

AZƏRBAYCAN RESPUBLİKASI TƏHSİL NAZİRLİYİ

BAKİ DÖVLƏT UNİVERSİTETİ

F.Ə.İmanov

HİDROMETEOROLOGİYADA STATİSTİK METODLAR

*Azərbaycan Respublikası Təhsil
Nazirliyinin 2011-ci il 04 iyul tarixli
1159 nömrəli əmri ilə dərslik təsdiq
edilmişdir*

BAKİ-2011

Rəyçilər:

Q.İ.Calalov, AMEA-nın müxbir üzvü, texnika elmləri doktoru, professor (AMEA-nın Geologiya İnstitutu)

R.H.Verdiev, coğrafiya elmləri namizədi (Ekologiya və Təbii Sərvətlər Nazirliyi Hidrometeorologiya İnstitutu)

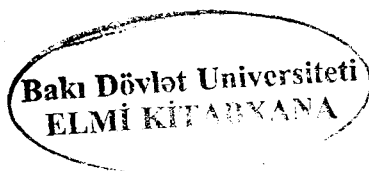
F.H.Rəhimov, fizika-riyaziyyat elmləri doktoru, professor (BDU, Ehtimal nəzəriyyəsi və riyazi statistika kafedrası)

İmanov Fərda. Hidrometeorologiyada statistik metodlar.
Bakı, 2011, 272 s.

Dərslikdə beynəlxalq təcrübə nəzərə alınmaqla statistik metodların hidrometeorologiyada tətbiqi tarixi, ehtimal nəzəriyyəsi və riyazi statistika haqqında ümumi məlumat, əsas analitik paylanma funksiyalarının tipləri və onların parametrlərinin təyini metodları, statistik meyarlar və asılılıqlar, xətti korrelyasiya, hidrometeoroloji sıraların riyazi modelləşdirilmə metodları haqqında məlumat verilmişdir.

Dərslik Bakı Dövlət Universitetinin coğrafiya fakültəsində hidrometeorologiya ixtisası üzrə təhsil alan tələbələr üçün nəzərdə tutulsa da, müvafiq ixtisaslı magistrant, doktorant və mühəndislər üçün də faydalı ola bilər.

ISBN: 978-9952-29-048-6



© F.Ə.İmanov

Mündəricat

Giriş	6
1. Statistik metodların hidrometeorologiyada tətbiqinin qısa tarixi	8
2. Ehtimal nəzəriyyəsi və riyazi statistika haqqında ümumi məlumat	17
– 2.1. Ehtimal nəzəriyyəsi və riyazi statistikanın hidrologiyada tətbiqinin məqsəd və vəzifələri	17
– 2.2. Təsadüfi kəmiyyətlər	20
– 2.3. Paylanma funksiyalarının ümumi səciyyəsi	21
– 2.4. Təsadüfi kəmiyyətlərin ədədi xarakteristikaları və onların xassələri	30
– 2.4.1. Ədədi orta, riyazi gözləmə, median və moda	30
– 2.4.2. Təsadüfi kəmiyyətin momentləri	35
– 2.4.3. Dispersiya, orta kvadratik meylectmə və variasiya əmsalı	36
– 2.4.4. Asimmetriya və eksses	39
2.4.5. Normallaşdırılmış təsadüfi kəmiyyətlər və paylanma kvantilləri	42
3. Empirik təminat ayriləri və analitik paylanma funksiyaları ...	47
– 3.1. Empirik təminat ayriləri	47
– 3.2. Hidrometeorologiyada istifadə olunan analitik paylanma funksiyaları	58
– 3.2.1. Normal paylanma	58
– 3.2.2. Loqarifmik-normal paylanma	63
3.2.3. Binomial paylanma	68
3.2.4. Puasson paylanması	70
3.2.5. Pirsonun III tip paylanması	73
– 3.2.6. Kritski-Menkel paylanması	79
3.2.7. Ekstremal-kəmiyyət paylanması	82
3.2.8. Qumbel paylanması	83
3.2.9. Veybul paylanması	90
3.2.10. GEV paylanma	93
3.2.11. Conson paylanması	96
4. Paylanma ayrilərinin parametrlərinin qiymətləndirilmə metodları	99
– 4.1. Momentlər metodu	99
– 4.2. Ən çox həqiqətəbənzər metod	104

