

Санкт-Петербургский государственный университет

Физический факультет
Кафедра вычислительной физики

Е.И.Бутиков, В.В.Монахов, О.В.Огинец, А.В.Кожедуб, В.Н.Смирнов, М.Г.Яковлева.

**Автоматизированный практикум по физике
для студентов второго курса**

МЕХАНИКА

Учебно-методическое пособие

Санкт-Петербург
2004

*Утверждено на заседании кафедры
вычислительной физики*

Авторы: Е.И.Бутиков, В.В. Монахов, О.В. Огинец, А.В. Кожедуб, В.Н.Смирнов, М.Г. Яковлева.

Учебно-методическое пособие содержит методические рекомендации и описания лабораторных работ, предназначенные для студентов 2 курса физического факультета по курсу "Автоматизированный физический практикум".

В первую часть пособия входят компьютерные работы по моделированию колебаний в различных физических системах.

Вторая часть настоящего пособия посвящена изложению основ физической теории, описанию экспериментальных установок с использованием компьютера и содержит задания для выполнения на этих установках лабораторных работ по механике, разработанных на кафедре вычислительной физики.

Авторский коллектив выражает особую благодарность Т.В. Фроловой и Н.А. Макарову за помощь в подготовке пособия к изданию.

Оглавление

I Моделирование колебаний	3
Лабораторная работа №1 Собственные колебания линейного осциллятора	5
1.1 Теоретические сведения	5
1.2 О численном моделировании изучаемой физической системы	10
1.3 Контрольные вопросы	11
1.4 Порядок выполнения работы	12
1.5 Сводка основных формул	14
Лабораторная работа №2 Колебания пружинного осциллятора с сухим трением	16
2.1 Теоретическая справка	16
2.2 Контрольные вопросы	22
2.3 Порядок выполнения работы	23
2.4 Сводка основных формул	25
Приложение	27
II Экспериментальное изучение механических колебаний	29
Лабораторная работа №3 Обратный маятник	31
3.1 Измерение ускорения свободного падения с помощью физического маятника	31
3.2 Определение ускорения свободного падения при помощи маятника с грузами (Метод Бесселя)	34
3.3 Контрольные вопросы	36
3.4 Порядок выполнения работы	37
Лабораторная работа №4 Исследование колебаний наклонного маятника	39
4.1 Описание экспериментальной установки	39
4.2 Затухание колебаний наклонного маятника при наличии сухого трения	40
4.3 Контрольные вопросы	43
4.4 Порядок выполнения работы	44
Лабораторная работа №5 Изучение эллипсоида инерции твердого тела	46
5.1 Описание лабораторной установки	46
5.2 Теория вращения твердого тела вокруг неподвижной оси	46
5.3 Методика измерений	50
5.4 Контрольные вопросы	51

5.5	Порядок выполнения работы	52
Лабораторная работа №6 Измерение скорости полета пули с помощью баллистического маятника		54
6.1	Описание лабораторной установки	54
6.2	Колебания баллистического маятника	55
6.3	Контрольные вопросы	57
6.4	Порядок выполнения работы	58
Лабораторная работа №7 Исследование законов падения тел в поле силы тяжести на машине Атвуда		60
7.1	Описание лабораторной установки	60
7.2	Движение связанных тел в поле земного тяготения	60
7.3	Контрольные вопросы	62
7.4	Порядок выполнения работы	63

Часть I

Моделирование колебаний

Лабораторная работа № 1

Собственные колебания линейного осциллятора

В данной работе изучаются собственные крутильные колебания торсионного пружинного осциллятора, подобного балансовому механизму механических наручных или карманных часов, после того как он выведен из состояния равновесия начальным воздействием. Строятся графики зависимости от времени угла отклонения и угловой скорости, а также фазовые диаграммы для незатухающих колебаний в консервативной системе и для колебаний, затухающих под действием вязкого трения. Анализируются превращения энергии при колебаниях.

1.1 Теоретические сведения

Сведения о физической системе

Линейный (или гармонический) осциллятор - это система, в которой при смещении из положения равновесия возникает возвращающая сила, пропорциональная смещению. Изменение состояния такой системы со временем описывается линейным дифференциальным уравнением. Механические примеры таких систем - подвешенный на упругой пружине груз, маховик со спиральной пружиной, закручивающейся при его повороте вокруг оси, как у балансира карманных или наручных часов. Колебания такого торсионного пружинного осциллятора и моделируются в дано компьютерной программе. Его условное изображение на экране монитора приведено на рис. 1.1.

Если осциллятор вывести из положения равновесия каким-либо внешним воздействием и затем предоставить самому себе, то возникающие после этого колебания вблизи положения устойчивого равновесия называются *собственными* или *свободными*.

В отсутствие трения, т.е. в *консервативной системе*, собственные колебания должны быть строго *периодическими*, с неизменным размахом (*незатухающие колебания*). При наличии трения, неизбежного в любой реальной системе, происходит *затухание* собственных колебаний, обусловленное диссипацией механической энергии.

Дифференциальное уравнение осциллятора

Дифференциальное уравнение, описывающее изменение механического состояния осциллятора, совершающего собственные колебания, следует из основного закона динамики - второго закона Ньютона. В случае груза на пружине возвращающая сила F , действующая на груз со стороны пружины, пропорциональна смещению x груза из положения равновесия: $F = -kx$. Коэффициент k в этом соотношении называется *жесткостью* пружины. В отсутствие других

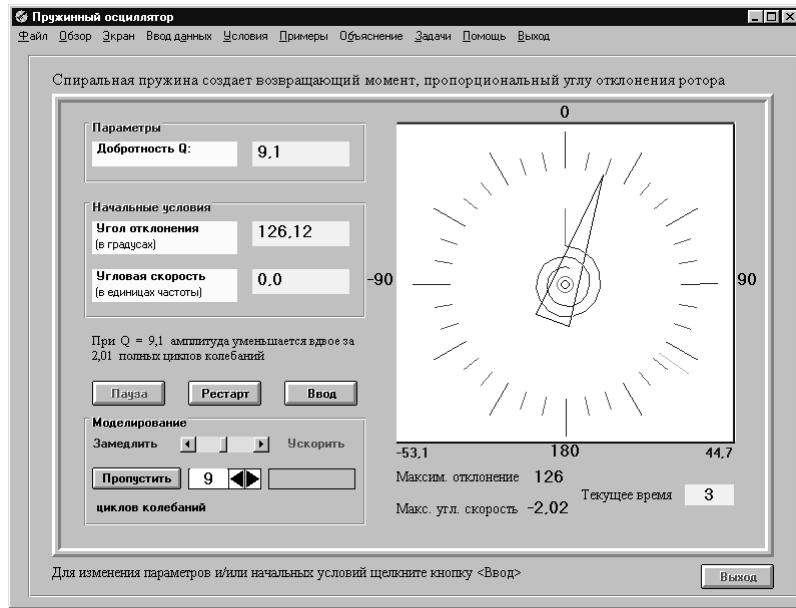


Рис. 1.1: Схематическое изображение осциллятора на экране

сил уравнение второго закона Ньютона дает

$$m\ddot{x} = -kx$$

или, после деления обеих частей уравнения на массу m ,

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0 \quad (1.1)$$

где по определению $\omega_0^2 = k/m$. Общее решение уравнения (1.1) - гармоническое колебание с произвольными амплитудой a и начальной фазой δ :

$$x(t) = a \cos(\omega_0 t + \delta) \quad (1.2)$$

Значения амплитуды a и начальной фазы δ определяются начальными условиями, т.е. способом возбуждения колебаний. Собственная частота ω_0 (круговая или циклическая частота) определяется коэффициентом при x в уравнении(1.1) и зависит только от свойств системы (но не от начальных условий). Период колебаний T обратно пропорционален собственной частоте:

$$T = 2\pi/\omega_0 \quad (1.3)$$

Крутильные колебания торсионного осциллятора, т.е. маховика на спиральной пружине (рис. 1.1), описываются таким же дифференциальным уравнением (1.1), если в качестве координаты рассматривать угол φ отклонения из положения равновесия. В самом деле, возвращающий момент N силы упругости пропорционален углу φ закручивания пружины:

$$N = -D\varphi$$

и уравнение основного закона динамики вращения вокруг фиксированной оси дает

$$J\ddot{\varphi} = -D\varphi, \quad \ddot{\varphi} + \omega_0^2 \varphi = 0 \quad (1.4)$$

где J - момент инерции маховика, $\omega_0^2 = D/J$. Таким образом, собственная частота ω_0 такого пружинного осциллятора равна квадратному корню из отношения модуля кручения спиральной пружины D к моменту инерции J маховика. Независимость частоты и периода собственных колебаний от амплитуды (и от энергии) называют *изохронностью* линейного осциллятора.

Затухание колебаний

При наличии силы трения, пропорциональной скорости (силы вязкого или жидкого трения), в правой части уравнения (1.4) Будет присутствовать тормозящий момент этой силы, пропорциональный угловой скорости $\dot{\varphi}$. Дифференциальное уравнение таких затухающих колебаний принято записывать в виде

$$\ddot{\varphi} + 2\gamma\dot{\varphi} + \omega_0^2\varphi = 0 \quad (1.5)$$

где имеющую размерность частоты (или угловой скорости) величину γ , характеризующую интенсивность вязкого трения, называют *коэффициентом затухания*.

Общее решение уравнения (1.5), описывающее затухающие собственные колебания, имеет вид:

$$\varphi(t) = A_0 \exp(-\gamma t) \cos(\omega_1 t + \delta_0) \quad (1.6)$$

где частота ω_1 , периодического (гармонического) сомножителя дается соотношением

$$\omega_1 = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} \quad (1.7)$$

В случае *слабого затухания*, когда $\gamma \ll \omega_0$, частота ω_1 мало отличается от ω_0 :

$$\omega_1 = \omega_0 \sqrt{1 - (\gamma/\omega_0)^2} \approx \omega_0 - \gamma^2/2\omega_0$$

Постоянные A_0 и δ_0 (1.6) определяются из начальных условий, т.е. зависят от способа возбуждения собственных колебаний осциллятора. График затухающих колебаний показан на рис. 1.2.

Время затухания

Множитель $A_0 \exp(-\gamma t)$, стоящий в (1.6) перед косинусом, в случае не слишком сильного затухания можно рассматривать как медленно убывающую со временем амплитуду колебаний. За время $\tau = 1/\gamma$ амплитуда убывает в $e \approx 2.72$ раза. Величину τ обратную коэффициенту затухания γ , называют *временем затухания* (или временем жизни) колебаний.

Условия слабого затухания $\gamma \ll \omega_0$ означает, что за время колебания τ осциллятор успевает совершить большое количество колебаний: $\tau \gg T$. При описываемом формулой (1.6) экспоненциальном затухании последовательные максимальные отклонения убывают в геометрической прогрессии:

$$\varphi_{n+1}/\varphi_n = \exp(-\gamma T) \approx 1 - \gamma T \quad (1.8)$$

В случае слабого затухания знаменатель этой убывающей прогрессии меньше единицы на величину $\gamma T = T/\tau$.

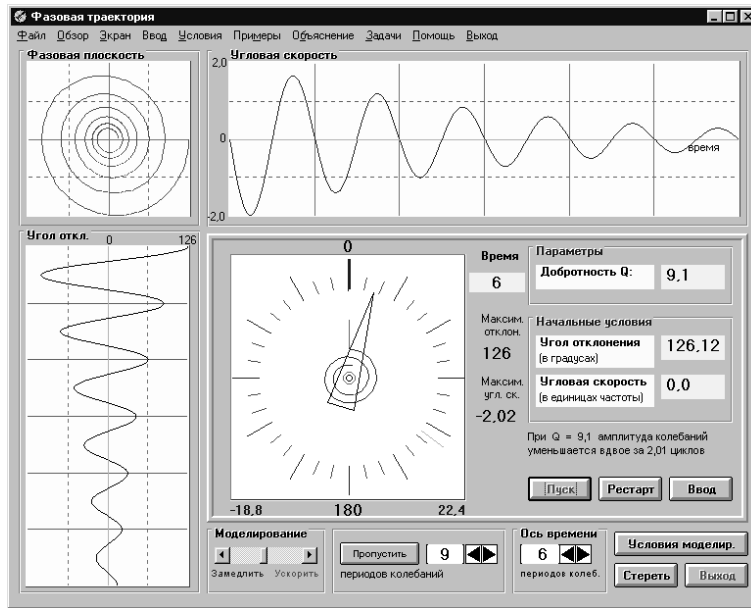


Рис. 1.2: Графики затухающих колебаний и фазовая траектория

Декремент затухания

Для характеристики затухания используют *логарифмический коэффициент затухания*, определяемый как логарифм отношения последовательных максимальных отклонений в одну сторону:

$$d = \ln(\varphi_n / \varphi_{n+1}) = \gamma T = T / \tau \quad (1.9)$$

Обратная логарифмическому декременту величина $1/d = \tau/T$ дает число колебаний за время затухания τ .

Добротность

Другая эквивалентная декременту характеристика затухания - *добротность* Q осциллятора - определяется соотношениями:

$$Q = \pi/d = \pi\tau/T = \omega_0/2\gamma \quad (1.10)$$

Добротность, деленная на π , дает число полных колебаний, на протяжении которых размах колебаний осциллятора уменьшается в $e \approx 2,72$ раза. Число колебаний $N_{1/2}$ на протяжении которых амплитуда убывает вдвое, выражается через добротность следующим соотношением:

$$N_{1/2} = (\ln 2/\pi)Q = 0.22Q = Q/4.53 \quad (1.11)$$

Добротность обычно используют для характеристики осциллятора со слабым затуханием. В случае сильного трения удобнее использовать коэффициент затухания γ .

Апериодическое движение

При *сильном затухании* ($\gamma \geq \omega_0$) возвращение осциллятора к равновесию имеет *апериодический* характер: выведенный из равновесия осциллятор без колебаний, не пересекая среднего

положения, асимптотически приближается к нему. В случае $\gamma = \omega_0$ (так называемое *критическое*, или быстрое затухание) решение дифференциального уравнения (1.4) имеет вид:

$$\varphi(t) = (C_1 t + C_2) \exp(-\gamma t) \quad (1.12)$$

где C_1 и C_2 постоянные, определяемые из начальных условий. Критическому затуханию соответствует значение добротности $Q = 0.5$.

Фазовая траектория

Механическое состояние осциллятора в каждый момент времени определяется двумя величинами: углом отклонения φ (*обобщенная координата*) и угловой скоростью $\dot{\varphi}$ (*обобщенная скорость*). Наглядное представление об изменении механического состояния в процессе колебаний осциллятора дает *фазовая диаграмма*, или траектория на фазовой плоскости, где по оси абсцисс отложена координата, а по оси ординат - скорость (рис. 1.2). При периодических колебаниях осциллятора точка фазовой плоскости, изображающая состояние системы, описывает замкнутую кривую, перемещаясь по часовой стрелке. В отсутствие трения фазовая траектория собственных колебаний линейного осциллятора представляет собой эллипс (или окружность - при соответствующем выборе масштабов). Точки, где фазовая траектория пересекает ось φ , - *точки поворота* - соответствуют максимальным отклонениям осциллятора из положения равновесия. Вследствие изохронности осциллятора точка, изображающая состояние на фазовой плоскости, обходит эллипсы разных размеров, соответствующие разным амплитудам за одно и то же время.

Превращения энергии

В точках поворота скорость и кинетическая энергия осциллятора обращаются в нуль, так что полная энергия совпадает с потенциальной энергией закрученной пружины. Спустя четверть периода колебаний осциллятор проходит через положение равновесия, где потенциальная энергия обращается в нуль, так что в этот момент полная энергия совпадает с кинетической. В течение следующей четверти периода происходит обратное превращение кинетической энергии в потенциальную.

Таким образом, при собственных колебаниях осциллятора колебания двух видов энергии происходят в противофазе друг с другом с частотой $2\omega_0$, т.е. с удвоенной частотой осциллятора. В отсутствие трения полная энергия остается неизменной. Максимальные значения кинетической и потенциальной энергии одинаковы и равны сохраняющемуся при колебаниях запасу полной энергии, сообщенной осциллятору при возбуждении. При этом средние по времени значения кинетической и потенциальной энергии также одинаковы и равны половине полной энергии.

Фазовая траектория и трение

При наличии вязкого трения фазовая траектория собственных колебаний осциллятора скручивается в спираль к фокусу, находящемуся в начале координат фазовой плоскости. Этот фокус соответствует состоянию покоя в положении устойчивого равновесия. Диссипация энергии осциллятора при колебаниях происходит неравномерно: скорость рассеяния энергии $-dE/dt$ определяется мощностью силы трения и потому пропорциональна квадрату угловой скорости осциллятора, т.е. кинетической энергии. Вблизи точек поворота, когда осциллятор

изменяет направление движения и его скорость обращается в нуль, диссипации энергии не происходит. Напротив, вблизи точек положения равновесия, когда скорость и кинетическая энергия максимальны, энергия осциллятора убывает наиболее быстро. Эти особенности убывания энергии при собственных колебаниях можно отчетливо видеть на графике зависимости полной энергии осциллятора от времени. Распространенное утверждение об экспоненциальном затухании энергии осциллятора в действительности справедливо только для среднего за период значения энергии осциллятора:

$$\langle E(t) \rangle = E_0 \exp(-2\gamma t) = E_0 \exp(-t/\tau_3) \quad (1.13)$$

где τ_3 - время затухания энергии осциллятора, вдвое меньшее затухания амплитуды колебаний: $\tau_3 = \tau/2$. Энергетические превращения при затухающих под действием вязкого трения колебаниях показаны на рис. 1.3.

