N.F. TAĞIYEV, R.M. QULIYEV,
F.Ə. MIRZƏYEV

İQTİSADİ PROSESLƏRDƏ RİYAZİ MODELLƏŞDIRMƏ

(Nəzəriyyə, model proseslər, test nümunələri)

Dərs vəsaiti

I hissə

Azərbaycan Respublikası Təhsil Nazirliyinin
04 oktyabr 2012-ci il tarixli 1553 saylı əmri ilə təsdiq edilmişdir

"ADİLOĞLU"
Bakı - 2012

Dərs vəsaiti Bakı Dövlət Universitetinin Tətbiqi riyaziyyat və kibernetika fakultəsinin elmi şurasının qərarı əsasında nəşr olunur.

Elmi redaktor: AMEA – nın müxbir üzvü, fizika – riyaziyyat elmləri doktoru, professor M. F. Mehdiyev.

Rəyçilər: - AMEA-nın İqtisadiyyat Institutunun direktoru, iqtisad elməri doktoru, professor Alıyev İsa Hüseyn oğlu.
- BDU – nun optimallaşdırma və idarəetmə kafedrasının dosenti, riyaziyyat elmləri doktoru Tağıyev Rafiq Qələndər oğlu.
-BDU – nun iqtisadi kibernetika kafedrasının dosenti, iqtisad elmləri üzrə fəlsəfə doktoru Abbasova Şərqiyyə Abbas qızı.

Namiq Faiq oğlu Tağıyev, Rafiq Meyxoş oğlu Quliyev, Fərhad Əlif oğlu Mirzəyev
İqtisadi proseslərdə riyazi modelləşdirmə (nəzəriyyə, model proseslər, test nümunələri) I hissə, Dərs vəsaiti, Bakı, **ADİLOĞLU** nəşriyyatı, 2012, 208 səh.

Kitab riyazi modelləşdirmənin iqtisadi proseslərin təhlilində tətbiqinə həsr olunmuşdur. Vəsaitdə riyazi modelləşdirmənin əsas mərhələləri, riyazi modellərin növləri və riyazi aparatın öyrənilən proseslərin tədqiqində istifadə qaydaları göstərilmişdir.

Vəsaitdən respublikanın ali məktəblərinin tətbiqi iqtisadiyyat yönümlü fakultələrində təhsil alan tələbələr istifadə edə bilərlər.

$\frac{4722110018}{121-2012}$ qrifli nəşr

MÜNDƏRİCAT

GIRIŞ

Müasir riyaziyyat elmi özünün müxtəlif elm sahələrində intensiv istifadə olunması ilə digər elmi istiqamətlərdən fərqlənir. Belə ki, riyaziyyat bir sıra elm sahələri üçün hesablamaların kəmiyyət aləti olmaqla yanaşı dəqiq tədqiqat və qarşıya çıxan problemin formalizə olunma metodudur. Digər tərəfdən müxtəlif iqtisadi, ekoloji, bioloji və.s yönümlü məsələlərin həlli və proqnozlaşdırılmasında riyazi üsulların tətbiqi o zaman mümkündür ki, tədqiq olunacaq prosesi müəyyən riyazi münasibətlər sistemi vasitəsilə təsvir etmək mümkün olsun. Bu münasibətlər öyrənilən prosesin riyazi modeli adlanır. Beləliklə, "İqtisadiyyatda riyazi modelləşdirmə" fənnində "model" dedikdə tədqiq olunacaq mühüm praktiki yönümlü proseslərin təhlili və tədqiqini daha dolğun əks etdirən riyazi, fiziki, mexaniki, bioloji və s. qanunauyğunluqlardan irəli gələn düsturlar, təriflər, qaydalar küllüsünü başa düşürük. Deməli, modelləşdirmə termini altında biz tədqiq ediləcək obyekti birbaşa yox, dolayı yolla yəni digər obyektlərin analizinin köməyi ilə yerinə yetirilmə prosesini başa düşürük. Məhz sonunculara bu fəndə model deyəcəyik. Modelin qurulması qarşıya qoyulmuş problemin məqsədindən asılıdır. Belə ki, modeldə iştirak edən və konkret məna kəcb edən parametrlər toplusundan hansına daha çox əhəmiyyət verilməsi bilavasitə qarşıya qoyulan problemin məqsədindən asılıdır. Sonda onu qeyd edək ki, modelləşdirmənin və o cümlədən də riyazi modelləşdirmənin müxtəlif elm sahələrində geniş tətbiqi son dövrlər müasir hesablama texnikasının sürətli inkişafı ilə sıx əlaqəlidir. Belə ki, tədqiq olunan proses barədə informasiyaların yeniləşməsi, artması nəticəsində ilkin model dəyişə və nəticə etibarı ilə təkmilləşə bilər; əvvəlcə nəzərə alınmayan xüsusiyyətlər modelə daxil edilər, nöqsanlar, az əhəmiyyətli parametrlər aradan çıxarıla bilər.

Modelləşdirmə elə tədqiqat üsuludur ki, eksperimentlər modelin üzərində aparılır, alınan uyğun nəticələr isə orijinala aid edilərək nəzərə alınır. Geniş mənada modelləşdirmə dedikdə həm problem yönümlü konkret prosesin modelinin qurulması, həm modelin tədqiqi, həm də tətbiqi başa düşülür.

Riyazi modelləşdirmənin və müasir riyazi üsulların iqtisadi tədqiqatlarda getdikcə daha geniş tətbiqi və yeni hesablama alqoritmlərindən,mükəmməl ədədi üsullardan istifadə olunması təbi zərurətdir.Çünki elə iqtisadi-ekoloji yönümlü problem məsələlər var və mövcud ola bilər ki, riyazi modelləşdirməni tətbiq etmədən bu problemləri həll etmək mümkün olmaz.

Vəsaitin əsas hissəsi onun müəlliflərinin uzun illər boyu Bakı Dövlət Universitetinin İqtisadi Kibernetika ixtisaslaşmasında "Tətbiqi iqtisadiyyatın elementləri", "İqtisadiyyatın riyazi modelləri" və "İqtisadi riyazi modellərdə ekoloji faktorların modelləşdirilməsi" fənnlərinin tədrisinin məhsuludur.

Müəlliflər kitabın əlyazmasının son variantının hazırlanmasında texniki və kompüter köməkliyi göstərmiş tətbiqi riyaziyyat və kibernetika fakültəsinin Tk – 04 qrup tələbəsi Eldar Zeynallıya minnətdarlığını bildirirlər.

I FƏSİL

Model anlayışı və modelləşdirmə prosesi. İqtisadi tədqiqatlarda modelləşdirmənin rolu. Modelləşdirmə prosesinin müxtəlif təsvirləri, riyazi iqtisadi baxımdan mərhələləri və təsnifata ayrılması. Riyazi iqtisadiyyat və ekonometrika elm sahələrinin predmeti.

İqtisadiyyatın riyazi modelləri ümumiləşmiş ad olub, iqtisad və riyaziyyat elmi fənlərinin kompleksinin vəhdətinin nəticəsidir. Bu termini ilk dəfə XX əsrin 60-cı illərinin əvvəllərində rus akademiki, statistik və iqtisadçı Nemçinov V.S. (1894-1964) elmə daxil etmişdir. İlk dəfə olaraq o, 1958-ci ildə yuxarıdakı adda (iqtisadiyyatın riyazi modelləri) elmi tədqiqat laboratoriyası yaratmış və az sonra bu laboratoriyanın nəznində hal-hazıra qədər dünya elmi ictimaiyyəti tərəfindən tanınan və Moskva şəhərində yerləşən "ЦЭМИ"("Центрально Экономико- Математический Институт") yaradılmışdır.

İqtisadiyyatın riyazi modelləri iqtisad elmini öyrənən digər predmetlərlə sıx əlaqədə olmasına baxmayaraq bu elmi istiqamətin özünəməxsus tədqiqat obyekti vardır. Belə ki, bu predmetin tədqiqatı ilə məşğul olan əsas elmi metodlar təkmilləşib inkişaf edərək özləri də tədqiqat obyektinə çevrilirlər. Bu elmi istiqamətin dünya elmi ictimaiyyəti tərəfindən əhəmiyyətinə və qiymətləndirilməsinə gəlincə iqtisadiyyat üzrə, lakin öz tədqiqatlarını riyaziyyatla iqtisadiyyatın vəhdətində yerinə yetirən Nobel mükafatçılarının sayına fikir vermək kifayətdir. Qeyd edək ki, Nobel mükafatı iqtisadiyyat üzrə 1968-ci ildə təsis olunmuş və 1969-cu ildən mükafatlandırmağa başlanılmışdır. Məhz bu ildə Yan Tinbergen (Hollandiya) və Raqner A.Friş(Norveç), 1970-ci ildə Pol Samuelson(ABŞ), 1973-cü ildə Vasiliy Leontyev(ABŞ.), 1975-ci ildə Leonid Kantoroviç (keçmiş SSRİ), 1987-ci ildə Robert Solou (ABŞ), 1998-ci ildə Amertiya Sent (Hindistan), 2011-ci ildə Tomas Sargent və Kristofer Sims (ABŞ) və s. bu mükafata layiq görülmüşlər (tam siyahı ilə Nobelprize.org saytında tanış olmaq olar). İqtisadiyyat üzrə Nobel mükafatı laureatlarının sayı bu günə qədər 60 nəfərdən çoxdur. Onlardan 40-a yaxını öz tədqiqatlarını riyazi nöqteyi-nəzərdən iqtisadi problemlərin həllinə tətbiq edənlərdir.

Yuxarıda qeyd etdiyimiz kimi iqtisadi proseslərdə riyazi modelləşdirmə fənninin özünəməxsus tədqiqat obyekti mövcuddur və onun əsas məqsədi konkret iqtisadi, ekoloji, bioloji və s. proseslərin riyazi modellərini qurub modelləşdirmə vasitəsilə modelin qoyulan problemə adekvatlığını (yəni həqiqətə uyğunluğunu) təhlil və tədqiq etməkdir.

"Model" termini istər elmi, istərsə də ümumi danışıq dilində müxtəlif mənalarda işlədilir və hər dəfə konkret situasiyadan asılı olaraq bu terminə müxtəlif mənalar da verilir. Həqiqətdə bu termin latınca "modulus" sözündən götürülmüşdür və mənaca "norma, ölçü, nümunə" və s. mənasında işlədilir. Geniş mənada bu termini təqdim olunan vəsaitdə obraz (şərti və yaxud ideal mənada) və bəzi hallarda proobraz kimi başa düşəcəyik. Riyazi nöqteyi nəzərdən obraz funksiyanın təyin oblastına, proobraz isə onun qiymətlər (dəyişmə) oblastına uyğundur.

$$f : A \to B$$

$$\sin : \underbrace{(-\infty,+\infty)}_{A} \to \underbrace{[-1,1]}_{B}$$

$$B - \textit{obraz}, A - \textit{proobraz}$$

Aydındır ki, qlobus yer kürəsinin modeli(obrazı), hər hansı fotoşəkil onda əks olunan obyektin modeli, xəritə orada əks olunan ərazinin modeli, fizika kursunun $s=v{\cdot}t$ düsturu- obyektin hərəkət tənliyinin modeli, $f'(x)=0$ (Ferma teoremi)- differensiallanan $f(x)$ funksiyasının stasionar(tarazlıq) vəziyyətlərinin təyini modeli və s. Proobraz mənasında modelə misal olaraq gələcəkdə istehsalı nəzərdə tutulan, lakin hal-hazırda hər hansı sərgidə nümayiş etdirilən avtomobillərin, təyyarələrin və s. maketini misal göstərmək olar.

İki obyekt (onlar müxtəlif təbiətli də ola bilər) arasında müəyyən mənada oxşarlıq varsa, onda bu obyektlər arasında orijinal və ya model münasibətləri mövcuddur deyilir. Model öyrənilən obyekti əvəz etməklə yanaşı özünə uyğun, həqiqətdə baş verən proseslər müvafiq riyazi modellərin qurulmasını tələb edir. Riyazi model uyğun tədqiqat obyektində baş verən proseslərin riyazi təsviridir. Bu təsvir kifayət qədər sadə və ya mürəkkəb tənliklərdən, cədvəl, qrafiklərdən və s. ibarət ola bilər.

İqtisadiyyatda riyazi modelləşdirmə fənnində "model" dedikdə tədqiq olunacaq mühüm praktiki yönümlü proseslərin təhlili və tədqiqini daha dolğun əks etdirən riyazi, fiziki, mexaniki, bioloji və s. qanunauyğunluqlardan irəli gələn düsturlar, təriflər, qaydalar küllüsünü başa düşürük. Deməli modelləşdirmə termini altında biz tədqiq ediləcək obyekti birbaşa yox, dolayı yolla, yəni digər obyektlərin analizinin köməyi ilə yerinə yetirilmə prosesini başa düşürük. Məhz sonunculara bu fəndə model deyəcəyik. Modelin qurulması qarşıya qoyulmuş problemin məqsədindən asılıdır. Belə ki, modeldə iştirak edən və konkret məna kəcb edən parametrlər toplusundan hansına daha çox əhəmiyyət verilməsi bilavasitə qarşıya qoyulan problemin məqsədindən asılıdır. Sonda onu qeyd edək ki, modelləşdirmənin və o cümlədən də riyazi modelləşdirmənin müxtəlif elm sahələrində geniş tətbiqi son dövrlər müasir hesablama texnikasının sürətli inkişafı ilə sıx əlaqəlidir. Belə ki, tədqiq olunan proses barədə informasiyaların yeniləşməsi, artması nəticəsində ilkin model dəyişə və nəticə etibarı ilə təkmilləşə bilər; əvvəlcə nəzərə alınmayan xüsusiyyətlər modelə daxil edilər, nöqsanlar, az əhəmiyyətli parametrlər aradan çıxarıla bilər.

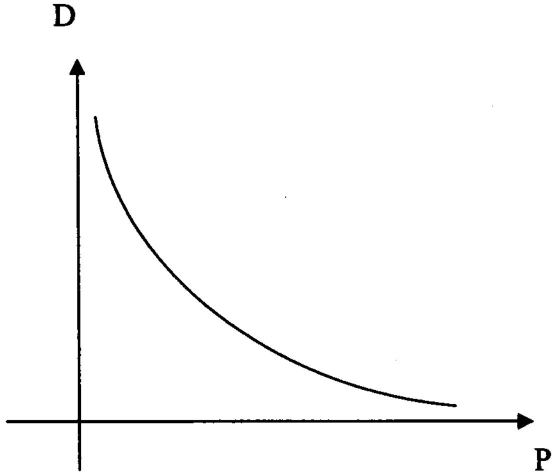
Modelləşdirmə elə tədqiqat üsuludur ki, eksperimentlər modelin üzərində aparılır, alınan uyğun nətiçələr isə orijinala aid edilərək nəzərə alınır. Geniş mənada modelləşdirmə dedikdə həm problem yönümlü konkret prosesin modelinin qurulması, həm modelin tədqiqi, həm də tətbiqi başa düşülür.

Riyazi modelləşdirmənin və müasir riyazi üsulların iqtisadi tədqiqatlarda getdikcə daha geniş tətbiqi və yeni hesablama alqoritmlərindən,mükəmməl ədədi üsullardan istifadə olunması təbi zərurətdir.Çünki elə iqtisadi-ekoloji yönümlü problem məsələlər var və mövcud ola bilər ki, riyazi modelləşdirməni tətbiq etmədən bu problemləri həll etmək mümkün olmaz.

Qeyd edək ki, modellərin ümumi qəbul olunmuş təsnifatı mövcud deyil. Lakin buna baxmayaraq çoxlu sayda model məfhumundan adətən 4 böyük qrupu ayırırlar:

1. Sözlə ifadə olunmuş və ya monoqrafik modellər- Onlar adətən tədqiq olunan obyektin və ya prosesin təyinlər, təriflər, qaydalar və s. formada təsvirinə deyilir.

2. Qrafik modellər adətən şəkillər, cədvəllər, qrafiklər və s. vasitəsilə təsvir olunurlar. Məs: tələbin qiymətdən asılılıq qrafiki.



3. Fiziki və ya maddi modellər adətən hələlik mövcud olmayan obyektlərin layihələşdirilməsi prosesində istifadə olunur. Doğrudan da, qiymətcə baha başa gələn təyyarə və ya raketin mühüm aerodinamik xassələrini yoxlamaq üçün real obyektin mövcudluğu heç də o qədər də vacib deyil. Bunun üçün onların uyğun modelləri (maketləri) üzərində lazımi hesablamalar aparmaq kifayətdir.

4. İqtisadi-riyazi modellər tədqiq olunan və yaxud gələcəkdə tədqiq olunacaq prosesləri real əks etdirən tənlik və yaxud tənliklər sisteminə, şərti və ya şərtsiz optimallaşdırma məsələlərinə, adi və ya xüsusi törəməli diferensial tənliklərlə təsvir olunan optimallaşdırma məsələlərinə və s. deyilir.

Onu da qeyd edək ki, iqtisadi-riyazi modellərin də ümumi təsnifatı bu günə qədər mövcud olmadığından həmin modelləri müəyyən xüsusiyyətlərə görə qruplaşdırırlar:

I. Modelləşdirmə obyektlərinin aqreqasiya dərəcəsinə görə

- Mikroiqtisadi (firma və müəssisələrin modelləri)
- Bir və ikifaktorlu(bir və ikiməhsullu modellər)
- Çoxfaktorlu(çoxməhsullu modellər)
- Makroiqtisadi (dövlət səviyyəsində təhlil olunan,məsələn inflyasiya və işsizlik problеləri ilə bağlı modellər)
- Qlobal (yəni ölkələrarası, beynəlxalq səviyyədə olan modellər)

II. Zaman faktorunu nəzərə alan modellər

- Statik (yəni modelin əsas münasibətlərini əks etdirən kəmiyyətlər əvvəlcədən hər hansı zaman anı ilə hesablanaraq sonradan statik vəziyyətdə qəbul olunurlar);
- Dinamik (yəni halı (vəziyyəti) zaman faktorundan kəsilməz asılı olaraq dəyişən modellər);

III. Tətbiq və yaranma məqsədinə görə iqtisadi modelləri aşağıdakı kimi fərqləndirmək olar:

- Balans (yəni resurslarla onlardan istifadənin əlaqəliliyi modelləri);
- Ekonometrik (konkret iqtisadi, ekoloji və s. proseslərin analizi və proqnozlaşdırılması üçün real statistik informasiyalara əsaslanan modellər);
- Optimallaşdırma (məs: istehsalın mümkün variantlar çoxlugundan optimal variantı tapmaga imkan verən modellər);
- Şəbəkə (yəni hər hansı iqtisadi yönümlü problemin ən qısa müddətə yerinə yetirilməsi üçün addımlar(alqoritmlər) ardıcıllığının təyini modelləri);
- Kütləvi xidmət sistemləri (xidmət kanallarının səmərəsiz dayanma vaxtının və növbədə gözləmə vaxt itkisinin minimallaşdırılması modelləri);

- İmitasiya (yəni tədqiq olunan sahə üzrə statistik verilənlərdən, EHM-dən və uygun sahə üzrə ekspert qruplarının bilik və təcrübələrindən istifadə olunaraq qurulan modellər);

IV. Qeyri-müəyyən faktorun nəzərə alınması modelləri:
- Determinik (yəni prosesin iqtisadi-riyazi modelində heç bir qeyri-müəyyən faktorun olmaması və nəticənin birqiymətli təyini modelləri);
- Stoxastik (yəni prosesin nəticəsi müxtəlif ehtimal variantlarından asılı olan modellər);
- Qeyri-səlis (yəni subyektiv fikirlərin müxtəlifliyini nəzərə alan modellər);

V. Tətbiq olunan riyazi aparata görə fərqlənən modellər:
- Xətti və qeyri-xətti riyazi proqramlaşdırma məsələlərinə gətirilən modellər;
- Korrelyasiya-reqressiya metodlarına əsaslanan modellər;
- Matris modelləri;
- Şəbəkə modelləri;
- Oyunlar nəzəriyyəsinə əsaslanan modellər;
- Kütləvi xidmət nəzəriyyəsi aparatının köməyi ilə təhlil olunan modellər;
- Qeyri-səlis çoxluqlar nəzəriyyəsinin köməyi ilə təhlil olunan modellər.

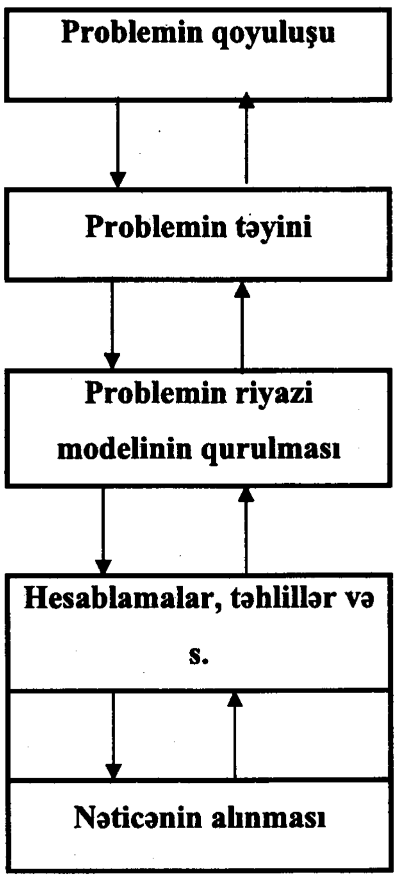
Yuxarıda deyilənlərdən o nəticəyə gəlirik ki, iqtisadi yönümlü proseslərin riyazi metodlar vasitəsilə tədqiqatının, yəni riyazi modelləşdirmə prosesinin əsas mərhələləri aşağıdakılardan ibarət olmalıdır:

- Sifarişçi tərəfindən qərar qəbul edən şəxs qarşısında problemin qoyuluşu;
- Qoyulmuş problemin iqtisadi-riyazi modelinin qurulması və modelin identifikasiyası-həqiqətə uyğunluğu;
- Qurulmuş modelin əsas xüsusiyyətlərinin təyini və təhlili(modelin trayektoriyasının yeganəliyi, dayanıqlılığı və s.).

Yuxarıdakı şərti təsnifat çərçivəsində həll olunmalı problemi, təyin ediləcək parametrləri, konkret iqtisadi, ekoloji və

s. yönümlü problemin həlli üçün lazım olan məlumatların toplanmasını, dəqiqləşdirilməsini, lazım gələrsə bu halda etimal nəzəriyyəsi və riyazi statistikanın üsullarından istifadəni də nəzərdə tuturuq. Daha sonra modelin əsas parametrlərinin ədədi qiymətlərinin təhlili və əgər mümkünsə onların məlum real nəticələrlə müqayisəsi müəyyənləşdirilməlidir (kifayət qədər böyük xəta modelin adekvatlığını şübhə altına ala bilər).

Beləliklə kifayət qədər dəqiqliklə modelləşdirmə prosesinin mərhələlər ardıcıllığı aşağıdakı sxemlə təsvir olunar:



Riyazi iqtisadiyyat – iqtisdi yönümlü proseslərin riyazi modellərinin həlləri və xassələrinin təhlili ilə məşgul olan elm sahəsidir. Əksər hallarda bu modellərə riyazi nəzəriyyə ilə iqtisad elminin birgə tədqiqat obyekti kimi də baxıla bilər. Riyazi iqtisadiyyatı ekonometrikadan fərqləndirmək lazimdır, belə ki, sonuncu sahə iqtisadi asılılıqlar və emprik verilənlər əsasında qurulmuş modellərin statistik qiymətləndirilməsi və analizi ilə məşgul olur. Riyazi iqtisadiyyatda adətən xəttilik, qabarıqlıq, monotonluq və s. asılılıqlarla bağlı nəzəri modellər öyrənilir (məs: modelin həllinin varlığı, həllin mənfi olmaması xassələri, tarazlıq vəziyyəti, dayanıqlılığı və s.).

Riyazi iqtisadiyyatdan fərqli olaraq ekonometrika iqtisadi, ekoloji və s. tipli göstəriciləri ifadə edən kəmiyyətlər arasındakı asılılıqların əsaslandırılması və formalarını aydınlaşdırır (məs. istelak kəmiyyəti gəlirin xətti və artan funksiyasıdır).

Təbiidir ki, iqtisad elminin tədqiqat oblastı, metodolojiyası yalnız riyazi iqtisadiyyatın və ekonometrikanın təhlil obyektləri ilə tükənmir. İqtisadi tədqiqatlarda keyfiyyət analizi üsullarından, induktiv və evristik yanaşmalardan geniş istifadə olunur. Bu onu deməyə əsas verir ki, riyazi iqtisadiyyat iqtisad elminin həm sərbəst bölməsi kimi, həm də onun əsas alətlərindən biri kimi çıxış edir. Onu da qeyd edək ki, əgər əvvəllər riyazi iqtisadiyyatın bölmələri sırf nəzəri planda tədqiq olunurdusa, hal hazırda bu bölmələr tətbiqi tədqiqat problemlərinin nəzəri bazası hesab olunur.

Ekonometrika "ekonomiya" (iqtisadiyyat) və "metrika" (ölçmə) sözlərindən düzəldilmişdir və məşhur Norveç alimi, Nobel mükafatı laureatı R.Friş tərəfindən elmə daxil edilmişdir. Bu elmi istiqamət xarici ölkələrdə, xüsusilə Qərbdə geniş yayılmışdır. Bazar münasibətlərinə malik inkişaf etmiş ölkələrdə ali məktəblərin tətbiqi iqtisadiyyat və sosial yönümlü ixtisaslarında geniş tədris olunur.

Ekonometrik modellər iqtisadiyyatın mikro və makro səviyyəsində uğurla tətbiq edilir. Bu modellər vasitəsilə iqtisadiyyatın bir sıra mühüm nəzəri məsələləri riyazi statistikanın üsulları ilə faktiki və ya emprik materiallar əsasında yoxlanılır.

Ekonometrikaya aid ilk elmi işlərə XIX əsrin sonu XX əsrin əvvəllərində rast gəlinir. 1897-ci ildə İtalyan iqtisadçısı və sosioloqu, iqtisadi nəzariyyədə riyazi məktəbin banilərindən biri Vilfredo Paretonun (1848-1923) müxtəlif ölkələr üzrə əhali gəlirlərinin ststistik öyrənilməsinə həsr olunmuş elmi işi diqqəti cəlb etmişdir. Bu əsərdə təqdim olunan Pareto əyrisi $Y = A(x-a)^{-\alpha}$ (x-gəlirin miqdarı, Y – x - dan çox gəlirə malik əhali sayı; a- minimal gəlir; A və α – statistik üsullarin köməyi ilə təyin olunan asılılığın parametrləridir) öz sadə ifadəsi, lakin dolğun təsəvvür yaratması ilə məhşurlaşmışdır.

Ekonometrik model və metodlar müasir dövrdə iqtisadiyyatda nəinki yeni biliklər əldə etmək üçün güclü alətdir, o həmçinin praktik proqnozlaşdırma qərarlarının qəbul edilməsində, bank işində, biznesdə və s. sahələrdə geniş istifadə olunan aparatdır.

II FƏSİL

Optimallaşdırmanln klassik metodları haqqında. Laqranj vuruqları üsulu – iqtisadi-riyazi modelləşdirmədə şərti ekstremal məsələlərin həlli üçün universal alət kimi. Model misallar. Ən kiçik kvadratlar üsulunun mahiyyəti.

İqtisadi proseslərin riyazi modellərinin böyük əksəriyyətində faktor parametrlərin arasındakı asılılıqlar qeyri xətti xarakter daşıyır. Məsələn, istehsal prosesində gəlir, maya dəyəri, kapital xərcləri və s. kimi göstəricilər istehsalın həcmindən, material xərclərindən qeyri xətti asılı olurlar. Belə hallarda riyazi modeli qeyri xətti riyazi proqramlaşdırma məsələsinin həllini tələb edən prosesla qarşılaşırıq. Onu da qeyd edək ki, istənilən qərar qəbul etmə problemi müxtəlif məhdudiyyətlər (maliyyə, resurs, hüquqi və s.) çərçivəsi daxilində yerinə yetrildiyindən uyğun riyazi modellər qurularkən məqsəd funksiyası ilə yanaşı məhdudiyyət şərtlərini dəqiq ifadə etmək lazımdır. Aşağıdakı kifayət qədər sadə proseslərə baxaq .

Misal1. [2]. Tutaq ki, konkret müəssisə iki texnoloji üsulun köməyi ilə 200 miqdar 2 növ məmulat hazırlamalıdır. Birinci texnoloji üsulla x_1 miqdar məmulatın hazırlanmasına çəkilən xərc - $(x_1^2+6x_1)$ pul vahidi, ikinci texnoloji üsulla x_2 miqdar məmulatın hazırlanmasına cəkilən xərc isə $(x_2^2+10x_2)$ pul vahidi olsun .

Hər texnoloji üsulla nə qədər məmulat hazırlamaq lazımdir ki, bütün məhsullarin istehsalına sərf olunaçaq ümumi xərc ən kiçik (minimal) olsun. Aydındır ki, bu prosesin modeli aşağıdakı riyazi proqramlaşdırma məsələsidir:

(qeyri xətti məqsəd funksiyası)

$$f_0(x_1,x_2)=x_1^2+6x_1+x_2^2+10x_2 \to \min_{(x_1,x_2)},$$

(xətti məhdudiyyət şərti)

$$\begin{cases} f_1(x_1,x_2)=200-x_1-x_2=0 \sim x_1+x_2=200, \\ x_1 \geq 0;\ x_2 \geq 0. \end{cases}$$

Misal 2. Tutaq ki, konkret kənd təsərüfatı məsulunun (məs.pambiq, üzüm, kartof və s.) yığımı zamanı n sayda tələbədən hər birinin imkanı $x_i=\lambda k_i$ (i=1,2,....n)-xətti asılılığı ilə təsvir olunur. Burada k_i (i=1,2,....n)- i-ci tələbənin fərdi əmsalı olub, onun bu prosesdə imkan səviyyəsini, λ - hər tələbənin yığacağı məhsulun ona ödəniləcək vahid miqdarının qiymətini, x_i isə i-ci tələbənin topladığı məhsulun miqdarını ifadə edən kəmiyyətlərdir. Aydındır ki, bu prosesdə hansı tələbənin imkan səviyyəsi böyükdürsə, onun uyğun k əmsalı da çoxdur. Bu tip proseslərin modellərini «məsrəf-həvəsləndirmə» tipli modellər hesab etmək olar.

Fərz edək ki, R miqdar ümumi məhsulu toplamaq üçün hər bir tələbəyə ödəniləcək xərc funksiyaları $\frac{1}{2k_i}x_i^2$ (i=1,2,...n) şəklindədir və hər bir tələbəyə tapşırığı necə vermək lazımdır ki, onlara çəkilən ümumi xərcin minimal olması təmin olunsun.

(qeyri xətti məqsəd funksiyası)

$$f_0(x_1,x_2,...x_n)=\sum_1^n \frac{1}{2k_i}x_i^2 \to \min_{(x_1,x_2,...x_n)},$$

(xətti məhdudiyyət şərti)

$$\begin{cases} f_1(x_1, x_2, ..., x_n) = R - \sum_1^n x_i = 0 \sim (\sum_1^n x_i = R), \\ x_1 \geq 0; x_2 \geq 0; ...; x_n \geq 0. \end{cases}$$

Misal 3. Tutaq ki, alıcının K qədər pulu var və bu pula hər birinin vahid miqdarının qiyməti uyğun olaraq p_1, p_2, p_3 olan üç növ məmulat almalıdır(x_1,x_2,x_3-onların uyğun miqdarları olsun).Alıcının bu məmulatlara subyektiv baxışını əks etdirən üstünlülük (lazımlılıq, faydalılıq və s.) funksiyasını $f_0(x_1, x_2, x_3) = x_1^\alpha x_2^\beta x_3^\gamma$ $(\alpha, \beta, \gamma > 0$ və bu dərəcələr alıcının uyğun məhsullara subyektiv baxış səviyyəsini əks etdirən parametrlərdir) şəklində təyin edək.Onda hər məmulatdan nə qədər almaq lazımdır ki, ümumi faydalılıq maksimal (ən böyük) olsun məsələnin riyazi modeli aşağdakı kimi ifadə olunar:
(qeyri xətti məqsəd funksiyası)

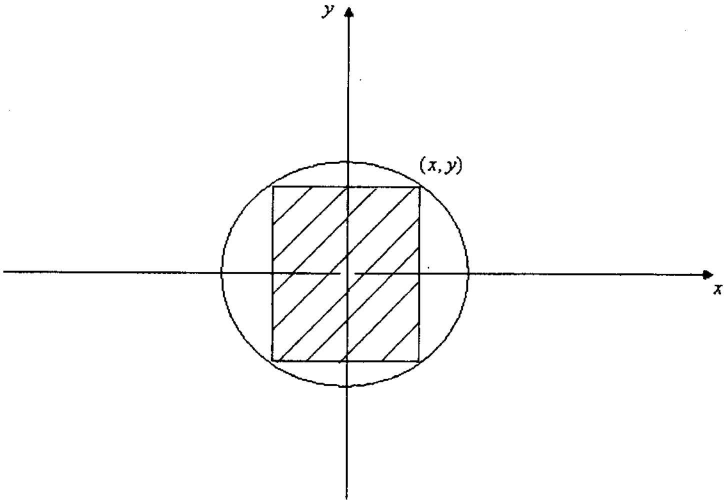
$$f_0(x_1, x_2, x_3) = x_1^\alpha x_2^\beta x_3^\gamma \to \max_{(x_1, x_2, x_3)}$$

(xətti məhdudiyyət şərti)

$$\begin{cases} f_1(x_1, x_2, x_3) = K - p_1x_1 - p_2x_2 - p_3x_3 = 0 \sim p_1x_1 + p_2x_2 + p_3x_3 = K, \\ x_1 \geq 0; x_2 \geq 0; x_3 \geq 0, \end{cases}$$

Misal 4. Verilmiş ellipsin daxilinə tərəfləri koordinat oxlarına paralel və sahəcə ən böyük olan düzbucaqlı çəkək.
(qeyri xətti məqsəd funksiyası) $f_0(x, y) = 4xy \to \max_{(x,y)}$,

(qeyri xətti məhdudiyyət şərti) $f_1(x, y) = 1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$.



