2$ $a_3 = -34m^2; a_4 = -134m^4$ $a_5 = 2184m^2$ </p>
<p>6. Altıbucaqlı</p>	<p> $z = A \left(\xi + \frac{m}{\xi^5} \right)$ $m = \frac{1}{25}$ $A = \frac{a+b}{2}$ $\xi > 1$ </p>	$\xi = \frac{z}{A} \sum_{n=0}^{\infty} a_n \left(\frac{A}{z} \right)^{6n}$ <p> a_n əmsalları cədvəl №6 verilib </p>

<p>7. Romb</p>	<p> $z = A \left(\xi + \frac{m_1}{\xi} + \frac{m_2}{\xi^3} \right) \quad A = \frac{a+b'}{2}$ $m_1 = 1 - 4\varepsilon \quad m_2 = \frac{4\varepsilon}{3}(1-2\varepsilon)$ $0 \leq \varepsilon \leq \frac{1}{4} \quad 0 \leq \frac{b'}{a} \leq 1$ </p>	$\xi = \frac{z}{A} \sum_{n=0}^{\infty} a_n \left(\frac{A}{z} \right)^{2n}$ <p> $a_0 = 1; a_1 = -\varepsilon;$ $a_2 = -\varepsilon^2 - \varepsilon^3; a_3 = -2\varepsilon^3$ $\varepsilon = \frac{1}{8}$ </p>
<p>8. Svod (Arka) šakilli kontur</p>	<p> $z = A \xi \sum_{n=0}^{\infty} a_n \xi^{-n}; \quad A = \frac{a+b}{2}$ $a_0 = 1; a_1 = 0,14153; a_2 = 0,06795$ $a_3 = -0,10130; a_4 = 0,03873; a_5 = 0,00194$ </p>	$\xi = \frac{z}{A} \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n \left(\frac{A}{z} \right)^n$ <p> $\lambda_0 = 1; \lambda_1 = 0; \lambda_2 = -\varepsilon$ $\lambda_3 = -\varepsilon^2; \lambda_4 = -\varepsilon^2 - \varepsilon^4$ $\lambda_5 = -3\varepsilon^2; \lambda_6 = -2\varepsilon^3$ $0 \leq \varepsilon \leq 1$ </p>

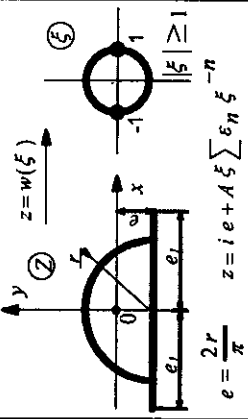
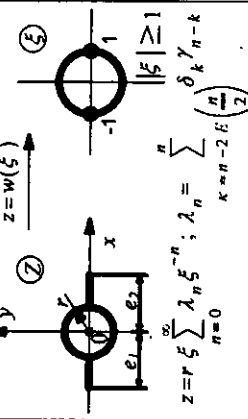
Cədvəl №1.1

<p>9. İki çatı olan R radiuslu çevre</p>	 <p> $z = r\xi \sum_{n=0}^{\infty} \gamma_{n-1} \xi^{-n}$ γ_{n-1} əmsalları üçün bax [51] </p>	$\xi = \frac{z}{R} \sum_{n=0}^{\infty} \delta_{n-1} \left(\frac{r}{z} \right)^n$ <p>δ_{n-1} əmsalları üçün bax [51]</p>
<p>10. İki çatı malik olan ellips</p>	 <p> $z = A\xi \prod_{n=0}^{\infty} \Pi_n \xi^{-n}$; $A = \frac{a+b}{2}$ </p> <p> $\Pi_n = \sum_{k=0}^n \gamma_{k-1} \Gamma_{n-k}$ </p>	$\xi = \frac{z}{A} \sum_{n=0}^{\infty} V_n \left(\frac{A}{z} \right)^n$ $V_n = \sum_{\nu=n-2}^n \alpha_{\nu}^* H_{\nu} \alpha_{n-\nu} \frac{1}{2}$

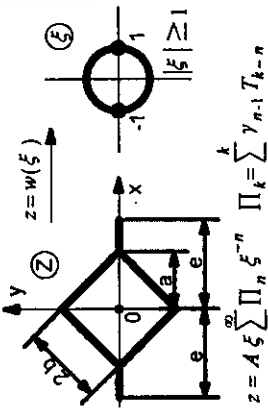
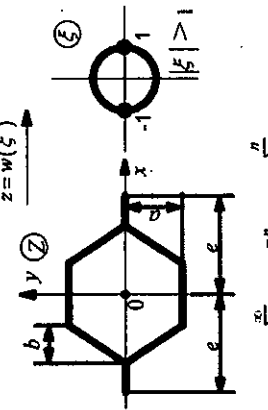
Cədvəl №1.1

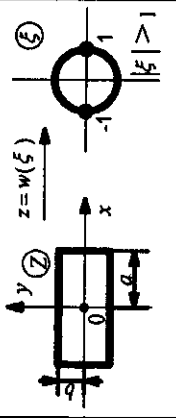
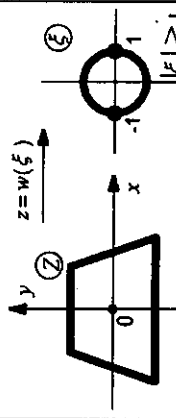
<p>11. R radiuslu və iki daxili çata malik olan dairə</p>	 <p style="text-align: center;">$z = R \xi \prod_{n=0}^{\infty} \xi^{n+1} \xi^{-n}$</p>	$\xi = \frac{z}{R} \sum_{k=0}^{\infty} \delta_{k-1} \left(\frac{R}{z} \right)^k$
<p>12. N sayda radial çata malik olan çevrə</p>	 <p style="text-align: center;">$z = r \xi^{2N} \prod_{n=0}^{N-1} \xi^{2n+1} \xi^{-2n}$</p>	$\xi = \chi(z) = \frac{z}{r} \delta_{-1}^{2N} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{r}{z} \right)^k E_n$ <p>E_n əmsalləri üçün bax [51]</p>

Cədvəl №1.1

<p>13. R radiuslu yarımdairə və iki çata malik olan kontur</p>	 <p>$e = \frac{2r}{\pi}$ $z = ie + A \xi \sum \varepsilon_n \xi^{-n}$</p>	$\xi = \chi(z) = \frac{z - ie}{A} x$ $x \sum_{n=0}^{\infty} q_n \left(\frac{A}{z - ie} \right)^n$ <p>ε_n və q_n əmsalları üçün bax [51]</p>
<p>14. r radiuslu və iki müxtə lif çata malik olan daire</p>	 <p>$z = r \xi \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n \xi^{-n}$; $\lambda_n = \sum_{k=n-2}^n \delta_k \gamma_{n-k}$</p> <p>$\delta_k$ və γ_n əmsalları [51] kitabında verilir.</p>	$\xi = \chi(z) = \frac{z}{r} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{r}{z} \right)^n E_n$ $E_n = \sum_{k=n-2}^n h_k \varepsilon_{n-k} \left(\frac{n}{2} \right)$ <p>h_k və ε_n üçün bax [51]</p>

Cədvəl №1.1

<p>15. İki çata malik olan kvadrat kontur</p>	 <p style="text-align: center;">$z = A \xi \prod_{n=0}^{\infty} \xi^{-n} \prod_{k=0}^n \gamma_{k-1} T_{k-n}$</p>	$\xi = \chi(z) = \frac{z}{A} \sum_{n=0}^{\infty} V_n \left(\frac{A}{z} \right)^n$ $V_n = \sum_{k=0}^n * H_v \alpha_{\nu-n} \frac{\nu-n}{4}$ <p>T_n və H_v əmsalları üçün bax [51]</p>
<p>16. İki çata malik altıbucaqlı</p>	 <p style="text-align: center;">$z = A \xi \prod_{n=0}^{\infty} \xi^{-n} \prod_{k=0}^n \gamma_{k-1} T_{n-k}$</p>	$\xi = \chi(z) = \frac{z}{A} \sum_{n=0}^{\infty} V_n \left(\frac{A}{z} \right)^n$ $V_n = \sum_{k=0}^n * H_v \alpha_{\nu-n} \frac{\nu-n}{4}$ <p>T_n və H_v əmsalları üçün bax [51]</p>

<p>17. Tərəfləri a və b olan dördbucaqlı</p>	 <p> $z = A \xi \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n \xi^{-2n}$; $A = \frac{a+b}{2}$; $a/b = 5$ $q_0 = 1$; $q_1 = 0,643$; $q_2 = -0,098$; $q_3 = -0,038$; $q_4 = -0,011$ </p>	$\xi = \chi(z) = \frac{z}{A} \sum a_n \left(\frac{A}{z} \right)^{2n}$ <p>a_n üçün bax [51]</p>
<p>i8. Trapesiya</p>	 <p> $z = A \xi \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n \xi^{-n}$ $\varepsilon_0 = 1$; $\varepsilon_1 = 0,0086$; $\varepsilon_2 = 0,0167$; $\varepsilon_3 = 0,0583$; $\varepsilon_4 = 0,1405$; $\varepsilon_5 = -0,109$ </p>	$\xi = \chi(z) = \frac{z}{A} \sum a_n \left(\frac{A}{z} \right)^n$ <p> $a_0 = 1$; $a_1 = -\varepsilon$; $a_2 = -\varepsilon^2$ $a_3 = -\varepsilon^2 - \varepsilon^3$; $a_4 = -3\varepsilon^3$ $a_5 = -2\varepsilon^3$ $0 \leq \varepsilon \leq \frac{1}{4}$ </p>

$a_n^{(k)}$ əmsalları

Cədvəl №1.2

k	2	3	4	5	6	7	8	9	10
n									
1	$2a_0a_1$	$3a_0^2a_1$	$4a_0^3a_1$	$5a_0^4a_1$	$6a_0^5a_1$	$7a_0^6a_1$	$8a_0^7a_1$	$9a_0^8a_1$	$10a_0^9a_1$
2	$2a_0a_2 + a_1^2$	$3a_0^2a_2 + 3a_0a_1^2$	$4a_0^3a_2 + 6a_0^2a_1^2$	$5a_0^4a_2 + 10a_0^3a_1^2$	$6a_0^5a_2 + 15a_0^4a_1^2$	$7a_0^6a_2 + 21a_0^5a_1^2$	$8a_0^7a_2 + 28a_0^6a_1^2$	$9a_0^8a_2 + 36a_0^7a_1^2$	$10a_0^9a_2 + 45a_0^8a_1^2$
3	$2a_0a_3 + 2a_1a_2$	$3a_0^2a_3 + 4a_0a_1a_2 + a_1^3$	$4a_0^3a_3 + 10a_0^2a_1a_2 + 4a_0a_1^3$	$5a_0^4a_3 + 18a_0^3a_1a_2 + 10a_0^2a_1^3$	$6a_0^5a_3 + 28a_0^4a_1a_2 + 20a_0^3a_1^3$	$7a_0^6a_3 + 40a_0^5a_1a_2 + 35a_0^4a_1^3$	$8a_0^7a_3 + 54a_0^6a_1a_2 + 56a_0^5a_1^3$	$9a_0^8a_3 + 70a_0^7a_1a_2 + 84a_0^6a_1^3$	$10a_0^9a_3 + 88a_0^8a_1a_2 + 120a_0^7a_1^3$
4	$2a_0a_4 + 2a_1a_3 + a_2^2$	$3a_0^2a_4 + 6a_0a_1a_3 + 3a_1^2a_2 + 3a_0a_2^2$	$4a_0^3a_4 + 12a_0^2a_1a_3 + 30a_0^2a_1^2a_2 + 10a_0^3a_2^2 + 5a_0a_1^4$	$5a_0^4a_4 + 20a_0^3a_1a_3 + 30a_0^2a_1^2a_2 + 10a_0^3a_2^2 + 5a_0a_1^4$	$6a_0^5a_4 + 30a_0^4a_1a_3 + 60a_0^3a_1^2a_2 + 15a_0^4a_2^2 + 15a_0^3a_1^4$	$7a_0^6a_4 + 42a_0^5a_1a_3 + 105a_0^4a_1^2a_2 + 21a_0^5a_2^2 + 35a_0^4a_1^4$	$8a_0^7a_4 + 56a_0^6a_1a_3 + 170a_0^5a_1^2a_2 + 28a_0^6a_2^2 + 76a_0^5a_1^4$	$9a_0^8a_4 + 72a_0^7a_1a_3 + 252a_0^6a_1^2a_2 + 132a_0^7a_2^2 + 36a_0^6a_1^4$	$10a_0^9a_4 + 90a_0^8a_1a_3 + 358a_0^7a_1^2a_2 + 216a_0^8a_2^2 + 45a_0^7a_1^4$

və i.a.

§1.2. Mərkəzi dairəvi deşiyə və iki düzxətlə çata malik çoxbucaqlı lövhənin kiçik fiziki qeyrixətti halda gərginlik vəziyyəti

Yuxarıda §1.1 deyildiyi kimi, əgər F gərginlik funksiyasının kiçik parametərə görə qurulmuş (I.1.58) sırasını (I.1.51) differensial tənliyində nəzərə alsaq ilk üç yaxınlaşma (sıfırıncı, birinci və ikinci) üçün aşağıdakı differensial tənlikləri alarıq [38,53]

$$\Delta\Delta F^{(0)} = 0; \quad (I.2.1)$$

$$\Delta\Delta F^{(1)} + L_1[F^{(0)}] = 0 \quad (I.2.2)$$

$$\Delta\Delta F^{(2)} + L_2[F^{(0)}; F^{(1)}] = 0 \quad (I.2.3)$$

Burada $L_1[F^{(0)}]$, $L_2[F^{(0)}, F^{(1)}]$, qeyrixətti operatorlar olub, aşağıdakı ifadələrlə müəyyən olunur:

$$\begin{aligned} L_1[F^{(0)}] = & F_{\rho\rho\rho\rho}^{(0)} \cdot \left[2 \left(F_{\rho\rho}^{(0)} - \frac{1}{\rho} F_{\rho}^{(0)} - \right. \right. \\ & \left. \left. - \frac{1}{\rho^2} F_{\theta\theta}^{(0)} \right) \cdot F_{\rho\rho}^{(0)} + \left(\frac{1}{\rho} F_{\rho}^{(0)} + \frac{1}{\rho^2} F_{\theta\theta}^{(0)} \right)^2 \right] + \\ & \frac{2}{\rho^2} F_{\rho\rho}^{(0)} \left(\frac{1}{\rho} F_{\rho}^{(0)} + \frac{1}{\rho^2} F_{\theta\theta}^{(0)} \right) \cdot F_{\rho\rho}^{(0)} + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{\rho^4} F_{\theta\theta\theta\theta}^{(0)} \cdot \left[F_{\rho\rho}^{(0)} \cdot \left(F_{\rho\rho}^{(0)} - \frac{2}{\rho} F_{\rho}^{(0)} - \frac{2}{\rho^2} F_{\theta\theta}^{(0)} \right) + \right. \\
& + 2 \left(\frac{1}{\rho} F_{\rho}^{(0)} + \frac{1}{\rho^2} F_{\theta\theta}^{(0)} \right)^2 \left. \right] + \frac{2}{\rho^2} \left(F_{\rho\rho\theta}^{(0)} \right)^2 F_{\rho\rho}^{(0)} + \\
& + \left(F_{\rho\rho\rho}^{(0)} \right)^2 \cdot 2 \left(F_{\rho\rho}^{(0)} - \frac{1}{\rho} F_{\rho}^{(0)} - \frac{1}{\rho^2} F_{\theta\theta}^{(0)} \right) + \\
& + \frac{2}{\rho^4} \cdot \left(F_{\rho\theta\theta}^{(0)} \right)^2 \cdot \left(\frac{1}{\rho} \cdot F_{\rho}^{(0)} + \frac{1}{\rho^2} \cdot F_{\theta\theta}^{(0)} \right) - \\
& - \frac{2}{\rho^6} \cdot \left(F_{\theta\theta\theta\theta}^{(0)} \right)^2 \cdot \left(F_{\rho\rho}^{(0)} - \frac{2}{\rho} \cdot F_{\rho}^{(0)} - \frac{2}{\rho^2} F_{\theta\theta}^{(0)} \right) + \\
& \frac{2}{\rho^2} \cdot F_{\rho\rho\rho}^{(0)} \cdot F_{\rho\theta\theta}^{(0)} \cdot \left(\frac{1}{\rho} \cdot F_{\rho}^{(0)} + \frac{1}{\rho^2} \cdot F_{\theta\theta}^{(0)} \right) + \\
& + \frac{2}{\rho^4} \cdot F_{\rho\theta\theta}^{(0)} \cdot F_{\theta\theta\theta}^{(0)} \cdot F_{\rho\rho}^{(0)} - \frac{2}{\rho} F_{\rho\rho\rho}^{(0)} \left[-\frac{2}{\rho} \cdot F_{\rho\rho}^{(0)} \cdot F_{\rho}^{(0)} - \right. \\
& - \frac{2}{\rho^2} \cdot F_{\rho}^{(0)} \cdot F_{\theta\theta}^{(0)} + \frac{1}{\rho^2} \cdot \left(F_{\rho}^{(0)} \right)^2 + \frac{3}{\rho^3} F_{\rho}^{(0)} \cdot F_{\theta\theta}^{(0)} \left. \right] - \\
& - \frac{2}{\rho^3} F_{\rho\rho\theta}^{(0)} \cdot F_{\rho\rho}^{(0)} \cdot F_{\rho\theta}^{(0)} + \frac{2}{\rho^3} \cdot F_{\rho\theta\theta}^{(0)} \cdot \left[\left(F_{\rho,\rho}^{(0)} \right)^2 - \frac{2}{\rho} \cdot F_{\rho}^{(0)} F_{\rho\rho}^{(0)} + \right. \\
& + \frac{2}{\rho^3} F_{\rho}^{(0)} \cdot F_{\theta\theta}^{(0)} - \frac{2}{\rho^4} \cdot \left(F_{\theta\theta}^{(0)} \right)^2 - \frac{2}{\rho^2} F_{\rho\rho}^{(0)} \cdot F_{\theta\theta}^{(0)} \left. \right] + \\
& + \frac{2}{\rho^4} \cdot F_{\theta\theta\theta}^{(0)} \cdot \left[-\frac{2}{\rho} \cdot F_{\rho\rho}^{(0)} \cdot F_{\rho\theta}^{(0)} + F_{\rho\rho}^{(0)} \cdot \left(\frac{1}{\rho^2} \cdot \Phi_{\theta\theta}^{(0)} + \frac{1}{\rho} \cdot \Phi_{\rho}^{(1)} \right) \right] +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{4}{\rho^2} \cdot F_\rho^{(0)} \cdot F_{\rho\theta}^{(0)} + \frac{4}{\rho^3} \cdot F_{\rho\theta}^{(0)} \cdot F_{\theta\theta}^{(0)} \Big] + \\
& + \frac{1}{\rho^2} (F_{\rho\rho}^{(0)})^3 - \frac{3}{\rho^3} \cdot F_\rho^{(0)} \cdot (F_{\rho\rho}^{(0)})^2 + \frac{2}{\rho^4} F_{\rho\rho}^{(0)} \cdot (F_\rho^{(0)})^2 - \\
& - \frac{4}{\rho^4} \cdot (F_{\rho\rho}^{(0)})^2 \cdot F_{\theta\theta}^{(0)} - \frac{2}{\rho^4} \cdot F_{\rho\rho}^{(0)} \cdot (F_{\rho\theta}^{(0)})^2 + \frac{6}{\rho^5} \cdot F_\rho^{(0)} \cdot F_{\rho\rho}^{(0)} \cdot F_{\theta\theta}^{(0)} + \\
& + \frac{4}{\rho^5} \cdot F_\rho^{(0)} \cdot (F_{\rho,\theta}^{(0)})^2 + \frac{4}{\rho^6} F_{\rho\rho}^{(0)} (F_{\theta\theta}^{(0)})^2 + \frac{2}{\rho^6} \cdot (F_\rho^{(0)})^2 \cdot F_{\theta\theta}^{(0)} + \\
& + \frac{4}{\rho^8} \cdot (F_{\theta\theta}^{(0)})^3 + \frac{4}{\rho^6} \cdot (F_{\rho\theta}^{(0)})^2 \cdot F_{\theta\theta}^{(0)} + \frac{6}{\rho^7} \cdot F_\rho^{(0)} \cdot (F_{\theta\theta}^{(0)})^2; \\
L_2[F^{(0)}, F^{(1)}] = & \frac{2}{3} [\Delta\Phi^{(0)} \cdot \Delta F^{(1)} + \Phi^{(0)} \cdot \Delta\Delta F^{(1)} + \\
& + 2\Phi_\rho^{(0)} (\Delta F^{(1)})_\rho + 2\Phi_\theta^{(0)} (\Delta F^{(1)})_\theta + \Delta\Phi^{(1)} \cdot \Delta F^{(0)} + \\
& + 2\Phi_\rho^{(1)} (\Delta F^{(0)})_\rho + 2\Phi_\theta^{(1)} (\Delta F^{(0)})_\theta] - \left[\Phi_{\rho\rho}^{(0)} \left(\frac{1}{\rho^2} \cdot F_{\theta\theta}^{(1)} + \frac{1}{\rho} \cdot F_\rho^{(1)} \right) + \right. \\
& + \Phi_{\rho\rho}^{(1)} \left(\frac{1}{\rho^2} \cdot F_{\theta\theta}^{(0)} + \frac{1}{\rho} \cdot F_\rho^{(0)} \right) + F_{\rho\rho}^{(1)} \cdot \left(\frac{1}{\rho^2} \cdot \Phi_{\theta\theta}^{(0)} + \frac{1}{\rho} \cdot \Phi_\rho^{(0)} \right) + \\
& \left. + F_{\rho\rho}^{(0)} \cdot \left(\frac{1}{\rho^2} \cdot \Phi_{\theta\theta}^{(1)} + \frac{1}{\rho} \cdot \Phi_\rho^{(1)} \right) \right] + \\
& + 2 \left[\left(\frac{1}{\rho} \cdot \Phi_{\rho\theta}^{(0)} - \frac{1}{\rho^2} \cdot \Phi_\theta^{(0)} \right) \cdot \left(\frac{1}{\rho} \cdot F_{\rho\theta}^{(1)} - \frac{1}{\rho^2} \cdot F_\theta^{(1)} \right) + \right. \\
& \left. + \left(\frac{1}{\rho} \cdot \Phi_{\rho\theta}^{(1)} - \frac{1}{\rho^2} \cdot \Phi_\theta^{(1)} \right) \cdot \left(\frac{1}{\rho} \cdot F_{\rho\theta}^{(0)} - \frac{1}{\rho^2} \cdot F_\theta^{(0)} \right) \right]; \tag{I.2.4}
\end{aligned}$$

Harada ki, bu əvəzləmələr edilib:

$$\begin{aligned}\Phi^{(0)}(\rho, \theta) = & F_{\rho\rho}^{(0)} \cdot \left(F_{\rho\rho}^{(0)} - \frac{1}{\rho} \cdot F_{\rho}^{(0)} - \frac{1}{\rho^2} \cdot F_{\theta\theta}^{(0)} \right) + \\ & + F_{\rho}^{(0)} \left(\frac{1}{\rho^2} \cdot F_{\rho}^{(0)} + \frac{2}{\rho^3} \cdot F_{\theta\theta}^{(0)} \right) + 3F_{\rho\theta}^{(0)} \cdot \left(\frac{1}{\rho^2} \cdot F_{\rho\theta}^{(0)} - \frac{2}{\rho^3} \cdot F_{\theta}^{(0)} \right) + \\ & + \frac{1}{\rho^4} \left(F_{\theta\theta}^{(0)} \right)^2 + \frac{3}{\rho^4} \cdot \left(F_{\theta}^{(0)} \right)^2;\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Phi^{(1)}(\rho, \varphi) = & 2F_{\rho\rho}^{(0)} \cdot F_{\rho\rho}^{(1)} - \frac{1}{\rho} \left(F_{\rho\rho}^{(0)} \cdot F_{\rho}^{(1)} + F_{\rho\rho}^{(1)} \cdot F_{\rho}^{(0)} \right) + \\ & + \frac{1}{\rho^2} \left(2F_{\rho}^{(0)} \cdot F_{\rho}^{(1)} - F_{\rho\rho}^{(0)} \cdot F_{\theta\theta}^{(1)} + F_{\rho\rho}^{(1)} \cdot F_{\theta\theta}^{(0)} + 6F_{\rho\theta}^{(0)} \cdot F_{\rho\theta}^{(1)} \right) + \\ & + \frac{2}{\rho^3} \left(F_{\rho}^{(0)} \cdot F_{\theta\theta}^{(1)} + F_{\rho}^{(1)} \cdot F_{\theta\theta}^{(0)} - 3F_{\rho\theta}^{(1)} \cdot F_{\theta}^{(0)} - 3F_{\rho\theta}^{(0)} \cdot F_{\theta}^{(1)} \right) + \\ & + \frac{1}{\rho^4} \cdot \left(2F_{\theta\theta}^{(0)} \cdot F_{\theta\theta}^{(1)} + 6F_{\theta}^{(0)} \cdot F_{\theta}^{(1)} \right);\end{aligned}$$

Burada $F^{(0)}$ - sıfırıncı yaxınlaşmadakı gərginlik funksiyasıdır və bu uyğun məsələ üçün xətti elastiklik nəzəriyyəsindən məlum olan gərginlik funksiyasıdır (Eri funksiyasıdır).

Çoxbucaqlı iki rabitəli lövhələr üçün bu $F^{(0)}$ funksiyası [2,43,26,53,67] işlərinə əsasən aşağıdakı düstürlə müəyyən olunur (lövhə daxilədən p_1 və xaricədən p_2 bərabər paylanmış hidrostatik təzyiqlə məruz qalır) (şək.1.1).

$$F^{(0)} = \operatorname{Re} \left[\bar{z} \cdot \varphi(z) + \int \psi(z) dz \right] \quad (\text{I.2.5})$$

Bu ifadədə analitik $\varphi(z)$ və $\psi(z)$ funksiyalarının

$$\begin{aligned} \varphi(z) &= \sum_{\nu=1}^{\infty} H_1(\nu) \cdot \left(\frac{r}{z}\right)^{\nu} + \sum_{k=0}^{\infty} b_k \cdot \left(\frac{z}{A}\right)^k \\ \psi(z) &= \sum_{\nu=1}^{\infty} H_2(\nu) \cdot \left(\frac{r}{z}\right)^{\nu} + \sum_{k=0}^{\infty} B_k \cdot \left(\frac{z}{A}\right)^k \end{aligned} \quad (\text{I.2.6})$$

kimi olduqlarını nəzərə alsaq, yazma bilərik: (z dəyişənindən polyar koordinat sisteminə $(\rho; \theta)$ keçib $z = \rho e^{i\theta}$ və $\bar{z} = \rho e^{-i\theta}$ olduğun nəzərə alsaq):

$$\begin{aligned} F^{(0)}(\rho; \theta) &= \sum_{k=1}^{\infty} \left[H_1(k) \cdot r^k \cdot \rho^{1-k} \cdot \varepsilon_1 \cdot \cos(1+k)\theta + \right. \\ &+ b_k \cdot A^{-k} \cdot \rho^{1+k} \cdot \varepsilon_2 \cdot \cos(k-1)\theta + H_2(1) \cdot r \cdot \ln \rho + \\ &+ H_2(k) \cdot r^k \cdot \rho^{1-k} \cdot \varepsilon_2 / (1-k) \cdot \cos(k-1)\theta + \\ &\left. + B_k \cdot A^{-k} \cdot \rho^{k+1} \cdot \frac{\varepsilon_1}{1+k} \cdot \cos(k+1) \cdot \theta \right]; \end{aligned} \quad (\text{I.2.7})$$

Burada aşağıdakı əvəzləmələr edilib [26]

$$H_1(\nu) = \sum_{k=0}^{\nu} * \alpha_k \cdot \delta_{-1}^{-k} \cdot l_{\nu-k}^{(k)}; \quad H_2(\nu) = \sum_{k=0}^{\nu} * d_k \cdot \delta_{-1}^{-k} \cdot l_{\nu-k}^{(k)};$$

Bütün $l_n^{(k)}$ əmsalları $l_n^{(k)} + \sum_{n_1=1}^n l_{n-n_1}^{(k)} \cdot g_{n_1}^{(k)} = 0$ şərtindən tapılır.

$$g_n^{(k)} = \sum_{n_1=0}^n g_{n_1}^{(k)} \cdot g_{n-n_1}^{(k-1)}; \quad g_n^{(k)} = \frac{\delta_{n-1}}{\delta_{-1}}$$

$$\alpha = \frac{e^2 + r^2}{2er}; \quad e \geq r \text{ v} \alpha \geq 1. \quad (I.2.8)$$

$$\delta_{n-1} = \sum_{k=0}^v * 2 \cdot \varepsilon \cdot (-1)^{k/2} \cdot C_{1/2}^{k/2} \cdot \left(-\frac{1}{2\alpha}\right)^{1-k} \cdot C_{1-k}^{\frac{n-k}{2}};$$

Bu ifadələrdə * ulduz işarəsi onu göstərir ki, cəm işarələrində növbəti həddə keçdikdə, toplananların indeksləri iki-iki dəyişir. $\pm e$ daxili L_1 konturunun (r radiuslu çevrənin) malik olduğu düzxətli çatın qurtaracaq nöqtələrinin koordinatıdır.

$$\varepsilon = \begin{cases} 1 & \text{əgər } n=0 \text{ olsa} \\ 1/2 & \text{əgər } n \neq 0 \text{ olsa} \end{cases}$$

$$\varepsilon_1 = \begin{cases} 0 & \text{əgər } k \neq q-1; 2q-1; \dots \\ 1 & \text{əgər } k = q-1; 2q-1 \dots \end{cases}$$

$$\varepsilon_2 = \begin{cases} 0 & \text{əgər } k \neq 1; q+1; 2q+1 \dots \\ 1 & \text{əgər } k = 1; q+1; 2q+1 \dots \end{cases}$$

Burada $q = N$ - çoxbucaqlının tərəfləri (simmetriya oxları) sayıdır.

Baxılan halda sıfırıncı yaxınlaşmada sərhəd şərtləri aşağıdakı kimidir.

-daxili L_1 konturu üzərində (r radiuslu çevrə və ondan çıxan iki düzxətli çat)

$$\sigma_{\rho}^{(0)} \Big|_{\rho=t_1} = \left[\frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial F^{(0)}}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 F^{(0)}}{\partial \theta^2} \right]_{\rho=t_1} = -P_1$$

-xarici L_2 konturu üzərində (düzgün çoxbucaqlı)

$$\sigma_{\rho}^{(0)} \Big|_{\rho=t_2} = \left[\frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial F^{(0)}}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 F^{(0)}}{\partial \theta^2} \right]_{\rho=t_2} = -P_2 \quad (I.2.9)$$

Sonrakı yaxınlaşmalar üçün (istər birinci, istərsədə ikinci yaxınlaşma olsun) sərhəd şərtləri belə olar:

$$\sigma_{\rho}^{(1)} \Big|_{\rho=t_1} = \left[\frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial F^{(1)}}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 F^{(1)}}{\partial \theta^2} \right]_{\rho=t_1} = 0$$

$$\sigma_{\rho}^{(1)} \Big|_{\rho=t_2} = \left[\frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial F^{(1)}}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 F^{(1)}}{\partial \theta^2} \right]_{\rho=t_2} = 0 \quad \text{və i.a.} \quad (I.2.10)$$

Bu işarələrdə t_1 və t_2 -uyğun olaraq L_j ($j=1;2$) konturlarının nöqtələrinin affiksləridir.

Sonrakı (I.2.2) differensial tənliyinin həllindən $F^{(1)}$ funksiyası tapılır. Bu (I.2.2) differensial tənliyin həlli, $\Delta \Delta F^{(1)} = 0$ bircinsli differensial tənliyin ümumi həllinin $(F_{\theta m}^{(1)})$ və göstərilən differensial tənliyin xüsusi həllinin $(F_{x\theta\theta}^{(1)})$ cəmi şəklində axtarılır:

$$F^{(1)} = F_{bm}^{(1)} + F_{xbs}^{(1)} \quad (I.2.11)$$

Məlumdur ki, $\Delta\Delta F^{(1)} = 0$ bircinsli differensial tənliyinin ümumi həlli aşağıdakı kimi götürülür (ümumi halda):

$$\begin{aligned} F_{bm}^{(1)} = & c_1 + c_2 \rho^2 + c_3 \cdot \rho^2 \cdot \ln \rho + c_4 \cdot \ln \rho + \\ & + [c_5 \rho^3 + c_6 \cdot \rho^{-1} + c_7 \cdot \rho + c_8 \cdot \rho \ln \rho]_{\cos \theta}^{\sin \theta} + \\ & + \sum_{m=2}^{\infty} [c_{m2} \cdot \rho^m + c_{m3} \cdot \rho^{2-m} + c_{m4} \rho^{-m}]_{\cos \theta}^{\sin \theta} ; \end{aligned} \quad (I.2.12)$$

Kiçik deformasiyalar üçün, kiçik fiziki qeyrixətti məsələlərin mövcud olan həllərində [38,53] göstəriləndiyi kimi biz birinci yaxınlaşmada baxılan məsələ üçün $F^{(1)}$ funksiyasını

$$F_{bm}^{(1)} = c_1 \cdot \ln \rho + c_2 \cdot \rho^2 \quad (I.2.13)$$

şəklində götürürük.

Qeyd edək ki, (I.1.58) differensial tənliyində polyar (ρ, θ) koordinatlarına keçsək və müvafiq törəmələri yerinə yetirsək, nəticədə $F^{(1)}$ funksiyasının tapılması üçün aşağıdakı differensial tənliyi alarıq [53].

Əgər (I.2.2) differensial tənliyində $F^{(0)}$ funksiyasının (I.2.7) ifadəsini və (I.2.4) ilə müəyyən olunan $L[F^{(0)}]$ operatorunu nəzərə alsaq bir neçə riyazi əməliyyatdan sonra $(\rho$ və θ dəyişənlərə nəzərən xüsusi törəmələr alıb, ρ dəyişənin eyni

qüvvət üstlü hədlərini bir sıra şəklində toplasaq) differensial tənlik aşağıdakı şəkllə düşər:

$$\Delta\Delta F^{(1)} = \sum_{k=1}^{\infty} \rho^{-k} \cdot V_1(k) + \sum_{k=0}^{\infty} \rho^k \cdot V_2(k) \quad (I.2.14)$$

Bu tənlikdə $V_1(k)$ və $V_2(k)$ kəmiyyətləri ρ dəyişənin eyni qüvvət üstlü hədlərinin cəbri cəmidir (fiksə edilmiş θ bucağı üçün). Qeyribircins differensial tənliyin (I.2.14) ümumi həlli, $\Delta\Delta F^{(1)} = 0$ bircins tənliyin ümumi həlli olan (I.2.13) ilə (I.2.14) tənliyinin xüsusi həllinin (xüsusi inteqralın) cəmi kimi axtarıldığından, $F_{xbs}^{(1)}$ - xüsusi həlli (I.2.14) ifadəsinin dördqat inteqrallanmasından aşağıdakı kimi alınır [53].

$$F_{xbs}^{(1)} = \sum_{k=0}^{\infty} \rho^{-k+4} \cdot \alpha \cdot V_1(k) + \sum_{k=0}^{\infty} \beta \cdot \rho^{k+4} \cdot V_2(k) \quad (I.2.15)$$

Burada

$$\alpha = \left[(4-k)^2 \cdot (2-k)^2 + \alpha_1 + \alpha_2 \right]^{-1};$$

$$\beta = \left[(k+4)^2 \cdot (2+k)^2 + \beta_1 + \beta_2 \right]^{-1}$$

$\alpha_1 = (4-k)^2 \cdot (2-k)^2 \cdot [V_1(k)]_{\theta\theta}$ burada-kvadrat mütərizənin indeksi θ - ya görə ikiqat törəməni göstərir.

$$\alpha_2 = [V_2(k)]_{\theta\theta\theta\theta} \text{-dörtqat törəməni göstərir.}$$

$$\beta_1 = (k+4)^2(2+k^2) \cdot [V_2(k)]_{\theta\theta}; \quad \beta_2 = [V_2(k)]_{\theta\theta\theta\theta} \quad (\text{I.2.16})$$

Oxasimmetrik məsələlərdə (məsələn konsentrik çevrələrə malik oblstlar üçün) $\alpha_1 = \alpha_2 = \beta_1 = \beta_2 = 0$ olur.

Beləliklə (I.2.14) differensial tənliyin ümumi həlli bu şəkildə alınır ((I.2.13) və (I.2.15) əsasən):

$$F^{(I)} = F_{\theta m}^{(I)} + F_{x b b}^{(I)} = \sum_{k=0}^{\infty} \rho^{-k+4} \cdot \alpha \cdot V_1(k) + \\ + \sum_{k=0}^{\infty} \rho^{k+4} \cdot \beta \cdot V_2(k) + c_1 \cdot \ln \rho + c_2 \cdot \rho^2; \quad (\text{I.2.17})$$

Bu ifadəyə daxil olan məchul əmsallar c_1 və c_2 baxılan məsələnin (daxildən p_1 , xaricdən p_2 müntəzəm paylanan təzyiqə məruz qalan ikirabitəli çoxbucaqlı lövhənin gərginlik deformasiya vəziyyəti) sərhəd şərtlərindən (I.2.10) tapılır [53]

daxili L_1 konturu üzərində $\rho = t_1$ olduqda

$$\sigma_{\rho}^{(I)} = 0$$

Xarici L_2 konturu üzərində $\rho = t_2 = A$ olduqda:

$$\sigma_{\rho}^{(I)} = 0 \quad (\text{I.2.18})$$

Əgər (I.2.17) ifadəsini bu şərtlərdə nəzərə alsaq (müvafiq törəmələr eləyib L_1 üzərində $\rho = t_1$ və L_2 üzərində $\rho = A$ olduğu qəbul edilir) bir neçə sadə riyazi çevirmələrdən sonra c_1 və c_2 əmsalları üçün aşağıdakı ifadələr alınır:

$$c_1 = \sum_{k=1}^{\infty} (4-k) \cdot \alpha \cdot V_1(k) \left[-t_1^{4-k} - \frac{t_1^2}{A^2 - t_1^2} \cdot (t_1^{4-k} - A^{4-k}) \right] + \\ + \sum_{k=1}^{\infty} (k+4) \cdot \beta \cdot V_2(k) \cdot \left[-t_1^{k+4} - \frac{t_1^2}{A^2 - t_1^2} (t_1^{k+4} - A^{k+4}) \right];$$

$$c_2 = \frac{1}{2 \cdot (A^2 - t_1^2)} \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \left[\alpha \cdot V_1(k) \cdot (4-k) \cdot (t_1^{4-k} - A^{4-k}) + \right. \\ \left. + \beta \cdot V_2(k) \cdot (k+4) \cdot (t_1^{k+4} - A^{k+4}) \right]; \quad (I.2.19)$$

Sabitlərin tapılan ifadələrini, yəni (I.2.19) əgər (I.2.17) nəzərə alsaq, baxılan məsələ üçün birinci yaxınlaşmada $F^{(1)}(\rho, \theta)$ gərginlik funksiyası nəticədə aşağıdakı ifadə ilə müəyyən olunur [53]:

$$F^{(1)}(\rho, \theta) = \sum_{k=1}^{\infty} \rho^{4-k} \cdot \alpha \cdot V_1(k) + \sum_{k=1}^{\infty} \rho^{k+4} \cdot \beta \cdot V_2(k) + \\ + \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} (4-k) \cdot \alpha \cdot V_1(k) \cdot \left[-t_1^{4-k} - \frac{t_1^2}{A^2 - t_1^2} (t_1^{4-k} - A^{4-k}) \right] + \right. \\ \left. + \sum_{k=1}^{\infty} (k+4) \cdot \beta \cdot V_2(k) \cdot \left[-t_1^{k+4} - \frac{t_1^2}{A^2 - t_1^2} (t_1^{k+4} - A^{k+4}) \right] \right\} \cdot \ln \rho + \\ + \frac{1}{2(A^2 - t_1^2)} \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \left[\alpha \cdot V_1(k) \cdot (4-k) \cdot (t_1^{4-k} - A^{4-k}) + \right. \\ \left. + \beta \cdot V_2(k) \cdot (k+4) \cdot (t_1^{k+4} - A^{k+4}) \right] \cdot \rho^2; \quad (I.2.20)$$

Bu (I.2.19) və (I.2.20) ifadələrinə daxil olan A əmsalı xarici L_2 konturunun formasını xarakterizə edən parametrdir. Beləki düzgün çoxbucaqlı konturlar üçün

$$A = \frac{a}{1+m}; m = \frac{1}{(N-1)^2} = \frac{a-b}{a+b} \quad (\text{I.2.21})$$

Burada N - çoxbucaqlının tərəflərinin sayı (simmetriya oxları sayı), a -çoxbucaqlının xaricinə çəkilməmiş çevrənin radiusudur, b -həmin çoxbucaqlının daxilinə çəkilən çevrənin radiusudur. Əgər baxılan kontur ellipsdirsə, onda a və b uyğun olaraq ellipsin böyük və kiçik yarımxlarıdır (bu halda $N = 2$ götürülür).

Gərginlik funksiyasının birinci yaxınlaşmada tapılan qiymətini $F^{(1)}(x, y) = F^{(1)}(\rho, \theta)$ -bilərək ikinci yaxınlaşma üçün gərginlik funksiyasını $F^{(2)}(x, y) = F^{(2)}(\rho, \theta)$ analoji olaraq tapırıq, və i.a. Gərginlik funksiyasının

$$F(\rho, \theta, \lambda) = F^{(0)}(\rho, \theta) + \lambda F^{(1)}(\rho, \theta) + \lambda^2 \cdot F^{(2)}(\rho, \theta) + \dots$$

ifadəsini tapdıqdan sonra (yəni bu ifadəyə daxil olan $F^{(0)}, F^{(1)}, F^{(2)}$ funksiyaları məlum olduqda) gərginlik komponentləri σ_ρ və σ_θ üçün aşağıdakı sıra şəkilində ifadələr alarıq:

$$\sigma_{\rho} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial F}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 F}{\partial \theta^2} = \sigma_{\rho}^{(0)} + \lambda \cdot \sigma_{\rho}^{(1)} + \lambda^2 \cdot \sigma_{\rho}^{(2)} + \dots$$

$$\sigma_{\theta} = \frac{\partial^2 F}{\partial \rho^2} = \sigma_{\theta}^{(0)} + \lambda \cdot \sigma_{\theta}^{(1)} + \lambda^2 \cdot \sigma_{\theta}^{(2)} + \dots$$

$$\tau_{\rho\theta} = \frac{1}{\rho^2} \cdot \frac{\partial F}{\partial \theta} - \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial^2 F}{\partial \rho \partial \theta} = \tau_{\rho\theta}^{(0)} + \lambda \cdot \tau_{\rho\theta}^{(1)} + \lambda^2 \cdot \tau_{\rho\theta}^{(2)} + \dots \quad (I.2.22)$$

Alınan ümumi həll aşağıdakı ədədi misallara nümayiş etdirilir.

1. Dairəvi deşiyə və iki düzxətli çata malik kiçik fiziki qeyrixətli materialdan olan silindrin gərginlik vəziyyəti.

Bu məsələ xətti elastiklik nəzəriyyəsində müfəssəl həll olunub (Hüq qanunu çərçivəsində). Ona görə də burada yalnız [53] işində alınan nəticələri veririk.

Silindrin iki rəbitəli oblastı, xaricdən R radiuslu çevrə ilə, daxildən r radiuslu çevrə və ondan çıxan iki düzxətli çata malik konturla əhatə olunub (şək.1.2)

Bu halda analitik funksiyalar $\varphi(z)$ və $\psi(z)$ belə götürülüb:

$$\begin{aligned} \varphi(z) &= \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cdot \xi_1^{-k} + \sum_{k=0}^{\infty} \beta_k \cdot \xi_1^{-k} \left(\frac{z}{k} \right)^k ; \\ \psi(z) &= \sum_{k=1}^{\infty} d_k \cdot \xi_1^{-k} + \sum_{k=0}^{\infty} c_k \left(\frac{z}{k} \right)^k \end{aligned} \quad (I.2.23)$$

En kəsiyim əsas ölçüləri arasında nisbət iki variantda verilib:

$$\text{I variant } r/R = 0,5; \quad e = 0,6R; \quad l = 0,1R$$

$$\text{II variant } r/R = 0,7; \quad e = 0,8R; \quad l = 0,1R$$

Kəsiyin xarakterik nöqtələrində tapılan $\sigma_{\rho}^{(0)}$ və $\sigma_{\theta}^{(0)}$ gərginlikləri (toxunan gərginlik $\tau_{\rho\theta}$ çox kiçik olduğundan $\tau_{\rho\theta} \approx 0$ qəbul edilib) aşağıdakı cədvəldə verilib: (cədv.Nö1.4)

Kəsiyin ən qorxulu nöqtəsində (çatların son nöqtələrində $z = \pm e$) gərginliklərin intensivlik əmsalı K_1 üçün bu qiymətlər alınıb $10K_1/p_1\sqrt{l}$ nisbətində):

I variant üçün 7,04; II variant üçün 11,68

Təsir edən daxili $p_1 = p$ təzyiqinin kritik qiyməti (yəni cismin dağılması çatlarına uzanması üçün minimal gərginlik) üçün bu qiymətlər alınıb (cədvəl Nö1.5):

I variant üçün $P_{kr} = 1,46[\sigma_b]$; II variant üçün $P_{kr} = 0,883[\sigma_b]$

$[\sigma_b]$ —baxılan cismin materialının texniki möhkəmlik həddi (buraxıla bilən matereialın dözübiləcəyi maksimum gərginlik) bir çox materiallar üçün cədvəldə verilib (bax cədvəl Nö1.3)

$\varphi(z)$ və $\psi(z)$ funksiyalarını tapandan sonra xətti elastilik nəzəriyyəsi çərçivəsində (sıfırıncı yaxınlaşmada) gərginlik funksiyası $F^{(0)}(x, y) = F^{(0)}(\rho, \theta)$ yuxarıda qeyd olunan (I.2.7)

Buraxıla bilən gərginliklər $[\sigma_b]$ kQ/sm²

Cədvəl №1.3

Material	Dartılma	Sıxılma
Çuğun	280-800	1200-1500
Polad	1400-1500	
Mis	300-1200	
Latun	700-1400	
Bronza (tunc)	600-1200	
Alüminium	300-800	
Düralüminium	800-1500	
Tekstolit	300-400	
Ağac-lif boyu	70-100	
lif eninə	15-25	
Beton	1-7	10-90

düsturuna əsasən tapılar. Sonra isə $F^{(1)}(\rho, \theta)$ -birinci yaxınlaşmada gərginlik funksiyası (I.2.20) ifadəsindən tapılır. $F^{(1)}(\rho, \theta)$ gərginlik funksiyasının tapılan ifadəsinə əsasən, (I.2.22) düstürlərinin köməyi ilə kəsiyin xarakterik nöqtələrində tapılan σ_θ gərginliyi cədvəldə verilmişdir. (Bax cədv. №1.4, şəkl.1.3)

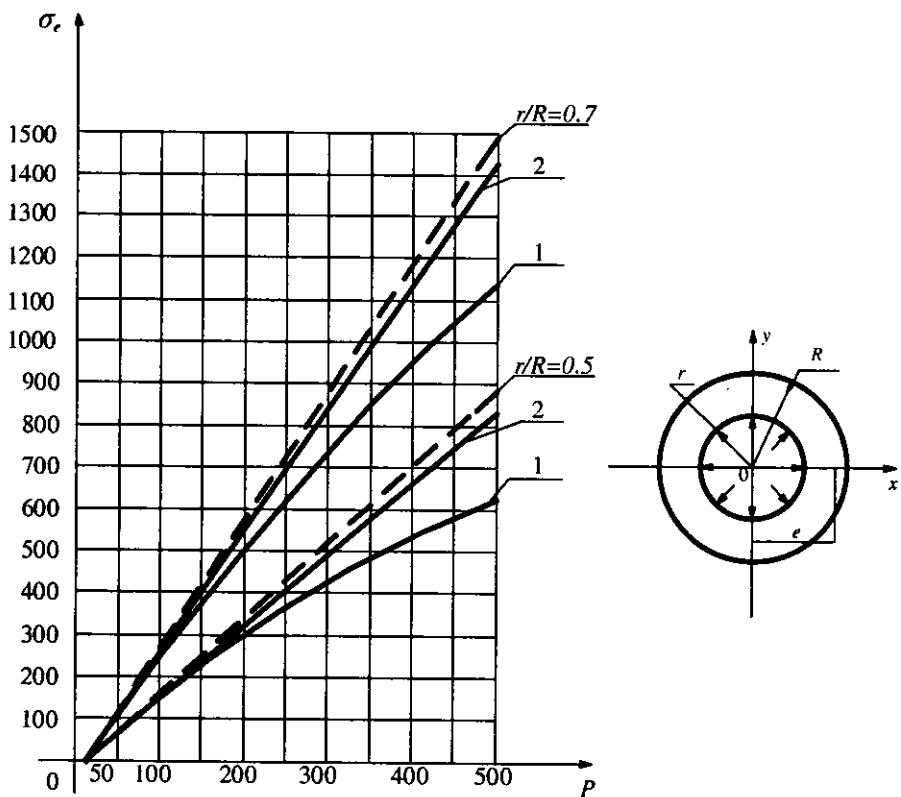
Gərginliklərin konsentrasiya əmsallar σ_θ / p

Variantlar	P	Xətti qoyuluş	xalis mis $\lambda = 0,255 \cdot 10^{-6}$	alüminium gümüş $\lambda = 0,053 \cdot 10^{-6}$	marten polad $\lambda = 0,032 \cdot 10^{-6}$
I $r/R = 0,5$ $e/R = 0,6$	20	1,76	1,759102	1,7598317	1,7593984
	50	1,76	1,7549383	1,758948	1,759365
	100	1,76	1,73975	1,7555792	1,75746
	200	1,76	1,6791012	1,74317	1,74984
	500	1,76	1,253825	1,654795	1,6965
II $r/R = 0,7$ $e/R = 0,8$	20	2,92	2,918793	2,419738	2,919842
	50	2,92	2,912123	2,91836	2,91901
	100	2,92	2,88848	2,91345	2,916065
	200	2,92	2,79393	2,8938	2,9042
	500	2,92	2,23205	2,75623	2,82112

Gərginliyin intensivlik əmsalı ($10K_1/P\sqrt{l}$ vahidi ilə) və təzyiğin kritik qiyməti (P_{kr}) (Dairəvi silindr)

Cədvəl №1.5

Variant	Təzyiq P	Xalis mis $\lambda = 0.255 \cdot 10^{-6}$		Marten polad	
		K_1	Kritik təzyiq (P_{kr})	K_1	Kritik yük P_{kr}
I $r/R = 0.5$ $e/R = 0.6$	100	6.958	1.48 $[\sigma_b]$	7.024	1.467 $[\sigma_b]$
	200	6.726	1.535 $[\sigma_b]$	6.999	1.473 $[\sigma_b]$
	500	5.015	2.05 $[\sigma_b]$	6.792	1.51 $[\sigma_b]$
II $r/R = 0.7$ $e/R = 0.8$	100	11.552	0.892 $[\sigma_b]$	11.664	0.884 $[\sigma_b]$
	200	22.176	0.922 $[\sigma_b]$	11.616	0.887 $[\sigma_b]$
	500	8.928	1.155 $[\sigma_b]$	11.284	0.914 $[\sigma_b]$



Punktir xətt-xətti məsələyə uyğundur.
 Bütöv xətt isə – qeyri-xətti məsələyə uyğundur.
 1) xalis mis; 2) marten polad

Şək.1.3.

2 Dairəvi deşiyə və iki düzxətli çata malik altibucaqlı lövhənin fiziki qeyrixətli qoyuluşda gərginlik vəziyyəti.

Bu məsələnin xətti elastiklik nəzəriyyəsində həlli ədəbiyyatdan məlumdur [26,53]. Altibucaqlı lövhənin istənilən nöqtəsində axtarılan gərginliklər $(\sigma_{\theta}^{(0)})$ müxtəlif variantlar üçün (en kəsik ölçülərinin nisbətinin müxtəlif qiymətlərində) hesablanıb cədvəl şəklində verilmişdir. Düzxətli çatların qurtaracaq nöqtələrində tapılan gərginliklərə əsasən gərginlik intensivlik əmsalı (K_1) və həmçinin daxili təzyiqin kritik qiyməti p_{kr} tapılıb, cədvəl №1.7 verilib (hər bir variant üçün).

$F^{(0)}(x, y) = F^{(0)}(\rho, \theta)$ funksiyasını məlum ifadəsini fiziki qeyri xətti məsələnin həlli üçün alınan differensial tənlikdə (I.2.4) nəzərə alıb, həll etdikdən sonra (aralıq riyazi hesablamaları buraxırıq), xətti məsələdə olduğu kimi kəsiyin ən qorxulu nöqtələrində - çatların qurtaracaq nöqtələrində $(z = \pm e = \pm \rho e^{i\theta})$ daxili təzyiqin $p_1 = p$ müxtəlif qiymətləri üçün gərginliklər tapılıb cədvəl şəklində verilib (cədvəl №1.6, 1.7). Çatların təpə nöqtələrində gərginliklər üçün belə bir ifadə alınır

I variant $r/A = 0,5$; $e/A = 0,6$; $m = 0,04$; $b = 1,922$;

$$\sigma_{\theta}/p = \sigma_{\theta/p}^{(0)} + \alpha \sigma_{\theta}^{(1)}/p = 1,68 - 9,2 \cdot \alpha \cdot p^2.$$

Altıbucaqlı lövhənin gərginlik konsentrasiyası.

Cədvəl №1.6

Variant	P	Xətti nəzəriyyə σ_θ/p	Qeyri-xətti nəzəriyyə		
			xalis mis $\lambda = 0,255 \cdot 10^{-6}$	alüminium gümüş $\lambda = 0,053 \cdot 10^{-6}$	martan polad $\lambda = 0,032 \cdot 10^{-6}$
I $r/A = 0,5$ $e/A = 0,6$	20	1,68	1,679185	1,6659	1,6798984
	50	1,68	1,67494	1,6654	1,6793648
	100	1,68	1,65975	1,6636	1,67746
	200	1,68	1,59901	1,6566	1,669835
	500	1,68	1,17384	1,607	1,61648
II $r/A = 0,7$ $e/A = 0,8$	20	3.21	3.20874	-2,66588	-2,66593
	50	3.21	3.20212	-2,6652	-2,6655
	100	3.21	3.168482	-2,6515	-2,6629
	200	3.21	3.083928	-2,654	-2,6587
	500	3.21	2.52205	-2,591	-2,2106

Gərginliyin intensivlik əmsalı ($10K_1/P\sqrt{l}$ vahidi ilə) və yükün kritik qiyməti (P_{kr}) (Altıbucaqlı silindr)

Cədvəl №1.7

Variant	Təzyiq P	Xalis mis $\lambda = 0.255 \cdot 10^{-6}$		Marten polad	
		K_1	Kritik təzyiq (P_{kr})	K_1	Kritik yük P_{kr}
I $r/R = 0.5$ $e/R = 0.6$	100	6.624	1.56 $[\sigma_b]$	6.708	1.5386 $[\sigma_b]$
	200	6.352	1.623 $[\sigma_b]$	6.6792	1.543 $[\sigma_b]$
	500	4.4	2.343 $[\sigma_b]$	6.464	1.595 $[\sigma_b]$
II $r/R = 0.7$ $e/R = 0.8$	100	12.68	0.803 $[\sigma_b]$	12.824	0.804 $[\sigma_b]$
	200	12.24	0.842 $[\sigma_b]$	12.776	0.807 $[\sigma_b]$
	500	11.92	0.865 $[\sigma_b]$	12.44	0.829 $[\sigma_b]$

II variant: $r/A = 0,7$; $e/A = 0,8$; $m = 0,04$; $b = 1,37r$;

$$\sigma_{\theta}/p = \sigma_{\theta/p}^{(0)} + \alpha\sigma_{\theta}^{(1)}/p = 3,21 - 14,62 \cdot \alpha \cdot p^2;$$

Burada $\alpha = \lambda = \frac{g_2 k}{(3K + G)G^2} = 0,225 \cdot 10^{-6} \text{ sm}^4/kQ^2$ - xalis mis

üçün. $\alpha = \lambda = 0,032 \cdot 10^{-6} \text{ sm}^4/kQ^2$ marten polad üçün.

Yuxarıda araşdırılan hər iki nümunə məsələlərin həllərinin ədədi nəticələrindən görünür ki, fiziki qeyrixətti qoyuluşda, xətti qoyuluşda alınan gərginliklərin ən maksimal qiymətləri azalır (gərginlik epyuralarının pik nöqtələri sığalanıb, hamarlaşır). Bunu verilən cədvəllərdən və uyğun məsələlər üçün qurulan epyuralardan- şəkillərdən də görmək olar (bax şəkl. 1.1)

3.Qalın divarlı borunun (Lyame məsələsi) kiçik fiziki qeyrixətti qoyuluşda gərginlik vəziyyəti.

Klassik elastiklik nəzəriyyəsində (məsələnin xətti qoyuluşunda)

$F^{(0)}$ gərginlik funksiyası üçün belə düstür alınır [26;53]:

$$F^{(0)}(\rho, \theta) = \beta_1 \cdot \frac{\rho^2}{r^2} + d_1 \cdot r \cdot \ln \rho; \quad (1)$$

Borunun daxili p_1 və xarici p_2 hidrostatik təzyiçə məruz qalan halı üçün β_1 və d_1 əmsalları belə ifadələrdə müəyyən olunurlar (bax [26;53] ədəbiyyatına):

$$\beta_1 = \frac{r}{2} \cdot \frac{p_1 \cdot r^2 - p_2 \cdot R^2}{R^2 - r^2}; \quad d_1 = \frac{r^2 R^2 \cdot (p_2 - p_1)}{(R^2 - r^2) \cdot r}; \quad (2)$$

Bunları $F^{(0)}$ gərginlik funksiyasının yuxarıdakı düsturunda yerinə yazsaq alarıq:

$$F^{(0)}(\rho, \theta) = \frac{r^2 R^2 \cdot (p_2 - p_1)}{R^2 - r^2} \cdot \ln \rho + \frac{1}{2} \frac{p_1 \cdot r^2 - p_2 \cdot R^2}{R^2 - r^2} \rho^2; \quad (3)$$

Bu ifadəni birinci yaxınlaşmada $F^{(1)}$ gərginlik funksiyası üçün alınan (1.2.20) ifadəsində nəzərə alsaq, alarıq:

$$\begin{aligned} F^{(1)}(\rho, \theta) = & \frac{r^4 R^4}{2(R^2 - r^2)} \cdot (p_2 - p_1)^2 \cdot \left\{ \frac{1}{r^2 R^2} \left[\frac{R^2 + r \cdot R + r^2}{R^2 - r^2} (p_2 - p_1) - \right. \right. \\ & - \left. \left. (R^2 + r^2)(p_1 r^2 - p_2 R^2) \right] \cdot \ln \rho + \frac{1}{r^2 R^2} \left[(p_1 r^2 - p_2 R^2) - \right. \right. \\ & \left. \left. (R^2 + r^2)(p_2 - p_1) \right] \cdot \rho^2 - \frac{1}{2} (p_1 r^2 - p_2 R^2) \cdot \frac{1}{\rho^2} + \right. \\ & \left. + \frac{1}{4} r^2 R^2 (p_2 - p_1) \cdot \frac{1}{\rho^4} \right\}; \quad (3) \end{aligned}$$

Bu alınan ifadə bütövlüklə **Tsurpal İ.A.** [99] və **Jndra F.** [124] tərəfindən alınmış ifadələrlə üst-üstə düşür. Qalın divarlı borunun ölçüləri, (daxili çevrənin radiusu r və xarici çevrənin radiusu R

arasında nisbət) iki variantda götürülüb, borunun daxili və xarici konturları üzərindəki nöqtələrdə gərginliklər tapılıb cədvəldə verilmişdir (bax. cədvəl №1.8).

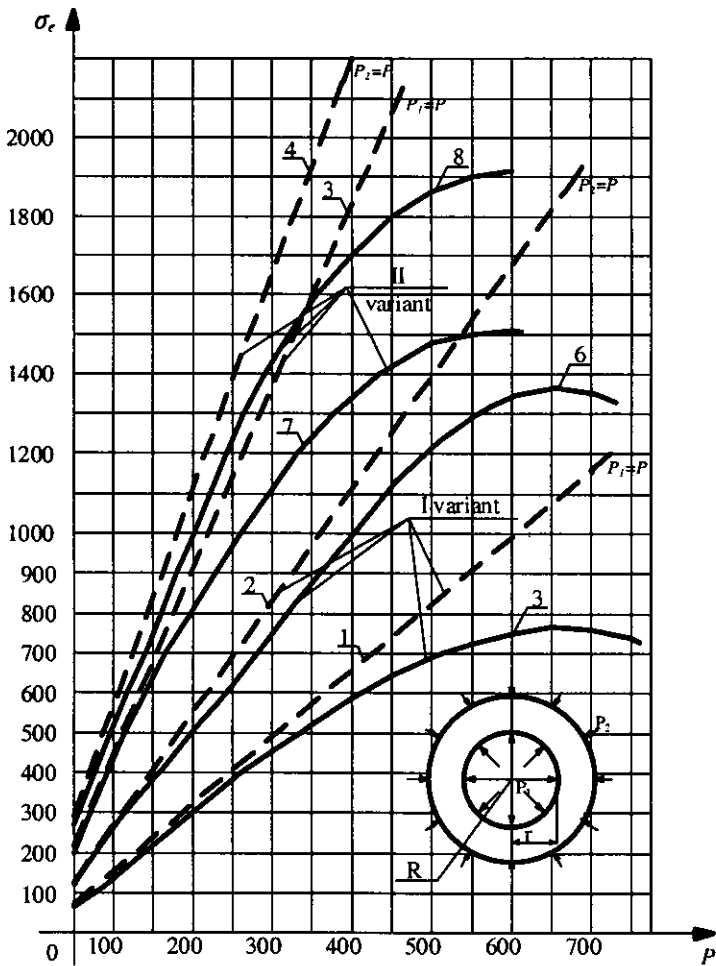
Borunun materialı üçün: xalis mis, aluminium tunc və marten polad seçilmişdir. Baxılan məsələ üçün (Lyame məsələsi) daxili çevrə üzərində gərginlik konsentrasiyası üçün uyğun olaraq aşağıdakı ifadələr alınıb:

$$\text{I variant } \sigma_{\theta}/p = 1,666 - 4,444 \cdot \lambda \cdot p^2; p_1 = p$$

$$\text{II variant } \sigma_{\theta}/p = 4,55 - 25,3 \cdot \lambda \cdot p^2; p_1 = p.$$

Bu düsturların köməyi ilə daxili təzyiqin (p_1) müxtəlif qiymətlərində $20 \leq p \leq 500$ hesablanan σ_{θ} gərginlikləri hər iki variantda qrafik şəklində də əyani göstərilmişdir (bax şəkl.1.4). qrafikdə bütöv xətt fiziki qeyrixətti məsələni, qırıq-qırıq (punktir) xətt isə xətti qoyuluşdakı məsələni göstərir.

Cədvəllərdən görünür ki, p - daxili təzyiqinin 100-də aşağı qiymətlərində σ_{θ} gərginlikləri demək olar 0,1% dəyişir (azalır), $p \geq 100$ qiymətlərində xətti və qeyrixətti qoyuluşda məsələlər həllindən alınan σ_{θ} gərginliklərinin fərqi hiss ediləcək dərəcədə çox olduğu gözə çarpır.



I variant: $r/R = 0,5$; II variant: $r/R = 0,8$;
 1,2,3,4 xətləri-xətti nəzəriyyəni göstərir.
 5,6,7,8 xətləri qeyri-xətti nəzəriyyəni göstərir.

Şək.1.4.

Variantlar	P	Xətti nəzəriyyə	Qeyri-xətti nəzəriyyə		
			xalis mis $\lambda = 0,255 \cdot 10^{-6}$	alüminium $\lambda = 0,053 \cdot 10^{-6}$	marten polad $\lambda = 0,032 \cdot 10^{-6}$
$R/r = 2$	20	1,666	1,6656	1,6659	1,66594
$P_1 = P$	50	1,666	1,6632	1,6654	1,6656
$P_2 = 0$	100	1,666	1,6547	1,6636	1,6646
	200	1,666	1,6207	1,6566	1,6603
	500	1,666	1,3827	1,607	1,6304
$R/r = 1,25$	20	4,555	4,5524	4,5545	4,554
$P_1 = P$	50	4,555	4,5389	4,5515	4,553
$P_2 = 0$	100	4,555	4,4905	4,5341	4,5469
	200	4,555	4,2969	4,5014	4,5226
	500	4,555	2,942	4,2198	4,352

1.3. İkirabitəli çoxbucaqlı lövhənin ixtiyari fiziki qeyrixətti qoyuluşda gərginlik vəziyyəti.

Əgər gərginlik funksiyasının $F(x, y) = F(\rho, \theta)$ bir sıra şəkildə (1.58) ifadəsini (1.48) differensial tənlikdə nəzərə alıb kiçik parametr α -nın qüvvət üstünə görə hədlərinin cəmlərini sıfıra bərabərləşdirsək ilk üç qüvvət üstü üçün (sıfır, birinci, ikinci) aşağıdakı differensial tənliklər sistemini alarıq (burada $\lambda_{ij} = \alpha_{ij}$ ilə əvəz edilmişdir).

$$\Delta\Delta F^{(0)} = 0 \quad (I.3.1)$$

$$\begin{aligned} & (\alpha_{11} + \alpha_{12}) \cdot \Delta\Delta F^{(1)} + \alpha_{21} \cdot \Delta \left[(\Delta F^{(0)})^2 \right] + \\ & + \alpha_{22} \left[\Delta(F_{,ij}^{(0)} \cdot F_{,ij}^{(0)}) + 2(\Delta F^{(0)} \cdot F_{,ij}^{(0)})_{,ij} \right] = 0 \end{aligned} \quad (I.3.2)$$

$$\begin{aligned} & (\alpha_{11} + \alpha_{12}) \cdot \Delta\Delta F^{(2)} + 2\alpha_{21} \cdot \Delta(\Delta F^{(0)} \cdot \Delta F^{(1)}) + \\ & + \alpha_{22} \left[2\Delta(F_{,ij}^{(0)} \cdot F_{,ij}^{(1)}) + (\Delta F^{(0)} \cdot F_{,ij}^{(1)} + F_{,ij}^{(0)} \cdot \Delta F^{(1)})_{,ij} \right] + \\ & + \alpha_{31} \left[\Delta(\Delta F^{(0)})^3 \right] + \alpha_{32} \left[F_{,ij}^{(0)} \cdot F_{,ij}^{(0)} \cdot F_{,kn}^{(0)} \right]_{,kn} + \\ & + \alpha_{33} \left\{ \Delta(F_{,ij}^{(0)} \cdot F_{,ij}^{(0)} \cdot \Delta F^{(0)}) + \left[(\Delta F^{(0)})^2 \cdot F_{,ij}^{(0)} \right]_{,ij} \right\} = 0 \end{aligned} \quad (I.3.3)$$

Bu tənliklərdə α_{ij} ($i = 1; 2; j = 1; 2$) əmsalları materialların fiziki xassələrini xarakterizə edən sabitlərdir.

Əvvəllər deyildiyi kimi, vergül işarəsi xüsusi törəməni göstərir; bütün i, j, k, n indeksləri 1 və 2 qiymətlərini alırlar.

Baxılan məsələ üçün xətti elastiklik nəzəriyyəsindən $F^{(0)}$ gərginlik funksiyası məlum olub (I.2.7) ifadəsi ilə müəyyən olunur [26;53].

$F^{(0)}(x, y) = F^{(0)}(\rho, \theta)$ gərginlik funksiyasının (I.2.7) ifadəsindən bütün lazımi törəmələri alıb, (I.3.2) və (I.3.3) differensial tənliklərində yerinə yazsaq, bir neçə riyazi çevirmələrdən sonra (ρ dəyişəninin mənfi və müsbət üstlü hədlərini bir yerə yığsaq, θ -nın fiksə edilmiş qiyməti üçün) aşağıdakı dördüncü dərəcədən differensial tənlikləri alırıq [22;53].

$$\begin{aligned} \Delta\Delta F^{(1)} + \frac{\alpha_{21}}{\alpha_{11} + \alpha_{12}} \cdot f_1(\rho, \theta) + \\ + \frac{\alpha_{22}}{\alpha_{11} + \alpha_{12}} [f_2(\rho, \theta) + 2f_3(\rho, \theta)] = 0 \end{aligned} \quad (I.3.4)$$

$$\begin{aligned}
& \Delta\Delta F^{(2)} + \frac{2\alpha_{21}}{\alpha_{11} + \alpha_{12}} \cdot f_4(\rho, \theta) + \\
& + \frac{\alpha_{22}}{\alpha_{11} + \alpha_{12}} [f_2(\rho, \theta) + f_6(\rho, \theta)] + \\
& + \frac{\alpha_{31}}{\alpha_{11} + \alpha_{12}} \cdot f_7(\rho, \theta) + \frac{\alpha_{32}}{\alpha_{11} + \alpha_{12}} \cdot f_5(\rho, \theta) + \\
& + \frac{\alpha_{33}}{\alpha_{11} + \alpha_{12}} \cdot [f_9(\rho, \theta) + f_{10}(\rho, \theta)] = 0 \quad (I.3.5)
\end{aligned}$$

Bu tənliklərdə aşağıdakı əvəzləmələr edilmişdir:

$$\begin{aligned}
f_1(\rho, \theta) &= 2 \cdot (\Delta F^{(0)})_{\rho\rho} \cdot \Delta F^{(0)} + 2 \cdot [(\Delta F^{(0)})_{\rho}]^2 + \\
& + \frac{2}{\rho} \cdot \Delta F^{(0)} \cdot (\Delta F^{(0)})_{\rho} + \frac{2}{\rho^2} \cdot \Delta F^{(0)} \cdot (\Delta F^{(0)})_{\theta\theta} + \\
& + \frac{2}{\rho^2} \cdot [(\Delta F^{(0)})_{\rho}]^2 ;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f_2(\rho, \theta) &= 2(F_{\rho\rho\rho}^{(0)})^2 + 2F_{\rho\rho}^{(0)} \cdot F_{\rho\rho\rho}^{(1)} + \frac{2}{\rho} \cdot F_{\rho\rho}^{(0)} \cdot F_{\rho\rho\rho}^{(1)} + \\
& + \frac{2}{\rho^2} \cdot (F_{\rho\rho\theta}^{(0)})^2 + \frac{2}{\rho^2} F_{\rho\rho}^{(0)} \cdot F_{\rho\rho\theta\theta}^{(0)} + \\
& + 2\Delta \left(\frac{1}{\rho^2} \cdot F_{\rho\theta}^{(0)2} - \frac{2}{\rho^3} \cdot F_{\rho\theta}^{(0)} \cdot F_{\theta}^{(0)} + \frac{1}{\rho^4} F_{\theta}^{(1)2} \right) + \\
& + \Delta \left(\frac{1}{\rho^2} \cdot F_{\rho\rho}^{(0)2} + \frac{2}{\rho^3} \cdot F_{\rho}^{(0)} \cdot F_{\theta\theta}^{(1)} + \frac{1}{\rho^4} F_{\theta\theta}^{(1)2} \right);
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f_3(\rho, \theta) = & \left(\Delta F^{(0)}\right)_{\rho\rho} \cdot F_{\rho\rho}^{(0)} + 2 \cdot \left(\Delta F^{(0)}\right)_{\rho} \cdot F_{\rho\rho\rho}^{(0)} + \\
& + \Delta F^{(0)} \cdot F_{\rho\rho\rho\rho}^{(0)} + \frac{1}{\rho^2} \cdot \left(\Delta F^{(0)}\right)_{\rho} \cdot F_{\rho}^{(0)} - \\
& - \frac{1}{\rho^3} \Delta F^{(0)} \cdot F_{\rho}^{(0)} \frac{2}{\rho^4} \cdot \Delta F^{(0)} \cdot F_{\theta\theta}^{(0)} + \frac{1}{\rho^3} \cdot \left(\Delta F^{(0)}\right)_{\rho} \cdot F_{\theta\theta}^{(0)} + \\
& + \frac{1}{\rho^2} \Delta F^{(0)} \cdot F_{\rho\rho}^{(0)} - \frac{2}{\rho^4} \cdot \Delta F^{(0)} \cdot F_{\theta\theta}^{(0)} + \frac{1}{\rho^3} \cdot \left(\Delta F^{(0)}\right)_{\rho} \cdot F_{\theta\theta}^{(0)} + \\
& + \frac{2}{\rho^3} \cdot \Delta F^{(0)} \cdot F_{\rho\theta\theta}^{(0)} + \frac{1}{\rho^3} \cdot \left(\Delta F^{(0)}\right)_{\theta\theta} \cdot F_{\rho}^{(0)} + \\
& + \frac{2}{\rho^3} \cdot \left(\Delta F^{(0)}\right)_{\theta} \cdot F_{\rho\theta}^{(0)} + \frac{1}{\rho^4} \cdot \left(\Delta F^{(0)}\right)_{\theta\theta} \cdot F_{\theta\theta}^{(0)} + \\
& + \frac{2}{\rho^4} \cdot \left(\Delta F^{(0)}\right)_{\theta} \cdot F_{\theta\theta\theta}^{(0)} + \frac{1}{\rho^4} \cdot \Delta F^{(0)} \cdot F_{\theta\theta\theta\theta}^{(0)} - \\
& - \frac{3}{\rho^3} \cdot \Delta F^{(0)} \cdot F_{\rho\theta\theta}^{(0)} + \frac{3}{\rho^4} \cdot \Delta F^{(0)} \cdot F_{\theta\theta}^{(0)} - \\
& - \frac{3}{\rho^3} \cdot \left(\Delta F^{(0)}\right)_{\theta} \cdot F_{\rho\theta}^{(0)} + \frac{3}{\rho^4} \cdot \left(\Delta F^{(0)}\right)_{\theta} \cdot F_{\theta}^{(0)} + \\
& + \frac{1}{\rho^2} \cdot \left(\Delta F^{(0)}\right)_{\rho\theta} \cdot F_{\rho\theta}^{(0)} + \frac{1}{\rho^2} \cdot \left(\Delta F^{(0)}\right)_{\theta}^{(0)} \cdot F_{\rho\rho\theta}^{(0)} + \\
& + \frac{1}{\rho^2} \cdot \left(\Delta F^{(0)}\right)_{\rho} \cdot F_{\rho\theta\theta\theta}^{(0)} + \frac{1}{\rho^2} \cdot \Delta F^{(0)} \cdot F_{\rho\rho\theta\theta}^{(0)} - \\
& - \frac{1}{\rho^3} \cdot \left(\Delta F^{(0)}\right)_{\rho\theta} \cdot F_{\theta}^{(0)} - \frac{1}{\rho^3} \cdot \left(\Delta F^{(0)}\right)_{\rho} \cdot F_{\theta\theta}^{(0)};
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f_4(\rho, \theta) = & (\Delta F^{(0)})_{\rho\rho} \cdot \Delta F^{(1)} + 2 \cdot (\Delta F^{(0)})_{\rho} \cdot (\Delta F^{(1)})_{\rho} + \\
& + \Delta F^{(0)} \cdot (\Delta F^{(1)})_{\rho\rho} + \frac{1}{\rho} \cdot (\Delta F^{(0)})_{\rho} \cdot \Delta F^{(1)} + \\
& + \frac{1}{\rho} \Delta F^{(0)} \cdot (\Delta F^{(1)})_{\rho} + \frac{1}{\rho^2} (\Delta F^{(1)})_{\theta\theta} \Delta F^{(1)} + \\
& + \frac{2}{\rho^2} \cdot (\Delta F^{(0)})_{\theta} \cdot (\Delta F^{(1)})_{\theta} + \frac{1}{\rho^2} \Delta F^{(0)} \cdot (\Delta F^{(1)})_{\theta\theta};
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f_5(\rho, \theta) = & \Delta \left[F_{\rho\rho}^{(0)} \cdot F_{\rho\rho}^{(1)} + 2 \left(\frac{1}{\rho} \cdot F_{\rho\theta}^{(0)} - \right. \right. \\
& \left. \left. - \frac{1}{\rho^2} \cdot F_{\theta}^{(0)} \right) \cdot \left(\frac{1}{\rho} \cdot F_{\rho\theta}^{(1)} - \frac{1}{\rho^2} \cdot F_{\theta}^{(1)} \right) + \right. \\
& \left. + \left(\frac{1}{\rho} \cdot F_{\rho}^{(0)} - \frac{1}{\rho^2} \cdot F_{\theta\theta}^{(0)} \right) \cdot \left(\frac{1}{\rho} \cdot F_{\rho}^{(1)} + \frac{1}{\rho^2} \cdot F_{\theta\theta}^{(1)} \right) \right];
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f_6(\rho, \theta) = & (\Delta F^{(0)})_{\rho\rho} \cdot F_{\rho\rho}^{(1)} + 2 \cdot (\Delta F^{(0)})_{\rho} \cdot F_{\rho\rho\rho}^{(1)} + \\
& + \Delta F^{(0)} \cdot F_{\rho\rho\rho\rho}^{(1)} + F_{\rho\rho\rho\rho}^{(0)} \Delta F^{(1)} + 2 \cdot F_{\rho\rho\rho}^{(0)} \cdot (\Delta F^{(1)})_{\rho} + \\
& + F_{\rho\rho}^{(1)} \cdot (\Delta F^{(1)})_{\rho\rho} + \frac{2}{\rho} \cdot \left[\frac{1}{\rho} \Delta F^{(0)} \cdot F_{\rho\theta}^{(1)} - \frac{1}{\rho^2} \cdot \Delta F^{(0)} \cdot F_{\theta}^{(1)} + \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{\rho} \cdot F_{\rho\theta}^{(1)} \cdot \Delta F^{(1)} - \frac{1}{\rho^2} \cdot F_{\theta}^{(0)} \cdot \Delta F^{(1)} \Big]_{\rho\theta} - \\
& - \frac{2}{\rho^2} \cdot \left[\frac{1}{\rho} \Delta F^{(0)} \cdot F_{\rho\theta}^{(1)} - \frac{1}{\rho^2} \Delta F^{(0)} \cdot F_{\theta}^{(1)} + \right. \\
& \left. + \frac{1}{\rho} \cdot F_{\rho\theta}^{(0)} \cdot \Delta F^{(1)} - \frac{1}{\rho^2} F_{\theta}^{(0)} \cdot \Delta F^{(1)} \right]_{\theta} + \\
& + \frac{1}{\rho} \cdot \left[\frac{1}{\rho} \cdot \Delta F^{(0)} \cdot F_{\rho}^{(1)} + \frac{1}{\rho^2} \cdot \Delta F^{(0)} \cdot F_{\theta\theta}^{(1)} + \right. \\
& \left. + \frac{1}{\rho} \cdot F_{\rho}^{(0)} \cdot \Delta F^{(1)} + \frac{1}{\rho^2} \cdot F_{\theta\theta}^{(0)} \cdot \Delta F^{(1)} \right]_{\rho} + \\
& + \frac{1}{\rho^2} \cdot \left[\frac{1}{\rho} \cdot \Delta F^{(0)} \cdot F_{\rho}^{(1)} + \frac{1}{\rho^2} \cdot \Delta F^{(0)} \cdot F_{\theta\theta}^{(1)} + \right. \\
& \left. + \frac{1}{\rho} \cdot F_{\rho}^{(0)} \cdot \Delta F^{(1)} + \frac{1}{\rho^2} \cdot F_{\theta\theta}^{(0)} \cdot \Delta F^{(1)} \right]_{\theta\theta} ;
\end{aligned}$$

$$f_7(\rho, \theta) = \Delta \left[\left(\Delta F^{(0)} \right)^3 \right] ;$$

$$\begin{aligned}
f_8(\rho, \theta) = & \left[F_{\rho\rho}^{(0)3} + \frac{2}{\rho^2} \cdot F_{\rho\rho}^{(0)} \cdot F_{\rho\theta}^{(0)2} - \right. \\
& - \frac{4}{\rho^3} \cdot F_{\rho\rho}^{(0)} \cdot F_{\rho\theta}^{(0)} \cdot F_{\theta}^{(0)} + \frac{2}{\rho^4} \cdot F_{\rho\rho}^{(0)} \cdot F_{\theta}^{(0)2} + \\
& \left. + \frac{1}{\rho^2} \cdot F_{\rho\rho}^{(0)} \cdot F_{\rho}^{(0)2} + \frac{2}{\rho^3} \cdot F_{\rho}^{(0)} \cdot F_{\rho\rho}^{(0)} \cdot F_{\theta\theta}^{(0)} + \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{\rho^4} \cdot F_{\rho\rho}^{(0)} \cdot F_{\theta\theta}^{(0)^2} \Big]_{\rho\rho} + \frac{1}{\rho} \cdot \left[\frac{1}{\rho} \cdot F_{\rho}^{(0)} \cdot F_{\rho\rho}^{(0)^2} + \frac{1}{\rho^2} \cdot F_{\rho\rho}^{(0)} \cdot F_{\theta\theta}^{(0)} + \right. \\
& + \frac{2}{\rho^3} \cdot F_{\rho\theta}^{(0)^2} \cdot F_{\rho}^{(0)} - \frac{4}{\rho^4} \cdot F_{\rho}^{(0)} \cdot F_{\rho\theta}^{(0)} \cdot F_{\theta}^{(0)} + \frac{2}{\rho^5} \cdot F_{\rho}^{(0)} \cdot F_{\theta}^{(0)^2} + \\
& + \frac{2}{\rho^4} \cdot F_{\rho\theta}^{(0)^2} \cdot F_{\theta\theta}^{(0)} - \frac{4}{\rho^5} F_{\theta\theta}^{(0)} \cdot F_{\rho\theta}^{(0)} \cdot F_{\theta}^{(0)} + \frac{2}{\rho^6} \cdot F_{\theta\theta}^{(0)} \cdot F_{\theta}^{(0)^2} + \\
& + \left. \left(\frac{1}{\rho} F_{\rho}^{(0)} + \frac{1}{\rho^2} \cdot F_{\theta\theta}^{(0)} \right)^3 \right]_{\rho} + \frac{1}{\rho^2} \left[\frac{1}{\rho} F_{\rho}^{(0)} \cdot F_{\rho\rho}^{(0)^2} + \frac{1}{\rho^2} \cdot F_{\rho\rho}^{(0)^2} F_{\theta\theta}^{(0)} + \right. \\
& + \frac{2}{\rho^3} F_{\rho\theta}^{(0)^2} \cdot F_{\rho}^{(0)} - \frac{4}{\rho^4} \cdot F_{\rho}^{(0)} \cdot F_{\rho\theta}^{(0)} \cdot F_{\theta}^{(0)} + \frac{2}{\rho^5} \cdot F_{\rho}^{(0)} \cdot F_{\theta}^{(0)^2} + \\
& + \frac{2}{\rho^4} \cdot F_{\rho\theta}^{(0)^2} \cdot F_{\theta\theta}^{(0)} - \frac{4}{\rho^5} F_{\theta\theta}^{(0)} \cdot F_{\rho\theta}^{(0)} \cdot F_{\theta}^{(0)} + \frac{2}{\rho^6} \cdot F_{\theta\theta}^{(0)} \cdot F_{\theta}^{(0)^2} + \\
& + \left. \left(\frac{1}{\rho} F_{\rho}^{(0)} + \frac{1}{\rho^2} \cdot F_{\theta\theta}^{(0)} \right)^3 \right]_{\theta\theta} + \\
& + \left(\frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial^2}{\partial\rho\partial\theta} - \frac{1}{\rho^2} \cdot \frac{\partial}{\partial\theta} \right) \left[\frac{2}{\rho} \cdot F_{\rho\rho}^{(0)^2} \cdot F_{\rho\theta}^{(0)} - F_{\rho\rho}^{(0)^2} \cdot F_{\theta}^{(0)} \cdot \frac{2}{\rho} + \right. \\
& + 4 \cdot \left(\frac{1}{\rho} F_{\rho\theta}^{(0)} - \frac{1}{\rho^2} \cdot F_{\theta}^{(0)} \right)^3 + \frac{2}{\rho^3} \cdot F_{\rho}^{(0)^2} \cdot F_{\rho\theta}^{(0)} + \\
& + \frac{4}{\rho^4} \cdot F_{\rho}^{(0)} \cdot F_{\theta\theta}^{(0)} \cdot F_{\rho\theta}^{(0)} + \frac{2}{\rho^5} \cdot F_{\theta\theta}^{(0)^2} \cdot F_{\rho\theta}^{(0)} - \frac{2}{\rho^4} F_{\rho}^{(0)^2} \cdot F_{\theta}^{(0)} - \\
& \left. - \frac{4}{\rho^5} \cdot F_{\rho}^{(0)} \cdot F_{\theta}^{(0)} \cdot F_{\theta\theta}^{(0)} - \frac{2}{\rho^6} F_{\theta}^{(0)} \cdot F_{\theta\theta}^{(0)^2} \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f_9(\rho, \theta) = & \Delta \left[\Delta F^{(0)} \cdot F_{\rho\rho}^{(0)2} \right] + \Delta \left[\frac{2}{\rho^2} \Delta F^{(0)} \cdot F_{\rho\theta}^{(0)2} - \right. \\
& \left. - \frac{4}{\rho^3} \Delta F^{(0)} \cdot F_{\theta}^{(0)} \cdot F_{\rho\theta}^{(0)} + \frac{2}{\rho^4} \Delta F^{(0)} \cdot F_{\theta}^{(0)2} \right] + \\
& + \Delta \left[\frac{1}{\rho^2} \Delta F^{(0)} \cdot F_{\rho}^{(0)2} + \frac{2}{\rho^3} \Delta F^{(0)} \cdot F_{\rho}^{(0)} \cdot F_{\theta\theta}^{(0)} + \frac{1}{\rho^4} \Delta F^{(0)} \cdot F_{\theta\theta}^{(0)2} \right]; \\
f_{10}(\rho, \theta) = & 2 \cdot \left(\Delta F^{(0)} \right)_{\rho} \cdot F_{\rho\rho}^{(0)} + 2 \cdot \Delta F^{(0)} \cdot \left(\Delta F^{(0)} \right)_{\rho\rho} \cdot F_{\rho\rho}^{(0)} + \\
& + 4 \cdot \Delta F^{(0)} \cdot \left(\Delta F^{(0)} \right)_{\rho} \cdot F_{\rho\rho\rho}^{(0)} + \left(\Delta F^{(0)} \right)_{\rho}^2 \cdot F_{\rho\rho\rho}^{(0)} + \\
& + \frac{1}{\rho} \left[\frac{1}{\rho} \left(\Delta F^{(0)} \right)_{\rho}^2 F_{\rho}^{(0)} + \frac{1}{\rho^2} F_{\theta\theta}^{(0)} \cdot \left(\Delta F^{(0)} \right)_{\rho}^2 \right] + \\
& + \frac{1}{\rho^2} \left[\frac{1}{\rho} \left(\Delta F^{(0)} \right)_{\rho}^2 F_{\rho}^{(0)} + \frac{1}{\rho^2} \cdot F_{\theta\theta}^{(0)} \cdot \left(\Delta F^{(0)} \right)_{\rho}^2 + 1 \right]_{\theta\theta} + \\
& + \frac{2}{\rho} \left[\frac{1}{\rho} F_{\rho\theta}^{(0)} \cdot \left(\Delta F^{(0)} \right)_{\rho}^2 - \frac{1}{\rho^2} F_{\theta}^{(0)} \cdot \left(\Delta F^{(0)} \right)_{\rho}^2 \right]_{\rho\theta} - \\
& - \frac{2}{\rho^2} \left[\frac{1}{\rho} F_{\rho\theta}^{(0)} \cdot \left(\Delta F^{(0)} \right)_{\rho}^2 - \frac{1}{\rho^2} F_{\theta}^{(0)} \cdot \left(\Delta F^{(0)} \right)_{\rho}^2 \right]_{\theta}; \tag{I.3.6}
\end{aligned}$$

Gərginlik funksiyasının birinci yaxınlaşmadakı ifadəsini $F^{(1)}(\rho, \theta)$ müəyyən etmək üçün (I.3.4) differensial tənliyini belə də yazmaq olar. (əgər (I.3.10) ifadələrinə daxil olan f_1, f_2 və f_3 funksiyalarında (I.2.7) nəzərə alıb, qruplaşma aparsaq):

$$\begin{aligned} \Delta\Delta F^{(1)} + (\beta_1 + \beta_2) \cdot \sum_{v=1}^{\infty} N_1(v) \cdot \rho^{-v} + \\ + (\beta_1 + \beta_2) \cdot \sum_{v=1}^{\infty} N_2(v) \cdot \rho^v = 0 \end{aligned} \quad (I.3.7)$$

Burada

$$\beta_1 = \frac{\alpha_{21}}{\alpha_{11} + \alpha_{12}}; \quad \beta_2 = \frac{\alpha_{22}}{\alpha_{11} + \alpha_{12}};$$

$N_1(v)$ və $N_2(v)$ kəmiyyətləri, f_1, f_2 və f_3 funksiyalarına daxil olan $F^{(0)}(\rho, \theta)$ gərginlik funksiyasından alınmış bütün törəmələrinin toplusu (cəbri cəmi) nəzərdə tutulur (uyğun olaraq ρ dəyişəninin eyni qüvvət üstlü hədlərin cəmi).