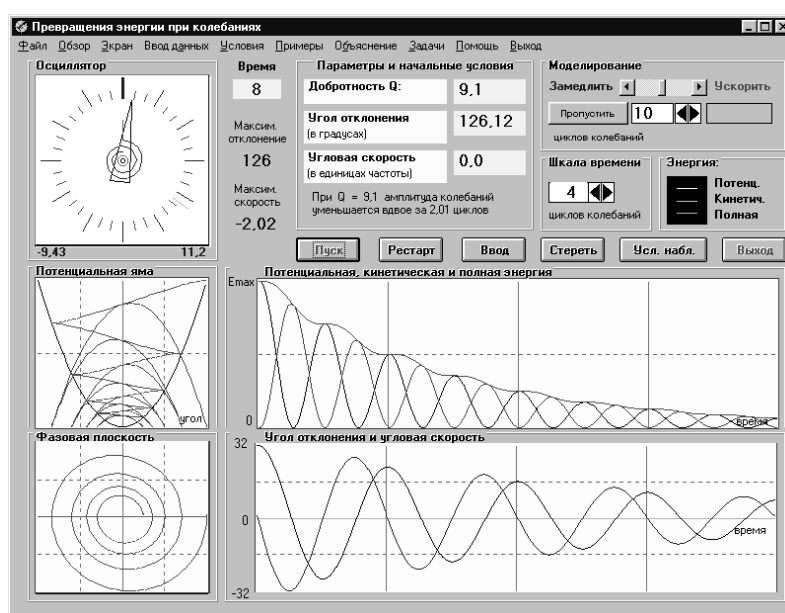


Рис. 1.3: Превращение энергии при затухании колебаний

Более подробный анализ рассмотренных здесь вопросов можно найти в книге Е.И.Бутикова, А.С.Кондратьева и А.А.Быкова "Физика для поступающих в вузы" (М., Наука, 1999).

1.2 О численном моделировании изучаемой физической системы

Компьютерная программа, моделирующая поведение осциллятора, выполняет численное интегрирование дифференциального уравнения (1.5). Несмотря на то, что это уравнение линейное и имеет аналитическое решение (1.6), при компьютерном моделировании это решение не используется (за исключением лишь определения максимальных значений угла отклонения и скорости, необходимых для выбора оптимальных масштабов при построении графиков).

Совпадение наблюдаемых результатов численного интегрирования с аналитическими предсказаниями может служить для подтверждения качества используемого алгоритма (метод

Рунге - Кутта четвертого порядка). Такая проверка делает убедительными результаты численного моделирования нелинейных систем в последующих разделах данного пакета учебных программ. При численном моделировании линейного осциллятора выбирается естественная для него единица времени - период собственных колебаний в отсутствие трения $T = 2\pi/\omega_0$. Поэтому осциллятор характеризуется единственным физическим параметром γ/ω_0 - безразмерным отношением коэффициента затухания к собственной частоте, или эквивалентной обратно пропорциональной коэффициенту затухания характеристикой - добротностью $Q = \omega_0/2\gamma$.

Угол φ отклонения от равновесного положения измеряется в радианах (но шкала осциллятора и графики $\varphi(t)$ для удобства проградуированы в угловых градусах), а угловая скорость $\dot{\varphi}$ - в единицах собственной круговой частоты $\omega_0 = 2\pi/T$. При задании начальных условий угол нужно задавать в градусах, а угловую скорость - в единицах ω_0 .

1.3 Контрольные вопросы

1. Приведите примеры физических систем, к которым применима модель линейного осциллятора. Какими физическими параметрами характеризуется торсионный пружинный осциллятор, колебания которого моделируются в лабораторной работе?
2. В каком случае состояние равновесия физической системы называется устойчивым? При каких условиях колебания системы называют собственными? Как можно возбудить собственные колебания?
3. Какой должна быть зависимость возвращающей силы от величины отклонения из равновесия, чтобы в отсутствие трения собственные колебания системы были гармоническими? Как потенциальная энергия в такой системе зависит от величины отклонения из равновесия?
4. Напишите дифференциальное уравнение гармонического осциллятора в отсутствие трения. Каково общее решение этого уравнения? Как найти значение произвольных постоянных в общем решении, если заданы начальные условия?
5. Как собственная частота линейного осциллятора выражается через физические параметры системы? Зависит ли период, частота и амплитуда собственных колебаний от способа возбуждения колебаний? В чем заключается свойство изохронности линейного осциллятора?
6. Что такое фазовая траектория? Какая кривая соответствует фазовой траектории собственных колебаний линейного осциллятора?
7. В каком направлении движется вдоль фазовой траектории изображающая точка? Почему фазовая траектория собственных колебаний консервативного осциллятора представляет собой замкнутую кривую? В течение какого промежутка времени изображающая точка обходит фазовую траекторию? Может ли одна и та же замкнутая фазовая траектория соответствовать колебаниям консервативного осциллятора, возбуждаемым при разных начальных условиях?
8. Какие превращения энергии происходят на протяжении одного цикла колебаний? С каким периодом и в каких пределах происходят колебания кинетической и потенциальной энергий консервативного осциллятора? Как энергия колебаний связана с амплитудой?

9. Как зависит от времени амплитуда собственных колебаний, затухающих под действием слабого вязкого трения? С математической точки зрения, какой вид последовательности образуют максимальные отклонения при затухающих колебаниях?
10. Какая величина называется логарифмическим декрементом затухания? Как добротность осциллятора связана с логарифмическим декрементом и постоянной затухания?
11. Опишите фазовую траекторию затухающих колебаний. По какому закону убывают размеры ее витков? Изменяется ли время обхода одного витка в процессе колебаний? От каких параметров осциллятора зависит это время?
12. Как убывает со временем энергия осциллятора при затухающих колебаниях? В какие моменты времени скорость рассеяния энергии наибольшая, а в какие - наименьшая?
13. В каком случае затухание колебаний называется критическим? Как ведет себя после возбуждения осциллятор с критическим затуханием? Какими параметрами определяется время прихода возбужденного осциллятора в состояние покоя? Может ли осциллятор с критическим (и сверхкритическим) затуханием пересечь положение равновесия после начального возбуждения?

1.4 Порядок выполнения работы

Приступая к работе, ознакомьтесь с Приложением (Как работать с пакетом программ "Физика колебаний").

Колебания консервативного осциллятора.

1. Выберите раздел "Графики колебаний" и откройте окно ввода параметров. Для этого выберите пункт "Ввод данных" в строке меню или нажмите кнопку "Ввод" и снимите "галочку" в боксе "Вязкое трение". Введите некоторое начальное отклонение (например, 90° или 180° градусов) и нулевую начальную скорость. Закройте окно ввода, нажав кнопку "ОК". Начните моделирование, нажав кнопку "Пуск". Нажмите кнопку "Условия моделирования" и в открывшемся окне регулятором строки "Моделирование" установите временной масштаб, удобный для наблюдения. Обратите внимание на вид графиков угла отклонения и угловой скорости от времени при выбранных начальных условиях. Какой математической функции соответствует каждый из графиков? Несколько раз приостановите моделирование кнопкой "Пауза" в различных фазах колебаний и сопоставьте наблюдаемое отклонение маятника с соответствующей точкой графика угла отклонения. Зарисуйте графики, обращая внимание на соотношение фаз колебаний угла отклонения и угловой скорости.
2. Допустим, что нужно получить колебания с угловой амплитудой 90° . Каким должно быть начальное отклонение $\varphi(0) = \varphi_0$ при нулевой начальной скорости маятника $\dot{\varphi}(0) = 0$? Какую начальную угловую скорость $\dot{\varphi}(0) = \Omega$ нужно сообщить маятнику в положении равновесия, чтобы получить колебания той же амплитуды 90° ? Начальную угловую скорость Ω при вводе нужно выражать в единицах собственной частоты ω_0 . Проверьте Ваш расчет с помощью моделирующего эксперимента на компьютере.

3. Какую начальную скорость $\dot{\varphi}(0) = \Omega$ нужно сообщить маятнику, отклоненному на угол 45° из положения равновесия, чтобы получить колебания той же амплитуды 90° ?
4. На какой максимальный угол $\varphi_{\text{макс}}$ отклонится осциллятор от положения равновесия, если задать начальную скорость $\dot{\varphi}(0)$ равной, например, $2\omega_0$? Найдите это максимальное отклонение расчетом, основанным на законе сохранения энергии, и проверьте полученный результат с помощью вычислительного эксперимента на компьютере. Подчеркнем, что моделирующая программа выполняет численное интегрирование дифференциального уравнения движения, "ничего не зная" о законе сохранения энергии.
5. Какую начальную угловую скорость Ω (в единицах ω_0) нужно сообщить осциллятору, чтобы он отклонился из положения равновесия на угол 180° градусов? Проверьте результат вычислительным экспериментом.
6. Перейдите в раздел "Фазовая траектория". Сопоставьте движение изображающей точки по фазовой траектории консервативного линейного осциллятора с графиками зависимости угла отклонения и угловой скорости от времени. Что изменяется при переходе от одних начальных условий к другим? Зависит ли от начальных условий направление движения изображающей точки по фазовой траектории? С какой угловой скоростью поворачивается на фазовой плоскости радиус вектор изображающей точки?
7. Перейдите в раздел "Превращения энергии". Сопоставьте фазовую траекторию с графиком потенциальной энергии осциллятора. Обратите внимание на положение точек поворота в параболической яме и на фазовой траектории. Почему в этих точках полная энергия осциллятора совпадает с потенциальной энергией пружины? Чему равно значение потенциальной и кинетической энергии в точках поворота и в положении равновесия при колебаниях, возбуждаемых начальными условиями $\varphi(0) = \varphi_0$, $\dot{\varphi}(0) = \Omega$? Чему равны значения угла отклонения $\varphi_{\text{макс}}$ в точках поворота?
8. Сравните графики зависимости от времени кинетической и потенциальной энергии. Что можно сказать о их максимальных и средних значениях? Сопоставьте графики изменения энергии с расположенными ниже графиками угла отклонения и угловой скорости. С какой частотой и в каких пределах происходят колебания каждого из двух видов энергий?
9. Рассмотрите колебания при различных начальных условиях, но при одинаковых значениях полной энергии осциллятора. Чем отличаются графики и фазовые траектории таких колебаний?

Затухающие колебания осциллятора.

В окне ввода параметров поставьте "галочку" в боксе "Вязкое трение" и введите некоторое значение добротности (5 – 20). Перейдите в раздел "Физическая система". Выполняя моделирование колебаний, занесите в таблицу серию значений последовательных максимальных отклонений маятника в одну сторону. Убедитесь в том, что эта последовательность представляет собой убывающую геометрическую прогрессию. Сравните результат Ваших измерений с теоретическим значением отношения амплитуд, рассчитанным для введенной Вами добротности (см. формулу 1.8).

1. Рассчитайте значение добротности, при котором амплитуда убывает вдвое за два полных колебания (воспользуйтесь формулой 1.11). Введите это значение и проверьте в вычислительном эксперименте справедливость сформулированной выше закономерности убывания амплитуды. Обратите внимание на то, что эта закономерность не зависит от начальных условий.
2. Фазовая траектория затухающих собственных колебаний представляет собой спираль, скручивающуюся к началу координат фазовой плоскости, которому соответствует состояние неподвижного осциллятора в положении равновесия. Почему витки этой спирали постепенно сгущаются? Как изменяется радиус витков при приближении к фокусу? Изменяется ли время прохождения изображающей точки по одному витку фазовой траектории по мере уменьшения размера витков?
3. Сравните энергетические превращения при собственных колебаниях осциллятора в отсутствие трения и при вязком трении. Проверьте в вычислительном эксперименте, что при значении добротности $Q = 9.1$ амплитуда убывает вдвое за два полных колебания, а полная энергия - за одно колебание. Почему диссипация энергии на протяжении периода происходит неравномерно? Каким моментам времени соответствует наибольшая и каким - наименьшая скорость диссипации.

Апериодическое движение осциллятора.

При сильном затухании возвращение осциллятора в положение равновесия происходит аperiодически, без колебаний.

1. Выберите значение добротности $Q = 0.5$, соответствующее критическому затуханию ($\gamma = \omega_0$). Каким будет максимальное отклонение осциллятора, если ему в положении равновесия сообщить угловую скорость $6\omega_0$? Найдите это отклонение расчетом, воспользовавшись формулой(1.12), и затем проверьте результат расчета с помощью компьютерного эксперимента. Обратите внимание на то, что осциллятор приближается к положению равновесия с одной стороны, т.е. не пересекает нулевого деления.
2. Убедитесь, что значение $Q = 0.5$ ($\gamma = \omega_0$) действительно критическое, т.е. что при несколько больших значениях Q стрелка осциллятора при приближении к равновесию совершает сильно затухающие колебания, пересекая нулевое деление шкалы.
3. Проверьте, что при $Q < 0.5$ аperiодическое приближение осциллятора к равновесию происходит медленнее, чем при критическом затухании. Чем отличаются фазовые траектории аperiодических режимов от фазовых траекторий затухающих колебаний?

1.5 Сводка основных формул

Дифференциальное уравнение колебаний:

$$\ddot{\varphi} + 2\gamma\dot{\varphi} + \omega_0^2\varphi = 0$$

Собственная частота и период колебаний:

$$\omega_0 = \sqrt{D/J}, \quad T = 2\pi/\omega_0$$

Уравнение затухающих колебаний:

$$\varphi(t) = A_0 \exp(-\gamma t) \cos(\omega_1 t + \delta_0)$$

Время затухания (время жизни) колебаний:

$$\tau = 1/\gamma$$

Логарифмический декремент затухания:

$$d = \ln(\varphi_n/\varphi_{n+1}) = \gamma T = T/\tau = 2\pi\gamma/\omega_0$$

Добротность осциллятора:

$$Q = \pi/d = \pi\tau/T = \omega_0/2\gamma$$

Число колебаний, на протяжении которых амплитуда убывает вдвое:

$$N_{1/2} = (\ln 2/\pi)Q = 0.22q = Q/4.53$$

Уравнение аперидического движения (при $\gamma \approx \omega_0$):

$$\varphi(t) = (C_1 t + C_2) \exp(-\gamma t)$$

Лабораторная работа № 2

Колебания пружинного осциллятора с сухим трением

Изучается затухание собственных колебаний торсионного пружинного осциллятора, вызванное действием сухого (кулоновского) трения. Используется идеализированная модель сухого трения, описываемая z -характеристикой (сила трения скольжения не зависит от скорости и равна максимальному значению силы трения покоя). Строятся графики зависимости от времени угла отклонения и угловой скорости, а также фазовые траектории. Анализируются превращения энергии при колебаниях.

2.1 Теоретическая справка

Сведения о физической системе

Торсионный осциллятор представляет собой сбалансированный маховик (центр масс находится на оси вращения), снабженный спиральной пружиной с неподвижно закрепленным вторым концом. При повороте маховика пружина закручивается и создает восстанавливающий момент силы, пропорциональный углу отклонения маховика из положения равновесия. Поведение такой системы при наличии вязкого трения, пропорционального скорости, рассмотрено в работе "Собственные колебания линейного осциллятора", которую рекомендуется изучить перед выполнением данной работы.

В случае *вязкого* трения затухание собственных колебаний пружинного осциллятора описывается линейным дифференциальным уравнением. Амплитуда таких колебаний убывает со временем экспоненциально, так что последовательные максимальные отклонения из положения равновесия образуют убывающую геометрическую прогрессию: каждое последовательное отклонение составляет определенную долю от предыдущего. Формально такие колебания продолжаются бесконечно долго. Условно длительность процесса экспоненциального затухания характеризуют временем жизни τ , в течение которого амплитуда уменьшается в $e = 2.72$ раза.

Экспоненциальный характер затухания колебаний при вязком трении связан с тем, что вызывающая это затухание сила трения пропорциональна скорости. При другой зависимости силы трения от скорости закон затухания колебаний будет иным.

Практически очень важен случай *сухого* (кулоновского) трения, когда от скорости зависит только направление силы трения, а ее величина практически постоянна. Идеализированная характеристика сухого трения (так называемая z -характеристика) показана на рис. 2.1. Здесь предполагается наличие разрыва непрерывности зависимости силы трения от скорости при $v = 0$: в аппроксимации реальной физической зависимости вводится конечный скачок силы трения при перемене направления движения. В состоянии покоя ($v = 0$) сила трения покоя может иметь любое значение в пределах от $-F_{\text{макс}}$ до $F_{\text{макс}}$ в зависимости от других приложенных сил.

Значение силы трения скольжения в такой модели принимается равным максимальной силе трения покоя.

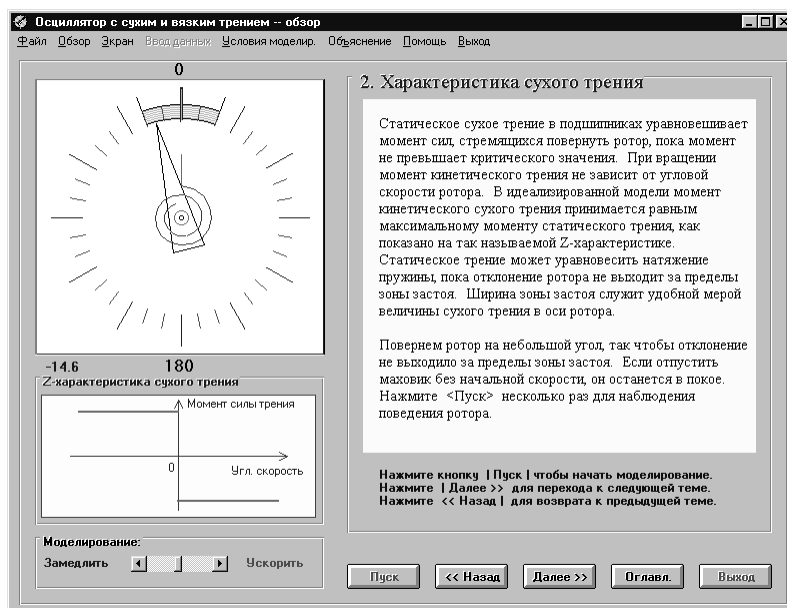


Рис. 2.1: Пружинный осциллятор с сухим трением (z -характеристика)

В реальных системах сухое трение характеризуется более сложными закономерностями. Обычно максимальная сила трения покоя несколько больше силы трения скольжения. При движении сила трения, с увеличением скорости несколько уменьшается, а затем, пройдя через минимум при некотором значении скорости, начинает постепенно возрастать. Тем не менее, идеализированная z -характеристика сухого трения позволяет понять существенные особенности процессов в реальных механических системах.

Для колебательных систем с сухим трением характерно прежде всего наличие *зоны застоя*, или мертвой зоны, простирающейся на некоторое расстояние по обе стороны от положения равновесия, в котором пружина не деформирована. Зона застоя тем больше, чем больше трение в системе. Ее границы определяются максимальным значением силы трения покоя. Маховик торсионного осциллятора может быть неподвижен в любой точке зоны застоя, ибо здесь сила трения покоя в состоянии уравновесить упругую возвращающую силу деформированной пружины.