Misal 5. n dəyişənli xətti funksiyanın vahid sferada ən kiçik qiymətini tapaq:
(xətti məqsəd funksiyası)

$$f_0(x_1, x_2, ..., x_n) = \langle \vec{c}, \vec{x} \rangle = \sum_{1}^{n} c_i x_i \to \min_{(x_1, x_2, ..., x_n)},$$

(qeyri xətti məhdudiyyət şərti)

$$f_1(x_1, x_2, ..., x_n) = x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2 - 1 = 0 \sim (\sum_{1}^{n} \mathrm{x}_{\mathrm{i}}^2 = 1).$$

Misal 6. Qeyri xətti məqsəd funksiyası :

$$f_0(x_1, x_2) = x_1 x_2 + x_2 x_3 \to \max_{(x_1, x_2, x_3)},$$

Xətti məhdudiyyət şərtləri

$$\begin{cases} f_1(x_1,x_2,x_3) = x_1 + x_2 - 2 = 0 \sim (x_1 + x_2 = 2), \\ f_2(x_1,x_2,x_3) = x_2 + x_3 - 2 = 0 \sim (x_2 + x_3 = 2), \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0. \end{cases}$$

Misal 7. Qeyri xətti məqsəd funksiyası :

$$f_0(x_1,x_2,x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \rightarrow \min_{(x_1,x_2,x_3)},$$

Xətti məhdudiyyət şərti: $f_1(x_1,x_2,x_3) = x_1 + x_2 + x_3 - 3a = 0$

$\sim (x_1 + x_2 + x_3 = 3a)$,

a - sabit kəmiyyətdir.

Yuxarıda gətirilən misalların həll və təhlilini Laqranj üsulunun mahiyyətini öyrəndikdən sonra verəcəyik.

Qeyd edək ki xətti proqramlaşdırma riyazi proqramlaşdırmanın mühüm bölmələrindən biridir və bu sahə xətti məqsəd funksiyalarının xətti məhdudiyyət şərtləri daxilində maksimum və ya minimum qiymətlərinin tapılmasına xidmət edir. Bu sahənin riyazi aparatı kifayət qədər öyrənildiyindən (həndəsi interpretasiya, simpleks üsul və onun müxtəlif modifikasiyaları və s.) biz bu bölmə ilə maraqlanan oxucuları məs. [1],[3],[10] ədəbiyyatlarına istiqamətləndiririk.

Çoxlu sayda iqtisadi modellər mövcuddur ki, onları prinsip etibarı ilə diferensial hesabının klassik üsullarının köməyi ilə də həll etmək olar. Lakin bu yolda hesablama xarakterli çətinliklər qarşıya çıxdığından bu metodlar yalnız baxılan prosesin nəzəri analizinin əsasını təşkil edə bilər.

Optimallaşdırmanın klassik metodlarından istifadə edərək məqsəd funksiyasının lokal, qlobal və şərti ekstremumları anlayışları arasındakı fərqi dəqiq müəyyənləşdirmək lazımdır.

İndi isə qısa şəkildə ekstremum üçün zəruri və kafi şərti söyləyək (bax. məs.[12]).

Fərz edək ki, $Z=f(x_1,x_2,..x_n)=f(x)$ funksiyası özünün təyin oblastından götürülmüş $x^* \in D(f)$ nöqtəsinin müəyyən ətrafında 2-ci tərtibdən diferensiallanan funksiyadır. Əgər bu ətrafdan olan istənilən x üçün $f(x^*)\geq f(x)$ ($f(x^*)\leq f(x)$) bərabərsizlikləri doğru olarsa, onda f(x) funksiyası x* nöqtəsində uyğun olaraq lokal maksimuma (lokal minimuma) malikdir deyilir. Əgər x* nöqtəsində f(x) funksiyasının bütün 1-ci tərtib $f'_{x_i}(x^*)=0$ $(i \in \overline{1,n})$ - xüsusi törəmələri sifira bərabər olarsa, bu nöqtəyə onun stasionar, tarazılıq və.s nöqtəsi deyilir.

Ekstremum üçün zəruri şərt:

Əgər x* nöqtəsi f(x) funksiyasının ekstremum nöqtəsidirsə, onda

$$f'_{x_i}(x^*)=0, \quad (i=1,...,n)$$

Deməli, ekstermum nöqtələri

$$\begin{cases} f'_{x_1}(x_1,x_2,...,x_n)=0, \\ f'_{x_2}(x_1,x_2,...,x_n)=0, \\ .... \\ .... \\ .... \\ .... \\ f'_{x_n}(x_1,x_2,...,x_n)=0. \end{cases}$$

tənliklər sistemini ödəyirlər.

Birdəyişənli funksiyalarda olduğu kimi, zəruri şərt stasionar nöqtənin ekstremum nöqtəsi olması üçün heç də kafi şərt deyil. Kafi şərti söyləmək üçün verilmiş funksiyanın stasionar nöqtədə

$$\partial^2 f(x) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} f'_{x_i x_j}(x)\Delta x_i \Delta x_j \text{ -}$$

2-ci tərtib diferensialının işarəsini müəyyənləşdirmək lazımdır.

Ekstremum üçün kafi şərtlər:

a) stasionar nöqtədə Δx_i və Δx_j arqument artımlarının eyni zamanda sıfıra bərabər olmayan istənilən qiymətlərində ∂^2f <0 (∂^2f >0) ödənilərsə bu stasionar nöqtə f(x) funksiyasının maksimum (minimum) nöqtəsidir;

b) stasionar nöqtədə Δx_i və Δx_j artımlarının qiymətlərindən asılı olaraq ∂^2f həm müsbət, həm də mənfi qiymətlər alarsa, onda bu stasionar nöqtə f(x) funksiyasının ekstremum nöqtəsi deyil;

c) stasionar nöqtədə Δx_i və Δx_j artımlarının sıfıra bərabər qiymətlərindən fərqli, hər hansı digər qiymətlərində də ∂^2f=0 ödənilərsə, bu halda ekstremum tapılması məsələsi açıq qalaraq, əlavə təhlil tələb edir.

Sadəlik üçün kafı şərtin izahını 2 dəyişənli Z=f(x_1,x_2) funksiyası üzərində aydınlaşdıraq.Bu halda 2-ci tərtib xüsusi törəmələr dörd saydadır:

$$f''_{x_1x_1},\ f''_{x_1x_2},\ f''_{x_2x_1},\ f''_{x_2x_2}.$$

$f''_{x_1x_2}$, $f''_{x_2x_1}$ funksiyaları kəsilməz olduğu halda, riyazi analiz kursundan məlum və alman riyaziyyatçısı Q.Şvarsın (1893-1921) adı ilə bağlı teoremə görə bərabərdirlər.

Daha sonra stasionar $x^* = (x_1^*, x_2^*)$ nöqtəsində bu funksiyaların qiymətlərini hesablayırıq:

$a_{11} = f''_{x_1x_1}(x^*)$; $a_{12} = f''_{x_1x_2}(x^*)$; $a_{21} = f''_{x_2x_1}(x^*)$; $a_{22} = f''_{x_2x_2}(x^*)$.

Nəticədə alınmış $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ matrisinin determinantını

$$\Delta = def\begin{pmatrix} a_{11}a_{12} \\ a_{21}a_{22} \end{pmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

hesabladıqdan sonra ekstremum üçün kafi şərti ifadə edə bilərik:

- əgər $\Delta > 0$, $a_{11} < 0$ ($a_{22} < 0$) bərabərsizlikləri doğrudursa, x^* nöqtəsi f funksiyasının maksimum; $\Delta > 0$, $a_{11} > 0$ ($a_{22} > 0$) doğru olduqda isə minumum nöqtəsidir;
- əgər $\Delta < 0$ olarsa, f funksiyasının ekstremumu yoxdur;
- əgər $\Delta = 0$ olarsa, bu funksiyanın ekstremumunun olub-olmaması məsələsi açıq qalır.

$Z = f(x_1, x_2) = x_1^4 + x_2^4 - x_1^2 - 2x_1x_2 - x_2^2$ funksiyası üzərində yuxarıdakı mərhələləri aydınlaşdıraq. $f'_{x_1} = 0$, $f'_{x_2} = 0$, tənliklər sistemini həll edib, verilmiş funksiyanın $x_1^* = (0;0)$; $x_2^* = (1;1)$; $x_3^* = (-1;-1)$ stasionar nöqtələrini tapınq.

Asanlıqla yoxlamaq olar ki, $f''_{x_1x_1} = 12x_1^2 - 2$, $f''_{x_1x_2} = -2$, $f''_{x_2x_1} = -2$, $f''_{x_2x_2} = 12x_2^2 - 2$.

Beləliklə, $\overset{*}{x_1}$ stasionar nöqtəsi üçün $a_{11} = -2$; $a_{12} = a_{21} = -2$; $a_{22} = -2$; $\Delta = \begin{vmatrix} -2 & -2 \\ -2 & -2 \end{vmatrix} = 0$ olduğundan ekstremum məsələsi açıq qalır (bu tip stasionar nöqtələr yəhərvari adlanırlar).

$\overset{*}{x_2}$ və $\overset{*}{x_3}$ stasionar nöqtələr üçün $a_{11} = 10$; $a_{12} = a_{21} = -2$; $a_{22} = 10$; $\Delta = \begin{vmatrix} -2 & -2 \\ -2 & -2 \end{vmatrix} = 96 > 0$ olduğundan baxılan funksiya bu nöqtələrdə minumum qiymətinə malikdir.

Yuxarıda deyilənlər çoxdəyişinli funksiyaların lokal ekstremumları haqqında idi. Çoxsaylı praktiki məsələlərin həllində məqsəd funksiyasının təyin olunduğu bütün oblastda ən kiçik və ən böyük qiymətlərinin təyini zərurəti meydana çıxır. Belə hallarda yalnız qlobal ekstremumlardan söhbət gedir. Beləliklə, əgər $Z = f(x)$ funksiyası özünün təyin oblastından olan $x^0 \in D(f)$ nöqtəsində $f(x^0) \geq f(x)$ ($f(x^0) \leq f(x)$) bərabərsizliklərini istənilən $x \in D(f)$ üçün doğru edərsə, onda bu funksiya x^0 elementində qlobal maksimuma (qlobal minumuma) malikdir deyilir.

Digər tərəfdən, ali riyaziyyat kursunun məşhur Veyerştrass (K.T.Veyerştrass (1815-1897)-alman riyaziyyatçısı) teoreminə "qapalı və məhdud oblastda təyin olunmuş, diferensiallanan $Z = f(x)$ funksiyası özünün ən böyük və ən kiçik qiymətlərini ya stasionar nöqtəsində, ya da bu oblastın sərhəd nöqtəsində alır" əsasən bəzi mühüm ekstremal məsələlərin həllində oblastın sərhəddi analitik olaraq tənlik (və yaxud tənliklər sistemi) şəkilndə verildiyindən təbii olaraq şərti ekstremal məsələ ilə qarşılaşmalı oluruq. Ona görə də şərti ekstremumun qısa şərhini verməyi zəruri hesab edirik.

Tutaq ki, $Z = f_0(x_1, x_2, \ldots, x_n) = f_0(x)$ - məqsəd funksiyasının dəyişənlərinin üzərinə qoyulmuş

$f_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0$, $i = 1,2,\ldots, m$, $m < n$

əlaqə tənlikləri şərti daxilində ekstremumu tapmaq tələb olunur. Əlavə olaraq fərz edək ki, f_0 və f_i funksiyaları bütün arqumentlərinə nəzərən kəsilməz xüsusi törəmələrə malikdirlər. Əgər $f_i(x^0) = 0$ ($i = 1,2,\ldots, m$) şərtlərini ödəyən $x^0 = (x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$ nöqtəsi $f(x^0) \geq f(x)$ ($f(x^0) \leq f(x)$) bərabərsizliklərini $f_i(x) = 0$ ($i = 1,2,\ldots, m$) şərtini ödəyən istənilən x nöqtəsi üçün doğru edərsə, onda $f(x)$ funksiyası x^0 nöqtəsində şərti maksimuma (şərti minumuma) malikdir deyilir. Asanlıqla görmək olar ki, şərti ekstremumun təyini məsələsi qeyri-xətti riyazi proqramlaşdırma məsələsidir. Məhz bu səbəbdən şərti ekstremumun təyiniin klassik üsullarından biri aşağıdakı kimi şərh edilə bilər.

Tutaq ki, əlaqə tənliklərində iştirak edən m sayda arqumenti, məsələn $x_1, x_2, \ldots, x_m$ -ləri yerdə qalan m sayda dəyişənlərlə aşkar şəkildə ifadə etmək olar:

$$x_i = \varphi_i(x_{m+1}, \ldots, x_n), \ i = 1,2,\ldots, m$$

Onda məqsəd funksiyası

$$Z=f_0(\varphi_1(x_{m+1},\ldots x_n),\ldots\varphi_m(x_{m+1},\ldots x_n),x_{m+1},\ldots x_n)\equiv F(x_{m+1},\ldots x_n)$$

şəklinə düşər.

Aydındır ki, bu çevrilmələrdən sonra ilkin məsələnin həlli (n-m) dəyişənli $Z=F(x_{m+1},\ldots,x_n)$ funksiyasının lokal(qlobal) ektremumunun tapılmasına gətirilir. Nəticə etibarı ilə bu o deməkdir ki, əgər $x^0=(\tilde{x}^0_{m+1},\ldots,\tilde{x}^0_n)$ nöqtəsi F funksiyasının ekstremum nöqtəsidirsə, onda $x^0=(\varphi_1(\tilde{x}^0_{m+1},\ldots,\tilde{x}^0_n),\ldots,\varphi_m(\tilde{x}^0{}_{m+1},\ldots,\tilde{x}^0_n),\tilde{x}^0_{m+1},\ldots,\tilde{x}^0_n)$ nöqtəsi ilkin f_0 funksiyasının şərti ekstremum nöqtəsi olur. Bu deyilənləri bölmənin əvvəlində gətirdiyimiz Misal1. üzərində nümayiş etdirək (bu halda $n=2$, $m=1$):

$$f_1(x_1,x_2)=200-x_1-x_2=0 \Rightarrow x_1=\varphi_1(x_2)=200-x_2$$

Bunu məqsəd funksiyasında yerinə yazsaq:

$$f_0(x_1,x_2)=F(x_2)=6(200-x_2)+(200-x_2)^2+x_2+10x_2=$$
$$=2x_2^2-396x_2+51200$$

Daha sonra $F'(x_2)=0 \Rightarrow x_2^0=99$ və $x_1^0=200-99=101$

$F''(x_2^0)>0$ şərti onu ifadə edir ki, (101,99) qiymətində $f_0(x_1,x_2)$ -məqsəd funksiyası özünün şərti minumum qiymətini alır.

Şərti ekstremal məsələlərin daha universal üsulu fransız riyaziyyatçısı və mexaniki J.L.Laqranjın (1736-1813) adı ilə bağlıdır. XVIII əsrin sonlarında o, orijinal üsul təklif edərək şərti ekstremal məsələni uyğun şərtsiz məsələyə gətirməyin mahiyyətini açıqlamışdır. Bu üsulun əsas mərhələlərini kifayət qədər ümumi şəkildə qoyulmuş, bərabərlik tipli məhdudiyyətli aşağıdakı qeyri-xətti riyazi proqramlaşdırma məsələsi üzərində izah edək:

$$f_0(\vec{x}) = f_0(x_1, x_2, \ldots, x_n) \to \underset{(x_1, x_2, \ldots, x_n)}{extr} \qquad (2.1)$$

$$\vec{x} \in Q: \quad \begin{cases} f_1(\vec{x}) = 0 & (\le 0), \\ f_2(\vec{x}) = 0 & (\le 0), \\ \ldots \\ \ldots \\ \ldots \\ f_m(\vec{x}) = 0 & (\le 0). \end{cases} \qquad (2.2)$$

Burada $\vec{x} \in R$, $n, m \in N$ (adətən $m < n$), Q isə $f_i(\vec{x}) = 0$ əlaqə tənliklərinin təsvir etdiyi (həndəsi mənada) məhdudiyyət çoxluğudur.

<u>I Mərhələ</u> Əvvəlcə verilmiş məsləyə uyğun Laqranj funksiyası qurulur və bu funksiya üçün optimallığın zəruri şərti (Ferma teoremi) yazılır:

$$L(\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_m, x_1, x_2, \ldots, x_n) = \lambda_0 f_0(\vec{x}) + \lambda_1 f_1(\vec{x}) + \ldots$$

$$\ldots + \lambda_m f_m(\vec{x}) = \sum_{i=0}^{m} \lambda_i f_i(\vec{x})$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L(\vec{x})}{\partial x_i} = 0, & i = 1,2,\dots,n, \\ \dfrac{\partial L(\vec{x})}{\partial \lambda_j} = 0, & j = 1,2,\dots,m. \end{cases} \qquad (2.3)$$

Asanlıqla yoxlamaq olar ki, $\dfrac{\partial L(\vec{x})}{\partial \lambda_j} = f_j(\vec{x})$, yəni (2.3) sisteminə əlaqə tənlikləri da daxildir. $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_m$ parametrləri Laqranj vuruqları adlanırlar.

Beləliklə $f_0(\vec{x})$ funsiyasının şərti ekstremumunun tapılması $L(\vec{x})$ funksiyasının lokal ekstremumunun axtarılmasına gətirilir.

II Mərhələ Əgər (2.1) ifadəsində ekstremum termini altında min(inf)nəzərdə tutulubsa, onda $\lambda_0 = +1$, ya da 1-dən fərqli istənilən müsbət ədəd qəbul edilə bilər. Əgər ekstremum termini altında max(sup) verilmişsə, $\lambda_0 = -1$, ya da -1 dən fərqli ixtiyari mənfi ədəd götürülə bilər. Nəticə etibarı ilə bu ona gətirir ki, (2.3) sisteminin tənlikləri sayı ilə məchullarının sayı bərabər olur. Daha sonra, əgər L funksiyasının stasionar (böhran) nöqtəsi tapılmışsa, ekstremumun varlığı yuxarıda gətirilən kafi şərtin köməyi ilə yerinə yetirilə bilər(d^2L diferensialının stasionar nöqtədə işarə təyini və $\sum_{i=1}^{n} \dfrac{\partial f_i}{\partial x_i} \Delta x_i = 0$, $i = 1,2,\dots,n$ şərtlərinin köməyi vasitəsilə).

Qeyd edək ki , Laqranj vuruqlarına iqtisadi məna da vermək olar. Əgər $f_0(x_1, x_2, \dots, x_n)$ $\chi = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ palnına uyğun gəliri, $f_i(x_1, x_2, \dots, x_n)$, $i = 1,2,\dots,m$ bu plana uyğun i-ci resursa çəkilən məsrəflərsə, onda $\lambda_i \quad (i=1,2,...,m)$ - f_0 məqsəd funksiyasının i-ci resursun miqdarının dəyişməsindən asılı olaraq ekstremal qiymətinin dəyişməsini xarakterizə edən i-ci resursun qiymətidir.

İndi isə fəslin əvvəlində gətirilmiş misalların Laqranj üsulunun köməyi ilə həllərini verək.

Misal 1.

$L(\lambda_0,\lambda_1,x_1,x_2)=x_1^2+6x_1+x_2^2+10x_2+\lambda_1(200-x_1-x_2)$ - Laqranj funksiyası və

$$\begin{cases} L'_{x_1}=\lambda_0(6+2x_1)-\lambda_1=0, \\ L'_{x_2}=\lambda_0(10+2x_2)-\lambda_1=0, \\ L'_{\lambda_1}=200-x_1-x_2=0. \end{cases}$$

$\lambda_0=\dfrac{1}{2}$ qəbul edib $\begin{cases} 3+x_1=5+x_2 \\ x_1+x_2=200 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1-x_2=2, \\ x_1+x_2=200. \end{cases}$

tənliklər sistemindən $x^*=(x_1^*,x_2^*)=(101;99)$ cavabını almış olarıq. Kafi şərtin köməyi ilə asanlıqla yoxlamaq olar ki, tapılmış qiymət məqsəd funksiyasına ən kiçik qiymət verir.

Misal 2.

$L(\lambda_0,\lambda_1,x_1,x_2,...,x_n)=\lambda_0\sum_1^n\dfrac{1}{2k_i}x_i^2+\lambda_1(R-\sum_1^n x_i)$ - Laqranj funksiyası və

$$\begin{cases} L'_{x_i}=0, i=1,2,...n, \\ L'_{\lambda_i}=0. \end{cases}$$

tənliklər sistemindən optimal həllin düsturun tapsaq :

$$x_1^* = \frac{k_1}{\sum_1^n k_i} R, \quad x_2^* = \frac{k_2}{\sum_1^n k_i} R, \ \ldots., \ x_n^* = \frac{k_n}{\sum_1^n k_i} R.$$

Beləliklə bu prosesdə optimallıq şərti

$$\frac{x_1^*}{k_1} = \frac{x_2^*}{k_2} = \ldots = \frac{x_n^*}{k_n} = \frac{k}{k_1 + k_2 + \ldots + k_n}$$

şəklində ifadə olunar. Deməli $\frac{x_i}{k_i} = \frac{x_j}{k_j}$ bərabərliyi məhsul yığımında iştirak edən bütün tələblər üçün eynidir. Bu nisbəti λ ilə işarə etsək, f_0 -məqsəd funksiyasının minimal $f_0^* = \frac{R^2}{2(k_1 + k_2 + \ldots + k_n)}$ qiymətini tapmış olarıq.

Misal 3.

$$L(\lambda_0, \lambda_1, x_1, x_2, x_3) = \lambda_0 x_1^{\lambda} x_2^{\beta} x_3^{\gamma} + \lambda_1 (K - p_1 x_1 - p_2 x_2 - p_3 x_3) \quad -$$

Laqranj funksiyası

$$\begin{cases} L'_{x_1} = 0, \\ L'_{x_2} = 0, \\ L'_{x_3} = 0, \\ L'_{x_4} = 0. \end{cases}$$

sistemində $\lambda_0 = -1$ qəbul edib, bəzi sadə çevrilmələrdən sonra

$$x_1^* = \frac{K\alpha}{p_1(\alpha+\beta+\gamma)} \quad , \quad x_2^* = \frac{K\beta}{p_2(\alpha+\beta+\gamma)}$$

$$x_3^* = \frac{K\gamma}{p_3(\alpha+\beta+\gamma)}$$

cavablarını alarıq. Beləliklə prosesin optimallıq şərti

$$\frac{p_1x_1^*}{\alpha} = \frac{p_2x_2^*}{\beta} = \frac{p_3x_3^*}{\gamma} = \frac{K}{\alpha+\beta+\gamma}$$

şəklindədir.

Misal 4.

$L(\lambda_0, \lambda_1, x, y) = \lambda_0 4xy + \lambda_1(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2})$ - Laqranj funksiyası və $L'_x = 0$, $L'_y = 0$, $L'_{\lambda_1} = 0$ sistemində $\lambda_0 = -\frac{1}{4}$ qəbul edib $x^* = \frac{a}{\sqrt{2}}$, $y^* = \frac{b}{\sqrt{2}}$ optimal həlli taparıq. Deməli, sahəcə maksimal düzbucaqlının sahəsi $f_0^* = 2ab$.

Misal 5.

$L(\lambda_0, \lambda_1, x_1, x_2, ..., x_n) = \lambda_0 \sum_1^n C_i x_i + \lambda_1(\sum_1^n x_i^2 - 1)$ - Laqranj funksiyası və

$L_{x_i} = 0$, $i = 1,2,...,n$, $L_{\lambda_1} = 0$ sistemlərinin nəticəsi olaraq, optimal həll

$$x_i^* = -\frac{C_i}{\|\vec{C}\|} = -\frac{C_i}{\sqrt{C_1^2 + C_2^2 + \ldots + C_n^2}} \quad (i = 1,2,\ldots,n) \text{ şəklində tapılar.}$$

Onda $f_0^{opt} = -\|\vec{C}\|$.

Misal 6.

$$L(\lambda_0, \lambda_1, x_1, x_2, x_3) = \lambda_0(x_1x_2 + x_2x_3) + \lambda_1(2 - x_1 - x_2) + \lambda_2(2 - x_2 - x_3)$$

və

$L'_{x_1} = 0$, $L'_{x_2} = 0$, $L'_{x_3} = 0$, $L'_{\lambda_1} = 0$, $L'_{\lambda_2} = 0$ sistemində $\lambda_0 = -1$ qəbul edib, onu həll etsək $x_1^* = x_2^* = x_3^* = 1$ dəyişənlərin optimal qiymətlərini və f_0 - məqsəd funsiyasınln $f_0^* = 2$ - maksimal qiymətini tapmış olarıq.

Misal 7.

$$L(\lambda_0, \lambda_1, x_1x_2x_3) = \lambda_0(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) + \lambda_1(3a - x_1 - x_2 - x_3).$$

$L'_{x_1} = 0$, $L'_{x_2} = 0$, $L'_{x_3} = 0$, $L'_{\lambda_1} = 0$ sistemində $\lambda_0 = \frac{1}{2}$ qəbul edib $x_1^* = x_2^* = x_3^* = a$ - dəyişənlərin optimal qiymətlərini və $f_0^* = 3a^2$ - məqsəd funksiyasının minimal qiymətini tapmış olarıq.

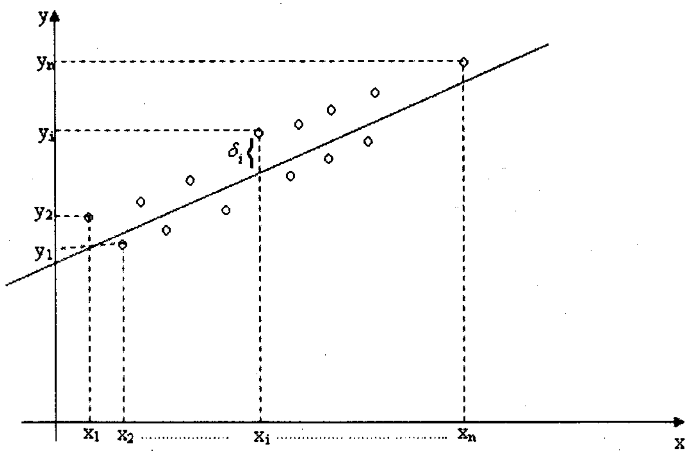
Elm və texnikanın müxtəlif tədqiqat obyektlərində eksperiment əsasında tərtib olunan qaydalardan istifadə etmək zərurəti yaranır. Belə düsturların alınmasında ən yaxşı üsullardan biri ən kiçik kvadratlar (ƏKKÜ, Least Squares Method) metodudur.

Ekonometrik analiz asılılıqlarının başlanğıc mərhələsi adətən dəyişənlər arasındakı xətti asılılığı qiymətləndirməkdir. Başqa sözlə, əgər koordinat müstəvisində pərakəndə formada müəyyən sayda müşahidə nöqtələri toplusu mövcuddursa bu topludan elə düz xətt keçirməyə cəhd etmək olar ki, müəyyən mənada digər düz xətlərdən ən yaxşısı (məsələn, müşahidə nöqtələrinə külliyatca "yaxın") olsun. Təbiidir ki, belə olan halda düz xəttin müstəvi üzərində verilmiş nöqtələr çoxluğuna yaxınlığı anlayışı təmin olunmalıdır. Bu cür yaxınlığın ölçüsünün müxtəlif olmasına baxmayaraq, ən yaxşı mənada yaxınlıq müşahidə nöqtələrindən tənliyi, məsələn y=ax+b şəklində olan baxılan düz xəttə qədər məsafələrlə əlaqəli olmalıdır. Adətən bu yaxınlıq əlaqəsinin meyarı olaraq y_i - müşahidə dəyişənləri ilə nəzəri hesablana bilən $ax_i + b$ qiymətlərinin fərqləri cəminin minimal olması götürülür:

$$f_0(a,b) = \sum_i [y_i - (ax_i + b)]^2 \to \min_{(a,b)}.$$

Burada y_i və x_i- müşahidənin məlum verilənləri, a,b isə reqresiyya xəttinin (tənliyinin) naməlum parametrləridir. Qeyd edək ki, $f_o \to$ min optimallaşdırma məsələsinin həllinin varlığı və korrektliyi bu funksiyanın kəsilməz, qabarıq və aşağıdan məhdud(sıfırla) olmasının nəticəsidir.

Tutaq ki, hər hansı konkret müşahidənin nəticəsi olan $(x_1,y_1),(x_2,y_2),\ldots,(x_n,y_n)$ nöqtələri şəkildə təsvir olunduğu kimi bir düz xətt üzərində yerləşmirlər. Bu hal üçün $y = ax + b$ xətti asılılığı ilə kifayətlənib,



$$\delta_1 - y_1 - (ax_1 + b), \delta_2 - y_2 - (ax_2 + b), \ldots, \delta_n - y_n - (ax_n + b)$$

xəta kəmiyyətlərini hesablayaq. a və b parametrlərini elə təyin edək ki bu kəmiyyətlərin cəm toplamı mütləq qiymətcə kifayət qədər kiçik olsun:

$$f_0(a,b)=\sum_{1}^{n}[y_i-(ax_i+b)]^2=\sum_{1}^{n}\delta_i^2\to\min_{(a,b)}$$

Beləliklə baxılan məsələ ikidəyişənli f_0 funksiyasına minumum qiymət verən (a,b) cütünün axtarılmasıdır:

$$\frac{\partial f_0}{\partial a}=-2\sum_{i=1}^{n}[y_i-(ax_i+b)]x_i\ ,\ \frac{\partial f_0}{\partial b}=-2\sum_{i=1}^{n}[y_i-(ax_i+b)]$$

Optimallıq üçün zəruri şərtə əsasən,

$$\begin{cases}\sum_{i=1}^{n}y_ix_i=a\sum_{i=1}^{n}x_i^2+b\sum_{i=1}^{n}x_i\\ \sum_{i=1}^{n}y_i=a\sum_{i=1}^{n}x_i+b_n\end{cases}\qquad(2.4)$$

(2.4) münasibətləri baxılan halda ən kiçik kvadratlar üsulunun normal tənliklər sistemi də adlanır. Bu sistemdən a və b parametrləri tapıldıqdan sonra axtarılan y=ax+b düz xəttinin analitik (riyazi) ifadəsi məlum olur. (a,b) cütünün $f_0(a,b)$ funksiyasına həqiqətən də minumum qiymət verməsi ekstremum üçün kafi şərtin köməyi ilə yoxlanıla bilər.

$$\frac{\partial^2 f_0}{\partial a^2}=2\sum_{i=1}^{n}x_i^2>0\ ,\ \frac{\partial^2 f_0}{\partial a\partial b}=2\sum_{i=1}^{n}x_i\ ,\ \frac{\partial^2 f_0}{\partial b^2}=2n$$

və beləliklə,

$\Delta=$

$$\frac{\partial^2 f_0}{\partial a^2}\cdot\frac{\partial^2 f_0}{\partial b^2}-\left(\frac{\partial^2 f_0}{\partial a\partial b}\right)^2=4n\sum_{i=1}^{n}x_i^2-\left(2\sum_{i=1}^{n}x_i\right)^2=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(x_i-x_j)^2>0$$

Tutaq ki, hər hansı müşahidə nəticəsində axtarılan funksiyanın arqumentin beş nöqtəsində qiymətləri alınmışdır:

x	-2	0	1	2	4
y	0.5	1	1.5	2	3

Asanlıqla yoxlamaq olar ki,

$\sum_{i=1}^{n} y_i x_i = 16.5$;

$\sum_{i=1}^{5} x_i^2 = 25;\quad \sum_{i=1}^{5} x_i = 5;\ \sum_{i=1}^{5} y_i = 8$

Onda (4) sistemi $\begin{cases} 25a + 5b = 16.5 \\ 5a + 5b = 8 \end{cases} \Rightarrow a - 0.425, b - 1.175.$

Beləliklə, y=0.425x+1.175-axtarılan xəttin tənliyidir.

Qeyd edək ki, bir çox hallarda iqtisadi dəyişənlər arasındakı asılılıqlar riyazi nöqteyi nəzərdən qeyri_xətti xaraktr daşıdığından yalnız xətti reqressiya modeli ilə kifayətlənmək olmur. Ona görə də qeyri-xətti modelin xəttiləşdirilməsi prosesi mühüm əhəmiyyət kəsb edir. Riyazi analiz kursundan məlumdur ki, istənilən diferensiallanan funksiyanı təyin oblastından götürülmüş dəyişənin müəyyən ətrafında qüvvət sırasına ayırmaq olar və bu sıranın yalnız bəzi vacib hədlərini saxlamaqla onlar üzrə xətti reqressiya qiymətləndirməsi aparmaq mümkündür. Xəttiləşdirmə prosesinin digər yolunu məsələn, Kobb-Duqlas tipli $Y = AK^{\alpha}L^{\beta}$ istehsal funksiyasının (A,α,β)-parametlərinin qiymətləndirilməsi prosesində izləyək. Orta məktəb kursundan məlum

$A = B \Leftrightarrow \log_c A = \log_c B \qquad (A, B > 0, c > 0, c \neq 1)$

keçidinə əsasən

$$\ln Y = \ln A + \alpha \ln K + \beta \ln L$$

Sonuncu münasibət məhsu buraxılışının, kapitalın və işçi qüvvəsi sayının natural e əsasının loqarifmlərinə nəzərən xətti asılılıq olduğundan (A, α, β) parametrlərinin ədədi qiymətlərinin tapılması xətti ƏKKÜ-nun köməyi ilə yerinə yetirilə bilər. Analoji üsul müxtəlif formalı makroiqtisadi istehsal funksiyalarının qurulması və parametrlərinin qiymətləndirilməsi prosesində də tətbiq oluna bilər. Məsələn, texniki tərəqqini nəzərə alan $Y = AK^{\alpha}L^{\beta}e^{\gamma t}$ istehsal funksiyasının xəttiləşmiş forması

$$\ln Y = \ln A + \alpha \ln K + \beta \ln L + \gamma t$$

şəklində olar.

Qeyd edək ki, bir çox hallarda qeyri-xətti reqressiya düsturunun birbaşa qiymətləndirilməsi tələb oluna bilər. Bu halda qeyri-xətti ƏKKÜ-dan istifadə aktual hesab olunur:

$$f^0(\vec{a}) = \sum_i [y_i - f(\vec{a}, x_i)]^2 = \sum_i \delta_i^2 \to \min_{\vec{a}}.$$

Burada $\vec{a}$ –qiymətləndiriləcək vektor parametr $(\vec{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_m))$, $f(\vec{a}, x) - x$ dəyişənin qeyri-xətti funksiyası, $\delta_i = y_i - f(\vec{a}, x_i)$ - hesablama qiymətlərinin empirik qiymətlərdən meylini ifadə edən xətalardır. Daha sonra ekstremum üçün zəruri şərti f^0 funksiyasının arqumentinin hər bir komponentinə nəzərən yazıb $f^0_{a_j} - 0$, j=1,2,...,m aşağıdakı tənliklər sistemini almış oluruq:

$$-2\sum_i \left(y_i - f(\vec{a}, x_i)\right) \cdot f_{a_j}(\vec{a}, x_i) = 0, \quad j=1,2,\ldots,m.$$

Sonuncu sistem qeyri-xətti tənliklər sistemidir. Əgər onun dəqiq həlli mövcud riyazi üsulların köməyilə tapıla bilmirsə, optimallaşdırma kursundan məlum iterasiya üsullarının köməyilə təqribi həlli tapmaq olar. Lakin ümumi halda bu heç də asan proses deyil.