(I.3.7) differensial tənliyin həlli yuxarıda §1.2-də deyildiyi kimi (bax (I.2.14) tənliyinin həllinə) bu şəkildə axtarılır:

$$F^{(1)} = F_{bm}^{(1)} + F_{xbs}^{(1)} \quad (I.3.8)$$

Burada $F_{bm}^{(1)}$ - (I.3.7) tənliyinə uyğun olan $\Delta\Delta F^{(1)} = 0$ bircinc tənliyinin ümumi həlli olub (I.2.13) kimi ifadə ilə müəyyən olur:

$$F_{bm}^{(1)} = c_1^* \cdot \ln \rho + c_2^* \cdot \rho^2 \quad (I.3.9)$$

İnteqral sabitləri c_1^* və c_2^* (I.3.9) ifadəsi ilə müəyyən olan $F_{bm}^{(1)}$ gərginlik funksiyasının, (I.3.7) differensial tənliyini ödəməsi

şərtindən tapılar. Sərhəd şərtləri (I.2.10) olduğu kimidir. Belə ki, daxili L_1 konturu üzərində

$$\sigma_{\rho}^{(1)} \Big|_{\rho=1} = \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial F^{(1)}}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 F^{(1)}}{\partial \theta^2} = 0$$

Xarici L_2 konturu üzərində

$$\sigma_{\rho}^{(1)} \Big|_{\rho=l_2} = \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial F^{(1)}}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 F^{(1)}}{\partial \theta^2} = 0 \quad (\text{I.3.10})$$

(I.3.7) differensial tənliyinin xüsusi həlli $F_{xbs}^{(1)}$ bu şəkildə alınar.

$$\begin{aligned} F_{xbs}^{(1)} &= \sum_{v=2}^{\infty} N_1(v) \cdot \rho^{4-v} \cdot (\beta_1 + \beta_2) \varepsilon_1 + \\ &+ \sum_{k=2}^{\infty} N_2(v) \cdot \rho^{v+4} \cdot (\beta_1 + \beta_2) \varepsilon_2 + \\ &+ (\beta_1 + \beta_2) N_1(1) \left(\frac{1}{6} \ln \rho - \frac{11}{36} \right) \cdot \rho^3 \end{aligned} \quad (\text{I.3.11})$$

Burada

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= \left\{ (4-v)(2-v) \cdot \left[(3-v)^2 - 1 \right] \right\}^{-1} \\ \varepsilon_2 &= \left\{ (4+v)(2+v) \cdot \left[(3+v)^2 - 1 \right] \right\}^{-1} \end{aligned} \quad (\text{I.3.12})$$

Beləliklə (I.3.7) differensial tənliyinin ümumi həlli, (I.3.8)-(I.3.12) ifadələrinə əsasən aşağıdakı şəkildə alınar:

$$\begin{aligned}
F^{(1)}(\rho, \theta) = & c_1^* \cdot \rho^2 + c_1^* \ln \rho + \sum_{v=2}^{\infty} \rho^{-v+4} \cdot (\beta_1 + \beta_2) \cdot N_1(v) \cdot \varepsilon_1 + \\
& + \sum_{v=1}^{\infty} \rho^{v+4} \cdot (\beta_1 + \beta_2) \cdot N_2(v) \cdot \varepsilon_2 + \\
& + (\beta_1 + \beta_2) N_1(v) \cdot \left(\frac{1}{6} \ln \rho - \frac{11}{36} \right) \cdot \rho^3 \quad (I.3.13)
\end{aligned}$$

Analoji olaraq növbəti – üçüncü yaxınlaşmada $F^{(2)}(\rho, \theta)$ gərginlik funksiyası üçün aşağıdakı ifadəni alarıq (əgər (I.3.3) differensial tənliyində $F^{(0)}$ üçün alınan (I.2.17) ifadəsini və $F^{(1)}(\rho, \theta)$ üçün alınan (I.3.13) ifadəsini nəzərə alsaq):

Əvvəlcə (I.3.3) differensial tənliyin belə də yazmaq olar:

$$\begin{aligned}
\Delta \Delta F^{(2)} + (2\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 + \beta_4 + \beta_5) \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \rho^{-k} \cdot W_1(k) + \\
+ (2\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 + \beta_4 + \beta_5) \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \rho^k \cdot W_2(k) = 0 \quad (I.3.14)
\end{aligned}$$

Burada β_1 və β_2 kəmiyyətləri (I.3.7)-dəki kimi təyin olunurlar.

$$\beta_3 = \frac{\alpha_{31}}{\alpha_{11} + \alpha_{12}}; \quad \beta_4 = \frac{\alpha_{32}}{\alpha_{11} + \alpha_{12}}; \quad \beta_5 = \frac{\alpha_{33}}{\alpha_{11} + \alpha_{12}}; \quad (I.3.15)$$

$W_1(k)$ və $W_2(k)$ özündə $F^{(0)}$ və $F^{(1)}$ funksiyalarını və onların lazımı törəmələrini cəmləşdirən, ρ dəyişəninin eyni qüvvət üstlü hədlərinin cəmini ifadə edən kəmiyyətlərdir.

$F^{(2)}(\rho, \theta)$ funksiyasını müəyyən edərəkən $F^{(1)}(\rho, \theta)$ funksiyasını taparkən istifadə olunan (I.3.10) sərhəd şərtlərindən istifadə olunur.

(I.3.14) differensial tənliyin həlli (I.3.7) tənliyinin həllində olduğu kimi, bu şəkildə axtarılır:

$$F^{(2)}(\rho, \theta) = F_{bm}^{(2)} + F_{xbs}^{(2)}$$

$F_{bm}^{(2)}$ -funksiyası (I.3.14) differensial tənliyinin ümumi həlli (I.3.9) kimi götürülür.

$$F_{bm}^{(2)}(\rho, \theta) = c_3 \cdot \ln \rho + c_4 \cdot \rho^2 \quad (I.3.16)$$

c_3 və c_4 əmsalları c_1 və c_2 sabitlərinin tapılması kimidir. Burada da sərhəd şərtləri (I.3.10) sərhəd şərtlərinin eynidir.

(I.3.14) differensial tənliyinin xüsusi həlli birinci yaxınlaşmadakı kimi analogi olaraq bu şəkildə müəyyən olunur:

$$F_{xbs}^{(2)} = \sum_{k=2}^{\infty} \rho^{4-k} \cdot Q_1(k) \cdot \delta \cdot \varepsilon_1 + \sum_{k=1}^{\infty} \rho^{4+k} \cdot Q_2(k) \cdot \delta \cdot \varepsilon_2 + \delta \cdot Q_1(1) \cdot \left(\frac{1}{6} \ln \rho - \frac{11}{36} \right) \cdot \rho^3 \quad (I.3.17)$$

Beləliklə (I.3.14) differensial tənliyin ümumi həllini tapmış oluruq:

$$\begin{aligned}
F^{(2)} = F_{bm}^{(2)} + F_{x\theta s}^{(2)} = c_3 \ln \rho + c_4 \rho^2 + \\
+ \sum_{k=2}^{\infty} \rho^{4-k} \cdot Q_1(k) \cdot \delta \cdot \varepsilon_1 + \sum_{k=1}^{\infty} \rho^{4+k} \cdot Q_2(k) \cdot \delta \cdot \varepsilon_2 + \\
+ \delta \cdot Q_1(1) \cdot \left(\frac{1}{6} \ln \rho - \frac{11}{36} \right) \cdot \rho^3; \quad (I.3.18)
\end{aligned}$$

Burada $\delta = 2\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 + \beta_4 + \beta_5$ əvəzləməsi edilib. ε_1 və ε_2 əmsalları (I.3.12) ifadələri ilə müəyyən olunur.

Biz burada, üç yaxınlaşma ilə kifayətlənirik. Aydındır ki, lazım gəldikdə 4-cü, 5-ci və i.a. yaxınlaşmalar üçün $F^{(n-1)}(\rho, \theta)$ gərginlik funksiyasını tapa bilərik.

Alınan həllər bir ədədi misalla nümayiş etdirilir. Yuxarıda §1.1-dəki qalın divarlı borunun gərginlik vəziyyətini (yəni ədəbiyyatlardan məlum olan Lyame məsələsini) indi burada ixtiyari fiziki qeyrixətti qoyuluşda həll edək (bunu, kiçik fiziki qeyrixətti qoyuluşdakı məsələnin həllinin ixtiyari fiziki qeyrixətti qoyuluşdan həlldən nə qədər fərqli olduğunu nümayiş etdirmək üçün edirik).

Xətti elastiklik nəzəriyyəindən məlum olan $F^{(0)}(\rho, \theta)$ gərginlik funksiyasının (I.2.7) ifadəsini (I.3.7) differensial tənliyində nəzərə alsaq birinci yaxınlaşmada $F^{(1)}(\rho, \theta)$ gərginlik funksiyası üçün belə bir differensial tənlik alarıq:

$$\Delta\Delta F^{(1)} = 64 \cdot b_1 A_1 \cdot \beta_2 \cdot \rho^{-4} - 32 A_1^2 \cdot \beta_2 \cdot \rho^{-6}; \quad (I.3.19)$$

Bu tənlikdə

$$b_1 = \frac{1}{2} \cdot \frac{p_2 r^2 - p_1 R^2}{R^2 - r^2}; \quad A_1 = \frac{r^2 R^2 \cdot (p_2 - p_1)}{R^2 - r^2};$$

$$\beta_2 = \frac{\alpha_{12}}{\alpha_{11} + \alpha_{12}}.$$

əvəzləmələri edilmişdir.

Yuxarıda şərh olunan yolla (I.3.19) differensial tənliyini həll edərək nəticədə birinci yaxınlaşmada gərginlik funksiyası $F^{(1)}(\rho, \theta)$ üçün belə bir ifadə alınar:

$$F^{(1)} = F_{bm}^{(1)} + F_{xbs}^{(1)}$$

$$F_{bm}^{(1)} = c_1^* + c_2^* \cdot \ln \rho; \quad F_{xbs}^{(1)} = \ln^2 \rho \cdot D_1 + D_2 \cdot \rho^{-2}. \quad (I.3.20)$$

Burada aşağıdakı əvəzləmələr edilib:

$$D_1 = 8b_1 A_1 \beta_2; \quad D_2 = -\frac{1}{2} A_1^2 \beta_2; \quad (I.3.21)$$

c_1^* və c_2^* sabitləri (I.3.10) sərhəd şərtlərinə əsasən bu qiymətləri alır:

$$c_2^* = \frac{1}{R^2 - r^2} \left[-A_1^2 \beta_2 \frac{R^4 - r^4}{r^2 R^2} - 16 A_1 b_1 \beta_2 (R^2 \ln r - r^2 \ln R) \right]$$

$$c_1^* = -\frac{1}{R^2 - r^2} \left[8b_1 A_1 \beta_2 \ln \frac{R}{r} - \frac{1}{2} A_1^2 \beta_2 \frac{R^2 - r^2}{r^2 R^2} \right] \quad (I.3.22)$$

Gərginlik funksiyası $F^{(1)}(\rho, \theta)$ üçün alınan (I.3.20) ifadəsini (I.3.5) differensial tənliyində nəzərə alsaq üçüncü yaxınlaşmada $F^{(2)}(\rho, \theta)$ funksiyası üçün belə bir differensial tənlik alarıq:

$$\Delta \Delta F^{(2)} + \beta_1 [\delta_1^* \cdot \rho^{-4} - \delta_2^* \cdot \rho^{-6}] + \beta_2 [\delta_3^* \cdot \rho^{-6} + \delta_4^* \cdot \rho^{-4} + \delta_5^* \cdot \rho^{-8} + \delta_6^* \ln \cdot \rho^{-6} - \delta_7^* \ln \rho \cdot \rho^{-4}] + \beta_4 [\delta_8^* \cdot \rho^{-6} - \delta_9^* \cdot \rho^{-4} - \delta_{10}^* \cdot \rho^{-8}] + \beta_5 [\delta_{11}^* \cdot \rho^{-6} - \delta_{12}^* \cdot \rho^{-4}] = 0 \quad (\text{I.3.23})$$

Yuxarıda göstərilən yolla (yəni $F^{(1)}$ funksiyasını müəyyən edərkən istifadə olunan üsul), bu differensial tənliyi həll edib $F^{(2)}$ gərginlik funksiyasını taparıq:

$$\begin{aligned} F^{(2)} &= F_{bm}^{(2)} + F_{xbs}^{(2)} = c_3 \rho^2 + c_4 \ln \rho + \\ &+ \beta_1 \left[-\frac{1}{8} \ln^2 \rho \cdot \delta_1^* + \frac{1}{64} \delta_2^* \rho^{-2} \right] + \\ &+ \beta_2 \left[-\delta_4^* \ln^2 \rho \cdot \varepsilon_1^* + \delta_7^* \varepsilon_2^* \ln^3 \rho - \delta_3^* \varepsilon_3^* \rho^{-2} - \right. \\ &\left. - \delta_6^* \ln \cdot \rho^{-2} \cdot \varepsilon_4^* - \delta_5^* \varepsilon_5^* \rho^{-4} \right] + \\ &+ \beta_4 \left[-\delta_8^* \rho^{-2} \varepsilon_6^* + \delta_9^* \varepsilon_7^* \ln^2 \rho + \delta_{10}^* \varepsilon_5^* \rho^{-4} \right] + \\ &+ \beta_5 \left[-\delta_{11}^* \rho^{-2} \varepsilon_6^* + \delta_{12}^* \varepsilon_7^* \ln^2 \rho \right] = 0; \end{aligned} \quad (\text{I.3.24})$$

c_3 və c_4 sabitlərini (I.3.10) sərhəd şərtlərinə əsasən tapırıq.

(I.3.24) ifadəsində aşağıdakı əvəzləmələr edilmişdir.

$$\delta_1^* = 512 \cdot \beta_2 \cdot b_1^2 A_1; \delta_2^* = 256 \cdot \beta_2 \cdot b_1 A_1^2;$$

$$\delta_3^* = 44 \cdot c_2 - 1956 \cdot \beta_1 \cdot b_1 A_1^2; \delta_5^* = 376 \cdot \beta_2 \cdot A_1^3$$

$$\delta_4^* = 1152 \cdot \beta_2 \cdot b_1^2 A_1 - 40 \cdot A_1 c_1 - 32 \cdot b_1 \cdot c_2;$$

$$\delta_6^* = 1088 \cdot \beta_2 \cdot b_1 A_1^2; \delta_7^* = 512 \cdot \beta_2 \cdot b_1^2 A_1;$$

$$\delta_8^* = 88 \cdot b_1 A_1^2; \delta_9^* = 40 \cdot b_1^2 A_1; \delta_{10}^* = 90 A_1^3;$$

$$\delta_{11}^* = 144 \cdot b_1 A_1^2; \delta_{12}^* = 96 \cdot b_1^2 A_1;$$

$$\begin{aligned} c_3 = & \frac{1}{R^2 - r^2} \left[\beta_1 \left(-\frac{1}{8} \delta_1^* \ln \frac{R}{r} - \frac{1}{64} \cdot \delta_2^* \frac{r^2 - R^2}{r^2 R^2} \right) + \right. \\ & + \beta_2 \left(-\delta_4^* \varepsilon_1 \ln \frac{R}{r} - \frac{1}{16} \cdot \delta_7^* \ln \frac{R}{r} + \delta_3^* \varepsilon_2 \frac{r^2 - R^2}{r^2 R^2} - \right. \\ & - \frac{1}{128} \cdot \delta_6^* \frac{r^2 - R^2}{r^2 R^2} + \frac{1}{64} \cdot \delta_6^* \frac{\ln R}{R^2} - \frac{1}{64} \cdot \delta_6^* \frac{\ln R}{r^2} + \\ & + \left. \frac{1}{288} \cdot \delta_5^* \frac{r^4 - R^4}{r^4 R^4} \right) + \beta_4 \left(\frac{1}{64} \delta_8^* \frac{r^2 - R^2}{r^2 R^2} + \frac{\delta_9^*}{8} \cdot \ln \frac{R}{r} - \right. \\ & \left. - \frac{1}{288} \cdot \delta_{10}^* \frac{r^4 - R^4}{r^4 R^4} \right) + \beta_5 \left(\frac{1}{64} \delta_{11}^* \frac{r^2 - R^2}{r^2 R^2} + \frac{1}{8} \cdot \delta_{12}^* \ln \frac{R}{r} \right) \Bigg]; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
c_4 = & \frac{r^2}{R^2 - r^2} \left[\beta_1 \left(-\frac{1}{4} \delta_1^* \ln R - \frac{1}{32} \cdot \delta_2^* \frac{1}{R^2} \right) + \right. \\
& + \beta_2 \left(-2\delta_4^* \varepsilon_1 \ln R + \frac{1}{8} \cdot \delta_7^* \ln R + 2\delta_3^* \varepsilon_2 \frac{1}{R^2} - \right. \\
& - \frac{1}{64} \cdot \delta_6^* \frac{1}{R^2} + \frac{1}{32} \cdot \delta_6^* \frac{\ln R}{R^2} + \frac{1}{144} \cdot \delta_5^* \frac{1}{R^4} \left. \right) + \\
& + \beta_4 \left(\frac{1}{32} \delta_8^* \frac{1}{R^2} + \frac{1}{4} \delta_9^* \cdot \ln R - \frac{1}{144} \cdot \delta_{10}^* \frac{1}{R^4} \right) + \\
& \left. + \beta_5 \left(\frac{1}{32} \delta_{11}^* \frac{1}{R^2} + \frac{1}{4} \cdot \delta_{12}^* \ln R \right) \right] - \\
& - \frac{R^2}{R^2 - r^2} \left[\beta_1 - \left(\frac{1}{4} \cdot \delta_1^* \ln r - \frac{1}{32} \cdot \delta_2^* \frac{1}{r^2} \right) + \right. \\
& + \beta_2 \left(-2\delta_4^* \varepsilon_1 \ln r + \frac{1}{8} \cdot \delta_7^* \ln r + \right. \\
& + 2\delta_3^* \varepsilon_2 \frac{1}{r^2} - \frac{1}{64} \cdot \delta_6^* \frac{1}{r^2} + \frac{1}{32} \cdot \delta_6^* \frac{\ln r}{r^2} + \frac{1}{144} \cdot \delta_5^* \frac{1}{r^4} \left. \right) + \\
& + \beta_4 \left(\frac{1}{32} \delta_8^* \frac{1}{r^2} + \frac{1}{4} \delta_9^* \cdot \ln r - \frac{1}{144} \cdot \delta_{10}^* \frac{1}{r^4} \right) + \\
& \left. + \beta_5 \left(\frac{1}{32} \delta_{11}^* \frac{1}{r^2} + \frac{1}{4} \cdot \delta_{12}^* \ln r \right) \right] ;
\end{aligned}$$

Ədədi misal həll edərkən en kəsiyin ölçülərinin nisbətini iki variantda götürülmüşdür:

I variant: $R/r = 2$; II variant: $R/r = 1,25$;

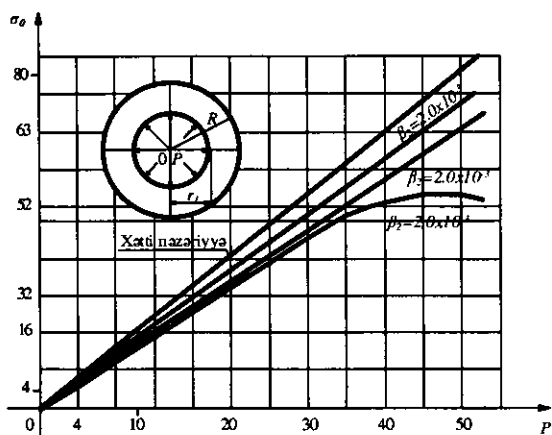
Burada r -daxili çevrənin radiusudur, R isə xarici çevrənin radiusudur. Silindr (qalın divarlı boru) yalnız daxili $p_1 = p$

təzyiqinə məruz qaldığı hal üçün, daxili kontur üzərindəki nöqtələrdə σ_θ gərginlik komponenti üçün (sıfırıncı və birinci yaxınlaşmada) alınan ifadələr aşağıdakı kimidir:

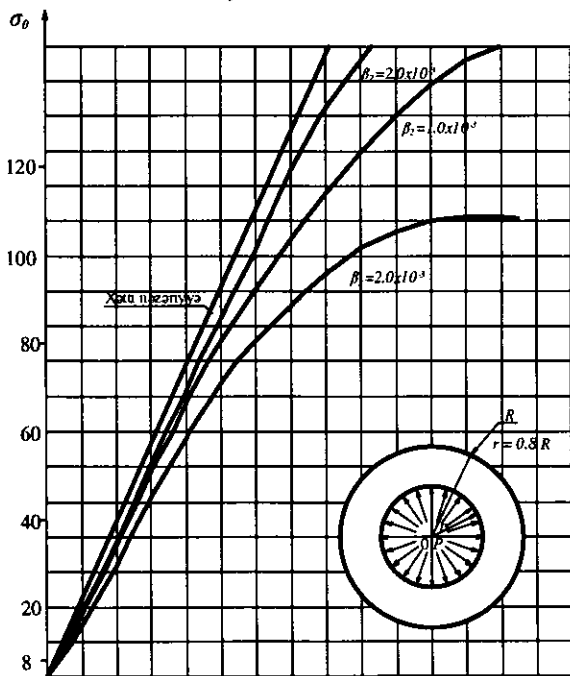
$$\text{I variant: } \sigma_\theta/p = \sigma_\theta^{(0)} + \sigma_\theta^{(1)} = 1,666 - 4,6 \cdot \beta_2 \cdot p^2;$$

$$\text{II variant: } \sigma_\theta/p = \sigma_\theta^{(0)} + \sigma_\theta^{(1)} = 4,556 - 23,58 \cdot \beta_2 \cdot p^2; \quad (\text{I.3.25})$$

Bu ifadələrə əsasən daxili təzyiqin müxtəlif qiymətlərində müxtəlif materiallar üçün tapılan σ_θ gərginlikləri aşağıda cədvəl şəklində verilir və bu cədvələ əsasən qrafik qurulmuşdur (bax şək.1.5)



Şək.1.5 a.



Şək.1.5 b.

σ_{θ} gərginlikləri
(Dairəvi silindr – Lyame məsələsi)

Cədvəl №1.9

P	Xətti nəzəriyyə		$\beta_2 = 0.2 \cdot 10^{-3}$ olduqda		$\beta_2 = 1.0 \cdot 10^{-3}$ olduqda		$\beta_2 = 2.0 \cdot 10^{-3}$ olduqda	
	VARIANTLAR							
	I	II	I	II	I	II	I	II
4	6.66	18.224	6.647	18.5	6.564	17.847	6.466	17.47
10	16.66	45.56	16.54	45.088	16.04	43.20	15.42	40.844
20	33.32	91.12	32.848	89.234	20.832	81.69	28.36	72.256
50	83.30	227.8	80.25	216.0	67.78	168.85	52.30	109.9

Eyni bir məsələnin (Lyame məsələsinin) hər iki yolla (kiçik fiziki qeyrixətti və ixtiyari fiziki qeyrixətti qoyuluşlarda) həllərindən belə nəticəyə gəlirik ki, xətti qanundan (Hük qanunundan) azacıq da olsa kənara çıxdıqda, gərginliklərin zirvəsini (ən maksimum qiymətini) xeyli azalır (yəni hamarlaşdırılır). Praktiki nöqteyi nəzərindən ilk iki yaxınlaşma (sıfırıncı və birinci yaxınlaşma) ilə kifayətlənmək olar.

Gərginliklərin tapılan qiymətlərinə əsasən verilən cədvəllərdən və qurulmuş qrafiklərdən belə nəticəyə gəlmək olar ki, gərginlik konsentrasiyası əsasən materiallardan, təsir edən yükədən asılıdır, özündə ixtiyari fiziki qeyrixətti qoyuluşda məsələnin həlli cisimlərdə gərginliklərin paylanmasını daha dəqiq xarakterizə edir. Materialın fiziki xassələrini əks etdirən β_2 əmsalı $\beta_2 > 0$ olduqda, gərginliklər paylanması müntəzəmə daha yaxın olur. $\beta_2 < 0$ olduqda əks effekt alınır.

II BÖLMƏ

PRİZMATİK TİRLƏRİN FİZİKİ QEYRİXƏTTİ QOYULUŞDA BURULMASI.

§2.1.Məsələnin qoyuluşu. Gərginlik funksiyasının seçilməsi.

En kəsiyi iki rəbitəli oblastdan ibarət olan prizmatik tirlərin burulma məsələsi xətti qoyuluşda ədəbiyyatda [2,19,25,53, 67,101] müxtəlif üsullar və variantlarla öz həllini tapmışdır. Bu məsələlərin hamısında qəbul olunur ki,

$$\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = \tau_{xy} = 0; \quad X = Y = Z = 0$$
$$\tau_{xz} = \tau_{xz}(x, y); \quad \tau_{yz} = \tau_{yz}(x, y) \quad (\text{II.1.1})$$

Bu şərtlər daxilində (I.1.1) müvazinət şərtləri aşağıdakı bir ifadəylə gətirilər:

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} = 0 \quad (\text{II.1.2})$$

(I.2.1) müvazinət şərtlərinin ilk ikisindən aydın olur ki, $\tau_{xz} = \tau_{xz}(x, y); \quad \tau_{yz} = \tau_{yz}(x, y)$, yəni toxunan gərginliklər z dəyişənindən asılı deyil. Deformasiyanın birgəlik şərtləri olan (I.1.7) ifadəsi isə (II.1.1) və $\epsilon_x = \epsilon_y = \epsilon_z = \gamma_{xy} = 0$ şərtlərinə əsasən belə olur:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} - \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} \right] = 0; \quad \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} - \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} \right] = 0 \quad (\text{II.1.3})$$

Bu sonuncu ifadədə kvadrat mötərizə içərisində olan hədlərin eyni olduğuna görə belə bir tənliklə eyni güclüdür

$$\frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} - \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} = c = \text{const} . \quad (\text{II.1.4})$$

Fiziki qeyri xətti qoyuluşda tirlərin burulma məsələsində yerdəyişmə komponentləri u, v və w , xətti elastiklik nəzəriyyəsinə kimi belə götürülür.

$$u = \tau \cdot y \cdot z; \quad v = -\tau \cdot x \cdot z; \quad w = w(x, y)$$

Burada τ -tirin vahid uzunluğuna düşən burulma bucağıdır.

Deyildiyi kimi, sonuncu ifadələrə əsasən, uzanma deformasiyaları həqiqətən də

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = 0; \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} = 0; \quad \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

olurlar ki, bu da (II.1.1) şərtlərini ödəyir.

Göstərmək olar ki, (II.1.1) və (II.1.3) şərtlərini saxlamaqla $\tau_{xz}(x, y)$ və $\tau_{yz}(x, y)$ gərginliklərini elə seçmək olar ki, (I.1.1) və (I.1.7) şərtləri fiziki qeyri xətti elastiklik nəzəriyyəsinə də öz doğruluğunu saxlasın.

Əgər toxunan gərginliklərin

$$\tau_{xz} = \frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial y}; \quad \tau_{yz} = -\frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial y}; \quad (\text{II.1.5})$$

kimi götürsək (II.1.2) tənliyi ödənilər. Burada $\Phi(x, y)$ -toxunan gərginliklər funksiyasıdır.

Onda $\Phi(x, y)$ funksiyanın x və y dəyişənlərinə nəzərən törəmələrini uyğun indekslərlə göstərsək, **gətirilmiş otra gətginliyin** (s_0) (I.1.3) ifadəsi və **gətirilmiş toxunan gərginliklərin intevsiivliyinin kvadratının** (t_0^2) ifadəsi (I.1.6) sadəlişib belə şəkllə düşər:

$$s_0 = \frac{\sigma_0}{3K} = \frac{1}{3K}(\sigma_x + \sigma_y) = 0$$

$$t_0^2 = \frac{2}{3G^2} \cdot \left[\left(\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \tau_{yz}}{\partial x} \right)^2 \right] = \frac{2}{3G^2} \cdot [\Phi_x^2 + \Phi_y^2]; \quad (\text{II.1.6})$$

Yuxarıda deyilənlərə əsasən deformasiyalar aşağıdakı kimi olar (əgər (I.1.36) ifadələrini də nəzərə alsaq):

$$\text{yerdəyişmələr üçün} \quad \varepsilon_x = \varepsilon_y = \varepsilon_z = \gamma_{xy} = 0$$

Sürüşmələr üçün

$$\gamma_x = 0; \quad \gamma_{xz} = \frac{1}{G} g(t_0^2) \cdot \tau_{xz}; \quad \gamma_{yz} = \frac{1}{G} g(t_0^2) \cdot \tau_{yz}. \quad (\text{II.1.7})$$

Əgər (II.1.7) ifadələrini (II.1.3) tənliyində nəzərə alsaq, yazarıq:

$$\frac{\partial}{\partial y} [g(t_0^2) \cdot \tau_{xz}] - \frac{\partial}{\partial x} [g(t_0^2) \cdot \tau_{yz}] = c \quad (\text{II.1.8})$$

Bu tənlikdə (II.1.5) ifadələrini nəzərə alsaq, yazı bilərik:

$$\frac{\partial}{\partial x} [g(t_0^2) \cdot \Phi_{xz}] + \frac{\partial}{\partial y} [g(t_0^2) \Phi_y] = c \quad (\text{II.1.9})$$

Bu sonuncu ifadədən, lazımi törəmələr aldıqdan sonra, aşağıdakıları yazaraq bu differensial tənliyi həllini, toxunan gərginliklərin intensivlik əmsalının xüsusi halının (I.1.57) şəklinə uyğun götürüldü:

$$g(t_0^2) \cdot \Delta F + \frac{4}{3G} \cdot [\Phi_x^2 \Phi_{xx} + 2\Phi_x \Phi_y \Phi_{xy} + \Phi_x^2 \Phi_{yy}] g'(t_0^2) - c = 0 \quad (\text{II.1.10})$$

Burada

$$g'(t_0^2) = \frac{d}{dt_0^2} g(t_0^2) \quad \text{və} \quad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}.$$

əvəzləmələri edilmişdir.

Əgər sürüşmə defformasiyaları γ_{xz} və γ_{yz} üçün

$$\gamma_{xz} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}; \quad \gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}$$

olduğunu nəzərə alsaq, (II.1.7) ifadələrinə əsasən aşağıdakı nəticəyə gəlmək olar:

$$\gamma_{yz} = \frac{\partial w}{\partial y} + \tau \cdot x = -\frac{1}{G} \cdot g(t_0^2) \cdot \Phi_x$$

$$\gamma_{xz} = \frac{\partial w}{\partial x} - \tau \cdot y = -\frac{1}{G} \cdot g(t_0^2) \cdot \Phi_y.$$

Bu ifadələrdən də tirin en kəsik müstəvisinin deplanasiyası (yəni müstəvinin formasının təhrif olunması düz müstəvi halının pozulması) funksiyası $w(x, y)$ aşağıdakı iki şərti eyni zamanda ödəməsi vacibdir.

$$\frac{\partial w}{\partial y} = -\frac{1}{G} g(t_0^2) \cdot \Phi_x - \tau \cdot x$$

$$\frac{\partial w}{\partial x} = -\frac{1}{G} g(t_0^2) \cdot \Phi_y - \tau \cdot y;$$

Bu isə o zaman mümkündür ki, birincidən x görə, ikincidən isə y görə törəmə alıb sağ tərəflərini bərabərləşdirək

$$\frac{1}{G} \left\{ \frac{\partial}{\partial x} [g(t_0^2) \cdot \Phi_x] + \frac{\partial}{\partial y} [g(t_0^2) \cdot \Phi_y] \right\} = -2\tau,$$

və ya (II.1.9) ifadəsinə əsasən c sabiti ilə, vahid uzunluğa düşən burulma bucağı arasında

$$c = -2G\tau \text{ asılılığı olmalıdır.}$$

(II.1.10) ifadəsindən görünür ki, (II.1.1) şərtlərinin, fiziki qeyri xətti elastilik nəzəriyyəsində istifadə olunmasından toxunan gərginlik funksiyası üçün xüsusi törəmələrlə ikinci tərtibli differensial tənlik alınır (yəni (II.1.1) şərtləri qeyrixətti qoyuluşda da yararlıdır).

Qeyd etmək lazımdır ki, $\Phi(x, y)$ funksiyası baxılan ikirabitəli konturlar $L_j (j = 1; 2)$ üzərində c_j sabir kəmiyyət alır.

$$\Phi(x, y) = f = c_j; L_j \text{ üzərində } j = 1; 2 \quad (\text{II.1.11})$$

(II.1.10) differensial tənliyi, **Hüq** qanunu çərçivəsində (xətti elastiklik nəzəriyyəsində) $g(t_0^2) = 1$ olduğundan, $\Delta\Phi_0 = \Delta\Phi = c$ differensial tənliyinə çevrilir (yəni xətti elastiklik nəzəriyyəsindəki məlum tənliyə çevrilir).

Bu $\Delta\Phi_0 = \Delta\Phi = c$ tənliyinin həlli xətti qoyuluşda həll olunub [2,19,25,67].

Müstəvi məsələlərin fiziki qeyrixətti qoyuluşda həllinə analogi olaraq (II.1.10) tənliyinin həllinin kiçik parametr λ görə beləbir polinom şəklində axtarılır:

$$\Phi = \Phi_0 + \lambda_2\Phi_1 + \lambda^2\Phi_2 + \dots + \lambda^n\Phi_n. \quad (\text{II.1.12}).$$

Kiçik λ parametrini I bölmədəki kimi $\lambda = g_2 K / (3K + G)G^2$ şəklində götürürük.

Burada $\Phi_0(x, y)$, xətti qoyuluşda burulmada gərginlik funksiyasıdır (sıfırıncı yaxınlaşma)

$\Phi_1(x, y)$, $\Phi_2(x, y)$ və i.a. funksiyaları isə

növbəti yaxınlaşmalarda (birinci, ikinci və i.a.) burulmada gərginlik funksiyasıdır.

Əgər (II.1.12) ifadəsini (II.1.10) differensial tənliyində yerinə qoyub $\lambda = g_2$ kiçik parametərə görə eyni qüvvət üstlü hədlərin

cəbri cəmini sıfıra bərabərləşdirsək n sayda ($n = 0; 1; \dots; \infty$) differensial tənliklər sistemi alırıq.

Birinci yaxınlaşmada ($\lambda = g_2$ və $n = 1$ olan hal üçün) (II.1.10) tənliyi aşağıdakı şəkil alır:

$$\Delta\Phi_1 + \frac{2}{3G^2} \frac{\partial\Phi_0}{\partial x} \cdot \frac{\partial}{\partial x} [(\Phi_0)_x^2 + (\Phi_0)_y^2] + \frac{2}{3G^2} \frac{\partial\Phi_0}{\partial y} \cdot \frac{\partial}{\partial y} [(\Phi_0)_x^2 + (\Phi_0)_y^2] - c \cdot \frac{2}{3G^2} [(\Phi_0)_x^2 + (\Phi_0)_y^2] = 0 \quad (\text{II.1.13})$$

Xətti elastiklik nəzəriyyəsindən məlumdur ki, $\Phi_0(x, y)$ gərginlik funksiyası, burulmaya məruz qalan prizmatik tirin en kəşik sahəsində requlyar olan $F(z)$ kompleks dəyişən funksiyasının köməyi ilə belə tapılır [2,19,25,53,67]:

$$\Phi_0(x, y) = \Phi_0(z, \bar{z}) = \frac{1}{2} [F(z) + \overline{F(z)}] - \frac{1}{2} z\bar{z}. \quad (\text{II.1.14})$$

Prizmatik tirin en kəsiyi ikirabitəli S oblastundan ibarət olub daxildən L_1 konturu (r radiuslu çevrə və ondan çıxan iki düzxətli çat ilə məhdudlaşan), xaricdən isə L_2 konturu ilə (düzgün çoxbucaqlı kontur) məhdudlaşıb. Belə bir oblastda requlyar olan analitik $F(z)$ funksiyası məlumdur ki, aşağıdakı şəkildə axtarılıb, (müəyyən olunub) [25,53,101]:

$$F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \cdot \xi_1^{-k} + \sum_{k=0}^{\infty} b_k \cdot \left(\frac{z}{A}\right)^k \quad (\text{II.1.15})$$

Burada

$$b_k = \sum_{n=k}^{\infty} * \beta_n \cdot a_{n-k}^{(n)} / q$$

Bütün α_k və β_k əmsalları xətti qoyuluşdakı məsələnin həllində uyğun (konkret) en kəsiyi üçün tapılmış, bir cədvəl şəklinə salınmışdır. (bax [25,53] ədəbiyyata). $a_n^{(k)}$ əmsalları, hər bir konkret L_2 konturu üçün məlum olan (bax cədvəl №1.1 və cədv. №1.2) $a_n^{(1)}$ əmsalları vasitəsilə müəyyən edilir (bax I.1.82 ifadəsində $g_n^{(k)}$ əmsalının rekurent düsturuna).

Yuxarıdakı (II.1.14) ifadəsində * ulduz işarəsi cəmin növbəti həddə keçərkən indeksinin q (çoxbucaqlının simmetriya oxları sayı) qədər dəyişdiyini göstərir.

$F(z)$ analitik fuksiyasının (II.1.14) ifadəsindəki ξ_1 dəyişənini $z = x + iy$ kompleks dəyişəni ilə əvəz etmək üçün L_1 konturunun vahid çevrə ətrafına inikas funksiyasından $z = \omega(\xi)$ və onun tərsi olan $\xi_1 = \chi(z)$ funksiyadan ifadə edilir

$$z = r \cdot \xi_1 \cdot \sum \gamma_{n-1} \cdot \xi_1^{-n};$$

$$\xi_1 = \chi(z) = \frac{z}{r} \sum_{n=0}^{\infty} \delta_{n-1} \cdot \left(\frac{r}{z}\right)^{2n} \quad (\text{II.1.16})$$

γ_{n-1} və δ_{n-1} əmsalları ədəbiyyatdan [25,53] məlumdur (bax [51] kitabında (3.15, 3.17) düsturlarına).

Beləliklə (II.1.14) ifadəsini (II.1.15) düsturuna əsasən belə də yazmaq olar (bir neçə sadə riyazi çevirmələrdən sonra):

$$F(z) = \sum_{v=1}^{\infty} a_v \cdot \left(\frac{r}{z}\right)^v + \sum_{k=0}^{\infty} b_k \cdot \left(\frac{z}{A}\right)^k \quad (\text{II.1.17})$$

burada

$$a_v = \sum_{k=0}^v \alpha_k \cdot \delta_{-1}^{-k} \cdot l_{v-k}^{(k)}$$

Bütün $l_n^{(k)}$ əmsalları (I.1.82) ifadələrinə əsasən tapılır [51]. Yəni bu əmsallar bu şərtindən tapılır.

$$l_n^{(k)} + \sum_{n_1=1}^n l_{n-n_1}; q_{n_1}^{(k)} = 0 \quad (\text{II.1.18})$$

(II.1.17) ifadəsini (II.1.14) düsturunda nəzərə alsaq, yaza bilərik (sıfırıncı yaxınlaşmada toxunan gərginliklər funksiyası üçün):

$$\begin{aligned} \Phi_0(z, \bar{z}) = & \frac{1}{2} \left[\sum_{v=1}^{\infty} a_v \cdot \left(\frac{r}{z}\right)^v + \sum_{k=0}^{\infty} b_k \cdot \left(\frac{z}{A}\right)^k + \right. \\ & \left. + \sum_{v=1}^{\infty} a_v \cdot \left(\frac{r}{\bar{z}}\right)^v + \sum_{k=0}^{\infty} b_k \cdot \left(\frac{\bar{z}}{A}\right)^k \right] - \frac{1}{2} z \cdot \bar{z} \end{aligned} \quad (\text{II.1.19})$$

Bu ifadədən z və \bar{z} dəyişənlərinə görə törəmələr alıb

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \quad \text{və} \quad \frac{\partial}{\partial y} = i \left(\frac{\partial}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \right)$$

olduğunu bilərək, (II.1.13) differensial tənliyi aşağıdakı şəkil alar:

$$\Delta \Phi_1 + c \cdot \frac{8}{3G^2} (\Phi_0)_z \cdot (\Phi_0)_z + \frac{16}{3G^2} \left[(\Phi_0)_z^2 \cdot (\Phi_0)_{\bar{z}\bar{z}} + (\Phi_0)_z^2 \cdot (\Phi_0)_{\bar{z}\bar{z}} + 2(\Phi_0)_{\bar{z}\bar{z}} \cdot (\Phi_0)_z \cdot (\Phi_0)_z \right] = 0 \quad (\text{II.1.20})$$

Burada $z = \rho e^{i\theta}$ və $\bar{z} = \rho e^{-i\theta}$ olduğuna əsasən polyar koordinat sistemində $(\Phi_0)_z \cdot (\Phi_0)_{\bar{z}}$ və i.a. ifadələri üçün belə düsturlar alınar:

$$\begin{aligned} (\Phi_0)_z \cdot (\Phi_0)_{\bar{z}} = & \left\{ \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \left[-\frac{k \cdot a_k \cdot r^k}{\rho^{k+1}} \cdot e^{-i\theta(k+1)} + \right. \right. \\ & \left. \left. + b_k \cdot k \cdot \frac{\rho^{k-1}}{A^k} \cdot e^{i\theta(k-1)} \right] - \right. \\ & \left. - \frac{1}{2} \rho e^{-i\theta} \right\} \cdot \left\{ \frac{1}{2} \sum_{v=1}^{\infty} \left[-\frac{a_v \cdot v \cdot r^v \cdot e^{i\theta(v+1)}}{\rho^{v+1}} + \right. \right. \\ & \left. \left. + b_v \cdot v \cdot \frac{\rho^{v-1}}{A^v} \cdot e^{-i\theta(v-1)} \right] - \frac{1}{2} \rho e^{i\theta} \right\} \quad (\text{II.1.21}) \end{aligned}$$

Bu ifadəni sadə şəkildə belə də yazmaq olar:

$$(\Phi_0)_z \cdot (\Phi_0)_{\bar{z}} = \sum_{n=1}^{\infty} V_1(n) \cdot \rho^{-n} + \sum_{n=1}^{\infty} V_2(n) \cdot \rho^n \quad (\text{II.1.22})$$

Analoji olaraq (II.1.20) ifadəsinə daxil olan digər hədlər üçün də bu əməliyyatı apararaq nəticədə, göstərilən differensial tənlik

aşağıdakı şəklə gətirilər (əgər ρ dəyişəninin eyni qüvvət üstlü hədlərini bir cəm kimi göstərsək):

$$\Delta\Phi_1 = \sum_{k=1}^{\infty} M_1(k) \cdot \rho^{-k} + \sum_{k=1}^{\infty} M_2(k) \cdot \rho^k. \quad (\text{II.1.23})$$

Burada $M_1(k)$ və $M_2(k)$ əmsalları $V_1(k)$, $V_2(k)$...və i.a kimi ifadələrinin toplusu (cəmi) olduğunu göstərir.

Bu (II.1.22) ifadəsində aşağıdakı əvəzləmələr edilmişdir:

$$V_1(k) = N_7(n) + N_8(k) + N_{11}(k) + N_5(k);$$

$$V_2(k) = N_{10}(k) + N_9(k+1) + N_{12}(k+1) + N_6(k) + \frac{\rho^2}{4} \varepsilon_1$$

$$N_1(n) = -n \cdot a_n \cdot r^n \cdot e^{i\theta(n+1)}; \quad N_2(n) = nb_n A^{-n} \cdot e^{i\theta(n-1)};$$

$$N_3(n) = -n \cdot a_n r^n \cdot e^{i\theta(n+1)}; \quad N_4(n) = n \cdot b_n \cdot A^{-n} \cdot e^{i\theta(n-1)};$$

$$N_5(n) = \frac{1}{4} na_n r^n \cdot (e^{in\theta} + e^{-in\theta}); \quad N_6(n) = -\frac{1}{4} nb_n A^{-n} (e^{in\theta} + e^{-in\theta});$$

$$N_7(n) = \frac{1}{4} \sum_{\nu=1} N_1(n) \cdot N_3(n-\nu+1) \cdot \varepsilon_2;$$

$$N_8(n) = \frac{1}{4} \sum_{\nu=1}^{\infty} [N_1(\nu) \cdot N_4(\nu-n+1) \cdot \varepsilon_2 + N_1(\nu) N_4(\nu+1) \varepsilon_3]$$

$$N_9(n) = -\frac{1}{4} \sum_{\nu=n}^{\infty} N_1(n-\nu+1) \cdot N_4(\nu+3)$$

$$N_{10}(n) = \frac{1}{4} \sum_{\nu=1}^{n+1} N_2(\nu) \cdot N_4(n-\nu+2)$$

$$N_{11}(n) = -\frac{1}{4} \sum_{\nu=n}^{\infty} [N_3(\nu-1) \cdot N_2(\nu-n+1) \cdot \varepsilon_2 + N_3(\nu) \cdot N_2(\nu+1) \varepsilon_3];$$

$$N_{12}(n) = -\frac{1}{4} \sum_{\nu=n}^{\infty} N_3(\nu-n+1) \cdot N_2(\nu+3);$$

$$\varepsilon_1 = \begin{cases} 0 & \text{əgər } n > 2 \\ 1 & \text{əgər } n \leq 2 \end{cases} \quad \varepsilon_2 = \begin{cases} 0 & \text{əgər } n = 1 \\ 1 & \text{əgər } n \neq 1 \end{cases}$$

$$\varepsilon_3 = \begin{cases} 0 & \text{əgər } n \neq 1 \\ 1 & \text{əgər } n = 1 \end{cases} \quad (\text{II.1.24})$$

Adi qaydada olduğu kimi, (II.1.23) differensial tənliyin həllini

$$\Phi_1(z, \bar{z}) = \Phi_1(\rho, \theta) = (\Phi_1)_{x_b s} + (\Phi_1)_{b m}$$

şəklində axtarıq.

Belə ki, (II.1.23) tənliyinin xüsusi həlli belə olar:

$$(\Phi_1)_{x_b s} = \sum_{k=1}^{\infty} \rho^{-k+2} \cdot M_1(\nu) \cdot \gamma_1^* +$$

$$+ \sum_{k=1}^{\infty} \rho^{k+2} \cdot M_2(\nu) \cdot \gamma_2^* \quad (\text{II.1.25}).$$

Burada

$$\gamma_1^* = (r - \nu)^{-2}; \quad \gamma_2^* = (\nu + 2)^{-2}$$

Məlumdur ki, (II.1.23) differensial tənliyi ilə bircins olan $\Delta\Phi_1 = 0$ tənliyinin ümumi həlli

$$(\Phi_1)_{\text{sm}} = c_1 \cdot \ln \rho + c_2 \rho^n \cdot \cos(n\theta) \quad (\text{II.1.26})$$

şəklində axtarılır.

Beləliklə birinci yaxınlaşmada $\Phi_1(z, \bar{z}) = \Phi_1(\rho, \theta)$ funksiyası üçün belə bir ifadə alınır:

$$\begin{aligned} \Phi_1(\rho, \theta) = & \sum_{k=1}^{\infty} \rho^{2-k} M_1(k) \cdot \gamma_1^* + \sum_{k=1}^{\infty} \rho^{k+2} M_2(k) \cdot \gamma_2^* + \\ & + c_1 \cdot \ln \rho + c_2 \cdot \rho^n \cdot \cos(n\theta); \end{aligned} \quad (\text{II.1.27})$$

c_1 və c_2 sabitləri aşağıdakı sərhəd şərtlərindən tapılır:

- daxili kontur L_1 üzərində

$$\Phi_1 = c_1 ;$$

$$\rho = t_1 e^{-i\theta} \text{ olduqda}$$

- xarici kontur L_2 üzərində

$$\Phi_1 = 0; \quad \rho = t_2 e^{-i\theta} \text{ olduqda} \quad (\text{II.1.28})$$

və ya

$$\tau_{\rho} = -\frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} = 0; \quad \rho = t_1 \text{ olduqda } (L_1 \text{ üzərində})$$

$$\tau_{\theta} = \frac{\partial \Phi}{\partial \rho} = 0; \quad \rho = t_2 \text{ olduqda } (L_2 \text{ üzərində})$$

Bu şərtlərə əsasən c_1 və c_2 sabitləri bu qiymətlər alır:

$$\begin{aligned}
c_1 = & -\sum_{k=1}^{\infty} t_1^{2-k} M_1(k) \cdot \gamma_1^* \cdot \frac{1}{\ln t_1} - \sum_{k=1}^{\infty} t_1^{k+2} M_2(k) \cdot \gamma_2^* \cdot \frac{1}{\ln t_1} - \\
& - \frac{t_1^n \cos n\theta}{\ln t_1 A^n \cdot \cos n\theta - \ln A \cdot t_1^n \cos n\theta} \cdot \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} t_1^{2-k} M_1(k) \cdot \gamma_1^* \cdot \frac{\ln t_2}{\ln t_1} + \right. \\
& + \sum_{k=1}^{\infty} t_1^{k+2} M_2(k) \cdot \gamma_2^* \cdot \frac{\ln t_2}{\ln t_1} - \\
& \left. - \sum_{k=1}^{\infty} t_2^{2-k} M_1(k) \cdot \gamma_1^* - \sum_{k=1}^{\infty} t_2^{2+k} M_2(k) \cdot \gamma_2^* \right\}; \\
c_2 = & \frac{\ln t_1}{t_2^n \cos n\theta \cdot \ln t_1 - \ln t_2 \cdot t_1^n \cos n\theta} \cdot \left[\sum_{k=1}^{\infty} t_1^{2-k} M_1(k) \cdot \gamma_1^* \cdot \frac{\ln t_2}{\ln t_1} + \right. \\
& + \sum_{k=1}^{\infty} t_1^{2+k} M_2(k) \cdot \gamma_2^* \cdot \frac{\ln t_2}{\ln t_1} - \sum_{k=1}^{\infty} t_1^{2-k} M_1(k) \cdot \gamma_1^* - \\
& \left. - \sum_{k=1}^{\infty} t_2^{2-k} M_1(k) \cdot \gamma_1^* - \sum_{k=1}^{\infty} t_2^{2+k} M_2(k) \cdot \gamma_2^* \right];
\end{aligned}$$

(II.1.29)

Gərginlik funksiyasının $\Phi_0(\rho, \theta)$ və $\Phi_1(\rho, \theta)$ ifadələri olan (II.1.19) və (II.1.27) düsturlarını bilərək (yəni sıfırıncı və birinci yaxınlaşmada gərginlik funksiyalarının ifadələrini bilərək), anoloji olaraq ikinci yaxınlaşmada $\Phi_2(\rho, \theta)$ gərginlik funksiyasının ifadəsini taparıq və i.a. Beləliklə istənilən yaxınlaşma üçün $\Phi_n(\rho, \theta)$ funksiyası tapılar, fərq yalnız riyazi əməliyyatların çoxluğunda alınan ifadələrin böyüklüyündədir.

Gərginlik funksiyasının (II.1.19) və (II.1.27) ifadələrinə əsasən, prizmatik tirin en kəsiyinin ən xarakterik nöqtələrində (eləcə də düzxətli çatların təpə nöqtələrində) toxunan gərginliklər τ_{xz} və τ_{yz} ədəbiyyatdan məlum olan düsturlarla tapılır:

$$\tau_{xz} = \tau_{\rho z} = -\frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial \theta}; \quad \tau_{yz} = \tau_{\theta z} = \frac{\partial \Phi}{\partial \rho} \quad (\text{II.1.30})$$

Bu ifadələrdə gərginlik funksiyasının (II.1.12) ifadəsini nəzərə alsaq, yaza bilərik (II.1.12 düsturunda ilk iki həddi saxladıqda)

$$\tau_{\rho z} = \tau_{\rho z}^{(0)} + g_2 \tau_{\rho z}^{(1)} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} - \frac{1}{\rho} g_2 \frac{\partial \Phi_1}{\partial \theta} = \tau_{\rho z}^{(0)} - g_2 \frac{1}{\rho} \frac{\partial \Phi_1}{\partial \theta};$$

$$\tau_{\theta z} = \tau_{\theta z}^{(0)} + g_2 \tau_{\theta z}^{(1)} = \frac{\partial \Phi_0}{\partial \rho} + g_2 \frac{\partial \Phi_1}{\partial \rho} = \tau_{\theta z}^{(0)} + g_2 \frac{\partial \Phi_1}{\partial \rho}; \quad (\text{II.1.31})$$

Burada $\tau_{\rho z}^{(0)}$ və $\tau_{\theta z}^{(0)}$, baxılan prizmatik tirin xətti elastiklik nəzəriyyəsi çərçivəsində burulmasından məlum olan toxunan gərginliklərdir (yəni sıfırıncı yaxınlaşmadakı toxunan gərginliklərdir).

Yuxarıda göstərilən ümumi həll aşağıdakı ədədi misalla nümayiş etdirilir.

1.Mərkəzi dairəvi deşiyə və iki düzxətli çata malik kvadrat tirin fiziki qeyrixətti qoyuluşda burulması.

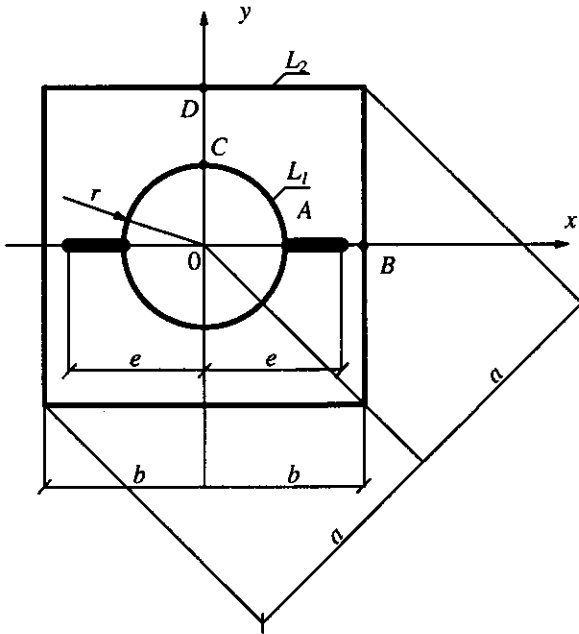
Bu məsələ xətti elastiklik nəzəriyyəsi çərçivəsində öz həllini tapmışdır [25,53]. Tirin en kəsik ölçüləri arasında nisbət iki variantda verilmişdir (şək.2.1).

$$\text{I variant } r/b = 0,5; \quad e = 0,6b; \quad m = -\frac{1}{9}; \quad A = 2,5r;$$

$$\text{II variant } r/b = 0,5; \quad e = 0,7b; \quad m = -\frac{1}{9}; \quad A = 2,5r$$

Gərginlik funksiyası $\Phi_0(z; \bar{z})$ üçün (II.1.19) ifadəsinə əsasən aşağıdakı düsturu alırıq (analitik $F(z)$ funksiyasında ilk iki həddi saxlayırıq, çünki α_k və β_k əmsallarının sonrakı qiymətləri sonsuz dərəcədə kiçikdirlər).

$$\begin{aligned} F(z) = & a_4 \cdot \left(\frac{t_1}{z}\right)^4 + a_8 \cdot \left(\frac{t_1}{z}\right)^8 + b_4 \left[a_1^{(n)} + \left(\frac{z}{t_2}\right)^4 \right] + \\ & + b_8 \cdot \left[a_2^{(8)} + a_1^{(8)} \left(\frac{z}{t_2}\right)^4 + \left(\frac{z}{t_2}\right)^8 \right]; \end{aligned} \quad (\text{II.1.32})$$



Şək.2.1.

Bu ifadəni t_1 və t_2 dəyişənlərinin birindən digərinə keçmək üçün L_1 və L_2 konturlarının inikas funksiyalarından istifadə olunur (bax I bölmədə cədvəl N:2.1)

Bu ifadəyə daxil olan a_4 , a_8 , b_4 və b_8 əmsalları hər bir variant üçün hesablanıb cədvəl şəklində verilib (bax cədvəl N:2.1).

Cədvəl 2.1

Əmsallar	Variantlar	
	I variant	II variant
a_4	0,013379	0,0524
a_8	0,011487	0,04407
b_4	-0,003939	-0,0168
b_8	-0,001927	-0,00255

Xətti elastiklik nəzəriyyəsində baxılan, en kəsiyi kvadrat olan tirin burulmasında tapılan toxunan gərginliklər cədvəl №2.2 verilir.

$F(z)$ analitik funksiyasını bilərək (2.1.19) ifadəsi ilə sıfırıncı yaxınlaşmada $\Phi_0(z; \bar{z})$ funksiyası tapılır. Sonra isə birinci yaxınlaşmada gərginlik funksiyasını $\Phi_1(z; \bar{z})$ aşağıdakı differensial tənlikdən tapırıq (əgər II.1.32 ifadəsini II.1.19 və II.1.20-də nəzərə alsaq):

Variantlar	Nöqtə z	Xətti qoyuluşda $[25;53] \tau_x (\tau_{yz}) / G\tau b$	Fiziki qeyri-xətti qoyuluşda Mis $g_2 = 0.255 \cdot 10^{-6}$
I $e/b = 0,6$ $r/b = 0,5$	«A» nöqtəsi $z = e$	0.769	0.665
	«B» nöqtəsi $z = b$	1.362	1.198
	«C» nöqtəsi $z = ir$	-0.542	-0.477
	«D» nöqtəsi $z = ib$	-1.354	-1.1915
II $e/b = 0,7$ $r/b = 0,5$	«A» nöqtəsi $z = e$	0.96	0.845
	«B» nöqtəsi $z = b$	1.47	1.294
	«C» nöqtəsi $z = ir$	-0.482	-0.424
	«D» nöqtəsi $z = ib$	-1.362	-1.185

$$\begin{aligned}
& \Delta\Phi_1 + B_1 \cdot \rho^{-28} + B_2 \cdot \rho^{-24} + B_3 \cdot \rho^{-20} + B_4 \cdot \rho^{-18} + \\
& + B_5 \cdot \rho^{-16} + B_6 \cdot \rho^{-14} + B_7 \cdot \rho^{-12} + B_8 \cdot \rho^{-20} + B_9 \cdot \rho^{-8} + \\
& + B_{10} \cdot \rho^{-6} + B_{11} \cdot \rho^{-4} + B_{12} \cdot \rho^{-2} + E_1 \cdot \rho^{20} + E_2 \cdot \rho^{16} + \quad (\text{II.1.33}) \\
& + E_3 \cdot \rho^{14} + E_4 \cdot \rho^{12} + E_5 \cdot \rho^{10} + E_6 \cdot \rho^8 + E_7 \cdot \rho^6 + \\
& + E_8 \cdot \rho^4 + E_9 \cdot \rho^2 + \varepsilon^* = 0
\end{aligned}$$

Bu tənlikdə aşağıdakı əvəzləmələr edilmişdir.

$$\lambda_1 = a_4 \cdot t_1^4; \lambda_2 = a_8 \cdot t_1^8; \lambda_3 = a_1^{(n)} \cdot b_4 + a_2^{(8)} \cdot b_8;$$

$$\lambda_4 = t_2^{-4} b_4 + a_1^{(8)} \cdot t_2^{-4} b_8; \lambda_5 = t_2^{-8} \cdot b_8;$$

$$B_1 = 1152\lambda_2^3 \cdot \delta \cdot e^{-10i\theta}; \quad B_2 = 1472\lambda_1 \cdot \lambda_2^2 \delta \cdot e^{-6i\theta};$$

$$B_3 = 320\lambda_1^2 \cdot \lambda_2 \delta \cdot e^{-2i\theta} + 288\lambda_1^2 \cdot \lambda_2 \delta \cdot e^{-10i\theta};$$

$$B_4 = 288\lambda_2^2 \delta \cdot e^{-18i\theta} - 16\lambda_2^2 \delta;$$

$$B_5 = 80\lambda_1^3 \cdot \delta \cdot e^{-6i\theta} - 1152\lambda_2^2 \cdot \lambda_4 \delta \cdot e^{-22i\theta} + 192\lambda_2^2 \cdot \lambda_4 \delta \cdot e^{-2i\theta};$$

$$B_6 = 224 \cdot \lambda_1 \lambda_2 \cdot \delta \cdot e^{-14i\theta} - 16\lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot e^{4i\theta} \cdot \delta;$$

$$B_7 = -408 \cdot \lambda_1 \lambda_2 \lambda_4 \cdot \delta \cdot e^{-18i\theta} - 1152\lambda_2^2 \cdot \lambda_5 \cdot \delta \cdot e^{26i\theta} +$$

$$+ 448 \cdot \lambda_2^2 \cdot \lambda_5 \cdot \delta \cdot e^{6i\theta} + 96\lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \lambda_4 \cdot \delta \cdot e^{6i\theta};$$

$$B_8 = 40 \cdot \lambda_1^2 \cdot \delta \cdot e^{-10i\theta} - 4\lambda_1^2 \delta;$$

$$B_9 = -4 \cdot \lambda_2 \delta - 160\lambda_1^2 \lambda_4 \delta \cdot e^{-14i\theta} - 1792\lambda_1 \lambda_2 \lambda_5 \cdot e^{-22i\theta} \cdot \delta +$$

$$+ 18\lambda_2 \delta \cdot e^{-10i\theta} + 48\lambda_1^2 \lambda_4 \delta \cdot e^{2i\theta} + 896\lambda_1 \lambda_2 \lambda_5 \cdot \delta \cdot e^{10i\theta}$$

$$B_{10} = 16\lambda_2 \lambda_4 \delta \cdot e^{-12i\theta} + 48\lambda_2 \lambda_4 \cdot \delta \cdot e^{-6i\theta} \delta - 144\lambda_2 \lambda_4 \cdot \delta \cdot e^{-6i\theta};$$

$$B_{11} = -2\lambda_1 \cdot e^{-4i\theta} \delta + 5\lambda_1 e^{-6i\theta} \cdot \delta - 320\lambda_1^2 \lambda_5 \delta \cdot e^{-18i\theta} + \\ + 96\lambda_2 \lambda_4^2 \cdot e^{-10i\theta} \delta + 112\lambda_1^2 \lambda_5 \delta \cdot e^{6i\theta};$$

$$B_{12} = 8\lambda_1 \lambda_4 \delta \cdot e^{-6i\theta} + 32\lambda_2 \lambda_5 \delta \cdot e^{-16i\theta} + 8\lambda_1 \lambda_4 \delta \cdot e^{-2i\theta} - \\ - 64\lambda_2 \lambda_5 \delta \cdot e^{-2i\theta};$$

$$\varepsilon^* = 64\lambda_1 \lambda_4^2 \delta \cdot e^{-6i\theta} + 768\lambda_2 \lambda_4 \lambda_5 \delta \cdot e^{-14i\theta} - 896\lambda_2 \lambda_4 \lambda_5 \delta \cdot e^{-6i\theta}$$

$$E_1 = 896\lambda_5^3 \delta \cdot e^{6i\theta}; \quad E_2 = 1088\lambda_4 \lambda_5^3 \delta \cdot e^{2i\theta};$$

$$E_3 = -16\lambda_5^2 \delta - 224\lambda_5^2 \delta \cdot e^{14i\theta};$$

$$E_4 = 192\lambda_4^2 \lambda_5 \delta \cdot e^{-2i\theta} + 224\lambda_4^2 \lambda_5 \delta \cdot e^{6i\theta};$$

$$E_5 = -16\lambda_4 \lambda_5 \delta \cdot e^{-4i\theta} - 160\lambda_4 \lambda_5 \delta \cdot e^{10i\theta};$$

$$E_6 = 4\lambda_5 \delta \cdot e^{8i\theta} - 128\lambda_1 \lambda_5^2 \cdot e^{-6i\theta} \cdot \delta - 24\lambda_4^3 \delta \cdot e^{2i\theta} + 7\lambda_5 \cdot \delta \cdot e^{6i\theta};$$

$$E_7 = -4\lambda_4^2 \delta - 24\lambda_4^2 \delta \cdot e^{6i\theta};$$

$$E_8 = 3\lambda_4 \delta \cdot e^{2i\theta} + 128\lambda_1 \lambda_4 \lambda_5 \delta \cdot e^{-10i\theta} - 448\lambda_1 \lambda_4 \lambda_5 \delta \cdot e^{-2i\theta} - \\ - 640\lambda_2 \lambda_5^2 \cdot \delta \cdot e^{-10i\theta} + 2\lambda_4 \delta e^{4i\theta};$$

$$E_9 = 32\lambda_1^2 \lambda_5 \delta \cdot e^{2i\theta} + 16\lambda_1 \lambda_5 \cdot \delta e^{2i\theta} - \frac{1}{4} \delta \cdot e^{-12i\theta};$$

(II.1.33) differensial tənliyin həlli belə olur.

$$\Phi_1 = (\Phi_1)_{x_b s} + (\Phi_1)_{b m};$$

Burada

$$\begin{aligned}
(\Phi_1)_{x_b s} = & B_1 e_1 \rho^{-26} + B_2 e_2 \rho^{-22} + B_3 e_3 \rho^{-18} + \\
& + B_4 e_4 \rho^{-16} + B_5 e_5 \rho^{-14} + B_6 e_6 \rho^{-12} + B_7 e_7 \rho^{-10} + \\
& + B_8 e_8 \rho^{-8} + B_9 e_9 \rho^{-6} + B_{10} e_{10} \rho^{-4} + \\
& + B_{11} e_{11} \rho^{-2} + B_{12} e_{12} \ln^2 \rho - \frac{1}{4} \varepsilon \rho^2 + E_1 e_2 \rho^{22} + E_2 e_3 \rho^{18} + \\
& + E_3 e_4 \rho^{16} + E_4 e_5 \rho^{14} + E_5 e_6 \rho^{12} + E_7 e_6 \rho^{10} + E_7 e_8 \rho^8 + \\
& + E_8 e_9 \rho^6 + E_9 e_{10} \rho^4
\end{aligned}$$

$$(\Phi_1)_{b m} = c_1 \ln \rho + c_2 \quad (\text{II.1.34})$$

c_1 və c_2 məlum (II.1.28) sərhəd şərtlərindən tapılır.

Beləliklə baxılan halda c_1 və c_2 sabitlərinin ifadələri belə olar.

$$\begin{aligned}
c_1 = & \frac{1}{\ln t_1 - \ln b} \cdot [B_1 e_1 (b^{-26} - t_1^{-26}) + B_2 e_2 (b^{-22} - t_1^{-22}) + \\
& + B_3 e_3 (b^{-18} - t_1^{-18}) + B_4 e_4 (b^{-16} - t_1^{-16}) + B_5 e_5 (b^{-14} - t_1^{-14}) + \\
& + B_6 e_6 (b^{-12} - t_1^{-12}) + B_7 e_7 (b^{-10} - t_1^{-10}) + \\
& + B_8 e_8 (b^{-8} - t_1^{-8}) + B_9 e_9 (b^{-6} - t_1^{-6}) + B_{10} e_{10} (b^{-4} - t_1^{-4}) + \\
& + B_{11} e_{11} (b^{-2} - t_1^{-2}) + B_{12} e_{12} (\ln^2 b - \ln^2 t_1) - \frac{1}{4} \varepsilon (b^2 - t_1^2) + \\
& + E_1 e_2 (b^{22} - t_1^{22}) + E_2 e_3 (b^{18} - t_1^{18}) + E_3 e_4 (b^{16} - t_1^{16}) + \\
& + E_4 e_5 (b^{14} - t_1^{14}) + E_5 e_6 (b^{12} - t_1^{12}) + E_6 e_7 (b^{10} - t_1^{10}) + \\
& + E_7 e_8 (b^8 - t_1^8) + E_8 e_9 (b^6 - t_1^6) + E_9 e_{10} (b^4 - t_1^4) + c] ;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
c_2 = & \frac{1}{2} \cdot [c - B_1 e_1 (b^{-26} + t_1^{-26}) - B_2 e_2 (b^{-22} + t_1^{22}) - \\
& - B_3 e_3 (b^{-18} + t_1^{-18}) - B_4 e_4 (b^{-16} + t_1^{-16}) - B_5 e_5 (b^{-14} + t_1^{-14}) - \\
& - B_6 e_6 (b^{-12} + t_1^{-12}) - B_7 e_7 (b^{-10} + t_1^{10}) - \\
& - B_8 e_8 (b^{-8} + t_1^{-8}) - B_9 e_9 (b^{-6} + t_1^{-6}) - B_{10} e_{10} (b^{-4} + t_1^{-4}) - \\
& + B_{11} e_{11} (b^{-2} + t_1^{-2}) + B_{12} e_{12} (\ln^2 b + \ln^2 t_1) + \frac{1}{4} \varepsilon^* (b^2 + t_1^2) - \\
& - E_1 e_2 (b^{22} + t_1^{22}) - E_2 e_3 (b^{18} + t_1^{18}) - E_3 e_4 (b^{16} + t_1^{16}) - \\
& - E_4 e_5 (b^{14} + t_1^{14}) - E_5 e_6 (b^{12} + t_1^{12}) - E_6 e_7 (b^{10} + t_1^{10}) - \\
& - E_7 e_8 (b^8 + t_1^8) - E_8 e_9 (b^6 + t_1^6) - E_9 e_{10} (b^4 - t_1^4)] - \\
& - \frac{\ln t_1 + \ln b}{\ln t_1 - \ln b} \cdot \frac{1}{2} [B_1 e_1 (b^{-26} - t_1^{26}) + B_2 e_2 (b^{-22} - t_1^{-22}) + \\
& + B_3 e_3 (b^{-18} - t_1^{-18}) + B_4 e_4 (b^{-16} + t_1^{-16}) + B_5 e_5 (b^{-14} - t_1^{14}) + \\
& + B_6 e_6 (b^{-12} - t_1^{-12}) + B_7 e_7 (b^{-10} - t_1^{-10}) + B_8 e_8 (b^{-8} - t_1^{-8}) + \\
& + B_9 e_9 (b^{-6} - t_1^{-6}) + B_{10} e_{10} (b^{-4} - t_1^{-4}) + B_{11} e_{11} (b^{-2} - t_1^{-2}) + \\
& + B_{12} e_{12} (\ln^2 b + \ln^2 t_1) + \left(-\frac{1}{4} \varepsilon\right) (b^2 - t_1^2) + E_1 e_2 (b^{22} - t_1^{22}) + \\
& + E_2 e_3 (b^{18} - t_1^{18}) + E_3 e_4 (b^{16} - t_1^{16}) + E_4 e_5 (b^{14} - t_1^{14}) + \\
& + E_5 e_6 (b^{12} - t_1^{12}) + E_6 e_7 (b^{10} - t_1^{10}) + E_7 e_8 (b^8 + t_1^8) - \\
& - E_8 e_9 (b^6 + t_1^6) - E_9 e_{10} (b^4 - t_1^4) + c]
\end{aligned}$$

$$e_1 = -\frac{1}{676}; \quad e_2 = -\frac{1}{484}; \quad e_3 = -\frac{1}{324}; \quad e_4 = -\frac{1}{256}; \quad e_5 = -\frac{1}{196};$$

$$e_6 = -\frac{1}{144}; e_7 = -\frac{1}{100}; e_8 = -\frac{1}{64}; e_9 = -\frac{1}{36}; e_{10} = -\frac{1}{16};$$

$$e_{11} = -\frac{1}{4}; e_{12} = -\frac{1}{2};$$

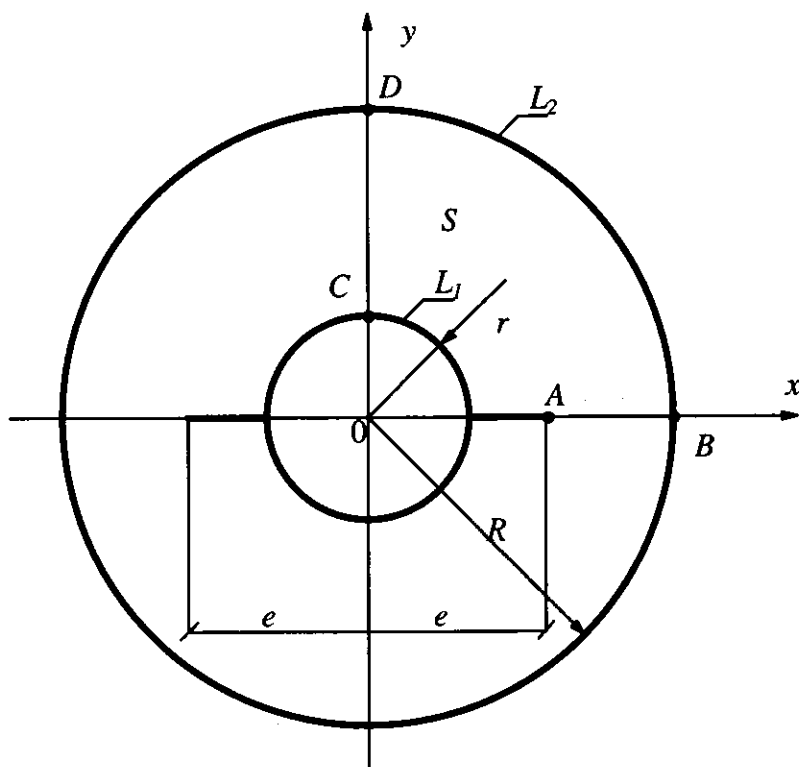
Bu baxılan məsələnin xətti elastiklik nəzəriyyəsi çərçivəsində həllindəki kimi burada da (yəni qeyri xətti qoyuluşda) ədədi hesablamalarda ən kəsiyin ölçüləri iki variantda götürülüb. Sıfırıncı və birinci yaxınlaşmadakı gərginlik funksiyalarını (Φ_0 və Φ_1) bilərək, toxunan gərginliklər (II.1.31) ifadələrinə əsasən hesablanıb aşağıdakı cədvəllərdə (bax cədvəl №2.2) verilmişdir (ən kəsiyin ən xarakterik nöqtələrində və müxtəlif materiallar üçün).

2. Dairəvi boşluq və iki düzxətli çatla zəiflədilmiş dairəvi silindirin fiziki qeyri xətti qoyuluşda burulması.

Bu məsələ də xətti qoyuluşda [25, 53] kitablarında öz həllini tapmışdır. Fiziki qeyri xətti qoyuluşda bu məsələni həllindən alınan nəticələr aşağıda cədvəldə verilmişdir (şək.2.2, cədv.2.3)

Biz burada aralıq hesablarını atıb yalnız alınan nəticələr veririk.

2. Dairəvi boşluq və iki düzxətli çatla zəiflədilmiş dairəvi silindrin qeyri-xətti qoyuluşda burulması



Şək.2.2

Cədvəl №2.3

Variantlar	Nöqtə Z	Xətti qoyuluşda [25,53] $\tau_{xz}(\tau_{yz})/Grb$	Qeyri xətti qoyuluşda Xəlis mis $g_2 = 0.255 \cdot 10^{-6}$
I $r/R = 0,5$ $e/R = 0,6$	«A» nöqtəsi; $z = e$	0.762	0.678
	«B» nöqtəsi; $z = b$	1.02	1.908
	«C» nöqtəsi; $z = ir$	-0.492	-0.443
	«D» nöqtəsi; $z = ib$	-0.944	-0.865
II $r/R = 0,5$ $e/R = 0,7$	«A» nöqtəsi; $z = e$	0.83	0.747
	«B» nöqtəsi; $z = b$	1.08	0.961
	«C» nöqtəsi; $z = ir$	-0.52	-0.468
	«D» nöqtəsi; $z = ib$	-0.98	-0.872
III $r/R = 0,7$ $e/R = 0,8$	«A» nöqtəsi; $z = e$	0.97	0.863
	«B» nöqtəsi; $z = b$	1.27	1.118
	«C» nöqtəsi; $z = ir$	-0.59	-0.531
	«D» nöqtəsi; $z = ib$	-1.089	-0.971

3. Kvadrat boşlugla zəiflədilmiş dairəvi silindirin fiziki qeyri xətti qoyuluşda burulması.

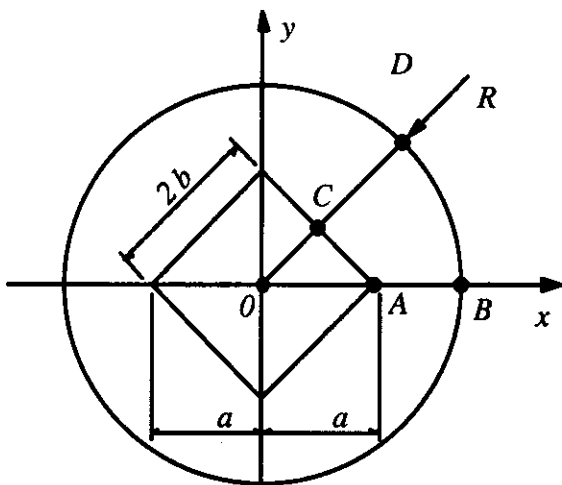
Bu məsələ xətti elastiklik nəzəriyyəsi çərçivəsində D.İ.Şerman [25] həll edilmişdir. Fiziki qeyri xətti qoyuluşda alınan nəticələr cədvəl №2.4 verilir.

Alınan ədədi nəticələr onu göstərir ki, çatların təpə nöqtələrində və xarici L_2 konturunun $\theta = 0$, $z = \rho = b$ nöqtəsində toxunan gərginlikər, fiziki qeyrixətti qoyuluşdan həlldə, xəti qoyuluşdakı həldən maksimum 10–15% fərqlənir. Yəni maksimum qiymət azalır, gərginlik epyuru hamarlaşır. Qalan nöqtələrdə (xüsusən daxili kontur üzərindəki nöqtələrdə $\tau_{\rho z}$ və $\tau_{\theta z}$ gərginlikləri çox az dəyişir, yəni burulma məsələlərində materialın fiziki qeyrixətti qanuna uyğun olması bir o qədər də gözlənilən effekti vermir).

Cədvəl №2.4

Variantlar	Nöqtə z	Xətti qoyuluşda [25;53] $\tau_{xz}(\tau_{yz})/G\tau R$	Fiziki qeyri xətti qoyuluşda Mis $g_2 = 0.255 \cdot 10^{-6}$
I $e/b = 0,6$ $r/b = 0,5$	«A» nöqtəsi; $z = a$	-1.593	-1.593
	«B» nöqtəsi; $z = R$	1.42	1.221
	«C» nöqtəsi; $z = ibe^{j\frac{\pi}{4}}$	-0.455	-0.405
	«D» nöqtəsi; $z = iRe^{j\frac{\pi}{4}}$	1.186	1.032
II $e/b = 0,7$ $r/b = 0,5$	«A» nöqtəsi; $z = a$	-3.383	-2.842
	«B» nöqtəsi; $z = R$	2.92	2.511
	«C» nöqtəsi; $z = ibe^{j\frac{\pi}{4}}$	-0.633	-0.5634
	«D» nöqtəsi; $z = iRe^{j\frac{\pi}{4}}$	1.464	1.259

3. Kvadrat boşluqla zəiflədilmiş dairəvi silindrin fiziki qeyri xətti qoyuluşda burulması



Şək.2.3

III BÖLMƏ

PRİZMATİK TİRLƏRİN FİZİKİ QEYRİXƏTTİ QOYULUŞDA ƏYİLMƏSİNDƏ GƏRGİNLİK VƏZİYYƏTİ.

§ 3.1. Prizmatik tirlərin xalis əyilməsi.

En kəsiyi ikirabitəli oblastdan ibarət olan prizmatik tir, onun qurtaracağılarında tətbiq olunan sabit M əyici momentinə məruz qalır (yəni tir xalis əyilməyə məruz qalıb). En kəsik xaricdən düzgün çoxbucaqlı (L_2 konturu) ilə, daxildən radiusu r olan çevrə və ondan çıxan iki düzxətli çatla (L_1 konturu) əhatə olub. Koordinat başlanğıcı kəsiyin mərkəzi üzərinə düşüb, z oxu isə tirin simmetriya oxu üzərinə düşüb (şək. 3.1).

Bu məsələ xətti elastiklik nəzəriyyəsində bizim tərəfimizdən həll olunduğu üçün qısaca olaraq qeyd edək ki, xətti elastiklik nəzəriyyəsi çərçivəsində τ_{xz} və τ_{yz} toxunan gərginliklərin eynilə sıfır olduğu və tirin oxu boyu yaranan σ_z normal gərginliyin z oxundan asılı olmadığı məlumdur.[‡]

Məlumdur ki, fiziki qeyrixətti elastik nəzəriyyəsinin bütün tənlikləri o vaxt ödənilər ki, biz xətti qoyuluşdakı şərtlərdən əlavə $\sigma_x(x, y)$, $\sigma_y(x, y)$ və $\tau_{xy}(x, y)$ gərginliklərinin də yaranmasını

[‡] Bu barədə məlumat üçün [26,53] ədəbiyyatlarına baxmaq olar.

qəbul edək [38,53]. Bu gərginliklərin hamısı z dəyişənindən (oxundan) asılı olmurlar.

Bu şərtlər daxilində, fiziki qeyrixətti elastik nəzəriyyəsinin əsas tənlikləri (1.1.1) və (1.1.7) aşağıdakı ifadələrə gətirilir:

- tarazılıq (müvazinat) tənlikləri

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = 0 ; \quad \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} = 0 \quad (\text{III.1.1})$$

- deformasiyaların birgəlik şərtləri:

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{xy}}{\partial x \partial y} ;$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x^2} = 0 ; \quad \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial y^2} = 0 ; \quad \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x \partial y} = 0 \quad (\text{III.1.2})$$

Gərginliklərlə (σ_{ij}) deformasiyalar arasında müxtəlif nöqtəyi nəzərə istinadən asılılığın ifadələri (I.1.27) və (I.1.28) yuxarıdakı qəbul olunan şərtlər daxilində daha da sadələşər.

- **Koşi, Qenki, Kauderer** və i.a. nöqtəyi nəzərinə.

$$\varepsilon_z(x, y) = \frac{1}{3} \left[\frac{1}{3K} k(s_0) \sigma_0 + \frac{1}{G} g(t_0^2) \sigma_0 \right]$$

$$\varepsilon_y(x, y) = \varepsilon_x(x, y) = \frac{1}{3} \left[\frac{1}{3K} k(s_0) \cdot \sigma_0 - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{2G} g(t_0^2) \cdot \sigma_0 \right] \quad \gamma_{xy} = \gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0 \quad (\text{III.1.3})$$

Bu ifadələrdə

$$\sigma_0 = \frac{1}{3}(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z); \quad t_0^2 = \frac{1}{3}\sqrt{2} \cdot \sigma_0$$

$$k(s_0) = k\left(\frac{\sigma_0}{9K}\right); \quad g(t_0^2) = g\left(\frac{2\sigma_0^2}{9G^2}\right);$$

- **Adgins, Qrin** və i.a. nöqtəyi nəzərinə:

$$\varepsilon_{ij} = \alpha_1 \delta_{ij} + \alpha_2 \sigma_{ij} + \alpha_3 \sigma_{ik} \sigma_{jk}; \quad i, j, k = 1; 2; 3; \quad (\text{III.1.4})$$

Gərginlik-deformasiya asılılığın “**kubik**” qanununa tabe olan materiallar üçün bu sonuncu ifadə aşağıdakı kimi olur:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{ij} = & c_{11} \sigma_{kk} \delta_{ij} + c_{12} \sigma_{ij} + c_{21} \sigma_{kk}^2 \delta_{ij} + c_{22} \sigma_{km} \sigma_{km} \delta_{ij} + \\ & 2c_{22} \sigma_{kk} \sigma_{ij} + c_{23} \sigma_{ik} \sigma_{jk} + c_{31} \sigma_{kk}^3 \delta_{ij} + c_{32} \sigma_{km} \sigma_{km} \sigma_{ij} + \\ & + c_{33} \sigma_{km} \sigma_{km} \sigma_{nn} \delta_{ij} + c_{33} \sigma_{kk}^2 \sigma_{ij} + c_{34} \sigma_{kk} \sigma_{in} \sigma_{jn} + \\ & + 3c_{34} \sigma_{km} \sigma_{kn} \sigma_{mn} \delta_{ij} \end{aligned} \quad (\text{III.1.5})$$

$c_{ij} (i = 1 - 3; j = 1 - 4)$ əmsalları, materialın fiziki xüsusiyyətlərini xarakterizə edən sabitlərdir.

Bu ifadənin alınmasında, aşağıdakı əvəzləmələr edilmişdir.

$$\alpha_1 = c_{11} T_1 + c_{21} T_1^2 + 2c_{22} T_2 + c_{31} T_1^3 + 2c_{33} T_1 T_2 + c_{34} T_3$$

$$\alpha_2 = c_{12} + 2c_{22} T_1 + 2c_{32} T_2 + c_{33} T_1^2; \quad \alpha_3 = c_{23} + c_{34} T_1$$

$$T_1 = \sigma_{ij}; \quad T_2 = \frac{1}{2} \sigma_{ij} \sigma_{ij}; \quad T_3 = \frac{1}{3} \sigma_{ij} \sigma_{jk} \sigma_{ik}; \quad (\text{III.1.6})$$

Bu ifadələrdə T_i - gərginliklər tenzorunun invariantlarıdır.

Müvazinət şərtlərini (III.1.1) ödəyən funksiya (gərginlik funksiyası) üçün bu ifadələr götürülür.

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}; \quad \sigma_y = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}; \quad \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}; \quad (\text{III.1.7})$$

Gərginlik funksiyası $F(x, y)$, prizmatik tirin yan səthində aşağıdakı sərhəd şərtlərini ödəməlidir:

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \text{const}; \quad \frac{\partial F}{\partial x} = \text{const} \quad (\text{III.1.8})$$

Bu sabitləri (const) sıfır da qəbul etmək olar.

Qeyri xətti qoyuluşdakı məsələlərdə σ_z və F kəmiyyətləri aşağıdakı sıra şəklində (kiçik λ parametmə görə) götürülür [38,53].

$$\begin{aligned} \sigma_z &= \sigma_z^{(0)} + \lambda \sigma_z^{(1)} + \lambda^2 \sigma_z^{(2)} + \dots \\ F &= F^{(0)} + \lambda F^{(1)} + \lambda^2 F^{(2)} + \dots \end{aligned} \quad (\text{III.1.9})$$

Bu ifadələrdə $\sigma_z^{(0)}$ və $F^{(0)}$ kəmiyyətləri (sıfırıncı yaxınlaşdakı qiymətlər), xətti elastiklik nəzəriyyəsində baxılan məsələ üçün belə qiymətlər alır:

$$F^{(0)} = 0; \quad \sigma_z^{(0)} = -\frac{M}{J} x \quad (\text{III.1.10})$$

Burada M -əyici moment, J - isə en kəsiyin sahəsinin ətalət momentidir.

Ümumi şəkildə ətalət momenti

$$J = \iint_S x^2 dx dy ; \quad J = J_2 - J_1 \quad (\text{III.1.11})$$

düsturu ilə hesablanır. J_1 -daxili L_1 konturu ilə əhatə olunan sahəsinin (deşiyin) ətalət momenti, J_2 isə xarici L_2 konturu ilə əhatə olunan sahənin (çoxbucaqlının) ətalət momentidir.

Bir neçə sadə həndəsi cisimlər üçün en kəsiyin sahəsinin ətalət momentləri cədvəl №3.1 verilmişdir.

Əgər gərginlik funksiyasının (F), (III.1.9) ifadəsini növbə ilə (III.1.3) və (III.1.5) düsturlarında nəzərə alsaq (III.1.10), (III.1.7) şərtlərinə əsasən alarıq:

- **Koşi, Qenki, Kauderer** və i.a. nöqtəyi nəzərinə (birinci yaxınlaşmada):

$$\Delta\Delta F^{(1)} = \frac{8a^3}{3G(3K + 4G)} x \quad (\text{III.1.12})$$

Burada

$a = -\frac{M}{J}$; G - sürüşmə modulu, K həcmi sıxılma moduludur.

(III.1.12) ifadəsinin alınmasında, **orta gərginlik funksiyasını** $k(s_0) = 1$ və **toxunan gərginliklərin intensivlik funksiyasını** $g(t_0^2) = 1 + g_2 t_0^2$ şəklində götürülmüşdür (bax I.1.29 və I.1.30 ifadələrinə).

