

Ramazanov Telman Qurban oğlu

# Maye, qaz mexanikası və dalğa dinamikasına giriş

Azərbaycan Respublikası Təhsil  
Nazirliyinin Elmi-Metodik Şurası  
«Mexanika» bölməsinin 26  
oktyabr 2000-ci il tarixli 07 sayılı  
iclas protokolu ilə dərs vəsaiti kimi  
təvsiyyə edilmişdir

«Bakı Universiteti» Nəşriyyatı - 2000

**Elmi redaktor:** fizika-riyaziyyat elmləri namizədi,  
dos. Xeyirov Z.B.

**Rəyçilər:** Azərbaycan Respublikası EA müxbir üzvü,  
tex.elm.doktoru, prof. Quliyev A.M.

+ 532  
P 21

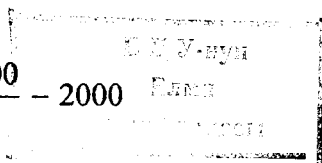
Fizika-riyaziyyat elmlər doktoru,  
prof. Axundov M.B.

**Ramazanov T.Q.** Maye, qaz mexanikası və dalğa dinamikasına giriş. 190 s.

Kitabda maye və çoxfazlı mühit mexanikasının əsas tənlikləri, xətti və qeyri-xətti dalğa dinamikasının bəzi məsələləri, sərhəd təbəqəsi və qaz dinamikasının əsas anlayışları verilmiş, bu sahələrdə klassik məsələlərin həlli tədqiq olunmuşdur.

Kitab ali məktəblərdə tədris olunan «Maye və qaz mexanikası», «Dalğa dinamikası» fənləri üzrə bakalavr və magistr pillələrində təhsil alan tələbələr üçün dərs vəsaiti kimi nəzərdə tutulur.

P 1603040100-000  
658(07)-43



240339

## Maye və qaz mexanikasına giriş

Maye və qaz mexanikası bütöv mühit mexanikası elminin bir sahəsi olub, həmin mühitin kinematikasını, statikasını və dinamikasını öyrənir.

Maye və qaz mühitləri digər mühitlərdən axıcılığına, daxili sürtünməsinə, fiziki xassələrinə, reoloji qanunlarına görə fərqlənirlər. Verilmiş həcmdə bu mühitlərin hissəcikləri (atom və ya molekulları) diskret qaydada paylanır və hər bir hissəciyin fəzada hərəkətini və ya tarazlığını maddi nöqtələr sistemi mexanikasının saxlanma qanunlarının və reoloji münasibətlərinin köməyi ilə tənliklər şəklində vermək olar. Lakin gözlə görünən çox kiçik həcmdə hissəciklərin sayı o qədər çoxdur ki, onların hər biri üçün tənliklər yazıb və bu tənliklərdə iştirak edən qüvvələri hətta təqribi qiymətləndirmək qeyri-mümkündür. Məsələn,  $1\text{cm}^3$  qaz həcmində  $2,7 \cdot 10^{19}$  sayda qaz,  $1\text{cm}^3$  mayədə isə  $\approx 10^{22}$  sayda və daha çox maye molekulları var. Ona görə də verilmiş həcmdə maye (qaz) mühitə bütöv mühit kimi baxılır, daha doğrusu, mayenin bu həcmdə kəsilməz paylanması qəbul olunur.

Eyni zamanda, fərz edilir ki, mayeni təsvir edən parametrlər (sıxlıq, təzyiq, temperatur, sür'ət vektoru və s.) zamanın və məkanın həm kəsilməz, həm də kəsilməz diferensiallanan funksiyalarıdır. Bu fərziyyələr mayenin (qazın) saxlanma və reoloji qanunlarını diferensial tənliklər vasitəsi ilə təsvir etməyə imkan verir. Diferensial tənliklərin sərhəd və başlanğıc şərtləri daxilindəki həlli praktika və təcrübədən alınmış nəticələrlə müqayisə edilmiş, onların adekvat

olduğu göstərilmişdir. Buradan belə nəticəyə gəlmək olar ki, fiziki və təbiət hadisələrinin riyazi modelləşdirilməsi indiki və gələcək dövrlərdə də nəzəri tədqiqatların əsasını təşkil edəcək, elm və texnikanın inkişafı üçün mühüm istiqamətlərdən biri olacaqdır.

Təbiətdə bircins maye və qazlara az rast gəlmək olur. Adətən bu mühitlər çoxfazlı, çoxkomponentli sistem şəklində olur. Məsələn, boruda axan su, neft və qaz ayrılıqda hər biri bir fazadır. Lakin qaz, su və neft fazasında həll olunaraq özünü onların komponenti kimi apara bilər. Bizi əhatə edən atmosferdə çoxfazlı və çox komponentli mühitdir. Belə mühitlərdə mexaniki prosesləri öyrənmək üçün çoxfazlı mühit mexanikası elmi yaranmış və hazırda praktiki məsələlərin həllində geniş tətbiq olunur. Çoxfazlı mühitlərdə, xüsusi halda mayelərdə fazaların kinematik və dinamik parametrləri bir-birindən ciddi fərqlənirlər və fazalararası kütlə, impuls, enerji və s. mübadiləsi baş verir.

Bəzi mühitlər maye və bərk hissəciklərdən təşkil olunur. Əgər qatışıqda maye fazanın kəsilməz və bərk hissəciklərin diskret paylanması qəbul edilərsə və maye həcmi bərk hissəciklərin tutduğu həcmdən ciddi şəkildə böyük olarsa, belə mühitlərə suspenziyalı mühitlər deyilir.

Çoxfazlı mühitlərin saxlanma qanunları, reoloji və termodinamik hal tənlikləri və s. makrokoordinat sistemində diferensial tənliklərin köməyi ilə təsvir edilir. Makrosistem dedikdə elə məştblı koordinat sistemi seçilir ki, onun elementar koordinatları həm suspenziyalı mühitin iki ən yaxın hissəciyi arasındakı məsafədən çox böyük olsun, həm də bu sistemin elementar həcmində hər bir fazada kifayət qədər çox hissəciklər iştirak etsin. Qeyd edilən şərtlər mikrosistemdəki diskret fazanın makrosistemdə kəsilməz faza ilə

əvəz edilməsinə imkan verir.

Müəllif kitabın yığılmasında və çap olunmasında Bakı Dövlət Universitetinin "Kompyüter mərkəzinin" rəhbəri Q.Atayevə və texniki işçi Ş.Mehrəliyevaya öz minnətdarlığımı bildirir.

# I FƏSİL

## HİDRODİNAMİKA

### §1.1. Maye mexanikasının əsas anlayışları

Mayelərin (qazların) hərəkəti elastiki bərk cisimlərin hərəkətindən aşağıdakı xüsusiyyətləri ilə fərqlənir:

1. Kiçik qüvvələrin tə'siri altında mayenin hərəkəti zamanı onun hissəciklərinin yerdəyişməsi kiçik olmaya bilər.
2. Mayenin hərəkət xüsusiyyətlərinə onun daxili sürtünməsi (özlük) çox böyük tə'sir edir.

Əvvəlcə ideal mayelərin xüsusiyyətlərini öyrənək. İdeal mayelər o mayelərə deyilir ki, onun hərəkəti zamanı daxili sürtünmə qüvvəsi çox kiçikdir, daha doğrusu, nəzərə alınmır. Bu zaman mexaniki enerji istiliyə çevrilmir. Deməli, mayenin müxtəlif həcmələri arasında istilik mübadiləsi getmir və bu, o deməkdir ki, proses sabit entropiyada baş verir və mayenin gərginlik vəziyyətini ancaq bir skalyar kəmiyyətlə -  $P$  təzyiqlə müəyyən etmək olar.

Özlü mayenin hissəcikləri biri o birisinə nisbətən hərəkət edərsə, onda onlar arasında sürtünmə qüvvəsi meydana çıxır və mexaniki enerji istiliyə çevrilir. Burada ideal mayelərdən fərqli olaraq toxunan gərginliklər sıfırdan fərqlidirlər və maye hissəciyinin sükunətdə olan bərk cismin səthindəki tangensial sür'əti sıfıra bərabərdir. Digər tərəfdən göstərəcəyik ki, potensiallı qüvvələr sahəsində potensiallı hərəkət edən ideal mayədə heç vaxt burulğanlar əmələ gəlmir və mayenin potensiallı hərəkəti həmişə potensiallı qalır. Ancaq özlü mayelərdə isə burulğanların yaranması və yox olması müşahidə olunur.

Əgər mayeni xarakterizə edən bütün parametrlər: maye hissəciklərinin sür'əti, mayenin özlük əmsalı, təzyiqi, sıxlığı, temperaturu və s. mə'lumdursa, onda mayenin hərəkəti

kətini tamamilə tə'yin etmək olar.

Mayenin hərəkəti iki üsulla - Laqranj və Eyler üsulları ilə verilir. Laqranj üsulunda mayenin hər bir hissəciyinin kinematik hərəkət tənlikləri verilir

$$x_i = x_i(t, \xi_1, \xi_2, \xi_3), \quad i = 1, 2, 3 \quad (1.1)$$

Bura daxil olan  $\xi_i$  dəyişənləri hərəkət zamanı qiymətlərini sabit saxlamaqla yanaşı, hərəkəti (1.1) tənliyi ilə təsvir olunan maye hissəciyinin seçilib götürülməsini tə'min edir. Çox hallarda  $\xi_i$  dəyişənlərini zamanın başlanğıc anına uyğun olan hissəciklərin (nöqtələrin) dekart və ya əyrixətli koordinatları ilə əvəz edirlər:  $\xi_i = x_i(\xi_1, \xi_2, \xi_3, t_0)$ . Eyni zamanda, bütün kəmiyyətlər:  $\bar{v}_i(\xi_1, \xi_2, \xi_3, t)$ ,  $P_i(\xi_1, \xi_2, \xi_3, t)$  və s. zamanın və  $\xi_i$  dəyişənlərinin funksiyalarıdır. Beləliklə, hərəkətin Laqranj təsvirində maye hissəciklərinin bir hissəsi qeyd olunur və zamanın hər bir anında onların fəzada vəziyyəti, sür'ətləri, təcilləri və s. öyrənilir. Buna misal olaraq bir hissəsi rənglənmiş suyun fəzada hərəkətinin izlənilməsini göstərmək olar.

Hərəkətin Eyler təsvirində mayeni xarakterizə edən kəmiyyətlər zamanın və koordinatların funksiyaları şəklində verilir. Məsələn, onlardan biri  $P(x_1, x_2, x_3, t)$  təzyiqli Eyler dəyişənlərində verilərsə və zaman qeyd edilərsə, onda hissəciklərin koordinatlarını dəyişdirməklə fəzanın hər bir nöqtəsində təzyiqli paylanması tapılır. Əgər fəzada hər hansı hissəciyin koordinatları qeyd edilərsə, onda bu nöqtədə təzyiqlin zamana görə dəyişməsi tə'yin edilir. Ancaq hərəkətin Eyler təsvirində maye hissəciyinin hər hansı zaman anında harada olması (hissəciyin koordinatlarını) və fəzada necə yerdəyişməsi haqqında mə'lumat vermək olmur.

Laqranj və Eyler təsvirləri arasında əlaqə olmasına baxmayaraq, bu əlaqəni ümumi halda vermək olduqca çətinidir. Hərəkətin Laqranj təsvirində maye hissəciklərinin sür'ətləri və tə'cilləri diskret nöqtələr sistemində olduğu kimi hesablanır:

$$v_1 = u = \frac{dx_1}{dt} = \dot{x}_1(t, \xi_1, \xi_2, \xi_3),$$

$$v_2 = v = \frac{dx_2}{dt} = \dot{x}_2(t, \xi_1, \xi_2, \xi_3), \quad (1.2)$$

$$v_3 = w = \frac{dx_3}{dt} = \dot{x}_3(t, \xi_1, \xi_2, \xi_3),$$

$$\dot{v}_1 = \dot{u} = \frac{d^2x_1}{dt^2} = \ddot{x}_1(t, \xi_1, \xi_2, \xi_3),$$

$$\dot{v}_2 = \dot{v} = \frac{d^2x_2}{dt^2} = \ddot{x}_2(t, \xi_1, \xi_2, \xi_3), \quad (1.3)$$

$$\dot{v}_3 = \dot{w} = \frac{d^2x_3}{dt^2} = \ddot{x}_3(t, \xi_1, \xi_2, \xi_3),$$

**Zamana görə substansional (tam) və lokal (məhəlli) törəmə.** Maye hissəciyinin təcilini Eyler təsvirində tapaq. Tutaq ki,  $t$  anında  $\{x_k\} (k=1,2,3)$  nöqtəsində olan hissəcik  $t + \Delta t$  müddətində  $\{x_k + \Delta x_k$  nöqtəsinə yerini dəyişib. Onda hissəciyin  $i$ -ci ( $i=1,2,3$ ) komponentinin tə'cili

$$w_i = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{v_i(x_k + \Delta x_k, t + \Delta t) - v_i(x_k, t)}{\Delta t}, \quad (1.4)$$

ifadəsi ilə tapılır.  $v_i(x_k + \Delta x_k, t + \Delta t)$  funksiyasını Teylor sırasına ayıraq:

$$v_i(x_k + \Delta x_k, t + \Delta t) = v_i(x_k, t) + \frac{\partial v_i}{\partial x_k} \Delta x_k + \frac{\partial v_i}{\partial t} \Delta t + \dots \quad (1.5)$$



Nəzərə alsaq ki,  $v_k = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x_k}{\Delta t}$  və (1.5) ayrılışını (1.4)

münasibətində yazsaq, taparıq:

$$w_i = \frac{dv_i}{dt} = \frac{\partial v_i}{\partial t} + v_k \frac{\partial v_i}{\partial x_k}; v_k \frac{\partial}{\partial x_k} = (\bar{v} \cdot \bar{\nabla}),$$

$$\bar{w} = \frac{d\bar{v}}{dt} = \frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + (\bar{v} \cdot \bar{\nabla})\bar{v}. \quad (1.6)$$

Burada  $\frac{d\bar{v}}{dt}$  ifadəsi substansional (tam),  $\frac{\partial \bar{v}}{\partial t}$  -isə lokal (məhəlli) törəmə,  $(\bar{v} \cdot \bar{\nabla})\bar{v}$  -konvektiv hədd adlanır. Qeyd edək ki, bərabərliyin hər iki tərəfində eyni indeks iştirak edərsə, o indeksə görə toplama getmir. Əgər indeks bərabərliyin bir tərəfində iştirak edərsə, onda ona görə toplama gedir. Məsələn, (1.6) ifadəsində  $k$ -ya görə toplama gedir.

Digər tərəfdən aşağıdakı münasibətlərdən geniş istifadə olunacaqdır.

a) Eyni maye hissəciklərindən təşkil olunmuş və maye ilə birlikdə hərəkət edən  $V$  həcmi üzrə ixtiyari  $f$  funksiyasının ( $f$  vektor və tenzor da ola bilər) inteqralından zamana görə tam törəmə belə bir düsturla hesablanır

$$\frac{d}{dt} \int_V f dV = \int_V \left( \frac{\partial f}{\partial t} + \text{div} f\bar{v} \right) dV = \int_V \left( \frac{\partial f}{\partial t} + \nabla f\bar{v} \right) dV, \quad (1.7)$$

$$\text{div} \bar{v} = \nabla \bar{v} = \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} + \frac{\partial v_3}{\partial x_3}. \quad (1.8)$$

b) Qauss-Ostroqradski teoreminə əsasən həm ixtiyari  $V$  həcmində və onun  $S$  səthində kəsilməz, həm də birinci tərtib kəsilməz törəmələri olan ixtiyari  $\bar{f}$  vektoru (tenzoru) üçün bu düstur doğrudur:

$$\int_S (\vec{f} \cdot \vec{n}) ds = \int_V \nabla \vec{f} dV \quad (1.9)$$

Burada  $\vec{n}$  –  $S$  səthinin xarici normalıdır. (1.9) düsturu ixtiyari ölçülü fəza və əyrixətli koordinat sistemi üçün doğrudur.

## §1.2. Hidrodinamikanın tənliklər sistemi.

### Kəsilməzlik tənliyi

Hidrodinamikanın fundamental tənliklərindən biri kəsilməzlik tənliyidir və ya maddənin saxlanması qanunudur. Hər zaman (həmişə) eyni maye hissəciklərini özündə saxlayan həcmdə mayenin kütləsi sabitdir (dəyişməzdir). Bu qanunu riyazi olaraq belə yazmaq olar:

$$\int_V dm = \text{const} \quad \text{və ya} \quad dm = \rho dV, \quad \frac{d}{dt} \int_V \rho dV = 0 \quad (1.10)$$

(1.8) düsturuna əsasən yazsaq bilirik:

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho dV = \int_V \left( \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \rho \vec{v} \right) dV = 0 \quad (1.11)$$

(1.11) münasibəti ixtiyari maye həcmi üçün doğrudur və ona görə də inteqral altı ifadə sıfıra bərabər olmalıdır:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \rho \vec{v} = 0 \quad \text{və ya} \quad \frac{d\rho}{dt} + \rho \nabla \vec{v} = 0. \quad (1.12)$$

Qaus-Ostroqradski teoreminə əsasən (1.11)-dən alırıq:

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho dV = - \int_V \nabla \rho \vec{v} dV = - \int_S \rho (\vec{v} \cdot \vec{n}) dS \quad (1.13)$$

Beləliklə alırıq ki, qeyd olunmuş  $V$  həcmi içərisindəki maye kütləsinin dəyişmə sür'əti onun  $S$  səthi vasitəsilə vahid zamanda çıxan maye kütləsinə bərabərdir. Bu qanundan istifadə edərək, tərs çevirmə vasitəsilə kəsilməzlik

tənliyini almaq olar. Əgər vahid həcmdəki molekulların və ya atomların sayı  $n = \frac{N}{V}$  və  $N$  individual həcmdə sabitdirsə, onda bu miqdar üçün kəsilməzlik tənliyi aşağıdakı şəkildə olar:

$$\frac{dn}{dt} + n\nabla\bar{v} = 0. \quad (1.14)$$

### §1.3. İdeal mayelərin hərəkət tənlikləri. Eyler tənlikləri

İndi ideal mayenin hərəkət tənliyini çıxaraq. Bunun üçün Nyutonun II qanununu tətbiq edək. Hər hansı maye həcmnin hərəkət miqdarından zamana görə alınmış törəmə bu həcmə tə'sir edən qüvvələrin cəminə bərabərdir.

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho \bar{v} dV = \bar{F} + \bar{F}_S. \quad (1.15)$$

Burada  $\bar{F} = \int_V \rho \bar{f} dV$  -xarici həcmi qüvvədir,  $\bar{f}$  -vahid kütləyə tə'sir edən xarici qüvvədir.  $\bar{F}_S$  - ətraf mühitin  $V$  həcminə onun  $S$  səthindən tə'sir edən qüvvəsidir.

İdeal mayelərdə səthi qüvvə ancaq  $P$  təzyiqli qüvvəsi ilə tə'yin olunur və bu qüvvə səthin  $\bar{n}$  normal istiqamətinin əksinə yönəlir.  $\bar{F}_S = - \int_S P \bar{n} ds$ ,  $\bar{n}$  -  $S$  səthinin xarici normalıdır.

lıdır,

$$\bar{F}_S = - \int_S P \bar{n} ds = - \int_V \nabla P dV. \quad (1.16)$$

İndi (1.15) münasibətini (1.8) və (1.16) düsturlarının köməyi ilə çevirək:

$$\int_V \left[ \frac{d\rho\bar{v}}{dt} + \rho(\bar{v} \cdot \bar{\nabla})\bar{v} \right] dV = \int_V (-\bar{\nabla}P + \rho\bar{f}) dV, \quad (1.17)$$

Buradan ixtiyari  $V$  həcmi üçün alırıq:

$$\frac{d(\rho\bar{v})}{dt} + \rho(\bar{v} \cdot \bar{\nabla})\bar{v} = -\bar{\nabla}P + \rho\bar{f},$$

və ya

$$\rho \frac{d\bar{v}}{dt} + \bar{v} \left( \frac{d\rho}{dt} + \rho \bar{\nabla} \bar{v} \right) = -\bar{\nabla}P + \rho\bar{f}, \quad (1.18)$$

(1.12) kəsilməzlik tənliyindən istifadə etsək, (1.18) sadələşər:

$$\frac{d\bar{v}}{dt} = \frac{\partial\bar{v}}{\partial t} + (\bar{v} \cdot \bar{\nabla})\bar{v} = -\frac{1}{\rho} \bar{\nabla}P + \bar{f}. \quad (1.19)$$

Xüsusi halda  $\bar{f}$  aşağıdakı qüvvələrdən biri ola bilər:

1.  $\bar{f} = \bar{g}$  -ağırliq qüvvəsi,
2.  $\bar{f} = \Omega^2 \bar{r}$  -mərkəzəqaçma qüvvəsi,
3.  $\bar{f} = -2(\bar{\Omega} \times \bar{v})$  -Kariolis qüvvəsi,
4.  $\bar{f} = -\bar{\nabla}U$  -potensiallı qüvvədir.

(1.19) tənlikləri ideal mayelərin hərəkət tənliyi və ya Eylər tənlikləri adlanır. (1.19) vektorial tənliyini koordinat oxları üzərində proyeksiyalasaq, alırıq:

$$\frac{\partial v_i}{\partial t} + v_j \nabla_j v_i = -\frac{1}{\rho} \nabla_i P + f_i. \quad (1.20)$$

## §1.4. Hal tənliyi

(1.12) kəsilməzlik tənliyi və (1.20) Eylər tənlikləri dörd skalyar tənlikdən ibarət sistemi əmələ gətirir. Ancaq sistemdə məchulların sayı beş skalyar kəmiyyətdir:  $\rho, \bar{v} \{v_x, v_y, v_z\}, P$ . Bu tənliklər sisteminin qapalı olması üçün

termodinamikanın hal tənliyindən istifadə edilir. Tutaq ki, təzyiq  $P$  sıxlıq və entropiyanın funksiyasıdır

$$P = P(\rho, s). \quad (1.21)$$

Burada entropiya verilən maye hissəciyi üçün sabitdir. Əgər  $s$  sabit olarsa, onda (1.21) hal tənliyindən alarıq:

$$\frac{dP}{dt} = \left( \frac{\partial P}{\partial \rho} \right)_s \frac{d\rho}{dt}, \quad \left( \frac{\partial P}{\partial \rho} \right)_{S=const} \equiv c^2, \quad \frac{dP}{dt} = c^2 \frac{d\rho}{dt}, \quad (1.22)$$

$c$ -səsin sükunətdə olan mühitdə sür'ətidir və o ancaq  $P$  və  $\rho$ -dan asılıdır. Belə mühitlərə **barotrop mühitlər** deyilir.

Xüsusi halda adiobatik prosedə ideal qazın hal tənliyi belədir:  $PV^\gamma = const, \gamma = C_p / C_v, C_p$  -qazın sabit təzyiqdə,  $C_v$  - isə qazın sabit həcmdə istilik tutumudur.

Zəif sıxılan mayelər üçün hal tənliyi Huk qanununa tabe olur.

$$\frac{d\rho}{\rho} = \frac{dP}{K}, \quad (1.23)$$

burada  $K$  -mayenin həcmi sıxılma moduludur.

### §1.5. Hidrostatika (tarazlıq halları)

Əgər  $\bar{v} = 0$  və xarici qüvvə  $\bar{f} = -\bar{\nabla}U$  olarsa, onda (1.19)-dan

$$\bar{\nabla}P = \rho \bar{f} = -\rho \bar{\nabla}U \quad (1.24)$$

alırıq. Bu ifadənin hər tərəfinə rotorla tə'sir edək

$$\text{rot} \bar{\nabla}P = -\text{rot}(\rho \bar{\nabla}U) = -\bar{\nabla}\rho \times \bar{\nabla}U - \rho \text{rot} \bar{\nabla}U \quad (1.25)$$

Vektor analizindən mə'lumdur ki,  $\text{rot} \bar{\nabla}U = 0$ . Onda (1.25) düsturundan çıxır ki,

$$\bar{\nabla}\rho \times \bar{\nabla}U = 0, \quad \bar{\nabla}\rho \times \|\bar{\nabla}U \quad (1.26)$$

olmalıdır. Mayenin potensiallı qüvvə sahəsində sükunətdə

olması üçün (1.26) zəruri şərtidir. Ağırliq qüvvəsi sahəsində mayədə təzyiq paylanmasını tapaq. Bu halda (1.24) tənliyini koordinat oxları üzrə proyeksiyalayaq:

$$\frac{\partial P}{\partial x} = 0; \quad \frac{\partial P}{\partial y} = 0; \quad \frac{\partial P}{\partial z} = -\rho g \quad (1.27)$$

Z oxu ağırliq qüvvəsi istiqamətinin əksinə yönəlir. Tutaq ki, maye sıxılmayıdır və  $z = z_0$  olduqda,  $P = P_0$  olur. Bu şərt daxilində (1.27) tənliyinin həlli  $z$ -in xətti funksiyası olacaqdır:

$$P = -\rho g(z - z_0) + P_0. \quad (1.28)$$

Atmosfer qazını ideal qaz kimi qəbul etsək, onda hal tənliyini sadə reoloji qanunla vermək olar

$$P = \left( \frac{R}{\mu} \right) \rho T \quad (1.29)$$

Burada  $R$  universal qaz sabiti,  $\mu$ -isə qazın molekulyar kütləsidir. (1.29)-u (1.27) tarazlıq tənliyində yerinə yazaq:

$$\frac{RT}{\mu} \frac{d\rho}{dz} = -\rho g, \quad \frac{d\rho}{\rho} = -\frac{g\mu}{RT} dz. \quad (1.30)$$

Əgər koordinat başlanğıcında  $z = 0$ ,  $\rho = \rho_0$  olarsa, onda

$$\rho = \rho_0 \exp\left(-\frac{\mu g}{RT} z\right) \quad (1.31)$$

(1.31) ifadəsi sıxlığın şaquli ox boyunca paylanmasını təsvir edir. İndi müəyyən edək ki, hansı şərtlər daxilində ağırliq qüvvəsi sahəsində tarazlıqda olan maye dayanıqlıdır.

## §1.6. Hidrostatik dayanıqlıq şərti. Vyasal tezliyi

İndi aydınlaşdıraraq ki, hansı şərtlər daxilində ağırlıq qüvvəsi sahəsində tarazlıqda olan maye dayanıqlı olacaqdır. Termodinamikanın hal tənliyini

$$P = P(\rho, s) \quad (1.32)$$

şəklində götürək. Onda (1.27)-dən alarıq:

$$\frac{dP}{dz} = \left( \frac{\partial P}{\partial \rho} \right)_s \frac{d\rho}{dz} + \left( \frac{\partial P}{\partial s} \right)_\rho \frac{ds}{dz} = c^2 \frac{d\rho}{dz} + Y \frac{ds}{dz} = -\rho g, \quad (1.33)$$

$$Y = \left( \frac{\partial P}{\partial s} \right)_\rho, \quad c^2 = \left( \frac{\partial P}{\partial \rho} \right)_s$$

$z$ -nöqtəsində olan maye hissəciyinin həcmi  $V_0$  ilə işarə edək. Mə'lumdur ki, həmin hissəciyə  $g\rho(z)V_0$  ağırlıq qüvvəsi və bu qüvvəyə bərabər olan əks istiqamətdə Arximed qüvvəsi təsir edəcək. Əgər bu hissəciyin şaquli istiqamətdə  $\xi$  qədər yerini dəyişsək, onda onun həcmi sıxılma nəticəsində  $\Delta V$  qədər dəyişər. Lakin bu zaman hissəciyin kütlə və entropiyası dəyişməyəcək. Bu hissəciyin yerdəyişməsində ona təsir edən əlavə qüvvəni təyin edək:

$$F = -g\rho(z)V_0 + g\rho(z + \xi)(V_0 + \Delta V) \quad (1.34)$$

Sıxlığı  $z$ -nöqtəsində Teylor sırasına ayırıb,

$$\rho(z + \xi) = \rho(z) + \frac{d\rho}{dz} \xi + \dots$$

onu (1.34) ifadəsində yerinə yazaraq. Alınmış ifadədə  $\xi$  və  $\Delta V$ -yə görə ancaq xətti hədləri saxlayaraq

$$F = g\rho(z)V_0 \left[ \frac{1}{\rho(z)} \cdot \frac{d\rho}{dz} \cdot \xi + \frac{\Delta V}{V_0} \right] \quad (1.35)$$

Digər tərəfdən  $s = const$ ,  $m = \rho(z)V_0 = const$  şərtlərinə əsa-

sən (1.22) hal tənliyində çevirmələr apararaq

$$\Delta P = c^2 \Delta \rho = c^2 \Delta(m/V) = c^2 \rho(z) V_0 \Delta(1/V),$$

$$\Delta P = c^2 \rho(z) V_0 \Delta(1/V) \approx -c^2 \rho(z) \frac{\Delta V}{V_0}. \quad (1.36)$$

Buradan

$$\frac{\Delta V}{V_0} = -\frac{\Delta P}{c^2 \rho(z)}. \quad (1.37)$$

Digər tərəfdən

$$\Delta P = P - P_0 = \frac{dP}{dz} \xi = -\rho(z) g \xi$$

ifadəsini (1.37)-də nəzərə alsaq, taparıq:

$$\frac{\Delta V}{V_0} = \left( \frac{g}{c^2} \right) \xi; \quad (1.38)$$

(1.38)-in ifadəsini (1.35)-də yerinə yazaq

$$F = g \rho(z) V_0 \left( \frac{1}{\rho} \cdot \frac{d\rho}{dz} + \frac{g}{c^2} \right) \xi = -m N^2 \xi \quad (1.39)$$

Burada

$$N^2 = -g \left( \frac{1}{\rho} \cdot \frac{d\rho}{dz} + \frac{g}{c^2} \right) \quad (1.40)$$

-Vyasal tezliyi adlanır.  $N^2 \geq 0$  və ya

$$\left( \frac{1}{\rho} \cdot \frac{d\rho}{dz} + \frac{g}{c^2} \right) \leq 0, \quad \frac{d\rho}{dz} \leq -\frac{g\rho}{c^2}$$

bərabərsizliyinin ödənilməsi mayenin tarazlıq halının dayanıqlı olması üçün kafi şərtidir, daha doğrusu, hündürlük artıqca, sıxlığın böyük sür'ətlə azalması kifayətdir.

Əgər  $\frac{d\rho}{dz} > -\frac{g\rho}{c^2}$  olarsa, onda mayedə tarazlıq halı

dayanıqsız olur və konvektiv hərəkət baş verir. Digər tərəfdən (1.33) ifadəsindən istifadə etsək:



$$\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dz} = -g/c^2 - \frac{Y}{\rho c^2} \frac{ds}{dz} \quad (1.41)$$

münasibətini alarıq. Burada Vyasal ədədi

$$N^2 = \frac{g}{\rho c^2} - Y \frac{ds}{dz}$$

ifadəsinə bərabərdir. Buradan görünür ki,  $\frac{ds}{dz} = 0$  olarsa, onda mayenin tarazlıq halı haqqında heç nə demək olmur.

### §1.7 Bernulli teoremi

Bu teorem ideal barotrop mayenin potensiallı qüvvələr sahəsində qərarlaşmış hərəkəti üçün doğrudur

$$\begin{cases} P = P(\rho), \\ \bar{v} \neq \bar{v}(t) \Rightarrow (\partial \bar{v} / \partial t) = 0, \quad \bar{f} = -\bar{\nabla} U \end{cases} \quad (1.42)$$

Vahid maye kütləsi üçün termodinamik kəmiyyət olan ( $W$ ) entalpiya daxil edək

$$W = \varepsilon + PV = \varepsilon + P/\rho; \quad V = \frac{1}{\rho}, \quad (1.43)$$

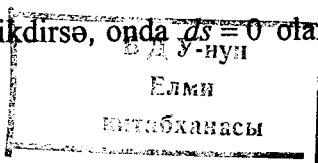
və ya

$$dW = d\varepsilon + \frac{dP}{\rho} - \frac{P}{\rho^2} \cdot d\rho. \quad (1.44)$$

Digər tərəfdən, vahid maye kütləsinin daxili enerjisi  $\varepsilon$ -nin diferensialı  $d\varepsilon = Tds - PdV$  ifadəsi ilə təyin olunur

$$d\varepsilon = Tds + \frac{P}{\rho^2} d\rho. \quad (1.45)$$

Əgər proses izentropikdirsə, onda  $ds = 0$  olar və (1.45) ifadəsi sadələşər



$$d\varepsilon = \frac{P}{\rho^2} d\rho. \quad (1.46)$$

(1.44) və (1.46) ifadələrini birləşdirək

$$dW = \frac{dP}{\rho} \Rightarrow \bar{\nabla} W = \frac{1}{\rho} \bar{\nabla} P. \quad (1.47)$$

(1.42) və (1.47) ifadələrini (1.19) Eyler tənliyində nəzərə alaraq

$$(\bar{v} \cdot \bar{\nabla}) \bar{v} = -\bar{\nabla} W - \bar{\nabla} U. \quad (1.48)$$

Mə'lum vektor eyniliyindən istifadə etsək,

$$(\bar{v} \cdot \bar{\nabla}) \bar{v} = \bar{\nabla} \left( \frac{v^2}{2} \right) - \bar{v} \times \text{rot} \bar{v},$$

(1.48) tənliyi bu şəkllə düşər

$$\bar{\nabla} \left( \frac{v^2}{2} + W + U \right) = \bar{v} \times \text{rot} \bar{v}. \quad (1.49)$$

Hər bir nöqtədə toxunanı sür'ət vektoru istiqaməti ilə üst-üstə düşən xəttə cərəyan xətti deyilir. Qərarlaşmış hərəkətdə cərəyan xətti və maye hissəciyinin trayektoriyası üst-üstə düşür. Əgər  $d\bar{e} \approx \bar{v} dt$ ,  $(\bar{v} \times \text{rot} \bar{v}) \perp \bar{v}$ ,  $(\bar{v} \times \text{rot} \bar{v}) \perp d\bar{e}$  olduğunu nəzərə alaraq, (1.49) tənliyini hər hansı cərəyan xəttinin  $d\bar{e}$  elementi üzrə proyeksiyalasaq, onda

$$\frac{d}{de} \left( \frac{v^2}{2} + W + U \right) = 0, \quad \frac{v^2}{2} + W + U = c_e \quad (1.50)$$

alırıq. (1.50)-nin ikinci ifadəsi hər bir cərəyan xətti üzrə sabitdir. Bu ifadə (1.19) Eyler tənliyinin birinci inteqralı olub, **Bernuli düsturu adlanır.**

1) Əgər  $\rho = \text{const}$  olarsa, onda  $\bar{\nabla} W = \frac{1}{\rho} \bar{\nabla} P = \bar{\nabla} \frac{P}{\rho}$ ,  $W = \frac{P}{\rho}$

olar və (1.50) düsturu sadələşər

$$\frac{v^2}{2} + \frac{P}{\rho} + U = c_e . \quad (1.51)$$

2) Əgər mayenin hərəkəti burulğansızdırsa, onda  $rot \bar{v} = 0$  olar və mayenin bütün nöqtələri üçün  $c_e = const$ -dir.

$$\frac{v^2}{2} + W + U = const. \quad (1.52)$$

**Bernulli teoreminin bir sıra tətbiqləri:** a) Sıxılmayan mayenin dəyişən en kəsikli üfüqi boruda hərəkətinə baxaq.  $\rho_1 = \rho_2 = \rho = const$ ,  $U_1 = U_2$  qəbul etsək və (1.51) ifadələrinin qiymətlərini  $s_1$  və  $s_2$  qeyd olunmuş en kəsiyindən keçən eyni cərəyan xəttləri üzərində bərabər olduqlarını nəzərə alsaq, yaza bilirik

$$\frac{P_1}{\rho} + \frac{v_1^2}{2} = \frac{P_2}{\rho} + \frac{v_2^2}{2}. \quad (1.53)$$

Digər tərəfdən aydındır ki,

$$v_1 s_1 = v_2 s_2, \quad v_2 = \frac{v_1 s_1}{s_2}. \quad (1.54)$$

(1.53) və (1.54) münasibətlərindən alırıq

$$v_1 = \left[ \frac{2(P_1 - P_2)}{\rho \left( \frac{s_1^2}{s_2^2} - 1 \right)} \right]^{\frac{1}{2}}. \quad (1.55)$$

Əgər  $P_1 - P_2$  təzyiq düşküsu və  $s_1, s_2$  kəsiklərinin sahəsi mə'lumdursa, onda  $v_1$  və  $v_2$  sür'ətlərini tapmaq olur.

b) Bir-birinə yaxın olan iki silindirin oxları boyunca mayenin axınına baxaq. Silindirlər arasında mayenin sür'əti böyük olduğundan, Bernulli teoreminə görə orada təzyiq paylanması azalır və nəticədə silindirlər bir-birini cəzb

edirlər.

s) En kəsiyi böyük olan qabın  $z_2$  aşağı hissəsindən kiçik deşik açsaq, çıxan mayenin sür'ətini tə'yin etmək olar:

$$v_2^2 / 2 + gz_2 = gz_1, v_2 = \sqrt{2g(z_1 - z_2)}. \quad (1.56)$$

İxtiyari qapalı konturdan keçən cərəyan xətlərinin əmələ gətirdiyi boruya cərəyan borusu deyilir.

### § 1.8 Qərarlaşmış potensiallı qüvvələr sahəsində enerjinin saxlanması qanunu

Mayenin qərarlaşmış potensiallı qüvvələr sahəsində hərəkəti zamanı enerjinin saxlanması qanununu yazaq. Vahid kütləli mayenin tam enerjisi onun kinetik, potensial və

daxili enerjilərinin cəminə bərabərdir  $E = \frac{v^2}{2} + U + \varepsilon$ .

Vahid həcmli mayenin enerjisi (enerji sıxlığı) əvvəlki ifadəyə uyğun olaraq belə tə'yin edilir:

$$E = \frac{1}{2} \rho \cdot v^2 + \rho U + \rho \varepsilon. \quad (1.57)$$

$\frac{\partial U}{\partial t} \equiv 0$  şərti daxilində enerji sıxlığının zamana görə dəyişməsini tapan:

$$\frac{\partial E}{\partial t} = \left( \frac{1}{2} v^2 + U \right) \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \bar{v} \cdot \frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + \frac{\partial \rho \varepsilon}{\partial t}. \quad (1.58)$$

(1.12) kəsilməzlik və (1.19) Eyler tənliyindən istifadə edərək (1.58) münasibətini çevirək:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} &= -\text{div} \rho \bar{v} = -\nabla(\rho \bar{v}), \\ \rho \bar{v} \cdot \frac{\partial \bar{v}}{\partial t} &= -\rho \bar{v} \cdot \frac{\nabla P}{\rho} - \rho \bar{v} \cdot \nabla U - \rho \bar{v} \cdot (\bar{v} \cdot \nabla) \bar{v} \end{aligned} \quad (1.59)$$

$$\bar{\nabla} W = \frac{\bar{\nabla} P}{\rho}; \quad -\rho \bar{v} \cdot (\bar{v} \cdot \bar{\nabla}) \bar{v} = -\rho \bar{v} \cdot \bar{\nabla} \left( \frac{v^2}{2} \right).$$

(1.59) ifadələrini (1.58) düsturunda yerinə yazaraq:

$$\frac{\partial E}{\partial t} = - \left( \frac{1}{2} v^2 + U \right) \nabla(\rho \bar{v}) - \rho \bar{v} \nabla \left( \frac{v^2}{2} + U + W \right) + \frac{\partial(\rho \varepsilon)}{\partial t}. \quad (1.60)$$

İndi daxili enerji sıxlığından zamana görə lokal törəmə əlaqə (1.43), (1.45) münasibətlərindən istifadə edək:

$$\frac{\partial(\rho \varepsilon)}{\partial t} = W \frac{\partial \rho}{\partial t} = -W \nabla(\rho \bar{v}). \quad (1.61)$$

(1.61) ifadəsini (1.60)-da nəzərə alsaq, o aşağıdakı şəkə çevrilər:

$$\frac{\partial E}{\partial t} = - \nabla \left[ \rho \bar{v} \left( \frac{v^2}{2} + U + W \right) \right] \quad (1.62)$$

(1.57)-dən  $E$ -nin ifadəsini (1.62)-də yerinə yazaraq:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\rho}{2} v^2 + \rho U + \rho \varepsilon \right) = - \nabla \left[ \rho \bar{v} \left( \frac{v^2}{2} + U + W \right) \right]. \quad (1.63)$$

(1.63) münasibətini ixtiyari qeyd olunmuş  $V$  həcmi üzrə inteqrallasaq və Gauss-Ostroqradski teoremindən istifadə etsək alarıq:

$$\begin{aligned} \int_v \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\rho}{2} v^2 + \rho U + \rho \varepsilon \right) dV &= - \int_v \nabla \left[ \rho \bar{v} \left( \frac{v^2}{2} + U + W \right) \right] dV = \\ &= - \int_s \rho \left( \frac{v^2}{2} + U + W \right) (\bar{v} \cdot \bar{n}) ds; \end{aligned} \quad (1.64)$$

və ya

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_v \left( \rho \frac{v^2}{2} + \rho U + \rho \varepsilon \right) dv = - \int_s \rho \left( \frac{v^2}{2} + U + W \right) v_n ds. \quad (1.65)$$

Sol tərəfdəki ifadə  $V$  həcmində olan mayenin ener-

jisinin vahid zamanda dəyişməsinə, sağdakı ifadə isə onun  $S$  səthindən keçən enerji selini (axını) verir:

$$\bar{N} = \rho \bar{v} \left( \frac{v^2}{2} + U + W \right) = \rho \bar{v} \left( \frac{p^2}{2} + U + \varepsilon + \frac{P}{\rho} \right). \quad (1.66)$$

(1.66) ifadəsi enerji selinin sıxlıq vektorunu verir və görün-  
düyü kimi həmin ifadə mayenin tam enerjisinə  $\frac{P}{\rho}$  həddi

əlavə olunmaqla alınır. Bu o deməkdir ki, mayenin hərəkəti zamanı verilmiş maye həcmi sıxılaraq müəyyən iş görür.

### §1.9. Mayenin burulğanlı hərəkəti

Mayenin potensiallı hərəkəti onun elə hərəkətinə deyilir ki, mayenin hər yerində  $rot \bar{v} = 0$  ödənilsin. Əgər maye həcmnin hər hansı bir hissəsində  $rot \bar{v} \neq 0$  olarsa, belə hərəkətə burulğanlı hərəkət deyilir. Mayenin potensiallı hərəkəti zamanı onun hər hansı hissəciyinin sür'ət vektorunu bir skalyar kəmiyyətlə ifadə etmək olar:

$$rot \bar{v} = \left( \frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z} \right) \bar{i} + \left( \frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x} \right) \bar{j} + \left( \frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) \bar{k}. \quad (1.67)$$

Doğrudanda

$$\bar{v} = \bar{\nabla} \varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \bar{i} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \bar{j} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \bar{k} \quad (1.68)$$

götürsək,

$$v_x = \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad v_y = \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \quad v_z = \frac{\partial \varphi}{\partial z}. \quad (1.69)$$

ifadələri (1.67) düsturunu eyniliklə ödəyir.

Mayədə hər hansı qapalı  $l$  konturu üzrə

$$\Gamma = \oint_l \bar{v} \cdot d\bar{r} \quad (1.70)$$

ifadəsinə sür'ətin bu kontur üzrə sirkulyasiyası deyilir. Stoks teoremindən istifadə edərək (1.70) ifadəsini çevirək

$$\Gamma = \oint_l \vec{v} \cdot d\vec{r} = \int_s \vec{n} \cdot \text{rot} \vec{v} ds. \quad (1.71)$$

Burada  $S-l$  konturunun daxili sahəsi,  $\vec{n}$ -isə  $l$ -in xarici normalıdır. Potensiallı hərəkət edən mayedə

$$\text{rot} \vec{v} = 0, \quad \Gamma = 0 \quad (1.72)$$

**Qeydiyyat:** Qeyd edək ki, Stoks teoremi bir rabitəli oblast üçün doğrudur. Yə'ni  $l$  konturunu bir nöqtəyə sıxmaq olar. Bu isə o deməkdir ki,  $l$  konturunun daxili ancaq maye mühitdən ibarətdir.

İndi göstərək ki, mayenin potensiallı hərəkətində cərəyan xətti qapalı ola bilməz. Əksini fərz edək. Tutaq ki, cərəyan xətti qapalıdır. Onda bu cərəyan xətti üzrə

$$\Gamma = \oint_{l_0} \vec{v} \cdot d\vec{r} = \int_t \vec{v} \cdot \vec{v} dt = \int_t v^2 dt > 0, \quad (1.73)$$

olar. Digər tərəfdən, hərəkət potensiallı olduğu üçün sür'ətin sirkulyasiyası

$$\Gamma = \int_{l_0} \vec{v} \cdot d\vec{r} = \int_s \vec{n} \cdot \text{rot} \vec{v} ds \equiv 0. \quad (1.74)$$

Bu (1.73) və (1.74) ziddiyyətliyi onu göstərir ki, mayedə cərəyan xətti qapalı ola bilməz.

### §1.10. Sür'ətin sirkulyasiyasının saxlanması haqqında teorem

**Teorem:** Maye ilə birlikdə hərəkət edən istənilən qeyd edilmiş qapalı kontur üzrə sürətin sirkulyasiyası sabitdir.

(1.70) ifadəsindən zamana görə tam törəmə alıb, (1.19) Eyler tənliyindən istifadə edək:

$$\begin{aligned} \frac{d\Gamma}{dt} &= \frac{d}{dt} \oint \bar{v} \cdot d\bar{r} = \oint \left( \frac{d\bar{v}}{dt} \cdot d\bar{r} + \bar{v} \frac{d\bar{r}}{dt} \right) = \oint \left( -\bar{\nabla}W - \bar{\nabla}U \right) \cdot d\bar{r} + d \left( \frac{v^2}{2} \right) = \\ &= \oint d \left( \frac{v^2}{2} - W - U \right). \end{aligned} \quad (1.75)$$

(1.75)-in axırınıcı ifadəsində inteqrallama konturu qapalı olduğu üçün inteqral sıfıra bərabərdir, yə'ni  $\Gamma = const$ . Bu nəticəni lord Kelvin almış və Tomson teoremi adlanır.  $\omega = rot\bar{v}$  vektor kəmiyyətinə **burulğanlıq vektoru** və ya **burulğanlıq** deyilir. Hər bir nöqtəsində toxunanı burulğanlıq vektor ilə kolleniar olan xəttə burulğanlıq xətti deyilir. Burulğanlıq borusu elə qapalı xətlərdən düzəlir ki, onların hər bir nöqtəsindən burulğanlıq xətti keçsin.

### §1.11. Mayenin potensiallı hərəkətində hidrodinamikanın hərəkət tənliklər sistemi

Mayenin potensiallı qüvvələr sahəsində potensiallı hərəkətinə baxaq:

$$\bar{f} = -\bar{\nabla}U, \quad rot\bar{v} = 0, \quad \bar{v} = \bar{\nabla}\varphi \Rightarrow \frac{\partial\bar{v}}{\partial t} = \bar{\nabla} \frac{\partial\varphi}{\partial t} \quad (1.76)$$

Bu halda (1.19) Eyler tənliyi aşağıdakı şəkllə düşər:

$$\bar{\nabla} \left( \frac{\partial\varphi}{\partial t} + \frac{v^2}{2} + W + U \right) = 0. \quad (1.77)$$

(1.77)-dən alırıq:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \frac{v^2}{2} + W + U = F(t). \quad (1.78)$$

(1.78) ifadəsinə Koşi-Laqrانج inteqralı deyilir. Əgər

$\varphi \rightarrow \varphi_1 + \int_{t_0}^t F(\tau) d\tau$  əvəzləməsi aparsaq, onda (1.78) aşağı-



dakı şəklə düşər:

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial t} + \frac{v^2}{2} + W + U = 0. \quad (1.79)$$

(1.79) düsturu ideal mayenin potensiallı qüvvələr sahəsində potensiallı hərəkətinin (Eyler tənliyinin) | inteqralıdır. Sıxılmayan ideal mayələr üçün (1.79) düsturu sadələşir.

Doğrudun da,  $\frac{d\rho}{dt} = 0$  olduqda:

$$\operatorname{div} \bar{v} = 0, \quad \bar{v} = \bar{\nabla} \varphi, \quad (1.80)$$

$$\nabla^2 \varphi = \Delta \varphi = 0, \quad (1.81)$$

olar. (1.81) –dən görüldüyü kimi  $\varphi$  funksiyası bircins ellip-tik tənliyi ödəyir. (1.79) inteqralında isə  $\bar{\nabla} W = \bar{\nabla} \frac{P}{\rho}$  ifadə-

sini nəzərə alsaq:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{v^2}{2} + \frac{P}{\rho} + U = 0. \quad (1.82)$$

olar. (1.81) tənliyini sərhəd şərtləri daxilində həll edərək, (1.76) ifadələrinin üçüncüsündən sür'ət vektoru, (1.82) düsturundan isə asanlıqla təzyiq paylanması tapılır:

$$P = -\rho \left( \frac{v^2}{2} + U + \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right) \quad (1.83)$$

## §1.12. İdeal sıxılmayan mayələrin müstəvi hərəkəti

İdeal sıxılmayan mayenin müstəvi hərəkətini öyrənək: Bu halda  $v_3 = v_z = 0$  olar. Onda (1.80) kəsilməzlik tənliyindən alarıq:

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0. \quad (1.84)$$

İndi (1.84) tənliyini eyniliklə ödəyən  $\psi$  funksiyası daxil edək:

$$v_x = \frac{\partial \psi}{\partial y}; \quad v_y = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (1.85)$$

$\psi$ -funksiyasına **cərəyan funksiyası** deyilir. Cərəyan xəttinin tərifinə görə,

$$d\vec{r} \parallel \vec{v} \Rightarrow (dx\vec{i} + dy\vec{j}) \parallel (v_x\vec{i} + v_y\vec{j}), \quad (1.86)$$

və ya

$$\frac{dy}{dx} = \frac{v_y}{v_x}, \quad v_x dy - v_y dx = 0. \quad (1.87)$$

(1.85)-i (1.87)-də yerinə yazaraq:

$$v_x dy - v_y dx = \frac{\partial \psi}{\partial y} dy + \frac{\partial \psi}{\partial x} dx = d\psi = 0. \quad (1.88)$$

(1.88)-dən alırıq ki, cərəyan xətti üzrində  $\psi = const$  bərabərdir. Ona görə də  $\psi$  -yə **cərəyan funksiyası** deyilir.

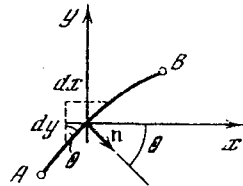
Axın müstəvisində ixtiyari A və B nöqtələri götürək və aşağıdakı inteqralı qiymətləndirək:

$$N = \int_A^B \vec{v} \cdot \vec{n} dl \quad (1.89)$$

Burada  $\vec{n}$  AB əyrisinin vahid normalıdır. Şəkildən görünür ki,

$$dl \cdot \cos \Theta = dy,$$

$$dl \cdot \cos \left( \frac{\pi}{2} + \Theta \right) = -dl \cdot \sin \Theta = -dx$$



Şəkil 1.1

$$N = \int_A^B v_x dy - v_y dx = \int_A^B \left( \frac{\partial \psi}{\partial y} dy + \frac{\partial \psi}{\partial x} dx \right) = \int_A^B d\psi = \psi_B - \psi_A \quad (1.90)$$

Beləliklə, öyrinin hər hansı hissəsindən keçən maye seli onun uclarındaki cərəyan funksiyalarının qiymətlərinin fərqiə bərabərdir. Burulğanlılıq vektorunu cərəyan funksiyası ilə əvəz edək

$$\omega = \text{rot} \bar{v}, \quad \omega_z = \frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y}. \quad (1.91)$$

(1.85) ifadələrini (1.91)-də yazsaq:

$$\omega_z = \omega = -\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = -\nabla^2 \psi = -\Delta \psi, \quad \omega = -\Delta \psi. \quad (1.92)$$

Xüsusi halda mayenin potensiallı hərəkətinə baxılırsa, onda  $\omega = \text{rot} \bar{v} = 0$  olar. (1.81) və (1.92) tənliklərindən görünür ki,  $\varphi$  potensial və  $\psi$  cərəyan funksiyaları bircins elliptik tənlikləri ödəyir:

$$\Delta \psi = 0, \quad \Delta \varphi = 0. \quad (1.93)$$

Bir tərəfdən,

$$v_x = \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad v_y = \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \quad (1.94)$$

digər tərəfdən,

$$v_x = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v_y = -\frac{\partial \psi}{\partial x}. \quad (1.95)$$

(1.94) və (1.95) ifadələrinin müqayisəsindən alırıq:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad -\frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{\partial \varphi}{\partial y}. \quad (1.96)$$

(1.96) münasibətlərini tərəf-tərəfə vursaq

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial y} = \bar{\nabla} \varphi \cdot \bar{\nabla} \psi = 0, \quad (1.97)$$

$\bar{\nabla} \varphi \perp \bar{\nabla} \psi$  alınar. Bu isə o deməkdir ki,  $\varphi = \text{const}$  və

$\psi = const$  funksiyaları ortoqonal xətlər ailəsi əmələ gətirir. Qeyd edək ki, (1.96) şərti  $F(z) = \varphi + i\psi$  kompleks dəyişənli funksiyanın analitik funksiya olması üçün zəruri və kafi şərtidir. Mə'lumdur ki, istənilən analitik funksiya  $F(z)$  iki qarşılıqlı axına uyğundur.

$$\varphi_1 = Re F(z), \quad \psi_1 = Im F(z), \quad (1.98)$$

və

$$\varphi_2 = Re(-iF(z)), \quad \psi_2 = Im(-iF(z)). \quad (1.99)$$

Aşağıdakı sadə hallara baxaq

1.  $F(z) = az$ ,  $a$ -həqiqi ədəddir.

$$\varphi_1 = ax, \quad \psi_1 = ay, \quad v_x = a; \quad v_y = 0. \quad (1.100)$$

Qoşa axın isə  $-iF(z) = -iaz = ay - iax$ ,

$$\varphi_2 = ay, \quad \psi_2 = ax; \quad v_y = a, \quad v_x = 0 \quad (1.101)$$

2. Tutaq ki,

$$F(z) = m \ln z; \quad x = r \cos \Theta, \quad y = r \sin \Theta, \quad (1.102)$$

$$F(z) = m \ln(r \cdot e^{i\Theta}) = m \ln r + im\Theta,$$

$$\varphi = m \ln r; \quad \psi = m\Theta$$

$$v_r = \frac{\partial \varphi}{\partial r} = \frac{m}{r}; \quad v_\Theta = 0; \quad m > 0 \quad (1.103)$$

(1.102) funksiyası  $m > 0$  olduqda mənbəyə,  $m < 0$ -mənsəbə axını təsvir edir.