Sonda onu qeyd edək ki, qeyri-xətti ƏKKÜ tənliklərinin mürəkkəb forma kəsb etməsinə və çətin həll olunmasına səbəb tədqiq olunan obyektin dəyişənləri arasındakı asılılığın düzgün seçilməməsi də ola bilər.

III FƏSİL

İstehsal prosesi və onun müxtəlif təsvirləri.İstehsal prosesində əsas istehsal faktorlarının qarşılıqlı əlaqəsini əks etdirən istehsal funksiyası və onun yaranma tarixi. Kobb-Duqlas tipli istehsal funksiyaları və onların mühüm xüsusiyyətləri.Konkret proses üçün istehsal funksiyasının elementar təyini və onun qeyri xəttiliyinin əsaslandırılması.

İstehsal- ehtiyatların əmtəə və xidmətlərə çevrilməsi prosesidir. Geniş mənada istehsal-cəmiyyətin və onun hər bir üzvünün tələbatını ödəmək üçün zəruri olan maddi nemətlərin yaradılmasına insanların məqsədyönlü fəaliyyət prosesidir. İstehsal prosesinin baş verməsi bilavasitə maddi və mənəvi faktorların qarşılıqlı əlaqəsi zəminində mümkündür.İstehsal faktorları əsasən 4 mühüm qrupa bölünür: təbiət və əmək faktorları, işçi qüvvəsi, sahibkarlıq fəaliyyəti (son vaxtlar bəzii ədəbiyyatlarda elmi-texniki tərəqqini də bu qrupa daxil edirlər).

Təbiət, yaxud **təbii resurslar** dedikdə, torpaq, mineral və meşə ehtiyatları, su və s. amillər başa düşülür (N).

Əmək və ya **işçi qüvvəsi(L)** hər hansı istehsal prosesində müəyyən məqsədə çatmaq üçün fiziki və intellektual fəaliyyətdir. Bu fəaliyyətin nəticəsinə verilən qiymət əmək haqqı formasına alır.

P.Samuelsonun fikrincə, **kapital**(K) iqtisadiyyatda digər əmtəələrin istehsalı zamanı uzun müddət istifadə olunan nemətdir. Son dövrlərdə "kapital" terminini biznesmenlər zavod, avadanlıq və digər istehsal ehtiyatları əldə etmək üçün çəkdikləri pul xərcləri ifadəsində işlədirlər. Kapitala olan baxışın müxtəlifliyindən asılı olmayaraq, onun bir ümumi xüsusiyyəti vardır ki, o da gəlir gətirmək qabiliyyətidir. Deməli, əgər pul mənfəət gətirmək məqsədilə istehsal vasitələri, işçi qüvvəsi əldə edərək, istehsalı təşkil etmək niyyəti ilə sərf olunursa (avans forması), bu pula kapital deyilir.

Sahibkarlıq fəaliyyəti dedikdə, yuxarıdakı istehsal amillərini səmərəli formada birləşdirmək qabiliyyəti başa düşülür.

Deməli, sahibkarlıq fəaliyyəti əmtəə və xidmət istehsalını təmin etmək məqsədilə istehsalın digər 3 faktorunun kombinasiyasını və koordinasiyasını nəzərdə tutur.

Müasir şərait "sahibkarlıq" termini altında adətən əmtəə istehsalına və xidmətə zəruri olan idarəetmə və təşkilatçılıq bacarıqları da aid edilir.

Qeyd edək ki, inzibati-amirlik iqtisadi sistemində sahibkarlıq qabiliyyəti və fəaliyyəti istehsal faktoru hesab olunmurdu. Hal-hazırda respublikamızın iqtisadiyyatının inkişafı üçün bacarıqlı sahibkarlara ehtiyacı böyükdür. Digər tərəfdən onların üzə çıxarılıb, inkişaf etdirilməsi üçün kifayət qədər vaxt lazımdır.

İstehsal prosesi kəsilməz (fasiləsiz) olub, təkrar olunandır. Məhz istehsal prosesinin təkrarlanması **təkrar istehsal** adlanır. Təkrar istehsal problemi müasir iqtisadi nəzəriyyənin vacib məsələlərindən olub, iqtisadiyyatın kəsilməz hərəkətini idarə edən qanunları təkrar istehsalın mərhələləri üzrə qarşılıqlı əlaqə və asılılıqda, vəhdət halında öyrənməkdir. Bu problemin düzgün açıqlanması cəmiyyətin keyfiyyətcə hərtərəfli yeniləşməsinin elmi əsasını təşkil edir.

Təkrar istehsalın iki – **sadə və geniş** növlərini fərqləndirmək lazımdır.

Sadə təkrar istehsal dedikdə istehsalın ilbəil əvvəlki miqyasda təkrarlanması başa düşülür. Belə olan halda istehsal olunmuş məhsul bütövlüklə ancaq şəxsi istehlaka və xərclərin ödənilməsinə sərf olunur.

Artan miqyasda təşkil olunan istehsal prosesinə geniş təkrar istehsal deyilir. Sadə təkrar istehsaldan fərqli olaraq geniş təkrar istehsal zamanı əmələ gələn izafi məhsulun bir hissəsi istehsal amillərinin çoxaldılmasına sərf olunur ki, bu da nəticə etibarilə istehsalın həcminin artması deməkdir.

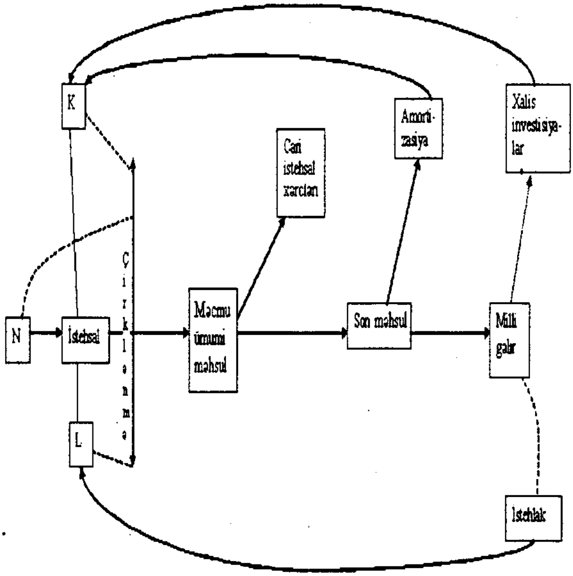
Beləliklə, V_t və V_{t+1} ilə uyğun olaraq zamanın istənilən t və (t+1)-ci illəri üçün istehsalın həcmini işarə etsək, $\gamma_t = \frac{V_{t+1}}{V_t}$ nisbəti təkrar istehsalın müəyyən mənada səviyyəsini xarakterizə edər. Aydındır ki, $\gamma_t = 1$ və $\gamma_t > 1$ halları uyğun olaraq sadə və geniş təkrar istehsalı səciyyələndirir. $\gamma_t < 1$ şərti abstrakt vəziyyətdə "sıxılımış" təkrar istehsal adlanır.

İqtisadi inkişaf çoxsaylı amillərin qarşılıqlı təsirinin birbaşa nəticəsidir və onların arasında ekstensiv və intensiv amilləri fərqləndirmək həmişə mühüm əhəmiyyət kəsb etmişdir.

Geniş təkrar istehsalın ekstensiv növü- əvvəlki keyfiyyətdə olan resursların kəmiyyətinin artırılması nəticəsində istehsalda olan inkişafdır (məs.işçilərin sayının və istehsal vəsaitlərinin artırılması hesabına). İntensiv forması isə resursların kəmiyyətini dəyişməz saxlamaqla istehsalın təkmilləşdirilməsi nəticəsində inkişafdır (ilk növbədə elmi-texniki tərəqqinin imkanları ilə bağlıdır). Real iqtisadiyyatda, bir qayda olaraq, ekstensiv və intensiv artma eyni zamanda baş verir. Təbiidir ki, bu amillərdən hansı üstünlük təşkil edərsə inkişaf məhz həmən amilin təsirinə daha çox məruz qalar. Onu da qeyd edək ki, istehsalin intensivliyi ehtiyyatların sayından yox, keyfiyyətindən və qənaətlə istifadə olunmasından aslıdır.

İstehsal fəaliyyəti (N,K,L)-əsas istehsal faktorlarının qarşılıqlı əlaqəsinin nəticəsidir. Burada N-təbiət (torpaq və s.), K-kapital, L-işçi qüvvəsidir. Bu qarşılıqlı əlaqənin nəticəsində müəyyən müddət keçdikdən sonra ümumi məhsul (məcmu məhsul) yaranır. İstehsal özünün müsbət effekti ilə yanaşı mənfi effekt-ətraf mühitin çirklənməsi kimi ekoloji problematikanı da qarşıya çıxarır. Bu effekt son zamanlara qədər demək olar ki, nəzərə alınmırdı, lakin hal-hazırda onun həcmi o dərəcəyə çatmışdır ki, onu nəzərə almamaq artıq qeyri-mümkündür.

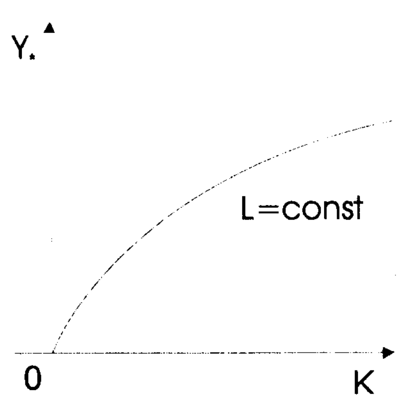
Qeyd edək ki, ekoloji problemlər müasir Azərbaycan Respublikası üçün də xüsusi aktuallıq kəsb edir. Respublikada ətraf mühitin çirklənməsinin əsas mənbələrindən biri neft və qaz sənayesi və onun ayrı-ayrı sahələridir. Belə ki, neftin çıxarılması, hazırlanması, saxlanılması, nəqli və emalı zamanı onun təxminən 1-14% - ə qədəri itkiyə məruz qalır, baş verən sızmalar və s. ətraf mühitin çirklənməsinə səbəb olur.

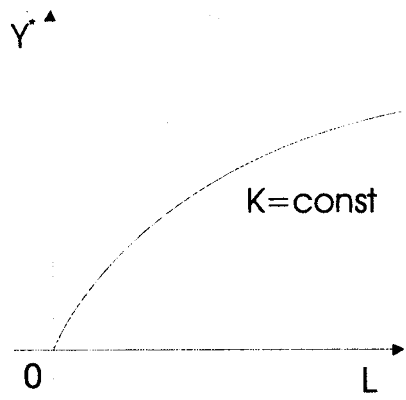


Qeyd edək ki, bu sxematik təsvir əsasən inzibati- amirlik iqtisadi sisteminə xas olub, müasir dövr üçün tam səciyyəvi deyil. Belə ki, bu təsvirdə məsələn milli gəlirə xidmətlər daxil olunmayıb.

Deyilənlərdən belə nəticəyə gəlirik ki, (N,K,L) faktorları arasında qarşılıqlı əlaqə mövcuddur. Adətən, $N=N_0=const$ hesab olunduğundan (məsələn, torpaq sahəsi adətən dəyişilməzdir) $Y=\Phi(N_0,K,L)=F(K,L)$ olur. Əgər $L=L_0=const$ olarsa, $Y_*=F(K,L_0)=Y_*(K)$ və əgər $K=K_0=const$ oduqda, $Y^*=F(K_0,L)=Y^*(L)$ olar.

Sadə analiz göstərir ki, bu asılılıqların qrafik təsvirləri aşağıdakı kimidir:





İstehsal funksiyaları nəzəriyyəsində istehsal prosesi bu prosesə lazım olan təbii və əmək resurslarının məhsula çevrilməsi nöqteyi-nəzərindən öyrənilir. Təbiidir ki, bu prosesin giriş elementləri istehsal prosesində tam və yaxud hissə-hissə istifadə olunan müxtəlif resurs növü, çıxışı isə realizə olunmuş hazır məhsuldur. İstehsal funksiyalarının qurulması prosesinin əsas "materialı" sadə halda, $Y = F(x_1, x_2, ..., x_n)$ asılılığının təhlilidir. Burada Y-buraxılışın həcmini ifadə edən kəmiyyət, $x_1, x_2, ..., x_n$ isə istehsal resurslarının həcm göstəricilərini xarakterizə edən kəmiyyətlərdir. F funksiyası kifayət qədər geniş oblastda təyin olunmalı və bu oblastın istənilən nöqtəsində hesablana bilənlik xüsusiyyətinə malik olmalıdır. Ümumi halda, istehsal prosesində adətən istehsal faktorlarından başqa bu prosesə daxildən və ya xaricdən təsir edə biləcək müxtəlif növ parametrlər toplusu da nəzərə alınmalıdır. Bu səbəbdən istehsal funksiyasının ümumi yazılışı:

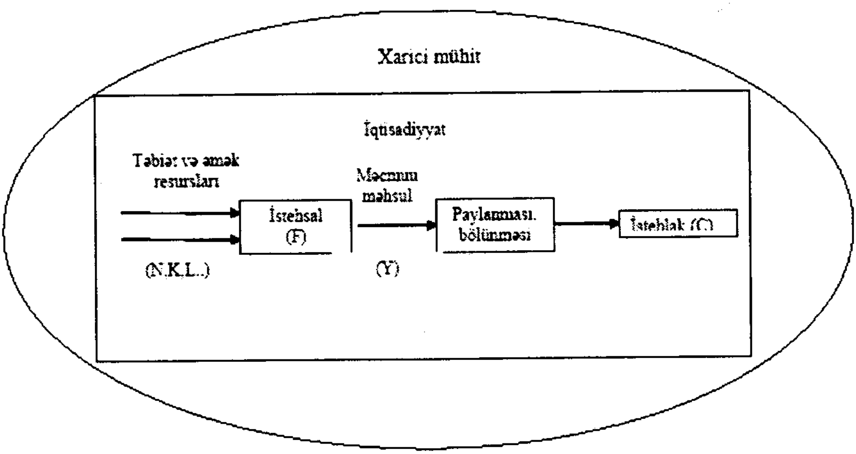
$$Y = F(x_1, x_2, ..., x_n, \vec{a}),$$

($\vec{a} = (a_1, a_2, ..., a_k)$-vektor parametrdir, $k \in N$).

Ümumi halda istehsal prosesini aşağıdakı iki prosesin nəticəsi kimi təsvir etmək olar:

- əmək alətləri və əmək resurslarının , əmək vasitələri ehtiyyatlarının formalaşdırılması;
- bu resurslardan nəticə etibarı ilə (yenidən işlənmə, təkrar emal və s. nəzərdə tutulur) hazır məhsulun alınması.

İstehsal prosesi elementləri arasındakı texnoloji əlaqəni kifayət qədər sadə halda aşağıdakı sxematik formada da təsvir etmək olar:



Yuxarıdakı mülahizələrdən bir daha o nəticəyə gəlirik ki, istehsal olunmuş məhsul miqdarı ilə bu prosesə sərf olunmuş amillərin miqdarı arasında birbaşa asılılıq mövcuddur. Bu konkret asılılığa (funksiyaya, inikasa, çevirməyə və s.) istehsal funksiyası deyilir. Başqa sözlə istehsal funksiyası iqtisadi – riyazi tənlik olub, resursları ifadə edən dəyişən kəmiyyətlərin istehsal amillərini məhsul buraxılışı kəmiyyəti ilə əlaqələndirir. Makroiqtisadiyyatda bu münasibət məsələn, milli gəlirin istehsal fondları, işçi qüvvəsindən asılılığı, mikroiqtisadiyyatda isə istehsal olunmuş məhsul həcminin firmanın (müəssisənin və s.) kapitalı və işçilərinin sayından asılılığıdır.

İstehsal funksiyaları nəzəriyyəsinin yaranma tarixi 1928-ci ilə təsadüf edir. Məhz bu ildə amerika riyaziyyatçısı C.Kobb və iqtisadçısı P.Duqlas "Amer. Econ. Rev." jurnalında "A theory of production" (İstehsal nəzəriyyəsi) adlı məqalə dərc etdirərək 1899 - 1922-ci illər ərzində ABŞ-ın emal sənayesində sərf olunan kapital və işçi qüvvəsinin nəticədə alınmış məhsul buraxılışı miqdarına təsirini empirik yolla müəyyənləşdirməyə cəhd etmişlər. Onların əsas məqsədi yuxarıdakı illərin statistik məlumatlarına əsaslanıb aşağıdakı sualların cavablandırılması olmuşdur:

- Parametrik formalı elə funksiya təyin etmək ki, baxılan prosesin əsas xarakteristikaları olan (K_t, L_t, Y_t) $t \in \overline{1899,...1922}$, faktorları arasındakı kəmiyyət münasibətlərini daha dəqiq əks etdirsin;
- Tapılacaq istehsal funksiyanın analitik riyazi yazlışında iştirak edən parametrlərin ədədi qiymətlərini tapmaq;
- $Y_{1899},..., Y_{1922}$ –faktiki qiymətləri ilə istehsal funksiyasının düsturu vasitəsilə tapılmış $Y(K_t, L_t)$ ($t \in \overline{1899,...1922}$) qiymətlərini müqayisə etmək.

Kobb tərəfindən bu prosesin istehsal funksiyası aşağıdakı şəkildə təklif olunmuşdur:

$$Y = A \cdot K^{\alpha} \cdot L^{\beta}$$

Burada A,α,β- ədədi parametrlər olub, A>0, α, β>0 və α+β=1 şərtini ödəyirlər.

İkinci sualın cavabı ƏKKÜ-nun (bax. II fəsil) köməyi ilə tapılmışdır.

Belə ki,

$$Y_t = AK_t^{\alpha} L_t^{\beta} \Leftrightarrow \ln Y_t = \ln A + \alpha \ln K_t + \beta \ln L_t \, -$$

xəttiləşdirilmə prinsipi əldə əsas götürülərək

$$I(A,\alpha,\beta)=\sum_{t=1899}^{1922}[\ln Y_t-\ln A-\alpha\ln K_t-\beta\ln L_t]^2\to\min_{(A,\alpha,\beta)}$$

məsələsi həll olunmuşdur:

$$\begin{cases} I_A=0\Rightarrow 2\sum_{1899}^{1922}[\ln Y_t-\ln A-\alpha\ln K_t-\beta\ln L_t](-\frac{1}{A})=0, \\ I_\alpha=0\Rightarrow 2\sum_{1899}^{1922}[\ln Y_t-\ln A-\alpha\ln K_t-\beta\ln L_t](-\ln K_t)=0, \\ I_\beta=0\Rightarrow 2\sum_{1899}^{1922}[\ln Y_t-\ln A-\alpha\ln K_t-\beta\ln L_t](-\ln L_t)=0. \end{cases}$$

Sonuncu tənliklər sistemindən **A=1,01; α=0,25; β=0,75** qiymətlərini tapılmışdır. Beləliklə tədqiq olunan prosesin istehsal funksiyası **$Y=1{,}01K^{0,25}L^{0,75}$** şəklində tapılaraq Kobb – Duqlas istehsal funksiyası adı ilə məhşurlaşmışdır.

Üçüncü suala cavab olaraq Y_t- faktiki qiymətləri ilə (t=1899,...,1922) düstur vasitəsilə alınmış $Y(K_t,L_t)$ qiymətlərinin müqayisəsi o nəticəyə gətirmişdir ki, bu qiymətlər ABŞ-da tənəzzül dövrü nəzərə alınmazsa biri-birilərinə çox yaxın olmuşlar.

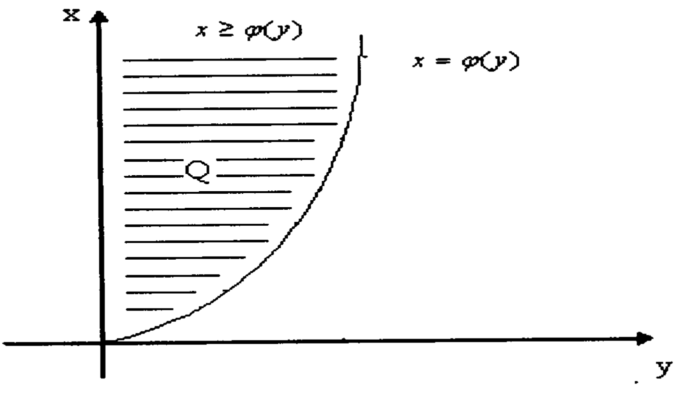
İndi isə istehsal funksiyalarının məhz nəyə görə əsas faktorların adətən qeyri-xətti funksiyası olduğunu aşağıdakı konkret proses üzərində izləyək.

Tutaq ki, hər hansı müəssisə, firma və s. konkret növ məhsul istehsal edir. Onda bu müəssisənin birinci əsas iqtisadi göstəricisi kimi baxılan zaman dövründə məhsul buraxılışı miqdarını (y), ikinci əsas göstəricisi kimi bu buraxılışa sərf olunan xammalın, enerjinin, insan qüvvəsinin və s. pulla ifadə olunmuş xərclərini (x) qəbul etmək olar. (y,x) cütü müəssisənin vəziyyəti və ya halı adlanır. Aydındır ki, y-artdıqda x –də artdığından bu iki kəmiyyət arasında konkret asılılıq mövcuddur. Bu asılılığı φ ilə işarə edək: $x = \varphi(y)$

Müəssisənin həqiqi xərcləri, işçilərin istehsal prosesinin səmərəliliyini daha da artırmaq üçün istehsal resurslarından istifadəyə münasibətlərində tam "obyektiv" olmadıqları səbəbindən, minimal xərclərdən çox olduğundan faktiki olaraq müəssisənin vəziyyəti dedikdə,

$$Q=\{(x,y)/x \geq \varphi(y)\} -$$

$\{x, y\}$ nöqtələr çoxluğu başa düşülür.



Baxdığımız prosesdə müəssisənin məhz hansı növ məhsul istehsal etdiyi bizi maraqlandırmadığından φ asılılığını kifayət qədər sadə formada, parabola şəkildə götürək (bu halı aşağıda əsaslandıracağıq):

$$x = \varphi(y) = \frac{1}{2r} y^2$$

Yuxarıda r-müəssisənin səmərəliliyini xarakterizə edən kəmiyyət olub, iki eyni tip məhsul istehsal edən müəssisədən hansında böyükdürsə (böyük ədəddirsə) o müəssisə eyni həcmli məhsul buraxılışını daha az xərclə yerinə yetirə bilər:

$$\text{əgər } r_1 > r_2, \text{ onda } x_1 = \frac{y^2}{2r_1} < x_2 = \frac{y^2}{2r_2}.$$

Hər bir müəssisənin əsas məqsədi mənfəət əldə etmək olduğundan, əgər bu proses üçün istehsal olunmuş məhsul buraxılışının vahid miqdarının qiymətini λ ilə işarə etsək, mənfəəti ifadə edən kəmiyyət aşğıdakı şəkildə yazılır.

$$M(y) = \lambda \cdot y - x = \lambda \cdot y - \frac{1}{2r} y^2$$

Beləliklə, nə qədər məhsul istehsal etmək lazımdır ki, gəlir maksimum olsun, məsələsinin həlli

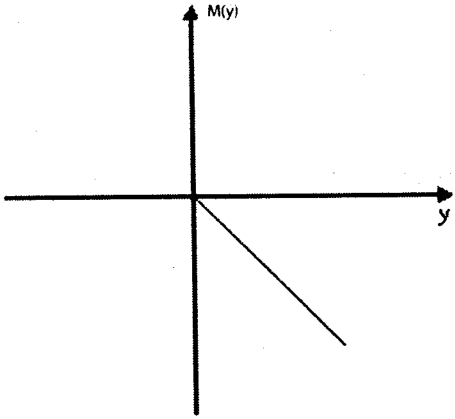
$$M'(y) = 0 \Leftrightarrow y_*^{opt} = \lambda \cdot r.$$

Optimallıq üçün kafi şərtə görə, $M''(\lambda \cdot r) = -\frac{1}{r} < 0$ olduğundan

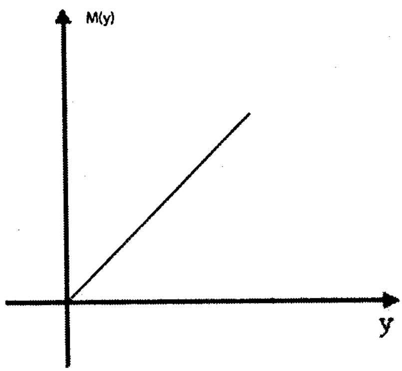
$$MaxM(y) = M(y_*^{opt}) = \lambda^2 r - \frac{\lambda^2 r^2}{2r} = \frac{\lambda^2 r}{2} = \frac{\lambda}{2} \cdot \lambda r = \frac{\lambda y_*^{opt}}{2}.$$

Əgər $\varphi(y)$ funksiyanısını xətti şəkildə, məsələn $x = ky$ şəklində götürmüş olsaydıq, onda gəlir funksiyası $M(y) = (\lambda - k)y$ şəklində olardı.

Digər tərəfdən $\lambda \leq k$ halında müəsssisə gəlirini maksimallaşdıran kəmiyyət $y_{*}^{opt} = 0$,



λ >k halında isə, $y_{*}^{opt} = +\infty$ olardı:



Aydınıdr ki, birinci hal zidiyyətli, ikinci hal isə qeyri realdır.

Makroiqtisadi səviyyədə istehsal prosesinin mühüm amilləri canlı əmək (işçi qüvvəsi) və istehsal fondları, istehsalın nəticəsi isə son ümumi məhsul (yaxud milli gəlir olur). Ona görə də növbəti bölmələrdə biz iki faktorlu istehsal funksiyalarının xarakterik xüsusiyyətlərinin təhlili ilə kifayətlənəcəyik.

Ümumiyyətlə istehsal funksiyası anlayışının iqtisadi nəzəriyyə elminə daxil edilməsi "gizli" şəkildə aşağıdakı fərziyyənin qəbul edilməsidir:

"Əgər hər hansı istehsal prosesində sərf olunan kapitalın miqdarı azalarsa (artarsa) istehsalın həcmini əvvəlki vəziyyətdə saxlamaq üçün digər faktorun qiymətini artırmaq (azaltmaq) lazımdır".

$$Y = AK^{\alpha}L^{\beta} \Rightarrow L = \left(\frac{Y}{AK^{\alpha}}\right)^{\frac{1}{\beta}} = L(K)$$

Bu fərziyyədən çıxış edərək istehsal funksiyalarının aşağıdakı mühüm 3 klassik xüsusiyyətini qeyd etmək olar:

1) $\{K, L\}$ istehsal faktorlarının mümkün qiymətləri üçün

$$F(K,0) = 0 \text{ və } F(0,L) = 0$$

bərabərlikləri doğrudur (istehsal faktorlarından heç olmasa birinin yoxluğu istehsalı qeyri mümkün edir).

2) Əgər F(K,L) istehsal funksiyası mümkün $(K,L) \in Q$ çoxluğunda birinci tərtibdən hamar funksiyadırsa, onda

$$F_k = \frac{\partial F(K,L)}{\partial K} > 0, \; F_L = \frac{\partial F(K,L)}{\partial L} > 0 \;\; \forall (K,L) \in Q.$$

3) Müşahidələr göstərir ki, iqtisadi prosesin xalis ekstensiv inkişafı zamanı istehsal faktorlarından hər hansı birinin sonrakı artımları məhz həmin resursdan istifadənin səmərəliliyini azaldır. Bu hökmün arxasında dayanan riyazi ifadənin iqtisadi mənasına azalan faydalılıq və ya azalan gəlirlilik qanunu deyilir:

Əgər $F \in C^2(Q)$ yəni F istehsal funksiyası hər bir dəyişəninə nəzərən ikinci tərtibdən törəməyə malikdirsə, onda

$$F_{KK} = \frac{\partial^2 F(K,L)}{\partial K^2} < 0 \quad \text{və } F_{LL} = \frac{\partial^2 F(K,L)}{\partial L^2} < 0 \quad \forall (K,L) \in Q.$$

Qeyd edək ki, əgər F(K,L) istehsal funksiyası üçün 2) və 3) fərziyyələrindəki hamarlılıq və ikinci tərtib xüsusi törəmələrə maliklik şərtləri ödənilməzsə, bu şərtlər istehsal funksiyasının monoton artanlıq ($F(\lambda K, \lambda L) > F(K,L) \quad \forall \lambda > 1$) və hər bir dəyişəninə nəzərən çöküklük xüsusiyyətlərinə malik olmasına ekvivalent olurlar.

Praktikada adətən birdəyişənli diferensiallanan funksiyaların qabarıq və yaxud çökük olmalarını aydınlaşdırmaq üçün uyğun olaraq $f''(x) \geq 0$ və ya $f''(x) \leq 0$, çoxdəyişəönli funksiyalar üçün isə ikinci tərtib törəmələrdən düzəldilmiş Hesse matrisinin müsbət və ya mənfi müəyyənlik şərtlərini yoxlayırlar (bax. məs. [10])

Əgər milli gəlir və ya istehsalın həcmi istehsal faktorlarına mütənasib formada dəyişərsə onda baxılan istehsal prosesinin istehsal funksiyası bircinsdir deyilir:

$$F(\lambda K, \lambda L) = \lambda F(K,L) \quad \forall \lambda > 0$$

Başqa sözlə, əgər elə $\mu > 0$ ədədi varsa ki, istehsal funksiyası üçün

$$F(\lambda K, \lambda L) = \lambda^{\mu} F(K,L) \quad \forall \lambda > 0$$

şərti ödənilsin, onda bu cür istehsal funksiyasına μ -cü tərtibdən bircins istehsal funksiyası deyilir.

Sonralar istehsal funksiyasının bircinsliyi termini altında biz μ=1 halını başa düşəcəyik.

Asanlıqla yoxlamaq olar ki, Kobb-Duqlas tipli

$$Y = F(K,L) = AK^{\alpha} L^{\beta} \quad (\alpha, \beta \geq 0; \ \alpha + \beta = 1)$$

istehsal funksiyası yuxarıda sadalanılan hər üç klassik xüsusiyyətə malikdir və bu funksiya üçün birinci tərtibdən bircinslik xassəsi də ödənilir.

IV FƏSİL

İzokvant əyriləri və onların həndəsi şərhi. İzokvant əyrilərinin monoton azalanlığı haqqında teorem. Elastiklik əmsalları və onların iqtisadi şərhi. İkidəyişənli Y=F(K,L) istehsal funksiyasının birdəyişənli y=f(η) funksiyası ilə əlaqələndirmə sxemi. Elastiklik əmsallarına nəzərən istehsal funksiyasının özünün bərpa olunması prinsipi. İstehsal funksiyasının miqyasdan asılı olmamazlıq əlamətləri

İstehsal funksiyasının klassik xüsusiyyətlərindən belə məlum olur ki, istehsal həcminin hər hansı $Y=Y_{const}$ - konkret qiymətini istehsal prosesinin əsas {K,L} – faktor cütlərinin sonsuz sayda kombinasiyasında əldə etmək mümkündür.

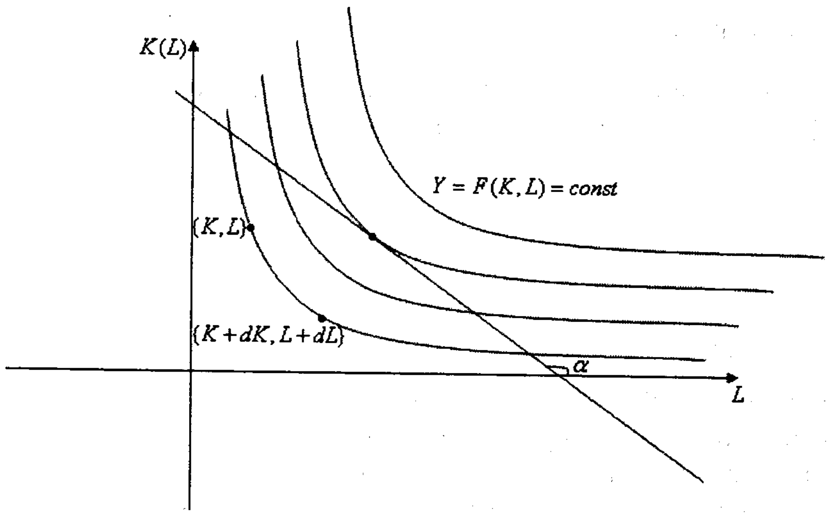
Bu şərti ödəyən {K,L} nöqtələrinin həndəsi yerinə KOL koordinat müstəvisində baxılan istehsal funksiyasına uyğun izokvant əyrisi deyilir. İzokvant əyrisindən resursların qarşılıqlı əvəzetmə imkanlarının təyini prosesində geniş istifadə olunur. Mahiyyət etibari ilə bu əyrinin qurulması prinsipi istehlak nəzəriyyəsində faydalılıq funksiyalarının etinasızlıq (təfavütsüzlük) xətlərinin qurulmasına analojidir. Belə ki, Dekart koordinat müstəvisinin birinci rübündə absis oxu üzərində istehsal prosesinin əsas faktorlarından biri, ordinat oxu üzərində isə digəri qeyd olunur. Daha sonra yuxarıdakı xüsusiyyətə malik {K,L} nöqtələr cütü birləşdirilərək izokvant əyrisini əmələ gətirirlər. Qeyd edək ki, eyni bir koordinat müstəvisində çoxlu sayda izokvant əyrilərini çəkmək mümkündür. İzokvant əyriləri adətən mənfi meyilli hamar əyrilərdir, belə ki, onların qrafikinə istənilən nöqtədə çəkilən toxunan absis oxunun müsbət istiqaməti ilə kor bucaq əmələ gətirir. Koordinat başlanğıcına sağdan sola yaxınlaşdıqca bu meyl azalır. Bu hal onu ifadə edir ki, izokvant əyriləri qabarıq əyrilərdir. İqtisadi informasiya məlumatlarının işlənməsi ilə bağlı tədqiqatlarda adətən bu əyrilərin əsas xüsusiyyətlərini riyazi statistikanın köməyi ilə öyrənirlər. Lakin, bu xassələri nəzəri aparatın köməyi ilə də əsaslandırmaq mümkündür. Məsələn, izokvant əyriləri üçün aşağıdakı teorem doğrudur.

Teorem: $Y_{const}=F(K,L)$ düsturundan tapılmış $K=K(L)$ izokvant əyrisi monoton azalan funksiyadır. Yəni ,

$$K'(L) = \frac{dK(L)}{dL} < 0.$$

İsbatı: Tutaq ki, $\{K,L\}$ və $\{K+dK, L+dL\}$ nöqtələri

izokvant əyrisinin üzərində olan cari nöqtələrdir (bax. şəkil.).