- **Qrin, Adgins** və i.a. nöqtəyi nəzərinə (yəni ixtiyarı fiziki qeyrixətti qoyuluşda):

$$\begin{aligned}
 & c_{11}[\Delta\Delta F + \Delta\sigma_z] + c_{12}\Delta\Delta F + c_{21}[\Delta(F_{xx}^2 + F_{yy}^2 + \sigma_z^2)] + \\
 & + c_{22}[\Delta(F_{xx}^2 + F_{yy}^2 + 2F_{xy}^2\sigma_z^2)] + 2c_{22}\left\{\frac{\partial^2}{\partial y^2}[(\Delta F + \sigma_z)F_{yy}]\right\} + \\
 & + \frac{\partial^2}{\partial x^2}[(\Delta F + \sigma_z)F_{xx}] + \frac{\partial^2}{\partial x\partial y}[(\Delta F + \sigma_z)F_{xy}] \Big\} + \\
 & + c_{23}\left\{\frac{\partial^2}{\partial y^2}(F_{yy}^2 + F_{xy}^2) + \frac{\partial^2}{\partial x^2}(F_{xx}^2 + F_{xy}^2) + \right. \\
 & \left. + \frac{\partial^2}{\partial x\partial y}[F_{yy}F_{xy} + F_{xx}F_{xy}]\right\} + c_{31}[\Delta(F_{xx}^3 + F_{yy}^3 + \sigma_z^3)] + \\
 & + c_{32}\left\{\frac{\partial^2}{\partial y^2}[(F_{yy}^2 + 2F_{xy}^2 + F_{xx}^2 + \sigma_z^2)F_{yy}]\right\} + \\
 & + \frac{\partial^2}{\partial x^2}[(F_{yy}^2 + 2F_{xy}^2 + F_{xx}^2 + \sigma_z^2)F_{xx}] + \\
 & + \frac{\partial^2}{\partial x\partial y}[(F_{yy}^2 + 2F_{xy}^2 + F_{xx}^2 + \sigma_z^2)F_{xy}] \Big\} + \\
 & + c_{33}\Delta[(\Delta F + \sigma_z) \cdot (F_{yy}^2 + 2F_{xy}^2 + F_{xx}^2 + \sigma_z^2)] +
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + c_{33} \left\{ \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left[(F_{xx}^2 + F_{yy}^2 + \sigma_z^2) \cdot F_{yy} \right] + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[(F_{xx}^2 + F_{yy}^2 + \sigma_z^2) F_{xx} \right] \right. \\
& + \left. \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \left[(F_{xx}^2 + F_{yy}^2 + \sigma_z^2) F_{xy} \right] \right\} + c_{34} \left\{ \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left[(\Delta F + \sigma_z) \cdot (F_{yy}^2 + F_{xy}^2) \right] + \right. \\
& + \left. \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[(\Delta F + \sigma_z) (F_{xx}^2 + F_{xy}^2) \right] + \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \left[(\Delta F + \sigma_z) (F_{xx} F_{xy} + \right. \right. \\
& + \left. \left. F_{yy} F_{xy}) \right] \right\} + 3c_{34} \Delta \left[F_{xx}^3 + F_{yy}^3 + \sigma_z^3 + 3F_{yy} F_{xy}^2 + 3F_{xx} F_{xy}^2 \right] = 0.
\end{aligned}
\tag{III.1.13}$$

Deformasiyaların birgəlilik şərtlərindən (III.1.2) görünür ki, σ_z normal gərginliyi x və y dəyişənləri ilə xətti asılılıqdadır:

$$\begin{aligned}
& c_{11}(\Delta F + \sigma_z) + c_{12}\sigma_z + c_{21}(F_{xx}^2 + F_{yy}^2 + \sigma_z^2) + \\
& + c_{22}[F_{xx}^2 + F_{yy}^2 + 2F_{xy}^2 + \sigma_z^2] + 2c_{22} \cdot \sigma_z(\Delta F + \sigma_z) + c_{23}\sigma_z^2 \\
& + c_{31}[F_{yy}^3 + F_{xx}^3 + \sigma_z^3] + c_{32}\sigma_z(F_{xx}^2 + F_{yy}^2 + \sigma_z^2 + 2F_{xy}^2) + \\
& + c_{33}(\Delta F + \sigma_z)(F_{xx}^2 + F_{yy}^2 + 2F_{xy}^2 + \sigma_z^2) + \\
& + c_{33}\sigma_z(F_{xx}^2 + F_{yy}^2 + \sigma_z^2) + c_{34}\sigma_z^2(\Delta F + \sigma_z) + \\
& + 3c_{34}(F_{xx}^3 + F_{yy}^3 + \sigma_z^3 + \\
& + 3F_{yy} \cdot F_{xy}^2 + 3F_{xx} \cdot F_{xy}^2) = A_1 x + B_1 y + c
\end{aligned}
\tag{III.1.14}$$

(III.1.9) ifadələrini (III.1.13) və (III.1.14) differensial tənliklərində nəzərə alsaq, birinci yaxınlaşmada alınan differensial tənlik belə olar:

$$\Delta \Delta F^{(1)} + \beta_1^* \Delta f^{(1)} + (2 + 2\beta_2^*) \cdot \frac{M^2}{J^2} +$$

$$+ (6\beta_4^* + 6\beta_5^* + 18\beta_6^*) \cdot \frac{M^3}{J^3} x = 0 \quad (\text{III.1.15})$$

$$f^{(1)} + \beta_1^* \Delta F^{(1)} + (1 + 3\beta_2^* + \beta_3^*) \cdot \frac{M^2}{J^2} x^2 +$$

$$+ (\beta_4^* + 2\beta_5^* + 4\beta_6^* + \beta_7^*) \frac{M^3}{J^3} x^3 = A_1 x + B_1 y + c; \quad (\text{III.1.16})$$

Burada aşağıdakı əvəzləmələr edilmişdir:

$$\beta_1^* = \frac{c_{11}}{c_{11} + c_{12}}; \quad \beta_2^* = \frac{c_{22}}{c_{21}}; \quad \beta_3^* = \frac{c_{23}}{c_{21}}; \quad \beta_4^* = \frac{c_{31}}{c_{21}};$$

$$\beta_5^* = \frac{c_{33}}{c_{21}}; \quad \beta_6^* = \frac{c_{32}}{c_{21}}; \quad \beta_7^* = \frac{c_{34}}{c_{21}}; \quad f^{(1)} = \sigma_2^{(1)}$$

Əgər (III.1.16) differensial tənliyinə $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$

operatorunu tətbiq edib, (III.1.15) ifadəsindəki $\Delta f^{(1)}$ funksiyasını yox etsək (əvəzləmə etsək) nəticədə belə bir differensial tənlik alınır:

$$\Delta \Delta F^{(1)} = H_1 + H_2 \cdot x \quad (\text{III.1.17}).$$

Burada

$$H_1 = \frac{1}{1 - (\beta_1^*)^2} \left[(2 + 6\beta_2^* + 2\beta_3^*)\beta_1^* - 2 - 2\beta_2^* \right] \frac{M^2}{J^2};$$

$$H_2 = \frac{1}{1 - \beta_1^*} \left[(6\beta_4^* + 6\beta_6^* + 12\beta_5^* + 24\beta_7^*)\beta_1^* - \right. \\ \left. - 6\beta_6^* - 6\beta_5^* - 18\beta_7^* \right] \cdot \frac{M^3}{J^3}$$

Beləliklə fiziki qeyrizətti qoyuluşda, prizmatik tirlərin xalis əyilməsində hər iki nöqtəyi nəzərə əsasən, məsələnin həlli (III.1.12) və (III.1.17) kimi uyğun differensial tənliklərin həllinə gətirilir (birinci yaxınlaşmadakı $F^{(1)}$ gərginlik funksiyasının tapılması üçün).

Əvvəlcə (III.1.12) differensial tənliyini həll edək. Bu tənliyin həllini $F^{(1)} = F_{xbs}^{(1)} + F_{bm}^{(1)}$ şəklində axtarıraq.

(III.1.12) tənliyini polyar koordinatlarda (ρ, θ) aşağıdakı şəkildə yazılar.

$$\Delta\Delta F^{(1)} = bx = b\rho \cos \theta \quad (\text{III.1.18})$$

Xüsusi həll $F_{xbs}^{(1)}$ bu şəkildə alınar;

$$F_{xbs}^{(1)} = \frac{b}{225} \rho^5 \cos \theta \quad (\text{III.1.19})$$

Ümumi həll $F_{bm}^{(1)}$ (bircins $\Delta\Delta F^{(1)} = 0$ tənliyinin ümumi həlli) isə bölmə I və bölmə II-də deyildiyi kimi

$$F_{\text{sm}}^{(1)} = c_1 \ln \rho + \rho^2 c_2 \quad (\text{III.1.20})$$

şəklində axtarılır.

Nəticə etibarı ilə (III.1.18) tənliyinin həlli belə olur:

$$F^{(1)} = F_{\text{xs}}^{(1)} + F_{\text{sm}}^{(1)} = \frac{b}{225} \rho^5 \cos \theta + c_1 \ln \rho + c_2 \rho^2 \quad (\text{III.1.21})$$

c_1 və c_2 sabitləri (III.1.18) sərhəd şərtlərinə əsasən bu qiymətləri alırlar:

$$c_1 = \frac{b \cos \theta}{45} \left[\frac{t_2^5 - t_1^5}{t_2^2 - t_1^2} t_1^2 - t_1^2 \right]; \quad c_2 = \frac{b \cos \theta}{90} \frac{t_1^5 - t_2^5}{t_2^2 - t_1^2} \quad (\text{III.1.22})$$

Bu ifadələrdə t_1 və t_2 uyğun olaraq daxili L_1 və xarici L_2 konturlarının nöqtələrinin affiksləridir.

$F^{(1)}$ gərginlik funksiyasını tapandan sonra $\sigma_z^{(1)} = f_1(x, y)$ funksiyası aşağıdakı ifadə ilə tapılır (III.1.3 ifadələrindəki \mathcal{E}_z deformasiyası

$$\mathcal{E}_z = \mathcal{E}_z^{(0)} + g_z \mathcal{E}_z^{(1)} = \mathcal{E}_z^{(0)} + g_z \cdot (\alpha \cdot x + \beta \cdot y + \gamma)$$

şəklində götürülür, sağ tərəflərini bərabərləşdirib,

$f_1^{(1)}(x, y)$ funksiyasını tapırıq)

$$f_1^{(1)}(x, y) = \frac{3G \cdot K}{3K + G} \cdot \left[\left(\frac{1}{2G} - \frac{1}{3K} \right) \cdot \Delta F^{(1)} - \right. \\ \left. - \frac{2}{9G^3} a^3 x^3 + 3(\alpha \cdot x + \beta \cdot y + \gamma) \right]; \quad (\text{III.1.23})$$

α, β və γ sabitləri tirin yan səthlərindəki sərhəd şərtlərindən tapılar

$$\begin{aligned} \iint_S \sigma_z^{(1)} dx dy &= \iint_S f_1^{(1)}(x, y) dx dy = 0 \\ \iint_S f_1^{(1)}(x, y) x dx dy &= M ; \\ \iint_S f_1^{(1)}(x, y) \cdot y dx dy &= 0 \end{aligned} \quad (\text{III.1.24})$$

Prizmatik tirin en kəsiyi simmetriyaya malik olduğunda $\beta = \gamma = 0$ olur. Beləliklə $\sigma_z^{(1)} = f_1^{(1)}(x, y)$ funksiyası üçün belə bir ifadə alınar:

$$\begin{aligned} f_1^{(1)}(x, y) &= \frac{3K \cdot G}{3K + G} \cdot \left[\left(\frac{1}{2G} - \frac{1}{3K} \right) \cdot \Delta F^{(1)} - \right. \\ &\left. - \frac{2}{9G^3} a^3 \cdot \rho^3 \cos^3 \theta + 3\alpha \cdot \rho \cdot \cos \theta \right]; \end{aligned} \quad (\text{III.1.25})$$

α əmsalı $\iint_S f_1^{(1)}(x, y) x dx dy = M$ ifadəsindən tapılır.

Qrin düsturunun köməyi ilə ikiqat inteqral birqat inteqralla əvəz edilir.

$$\iint_S f_1^{(1)}(x, y) x dx dy = \int_{L_1} \varphi dy - \int_{L_2} \varphi dy = M \quad (\text{III.1.26})$$

Burada

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = f_1^{(1)}(x, y) \cdot x; \text{ olduğundan}$$

$\varphi = \int f_1^{(1)}(x, y) dx$ olduğu müəyyən olur.

İntegrallama $d\rho$ üzrə olduğundan sonuncu ifadədən və (III.1.25) bərabərsizliyinə əsasən $\varphi(x, y)$ funksiyasını tapılır:

$$\begin{aligned} \varphi(x, y) = & \frac{\rho^5}{5} (d_1 - d_3) \cos^2 \theta + \\ & + \frac{\rho^2}{2} d_2 c_2 \cos^2 \theta + \alpha \cdot d_4 \frac{\rho^3}{3} \cos^2 \theta \end{aligned} \quad (\text{III.1.27})$$

Bu ifadəni (III.1.26) tənliyində nəzərə alsaq və $dy = d\rho \sin \theta$ və $\rho = t_2$ olduğundan (xarici kontur L_2 üzərində) yaza bilərik:

$$\begin{aligned} & \left[\frac{1}{30} (d_1 - d_3) \cos^2 \theta t_2^{-1} + \frac{1}{6} d_2 \cdot c_2 \cdot t_2^3 \cos^2 \theta + \right. \\ & \left. + \frac{1}{12} \alpha \cdot d_4 \cos^2 \theta t_2^4 \right] \sin \theta - \left[\frac{1}{30} (d_1 - d_3) \cos^2 \theta t_1^6 + \right. \\ & \left. + \frac{1}{6} d_2 \cdot c_2 \cdot t_1^3 \cos^2 \theta + \frac{1}{12} d_4 \alpha \cdot t_1^4 \cos^2 \theta \right] \sin \theta = M \end{aligned}$$

Buradan alırıq:

$$\begin{aligned} \alpha = & \frac{12M}{d_4 \cos^2 \sin \theta (t_2^4 - t_1^4)} - \\ & - \frac{\frac{2}{5} (d_1 - d_3) (t_2^6 - t_1^6) + 2c_2 d_2 (t_2^3 - t_1^3)}{d_4 (t_2^4 - t_1^4)} \end{aligned} \quad (\text{III.1.29})$$

Bu ifadələrdə aşağıdakı əvəzləmələr edilib:

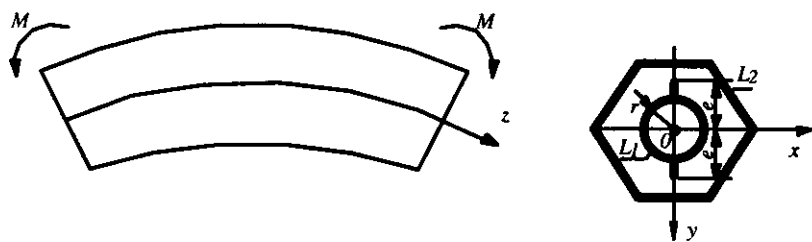
$$d_1 = \frac{3KG}{3K+G} \left(\frac{1}{2G} - \frac{1}{3K} \right) \frac{1}{9} b \cos \theta; \quad d_2 = \frac{3KG}{3K+G} \left(\frac{1}{2G} - \frac{1}{3K} \right) 4;$$

$$d_3 = \frac{3KG}{3K+G} \frac{2}{9G^3} a^3 \cos^3 \theta; \quad d_4 = \frac{9KG}{3K+G} 3 \cos^3 \theta \quad (\text{III.1.30})$$

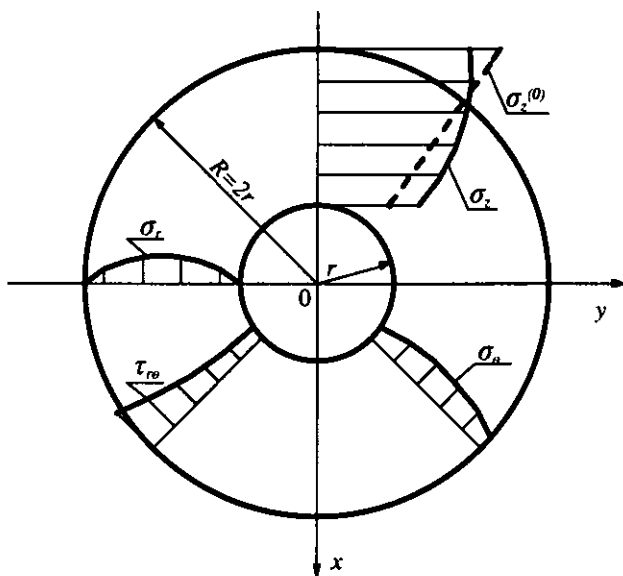
Beləliklə $f_1^{(1)}(x, y)$ və $\varphi(x, y)$ funksiyaları tam müəyyən olunur. Sonra isə (III.1.9) ifadələrinin köməyi ilə gərginlik komponentlərini tapırıq:

$$\sigma_z = \sigma_z^{(0)} + g_2 \sigma_z^{(1)} = a \rho \cos \theta + g \varphi(\rho, \theta); \quad \sigma_\theta = -\frac{\partial^2 F^{(1)}}{\partial \rho^2}$$

$$\sigma_\rho = \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 F^{(1)}}{\partial \theta^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial F^{(1)}}{\partial \rho}; \quad \tau_{\rho\theta} = -\frac{\partial}{\partial \rho} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial F^{(1)}}{\partial \theta} \right); \quad (\text{III.1.31})$$



Şək.3.1a



Şək.3.1 b

Alınan ümumi həll, A, N, m , parametrlərindən asılı olaraq bir çox konkret misallarla nümayiş etdirilə bilər.

1. $A = R$; $m = 0$ olduqda xarici kontur L_2 çevrə şəklini alır, bu halda biz silindirik tirin əyilməsi məsələsini alırıq. Bu halda daxili kontur L_1 , olanda $e = r$ olanda r radiuslu çevrəyə keçir. Yəni silindirik tirin en kəsiyi, konsentrik çevrələrdən ibarət olur (R və r radiuslu konsentrik çevrələr).

2. $N = 2$; $m = \frac{a-b}{a+b}$; $r = 0$; $l = e - r = 0$ olduqda yarımoxları a və b olan, bütöv elliptik tirin əyilməsi məsələsini alırıq. Hər iki halda alınan nəticələr [22] işindəki kimidir (gərginlik funksiyasının birinci yaxınlaşmadakı qiyməti $F^{(1)}$ və $\varphi(x, y)$ funksiyasını ifadəsi).

Analoji olaraq $F(x, y)$ və $\varphi(x, y)$ funksiyalarının sonrakı (ikinci və i.a. yaxınlaşmalardakı qiymətlərini) yaxınlaşmalardakı ifadələrini tapmaq olar. Gələcək tədqiqatçılar bu işi davam etdirib ədədi misallara baxa bilərlər.

İndidə (III.1.17) differensial tənliyin həllinə baxaq (yəni ixtiyari fiziki qeyrixətti qoyuluşda prizmatik tirin əyilməsi məsələsinin həllinə baxaq).

Əgər (III.1.17) tənliyində x və y dəyişənlərindən z və \bar{z} dəyişənlərinə keçsəkçə alarıq:

$$4 \frac{\partial^4 F^{(1)}}{\partial z^2 \partial \bar{z}^2} = H_1 + \frac{1}{2} H_2 (z + \bar{z}); \quad (\text{III.1.32})$$

Bu ifadəni dörd dəfə inteqrallasaq, belə bir ifadə alınar:

$$F^{(1)} = \frac{1}{16} H_1 \cdot z^2 \cdot (\bar{z})^2 + \frac{1}{96} H_2 [z^3 (\bar{z})^2 + z^2 (\bar{z})^3] + \frac{1}{2} d_1^* \cdot z (\bar{z})^2 + \frac{1}{2} \cdot d_2^* (\bar{z})^2 + d_3^* \bar{z} + d_4^* \quad (\text{III.1.33})$$

Bu ifadədə polyar (ρ, θ) koordinatlarına keçsək alarıq:

$$F^{(1)}(\rho, \varphi) = \frac{1}{16} H_1 \cdot \rho^4 + \frac{1}{48} \cdot H_2 \cdot \rho^5 \cos \theta + \frac{1}{2} d_1^* \rho^3 + (\cos \varphi - i \sin \theta) + \frac{1}{2} \cdot d_2^* \cdot \rho^2 (\cos 2\theta - i \sin 2\theta) + d_3^* \cdot \rho^3 (\cos \varphi - i \sin \theta) + d_4^*; \quad (\text{III.1.34})$$

Bu ifadəyə daxil olan d_3^* və d_4^* sabitləri (inteqral sabitləri) tirin gərginlik vəziyyətinə təsir etmədiyindən onları sıfır qəbul etmək olar (gərginliklərin (III.1.7) ifadələrindən görünür ki, $F^1(\rho, \theta)$ funksiyasından ρ və θ görə ikiqat törəmə aldıqda d_3^* və d_4^* -sabitlərinin əmsalları sıfır olur). d_1^* və d_2^* -sabitlərini isə tirin yan

səthində sərhəd şərtindən ($\sigma_x = \sigma_y = 0$ olması şərtindən)

tapılır:

$$d_1^* = -e^{i\theta} \left[\frac{1}{4} H_1 (t_2 + t_1) + \frac{1}{12} H_2 \cdot (t_2^2 + t_1 t_2 + t_1^2) \cos \theta \right] \cdot e^{i\theta};$$

$$d_2^* = -e^{2i\theta} \left[\frac{1}{4} H_1 \cdot t_1 t_2 + \frac{1}{12} H_2 \cdot (t_2 + t_1) \cdot t_2 + t_1^2 \cos \varphi \right] \cdot e^{i\theta}; \quad (\text{III.1.35})$$

$f^{(1)}$ funksiyasını tapandan sonra $f^{(1)}$ funksiyası (III.1.16)

ifadəsinə əsasən belə tapılar

$$f^{(1)} = -\beta_1^* \left[H_1 \cdot z\bar{z} + \frac{1}{4} \cdot H_2 \cdot (z^2 \bar{z} + z\bar{z}^2) + \right. \\ \left. + 4c_1 \cdot \bar{z} \right] - (1 + \beta_2^* + \beta_3^*) \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{M^2}{J^2} \cdot (z^2 + \\ + 2z\bar{z} + \bar{z}^2) - \frac{1}{8} \cdot \frac{M^3}{J^3} \left[\beta_4^* + \beta_6^* + \beta_5^* \cdot 2 + \right. \\ \left. + 4 \cdot \beta_7^* \right] \cdot (z \cdot \bar{z})^3 + \frac{1}{2} \cdot A^* \cdot (z + \bar{z}) - \frac{i}{2} \cdot B^* (z - \bar{z}) + c^* \quad (\text{III.1.36})$$

Bu ifadəyə daxil olan A^* , B^* və c^* sabitləri tirin yan səthindəki sərhəd şərtləri olan (III.1.24) ifadələrinə əsasən tapılır. Belə ki, aşağıdakı nəticələr alınıb:

$$A^* = \frac{1}{t_2^4 - t_1^4} \cdot \left[-\frac{1}{20} H_1 \cdot \beta_1^* (t_2^5 - t_1^5) + \frac{3}{100} \cdot \beta_1^* \cdot H_2 \cdot (t_2^6 - t_1^6) - \right. \\ \left. - \frac{1}{20} d_1^* \cdot \beta_1^* (t_2^3 - t_1^3) + \frac{21}{200} \cdot \frac{M^2}{J^2} \cdot (1 + 3\beta_2^* + \beta_3^*) \cdot (t_2^5 - t_1^5) - \right. \\ \left. - \frac{399}{800} \cdot \frac{M^3}{J^3} \cdot (\beta_4^* + \beta_6^* + 2 \cdot \beta_5^* + 4 \cdot \beta_7^*) \cdot (t_2^5 - t_1^5) \right];$$

$$c^* = 0; \quad B^* = 0$$

Birinci yaxınlaşmada, $F^{(1)}$ və $f^{(1)}$ funksiyalarını tapandan sonra, gərginlik komponentləri bu ifadələrlə tapılar:

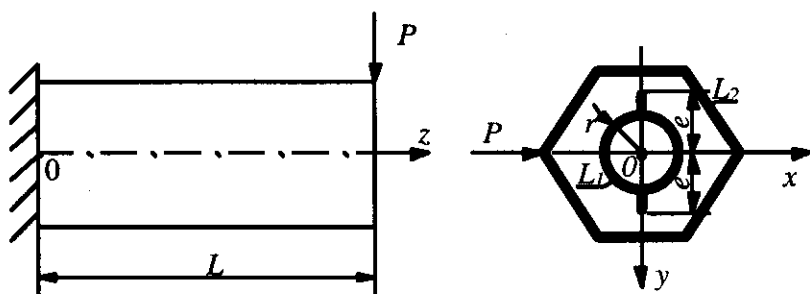
$$\sigma_z = \sigma_z^{(0)} + f^1(x, y) = \frac{M}{J} \cdot x + f^{(1)}(x, y);$$

$$\sigma_x^{(1)} = \frac{\partial^2 F^{(1)}}{\partial y^2}; \quad \sigma_y^{(1)} = \frac{\partial^2 F^{(1)}}{\partial x^2}; \quad \tau_{xy}^{(1)} = -\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y};$$

Alınan ümumi həlli, konkret ədədi misallarla nümayiş etdirmək olar. Tədqiqatçılar və maraqlananlar bu işi asanlıqla yerinə yetirə bilərlər (məsələn en kəsiyi konsentrik çevrə olan tirin dairəvi deşiyə malik kvadrat, elliptik və i.a. prizmatik tirlərin xalis əyilmə məsələlərini fiziki qeyrixətti qoyuluşda həll edib ədədi əticələr almaq olar).

§ 3.2. Topa yük təsirindən prizmatik tirlərin fiziki qeyrixətti qoyuluşda əyilməsi.

Yuxarıda §3.1, prizmatik tirlərin xalis əyilməsində istifadə edilən metodu, topa yük təsirindən əyilmə məsələsində istifadə edirik. §3.1 deyildiyi kimi prizmatik tirin en kəsiyi iki rabitəli oblastan ibarət olub, xaricdən düzgün çoxbucaqlı ilə (L_2 konturu)daxildən isə radiusu r olan çevrə və ondan çıxan iki düzxətli çata malik konturla (L_1 konturu) əhatə olunub. Çatların təpə nöqtələrinin koordinatları $\pm ie$ ilə işarə olunub (şək.3.2). Tirin ümumi uzunluğu L , topa yük P ilə işarə olunub (topa yük tirin qurtaracaq $z = L$ oturacağında x oxu boyunca tətbiq olunub).



Şək.3.2

Xalis əyilmədən fərqli olaraq, topa yük təsirindən bütün gərginliklərin $(\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{xz}, \tau_{yz})$ olduğu halda (meydana gəldiyi halda), qeyrixətti elastiklik nəzəriyyəsinin bütün tənlikləri ödənilir. Özüdə σ_x, σ_y və τ_{xy} gərginliklərinin z oxundan asılı detildir.

Birinci bölmədən məlumdur ki, həcmi qüvvələr olmadığı halda, müvazinət tənlikləri aşağıdakı şəkildə yazılır (bax I.1.1, I.1.7 və I.1.36 ifadələrinə):

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = 0; \quad \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} = 0; \\ \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} = 0; \end{aligned} \quad (\text{III.2.1})$$

Deformasiyaların birgəlik şərtləri

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \psi_{yz}}{\partial y \partial z} = \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial z^2} + \frac{\partial \varepsilon_y}{\partial y^2}; \quad \frac{\partial^2 \psi_{zx}}{\partial z \partial x} = \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial z^2}; \\ \frac{\partial^2 \psi_{xy}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
2 \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y \partial z} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(-\frac{\partial \psi_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \psi_{xz}}{\partial y} + \frac{\partial \psi_{xy}}{\partial z} \right); \\
2 \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x \partial z} &= \frac{\partial}{\partial y} \left(-\frac{\partial \psi_{xz}}{\partial y} + \frac{\partial \psi_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \psi_{xy}}{\partial z} \right); \\
2 \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial}{\partial z} \left(-\frac{\partial \psi_{xy}}{\partial z} + \frac{\partial \psi_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \psi_{xz}}{\partial y} \right); \quad (\text{III.2.2})
\end{aligned}$$

Deformasiyalarnın gərginliklər vasitəsi ilə ifadələri

$$\begin{aligned}
\varepsilon_x &= \frac{1}{3K} k(s_0) \cdot \sigma_0 + \frac{1}{2G} g(t_0^2) \cdot (\sigma_x - \sigma_0); \\
\varepsilon_y &= \frac{1}{3K} k(s_0) \cdot \sigma_0 + \frac{1}{2G} g(t_0^2) \cdot (\sigma_y - \sigma_0); \\
\varepsilon_z &= \frac{1}{3K} k(s_0) \cdot \sigma_0 + \frac{1}{2G} g(t_0^2) \cdot (\sigma_z - \sigma_0); \quad \psi_{xy} = \frac{1}{G} g(t_0^2) \cdot \tau_{xy}; \\
\psi_{yz} &= \frac{1}{G} g(t_0^2) \cdot \tau_{yz}; \quad \psi_{xz} = \frac{1}{G} g(t_0^2) \tau_{xz}; \quad (\text{III.2.3})
\end{aligned}$$

Burada $\sigma_0 = \frac{1}{3}(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)$ orta gərginlikdir.

İndi görək $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{xz}$ və τ_{yz} gərginliklərini necə götürək (necə istifadə edək) ki, onlar yuxarıdakı bütün tənlikləri (şərtləri) ödəsin.

Xalis əyilmədə olduğu kimi, əgər σ_x, σ_y və τ_{xy} gərginliklərini $F(x, y)$ gərginlik funksiyası vasitəsi ilə

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}; \quad \sigma_y = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}; \quad \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}; \quad (\text{III.2.4})$$

kimi götürsək, (III.2.1) müvazinət şərtlərinin ilk ikisi ödənilər. Bu $F(x, y)$ gərginlik funksiyası, prizmatik tirin yan səthidə

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \text{const} \quad \text{və} \quad \frac{\partial F}{\partial x} = \text{const}; \quad (\text{III.2.5})$$

şərtlərini ödəməlidir. Burada sabitləri sıfır da götürmək olar (bu gərginliklərə xələl gətirmir). Müvazinət şərtlərinin (III.2.1) sonuncu ifadəsi, o vaxt ödənilər ki, σ_z normal gərginlik

$$\sigma_z = \sigma_z^{(0)} + \lambda \cdot f(x, z) \quad (\text{III.2.6})$$

və həmçinin τ_{xz} və τ_{yz} toxunan gərginliklər də

$$\tau_{xz} = \frac{\partial \varphi}{\partial y}; \quad \tau_{yz} = -\frac{\partial \varphi}{\partial x} - \frac{P}{J}xy - \lambda \cdot f_z \cdot y \quad (\text{III.2.7})$$

şəkildə götürülsün.

Bu ifadələrdə P - tirə təsir edən topa yük, J - tirin en kəsiyinin sahəsinin neytral oxa nəzərən ətalət momentidir. Məlumdur ki, ətalət momenti belə bir ifadə ilə müəyyən olunur:

$$J = \iint_S x^2 dx dy \quad (\text{III.2.8})$$

Yuxarıda deyildi ki kimi Ostoqradski-Qrin düsturunun köməyi ilə ikiqat inteqral, birqat inteqrala gətirilir (bax (III.1.11))

düsturuna). Bir neçə sadə həndəsi cisimlərin ətalət momentləri cədvəl №3.1 də verilib.

Əgər (III.2.3) ifadələrinə daxil olan orta gərginliklər funksiyasını ($k(s_0)$) və toxunan gərginliklərin intevsivlik funksiyasını $g(t_0^2)$, ixtiyari götürülsə, onda I və II bölmədə deyildiyi kimi, məsələnin həlli və sərhəd şərtlərinin ödənilməsi ciddi riyazi çətinliklərlə üzləşir. Məsələnin həllinin asanlaşdırılması üçün $k(s_0)$ və $g(t_0^2)$ ifadələrində (I.1.29, I.1.30 I.1.57 və ifadələrinə) xüsusi hal ilə məhdudlaşıb, belə bir şəkildə götürürük:

$$k(s_0) = 1; \quad g(t_0^2) = 1 + g_2 \cdot t_0^2 \quad (\text{III.2.9})$$

Yəni $k(s_0)$ və $g(t_0^2)$ funksiyalarının birinci yaxınlaşması ilə kifayətlənirik (sıfırıncı yaxınlaşma xətti qoyuluşdakı həlli verir). Eyni zamanda (III.2.7) ifadələrində $\varphi(x, y)$ funksiyasını

$$\varphi = \varphi^{(0)} + \lambda_2 \cdot \varphi^{(1)} \quad (\text{III.2.10})$$

kimi götürsək və həmin ifadələrdə nəzərə alsaq, τ_{xz} və τ_{yz} toxunan gərginliklər üçün aşağıdakı düsturlar alınır.

$$\tau_{xz} = \frac{\partial \varphi^{(0)}}{\partial y} + g_2 \cdot \frac{\partial \varphi^{(1)}}{\partial y};$$

$$\tau_{yz} = -\frac{\partial \varphi^{(0)}}{\partial x} - \lambda \cdot \frac{\partial \varphi^{(1)}}{\partial x} - \frac{P}{J} xy - \lambda \cdot f_z \cdot y; \quad (\text{III.2.11})$$

Əgər toxunan gərginliklərin intevsivlik funksiyası olan $g(t_0^2)$ birinci bölmədəki (I.1.6) ifadəsində (III.1.4); (III.2.9) və (III.2.11) nəzərə alsaq və g_2 əmsalının kvadratı və ondan yüksək dərəcələrini nəzərə almasaq, yaza bilərik:

$$g(t_0^2) = g_2 \cdot \frac{\tau_0^2}{G^2} [\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2 - \sigma_x \sigma_y - \sigma_y \sigma_z - \sigma_x \sigma_z + 3\tau_{xy}^2 + 3\tau_{yz}^2 + 3\tau_{xz}^2] = \frac{2}{9G^2} \cdot g_2 \cdot [\sigma_z^2 + 3\Phi]; \quad (\text{III.2.12})$$

Burada

$$\Phi = 3(\varphi_x^{(0)})^2 + 3(\varphi_y^{(0)})^2 + 6\varphi_x^{(0)} \frac{P}{J} xy + 3 \frac{P^2}{J^2} x^2 y^2$$

Onda yerdəyişmə deformasiyaları $(\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z)$ və sürüşmə deformasiyaları $(\psi_{xy}, \psi_{xz}$ və $\psi_{yz})$ komponentləri üçün (III.2.3) ifadələrinə əsasən aşağıdakıları yazmaq olar;

$$\varepsilon_x = n_1 \sigma_z^{(0)} + n_1 g_2 f + n_1 g_2 \cdot \Delta F + \frac{1}{2G} g_2 F_{yy} - n_2 g_2 (\sigma_z^{(0)^3} + \sigma_z^{(0)} \cdot \Phi);$$

$$\varepsilon_y = n_1 \sigma_z^{(0)} + n_1 g_2 f + n_1 g_2 \cdot \Delta F + \frac{1}{2G} g_2 F_{xx} - n_2 g_2 (\sigma_z^{(0)^3} + \sigma_z^{(0)} \cdot \Phi);$$

$$\begin{aligned}
\varepsilon_z &= n_3 \sigma_z^{(0)} + n_3 \cdot g_2 \cdot f + n_1 \cdot g_2 \cdot \Delta F + \\
&+ 2n_2 \cdot g_2 \cdot \left[\left(\sigma_z^{(0)} \right)^3 + \sigma_z^{(0)} \cdot \Phi \right]; \quad \psi_{xy} = -\frac{1}{G} g_2 F_{xy} \\
\psi_{xz} &= \frac{1}{G} \left(\varphi_y^{(0)} + g_2 \varphi_y^{(1)} \right) + \frac{2}{9G^3} g_2 \left(\varphi_y^{(0)} \cdot \sigma_z^{(0)^3} + \varphi_y^{(0)} \cdot \Phi \right); \\
\psi_{yz} &= -\frac{1}{G} \left(\varphi_y^{(0)} + g_2 \varphi_x^{(1)} + \frac{Pxy}{J} + g_2 f_z y \right) - \\
&- \frac{2}{9G^3} g_2 \left(\varphi_x^{(0)} \cdot \sigma_z^{(0)^2} + \varphi_x^{(0)} \cdot \Phi + \right. \\
&\left. + \sigma_z^{(0)^2} \frac{Pxy}{J} + \frac{Pxy}{J} \cdot \Phi \right) \quad (III.2.13)
\end{aligned}$$

Burada aşağıdakı əvəzləmələr edilib

$$n_1 = \frac{1}{9K} - \frac{1}{6G}; \quad n_2 = \frac{1}{27G^3}; \quad n_3 = \frac{1}{9K} + \frac{1}{3G}; \quad (III.2.14)$$

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} - \text{Laplas operatorudu.}$$

Deformasiyaların birgəlilik şərtlərindən (III.2.2) birincisi, ikincisi və axırıncısı-altıncısı aşağıdakı bir şərtə gətirilər.

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2} \left(\frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} \right) = 0 \quad (III.2.15)$$

Əgər (III.2.14) ifadələrini bu sonuncu düsturda yerinə yazsaq alarıq:

$$n_1 f_{xx} = 6n_2 \cdot g_2 \frac{P^3 (L-z)^3}{J^3} x;$$

və ya $M = P(L - z)$ olduğu üçün yazı bilərik

$$f_{xx} = 6 \frac{n_2}{n_1} g_2 \frac{M^3}{J^3} x \quad (\text{III.2.16})$$

Bu sonuncu ifadəni x dəyişəninə görə iki dəfə inteqrallasaq alarıq:

$$f(x, z) = n_4 \frac{x^3}{6} + c_1 x + c_2; \quad (\text{III.2.17})$$

$$n_4 = 6 \frac{n_2}{n_1} g_2 \frac{M^3}{J^3}$$

c_1 və c_2 inteqral sabitləridir. Bunlardan birini $c_2 = 0$ qəbul etsək (bu məsələnin həllinə və tirin gərginlik vəziyyətinə xələl gətirməz) digərini c_1 sabitini isə f funksiyasının

$$\iint_S f \cdot x \cdot dx dy = M \quad (\text{III.2.18})$$

şərtini ödəməsindən tapa bilərik (çünki, tirin hər hansı en kəsiyinə təsir edən gərginliklərin toplusu M əyici momentinə ekvivalentdir).

Bu ikiqat inteqral, **Qrın** düsturunun köməyi ilə birqat inteqralla gətirilə:

$$\iint_S f \cdot x \cdot dx dy = \int_{L_2} f_1 \cdot dy - \int_{L_1} f_1 \cdot dy = M \quad (\text{III.2.19})$$

Inteqrallama bütün L_1 və L_2 konturları boyunca aparılır.

Burada $\frac{\partial f_1}{\partial x} = f \cdot x$ əvəzləməsi edilmişdir.

Onda $f_1 = \int fx dx + c_3$ olar.

Əgər bu sonuncu ifadədə (III.2.17) bərabərliyini nəzərə alıb (III.2.19) də yerinə yazsaq alarıq:

$$\int_{L_2} f_1 dy - \int_{L_1} f_1 dy = \int_{L_2} \left[n_4 \frac{x^5}{30} + c_1 \frac{x^3}{3} + c_3 \right] dy -$$

$$- \int_{L_1} \left[n_4 \frac{x^5}{30} + c_1 \frac{x^3}{3} + c_3 \right] dy = M \quad (\text{III.2.20})$$

İntegrallamanı tam yerinə yerirmək üçün x və y dəyişənləri arasında (istər L_1 konturları olsun istərsə də L_2 konturu) əlaqə yazmaq lazım gəlir.

Kompleks dəyişənlərə keçsək (burdakı z , tirin oxu yəni tirin boyu üzrə yönələn simmetriya oxu deyil)

$$z = x + iy; \bar{z} = x - iy \text{ olduğu üçün}$$

$$x = \frac{1}{2}(z + \bar{z}); y = -\frac{i}{2}(z - \bar{z}) \text{ olur.} \quad (\text{III.2.21})$$

Xarici L_2 konturu (düzgün çoxbucaqlı) vahid çevrə ətrafına inikas etdirici funksiya belədir [51]

$$z = A(\tau_2 + m\tau_2^{1-N}); \bar{z} = A(\tau_2^{-1} + m\tau_2^{N-1}); \quad (\text{III.2.22})$$

Daxili L_1 konturun (r radiuslu çevrə və ondan çıxan iki düzxətli çat) vahid çevrə ətrafına inikas olunan funksiyası isə bu şəkildədir [51]:

$$z = r\tau_1 \sum_{n=0}^{\infty} \gamma_{n-1} \cdot \tau_1^{-n}; \quad \bar{z} = r\tau_1^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} \gamma_{n-1} \cdot \tau_1^n \quad (\text{III.2.23})$$

Bu sonuncu (III.2.22) və (III.2.23) ifadələrində τ dəyişəni vahid γ çevrəsi üzərindəki nöqtələrin affiksidir (yadda saxlamaq lazımdır ki, vahid çevrə üzərində $\tau = e^{i\theta}$ və $\tau \cdot \bar{\tau} = 1$ olur). A, m, N kəmiyyətləri bölmə I və II deyildiyi kimi (bax I.2.21 və №1.1 ifadələrinə) tirin ən kəsiyini xarakterizə edən əmsallardır.

γ_{n-1} əmsalları isə [51] əsasən tapılır (bax II.1.16 ifadələrinə).

Göründüyü kimi (III.2.20) ifadəsindəki inteqralları hesablamaq üçün x və y dəyişənlərinin nəticə etibarı ilə z və \bar{z} dəyişənlərinin ən azı beşinci dərəcədən qüvvət üstünün ifadələrini bilmək lazım gəlir. Ona görə də biz aşağıda (III.2.22) və (III.2.23) ifadələrinin istənilən qüvvət üstlü ifadəsini veririk (bunu gələcək tədqiqatçıların yorucu hesabatların aparılmasında əziyyət çəkməmələri üçün edirik).

Əvvəlcə $\bar{z}\bar{z}$ ifadəsinə baxaq.

(III.2.22) əsasən (yəni düzgün N bucaqlı üçün).

$$z\bar{z} = A^2 m (\tau^N + \tau^{-N}) + A^2 (1 + m^2) \quad (\text{III.2.24})$$

(III.2.23) əsasən (yəni iki düzxətli çata malik çevrə).

$$z\bar{z} = r\tau \sum_{n=0}^{\infty} \gamma_{n-1} \tau^{-n} r \tau^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} \gamma_{n-1} \tau^n = r^2 \sum_{v=0}^{\infty} \tau^v T_1 + r^2 \sum_{v=1}^{\infty} \tau^{-v} T_2(v)$$

$$T_1(v) = \sum_{n=v}^{\infty} \gamma_{n-1} \gamma_{n-v-1}; \quad T_2(v) = \sum_{n=0}^{\infty} \gamma_{n-1} \gamma_{n+v-1} \quad (\text{III.2.25})$$

(III.2.22) ifadəsinə əsasən

$$(z)^k = \left[A(\tau + m\tau^{1-N}) \right]^k = \sum_{v=0}^{\infty} \tau^v T_3(v) + \sum_{v=0}^{\infty} \tau^{-v} T_4(v);$$

$$T_3(v) = \sum_{v=0}^{\infty} A^k C_k^N m^{\frac{k-v}{N}}; \quad T_4(v) = \sum_{k=\frac{v+\varepsilon}{N-1}+\varepsilon}^{\infty} A^k C_k^N m^{\frac{k-v}{N}}; \quad (\text{III.2.26})$$

$$k = 2; 3; \dots; \quad v = 0; 1; 2; \dots$$

(III.2.23) ifadələrinə əsasən

$$(z)^k = \left[r\tau \sum_{n=0}^{\infty} \gamma_{n-1} \tau^{-n} \right]^k = \sum_{v=0}^{\infty} \tau^v T_5(v) + \sum_{v=1}^{\infty} \tau^{-v} T_6(v);$$

$$T_5(v) = \sum_{k=v}^{\infty} r^k \gamma_{-1}^k g_{k-v}^{(k)}; \quad T_6(v) = \sum_{k=v}^{\infty} r^k \gamma_{-1}^k g_{k+v}^{(k)};$$

$$g_n^{(k)} = \sum_{n_1=0}^{\infty} g_{n_1}^{(1)} g_{n-n_1}^{(k-1)}; \quad g_n = g_n^{(1)} = \frac{\gamma_{n-1}}{\gamma_{-1}};$$

$$k = 2; 3; \dots; \quad n = 0; 1; 2; \dots; \quad (\text{III.2.27})$$

Bu ifadələrdə * və ** ulduz işarələr cəmlərin növbəti həddə keçdikdə indekslərin uyğun olaraq 2 və N qədər dəyişməsinə göstərir.

Differensial tənlik (III.2.20) bir neçə riyazi əməliyyatlardan sonra aşağıdakı şəkil alar (III.2.21, III.2.22, III.2.23, III.2.26 və III.2.27 ifadələrini nəzərə alıqda):

$$\int_{L_2} \left\{ \frac{n_4}{32} \frac{A^5}{30} \left(-\frac{iA}{2} \right) (\tau_2 + m\tau_2^{1-N} + \tau_2^{-1} + m\tau_2^{N-1})^5 \cdot [1 + m(1-N)\tau_2^{-N} + \tau_2^{-2} + m(N-1)\tau_2^{N-2}] + c_1 \frac{A^3}{24} \left(-\frac{iA}{2} \right) (\tau_2 + m\tau_2^{-N+1} + \tau_2^{-1} + m\tau_2^{N-1})^3 [1 + \tau_2^2 + m(1-N)\tau_2^{-N} - m(N-1)\tau_2^{N-2}] + c_3 \left(-\frac{iA}{2} \right) [1 + m(1-N)\tau_2^{-N} + \tau_2^{-2} - m(N-1)\tau_2^{N-2}] \right\} d\tau_2 - \int_{L_1} \left\{ \frac{n_4}{30} \frac{r^5}{32} \left(-\frac{ir}{2} \right) \left[\sum_{n=0}^{\infty} \gamma_{n-1} \tau_2^{1-n} + \sum_{n=0}^{\infty} \gamma_{n-1} \tau_1^{n-1} \right]^5 \cdot \left[\sum_{n=0}^{\infty} \gamma_{n-1} (1-n) \tau_1^{-n} - \sum_{n=0}^{\infty} \gamma_{n-1} (n-1) \tau_1^{n-2} \right] d\tau_1 + c_1 \frac{r^3}{24} \left(-\frac{ir}{2} \right) \cdot \left[\sum_{n=0}^{\infty} \gamma_{n-1} \tau_1^{1-n} + \sum_{n=0}^{\infty} \gamma_{n-1} \tau_1^{n-1} \right]^3 \cdot \left[\sum_{n=0}^{\infty} \gamma_{n-1} (1-n) \tau_1^{-n} - \right.$$

$$\begin{aligned}
& - \sum_{n=0}^{\infty} \gamma_{n-1} (n-1) \tau_1^{n-2} \left. \right] d\tau_1 + c_3 \frac{r^3}{24} \left(-\frac{ir}{2} \right) \left[\sum_{n=0}^{\infty} \gamma_{n-1} (1-n) \tau_1^{-n} - \right. \\
& \left. - \sum_{n=0}^{\infty} \gamma_{n-1} (n-1) \tau_1^{n-2} \right] \left. \right\} d\tau_1 = M \quad (\text{III.2.28})
\end{aligned}$$

Bu ifadəyə daxil olan bütün inteqralların hesablanmasında, yalnız τ dəyişəninin mənfi bir (-1) üslü daxil hədlər olanları sıfırdan fərqlidir, qalanları isə sıfırdır (bu inteqralların hamısı Koşi tipli inteqrallardır).

$$\text{Yəni } \tau = e^{i\theta} \text{ və } \tau^{-1} = 1 \cdot e^{-i\theta} \text{ olduğu üçün: } \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{d\tau}{\tau} = 1;$$

Çünki

$$\begin{aligned}
\int_L \frac{d\tau}{\tau} &= \ln \tau \Big|_0^{2\pi} = \ln(1e^{i\theta}) \Big|_0^{2\pi} = \ln 1 + \ln(1e^{i\theta}) \Big|_0^{2\pi} = \\
&= \ln 1 + i\theta \Big|_0^{2\pi} = 0 + 2\pi i \text{ olar.}
\end{aligned}$$

Bu inteqrallardan başqaları eyniyənən sıfırdır. Məsələn,

$$\begin{aligned}
\int_L \frac{d\tau}{\tau^2} &= \int_L \tau^{-2} d\tau = -\frac{1}{3} \tau^{-1} \Big|_0^{2\pi} = \\
&= -\frac{1}{3} e^{i\theta} \Big|_0^{2\pi} = -\frac{1}{3} (\cos \theta - i \sin \theta) \Big|_0^{2\pi} = 0
\end{aligned}$$

və ya

$$\int_L \pi d\tau = \frac{\tau^2}{2} \Big|_0^{2\pi} = \frac{1}{2} e^{i2\theta} \Big|_0^{2\pi} = \frac{1}{2} e^{i\theta} (\cos + i \sin \theta) \Big|_0^{2\pi} =$$

$$= \frac{1}{2} \cos 2\theta \Big|_0^{2\pi} + \frac{1}{2} i \sin 2\theta \Big|_0^{2\pi} = 0 \quad (\text{III.2.29})$$

və i.a.

Bütün bu yuxarıda deyilənlərə əsasən (III.2.26) tənliyindəki inteqralları hesablasaq, aşağıdakı nəticəyə gələrik:

$$n_4 \frac{\pi A^6}{480} \Pi_1 + \frac{\pi A^4}{24} c_1 \Pi_2 - n_4 \frac{\pi r^6}{480} \cdot \Pi_3 - n_4 \frac{\pi r^4}{8} c_1 \Pi_4 = M \quad (\text{III.2.30})$$

Bu ifadədən c_1 sabitini taparıq:

$$c_1 = \frac{M - \frac{\pi \cdot n_4}{480} \Pi_1 \cdot A^6 - \frac{\pi \cdot n_4}{480} r^6}{\frac{\pi A^4}{24} \cdot \Pi_2 - \frac{\pi \cdot r^4}{8} \cdot \Pi_4} \quad (\text{III.2.31}).$$

Burada Π_1, Π_2, Π_3 və Π_4 - kəmiyyətləri inteqrallamanın nəticəsində meydana çıxan əmsallardır (m, N, γ_{n-1} parametrlərindən asılı əmsallardır). Beləliklə $f(x, z)$ funksiyasının birinci yaxınlaşmadakı ifadəsini tapmış olarıq.

Əgər $f(x, z)$ funksiyası məlum olduğunu bilərək, deformasiyaların birgəlilik şərtlərinin (III.2.2) üçüncüsündə, deformasiyaların $(\varepsilon_x, \varepsilon_y, \psi_{xy})$ ifadələri olan (III.2.14) düsturlara əsasən gərginlik funksiyası $F(x, y)$ üçün belə bir differensial tənlik alarıq:

$$\Delta\Delta F \cdot \left(n_1 + \frac{1}{2G} \right) = n_2 \cdot \sigma_z^{(0)} \cdot \Phi_{yy} + 6n_2 \cdot \sigma_z^{(0)} \cdot \frac{P^2 \cdot (l-z)^2}{J^2} - \\ - 2n_2 \Phi_x \frac{P^2 \cdot (l-z)}{J} + n_2 \cdot \sigma_z^{(0)} \cdot \Phi_{xx} - n_1 \cdot f_{xx}; \quad (\text{III.2.32})$$

Bu ifadəyə daxil olan Φ funksiyası (III.2.13) düsturu ilə müəyyən edilir. Xətti elastiklik nəzəriyyəsi çərçivəsində (III.2.13) ifadəsinə daxil olan $\varphi^{(0)}(x, y)$ funksiyası aşağıdakı ifadə ilə müəyyən olunur:

$$\varphi^{(0)}(x, y) = \varphi^{(0)}(z, \bar{z}) = \frac{1}{2} B_1 \cdot z \cdot (\bar{z})^2 + \\ + \frac{i}{6} B_2 \cdot z^3 - \frac{i}{4} B_3 \cdot z^2 \cdot \bar{z} + \frac{i}{8} B_4 \left[\frac{1}{3} z^3 - z \cdot (\bar{z})^2 \right] + \\ + \frac{1}{2} B_5 \sum_{k=1}^{\infty} \left[\alpha_k \left(\frac{z}{A} \right)^k + \beta_k \xi_1^{-k} \right]; \quad (\text{III.2.33})$$

Bu ifadəyə daxil olan α_k və β_k əmsalları, məsələnin xətti qoyuluşdakı həllindən məlumdur. ξ_1 dəyişəni daxili L_1 konturunun inikas funksiyasının (III.2.23) tərsi olan funksiyadır (bax cəđ. №1.1 düsturuna).

Sonuncu ifadədə aşağıdakı əvəzləmələr edilib.

$$B_1 = -\frac{P}{8(1+\mu) \cdot J} (1+2\mu); \quad B_2 = -\frac{3P}{8(1+\nu) \cdot J} P;$$

$$B_3 = -\frac{2P}{8(1+\nu) \cdot J}; B_4 = -\frac{P}{J}; B_5 = -\frac{4P}{8(1+\nu) \cdot J}; \quad (\text{III.2.34})$$

Əgər (III.2.33) ifadəsini (III.2.13) düsturunda yerinə yazsaq $\Phi(x, y)$ funksiyası aşağıdakı kimi müəyyən olunur. Əvvəlcə (III.2.33) ifadəsindəki sonuncu həddi (II.2.16) əsasən belə yazmaq olar:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k \xi_1^{-k} &= \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k \left[\frac{z}{r} \sum_{n=0}^{\infty} * \delta_{n-1} \left(\frac{r}{z} \right)^n \right]^{-k} = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{r}{z} \right)^v B(v); B(v) = \sum_{k=0}^v \beta_k \delta_{-1}^{-k} L_{v-k}; \end{aligned} \quad (\text{III.2.35})$$

Burada ulduz (*) işarəsi, növbəti toplanana keçdikdə indekslərin iki-iki dəyişməsini göstərir. Bütün $L_n^{(k)}$ əmsalları belə bir şərtədən tapılır [51]:

$$L_n^{(k)} + \sum_{n_1=0}^n L_{n-n_1}^{(k)} g_{n_1}^{(k)} = 0; \quad g_n^{(1)} = \frac{\delta_{n-1}}{\delta_{-1}};$$

Beləliklə alırıq:

$$\begin{aligned}
\Phi = & z\bar{z}^3 \cdot \gamma_1^* + z^3 \cdot \bar{z}\gamma_2^* + \bar{z}^2 \cdot z^2 \cdot \gamma_3^* + z^4 \cdot \gamma_4^* + \bar{z}^4 \cdot \gamma_5^* + \\
& + i\gamma_6^* \sum_{k=1}^{\infty} \left[ka_k A^{-k} \cdot z^{k+1} - k \cdot B(k)r^k \cdot z^{-k+1} \right] + \\
& + i\gamma_7^* \sum_{k=1}^{\infty} \left[ka_k A^{-k} \cdot z^{k-1} \cdot \bar{z}^2 - k \cdot B(k) \cdot r^k \cdot z^{-k-1} \cdot \bar{z}^2 \right] + \\
& + i\gamma_8^* \sum_{k=1}^{\infty} \left[ka_k \cdot A^{-k} \cdot z^k \cdot \bar{z} - k \cdot B(k) \cdot r^k \cdot z^{-k} \cdot \bar{z} \right]; \quad (\text{III.2.36})
\end{aligned}$$

Burada aşağıdakı əvəzləmələr edilib:

$$\begin{aligned}
\gamma_2^* &= -6B_1^2 - \frac{3}{4}B_3B_4 - \frac{9}{2}B_1B_4; \\
\gamma_2^* &= 6B_1B_2 + 3B_1B_4 - \frac{3}{2}B_3^2 + \frac{3}{2}B_2B_4 + \frac{3}{4}B_3B_4 + \frac{3}{4}B_4^2; \\
\gamma_3^* &= \frac{3}{4}B_1B_4 + \frac{3}{4}B_2B_4 - \frac{9}{4}B_3B_4 - \frac{15}{2}B_1B_3 + \frac{3}{4}B_4^2; \\
\gamma_4^* &= \frac{3}{4}B_2B_3 - \frac{3}{4}B_2B_4 + \frac{3}{4}B_3B_4 - \frac{3}{8}B_4^2; \\
\gamma_5^* &= -\frac{3}{4}B_1B_4 - \frac{3}{8}B_4^2; \quad \gamma_6^* = -\frac{3}{4}B_3B_5 + \frac{3}{4}B_4B_5; \\
\gamma_7^* &= -\frac{3}{4}B_4B_5; \quad \gamma_8^* = 6B_1B_5 - \frac{3}{4}B_4B_5; \quad (\text{III.2.37})
\end{aligned}$$

(III.2.36) ifadəsində polayar koordinatlara (ρ, θ) keçib, lazım təmələr aparıb, alınan nəticəni (III.2.32) differensial tənliyində yerinə yazsaq, alarıq:

$$\Delta\Delta F = \sum_{k=1}^{\infty} \rho^k \cdot V_1(k) + \sum_{k=2}^{\infty} \rho^{-k} \cdot V_2(k) + \rho^{-1} \cdot V_2(1). \quad (\text{III.2.38})$$

Burada

$$V_1(k) = \left(-2 \frac{n_2}{n_3} \right) \frac{M}{J} \left[2\gamma_1^* \cdot e^{-3i\theta} \cdot \varepsilon_1 + 2\gamma_2^* \cdot e^{-3i\theta} \cdot \varepsilon_1 + \right. \\ \left. + 2\gamma_3^* e^{-i\theta} \varepsilon_1 + 2\gamma_3^* e^{-i\theta} \varepsilon_1 - 4\gamma_4^* e^{3i\theta} \varepsilon_1 - 4\gamma_5^* e^{-3i\theta} \varepsilon_1 + \right. \\ \left. + i e^{i(k-2)\theta} E_1 + i e^{i(k-2)\theta} E_2 + i e^{ik\theta} E_3 \right];$$

$$V_2(k) = \left(-2 \frac{n_2}{n_3} \right) \frac{M}{J} \left[i e^{-i(k+2)\theta} \cdot E_4 + i e^{-i(k+4)\theta} \cdot E_5 + i e^{-ik\theta} \cdot E_6 \right];$$

$$E_1 = \gamma_7^* \left[2k(k-2)a_k A^{-k} \right]; \quad E_2 = \gamma_7^* k(k-1)a_k \cdot A^{-k};$$

$$E_3 = \gamma_8^* \left[k^2 a_k A^{-k} - k a_k A^{-k} \right] - \gamma_6^* k(k+1)a_k \cdot A^{-k};$$

$$E_4 = \gamma_7^* 2k(k+2)B(k) \cdot r^k; \quad E_5 = \gamma_7^* k(k+1)B(k) \cdot r^k;$$

$$E_6 = \gamma_8^* \left[k^2 B(k) \cdot r^k + B(k) \cdot r^k \right] - \gamma_8^* k(k-1)B(k) \cdot r^k;$$

$$\varepsilon_1 = \begin{cases} 0 & k \neq 3; \\ 1 & k = 3; \end{cases} \quad (\text{III.2.39})$$

(III.2.38) differensial tənliyin həlli I və II bölmələrdə deyildi ki kimi, belə götürülür (xüsusi və ümumi həllərin cəmi kimi).

$$F = F_{xbs} + F_{bm}; \quad F_{bm} = \rho^2 \cdot c_1^* + c_2^* \cdot \ln \rho$$

$$\begin{aligned}
F_{x_b s} &= \sum_{k=1}^{\infty} \rho^{k+4} \delta_1^* \cdot V_1(k) + \sum_{k=2}^{\infty} \rho^{4-k} \cdot \delta_2^* \cdot V_2(k) + \\
&+ V_2(1) \cdot \left[\frac{\rho^3}{6} \ln \rho^* - \frac{11}{36} \rho^3 \right] \cdot \delta_3^*
\end{aligned} \quad (\text{III.2.40})$$

Burada $\ln \rho^* = \ln \frac{\rho}{c_3}$ əgər $c_3 < \rho$ olsa; $\ln \rho^* = \frac{c_3}{\rho}$ əgər

$c_3 > \rho$ olsa.

$$\begin{aligned}
\delta_1^* &= \left[(k+4)^2 (2+k)^2 \right]^{-1}; \quad \delta_2^* = \left[(4-k)^2 (2-k)^2 \right]^{-1}; \\
\delta_3^* &= \left[\frac{3}{2} V_2(0) - \frac{11}{4} \right]^{-1}; \quad V_v(0) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{2k-1};
\end{aligned}$$

Beləliklə gərginlik funksiyası $F(x, y)$ aşağıdakı ifadə ilə müəyyən edilir.

$$\begin{aligned}
F &= F_{x_b s} + F_{b m} = \sum_{k=1}^{\infty} \rho^{k+4} \cdot \delta_1^* \cdot V_1(k) + \sum_{k=2}^{\infty} \rho^{4-k} \cdot \delta_2^* \cdot V_2(k) + \\
&+ V_2(1) \cdot \delta_4^* \cdot \rho^3 + c_1^* \cdot \rho^2 + c_2^* \cdot \ln \rho; \\
\delta_4^* &= \delta_3^* \left[\frac{1}{6} \ln \rho^* - \frac{11}{36} \right];
\end{aligned} \quad (\text{III.2.41})$$

Bu ifadədəki c_1^* və c_2^* sabitlərini (III.2.5) sərhəd şərtlərinə əsasən tapırıq:

$$\frac{\partial F}{\partial \rho} \cos \theta - \frac{1}{\rho} \sin \theta \cdot \frac{\partial F}{\partial \theta} = 0; \quad \frac{\partial F}{\partial \rho} \sin \theta + \frac{1}{\rho} \cos \theta \cdot \frac{\partial F}{\partial \theta} = 0;$$

və ya (III.2.41) ifadəsinə əsasən yazarıq.

$$\left\{ \sum_{k=1}^{\infty} (k+4)t_2^{k+3} \cdot \delta_1^* \cdot V_1(k) + \sum_{k=2}^{\infty} t_2^{-k+3}(4-k)\delta_2^* \cdot V_2(k) + \right. \\ \left. + 3V_2(1) \cdot \delta_4^* \cdot \rho^2 + 2t_2 c_1^* + \frac{1}{t} c_2^* \right\} \sin \theta + \\ + \frac{1}{t_2} \cos \theta \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} t_2^{k+4} \delta_1^* \cdot V_3(k) + \sum_{k=2}^{\infty} t_2^{-k+4} \cdot \delta_2^* \cdot V_4(k) + \right. \\ \left. + V_4(1) \cdot \delta_4^* \cdot t_2^3 \right\} = 0; \text{ əgər } \rho = t_2 \text{ olsa, yəni } L_2 \text{ üzərində}$$

$$\left\{ \sum_{k=1}^{\infty} (k+4)t_1^{k+3} \delta_1^* \cdot V_1(k) + \sum_{k=2}^{\infty} t_1^{-k+3}(4-k) \cdot \delta_2^* \cdot 3V_2(k) + \right. \\ \left. + V_2(1) \cdot \delta_4^* \cdot t_1^3 + 2t_1 c_1 + \frac{1}{t_1} c_2^* \right\} \sin \theta + \\ + \frac{1}{t_2} \cos \theta \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} t_2^{k+4} \cdot \delta_1^* \cdot V_3(k) + \sum_{k=2}^{\infty} t_1^{-k+4} \cdot \delta_2^* \cdot V_4(k) + \right. \\ \left. + V_4(1) \cdot \delta_4^* \cdot t_1^3 \right\} = 0; \text{ əgər } \rho = t_1 \text{ olsa} \quad (\text{III.2.42})$$

Burada

$$V_3(k) = \frac{\partial V_1(k)}{\partial \theta}; \quad V_4(k) = \frac{\partial V_2(k)}{\partial \theta};$$

Bu (III.2.42) düsturlarından c_1^* və c_2^* sabitləri üçün bu ifadələr alınar:

$$c_1^* = \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} [t_2^{k+4} - t_1^{k+4}] \delta_5^* + \sum_{k=2}^{\infty} [t_2^{-k+4} - t_1^{-k+4}] \delta_6^* + \right. \\ \left. + (t_2^3 - t_1^3) \delta_7^* \right\} \frac{1}{t_2^2 - t_1^2};$$

$$c_2^* = \sum_{k=1}^{\infty} t_2^{k+4} \delta_5^* + \sum_{k=2}^{\infty} t_2^{-k+4} \delta_6^* + t_2^3 \delta_7^* + t_2^2 \cdot \sum_{k=1}^{\infty} (t_2^{k+4} - t_1^{k+4}) \delta_5^* + \\ + \left[\sum_{k=2}^{\infty} (t_2^{-k+4} - t_1^{-k+4}) \delta_6^* + (t_2^3 - t_1^3) \delta_7^* \right] \frac{1}{t_2^2 - t_1^2};$$

$$\delta_5^* = [(k+4) \varepsilon_1 \cdot V_1(k) \cdot \sin \theta + \varepsilon_1 V_3(k) \cos \theta];$$

$$\delta_6^* = [(4-k) \cdot \sin \theta \cdot \varepsilon_2 \cdot V_2(k) + \varepsilon_2 \cdot V_4(k) \cos \theta];$$

$$\delta_7^* = [3 \sin \theta \cdot V_2(1) + V_4(1) \cdot \cos \theta] \delta_4^*; \quad (\text{III.2.43})$$

Gərginlik funksiyası F tapıldıqdan (müəyyən olunduqdan) sonra, gərginlik komponentləri (III.2.4) ifadələrinə əsasən tapılırlar.

$$\sigma_{\rho} = g_2 \left[\frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 F}{\partial \theta^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial F}{\partial \rho} \right]; \quad \sigma_{\theta} = g_2 \frac{\partial^2 F}{\partial \rho^2};$$

$$\tau_{\rho\theta} = -g_2 \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial F}{\partial \theta} \right); \quad (\text{III.2.44})$$

İndi də toxunan gərginliklərin (τ_{xz} və τ_{yz}) əyilmədə gərginlik funksiyası olan $F^{(1)}$ - funksiyası vasitəsilə ifadələrini

çıxaraq. Bunun üçün (III.2.2) deformasiyaların birgəlik şərtlərindəki dördüncü və beşincisini birlikdə belə də yazmaq olar.

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[\frac{\partial \psi_{xz}}{\partial y} - \frac{\partial \psi_{yz}}{\partial x} \right] + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left[\frac{\partial \psi_{xz}}{\partial y} - \frac{\partial \psi_{yz}}{\partial x} \right] = 0; \quad (\text{III.2.45})$$

Bu tənlikdə ψ_{xz} və ψ_{yz} sürüşmə deformasiyalarının (III.2.13) ifadələrini nəzərə alsaq, yazarıq:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi_{xz}}{\partial y} &= \frac{1}{G} [\varphi_{yy}^{(0)} + g_2 \varphi_{yy}^{(1)}] + \frac{2}{9G^3} g_2 (\varphi_{yy}^{(0)} \cdot \sigma_z^{(0)^2} + \\ &+ \varphi_{yy}^{(0)} \cdot \Phi + \varphi_y^{(0)} \cdot \Phi_y) - \frac{\partial \psi_{yz}}{\partial x} = \\ &= \frac{1}{G} \left[\varphi_{xx}^{(0)} + g_2 \cdot \varphi_{xx}^{(1)} + \frac{Py}{J} + g_2 \cdot f_{xz} \cdot y \right] + \\ &+ \frac{2}{9G^3} g_2 [\varphi_{xx}^{(0)} \cdot \sigma_z^{(0)^2} - \varphi_x^{(0)} \cdot \sigma_z^{(0)^2} \frac{P(l-z)}{J} + \\ &+ \varphi_{xx}^{(0)} \cdot \Phi + \varphi_x^{(0)} \Phi_x + \sigma_z^{(0)^2} \frac{Py}{J} + \frac{Py}{J} \Phi - \\ &- \sigma_z^{(0)} \frac{P(l-z)}{J} \frac{Pxy}{J} + \frac{Pxy}{J} \Phi_x]; \end{aligned} \quad (\text{III.2.46})$$

Bu (III.2.46) ifadələrini (III.2.45) tənliyində nəzərə alsaq, belə bir diferensial tənlik alarıq:

$$\begin{aligned}
\Delta\Delta\varphi^{(1)} = & \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \cdot \left\{ \left(-\frac{2}{9G^2} \right) \left[\sigma_z^{(0)} \cdot \Delta\varphi^{(0)} + \right. \right. \\
& + \Phi \cdot \Delta\varphi^{(0)} + \varphi_x^{(0)} \cdot \Phi_x + \varphi_y^{(0)} \cdot \Phi_y - \\
& - \sigma_z^{(0)} \cdot \varphi_x^{(0)} \cdot \frac{P(l-z)}{J} + \sigma_z^{(0)^2} \cdot \frac{Py}{J} + \frac{Py}{J} \Phi - \\
& \left. \left. - \sigma_z^{(0)^2} \cdot \frac{P(l-z)}{J} \cdot \frac{Pxy}{J} + \frac{Pxy}{J} \Phi_x \right] - f_{xz}y \right\} \quad (\text{III.2.47})
\end{aligned}$$

Burada x və y dəyişənlərindən kompleks dəyişəninə ($z = x + iy$) keçsək alarıq:

$$\begin{aligned}
\Delta\Delta\varphi^{(1)} = & -\frac{2}{9G^2} \frac{\partial^2}{\partial z \partial \bar{z}} \left[\lambda_1 (z^2 + 2z\bar{z} + \bar{z}^2) 4\varphi_{zz}^{(0)} + 4\varphi_{zz}^{(0)} \cdot \Phi + \right. \\
& + 2\varphi_z^{(0)} \cdot \Phi_{\bar{z}} + 2\varphi_{\bar{z}} \cdot \Phi_z + 2\lambda_1 (z + \bar{z}) (\varphi_z^{(0)} + \varphi_{\bar{z}}^{(0)}) - \frac{i}{2} (z - \bar{z}) \frac{P}{J} \Phi - \\
& \left. - \frac{i}{4} \frac{P}{J} (z^2 - \bar{z}^2) (\Phi_z + \Phi_{\bar{z}}) + \lambda_2 i (z - \bar{z}) + \frac{i}{2} (z - \bar{z}) \cdot H_1 \right] \quad (\text{III.2.48})
\end{aligned}$$

Burada:

$$\lambda_2 = \frac{8}{9G^2} \frac{P^3(l-z)^2}{J^3}; \quad \lambda_1 = \frac{1}{4} \frac{P^2(l-z)^2}{J^2}; \quad H_1 = -18 \frac{n_2}{n_1} \frac{P^3(l-z)^2}{J^3};$$

Beləliklə $\Delta\Delta\varphi^{(1)}$ üçün belə bir ifadə alınır (əgər bu tənliyə daxil ola $\varphi^{(0)}$, f və Φ funksiyalarının məlum ifadələrini - III.2.33, III.2.36, III.2.17 nəzərə alsaq)

$$\begin{aligned}
\Delta\Delta\varphi^{(1)} = & -\frac{32}{9G^2}\lambda_1[-iz\alpha_8 - i\bar{z}\alpha_9] - \frac{16}{9G^2}\lambda_1[-i\bar{z}\alpha_{10} - iz\alpha_{11} + \\
& + \sum_{k=1}^{\infty}\gamma_9^*(k)\cdot z^{k-2} + \sum_{k=1}^{\infty}\gamma_{10}^*(k)\cdot z^{-k-2}] - \\
& -\frac{8}{9G^2}\left\{i\bar{z}^3\lambda_3 + iz^2\bar{z}\lambda_4 + iz\bar{z}^2\lambda_5 + iz^3\bar{z}\lambda_6 + \sum_{k=1}^{\infty}\left[z^k\cdot\eta_1(a) + \right. \right. \\
& + z^{k-2}\bar{z}^2\cdot\eta_2(a) + z^{k-1}\bar{z}\eta_3(a) + z^{k-3}\cdot\bar{z}^3\cdot\eta_4(a)] + \\
& + \sum_{k=1}^{\infty}\left[z^{-k}\cdot\eta_1(b) + z^{-k-2}\cdot\bar{z}^2\cdot\eta_2(b) + z^{-k-1}\cdot\bar{z}\cdot\eta_3(b) + \right. \\
& + z^{-k-3}\cdot\bar{z}^3\cdot\eta_4(b)] + iz\bar{z}^2\cdot\alpha_1 + i\cdot z^3\cdot\alpha_2 + i\cdot z^2\cdot\bar{z}\cdot\alpha_3 + i\cdot\bar{z}^3\cdot\alpha_4 + \\
& + \sum_{k=1}^{\infty}\left[z^{k-1}\cdot\bar{z}\cdot\alpha_5(a) + z^k\cdot\alpha_6(a) + z^{k-2}\cdot\bar{z}^2\cdot\alpha_7(a)\right] + \\
& + \sum_{k=1}^{\infty}\left[z^{-k-1}\cdot\bar{z}\cdot\alpha_5(b) + \bar{z}^k\cdot\alpha_6(b) + z^{-k-2}\cdot\bar{z}^2\cdot\alpha_7(b)\right] + \\
& + 2i\sum_{k=1}^{\infty}z^{-k}\cdot N_{12}(k) + 2i\sum_{k=0}^{\infty}z^k\cdot N_{13}(k)\left. \right\} + i\cdot\lambda_2\cdot z - \\
& - i\cdot\lambda_2\cdot\bar{z} + i\frac{1}{2}H_1\cdot z - \frac{i}{2}\bar{z}\cdot H_1
\end{aligned} \tag{III.2.49}$$

və ya kompakt şəkildə bu tənliyi belə də yazmaq olar.

$$\Delta\Delta\varphi^{(1)} = \sum_{k=1}^{\infty}\rho^k\cdot T_1^*(k) + \sum_{k=1}^{\infty}\rho^{-k}\cdot T_2^*(k) \tag{III.2.50}$$

Burada aşağıdakı əvəzləmələr edilib.

$$\begin{aligned}
T_1^*(k) = & i \frac{32}{9G^2} \lambda_1 \cdot \alpha_8 \cdot \varepsilon_5 \cdot e^{i\theta} + i \frac{32}{9G^2} \lambda_1 \cdot \alpha_9 \cdot e^{-i\theta} \cdot \varepsilon_5 + \\
& + \lambda_9^* \cdot e^{i(k-2)\theta} \cdot \varepsilon_5 + \frac{16}{9G^2} \lambda_1 (\alpha_{10} \cdot e^{-i\theta} - \alpha_{11} \cdot e^{i\theta}) \cdot \varepsilon_5 - \\
& - \frac{8 \cdot i}{9G^2} (\lambda_3 \cdot e^{-3i\theta} + \lambda_4 \cdot e^{-i\theta} + \lambda_5 \cdot e^{-i\theta} + \lambda_6 \cdot e^{3i\theta}) \cdot \varepsilon_7 + \\
& + \eta_1(a) \cdot e^{ik\theta} + \eta_2(a) \cdot e^{i(k-4)\theta} + \eta_3(a) \cdot e^{i(k-2)\theta} + \\
& + \eta_4(a) \cdot e^{i(k-6)\theta} + \alpha_1 \cdot ie^{-i\theta} \cdot \varepsilon_7 + i\alpha_2 \cdot e^{3i\theta} \cdot \varepsilon_7 + \\
& + ie^{i\theta} \cdot \alpha_3 \cdot \varepsilon_7 + ie^{-3i\theta} \alpha_4 \cdot \varepsilon_7 + \alpha_5(a) \cdot e^{i(k-2)\theta} \cdot \alpha_6(a) \cdot e^{ik\theta} + \\
& + \alpha_7 \cdot e^{i(k-4)\theta} + 2iN_{13}(k) \cdot e^{ik\theta} + i\lambda_2 \cdot e^{i\theta} \cdot \varepsilon_5 - i\lambda_2 \cdot e^{-i\theta} \varepsilon_5 + \\
& + \frac{i}{2} e^{i\theta} \cdot H_1 \cdot \varepsilon_5 - \frac{i}{2} H_1 \cdot e^{-i\theta} \varepsilon_5;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
T_2^*(k) = & -\frac{16}{9G^2} [\lambda_1 \cdot \gamma_9^*(k) \cdot e^{-i\theta} + \gamma_{10}^*(k) \cdot e^{-i(k+2)\theta} \cdot \varepsilon_6] - \\
& - \frac{8}{9G^2} \{ \eta_1(b) \cdot e^{-ik\theta} + \eta_2(b) \cdot e^{-i(k-4)\theta} + \eta_3(b) \cdot e^{-i(k+2)\theta} + \\
& + \eta_4(b) \cdot e^{-i(k+6)\theta} + \alpha_5(b) \cdot e^{-i(k+2)\theta} + \alpha_8(b) e^{-ik\theta} + \\
& + \alpha_7(b) e^{-i(k+4)\theta} + 2iN_{12}(k) \cdot e^{ik\theta} \}
\end{aligned}$$

$$\alpha_8 = 2B_1 + 2B_3 + \frac{1}{2} B_4; \quad \alpha_9 = 4B_1 + B_3 + B_4;$$

$$\alpha_{10} = 4B_1 + B_3 + B_4; \quad \alpha_{11} = B_1 + 2B_3 + B_2;$$

$$\lambda_3 = 5 \frac{P}{J} \gamma_1^* + 2 \frac{P}{J} \gamma_3^* - 2 \frac{P}{J} \gamma_5^*; \quad \lambda_6 = 2\gamma_4^* - 4\gamma_2^* \frac{P}{J} - 2 \frac{P}{J} \gamma_3^*;$$

$$\lambda_4 = \frac{9}{2}\gamma_2^* \frac{P}{J} - 6\gamma_3^* \frac{P}{J} - \frac{9}{2}\gamma_1^* \frac{P}{J} + 6\gamma_4^* \frac{P}{J};$$

$$\lambda_5 = 6\gamma_3^* \frac{P}{J} - \frac{9}{2}\gamma_1^* \frac{P}{J} + \frac{9}{2}\gamma_2^* \frac{P}{J} - 6\gamma_5^* \frac{P}{J};$$

$$\lambda_7(a) = -\frac{1}{2}\gamma_6^* \frac{P}{J} k(k+1) \cdot a_k \cdot A^{-k};$$

$$\lambda_7(b) = -\frac{1}{2}\gamma_6^* \frac{P}{J} k \cdot (k-1)B(k) \cdot r^k;$$

$$\lambda_8(a) = -\frac{1}{2}\gamma_7^* \frac{P}{J} k \cdot (k-1)a_k \cdot A^{-k};$$

$$\lambda_8(b) = -\frac{1}{2}\gamma_7^* \frac{P}{J} k \cdot (k+1) \cdot B(k) \cdot r^k; \quad \lambda_9(a) = \frac{1}{2}\gamma_8^* \frac{P}{J} k^2 \cdot a_k \cdot A^{-k};$$

$$\lambda_9(b) = -\frac{1}{2}\gamma_8^* \frac{P}{J} k^2 \cdot B(k) \cdot r^k; \quad \lambda_{10}(a) = \gamma_7^* \frac{P}{J} k \cdot a_k \cdot A^{-k};$$

$$\lambda_{10}(b) = -\gamma_7^* \frac{P}{J} k \cdot B(k) \cdot r^k; \quad \lambda_{11}(a) = \frac{1}{2}\gamma_8^* \frac{P}{J} k \cdot a_k \cdot A^{-k};$$

$$\lambda_{11}(b) = -\frac{1}{2}\gamma_8^* \frac{P}{J} k \cdot B(k) \cdot r^k; \quad \lambda_{12}(a) = \gamma_7^* \frac{P}{J} 2k \cdot (k-1)a_k \cdot A^{-k};$$

$$\lambda_{12}(b) = 2\gamma_7^* \frac{P}{J} k \cdot (k+1) \cdot B(k) \cdot r^k; \quad \lambda_{13}(a) = \gamma_8^* \frac{P}{J} k^2 \cdot a_k \cdot A^{-k};$$

$$\lambda_{13}(b) = \gamma_8^* \frac{P}{J} k^2 \cdot B(k) \cdot r^k; \quad \lambda_{14}(a) = -\gamma_7^* \frac{P}{J} 2k \cdot (k-1)a_k \cdot A^{-k};$$

$$\lambda_{14}(b) = -2\gamma_7^* \frac{P}{J} k \cdot (k+1)B(k) \cdot r^k; \quad \lambda_{15}(a) = -\gamma_8^* \frac{P}{J} k^2 \cdot a_k \cdot A^{-k};$$

$$\lambda_{15}(b) = -\gamma_8^* \frac{P}{J} k^2 \cdot B(k) \cdot r^k;$$

$$\lambda_{16}(a) = \frac{1}{2} \cdot \gamma_7^* \frac{P}{J} k \cdot (k-1) \cdot (k-2) a_k \cdot A^{-k};$$

$$\lambda_{17}(a) = \frac{1}{4} \gamma_8^* \frac{P}{J} k^2 \cdot (k-1) a_k \cdot A^{-k};$$

$$\lambda_{16}(b) = \frac{1}{2} \cdot \gamma_7^* \frac{P}{J} k \cdot (k+1) \cdot (k+2) B(k) \cdot r^k;$$

$$\lambda_{17}(b) = -\frac{1}{4} \cdot \gamma_8^* \frac{P}{J} k^2 \cdot (k+1) B(k) \cdot r^k;$$

$$\lambda_{18}(a) = -\frac{1}{2} \gamma_7^* \frac{P}{J} k \cdot (k-1) \cdot (k-2) a_k \cdot A^{-k};$$

$$\lambda_{19}(a) = -\frac{1}{4} \gamma_8^* \frac{P}{J} k^2 \cdot (k-1) a_k \cdot A^{-k};$$

$$\lambda_{18}(b) = \frac{1}{2} \cdot \gamma_7^* \frac{P}{J} k \cdot (k+1) \cdot (k+2) B(k) \cdot r^k;$$

$$\lambda_{19}(b) = \frac{1}{4} \gamma_8^* \frac{P}{J} k^2 \cdot (k-1) B(k) \cdot r^k;$$

$$\lambda_{20}(a) = \frac{1}{2} \gamma_7^* \frac{P}{J} k \cdot (k-1) a_k \cdot A^{-k};$$

$$\lambda_{20}(b) = \frac{1}{2} \gamma_7^* \frac{P}{J} k \cdot (k+1) B(k) \cdot r^k;$$

$$\lambda_{21}(a) = -\frac{1}{2} \gamma_7^* \frac{P}{J} k \cdot (k-1) a_k \cdot A^{-k};$$

$$\lambda_{21}(b) = -\frac{1}{2}\gamma_7^* \frac{P}{J} k \cdot (k-1)B(k) \cdot r^k; \quad \lambda_{22}(a) = \gamma_k^* \frac{P}{J} k \cdot a_k \cdot A^{-k};$$

$$\lambda_{22}(b) = -\gamma_7^* \frac{P}{J} k \cdot B(k) \cdot r^k; \quad \lambda_{23}(a) = -\frac{1}{2}\gamma_6^* \frac{P}{J} k^2 \cdot (k+1)a_k \cdot A^{-k};$$

$$\lambda_{23}(b) = \frac{1}{2}\gamma_6^* \frac{P}{J} k^2 \cdot (k-1) \cdot B(k) \cdot r^k;$$

$$\lambda_{24}(a) = -\frac{1}{2}\gamma_7^* \frac{P}{J} k \cdot (k-1) \cdot (k-2)a_k \cdot A^{-k};$$

$$\lambda_{24}(b) = \frac{1}{2}\gamma_7^* \frac{P}{J} k \cdot (k+1) \cdot (k+2)B(k) \cdot r^k;$$

$$\lambda_{25}(b) = \frac{1}{2}\gamma_8^* \frac{P}{J} k^2 \cdot (k+1)B(k) \cdot r^k;$$

$$\lambda_{25}(a) = \frac{1}{2}\gamma_8^* \frac{P}{J} k^2 \cdot (k-1)a_k \cdot A^{-k};$$

$$\eta_1(a) = \lambda_7(a) + \lambda_{11}(a) + \lambda_{13}(a) + \lambda_{17}(a) + \lambda_{20}(a) + \lambda_{22}(a);$$

$$\eta_2(a) = \lambda_8(a) + \lambda_{14}(a) + \lambda_{19}(a) + \lambda_{21}(a) + \lambda_{25}(a);$$

$$\eta_3(a) = \lambda_9(a) + \lambda_{10}(a) + \lambda_{12}(a) + \lambda_{15}(a) + \lambda_{16}(a) + \lambda_{23}(a);$$

$$\eta_4(a) = \lambda_{18}(a) + \lambda_{24}(a); \quad \eta_4(b) = \lambda_{18}(b) + \lambda_{24}(b);$$

$$\eta_1(b) = \lambda_7(b) + \lambda_{11}(b) + \lambda_{13}(b) + \lambda_{17}(b) + \lambda_{20}(b) + \lambda_{22}(b);$$

$$\eta_2(b) = \lambda_8(b) + \lambda_{14}(b) + \lambda_{19}(b) + \lambda_{21}(b) + \lambda_{25}(b);$$

$$\eta_3(b) = \lambda_9(b) + \lambda_{10}(b) + \lambda_{12}(b) + \lambda_{15}(b) + \lambda_{16}(b) + \lambda_{23}(b);$$

$$\alpha_1 = -33B_3\gamma_1^* - 60B_1\gamma_3^* - 15\gamma_3^*B_4 + 24\gamma_5^*B_2;$$

$$\alpha_2 = -18\gamma_1^* B_3 - 48\gamma_4^* B_1 - 12\gamma_4^* B_4 + 8\gamma_3^* B_2 + 2\gamma_3^* B_4;$$

$$\alpha_3 = -30\gamma_3^* B_3 - 66\gamma_2^* B_1 - \frac{33}{2}\gamma_2^* B_4 + 18\gamma_1^* B_2 + \frac{9}{2}\gamma_1^* B_4;$$

$$\alpha_4 = -36\gamma_1^* B_1 - 24\gamma_5^* B_3 - 9\gamma_1^* B_4;$$

$$\begin{aligned} \alpha_5(a) = & 8\gamma_7^* B_3 k a_k A^k + 14\gamma_8^* B_1 k^2 a_k A^{-k} + \\ & + \frac{7}{2}\gamma_8^* B_4 k^2 a_k A^{-k} + 10\gamma_7^* B_3 k(k-1) a_k A^{-k} + \\ & + 4B_1 \gamma_8^* k^2 (k-1) a_k A^{-k} + \gamma_8^* B_4 k^2 (k-1) a_k A^{-k} + \\ & + \gamma_7^* B_3 k(k-1)(k-2) a_k A^{-k} + 6\gamma_1^* B_5 k a_k A^{-k} + \\ & + 6\gamma_1^* B_5 k(k-1) a_k A^{-k}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \alpha_6(a) = & 3\gamma_8^* B_3 \cdot k \cdot a_k \cdot A^{-k} + 6B_1 \cdot \gamma_6^* \cdot k \cdot (k+1) \cdot a_k \cdot A^{-k} + \\ & + \frac{3}{2}\gamma_6^* \cdot B_4 \cdot k \cdot (k+1) \cdot a_k \cdot A^{-k} + 4B_2 \cdot \gamma_7^* \cdot k \cdot a_k \cdot A^{-k} - \\ & + B_4 \cdot \gamma_7^* \cdot k \cdot a_k \cdot A^{-k} - 2\gamma_7^* \cdot B_2 \cdot k \cdot (k-1) a_k \cdot A^{-k} + \\ & + 4\gamma_8^* \cdot B_3 \cdot k^2 \cdot a_k \cdot A^{-k} - \frac{1}{2}\gamma_7^* \cdot B_4 \cdot k \cdot (k-1) a_k \cdot A^{-k} + \\ & + 2\gamma_6^* \cdot B_1 \cdot k^2 \cdot (k+1) a_k \cdot A^{-k} + \frac{1}{2}\gamma_6^* \cdot B_4 \cdot k^2 \cdot (k+1) a_k \cdot A^{-k} + \\ & + \frac{1}{2}B_3 \cdot \gamma_8^* \cdot k^2 \cdot (k-1) a_k \cdot A^{-k} + 2\gamma_3^* \cdot B_5 \cdot k \cdot (k-1) a_k \cdot A^{-k} + \\ & + 4\gamma_3^* \cdot B_5 \cdot k \cdot a_k \cdot A^{-k}; \end{aligned}$$

$$\alpha_7(a) = 12\gamma_7^* \cdot B_1 \cdot k \cdot (k-1) a_k \cdot A^{-k} + 6\gamma_7^* \cdot B_4 \cdot k \cdot (k-1) a_k \cdot A^{-k} - \\ - 6\gamma_7^* \cdot B_1 \cdot k \cdot (k-1) \cdot (k-2) a_k \cdot A^{-k} + 12\gamma_5^* \cdot B_5 \cdot k \cdot (k-1) a_k \cdot A^{-k} + \\ + \frac{3}{2} \gamma_7^* \cdot B_4 \cdot k \cdot (k-1) \cdot (k-2) a_k \cdot A^{-k};$$

$$\alpha_5(b) = -8\gamma_7^* \cdot B_3 \cdot k \cdot B(k) \cdot r^k + 14B_1 \cdot \gamma_8^* \cdot k^2 \cdot B(k) \cdot r + \\ + \frac{7}{2} \gamma_8^* \cdot B_4 \cdot k^2 \cdot B(k) \cdot r^k + 10\gamma_7^* \cdot B_3 \cdot k \cdot (k+1) B(k) \cdot r^k - \\ - \gamma_7^* \cdot B_3 \cdot k(k+1) \cdot (k-2) B(k) \cdot r^k - \gamma_8^* \cdot B_4 \cdot k^2 B(k) \cdot r^k - \\ - 4\gamma_8^* \cdot B_1 \cdot k^2 \cdot (k+1) B(k) \cdot r^k - 6\gamma_1^* \cdot B_5 \cdot k \cdot B(k) \cdot r^k + \\ + 6\gamma_1^* \cdot B_5 \cdot k(k+1) B(k) \cdot r^k;$$

$$\alpha_6(b) = -3\gamma_8^* \cdot B_3 \cdot k \cdot B(k) \cdot r^k + 4\gamma_8^* \cdot B_3 \cdot k^2 B(k) \cdot r + \\ + 6B_1 \cdot \gamma_6^* \cdot k \cdot (k-1) B(k) \cdot r^k + \frac{3}{2} \gamma_6^* \cdot B_4 \cdot k \cdot (k-1) B(k) \cdot r^k + \\ + 4\gamma_7^* \cdot B_2 \cdot k \cdot B(k) \cdot r^k + \gamma_7^* \cdot B_4 \cdot k \cdot B(k) \cdot r^k - \\ - 2\gamma_7^* \cdot B_2 \cdot k \cdot (k+1) B(k) \cdot r^k - \frac{1}{2} \gamma_7^* \cdot B_4 \cdot k \cdot (k+1) B(k) \cdot r^k + \\ + 2\gamma_6^* \cdot B_1 \cdot k^2 \cdot (k-1) B(k) \cdot r^k - \frac{1}{2} \gamma_6^* \cdot B_4 \cdot k^2 (k-1) B(k) \cdot r^k - \\ - \frac{1}{2} \gamma_8^* \cdot B_3 \cdot k^2 \cdot (k-1) B(k) \cdot r^k + 2\gamma_3^* \cdot B_5 \cdot k \cdot (k+1) B(k) \cdot r^k - \\ - 4\gamma_3^* \cdot B_5 \cdot k \cdot B(k) \cdot r^k;$$

$$\alpha_7(b) = 12\gamma_7^* \cdot B_1 \cdot k \cdot (k+1)B(k) \cdot r^k + 6\gamma_7^* \cdot B_4 \cdot k(k+1)B(k) \cdot r - \\ - 6\gamma_7^* \cdot B_1 \cdot k(k+1) \cdot (k+2)B(k) \cdot r^k - \\ - \frac{3}{2}\gamma_7^* \cdot B_4 \cdot k(k+1) \cdot (k+2)B(k) \cdot r^k + 12\gamma_5^* \cdot B_5 \cdot k \cdot (k+1)B(k) \cdot r^k;$$

$$\gamma_9^*(k) = \frac{1}{2}B_5 \cdot k \cdot (k-1)a_k \cdot A^{-k}; \quad \gamma_{10}^*(k) = \frac{1}{2}B_5 \cdot k \cdot (k+1)B(k) \cdot r^k;$$

$$N_1(k) = \gamma_7^* \cdot B_5 \cdot k \cdot (k-1)a_k \cdot A^{-k};$$

$$N_2(k) = B_5 \cdot \gamma_7^* \cdot k \cdot (k+1)B(k) \cdot r^k;$$

$$N_3(k) = 2k \cdot a_k \cdot A^{-k}; \quad N_4(k) = 2k \cdot B(k) \cdot r^k;$$

$$N_5(k) = \sum_{n=k}^{\infty} N_3(n-k+1) \cdot N_1(3-n)\varepsilon_1;$$

$$N_6(k) = \sum_{n=1}^{k+3} N_1(n) \cdot N_3(k-n+4);$$

$$N_7(k) = \sum_{n=k}^{\infty} [N_2(n-2) \cdot N_3(n-k+1)\varepsilon_2 + \\ + N_2(n-k+1) \cdot N_3(3-2k+n)\varepsilon_3]$$

$$N_8(k) = \sum_{n=k}^{\infty} N_2(n-k+1)N_3(n+4);$$

$$N_9(k) = \sum_{n=k}^{\infty} [N_1(n-2) \cdot N_4(n-k+1)\varepsilon_2 + \\ + N_1(n-k+1) \cdot N_4(n-2k+3)\varepsilon_3]$$

$$N_{10}(k) = \sum_{n=k}^{\infty} N_1(n-k+1) \cdot N_4(n+4);$$

$$N_{11}(k-4) = \sum_{n=1}^{\infty} N_2(n) \cdot N_4(k-4-n+1) \varepsilon_4$$

$$N_{12}(k) = N_5(k) + N_7(k) + N_9(k) + N_{11}(k-4);$$

$$N_{13}(k) = N_6(k) + N_8(k) + N_{10}(k);$$

$$\varepsilon_1 = \begin{cases} 0 & \text{əgər } k > 2; \\ 1 & \text{əgər } k \leq 2; \end{cases} \quad \varepsilon_2 = \begin{cases} 0 & \text{əgər } k \leq 2; \\ 1 & \text{əgər } k > 2; \end{cases}$$

$$\varepsilon_3 = \begin{cases} 0 & \text{əgər } k > 2; \\ 1 & \text{əgər } k \leq 2; \end{cases}$$

$$\varepsilon_4 = \begin{cases} 0 & \text{əgər } k \leq 4; \\ 1 & \text{əgər } k > 4; \end{cases} \quad \varepsilon_5 = \begin{cases} 0 & \text{əgər } k \neq 1; \\ 1 & \text{əgər } k = 1; \end{cases}$$

$$\varepsilon_6 = \begin{cases} 0 & \text{əgər } k = 1; 2; \\ 1 & \text{əgər } k \neq 1; 2; \end{cases} \quad \varepsilon_7 = \begin{cases} 0 & \text{əgər } k \neq 3; \\ 1 & \text{əgər } k = 3; \end{cases}$$

Bu (III.2.50) differensial tənliyin həllini, yuxarıda deyildiyi kimi

$$\varphi^{(1)} = \varphi_{bm}^{(1)} + \varphi_{xbs}^{(1)} \quad \text{şəklində götürürük.}$$

Burada

$$\varphi_{bm}^{(1)} = c_5^* \cdot \rho^n \cos n\varphi + c_6^* \cdot \rho^2 \quad (\text{III.2.51})$$

bircinsli $\Delta\Delta\varphi^{(1)} = 0$ tənliyinin ümumi həllidir. $\varphi_{xbs}^{(1)}$ isə

(III.2.50) differensial tənliyin xüsusi həllidir. Beləki, bu həlli

$$\begin{aligned} \varphi_{x\theta s}^{(1)} &= \sum_{k=1}^{\infty} \rho^{k+4} \cdot \vartheta_1 T_1^*(k) + \\ &+ \sum_{k=2}^{\infty} \rho^{4-k} \cdot \vartheta_2 T_2^*(k) + T_2^*(1) \vartheta_3 \rho^3 \end{aligned} \quad (\text{III.2.52})$$

kimi götürmək olar ((III.2.50) ifadəsinin sağ tərəfini dördqat inteqrallasag);

Beləliklə (III.2.50) differensial tənliyin həlli nəticədə belə olar:

$$\begin{aligned} \varphi^{(1)} &= \sum_{k=1}^{\infty} \rho^{k+4} \cdot \vartheta_1 T_1^*(k) + \sum_{k=2}^{\infty} \rho^{4-k} \cdot \vartheta_2 T_2(k) + \\ &+ T_2^*(1) \vartheta_3 \rho^3 + c_5^* \rho^n \cos n\theta + c_6^* \rho^2; \end{aligned} \quad (\text{III.2.53})$$

Bu ifadələrdə, aşağıdakı əvəzləmələr edilib:

$$\vartheta_1 = \{(k+4)(-k-2) + 2(k+3)(k+2) + (k+3)(k+2)(k+1)\}^{-1};$$

$$\vartheta_2 = \{(4-k)(k-2) + 2(3-k)(2-k) + (3-k)(2-k)(1-k)\}^{-1};$$

$$\vartheta_3 = \left[\frac{1}{6} \ln \rho - \frac{11}{36} \right] \left[\frac{3}{2} V_\nu(0) - \frac{11}{4} \right]^{-1}; \quad V_\nu(0) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{2k-1};$$

c_5^* və c_6^* sabitləri, tirin yan səthindəki nöqtələrdə

$$\tau_{xz} \cdot \cos(\vec{n}, x) + \tau_{yz} \cdot \cos(\vec{n}, y) = 0 \quad (\text{III.2.54})$$

şərtlərindən tapılar. Bu şərtlər, bilindiylə kimi [38,53] bu iki şərtin ödənilməsinə gətirilər:

$$\iint_S \tau_{xz}^{(1)} dx dy = 0; \quad \iint_S \tau_{yz}^{(1)} dx dy = 0;$$

Ostrogradski-Qrin düsturunun köməyi ilə, ikiqat inteqrallar birqat inteqrala gətirilir:

$$\iint_S \tau_{xz}^{(1)} dx dy = \int_{L_2} \varphi_1(x, y) \cdot dy - \int_{L_1} \varphi_1(x, y) \cdot dy = 0 ;$$

$$\iint_S \tau_{yz}^{(1)} dx dy = \int_{L_2} \varphi_2(x, y) \cdot dy - \int_{L_1} \varphi_2(x, y) \cdot dy = 0 ; \quad (\text{III.2.55})$$

Bu ifadələrdə

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial x} = \tau_{xz}^{(1)} ; \quad \varphi_1 = \int \tau_{xz}^{(1)} dx ; \quad \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} = \tau_{yz} ; \quad \varphi_2 = \int \tau_{yz}^{(1)} dx ; \quad (\text{III.2.56})$$

Polyar (ρ, θ) kordinatlarda $\tau_{xz}^{(1)}$ və $\tau_{yz}^{(1)}$ gərginliklər

$$\tau_{xz}^{(1)} = \frac{\partial \varphi^{(1)}}{\partial \rho} \sin \theta + \frac{\cos \theta}{\rho} \frac{\partial \varphi^{(1)}}{\partial \theta} ;$$

$$\tau_{yz}^{(1)} = -\frac{\partial \varphi^{(1)}}{\partial \rho} \cos \theta + \frac{\sin \theta}{\rho} \frac{\partial \varphi^{(1)}}{\partial \theta} - f_z y ; \quad (\text{III.2.57})$$

f funksiyası (III.2.17) ifadəsi ilə tapılır.