4.3. L–momentlər metodu	106
4.4. Kvantillər metodu	110
4.5. Qrafik metod	118
—4.6. Paylanmanın seçmə parametrlərinin xətlərinin qiymətləndirilməsi	119
5. Parametrlərin intervallar üzrə qiymətləndirilməsi və statistik hipotezlərin yoxlanması	124
5.1. Paylanma parametrlərinin intervallar üzrə qiymətləndirilməsi ...	124
5.1.1. Riyazi gözləmənin interval qiyməti	126
5.1.2. Dispersiyanın interval qiyməti	127
—5.2. Statistik hipotez və meyarlar	131
—5.3. Hidrometeoroloji sıraların bircinsliyinin qiymətləndirilməsi	136
—5.3.1. Styudent meyarı	137
—5.3.2. Fişer meyarı	139
5.3.3. Uilkokson-Mann-Uitni meyarı	141
5.3.4. Zigel-Tüki meyarı	144
5.4. Sıraların təsadüfiliyinin qiymətləndirilməsi	146
5.4.1. Seriyalar meyarları	147
5.4.2. Artma və azalmaların sayı meyarı	150
5.4.3. Ekstremumların sayı meyarı	152
—5.5. Empirik və analitik təminat əyrilərinin uyğunluğunun yoxlanması	153
5.5.1. χ^2 (Pirson) meyarı	153
5.5.2. Kolmoqorov meyarı	160
5.5.3. $n\omega^2$ (Kramer-Mizes-Smirnov) meyarı	163
—6. Hidrometeorologiyada statistik asılılıqlar və xətti korrelyasiya	167
6.1. Funksional və stoxastik əlaqələr	167
6.2. Ən kiçik kvadratlar metodu	170
6.3. İki dəyişən kəmiyyət üçün xətti reqressiya tənliyi	171
6.4. Qeyri-xətti asılılıqların düzləndirilməsi	176
—6.5. İki dəyişən kəmiyyət üçün xətti reqressiya tənliyinin dəqiqliyinin qiymətləndirilməsi	180
—6.6. Xətti reqressiya tənliyi parametrlərinin etibarlılıq intervalı və əhəmiyyətlik səviyyəsinin qiymətləndirilməsi	185
6.6.1. Cüt korrelyasiya əmsalının etibarlılıq intervalı	185
6.6.2. Spirmenin ranq korrelyasiya əmsalı	187

6.6.3. Regressiya əmsalinin etibarlılıq intervalı	191
6.6.4. Sərbəst həddin interval üzrə qiymətləndirilməsi	192
→6.7. Xətti regressiya tənliyinin etibarlılıq intervalı və əhəmiyyətliliyinin qiymətləndirilməsi	193
6.8. Çoxhədli xətti korrelyasiya	195
→7. Hidrometeoroloji sıraların riyazi modelləşdirilməsi	204
→7.1. Sıraların təsadüfi kəmiyyət sxemi üzrə modelləşdirilməsi.....	206
7.2. Sıraların sadə Markov zənciri sxemi üzrə modelləşdirilməsi	212
Ədəbiyyat	216
Əlavələr	219
1. Pirsonun III tip analitik təminatlar əyrisinin normallaşdırılmış ordinatları	220
2. Kritski-Menkelin təminatlar əyrisinin modul əmsalları ilə ifadə olunmuş ordinatları (üçparametrlı gamma paylanma)	222
3. H – paylanmanın (A.V.Yejovun) təminatlar əyrisinin modul əmsalları ilə ifadə olunmuş ordinatları	233
4. χ^2 paylanması	236
5. Styudent paylanması	237
6. F – paylanma (Fişer paylanması)	239
7. Kolmoqorov paylanması	245
8. $y=f(z)$ asılılığı üçün yanlış korrelyasiya effekti (Bensona görə) ...	246
9. Ən çox həqiqətəbənzər metodu ilə λ_2 statistikasından asılı olaraq variasiya əmsalını təyin etmək üçün cədvəl	247
10. Dikson statistikasının böhran qiymətləri	251
11. Smirnov-Qrabbs statistikasının böhran qiymətləri	257
12. Standart normal əyri altındakı sahələr	263
13. Kolmoqorov – Smirnov statistikasının böhran qiymətləri	267
14. Gamma funksiyası	268
15. Korrelyasiya əmsalinin böhran qiymətləri	269

GİRİŞ

Hidrometeoroloji hadisələr və onların kəmiyyət göstəriciləri çoxsaylı amillərin təsirinin nəticəsidir və hər bir amilin təsirini ayrılıqda nəzərə almaq demək olar ki, qeyri-mümkündür. Buna görə də hidrometeoroloji xarakteristikalara təsadüfi kəmiyyət kimi baxılır və onları təyin etmək üçün ehtimal nəzəriyyəsi və riyazi statistikanın metodlarından geniş istifadə olunur. Hazırda mövcud müşahidə məlumatlarının statistik metodlarla işlənməsi tətbiqi hidrometeorologiyanın mühüm tərkib hissəsidir. Riyazi statistika və ehtimal nəzəriyyəsinin metodları meteoroloji və hidroloji hesablamalarda, meteoroloji və hidroloji proqnozların tərtibində, ekoloji monitoring prosesində geniş istifadə olunur.