Подобное явление хорошо известно в механических системах, в частности, с ним встречаются в стрелочных измерительных приборах, где колебательным элементом служит подвижная система (например катушка гальванометра), находящаяся под воздействием возвращающей пружины и вращающаяся на оси в подшипниках без смазки.

Важная отличительная черта затуханий под действием сухого трения состоит в полном прекращении колебаний после конечного числа циклов. Прекращение движения происходит тогда, когда скорость, периодически изменяющая свой знак при колебаниях, в очередной раз обращается в нуль в пределах зоны застоя. Тот факт, что при каких-то начальных условиях подвижная система измерительного прибора, будучи предоставлена самой себе, после успокоения колебаний при измерениях не обязательно приходит в положение равновесия, объясняет связанные с сухим трением неизбежные погрешности стрелочных приборов. Остановка стрелки

прибора происходит не точно на том делении шкалы, которое соответствует измеряемой величине, а в какой-либо точке зоны застоя вблизи этого деления.

Дифференциальное уравнение осциллятора с сухим трением

Момент силы сухого трения $N_{\text{тр}}$, направленный противоположно угловой скорости $\dot{\varphi}$, нужно включить, наряду с восстанавливающим моментом $-D\varphi$ упругой силы деформированной пружины, в правую часть основного уравнения динамики вращательного движения маховика вокруг фиксированной оси:

$$J\ddot{\varphi} = -D\varphi + N_{\text{тр}}(\dot{\varphi}) \quad (2.1)$$

Здесь $N(\dot{\varphi}) = -D\varphi$ момент упругой возвращающей силы спиральной пружины, пропорциональный углу φ отклонения маховика от положения равновесия, J - момент инерции маховика. В соответствии с принятой идеализированной z -характеристикой сухого трения:

$$N_{\text{тр}}(\dot{\varphi}) = \begin{cases} -N_{\text{макс}} & \text{при } \dot{\varphi} > 0 \\ N_{\text{макс}} & \text{при } \dot{\varphi} < 0 \end{cases} \quad (2.2)$$

или $N_{\text{тр}}(\dot{\varphi}) = -N_{\text{макс}} \text{sign}(\dot{\varphi})$. Здесь $N_{\text{макс}}$ - максимальный момент силы трения покоя. Значение $N_{\text{макс}}$ удобно выразить через максимальный угол $\varphi_{\text{м}}$, на который может быть отклонен маховик в состоянии покоя:

$$N_{\text{макс}} = D\varphi_{\text{м}} \quad (2.3)$$

Угол $\varphi_{\text{м}}$ соответствует правой границе зоны застоя, угол $-\varphi_{\text{м}}$ соответствует ее левой границе.

Таким образом, вместо дифференциального уравнения (2.1), которое в общем случае нелинейно, так как при перемене знака $\dot{\varphi}$ момент силы трения $N_{\text{тр}}(\dot{\varphi})$ меняется скачком, можно записать два линейных уравнения:

$$J\ddot{\varphi} = -D(\varphi + \varphi_{\text{м}}) \quad \text{при } \dot{\varphi} > 0 \quad (2.4)$$

$$J\ddot{\varphi} = -D(\varphi - \varphi_{\text{м}}) \quad \text{при } \dot{\varphi} < 0 \quad (2.5)$$

причем одно из них сменяет другое в моменты времени, когда изменяется знак $\dot{\varphi}$. В поочередном переходе от одного из дифференциальных уравнений (2.4) - (2.5) и заключается *нелинейность* рассматриваемой задачи.

Решение уравнений (2.4) - (2.5), соответствующее каким-либо определенным начальным условиям, можно найти методом *позитивного интегрирования* линейных уравнений, "сшивая" получаемые решения в моменты перехода от одного уравнения к другому. Если наряду с сухим трением на осциллятор действует еще и сила вязкого трения, то в уравнение движения следует добавить еще один член, пропорциональный угловой скорости $\dot{\varphi}$:

$$\ddot{\varphi} = -\omega_0^2(\varphi + \varphi_{\text{м}}) - 2\gamma\dot{\varphi} \quad \text{при } \dot{\varphi} > 0 \quad (2.6)$$

$$\ddot{\varphi} = -\omega_0^2(\varphi - \varphi_{\text{м}}) - 2\gamma\dot{\varphi} \quad \text{при } \dot{\varphi} < 0 \quad (2.7)$$

Здесь $\omega_0^2 = D/J$ - квадрат собственной частоты осциллятора в отсутствие трения, γ - коэффициент затухания, характеризующий интенсивность вязкого трения. Вместо γ для характеристики интенсивности вязкого трения удобно использовать безразмерную величину - добротность Q , связанную с γ соотношением $Q = \omega_0/2\gamma$.

Графики колебаний

Чтобы выявить основные особенности поведения осциллятора, обусловленные сухим трением, будем пока считать, что вязкое трение полностью отсутствует ($\gamma = 0$).

Пусть, например, в начальный момент времени маховик осциллятора отклонен вправо (по часовой стрелке) из положения равновесия, так что $\varphi(0) > 0$. Если это отклонение выходит за пределы зоны застоя, т.е. $\varphi(0) > \varphi_M$, то отпущенный без толчка маховик начнет движение влево ($\dot{\varphi} < 0$), и его движение будет описываться уравнением (2.5). Решением уравнения (2.5) при таком начальном условии будет гармоническое колебание с частотой ω_0 и амплитудой $\varphi(0)$, происходящее около среднего положения φ_M , совпадающего с правой границей зоны застоя. Смещение среднего положения вправо вызвано действием на осциллятор постоянной силы трения скольжения, действующей вправо, пока маховик движется влево. Описанному движению соответствует первая половина периода синусоиды на рис. 2.2. Когда маховик

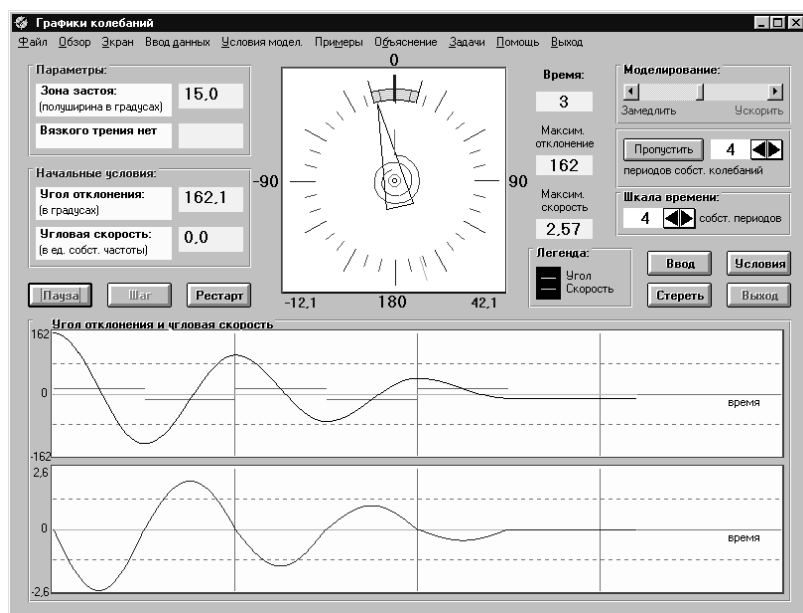


Рис. 2.2: Графики затухающих колебаний при сухом трении

достигнет крайнего левого положения, определяемого углом $\varphi(0) - 2\varphi_M$, его скорость обратится в нуль, и затем он начнет двигаться вправо, так что его скорость $\dot{\varphi}$ будет положительной, и для описания его движения нужно перейти к уравнению (2.4). В качестве начальных условий нужно взять те значения φ и $\dot{\varphi}$, которые были в конце движения, описываемого уравнением (2.5). Поэтому дальнейшее движение будет представлять собой отрезок гармонического колебания, происходящего относительно среднего положения $-\varphi_M$, смещенного на угол φ_M влево и совпадающего с левой границей зоны застоя. Это смещение вызвано силой трения скольжения, изменившей свое направление при перемене направления движения.

Таким образом, маховик осциллятора совершает синусоидальные колебания относительно сменяющихся средних положений φ_M и $-\varphi_M$. В результате такого чередования таких кусков синусоид со смещенными средними положениями получается кривая, описывающая затухающее движение (рис. 2.2). Легко видеть, что за каждый цикл колебаний максимальное отклонение уменьшается на одну и ту же величину - удвоенную ширину зоны застоя (на $4\varphi_M$). Это значит, что при сухом трении последовательные максимальные отклонения убывают в арифметической

прогрессии (линейно) в противоположность продолжающемуся бесконечно долго убыванию в геометрической прогрессии при вязком трении.

Очевидно, что в случае сухого трения через некоторое конечное число циклов непременно наступит момент, когда очередное максимальное отклонение окажется в пределах зоны застоя $-\varphi_M < \varphi < \varphi_M$ и движение на этом полностью прекратится. Длительность одного цикла этих затухающих колебаний совпадает с периодом $T = 2\pi/\omega_0$ собственных колебаний осциллятора в отсутствие трения.

Фазовая траектория

Наглядное представление об общем характере колебаний при сухом трении дает фазовая диаграмма (рис. 2.3). Начальное состояние отклоненного вправо неподвижного осциллятора изображается точкой на оси φ . Движению влево соответствует лежащая ниже оси абсцисс часть фазовой траектории. Она представляет собой половину эллипса (или окружности при должном выборе масштабов) с центром в точке φ_M на оси φ , которая соответствует правой границе зоны застоя. Обратное движение осциллятора вправо изображается лежащей выше оси φ половиной эллипса с центром в точке $-\varphi_M$. Вся фазовая траектория состоит из таких половинок эллипсов с чередующимися центрами. Она обрывается в точке на оси абсцисс, в которой скорость $\dot{\varphi}$ обращается в нуль, в пределах между точками $-\varphi_M$ и φ_M . В отличие от

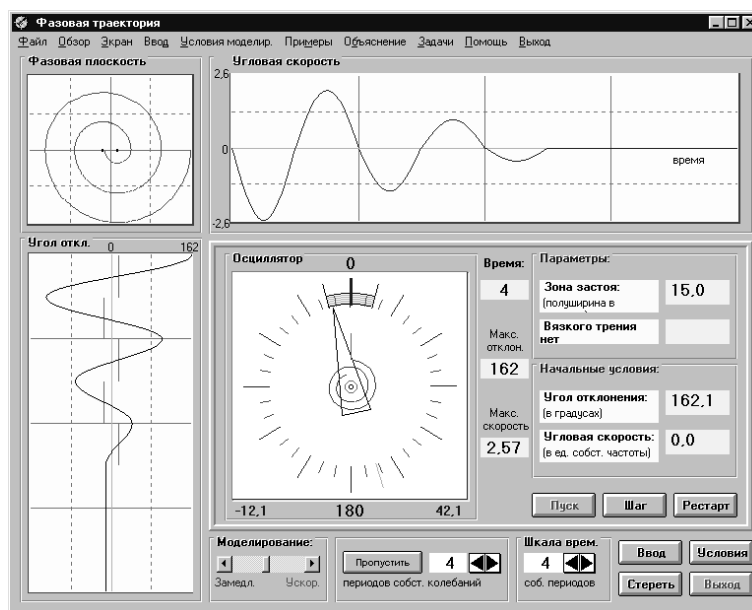


Рис. 2.3: Фазовая диаграмма

фазовой траектории затухающих колебаний линейного осциллятора с вязким трением, витки которой постепенно сгущаются, совершая бесконечное число оборотов по мере приближения к началу координат фазовой плоскости, при сухом трении витки фазовой спирали эквидистантны, и она обрывается, уперевшись в отрезок оси φ между точками $-\varphi_M$ и φ_M . Если дополнительно к сухому трению в системе присутствует также и вязкое трение, пропорциональное скорости, витки фазовой траектории уже не будут эквидистантными, но тем не менее их сгущение не продолжается бесконечно долго: фазовая траектория и в этом случае оборвется через конечное число оборотов, "уткнувшись" в область застоя на оси φ .

Превращения энергии

Энергетические превращения при затухании колебаний осциллятора под действием сухого трения также отличаются рядом характерных особенностей. Прежде всего можно отметить линейный характер убывания полной энергии в зависимости от угла поворота φ (разумеется, лишь на участках между точками поворота, т.е. в пределах изменения угла φ , соответствующих движению маховика в одну сторону). Линейная зависимость полной энергии от φ объясняется тем, что тормозящий момент силы сухого трения скольжения не зависит от угловой скорости $\dot{\varphi}$. Поэтому совершаемая силой трения отрицательная работа, определяющая убыль полной механической энергии осциллятора, пропорциональна углу поворота φ . Но зависимость полной энергии от времени t , конечно, не будет линейной, т.к. поворот маховика происходит неравномерно. Наиболее быстрая диссипация энергии происходит в те моменты, когда скорость $\dot{\varphi}$ максимальна по модулю. Вблизи точек поворота, где скорость минимальна, диссипация замедляется. Если рассматривать усредненное за цикл колебаний значение полной энергии, то

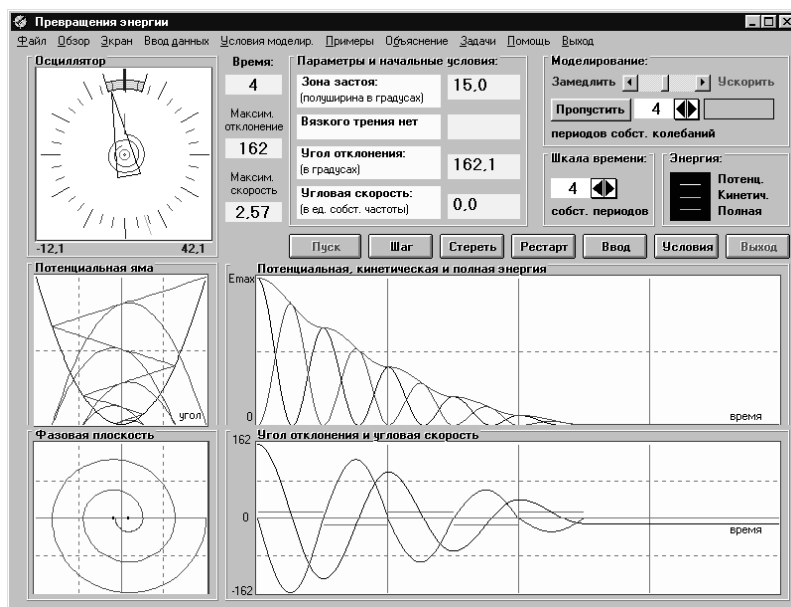


Рис. 2.4: Превращение энергии при затухающих колебаниях

ее уменьшение со временем на протяжении большого числа колебаний происходит квадратично - пропорционально $(t - t_K)^2$, где t_K - момент времени, соответствующий прекращению колебаний. Такой закон убывания полной энергии (справедливый, разумеется, лишь при $t < t_K$) связан с линейным убыванием амплитуды колебаний, затухающих под действием сухого трения.

О роли вязкого трения

В реальных системах наряду с сухим трением в большей или меньшей степени всегда присутствует еще и вязкое трение, пропорциональное скорости. Характер колебаний и в это случае можно исследовать, основываясь на поэтапном интегрировании уравнений движения. Наиболее наглядное представление о процессе затухания собственных колебаний в целом дает фазовая траектория. В отличие от рассмотренного выше случая затухания под действием только сухого трения, фазовая траектория теперь будет образована не половинками идеальных

эллипсов (или окружностей) с чередующимися центрами, а половинками витков скручивающихся спиралей, характерных для линейного затухающего осциллятора. Каждая половина такого витка будет поочередно соответствовать спирали, скручивающейся то к правой, то к левой границе зоны застоя.

Для выяснения относительной роли вязкого и сухого трения сопоставим уменьшение амплитуды за один цикл под действием каждой из этих причин. Благодаря сухому трению это уменьшение, как мы видели, составляет удвоенную ширину зоны застоя $4\varphi_M$. Отметим, эта величина не зависит от амплитуды. Вязкое трение, напротив, приводит к уменьшению размаха колебаний за цикл, пропорциональный амплитуде. В самом деле, при $\gamma T \ll 1$, т.е. при не слишком малой добротности Q , выражение для уменьшения амплитуды за время T , вызванного вязким трением, можно разложить в ряд:

$$a(1 - e^{-\gamma T}) \approx a\gamma T = a\gamma(2\pi/\omega_0) = \pi a/Q$$

Приравняв эту величину удвоенной ширине зоны застоя $4\varphi_M$, найдем значение амплитуды $a_{гр}$, разграничивающее случаи преобладания роли каждой из причин затухания колебаний:

$$a_{гр} = 4\varphi_M/(\gamma T) = (4/\pi)\varphi_M Q \approx \varphi_M Q \quad (2.8)$$

При достаточно сильном начальном возбуждении осциллятора амплитуда может превосходить это значение. Тогда на первом этапе затухание колебаний будет определяться вязким трением. На фазовой траектории это означает, что уменьшение ширины очередной половины её витка из-за вязкого трения больше расстояния между центрами соседних полувитков (т.е. больше расстояния между границами зоны застоя). Ясно, что при этом скручивание спирали благодаря вязкому трению существеннее, чем чередование центров полувитков из-за сухого трения.

Когда амплитуда a уменьшится настолько, что будет выполняться неравенство $a < a_{гр} = \varphi_M Q$, характер дальнейшего затухания будет определяться преимущественно сухим трением, выражающимся на фазовой плоскости в перескоках центров витков между точками φ_M и $-\varphi_M$, пока фазовая траектория не оборвется, уперевшись в отрезок оси абсцисс между этими точками.

При добротности Q меньше критического значения $0,5$, стрелка выведенного из равновесия осциллятора аperiodически, без колебаний, приближается к делению шкалы, соответствующей ближайшей границе зоны застоя. Приведенный выше анализ поведения осциллятора с сухим трением основан на идее поэтапного аналитического интегрирования дифференциальных уравнений движения, осциллятора между точками поворота, и "сшивания" решений, соответствующих соседним промежуткам времени. В компьютерном моделировании используются численные методы интегрирования уравнений (метод Рунге-Кутты четвертого порядка). Для ответа на сформулированные в дальнейших заданиях вопросы нужно опираться на аналитический метод, а затем обратиться к вычислительному эксперименту и сравнить полученные результаты с тем, что дает метод численного интегрирования.