Beləliklə (III.2.55) ifadələrindən birincisi aşağıdakı şəkllə gətirilir.

$$\varphi_1 = \sum_{k=1}^{\infty} H_2^* \rho^{k+4} + \sum_{k=2}^{\infty} \rho^{4-k} \cdot H_3^* +$$

$$+ H_4^* c_3^* \rho^2 + H_5^* c_4^* \rho^n + H_6^* \rho^3 ; \quad (\text{III.2.58})$$

Onda yazı bilərik:

$$\begin{aligned}
\iint_S \tau_{xz}^{(1)} dx dy &= \int_{L_2} \varphi_1 dy - \int_{L_1} \varphi_1 dy = \sum_{k=1}^{\infty} H_2 (t_2^{k+5} - t_1^{k+5}) + \\
&+ H_6 (t_2^4 - t_1^4) - H_3 (t_2^{5-k} - t_1^{5-k}) + H_4 (t_2^3 - t_1^3) c_3^* + \\
&+ H_5 c_4^* \cdot (t_2^{n+1} - t_1^{n+1}) = 0;
\end{aligned} \tag{III.2.59}$$

φ_2 funksiyası üçün isə belə ifadə alarıq (III.2.56-da III.2.57 nəzərə alsaq)

$$\begin{aligned}
\varphi_2(\rho, \theta) &= \sum_{k=1}^{\infty} \rho^{k+4} H_7^* + \sum_{k=1}^{\infty} \rho^{4-k} H_8^* + H_9^* \cdot c_3^* \rho^2 + \\
&+ H_{10}^* \cdot c_4^* \rho^n + H_{11}^* \cdot \rho^3 + H_{12}^* \cdot \rho^5;
\end{aligned} \tag{III.2.60}$$

Onda (III.2.55) şərtlərindən ikincisi bu şəkllə düşər:

$$\begin{aligned}
\iint_S \tau_{yz}^{(1)} dx dy &= \int_{L_2} \varphi_2 dy - \int_{L_1} \varphi_2 dy = H_7 (t_2^{k+5} - t_1^{k+5}) + \\
&+ H_8 (t_2^{5-k} - t_1^{5-k}) + H_9 (t_2^3 - t_1^3) c_3^* + H_{10} \cdot (t_2^{n+1} - t_1^{n+1}) c_4^* + \\
&+ H_{11} (t_2^4 - t_1^4) + H_{12} (t_2^6 - t_1^6) = 0;
\end{aligned} \tag{III.2.61}$$

Bu ifadələrin alınmasında $x = \rho \cos \varphi$; $y = \rho \sin \varphi$ olduğu üçün, $dx = \cos \theta d\rho - \rho \sin \theta \cdot d\theta$ və $dy = \sin \theta \cdot d\rho + \rho \cos \theta d\theta$ olduğu nəzərə alınıb.

Bütün $H_k (k = \overline{2,12})$ əmsalları, tirin en kəsik ölçülərini nəzərə alan N, m, A parametrlərdən asılıdır. Hər bir konkret baxılan tirin en kəsik ölçülərindən asılı olaraq tapılırlar. Beləliklə (III.2.59) və (III.2.61) tənliklərindən c_3^* və c_4^* tapırıq:

$$\begin{aligned}
c_3^* = & \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} H_3 (t_2^{5-k} - t_1^{5-k}) - \sum_{k=2}^{\infty} H_2 (t_2^{k+5} - t_1^{k+5}) - H_6 (t_2^4 - t_1^4) + \right. \\
& + \frac{H_5 \cdot H_4}{H_5 \cdot H_9 - H_4 \cdot H_{10}} \left[\left(H_7 - H_2 \cdot \frac{H_9}{H_4} \right) \cdot \sum_{k=1}^{\infty} (t_2^{k+5} - t_1^{k+5}) + \right. \\
& + \left. \left(H_{11} - H_6 \cdot \frac{H_9}{H_4} \right) \cdot (t_2^4 - t_1^4) - \left(H_8 - H_3 \cdot \frac{H_9}{H_4} \right) \cdot \sum_{k=2}^{\infty} (t_2^{5-k} - t_1^{5-k}) + \right. \\
& \left. + H_{12} \cdot (t_2^6 - t_1^6) \frac{1}{H_9 \cdot (t_2^3 - t_1^3)} \right]; \\
c_4^* = & \left[\sum_{k=1}^{\infty} \left(H_7 - H_2 \frac{H_9}{H_4} \right) \sum_{k=1}^{\infty} (t_2^{k+5} - t_1^{k+5}) - \right. \\
& - \left(H_8 - H_3 \frac{H_9}{H_4} \right) \sum_{k=2}^{\infty} (t_2^{5-k} - t_1^{5-k}) + \left(H_{11} - H_6 \frac{H_9}{H_4} \right) \cdot (t_2^4 - t_1^4) + \\
& \left. + H_{11} (t_2^6 - t_1^6) \cdot \left(H_5 \cdot \frac{H_9}{H_4} H_{10} \right)^{-1} \cdot (t_2^{n+1} - t_1^{n+1})^{-1}; \quad (\text{III.2.62})
\end{aligned}$$

$\varphi^{(1)}$ funksiyasını (əyilmədə gərginlik funksiyası) tapandan sonra (yəni (III.2.53) ifadəsini tam müəyyən etdikdən sonra) $\tau_{xz}^{(1)}$ və $\tau_{yz}^{(1)}$ toxunan gərginliklərin birinci yaxınlaşmadakı ifadələrini belə tapmaq olar (polyar ρ, θ koordinatla):

$$\begin{aligned}
\tau_{\rho z} = & \frac{1}{\rho} \frac{\partial \varphi^{(1)}}{\partial \theta} + \lambda \cdot \frac{1}{\rho} \frac{\partial \varphi^{(1)}}{\partial \theta}; \tau_{\theta z} = -\frac{\partial \varphi^{(0)}}{\partial \rho} - \lambda \cdot \frac{\partial \varphi^{(1)}}{\partial \rho} - \\
& - \frac{P \cdot \rho^2}{J} \cdot \sin \theta \cos \theta - \lambda \cdot f_z \cdot \rho \cdot \sin \theta \quad (\text{III.2.63})
\end{aligned}$$

Bu ifadələrin alınmasında

$$\tau_{\rho z} = \tau_{\rho z}^{(0)} + \lambda \cdot \tau_{\rho z}^{(1)} \quad \text{və} \quad \tau_{\theta z} = \tau_{\theta z}^{(0)} + \lambda \cdot \tau_{\theta z}^{(1)};$$

olduğu nəzərə alınıb.

Yuxarıda göstərilən ümumi həll, prizmatik tirin en kəsiyini ölçülərini xarakterizə edən A, m, N, r, e parametrlərinin müxtəlif variantlarından asılı olaraq çoxlu sayda konkret ədədi misallara baxmaq olar.

Aşağıda bir neçə ədədi misallara baxaq

1. Bütöv dairəvi silindrin əyilməsi (şəkl.3.3).

Bu məsələ ədəbiyyatda xətti elastiklik nəzəriyyəsi çərçivəsində həll olunmuşdur.

Əyilmədə gərginlik funksiyası üçün belə ifadə alınıb [67,95]

$$\varphi^{(0)}(x, y) = \frac{1+2\nu}{8(1+\nu)} \cdot \frac{P}{J} (x^2 + y^2 - R^2) \cdot y$$

Dairə üçün ətalət moment: $J = \frac{\pi R^4}{2}$ ν puasson əmsalı P -

təsir edən əyici qüvvədir. Silindrin hər hansı bir en kəsiyi oxy müstəvisi üzərində yerləşib.

Kəsiyin mərkəzi 0 nöqtəsində ($y = 0$) toxunan gərginlik

$\tau_{xz}^{(0)}$ xətti nəzəriyyədə $\tau_{xz}^{(0)} = 1,38 \frac{P}{A^*}$; A^* - en kəsiyin sahəsidir.

A və B nöqtəsində isə ($y = R$)

$$\tau_{xz}^{(0)} = 1,23 \frac{P}{A^*}.$$

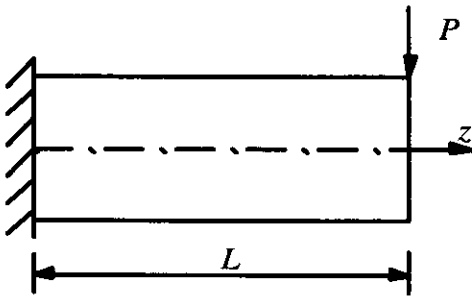
Fiziki qeyri xətti qoyuluşda bu məsələnin birinci yaxınlaşmada həlli nəticəsində göstərilən nöqtələrdə gərgin komponent $\tau_{xz} = \tau_{xz}^{(0)} + \lambda \tau_{xz}^{(1)}$ belə qiymətlər alır (mis material üçün $\lambda = 0,255 \cdot 10^{-6} \text{ sm}^4 / \text{kq}^2$ götürülür).

0 nöqtəsində ($y = 0$)

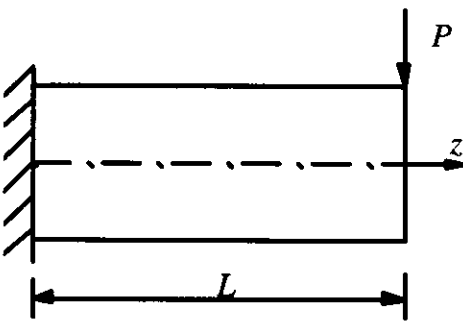
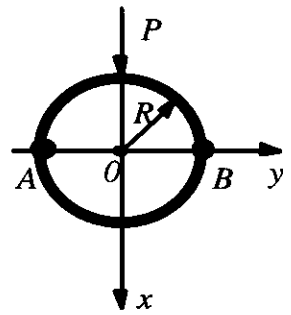
$$\tau_{xz} = \tau_{xz}^{(0)} + \lambda \tau_{xz}^{(1)} = 1,38 - 0,03386 = 1,341 \text{ sm}^2 / \text{kq}$$

A və B nöqtələrində ($y = R$)

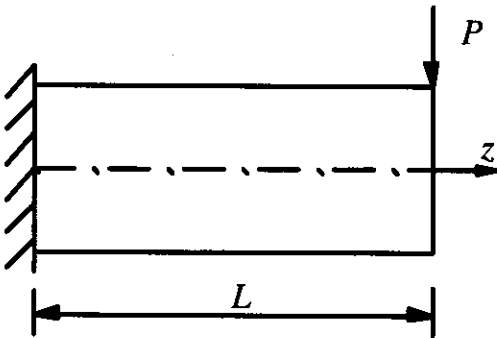
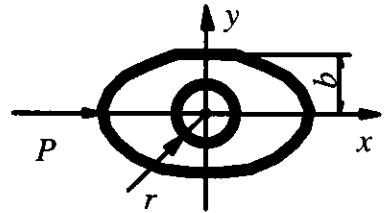
$$\tau_{xz} = \tau_{xz}^{(0)} + \lambda \tau_{xz}^{(1)} = 1,23 - 0,03075 = 1,199 \text{ sm}^2 / \text{kq}.$$



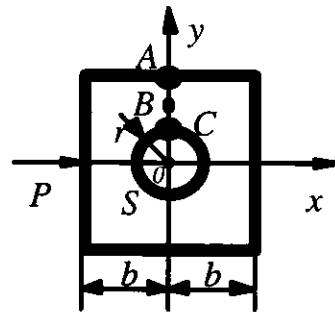
Şək.3.3



Şək.3.4



Şək.3.5



2.Dairəvi silindirik boşluğa malik elliptik tirin topa yükün təsirindən əyilməsi (şək 3.4)

Bu məsələ xətti elastiklik nəzəriyyəsində prof. D.İ.Şerman tərəfindən həll olunub [102]. Əyilmədə gərginlik funksiyasının (xətti qoyuluşda-yəni sıfırıncı yaxınlaşmada) ifadəsi aşağıdakı kimi alınıb:

$$\varphi_{(z)}^{(0)} = -i \cdot A^2 \left(\frac{\rho^2}{\rho^2 - 1} \cdot c_1 - 3 \cdot \frac{\rho^6}{\rho^6 - 1} \right) \cdot z -$$

$$-i \cdot \frac{\rho^6}{\rho^6 - 1} \cdot c_3 \cdot z^3 - i \cdot A^2 \cdot \left(\frac{\rho^2}{\rho^2 - 1} \cdot c_1 - 3 \cdot \frac{\rho^6}{\rho^6 - 1} c_3 \right) \cdot \frac{r^2}{z};$$

$$A = \frac{1}{2} \sqrt{a^2 - b^2}; \quad \rho = \sqrt{\frac{a+b}{a-b}};$$

$$c_1 = -\frac{\rho^2 - 1}{4\rho^4} \cdot (3\rho^4 + 2\rho^2 + 3) - \nu \cdot \frac{\rho^2 - 1}{2\rho^4} \cdot (\rho^4 + 3\rho^2 + 1);$$

$$c_3 = -\frac{\rho^2 - 1}{12\rho^4} \cdot (3\rho^4 + 2\rho^2 + 3) + \nu \cdot \frac{\rho^2 - 1}{6\rho^4};$$

Ellipsin yarım oxu b ilə, boşluğun-çevrənin radiusu R arasında nisbət, üç variantda 0,95; 0,9 və 0,3 kimi götürülüb. Toxunan gərginlik τ_{xz} üçün uyğun olar $z = ib$ və $z = iR$ nöqtələrində xalis mis material üçün ($\lambda = 0,255 \cdot 10^{-6}$) bu qiymətlər alınıb (birinci yaxınlaşmada qeyri xətti qoyuluşda)

Nöqtələr R/b	Xətti qoyuluşda $(\frac{Pb^2}{J} \text{ ilə })$	Fiziki qeyrixətti $(\frac{Pb^2}{J} \text{ ilə })$
$z = ib$ 0,95	53,702	52,09
0,9	26,91	25,89
0,3	3,67	3,58
$z = ir$ 0,95	55,27	54,28
0,9	28,627	27,57
0,3	6,50	6,3

3.Dairəvi boşluqla zəiflədilmiş kvadrat tirin topa yükədən əyilməsi (şək. 3.5)

Bu məsələ də xətti qoyuluşda öz həllini tapıb [3].

Əyilmədə gərginlik funksiyası üçün belə ifadə alınıb:

$$\varphi^{(0)}(z) = H_1 \frac{z}{2} + H_5 \left(\frac{z}{r} \right)^5 + b_1 \cdot \frac{r}{z} + b_5 \cdot \left(\frac{r}{z} \right)^5;$$

$$H_n = \left(\frac{z}{A} \right)^n \sum_{k=n}^{\infty} a_{\frac{k-n}{4}}^{(n)} \cdot b_k.$$

Kəsiyin A , B və C nöqtələrində tapılan gərginliklər uyğun olaraq bu qiymətlər alır (xalis mis material üçün $\lambda = 0,255 \cdot 10^{-6} \text{ sm}^4 / \text{kq}^2$)

$$z = ib, \quad \tau_{xz}^{(0)} = 2,1565 \frac{Pb^2}{J}; \quad \tau_{xz} = \tau_{xz}^{(0)} + \lambda \tau_{xz}^{(1)} = 3,98 \frac{Pb^2}{J}.$$

$$z = ir; \quad \tau_{xz}^{(0)} = 2,256 \frac{Pb^2}{J}; \quad \tau_{xz} = \tau_{xz}^{(0)} + \lambda \tau_{xz}^{(1)} = 2,188 \frac{Pb^2}{J};$$

$$z = i \frac{b+r}{2}; \quad \tau_{xz}^{(0)} = 2,176 \frac{Pb^2}{J}; \quad \tau_{xz} = \tau_{xz}^{(0)} + \lambda \tau_{xz}^{(1)} = 2,111 \frac{Pb^2}{J}.$$

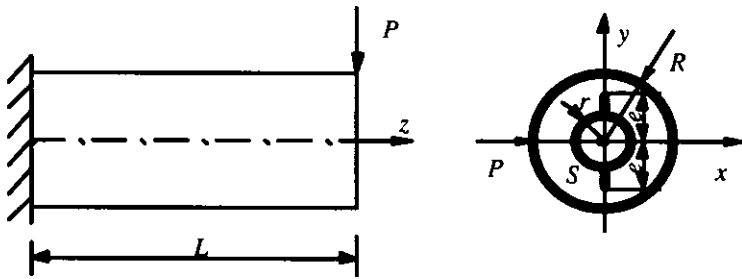
4. Dairəvi boşluq və iki düzxətli çatla zəiflədilmiş dairəvi silindirin topa yükədən əyilməsi (şəkl. 3.6)

Əyilmədə gərginlik funksiyası $\varphi^{(0)}(z)$ üçün belə ifadə alınıb.

$$\varphi^{(0)}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n^* \cdot \left(\frac{R}{t_2} \right)^n + \sum_{n=0}^{\infty} \beta_n \cdot \left(\frac{t}{R} \right)^n;$$

$$\alpha_n^* = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k \cdot (\delta_{-1})^{-n} \cdot l_{n-k}^{(k)} \cdot \left(\frac{r}{R} \right)^n;$$

$\delta_{-1}, l_n^{(k)}$ kəmiyyətləri [51] işinə əsasən müəyyən olunur.



Şək.3.6

En kəsiyin ən qorxulu (ən xarakterik nöqtələrində) nöqtələrində τ_{xz} gərginliyi bu qiymətlər alır. (e/R nisbətinin iki variantında).

$z = 1.01ie$ nöqtəsində

I variant: $e = 0,6R$; $r/R = 0,5$

$$\tau_{xz} = \tau_{xz}^0 + \lambda \tau_{xz}^{(1)} = 26,78 + (-1,071) = 25,71 \frac{PR^2}{J}$$

II variant: $e = 0,7R$; $e = 0,5R$;

$$\tau_{xz} = 28,92 + (-11,568) = 27,76 \frac{PR^2}{J}$$

$z = iR$ nöqtəsində

I variant:

$$\tau_{xz} = 11,26 + (-0,3378) = 10,92 \frac{PR^2}{J}$$

II variant:

$$\tau_{xz} = 14,65 + (-0,5320) = 14,07 \frac{PR^2}{J}$$

Bütün bu baxılan məsələlərin həlli göstərir ki, əyilmə məsələlərinin qeyrixətti qoyuluşda həlli xətti qoyuluşdakı həllərdən 2:10% fərqli alınır. Bu tirin ən kəsik ölçülərindən və materiallardan asılıdır.

Bu ədədi misalları davam etdirmək olar. Bunu gələcək tədqiqatçıların öhdəsinə buraxırıq. Məsələn ən kəsiyi tam-bütöv kvadrat, ellips, altıbucaqlı olan prizmatik tirlərin xətti elastiklik nəzəriyyəsi çərçivəsində məlum həllərindən istifadə edib fiziki qeyrixətti qoyuluşda əyilmə məsələlərinə baxmaq olar. Digər tərəfdən iki rabitəli oblasta malik tirlərin qeyrixətti qoyuluşda əyilməsini tədqiq etmək olar və i.a. Hələ mən, ən kəsiyi düzxətli çatlara malik prizmatik tirlərin həllinin, demək olar ki, həm xətti qoyuluşda, həm də fiziki qeyrixətti qoyuluşda həllərinin çox az olduğunu demirəm. Bir sözlə gələcək tədqiqatçıları kifayət qədər məsələlərin həlli gözləyir.

§3.3. Lövhlərin fiziki qeyrixətti qoyuluşda əyilməsi.

Sonlu və sonsuz izotrop lövhələrin əyilməsi məsələlərinə bir çox ədəbiyyatlarda və bizim tərəfimizdən Azərbaycan dilində ilk ədəbiyyat olan [26] işində müfəssəl baxılıb. Ona görə də bir çox ifadələrin alınması, lövhələrin əyilmə funksiyasının $w(x, y)$ tapılması üçün tənliklərin çıxarılması və sərhəd şərtlərinin ödənilməsinin ifadələrini hazır şəkildə veririk.[§]

Burada biz əsasən sonlu iki rəbitəli çoxbucaqlı lövhənin müxtəlif yükləmələrdən gərginlik–deformasiya vəziyyətinə baxırıq. Lövhnin qalınlığı h olub digər ölçülərə nəzərən (eninə və uzunluğuna görə ölçülər) çox kiçikdir. Lövhe xaricdən düzgün çoxbucaqlı ilə (L_2 konturu) məhdudlaşıb. Çatların təpə nöqtələrinin koordinatları $\pm e$ ilə işarə olunub (şək. 3.7). Xətti elastiklik nəzəriyyəsində olduğu kimi, fiziki qeyrixətti qoyuluşda da aşağıdakı şərtlər (fərziyyələr) qəbul olunur.

1. Lövhnin orta müstəvisinə perpendikulyar olan xətlər, deformatsiya olandan sonra da əyilmiş orta səthə perpendikulyar olurlar və öz ölçülərini saxlayırlar (normal xətlərin deformatsiyaya uğramaması fərziyyəsi)

[§] Bütün bu məsələlərə dair geniş məlumat almaq üçün oxucu-tədqiqatçı [9,26,43] ədəbiyyatlarına müraciət edə bilər.

2. Lövhlərin orta müstəvisi sonsuz kiçik deformasiya aldığından onu nəzərə almırıq, yəni lövhənin əyilməsi zamanı orta müstəvi heç bir dartılmaya (və ya sıxılmaya) məruz qalmır, sanki neytral lay rolunu oynayır.
3. Lövhnin orta müstəvisinə perpendikulyar olan ormal σ_z gərginliyi, digər gərginlik komponentlərinə nisbətən çox kiçik olduğundan, onları gərginlik və deformasiyalar arasındakı asılılıqlarda nəzərə almırlar.

Bu göstərilən şərtlər daxilində lövhənin əyilmə tənliyi (Şofi Jermen tənliyi) aşağıdakı kimidir

$$\Delta \Delta w = \frac{q(x, y)}{D}; \quad (\text{III.3.1})$$

Burada

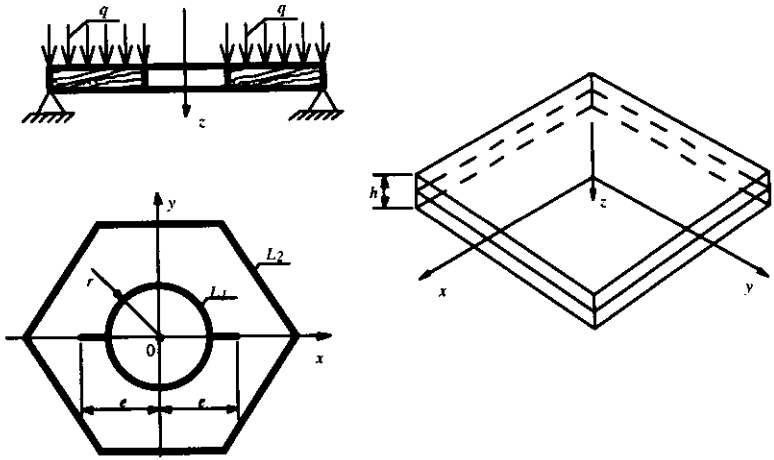
$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} = \frac{1}{3} \cdot \frac{3K + G}{3K + 4G} \cdot G \cdot h^3$$

lövhnin **silindirik sərtliyidir**.

Bu differensial tənliyin ümumi həlli, məlumdur ki, lövhənin kənarlarının bağlanması (bərkidilməsi) üsullarından asılıdır. ədəbiyyatdan məlumdur ki, lövhənin kənarları üç üsulla bərkidilir:

- **lövhlərin kənarları sərt bərkidilib.**

Bu halda sərhəd şərtləri belədir:



Şek.3.7

$$w = 0; \frac{\partial w}{\partial n} = 0 \text{ və ya } w = 0; \frac{\partial w}{\partial x} = 0; \frac{\partial w}{\partial y} = 0$$

- **lövhlərin kənarları oynaqca bərkidilib.** Onda sərhəd şərtləri bunlardır:

$$w = 0; M_n = 0; \text{ və ya } w = 0;$$

$$v \cdot \Delta w + (1 - v) \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \cdot \cos^2 \alpha + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \cdot \sin^2 \alpha + \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \cdot \sin 2\alpha \right];$$

α bucağı konturun n normalı ilə ox oxunun əmələ gətirdiy bucaqdır.

- **lövhanin kənarı sərbəst oturdulub.** Bu halda sərhəd şərtləri belədir:

$$M_n = 0; H_{nt} = 0; Q_n = 0;$$

Bir çox hallarda bu üçüncü sərhəd şərtlərin sonuncu ikisini birləşdirib belə də ifadə etmək olar:

$$Q_n + \frac{\partial H_{nt}}{\partial s} = 0;$$

Bu şərtlərin kombinasiyası da (qarışıq sərhəd şərtləri) mövcuddur.

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} = 4 \frac{\partial^2}{\partial z \partial \bar{z}}. \text{ Laplas operatorudu.}$$

$q(x, y)$ - lövhənin səthinə (orta müstəviyə perpendikulyar olan səth) təsir edən paylanmış yüküdür. Bu yük lövhənin üst

oturacağına ($z = -\frac{h}{2}$ müstəvisinə) tətbiq edildikdə σ_z normal gərginlik $\sigma_z = -q$ olur.

Əgər lövhənin alt və üst oturacağına heç bir qüvvə təsir etmərsə, onda $\sigma_z = 0$ olur.

Baxılan lövhənin fiziki qeyri xətti qoyuluşda əyilməsinin tənliyini çıxarılmasında, xətti qoyuluşdakı məhdudiyyətlərdən (şərtlərdən) istifadə olunur [9,26,38]. Belə ki, lövhənin z oxu boyunca əyilməsini $w(x, y)$ funksiyası şəklində götürsək, yuxarıda deyilənlərə əsasən, deformasiyaları belə ifadə etmək olar:

$$\varepsilon_x = -z \cdot w_{xx}; \quad \varepsilon_y = -z \cdot w_{yy};$$

$$\psi_{xy} = -2z \cdot w_{xy}; \quad \psi_{xz} = \psi_{yz} = 0; \quad (\text{III.3.2})$$

Kiçik deformasiyal üçün gərginliklərlə (σ_{ij}) deformasiyalar (ε_{ij}) arasında asılılıqlar aşağıdakı kimidir [38].

$$\begin{aligned} \sigma_x &= 3K \cdot \chi(\varepsilon_0) \cdot \varepsilon_0 + 2G \cdot \gamma(\psi_0^2) \cdot (\varepsilon_x - \varepsilon_0); \\ \sigma_y &= 3K \cdot \chi(\varepsilon_0) \cdot \varepsilon_0 + 2G \cdot \gamma(\psi_0) \cdot (\varepsilon_y - \varepsilon_0); \\ \tau_{xy} &= G \cdot \gamma(\psi_0^2) \cdot \psi_{xy}; \quad \tau_{yz} = G \cdot \gamma(\psi_0^2) \cdot \psi_{yz}; \\ \tau_{xz} &= G \cdot \gamma(\psi_0^2) \cdot \psi_{xz}; \end{aligned} \quad (\text{III.3.3})$$

Yadda saxlamaq lazımdır ki, orta müstəvi üzərində ($z = 0$) $\sigma_z = 0$ olduğunu qəbul etmişik.

Bu sonuncu ifadələrdə (III.3.2) və həmçinin **orta uzanma deformasiyasının**

$$\varepsilon_0 \frac{\sigma_0}{3K \cdot \chi(\varepsilon_0)} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{3K \cdot \chi(\varepsilon_0)}$$

olduğunu nəzərə alsaq, yaza bilərik:

$$\begin{aligned} \sigma_x &= -\frac{2}{1-\nu(\varepsilon_0, \psi_0^2)} \cdot G \cdot \gamma(\psi_0^2) \cdot [w_{xx} + \nu(\varepsilon_0, \psi_0^2) \cdot w_{yy}] \cdot z; \\ \sigma_y &= -\frac{2}{1-\nu(\varepsilon_0, \psi_0^2)} \cdot G \cdot \gamma(\psi_0^2) \cdot [w_{yy} + \nu(\varepsilon_0, \psi_0^2) \cdot w_{xx}] \cdot z; \\ \tau_{xy} &= -2G \cdot \gamma(\psi_0^2) \cdot w_{xy}; \end{aligned} \quad (\text{III.3.4})$$

Bu ifadələrdə $\chi(\varepsilon_0)$ **uzadılma funksiyası**, $\gamma(\psi_0^2)$ isə **sürüşmə funksiyasıdır**. Hər iki funksiya (I.1.31 və I.1.32) şəklində götürülür. Xətti elastikli nəzəriyyəsində olduğu kimi, eninə uzanma ε_z belə bir ifadə ilə müəyyən olunur:

$$\varepsilon_z = \frac{\nu_0}{1-\nu_0} \cdot (\varepsilon_x + \varepsilon_y) \quad (\text{III.3.5})$$

Burada (III.3.2) ifadəsini nəzərə alsaq alarıq:

$$\varepsilon_z = \frac{\nu_0}{1-\nu_0} \cdot z \cdot \Delta w \quad (\text{III.3.6})$$

Onda orta uzanma (ε_0) üçün alınmış

$$\varepsilon_0 = \frac{1}{3} (\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z)$$

ifadəsi belə şəklə düşər:

$$\varepsilon_0 = -\frac{1}{3} \frac{1-2\nu_0}{1-\nu_0} \cdot z \cdot \Delta w \quad (\text{III.3.7})$$

Sürüşmə deformasiyasının intensivliyinin kvadratı (ψ_0^2) bölmə

I məlum olan (I.1.19) ifadəsi belə olar:

$$\psi_0^2 = \frac{9}{8} \left[\nu_1 (w_{xx}^2 + w_{yy}^2) + \nu_2 \cdot w_{xx} + w_{yy} + 3w_{xy}^2 \right] \cdot z^2; \quad (\text{III.3.8})$$

Burada

$$\nu_1 = \frac{\nu_0}{(1-\nu_0)^2} + 1; \quad \nu_2 = \frac{2\nu_0}{(1-\nu_0)^2} - 1$$

$\nu_0 = \nu$ - **Puasson əmsal**ıdır

Xətti elastiklik nəzəriyyəsində olduğu kimi, burada lövhənin hər hansı $dxdy$ ölçüdə elementinin müvazinət şərtinə baxsaq, vahid uzunluğa düşən əyici momentlər aşağıdakı ifadələrlə müəyyən olunurlar:

$$\begin{aligned} M_x &= \int_{-h/2}^{+h/2} \sigma_x \cdot z \, dz; & M_y &= \int_{-h/2}^{+h/2} \sigma_y \cdot z \, dz; \\ M_{xy} &= -M_{yx} = \int_{-h/2}^{+h/2} \tau_{xy} \cdot z \, dz; \end{aligned} \quad (\text{III.3.9})$$

Kəsici qüvvələr isə bu ifadələrlə müəyyən olunurlar:

$$Q_x = \int_{-h/2}^{+h/2} \tau_{yz} \cdot dz; \quad Q_y = \int_{-h/2}^{+h/2} \tau_{xz} \cdot dz; \quad (\text{III.3.10})$$

Bu hər iki (III.3.9) və (III.3.10) ifadələri müvazinət şərtlərində

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\tau_{xy}}{\partial y} = 0; \quad \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} = 0;$$

nəzərə alsaq, alarıq

$$\frac{\partial Q_x}{\partial y} + \frac{\partial Q_y}{\partial x} + q(x, y) = 0; \quad (\text{III.3.11})$$

İndi, əgər (III.3.4) ifadələrini (III.3.9) düsturlarında yerinə yazsaq, əyici və burucu momentlər (M_x, M_y, M_{xy}) üçün belə ifadələr alarıq:

$$M_x = -G \cdot \frac{h^3}{6} \cdot (\lambda \cdot w_{xx} + \mu \cdot w_{yy});$$

$$M_y = -G \cdot \frac{h^3}{6} \cdot (\lambda \cdot w_{yy} + \mu \cdot w_{xx});$$

$$M_{xy} = -M_{yx} = -G \cdot \frac{h^3}{6} \cdot (\lambda - \mu) \cdot w_{xy}; \quad (\text{III.3.12})$$

Burada aşağıdakı əvəzləmələr edilib:

$$\lambda(x, y) = \frac{12}{h^3} \int_{-h/2}^{+h/2} \frac{\gamma(\psi_0^2)}{1 - \nu(\epsilon_0, \psi_0^2)} \cdot z^2 \cdot dz;$$

$$\mu(x, y) = \frac{12}{h^3} \int_{-h/2}^{+h/2} \frac{\gamma(\psi_0^2) \cdot \nu(\epsilon_0, \psi_0^2)}{1 - \nu(\epsilon_0, \psi_0^2)} \cdot z^2 \cdot dz; \quad (\text{III.3.13})$$

Əgər (III.3.10) ifadələrini (III.3.11) müvazinət şərtində nəzərə alsaq, alarıq:

$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} + q(x, y) = 0. \quad (\text{III.3.14})$$

Bu tənlikdə (III.3.12) ifadələrininəzərə alsaq, aşağıdakı differensial tənliyi alarıq:

$$\begin{aligned} & \lambda \cdot \Delta \Delta w + 2\lambda_x \frac{\partial}{\partial x} (\Delta w) + 2\lambda_y \frac{\partial}{\partial y} (\Delta w) + \\ & + (\lambda_{xx} + \mu_{yy}) \cdot w_{xx} + (\lambda_{yy} + \mu_{xx}) \cdot w_{yy} + \\ & + 2(\lambda_{xy} - \mu_{xy}) \cdot w_{xy} = \frac{6}{Gh^3} \cdot q(x, y); \end{aligned} \quad (\text{III.3.15})$$

Bu differensial tənlik, lövhələrin **fiziki qeyri xətti qoyuluşda əyilməsinin tənliyidir**. Bu tənlikdə iştirak edən $\lambda(x, y)$ və $\mu(x, y)$ funksiyalarındakı γ və ν əmsallarını $\gamma = \lambda = 1$ götürsək, onda (III.3.13) ifadələri sadələşib

$$\lambda(x, y) = \frac{1}{1 - \nu_0} = 2 \cdot \frac{3K + G}{3K + 4G} = \frac{6 \cdot D}{Gh^3} = \text{const}$$

$$\mu = \frac{\nu_0}{1 - \nu_0} = \text{const} \quad (\text{III.3.16})$$

şəklinə düşər. Onda (III.3.15) differensial tənlik xətti qoyuluşdakı məsələnin həllindəki differensial tənliklə üst-üstə düşər.

Əgər x və y koordinat sistemi əvəzinə polyar koordinat sistemi (ρ, θ) götürsək, onda (III.3.15) differensial tənlik belə şəkə düşər:

$$\begin{aligned}
& \lambda \cdot \Delta \Delta w + 2\lambda_\rho \frac{\partial}{\partial \rho} \Delta w + \frac{2}{\rho^2} \lambda_\varphi \frac{\partial}{\partial \theta} (\Delta w) + \left(\lambda_{\rho\rho} + \frac{1}{\rho} \mu_\rho + \right. \\
& \left. + \frac{1}{\rho^2} \cdot \mu_{\theta\theta} \right) \cdot w_{\rho\rho} + \left(\frac{1}{\rho} \lambda_\rho + \frac{1}{\rho^2} \cdot \lambda_{\theta\theta} + \mu_{\rho\rho} \right) \cdot \left(\frac{1}{\rho} w_\rho + \right. \\
& \left. + \frac{1}{\rho^2} \cdot w_{\theta\theta} \right) + \frac{2}{\rho^2} \left[\lambda_{\rho\theta} - \mu_{\rho\theta} - \frac{1}{\rho} (\lambda_\theta - \mu_\theta) \right] \cdot (w_{r\theta} - \\
& \left. \frac{2}{\rho} w_\theta \right) = \frac{6 \cdot q(\rho, \theta)}{G \cdot h^3}; \quad (\text{III.3.17})
\end{aligned}$$

Bu tənliyin alınmasında

$$x = \rho \cdot \cos \theta; \quad y = \rho \cdot \sin \theta;$$

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} = \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \cdot \frac{\partial^2}{\partial \theta^2}$$

və i.a. kimi ifadələr (yəni dekart koordinat sistemindən, polyar koordinat sisteminə keçdikdə meydana çıxan çevirmə düsturları) nəzərə alınıb.

İstər (III.3.15) differensial tənliyi olsun, istərsə də (III.3.17) tənliyi, onları həll etmək riyazi cəhətdən çox çətindir (bəzən də mümkün deyil). Ona görə də, həlli sadələşdirmək məqsədi ilə $\lambda_1(\varepsilon_0)$ və $\gamma(\psi_0^2)$ funksiyalarını (I.1.29 - I.1.32) belə götürürlər (ilk iki həddi saxlayaraq).

$$\chi_1(\varepsilon_0) = 1 + \chi_2 \cdot \varepsilon_0^2; \quad \gamma(\psi_0^2) = 1 + \gamma_2 \cdot \psi_0^2;$$

Bunları (III.3.3) yerinə qoyub, χ_2 və γ_2 əmsallarının qüvvət üstlü sıra şəklində götürüb, yalnız **ikinci dərəcəli qüvvət üstlü hədləri** saxlayırlar. Bu üsulla həlqəvari lövhənin müntəzəm paylanmış $q(x, y)$ yükü təsirindən əyilməsi məsələsi [38] işində həll olunmuşdur. Bu məsələnin xətti qoyuluşda həlli [53,56] işlərində müfəssəl həll olunmuşdur. Fiziki qeyri xətti qoyuluşda bu məsələnin həllindən (lövhə sərbəst oturulduğu halında) aşağıdakı nəticələr alınır.

Aliminum tunc (latun) üçün

$$K = 1,35 \cdot 10^6 \text{ kQ/sm}^2 ; G = 0,477 \cdot 10^6 \text{ kQ/sm}^2 ;$$

$$\gamma_2 = -0,04 \cdot 10^6 ; \chi_2 = -38 \cdot 10^6 ;$$

$$q = 0,18 \text{ kQ/sm}^2 ; h/R = \frac{1}{50} ;$$

$$w^{(1)} = h \left[0,14625 - 0,29322 \left(\frac{r}{R} \right)^2 + 0,14889 \cdot \left(\frac{r}{R} \right)^2 + \dots \right]$$

$$\text{Xətti qoyuluşda əyilmə } w_0 = \frac{qR^4}{64D} \cdot \left[1 - \left(\frac{r}{R} \right)^2 \right]^2 ;$$

Dairəvi bütöv lövhənin mərkəzində ($r = 0$), əyilmə bu qiymətləri alır:

$$w_0 = 0,1455 \cdot h ; - \text{xətti qoyuluşda}$$

$$w_1 = 0,14625 \cdot h - \text{fiziki qeyri xətti qoyuluşda}$$

Bu əyintilərə uyğun olan gərginliklər üçün bu qiymətlər alınıb
($r = 0$ olan halda)

$$\sigma_{\rho}^{(1)} = 223,79 \text{ kQ/sm}^2 - \text{qeyri xətti qoyuluşda}$$

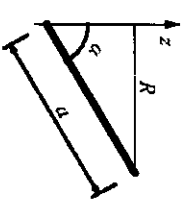
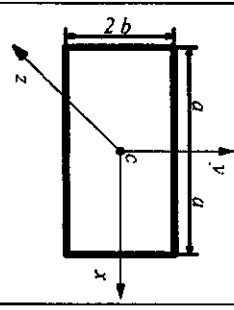
$$\sigma_{\rho}^{(0)} = 226,45 \text{ kQ/sm}^2 - \text{xətti qoyuluşda}$$

Alınan nəticələr göstərir ki, əyintilər (w) və gərginliklər (σ_{ρ}) hər iki halda-istər fiziki qeyri-xətt istərsədə xətti qoyuluşda olsun çox az fərqlənirlər (2% -qədər).

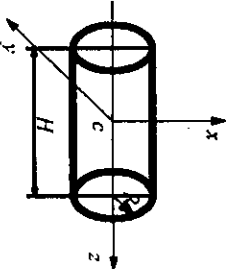
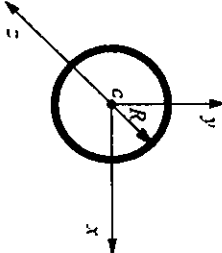
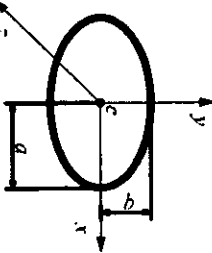
Tədqiqatçılar, xətti qoyuluşda lövhələrin əyilməsinin $w_0(x, y)$ funksiyasını konkret misallarda ifadəsini bilərək, qeyri xətti qoyuluşda birinci yaxınlaşmada bu funksiyanın ifadəsini, həmçinin gərginliklərin birinci yaxınlaşmada qiymətlərini (göstərilən metodla) təyin edə bilirlər.

Sada handesi cisimlərin
ətət momentləri

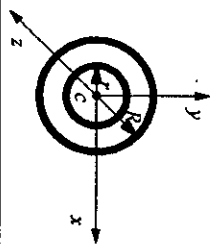
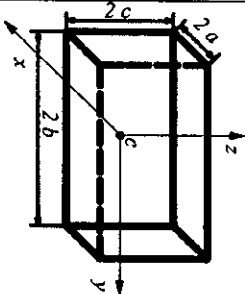
Cədvəl № 3.1

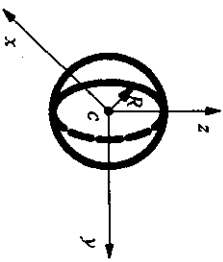
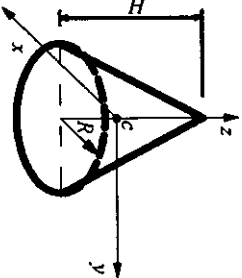
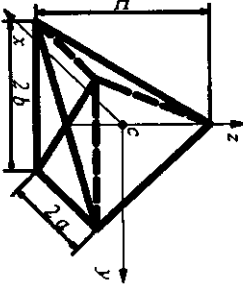
Handesi fiqurlar	Etət momentləri		
	J_x	J_y	J_z
1. Bircinsli çubuq 	—	—	$\frac{MR^2}{3} = \frac{4Ma^2}{3} \sin^2 \alpha$
2. Düzbucaqlı lövhə 	$\frac{Mb^2}{3}$	$\frac{Ma^2}{3}$	$\frac{M(a^2 + b^2)}{3}$

Садвал № 3.1

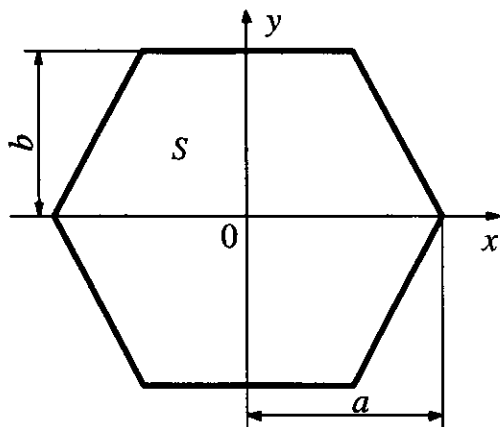
5. Silindr	4. Dairəvi lövhə	3. Elliptik lövhə
		
$\frac{M}{4} \left(\frac{H^2}{3} + R^2 \right)$	$\frac{MR^2}{4}$	$\frac{1}{4} Mb^2$
$\frac{M}{4} \left(\frac{H^2}{3} + R^2 \right)$	$\frac{MR^2}{4}$	$\frac{1}{4} Ma^2$
$\frac{MR^2}{2}$	$\frac{MR^2}{2}$	$\frac{1}{4} M(a^2 + b^2)$

Cədvəl № 3.1

Həndəsi fiqurlar	Ətalət momentləri		
	J_x	J_y	J_z
<p>6. Dairəvi həlqə</p> 	$\frac{M(R^2 + r^2)}{4}$	$\frac{M(R^2 + r^2)}{4}$	$\frac{M(R^2 + r^2)}{2}$
<p>7. Prizma</p> 	$\frac{M(b^2 + c^2)}{3}$	$\frac{M(a^2 + c^2)}{3}$	$\frac{M(a^2 + b^2)}{3}$

10. Küre	9. Konus	8. Piramida
		
$\frac{2}{5} MR^2$	$\frac{3M}{20} \left(\frac{H^2}{4} + R^2 \right)$	$\frac{M}{20} \left(\frac{3H^2}{4} + 4b^2 \right)$
$\frac{2}{5} MR^2$	$\frac{3M}{20} \left(\frac{H^2}{4} + R^2 \right)$	$\frac{M}{20} \left(\frac{3H^2}{4} + 4a^2 \right)$
$\frac{2}{5} MR^2$	$\frac{3MR^2}{10}$	$\frac{1}{5} M(a^2 + b^2)$

11. Çoxbucaqlı lövhənin ətalət momenti



Bir çox texniki məsələlərin həllində, vahid qalınlıqlı dairəvi lövhə üçün (bax cədvəl №3.1) düsturu əvəzinə aşağıdakı ifadədən istifadə etmək əlverişli olur. Əgər $M = \gamma\pi R^2$ nəzərə alsaq, onda

$$J_0 = m \frac{R^2}{2} = \gamma\pi \frac{R^4}{2} \quad (1)$$

olur.

Bircins maddələr üçün sıxlıq əmsalı $\gamma = const$ olduğundan çox hallarda γ -nu yazmırlar, sadəcə olaraq

$$J_0 = \pi \frac{R^4}{2} \quad (2)$$

yazılır.

Burada J_0 – qütb (polyar) ətalət momentidir. (bəzən J_0 gətirilmiş polyar ətalət moment idə adlanır).

Düzgün çoxbucaqlı lövhələr üçün polyar ətalət momenti bu düsturla hesablanır [14]:

$$J_0 = \iint_{(s)} (x^2 + y^2) dx dy \quad (3)$$

Kompleks dəyişən funksiyalar nəzəriyyəsinə əsasən, z və onun qoşması \bar{z} üçün

$$z = x + iy; \quad \bar{z} = x - iy, \quad dz = dx + idy; \quad d\bar{z} = dx - idy \quad (4)$$

yazmaq olar.

Bu z və \bar{z} ifadələrindən x və y tapıb, nəticə etibarilə yaza bilərik.

$$dx = \frac{1}{2}(dz + d\bar{z}), \quad dy = -\frac{1}{2}(dz - d\bar{z}) \quad (5)$$

Qauss-Ostroqradski düsturuna əsasən, ikiqat inteqralı birqat inteqrala gətirilir.

$$J = \iint_{(s)} (x^2 + y^2) dx dy = \frac{1}{3} \int_L (x^3 + y^3) dx dy \quad (6)$$

Burada inteqral bütöv L konturu boyunca elə aparılır ki, kəsik sahəsi həmişə solda qalsın.

Sonra bu inteqralda:

$$z = x + iy; \quad \bar{z} = x - iy \quad (7)$$

ifadələrinin köməyi ilə t və \bar{t} dəyişənlərinə keçsək, alırıq (kontur üzərində z dəyişəni t , \bar{z} isə \bar{t} dəyişəninə keçir):

$$J = \frac{1}{8i} \int_L (\bar{t} dt - t d\bar{t}) \quad (8)$$

Burada t və onun qoşması \bar{t} baxılan L konturunun ixtiyari nöqtəsinin affiksidir.

L konturunun parametrik tənliyi məlum olduqda bu inteqral asanlıqla hesablanır.

Düzgün çoxbucaqlı kontur üçün:

$$t = A[e^{i\theta} + me^{-i(N-1)\theta}], \quad \bar{t} = A[e^{i\theta} + me^{i(N-1)\theta}] \quad (9)$$

Bu ifadələrdəki A, m, N kəmiyyətləri (1.1.10) düsturundakı kimi müəyyən olunur. beləliklə, çoxbucaqlı lövhələr üçün en kəsik sahəsinin polyar ətalət momenti aşağıdakı düsturla hesablanır [26,53].

$$J = \frac{\pi A^4}{2} [1 + 2m^2(2 - N) + m^4(1 - N) + m\varepsilon(4 - N) + (4 - 3N)m^3\varepsilon] \quad (10)$$

$\varepsilon = 0$, əgər $N \neq 2$; $\varepsilon = 1$ əgər $N = 2$

Məsələn, düzgün altıbucaqlı lövhə üçün ($N = 6$);

$$J = \frac{\pi A^4}{2} [1 - 8m^2 - 5m^4] \quad (11)$$

kvadrat lövhə üçün ($N = 4$)

$$J = \frac{\pi A^4}{2} [1 - 4m^2 - 3m^4]. \quad (12)$$

Əgər cismin en kəşik sahəsi hər hansı L_1 konturu ilə əhatə olunan boşluğa (deşiyə) malikdirsə, onda polyar ətalət momentinin ifadəsi şəklində olar

$$J = J_2 - J_1$$

Burada J_2 – xarici L_2 konturu ilə əhatə olunan en kəşik sahəsinin ətalət momentidir J_2 isə daxili L_1 konturu ilə əhatə olunan boşluğun (deşiyin) sahəsinin ətalət momentidir.

ӘДӘБИҮАТ

1. **Абель В.В.** Об интегрировании гармонического и бигармонического уравнений в криволинейных координатах. Инженерный журнал, т. 3., 1, 1963, с. 169-173.
2. **Амензаде Ю.А.** Теория упругости. М., Высшая школа, 1976, с. 272.
3. **Амензаде Ю.А.** Изгиб призматического бруса, ослабленного круговой полостью. Доклад АН СССР. 1957. т.114.№1, с.37-40.
4. **Ашкенази Е.К., Гапов Э.В.** Анизотропия конструкционных материалов. Справочник. Изд. Машиностроение. Л., 1972, с.250.
5. **Бабаев М.А.** Физически нелинейная пластинка с отверстием, подкрепленным тонким упругим стержнем. Прикладная механика т.П. в. 7. 1966. с. 80-87.
6. **Бабаев М.А., Цурпал И.А.** Двухосное однородное напряженное состояние физически нелинейной пластинки с круговым отверстием. Инженерный журнал, т. V, в. 5, 1965, с.68-75

7. **Баренблатт Г.И., Черепанов Г.П.** О хрупких трещинах продольного сдвига.- ПММ. 1961. т. 25. в. 6 с.1110-1119.
8. **Баренблатт Г.И.** Математическая теория равновесных трещин, образующихся при хрупком разрушении. ПМТФ. 1961, №4, с. 35-56.
9. **Бережницкий Л.Т., Делявский М.В., Панасюк В.В.** «Изгиб тонких пластин с дефектами типа трещин», Киев «Наука во думка», 1979, с. 400.
10. **Бережницкий Л.Т., Делявский М.В., Мазурак Л.П., Панасюк В.В.** Изгиб круглой пластины с трещиной. – В кн.Труды X. Всесоюзн. конф. по пластинам и оболочкам. Харьков, 1977, с.72-77.
11. **Бережницкий Л.Т., Панасюк В.В., Труш И.И.** Коэффициент интенсивности напряжений, возле жестких остроугольных включений. –В кн.: Проблемы прочности, Киев, 1973, №7, с.3-7.
12. **Бережницкий Л.Т., Садивский В.М., Онышко Л.И.** Изгиб анизотропной пластины с трещиной.-ПМ. 1978,т.14, №11, с.71-80.
13. **Бережницкий Л.Т., Садивский В.М.** К теории остроконечных концентраторов напряжений в

- анизотропных пластинах. - ФХММ. 1977, т.13, в.№3, с.82-90.
14. **Бови О.** Растяжения прямоугольной пластины с симметричными трещинами на кромках.-Тр. Америк. о-ва инж.механиков. Сер. Е. Прикл. Механика. 1964. т. 31, в.2, с.56-61.
 15. **Варданын Л.М.** Концентрация напряжений возле отверстия общего вида в нелинейно-упругой пластинке. Прикладная механика, т.VI, в.5, 1970, с.125-130.
 16. **Варданын Л.М.** Плоская деформация нелинейной упругой анизотропной среды с конечным числом круговых отверстий. Изв. АН Арм. ССР, Механика, т. XXIV, №5, 1971, с.32-35.
 17. **Вайнберг Д.В.** Справочник по прочности, устойчивости и колебаниям пластин. Киев, 1973, с.488.
 18. **Вайнберг Д.В., Вайнберг Е.Д.** Пластины диски, балки-стенки (прочность, устойчивость и колебания). Киев Госстройиздат, УССР, 1959, 1049 с.
 19. **Гахов Ф.Д.** Краевые задачи. -М.Наука 1977.-640 с.
 20. **Гарибов Р.Т.** Свободные крутильные колебания круглого толстостенного цилиндрического стержня,

при нелинейном законе упругости Изв. ВУЗ-ов СССР.
«Строительство и архитектурой» №4, 1990, с.

21. Гольденблатт П. И. Нелинейные проблемы теории упругости. М., Наука, 1969, с.336.
22. Грин А., Адкинс Дж. Большие упругие деформации и нелинейная механика сплошной среды. М., Мир, 1965, с.455.
23. Глобенко Т.М. Влияние физической нелинейности материала на концентрацию напряжений около квадратного отверстия. В. Кн.: Расчетные методы в строительстве, М., 1974, с.39-55.
24. Гузь А.Н., Цурпал И.А. О решение плоских физически нелинейных задач теории упругости для многосвязных областей. Прикладная механика, т.IV, в.11, 1968, с.41-49.
25. Quliyev S.Ə. Elastiklik nəzəriyyəsi. Bakı, Azərənəşr 1998, səh.210.
26. Quliyev S.Ə. Elastiklik nəzəriyyəsinin bəzi məsələləri. Bakı, Azərənəşr 2001, səh.400.
27. Quliyev S.Ə. Anizotrop lövhələrin gərginlik vəziyyəti.. Bakı, Azərənəşr 2002, səh.254.
28. Глущко В.Т., Долинина Н.Н. Розовский М.И. Концентрация напряжений около отверстий при

- нелинейной ползучести. Прикладная механика. т. VII, в. 10, 1970, с. 71-78.
29. Громов В.Г. О влиянии физической нелинейности на концентрацию напряжений возле кругового отверстия при больших деформациях. Прикладная механика (ПМ). Киев, 1965, т.1, в.10, с.72-75.
 30. Демидов С.П. Теории упругости. М., «Высшая школа» 1979, -432 с.
 31. Делявский М.В. К вопросу об изгибе пластин, ослабленных остро конечными концентраторами напряжений.- ФХММ. 1976, т.12, в.3, с.119-121.
 32. Джовда С.В., Топпор Т.Г. О соотношении между коэффициентами концентрации напряжений и деформаций в надрезанных образцах при плоском напряженном состоянии. Труды Американского общества инженеров – механиков. Прикладная механика. Т.27, 1970, №1, с.80-88.
 33. Зволинский Н.В., Риз П.М. О некоторых задачах нелинейной теории упругости. ПММ, т.2, в.4, 1939, с.417-426.
 34. Ивлев Д.Д. О теории трещин квазихрупкого разрушения. ПМТФ. 1967, №6, с.88-128.

35. **Исаев А.М., Гарибов Р.Т.** Кручение призматического тела в физической нелинейной постановке. Деп. В ВИНТИ. №285. Аз. Д.84.
36. **Ивлев Д.Д.** Об одном построении теории трещин. Инж. Журнал МТТ, 1967, №6, с.91-94.
37. **Ильюшин А.А.** Механика сплошной среды. Изд. МГУ, 1971, с.247.
38. **Каудерер Г.** Нелинейная механика. М., ИЛ, 1961, с.780.
39. **Кирхгоф Ф.Г.** Механика: Лекции по математической физике. – Изд-во АН.СССР, 1960, -402 с.
40. **Керимов Р.Ю., Хорошун Л.П.** Комплексные представления плоских физически нелинейных задач механики твердого тела. Изв. АН Азерб. ССР. сер. физ-мат. и техн. наук. Баку, 1971, №2, с.120-127.
41. **Клойзер С.М., Космодамианский А.С.** Нелинейные задачи плоской теории упругости для многосвязных сред. Прикладная механика, т.V, в.9,1969, с.63-70.
42. **Коротких Г.Ю.** Решение плоской задачи для физически нелинейных разностей. Прикладная механика. 1966, т.2, в.3, с.50-57.

43. **Космодамианский А.С.** Плоская задача теории упругости для пластин с отверстиями, вырезами и выступами. Киев, Изд. Вища школа 1975, с.228.
44. **Космодамианский А.С.** Напряженное состояние анизотропных сред с отверстиями или полостями. Киев-Донецк. Вища школа 1976, с.200.
45. **Космодамианский А.С., Иванов Г.И.** Изгиб тонких многосвязных плит. Донецк 1973, с.264.
46. **Космодамианский А.С., Цурпал И.А.** Физически нелинейные задачи для пластинки, ослабленной двумя круговыми отверстиями. ДАН. УССР. сер. А. №5, 1967, с.449-452.
47. **Койфман Ю.И.** Плоские нелинейные задачи упругого равновесия многосвязных тел. Прикладная механика. Киев, т.6, в.2, 1970, с.58-65.
48. **Колосов Г.В.** Применения комплексной переменной теории упругости. ОНТИ,М. –Л., 1935, с.224.
49. **Кулуев Г.Г.** Концентрация напряжений была подкрепленного криволинейного отвару звракувянием нелинейно-пужник властивостей материалу. ДАН. УРСР. серия А, №9, 1971, с.801-807.
50. **Кулиев С.А.** Исследование напряженном состоянии многоугольной пластинки при физически нелинейной

- теории упругости. Изв. АН Азерб. ССР.серия физ-мат и техн. наук. 1975, №3, с.104-108.
51. **Кулиев С.А.** Конформно- отображающие функции сложных областей. Баку, Азернешр. 2004, с.372.
 52. **Кулиев С.А.** Исследование напряженного состояния многоугольной пластинки в произвольной физической нелинейности. Ученые записки». Азинефтехима, 1978, №3, с.26-30.
 53. **Кулиев С.А.** Двумерные задачи теории упругости. М.:Стройздат. 1991, с.352.
 54. **Кулиев С.А.** Напряженное состояние круглой пластинки, ослабленной центральным квадратным отверстием и двумя разрезами. Изв. АН. СССР, МТТ. 1987, №6, с.184-190.
 55. **Кулиев С.А.** К решению задачи теории упругости методом аналитических функций. Изв. АН. СССР, ПММ. 1989, т.53, в.5, с.852-856.
 56. **Кулиев С.А.** Изгиб многоугольной пластинки с центральным круглым отверстием и двумя прямолинейными разрезами различной длины. Изв.АН СССР, МТТ. 1990, №6, с.173-179.

57. **Лаврентьев М.А., Шабат Б.В.** Методы теории функции комплексного переменного. –М: Наука, 1973, с.736.
58. **Лаврик В.И., Савенков В.Н.** Справочник по конформным отображениям. Киев Наук думка, 1970, с.252.
59. **Лехницкий С.Г.** Анизотропные пластинки. М.: Гостехиздат. 1957, с.464.
60. **Лехницкий С.Г.** Теория упругости анизотропного тела. М.: Наука, 1977, с.416.
61. **Лехницкий С.Г.** Кручение анизотропных и неоднородных стержней. М.Наука, 1971, с.240.
62. **Лукаш П.А.** Основы нелинейной строительной механики. Стройиздат.1978, с.204.
63. **Лурье А. Н.** Нелинейная теория упругости. М.: Наука, 1980, с.512.
64. **Меглинский В.В.** Изгиб эллиптической анизотропной плиты с эллиптическим отверстием. Изв. АН Арм.,ССР, Механика, 1966, т.19, в.3, с.14-25.
65. **Меглинский В.В.** Напряженно-деформированное состояние опертой по краю анизотропной эллиптической плиты с отверстием. ПМ. 1971, т.7, в.7, с.100-103.

66. **Меглинский В.В.** Концентрация напряжений около эллиптических упругих включений в тонкой анизотропной плите. Изв. АН ССР, МТТ, 1970, №6, с.152-160.
67. **Мухелишвили Н.И.** Некоторые основные задачи математической теории упругости. М., Наука, 1966, с.648.
68. **Морозов Н.Ф.** Нелинейные задачи пластин. Вестник Ленинград ун-та. 1958, №19, с.100-124.
69. **Морозов Н.Ф.** К нелинейной теории тонких пластин. ДАН. СССР., т.114, №5, 1957, с.968-971.
70. **Нейбер Г.** Теория концентрации касательных напряжений в призматических телах при произвольной нелинейной зависимости между напряжением и деформацией. Труды Американ.об-ва инженеров-механиков. Прикладная механика. 1962, №4, с.71-76.
71. **Немыщ Ю.Н.** О напряженном состоянии нелинейно-упругих тел. Изв.АН. СССР. Механика твердого тела. №4, 1971, с.81-89.
72. **Новожилов В.В.** О связи между напряжениями и деформациями в нелинейно-упругой среде.

Прикладная математика и механика (ПММ).т.XV, в.2, 1951, с.183-194.

73. **Невожилов В.В., Черных К.Ф.** Нелинейная плоская задача теории упругости (плоская деформация). В кн. Вестник Ленинград.ун-та, 1975, №1, с.122-129.
74. **Новожилов В.В.** Теория упругости Изд. Судпромгаз. 1958, с.212.
75. **Пелех Б.Л.** Концентрация напряжений около отверстий при изгибе трансверсально-изотропных пластин. Киев, Наукова думка. 1977, с.184.
76. **Окцивист Ф.К.Г.** Нелинейная механика и ее прошлое, настоящее и будущее. Сборник перев. «Механика» 1970, №3.(121).
77. **Петров В.В.** К вопросу расчета пластинок и пологих оболочек с учетом физической и геометрической нелинейности. В сб.: Механика деформируемых сред, Изд. Саратовского гос. Ун-та, Саратов, в.1, 1974, с.123-130.
78. **Петров В.В.** О первой краевой задаче нелинейной теории упругости. ДАН СССР, т.114, №1, 1957, с.41-44.

79. **Пистер К., Ивенс Р.** Расчет упругих напряжений в физически нелинейных твердых топливах. Ракетная техника и космонавтика, 1966, №2, с.35-42.
80. **Рассказов Л.Н., Клейн Н.С.** К решениям нелинейной задачи теории упругости методом последовательных приближений. В кн.: Труды ВНИИ водоснабжения, канализ., гидротехн., сооруж. и инж. гидрогеол., в.34, 1972, с.32-37.
81. **Розовский М.М., Глушко В.Т., Ткаченко В.Е.** Влияние времени на концентрацию напряжений около отверстий в пластинках при физической нелинейности и больших деформациях. Сб.: Концентрация напряжений, в.3, Киев, Наукова думка, 1971, с.95-101.
82. **Савин Г.Н., Хорошун Л.П.** Плоская задача физически нелинейных упругих тел. Прикладная механика, т.1, в.4, 1965, с.1-11.
83. **Седов Л.И.** Основы нелинейной механики сплошной среды. М., Изд. АН СССР, 1960, с.412.
84. **Соколовский В.В.** Концентрация касательных напряжений при нелинейном законе деформации. Инженерный журнал, т.2, в.2, 1960, с.80-84.
85. **Савин Г.Н.** Распределение напряжений около отверстий. Киев, Наукова думка, 1968, с.888.

86. **Савин Г.Н., Койфман Ю.И.** Некоторые задачи плоской нелинейной теории упругости. Прикладная механика, т.8, в. 6, 1961, с.590-600.
87. **Си Г., Либовиц Г.** Математическая теория хрупкого разрушения. В кн.: Разрушение. М.:1975, т.2, с.83-203.
88. **Си Г.** Распределение напряжений вблизи концов трещины продольного сдвига. Тр.Амер. Об-ва инж. механиков, сер.В. Прикладная механика, 1965, т.32, №1, с.57-65.
89. **Си Г., Парис П., Эрдоган Ф.** Коэффициенты концентрации напряжений у вершины трещины при плоском растяжении и изгибе пластин. Тр.Амер. Об-ва инж. механиков, сер.Е. Прикладная механика, 1962, т.29, №2, с.101-108.
90. **Тарасьев Г.С.** Уравнения нелинейной теории упругости в перемещениях. ДАН СССР, т.191, №6, 1970, с.1249-1252.
91. **Тарстон Г.А.** Применение метода Ньютона в решении задач нелинейной механики. Труды Амер. Об-ва инженеров-механиков, сер.Е.,№2, т.32, 1965, с.146-152.

92. **Терегулов П.Г.** Об одной вариационной теореме нелинейной теории упругости. Прикладная математика и механика, т.26, в.1, 1962, с.169-171.
93. **Толоконников А.А.** Уравнение нелинейной теории упругости, в перемещениях. ПММ.т.21, №6, 1957, с.815-822.
94. **Труделл К.** Первоначальный курс рациональной механики сплошных сред. М., Мир, 1975, с.592.
95. **Тимошенко С.П., Войновски-Кригер.** Пластины и оболочки. М., Наука, 1966, с.632.
96. **Черепанов Г.П.** Механика хрупкого разрушения. М., Наука, 1974, с.640.
97. **Ченцов Н.Г.** Исследование фанеры, как анизотропной пластинки, Технич. заметки ЦАГИ, №91, 1936, с.1-27.
98. **Чекушкин Ю.К.** Об одном методе в нелинейной теории изгиба тонких пластин. Прикладная механика. Т.1. в.8, 1965. с.23-29.
99. **Цурпал И.А.** Экспериментальные значения пружных констант нелинейной теории пружности. Прикладная механика, т.VIII, в.5, 1962, с.201-204.
100. **Цурпал И.А., Кулиев Г.Г.** Задачи концентрации напряжений с учетом физической

нелинейности материала. Прикладная механика, т.х.в.7,1974, с.3-22.

101. **Цурпал И.А.** Концентрация поспряжений около квадратного отверстия в физически нелинейной упругой пластинке. Изв. АН СССР. Механика. 1965, №6, с.71-76.
102. **Шерман Д.И.** Изгиб поперенной силой эллиптического бруса ослабленного продольно круговой цилиндрической полостью. Инст. Механики АН СССР. Инжен. сборник т.XVII. 1953, с.121-150.
103. **Шерман Д.И.** О напряжениях в плоской весомой среде с двумя одинаковыми симметрично расположенными круговыми отверстиями. Прикладная математика и механика, т.4, в.6, 1951, с.751-761.
104. **Шерман Д.И.** Плоская задача теории упругости для анизотропной среды. Тр. Сейсмологического ин-та АН СССР, №8, 1938, с.51-78.
105. **Шерман Д.И.** Плоская деформация в изотропной неоднородной среде. Прикладная математика и механика, т.7, в.4, 1943, с. 691-703.
106. **Шерман Д.И.** К решению плоской задачи теории для анизотропной среды.- Прикладная

математика и механика (ПММ) 1942, т.6, в.6, с. 509-514.

107. Шульга Н.А. Изгиб тонкой пластинки, ослабленной круговым отверстием при нелинейном законе упругости. Прикладная механика, т.1, в.2, 1965, с.121-126.
108. Шульга Н.А. Изгиб тонких физических нелинейных тел. Прикладная механика, т.2, в. 12, 1966, с.115-118.
109. Ярема С.Я., Крестин Г.С. Распределение напряжения у вершины трещины в анизотропной пластине. –ФХММ, 1969, т.5, в.6, с.714-719.
110. Adkins J.E. Finite deformation of materials exhibiting curvilinear anisotropy. Proc.Roy. Soc.,A 229, №1176, p.119-134, 1955.
111. Adkins J.E., Green A.E. Plane problems in secondorder elasticity theory. Proc.Roy. Soc., A 239, №1219, p.557-576, 1957.
112. Ang D.D., Williams M.L. Combined stress in a orthotropic plate having a finite crack. –J.Appl. Mech. 1961, v.28, № 3, p.372-378.

113. **Bowie O.L.** Analysis of infinite plate containing radial crack originating at the boundary of an internal circular hole.- J. Math and Phys. 1956, v.35, № 1, p.60-71.
114. **Durelli A.I., Parks, V.I., Chen I.L.** Stress concentration in a rectangular plate with circular perforations along its two bounded edges and subjected to restrained shrinkage, J. strain and stress analysis, v.1, № 5, 1969 p.35-51.
115. **Evans K.I., Pister K.S.** Constitutive equations for a class of nonlinear elastic solids. Inter. J. Solids and struct., v.2, №3, 1966, p.427-445.
116. **Griffith A.A.** The Phenomenon of rupture and slow growth of cracks in brittle solids.-Trans:1 Roy. Soc. A. 1920; t.221; The theory of rupture. In:Proc. First Intern. Congr. Appl. Mech. Delft. 1924.
117. **Teodorescu P.P.** Problemele plane in teoriea elasticitatii. v.1. p.995, 1960, v.2, p.669, 1965.
118. **Zerna W.** Über eine nichtlineare allgemeine Theorie der Schalen.-Proc. Lutam, Sympos. Theory Thin Elastic shells (Delft, 1959), Amsterdam, 1960.
119. **Williams M.L.** On the stress distribution at the base of a stationary crack.-J.App. Mech., 1957. v.24, №1, p.109-114.

120. **Subrata Saha, Subrata Knezjce.** Ehi Chang Chao. Concentrated forces in semiinfinite anisotropic media.- J. Compos. Mater. 1972, v.6 №3, p.403-408.
121. **Irwin L.R.** Fracture. In.: Handbuck der Physic. Brlin. 1958. Bd 6, p.551-590.
122. **Jindra F.** Warmespannungen bei einem nichtlinearen elastizitatsgsetzes. Ing. Arch.,Bd.28, №2, 1959, p.109-116.
123. **Hulbert L.E.** The Numerical Solution of Two Dimansional Problems of the Theory of Elasticity, Ohio State univ., Eng. Exp. Sta. Bull., 198, Columbus, Ohio, 1965.
124. **Isida M.** Method of Laurent series expansion for internal crack problems.-in:Mechanics of fracture. Lejden.1973, v.1, p.56-130.
125. **Irwin L.R.** Fracture.-in: Handbuck der Physic. Berlin, 1958, Bd 6, p. 551-590.
126. **Koiter W.T.** General theorenis or elastic-plastic solids. Progress in Solid Mechanics (ed Sneddon J.N., Hill R.), Charter 4, Noth-Holland, 1960.
127. **Kuliyev S.A.** Stressed state of polygonal plate with central circular hollow and two linear cracks. Engineering

- Fracture Mechanics. V.27, №6, p.601-613, 1987. Printed in Great Britain.
128. **Kuliyev S.A.** The bending of an anisotropy plate with a central circular cavity and two rectilinear cuts. J. App. Maths. Mechs. V.57, №2, p. 399-406, 1993. Printed in Great Britain.
129. **Kraus H., Rotondo P., Haddon W.D.** Analysis of Radially Deformed Perforated Flanges. -Trans. ASME, v. 88, Series E, 1966, Applied Mechanics Section, p. 172.
130. **Renzulli G.** Contributo allo studio dell equilibrio elastico in canipo nonlineare-Giornnat. Battaglini, v.85, №1,4, 195, p.41-51.
131. **Rivlin R.S.** Fundamental tensor relations of nonlinear continuum mechanics. Theory of plates and shells. Bratislava, 1966.
132. **Stenberg E.** Nonlinear theory of elasticity with small deformations. J. Appl. Mech., v.13, 1946.
133. **Periman A. B., Sih G.C.** Circular arc cracks in bimaterial plates under bending.-int. J. Fract. Mech., 1967, v.3, №3, p. 193-203.
134. **Sih G.C., Paris P.G., Irwin L.R.** On the cracks in rectilinear anisotropic bodies. Int. J. Mech., 1965, v.1, №3, p. 189-203.

135. **Sih G.C.** Bending of cracked plate with arbitrary stress distribution across the thickness. – J. Eng. Industry 1970, v.92, №3, p.350-356.

**Quliyev S.Ə.
Kuliyev S.A.**

**ELASTİKLİK NƏZƏRİYYƏSİNİN FİZİKİ
QEYRİ-XƏTTİ MƏSƏLƏLƏRİ**

**PHYSICAL NON-LINEAR PROBLEMS OF
ELASTICITY THEORY**

**BAKİ-AZƏRNƏŞR –2010
BAKU-AZERNESHHR–2010**

CONTENTS

PREFACE	234
INTROCUCTION	236
PART I. Plane problems of physical non-linear elasticity theory	240
§ 1.1 Problem statement. Basic equations of physical non-linear plane problems.....	240
§1.2. Stress state of a polygonal plate possessing a central annular hole and two linear cracks in the small physical non-linear condition.....	283
1. Stress state of a cylinder made of small physical nonlinear material and possessing an annular hole and two linear cracks.....	295
2. Stress state of a hexagonal plate with annular hole and two linear cracks in physical non-linear statement.....	301
3. Stress state of a thick - walled pipe (Lame problem) in small physical non – linear statement.....	305
§1.3 Stress state of doubly – connected polygonal plate in arbitrary physical non-linear statement.....	310
PART II. Torsion of prismatic beams in physical nonlinear statement	330

§2.1. Problem statement. Choice of stress function.....	330
1. Torsion of a central annular hole and two linear cracks quadratic beam in non-linear statement.....	345
2. Torsion of a circular cylinder weakened by an annular hole space and two linear cracks in physical non-linear statement.....	354
3. Torsion of a circular cylinder weakened by square hole in physical non-linear statement.....	
PART III. Stress state of bending of prismatic beams in physical non-linear statement.....	359
§3.1. Pure bending of prismatic beams.....	359
§3.2. Bending of prismatic beams under point concentrate load in physical nonlinear statement.....	374
1. Bending of on entire circular cylinder.....	410
2. Bending of a on elliptic beam possessing annular cylindrical hole, under point load.....	413
3. Bending of a quadratic beam weakened by an annular hole under point.....	414
4. Bending of an annular cylinder weakened by a circular hole and two linear crack under point load.....	415
§3.3. Bending of plates in physical nonlinear statement....	415
REFERENCES.....	418
TECHNICAL TERMS.....	456

Preface

Physical non-linear problems (non-linear case of relation between stress and strain components) are considered in the monograph. The two domain (for finite domains) problems of elasticity theory (plane problems, torsion and bending problems of prismatic beams) are solved both in small physical non-linear statement (**Cauchy, Genki, Kawderer's** point of view) and arbitrary physical non-linear statement (**Green, Adgins** and etc. point of view).

As the solutions of many problems of elasticity theory with the considered domains in physical non-linear statement have not studied enough and especially, as there are no solutions of the problems for domains with linear cracks, this book is of great importance.

A majority of the problems in physical non-linear statement considered in the book, were solved by the author himself.

To save the time of researchers, some needed mathematical calculations are given in the ready form. Some advices to future investigations find its place in the book. It should be specially mentioned that to understand the strong mathematical

calculations the reader must possess appropriate mathematical knowledge.

Not all the problems of physical non-linear elasticity theory have been considered in the book, we have considered some problems that we are interested in some problems not considered here may be easily solved by the method mentioned in this book.

The monograph is the first book in the Azerbaijan language in the field of physical non-linear elasticity theory.

The book is intended for a wide class of readers, for students, post graduate students, teachers, researchers and etc.

INTRODUCTION

Development of science and engineering in the last years requires to extend classic theories, to reject linearization of some assumptions and principal equations (dependencies between stress and strain components) and to solve some important problems that are not covered by classic elasticity theory. Therefore, solution of non-linear problems is very urgent in deformable solids mechanics. This is connected with importance of exact analysis of stressed states of solids under consideration and with the fact that these physico-mechanical processes can not be explained by the laws known from the linear elasticity theory.

All what has been said, leads to development of non-linear elasticity theory, as non-linear problems have a great importance in physics and up to date engineering.

Rejection of part or all of the assumptions and errors adopted in elasticity theory gives a rise to new variants of non-linear elasticity theory (there are different relation forms between strain tensor and stress components).

In classic elasticity theory, linearization is mainly conducted in two directions. The first one is geometry of a deformable body (as deformation is very little, their terms of two and more power are ignored). The second one is physical

properties (relation of stress and strain, i.e. the Hooke's law) of material of a body under consideration. These two facts were used in appearance of elasticity theory.

Physical law of deformability, i.e. relation of stress and strain (in other words, principal determining equations expressing the state of elastic body) are expressed in two ways:

1. The method based on general functional relation of stress and strains (between two different power symmetric tensor components). –a point of view of scientists as **O.Cauchy, Genki, Kauderer** and etc.

2. Inclusion of deformation energy function into elasticity potential. A point of view of such scientists as **A. Green, D. Agins** and others.

Determination of real physical expressions between stress and strain components with regard to the mentioned two points of view, and solution of some urgent problems of up to date engineering are important issues of non-linear elasticity theory.

Some actual problems of non-linear elasticity theory were solved by the known scientists working in this field as **N.N. Goldenblatt, A.N.Guz, K.Z. Halimov, J.S.Erjanov, D.D.Ivlev, A.A. Lyunlin, A.S.Kosmodaminskii, Yu.I.Coifmann, D.L.Laurie, H.M.Mushtari, V.V. Novoghilov, Y.S. Postricage, Y.N.Robotnov, O.Nemish, H.A.Rahmatullin, L.Z.Sedov, G.N.**

Savin, P. Lukas, S.Lekhuitskii, I.Teregulov, N.S.Sailov, L.A.Tolokonnikov, G.S.Tarasev, D.P.Khoroshin, I.A.Truspal, D.Adgins, A.Green, S.Trusdelli, F.Indra, G. Cauderer and others.

The works done in the field of non-linear elasticity theory in our Republic is related with the names of such scientists as **A.Mirzajanzadeh, Y.Amenzadeh, M.A. Babayev, A.Z.Isayev, N.Mamedsadygov, R.Kerimov, N.Guliyev** and othes.

In this book, we leave geometrical linearization, violating the Hooke's law in considerable degree (assuming that small deformations change by linear law) we consider the case when the expressions on relation of stress and strains consists of non-linear terms (physical non-linear elasticity theory).

The book consists of introduction, three chapters and references. Plane problem of physical non-linear elasticity problem is considered in chapter I. (investigation of stressed state of finite polygonal doubly connected plates under different loadings)

In charter II torsion of prismatic beams are researched in physical non-linear statement.

Bending problems of prismatic beams in physical non-linear elasticity theory are considered in chapter III (problems of

absolute bending and concentric lateral bending of a ball under loading).

As the book is the first book in this field book in this field in the Azerbaijan language, valuable advices are given in each chapter for future researchers.

PART I

PLANE PROBLEMS OF PHYSICAL NON-LINEAR ELASTICITY THEORY

1. Problem statement. Basic equations of physical non-linear plane problems.

It is known that classic theory of elasticity is based on Hooke's principle* expressed by linear relation between stress and strains. Here we give only very important expressions for deriving basic equations of physical non-linear elasticity theory. For wider information in this field, one can see references [21,22,38,63,83,94].

It is known that in physical non-linear elasticity theory, the equilibrium equations under the action of certain forces are as follows: [22,38]:

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + X = 0$$

* We think that in order to understand the problems in the book, the reader sufficiently knows the basic notions of the classic elasticity theory and higher mathematics. The reader may be acquainted with many books on "Elasticity theory" written in Russian and English and the first book in this field written in the Azerbaijan language.

$$\begin{aligned}\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + Y &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial z} + Z &= 0\end{aligned}\quad (1.1.1)$$

In these expressions $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{xz}, \tau_{yz}$ are stress components, X, Y, Z are volumetric forces (for example, gravity and inertia forces)

We can write the equilibrium conditions (1.1) in the compact form (ignoring the volumetric forces)

$$\sigma_{ij,j} = 0 \quad (1.1.2)$$

The mean value σ_0 of the normal stresses σ_x, σ_y and σ_z is mean stress and is determined in the following way:

$$\sigma_0 = \frac{1}{3}(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) \quad (1.1.3)$$

At arbitrary point of the coordinate system $oxyz$ the stress tensor T is expressed in the matrix form as follows;

$$T = \begin{pmatrix} \sigma_x & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_y & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_z \end{pmatrix}. \quad (1.1.4).$$

Then, the free invariants S_1, S_2 and S_3 of the stress tensor are in the following form: (when σ_x, σ_y and σ_z normal stresses are basic stresses):

$$S_1 = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z ; S_2 = \sigma_x \cdot \sigma_y + \sigma_y \sigma_z + \sigma_x \sigma_z ;$$

$$S_3 = \sigma_x \sigma_y \sigma_z ; \quad (1.1.5)$$

Tangential stresses intensity τ_0 is expressed as follows:

$$\tau_0 = \sqrt{\frac{1}{3}(\sigma_x - \sigma_0)^2 + (\sigma_y - \sigma_0)^2 + (\sigma_z - \sigma_0)^2} =$$

$$= \sqrt{\frac{1}{3}[\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2 - \sigma_x \sigma_y - \sigma_y \sigma_z - \sigma_x \sigma_z] + \tau_{xy}^2 + \tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2} \quad (I.1.6)$$

Strain compatibility conditions

(relations between three longitudinal and three shear strains):

$$2 \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x \partial z} = \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} - \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} \right];$$

$$2 \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} - \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} \right];$$

$$2 \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{\partial \varepsilon_x}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} - \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} \right]; \quad \frac{\partial^2 \gamma_{yz}}{\partial y \partial z} = \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial y^2};$$

$$\frac{\partial^2 \gamma_{xz}}{\partial x \partial z} = \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial z^2}; \quad \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2}; \quad (I.1.7)$$

The relations between strains (ε_{ij}) and displacements (u, v, w) are in the following form:
(ignoring the third and higher order displacements)

$$\varepsilon_{xx} = 2 \frac{\partial u}{\partial x} + \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \dots$$

$$\varepsilon_{yy} = 2 \frac{\partial v}{\partial y} + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 + \dots$$

$$\varepsilon_{zz} = 2 \frac{\partial w}{\partial z} + \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 + \dots$$

$$\gamma_{xy} = \varepsilon_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} + \dots$$

$$\gamma_{xz} = \varepsilon_{xz} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial z} + \dots$$

$$\gamma_{yz} = \varepsilon_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial w}{\partial z} + \dots \quad (\text{I.1.8})$$

It should be noted that if we consider the plane problem of elasticity theory, then the expressions (I.1.7) and (I.1.8) take the following form:

Strain compatibility conditions:

$$\varepsilon_{xx,yy} + \varepsilon_{yy,xx} - 2\varepsilon_{xy,xy} = 0 \quad (\text{I.1.9})$$

$$\varepsilon_{xy} = \gamma_{xy}$$

The relation between strains and displacements

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}) \quad (\text{I.1.10})$$

In these expressions, i and j take the values 1 and 2 respectively.

The signs of coma in the expressions indicate (see. I.1.2, I.1.10 and etc.) partial derivatives. For example,

$$\begin{aligned} \varepsilon_{i,j} &= \varepsilon_{x,x} + \varepsilon_{x,y} + \varepsilon_{y,x} + \varepsilon_{y,y} = \\ &= \frac{\partial \varepsilon_x}{\partial x} + \frac{\partial \varepsilon_x}{\partial y} + \frac{\varepsilon_y}{\partial x} + \frac{\partial \varepsilon_y}{\partial y} \quad \text{and etc.} \quad (\text{I.1.11}) \end{aligned}$$

Based on **G. Green's** point of view for isotropic and homogeneous bodies for relationships between stress components σ_{ij} and strain components ε_{ij} some scientists assume that there is inner forces potential is an energy function [22]

$$U = U(J_1; J_2; J_3)$$

Here J_1, J_2 and J_3 are arbitrary changing invariants of the strain tensor

$$D = \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{yy} & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{xz} & \varepsilon_{yz} & \varepsilon_{zz} \end{pmatrix} \quad (\text{I.1.12})$$

So,

$$\begin{aligned}
 J_1 &= \frac{1}{2}(\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz}) = \frac{1}{2}\varepsilon_{ij} \\
 J_2 &= \frac{1}{4}[\varepsilon_{xx}\varepsilon_{yy} + \varepsilon_{yy}\varepsilon_{zz} + \varepsilon_{zz}\varepsilon_{xx} - \\
 &\quad - \varepsilon_{xy}^2 + \varepsilon_{yz}^2 - \varepsilon_{xz}^2] = \frac{1}{4}\varepsilon_{ij}\varepsilon_{ij} \\
 J_3 &= \frac{1}{8} \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{yy} & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{xz} & \varepsilon_{yz} & \varepsilon_{zz} \end{pmatrix} = \frac{1}{8}\varepsilon_{ij}\varepsilon_{jk}\varepsilon_{ik} \quad (\text{I.1.13})
 \end{aligned}$$

The invariant J_1 is called a volumetric extension. Similar to principal stresses $(\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z)$, the $\varepsilon_{kk}, \varepsilon_{yy}$ and ε_{zz} are said to be principal elongations (strains in the direction of the coordinate axes x, y and z)

$$\varepsilon_{xx} \leq \varepsilon_{yy} \leq \varepsilon_{zz}$$

Called volumetric extension. Similar to principal stressed $(\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z)$ the $\varepsilon_{kk}, \varepsilon_{yy}$ and ε_{zz} are called

If in the coordinate system $oxyz$ at arbitrary points paraleld to principal elangations $(\varepsilon_{xx}, \varepsilon_{yy}, \varepsilon_{zz})$ the shears $(\gamma_{xy} = \varepsilon_{xy}, \gamma_{xz} = \varepsilon_{xz}$ and $\gamma_{yz} = \varepsilon_{yz})$ are zero, then strain tensor and arbitrary variable invariants take the form: (if in expressions

(I.1.12) and (I.1.13) we take into account $\gamma_{xy} = \varepsilon_{xy} = 0$,
 $\gamma_{yz} = \varepsilon_{yz} = 0$ and $\gamma_{xz} = \varepsilon_{xz} = 0$)

$$D = \begin{vmatrix} \varepsilon_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{zz} \end{vmatrix} \quad (\text{I.1.14})$$

and

$$\begin{aligned} J_1 &= \varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz} \\ J_2 &= \varepsilon_{xx}\varepsilon_{yy} + \varepsilon_{yy}\varepsilon_{zz} + \varepsilon_{xx}\varepsilon_{zz} \\ J_3 &= \varepsilon_{xx}\varepsilon_{yy}\varepsilon_{zz} \end{aligned} \quad (\text{I.1.15})$$

According to stress components investigation the mean elongation ε_0 is defined as follows

$$\varepsilon_0 = \frac{1}{3}(\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz}) = \frac{1}{3}J_1 \quad (\text{I.1.16})$$

Then the circular tensor D_0 of the strain is in the form:

$$D_0 = \begin{vmatrix} \varepsilon_0 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_0 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_0 \end{vmatrix} \quad (\text{I.1.17})$$

This means that in the considered case, the change of the volume of the body happens because the change of its form.