Dərslik 7 fəsildən ibarətdir. Bu fəsillərdə müvafiq olaraq statistik metodların hidrometeorologiyada tətbiqi tarixi, ehtimal nəzəriyyəsi və riyazi statistika haqqında ümumi məlumat, əsas analitik paylanma funksiyalarının tipləri və onların parametrlərinin təyini metodları, statistik meyarlar və asılılıqlar, xətti korrelyasiya, hidrometeoroloji sıraların riyazi modelləşdirilmə metodları haqqında məlumat verilmişdir.

Dərslikdə nəzəri materialla yanaşı statistik metodların konkret tətbiqinə aid çoxsaylı misallar da verilmişdir.

Əlavələrə geniş istifadə olunan əsas statistik cədvəllər daxil edilmişdir.

Qeyd etmək lazımdır ki, hazırda hidrometeorologiya ixtisası üzrə təhsil alan azərbaycanlı tələbələr və onların müəllimləri başlıca olaraq rus dilində çap olunmuş dərslik və elmi ədəbiyyatdan istifadə edirlər. Bu baxımdan, Qərbi ölkələrində işlənmiş və orada hidrometeoroloji tədqiqatlarda istifadə olunan statistik metodlar ilə tanışlıq tələbələrin müxtəlif məktəblərin yanaşmalarını müqayisə etmələri üçün yaxşı imkandır.

Dərslik hazırlanarkən nəzərə alınmışdır ki, tələbələr ümumi meteorologiya, hidrologiya, ehtimal nəzəriyyəsi və riyazi statistikanın fundamental kursları ilə artıq tanışdırlar.

Dərsliyin bakalavriat pilləsində təhsil alan hidrometeoroloq

tələbələr üçün nəzərdə tutulmasına baxmayaraq, o, magistrantlar, doktorantlar, mühəndis hidrometeoroloqlar və elmi işçilər üçün də faydalı ola bilər.

Müəllif dərsləyin əlyazmasının çapa hazırlanmasında göstərdikləri texniki köməyə görə A.A.Quliyevaya, A.A.Nuriyevə və P.B.Sultanovaya öz minnətdarlığını bildirir.

1. STATİSTİK METODLARIN HİDROMETEOROLOGİYADA TƏTBİQİNİN QISA TARİXİ

Hidrometeoroloji müşahidə məlumatlarının işlənilməsində statistik metodların tətbiqi ilk ümumiləşdirmələrin yerinə yetirilməsi ilə əlaqədardır. Əvvəllər hidrometeoroloji kəmiyyətləri xarakterizə etmək üçün statistik sıraların ən sadə parametrlərindən (orta kəmiyyət, mediana, amplituda və s.) istifadə edilirdi. Həmin dövrdə atmosfer yağıntıları, havanın temperaturu, suyun səviyyəsi və sərfələrinin empirik davamiyyət ayrıları da qurulurdu. Bəzən korrelyasion analizdən istifadə olunurdu.

Ehtimal nəzəriyyəsi və riyazi statistikanın hidrometeorologiyada geniş tətbiqi XX əsrin əvvəllərinə təsadüf edir. İlk dəfə A.Hazen (Hazen, 1914; 1917) çay axımının çoxillik tərəddüdlərinin statistik qanunauyğunluqlarını təhlil etmək üçün ehtimal nəzəriyyəsini tətbiq etmişdir.

A.Hazen çay axımı sırasının statistik paylanmasını təsvir etmək üçün Qaus əyrisindən istifadə etmişdir. Məlumdur ki, bu əyri simmetrikdir və dəyişən kəmiyyətlər $-\infty$ və $+\infty$ arasında qiymətlər ala bilər. Qaus əyrisinin iki parametri var- dəyişən kəmiyyətin orta qiyməti və orta kvadratik meyletməsi.

O, empirik təminatı təyin etmək üçün düstur da təklif etmişdir (bax 3-cü fəslə).