Onda

$$\begin{cases} F(K,L) = Y_{const}, \\ F(K+dK, L+dL) = Y_{const}. \end{cases}$$

İkinci bərabərlikdən birincini çıxsaq və alınmış fərqə ikidəyişənli funksiyalar üçün riyazi analiz kursundan Laqranjın məlum sonlu artımlar düsturunu tətbiq etsək aşağıdakı bərabərliyi alarıq:

$$\frac{\partial F}{\partial K}dK+\frac{\partial F}{\partial L}dL=0.$$

Buradan F- istehsal funksiyasının ikinci xüsusiyyətinə əsasən

$$\frac{dK}{dL}=-\frac{\dfrac{\partial F(K,L)}{\partial L}}{\dfrac{\partial F(K,L)}{\partial K}}<0.$$

Teorem isbat olundu.

Aşağıdakı iki kəmiyyətə uyğun olaraq K-kapitalına və L-işçi qüvvəsinə nəzərən elastiklik əmsalları deyilir.

$$E_K\stackrel{def}{=}\frac{\partial F(K,L)}{\partial K}\cdot\frac{K}{F},$$

$$E_L\stackrel{def}{=}\frac{\partial F(K,L)}{\partial L}\cdot\frac{L}{F}.$$

Asanlıqla yoxlamaq olar ki, Kobb-Duqlas tipli $F(K,L)=AK^{\alpha}L^{\beta}$ istehsal funksiyaları üçün $E_K=\alpha$, $E_L=\beta$. Iqtisadi mənaca bu kəmiyyətlər K və L istehsal məsrəflərinin 1% artımına məcmu məhsulun necə faiz artmını ifadə edir.

Məsələn, Kobb – Duqlasın $Y=1.01K^{0.25}L^{0.75}$ funksiyasında kapital məsrəflərinin 1% artımı istehsalın həcminin 0.25% artımına, əmək məsrəflərinin 1% artımı isə istehsal həcminin 0.75% artımına gətirib.

Məlumdur ki, ikidəyişənli Y=F(K,L) istehsal funksiyasının üçölçülü fəza qrafikinin təsvirini əldə etmək kifayət qədər mürəkkəb məsələdir. Bu hal iqtisadi-riyazi modelləşdirmədə müəyyən təbii çətinliklər yaradır. Adətən situasiyadan çıxış yolunu konkret istehsal funksiyasına uyğun izokvant əyrilərinin tədqiqində görürlər. Lakin elə hallar olur ki, istehsal funksiyasının özünün qrafikinin təsvirindən yan keçmək mümkünsüz olur.

Bu əlaqə prosesini Y=F(K,L) istehsal funksiyasının bircinsliyi ($F(\lambda K, \lambda L) = \lambda F(K, L)$, $\forall \lambda > 0$) şərti daxilində aşağıdakı sxem üzərində izləyək. $\lambda = \frac{1}{L}$ qəbul etsək:

$$Y = L \cdot F(\frac{K}{L}, \frac{L}{L}) = L \cdot F(\frac{K}{L}, 1),$$

$$\frac{Y}{L} = F(\frac{K}{L}, 1).$$

Aydındır ki, iqtisadi mənaca $y = \frac{Y}{L}$ - bir işçiyə düşən məhsul buraxılışının miqdarını və yaxud orta əmək məhsuldarlığı, $\eta = \frac{K}{L}$ isə bir işçiyə düşən əsas fondların orta miqdarını və yaxud fondla silahlanmanı ifadə edərlər. Nəticədə $y = F(\eta, 1) = f(\eta)$ birdəyişənli istehsal funksiyasını almış olarıq. O da aydındır ki, F(K,L) və $f(\eta)$ istehsal funksiyaları arasındakı təbii nəticə aslılığı $Lf(\eta) = F(K, L)$ bərabərliyidir.

Qeyd edək ki, $y = f(\eta)$ funksiyası iqtisadi artım modelində məşhur amerikan iqtisadçısı, nobel mükafatı laureatı Robert Solounun adı ilə bağlı tənliyin əsas tədqiqat elementidir.

Asanlıqla yoxlamaq olar ki, bu funksiya aşağıdakı xüsusiyyətlərə malikdir:

1) f(0)=0,

2) $f'(\eta) = \frac{dF(\eta, 1)}{d\eta} > 0,$

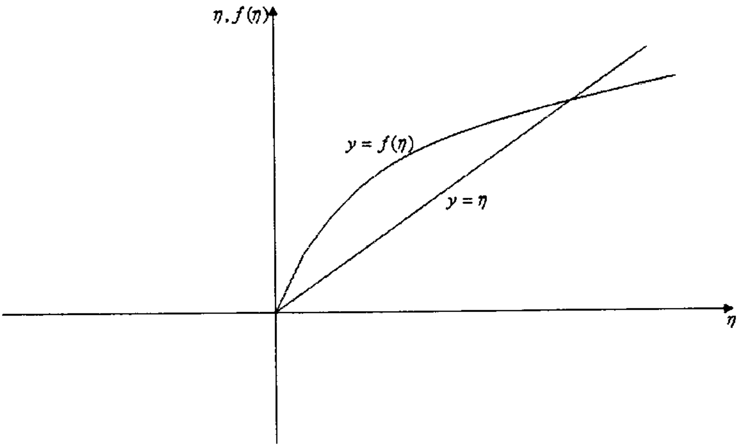
3) $f''(\eta) = \dfrac{d^2F(\eta,1)}{d\eta^2} < 0,$

4) $\lim\limits_{\eta \to +0} f'(\eta) = +\infty,$

5) $\lim\limits_{n \to +\infty} f'(\eta) = 0,$

6) $\lim\limits_{n \to +\infty} f(\eta) = +\infty,$

7) $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{f(\eta)}{\eta} = 0.$



Sonuncu xassə bəzi vacib iqtisadi tədqiqatlarda (məs. iqtisadi artımın neoklassik Solou modelinin stasionar vəziyyətlərinin təhlilində) mühüm əhəmiyyət kəsb etdiyindən onun isbatını verək.

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{f(\eta)}{\eta} = \lim_{n \to +\infty} \frac{F(\eta,1)}{\eta} = \lim_{n \to +\infty} F(1;\frac{1}{\eta}) = F(1;\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{\eta}) = F(1;0) = 0.$$

İndi isə artıq bizə məlum olan

$$E_K = \frac{\partial F(K,L)}{\partial K} \cdot \frac{K}{F},$$

$$E_L = \frac{\partial F(K,L)}{\partial L} \cdot \frac{L}{F} -$$

kapitala və işçi qüvvəsinə nəzərən elastik əmsallarını Y=F(K,L) istehsal funksiyasına uyğun y=f(η) funksiyası ilə əlaqələndirək.

$$E_k = \frac{\partial (Lf(\eta))}{\partial K} \cdot \frac{K}{Lf(\eta)} = L\frac{\partial f(\eta)}{\partial K} \cdot \frac{K}{Lf(\eta)} = \qquad (\eta = \frac{K}{L} \Rightarrow K = L\eta)$$

$$= \frac{\partial f(\eta)}{L\partial \eta} \cdot \frac{K}{f(\eta)} = f'(\eta)\frac{\eta}{f(\eta)} = \frac{\eta f'(\eta)}{f(\eta)};$$

$$E_L = \frac{\partial (Lf(\eta))}{\partial L} \cdot \frac{L}{Lf(\eta)} = \frac{\partial (Lf(\eta))}{\partial L} \cdot \frac{1}{f(\eta)} = \qquad (\eta = \frac{K}{L} \Rightarrow L = \frac{K}{\eta})$$

$$= \frac{1}{\eta f(\eta)} \cdot \frac{\partial f(\eta)}{\partial \frac{1}{\eta}} = \frac{1}{\eta f(\eta)} \cdot \frac{f'(\eta)\frac{1}{\eta} - \frac{1}{\eta^2} f(\eta)}{\frac{1}{\eta^2}} = \frac{1}{f(\eta)}[f(\eta) - \eta f'(\eta)]$$

Aşağıdakı, müəyyən mənada tərs məsələnin sualını cavablandıraq: "Tutaq ki, hər hansı naməlum F(K,L) istehsal funksiyası üçün hər iki elastiklik əmsalları sabit ədədlərdir. Bu hansı tip istehsal funksiyasıdır ?"

Doğrudan da əgər $E_K = const(C)$ isə, onda

$$\frac{\eta f'(\eta)}{f(\eta)} = C \Rightarrow \frac{df(\eta)}{f(\eta)} = \frac{C}{\eta} d\eta \Rightarrow \ln f(\eta) = \ln C_1 \cdot \eta \Rightarrow f(\eta) = C_1 \cdot \eta^C \Rightarrow$$

$$\Rightarrow Lf(\eta) = LC_1 \cdot \eta^C \Rightarrow F(K,L) = LC_1 \cdot \left(\frac{K}{L}\right)^C = LC_1 \frac{K^C}{L^C} = C_1 K^C L^{1-C}.$$

Digər tərəfdən əgər $E_L = const(C_2)$ olarsa, onda

$$\frac{1}{f(\eta)}(f(\eta) - \eta f'(\eta)) = C_2 \Rightarrow f(\eta) - \eta f'(\eta) = C_2 f(\eta)$$

$$\Rightarrow \eta f'(\eta) = (1 - C_2) f(\eta) \Rightarrow \frac{f'(\eta)}{f(\eta)} = \frac{(1 - C_2)}{\eta} \Rightarrow \ln f(\eta) =$$

$$= (1 - C_2) \ln \eta + \ln C_3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(\eta) = C_3 \eta^{1-C_2} \Rightarrow Lf(\eta) = C_3 \frac{K^{1-C_2}}{L^{1-C_2}} \cdot L = C_3 K^{1-C_2} L^{C_2}.$$

Cavab: Kobb-Duqlas tipli istehsal funksiyaları üçün.

Qeyd: Əgər hər hansı istehsal funksiyasında iştirak edən əsas istehsal faktorlarının dərəcələri cəmi vahidə bərabərdirsə, bu hal riyazi olaraq istehsal funksiyasının bircinsliyi deməkdir. İqtisadi mənaca bu onu ifadə edir ki, istehsalın həcmi istehsal faktorlarına mütənasib olaraq artır. Əgər bu dərəcələrin cəmi vahiddən böyük olarsa bu hal xərclərin artımının istehsal prosesində məhsul buraxılışının qeyri mütənasib artımına gətirər. Məsələn, istehsal prosesini gücləndirmək məqsədilə ikiqat gücə malik zavod (müəssisə, firma və s.), eyni qədər kapital qoyuluşu tələb edən iki eyni tipli zavoddan səmərəlidir.

İstənilən istehsal funksiyasında əsas istehsal faktorlarının qarşısındakı vuruq(əmsal) kəmiyyəti əsas istehsal faktorları və məhsul buraxılışı miqdarının seçilmiş ölçü vahidlərindən asılı miqyas , ölçü göstərən kəmiyyətdir.

Indi isə istehsal funksiyalarını miqyasdan asılı olmamazlıq xassəsi ilə tanış olaq.

Fərz edək ki, bircins (eyni növ) məhsul istehsal edən n sayda müəssisə mövcuddur və bu tip müəssisdən biri də tikilərək onun üçün işçi qüvvəsi və lazımi avadanlıq əldə olunmuşdur. Bu o deməkdir ki, bütün bu müəssisələrin məhsul buraxılışı fəaliyyəti üçün fond həcmi və işləyənlərin sayı $(1+\frac{1}{n})$ dəfə artıb. Əgər belə olan halda məhsul buraxılışı miqdarı da məhz bu qədər dəfə artarsa, bu istehsal fəaliyyətinin istehsal funksiyası miqyasdan asılı olmur deyilir.

Aydındır ki, bu vəziyyət elmi texniki tərəqqinin nailiyyətləri nəzərə alınmadığı halda istehsal funksiyasının bircinsliyi şərtinə ekvivalentdir. Məhz bundan istifadə edərək yuxarıda biz F(K,L) istehsal funksiyasını birdəyişənli $f(\eta)$ funksiyası ilə əlaqələndirə bildik: $F(K,L)=Lf(\eta)$.

Əgər hər hansı istehsal prosesi üçün onu əsas x_1,x_2 istehsal faktorlardan asılı $F(x_1,x_2)$ istehsal funksiyası $F(tx_1,tx_2)>tF(x_1,x_2)$, $\forall t>1$ bərabərsizliyini ödəyərsə, bu prosesin istehsal funksiyası miqyasdan artan verimə malikdir deyilir. Məsələn, əgər biz neft kəmərinin diametrini iki dəfə artırsaq, bu borudan əvvəlkindən iki dəfə artıq neft ötürə bilərik. Lakin bu halda borunun ixtiyari hissəsində onun en kəsiyinin sahəsi 4 dəfə artdığından material tutumunun artması nəticəsində diametrin növbəti artımı kəmərin öz xüsusi çəkisinin ağırlığından ciddi zədəyə məruz qala bilər.

Əgər hər hansı istehsal prosesi üçün onun istehsal funksiyası

$$F(tx_1,tx_2)<tF(x_1,x_2),\ \forall t>1$$

bərabərsizliyi ödəyərsə, onda deyilir ki, bu prosesin istehsal funksiyası miqyasdan azalan verimə malikdir. Bu hal müəyyən qədər spesifikdir. Əgər istehsal faktorlarından hər birini iki dəfə artırarkən biz nəticədə 2 dəfədən artıq məhsul buraxılışı əldə etməmişiksə, hansı situasiyadasa istehsal faktoralarından hər hansı birinə (və yaxud hər ikisinə) təsir edə biləcək amilləri tam nəzərə almamışıq. Zənnimizcə, sonuncu hal qısa müddətli istehsal prosesi dövrü üçün xarakterik olub, baxılan müddət ərzində istehsal faktorlarından hər hansı birinin dəyişməz qaldığı vəziyyətə uyğun ola bilər.

V FƏSİL

Dinamik sistemlər nəzəriyyəsinin iqtisadi inkişafın dinamik modellərinə tətbiqi.Dinamik sistemlər və onların həllərinin mühüm xüsusiyyətləri. Bir və iki növ populyasiya modelinin dinamik sistemlərlə əlaqəli təhlili. İqtisadi tədqiqatlarda A.Lyapunov mənasında dayanıqlıq və asimtotik dayanıqlıq anlayışları. Misallar. Dinamik tənliklər sisteminin tarazlıq vəziyyətlərinin dayanıqlığa görə təsnifatalaşdırılması.

Məlumdur ki, əksər iqtisadi proseslər zamandan kəsilməz asılı olaraq inkişaf etdiyindən dinamik proseslər adlanırlar. Başqa sözlə kəsilməz iqtisadi modellərdə (harada ki, asılı olmayan dəyişən t – zaman faktorudur) diferensial tənliklər nəzəriyyəsindən istifadə təbiidir. Belə ki, iqtisadi sistemlərin uzun müddətli tədqiqində diferensial tənliklərlə təsvir olunan modellər olduqca səmərəlidir(məs. iqtisadi dinamikanın təhlilində onlar əsas vasitə sayılırlar).

Differensial model dedikdə hər hansı real hadisə və prosesin tədqiqi zamanı qarşıya çıxan tənlik və ya tənliklər sistemi başa düşülür. Aydındır ki, differensial modellər bizi əhatə edən aləmdə baş verən çoxsaylı proseslərin öyrənilməsində istifadə olunan modellərdən biridir və onların çoxlu növləri mövcuddur (xüsusi törəməli differensial tənliklərlə, inteqro-differensial tənliklərlə, gecikən, meyl edən arqumentli differensial tənliklərlə və s. təsvir olunan modellər). Qeyd edək ki, çoxlu sayda iqtisadi-ekoloji yönümlü proseslərin riyazi modelləri differensial tənliklər sistemi ilə təsvir olunarkən prosesin təbiəti elə olur ki, model differensial tənliklərin sağ tərəfləri aşkar şəkildə zaman parametrindən asılı olmur.

Tərif: $n \in N$ tərtibli adi differensial tənliklər sisteminə o zaman dinamik (avtonom, konservativ, stasionar) differensial tənliklər sistemi deyilir ki, onun sağ tərəfindəki bütün ifadələr aşkar şəkildə t - zaman parametrindən asılı olmasın. Vektor bərabərliyi formasında bu tərif altında

$$\dot{\vec{x}}(t) = \vec{f}(\vec{x}(t)) \qquad (5.1)$$

münasibəti başa düşülür. Yuxarıda

$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ . \\ . \\ x_n \end{pmatrix}$ - məchul vektor funksiya, $t \in (-\infty;+\infty)$, "$\bullet$" –törəmə alma simvolu,

$\dot{\vec{x}}(t) = \begin{pmatrix} \frac{dx_1(t)}{dt} \\ \frac{dx_2(t)}{dt} \\ . \\ . \\ . \\ \frac{dx_n(t)}{dt} \end{pmatrix}$, $\vec{f} = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \dots \\ f_n \end{pmatrix}$ - sağ tərəfin məlum vektor funksiyadır.

(5.1) sisteminin koordinatlarla yazılışı

$$\begin{cases} x'_1(t) = f_1(x_1(t);\ x_2(t);\ \ldots\ x_n(t)), \\ x'_2(t) = f_2(x_1(t);\ x_2(t);\ \ldots\ x_n(t)), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x'_n(t) = f_n(x_1(t);\ x_2(t);\ \ldots\ x_n(t)). \end{cases}$$

formasındadır.

Qeyd edək ki, əgər sağ tərəfi zaman parametrindən aşkar formada asılı $\dot{\vec{x}}(t) = \vec{g}(t, \vec{x}(t))$ -differensial tənliklər sistemi verilmişsə, $x_{n+1} \equiv t$ əvəzlənməsini apardıqdan sonra ($\dot{x}_{n+1} \equiv 1$) onu $\dot{\vec{y}}(t) = \vec{F}(\vec{y}(t))$ -sistem şəklinə gətirmək mümkündür.

Yuxarıda

$$\vec{F} = \begin{pmatrix} \vec{g} \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \vec{y} = \begin{pmatrix} \vec{x} \\ x_{n+1} \end{pmatrix}$$

işarə olunmuşdur.

Fərz edirik ki, (5.1) tənliyinin sağ tərəfindəki funksiya hər hansı açıq $\Omega \in R^n$ oblastında kəsilməz vektor funksiyadır və bu çoxluğa daxil olan istənilən qapalı, məhdud K- alt çoxluğunda diferensial və inteqral hesabının məşhur Lipşis şərtini ödəyir:
$\exists L > 0$ var ki, $\forall (x, y) \in K$ üçün $|f(x) - f(y)| \leq L \cdot |x - y|$.

Onda differensail tənliklər kursundan həllin varlığı və yeganəliyi haqqında məlum teoremə əsasən, istənilən başlanğıc $t_0 \in (-\infty;+\infty)$ zaman anı və başlanğıc $x_0 \in \Omega$ vəziyyəti üçün (5.1) sisteminin $\vec{x}\ (t_0) = \vec{x}_0$ şərtini ödəyən yeganə $\vec{x} = \vec{x}(t)$ həlli var.

(x_1 $x_2, \ldots, x_n$) koordinat sistemində (buna adətən (5.1) tənliklər sisteminin faza fəzası da deyilir) (5.1) tənliyinin istənilən həlli hər hansı konkret əyrini təyin edir. Bu əyri t zaman parametri ilə birlikdə ($x_1=x_1(t)$; $x_2=x_2(t)$; ..., $x_n=x_n(t)$) (5.1) tənliklər sisteminin trayektoriyası adlanır və t zaman parametrinin dəyişməsinə uyğun olaraq R^n fəzasında hər hansı nöqtələr çoxluğunu təyin edir. Bu sisteminin inteqral əyriləri (t=t; $x_1=x_1(t)$; $x_2=x_2(t)$; ...; $x_n=x_n(t)$) nöqtələr çoxluğundan ibarət olub R^{n+1} oblastına aiddir.

Deməli (5.1) tipli dinamik tənliklər sisteminin trayektoriyaları özünün inteqral əyrilərinin t oxuna paralel müstəvi üzərindəki R^n fəzasında proyeksiyalanması nəticəsində alınır. Kifayət qədər sadə dildə bu o deməkdir ki, hər hansı dinamik tənliklər sisteminin inteqral əyilərindən onun trayektoriyasını əldə etmək üçün inteqral əyrini təyin edən ifadələrdən t zaman parametrini yox etmək kifayətdir.

Misal:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t), \\ \dot{x}_2(t) = -x_1(t). \end{cases}$$

Burada n=2, $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$, $\vec{f} = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 \\ -x_1 \end{pmatrix}$.

Aydındır ki, bu sistemin inteqral əyriləri $\ddot{x}_1 + x_1 = 0$ tənliyinin nəticəsi kimi təyin olunan

$$(t;\ x_1(t) = C_1 \sin t + C_2 \cos t;\ x_2(t) = C_1 \cos t - C_2 \sin t) \in R^3$$

nöqtələri çoxluğudur. Onun trayektoriyaları isə x_1Ox_2 koordinat sistemində $x_1^2 + x_2^2 = C^2$ $(C^2 = C_1^2 + C_2^2)$ - mərkəzi koordinat başlanğıcında olan konsentrik çevrələr ailəsindir(xüsusi halda (0,0)- koordinat başlanğıcı da daxil olmaqla).

İndi isə dinamik tənliklər sisteminin elə xassələri ilə tanış olaq ki, o xassələr adi differensial tənliklərin həllərinə ümumiyyətlə xas deyil. Şərtləşək ki, texniki səbəbdən vektor işarəsini heç də həmişə yazmayacağıq.

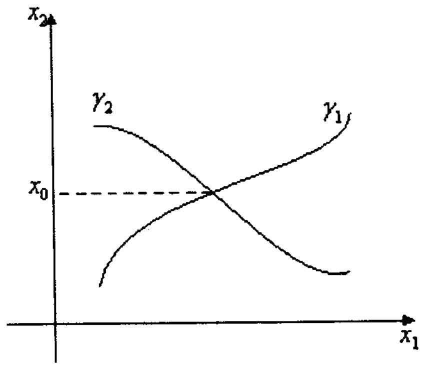
1) Əgər $x=\varphi(t)$ əyrisi (5.1) dinamik tənliklər sisteminin həllidirsə, onda ixtiyari c-həqiqi ədədi üçün $x=\varphi(t+c)$ də həmin sistemin həllidir.

Doğrudan da $\dfrac{d\varphi(t+c)}{dt}=\dfrac{d\varphi(t+c)}{d(t+c)}=f(\varphi(t+c))$.

Bu xassə onu ifadə edir ki, $x=\varphi(t+c)$ həlli c-həqiqi sabitinin bütün mümkün qiymətlərində faza fəzasında eyni bir traektoriyanı təyin edir.

2) (5.1) dinamik tənliklər sisteminin istənilən iki trayektoriyası ya üst-üstə düşürlər, ya da ümumi kəsişmə nəqtəsinə malik olmurlar.

İsbatı: Tutaq ki, (5.1) sisteminin $x_1=\varphi_1(t)$, $x_2=\varphi_2(t)$ traektoriyaları üçün elə t_1, t_2 zaman anları mövcüddür ki, $\varphi_1(t_1)=\varphi_2(t_2)=x_0$. γ_1 və γ_2 ilə uyğun olaraq bu traektoriyaların qrafiklərin işarə edək.



Onda $x_3=\varphi_3(t)=\varphi_2(t+(t_2-t_1)$ əyrisi xassə 1)-ə əsasən (5.1) tənliyinin həlli olar, belə ki,

$$\varphi_3(t_1)=\varphi_2(t_2)=\varphi_1(t_1)=x_0.$$

Sonuncu bərabərlik onu ifadə edir ki, eyni bir başlanğıc (t_1, x_o) vəziyyətindən (5.1) dinamik sisteminin iki müxtəlif $\varphi_3(t)$ və $\varphi_1(t)$ həlləri çıxır. Bu isə uyğun Koşi məsələsinin həllinin yeganəliyinə ziddir.

3) Tutaq ki, $x=\varphi(t)$ trayektoriyası (5.1) dinamik sisteminin $-\infty < t < +\infty$ aralığında təyin olunmuş hər hansı həllidir. T ədədinə o zaman bu həllin dövrü (periodu) deyilir ki, $\varphi(t+T) = \varphi(t)$ bərabərliyi istənilən t üçün doğru olsun.

$P(\varphi)$ ilə $\varphi(t)$ trayektoriyasının periodlar çoxluğunu işarə edək. Asanlıqla yoxlamaq olar ki, bu çoxluq boş deyil, çünki $T=0 \in P(\varphi)$. Digər tərəfdən bu çoxluq aşağıdakı mühüm xüsüsiyyətlərə malikdir:

-əgər $T \in P(\varphi)$, onda $-T \in P(\varphi)$;

-əgər $T_1, T_2 \in P(\varphi)$, onda $T_1+T_2 \in P(\varphi)$

-$P(\varphi)$ çoxluğu qapalı çoxluqdur, yəni bu çoxluğun bütün limit elementləri özünə aiddir.

Sonuncu xassə iqtisadi – riyazi tədqiqatlarda mühüm əhəmiyyət kəsb etdiyindən onun isbatının qısa şərhini verək.

Tutaq ki, T_0 ədədi $P(\varphi)$ çoxluğundan götürülmüş istənilən yığılan $\{T_n\}_{n \in N}$ ardıcıllığının limitidir. Onda

$$\varphi(t+T_0) = \varphi(t + \lim_{n\to\infty} T_n) = \lim_{n\to\infty} \varphi(t+T_n) = \lim_{n\to\infty} \varphi(t) = \varphi(t).$$

Deməli $T_0 \in P(\varphi)$.

4) (5.1) tənliklər sisteminin $x = \vec{a}$ ($\vec{a}$ -sabit vektordur) şəkilli həllərinə onun tarazlıq, məxsusi, sükunət və s. vəziyyətləri və yaxud həlləri deyilir.

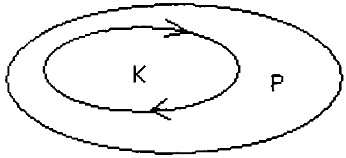
Asanlıqla yoxlamaq olar ki, əgər $x=\vec{a}$ (5.1) sisteminin məxsusi vəziyyətidirsə onda f funksiyası üçün $\bar{f}(\vec{a})=0$ və tərsinə. Qeyd edək ki, istənilən xarakterli sistemin tarazlıq vəziyyətləri (əgər mövcuddursa) onun mühüm xüsusiyyətlərini əks etdirən özünəməxsus haldır. Məxsusi vəziyyətlərin təsnifatlaşdırılması məsələsi ilk dəfə olaraq ikinci tərtib dinamik tənliklər sistemi üçün rus alimi N.E. Jukovski tərəfindən 1876-cı ildə yerinə yetirilmişdir. Sonralar fransız riyaziyyatçısı A. Puankare məxsusi vəziyyətləri xarakterik xüsusiyyətlərinə görə adlandırmışdır.

Beləliklə istənilən dinamik tənlik və yaxud dinamik tənliklər sisteminin yalnız 3 növ trayektoriyaları mövcud ola bilər.

1. $\vec{\varphi}(t)\equiv\vec{a}$ şəkilli sabit həllər (bu cür həllərə adətən dinamik tənliklər sisteminin tarazlıq vəziyyətlərini taparkən rast gəlinir).

2. Biri-birini kəsməyən hamar qapalı əyrilər(onlara adətən periodik həllər, tsikllər, attraktor və ya cəlb edən çoxluqlar da deyilir).

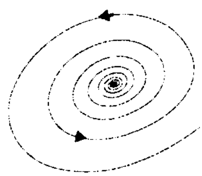
Dinamik tənliklər sistemi üçün cəlb edən çoxluğun tərifi ilk dəfə fransız riyaziyyatçısı Anri Puankare tərəfindən verilmişdir. Puankareyə görə, cəlb edən çoxluq dinamik sistemin izolə olunmuş hər hansı periodik həllidir. Başqa sözlə, tutaq ki, $x=\varphi(t)$ dinamik sistemin P müstəvisində hər hansı periodik həlli, K isə onun qrafik təsviridir. K əyrisi o zaman izolə olunmuş periodik həll, yəni cəlb edən çoxluq adlanır ki, P müstəvisin bu əyrinin sərhəddinə kifayət qədər yaxın nöqtələrdən çıxan baxılan dinamik sistemin heç bir periodik həlli keçməsin.



Başqa sözlə, K çoxluğu o zaman Puankare mənada cəlb edən çoxluq adlanır ki, onun sərhəddinə istər daxildən, istərsə də xaricdən kifayət qədər yaxın olan məsafədən çıxan dinamik sistemin digər trayektoriyaları spiralvari olaraq bu çoxluğa ya xaricdən, ya da daxildən dolansınlar (həm $t \to +\infty$, həm də $t \to -\infty$ hallarında).

Beləliklə K əyrisi P faza müstəvisini iki -daxili və xarici hissələrə ayırır.

3. Özü-özünü kəsməyən hamar əyrilər.



Aşağıdakı misala baxaq:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = x(t) - y(t) \\ \dot{y}(t) = x(t) + y(t) \end{cases}$$

$x = \rho \cos\varphi$, $y = \rho \sin\varphi$ əvəzləmisndən sonra

$$dx = d\rho \cos\varphi - \rho \sin\varphi d\varphi , dy = d\rho \sin\varphi + \rho \cos\varphi d\varphi$$

münasibətlərini $\frac{dy}{dx}=\frac{x+y}{x-y}$ tənliyində nəzərə alıb sadə

çevirmələrdən sonra alarıq: $d\rho=\rho d\varphi \Rightarrow \rho=ce^{\varphi}$.

Sonuncunun qrafiki polyar koordinat sistemində məhz Arximed spiralının təsvir edir.

Müasir ekologiyanın ən mühüm problemlərindən biri populyasiyaların tədqiqi məsələsidir. Populyasiya (latınca "populyus") dedikdə, müəyyən dövr müddətində konkret ərazidə məskunlaşmış, eyni bir növdən olan canlı orqanizmlər qrupu başa düşülür. Populyasiyaların artım dinamikasının ilk modellərindən biri ingilis iqtisadçısı Robert Maltus (1766-1834) tərəfindən təklif olunmuşdur. Bu modeldə artım əmsalı müsbət götürüldüyündən (bax. məs [9]) və yaşayış uğrunda mübarizə, digər populyasiyalar tərəfindən məhv edilmə və bu kimi amillər nəzərə alınmadığından uyğun riyazi modeldən populyasiyanın sayının zaman keçdikcə sonsuz (hətta eksponenseial qaydada) artması qəanətinə gəlinmişdir. Lakin bu effekt təbii populyasiyalarda heç də müşahidə olunmur. Artımı ləngidən əmsalın nəzərə alınmasının təbii zəruriliyini zənnimizcə ilk dəfə 1838-ci ildə P.Verhulst nəzərə alaraq hesab etmişdir ki, yuxarıdakı amillər nəticəsində populyasiyanın sayı zamanın istənilən anında cari sayın qeyri xətti dərəcəsinə (məs: kvadratına) mütənasib azalır.

Beləliklə zamanın başlangıc t_0 anında (ilində) ilkin biokütləsi (sayı və s.) $x(t_0)=x_0$ olan konret növ populyasiyanın zamanın istənilən $t \geq t_0$ anındakı sayını $x(t)$ ilə işarə edək. Fərz edək ki, bu canlılar növü eyni qida ilə qidalanırlar və nəticə etibari ilə yaşayış uğrunda mübarizə şəraitində olurlar. Uzun illərin müşahidələri gösətərmişdir ki, belə olan halda baxılan canlı növünün sayının dəyişmə sürəti cari sayla düz mütənasib olmaqla yanaşı, hazırkı sayın qeyri xətti dərəcəsi ilə tərs mütənasibdir (fərq mənasında). Deməli bu populyasiya dinamkiasının riyazi modeli aşağıdakı kifayət qədər sadə Koşi məsələsidir :

$$\begin{cases} dx(t)/dt = kx(t) - \alpha x^2(t) & (5.2) \\ x(t_0) = x_0 & (5.3) \end{cases}$$

Burada k və α modelin parametrləri olub (sadəlik üçün k, α > 0) müəyyən mənada təbii şəraitin faktorları ilə təyin oluna bilərlər. İfadəsindən göründüyü kimi (5.2) münasibəti dinamik tənlikdir və onun iki tarazlıq vəziyyəti mövcuddur: $x_1(t) \equiv 0$, $x_2(t) \equiv \frac{k}{\alpha}$. Digər tərəfdən bu tənlik həm də dəyişənlərinə ayrıla bilən adi diferensial tənlik tipinə aid olduğundan aşağıdakı sxem üzrə (5.2)-(5.3) Koşi məsələsinin həllini tapaq.

$$dx(t)/dt = kx(t) - \alpha x^2(t) \Rightarrow dx/(kx - \alpha x^2) = dt \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int_{t_0}^{t} \frac{dx}{kx - \alpha x^2} = t - t_0. \quad \frac{1}{kx - \alpha x^2} = \frac{1}{k}[\frac{1}{x} + \frac{\alpha}{k - \alpha x}]$$

olduğunu yuxarıda nəzərə alsaq,

$$[\ln x(t) - \ln(k - \alpha x(t)] |^{t}_{t0} = k(t - t_0) \Rightarrow \ln x(t)/(k-\alpha x(t)) \cdot |^{t}_{t0} = k(t - t_0) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ln x(t)/(k-\alpha x(t)) \cdot (k-\alpha x_0)/x_0 = k(t - t_0) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow [x(t)(k-\alpha x_0)]/[x_0(k-\alpha x(t)] = e^{k(t-t_0)}$$

Daha sonra sadə çevrilmələrin köməyi ilə alarıq:

$$x(t) = [x_0 k \cdot e^{k(t-t_0)}]/[k-\alpha x_0(1- e^{k(t-t_0)})].$$

İndi isə zamanın kifayət qədər böyük anları üçün $x(t)$ sayını hesablayaq. İdeal mənada bu aşağıdakı limitin cavabının tapılmasıdır:

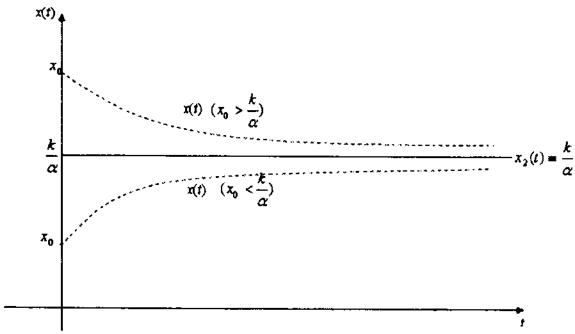
$$\lim_{t\to\infty} x(t) = \lim_{t\to\infty}[x_0 k \cdot e^{k(t-t_0)}]/[k-\alpha x_0(1- e^{k(t-t_0)})] = kx_0/\alpha x_0 = k/\alpha = x_2(t).$$

Beləliklə limitin hökmü onu ifadə edir ki baxılan populyasiyanın $x(t)$ sayı başlanğıc x_0 sayından asılı olmayaraq (5.2) tənliyinin ikinci tarazlıq vəziyyəti olan k/α kəmiyyətinə asimtotik olaraq yaxınlaşır. Bu hökm növbəti bölmədə tanış olacağımız A.Lyapnov mənasında asimptotik dayanıqlıq anlayışından da güclü faktdır, belə ki, sonuncu $x_2(t)$ trayektoriyasına yalnız başlanğıc vəziyyətləri yaxın olan digər trayektoriyaların yığılmasını nəzərdə tutur.