Therefore, D_0 is called pure volumetric strain. Difference of deformation tensor D_0 and circular tensor (pure volumetric strain) is called strain deviator and is denoted by D' .

So,

$$D' = D - D_0 = \begin{vmatrix} \epsilon_{xx} - \epsilon_0 & \epsilon_{xy} & \epsilon_{xz} \\ \epsilon_{xy} & \epsilon_{yy} - \epsilon_0 & \epsilon_{yz} \\ \epsilon_{xy} & \epsilon_{yz} & \epsilon_{zz} - \epsilon_0 \end{vmatrix} \quad (\text{I.1.18})$$

Strain deviator D' is such a strain that a body gets it without of its volume (i.e/ a body changes only its form).

Similar to tangential stresses, shear strain intensity factor is determined by the following expression

$$\begin{aligned} \psi_0 &= \\ &= \frac{2}{\sqrt{3}} \sqrt{\frac{2}{3} [\epsilon_x^2 + \epsilon_y^2 + \epsilon_z^2 - \epsilon_x \epsilon_y - \epsilon_y \epsilon_z - \epsilon_x \epsilon_z] + \frac{1}{2} (\gamma_{xy}^2 + \gamma_{yz}^2 + \gamma_{xz}^2)} \end{aligned} \quad (\text{I.1.19})$$

For pure volumetric strain (for $\epsilon_{xx} = \epsilon_{yy} = \epsilon_{zz} = 0$) the expression (I.1.19) is simplified and takes the form:

$$\psi_0 = \sqrt{\frac{2}{3} (\gamma_{xy}^2 + \gamma_{yz}^2 + \gamma_{xz}^2)} \quad (\text{I.1.20})$$

According to crystallic structure of body materials, the relationship between stress and strain components is in different form (for wider information see **Smith and Rivlin** [117], **Green and Adgins** [22] and other references).

It is known that in many cases the crystalline structure of materials of bodies mainly consists of these classes: triclinic system monohedral and pinocoidal classes, monocline system (dihedral axisless class, dihedral axis class and prismatic class), rhombic system (rhombic pyramidal class rhombotetrahedral class, rhombic dipyramidal class) tetragonal system. This system consists of 7 crystal classes:

- tetragonal- tetrahedral class
- tetragonal – pyramidal class
- tetragonal - dipyramidal class
- tetragonal – scalenohedral class
- ditetragonal – pyramidal class
- tetragonal – trapezoidal class
- ditetragonal – dipyramidal class

The cube system (cubic symmetry system) is divided into five crystal classes:

- tritetrohedral class
- didodecahedral class
- hexatetrahedral class
- triactahedral class
- hexoctahedral class

Hexagonal system consists of 12 crystal classes:

- trigonal – pyramidal class

- rhombohedral class
- ditrigonal - pyramidal
- trigonal – trapezoidal class
- hexagonal – scalenohedral class
- trigonal – dipyramidal class
- hexagonal – pyramidal class
- hexagonal – dipyramidal class
- ditrigonal – dipyramidal class
- dihergonal – pyramidal class
- hexagonal – trapezohedral class
- dihexagonal – dipyramidal class

Finally, we can notice **transversal – isotropic** symmetry systems and isotropic symmetry system.

Below we give some expressions for the existing symmetry properties of the classic classes (we accept that these are three directions of body material before strain and \bar{e}_1, \bar{e}_2 and \bar{e}_3 are unique vectors of these directions).

In the triklin system, there are restrictions in the direction of unique vectors $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$ and there is no restriction on **internal forces potential** U (energy function), i.e. this function is expressed as a polynomial of strain components in the form:

$$U = U(\varepsilon_{xx}, \varepsilon_{yy}, \varepsilon_{zz}, \varepsilon_{xy}, \varepsilon_{yz}, \varepsilon_{xz}) \quad (I.1.21)$$

For the next coordinate system we can choose any rectangular cartesian system $OXYZ$.

For a monocline system, the unique vectors \bar{e}_2 and \bar{e}_3 make a rectangle, a unique vector \bar{e}_1 , becomes perpendicular to the surface $\bar{e}_2 \bar{e}_3$. In this system, dependence of the function U on strains is as follows.

$$U(\epsilon_{xx}, \epsilon_{yy}, \epsilon_{zz}, \epsilon_{xy}, \epsilon_{yz}, \epsilon_{xz}) = U(\epsilon_{xx}, \epsilon_{yy}, \epsilon_{zz}, -\epsilon_{xy}, \epsilon_{yz}, -\epsilon_{xz}) \quad (I.1.22)$$

For a rhombic system the unique vectors $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$ are mutually perpendicular to each other.

The origin cartesian coordinate axes (x, y, z) are taken parallel to the unique vectors \bar{e}_1, \bar{e}_2 and \bar{e}_3 .

The internal force potential U function depends on seven quantities (combination of strains)

$$U = U(\epsilon_{xx}, \epsilon_{yy}, \epsilon_{zz}, \epsilon_{xy}^2, \epsilon_{yz}^2, \epsilon_{xz}^2, \epsilon_{xy} \cdot \epsilon_{yz} \cdot \epsilon_{xz}) \quad (I.1.23)$$

In tetragonal case, the unique vectors \bar{e}_1, \bar{e}_2 and \bar{e}_3 are mutually perpendicular to each other.

As in the rhombic system, the coordinate axes are parallel to unique vectors and the axis z is taken as the main symmetry axis.

In this case, the function U is taken in two forms. For the first three classes this expression is as follows:

$$\begin{aligned}
 & U(\varepsilon_{xx}, \varepsilon_{yy}, \varepsilon_{zz}, \varepsilon_{xy}^2, \varepsilon_{yz}^2, \varepsilon_{xz}^2, \varepsilon_{xy} \circ \varepsilon_{yz} \circ \varepsilon_{xz}) = \\
 & = U(\varepsilon_{yy}, \varepsilon_{xx}, \varepsilon_{zz}, \varepsilon_{xy}^2, \varepsilon_{xz}^2, \varepsilon_{yz}^2, \varepsilon_{xy} \cdot \varepsilon_{yz} \cdot \varepsilon_{xz})
 \end{aligned}$$

For the last four classes it is taken as

$$\begin{aligned}
 & U(\varepsilon_{xx}, \varepsilon_{yy}, \varepsilon_{zz}, \varepsilon_{xy}, \varepsilon_{yz}, \varepsilon_{xz} = \\
 & = U\varepsilon_{xx}, \varepsilon_{yy}, \varepsilon_{zz}, \varepsilon_{xy}, -\varepsilon_{yz}, -\varepsilon_{xz})
 \end{aligned} \tag{I.1.24}$$

For the cubic system the unique vectors $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$ are mutually perpendicular. A coordinate system with symmetric axes parallel to unique vectors is chosen.

In the general case, for the cubic symmetry case, for the first two classes the function U is taken as follows:

$$\begin{aligned}
 & U(\varepsilon_{xx}, \varepsilon_{yy}, \varepsilon_{zz}, \varepsilon_{xy}^2, \varepsilon_{yz}^2, \varepsilon_{xz}^2, \varepsilon_{xy} \cdot \varepsilon_{yz} \cdot \varepsilon_{xz}) = \\
 & = U(\varepsilon_{yy}, \varepsilon_{zz}, \varepsilon_{xx}, \varepsilon_{yz}^2, \varepsilon_{xz}^2, \varepsilon_{xy}^2, \varepsilon_{xy} \cdot \varepsilon_{yz} \cdot \varepsilon_{xz}) = \\
 & = U(\varepsilon_{zz}, \varepsilon_{xx}, \varepsilon_{yy}, \varepsilon_{xz}^2, \varepsilon_{yz}^2, \varepsilon_{xy}^2, \varepsilon_{xy} \cdot \varepsilon_{yz} \cdot \varepsilon_{xz})
 \end{aligned} \tag{I.1.25}$$

i.e. a polynomial expression is used. For the last three classes, the function U

$$\begin{aligned}
 & U(\varepsilon_{xx}, \varepsilon_{yy}, \varepsilon_{zz}, \varepsilon_{xy}^2, \varepsilon_{yz}^2, \varepsilon_{xz}^2, \varepsilon_{xy} - \varepsilon_{yz} - \varepsilon_{xz}) = \\
 & = U(\varepsilon_{xx}, \varepsilon_{zz}, \varepsilon_{yy}, \varepsilon_{xz}^2, \varepsilon_{yz}^2, \varepsilon_{xy}^2, \varepsilon_{xy} \cdot \varepsilon_{yz} \cdot \varepsilon_{xz}) = \\
 & = U(\varepsilon_{zz}, \varepsilon_{xx}, \varepsilon_{yy}, \varepsilon_{xz}^2, \varepsilon_{xy}^2, \varepsilon_{yz}^2, \varepsilon_{xy} \cdot \varepsilon_{yz} \cdot \varepsilon_{xz}).
 \end{aligned} \tag{I.1.26}$$

In the hexagonal system the relation between the internal forces potential U function and strain components ε_{ij} is on many

variants. For the first two crystal classes this relation is created by 14 quantities (combinations between strain components), for the remaining three classes this relation is created by 9 quantities.

In the **transversal isotropic** system, for all the crystal classes the relation between the function U and strain components ε_{ij} is as follows (i.e. in the form of a polynomial):

$$U = U\left(\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy}, \varepsilon_{xy}^2 + \varepsilon_{yz}^2; \varepsilon_{zz}\varepsilon_{xx} - \varepsilon_{yy}, 2\varepsilon_{xy}, \varepsilon_{xz}^2 - \varepsilon_{yz}^2, 2\varepsilon_{xz} \cdot \varepsilon_{yz}\right)$$

Finally in the **isotropic** system, for all the crystal classes a polynomial expression for the function U is as follows:

$$U = U(J_1, J_2, J_3)$$

Here J_1, J_2 and J_3 are free invariants and are expressed by the expression (I.1.15).

To investigate the expressions for stresses and strain components for all the crystal classes mentioned above, is impossible within this book. Therefore, we consider only the cases for small cubic symmetry systems (Hooke's law for isotropic materials are widely investigated in elasticity theory books [2,9,19,26,30,45,67])

For crystal classes of the cubic system the relationship between the stress and strain components is taken in the following variants:

$$\varepsilon_{i,j} = \frac{k(s_0)}{3K} \sigma_0 \cdot \delta_{ij} + \frac{g(t_0^2)}{2G} (\sigma_{ij} - \sigma_0 \cdot \delta_{ij}) \quad (\text{I.1.27})$$

This relationship is based on the point of view of **O. Cauchy, A. Genki and G. Cowderer** (a point of view based on general functional relation between ε_{ij} and σ_{ij})

$$\varepsilon_{ij} = f_1 \cdot \delta_{ij} + f_2 \cdot \sigma_{ij} + f_3 \cdot \sigma_{ik} \cdot \sigma_{jk}; \quad f_n = \frac{\partial U}{\partial S_n}, \quad n = 1; 2; 3 \quad (\text{I.1.28})$$

But this relation is from the point of view of **A. Green** and others (a point of view including a strain energy function).

In these expressions K is a volumetric compression modulus. G is shear modulus, f_n is a stress function of the material. $U = U(J_1, J_2, J_3)$ is a potential of internal forces potential (energy density function), S_1, S_2 and S_3 are stress tensor invariants, $k(s_0)$ is a mean stress, (s_0) function, $g(t_0^2)$ is intensity function of tangential stresses (t_0^2)

$s_0 = \frac{\sigma_0}{3k}$ is the expression **for the reduced mean stress,**

$t_0 = \frac{\tau_0}{G}$ is the expression **for intensity the reduced tangential stresses.** The functions $k(s_0)$ and $g(t_0^2)$ may be taken in the form of infinite series [38]

$$k(s_0) = 1 + k_1 \cdot s_0 + k_2 \cdot s_0^2 + k_3 \cdot s_0^3 + \dots \quad (\text{I.1.29})$$

$$g(t_0^2) = 1 + g_2 \cdot t_0^2 + g_4 \cdot t_0^4 + g_6 \cdot t_0^6 + \dots \quad (\text{I.1.30})$$

Here

$$\begin{aligned} k_1 &= -\chi_1 ; k_2 = 2\chi_1^2 - \chi_2 ; \\ k_3 &= -5\chi_1^3 + 5\chi_1 \cdot \chi_2 - \chi_3 ; \text{ and etc.} \end{aligned} \quad (\text{I.1.31})$$

The function χ in expression (I.1.31) is the elongation function.

This elongation belongs to line size but not to time)

$$g_2 = -\gamma_2 ; g_4 = 3\gamma_2^2 - \gamma_4 ; \dots \quad (\text{I.1.32})$$

γ is a shear strain function. With the help of the functions (t_0) , $k(s_0)$ and $g(t_0^2)$ the reduced tangential stress intensity is expressed as follows [38]:

$$s_0 = \sigma_0 \cdot k(s_0); t_0 = \psi_0 \cdot \gamma(\psi_0^2); \quad (\text{I.1.33})$$

It should be noted that if in the expressions (I.1.31) we replace the coefficients χ_i and k_i (i.e. replace one by another), we equalities remain valid.

If we take onto account the expression (I.1.3) and (I.1.4) in (I.1.33) use the mean stress tensor

$$T_0 = \sigma_0 \cdot E, \quad (\text{I.1.34})$$

then after some transformations we can find the stresses by means of the strains in the following way:

$$\begin{aligned}
\sigma_x &= 3K \cdot k(s_0) \cdot \varepsilon_0 + 2G \cdot \gamma(\psi_0^2) \cdot (\varepsilon_x - \varepsilon_0) \\
\sigma_y &= 3K \cdot k(s_0) \cdot \varepsilon_0 + 2G \cdot \gamma(\psi_0^2) \cdot (\varepsilon_y - \varepsilon_0) \\
\sigma_z &= 3K \cdot k(s_0) \cdot \varepsilon_0 + 2G \cdot \gamma(\psi_0^2) \cdot (\varepsilon_z - \varepsilon_0) \\
\tau_{xy} &= G \cdot \gamma(\psi_0^2) \cdot \gamma_{xy}; \quad \tau_{yz} = G \cdot \gamma(\psi_0^2) \cdot \gamma_{yz}; \\
\tau_{xz} &= G \cdot \gamma(\psi_0^2) \cdot \gamma_{xz}
\end{aligned} \tag{I.1.35}$$

If we take into account the expressions (I.1.16), (I.1.17), (I.1.18) and (I.1.33) strain components (ε_{ij}) are expressed by the strain components in the following way: (in these expressions $\varepsilon_{xx} = \varepsilon_x$, $\varepsilon_{yy} = \varepsilon_y$ are accepted as $\varepsilon_{zz} = \varepsilon_z$).

$$\begin{aligned}
\varepsilon_x &= \frac{1}{3K} \cdot k(s_0) \cdot \sigma_0 + \frac{1}{2G} \cdot g(t_0^2) \cdot (\sigma_x - \sigma_0) \\
\varepsilon_y &= \frac{1}{3K} \cdot k(s_0) \cdot \sigma_0 + \frac{1}{2G} \cdot g(t_0^2) \cdot (\sigma_y - \sigma_0) \\
\varepsilon_z &= \frac{1}{3K} \cdot k(s_0) \cdot \sigma_0 + \frac{1}{2G} \cdot g(t_0^2) \cdot (\sigma_z - \sigma_0); \quad \gamma_{xy} = \frac{1}{G} \cdot g(t_0^2) \cdot \tau_{xy}; \\
\gamma_{yz} &= \frac{1}{G} \cdot g(t_0^2) \cdot \tau_{yz}; \quad \gamma_{xz} = \frac{1}{G} \cdot g(t_0^2) \cdot \tau_{xz};
\end{aligned} \tag{I.1.36}$$

In the expressions (I.1.35) and (I.1.36) K is a volumetric compression modulus, G is a shear modulus.

A collection of fifteen equations mentioned above – three equilibrium conditions (I.1.1), six strain compatibility conditions (I.1.7) and six expressions (I.1.35) on finding stresses by strains

(or expression (I.1.36) on finding strains by stresses) make the basic system of equations of non-linear elasticity theory (for small strains). It should be noted that for plane problems of elasticity theory (both for a stressed and strained planes) the indicated 15 equations are very simplified.

As in the **stressed state the plane is in the form:**

$$\sigma_z \equiv 0; \tau_{xz} \equiv 0; \tau_{yz} \equiv 0$$

the equations (I.1.1) and (I.1.35) decrease and become 6: **equilibrium conditions**

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = 0; \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} = 0; \quad (\text{I.1.37})$$

Strain compatibility conditions

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} \quad (\text{I.1.38})$$

expression of strains by stresses.

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{1}{3K} \cdot k(s_0) \cdot \sigma_0 + \frac{1}{2G} \cdot g(t_0^2) \cdot (\sigma_x - \sigma_0) \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{3K} \cdot k(s_0) \cdot \sigma_0 + \frac{1}{2G} \cdot g(t_0^2) \cdot (\sigma_y - \sigma_0) \\ \gamma_{xy} &= \frac{1}{G} \cdot g(t_0^2) \cdot \tau_{xy} \end{aligned} \quad (\text{I.1.39})$$

In derivation of these expressions, It was taken into account that the stresses σ_x, σ_y and τ_{xy} are very small in comparison with

other dimensions of thickness of plates in the direction of the axis z and these stresses depend only on the axes x and y .

Similarly, in the strained state of the plate, as in the classic theory, in nonlinear elasticity theory, the above mentioned equations are simplified and diminish in number. (it is taken into account that the plate is in strained state $\varepsilon_z = \gamma_{xz} = \gamma_{yz}$)

We repeatedly notice that all these simplifications and diminution of the number of equations are true only for small strains.

When a plane is in stressed state, the reduced mean stress (s_0) and mean intensity of tangential stresses (t_0) take the following values:

$$\sigma_0 = \frac{1}{3}(\sigma_x + \sigma_y); \quad s_0 = \frac{1}{9K} \cdot (\sigma_x + \sigma_y) = \frac{\sigma_0}{3K}$$

$$t_0^2 = \frac{2}{9G^2} \cdot [\sigma_x^2 + \sigma_y^2 - \sigma_x \sigma_y + 3\tau_{xy}^2]; \quad (\text{I.1.40})$$

When a plate is in strained state, the stresses σ_{ij} in the expressions (I.1.27) and (I.1.28) as in the classic elasticity theory satisfy the equilibrium equations in the same way, and is expressed by Airy stress function (F) as follows [22, 28].

$$\sigma_{ij} = F_{,kk} \cdot \delta_{ij} - F_{,ij} \quad (\text{I.1.41})$$

Here, the coefficients δ_{ij} are determined by the formula:

$$\delta_{ij} = \frac{\partial J_1}{\partial \varepsilon_{ij}} \quad (\text{I.1.42})$$

J_1 is a strain tensor (the first free invariant of strains) and for plane stress state is determined as

$$J_1 = \varepsilon_{kk} \quad (\text{I.1.43}).$$

According to (I.1.4 and I.1.43) we can write for $i \neq j$;

$$\delta_{ii} = \delta_{jj} = 1; \text{ for } i = j; \delta_{ij} = 0$$

By the rule of “**cube**” order stress strain relation we can write expression (I.1.28) as follows [22].

$$\begin{aligned} \varepsilon_{ij} = & \lambda_{11} \sigma_{kk} \cdot \delta_{ij} + \lambda_{12} \cdot \sigma_{ij} + \lambda_{21} \cdot \sigma_{kk}^2 \cdot \delta_{ij} + \\ & + \lambda_{22} \sigma_{kn} \sigma_{kn} \cdot \delta_{ij} + 2\lambda_{22} \cdot \sigma_{kk} \sigma_{ij} + \\ & + \lambda_{31} \cdot \sigma_{kk}^3 \cdot \delta_{ij} + \lambda_{23} \cdot \sigma_{ik} \sigma_{jk} \cdot \delta_{ij} + \\ & + \lambda_{32} \cdot \sigma_{kn} \cdot \sigma_{kn} \cdot \sigma_{ij} \cdot \delta_{ij} + \lambda_{33} \cdot \sigma_{kk}^2 \sigma_{ij} \end{aligned} \quad (\text{I.1.44})$$

Here, the coefficients λ_{ij} determine the physical properties of the considered materials.

Notice that as shown in [99] the expressions (I.1.27) and (I.1.28) consider with the following values of the coefficients λ_{ij} that are elasticity constants.

$$\lambda_{11} = \frac{1}{9K} - \frac{1}{6G}; \quad \lambda_{12} = \frac{1}{4G}; \quad \lambda_{31} = -\frac{1}{27} \cdot \frac{g_2}{G_3};$$

$$\lambda_{32} = -\frac{1}{12} \cdot \frac{g_2}{G^2}; \quad \lambda_{33} = \frac{1}{18} \cdot \frac{g_2}{G^3};$$

$$\lambda_{21} = \lambda_{22} = \lambda_{23} = 0 \quad (\text{I.1.45})$$

K (compression modulus) and G (shear modulus) coefficients in these expressions are found by the E (Young modulus – elasticity modulus) and ν (Poisson ratio) constants widely met in practice, in the following way: (and inversely, if G, K are known, then E and ν are found)

$$G = \frac{1}{2} \cdot \frac{\nu}{K\nu} \cdot E; \quad K = \frac{1}{3} \cdot \frac{K}{K2} \cdot E$$

$$E = 2 \frac{\nu+1}{\nu} \cdot G = 3 \cdot \frac{\nu-2}{\nu} \cdot K = \frac{9KG}{3K+G}$$

$$\nu = \frac{2G}{E-2G} = \frac{6}{3K-E} = 2 \cdot \frac{3K+G}{3K-2G}; \quad (\text{I.1.46})$$

If we write the expressions (I.1.27) or (I.1.28) of relation between σ_{ij} and strain components \mathcal{E}_{ij} in expression (I.1.7) of strain compatibility conditions the solution of plane problem of physical non-linear elasticity theory is reduced to integration of the following differential equations:

From **O. Cauchy**, **A. Genki**, **G. Gawderer** and others point of view:

$$\Delta \left\{ \left[\frac{1}{9K} \cdot k(s_0) + \frac{1}{3G} \cdot g(t_0^2) \right] (\sigma_x + \sigma_y) \right\} -$$

$$-\frac{1}{2G} \left[\sigma_x \cdot \frac{\partial^2 g(t_0^2)}{\partial x^2} + \sigma_y \cdot \frac{\partial^2 g(t_0^2)}{\partial y^2} + 2\tau_{xy} \cdot \frac{\partial^2 g(t_0^2)}{\partial x \partial y} \right] = 0 \quad (\text{I.1.47})$$

From **A. Gereen, D. Adgins**, and others point of view:

$$\begin{aligned} & (\lambda_{11} + \lambda_{12}) \cdot \Delta \Delta F + \lambda_{21} \cdot \Delta[(\Delta F)] + \\ & + \lambda_{22} \cdot \Delta[\Delta(F_{,ij} F_{,ij}) + 2(\Delta F F_{,ij})_{,ij}] + \\ & + \lambda_{31} \cdot \Delta[\Delta(\Delta F)^3] + \lambda_{32} \cdot (F_{,ij} F_{,ij} F_{,kn})_{,kn} + \\ & + \lambda_{33} [\Delta(\Delta F F_{,ij} F_{,ij})] + \lambda_{33} [(\Delta F)^2 F_{,ij}]_{,ij} = 0 \end{aligned} \quad (\text{I.1.48})$$

In these expressions, $F(x, y)$ is the **Airy function of stresses**:

So, for **plane stress state** we can write [25,43,67]:

$$\sigma_{xx} = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \quad \sigma_y = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \quad \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \quad (\text{I.1.49})$$

Δ is a Laplace operator:

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \quad (\text{I.1.50})$$

The commas indicate partial derivatives (it should be mentioned that in plane stress state, the i and j and also k and n indices take the values 1 and 2).

If we consider the expressions (I.1.49) and (I.1.50) in differential equation (I.1.47), we can write:

$$\Delta \left\{ \left[\frac{1}{9K} \cdot k(s_0) + \frac{1}{3G} \cdot g(t_0^2) \right] \Delta F \right\} - \frac{1}{2G} \left[\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \cdot \frac{\partial^2 g(t_0^2)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 g(t_0^2)}{\partial y^2} - 2 \cdot \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \cdot \frac{\partial^2 g(t_0^2)}{\partial x \partial y} \right] = 0 \quad (\text{I.1.51})$$

It should be noted that in solving some stress concentration problems it is convenient to use **polar coordinates** (ρ, θ) .

Using the expressions for the relation of polar coordinates and cartesian coordinates

$$x = \rho \cos \theta; \quad y = \rho \sin \theta; \quad \rho = \sqrt{x^2 + y^2}; \quad \text{tg} \theta = \frac{y}{x} \quad (\text{I.1.52})$$

for partial derivatives we can write:

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial \rho} \frac{\partial \rho}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial x}; \quad \frac{\partial \rho}{\partial x} = \frac{\partial (\sqrt{x^2 + y^2})}{\partial x} = \frac{x}{\rho} = \cos \theta$$

$$\frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial \rho} \frac{\partial \rho}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial y}; \quad \frac{\partial \rho}{\partial y} = \frac{y}{\rho} = \sin \theta;$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial x} = \frac{\partial \left(\arctg \frac{y}{x} \right)}{\partial x} = -\frac{y^2}{\rho^2} = -\frac{\sin \theta}{\rho}; \quad \frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{x}{\rho^2} = \frac{\cos \theta}{\rho}$$

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} = \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2}; \quad (\text{I.1.53})$$

By means of expressions (I.1.53) we can write differential equation (I.1.51) as follows:

$$\Delta \left\{ \left[\frac{1}{9K} \cdot k(s_0) + \frac{1}{3G} \cdot g(t_0^2) \right] \Delta F \right\} - \frac{1}{2G} \left[\left(\frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 F}{\partial \theta^2} + \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial F}{\partial \rho} \right) \cdot \frac{\partial^2 g(t_0^2)}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial \rho^2} \cdot \left(\frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 g(t_0^2)}{\partial \theta^2} + \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial g(t_0^2)}{\partial \rho} \right) \right] - 2 \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial^2 F}{\partial \rho \partial \theta} - \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial F}{\partial \theta} \right) \cdot \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial^2 g(t_0^2)}{\partial \rho \partial \theta} - \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial g(t_0^2)}{\partial \theta} \right) = 0; \quad (I.1.54)$$

As it is seen, the solution of plane problems of physical non-linear elasticity theory is reduced to the integration of differential equations (I.1.54) and (I.1.48).

In both differential equations, $F(x, y) = F(\rho, \theta)$ is a stress function.

It should also be noted that if in differential equation (I.1.54) we accept $k(s_0) = 1$ and $g(t_0^2) = 1$, and that in differential equation (I.1.48) except λ_{11} the other constants are zero, the both differential equations are reduced to biharmonic equation

$$\Delta \Delta F = 0 \quad (I.1.55)$$

(i.e. the considered problem turns into a problem in linear elasticity theory) known from classical elasticity theory.

In both cases, (both in solving differential equation (I.1.54) based on **O. Cauchy**, **A. Genki**, **G. Cawderer** and etc. point of

view and in solving differential equation based on points of view of **A. Green, J. Adgins** and others) the boundary conditions are determined as in classic elasticity theory.

If we take the functions $k(s_0)$ and $g(t_0^2)$ contained in differential equation (I.1.54) in the form of a series as (I.1.29) and (I.1.30), then the solution of differential equation and satisfaction of boundary conditions meet many mathematical difficulties.

In many cases, the experiments on materials show that one can take the dependencies between mean stress (s_0) and mean strain (ε_0) by the expressions close to linear rule.

Therefore, for small strains, the expression (I.1.29) in solution of concrete problems is taken as

$$k(s_0) \equiv 1 \quad (\text{I.1.56})$$

(small, i.e. little physical non-linear elasticity theory problems).

For the tangential stresses intensity function $g(t_0^2)$ the first two terms of the series in the expression (I.1.30) is taken

$$g(t_0^2) = 1 + g_2 \cdot t_0^2; \quad (\text{I.1.57})$$

In these special cases (I.1.56) and (I.1.57), the solution of differential equation (I.1.54) for physical non-linear statement simplifies.

Based on existing references on the solution of differential equations, for the solution of differential equations (I.1.54) and (I.1.48) (i.e. for integration), the stress function $F(x, y)$ is taken as a power series of small parameter.

$$F = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n F_n = F_0 + \lambda \cdot F_1 + \lambda^2 \cdot F_2 + \dots \quad (\text{I.1.58})$$

The taken small parameter α is determined as

$$\alpha = \lambda = \frac{K \cdot g_2}{3K + G} \cdot \frac{1}{G^2} \quad (\text{I.1.59})$$

for differential equation (I.1.54), and as

$$\lambda = \frac{\lambda_{21}}{\lambda_{11} + \lambda_{12}} \quad (\text{I.1.60})$$

for differential equations (I.1.48).

If we take into account the expression of stress function F in the form of series (I.1.58) in differential equations (I.1.54) and (I.1.48), and use the condition of equality of the sum of the same power terms of the small parameter λ , each of these differential equations are reduced to n number of system differential equations. The first of these equations (the differential equation made of zero power of the parameter λ) is a linear, homogeneous equation that corresponds to classic elasticity theory. The remaining differential equations give corrections to linear elasticity theory.

Thus, the system of differential equations obtained in both cases (i.e. differential equations (I.1.54) and (I.1.48) may be determined in short by the following expression:

$$\Delta\Delta F^{(0)} = 0 \quad (\text{I.1.61})$$

$$\Delta\Delta F^{(n)} + L^{(n)}[F^{(0)}, F^{(1)}, \dots, F^{(n-1)}] = 0 \quad (\text{I.1.62})$$

Here, $L^{(n)}$ is said to be a **linear operator** and consists of the functions $F^{(0)}, F^{(1)}, F^{(2)} \dots F^{(n-1)}$ obtained from the solution of the preceding differential equation of each differential equation and the expressions of this derivatives.

The function $F^{(n)}$ obtained from the solution of each considered differential equation, make some corrections for preceding ones.

It is known from the references that in linear elasticity theory (plane problems), the Airy stress function $F^{(n)}$ is determined by two analytic functions $\phi(z)$ and $\psi(z)$ by the following expression [2,9,19,25,26,27,30,43,67]

$$F^{(0)} = \text{Re}[\bar{Z} \cdot \phi(z) + \int \psi(z) dz] \quad (\text{I.1.63})$$

Here, the symbol Re shows that the real part of the expression in brackets should be taken.

Due to finite or infinite form of the considered body (plate, cylinder, prismatic and etc.) and the number of connection of

domains, the function $\varphi(z)$ and $\psi(z)$ are taken as follows (see some references [2,26,43,67] in elasticity theory field to get more information).

1. For finite one-connected polygon contour domains, (this contour may be in the form of circle, ellipse, square, right hexagon and etc.), the functions $\varphi(z)$ and $\psi(z)$ are found in the form [2,26,43,67]:

$$\varphi(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{z}{A}\right)^k \cdot A_k; \quad \psi(z) = \sum_{k=1}^{\infty} B_k \cdot \left(\frac{z}{A}\right)^k \quad (\text{I.1.64})$$

Here

$$A_k = \sum_{n=k}^{\infty} \alpha_n \cdot \frac{a_{n-k}^{(n)}}{q}; \quad B_k = \sum_{n=k}^{\infty} \beta_n \cdot \frac{a_{n-k}^{(n)}}{q}$$

2. For finite doubly - connected domains, the regular functions $\varphi(z)$ and $\psi(z)$ are taken as [2,26,43,67]:

$$\psi(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k \cdot \xi_1^{-k} + \sum_{k=0}^{\infty} B_k \left(\frac{z}{A}\right)^k; \quad (\text{I.1.65})$$

Here ξ_1 is the inverse function $\xi = \chi(z)$ (L_1) of the mapping function $z = \omega(\xi_1)$ of the inner contour around the unique circle.

For wide information see [51].

The coefficients A_k and B_k of analytic functions, are as in (I.1.64)

$$A_k = \sum_{n=k}^{\infty} {}^* a_n \cdot a_{\frac{n-k}{q}}^{(n)}; \quad B_k = \sum_{n=k}^{\infty} {}^* b_n \cdot a_{\frac{n-k}{q}}^{(n)} \quad (\text{I.1.66})$$

The coefficients $a_n^{(k)}$ contained in expressions (I.1.64) and (I.1.66) are found for concrete contour and given in the table form in references [51][†]. The star * shows the indices inseries (I.1.66) while passing to the next term increases by q (the number of symmetry axes- the number of polygon's sides). We assume that in doubly connected domains the contours L_1 and L_2 are concentric.

3. The analytic functions for multiply - connected finite domains are found by the following expressions [2,26,43,67]:

$$\begin{aligned} \varphi(z) = & \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cdot \left(\frac{z}{A}\right)^k + \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^{\infty} A_k^{(i)} \xi_i^{-k} + \\ & + \sum_{i=1}^n [\gamma_i \cdot z \cdot \ln(z - z_i) + \lambda_i \ln(z - z_i)]; \end{aligned}$$

$$\psi(z) = \sum_{k=1}^{\infty} B_k \cdot \left(\frac{z}{A}\right)^k + \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^{\infty} B_k^{(i)} \xi_i^{-k} + \sum_{i=1}^n \varepsilon_i \cdot \ln(z - z_i); \quad (\text{I.1.67})$$

[†] In our country and post SSSR (now ULS), regular function $\varphi(z)$ and $\psi(z)$ were taken in a very rough form by researdiers. Such scientists exist at our days, too. In our papers, we take such functions in the forms (1.1.64) and (1.1.65) based on exact matematical operations. (by the advice of my supervisor, world known scientist D.I.Sherman (the late)

Here, the constants z_i indicate the coordinates of any points interior to the contours $L_i (i = 1, 2, \dots, n)$.

γ_i are real constants, λ_i are complex constants. The two-fold series in the expression (I.1.67) indicate the function regular everywhere outside of $i (i = 1, 2, \dots, n)$ number L_i contours interior to multipunctured domain.

4. The analytic functions $\varphi(z)$ and $\psi(z)$ for **infinite one-connected domains** are found as [2,26,43,67]:

$$\begin{aligned}\varphi(z) &= \varphi(\xi) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cdot \xi^{-k} \\ \psi(z) &= \psi(\xi) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \cdot \xi^{-k}\end{aligned}\quad (\text{I.1.68})$$

5. The regular function $\varphi(z)$ and $\psi(z)$ for infinite doubly - connected domains are found as follows [2,26,43,67]:

$$\begin{aligned}\varphi(z) &= \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cdot \xi_1^{-k} + \sum_{n=1}^{\infty} b_k \cdot \xi_2^{-k}; \\ \psi(z) &= \sum_{k=1}^{\infty} c_k \cdot \xi_1^{-k} + \sum_{n=1}^{\infty} d_k \cdot \xi_2^{-k}\end{aligned}\quad (\text{I.1.69})$$

The variables ξ_1 and ξ_2 are the inverse functions $\xi_1 = \chi_1(z)$ and $\xi_2 = \chi_2(z)$ of the mapping functions $z = \omega(\xi_1)$ and $z = \omega(\xi_2)$ of

contour L_1 and L_2 bounding the infinite domain (S) from interior.

In the expressions (I.1.64) – (I.1.69), as z is a complex variable, below we give some transformation formula in order the reader save time.

So, as $z = x + iy$ and its adjoint $\bar{z} = x - iy$, we write

$$x = \frac{1}{2}(z + \bar{z}); \quad y = -\frac{i}{2}(z - \bar{z}) \quad (\text{I.1.70})$$

Partial derivatives:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \cdot \frac{\partial \bar{z}}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial \bar{z}}; \\ \frac{\partial}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \cdot \frac{\partial \bar{z}}{\partial y} = i \left(\frac{\partial}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \right) \end{aligned} \quad (\text{I.1.71})$$

Their inverse expressions (derivatives):

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial z} &= \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial z} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \right); \\ \frac{\partial}{\partial \bar{z}} &= \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \bar{z}} + \frac{\partial}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right) \end{aligned} \quad (\text{I.1.72})$$

The Laplace operator Δ is expressed by the complex variable z as follows:

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} = 4 \frac{\partial^2}{\partial z \partial \bar{z}} \quad (\text{I.1.73})$$

By what has been said above, any biharmonic equation

$$\Delta\Delta f = 0$$

may be expressed by complex variables as follows:

$$\Delta\Delta f = \frac{\partial^4 f}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 f}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 f}{\partial y^4} = 16\frac{\partial^4 f}{\partial z^2 \cdot \partial(\bar{z})^2} = 0 \quad (\text{I.1.74})$$

Considering the important part of conformal mapping functions in all problems of elasticity theory, for oftenly met domains in engineering we give the coefficients $a_n^{(k)}$ found for $z = \omega(\xi)$ and its inverse $\xi = \chi(z)$ and functions and appropriate contours in the following table form (see table №1.1 and 1.2)

The values of the coefficients $a_n^{(1)}$

Table №1.1a

Contour Coefficient	Ellipse $q = 2$	Square $q = 4$	Hexagon $q = 6$
	$a_0^{(1)}$	1	1
$a_1^{(1)}$	$-m$	$-m$	$-m$
$a_2^{(1)}$	$-2m^2$	$-3m^2$	$-5m^2$
$a_3^{(1)}$	$-5m^3$	$-15m^3$	$-40m^3$
$a_4^{(1)}$	$-14m^4$	$-92m^4$	$-385m^4$
$a_5^{(1)}$	$-42m^5$	$-612m^5$	$-4095m^5$

The table of conformally mapping functions and their inverse functions

Table № 1.1

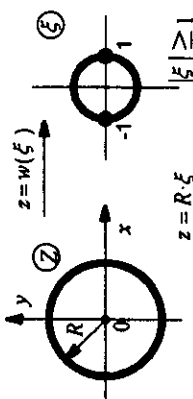
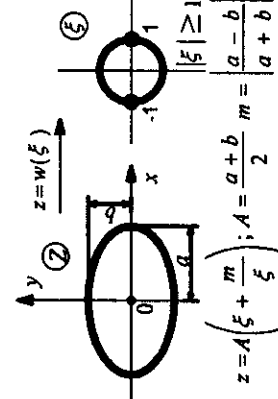
Contour	Mapping functions $z=w(\xi)$	The functions inverse to mapping functions $\xi = \chi(z)$
1. Disk of radius R	 <p style="text-align: center;">$z = R \cdot \xi$</p>	$\xi = \frac{z}{R}$
2. Ellipse with semi-axes a and b	 <p style="text-align: center;">$z = A \left(\xi + \frac{m}{\xi} \right); A = \frac{a+b}{2}; m = \frac{a-b}{a+b}$</p>	$\xi = \frac{1}{2A} \left[z + \sqrt{z^2 - 4m^2} \right] = \frac{z}{A} \sum_{n=0}^{\infty} a_n \left(\frac{A}{z} \right)^{2n}$ <p>All quantities of $a_n = a_n^{(1)}$ are arranged in table № 1.1</p>

Table № 1.1

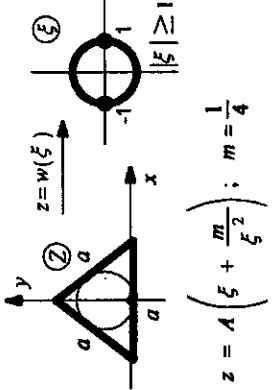
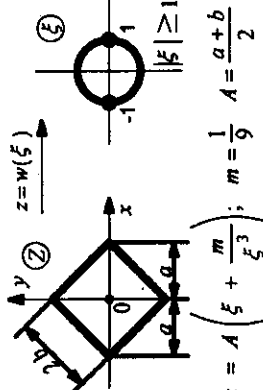
<p>3. Equilateral all triangle</p>	 <p> $z = A \left(\xi + \frac{m}{\xi^2} \right); m = \frac{1}{4}$ </p>	$\xi = \frac{z}{A} \sum_{n=0}^{\infty} a_n \left(\frac{A}{z} \right)^{3n}$ <p> $a_0 = 1; a_1 = -m; a_2 = -2m^2$ $a_3 = -7m^2; a_4 = -30m^4$ $a_5 = 56m^5$ </p>
<p>4. Square</p>	 <p> $z = A \left(\xi + \frac{m}{\xi^3} \right); m = \frac{1}{9}$ </p>	$\xi = \frac{z}{A} \sum_{n=0}^{\infty} a_n \left(\frac{A}{z} \right)^{4n}$ <p> The quantities of $a_n^{(1)}$ is taken from in table № 1.1 </p>

Table № 1.1

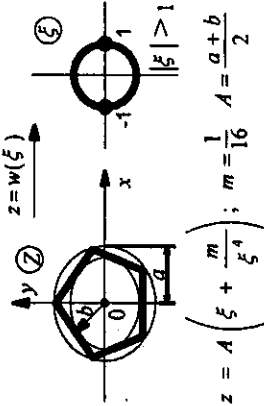
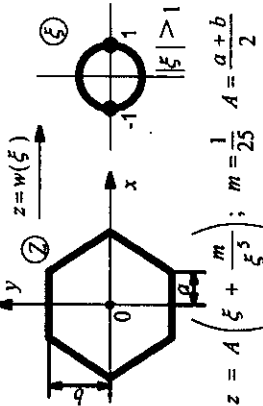
<p>5. Pentagon</p>	 <p> $z = A \left(\xi + \frac{m}{\xi^4} \right); m = \frac{1}{16} \quad A = \frac{a+b}{2}$ $\xi > 1$ </p>	$\xi = \frac{z}{A} \sum_{n=0}^{\infty} a_n \left(\frac{A}{z} \right)^{5n}$ <p> $a_0 = 1; a_1 = -m; a_2 = -4m^2$ $a_3 = -34m^2; a_4 = -134m^4$ $a_5 = 2184m^5$ </p>
<p>6. Hexagon</p>	 <p> $z = A \left(\xi + \frac{m}{\xi^5} \right); m = \frac{1}{25} \quad A = \frac{a+b}{2}$ $\xi > 1$ </p>	$\xi = \frac{z}{A} \sum_{n=0}^{\infty} a_n \left(\frac{A}{z} \right)^{6n}$ <p> The quantities of a_n is taken from in table № 1.1 </p>

Table № 1.1

<p>7. Rhombus</p>	<p> $z = A \left(\xi + \frac{m_1}{\xi} + \frac{m_2}{\xi^3} \right); A = \frac{a+b}{2}$ $m_1 = 1 - 4\varepsilon; m_2 = \frac{4\varepsilon}{3}(1 - 2\varepsilon);$ $0 \leq \varepsilon \leq \frac{1}{4} \quad 0 \leq \frac{b}{a} \leq 1$ </p>	$\xi = \frac{z}{A} \sum_{n=0}^{\infty} a_n \left(\frac{A}{z} \right)^{2n}$ <p> $a_0 = 1; a_1 = -\varepsilon;$ $a_2 = -\varepsilon^2 - \varepsilon^3; a_3 = -2\varepsilon^3$ $\varepsilon = \frac{1}{8}$ </p>
<p>8. Arch (vault)</p>	<p> $z = A \xi \sum_{n=0}^{\infty} a_n \xi^{-n}; A = \frac{a+b}{2}$ $a_0 = 1; a_1 = 0,14153; a_2 = 0,06795$ $a_3 = -0,10130; a_4 = 0,03873; a_5 = 0,00194$ </p>	$\xi = \frac{z}{A} \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n \left(\frac{A}{z} \right)^n$ <p> $\lambda_0 = 1; \lambda_1 = 0; \lambda_2 = -\varepsilon$ $\lambda_3 = -\varepsilon^2; \lambda_4 = -\varepsilon^2 - \varepsilon^4$ $\lambda_5 = -3\varepsilon^3; \lambda_6 = -2\varepsilon^3$ $0 \leq \varepsilon \leq 1$ </p>

Table № 1.1

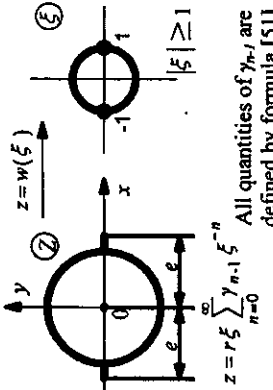
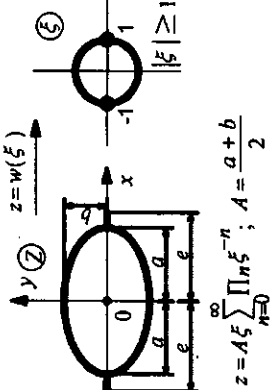
<p>9. A disk of radius r with two cracks</p>	 <p> $z = r\xi \sum_{n=0}^{\infty} \gamma_{n-1} \xi^{-n}$ All quantities of γ_{n-1} are defined by formula [51] </p>	$\xi = \frac{z}{R} \sum_{n=0}^{\infty} \delta_{n-1} \left(\frac{r}{z} \right)^n$ <p>All quantities of δ_{n-1} are determined by formula [51]</p>
<p>10. Ellipse with two cracks</p>	 <p> $z = A\xi \sum_{n=0}^{\infty} \prod_{k=0}^{n-1} T_{n-k}$; $A = \frac{a+b}{2}$ $\prod_n = \sum_{k=0}^n \gamma_{k-1} T_{n-k}$ </p> <p>The quantities of T_j are determined by [51]</p>	$\xi = \frac{z}{A} \sum_{n=0}^{\infty} V_n \left(\frac{A}{z} \right)^n$ $V_n = \sum_{\nu=n-2E\left(\frac{n}{2}\right)}^n H_{\nu} \alpha_{n-\nu} \frac{1}{2}$ <p>The quantities of H_{ν} are defined by formula [51] The values of α_n are taken from in table №1.1</p>

Table № 1.1

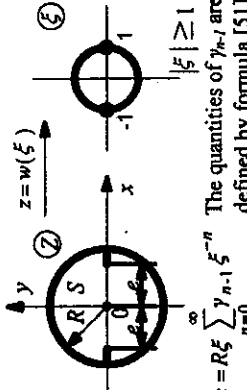
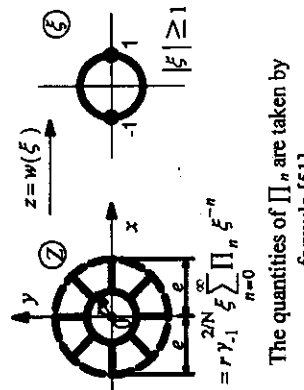
<p>11. A disk of radius R with two cracks</p>	 <p> $z = R\xi \sum_{n=0}^{\infty} \gamma_{n-1} \xi^{-n}$ The quantities of γ_{n-1} are defined by formula [51] </p>	$\xi = \frac{z}{R} \sum_{k=0}^{\infty} \delta_{k-1} \left(\frac{R}{z} \right)^k$ <p>All quantities of δ_{k-1} are determined by formula [51]</p>
<p>12. Circle of radius r with N number of radial cracks</p>	 <p> $z = r \gamma_{1,1} \xi \sum_{n=0}^{2N} \Pi_n \xi^{-n}$ </p> <p>The quantities of Π_n are taken by formula [51]</p>	$\xi = \chi(z) = \frac{z}{r} \delta_{-1} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{r}{z} \right)^k E_n$ <p>All quantities of E_n are determined by formula [51]</p>

Table № 1.1

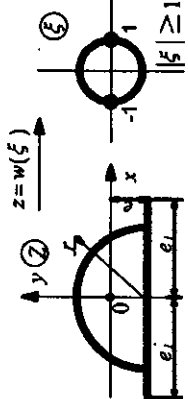
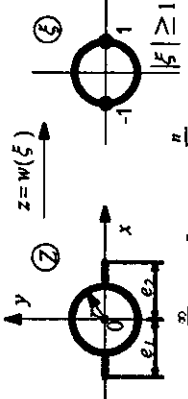
<p>13. Semidisk of radius r with two cracks</p>	 <p> $e = \frac{2r}{\pi}$ $z = ie + A \xi \sum \varepsilon_n \xi^{-n}$ The quantities of ε_n are determined by formula [51] </p>	$\xi = \chi(z) = \frac{z - ie}{A} x$ $x \sum_{n=0}^{\infty} q_n \left(\frac{A}{z - ie} \right)^n$ <p>All quantities of q_n are determined by formula [51]</p>
<p>14. Circle of radius r with two cracks of different length</p>	 <p> $z = r \xi \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n \xi^{-n}; \lambda_n = \sum_{k=n-2, E}^n \delta_k \gamma_{n-k} \left(\frac{n}{2} \right)$ The quantities of δ_k and γ_j are determined by formula [51] </p>	$\xi = \chi(z) = \frac{z}{r} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{r}{z} \right)^n E_n$ $E_n = \sum_{k=n-2, E}^n h_k g_{n-k} \left(\frac{n}{2} \right)$ <p>All quantities of h_k and g_j are determined by formula [51]</p>

Table № 1.1

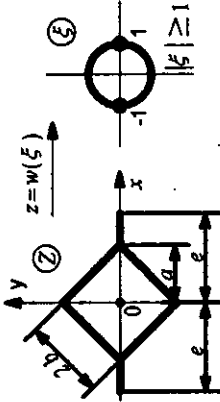
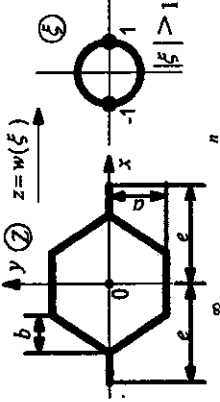
<p>15. Square with two cracks</p>	 <p> $z = A \xi \prod_{n=0}^{\infty} \xi^{-n}; \prod_k = \sum_{n=0}^k \gamma_{n-1} T_{k-n}$ All quantities of T_j are determined by formula </p>	$\xi = \chi(z) = \frac{z}{A} \sum_{n=0}^{\infty} V_n \left(\frac{A}{z}\right)^n$ $V_n = \sum_{k=0}^n H_k \alpha_{\nu-k} \frac{\nu-k}{4}$ <p>The quantities of H_k are defined by formula [3,48] The values of a_n are taken from in table № 1</p>
<p>16. Right hexagon with two cracks</p>	 <p> $z = A \xi \prod_{n=0}^{\infty} \xi^{-n}; \prod_k = \sum_{n=0}^k \gamma_{k-1} T_{n-k}$ All coefficients of T_j are determined by formula [51] </p>	$\xi = \chi(z) = \frac{z}{A} \sum_{n=0}^{\infty} V_n \left(\frac{A}{z}\right)^n$ $V_n = \sum_{k=0}^n H_k \alpha_{\nu-k} \frac{\nu-k}{6}$ <p>The quantities of H_k are defined by formula [51] The values of a_n are taken from in table № 1.1</p>

Table № 1.1

<p>17. Rectangle with the sides a and b</p>	<p> $z = A \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n \xi^{-2n}$; $A = \frac{a+b}{2}$; $a/b = 5$ $q_0 = 1$; $q_1 = -0,643$; $q_2 = -0,098$; $q_3 = -0,038$; $q_4 = -0,011$ </p>	$\xi = \chi(z) = \frac{z}{A} \sum a_n \left(\frac{A}{z}\right)^{2n}$ <p>The quantities of a_n by [51]</p>
<p>18. Trapezoid</p>	<p> $z = A \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n \xi^{-n}$ $\varepsilon_0 = 1$; $\varepsilon_1 = 0,0086$; $\varepsilon_2 = 0,0167$; $\varepsilon_3 = 0,0583$; $\varepsilon_4 = 0,1405$; $\varepsilon_5 = -0,109$ </p>	$\xi = \chi(z) = \frac{z}{A} \sum a_n \left(\frac{A}{z}\right)^n$ <p> $a_0 = 1$; $a_1 = -\varepsilon$; $a_2 = -\varepsilon^2$ $a_3 = -\varepsilon^2 - \varepsilon^3$; $a_4 = -3\varepsilon^3$ $a_5 = -2\varepsilon^3$ $0 \leq \varepsilon \leq \frac{1}{4}$ </p>

The values of the coefficients $a_n^{(k)}$

Table №1.2

k	n	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1	$2a_0a_2 + a_1^2$	$3a_0^2a_1 + 3a_0a_2 + 3a_0a_1^2$	$4a_0^3a_1 + 4a_0^3a_2 + 6a_0^2a_1^2$	$5a_0^4a_1 + 5a_0^4a_2 + 10a_0^3a_1^2$	$6a_0^5a_1 + 6a_0^5a_2 + 15a_0^4a_1^2$	$7a_0^6a_1 + 7a_0^6a_2 + 21a_0^5a_1^2$	$8a_0^7a_1 + 8a_0^7a_2 + 24a_0^6a_1^2$	$9a_0^8a_1 + 9a_0^8a_2$	$10a_0^9a_1 + 10a_0^9a_2$
3	2	$2a_0a_3 + 2a_1a_2 + a_1^2$	$3a_0^2a_3 + 4a_0a_1a_2 + a_1^3$	$4a_0^3a_3 + 10a_0^2a_1a_2 + 4a_0a_1^3$	$5a_0^4a_3 + 18a_0^3a_1a_2 + 10a_0^2a_1^3$	$6a_0^5a_3 + 28a_0^4a_1a_2 + 20a_0^3a_1^3$	$7a_0^6a_3 + 40a_0^5a_1a_2 + 35a_0^4a_1^3$	$8a_0^7a_3 + 54a_0^6a_1a_2 + 56a_0^5a_1^3$	$9a_0^8a_3 + 70a_0^7a_1a_2 + 84a_0^6a_1^3$	$10a_0^9a_3 + 88a_0^8a_1a_2 + 120a_0^7a_1^3$
4	3	$2a_0^4a_4 + 2a_1a_3 + a_2^2$	$3a_0^2a_4 + 6a_0a_1a_3 + 3a_1^2a_2 + 3a_0a_2^2$	$4a_0^3a_4 + 12a_0^2a_1a_3 + 30a_0^2a_1^2a_2 + 10a_0^3a_2^2 + 5a_0a_1^4$	$5a_0^4a_4 + 20a_0^3a_1a_3 + 30a_0^2a_1^2a_2 + 10a_0^3a_2^2 + 5a_0a_1^4$	$6a_0^5a_4 + 30a_0^4a_1a_3 + 60a_0^3a_1^2a_2 + 15a_0^4a_2^2 + 15a_0^2a_1^4$	$7a_0^6a_4 + 42a_0^5a_1a_3 + 105a_0^4a_1^2a_2 + 21a_0^5a_2^2 + 35a_0^3a_1^4$	$8a_0^7a_4 + 56a_0^6a_1a_3 + 170a_0^5a_1^2a_2 + 28a_0^6a_2^2 + 76a_0^4a_1^4$	$9a_0^8a_4 + 72a_0^7a_1a_3 + 252a_0^6a_1^2a_2 + 132a_0^7a_2^2 + 36a_0^5a_1^4$	$10a_0^9a_4 + 90a_0^8a_1a_3 + 358a_0^7a_1^2a_2 + 216a_0^8a_2^2 + 45a_0^6a_1^4$

М. Т. Д.

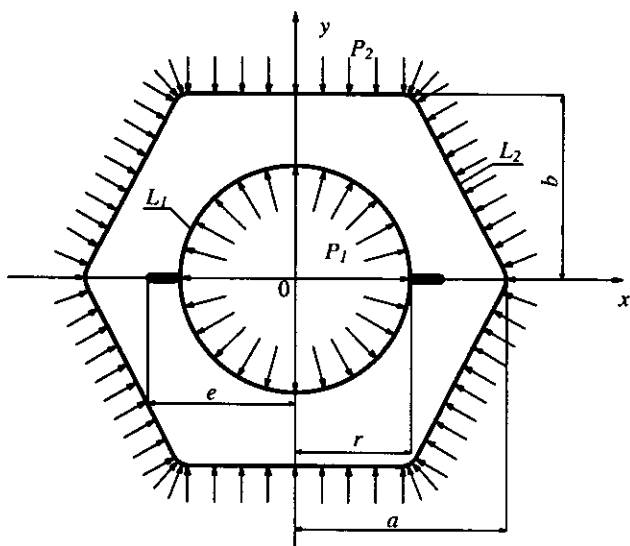


Fig. 1.1.

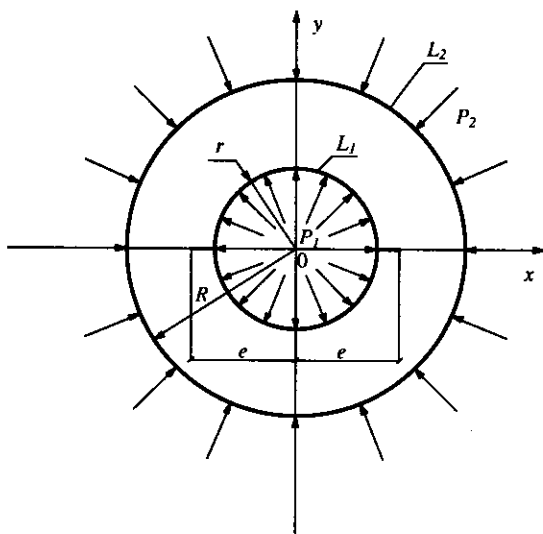


Fig. 1.2.

§ 1.2. Stress state of a polygonal plate possessing a central annular hole and two linear cracks in the small physical non-linear condition.

As it was noticed in § 1.1. if we take into account the series (I.1.58) of the stress function F with respect to the small parameter in differential equation (I.1.51), for the first three approximation (zero, first and second) we get the following differential equations [38,53]

$$\Delta\Delta F^{(0)} = 0 \quad (\text{I.2.1})$$

$$\Delta\Delta F^{(1)} + L_1[F^{(0)}] = 0 \quad (\text{I.2.2})$$

$$\Delta\Delta F^{(2)} + L_2[F^{(0)}, F^{(1)}] = 0 \quad (\text{I.2.3})$$

Here $L_1[F^{(0)}]$, $L_2[F^{(0)}, F^{(1)}]$ are non-linear operators and defined by the following expressions:

$$\begin{aligned} L_1[F^{(0)}] = & F_{\rho\rho\rho\rho}^{(0)} \cdot \left[2 \left(F_{\rho\rho}^{(0)} - \frac{1}{\rho} F_{\rho}^{(0)} - \right. \right. \\ & \left. \left. - \frac{1}{\rho^2} F_{\theta\theta}^{(0)} \right) \cdot F_{\rho\rho}^{(0)} + \left(\frac{1}{\rho} F_{\rho}^{(0)} + \frac{1}{\rho^2} F_{\theta\theta}^{(0)} \right)^2 \right] + \\ & \frac{2}{\rho^2} F_{\rho\rho}^{(0)} \left(\frac{1}{\rho} F_{\rho}^{(0)} + \frac{1}{\rho^2} F_{\theta\theta}^{(0)} \right) \cdot F_{\rho\rho}^{(0)} + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{\rho^4} F_{\theta\theta\theta\theta}^{(0)} \cdot \left[F_{\rho\rho}^{(0)} \cdot \left(F_{\rho\rho}^{(0)} - \frac{2}{\rho} F_{\rho}^{(0)} - \frac{2}{\rho^2} F_{\theta\theta}^{(0)} \right) + \right. \\
& + 2 \left(\frac{1}{\rho} F_{\rho}^{(0)} + \frac{1}{\rho^2} F_{\theta\theta}^{(0)} \right)^2 \left. \right] + \frac{2}{\rho^2} \left(F_{\rho\rho\theta}^{(0)} \right)^2 F_{\rho\rho}^{(0)} + \\
& + \left(F_{\rho\rho\rho}^{(0)} \right)^2 \cdot 2 \left(F_{\rho\rho}^{(0)} - \frac{1}{\rho} F_{\rho}^{(0)} - \frac{1}{\rho^2} F_{\theta\theta}^{(0)} \right) + \\
& + \frac{2}{\rho^4} \cdot \left(F_{\rho\theta\theta}^{(0)} \right)^2 \cdot \left(\frac{1}{\rho} \cdot F_{\rho}^{(0)} + \frac{1}{\rho^2} \cdot F_{\theta\theta}^{(0)} \right) - \\
& - \frac{2}{\rho^6} \cdot \left(F_{\theta\theta\theta\theta}^{(0)} \right)^2 \cdot \left(F_{\rho\rho}^{(0)} - \frac{2}{\rho} \cdot F_{\rho}^{(0)} - \frac{2}{\rho^2} F_{\theta\theta}^{(0)} \right) + \\
& \frac{2}{\rho^2} \cdot F_{\rho\rho\rho}^{(0)} \cdot F_{\rho\theta\theta}^{(0)} \cdot \left(\frac{1}{\rho} \cdot F_{\rho}^{(0)} + \frac{1}{\rho^2} \cdot F_{\theta\theta}^{(0)} \right) + \\
& + \frac{2}{\rho^4} \cdot F_{\rho\rho\theta}^{(0)} \cdot F_{\theta\theta\theta}^{(0)} \cdot F_{\rho\rho}^{(0)} - \frac{2}{\rho} F_{\rho\rho\rho}^{(0)} \left[-\frac{2}{\rho} \cdot F_{\rho\rho}^{(0)} \cdot F_{\rho}^{(0)} - \right. \\
& - \frac{2}{\rho^2} \cdot F_{\rho}^{(0)} \cdot F_{\theta\theta}^{(0)} + \frac{1}{\rho^2} \cdot \left(F_{\rho}^{(0)} \right)^2 + \frac{3}{\rho^3} F_{\rho}^{(0)} \cdot F_{\theta\theta}^{(0)} \left. \right] - \\
& - \frac{2}{\rho^3} F_{\rho\rho\theta}^{(0)} \cdot F_{\rho\rho}^{(0)} \cdot F_{\rho\theta}^{(0)} + \frac{2}{\rho^3} \cdot F_{\rho\theta\theta}^{(0)} \cdot \left[\left(F_{\rho,\rho}^{(0)} \right)^2 - \frac{2}{\rho} \cdot F_{\rho}^{(0)} F_{\rho\rho}^{(0)} + \right. \\
& + \frac{2}{\rho^3} F_{\rho}^{(0)} \cdot F_{\theta\theta}^{(0)} - \frac{2}{\rho^4} \cdot \left(F_{\theta\theta}^{(0)} \right)^2 - \frac{2}{\rho^2} F_{\rho\rho}^{(0)} \cdot F_{\theta\theta}^{(0)} \left. \right] + \\
& + \frac{2}{\rho^4} \cdot F_{\theta\theta\theta}^{(0)} \cdot \left[-\frac{2}{\rho} \cdot F_{\rho\rho}^{(0)} \cdot F_{\rho\theta}^{(0)} + F_{\rho\rho}^{(0)} \left(\frac{1}{\rho^2} \cdot \Phi_{\theta\theta}^{(0)} + \frac{1}{\rho} \cdot \Phi_{\rho}^{(1)} \right) \right] +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{4}{\rho^2} \cdot F_{\rho}^{(0)} \cdot F_{\rho\rho}^{(0)} + \frac{4}{\rho^3} \cdot F_{\rho\theta}^{(0)} \cdot F_{\theta\theta}^{(0)} \Big] + \\
& + \frac{1}{\rho^2} (F_{\rho\rho}^{(0)})^3 - \frac{3}{\rho^3} \cdot F_{\rho}^{(0)} \cdot (F_{\rho\rho}^{(0)})^2 + \frac{2}{\rho^4} F_{\rho\rho}^{(0)} \cdot (F_{\rho}^{(0)})^2 - \\
& - \frac{4}{\rho^4} \cdot (F_{\rho\rho}^{(0)})^2 \cdot F_{\theta\theta}^{(0)} - \frac{2}{\rho^4} \cdot F_{\rho\rho}^{(0)} \cdot (F_{\rho\theta}^{(0)})^2 + \frac{6}{\rho^5} \cdot F_{\rho}^{(0)} \cdot F_{\rho\rho}^{(0)} \cdot F_{\theta\theta}^{(0)} + \\
& + \frac{4}{\rho^5} \cdot F_{\rho}^{(0)} \cdot (F_{\rho,\theta}^{(0)})^2 + \frac{4}{\rho^6} F_{\rho\rho}^{(0)} (F_{\theta\theta}^{(0)})^2 + \frac{2}{\rho^6} \cdot (F_{\rho}^{(0)})^2 \cdot F_{\theta\theta}^{(0)} + \\
& + \frac{4}{\rho^8} \cdot (F_{\theta\theta}^{(0)})^3 + \frac{4}{\rho^6} \cdot (F_{\rho\theta}^{(0)})^2 \cdot F_{\theta\theta}^{(0)} + \frac{6}{\rho^7} \cdot F_{\rho}^{(0)} \cdot (F_{\theta\theta}^{(0)})^2; \\
L_2[F^{(0)}, F^{(1)}] = & \frac{2}{3} [\Delta\Phi^{(0)} \cdot \Delta F^{(1)} + \Phi^{(0)} \cdot \Delta\Delta F^{(1)} + \\
& + 2\Phi_{\rho}^{(0)} (\Delta F^{(1)})_{\rho} + 2\Phi_{\theta}^{(0)} (\Delta F^{(1)})_{\theta} + \Delta\Phi^{(1)} \cdot \Delta F^{(0)} + \\
& + 2\Phi_{\rho}^{(1)} (\Delta F^{(0)})_{\rho} + 2\Phi_{\theta}^{(1)} (\Delta F^{(0)})_{\theta}] - \left[\Phi_{\rho\rho}^{(0)} \left(\frac{1}{\rho^2} \cdot F_{\theta\theta}^{(1)} + \frac{1}{\rho} \cdot F_{\rho}^{(1)} \right) + \right. \\
& + \Phi_{\rho\rho}^{(1)} \left(\frac{1}{\rho^2} \cdot F_{\theta\theta}^{(0)} + \frac{1}{\rho} \cdot F_{\rho}^{(0)} \right) + F_{\rho\rho}^{(1)} \cdot \left(\frac{1}{\rho^2} \cdot \Phi_{\theta\theta}^{(0)} + \frac{1}{\rho} \cdot \Phi_{\rho}^{(0)} \right) + \\
& \left. + F_{\rho\rho}^{(0)} \cdot \left(\frac{1}{\rho^2} \cdot \Phi_{\theta\theta}^{(1)} + \frac{1}{\rho} \cdot \Phi_{\rho}^{(1)} \right) \right] + \\
& + 2 \left[\left(\frac{1}{\rho} \cdot \Phi_{\rho\theta}^{(0)} - \frac{1}{\rho^2} \cdot \Phi_{\theta}^{(0)} \right) \cdot \left(\frac{1}{\rho} \cdot F_{\rho\theta}^{(1)} - \frac{1}{\rho^2} \cdot F_{\theta}^{(1)} \right) + \right. \\
& \left. + \left(\frac{1}{\rho} \cdot \Phi_{\rho\theta}^{(1)} - \frac{1}{\rho^2} \cdot \Phi_{\theta}^{(1)} \right) \cdot \left(\frac{1}{\rho} \cdot F_{\rho\theta}^{(0)} - \frac{1}{\rho^2} \cdot F_{\theta}^{(0)} \right) \right]; \quad (I.2.4)
\end{aligned}$$

Here we make the following substitutions:

$$\begin{aligned} \Phi^{(0)}(\rho, \theta) &= F_{\rho\rho}^{(0)} \cdot \left(F_{\rho\rho}^{(0)} - \frac{1}{\rho} \cdot F_{\rho}^{(0)} - \frac{1}{\rho^2} \cdot F_{\theta\theta}^{(0)} \right) + \\ &+ F_{\rho}^{(0)} \left(\frac{1}{\rho^2} \cdot F_{\rho}^{(0)} + \frac{2}{\rho^3} \cdot F_{\theta\theta}^{(0)} \right) + 3F_{\rho\theta}^{(0)} \cdot \left(\frac{1}{\rho^2} \cdot F_{\rho\theta}^{(0)} - \frac{2}{\rho^3} \cdot F_{\theta}^{(0)} \right) + \\ &+ \frac{1}{\rho^4} \left(F_{\theta\theta}^{(0)} \right)^2 + \frac{3}{\rho^4} \cdot \left(F_{\theta}^{(0)} \right)^2; \\ \Phi^{(1)}(\rho, \varphi) &= 2F_{\rho\rho}^{(0)} \cdot F_{\rho\rho}^{(1)} - \frac{1}{\rho} \left(F_{\rho\rho}^{(0)} \cdot F_{\rho}^{(1)} + F_{\rho\rho}^{(1)} \cdot F_{\rho}^{(0)} \right) + \\ &+ \frac{1}{\rho^2} \left(2F_{\rho}^{(0)} \cdot F_{\rho}^{(1)} - F_{\rho\rho}^{(0)} \cdot F_{\theta\theta}^{(1)} + F_{\rho\rho}^{(1)} \cdot F_{\theta\theta}^{(0)} + 6F_{\rho\theta}^{(0)} \cdot F_{\rho\theta}^{(1)} \right) + \\ &+ \frac{2}{\rho^3} \left(F_{\rho}^{(0)} \cdot F_{\theta\theta}^{(1)} + F_{\rho}^{(1)} \cdot F_{\theta\theta}^{(0)} - 3F_{\rho\theta}^{(1)} \cdot F_{\theta}^{(0)} - 3F_{\rho\theta}^{(0)} \cdot F_{\theta}^{(1)} \right) + \\ &+ \frac{1}{\rho^4} \cdot \left(2F_{\theta\theta}^{(0)} \cdot F_{\theta\theta}^{(1)} + 6F_{\theta}^{(0)} \cdot F_{\theta}^{(1)} \right); \end{aligned}$$

Here $F^{(0)}$ is the stress function in the zero approximation and is the stress function (Airy function) known from the linear elasticity theory for the corresponding problem. According to the papers [2,43,26,53,67] for polygonal doubly connected plates the function $F^{(0)}$ is determined by the following formula (the plate is under the inner p_1 , and external p_2 equidistributed hydrostatic pressure (fig.1.1))

$$F^{(0)} = \operatorname{Re} \left[z \cdot \varphi(z) + \int \psi(z) dz \right] \quad (\text{I.2.5})$$

Considering that in this expression the analytic function $\varphi(z)$ and $\psi(z)$ are in the form

$$\begin{aligned}\varphi(z) &= \sum_{\nu=1}^{\infty} H_1(\nu) \cdot \left(\frac{r}{z}\right)^{\nu} + \sum_{k=0}^{\infty} b_k \cdot \left(\frac{z}{A}\right)^k \\ \psi(z) &= \sum_{\nu=1}^{\infty} H_2(\nu) \cdot \left(\frac{r}{z}\right)^{\nu} + \sum_{k=0}^{\infty} B_k \cdot \left(\frac{z}{A}\right)^k\end{aligned}\quad (I.2.6)$$

we can write: (passing from variable z to polar coordinate system $(\rho; \theta)$ and considering that $z = \rho e^{i\theta}$ and $\bar{z} = \rho e^{-i\theta}$)

$$\begin{aligned}F^{(0)}(\rho; \theta) &= \sum_{k=1}^{\infty} \left[H_1(k) \cdot r^k \cdot \rho^{1-k} \cdot \varepsilon_1 \cdot \cos(1+k)\theta + \right. \\ &+ b_k \cdot A^{-k} \cdot \rho^{1+k} \cdot \varepsilon_2 \cdot \cos(k-1)\theta + H_2(1) \cdot r \cdot \ln \rho + \\ &+ H_2(k) \cdot r^k \cdot \rho^{1-k} \cdot \varepsilon_2 / (1-k) \cdot \cos(k-1)\theta + \\ &\left. + B_k \cdot A^{-k} \cdot \rho^{k+1} \cdot \frac{\varepsilon_1}{1+k} \cdot \cos(k+1)\theta \right];\end{aligned}\quad (I.2.7)$$

Here we make the following substitutions [26]

$$H_1(\nu) = \sum_{k=0}^{\nu} \alpha_k \cdot \delta_{-1}^{-k} \cdot l_{\nu-k}^{(k)}; \quad H_2(\nu) = \sum_{k=0}^{\nu} d_k \cdot \delta_{-1}^{-k} \cdot l_{\nu-k}^{(k)}$$

Here, the coefficients $l_n^{(k)}$ are found from the condition

$$l_n^{(k)} + \sum_{n_1=1}^n l_{n-n_1}^{(k)} \cdot g_{n_1}^{(k)} = 0$$

$$g_n^{(k)} = \sum_{n_1=0}^n g_{n_1}^{(k)} \cdot g_{n-n_1}^{(k-1)}, \quad g_n^{(k)} = \frac{\delta_{n-1}}{\delta_{-1}}$$

$$\alpha = \frac{e^2 + r^2}{2er}; \quad e \geq r \text{ and } \alpha \geq 1 \quad (\text{I.2.8})$$

In these expressions, the asterisk * shows that when passing to the next term in the summation signs the indices of addends change by two. $\pm e$ is a coordinate of the end points of linear crack of the inner L_1 contour (r radius circle)

$$\varepsilon = \begin{cases} 1 & \text{if } n=0 \\ 1/2 & \text{if } n \neq 0 \end{cases} \quad \varepsilon_1 = \begin{cases} 0 & \text{if } k \neq q-1; 2q-1; \dots \\ 1 & \text{if } k = q-1; 2q-1 \dots \end{cases}$$

$$\varepsilon_2 = \begin{cases} 0 & \text{if } k \neq 1; q+1; 2q+1 \dots \\ 1 & \text{if } k = 1; q+1; 2q+1 \dots \end{cases}$$

Here $q = N$ is the number of the sides of a polygon (symmetry axes). In the considered case, in the zero approximation, the boundary conditions are as follows:

- on the inner L_1 contour (r radius circle and two linear crack arising from it)

$$\sigma_{\rho}^{(0)} \Big|_{\rho=t_1} = \left[\frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial F^{(0)}}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 F^{(0)}}{\partial \theta^2} \right]_{\rho=t_1} = -P_1$$

- on the external L_2 contour (right polygon)

$$\sigma_{\rho}^{(0)} \Big|_{\rho=t_2} = \left[\frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial F^{(0)}}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 F^{(0)}}{\partial \theta^2} \right]_{\rho=t_2} = -P_2 \quad (\text{I.2.9})$$

For the next approximations (both for the first and second approximations), the boundary conditions are as follows:

$$\sigma_{\rho}^{(1)} \Big|_{\rho=t_1} = \left[\frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial F^{(1)}}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 F^{(1)}}{\partial \theta^2} \right]_{\rho=t_1} = 0$$

$$\sigma_{\rho}^{(1)} \Big|_{\rho=t_2} = \left[\frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial F^{(1)}}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 F^{(1)}}{\partial \theta^2} \right]_{\rho=t_2} = 0 \quad (\text{I.2.10})$$

In these denotation, t_1 and t_2 are the offices of the points of the contours L_j ($j=1;2$) and etc., respectively. The function $F^{(1)}$ is found from the solution of differential equation (I.2.1). The solution of differential equation (I.2.1) is found in the form of the sum of general solution $\Delta\Delta F^{(1)}=0$ of the first differential equation ($F_{gen}^{(1)}$) and the special solution ($F_{spec}^{(1)}$) of the mentioned differential equation.

$$F^{(1)} = F_{gen}^{(1)} + F_{spec}^{(1)} \quad (\text{I.2.11})$$

It is known that the general solution of the homogeneous differential equation $\Delta\Delta F^{(1)}=0$ is taken in the following way (in the general case):

$$\begin{aligned}
F_{gen.}^{(1)} = & c_1 + c_2 \rho^2 + c_3 \cdot \rho^2 \cdot \ln \rho + c_4 \cdot \ln \rho + \\
& + \left[c_5 \rho^3 + c_6 \cdot \rho^{-1} + c_7 \cdot \rho + c_8 \cdot \rho \ln \rho \right] \frac{\sin \theta}{\cos \theta} + \\
& + \sum_{m=2}^{\infty} \left[c_{m2} \cdot \rho^m + c_{m3} \cdot \rho^{2-m} + c_{m4} \rho^{-m} \right] \frac{\sin \theta}{\cos \theta} ; \quad (I.2.12)
\end{aligned}$$

For small deformations, as it is shown in the solutions [38,53] of small physical classic non-linear problems, in the first approximation for the considered problem we take the function $F^{(1)}$ in the form

$$F_{gen.}^{(1)} = c_1 \cdot \ln \rho + c_2 \cdot \rho^2 \quad (I.2.13).$$

Notice that if in the differential equation (I.1.58) we pass to polar (ρ, θ) coordinates and take appropriate derivatives, we get the following differential equation [53] for the function $F^{(1)}$.

If in differential equation (I.2.2) we take into account the expression (I.2.7) of the function $F^{(0)}$ and the operator $L [F^{(0)}]$ determined by (I.2.4), after some mathematical operations (obtaining partial derivatives with respect to variables ρ and θ , adding the some power terms of the variable ρ in a series form) the differential equation takes the form:

$$\Delta\Delta F^{(1)} = \sum_{k=1}^{\infty} \rho^{-k} \cdot V_1(k) + \sum_{k=0}^{\infty} \rho^k \cdot V_2(k) \quad (I.2.14)$$

In this equation, the quantities $V_1(k)$ and $V_2(k)$ is algebraic sum ρ same power terms of the variable p (for the fixed θ angle). As the general solution of inhomogeneous differential equation (I.2.14) is sought as the sum of special solution (special integral) of the equations (I.2.13) and (I.2.14) being general solutions of homogeneous equation $\Delta\Delta F^{(1)} = 0$, the special solution $F_{spec}^{(1)}$ is found from four -fold integration of the expression (I.2.14) in the following way [53]:

$$F_{spec}^{(1)} = \sum_{k=0}^{\infty} \rho^{-k+4} \cdot \alpha \cdot V_1(k) + \sum_{k=0}^{\infty} \beta \cdot \rho^{k+4} \cdot V_2(k) \quad (I.2.15)$$

Here

$$\alpha = \left[(4-k)^2 \cdot (2-k)^2 + \alpha_1 + \alpha_2 \right]^{-1}$$

$$\beta = \left[(k+4)^2 \cdot (2+k)^2 + \beta_1 + \beta_2 \right]^{-1}$$

$\alpha_1 = (4-k)^2 \cdot (2-k)^2 \cdot [V_1(k)]_{\theta\theta}$ here the index in bracket indicates two - fold derivative with respect to the index θ .

$\alpha_2 = [V_2(k)]_{\theta\theta\theta\theta}$ - indicates four - fold derivative.

$$\beta_1 = (k+4)^2 (2+k)^2 \cdot [V_2(k)]_{\theta\theta} \quad \beta_2 = [V_2(k)]_{\theta\theta\theta\theta} \quad (I.2.16)$$

In axi symmetric problems (for instance for concentric circle domains) $\alpha_1 = \alpha_2 = \beta_1 = \beta_2 = 0$.

Thus, the general solution of differential equation (I.2.14) is in the form (by (I.2.13) and (I.2.15)):

$$F^{(1)} = F_{gen.}^{(1)} + F_{spec.}^{(1)} = \sum_{k=0}^{\infty} \rho^{-k+4} \cdot \alpha \cdot V_1(k) + \\ + \sum_{k=0}^{\infty} \rho^{k+4} \cdot \beta \cdot V_2(k) + c_1 \cdot \ln \rho + c_2 \cdot \rho^2; \quad (I.2.17)$$

The unknown coefficients c_1 and c_2 contained in this expression are found from the boundary conditions (I.2.10) of the considered problem (stress strain state of a doubly – connected polygonal plate subjected to equidistributed inner pressure p_1 and external pressure p_2) [53].

If in the inner contour L_1 $\rho = t_1$: $\sigma_{\rho}^{(1)} = 0$

If on the external contour L_2 $\rho = t_2 = A$;

$$\sigma_{\rho}^{(1)} = 0 \quad (I.2.18).$$

If we take into account the expression (I.2.17) in these conditions (taking some derivatives we accept $\rho = t_1$ on L_1 and $\rho = A$ on A) after some simple mathematical calculations, for the coefficients c_1 and c_2 we find the following expressions:

$$\begin{aligned}
c_1 = & \sum_{k=1}^{\infty} (4-k) \cdot \alpha \cdot V_1(k) \left[-t_1^{4-k} - \frac{t_1^2}{A^2 - t_1^2} \cdot (t_1^{4-k} - A^{4-k}) \right] + \\
& + \sum_{k=1}^{\infty} (k+4) \cdot \beta \cdot V_2(k) \cdot \left[-t_1^{k+4} - \frac{t_1^2}{A^2 - t_1^2} (t_1^{k+4} - A^{k+4}) \right]; \\
c_2 = & \frac{1}{2 \cdot (A^2 - t_1^2)} \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \left[\alpha \cdot V_1(k) \cdot (4-k) \cdot (t_1^{4-k} - A^{4-k}) + \right. \\
& \left. + \beta \cdot V_2(k) \cdot (k+4) \cdot (t_1^{k+4} - A^{k+4}) \right]; \quad (I.2.19)
\end{aligned}$$

It we take into account the found expressions of coefficients, i.e. (I.2.19) and (I.2.17), for the considered problem in a first approximation the stress function $F^{(1)}(\rho, \theta)$ is determined by the following expression [53]:

$$\begin{aligned}
F^{(1)}(\rho, \theta) = & \sum_{k=1}^{\infty} \rho^{4-k} \cdot \alpha \cdot V_1(k) + \sum_{k=1}^{\infty} \rho^{k+4} \cdot \beta \cdot V_2(k) + \\
& + \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} (4-k) \cdot \alpha \cdot V_1(k) \cdot \left[-t_1^{4-k} - \frac{t_1^2}{A^2 - t_1^2} (t_1^{4-k} - A^{4-k}) \right] + \right. \\
& \left. + \sum_{k=1}^{\infty} (k+4) \cdot \beta \cdot V_2(k) \cdot \left[-t_1^{k+4} - \frac{t_1^2}{A^2 - t_1^2} (t_1^{k+4} - A^{k+4}) \right] \right\} \cdot \ln \rho + \\
& + \frac{1}{2(A^2 - t_1^2)} \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \left[\alpha \cdot V_1(k) \cdot (4-k) \cdot (t_1^{4-k} - A^{4-k}) + \right. \\
& \left. + \beta \cdot V_2(k) \cdot (k+4) \cdot (t_1^{k+4} - A^{k+4}) \right] \cdot \rho^2; \quad (1.2.20)
\end{aligned}$$

The coefficient A contained in the expressions (I.2.19) and (I.2.20) is a parameter characterizing the form of the external contour L_2 . This, for the right polygonal contours

$$A = \frac{a}{1+m} \quad m = \frac{1}{(N-1)^2} = \frac{a-b}{a+b} \quad (\text{I.2.21})$$

Here N is in number of the sides (the number of symmetry axes), a is the radius of the circle drawn to the exterior of the polygon, b is radius of the circle drawn to the interior of this polygon. If the considered contour is an ellipse, then a and b are big and small semi -axes of the ellipse (in this case we take $N = 2$).

Dividing the value of the stress function found from the second approximation into $F^{(1)}(x, y) = F^{(1)}(\rho, \theta)$, similarly we found the stress function $F^{(2)}(x, y) = F^{(2)}(\rho, \theta)$ for the second approximation and etc. After founding the expression

$F(\rho, \theta, \lambda) = F^{(0)}(\rho, \theta) + \lambda F^{(1)}(\rho, \theta) + \lambda^2 \cdot F^{(2)}(\rho, \theta) + \dots$ (i.e. if the functions $F^{(0)}$, $F^{(1)}$, $F^{(2)}$ contained in this expression are known), for the stress components σ_ρ and σ_θ we get the following expressions in the form of the series:

$$\sigma_\rho = \frac{1}{\rho} \frac{\partial F}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 F}{\partial \theta^2} = \sigma_\rho^{(0)} + \lambda \cdot \sigma_\rho^{(1)} + \lambda^2 \cdot \sigma_\rho^{(2)} + \dots$$

$$\sigma_{\theta} = \frac{\partial^2 F}{\partial \rho^2} = \sigma_{\theta}^{(0)} + \lambda \cdot \sigma_{\theta}^{(1)} + \lambda^2 \cdot \sigma_{\theta}^{(2)} + \dots$$

$$\tau_{\rho\theta} = \frac{1}{\rho^2} \cdot \frac{\partial F}{\partial \theta} - \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial^2 F}{\partial \rho \partial \theta} = \tau_{\rho\theta}^{(0)} + \lambda \cdot \tau_{\rho\theta}^{(1)} + \lambda^2 \cdot \tau_{\rho\theta}^{(2)} + \dots \quad (1.2.22)$$

The obtained general solution is demonstrated by the numerical examples.

1. Stress state of a cylinder made of small physical nonlinear material and possessing an annular hole and two linear cracks.

In linear elasticity theory, this problem was solved completely (within Hooke's law). Therefore here we give only the results obtained in [53].

The doubly connected domain of the cylinder is bounded from exterior by a R radius circle and from interior by r radius circle and a contour with two linear cracks arising from it (fig. 1.2).

In this case, the analytic functions $\varphi(z)$ and $\psi(z)$ are taken as:

$$\varphi(z) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cdot \xi_1^{-k} + \sum_{k=0}^{\infty} \beta_k \cdot \xi_1^{-k} \left(\frac{z}{k} \right)^k$$

$$\psi(z) = \sum_{k=1}^{\infty} d_k \cdot \xi_1^{-k} + \sum_{k=0}^{\infty} c_k \left(\frac{z}{k}\right)^k \quad (I.2.23).$$

The ratio of main measures of the cross section is given in two variants:

Variant: I $r/R = 0,5$; $e = 0,6R$; $l = 0,1R$

Variant II: $r/R = 0,7$; $e = 0,8R$; $l = 0,1R$

The stresses $\sigma_{\rho}^{(0)}$ and $\sigma_{\theta}^{(0)}$ found from characteristic points of the section (as tangential stresses $\tau_{\rho\theta}$ are small we accept $\tau_{\rho\theta} = 0$) are given in the following table: (table №1.4)

At the most dangerous point of the section (at the end points of the cracks: $z = \pm e$), for the stress intensity factor K_1 we get the following estimates $10K_1/p_1\sqrt{l}$

For variant I 7,04

For variant II 11,68

The following estimates are found for critical value of inner pressure $p_1 = p$ (i.e. destruction of the body minimal stress for elongation of cracks):

For variant I $P_{kr} = 1,46[\sigma_b]$ For variant $P_{kr} = 0,883[\sigma_b]$

Technical ultimate strength $[\sigma_b]$ (maximum stress of the material) is given in the table for many materials. (see table №1.3)

After finding the functions $\varphi(z)$ and $\psi(z)$, within the linear elasticity theory (in zero approximation), the stress function $F^{(0)}(x, y) = F^{(0)}(\rho, \theta)$ is found by the formula (I.2.7) mentioned above. Then $F^{(1)}(\rho, \theta)$ is found from the expression (I.2.20) of the stress function in a first approximation. According to the found expression of the stress function $F^{(1)}(\rho, \theta)$, the stress σ_θ found

Admissible stress $[\sigma_b]$ kQ/sm²

Table №1.3

Material	Stretch	Compression
Cast iron	280-800	1200-1500
Steel	1400-1500	
Copper	300-1200	
Alloy	700-1400	
Bronze	600-1200	
Aluminum	300-800	
Duralluminium	800-1500	
Textolit	300-400	
Along fiber	70-100	
Along fiber width	15-25	
Concrete	1-7	10-90

from the characteristic points of the section by means of formulae (I.2.22) is given in the table (see table 1.4, fig.1.3).