İlk dəfə Hazen empirik təminat ayrılarını aproximasiya və ekstrapolyasiya etmək üçün ehtimallar daması qurmuşdur. Bu ehtimallar damasında normal paylanma əyrisi (Qaus əyrisi) düz xətt forması alır. Hazırda əksər meteoroloji elementlərin təminatlı qiymətlərinin hesablanması Qaus əyrisindən istifadə olunur.

Statistik metodların tətbiqində növbəti mühüm mərhələ A.Fosterin (Foster, 1923; 1924) adı ilə bağlıdır. O, göstərdi ki, bir çox meteoroloji elementlərin müşahidə sıralarından fərqli olaraq su sərfi sıraları simmetrik deyil. Buna görə də o, su sərfələrinin təminatlı qiymətlərini hesablamaq üçün Pirsunun III tip asimmetrik əyrisindən istifadənin məqsədəuyğun olduğunu əsaslandırdı.

Məlumdur ki, Qaus əyrisinin ordinatları mənfi qiymətlər də ala bilər. Bu isə axım hadisəsinin mahiyyətinə ziddir. Belə ki, su sərfələri yalnız sifra bərabər və ya müsbət qiymətlər ala bilər. Pirsonun III tip əyrisinin ordinatları isə paylanma parametrlərinin müəyyən qiymətlərində yalnız müsbət qiymətlər alır və bu da onun əsas üstünlüklərindən biridir.

Pirsonun III tip əyrisindən geniş istifadə mümkün olsun deyə, Foster xüsusi cədvəl hazırlamışdır. Hidrometeoroloji müşahidə sırasının əsas parametrlərinə (orta kəmiyyət, variasiya və asimmetriya əmsalları) görə bu cədvəldən əyrinin dayaq ordinatlarını (kvantillərini) təyin etmək və onu qurmaq olar.

Fosterin cədvəlini sonradan S.İ.Rıbkin (Рыбкин, 1938) dəqiqləşdirmişdir və indi bu cədvəl Foster-Rıbkin cədvəli adlanır.

Keçmiş SSRİ-də ehtimal nəzəriyyəsi və riyazi statistika aparatını hidrologiyada ilk dəfə D.L.Sokolovski (Соколовский, 1930) istifadə etmişdir. O, SSRİ-nin Avropa hissəsi çaylarının illik axımının təminatlı qiymətlərini təyin etmək üçün Fosterin hesablama sxemini tətbiq etmişdir. Sokolovski ilk dəfə göstərdi ki, bu sxem müşahidə məlumatları olmayan çaylar üçün də istifadə oluna bilər. O, müşahidə məlumatları olmayan çayların illik axımının variasiya əmsalını hesablamaq üçün empirik düstur təklif etdi.

Yuxarıda qeyd olunduğu kimi, təminat əyrisini qurmaq üçün sıranın üç parametri məlum olmalıdır. Müşahidə məlumatları olduqda bu parametrlər mövcud metodlardan birinə görə hesablanır. Lakin müşahidə məlumatları olmadıqda parametrlərin hər biri ayrılıqda dolayı yolla təyin olunmalıdır. Öyrənilməmiş çayların axım normasını, $\bar{Q}$ və ya $\bar{q}$, təyin etmək üçün D.İ.Koçerin (Кочерин, 1927), variasiya əmsalını, C_v , qiymətləndirmək üçün isə Sokolovski üsul işləmişlər. Üçüncü parametri-asimmetriya əmsalını, C_s , hətta mövcud uzun müşahidə sıralarına görə dəqiq təyin etmək qeyri-mümkündür. Buna görə də illik axımı hesablamaq üçün $C_s = 2C_v$ nisbəti qəbul olunurdu. Belə ki, $C_s = 2C_v$ olduqda baxılan hidrometeoroloji kəmiyyətin təminatlı

qiymətləri heç vaxt mənfi qiymət almır.

Sonrakı illərdə Pirsonun III tip əyrisi digər axım xarakteristikalarının təminatlı qiymətlərinin hesablanması da istifadə olunmağa başlandı.

Bu əyridən hidrometeorologiyada geniş istifadə edilməsinə baxmayaraq, onun mühüm çatışmazlığı da müəyyən olunmuşdu: $C_s < 2C_v$ olduqda baxılan kəmiyyətlərin (atmosfer yağıntıları, su sərfələri və s.) böyük təminatlı qiymətləri mənfi alınır.