Digər tərəfdən asanlıqla görmək olar ki, $x_2(t) \equiv k/\alpha$ tarazlıq halı həm də (5.2) tənliyini ödəyir.

$$0 = k \cdot k/\alpha - \alpha \cdot k^2/\alpha^2 = 0$$

Yuxarıdakı limitin hökmünə bənzər situasiya iqtiasdi tədqiqatlarda da çox zaman rast gəlinir və bu hal iqtisadi inkişaf trayektoriyasının "magistrallıq" xassəsi də adlanır.



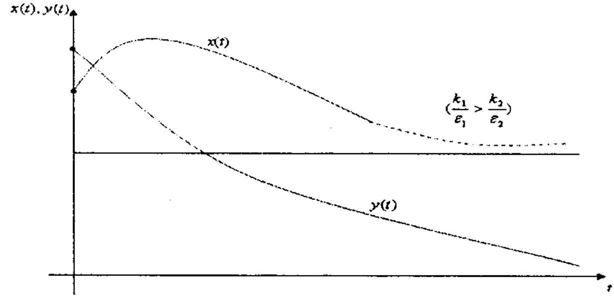
Yuxarıda biz kifayət qədər sadə hala baxdıq. Yəni fərz etdik ki, konkret götürülmüş canlılar növü digər polulyasiyalarla qarşılıqlı təmasda olmurlar. Təbii ki, sonuncunun nəzərə alınması model tənliklərin mürəkkəbləşməsinə gətirər. Bu baxımdan iki növ polulyasiya dinamikası üçün uyğun riyazi modelin ilk dəfə qurulması və tədqiqini fransız riyaziyyatçısı F.Volter Adriatik dənizində xırda və iri balıqların birgə "yaşayışının" izahını vermək məqsədilə yerinə yetirmişdir.

Beləliklə zamanın başlanğıc t_0 anında başlanğıc biokütlələri uyğun olaraq $x(t_0) = x_0$ və $y(t_0) = y_0$ olan iki növ polulyasiyanın zamanın istənilən $t \geq t_0$ ilində saylarını uyğun olaraq $x(t)$ və $y(t)$ ilə işarə etsək, eyni növ qida ilə qidalanma fərziyyəsi daxilində Voltera görə uyğun riyazi model kifayət qədər dəqiqliklə aşağıdakı ikinci tərtib dinamik tənliklər sistemi vasitəsilə təsvir olunar:

$$\begin{cases} \dfrac{dx(t)}{dt} = k_1 x(t) - \varepsilon_1(\lambda_1 x(t) + \lambda_2 y(t)) \cdot x(t), \\ \dfrac{dy(t)}{dt} = k_2 y(t) - \varepsilon_2(\lambda_1 x(t) + \lambda_2 y(t)) \cdot y(t) \\ x(t_0) = x_0 \ ; \ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

$k_1, k_2, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \lambda_1, \lambda_2 > 0$ – modelin parametrləridir.

Volter göstərmişdir ki, hansı polulyasiya üçün k_i/ε_i; i=1,2 nisbəti böyükdürsə, zaman keçdikcə həmin növ polulyasiya yaşayır və nəticə etibarilə (zamanın kifayət qədər böyük anlarında və limit mənasında) stabilləşir, digər növ isə müəyyən müddət keçəndən sonra sayca azalaraq tələf olur (bax. şəkildə məs. $\dfrac{k_1}{\varepsilon_1} > \dfrac{k_2}{\varepsilon_2}$ *hali*).



Hökmü isbatsız qəbul edək və qeyd edək ki, onun doğruluğuna modelin tənliklərinə adi differensial tənliklər kursundan məlum ardıcıl yaxınlaşmalar üsulunu

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_0 + \int_{t_0}^{t} [k_1 x_n(s) - \varepsilon_1 (\lambda_1 x_n(s) + \lambda_2 y_n(s)) x_n(s)] ds, \\ y_{n+1} = y_0 + \int_{t_0}^{t} [k_2 y_n(s) - \varepsilon_2 (\lambda_1 x_n(s) + \lambda_2 y_n(s)) y_n(s)] ds, \\ x_0 = x(t_0); y_0 = y(t_0) \quad n = 0,1,2,...... \end{cases}$$

tətbiq etməklə müasir elektron hesablama maşınlarının proqram təminatı vasitəsi ilə də inanmaq olar.

Fəsil I - də qeyd etmişdik ki, iqtisadi proseslərin riyazi metodlar vasitəsi ilə tədqiqatının əsas mərhələlərindən biri də modelin trayektoriyalarının mühüm xüsusiyyətlərinin təhlil və tədqiq olunmasıdır. Bu öz növbəsində tədqiq olunan iqtisadi obyektin inkişaf trayektoriyasının (həllinin) varlığı və yeganəliyi, dayanığlığı kimi çox mühüm anlayışların vacibliyini nəzərdə tutur. Dayanıqlıq nəzəriyyəsinin ilk baniləri rus alimi A.M.Lyapnov və fransız alimi A.Puankare hesab olunurlar. Bu nəzəriyyə müasir tətbiqi riyaziyyatın çox mühüm bölməsi hesab olunur. Qeyd edək ki, rus alimləri N.Q.Çetayev, E.A.Barbaşin, N.P.Yeruqin və N.N.Krasovski müasir dayanıqlılıq nəzəriyyəsinin yaradıcılarından hesab olunurlar.

İqtisadi sistemlərin modellər vasitəsilə tədqiqatı zamanı sistemin mühüm xüsusiyyətlərinin öyrənilməsi real prosesi əks etdirən uyğun modelin trayektoriyalarının özlərini necə aparmasının analizindən çox asılıdır.

Məlumdur ki, iqtisadi sistemlərdə proqram idarələrinin realizasiyaları zamanı, məsələn, optimal trayektoriyadan təbii meyletmələr meydana çıxa bilər. Belə sapmalar sistemin sonralar özünü necə aparmasına təsir edər və sonda iki, prinsip etibarilə müxtəlif, nəticəyə gəlmək olar:

- Mühüm inkişaf trayektoriyasından prosesin əvvəlindəki kifayət qədər kiçik meyllər bu trayektoriyanın gələcəkdə kifayət qədər kiçik dəyişməsinə gətirər. Belə olan halda prosesin əvvəlində mövcud meylləri daha da azaltmaqla gələcəkdə qarşıya çıxa biləcək sapmaları yüksək dəqiqliklə kiçiltmək mümkündür.
- Mövcud trayektoriyadan prosesin əvvəlindəki kifayət qədər kiçik meyllər gələcəkdə gözlənildiyindən də az olmayan sapmalara gətirər.

Sadə dildə desək, birinci halda baxılan konkret trayektoriya dayanıqlı, ikinci halda isə dayanıqsız adlanır.

Tutaq ki, tədqiq olunan prosesin riyazi modeli $\dot{x}(t) = f(x(t))$ - dinamik tənliklər sistemi ilə təsvir olunur və $x = \varphi(t)$ bu sistemin başlanğıc t_0 anında $\varphi(t_0) = x_0$ - başlanğıc şərtini ödəyən, tədqiq etmək istədiyimiz həllidir.

$x = \psi(t)$ ilə dinamik sistemin $\psi(t_0) = \bar{x}_0$ şərtini ödəyən ixtiyari həllini işarə edək.

Sadəlik üçün aşağıda dayanıqlığın tərifini zaman parametrinin müsbət istiqaməti ($t \to +\infty$) üçün verəcəyik. Mənfi istiqamətə görə tərif anolojidir.

Tərif: $x = \varphi(t)$ trayektoriyası üçün

$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists \delta > 0 \;\; \forall \bar{x}_0 : | x_0 - \bar{x}_0 | < \delta \Rightarrow$

$| \varphi(t) - \psi(t) | < \varepsilon \quad \forall t \ge t_0$ implikasiyası doğru olarsa ona Lyapunov mənasında dayanıqlı *trayektoriya* deyilir. Əgər bu tərifin şərti daxilində onun hökmü

$\lim\limits_{t\to+\infty} |\varphi(t)-\psi(t)|=0 \qquad (\lim\limits_{t\to+\infty} \psi(t)=\varphi(t))$ şəklində ifadə olunarsa, $\varphi(t)$ trayektoriyası *asimtotik dayanıqlı trayektoriya* adlanır.

Tərifdən aydındır ki, asimtotik dayanıqlıq adi dayanqlıq anlayışından ümumidir (güclüdür). Belə ki, konkret dinamik sistemin tədqiq olunan trayektoriyasına başlanğıc qiymət nöqteyi nəzərdən yaxın olan bütün digər hələri zamanın bütün anlarında ona yaxın qalarlarsa (və yaxud müəyyən müddətdən sonra onunla üst-üstə düşərlərsə) konkret götürülmüş bu trayektoriyaya *dayanıqlı (asimptotik dayanıqlı) trayektoriya* adlandırılır. Əks halda o *dayanıqsız (asimptotik dayanıqsız) trayektoriya* hesab olunur.

Yuxarıda deyilənlərdən o nəticəyə gəlirik ki, istənilən dinamik sistemin hər hansı konkret trayektoriyasının dayanıqlı olub-olmadığını yoxlamaq üçün:

a) Bu sistemin bütün digər həllərin tapmaq (elə üsullar mövcuddur ki, buna ehtiyac olmaya da bilər);

b) Konkret həll ilə sistemin istənilən həllinin fərqinin mütləq qiymətini qiymətləndirmək kifayətdir.

Misal.1: $\begin{cases} \dot{x}(t)=kx(t), \\ x(t_0)=x_0. \end{cases}$ k -istənilən həqiqi parametrdir.

Asanlıqla yoxlamaq olar ki, yuxarıdakı Koşi məsələsinin yeganə həlli

$\varphi(t)=x_0\cdot e^{k(t-t_0)}$ şəklindədir və bu tənliyin bütün digər müxtəlif həlləri bu həldən yalnız başlanğıc qiymətlə fərqlənəcəklər:

$\forall\,\psi(t)=\bar{x}_0\cdot e^{k(t-t_0)}$. Onda

$$|\varphi(t)-\psi(t)|=e^{k(t-t_0)}\cdot|x_0-\bar{x}_0| \quad (x_0\neq\bar{x}_0).$$

-əgər k<0 isə, onda $\lim\limits_{t\to+\infty} |\varphi(t)-\psi(t)|=0$, deməli $\varphi(t)$

trayektoriyası assimptotik dayanıqlı həlldir.

- $k>0$ halında $\lim\limits_{t\to+\infty}|\varphi(t)-\psi(t)|\to+\infty$ olduğundan $\varphi(t)$ - dayanıqsız,

- $k=0$ halında isə,
$|\varphi(t)-\psi(t)|=e^{k(t-t_0)}\cdot|x_0-\bar{x}_0|=|x_0-\bar{x}_0|<\varepsilon$ $\quad(|x_0-\bar{x}_0|<\delta=\varepsilon)$ - adi mənada dayanıqlı olar.

Misal 2. $\quad\begin{cases}\dot{x}_1=x_2-1\\ \dot{x}_2=-x_1+1.\end{cases}$

Sadəlik üçün $t_0=0$ qəbul edək və sistemin $\vec{\varphi}(t)=(\varphi_1(t),\varphi_2(t))\equiv(1,1)$ – yeganə tarazlıq vəziyyətinin dayanıqlı olub - olmaması məsələsinə baxaq.

Asanlıqla yoxlamaq olar ki, bu sistemin ümumi həlli (xətti və qeyri-bircins tənlik olduğu üçün)

$$x_1(t)=C_1\sin t+C_2\cos t+1\,,\quad x_2(t)=C_1\cos t-C_2\sin t+1$$

şəklindədir(C_1,C_2 -ixtiyari sabitlərdir). (x_1,x_2) - faza müstəvisində bu sistemin həllərinin həndəsi şərhini əldə etmək üçün ümumi həllin ifadəsindən t -zaman parametrini yox edək: $(x_1-1)^2+(x_2-1)^2=C^2$ ($C^2=C_1^2+C_2^2$ -ixtiyari sabitdir) və $|\vec{\varphi}(t)-\vec{\psi}(t)|$ - fərqini qiymətləndirək. Dayanıqlığın tərifindən istifadə edək. Tutaq ki, $\varepsilon>0$ ixtiyari ədəddir. $\delta<\dfrac{\varepsilon}{2}$ qəbul edək. Onda

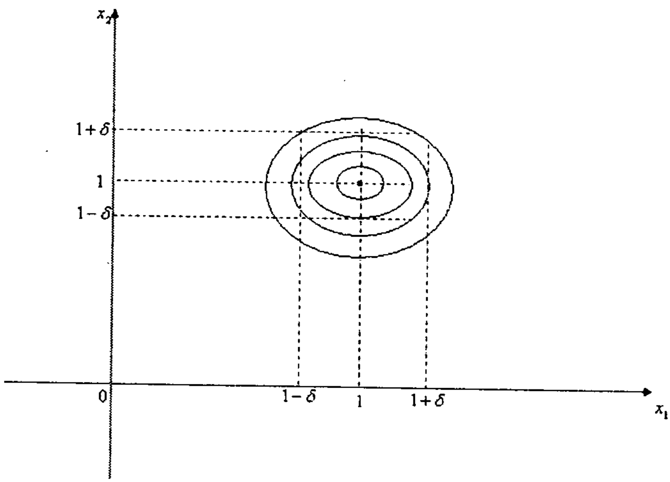
$$|\varphi_1(0)-\psi_1(0)|<\delta\Rightarrow|C_2|<\delta,\qquad|\varphi_2(0)-\psi_2(0)|<\delta\Rightarrow|C_1|<\delta$$

şərtlərindən

$$|\varphi_1(t)-\psi_1(t)|=|C_1\sin t+C_2\cos t|\le|C_1|+|C_2|\le 2\delta<\varepsilon\,,$$

$$|\varphi_2(t)-\psi_2(t)|=|C_1\cos t+C_2\sin t|\le|C_1|+|C_2|\le 2\delta<\varepsilon$$

alarıq.



Bu onu göstərir ki, baxılan sistemin (1;1) tarazlıq vəziyyəti yalnız adi mənada dayanıqlıdır.

İndi isə Leontyevin birməhsullu(birsektorlu) xətti dinamik modelinin istənilən xüsusi həllinin dayanıqsız olduğunu göstərək. Bu model aşağıdakı, məcmuu məhsula nəzərən birinci tərtib xətti və qeyri-bircins diferensial tənliklə təsvir olunur:

$$(1-a)x(t)=b\dot{x}(t)+c\,.$$

Burada $x(t)$ cari t ilinin məcmuu məhsul miqdarı, c - son istehlak, $0<a<1$ – birbaşa istehsal məsrəfləri əmsalı, $b>0$ - fond tutumu artımı əmsalıdır.

Fərz edək ki, istehlak $c=c(t)$ - zaman funksiyası şəklində, analitik formada verilmişdir və göstərək ki, bu modelin istənilən $\bar{x}(t)$ iqtiasdi artım trayektoriyası dayanıqsızdır. Sadəlik üçün

$t_0 = 0$ qəbul edək və modelin ümumi həllini məlum qayda üzrə tapaq.

$$\dot{x}(t) = \frac{1-a}{b}\cdot x(t) - \frac{1}{b}\cdot c(t).$$

Onda yuxarıdakı tənliyin ümumi həlli $x(t) = c_1 e^{\lambda t} + \bar{x}(t)$ - şəklində ifadə olunar(burada $\lambda = \frac{1-a}{b} > 0$ və c_1 – istənilən sabitdir).

Əgər $x(0) = x_0$, $\bar{x}(0) = \bar{x}_0$ başlanğıc şərtlərini nəzərə alsaq. $c_1 = x_0 - \bar{x}_0$ və beləliklə məcmuu məhsula nəzərən Leontyevin birməhsullu xətti dinamik modelinin həlli üçün aşağıdakı yekun münasibəti almış olarıq :

$\varphi(t) = (x_0 - \bar{x}_0)e^{\lambda t} + \psi(t)$ ($\psi(t)$ istənilən xüsusi həldir).

Buradan aydın görünür ki, $|\varphi(t) - \psi(t)| = |x_0 - \bar{x}_0|e^{\lambda t}$ fərqi $|x_0 - \bar{x}_0|$ - başlanğıc meylinin istənilən qədər kiçik qiymətlərində belə $t \to +\infty$ şərti daxilində qeyri məhduddur. Bu isə o deməkdir ki, baxılan modelin istənilən xüsusi həlli dayanıqsızdır.

Qeyd edək ki, tarazlıq vəziyyətlərinin ümumiyyətlə 4 növü mövcuddur: **"düyün"**, **"yəhər"**, **"fokus"**, **"mərkəz"** və ümumi halda istənilən dinamik tənliklər sistemi üçün məxsusi vəziyyətləri fərqləndirən vahid kirteriya mövcud deyil. Lakin bəzi sinif dinamik tənliklər sistemi üçün bu vəziyyətləri fərqləndirən analitik əlaməti söyləmək olur.

Bu prosesin kifayət qədər sadə şərhini iki məchullu, iki xətti tənliklər sistemi üzərində verək.

Aydındır ki, əgər $\det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \neq 0$ isə,onda istənilən $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}$ -həqiqi ədədləri üçün

$$\begin{cases} \dfrac{dx(t)}{dt} = a_{11}x(t) + a_{12}y(t) \\ \dfrac{dy(t)}{dt} = a_{21}x(t) + a_{22}y(t) \end{cases} \qquad (5.4)$$

dinamik sistemi yeganə $(x, y) \equiv (0,0)$ - tarazlıq vəziyyətinə malikdir. Bu həm də baxılan sistemin trivial həllidir. Bu tarazlıq vəziyyətinin hansı tipə aid olduğunu təyin etmək və yuxarıdakı tənliyin qeyri-trivial həllərinin varlığını müəyyənləşdirmək məqsədi ilə diferensial tənliklər kursundan məlum Eyler tipli əvəzləməni aparaq :

$$\begin{cases} x = \alpha_1 e^{\lambda t} \\ y = \alpha_2 e^{\lambda t} \end{cases}$$ (λ – hələlik naməlum, həqiqi və yaxud

kompleks parametrdir, α_1 və α_2 ədədləri üçün $\alpha_1^2 + \alpha_2^2 \neq 0$ şərti

ödənilir).

Bəzi sadə çevirlmələrdən sonra (5.4) tənliklər sisteminin qeyri-trivial həllinin varlığı üçün zəruri və kafi şərt

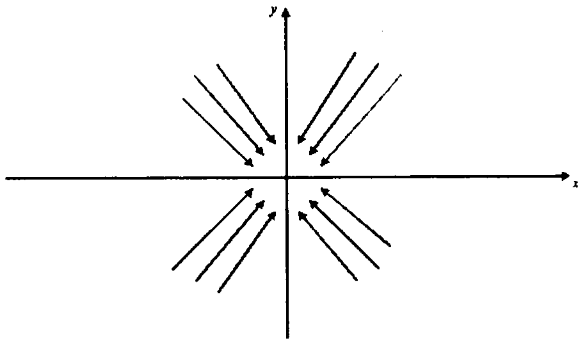
$$\det\begin{pmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda \end{pmatrix} = 0 \qquad (5.5)$$

formasında alınar. (5.5) münasibəti λ parametrinə nəzərən kvadrat tənlikdir. Məhz bu tənliyin λ_1 və λ_2 köklərinin təbiətindən və xarakterindən asılı olaraq baxılan dinamik tənliyin yeganə (0;0) tarazlıq vəziyyəti yuxarıda sadalanan 4 növdən birinə aid olur.

Beləliklə:

1) əgər (5.5) tənliyinin hər iki kökü həqiqi ədədlər olub, eyni işarəli olarlarsa, onda (5.4) tənliyinin (0;0) tarazlıq vəziyyəti **"düyün"** tipinə aiddir deyilir. Bu halda (5.4) tənliyinin bütün faza trayektoriyaları tarazlıq vəziyyətinə müəyyən istiqamətdə "yığılırlar".

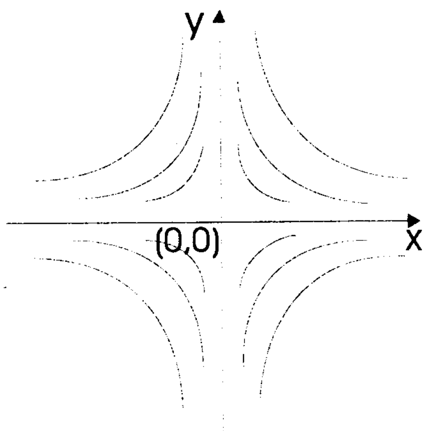
Məsələn: $\begin{cases} \dot{x} = x, \\ \dot{y} = y. \end{cases}$ sistemi timsalında $\lambda_1 = \lambda_2 = +1$.



2) əgər (5.5) tənliyinin hər iki kökü həqiqi ədədlər olub əks işarəli olarlarsa, onda (5.4) tənliyinin (0;0) tarazlıq vəziyyəti **"yəhər"** tipinə aiddir deyilir.

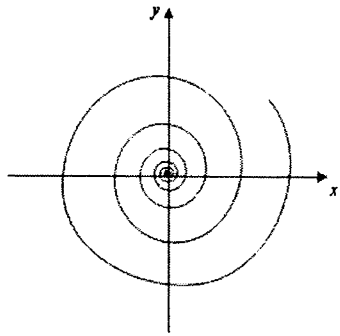
Məsələn $\begin{cases} \dot{x} = x, \\ \dot{y} = -y. \end{cases}$ sistemi üçün $\lambda_1 = +1$,

$\lambda_2 = -1$ olduğundan faza trayektoriyalarının qrafik təsviri aşağıdakı formada alınar



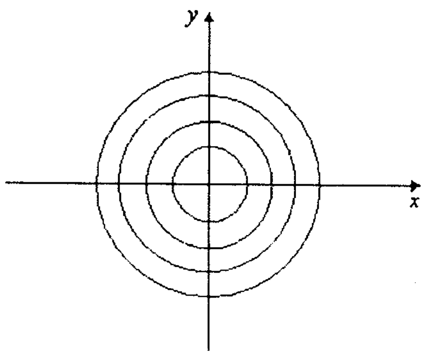
3) əgər (5.5) tənliyinin hər iki kökü həqiqi ədədlər olmayıb xalis xəyali ədədlər olmazlarsa, onda (5.4) tənliyinin (0;0) tarazlıq vəziyyəti **"fokus"** tipinə aiddir deyilir.

Misal: ` $\begin{cases} \dot{x} = x - y, \\ \dot{y} = x + y. \end{cases}$ $(\lambda_1 = 1 - i,\ \lambda_2 = 1 + i)$.

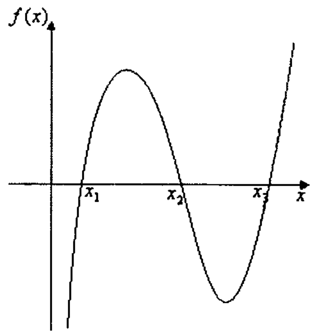


4) əgər (5.5) tənliyinin hər iki kökü xalis (sırf) xəyali ədədlərdirsə, onda (5.4) sisteminin (0;0) tarazlıq vəziyyəti **"mərkəz"** tipinə aiddir deyilir.

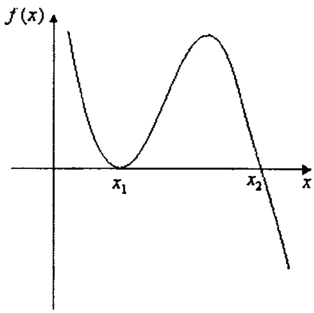
Məsələn $\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -x \end{cases}$ dinamik sistemi üçün $\lambda_1 = -i,\ \lambda_2 = +i$.



Qeyd edək ki, iqtisadi riyazi modelləşdirmədə məxsusi nöqtənin ilk üç növü **“kobud məxsusi nöqtə”** tipinə (yəni onların mühüm xarakteristikaları, məs. uyğun differensial tənliklər sisteminin sağ tərəflərinin köklərinin sayı, sağ tərəflərin kifayət qədər kiçik dəyişmələrində dəyişmirlər), mərkəz tipli məxsusi nöqtələr isə **“qeyri kobud”** (onların mühüm xarakteristiakları ilkin diferensial tənliklər sisteminin sağ tərəflərinin kiçik həyəcanlanmasında dəyişirlər) məxsusi nöqtə tipinə aid edilirlər:



(“kobud”)



(“qeyri kobud”)

VI FƏSİL

Sahələrarası balans modelləri haqqında.Leontyev modeli - mikroiqtisadi çoxsahəli xətti model kimi.İqtisadiyyatda Neyman modeli və onun Leontyev modeli ilə oxşar və fərqli cəhətləri. Neyman modelinin qapalılığı və qiymətlər ardıcıllığının xüsusiyyətləri

Müasir təsərrüfat sistemi kifayət qədər mürəkkəb sahələrarası əlaqələr prosesində inkişaf etdiyindən istehsal sisteminin təhlili üçün bu sistemə qarşılıqlı əlaqəli sahələr kompleksi kimi baxılır. Bu baxımdan sahələrarası balans nəzəriyyəsi məhsul istehsalı və bölgüsünün sahələr üzrə balansı, istehsal sferası sahələrinin kompleks əlaqələrini nəzərə almaqla, ictimai istehsalın strukturunun təhlili və planlaşdırılması istiqamətində universal alətlərdəndir. Zaman amilinin nəzərə alınmasına görə sahələrarası balansın statik və dinamik modelləri mövcüddur. Statik balans sxemləri və modelləri müəyyən vaxt intervalı üçün qurulursa, dinamik balans modelləri ondan fərqli olaraq baxılan problemi zamandan asılı olaraq illər üzrə xarakterizə edir.Məsələn, iqtisadiyyatın istənilən cari ildəki vəziyyəti bu ildən əvvəlki zaman ilindəki vəziyyətindən asılı olur. İstər statik, istərsə də, dinamik sahələrarası balans modellərində xalq təsərüfatının tədqiq olunan sahələri arasındakı mütənasibliklər gözlənilməlidir: istehsal olunmuş məhsul öz alıcısını tapmalı, istənilən sahədə qarçıya çıxa biləcək tələbat ödənməlidir. Başqa sözlə, hər bir sahə ikili xarakteristikaya malikdir: o, eyni zamanda həm istehsal, həm də istehlak subyekti kimi fəaliyyət göstərir.

Sahələrarası balans metodunun təşəkkülü və tədqiqində riyazi aparatı işləmiş alim 1973-cü il üzrə Nobel mükafatı laureatı, amerikan iqtisadçısı (mənşəcə rusdur) Vasili Leontyevdir(1906-1999). Xarici ədəbiyyatlarda sahələrarsı balansı adətən Leontyevin "məsrəflər-buraxılış", "input-output" təhlili və s. adlı üsulları da adlandırırlar.

Növbəti bölmədə biz yalnız statik sahələrarası modellə tanış olacağıq. Dinamik sahələrarası modellərlə maraqlanan oxucuları məsələn [7] ədəbiyyatına istiqamətləndiririk.

Aşağıdakı fərziyyələri qəbul edək :

– tutaq ki, istehsal $n \in N$ (n≥2) sahədən ibarətdir və hər bir sahə yalnız bir növ məhsul istehsal edir, müxtəlif məhsulların birgə istehsalı olmur (müxtəlif sahələr müxtəlif məsullar istehsal edirlər);

– iqtisadi sistemdə n növ məhsul istehsal olunur, satılır, alınır, istehalk olunur, və investisiyaya qoyulur;

– istənilən sahədə istehsal prosesi dedikdə müəyyən növ (mümkündür ki, bütün növ) məhsulların konkret məhsula çevrilməsi başa düşülür, belə ki, bu prosesdə sərf olunan məhsulun buraxılan məhsula olan miqdar nisbəti sabit qalır. Riyazi olaraq bu istehsal prosesinin xəttiliyi deməkdir.

Beləliklə a_{ij} $(i,j \in \overline{1,n})$ ilə i-ci sahədə istehsal olunmuş məhsuldan j-ci sahədə nə qədər istifadə olunma miqdarını, c_i $(i \in \overline{1,n})$ ilə i-ci sahədə istehsal olunmuş məhsulun istehlaka gedən hissəsini, $\overline{v_i}$ $(i \in \overline{1,n})$ ilə isə i-ci sahədə istehsal olunmuş məhsulun ümumi həcmini işarə edək. Nəticədə aşağıdakı cədvəli almış olarıq:

a_{11}	a_{12}	...	a_{1n}	c_1
a_{21}	a_{22}	...	a_{2n}	c_2
. . .	. . .	. . .	. . .	. . .
a_{n1}	a_{n2}	.	a_{nn}	c_n
$\overline{v_1}$	$\overline{v_2}$	.	$\overline{v_n}$	

Cədvəldən göründüyü kimi

$$\begin{cases} \overline{\mathrm{v}_1} = \overline{a_{11}} + \overline{a_{12}} + \ldots + \overline{a_{1n}} + \overline{c_1}, \\ \overline{\mathrm{v}_2} = \overline{a_{21}} + \overline{a_{22}} + \ldots + \overline{a_{2n}} + \overline{c_2}, \\ . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ \overline{\mathrm{v}_n} = \overline{a_{n1}} + \overline{a_{n2}} + \ldots + \overline{a_{nn}} + \overline{c_n}. \end{cases} \Leftrightarrow \overline{\mathrm{v}_i} = \sum_{j=1}^{n} \overline{a_{ij}} + \overline{c_i} \qquad (i \in \overline{1,n}).$$

Sonuncu münasibətə Leontyev modelinin balans tənliklər sistemi deyilir. Vasiliy Leontyev (1906-1999) Amerikan iqtisadçısı olub mənşəcə rusdur. O, "input-output" ideyasının və yaxud yerli terminalogiya ilə desək "sahələrarası balans modelləri"nin müəllifidir. Bu metod üçün zəngin riyazi aparat hazırladığına görə 1973-cü ildə Nobel mükafatına layiq görülmüşdür.

Aşağıdakı işarəmələri qəbul etsək,

$a_{ij} = \dfrac{\overline{a_{ij}}}{\overline{\mathrm{v}_i}}$ – i–ci sahədə istehsal olunmuş məhsulun j–ci sahədə istifadə olunmasını və $c_i = \dfrac{\overline{c_i}}{\overline{\mathrm{v}_i}}$ -i-ci sahədə istehsal olunan məhsulun hansı hissəsinin istehlaka gedən payını göstərər. Nəticədə $\mathrm{O} \le \mathrm{A} = \{a_{ij}\}_{i,j\in\overline{1,n}} \le \mathrm{E}$ almış olarıq. O- sıfır matris, E isə bütün elementləri 1 olan matrisdir.

İqtisadi tədqiqatlarda A matrisinə texnoloji matris, birbaşa məsrəf əmsalları matrisi və yaxud material tutumunun normativ matrisi də deyilir.

Qeyd edək ki, A – texnoloji matrisi o zaman ayrılmayan adlanır ki, hər hansı sahədə məhsul istehsal etmək üçün digər bütün sahələrin məhsullarından bilavasitə və yaxud dolayı yolla istifadə edilmiş olsun.

Əlavə olaraq fərz edək ki, planlaşdırılan zaman anında A matrisi sabitdir və yuxarıda qeyd etdiyimiz kimi istehsal prosesi xəttidir. Sonuncu o deməkdir ki, j-ci sahədə vahid miqdar məhsul istehsal etmək üçün i-ci sahədən a_{ij} qədər xammal tələb olunursa, j-ci sahədə x_j miqdar məhsul istehsal etmək üçün i-ci sahədən $a_{ij}x_j$ qədər məhsul tələb olunmalıdır. Nəticədə aşağıdakı cəmlər

$$\sum_{j=1}^{n} a_{1j}x_j, \quad \sum_{j=1}^{n} a_{2j}x_j, \ldots, \quad \sum_{j=1}^{n} a_{nj}x_j$$

uyğun olaraq 1-ci, 2-ci, ..., n-ci sahəyə olan ümumi tələbatı ifadə edər. Beləliklə hələlik naməlum olan $\vec{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ məcmu məhsulu əldə etmək üçün ümumi tələbat

$$A\vec{x} = \left(\sum_{j=1}^{n} a_{1j}x_j, \sum_{j=1}^{n} a_{2j}x_j, \ldots, \sum_{j=1}^{n} a_{nj}x_j\right) \quad \text{kəmiyyətinə bərabər}$$

olar.

Təbiidir ki, istehlaka gedən hissə

$$\begin{cases} c_i = x_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j, i = 1,2,\ldots, n \\ C = \text{x} - \text{Ax}, \; \text{C} = (\text{I} - \text{A})\text{x} \end{cases} \tag{6.1}$$

bərabər olacaq. Burada I – baş dioqanalının elementləri 1 olan vahid matrisdir.

(6.1) – Leontyev modelidir. (6.1) tənliyi o zaman məhsuldar adlanır ki, bu sistem istənilən $c_i \geq 0 (i \in \overline{1,n})$ üçün mənfi olmayan $x_i \geq 0 (i \in \overline{1,n})$ həllinə malik olsun. Məsələnin iqtisadi qoyuluşuna görə bu xətti cəbri tənliklər sisteminin mənfi olmayan həllinin varlığı və yeganəliyinin araşdırılması riyazi nöqteyi nəzərdən əhəmiyyətlidir. $\vec{x} \geq \vec{O}$ şərtindən alınır ki, $(I - A)^{-1}$ matrisinin elementləri mənfi olmamalıdır. Bu hökmə modelin məhsuldarlığı deyilir. Qeyd edək ki, Leontyev modelinin məhsuldarlığı şərtinin yoxlanılması aşağıdakı 4 hökmdən hər hansı birinin doğruluğuna ekvivalentdir:

1) A matrisinin ən böyük məxsusi ədədi λ(A)<1-dir;

2) (I-A) matrisi mənfi olmayaraq dönəndir. Yəni $(I-A)^{-1}$ matrisi mövcuddur və onun bütün elementləri mənfi deyil;

3) $I + A + A^2 + ... + A^n + ... = \sum_{k=0}^{\infty} A^k (A^0 = I)$ matris sırası yığılandır

və onun cəmi $\sum_{k=0}^{\infty} A^k = (I-A)^{-1}$.

4) $(I-A)^{-1}$ matrisinin determinantının bütün ardıcıl baş minorları müsbət ədədlərdir.

Başqa sözlə aşağıdakı teoremi şərh edək.