### §1.13. Özlü sıxılan mayelər üçün ümumiləşmiş Nyuton qanunu

Gərginlik tenzorunun komponentlərini deformasiya sür'əti tenzorunun komponentləri ilə əlaqələndirən tənliklərə mühitin reoloji tənlikləri (qanunları) deyilir.

1) İdeal maye üçün

$$\sigma = -PE_{,j} \sigma_{ij} = -P\delta_{ij}, \quad (1.104)$$

$\delta_{ij}$  - Kronecker tenzoru adlanır,  $i = j$  olduqda  $\delta_{ii} = 1$ ,  $i \neq j$  olduqda  $\delta_{ij} = 0$ .

- 2) İki paralel lövhə arasında ozlü mayenin  $x$  oxu istiqamətində birölçülü laminar axınının reoloji tənliyi mə'lum Nyuton qanununa tabe olur:

$$\sigma_{xz} = \mu \frac{\partial v_x}{\partial z}, \quad \sigma_{zx} = \mu \frac{\partial v_x}{\partial z} \quad (1.105)$$

Burada  $\mu$  -dinamik özlük əmsalı və ya sadəcə olaraq özlük əmsalı,  $\nu = \frac{\mu}{\rho}$  -isə kinematik özlük əmsalı adlanır,  $z$  oxu isə lövhələrin müstəvilərinə perpendikulyar istiqamətdə yönəlir.

$$1P = 1 \frac{\text{dinas}}{\text{sm}^2} = 1 \frac{G}{\text{sm} \cdot s} \text{ (puaz)}, \quad 1 \text{ santipuz} = 10^{-2} P \text{ (su üçün)}$$

$$\text{BS sistemində } 1Pa \cdot s = 1 \frac{N \cdot s}{m^2} = 10P.$$

(1.105) xətti reoloji tənliyi mayenin fəza axınının sadə halıdır. Bu qanunun çoxölçülü şəkli Nyutonun ümumiləşmiş qanunu adlanır. İzotrop özlü Nyuton mühiti üçün gərginliklər tenzoru və deformasiya sür'ətləri tenzoru arasında xətti əlaqəni həm matris, həm də tenzor şəklində vermək olar:

$$\sigma = aS + bE; \quad \sigma_{ij} = a\epsilon_{ij} + b \cdot \delta_{ij} \quad (1.106)$$

Burada  $a$  -skalyar kəmiyyətdir,  $b$  -skalyar kəmiyyəti isə gərginlik tenzorunun və deformasiya sür'ətləri tenzorunun xətti (birinci) invariantlarından asılıdır. (1.106) münasibəti xüsusi halda (1.105) münasibəti ilə üst-üstə düşdüynə görə  $a = 2\mu$  olacaq.  $b$ -(1.106)-dan xətti invariantların bərabərliyindən tapılır

$$\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33} = 2\mu \text{div} \bar{v} + 3b, \quad ,$$

$$b = \frac{1}{3}(\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}) - \frac{2\mu}{3} \operatorname{div} \bar{v}, \quad (1.107)$$

Digər tərəfdən, sıxılan maye üçün fiziki təsəvvürdən istifadə edək:

$$\frac{1}{3}(\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}) = -P + \mu' \operatorname{div} \bar{v}; \quad (1.108)$$

burada  $\mu'$ -həcmi genişlənmə əmsalı adlanır. (1.108) münasibətini (1.107) ifadəsində yazıb,  $b$  skalyar kəmiyyətini tapırıq:

$$b = -P - \left( \frac{2}{3} \mu - \mu' \right) \operatorname{div} \bar{v} \quad (1.109)$$

$a$  və  $b$ -nin ifadələrini (1.106) –da nəzərə alsaq, özlü maye üçün ümumiləşmiş reoloji qanununun matris şəklini alırıq:

$$\sigma = 2\mu S + \left[ -P - \left( \frac{2}{3} \mu - \mu' \right) \operatorname{div} \bar{v} \right] \cdot E, \quad (1.110)$$

Sadəlik üçün  $\frac{2}{3} \mu - \mu' \rightarrow \frac{2}{3} \mu$  əvəzləməsini aparaq. Onda (1.106) və ya (1.110) reoloji tənliklərin tenzor şəklində ifadəsi aşağıdakı kimi olar:

$$\sigma_{ij} = 2\mu \dot{\varepsilon}_{ij} + \left( -P - \frac{2}{3} \mu \frac{\partial v_m}{\partial x_m} \right) \cdot \delta_{ij}. \quad (1.111)$$

(1.111) tənlikləri özlü-xətti sıxılan mayələr üçün **ümumiləşmiş Nyuton qanununun** riyazi yazılışdır və bu qanuna tabe olan mayələrə **Nyuton mayələri** deyilir.

Özlü mayenin (bütöv mühitin) hərəkət tənlikləri §3-dəki üsulla alınır və aşağıdakı şəkildədir:

$$\rho \frac{dv_i}{dt} = \rho F_i + \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} = \rho F_i + \frac{\partial \sigma_{i1}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{i2}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{i3}}{\partial x_3}. \quad (1.112)$$

(1.111) realoji münasibətlərini (1.112) tənliklərində yerinə yazsaq, alarıq:

$$\rho \frac{dv_i}{dt} = \rho F_i - \frac{\partial P}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \frac{\partial}{\partial x} \left( \mu \frac{\partial v_j}{\partial x_j} \right) + 2 \frac{\partial}{\partial x} \left( \mu \frac{\partial v_i}{\partial x_i} \right) + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \mu \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \right]_{j+i}, \quad i, j = 1, 2, 3. \quad (1.113)$$

$x_1 \rightarrow x$ ,  $x_2 \rightarrow y$ ,  $x_3 \rightarrow z$  əvəzləməsi aparsaq (1.113) tənlikləri aşağıdakı şəkildə olar:

$$\begin{aligned} \rho \frac{dv_x}{dt} &= \rho F_x - \frac{\partial P}{\partial x} - \frac{2}{3} \frac{\partial}{\partial x} (\mu \operatorname{div} \bar{v}) + 2 \frac{\partial}{\partial x} \left( \mu \frac{\partial v_x}{\partial x} \right) + \\ &+ \frac{\partial}{\partial y} \left[ \mu \left( \frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[ \mu \left( \frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial x} \right) \right], \\ \rho \frac{dv_y}{dt} &= \rho F_y - \frac{\partial P}{\partial y} - \frac{2}{3} \frac{\partial}{\partial y} (\mu \operatorname{div} \bar{v}) + 2 \frac{\partial}{\partial y} \left( \mu \frac{\partial v_y}{\partial y} \right) + \\ &+ \frac{\partial}{\partial x} \left[ \mu \left( \frac{\partial v_y}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[ \mu \left( \frac{\partial v_y}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial y} \right) \right], \\ \rho \frac{dv_z}{dt} &= \rho F_z - \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{2}{3} \frac{\partial}{\partial z} (\mu \operatorname{div} \bar{v}) + 2 \frac{\partial}{\partial z} \left( \mu \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) + \\ &+ \frac{\partial}{\partial x} \left[ \mu \left( \frac{\partial v_z}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial z} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[ \mu \left( \frac{\partial v_z}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial z} \right) \right]. \end{aligned} \quad (1.114)$$

Qeyd edək ki, (1.12) kəsilməzlik tənliyi kütlənin saxlanması qanununu təsvir etdiyindən o özlü mayelər üçün də dəyişməz qalır

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \rho \bar{v} = 0. \quad (1.115)$$

Qazın kinetik nəzəriyyəsinə əsasən onun özlük

əmsalının temperaturdan asılı olaraq dəyişməsi düsturu aşağıdakı kimi verilir

$$\frac{\mu}{\mu_0} = \left( \frac{T}{T_0} \right)^{3/2} \frac{T_0 + T_s}{T + T_0} \quad (1.116)$$

(1.116) Satterland düsturu adlanır,  $T_s = 122K^0$  -Satterland sabiti adlanır və  $T_0$ ,  $\mu_0$  - isə qazın başlanğıc halına uyğun gələn mütləq temperatur və özlük əmsalıdır. Praktikada çox məsələlərin həllində sadə qüvvət funksiyasından istifadə edilir

$$\frac{\mu}{\mu_0} = \left( \frac{T}{T_0} \right)^n$$

İdeal və təkmil qazların termodinamik hal tənliklərini yazaq:

$$P = \rho RT, \quad \frac{P}{P_0} = \left( \frac{\rho}{\rho_0} \right)^k, \quad k = \frac{C_p}{C_v} \quad (1.117)$$

İstilik balans tənliyi

$$\rho \frac{dh}{dt} = \frac{dP}{dt} + 2\mu(S)^2 - \frac{2}{3}\mu(\operatorname{div}\bar{v})^2 + \operatorname{div}\left(\mu \operatorname{grad} \frac{h}{\sigma}\right) \quad (1.118)$$

haradakı  $h$ -entalpiya,  $C_p$ -sabit təzyiqdə,  $C_v$ -isə sabit həcmdə xüsusi istilik tutumu,  $\alpha$ -istilik keçirmə əmsalıdır.

$$h = \int_0^T C_p(T) dT, \quad \sigma = \frac{\mu C_p}{\alpha} = \text{const}$$

(1.114)-(1.118) yeddi tənliklər sisteminə yeddi axtarılan  $v_x, v_y, v_z, p, \rho, T, \mu$  funksiyaları iştirak edir və sistem onlara nəzərən qeyri-xəttidir.

İzotermik proseslərdə sıxılmayan özlü mayelərin hərəkət tənlikləri nisbətən sadələşir və  $\rho, T, \mu$  parametrlə-



rinin sabit qiymətlərində (1.114), (1.115) tənlikləri aşağıdakı kimi olur:

$$\begin{aligned}\rho \frac{dv_x}{dt} &= \rho F_x - \frac{\partial P}{\partial x} + \mu \Delta v_x, \\ \rho \frac{dv_y}{dt} &= \rho F_y - \frac{\partial P}{\partial y} + \mu \Delta v_y, \\ \rho \frac{dv_z}{dt} &= \rho F_z - \frac{\partial P}{\partial z} + \mu \Delta v_z,\end{aligned}\tag{1.119}$$

$$\nabla \bar{v} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0.\tag{1.120}$$

və ya vektor şəklində

$$\frac{d\bar{v}}{dt} = \frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + (\bar{v} \cdot \nabla) \bar{v} = \bar{F} - \frac{1}{\rho} \nabla P + \frac{\mu}{\rho} \Delta \bar{v},\tag{1.121}$$

$$\nabla \bar{v} = \text{div} \bar{v} = 0, \Delta = (\nabla)^2.\tag{1.122}$$

### §1.14. Sıxılmayan özlü mayələrin bə'zi reoloji qanunları

Bir sıra mayələr: gilli məhlul, parafinlər, yağlı kraskalar və s. xassələrinə görə Nyuton mayələrindən fərqlənirlər. Belə mayələrin özlük əmsalı sürüşmə sür'ətinin, deformasiyasının, zamanın və s. funksiyası ola bilər.

**1. Özlü-plastik mayələr:** Əgər mühit eyni zamanda həm özlük, həm də plastiklik xassəsinə malik olarsa və onun gərginlik tenzorunun komponentləri özlü və plastiki gərginlik tenzorlarının uyğun komponentlərinin cəminə bərabədirsə, onda belə mühit özlü-plastik mühit adlanır. Bu hipotezəni ilk dəfə Şvedov-Benqam sadə birölçülü halda sürüşmə gərginliyi üçün vermişdir:

$$\sigma_{rz} = \tau_0 + \mu \frac{\partial v_x(z, t)}{\partial z}, \quad \tau > \tau_0. \quad (1.123)$$

Burada  $\mu$ -struktur özlük,  $\tau_0$ -axıcılığın gərginlik həddi,  $v_x$ -isə maye hissəciyinin X oxu istiqamətində sür'ətidir, Henki-İlyuşin Şvedov-Benqam hipotezasını ümumiləşdirərək izotrop özlü-plastik mühitlər üçün gərginlik və deformasiya sür'ətləri tenzorları arasında aşağıdakı münasibətləri vermişlər

$$\sigma_{ij} = -P\delta_{ij} + \left( \mu + \frac{\tau_0}{J_2} \right) \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} \left( \mu + \frac{\tau_0}{J_2} \right) \nabla \bar{v} \cdot \delta_{ij}. \quad (1.124)$$

Burada  $J_2$ ,  $\nabla \bar{v} = \text{div } \bar{v} = 0$  olduqda, sürüşmə deformasiya sür'ətlərinin intensivliyidir

$$J_2 = \sqrt{\left( \frac{\partial v_1}{\partial x_2} + \frac{\partial v_2}{\partial x_1} \right)^2 + \left( \frac{\partial v_1}{\partial x_3} + \frac{\partial v_3}{\partial x_1} \right)^2 + \left( \frac{\partial v_2}{\partial x_3} + \frac{\partial v_3}{\partial x_2} \right)^2} + 2 \sqrt{\left( \frac{\partial v_1}{\partial x_1} \right)^2 + \left( \frac{\partial v_2}{\partial x_2} \right)^2 + \left( \frac{\partial v_3}{\partial x_3} \right)^2} \quad (1.125)$$

Silindrik koordinat sistemində (1.124) ifadələri belə olar:

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} &= -P + 2 \left( \mu + \frac{\tau_0}{J_2} \right) \left( \frac{\partial v_r}{\partial r} - \frac{1}{3} \text{div } \bar{v} \right), \\ \sigma_{\varphi\varphi} &= -P + 2 \left( \mu + \frac{\tau_0}{J_2} \right) \left( \frac{1}{r} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{v_r}{r} - \frac{1}{3} \text{div } \bar{v} \right), \\ \sigma_{zz} &= -P + 2 \left( \mu + \frac{\tau_0}{J_2} \right) \left( \frac{\partial v_z}{\partial z} - \frac{1}{3} \text{div } \bar{v} \right), \\ \sigma_{r\varphi} &= \left( \mu + \frac{\tau_0}{J_2} \right) \left( \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \varphi} + \frac{\partial v_\varphi}{\partial r} - \frac{v_\varphi}{r} \right), \end{aligned} \quad (1.126)$$

$$\sigma_{rz} = \left( \mu + \frac{\tau_0}{J_2} \right) \left( \frac{\partial v_r}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial r} \right),$$

$$\sigma_{\varphi z} = \left( \mu + \frac{\tau_0}{J_2} \right) \left( \frac{\partial v_\varphi}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \varphi} \right),$$

$\operatorname{div} \bar{v} = 0$  olduqda,

$$J_2 = \sqrt{\left( \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \varphi} + \frac{\partial v_\varphi}{\partial r} - \frac{v_\varphi}{r} \right)^2 + \left( \frac{\partial v_r}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial r} \right)^2 + \left( \frac{1}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \varphi} + \frac{\partial v_\varphi}{\partial z} \right)^2 +$$

$$+ 2 \left( \frac{\partial v_r}{\partial r} \right)^2 + 2 \left( \frac{1}{r} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{v_r}{r} \right)^2 + 2 \left( \frac{\partial v_z}{\partial x_2} \right)^2} \quad (1.127)$$

(1.126) (1.127) ifadələrində  $v_r = v_\varphi = 0$ ,  $v_z = v_z(r, t)$  və  $\bar{\nabla} P = 0$  qəbul etsək, sıfırdan fərqli gərginlik  $\sigma_{rz}$  olacaq və  $J_2$ -nin ifadəsi sadələşəcək

$$J_2 = \left| \frac{\partial v_z}{\partial r} \right|, \quad \sigma_{rz} = \tau_0 \operatorname{sign} \frac{\partial v_z}{\partial r} + \mu \frac{\partial v_z}{\partial r}. \quad (1.128)$$

Əgər  $v_z$  sür'əti  $r$ -in monoton artan funksiyası olarsa, onda (1.128) ifadəsi (1.123) analoji şəklini alar.  $\tau \leq \tau_0$  olduqda mayenin axıcılığı olmur və mühit özünü bərk cisim kimi aparır:  $\dot{\epsilon} = 0$ . Ancaq bu qanuna gilli, sementli və s. məhlullar tabe olur.

2. Pseudoplastiki mayelərdə axıcılığın gərginlik həddi olmur və struktur özlüyü sürüşmə sür'ətindən asılıdır. Belə qeyri-xətti mayələr: antisimmetrik hissəciklərin suspenziyası, yüksək polimerli məhlulları və s. mühitləri göstərmək olar:

$$\tau = k \dot{\epsilon}^n \quad (1.129)$$

$\frac{\tau}{\dot{\epsilon}} = k \dot{\epsilon}^{n-1} = \mu(\dot{\epsilon})$  -zahiri özlük əmsalındır və  $n < 1$  olduqda,

$\dot{\varepsilon}$  artdıqca  $\mu(\dot{\varepsilon})$  azalır. Belə mayelərə **Ostvoid-Reyner** mayeləri deyilir.  $n > 1$  olduqda, (1.129) tənliyi ilə təsvir olunan mayelərə **dilatant** mayelər deyilir. Daha çox istifadə olunan reoloji qanunlardan aşağıdakıları göstərmək olar:

3. Maksvel mayeləri:

$$\frac{\dot{\tau}}{G} + \frac{\tau}{\mu} = \dot{\varepsilon}; \quad (1.130)$$

4. Xətti irsi mayelər:

$$e_{ij} = \frac{1}{2G} \left[ \sigma_{ij} + \int_0^t h(t-\xi) \sigma_{ij}(\xi) d\xi \right]. \quad (1.131)$$

Burada  $G$ -sürüşmə əmsəlidir,  $h(t-\xi)$ -yaddaş funksiyası adlanır və  $t=0$  anına qədər olan deformasiya tarixindən aslıdır.

### §1.15. Sıxılmayan özlü mayenin axınlarının oxşarlığı

Tutaq ki,  $\varphi(\vec{r}, t)$ ,  $\vec{a}(\vec{r}, t)$ ,  $Q(\vec{r}, t)$  qərarlaşmamış sahənin məkan-zaman oblastında  $(\vec{r}, t)$  skalyar, vektor və tenzor kəmiyyətləri bir fiziki hadisəni təsvir edir. Bu hadisəni başqa hər hansı  $\parallel$  hadisə ilə müqayisə edək. Tutaq ki,  $\parallel$  fiziki hadisəni  $(\vec{r}, t)$  oblastında  $\bar{\varphi}(\vec{r}, t)$ ,  $\bar{\vec{a}}(\vec{r}, t)$ ,  $\bar{Q}(\vec{r}, t)$  skalyar, vektor və tenzor kəmiyyətləri təsvir edir. O zaman  $\bar{M}(\vec{r}, t)$  məkan-zaman nöqtəsi  $M(\vec{r}, t)$  nöqtəsinə uyğundur deyilir ki, bu nöqtələrin radius vektorları və zaman fasilələri biri o birindən sadə xətti çevirmə vasitəsi ilə alınır bilinsin

$$\vec{r} = k_1 \bar{\vec{r}} (\bar{x} = k_1 x, \bar{y} = k_1 y, \bar{z} = k_1 z), \quad \bar{t} = k_1 t \quad (1.132)$$

Əgər bu iki fiziki hadisəni təsvir edən  $\varphi, \vec{a}, Q$  və  $\bar{\varphi}, \bar{\vec{a}}, \bar{Q}$  funksiyalarının birini o birindən sadə xətti çevirmə

vasitəsilə almaq mümkündürsə, onda bu fiziki hadisələr oxşardır deyilir.

$$\bar{\varphi} = k_{\varphi}\varphi, \quad \bar{\vec{a}} = k_a\vec{a}, \quad \bar{Q} = k_q Q \quad (1.133)$$

Burada  $k_a$  vektorun bütün proyeksiyaları,  $k_q$  isə tenzorun bütün komponentləri üçün eynidir.

Sıxılmayan özlü Nyuton mayələrinin izotermik axınlarında oxşarlıq şərtləri iki axınlıdır. Tutaq ki, bu axınların hər birisinin özünə uyğun sabit sıxlığı və özlüyü var. Uyğun masştablar seçməklə (1.119) Navye-Stoks, (1.120) kəsilməzlik tənliklərini ölçüsüz şəkllə gətirək:

$$\begin{aligned} x &= Lx', y = Ly', z = Lz' \\ u &= Vu', v = Vv', w = Vw', t = Tt' \\ P &\rightarrow Pp', F_x = FF'_x, F_y = FF'_y, F_z = FF'_z \end{aligned} \quad (1.134)$$

$$\begin{aligned} \frac{V}{T} \frac{\partial u'}{\partial t'} + \frac{V^2}{L} \left( u' \frac{\partial u'}{\partial x'} + v' \frac{\partial u'}{\partial y'} + w' \frac{\partial u'}{\partial z'} \right) = \\ = FF'_x - \frac{P}{\rho L} \frac{\partial p'}{\partial x'} + \frac{\nu V}{L^2} \left( \frac{\partial^2 u'}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 u'}{\partial y'^2} + \frac{\partial^2 u'}{\partial z'^2} \right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{V}{T} \frac{\partial w'}{\partial t'} + \frac{V^2}{L^2} \left( u' \frac{\partial w'}{\partial x'} + v' \frac{\partial w'}{\partial y'} + w' \frac{\partial w'}{\partial z'} \right) = \\ = FF'_z - \frac{P}{\rho L} \frac{\partial p'}{\partial z'} + \frac{\nu V}{L^2} \left( \frac{\partial^2 w'}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 w'}{\partial y'^2} + \frac{\partial^2 w'}{\partial z'^2} \right), \end{aligned} \quad (1.135)$$

$$\frac{V}{L} \left( \frac{\partial u'}{\partial x'} + \frac{\partial v'}{\partial y'} + \frac{\partial w'}{\partial z'} \right) = 0. \quad (1.136)$$

Bura daxil olan kompleks ölçüsüz birhədlilər oxşarlıq ədədləri adlanır.

$$\begin{aligned} \frac{L}{VT} = Sh & \quad - \text{Struxal ədədi;} \\ \frac{P}{\rho V^2} = E_u & \quad - \text{Eylər ədədi;} \\ \frac{V^2}{FL} = F_r & \quad - \text{Frud ədədi;} \\ \frac{VL}{\nu} = \frac{\rho VL}{\mu} = Re & \quad - \text{Reynolds ədədi;} \end{aligned} \quad (1.137)$$

Oxşarlıq ədədlərində (1.135), (1.136) tənlikləri aşağıdakı şəkildə düşür:

$$\begin{aligned} Sh \frac{\partial u'}{\partial t'} + u' \frac{\partial u'}{\partial x'} + v' \frac{\partial u'}{\partial y'} + w' \frac{\partial u'}{\partial z'} = \frac{1}{F_r} F'_x - \\ - E_u \frac{\partial p'}{\partial x'} + \frac{1}{Re} \left( \frac{\partial^2 u'}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 u'}{\partial y'^2} + \frac{\partial^2 u'}{\partial z'^2} \right), \end{aligned} \quad (1.138)$$

$$\begin{aligned} \dots\dots\dots \\ Sh \frac{\partial w'}{\partial t'} + u' \frac{\partial w'}{\partial x'} + v' \frac{\partial w'}{\partial y'} + w' \frac{\partial w'}{\partial z'} = \\ = \frac{1}{F_r} F'_z - E_u \frac{\partial p'}{\partial x'} + \frac{1}{Re} \left( \frac{\partial^2 w'}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 w'}{\partial y'^2} + \frac{\partial^2 w'}{\partial z'^2} \right), \\ \frac{\partial u'}{\partial x'} + \frac{\partial v'}{\partial y'} + \frac{\partial w'}{\partial z'} = 0. \end{aligned} \quad (1.139)$$

Bu tənliklər özlü sıxılmayan maye dinamikasının ölçüsüz şəkildə Stoks tənlikləridir. Konkret məsələlərin həllində (1.138), (1.139) tənliklərinə ölçüsüz başlanğıc və sərhəd şərtləri əlavə edilir.

Fərz edək ki, qərarlaşmamış hərəkət edən iki özlü sıxılmayan maye axını bir-birinə oxşardır. Onda bu axınları xarakterizə edən diferensial tənliklərin üst-üstə düşməsi

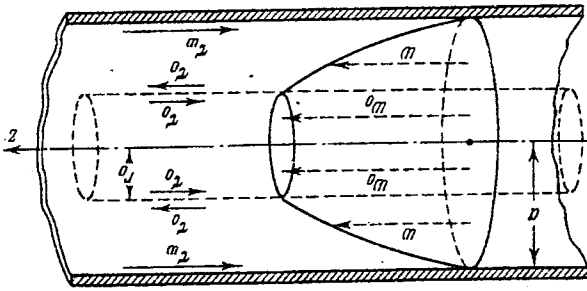
üçün onların oxşarlıq ədədlərinin eyni olması zəruridir:

$$Sh = idem, F_r = idem, E_u = idem, Re = idem$$

Oxşarlığın kafi şərtlərinin izahatı (1.138), (1.139) tənlikləri üçün qoyulmuş qarışıq məsələnin həllinin yeganəliyi haqqında teoremin isbatının çətinliyi ilə əlaqədardır.

### §1.16. Özlü-plastik mayelərin silindrik boruda qərarlaşmış və iki paralel lövhə arasında qərarlaşmamış hərəkəti

1.  $Z$  oxu istiqamətində yönələn, en kəsiyi dairə olan boruda özlü-plastik mayenin qərarlaşmış laminar axınını öyrənək (şəkil 1.2):



Şəkil 1.2.

$$\tau = \tau_0 + \mu \dot{\varepsilon}, \quad \tau_0 < \tau < \tau_w; \quad \dot{\varepsilon} = 0, \tau = \tau_0 \quad (1.140)$$

Burada

$$\dot{\varepsilon} = -\frac{dv_z}{dr} = -\frac{dw}{dr} \quad (1.141)$$

(1.140)-dan alırıq:

$$\dot{\varepsilon} = -\frac{dw}{dr} = \begin{cases} \frac{\tau - \tau_0}{\mu} & , \tau_0 < \tau < \tau_w \\ 0 & , \tau \leq \tau_0 \end{cases} \quad (1.142)$$

İndi  $\ell$ -uzunluqlu boruda olan mayenin tarazlıq şərtini yazaq:

$$\pi a^2 \Delta P = l \int_s \tau ds = 2\pi a \frac{l}{2\pi a} \int_s \tau ds = 2\pi a \tau_\omega l. \quad (1.143)$$

(1.143)-dən alırıq:

$$\tau_\omega = \frac{\Delta P a}{l 2}, \quad \tau = \frac{r}{a} \tau_\omega, \quad \tau_0 = \frac{r_0}{a} \tau_\omega \quad \tau = \frac{\Delta P r}{l 2} \quad (1.144)$$

Burada  $\tau_\omega$ -borunun perimetri boyunca olan sürtünmə gərginliyidir.

$$\frac{dw}{dr} = \frac{dw}{d\tau} \frac{d\tau}{dr} = \frac{\tau_\omega}{a} \frac{dw}{d\tau} = \begin{cases} \frac{\tau - \tau_0}{\mu}; & \tau_0 < \tau < \tau_\omega \\ 0 & ; \tau \leq \tau_0 \end{cases} \quad (1.145)$$

və ya

$$\frac{dw}{d\tau} = \begin{cases} \frac{a \tau - \tau_0}{\tau_\omega \mu}; & \tau_0 < \tau < \tau_\omega \\ 0 & ; \tau \leq \tau_0 \end{cases},$$

(1.144)-ün ikinci ifadəsindən  $r = a$  olduqda aşağıdakı sərhəd şərti alırıq:

$$\tau = \tau_\omega \quad (1.146)$$

(1.145)-ni  $\tau$ -ya görə inteqrallasaq,

$$w = \begin{cases} \frac{a\tau_\omega}{2\mu} \left( 1 - 2\frac{\tau_0}{\tau_\omega} + \frac{\tau}{\tau_\omega} \right) \left( 1 - \frac{\tau}{\tau_\omega} \right), & \tau_0 < \tau < \tau_\omega, \\ \frac{a\tau_\omega}{2\mu} \left( 1 - \frac{\tau}{\tau_\omega} \right)^2 = \text{const} = \omega_0, & \tau \leq \tau_0. \end{cases} \quad (1.147)$$

Əgər  $\tau_\omega$ -ni (1.144) ifadəsi ilə əvəz etsək, (1.147)-dən alırıq:



$$w = \begin{cases} \frac{a^2 \Delta P}{4\mu l} \left[ 1 - \frac{r^2}{a^2} - \frac{4l\tau_0}{a\Delta P} \left( 1 - \frac{r}{a} \right) \right], & r_0 < r < a \\ \frac{a^2 \Delta P}{4\mu l} \left( 1 - \frac{2l\tau_0}{a\Delta P} \right)^2 = w_0, & 0 < r < r_0 \end{cases} \quad (1.148)$$

Əgər (1.148) ifadəsində  $r_0 = 0$ ,  $\tau_0 = 0$  götürsək, Nyuton mayesinin boruda sür'ət **epyürasını** alarıq.

Sür'ət epyürasına əsasən borunun en kəsiyindən vahid zamanda keçən mayenin həcmi tə'yin edə bilərik:

$$\begin{aligned} Q &= \int_0^a 2\pi w r dr = \pi \int_0^a w d(r)^2 = \pi \left[ r^2 w \right]_0^a - \pi \int_0^a r^2 \frac{dw}{dr} dr = \\ &= \frac{\pi a^2}{\mu \tau_0^2} \int_{\tau_0}^{\tau_w} \tau^2 (\tau - \tau_0) d\tau = \frac{\pi a^3 \tau_w}{4\mu} \left[ 1 - \frac{4}{3} \frac{\tau_0}{\tau_w} + \frac{1}{3} \left( \frac{\tau_0}{\tau_w} \right)^2 \right] = \\ &= \frac{\pi a^4 \Delta P}{8\mu l} \left[ 1 - \frac{4}{3} \left( \frac{2\tau_0 l}{a\Delta P} \right) + \frac{1}{3} \left( \frac{2\tau_0 l}{a\Delta P} \right)^2 \right]. \end{aligned} \quad (1.149)$$

2.İki paralel lövhə arasında sıxılmayan özlü-plastiki mühitin qərarlaşmamış axınına baxaq. Fərz edək ki, hərəkət  $X$ -oxu istiqamətində,  $XOZ$  müstəvisinə nəzərən simmetrik baş verir. Burada  $Z$  oxu lövhələrə,  $Y$  oxu  $XOZ$  müstəvisinə perpendikulyar yönəliblər. Onda  $v_z = v_y = 0$ ,  $\frac{\partial \bar{v}}{\partial y} = 0$  olar və kəsilməzlik tənliyindən  $\partial v_z / \partial z = 0$  alarıq. Qəbul edək ki,  $t < 0$  olduqda alt lövhə tərپənməzdi, üst lövhə isə  $-v_0$  sür'əti ilə hərəkət edir. Tutaq ki,  $t > 0$  olduqda, hər iki lövhə müəyyən sür'ətlə hərəkət edir və axın istiqamətində təzyiç düşgüsü yoxdur. Bu halda (1.119) hərəkət tənliyindən alarıq:

$$\rho \frac{\partial v_x}{\partial t} = \mu \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} \quad (1.150)$$

Lövhələrin hərəkət zamanı sərt nüvənin əmələ gəlməsini nəzərə alsaq, (1.150) bircins parabolik tip tənlik üçün başlanğıc və sərhəd şərtlərini bu şəkildə vermək olar:

$$v_x(x, t) = -\frac{v_0}{h} z, \quad t = 0 \quad (1.151)$$

$$\frac{\partial v_x(z, t)}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial v_x}{\partial t} = -\frac{\tau_0}{\rho z_0(t)}, \quad z = z_0(t) \quad (1.152)$$

h-lövhələr arasındakı məsafə,  $z_0$ -nüvənin ölçüsüdür: (1.151) başlanğıc şərti mayenin qərarlaşmış hərəkətinin diferensial tənliyinin həllidir. Doğrudan da  $t < 0$  olduqda, qərarlaşmış axının analitik üsulla öyrənilməsi, aşağıdakı məsələnin həllinə gətirilir:

$$\frac{d^2 v_x}{dz^2} = 0, \quad v_x = c_1 z + c_2 \quad (1.153)$$

$$v_x = -v_0, \quad z = h; \quad v_x = 0, \quad z = 0.$$

Buradan mayenin Kuett axınının ifadəsini alırıq:

$$v_x = -\frac{v_0}{h} z \quad (1.154)$$

Nüvə sərt (deformasiyaya mə'ruz qalmayan) mühit olduğu üçün onun özlü maye ilə görüşmə səthində toxunan gərginliyi  $\sigma_{xz}(z_0(t)) = 0$  və hərəkət tənliyi (1.151) şəklində olar.

İndi nüvənin ölçüsünün dəyişmə qanunu verildikdə, lövhələrin sür'ətlərini tə'yin edək:

$$z_0(t) = \alpha \sqrt{t}. \quad (1.155)$$

Burada  $\alpha$  məchul əmsaldır. Aydınır ki,  $t = 0$  olduqda,  $z_0(0) = 0$ ,  $v(0,0) = 0$  olacaqdır. (1.152) sərhəd

şərtinin ikincisini inteqrallasaq, alarıq:

$$v_x(z_0, t) = -\frac{2\tau_0}{\rho\alpha} \quad (1.156)$$

(1.150) tənliyinin avtomodel həllini

$$v_x = A\sqrt{t}f(\xi), \quad \xi = \sqrt{\frac{\rho}{2\mu}} \cdot \frac{z}{\sqrt{t}}, \quad A = \frac{2\tau_0}{\rho\alpha}, \quad (1.157)$$

şəklində axtaraq. (1.157) ifadəsini (1.150) tənliyində və (1.151), (1.152) sərhəd şərtlərində nəzərə alaq

$$\frac{1}{\xi} \frac{d(\xi f)}{d\xi} - f(\xi) = 0 \quad (1.158)$$

$$f(\xi) = -1, \quad \frac{df(\xi)}{d\xi} = 0, \quad \xi = \xi_0 = \alpha \sqrt{\frac{\rho}{2\mu}}. \quad (1.159)$$

(1.158) və (1.159) məsələsinin həlli Qausun xəta funksiyası ilə ifadə olunur:

$$f(\xi) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \xi e^{\frac{1}{2}\xi_0^2} [\Phi(\xi_0) - \Phi(\xi)] - e^{-\frac{1}{2}(\xi^2 - \xi_0^2)}, \quad (1.160)$$

$$\Phi(\xi) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\xi e^{-y^2} dy,$$

$$v_x = -A \sqrt{\frac{\pi\rho}{4\mu}} z e^{\frac{\rho\alpha^2}{4\mu}} \left[ \Phi\left(\frac{z}{\sqrt{t}} \sqrt{\frac{\rho}{2\mu}}\right) - \Phi\left(\alpha \sqrt{\frac{\rho}{2\mu}}\right) \right] - A\sqrt{t} \exp\left[-\frac{\rho}{4\mu} \left(\frac{z^2}{t} - \alpha^2\right)\right]. \quad (1.161)$$

(1.161) ifadəsini (1.151) başlanğıc şərtində nəzərə alaq,  $\alpha$ -nı tapmaq üçün belə bir tənlik alarıq:

$$A \sqrt{\frac{\pi\rho}{4\mu}} e^{\frac{\rho\alpha^2}{4\mu}} \left[ 1 - \Phi\left(\alpha \sqrt{\frac{\rho}{2\mu}}\right) \right] = \frac{v_0}{h}. \quad (1.162)$$

Sür'ət üçün alınmış (1.161) düsturundan istifadə etsək üst

$v_x(h, t)$  və alt  $v_x(0, t)$  lövhələrin sür'ətlərini tapırıq. Beləliklə, özlü-plastiki mayenin parametrləri lövhələr arasındakı məsafə və  $v_0$  sür'əti verildikdə, nüvənin ölçülərini və lövhələrin sür'ətlərini zamanın hər bir anında tapmaq olar.

### §1.17. Özlü sıxılmayan mayenin müxtəlif en kəsikli borularda qərarlaşmış axını

1. En kəsiyi ellipsis olan silindrik borudan axan maye məsələsinə baxaq. Borunu müstəvi en kəsiyi üzərində götürülmüş  $OXY$  koordinatlarında ellipsin tənliyi

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (1.163)$$

şəklindədir. Burada  $a, b$ -ellipsin yarımoxlarıdır. Kəsiyin konturunda maye hissəciklərinin sür'ətlərinin sıfıra bərabər olduğunu nəzərə alsaq, sürətin ifadəsini belə yaza bilərik:

$$w = A \left( 1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} \right) \quad (1.164)$$

$A$  sabiti mayenin qərarlaşmış (1.119) hərəkət tənliyindən ( $v_x = v_y = 0$ ,  $v_z = w(x, y)$ ) təyin edilir:

$$\frac{\partial P}{\partial z} = \mu \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right), \quad \frac{\partial P}{\partial z} \approx - \frac{\Delta P}{l} \quad (1.165)$$

Burada  $l$ -borunun uzunluğu,  $\Delta P > 0$  isə onun uc nöqtəsindəki təzyiqlər fərqi (düşküsdür):

$$2A \left( \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right) = \frac{\Delta P}{\mu l}, \quad A = \frac{\Delta P}{2\mu l} \frac{a^2 b^2}{a^2 + b^2} \quad (1.166)$$

(1.164) ifadəsindən

$$w = \frac{\Delta P}{2\mu l} \frac{a^2 b^2}{a^2 + b^2} \left( 1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} \right). \quad (1.167)$$

Bu ifadədən görünür ki, maksimal sür'ət elliptik borunun oxu üzərində ( $x = 0, y = 0$ ) olacaqdır:

$$w_{\max} = \frac{\Delta P}{2\mu l} \frac{a^2 b^2}{a^2 + b^2} \quad (1.168)$$

(1.168) ifadəsini (1.167)-də nəzərə alsaq, tapırıq:

$$w = w_{\max} \left( 1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} \right). \quad (1.169)$$

Elliptik borunun en kəsiyindən vahid zamanda keçən mayenin həcm itkisini hesablayaq:

$$\begin{aligned} Q &= \iint_S w dx dy = w_{\max} \iint_S \left( 1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} \right) dx dy = \frac{\pi}{2} ab w_{\max} = \\ &= \frac{\pi a^3 b^3 \Delta P}{4\mu l (a^2 + b^2)}. \end{aligned} \quad (1.170)$$

Ellipsin sahəsi  $S = \pi ab$  düsturu ilə təyin olunur. (1.170) ifadəsindən orta sür'əti tapaq:

$$w_p = \frac{Q}{\pi ab} = \frac{1}{2} w_{\max} = \frac{\Delta P}{4\mu l} \frac{a^2 b^2}{a^2 + b^2} = \frac{1}{2} w_{\max}. \quad (1.171)$$

Tutaq ki, silindrik borunun en kəsiyi dairə şəklindədir. Onda  $a = b, x^2 + y^2 = r^2$  münasibətlərindən istifadə etsək

$$w = w_{\max} \left( 1 - \frac{r^2}{a^2} \right), \quad w_{\max} = \frac{a^2 \Delta P}{4\mu l} = 2w_{op} \quad (1.172)$$

(1.170)-ifadəsindən en kəsiyi dairə olan boruda vahid zamanda həcm itkisi tapılır:

$$Q = \frac{\pi a^4 \Delta P}{8\mu l}. \quad (1.173)$$

En kəsiyi dairəvi olan silindrik borudan keçən sıxılmayan özlü mayenin laminar qərarlaşmış axını zamanı vahid zamanda həcm itkisi borunun vahid uzunluğuna düşən təzyiqli düşküsi və dairənin radiusunun dördüncü dərəcəsi ilə mütənasibdir.

2. Sıxılmayan özlü mayenin en kəsiyi dördbucaqlı olan boruda axın məsələsinə baxaq. Düzbucaqlının  $OY$  oxuna paralel olan hündürlüyünü  $2h$ ,  $OX$  oxuna paralel olan tərəfini  $2\alpha h$  ilə işarə edək. Burada  $\alpha$  ixtiyari müsbət sabitdir.  $OZ$  oxunu düzbucaqlının mərkəzindən axın istiqamətində yönəldək və ölçüsüz dəyişənlər daxil edək:

$$\xi = x/h, \eta = y/h, \quad W = w\mu l / (h^2 \Delta P) \quad (1.174)$$

(1.174) ifadəsini (1.165) tənliyində yerinə yazsaq, alarıq:

$$\frac{\partial^2 W}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial \eta^2} = -1. \quad (1.175)$$

Düzbucaqlının konturu üzərində aşağıdakı sərhəd şərti ödənilir

$$W = 0, \quad \xi = \pm \alpha, \quad |\eta| < 1, \quad (1.176)$$

$$W = 0, \quad \eta = \pm 1, \quad |\xi| < \alpha.$$

(1.175) tənliyini həll etmək üçün mə'lum Furiye sırasından istifadə edək:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} \cos \frac{2n+1}{2} \pi t = \begin{cases} \frac{\pi}{4}, & |t| < 1 \\ 0, & |t| = 1 \end{cases} \quad (1.177)$$

Həlli (1.177) ifadəsinə uyğun

$$W = \sum_{n=0}^{\infty} Y_n(\eta) \cos \left( \frac{2n+1}{2} \frac{\pi}{\alpha} \xi \right), \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (1.178)$$

şəklində axtaraq. (1.177), (1.178) ifadələrini (1.175) tənliyində yerinə yazıb, əmsalları bərabərləşdirsək, alarıq:

$$Y_n'' - \left( \frac{2n+1}{2} \frac{\pi}{\alpha} \right)^2 Y_n = -\frac{4}{\pi} \frac{(-1)^n}{2n+1}, \quad (1.179)$$

$$Y_n = 0, \quad \eta = \pm 1.$$

(1.179)-tənliyinin ümumi həlli

$$Y_n = A_n + B_n \operatorname{ch} \left( \frac{2n+1}{2} \frac{\pi}{\alpha} \eta \right) + C_n \operatorname{sh} \left( \frac{2n+1}{2} \frac{\pi}{\alpha} \eta \right) \quad (1.180)$$

olacaqdır.  $A_n$  sabiti (1.179)-tənliyindən təyin olunur.

$$A_n = \frac{16\alpha^2}{\pi^3} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^3} \quad (1.181)$$

(1.179)-sərhəd şərtlərindən istifadə etsək,  $B_n$  və  $C_n$  sabitlərini taparıq:

$$B_n \operatorname{ch} \left( \frac{2n+1}{2} \frac{\pi}{\alpha} \right) + C_n \operatorname{sh} \left( \frac{2n+1}{2} \frac{\pi}{\alpha} \right) = -A_n, \quad (1.182)$$

$$B_n \operatorname{ch} \left( \frac{2n+1}{2} \frac{\pi}{\alpha} \right) - C_n \operatorname{sh} \left( \frac{2n+1}{2} \frac{\pi}{\alpha} \right) = -A_n,$$

$$C_n = 0, \quad B_n = -\frac{A_n}{\operatorname{ch} \left( \frac{2n+1}{2} \frac{\pi}{\alpha} \right)}. \quad (1.183)$$

Sabitlərin ifadələrini (1.178)-də yazsaq, sür'ətin ölçüsüz ifadəsini alarıq:

$$W = \frac{16\alpha^2}{\pi^3} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^3} \left[ 1 - \frac{\operatorname{ch} \left( \frac{2n+1}{2} \frac{\pi}{\alpha} \eta \right)}{\operatorname{ch} \left( \frac{2n+1}{2} \frac{\pi}{\alpha} \right)} \right] \cos \left( \frac{2n+1}{2} \frac{\pi}{\alpha} \xi \right) \quad (1.184)$$

və ya sür'ətin ölçülü ifadəsi

$$w = \frac{16\alpha^2 h^2 \Delta P}{\pi^3 \mu l} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^3} \left[ 1 - \frac{\operatorname{ch}\left(\frac{2n+1}{2} \frac{\pi}{\alpha h} y\right)}{\operatorname{ch}\left(\frac{2n+1}{2} \frac{\pi}{\alpha}\right)} \right] \cos\left(\frac{2n+1}{2} \frac{\pi x}{\alpha}\right) \quad (1.185)$$

En kəsiyi düzbucaqlı olan boruda vahid zamanda həcm itkisi (1.185) sür'ət paylanmasıyla köməyi ilə təyin edilir:

$$Q = \int_0^{2h} \int_0^{\alpha} w dx dy = \frac{\Delta P}{4\mu l} \alpha h^4 \times \\ \times \left[ \frac{16}{3} - \frac{1024}{\pi^5 \alpha} \left( th \frac{\pi \alpha}{2} + \frac{1}{3^3} th \frac{3\pi \alpha}{2} + \dots \right) \right] = \frac{\Delta P}{4\mu l} \alpha h^4 \cdot f(\alpha) \quad (1.186)$$

Buradan

$$w_{or} = \frac{Q}{4\alpha h^2} = \frac{\Delta P h^2}{16\mu l} \cdot f(\alpha), \quad (1.187)$$

$\lambda$  müqavimət əmsalını belə bir düsturla təyin edilir:

$$\Delta P = \lambda \frac{l}{2h} \frac{\rho w_{or}^2}{2}. \quad (1.188)$$

(1.188) ifadəsində  $w_{or}$  ifadəsini nəzərə alsaq və  $Re = w_{or} \frac{2h}{\nu}$  ilə işarə etsək, onda müqavimət əmsalını təyin edirik:

$$\lambda = \frac{128}{Re f(\alpha)}. \quad (1.189)$$

(1.185) düsturunda  $\alpha = 1$  götürsək, en kəsiyi kvadrat olan boruda,  $\alpha \rightarrow \infty$  - müstəvi boruda axın məsələlərini öyrənmiş olarıq.



## II FƏSİL

### SƏRHƏD TƏBƏQƏSİ

#### §2.1 Özlü dalğalar

Özlü dalğalar adlanan məsələyə baxaq. Tutaq ki, sonsuz lövhə öz müstəvisində periodik rəqslər edir. (şək. 2.1).  $XY$  koordinatlarını lövhə üzərində,  $z > 0$  oxunu isə şaquli istiqamətdə yuxarı yönəldək.  $z > 0$  fəzasını özlü sıxılmayan bircins maye tutduğunu və  $\bar{\nabla}P = 0$  olduğunu qəbul edək. Lövhənin  $x$  oxu boyunca rəqsi hərəkətini

$$v_x|_{z=0} = v_0 \exp(-i\omega t), \quad v_y|_{z=0} = v_z|_{z=0} = 0 \quad (2.1)$$

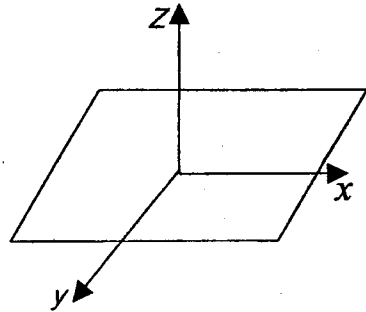
şəklində verək. Əgər maye ideal olarsa, lövhə və maye arasında sürtünmə qüvvəsi olmayacaq və  $z > 0$ ,  $v_x = v_y = v_z = 0$  şərti ödəniləcək, yəni maye sükunətdə qalacaq. Lakin lövhə hissəciyi isə  $x$  oxu istiqamətində yerini dəyişəcək.

Maye özlüdürsə, yapışqanlıq şərtinə əsasən, maye hissəciyinin sür'əti lövhə üzərində (2.1) şəklində veriləcək. Məsələnin

simmetriyindən  $v_y = 0$  olur və digər iki sür'ət komponenti ancaq  $z$  fəza koordinatının və  $t$  zamanının funksiyaları kimi dəyişir:

$$v_x = v_x(z, t), \quad v_z = v_z(z, t), \quad P = P(z, t).$$

Sıxılmayan mayələr üçün (1.80) kəsilməzlik tənliyini yazaq:



Şəkil 2.1

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0 \quad (2.2)$$

və ya

$$\frac{\partial v_z}{\partial z} = 0, \quad v_z = \text{const} = 0.$$

Navye-Stoks tənliyindən yazıb bilərik:

$$\frac{\partial v_x}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2}, \quad \nu = \frac{\mu}{\rho}. \quad (2.3)$$

(2.3) xətti bircins istilikkeçirmə tənliyidir. Onun (2.1) sərhəd şərtini ödəyən həllini

$$v_x = v_0 \exp[i(kz - \omega t)] \quad (2.4)$$

şəklində axtaraq. (2.4) ifadəsini (2.3) tənliyində yerinə yazsaq, dispersiya tənliyini alırıq:

$$k = \sqrt{\frac{i\omega}{\nu}} = \pm(1+i)\sqrt{\frac{\omega}{2\nu}} \quad (2.5)$$

$v_x$ -sür'ətinin ((2.4) ifadəsinin)  $z \rightarrow \infty$  məhdud olması üçün  $\text{Im} k > 0$ . Ona görə də, (2.5)-in müsbət işarəli ifadəsi götürülmüşdür. Bu halda

$$v_x = v_0 \exp\left[-\left(\sqrt{\frac{\omega}{2\nu}}z\right)\right] \exp\left[i\left(\sqrt{\frac{\omega}{2\nu}}z - \omega t\right)\right]. \quad (2.6)$$

(2.6)-da  $v_x$ -sür'ətinin "e" dəfə azalması üçün  $h = \sqrt{\frac{2\nu}{\omega}}$  olmalıdır. Əgər  $\mu \rightarrow 0$  olarsa, onda  $v_x \rightarrow 0$  və  $h \rightarrow 0$ . Bu isə onu göstərir ki, ideal mayelərdə həyəcanlanma baş vermir və özlü qat yaranmır. (2.4) ifadəsi özlü mayelərdə həyəcanlanmaların yayılmasını təsvir etdiyi üçün ona **özlü dalğalar** deyilir.

## §2.2. Keyfiyyət mülahizələri

Tutaq ki, özlü maye bərk cismi axıb keçir. Navye-Stoks tənliyində özlük əmsalı  $\mu$  azaldıqca  $\mu\Delta\bar{v}$  özlük həddi də azalır. Bizə elə gəlir ki,  $\nu = \left(\frac{\mu}{\rho}\right) \rightarrow 0$  olduqda, ideal mayenin cismi axıb keçmə halını alırıq. Bu belə deyildir. Özlü həddin inersiya həddinə olan nisbətini qiymətləndirək

$$\frac{|\mu\Delta\bar{v}|}{|\rho(\bar{v}\nabla)\bar{v}|} \sim \frac{\mu \frac{v_0}{l^2}}{\rho v_0^2 / l} = \frac{\nu}{v_0 l} = \frac{1}{Re}, \quad Re = \frac{v_0 l}{\nu} \quad (2.7)$$

Burada  $l$  məsələnin xarakterik miqyası,  $v_0$ -isə axının xarakteristik sür'ətidir. (2.7)-dən görüldüyü kimi

$$\frac{\mu}{\rho} \rightarrow 0, \quad Re \rightarrow \infty \quad (2.8)$$

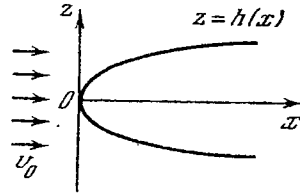
olur. (2.8) şərti onu göstərir ki, Reynolds ədədinin çox böyük qiymətlərində özlü hədd inersial həddə nisbətən çox kiçikdir. Bu cür qiymətləndirmə axının hər yerində doğrudurmu?