Bu çatışmazlığı aradan qaldırmaq üçün ilk cəhdi Q.H.Brovko-
viç (Бровкович, 1941; 1946) etmişdir. O, $0 < x < \infty$ intervalında dəyişən kəmiyyətin ehtimallarının paylanma funksiyasını Lager-
rin polinomları üzrə sıraya ayırma şəklində ifadə etdi. Sonralar Brovkoviçin bu yanaşmasını M.A.Velikanov inkişaf etdirməyə çalışmışdır. Lakin G.A.Alekseyev göstərdi ki, Velikanovun təklifləri Pirsonun III tip əyrisinin qeyd olunan çatışmazlığını aradan tam götürmür.

Baxılan problemin həllinə S.N.Kritski və M.F.Menkel (Крицкий, Менкель, 1946) nail oldular. Onlar ilkin dəyişən X kəmiyyətini başqa Z kəmiyyəti ilə əvəz etdilər: $Z = ax^b$, burada a və b ilkin X kəmiyyətinin empirik sırasının variasiya və asimmetriya əmsallarından asılı olan parametrlərdir.

Pirsonun III tip əyrisi əsasında alınan bu əyrilər praktikada Kritski-Menkelin üç parametrlə qamma-paylanması adı altında tanınır. Bu ad A.V.Rojdestvenski və A.I.Çebotaryovun fikirlərinə görə o qədər də dəqiq deyil, çünki Pirsonun III tip əyrisi də ümumi halda üç parametrlə ifadə olunan qamma-paylanmadır.

Kritski-Menkel əyriləri universal xarakter daşıyır. Onlar keçmiş SSRİ və indi MDB məkanında ən geniş istifadə olunan əyrilərdir. Rusiya Federasiyasında qüvvədə olan normativ sənəddə də bu əyridən istifadə nəzərdə tutulur. Eyni zamanda hidrometeoroloji kəmiyyətlərin müşahidə sıralarının səciyyəvi xüsusiyyətlərini nəzərə alan yeni sxemlərin işlənməsi istiqamətində də tədqiqatlar davam etdirilirdi. Məsələn, M.V.Myalkovski (Мялковский, 1937) normal paylanma qanununu Qramm-Şarlye sırasına

ayırmaqla transformasiya etmiş və Şarlye paylanmasını almışdır. Lakin bu əyridən praktikada istifadə olunmur, çünki onun ordnatlarını təyin etmək üçün asimmetriya və eksses əmsalları hesablanmalıdır və məlumdur ki, qısa empirik sıralar üçün onların qiymətləndirilmə dəqiqliyi çox aşağıdır.

Normal qanunun loqarifmik çevirmələri də məlumdur və bunların nəticəsində loqarifmik-normal (loq-normal) paylanma alınır. Bu çevirmələr iki yolla yerinə yetirilir. Birinci halda normal qanunun tənliyində X dəyişəni $\lg X$ ilə əvəz olunur. Alınan loq-normal paylanma asimmetrik olur, paylanma sıfırdan başlayır və yuxarıdan məhdudlanmır. İkinci halda ilkin müşahidə sırasının X elementləri $\lg X$ ilə əvəzlənir. Bu zaman baxılan kəmiyyətin dəyişmə intervalı ($0 \leq X < \infty$) genişlənir ($-\infty < \lg X < \infty$), sıra simmetrikləşir və onu normal paylanma qanunu ilə təsvir etmək mümkün olur.

Loqarifmik çevirmələrlə bağlı ilk tədqiqatları danimarkalı riyaziyyatçı A.Fişer yerinə yetirmişdir. Hidrologiyada isə ilk dəfə loq-normal paylanmanı J.Sleyd (Slade, 1937) tətbiq etmişdir. ABŞ-da Berdon və Kumperon, keçmiş SSRİ-də Y.Q.Bloxinov bu paylanmanı yağış daşqınlarının maksimal su sərfələrinin təminatlı qiymətlərinin hesablanmasında istifadə etmişlər.

A.V.Rojdestvenski və A.İ.Çebotaryov qeyd edirlər ki, hidrometeorologiyada dəyişən kəmiyyətin loqarifmik çevirməsini yuxarıda adları çəkilən alimlərdən daha əvvəl S.İ.Rıbkin yerinə yetirmişdir. Lakin o, loq-normal paylanmadan yox, Pirsonun II tip paylanmasından istifadə etmişdir.

Ümumiyyətlə, K.Pirson (Pearson, 1930) 13 tip paylanma (normal paylanma da daxil olmaqla) təklif etmişdir. Lakin bu əyrilərin əksəriyyəti hidrometeoroloji kəmiyyətlər üçün səciyyəvi olan $0 \leq X < \infty$ intervalından kənara çıxdığına görə, praktikada yalnız III tip əyridən geniş istifadə olunur.