Table 1.4

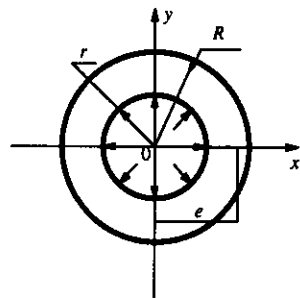
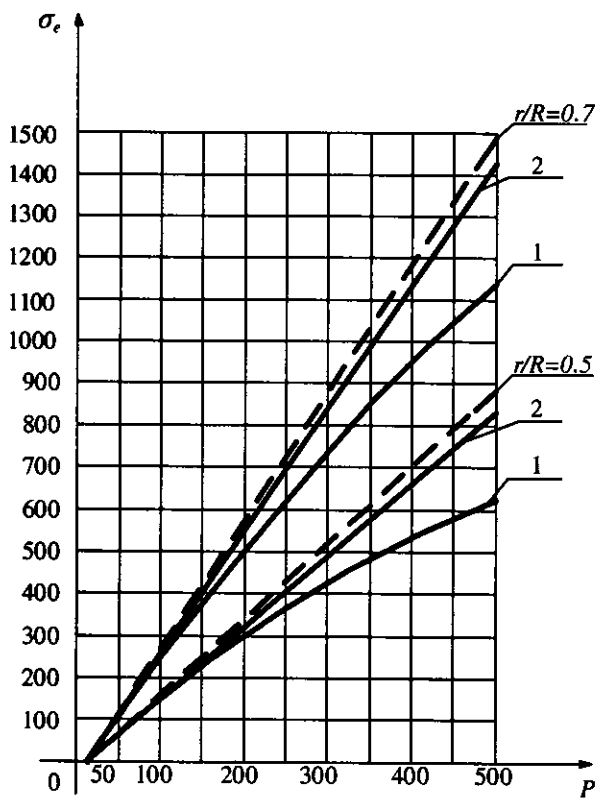
Stress concentration coefficients σ_{θ} / p

Variants	P	Linear statement	Pure copper $\lambda = 0,255 \cdot 10^{-6}$	Alluminium silver $\lambda = 0,053 \cdot 10^{-6}$	Open heath steel $\lambda = 0,032 \cdot 10^{-6}$
I $r/R = 0,5$	20	1,76	1,759102	1,7598317	1,7593984
	50	1,76	1,7549383	1,758948	1,759365
	100	1,76	1,73975	1,755792	1,75746
	200	1,76	1,6791012	1,74317	1,74984
	500	1,76	1,253825	1,654795	1,6965
II $r/R = 0,7$	20	2,92	2,918793	2,419738	2,919842
	50	2,92	2,912123	2,91836	2,91901
	100	2,92	2,88848	2,91345	2,916065
	200	2,92	2,79393	2,8938	2,9042
	500	2,92	2,23205	2,75623	2,82112
$e/R = 0,8$	20	2,92	2,918793	2,419738	2,919842
	50	2,92	2,912123	2,91836	2,91901
	100	2,92	2,88848	2,91345	2,916065
	200	2,92	2,79393	2,8938	2,9042
	500	2,92	2,23205	2,75623	2,82112

Stress intensity (by $10K_1/P\sqrt{l}$) and critical value of stress
 (P_{kr}) (Annular cylinder)

Table №1.5

Variant	Pressure P	Pure copper $\lambda = 0.255 \cdot 10^{-6}$		Open heath steel	
		K_1	Critical pressure (P_{kr})	K_1	Critical load P_{kr}
I $r/R = 0.5$ $e/R = 0.6$	100	6.958	$1.48[\sigma_b]$	7.024	1.467
	200	6.726	1.535	6.999	$[\sigma_b]$
	500	5.015	$[\sigma_b]$ $2.05[\sigma_b]$	6.792	1.473 $[\sigma_b]$ $1.51[\sigma_b]$
II $r/R = 0.7$ $e/R = 0.8$	100	11.55	0.892	11.66	0.884
	200	2	$[\sigma_b]$	4	$[\sigma_b]$
	500	22.17	0.922	11.61	0.887
		6	$[\sigma_b]$	6	$[\sigma_b]$
		8.928	1.155	11.28	0.914
		$[\sigma_b]$	4	$[\sigma_b]$	



Dotted line indicates linear problem solid line non-linear problem
 1) pure copper; 2) open hearth steel

Fig.1.3.

2. Stress state of a hexagonal plate with annular hole and two linear cracks in physical non-linear statement.

The solution of this problem in linear elasticity theory is known from references [26,53].

The stresses $(\sigma_{\theta}^{(0)})$ found at any point of a hexagonal plate are calculated for different variants (for different values of the ratio of cross section measures) and is given in the table. According to the stresses found at the end points of linear cracks, the stress intensity factor (K_1) and critical value p_{kr} of inner pressure are found and given for each variant at the end of the table №1.7. The known expression of the function is taken into account in differential equation (I.2.14) obtained for the solution of physical non linear problem and after solving, (we omit intermediate mathematical calculations) as in the linear problem, the stress for different values of inner pressure p_{kr} at the most dangerous points $F^{(0)}(x, y) = F^{(0)}(\rho, \theta)$ of the section are found and given in the form of a table.

At the vertices of the cracks we get the following expressions for the stresses.

Variant I $r/A = 0,5$; $e/A = 0,6$; $m = 0,04$; $b = 1,922$

$$\sigma_{\theta}/p = \sigma_{\theta/p}^{(0)} + \alpha \sigma_{\theta}^{(1)}/p = 1,68 - 9,2 \cdot \alpha \cdot p^2$$

Variant II $r/A = 0,7$; $e/A = 0,8$; $m = 0,04$; $b = 1,37r$

$$\sigma_{\theta}/p = \sigma_{\theta/p}^{(0)} + \alpha\sigma_{\theta}^{(1)}/p = 3,21 - 14,62 \cdot \alpha \cdot p^2$$

Here $\alpha = \lambda = \frac{g_2 k}{(3K + G)G^2} = 0,225 \cdot 10^{-6} \text{ sm}^4/\text{kQ}^2$ for pure

copper.

$\alpha = \lambda = 0,032 \cdot 10^{-6} \text{ sm}^4/\text{kg}^2$ for open – hearth steel.

It is seen from numerical results of both sample problems that in physical non-linear statement, the maximal values of stresses obtained from linear statement diminish (peak points of stress diagrams are smoothed).

We can see it from the given diagrams and

-figures for appropriate problems. (see fig. 1.1).

Stress concentrain of a hexogonal plate.

Table №1.6

Variant	P	Linear theory σ_{θ}/p	Non linear theory		
			Pure copper $\lambda = 0,255 \cdot 10^{-6}$	Alluminium silver $\lambda = 0,053 \cdot 10^{-6}$	Open heath steel $\lambda = 0,032 \cdot 10^{-6}$
I $r/A = 0,5$ $e/A = 0,6$	20	1,68	1,679185	1,6659	1,6798984
	50	1,68	1,67494	1,6654	1,6793648
	100	1,68	1,65975	1,6636	1,67746
	200	1,68	1,59901	1,6566	1,669835
	500	1,68	1,17384	1,607	1,61648
II $r/A = 0,7$ $e/A = 0,8$	20	3.21	3.20874	-2,66588	-2,66593
	50	3.21	3.20212	-2,6652	-2,6655
	100	3.21	3.168482	-2,6515	-2,6629
	200	3.21	3.083928	-2,654	-2,6587
	500	3.21	2.52205	-2,591	-2,2106

Stress intensity coefficient ($10K_1 / P\sqrt{l}$) and critical value of load (P_{kr}) (hexagon cylinder)

Table №1.7

Variant	Pressure P	Pure copper $\lambda = 0.255 \cdot 10^{-6}$		Open heath steel	
		K_1	Critical pressure (P_{kr})	K_1	Critical load P_{kr}
I $r/R = 0.5$ $e/R = 0.6$	100	6.624	$1.56[\sigma_b]$	6.708	$1.5386[\sigma_b]$
	200	6.352	$1.623[\sigma_b]$	6.6792	$1.543[\sigma_b]$
	500	4.4	$2.343[\sigma_b]$	6.464	$1.595[\sigma_b]$
II $r/R = 0.7$ $e/R = 0.8$	100	12.68	$0.803[\sigma_b]$	12.824	$0.804[\sigma_b]$
	200	12.24	$0.842[\sigma_b]$	12.776	$0.807[\sigma_b]$
	500	11.92	$0.865[\sigma_b]$	12.44	$0.829[\sigma_b]$

3. Stress state of a thick - walled pipe (Lame problem) in small physical non – linear statement.

In classic elasticity theory (in problems linear statement), the following formula is obtained for the stress function $F^{(0)}$ [26;53].

$$F^{(0)}(\rho, \theta) = \beta_1 \cdot \frac{\rho^2}{r^2} + d_1 \cdot r \cdot \ln \rho; \quad (1)$$

When the pipe is under the inner p_1 and external hydrostatic pressure p_2 , the coefficients β_1 and d_1 are determined by the following expressions (see [26;53]):

$$\beta_1 = \frac{r}{2} \cdot \frac{p_1 \cdot r^2 - p_2 \cdot R^2}{R^2 - r^2}; \quad d_1 = \frac{r^2 R^2 \cdot (p_2 - p_1)}{(R^2 - r^2) \cdot r}; \quad (2)$$

Here if we write the stress function $F^{(0)}$ in formula (1), we get

$$F^{(0)}(\rho, \theta) = \frac{r^2 R^2 \cdot (p_2 - p_1)}{R^2 - r^2} \cdot \ln \rho + \frac{1}{2} \cdot \frac{p_1 \cdot r^2 - p_2 \cdot R^2}{R^2 - r^2} \rho^2; \quad (3)$$

If we this expression in the expression (I.2.20) obtained for the stress function $F^{(1)}$, we get:

$$\begin{aligned}
F^{(1)}(\rho, \theta) = & \frac{r^4 R^4}{2(R^2 - r^2)} \cdot (p_2 - p_1)^2 \cdot \left\{ \frac{1}{r^2 R^2} \left[\frac{R^2 + r \cdot R + r^2}{R^2 - r^2} (p_2 - p_1) - \right. \right. \\
& - (R^2 + r^2) (p_1 r^2 - p_2 R^2) \left. \right] \cdot \ln \rho + \frac{1}{r^2 R^2} \left[(p_1 r^2 - p_2 R^2) - \right. \\
& \left. (R^2 + r^2) (p_2 - p_1) \right] \cdot \rho^2 - \frac{1}{2} (p_1 r^2 - p_2 R^2) \cdot \frac{1}{\rho^2} + \\
& \left. + \frac{1}{4} r^2 R^2 (p_2 - p_1) \cdot \frac{1}{\rho^4} \right\}; \quad (4)
\end{aligned}$$

The obtained expression completely coincides with the expressions obtained by **Truspal L.A** [] and **Indra F.** [124]. The measures of thick - walled pipes (the ratio of radius r of linear circle and radius R of internal circle were taken in two variants (see table №1.8)

Pure copper, aluminum, bronze and open - heath steel were chosen for pipe's materials.

The following expressions are obtained for stress concentration on the inner circle for the considered problem (Lame problem)

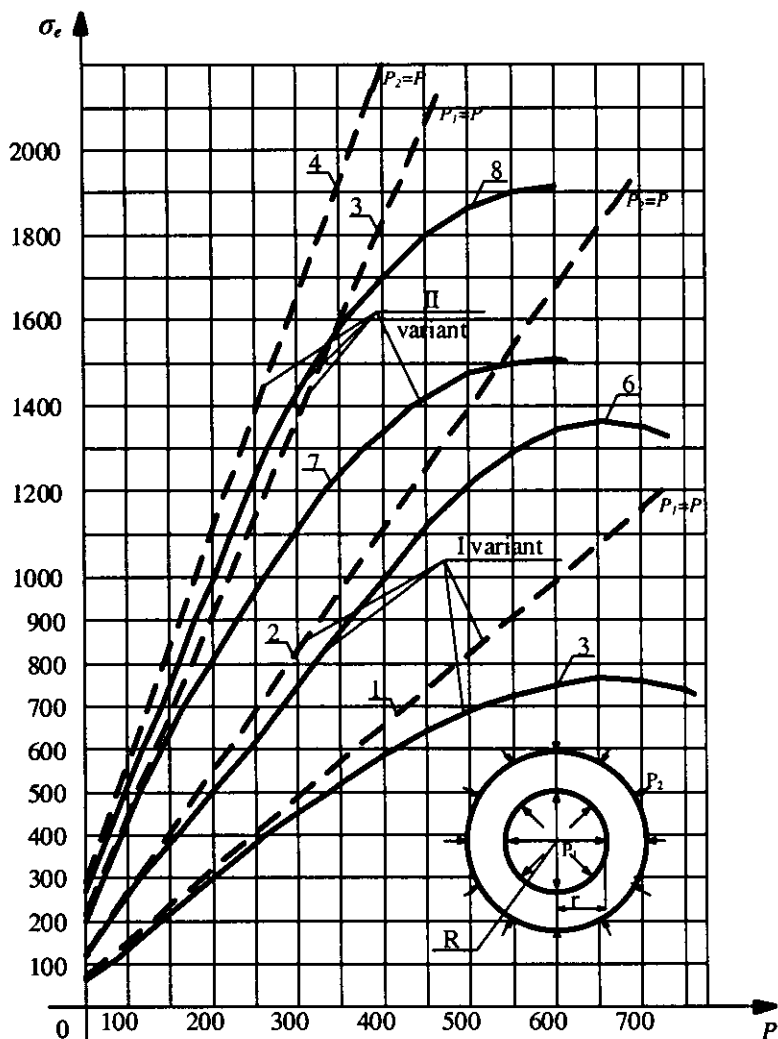
$$\text{Variant I. } \sigma_{\theta}/p = 1,666 - 4,444 \cdot \lambda \cdot p^2; \quad p_1 = p$$

$$\text{Variant II } \sigma_{\theta}/p = 4,55 - 25,3 \cdot \lambda \cdot p^2; \quad p_1 = p$$

The stresses σ_{θ} calculated for different values $20 \leq p \leq 500$ of inner pressure (p_1) by means of those formulae are given in graphic form and visually (see fig. 1.4.) in both variants. (see fig.1.4).

In the graph, solid line indicates non – linear problem, the punctured line the problem in linear statement.

It is seen from tables that for the values of inner pressure p below 100, the stresses σ_{θ} for 0,1% (diminish), for the values $p \geq 100$ we see that in linear and non – linear statement, the difference of stresses σ_{θ} obtained from the solution of the problem is great.



I variant: $r/R = 0,5$; II variant: $r/R = 0,8$;

Lines 1,2,3,4 indicate the linear theory.

Lines 5,6,7,8 nonlinear theory.

Fig.1.4.

Table №1.8

Variants	P	Linear theory	non-linear theory		
			Pure copper $\lambda = 0,255 \cdot 10^{-6}$	aluminium $\lambda = 0,053 \cdot 10^{-6}$	Open steel $\lambda = 0,032 \cdot 10^{-6}$
$R/r = 2$	20	1,666	1,6656	1,6659	1,66594
	50	1,666	1,6632	1,6654	1,6656
	100	1,666	1,6547	1,6636	1,6646
	200	1,666	1,6207	1,6566	1,6603
	500	1,666	1,3827	1,607	1,6304
$R/r = 1,25$	20	4,555	4,5524	4,5545	4,554
	50	4,555	4,5389	4,5515	4,553
	100	4,555	4,4905	4,5341	4,5469
	200	4,555	4,2969	4,5014	4,5226
	500	4,555	2,942	4,2198	4,352

§1.3 Stress state of doubly – connected polygonal plate in arbitrary physical non-linear statement.

If we take into account the expression (I.1.58) of stress function $F(x, y) = F(\rho, \theta)$ in differential equation (I.1.48) in the form of series, equate the sums of the summands with respect to the power of small parameter α to zero, for the first these three powers (zero, first and second) we get the following system of differential equations (here $\lambda_{ij} = \alpha_{ij}$)

$$\Delta\Delta F^{(0)} = 0 \quad (\text{I.3.1})$$

$$\begin{aligned} & (\alpha_{11} + \alpha_{12}) \cdot \Delta\Delta F^{(1)} + \alpha_{21} \cdot \Delta \left[(\Delta F^{(0)})^2 \right] + \\ & + \alpha_{22} \left[\Delta \left(F_{,ij}^{(0)} \cdot F_{,ij}^{(0)} \right) + 2 \left(\Delta F^{(0)} \cdot F_{,ij}^{(0)} \right)_{,ij} \right] = 0 \end{aligned} \quad (\text{I.3.2})$$

$$\begin{aligned} & (\alpha_{11} + \alpha_{12}) \cdot \Delta\Delta F^{(2)} + 2\alpha_{21} \cdot \Delta \left(\Delta F^{(0)} \cdot \Delta F^{(1)} \right) + \\ & + \alpha_{22} \left[2\Delta \left(F_{,ij}^{(0)} \cdot F_{,ij}^{(1)} \right) + \left(\Delta F^{(0)} \cdot F_{,ij}^{(1)} + F_{,ij}^{(0)} \cdot \Delta F^{(1)} \right)_{,ij} \right] + \\ & + \alpha_{31} \left[\Delta \left(\Delta F^{(0)} \right)^3 \right] + \alpha_{32} \left[F_{,ij}^{(0)} \cdot F_{,ij}^{(0)} \cdot F_{,kn}^{(0)} \right]_{,kn} + \\ & + \alpha_{33} \left\{ \Delta \left(F_{,ij}^{(0)} \cdot F_{,ij}^{(0)} \cdot \Delta F^{(0)} \right) + \left[\left(\Delta F^{(0)} \right)^2 \cdot F_{,ij}^{(0)} \right]_{,ij} \right\} = 0 \end{aligned} \quad (\text{I.3.3})$$

In these equations, the coefficients α_{ij} ($i = 1; 2; j = 1; 2$) are the constants characterizing the physical properties of the materials.

As we have said above, coma (,) denotes a partial derivative ; all the indices i, j, k, n get the values 1 and 2.

For the considered problem, the stress function $F^{(0)}$ is known from the linear elasticity theory and is determined by expression (I.2.7) [26;53].

It we get all necessary derivatives of stress function $F^{(0)}(x, y) = F^{(0)}(\rho, \theta)$ from expression (I.2.2) and write them in differential equations (I.3.2) and (I.3.3), after some mathematical calculations (writing together the negative and positive power terms of the variable ρ , for the fixed values of θ), we get the following fourth order differential equations.

$$\Delta\Delta F^{(1)} + \frac{\alpha_{21}}{\alpha_{11} + \alpha_{12}} \cdot f_1(\rho, \theta) + \frac{\alpha_{22}}{\alpha_{11} + \alpha_{12}} [f_2(\rho, \theta) + 2f_3(\rho, \theta)] = 0 \quad (I.3.4)$$

$$\begin{aligned} \Delta\Delta F^{(2)} + \frac{2\alpha_{21}}{\alpha_{11} + \alpha_{12}} \cdot f_4(\rho, \theta) + \\ + \frac{\alpha_{22}}{\alpha_{11} + \alpha_{12}} [f_2(\rho, \theta) + f_6(\rho, \theta)] + \\ + \frac{\alpha_{31}}{\alpha_{11} + \alpha_{12}} \cdot f_7(\rho, \theta) + \frac{\alpha_{32}}{\alpha_{11} + \alpha_{12}} \cdot f_5(\rho, \theta) + \\ + \frac{\alpha_{33}}{\alpha_{11} + \alpha_{12}} \cdot [f_9(\rho, \theta) + f_{10}(\rho, \theta)] = 0 \quad (I.3.5) \end{aligned}$$

In these equations we make the following substitutions

$$\begin{aligned}
 f_1(\rho, \theta) = & 2 \cdot (\Delta F^{(0)})_{\rho\rho} \cdot \Delta F^{(0)} + 2 \cdot [(\Delta F^{(0)})_{\rho}]^2 + \\
 & + \frac{2}{\rho} \cdot \Delta F^{(0)} \cdot (\Delta F^{(0)})_{\rho} + \frac{2}{\rho^2} \cdot \Delta F^{(0)} \cdot (\Delta F^{(0)})_{\theta\theta} + \\
 & + \frac{2}{\rho^2} \cdot [(\Delta F^{(0)})_{\rho}]^2 ;
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 f_2(\rho, \theta) = & 2(F_{\rho\rho\rho}^{(0)})^2 + 2F_{\rho\rho}^{(0)} \cdot F_{\rho\rho\rho\rho}^{(1)} + \frac{2}{\rho} \cdot F_{\rho\rho}^{(0)} \cdot F_{\rho\rho\rho}^{(1)} + \\
 & + \frac{2}{\rho^2} \cdot (F_{\rho\rho\theta}^{(0)})^2 + \frac{2}{\rho^2} F_{\rho\rho}^{(0)} \cdot F_{\rho\rho\theta\theta}^{(0)} + \\
 & + 2\Delta \left(\frac{1}{\rho^2} \cdot F_{\rho\theta}^{(0)2} - \frac{2}{\rho^3} \cdot F_{\rho\theta}^{(0)} \cdot F_{\theta}^{(0)} + \frac{1}{\rho^4} F_{\theta}^{(1)2} \right) + \\
 & + \Delta \left(\frac{1}{\rho^2} \cdot F_{\rho\rho}^{(0)2} + \frac{2}{\rho^3} \cdot F_{\rho}^{(0)} \cdot F_{\theta\theta}^{(1)} + \frac{1}{\rho^4} F_{\theta\theta}^{(1)2} \right);
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 f_3(\rho, \theta) = & (\Delta F^{(0)})_{\rho\rho} \cdot F_{\rho\rho}^{(0)} + 2 \cdot (\Delta F^{(0)})_{\rho} \cdot F_{\rho\rho\rho}^{(0)} + \\
 & + \Delta F^{(0)} \cdot F_{\rho\rho\rho\rho}^{(0)} + \frac{1}{\rho^2} \cdot (\Delta F^{(0)})_{\rho} \cdot F_{\rho}^{(0)} - \\
 & - \frac{1}{\rho^3} \Delta F^{(0)} \cdot F_{\rho}^{(0)} \frac{2}{\rho^4} \cdot \Delta F^{(0)} \cdot F_{\theta\theta}^{(0)} + \frac{1}{\rho^3} \cdot (\Delta F^{(0)})_{\rho} \cdot F_{\theta\theta}^{(0)} + \\
 & + \frac{1}{\rho^2} \Delta F^{(0)} \cdot F_{\rho\rho}^{(0)} - \frac{2}{\rho^4} \cdot \Delta F^{(0)} \cdot F_{\theta\theta}^{(0)} + \frac{1}{\rho^3} \cdot (\Delta F^{(0)})_{\rho} \cdot F_{\theta\theta}^{(0)} + \\
 & + \frac{2}{\rho^3} \cdot \Delta F^{(0)} \cdot F_{\rho\theta\theta}^{(0)} + \frac{1}{\rho^3} \cdot (\Delta F^{(0)})_{\theta\theta} \cdot F_{\rho}^{(0)} + \\
 & + \frac{2}{\rho^3} \cdot (\Delta F^{(0)})_{\theta} \cdot F_{\rho\theta}^{(0)} + \frac{1}{\rho^4} \cdot (\Delta F^{(0)})_{\theta\theta} \cdot F_{\theta\theta}^{(0)} +
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{2}{\rho^4} \cdot (\Delta F^{(0)})_{\theta} \cdot F_{\theta\theta\theta}^{(0)} + \frac{1}{\rho^4} \cdot \Delta F^{(0)} \cdot F_{\theta\theta\theta\theta}^{(0)} - \\
& - \frac{3}{\rho^3} \cdot \Delta F^{(0)} \cdot F_{\rho\theta\theta}^{(0)} + \frac{3}{\rho^4} \cdot \Delta F^{(0)} \cdot F_{\theta\theta}^{(0)} - \\
& - \frac{3}{\rho^3} \cdot (\Delta F^{(0)})_{\theta} \cdot F_{\rho\theta}^{(0)} + \frac{3}{\rho^4} \cdot (\Delta F^{(0)})_{\theta} \cdot F_{\theta}^{(0)} + \\
& + \frac{1}{\rho^2} \cdot (\Delta F^{(0)})_{\rho\theta} \cdot F_{\rho\theta}^{(0)} + \frac{1}{\rho^2} \cdot (\Delta F^{(0)})_{\theta}^{(0)} \cdot F_{\rho\rho\theta}^{(0)} + \\
& + \frac{1}{\rho^2} \cdot (\Delta F^{(0)})_{\rho} \cdot F_{\rho\theta\theta\theta}^{(0)} + \frac{1}{\rho^2} \cdot \Delta F^{(0)} \cdot F_{\rho\rho\theta\theta}^{(0)} - \\
& - \frac{1}{\rho^3} \cdot (\Delta F^{(0)})_{\rho\theta} \cdot F_{\theta}^{(0)} - \frac{1}{\rho^3} \cdot (\Delta F^{(0)})_{\rho} \cdot F_{\theta\theta}^{(0)}; \\
f_4(\rho, \theta) &= (\Delta F^{(0)})_{\rho\rho} \cdot \Delta F^{(1)} + 2 \cdot (\Delta F^{(0)})_{\rho} \cdot (\Delta F^{(1)})_{\rho} + \\
& + \Delta F^{(0)} \cdot (\Delta F^{(1)})_{\rho\rho} + \frac{1}{\rho} \cdot (\Delta F^{(0)})_{\rho} \cdot \Delta F^{(1)} + \\
& + \frac{1}{\rho} \Delta F^{(0)} \cdot (\Delta F^{(1)})_{\rho} + \frac{1}{\rho^2} (\Delta F^{(1)})_{\theta\theta} \Delta F^{(1)} + \\
& + \frac{2}{\rho^2} \cdot (\Delta F^{(0)})_{\theta} \cdot (\Delta F^{(1)})_{\theta} + \frac{1}{\rho^2} \Delta F^{(0)} \cdot (\Delta F^{(1)})_{\theta\theta}; \\
f_5(\rho, \theta) &= \Delta \left[F_{\rho\rho}^{(0)} \cdot F_{\rho\rho}^{(1)} + 2 \left(\frac{1}{\rho} \cdot F_{\rho\theta}^{(0)} - \right. \right. \\
& \left. \left. - \frac{1}{\rho^2} \cdot F_{\theta}^{(0)} \right) \cdot \left(\frac{1}{\rho} \cdot F_{\rho\theta}^{(1)} - \frac{1}{\rho^2} \cdot F_{\theta}^{(1)} \right) + \right. \\
& \left. + \left(\frac{1}{\rho} \cdot F_{\rho}^{(0)} - \frac{1}{\rho^2} \cdot F_{\theta\theta}^{(0)} \right) \cdot \left(\frac{1}{\rho} \cdot F_{\rho}^{(1)} + \frac{1}{\rho^2} \cdot F_{\theta\theta}^{(1)} \right) \right];
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f_6(\rho, \theta) = & \left(\Delta F^{(0)} \right)_{\rho\rho} \cdot F_{\rho\rho}^{(1)} + 2 \cdot \left(\Delta F^{(0)} \right)_\rho \cdot F_{\rho\rho\rho}^{(1)} + \\
& + \Delta F^{(0)} \cdot F_{\rho\rho\rho}^{(1)} + F_{\rho\rho\rho}^{(0)} \Delta F^{(1)} + 2 \cdot F_{\rho\rho\rho}^{(0)} \cdot \left(\Delta F^{(1)} \right)_\rho + \\
& + F_{\rho\rho}^{(1)} \cdot \left(\Delta F^{(1)} \right)_{\rho\rho} + \frac{2}{\rho} \cdot \left[\frac{1}{\rho} \Delta F^{(0)} \cdot F_{\rho\theta}^{(1)} - \frac{1}{\rho^2} \Delta F^{(0)} \cdot F_\theta^{(1)} + \right. \\
& + \frac{1}{\rho} \cdot F_{\rho\theta}^{(1)} \cdot \Delta F^{(1)} - \frac{1}{\rho^2} \cdot F_\theta^{(0)} \cdot \Delta F^{(1)} \left. \right]_{\rho\theta} - \\
& - \frac{2}{\rho^2} \cdot \left[\frac{1}{\rho} \Delta F^{(0)} \cdot F_{\rho\theta}^{(1)} - \frac{1}{\rho^2} \Delta F^{(0)} \cdot F_\theta^{(1)} + \right. \\
& + \frac{1}{\rho} \cdot F_{\rho\theta}^{(0)} \cdot \Delta F^{(1)} - \frac{1}{\rho^2} F_\theta^{(0)} \cdot \Delta F^{(1)} \left. \right]_\theta + \\
& + \frac{1}{\rho} \cdot \left[\frac{1}{\rho} \Delta F^{(0)} \cdot F_\rho^{(1)} + \frac{1}{\rho^2} \Delta F^{(0)} \cdot F_{\theta\theta}^{(1)} + \right. \\
& + \frac{1}{\rho} \cdot F_\rho^{(0)} \cdot \Delta F^{(1)} + \frac{1}{\rho^2} \cdot F_{\theta\theta}^{(0)} \cdot \Delta F^{(1)} \left. \right]_\rho + \\
& + \frac{1}{\rho^2} \cdot \left[\frac{1}{\rho} \Delta F^{(0)} \cdot F_\rho^{(1)} + \frac{1}{\rho^2} \Delta F^{(0)} \cdot F_{\theta\theta}^{(1)} + \right. \\
& + \frac{1}{\rho} \cdot F_\rho^{(0)} \cdot \Delta F^{(1)} + \frac{1}{\rho^2} \cdot F_{\theta\theta}^{(0)} \cdot \Delta F^{(1)} \left. \right]_{\theta\theta} ; \\
f_7(\rho, \theta) = & \Delta \left[\left(\Delta F^{(0)} \right)^3 \right] ;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f_8(\rho, \theta) = & \left[F_{\rho\rho}^{(0)3} + \frac{2}{\rho^2} \cdot F_{\rho\rho}^{(0)} \cdot F_{\rho\theta}^{(0)2} - \right. \\
& - \frac{4}{\rho^3} \cdot F_{\rho\rho}^{(0)} \cdot F_{\rho\theta}^{(0)} \cdot F_{\theta}^{(0)} + \frac{2}{\rho^4} \cdot F_{\rho\rho}^{(0)} \cdot F_{\theta}^{(0)2} + \\
& + \frac{1}{\rho^2} \cdot F_{\rho\rho}^{(0)} \cdot F_{\rho}^{(0)2} + \frac{2}{\rho^3} \cdot F_{\rho}^{(0)} \cdot F_{\rho\rho}^{(0)} \cdot F_{\theta\theta}^{(0)} + \\
& \left. + \frac{1}{\rho^4} \cdot F_{\rho\rho}^{(0)} \cdot F_{\theta\theta}^{(0)2} \right]_{\rho\rho} + \frac{1}{\rho} \cdot \left[\frac{1}{\rho} \cdot F_{\rho}^{(0)} \cdot F_{\rho\rho}^{(0)2} + \frac{1}{\rho^2} \cdot F_{\rho\rho}^{(0)} \cdot F_{\theta\theta}^{(0)} + \right. \\
& + \frac{2}{\rho^3} \cdot F_{\rho\theta}^{(0)2} \cdot F_{\rho}^{(0)} - \frac{4}{\rho^4} \cdot F_{\rho}^{(0)} \cdot F_{\rho\theta}^{(0)} \cdot F_{\theta}^{(0)} + \frac{2}{\rho^5} \cdot F_{\rho}^{(0)} \cdot F_{\theta}^{(0)2} + \\
& + \frac{2}{\rho^4} \cdot F_{\rho\theta}^{(0)2} \cdot F_{\theta\theta}^{(0)} - \frac{4}{\rho^5} \cdot F_{\theta\theta}^{(0)} \cdot F_{\rho\theta}^{(0)} \cdot F_{\theta}^{(0)} + \frac{2}{\rho^6} \cdot F_{\theta\theta}^{(0)} \cdot F_{\theta}^{(0)2} + \\
& \left. + \left(\frac{1}{\rho} F_{\rho}^{(0)} + \frac{1}{\rho^2} \cdot F_{\theta\theta}^{(0)} \right)^3 \right]_{\rho} + \frac{1}{\rho^2} \left[\frac{1}{\rho} F_{\rho}^{(0)} \cdot F_{\rho\rho}^{(0)2} + \frac{1}{\rho^2} \cdot F_{\rho\rho}^{(0)2} F_{\theta\theta}^{(0)} + \right. \\
& + \frac{2}{\rho^3} F_{\rho\theta}^{(0)2} \cdot F_{\rho}^{(0)} - \frac{4}{\rho^4} \cdot F_{\rho}^{(0)} \cdot F_{\rho\theta}^{(0)} \cdot F_{\theta}^{(0)} + \frac{2}{\rho^5} \cdot F_{\rho}^{(0)} \cdot F_{\theta}^{(0)2} + \\
& + \frac{2}{\rho^4} \cdot F_{\rho\theta}^{(0)2} \cdot F_{\theta\theta}^{(0)} - \frac{4}{\rho^5} F_{\theta\theta}^{(0)} \cdot F_{\rho\theta}^{(0)} \cdot F_{\theta}^{(0)} + \frac{2}{\rho^6} \cdot F_{\theta\theta}^{(0)} \cdot F_{\theta}^{(0)2} + \\
& \left. + \left(\frac{1}{\rho} F_{\rho}^{(0)} + \frac{1}{\rho^2} \cdot F_{\theta\theta}^{(0)} \right)^3 \right]_{\theta\theta} + \\
& + \left(\frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial^2}{\partial \rho \partial \theta} - \frac{1}{\rho^2} \cdot \frac{\partial}{\partial \theta} \right) \left[\frac{2}{\rho} \cdot F_{\rho\rho}^{(0)2} \cdot F_{\rho\theta}^{(0)} - F_{\rho\rho}^{(0)2} \cdot F_{\theta}^{(0)} \frac{2}{\rho} + \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + 4 \cdot \left(\frac{1}{\rho} F_{\rho\theta}^{(0)} - \frac{1}{\rho^2} \cdot F_{\theta}^{(0)} \right)^3 + \frac{2}{\rho^3} \cdot F_{\rho}^{(0)2} \cdot F_{\rho\theta}^{(0)} + \\
& + \frac{4}{\rho^4} \cdot F_{\rho}^{(0)} \cdot F_{\theta\theta}^{(0)} \cdot F_{\rho\theta}^{(0)} + \frac{2}{\rho^5} \cdot F_{\theta\theta}^{(0)2} \cdot F_{\rho\theta}^{(0)} - \frac{2}{\rho^4} F_{\rho}^{(0)2} \cdot F_{\theta}^{(0)} - \\
& - \frac{4}{\rho^5} \cdot F_{\rho}^{(0)} \cdot F_{\theta}^{(0)} \cdot F_{\theta\theta}^{(0)} - \frac{2}{\rho^6} F_{\theta}^{(0)} \cdot F_{\theta\theta}^{(0)2} \Big]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f_9(\rho, \theta) = & \Delta \left[\Delta F^{(0)} \cdot F_{\rho\rho}^{(0)2} \right] + \Delta \left[\frac{2}{\rho^2} \Delta F^{(0)} \cdot F_{\rho\theta}^{(0)2} - \right. \\
& \left. - \frac{4}{\rho^3} \Delta F^{(0)} \cdot F_{\theta}^{(0)} \cdot F_{\rho\theta}^{(0)} + \frac{2}{\rho^4} \Delta F^{(0)} \cdot F_{\theta}^{(0)2} \right] + \\
& + \Delta \left[\frac{1}{\rho^2} \Delta F^{(0)} \cdot F_{\rho}^{(0)2} + \frac{2}{\rho^3} \Delta F^{(0)} \cdot F_{\rho}^{(0)} \cdot F_{\theta\theta}^{(0)} + \frac{1}{\rho^4} \Delta F^{(0)} \cdot F_{\theta\theta}^{(0)2} \right];
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f_{10}(\rho, \theta) = & 2 \cdot (\Delta F^{(0)})_{\rho} \cdot F_{\rho\rho}^{(0)} + \\
& + 2 \cdot \Delta F^{(0)} \cdot (\Delta F^{(0)})_{\rho\rho} \cdot F_{\rho\rho}^{(0)} + \\
& + 4 \cdot \Delta F^{(0)} \cdot (\Delta F^{(0)})_{\rho} \cdot F_{\rho\rho\rho}^{(0)} + (\Delta F^{(0)})^2 \cdot F_{\rho\rho\rho}^{(0)} + \\
& + \frac{1}{\rho} \left[\frac{1}{\rho} (\Delta F^{(0)})^2 F_{\rho}^{(0)} + \frac{1}{\rho^2} F_{\theta\theta}^{(0)} \cdot (\Delta F^{(0)})^2 \right]_{\rho} + \\
& + \frac{1}{\rho^2} \left[\frac{1}{\rho} (\Delta F^{(0)})^2 F_{\rho}^{(0)} + \frac{1}{\rho^2} \cdot F_{\theta\theta}^{(0)} \cdot (\Delta F^{(0)})^2 \right]_{\theta\theta} + \\
& + \frac{2}{\rho} \left[\frac{1}{\rho} F_{\rho\theta}^{(0)} \cdot (\Delta F^{(0)})^2 - \frac{1}{\rho^2} F_{\theta}^{(0)} \cdot (\Delta F^{(0)})^2 \right]_{\rho\theta} - \\
& - \frac{2}{\rho^2} \left[\frac{1}{\rho} F_{\rho\theta}^{(0)} \cdot (\Delta F^{(0)})^2 - \frac{1}{\rho^2} F_{\theta}^{(0)} \cdot (\Delta F^{(0)})^2 \right]_{\theta} ; \quad (I.3.6)
\end{aligned}$$

To determine the stress function expression $F^{(1)}(\rho, \theta)$ in a first approximation, we can write differential equation (I.3.4) as follows (if we consider in (I.2.7) the functions f_1 , f_2 and f_3 contained in (I.3.10) and carry and group)

$$\begin{aligned} \Delta\Delta F^{(1)} + (\beta_1 + \beta_2) \cdot \sum_{\nu=1}^{\infty} N_1(\nu) \cdot \rho^{-\nu} + \\ + (\beta_1 + \beta_2) \cdot \sum_{\nu=1}^{\infty} N_2(\nu) \cdot \rho^{\nu} = 0 \end{aligned} \quad (\text{I.3.7})$$

Here

$$\beta_1 = \frac{\alpha_{21}}{\alpha_{11} + \alpha_{12}}; \quad \beta_2 = \frac{\alpha_{22}}{\alpha_{11} + \alpha_{12}};$$

$N_1(\nu)$ and $N_2(\nu)$ are considered as summation (algebraic sum) of all derivatives obtained from the stress function $F^{(0)}(\rho, \theta)$ contained in the functions f_1, f_2, f_3 (sum of the same power terms of variable ρ). As it is said in §1.2, the solution of differential equation (I.3.7) is sought in the form: (see the solution of equation (I.2.14))

$$F^{(1)} = F_{gen.}^{(1)} + F_{spec.}^{(1)} \quad (\text{I.3.8})$$

Here $F_{gen.}^{(1)}$ is a general solution of the homogeneous equation $\Delta\Delta F^{(1)} = 0$ corresponding to equation (I.3.7) and is expressed as the expression (I.2.13)

$$F_{gen.}^{(1)} = c_1^* \cdot \ln \rho + c_2^* \cdot \rho^2 \quad (I.3.9)$$

The integral constants c_1^* and c_2^* are found subject to the satisfaction of stress function $F_{gen.}^{(1)}$ of stress determined by expression (I.3.9) differential equation (I.3.7). Boundary conditions are as (I.2.10). So, on the inner contour L_1

$$\sigma_\rho^{(1)} \Big|_{\rho=r_1} = \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial F^{(1)}}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 F^{(1)}}{\partial \theta^2} = 0$$

On the external contour L_2

$$\sigma_\rho^{(1)} \Big|_{\rho=r_2} = \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial F^{(1)}}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 F^{(1)}}{\partial \theta^2} = 0 \quad (I.3.10)$$

The special solution $F_{spec.}^{(1)}$ of differential equation (I.3.7) is found in the form:

$$\begin{aligned} F_{spec.}^{(1)} &= \sum_{v=2}^{\infty} N_1(v) \cdot \rho^{4-v} \cdot (\beta_1 + \beta_2) \varepsilon_1 + \\ &+ \sum_{k=2}^{\infty} N_2(v) \cdot \rho^{v+4} \cdot (\beta_1 + \beta_2) \varepsilon_2 + \\ &+ (\beta_1 + \beta_2) N_1(1) \left(\frac{1}{6} \ln \rho - \frac{11}{36} \right) \cdot \rho^3 \end{aligned} \quad (I.3.11)$$

Here

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= \left\{ (4-v)(2-v) \cdot [(3-v)^2 - 1] \right\}^{-1} \\ \varepsilon_2 &= \left\{ (4+v)(2+v) \cdot [(3+v)^2 - 1] \right\}^{-1} \end{aligned} \quad (I.3.12)$$

So, by the expressions (I.3.8)- (I.3.12) the general solution of differential equation (I.3.7) is found as follows:

$$\begin{aligned}
 F^{(1)}(\rho, \theta) = & c_1^* \cdot \rho^2 + c_1^* \ln \rho + \sum_{v=2}^{\infty} \rho^{-v+4} \cdot (\beta_1 + \beta_2) \cdot N_1(v) \cdot \varepsilon_1 + \\
 & + \sum_{v=1}^{\infty} \rho^{v+4} \cdot (\beta_1 + \beta_2) \cdot N_2(v) \cdot \varepsilon_2 + \\
 & + (\beta_1 + \beta_2) N_1(v) \cdot \left(\frac{1}{6} \ln \rho - \frac{11}{36} \right) \cdot \rho^3 \quad (I.3.13)
 \end{aligned}$$

In the similar way, in a second approximation, we can get the following expression for the stress function $F^{(2)}(\rho, \theta)$ (if in differential equation (I.3.3) we consider the expression (I.2.7) obtained for $F^{(0)}$, and the expression (I.3.13) obtained for $F^{(1)}(\rho, \theta)$).

At first we can write differential equation (I.3.3) also in the following form:

$$\begin{aligned}
 \Delta \Delta F^{(2)} + (2\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 + \beta_4 + \beta_5) \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \rho^{-k} \cdot W_1(k) + \\
 + (2\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 + \beta_4 + \beta_5) \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \rho^k \cdot W_2(k) = 0 \quad (I.3.14)
 \end{aligned}$$

Here the quantities β_1 and β_2 are determined as in (I.3.7).

$$\beta_3 = \frac{\alpha_{31}}{\alpha_{11} + \alpha_{12}}; \quad \beta_4 = \frac{\alpha_{32}}{\alpha_{11} + \alpha_{12}}; \quad \beta_5 = \frac{\alpha_{33}}{\alpha_{11} + \alpha_{12}} \quad (I.3.15)$$

$W_1(k)$ and $W_2(k)$ are the quantities that combine the functions $F^{(0)}$ and $F^{(1)}$ their necessary derivatives and express the sum of the same order terms of variable ρ .

When defining the function $F^{(2)}(\rho, \theta)$, we use boundary conditions (I.3.10) used in finding the functions $F^{(1)}(\rho, \theta)$.

We solution of differential equation (I.3.14), as in equation (I.3.8) is found in the following form:

$$F^{(2)}(\rho, \theta) = F_{gen.}^{(2)} + F_{spec.}^{(2)}$$

The function $F_{gen.}^{(2)}$ is taken as a general solution (I.3.9) of differential equation (I.3.14)

$$F_{gen.}^{(2)}(\rho, \theta) = c_3 \cdot \ln \rho + c_4 \cdot \rho^2 \quad (I.3.16)$$

The coefficients c_3 and c_4 are found as the constants c_1 and c_2 . Here the boundary conditions are same with boundary conditions (I.3.10)

In the similar way, the special solution of differential equation (I.3.14), as in a first approximation, is defined as follows:

$$F_{spec.}^{(2)} = \sum_{k=2}^{\infty} \rho^{4-k} \cdot Q_1(k) \cdot \delta \cdot \varepsilon_1 + \sum_{k=1}^{\infty} \rho^{4+k} \cdot Q_2(k) \cdot \delta \cdot \varepsilon_2 + \delta \cdot Q_1(1) \cdot \left(\frac{1}{6} \ln \rho - \frac{11}{36} \right) \cdot \rho^3 \quad (I.3.17)$$

So, we find general solution of differential equation
(I.3.14)

$$\begin{aligned}
 F^{(2)} &= F_{gen}^{(2)} + F_{spec}^{(2)} = c_3 \ln \rho + c_4 \rho^2 + \\
 &+ \sum_{k=2}^{\infty} \rho^{4-k} \cdot Q_1(k) \cdot \delta \cdot \varepsilon_1 + \sum_{k=1}^{\infty} \rho^{4+k} \cdot Q_2(k) \cdot \delta \cdot \varepsilon_2 + \\
 &+ \delta \cdot Q_1(1) \cdot \left(\frac{1}{6} \ln \rho - \frac{11}{36} \right) \cdot \rho^3; \quad (I.3.18)
 \end{aligned}$$

Here, we make substitution $\delta = 2\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 + \beta_4 + \beta_5$.

The coefficients ε_1 and ε_2 are determined by the expression
(I.3.12).

Here we are satisfied with three approximations. It is clear that for the 4-th and 5-th approximation we can find the stress function $F^{(n-1)}(\rho, \theta)$.

The obtained solution is demonstrated by one numerical example. Now, we solve the stress state of the thick – walled pipe in §1.2 (i.e. Lamé problem known from references) in the arbitrary physical non – linear statement (we do it to demonstrate the difference of the solution in small physical linear statement from the arbitrary physical non – linear statement).

If we take into account the expression (I.2.7) of the stress function $F^{(0)}(\rho, \theta)$ known from the elasticity theory in

differential equation (I.3.7), we can get the following differential equation for the stress function $F^{(1)}(\rho, \theta)$ in a first approximation.

$$\Delta\Delta F^{(1)} = 64 \cdot b_1 A_1 \cdot \beta_2 \cdot \rho^{-4} - 32 A_1^2 \cdot \beta_2 \cdot \rho^{-6} \quad (\text{I.3.19})$$

In this equation we make the substitutions

$$b_1 = \frac{1}{2} \cdot \frac{p_2 r^2 - p_1 R^2}{R^2 - r^2} \quad A_1 = \frac{r^2 R^2 \cdot (p_2 - p_1)}{R^2 - r^2}$$

$$\beta_2 = \frac{\alpha_{12}}{\alpha_{11} + \alpha_{12}}$$

In the way mentioned above, we solve differential equation (I.3.19) and for the stress function $F^{(1)}(\rho, \theta)$ in a first approximation we get the expression

$$F^{(1)} = F_{gen.}^{(1)} + F_{spec.}^{(1)}$$

$$F_{gen.}^{(1)} = c_1^* + c_2^* \cdot \ln \rho ; \quad F_{spec.}^{(1)} = \ln^2 \rho \cdot D_1 + D_2 \cdot \rho^{-2} \quad (\text{I.3.20}).$$

Here we make the substitutions:

$$D_1 = 8b_1 A_1 \beta_2 ; \quad D_2 = -\frac{1}{2} A_1^2 \beta_2 ; \quad (\text{I.3.21})$$

According to boundary conditions (I.3.10) the constants c_1^* and c_2^* take the following values:

$$c_2^* = \frac{1}{R^2 - r^2} \left[-A_1^2 \beta_2 \frac{R^4 - r^4}{r^2 R^2} - 16 A_1 b_1 \beta_2 (R^2 \ln r - r^2 \ln R) \right]$$

$$c_1^* = -\frac{1}{R^2 - r^2} \left[8b_1 A_1 \beta_2 \ln \frac{R}{r} - \frac{1}{2} A_1^2 \beta_2 \frac{R^2 - r^2}{r^2 R^2} \right] \quad (\text{I.3.22})$$

If we take into account the expression (I.3.20) obtained for the stress functions $F^{(1)}(\rho, \theta)$ in differential expression (I.3.5), in a second approximation for the stress functions $F^{(2)}(\rho, \theta)$ we can get the following differential equation:

$$\begin{aligned} \Delta \Delta F^{(2)} + \beta_1 [\delta_1^* \cdot \rho^{-4} - \delta_2^* \cdot \rho^{-6}] + \beta_2 [\delta_3^* \cdot \rho^{-6} + \delta_4^* \cdot \rho^{-4} + \\ \delta_5^* \cdot \rho^{-8} + \delta_6^* \ln \rho \cdot \rho^{-6} - \delta_7^* \ln \rho \cdot \rho^{-4}] + \beta_4 [\delta_8^* \cdot \rho^{-6} - \delta_9^* \cdot \rho^{-4} - \\ - \delta_{10}^* \cdot \rho^{-8}] + \beta_5 [\delta_{11}^* \cdot \rho^{-6} - \delta_{12}^* \cdot \rho^{-4}] = 0 \end{aligned} \quad (\text{I.3.23})$$

By the method above (i.e. by the method used in definition of the functions $F^{(1)}$) we solve this equation and get the stress function $F^{(2)}$

$$\begin{aligned} F^{(2)} = F_{gen.}^{(2)} + F_{spec.}^{(2)} = c_3 \rho^2 + c_4 \ln \rho + \\ + \beta_1 \left[-\frac{1}{8} \ln^2 \rho \cdot \delta_1^* + \frac{1}{64} \delta_2^* \rho^{-2} \right] + \\ + \beta_2 \left[-\delta_4^* \ln^2 \rho \cdot \varepsilon_1^* + \delta_7^* \varepsilon_2^* \ln^3 \rho - \delta_3^* \varepsilon_3^* \rho^{-2} - \right. \\ \left. - \delta_6^* \ln \rho \cdot \rho^{-2} \cdot \varepsilon_4^* - \delta_5^* \varepsilon_5^* \rho^{-4} \right] + \\ + \beta_4 \left[-\delta_8^* \rho^{-2} \varepsilon_6^* + \delta_9^* \varepsilon_7^* \ln^2 \rho + \delta_{10}^* \varepsilon_5^* \rho^{-4} \right] + \\ + \beta_5 \left[-\delta_{11}^* \rho^{-2} \varepsilon_6^* + \delta_{12}^* \varepsilon_7^* \ln^2 \rho \right] = 0; \end{aligned} \quad (\text{I.3.24})$$

We found the constants c_3 and c_4 by the boundary conditions (I.3.10). In the expression (I.3.24), we make the following substitutions.

$$\begin{aligned} \delta_1^* &= 512 \cdot \beta_2 \cdot b_1^2 A_1; \quad \delta_2^* = 256 \cdot \beta_2 \cdot b_1 A_1^2; \\ \delta_3^* &= 44 \cdot c_2 - 1956 \cdot \beta_1 \cdot b_1 A_1^2; \quad \delta_5^* = 376 \cdot \beta_2 \cdot A_1^3 \\ \delta_4^* &= 1152 \cdot \beta_2 \cdot b_1^2 A_1 - 40 \cdot A_1 c_1 - 32 \cdot b_1 \cdot c_2; \\ \delta_6^* &= 1088 \cdot \beta_2 \cdot b_1 A_1^2; \quad \delta_7^* = 512 \cdot \beta_2 \cdot b_1^2 A_1; \quad \delta_8^* = 88 \cdot b_1 A_1^2; \\ \delta_9^* &= 40 \cdot b_1^2 A_1; \quad \delta_{10}^* = 90 A_1^3; \quad \delta_{11}^* = 144 \cdot b_1 A_1^2; \\ \delta_{12}^* &= 96 \cdot b_1^2 A_1; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} c_3 &= \frac{1}{R^2 - r^2} \left[\beta_1 \left(-\frac{1}{8} \delta_1^* \ln \frac{R}{r} - \frac{1}{64} \cdot \delta_2^* \frac{r^2 - R^2}{r^2 R^2} \right) + \right. \\ &+ \beta_2 \left(-\delta_4^* \varepsilon_1 \ln \frac{R}{r} - \frac{1}{16} \cdot \delta_7^* \ln \frac{R}{r} + \delta_3^* \varepsilon_2 \frac{r^2 - R^2}{r^2 R^2} - \right. \\ &- \frac{1}{128} \cdot \delta_6^* \frac{r^2 - R^2}{r^2 R^2} + \frac{1}{64} \cdot \delta_6^* \frac{\ln R}{R^2} - \frac{1}{64} \cdot \delta_6^* \frac{\ln R}{r^2} + \\ &+ \left. \frac{1}{288} \cdot \delta_5^* \frac{r^4 - R^4}{r^4 R^4} \right) + \beta_4 \left(\frac{1}{64} \delta_8^* \frac{r^2 - R^2}{r^2 R^2} + \frac{\delta_9^*}{8} \cdot \ln \frac{R}{r} - \right. \\ &- \left. \frac{1}{288} \cdot \delta_{10}^* \frac{r^4 - R^4}{r^4 R^4} \right) + \beta_5 \left(\frac{1}{64} \delta_{11}^* \frac{r^2 - R^2}{r^2 R^2} + \frac{1}{8} \cdot \delta_{12}^* \ln \frac{R}{r} \right) \Big]; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
c_4 = & \frac{r^2}{R^2 - r^2} \left[\beta_1 \left(-\frac{1}{4} \delta_1^* \ln R - \frac{1}{32} \cdot \delta_2^* \frac{1}{R^2} \right) + \right. \\
& + \beta_2 \left(-2\delta_4^* \varepsilon_1 \ln R + \frac{1}{8} \cdot \delta_7^* \ln R + 2\delta_3^* \varepsilon_2 \frac{1}{R^2} - \right. \\
& - \frac{1}{64} \cdot \delta_6^* \frac{1}{R^2} + \frac{1}{32} \cdot \delta_6^* \frac{\ln R}{R^2} + \frac{1}{144} \cdot \delta_5^* \frac{1}{R^4} \left. \right) + \\
& + \beta_4 \left(\frac{1}{32} \delta_8^* \frac{1}{R^2} + \frac{1}{4} \delta_9^* \cdot \ln R - \frac{1}{144} \cdot \delta_{10}^* \frac{1}{R^4} \right) + \\
& + \beta_5 \left(\frac{1}{32} \delta_{11}^* \frac{1}{R^2} + \frac{1}{4} \cdot \delta_{12}^* \ln R \right) \left. \right] - \\
& - \frac{R^2}{R^2 - r^2} \left[\beta_1 - \left(\frac{1}{4} \cdot \delta_1^* \ln r - \frac{1}{32} \cdot \delta_2^* \frac{1}{r^2} \right) + \right. \\
& + \beta_2 \left(-2\delta_4^* \varepsilon_1 \ln r + \frac{1}{8} \cdot \delta_7^* \ln r + \right. \\
& + 2\delta_3^* \varepsilon_2 \frac{1}{r^2} - \frac{1}{64} \cdot \delta_6^* \frac{1}{r^2} + \frac{1}{32} \cdot \delta_6^* \frac{\ln r}{r^2} + \frac{1}{144} \cdot \delta_5^* \frac{1}{r^4} \left. \right) + \\
& + \beta_4 \left(\frac{1}{32} \delta_8^* \frac{1}{r^2} + \frac{1}{4} \delta_9^* \cdot \ln r - \frac{1}{144} \cdot \delta_{10}^* \frac{1}{r^4} \right) + \\
& + \beta_5 \left(\frac{1}{32} \delta_{11}^* \frac{1}{r^2} + \frac{1}{4} \cdot \delta_{12}^* \ln r \right) \left. \right] ;
\end{aligned}$$

While solving the numerical example, the ratio of the cross section sizes is taken in two variants:

Variant I: $R/r = 2$

Variant II: $R/r = 1,25$

Here r is a radius of inner circle, R is a radius of external circle. As the cylinder (thick walled pipe) is only under the inner

pressure $p_1 = p$, for the stress components σ_θ at the points on the inner contour, the expressions obtained at zero and first approximation are as follows:

$$\text{Variant I: } \sigma_\theta/p = \sigma_\theta^{(0)} + \sigma_\theta^{(1)} = 1,666 - 4,6 \cdot \beta_2 \cdot p^2$$

Variant II:

$$\sigma_\theta/p = \sigma_\theta^{(0)} + \sigma_\theta^{(1)} = 4,556 - 23,58 \cdot \beta_2 \cdot p^2 \quad (\text{I.3.25})$$

According to these expressions, the stresses σ_θ found for different materials at different values of inner pressure are given in the following table and is graphically structured. (see figure 1.5).

From the solutions of the same problem (Lame problem) by two methods (small physical nonlinear and physical non-linear statements) we conclude that if we violate the linear law (Hooke's law), the peak of stresses (maximum) values significantly diminishes (i.e. is smoothed).

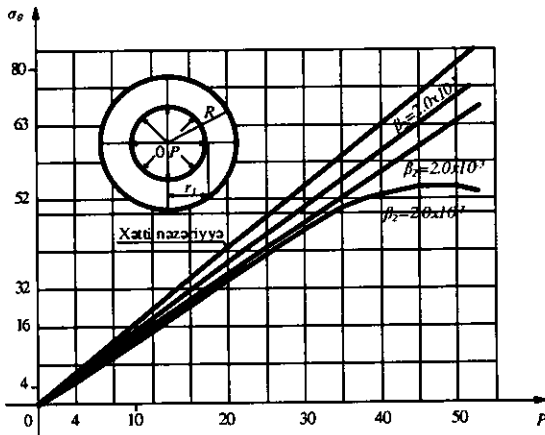


Fig.1.5 a.

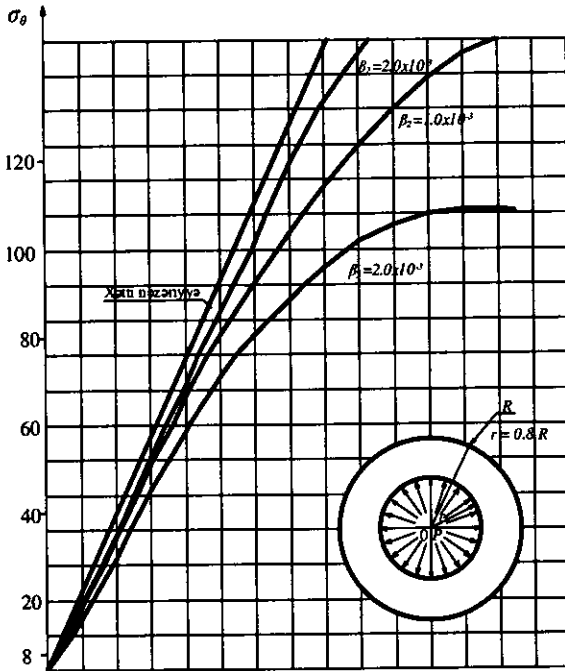


Fig.1.5 b.

σ_θ stresses
(Annular cylinder – Lyame problem)

Table №1.9

P	Linear theory		for $\beta_2 = 0.2 \cdot 10^{-3}$		for $\beta_2 = 1.0 \cdot 10^{-3}$		for $\beta_2 = 2.0 \cdot 10^{-3}$	
	VARIANTS							
	I	II	I	II	I	II	I	II
4	6.66	18.224	6.647	18.5	6.564	17.847	6.466	17.47
10	16.66	45.56	16.54	45.088	16.04	43.20	15.42	40.844
20	33.32	91.12	32.848	89.234	20.832	81.69	28.36	72.256
50	83.30	227.8	80.25	216.0	67.78	168.85	52.30	109.9

From the practical point of view the first two approximations (zero and first approximation) may be sufficient. From the tables and structured graphs, according to the obtained values of the stresses we can conclude that the stress concentration mainly depends on materials, acting load and in arbitrary physical non – linear statement, the solution of the problem characterizes more exactly the stress distribution in bodies. When the coefficient reflecting physical characteristics of the material is $\beta_2 > 0$, the stress distribution is more regularized. The contrary effect is obtained for $\beta_2 < 0$.

PART II
TORSION OF PRISMATIC BEAMS IN PHYSICAL
NONLINEAR STATEMENT.

§2.1. Problem statement. Choice of stress function.

The problem on torsion of prismatic beams with two – connected domain cross – section in linear statement has found its solution by different methods and in different variants in the references [2,19,25,53, 67,101]. In all these problems, it is accepted that

$$\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = \tau_{xy} = 0; \quad X = Y = Z = 0$$

$$\tau_{xz} = \tau_{xz}(x, y); \quad \tau_{yz} = \tau_{yz}(x, y) \quad (\text{II.1.1})$$

Under these conditions, equilibrium conditions (I.1.1) are reduced to the following expression:

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} = 0 \quad (\text{II.1.2})$$

It is clear from the first two conditions of equilibrium conditions (I.2.1) that $\tau_{xz} = \tau_{xz}(x, y); \quad \tau_{yz} = \tau_{yz}(x, y)$ i.e. the tangential stresses are independent of variable z . According two (II.1.1) and $\varepsilon_x = \varepsilon_y = \varepsilon_z = \gamma_{xy} = 0$ conditions, the expression (I.1.7) of deformation compatibility conditions is in the from:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} - \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} \right] = 0 ; \quad \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} - \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} \right] = 0 \quad (\text{II.1.3})$$

In the last expression, as the terms in square brackets are same, it is equipotential with the following equality

$$\frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} - \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} = c = \text{const} \quad (\text{II.1.4})$$

In physical non – linear statement, the displacement parameters u , v and w are taken as in linear elasticity theory in the following way:

$$u = \tau \cdot y \cdot z ; \quad v = -\tau \cdot x \cdot z ; \quad w = w(x, y)$$

Here τ is a torsion angle per a unit length.

As it has been said, according to the last expression, prolongation deformations are in the form

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = 0 ; \quad \varepsilon_y = \frac{\partial u}{\partial y} = 0 ; \quad \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} = 0 ;$$

and this satisfies the conditions (II.1.1).

We can show that retaining the conditions (II.1.1) and (II.1.3) one can choose the stresses. $\tau_{xz}(x, y)$ and $\tau_{yz}(x, y)$ so that conditions (I.1.1) and (I.1.2) hold true in physical non – linear elasticity theory as well.

If we take tangential stresses as

$$\tau_{xz} = \frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial y} ; \quad \tau_{yz} = -\frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial x} , \quad (\text{II.1.5})$$

condition (II.1.2) is satisfied. Here $\Phi(x, y)$ is a tangential stress function.

If we show the derivatives of the function to $\Phi(x, y)$ with respect to the variables x and y , the expression (I.1.3) of the **reduced mean stresses** and expression (I.1.6) of the **reduced tangential stresses intensity square** (t_0^2) are simplified and take the following form:

$$s_0 = \frac{\sigma_0}{3K} = \frac{1}{3K}(\sigma_x + \sigma_y) = 0 ;$$

$$t_0^2 = \frac{2}{3G^2} \cdot \left[\left(\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \tau_{yz}}{\partial x} \right)^2 \right] = \frac{2}{3G^2} \cdot [\Phi_x^2 + \Phi_y^2] \quad (\text{II.1.6})$$

According to what has been said above, the strains are in the following form (considering expressions I.1.36):

For displacements $\varepsilon_x = \varepsilon_y = \varepsilon_z = \gamma_{xy} = 0$

For shears

$$\gamma_x = 0 ; \gamma_{xz} = \frac{1}{G} g(t_0^2) \cdot \tau_{xz} ; \gamma_{yz} = \frac{1}{G} g(t_0^2) \cdot \tau_{yz} . \quad (\text{II.1.7})$$

If we consider the expression (II.1.7) in equation (II.1.3) we write:

$$\frac{\partial}{\partial y} \cdot [g(t_0^2) \cdot \tau_{xz}] - \frac{\partial}{\partial x} [g(t_0^2) \cdot \tau_{yz}] = c \quad (\text{II.1.8})$$

If in this equation we take into account expression (II.1.5), we can write

$$\frac{\partial}{\partial x} \cdot [g(t_0^2) \cdot \Phi_{xz}] + \frac{\partial}{\partial y} [g(t_0^2) \Phi_y] = c \quad (\text{II.1.9})$$

After obtaining desired derivatives from the last expression, we write the followings. The solution of this equation is taken corresponding to the form (I.1.57) of special case of tangential stress intensity coefficient:

$$g(t_0^2) \cdot \Delta F + \frac{4}{3G} \cdot [\Phi_x^2 \Phi_{xx} + 2\Phi_x \Phi_y \Phi_{xy} + \Phi_x^2 \Phi_{yy}] g'(t_0^2) - c = 0 \quad (\text{II.1.10})$$

Here we make substitutions

$$g'(t_0^2) = \frac{d}{dt_0^2} g(t_0^2) \text{ and } \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

If we consider

$$\gamma_{xz} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}; \quad \gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}$$

for shear deformations γ_{xz} and γ_{yz} , we arrive at the following result according to expressions (II.1.7):

$$\gamma_{yz} = \frac{\partial w}{\partial y} + \tau \cdot x = -\frac{1}{G} \cdot g(t_0^2) \cdot \Phi_x$$

$$\gamma_{xz} = \frac{\partial w}{\partial x} - \tau \cdot y = -\frac{1}{G} \cdot g(t_0^2) \cdot \Phi_y$$

From these expressions we can see that the wrappings (distortion of the form of a plane, violation of right plane case) function $w(x, y)$ should simultaneously satisfy the following two conditions

$$\frac{\partial w}{\partial y} = -\frac{1}{G} g(t_0^2) \cdot \Phi_x - \tau \cdot x;$$

$$\frac{\partial w}{\partial x} = -\frac{1}{G} g(t_0^2) \cdot \Phi_y - \tau \cdot y;$$

It is possible in the case when from the first one we get derivative with respect to x , from the second one with respect to y and equate the right hand sides

$$\frac{1}{G} \left\{ \frac{\partial}{\partial x} [g(t_0^2) \cdot \Phi_x] + \frac{\partial}{\partial y} [g(t_0^2) \cdot \Phi_y] \right\} = -2\tau.$$

or by expression (II.1.9), there must be the ratio $c = -2G\tau$ between the constant and torsion angle per a unit length. It is seen from expression (II.1.10) that from the use of conditions (II.1.1) in physical nonlinear elasticity theory, we can obtain second order partial differential equation for tangential stress function (i.e. conditions (II.1.1) are true also in non – linear statement).

It should be noted that on the considered two – connected contours $L_j (j = 1; 2)$ the function $\Phi(x, y)$ gets a constant quantity c_j .

$$\Phi(x, y) = f = c_j; \text{ on } L_j; j = 1; 2 \quad (\text{II.1.11})$$

As within the **Hooke's** law (in linear elasticity theory) differential equation (II.1.10) is $g(t_0^2) = 1$, it turns into differential equation $\Delta\Phi_0 = \Delta\Phi = c$ (i.e. it turns into a known equality in linear elasticity theory).

The solution of the equations $\Delta\Phi_0 = \Delta\Phi = c$ was solved in linear statement [2,19,25,67].

Similar to the solution of plane problem in physical non-linear statement, the solution of equation (II.1.10) with respect to small parameter λ is sought in the form of such a polynomial:

$$\Phi = \Phi_0 + \lambda_2\Phi_1 + \lambda^2\Phi_2 + \dots + \lambda^n\Phi_n \quad (\text{II.1.12})$$

We take the small parameter λ as in part I in the form $\lambda = g_2 K / (3K + G)G^2$.

Here, $\Phi_0(x, y)$ is a tensional stress function in linear statement (zero approximation),

$$\Phi_1(x, y); \Phi_2(x, y)$$

and other function are tensional stress functions in next approximations (first, second and etc.).

If we substitute expression (II.1.12) in differential equation (II.1.10) and equate to zero the algebraic sum of same power terms with respect to the small parameter $\lambda = g_2$, we can get n

number system of differential equations ($n = 0; 1; \dots; \infty$). In a first approximation when, ($\lambda = g_2$ and $n = 1$) equation (II.1.10) takes the following form:

$$\Delta\Phi_1 + \frac{2}{3G^2} \frac{\partial\Phi_0}{\partial x} \cdot \frac{\partial}{\partial x} [(\Phi)_x^2 + (\Phi)_y^2] + \frac{2}{3G^2} \frac{\partial\Phi_0}{\partial y} \cdot \frac{\partial}{\partial y} [(\Phi_0)_x^2 + (\Phi_0)_y^2] - c \cdot \frac{2}{3G^2} [(\Phi_0)_x^2 + (\Phi_0)_y^2] = 0 \quad (\text{II.1.13})$$

It is known from the linear elasticity theory that the stress function $\Phi_0(x, y)$ is found by means of a complex variable $F(z)$ regular in cross section area of torsional prismatic bar in the following form [2,19,25,53,67]:

$$\Phi_0(x, y) = \Phi_0(z, \bar{z}) = \frac{1}{2} [F(z) + \overline{F(z)}] - \frac{1}{2} z\bar{z} \quad (\text{II.1.14})$$

The cross section of a prismatic bar consists of two-connected S domain and is bounded from interior by a contour L_1 (r radius circle and two linear cracks arising from it) and from exterior by a contour L_2 .

In this domain there is a regular analytic function $F(z)$ and it is found in the following way [25,53,101]:

$$F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \cdot \xi_1^{-k} + \sum_{k=0}^{\infty} b_k \cdot \left(\frac{z}{A}\right)^k \quad (\text{II.1.15})$$

Here

$$b_k = \sum_{n=k}^{\infty} * \beta_n \cdot \frac{a_{n-k}^{(n)}}{q}$$

All α_k and β_k coefficients are found for an appropriate (concrete) cross section in the solution of the problem in linear statement, and are given in the form of a table (see reference [25,53]). The coefficients $a_n^{(k)}$ are determined by means of the coefficients (see recurrent formula of coefficients $g_n^{(k)}$ in (I.1.82)) known for each concrete L_2 contour (see table №1. and 1.2).

In the expression (II.1.14) the * sign shows that passing to the next term, the index of sum changes by q (the number of symmetry axes of a polygonal).

To replace the variable ξ_1 of analytic function $F(z)$ in expression (II.1.14) by a complex variable $z = x + iy$ we use a mapping function $z = \omega(\xi)$ of L_1 contour into a unit circle and its inverse function $\xi_1 = \chi(z)$

$$z = r \cdot \xi_1 \cdot \sum \gamma_{n-1} \cdot \xi_1^{-n}$$

$$\xi_1 = \chi(z) = \frac{z}{r} \sum_{n=0}^{\infty} \delta_{n-1} \cdot \left(\frac{r}{z}\right)^{2n} \quad (\text{II.1.16})$$

The coefficients γ_{n-1} and δ_{n-1} are known from the references [25, 33] (see formulae (3.15, 3.17) in [51]).

So, by formula (II.1.15), we can write expression (II.1.14) (after some transformations) in the following way:

$$F(z) = \sum_{\nu=1}^{\infty} a_{\nu} \cdot \left(\frac{r}{z}\right)^{\nu} + \sum_{k=0}^{\infty} b_k \cdot \left(\frac{z}{A}\right)^k \quad (\text{II.1.17})$$

Here

$$a_{\nu} = \sum_{k=0}^{\nu} \alpha_k \cdot \delta_{-1}^{-k} \cdot l_{\nu-k}^{(k)}$$

All the coefficients $l_n^{(k)}$ are found by the expressions (I.1.82) [51].

i.e. these coefficients are found from the condition

$$l_n^{(k)} + \sum_{n_1=1}^n l_{n-n_1}^{(k)}; q_{n_1}^{(k)} = 0 \quad (\text{II.1.18})$$

Allowing for expression (II.1.17) in formula (II.1.14) (for tangential stress functions in zero approximation) we can write:

$$\begin{aligned} \Phi_0(z_1 \bar{z}) = & \frac{1}{2} \left[\sum_{\nu=1}^{\infty} a_{\nu} \cdot \left(\frac{r}{z}\right)^{\nu} + \sum_{k=0}^{\infty} b_k \cdot \left(\frac{z}{A}\right)^k + \right. \\ & \left. + \sum_{\nu=1}^{\infty} a_{\nu} \cdot \left(\frac{r}{\bar{z}}\right)^{\nu} + \sum_{k=0}^{\infty} b_k \cdot \left(\frac{\bar{z}}{A}\right)^k \right] - \frac{1}{2} z \cdot \bar{z} \quad (\text{II.1.19}) \end{aligned}$$

From this expression we get derivatives with respect to the variables z and \bar{z} and know that

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \quad \text{and} \quad \frac{\partial}{\partial y} = i \left(\frac{\partial}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \right).$$

Differential equation (II. 1.13) takes the following form:

$$\Delta\Phi_1 + c \cdot \frac{8}{3G^2} (\Phi_0)_z \cdot (\Phi_0)_z + \frac{16}{3G^2} \left[(\Phi_0)_z^2 \cdot (\Phi_0)_{\bar{z}} + (\Phi_0)_z^2 \cdot (\Phi_0)_{\bar{z}} + 2(\Phi_0)_{\bar{z}} \cdot (\Phi_0)_z \cdot (\Phi_0)_z \right] = 0 \quad (\text{II.1.20})$$

Here by $z = \rho e^{i\theta}$ and $\bar{z} = \rho e^{-i\theta}$, in the polar coordinate system, for $(\Phi_0)_z \cdot (\Phi_0)_{\bar{z}}$ and other expressions we get the formulae:

$$\begin{aligned} (\Phi_0)_z \cdot (\Phi_0)_{\bar{z}} = & \left\{ \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \left[-\frac{k \cdot a_k \cdot r^k}{\rho^{k+1}} \cdot e^{-i\theta(k+1)} + \right. \right. \\ & \left. \left. + b_k \cdot k \cdot \frac{\rho^{k-1}}{A^k} \cdot e^{i\theta(k-1)} \right] - \right. \\ & \left. - \frac{1}{2} \rho e^{-i\theta} \right\} \cdot \left\{ \frac{1}{2} \sum_{\nu=1}^{\infty} \left[-\frac{a_\nu \cdot \nu \cdot r^\nu \cdot e^{i\theta(\nu+1)}}{\rho^{\nu+1}} + \right. \right. \\ & \left. \left. + b_\nu \cdot \nu \cdot \frac{\rho^{\nu-1}}{A^\nu} \cdot e^{-i\theta(\nu-1)} \right] - \frac{1}{2} \rho e^{i\theta} \right\} \end{aligned} \quad (\text{II.1.21})$$

We can write this expression in a simple form as follows:

$$(\Phi_0)_z \cdot (\Phi_0)_{\bar{z}} = \sum_{n=1}^{\infty} V_1(n) \cdot \rho^{-n} + \sum_{n=1}^{\infty} V_2(n) \cdot \rho^n \quad (\text{II.1.22})$$

If we make such operations for other terms contained in expression (II.1.20) as well in the similar way, as a resued, the indicated differential equation will be reduced to the following form (if the same power terms of variable ρ is taken as a sum):

$$\Delta\Phi_1 = \sum_{k=1}^{\infty} M_1(k) \cdot \rho^{-k} + \sum_{k=1}^{\infty} M_2(k) \cdot \rho^k \quad (\text{II.1.23})$$

Here, the coefficients $M_1(k)$ and $M_2(k)$ denote the sum of expressions $V_1(k)$, $V_2(k)$ and etc.

In expression (II.1.22) we make the following substitutions:

$$V_1(k) = N_7(n) + N_8(k) + N_{11}(k) + N_5(k);$$

$$V_2(k) = N_{10}(k) + N_9(k+1) + N_{12}(k+1) + N_6(k) + \frac{\rho^2}{4} \varepsilon_1$$

$$N_1(n) = -n \cdot a_n \cdot r^n \cdot e^{i\theta(n+1)}; \quad N_2(n) = nb_n A^{-n} \cdot e^{i\theta(n-1)};$$

$$N_3(n) = -n \cdot a_n r^n \cdot e^{i\theta(n+1)}; \quad N_4(n) = n \cdot b_n \cdot A^{-n} \cdot e^{i\theta(n-1)};$$

$$N_5(n) = \frac{1}{4} na_n r^n \cdot (e^{in\theta} + e^{-in\theta}); \quad N_6(n) = -\frac{1}{4} nb_n A^{-n} (e^{in\theta} + e^{-in\theta});$$

$$N_7(n) = \frac{1}{4} \sum_{\nu=1}^n N_1(n) \cdot N_3(n-\nu+1) \cdot \varepsilon_2;$$

$$N_8(n) = \frac{1}{4} \sum_{\nu=1}^{\infty} [N_1(\nu) \cdot N_4(\nu-n+1) \cdot \varepsilon_2 + N_1(\nu) N_4(\nu+1) \varepsilon_3]$$

$$N_9(n) = -\frac{1}{4} \sum_{\nu=n}^{\infty} N_1(n-\nu+1) \cdot N_4(\nu+3)$$

$$N_{10}(n) = \frac{1}{4} \sum_{\nu=1}^{n+1} N_2(\nu) \cdot N_4(n-\nu+2)$$

$$N_{11}(n) = -\frac{1}{4} \sum_{\nu=n}^{\infty} [N_3(\nu-1) \cdot N_2(\nu-n+1) \cdot \varepsilon_2 + N_3(\nu) \cdot N_2(\nu+1) \varepsilon_3];$$

$$N_{12}(n) = -\frac{1}{4} \sum_{\nu=n}^{\infty} N_3(\nu-n+1) \cdot N_2(\nu+3);$$

$$\varepsilon_1 = \begin{cases} 0 & \text{if } n > 2 \\ 1 & \text{if } n \leq 2 \end{cases} \quad \varepsilon_2 = \begin{cases} 0 & \text{if } n = 1 \\ 1 & \text{if } n \neq 1 \end{cases}$$

$$\varepsilon_3 = \begin{cases} 0 & \text{if } n \neq 1 \\ 1 & \text{if } n = 1 \end{cases} \quad (\text{II.1.24})$$

As usually, we look for the solution of differential equation (II.1.23) in the form:

$$\Phi_1(z, \bar{z}) = \Phi_1(\rho, \theta) = (\Phi_1)_{xbs} + (\Phi_1)_{bm}$$

So, the special solution of equation (II.1.27) will be as follows:

$$(\Phi_1)_{spec.} = \sum_{k=1}^{\infty} \rho^{-k+2} \cdot M_1(v) \cdot \gamma_1^* +$$

$$+ \sum_{k=1}^{\infty} \rho^{k+2} \cdot M_2(v) \cdot \gamma_2^* \quad (\text{II.1.25}).$$

Here

$$\gamma_1^* = (r - v)^{-2}; \gamma_2^* = (v + 2)^{-2};$$

It is known that general solution of equation $\Delta\Phi_1 = 0$ homogeneous with differential equation (II.1.23) is found in the form:

$$(\Phi_1)_{gen.} = c_1 \cdot \ln \rho + c_2 \rho^n \cdot \cos(n\theta) \quad (\text{II.1.26})$$

Thus, in a first approximation, for the function $\Phi_1(z, \bar{z}) = \Phi_1(\rho, \theta)$ we get the following expression:

$$\Phi_1(\rho, \theta) = \sum_{k=1}^{\infty} \rho^{2-k} M_1(k) \cdot \gamma_1^* + \sum_{k=1}^{\infty} \rho^{k+2} M_2(k) \cdot \gamma_2^* + c_1 \cdot \ln \rho + c_2 \cdot \rho^n \cdot \cos(n\theta); \quad (\text{II.1.27})$$

The coefficients c_1 and c_2 are found from the following boundary conditions:

- When on internal contour L_1

$$\Phi_1 = c_1; \quad \rho = t_1 e^{-i\theta}$$

- When on the external contour L_2

$$\Phi_1 = 0; \quad \rho = t_2 e^{-i\theta} \quad (\text{II.1.28})$$

$$\text{Or when } \tau_{\rho\alpha} = -\frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} = 0; \quad \rho = t_1 \text{ (on } L_1)$$

$$\text{When } \tau_{\rho\alpha} = \frac{\partial \Phi}{\partial \rho} = 0; \quad \rho = t_2 \text{ (on } L_2).$$

By these conditions, the coefficients c_1 and c_2 take the values:

$$\begin{aligned}
c_1 = & -\sum_{k=1}^{\infty} t_1^{2-k} M_1(k) \cdot \gamma_1^* \cdot \frac{1}{\ln t_1} - \sum_{k=1}^{\infty} t_1^{k+2} M_2(k) \cdot \gamma_2^* \cdot \frac{1}{\ln t_1} - \\
& - \frac{t_1^n \cos n\theta}{\ln t_1 A^n \cdot \cos n\theta - \ln A \cdot t_1^n \cos n\theta} \cdot \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} t_1^{2-k} M_1(k) \cdot \gamma_1^* \cdot \frac{\ln t_2}{\ln t_1} + \right. \\
& + \sum_{k=1}^{\infty} t_1^{k+2} M_2(k) \cdot \gamma_2^* \cdot \frac{\ln t_2}{\ln t_1} - \\
& \left. - \sum_{k=1}^{\infty} t_2^{2-k} M_1(k) \cdot \gamma_1^* - \sum_{k=1}^{\infty} t_2^{2+k} M_2(k) \cdot \gamma_2^* \right\}; \\
c_2 = & \frac{\ln t_1}{t_2^n \cos n\theta \cdot \ln t_1 - \ln t_2 \cdot t_1^n \cos n\theta} \cdot \left[\sum_{k=1}^{\infty} t_1^{2-k} M_1(k) \cdot \gamma_1^* \cdot \frac{\ln t_2}{\ln t_1} + \right. \\
& + \sum_{k=1}^{\infty} t_1^{2+k} M_2(k) \cdot \gamma_2^* \cdot \frac{\ln t_2}{\ln t_1} - \sum_{k=1}^{\infty} t_1^{2-k} M_1(k) \cdot \gamma_1^* - \\
& \left. - \sum_{k=1}^{\infty} t_2^{2-k} M_1(k) \cdot \gamma_1^* - \sum_{k=1}^{\infty} t_2^{2+k} M_2(k) \cdot \gamma_2^* \right];
\end{aligned}$$

(II.1.29)

Knowing the formulae (II.1.19) and (II.1.27) of expressions of stress functions $\Phi_0(\rho, \theta)$ and $\Phi_1(\rho, \theta)$ (i.e. knowing the expression of stress function in a at first approximation), in the similar way we find the expression for the stress function $\Phi_2(\rho, \theta)$ in a second approximation, and etc. So, the function $\Phi_n(\rho, \theta)$ may be found for any approximation. The difference is only in bulky form of expressions of mathematical operations.

By the expressions (II.1.19) and (II.1.27) of the stress function we find the tangential stresses τ_{xz} and τ_{yz} at the most characteristic points of the cross section (also at the vertices of linear cracks) of a prismatic bar by the formulae known in references:

$$\tau_{xz} = \tau_{\rho z} = -\frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial \theta}; \quad \tau_{yz} = \tau_{\theta z} = \frac{\partial \Phi}{\partial \rho} \quad (\text{II.1.30}).$$

Allowing for expression (II.1.12) of stress function in these expressions, we can write (retaining the first two terms in formula (II.1.12)):

$$\begin{aligned} \tau_{\rho z} &= \tau_{\rho z}^{(0)} + g_2 \tau_{\rho z}^{(1)} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} - \frac{1}{\rho} g_2 \frac{\partial \Phi_1}{\partial \theta} = \tau_{\rho z}^{(0)} - g_2 \frac{1}{\rho} \frac{\partial \Phi_1}{\partial \theta} \\ \tau_{\theta z} &= \tau_{\theta z}^{(0)} + g_2 \tau_{\theta z}^{(1)} = \frac{\partial \Phi_0}{\partial \rho} + g_2 \frac{\partial \Phi_1}{\partial \rho} = \tau_{\theta z}^{(0)} + g_2 \frac{\partial \Phi_1}{\partial \rho}; \quad (\text{II.1.31}) \end{aligned}$$

Here $\tau_{\rho z}^{(0)}$ and $\tau_{\theta z}^{(0)}$ are tangential stresses (i.e. tangential stresses in zero approximation) known from torsion of the prismatic bar within linear elasticity theory.

The general case indicated above, is illustrated by a numerical example.

1. Torsion of a central annular hole and two linear cracks quadratic beam in non-linear statement.

This problem has found its solution within linear elasticity theory [25,53]. The ratio between cross section dimensions of the beam is given in two variants (figure 2.1).

$$\text{Variant I } r/b = 0,5; \quad e = 0,6b; \quad m = -\frac{1}{9}; \quad A = 2,5r;$$

$$\text{Variant II } r/b = 0,5; \quad e = 0,7b; \quad m = -\frac{1}{9}; \quad A = 2,5r;$$

By expressions (II.1.19) for the stress function $\Phi_0(z; \bar{z})$ we get the following formula (we retain the first two terms in the analytic function $F(z)$, as the other values of the coefficients α_k and β_k are infinitely small)

$$F(z) = a_4 \cdot \left(\frac{t_1}{z}\right)^4 + a_8 \cdot \left(\frac{t_1}{z}\right)^8 + b_4 \left[a_1^{(n)} + \left(\frac{z}{t_2}\right)^4 \right] + \\ + b_8 \cdot \left[a_2^{(8)} + a_1^{(8)} \left(\frac{z}{t_2}\right)^4 + \left(\frac{z}{t_2}\right)^8 \right]; \quad (\text{II.1.32})$$

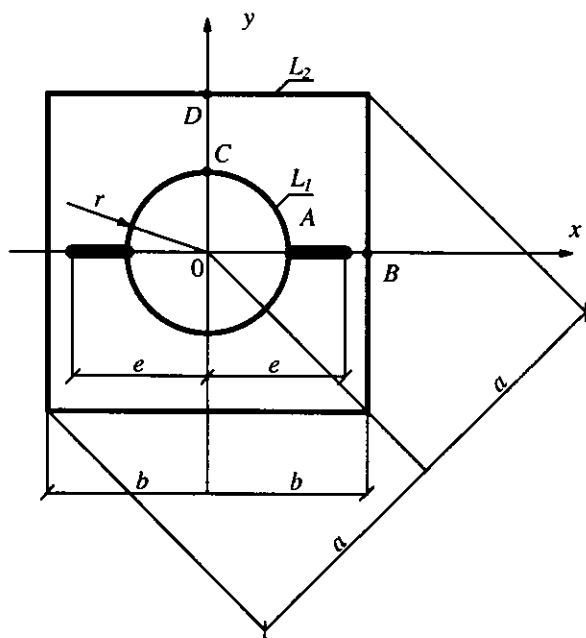


Fig.2.1

In this expression, for passing from one variable t_1 to the other variable t_2 , mapping functions of L_1 and L_2 contours are used (see. table № 1.2 in part I).

The coefficients contained in this expression were calculated for each variant and given in a table form (see. table 2.1)

Table 2.1.

Coefficients	Variants	
	variant I	variant II
a_4	0,013379	0,0524
a_8	0,011487	0,04407
b_4	-0,003939	-0,0168
b_8	-0,001927	-0,00255

Tangential stresses found in torsion of a beam (with quadratic cross section) considered in linear elasticity problem is given in the table 2.2.

Knowing the analytic function $F(z)$, by means of expression (II.1.19) we find the function $\Phi_0(z; \bar{z})$ in zero approximation. Then in a first approximation we get the stress function $\Phi_1(z; \bar{z})$ from the following differential equation (if we consider expression II.1.32 in II.1.19 and II.1.20):

$$\begin{aligned}
& \Delta\Phi_1 + B_1 \cdot \rho^{-28} + B_2 \cdot \rho^{-24} + B_3 \cdot \rho^{-20} + B_4 \cdot \rho^{-18} + \\
& + B_5 \cdot \rho^{-16} + B_6 \cdot \rho^{-14} + B_7 \cdot \rho^{-12} + B_8 \cdot \rho^{-20} + B_9 \cdot \rho^{-8} + \\
& + B_{10} \cdot \rho^{-6} + B_{11} \cdot \rho^{-4} + B_{12} \cdot \rho^{-2} + E_1 \cdot \rho^{20} + E_2 \cdot \rho^{16} + \quad (\text{II.1.33}): \\
& + E_3 \cdot \rho^{14} + E_4 \cdot \rho^{12} + E_5 \cdot \rho^{10} + E_6 \cdot \rho^8 + E_7 \cdot \rho^6 + \\
& + E_8 \cdot \rho^4 + E_9 \cdot \rho^2 + \varepsilon^* = 0
\end{aligned}$$

In this equation we make the following substitutions :

$$\lambda_1 = a_4 \cdot t_1^4; \lambda_2 = a_8 \cdot t_1^8; \lambda_3 = a_1^{(n)} \cdot b_4 + a_2^{(8)} \cdot b_8;$$

$$\lambda_4 = t_2^{-4} b_4 + a_1^{(8)} \cdot t_2^{-4} b_8; \lambda_5 = t_2^{-8} \cdot b_8;$$

$$B_1 = 1152\lambda_2^3 \cdot \delta \cdot e^{-10i\theta}; \quad B_2 = 1472\lambda_1 \cdot \lambda_2^2 \delta \cdot e^{-6i\theta};$$

$$B_3 = 320\lambda_1^2 \cdot \lambda_2 \delta \cdot e^{-2i\theta} + 288\lambda_1^2 \cdot \lambda_2 \delta \cdot e^{-10i\theta};$$

$$B_4 = 288\lambda_2^2 \delta \cdot e^{-18i\theta} - 16\lambda_2^2 \delta;$$

$$B_5 = 80\lambda_1^3 \cdot \delta \cdot e^{-6i\theta} - 1152\lambda_2^2 \cdot \lambda_4 \delta \cdot e^{-22i\theta} + 192\lambda_2^2 \cdot \lambda_4 \delta \cdot e^{-2i\theta};$$

$$B_6 = 224 \cdot \lambda_1 \lambda_2 \cdot \delta \cdot e^{-14i\theta} - 16\lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot e^{4i\theta} \cdot \delta;$$

$$\begin{aligned}
B_7 = & -408 \cdot \lambda_1 \lambda_2 \lambda_4 \cdot \delta \cdot e^{-18i\theta} - 1152\lambda_2^2 \cdot \lambda_5 \cdot \delta \cdot e^{26i\theta} + \\
& + 448 \cdot \lambda_2^2 \cdot \lambda_5 \cdot \delta \cdot e^{6i\theta} + 96\lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \lambda_4 \cdot \delta e^{6i\theta};
\end{aligned}$$

$$B_8 = 40 \cdot \lambda_1^2 \cdot \delta \cdot e^{-10i\theta} - 4\lambda_1^2 \delta;$$

$$\begin{aligned}
B_9 = & -4 \cdot \lambda_2 \delta - 160\lambda_1^2 \lambda_4 \delta \cdot e^{-14i\theta} - 1792\lambda_1 \lambda_2 \lambda_5 \cdot e^{-22i\theta} \cdot \delta + \\
& + 18\lambda_2 \delta \cdot e^{-10i\theta} + 48\lambda_1^2 \lambda_4 \delta \cdot e^{2i\theta} + 896\lambda_1 \lambda_2 \lambda_5 \cdot \delta e^{10i\theta}
\end{aligned}$$

$$B_{10} = 16\lambda_2 \lambda_4 \delta \cdot e^{-12i\theta} + 48\lambda_2 \lambda_4 \cdot \delta \cdot e^{-6i\theta} \delta - 144\lambda_2 \lambda_4 \cdot \delta \cdot e^{-6i\theta};$$

$$B_{11} = -2\lambda_1 \cdot e^{-4i\theta} \delta + 5\lambda_1 e^{-6i\theta} \cdot \delta - 320\lambda_1^2 \lambda_5 \delta \cdot e^{-18i\theta} + \\ + 96\lambda_2 \lambda_4^2 \cdot e^{-10i\theta} \delta + 112\lambda_1^2 \lambda_5 \delta \cdot e^{6i\theta};$$

$$B_{12} = 8\lambda_1 \lambda_4 \delta \cdot e^{-6i\theta} + 32\lambda_2 \lambda_5 \delta \cdot e^{-16i\theta} + 8\lambda_1 \lambda_4 \delta \cdot e^{-2i\theta} - \\ - 64\lambda_2 \lambda_5 \delta \cdot e^{-2i\theta};$$

$$\varepsilon^* = 64\lambda_1 \lambda_4^2 \delta \cdot e^{-6i\theta} + 768\lambda_2 \lambda_4 \lambda_5 \delta \cdot e^{-14i\theta} - 896\lambda_2 \lambda_4 \lambda_5 \delta \cdot e^{-6i\theta}$$

$$E_1 = 896\lambda_5^3 \delta \cdot e^{6i\theta}; \quad E_2 = 1088\lambda_4 \lambda_5^3 \delta \cdot e^{2i\theta};$$

$$E_3 = -16\lambda_5^2 \delta - 224\lambda_5^2 \delta \cdot e^{14i\theta};$$

$$E_4 = 192\lambda_4^2 \lambda_5 \delta \cdot e^{-2i\theta} + 224\lambda_4^2 \lambda_5 \delta \cdot e^{6i\theta};$$

$$E_5 = -16\lambda_4 \lambda_5 \delta \cdot e^{-4i\theta} - 160\lambda_4 \lambda_5 \delta \cdot e^{10i\theta};$$

$$E_6 = 4\lambda_5 \delta \cdot e^{8i\theta} - 128\lambda_1 \lambda_5^2 \cdot e^{-6i\theta} \cdot \delta - 24\lambda_4^3 \delta \cdot e^{2i\theta} + 7\lambda_5 \cdot \delta \cdot e^{6i\theta};$$

$$E_7 = -4\lambda_4^2 \delta - 24\lambda_4^2 \delta \cdot e^{6i\theta};$$

$$E_8 = 3\lambda_4 \delta \cdot e^{2i\theta} + 128\lambda_1 \lambda_4 \lambda_5 \delta \cdot e^{-10i\theta} - 448\lambda_1 \lambda_4 \lambda_5 \delta \cdot e^{-2i\theta} - \\ - 640\lambda_2 \lambda_5^2 \cdot \delta \cdot e^{-10i\theta} + 2\lambda_4 \delta e^{4i\theta};$$

$$E_9 = 32\lambda_1^2 \lambda_5 \delta \cdot e^{2i\theta} + 16\lambda_1 \lambda_5 \cdot \delta e^{2i\theta} - \frac{1}{4} \delta \cdot e^{-12i\theta};$$

The solution of differential equation (II.1.33) is as follows.

$$\Phi_1 = (\Phi_1)_{spec.} + (\Phi_1)_{gen.}$$

Here,

$$\begin{aligned}
(\Phi_1)_{spec.} = & B_1 e_1 \rho^{-26} + B_2 e_2 \rho^{-22} + B_3 e_3 \rho^{-18} + \\
& + B_4 e_4 \rho^{-16} + B_5 e_5 \rho^{-14} + B_6 e_6 \rho^{-12} + B_7 e_7 \rho^{-10} + \\
& + B_8 e_8 \rho^{-8} + B_9 e_9 \rho^{-6} + B_{10} e_{10} \rho^{-4} + \\
& + B_{11} e_{11} \rho^{-2} + B_{12} e_{12} \ln^2 \rho - \frac{1}{4} \varepsilon \rho^2 + E_1 e_2 \rho^{22} + E_2 e_3 \rho^{18} + \\
& + E_3 e_4 \rho^{16} + E_4 e_5 \rho^{14} + E_5 e_6 \rho^{12} + e_7 E_6 \rho^{10} + E_7 e_8 \rho^8 + \\
& + E_8 e_9 \rho^6 + E_9 e_{10} \rho^4
\end{aligned}$$

$$(\Phi_1)_{gen.} = c_1 \ln \rho + c_2 \quad (\text{II.1.34})$$

c_1 and c_2 are found from the known boundary condition (II.1.28).