2.2 Контрольные вопросы

1. Сформулируйте основные закономерности сухого трения. Приведите примеры физических систем, в которых сухое трение играет важную роль.
2. Опишите физическую систему (торсионный пружинный осциллятор с сухим и вязким трением), которая моделируется в лабораторной работе. Какие параметры определяют математическую модель осциллятора? Что такое z -характеристика?

3. Какие параметры используются в модели осциллятора для характеристики интенсивности сухого трения и вязкого трения? Что такое зона застоя или мертвая зона?
4. Каким дифференциальным уравнением описывается движение пружинного осциллятора с сухим и вязким трением? Почему рассматриваемую модель нельзя отнести к линейным физическим системам?
5. Объясните идею метода поэтапного интегрирования дифференциального уравнения пружинного осциллятора с сухим трением.
6. Каким будет график угла отклонения от времени при колебаниях осциллятора с сухим трением (в отсутствие вязкого трения) на интервале между соседними моментами поворота (моментами изменения направления движения)? Как соединяются эти графики в моменты поворота?
7. Сравните характер убывающих последовательностей максимальных отклонений при затухании колебаний под действием вязкого и сухого трений. Почему колебания осциллятора с сухим трением полностью прекращаются после конечного числа циклов? На каком максимальном угловом расстоянии от положения равновесия может остановиться ротор при прекращении колебаний?
8. Как влияет сухое трение на (условный) период затухающих колебаний? Сравните с влиянием вязкого трения на период колебаний осциллятора.
9. Как выглядит фазовая траектория колебаний, затухающих под действием сухого трения? Сравните ее с фазовой траекторией колебаний, затухающих под действием вязкого трения.
10. Объясните, почему график зависимости полной энергии от углового положения ротора для осциллятора с сухим трением состоит из прямолинейных отрезков, соединяющих берега параболической потенциальной ямы осциллятора.
11. Почему при полном прекращении колебаний осциллятора с сухим трением его полная энергия, вообще говоря, не обращается в нуль?
12. Если осциллятор одновременно подвержен действию сухого и вязкого трения, каким критерием определяется вид трения, играющего доминирующую роль в затухании колебаний?

2.3 Порядок выполнения работы

Приступая к работе, ознакомьтесь с Приложением (Как работать с пакетом программ "Физика колебаний").

Колебания под действием сухого трения

Интенсивность сухого трения в системе задается указанием размера зоны застоя, точнее, угла φ_M , которым ограничиваются ее пределы по обе стороны равновесия $\varphi = 0$, соответствующего недеформированной пружине. Полный размер зоны застоя составляет $2\varphi_M$. Значение угла φ_M нужно вводить в градусах.

1. Введите значение $\varphi_M = 0$, что соответствует отсутствию сухого трения. Убедитесь, что система демонстрирует знакомое вам поведение линейного осциллятора: незатухающие синусоидальные колебания в отсутствие вязкого трения и экспоненциально затухающие колебания при действии только вязкого трения, интенсивность которого задается приводе добротности Q .
2. Возьмите для наглядности сравнительно большое значение угла φ_M , определяющего границы зоны застоя ($15 - 20$ угловых градусов), и полное отсутствие вязкого трения. Такие условия далеки от ситуации, характерной для стрелочных измерительных приборов, где зону застоя стремятся сделать как можно меньше, а вязкое трение вводят намеренно с помощью демпфирующих устройств и выбирают его интенсивность близкой к критическому значению с целью получить наиболее быстрое успокоение колебаний подвижной системы прибора при измерениях. Но для уяснения роли сухого трения выбранные условия наиболее благоприятны. Пусть, например, граница зоны застоя $\varphi_M = 15^\circ$, начальное отклонение 160° , начальная угловая скорость равна нулю. С помощью расчета определите, на каком делении шкалы должна остановиться стрелка после прекращения колебаний. Сколько полуэллипсов составят фазовую траекторию от начала до точки ее обрыва? Проверьте Ваши предсказания, выполнив вычислительный эксперимент. На графике зависимости угла отклонения от времени обратите внимание на смещение средних положений половин периодов синусоид, из которых формируется график угла отклонения. Чем объясняются изломы на графике скорости в те моменты времени, когда скачком происходит смена этих средних положений? Убедитесь, что эти моменты отстоят во времени на половину периода собственных колебаний осциллятора в отсутствие трения (деления на шкале графика проведены через промежутки времени, равные этому периоду).
3. Выберите другие начальные условия: начальное отклонение равно нулю, начальная угловая скорость, например, $2\omega_0$ (ω_0 - частота собственных колебаний осциллятора). Рассчитайте максимальное отклонение стрелки (при прежнем размере зоны застоя). На каком делении остановится стрелка после прекращения колебаний? Сколько витков будет у фазовой траектории? Проверьте результат расчета в эксперименте. Почему график зависимости полной энергии от угла отклонения состоит из отрезков прямых линий?
4. Сделайте теоретическое предсказание, касающееся максимального угла отклонения и деления шкалы, на котором остановится стрелка, для более сложных начальных условий:
 - а) начальное отклонение 135° , начальная угловая скорость $+1.5\omega_0$;
 - б) начальное отклонение -135° , начальная угловая скорость по-прежнему $+1.5\omega_0$.
 Проверьте результаты ваших расчетов в эксперименте.
5. Рассчитайте полный угловой путь (в градусах), который пройдет маховик осциллятора до полной остановки после возбуждения осциллятора начальным толчком $\dot{\varphi}(0) = 2\omega_0$ из средней точки зоны застоя, где ω_0 - собственная частота осциллятора. Полуширина зоны застоя $\varphi_M = 10^\circ$.
6. Выберите значительно меньшее, чем прежде, значение угла φ_M , ограничивающее зону застоя (до 5°), и начальные условия, при которых максимальное отклонение многократно превосходит размер зоны застоя (узкая зона застоя). Сколько колебаний совершит осциллятор до остановки при выбранных вами начальных условиях? На большом

числе колебаний графики особенно наглядно демонстрируют линейный закон убывания амплитуды и эквидистантность витков фазовой траектории. По какому закону убывает со временем усредненная по периоду колебаний полная энергия?

Влияние вязкого трения

При комбинированном затухании, обусловленном одновременным действием как сухого, так и вязкого трения, интересно наблюдать смену характера процесса затухания колебаний, связанную с переходом главной роли в этом процессе от вязкого трения к сухому.

1. Выберите размер зоны застоя φ_M , например, 1° , а добротность Q , характеризующую интенсивность вязкого трения, около 30. Задайте начальное отклонение 60° при нулевой начальной скорости. Сухое или вязкое трение будет играть главную роль на начальном этапе колебаний? При каком значении амплитуды должна произойти смена характера затухания? В чем эта смена выражается на графиках временной зависимости угла отклонения и угловой скорости? На фазовой траектории? Проверьте Ваши предсказания экспериментом.
2. При значении размера зоны застоя $\varphi_M = 10^\circ$ и добротности $Q = 5$ задайте начальную скорость $2\omega_0$ при нулевом начальном отклонении. Рассчитайте теоретически максимальное отклонение стрелки при таких начальных условиях. Проверьте результат расчета экспериментом. Какой вид трения будет определять характер затухания на первом этапе?
3. Пусть зона застоя задается углом $\varphi_M = 10^\circ$, добротность $Q = 3$, начальное отклонение 65° , начальная скорость $-2\omega_0$. Рассчитайте угол, на который произойдет отклонение стрелки в противоположную сторону. Проверьте результат расчета экспериментом.
4. Задайте добротность, близкую к критическому значению 0.5, и исследуйте экспериментально характер затухания колебаний. Где в пределах зоны застоя наиболее вероятна остановка стрелки при значениях Q , немного превосходящих критическое значение? Где остановится стрелка при значениях добротности, меньших 0.5? Зависит ли ответ от начальных условий?

2.4 Сводка основных формул

Дифференциальное уравнение осциллятора с сухим трением:

$$J\ddot{\varphi} = -D(\varphi + \varphi_M) \quad \text{при} \quad \dot{\varphi} > 0$$

$$J\ddot{\varphi} = -D(\varphi - \varphi_M) \quad \text{при} \quad \dot{\varphi} < 0$$

где φ_M - угол, соответствующий границе зоны застоя. При наличии вязкого трения в уравнении будет еще член, пропорциональный скорости:

$$\ddot{\varphi} = -\omega_0^2(\varphi + \varphi_M) - 2\gamma\dot{\varphi} \quad \text{при} \quad \dot{\varphi} > 0$$

$$\ddot{\varphi} = -\omega_0^2(\varphi - \varphi_M) - 2\gamma\dot{\varphi} \quad \text{при} \quad \dot{\varphi} < 0$$

где ω_0 - собственная частота в отсутствии трения:

$$\omega_0^2 = D/J$$

Коэффициент затухания γ , характеризующий интенсивность вязкого трения, связан с добротностью Q соотношением:

$$Q = \omega_0/(2\gamma)$$

Граничное значение амплитуды колебаний, разделяющее случаи преобладания роли вязкого или сухого трения:

$$a_{\text{гр}} = 4\varphi_M/(\gamma T) = (4/\pi)\varphi_M Q \approx \varphi_M Q$$

Приложение

Как работать с пакетом программ "ФИЗИКА КОЛЕБАНИЙ"

Компьютерные программы пакета "Физика колебаний" разработаны таким образом, чтобы Ваши действия по управлению были максимально простыми. Каждая работа предваряется меню (рис.1)



Рис.1 Меню.

Приступая к работе с программой, прежде всего изучите раздел 1 "Основы теории". В этом разделе не требуется вводить параметры или задавать начальные условия. Ознакомившись с текстом и сопровождающей его динамической иллюстрацией, можно перейти к следующей странице, нажав кнопку "Далее". Кроме описания устройства торсионного пружинного осциллятора, последовательно приведены демонстрации его поведения в отсутствие трения и при вязком или сухом трении. При переходе к вычислительному эксперименту рекомендуется сначала получить общее представление о характере предстоящей работы. С этой целью можно бегло просмотреть все разделы (2 - 5) вычислительного эксперимента в демонстрационном варианте. После просмотра очередного пункта меню и знакомства с выводимой на экран информацией нажмите на кнопку "Выход" и вы вернетесь в меню для выбора следующего раздела. Числовые значения параметров физической системы или начальные условия можно задать в любом разделе работы. Для этого выберите пункт "Ввод данных" в строке меню и в раскрывшемся окне (рис.2) с помощью цифровых кнопок клавиатуры или бегунка в строке прокрутки отредактируйте необходимые параметры.

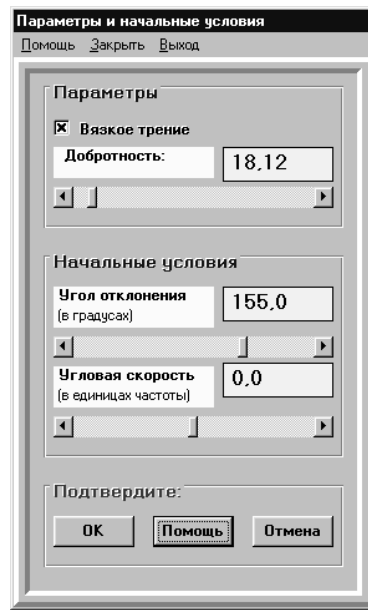


Рис.2 Ввод данных.

Подтвердите введенные величины нажав кнопку "ОК". Единицы, в которых нужно выразить вводимые значения, указаны в описании соответствующей моделирующей программы, а также на экране. Пуск моделирующей программы в каждом из разделов (т.е. начало движения физической системы) производится нажатием кнопки "Пуск". Вы можете замедлить или ускорить вывод графиков на экран с помощью бегунка в строке прокрутки под надписью "Моделирование системы". Вы можете также поменять масштабы вывода графиков на экран. Для этого нажмите кнопку "Условия моделирования" и введите необходимые изменения в раскрывшемся окне. Необходимую подсказку можно также получить, выбрав пункт меню "Помощь" в любом разделе программы.

Часть II

Экспериментальное изучение механических колебаний

Лабораторная работа № 3

Оборотный маятник

3.1 Измерение ускорения свободного падения с помощью физического маятника

Лабораторная установка, используемая в данной работе, представляет собой физический маятник, закрепленный на штативе.

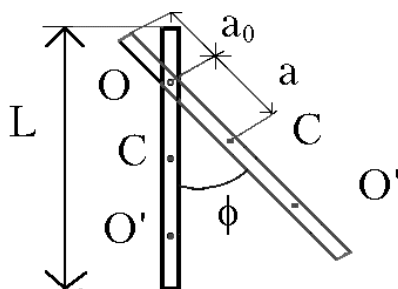


Рис. 3.1: Физический маятник

В качестве физического маятника используется однородный стальной стержень длины L , не содержащий дополнительных грузов. На стержне массой m закреплена опорная призма, острое ребро которой является осью качания маятника. Призму можно перемещать вдоль стержня, меняя таким образом расстояние a от точки опоры маятника (оси вращения) O до центра масс C (рис. 3.1). Физическим маятником называется любое твердое тело, которое под действием силы тяжести может совершать свободные колебания вокруг неподвижной точки. Наиболее просто описывается плоское движение маятника вокруг фиксированной оси. В том случае, если маятник совершает несколько десятков колебаний без заметного затухания, моментом силы трения в первом приближении можно пренебречь, и уравнение движения маятника записывается в виде:

$$\frac{d^2\phi}{dt^2} = \frac{M}{J}, \quad (3.1)$$

где J - момент инерции маятника относительно оси вращения, ϕ - угол отклонения маятника от положения равновесия, $d^2\phi/dt^2$ - угловое ускорение; t - время, M - момент всех сил, действующих на маятник. Если пренебречь массой опорной призмы, по теореме Гюйгенса-Штейнера момент инерции маятника в этом случае равен сумме момента инерции относительно оси, проходящей через центр масс (параллельно оси вращения) и ma^2 :

$$J = \frac{mL^2}{12} + ma^2 . \quad (3.2)$$

Момент силы тяжести, действующей на маятник:

$$M = -mga \sin \phi . \quad (3.3)$$

Подставляя выражение для M и J в (3.1), получим уравнение движения маятника в виде:

$$\ddot{\phi} + \frac{ga}{a^2 + L^2/12} \sin \phi = 0 . \quad (3.4)$$

При малых углах отклонения $\sin \phi \approx \phi$ (ϕ - в радианах), так что (3.4) преобразуется к виду:

$$\ddot{\phi} + \omega^2 \phi = 0 , \quad (3.5)$$

где

$$\omega^2 = \frac{ga}{a^2 + L^2/12} . \quad (3.6)$$

Решением этого уравнения является функция

$$\phi(t) = A \sin(\omega t + \alpha) . \quad (3.7)$$

Амплитуда колебаний A и фаза α зависят от того, как возбуждаются колебания маятника, т.е. начальных условий задачи. Например, если мы отклоним маятник от положения равновесия на угол ϕ_0 , а затем отпустим его, то в начальный момент

$$\phi(0) = \phi_0, \quad \dot{\phi}(0) = 0 . \quad (3.8)$$

Тогда

$$\phi(t) = \phi_0 \cos \omega t . \quad (3.9)$$

Частота колебаний, согласно (3.6), зависит только от длины маятника L и расстояния от точки подвеса до центра масс a . Период колебаний $T = 2\pi/\omega$ равен:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{a^2 + L^2/12}{ag}} . \quad (3.10)$$

Как известно, период колебаний математического маятника определяется формулой:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} , \quad (3.11)$$

где l - длина математического маятника. Поэтому величину

$$L_{np} = a + L^2/(12a) \quad (3.12)$$

называют приведенной длиной физического маятника. Точку O' , отстоящую от точки опоры O на расстояние L_{np} , называют центром качания физического маятника. Можно доказать, что точка опоры и центр качания обратимы, т.е. при качании маятника вокруг точки O' период колебания должен быть таким же, как и при качании вокруг точки O .

Утверждение, что период колебаний физического маятника не зависит ни от фазы, ни от амплитуды колебаний, справедливо только для колебаний, подчиняющихся уравнению (3.5). Однако даже при достаточно большом угле $\phi_0 = 20^\circ$ поправка к T , зависящая от начальной амплитуды отклонения, составляет менее 1%. Если же исследовать решение (3.14), в следующем порядке по малому параметру ϕ можно получить выражение для периода, в котором наблюдается слабая зависимость от амплитуды колебаний:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{a^2 + L^2/12}{ag}} \left(1 + \frac{\phi_0^2}{16}\right). \quad (3.13)$$

При выводе уравнения (3.4) мы не учитывали возможного затухания колебаний маятника вследствие действия сил трения. Проанализируем сначала влияние силы трения для малых амплитуд колебаний в (3.15) в приближении "вязкого" трения, когда имеется пропорциональность момента сил трения угловой скорости маятника. Это приводит к появлению в (3.5) дополнительного слагаемого $\gamma\dot{\phi}$:

$$\ddot{\phi} + \omega^2\phi + 2\gamma\dot{\phi} = 0, \quad (3.14)$$

где $\gamma = const$ - коэффициент затухания (в механической системе он обычно называется коэффициентом вязкого трения). В этом случае решение (3.14) будет иметь вид:

$$\phi(t) = \phi_0 e^{-\gamma t} \cos(\sqrt{\omega^2 - \gamma^2} t + const). \quad (3.15)$$

Как видно из (3.15), колебания в этом случае оказываются непериодическими и происходят с экспоненциальным затуханием амплитуды, причем скорость затухания определяется коэффициентом γ . В рамках такой модели происходит увеличение периода колебаний по сравнению с (3.10), однако он, тем не менее, остается независимым от начальной амплитуды отклонения:

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega^2 - \gamma^2}}. \quad (3.16)$$

В случае "сухого" трения сила трения по абсолютной величине (f) не зависит от угла ϕ и направлена против направления движения. Тогда уравнение движения записывается в виде

$$\ddot{\phi} + \omega^2\phi = \pm f, \quad (3.17)$$

где знак '+' для одного направления движения, а знак '-' для противоположного. Легко показать, что решением (3.17) с начальными условиями (3.8), является кривая, "склеенная" из кусков косинусоид с периодом (3.10), но сдвинутых по оси амплитуд на $\pm f/\omega^2$. Затухание амплитуды колебаний в этом случае линейно, на величину f/ω^2 за один полупериод. В отличие от предыдущего случая, при "сухом" трении колебания полностью затухнут за конечное время.