Lakin cismin səthinin lap yaxınlığında, sərhəd təbəqəsi adlanan oblastda, Reynolds ədədinin böyük olmasına baxmayaraq bu həddlər eyni tərtibdən ola bilərlər. Beləliklə, bərk cisim üzərində maye axınını iki oblasta ayırmaq olar. Birinci oblastda müəyyən  $h$  qalınlıqlı elə sərhəd təbəqəsi götürürük ki, orada səthin üzərindəki maye hissəciyinin  $\bar{v} = 0$  sür'əti təqribən  $\bar{v}_0$  axın sür'ətinə qədər dəyişsin.

Sür'ətin sərhəd təbəqəsində bu cür dəyişməsi  $\mu\Delta\bar{v}$  həddi ilə əlaqədardır və  $|\mu\Delta\bar{v}| \sim \mu\nu_0/h^2$  həddi Navye-Stoks tənliyində başqa hədlər ilə eyni tərtibdən olmalıdır. Bu

hədlərin eyni tərtibdən qalması üçün  $\mu$  azaldıqca  $v_0/h^2$  nisbəti böyüməlidir, yə'ni  $h$  kiçilməlidir. Beləliklə,  $\mu\Delta\bar{v}$  həddini I oblastda  $\mu \rightarrow 0$  olduqda atmaq olmaz.

II oblast isə ideal mayenin hərəkəti ilə xarakterizə edilir. Axını iki oblasta ona görə ayırırlar ki, II oblastda ideal mayenin hərəkət tənliyini-Eyler tənliyini (tənliyin tərtibi azalır), I oblastda isə sadələşmiş Navye-Stoks tənliyini həll etməli oluruq. Özlü mayenin nazik,



Şəkil 2.2

yarım sonsuz lövhə üzərində axın məsələsinə baxaq. Tutaq ki, lövhə  $Z = 0$  müstəvisi üzərindədir (şək. 2.2).

Bu halda aşağıdakı məsələni həll etməli oluruq:

$$\frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + (\bar{v} \cdot \nabla) \bar{v} = -\frac{\nabla P}{\rho} + \frac{\mu}{\rho} \Delta \bar{v}, \quad \nabla \bar{v} = 0, \quad (2.9)$$

$$\begin{cases} v_x = v_y = v_z = 0, & z = 0; \quad x \geq 0, \\ v_x|_{x \rightarrow -\infty} = v_0, \quad v_y = v_z = 0; & x \rightarrow -\infty. \end{cases} \quad (2.10)$$

Məsələnin simmetrikliliyinə əsasən yaza bilərik:

$$v_y \equiv 0, \quad v_x = v_x(x, z, t), \quad v_z = v_z(x, z, t),$$

$x \gg h(x)$  şərti daxilində qiymətləndirmələr aparaq:

$$\frac{\mu}{\rho} |\Delta \bar{v}| = \frac{\mu}{\rho} \left| \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial z^2} \right| \sim \frac{\mu}{\rho} \cdot \frac{v_0}{h^2(x)} \quad (2.11)$$

Digər tərəfdən, maye axınının  $X$  oxu istiqamətində olduğunu nəzərə alsaq,  $v_x \gg v_z$  olar və

$$|(\bar{v}\nabla)\bar{v}| \sim \left| v_0 \frac{\partial v_x}{\partial x} \right| \sim \frac{v_0^2}{x}; \quad (2.12)$$

(2.11) özlü və (2.12) inersiya hədlərinin bərabərliyindən  $h(x)$  tapmaq olar:

$$v \frac{v_0}{h^2(x)} \sim \frac{v_0^2}{x}; \quad h(x) \sim \left( \frac{vx}{v_0} \right)^{1/2} = \frac{x}{\sqrt{Re}} \quad (2.13)$$

Əgər  $Re = \frac{v_0 x}{\nu} \gg 1$  şərti ödənilərsə, onda sərhəd təbəqəsindən kənarda özlü həddi atmaq olar.

İndi lövhə üçün uyğun Reynolds ədədi qəbul edək:

$$Re_\ell = \frac{v_0 h(x)}{\nu} \sim \frac{x}{h(x)} = \sqrt{Re} \quad (2.14)$$

Eyni zamanda, maye seli tərəfindən lövhənin vahid səthinə tə'sir edən özlü qüvvəni tə'yin edək:

$$|f| = \mu \left| \frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial x} \right| \sim \mu \frac{v_0}{h(x)} = \rho \frac{w_0}{h(x)} = \rho \left( \frac{w_0^3}{x} \right)^{1/2} \quad (2.15)$$

Buradan müqavimət əmsalını asanlıqla tapırıq:

$$C_0 = \frac{f}{\rho v_0^2} \sim \left( \frac{\nu}{v_0 x} \right)^{1/2} = \frac{1}{\sqrt{Re}} \quad (2.16)$$

(2.16) ifadəsindən görüldüyü kimi lövhənin Reynolds ədədi böyüdükcə, onun müqavimət əmsalı azalır.

### §2.3. Sərhəd təbəqəsinin Prandtl tənlikləri

(2.13) ifadəsindən görünür ki, Reynolds ədədinin çox böyük qiymətlərində sərhəd təbəqəsi nazıqləşir. Bu halda Prandtl sərhəd təbəqəsi oblastında (I oblast) Navye-Stoks tənliyini sadələşdirmişdir. Əvvəlki paraqrafdakı məsələyə

baxaq (şək. 2.2). Tutaq ki, sıxılmayan mayenin yarımsonsuz  $XOY$  lövhə üzərində axını  $XOZ$  müstəvisində baş verir.

$X$  oxunu axın istiqamətində yönəltsek,  $v_y \equiv 0$ ,  $\frac{\partial}{\partial y} \equiv 0$  olar.

Sıxılmayan mayələr üçün Navye-Stoks və kəsilməzlik tənliklərini yazaq:

$$\begin{cases} \frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} + \nu \left( \frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} \right), \\ \frac{\partial v_z}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_z}{\partial x} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial z} + \nu \left( \frac{\partial^2 v_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} \right), \end{cases} \quad (2.17)$$

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0. \quad (2.18)$$

Sərhəd təbəqəsi oblastında  $0 \leq x \leq h(x)$  aşağıdakı münasibətlər doğrudur:

$$\begin{aligned} v_x \rightarrow v_0, \quad \frac{\partial}{\partial z} \approx \frac{1}{h(x)}, \quad \frac{\partial}{\partial x} \sim \frac{1}{x}, \\ h \approx \frac{x}{\sqrt{Re}} \ll x, \quad Re = \frac{v_0 x}{\nu} \gg 1. \end{aligned} \quad (2.19)$$

İ oblastda kəsilməzlik tənliyini sıfırdan  $h(x)$ -a qədər inteqrallayaq:

$$\begin{aligned} \int_0^h \frac{\partial v_z}{\partial z} dz = - \int_0^h \frac{\partial v_x}{\partial x} dz, \quad v_z|_{z=0} = 0, \\ v_z(h(x)) \approx -\frac{v_0 h(x)}{x}, \quad v_z \sim \frac{v_0 h(x)}{x} \ll v_0, \quad v_z \ll v_x. \end{aligned} \quad (2.20)$$

İndi (2.17) tənliyində inersial hədləri qiymətləndirək:

$$v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} \approx v_z \frac{\partial v_x}{\partial z} \sim \frac{v_0^2}{x}, \quad v_x \frac{\partial v_z}{\partial x} \approx v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} \sim \frac{v_0^2 h(x)}{x}. \quad (2.21)$$

(2.21) münasibətlərini (2.17) tənliklərində nəzərə alaq:

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} \sim \frac{v_0^2}{x}, \quad \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial z} \sim \frac{v_0^2}{x} \frac{h(x)}{x}, \quad \frac{h(x)}{x} \ll 1 \quad (2.22)$$

və onları müqayisə edək  $\frac{\partial P}{\partial x} \gg \frac{\partial P}{\partial z}$ .

Beləliklə, I oblastda  $P$  təzyiqinin  $z$ -dən asılılığını nəzərə almayaraq  $P = P(x, t)$  kimi qəbul etmək olar. II oblastda  $P(x, z, t)$  təzyiqi ideal mayelərin hidrodinamik tənliklər sistemindən tapıldıqdan sonra  $P(x, z, t)_{z=h(x)} = P(x, t)$  sərhəd şərtindən I oblastda təzyiq paylanması təyin edilir. I oblastda

$$\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} \sim \frac{v_0}{x^2}, \quad \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} \sim \frac{v_0}{h^2}, \quad \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} \gg \frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} \quad (2.23)$$

qiymətləndirmələrini (2.17) tənliyində nəzərə alsaq, Navye-Stoks tənliyi sadələşər

$$\frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\mu}{\rho} \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2}, \quad \nabla \bar{v} = 0 \quad (2.24)$$

İndi (2.24) Prandtl tənliklərini integral şəklinə gətirək. Bunun üçün (2.18) kəsilməzlik tənliyindən istifadə edərək, inersiya həddini çevirək:

$$\begin{aligned} v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z} &= v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial z} (v_x v_z) - v_x \frac{\partial v_z}{\partial z} = \\ &= \frac{\partial}{\partial x} (v_x^2) + \frac{\partial}{\partial z} (v_x v_z) \end{aligned} \quad (2.25)$$

(2.24) tənliyini  $z$ -ə görə sıfırdan  $h(x)$ -a qədər inteqrallayaq

$$\int_0^h \frac{\partial v_x}{\partial t} dz + \int_0^h \frac{\partial v_x^2}{\partial x} dz + v_x v_z \Big|_0^h = -\frac{h}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} + v \frac{\partial v_x}{\partial z} \Big|_0^h \quad (2.26)$$

Tutaq ki,  $v_{x=h} = v_0$ . Onda aşağıdakı münasibətləri yaza bilə-

rik:

$$\int_0^{h(x)} \frac{\partial v_x}{\partial t} dz = \frac{\partial}{\partial t} \int_0^h v_x dz - v_0 \frac{\partial h}{\partial t}$$

$$\int_0^h \frac{\partial v_x^2}{\partial x} dz = \frac{\partial}{\partial x} \int_0^h v_x^2 dz - v_0^2 \frac{\partial h}{\partial x} \quad (2.27)$$

$$v_x v_z \Big|_0^h = v_0 v_{z=h} = v_0 \int_0^h \frac{\partial v_z}{\partial z} dz = -v_0 \int_0^h \frac{\partial v_x}{\partial x} dz = -v_0 \frac{\partial}{\partial x} \int_0^h v_x dz + v_0^2 \frac{\partial h}{\partial x}$$

Qəbul etsək ki,  $\frac{\partial v_x}{\partial z} \Big|_{z=h} = 0$  ( $z \geq h(x)$ ) oblastında maye ideal olduğuna görə  $\tau_{xz} \Big|_{z=h} = 0$ ). Yuxarıdakı ifadələri (2.26) tənliyində yazsaq, alarıq:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_0^h v_x dz - v_0 \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \int_0^h v_x^2 dz - v_0 \frac{\partial}{\partial x} \int_0^h v_x dz = -\frac{h}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} - \frac{\mu}{\rho} \frac{\partial v_x}{\partial z} \Big|_{z=0} \quad (2.28)$$

(2.28) tənliyi birinci dəfə **Karman** tərəfindən alınmışdır. Əgər I oblastda  $v_x$  sür'əti mə'lum olarsa, onda (2.28) tənliyindən sərhəd təbəqəsinin qalınlığını tə'yin etmək olar.

#### §2.4. Qərarlaşmış müstəvi sərhəd təbəqəsi məsələsinin təqribi həlli

Əgər sərhəd təbəqəsi oblastında mayenin müstəvi qərarlaşmış hərəkətinə baxılırsa (şək.2.2), onda  $P$  təzyiqi ancaq  $x$  dəyişənin funksiyası kimi götürülür və (2.25) Prandtl tənliklərində  $P$ -dən  $x$ -ə görə törəməni tam törəmə  $\frac{dP}{dx}$  ilə əvəz etmək olar. İkinci oblastda ideal mayenin nazik sərhəd təbəqəsi üzərində axının sür'ətini, sərhəd təbəqəsi olmadı-



qda, ideal mayenin lövhə üzərindəki sürüşmə sür'ətinə  $U(x)$  bərabər götürmək olar.  $U(x)$  sür'əti sərhəd təbəqəsinin xarici sərhəddindəki sür'ətə uyğun olduğuna görə, o xarici sür'ət adlandırılır. Beləliklə, sabit potensiallı qüvvələr sahəsində II-oblastda mayenin hərəkətini burulğansız qəbul etsək, Bernuli teoremindən alarıq:

$$\frac{1}{\rho} \frac{dP}{dx} = -U \frac{dU}{dx} \quad (2.29)$$

(2.29) ifadəsini (2.24) tənliyində nəzərə alaraq:

$$\frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z} = U \frac{dU}{dx} + \nu \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} \quad (2.30)$$

Mə'lum faktdır ki,  $t = 0$  başlanğıc anda lövhə üzərində sərhəd təbəqəsi yaranmır və maye lövhənin səthi üzərində sürüşərək hərəkət edir. Zamanın kiçik qiymətlərində çox nazik sərhəd təbəqəsi əmələ gəlir və orada sür'ət sıfırdan çox az fərqlənərək, xarici  $U(x)$  sür'ətinin qiymətinə bərabər olur. Bu halda (2.30) tənliyində konvektiv hədləri digər hədlərlə müqayisədə atsaq, birinci yaxınlaşmada parabolik tip tənlik alarıq:

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 u_1}{\partial z^2}, \quad (2.31)$$

Bu halda (2.30) və (2.18) Prandtl tənliklərinin başlanğıc və sərhəd şərtləri aşağıdakı kimi olar:

$$v_x = U(x), \quad v_z = 0; \quad z = 0; \quad t = 0.$$

$$v_x = 0, \quad v_z = 0; \quad z = 0; \quad t > 0.$$

$$v_x = U(x), \quad z \rightarrow \infty; \quad (2.32)$$

$$v_x = U(0), \quad x = 0; \quad z \geq 0; \quad t \geq 0.$$

(2.31) tənliyinin avtomodel həllini

$$u_1 = U(x) f_1(\eta), \quad \eta = z / (2\sqrt{\nu t}) \quad (2.33)$$

şəklində axtaraq. (2.33) avtomodel həllini (2.31)-də nəzərə alaq:

$$\frac{d^2 f_1}{d\eta^2} + 2\eta \frac{df_1}{d\eta} = 0 \quad (2.34)$$

(2.34) diferensial tənliyinin həlli Qausun xəta funksiyası şəklindədir.

$$f_1 = \text{Erf}\eta = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\eta e^{-y^2} dy \quad (2.35)$$

Birinci yaxınlaşmada üfüqi  $u_1$  sür'ətini analitik tapırıq:

$$u_1 = U(x) \text{Erf}\eta \quad (2.36)$$

(2.36) ifadəsini (2.18) kəsilməzlik tənliyində yerinə yazıb,  $v_z \approx v_1$  ilə işarə etsək, birinci yaxınlaşmada  $v_1$  şaquli sür'əti təyin edirik:

$$v_1 = -2\sqrt{vt} \frac{dU}{dx} \left[ \eta \text{Erf}\eta - \frac{1}{\sqrt{\pi}} (1 - e^{-\eta^2}) \right] \quad (2.37)$$

İkinci yaxınlaşmanı tapmaq üçün  $v_x$  və  $v_z$  sür'ətlərinin ayrılışında (2.36), (2.37) birinci yaxınlaşmaların ifadələrini nəzərə almalıyıq

$$v_x = u_1 + u_2 + \dots, \quad v_z = v_1 + v_2 + \dots \quad (2.38)$$

(2.38) ayrılışını (2.30) tənliyində yerinə yazsaq, parabolik tip qeyri-bircins tənlik alırıq:

$$\begin{aligned} v \frac{\partial^2 u_2}{\partial z^2} - \frac{\partial u_2}{\partial t} &= -U \frac{dU}{dx} + u_1 \frac{\partial u_1}{\partial x} + v_1 \frac{\partial u_1}{\partial z} = \\ &= U \frac{dU(x)}{dx} \left[ \text{Erf}^2 \eta - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \pi e^{-\eta^2} \text{Erf}\eta - 1 + \frac{2}{\pi} (e^{-\eta^2} - e^{-2\eta^2}) \right] \end{aligned} \quad (2.39)$$

$u_2$  - sür'ətini bu şəkildə axtarsaq,

$$u_2 = tU \frac{dU(x)}{dx} f_2(\eta), \quad (2.40)$$

(2.39)-dan alarıq:

$$\frac{d^2 f_2}{d\eta^2} + 2\eta \frac{df_2}{d\eta} - 4f_2 = 4 \left[ \operatorname{Erf}^2 \eta - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \pi e^{-\eta^2} \operatorname{Erf} \eta - 1 + \frac{2}{\pi} (e^{-\eta^2} - e^{-2\eta^2}) \right] \quad (2.41)$$

(2.41) tənliyinin həlli belədir:

$$f_2(\eta) = \frac{1}{2} (2\eta^2 - 1) \operatorname{Erf}^2 \eta - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \pi e^{-\eta^2} \operatorname{Erf} \eta - 1 + \frac{4}{3\pi} e^{-\eta^2} + \frac{2}{\pi} e^{-2\eta^2} + \alpha(2\eta^2 + 1) + \beta \left[ \frac{\sqrt{\pi}}{2} (2\eta^2 + 1) \operatorname{Erf} \eta + \eta e^{-\eta^2} \right] \quad (2.42)$$

burada  $\alpha$  və  $\beta$  inteqrallama sabitləridir.  $f_2$  funksiyası üçün sərhəd şərtləri (2.38) ayrılışından (2.32) şərtlərinin köməyi ilə alınır:

$$f_2(\eta) = 0, \eta = 0; \quad f_2(\eta) = 0, \eta \rightarrow \infty; \quad (2.43)$$

(2.43) sərhəd şərtlərindən istifadə edərək, (2.42)-dən  $\alpha$  və  $\beta$  sabitlərini taparıq:

$$\alpha = -\left(1 + \frac{2}{3\pi}\right) \approx -1,212; \quad \beta = \frac{1}{\sqrt{\pi} \left(1 + \frac{4}{3\pi}\right)} \approx 0,804 \quad (2.44)$$

(2.42)-ifadəsini (2.40)-da nəzərə alsaq,  $u_2$ -sür'ətini təyin edərik. Kəsilməzlik tənliyindən istifadə edərək,  $v_2$ -ni taparıq:

$$v_2 = 2\sqrt{\nu}^3 \left[ U \frac{d^2 U(x)}{dx^2} + \left( \frac{dU(x)}{dx} \right)^2 \right] \left\{ \frac{1}{3\sqrt{\pi}} \left( 1 + \frac{4}{3\pi} \right) - \frac{1}{6} (2\eta^2 - 3\eta) \operatorname{Erf}^2 \eta + \frac{1}{6\sqrt{\pi}} \left[ 4 - (4\eta^2 - 1) e^{-\eta^2} \right] \operatorname{Erf} \eta - \right. \quad (2.45)$$

$$\left. - \eta - \frac{1}{3\pi} \eta e^{-\eta^2} - \frac{4}{3} \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} \operatorname{Erf}(\eta\sqrt{2}) + \left( 1 + \frac{2}{3\pi} \right) \left( \frac{2}{3} \eta^2 + \eta \right) - \right.$$

$$-\frac{1}{\sqrt{\pi}} \left( 1 + \frac{4}{3\pi} \right) \left[ \frac{\sqrt{\pi}}{6} (2\eta^3 + 3\eta) \operatorname{Erf}\eta + \frac{1}{3} (\eta^2 + 1) e^{-\eta^2} \right]$$

Eyni qayda ilə üçüncü, dördüncü və s. yaxınlaşmaları tapmaq olar. Absis oxu üzərində ayrılma nöqtəsi və ona uyğun gələn zaman (ayrılma müddətini)

$$\left( \frac{\partial v_x}{\partial z} \right)_{z=0} = 0 \quad \text{və ya} \quad \left( \frac{\partial v_x}{\partial \eta} \right)_{\eta=0} = 0 \quad (2.46)$$

tənliyinin kökü ilə təyin edilir.

Əgər ayrılmanın absisini  $x_0$  və ona uyğun gələn zamanı  $t_0$  ilə işarə etsək, ikinci yaxınlaşmada alarıq:

$$1 + \left( 1 + \frac{4}{3\pi} \right) \left( \frac{dU}{dx} \right)_0 t_0 = 0. \quad (2.47)$$

Buradan

$$t_0 = \frac{1}{\left( 1 + \frac{4}{3\pi} \right) \left( -\frac{dU}{dx} \right)_0}. \quad (2.48)$$

Ayrılma-sərhəd təbəqəsinin xarici sərhəddində sür'ətin absisə görə törəməsinin mənfi qiymətləri oblastında baş verir və ən əvvəl bu ayrılma törəmənin mütləq qiymətinə maksimum verən nöqtədən başlanır. (2.48)-dən görüldüyü kimi cismin səthində ayrılma müddəti onun fiziki xassələ-rindən (sıxlıqdan, özlükdən) asılı deyildir.

Xüsusi halda  $a$  radiuslu silindr götürək və  $x$ -i çevrənin qövsü boyunca kritik nöqtədən hesablayaq:

$$U(x) = u_\infty \sin \frac{x}{a}, \quad \frac{dU(x)}{dx} = 2 \frac{u_\infty}{a} \cos \left( \frac{x}{a} \right). \quad (2.49)$$

Buradan  $\max \left| \frac{dU(x)}{dx} \right| = 2 \frac{u_\infty}{a}$  ifadəsini (2.48)-də nəzərə al-

saq, hərəkət başlanan andan sərhəd təbəqəsinin arxa tərəfində kritik nöqtənin ayrılma vaxtını tapırıq:

$$t_0 = \frac{a}{2 \left(1 + \frac{4}{3\pi}\right) u_\infty} = 0,351 \frac{a}{u_\infty}. \quad (2.50)$$

## §2.5. Qərarlaşmış müstəvi sərhəd təbəqəsinin tənliklərinin avtomodel həlli

Yarımsonsuz nazik lövhə üzərində sıxılmayan mayenin qərarlaşmış axın məsələsinə baxaq.  $\frac{dP}{dx} = 0$  olduqda, Prandtl tənliklərini yazaq:

$$v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z} = \nu \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2}, \quad (2.51)$$

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0. \quad (2.52)$$

Cərəyan funksiyası  $v_x = \frac{\partial \psi}{\partial z}$ ,  $v_z = -\frac{\partial \psi}{\partial x}$  daxil etsək, kəsilməzlik tənliyi eyniliklə ödənilər, (2.51) hərəkət tənliyi isə aşağıdakı şəkllə düşər:

$$\frac{\partial \psi}{\partial z} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial z} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = \nu \frac{\partial^3 \psi}{\partial z^3} \quad (2.53)$$

$OX$  oxu lövhənin üzərində simmetriya oxu olduğunu nəzərə alsaq, yazarıq

$$\frac{\partial v_x}{\partial z} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = 0, \quad \psi = 0; \quad z = 0 \quad (2.54)$$

$$\lim_{z \rightarrow \infty} v_x = \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{\partial \psi}{\partial z} = 0$$

(2.51)-(2.54) məsələsində  $x$ -ə nəzərən sərhəd şərti iştirak

etmir və  $v_x = v_z = 0$  onun trivial həlli olur. Bu ziddiyyəti aradan qaldırmaq üçün (2.51) tənliyini (2.52)-nin köməyi ilə aşağıdakı şəkllə gətirək:

$$\frac{\partial v_x^2}{\partial x} + \frac{\partial v_x v_z}{\partial z} = v \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} \quad (2.55)$$

(2.55)-i  $z$ -ə görə  $-\infty$ -dan  $+\infty$  qədər inteqrallayaq:

$$\frac{d}{dx} \int_{-\infty}^{\infty} v_x^2 dz + (v_x v_z)_{-\infty}^{+\infty} = v \left( \frac{\partial v_x}{\partial z} \right)_{-\infty}^{+\infty} \quad (2.56)$$

Yuxarıdakı sərhəd şərtlərindən istifadə etsək, (2.56)-dan alarıq:

$$\frac{d}{dx} \int_{-\infty}^{\infty} v_x^2 dz = 0, \quad \int_{-\infty}^{\infty} v_x^2 dz = const \quad (2.57)$$

(2.57) bərabərliyinin hər tərəfini sabit  $\rho$  sıxlığına vuraq:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \rho v_x^2 dz = J_0 = const \quad (2.58)$$

(2.58) düsturundan belə nəticəyə gəlirik ki, lövhənin ixtiyari en kəsiyindən keçən mayenin hərəkət miqdarı sabitdir.  $J_0$  kəmiyyətinin verilməsi məsələni tamamilə müəyyən edir. (2.58) düsturundan çıxır ki, (2.51)-(2.54) məsələsinin trivial olmayan həlli var. Ölçülər nəzəriyyəsinin köməyi ilə (2.53) tənliyinin avtomodel həlli

$$\psi = \frac{J_0}{\rho v_0} \left( \frac{x}{L} \right)^{1/3} \varphi(\eta), \quad \eta = \sqrt{\frac{J_0}{\rho v^2}} \cdot \frac{z}{x^{2/3}} \quad (2.59)$$

şəklində axtarılır. Burada  $L = J_0^2 / (v_0^3)$ ,  $v_0$ -axının xarakteristik sür'ətidir. (2.59) ifadəsini (2.53) tənliyində və (2.54) sərhəd şərtlərində yazaq:

$$\frac{d^3\varphi}{d\eta^3} + \frac{1}{3} \left[ \left( \frac{d\varphi}{d\eta} \right)^2 + \varphi \frac{d^2\varphi}{d\eta^2} \right] = 0 \quad (2.60)$$

$$\varphi = 0, \frac{d^2\varphi}{d\eta^2} = 0; \quad \eta = 0 \quad (2.61)$$

$$\lim_{\eta \rightarrow +\infty} \frac{d\varphi}{d\eta} = 0$$

(2.58) inteqral şərtini bir daha  $\varphi$  əvəzləməsində yazaq:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left( \frac{d\varphi}{d\eta} \right)^2 d\eta = 1 \quad (2.62)$$

(2.60) tənliyini (2.61)-in birinci iki şərtini nəzərə alaraq, inteqrallayaq:

$$\frac{d^2\varphi}{d\eta^2} + \frac{1}{3} \varphi \frac{d\varphi}{d\eta} = 0 \quad (2.63)$$

və  $\frac{d\varphi}{d\eta} = 0$  olduqda,  $\varphi = \varphi_0$  olarsa, (2.63)-dən taparıq:

$$\frac{d\varphi}{d\eta} = \frac{1}{6} (\varphi_0^2 - \varphi^2) \quad (2.64)$$

Yenə də (2.64) tənliyini inteqrallayaq

$$\varphi = \varphi_0 \operatorname{th} \left( \frac{1}{6} \varphi_0 \eta \right) \quad (2.65)$$

(2.62) şərtindən istifadə edərək,  $\varphi_0$ -ı tapaq

$$\frac{\varphi_0}{6} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\xi}{ch^2\xi} = 1, \quad \varphi_0 = \sqrt[3]{\frac{9}{2}} \quad (2.66)$$

(2.65) ifadəsini (2.59) nəzərə alsaq,  $\psi$  -cərəyan funksiyasını taparıq

$$\psi = 1,6513 \sqrt{\frac{\nu J_0 x}{\rho}} \operatorname{th} \left( 0,27523 \sqrt{\frac{J_0}{\rho \nu^2}} \frac{z}{x^{2/3}} \right) \quad (2.67)$$

Axının sür'ət komponentləri  $\psi$  funksiyası mə'lum olduqda asanlıqla tapılır. Cərəyan funksiyasının fiziki mə'nasından istifadə edərək vahid zamanda en kəsikdən keçən maye həcmi tə'yin edək:

$$Q = 2(\psi)_{z \rightarrow \infty} = 3,3023 \sqrt{\frac{WJ_0}{\rho}} x \quad (2.68)$$

(2.67) düsturuna əsasən sür'ətin üfüqi komponentinin profilini  $z$ -dən asılı qursaq, bu profilin

$$v_x = v_0 \sin \xi, \quad \xi = \frac{\pi}{2h} z \quad (2.69)$$

funksiyasına aproksimasiya etmək olur. Bu aproksimasiyanın doğruluğunu təcrübədən alınmış nəticələr də təsdiq edir. (2.69) ifadəsini Karman tənliyində yazıb, aşağıdakı inteqralları hesablayaq:

$$\int_0^h v_x dz = v_0 \frac{2h}{\pi} \int_0^{\pi/2} \sin \xi d\xi = \frac{2h}{\pi} v_0$$

$$\int_0^h v_x^2 dz = v_0^2 \frac{2h}{\pi} \int_0^{\pi/2} \sin^2 \xi d\xi = \frac{2h}{\pi} v_0^2$$

Nəticədə  $h(x)$  sərhəd təbəqəsi üçün adi diferensial tənlik alınır:

$$h \frac{dh}{dx} = \frac{v}{v_0} \frac{\pi^2}{4 - \pi} \quad (2.70)$$

(2.70)-tənliyinin  $h(0) = 0$  şərtində həlli bu cür olar :

$$h(x) = \sqrt{\frac{2\pi^2}{4 - \pi}} \sqrt{\frac{vx}{v_0}} \quad (2.71)$$

Buradan görünür ki, sərhəd təbəqəsinin qalınlığı  $x$ -in kökü ilə düz,  $v_0$  sür'ətinin kökü ilə tərs mütənasıbdır. Maye



tərəfindən lövhənin vahid səthinə tə'sir edən qüvvəni hesablayaq:

$$f(x) = \mu \left( \frac{\partial v_x}{\partial z} \right)_{z=0} = \frac{1}{2} \rho v_0^2 \sqrt{\frac{4-\pi}{2}} \sqrt{\frac{v}{v_0 x}} \quad (2.72)$$

Buradan  $L$  uzunluqlu və vahid enlikli lövhəyə tə'sir edən qüvvəni və müqavimət əmsalını tapaq:

$$F = \int_0^L f dx = \frac{1}{2} \rho v_0^2 \sqrt{\frac{4-\pi}{2}} \cdot 2L \sqrt{\frac{v}{v_0 L}} = \sqrt{\frac{4-\pi}{2}} \frac{\rho v_0^2 L}{\sqrt{Re}},$$

$$Re = \frac{v_0 L}{\nu} \quad (2.73)$$

$$C_0 = \frac{2F}{\rho v_0 L} = \frac{1,31}{\sqrt{Re}}.$$

### III FƏSİL

#### MAYEDƏ SƏTHİ VƏ DAXİLİ DALĞALAR.

##### §3.1. Hidrodinamika tənliklərinin xəttiləşməsi

Mayenin qərərlaşmış hərəkətini təsvir edən hidrodinamikanın tənliklər sistemi qeyri-xəttidir. Ağırliq qüvvəsi sahəsində (1.19) hərəkət, (1.12) kəsilməzlik və (1.22) hal tənliklərini yazaq:

$$\frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + (\bar{v} \cdot \bar{\nabla}) \bar{v} = -\frac{\bar{\nabla} P}{\rho} - g \bar{\nabla} z - 2\bar{\Omega} \times \bar{v}, \quad (3.1)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla(\rho \bar{v}) = 0; \quad (3.2)$$

$$\frac{dP}{dt} = \left( \frac{\partial P}{\partial \rho} \right)_s \frac{d\rho}{dt} = c^2 \frac{d\rho}{dt}, \quad (3.3)$$

burada  $g \bar{\nabla} z$  - **ağırliq** qüvvəsi,  $2\bar{\Omega} \times \bar{v}$  - **Kariolis** qüvvəsidir.

Əgər mayenin hərəkətini xarakterizə edən parametrlər mayenin həyəcanlanması zamanı çox az dəyişərsə, onda (3.1)-(3.3) tənliklərini xəttiləşdirmək olar. Tarazlıqda olan mayenin (1.27) tənliyini yazaq:

$$\bar{v}_0 = 0; \quad \bar{\nabla} P_0 = -g \rho_0(z) \bar{\nabla} z. \quad (3.4)$$

Fərz edək ki, tarazlıqda olan mayenin  $P_0(z)$  təzyiqi,  $\rho_0(z)$  -sıxlığı maye həyəcanlandıqdan sonra öz qiymətlərini çox az dəyişir:

$$\begin{aligned} \bar{v} &= 0 + \bar{v}', \quad P = P_0(z) + P', \quad \rho = \rho_0(z) + \rho', \\ P' &\ll P_0, \quad \rho' \ll \rho_0. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Onda inersial hədd  $|(\bar{v} \cdot \bar{\nabla}) \bar{v}| \sim \frac{(\bar{v}')^2}{L}$  şəkində olacaq. Burada  $L$  -xarakteristik məşab olub, bu məsələdə dalğa uzunluğudur.

(3.1) tənliyində  $\bar{\nabla}P / \rho$  həddini xəttiləşdirək:

$$\begin{aligned} \frac{\bar{\nabla}P}{\rho} &= \frac{\bar{\nabla}(P_0 + P')}{\rho_0(z) + P'} = \frac{\bar{\nabla}P_0 + \bar{\nabla}P'}{\rho_0(z) \left(1 + \frac{P'}{\rho_0}\right)} \approx \\ &\approx \frac{\bar{\nabla}P_0(z)}{\rho_0(z)} + \frac{\bar{\nabla}P'}{\rho_0(z)} - \frac{\rho'}{\rho_0(z)} \frac{\bar{\nabla}\rho_0}{\rho_0} - \frac{\rho'}{\rho_0(z)} \frac{\bar{\nabla}P'}{\rho_0(z)} \approx \\ &\approx \frac{\bar{\nabla}P_0(z)}{\rho_0(z)} + \frac{\bar{\nabla}P'}{\rho_0(z)} - \frac{\bar{\nabla}P_0}{\rho_0(z)} \frac{\rho'}{\rho_0(z)}. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Analoji qaydada (3.2) kəsilməzlik və (3.3) tənliklərində qeyri-xətti hədləri sadələşdirək:

$$\begin{aligned} \nabla(\rho\bar{v}) &= \nabla[\rho_0(z) + \rho']\bar{v}' \approx \nabla(\rho_0(z)\bar{v}') = \\ &= \rho_0(z)\nabla\bar{v}' + (\bar{v}' \cdot \bar{\nabla}\rho_0(z)) = \rho_0\nabla\bar{v}' + v'_z \frac{d\rho_0(z)}{dz}, \end{aligned} \quad (3.7)$$

$$\begin{aligned} \frac{d\rho}{dt} &= \frac{\partial}{\partial t}(P_0 + P') + v'_x \frac{\partial P}{\partial x} + v'_y \frac{\partial P}{\partial y} + v'_z \frac{\partial P}{\partial z} = \\ &= \frac{\partial}{\partial t}[P_0(z) + P'] + v'_x \frac{\partial}{\partial x}[P_0(z) + P'] + v'_y \frac{\partial}{\partial y}[P_0(z) + P'] + \\ &+ v'_z \frac{\partial}{\partial z}[P_0(z) + P'] = \frac{\partial P'}{\partial t} + v'_z \frac{dP_0}{dz} = \\ &= \left(\frac{\partial P'}{\partial t}\right)_s + v'_z \left(\frac{\partial P_0}{\partial z}\right)_s \cdot \frac{d\rho_0}{dz} = c^2 \left(\frac{\partial P'}{\partial t} + \frac{d\rho_0}{dz} v'_z\right), \end{aligned} \quad (3.8)$$

$$\begin{aligned} \frac{d\rho}{dt} &= \frac{\partial P'}{\partial t} + v'_z \frac{\partial \rho_0}{\partial z} = \left(\frac{\partial P'}{\partial t}\right)_s + v'_z \left(\frac{\partial \rho_0}{\partial z}\right)_s \frac{\partial P_0}{\partial z} = \\ &= \frac{1}{c^2} \frac{\partial P'}{\partial t} + \frac{v'_z}{c^2} (-g\rho_0) \end{aligned} \quad (3.9)$$

(3.6)-(3.9) münasibətlərini (3.1)-(3.3)-də nəzərə alsaq və ştrixləri atsaq, alarıq:

$$\frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + \frac{\bar{\nabla} P}{\rho_0(z)} + g \frac{\rho}{\rho_0(z)} \bar{\nabla} z + 2\bar{\Omega} \times \bar{v} = 0 \quad (3.10)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{d\rho_0(z)}{dz} v_z + \rho_0 \nabla \bar{v} = 0 \quad (3.11)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = c^2 \frac{\partial P}{\partial t} + \rho_0(z) \frac{N^2(z)}{g} v_z \quad (3.12)$$

burada  $N$  Vyasal tezliyidir

$$N^2(z) = -g \left( \rho_0^{-1} \frac{d\rho_0}{dz} + \frac{g}{c^2} \right)$$

Əgər maye sıxılmayırsa,  $\rho = \text{const}$ , onda

$$\frac{d\rho}{dt} = 0, \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + v_z \frac{d\rho_0(z)}{dz} = 0 \quad (3.13)$$

olar və kəsilməzlik tənliyi sadələşər

$$\text{div} \bar{v} = \nabla \bar{v} = 0 \quad (3.14)$$

(3.3) hal tənliyində nəzərə alsaq ki, həyəcanlanmada

$\frac{dP}{dt} \neq 0$ , onda, mayədə səsin  $c = \infty$  sür'ətlə yayıldığını ala-

ırıq. Bu halda (3.10)-(3.12) tənlikləri aşağıdakı şəkə düşər:

$$\frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + \frac{\bar{\nabla} P}{\rho_0} + g \frac{\rho}{\rho_0(z)} \bar{\nabla} z + 2\bar{\Omega} \times \bar{v} = 0, \quad (3.15)$$

$$\nabla \bar{v} = 0; \quad (3.16)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} - \rho_0(z) \frac{N^2(z)}{g} v_z = 0, \quad N^2(z) = -g \rho_0^{-1} \frac{d\rho_0}{dz} \quad (3.17)$$

### §3.2. Xətti sərhəd şərtləri

Tutaq ki, tarazlıqda olan mayenin səthi müstəvidir. Maye səthini müstəvi halından çıxardıqda, onu əvvəlki halına iki müxtəlif qüvvə qaytarmağa çalışacağıq. Ona görə də

maye səthində bütün istiqamətlərdə yayılan dalğalar meydana çıxacaq. Tarazlıq halında maye səthi  $Z = 0$  müstəvisi ilə müəyyən olunacaq. Tutaq ki, həyəcanlanmadan sonra bu səth  $z = z(x, y, t)$  ifadəsi ilə tə'yin olunur. Bu səthin qalxıb-enmə sür'əti  $\frac{dz}{dt}$  -maye hissəciyinin şaquli sür'əti ilə üst-üstə düşəcək, yə'ni

$$v_z - \frac{dz(x, y, t)}{dt} = 0, \quad (3.18)$$

Bu şərtə mayenin sərbəst səthində kinematik sərhəd şərti deyilir.

Bu sərhəddin hər iki tərəfində təzyiqlərin müxtəlif olmasına səbəb məhz həyəcanlanma zamanı maye səthində səthi gərilmə qüvvəsinin yaranmasıdır. Əgər mayədə təzyiq  $P_0(z) + P'$ , onun səthi üzərində  $P_a$  - ilə işarə etsək, onda mə'lum Laplas düsturuna əsasən:

$$P_0(z) + P'(z) - P_a = -\sigma/R, \quad (3.19)$$

Burada  $\sigma$  -səthi gərilmə əmsalı,  $R^{-1}$  -isə səthinin baş əyriliklərinin cəmidir?

$$R^{-1} = \nabla \left( \frac{\bar{\nabla} z}{\sqrt{1 + (\bar{\nabla} z)^2}} \right) \epsilon \quad (3.20)$$

(3.19) şərti mayenin sərbəst səthində **dinamik sərhəd şərti** adlanır. (3.18) və (3.19) sərhəd şərtləri qeyri-xəttidir və həyəcanlanmış  $z(x, y)$  səthinin kiçik qiymətlərində xəttiləşir:

$$v_{z=0} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \Big|_{z=0} z + \dots - \frac{\partial z}{\partial t} - v_x \frac{\partial z}{\partial x} - v_y \frac{\partial z}{\partial y} = v_{z=0} - \frac{\partial z}{\partial t} = 0,$$

$$v_{z=0} = \frac{\partial z}{\partial t}, \quad (3.21)$$

$$P_0(z) = P_0(0) + \left. \frac{\partial P_0}{\partial z} \right|_{z=0} z + \dots, \quad \left. \frac{dP_0}{dz} \right|_{z=0} = -\rho_0 g;$$

$P_0(0) = P_a$  olduğunu nəzərə alsaq, (3.21)-in axırıncı şərti bu şəkllə düşər:

$$P|_{z=0} = g\rho_0(0)z - \sigma\Delta_- z, \quad \Delta_- = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}. \quad (3.22)$$

### §3.3. Səthi qravitasiya dalğaları. Harmonik dalğalar

Tutaq ki, sıxılmayan mayenin müstəvi sərbəst səthi həyəcanlandıqdan sonra onu əvvəlki vəziyyətinə qaytaran qüvvə ancaq qravitasiya (ağırlıq) qüvvəsidir. Bu halda

$$\rho_0(z) = \text{cons}, \quad \rho' = 0, \quad \bar{\Omega} = 0, \quad \sigma = 0 \quad (3.23)$$

olar və (3.15) hərəkət, (3.16) kəsilməzlik tənlikləri sadələşər:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial P}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial P}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial t} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial z} = 0, \quad (3.24)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0. \quad (3.25)$$

Burada  $\vec{v}(v_x, v_y, v_z)$  ilə  $\bar{v}(u, v, w)$  işarə edilmişdir. (3.24) tənliklər sisteminin birinci tənliyindən x-ə, ikincisindən y-ə, üçüncüsündən z-ə görə törəmə alıb, tərəf-tərəfə toplayaq:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) + \frac{1}{\rho_0} \left( \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial z^2} \right) = 0. \quad (3.26)$$

(3.25) kəsilməzlik tənliyini (3.26)-da nəzərə alsaq, Laplas

tənliyini alarıq:

$$\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial z^2} = \Delta P = 0 \quad (3.27)$$

İndi (3.24) sisteminin birinci tənliyindən  $x$ -ə, ikinci tənliyindən  $y$ -ə görə törəmə alıb, tərəf-tərəfə toplayaq:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \frac{1}{\rho_0} \left( \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} \right) = 0, \quad \Delta_- P = \rho_0 \frac{\partial^2 w}{\partial t \partial z} \quad (3.28)$$

(3.24) sisteminin üçüncü tənliyinə  $\Delta_-$ -tə'sir edək:

$$\frac{\partial}{\partial t} \Delta_- w + \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial}{\partial z} \Delta_- P = 0 \quad (3.29)$$

(3.28) düsturunu (3.29)-da yerinə yazsaq, taparıq:

$$\frac{\partial}{\partial t} \Delta w = \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) = 0 \quad (3.30)$$

(3.24) sisteminin birinci və ikinci tənliklərinə  $\Delta_-$  operatoru ilə tə'sir edək və (3.28) münasibətini onlarda nəzərə alaq:

$$\frac{\partial}{\partial t} \Delta_- u = -\frac{\partial^3 w}{\partial t \partial x \partial z}, \quad \frac{\partial}{\partial t} \Delta_- v = -\frac{\partial^3 w}{\partial t \partial y \partial z} \quad (3.31)$$

Beləliklə, (3.30) tənliyini sərhəd və başlanğıc şərtləri daxilində həll edərək  $w$  sür'ət paylanması tapılır. Sonra  $w$ -nin ifadəsi (3.31)-də nəzərə alınaraq  $u$  və  $v$ , (3.28)-dən isə  $P$ -təzyiq paylanması tapılır.

Həyəcanlanmada ancaq qravitasiya qüvvəsi iştirak etdiyindən, əvvəlki sərhəd şərtləri sadələşər:

$$w \Big|_{z=0} = \frac{\partial z}{\partial t}, \quad P \Big|_{z=0} = \rho_0 g z. \quad (3.32)$$

(3.32) sərhəd şərtlərinin ikincisinə  $\Delta_-$  ilə tə'sir edib,  $t$ -yə görə lokal törəmə alaq:

$$\left. \frac{\partial}{\partial t} \Delta P \right|_{z=0} = \rho_0 g \frac{\partial}{\partial t} \Delta_{-z} . \quad (3.33)$$

Sonra (3.33)-də (3.28) ifadəsini (3.32) birinci sərhəd şərtində nəzərə alsaq,  $w$  şaquli sür'əti üçün sərhəd şərti alırıq:

$$\left. \frac{\partial^3 w}{\partial t^2 \partial z} \right|_{z=0} = g \Delta_{-z} w|_{z=0} . \quad (3.34)$$

Aşağıdakı konkret məsələyə baxaq:  $H$  dərinliyində, üfüqi istiqamətdə qeyri-məhdud olan maye qatında harmonik dalğaların yayılmasını öyrənək. Mayenin alt qatında onun hissəciklərinin yarışqanlıq şərtinə görə,

$$w|_{z=-H} = 0 \quad (3.35)$$

olacaq. (3.30) tənliyinin həllini (3.34) və (3.35) sərhəd şərtləri daxilində harmonik dalğa şəklində axtaraq:

$$w = \Phi(z) \exp i(\bar{k} \cdot \bar{r} - \omega t), \quad (3.36)$$

burada  $\bar{k}$  -dalğa vektorudur,

$$\bar{k}(k_x, k_y), \quad \bar{r}(x, y), \quad k = \sqrt{k_x^2 + k_y^2} \quad (3.37)$$

(3.36)-ni (3.30)-da nəzərə alsaq, aşağıdakı tənliyə gələrik:

$$\frac{d^2 \Phi}{dz^2} - k^2 \Phi = 0. \quad (3.38)$$

Onda (3.34) və (3.35) sərhəd şərtləri aşağıdakı şəkllə düşər:

$$\left( \frac{d\Phi}{dz} - g \frac{k^2}{\omega^2} \Phi \right)_{z=0} = 0, \quad \Phi|_{z=-H} = 0 \quad (3.39)$$

Bu tənliyin həlli aşağıdakı şəkildədir:

$$\Phi = a_1 e^{kz} + b_1 e^{-kz} \quad (3.40)$$

(3.39)-un ikinci şərtinə əsasən,  $\Phi$  funksiyasını belə yazmaq olar:

$$a_1 e^{-kH} + b_1 e^{kH} = 0, \quad a_1 = -b_1 e^{2kH},$$



$$\Phi = -b_1 e^{2kH} e^{kz} + b_1 e^{-kz}; \quad b_1 = -b e^{-kH} / shkH,$$

$$\Phi = b \frac{shk(z+H)}{shkH}. \quad (3.41)$$

(3.41)-i (3.39)-un birinci şərtində nəzərə alsaq,

$$\omega^2 = gkth(kH) \quad (3.42)$$

dispersiya münasibətini alırıq. (3.42) münasibəti dalğa tezliyi və məsələnin parametrləri arasındakı əlaqəni verir. Bu parametrlər mə'lum olduqda, düşən dalğanın tezliyini tapmaq olar:

$$\omega = \sqrt{gkth(kH)}. \quad (3.43)$$

(3.43)-dən düşən dalğanın faza sür'əti

$$C_\phi = \omega / k = \sqrt{\frac{g}{k} th(kH)} = \sqrt{gH} \sqrt{\frac{th(kH)}{kH}} \quad (3.44)$$

və qruppa sür'əti tapılır:

$$C_{gp} = \frac{d\omega}{dk} = \frac{C_\phi}{2} \left( 1 + \frac{kH}{th(kH)} - kHth(kH) \right). \quad (3.45)$$

Sərbəst səthin yerdəyişməsi

$$\frac{\partial z}{\partial t} = w /_{z=0} = b \exp[i(\bar{k}\bar{r} - \omega t)]$$

ifadəsindən tə'yin edilir:

$$z = \frac{b}{\omega} \exp i(\bar{k} \cdot \bar{r} - \omega t). \quad (3.46)$$

### §3.4. Qravitasiya-kapilyar dalğaları

Əgər mayenin sərbəst müstəvi səthini həyəcanlandıqdan sonra əvvəlki vəziyyətinə ağırlıq və səthi gərilmə qüvvələri qaytararsa, onda bu səthdə (3.18) və (3.22) sərhəd şərtləri ödənməlidir. Əvvəlcə (3.22) sərhəd şərtinə

$\Delta_-$  ilə tə'sir edək, sonra ondan  $t$ -yə görə törəmə alaq:

$$\frac{\partial \Delta_- P}{\partial t} = \rho_0 g \frac{\Delta_- z}{\partial t} - \sigma \Delta_- \Delta_- \left( \frac{\partial z}{\partial t} \right), \quad (3.47)$$

(3.47)-də (3.18) sərhəd şərtini və (3.28) tənliyini nəzərə alaq:

$$\left( \frac{\partial^3 w}{\partial t^2 \partial z} - g \Delta_- w + \gamma \Delta_- \Delta_- w \right)_{z=0} = 0, \quad \gamma = \sigma / \rho_0. \quad (3.48)$$

İndi (3.30) və (3.48) məsələsinin həllini müstəvi harmonik dalğalar şəklində axtaraq. Bu məsələni əvvəlki qayda ilə həll etsək, aşağıdakı dispersiya münasibətini alarıq:

$$\omega^2 = (gk + \gamma k^3) th(kH), \quad (3.49)$$

Buradan faza sür'ətinin kvadratını tapaq:

$$C_\phi^2 = \left( \frac{g}{k} + \gamma k \right) th(kH). \quad (3.50)$$

Dərin mayelərdə  $\lambda \ll H$  şərti ödənilərsə, onda  $kH \gg 1$ ,  $thkH \approx 1$  olar:

$$\omega^2 = gk + \gamma k^3, \quad C_\phi^2 = \frac{g}{k} + \gamma k. \quad (3.51)$$

İndi qısa və uzun dalğalar üçün (3.49) dispersiya tənliyini sadələşdirək.

1. Qısa dalğalarda ( $k \gg 1$ ) -  $\omega^2 = \gamma k^3 th(kH)$  münasibətindən görüldüyü kimi kapilyar dalğalar üstünlük təşkil edir.
  2. Uzun dalğalarda ( $k \ll 1$ ) -  $\omega^2 = gk th(kH)$  münasibəti alınır və bu halda qravitasiya dalğaları üstünlük təşkil edir.
- (3.51)-dən  $kH \ll 1$  olduqda, faza sür'əti üçün

$$C_\phi = \sqrt{\frac{g}{k} + \gamma k}, \quad (3.52)$$

düsturunu alırıq. (3.52)-dən tapırıq:

$$2C_{\phi} \frac{dC_{\phi}}{dk} = -\frac{g}{k^2} + \gamma, \quad \frac{d^2C_{\phi}^2}{dk^2} = -\frac{2g}{k^2} < 0. \quad (3.53)$$

(3.53)-ün birinci düsturuna əsasən  $\left(-\frac{g}{k^2} + \gamma = 0\right)$  şərtindən faza sür'ətinə minimum qiymət verən dalğa ədədi tapılır :

$$k_0 = \sqrt{\frac{g}{\gamma}}, \quad \lambda_0 = 2\pi \sqrt{\frac{\gamma}{g}} \quad (3.54)$$

(3.54)-dü (3.52)-də nəzərə alsaq, minimal faza sür'ətinin kvadratını tapırıq:

$$C_{\phi \min}^2 = 2(g\gamma)^{1/2} \quad (3.55)$$

Su - hava sərhəddində verilənlərə əsasən

$$\gamma = \frac{\sigma}{\rho_0} = 73 \text{ sm}^3 / \text{san}^2, \quad g = 983 \frac{\text{sm}}{\text{san}^2}, \quad k_0 = \sqrt{\frac{g}{\gamma}}$$

alarıq:

$$\lambda_0 = 1,714 \text{ sm}, \quad C_{\phi \min} = 23,1 \text{ sm} / \text{san} ,$$

$$\omega_0 = C_{\phi \min} / \lambda_0 = 13,5 \text{ hc} ,$$

$\lambda_0$  -dalğanın uzun-qravitasiya və qısa kapilyar dalğalara ayrıran sərhəd qiymətidir. Əgər  $\lambda \gg \lambda_0$  olarsa, - qravitasiya dalğaları,  $\lambda \ll \lambda_0$  olarsa, - kapilyar dalğalar üstünlük təşkil edir.  $kH \gg 1$  şərti daxilində (3.51)-in birinci dispersiya münasibətindən  $k$ -ya görə törəmə alaq:

$$2\omega \frac{d\omega}{dk} = 2\omega C_{gr} = g + 3\gamma k^2, \\ C_{gr} = \frac{g + 3\gamma k^2}{2\omega} = \frac{C_{\phi}}{2} \cdot \frac{g/\gamma + 3k^2}{g/\gamma + k^2} = \frac{C_{\phi}}{2} \cdot \frac{k_0^2 + 3k^2}{k_0^2 + k^2}. \quad (3.56)$$

### §3.5. Daxili dalğaların əsas tənliyi. Bussinesk yaxınlaşması

Sıxılmayan və fırlanmayan maye hidrodinamikasının (3.15)-(3.17) xətti tənliklərini,  $\rho_0 = \rho_0(z)$ ,  $N = N(z)$  halında aşağıdakı kimi yazaq:

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \frac{\nabla_- P}{\rho_0} = 0, \quad (3.57)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \frac{1}{\rho_0(z)} \frac{\partial P}{\partial z} + \frac{\rho}{\rho_0} g = 0, \quad (3.58)$$

$$\nabla_- \bar{u} = -\frac{\partial w}{\partial z}, \quad (3.59)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\rho}{\rho_0} \right) = \frac{N^2}{g} w, \quad (3.60)$$

harada  $\bar{u} = (u, v)$ ,  $N^2(z) = -g\rho_0^{-1} \frac{d\rho_0}{dz}$ . Bu tənlikləri hissəciyin  $w$  şaquli sür'ətinin komponentinə nəzərən bir tənliyə gətirək. Bunun üçün (3.57) tənliyinə  $\nabla_-$  ilə tə'sir etdikdən sonra, alınan tənlikdə (3.59) kəsilməzlik tənliyini nəzərə alaq:

$$-\frac{\partial^2 w}{\partial t \partial z} + \frac{\Delta_- P}{\rho_0} = 0 \Rightarrow \Delta_- P = \rho_0 \frac{\partial^2 w}{\partial t \partial z}, \quad (3.61)$$

(3.61) düsturunda belə bir eynilikdən istifadə edilmişdir:

$$\nabla_- \bar{\nabla}_- = \Delta_- = \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right). \quad (3.62)$$

(3.58)-dən  $t$ -yə görə lokal törəmə alıb, sonra  $\Delta_-$  operatoru ilə tə'sir edək:

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}(\Delta_w) + \frac{1}{\rho_0(z)} \frac{\partial^2}{\partial t \partial z}(\Delta_P) + g \Delta_- \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\rho}{\rho_0} \right) = 0. \quad (3.63)$$

(3.63) tənliyində (3.60) və (3.61) ifadələrini yerinə yazaraq:

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \left( \Delta_w + \frac{1}{\rho_0} \frac{d\rho_0}{dz} \cdot \frac{\partial w}{\partial z} \right) + N^2(z) \Delta_w = 0. \quad (3.64)$$

(3.64) tənliyi **daxili dalğaların tənliyi** adlanır. Okeanda yaranan dalğalar üçün  $\Delta_w \gg \frac{1}{\rho_0} \cdot \frac{d\rho_0}{dz} \cdot \frac{\partial w}{\partial z}$  münasibəti ödənilir

və (3.64) tənliyi sadələşərək

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \Delta_w + N^2(z) \Delta_w = 0 \quad (3.65)$$

şəklinə düşür. Bu sadələşməyə **Bussinesk yaxınlaşması** deyilir.