Teorem (Frobenius – Perron): A texnoloji matrisi ayrılmayandırsa onda elə λ(A)>0 məxsusi ədədi mövcuddur ki, bu matrisin bütün digər məxsusi ədədləri mütləq qiymətcə ondan kiçikdir $|\lambda| < \lambda(A)$. Bundan əlavə λ(A) məxsusi ədədinə uyğun Leontyev modelinin elə $\vec{x}_{\lambda(A)} > \vec{0}$ həlli var ki, o, skalyar hasil mənada yeganədir. λ(A) məxsusi ədədinə iqtisadi tədqiqatlarda Frobenius ədədi də deyilir.

Qeyd edək ki, Frobenius – Perron teoreminə istinad edərək geniş tətbiq imkanlarına malik olan aşağıdakı hökmü isabat etmək olar: Leontyev modelinin məhsuldar olması üçün zəruri və kafi şərt λ(A) < 1 olmasıdır.

Məsələn istehsal prosesi $A=\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$ matrisi ilə təsvir olunan model məhsuldardır. Çünki onun məxsusi ədələri

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{3}-\lambda & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{4}-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 - \frac{7}{12}\lambda + \frac{1}{24} = 0 \Rightarrow \lambda_{max}(A) = \frac{1}{2} < 1$$

Qeyd 1. (6.1) sistemi ümumiyyətlə n tənlikdən ibarət 2n məchullu tənlikdir (x və C vektorlarının komponenlərinin sayı 2n – dir). Bu sistemdən şərti olaraq 2 növ məsələ almaq mümkündür.

1. Müşahidəolunma məsələsi $(x \rightarrow C)$:

$$x \rightarrow (I - A) \rightarrow C,$$
$$(I - A)x = C.$$

2. Sintez məsələsi $C \rightarrow x$:

$$C \rightarrow (I - A)^{-1} \rightarrow x,$$
$$(I - A)^{-1} C = x.$$

Qeyd 2. Ümumiyyətlə (6.1) sistemi sahələrarası əlaqələrin "məsrəflər – buraxılış" metodu vasitəsilə təhlilinin əsasədır. C vektorunun c_i elementləri son istehlakdan (yəni qeyri – istehsal sahəsindəki istehlak nəzərdə tutulur), ixrac və investisiyalardan təşkil olunur.

Qeyd 3. $B = (I - A)^{-1}$ matrisinin b_{ij} $(i, j \in \overline{1, n})$ elementləri sahələrarsı balans probmlemlərinin həllində a_{ij} $(i, j \in \overline{1, n})$ birbaşa material məsrəfləri əmsallarından fərqləndirilir. Belə ki, b_{ij} - j–ci sahədə vahid miqdarda son məhsul istehsal etmək üçün i – ci sahənin istehsal etdiyi məhsuldan istifadə olunma miqdarını xarakterizə edir. B matrisinə tam material xərcləri matrisi də deyilir. Praktiki məsələlərin həllində bu matrisi kifayət qədər dəqiqliklə təyin etmək üçün

$$B = (I - A)^{-1} = I + A + A^2 + ... + A^k + ...$$

bərabərliyində k – nın kifayət qədər böyük qiymətlərində A^k matrisinin elementləri vahiddən çox – çox kiçik ədələr olduğundan

$$B \approx I + A + A^l$$

(hər hansı $l < k$ üçün) təqribi bərabərliyi ilə də kifayətlənnmək olar.

Onu da qeyd edək ki, B matrisinin sıraya ayrılışından aydındır ki, $b_{ij} \geq a_{ij}$ $(i, j \in \overline{1, n})$ və B martisinin bütün diaqonal elementləri $b_{ii} \geq 1$ $(i \in \overline{1, n})$ bərabərsizliyini ödəyirlər.

Yuxarıda tanış olduğumuz sahələtarası balans modeli statik xarakter daşıdığından yalnız bir istehsal – istehlak tsikli nəzərdən keçirilir. Elə modellər movcuddur ki, iqtisadi prosesin tədqiqini zamandan asılı dövrü xarakterli formada öyrənir. Bu modellərdən biri də Neyman modelidir.

Yada salaq ki, biz $(I - A)x = C$ və yaxud $(I - A)^{-1}C = x$ - Leontyev modelini aşağıdakı fərziyyələr daxilində təhlil etdik :

– planlaşdırılan zaman mərhələsində A – birbaşa məsrəf əmsalları matrisi sabitdir (bu qısa müddət üçün çox da ağır fərziyyə deyil);

– istehsal prosesi xəttilik prinsipinə malikdir;

– istehsal $n \in N, n > 1$ sahədən ibarətdir və hər bir sahə yalnız bir növ məhsul istehsal edir;

– məhsul buraxılışı hər bir sahədə vahid intensivliklə yerinə yetirilir.

Əgər sonuncu iki fərziyyə heç də həmişə ödənilməzsə, nəticədə alınmış modelə Neyman modeli deyilir. Neyman modeli iqtisadiyyatda çox mühüm modellərdən olub, ilk dəfə olaraq 1937 – ci ildə müasir riyaziyyatın görkəmli nümayədəsi Con Fon – Neyman (1903 – 1957) tərəfindən elmə daxil edilmişdir. (amerika riyaziyyatçısı olub mənşəcə macardır). Fundamental və tətbiqi riyaziyyatın bir sıra sahələrində çox mühüm işlər görmüş və O.Morqenşternlə birlikdə matris oyunları nəzəriyyəsinin əsasını qoymuşdur. Neyman modeli "genişlənən iqtisadiyyatın" modeli olub müəllifin adı ilə bağlı dünya iqtisadiyyatı ədəbiyyatında "Neyman şüası", "Neyman qiymətləri" və s. anlayışlarla məşhurdur. Modelin təhlilinə aid Neymanın məqaləsi ilk dəfə olaraq çox da geniş oxucu kütləsi məlum olmayan alman jurnalında dərc olunmuş, lakin 1945 – ci ildə ingilis dilinə tərcümə olunduqdan sonra məşhurlaşmışdır.

Neyman modelində fərz olunur ki, iqtisadi sistemin (firmalar, sahə, region, ölkə və s.) fəaliyyətin (tənzimlənməsi) ayrı – ayrı zaman mərhələlərində yerinə yetirilir. Belə zaman dövrlərinə misal olaraq il, kvartal, ay, gün və s. qəbul oluna bilər. Leontyev modelində olduğu kimi Neyman modelinin də əsasında "məsrəflər – buraxılış" prinsipi durur. Yəni ixtiyari zaman dövrü üçün bu zamanın əvvəlində mövcud məhsul yığımı ("xərclər") bu dövrün sonu üçün eyni və yaxid müxtəlif məhsul yığımına ("buraxılış") çevrilir. Məhsul termini altında, məsələn, müxtəlif növ istehsal fondları, işçi qüvvəsi, müxtəlif istehlak predmetləri, yararlı təbii resursllar və s. başa düşülür. Başqa sözlə Neyman modeli sonlu sayda $(a^j, b^j)\, j \in \overline{1,m}$ istehsal prosesi elementləri vasitəsilə təsvir olunur :

$a^j = (a_{1j}, a_{2j}, \dots, a_{nj})$ - xərcləri əks etdirən kəmiyyəti,

$b^j = (b_{1j}, b_{2j},..., b_{nj})$ - isə vahid intensivlikli məhsul buraxılışını göstərir. (a^j, b^j) cütünə Neyman modelində prosesin bazisi də deyilir.

Qeyd edək ki, Neyman modeli tipli proseslərdə eyni bir istehsal fəaloyyətində yalnız bir mıhsulun tədarükü vacib şərt sayılmır (bu Neyman modelini Leontev modelindən fərqləndirən birinci əsas cəhətdir).

İqtisadi məna nöqteyi – nəzərdən $a_{ij} \geq 0, b_{ij} \geq 0, i \in \overline{1,n}, j \in \overline{1,n}$ olduğundan Neyman modelinin texnalogiyası bir cüt (A, B) $A = \{a_{ij}\}, B = \{b_{ij}\}$ - matrisi vasitəsilə verilir.

Əvvəlcə Neyman modelində müəssisənin halını, eıementar istehsal prosesi və intensivliyi anlayışlarını aydınlaşdıran aşağıdakı sadə misla baxaq.

Tutaq ki, iqtisadi obyekt quşçuluq fermasıdır və başlanğıc (ilkin) mərhələdə yumurta və toyuq satışı aparılmır. Nəticə etibarilə bütün fəaliyyət müəssisəni ümumi gücünün artırılmasına yönəldilmişdir.

Əgər toyuqdan yumurta almaq məqsədilə istifadə olunarsa 1 ay ərzində orta hesabla 12 yumurta əldə edilmiş olar. Əgər toyuqdan bala almaq məqsədilə istifadə olunarsa, onda baxılan dövr ərzində orta hesabla 8 cücə əldə oluna bilər. Beləliklə bu prosesdə məhsul dedikdə yumurta və toyuqlar başa düşülür. Təbiidir ki, müəssisənin halı və ya vəziyyəti sonlu elementli vektor olub hər hansı dövrün əvvəli üçün bu vektorun koordinatları müəssisədə mövcud yumurta və toyuqların sayını ifadə edir.

Müəssisədə elementar istehsal prosesi dedikdə bütün texnaloji əməliyyatları əks etdirən 4 ölçülü vektor başa düşülür. Onların ən əsaslarını sadalayaq.

1. Fermada yalnız yumurta əldə etmə prosesi:

$$I_1 = (1,0;1,12).$$

Girişdə 1 toyuq 0 yumurta (A "xərclər"), çıxışda isə 1 toyuq və 12 yumurta (B "məhsul").

2. Cücə əldə etmə prosesi:

$$I_2 = (1{,}12; 9{,}0).$$

3. Yararsız yumurtaların saxlanılması prosesi:

$$I_3 = (0{,}1; 0{,}1).$$

4. Məhsuldar ("işlək") olmayan toyuq saxlama prosesi:

$$I_4 = (1{,}0; 1{,}0).$$

Aydındır ki, sonuncu 2 proses "ağıllı" idarəetmədə özünü doğrultmayandır.
İndi isə modelə qayıdaq və yeni prosesi təyin edək.

$$\sum_{j=1}^{m}(a^j, b^j)x_j = \left(\sum_{j=1}^{m} a^j x_j; \sum_{j=1}^{m} b^j x_j\right) \equiv (Ax, Bx)$$

$\vec{x} = (x_1, .., x_m)$, $\quad x_k \geq 0, \quad k \in \overline{1,m}$ - intensivlik vektorudur.

Məsələn yuxarıdakı misalda

$3\,I_1 = (3{,}0; 3, \quad 36)$ - üç toyuqdan yumurta əldə etmə prosesi,

$700\,I_3 = (0{,}700; 0{,}700)$ - yeddi yüz yumurta saxlanması prosesidir.

A və B matrislərinin təsiri nəticəsində alınmış daha geniş prosesi C ilə işarə edək:

$$C = \{(y, z) \mid \exists x \geq 0; y = Ax, z = Bx\} \equiv Bx - Ax.$$

Burada x – intensivlik vektorudur.

Quruluşundan görünür ki, C = x – Ax Leontyev modeli $\begin{cases} B = I \\ n = m \end{cases}$ olduqda Neyman modelinin xüsusi halıdır.

x_1 ilə ümumi halda ixtiyari bir istehsal sisteminin $\forall t \geq 1$ ili üçün [t – 1, t] zaman intervalında intensivlik vektorunu işarə edək. Leontyev modeli kimi Neyman modeli də mikroiqtisadi xətti modeldir və təbiətcə elədir ki, aşağıdakı qapalılıq şərti ödənilir:

[t, t+1] zaman müddətində istehsal prosesi üçün yalnız o xərclərdən istifadə olunmağa icazə verilir ki, bu xərclər [t – 1, t] zaman kəsiyində əldə olunmuş olsun.

Riyazi olaraq bu aşağıdakı şərtə ekvivalentdir:

$$Ax_t \leq Bx_{t-1}, t = 1,2,..T \quad \text{(T–dövrlərin sayıdır)} \quad (6.3)$$

t=1 halında alınmış Bx_0 kəmiyyəti [1,T] ümumi zaman dövrü üçün ehtiyat xərcin miqdarını ifadə edir. (6.3) bərabərsizliyini ödəyən $x_1, x_2, ..., x_T$ küllüsü x_0 başlanğıc vəziyyətli plan adlanır və $\{x_t\}_{t\in\overline{1,T}}$ kimi işarə olunur.

P^i_{t-1}, $i = 1,...,n$ ilə [t – 1, t] dövrü üçün i növ məhsulun vahid miqdarının qiymətini işarə edək. Həmin dövr üçün $\vec{P}_{t-1} = (P^1_{t-1},...,P^1_{t-1})$- qiymət vektoru olsun.

Onda təbiidir ki,

$<\vec{P}_t, b^j> - <\vec{P}_{t-1}, a^j>$ fərqi

(a^j, b^j) prosesi üçün [t – 1, t] dövrü ərzində mənfəəti ifadə edər.

Əgər hər hansı Neyman tipli model proses üçün

$<\vec{P}_t, b^j> - <\vec{P}_{t-1}, a^j> \leq 0$, j=1,m; t=1,2,...,T ödənilərsə (yəni $P_{t-1}A \geq P_tB$), onda bu proses sıfır gəlirlilik qaydası üzrə baş verir deyilir.

İlk baxışda bu kapitalist iqtisadiyyatı nöqtəyi-nəzərdən paradoksal görünür. Doğrudan da əgər istehsal mənfəət gətirmirsə, niyə görə bu proses yerinə yetirilməlidir? Lakin bu ilk baxışda belə görünür. Məsələ ondadır ki, j – ci prosesin $<\vec{P}_t, b^j> - <\vec{P}_{t-1}, a^j>$ - gəlir kəmiyyəti müxtəlif (ayrı – ayrı) zaman dövrlərinə aiddir.

Doğrudan da, fərz edək ki, firma sahibi t – ci zaman dövrünün əvvəlində K miqdar kapitala malikdir. Bu məbləğə o, xammal alır, məhsul istehsal edir və bu məhsulları reallaşdırır (satır). Sıfır gəlirlilik halında o yenidən K miqdara sahibdir, lakin qiymətlər başqa ola bilər (məsələn, əvvəlkindən aşağı). Deməli eyni bir K pul miqdarı daha böyük alıcılıq qabiliyyətinə malik olmalıdır. Neyman modelində məhz bu hal nəzərdə tutulur.

Fon – Neyman modelləri barədə, məsələn, [7] ədəbiyyatından ətraflı məlumat əldə etmək olar.

TEST NÜMUNƏLƏRİ*

001) Hansı istehsal faktoru deyil?

a) vergilər
b) kapital
c) fondlar
d) əmək
e) materiallar

002) Y=f($(x_1, x_2, x_3, ...)$ istehsal funksiyasında $x_1, x_2, x_3, ...$ kəmiyyətləri :

a) İstehsal resurslarıdır
b) Vergilərdir
c) Əsas fondlardır
d) Gəlirdir
e) Düzgün cavab göstərilməyib

003) Kobb-Duqlas istehsal funskiyası hansı şəklə malikdir.?

a) $F=AK^{\alpha}L^{\beta}$
b) F=AK+L
c) $F=AK^{\alpha}L^{\beta}+3$

d) $F=AK-L$

e) $F=A*K^{\alpha}/L^{\beta}$

004) Diferensiallanan neoklassik F(K,L) istehsal funksiyaları üçün hansı cavab doğru deyil?

a) $F(K,L)=0$

b) $\frac{\partial F}{\partial K} > 0$

c) $\frac{\partial F}{\partial L} > 0$

d) $F(K,O)=0$

e) $F(O,L)= 0$

005) $y = a + \frac{b}{x}$ $(b \neq 0)$ hansı təbiətli asılılığa malikdir?

a) qeyri-xətti

b) parabolik

c) loqarifmik

d) qüvvət tiplidir

e) xətti

006) $y = a + \frac{b}{x^3}$ $(b \neq 0)$ hansı təbiətli asılılığa malikdir ?

a) qeyri-xətti

b) parabolik

c) loqarifmik

d) qüvvət tiplidir

e) xətti

007) $y = a + be^x$ $(b \neq 0)$ hansı təbiətli asılılığa malikdir ?

a) qüvvət tiplidir

b) parabolik

c) loqarifmik

d) hiperbolik

e) xətti

008) $\begin{cases} x = 2t \\ y = 3t + 1 \end{cases}$ asılılığını F(x,y)=0 şəklində yazın

a) 3x-2y+2=0

b) 2x-2y+1=0

c) 4x+y+2=0

d) x+y=0

e) 2x+y+2=0

009) $\begin{cases} x = t^2 \\ y = t - 2 \end{cases}$ asılılığını F(x,y)=0 şəklində yazın

a) y=$\sqrt{x} - 2$

b) y=$\sqrt{x} - 1$

c) y=2x-2

d) y=$x^2 + 2$

e) x+y=0

010) $\begin{cases} x = \cos^3 t \\ y = \sin^3 t \end{cases}$ asılılığını F(x,y)=0 şəklində yazın

a) $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} - 1 = 0$

b) $x^2 + y^2 - 1 = 0$

c) x+y-1=0

d) $x^{\frac{2}{3}}$+y-1=0

e) x+ $y^{\frac{2}{3}}$-2=0

011) $f(x)=\frac{1}{x-1}$ funksiyasının proobrazını tapın

a) $x \neq 1$

b) $x \neq 0; x \neq 1$

c) $x = 1$

d) x=0

e) x=2

012) f(f(x)) funksiyasının proobrazını tapın , burada $f(x)=\frac{1}{1-x}$

a) $x \neq 0; x \neq 1$

b) $x \neq 1$

c) $x = 1$

d) $x \neq 1; x \neq -1$

e) x=0

013) f(f(f(x))) funksiyasının proobrazını tapın, burada $f(x)=\frac{1}{1-x}$

a) $x \neq 0; x \neq 1$

b) $x \neq 1$

c) $x = 1$

d) $x \neq 1; x \neq -1$

e) x=0

014) f(x)=$\sqrt{2-x}+\sqrt{x-2}$ funksiyasının proobrazını tapın

a) $\{2\}$

b) $\{4,2\}$

c) $\{1,1\}$

d) $\{0\}$

e) $\{4\}$

015) f(x)=$\sqrt{2x-1}+\sqrt{1-2x}$ funksiyasının proobrazını tapın

a) ½

b) 1

c) 0

d) 2

e) 3/2

016) f(x)=$\sqrt{2-x}+\sqrt{x-2}$ funksiyasının obrazını tapın

a) $\{0\}$

b) $\{4,2\}$

c) $\{1,1\}$

d) $\{2\}$

e) $\{4\}$

017) f(x)= $\sqrt{2x-1}+\sqrt{1-2x}$ funksiyasının obrazını tapın

a) $\{0\}$

b) $\{2\}$

c) $\{1,1\}$

d) $\{4,2\}$

e) $\{4\}$

018) $\left[\frac{1}{27};8\right]$ çoxluğunun y= $1-\sqrt[3]{x^2}$ -da obrazını tapın

a) $\left[-3;\frac{8}{9}\right]$

b) $[3;8]$

c) $(-3;\frac{8}{9})$

d) (-3 ; 9)

e) $[-3;9]$

019) $\left[\frac{1}{27};8\right]$ çoxluğunun y' vasitəsilə obrazını tapın , burada $y=1-\sqrt[3]{x^2}$

a) $\left[-\frac{1}{3};-2\right]$

b) $\left[-3;\frac{8}{9}\right]$

c) $[-3;9]$

d) $(-\frac{1}{3};-2)$

e) $[-3;9]$

020) İqtisadiyyat üzrə Nobel mükafatı ilk dəfə kimə verilmişdir?

a) Yan Tinberqen

b) Pol Samuelson

c) Vasiliy Leontyev

d) Con Neş

e) Robert Solou

021) İqtisadiyyat üzrə Nobel mükafatı neçənci ildə təsis edilmişdir?

a) 1968

b) 1965

c) 1971

d) 1973

e) 1961

022) "Model" termini hansı mənşəlidir ?

a) Latın

b) Kiril

c) Alman

d) Yunan

e) Rus

023) Düzbucaqlı paralepiped formaya malik iqtisadi obyektin modeli onun təbii ölçüsünün $\frac{1}{20}$ -nə bərabər ölçüdə tərtib edilmişdir. Obyektin həcmi onun modelinin həcmindən neçə dəfə böyükdür?

a) 8000

b) 600

c) 800

d) 200

e) 4000

024) Kub şəkilli iqtisadi obyektin modeli onun təbii ölçüsünün $\frac{1}{20}$ -nə bərabər ölçüdə tərtib edilmişdir. Obyektin həcmi onun modelinin həcmindən neçə dəfə böyükdür?

a) 8000

b) 4000

c) 800

d) 200

e) 600

025) Kürə şəkilli iqtisadi obyektin modeli onun təbii ölçüsünün $\frac{1}{20}$ -nə bərabər ölçüdə tərtib edilmişdir. Obyektin həcmi onun modelinin həcmindən neçə dəfə böyükdür?

a) 8000

b) 4000

c) 800

d) 200

e) 600

026) Konus şəkilli iqtisadi obyektin modeli onun təbii ölçüsünün $\frac{1}{20}$ -nə bərabər ölçüdə tərtib edilmişdir. Obyektin həcmi onun modelinin həcmindən neçə dəfə böyükdür?

a) 8000

b) 4000

c) 800

d) 200

e) 600

027) Silindrik formaya malik iqtisadi obyektin modeli onun təbii ölçüsünün $\frac{1}{20}$ -nə bərabər ölçüdə tərtib edilmişdir. Obyektin həcmi onun modelinin həcmindən neçə dəfə böyükdür?

a) 8000

b) 4000

c) 800

d) 200

e) 600

028) Düz prizma şəkilli iqtisadi obyektin modeli onun təbii ölçüsünün $\frac{1}{20}$ -nə bərabər ölçüdə tərtib edilmişdir. Obyektin həcmi onun modelinin həcmindən neçə dəfə böyükdür?

a) 8000

b) 4000

c) 200

d) 800

e) 600

029) Düz kəsik konus şəkilli iqtisadi obyektin modeli onun təbii ölçüsünün $\frac{1}{20}$ -nə bərabər ölçüdə tərtib edilmişdir. Obyektin həcmi onun modelinin həcmindən neçə dəfə böyükdür?

a) 8000

b) 4000

c) 200

d) 600

e) 800

030) Düz kəsik piramida şəkilli iqtisadi obyektin modeli onun təbii ölçüsünün $\frac{1}{20}$ -nə bərabər ölçüdə tərtib edilmişdir. Obyektin həcmi onun modelinin həcmindən neçə dəfə böyükdür?

a) 8000

b) 4000

c) 200

d) 600

e) 800

031) İqtisadi proseslərin riyazi modellər vasitəsilə tədqiqatının birinci əsas mərhələsi :

a) Sifarişçi tərəfindən qərar qəbul edən şəxs qarşısında problemin qoyuluşudur
b) Azalan gəlir qanununun tətbiqi
c) Riyazi modelin qurulması və onun identifikasiyasıdır
d) Qurulmuş modelin tədqiqatıdır
e) Lıpşits şərtinin ödənilməsinin yoxlanılmasıdır

032) İqtisadi proseslərin riyazi modellər vasitəsilə tədqiqatının ikinci əsas mərhələsi :

a) Riyazi modelin qurulması və onun identifikasiyasıdır
b) Azalan gəlir qanununun tətbiqi
c) Qurulmuş modelin tədqiqatıdır
d) Sifarişçi tərəfindən qərar qəbul edən şəxs qarşısında problemin qoyuluşudur
e) Lipşits şərtinin ödənilməsinin yoxlanılmasıdır

033) İqtisadi proseslərin riyazi modellər vasitəsilə tədqiqatının üçüncü əsas mərhələsi :

a) Qurulmuş modelin tədqiqatıdır
b) Azalan gəlir qanununun tətbiqidir
c) Riyazi modelin qurulması və onun identifikasiyasıdır
d) Sifarişçi tərəfindən qərar qəbul edən şəxs qarşısında problemin qoyuluşudur
e) Lipşits şərtinin ödənilməsinin yoxlanılmasıdır

034) Müsbət effektlə yanaşı istehsal mənfi effekt də verir:

a) ətraf mühitin çirklənməsində
b) əmək haqqının aşağı düşməsində
c) həyat səviyyəsinin yüksəlməsində
d) rifahda
e) əmək haqqının yüksəlməsində

035) İqtisadi tədqiqatlarda fondla silahlanma dedikdə nə nəzərdə tutulur?

a) $\frac{K}{L}$
b) $\frac{L}{K}$
c) LK
d) L+K
e) L^2K^2

036) $\frac{K}{L}$ iqtisadi tədqiqatlarda hansı iqtisadi mənaya malikdir?

a) Fondla silahlanma

b) Əmək tutumu

c) Məhsuldarlıq

d) Fondlar

e) Xüsusi istehlak

037) İstehsal funksiyasının yaranmasını hansı ilə aid etmək olar?

a) 1928

b) 1926

c) 1933

d) 1941

e) 1973

038) $F(KL)= AK^{\alpha}L^{\beta}$ İstehsal funksiyası üçün $\alpha+\beta=1$ şərti riyazi cəhətdən nəyi ifadə edir?

a) Funksiyanın bircinsliyini

b) Funksiyanın kəsilməzliyini

c) Funksional xəttiliyi

d) Funksiyanın monoton artanlığını

e) Funksiyanın monoton azalanlığını

039) İstehsal funksiyası dinamik adlanır , əgər :

a) Zaman kəmiyyəti bu funksiyanın analitik şəklində özünü göstərirsə

b) O miqyasdan azalan verim xassəsinə malikdirsə

c) O miqyasdan artım verim xassəsinə malikdirsə

d) O miqyasdan sabit verim xassəsinə malikdirsə

e) Zaman kəmiyyəti bu funksiyanın analitik şəklində özünü göstərmirsə

040) Kobb-Duqlas funksiyasını necə xəttiləşdirmək olar?

a) Loqarifmləməklə

b) Diferensiallamaqla

c) İnteqrallamaqla

d) Kvadrata yüksəltməklə

e) Törəməsini hesablamqa

041) İstehsal funksiyalarından hansı miqyasdan azalan verim xassəsinə mailkdir?

a) $Y=3K^{0.4}L^{0.5}$

b) $Y=6K+3L$

c) $Y=(KL)^{0.5}$

d) $Y=(K^2+L^2)^{0.5}$

e) $Y=(KL)^{0.6}$

042) İstehsal funksiyalarından hansı neoklassik deyil ?

a) $Y=3K^{0.5} L^{0.5} +7$

b) $Y=3K^{0.4} L^{0.6}$

c) $Y=3K^{0.2} L^{0.8}$

d) $Y=3K^{0.1} L^{0.9}$

e) $Y=3K^{0.3} L^{0.7}$

043) İstehsal funksiyalarından hansı neoklassik deyil ?

a) $Y=3K^{0.5} L^{0.5} - 7$

b) $Y=3K^{0.4} L^{0.6}$

c) $Y=3K^{0.2} L^{0.8}$

d) $Y=3K^{0.1} L^{0.9}$

e) $Y=3K^{0.3} L^{0.7}$

044) İstehsal funksiyalarından hansı miqyasdan artan verim xassəsinə mailkdir?

a) $Y=(KL)^{0.6}$

b) $Y=6K+3L$

c) $Y=(KL)^{0.5}$

d) $Y=3K^{0.4} L^{0.5}$

e) $Y=(K^2+L^2)^{0.5}$

045) Aşağıdakı istehsal funksiyaları verilmişdir :

$I.Y=(K^2+L^2)^{0.5}$ $II.Y=6K+3L$ $III.Y=(KL)^{0.5}$ $IV.Y=3K^{0.4}L^{0.5}$ $V.Y=(KL)^{0.6}$

İstehsal funksiyalarından hansı miqyasdan sabit verimə malikdir?

a) I,II,III

b) III,IV,V

c) I,IV,V

d) II,III,IV

e) I,III,V

046) XX əsrin 60-cı illərinin əvvəlində “İqtisadi-riyazi metodlar“ terminini elmə kim daxil etmişdir?

a) V.Nemçinov

b) L.Kontoroviç

c) P.Samuelson

d) C.Keyns

e) V.Leontyev

047) Şərti qeyri-xətti ekstremal məsələlərin şərtsizə gətirilməsi metodunun banisi kimdir?

a) Laqranj

b) Koşi

c) Kolmoqorov

d) Lyapunov

e) Pareto

048) Laqranj funksiyasının Laqranj vuruqlarından asılılığı hansı təbiətə malikdir?

a) Xəttidir

b) Qüvvət tiplidir

c) Loqarifmikdir

d) Qeyri-xəttidir

e) Pilləvaridir

049) Laqranj funksiyası qurularkən məsələnin məhdudiyyətlər şərtləri :

a) Cəmlənir

b) Bölünür

c) Loqarifmlənir

d) Vurulur

e) Kvadrata yüksəldilir `

050) Laqranj funksiyası qurularkən məsələnin məqsəd funksiyası ilə məhdudiyyətlər şərtləri :

a) Cəmlənir

b) Bölünür

c) Loqarifmlənir

d) Vurulur

e) Kvadrata yüksəldilir

051) $F(K,L)$ istehsal funksiyasının $F_{KK}<0$ və ya $F_{LL}<0$ xassələri altında hansı iqtisadi qanun "gizlənir" ?

a) Azalan faydalılıq qanunu

b) Pareto qanunu

c) Sey qanunu

d) Azalan vergi qanunu

e) İşsizlik və inflyasiya arasındakı qanun

052) İzokvant əyriləri dedikdə nə başa düşülür?

a) Sabit buraxılış əyrisi

b) Sabit xərclər əyrisi

c) Sabit qiymət əyrisi

d) Sabit tələb əyrisi

e) Sabit gəlir qanunu

053) İqtisadi tədqiqatlarda sabit buraxılış əyrisini adətən necə adlandırırlar ?

a) İzokvant əyrisi

b) Sabit xərclər əyrisi

c) Sabit qiymət əyrisi

d) Sabit tələb əyrisi

e) Sabit gəlir qanunu

054) $F(K,L)=ak+bl$ $(a,b\neq o)$ istehsal funksiyasının izokvant əyrilərinin riyazi təbiəti necədir?

a) Xəttidir

b) Hiperbola şəklindədir

c) Konsentrik çevrələrdir

d) Parabola şəklindədir

e) Qeyri-xəttidir

055) $F(K,L)=3(KL)^{0.5}$ istehsal funksiyasının izokvant əyrilərinin riyazi təbiəti necədir ?

a) Hiperbola şəklindədir

b) Qeyri-xəttidir

c) Konsentrik çevrələrdir

d) Parabola şəklindədir

e) Xəttidir

056) Kobb-Duqlas istehsal funksiyasının izokvant əyrilərinin riyazi təbiəti necədir?

a) Hiperbola şəklindədir

b) Qeyri-xəttidir

c) Konsentrik çevrələrdir

d) Parabola şəklindədir

e) Xəttidir

057) İxtiyari istehsal funksiyasının izokvant əyriləri hansi koordinat rübündə yerləşir?

a) I

b) III və IV

c) I və III

d) II

e) I və II

058) Loqarifmik $D(p) = \ln\frac{1+p}{p}$ tələb funksiyasının p qiymətinə görə dəyişmə sürətini tapın.

a) $-\frac{1}{p(1+p)}$

b) $\frac{1}{1+p}$

c) $\frac{p}{p+1}$

d) $-\frac{p}{p+1}$

e) p(p+1)

059) Loqarifmik $D(p) = \ln(1+p)$ tələb funksiyasının p qiymətinə görə dəyişmə sürətini tapın.

a) $\frac{1}{1+p}$

b) $\frac{1}{1+p}$

c) $\frac{p}{p+1}$

d) $-\frac{p}{p+1}$

e) p(p+1)

060) Loqarifmik $D(p) = \ln(2+p)$ tələb funksiyasının p qiymətinə görə dəyişmə sürətini tapın.

a) $\frac{1}{2+p}$

b) $-\frac{1}{1+p}$

c) $\frac{p}{p+1}$

d) $-\frac{p}{p+1}$

e) p(p+1)

061) Loqarifmik $S(p)=\ln(1+p)$ təklif funksiyasının p qiymətinə görə dəyişmə sürətini tapın.

a) $\frac{1}{1+p}$

b) $-\frac{1}{1+p}$

c) $\frac{p}{p+1}$

d) $-\frac{p}{p+1}$

e) p(p+1)

062) Loqarifmik $S(p)=\ln(2+p)$ təklif funksiyasının p qiymətinə görə dəyişmə sürətini tapın.

a) $\frac{1}{2+p}$

b) $-\frac{1}{1+p}$

c) $\frac{p}{p+1}$

d) $-\frac{p}{p+1}$

e) p(p+1)

063) Loqarifmik $S(p) = \ln(1+2p)$ təklif funksiyasının p qiymətinə görə dəyişmə sürətini tapın.

a) $\frac{2}{1+2p}$

b) $-\frac{1}{1+p}$

c) $\frac{p}{p+1}$

d) $-\frac{p}{p+1}$

e) p(p+1)

064) p qiymətinə görə D tələbinin elastikliyi hansı düsturla hesablanır ?

a) $\frac{dD}{dp} * \frac{p}{D}$

b) D*dp

c) p*dD

d) $\frac{dp}{dD} * \frac{p}{D}$

e) p*D

065) I gəlirinə görə D tələbinin elastikliyi hansı düsturla hesablanır ?

a) $\frac{\mathrm{dD}}{\mathrm{dI}} * \frac{\mathrm{I}}{\mathrm{D}}$

b) D*dI

c) D*I

d) $\frac{\mathrm{dD}}{\mathrm{dI}} * \frac{\mathrm{D}}{\mathrm{I}}$

e) I *dD

066) Əgər V- kürə şəkilli modelin həcmi , R isə onun radiusudursa , $\frac{dV}{dR}$ törəməsi nəyə bərabərdir ?

a) Modelin səthinin sahəsinə

b) Modelin uzunluğuna

c) Modelin həcminin yarısına

d) Modelin uzunluğunun yarısına

e) Düzgün cavab göstərilməyib

067) Əgər S- dairə şəkilli modelin həcmi , R isə onun radiusudursa, $\frac{dS}{dR}$ törəməsi nəyə bərabərdir ?

a) Modelin uzunluğuna
b) Modelin səthinin sahəsinə
c) Modelin həcminin yarısına
d) Modelin uzunluğunun yarısına
e) Düzgün cavab göstərilməyib

068) Konkret istehsal funksiyası üçün elastiklik əmsallarının tapılması riyazi nöqteyi nəzərdən hansı məsələ tipinə aiddir ?

a) Düz məsələ
b) Tərs məsələ
c) Qoşma məsələ
d) İkili məsələ
e) Sərhəd məsələsi

069) (I+C) cəminin hesablanması riyazi nöqteyi nəzərdən necə məsələ hansı məsələ hesab olunur ?