В реальных условиях, как правило, затухание колебаний физического маятника связано с наличием обоих видов трения.

3.2 Определение ускорения свободного падения при помощи маятника с грузами (Метод Бесселя)

Применение обратного маятника для измерения ускорения свободного падения основано на свойстве сопряженности центра качания и точки подвеса. Это свойство заключается в том, что во всяком физическом маятнике можно найти такие две точки, расположенные по разные стороны от центра масс, что при последовательном подвешивании маятника за одну и другую из них период колебаний маятника остается неизменным. Расстояние между этими точками определяет собой т.н. приведенную длину физического маятника (3.12).

Если амплитуда колебаний физического маятника мала (см. (3.5)), период его колебаний определяется формулой:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{J}{mga}} . \quad (3.18)$$

Оборотные маятники, применяемые в методе Бесселя, в зависимости от предъявленных к ним требований имеют самую разнообразную форму. Они обычно состоят из металлического стержня, по которому могут передвигаться и закрепляться в том или ином положении тяжелые и легкие грузы и опорные призмы. Различные комбинации грузов и их положений на стержне относительно опорных призм дают различные типы обратных маятников.

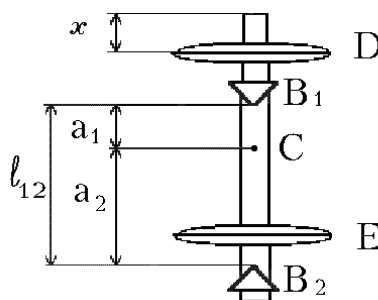


Рис. 3.2: Обратный маятник

В данной лабораторной работе применяется обратный маятник, изображенный на рис. 3.2, в котором используются два груза в форме чечевиц. На металлическом стержне опорные призмы B_1 и B_2 жестко закрепляются и не перемещаются. Жестко закреплен и груз E , находящийся между ними. Второй груз D находится на конце стержня (не между призмами) и может перемещаться по стержню и закрепляется в нужном положении. Расстояние между призмами $l_{12} = a_1 + a_2$ постоянно. Допустим, что нам удалось найти такое положение груза D , при котором периоды колебаний маятника T_1 и T_2 около призм B_1 и B_2 совпали, т.е

$$T \approx T_1 \approx T_2 , \quad (3.19)$$

$$T_1 = 2\pi \sqrt{\frac{J_1}{mga_1}}, \quad T_2 = 2\pi \sqrt{\frac{J_2}{mga_2}} . \quad (3.20)$$

Условием точного равенства, очевидно, будет являться равенство приведенных длин, т.е. равенство величин J_1/ma_1 и J_2/ma_2 . По теореме Гюйгенса-Штейнера:

$$J_1 = J_0 + ma_1^2, J_2 = J_0 + ma_2^2, \quad (3.21)$$

где J_0 - момент инерции маятника относительно оси, проходящей через его центр масс параллельно оси качания.

Исключая из (3.20)–(3.21) J_0 и m , получим формулу для определения g :

$$g = \frac{4\pi^2}{T^2}(a_1 + a_2) = 4\pi^2 \frac{l_{12}}{T^2}. \quad (3.22)$$

Заметим, что формула (3.22) следует из (3.20)–(3.21) лишь при условии, что $a_1 \neq a_2$. При выводе формулы (3.22) мы предполагали, что $T_1 \approx T_2$. На самом деле полного равенства периодов добиться невозможно. Тогда:

$$T_1 = 2\pi \sqrt{\frac{J_0 + ma_1^2}{mga_1}}, \quad T_2 = 2\pi \sqrt{\frac{J_0 + ma_2^2}{mga_2}}. \quad (3.23)$$

Из этих равенств имеем:

$$T_1^2 ga_1 - T_2^2 ga_2 = 4\pi^2(a_1^2 - a_2^2), \quad (3.24)$$

откуда

$$g = 4\pi^2 \frac{a_1^2 - a_2^2}{a_1 T_1^2 - a_2 T_2^2} = 4\pi^2 \frac{l_{12}}{T_0^2}, \quad (3.25)$$

где

$$T_0^2 = \frac{a_1 T_1^2 - a_2 T_2^2}{a_1 - a_2} = T_2^2 + \frac{a_1}{a_1 - a_2} (T_1 + T_2)(T_1 - T_2). \quad (3.26)$$

Формула (3.25) соответствует измерению g по методу Бесселя.

Оценим погрешность определения g на основании (3.25). Прежде, чем это сделать, оценим, как зависит период колебаний маятника от расстояния a между центром масс и осью качания. Из (3.20)–(3.21):

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{J_0 + ma^2}{mga}}. \quad (3.27)$$

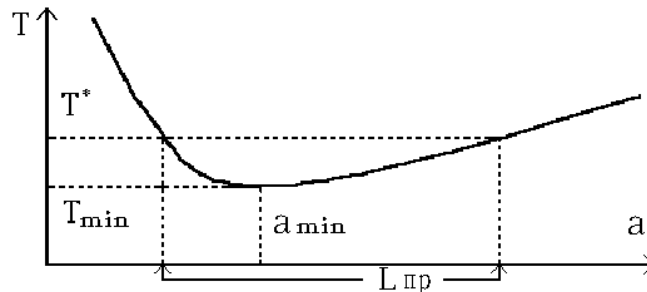


Рис. 3.3: Зависимость периода колебаний от положения чечевицы на стержне

На рис. 3.3 изображена зависимость периода колебаний маятника от расстояния между центром масс и осью качания. При этом $a = a_1$ при опоре на призму B_1 , и $a = a_2$ при опоре на призму B_2 . Если $a \rightarrow 0$, то $T \rightarrow \infty$ как $a^{-0.5}$; если $a \rightarrow \infty$, то $T \rightarrow \infty$, как $a^{0.5}$. Период минимален при $a_{min}^2 = J_0/m$. При $T > T_{min}$ одно и то же значение T достигается при двух разных значениях a , одно из которых больше, а другое меньше a_{min} .

Эти разные значения a были использованы в (3.20)–(3.22). Как ясно из графика, при изменении T величины a_1 и a_2 сближаются или удаляются друг от друга. Погрешность определения T_0 зависит от модуля разности $|a_1 - a_2|$. Действительно, дифференцируя выражение для T_0 , например, по T_1 , и полагая T_2 неизменным, найдем погрешность T_0 :

$$\delta T_0 = \frac{a_1}{a_1 - a_2} \frac{T_1}{T_0} \delta T_1 \quad (3.28)$$

(здесь мы считаем, что расстояния a_1 и a_2 нам точно известны). Когда a_1 и a_2 близки друг к другу, знаменатель формулы близок к нулю, но ни a_1 , ни T_1 при этом к нулю не стремятся. Тот же вывод справедлив для пересчета погрешности δT_2 в погрешность δT_0 при неизменном T_1 . Поэтому расположение опорных призм относительно центра масс, задаваемого положением грузов, следует выбирать так, чтобы a_1 и a_2 различались, по крайней мере, в 1.5 раза.

Метод Бесселя не предполагает строгого равенства периодов, поэтому в этом случае нет смысла тратить время на уточнение этого равенства после того, как периоды оказались равны друг другу с погрешностью нескольких процентов.

Заметим, наконец, что отношение a_1/a_2 не должно быть и слишком большим. В самом деле, a_1 всегда меньше расстояния между призмами l_{12} . При больших a_1/a_2 величина a_2 неизбежно оказывается малой, и период колебаний резко возрастает. При этом увеличивается время измерений и растет роль сил трения, которые при выводе (3.8) не учитывались. Кроме того, в этом случае при данной длине маятника может вообще не найтись положения груза D, при котором совпадают T_1 и T_2 .

Таким образом, мы приходим к выводу, что отношение a_1/a_2 не должно быть ни слишком малым, ни слишком большим. Желательно, чтобы выполнялось условие $1.5 < a_1/a_2 < 3$.

3.3 Контрольные вопросы

1. Что представляет собой физический маятник? Приведите конкретный пример такой колебательной системы и поясните характер ее движения.
2. Какие колебания называются свободными?
3. Как зависит действующая на физический маятник возвращающая сила от угла отклонения?
4. Зависит ли период колебаний физического маятника от фазы, амплитуды колебаний? Если да, то как. Изменится ли ответ, если влиянием трения на движение физического маятника, совершающего колебания при малых углах отклонения, пренебречь нельзя.
5. В чем состоит свойство сопряженности центра качания физического маятника и точки его подвеса? Чему равна приведенная длина физического маятника?
6. Как зависит период колебаний T маятника от расстояния a между центром масс и осью качания? Каково асимптотическое поведение $T(a)$: $a \rightarrow 0$, $a \rightarrow \infty$. При каких значениях a период минимален?

7. Опишите конструкцию оборотного маятника, используемого в настоящей работе. Каковы ограничения на расположение опорных призм относительно центра масс оборотного маятника?

3.4 Порядок выполнения работы

Задание 1. Изучение колебаний физического маятника

1. Определите диапазон амплитуд, в пределах которых период колебаний маятника T можно считать не зависящим от амплитуды. Для этого отклоните маятник из положения равновесия на некоторый угол ϕ , проведите измерения для N колебаний и определите средний период и его погрешность. Повторяя опыт при различных начальных отклонениях, можно оценить погрешность измерения периода колебаний.

Проведите измерения при большом количестве колебаний N и оцените, при каком количестве колебаний начинает сказываться затухание. Как это зависит от точки подвеса маятника?

2. Перемещая опорную призму вдоль стержня, исследуйте зависимость периода колебаний T от расстояния a между точкой опоры и центром масс. Не забывайте о том, что при этом приходится изменять расположение датчика для регистрации моментов прохождения маятником нижней точки движения.

Используя специальную подставку, можно найти центр масс стержня и соответствующее расстояние a . Впоследствии можно просто измерять расстояние a_0 от конца стержня до опоры C призмы, а затем пересчитывать его в расстояние a до центра масс. Очевидно, что для однородного стержня центр масс расположен в середине стержня, так что $a = L/2 - a_0$.

Полученный массив экспериментальных точек $(a_i, T_i, i = 1, \dots, S)$ удобно представить в виде графика функции aT^2 от a^2 . Как следует из (3.10), график должен иметь вид прямой, параметры которой определяют величины $4\pi^2/g$ и $\pi^2 L^2/(3g)$, поскольку должно выполняться равенство $T^2 a = 4\pi^2 a^2/g + \pi^2 L^2/(3g)$. Компьютерная программа позволяет обрабатывать данные по методу наименьших квадратов (МНК): строить прямую, находя значения g и L . Сравните полученное значение g с табличным, а величину L - с результатом непосредственных измерений (L_0). Какова возможная причина отличия полученного значения L от фактического? Проверьте на опыте обратимость точки подвеса и центра качания физического маятника.

Задание 2. Изучение колебаний оборотного маятника

1. Определите рабочий диапазон амплитуд, в пределах которого период колебаний T оборотного маятника можно считать не зависящим от амплитуды, так же, как это делалось в задании 1 (раздел 3.4).
2. Получите графики зависимости периодов колебаний оборотного маятника вокруг двух точек качания для различных положений чечевицы D на стержне. Это делается следующим образом: после измерения периода относительно опорной призмы B_1 маятник переворачивают и измеряют период колебаний относительно опорной призмы B_2 . Затем перемещают груз D , возвращают маятник в исходное положение и вновь по очереди измеряют периоды колебаний вокруг призм B_1 и B_2 . В результате цикла из S измерений

будет накоплен массив $(a_j, T_{k,j}, j = 1, \dots, S, k = 1, 2)$, где индексы k соответствуют колебаниям вокруг призм B_1 и B_2 .

Графики зависимости периода колебаний от положения чечевицы на стержне отображаются на экране дисплея. По оси абсцисс отложены деления шкалы x , указывающие положение груза D относительно конца стержня, а по оси ординат - величины периодов колебаний T_1 и T_2 . Поскольку значения a_1 и a_2 однозначно связаны с x , согласно (1.20) получаем, что точка пересечения кривых определяет местонахождение подвижной чечевицы, при котором периоды колебаний T^* наиболее близки друг к другу. Подставляя T^* в (3.22), можно вычислить значение g . Компьютер автоматически производит такие вычисления для данного расстояния l_{12} между призмами.

3. Для измерения значения g по методу Бесселя следует определить периоды колебаний T_1 и T_2 в прямом и перевернутом положении маятника, взяв достаточно большое количество колебаний, при условии, что периоды отличаются не более, чем на несколько процентов. Для определения величин a_1 и a_2 находят центр тяжести, уравновешивая маятник на специальной подставке. Расстояния от этой точки (центра тяжести маятника) до опорных призм дают соответственно величины a_1 и a_2 . Их измерения производятся масштабной линейкой. После ввода этих данных компьютерная программа по формуле Бесселя (3.26) автоматически определяет величину ускорения свободного падения и оценивает его погрешность.

Лабораторная работа № 4

Исследование колебаний наклонного маятника

4.1 Описание экспериментальной установки

Установка для определения коэффициента трения качения показана на рис.4.1.

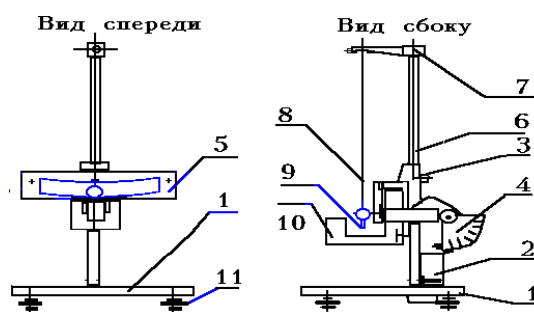


Рис. 4.1: *Общий вид установки*

На вертикальной стойке 2 основания 1 размещен червячный редуктор, который осуществляет поворот и фиксацию нижнего кронштейна 3. Редуктор приводится во вращение маховичком, отсчет угла наклона маятника производится по шкале 4. Нижний кронштейн 3 представляет собой литую деталь сложной конфигурации, на которой крепятся: шкала отсчета амплитуды колебаний маятника 5; вертикальный стержень 6, предназначенный для крепления верхнего кронштейна 7, и фотоэлектрический датчик 10. По шкале определяется амплитуда начального отклонения маятника от положения равновесия. Обратите внимание на то, что шкала проградуирована равномерно отстоящими рисками. Угол отклонения может быть найден по этой величине при известных длине нити и расстоянии между рисками. Шкала 5 снабжена зеркальным отражателем, который служит для уменьшения погрешности отсчета отклонения маятника. Во время выполнения работы начальный угол отклонения (в радианах) надо самостоятельно вычислять.

В верхнем кронштейне 3 размещается механизм подвеса маятника, который позволяет регулировать длину нити. Маятник представляет собой тонкую эластичную нить 8 с подвешенным на ней шаром, из нижней части которого выступает тонкий стержень 9, предназначенный для пересечения оптической оси фотоэлектрического датчика 10. Снизу основания 1 имеются регулировочные винты 11, позволяющие устранить качания основания, вызванные неровностью стола.

4.2 Затухание колебаний наклонного маятника при наличии сухого трения

Целью настоящей работы является экспериментальное изучение основных закономерностей колебаний наклонного маятника при наличии трения качения и измерение периода колебаний и коэффициента трения качения при различных углах наклона маятника и радиусах используемых шаров.

Трение качения является случаем так называемого "сухого" трения, при котором работа сил трения зависит только от пути и не зависит от скорости движения. Такое трение возникает при перекачивании одного тела по поверхности другого. При этом соприкасающиеся поверхности, как правило, бывают локально цилиндрические или сферические, причем одна из поверхностей может быть плоской. В качестве примера рассмотрим шар радиуса R и массы m , лежащий на горизонтальной плоскости (рис 4.2).

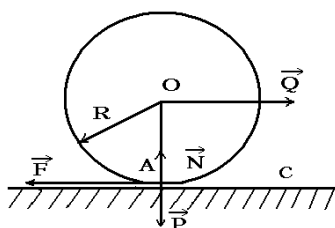


Рис. 4.2: Взаимодействие шара с плоскостью (идеальный случай)

Приложим к центру шара силу \vec{Q} , меньшую, чем максимальная сила трения покоя $\vec{F}_m = f_0 \vec{N}$, где f_0 - статический коэффициент трения, \vec{N} - нормальная реакция опоры. Тогда в точке касания А возникает сила трения \vec{F} , численно равная силе \vec{Q} . Если сила нормальной реакции опоры приложена к точке А, то она уравнивает силу тяжести $\vec{P} = m\vec{g}$ (g - ускорение свободного падения), а под действием пары сил \vec{Q} и \vec{F} будет происходить качение шара. Для идеально гладких недеформируемых поверхностей качение начинается под действием сколь угодно малой силы \vec{Q} .

В реальных условиях при взаимодействии очень гладких шара и плоскости их поверхности деформируются, и касание их происходит вдоль некоторой полосы АВ (рис 4.3). Если же одна или обе поверхности шероховаты, аналогичное касание происходит вдоль выступов и впадин шероховатостей.

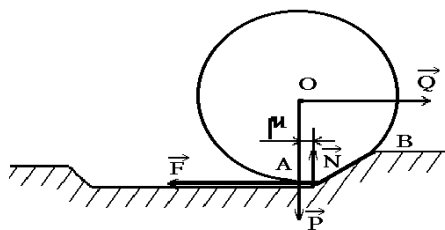


Рис. 4.3: Взаимодействие шара с плоскостью (реальный случай)

Поскольку под действием силы \vec{Q} сила давления на плоскость становится распределенной неравномерно (у края А убывает, а у края В возрастает), результирующая сила реакции опоры

имеет точку приложения, смещенную к точке В, т.е. в сторону действия силы \vec{Q} на шар. С увеличением \vec{Q} это смещение возрастает до некоторой предельной величины μ (рис.4.3).