Thus, the expressions for the constants c_1 and c_2 will be as follows:

$$\begin{aligned}
c_1 = & \frac{1}{\ln t_1 - \ln b} \cdot [B_1 e_1 (b^{-26} - t_1^{-26}) + B_2 e_2 (b^{-22} - t_1^{-22}) + \\
& + B_3 e_3 (b^{-18} - t_1^{-18}) + B_4 e_4 (b^{-16} - t_1^{-16}) + B_5 e_5 (b^{-14} - t_1^{-14}) + \\
& + B_6 e_6 (b^{-12} - t_1^{-12}) + B_7 e_7 (b^{-10} - t_1^{-10}) + \\
& + B_8 e_8 (b^{-8} - t_1^{-8}) + B_9 e_9 (b^{-6} - t_1^{-6}) + B_{10} e_{10} (b^{-4} - t_1^{-4}) + \\
& + B_{11} e_{11} (b^{-2} - t_1^{-2}) + B_{12} e_{12} (\ln^2 b - \ln^2 t_1) - \frac{1}{4} \varepsilon (b^2 - t_1^2) + \\
& + E_1 e_2 (b^{22} - t_1^{22}) + E_2 e_3 (b^{18} - t_1^{18}) + E_3 e_4 (b^{16} - t_1^{16}) + \\
& + E_4 e_5 (b^{14} - t_1^{14}) + E_5 e_6 (b^{12} - t_1^{12}) + E_6 e_7 (b^{10} - t_1^{10}) + \\
& + E_7 e_8 (b^8 - t_1^8) + E_8 e_9 (b^6 - t_1^6) + E_9 e_{10} (b^4 - t_1^4) + c] ;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
c_2 = & \frac{1}{2} \cdot [c - B_1 e_1 (b^{-26} + t_1^{-26}) - B_2 e_2 (b^{-22} + t_1^{22}) - \\
& - B_3 e_3 (b^{-18} + t_1^{-18}) - B_4 e_4 (b^{-16} + t_1^{-16}) - B_5 e_5 (b^{-14} + t_1^{-14}) - \\
& - B_6 e_6 (b^{-12} + t_1^{-12}) - B_7 e_7 (b^{-10} + t_1^{10}) - \\
& - B_8 e_8 (b^{-8} + t_1^{-8}) - B_9 e_9 (b^{-6} + t_1^{-6}) - B_{10} e_{10} (b^{-4} + t_1^{-4}) - \\
& + B_{11} e_{11} (b^{-2} + t_1^{-2}) + B_{12} e_{12} (\ln^2 b + \ln^2 t_1) + \frac{1}{4} \varepsilon^* (b^2 + t_1^2) - \\
& - E_1 e_2 (b^{22} + t_1^{22}) - E_2 e_3 (b^{18} + t_1^{18}) - E_3 e_4 (b^{16} + t_1^{16}) - \\
& - E_4 e_5 (b^{14} + t_1^{14}) - E_5 e_6 (b^{12} + t_1^{12}) - E_6 e_7 (b^{10} + t_1^{10}) - \\
& - E_7 e_8 (b^8 + t_1^8) - E_8 e_9 (b^6 + t_1^6) - E_9 e_{10} (b^4 - t_1^4)] - \\
& - \frac{\ln t_1 + \ln b}{\ln t_1 - \ln b} \cdot \frac{1}{2} [B_1 e_1 (b^{-26} - t_1^{26}) + B_2 e_2 (b^{-22} - t_1^{-22}) + \\
& + B_3 e_3 (b^{-18} - t_1^{-18}) + B_4 e_4 (b^{-16} + t_1^{-16}) + B_5 e_5 (b^{-14} - t_1^{14}) + \\
& + B_6 e_6 (b^{-12} - t_1^{-12}) + B_7 e_7 (b^{-10} - t_1^{-10}) + B_8 e_8 (b^{-8} - t_1^{-8}) + \\
& + B_9 e_9 (b^{-6} - t_1^{-6}) + B_{10} e_{10} (b^{-4} - t_1^{-4}) + B_{11} l_{11} (b^{-2} - t_1^{-2}) + \\
& + B_{12} e_{12} (\ln^2 b + \ln^2 t_1) + \left(-\frac{1}{4} \varepsilon\right) (b^2 - t_1^2) + E_1 e_2 (b^{22} - t_1^{22}) + \\
& + E_2 e_3 (b^{18} - t_1^{18}) + E_3 e_4 (b^{16} - t_1^{16}) + E_4 e_5 (b^{14} - t_1^{14}) + \\
& + E_5 e_6 (b^{12} - t_1^{12}) + E_6 e_7 (b^{10} - t_1^{10}) + E_7 e_8 (b^8 + t_1^8) - \\
& - E_8 e_9 (b^6 + t_1^6) - E_9 e_{10} (b^4 - t_1^4) + c]
\end{aligned}$$

$$e_1 = -\frac{1}{676}; \quad e_2 = -\frac{1}{484}; \quad e_3 = -\frac{1}{324}; \quad e_4 = -\frac{1}{256}; \quad e_5 = -\frac{1}{196};$$

$$e_6 = -\frac{1}{144}; e_7 = -\frac{1}{100}; e_8 = -\frac{1}{64}; e_9 = -\frac{1}{36}; e_{10} = -\frac{1}{16};$$

$$e_{11} = -\frac{1}{4}; e_{12} = -\frac{1}{2};$$

As in the solution of this problem within linear elasticity theory, here (i.e. in non-linear statement) in numerical calculations, the sizes of cross section are is taken in two variants.

Knowing the tangential functions (Φ_0 and Φ_1) in zero and first approximation, the tangential stresses are calculated according to the expressions (II.1.31) and given in the following tables (see table №2.2) (at the most characteristic points of cross section and for different materials).

Table №2.2

Variants	Point	Linear statement $[25,53] \tau_{xz}(\tau_{yz})/Grb$	Physical non-linear statement Copper $g_2 = 0.255 \cdot 10^{-6}$
I $e/b = 0,6$ $r/b = 0,5$	Point «A» $z = e$	0.769	0.665
	Point «B» $z = b$	1.362	1.198
	Point «C» $z = ir$	-0.542	-0.477
	Point «D» $z = ib$	-1.354	-1.1915
II $e/b = 0,7$ $r/b = 0,5$	Point «A» $z = e$	0.96	0.845
	Point «B» $z = b$	1.47	1.294
	Point «C» $z = ir$	-0.482	-0.424
	Point «D» $z = ib$	-1.362	-1.185

2. Torsion of a circular cylinder weakened by an annular hole space and two linear cracks in physical non-linear statement.

This problem has found its solution in the books [25,53]. The results obtained from the solution of this problem are given in the following table (figure 2.2, table 2.3). Here we miss intermediate calculations and give only the obtained results.

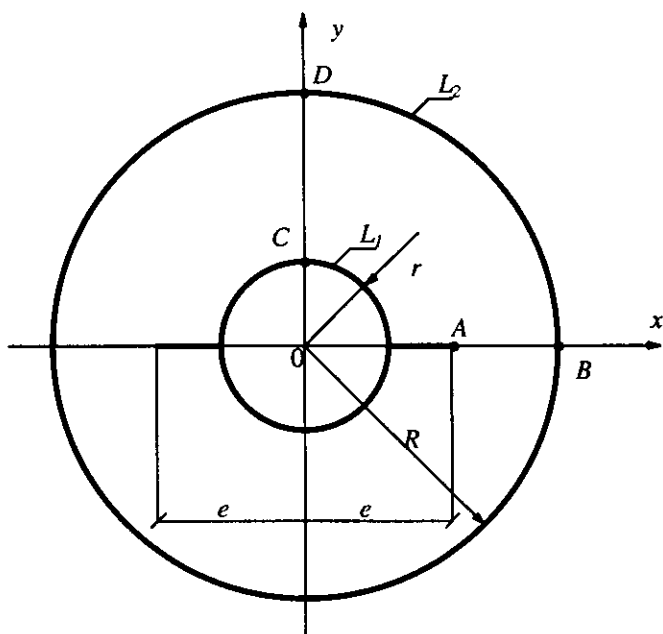


Fig.2.2

Table №2.3

Variants	Point	Linear statement	Physical non-linear statement
	Z	$[25,53]$ $\tau_{xz}(\tau_{yz})/G\tau b$	Copper $g_2 = 0.255 \cdot 10^{-6}$
I	Point «A» $z = e$	0.762	0.678
$r/R = 0,5$	Point «B»; $z = b$	1.02	1.908
	Point «C»; $z = ir$	-0.492	-0.443
$e/R = 0,6$	Point «D» $z = ib$	-0.944	-0.865
II	Point «A» $z = e$	0.83	0.747
$r/R = 0,5$	Point «B»; $z = b$	1.08	0.961
	Point «C»; $z = ir$	-0.52	-0.468
$e/R = 0,7$	Point «D»; $z = ib$	-0.98	-0.872
III	Point «A» $z = e$	0.97	0.863
$r/R = 0,7$	Point «B»; $z = b$	1.27	1.118
	Point «C»; $z = ir$	-0.59	-0.531
$e/R = 0,8$	Point «D»; $z = ib$	-1.089	-0.971

3. Torsion of a circular cylinder weakened by square hole in physical non-linear statement.

This problem was solved by D.I. Sherman [25] within linear elasticity theory. The results obtained in physical non-linear statement are given in table №2.4.

The obtained numerical results show that the tangential stresses in the vertex points of cracks and at the points $\theta = 0$, $z = \rho = b$ in physical non-linear statement solution differ 10-15 % from the solution in linear statement i.e. maximum value decreases and the stress curve smoothens. As the remaining points (especially at the points on internal contours), the stresses $\tau_{\rho z}$ and $\tau_{\theta z}$ change very little, i.e. in torsion problems accordance of materials to physical non-linear rule doesn't give the expensed effect.

3. Torsion of a circular cylinder weakened by square hole in physical non-linear statement

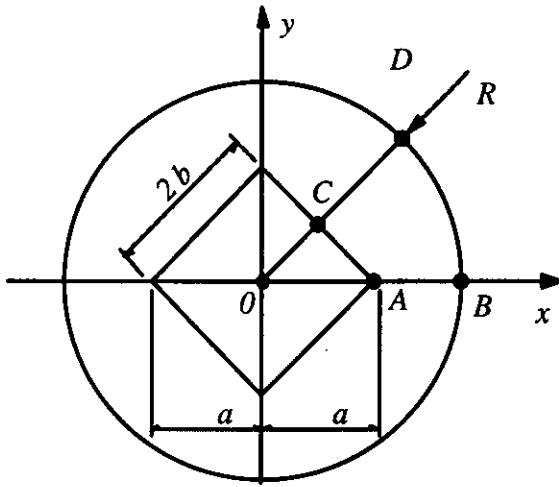


Fig.2.3

Table №2.4

Variants	Point z	Linear statement $[25;53] \tau_{xz}(\tau_{yz})/G\tau R$	Physical non-linear statement Copper $g_2 = 0.255 \cdot 10^{-6}$
I $e/b = 0,6$ $r/b = 0,5$	Point «A» $z = a$	-1.593	-1.593
	Point «B» $z = R$	1.42	1.221
	Point «C» $z = ibe^{j\frac{\pi}{4}}$	-0.455	-0.405
	Point «D» $z = iRe^{j\frac{\pi}{4}}$	1.186	1.032
II $e/b = 0,7$ $r/b = 0,5$	Point «A» $z = a$	-3.383	-2.842
	Point «B» $z = R$	2.92	2.511
	Point «C» $z = ibe^{j\frac{\pi}{4}}$	-0.633	-0.5634
	Point «D» $z = iRe^{j\frac{\pi}{4}}$	1.464	1.259

PART III.

STRESS STATE OF BENDING OF PRISMATIC BEAMS IN PHYSICAL NON-LINEAR STATEMENT.

§3.1 Pure bending of prismatic beams.

A prismatic beam of two-connected area cross section is subjected to the action of bending moment M applied to its base (i.e. a beam is subjected to pure bending). The cross section is bounded by a right polygonal (L_2 contour) from exterior, and by a r radius circle and two linear cracks (L_1 contour) from interior. The origin of coordinates is on the center of the section, the axis z is on the symmetry axis (fig.3.1).

As we have solved this problem in linear elasticity theory, we should briefly notice that it is known that within the linear elasticity theory, the tangential stresses τ_{xz} and τ_{yz} are identically zero and that the normal stress σ_z along the axis of the beam is independent on the axis z .[‡]

It is known that all the equations of physical non-linear elasticity theory are satisfied when in addition to conditions of

[‡] For that you can see the references[25,26]

linear statement we accept the creation of stresses $\sigma_x(x, y)$, $\sigma_y(x, y)$ and $\tau_{xy}(x, y)$ as well [38,53]. Not all of these stresses depend on the variable (axis) z .

Under these conditions, the basic equations (I.1.1) and (I.1.7) of nonlinear elasticity theory are reduced to the following expressions:

- equilibrium (balance) equations:

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = 0 ; \quad \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} = 0 \quad (\text{III.1.1}).$$

- strain compatibility conditions:

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{xy}}{\partial x \partial y}$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x^2} = 0; \quad \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial y^2} = 0; \quad \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x \partial y} = 0 \quad (\text{III.1.2})$$

From different points of view, the expressions (I.1.27) and (I.1.28) between the stresses (σ_{ij}) and strains may be simplified more under the above accepted conditions.

- From **Cauchy, Genki, Cawderer** and etc. point of view

$$\varepsilon_z(x, y) = \frac{1}{3} \left[\frac{1}{3K} k(s_0) \sigma_0 + \frac{1}{G} g(t_0^2) \sigma_0 \right]$$

$$\varepsilon_y(x, y) = \varepsilon_x(x, y) = \frac{1}{3} \left[\frac{1}{3K} k(s_0) \cdot \sigma_0 - \frac{1}{2G} g(t_0^2) \cdot \sigma_0 \right] \gamma_{xy} = \gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0 \quad (\text{III.1.3})$$

In these expressions

$$\sigma_0 = \frac{1}{3} (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z); \quad t_0^2 = \frac{1}{3} \sqrt{2} \cdot \sigma_0$$

$$k(s_0) = k\left(\frac{\sigma_0}{9K}\right); \quad g(t_0^2) = g\left(\frac{2\sigma_0^2}{9G^2}\right);$$

- **Adgins, Green** and etc. point of view:

$$\varepsilon_{ij} = \alpha_1 \delta_{ij} + \alpha_2 \sigma_{ij} + \alpha_3 \sigma_{ik} \sigma_{jk}; \quad i, j, k = 1, 2, 3; \quad (\text{III.1.4})$$

For the materials subjected to “**cubic**” rule of stress-strain relation, the last relation is in the following form:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{ij} = & c_{11} \sigma_{kk} \delta_{ij} + c_{12} \sigma_{ij} + c_{21} \sigma_{kk}^2 \delta_{ij} + c_{22} \sigma_{km} \sigma_{km} \delta_{ij} + \\ & 2c_{22} \sigma_{kk} \sigma_{ij} + c_{23} \sigma_{ik} \sigma_{jk} + c_{31} \sigma_{kk}^3 \delta_{ij} + c_{32} \sigma_{km} \sigma_{km} \sigma_{ij} + \\ & + c_{33} \sigma_{km} \sigma_{km} \sigma_{nn} \delta_{ij} + c_{33} \sigma_{kk}^2 \sigma_{ij} + c_{34} \sigma_{kk} \sigma_{in} \sigma_{jn} + \\ & + 3c_{34} \sigma_{km} \sigma_{kn} \sigma_{mn} \delta_{ij} \end{aligned} \quad (\text{III.1.5})$$

The coefficients c_{ij} ($i = 1-3; j = 1-4$) are the constants defining the physical properties of the material.

In obtaining these expression we made the following substitutions:

$$\alpha_1 = c_{11} T_1 + c_{21} T_1^2 + 2c_{22} T_2 + c_{31} T_1^3 + 2c_{33} T_1 T_2 + c_{34} T_3$$

$$\alpha_2 = c_{12} + 2c_{22}T_1 + 2c_{32}T_2 + c_{33}T_1^2; \quad \alpha_3 = c_{23} + c_{34}T_1$$

$$T_1 = \sigma_{ij}; \quad T_2 = \frac{1}{2}\sigma_{ij}\sigma_{ij}; \quad T_3 = \frac{1}{3}\sigma_{ij}\sigma_{jk}\sigma_{ik}; \quad (\text{III.1.6})$$

In these expressions T_i are stress tensor invariants.

For the function (stress function) satisfying the equilibrium conditions (III.1.1) we take the expressions:

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}; \quad \sigma_y = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}; \quad \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}; \quad (\text{III.1.7})$$

On a lateral side of a prismatic beam, the stress function $F(x, y)$ should satisfy the following boundary conditions:

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \text{const}; \quad \frac{\partial F}{\partial x} = \text{const} \quad (\text{III.1.8})$$

These constants may be accepted as zero.

In non-linear statement problems, the quantities σ_z and F are taken in the following series form (with respect to small parameter λ) [38,53]:

$$\begin{aligned} \sigma_z &= \sigma_z^{(0)} + \lambda \sigma_z^{(1)} + \lambda^2 \sigma_z^{(2)} + \dots \\ F &= F^{(0)} + \lambda F^{(1)} + \lambda^2 F^{(2)} + \dots \end{aligned} \quad (\text{III.1.9})$$

In these expressions, the quantities $\sigma_z^{(0)}$ and $F^{(0)}$ (the values in zero approximation) take the following values for a linear elasticity problem:

$$F^{(0)} = 0 ; \sigma_z^{(0)} = -\frac{M}{J} x \quad (\text{III.1.10})$$

Here M is a bending moment, J is inertia moment of cross section area.

In the general form, the inertia moment is calculated by the formula:

$$J = \iint_S x^2 dx dy ; J = J_2 - J_1 \quad (\text{III.1.11}).$$

J_1 is an inertia moment of an area (hole) bounded by L_1 contour, J_2 is an inertia moment of an area (polygon) bounded by L_2 contour. Inertia moments of cross section areas of some simple geometric bodies are given in the form of table №3.1

It we take into account the expression (III.1.9) of the stress function (F) in the formula (III.1.3) and (III.1.5) in turn, then by the conditions (III.1.10), (III.1.7) we get.

- From **Cauchy, Genki, Cawderer** and etc. point of view (in a first approximation):

$$\Delta\Delta F^{(1)} = \frac{8a^3}{3G(3K + 4G)} x \quad (\text{III.1.12}).$$

Here, $a = -\frac{M}{J}$; G is a shear modulus, K is a volume compression modulus. In obtaining expression (III.1.12), the mean stress function is taken as $k(s_0) = 1$ and of tangential stresses

intensity is taken function in the form $g(t_0^2) = 1 + g_2 t_0^2$. (see I.1.28 and I.1.20)

-From **Green, Adgins** and etc. point of view (i.e. at any physical nonlinear statement):

$$\begin{aligned}
 & c_{11}[\Delta\Delta F + \Delta\sigma_z] + c_{12}\Delta\Delta F + c_{21}[\Delta(F_{xx}^2 + F_{yy}^2 + \sigma_z^2)] + \\
 & + c_{22}[\Delta(F_{xx}^2 + F_{yy}^2 + 2F_{xy}^2\sigma_z^2)] + 2c_{22}\left\{\frac{\partial^2}{\partial y^2}[(\Delta F + \sigma_z)F_{yy}]\right\} + \\
 & + \frac{\partial^2}{\partial x^2}[(\Delta F + \sigma_z)F_{xx}] + \frac{\partial^2}{\partial x\partial y}[(\Delta F + \sigma_z)F_{xy}] \Big\} + \\
 & + c_{23}\left\{\frac{\partial^2}{\partial y^2}(F_{yy}^2 + F_{xy}^2) + \frac{\partial^2}{\partial x^2}(F_{xx}^2 + F_{xy}^2) + \right. \\
 & \left. + \frac{\partial^2}{\partial x\partial y}[F_{yy}F_{xy} + F_{xx}F_{xy}]\right\} + c_{31}[\Delta(F_{xx}^3 + F_{yy}^3 + \sigma_z^3)] + \\
 & + c_{32}\left\{\frac{\partial^2}{\partial y^2}[(F_{yy}^2 + 2F_{xy}^2 + F_{xx}^2 + \sigma_z^2)F_{yy}]\right\} + \\
 & + \frac{\partial^2}{\partial x^2}[(F_{yy}^2 + 2F_{xy}^2 + F_{xx}^2 + \sigma_z^2)F_{xx}] + \\
 & + \frac{\partial^2}{\partial x\partial y}[(F_{yy}^2 + 2F_{xy}^2 + F_{xx}^2 + \sigma_z^2)F_{xy}] \Big\} + \\
 & + c_{33}\Delta[(\Delta F + \sigma_z) \cdot (F_{yy}^2 + 2F_{xy}^2 + F_{xx}^2 + \sigma_z^2)] +
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + c_{33} \left\{ \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left[(F_{xx}^2 + F_{yy}^2 + \sigma_z^2) \cdot F_{yy} \right] + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[(F_{xx}^2 + F_{yy}^2 + \sigma_z^2) F_{xx} \right] \right. \\
& + \left. \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \left[(F_{xx}^2 + F_{yy}^2 + \sigma_z^2) F_{xy} \right] \right\} + c_{34} \left\{ \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left[(\Delta F + \sigma_z) \cdot (F_{yy}^2 + F_{xy}^2) \right] + \right. \\
& + \left. \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[(\Delta F + \sigma_z) (F_{xx}^2 + F_{xy}^2) \right] + \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \left[(\Delta F + \sigma_z) (F_{xx} F_{xy} + \right. \right. \\
& \left. \left. + F_{yy} F_{xy}) \right] \right\} + 3c_{34} \Delta [F_{xx}^3 + F_{yy}^3 + \sigma_z^3 + 3F_{yy} F_{xy}^2 + 3F_{xx} F_{xy}^2] = 0.
\end{aligned}$$

(III.1.13).

It is seen from strain compatibility conditions (III.1.2) that there is a linear dependence between normal stress σ_z and variables x , y .

$$\begin{aligned}
& c_{11}(\Delta F + \sigma_z) + c_{12}\sigma_z + c_{21}(F_{xx}^2 + F_{yy}^2 + \sigma_z^2) + \\
& + c_{22}[F_{xx}^2 + F_{yy}^2 + 2F_{xy}^2 + \sigma_z^2] + 2c_{22} \cdot \sigma_z(\Delta F + \sigma_z) + c_{23}\sigma_z^2 \\
& + c_{31}[F_{yy}^3 + F_{xx}^3 + \sigma_z^3] + c_{32}\sigma_z(F_{xx}^2 + F_{yy}^2 + \sigma_z^2 + 2F_{xy}^2) + \\
& + c_{33}(\Delta F + \sigma_z)(F_{xx}^2 + F_{yy}^2 + 2F_{xy}^2 + \sigma_z^2) + \\
& + c_{33}\sigma_z(F_{xx}^2 + F_{yy}^2 + \sigma_z^2) + c_{34}\sigma_z^2(\Delta F + \sigma_z) + \\
& + 3c_{34}(F_{xx}^3 + F_{yy}^3 + \sigma_z^3 + \\
& + 3F_{yy} \cdot F_{xy}^2 + 3F_{xx} \cdot F_{xy}^2) = A_1 x + B_1 y + c
\end{aligned}$$

(III.1.14)

If we consider expressions (III.1.9) in differential equations (III.1.13) and (III.1.14), a differential equation obtained in a first approximation will be as follows:

$$\Delta\Delta F^{(1)} + \beta_1^* \Delta f^{(1)} + (2 + 2\beta_2^*) \cdot \frac{M^2}{J^2} + (6\beta_4^* + 6\beta_5^* + 18\beta_6^*) \cdot \frac{M^3}{J^3} x = 0 \quad (\text{III.1.15})$$

$$f^{(1)} + \beta_1^* \Delta F^{(1)} + (1 + 3\beta_2^* + \beta_3^*) \cdot \frac{M^2}{J^2} x^2 + (\beta_4^* + 2\beta_5^* + 4\beta_6^* + \beta_7^*) \frac{M^3}{J^3} x^3 = A_1 x + B_1 y + c; \quad (\text{III.1.16})$$

Here we make the following substitutions:

$$\beta_1^* = \frac{c_{11}}{c_{11} + c_{12}}; \quad \beta_2^* = \frac{c_{22}}{c_{21}}; \quad \beta_3^* = \frac{c_{23}}{c_{21}}; \quad \beta_4^* = \frac{c_{31}}{c_{21}};$$

$$\beta_5^* = \frac{c_{33}}{c_{21}}; \quad \beta_6^* = \frac{c_{32}}{c_{21}}; \quad \beta_7^* = \frac{c_{34}}{c_{21}}; \quad f^{(1)} = \sigma_z^{(1)}$$

If to differential equation (III.1.16) we apply the operator

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \quad \text{and remove the function } \Delta f^{(1)} \text{ in expression}$$

(III.1.15) (make a substitution) we get the following differential equation:

$$\Delta\Delta F^{(1)} = H_1 + H_2 \cdot x \quad (\text{III.1.17}).$$

Here

$$H_1 = \frac{1}{1 - (\beta_1^*)^2} \left[(2 + 6\beta_2^* + 2\beta_3^*) \beta_1^* - 2 - 2\beta_2^* \right] \frac{M^2}{J^2}$$

$$H_2 = \frac{1}{1 - \beta_1^*} \left[(6\beta_4^* + 6\beta_6^* + 12\beta_5^* + 24\beta_7^*)\beta_1^* - 6\beta_6^* - 6\beta_5^* - 18\beta_7^* \right] \cdot \frac{M^3}{J^3}$$

Thus, in physical non-linear statement, in pure bending of prismatic beams, by both point of views, the solution of the problem is reduced to the solution of differential equations as (III.1.12) and (III.1.2) and (III.1.17) (for finding stress function $F^{(1)}$ in a first approximation). All first we solve the differential equation (III.1.12). We look for the solution of this equation in the form $F^{(1)} = F_{spec}^{(1)} + F_{gen}^{(1)}$. Equation (III.1.12), in polar coordinates (ρ, θ) is written in the form:

$$\Delta \Delta F^{(1)} = bx = b\rho \cos \theta \quad (\text{III.1.18})$$

Special solution $F_{spec}^{(1)}$ is found in the form:

$$F_{spec}^{(1)} = \frac{b}{225} \rho^5 \cos \theta \quad (\text{III.1.19})$$

General solution $F_{gen}^{(1)}$ (general solution of the homogeneous equation $\Delta \Delta F^{(1)} = 0$) as we noted in part I and II is found in the form:

$$F_{gen}^{(1)} = c_1 \ln \rho + \rho^2 c_2 \quad (\text{III.1.20}).$$

As a resuet, the solution of equation (III.1.18) is in the form:

$$F^{(1)} = F_{spec}^{(1)} + F_{gen}^{(1)} = \frac{b}{225} \rho^5 \cos \theta + c_1 \ln \rho + c_2 \rho^2 \quad (\text{III.1.21})$$

By boundary conditions (III.1.18), the constants c_1 and c_2 take the values:

$$c_1 = \frac{b \cos \theta}{45} \left[\frac{t_2^5 - t_1^5}{t_2^2 - t_1^2} t_1^2 - t_1^2 \right]; \quad c_2 = \frac{b \cos \theta}{90} \frac{t_1^5 - t_2^5}{t_2^2 - t_1^2} \quad (\text{III.1.22}).$$

In these expressions t_1 and t_2 are affices of internal L_1 and external L_2 contours, respectively.

After finding the stress function $F^{(1)}$, the function $\sigma_z^{(1)} = f_1(x, y)$ is found by the following expression: (we take ε_z deformation III.1.3, in the expression in the form of

$$\varepsilon_z = \varepsilon_z^{(0)} + g_z \varepsilon_z^{(1)} = \varepsilon_z^{(0)} + g_2 \cdot (\alpha \cdot x + \beta \cdot y + \gamma)$$

equate the right hand sides, find the function $f_1^{(1)}(x, y)$)

$$f_1^{(1)}(x, y) = \frac{3G \cdot K}{3K + G} \cdot \left[\left(\frac{1}{2G} - \frac{1}{3K} \right) \cdot \Delta F^{(1)} - \right. \\ \left. - \frac{2}{9G^3} a^3 x^3 + 3(\alpha \cdot x + \beta \cdot y + \gamma) \right]; \quad (\text{III.1.23})$$

α, β and γ constants are found from the boundary conditions

$$\iint_S \sigma_z^{(1)} dx dy = \iint_S f_1^{(1)}(x, y) dx dy = 0$$

$$\iint_S f_1^{(1)}(x, y) x dx dy = M$$

$$\iint_S f_1^{(1)}(x, y) \cdot y dx dy = 0 \quad (\text{III.1.24})$$

at the lateral side of the beam.

When a cross section of a prismatic beam is symmetric, $\beta = \gamma = 0$. So, for the function $\sigma_z^{(1)} = f_1^{(1)}(x, y)$ we get the following expression:

$$f_1^{(1)}(x, y) = \frac{3K \cdot G}{3K + G} \cdot \left[\left(\frac{1}{2G} - \frac{1}{3K} \right) \cdot \Delta F^{(1)} - \right. \\ \left. - \frac{2}{9G^3} a^3 \cdot \rho^3 \cos^3 \theta + 3\alpha \cdot \rho \cdot \cos \theta \right]; \quad (\text{III.1.25})$$

The coefficient a is found from the expression

$$\iint_S f_1^{(1)}(x, y) x dx dy = M. \text{ By means of the Green formula we}$$

replace the two-fold integral by a one-fold integral

$$\iint_S f_1^{(1)}(x, y) x dx dy = \int_{L_1} \varphi dy - \int_{L_2} \varphi dy = M \quad (\text{III.1.26}).$$

Here, since $\frac{\partial \varphi}{\partial x} = f_1^{(1)}(x, y) \cdot x$, it is determined that

$\varphi = \int f_1^{(1)}(x, y) x dx$. As integration is with respect to $d\rho$, the function $\varphi(x, y)$ is found from the last expression and by in equality (III.1.25),

$$\begin{aligned} \varphi(x, y) = & \frac{\rho^5}{5} (d_1 - d_3) \cos^2 \theta + \\ & + \frac{\rho^2}{2} d c_2 \cos^2 \theta + \alpha \cdot d_4 \frac{\rho^3}{3} \cos^2 \theta \end{aligned} \quad (\text{III.1.27})$$

If we consider this expression in equation (III.1.26) we can write $dy = d\rho \sin \theta$ and $\rho = t_2$ (on an external contour L_2)

$$\begin{aligned} & \left[\frac{1}{30} (d_1 - d_3) \cos^2 \theta t_2^{-1} + \frac{1}{6} d_2 \cdot c_2 \cdot t_2^3 \cos^2 \theta + \right. \\ & \left. + \frac{1}{12} \alpha \cdot d_4 \cos^2 \theta t_2^4 \right] \sin \theta - \left[\frac{1}{30} (d_1 - d_3) \cos^2 \theta \cdot t_1^6 + \right. \\ & \left. + \frac{1}{6} d_2 \cdot c_2 \cdot t_1^3 \cos^2 \theta + \frac{1}{12} d_4 \alpha \cdot t_1^4 \cos^2 \theta \right] \sin \theta = M \end{aligned}$$

Hence we get:

$$\begin{aligned} \alpha = & \frac{12M}{d_4 \cos^2 \sin \theta (t_2^4 - t_1^4)} - \\ & - \frac{\frac{2}{5} (d_1 - d_3) (t_2^6 - t_1^6) + 2c_2 d_2 (t_2^3 - t_1^3)}{d_4 (t_2^4 - t_1^4)} \end{aligned} \quad (\text{III.1.29})$$

In these expressions, we make the following substitutions:

$$\begin{aligned} d_1 = & \frac{3KG}{3K+G} \left(\frac{1}{2G} - \frac{1}{3K} \right) \frac{1}{9} b \cos \theta; \quad d_2 = \frac{3KG}{3K+G} \left(\frac{1}{2G} - \frac{1}{3K} \right) 4; \\ d_3 = & \frac{3KG}{3K+G} \frac{2}{9G^3} a^3 \cos^3 \theta; \quad d_4 = \frac{9KG}{3K+G} 3 \cos^3 \theta \end{aligned} \quad (\text{III.1.30})$$

Thus, the functions $f_1^{(1)}(x, y)$ and $\varphi(x, y)$ are completely defined. Then by means of expressions (III.1.9) we find the stress components:

$$\sigma_z = \sigma_z^{(0)} + g_2 \sigma_z^{(1)} = a\rho \cos \theta + g\varphi(\rho, \theta); \quad \sigma_\theta = -\frac{\partial^2 F^{(1)}}{\partial \rho^2}$$

$$\sigma_\rho = \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 F^{(1)}}{\partial \theta^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial F^{(1)}}{\partial \rho}; \quad \tau_{\rho\theta} = -\frac{\partial}{\partial \rho} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial F^{(1)}}{\partial \theta} \right); \quad (\text{III.1.31})$$

Depending on the parameters A, N, m , the obtained general solution may be demonstrated by many concrete examples.

1. For $A = R$, $m = 0$ the external contour L_2 takes the form of a circle. In this case we get a problem on bending of a cylindric beam.

In this case, for $e = r$, the internal contour L_1 becomes an r radius circle. i.e. the cross section of a cylindric beam consists of concentric circles (concentric circles of radii R and r).

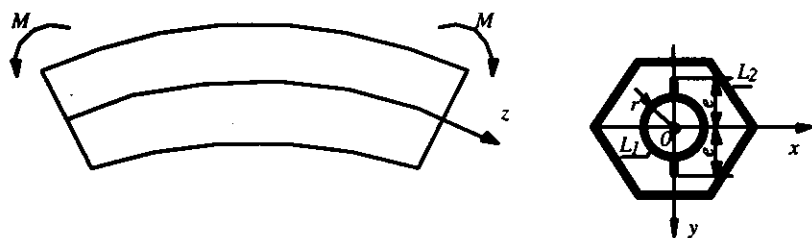


Fig.3.1 a

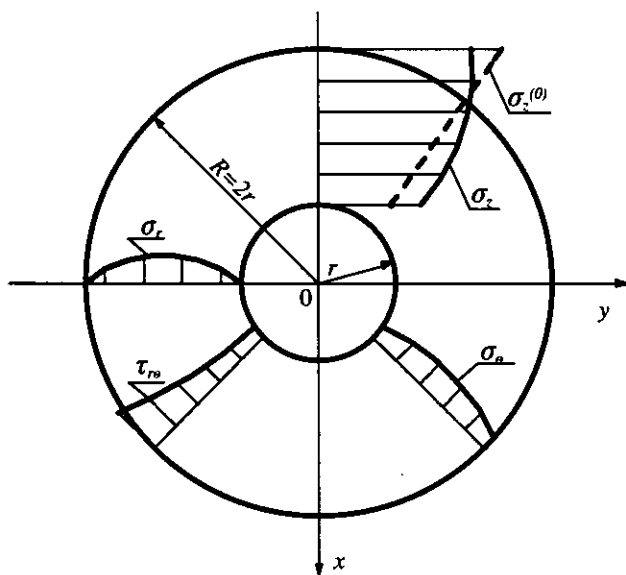


Fig.3.1 b

2. for $N = 2$; $m = \frac{a-b}{a+b}$; $r = 0$; $l = e - r = 0$ we get a problem in bending of an whole elliptic beam with semi-axes a and b . The results obtained in both cases are same as in the paper [22] (the value of the stress function in a first approximation $F^{(1)}$ and expression of the function $\varphi(x, y)$).

Similarly we can find the expressions of the functions $F(x, y)$ and $\varphi(x, y)$ in (the next the values in the second and etc). approximations. Investigators in the future may continue this work and consider numerical results.

§3.2. Bending of prismatic beams under point concentrate load in physical nonlinear statement.

We use the method used in pure bending of a prismatic beam in §1, in a problem on bending under the point load. As it was said in §1, a crass section of a prismatic beam consists of two-connected domain (contour L_2) and is bounded from exterior by a right polygon and from interior by a r radius circle and a contour L_1 possessing two linear crcks outgoing from this circle. The vertex point of cracks of cracks are denoted by $\pm ie$ (fig.3.2). Total length of the beam is point load L is denoted by P (the point load is applied on the base $z = L$ of the beam along the axis x).

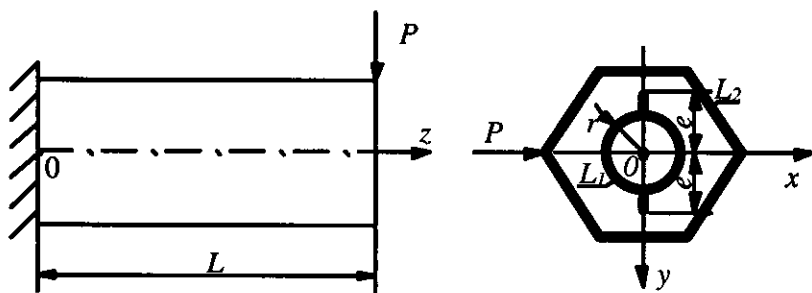


fig.3.2

Unlike the pure bending, when under the action of point load, the stresses are in the form $(\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{xz}, \tau_{yz})$ all the equations of nonlinear elasticity theory are satisfied. And the stresses σ_x, σ_y and τ_{xy} are independent on the axis z .

It is known from the first part that when there are no volume forces, the equilibrium equations are written in the form (see I.1.1., I.1.7 and I.1.36)

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = 0; \quad \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} = 0$$

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} = 0; \quad (\text{III.2.1})$$

Strain compatibility conditions

$$\frac{\partial^2 \psi_{yz}}{\partial y \partial z} = \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial z^2} + \frac{\partial \varepsilon_y}{\partial y^2}; \quad \frac{\partial^2 \psi_{zx}}{\partial z \partial x} = \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial z^2};$$

$$\frac{\partial^2 \psi_{xy}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2};$$

$$2 \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y \partial z} = \frac{\partial}{\partial x} \left(-\frac{\partial \psi_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \psi_{xz}}{\partial y} + \frac{\partial \psi_{xy}}{\partial z} \right);$$

$$2 \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x \partial z} = \frac{\partial}{\partial y} \left(-\frac{\partial \psi_{xz}}{\partial y} + \frac{\partial \psi_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \psi_{xy}}{\partial z} \right);$$

$$2 \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial z} \left(-\frac{\partial \psi_{xy}}{\partial z} + \frac{\partial \psi_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \psi_{xz}}{\partial y} \right); \quad (\text{III.2.2})$$

Expression of strains by stresses

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= \frac{1}{3K} k(s_0) \cdot \sigma_0 + \frac{1}{2G} g(t_0^2) \cdot (\sigma_x - \sigma_0); \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{3K} k(s_0) \cdot \sigma_0 + \frac{1}{2G} g(t_0^2) \cdot (\sigma_y - \sigma_0); \\ \varepsilon_z &= \frac{1}{3K} k(s_0) \cdot \sigma_0 + \frac{1}{2G} g(t_0^2) \cdot (\sigma_z - \sigma_0) \psi_{xy} = \frac{1}{G} g(t_0^2) \cdot \tau_{xy}; \\ \psi_{yz} &= \frac{1}{G} g(t_0^2) \cdot \tau_{yz}; \quad \psi_{xz} = \frac{1}{G} g(t_0^2) \tau_{xz}\end{aligned}\quad (\text{III.2.3})$$

Here $\sigma_0 = \frac{1}{3}(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)$ are mean stresses. How we can take the stresses $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{xz}$ and τ_{xy} that they satisfy all the equations (conditions) given above. As in pure bending if we take the stresses σ_x, σ_y and τ_{xy} by the stress function $F(x, y)$ as

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}; \quad \sigma_y = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}; \quad \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}; \quad (\text{III.2.4}),$$

then the first two equilibrium conditions are satisfied this stress function $F(x, y)$ should satisfy the conditions

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \text{const} \quad \text{and} \quad \frac{\partial F}{\partial x} = \text{const} \quad (\text{III.2.5})$$

in the lateral side of the prismatic beam. Here we can take constants as a zero (this doesn't affect on stresses). The last

expression of equilibrium conditions (III.2.1) is satisfied when the normal stress σ_z

$$\sigma_z = \sigma_z^{(0)} + \lambda \cdot f(x, z) \quad (\text{III.2.6})$$

and also tangential stresses τ_{xz} and τ_{yz} are taken in the form

$$\tau_{xz} = \frac{\partial \varphi}{\partial y}; \quad \tau_{yz} = -\frac{\partial \varphi}{\partial x} - \frac{P}{J}xy - \lambda \cdot f_z \cdot y \quad (\text{III.2.7})$$

In these expressions, P is a point load acting on P , and J is an inertia moment of cross section of the beam with respect to neutral axis. It is known that the inertia moment is defined by the following expression.

$$J = \iint_S x^2 dx dy \quad (\text{III.2.8})$$

As it was said above, by means of **Ostogradskii-Green** formula, the two-fold integral is reduced to one-fold integral (see formula III.1.11). Inertia moments of some simple geometric bodies are given in table №3.1.

Is we arbitrarily take the mean stress function ($k(s_0)$) and intensity function $g(t_0^2)$ of tangential stresses, then as it was said in parts I and II, the solution of the problem and satisfaction of boundary conditions meet many mathematical difficulties. For simplifying the solution of the problem, in expressions $k(s_0)$ and

$g(t_0^2)$, (in expressions I.1.29 and I.1.30), and (I.1.57) we are restricted by a special case and take the form:

$$k(s_0) = 1; \quad g(t_0^2) = 1 + g_2 \cdot t_0^2 \quad (\text{III.2.9})$$

i.e. we are restricted in a first approximation of the functions $k(s_0)$ and $g(t_0^2)$ (zero approximation gives the solution in the linear statement). At the same time, if in the expressions (III.2.7) we take the function $\varphi(x, y)$ in the form:

$$\varphi = \varphi^{(0)} + \lambda_2 \cdot \varphi^{(1)} \quad (\text{III.2.10}),$$

and consider it in that formulae, for the tangential stresses τ_{xz} and τ_{yx} we can get:

$$\begin{aligned} \tau_{xz} &= \frac{\partial \varphi^{(0)}}{\partial y} + g_2 \cdot \frac{\partial \varphi^{(1)}}{\partial y} \\ \tau_{yz} &= -\frac{\partial \varphi^{(0)}}{\partial x} - \lambda \cdot \frac{\partial \varphi^{(1)}}{\partial x} - \frac{P}{J} xy - \lambda \cdot f_z \cdot y \end{aligned} \quad (\text{III.2.11}).$$

If we take into account the intensity function $g(t_0^2)$ of tangential stresses in the expression (I.1.6) of part I (III.1.11); (III.2.9) and (III.2.11) and ignore the square of coefficient $g(t_0^2)$ and its higher degrees, we can write:

$$g(t_0^2) = g_2 \cdot \frac{\tau_0^2}{G^2} [\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2 - \sigma_x \sigma_y - \sigma_y \sigma_z - \sigma_x \sigma_z + 3\tau_{xy}^2 + 3\tau_{yz}^2 + 3\tau_{zx}^2] = \frac{2}{9G^2} \cdot g_2 \cdot [\sigma_z^2 + 3\Phi]; \quad (\text{III.2.12})$$

Here

$$\Phi = 3(\varphi_x^{(0)})^2 + 3(\varphi_y^{(0)})^2 + 6\varphi_x^{(0)} \frac{P}{J} xy + 3 \frac{P^2}{J^2} x^2 y^2;$$

Then, by the expressions (III.2.3), for displacement strain $(\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z)$ and shear strain $(\psi_{xy}, \psi_{xz}, \psi_{yx})$ components we can write the followings:

$$\varepsilon_x = n_1 \sigma_z^{(0)} + n_1 g_2 f + n_1 g_2 \cdot \Delta F + \frac{1}{2G} g_2 F_{yy} - n_2 g_2 (\sigma_z^{(0)^3} + \sigma_z^{(0)} \cdot \Phi);$$

$$\varepsilon_y = n_1 \sigma_z^{(0)} + n_1 g_2 f + n_1 g_2 \cdot \Delta F + \frac{1}{2G} g_2 F_{xx} - n_2 g_2 (\sigma_z^{(0)^3} + \sigma_z^{(0)} \cdot \Phi);$$

$$\varepsilon_z = n_3 \sigma_z^{(0)} + n_3 \cdot g_2 \cdot f + n_1 \cdot g_2 \cdot \Delta F + 2n_2 \cdot g_2 \cdot \left[(\sigma_z^{(0)})^3 + \sigma_z^{(0)} \cdot \Phi \right]; \quad \psi_{xy} = -\frac{1}{G} g_2 F_{xy}$$

$$\psi_{xz} = \frac{1}{G} (\varphi_y^0 + g_2 \varphi_y^{(1)}) + \frac{2}{9G^3} g_2 (\varphi_y^{(0)} \cdot \sigma_z^{(0)^3} + \varphi_y^{(0)} \cdot \Phi);$$

$$\begin{aligned} \psi_{yz} = & -\frac{1}{G} \left(\varphi_y^{(0)} + g_2 \varphi_x^{(1)} + \frac{Pxy}{J} + g_2 f_z y \right) - \\ & - \frac{2}{9G^3} g_2 \left(\varphi_x^{(0)} \cdot \sigma_z^{(0)^2} + \varphi_x^{(0)} \cdot \Phi + \right. \\ & \left. + \sigma_z^{(0)^2} \frac{Pxy}{J} + \frac{Pxy}{J} \cdot \Phi \right) \end{aligned} \quad (\text{III.2.13})$$

Here we made the following substitutions:

$$n_1 = \frac{1}{9K} - \frac{1}{6G}; \quad n_2 = \frac{1}{27G^3}; \quad n_3 = \frac{1}{9K} + \frac{1}{3G}; \quad (\text{III.2.14})$$

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \quad \text{is a Laplace operator.}$$

The first, second and the sixth of strain compatibility conditions (III.2.12) are reduced to the following one condition.

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2} \left(\frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} \right) = 0 \quad (\text{III.2.15})$$

If we write the expressions (III.2.14) in this last formula, we get.

$$n_1 f_{xx} = 6n_2 \cdot g_2 \frac{P^3(L-z)^3}{J^3} x; \quad \text{or as } m = p(L-z),$$

we can write:

$$f_{xx} = 6 \frac{n_2}{n_1} g_2 \frac{M^3}{J^3} x \quad (\text{III.2.16})$$

It we twice integrate the last expression with respect to the variable x , we get:

$$f(x, z) = n_4 \frac{x^3}{6} + c_1 x + c_2 \quad (\text{III.2.17}).$$

$$n_4 = 6 \frac{n_2}{n_1} g_2 \frac{M^3}{J^3}$$

c_1 and c_2 are integral constants. If we accept one of them as $c_2 = 0$ (this will not affect on the solution of the problem and stress state of the beam), we can find the other c_1 constant from the satisfaction of the function f the condition

$$\iint_S f \cdot x \cdot dx dy = M \quad (\text{III.2.18}).$$

(because a set of stresses acting in any cross section of the beam is equivalent to the bending moment M).

By means of **Green** formula, this two-fold integral is reduced to one-fold ontegral:

$$\iint_S f \cdot x \cdot dx dy = \int_{L_2} f_1 \cdot dy - \int_{L_1} f_1 \cdot dy = M \quad (\text{III.2.19}).$$

Integration is conducted along the contours L_1 and L_2 .

Here we make substitution $\frac{\partial f_1}{\partial x} = f \cdot x$.

$$\text{Then } f_1 = \int f x dx + c_3 .$$

It in the last expression we take into account equality (III.2.17) and write it in (III.2.19), we get:

$$\int_{L_2} f_1 dy - \int_{L_1} f_1 dy = \int_{L_2} \left[n_4 \frac{x^5}{30} + c_1 \frac{x^3}{3} + c_3 \right] dy - \int_{L_1} \left[n_4 \frac{x^5}{30} + c_1 \frac{x^3}{3} + c_3 \right] dy = M \quad (\text{III.2.20})$$

To conduct complete integration we must make relations between the variables x and y .

It we pass to complex variables (here z is not a symmetry axis along the beam's axis, i.e. along the beam).

As

$$z = x + iy, \quad \bar{z} = x - iy,$$

then

$$x = \frac{1}{2}(z + \bar{z}); \quad y = -\frac{i}{2}(z - \bar{z}) \quad (\text{III.2.21})$$

The function mapping the contour L_2 (right polygon) exterior to a unit circle [51] is as follows:

$$z = A(\tau_2 + m\tau_2^{1-N}); \quad \bar{z} = A(\tau_2^{-1} + m\tau_2^{N-1}); \quad (\text{III.2.22}).$$

The function mapping the contour L_1 (r radius circle and two linear cracks outgoing from it) exterior to a unit circle is as follows [51]

$$z = r\tau_1 \sum_{n=0}^{\infty} \gamma_{n-1} \tau_1^{-n}; \quad \bar{z} = r\tau_1^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} \gamma_{n-1} \tau_1^n \quad (\text{III.2.23})$$

In the last expressions (III.2.22) and (III.2.23), the variable τ is an affix of the points on a unit circle γ (recall that on a unit circle, $\tau = e^{i\theta}$ and $\tau \cdot \bar{\tau} = 1$).

As it was said in section I and II the quantities A, m, N are the coefficients defining the cross section of the beam (see expressions I.2.21 and №1.1).

The coefficients γ_{n-1} are found by [51] (see expressions II.1.16). As it is seen, to calculate the integrals in the expression (III.2.20), we should know the expressions of at least the fifth order power of variables z and \bar{z} ; therefore, below we give the expression for any power of expressions (III.2.22) and (III.2.23) (we do this for simplifying the calculations of future researchers).

At first we consider the expression $z\bar{z}$.

By (III.2.22) (i.e. for a right angle N)

$$z\bar{z} = A^2 m (\tau^N + \tau^{-N}) + A^2 (1 + m^2) \quad (\text{III.2.24})$$

By (III.2.23) (i.e. a circle with two linear cracks)

$$z\bar{z} = r\tau \sum_{n=0}^{\infty} \gamma_{n-1} \tau^{-n} r\tau^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} \gamma_{n-1} \tau^n = r^2 \sum_{\nu=0}^{\infty} \tau^\nu T_1 + r^2 \sum_{\nu=1}^{\infty} \tau^{-\nu} T_2(\nu)$$

$$T_1(v) = \sum_{n=v}^{\infty} * \gamma_{n-1} \gamma_{n-v-1}; \quad T_2(v) = \sum_{n=0}^{\infty} * \gamma_{n-1} \gamma_{n+v-1} \quad (\text{III.2.25})$$

By the expression (III.2.22)

$$(z)^k = \left[A(\tau + m\tau^{1-N}) \right]^k = \sum_{v=0}^{\infty} \tau^v T_3(v) + \sum_{v=0}^{\infty} \tau^{-v} T_4(v)$$

$$T_3(v) = \sum_{v=0}^{\infty} ** A^k C_k^{\frac{k-v}{N}} m^{\frac{k-v}{N}}; \quad T_4(v) = \sum_{k=\frac{v+\varepsilon}{N-1}+\varepsilon}^{\infty} ** A^k C_k^{\frac{k-v}{N}} m^{\frac{k-v}{N}} \quad (\text{III.2.26})$$

$$k = 2; 3; \dots, v = 0; 1; 2; \dots$$

By (III.2.23)

$$(z)^k = \left[r\tau \sum_{n=0}^{\infty} \gamma_{n-1} \tau^{-n} \right]^k = \sum_{v=0}^{\infty} \tau^v T_5(v) + \sum_{v=1}^{\infty} \tau^{-v} T_6(v);$$

$$T_5(v) = \sum_{k=v}^{\infty} * r^k \gamma_{-1}^k g_{k-v}^{(k)}; \quad T_6(v) = \sum_{k=v}^{\infty} * r^k \gamma_{-1}^k g_{k+v}^{(k)};$$

$$g_n^{(k)} = \sum_{n_1=0}^{\infty} g_{n_1}^{(1)} g_{n-n_1}^{(k-1)}; \quad g_n = g_n^{(1)} = \frac{\gamma_{n-1}}{\gamma_{-1}}$$

$$k = 2; 3; \dots; \quad n = 0; 1; 2; \dots; \quad (\text{III.2.27}).$$

In these expressions, the stars * and ** indicate the change of indices of the sums by 2 and N , while passing to the next term.

After some mathematical operations, differential equation (III.2.20) takes the following form (if we take into account expressions III.2.21, III.2.22, III.2.23, III.2.26 and III.2.27).

$$\begin{aligned}
& \int_{L_2} \left\{ \frac{n_4}{32} \frac{A^5}{30} \left(-\frac{iA}{2} \right) (\tau_2 + m\tau_2^{1-N} + \right. \\
& + \tau_2^{-1} + m\tau_2^{N-1})^5 \cdot [1 + m(1-N)\tau_2^{-N} + \\
& + \tau_2^{-2} + m(N-1)\tau_2^{N-2}] + c_1 \frac{A^3}{24} \left(-\frac{iA}{2} \right) (\tau_2 + m\tau_2^{-N+1} + \\
& + \tau_2^{-1} + m\tau_2^{N-1})^3 [1 + \tau_2^2 + m(1-N)\tau_2^{-N} - \\
& - m(N-1)\tau_2^{N-2}] + c_3 \left(-\frac{iA}{2} \right) [1 + m(1-N)\tau_2^{-N} + \\
& + \tau_2^{-2} - m(N-1)\tau_2^{N-2}] \left. \right\} d\tau_2 - \int_{L_4} \left\{ \frac{n_4}{30} \frac{r^5}{32} \left(-\frac{ir}{2} \right) \left[\sum_{n=0}^{\infty} \gamma_{n-1} \tau_2^{1-n} + \right. \right. \\
& + \sum_{n=0}^{\infty} \gamma_{n-1} \tau_1^{n-1} \left. \right]^5 \cdot \left[\sum_{n=0}^{\infty} \gamma_{n-1} (1-n) \tau_1^{-n} - \sum_{n=0}^{\infty} \gamma_{n-1} (n-1) \tau_1^{n-2} \right] d\tau_1 + \\
& + c_1 \frac{r^3}{24} \left(-\frac{ir}{2} \right) \cdot \left[\sum_{n=0}^{\infty} \gamma_{n-1} \tau_1^{1-n} + \sum_{n=0}^{\infty} \gamma_{n-1} \tau_1^{n-1} \right]^3 \cdot \left[\sum_{n=0}^{\infty} \gamma_{n-1} (1-n) \tau_1^{-n} - \right. \\
& - \sum_{n=0}^{\infty} \gamma_{n-1} (n-1) \tau_1^{n-2} \left. \right] d\tau_1 + c_3 \frac{r^3}{24} \left(-\frac{ir}{2} \right) \left[\sum_{n=0}^{\infty} \gamma_{n-1} (1-n) \tau_1^{-n} - \right. \\
& - \sum_{n=0}^{\infty} \gamma_{n-1} (n-1) \tau_1^{n-2} \left. \right] \left. \right\} d\tau_1 = M \quad (\text{III.2.28})
\end{aligned}$$

In calculation of all integrals contained in this expression, only the terms possessing τ power terms of the variable (-1) are not zero, the others are zero (all these integrals are **Cauchy** type integrals).

$$\text{i.e. as } \tau = e^{i\theta} \text{ and } \tau^{-1} = 1 \cdot e^{-i\theta} \quad \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{d\tau}{\tau} = 1$$

Because

$$\begin{aligned} \int_L \frac{d\tau}{\tau} &= \ln \tau \Big|_0^{2\pi} = \ln(1e^{i\theta}) \Big|_0^{2\pi} = \ln 1 + \ln(1e^{i\theta}) \Big|_0^{2\pi} = \\ &= \ln 1 + i\theta \Big|_0^{2\pi} = 0 + 2\pi i \end{aligned}$$

The other integrals are identity zeros. For example,

$$\begin{aligned} \int_L \frac{d\tau}{\tau^2} &= \int_L \tau^{-2} d\tau = -\frac{1}{3} \tau^{-1} \Big|_0^{2\pi} = \\ &= -\frac{1}{3} e^{i\theta} \Big|_0^{2\pi} = -\frac{1}{3} (\cos \theta - i \sin \theta) \Big|_0^{2\pi} = 0 \end{aligned}$$

or

$$\begin{aligned} \int_L \tau d\tau &= \frac{\tau^2}{2} \Big|_0^{2\pi} = \frac{1}{2} e^{i2\theta} \Big|_0^{2\pi} = \frac{1}{2} e^{i\theta} (\cos + i \sin \theta) \Big|_0^{2\pi} = \\ &= \frac{1}{2} \cos 2\theta \Big|_0^{2\pi} + \frac{1}{2} i \sin 2\theta \Big|_0^{2\pi} = 0 \end{aligned} \quad (\text{III.2.29})$$

and etc.

According to what has been said, if we calculate the integrals in the equation (III.2.26), we get the following result:

$$n_4 \frac{\pi A^6}{480} \Pi_1 + \frac{\pi A^4}{24} c_1 \Pi_2 - n_4 \frac{\pi r^6}{480} \cdot \Pi_3 - n_4 \frac{\pi r^4}{8} c_1 \Pi_4 = M \quad (\text{III.2.30})$$

From this expression we find the constant c_1

$$c_1 = \frac{M - \frac{\pi \cdot n_4}{480} \Pi_1 \cdot A^6 - \frac{\pi \cdot n_4}{480} r^6}{\frac{\pi A^4}{24} \cdot \Pi_2 - \frac{\pi \cdot r^4}{8} \cdot \Pi_4} \quad (\text{III.2.31})$$

Here, the quantities Π_1, Π_2, Π_3 and Π_4 are the coefficients obtained from integration (the coefficients dependent on the parameters m, N, γ_{n-1}).

Thus, we find the expression of the function $f(x, z)$ in a first approximation.

If the function $f(x, z)$ is known, in the third of strain compatibility conditions (III.2.2), by formula (III.2.14) being an expression of deformations $(\varepsilon_x, \varepsilon_y, \psi_{xy})$, for the function $F(x, y)$ we can get the following expression:

$$\begin{aligned} \Delta \Delta F \cdot \left(n_1 + \frac{1}{2G} \right) = & n_2 \cdot \sigma_z^{(0)} \cdot \Phi_{yy} + 6n_2 \cdot \sigma_z^{(0)} \cdot \frac{P^2 \cdot (l-z)^2}{J^2} - \\ & - 2n_2 \Phi_x \frac{P^2 \cdot (l-z)}{J} + n_2 \cdot \sigma_z^{(0)} \cdot \Phi_{xx} - n_1 \cdot f_{xx}; \end{aligned} \quad (\text{III.2.32})$$

The function Φ contained in this expression is defined by formula (III.2.13). Within linear elasticity theory, the function $\varphi^{(0)}(x, y)$ contained in expression (III.2.13) is defined by the following expression

$$\begin{aligned}
\varphi^{(0)}(x, y) &= \varphi^{(0)}(z, \bar{z}) = \frac{1}{2} B_1 \cdot z \cdot (\bar{z})^2 + \\
&+ \frac{i}{6} B_2 \cdot z^3 - \frac{i}{4} B_3 \cdot z^2 \cdot \bar{z} + \frac{i}{8} B_4 \left[\frac{1}{3} z^3 - z \cdot (\bar{z})^2 \right] + \\
&+ \frac{1}{2} B_5 \sum_{k=1}^{\infty} \left[\alpha_k \left(\frac{z}{A} \right)^k + \beta_k \xi_1^{-k} \right]; \tag{III.2.33}
\end{aligned}$$

The coefficients α_k and β_k contained in this expression is known from the solution linear statement of the problem. The variable ξ_1 is the inverse function of mapping function (III.2.23) of the internal L_1 contour (see formula №1.1).

In the last expression we made the following substitutions:

$$\begin{aligned}
B_1 &= -\frac{P}{8(1+\mu) \cdot J} (1+2\mu); \quad B_2 = -\frac{3P}{8(1+\nu) \cdot J} P \\
B_3 &= -\frac{2P}{8(1+\nu) \cdot J}; \quad B_4 = -\frac{P}{J}; \quad B_5 = -\frac{4P}{8(1+\nu) \cdot J} \tag{III.2.34}.
\end{aligned}$$

It we substitute expression (III.2.33) in formula (III.2.13), the function $\Phi(x, y)$ is defined as follows.

At first, by (II.2.16) we can write the last term in expression (III.2.32) as follows:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k \xi_1^{r-k} &= \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k \left[\frac{z}{r} \sum_{n=0}^{\infty} \delta_{n-1} \left(\frac{r}{z} \right)^n \right]^{-k} = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{r}{z} \right)^v B(v); \quad B(v) = \sum_{k=0}^v \beta_k \delta_{-1}^{-k} L_{v-k}; \end{aligned} \quad (\text{III.2.35})$$

Here (*) shows that while passing to the next term the indices change by two. All the coefficients $L_n^{(k)}$ are found from this condition [51]:

$$L_n^{(k)} + \sum_{n_1=0}^n L_{n-n_1}^{(k)} g_{n_1}^{(k)} = 0; \quad g_n^{(1)} = \frac{\delta_{n-1}}{\delta_{-1}}$$

Thus, we obtain:

$$\begin{aligned} \Phi &= z\bar{z}^3 \cdot \gamma_1^* + z^3 \cdot \bar{z} \gamma_2^* + \bar{z}^2 \cdot z^2 \cdot \gamma_3^* + z^4 \cdot \gamma_4^* + \bar{z}^4 \cdot \gamma_5^* + \\ &+ i\gamma_6^* \sum_{k=1}^{\infty} [ka_k A^{-k} \cdot z^{k+1} - k \cdot B(k) r^k \cdot z^{-k+1}] + \\ &+ i\gamma_7^* \sum_{k=1}^{\infty} [ka_k A^{-k} \cdot z^{k-1} \cdot \bar{z}^2 - k \cdot B(k) \cdot r^k \cdot z^{-k-1} \cdot \bar{z}^2] + \\ &+ i\gamma_8^* \sum_{k=1}^{\infty} [ka_k \cdot A^{-k} \cdot z^k \cdot \bar{z} - k \cdot B(k) \cdot r^k \cdot z^{-k} \cdot \bar{z}]; \end{aligned} \quad (\text{III.2.36})$$

Here, we make the substitutions:

$$\gamma_2^* = -6B_1^2 - \frac{3}{4} B_3 B_4 - \frac{9}{2} B_1 B_4;$$

$$\gamma_2^* = 6B_1 B_2 + 3B_1 B_4 - \frac{3}{2} B_3^2 + \frac{3}{2} B_2 B_4 + \frac{3}{4} B_3 B_4 + \frac{3}{4} B_4^2;$$

$$\begin{aligned}
\gamma_3^* &= \frac{3}{4}B_1B_4 + \frac{3}{4}B_2B_4 - \frac{9}{4}B_3B_4 - \frac{15}{2}B_1B_3 + \frac{3}{4}B_4^2; \\
\gamma_4^* &= \frac{3}{4}B_2B_3 - \frac{3}{4}B_2B_4 + \frac{3}{4}B_3B_4 - \frac{3}{8}B_4^2; \\
\gamma_5^* &= -\frac{3}{4}B_1B_4 - \frac{3}{8}B_4^2; \quad \gamma_6^* = -\frac{3}{4}B_3B_5 + \frac{3}{4}B_4B_5; \\
\gamma_7^* &= -\frac{3}{4}B_4B_5; \quad \gamma_8^* = 6B_1B_5 - \frac{3}{4}B_4B_5; \quad (\text{III.2.37}).
\end{aligned}$$

Passing to polar coordinates (ρ, θ) in expression (III.2.36), we make same derivations, write the obtained result in differential equation (III.2.32) and get:

$$\Delta\Delta F = \sum_{k=1}^{\infty} \rho^k \cdot V_1(k) + \sum_{k=2}^{\infty} \rho^{-k} \cdot V_2(k) + \rho^{-1} \cdot V_2(1) \quad (\text{III.2.38}).$$

Here

$$\begin{aligned}
V_1(k) &= \left(-2 \frac{n_2}{n_3} \right) \frac{M}{J} \left[2\gamma_1^* \cdot e^{-3i\theta} \cdot \varepsilon_1 + 2\gamma_2^* \cdot e^{-3i\theta} \cdot \varepsilon_1 + \right. \\
&+ 2\gamma_3^* e^{-i\theta} \varepsilon_1 + 2\gamma_3^* e^{-i\theta} \varepsilon_1 - 4\gamma_4^* e^{3i\theta} \varepsilon_1 - 4\gamma_5^* e^{-3i\theta} \varepsilon_1 + \\
&\left. + ie^{i(k-2)\theta} E_1 + ie^{i(k-2)\theta} E_2 + ie^{ik\theta} E_3 \right]; \\
V_2(k) &= \left(-2 \frac{n_2}{n_3} \right) \frac{M}{J} \left[ie^{-i(k+2)\theta} \cdot E_4 + ie^{-i(k+4)\theta} \cdot E_5 + ie^{-ik\theta} \cdot E_6 \right]; \\
E_1 &= \gamma_7^* \left[2k(k-2)a_k A^{-k} \right]; \quad E_2 = \gamma_7^* k(k-1)a_k \cdot A^{-k}; \\
E_3 &= \gamma_8^* \left[k^2 a_k A^{-k} - ka_k A^{-k} \right] - \gamma_6^* k(k+1)a_k \cdot A^{-k};
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 E_4 &= \gamma_7^* 2k(k+2)B(k) \cdot r^k; \quad E_5 = \gamma_7^* k(k+1)B(k) \cdot r^k; \\
 E_6 &= \gamma_8^* [k^2 B(k) \cdot r^k + B(k) \cdot r^k] - \gamma_8^* k(k-1)B(k) \cdot r^k; \\
 \varepsilon_1 &= \begin{cases} 0 & k \neq 3; \\ 1 & k = 3; \end{cases} \quad (\text{III.2.39}).
 \end{aligned}$$

As it was said in parts I and II, the solution of differential equation (III.2.38) is taken as follows (as a sum of special and general solution).

$$\begin{aligned}
 F &= F_{spec.} + F_{gen}; \quad F_{gen} = \rho^2 \cdot c_1^* + c_2^* \cdot \ln \rho \\
 F_{spec.} &= \sum_{k=1}^{\infty} \rho^{k+4} \delta_1^* \cdot V_1 \cdot (k) + \sum_{k=2}^{\infty} \rho^{4-k} \cdot \delta_2^* \cdot V_2(k) + \\
 &+ V_2(1) \cdot \left[\frac{\rho^3}{6} \ln \rho^* - \frac{11}{36} \rho^3 \right] \cdot \delta_3^* \quad (\text{III.2.40})
 \end{aligned}$$

Here $\ln \rho^* = \ln \frac{\rho}{c_3}$ if $c_3 < \rho$.

In $\rho^* = \frac{c_3}{\rho}$ if $c_3 > \rho$.

$$\begin{aligned}
 \delta_1^* &= [(k+4)^2(2+k)^2]^{-1}; \quad \delta_2^* = [(4-k)^2(2-k)^2]^{-1}; \\
 \delta_3^* &= \left[\frac{3}{2} V_2(0) - \frac{11}{4} \right]^{-1}; \quad V_v(0) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{2k-1};
 \end{aligned}$$

So, the stress function $F(x, y)$ is defined by the following expression

$$\begin{aligned}
F &= F_{spec.} + F_{gen.} = \sum_{k=1}^{\infty} \rho^{k+4} \cdot \delta_1^* \cdot V_1(k) + \sum_{k=2}^{\infty} \rho^{4-k} \cdot \delta_2^* \cdot V_2(k) + \\
&+ V_2(1) \cdot \delta_4^* \cdot \rho^3 + c_1^* \cdot \rho^2 + c_2^* \cdot \ln \rho; \\
\delta_4^* &= \delta_3^* \left[\frac{1}{6} \ln \rho^* - \frac{11}{36} \right]; \quad (III.2.41)
\end{aligned}$$

In this expression, we find the coefficients c_1^* and c_2^* by boundary conditions (III.2.5)

$$\frac{\partial F}{\partial \rho} \cos \theta - \frac{1}{\rho} \sin \theta \cdot \frac{\partial F}{\partial \theta} = 0; \quad \frac{\partial F}{\partial \rho} \sin \theta + \frac{1}{\rho} \cos \theta \cdot \frac{\partial F}{\partial \theta} = 0;$$

By expression (III.2.41) we write

$$\begin{aligned}
&\left\{ \sum_{k=1}^{\infty} (k+4) \rho_2^{k+3} \cdot \delta_1^* \cdot V_1(k) + \sum_{k=2}^{\infty} \rho_2^{-k+3} (4-k) \delta_2^* \cdot V_2(k) + \right. \\
&+ 3V_2(1) \cdot \delta_4^* \cdot \rho^2 + 2t_2 c_1^* + \frac{1}{t} c_2^* \left. \right\} \sin \theta + \\
&+ \frac{1}{t_2} \cos \theta \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} t_2^{k+4} \delta_1^* \cdot V_3(k) + \sum_{k=2}^{\infty} t_2^{-k+4} \cdot \delta_2^* \cdot V_4(k) + \right. \\
&+ V_4(1) \cdot \delta_4^* \cdot t_2^3 \left. \right\} = 0; \quad \text{if } \rho = t_2, \text{ i.e. in } L_2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} (k+4)t_1^{k+3} \delta_1^* \cdot V_1(k) + \sum_{k=2}^{\infty} t_1^{-k+3} (4-k) \cdot \delta_2^* \cdot 3V_2(k) + \right. \\
& \left. + V_2(1) \cdot \delta_4^* \cdot t_1^3 + 2t_1 c_1 + \frac{1}{t_1} c_2^* \right\} \sin \theta + \\
& + \frac{1}{t_2} \cos \theta \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} t_2^{k+4} \cdot \delta_1^* \cdot V_3(k) + \sum_{k=2}^{\infty} t_1^{-k+4} \cdot \delta_2^* \cdot V_4(k) + \right. \\
& \left. + V_4(1) \cdot \delta_4^* \cdot t_1^3 \right\} = 0; \text{ if } \rho = t_1 \quad (\text{III.2.42})
\end{aligned}$$

Here

$$V_3(k) = \frac{\partial V_1(k)}{\partial \theta}; \quad V_4(k) = \frac{\partial V_2(k)}{\partial \theta}$$

From formula (III.2.42) the following expressions are found for the coefficients c_1^* and c_2^* .

$$\begin{aligned}
c_1^* &= \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} [t_2^{k+4} - t_1^{k+4}] \delta_5^* + \sum_{k=2}^{\infty} [t_2^{-k+4} - t_1^{-k+4}] \delta_6^* + \right. \\
& \left. + (t_2^3 - t_1^3) \delta_7^* \right\} \frac{1}{t_2^2 - t_1^2}; \\
c_2^* &= \sum_{k=1}^{\infty} t_2^{k+4} \delta_5^* + \sum_{k=2}^{\infty} t_2^{-k+4} \delta_6^* + t_2^3 \delta_7^* + t_2^2 \cdot \sum_{k=1}^{\infty} (t_2^{k+4} - t_1^{k+4}) \delta_5^* + \\
& + \left[\sum_{k=2}^{\infty} (t_2^{-k+4} - t_1^{-k+4}) \delta_6^* + (t_2^3 - t_1^3) \delta_7^* \right] \frac{1}{t_2^2 - t_1^2}; \\
\delta_5^* &= [(k+4) \vartheta_1 \cdot V_1(k) \cdot \sin \theta + \vartheta_1 V_3(k) \cos \theta] \\
\delta_6^* &= [(4-k) \cdot \sin \theta \cdot \vartheta_2 \cdot V_2(k) + \vartheta_2 \cdot V_4(k) \cos \theta] \\
\delta_7^* &= [3 \sin \theta \cdot V_2(1) + V_4(1) \cdot \cos \theta] \delta_4^* \quad (\text{III.2.43})
\end{aligned}$$

After obtaining (defining) the function F , the stress components are found by the expressions (III.2.4).

$$\sigma_{\rho} = g_2 \left[\frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 F}{\partial \theta^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial F}{\partial \rho} \right]; \quad \sigma_{\theta} = g_2 \frac{\partial^2 F}{\partial \rho^2};$$

$$\tau_{\rho\theta} = -g_2 \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial F}{\partial \theta} \right); \quad (\text{III.2.44})$$

Now, get expressions for tangential stresses (τ_x and τ_{yz}) in bending by the function $F^{(1)}$. For that, we can write together the fourth and fifth of strain compatibility conditions as follows:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[\frac{\partial \psi_{xz}}{\partial y} - \frac{\partial \psi_{yz}}{\partial x} \right] + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left[\frac{\partial \psi_{xz}}{\partial y} - \frac{\partial \psi_{yz}}{\partial x} \right] = 0 \quad (\text{III.2.45}).$$

In this equation, allowing for expressions (III.2.13) of shear strains ψ_{xz} and ψ_{yz} , we can write:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \psi_{xz}}{\partial y} &= \frac{1}{G} [\varphi_{yy}^{(0)} + g_2 \varphi_{yy}^{(1)}] + \frac{2}{9G^3} g_2 (\varphi_{yy}^{(0)} \cdot \sigma_z^{(0)^2} + \\
&+ \varphi_{yy}^{(0)} \cdot \Phi + \varphi_y^{(0)} \cdot \Phi_y) - \frac{\partial \psi_{yz}}{\partial x} = \\
&= \frac{1}{G} \left[\varphi_{xx}^{(0)} + g_2 \cdot \varphi_{xx}^{(1)} + \frac{Py}{J} + g_2 \cdot f_{xz} \cdot y \right] + \\
&+ \frac{2}{9G^3} g_2 [\varphi_{xx}^{(0)} \cdot \sigma_z^{(0)^2} - \varphi_x^{(0)} \cdot \sigma_z^{(0)^2} \frac{P(l-z)}{J} + \\
&+ \varphi_{xx}^{(0)} \cdot \Phi + \varphi_x^{(0)} \Phi_x + \sigma_z^{(0)^2} \frac{Py}{J} + \frac{Py}{J} \Phi - \\
&- \sigma_z^{(0)} \frac{P(l-z)}{J} \frac{Pxy}{J} + \frac{Pxy}{J} \Phi_x]; \tag{III.2.46}
\end{aligned}$$

It we take into account the expression (III.2.46) in equation (III.2.45), we can get such a differential equation:

$$\begin{aligned}
\Delta \Delta \varphi^{(1)} &= \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \cdot \left\{ \left(-\frac{2}{9G^2} \right) [\sigma_z^{(0)} \cdot \Delta \varphi^{(0)} + \right. \\
&+ \Phi \cdot \Delta \varphi^{(0)} + \varphi_x^{(0)} \cdot \Phi_x + \varphi_y^{(0)} \cdot \Phi_y - \\
&- \sigma_z^{(0)} \cdot \varphi_x^{(0)} \cdot \frac{P(l-z)}{J} + \sigma_z^{(0)^2} \cdot \frac{Py}{J} + \frac{Py}{J} \Phi - \\
&- \sigma_z^{(0)^2} \cdot \frac{P(l-z)}{J} \cdot \frac{Pxy}{J} + \frac{Pxy}{J} \Phi_x] - f_{xz} y \left. \right\} \tag{III.2.47}
\end{aligned}$$

Here, passing from the variables x and y to the complex variable ($z = x + iy$), we get:

$$\Delta\Delta\varphi^{(1)} = -\frac{2}{9G^2} \frac{\partial^2}{\partial z \partial \bar{z}} \left[\lambda_1 (z^2 + 2z\bar{z} + \bar{z}^2) 4\varphi_{zz}^{(0)} + 4\varphi_{z\bar{z}}^{(0)} \cdot \Phi + \right. \\ \left. + 2\varphi_z^{(0)} \cdot \Phi_{\bar{z}} + 2\varphi_{\bar{z}} \cdot \Phi_z + 2\lambda_1 (z + \bar{z}) (\varphi_z^{(0)} + \varphi_{\bar{z}}^{(0)}) - \frac{i}{2} (z - \bar{z}) \frac{P}{J} \Phi - \right. \\ \left. - \frac{i}{4} \frac{P}{J} (z^2 - \bar{z}^2) (\Phi_z + \Phi_{\bar{z}}) + \lambda_2 i (z - \bar{z}) + \frac{i}{2} (z - \bar{z}) \cdot H \right] \quad (\text{III.2.48})$$

Here

$$\lambda_2 = \frac{8}{9G^2} \frac{P^3(l-z)^2}{J^3}; \lambda_1 = \frac{1}{4} \frac{P^2(l-z)^2}{J^2}; H_1 = -18 \frac{n_2}{n_1} \frac{P^3(l-z)^2}{J^3};$$

Thus, for $\Delta\Delta\varphi^{(1)}$ we get the following expression (if we take into account the known expressions of the functions $\varphi^{(0)}$, f and Φ contained in this equation in III.2.33, III. 2.36, III.2.17)

$$\Delta\Delta\varphi^{(1)} = -\frac{32}{9G^2} \lambda_1 [-iz\alpha_8 - i\bar{z}\alpha_9] - \frac{16}{9G^2} \lambda_1 [-i\bar{z}\alpha_{10} - iz\alpha_{11} + \\ + \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_9^*(k) \cdot z^{k-2} + \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_{10}^*(k) \cdot z^{-k-2}] - \\ - \frac{8}{9G^2} \left[i\bar{z}^3 \lambda_3 + iz^2 \bar{z} \lambda_4 + iz\bar{z}^2 \lambda_5 + iz^3 \bar{z} \lambda_6 + \sum_{k=1}^{\infty} [z^k \cdot \eta_1(a) + \right. \\ \left. + z^{k-2} \bar{z}^2 \cdot \eta_2(a) + z^{k-1} \bar{z} \eta_3(a) + z^{k-3} \cdot \bar{z}^3 \cdot \eta_4(a)] + \right. \\ \left. + \sum_{k=1}^{\infty} [z^{-k} \cdot \eta_1(b) + z^{-k-2} \cdot \bar{z}^2 \cdot \eta_2(b) + z^{-k-1} \cdot \bar{z} \cdot \eta_3(b) + \right.$$

$$\begin{aligned}
& + z^{-k-3} \cdot \bar{z}^3 \cdot \eta_4(b)] + iz\bar{z}^2 \cdot \alpha_1 + i \cdot z^3 \cdot \alpha_2 + i \cdot z^2 \cdot \bar{z} \cdot \alpha_3 + i \cdot \bar{z}^3 \cdot \alpha_4 + \\
& + \sum_{k=1}^{\infty} [z^{k-1} \cdot \bar{z} \cdot \alpha_5(a) + z^k \cdot \alpha_6(a) + z^{k-2} \cdot \bar{z}^2 \cdot \alpha_7(a)] + \\
& + \sum_{k=1}^{\infty} [z^{-k-1} \cdot \bar{z} \cdot \alpha_5(b) + \bar{z}^k \cdot \alpha_6(b) + z^{-k-2} \cdot \bar{z}^2 \cdot \alpha_7(b)] + \\
& + 2i \sum_{k=1}^{\infty} z^{-k} \cdot N_{12}(k) + 2i \sum_{k=0}^{\infty} z^k \cdot N_{13}(k) \} + i \cdot \lambda_2 \cdot z - \\
& - i \cdot \lambda_2 \cdot \bar{z} + i \frac{1}{2} H_1 \cdot z - \frac{i}{2} \bar{z} \cdot H_1 \tag{III.2.49}
\end{aligned}$$

Or we can write this equation in a compact form as follows:

$$\Delta \Delta \varphi^{(1)} = \sum_{k=1}^{\infty} \rho^k \cdot T_1^*(k) + \sum_{k=1}^{\infty} \rho^{-k} \cdot T_2^*(k) \tag{III.2.50}.$$

Here we made the following substitutions:

$$\begin{aligned}
T_1^*(k) = & i \frac{32}{9G^2} \lambda_1 \cdot \alpha_8 \cdot \varepsilon_5 \cdot e^{i\theta} + i \frac{32}{9G^2} \lambda_1 \cdot \alpha_9 \cdot e^{-i\theta} \cdot \varepsilon_5 + \\
& + \lambda_9 \cdot e^{i(k-2)\theta} \cdot \varepsilon_5 + \frac{16}{9G^2} \lambda_1 (\alpha_{10} \cdot e^{-i\theta} - \alpha_{11} \cdot e^{i\theta}) \cdot \varepsilon_5 - \\
& - \frac{8 \cdot i}{9G^2} (\lambda_3 \cdot e^{-3i\theta} + \lambda_4 \cdot e^{-i\theta} + \lambda_5 \cdot e^{-i\theta} + \lambda_6 \cdot e^{3i\theta}) \cdot \varepsilon_7 + \\
& + \eta_1(a) \cdot e^{ik\theta} + \eta_2(a) \cdot e^{i(k-4)\theta} + \eta_3(a) \cdot e^{i(k-2)\theta} + \\
& + \eta_4(a) \cdot e^{i(k-6)\theta} + \alpha_1 \cdot i e^{-i\theta} \cdot \varepsilon_7 + i \alpha_2 \cdot e^{3i\theta} \cdot \varepsilon_7 + \\
& + i e^{i\theta} \cdot \alpha_3 \cdot \varepsilon_7 + i e^{-3i\theta} \alpha_4 \cdot \varepsilon_7 + \alpha_5(a) \cdot e^{i(k-2)\theta} \cdot \alpha_6(a) \cdot e^{ik\theta} + \\
& + \alpha_7 \cdot e^{i(k-4)\theta} + 2i N_{13}(k) \cdot e^{ik\theta} + i \lambda_2 \cdot e^{i\theta} \cdot \varepsilon_5 - i \lambda_2 \cdot e^{-i\theta} \varepsilon_5 + \\
& + \frac{i}{2} e^{i\theta} \cdot H_1 \cdot \varepsilon_5 - \frac{i}{2} H_1 \cdot e^{-i\theta} \varepsilon_5;
\end{aligned}$$

$$T_2^*(k) = -\frac{16}{9G^2} [\lambda_1 \cdot \gamma_9^*(k) \cdot e^{-i\theta} + \gamma_{10}^*(k) \cdot e^{-i(k+2)\theta} \cdot \varepsilon_6] -$$

$$-\frac{8}{9G^2} \{ \eta_1(b) \cdot e^{-ik\theta} + \eta_2(b) \cdot e^{-i(k-4)\theta} + \eta_3(b) \cdot e^{-i(k+2)\theta} +$$

$$+ \eta_4(b) \cdot e^{-i(k+6)\theta} + \alpha_5(b) \cdot e^{-i(k+2)\theta} + \alpha_8(b) e^{-ik\theta} +$$

$$+ \alpha_7(b) e^{-i(k+4)\theta} + 2iN_{12}(k) \cdot e^{ik\theta} \}$$

$$\alpha_8 = 2B_1 + 2B_3 + \frac{1}{2}B_4; \quad \alpha_9 = 4B_1 + B_3 + B_4;$$

$$\alpha_{10} = 4B_1 + B_3 + B_4; \quad \alpha_{11} = B_1 + 2B_3 + B_2;$$

$$\lambda_3 = 5\frac{P}{J}\gamma_1^* + 2\frac{P}{J}\gamma_3^* - 2\frac{P}{J}\gamma_5^*; \quad \lambda_6 = 2\gamma_4^* - 4\gamma_2^*\frac{P}{J} - 2\frac{P}{J}\gamma_3^*;$$

$$\lambda_4 = \frac{9}{2}\gamma_2^*\frac{P}{J} - 6\gamma_3^*\frac{P}{J} - \frac{9}{2}\gamma_1^*\frac{P}{J} + 6\gamma_4^*\frac{P}{J};$$

$$\lambda_5 = 6\gamma_3^*\frac{P}{J} - \frac{9}{2}\gamma_1^*\frac{P}{J} + \frac{9}{2}\gamma_2^*\frac{P}{J} - 6\gamma_5^*\frac{P}{J};$$

$$\lambda_7(a) = -\frac{1}{2}\gamma_6^*\frac{P}{J}k(k+1) \cdot a_k \cdot A^{-k};$$

$$\lambda_7(b) = -\frac{1}{2}\gamma_6^*\frac{P}{J}k \cdot (k-1)B(k) \cdot r^k;$$

$$\lambda_8(a) = -\frac{1}{2}\gamma_7^*\frac{P}{J}k \cdot (k-1)a_k \cdot A^{-k};$$

$$\lambda_8(b) = -\frac{1}{2}\gamma_7^*\frac{P}{J}k \cdot (k+1) \cdot B(k) \cdot r^k; \quad \lambda_9(a) = \frac{1}{2}\gamma_8^*\frac{P}{J}k^2 \cdot a_k \cdot A^{-k};$$

$$\lambda_9(b) = -\frac{1}{2}\gamma_8^*\frac{P}{J}k^2 \cdot B(k) \cdot r^k; \quad \lambda_{10}(a) = \gamma_7^*\frac{P}{J}k \cdot a_k \cdot A^{-k};$$

$$\lambda_{10}(b) = -\gamma_7^* \frac{P}{J} k \cdot B(k) \cdot r^k; \quad \lambda_{11}(a) = \frac{1}{2} \gamma_8^* \frac{P}{J} k \cdot a_k \cdot A^{-k};$$

$$\lambda_{11}(b) = -\frac{1}{2} \gamma_8 \frac{P}{J} k \cdot B(k) \cdot r^k; \quad \lambda_{12}(a) = \gamma_7 \frac{P}{J} 2k \cdot (k-1) a_k \cdot A^{-k};$$

$$\lambda_{12}(b) = 2\gamma_7^* \frac{P}{J} k \cdot (k+1) \cdot B(k) \cdot r^k; \quad \lambda_{13}(a) = \gamma_8 \frac{P}{J} k^2 \cdot a_k \cdot A^{-k};$$

$$\lambda_{13}(b) = \gamma_8^* \frac{P}{J} k^2 \cdot B(k) \cdot r^k; \quad \lambda_{14}(a) = -\gamma_7^* \frac{P}{J} 2k \cdot (k-1) a_k \cdot A^{-k};$$

$$\lambda_{14}(b) = -2\gamma_7^* \frac{P}{J} k \cdot (k+1) B(k) \cdot r^k; \quad \lambda_{15}(a) = -\gamma_8^* \frac{P}{J} k^2 \cdot a_k \cdot A^{-k};$$

$$\lambda_{15}(b) = -\gamma_8^* \frac{P}{J} k^2 \cdot B(k) \cdot r^k;$$

$$\lambda_{16}(a) = \frac{1}{2} \cdot \gamma_7^* \frac{P}{J} k \cdot (k-1) \cdot (k-2) a_k \cdot A^{-k};$$

$$\lambda_{17}(a) = \frac{1}{4} \gamma_8^* \frac{P}{J} k^2 \cdot (k-1) a_k \cdot A^{-k};$$

$$\lambda_{16}(b) = \frac{1}{2} \cdot \gamma_7 \frac{P}{J} k \cdot (k+1) \cdot (k+2) B(k) \cdot r^k;$$

$$\lambda_{17}(b) = -\frac{1}{4} \cdot \gamma_8 \frac{P}{J} k^2 \cdot (k+1) B(k) \cdot r^k;$$

$$\lambda_{18}(a) = -\frac{1}{2} \gamma_7^* \frac{P}{J} k \cdot (k-1) \cdot (k-2) a_k \cdot A^{-k};$$

$$\lambda_{19}(a) = -\frac{1}{4}\gamma_8^* \frac{P}{J} k^2 \cdot (k-1)a_k \cdot A^{-k};$$

$$\lambda_{18}(b) = \frac{1}{2} \cdot \gamma_7^* \frac{P}{J} k \cdot (k+1) \cdot (k+2)B(k) \cdot r^k;$$

$$\lambda_{19}(b) = \frac{1}{4}\gamma_8^* \frac{P}{J} k^2 \cdot (k-1)B(k) \cdot r^k;$$

$$\lambda_{20}(a) = \frac{1}{2}\gamma_7^* \frac{P}{J} k \cdot (k-1)a_k \cdot A^{-k};$$

$$\lambda_{20}(b) = \frac{1}{2}\gamma_7^* \frac{P}{J} k \cdot (k+1)B(k) \cdot r^k;$$

$$\lambda_{21}(a) = -\frac{1}{2}\gamma_7^* \frac{P}{J} k \cdot (k-1)a_k \cdot A^{-k};$$

$$\lambda_{21}(b) = -\frac{1}{2}\gamma_7^* \frac{P}{J} k \cdot (k-1)B(k) \cdot r^k; \quad \lambda_{22}(a) = \gamma_k^* \frac{P}{J} k \cdot a_k \cdot A^{-k};$$

$$\lambda_{22}(b) = -\gamma_7^* \frac{P}{J} k \cdot B(k) \cdot r^k; \quad \lambda_{23}(a) = -\frac{1}{2}\gamma_6^* \frac{P}{J} k^2 \cdot (k+1)a_k \cdot A^{-k};$$

$$\lambda_{23}(b) = \frac{1}{2}\gamma_6^* \frac{P}{J} k^2 \cdot (k-1) \cdot B(k) \cdot r^k;$$

$$\lambda_{24}(a) = -\frac{1}{2}\gamma_7^* \frac{P}{J} k \cdot (k-1) \cdot (k-2)a_k \cdot A^{-k};$$

$$\lambda_{24}(b) = \frac{1}{2}\gamma_7^* \frac{P}{J} k \cdot (k+1) \cdot (k+2)B(k) \cdot r^k;$$

$$\lambda_{25}(b) = \frac{1}{2}\gamma_8^* \frac{P}{J} k^2 \cdot (k+1)B(k) \cdot r^k;$$

$$\lambda_{25}(a) = \frac{1}{2} \gamma_8^* \frac{P}{J} k^2 \cdot (k-1) a_k \cdot A^{-k};$$

$$\eta_1(a) = \lambda_7(a) + \lambda_{11}(a) + \lambda_{13}(a) + \lambda_{17}(a) + \lambda_{20}(a) + \lambda_{22}(a);$$

$$\eta_2(a) = \lambda_8(a) + \lambda_{14}(a) + \lambda_{19}(a) + \lambda_{21}(a) + \lambda_{25}(a);$$

$$\eta_3(a) = \lambda_9(a) + \lambda_{10}(a) + \lambda_{12}(a) + \lambda_{15}(a) + \lambda_{16}(a) + \lambda_{23}(a);$$

$$\eta_4(a) = \lambda_{18}(a) + \lambda_{24}(a); \quad \eta_4(b) = \lambda_{18}(b) + \lambda_{24}(b);$$

$$\eta_1(b) = \lambda_7(b) + \lambda_{11}(b) + \lambda_{13}(b) + \lambda_{17}(b) + \lambda_{20}(b) + \lambda_{22}(b);$$

$$\eta_2(b) = \lambda_8(b) + \lambda_{14}(b) + \lambda_{19}(b) + \lambda_{21}(b) + \lambda_{25}(b);$$

$$\eta_3(b) = \lambda_9(b) + \lambda_{10}(b) + \lambda_{12}(b) + \lambda_{15}(b) + \lambda_{16}(b) + \lambda_{23}(b);$$

$$\alpha_1 = -33B_3\gamma_1^* - 60B_1\gamma_3^* - 15\gamma_3^*B_4 + 24\gamma_5^*B_2;$$

$$\alpha_2 = -18\gamma_1^*B_3 - 48\gamma_4^*B_1 - 12\gamma_4^*B_4 + 8\gamma_3^*B_2 + 2\gamma_3^*B_4;$$

$$\alpha_3 = -30\gamma_3^*B_3 - 66\gamma_2^*B_1 - \frac{33}{2}\gamma_2^*B_4 + 18\gamma_1^*B_2 + \frac{9}{2}\gamma_1^*B_4;$$

$$\alpha_4 = -36\gamma_1^*B_1 - 24\gamma_5^*B_3 - 9\gamma_1^*B_4;$$

$$\begin{aligned}
\alpha_5(a) = & 8\gamma_7^* B_3 k a_k A^k + 14\gamma_8^* B_1 k^2 a_k A^{-k} + \\
& + \frac{7}{2} \gamma_8^* B_4 k^2 a_k A^{-k} + 10\gamma_7^* B_3 k(k-1) a_k A^{-k} + \\
& + 4B_1 \gamma_8^* k^2 (k-1) a_k A^{-k} + \gamma_8^* B_4 k^2 (k-1) a_k A^{-k} + \\
& + \gamma_7^* B_3 k(k-1)(k-2) a_k A^{-k} + 6\gamma_1^* B_5 k a_k A^{-k} + \\
& + 6\gamma_1^* B_5 k(k-1) a_k A^{-k};
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\alpha_6(a) = & 3\gamma_8^* B_3 \cdot k \cdot a_k \cdot A^{-k} + 6B_1 \cdot \gamma_6^* \cdot k \cdot (k+1) \cdot a_k \cdot A^{-k} + \\
& + \frac{3}{2} \gamma_6^* \cdot B_4 \cdot k \cdot (k+1) \cdot a_k \cdot A^{-k} + 4B_2 \cdot \gamma_7^* \cdot k \cdot a_k \cdot A^{-k} - \\
& + B_4 \cdot \gamma_7^* \cdot k \cdot a_k \cdot A^{-k} - 2\gamma_7^* \cdot B_2 \cdot k \cdot (k-1) a_k \cdot A^{-k} + \\
& + 4\gamma_8^* \cdot B_3 \cdot k^2 \cdot a_k \cdot A^{-k} - \frac{1}{2} \gamma_7^* \cdot B_4 \cdot k \cdot (k-1) a_k \cdot A^{-k} + \\
& + 2\gamma_6^* \cdot B_1 \cdot k^2 \cdot (k+1) a_k \cdot A^{-k} + \frac{1}{2} \gamma_6^* \cdot B_4 \cdot k^2 \cdot (k+1) a_k \cdot A^{-k} + \\
& + \frac{1}{2} B_3 \cdot \gamma_8^* \cdot k^2 \cdot (k-1) a_k \cdot A^{-k} + 2\gamma_3^* \cdot B_5 \cdot k \cdot (k-1) a_k \cdot A^{-k} + \\
& + 4\gamma_3^* \cdot B_5 \cdot k \cdot a_k \cdot A^{-k};
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\alpha_7(a) = & 12\gamma_7^* \cdot B_1 \cdot k \cdot (k-1) a_k \cdot A^{-k} + 6\gamma_7^* \cdot B_4 \cdot k \cdot (k-1) a_k \cdot A^{-k} - \\
& - 6\gamma_7^* \cdot B_1 \cdot k \cdot (k-1) \cdot (k-2) a_k \cdot A^{-k} + 12\gamma_5^* \cdot B_5 \cdot k \cdot (k-1) a_k \cdot A^{-k} + \\
& + \frac{3}{2} \gamma_7^* \cdot B_4 \cdot k \cdot (k-1) \cdot (k-2) a_k \cdot A^{-k};
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \alpha_5(b) = & -8\gamma_7^* \cdot B_3 \cdot k \cdot B(k) \cdot r^k + 14B_1 \cdot \gamma_8^* \cdot k^2 \cdot B(k) \cdot r + \\ & + \frac{7}{2}\gamma_8^* \cdot B_4 \cdot k^2 \cdot B(k) \cdot r^k + 10\gamma_7^* \cdot B_3 \cdot k \cdot (k+1)B(k) \cdot r^k - \\ & - \gamma_7^* \cdot B_3 \cdot k(k+1) \cdot (k-2)B(k) \cdot r^k - \gamma_8^* \cdot B_4 \cdot k^2 B(k) \cdot r^k - \\ & - 4\gamma_8^* \cdot B_1 \cdot k^2 \cdot (k+1)B(k) \cdot r^k - 6\gamma_1^* \cdot B_5 \cdot k \cdot B(k) \cdot r^k + \\ & + 6\gamma_1^* \cdot B_5 \cdot k(k+1)B(k) \cdot r^k; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \alpha_6(b) = & -3\gamma_8^* \cdot B_3 \cdot k \cdot B(k) \cdot r^k + 4\gamma_8^* \cdot B_3 \cdot k^2 B(k) \cdot r + \\ & + 6B_1 \cdot \gamma_6^* \cdot k \cdot (k-1)B(k) \cdot r^k + \frac{3}{2}\gamma_6^* \cdot B_4 \cdot k \cdot (k-1)B(k) \cdot r^k + \\ & + 4\gamma_7^* \cdot B_2 \cdot k \cdot B(k) \cdot r^k + \gamma_7^* \cdot B_4 \cdot k \cdot B(k) \cdot r^k - \\ & - 2\gamma_7^* \cdot B_2 \cdot k \cdot (k+1)B(k) \cdot r^k - \frac{1}{2}\gamma_7^* \cdot B_4 \cdot k \cdot (k+1)B(k) \cdot r^k + \\ & + 2\gamma_6^* \cdot B_1 \cdot k^2 \cdot (k-1)B(k) \cdot r^k - \frac{1}{2}\gamma_6^* \cdot B_4 \cdot k^2(k-1)B(k) \cdot r^k - \\ & - \frac{1}{2}\gamma_8^* \cdot B_3 \cdot k^2 \cdot (k-1)B(k) \cdot r^k + 2\gamma_3^* \cdot B_5 \cdot k \cdot (k+1)B(k) \cdot r^k - \\ & - 4\gamma_3^* \cdot B_5 \cdot k \cdot B(k) \cdot r^k; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \alpha_7(b) = & 12\gamma_7^* \cdot B_1 \cdot k \cdot (k+1)B(k) \cdot r^k + 6\gamma_7^* \cdot B_4 \cdot k(k+1)B(k) \cdot r - \\ & - 6\gamma_7^* \cdot B_1 \cdot k(k+1) \cdot (k+2)B(k) \cdot r^k - \\ & - \frac{3}{2}\gamma_7^* \cdot B_4 \cdot k(k+1) \cdot (k+2)B(k) \cdot r^k + 12\gamma_5^* \cdot B_5 \cdot k \cdot (k+1)B(k) \cdot r^k; \end{aligned}$$

$$\gamma_9^*(k) = \frac{1}{2}B_5 \cdot k \cdot (k-1)a_k \cdot A^{-k}; \quad \gamma_{10}^*(k) = \frac{1}{2}B_5 \cdot k \cdot (k+1)B(k) \cdot r^k;$$

$$N_1(k) = \gamma_7^* \cdot B_5 \cdot k \cdot (k-1)a_k \cdot A^{-k}$$

$$N_2(k) = B_5 \cdot \gamma_7^* \cdot k \cdot (k+1)B(k) \cdot r^k;$$

$$N_3(k) = 2k \cdot a_k \cdot A^{-k}; \quad N_4(k) = 2k \cdot B(k) \cdot r^k;$$

$$N_5(k) = \sum_{n=k}^{\infty} N_3(n-k+1) \cdot N_1(3-n) \varepsilon_1;$$

$$N_6(k) = \sum_{n=1}^{k+3} N_1(n) \cdot N_3(k-n+4);$$

$$N_7(k) = \sum_{n=k}^{\infty} [N_2(n-2) \cdot N_3(n-k+1) \varepsilon_2 + \\ + N_2(n-k+1) \cdot N_3(3-2k+n) \varepsilon_3]$$

$$N_8(k) = \sum_{n=k}^{\infty} N_2(n-k+1) N_3(n+4);$$

$$N_9(k) = \sum_{n=k}^{\infty} [N_1(n-2) \cdot N_4(n-k+1) \varepsilon_2 + \\ + N_1(n-k+1) \cdot N_4(n-2k+3) \varepsilon_3]$$

$$N_{10}(k) = \sum_{n=k}^{\infty} N_1(n-k+1) \cdot N_4(n+4);$$

$$N_{11}(k-4) = \sum_{n=1}^{\infty} N_2(n) \cdot N_4(k-4-n+1) \varepsilon_4$$

$$N_{12}(k) = N_5(k) + N_7(k) + N_9(k) + N_{11}(k-4);$$

$$N_{13}(k) = N_6(k) + N_8(k) + N_{10}(k);$$

$$\varepsilon_1 = \begin{cases} 0 & \text{if } k > 2; \\ 1 & \text{if } k \leq 2; \end{cases} \quad \varepsilon_2 = \begin{cases} 0 & \text{if } k \leq 2; \\ 1 & \text{if } k > 2; \end{cases}$$

$$\varepsilon_3 = \begin{cases} 0 & \text{if } k > 2; \\ 1 & \text{if } k \leq 2; \end{cases}$$

$$\varepsilon_4 = \begin{cases} 0 & \text{if } k \leq 4; \\ 1 & \text{if } k > 4; \end{cases} \quad \varepsilon_5 = \begin{cases} 0 & \text{if } k \neq 1; \\ 1 & \text{if } k = 1; \end{cases}$$

$$\varepsilon_6 = \begin{cases} 0 & \text{if } k = 1; 2; \\ 1 & \text{if } k \neq 1; 2; \end{cases} \quad \varepsilon_7 = \begin{cases} 0 & \text{if } k \neq 3; \\ 1 & \text{if } k = 3; \end{cases}$$

We take the solution of differential equation (III.2.50), as if was said above, in the form:

$$\varphi^{(1)} = \varphi_{gen.}^{(1)} + \varphi_{spec.}^{(1)}$$

Here

$$\varphi_{gen.}^{(1)} = c_5^* \cdot \rho^n \cos n\varphi + c_6^* \cdot \rho^2 \quad (\text{III.2.51})$$

is a general solution of the homogeneous equation $\Delta\Delta\varphi^{(1)} = 0$.