**Qeyri-məhdud mühitdə dalğalar:** Vyasal tezliyinin sabit qiymətlərində ( $N^2 = const$ ) harmonik müstəvi daxili dalğaları öyrənək. Bu halda (3.65) tənliyinin həllini

$$w = b \exp[\bar{i}(\bar{k}\bar{r} + k_z z - \omega t)] = b \exp[\bar{i}(\bar{\alpha}R - \omega t)] \quad (3.66)$$

şəklində axtaraq. Burada

$$\bar{\alpha} = \{k_x, k_y, k_z\} = \{\bar{k}, k_z\}, \quad \bar{R} = \{x, y, z\} = \{\bar{r}, z\}.$$

(3.66) ifadəsini (3.65) də yazsaq, belə bir dispersion münasibət alarıq:

$$\omega^2 (k_x^2 + k_y^2 + k_z^2) - N^2 \{k_x^2 + k_y^2\} = 0.$$

və ya

$$\omega^2 = N^2 \frac{k^2}{\alpha^2} = N^2 \frac{k^2}{k^2 + k_z^2} = N^2 \sin^2 \Theta \quad (3.67)$$

$\sin^2 \Theta \leq 1$  olduğunu nəzərə alsaq, (3.67)-dən aşağıdakı nəticələr çıxar:

$$1) \quad \omega^2 \leq N^2 \Rightarrow \omega \leq N,$$

- 2) dalğa verilmiş istiqamətdə yayılarda  $\omega$  tezliyi (3.67) dispersiya münasibəti ilə birqiymətli tə'yin edilir və dalğa uzunluğu ixtiyari ola bilər.

### §3.6. Fırlanan mayelərdə dalğalar

Atmosferdə və okeanda dalğaların yayılması prosesinə Yer fırlanması böyük tə'sir göstərir. Sadəlik üçün qəbul edək ki, maye  $Z$  oxu ətrafında  $\bar{\Omega}$  sabit bucaq sür'əti ilə fırlanır və  $\rho_0 = const$ ,  $N^2 = 0$ . Onda  $\bar{v} = \{u, v, w\}$ ,  $\bar{\Omega} = \{0, 0, \Omega_z\}$  olar

$$2\bar{\Omega} \times \bar{v} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 0 & 2\Omega_z \\ u & v & w \end{vmatrix} = -2\Omega_z v \bar{i} + 2\Omega_z u \bar{j}, \quad (3.68)$$

$$K = 2\Omega_z = const.$$

Onda sıxılmayan maye üçün hidrodinamikanın xəttilləşmiş (3.15), (3.16) tənlikləri aşağıdakı kimi olar:

$$\frac{\partial u}{\partial t} - Kv + \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial P}{\partial x} = 0, \quad (3.69)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + Ku + \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial P}{\partial y} = 0, \quad (3.70)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial P}{\partial z} = 0, \quad (3.71)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\partial w}{\partial z} \quad (3.72)$$

(3.69) tənliyindən  $x$  və  $t$ -yə görə, (3.70)-dən isə  $y$  və  $t$ -yə görə törəmə alıb, tərəf-tərəfə topladıqdan sonra alınan tənlikdə (3.72) kəsilməzlik tənliyini nəzərə alaq:

$$\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial}{\partial t} \Delta_- P = \frac{\partial^3 w}{\partial t^2 \partial z} + K \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right), \quad (3.73)$$

İndi (3.69)-dan  $y$ -ə, (3.70)-dən  $x$ -ə görə törəmə alıb, birinci tənlikdən ikinci tənliyi çıxaraq və alınan tənliyi (3.72)-nin köməyi ilə çevirək:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) = K \frac{\partial w}{\partial z}.$$

Bu tənliyi (3.73)-də nəzərə alaq:

$$\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial}{\partial t} \Delta_- P = \frac{\partial^3 w}{\partial t^2 \partial z} + K^2 \frac{\partial w}{\partial z} \quad (3.74)$$

(3.71) tənliyinə  $\frac{\partial}{\partial t}$  və  $\Delta_-$  operatorları ilə tə'sir etdikdən sonra alınan tənlikdə (3.74) münasibətini nəzərə alaq.

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \Delta w + K^2 \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} = 0 \quad (3.75)$$

(3.75) tənliyi bircinsli fırlanan mayenin dalğa tənliyi adlanır. Bu tənliyi ödəyən dalğa həllinə fırlanan mayədə **inersiya və ya hiroskopik dalğalar** deyilir. (3.75) tənliyinin həllini müstəvi harmonik dalğalar şəklində axtarsaq,

$$w = b \exp i \left[ (\bar{k} \bar{r} + k_z z - \omega t) \right] \quad (3.76)$$

asanlıqla dispersiya münasibətini alırıq:

$$\omega^2 = K^2 \frac{k_z^2}{k^2 + k_z^2} = K^2 \cos^2 \Theta. \quad (3.77)$$

Burada  $\Theta$  dalğa vektoru ilə şaquli bucaq sür'əti vektoru arasındakı bucaqdır. (3.77)-dən alırıq ki, ixtiyari uzunluqlu inersiya dalğalarının tezliyi fırlanan mayenin bucaq sür'ətinin iki mislindən böyük ola bilməz.

### §3.7. Müstəvi dalğalar

Dalğaların yayılmasında həlledici faktor mühitin sıxılması nəticəsində yaranan dalğalar olarsa, belə dalğalara *səs* və ya **akustik dalğalar** deyilir. Əgər  $g = 0$ ,  $N^2 = 0$ ,  $\bar{\Omega} = 0$  götürsək, onda (3.10)-(3.12) tənliklər sistemindən asanlıqla alarıq:

$$\frac{\partial^2 P}{\partial t^2} = c^2 \Delta P. \quad (3.78)$$

X oxu istiqamətində yayılan dalğalar üçün (3.78) tənliyinin ümumi həllini yazaq:

$$P = f(x - ct) + g(x + ct). \quad (3.79)$$

(3.79) həllinin alınması §3.10-da verilir. Burada  $f$  və  $g$  ixtiyari funksiyalardır.  $f(x - ct)$  - X oxunun müsbət istiqamətində,  $g(x + ct)$  - X oxunun mənfi istiqamətində yayılan dalğaları təsvir edir. Yenə (3.10) tənliyinin X oxu üzrə proyeksiyasını yazaq:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial P}{\partial x}. \quad (3.80)$$

(3.80) tənliyini başlanğıc  $t_0$  anından  $t$ -yə qədər inteqrallayaq:

$$u = u(t_0, x) - \frac{1}{\rho_0} \int_{t_0}^t \frac{\partial}{\partial x} f(x - c\tau) d\tau - \frac{1}{\rho_0} \int_{t_0}^t \frac{\partial}{\partial x} g(x + c\tau) d\tau$$

və ya

$$u = v_x = \frac{1}{\rho_0 c} [f(x - ct) - g(x + ct)] \quad (3.81)$$

Buradan alırıq ki, sağa hərəkət edən hissəciyin sür'əti

$$v_x^+ = \frac{1}{\rho_0 c} f(x - ct), \quad (3.82)$$



sola hərəkət edən hissəciyin sür'əti

$$v_x^- = -\frac{1}{\rho_0 c} g(x+ct), \quad (3.83)$$

ifadələri ilə tə'yin olunur.

$$\rho_0 c = \frac{f(x-ct)}{v_x^+} = -\frac{g(x+ct)}{v_x^-}. \quad (3.84)$$

kəmiyyətinə mühitin dalğa müqaviməti,  $\frac{1}{\rho_0 c}$  - kəmiyyətinə

isə mühitin **dalğa keçiriciliyi** deyilir.

Akustikada müəyyən tezlikli səs mənbəyinin şüalanmasından geniş istifadə edilir. Belə mənbələrdən şüalanan dalğalar çox zaman harmonik olur və

$$P = \varphi(r) \exp(-i\omega t) \quad (3.85)$$

şəkilində təsvir olunur. (3.85) ifadəsini üç ölçülü fəza üçün yazılmış (3.78) tənliyində yerinə yazsaq, alırıq:

$$\Delta\varphi + k^2\varphi = 0; \quad k^2 = \omega^2 / c^2, \quad (3.86)$$

Bu tənliyin ən sadə həlli müstəvi dalğalardır:

$$\varphi = A \exp(i\bar{k} \cdot \bar{r}); \quad \bar{k} = \{k_x, k_y, k_z\},$$

$$\bar{r} = \{x, y, z\}, \quad k^2 = k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 = \omega^2 / c^2, \quad (3.87)$$

(3.85) və (3.87) -dən səs təzyiqini

$$P = A \exp[i(\bar{k}\bar{r} - \omega t)] \quad (3.88)$$

şəkilində tapırıq. Maye hissəciyinin sür'ət vektorunu tapmaq üçün (3.88) ifadəsindən və hərəkət tənliyindən istifadə edək:

$$\bar{v} = \frac{A}{\rho_0 c} \frac{\bar{k}}{k} \exp i(\bar{k} \cdot \bar{r} - \omega t). \quad (3.89)$$

Buradan alırıq ki,  $\bar{v}$  sür'ət vektoru dalğanın yayılma istiqaməti  $\bar{k}$  ilə üst-üstə düşür.

Əgər iki eyni tezlikli və amplitudlu dalğalar əks istiqamətlərdə yayılırsa, onda onlar dayanıqlı dalğa əmələ gəti-

riirlər. Doğrudan da,  $\bar{k} = -\bar{k}'$  olarsa,  $P(\bar{k})$  və  $P(-\bar{k})$ ,  $\bar{v}(\bar{k})$  və  $v(-\bar{k})$  ifadələrini toplasaq, alırıq:

$$P = 2A \cos(\bar{k} \cdot \bar{r}) e \exp(-i\omega t),$$

$$\bar{v} = \frac{2iA}{\rho_0 c} \bar{k} \sin(\bar{k} \cdot \bar{r}) \exp(-i\omega t). \quad (3.90)$$

(3.90) düsturlarının birincisindən alırıq ki, təzyiqlik üçün düyün müstəviləri  $\bar{k} \cdot \bar{r} = \frac{\pi}{2} + n\pi$  ( $P = 0$ ) tənliyi ilə təyin edilir və bu müstəvilər bir-birindən dalğa uzunluğunun yarısına bərabər məsafədədirlər.

### §3.8. Müstəvi dalğaların şüalanması

Müəyyən müstəvidə təzyiqlik və ya normal sürətin paylanması yaratmaqla müstəvi səs dalğaları almaq olar. Məsələn,  $Z = 0$  müstəvisində  $v_z = f(t)$  paylanması verilərsə, onda (3.78), (3.80) akustik tənliklərinin həlli bu şəkildə olur:

$$v_x = v_y = 0, \quad (3.91)$$

$$P = \rho_0 c f\left(t - \frac{z}{c}\right), \quad (3.92)$$

$$v_z = w = f\left(t - \frac{z}{c}\right), \quad (3.93)$$

Əgər biz  $f(t)$  funksiyasını  $Z = 0$  müstəvisində  $t$ -yə görə Furje inteqralı şəklində ayırısaq, onda bu ayrılışın hər bir həddinin

$$P|_{z=0} = A \exp(-i\omega t), \quad (3.94)$$

şəklində vuruqların hasilindən ibarət olduğunu görürük. Beləliklə, (3.91)-(3.93) paylanmasını  $f(t - z/c)$   $t$  və  $z$ -ə görə Furje inteqralına gətirmək olar:

$$P(z,t) = A \exp(k_z z - \omega t), \quad v_z = B \exp[i(k_z z - \omega t)]. \quad (3.95)$$

$Z = 0$  müstəvisində

$$P|_{z=0} = f(x,y,t) = A \exp i(k_x x + k_y y - \omega t) \quad (3.96)$$

paylanması verilərsə, onda üç ölçülü fəza üçün dalğa tənliyinin harmonik həlli belə olar:

$$P(x,y,z,t) = A \exp i(k_x x + k_y y + k_z z - \omega t), \quad (3.97)$$

$$k_1^2 = k_x^2 + k_y^2, \quad k_z = \sqrt{k^2 - k_1^2}.$$

(3.96) dalğası (3.97) dalğasının  $Z = 0$  müstəvisində izi adlanır (elə bil proyeksiyadır). Belə ki, onların amplitudları və tezlikləri bərabərdir,  $\bar{k}_1$  dalğa ədədi isə  $\bar{k}$  dalğa vektorunun verilən müstəvidə proyeksiyasıdır. Nəticədə alırıq ki, dalğanın izini bilməklə onu fəzaya davam etdirmək olar.

Əgər dalğa vektorunun proyeksiyasının uzunluğu  $k_1$  onun  $k$  uzunluğundan böyükdürsə,

$$k_z = \sqrt{k^2 - k_1^2} = i\sqrt{k_1^2 - k^2}, \quad (3.98)$$

ödənər və akustik dalğanın (3.97) təzyiqi belə olar:

$$P = A \exp(-|k_z|z) \exp[i(k_x x + k_y y - \omega t)], \quad (3.99)$$

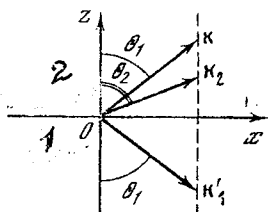
Bu cür dalğalara **qeyri-bircins müstəvi dalğalar** deyilir. (3.99) dalğalarının cəbhəsi  $k_x x + k_y y = \text{const}$  müstəvisi ilə üst-üstə düşər və onun amplitudu eksponensial olaraq azalar:

$$v_x = \frac{1}{i\omega\rho_0} \cdot \frac{\partial P}{\partial x} = \frac{k_x}{\omega\rho_0} A \exp(-|k_z|z) \exp[i(k_x - \omega t)], \quad (3.100)$$

$$v_z = \frac{1}{i\omega\rho_0} \cdot \frac{\partial P}{\partial z} = i \frac{|k_z|}{\omega\rho_0} A \exp(-|k_z|z) \exp[i(k_x - \omega t)], \quad (3.101)$$

(3.100) və (3.101) ifadələrinin müqayisəsindən görünür ki,  $v_x$  və  $v_z$  sür'ət komponentləri bir-birindən fazaca  $\pi/2$  qə-dər sürüşüblər.

### §3.9. Mühitlərin ayrılma sərhədlərindən müstəvi dalğaların əks olunması



Şəkil 3.1.

Qeyri-bircins mayədə səs dalğalarının yayılmasını öyrənmək üçün müxtəlif sıxlığa və ayrılma müstəvi səthinə malik olan mayelərdə dalğaların transformasiyası məsələsinə baxaq (şəkil 3.1). Tutaq ki, düşən dalğa cəbhəsinin normalı  $XOZ$  müstəvisindədir. Onda bircins mühitdə yayılan (düşən) müstəvi dalğanı belə yazıb bilərik:

$$P_1^+ = A \exp i(\xi x + k_{1z} z - \omega t), \quad z < 0 \quad (3.102)$$

$$\bar{k}_1 = \{\xi, 0, k_{1z}\}, \quad k_{1z} = \sqrt{(k_1)^2 - \xi^2} = \sqrt{\omega^2 / c_1^2 - \xi^2}, \quad k_1 = \omega / c_1$$

Səs dalğası düşənə qədər həm ayrılma sərhəddi tərpənməz qaldığı üçün, həm də dalğa vektorunun sərhəddəki proyeksiyaları dəyişmədiyi üçün əks olunan dalğa aşağıdakı şəkildə olar:

$$P_1^- = VA \exp i(\xi x - k_{1z} z - \omega t), \quad (3.103)$$

burada  $V$  -əks olunma əmsalındır,  $\bar{k}_1^- = \{\xi, 0, -k_{1z}\}$ .

İkinci bir tərəfdən, mayelərin ayrılma sərhəddinə düşən dalğa sınıraqla ikinci mühitdə yayılır:

$$P_2 = WA \exp [i(\xi x + k_{2z} z - \omega t)], \quad (3.104)$$

harada  $W$  -sərhəddin şəffaflıq əmsalındır,

$$\bar{k}_2 = \{\xi, 0, k_{2z}\}, \quad k_2 = \omega / c_2, \quad k_{2z} = \sqrt{k_2^2 - \xi^2}.$$

Kəsilməzlik şərtinə görə sərhəddə akustik təzyiqlər və şaquli sür'ətlər bərabərdir:

$$(P_1^+ + P_1^-)_{z=0} = P_2|_{z=0}, \quad \frac{1}{\rho_1} \left( \frac{\partial P_1^+}{\partial z} + \frac{\partial P_1^-}{\partial z} \right) = \frac{1}{\rho_2} \frac{\partial P_2}{\partial z} |_{z=0} \quad (3.105)$$

(3.102)-(3.104) ifadələrini (3.105) sərhəd şərtlərində nəzərə alsaq,  $V$  və  $W$  axtarılan əmsallar üçün iki tənlikdən ibarət sistem alırıq:

$$1 + V = W, \quad \frac{k_{1z}}{\rho_1} (1 - V) = \frac{k_{2z}}{\rho_2} W. \quad (3.106)$$

İşarələmələr aparaq:  $k_{1z} = k_1 \cos \Theta_1$ ,  $k_{2z} = k_2 \cos \Theta_2$

$$m = \rho_2 / \rho_1, \quad \frac{\sin \Theta_1}{\sin \Theta_2} = n; \quad n = \frac{k_2}{k_1} = \frac{c_1}{c_2}, \quad (3.107)$$

burada  $k_1 \sin \Theta_1 = k_2 \sin \Theta_2$ -sınma qanunu,  $\Theta_1$  - düşmə,  $\Theta_2$  - sınma bucaqlarıdır. (3.106) sisteminin həllindən **Frenel düsturları** alınır:

$$V = \frac{m \cos \Theta_1 - n \cos \Theta_2}{m \cos \Theta_1 + n \cos \Theta_2} = \frac{m \cos \Theta_1 - \sqrt{n^2 - \sin^2 \Theta_1}}{m \cos \Theta_1 + \sqrt{n^2 - \sin^2 \Theta_1}}, \quad (3.108)$$

$$W = \frac{2m \cos \Theta_1}{m \cos \Theta_1 + n \cos \Theta_2} = \frac{2m \cos \Theta_1}{m \cos \Theta_1 + \sqrt{n^2 - \sin^2 \Theta_1}}. \quad (3.109)$$

Xüsusi halda,  $\Theta_1 = \Theta_2 = 0$  olarsa, onda yuxarıdakı ifadələr sadələşər:

$$V = \frac{m - n}{m + n} = \frac{\rho_2 c_2 - \rho_1 c_1}{\rho_2 c_2 + \rho_1 c_1}, \quad W = \frac{2\rho_2 c_2}{\rho_2 c_2 + \rho_1 c_1}, \quad (3.110)$$

(3.110) düsturundan görünür ki, dalğa sərhəddə normal düşəndə əks olunma və şəffaflıq əmsalları ancaq mühitlərin dalğa müqavimətindən asılıdırlar. Əgər  $z_1 = \rho_1 c_1$  və  $z_2 = \rho_2 c_2$  (bunlara **dalğa impedansları** da deyilir) olarsa, onda (3.110) aşağıdakı şəkə düşər:

$$V = \frac{z_2 - z_1}{z_2 + z_1}, \quad W = \frac{2z_2}{z_2 + z_1}. \quad (3.111)$$

(3.108), (3.109) düsturlarının hər tərəfini  $\cos \Theta_1 \cdot \cos \Theta_2$ -yə bölsək və  $z_1 = \rho_1 c_1 / \cos \Theta_1$ ,  $z_2 = \rho_2 c_2 / \cos \Theta_2$  ilə işarə etsək, (3.111) düsturlarını alarıq. Digər tərəfdən, asanlıqla aşağıdakı münasibətlərin doğruluğunu göstərmək olar:

$$z_1 = \frac{P_1^+}{V_{1z}^+}, \quad z_2 = \frac{P_2^-}{V_{2z}^-}. \quad (3.112)$$

Bunlar uyğun olaraq birinci və ikinci mühitin **normal impedansları** adlanır.  $z_2$ -yə giriş impedans da deyilir.

Qeyd edək ki, (3.108) və (3.109) düsturlarından xüsusi hallarda maraqlı nəticələr alınır:

1. Əgər  $\Theta_1 \rightarrow \pi/2$  olarsa, onda  $V = -1$ ,  $W \rightarrow 0$  olar. Buradan çıxır ki,  $P_1 = P_1^+ + P_1^- = 0$ ,  $P_2 = 0$ ; həm düşən və əks olunan dalğaların təzyiqlərinin cəmi, həm də keçən dalğanın təzyiqi sıfıra bərabərdir. Bu isə onu göstərir ki, iki maye mühiti ayıran sərhəddə müstəvi dalğa ola bilməz.

2. Dalğa əks olunmursa,  $V = 0$  olar və  $m \cos \Theta_1 = \sqrt{n^2 - \sin^2 \Theta_1}$  şərtini alarıq. Buradan tam şəffaflıq

bucağını tapaq:  $\Theta_1 = \arg \sin \sqrt{\frac{m^2 - n^2}{m^2 - 1}}$ . Belə bucağın olması

üçün  $m$  və  $n$  elə seçilməlidir ki, kökaltı ifadənin qiyməti müsbət olmaqla yanaşı, vahiddən kiçik olsun.

3. İkinci mühitdə səsin sür'əti birinci mühitdəki səsin sür'ətindən böyük olsun ( $n < 1$ ). Bu halda göstərmək olar ki,

$$V = \exp(i\Theta), \quad \Theta = -2 \arg \operatorname{tg} \sqrt{\frac{\sin^2 \Theta_1 - n^2}{m \cos \Theta_1}} \quad \text{olduqda,} \quad n < 1$$

olur.

### §3.10. Hidrodinamikanın bir sıra qeyri-xətti dalğa tənlikləri

Elə dalğavari prosesə baxaq ki, burada ideal mayədə təzyiqliq gradienti və həcmi qüvvələr inersiya qüvvəsinə nəzərən çox kiçik olsun. Onda birölçülü Eylər tənliyi aşağıdakı şəkllə düşər:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = 0. \quad (3.113)$$

(3.113) –ün xarakteristik tənliklərindən

$$\frac{dt}{1} = \frac{dx}{u} = \frac{du}{0}, \quad (3.114)$$

alırıq.

$$\frac{dx}{dt} = u. \quad (3.115)$$

Bu xarakteristika boyunca  $u$  sür'əti saxlanılır (sabit qalır) və (3.113) tənliyinin ümumi həlli belə olur:

$$u(x, t) = \varphi(x - ut). \quad (3.116)$$

$\varphi$  – ixtiyari funksiyadır. İndi (3.113) tənliyinə uyğun xətti tənlik götürək:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c \frac{\partial u}{\partial x} = 0. \quad (3.117)$$

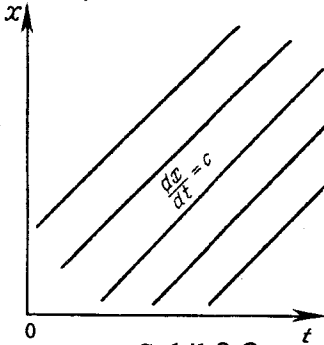
Bu tənliyin ümumi həlli aşağıdakı şəkildədir:

$$u(x, t) = f(x - ct) = f(\xi) \quad (3.118)$$

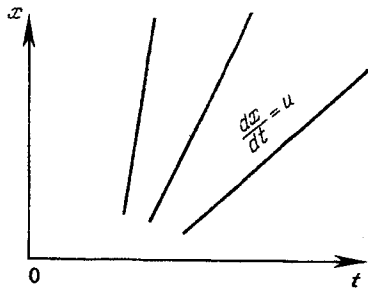
$f$  – ixtiyari funksiyadır.  $\xi = x - ct$  hərəkət edən koordinat sisteminde (3.117) tənliyinin həlli  $t$  –dən aşkar şəkildə asılı deyildir və bu həll qərarlaşmış həll adlanır. (3.117) –in xarakteristik tənliyi:

$$\frac{dx}{dt} = c, \quad x - ct = \text{const.} \quad (3.119)$$

(3.117) tənliyinin xarakteristikaları ((3.119) tənlikləri)  $(x,t)$  müstəvisində bir-birinə paralel və  $t$  oxu ilə  $\arctg c$  bucağı əmələ gətirən düz xətlər ailəsi təşkil edir (şək.3.2). Ancaq (3.113) tənliyinin xarakteristikaları (3.115) isə bir-biri ilə kəsişən xətlər ailəsindən ibarətdir (şək.3.3).



Şəkil 3.2



Şəkil 3.3

Fiziki olaraq (3.118) xətti, sabit  $c$  sür'əti ilə hərəkət edən elementar dalğalar çoxluğunu təsvir edir və hər bir xarakteristika üzərində  $u$  funksiyasının sabit qiyməti isə dalğanın özü ilə apardığı müəyyən informasiyalar verir. Eyni qaydada (3.116) həlli də müxtəlif sür'ətlə hərəkət edən elementar dalğalar çoxluğunu təsvir edir və bu dalğalar böyük sür'ətlə yayılaraq daha çox informasiya verir. Misal üçün (3.113) və (3.117) tənliklərini verilən başlanğıc şərtləri daxilində həll edək.

$$u(x,0) = a^2 - x^2, \quad |x| \leq a; \quad u(x,0) = 0, \quad |x| > 0. \quad (3.120)$$

Xətti (3.117) tənliyinin həlli



$$u(x,t) = a^2 - (x - ct)^2, \quad |x - ct| \leq a, \quad (3.121)$$

$$u(x,t) = 0, \quad |x - ct| > a.$$

(3.113) qeyri-xətti tənliyinin (3.116) həlli

$$u(x,t) = a^2 - (x - ut)^2, \quad |x - ut| \leq a, \quad (3.122)$$

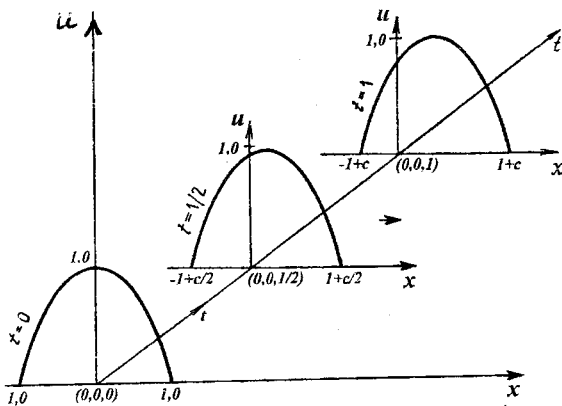
$$u(x,t) = 0, \quad |x - ut| > 0$$

və ya aşkar şəkildə

$$u(x,t) = \frac{1}{2t^2} \left[ (2xt - 1) \pm \sqrt{1 - 4xt + 4a^2 t^2} \right], \quad |x - ut| \leq a, \quad (3.123)$$

$$u(x,t) = 0, \quad |x - ut| > a.$$

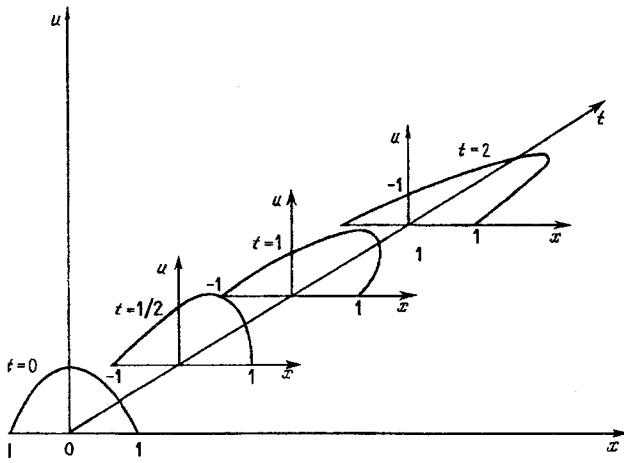
Şəkil 3.4-də başlanğıc parabolik impuls olan dalğanın yayılması göstərilir. Göründüyü kimi xətti dalğalar profilin dəyişmədən  $c$  sür'əti ilə sağa yayılır.



Şəkil 3.4

İndi (3.120) başlanğıc impulsunun (3.116) düsturu ilə yayılmasına baxaq (şəkil 3.5). (3.123) ifadəsindən

$$u_x(a,t) = \frac{1 - 2at \pm 1}{t(1 - 2at)} \quad (3.124)$$



Şəkil 3.5

zamanın kiçik qiymətlərində (3.123) həlli və bu həll əyrisinin meyilliyi ancaq kökəltinin və kəsrin qabağındakı yuxarı işarə ilə müəyyən edilir.  $u_x(a,t)$ -nin ifadəsindən görünür ki,  $a$ -nın mənfi qiymətlərində  $u_x(a,t) > 0$  və  $t$ -nin monoton azalan funksiyasıdır. Baxmayaraq ki,  $a$ -nın müsbət qiymətlərində ( $u_x(a,0) \approx -2a$ ) (parabolun sağ hissəsində)  $u_x(a,t) < 0$  bu funksiya monoton azalır. Lakin  $x \geq a$  olduqda,  $u_x(a,t) \geq 0$  bərabərsizliyini ödəyir və  $u(x,t)$  funksiyası birqiymətliliyini itirir.  $u_x(a,t)$  mənfi qiymətlərindən müsbətə ancaq onun sonsuzluqdakı qiymətindən keçdiyinə görə  $(1-2at) \rightarrow 0$  şərtindən  $t_0 = 1/2a$  ifadəsini alırıq.  $t$ -nin ancaq bu qiymətlərində (3.123) və (3.124) ifadələrində hər iki (radikalın qabağındakı mənfi və müsbət) işarə ola bilər.

Beləliklə, başlanğıc impulsun profili zaman keçdikcə daha çox deformasiya edərək sərtləşir.  $t_0 = 1/2a$  zamanından başlayaraq  $u(x,t)$  çoxqiymətli funksiya olur ki, bu da fiziki olaraq mümkün deyil. Yeganə məhdud həllin varlığı

üçün zəif həll anlayışı daxil edilir ki, bu da kəsilmə hərəkəti verir və zərbə dalğası yaranır. Yuxarıdakı mülahizələrə əsasən alırıq ki,  $(x,t)$  müstəvisinin  $t=0$  oxu üzərində  $|x| < a$  şərtini ödəyən nöqtələrindən çıxan xarakteristikalar,  $x > a$  nöqtələrindən çıxan xarakteristikalarla mütləq kəşisirlər.

İndi başlanğıc şərti qeyri-əşkar funksiya şəklində götürək:

$$u(x,0)=\varphi(x), |x| \leq a, \quad \varphi(x)=0, |x| > a \quad (3.125)$$

Burada  $\varphi(x)$ - mənfi və müsbət meyli olan kəsilməz differensiallanan funksiyadır. (3.113) tənliyinin (3.125) şərti daxilində (3.116) həlli

$$u(x,t)=\varphi(x-ut), |x-ut| \leq a; \quad u(x,t)=0, |x-ut| > a \quad (3.126)$$

şəklində olar. Buradan

$$u_x(x,t) = \frac{\partial \varphi}{\partial \xi} \cdot (1 - u_x \cdot t), \quad u_x(x,t) = \frac{\varphi_\xi}{1 + \varphi_\xi \cdot t}. \quad (3.127)$$

$\varphi_\xi < 0$  olduqda  $t_0 = -(1/\varphi_\xi)$  zaman anından başlayaraq  $u(x,t)$  funksiyası çoxqiymətli olur və  $x_0 = \xi_0 + t_0 \varphi(\xi_0)$  nöqtəsi ətrafında  $(-1/\varphi_\xi)$  funksiyası öz minimal qiymətini alır.

### §3.11. Sonlu amplitudlu müstəvi dalğaların yayılması. Riman dalğaları

Xətti dalğa tənliyinin müstəvidə həlli  $c$  sür'əti ilə hərəkət edən sistemin koordinatının funksiyasıdır. Bu sonsuz kiçik amplitudlu dalğa zəif həyəcanlanma zamanı yaranır və dalğa cəbhəsi  $X$  oxu boyunca sabit sür'ətlə öz formasını dəyişmədən yayılır.

$X$  oxunu dalğanın yayılma istiqaməti boyunca yönəltmək, onda biröçlü Eyler və kəsilməzlik tənlikləri aşağıdakı kimi olar:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} = 0 \quad (3.128)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \frac{\partial u}{\partial x} + u \frac{\partial \rho}{\partial x} = 0 \quad (3.129)$$

Əgər maye barotropdursa, onda (3.128),(3.129) tənliklərini termodinamik hal tənliyi qapayar

$$P = p(\rho) \quad (3.130)$$

(3.128)-(3.130) tənliklər sistemi qeyri-xəttidir. Bu sistemin xüsusi həllini axtaraq:

$$u = u(\rho), \quad (3.131)$$

(3.128)-(3.130) sisteminin (3.131) şəklində həllərinə onun **Riman həlli**, bu həllərə uyğun olan hərəkətlərə **Riman dalğaları** deyəcəyik. (3.131)-i (3.128)-(3.129) tənliklərində nəzərə alaq:

$$\frac{du}{d\rho} \cdot \frac{\partial \rho}{\partial t} + \left( u \frac{du}{d\rho} + \frac{1}{\rho} \frac{dp}{d\rho} \right) \frac{\partial \rho}{\partial x} = 0. \quad (3.132)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \left( u + \rho \frac{du}{d\rho} \right) \frac{\partial \rho}{\partial x} = 0. \quad (3.133)$$

(3.132), (3.133) tənliklərinin birgə olması üçün, yə'ni onların trivial olmayan həllinin varlığı üçün baş determinant sıfıra bərabər olmalıdır.

$$\left( \rho \frac{du}{d\rho} \right)^2 = \frac{dp}{d\rho}; \quad \frac{du}{d\rho} = \pm \frac{1}{\rho} \sqrt{\frac{dp}{d\rho}};$$

$$u = \pm \int_{\rho_0}^{\rho} \sqrt{\frac{dp}{d\rho}} \frac{d\rho}{\rho} \quad (3.134)$$

Digər tərəfdən

$$\frac{dp}{d\rho} = a^2(\rho) \quad (3.135)$$

işarə etsək, (3.133) tənliyi sadələşər

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + (u \pm a) \frac{\partial \rho}{\partial x} = 0. \quad (3.136)$$

Belə bir əvəzləmə aparaq:

$$c = u \pm a. \quad (3.137)$$

Onda bu kəmiyyətə sür'ət ölçüsünə uyğun olaraq sabit sıxlığın yayılma sür'əti kimi baxmaq olar. Doğrudan da

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{dx}{dt} \cdot \frac{\partial \rho}{\partial x} = 0. \quad (3.138)$$

(3.136) və (3.138) ifadələrinin müqayisəsindən alarıq:

$$\frac{dx}{dt} = c \quad (3.139)$$

Barotrop proseslərdə  $c = c(\rho)$  götürsək,

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + c(\rho) \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0. \quad (3.140)$$

Adiabatik halda təkmil qazlar üçün  $c(\rho)$  funksiyasını taparıq:

$$p = A\rho^\gamma; \quad a^2 = \frac{dp}{d\rho} = A\gamma\rho^{\gamma-1}, \quad (3.141)$$

$$u(\rho) = \pm \int \sqrt{A\gamma} \rho^{\frac{\gamma-1}{2}} \frac{d\rho}{\rho} = \pm \frac{2\sqrt{A\gamma}}{\gamma-1} \rho^{\frac{\gamma-1}{2}} + const, \quad (3.142)$$

$$c(\rho) = u + a = \sqrt{A\gamma} \left[ 1 + \frac{2}{\gamma-1} \right] \rho^{\frac{\gamma-1}{2}} + const.$$

(3.142) ifadəsindən görünür ki,  $a$  və  $c$  sür'ətləri  $\rho$  sıxlığının monoton artan funksiyasıdır. Hal tənliyində  $\rho$ -nu  $p$  ilə əvəz etməklə,  $a$  və  $c$ -nin təzyiqdən asılılıq funksiyasını alarıq.

Digər tərəfdən, sabit  $\rho$  sıxlığının və maye hissəciyinin sabit  $u(\rho)$  sür'ətinin fəzada  $c(\rho)$  sür'əti ilə yerdəyişmələrini nəzərə alsaq, yaza bilərik:

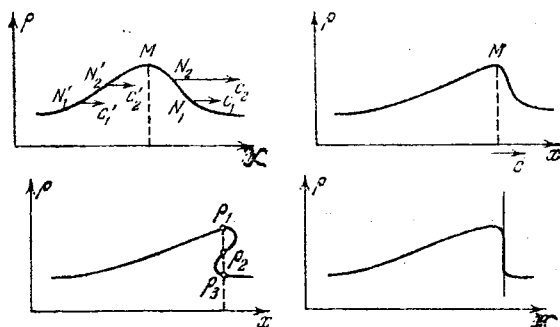
$$\left(\frac{dx}{dt}\right)_{\rho,u} = c(\rho) = u + a, \quad (3.143)$$

və ya

$$x = tc(\rho) + F(\rho), \quad (3.144)$$

burada  $F(\rho)$  ixtiyari funksiyasıdır və başlanğıc şərtindən tapılır. (3.134), (3.137) və (3.144) düsturları məsələnin Riman həllini verir.

Tutaq ki, qeyd olunmuş zaman anında sıxlığın  $x$ -dən asılılıq profili verilir və Riman dalğası şəkil 3.6-də göstəriləni kimidir.



Şəkil 3.6

$\rho(x,t)$  sıxlığı  $M$  nöqtəsindən solda  $x$  artdıqca artır və boşalma dalğası yaranır.  $M$ -nöqtəsindən sağda  $x$  artdıqca  $\rho(x,t)$  azalır və sıxılma dalğası yaranır.  $c(\rho)$  sür'əti sıxlıqdan asılı olaraq dəyişdiyi üçün  $\rho(x,t)$  profili zamandan asılı olaraq dəyişəcəkdir. Əgər təkmil qazın adiabatik hərəkətinə baxırıqsa, onda  $c(\rho)$  sür'əti  $\rho$  artdıqca artacaq və azaldıqca azalacaq. Riman dalğasının bir hissəsində sıxılma, digər hissəsində boşalma baş verəcək. Sıxılma dalğası olan hissədə  $\rho$ -nun nöqtələri arasındakı məsafə azaldıqca dalğanın profili daha da sərtləşəcək (dikləşəcək) və eyni  $t_{kr}$  anı başlayacaq ki,  $x$ -in hər hansı bir qiymətində sıxlıq çox-

qiymətli olacaqdır. Bu isə fiziki cəhətdən mümkün deyil və  $t_{kr}$  anında Riman kəsilməz həlli öz gücünü itirir. Riman dalğasının birqiymətli kəsilməz həlli o zamana qədər doğrudur ki, sıxlığın  $x$ -dən asılı paylanma profili şaquli forma alsın (şəkil 3.6).

Nəzəriyyə və təcrübə göstərir ki, Rimanın kəsilməz həlli  $t_{kr}$  anından sonra sıçrayışla sıxılmanın ümumi kəsilməz həlli ilə əvəz olunur.

Digər tərəfdən isə dalğa profilinin sağa yayıldığını və  $N_1''$  nöqtəsində sıxlığın  $N_1'$  nöqtəsindəki sıxlıqdan böyük olduğunu nəzərə alsaq, ( $c_{N_1} < c_{N_1'}$ ) bu nöqtələr arasındakı məsafə çoxalacaq və boşalma dalğasının profili daha da müstəviləşəcək.

Beləliklə, alırıq ki, əgər məsələnin Riman həllində sıxılan dalğa sahəsi varsa, onda ideal maye (qaz) axınında mütləq sıxılmanın sıçrayışı baş verəcək. Əgər Riman dalğasının yayılma istiqamətində sıxlıq monoton olaraq artarsa, onda belə həlldə sıçrayış baş vermir.

### §3.12. Dissipasiyalı dalğalar. Byurqers tənliyi və onun həlli

Birölçülü Navye-Stoks tənliyi  $\bar{f} = 0$ ,  $\bar{\nabla}P = 0$  halı üçün sadələşir

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} - \mu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \quad \mu \rightarrow \frac{\mu}{\rho} \quad (3.145)$$

Burada qeyri-xətti  $uu_x$  həddi mayədə konvektivliyi,  $\mu u_{xx}$  - həddi isə özlü qüvvəni təsvir edir. (3.145) tənliyi Byurqers tənliyi adlanır və özlü dissipasiyanın dalğa profili-

nin deformasiyasına tə'sirini müəyyən edir.

Byurqers tənliyinin qərarlaşmış həllini

$$u(x, t) = u(x - ct), \quad \xi = x - ct \quad (3.146)$$

şəklində axtaraq. (3.146)-nı (3.145)-də yerinə qoysaq, alarıq:

$$-cu_\xi + uu_\xi - \mu u_{\xi\xi} = 0. \quad (3.147)$$

(3.147) tənliyinin birinci inteqralını tapaq:

$$-cu + \frac{1}{2}u^2 - \mu u_\xi = \text{const} = B \quad (3.148)$$

Əgər  $\frac{\partial u}{\partial \xi} \Big|_{\xi \rightarrow \pm\infty} = 0$  qəbul etsək və

$$\left( \frac{1}{2}u^2 - cu - B \right) \Big|_{\xi \rightarrow \pm\infty} = 0, \quad (3.149)$$

tənliyinin köklərini  $u(\infty)$ ,  $u(-\infty)$  ilə işarə etsək, onda (3.148) tənliyindən alarıq:

$$u_\xi = \frac{1}{2\mu}(u - u(\infty))(u - u(-\infty)), \quad c = \frac{1}{2}(u(\infty) + u(-\infty)), \quad (3.150)$$

$$u(\infty) = c - \sqrt{c^2 + 2B}, \quad u(-\infty) = c + \sqrt{c^2 + 2B}.$$

Aydındır ki, bu köklərin həqiqi və müxtəlif olması üçün aşağıdakı şərtlər ödənməlidir.

$$c^2 + 2B > 0, \quad u(-\infty) > u(\infty).$$

(3.150) tənliyi iki asimptotik halı birləşdirir və onun həlli kəsilməz olaraq bu hallar arasında dəyişəcək. (3.150) tənliyinin həlli  $u_{\xi \rightarrow \pm\infty} = u(\pm\infty)$  şərtlərindən biri daxilində aşağıdakı şəkildədir:

$$u(x, t) = \frac{1}{2}[(u(-\infty) + u(\infty))] - [u(-\infty) - u(\infty)] \times \\ \times \text{th} \frac{1}{4\mu} \left[ u(-\infty) - u(\infty) \right] \left[ x - \frac{1}{2}(u(-\infty) + u(\infty))t \right] \quad (3.151)$$



Xəttiləşmiş Byurqers tənliyinin

$$u_t - \mu u_{xx} = 0, \quad (3.152)$$

həlli

$$u(x, t) = u(\xi) = A + B \exp\left(-\frac{c}{\mu} \xi\right) \quad (3.153)$$

Buradan görüldüyü kimi,  $u(\infty) = A$ ,  $u(-\infty) \rightarrow \infty$  olur ( $B = 0$ ).

Beləliklə, (3.152) tənliyinin yeganə məhdud qərarlaşmış həlli onun sabit halıdır və xəttiləşmiş Byurqers tənliyi kəsilməz dəyişən hallar çoxluğundan iki bircins halın birləşməsinə özündə saxlamır. Ancaq Byurqers tənliyində qeyri-xəttilik iki asimtotik bircins halları kəsilməz dəyişən həllərin köməyi ilə hamar birləşdirilir. Bu tənlikdə ikinci tərtib törəmənin olması dalğa profilində konvektiv hədd hesabına yaranan sərtliyin qabağını almaqla bərabər, həmçinin istənilən başlanğıc kəsilməni gərəkək hamarlayır.  $u(\xi)$  funksiyasının  $\xi$ -dən soldakı qiymətini  $u(\xi_-)$ , sağdakı qiymətini isə  $u(\xi_+)$  işarə edək və

$$u(\xi_-) = u(-\infty) - \alpha[u(-\infty) - u(\infty)]; \quad (3.154)$$

$$u(\xi_+) = u(\infty) + \alpha[u(-\infty) - u(\infty)]; \quad (3.155)$$

götürək. Burada  $\alpha$  -kiçik müsbət ədəddir. (3.154) və (3.155)-dən alırıq

$$\xi_+^- - \xi_- = \frac{4\mu}{u(-\infty) - u(\infty)} [\ln(1 - \alpha) - \ln \alpha] \quad (3.156)$$

(3.156) münasibətindən  $\mu \rightarrow 0$  olduqda  $\xi_+ \rightarrow \xi_-$  olur. Bu isə o deməkdir ki,  $u(\xi)$  funksiyası  $\xi$  xəttindən keçəndə kəsilməyə məruz qalır. (Zərbə dalğası yaranır).  $\mu > 0$  olduqda konvektiv həddin əmələ gətirdiyi kəsilmə xətti tədricən yuyulur və  $\mu$  böyüdükcə dalğa profilində yaranan sərtlik və ya kəsilmə xətti sür'ətlə aradan çıxır.

Beləliklə, özlük əmsalı dissipasiyanın ölçüsü olur. Bu isə fiziki olaraq onu göstərir ki, mayenin daxili sürtünmə qüvvəsi böyük olduqca, onun dissipasiyası çoxalır, daha doğrusu, dalğada yaranan mexaniki enerji böyük sür'ətlə istilik enerjisinə keçir və nəticədə dalğa öz enerjisini itirərək gərilir.

### §3.13. Uzun dalğalar nəzəriyyəsi.

#### Ayrılmış və knoidal dalğalar

Üfüqi xarakteristik ölçüləri şaquli xarakteristik ölçüsündən çox böyük olan mayenin səthində uzun dalğaların yayılması prosesinin öyrənilməsi dalğa nəzəriyyəsinin inkişafında həm nəzəri, həm də praktik əhəmiyyət kəsb edir. İlk dəfə dayaz sulara ayrılmış (təkləşmiş) və ya knoidal dalğaların yayılması eksperimental olaraq müşahidə edilmiş, sonralar isə nəzəri tədqiqat işləri aparılmışdır. Çox dərinliyə malik olmayan mayədə uzun dalğaların yayılmasını təsvir edən Korteveq- de Vrız tənliyi ölçüsüz kəmiyyətlərdə aşağıdakı kimidir:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{3}{2}u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{6}\mu \cdot \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + \frac{\partial u}{\partial x} = 0. \quad (3.157)$$

Burada  $\mu = \left(\frac{H}{L}\right)^2$ ,  $L, H$  -uyğun olaraq maye həcmnin

xətti horizontal və şaquli xarakteristik ölçüləridir.

(3.157) Karteveq-de Vrız tənliyinin həllini qərarlaşmış xətti dalğa şəklində axtaraq:

$$u = (\xi), \quad \xi = x - ct. \quad (3.158)$$

Bu halda (3.157) tənliyi adi diferensial tənliyə gətirilir:

$$\frac{\mu}{6} \frac{d^3 u}{d\xi^3} + \frac{3}{4} \frac{d}{d\xi} u^2 + (1-c) \frac{du}{d\xi} = 0. \quad (3.159)$$

(3.159) tənliyini inteqrallayaq:

$$\frac{\mu}{12} \frac{d(u')^2}{du} + \frac{3}{4} u^2 - (c-1)u + A_1 = 0, \quad (3.160)$$

$$u' = du / d\xi, \quad u'' = \frac{1}{2} \frac{d(u')^2}{du}.$$

Alınmış tənliyi bir daha inteqrallasaq, alarıq:

$$\frac{\mu}{3} (u')^2 = -u^3 + 2(c-1)u^2 - 4A_1u - A_2. \quad (3.161)$$

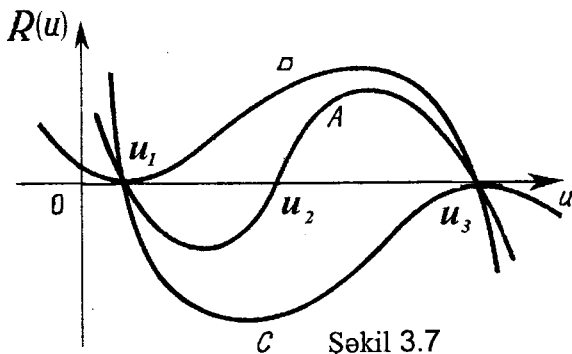
$u(\xi)$  funksiyasının ekstremumu aşağıdakı polinomun köklərinin köməyi ilə təyin edilir:

$$R(u) = -u^3 + 2(c-1)u^2 - 4A_1u - A_2 = 0. \quad (3.162)$$

Aşağıdakı hallara baxaq:

1. Əgər  $R(u)$  tənliyinin köklərindən biri kompleksdirsə, onda ona qoşma olan ikinci kök də kompleksdir və ancaq üçüncü kök həqiqidir. Bu isə fiziki cəhətdən mümkün deyil, ona görə ki, yayılan dalğaların profili həmişə maksimuma və minimuma malikdir.