В предельном положении на шар будут действовать две пары сил с моментами относительно точки О: $M_1 = Q_{пр}R$ и $M_2 = \mu N$, уравновешивающими друг друга. Из равенства моментов $M_1 = M_2$ находится значение предельной силы $Q_{пр} = N\mu/R$. Пока $Q < Q_{пр}$, шар находится в покое. При $Q > Q_{пр}$ начинается качение, при этом абсолютная величина силы трения качения

$$F_{тр} = \frac{N\mu}{R} \quad (4.1)$$

равна абсолютному значению предельной силы $Q_{пр}$. Входящая в выражение для момента силы трения величина μ носит название коэффициента трения качения.

Таким образом, коэффициент трения качения μ - это плечо пары сил, создающих момент трения качения. Этот коэффициент измеряется в единицах длины, а его значение зависит от материала тела и соприкасающейся с телом поверхности. По порядку величины μ обычно сопоставимо с размером шероховатостей наименее гладкой из соприкасающихся поверхностей. В большинстве случаев отношение μ/R значительно меньше, чем статический коэффициент трения f_0 , и потери энергии на трение качения меньше, чем на трение скольжения. Поэтому в технике, по возможности, стремятся заменить скольжение качением.

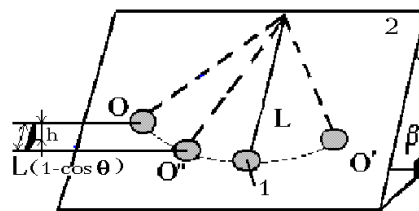


Рис. 4.4: Наклонный маятник

Для исследования трения качения в данной работе используется наклонный маятник (рис.4.4). Шарик массой m подвешен на нити длиной L . Он давит на наклонную плоскость 2, угол β отклонения которой от вертикали можно изменять. Если вывести шарик из положения равновесия 1, благодаря силе тяжести он начнет катиться по плоскости, и его движение примет характер затухающих под действием сил трения колебаний.

Составляющая силы тяжести создает силу нормального давления (рис.4.5):

$$N = mg \sin \beta . \quad (4.2)$$

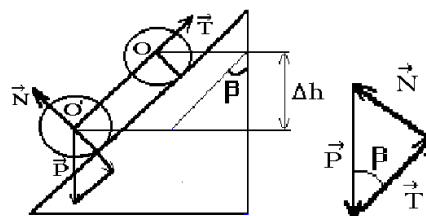


Рис. 4.5: Наклонный маятник (вид сбоку)

В данной работе измерение коэффициента трения качения с помощью наклонного маятника основано на подсчете числа колебаний до их полного затухания. Формулу для расчета

коэффициента трения можно получить, если приравнять потерю энергии за один полупериод колебаний маятника работе сил трения за этот полупериод. Будем отсчитывать потенциальную энергию шарика от нижней точки его траектории (в положении 1). Тогда полная энергия в верхней точке траектории равна потенциальной $T = mgh$, где h - высота, на которую поднимается центр тяжести шарика по сравнению с равновесным положением. Если θ - угол отклонения от положения 1, а L - длина нити маятника, то (см. рис. 4.4):

$$h = L(1 - \cos \theta) \cos \beta . \quad (4.3)$$

Если угол θ мал, то

$$E \approx \frac{mgL}{2} \theta^2 \cos \beta . \quad (4.4)$$

За полупериод колебаний шарик переходит из положения О в положение О'. При этом маятник теряет потенциальную энергию $\Delta E = mg\Delta h$, равную работе $\Delta A_{\text{тр}}$ сил трения на пройденном пути S :

$$\Delta E = \Delta A_{\text{тр}} = \Delta A_1 + \Delta A_2 , \quad (4.5)$$

где $\Delta A_1 = F_{\text{тр}}S$ - работа сил трения качения, ΔA_2 - работа по преодолению сопротивления среды и трения в подвесе маятника, Δh - изменение положения центра тяжести маятника.

Пренебрегая величиной ΔA_2 ввиду ее малости, имеем :

$$\Delta E = F_{\text{тр}} S . \quad (4.6)$$

Дифференцируя (4.4) по θ и считая, что $\Delta\theta \ll \theta$, так что можно заменить $d\theta$ на $\Delta\theta$, получаем:

$$\Delta E = mgL \theta \Delta\theta \cos \beta . \quad (4.7)$$

При слабом затухании колебаний, когда $\Delta\theta \ll \theta$, можно считать, что за один полупериод шарик проходит путь $S = 2L\theta$. С учетом этого, приравнявая ΔE из (4.5) и (4.6), получаем уравнение:

$$mgL \theta \Delta\theta \cos \beta = 2F_{\text{тр}}L \theta , \quad (4.8)$$

из которого находим изменение угла θ за один полупериод:

$$\Delta\theta = \frac{2F_{\text{тр}}}{mg \cos \beta} . \quad (4.9)$$

Таким образом, при постоянстве $F_{\text{тр}}$ значение $\Delta\theta$ не зависит от угла отклонения и номера колебания, поэтому для n -ого полупериода имеем :

$$\theta(n) = \theta(0) - \frac{2F_{\text{тр}}n}{mg \cos \beta} . \quad (4.10)$$

Зависимость (4.9) показывает, что происходит линейное уменьшение амплитуды колебаний в зависимости от номера полупериода (что характерно для затухания колебаний под действием сил "сухого" трения). Очевидно, что колебания полностью прекратятся при $\theta(n_k) = 0$, т.е

$$\theta(0) - \frac{2F_{\text{тр}}n_k}{mg \cos \beta} = 0 . \quad (4.11)$$

Таким образом, зная номер полупериода n_k , при котором произошло полное затухание колебаний, можно вычислить силу трения:

$$F_{\text{тр}} = \frac{mg \theta(0) \cos \beta}{2n_k}. \quad (4.12)$$

Перепишем соотношение (4.1), используя связь статического коэффициента трения с коэффициентом трения качения и формулу (4.2):

$$F_{\text{тр}} = \frac{\mu}{R} mg \sin \beta. \quad (4.13)$$

Тогда из (4.12) и (4.13) следует, что:

$$\frac{\mu}{R} mg \sin \beta = \frac{mg \theta(0) \cos \beta}{2n_k}. \quad (4.14)$$

Из (4.14) окончательно получаем для коэффициента трения качения:

$$\mu = \frac{R \theta(0) \operatorname{ctg} \beta}{2n_k}. \quad (4.15)$$

С другой стороны, можно выразить n_k через остальные величины:

$$n_k = \frac{R \theta(0) \operatorname{ctg} \beta}{2\mu}. \quad (4.16)$$

Стоит отметить, что при $\beta \rightarrow \pi/2$ имеем $\operatorname{ctg} \beta \rightarrow 0$, и из (4.16) следует, что при заданных R , $\theta(0)$ и μ мы получаем $n_k \rightarrow 0$, т.е. колебания затухают очень быстро, и наше предположение $\Delta\theta \ll \theta$ может не выполняться. При $\beta \rightarrow 0$ имеем $\operatorname{ctg} \beta \rightarrow \infty$ и $n_k \rightarrow \infty$, т.е. колебания почти не затухают. В то же время при очень близких к нулю β начинается проскальзывание шарика, из-за чего рассматриваемая модель становится неприменимой, а измеряемые значения μ резко возрастают, т.к. потери энергии при скольжении выше, чем при качении. Другим фактором, ограничивающим применимость предложенного метода, является малость начального угла отклонения $\theta(0)$, когда выполняется условие $\sin\theta(0) \approx \theta(0)$ (см. формулы (4.4) и (4.7)).

4.3 Контрольные вопросы

1. Дайте определение математического маятника. При каких углах наклона плоскости, длинах нити и радиусах шара наклонный маятник можно приближенно считать математическим?
2. Зависит ли период колебаний наклонного маятника от начальной фазы и амплитуды колебаний? Если да, то с чем это связано?
3. По какому закону зависит период математического маятника от длины нити? Как правильно измерить длину нити наклонного маятника, если радиусом шара нельзя пренебречь?
4. Как и почему изменится период колебаний наклонного маятника при увеличении угла наклона плоскости?
5. При каком виде движения с трением (скольжении или качении) потери энергии меньше?
6. Дайте определение коэффициента трения качения. От чего этот коэффициент зависит?

7. Опишите лабораторную установку для экспериментального изучения основных закономерностей колебаний наклонного маятника? Как производится измерение интервалов времени в эксперименте?

4.4 Порядок выполнения работы

Задание 1. Изучение колебаний маятника

1. Измерение периодов колебания маятника

Определите диапазон амплитуд, в пределах которых период T колебаний вертикально висящего ($\beta = 0$) маятника можно считать не зависящим от амплитуды. Для этого отклоните маятник из положения равновесия на некоторый угол θ_0 , определяемый по шкале, измерьте средний период для некоторого числа N колебаний и его погрешность. Повторяя такие измерения при различных θ_0 , можно определить, при каких $|\theta_0| < \theta_{max}$ периоды совпадают в пределах погрешности измерений. Для дальнейших измерений ускорения свободного падения можно выбрать любое значение θ_0 , удовлетворяющее указанному неравенству. С чем связана относительно большая погрешность измерения периода колебаний? Попробуйте провести измерения при наличии очень слабого касания шарика и поверхности. Уменьшилась ли погрешность измерений? Почему?

Проведите измерения при большом количестве колебаний и оцените влияние затухания. Каковы его причины? Зависит ли затухание от длины нити L ?

2. Зависимость периода от угла наклона плоскости

Не меняя длину нити, проведите серию измерений для различных углов β . Сравните полученные значения с теоретическими (для расчетов воспользуйтесь пунктом "Калькулятор").

3. Зависимость периода от длины нити

Проведите серию измерений ускорения свободного падения g при различных значениях длины нити L и нескольких углах наклона плоскости качения. Сравните найденные значения g друг с другом и с табличным. Как правильно измерить длину L , если радиусом шара R нельзя пренебречь по сравнению с L ? Как зависит погрешность измерения g от погрешности измерения L ? От угла наклона?

Задание 2. Измерение коэффициента трения качения

1. Зависимость коэффициента трения от радиуса шара

Исследуйте зависимость коэффициента трения μ от радиуса используемых шаров R и сравните ее с теоретической. Для этого выберите какое-либо наклонное положение маятника и угол начального отклонения от положения равновесия θ_0 . Получите серию значений коэффициента трения μ при различных θ_0 и L для шаров различных радиусов R . Как влияют эти параметры на величину коэффициента трения? Изменяется ли погрешность определения μ для различных θ_0 ?

2. Зависимость коэффициента трения от угла наклона маятника

Исследуйте зависимость коэффициента трения μ от угла наклона маятника β при фиксированной длине маятника L для одного и того же шарика определенного радиуса.

Сравните ее с теоретической. Сравните результаты измерений с данными, полученными в предыдущем пункте задания. Совпадают ли они? Ответьте на вопросы предыдущего пункта задания относительно влияния величины θ_0 на значение коэффициента μ и его погрешность. Почему при близких к нулю β , когда начинает проявляться проскальзывание шарика по поверхности, измеренное значение μ начинает возрастать?

Лабораторная работа № 5

Изучение эллипсоида инерции твердого тела

5.1 Описание лабораторной установки

Исследуемое тело T закрепляется в рамке 1 (рис. 5.1) при помощи планки 2, которая может передвигаться по направляющим и зажиматься винтами 3. Ось вращения фиксируется двумя упорами 4 (верхний упор поджимается винтом 5).

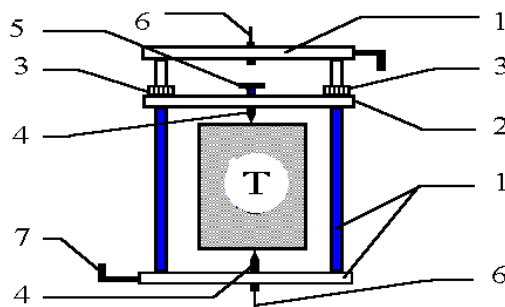


Рис. 5.1: Закрепление тела на подвесе

Рамка укреплена с помощью вертикально ориентированных нитей 6 и может совершать крутильные колебания вокруг вертикальной оси за счет упругости нити. На рамке имеется указатель 7, который при повороте рамки перемещается вдоль неподвижной шкалы. Для измерения периода колебаний служит система регистрации, состоящая из источника излучения и приемника для автоматического определения момента прохождения рамки через отметку на шкале. На угловой шкале укреплен также перемещаемый в пределах от 30° до 120° электромагнит, служащий для фиксации рамки в исходном положении.

5.2 Теория вращения твердого тела вокруг неподвижной оси

Целью данной работы является экспериментальное исследование процессов, происходящих при вращении твердого тела вокруг оси, проходящей через его центр масс.

Как хорошо известно, поступательное движение твердого тела массой m под действием силы \vec{f} описывается уравнением:

$$m\vec{w} = \vec{f}, \quad (5.1)$$

где \vec{w} - ускорение движения тела.

Вращательное движение вокруг неподвижной оси твердого тела, как будет показано ниже, определяется не силой, а приложенным к нему моментом силы относительно этой оси. Рассмотрим вращение твердого тела вокруг неподвижной оси. Выделим в теле элементарный объем массой Δm_i на расстоянии r_i от оси. Тогда:

$$\Delta m_i w_i = f_i , \quad (5.2)$$

где w_i - тангенциальное ускорение, а f_i - компонента силы, направленная по касательной к окружности, по которой движется выделенный объем. Введя угловое ускорение $\beta = w_i/r_i$, умножив обе части равенства (5.2) на r_i , после суммирования получим:

$$\beta \sum_i \Delta m_i r_i^2 = \sum_i r_i f_i . \quad (5.3)$$

Определим $N = \sum_i r_i f_i$ как момент внешних сил N , действующих на тело относительно оси вращения. Сумма, стоящая в (5.3) слева, зависит только от распределения массы в теле. Эта величина называется моментом инерции тела J относительно выбранной оси:

$$\sum_i \Delta m_i r_i^2 = J$$

В итоге (5.3) представимо в виде:

$$J\beta = N . \quad (5.4)$$

Уравнение (5.4), описывающее движение твердого тела вокруг неподвижной оси, по форме совпадает с уравнением (5.1) для поступательного движения, но вместо силы стоит момент сил, вместо линейного ускорения - угловое ускорение, а аналогом массы служит момент инерции. Сразу видно, что момент инерции - понятие более сложное, чем масса. Действительно, момент инерции определяется распределением массы тела относительно оси вращения, поэтому он зависит от положения этой оси. Однако моменты инерции, определенные относительно различных осей, связаны между собой, так как определяются одним и тем же распределением массы.

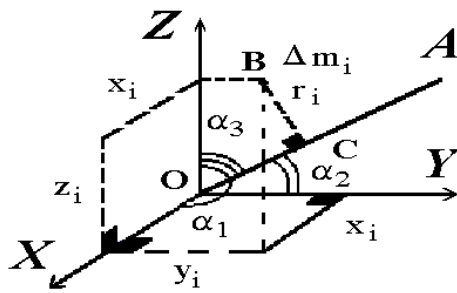


Рис. 5.2: Положение оси вращения

Установим связь между величинами моментов инерции тела для осей вращения, проходящих через одну точку. Определим момент инерции тела относительно некоторой оси вращения OA (рис. 5.2). За начало координат выберем произвольную точку, которая находится на этой оси. Ось вращения составляет с осями координат углы α_1 , α_2 , α_3 . Имеем:

$$J = \sum_i \Delta m_i r_i^2 = \sum_i \Delta m_i [(OB)^2 - (OC)^2] .$$

При этом, очевидно, $(OB)^2 = x_i^2 + y_i^2 + z_i^2$. Здесь x_i, y_i, z_i - проекция OB на соответствующую ось (рис. 5.2). Учитывая, что $OC = x_i \cos \alpha_1 + y_i \cos \alpha_2 + z_i \cos \alpha_3$, и $\cos^2 \alpha_1 + \cos^2 \alpha_2 + \cos^2 \alpha_3 = 1$, получим :

$$\begin{aligned}
 J &= \sum_i m_i [(x_i^2 + y_i^2 + z_i^2) - (x_i \cos \alpha_1 + y_i \cos \alpha_2 + z_i \cos \alpha_3)^2] = & (5.5) \\
 &= \cos^2 \alpha_1 \sum_i m_i (z_i^2 + y_i^2) + \cos^2 \alpha_2 \sum_i m_i (x_i^2 + z_i^2) + \\
 &+ \cos^2 \alpha_3 \sum_i m_i (x_i^2 + y_i^2) - 2 \cos \alpha_1 \cos \alpha_2 \sum_i m_i x_i y_i - \\
 &- 2 \cos \alpha_1 \cos \alpha_3 \sum_i m_i x_i z_i - 2 \cos \alpha_2 \cos \alpha_3 \sum_i m_i y_i z_i .
 \end{aligned}$$

Выражения при квадратах косинусов углов представляют собой моменты инерции тела $J_{x,y,z}$ относительно осей координат:

$$J_{xx} = \sum_i m_i (z_i^2 + y_i^2) ; \quad J_{yy} = \sum_i m_i (x_i^2 + z_i^2) ; \quad J_{zz} = \sum_i m_i (x_i^2 + y_i^2) ;$$

и они всегда положительны. Выражения:

$$J_{xy} = - \sum_i m_i x_i y_i ; \quad J_{xz} = - \sum_i m_i x_i z_i ; \quad J_{yz} = - \sum_i m_i y_i z_i$$

называются центробежными моментами инерции и могут быть любого знака. Перепишем (5.5) в новых обозначениях:

$$\begin{aligned}
 J &= J_{xx} \cos^2 \alpha_1 + 2J_{xy} \cos \alpha_1 \cos \alpha_2 + 2J_{xz} \cos \alpha_1 \cos \alpha_3 + & (5.6) \\
 &+ J_{yy} \cos^2 \alpha_2 + 2J_{yz} \cos \alpha_2 \cos \alpha_3 + J_{zz} \cos^2 \alpha_3 .
 \end{aligned}$$

Для различных осей, проходящих через начало координат (при разных $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$) величина момента инерции будет различна.

Из уравнения (5.5) видно, что момент инерции задается не одной величиной (как скалярная величина - масса) и не тремя величинами, как вектор, а шестью.