a) Düz məsələ
b) Tərs məsələ
c) Qoşma məsələ
d) İkili məsələ

e) Sərhəd məsələsi

070) I+C=10 bərabərliyindən I investisiyasının və C istehlakının təyini riyazi nöqteyi nəzərdən hansı tip məsələ hesab olunur ?

a) Tərs məsələ

b) Düz məsələ

c) Qoşma məsələ

d) İkili məsələ

e) Sərhəd məsələsi

071) İstehsal funksiyasının özünün elastiklik əmsalları vasitəsilə təyini riyazi nöqteyi nəzərdən hansı tip məsələ hesab olunur?

a) Tərs məsələ

b) Düz məsələ

c) Qoşma məsələ

d) İkili məsələ

e) Sərhəd məsələsi

072) V.Leontyev iqtisadiyyatda hansı istiqamətin banisidir?

a) Məsrəflər-buraxılış

b) Vergi siyasəti

c) Buraxılış-vergilər

d) İnflyasiya- işsizlik

e) Maliyyə-vergilər

073) Leontyev modelinin əsasında hansı prinsip dayanır :

a) Məsrəflər-buraxılış

b) Buraxılış –vergilər

c) Vergi siyasəti

d) İnflyasiya-işsizlik

e) Maliyyə-vergilər

074) İstehlak seçimi məsələsini həll edin:
$V(x_1, x_2) = x_1 \cdot x_2 \to \max$, $3x_1+5x_2 \le 36$, $x_1 \ge 0$; $x_2 \ge 0$.

a) (6; 3,6)

b) (6; 3,5)

c) (5; 3)

d) (7;4)

e) (5;6,2)

075) “ Ekonometriya “ terminini elmə ilk dəfə kim daxil etmişdir ?

a) R.Friş

b) C.Keyns

c) V.Leontyev

d) R.Solou

e) P.Samuelson

076) F(K,L) istehsal funksiyası L-ə görə ikinci tərtibdən differensiallanan olmadıqda $\frac{\partial^2 F}{\partial L^2} < 0$ şərti hansı şərtlə əvəz olunar?

a) L-ə görə çöküklük

b) L-ə görə qabarıqlıq

c) L-ə görə kəsilməzlik

d) L-görə sabitlik

e) L-ə görə Lipşits şərtinin ödənilməsi

077) F(K,L) istehsal funksiyası K-ya görə ikinci tərtibdən differensiallanan olmadıqda $\frac{\partial^2 F}{\partial K^2} < 0$ şərti hansı şərtlə əvəz olunar?

a) K-ə görə çöküklük

b) K-ə görə qabarıqlıq

c) K-ə görə kəsilməzlik

d) K-görə sabitlik

e) K-ə görə Lipşits şərtinin ödənilməsi

078) F(K,L) istehsal funksiyası ikinci tərtibdən differensiallanan olmadıqda $\frac{\partial^2 F}{\partial L^2} < 0$ (və ya $\frac{\partial^2 F}{\partial K^2} < 0$) şərtləri hansı şərtlərlə əvəz olunur ?

a) Çöküklük

b) Qabarıqlıq

c) Kəsilməzlik

d) Sabitlik

e) Lipşits şərtinin ödənilməsi

079) Xətti reqressiya modeli üçün ən kiçik kvadratlar metodunu göstərin ?

a) $\sum_i (y_i - (a + bx_i))^2 \to \min$

b) $\sum_i (y_i^2 + (a + bx_i))^2 \to \min$

c) $\sum_i (y_i + (a + bx_i))^2 \to \min$

d) $\sum_i (y_i + (a + bx_i))^3 \to \min$

e) $\sum_i (y_i + (a + bx_i))^4 \to \min$

080) Diferensial tənliklər üçün dayanıqlılıq nəzəriyyəsinin banisi kimdir ?

a) A.Lyapunov

b) R.Belman

c) V.Leontyev

d) A.Kofman

e) L.Zadə

081) Diferensial tənliklər nəzəriyyəsinə assimptotik dayanıqlıq anlayışını ilk dəfə kim daxil etmişdir?

a) A.Lyapunov

b) R.Belman

c) V.Leontyev

d) A.Kofman

e) L.Zadə

082) İqtisadi kibernetikanın əsas obyekti nə hesab olunur ?

a) İqtisadi sistemlər

b) Bioloji sistemlər

c) Coğrafi proseslər

d) Kimyəvi proseslər

e) Mexaniki sistemlər

083) XIX əsrin sonlarından başlayaraq " siyasi iqtisadiyyat " termininin əvəzinə hansı termin əmələ gəldi ?

a) Ekonomiks

b) Açıq iqtisadiyyat

c) Xarici ticarət

d) Ekonometriya

e) Statistika

084) Hansı əsrin sonlarından başlayaraq " siyasi iqtisadiyyat " terminin əvəzinə "Ekonomiks" termini işlənilməyə başlanmışdır

a) XIX

b) XVII

c) XVIII

d) XVI

e) XX

085) Super-iqtisadiyyat nə deməkdir?

a) Dünya iqtisadiyyatı

b) Firmanın iqtisadiyyatı

c) Mikroiqtisadiyyat

d) Ailə iqtisadiyyatı

e) Makroiqtisadiyyat

086) “Dünya iqtisadiyyatı” termininin əvəzinə hansı termin istifadə olunur ?

a) Super iqtisadiyyat

b) Firmanın iqtisadiyyatı

c) Mikroiqtisadiyyat

d) Ailə iqtisadiyyatı

e) Makroiqtisadiyyat

087) $y''' - y'' - 4y' + 4y = 0$ differensial tənliyinin ümumi həllini göstərin

a) $y = c_1e^x + c_2e^{-2x} + c_3e^{2x}$

b) $y = c_1e^x + c_2e^{-x} + c_3$

c) $y = c_1 \sin x + c_2 \cos 2x$

d) $y = c_1e^x + c_2e^{-2x} + c_3e^{3x}$

e) $y = c_1e^x + c_2e^{-2x} - c_3e^{2x}$

088) $y''' - y'' - 4y' + 4y = 0$ differensial tənliyinin xarakteristik çoxhədlisinin kökləri cəmini tapın .

a) 1

b) 0

c) -1

d) 2

e) -2

089) $y^{\bullet} - 4y = 0$ differensial tənliyinin xarakteristik çoxhədlisinin kökləri cəmini tapın .

a) 0

b) -1

c) 1

d) 2

e) -2

090) İkinci tərtib $y^{\bullet} - 4y = 0$ diferensial tənliyinin xüsusi həllini göstərin

a) e^{-2x}

b) cos2x

c) sin4x

d) e^{4x}

e) e^{3x}

091) $y^{\bullet} - 4y = 0$ differensial tənliyinin xarakteristik çoxhədlisinin kökləri cəmini tapın .

a) 0

b) -1

c) 1

d) 2

e) -2

092) İkinci tərtib $y'' + 9y = 0$ diferensial tənliyinin xüsusi həllini göstərin

a) sin3x

b) cos2x

c) sin4x

d) e^{-2x}

e) e^{3x}

093) $y'' + 9y = 0$ differensial tənliyinin xarakteristik çoxhədlisinin kökləri cəmini tapın .

a) 0

b) -1

c) 1

d) 2

e) -2

099) İkinci tərtib $y'' + 9y = 0$ diferensial tənliyinin xüsusi həllini göstərin

a) cos3x

b) cos2x

c) sin4x

d) e^{-2x}

e) e^{3x}

100) $y'' + 9y = 0$ differensial tənliyinin xarakteristik çoxhədlisinin kökləri cəmini tapın

a) 0

b) -1

c) 1

d) 2

e) -2

101) Şərti ekstremal məsələni həll edin :
$f(x_1, x_2) = x_1^2 + 6x_1 + x_2^2 + 10x_2 \to \min, \; x_1 + x_2 = 200, \; x_1, x_2 \geq 0$

a) (101; 99)

b) (100;100)

c) (88;102)

d) (132;68)

e) (97;103)

102) $y^{IV} + y''' + 4y'' + 4y' = 0$ differensial tənliyinin ümumi həllini göstərin .

a) $y = c_1 + c_2 e^{-x} + c_3 \cos 2x + c_4 \sin 2x$

b) $y = c_1 e^x + c_2 e^{-x} + c_3$

c) $y = c_1 \sin x + c_2 \cos 2x - c_3 \sin 2x$

d) $y = c_1 e^x + c_2 e^{-2x} + c_3 e^{3x}$

e) $y = c_1 \sin x + c_2 \cos 2x$

103) $y^{IV} + y''' + 4y'' + 4y' = 0$ differensial tənliyinin xarakteristik çoxhədlisinin kökləri cəmini tapın .

a) -1

b) 0

c) 1

d) 2

e) -2

104) $\begin{pmatrix} 2x & 5 \\ 7 & y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3y & -2 \\ 1 & 4x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 8 & 9 \end{pmatrix}$ -dan x*y hasilini tapın.

a) 2

b) 1

c) 0

d) 3

e) 4

105) Əgər $A=\begin{pmatrix} \sin x & \cos x \\ -\cos x & \sin x \end{pmatrix}$, A^{-1} matrisini tapın .

a) $\begin{pmatrix} \sin x & -\cos x \\ \cos x & \sin x \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} \sin x & \cos x \\ -\cos x & \sin x \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} \sin x & -\sin x \\ \cos x & \cos x \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} \sin x & -\cos x \\ \sin x & \cos x \end{pmatrix}$

e) $\begin{pmatrix} \sin x & \cos x \\ -\sin x & 1 \end{pmatrix}$

106) Əgər $A=\begin{pmatrix} \sin x & \cos x \\ -\cos x & \sin x \end{pmatrix}$, detA -nı tapın .

a) 1

b) -cos2x

c) -1

d) sin2x

e) 0

107) İqtisadiyyatda ingilis iqtisadçısı A.Filipsin adı ilə bağlı olan funksional asılılıq nəyi ifadə edir?

a) İnflyasiya və işsizlik arasındakı əlaqə

b) İşçi qüvvəsinin sayının artım tempi

c) Əsas fondların dəyəri

d) Məcmu tələb və təklif arasındakı əlaqə

e) Azalan faydalılıq qanunu

108) Əgər $A = \begin{pmatrix} \sin x & \cos x \\ \cos x & \sin x \end{pmatrix}$, detA -nı tapın .

a) -cos2x

b) 0

c) -1

d) sin2x

e) 1

109) t zaman parametrindən asılı $\begin{cases} \overset{\circ}{x}_1 = x_2^2 - 5x_2 + 6 \\ \overset{\circ}{x}_2 = 3\cos x_1 - 4 \end{cases}$ dinamik sistemin tarazlıq vəziyyətini tapın:

a) yoxdur

b) (0;1)

c) (-1;1)

d) (1;1)

e) (2;3)

110) Leontyev modelində A matrisi o zaman məhsuldar adlanır ki,onun Frobenius ədədi

a) 1 –dən kiçikdir

b) 1-ə bərabərdir

c) 1-dən böyükdür

d) ½-dən kiçikdir

e) ½ -dən böyükdür

111) $\begin{cases} \overset{\circ}{x} = x \\ \overset{\circ}{y} = -y \end{cases}$ - dinamik sisteminin inteqral əyriləri XOY müstəvisində hansı həndəsi fiquru əmələ gətirir ?

a) Hiperbolalar

b) Düz xəttlər

c) Polyar koordinat sistemində loqarifmik (Arximed) spiralı

d) Konsentrik çevrələr

e) Parabolalar

112) $y=2x^3-6x^2-18x+7$ funksiyasının minimum nöqtəsini tapın

a) 3

b) -1

c) 7

d) 0

e) $\sqrt{2}$

113) $\begin{cases} \overset{\circ}{x} = x \\ \overset{\circ}{y} = y \end{cases}$ -dinamik sisteminin inteqral əyriləri XOY müstəvisində hansı həndəsi fiquru təsvir edirlər ?

a) Düz xəttlər

b) Hiperbolalar

c) Polyar koordinat sistemində loqarifmik (Arximed) spiralı

d) Konsentrik çevrələr

e) Parabolalar

114) $f(x)=\sin 2x$ funksiyası üçün $f'(\frac{\pi}{4})$ neçədir ?

a) 0

b) 3

c) $\frac{1}{3}$

d) 1

e) $\sqrt{3}$

115) $\frac{dx(t)}{dt}=kx(t)-\alpha x^2(t)$, $x(t_0)=x_0$ populyasiya dinamikası modelinin həllinii tapın

a) $x(t)=\frac{kx_0e^{k(t-t_0)}}{k-\alpha x_0(1-e^{k(t-t_0)})}$

b) $x(t)=\frac{kx_0e^{kt}}{k-\alpha}$

c) $x(t)=\frac{k}{\alpha+x_0}$

d) $x(t)=\frac{ke^{k(t-t_0)}}{\alpha(1-e^{k(t-t_0)})}$

e) $x(t)=k\alpha x_0e^{k(t-t_0)}$

116) $y=2x^3-6x^2-18x+7$ funksiyasının minimum nöqtəsini tapın

a) 3

b) -1

c) 7

d) 0

e) $\sqrt{2}$

117) $\begin{cases} \overset{\circ}{x} = x \\ \overset{\circ}{y} = y \end{cases}$ -dinamik sisteminin (0;0) tarazlıq vəziyyəti hansı tipə aiddir ?

a) düyün

b) fokus

c) yəhər

d) qeyri-kobud

e) mərkəz

118) t zaman parametrindən asılı $\begin{cases} \overset{\circ}{x}_1 = x_2 - 1 \\ \overset{\circ}{x}_2 = -x_1 + 1 \end{cases}$ dinamik sistemin tarazlıq vəziyyətini tapın:

a) (1;1)

b) (0;1)

c) (-1;1)

d) (1;-1)

e) yoxdur

119) t zaman parametrindən asılı $\begin{cases} \overset{\circ}{x}_1 = x_2^2 - 5x_2 + 6 \\ \overset{\circ}{x}_2 = 3\cos x_1 - 4 \end{cases}$ dinamik sistemin tarazlıq vəziyyətini tapın:

a) yoxdur

b) (0;1)

c) (-1;1)

d) (1;1)

e) (2;3)

120) Əgər 2 –ci tərtib xətti dinamik tənliklər sisteminin xarakteristik tənliyinin hər iki kökü həqiqi ədədlər olub, eyni işarəlidirlərsə ,onda bu sistemin (0,0) tarazlıq vəziyyəti :

a) düyün tipinə aiddir

b) fokus tipinə aiddir

c) yəhər tipinə aiddir

d) kobud tipə aiddir

e) mərkəz tipinə aiddir

121) Əgər 2 –ci tərtib xətti dinamik tənliklər sisteminin xarakteristik tənliyinin hər iki kökü həqiqi ədədlər olub , müxtəlif işarəlidirlərsə ,onda bu sistemin (0,0) tarazlıq vəziyyəti :

a) yəhər tipinə aiddir

b) fokus tipinə aiddir

c) düyün tipinə aiddir

d) kobud tipə aiddir

e) mərkəz tipinə aiddir

122) Əgər 2 –ci tərtib xətti dinamik tənliklər sisteminin xarakteristik tənliyinin hər iki kökü həqiqi ədəd olmayıb, sırf xəyali də deyillərsə ,onda bu sistemin (0,0) tarazlıq vəziyyəti:

a) fokus tipinə aiddir

b) yəhər tipinə aiddir

c) düyün tipinə aiddir

d) kobud tipə aiddir

e) mərkəz tipinə aiddir

123) Əgər 2 –ci tərtib xətti dinamik tənliklər xarakteristik tənliyinin sisteminin hər iki kökü sırf xəyalidirlərsə ,onda bu sistemin (0,0) tarazlıq vəziyyəti :

a) mərkəz tipinə aiddir

b) fokus tipinə aiddir

c) düyün tipinə aiddir

d) kobud tipə aiddir

e) yəhər tipinə aiddir

124) $\begin{cases} \overset{\circ}{x} = x \\ \overset{\circ}{y} = y \end{cases}$ -dinamik sisteminin inteqral əyriləri XOY müstəvisində hansı həndəsi fiquru təsvir edirlər ?

a) Düz xəttlər

b) Hiperbolalar

c) Polyar koordinat sistemində loqarifmik (Arximed) spiralı

d) Konsentrik çevrələr

e) Parabolalar

125) $\begin{cases} \overset{\circ}{x} = x \\ \overset{\circ}{y} = y \end{cases}$ -dinamik sisteminin xarakteristik tənliyinin köklərini göstərin

a) (1,1)

b) (1,-1)

c) (0,0)

d) (-i, i)

e) (1-i, 1+i)

126) $\begin{cases} \overset{\circ}{x} = x \\ \overset{\circ}{y} = -y \end{cases}$ -dinamik sisteminin (0;0) tarazlıq vəziyyəti

hansı tipə aiddir ?

a) yəhər

b) fokus

c) düyün

d) qeyri-kobud

e) mərkəz

127) $\begin{cases} \overset{\circ}{x} = x \\ \overset{\circ}{y} = -y \end{cases}$ - dinamik sisteminin xarakteristik tənliyinin

köklərini göstərin

a) (1,-1)

b) (1,1)

c) (0,0)

d) (-i, i)

e) (1-i, 1+i)

128) $\begin{cases} \overset{\circ}{x} = x - y \\ \overset{\circ}{y} = x + y \end{cases}$ - dinamik sisteminin (0;0) tarazlıq vəziyyəti

hansı tipə aiddir?

a) fokus

b) yəhər

c) düyün

d) qeyri-kobud

e) mərkəz

129) $\begin{cases} \overset{\circ}{x} = x - y \\ \overset{\circ}{y} = x + y \end{cases}$ dinamik sisteminin inteqral əyriləri müstəvisində hansı həndəsi fiquru əmələ gətirir ?

a) Polyar koordinat sistemində loqarifmik (Arximed) spiralı

b) Düz xəttlər

c) Hiperbolalar

d) Konsentrik çevrələr

e) Parabolalar

130) $\begin{cases} \overset{\circ}{x} = x - y \\ \overset{\circ}{y} = x + y \end{cases}$ - dinamik sisteminin xarakteristik tənliyinin köklərini göstərin

a) (1-i, 1+i)

b) (1,1)

c) (0,0)

d) (-i, i)

e) (1,-1)

131) $\begin{cases} \overset{\circ}{x} = y \\ \overset{\circ}{y} = -x \end{cases}$ - dinamik sisteminin (0;0) tarazlıq vəziyyəti hansı tipə aiddir ?

a) mərkəz

b) fokus

c) düyün

d) qeyri-kobud

e) yəhər

132) $\begin{cases} \overset{\circ}{x} = y \\ \overset{\circ}{y} = -x \end{cases}$ dinamik sisteminin inteqral əyriləri müstəvisində hansı həndəsi fiquru əmələ gətirir ?

a) Konsentrik çevrələr

b) Düz xəttlər

c) Hiperbolalar

d) Polyar koordinat sistemində loqarifmik (Arximed) spiralı

e) Parabolalar

133) $\begin{cases} \overset{\circ}{x} = y \\ \overset{\circ}{y} = -x \end{cases}$ - dinamik sisteminin xarakteristik tənliyinin köklərini göstərin

a) (-i, i)

b) (1,1)

c) (0,0)

d) (1,-1)

e) (1-i, 1+i)

134) Leontyev modeli $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ matrisi vasitəsilə verilmişdir . $C = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ istehlak vektorunu təmin edən x istehsal həcmini tapın :

a) $\begin{pmatrix} 12 \\ 12 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 10 \\ 10 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 6 \\ 18 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} 8 \\ 8 \end{pmatrix}$

e) $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

135) Leontyev modeli :

a) Mikroiqtisadiyyatın xətti modelidir
b) Super iqtisadiyyatın xətti modelidir
c) Makroiqtisadi qeyri-xətti modeldir
d) Makroiqtisadi xətti modeldir
e) Düzgün cavab yoxdur

136) İqtisadi obyektin gəliri təyin olunur :

a) Ümumi gəlirdən xərclər çıxılmaqla
b) Ümumi gəlirdən məhsulların qiyməti çıxılmaqla
c) Ümumi gəlirdən baza ilindəki qiymət çıxılmaqla
d) Ümumi gəlirdən əvvəlki ildəki qiymət çıxılmaqla
e) Ümumi gəlirdən istehsal həcmi çıxılmaqla

137) Leontyev modelində A matrisi o zaman məhsuldar adlanır ki,onun Frobenius ədədi

a) 1 –dən kiçikdir

b) 1-ə bərabərdir

c) 1-dən böyükdür

d) ½-dən kiçikdir

e) ½ -dən böyükdür

138) Leontyev modelində x vektoru necə adlanır ?

a) Məcmu məhsul vektoru

b) Son istehlak vektoru

c) Sahələr arası balans vektoru

d) Birbaşa xərclər vektoru

e) Düzgün cavab yoxdur

139) Leontyev modelində C vektoru necə adlanır ?

a) Son istehlak vektoru

b) Məcmu məhsul vektoru

c) Sahələr arası balans vektoru

d) Birbaşa xərclər vektoru

e) Düzgün cavab yoxdur

140) İqtisadi tədqiqatlarda tələb və təklif əyrilərinin kəsişməsi nəyi ifadə edir?

a) Məhsulun qiymətini

b) İnflyasiya tempini

c) Baza ilində qiymət indeksini

d) Əvvəlki ildəki qiymət indeksini

e) İstehsal həcmini

141) $\frac{dx(t)}{dt} = kx(t) - \alpha x^2(t), \; x(t_0) = x_0$ populyasiya dinamikası modeli hansı tipə aiddir ?

a) Dəyişənlərə ayrıla bilən diferensial tənlik

b) Birinci tərtib xətti diferensial tənlik

c) Tam diferensial tənlik

d) Bircins diferensial tənlik

e) İkinci tərtib qeyri-xətti diferensial tənlik

142) $\frac{dx(t)}{dt} = kx(t) - \alpha x^2(t), x(t_0) = x_0$ dinamik modelində populyasiyanın miqdarı hansı kəmiyyətə yığılır.

a) $\frac{k}{\alpha}$

b) $\frac{k}{x_o}$

c) $\frac{\alpha}{t_o}$

d) $\frac{x_o}{t_o}$

e) $\kappa\alpha$

143) $\frac{dx(t)}{dt} = 26x(t) - 2x^2(t)$, $x(1) = 7$ dinamik modelində populyasiyanın miqdarı hansı kəmiyyətə yığılır?

a) 13

b) 28

c) 12

d) 52

e) 24

144) $\frac{dx(t)}{dt} = 26x(t) - 2x^2(t)$, $x(1) = 7$ populyasiya dinamikası modeli hansı tipə aiddir ?

a) Dəyişənlərə ayrıla bilən diferensial tənlik

b) Birinci tərtib xətti diferensial tənlik

c) Tam diferensial tənlik

d) Bircins diferensial tənlik

e) İkinci tərtib qeyri-xətti diferensial tənlik

145) $\frac{dx(t)}{dt} = 2012x(t) - 4x^2(t)\,, x(1) = 10$ dinamik modelində populyasiyanın miqdarı hansı kəmiyyətə yığılır.

a) 503

b) 502

c) 501

d) 504

e) 505

146) $\frac{dx(t)}{dt} = 2012x(t) - 4x^2(t)\,, x(1) = 10$ populyasiya dinamikası modeli hansı tipə aiddir ?

a) Dəyişənlərə ayrıla bilən diferensial tənlik

b) Birinci tərtib xətti diferensial tənlik

c) Tam diferensial tənlik

d) Bircins diferensial tənlik

e) İkinci tərtib qeyri-xətti diferensial tənlik

147) $\frac{dx(t)}{dt} = kx(t) - \alpha x^2(t), x(t_0) = x_0$ populyasiya modelində "qeyri-trivial" tarazlıq vəziyyətini göstərin

a) $\frac{k}{\alpha}$

b) $\frac{k}{x_o}$

c) $\frac{\alpha}{t_o}$

d) $\frac{x_o}{t_o}$

e) $\kappa\alpha$

148) $\frac{dx(t)}{dt} = 26x(t) - 2x^2(t)$, $x(1) = 7$ populyasiya modelində "qeyri-trivial" tarazlıq vəziyyətini göstərin

a) 13

b) 28

c) 12

d) 52

e) 24

149) f(x)=$\sqrt{2x-1}$ funksiyası üçün f'(5) neçədir ?

a) $1/3$

b) 3

c) 0

d) 1

e) $\sqrt{3}$

150) f(x)= $\sqrt[3]{x-1}$ funksiyası üçün $f'(0)$ neçədir ?

a) $1/3$

b) 3

c) 0

d) 1

e) $\sqrt{3}$

151) f(x)= $\sqrt[3]{x-1}$ funksiyası üçün $f'(1)$ neçədir ?

a) mövcud deyil

b) 3

c) 0

d) 1

e) $\sqrt{3}$

152) $f(x)=\dfrac{8}{x}$ funksiyası üçün $f'(2)$ neçədir ?

a) -2

b) 3

c) 0

d) 1

e) $\sqrt{3}$

153) $f(x)=\dfrac{8}{x}$ funksiyası üçün $f'(-2)$ neçədir ?

a) -2

b) 3

c) 0

d) 1

e) $\sqrt{3}$

154) $f(x)=\dfrac{8}{x}$ funksiyası üçün $f'(-2)$ neçədir ?

a) $f'(2)$

b) $f'(-1)$

c) $f'(0)$

d) $f'(1)$

e) $f'(\frac{1}{3})$

155) $f(x)=\dfrac{8}{x}$ funksiyası üçün $f'(2)$ neçədir ?

a) $f'(-2)$

b) $f'(-1)$

c) $f'(0)$

d) $f'(1)$

e) $f'(\frac{1}{3})$

156) y=x-ln x funksiyasının minimal qiyməti neçədir :

a) 1

b) 0

c) -4

d) $\frac{1}{2}$

e) e

157) Limiti hesablayın: $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin 3x}{2x}$

a) 3/2

b) 3

c) 1

d) 2

e) 5/2

158) Limiti hesablayın : $\lim_{x \to 0} \frac{\sin^3 x}{x}$

a) 0

b) 3

c) 1

d) $\frac{3}{2}$

e) 2

159) Limiti hesablayın : $\lim_{x \to 0} \frac{\sin^3 x}{2x}$

a) 0

b) 3

c) 1

d) $\frac{3}{2}$

e) 2

160) Limiti hesablayın : $\lim\limits_{x\to 0}\frac{tgx}{x}$

a) 1

b) 3

c) 0

d) $\frac{3}{2}$

e) 2

161) Limiti hesablayın : $\lim\limits_{x\to 0}\frac{tgx}{2x}$

a) ½

b) 3

c) 0

d) $\frac{3}{2}$

e) 2

162) Limiti hesablayın : $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{\sin^2 x}$

a) ½

b) 3

c) 0

d) $\frac{3}{2}$

e) 2

163) Limiti hesablayın : $\lim\limits_{x\to 0} \frac{2-2\cos x}{\sin^2 x}$

a) 1

b) 3

c) 0

d) $\frac{3}{2}$

e) 2

164) Limiti hesablayın: $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin 5x}{2x}$

a) 5/2

b) 3

c) 1

d) 3/2

e) 2

166) Limiti hesablayın: $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin 2010x}{2x}$

a) 1005

b) 3000

c) 1050

d) 2000

e) 1500

167) $\int\limits_0^{\pi/2} \sin x * \cos x dx$ inteqralının qiymətini hesablayın

a) $1/2$

b) $1/3$

c) 0

d) -1

e) π

168) $\int\limits_0^{\pi/2} 2\sin x * \cos x dx$ inteqralının qiymətini hesablayın

a) 1

b) $1/3$

c) 0

d) $\frac{1}{2}$

e) π

169) U(x)=sinx və V(x)= cosx funksiyalarının $(0:\frac{\pi}{2})$ aralığında skalyar hasilini tapın

a) $\frac{1}{2}$

b) $\frac{1}{3}$

c) 0

d) -1

e) π

170) U(x)=2sinx və V(x)= cosx funksiyalarının $(0:\frac{\pi}{2})$ aralığında skalyar hasilini tapın

a) -1

b) $\frac{1}{3}$

c) 0

d) $\frac{1}{2}$

e) π

171) U(x)=sinx və V(x)=2cosx funksiyalarının $(0:\frac{\pi}{2})$ aralığında skalyar hasilini tapın

a) -1

b) $\frac{1}{3}$

c) 0

d) $\frac{1}{2}$

e) π

172) Orta məhsuldarlıq dedikdə nə nəzərdə tutulur ?

a) $\frac{F(K,L)}{L}$

b) K*F(K,L)

c) $\frac{F(K,L)}{KL}$

d) L*F(K,L)

e) $\frac{KL}{F(K,L)}$

173) $\frac{F(K,L)}{L}$ nisbəti iqtisadi – riyazi tədqiqatlarda hansı iqtisadi mənaya malikdir ?

a) Orta məhsuldarlıq

b) Əməktutumu

c) Fondla silahlanma

d) Fondlar

e) Xüsusi istehlak

174) $\frac{C}{L}$ nisbəti iqtisadi – riyazi tədqiqatlarda hansı iqtisadi mənaya malikdir ?

a) Xüsusi istehlak

b) Əməktutumu

c) Fondla silahlanma

d) Fondlar

e) Orta məhsuldarlıq

175) $\frac{K}{Y}$ nisbəti iqtisadi – riyazi tədqiqatlarda hansı iqtisadi mənaya malikdir ?

a) İstehsalın kapital tutumu

b) Əmək tutumu

c) Fondla silahlanma

d) Xüsusi istehlak

e) Orta məhsuldarlıq

176) $\frac{L}{Y}$ nisbəti iqtisadi – riyazi tədqiqatlarda hansı iqtisadi mənaya malikdir ?

a) İstehsalın əmək tutumu

b) İstehsalın kapital tutumu

c) Fondla silahlanma

d) Xüsusi istehlak

e) Orta məhsuldarlıq

177) $\frac{Y}{K}$ nisbəti iqtisadi – riyazi tədqiqatlarda hansı iqtisadi mənaya malikdir ?

a) İstehsalın məhsuldarlığı

b) İstehsalın kapital tutumu

c) Fondla silahlanma

d) Xüsusi istehlak

e) Orta məhsuldarlıq

178) Xüsusi istehlak dedikdə nə başa düşülür ?

a) $\frac{C}{L}$

b) K*C

c) L*C

d) $\frac{K}{C}$

e) $\frac{KL}{C}$

179) Y -məhsul buraxılışının kapitaltutumu dedikdə nə başa düşülür ?

a) $\frac{K}{Y}$

b) K*Y

c) $\frac{K}{L}$

d) L*Y

e) $\frac{KL}{Y}$

180) Y məhsul buraxılışının əmək tutumu dedikdə nə başa düşülür ?

a) $\frac{L}{Y}$

b) K*Y

c) $\frac{K}{L}$

d) $\frac{K}{Y}$

e) L*Y

181) K kapitalının məhsuldarlığı dedikdə nə başa düşülür ?

a) $\frac{Y}{K}$

b) K*Y

c) $\frac{L}{Y}$

d) $\frac{K}{Y}$

e) L*Y

182) $F(K,L)=AK^{\alpha}L^{\beta}$ istehsal funksiyasının yazılışında α parametri nəyi ifadə edir?

a) Kapitala görə elastikliyi

b) Əsas fondların dəyərini

c) İşçi qüvvəsinin miqdarını

d) Məhsul buraxılışı artımını

e) Milli gəlirin artım tempini

183) $F(K,L)=AK^{\alpha}L^{\beta}$ istehsal funksiyasının yazılışında β parametri nəyi ifadə edir?

a) İşçi qüvvəsinə görə elastikliyi

b) Məhsul buraxılışı artımını

c) İstehlak multiplikatorunu

d) İşçi qüvvəsinin artım tempini

e) Əsas fondların dəyərini

184) $F(K,L)=AK^{0.7}L^{0.3}$ istehsal funksiyasının yazılışında 0.7 qüvvəti nəyi ifadə edir?

a) Kapitala görə elastiklik əmsalını

b) Milli gəlirin artım tempini

c) İşçi qüvvəsinin miqdarını

d) Məhsul buraxılışı artımını

e) Əsas fondların dəyərini

187) $F(K,L)=AK^{0.3}L^{0.7}$ istehsal funksiyasının yazılışında 0.3 qüvvəti nəyi ifadə edir?

a) Kapitala görə elastiklik əmsalını

b) Milli gəlirin artım tempini

c) İşçi qüvvəsinin miqdarını

d) Məhsul buraxılışı artımını

e) Əsas fondların dəyərini

188) $F(K,L)=3K^{0.6}L^{0.4}$ istehsal funksiyasının yazılışında 0,4 qüvvəti nəyi ifadə edir?

a) İşçi qüvvəsinə nəzərən elastiklik əmsalını

b) Milli gəlirin artım tempini

c) Əsas fondların dəyərini

d) Məhsul buraxılışı artımını

e) Kapitala görə elastiklik əmsalını

189) Tələb funksiyasının qiymətdən asılılığı hansı təbiətə malikdir ?

a) Azalan funksiyadır

b) Artan funksiyadır

c) Pilləvari funksiyadır

d) Sinusoidal funksiyadır

e) Tanqensiodal funksiyadır

190) Təklif funksiyasının qiymətdən asılılığı hansı təbiətə malikdir ?

a) Artan funksiyadır

b) Pilləvari funksiyadır

c) Azalan funksiyadır

d) Sinusoidal funksiyadır

e) Tanqensoidal funksiyadır

191) Məhsulun qiyməti qalxdıqda tələb necə dəyişir ?

a) Aşağı düşür

b) Artır

c) Dəyişmir

d) Düzgün cavab göstərilməyib

e) Sonsuz artır

192) Kobb-Duqlas tipli istehsal funksiyalarında ədədi parametrlərin təyini zamanı hansı riyazi aparat tətbiq olunmuşdur ?

a) Ən kiçik kvadratlar metodu

b) Qauss metodu

c) Kramer metodu

d) Laqranjın sonlu artımlar düsturu

e) Tələb və təklifin tarazlığı prinsipi

193) Kobb-Duqlas istehsal funksiyasında iştirak edən parametrlərin ədədi qiymətləri hansı üsulun köməyi ilə tapılmışdır?

a) Ən kiçik kvadratlar metodu

b) Qauss metodu

c) Kramer metodu

d) Laqranjın sonlu çevirmələr düsturu

e) Tələb və təklifin tarazlığı prinsipi

194) İstehsal funksiyasının miqyasdan asılı olmaması riyazi olaraq nə deməkdir?

a) Bircinslik

b) Differensiallanan olmaması

c) Kəsilməzlik

d) Pilləvari funksiya

e) Qeyri-xəttilik

195) W – nominal əmək haqqı , p – qiymət səviyyəsi. Real əmək haqqı hansı düsturla hesablanır?