2. Tutaq ki, (3.162) tənliyinin üç həqiqi kökü var (şək.3.7):



Şəkil 3.7

$$u_1 < u_2 < u_3 \quad (3.163)$$

(3.162) üçhədlisini vuruqlara ayıraq:

$$R(u) = -(u - u_1)(u - u_2)(u - u_3) \quad (3.164)$$

Viyet teoreminə əsasən

$$\begin{aligned} 2(c-1) &= u_1 + u_2 + u_3, & 4A_1 &= -(u_1u_2 + u_1u_3 + u_2u_3), \\ A_2 &= u_1u_2u_3 \end{aligned} \quad (3.165)$$

Buradan  $u_1, u_2, u_3$  köklərinin həqiqi olması üçün kafi şərt tapıq. Doğrudan da, (3.165)-dən tapırıq ki,

$$(c-1)^2 + 2A_1 = \frac{1}{4}(u_1^2 + u_2^2 + u_3^2) \quad (3.166)$$

(3.166) ifadəsinin müsbət olması üçün (3.162) tənliyinin kökləri həqiqi olmalıdır. Funksiyanın maksimum və minimum qiymətlərini ödəmə şərtlərinə əsasən  $R(u)$  funksiyasının maksimumu  $[u_2, u_3]$  parçasında, minimumu isə  $[u_1, u_2]$  parçasındadır

$$u = \frac{2}{3} \left( c - 1 + \sqrt{(c-1)^2 + 3A_1} \right) \in [u_2, u_3] \quad (3.167)$$

$$u = \frac{2}{3} \left( c - 1 - \sqrt{(c-1)^2 + 3A_1} \right) \in [u_1, u_2]$$

nöqtələrində

$$\begin{aligned} R \left[ \frac{2}{3} \left( c - 1 + \sqrt{(c-1)^2 + 3A_1} \right) \right] &\geq 0, \\ R \left[ \frac{2}{3} \left( c - 1 - \sqrt{(c-1)^2 + 3A_1} \right) \right] &\leq 0. \end{aligned} \quad (3.168)$$

(3.168) münasibətlərinin ödənilməsi  $R(u)$  funksiyasının köklərinin həqiqi olmasını bir daha təmin edir.  $u$  axtarılan funksiyanı

$$u = u_3 - (u_3 - u_2) \sin^2 \alpha \quad (3.169)$$

şəklində əvəz edək. Bu əvəzləməni (3.164) üçhədlisində nəzərə alsaq, yeni dəyişəndə  $R(\alpha)$ -nın ifadəsini tapırıq:

$$R = (u_3 - u_2)^2 [u_3 - u_1 - (u_3 - u_2) \sin^2 \alpha] \cos^2 \alpha \sin^2 \alpha \quad (3.170)$$

Digər tərəfdən,

$$u' = \frac{du}{d\xi} = -2(u_3 - u_2) \sin \alpha \cdot \cos \alpha \cdot \alpha',$$

ifadəsini (3.161) tənliyinin sol tərəfində nəzərə alaraq.

$$\frac{\mu}{3}(u')^2 = \frac{4}{3}\mu(u_3 - u_2)^2 \sin^2 \alpha \cdot \cos^2 \alpha \cdot (\alpha')^2, \quad (3.171)$$

(3.170), (3.171) ifadələrini və

$$K = \frac{u_3 - u_2}{u_3 - u_1}, \quad \frac{1}{\delta^2} = \frac{3}{4\mu}(u_3 - u_1),$$

əvəzləmələrini (3.161)-də yazaq:

$$(\alpha')^2 = \frac{1}{\delta^2}(1 - K^2 \sin^2 \alpha), \quad (3.172)$$

(3.172) tənliyini  $\xi(0)=0$  şərti daxilində inteqrallasaq, alırıq:

$$\xi = \delta \int_0^\alpha \frac{d\alpha}{\sqrt{1 - K^2 \sin^2 \alpha}} = \delta \operatorname{sn}^{-1}(\alpha, k), \quad (3.173)$$

burada  $\operatorname{sn}(\alpha, k)$  Yakobinin elliptik funksiyasıdır. (3.169) əvəzləməsindən tapırıq:

$$u|_{\alpha=0} = u_3, \quad u|_{\alpha=\frac{\pi}{2}} = u_2. \quad (3.174)$$

Dalğa uzunluğunu  $\lambda$  ilə işarə etsək və (3.174) şərtini (3.173)-də nəzərə alsaq, o aşağıdakı şəkllə düşər:

$$\frac{\lambda}{2} = \delta \int_0^{\pi/2} \frac{d\alpha}{\sqrt{1 - K^2 \sin^2 \alpha}}, \quad \text{və ya } \lambda = 2\delta\Phi(K), \quad (3.175)$$

$$\Phi(K) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\alpha}{\sqrt{1 - K^2 \sin^2 \alpha}}$$

(3.172) tənliyinin həllinin periodikliyini və bu həllin saxlanma qanununu ödədiyini nəzərə alaq:

$$\int_0^x u(\xi) d\xi = 0, \quad (3.176)$$

(3.169)-u (3.170)-də yerinə yazaq:

$$\lambda u_3 = -\frac{2\delta}{K^2} (u_3 - u_2) [F(K) - \Phi(K)], \quad (3.177)$$

$$F(K) = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - K^2 \sin^2 \alpha} d\alpha.$$

Burada  $u_2 - u_1$  ifadəsini  $u_3 - u_1$  ifadəsi ilə əvəz edərək, (3.177) düsturunu sadələşdirək:

$$\lambda u_3 = 2\delta(u_3 - u_1) [F(K) - \Phi(K)] \quad (3.178)$$

Dalğa hündürlüyünü  $h$  ilə işarə etsək, onda  $h = u_3 - u_2$  olar. Beləliklə, dalğa uzunluğu və hündürlüyü mə'lumdursa, onda (3.175), (3.178) və  $h = u_3 - u_2$  münasibətlərindən  $u_1, u_2, u_3$  məchullarını tapmaq olar. Əksinə,  $u_1, u_2, u_3$  kökləri verilərsə, onda  $c, \lambda, h$  parametrlərini tə'yin etmək olar. Dalğanın yayılma sür'əti isə (3.165)-in birinci düsturundan tapılır:

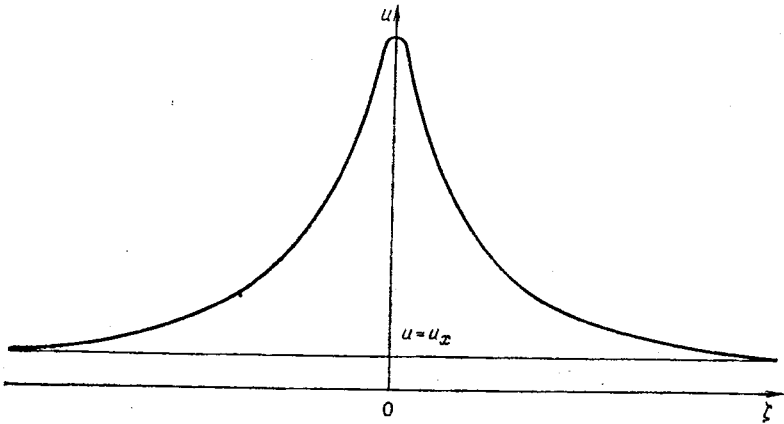
$$c = 1 + 1/2(u_1 + u_2 + u_3). \quad (3.179)$$

(3.173) inteqralı Yakobinin elliptik funksiyasının tərsidir. Bu həll Yakobinin  $sn(x)$  elliptik funksiyası ilə ifadə olunduğuna görə **knoidal dalğa** adlanır.

3. Tutaq ki,  $u_1 = u_2 \neq u_3$ . Bu halda  $u$  funksiyası  $u_1$  və  $u_3$  arasında dəyişəcək və qrafiki şəkildə göstərilən kimi olacaq. (3.161) tənliyini  $u_1 = u_2$  şərti daxilində inteqrallayaq:

$$u(\xi) = u_1 + \frac{u_3 - u_1}{ch^2 \left( \sqrt{\frac{3}{4\mu}} (u_3 - u_1) \xi \right)} \quad (3.180)$$

Buradan  $\xi \rightarrow \pm\infty$  olduqda,  $u \rightarrow u_1 = u_\infty$  olur. Üçüncü hal sonsuzluqda bircins olan həlləri birləşdirir, yə'ni qaçan dalğalar bir sükunət halından  $\xi \rightarrow -\infty$  digər sükunət halına  $\xi \rightarrow \infty$  keçərkən  $\xi = 0$  ətrafında cəmləşir (lokallaşır) (şəkil 3.8). Bu halda dalğa özü ilə bərabər müəyyən maye kütləsi apararaq fəzada öz formasını dəyişmədən yayılır. Belə dalğalara **təklənmiş (ayrılmış) dalğalar** deyilir.



Şəkil 3.8

$$u(\xi) = u_\infty + \frac{u_3 - u_\infty}{ch^2 \left( \sqrt{\frac{3}{4\mu}} h\xi \right)}, \quad (3.181)$$

$$h = u_3 - u_\infty, \quad c = 1 + \frac{3}{2}u_\infty + \frac{1}{2}h.$$

(3.181) düsturuna əsasən aşağıdakı nəticələrə gəlmək olar:

a) Dalğanın eni  $2\pi\sqrt{4\mu/3h}$  ifadəsinə bərabər olub, dalğa

amplitudunun kvadrat kökü ilə tərs mütənasibdir.

b) Dalğa sür'əti onun sonsuzluqdakı bircins halı və amplitudu ilə mütənasibdir.

c) Amplitud  $u_\infty$ -sonsuzluqdakı bircins halından asılı deyildir.

d) Dalğanın eni  $\mu$  parametrinin kvadrat kökü ilə mütənasib olub, dalğa profilinin həm dəyişməsində, həm də yayılmasında əsas rol oynayır.

4.  $u_1 \neq u_2 = u_3$ . Bu halda  $u \leq u_1$  olduqda,  $R(u) \geq 0$  olur. Alınmış (3.173) inteqral həll onu göstərir ki, (3.161) tənliyinin məhdud həlli yoxdur. Xüsusi halda,  $u_2 \rightarrow u_3$  olduqda,  $K^2 \rightarrow 0$  olur və (3.173) sadələşmiş ifadəsini (3.169)-da nəzərə alsaq, alarıq

$$u(\xi) = u_3 - (u_3 - u_2) \sin^2 \left[ \sqrt{\frac{3}{4\mu} (u_3 - u_1)} (\xi - \xi_0) \right]. \quad (3.182)$$

Bu ifadənin limiti sabit  $u_3$  qiymətinə yaxınlaşır və periodu aşağıdakı ifadə ilə təyin olunur:

$$T \rightarrow 2\pi \sqrt{\frac{4\mu}{3(u_3 - u_1)}}. \quad (3.183)$$



## IV FƏSİL

### QAZIN BİRÖLÇÜLÜ QƏRARLAŞMAYAN HƏRƏKƏTLƏRİNDƏ SONLU HƏYƏCANLAMALAR

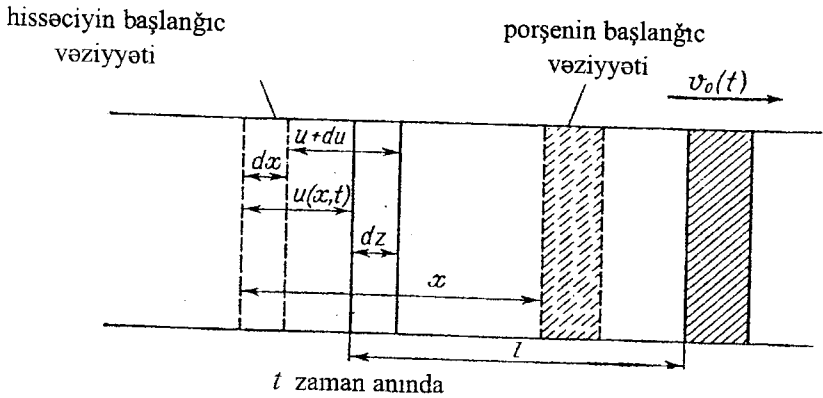
#### §4.1. Boruda boşalma dalğaları

Qazın birölçülü qərarlaşmayan hərəkəti elə hərəkətə deyilir ki, qazın hərəkətini xarakterizə edən parametrlər ancaq bir fəza koordinatından asılı olsun. En kəsiyi sabit olan boruda porşenin hərəkəti zamanı onun arxasında və qabağında qazın hərəkətini birölçülü qəbul etmək olar.

Tutaq ki, boruda sükunətdə olan qaz  $P_0$  təzyiqi altında  $T_0$  temperaturuna və  $\rho_0$  sıxlığına malikdir. Əgər hər hansı kəsikdə olan porşen hərəkət edərsə, onda porşen arxasındakı qaz porşenə çatmağa cəhd edir və nəticədə boşalma dalğası əmələ gəlir. Qazın özlüyünü və istilik keçirməsini nəzərə almadan onun hərəkət tənliyini çıxaraq. Hesablamaları Lagraanj koordinat sistemində aparaq.

Qaz hissəciyinin başlanğıc  $x$  koordinatını və  $t$  zamanını asılı olmayan koordinatlar kimi qəbul edək.  $X$  koordinat oxunu porşenin hərəkət istiqamətində yönəldək və  $t = 0$  olduqda koordinat başlanğıcını sükunətdə olan porşenlə üst-üstə salaq. Onda porşenin arxasında olan qaz  $x$ -in mənfi hissəsinə düşəcək. Qeyd edək ki, qaz özlü olmadığı üçün müəyyən  $t$  zaman müddətində qaz hissəciyinin porşendən olan məsafəsi  $|x|$ -ə bərabər olmayacaqdır. Borunun en kəsiyində qaz hissəciyinin yerdəyişməsini  $u(x, t)$  və porşenin sür'ətini  $v_0(t)$  ilə işarə etsək, onda bu kəsik  $t$  zaman anında porşendən  $l$  qədər geridə qalacaq

$$l = |x| - u(x, t) + \int_0^t v_0(t) dt. \quad (4.1)$$



Şəkil 4.1

Qaz hissəciyinin başlanğıc  $dx$  uzunluğunun  $t$  zaman müddətində dəyişməsinə  $dz$  ilə işarə edək

$$dz = dx + du \quad (4.2)$$

Burada  $du$   $x$  koordinatının  $dx$  qədər dəyişməsi zamanı qaz hissəciklərindən təşkil olunan en kəsiyin yerdəyişməsinin artımıdır. (4.1) şəklindən görüldüyü kimi

$$dz = dx + u + du - u = dx + du. \quad (4.3)$$

Borunun en kəsiyinin sabit olduğunu qəbul edərək, hissəciyin başlanğıc və  $t$  anında uzunluğunu bilərək, hissəciyin kütləsinin saxlanması qanununu yazaq:

$$\rho_0 dx = \rho dz = \rho(dx + du);$$

və ya

$$\rho_0 = \rho \left( 1 + \frac{\partial u}{\partial x} \right). \quad (4.4)$$

Aşağıdakı işarələmələri apararaq

$$u_x = \frac{\partial u}{\partial x}; \quad u_t = \frac{\partial u}{\partial t}. \quad (4.5)$$

Qaz hissəciyinin deformasiyasını tapaq:

$$\varepsilon = \frac{dz - dx}{dx} = \frac{\partial u}{\partial x} = u_x, \quad (4.6)$$

Qazın hər bir hissəciyini maddi nöqtə kimi qəbul edərək, ona Nyutonun II qanununu tətbiq edək:

$$dx \cdot \rho_0 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -dP, \\ \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial P}{\partial x}. \quad (4.7)$$

Qazın təkmil olduğunu nəzərə alaraq, entropiya tənliyinin inteqrallanmasından tapırıq:

$$\frac{P}{\rho^k} = \frac{P_0}{\rho_0^k} = const, \quad k = \frac{C_p}{C_v}. \quad (4.8)$$

(4.4) və (4.5) münasibətlərindən alarıq:

$$P = \frac{P_0}{(1 + u_x)^k}. \quad (4.9)$$

(4.9) düsturunu (4.7)-də yerinə yazsaq,  $u$ -ya nəzərən qeyri-xətti hiperbolik tip tənlik alarıq:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{kP_0}{\rho_0} \frac{1}{(1 + u_x)^{k+1}} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \quad (4.10)$$

Aşağıdakı kimi işarələmələr aparaq:

$$a_0^2 = \frac{kP_0}{\rho_0}, \quad a^2 = \frac{a_0^2}{(1 + u_x)^{k+1}}, \quad (4.11)$$

$$c = \sqrt{\frac{kP}{\rho}} = \frac{a_0}{(1 + u_x)^{(k-1)/2}}. \quad (4.12)$$

Burada  $a_0$ -həyəcanlanmamış,  $c$  isə həyəcanlanmış qazda səsin sürətini göstərir. (4.11) və (4.12) ifadələrindən göründüyü kimi  $a \neq c$ . (4.10) tənliyini aşağıdakı kimi yazmaq olar:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2(u_x) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \quad (4.13)$$

Porşen arxasında qazın hərəkətini öyrənmək üçün aşağıdakı başlanğıc və sərhəd şərtlərinin verilməsi zəruridir:

$$u_x(x,0) = 0, \quad u_t(x,0) = 0, \quad (4.14)$$

$$u_t(0,t) = v_0(t) \quad (4.15)$$

(4.13) tənliyi qeyri-xətti hiperbolik tip tənlikdir. (4.15) üçüncü sərhəd şərti göstərir ki, qaz hissəciyinin sür'əti porşenin sür'əti ilə üst-üstə düşür (yapışqanlıq şərti).

İndi göstərək ki,  $(x,t)$  müstəvisində elə iki istiqamət var ki, onlar üzərində  $u$  funksiyasının tam diferensialları arasında xətti asılılıq var. Bu istiqamətlər xarakteristik xətlər adlanır. İxtiyari  $dx, dt$  -lər üçün yazıla bilər:

$$du_t = u_{tt} dt + u_{tx} dx;$$

$$du_x = u_{xt} dt + u_{xx} dx. \quad (4.16)$$

$du_t$  və  $du_x$  münasibətləri arasında elə bir əlaqə axtaraq ki, onlar (4.13) tənliyini ödəsin. Tutaq ki,  $dx = \Lambda dt$ . Onda (4.16) münasibətləri (4.13) tənliyinin köməyi ilə aşağıdakı şəkə düşər:

$$du_t = (a^2 u_{xx} + \Lambda u_{tx}) dt,$$

$$du_x = (u_{xt} + \Lambda u_{xx}) dt. \quad (4.17)$$

(4.17)-də  $du_t$  və  $du_x$  arasında xətti əlaqənin olması üçün onlar belə bir şərti ödəməlidir:

$$a^2 u_{xx} + \Lambda u_{tx} = B(u_{xt} + \Lambda u_{xx}). \quad (4.18)$$

Burada  $B$  və  $\Lambda$  -nı aşağıdakı kimi götürsək,

$$B = \Lambda, \quad B\Lambda = a^2, \quad \Lambda^2 = a^2,$$

$$\frac{dx}{dt} = \Lambda = \pm a, \quad (4.19)$$

(4.17) münasibətlərindən alırıq:

$$\frac{du_t}{du_x} = B, \quad du_t = Bdu_x = \pm adu_x. \quad (4.20)$$

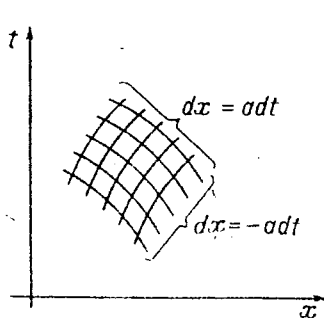
Göstərdik ki,  $(x, t)$  xarakteristikaları üzərində (4.20) şərti ödənilir. Əgər (4.19) xarakteristikaları üzərində (4.20) münasibətləri ödənilərsə, onda onlar üzərindəki (4.13) tənliyi də ödəniləcək. (4.20) münasibətini (4.16)-da nəzərə alsaq,

$$u_{tt} dt + u_{tx} dx = a (u_{xt} dt + u_{xx} dx) \quad (4.21)$$

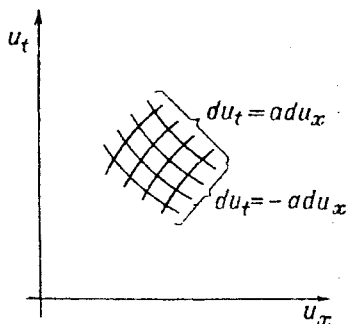
onda (4.19) xarakteristikaların tənliklərinə əsasən (4.21)-dən (4.13) tənliyi alınır

$$u_{tt} = a^2 u_{xx}. \quad (4.22)$$

Beləliklə alırıq ki, (4.19) şərtini ödəməklə  $u_t$  və  $u_x$  kəmiyyətləri (4.20)-dən tapılırsa, onda onlar (4.13) tənliyini də ödəyər. Bu fakt onu göstərir ki, (4.13) tənliyinin həlli xarakteristik tənliklərin həlli ilə ekvivalentdir. İndi  $(x, t)$  və  $(u_x, u_t)$  müstəvilərində (4.19) və (4.20) tənliklərinin həndəsi interpretasiyasını verək. Əgər  $u(x, t)$  funksiyasını mə'lum hesab etsək, onda  $(x, t)$  müstəvisində (4.19) diferensial tənliyinin iki inteqral əyrilər ailəsi olacaq (şəkil 4.2, şəkil 4.3).



Şəkil 4.2



Şəkil 4.3

Digər tərəfdən, bu əyrilər üzərində (4.20) münasibətləri ödənilir və  $(x, t)$  müstəvisində xarakteristikaların nöqtələri  $(u_x, u_t)$  müstəvisindəki xarakteristikaların nöqtələrinə uyğun gələcək (şək. 4.3).

$$\frac{dx}{dt} = \pm a, \quad \frac{du_t}{du_x} = \pm a. \quad (4.23)$$

Buradan göründüyü kimi,  $(x, t)$  və  $(u_x, u_t)$  müstəvilərində xarakteristikaların kəsişmə nöqtələri də bir-birinə uyğun olacaq və (4.19), (4.20) tənliklərinin həllini tapmaq bu müstəvilər üzərində kəsişmə nöqtələri arasında uyğunluğu yaratmaqdan ibarətdir. Beləliklə, (4.13) tənliyinin həlli (4.19) və (4.20) sisteminin həllinə gətirilir. Bu üsula (fakta) **uyğunluq teoremi** deyilir.

Porşen arxasında qazın hərəkətini təsvir edən (4.13) hiperbolik tip tənliyin verilmiş başlanğıc şərtləri daxilində (Koşi məsələsi) həllini tapaq. Qoyulmuş məsələdə  $OX$  oxu üzərində  $u_x(x, 0) = u_t(x, 0) = 0$  şərtləri verilir və bu ox  $(x, t)$  müstəvisində xarakteristik xətlərlə üst-üstə düşmür ( $a \neq 0$ ).  $(u_x, u_t)$  müstəvisində xarakteristikaların tənliyini yazaq. (4.11) ifadəsini (4.20)-də nəzərə alsaq, taparıq:

$$du_t = \pm \frac{a_0}{(1 + u_x)^{(k+1)/2}} du_x. \quad (4.24)$$

(4.24) tənliyini  $dx = adt$  xarakteristikası üzrə inteqrallayaq:

$$u_t = a_0 \int_0^{u_x} \frac{du_x}{(1 + u_x)^{(k+1)/2}} + c_1. \quad (4.25)$$

$$u_t = \frac{2a_0}{k-1} \left[ 1 - \frac{1}{(1 + u_x)^{(k-1)/2}} \right] + c_1. \quad (4.26)$$

Analoji qaydada  $dx = -adt$  xarakteristikası boyu

$$u_t = -\frac{2a_0}{k-1} \left[ 1 - \frac{1}{(1+u_x)^{(k-1)/2}} \right] + c_2. \quad (4.27)$$

İntegral sabitləri (4.14) başlanğıc şərtlərindən tapılır

$$c_1 = c_2 = 0 \quad (4.28)$$

Əgər

$$\varphi(u_x) = \frac{2a_0}{k-1} \left[ 1 - \frac{1}{(1+u_x)^{(k-1)/2}} \right], \quad (4.29)$$

işarələməsi aparsaq, onda porşen arxasında ( $x < 0$ ) (4.26) və (4.27) birinci inteqralları aşağıdakı şəkildə yaza bilərik:

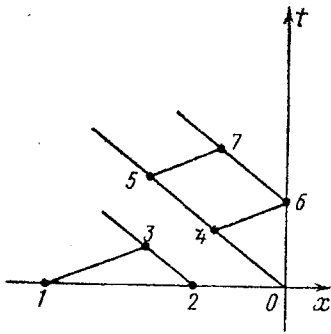
$$u_t = \psi(u_x), \quad u_t = -\psi(u_x) \quad (4.30)$$

Mənfi  $OX$  yarım oxunun ixtiyari nöqtəsindən çıxan xarakteristika  $(u_x, u_t)$  müstəvisində koordinat başlanğıcından çıxan xarakteristikaya uyğun olacaq (şək. 4.4-4.5). Belə ki, bu ox üzərində  $u_x(x,0) = u_t(x,0) = 0$ .  $(x,t)$  müstəvisində ixtiyari 1-3 xarakteristikasını götürək və bu xarakteristika  $(u_x, u_t)$  müstəvisində  $u_t = \psi(u_x)$  xarakteristikasına uyğun olacaq. Eyni qaydada  $(x,t)$  müstəvisindəki 2-3 xarakteristikasına,  $(u_x, u_t)$  müstəvisində,  $u_t = -\psi(u_x)$  xarakteristikası uyğun olacaq. Uyğunluq teoreminə əsasən  $(x,t)$  müstəvisində 1-3 və 2-3 xarakteristikalarının kəsişmə nöqtəsi,  $(u_x, u_t)$  müstəvisinin koordinat başlanğıcına uyğundur. Beləliklə, alırıq ki,  $X$  yarım oxunun ixtiyari 1 və 2 nöqtəsindən çəkilmiş xarakteristikaların kəsişmə,  $(x,t)$  nöqtəsinə  $(u_x, u_t)$  müstəvisində uyğun olan nöqtə koordinat başlanğıcıdır ( $u_x = \varepsilon = 0, u_t = 0$ ). Bu halda (4.11) ifadəsindən alırıq:

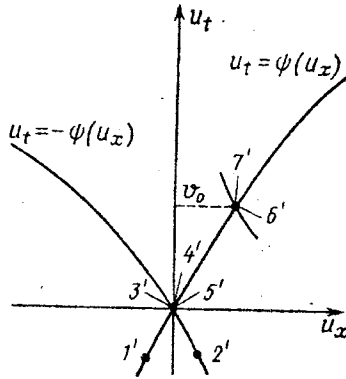
$$a = a_0. \quad (4.31)$$

(4.19) tənliyində (4.31)-i nəzərə alsaq,  $(x,t)$  müstəvisinin ikinci kvadrantında xarakteristikaların tənliyi sadələşərək

düz xətt olar (şək. 4.4)



Şəkil 4.4



Şəkil 4.5

$$x = a_0 t + c_3, \quad x = -a_0 t + c_4. \quad (4.32)$$

(4.32) ifadələrindən görüldüyü kimi porşenin yaratdığı həyəcanlanma  $x < 0$  istiqamətində  $a_0$  sür'əti ilə yayılır və başlanğıc şərt  $x = -a_0 t$  xarakteristikalarının üzərinə keçir. Deməli, (4.15) sərhəd şərtindən  $u_t(0, t) = v_0(t)$  əlavə xarakteristika üzərində  $x = -a_0 t$ ,  $u_x = 0$ ,  $u_t = 0$  şərtləri ödənməlidir. Hiperbolik tənliklər üçün bu şəkildə qoyulmuş məsələlər **qarışıq məsələlər** adlanır, yə'ni sərhəd şərtləri həm xarakteristika üzərində  $x = -a_0 t$ , həm də xarakteristik xətt olmayan  $x = 0$  düz xətti üzərində verilməlidir.

Uyğunluq teoremindən istifadə edərək qarışıq məsələni həll edək. Bunun üçün  $(x, t)$  müstəvisində 4-6 xarakteristikasının 6 nöqtəsində  $u_t = v_0$  sür'əti verilir və  $u_t = \psi(u_x)$ , əyrisi üzərində  $v_0(t)$  ordinatlı  $6'$  nöqtəsi tapılır. İsbat etmək olar ki, 6-7 xarakteristikası üzərində götürülmüş ixtiyari nöqtə  $(u_x, u_t)$  müstəvisində  $6^1$  nöqtəsinə keçəcək. Həmçinin, 6-7 xarakteristikası üzrə hissəciyin sür'əti və deformasiyası sabitdir. Ona görə də  $Ot$  ordinatın-



dan çıxan mənfi işarəli ixtiyari xarakteristika düz xətt verir. Ümumi halda  $a_0 \neq 0$  olduqda  $u_x, u_t$  funksiyalarını tapaq. Bunun üçün  $Ot$  ordinatı üzərində  $t_0$  - nöqtəsi qeyd edək və bu nöqtədən çıxan xarakteristikanın tənliyini yazaq:

$$x = -a(u_x)(t - t_0). \quad (4.33)$$

$x = -a_0 t$  xarakteristikası (bu xarakteristika oblastın sərhədidir) və  $Ot$  oxunun əmələ gətirdiyi müstəvidə (4.26) integralı doğrudur

$$u_t = \frac{2a_0}{k-1} \left[ 1 - \frac{1}{(1+u_x)^{(k-1)/2}} \right]. \quad (4.34)$$

$Ot$  üzərində sərhəd şərtini yazaq:

$$u_t = v_0(t_0). \quad (4.35)$$

(4.33) münasibətindən  $t_0$  tapıb, onu (4.35)-də yerinə yazaq

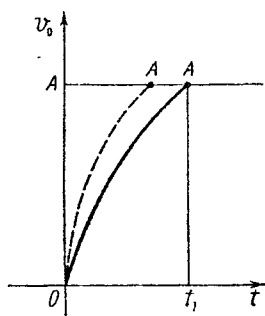
$$u_t = v_0 \left( t + \frac{x}{a(u_x)} \right). \quad (4.36)$$

Əgər (4.36) münasibəti aşkar şəkildə verilsə, onda (4.34) və (4.36) tənliklər sistemini  $u_x, u_t$  məchullarına görə birgə həll edərək, onların  $x$  və  $t$ -dən asılılığını taparıq. (4.34) və (4.36) tənlikləri transendent tənliklər sistemidir və (4.35) sadə şəkildə verildikdə,  $u_t$  və  $u_x$  üçün analitik həll vermək olur.

(4.34)-(4.35) tənliklərini həll etmədən bə'zi nəticələr almaq olar. Tutaq ki,  $v_0(t)$  (4.6) şəklində olduğu kimi dəyişir. Oradan görünür ki, zaman artdıqca  $u_x$  artır və  $a$ -nın qiyməti azalır.  $t > t_1$  olduqda  $u_0(t) = const$  olduğunu nəzərə alsaq,  $u_x = const$ ,  $a(u_x) = const$  olar.

Şəkil 4.4-dən görüldüyü kimi  $t < t_1$  olduqda  $t$  oxundan başlanan bütün xarakteristikalar bir-birindən

aralanırlar ( $a \neq a_0$ ),  $t > t_1$  olduqda isə bir-birinə paralel qalırlar ( $a_0 = \text{const}$ ). Eyni zamanda  $t \in [0, t_1]$  olduqda xarakteristikaların mənfi  $\alpha$  oxu ilə əmələ gətirdiyi bucaq zaman artdıqca artır, çünki (4.11) ifadəsindən görüldüyü kimi  $u_x$  artdıqca  $a(u_x)$  funksiyası azalır. Əgər  $t_1$  müddətini sıfıra



Şəkil 4.6

yaxınlaşdırsa, onda dəyişən meyilli xarakteristikalar da  $t$  oxu boyunca başlanğıc koordinata «0» sıxılacaq. Bu zaman  $t > t_1$  uyğun gələn xarakteristikalar bir-birinə paralel qalacaq və  $v_0 = v_0(t)$  dəyişməsindən asılı olmayacaq:  $t > t_1$ ;  $v_0 = \text{const}$ . Beləliklə, porşen sür'ətini sonsuz kiçik  $t_1$  müddətində sıfırdan  $v_0(t)$ -yə qədər sıçrayışla dəyişəcək və

şəkil 4.6 da göstərilirdiyi kimi olacaq.

Şəkil 4.4 və 4.5-dən görüldüyü kimi dəyişən meyilli hər bir xarakteristikaya  $(u_t, u_x)$  müstəvisində  $u_t = \psi(u_x)$  əyrisinin müxtəlif nöqtəsi uyğun gəlir. Birinci paralel xarakteristika da  $x = 0, t = 0$  başlanğıc nöqtədən keçir və bu kəsişmə nöqtəsi (koordinat başlanğıcı) məxsusi nöqtə olur, yə'ni  $u_x$  kəmiyyətləri həmin nöqtədə kəsişmə verir.

Əgər  $Ot$  oxu boyunca koordinat başlanğıcına yaxınlaşsaq və  $u_t = v_0 = \text{const}$  götürsək, onda (4.34)-dən alarıq

$$u_x = \left[ 1 - \frac{v_0(k-1)}{2a_0} \right]^{-2/(k-1)} - 1. \quad (4.37)$$

Digər tərəfdən,  $OX$  oxu boyunca koordinat başlanğıcına yaxınlaşsaq  $u_t = u_x = 0$  olar.

Bir nöqtədən çıxan xarakteristikalar sisteminə uyğun gələn dalğalara **mərkəzləşmiş Riman dalğaları** deyilir.

Ölçülər nəzəriyyəsindən istifadə edərək, porşenin sıçrayışlı hərəkətini öyrənək. Ümumi halda qaz hissəciyinin  $u$ , sür'əti və  $u_x$  deformasiyası  $v_0, P_0, \rho_0, k$  parametrlərindən və  $(x, t)$  koordinatlarından asılı olur

$$\begin{aligned} u_t &= v_0 f_1(x, t, v_0, P_0, \rho_0, k), \\ u_x &= f_2(x, t, v_0, P_0, \rho_0, k). \end{aligned} \quad (4.38)$$

$f_1$  və  $f_2$  funksiyaları ölçüsüz kəmiyyətlər olduqları üçün, onlar  $x, t, v_0, P_0, \rho_0, k$  kəmiyyətlərinin kombinasiyalarından asılı olmalıdır. Ümumi halda bu kəmiyyətlərin kombinasiyasını götürək. Burada iştirak edən kəmiyyətlər uzunluq, zaman və çəki vahidlərinin kombinasiyasından ibarətdir

$$x^{n_1}, t^{n_2}, v_0^{n_3}, P_0^{n_4}, \rho_0^{n_5} \quad (4.39)$$

Onda  $x = [L]$ ,  $t = [\tau]$ ,  $P_0 = \frac{[G]}{[L^2]}$  kimi götürsək, (4.39)

ifadəsi aşağıdakı şəkllə düşər:

$$\left[ L^{n_1} \tau^{n_2} \frac{L^{n_3}}{\tau^{n_3}} \frac{G^{n_4}}{L^{2n_4}} \frac{G^{n_5} \tau^{2n_5}}{L^{4n_5}} \right] = 0. \quad (4.40)$$

(4.40) ifadəsinin ölçüsüz kəmiyyət olması üçün  $L, \tau, G$ -lərin üstlərinin cəmi sıfıra bərabər olmalıdır

$$\begin{cases} n_1 + n_3 - 2n_4 - 4n_5 = 0, \\ n_2 - n_3 + 2n_5 = 0, \\ n_4 + n_5 = 0. \end{cases} \quad (4.41)$$

(4.41) sistemində beş məchuldən ikisi ixtiyari, qalan üçü isə onlarla ifadə oluna bilər

$$n_2 = -n_1, \quad n_5 = -n_4, \quad n_3 = -2n_4 - n_1. \quad (4.42)$$

(4.42)-ni (4.39) ifadəsində yerinə yazsaq,

$$\frac{x^{n_1} P_0^{n_4}}{t^{n_1} v_0^{n_1} \rho_0^{n_4} v_0^{2n_4}} = \left( \frac{x}{tv_0} \right)^{n_1} \cdot \left( \frac{P_0}{\rho_0 v_0^2} \right)^{n_4}, \quad (4.43)$$

(4.43) ifadəsində hər bir mötərizənin içərisi ölçüsüz kəmiyyətdir və ondan istifadə edərək, qaz hissəciyinin yer-dəyişməsinə təyin edək:

$$u = v_0 t f \left( \frac{x}{tv_0}, k, \frac{P_0}{\rho_0 v_0^2} \right). \quad (4.44)$$

(4.44) ifadəsindən görüldüyü kimi  $f$  funksiyası ancaq  $x/(v_0 t)$  dəyişənindən asılıdır. (4.44) ifadəsini (4.13) tənliyində yerinə yazsaq, alarıq:

$$\frac{x^2}{v_0 t^3} = \frac{a^2(u_x)}{v_0 t}. \quad (4.45)$$

Buradan  $a^2(u_x)$  taparıq:

$$a^2(u_x) = \left( \frac{x}{t} \right)^2. \quad (4.46)$$

Bu nəticə əvvəlcədən həndəsi olaraq alınmışdır. Doğrudan da  $(x, t)$  müstəvisində  $OX$  oxuna nəzərən Rimanın mərkəzləşmiş dalğalarının meylik bucağını hesablasaq, (4.46) ifadəsi alınar.

## §4.2. Porşen qabağında qazın hərəkəti

Porşenin qabağında qazın hərəkəti porşen arxasındakı hərəkətdən ciddi fərqlənir. Porşen arxasında boşalma dalğaları yaranırsa, onun qabağında sıxılma dalğaları əmələ gəlir. Porşenin qabağında qazın hərəkət oblastı müstəvinin birinci kvadrantına uyğun olur. Məsələnin həlli §4.1-dəki tənliklər sisteminə analogi olan sistemin həllinə gətirilir.

$$x = a(u_x)(t - t_0), \quad u_t = v_0(t_0), \quad (4.47)$$

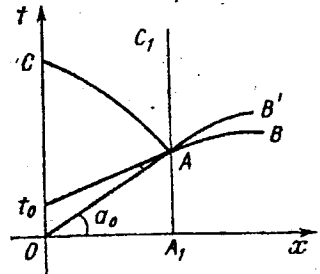
$$u_t = \frac{2a_0}{k-1} \left[ \frac{1}{(1+u_x)^{(k-1)/2}} - 1 \right],$$

Buradan  $t_0$  aradan çıxarsa, alırıq:

$$u_t = v_0 \left( t - \frac{x}{a(u_x)} \right),$$

$$u_t = -\frac{2a_0}{k-1} \left[ 1 - \frac{1}{(1+u_x)^{(k-1)/2}} \right], \quad (4.48)$$

Asanlıqla göstərmək olar ki, (4.48) ifadələri (4.13) tənliyini ödəyir. (4.47) münasibətindən belə nəticəyə gəlmək olar ki, müsbət meyilli xarakteristikalar üzərində qaz hissəciyinin sür'ət və deformasiyası sabitdir.  $v_0(t) = const$  olduğu üçün  $u_x$ -də sabitdir. Digər tərəfdən  $u_t = v_0 > 0$  olduğunu nəzərə alsaq, (4.47)-də  $u_x < 0$  olar və  $|u_x|$  zaman artdıqca monoton olaraq artır. (4.47) sisteminin birinci tənliyində  $a(u_x)$  zaman artdıqca böyüyür və nəticədə  $(x, t)$  müstəvisində xarakteristikanın  $t$  oxuna nəzərən meyillilik bucağı artır (şək. 4.7). Beləliklə,  $t$  oxundan çıxan müsbət xarakteristikalar hökmən bir-biri ilə kəsişirlər. Onda  $(x, t)$  müstəvisində xarakteristikaların elə  $AB$  qurşayanı var ki, bu xarakteristikalar həmin qurşayana toxunur. Aydınır ki,  $OAB$  əyrisini heç bir xarakteristika kəsmir və onun hər bir nöqtəsinə bir xarakteristika toxunur. Eyni zamanda  $(x, t)$



Şəkil 4.7

müstəvisinin hər bir nöqtəsindən ancaq bir müsbət meylli xarakteristika keçəcək. Hələlik onların kəsişmə nöqtələrini nəzərə almırıq. Bu isə (4.48) sisteminin həllinin birqiymətliliyini göstərir.  $X$  oxunun müsbət istiqaməti ilə  $OAB$  əyrisi arasında qalan oblastda qaz sükunətdədir. Bunun doğruluğunu xarakteristikalar metodundan istifadə edərək göstərmək olar. Əgər  $OAB$  əyrisinə  $OX$  oxu istiqamətindən yaxınlaşsaq, onda bu oblastda  $u_t = 0$ ,  $u_x = 0$  olacaq. Bu əyriyə  $Ot$  oxu istiqamətindən xarakteristikalar boyunca yaxınlaşsaq,  $u_t \neq 0$ ,  $u_x \neq 0$  olar. Deməli,  $OAB$  əyrisi üzərində  $u_t$  və  $u_x$  funksiyalarının kəsilməsi baş verir. (4.48) həllinin bir çatışmazlığı var ki, kəsilmə səthində o bu şərtləri ödəməyəcək. Həllin kəsilməsi fiziki olaraq  $OAB$  üzərində baş verir, ancaq zərbə dalğası  $AB'$  xətti üzərində yaranır.

İndi göstərek ki,  $v_0 = v_0(t)$  sür'əti hər hansı qanunla artıqda elə bir  $OAC$  oblastı var ki, orada (4.48) həllini yuxarıdakı şərtlər daxilində istifadə etmək mümkün olsun. Bunun üçün  $OAB$  əyrisinin  $OA$  hissəsinin xarakteristik əyri olduğunu göstərmək kifayətdir.  $A$  nöqtəsi iki sonsuz yaxın xarakteristikanın kəsişmə nöqtəsidir. Fiziki olaraq bu onu göstərir ki, kəsilmə xətti (zərbə dalğası)  $A$  nöqtəsindən başlayır və sonrakı dalğa isə porşəndən qabaqda yaranan səs dalğasını gücləndirir.

$Ot$  oxunun iki nöqtəsindən çıxan xarakteristikalar ailəsinin kəsişmə nöqtəsini tapmaq. Bunun üçün onların tənliyini yazaq:

$$x = (t - t_1)a(u_{x1}), \quad x = (t - t_2)a(u_{x2}). \quad (4.49)$$

Bunları birgə həll edərək  $t$ -ni tapmaq:

$$t = t_1 + \frac{a_2(t_2 - t_1)}{a_2 - a_1}, \quad (4.50)$$

$$a(u_{x1}) = a_1, \quad a(u_{x2}) = a_2,$$

Götürülmüş xarakteristikalar sonsuz yaxın olduğu üçün  $t_2 \rightarrow t_1$ . Onda (4.50)-dən alarıq:

$$t = t_1 + \frac{a_1}{a'_{1t}}, \quad a'_{1t} = \frac{\partial a_{1t}}{\partial t}. \quad (4.51)$$

Bu tənlikdən görünür ki, sonsuz kiçik yaxın xarakteristikalar sonlu məsafədə kəsişirlər. Əgər birinci xarakteristikanı OA götürsək, onda  $t_1 = 0$  olur və zərbə dalğasının yaranma anını (4.51)-dən taparıq:

$$t_{\text{zərb}} = \frac{a_0}{a'_{0t}(0)} \quad (4.52)$$

Buradan zərbə dalğasının əmələgəlmə məsafəsini təyin edək:

$$x = a_0 t_{\text{zərb}} = \frac{a_0^2(0)}{a'_{0t}(0)} \quad (4.53)$$

İndi  $a'_{0t}(0)$ -ə kəmiyyətini  $v_0 = v_0(t)$ -nin törəməsi ilə əvəz edək:

$$\frac{\partial a}{\partial t} = \frac{da}{du_x} \cdot \frac{\partial u_x}{\partial t} \quad (4.54)$$

(4.48) ifadələrini birləşdirək:

$$v_0\left(t - \frac{x}{a(u_x)}\right) = \frac{2a_0}{k-1} \left[ \frac{1}{(1+u_x)^{(k-1)/2}} - 1 \right] \quad (4.55)$$

(4.54)-dən  $t$ -yə görə lokal törəmə alıb, (4.53) ifadəsini nəzərə alsaq:

$$v'_0(0) = -\frac{2a_0}{k-1} \frac{k-1}{2} (1+u_{x=a_0t})^{-(k+1)/2} \frac{\partial u_x}{\partial t} \Big|_{x=a_0t} = -a_0 \frac{\partial u_x}{\partial t} \Big|_{x=a_0t} \quad (4.56)$$

Digər tərəfdən,

$$\left. \frac{da(u_x)}{du_x} \right|_{x=a_0 t_{\text{zərbə}}} = -\frac{k+1}{2} \cdot \frac{a_0}{(1+u_x)^{(k+1)/2}} = -\frac{k+1}{2} a_0 \quad (4.57)$$

(4.56) və (4.57) ifadələrini  $x = a_0 t_{\text{zərbə}}$  (4.54)-də nəzərə alsaq,  $a'_t$  -i tapırıq:

$$\left. \frac{\partial a}{\partial t} \right|_{u_x=0} = \frac{k+1}{2} v'_0(0) \quad (4.58)$$

(4.58) düsturunu (4.53) yerinə yazsaq, alırıq:

$$t_{\text{zərb}} = \frac{2}{k+1} \cdot \frac{a_0}{v'_0(0)}; \quad x_{\text{zərb}} = \frac{2}{k+1} \cdot \frac{a_0^2}{v'_0(0)} \quad (4.59)$$

(4.59) ifadəsindən görüldüyü kimi porşen ani olaraq  $v_0(t) = v_0 = \text{const}$  sür'ətini alarsa, onda  $v'_0(0) \rightarrow \infty$  olar,

$$t_{\text{zərb}} = 0, \quad x_{\text{zərb}} = 0 \quad (4.60)$$

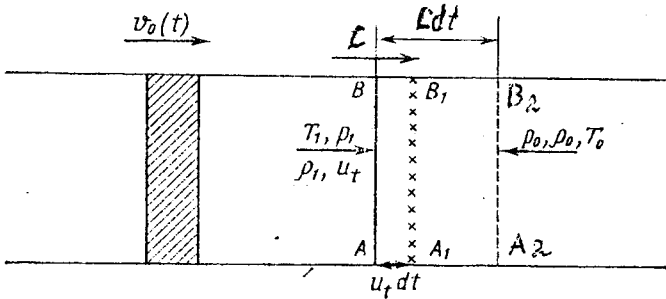
və zərbə dalğası ani olaraq porşen üzərində yaranar.

Qeyd edək ki, (4.48) həlli  $OAC$  oblastının daxilində doğrudur. Həqiqətdə isə  $OA$  xarakteristikası üzərində  $u_x = 0$ ,  $u_t = 0$  və  $Ot$  xətti üzərində  $v_0(t)$  verilərsə, onda  $OAC$  oblastında (4.13) tənliyi üçün qoyulmuş qarışıq məsələnin həlli var və (4.48) şəklindədir.  $OA$  parçası üzərində olan qaz hissəciyi heç bir zərbə dalğasının tə'sirinə mə'ruz qalmır, ancaq  $A_1AC_1$  düz xəttindən solda (4.13) tənliyi doğrudur.  $A_1AC_1$  xəttindən sağda qalan hissəciklər zərbə dalğasının tə'sirinə mə'ruz qalır və bu halda hərəkətin diferensial tənliyini çıxardıqda Puassonun döən adiabatik tənliyindən  $P = P_0(\rho/\rho_0)^k$  istifadə etmək olmaz. Bunu onunla izah etmək olar ki, hissəcik zərbə dalğası zonasından keçdikdə onun entropiyası dəyişir və ya zərbə dalğası keçən zonalarda hissəciklərin entropiyaları bir-birindən fərqlənirlər. Bu deyilənlər onu göstərir ki, qaz hissəcikləri arasında enerji (istilik) mübadiləsi baş verir.



### Ş4.3. Porsən qabağında qazın hərəkət tənlikləri

Fərz edək ki, zərbə dalğası AB' xətti boyunca baş verir. Yə'ni zərbə dalğası dedikdə qazda elə kəsilmə səthi yaranır ki, bu səthə sağ və sol tərəfdən yaxınlaşdıqda qazın fiziki parametrləri sıçrayışla dəyişir. Əlbəttə, zərbə dalğası yaranan oblast müəyyən qalınlığa malikdir. Məsələnin riyazi cəhətdən həllini asanlaşdırmaq üçün zərbə dalğasının qalınlığı nəzərə alınmır. Şəkil 4.8-də müvazinətdə olan qazda  $c(t)$  sür'əti ilə yayılan zərbə dalğası əks olunur.



Şəkil 4.8

Burada (şəkil 4.8) zərbə dalğası ilə  $dt$  müddətində çatdırılan  $A_2B_2$  qaz kəsiyi göstərilir. Başlangıç anda AB zərbə dalğası üzərində olan hissəciklər  $dt$  müddətindən sonra vuruq işarələri ilə göstərilən vəziyyətdə olacaq. Qeyd edək ki, zərbə dalğasının qabağında qaz müvazinətdə olduğu üçün orada termodinamik parametrlər  $\rho_0, P_0, T_0$  və kinematik parametrlər  $u_t = 0, u_x = 0$  olacaqdır. Zərbə dalğası arxasında isə onlar uyğun olaraq  $\rho_1, P_1, T_1$  və  $u_t \neq 0, u_x \neq 0$  olacaqdır.

İndi qaz kütləsinin saxlanma qanununu yazaq. Əgər borunun en kəsiyinin sahəsini vahid qəbul etsək, onda zərbə dalğasının qabağında  $cdt$  uzunluqlu qaz hissəciyinin kütləsi aşağıdakı kimi olar:

$$dm = \rho_0 c dt. \quad (4.61)$$

Zərbə dalğası  $A_2 B_2$  kəsiyinə çatdıqda həmin hissəciyin kütləsi

$$\rho_1 (c - u_t) dt. \quad (4.62)$$

ifadəsi ilə tə'yin olunur və (4.61) ifadəsinə bərabərdir

$$c\rho_0 = (c - u_t)\rho_1. \quad (4.63)$$

Başlanğıc anda qaz müvazinətdə olduğu üçün qaz hissəciyinin hərəkət miqdarı sıfıra bərabərdir.  $dt$  müddətində hissəciyin hərəkət miqdarının dəyişməsi  $\rho_0 u_t c dt$  -ə bərabər olar. Digər tərəfdən, bu hərəkət miqdarının artması ona tə'sir edən qüvvələrin impulsuna bərabərdir:  $(P_1 - P_0)dt$ . Onların bərabərliyindən alırıq ki,

$$c\rho_0 u_t = P_1 - P_0. \quad (4.64)$$

Başlanğıc anda qaz hissəciyinin kinetik enerjisi sıfıra bərabərdir və hissəcik ancaq daxili enerjiyə malik olur:  $cdt\rho_0 J C_v T_0$ . Burada  $J$ -istiliyin mexaniki ekvivalentliyidir.  $dt$  müddətində hissəcik zərbə dalğasının cəbhəsini keçərək  $A_1 B_1$  vəziyyətini tutduqda onun enerjisi aşağıdakı ifadə ilə hesablanır:

$$c\rho_0 dt \left( \frac{u_t^2}{2} + J C_v T_1 \right).$$

Hissəciyin tam enerjisinin dəyişməsi təzyiq qüvvələrinin gördüyü  $P_1 u_t dt$  işin hesabına olur, ona görə də

$$c\rho_0 \left[ \frac{u_t^2}{2} + J C_v (T_1 - T_0) \right] = P_1 u_t. \quad (4.65)$$

(4.63)-(4.65) saxlanma tənlikləri Klapeyronun termodinamik hal tənliyinin köməyi ilə qapanır:

$$P_1 = R\rho_1 T_1. \quad (4.66)$$

Burada  $R$  -qaz sabitidir və Mayer münasibətinə əsasən:  $R = J(C_p - C_v)$ . (4.65) münasibətini Mayer, (4.64) və (4.65) münasibətlərindən istifadə edərək sadələşdirək:

$$(P_1 - P_0) \frac{u_t}{2} + \frac{c\rho_0}{k-1} \left( \frac{P_1}{\rho_1} - \frac{P_0}{\rho_0} \right) = P_1 u_t. \quad (4.67)$$

(4.63)-dən  $c$ -ni tapaq:

$$c = \frac{\rho_1}{\rho_1 - \rho_0} u_t. \quad (4.68)$$

(4.68)-dən  $c$ -nin ifadəsini (4.67)-də yerinə yazsaq, alarıq:

$$\frac{P_1 - P_0}{2} + \frac{\rho_1 \rho_0}{(k-1)(\rho_1 - \rho_0)} \left( \frac{P_1}{\rho_1} - \frac{P_0}{\rho_0} \right) = P_1. \quad (4.69)$$

(4.69) münasibətindən  $P_1 / P_0$  nisbətini təyin edək:

$$\frac{P_1}{P_0} = \frac{\frac{k+1}{k-1} \frac{\rho_1}{\rho_0} - 1}{\frac{k+1}{k-1} \frac{\rho_1}{\rho_0}}. \quad (4.70)$$

(4.70) münasibəti **Hüygensin zərbə adiabatı** adlanır. Bu münasibət zərbə dalğasının qabağında və arxasındakı təzyiqlərin və sıxlıqların nisbəti arasında əlaqə yaradır. (4.70) münasibətindən görüldüyü kimi

$$\frac{\rho_1}{\rho_0} < \frac{k+1}{k-1}, \quad (4.71)$$

şerti ödənməlidir, yə'ni sıxılma zamanı zərbə dalğasının arxasında  $\rho_1$  sıxlığı zərbə dalğasının qabağındakı  $\rho_0$  sıxlığından  $\frac{k+1}{k-1}$  dəfə çox ola bilməz. Adi hava üçün  $k=1,4$  olduğunu nəzərə alsaq,  $\rho_1/\rho_0 < 6$  olar. Təzyiq altında adi qazın sıxlığını yüz dəfələrlə artırmaq olar, buna baxmayaraq partlayışlar zamanı zərbə dalğası üzərində sıxlıq 6 dəfədən çox dəyişmir. (4.68)-dən  $u_t$ -nin və (4.70)-dən  $P_1$ -in ifadələrini (4.64) münasibətində nəzərə alsaq, aşağıdakı düsturu alarıq:

$$c^2(\rho_1 - \rho_0) \frac{\rho_0}{\rho_1} = P_0 \left( \frac{\varepsilon \frac{\rho_1}{\rho_0} - 1}{\varepsilon - \frac{\rho_1}{\rho_0}} - 1 \right), \quad (4.72)$$

Burada  $\varepsilon = \frac{k+1}{k-1}$ .

Əgər (4.72) düsturundan zərbə dalğasının  $c$  sür'əti mə'lumdursa, onda oradan  $\rho_1/\rho_0$  nisbətini, sonra (4.70)-dən  $P_1/P_0$  nisbətini tapa bilərik. Bu münasibətlərin qiymətlərinə əsasən  $P_1/\rho_1^k$  hal tənliyindən entropiyanı tapırıq.