Физические величины, подобные моменту инерции, называются тензорами. Компоненты тензора принято записывать в виде таблицы:

$$J_{ij} = \begin{vmatrix} J_{xx} & J_{xy} & J_{xz} \\ J_{yx} & J_{yy} & J_{yz} \\ J_{zx} & J_{zy} & J_{zz} \end{vmatrix} . \quad (5.7)$$

Хотя в таблице 9 компонент, разных из них только 6, так как величины, отличающиеся порядком индексов, одинаковы. Это видно из самого определения центробежных моментов инерции. Такие тензоры называются симметричными.

Рассмотрим геометрическую интерпретацию изменения величины момента инерции тела при изменении направления в пространстве оси вращения. Если откладывать от начала координат отрезки $OH = J^{-1/2}$, где J - момент инерции тела относительно данной оси, то концы всех

отрезков образуют некоторую поверхность. Поскольку координаты точек на этой поверхности связаны с длиной OH соотношениями

$$x = OH \cos \alpha_1, \quad y = OH \cos \alpha_2, \quad z = OH \cos \alpha_3,$$

то из уравнения (5.7) получаем уравнение поверхности в виде:

$$J_{xx}x^2 + J_{yy}y^2 + J_{zz}z^2 + 2J_{xy}xy + 2J_{yz}yz + 2J_{xz}xz - 1 = 0. \quad (5.8)$$

Уравнение (5.8) является уравнением эллипсоида. Такой эллипсоид называется эллипсоидом инерции тела относительно произвольно выбранной точки O . Зная эллипсоид инерции, можно всегда определить момент инерции тела относительно любой оси, проходящей через начало координат, т.к. $J = 1/(OH)^2$. Оси эллипсоида называются главными осями инерции тела в этой точке. Из аналитической геометрии известно, что эллипсоид имеет три взаимно перпендикулярные оси. Следовательно, в каждой точке тела имеются три взаимно перпендикулярные главные оси инерции. Уравнение эллипсоида, отнесенное к этим осям, имеет наиболее простой вид, так как оно не содержит членов с произведениями различных координат:

$$J = J_{xx} \cos^2 \alpha_1 + J_{yy} \cos^2 \alpha_2 + J_{zz} \cos^2 \alpha_3. \quad (5.9)$$

В этом случае момент инерции определяется не шестью, а лишь тремя величинами. Иными словами, тензор (5.7) диагонален (отличны от нуля лишь элементы, стоящие на главной диагонали).

Эллипсоид инерции относительно центра тяжести тела называется центральным, а его главные оси называются главными центральными осями инерции. Для однородных симметричных тел информацию о направлениях главных центральных осей инерции можно получить исходя из симметрии тела. Очевидно, что:

- а) Всякая ось симметрии тела является главной осью эллипсоида инерции;
- б) Всякая плоскость симметрии перпендикулярна одной из осей вращения эллипсоида;
- в) Если ось симметрии имеет порядок > 2 (говорят, что прямая является осью симметрии порядка n , если при поворотах вокруг этой прямой на угол $2\pi/n$ тело совмещается само с собой), то эллипсоид вырождается в эллипсоид вращения вокруг этой оси. При наличии оси симметрии Z моменты инерции J_{xx} и J_{yy} относительно перпендикулярных к ней осей X и Y совпадают.
- г) Если имеется несколько осей симметрии порядка > 2 , эллипсоид становится сферой ($J_{xx} = J_{yy} = J_{zz}$).

В работе исследуются несколько тел, представляющих собой прямоугольные параллелепипеды, сделанные из однородного материала. У всех тел имеются небольшие углубления в середине каждой грани, в вершинах и середине каждого ребра. Эти отверстия служат для закрепления тела в установке (см. ниже) и фиксации оси, относительно которой измеряется момент инерции.

На рис. 5.3 приведены обозначения осей цифрами от 1 до 13. Все оси проходят через центр параллелепипеда.

Оси 1, 2, 3 проходят через середины граней параллелепипеда - ось 1 перпендикулярна большей по размерам грани, ось 2 - средней и ось 3 - меньшей грани.

Оси 4, 5, 6, 7 - диагональные, они проходят через вершины параллелепипеда.

Оси 8, 9, 10 и 11, 12 и 13 проходят через середины ребер. В силу симметрии центр масс исследуемых тел совпадает с их геометрическим центром. Параллелепипед имеет 3 оси симметрии, совпадающие с осями 1, 2 и 3. Эти оси являются его главными осями инерции.

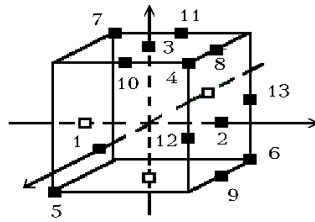


Рис. 5.3: Нумерация осей параллелепипеда

Оси 4–7, соединяющие вершины параллелепипеда - симметричны, а оси, соединяющие центры ребер - попарно симметричны: 8 и 9, 10 и 11, 12 и 13. Свяжем с параллелепипедом прямоугольную систему координат. Начало координат поместим в центр параллелепипеда, ось OX направим по оси 1, ось OY - по оси 2, ось OZ - по оси 3 (все оси направлены от центра к соответствующей цифре, см. рис. 5.3).

Моменты исследуемых тел J_x , J_y , J_z относительно осей OX , OY и OZ можно рассчитать, зная массу и геометрические размеры тела (см. приложение).

В случае сплошного параллелепипеда:

$$J_x = \frac{1}{12}M(b^2 + c^2) \quad , \quad J_y = \frac{1}{12}M(a^2 + c^2) \quad , \quad J_z = \frac{1}{12}M(b^2 + c^2) \quad . \quad (5.10)$$

Здесь a - расстояние между гранями параллелепипеда по оси OX , b - по оси OY , c - по оси OZ ($a < b < c$), M - масса параллелепипеда.

В расчетах не учитывались срезы и углубления, служащие для фиксации осей. Подумайте, как можно учесть их влияние при обработке результатов. Оцените погрешность, связанную с их наличием.

5.3 Методика измерений

Уравнение движения пустой рамки имеет вид:

$$J_p \frac{d^2\beta}{dt^2} = N \quad , \quad (5.11)$$

где J_p - момент инерции рамки относительно оси вращения, β - угол поворота вокруг этой оси, N - момент сил, действующих на рамку. Если трение пренебрежимо мало, то $N = -\sin(k\beta)$, где k - модуль кручения нити, рассчитанный на ее полную длину. Тогда решение уравнения (5.11) с учетом начальных условий $\phi(0) = \phi_0$, $\dot{\phi}(0) = 0$ и при условии малой деформации нити на единицу длины, когда можно считать $\sin(k\beta) \approx k\beta$, имеет вид: $\phi = \phi_0 \cos(\omega t)$, т.е. рамка будет совершать гармонические крутильные колебания с периодом

$$T_p = \frac{2\pi}{\omega_p} = 2\pi \sqrt{\frac{J_p}{k}} \quad , \quad (5.12)$$

откуда можно найти момент инерции рамки:

$$J_p = \frac{k}{4\pi^2} T_p^2 \quad . \quad (5.13)$$

Так как суммарный момент инерции рамки с закрепленным в ней телом равен $J^* = J + J_p$, то

$$J = \frac{k}{4\pi^2} T^2 - J_p . \quad (5.14)$$

Так что, измерив период колебаний пустой рамки T_p и период колебаний рамки с телом T , можно определить момент инерции тела, если известен модуль кручения нити k :

$$J = \frac{k}{4\pi^2} (T^2 - T_p^2) . \quad (5.15)$$

Для определения модуля кручения нити необходимо иметь эталонное тело, момент инерции которого J_0 известен. Тогда, измеряя период колебаний рамки с эталонным телом T_0 , из (5.14) и (5.15) получим:

$$k = 4\pi^2 \frac{J_0}{T_0^2 - T_p^2} , \quad (5.16)$$

$$J_p = J_0 \frac{T_p^2}{T_0^2 - T_p^2} . \quad (5.17)$$

Подставив в (5.15) значения J_p и k из (5.16), (5.17), окончательно получим:

$$J = J_0 \frac{T^2 - T_p^2}{T_0^2 - T_p^2} . \quad (5.18)$$

В качестве эталонного тела мы используем цилиндр. Его удобно закреплять в рамке, а момент инерции цилиндра (относительно его оси симметрии) можно легко вычислить:

$$J_0 = \frac{MH}{V} \int_0^{D/2} r^2 2\pi r dr = \frac{MD^2}{8} ,$$

где M - масса, D - диаметр, H - высота, а $V = \pi D^2 H/4$ - объем цилиндра.

5.4 Контрольные вопросы

1. Чем определяется вращательное движение твердого тела вокруг неподвижной оси?
2. Чем определяется момент инерции твердого тела?
3. Как математически выражается интерпретация момента инерции твердого тела?
4. Какие оси симметрии являются главными для прямоугольного параллелепипеда?
5. Опишите лабораторную установку для исследования момента инерции твердого тела.
6. При каких условиях рамка будет совершать свободные гармонические колебания?
7. Зачем в работе используется эталонное тело?
8. Какой характер носит зависимость $T(n)$ и почему? Изменяется ли вид зависимости $T(n)$ для пустой рамки и рамки с закрепленным на ней телом?
9. Какова причина расхождения определенных экспериментально значений момента инерции от рассчитанных теоретически.

5.5 Порядок выполнения работы

Задание 1. Изучение зависимости периода колебаний от условий эксперимента и определение параметров установки

1. Измерение периодов колебаний рамки

Для выбранного начального угла отклонения рамки ϕ_0 получите зависимость периода колебания рамки T от его номера n . Какой характер носит зависимость $T(n)$ и почему? Изменяется ли вид зависимости $T(n)$ для пустой рамки и рамки с закрепленным на ней телом?

Для выбранного числа колебаний n измерьте зависимость среднего значения T от начального угла отклонения ϕ_0 . Меняется ли характер зависимости при изменении n ?

2. Определение параметров установки

Для выбранной начальной амплитуды отклонения определите модуль кручения нити k и момент инерции пустой рамки J_p .

Для этого предварительно необходимо взвесить эталонное тело и измерить диаметр цилиндра. После этого определите период колебания пустой рамки и рамки с закрепленным в ней цилиндром. Вычисление k и J_p производится в программе по формулам (5.16), (5.18).

Задание 2. Измерение моментов инерции тела и построение эллипсоида инерции

1. Измерение моментов инерции тела

- Определите моменты инерции тела относительно осей, совпадающих с координатными осями ($l=1, 2, 3$).

Последовательно закрепляя исследуемое тело по осям 1, 2 и 3 (оси OX, OY и OZ) измерьте периоды колебания тела вокруг соответствующих осей. Программа производит расчет главных моментов инерции J_x, J_y, J_z согласно (5.18) и сравнивает их с теоретическими (см. приложение) Для сравнения измеренных значений с вычисленными необходимо первоначально ввести в программу размеры исследуемого тела (параллелепипеда). Обратите внимание на выполнение условия $a < b < c$!

- Измерение моментов инерции тела относительно диагональных осей ($l=4,5,6,7$).

Эти измерения позволяют проверить, совпадают ли главные оси инерции с координатными осями. Если они совпадают, то должно выполняться равенство (5.9), что можно проверить, подсчитав правую и левую части. Однако удобнее сравнивать не моменты инерции, а соответствующие периоды колебаний, так как они измерены точнее (в погрешность момента инерции входят, кроме погрешностей периода, еще и погрешности величин J_0 и T_0). Подставив в (5.9) выражения для моментов инерции из (5.15), получим:

$$T_l^2 = T_1^2 \cos^2 \alpha_1 l + T_2^2 \cos^2 \alpha_2 l + T_3^2 \cos^2 \alpha_3 l, \quad (5.19)$$

где T_l - период колебаний вокруг оси номер l , $T_{1,2,3}$ - периоды колебаний вокруг осей OX, OY и OZ, определенные в предыдущем задании.

Закрепите тело по любой диагональной оси с номером l и измерьте период колебаний T_l . Программа вычисляет правую и левую части выражения (5.19) используя данные,

полученные в предыдущем пункте задания. Проверьте, выполняется ли равенство (5.19).

2. Построение эллипсоида инерции

Выведите на экран компьютера сечение полученного на основании экспериментальных данных эллипсоида инерции плоскостями, проходящими через центр перпендикулярно главным осям. Сравните его с построенным исходя из теоретического расчета.

Приложение

Расчет моментов инерции параллелепипеда

Пусть M - масса параллелепипеда, a, b, c - длины его сторон по осям Ox , Oy , Oz . Расчитаем момент инерции J_{xx} относительно оси Ox . Выделим в параллелепипеде элемент объема $dV = dx dy dz$ с координатами x, y, z . Масса этого элемента объема будет $\rho dx dy dz$, где ρ - плотность материала, а длина соответствующего радиус-вектора $r = \sqrt{y^2 + z^2}$. Тогда

$$J_{xx} = \int \int \int (y^2 + z^2) \rho dV = \rho \int_{-a/2}^{a/2} dx \int_{-b/2}^{b/2} dy \int_{-c/2}^{c/2} dz (y^2 + z^2) = \rho \frac{abc}{12} (b^2 + c^2). \quad (5.20)$$

Плотность ρ связана с массой M выражением $\rho = M/(abc)$. Подставив значение ρ в (5.20), получаем :

$$J_{xx} = \frac{1}{12} M (b^2 + c^2).$$

Моменты инерции J_{yy} и J_{zz} вычисляются аналогично:

$$J_{yy} = \frac{1}{12} M (a^2 + c^2) \quad , \quad J_{zz} = \frac{1}{12} M (a^2 + b^2).$$

Лабораторная работа № 6

Измерение скорости полета пули с помощью баллистического маятника

6.1 Описание лабораторной установки

Баллистический маятник изображен на рис. 6.1. На вертикальной стойке 1 основания 2 крепятся два кронштейна 3, между которыми

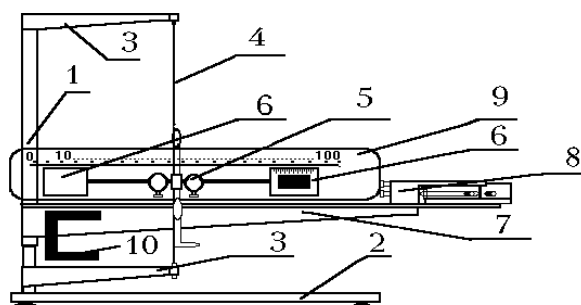


Рис. 6.1: Внешний вид установки

на стальной проволоке 4 закреплен подвес 5, представляющий собой стальной стержень, по которому в горизонтальном направлении перемещаются два груза равной массы. На стержне нанесены деления через 1 см. На концах стержня находятся мишени 6. Между верхним и нижним кронштейнами 3 расположен третий кронштейн 7, на котором крепится пусковое устройство 8, предназначенное для запуска "пули". Конец ствола пускового устройства и подвес закрыты прозрачным кожухом 9, на внутренней стороне которого нанесена шкала для определения угла отклонения маятника (в градусах). Снизу кронштейна 7 размещен фотоэлектрический датчик 10, служащий для измерения периодов колебаний маятника.

Замечание: Вам нужно научиться аккуратно стрелять пулей по мишени. Сначала осмотрите устройство для стрельбы, затем попросите лаборанта или преподавателя показать Вам механизм выстрела. Осмотрите пулю. Научитесь устанавливать ее на стержне. Изучите запускаящее устройство. Проверьте наличие пластины на мишени. Проверьте, разогрет ли пластилин на мишени до вязкого состояния для прилипания пули к мишени после выстрела. Если нет, то на пуле должно находиться пластилиновое кольцо для прилипания к пластилину мишени. Зарядите запускаящее устройство и выстрелите. Следите за тем, чтобы пуля после выстрела увязла в мишени. Только такой выстрел обеспечивает абсолютно неупругий удар и дает возможность корректно определить скорость пули.

6.2 Колебания баллистического маятника

Целью данной работы является изучение и проверка с помощью баллистического крутильного маятника закона сохранения момента импульса при неупругом соударении.

Абсолютно неупругим ударом называется такой удар, когда столкнувшиеся тела после удара либо движутся с одинаковой скоростью, либо покоятся. При этом кинетическая энергия тел частично или полностью превращается во внутреннюю энергию.

Пусть имеется горизонтальный стержень с двумя одинаковыми грузами с массами m , которые могут перемещаться вдоль стержня (рис. 6.2).

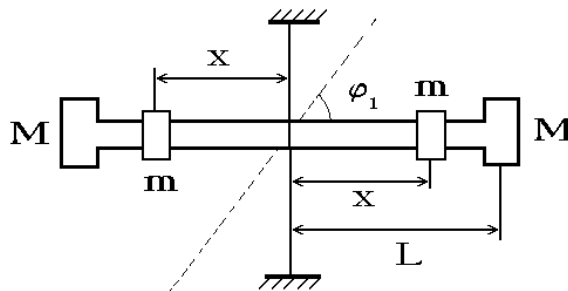


Рис. 6.2: Схема баллистического крутильного маятника

Стержень подвешен на стальной проволоке, проходящей через его центр и являющейся осью вращения системы. На концах стержня закреплены мишени M . Пуля, летящая с некоторой скоростью v , попадает в мишень M в точке, находящейся от оси вращения на расстоянии L , и прилипает к мишени. Удар можно считать абсолютно неупругим. Тогда, согласно закону сохранения момента импульса для системы пуля—стержень, можно написать:

$$\mu vL = (J_1 + \mu L^2)\omega_\mu, \quad (6.1)$$

где μ - масса пули, ω_μ - угловая скорость системы после окончания взаимодействия пули с мишенью, v - скорость пули перед ударом, L - расстояние от оси вращения до точки удара пули, J_1 - момент инерции маятника с грузами, закрепленными в определенном положении (момент инерции стержня).

При этом моментом инерции пули по отношению к ее вращению вокруг собственной оси пренебрегаем (считаем пулю точечной).

После удара система стержень—пуля совершает крутильные колебания с начальной угловой скоростью ω_μ . Обозначим как J полный момент инерции маятника. Если пули нет, то $J = J_1$, иначе, как в данном случае, $J = J_1 + \mu L^2$.