a) $\frac{W}{p}$

b) W*p

c) $\frac{p}{W}$

d) W-p

e) p-W

196) Əmək bazarı :

a) Məhsula olan tələb və təklif arasındakı əlaqələrin məcmusudur

b) Tələbin qiymətidir

c) Məcmu tələbdir

d) Qiymətə görə tələbdir

e) Məcmu istehlakdır

197) U – işsizlərin sayı , E – əmək qabiliyyətli insanların sayıdır.İşsizliyin səviyyəsi hansı düsturla hesablanır?

a) $\frac{U}{E}*100\%$

b) $\frac{E}{U}*100\%$

c) $\frac{E-U}{E}*100\%$

d) $\frac{U-E}{U}*100\%$

e) E*U

198) Xətti proqramlaşdırmaya gətirilən optimallaşdırma məsələlərinin həllində hansı üsul ən geniş yayılmışdır ?

a) Simpleks üsul

b) Maksimum prinsipi

c) Ardıcıl yaxınlaşmalar üsulu

d) Ən kiçik kvadratlar üsulu

e) Laqranj üsulu

199) Leontyev modelinin birbaşa istehsal xərcləri matrisinin elementləri hansı ədədlər arasında məhdudlaşır ?

a) 0 və 1

b) -1 və 0

c) -2 və -1

d) 2 və 3

e) 1 və 2

200) Sadə faiz norması hansı düsturlar hesablanır (A – başlanğıc məbləğ ,r –faiz stavkası , n – illərin sayı)?

a) $S_n = A(1+\frac{nr}{100})$

b) $S_n = A(1+nr)$

c) $S_n = A(1+\frac{r}{100})^n$

d) $S_n = \frac{A^n}{1+nr}$

e) $S_n = A(1+r^n n)$

201) Mürəkkəb faiz norması hansı düsturla hesablanır (A – başlanğıc məbləğ, r –faiz stavkası, n – illərin sayı)?

a) $S_n = A(1+\frac{r}{100})^n$

b) S_n=A(1+$\frac{nr}{100}$)

c) $S_n=\frac{A^n}{1+nr}$

d) $S_n=\frac{1+nr}{A}$

e) S_n=A+nr

202) 3 faizlə banka qoyulmuş pulun məbləği 100 ildən sonra neçə dəfə artır ?

a) $\approx$20 dəfə

b) $\approx$2 dəfə

c) $\approx$3dəfə

d) $\approx$4dəfə

e) $\approx$100dəfə

203) Nəqliyyat məsələsi modeli hansı riyazi problem tipinə aiddir ?

a) Xətti proqramlaşdırmanın

b) Qeyri-xətti proqramlaşdırmanın

c) Mexanika nın

d) Funksional analizin

e) Fizikanın

204) k parametrinin hansı qiymətlərində $\overset{0}{x}(t)$=kx(t), $x(t_0)=x_0$ -Koşi məsələsinin həlli dayanıqlıdır?

a) $k\leq 0$

b) $k>1$

c) $k>2$

d) $k>0$

e) $k\in[1;2]$

205) k parametrinin hansı qiymətlərində $\overset{0}{x}(t)$=kx(t), $x(t_0)=x_0$ -Koşi məsələsinin həlli assimptotik dayanıqlıdır?

a) $k<0$

b) $k>1$

c) $k>2$

d) $k>0$

e) $k\in[1;2]$

206) k parametrinin hansı qiymətlərində $\overset{0}{x}(t)$=kx(t), $x(t_0)=x_0$ -Koşi məsələsinin həlli dayanıqsızdır?

a) $k>0$

b) $k>1$

c) $k>2$

d) k<0

e) $k \in [1;2]$

207) $\begin{cases} \overset{0}{x} = \sin y - 1{,}01 \\ \overset{0}{y} = x^2 - 2x + 11 \end{cases}$ differensial tənlikli dinamik sisteminin tarazlıq vəziyyətini tapın.

a) mövcud deyil

b) $(4;\frac{\pi}{2})$

c) (6;0)

d) (4;arcsin 1,01)

e) (0;0)

208) $\begin{cases} \overset{0}{x} = 2^y + 4 \\ \overset{0}{y} = -2^x + 2 \end{cases}$ diferensial tənliklərinin dinamik sisteminin tarazlıq vəziyyətini tapın

a) mövcud deyil

b) (2;2)

c) (2;-2)

d) (-2;-2)

e) (0;0)

209) $\begin{cases} \overset{0}{x} = 2^y - 1 \\ \overset{0}{y} = -2^x + 1 \end{cases}$ diferensial tənliklərinin dinamik sisteminin tarazlıq vəziyyətini tapın

a) (0;0)

b) (2;2)

c) (2;-2)

d) (-2;-2)

e) mövcud deyil

210) a, b və c parametrlərinin hansı münasibətində $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+2ax_1x_2+bx_2^2+cx_3^2$ funksiyası qabarıq olur ?

a) $b \geq a^2, c \geq 0$

b) $a \leq b^2$, c>0

c) a>b, c<0

d) $c \geq a^2$, b<0

e) a^2>c, $b \leq 0$

211) a, b və c parametrlərinin hansı münasibətində $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+2ax_1x_2+bx_2^2+cx_3^2$ funksiyası ciddi qabarıq olur?

a) $b>a^2$, c>0

b) $a \leq b^2$, c>0

c) a>b, c<0

d) $c \geq a^2$, b<0

e) $a^2 > c$, $b \leq 0$

212) a, b parametrlərinin hansı münasibətində, $f(x_1, x_2) = \frac{1}{2}ax_1^2 + \frac{1}{2}bx_2^2 \to \min\limits_{(x_1,x_2)\in R^2}$ $(a,b \neq 0)$, optimallaşdırma məsələsi üçün (0;0) stasionar nöqtəsi minimum nöqtəsidir ?

a) a>0, b>0

b) ab<0

c) a<0 ,b<0

d) a<0 ,b>0

e) a>0, b<0

213) a, b parametrlərinin hansı münasibətində, $f(x_1, x_2) = \frac{1}{2}ax_1^2 + \frac{1}{2}bx_2^2 \to \min\limits_{(x_1,x_2)\in R^2}$ $(a,b \neq 0)$, optimallaşdırma məsələsi üçün ekstremum yoxdur ?

a) ab<0

b) a>0, b>0

c) a<0 ,b=0

d) a=0 ,b=0

e) a=0, b<0

214) a, b parametrlərinin hansı münasibətində, $f(x_1,x_2)=$ $\frac{1}{2}ax_1^2+\frac{1}{2}bx_2^2 \to \min\limits_{(x_1,x_2)\in R^2}$ $(a,b\neq 0)$, optimallaşdırma məsələsi üçün (0;0) stasionar nöqtəsi maksimum nöqtəsidir ?

a) a<0 ,b<0

b) ab<0

c) a>0, b>0

d) a<0 ,b>0

e) a>0, b<0

215) Parametrik formada verilmiş $\begin{cases} x = 1+e^{3t} \\ y = 7+e^{-3t} \end{cases}$ sistemi XOY- koordinat müstəvisində hansı fiquru təsvir edir?

a) Hiperbola

b) Parabola

c) Çevrə

d) Düz xətt

e) Ellips

216) Parametrik formada verilmiş $\begin{cases} x = 2t \\ y = 3t+1 \end{cases}$ sistemi XOY-koordinat müstəvisində hansı fiquru təsvir edir?

a) Düz xətt

b) Parabola

c) Çevrə

d) Hiperbola

e) Ellips

217) Parametrik formada verilmiş $\begin{cases} x = 3t + 1 \\ y = 2t \end{cases}$ sistemi XOY-koordinat müstəvisində hansı fiquru təsvir edir?

a) Düz xətt

b) Parabola

c) Çevrə

d) Hiperbola

e) Ellips

218) Parametrik formada verilmiş $\begin{cases} y = t^2 \\ x = t - 2 \end{cases}$ sistemi XOY-koordinat müstəvisində hansı fiquru təsvir edir?

a) Parabola

b) Hiperbola

c) Çevrə

d) Düz xətt

e) Ellips

219) Hansı ildə Sovet riyaziyyatçısı və iqtisadçısı L.Kontoroviç xətti proqramlaşdırma üsulunu yaratmışdır ?

a) 1939

b) 1936

c) 1942

d) 1943

e) 1945

220) Diferensial tənliyin həllini tapın : $\frac{dy}{dx} - \frac{(x+1)y}{x} = 0$

a) $y = xe^x$

b) $y = \frac{e^x}{x}$

c) $y = x^2e^x$

d) $y = e^{2x}x$

e) $y = 2xe^x$

221) Diferensial tənliyin həllini tapın : $xy' = y(x+1)$

a) $y = xe^x$

b) $y = \frac{e^x}{x}$

c) $y = x^2 e^x$

d) $y = e^{2x} x$

e) $y = 2xe^x$

222) Diferensial tənliyin həllini tapın :

$$y' = \frac{y(x+1)}{x}$$

a) $y = xe^x$

b) $y = \frac{e^x}{x}$

c) $y = x^2 e^x$

d) $y = e^{2x} x$

e) $y = 2xe^x$

223) Aşağıdakı diferensial model tənliyini həll edin :

$y'' + y = 0, y'(0) = 1, y'(\pi) = -1$.

a) y=Ccosx +sinx

b) y=sinx +cosx

c) həlli yoxdur

d) y=cosx +Csinx

e) $y \equiv 0$

224) Aşağıdakı diferensial model tənliyini həll edin :
$y'' + y = 0, y'(0) = 1, y'(\pi) = 1$

a) həlli yoxdur

b) y=sinx +cosx

c) y=Ccosx +sinx

d) y=cosx +Csinx

e) $y \equiv 0$

225) $y = \dfrac{1}{\sin x}$ funksiyasının $[0;\pi]$ parçasında minimum qiymətini tapın.

a) 1

b) π

c) 2

d) -1

e) 0

226) $y = -\dfrac{1}{\sin x}$ funksiyasının $[0;\pi]$ parçasında maksimum qiymətini tapın.

a) -1

b) π

c) 2

d) -1

e) 0

227) $y = \frac{2}{\sin x}$ funksiyasının $[0;\pi]$ parçasında minimum qiymətini tapın.

a) 2

b) π

c) 0

d) -1

e) 1

228) $y = -\frac{2}{\sin x}$ funksiyasının $[0;\pi]$ parçasında maksimum qiymətini tapın.

a) -2

b) π

c) -1

d) 1

e) 0

229) $y = \frac{\pi}{\sin x}$ funksiyasının $[0;\pi]$ parçasında minimum qiymətini tapın.

a) π

b) 0

c) 2

d) -1

e) 1

230) $y = -\dfrac{\pi}{\sin x}$ funksiyasının [0;π] parçasında maksimum qiymətini tapın.

a) -π

b) -1

c) 2

d) 1

e) 0

231) $y = \dfrac{1}{\cos x}$ funksiyasının [0;π/2] parçasında minimum qiymətini tapın.

a) 1

b) π

c) 2

d) -1

e) 0

232) $y = -\dfrac{1}{\cos x}$ funksiyasının [0;π/2] parçasında maksimum qiymətini tapın.

a) -1

b) π

c) 0

d) 2

e) 1

233) $y = \dfrac{2}{\cos x}$ funksiyasının [0;π/2] parçasında minimum qiymətini tapın.

a) 2

b) π

c) 0

d) -1

e) 1

234) $y = -\dfrac{2}{\cos x}$ funksiyasının [0;π/2] parçasında maksimum qiymətini tapın.

a) -2

b) π

c) 0

d) -1

e) 1

235) $y = \dfrac{\pi}{\cos x}$ funksiyasının $[0;\pi/2]$ parçasında minimum qiymətini tapın.

a) π

b) 0

c) 2

d) -1

e) 1

236) $A = \begin{pmatrix} 0 \mid 1 \\ 0 \mid 1 \end{pmatrix}$ və $B = \begin{pmatrix} 1 \mid 1 \\ 0 \mid 0 \end{pmatrix}$ matrisləri üçün hansı doğrudur?

a) $AB \neq BA$

b) $AB = BA$

c) $\det AB < \det BA$

d) $BA = 2AB$

e) $BA = 3AB$

237) İqtisadi artım modelində $\lim\limits_{\eta \to +\infty} \dfrac{f(\eta)}{\eta}$ -nı hesablayın .

Burada

$f(\eta) = F(\eta;1), \eta = \dfrac{K}{L}, F(K,L)$ - bircins istehsal funksiyasıdır.

a) 0

b) 1

c) K

d) L

e) K* L

238) $F(K,L)$ və $f(\eta)$ ($f(\eta)=F(\eta;1), \eta=\dfrac{K}{L}$) istehsal funksiyaları arasında hansı əlaqə mövcuddur?

a) L $f(\eta)=F(K,L)$

b) $f(\eta)=F(K,0)$

c) L $f(\eta)=F(1,1)$

d) L $f(\eta)=F(1,L)$

e) $F(K,L)=f(\eta K)$

239) İkidəyişənli neoklassik $F(K,L)$ və birdəyişənli $f(\eta)$ ($f(\eta)=F(\eta;1), \eta=\dfrac{K}{L}$) istehsal funksiyaları üçün hansı bərabərlik doğrudur ?

a) L $f(\eta)=F(K,L)$

b) $f(\eta)=F(K,0)$

c) L $f(\eta)=F(1,1)$

d) $\mathrm{L}\, f(\eta)=F(1,L)$

e) $F(K,L)=f(\eta K)$

240) $A=\begin{pmatrix}3|7\\2|9\end{pmatrix}$ və $B=\begin{pmatrix}-6-13\\-4-17\end{pmatrix}$ matrisləri üçün 2A+B –i tapın .

a) $\begin{pmatrix}0|1\\0|1\end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix}1|0\\0|1\end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix}0|1\\1|0\end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix}0|0\\1|1\end{pmatrix}$

e) $\begin{pmatrix}1|1\\0|0\end{pmatrix}$

241) C=A+2B matrisi üçün , harda ki, $\mathrm{A}=\begin{pmatrix}-1 & 7\\3 & 2\end{pmatrix}$ və $\mathrm{B}=\begin{pmatrix}2 & -5\\1 & 1\end{pmatrix}$. $\det|C|$ -ni hesablayın .

a) 27

b) 15

c) 0

d) 45

e) 57

242) $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 3 \\ -3 & 2 & 3 \\ -3 & -3 & 2 \end{pmatrix}$ matrisi üçün , $\det\left|A + A^T\right|$ hesablayın.

a) 64

b) 128

c) 48

d) 32

e) 16

243) $A = \begin{pmatrix} 1 | 3 \\ 0 | 1 \end{pmatrix}$ matrisi üçün A^9 -u hesablayın

a) $\begin{pmatrix} 1 | 27 \\ 0 | 1 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 1 | 9 \\ 0 | 1 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 1 | 15 \\ 0 | 1 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} 1 | 3 \\ 0 | 1 \end{pmatrix}$

e) $\begin{pmatrix} 1 | 81 \\ 0 | 1 \end{pmatrix}$

244) $A = \begin{pmatrix} 5 | 3 \\ 2 | 1 \end{pmatrix}$ matrisi üçün $A^2 - 6A$ matrisini hesablayın

a) $\begin{pmatrix} 1 | 0 \\ 0 | 1 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} -2 | 3 \\ -1 | 2 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 1 | 3 \\ 1 | 2 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} 2 | 3 \\ 2 | 1 \end{pmatrix}$

e) $\begin{pmatrix} 1 | 3 \\ 1 | 2 \end{pmatrix}$

245) $A = \begin{pmatrix} 5 | 3 \\ 2 | 1 \end{pmatrix}$ matrisi üçün A^2 matrisini hesablayın

a) $\begin{pmatrix} 31 | 19 \\ 12 | 7 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} -2 | 3 \\ -1 | 2 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 19 | 31 \\ 7 | 12 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} 2 | 3 \\ 2 | 1 \end{pmatrix}$

e) $\begin{pmatrix} 25 | 9 \\ 4 | 1 \end{pmatrix}$

246) $A = \begin{pmatrix} 5 | 3 \\ 2 | 1 \end{pmatrix}$ matrisi üçün $6A$ matrisini hesablayın

a) $\begin{pmatrix} 30 | 18 \\ 12 | 6 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} -2 | 3 \\ -1 | 2 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 12 | 6 \\ 18 | 30 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} 2 | 3 \\ 2 | 1 \end{pmatrix}$

e) $\begin{pmatrix} 11 | 9 \\ 7 | 8 \end{pmatrix}$

247) $A=\begin{pmatrix}5 | 3\\ 2 | 1\end{pmatrix}$ matrisi üçün $6A-A^2$ matrisini hesablayın

a) $\begin{pmatrix}-1 | -1\\ 0 | -1\end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix}-2 | 3\\ -1 | 2\end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix}1 | 3\\ 1 | 2\end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix}2 | 3\\ 2 | 1\end{pmatrix}$

e) $\begin{pmatrix}1 | 3\\ 1 | 2\end{pmatrix}$

248) $A=\begin{pmatrix}5 | 3\\ 2 | 1\end{pmatrix}$ matrisi üçün $6A+A^2$ matrisini hesablayın

a) $\begin{pmatrix}61 | 37\\ 24 | 13\end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix}-12 | 3\\ -1 | 2\end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix}61 | 13\\ 21 | 32\end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} 24 \mid 13 \\ 2 \mid 61 \end{pmatrix}$

e) $\begin{pmatrix} 1 \mid 3 \\ 1 \mid 2 \end{pmatrix}$

249) $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$ matrisinin məxsusi ədədlərinin cəmini tapın.

a) 5/6

b) 1/3

c) 2/3

d) 0

e) 3/4

250) Əgər $f(x) = x^2$ və $A = \begin{pmatrix} 2 \mid 1 \\ 1 \mid -1 \end{pmatrix}$ $f(A)$ -nın qiymətini tapın

a) $\begin{pmatrix} 5 \mid 1 \\ 1 \mid 2 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 4 | 1 \\ 1 | 2 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 5 | 1 \\ -1 | 2 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} 5 | 1 \\ 1 | -2 \end{pmatrix}$

e) $\begin{pmatrix} -5 | 1 \\ 1 | 2 \end{pmatrix}$

251) AX-B=3C matris tənliyindən X-i tapın , harada ki, A, B, C – sabit matrislərdir və A–nın tərsi var.

a) $X = A^{-1}(B + 3C)$

b) $X = B + 3C$

c) $X = X^{T}(B + 3C)$

d) $X = A(B + 3C)$

e) $X = A^{-1}(B + C)$

252) AT-B=C matris tənliyindən T-i tapın , harada ki, A, B, C – sabit matrislərdir və A –nın tərsi var.

a) $T = A^{-1}(B + C)$

b) $T = B + C$

c) $T = T^T (B + C)$

d) $T = A(B + C)$

e) $T = A^{-1}(B + 2C)$

253) AY-B=C matris tənliyindən Y-i tapın , harada ki, A, B, C – sabit matrislərdir və A –nın tərsi var.

a) $Y = A^{-1}(B + C)$

b) $Y = B + C$

c) $Y = Y^T (B + C)$

d) $Y = A(B + C)$

e) $Y = A^{-1}(B + 2C)$

254) AZ-B=C matris tənliyindən Z-i tapın , harada ki, A, B, C – sabit matrislərdir və A –nın tərsi var.

a) $Z = A^{-1}(B + C)$

b) $Z = B + C$

c) $Z = Z^T (B + C)$

d) $Z = A(B + C)$

e) $Z = A^{-1}(B + 2C)$

255) AX+B=C matris tənliyindən X-i tapın , harada ki, A, B, C – sabit matrislərdir və A –nın tərsi var.

a) $X = A^{-1}(C - B)$

b) $X = B - C$

c) $X = X^{T}(C - B)$

d) $X = A(B + C)$

e) $X = A^{-1}(B + C)$

256) AT+B=C matris tənliyindən T-i tapın , harada ki, A, B, C – sabit matrislərdir və A –nın tərsi var.

a) $T = A^{-1}(C - B)$

b) $T = B + C$

c) $T = T^{T}(C - B)$

d) $T = A(B + C)$

e) $T = A^{-1}(B + 2C)$

257) AY+B=C matris tənliyindən Y-i tapın , harada ki, A, B, C – sabit matrislərdir və A –nın tərsi var.

a) $Y = A^{-1}(C - B)$

b) $Y = B + 3C$

c) $Y = Y^{T}(C - B)$

d) $Y = A(B+3C)$

e) $Y = A^{-1}(B+C)$

258) AZ+B=C matris tənliyindən Z-i tapın , harada ki, A, B, C – sabit matrislərdir və A –nın tərsi var.

a) $Z = A^{-1}(C-B)$

b) $Z = B+C$

c) $Z = Z^{T}(C-B)$

d) $Z = A(B+C)$

e) $Z = A^{-1}(B+2C)$

259) $-x_1 - x_2 \to \min$, $\begin{cases} 2x_1 + x_2 \le 4 \\ x_1 + 2x_2 \le 4 \end{cases}$ -məsələsinə qoşma olan məsələnin həlli hansıdır?

a) $\left(\frac{1}{3};\frac{1}{3}\right)$

b) (1;2)

c) $\left(\frac{2}{3};\frac{2}{3}\right)$

d) (0;2)

e) $\left(\frac{1}{4};\frac{1}{4}\right)$

260) Xətti proqramlaşdırmanın ilkin məsələsinin məhdudiyyətlər sistemi matrisi nədir ?

a) İkili məsələnin transponirə edilmiş matrisi

b) Vahid matrisdir

c) İkili məsələnin məhdudiyyətlərinin sərbəst hədləri

d) İkili məsələnin məqsəd funksiyasının əmsalları

e) Diaqonal matris

261) İlkin məsələnin məqsəd funksiyasının əmsalları:

a) İkili məsələnin məhdudiyyətlər şərtinin sərbəst hədləridir

b) Vahid matrisdir

c) İkili məsələnin məqsəd funksiyasının əmsallarıdır

d) İkili məsələdə transponirə edilmiş matrisdir

e) Diaqonal matrisdir

262) İlkin məsələnin məhdudiyyətlər şərtinin sərbəst hədləri :

a) İkili məsələnin məqsəd funksiyasının əmsallarıdır

b) Vahid matrisdir

c) İkili məsələnin məhdudiyyətlər şərtinin sərbəst hədləridir

d) İkili məsələdə transponirə edilmiş matrisdir

e) Diaqonal matrisdir

263) Xətti proqramlaşdırmanın ikili məsələsinin məhdudiyyətlər sistemi matrisi nədir?

a) İlkin məsələnin məhdudiyyətlər sistemi matrisi

b) Vahid matrisdir

c) İkili məsələnin məhdudiyyətlərinin sərbəst hədləri

d) İkili məsələnin məqsəd funksiyasının əmsalları

e) Diaqonal matris

264) İkili məsələnin məqsəd funksiyasının əmsalları :

a) İlkin məsələnin məhdudiyyətlər sisteminin sərbəst hədləridir

b) Vahid matrisdir

c) İkili məsələnin məqsəd funksiyasının əmsallarıdır.

d) İkili məsələdə transponirə edilmiş matrisdir

e) Diaqonal matrisdir

265) İkili məsələnin məhdudiyyətlər sisteminin sərbəst hədləri :

a) İlkin məsələnin məqsəd funksiyasının əmsallarıdır

b) Vahid matrisdir

c) İlkin məsələnin məhdudiyyətlər sisteminin sərbəst hədləridir

d) İkili məsələdə transponirə edilmiş matrisdir

e) diaqonal matrisdir

267) Xətti proqramlaşdırma məsələsini həll edin :

$$-x_1-3x_2 \to \min,\ \begin{cases} -x_1-x_2 \le -1 \\ -3x_1+x_2 \le 3 \\ 5x_1+4x_2 \le 20 \end{cases},$$

$$x_1 \ge 0; x_2 \ge 0$$

a) $\left(\frac{8}{17};\frac{75}{17}\right)$

b) $\left(\frac{7}{15};\frac{6}{15}\right)$

c) (1,0)

d) (4;0)

e) (0;4)

268) Ən kiçik kvadratlar üsulunun köməyi ilə $y=ax^2+bx+c$ tipli vparabolalar ailəsindən [0,3] parçasında $y=x^2-3x+2$ funksiyasına ən yaxın funksiyanı tapın

a) $y=x^2-3x+2$

b) $y=x^2+2,9x+2,1$

c) $y=x^2-3x$

d) $y=x^2+2$

e) $y = x^2 + 3,1x + 1,9$

269) Ən kiçik kvadratlar üsulunun köməyi ilə $y = kx + b$ tipli düz xəttlilər ailəsindən [-70,70] parçasında $y = 2x + 6$ funksiyasına ən yaxın funksiyanı tapın

a) $y = 2x + 6$

b) $y = -35x + 35$

c) $y = x + 3$

d) $y = x^2 + 2$

e) $y = x^2 + 3,1x + 1,9$

270) Ən kiçik kvadratlar üsulunun köməyi ilə $y = ax^2 + bx + c$ tipli parabolalar ailəsindən [1,4] parçasında $y = x^2 - 5x + 6$ funksiyasına ən yaxın funksiyanı tapın

a) $y = x^2 - 5x + 6$

b) $y = -35x + 35$

c) $y = x + 3$

d) $y = x^2 + 6x - 5$

e) $y = x^2 + x + 4$

271) Ən kiçik kvadratlar üsulunun köməyi ilə $y = \frac{k}{x} + b$ tipli hiperbolalar ailəsindən [1,2010] parçasında $y = \frac{7}{x} + 6$ funksiyasına ən yaxın funksiyanı tapın

a) $y = \frac{7}{x} + 6$

b) $y = \frac{1}{x} + 2010$

c) $y = x + 3$

d) $y = \frac{2010}{x} + 1$

e) $y = x + 4$

272) k parametrinin hansı qiymətində $L_t = L_0 e^{-kt}$ –istehsalda çalışanların sayı t zamanın azalan funksiyası olar ?

a) $k>0$

b) $k<0$

c) $k=0$

d) $L_0\,k<0$

e) $e^{-kt}<0$

273) k parametrinin hansı qiymətində $L_t = L_0 e^{-kt}$ –istehsalda çalışanların sayı t zamanın artan funksiyası olar?

a) $k<0$

b) $k>0$

c) $k=0$

d) $L_0\, k>0$

e) $e^{-kt}<0$

274) k parametrinin hansı qiymətində $L_t=L_0e^{-kt}$ –istehsalda çalışanların sayı t zamanın sabit funksiyası olar?

a) $k=0$

b) $k<0$

c) $k>0$

d) $L_0\, k<0$

e) $e^{-kt}<0$

275) İstehsal t dövründə geniş (və ya iqtisadi artıma malik) adlanır ,əgər :

a) $Y(t+1)> Y(t)$

b) $Y(t+1)< Y(t)$

c) $Y(t+1)=Y(t)$

d) $Y(t+1)< Y(t-1)$

e) Düzgün cavab yoxdur

276) İstehsal t dövründə dar adlanır ,əgər :

a) $Y(t+1) < Y(t)$

b) $Y(t+1) > Y(t)$

c) $Y(t+1)=Y(t)$

d) $Y(t+1) < Y(t-1)$

e) Düzgün cavab yoxdur

277) İstehsal t dövründə sadə adlanır ,əgər :

a) $Y(t+1)=Y(t)$

b) $Y(t+1) > Y(t)$

c) $Y(t+1) < Y(t)$

d) $Y(t+1) < Y(t-1)$

e) Düzgün cavab yoxdur

278) Əgər $Y(t+1) < Y(t)$ ($Y(t)$ –t dövründə istehsal həcmi) şərti ödənərsə, onda istehsal necə adlanır ?

a) Dar

b) Sadə

c) Geniş

d) Səmərəli

e) Düzgün cavab yoxdur

279) Əgər $Y(t+1) = Y(t)$ ($Y(t)$ –t dövründə istehsal həcmi) şərti ödənərsə onda istehsal necə adlanır ?

a) Sadə

b) Dar

c) Geniş

d) Səmərəli

e) Düzgün cavab yoxdur

280) Əgər $Y(t+1) > Y(t)$ ($Y(t)$ –t dövründə istehsal həcmi) şərti ödənərsə onda istehsal necə adlanır ?

a) Geniş

b) Dar

c) Sadə

d) Səmərəli

e) Düzgün cavab yoxdur

281) $f(x)$ funksiyasının təyin olunduğu X çoxluğunda ekstremumu üçün zəruri şərt hansıdır ($x^* \in X$, $f(x)$– X -da diferensiallanan funksiyadır.)?

a) $f'(x^*) = 0$

b) $f'(x^*) \leq 0$

c) $f'(x^*) \geq 0$

d) $f'(x^*) < 0$

e) $f'(x^*) > 0$

282) $f(x)$ funksiyasının X çoxluğunda lokal maksimumu üçün kafi şərt hansıdır ($x^* \in X$, $f(x)$– X -da ikiqat diferensiallanan funksiyadır.) ?

a) $f''(x_*) < 0$

b) $f''(x_*) = 0$

c) $f''(x_*) \leq 0$

d) $f''(x_*) > 0$

e) $f''(x_*) \neq 0$

283) Matrisin müsbət müəyyən olması üçün zəruri və kafi şərt hansıdır?

a) Matrisin bütün baş diaqonal minorlarının müsbət olması

b) Matrisin birinci diaqonal baş minorlarının mənfi olması

c) Matrisin bütün baş diaqonal minorlarının mənfi olması

d) Matrisin bütün baş diaqonal minorlarının sıfır olması

e) Matrisin birinci baş diaqonal minorunun mənfi , qalanlarının müsbət olması

284) $z = f(x),\ x \in R^n$ funksiyası üçün Hesse matrisi necə qurulur?

a) İkinci tərtib xüsusi törəmələrdən
b) Birinci tərtib xüsusi törəmələrdən
c) Üçüncü tərtib xüsusi törəmələrdən
d) Diaqonal elementləri vahid olan ikinci tərtib xüsusi törəmələrdən
e) Baş diaqonal elementləri sıfır,qalan elementləri birinci tərtib törəmələrdən

285) Tələb funksiyasının qiymətdən asılılığı hansl təbiətə malikdir ?

a) Azalan funksiyadır
b) Artan funksiyadır
c) Pilləvari funksiyadır
d) Sinusoidal funksiyadır
e) Tanqensiodal funksiyadır

286) Təklif funksiyasının qiymətdən asılılığı hansl təbiətə malikdir ?

a) Artan funksiyadır
b) Azalan funksiyadır
c) Pilləvari funksiyadır

d) Sinusoidal funksiyadır

e) Tanqensiodal funksiyadır

*) Bütün testlərin düzgün cavabları a) bəndində verilmişdir.

ƏSAS ƏDƏBIYYAT

1. Исследование операций в экономике. Под редакцией проф. Н. Ш. Кремера Москва, "ЮНИТИ", 2004.

2. A.F. Musayev, Y. Q. Osmanov. Riyazi iqtisadiyyat (Ali məktəblər üçün dərslik), Bakı "Sabah" nəşriyyatı,1997.

3. A.D. İskəndərov, R.Q. Tağıyev, Q.Y.Yaqubov. Optimallaşdırma üsulları. Bakı, "Çaşıoğlu",2002.

4. C.E. Allahverdiyev, Ş.G. Baimov, E.B. Sultanova. Riyazi modelləşdirmə. Bakı, BDU nəşriyyatı, 2005.

5. Y.H. Həsənli, R.T. Həsənov. İqtisadi tədqiqatlarda riyazi üsulların tətbiqi (dərs vəsaiti), Bakı, "Nafta-Press",2002.

6. Ə.T. Nağıyev, R.M. Quliyev, Ş.A. Abbasova. Tətbiqi iqtisadiyyatın elementleri (dərs vəsaiti), Bakı, "Səda", 2001.

7. В.И. Малыхин. Математическое моделирование экономики (учебно-практическое пособие для вузов), Москва, издательство УРАО, 1998.

8. В.Д. Матвеенко, Р.Т. Пашаев, А.М. Рубинов. Выпуклый анализ на плоскости. Баку, "ЭЛМ", 1995.

9. X.M. Həmzəyev, Q.Q. İsmayılov. Ekoloji problemlərdə riyazi modelləşdirmə (dərs vəsaiti), Bakı, ADNA-nın nəşri, 2002.

10. О.О. Замков, А.В. Толстопятенко, Ю.Н. Черемных Математические методы в экономике. Мосва, "Дело и Сервис", 2001.

11. Е.С. Кундышева. Математическое моделирование в экономике (учебное пособие), Москва, Издательско-торговая корпорация "Дашков и К", 2004.

12. В.С.Шипачев. Высшая математика. Москва, "Высшая школа", 1990

13. Ю.Н.Черемных. Математические модели развития народного хозяйства. Москва, изд.МГУ, 1986.

14. С.Солодовников и др. Математика в экономике. I-II т., Москва, 2000.

15. А.Крушевский, К Швецов. Математическое программирование и моделирование в экономике. Киев, 1979.

16. Е.В.Бережная, В.И.Бережной. Математические методы моделирования экономических систем. Москва, 2001.

ƏLAVƏ ƏDƏBIYYAT

1. Р.М.Нуреев. Курс микроэкономики. Учебник для вузов. Москва. Изд. «НОРМА», 1999.
2. А.И.Орлов. Устойчивость в социально-экономических модельях. Москва. «Наука», 1979.
3. Е.М.Четыркин. Статистические методы прогнозирования. Москва, «Статистика», 1997.
4. Статистическое моделирование и прогнозирование(под ред.А.Г.Гранберга) Москва, «Финансы и статистика» , 1990.
5. Харрис Л. Денежная теория.М; Прогресс, 1990.
6. М.Интрилигатор. Математические методы оптимизации и экономическая теория. М; Прогресс, 1975.
7. В.А.Колемаев. Математическая экономика. М; ГАУ им.С.Орджоникидзе, 1996.

N.F. TAĞIYEV, R.M. QULIYEV,
F.Ə. MIRZƏYEV

İQTİSADİ PROSESLƏRDƏ RİYAZİ MODELLƏŞDIRMƏ

(Nəzəriyyə, model proseslər, test nümunələri)

Dərs vəsaiti

I hissə

Nəşriyyat redaktoru: *İlahə HİDAYƏTQIZI*
Dizayner: *Aynur ƏSGƏRLİ*
Səhifələyici: *Elvira NADİRQIZI*

Çapa imzalanmışdır: 22.10.2012
Kağız formatı: 60x90 1/16
H/n həcmi: 13 ç.v.
Sifariş: 121
Sayı: 500

Kitab «ADİLOĞLU» nəşriyyatında
nəşrə hazırlanmış və ofset üsulu ilə çap edilmişdir.
Ünvan:Bakı şəh., Şərifzadə küç., 202
Tel.: 433 00 43; (050) 593 27 77
(055) 870-55-09
Web: www.adiloglu.az;
E-mail: adiloglu2000@gmail.com