$\varphi_{spec.}^{(1)}$ is a special solution of differential equation (III.2.50). So,

we can take this solution in the form:

$$\varphi_{x\ddot{u}s}^{(1)} = \sum_{k=1}^{\infty} \rho^{k+4} \cdot \partial_1 T_1^*(k) +$$

$$+ \sum_{k=2}^{\infty} \rho^{4-k} \cdot \partial_2 T_2^*(k) + T_2^*(1) \partial_3 \rho^3 \quad (\text{III.2.52})$$

(if we four-fold integrate the right hand side of expression (III.2.50));

Thus, as a result, differential equation (III.2.50) is in the form:

$$\begin{aligned} \varphi^{(1)} = \sum_{k=1}^{\infty} \rho^{k+4} \cdot \vartheta_1 T_1^*(k) + \sum_{k=2}^{\infty} \rho^{4-k} \cdot \vartheta_2 T_2(k) + \\ + T_2^*(1) \vartheta_3 \rho^3 + c_5^* \rho^n \cos n\theta + c_6^* \rho^2; \end{aligned} \quad \text{In} \quad \text{(III.2.53)}$$

these expressions, we made the following substitutions:

$$\vartheta_1 = \{(k+4)(-k-2) + 2(k+3)(k+2) + (k+3)(k+2)(k+1)\}^{-1};$$

$$\vartheta_2 = \{(4-k)(k-2) + 2(3-k)(2-k) + (3-k)(2-k)(1-k)\}^{-1};$$

$$\vartheta_3 = \left[\frac{1}{6} \ln \rho - \frac{11}{36} \right] \left[\frac{3}{2} V_\nu(0) - \frac{11}{4} \right]^{-1}; \quad V_\nu(0) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{2k-1};$$

The constants c_5^* and c_6^* are found from the conditions

$$\tau_{xz} \cdot \cos(\bar{n}, x) + \tau_{yz} \cdot \cos(\bar{n}, y) = 0 \quad \text{(III.2.54)}$$

At lateral points of the beam.

As is known [38,53], these conditions are reduced to satisfaction of these two conditions.

$$\iint_S \tau_{xz}^{(1)} dx dy = 0; \quad \iint_S \tau_{yz}^{(1)} dx dy = 0$$

By means of **Ostrogradskiy-Green** formula, the two-fold integrals are reduced to a one-fold integral

$$\iint_S \tau_{xz}^{(1)} dx dy = \int_{L_2} \varphi_1(x, y) \cdot dy - \int_{L_1} \varphi_1(x, y) \cdot dy = 0$$

$$\iint_S \tau_{yz}^{(1)} dx dy = \int_{L_2} \varphi_2(x, y) \cdot dy - \int_{L_1} \varphi_2(x, y) \cdot dy = 0 \quad (\text{III.2.55}).$$

In these expressions

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial x} = \tau_{xz}^{(1)}; \quad \varphi_1 = \int \tau_{xz}^{(1)} dx; \quad \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} = \tau_{yz}; \quad \varphi_2 = \int \tau_{yz}^{(1)} dx \quad (\text{III.2.56}).$$

In polar coordinates (ρ, θ) the stresses $\tau_{xz}^{(1)}$ and $\tau_{yz}^{(1)}$;

$$\begin{aligned} \tau_{xz}^{(1)} &= \frac{\partial \varphi^{(1)}}{\partial \rho} \sin \theta + \frac{\cos \theta}{\rho} \frac{\partial \varphi^{(1)}}{\partial \theta} \\ \tau_{yz}^{(1)} &= -\frac{\partial \varphi^{(1)}}{\partial \rho} \cos \theta + \frac{\sin \theta}{\rho} \frac{\partial \varphi^{(1)}}{\partial \theta} - f_2 y \end{aligned} \quad (\text{III.2.57})$$

f is found by means of expression (III.2.27). Thus, the first of expressions (III.2.55) is reduced to the following form

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= \sum_{k=1}^{\infty} H_2^* \rho^{k+4} + \sum_{k=2}^{\infty} \rho^{4-k} \cdot H_3^* + \\ &+ H_4^* c_3^* \rho^2 + H_5^* c_4^* \rho^n + H_6^* \rho^3; \end{aligned} \quad (\text{III.2.58})$$

Then we can write:

$$\begin{aligned} \iint_S \tau_{xz}^{(1)} dx dy &= \int_{L_2} \varphi_1 dy - \int_{L_1} \varphi_1 dy = \sum_{k=1}^{\infty} H_2 (t_2^{k+5} - t_1^{k+5}) + \\ &+ H_6 (t_2^4 - t_1^4) - H_3 (t_2^{5-k} - t_1^{5-k}) + H_4 (t_2^3 - t_1^3) c_3^* + \\ &+ H_5 c_4^* \cdot (t_2^{n+1} - t_1^{n+1}) = 0; \end{aligned} \quad (\text{III.2.59})$$

For the function φ_2 we can obtain such an expression (if we take into account III.2.57 in III.2.56).

$$\begin{aligned} \varphi_2(\rho, \theta) = & \sum_{k=1}^{\infty} \rho^{k+4} H_7^* + \sum_{k=1}^{\infty} \rho^{4-k} H_8^* + H_9^* \cdot c_3^* \rho^2 + \\ & + H_{10}^* \cdot c_4^* \rho^n + H_{11}^* \cdot \rho^3 + H_{12}^* \cdot \rho^5; \end{aligned} \quad (\text{III.2.60})$$

Then, the second of conditions (III.2.55) takes the following form:

$$\begin{aligned} \iint_S \tau_{yz}^{(1)} dx dy = & \int_{L_2} \varphi_2 dy - \int_{L_1} \varphi_2 dy = H_7 (t_2^{k+5} - t_1^{k+5}) + \\ & + H_8 (t_2^{5-k} - t_1^{5-k}) + H_9 (t_2^3 - t_1^3) c_3^* + H_{10} \cdot (t_2^{n+1} - t_1^{n+1}) c_4^* + \\ & + H_{11} (t_2^4 - t_1^4) + H_{12} (t_2^6 - t_1^6) = 0; \end{aligned} \quad (\text{III.2.61})$$

In obtaining these expressions, as $x = \rho \cos \varphi$, $y = \rho \sin \varphi$, it was taken into account that $dx = \cos \theta d\rho - \rho \sin \theta \cdot d\theta$ and $dy = \sin \theta \cdot d\rho + \rho \cos \theta d\theta$.

All the coefficients $H_k (k = \overline{2,12})$ depend on parameters N, m, A taking into account the cross section of the beam. Each concretely considered c_3^* and c_4^* is found depending on cross section sizes of the beam. So, from equations (III.2.54) and (III.2.56) we find c_3^* and c_4^*

$$\begin{aligned}
c_3^* &= \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} H_3 (t_2^{5-k} - t_1^{5-k}) - \sum_{k=2}^{\infty} H_2 (t_2^{k+5} - t_1^{k+5}) - H_6 (t_2^4 - t_1^4) + \right. \\
&+ \frac{H_5 \cdot H_4}{H_5 \cdot H_9 - H_4 \cdot H_{10}} \left[\left(H_7 - H_2 \cdot \frac{H_9}{H_4} \right) \cdot \sum_{k=1}^{\infty} (t_2^{k+5} - t_1^{k+5}) + \right. \\
&+ \left. \left(H_{11} - H_6 \cdot \frac{H_9}{H_4} \right) \cdot (t_2^4 - t_1^4) - \left(H_8 - H_3 \cdot \frac{H_9}{H_4} \right) \cdot \sum_{k=2}^{\infty} (t_2^{5-k} - t_1^{5-k}) + \right. \\
&+ \left. H_{12} \cdot \frac{(t_2^6 - t_1^6)}{H_9 \cdot (t_2^3 - t_1^3)} \right]; \\
c_4^* &= \left[\sum_{k=1}^{\infty} \left(H_7 - H_2 \frac{H_9}{H_4} \right) \sum_{k=1}^{\infty} (t_2^{k+5} - t_1^{k+5}) - \right. \\
&- \left. \left(H_8 - H_3 \frac{H_9}{H_4} \right) \sum_{k=2}^{\infty} (t_2^{5-k} - t_1^{5-k}) + \left(H_{11} - H_6 \frac{H_9}{H_4} \right) \cdot (t_2^4 - t_1^4) + \right. \\
&+ \left. H_{11} (t_2^6 - t_1^6) \cdot \left(H_5 \cdot \frac{H_9}{H_4} H_{10} \right)^{-1} \cdot (t_2^{n+1} - t_1^{n+1})^{-1}; \quad (III.2.62)
\end{aligned}$$

After finding the function $\varphi^{(1)}$ (stress function in bending) (i.e. after completely defining the expression III.2.53), we find the expressions for tangential stresses $\tau_{xz}^{(1)}$ and $\tau_{yz}^{(1)}$ in a first approximation as follows (by polar coordinates ρ, θ)

$$\tau_{\rho z} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \varphi^{(1)}}{\partial \theta} + \lambda \cdot \frac{1}{\rho} \frac{\partial \varphi^{(1)}}{\partial \theta}; \quad \tau_{\theta z} = -\frac{\partial \varphi^{(0)}}{\partial \rho} - \lambda \cdot \frac{\partial \varphi^{(1)}}{\partial \rho} -$$

$$-\frac{P \cdot \rho^2}{J} \cdot \sin \theta \cos \theta - \lambda \cdot f_z \cdot \rho \cdot \sin \theta \quad (\text{III.2.63})$$

In obtaining these expressions, we take into account

$$\tau_{\rho z} = \tau_{\rho z}^{(0)} + \lambda \cdot \tau_{\rho z}^{(1)} \quad \text{and} \quad \tau_{\theta z} = \tau_{\theta z}^{(0)} + \lambda \cdot \tau_{\theta z}^{(1)}$$

The general solution mentioned above may be considered many concrete numerical examples. depending on different variants of parameters A, m, N, r, e defining the cross section of the prismatic beam Let's consider some numerical examples.

1. Bending of on entire circular cylinder (fig.3.3)

This problem was solved in the frames of linear elasticity theory in references. Stress function in bending is expressed as follows [67, 95]

$$\varphi^{(0)}(x, y) = \frac{1 + 2\nu}{8(1 + \nu)} \cdot \frac{P}{J} (x^2 + y^2 - R^2) \cdot y$$

Inertia moment for a circle $J = \frac{\pi R^4}{2}$.

Is a poisson ratio ν P is an acting bending force. Any cross section of the cylinder is on a plane oxy . At the center of the section O , ($y = 0$), the tangential stress $\tau_{xz}^{(0)}$ in linear theory is

$$\tau_{xz}^{(0)} = 1,38 \frac{P}{A^*};$$

A is an area of cross section. At the points A and B ($y = R$)

$$\tau_{xz}^{(0)} = 1,23 \frac{P}{A^*}$$

In the physical linear statement, as a result of solution of this problem in a first approximation, at the indicated points the stress components $\tau_{xz} = \tau_{xz}^{(0)} + \lambda \tau_{xz}^{(1)}$ take the following values ($\lambda = 0,255 \cdot 10^{-6} \text{ sm}^4 / \text{kQ}^2$). For copper material at the point 0 ($y = 0$)

$$\tau_{xz} = \tau_{xz}^{(0)} + \lambda \tau_{xz}^{(1)} = 1,38 - 0,03386 = 1,341 \text{ sm}^2 / \text{kQ}$$

At the points A and B ($y = R$)

$$\tau_{xz} = \tau_{xz}^{(0)} + \lambda \tau_{xz}^{(1)} = 1,23 - 0,03075 = 1,199 \text{ sm}^2 / \text{kQ}$$

At the points A and B

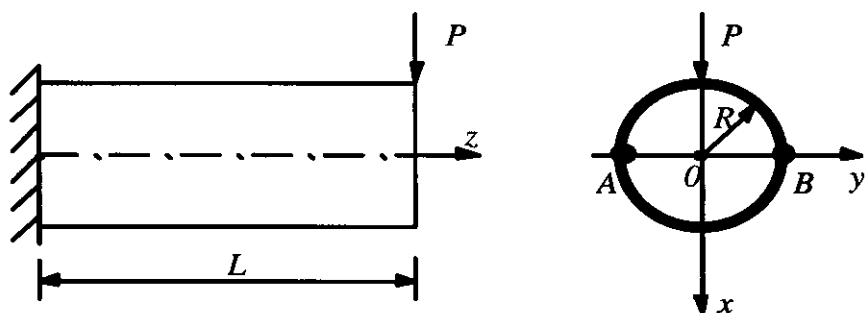


Fig.3.3

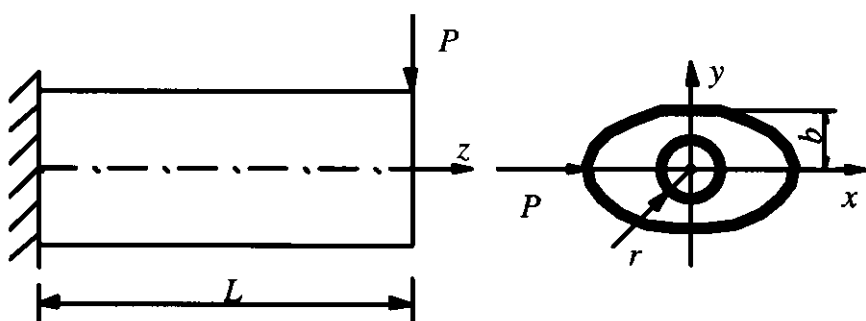


Fig.3.4

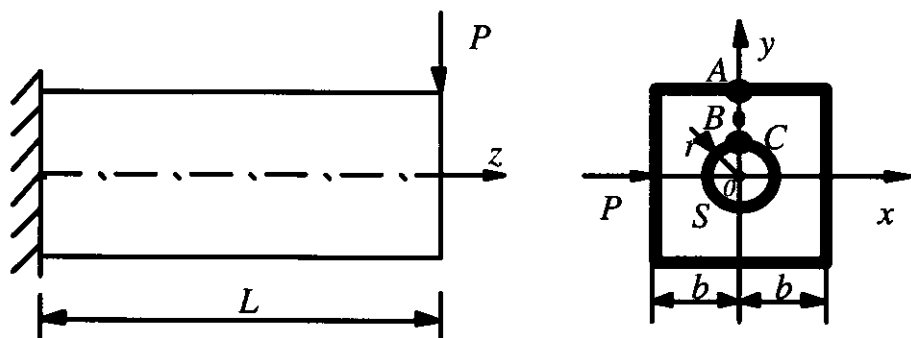


Fig.3.5

2. Bending of an elliptic beam possessing annular cylindrical hole, under point load (fig.3.4).

In linear elasticity theory, this problem was solved by prof. **D.Z. Shermann** [102]. The expression for stress function in bending (in linear statement, i.e. in zero approximation) is taken as follows:

$$\varphi_{(z)}^{(0)} = -i \cdot A^2 \left(\frac{\rho^2}{\rho^2 - 1} \cdot c_1 - 3 \cdot \frac{\rho^6}{\rho^6 - 1} \right) \cdot z -$$

$$-i \cdot \frac{\rho^6}{\rho^6 - 1} \cdot c_3 \cdot z^3 - i \cdot A^2 \cdot \left(\frac{\rho^2}{\rho^2 - 1} \cdot c_1 - 3 \cdot \frac{\rho^6}{\rho^6 - 1} \cdot c_3 \right) \cdot \frac{r^2}{z};$$

$$A = \frac{1}{2} \sqrt{a^2 - b^2}; \quad \rho = \sqrt{\frac{a+b}{a-b}};$$

$$c_1 = -\frac{\rho^2 - 1}{4\rho^4} \cdot (3\rho^4 + 2\rho^2 + 3) - \nu \cdot \frac{\rho^2 - 1}{2\rho^4} \cdot (\rho^4 + 3\rho^2 + 1);$$

$$c_3 = -\frac{\rho^2 - 1}{12\rho^4} \cdot (3\rho^4 + 2\rho^2 + 3) + \nu \cdot \frac{\rho^2 - 1}{6\rho^4};$$

The ratio of the semi axis b and radius R of a hole (circle) is taken in three variants: 0,95; 0,9 and 0,3. For tangential stresses τ_{xz} the following estimates for copper material ($\lambda = 0,255 \cdot 10^{-6}$) are obtained at the points $z = ib$ and $z = iR$, respectively (a first approximation at nonlinear statement).

Point R/b	Linear statement $(\frac{Pb^2}{J})$	Physical non- linear statement $(\frac{Pb^2}{J})$
$z = ib$ 0,95	53,702	52,09
0,9	26,91	25,89
0,3	3,67	3,58
$z = ir$ 0,95	55,27	54,28
0,9	28,627	27,57
0,3	6,50	6,3

3. Bending of a quadratic beam weakened by an annular hole under point (fig.3.5)

This problem also has found its solution at linear statement [3].

For a stress function in bending we have obtained such an expression.

$$\varphi^{(0)}(z) = H_1 \frac{z}{2} + H_5 \left(\frac{z}{r}\right)^5 + b_1 \cdot \frac{r}{z} + b_5 \cdot \left(\frac{r}{z}\right)^5;$$

$$H_n = \left(\frac{z}{A}\right)^n \sum_{k=n}^{\infty} a_{\frac{k-n}{4}}^{(n)} \cdot b_k.$$

The stresses found at the points A, B , and C of the section take the following values, respectively (for pure copper material $\lambda = 0,255 \cdot 10^{-6} \text{ sm}^4/\text{kQ}^2$)

$$z = ib, \quad \tau_{xz}^{(0)} = 2,1565 \frac{Pb^2}{J}; \quad \tau_{xz} = \tau_{xz}^{(0)} + \lambda \tau_{xz}^{(1)} = 3,98 \frac{Pb^2}{J}.$$

$$z = ir; \quad \tau_{xz}^{(0)} = 2,256 \frac{Pb^2}{J}; \quad \tau_{xz} = \tau_{xz}^{(0)} + \lambda \tau_{xz}^{(1)} = 2,188 \frac{Pb^2}{J};$$

$$z = i \frac{b+r}{2}; \quad \tau_{xz}^{(0)} = 2,176 \frac{Pb^2}{J}; \quad \tau_{xz} = \tau_{xz}^{(0)} + \lambda \tau_{xz}^{(1)} = 2,111 \frac{Pb^2}{J}.$$

4. Bending of an annular cylinder weakened by a circular hole and two linear crack under point load. (fig.3.6)

For a stress function $\varphi^{(0)}(z)$ in bending we get the following expression

$$\varphi^{(0)}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n^* \cdot \left(\frac{R}{t_2}\right)^n + \sum_{n=0}^{\infty} \beta_n \cdot \left(\frac{t}{R}\right)^n$$

$$\alpha_n^* = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k \cdot (\delta_{-1})^{-n} \cdot l_{n-k}^{(k)} \cdot \left(\frac{r}{R}\right)^n;$$

The quantities $\delta_{-1}, l_n^{(k)}$ are determined by [51].

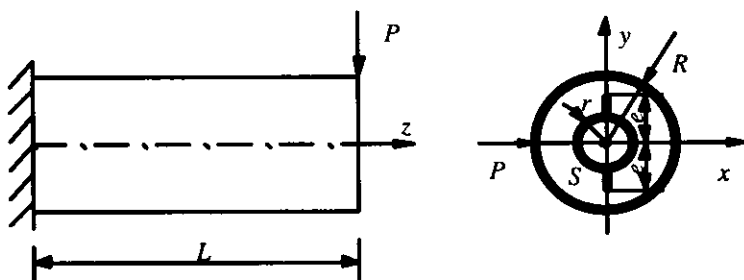


Fig.3.6

At the most dangerous (typical points) of the cross section the stress τ_{xz} gets the following values. (in two variants of ratio e/R)

At the point $z = 1.01ie$.

Variant I: $e = 0,6R$; $r/R = 0,5$

$$\tau_{xz} = \tau_{xz}^0 + \lambda \tau_{xz}^{(1)} = 26,78 + (-1,071) = 25,71 \frac{PR^2}{J}$$

Variant: II $e = 0,7R$; $e = 0,5R$;

$$\tau_{xz} = 28,92 + (-11,568) = 27,76 \frac{PR^2}{J}$$

At the point $z = iR$.

Variant: I

$$\tau_{xz} = 11,26 + (-0,3378) = 10,92 \frac{PR^2}{J}$$

Variant: II

$$\tau_{xz} = 14,65 + (-0,5320) = 14,07 \frac{PR^2}{J}$$

The solution of all these considered problems show that the solution of bending problems in non-linear statement differs 2:10% from the solutions in the linear statement. This depends on the sizes of cross-section size of a beam and materials.

We can continue these numerical examples. But we leave it to future investigators. For example, using the known solutions of prismatic beams with whole square, ellipse, hexagon cross-section, one can consider the bending problems in physical non-linear statement. On the other hand, one can study bending of two-connected domain beams in non-linear statement and etc. I don't speak on the fact that the solution of prismatic beams with linear cracks cross section is not enough both in linear and physical non-linear statement. So, there are many problems to be solved for the future investigators.

§3.3. Bending of plates in physical nonlinear statement.

The problems on bending of finite and infinite isotropic plates were considered in many references and in [26] that is the first book in the Azerbaijan language. Therefore, we give the obtaining of many expressions, derivation of equation for finding the bending function $w(x, y)$ of the plates and expressions on satisfaction of boundary conditions in ready form.[§] Here we mainly consider stress-strain state of a finite two-connected polygonal plate under different loadings. The thickness of the plate h is smaller than the other sizes (sizes for width and length) of the plate. From exterior the plate is bounded by a right polygon (L_2 contour). The coordinates of vertex points are denoted by $\pm e$ (fig.3.7). As in linear elasticity theory, the following conditions (assumptions) are also accepted in physical non-linear statement.

1. The lines perpendicular to the median surface of the plate, even after deformation become perpendicular to the curved median surface and retain their sizes (an assumption on non-deformability of normal lines).
2. As the median surface of plates undergoes infinite small deformation, we ignore it i.e. while

[§] For wide information on these problems the reader-researcher may see references [9, 26 43].

bending the plate, the median surface doesn't undergo some extension (or compression) as a neutral layer.

3. As the normal stress σ_z perpendicular to the median surface is smaller than the other stress components, they are not taken into account in dependencies between stress and strains. Within these indicated conditions, bending equation of the plate (**Sophi Jermen** equation) is as follows:

$$\Delta\Delta w = \frac{q(x, y)}{D} \quad (\text{III.3.1})$$

Here

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} = \frac{1}{3} \cdot \frac{3K+G}{3K+4G} \cdot G \cdot h^3$$

is a cylindricity condition of the plate.

It is known that the general solution of this differential equation depends on the methods of strengthening the sides of the plate. It is known from the references that plate is strengtened by three mehods.

- **the plate is rigidly supported.**

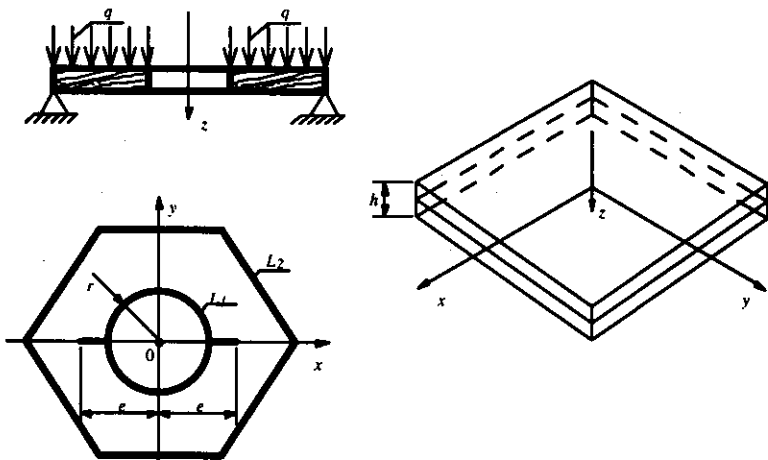


Fig.3.7

In these case the boundary conditions are as follows:

$$w = 0; \frac{\partial w}{\partial n} = 0; \quad w = 0; \frac{\partial w}{\partial x} = 0; \quad \frac{\partial w}{\partial y} = 0$$

- **the plate is hinge supported.** Then the boundary conditions are as follows:

$$w = 0; M_n = 0; \quad v \partial_y w = 0;$$

$$v \cdot \Delta w + (1 - \nu) \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \cdot \cos^2 \alpha + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \cdot \sin^2 \alpha + \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \cdot \sin 2\alpha \right];$$

n normal of the contour makes an angle α with the axis ox .

- **the plate is simply supported.** In this case the boundary conditions are as follows:

$$M_n = 0; H_{nt} = 0; Q_n = 0;$$

In many cases, combining the last two conditions of these third boundary conditions we can get :

$$Q_n + \frac{\partial H_{nt}}{\partial s} = 0$$

There exists a combination of these conditions (mixed boundary conditions) as well.

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} = 4 \frac{\partial^2}{\partial z \partial \bar{z}} \text{ is a Laplace operator.}$$

cylindricity condition of the plate $q(x, y)$ is a distributed load acting in plate's surface (perpendicular to the mean surface).

Applied to the upper base of the plate (to $z = -\frac{h}{2}$ surface) the normal $\sigma_z = -q$.

If the upper and lower bases of the plate are not under any action, then $\sigma_z = 0$.

In deriving equations of bending of the plate in physical nonlinear statement, the restrictions (conditions) in the linear statement are used [9,26,38]. Thus, if we take the bending of the plate along the axis z , in the form of the function $w(x, y)$ by what has been said above, we can express deformations as follows:

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= -z \cdot w_{xx}; & \varepsilon_y &= -z \cdot w_{yy}; \\ \psi_{xy} &= -2z \cdot w_{xy}; & \psi_{xz} &= \psi_{yz} = 0; \end{aligned} \quad (\text{III.3.2})$$

For small strains, the dependencies between stresses (σ_{ij}) and strains (ε_{ij}) are as follows [38].

$$\begin{aligned} \sigma_x &= 3K \cdot \chi(\varepsilon_0) \cdot \varepsilon_0 + 2G \cdot \gamma(\psi_0^2) \cdot (\varepsilon_x - \varepsilon_0); \\ \sigma_y &= 3K \cdot \chi(\varepsilon_0) \cdot \varepsilon_0 + 2G \cdot \gamma(\psi_0^2) \cdot (\varepsilon_y - \varepsilon_0); \\ \tau_{xy} &= G \cdot \gamma(\psi_0^2) \cdot \psi_{xy}; & \tau_{yz} &= G \cdot \gamma(\psi_0^2) \cdot \psi_{yz}; \\ \tau_{xz} &= G \cdot \gamma(\psi_0^2) \cdot \psi_{xz}; \end{aligned} \quad (\text{III.3.3})$$

Recall that we have accepted $\sigma_z = 0$ on the median surface ($z = 0$). In these last expressions (III.3.2), allowing for mean prolongation deformation

$$\varepsilon_0 \frac{\sigma_0}{3K \cdot \chi(\varepsilon_0)} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{3K \cdot \chi(\varepsilon_0)}$$

we can write

$$\begin{aligned} \sigma_x &= -\frac{2}{1-\nu(\varepsilon_0, \psi_0^2)} \cdot G \cdot \gamma(\psi_0^2) \cdot [w_{xx} + \nu(\varepsilon_0, \psi_0^2) \cdot w_{yy}] \cdot z; \\ \sigma_y &= -\frac{2}{1-\nu(\varepsilon_0, \psi_0^2)} \cdot G \cdot \gamma(\psi_0^2) \cdot [w_{yy} + \nu(\varepsilon_0, \psi_0^2) \cdot w_{xx}] \cdot z; \\ \tau_{xy} &= -2G \cdot \gamma(\psi_0^2) \cdot w_{xy}; \end{aligned} \quad (\text{III.3.4})$$

In these expressions, $\chi(\varepsilon_0)$ is a **prolongation function**, $\gamma(\psi_0^2)$ is a **shear function**. Both functions are taken in the form (I.1.31) and (I.1.32). As in the linear elasticity theory, lateral prolongation ε_z is determined by this expression:

$$\varepsilon_z = \frac{\nu_0}{1-\nu_0} \cdot (\varepsilon_x + \varepsilon_y) \quad (\text{III.3.5})$$

Here, allowing for expression (III.3.2), we can get:

$$\varepsilon_z = \frac{\nu_0}{1-\nu_0} \cdot z \cdot \Delta w \quad (\text{III.3.6})$$

The expression $\varepsilon_0 = \frac{1}{3}(\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z)$ obtained for mean prolongation (ε_0) takes the form:

$$\varepsilon_0 = -\frac{1}{3} \frac{1-2\nu_0}{1-\nu_0} \cdot z \cdot \Delta w \quad (\text{III.3.7})$$

Shear strain intensity square (ψ_0^2) known from part I is as follows:

$$\psi_0^2 = \frac{9}{8} [v_1 (w_{xx}^2 + w_{yy}^2) + v_2 \cdot w_{xx} \cdot w_{yy} + 3w_{xy}^2] \cdot z^2; \quad (\text{III.3.8})$$

Here

$$v_1 = \frac{\nu_0}{(1-\nu_0)^2} + 1; \quad v_2 = \frac{2\nu_0}{(1-\nu_0)^2} - 1$$

$\nu_0 = \nu$ - is a **Poisson ratio**.

As in the linear elasticity theory, if we consider equilibrium condition of $dxdy$ size element of the plate, bending moments per a unit length are determined by the following expressions:

$$M_x = \int_{-h/2}^{+h/2} \sigma_x \cdot z \, dz; \quad M_y = \int_{-h/2}^{+h/2} \sigma_y \cdot z \, dz;$$

$$M_{xy} = -M_{yx} = \int_{-h/2}^{+h/2} \tau_{xy} \cdot z \, dz; \quad (\text{III.3.9})$$

Cutting forces are determined as follows:

$$Q_x = \int_{-h/2}^{+h/2} \tau_{yz} \cdot dz; \quad Q_y = \int_{-h/2}^{+h/2} \tau_{xz} \cdot dz; \quad (\text{III.3.10})$$

Allowing for expressions (III.3.9) and (III.3.10) in the equilibrium conditions

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\tau_{xy}}{\partial y} = 0; \quad \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} = 0;$$

we get

$$\frac{\partial Q_x}{\partial y} + \frac{\partial Q_y}{\partial x} + q(x, y) = 0; \quad (\text{III.3.11})$$

Now, if we substitute expressions (III.3.4) in formulae (III.3.9), for bending and torsional moments (M_x, M_y, M_{xy}) we get the expressions

$$M_x = -G \cdot \frac{h^3}{6} \cdot (\lambda \cdot w_{xx} + \mu \cdot w_{yy});$$

$$M_y = -G \cdot \frac{h^3}{6} \cdot (\lambda \cdot w_{yy} + \mu \cdot w_{xx});$$

$$M_{xy} = -M_{yx} = -G \cdot \frac{h^3}{6} \cdot (\lambda - \mu) \cdot w_{xy}; \quad (\text{III.3.12})$$

Here we make the following substitutions:

$$\lambda(x, y) = \frac{12}{h^3} \int_{-h/2}^{+h/2} \frac{\gamma(\psi_0^2)}{1 - \nu(\epsilon_0, \psi_0^2)} \cdot z^2 \cdot dz;$$

$$\mu(x, y) = \frac{12}{h^3} \int_{-h/2}^{+h/2} \frac{\gamma(\psi_0^2) \cdot \nu(\epsilon_0, \psi_0^2)}{1 - \nu(\epsilon_0, \psi_0^2)} \cdot z^2 \cdot dz; \quad (\text{III.3.13})$$

Considering expressions (III.3.10) in equilibrium conditions (III.8.11), we get

$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} + q(x, y) = 0. \quad (\text{III.3.14})$$

If in this equation we take into account expressions (III.3.12), we get the following differential equation:

$$\begin{aligned} & \lambda \cdot \Delta \Delta w + 2\lambda_x \frac{\partial}{\partial x} (\Delta w) + 2\lambda_y \frac{\partial}{\partial y} (\Delta w) + \\ & + (\lambda_{xx} + \mu_{yy}) \cdot w_{xx} + (\lambda_{yy} + \mu_{xx}) \cdot w_{yy} + \\ & + 2(\lambda_{xy} - \mu_{xy}) \cdot w_{xy} = \frac{6}{Gh^3} \cdot q(x, y); \end{aligned} \quad (\text{III.3.15})$$

This differential equation is an **equation for bending of plates in physical nonlinear statement**. If we take the coefficients γ and ν in the function $\lambda(x, y)$ $\mu(x, y)$ participating in this equation as $\gamma = \lambda = 1$, then expressions (III.3.13) are simplified and take the following form:

$$\begin{aligned} \lambda(x, y) &= \frac{1}{1 - \nu_0} = 2 \cdot \frac{3K + G}{3K + 4G} = \frac{6 \cdot D}{Gh^3} = \text{const} \\ \mu &= \frac{\nu_0}{1 - \nu_0} = \text{const} \end{aligned} \quad (\text{III.3.16})$$

Then differential equation (III.3.15) coincide with differential equation in the solution of the problem in linear statement.

It instead of a coordinate system x and y we take a polar coordinate system (ρ, θ) , differential equation (III.3.15) takes the following form:

$$\begin{aligned} & \lambda \cdot \Delta \Delta w + 2\lambda_{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \Delta w + \frac{2}{\rho^2} \lambda_{\theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\Delta w) + \left(\lambda_{\rho\rho} + \frac{1}{\rho} \mu_{\rho} + \right. \\ & \left. + \frac{1}{\rho^2} \cdot \mu_{\theta\theta} \right) \cdot w_{\rho\rho} + \left(\frac{1}{\rho} \lambda_{\rho} + \frac{1}{\rho^2} \cdot \lambda_{\theta\theta} + \mu_{\rho\rho} \right) \cdot \left(\frac{1}{\rho} w_{\rho} + \right. \\ & \left. + \frac{1}{\rho^2} \cdot w_{\theta\theta} \right) + \frac{2}{\rho^2} \left[\lambda_{\rho\theta} - \mu_{\rho\theta} - \frac{1}{\rho} (\lambda_{\theta} - \mu_{\theta}) \right] \cdot (w_{r\theta} - \\ & \left. \frac{2}{\rho} w_{\theta} \right) = \frac{6 \cdot q(\rho, \theta)}{G \cdot h^3}; \end{aligned} \quad (\text{III.3.17})$$

In obtaining this equation, the expressions

$$x = \rho \cdot \cos \theta; \quad y = \rho \cdot \sin \theta;$$

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} = \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \cdot \frac{\partial^2}{\partial \theta^2}$$

and others (i.e. transformation formulae occurring in passing from cartesian coordinate system to polar coordinate system) are taken into account.

Both differential equation (III.3.15) and equation (III.3.17) are very difficult to solve from mathematical point of view

(sometimes it is impossible). Therefore, to simplify the solution, the functions $\lambda_1(\varepsilon_0)$ and $\gamma(\psi_0^2)$ (I.1.29 - I.1.32) are taken (retaining the first two terms) as follows:

$$\chi_1(\varepsilon_0) = 1 + \chi_2 \cdot \varepsilon_0^2; \quad \gamma(\psi_0^2) = 1 + \gamma_2 \cdot \psi_0^2;$$

Substituting them in (III.3.3), taking the coefficients χ_2 and γ_2 in power series form, retain **the second order power terms**. A problem on bending of an annular plate under the action of regularly distributed load $q(x, y)$ has been solved by this method in [38]. The solution of this problem in linear statement was solved in [53;56]. The following results were obtained from the solution (when a plate is simply supported) of this problem in physical linear statement.

For aluminium bronze (brass)

$$K = 1,35 \cdot 10^6 \text{ kQ/sm}^2; \quad G = 0,477 \cdot 10^6 \text{ kQ/sm}^2;$$

$$\gamma_2 = -0,04 \cdot 10^6; \quad \chi_2 = -38 \cdot 10^6;$$

$$q = 0,18 \text{ kQ/sm}^2; \quad h/R = \frac{1}{50};$$

$$w^{(1)} = h \left[0,14625 - 0,29322 \left(\frac{r}{R} \right)^2 + 0,14889 \cdot \left(\frac{r}{R} \right)^2 + \dots \right]$$

$$\text{Bending in linear statement } w_0 = \frac{qR^4}{64D} \cdot \left[1 - \left(\frac{r}{R} \right)^2 \right]^2.$$

The bending at the center of a whole plate ($\nu = 0$), takes the estimates:

$$w_0 = 0,1455 \cdot h \quad \text{in linear statement:}$$

$$w_1 = 0,14625 \cdot h \quad \text{in physical nonlinear statement.}$$

For stresses due to these bendings, the following estimates are obtained: (when $r = 0$).

$$\sigma_{\rho}^{(1)} = 223,79 \text{ kQ/sm}^2 \quad \text{in nonlinear statement.}$$

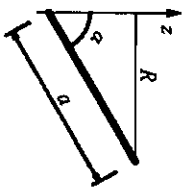
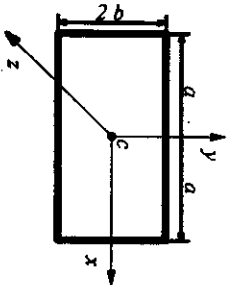
$$\sigma_{\rho}^{(0)} = 226,45 \text{ kQ/sm}^2 \quad \text{in linear statement.}$$

The obtained results show that bendings (w) and stresses (σ_{ρ}) differ very little in both cases, i.e. in physical nonlinear statement and linear statement.

Knowing the expressions of the function $w_0(x, y)$ of plate's bending in linear statement in concrete examples, the investigators may determine the expression of this function in a first approximation and also the estimates (by the indicated method) of stresses in a first approximation.

Inertia moments
of simple geometric bodies

Table № 3.1

Geometric figures	Inertia moments		
	J_x	J_y	J_z
1.Homogeneous bar 	—	—	$\frac{MR^2}{3} =$ $= \frac{4Ma^2}{3} \sin^2 \alpha$
2.Rectangular plate 	$\frac{Mb^2}{3}$	$\frac{Ma^2}{3}$	$\frac{M(a^2 + b^2)}{3}$

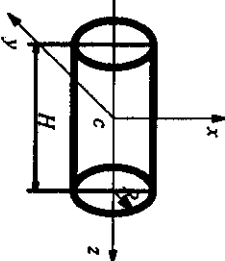
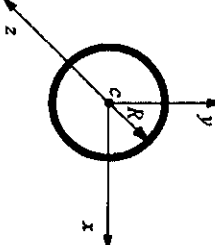
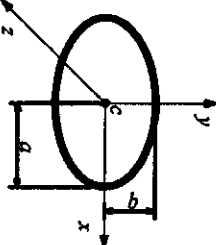
5. Cylinder	4. Annular plate	3. Elliptic plate
		
$\frac{M}{4} \left(\frac{H^2}{3} + R^2 \right)$	$\frac{MR^2}{4}$	$\frac{1}{4} Mb^2$
$\frac{M}{4} \left(\frac{H^2}{3} + R^2 \right)$	$\frac{MR^2}{4}$	$\frac{1}{4} Ma^2$
$\frac{MR^2}{2}$	$\frac{MR^2}{2}$	$\frac{1}{4} M(a^2 + b^2)$

Table No. 3.1

Table № 3.1

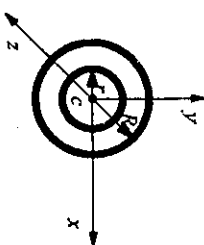
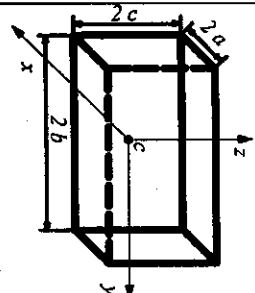
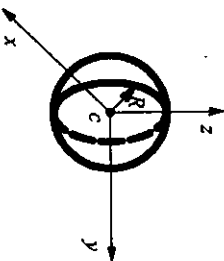
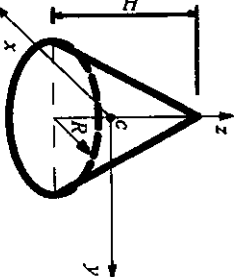
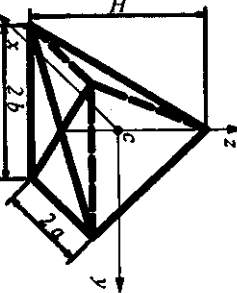
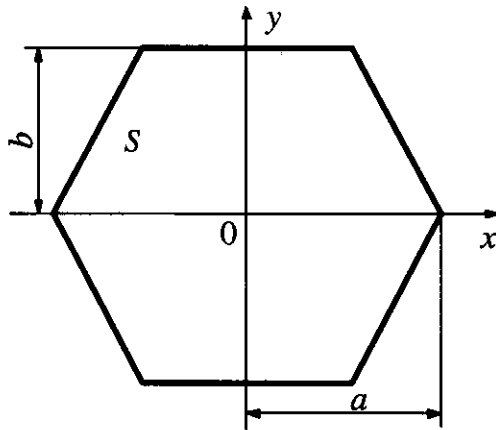
Geometric figures	Inertia moments		
	J_x	J_y	J_z
<p>6. Annular ring</p> 	$\frac{M(R^2 + r^2)}{4}$	$\frac{M(R^2 + r^2)}{4}$	$\frac{M(R^2 + r^2)}{2}$
<p>7. Prism</p> 	$\frac{M(b^2 + c^2)}{3}$	$\frac{M(a^2 + c^2)}{3}$	$\frac{M(a^2 + b^2)}{3}$

Table № 3.1

10.Circle	9.Cone	8.Pyramid
		
$\frac{2}{5} MR^2$	$\frac{3M}{20} \left(\frac{H^2}{4} + R^2 \right)$	$\frac{M}{20} \left(\frac{3H^2}{4} + 4b^2 \right)$
$\frac{2}{5} MR^2$	$\frac{3M}{20} \left(\frac{H^2}{4} + R^2 \right)$	$\frac{M}{20} \left(\frac{3H^2}{4} + 4a^2 \right)$
$\frac{2}{5} MR^2$	$\frac{3MR^2}{10}$	$\frac{1}{5} M(a^2 + b^2)$

11. Inertia moment of a polygonal plate.



In the solution of some technical problems, it is convenient to write the following expression instead of the formula (see table №3.1) for a unique thickness annular plate. If we take into account $M = \gamma\pi R^2$, then

$$J_0 = m \frac{R^2}{2} = \gamma\pi \frac{R^4}{2} \quad (1)$$

Since for homogeneous materials the density coefficient $\gamma = const$, in many cases γ is not written, simply

$$J_0 = \pi \frac{R^4}{2} \quad (2)$$

is written.

Here, J_0 is a **polar inertia moment**. (Sometimes J_0 is called a reduced polar inertia moment).

For rectangle plates, the polar inertia moment is calculated by this formula [14]:

$$J_0 = \iint_{(s)} (x^2 + y^2) dx dy \quad (3)$$

By the variable function theory, for z and its adjoints \bar{z} we can write

$$z = x + iy; \quad \bar{z} = x - iy, \quad dz = dx + idy; \quad d\bar{z} = dx - idy \quad (4)$$

From the expressions of z and \bar{z} we find x , y and write

$$dx = \frac{1}{2}(dz + d\bar{z}), \quad dy = -\frac{1}{2}(dz - d\bar{z}) \quad (5)$$

By Gauss-Ostrogradskiy formula, the two fold integral is reduced to one fold integral

$$J = \iint_{(s)} (x^2 + y^2) dx dy = \frac{1}{3} \int_L (x^3 + y^3) dx dy \quad (6)$$

Here the integral along the contour L is conducted so that the section area remains in the left.

Then if this integral, by means of the expressions

$$z = x + iy; \quad \bar{z} = x - iy \quad (7)$$

we pass to the variables t and \bar{t} (one the contour, the variable z passes to variable t and \bar{z} passes to variable \bar{t}), we get

$$J = \frac{1}{8i} \int_L \bar{t} (\bar{t} dt - t d\bar{t}) \quad (8)$$

Here t and its adjoint \bar{t} is an affix of any point of the considered L contour.

When parametric equation of contour L is known, this integral is easily calculated.

For a right polygonal contour

$$t = A[e^{i\theta} + me^{-i(N-1)\theta}], \quad \bar{t} = A[e^{i\theta} + me^{i(N-1)\theta}] \quad (9)$$

The quantities A, m, N in this expression are defined as in formula (1.1.10). so, polar inertia moment of cross section area for polygonal plates is calculated as follows []:

$$J = \frac{\pi A^4}{2} [1 + 2m^2(2 - N) + m^4(1 - N) + m\varepsilon(4 - N) + (4 - 3N)m^3\varepsilon] \quad (10)$$

$\varepsilon = 0$, if $N \neq 2$; $\varepsilon = 1$ if $N = 2$

For example, for a right **hexagonal plate** ($N = 6$)

$$J = \frac{\pi A^4}{2} [1 - 8m^2 - 5m^4] \quad (11)$$

For a **square plate** ($N = 4$)

$$J = \frac{\pi A^4}{2} [1 - 4m^2 - 3m^4]. \quad (12)$$

If the cross section area of the body has a hole bounded by L_1 contour, then the polar inertia moment is as follows:

$$J = J_2 - J_1$$

Here J_2 is an inertia moment of the cross section bounded by the external L_2 contour. J_1 is an inertia moment of a hole bounded by internal L_1 contour.

References

1. **Abel V.V.** On integration of harmonic and biharmonic equations in curvilinear coordinates. *Inzhenerniy zhurnal*. Vol.3, № 1, 1963, pp. 169-173.
2. **Ambartsumyan S.A.** Theory of anisotropic plates. *Fizmatgiz, M.*, 1967, pp.350.
3. **Amenzadeh Ju. A.** Theory of elasticity. *M. Vysshaya shkola*. 1976, 272 p.
4. **Ashkenazi E.K., Gapov E.V.** Anisotropy of structural materials. Reference book. *Mashinostroyeniye. L.* 1972, 250 p.
5. **Babayev M.A.** Physical nonlinear plate with a hole strengthened by thin elastic bar. *Prikladnaya mekhanika* vol. 2, issue 7, 1966, pp. 80-87.
6. **Babayev M.A., Tsurpal I.A.** Two-axial homogeneous stress state of an annular hole physical nonlinear plate. *Inzhenerniy zhurnal* vol. V, issue 5, 1965, pp. 68-75.
7. **Barenblatt G.I., Cherepanov G.P.** On brittle cracks of longitudinal shear. *PMM*, 1961, vol. 25, issue 6, pp. 110-119.

8. **Barenblatt G.I.** Mathematical theory of equilibrium cracks generated under brittle failure. PMTPH. 1961, № 4, pp. 35-56.
9. **Berezhnitskii L.T., Delyavskii M.V., Panasyuk V.V.** Bending of thin plates with crack type defects. Kiev "Naukova Dumka", 1919, 400 p.
10. **Berezhnitskii L.T., Delyavskii M.V., Mazurak L.P., Panasyuk V.V.** Bending of cracked annular plate. In: Proc. of All-Union Conf. on plates and shells. Kharkov, 1977, pp. 72-77.
11. **Berezhnitskii L.T., Panasyuk V.V., Trush I.I.** Stress intensity coefficient near rigid sharpangle inclusions. In: Strength problems. Kiev, 1973, № 7, pp. 3-7.
12. **Berezhnitskii L.T., Sadivskii V.M., Onyshko L.I.** Bending of a cracked anisotropic plate. PM. 1978, vol. 14, № 11, pp.71-80.
13. **Berezhnitskii L.T., Sadivskii V.M.** To the theory of sharpened stress concentrations in anisotropic plates. Ph. Ch.MM. 1977, vol. 13, № 3, pp82-90.
14. **Bowie O.** Extension of a rectangular plate with symmetric cracks at the edges. Tr. Amer. Ob.va. inzh. Mech. Ser. E. Prikl. Mekh. 1964, vol. 31, № 2, pp. 56-61.

15. **Vardanyan L.M.** Stress concentration near general form hole in nonlinear-elastic plate. Prikl. Mekhanika, vol. 6, № 5, 1970, pp. 125-130.
16. **Vardanyan L.M.** Plate deformation of nonlinear elastic anisotropic medium with finite number of annular holes. Izv. Arm. SSR, Mekhanika, vol. XXIV, № 5, 1971, pp. 32-35.
17. **Weinberg D.V.** Reference book on strength, stability and oscillations of plates. Kiev, 1973, 488 p.
18. **Weinberg D.V. Weinberg E.D.** Plates disks, beams-walls (strength, stability and oscillation). Kiev, Ukr SSR, 1959, 1049 p.
19. **Gakhov F.B.** Boundary value problems. M. Nauka, 1977, 640 p.
20. **Garibov R.T.** Free torsional oscillations of an annular thick-walled cylindrical shell under nonlinear law of elasticity. Izv. Vuz-ov SSSR "Stroitelstvo i Arkhitektura", № 4, 1990 p.
21. **Goldenblatt P. I.** Nonlinear problems of elasticity theory. M. Nauka, 1969, 336 p.
22. **Green A., Adkins J.** Large elastic deformations and nonlinear continuum mechanics. M. Mir, 1965, 455 p.

23. **Globenko T.M.** Influence of physical nonlinearity of material on stress concentration near square hole. In: Calculation methods in civil engineering. M., 1974, pp. 39-55.
24. **Guz A.N., Tsurpal I.A.** On solution of plane physically nonlinear problems of elasticity theory for multi connected domains. Prikl. mekh., vol. IV, № 11, 1968, pp. 41-49.
25. **Kuliyev S.A.** Elasticity theory. Baku, Azerneshr 1998, 210 p.
26. **Kuliyev S.A.** Some problems of elasticity theory. Baku, Azerneshr 2001, 400 p.
27. **Kuliyev S.A.** Stress state of anisotropic plates. Baku, Azerneshr 2002, 254 p.
28. **Glushko V.T., Dolinina N.N, Rozovskii M.I.** Stress concentration near the holes under nonlinear creeping. Prikladnaya neekhanike, vol. VII, № 10, 1970, pp. 71-78.
29. **Gromov V.G.** On influence of physical nonlinearity on stress concentration near annular hole for large deformations. PM, 1965, vol. 1, № 10, pp. 72-75.
30. **Demidov S.P.** Elasticity theory. M., Vysshaya shkola, 1979, 432 p.

31. **Delyavskiy M.V.** To the problem on bending of plates weakened by sharp stress concentration. Ph. Ch. M.M., 1976, vol. 12, № 3, pp. 119-121.
32. **Jowda S.V. Toppor T.G.** On relation between stress and strain intensity coefficients in cut samples for plane stress state. Trudy Amer. ob.-va inzh.-mekh. PM, vol. 27, 1970, № 1, pp. 80-88.
33. **Zvolinskii N.V., Reez P.M.** On some problems of nonlinear elasticity theory. PMM, vol. 2, № 4, 1939, pp. 417-426.
34. **Ivlev D.D.** To the theory of brittle failure cracks. PMPH, 1976, № 6, pp. 88-128.
35. **Isayev A.M., Garibov R.T.** Torsion of prismatic body in physical nonlinear statement. Dep. In VINITI, № 285, Az. D. 84.
36. **Ivlev D.D.** On a construction of cracks theory. Inzh. zhurnal. MTT. 1967, № 6, pp. 91-94.
37. **Ilyushin A.A.** Continuum mechanics Izd. MGU, 1971, 247 p.
38. **Cowdener G.** Nonlinear mechanics. M., Il: 1961, 780 p.
39. **Kirchhoff F.G.** Mechanics: Lectures on mathematical physics. Izd-vo AN SSSR, 1960, 402 p.

40. **Kerimov R. Yu., Khoroshun L.P.** Complex representations of plane physical nonlinear problems of solid mechanics. *Izv. AN Azerb., SSR, ser. fiz. mat. i tekhn. Nauk*, Baku, 1971, № 2, pp. 120-127.
41. **Cloiser S.M., Kosmodamianskii A.S.** Nonlinear problems of plane elasticity theory for multi-connected media. *PM*, vol. V, № 9, 1969, pp. 63-70.
42. **Korotkikh G.Yu.** Solution of boundary value problem for physically nonlinear differences. *PM*, 1966, vol. 2, № 3, pp. 50-57.
43. **Kosmodamianskii A.S.** Plane problem of elasticity theory for plates with holes, cuts and bulks. *Kiev. Visha Shkola*, 1975, 228 p.
44. **Kosmodamianskii A.S.** Stress state of anisotropic media with holes and cavities. *Kiev. Donetsk, Vissha, Shkola*, 1976, 200 p.
45. **Kosmodamianskii A.S., Ivanov G.I.** Bending of thin multi-connected plates. *Donetsk* 1973, p.264.
46. **Kosmodamianskii A.S. Tsurpal I.A.** Physical nonlinear problems for a plate weakened by two annular holes. *DAN Ukr. SSR*, № 5, 1967, pp. 449-452.

47. **Coifmann Yu.I.** Plane nonlinear problems of elastic equilibrium of multi-connected bodies. *Prikladnaya mekhanika Kiev*, vol. 6, № 2, 1970, pp. 58-65.
48. **Kolosov G.V.** Application of complex variable of elasticity theory. ONTI, M.-L., 1935, pp.234.
49. **Kuliyev G.G.** № 9, 1971, pp. 801-807.
50. **Kuliyev S.A.** Investigation of stress state of polygonal plate for physically nonlinear theory of elasticity. *Izv. AN Azerb. SSR. ser. fiz. mat. i tekhn. nauk*, 1975, № 3, pp. 104-108.
51. **Kuliyev S.A.** Conformally mapping functions of complex domains. Baku, Azerneshr, 2004, p.372.
52. **Kuliyev S.A.** Investigation of stress state of polygonal plate in arbitrary physical nonlinearity. *Ucheniye zapiski Azineftekhima*, 1978, № 3, pp. 26-30.
53. **Kuliyev S.A.** Two-dimensional problems of elasticity theory. M. Stroyizdat, 1991, 352 p.
54. **Kuliyev S.A.** Stress state of a circular plate weakened by a central square hole and two cracks. *Iz. AN SSSR, MTT*, 1987, № 6, pp. 184-190.
55. **Kuliyev S.A.** To the solution of elasticity theory problem by analytic functions method. *Izv. AN SSSR, PMM*, 1989, vol. 53, № 5, pp. 852-856.

56. **Kuliyev S.A.** Bending of polygonal plate with central circular hole and two linear cracks of different length. *Izv. AN, SSSR, MTT*, 1996, № 6, pp. 173-179.
57. **Lavrentyev M.A. Shabat B.V.** Methods of theory of complex variable. M.Nauke, 1973, 736 p.
58. **Lavrik V.I., Savenkov V.N.** Reference book on conformal mappings. Kiev, Naukove Dumka, 1970, 252 p.
59. **Lekhnitskii S.G.** Anisotropic plates. M. Gostekhizdat, 1957, 464 p.
60. **Lekhnitskii S.G.** Elasticity theory of anisotropic body. M.Nauka 1977, 416 p.
61. **Lekhnitskii S.G.** Torsion of anisotropic and inhomogeneous bars. M. Nauka. 1971, 240 p.
62. **Lukash Y.A.** Bases of nonlinear civil engineering mechanics. Stroyizdat, 1978, 204 p.
63. **Lourie A.N.** Nonlinear theory of elasticity M.Nauka, 1980, 512 p.
64. **Meglinskii V.V.** Bending of an elliptic anisotropic plate with elliptic hole. *Izv. Arm. SSR. Mekhanika*, 1966, vol. 19, № 3, pp. 14-25.
65. **Meglinskii V.V.** Stress state of edge supported anisotropic elliptic plate with hole. *PM*, 1971, vol. 7, № 7, pp. 100-103.

66. **Meglinskii V.V.** Stress concentration near elliptic elastic inclusion in thin anisotropic plate *Izv. AN SSSR, MTT*, 1970, № 6, pp. 152-160.
67. **Muskhelesvili N.I.** Some basic problems of elasticity theory. M. Nauka, 1966, 648 p.
68. **Morozov N.F.** Nonlinear problems of plates. *Vestnik Leningrad. Univ.* 1958, № 19, pp. 100-124.
69. **Morozov N.F.** To nonlinear theory of thin plates. *DAN SSSR*, vol. 114, № 5, 1957, pp. 968-971.
70. **Neiber G.** Theory of tangential stress concentration in prismatic bodies for arbitrary nonlinear dependence between stress and strain, *Trudy Amer. Ob.-va inzhenerov mekhanikov. Prikladnaya mekhanika*, 1962, № 4, pp. 71-76.
71. **Nemysh Yu.N.** On stress state of nonlinear elastic bodies. *Izv. AN SSSR, Mekhanika tverdogo tela.* № 4, 1971, pp. 81-89.
72. **Novozhilov V.V.** On relation between stress and strains on nonlinear-elastic medium *Prikl. mat. i. mekhanik, PMM*, vol. XV, № 2, 1951, pp. 183-194.
73. **Novozhilov V.V., Chernykh K.F.** Nonlinear plane problem of elasticity theory (plane deformation) In: *Vestnik Leningrad, Univ.*, 1975, № 1, pp. 122-129.

74. **Novozhilov V.V.** Elasticity theory, Izd. Sudpromgaz 1958, 212 p.
75. **Pelekh B.L.** Stress concentration near holes for bending of transversally-isotropic plates. Kiev, Naukova Dumka. 1977, 184 p.
76. **Oktsvist F.K.G.** Nonlinear mechanics and its past, present and future. Sbornik perevodov. "Mekhanika", 1970, № 3. (121)
77. **Petrov V.V.** To calculation of plates and hollow shells with regard to physical and geometrical nonlinearity. In: Mekhanika deformiruyemikh sred. Izd. Saratov. Gos. Univ. Saratov, № 1, 1974, pp. 123-130.
78. **Petrov V.V.** On the first boundary value problem of nonlinear theory of elasticity. DAN SSSR, vol. 114, № 1, 1957, pp. 41-44.
79. **Pister K., Ivens R.** Calculation of elastic stresses in physically nonlinear solid fuels. Raketnaya Tekhnika i Kosmonavtika, 1966, № 2, pp. 35-42.
80. **Passkazov L.N., Klein N.S.** To solutions of nonlinear problem of elasticity theory by successive approximation method. In: Trudy VNII Vodostabzheniya. Kanaliz. gidrotekhn. sooruzh. inzh. gidrogeol, № 34, 1972, pp. 32-37.

81. **Rosovskii M.M., Glushko V.I., Tkachenko V.E.** Influence of time on stress concentration near holes in plates for physical nonlinearity and large deformations. In: Konsentratsiya napryazheniy. № 3, Kiev Naukova Dumka, 1971, pp. 95-101.
82. **Savin G.N., Khoroshun L.P.** Plane problem of physically nonlinear elastic bodies. Prikladnaya mekhanika, vol. 1, № 4, 1965, pp. 1-11.
83. **Sedov L.I.** Bases of nonlinear continuum mechanics. M.Izv. AN SSSR, 1960, 412 p.
84. **Sokholovskii V.V.** Concentration of tangential stresses for nonlinear law of deformation. Inzhenerniy zhurnal, vol. 2, № 2, 1960, pp. 80-84.
85. **Savin G.N.** Stress distribution near holes. Kiev, Naukova Dumka, 1968, 888 p.
86. **See G., Coifman Yu. I.** Some problems of plane theory nonlinear of elasticity. Prikladnaya mekhanika, vol.8, № 6, 1961, pp. 590-600.
87. **See G., Libovits G.** Mathematical theory of brittle failure. In book: Failure, M.:1975, vol. 2, pp. 83-203.
88. **See G.** Stress distribution near the ends of longitudinal shear crack. Trudy Amer. Obsh. Mekh. Inzh. PM, 1956, vol. 32, № 1, pp. 57-65.

89. **See G., Paris P. Erdogan F.** Stress concentration coefficients at cracks vertices for plane tension and bending of plates. Trudy Amer. Obsh. Mekh. Inzh. PM, 1962, vol. 29, № 2, pp. 101-108.
90. **Taras`ev G.S.** Equations of nonlinear theory of elasticity in displacements DAN SSSR, vol. 191, № 6, 1970, pp. 1249-1252.
91. **Tarston G.A.** Application of Newton`s method in solving nonlinear mechanics problem. Trudy Amer. Obsh. Mekh. Inzh. № 2, vol. 32, 1965, pp. 146-152.
92. **Teregulov P.G.** On a variational theorem of nonlinear theory of elasticity. PMM. vol. 26, № 1, 1962, pp. 169-171.
93. **Tolokonnikov A.A.** Equations of nonlinear theory of elasticity in displacements. PMM. vol. 21, № 6, 1957, pp. 815-822.
94. **Trusdell K.** Initial course of rational continuum mechanics. M. Mir, 1975, pp.592.
95. **Timoshenko S.P., Voynovskii-Krieger.** Plates and shells. M. Nauka, 1966, pp. 632.
96. **Cherepanov G.P.** Brittle failure mechanics. M. Nauka, 1974, pp. 640.

97. **Chentsov N.G.** Investigation of vaneer as anisotropic plate. Tekhnicheskiye zametki. TsAGI, № 91, 1936, pp. 1-27.
98. **Chekushkin Yu.K.** On a method in nonlinear theory of bending of thin plates. PM. vol.1, 8, 1965, pp. 23-29.
99. **Tsurpal I.A.** PM. vol.VIII, № 5, 1962, pp. 201-204.
100. **Tsurpal I.A., Kuliyeu G.G.** Stress concentration problems with regard to physical nonlinearity of material. PM. № 7, 1974, pp. 3-22
101. **Tsurpal I.A.** Stress concentration near square hole in physically nonlinear elastic plate. Izv. AN SSSR, mekhanika, 1965, № 6, pp. 71-76.
102. **Sherman D.I.** On a solution method of elasticity theory problems for doubly-connected domains. DAN SSSR, 1947, № 8, pp. 710-704.
103. **Sherman D.I.** On stresses in plane weight medium with two same, symmetrically arranged annular holes. PMM. vol.4, № 6, 1951, pp. 751-761.
104. **Sherman D.I.** Plane theory of elasticity for anisotropic medium. Trudy Seismologicheskogo Ins-ta. AN SSSR, №8, 1938, pp.51-78.

105. **Sherman D.I.** Plane deformation in isotropic inhomogeneous medium. PMM, vol. 7, № 4, 1943, pp. 691-703.
106. **Sherman D.I.** To the solution of plane problem for anisotropic medium theory. PMM, 1942, vol. 6, № 6, pp. 509-514.
107. **Shulga N.A.** Bending of thin plate weakened by annular hole for nonlinear law of elasticity. PM. vol.1, № 2, 1965, pp. 121-126.
108. **Shulga N.A.** Bending of thin physically nonlinear bodies. PM., vol. 2, № 12, 1966, pp. 115-118.
109. **Yarema S.Ya., Krestin G.S.** Stress distribution at cracks' vertex in anisotropic plate. Ph. Ch. M.M., 1969, vol. 5, № 6, pp.714-719.
110. **Adkins J.E.** Finite deformation of materials exhibiting curvilinear anisotropy. Proc.Roy. Soc.,A 229, №1176, p.119-134, 1955.
111. **Adkins J.E., Green A.E.** Plane problems in second order elasticity theory. Proc.Roy. Soc., A 239, №1219, p.557-576, 1957.
112. **Ang D.D., Williams M.L.** Combined stress in an orthotropic plate having a finite crack. -J.Appl. Mech. 1961, v.28, № 3, p.372-378.

113. **Bowie O.L.** Analysis of infinite plate containing radial crack propagating at the boundary of an internal circular hole.- J. Math and Phys. 1956, v.35, № 1, p. 60-71.
114. **Durelli A.I., Parks, V.I., Chen I.L.** Stress concentration of rectangular plate with circular perforations along its two bounded edges and subjected to restrained shrinkage, J. strain and stress analysis, v.1, № 5, 1969 p.35-51.
115. **Evans K.I., Pister K.S.** Constitutive equations for a class of nonlinear elastic solids. Inter. J. Solids and struct., v.2, №3, 1966, p.427-445.
116. **Griffith A.A.** The Phenomenon of rupture and slow of solids.-Trans:1 Roy. Soc. A. 1920; t.221; The theory of rupture. In:Proc. First Intern. Congr. Appl. Mech. Delft. 1924.
117. **Teodorescu P.P.** Problemele plane in teoriei elasticitatii. v.1. p.995, 1960, v.2, p.669, 1965.
118. **Zerna W.** Uber ein nichtlineare allgemeine Theorie der Schalen.-Proc. Lutam, Sympos. Theory Thin Elastic shells (Deldt, 1959), Amsterdam, 1960.

119. **Williams M.L.** On the stress distribution at the base of a stationary crack.-*J.App. Mech.*, 1957. v.24, №1, p.109-114.
120. **Subrata Saha, Subrata Knezjce.** Ehi Chang Chao. Concentrated forces in semiinfinite anisotropic media.- *J. Compos. Mater.* 1972, v.6 №3, p.403-408.
121. **Irwin L.R.** Fracture. In.: *Handbuck der Physic.* Brlin. 1958. Bd 6, p.551-590.
122. **Jindra F.** Warmespannungen bei einem nichtlinearen elastizitatsgsetzes. *Ing. Arch.*,Bd.28, №2, 1959, p.109-116.
123. **Hulbert L.E.** The Numerical Solution of Two Dimansional Problems of the Theory of Elasticity, Ohio State univ., Eng. Exp. Sta. Bull., 198, Columbus, Ohio, 1965.
124. **Isida M.** Method of Laurent series expansion for internal crack problems.-in:*Mechanics of fracture.* Lejden.1973, v.1, p.56-130.
125. **Irwin L.R.** Fracture.-in: *Handbuck der Physic.* Berlin, 1958, Bd 6, p. 551-590.
126. **Koiter W.T.** General theorenis or elastic-plastic solids. *Progress in Solid Mechanics* (ed Sneddon J.N., Hill R.), Charter 4, Noth-Holland, 1960.

127. **Kuliyev S.A.** Stressed state of polygonal plate with central circular hollow and two linear cracks. *Engineering Fracture Mechanics*. V.27, №6, p.601-613, 1987. Printed in Great Britain.
128. **Kuliyev S.A.** The bending of an anisotropy plate with a central circular cavity and two rektilinear cuts. *J. App. Maths. Mechs*. V.57, №2, p. 399-406, 1993. Printed in Great Britain.
129. **Kraus H., Rotondo P., Haddon W.D.** Analysis of Radially Deformed Perforated Flanges. –*Trans. ASME*, v. 88, Series E, 1966, Applied Mechanics Section, p. 172.
130. **Renzulli G.** Contributo allo studio dell equilibrio elastico in canipo nonlineare-Giormnat. *Battaglini*, v.85, №1,4, 195, p.41-51.
131. **Rivlin R.S.** Fundamental tensor relations of nonlinear continuum mechanics. *Theory of plates and shells*. Bratislava, 1966.
132. **Stenberg E.** Nonlinear theory of elasticity with small deformations. *J. Appl. Mech.*, v.13, 1946.
133. **Periman A. B., Sih G.C.** Circular cracks in bimaterial plates under bending.-*int. J. Fract. Mech.*, 1967, v.3, №3, p. 193-203.

134. **Sih G.C., Paris P.G., Irwin L.R.** On the cracks in rectilinear anisotropic bodies. *Int. J. Mech.*, 1965, v.1, №3, p. 189-203.
135. **Sih G.C.** Bending of cracked plate with arbitrary stress distribution across the thickness. – *J. Eng. Industry* 1970, v.92, №3, p.350-356.

BƏZİ TEXNİKİ TERMLƏR

Rusca	Azərbaycanca	İngiliscə
Осесимметричные	Oxasimmetrik	Axisymmetric
Среднее напряжение	Orta gərginlik	Mean stress
Интенсивность касательных напряжений	Toxunan gərginliklərin intensivliyi	Tangential stress intensity
Чисто-объемная деформация	Xalis həcmi deformasiya	Pure volume strain
Геометрическая линейаризация	Həndəsi xəttiləşmə	Geometric linearization
Физическая линейаризация	Fiziki xəttiləşmə	
Удельная работа деформации	Deformasiyanın xüsusi işi (vahid deformasiyada görülan iş)	Specific work of strain
Абсолютно упругое тела	Mütləq elastik cisimlər	Absolutely elastic body
Приведенное среднее напряжение	Gətirilmiş orta gərginlik	Reduced mean stress
Подынтегральное выражение	Integralaltı ifadə	Integrand expression

Одноосное растяжение-сжатие удлинение	Biroxlu dartılma – sıxılma uzanma dartıb uzadmaq	Uniaxial extension-compression-prolongation
Круглый цилиндр	Dairəvi silindir	Circular cylinder
Функция удлинения	Uzanma (uzadılma) funksiyası	Prolongation function
Функция сдвига	Sürüşmə funksiyası	Shear function
Степенной ряд	Qüvvət üstlü sıra	Power series
Метод малого параметра	Kiçik parametir metodu	Small parameter method
Физически нелинейная теория	Fiziki qeyri xətt nəzəriyyə	Physical nonlinear theory
Сплошная среда	Bütöv mühit	Continuum
Перемещения (смещения)	Yerdəyişmə	Displacement
Объемные силы	Həcmi qüvvələr	Volume forces
Модуль сдвига	Sürüşmə modulu	Shear modulus
Чистый сдвиг	Xalis sürüşmə	Pure shear
Жесткое смещение	Sərt yerdəyişmə	Rigid displacement

Условия совместности деформации	Deformasiyaların bingəlilik şərtləri	Strain compatibility conditions
Плоская деформация	Müstəvi deformasiya	Plane deformation
Условия однозначности смещения	Yerdəyişmələrin birmənəlilik (yeganəlik) şərtləri	Uniqueness conditions of displacement
Призматический брус	Prizmatik tir	Prismatic beam
Полуобратный метод	Yarıters (yarıeks)metod	Semi-inverse method
Жесткость при кручении	Burulmada sərtlik	Torsion rigidity
Поперечные (продольные) силы	Eninə (uzununa)qüvvələr	Lateral (longitudinal) forces
Жесткость при изгибе	Əyilmədə sərtlik	Bending rigidity
Конформное отображение	Konform inikas	Conformal mapping
Трещина (щель, разрез)	Çat (yarıq)	Crack (cut, section)
Продольный сдвиг	Uzununa sürüşmə	Longitudinal shear
Поверхностные силы	Səthi qüvvələr	Surface forces
Относительное удлинение	Nisbi uzanma	Relative prolongation

Модуль объемного расширения	Нəsmi genişlənmə modulu	Volume extension
Граничные условия	Sərhəd şərtləri	Boundary conditions
Ядро Коши	Koşi nüvəsi (özəyi)	Cauchy kernel
Плотности интеграла	İnteqralın sıxlığı	Density of integral
Главные значения интеграла	İnteqralın əsas qiyməti	Mean values of integral
Действительные постоянные	Həqiqi sabitlər	Real constants
Обратная функция	Tərsi (əks) funksiya	Inverse function
Упругое равновесие	Elastik müvazinat	Elastic equilibrium
Составляющие напряжений (перемещений, деформации)	Gərginliyin (yerdəyişmənin, deformasiyanın) toplananları	Stress (displacements, strain) components
Упругая симметрия	Elastik simmetriya	Elastic symmetry
Главные оси координат	Baş koordinat oxları	Principal coordinates axis
Комплексные сопряженные величины	Kompleks qoşma kəmiyyətlər	Complex adjoint quantities
Прогиб	Əyinti, əyilmə	Bending

Срединная плоскость	Orta müstəvi	Median surface
Свободно опертая пластинка	Kənarları sərbəst oturdulmuş lövhə	Simply supported plate
Шарнирно опертый край	Kənarları oynaqla bərkidilmiş (oturdulmuş) lövhələr	Hinge supported plate
Жестко зашлемленный край	Kənarları sert bağlanmış (bərkidilmiş) lövhə	Rigidly built in plate
Функция прогиба	Əyinti funksiyası	Bending function
Перерезывающая сила	Kəşici qüvvə	Cutting force
Условия однозначности прогиба	Əyintilərin (birmənəli) birqiymətlik şərtləri	Uniqueness conditions of bending
Изгиб пластинки	Lövhənin əyilməsi	Bending of plate
Прогиб пластинки	Lövhənin əyintisi	Deflection of plate
Напряжения на бесконечности	Sonsuzluqdakı gərginliklər	Stress at infinity
Сплошная пластинка	Bütöv (yəni deşiksiz) lövhə	Entire plate

Бесконечно удаленная точка	Sonsuz uzaqlaşdırılmış nöqtə	Point at infinity
Замкнутый контур	Qapalı kontur	Closed contour
Конечная пластинка	Sonlu lövhə (yəni müəyyən konturla xaricdən hüdudlanmış lövhə)	Finite plate (i.e. a plate bounded from exterior by a contour)
Вещественная постоянная	Həqiqi sabit	Real constant
Вершина трещины	Çatın təpə nöqtəsi	Vertex of a crack
Разрушение пластины с трещиной	Çatlara malik lövhələrin dağılması	Failure of cracked plate
Плотность поверхностной энергии	Səthi enerjinin sıxlığı	Density of surface energy
Предельное равновесия	Müvazinet həddi	Limit equilibrium

KULIYEV SABIR ALI oglu
Dr. of Techn. Sci. prof. of the chair
"Theoretical mechanics"
Azerbaijan Architectural
Civil Engineering University



Kuliiev Sabir Ali oglu was born in 1940 in Kalbajar district of Azerbaijan Republic (from 1993 up to now this territory is under invasion of Armenia).

In 1957 he finished the secondary school with a medal and joined Azerbaijan Polytechnical Institute (now Azerbaijan Technical University) and graduated from it in 1962 (by the speciality mechanical engineer engineering industry technologies). Bending from 1963 up to day he works at the Higher school (to 1975 at Azerbaijan Polytechnical Institute, from 1975 at Azerbaijan Architectural civil Enjineering University) as a teacher.

In 1966 S.A.Kuliiev joined the post-graduate courses of the Institute of Mathematics and Mechanics of the Academy of Sciences of Azerbaijan (by the speciality Theory of elasticity and plasticity).

In 1971 he earned in Moscow his Ph.D (in the field of the mechanics of solids).

From 1975 S.A.Kuliiev carried out his scientific activity under the guidance of the world-known scientist prof. D.I.Sherman (Institute of "Problems of Mechanics" of the Academy of Sciences of the USSR, now Academy of Sciences of Russian Federation).

In 1988 S.A.Kuliiev earned his doctor's degree on the theme "Determination of a strees-state of doubly-connected bodies with complicated geometry".

Working already 40 years in the field of mechanics of solids S.A.Kuliiev published more than 100 scientific papers and 13 books.

Many of these papers have been published in the known academic scientific journals of Russia ("Mechanics of solids", "Applied mathematics and mechanics"), Ukraine ("Applied mechanics"), Azerbaijan (Doklady AN, Izvestiya AN and etc.), and also in the known scientific journals of the USA, England, Canada, Japan and others.

In 1991 S.A.Kuliiev's first monograph "Two-dimensional problems of elasticity theory" was published in Moscow (in Russian).

In 1998 prof. S.A.Kuliyev for the first time in Azerbaijan published the monograph "Theory of Elasticity" (torsion and bending of prismatic beams) in azerb. language.

In 2001 also in azeri the book of prof. S.A.Kuliyev "Some problems of the theory of elasticity" (plane problems and bending of polygonal plates) was published.

In 2002 prof. S.A.Kuliyev publishes a new monograph "The stress state of anisotropic plates" (in azeri).

In 2004 S.A.Kuliyev's new monograph "Conformally mapping functions of complex domains" appears (in Russian and English).

In 2005 prof. S.A. Kuliyev (in collaboration with A.F. Mamedov) published a new educational book titled "Calculation of flat and spatial farms".

Alongside with these ones, prof. S.A.Kuliyev has published 5 educational books and 1 text book "Short course of theoretical mechanics" (with dos.E.V.Eyvazov) on all parts of theoretical mechanics (statics, kinematics, dynamics)

In all these papers and books, also first in the scientific world, namely a great number of conformally mapping functions (composite geometry domains: a circle and contours outgoing from it and possessing some linear cracks, square and hexagonal contours possessing different cracks and etc.)found by S.A.Kuliyev, and constructive suggestions and recommendations for choosing and using the known Kolosov-Muskheleshovili potentials for multi-connected geometry domain are given.

Prof. S.A.Kuliyev extended and developed the famous auxiliary functions method of his supervisor and teacher D.I.Sherman.

It should be also noticed that both in our country and abroad, the solution of static and dynamic problems of polygonal plates possessing different linear and curvilinear cracks and also the solution of torsion and bending problems of prismatic beams were first given namely by prof. Kuliyev S.A.

İngilis dilinə
tərcümə edən: *Əliyeva Esmira Tələt qızı*
Bədii redaktor: *Məhəbbət Orucov*
Korrektor: *Nigar Sabir qızı*
Kompüter xidməti: *Aşumova Ülviyyə Akif qızı*

«Tayms» qarnitur. Formatı 60x90 1/16. Ofset kağızı 1. Şərti çap vərəqi 29.
Tirajı 200. Müqavilə qiyməti ilə.

Azərbaycan Respublikası Mədəniyyət və Turizm Nazirliyi
Azərbaycan Dövlət Nəşriyyatı. Bakı – Mehdi Hüseyn küç. 61. dalan 2, ev 3.

“RS Poliqraf” MMC-nin mətbəəsində
hazır diapozitivlərdən çap olunmuşdur.