Через некоторое время кинетическая энергия системы, равная $J\omega_\mu^2/2$, согласно закону сохранения энергии (в пренебрежении неупругими эффектами), полностью перейдет в энергию упругих деформаций нити $k\phi_\mu^2/2$:

$$\frac{J\omega_\mu^2}{2} = \frac{k\phi_\mu^2}{2}, \quad (6.2)$$

где ϕ_μ - наибольший угол поворота стержня, k - постоянная упругих сил (модуль кручения). Из уравнения (6.2) получаем $J = k\phi_\mu^2/\omega_\mu^2$, и, подставляя в (6.1), имеем

$$v = \frac{k\phi_\mu^2}{\mu L\omega_\mu} . \quad (6.3)$$

Расстояние от оси вращения до точки удара пули L можно легко измерить, наибольший угол поворота стержня ϕ_μ может быть определен визуально по шкале маятника, а как можно вычислить значения k_n и μ , описано ниже.

В нашем случае система совершает крутильные колебания, которые в отсутствии трения описываются уравнением движения

$$J\ddot{\phi} = -k\phi , \quad (6.4)$$

где $\ddot{\phi}$ - угловое ускорение маятника. Период таких колебаний, как следует из (6.4), равен

$$T = 2\pi\sqrt{J/k} . \quad (6.5)$$

Меняя положение грузов m на стержне (а значит и момент инерции системы J), мы изменяем период колебаний маятника. При этом грузы надо сдвигать одновременно, чтобы ось симметрии продолжала проходить по нити подвеса.

На основании теоремы Гюйгенса - Штейнера момент инерции системы J_1 при первом положении грузов можно представить в виде:

$$J_1 = J_0 + 2(J_w + mX_1^2) , \quad (6.6)$$

а при втором положении:

$$J_2 = J_0 + 2(J_w + mX_2^2) , \quad (6.7)$$

где m - масса одного груза, J_0 - момент инерции маятника без грузов относительно оси, проходящей через нить подвеса, J_w - момент инерции одного груза относительно оси, проходящей через его центр масс параллельно оси вращения, X_1 и X_2 - расстояния от центра массы груза до оси вращения при первом и втором положении грузов, соответственно.

Из (6.5) получаем для квадратов периодов колебаний при первом и втором положениях грузов:

$$T_1^2 = \frac{(2\pi)^2 J_1}{k} , \quad T_2^2 = \frac{(2\pi)^2 J_2}{k} ,$$

откуда:

$$T_1^2 - T_2^2 = \frac{4\pi^2(J_1 - J_2)}{k} . \quad (6.8)$$

С другой стороны, из (6.6) и (6.7) имеем:

$$J_1 - J_2 = 2m(X_1^2 - X_2^2) , \quad (6.9)$$

поэтому

$$T_1^2 - T_2^2 = \frac{(2\pi)^2 2m(X_1^2 - X_2^2)}{k} ,$$

т. е.

$$k = \frac{(2\pi)^2 2m(X_1^2 - X_2^2)}{T_1^2 - T_2^2} . \quad (6.10)$$

Таким образом, зная массу грузов m и измерив значения периодов T_1 и T_2 при положении грузов X_1 и X_2 , можно найти модуль кручения нити k . Зная k , легко найти массу и скорость пули. Действительно, из (6.5) имеем:

$$T_\mu = 2\pi\sqrt{\frac{J_1 + \mu L^2}{k}}, \quad (6.11)$$

где T_μ - период колебания маятника с прилипшей пулей.

Тогда, выражая в (6.11) μ через остальные величины, получаем:

$$\mu = \frac{k}{4\pi^2 L^2} (T_\mu^2 - T_1^2), \quad (6.12)$$

где T_1 - период колебаний маятника с тем же положением грузов, но без пули. При этом измерение периода колебания маятника T_μ можно провести, прилепив вручную пулю к мишени, и производить выстрел не обязательно.

Теперь, подставляя выражения для k и μ в (6.3), мы можем вычислить скорость пули:

$$v = \frac{2\pi\phi_\mu T_\mu L}{T_\mu^2 - T_1^2}. \quad (6.13)$$

Таким образом, для вычисления скорости полета пули нам нужно измерить L (расстояние от нити до точки прилипания пули), максимальный угол отклонения после выстрела, периоды колебаний маятника T_μ и T_1 (с прилипшей пулей и без нее).

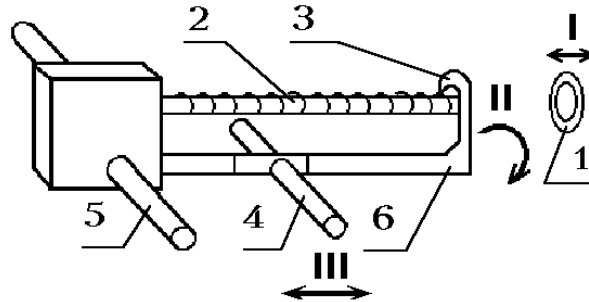


Рис. 6.3: Механизм для стрельбы пулей из баллистического маятника

Римскими цифрами обозначены направления движения: I - пули, II - мушки, III - пускового устр-ва.

- 1 - пуля для стрельбы, надеваемая на стержень с пружиной 2.
- 2 - стержень с пружиной и мушкой 3.
- 3 - мушка, поворачиваемая вправо, при надевании пружины.
- 4 - пусковое устройство, свободно движущееся по стержню 6.
- 5 - упор для заряжания пускового устройства.
- 6 - стержень для движения пускового устройства.

6.3 Контрольные вопросы

1. Какой удар называется абсолютно неупругим? Сохраняется ли механическая энергия при таком столкновении?

2. Запишите закон сохранения момента импульса для системы маятник-пуля.
3. Какие колебания возбуждаются в баллистическом маятнике в результате столкновения с пулей? Опишите их начальные условия. Зависит ли период колебаний баллистического маятника от амплитуды колебаний? Для чего нужно определить угол максимального отклонения маятника?
4. Изобразите график зависимости $T(x)$, где T - период колебаний маятника, x - расстояние грузов на стержне от оси вращения до их центра. Как выглядит этот график для достаточно больших значений x .
5. Что нужно знать для определения массы пули? ее скорости в момент столкновения?
6. Вычислите объем пули и определите материал, из которого она изготовлена.
7. Что представляет собой баллистический маятник, используемый в данной работе. Как реализовано измерение периода колебаний баллистического маятника?

6.4 Порядок выполнения работы

Задание 1. Изучение колебаний баллистического маятника

Данные, полученные в этом задании, необходимы для выполнения следующего задания - определения массы тела и измерения скорости полета пули. Выполнение первого задания позволяет научиться работать с баллистическим маятником, а также изучить основные закономерности его поведения.

1. Измерение периодов колебаний маятника

Для выбранного числа n колебаний предлагается запустить маятник и построить график зависимости периода T от n .

2. Измерение зависимости периодов колебаний от начальных углов отклонения

Измерение зависимости периодов колебаний T от начальных углов отклонения маятника ϕ_n (отсчитываемых по шкале маятника). Целесообразно проводить большое число измерений для того, чтобы добиться лучшей точности. Можно ли на основании результатов измерений сделать вывод о справедливости уравнения (6.4) даже для углов отклонения ϕ , для которых $\sin \phi \neq \phi$? Можно ли для рассматриваемой системы считать $\phi = \frac{\pi}{2}$ малым?

3. Измерение зависимости периодов колебаний от положения грузов

Измерение зависимости $T(x)$ для выбранных положений грузов x на оси маятника. При этом координата грузов отсчитывается от оси вращения. Оба груза должны находиться на одинаковом расстоянии от оси.

Задание 2. Измерение скорости полета пули

Для измерения скорости полета пули с помощью баллистического маятника необходимо знать массу пули. Ее можно измерить как с помощью баллистического маятника, так и просто на весах. Для измерения массы пули с помощью маятника необходимо знать модуль кручения нити (k) и момент инерции (J) маятника. Они вычисляются по результатам предыдущего задания.

1. Определение массы пули

Находятся модуль кручения нити и момент инерции маятника (график $J(x)$) при различных положениях груза x . Они рассчитываются с помощью получаемого в ходе эксперимента графика зависимости $T(x)$. По ним из (6.12) находится масса пули.

2. Измерение скорости полета пули

Используется пуля известной массы. Груз устанавливается в фиксированное положение X , пружинное ружье заряжается пулей, маятник приводится в состояние покоя и производится выстрел. По шкале определяется максимальный угол отклонения после прилипания пули и измеряется расстояние от центра оси вращения до точки прилипания пули. Используя эти результаты, рассчитывается скорость пули. Необходимо провести серию таких измерений.

Лабораторная работа № 7

Исследование законов падения тел в поле силы тяжести на машине Атвуда

7.1 Описание лабораторной установки

Устройство машины Атвуда показано на рис. 7.1.

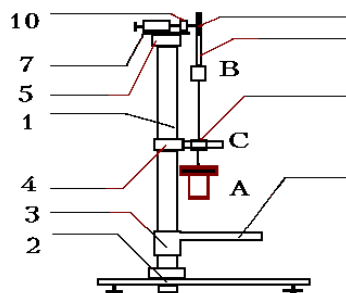


Рис. 7.1: Схема установки

Установка состоит из стойки 1, верхнего кронштейна 5, с закрепленной на нем осью 10, вокруг которой свободно вращается легкий алюминиевый блок 11, удерживаемый в состоянии покоя с помощью фрикционного электромагнита 7. Через блок перекинута нить 6, на концах которой висят грузы А и В, имеющие равные массы $M = 80$ г. На груз А могут надеваться один или несколько перегрузков С в виде колец известной массы m . С помощью фотодатчика 8, установленного на среднем кронштейне 4, производится измерение времени падения груза А с перегрузком. Положение среднего 4 и нижнего 3 кронштейнов можно менять. Средний кронштейн имеет кольцо, сквозь которое может проходить груз, но не может пройти перегрузок. Нижний кронштейн 3 представляет собой площадку 9 с резиновым амортизатором и фотодатчиком, служащим для определения момента окончания падения груза. Для отсчета расстояния, проходимого грузом А, на стойке установлена миллиметровая шкала.

7.2 Движение связанных тел в поле земного тяготения

Машина Атвуда предназначена для исследования закона движения тел при их свободном падении в поле земного тяготения.

Целью данной работы является проверка законов равномерного и равноускоренного движения тел, а также измерение ускорения свободного падения и силы натяжения нити.

Рассмотрим закон движения грузов. Введем неподвижную систему координат, центр которой совмещен с осью блока O (рис. 7.2), на котором на невесомой нерастяжимой нити подвешены два груза A и B равной массы.

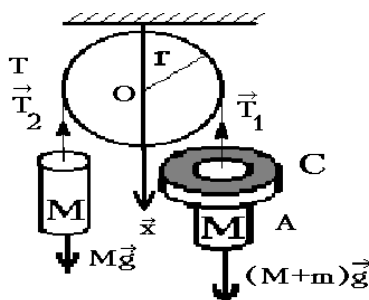


Рис. 7.2: Схема блока с грузами и перегрузком

Ось координат Ox направим вниз и рассмотрим силы, действующие на грузы в направлении этой оси. Пусть масса грузов A и B равна M , а масса перегрузка, лежащего на грузе A , равна m . На груз A с перегрузком действуют две силы: сила тяжести $(M + m)g$ и сила натяжения нити T_1 . Согласно второму закону Ньютона, уравнение для проекций этих сил на ось Ox :

$$(M + m)g - T_1 = (M + m)a , \quad (7.1)$$

где a - ускорение груза A с перегрузком, g - ускорение свободного падения.

В силу нерастяжимости нити ускорение груза B по абсолютной величине равно ускорению груза A и направлено в противоположную сторону. Пусть T_2 - натяжение левого конца нити. Тогда:

$$Mg - T_2 = -Ma . \quad (7.2)$$

Считая блок невесомым, а нить абсолютно упругой примем, что

$$T_1 = T_2 = T . \quad (7.3)$$

Из уравнений (7.1)–(7.3) получим:

$$a = \frac{mg}{2M + m} , \quad (7.4)$$

$$g = \frac{a(2M + m)}{m} . \quad (7.5)$$

Более точное определение ускорения движения системы требует учета массы самого блока. Натяжение нити по обе стороны блока в этом случае будет различным, и вместо уравнения (7.3) следует рассмотреть уравнение, определяющее закон вращательного движения блока:

$$T_1 r - T_2 r = J\beta , \quad (7.6)$$

где $J = \alpha m_0 r^2$ - момент инерции блока, m_0 - масса блока, r - его радиус, β - угловое ускорение, α - коэффициент, зависящий от распределения массы в блоке.

Если скольжение нити по блоку исключено, то угловое и линейное ускорения связаны уравнением $a = \beta r$

Решение системы уравнений (7.1), (7.2), (7.6) дает для ускорения системы следующее выражение:

$$a = \frac{mg}{2M + m + \alpha m_0} .$$

Отсюда:

$$g = \frac{a(2M + m + \alpha m_0)}{m} . \quad (7.7)$$

Легко видеть, что замена (7.5) на (7.7) не изменяет ни вида формулы, ни характера движения, а приводит лишь к небольшой поправке к массе грузов. Учет силы трения нити в блоке также приводит к уменьшению величины ускорения a системы, а значит, к уменьшению значения g , рассчитанного по (7.7). Ускорение a при небольших перегрузках существенно меньше g , поэтому его легко измерить. С указанными выше допущениями формула (7.7) может служить для определения ускорения g .

Поскольку не существует простых способов прямого измерения ускорения, для определения a воспользуемся равноускоренным характером движения грузов и будем измерять путь h и время движения t , которые, как известно, при нулевой начальной скорости связаны соотношением:

$$h = \frac{at^2}{2} . \quad (7.8)$$

Проверив на опыте равноускоренный характер движения (пропорциональность h и t^2), можно определить входящее в уравнение (7.8) ускорение a и вычислить с его помощью по формуле (7.5) ускорение свободного падения g и натяжение нити T .

7.3 Контрольные вопросы

1. Как движется тело при свободном падении в поле земного тяготения? Является ли движение груза в Машине Атвуда "свободным падением"?
2. С каким ускорением опускается груз в Машине Атвуда? В каких пределах изменяется величина его ускорения? Зависит ли ускорение падения груза от размеров (радиуса) блока (скольжением нити пренебречь)? Как изменится значение величины ускорения блока, если учесть скольжение нити по поверхности блока?
3. В модели с невесомым блоком значение величины ускорения свободного падения отличается от известного. Будет ли оно оценкой $g = 9,81\text{м/с}^2$ снизу? сверху? К чему приводит учет массы блока?
4. При изучении равноускоренного движения зависимость $h(t^2)$, рассчитанная по методу наименьших квадратов на основании эмпирических данных может не проходить через начало координат. Что это означает с точки зрения законов движения тела? Объясните причины, которые обуславливают полученный результат.
5. Опишите устройство Машины Атвуда. Какие из перечисленных элементов относятся к основным? Как приводятся в движение грузы и измеряется время их падения?
6. Каким из двух фотодатчиков нужно пользоваться для измерения интервалов времени при проверке закона равноускоренного движения грузов? В каком диапазоне следует выбирать значения перемещения h ?

7. Как расположить фотодатчики при проверке закона равномерного движения грузов без перегрузки и какой из датчиков целесообразно перемещать?

7.4 Порядок выполнения работы

Для успешного выполнения работы необходимо предварительно тщательно отцентрировать систему блок-грузы-кольцо-датчики, и в дальнейшем сохранять полученную конфигурацию. Для этого надо перекинуть через блок нить с привязанными на концах грузами и убедиться, что такая система находится в положении безразличного равновесия. Затем установить средний кронштейн 4 в окрестности середины шкалы и зафиксировать кольцо, снимающее перегрузок, так, чтобы при падении груза А с перегрузком ось падения проходила строго через центр кольца. При этом следует убедиться, что перегрузок снимается кольцом без касания кольца самим грузом, и в дальнейшем он совершает падение до нижнего кронштейна 3 без возмущений.

Задание 1. Изучение равноускоренного движения

Приведите подвижную систему в исходное состояние, для чего установите груз А в верхнее положение и отметьте положение нижнего среза груза А по шкале установки. После этого положите на груз А перегрузок и проведите серию измерений времени падения t груза с перегрузком, изменяя начальную высоту падения h . Поскольку результаты измерения содержат погрешности, связанные с разбалансировкой системы и закручиванием нити, каждое из измерений следует повторить несколько раз для последующего усреднения. Таким образом, по окончании выполнения задания будет получен массив измерений $h_i, t_i, i = 1, \dots, N$, причем каждое значение t_i есть результат усреднения по n попыткам. Закон равноускоренного характера движения грузов (7.8) можно проверить, построив зависимость $h(t^2)$. Наклон прямой, построенной по методу наименьших квадратов, позволяет определить ускорение a и рассчитать примерное значение ускорения свободного падения g по формуле (7.5), а также натяжение нити T . Обдумайте, какие причины могут привести к тому, что построенная прямая не будет проходить через начало координат?

Задание 2. Исследование перехода равноускоренного движения в равномерное

На некоторой высоте, на пути падения груза с перегрузком установите снимающее кольцо, на котором установлен датчик, фиксирующий время равноускоренного движения T_1 и одновременно запускающий счетчик второго интервала времени T_2 . После этого кольца груз падает вниз на расстояние h , отделяющее нижний датчик от верхнего, уже без перегрузка массы m . Каждое измерение для данного h также следует повторить несколько раз (как в задании 1), чтобы избежать большой ошибки измерений усреднением полученных результатов. По окончании всего цикла измерений следует сравнить полученные значения скорости равномерного движения $V = at_1$ и убедиться, что они совпадают для различных h в пределах погрешности измерений ($V = h/t_2$).

Задание 3. Определение ускорения свободного падения с помощью перегрузков различных масс

Определение ускорения свободного падения в этом задании следует провести, используя перегрузки различных масс. Тогда, повторив измерения, описанные в *задании 1*, но не при различных начальных высотах падения h , а с различными перегрузками m_i , $i = 1, \dots, N$, можно воспользоваться уравнением (7.7) и найти значения g и коэффициента распределения массы блока α (для однородного плоского диска он равен $1/2$). Подбор значений g и α при трех и более измерениях производится по методу наименьших квадратов (МНК). Кроме этого, из (7.6) можно определить вид зависимости натяжения нити T от массы перегрузка m_i .

Отметим, что поскольку теперь $T_1 \neq T_2$, натяжения двух концов нити неодинаковы и отличаются на величину, прямо пропорциональную массе перегрузка.