Əgər (4.72) münasibətində zərbə dalğası dəyişən sür'ətlə hərəkət edərsə, onda zərbə dalğasını ötürən hissəciklərin entropiyası müxtəlif olacaqdır. Saxlanma qanunlarından istifadə edərək alınan tənliklərin birgə həllinin olması zərbə dalğasının varlığını göstərir. Bu dalğanın varlığı mexanika və termodinamikanın qanunları ilə ziddiyyət yaratmır. Deməli, belə bir zərbə dalğasının varlığı isbat olunur.

#### §4.4. Zərbə dalğalarının faktiki tapılma üsulları

Biz (4.72) tənliyini çıxaranda fərz etmişdik ki, bütün qaz hissəciklərinin entropiyası eynidir. Digər tərəfdən göstərdik ki, porşen ani olaraq sabit sür'ətlə hərəkət edərsə, zərbə dalğası porşenlə üst-üstə düşər. Əgər porşen dəyişən sür'ətlə hərəkət edərsə, onda zərbə dalğasının koordinatı (4.59) düsturu ilə təyin edilir və porşenlə birinci yaranan zərbə dalğası arasında olan həcmdə hissəciklərin entropiyaları eyni olur. Lakin zərbə dalğasını keçirən hər bir hissəcik üçün entropiya müxtəlifdir. (4.13) tənliyi  $A_1AC_1$  düz xəttinin sağ oblastında ödənilməyəcəkdir (şəkil 4.7). Zərbə dalğasını keçirən hissəciklər üçün təzyiğin sıxlıqdan asılılıq düsturunu yazaq:

$$\frac{P}{P_1} = \left( \frac{\rho}{\rho_1} \right)^k, \quad (4.73)$$

Burada  $P_1$  və  $\rho_1$   $AB'$  zərbə dalğası üzərində təzyiqlik və sıxlığın qiyməti olub, hər bir hissəcik üçün müxtəlifdirlər.

Hissəciklərin hərəkətinin diferensial tənliyini çıxarmaq üçün  $(AC_1B'$  oblastında) (4.4) tənliyindən istifadə edək:

$$\rho = \frac{\rho_0}{1 + \frac{\partial u}{\partial x}} = \frac{\rho_0}{1 + u_x}.$$

Bu ifadəni (4.73)-də yerinə yazaq:

$$P = \frac{P_1}{(1 + u_x)^k} \left( \frac{\rho_0}{\rho_1} \right)^k. \quad (4.74)$$

(4.74) düsturundan  $x$ -ə görə törəmə alıb, onu (4.7) hərəkət tənliyində nəzərə alaq:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{kP_1 \rho_0^{k-1} u_{xx}}{\rho_1^k (1+u_x)^{k+1}} - \frac{\rho_0^{k-1}}{(1+u_x)^k} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{P_1}{\rho_1^k} \right). \quad (4.75)$$

(4.75) tənliyində faktiki olaraq  $u$  və  $P_1$  məchul funksiyalardır. Hüygensin zərbə adiabatı (4.70) düsturuna əsasən  $\rho_1 = \rho_1(P_1)$  tə'yin edilir. İşarələmələr aparaq:

$$a^2 = \frac{kP_1 \rho_0^{k-1}}{\rho_1^k (1+u_x)^{k+1}}, \quad (4.76)$$

$$\delta = \frac{\rho_0^{k-1}}{(1+u_x)^k} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{P_1}{\rho_1^k} \right) = \left( \frac{\rho_0^{k-1}}{(1+u_x)^k} \right) \bar{\delta}$$

Bu işarələmələrdən sonra (4.75) tənliyinin şəkli sadələşir

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \delta. \quad (4.77)$$

(4.77) tənliyini xarakteristikalar metodundan istifadə edərək  $AC_1B'$  oblastında həll etmək olar. Yuxarıda göstəriləyi kimi (4.77) tənliyinin xarakteristik tənlikləri aşağıdakı kimidir:

$$dx = \pm a dt \quad (4.78)$$

$$du_t = \pm a du_x - \delta dt.$$

(4.77) tənliyini ədədi üsulla həll etmək üçün  $(x, t)$  müstəvisində (4.78) xarakteristik tənliklərindən istifadə edirlər.

Xüsusi halda, porşen sıçrayışla (ani olaraq)  $v_0$  sabit sür'ətini alarsa, onda  $AC_1B'$  oblastında məsələni analitik həll etmək olar. (4.68)-də  $u_t = v_0$  götürsək və onu (4.72)-da nəzərə alsaq:

$$v_0^2 \frac{\rho_0 \rho_1}{\rho_1 - \rho_0} = P_0 \left( \frac{\alpha \frac{\rho_1}{\rho_0} - 1}{\alpha - \frac{\rho_1}{\rho_0}} \right). \quad (4.79)$$

(4.79) ifadəsini  $\rho_1 / \rho_0$ -a görə qruplaşdırsaq,  $\rho_1 / \rho_0$  nəzərən

kvadrat tənlik alırıq. Həmin kvadrat tənliyi,  $(\lambda_0^2 = \rho_0 v_0^2 / P_0$  işarələməsindən sonra) həll edək:

$$\frac{\rho_1}{\rho_0} = \frac{\varkappa + 1 + \lambda_0^2 \varkappa / 2}{\varkappa + 1 + \lambda_0^2} + \sqrt{\left( \frac{\varkappa + 1 + \lambda_0^2 \varkappa / 2}{\varkappa + 1 + \lambda_0^2} \right)^2 - \frac{\varkappa + 1}{\varkappa + 1 + \lambda_0^2}} \quad (4.80)$$

Burada  $\lambda_0 \rightarrow \infty$  yaxınlaşanda  $\rho_1 / \rho_0$  sıfıra yox, sonlu qiymətə yaxınlaşdığını nəzərə alsaq, (4.80) ifadəsində kök müsbət götürülür:

$$\rho_1 / \rho_0 = \varkappa = \frac{k + 1}{k - 1}. \quad (4.81)$$

Bu isə  $\rho_1 / \rho_0$  nisbətinin maksimal qiymətdir. (4.80) düsturundan  $\rho_1 / \rho_0$  mə'lum olduqda, (4.70)-dən  $P_1 / P_0$ , (4.66)-dan  $T_1 / T_0$  və (4.64)-dən  $c$ -ni tapa bilərik. Beləliklə, zərbə dalğasının sür'ətini və onun parametrlərini təyin etmək olar.

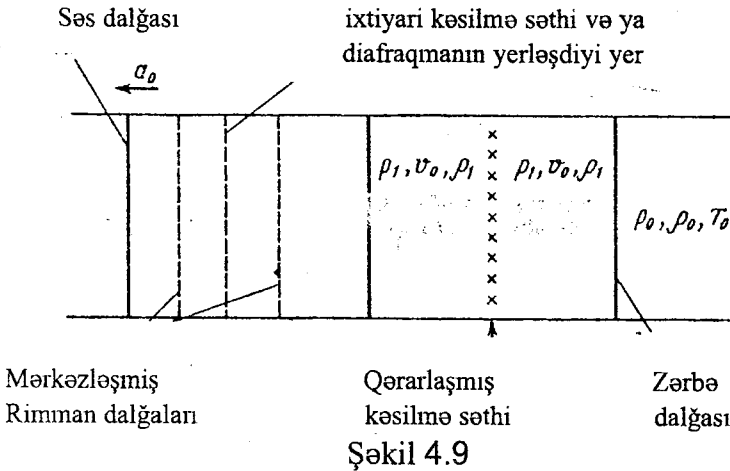
Qeyd edək ki, qazda zərbə dalğası yaranana qədər, daha doğrusu, birinci yaranan zərbə dalğasının arxasında qazın hərəkəti (4.13) diferensial tənliyi, zərbə dalğası yaranandan sonra zərbəyə mə'ruz qalan qaz hissəciklərinin hərəkəti isə (4.77) diferensial tənliyi ilə təsvir olunur.

#### § 4.5. Adi partlayış və ya ixtiyari kəsilmənin parçalanması

Qazda zərbə dalğalarından əlavə elə ixtiyari kəsilmə səthi yaranır ki, bu kəsilmə səthi üzərində qaz parametrlərini hər hansı bir münasibətlə əlaqələndirmək olmur. Əgər böyük təzyiq altında olan qapalı qaz partlayırsa, onda təzyiq, temperatur və sıxlıq parametrlərinin ixtiyari kəsilmələri yaranır. Qazda hərəkət ixtiyari kəsilmə əmələ gəldikdən

sonra meydana çıxarsa, onda bu cür hadisə adi partlayış və ya ixtiyari kəsilmələrin parçalanması adlanır.

Partlayışdan sonra qaz hissəciklərinin sür'ət və təzyiqləri kontakt səthində olan qaz hissəciklərinin sür'ət və təzyiqləri ilə ani olaraq eyniləşəcək. Eyni qaz hissəciklərindən təşkil olunmuş bu kəsilmə səthinin sür'əti qaz hissəciklərinin sür'ətləri ilə üst-üstə düşür və qərarlaşmış kəsilmə səthi adlanır.



Tutaq ki, boruda ixtiyari kəsilmə səthi (diafraqma) iki termodinamik halda olan qazı bir-birindən şəkil 4.9 göstəriləndiyi kimi ayırır. Diafraqmanı ani olaraq uzaqlaşdırdıqda bir ölçülü partlayışa baxaq. Adi partlayışda  $P_2 \gg P_0$  olduğu üçün zərbə dalğası sağ istiqamətdə yayılacaq. Prosesi yaxşı başa düşmək üçün qərarlaşmış kəsilmə səthinin hərəkətini ani  $v_0$  sür'əti almış porşenin hərəkəti ilə uyğunlaşdırmaq. Bu zaman porşenin hərəkəti hissəciklərin sür'əti ilə üst-üstə düşəcək və onun sür'ətinin verilməsinə baxmayaraq ixtiyari kəsilmə səthindən bir tərəfdə eyni hissəciklər üçün  $P_2, \rho_2$



və digər tərəfdə isə  $P_0, \rho_0$  verilir. Beləliklə, biz  $(x, t)$  müstəvisində ixtiyari kəsilmə səthinin qabağında və arxasında xarakteristikaların şəklini alırıq.

Şəkildən göründüyü kimi adi partlayış zamanı ixtiyari kəsilmə zərbə və boşalma dalğalarına parçalanır. Zərbə dalğası təzyiqli azalan istiqamətdə, boşalma dalğası isə təzyiqli artan istiqamətdə yayılır. Kiçik təzyiqli qaz zərbə ilə sıxıldıqda  $T_1 \gg T_0$  olur və  $P_1, \rho_1, T_1, v_0$  parametrləri sabit qalırlar. Zərbə ilə sıxılan yüksək temperaturlu qazın bu hissəsinə qızmar tıxac deyilir. Qazın boşalma gedən hissəsində isə göstərilən parametrlər sabit qalır, lakin temperatur ciddi azalır və bu hissə soyuq tıxac adlanır. Əgər nəzərə alsaq ki, qazın təzyiqinin artması istiqamətində boşalma dalğalarının yayılması prosesi dönmə adiabatik prosesdir, onda yazıb bilərik:

$$\frac{P_1}{P_2} = \left( \frac{\rho_1}{\rho_2} \right)^k. \quad (4.82)$$

Digər tərəfdən (4.34) hərəkət tənliyinin birinci inteqralına əsasən

$$v_0 = \frac{2a_0}{k-1} \left[ 1 - \frac{1}{(1+u_{2x})^{(k-1)/2}} \right]. \quad (4.83)$$

Eyni zamanda  $\rho_2 = \rho_0(1+u_{2x})$  münasibətini (4.83)-də nəzərə alaraq:

$$v_0 = \frac{2a_0}{k-1} \left[ 1 - \left( \frac{\rho_2}{\rho_0} \right)^{\frac{k-1}{2}} \right]. \quad (4.84)$$

İndi Hüyqensin zərbə adiabatını yazaq:

$$\frac{P_1}{P_0} = \frac{\alpha_1 \frac{\rho_1}{\rho_0} - 1}{\alpha_1 - \frac{\rho_1}{\rho_0}}, \quad \alpha_1 = \frac{k_1 + 1}{k_1 - 1}; \quad (4.85)$$

Burada  $k_1 = C_p / C_v$ -kiçik təzyiqin adiabatik göstəricisidir. (4.85) ifadəsindən  $P_1$ -i, (4.84) ifadəsindən  $\rho_2 / \rho_1$  nisbətini tapıb, (4.82) yerinə qoysaq, alarıq:

$$\frac{P_2}{P_0} = \frac{\alpha_1 \frac{\rho_1}{\rho_0} - 1}{\alpha_1 - \frac{\rho_1}{\rho_0}} \left[ 1 - \frac{k-1}{2} \frac{v_0}{a_0} \right]^{2k}. \quad (4.86)$$

Əgər  $\alpha = \alpha_1$  qəbul etsək, onda (4.80) ifadəsindən alarıq:

$$\frac{v_0}{a_0} = \frac{v_0}{\sqrt{k \frac{P_2}{\rho_2}}} = \frac{v_0}{\sqrt{\frac{P_0}{\rho_0}}} \cdot \frac{1}{\sqrt{k \frac{P_2 \rho_0}{P_0 \rho_2}}} = \lambda_0 \sqrt{\frac{P_0}{P_2} \cdot \frac{\rho_2}{\rho_0}}, \quad (4.87)$$

$$\lambda_0 = v_0 \sqrt{\frac{\rho_0}{P_0 k}}$$

(4.86) münasibətindən  $v_0 / a_0$  nisbətini tapıb (4.87) nəzərə alaraq:

$$\left( \frac{\rho_2}{\rho_0} \right)^{1/2} = \frac{2}{(k-1)\lambda_0} \left( \frac{P_2 k}{P_0} \right)^{1/2} \left[ 1 - \left( \frac{P_2}{P_0} \cdot \frac{\alpha_1 - \frac{\rho_1}{\rho_0}}{\alpha_1 \frac{\rho_1}{\rho_0} - 1} \right)^{\frac{1-k}{2k}} \right] \quad (4.88)$$

Bu münasibətdən gördüyü kimi adi partlayış zamanı zərbə dalğasının parametrləri porşenin qabağında qazın hərəkət məsələsindən alınan analitik düsturların köməyi ilə təyin edilir.

#### §4.6. Sonlu amplitudlu həyəcanlanmış qazın oxasimmetrik hərəkəti

Oxa simmetrik halda qazın kütləsinin saxlanması tənliyini çıxaraq. Vahid zamanda radial istiqamətdə dəyişən qaz kütləsinin miqdarı:

$$2\pi r \rho v_r dz + \frac{\partial}{\partial r} (2\pi r \rho v_r dz) dr - 2\pi r \rho v_r dz, \quad (4.89)$$

$z$  oxu istiqamətində daxil olan və çıxan qazın kütləsinin miqdarı

$$2\pi r \rho v_z dr + \frac{\partial}{\partial z} (2\pi r \rho v_z dr) dz - 2\pi r \rho v_z dr \quad (4.90)$$

ifadələri ilə təyin olunur. (4.89) və (4.90) düsturlarından görünür ki,  $r$  və  $z$  istiqamətlərində silindrin səthindən çıxan qaz axını sıxlığının zamana görə azalmasına gətirir. (4.89) və (4.90) cəmi

$$-2\pi r \frac{\partial \rho}{\partial t} dr dz \quad (4.91)$$

ifadəsini verir.

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \rho v_r) + \frac{\partial}{\partial z} (\rho v_z) = -\frac{\partial \rho}{\partial t} \quad (4.92)$$

Qaz hissəciyinin oxa simmetrik koordinat sistemində hərəkət tənlikləri belə olar

$$\frac{dv_r}{dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial r} + F_r, \quad \frac{dv_z}{dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial z} + F_z, \quad (4.93)$$

Əgər xarici qüvvələr potensiallıdırsa, qaz mühiti barotrop-dursa və qərarlaşmış hərəkət edirsə, onda yazı bilərik:

$$F_r dr + F_z dz = -dU, \quad P = P(\rho), \quad dr = v_r dt, \quad dz = v_z dt. \quad (4.94)$$

(4.93) tənlikləri əsasında alırıq:

$$\frac{dv_r}{dt} dr + \frac{dv_z}{dt} dz = -\frac{1}{\rho} dP + (F_r dr + F_z dz),$$

və ya

$$\frac{v^2}{2} + \int \frac{dP}{\rho} + U = C. \quad (4.95)$$

Qeyd edək ki, (4.95) Bernulli inteqralıdır və inteqrallama sabiti C cərəyan xətləri üzərində dəyişir. İzoentropik təkmil qazın termodinamik hal tənliyi üçün (4.95) tənliyi belə olar:

$$P = P_0 (\rho / \rho_0)^\gamma \quad (4.96)$$

$$\frac{v^2}{2} + \frac{\gamma P}{\rho(\gamma-1)} = \frac{\gamma P_0}{\rho_0(\gamma-1)} = \frac{v_k^2}{2} \quad (4.97)$$

Burada axının sür'əti sıfır olduqda, ona uyğun  $P_0$  təzyiq və  $\rho_0$  sıxlıqdır,  $v_k$  -isə əvəzləmədir ,

$$P = P_0 \left[ 1 - \frac{v^2}{v_k^2} \right]^{\frac{1}{\gamma-1}}, \quad \rho = \rho_0 \left[ 1 - \frac{v^2}{v_k^2} \right]^{\frac{1}{\gamma-1}}, \quad (4.98)$$

Fərz edək ki, qazın axını potensialıdır

$$v_r = \frac{\partial \varphi}{\partial r}, \quad v_z = \frac{\partial \varphi}{\partial z}, \quad (4.99)$$

Mə'lum Lagranj-Koşi inteqralına əsasən

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial r} \left[ \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{v^2}{2} + \frac{c^2}{\gamma-1} + U \right] &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial z} \left[ \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{v^2}{2} + \frac{c^2}{\gamma-1} + U \right] &= 0. \end{aligned} \quad (4.100)$$

Burada  $c = \sqrt{\frac{\gamma P}{\rho}}$  -qazda səsin sür'ətidir. (4.100)-dən

alıraq:

$$\left[ \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{v^2}{2} + \frac{c^2}{\gamma - 1} + U \right] = f(t). \quad (4.101)$$

Beləliklə, qazın xarici potensiallı qüvvələr sahəsində potensiallı hərəkətinin Laqranj-Koşi inteqralını aldıq. Qazın hərəkətinin birinci inteqralının varlığı, yə'ni (4.101) düsturünün doğru olması üçün əlavə şərt kimi qazın ideal olması zəruridir.

## V FƏSİL

### QARŞILIQLI NÜFUZ EDƏN QATIŞIQLARIN HİDRODİNAMİKASI

#### §5.1. QATIŞIQLARIN KƏSİLMƏZLİK VƏ HƏRƏKƏT TƏNLİKLƏRİ

Müxtəlif təbiətli çoxfazlı dispers qatışıqların laminar axın məsələlərinin tədqiqi özlü sıxılmayan və ya özlüplastiki mayelər dinamikasını klassik metodlarla ümumiləşdirilərək həyata keçirilir. X.A.Raxmatulin tərəfindən çoxfazlı mayelərin hərəkətinin diferensial tənlikləri verilmiş və tənliklərin sayı qatışıqdakı fazaların sayına bərabərdir. Bu halda fazalararası qarşılıqlı tə'sir qüvvəsi onların sür'ətlər fərqi ilə düz mütənəsbdir. Riyazi modelin qurulması zamanı fərz olunur ki, qatışığın hər bir nöqtəsində fazalar öz gətirilmiş sıxlıqları, sür'ətləri, temperaturları və təzyiqləri ilə iştirak edir. Vahid həcmdə olan hər hansı fazanın kütləsini  $\rho_i$  ilə işarə etsək, onda həmin fazanın həqiqi sıxlığı

$$\rho_i^{(0)} = \frac{\rho_i}{\alpha_i}, \quad \alpha_i = \frac{V_i}{V} = V_i, \quad (5.1)$$

kimi tə'yin olunur. Burada  $\alpha_i$  qatışığın  $V$  həcmində  $i$  fazasının tutduğu həcmdir. Onda

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i = 1 \quad \text{və ya} \quad \sum_{i=1}^n \frac{\rho_i}{\rho_i^{(0)}} = 1 \quad (5.2)$$

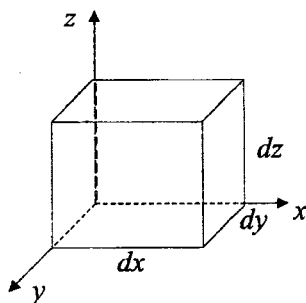
Burada  $n$ -qatışıqdakı fazaların sayıdır.

Əgər qatışıqda mənbə və ya mənşəb yoxdursa, onda qatışığın vahid həcmində vahid zamanda fazalararası kütlə mübadiləsinin intensivliyi aşağıdakı münasibəti ödəyir

$$J_{ji} = -J_{ij}, \quad J_{ii} = 0 \quad (5.3)$$

Burada  $J_{ji}$  - qatışıqın  $j$  fazasından  $i$  fazasına keçən kütlənin intensivliyidir.

Qatışıqda fazaların kütləsinin saxlanma qanununu təsvir edən diferensial tənliyi çıxarmaq üçün tərəfləri  $dx, dy, dz$  olan elementar paralelepipedə baxaq: (şək. 5.1). Fərz edək ki, çoxfazlı mühit və ya qatışıq verilmiş həcmi kəsilməz olaraq doldurur və axını təsvir edən parametrlərin zamana və koordinatlara görə diferensial kəsilməz funksiyalardır.



Şəkil 5.1

Əgər qatışıqın  $i$ -ci fazasının sür'ətini  $\bar{v}_i \{u_i, v_i, w_i\}$  ilə işarə etsək, onda paralelepipedin  $x, y, z$  oxlarına perpendikulyar olan üzlərindən qatışıqın  $i$ -ci fazasının vahid zamanda çıxan miqdarı aşağıdakı kimi təyin olunur

$$dydz \frac{\partial}{\partial x} (\rho_i u_i) dx + dzdx \frac{\partial}{\partial y} (\rho_i v_i) dy + dydx \frac{\partial}{\partial z} (\rho_i w_i) dz. \quad (5.4)$$

Bu zaman baxılan həcmdə  $i$ -ci fazanın kütləsi

$$\frac{\partial \rho_i}{\partial t} dx dy dz \quad (5.5)$$

kəmiyyəti qədər azalır. Eyni zamanda, bu faza ilə o biri fazalar arasında kütlələr mübadiləsi hesabına  $i$ -ci fazanın kütləsi

$\sum_{j=1}^n J_{ij}$  kəmiyyəti qədər azalar. (5.4), (5.5) və axırını

ifadələr bir-birini kompensasiya etdiklərinə görə yaza bilərik;

$$\frac{\partial \rho_i}{\partial t} + \nabla \rho_i \bar{v}_i + \sum_{j=1}^n J_{ij} = 0. \quad (5.6)$$

Alınmış (5.6) tənliyi qatışıqın  $i$ -ci fazasının kəsilməzlik tənliyidir. Bu kəsilməzlik tənliklərini  $i$  üzrə toplasaq və nəzərə alsaq ki,

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i \rho_i^{(0)} = \sum_{i=1}^n \rho_i = \rho, \quad \sum_{i=1}^n \rho_i \bar{v}_i = \rho \bar{v}, \quad \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n J_{ji} = 0 \quad (5.7)$$

onda tam qatışıqın kütləsinin saxlanması qanununun diferensial tənliyini alırıq:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \rho \bar{v} = 0. \quad (5.8)$$

İxtiyari fazanın impuls axınının saxlanma qanununu diferensial şəkildə çıxarmaq üçün  $dx dy dz$  elementar həcmli paralelepipedə baxaq.  $X$  oxu istiqamətində  $i$ -ci fazanın impulsunun dəyişməsi qanununa görə yaza bilərik

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\rho_i u_i)}{\partial t} = & -\frac{\partial}{\partial x}(\rho_i u_i u_i) - \frac{\partial}{\partial y}(\rho_i u_i v_i) - \frac{\partial}{\partial z}(\rho_i u_i w_i) + \\ & + \frac{\partial \sigma_{xx}^i}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}^i}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{xz}^i}{\partial z} + \sum_{j=1}^n F_{xji} + g_{xi} \rho_i \end{aligned} \quad (5.9)$$

(5.6) kəsilməzlik tənliyini (5.9) tənliyində yerinə yazsaq, alırıq

$$\begin{aligned} \rho_i \frac{du_i}{dt} = & \rho_i \frac{\partial u_i}{\partial t} + \rho_i \left( u_i \frac{\partial u_i}{\partial x} + v_i \frac{\partial u_i}{\partial y} + w_i \frac{\partial u_i}{\partial z} \right) = \\ = & \frac{\partial \sigma_{xx}^i}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}^i}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{xz}^i}{\partial z} + \sum_{j=1}^n F_{xji} - u_i \sum_{j=1}^n J_{ij} + g_{xi} \rho_i \end{aligned} \quad (5.10)$$

Burada  $F_{xij} = F_{xji}$   $x$  oxu boyunca  $i$  fazasına  $j$  fazası tərəfindən təsir edən, vahid həcmə düşən qüvvə,  $\sigma_{xx}^i, \sigma_{xy}^i, \sigma_{xz}^i$  -  $i$ -ci fazaya paralelepipedin  $x$  oxuna perpendikulyar olan



üzlərindən tə'sir edən səthi qüvvənin komponentləri,  $g_{xi}$ - $x$  oxu boyunca  $i$  fazasının vahid kütləsinə tə'sir edən qüvvədir.

Eyni qaydada  $y$  və  $z$  oxları üzrə impulsların dəyişməsi və ya hərəkət tənliklərini yazma bilirik

$$\begin{aligned}\rho_i \frac{dv_i}{dt} &= \frac{\partial \sigma_{yx}^i}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}^i}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{yz}^i}{\partial z} + \sum_{j=1}^n F_{yji} + g_{yi} \rho_i - v_i \sum_{j=1}^n J_{ji}, \\ \rho_i \frac{dw_i}{dt} &= \frac{\partial \sigma_{zx}^i}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{zy}^i}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}^i}{\partial z} + \sum_{j=1}^n F_{zji} + g_{zi} \rho_i - w_i \sum_{j=1}^n J_{ji}.\end{aligned}\quad (5.11)$$

## §5.2. Enerjinin saxlanması tənliyi

Enerji axınının tənliyini çıxaraq.  $i$ -ci fazanın xüsusi enerjisi (vahid kütləyə düşən) aşağıdakı ifadəyə bərabərdir:

$$E_i = U_i + \frac{v_i^2}{2}.\quad (5.12)$$

Burada  $U_i$ - daxili enerji,  $v_i^2/2$  -isə vahid kütlənin kinetik enerjisidir.

Ən sadə halda, qatışıqın vahid kütləsinə düşən  $U$  daxili və  $K$  kinetik enerjiləri bu ifadələrlə tə'yin edilir:

$$\rho U = \sum_{i=1}^n \rho_i U_i, \quad \rho K = \sum_{i=1}^n \rho_i \frac{v_i^2}{2}.\quad (5.13)$$

Buradan qatışıqın ümumi enerjisini tapaq:

$$\rho E = \sum_{i=1}^n \rho_i E_i = \sum_{i=1}^n \rho_i \left( U_i + \frac{v_i^2}{2} \right).\quad (5.14)$$

Ümumi qatışıqın  $\bar{v}$  sür'əti ilə fazaların  $\bar{v}_i$  sür'ətləri arasındakı fərq qatışıqda diffuziya axını yaradır:

$$\vec{W}_i = \bar{v}_i - \bar{v}\quad (5.15)$$

Buradan və (5.7)-nin ikinci düsturundan alırıq:

$$\sum_{i=1}^n \rho_i \bar{W}_i = \sum_{i=1}^n \rho_i \bar{v}_i - \rho \bar{v} = 0 \quad (5.16)$$

(5.15) ifadəsini (5.13) düsturunun ikincisində nəzərə alaq:

$$\rho K = \sum_{i=1}^n \rho_i \frac{(\bar{W}_i + \bar{v})^2}{2} = \frac{\rho \bar{v}^2}{2} + \sum_{i=1}^n \frac{\rho_i W_i^2}{2} \quad (5.17)$$

Beləliklə, çoxfazlı qatışıqların kinetik enerjisi onun həm  $\bar{v}$  sür'əti, həm də  $W_i$  diffuziya sür'əti ilə tə'yin olunur.

Elementar  $dx dy dz$  həcmində olan  $i$ -fazasının enerji axınının tənliyini yazaq:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho_i E_i}{dt} = & -\frac{\partial}{\partial x}(\rho_i E_i u_i) - \frac{\partial}{\partial y}(\rho_i E_i v_i) - \frac{\partial}{\partial z}(\rho_i E_i w_i) + \\ & + \frac{\partial}{\partial x}(\sigma'_{xx} u_i) + \frac{\partial}{\partial y}(\sigma'_{xy} v_i) + \frac{\partial}{\partial z}(\sigma'_{xz} w_i) + \frac{\partial}{\partial x}(\sigma'_{yx} u_i) + \dots \\ & + \frac{\partial}{\partial z}(\sigma'_{zz} w_i) + \rho_i \bar{g}_i \cdot \bar{v}_i + \sum_{j=1}^n E_{ji} - \bar{\nabla} \cdot \bar{q}_i. \end{aligned} \quad (5.18)$$

Burada  $E_{ji}$ -qatışığının  $i$  və  $j$  fazaları arasında enerji mübadiləsi,  $\bar{q}_i$ -qatışıqın vahid səthindən  $i$  fazasına daxil olan istilik seli vektorudur. (5.18) tənliyində (5.12), (5.14), (5.15) münasibətlərini nəzərə alsaq və onu bütün fazalar üzrə toplasaq, alarıq:

$$\begin{aligned} \rho \frac{dE}{dt} + E \left( \frac{d\rho}{dt} + \rho \nabla \bar{v} \right) + \sum_{i=1}^n \rho_i E_i (\bar{\nabla} \cdot \bar{W}_i) = \\ = \bar{\nabla} \cdot (\bar{\sigma} \otimes \bar{v} - \bar{q}) + \rho \bar{g} \cdot \bar{v} + \sum_{i=1}^n \rho_i (\bar{g}_i \cdot \bar{W}_i), \end{aligned} \quad (5.19)$$

harada  $\otimes$  vektorla tenzorun hasilinin işarəsidir.

$$E = U + \frac{v^2}{2} + \sum_{i=1}^n \frac{W_i^2}{2} \quad (5.20)$$

Beləliklə, (5.8) tənliyini (5.19) ümumi qatışıqın enerji tənliyində nəzərə alsaq, o sadələşər

$$\begin{aligned} \rho \frac{dE}{dt} + \sum_{i=1}^n \rho_i E_i (\bar{\nabla} \cdot \bar{W}_i) &= \\ &= \bar{\nabla} \cdot (\bar{\sigma} \otimes \bar{V} - \bar{q}) + \rho (\bar{g} \cdot \bar{v}) + \sum_{i=1}^n \rho_i (\bar{g}_i \cdot \bar{W}_i). \end{aligned} \quad (5.21)$$

(5.10) və (5.11) skalyar tənliklərini birləşdirərək onu vektor şəklində yazmaq

$$\rho_i \frac{d\bar{v}_i}{dt} = \nabla \bar{\sigma}^i + \rho_i \bar{g}_i + \sum_{j=1}^n \bar{F}_{ji} - \bar{v}_i \sum_{j=1}^n J_{ji}, \quad (5.22)$$

Burada

$$\bar{\sigma}^i = \begin{pmatrix} \sigma_{xx}^i & \sigma_{xy}^i & \sigma_{xz}^i \\ \sigma_{yx}^i & \sigma_{yy}^i & \sigma_{yz}^i \\ \sigma_{zx}^i & \sigma_{zy}^i & \sigma_{zz}^i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{\tau} \\ \bar{j} \\ \bar{k} \end{pmatrix} \quad (5.23)$$

$\bar{\tau}, \bar{j}, \bar{k}$  -  $x, y, z$  koordinat oxlarının ort vektorlarıdır.

Simmetrik gərginlik tenzoru o tenzora deyilir ki, onun komponentləri  $\sigma_{xy}^i = \sigma_{yx}^i, \sigma_{xz}^i = \sigma_{zx}^i, \sigma_{yz}^i = \sigma_{zy}^i$  şərtlərini ödəsin. Gərginlikləri bu şərtləri ödəyən mühitlərə izotrop mühitlər deyilir.

### §5.3. Heterogen qatışıqlar

Heterogen qatışıqlara misal olaraq maye ilə doymuş məsələli mühitləri, qazın su damcıları ilə qatışıqı, mayenin bərk hissəciklərlə qatışıqı (suspensiya), mayenin başqa maye damcıları və ya qabarıcıqları ilə qatışıqlarını göstərmək olar.  $n$  fazlı ideal mühitin hərəkətinə baxaq. Bu sadə halda daxili səthi qüvvələri bir normal  $P_i$  təzyiqə gətirmək olur.

Belə ki, gərginlik tenzorunu aşağıdakı şəkildə göstərmək olar:

$$\sigma^i = \begin{pmatrix} -\alpha_i P^i & 0 & 0 \\ 0 & -\alpha_i P^i & 0 \\ 0 & 0 & -\alpha_i P^i \end{pmatrix} = -\alpha_i P^i E, \quad E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (5.24)$$

Bundan əlavə fərz edirik ki, fazalardakı həqiqi təzyiq bir-birinə bərabər olub, ideal qatışıqdakı ümumi təzyiqə bərabərdir  $P_i = P$ . Ümumi halda fazalararası qarşılıqlı tə'sir qüvvələri onların sür'ətlərinin fərqi ilə mütənəsbdir. Bu qüvvələr Reynolds ədədinin kiçik qiymətlərində fazaların sür'ətlərinin fərqindən xətti asılı olaraq dəyişir:

$$\bar{F}_{ji} = \sum_{j=1}^n K_{ji} (\bar{v}_j - \bar{v}_i) + P \left( \frac{\partial \alpha_i}{\partial x} \bar{r} + \frac{\partial \alpha_i}{\partial y} \bar{j} + \frac{\partial \alpha_i}{\partial z} \bar{k} \right). \quad (5.25)$$

Təcrübə göstərir ki, qarşılıqlı tə'sir qüvvəsinə həm də təzyiq qüvvəsi (Arximed qüvvəsinə) əlavə olunur. Əgər fazalar arasında kütlə mübadiləsinə nəzərə almasaq,  $i$  fazasının (5.25) hərəkət tənliyində (5.24), (5.25) münasibətlərini yerinə yazsaq, alarıq:

$$\rho_i \frac{d\bar{v}_i}{dt} = -\alpha_i \bar{\nabla} P + \sum_{j=1}^n K_{ji} (\bar{v}_j - \bar{v}_i) + \rho_i \bar{g}_i. \quad (5.26)$$

Burada  $K_{ij}$ -qatışığın  $j$ -ci fazası ilə  $i$ -ci fazası arasındakı qarşılıqlı müqavimət əmsalıdır,  $i = \overline{1, n}$ . Bu tənliklərə (5.6) kəsilməzlik tənlikləri

$$\frac{\partial \rho_i}{\partial t} + \nabla \cdot \rho_i \bar{v}_i = 0 \quad (5.27)$$

və (5.2) konsentrasiya tənliyi

$$\sum_{i=1}^n \frac{\rho_i}{\rho_i^0} = \sum_{i=1}^n \alpha_i = 1 \quad (5.28)$$

əlavə olunur. İdeal qatışıqğa baxdığımız üçün hər bir fazanın

termodinamik hal tənliyini sadə şəkildə vermək olar

$$\rho_i^0 = \rho_i^0(P) \quad (5.29)$$

(5.26)-(5.29) tənliklərində  $3n$  sayda sür'ətlərin komponentləri,  $n$ -sayda həqiqi sıxlıqlar,  $n$ -sayda konsentrasiyalar və təzyiç axtarılan funksiyalardır. Burada tənliklər və axtarılan məchulların sayı  $5n+1$  sayda olub, (5.26)-(5.29) qapalı sistem əmələ gətirir.

#### §5.4. Sıxılmayan mayələrin hərəkət tənlikləri

Çoxfazlı qatışıqın hərəkəti zamanı onların həqiqi sıxlığı  $\rho_i^0 = (const)_i$  olarsa, onda onun hərəkət tənlikləri (5.26)-(5.29) sadələşərlər

$$\begin{cases} \frac{du_i}{dt} = -\frac{1}{\rho_i^0} \frac{\partial P}{\partial x} + \sum_{j=1}^N \frac{K_{ji}}{\rho_i} (u_j - u_i) + g_{xi}, \\ \frac{dv_i}{dt} = -\frac{1}{\rho_i^0} \frac{\partial P}{\partial y} + \sum_{j=1}^N \frac{K_{ji}}{\rho_i} (v_j - v_i) + g_{yi}, \\ \frac{dw_i}{dt} = -\frac{1}{\rho_i^0} \frac{\partial P}{\partial z} + \sum_{j=1}^N \frac{K_{ji}}{\rho_i} (w_j - w_i) + g_{zi} \end{cases} \quad (5.30)$$

$$\frac{\partial \alpha_i}{\partial t} + \nabla \alpha_i \bar{v}_i = 0, \quad (5.31)$$

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i = 1. \quad (5.32)$$

(5.30)-(5.32) qapalı tənliklər sistemində məchulların sayı azalaraq  $4N+1$  olur:  $(u_i, v_i, w_i)$ ,  $\alpha_i, P$ . Qərarlaşmış hərəkətdə bu funksiyalar zamandan asılı olmur

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} = \frac{\partial v_i}{\partial t} = \frac{\partial w_i}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial \alpha_i}{\partial t} = 0. \quad (5.33)$$

**§5.5. Sıxılmayan iki fazalı qatışıqın qərarlaşmış hərəketi.  
Qatışıqın tərkibinin dəyişməsi haqqında teorem**

İki sıxılmayan maye qatışıqının  $x$  oxu boyunca birölçülü qərarlaşmış hərəketinə baxaq. Bu halda (5.30)-(5.32) tənlikləri aşağıdakı şəkllə düşər

$$u_1 \frac{du_1}{dx} = -\frac{1}{\rho_1^0} \frac{dP}{dx} + \frac{K}{\rho_1} (u_2 - u_1), \quad (5.34)$$

$$u_2 \frac{du_2}{dx} = -\frac{1}{\rho_2^0} \frac{dP}{dx} + \frac{K}{\rho_2} (u_1 - u_2),$$

$$\frac{d}{dx}(\rho_1 u_1) = 0, \quad \frac{d}{dx}(\rho_2 u_2) = 0, \quad (5.35)$$

$$\frac{\rho_1}{\rho_1^0} + \frac{\rho_2}{\rho_2^0} = 1. \quad (5.36)$$

(5.34) hərəket tənliklərini tərəf-tərəfə toplasaq, alarıq

$$\rho_1 u_1 \frac{du_1}{dx} + \rho_2 u_2 \frac{du_2}{dx} = -\frac{dP}{dx}. \quad (5.37)$$

(5.35) tənlikləri inteqrallayaq

$$\rho_1 u_1 = c_1, \quad \rho_2 u_2 = c_2. \quad (5.38)$$

Burada  $c_1$  və  $c_2$  inteqrallama sabitləridir.

Eyni qaydada (5.38)-in köməyi ilə (5.37) tənliyinin ümumi inteqralını tapan

$$\rho_1 u_1^2 + \rho_2 u_2^2 + P = c_3. \quad (5.39)$$

Bu düstur iki fazalı sıxılmayan qatışıq üçün **Bernulli inteqralıdır**. (5.36) münasibətini çevirək

$$\frac{\rho_1}{\rho_1^0} \left( 1 + \frac{\rho_1^0 \rho_2}{\rho_1 \rho_2^0} \right) = 1. \quad (5.40)$$

Onda (5.39) inteqralını (5.40) münasibətinin köməyi ilə aşağıdakı kimi yazmaq olar

$$\frac{1}{\rho_1^0} \left( 1 + \frac{\rho_2}{\rho_1} \frac{\rho_1^0}{\rho_2^0} \right) \left( c_1^2 + c_2^2 \frac{\rho_1}{\rho_2} \right) + P = C_3. \quad (5.41)$$

Tutaq ki, axının hər hansı bir en kəsiyinə uyğun parametrləri mə'lumdur:

$$\rho_1 = \rho_{10}, \quad \rho_2 = \rho_{20}, \quad u_1 = u_{10}, \quad u_2 = u_{20}, \quad P = P_0. \quad (5.42)$$

İşarələmələr apararaq:

$$\begin{aligned} \frac{\rho_{10}}{\rho_1^0} &= \varkappa, & \frac{\rho_{10}}{\rho_{20}} &= \eta_0, & \frac{\rho_1}{\rho_2} &= \lambda, & \frac{P}{\rho_1^0 u_{10}^2} &= P^*, \\ \frac{\rho_1^0}{\rho_2^0} &= \mu, & \frac{u_{10}}{u_{20}} &= \nu, & \frac{P_0}{\rho_1^0 u_{10}^2} &= P_0^*. \end{aligned} \quad (5.43)$$

Bu işarələmələrdən sonra (5.41) aşağıdakı şəkllə düşər:

$$\begin{aligned} \frac{u_{10}^2}{\rho_1^0} \frac{\rho_{10}^2}{\rho_2^0} \left( 1 + \frac{\mu}{\lambda} \right) \left( 1 + \frac{\lambda}{\nu^2 \eta_0^2} \right) + P &= P_0 + \rho_{10} u_{10}^2 + \rho_{20} u_{20}^2, \\ c_1^2 &= \rho_{10}^2 u_{10}^2; \quad c_2^2 = \rho_{20}^2 u_{20}^2. \end{aligned} \quad (5.44)$$

(5.44) düsturunda dəyişən parametrlər ancaq  $\lambda$  və  $P$ -dir.

Burada  $\lambda = \rho_1 / \rho_2 = \alpha_1 \rho_1^0 / (\alpha_2 \rho_2^0) = \mu \left( \alpha_1 / \alpha_2 \right)$  əvəzləməsini nəzərə alsaq və (5.44) düsturunun hər tərəfini  $\rho_1^0 u_{10}^2$ -ifadəsinə bölsək, alarıq:

$$\varkappa^2 \left( 1 + \frac{\mu}{\lambda} \right) \left( 1 + \frac{\lambda}{\nu^2 \eta_0^2} \right) + P^* = P_0^* + \varkappa + \frac{\varkappa}{\nu^2 \eta_0^2} \rho_{20}. \quad (5.45)$$

(5.45)-dən  $P^*$ -nin  $\lambda$ -ya görə törəməsini tapaq:

$$\begin{aligned} \frac{dP^*}{d\lambda} &= \frac{\varkappa^2 \mu}{\lambda^2} \left( 1 + \frac{\lambda}{\nu^2 \eta_0^2} \right) - \frac{\varkappa^2}{\nu^2 \eta_0^2} \left( 1 + \frac{\mu}{\lambda} \right) = \\ &= \frac{\varkappa^2}{\nu^2 \eta_0^2} \left( \frac{\nu^2 \eta_0^2 \mu}{\lambda^2} - 1 \right). \end{aligned} \quad (5.46)$$

Əgər  $v^2 \mu > 1$ ,  $\frac{dP^*}{d\lambda} > 0$  olarsa, onda təzyiq artdıqca uyğun olaraq birinci fazanın orta sıxlığı ikinci fazanın orta sıxlığına nisbətən artacaq.  $\frac{dP^*}{d\lambda} < 0$ ,  $v^2 \mu < 1$  olduqda isə, təzyiq azaldıqca birinci fazanın sıxlığı ikinci fazanın orta sıxlığına nisbətən azalacaq.

### §5.6. Dəyişən en kəsikli borularda sıxılmayan ikifazlı qatışıqın qərarlaşmış hərəkəti

Əgər qatışıq üfüqi vəziyyətdə yerləşmiş borunun oxu boyunca yönəlmiş  $x$  oxu istiqamətində qərarlaşmış hərəkət edərsə, onda hərəkət tənlikləri (5.34) şəklində olar:

$$\begin{aligned} u_1 \frac{du_1}{dx} &= -\frac{1}{\rho_1^0} \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{K}{\rho_1} (u_2 - u_1), \\ u_2 \frac{du_2}{dx} &= -\frac{1}{\rho_2^0} \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{K}{\rho_2} (u_1 - u_2). \end{aligned} \quad (5.47)$$

Borunun ixtiyari en kəsiyindən keçən hər bir fazanın kütləsinin sabit olduğunu nəzərə alsaq:

$$f(x) \rho_1 u_1 = c_1, \quad f(x) \rho_2 u_2 = c_2. \quad (5.48)$$

Burada  $c_1, c_2$  sabitləri hər hansı qeyd olunmuş kəsikdə təyin olunur:  $c_1 = f_0 \rho_{10} u_{10}$ ,  $c_2 = f_0 \rho_{20} u_{20}$ ,  $f(x)$ -borunun en kəsiyinin sahəsidir. (5.48)-dən  $\rho_1$  və  $\rho_2$ -nin ifadələrini (5.36) münasibətində nəzərə alaq:

$$\frac{c_1}{u_1 \rho_1^0} + \frac{c_2}{u_2 \rho_2^0} = f(x). \quad (5.49)$$

(5.47) sistemindən tapırıq:



$$u_1 \frac{du_1}{dx} = \frac{1}{\rho_1^0} \left[ \rho_2^0 u_2 \frac{du_2}{dx} - \frac{K\rho_2^0}{\rho_2} (u_1 - u_2) \right] + \frac{K}{\rho_1} (u_2 - u_1) \quad (5.50)$$

(5.49)-da  $\alpha = c_1 / \rho_1^0, \beta = c_2 / \rho_2^0$  əvəzləməsi aparsaq, alarıq:

$$\frac{\alpha}{u_1} = f - \frac{\beta}{u_2}, \quad u_1 = \alpha \frac{u_2}{fu_2 - \beta}. \quad (5.51)$$

(5.51) münasibətindən  $u_1$ -in ifadəsini (5.50)-də yerinə yazaq:

$$\frac{\alpha^2 u_2}{(fu_2 - \beta)^2} \frac{du_2}{dx} - \frac{\alpha^2 u_2^2 \left( f' u_2 + f \frac{du_2}{dx} \right)}{(fu_2 - \beta)(fu_2 - \beta)^2} = \frac{\rho_2^0}{\rho_1^0} u_2 \frac{du_2}{dx} - \frac{K\rho_2^0}{\rho_1^0} \times$$

$$\times \left( \frac{\alpha u_2}{fu_2 - \beta} - u_2 \right) \frac{fu_2}{c_2} + \frac{Kf}{c_1} \cdot \frac{\alpha u_2}{fu_2 - \beta} \left( u_2 - \frac{\alpha u_2}{fu_2 - \beta} \right). \quad (5.52)$$

Burada bir sıra çevirmələr apardıqdan sonra alarıq:

$$\frac{du_2}{dx} =$$

$$= \frac{\alpha^2 u_2^3 f' - \frac{K\rho_2^0 fu_2^2 (\alpha + \beta - fu_2)}{c_2 \rho_1^0 (fu_2 - \beta)} + \frac{Kf \alpha u_2^2 (fu_2 - \alpha - \beta)}{c_1 (fu_2 - \beta)^2}}{\frac{\alpha^2 u_2}{(fu_2 - \beta)^2} - \frac{\alpha^2 u_2^2 f}{(fu_2 - \beta)^3} - \frac{\rho_2^0 u_2}{\rho_1^0}}. \quad (5.53)$$

Beləliklə, məsələ (5.53) tənliyinin inteqrallanmasına gətirilir. Bu tənliyi ədədi üsulla inteqrallayaraq dəyişən en kəskin borularda sıxılmayan mayelərin axın məsələsi öyrənilir. Xüsusi halda,  $f(x) = \gamma x$  olduqda, ( $\gamma$  kiçik əmsəldir) müstəvi mənbə,  $f(x) = x^2$  olduqda isə fəza mənbəyi alırıq.

Adi mənbə və mənsəblərdən fərqli olaraq burada eyni

və əks istiqamətlərdə fazaların axını ola bilər. Bu  $c_1$  və  $c_2$  sabitlərinin işarələrindən asılıdır.

### §5.7. İkfazlı qatışıqda birölçülü müstəvi dalğaların yayılması

(5.26)-(5.29) tənliklərində  $i = 2$  olduqda, müstəvi dalğaların  $x$  oxu istiqamətində yayılması məsələsinə baxaq:

$$\begin{cases} \rho_1 \frac{du_1}{dt} = -\frac{\rho_1}{\rho_1^0} \frac{\partial P}{\partial x} + K(u_2 - u_1), \\ \rho_2 \frac{du_2}{dt} = -\frac{\rho_2}{\rho_2^0} \frac{\partial P}{\partial x} + K(u_1 - u_2): \end{cases} \quad (5.54)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho_1}{\partial t} + \frac{\partial \rho_1 u_1}{\partial x} = 0, \\ \frac{\partial \rho_2}{\partial t} + \frac{\partial \rho_2 u_2}{\partial x} = 0, \end{cases} \quad (5.55)$$

$$\rho_1^0 = \rho_1^0(P), \quad \rho_2^0 = \rho_2^0(P), \quad (5.56)$$

$$\frac{\rho_1}{\rho_1^0} + \frac{\rho_2}{\rho_2^0} = 1. \quad (5.57)$$

(5.57) konsentrasiya tənliyindən  $x$ -ə görə törəmə alaq:

$$\frac{1}{\rho_1^0} \frac{\partial \rho_1}{\partial x} + \frac{1}{\rho_2^0} \frac{\partial \rho_2}{\partial x} - \frac{\rho_1}{(\rho_1^0)^2} \frac{\partial \rho_1^0}{\partial x} - \frac{\rho_2}{(\rho_2^0)^2} \frac{\partial \rho_2^0}{\partial x} = 0. \quad (5.58)$$

Eyni qaydada (5.56) barotrop fazalarının hal tənliklərindən alarıq:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho_1^0}{\partial x} &= \frac{d\rho_1^0}{dP} \cdot \frac{\partial P}{\partial x} \\ \frac{\partial \rho_2^0}{\partial x} &= \frac{d\rho_2^0}{dP} \cdot \frac{\partial P}{\partial x} \end{aligned} \quad (5.59)$$

Digər tərəfdən mə'lumdur ki,

$$\frac{dP}{d\rho_1^0} = a_1^2, \quad \frac{dP}{d\rho_2^0} = a_2^2, \quad (5.60)$$

(5.59) və (5.60) münasibətlərindən alırıq:

$$\frac{\partial \rho_1^0}{\partial x} = \frac{1}{a_1^2} \cdot \frac{\partial P}{\partial x}, \quad \frac{\partial \rho_2^0}{\partial x} = \frac{1}{a_2^2} \cdot \frac{\partial P}{\partial x}. \quad (5.61)$$

(5.61) ifadələrinin köməyi ilə (5.58) münasibətini çevirək

$$\frac{1}{\rho_1^0} \frac{\partial \rho_1}{\partial x} + \frac{1}{\rho_2^0} \frac{\partial \rho_2}{\partial x} = \left[ \frac{\rho_1}{(\rho_1^0)^2 a_1^2} + \frac{\rho_2}{(\rho_2^0)^2 a_2^2} \right] \frac{\partial P}{\partial x} = A \frac{\partial P}{\partial x}, \quad (5.62)$$

Burada

$$A = \frac{\rho_1}{(\rho_1^0)^2 a_1^2} + \frac{\rho_2}{(\rho_2^0)^2 a_2^2}.$$

(5.62) düsturundan  $\frac{\partial P}{\partial x}$  ifadəsini (5.54) hərəkət tənliklərinin

də yerinə yazsaq:

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} + u_1 \frac{\partial u_1}{\partial x} = -\frac{1}{A\rho_1^0} \left[ \frac{1}{\rho_1^0} \frac{\partial \rho_1}{\partial x} + \frac{1}{\rho_2^0} \frac{\partial \rho_2}{\partial x} \right] + \frac{K}{\rho_1} (u_2 - u_1) \quad (5.63)$$

$$\frac{\partial u_2}{\partial t} + u_2 \frac{\partial u_2}{\partial x} = -\frac{1}{A\rho_2^0} \left[ \frac{1}{\rho_1^0} \frac{\partial \rho_1}{\partial x} + \frac{1}{\rho_2^0} \frac{\partial \rho_2}{\partial x} \right] + \frac{K}{\rho_2} (u_1 - u_2)$$

Tutaq ki,  $(x, t)$  müstəvisinin hər hansı S əyrisi üzərində olan parça boyu  $u_1, u_2, \rho_1, \rho_2, \rho_1^0, \rho_2^0$  parametrlərinin qiymətləri verilib. S xətti boyu tam törəməni  $\frac{\tilde{d}}{dt}$  ilə işarə etsək, onda alırıq:

$$\begin{aligned} \frac{d\tilde{u}_1}{dt} &= \frac{\partial u_1}{\partial t} + \frac{dx}{dt} \cdot \frac{\partial u_1}{\partial x} = u_{1t} + x_t u_{1x}; & \frac{d\tilde{u}_2}{dt} &= u_{2t} + x_t u_{2x}; \\ \frac{d\tilde{\rho}_1}{dt} &= \rho_{1t} + x_t \rho_{1x}; & \frac{d\tilde{\rho}_2}{dt} &= \rho_{2t} + x_t \rho_{2x}; \end{aligned} \quad (5.64)$$

$$\frac{d\tilde{\rho}_1^0}{dt} = \rho_{1t}^0 + x_t \rho_{2x}^0; \quad \frac{d\tilde{\rho}_2^0}{dt} = \rho_{2t}^0 + x_t \rho_{2x}^0.$$

(5.55) kəsilməzlik tənliklərini bu şəkildə yazaq:

$$\begin{aligned} \rho_{1t} + u_1 \rho_{1x} + u_{1x} \rho_1 &= 0 \\ \rho_{2t} + u_2 \rho_{2x} + u_{2x} \rho_2 &= 0. \end{aligned} \quad (5.65)$$

(5.64) münasibətlərindən  $\rho_{1t}$  və  $\rho_{2t}$ -nin ifadələrini (5.65) nəzərə alaraq:

$$\begin{aligned} (u_1 - x_t) \rho_{1x} + u_{1x} \rho_1 + \frac{d\tilde{\rho}_1}{dt} &= 0, \\ (u_2 - x_t) \rho_{2x} + u_{2x} \rho_2 + \frac{d\tilde{\rho}_2}{dt} &= 0. \end{aligned} \quad (5.66)$$

(5.66) və (5.64) -ün birinci iki münasibətindən çıxırıq ki,

$$\begin{cases} \rho_{1x} = -\frac{1}{u_1 - x_t} \left[ u_{1x} \rho_1 + \frac{d\tilde{\rho}_1}{dt} \right], \\ \rho_{2x} = -\frac{1}{u_2 - x_t} \left[ u_{2x} \rho_2 + \frac{d\tilde{\rho}_2}{dt} \right]. \end{cases} \quad (5.67)$$

$$u_{1t} = \frac{d\tilde{u}_1}{dt} - x_t u_{1x}, \quad u_{2t} = \frac{d\tilde{u}_2}{dt} - x_t u_{2x}. \quad (5.68)$$

(5.67) və (5.68) münasibətlərini (5.63)-də yerinə yazsaq, alırıq:

$$\begin{aligned} (u_1 - x_t) u_{1x} - \frac{1}{A \rho_1^0} \left[ \frac{\rho_1 u_{1x}}{\rho_1^0 (u_1 - x_t)} + \frac{\rho_2 u_{2x}}{\rho_2^0 (u_2 - x_t)} \right] &= A_1, \\ (u_2 - x_t) u_{2x} - \frac{1}{A \rho_2^0} \left[ \frac{\rho_1 u_{1x}}{\rho_1^0 (u_1 - x_t)} + \frac{\rho_2 u_{2x}}{\rho_2^0 (u_2 - x_t)} \right] &= A_2, \end{aligned} \quad (5.69)$$

Burada  $A_1$  və  $A_2$ -nin ifadələri aşağıdakı şəkildədir:

$$A_1 = K(u_2 - u_1) - \frac{d\tilde{u}_1}{dt} + \frac{1}{(\rho_1^0)^2 A(u_1 - x_t)} \frac{d\tilde{\rho}_1}{dt} +$$

$$+ \frac{1}{(\rho_2^0)^2 A(u_2 - x_t)} \frac{d\tilde{\rho}_2}{dt}, \quad (5.70)$$

$$A_2 = K(u_1 - u_2) - \frac{d\tilde{u}_2}{dt} + \frac{1}{(\rho_1^0)^2 A(u_1 - x_t)} \frac{d\tilde{\rho}_1}{dt} +$$

$$+ \frac{1}{(\rho_2^0)^2 A(u_2 - x_t)} \frac{d\tilde{\rho}_2}{dt}.$$

(5.69) tənliklər sistemi  $u_{1x}$  və  $u_{2x}$  məchullarına görə qapalı sistem təşkil edir.

$$\left[ u_1 - x_t - \frac{\rho_1}{(\rho_1^0)^2 A(u_1 - x_t)} \right] u_{1x} - \frac{\rho_2}{(\rho_2^0)^2 A(u_2 - x_t)} u_{2x} = A_1 \quad (5.71)$$

$$- \frac{\rho_1}{\rho_1^0 \rho_2^0 (u_1 - x_t)} u_{1x} + \left[ u_2 - x_t - \frac{\rho_2}{(\rho_2^0)^2 A(u_2 - x_t)} \right] u_{2x} = A_2;$$

Ədəbiyyatdan məlumdur ki, xarakteristik istiqamətlərin tənliyini almaq üçün (5.71) sisteminin determinanı sıfıra bərabər olmalıdır

$$\left[ (u_1 - x_t)^2 - \frac{\rho_1}{(\rho_1^0)^2 A} \right] \left[ (u_2 - x_t)^2 - \frac{\rho_2}{(\rho_2^0)^2 A} \right] -$$

$$- \frac{\rho_1 \rho_2}{A^2 (\rho_1^0)^2 (\rho_2^0)^2} = 0 \quad (5.72)$$

və ya

$$(u_1 - x_t)^2 (u_2 - x_t)^2 - \frac{\rho_2}{(\rho_2^0)^2 A} (u_1 - x_t)^2 -$$

$$- \frac{\rho_1}{(\rho_1^0)^2 A} (u_2 - x_t)^2 = 0 \quad (5.73)$$

Qeyd edək ki, əgər S xəttinin hər hansı parçası boyunca  $u_1, u_2, \rho_1, \rho_2, \rho_1^0, \rho_2^0$ , parametrləri verilərsə, onda  $x_f$  sür'əti (5.73) cəbri tənlikdən tə'yin edilir.

İkifazalı mühitlərdə kiçik həyəcanlanma zamanı təqribən

$$x_t - u_1 \rightarrow x_t, \quad x_t - u_2 \Rightarrow x_t, \quad x_t \Rightarrow u_1, u_2, \quad (5.74)$$

münasibəti doğrudur. Bu halda (5.73)-dən alırıq

$$x_t = \sqrt{\frac{1}{A} \left( \frac{\rho_1}{(\rho_1^0)^2} + \frac{\rho_2}{(\rho_2^0)^2} \right)}. \quad (5.75)$$

A-nın ifadəsini (5.75)-də yerinə yazsaq, alırıq

$$x_t = \sqrt{\frac{1}{\frac{\rho_1}{(\rho_1^0)^2 a_1^2} + \frac{\rho_2}{(\rho_2^0)^2 a_2^2}} \left( \frac{\rho_1}{(\rho_1^0)^2} + \frac{\rho_2}{(\rho_2^0)^2} \right)}. \quad (5.76)$$

Fazalardan biri sıxılmayan olduqda, məsələn,  $\rho_1^0 = \text{const}$  olduqda,  $a_1^2 \rightarrow \infty$  olar. Bu halda

$$x_t = a_2 \sqrt{1 + \frac{\rho_1}{\rho_2} \cdot \frac{\rho_2^0}{\rho_1^0}} \quad (5.77)$$

(5.76) düsturundan birfazalı mühitlər üçün alırıq

$$\rho_1 = \rho_2; \quad \rho_1^0 = \rho_2^0; \quad a_1 = a_2 = a$$

$$x_t = \sqrt{\frac{dP}{d\rho}} \quad (5.78)$$

(5.76) düsturundan görünür ki,  $\rho_1 = \rho_2$  olduqda ikifazalı mühitlər bir səs sür'ətinə malik olur.

## VI FƏSİL

### MONODİSPERS SUSPENZIYA

#### § 6.1. Monodispers suspenziyanın əsas tənlikləri

Çoxfazlı sistemləri təsvir etmək üçün iki cür yanaşma üsulundan istifadə edilir. Birinci yanaşma kütlənin, impulsun və enerjinin saxlanması fiziki qanunlarına əsaslanır və hər bir fazanın ayrılıqda tənlikləri yazılır. Qatışıqda hər bir fazanın makroskopik şəkildə iştirakı fərz olunur və ölçüləri molekulyar ölçülərindən çox-çox böyük hesab edilir. Bir sıra tədqiqatçılar tərəfindən qaz qarışığının müəyyən dəqiqliklə hərəkətini təsvir edən tənliklər verilmişdir. Müəlliflər haqlı olaraq qeyd edirlər ki, ümumi halda yalnız bir balans münasibəti yazmaq qarışıqın mexanikasını tam öyrənməyə imkan vermir. Göstərilmiş halda əsas çətinliklər fazaların istilik və qarşılıqlı təsirin qüvvələrinin konkretləşdirilməsindən (dəqiqləşdirilməsindən) və faza keçidlərinin ayırd edilməsindən ibarətdir.

İkinci yanaşmada hərəkət tənliyini çıxarmaq üçün statistik fizikanın metodlarından istifadə edilir. Bu məqsədlə qazın kinetik nəzəriyyəsinə, fəza, zaman və s. üzrə ortalaşdırılmadan istifadə edilir.

Qaz-bərk hissəciklər sisteminin eyni zamanda, stasionar hərəkətini təsvir edən tənliklər P.Panton, daha ümumi halda isə R.İ.Niqmatulin tərəfindən alınmışdır. Qeyd olunan yanaşma ayrı-ayrı hissəciklərin ətrafında sür'ətlərin, temperaturun, gərginliyin qiymətinin mə'lum olmasını tələb edir. Bunu isə birfazlı bütöv mühit üçün sərhəd məsələsinin həllindən tapmaq olar. Lakin lokal oyuqların konturunda sərhəd

şərtlərinin dəqiq verilməsi zamanı ciddi çətinliklər yaranır. Burada fazalararası qarşılıqlı tə'sir qüvvəsinin aşkar şəklini ancaq xüsusi hallar üçün hesablamaq mümkün olur.

İstifadə ediləcək model termodinamik qüvvəni nəzərə almaqla ikifazlı mühitlərin (qatışıqların) hidrodinamikasını öyrənməyə imkan verir. Suspenziyada dispers fazaya kəsilməz mühit kimi baxmaq üçün onun iki ən yaxın hissəcikləri arasında orta məsafəsi axının makroskopik miqyası ilə müqayisədə kiçik olmalıdır. Bu işə bütöv mühit mexanikasının saxlanma qanunlarına həcmi ortalaşma üsulunu tətbiq etməyə imkan verir. Əgər  $L$  baxılan hərəkətin xarici ölçüsü (borunun uzunluğu, layın ölçüsü və s.),  $\Lambda$ -makrohəcm miqyası,  $d$ -mikrohəcm miqyası,  $\lambda$ -iki ən yaxın monodispers hissəcik arasındakı məsafə olarsa, onda  $L \gg \Lambda \gg \lambda \gg d$  və  $dx_1 dx_2 dx_3 \sim \Lambda^3$  makrohəcm üzrə balans tənliklərini ortalaşdırmaq olar. Makrosistemdə monodispers suspenziyalı mühitin biröçlü kəsilməzlik tənlikləri

$$\frac{\partial(\alpha_1 \rho_1)}{\partial t} + \frac{\partial(\alpha_1 \rho_1 v_1)}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial(\alpha_2 \rho_2)}{\partial t} + \frac{\partial(\alpha_2 \rho_2 v_2)}{\partial x} = 0, \quad (6.1)$$

şəklində, impulsun saxlanma (hərəkət) tənlikləri isə

$$\frac{\partial(\alpha_1 \rho_1 v_1)}{\partial t} + \frac{\partial(\alpha_1 \rho_1 v_1 v_1)}{\partial x} = \frac{\partial(\alpha_1 \sigma_{11})}{\partial x} + F, \quad (6.2)$$

$$\frac{\partial(\alpha_2 \rho_2 v_2)}{\partial t} + \frac{\partial(\alpha_2 \rho_2 v_2 v_2)}{\partial x} = \frac{\partial(\alpha_2 \tau_{22})}{\partial x} - F,$$

şəklində olur. Fərz edək ki, dispers fazada bərk hissəciyin deformasiyası ümumiləşmiş xətti özlü-elastiki reoloji qanuna tabedir:

$$\left( b_0 + \sum_{l=1}^m b_l \frac{d}{dt} \right) \sigma_{11} = \left( a_0 + \sum_{l=1}^n a_l \frac{d}{dt} \right) e_1, \quad (6.3)$$

Digər tərəfdən, belə bir şərtin ödənməsi zəruridir:



$$\alpha_1 + \alpha_2 = 1 \quad (6.4)$$

Hər bir fazanın sıxlığı öz fazasının gərginlik vəziyyəti ilə təyin olunarsa, onda termodinamik hal tənlikləri belə ifadə olunar:

$$\rho_1 = \rho_1(\sigma_{11}), \quad \rho_2 = \rho_2(P) \quad (6.5)$$

Yuxarıdakı tənliklər sistemi bərk fazadakı kinematik münasibətlə tamamlanır (qapanır).

$$\frac{de_1}{dt} = \frac{\partial e_1}{\partial t} + \frac{\partial(e_1 v_1)}{\partial x} = \frac{\partial v_1}{\partial x} \quad (6.6)$$

Burada «1» indeksi monodispers fazaya, «2»-indeksi maye fazaya aiddir. Bərk fazanın vahid həcmdə tutduğu həcm hissəsi  $\alpha_1$  (bu suspenziya mühitin konsentrasiyası adlanır) olarsa, onda maye fazanın tutduğu həcm hissəsi  $\alpha_2 = 1 - \alpha_1$  olar.  $v_1, v_2, \rho_1, \rho_2, \sigma_{11}, \tau_{22}$  -uyğun olaraq bərk və maye fazalarının sür'ətləri, sıxlıqları və gərginlikləridir,  $P$  - maye fazada təzyiq,  $e_1$  - bərk fazada deformasiyadır. (6.3) münasibətində  $b_0, b_1, \dots, b_m, a_0, a_1, \dots, a_n$  sabitləri özlü-elastiki mühitlərin mexaniki xassələrini xarakterizə edən parametrlərdir və konkret mühitlər üçün eksperimental üsulla təyin edilir. Əgər bərk hissəcik xətti elastikdirsə, onda (6.3) reoloji münasibətindən  $b_0 = 1, b_m = 0; a_0 = E, a_n = 0$  olar. Burada  $E$ -elastiklik əmsəlidir. Eyni qayda ilə Maksvel mühitləri üçün:  $a_0 = 0, a_1 = E, b_0 = 1, b_1 = \frac{E}{\mu}$  olar. Yerdə qalan sabitlər isə sıfıra bərabərdir. Burada  $\mu$  - bərk hissəciyin özlük əmsəlidir. Beləliklə, (6.3) münasibətində əmsəlləri təyin etməklə, müxtəlif reoloji modellər alırıq.

Konsentrasiyanın kiçik qiymətlərində ( $\alpha_1 \ll 1$ ), izole edilmiş kiçik sferik hissəciyə tə'sir edən qüvvə belə bir ifadə

ilə hesablanır.

$$F = P \frac{\partial x_1}{\partial x_j} + \frac{\alpha_1 \rho_1}{\tau_p} (v_2 - v_1) + \frac{\alpha_1 \rho_2}{2} \left( \frac{dv_2}{dt} - \frac{dv_1}{dt} \right) - \frac{3kT}{4\pi\alpha^3} \alpha_1 \frac{\partial f}{\partial \alpha_1} \cdot \frac{\partial \alpha_1}{\partial x} \quad (6.7)$$

Sağ tərəfdəki 1-ci hədd həcm üzrə ortalaşdırılmış təzyiq qüvvəsi, 2-ci hədd Stoks müqavimət qüvvəsi, 3-cü birləşdirilmiş kütlə effekti, 4-cü termodinamik qüvvədir

$$f = \ln \alpha_1 - \alpha_1 + \frac{\alpha_1(3 + 5\alpha_1)}{(1 - \alpha_1)^2},$$

burada  $k$  -Bolsman sabiti,  $T$ -mütləq temperatur,  $\tau_p$  -impulsun ötürmə relaksasiya zamanıdır,

$$\tau_p = \frac{2\rho_1\alpha^2}{9\mu}, \quad (6.8)$$

Bu ifadə Reynolds ədədinin kiçik qiymətlərində doğrudur:

$$R_e = \frac{|v_1 - v_2| \alpha \rho_1}{\mu} < 1. \quad (6.9)$$

Məsələ bir ölçülüdür, ona görə də hissəciklərin eninə hərəkətini ifadə edən həcm üzrə ortalaşdırılmış qaldırıcı qüvvə burada iştirak etmir.

Suspenziyanın özlüyü dispers fazanın konsentrasiyasından asılı olub, Eynşteyn özlüyü ilə tə'yin edilir

$$\mu_3(\alpha_1) = \mu \left( 1 + \frac{5}{2} \alpha_1 \right) \quad \lambda_3(\alpha_1) = -\frac{2}{3} \mu \left( 1 + \frac{5}{2} \alpha_1 \right) \quad (6.10)$$

Burada  $\mu_3, \lambda_3$  mayenin özlük əmsallarıdır. Bu halda kəsil-məz aparıcı və dispers fazaların gərginlik tenzoru aşağıdakı kimi yazıla bilər:

$$\tau_{22} = -P + \frac{4}{3}\mu\left(1 + \frac{5}{2}\alpha_1\right)\frac{\partial v_2}{\partial x}, \quad \sigma_{11} = -\sigma. \quad (6.11)$$

(6.1)-(6.6) qeyri-xətti tənliklər sistemi  $\alpha_i\rho_i, v_i, p_i\sigma_{11}$  və  $e_1$  dəyişənlərinə nəzərən qapalı olub, verilmiş başlanğıc və sərhəd şərtləri daxilində analitik həlli, çox sadə hallarda belə, böyük riyazi çətinliklərlə qarşılaşır.

## § 6.2 Monodispers suspenziyalarda bir ölçülü qeyri-xətti dalğaların evolyusiyaya tənliyi

Monodispers suspenziyalarda  $x$  oxu istiqamətində yayılan kiçik, lakin sonlu amplitudlu dalğaları təsvir edən tənliyi çıxaraq. Əgər (6.1)-(6.7) tənliklər sisteminin qeyri-xəttiliyini və dalğaların zaman-məkan koordinatlarında sönməsinə nəzərə almasaq, onda bu sistemin axtarılan funksiyalarını  $v_i, \rho_i, v_i, e_1\sigma_{11}, P$  qərarlaşmış dalğalarda olduğu kimi  $F(t - c^{-1}x)$  şəklində axtarmaq olar.  $F$  axtarılan funksiyalardan istənilən biridir. Lakin bu sistemin qeyri-xəttiliyi zaman-məkan fəzasında verilmiş dalğaların profilinin dəyişməsinə səbəb olur və  $F$  funksiyası

$$F = F(\eta x, t - c^{-1}x) \quad (6.12)$$

şəklində axtarılır. Buradan  $\eta \ll 1$  kiçik parametr,  $c$  xətti (akustik) dalğanın sür'ətidir və dispersiya tənliyindən tapılacaq. Məkan və zaman miqyaslarını

$$X = \eta x, \quad \tau = t - c^{-1}x, \quad (6.13)$$

kimi dəyişərək, (6.1)-(6.6) tənliklər sistemini yeni dəyişənlərdə yazmaq:

$$\frac{\partial(\alpha_1\rho_1)}{\partial\tau} + \eta\frac{\partial(\alpha_1\rho_1v_1)}{\partial X} - c^{-1}\frac{\partial(\alpha_1\rho_1v_1)}{\partial\tau} = 0, \quad (6.14)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\alpha_2 \rho_2)}{\partial \tau} + \eta \frac{\partial(\alpha_2 \rho_2 v_2)}{\partial X} - c^{-1} \frac{\partial(\alpha_2 \rho_2 v_2)}{\partial \tau} &= 0, \\ \frac{\partial(\alpha_1 \rho_1 v_1)}{\partial \tau} + \eta \frac{\partial(\alpha_1 \rho_1 v_1 v_1)}{\partial X} - c^{-1} \frac{\partial(\alpha_1 \rho_1 v_1 v_1)}{\partial \tau} &= \\ -\eta \frac{\partial(\alpha_1 \sigma_{11})}{\partial X} + c^{-1} \frac{\partial(\alpha_1 \sigma_{11})}{\partial \tau} + F, & \end{aligned} \quad (6.15)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\alpha_2 \rho_2 v_2)}{\partial \tau} + \eta \frac{\partial(\alpha_2 \rho_2 v_2)}{\partial X} - c^{-1} \frac{\partial(\alpha_2 \rho_2 v_2 v_2)}{\partial \tau} &= \\ = -\eta \frac{\partial(\alpha_2 \tau_{22})}{\partial X} + c^{-1} \frac{\partial(\alpha_2 \tau_{22})}{\partial \tau} - F, & \\ \left[ b_0 + \sum_{l=1}^m b_l \prod_{q=1}^l \left( \frac{\partial}{\partial \tau} + \eta v_1 \frac{\partial}{\partial X} - c^{-1} v_1 \frac{\partial}{\partial \tau} \right)^q \right] \sigma_{11} &= \\ = \left[ a_0 + \sum_{l=1}^n b_l \prod_{q=1}^l \left( \frac{\partial}{\partial \tau} + \eta v_1 \frac{\partial}{\partial X} - c^{-1} v_1 \frac{\partial}{\partial \tau} \right)^q \right] e_1, & \end{aligned} \quad (6.16)$$

$$\frac{\partial v_1}{\partial \tau} + \eta \frac{\partial(e_1 v_1)}{\partial X} - c^{-1} \frac{\partial(e_1 v_1)}{\partial \tau} = \eta \frac{\partial v_1}{\partial X} - c^{-1} \frac{\partial v_1}{\partial \tau}. \quad (6.17)$$

İndi axtarılan funksiyaların  $\eta$  kiçik parametrlərinə nəzərən ayrılışından aşağıdakı kimi istifadə edək:

$$\begin{aligned} \alpha_i &= \alpha_i^{(0)} + \eta \alpha_i^{(1)} + \eta^2 \alpha_i^{(2)} + \dots, \quad v_i = \eta v_i^{(1)} + \eta^2 v_i^{(2)} + \dots, \\ P &= \eta P_1 + \eta^2 P_2 + \dots, \quad \sigma_{11} = \eta \sigma_1 + \eta^2 \sigma_2 + \dots, \\ \rho_1 &= \rho_1^{(0)} + \eta(L_1 \sigma_2 + L_2 \sigma_1^2) + \dots, \\ e_i &= e_i^{(0)} + \eta e_i^{(1)} + \eta^2 e_i^{(2)} + \dots, \\ \rho_2 &= \rho_2^{(0)} + \eta B_1 P_1 + \eta^2 (B_1 P_2 + B_2 P_1^2) + \dots, \end{aligned} \quad (6.18)$$

Burada "0" indeksli parametrlər suspenziyanın tarazlıq halına uyğun gəlir.  $v_i^{(0)} = 0$ ,  $P = P_0$ ,  $\sigma = \sigma_0$  funksiyaları həy-

əcanlanmaya qədər tarazlıq tənliyini eyniliklə ödədiyi üçün (6.18) ayrılışında  $P^{(0)}$  və  $\sigma^{(0)}$  iştirak etmir.

$$L_1 = \left. \frac{\partial \rho_1}{\partial \sigma} \right|_{\sigma_0}, \quad L_2 = \left. \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \rho_1}{\partial \sigma^2} \right|_{\sigma_0},$$

$$B_1 = \left. \frac{\partial \rho_2}{\partial P} \right|_{P_0}, \quad B_2 = \left. \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \rho_2}{\partial P^2} \right|_{P_0}. \quad (6.19)$$

Əgər (6.18) ayrılışlarını (6.14)-(6.17) və (6.4), (6.5) tənliklərində yerinə qoysaq və sonra  $\eta$ -nın birinci dərəcəli hədlərinin əmsallarını müqayisə etsək, onda  $\alpha_i^{(1)}, v_i^{(1)}, P_1, \sigma_1, e_1^{(1)}$  funksiyalarına nəzərən bircins xətti tənliklər sistemi alarıq:

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho_1^{(0)} \alpha_1^{(1)} + \alpha_1^{(0)} L_1 \sigma_1 - c^{-1} \alpha_1^{(0)} \rho_1^{(0)} v_1^{(1)} = 0, \\ \rho_2^{(0)} \alpha_2^{(1)} + \alpha_2^{(0)} B_1 P_1 - c^{-1} \alpha_2^{(0)} \rho_2^{(0)} v_2^{(1)} = 0, \\ \alpha_1^{(0)} \rho_1^{(0)} v_1^{(1)} - c^{-1} \alpha_1^{(0)} \sigma_1 - \frac{\alpha_1^{(0)} \rho_1^{(0)}}{2} (v_2 - v_1) - \frac{3kT\xi_1 c^{-1} \alpha_1^{(1)}}{4\pi a^3} = 0, \\ \alpha_2^{(0)} \rho_2^{(0)} v_2^{(1)} - c^{-1} \alpha_2^{(0)} P_1 + \frac{\alpha_1^{(0)} \rho_1^{(0)}}{2} (v_2 - v_1) - \frac{3kT\xi_1 c^{-1} \alpha_1^{(1)}}{4\pi a^3} = 0, \\ -b_0 \sigma_1 = a_0 e_1^{(1)}, \\ \alpha_1^{(1)} + \alpha_2^{(1)} = 0, \\ e_1^{(1)} = c^{-1} v_1^{(1)}, \end{array} \right. \quad (6.20)$$

burada  $\xi_1 = \alpha_2^{(0)} + (\alpha_2^{(0)})^{-3} [6 - 4\alpha_2^{(0)} - 2(\alpha_2^{(0)})^2]$ .

(6.20)-də yeddinci tənliyi beşinci tənlikdə, sonra beşinci tənliyi birinci tənlikdə yerinə yazsaq, alarıq:

$$\alpha_1^{(1)} = c^{-1} \alpha_1^{(0)} \left( 1 - \frac{a_0 L_1}{b_0 \rho_1^{(0)}} \right) v_1^{(1)} = A_1 v_1^{(1)} = -\alpha_2^{(1)}. \quad (6.21)$$

(6.21) münasibətini (6.20) sisteminin 3-cü tənliyində nəzərə alaraq:

$$v_2^{(1)} = 2 \left[ \frac{1}{2} + \frac{\rho_1^{(0)}}{\rho_2^{(0)}} - \frac{a_0}{b_0 \rho_2^{(0)} c^2} - \frac{3kT\xi_1}{4\pi a^3 \rho_2^{(0)} c^2} \left( 1 - \frac{a_0 L_1}{b_0 \rho_1^{(0)}} \right) \right] v_1^{(1)} = A_2 v_1^{(1)} \quad (6.22)$$

(6.20) –də üçüncü və dördüncü tənliyi cəmləyək:

$$P_1 = \frac{c}{\alpha_2^{(0)}} \left\{ \alpha_1^{(0)} \rho_1^{(0)} + 2\alpha_2^{(0)} \rho_2^{(0)} \left[ \frac{1}{2} + \frac{\rho_1^{(0)}}{\rho_2^{(0)}} - \frac{a}{b_0 \rho_2^{(0)} c^2} - \frac{3kT\xi_1}{4\pi a^3 \rho_2^{(0)} c^2} \right] \left( 1 - \frac{a_0 L_1}{b_0 \rho_1^{(0)}} \right) - \frac{a_0 \alpha_1^{(0)}}{b_0 c^2} \right\} v_1^{(1)} = A_3 v_1^{(1)}. \quad (6.23)$$

Alınmış (6.21)-(6.23) münasibətlərini (6.20)-nin ikinci tənliyində yerinə yazsaq və  $v_2^{(1)} \neq 0$  olduğunu nəzərə alsaq, birinci yaxınlaşmada uzununa dalğaların sür'ətlərini tapmaq üçün dispersiya münasibəti alarıq.

$$B_1 \left[ \alpha_1^{(0)} \rho_1^{(0)} + \alpha_2^{(0)} (\rho_2^{(0)} + 2\rho_1^{(0)}) \right] c^4 - \left[ \alpha_1^{(0)} \rho_2^{(0)} \left( 1 - \frac{a_0 L_1}{b_0 \rho_1^{(0)}} \right) + \frac{a_0 \alpha_1^{(0)} B_1}{b_0} \left( 1 + \frac{2\alpha_2^{(0)}}{\alpha_1^{(0)}} \right) + \alpha_2^{(0)} (\rho_2^{(0)} + 2\rho_1^{(0)}) + \frac{3kT\xi_1 \alpha_2^{(0)} B_1}{2\pi a^3} \right] \times \left( 1 - \frac{a_0 L_1}{b_0 \rho_1^{(0)}} \right) c^2 + 2\alpha_2^{(0)} \left[ \frac{a_0}{b_0} + \frac{3kT\xi_1}{4\pi a^3} \left( 1 - \frac{a_0 L_1}{b_0 \rho_1^{(0)}} \right) \right] = 0 \quad (6.24)$$

(6.24) dispersiya tənliyinin iki həqiqi kökü var. Birinci kök maye fazada, ikinci kök dispers fazada dalğanın sür'ətinə uyğundur. Analoji olaraq  $\eta^2$  daxil olan hədləri müqayisə etsək, ikinci yaxınlaşmada alarıq:

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \left( \rho_1^{(0)} \alpha_1^{(2)} + \alpha_1^{(0)} L_1 \sigma_2 - c^{-1} \alpha_1^{(0)} \rho_1^{(0)} v_1^{(2)} \right) = N_1,$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial \tau} \left( \rho_2^{(0)} \alpha_2^{(2)} + \alpha_2^{(0)} B_1 P_2 - c^{-1} \alpha_2^{(0)} \rho_2^{(0)} v_2^{(2)} \right) &= N_2, \\
\frac{\partial}{\partial \tau} \left[ \alpha_1^{(0)} \left( \rho_1^{(0)} + \frac{\rho_2^{(0)}}{2} \right) v_1^{(2)} - \frac{\alpha_1^{(0)} \rho_2^{(0)}}{2} v_2^{(2)} - \right. \\
&\left. - c^{-1} \alpha_2^{(0)} P_2 + \frac{3kT\xi_1 \alpha_1^{(2)}}{4\pi a^3 c} \right] = N_3, \\
\frac{\partial}{\partial \tau} \left[ -\frac{\alpha_1^{(0)} \rho_2^{(0)}}{2} v_1^{(2)} + \rho_2^{(0)} \left( \alpha_2^{(0)} + \frac{\alpha_1^{(0)}}{2} \right) v_2^{(2)} - \right. \\
&\left. - c^{-1} \alpha_2^{(0)} P_2 + \frac{3kT\xi_1 \alpha_1^{(2)}}{4\pi a^3 c} \right] = N_4, \\
-b_0 \frac{\partial \sigma_2}{\partial \tau} - \alpha_0 \frac{\partial P_2}{\partial \tau} &= \frac{\partial T}{\partial \tau}, \quad \frac{\partial}{\partial \tau} (c e_1^{(2)} + v_1^{(2)}) = F, \quad (6.25) \\
\frac{\partial \alpha_1^{(2)}}{\partial \tau} &= -\frac{\partial \alpha_2^{(2)}}{\partial \tau}
\end{aligned}$$

burada

$$\begin{aligned}
N_1 &= -\frac{\partial(\alpha_1^{(0)} \rho_1^{(0)} v_1^{(1)})}{\partial X} - \frac{\partial}{\partial \tau} (L_1 \alpha_1^{(1)} \sigma_1^{(0)} - \alpha_1^{(0)} L_2 \sigma_1^2 - c^{-2} \alpha_1^{(0)} \rho_1^{(0)} v_1^{(1)} v_1^{(1)}), \\
N_2 &= -\frac{\partial(\alpha_2^{(0)} \rho_2^{(0)} v_2^{(1)})}{\partial X} - \frac{\partial}{\partial \tau} (B_1 \alpha_2^{(1)} P_1 + \alpha_2^{(0)} B_2 P_1^{(2)} - c^{-2} \alpha_2^{(0)} \rho_2^{(0)} v_2^{(1)} v_2^{(1)}) \\
N_3 &= -\frac{\partial(\alpha_1^{(0)} \sigma_1)}{\partial X} \frac{3kT\xi_1}{4\pi a^3} \frac{\partial \alpha_1^{(1)}}{\partial X} + c^{-1} \frac{\partial \alpha_1^{(1)} \sigma_1}{\partial \tau} - c^{-1} P_1 \frac{\partial \alpha_1^{(1)}}{\partial \tau} - \frac{\alpha_2^{(0)} \rho_2^{(0)}}{2c} \times \\
&\times \left( v_2^{(1)} \frac{\partial v_2^{(1)}}{\partial \tau} - v_1^{(1)} \frac{\partial v_1^{(1)}}{\partial \tau} \right) + \frac{3kT\xi_1}{4\pi a^3 c} \alpha_2^{(1)} \frac{\partial \alpha_1^{(1)}}{\partial \tau} + \frac{1}{2} (\rho_2^{(0)} \alpha_1^{(1)} + \alpha_1^{(0)} B_1 P_1) \times \\
&\times \left( \frac{\partial v_2^{(1)}}{\partial \tau} - \frac{\partial v_1^{(1)}}{\partial \tau} \right) + c^{-1} \alpha_1^{(0)} \rho_1^{(0)} v_1^{(1)} \frac{v_2^{(1)} - v_1^{(1)}}{\tau_p} + \frac{\alpha_1^{(0)} \rho_1^{(0)}}{\varphi} \cdot \frac{v_2^{(1)} - v_1^{(1)}}{\eta}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
N_4 = & -\frac{\partial(\alpha_2^{(0)} P_1)}{\partial X} + \frac{3kT\xi_1}{4\pi a^3} \cdot \frac{\partial \alpha_1^{(1)}}{\partial x} + c^{-1} \frac{\partial(\alpha_2^{(1)} P_1)}{\partial \tau} + c P_1 \frac{\partial \alpha_1^{(1)}}{\partial \tau} + \frac{\alpha_1^{(0)} \rho_2^{(0)}}{2c} \times \\
& \times \left( v_2^{(1)} \frac{\partial v_2^{(1)}}{\partial \tau} - v_1^{(1)} \frac{\partial v_1^{(1)}}{\partial \tau} \right) - \frac{3kT\xi_2}{4\pi a^3 c} \alpha_2^{(1)} \frac{\partial \alpha_1^{(1)}}{\partial \tau} - \frac{1}{2} (\rho_2^{(0)} \alpha_1^{(1)} + \alpha_1^{(0)} B_1 P_1) \times \\
& \times \left( \frac{\partial v_2^{(1)}}{\partial \tau} - \frac{\partial v_1^{(1)}}{\partial \tau} \right) - c^{-1} \alpha_1^{(0)} \rho_1^{(0)} v_1^{(1)} \frac{v_2^{(1)} - v_1^{(1)}}{\tau_p} \frac{\alpha_1^{(0)} \rho_1^{(0)}}{\tau_p} \cdot \frac{v_2^{(1)} - v_1^{(1)}}{\eta} + \frac{10\mu\alpha_2^{(0)}}{3c^2} \\
& \times \frac{\partial}{\partial \tau} \left( \alpha_1^{(1)} \frac{\partial v_1^{(2)}}{\partial \tau} \right) + \frac{4\mu}{3c^2} \left( 1 + \frac{5}{2} \alpha_1^{(0)} \right) \frac{\partial}{\partial \tau} \left( \alpha_2^{(1)} \frac{\partial v_2^{(1)}}{\partial \tau} \right) + \frac{4\mu\alpha_2^{(0)}}{3\eta c^2} \times \\
& \times \left( 1 + \frac{5}{2} \alpha_1^{(0)} \right) \frac{\partial^2 v_2^{(1)}}{\partial \tau^2} - \frac{4\mu\alpha_2^{(0)}}{3c} \left( 1 + \frac{5}{2} \alpha_1^{(0)} \right) \frac{\partial^2 v_2^{(1)}}{\partial \tau \partial X}; \quad (6.26)
\end{aligned}$$

$$T = \frac{1}{\eta c} \sum_{l=1}^n S_{l+1} \frac{\partial^l v_1^{(1)}}{\partial \tau^l}, \quad F = \frac{\partial(e_1^{(1)} v_1^{(1)})}{\partial \tau} + c \frac{\partial v_1^{(1)}}{\partial X},$$

$$S_{l+1} = \Gamma_{m-l} \frac{a_0 b_l}{b_0} - \Gamma_{n-l} a_l,$$

$$\xi_2 = 1 + 2(\alpha_2^{(0)})^{-4} \left[ (\alpha_2^{(0)})^2 + 8\alpha_2^{(0)} - 18 \right].$$

Yuxarıda olduğu kimi,  $\alpha_2^{(2)}, v_2^{(2)}, P_2, \sigma_2, P_2$  funksiyalarını  $v_1^{(2)}$  funksiyası ilə ifadə edək. Onda (6.25) tənliklər sisteminin altıncı, beşinci və birinci tənliklərindən alırıq:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial e_1^{(2)}}{\partial \tau} &= c^{-1} \left( F - \frac{\partial v_1^{(2)}}{\partial \tau} \right), \\
\frac{\partial \sigma_2}{\partial \tau} &= -\frac{1}{b_0} \cdot \frac{\partial \Gamma}{\partial \tau} - \frac{a_0}{b_0 c} \left( F - \frac{\partial v_1^{(2)}}{\partial \tau} \right), \\
\frac{\partial \alpha_1^{(2)}}{\partial \tau} &= \frac{\alpha_1^{(0)}}{c} \left( 1 - \frac{a_0 L_1}{b_0 \rho_1^{(0)}} \right) \cdot \frac{\partial v_1^{(2)}}{\partial \tau} + \frac{1}{\rho_1^{(0)}} + \\
&+ \frac{1}{\rho_1^{(0)}} \left( N_1 + \frac{\alpha_1^{(0)} L_1}{b_0} \frac{\partial \Gamma}{\partial \tau} + \frac{a_0 L_1 \alpha_1^{(0)}}{b_0 c} F \right) = \frac{\partial \alpha_2^{(2)}}{\partial \tau} \quad (6.27)
\end{aligned}$$



(6.27) münasibətlərini (6.25) sisteminin üçüncü tənliyində yerinə qoysaq,

$$\left[ 2\rho_1^{(0)} + \rho_2^{(0)} - \frac{2a_0}{b_0 c^2} - \frac{3kT\xi_1}{2\pi a^3 c^2} \left( 1 - \frac{a_0 L_1}{b_0 \rho_1^{(0)}} \right) \right] \frac{\partial v_1^{(2)}}{\partial \tau} + \frac{2}{b_0 c} \cdot \left( 1 - \frac{3kT\xi_1 L_1}{4\pi a^3 \rho_1^{(0)}} \right) \frac{\partial \Gamma}{\partial \tau} + \frac{2a_0}{b_0 c^2} \left( 1 - \frac{3kT\xi_1 L_1}{4\pi a^3 \rho_1^{(0)}} \right) F - \frac{N_3}{\alpha_1^{(0)}} - \frac{3kT\xi_1}{2\pi a^3 c \rho_1^{(0)} \alpha_1^{(0)}} N_1 = \rho_2^{(0)} \frac{\partial v_2^{(2)}}{\partial \tau}. \quad (6.28)$$

Əvvəlcə (6.25) tənliklər sisteminin üçüncü və dördüncü tənliklərini tərəf-tərəfə toplayıb, alınan tənliyi  $cB_1/2$ -yə vuraq:

$$\frac{\partial}{\partial \tau} (c\alpha_1^{(0)} \rho_1^{(0)} B v_1^{(2)} + c\alpha_2^{(0)} \rho_2^{(0)} B_1 v_2^{(2)} - \alpha_1^{(0)} B_1 \sigma_2 P_2) = \frac{cB_1}{2} (N_3 + N_4). \quad (6.29)$$

(6.29) tənliyini (6.25) sisteminin ikinci tənliyi ilə cəmləyək:

$$c\alpha_1^{(0)} \rho_1^{(0)} B_1 \frac{\partial v_1^{(2)}}{\partial \tau} - \rho_2^{(0)} \alpha_1^{(2)} + c^{-1} \alpha_2^{(0)} \rho_2^{(0)} (c^2 B_1 - 1) \frac{\partial v_2^{(2)}}{\partial \tau} - \alpha_1^{(0)} B_1 \frac{\partial \sigma_2}{\partial \tau} = \frac{cB_1}{2} (N_3 + N_4) + N_2 \quad (6.30)$$

İndi (6.27) və (6.28) münasibətlərini (6.30)-da yerinə yazsaq, aşağıdakı şəkllə düşər:

$$\left( c\alpha_1^{(0)} \rho_1^{(0)} B_1 - \frac{\alpha_1^{(0)} \rho_2^{(0)}}{c} \left( 1 - \frac{a_0 L_1}{b_0 \rho_1^{(0)}} \right) + \frac{\alpha_2^{(0)}}{c} (c^2 B_1 - 1) \right) \times \left[ 2\rho_1^{(0)} + \rho_2^{(0)} - \frac{2a_0}{b_0 c^2} - \frac{3kT\xi_1}{2\pi a^3 c^2} \left( 1 - \frac{a_0 L_1}{b_0 \rho_1^{(0)}} \right) - \frac{a_0 \alpha_1^{(0)} B_1}{b_0 c} \right] \frac{\partial v_1^{(2)}}{\partial \tau} =$$

$$\begin{aligned}
&= \left[ \frac{\rho_2^{(0)}}{\rho_1^{(0)}} + (c^2 B_1 - 1) \cdot \frac{3kT\xi_1 \alpha_2^{(0)}}{2\pi a^3 c^2 \rho_1^{(0)} \alpha_1^{(0)}} \right] N_1 + N_2 + \left[ \frac{cB_1}{2} + \frac{\alpha_2^{(0)}(c^2 B_1 - 1)}{\alpha_1^{(0)} c} \right] N_3 + \\
&+ \frac{cB_1}{2} N_4 + \frac{a_0}{b_0 c} \left[ \alpha_1^{(0)} \frac{\rho_2^{(0)}}{\rho_1^{(0)}} L_1 - \alpha_1^{(0)} B_1 - \frac{2\alpha_2^{(0)}(c^2 B_1 - 1)}{c^2} \right] \times \\
&\times \left( 1 - \frac{3kT\xi_1 L_1}{4\pi a^3 \rho_1^{(0)}} \right) \left[ F + \frac{1}{b_0} \left[ \alpha_1^{(0)} L_1 \frac{\rho_2^{(0)}}{\rho_1^{(0)}} - \alpha_1^{(0)} B_1 - \frac{2\alpha_2^{(0)}(c^2 B_1 - 1)}{C^2} \right] \right] \times \\
&\times \left( 1 - \frac{3kT\xi_1 L_1}{4\pi a^3 \rho_1^{(0)}} \right) \frac{\partial T}{\partial \tau}; \tag{6.31}
\end{aligned}$$

(6.31)-də  $\partial v_1^{(2)} / \partial t$ -nin əmsalı (6.24) dispersiya münasibətini verir və  $\partial v_1^{(2)} / \partial t \neq 0$  şərti (6.31) tənliyini sadələşdirərək, aşağıdakı şəkllə gətirir:

$$\begin{aligned}
&\left[ \frac{\rho_2^{(0)}}{\rho_1^{(0)}} + (c^2 B_1 - 1) \cdot \frac{3kT\xi_1 \alpha_2^{(0)}}{2\pi a^3 c^2 \rho_1^{(0)} \alpha_1^{(0)}} \right] N_1 + N_2 + \left[ \frac{cB_1}{2} + \frac{\alpha_2^{(0)}(c^2 B_1 - 1)}{\alpha_1^{(0)} c} \right] N_3 + \\
&+ \frac{cB_1}{2} N_4 + \frac{a_0}{b_0 c} \left[ \alpha_1^{(0)} \frac{\rho_2^{(0)}}{\rho_1^{(0)}} L_1 - \alpha_1^{(0)} B_1 - \frac{2\alpha_2^{(0)}(c^2 B_1 - 1)}{c^2} \right] \times \\
&\times \left( 1 - \frac{3kT\xi_1 L_1}{4\pi a^3 \rho_1^{(0)}} \right) \left[ F + \frac{1}{b_0} \left[ \alpha_1^{(0)} L_1 \frac{\rho_2^{(0)}}{\rho_1^{(0)}} - \alpha_1^{(0)} B_1 - \frac{2\alpha_2^{(0)}(c^2 B_1 - 1)}{C^2} \right] \right] \times \\
&\times \left( 1 - \frac{3kT\xi_1 L_1}{4\pi a^3 \rho_1^{(0)}} \right) \frac{\partial T}{\partial \tau} = 0. \tag{6.32}
\end{aligned}$$

(6.26)-nın  $N_1, N_2, N_3, N_4, T$  və  $F$  ifadələrində iştirak edən  $\alpha_i^{(1)}, v_2^{(1)}, \rho_1, \sigma_1, e_1^{(1)}$  funksiyalarını (6.20)-(6.23) tənliklərindən istifadə edərək  $v_1^{(1)}$  funksiyası ilə əvəz edib, onları (6.32) tənliyində yerinə yazsaq və bir sıra çevirmələr apararsaq, alarıq:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial v_1}{\partial X} + R_1 v_1^{(1)} \frac{\partial v_1^{(1)}}{\partial \tau} - R_2 \frac{\partial}{\partial \tau} \left( v_1^{(1)} \frac{\partial v_1^{(1)}}{\partial \tau} \right) + R_3 \frac{\partial^2 v_1^{(1)}}{\partial \tau \partial X} - \frac{R_4}{\eta} \frac{\partial^2 v_1^{(1)}}{\partial \tau^2} + \\ & + R_5 v_1^{(1)} v_1^{(1)} + R_6 v_1^{(1)} - \frac{R_7}{\eta} \sum_{l=1}^n (-1)^{l+1} S_{l+1} \frac{\partial^{l+1} v}{\partial \tau^{l+1}} = 0 \end{aligned} \quad (6.33)$$

burada

$$\begin{aligned} \Delta &= \alpha_1^{(0)} \rho_1^{(0)} M_1 + \alpha_2^{(0)} \rho_2^{(0)} A_2^0 + \left( \frac{a_0 \alpha_1^{(0-)}}{b_0 c} + \frac{3kT\xi_1 A_1^0}{4\pi a^3} \right) M_2 + \\ &+ \frac{cB_1}{2} \left( \alpha_2^{(0)} A_3^0 - \frac{3kT\xi_1 A_1^0}{4\pi a^3} \right) - a_0 M_4, \\ \Delta \cdot R_1 &= 2 \left( \frac{a_0 L_1}{b_0 c} A_1^0 + \alpha_1^{(0)} L_2 \frac{a_0^2}{b_0^2 c^2} - \frac{\alpha_1^{(0)} \rho_1^{(0)}}{c^2} M_1 \right) + \\ &+ 2 \left( \alpha_2^{(0)} B_2 A_3^0 - B_1 A_1^0 A_3^0 - c^{-2} \alpha_2^{(0)} \rho_2^{(0)} A_2^{0^2} \right) - \left[ \frac{2a_0 A_1^0}{b_0 c^2} - \frac{A_1^0 A_3^0}{c} + \right. \\ &+ \left. \frac{\alpha_1^{(0)} \rho_2^{(0)}}{2c} (1 - A_2^{0^2}) - \frac{3kT\xi_2 A_1^{0^2}}{4\pi a^3 c} + \frac{1}{2} (\rho_2^{(0)} A_1^{(0)} + \alpha_1^{(0)} B_1 A_3^0) (A_2^0 - 1) \right] M_2 + \\ &+ \frac{cB_1}{2} \left[ \frac{A_1^0 A_3^0}{c} + \frac{\alpha_1^{(0)} \rho_2^{(0)}}{2c} (1 - A_2^{0^2}) - \frac{3kT\xi_2 A_1^{0^2}}{4\pi a^3 c} + \right. \\ &+ \left. \frac{1}{2} (\rho_2^{(0)} A_1^0 + \alpha_1^{(0)} B_1 A_3^0) (A_2^0 - 1) \right] + \frac{2a_0}{c^2} M_1, \\ \Delta \cdot R_2^{(0)} &= \frac{2\mu B_1 A_1^0 A_2^0}{3c} \left[ \frac{5\alpha_2^{(0)}}{2} - \left( 1 + \frac{5}{2} \alpha_1^{(0)} \right) \right]; \\ \Delta \cdot R_3^{(0)} &= \frac{2\mu \alpha_2^{(0)} A_2^{(0)} B_1}{3} \left( 1 + \frac{5}{2} \alpha_1^{(0)} \right); \\ \Delta \cdot R_4^{(0)} &= \frac{2\mu \alpha_2^{(0)} A_2^{(0)} B_1}{3\eta c} \left( 1 + \frac{5}{2} \alpha_1^{(0)} \right); \end{aligned} \quad (6.34)$$

$$\Delta \cdot R_5^{(0)} = \frac{\alpha_1^{(0)} \rho_1^{(0)} (1 - A_2^0)}{\tau_p} \cdot \left( \frac{M_2}{c} + \frac{B_1}{2} \right);$$

$$\Delta \cdot R_6^{(0)} = \frac{\alpha_1^{(0)} \rho_1^{(0)} (1 - A_2^0)}{\tau_p \eta} \cdot \left( M_2 - \frac{c B_1}{2} \right); \quad \Delta \cdot R_7^{(0)} = \frac{M_4}{c};$$

$$M_1 = \frac{\rho_2^{(0)}}{\rho_1^{(0)}} + \frac{3kT\xi_1 \alpha_2^{(0)} (c^2 B_1 - 1)}{2\pi a^3 \rho_1^{(0)} \alpha_1^{(0)} c^2}, \quad M_2 = \frac{1}{c} \left[ \frac{1}{2} c^2 B_1 + \frac{\alpha_2^{(0)}}{\alpha_1^{(0)}} (c^2 B_1 - 1) \right],$$

$$M_3 = \frac{a_0}{b_0 c^3} \left[ \alpha_1^{(0)} c^2 L_1 \frac{\rho_2^{(0)}}{\rho_1^{(0)}} - \alpha_1^{(0)} c^2 B_1 - 2\alpha_2^{(0)} (c^2 B_1 - 1) \left( 1 - \frac{3kT\xi_1 L_1}{4\pi a^3 \rho_1^{(0)}} \right) \right],$$

$$M_4 = \frac{c}{a_0} M_3.$$

$$A_1^0 = c^{-1} \alpha_1^{(0)} \left( 1 - \frac{a_0 L_1}{b_0 \rho_1^{(0)}} \right),$$

$$A_2^0 = 2 \left[ \frac{1}{2} + \frac{\rho_1^{(0)}}{\rho_2^{(0)}} - \frac{a_0}{b_0 \rho_2^{(0)} c^2} - \frac{3kT\xi_1}{4\pi a^3 \rho_2^{(0)} c^2} \cdot \left( 1 - \frac{a_0 L_1}{b_0 \rho_1^{(0)}} \right) \right]$$

$$A_3^0 = \frac{c}{\alpha_2^{(0)}} \left[ \alpha_1^{(0)} \rho_1^{(0)} + A_2^{(0)} \alpha_2^{(0)} \rho_2^{(0)} \left( 1 - \frac{a_0 L_1}{b_0 \rho_1^{(0)}} \right) - \frac{a_0 \alpha_1^{(0)}}{b_0 c^2} \right];$$

Əgər  $v = \eta R_1 v_1^{(1)} = R_1 v_1$ ,  $X = \eta x$  əvəzləməsi aparsaq, onda (6.33) tənliyindən kiçik  $\eta$  parametrini çıxarmaq olar

$$\frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial \tau} - \frac{R_2}{R_1} \frac{\partial}{\partial \tau} \left( v \frac{\partial v}{\partial \tau} \right) + R_4 c \left( \frac{\partial^2 v}{\partial \tau \partial x} - \frac{\partial^2 v}{\partial \tau^2} \right) + R_6 \left( v + \frac{v^2}{c R_1} \right) -$$

$$- \sum_{l=1}^n (-1)^{l+1} S_{l+1} \frac{\partial^{l+1} v}{\partial \tau^{l+1}} = 0, \quad (6.35)$$

(6.35) tənliyi həm Korteveq-de Vrız və onun törəməsinə görə, həm də diffuzion tip qeyri-xəttiliyə malikdir. Ədəbiyyatda bu tip tənliyə **dalğanın evalyusiya tənliyi** deyilir. (6.35) tənliyini başlanğıc və sərhəd şərtləri daxilində həll

edərək  $v$  və ya  $v_1^{(1)}$  sür'ətini tapırıq. Sonra  $v_1^{(1)}$  qiymətini (6.20)-(6.23) ifadələrində yerinə yazırıq və  $v_2^{(1)}, \rho_2^{(1)}, \sigma_1, \alpha_i^{(1)}, e_1^{(1)}$  axtarılan parametrləri tapırıq. (6.35) tənliyinin sadə hallarda analitik həllini tapmaq mümkündür. Ümumi halda isə bu tənliyin həllini almaq riyazi çətinliklə bağlıdır və ona görə də ədədi üsullardan istifadə olunur.

### §6.3. Evalyusiya tənliyinin xüsusi hallarda analitik həlləri

Maye fazanın dinamik özlüyünü  $\mu \rightarrow 0$  götürsək, onda (6.35) tənliyində 3-cü, 4-cü və 5-ci hədləri yerdə qalan hədlərə nəzərən atmaq olar.

$$\frac{\partial V}{\partial x} + V \frac{\partial V}{\partial T} + R_7 \sum_{l=1}^n (-1)^{l+1} S_{l+1} \frac{\partial^{l+1} V}{\partial T^{l+1}} = 0 \quad (6.36)$$

$T = c^{-1}x - t$ ,  $v = -V$  əvəzləməsinin köməyi ilə alınmış (6.36) tənliyi Korteveq-de Vrız qeyri-xəttiliyinə malik olan evalyusiya tənliyidir. Xüsusi halda (6.36)-dan:

1.  $l = 1$ ,  $\alpha = -R_7 S_2$  götürsək, Byurqers tənliyini alarıq:

$$\frac{\partial V}{\partial x} + V \frac{\partial V}{\partial T} = \alpha \frac{\partial^2 V}{\partial T^2} \quad (6.37)$$

(6.37) tənliyi maye və qaz dinamikasında zərbə dalğasının əmələ gəlməsini təsvir edən ən sadə riyazi modeldir. Koul-Xopf

$$V(x, T) = 2\alpha \frac{\partial \ln F}{\partial T} \quad (6.38)$$

çevirməsinin köməyi ilə (6.37) tənliyini ödəyən

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \alpha \frac{\partial^2 F}{\partial T^2} \quad (6.39)$$

istilik keçirmə tənliyini alırıq. (6.39) xətti tənlik olmasına baxmayaraq, onun üçün qoyulmuş sərhəd şərti (6.38) əvəzləməsindən görüldüyü kimi xətti olmaya bilər. (6.37) tənliyinin həlli haqqında mə'lumat III fəsildə, (6.39) isə I, II fəsillərdə verilmişdir.

2.  $l=2, s_2=0$  və  $\beta = -R_7 S_3$  götürsək, (3.36)-dan Korteveqde Vrız tənliyini alırıq:

$$\frac{\partial V}{\partial x} + V \frac{\partial V}{\partial T} + \beta \frac{\partial^3 V}{\partial T^3} = 0 \quad (6.40)$$

III fəsildə (6.40) tənliyinin knoidol və soliton dalğa həlli haqqında geniş mə'lumat verilmişdir. İndi (6.40) tənliyinin avtomodel həllini

$$\begin{aligned} V(x, T)|_{x=0} &= v_0(T), V(x, T)|_{T=\infty} = 0 \\ V(x, T)|_{T=\infty} &= 0, \frac{\partial V}{\partial T}|_{T=\infty} = 0 \end{aligned} \quad (6.41)$$

sərhəd şərtləri daxilində araşdırıq.  $V = f(x) \cdot \varphi(\xi)$ ,  $\xi = T / g(x)$  əvəzləməsi (6.40) tənliyini aşağıdakı şəkə salır.

$$\begin{aligned} \varphi(\xi) \frac{df}{dx} - \frac{Tg'(x)f(x)}{g^{2(x)}} \frac{d\varphi}{d\xi} + \frac{f^2(x)}{g(x)} \varphi(\xi) \frac{d\varphi}{d\xi} + \\ + \frac{\beta f(x)}{g^3(x)} \frac{d^3\varphi}{d\xi^3} = 0 \end{aligned} \quad (6.42)$$

(6.42) tənliyini

$$\beta \frac{d^3\varphi}{d\xi^3} + \varphi(\xi) \frac{d\varphi}{d\xi} - \frac{\xi}{3x_f} \frac{d\varphi}{d\xi} - \frac{2}{3x_f} \varphi(\xi) = 0 \quad (6.43)$$

şəklinə gətirmək üçün onun əmsallarını müqayisə etməklə  $f(x)$  və  $g(x)$  funksiyaları birqiymətli tə'yin olunmalıdır.

$$f(x) = \left(1 - \frac{x}{x_f}\right)^{-\frac{2}{3}}, \quad g(x) = \left(1 - \frac{x}{x_f}\right)^{\frac{2}{3}},$$

Burada  $x_f$ -dəyişənlərinə ayrılımda ixtiyari parametrdir. (6.43) tənliyinin  $\xi \rightarrow \infty$ -da asimptotik həlli belədir:

$$\varphi(\xi) \rightarrow \frac{A}{\xi^2}$$

Onda  $V$  sür'əti üçün aşağıdakı asimptotik ayrılışı alırıq.

$$V = \left(1 - \frac{x}{x_f}\right)^{\frac{2}{3}} \cdot \varphi(\xi) \rightarrow \frac{A}{T^2} \quad (6.45)$$

$T = \xi \left(1 - \frac{x}{x_f}\right)^{1/3}$ , ifadəsindən görünür ki,  $0 < T \leq T_0$  yarım

kəsiyində giriş impulsun (həyəcanlanmanın) yayılma oblastı qısalır. Qısalma oblastının (mərkəzin) kəskinləşmə rejimində  $v_0(T)$  sür'əti artır, bu oblastın kənarında isə (6.45) düsturu ilə tə'yin olunur.

3.  $l=3$ , olarsa və  $\alpha = -R_7 S_2$ ,  $\beta = -R_7 S_3$ ,  $\gamma = -R_7 S_4$  işarə etsək, (6.36) tənliyindən alırıq:

$$\frac{\partial V}{\partial x} + V \frac{\partial V}{\partial T} + \beta \frac{\partial^3 V}{\partial T^3} = \alpha \frac{\partial^2 V}{\partial T^2} + \gamma \frac{\partial^4 V}{\partial T^4} \quad (6.46)$$

Bu tənliyin əmsalları  $\beta = 4\sqrt{\alpha\gamma}$  şərtini ödəyərsə, onda Beklund çevirməsinin

$$V(T, x) = \frac{15}{76} \left( \frac{\beta^2}{\gamma} - 16\alpha \right) \frac{\partial \ln F}{\partial T} + \quad (6.47)$$

$$+ 15\beta \frac{\partial^2 \ln F}{\partial T^2} - 60\gamma \frac{\partial^3 \ln F}{\partial T^3}$$

köməyi ilə (6.46) tənliyini analitik həll etmək olur.  $F(T, x)$

funksiyasını

$$F(T, x) = 1 + \exp\left(\sqrt{\frac{\alpha}{\gamma}}T - \alpha x\right)$$

şəkində götürüb, (6.47) ifadəsində nəzərə alsaq, taparıq:

$$V(T, x) = 15\sqrt{\frac{\alpha}{\gamma}}ch^{-1}\left[\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\alpha}{\gamma}}\left(T - 6\alpha\sqrt{\frac{\alpha}{\gamma}}x\right)\right] \times \\ \times \left\{1 + th\left[\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\alpha}{\gamma}}\left(T - 6\alpha\sqrt{\frac{\alpha}{\gamma}}x\right)\right]\right\} \quad (6.48)$$

(6.48) ifadəsi (6.46) tənliyinin soliton (ayrılmış) dalğa həllidir və onun yeganə maksimumu var:

$$\max V(T, x) = \frac{160\alpha}{9} \sqrt{\frac{\alpha}{\gamma}}$$

və  $\xi \rightarrow T \rightarrow \infty$   $\left(\xi = T - 6\alpha\sqrt{\frac{\alpha}{\gamma}}x\right)$  olduqda,

$$\lim_{T \rightarrow \infty} V(T, x) = 0$$

olur.

#### §6.4. Sıxılmayan suspenziyanın çoxölçülü hidrodinamik tənlikləri

Suspenziyanın və digər dispers mühitin axını zamanı fazaların həm konvektiv, həm də diffuziya nəticəsində paylanması baş verir ki, bu da asılı hissəciklərin konsentrasiyasının müəyyən formasını yaradır. Təzyiq və fazaların sürətlər sahəsi kimi konsentrasiyalar sahəsi də mə'lum olmayan funksiyalardır. Bütün bu məchullar baxılan axın üçün sərhəd şərtləri daxilində dispers mühit hidromexanikasının



tənliklər sistemini həll etməklə tə'yin olunmalıdır.

Eyni hissəciklərdən ibarət kiçik dispersiyalı mühit üçün fazaların saxlanması birözlü tənlikləri (6.1)-(6.6) şəklində verilmişdir. Çoxölçülü halda və  $\sigma_{11} = 0$  olduqda, suspenziyanın fazalarının kütləsinin və impulsunun saxlanması tənlikləri aşağıdakı kimi olar:

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \nabla(\varepsilon \bar{v}) = 0, \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla(\rho \bar{w}) = 0, \quad (6.49)$$

$$d_0 \varepsilon [\partial / \partial t + (\bar{v} \cdot \nabla) \bar{v}] = -\bar{\nabla} P + \nabla \otimes \sigma - \bar{f} - \varepsilon d_0 \bar{\nabla} U,$$

$$d_1 \rho [\partial / \partial t + (\bar{w} \cdot \nabla) \bar{w}] = \bar{f} - \rho d_1 \bar{\nabla} U.$$

Burada  $d_0, d_1$  - maye və hissəciyin materialının sıxlığı,  $\rho$  - dispers fazanın həcmi konsentrasiyası, əvvəlki paragraflardakı  $\alpha_1$  - ilə eynidir:  $\varepsilon = 1 - \rho$ ;  $U$  - xarici qüvvə sahəsinin potensialı:  $\bar{g} = -\bar{\nabla} U$ ;  $\bar{v}, \bar{w}$  - mayenin və dispers fazanın orta sür'əti;  $P$  - mayenin təzyiqi;  $\bar{f}$  - fazalararası qarşılıqlı tə'sir qüvvəsi;  $\sigma$  - effektiv özlü gərginlik tenzoru və

$$\sigma = 2\eta e, \quad e = \frac{1}{2} \left\| \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right\|. \quad (6.50)$$

Kifayət qədər kiçik hissəciklər üçün vahid həcmdəki fazalararası qarşılıqlı tə'sir qüvvəsi aşağıdakı kimidir:

$$\bar{f} = \bar{f}_A + \bar{f}_S + \bar{f}_B + \bar{f}_F + \bar{f}_I + \bar{f}_M + \bar{f}_T. \quad (6.51)$$

(6.51)-in sağ tərəfindəki qüvvələr uyğun olaraq effektiv üzme qüvvəsi (Arximed), özlü qarşılıqlı tə'sir (Stoks), Basse, Foksen, ətalət, Maqнус və termodinamik qüvvələrdən ibarətdir. Eyni kiçik kürəcikli suspenziyalar üçün bu qüvvələr aşağıdakı kimidir:

$$\bar{f}_A = \rho d \left[ \bar{\nabla} U + \left( \frac{\partial}{\partial t} + \bar{w} \cdot \nabla \right) \bar{w} \right], \quad \bar{f}_S = \frac{9}{2} \rho M(\rho) \frac{\eta_0}{a^2} (\bar{v} - \bar{w}),$$

$$\bar{f}_B = \frac{9}{2} \rho \left[ \frac{(1-\rho)M}{\pi} \right]^{1/2} \left( \frac{\eta_0 d_0}{a^2} \right)^{1/2} \int_{-\infty}^{\infty} \left( \frac{\partial}{\partial t} + \bar{w} \cdot \bar{\nabla} \right) (\bar{v} - \bar{w}) \frac{d\tau}{\sqrt{t-\tau}},$$

$$\bar{f}_F = \frac{3}{4} \rho M l_0 \nabla \bar{v}, \quad (6.52)$$

$$\bar{f}_I = \frac{3}{2} \rho (1-\rho) \left[ 1 + \rho \left( \frac{1}{2} + \frac{15}{4} M \right) \right] \times d_0 \left( \frac{\partial}{\partial t} + \bar{w} \cdot \bar{\nabla} \right) \cdot (\bar{v} - \bar{w}),$$

$$\bar{f}_M = 6,46 \frac{3\rho}{4\pi a} d \left[ \eta_0 M(\rho) \left| \frac{dv}{dy} \right| \right]^{1/2} \left[ \bar{u} \times \bar{l}_\omega \right],$$

$$\bar{f}_T = -\frac{3\rho}{4\pi a^3} \left( \frac{\partial \mu}{\partial \rho} \right)_{P,T} \bar{\nabla} \rho.$$

Burada

$$\eta = M(\rho) \eta_0, \quad M(\rho) = \frac{2}{2-5\rho}; \quad d = \varepsilon d_0 + \rho d_1, \quad (6.53)$$

$\eta, \eta_0$ -suspenziyanın və bircinsli mayenin özlüyü,  $M(\rho)$ -effektiv özlük;  $d$ -suspenziyanın sıxlığıdır,  $v_0 = \eta_0 / d_0$ ;  $a$ -hissəciyin radiusu;  $\bar{l}_\omega$ -sür'ət axını (burulğanı) istiqamətində vahid vektor;  $\bar{u} = \bar{v} - \bar{w}$   $\mu$ -hissəciklərin kimyəvi potensialı olub

$$\mu = \mu^0 + kTF(\rho), \quad (6.54)$$

ifadəsinə bərabərdir.  $\mu^0$  -  $\rho$ -dan asılı olmayan toplanandır,

yə'ni  $\frac{\partial \mu^0}{\partial \rho} = 0$ ,  $k$ -Bolsman sabiti,  $T$ -mütləq temperaturdur.

$$F(\rho) = \ln \rho - \rho + \rho \frac{8-5\rho}{(1-\rho)^2}. \quad (6.55)$$

Suspenziyanın hidrodinamik tənliklərindən istifadə edərək, bə'zi konkret məsələləri həll edək.

## §6.5. Dairəvi boruda suspenziyanın axını zamanı hissəciklərin paylanması

Kiçik hissəcikli monodispers suspenziyanın hərəkətinə baxaq. Bərabər sıxlıqlı suspenziyalarda ağırlıq və Arximed qüvvələri fazaların bir-birinə nisbətən sürüşməsinə yaratmışdır. Əgər sürüşmə sür'ətləri qiymətcə hər iki fazanın orta sür'ətindən çox kiçikdirsə, onda fazaların sıxılmamazlıq şərtini nəzərə almaqla, kütlə və tam impulsun saxlanması şərtlərini aşağıdakı kimi yazmaq olar:

$$\nabla \vec{v} = 0, \quad -\nabla P + 2\overline{\nabla}(\eta \nabla \vec{e}) = 0, \quad (6.56)$$

burada  $\vec{v}$  -suspenziyanın orta sür'əti, P-xarici kütləvi qüvvələri nəzərə alınmaqla təzyiq, e-sür'ətlər sahəsinə görə qurulmuş deformasiya sür'əti tenzoru,  $\eta = M(\rho)\eta_0$  -suspenziyanın effektiv özlüyü ( $\eta_0$  -mayenin özlüyü,  $M(\rho)$  dispers fazanın  $\rho$  -həcmi konsentrasiyasından asılı artan funksiyadır ( $M(0) = 1$ ).

Birölçülü Puazeyl axını üçün (6.56) tənlikləri aşağıdakı kimi olur:

$$-\frac{\partial P}{\partial z} + \eta_0 \frac{1}{x^m} \frac{d}{dx} \left( x^m M \frac{dv}{dx} \right) = 0, \quad -\frac{\partial P}{\partial x} = 0, \quad (6.57)$$

( $m$  parametri müstəvi və oxa simmetrik hərəkət üçün uyğun olaraq sıfır və vahidə bərabər olur.) burada  $z$  və  $x$ -uzununa və eninə koordinatlarıdır. (6.57) tənliklərini tamamlamaq üçün həmin tənliklərə uyğun suspenziyanın fazalarının hər hansı birinin tənliyindən istifadə edək.

Ox boyunca maye tərəfindən hissəciyə  $\vec{f}_s$  Stoks qüvvəsi və  $\vec{f}_F$  Foksen qüvvəsi tə'sir edir. Vahid həcmdə zəif (durulaşdırılmış) suspenziyalar üçün bu qüvvələrin ifadə

dəsi aşağıdakı kimidir:

$$\vec{f}_s = \rho \frac{9}{2} \cdot \frac{\eta_0}{a^2} M(\rho) \vec{u}, \quad \vec{f}_F = \rho \frac{3}{4} \eta_0 M(\rho) \Delta \vec{v}, \quad (6.58)$$

burada  $\vec{u} = \vec{v} - \vec{w}$  sürüşmə sür'ətidir.  $\vec{v}$  və  $\vec{w}$  uyğun olaraq maye və hissəciyin orta sür'ətidir. Əgər dispers fazanın impulsunun saxlanması tənliyini  $OX$  oxu boyunca proyeksiyalsaq, onda

$$u = -\frac{a^2}{6M(\rho)} \cdot \frac{1}{x^m} \cdot \frac{d}{dx} \left( x^m M \frac{dv}{dx} \right), \quad (6.59)$$

münasibətini alırıq. Eyni qayda ilə vahid həcmdəki bütün hissəciklərə tə'sir edən eninə qaldırıcı qüvvələri tə'yin edək. Bunun üçün bir hissəcik üçün Sefman tərəfindən müəyyən edilmiş qüvvədən istifadə edək:

$$f_M = \rho \frac{3 \cdot 6,46}{4\pi a} d \left[ v_0 M \left| \frac{dv}{dx} \right| \right]^{1/2} u \cdot \text{sign} \left( \frac{dv}{dx} \right), \quad (6.60)$$

burada  $v_0$  -mayenin kinematik özlüyüdür. (6.60) qüvvəsinin tə'siri altında, burada konsentrasiyanın qeyri-bircins profili yaranır. Bu qeyri-bircinslilik termodinamik qüvvənin yaranmasına səbəb olur və baxılan birölçülü axının vahid həcmdəki bütün hissəciklər üçün

$$f_T = -\frac{3\rho}{4\pi a^3} \left( \frac{\partial \mu}{\partial \rho} \right)_{p,T} \frac{d\rho}{dx}, \quad (6.61)$$

ifadəsi doğrudur. Burada  $\mu$  -hissəciklərin kimyəvi potensialıdır, (6.61) ifadəsində diferensiallama sabit təzyiq və temperaturda yerinə yetirilir. (6.61) və (6.60) ifadələrinin bərabərliyindən dispers fazanın impulsunun saxlanması tənliyinin eninə komponenti aşağıdakı kimi olur:

$$\left(\frac{\partial \mu}{\partial \rho}\right)_{P,T} \frac{d\rho}{dx} = 6,46a^2 d \left[ v_0 M \left| \frac{dv}{dx} \right| \right]^{1/2} u \operatorname{sign} \left( \frac{dv}{dx} \right). \quad (6.62)$$

(6.59) və (6.62) tənlikləri konsentrasiyasının profilini tapmağa imkan verir. Suspenziyanın impulsunun saxlanması tənliyində termodinamik qüvvənin nəzərə alınması, dispers məhlulların riyazi modeləşdirilməsində diffuziya hadisəsinin nəzərə alınmasından daha təbii və məqsədəuyğundur. İndi

$$-\frac{\partial P}{\partial z} \rightarrow P \quad (6.63)$$

kimi qəbul edib, ölçüsüz dəyişənlərə keçsək:

$$\left\{ \begin{array}{l} \xi \\ \zeta \end{array} \right\} = \frac{1}{R} \left\{ \begin{array}{l} x \\ z \end{array} \right\}, \quad \left\{ \begin{array}{l} V \\ U \end{array} \right\} = \frac{\eta_0}{PR^2} \left\{ \begin{array}{l} v \\ u \end{array} \right\}, \quad (6.64)$$

(6.59) ifadəsini (6.57) və (6.62) tənliklərində nəzərə almaqla, axtarılan  $V(\xi)$  və  $\rho(\xi)$  funksiyaları üçün aşağıdakı tənliklər sistemini alırıq:

$$\frac{1}{\xi^m} \cdot \frac{d}{d\xi} \left( \xi^m M \frac{dV}{d\xi} \right) = -1, \quad P = \text{const}, \quad (6.65)$$

$$M \frac{dF}{d\rho} \cdot \frac{d\rho}{d\xi} = \Gamma \left| M \frac{dV}{d\xi} \right|^{1/2} \frac{1}{\xi^m} \cdot \frac{d}{d\xi} \left( \xi^m M \frac{dV}{d\xi} \right),$$

burada

$$\Gamma = \frac{6,46}{6} \cdot \frac{a^4 (PR)^{3/2}}{d^{1/2} v_0 kT}. \quad (6.66)$$

Axının simmetriklilik və mayenin borunun divarına yapışma şərtindən istifadə etsək,  $V$  və  $\rho$  üçün sərhəd şərtlərini yazıb bilərik:

$$\xi = 1 \quad \text{olduqda} \quad V = 0.$$

$$\xi = 0 \text{ olduqda } \frac{dV}{d\xi} = 0 \quad (6.67)$$

Əlavə şərt kimi, ya hissəciklərin en kəsiyi üzrə orta qiymətindən  $\langle \rho \rangle$ , ya da konsentrasiyasının orta sərfinin  $\rho_f$  mə'lum qiymətindən istifadə etmək olar.

$$(1+m) \int_0^1 \rho(\xi) \xi^m d\xi = \langle \rho \rangle, \quad (6.68)$$

$$\int_0^1 \rho(\xi) V(\xi) d\xi \left( \int_0^1 V(\xi) \xi^m d\xi \right)^{-1} = \rho_f.$$

(6.65)-(6.68) məsələsinin qapanması üçün  $M(\rho)$  funksiyasını aproksimasiya edib, bütün  $\rho$  intervalında yararlı olan

$$M(\rho) = (1-\rho)^{-5/2}, \quad (6.69)$$

ifadəsindən istifadə edək. (6.65)-in birinci tənliyində (6.67)-ni nəzərə almaqla

$$M \frac{dV}{d\xi} = -\frac{\xi}{m+1}, \quad (6.70)$$

ifadəsini alırıq. Onda (6.65)-in ikinci tənliyini kvadraturada yazı bilərik.

$$I(\rho) - I(\rho_0) = \frac{2}{3} \cdot \frac{\Gamma}{\sqrt{m+1}} \xi^{3/2}, \quad 0 \leq \xi \leq 1, \quad (6.71)$$

burada  $\rho_0$  -  $\xi = 0$  simmetriya oxu və ya  $\xi = 0$  müstəvisi üzərində konsentrasiyasının,  $\rho_*$  - isə sıx yığılmış konsentrasiyasının maksimal qiymətidir. (6.71)-dən alırıq

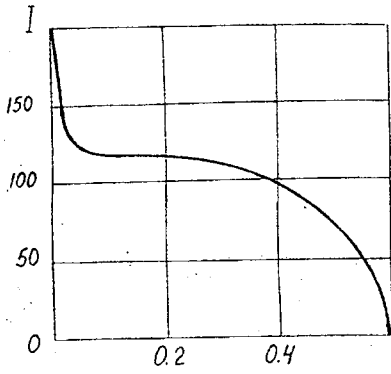
$$I(\rho) = \frac{2}{3} \cdot \frac{\Gamma}{\sqrt{m+1}} \left( \xi^{3/2} - \xi_*^{3/2} \right), \quad \xi_* \leq \xi \leq 1, \quad (6.72)$$

$$\rho = \rho_*, \quad 0 \leq \xi \leq \xi_*$$

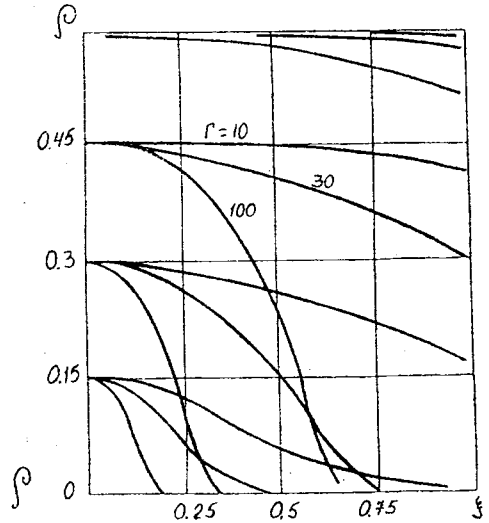
(6.71) və (6.72) ifadələrində

$$I(\rho) = \int_{\rho}^{\rho_*} M(\rho) \frac{dF}{d\rho} d\rho \quad (6.73)$$

funksiyası daxil edilmişdir. Bu funksiyanı (6.64) və (6.69)-dan istifadə etməklə, mə'lum kəmyyötlərlə ifadə etmək olar. Lakin onu hesablama metodları ilə qurmaq daha asandır.  $\rho_* = 0,6$  olduqda hesablamanın nəticəsi şəkil 6.1-də verilmişdir.



Şəkil 6.1



Şəkil 6.2

(6.71) və (6.72) tənliklərindən istifadə edərək,  $\rho_0$  və  $\Gamma$  parametrinin müxtəlif qiymətlərində müstəvi və oxa simmetrik axınlar üçün konsentrasiyanın profilini qurmaq olar. Şəkil (6.2)-də  $\rho_0$  və  $\Gamma$  parametrinin müxtəlif qiymətlərində dairəvi boruda suspenziya axını zamanı hissəciklərin konsentrasiyasının profili qurulmuşdur. Göründüyü kimi  $\Gamma$  parametrinin kifayət qədər böyük qiymətlərində hissəciklər axının mərkəzinə yığılır; bu effekt konsentrasiyanın artması ilə zəifləyir.  $\rho$ -nun kiçik qiymətlərində  $F \approx \ln \rho$ ,  $M \approx 1$  olduğun-

dan (6.72) və (6.73) ifadələrindən

$$\rho = \rho_0 \exp\left(-\frac{2}{3} \cdot \frac{\Gamma}{\sqrt{m+1}} \xi^{3/2}\right) \quad (6.74)$$

alınır. Tapılmış  $\rho(\xi)$  funksiyasından istifadə etməklə (6.70) tənliyindən ölçüsüz sür'ətlər profilini qurmaq olar.

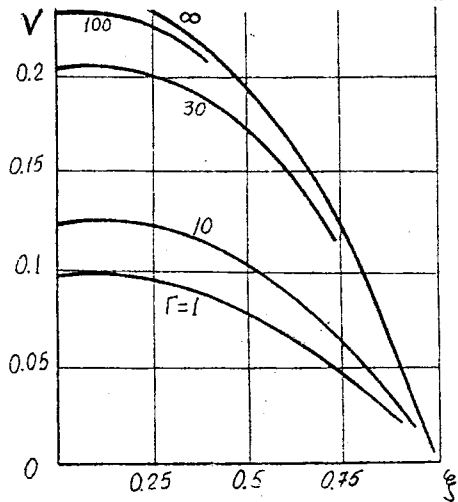
$$V(\xi) = \frac{1}{m+1} \int_{\xi}^1 \frac{\xi d\xi}{M(\rho)}, \quad \xi_* \leq \xi < 1, \quad (6.75)$$

$$V(\xi) = V(\xi_*) = V_*, \quad 0 < \xi < \xi_*.$$

Şəkil 6.2-dən konsentrasiyanın profilinə uyğun olaraq,

$\rho_0 = 0,3$  qiymətində  $V(\xi)$  funksiyasının qrafiki şəkil 6.3-də göstərilmişdir.

Hissəcikləri sıx yığılmış nüvəsi olan axınlar üçün ölçüsüz sür'ətlər profili şəkil 6.4-də təsvir olunmuşdur. (6.75) ifadəsi  $\Gamma$  və  $\rho_0$  (yaxud  $\xi_*$ ) parametrlərinin müxtəlif qiymətlərində suspenzi-



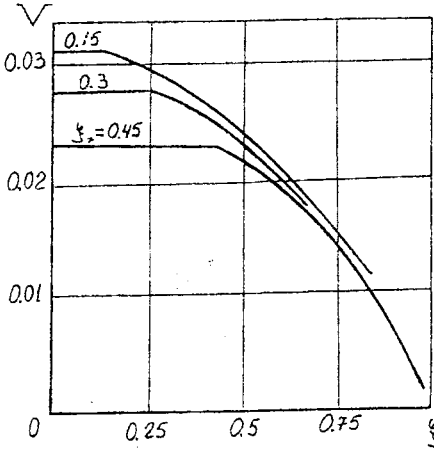
Şəkil 6.3

yanın ölçüsüz həcmi sərfələrini hesablamğa imkan verir. Bu zaman  $Q$  sərfi ilə yanaşı, hissəcikləri bircinsli paylanmış ( $\rho = \langle \rho \rangle$ ) suspenziyanın analogi  $Q^0$  kəmiyyətinə baxmaq olar. Onda

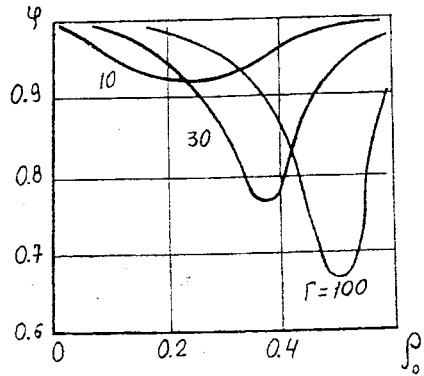
$$\varphi = \frac{Q^0}{Q} = \frac{1}{16M(\langle \rho \rangle)} \left( \int_0^1 \xi V(\xi) d\xi \right)^{-1}, \quad (6.76)$$



nisbəti faktiki olaraq suspenziyanın paylanması nəticəsində müqavimətin azalması əmsalını ifadə edir. Bu əmsal axının psevdoplastik xassəsini xarakterizə edir və  $\Gamma$  parametri artıqca güclənir.  $\varphi$  -nin  $\rho_0$  və  $\Gamma$  parametrindən asılılığı şəkil 6.5-də verilmişdir.



Şəkil 6.4



Şəkil 6.5

### § 6.6. Broun hissəcikli suspenziyanın həlqəvari yarıqda hərəkəti

Quyuların qazılması problemləri ilə əlaqədar olaraq iki koaksial boru arasındakı yarıqda laminar hərəkət zamanı hissəciklərin paylanması mühüm əhəmiyyət kəsb edir. Bu məsələdə də fərz edəcəyik ki, hissəciklər çox kiçik olub, yalnız broun pulasiya hərəkəti edir və hissəciklə mayenin sıxlıqları fərqi nəzərə alınmır.

Baxılan axın üçün impulsun saxlanması tənliklərinin OX oxu boyunca komponenti aşağıdakı kimi olar:

$$\eta_0 \frac{1}{\Gamma} \cdot \frac{d}{dr} \left( rM \frac{dv}{dr} \right) = \frac{dP}{dz} - gd, \quad (6.77)$$

burada  $d = (1 - \rho)d_0 + \rho d_1$ ,  $\rho$  hissəciklərin həcmi konsentrasiyası,  $v$ -mayenin orta sür'əti,  $M(\rho)$ -nisbi özlük,  $P$ -təzyiq,  $r$ -radial koordinant,  $z$ -oxu isə şaquli olaraq aşağıya yönəlmişdir.

Dispers fazanın impulsunun saxlanması tənliklərini OZ oxu və  $r$  radiusu boyunca proyeksiyalayaq:

$$\begin{aligned} f_S + f_F + f_A + \rho d_1 g &= 0, \\ f_N + f_T &= 0. \end{aligned} \quad (6.78)$$

(6.78) tənliyinin birincisində Stoks, Foksen və Arximed qüvvələrindən istifadə olunmuşdur.

$$\begin{aligned} \bar{f}_S &= (9\rho M/2)\eta_0 a^{-2} \bar{u}, \quad u = v - w, \\ \bar{f}_F &= (3\rho/4)\eta_0 \bar{\nabla}(M \nabla \bar{v}), \\ \bar{f}_A &= -\rho \bar{g} d \end{aligned} \quad (6.79)$$

burada  $w$ -dispers fazanın hissəciyinin orta sür'ətidir.

(6.78) -tənliyinin ikincisi isə iki qüvvədən ibarətdir: qeyri-xətti eninə qüvvə

$$f_N = \frac{3 \cdot 6,46 \rho}{4\pi a} d \left( \frac{\eta_0}{d_0} M \left| \frac{dv}{dx} \right| \right)^{1/2} u \cdot \text{sign} \frac{dv}{dx} \quad (6.80)$$

və fazalararası qarşılıqlı termodinamik qüvvə

$$\bar{f}_T = -\frac{kT}{\sigma} \cdot \frac{d\rho L(\rho)}{d\rho} \bar{\nabla} \rho, \quad (6.81)$$

Burada

$$\sigma = \frac{4}{3} \pi a^3$$

$$L(\rho) = 2 \frac{\ln(1-\rho)}{\rho} + 3 \frac{1-2\rho}{1-\rho} + \frac{\rho}{2} \frac{15-8\rho-\rho^2}{(1-\rho)^2}$$

$k$ -Bolsman sabiti,  $T$ -mütləq temperaturdur. Konkret hesab-

lamalarda nisbi özlük üçün

$$M(\rho) = (1 - \rho)^{-5/2} \quad (6.82)$$

Eynşteyn ifadəsindən istifadə olunur. Yuxarıdakı tənliklərdə  $\rho(r)$ -in tapılması ilə əlaqədar olan inteqral sabitlərini təyin etmək üçün aşağıdakı şərtlərin birindən istifadə edək.

$$\langle \rho \rangle_1 = \frac{2}{R^2 - R'^2} \int_{R'}^R \rho(r) r dr, \quad \langle \rho \rangle_2 = \frac{\int_{R'}^R \rho(r) v(r) r dr}{\int_{R'}^R v(r) r dr} \quad (6.83)$$

burada  $\langle \rho \rangle_1$  və  $\langle \rho \rangle_2$  - mə'lum kəmiyyətlər olub, uyğun olaraq dispers fazanın kəsik üzrə və axında konsentrasiyanın orta qiymətləridir.  $R$  və  $R'$  ( $R > R'$ ) eyni oxlu şaquli kəmərlərin radiuslarıdır. Yuxarıdakı tənliklərdən istifadə edərək iki məsələni həll edək:

a) əvvəlcə bərabərsıxlıqlı suspenziyanın  $d_0 = d_1 = d$  həlqəvari yarıqda axını məsələsinə baxaq. Alınmış nəticələri tədqiq etmək və hesablamaları sadələşdirmək üçün ölçüsüz kəmiyyətlərə keçək.

$$(\xi, \zeta) = \frac{1}{R} (x, z) ; (V, W) = \frac{\eta_0}{R^2 P} (v, \omega); \quad P \rightarrow \frac{dP}{dz}, \quad (6.84)$$

$P = const$  kəmiyyətini müsbət hesab etmək olar, belə ki, bərabərsıxlıqlı suspenziyanın hərəkətində kanalın oriyentasiyasının əhəmiyyəti yoxdur və buna görə də (6.78) tənliklərində ağırlıq və üzme qüvvələrinin tə'siri ilə əlaqədar olan komponentlər iştirak etmir. (6.77) tənliyində tam suspenziyaya tə'sir edən və  $g$  sərbəstdüşmə tə'cili ilə mütənəsb olan ağırlıq qüvvəsi, sabit olub, onu effektiv təzyiqlə qradiyenti  $P$ -yə daxil etmək olar. Deyilənləri və (6.84) şərtini nəzərə almaqla, (6.77) tənliyinin birincisindən fazaların  $U = V - W$  -

ölçüsüz sürüşmə sür'ətlərinin ifadəsini alırıq. Sonra bu ifadəni (6.78)-in ikinci tənliyində istifadə etsək, aşağıdakı münasibətləri alırıq:

$$\frac{M}{\rho} \cdot \frac{d\rho L(\rho)}{d\rho} \frac{d\rho}{d\xi} = \Gamma \left| M \frac{dV}{d\xi} \right|^{1/2} \operatorname{sign} \left( \frac{dV}{d\xi} \right), \quad (6.85)$$

$$\Gamma = \frac{6,46}{6} \cdot \frac{a^4 d_0^{1/2} (RP)^{3/2}}{\eta_0 kT}.$$

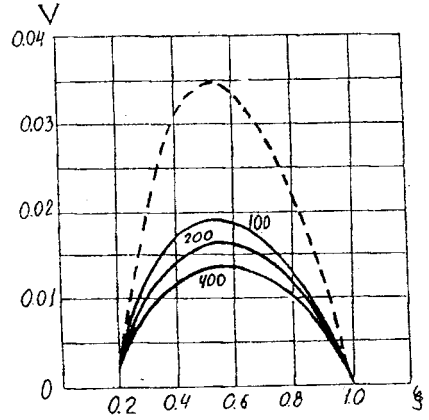
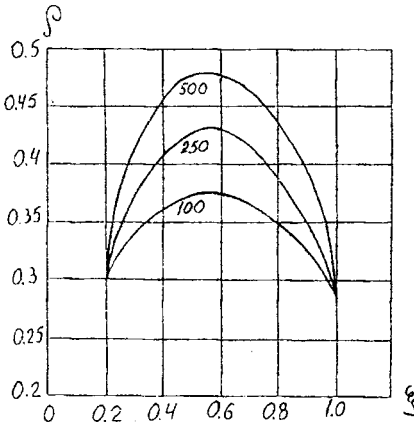
(6.77) tənliyində (6.84)-i nəzərə almaqla, aşağıdakı tənliyi alırıq:

$$\frac{d}{d\xi} \left( \xi M \frac{dV}{d\xi} \right) = -\xi. \quad (6.86)$$

(6.85) və (6.86) tənlikləri üçün sərhəd şərtlərini aşağıdakı kimi qəbul edək.

$$V(1) = V(\xi') = 0, \quad \rho(\xi') = \rho_0, \quad \xi' = R' / R, \quad (6.87)$$

$\rho(\xi)$  funksiyası üçün (6.83) sərhəd şərti münasib olmadığına görə konkret hesablamalarda (6.87) sərhəd şərtindən istifadə edəcəyik. Lakin texnoloji təkliflərdə istifadə etmək məqsədi ilə  $\rho_0$  parametri ilə  $\langle \rho \rangle_1$ , və  $\langle \rho \rangle_2$  orta konsentrasiyaları arasında əlaqə müəyyən olunacaq. Şək.6.6-da  $\Gamma$  parametrinin müxtəlif qiymətlərində konsentrasiyanın  $\rho(\xi)$  və mayenin ölçüsüz  $V(\xi)$  profili qurulmuşdur. Hesablama zamanı  $\rho_0 = 0,3$ ,  $\xi' = 0,2$  götürülmüşdür. Göründüyü kimi  $\Gamma$  parametrinin qiyməti artdıqca hissəciklərin qeyri-bircinsli paylanması güclənir ki, buna uyğun sür'ətlərdə bütün en kəsik üzrə  $\rho(\xi) \equiv \rho_0 = 0,3$  qiymətinə uyğun qurulmuş və şək.6.6-da ştrixlə göstərilmiş  $V(\xi)$  sür'ətindən kifayət qədər fərqlənir.



Şəkil 6.6

Şəkil 6.7-də  $\Gamma$  parametrinin müxtəlif qiymətlərində  $\rho_0$  ilə  $\langle \rho \rangle_1$  və  $\langle \rho \rangle_2$  arasında əlaqə qurulmuşdur. Qrafikdə bütöv xətlər  $\langle \rho \rangle_1$ , qırıq xətlər isə  $\langle \rho \rangle_2$  konsentrasiyasına uyğundur.

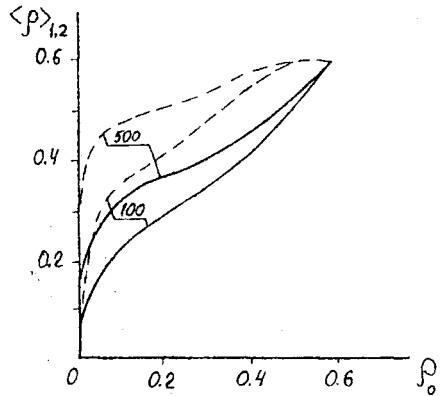
b) İndi isə fərz edək ki, hissəciyin sıxlığı  $d_1$ , mayenin sıxlığından  $d_0$ , iki dəfə böyükdür, yə'ni

$$\chi = \frac{d_1}{d_0} = 2. \text{ Yenə də}$$

əsas tənliklər olaraq (6.77) və (6.78) tənliklərindən istifadə edəcəyik. (6.78)-in

birinci tənliyinə daxil

olan Faksen qüvvəsi digər qüvvələrə nəzərən çox kiçikdir. Buna görə də fazalararası sürüşmə qüvvəsini əsasən ağırlıq və üzmə qüvvələrinin fərqi müəyyən edir.



Şəkil 6.7

Qeyd edək ki, bərabərsızlıqlı suspenziyalarda Faksen qüvvəsinin nəzərə alınması prinsiplial xarakter daşıyır. Belə ki, məhz bu halda sür'ət profilinin qeyri-bircins olması  $U$  sürüşmə sür'ətinin yaranmasına səbəb olur. Bu məsələdə  $P$  kəmiyyəti dedikdə,  $-(dP/dz - d_0g)$  ifadəsi nəzərdə tutulur. Eyni qayda ilə (6.84)-ü (6.77) və (6.78) tənliklərində nəzərə alıb, bir sıra çevirmələr aparsaq, aşağıdakı tənliyi alarıq:

$$\frac{M}{\rho} \frac{d(\rho L(\rho))}{d\rho} \frac{d\rho}{d\xi} = \Gamma^* \left| M \frac{dV}{d\xi} \right|^{\frac{1}{2}} \operatorname{sign} \left( \frac{dV}{d\xi} \right) K(\rho),$$

$$\Gamma^* = \frac{2 \cdot 6,46}{9} \frac{a^4 d_0^{2/3} R^{3/2} P^{1/2} g}{\eta_0 kT}. \quad (6.88)$$

$$K(\rho) = [1 + (\chi - 1)\rho](1 - \rho)(\chi - 1),$$

$$\frac{d}{d\xi} \left( \xi M \frac{dV}{d\xi} \right) = -[1 + \rho(\chi - 1)G]\xi, \quad G = \frac{d_0 g}{P}$$

Laminar hərəkətə baxdığımızdan (boru üçün  $Re < 10^3$ ), sadə qiymətləndirmə ilə  $P$  parametrinin kiçik olması və öz növbəsində  $G = -1$  olması nəticəsinə gəlirik. Başqa sözlə,  $P, G$ -nin belə qiymətləri suspenziyanın yuxarıya doğru laminar axınına uyğundur. Eksperiment və hesablamalar göstərir ki, dispers hissəciklərin axını mərkəzi oxa yığılmaqla müşahidə olunur.

## § 6.7. Fırlanan suspenziyada hissəciklərin paylanması

Bərk cisim kimi fırlanan qabda suspenziyanın laylarla paylanması məsələsinə baxaq. Bu halda hərəkət tənliklərini aşağıdakı kimi göstərmək olar.

$$\frac{d}{dr} \left[ r^2 M \left( \frac{dv}{dr} - \frac{v}{r} \right) \right] = 0, \quad \frac{dP}{dr} = -d|\nabla\Phi|,$$

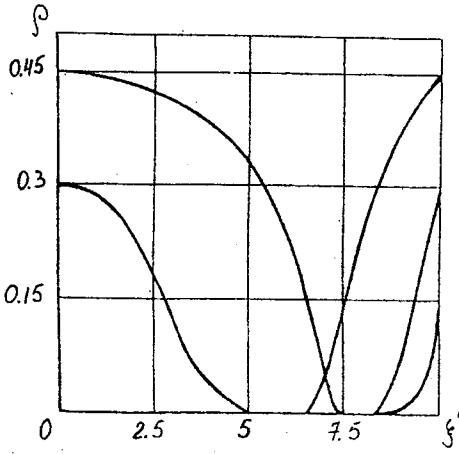
$$f_A + f_T - \rho d_1 |\nabla \Phi| = 0, \quad -|\nabla \Phi| = \frac{v^2}{r}. \quad (6.89)$$

Burada  $v$  sür'ətin tangensial komponenti olub, hissəcik və kəsilməz faza üçün eynidir. Tələb olunur ki,  $r = R$  olduqda  $v = \Omega R$  olsun, burada  $\Omega$  -fırlanmanın bucaq sür'əti,  $R$ -fırlanma oblastının xarici sərhəddinin radiusudur. Bundan əlavə  $r = 0$  olduqda,  $v$ -nin məxsusiyyəti olmalıdır. (6.89)-ün birinci tənliyində  $v = \Omega r$ , üçüncü tənliyində isə Arximed və termodinamik qüvvələrinin ifadələrini nəzərə alsaq və  $\xi = r/R$  ölçüsüz koordinant daxil etsək, onda (6.89) sistemini bir tənliyə gətirmək olar.

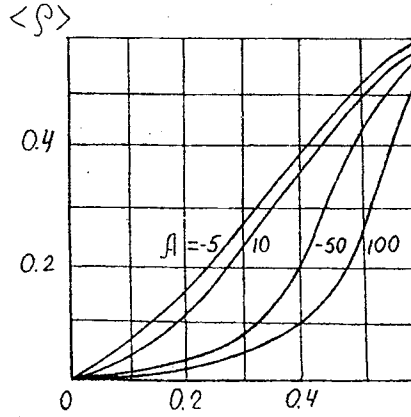
$$\frac{1}{\rho} \cdot \frac{d(\rho L)}{d\rho} \cdot \frac{d\rho}{d\xi} = A(1 - \rho)\xi, \quad A = \frac{4\pi\alpha^3 R^2 d_0 \Omega^2}{3kT} \left( \frac{d_1}{d_0} - 1 \right) \quad (6.90)$$

(6.89)-un ikinci tənliyi təzyiqlər sahəsini tapmağa imkan verir. Yənə də parametr kimi  $\rho(0) = \rho_0$  kəmiyyətinə baxmaq olar. Təzədən  $\xi' = |A|^{1/2} \xi$  ölçüsüz parametri daxil edib, (6.90) tənliyindən yalnız  $\rho_0$  parametrindən asılı olan fırlanan suspenziyanın konsentrasiyasının profilini almaq olar.  $\rho_0$  parametri ilə  $\langle \rho \rangle$  orta konsentrasiya arasında əlaqə profili  $0 < r < R$  dairəsində ortalasdırmanın köməyi ilə almaq olar.

Müxtəlif  $\rho_0$  parametrinə uyğun konsentrasiyanın profili şəkil 6.8-də,  $\rho_0$  və  $\langle \rho \rangle$  arasında əlaqə şəkil 6.9-da göstərilmişdir. Şəkil 6.8-də görüldüyü kimi daha ağır hissəciklər fırlanan suspenziya həcminin xarici sərhəddinə yığılır, yüngül hissəciklər isə mərkəzi oblasta yığılır.



Şekil 6.8



Şekil 6.9



## ӘДӘВІҮАТ

1. **Бреховских Л.М., Гончаров В.В.** Введение в механику сплошных сред. М.: Наука, 1982, 335с.
2. **Буевич Ю.А., Зубарева А.Ю., Исаев А.М.** О гидродинамике суспензий. Инж.физ.журнал., 1989, т.57, №3, с.402-412.
3. **Лойцянский Л.Г.** Механика жидкости и газа. М.: Наука, 1978, 736с.
4. **Мирзаджанзаде А.Х.** Вопросы гидродинамики вязкопластичных и вязких жидкостей в нефтедобыче. Баку, Азнефтиздат, 1959, 409с.
5. **Николаевский В.Н.** Геомеханика и флюидодинамика. М.: Недра, 1996, 447с.
6. **Рамазанов Т.К.** Нелинейные волны в двухфазных системах. Жур. Прикладная механика, Киев, 1996, №9, т.31, с.38-45.
7. **Рамазанов Т.К., Тагиев М.М.** Одномерная динамика нелинейных волн в монодисперсных суспензиях, Баку Университетинин хябярляри, 1999, №1. с.144-151.
8. **Рахматулин А.Х.** Газовая и волновая динамика. Издат. Московского Университета, 1983, 200с.

## M Y N D Ə R İ Ç A T

<b>Maye və qaz mexanikasına giriş .....</b>	<b>3</b>
<b>I fəsil. Hidrodinamika</b>	
§1.1. Maye mexanikasının əsas anlayışları .....	6
§1.2. Hidrodinamikanın tənliklər sistemi. Kəsilməzlik tənliyi .....	10
§1.3. İdeal mayelərin hərəkət tənlikləri. Eyler tənlikləri ....	11
§1.4. Hal tənliyi .....	12
§1.5. Hidrostatika (tarazlıq halları) .....	13
§1.6. Hidrostatik dayanıqlıq şərti. Vyasal tezliyi .....	15
§1.7 Bernulli teoremi .....	17
§1.8 Qərarlaşmış potensiallı qüvvələr sahəsində enerjinin saxlanması qanunu .....	20
§1.9. Mayenin burulğanlı hərəkəti .....	22
§1.10. Sür'ətin sirkulyasiyasının saxlanması haqqında teorem .....	23
§1.11. Mayenin potensiallı hərəkətində hidrodinamikanın hərəkət tənliklər sistemi .....	24
§1.12. İdeal sıxılmayan mayelərin müstəvi hərəkəti .....	25
§1.13. Özlü sıxılan mayelər üçün ümumiləşmiş Nyuton qanunu .....	28
§1.14. Sıxılmayan özlü mayelərin bə'zi reoloji qanunları ...	33
§1.15. Sıxılmayan özlü mayenin axınlarının oxşarlığı .....	36
§1.16. Özlü-plastik mayelərin silindrik boruda qəralaşmış və iki paralel lövhə arasında qəralaşmamış hərəkəti..	39
§1.17. Özlü sıxılmayan mayenin müxtəlif en kəsikli borularda qərarlaşmış axını .....	44
<b>II fəsil. Sərhəd təbəqəsi</b>	
§2.1 Özlü dalğalar .....	49

§2.2. Keyfiyyət mülahizələri. ....	51
§2.3. Sərhəd təbəqəsinin Prandtl tənlikləri .....	53
§2.4. Qərarlaşmış müstəvi sərhəd təbəqəsi məsələsinin təqribi həlli .....	56
§2.5. Qərarlaşmış müstəvi sərhəd təbəqəsinin tənliklərinin avtomodel həlli .....	61
<b>III Fəsil. Mayedə səthi və daxili dalğalar .....</b>	
§3.1. Hidrodinamika tənliklərinin xəttləşməsi .....	66
§3.2. Xətti sərhəd şərtləri .....	68
§3.3. Səthi qravitasiya dalğaları. Harmonik dalğalar .....	70
§3.4. Qravitasiya-kapilyar dalğaları .....	73
§3.5. Daxili dalğaların əsas tənliyi. Bussinesk yaxınlaşması.	76
§3.6. Fırlanan mayelərdə dalğalar .....	78
§3.7. Müstəvi dalğalar .....	80
§3.8. Müstəvi dalğaların şüalanması .....	82
§3.9. Mühitlərin ayrılma sərhədlərindən müstəvi dalğaların əks olunması .....	84
§3.10. Hidrodinamikanın bir sıra qeyri-xətti dalğa tənlikləri .....	87
§3.11. Sonlu amplitudalı müstəvi dalğaların yayılması. Riman dalğaları .....	91
§3.12. Dissipasiyalı dalğalar. Byurqers tənliyi və onun həlli .....	95
§3.13. Uzun dalğalar nəzəriyyəci. Ayrılmış və knoidal dalğalar .....	98
<b>IV Fəsil. Qazın birölçülü qərarlaşmayan hərəkətlərdə sonlu həyacanlamalar.</b>	
§4.1. Boruda boşalma dalğaları .....	105
§4.2. Porşen qabağında qazın hərəkəti .....	116
§4.3. Porşen qabağında qazın hərəkət tənlikləri .....	121

§4.4. Zərbə dalğalarının faktiki tapılma üsulları .....	125
§4.5. Adi partlayış və ya ixtiyari kəsilmənin parçalanması ...	127
§4.6. Sonlu amplitudlu həyacanlanmış qazın oxasimmetrik hərəkəti .....	131
<b>V fəsil. Qarşılıqlı nüfuz edən qatışıqların hidrodinamikası</b>	
§5.1. Qatışıqların kəsilməzlik və Hərəkət tənlikləri .....	134
§5.2. Enerjinin saxlanması tənliyi. ....	137
§5.3. Heterogen qatışıqlar .....	139
§5.4. Sıxılmayan mayelərin hərəkət tənlikləri .....	141
§5.5. Saxlanmayan iki fazalı qatışıqın qərarlaşmış hərəkəti. Qatışıqın tərkibinin dəyişməsi haqqında teorem .....	142
§5.6. Dəyişən en kəsikli borularda sıxılmayan ikifazalı qatışıqın qərarlaşmış hərəkəti .....	144
§5.7. İki fazalı mühitlərdə birölçülü müstəvi dalğaların yayılması .....	146
<b>VI fəsil. Monodispers suspenziya</b>	
§6.1 Monodispers suspenziyanın əsas tənlikləri .....	151
§6.2 Monodispers suspenziyalarda bir ölçülü qeyri-xətti dalğaların evolyusiyaya tənliyi .....	155
§6.3. Ekvolyusiyaya tənliyinin xüsusi hallarda analitik həlləri .....	165
§6.4. Sıxılmayan suspenziyanın çoxölçülü hidrodinamik tənlikləri .....	168
§6.5 Dairəvi boruda suspenziyanın axını zamanı hissəciklərin paylanması .....	171
§6.6. Broun hissəcikli suspenziyanın həlqəvari yarıqda hərəkəti .....	177
§ 6.7. Fırlanan suspenziyada hissəciklərin paylanması .....	182
Ədəbiyyat .....	185