R.D.Qudriç (Goodrich, 1927) atmosfer yağıntıları və çay axımının çoxillik tərəddüdlərini təsvir etmək üçün paylanma təklif etmişdir. Lakin bu paylanmanın Pirsonun III tip və Kritski-

Menkelin ayrılması ilə müqayisədə aşkar üstünlükləri olmadığına görə o, praktikada geniş istifadə olunmur.

Eyni sözləri Conson paylanması haqqında da demək olar. Bu paylanma həm aşağıdan, həm də yuxarıdan məhdudlanır. Lakin dəyişən kəmiyyətin maksimal və minimal qiymətlərinin təyini subyektiv xarakter daşıyır. Bu paylanmanın imkanlarını Q.Q.Svanidze və Q.L.Qriqoliya geniş təhlil etmişlər (Сванидзе, Григолия, 1973).

Ekstremal hidrometeoroloji kəmiyyətlərin təminatlı qiymətlərinin hesablanması Qumbel (Gumbel, 1935) paylanmasından (I tip ekstremal-kəmiyyət paylanması) geniş istifadə edilir. Qərb ölkələrində minimal su sərfələrinin tədqiqində Veybul (Weibull, 1939) paylanması da tətbiq olunur. Bu paylanmanın başqa adı III tip ekstremal-kəmiyyət paylanmasıdır.

Ekstremal-kəmiyyət paylanmasının üç tipi məlumdur (Fisher and Tippett, 1928). Keçmiş SSRİ-də bunlardan yalnız Qumbel paylanmasından bəzi hallarda istifadə olunurdu.

Meteoroloji məlumatların maksimal qiymətlərinin çoxillik tərəddüdlərini təsvir etmək üçün GEV (general extreme-value) paylanması təklif olunmuşdur (Jenkinson, 1955). Bu paylanma digər hidrometeoroloji xarakteristikaların (yağış layı, küləyin sürəti, dalğa hündürlüyü, daşqın sərfələri və s.) maksimumlarının qiymətləndirilməsində tətbiq edilə bilər (Martins and Stedinger, 2000).

Yuxarıda adları çəkilən paylanmaların hamısı kəsilməzdir. Diskret paylanmalar hidrometeorologiyada az hallarda istifadə olunur. Belə paylanmalara misal olaraq Puasson paylanmasını göstərmək olar. Bu paylanma çaylarda quruma hadisəsinin, həmçinin yağışsız dövrlərin davamiyyətinin tədqiqində tətbiq olunur.

Müasir dövrdə işlənmiş paylanmalardan A.V.Yejovun (Ежов, 1986) H-paylanmasını qeyd etmək olar. Bu paylanma funksiyası üçparametrlidir və argument 0 ilə $+\infty$ arasında qiymətlər alır. H-paylanması üçün parametrlərin momentlər metodu və ən çox həqiqətəbənzər metod ilə hesablanmış qiymətləri üst-üstə düşür.

Bu paylanma Rusiya Dövlət Hidrometeorologiya Universitetinin "Qurunun hidrologiyası" kafedrasında A.V.Sikan (Сикан,

2007) tərəfindən ətraflı təhlil olunmuşdur. Müəyyən edilmişdir ki, onun çatışmazlığı paylanmanın əsas parametrlərə çox sərt məhdudiyyətlər qoymasındır. Həmçinin H-paylanmanın real istifadə olunan ordinatları Kritski-Menkel ayrılarının müvafiq ordinatlarından çox cüzi fərqlənir.

Hidrometeoroloji müşahidə sıraları adətən qısa olduqlarına görə empirik təminat ayrıları analitik təminat ayrıları (paylanma funksiyaları) ilə hər iki tərəfə-həm mümkün ən kiçik, həm də ən böyük qiymətlər zonalarına ekstrapolyasiya olunur. Yalnız bu yolla nadir təkrarlanmaya malik hidrometeoroloji xarakteristikalar qiymətləndirilir.

Hələ 1930-cu ildə D.L.Sokolovski çay axımı sıraları misalında analitik və empirik təminat ayrılarının uyğunluğunu qiymətləndirməyə çalışmışdı. Lakin həmin dövrdə mövcud müşahidə sıraları çox qısa olduğundan, onun yerinə yetirdiyi müqayisəli təhlilin nəticələri o qədər də etibarlı hesab oluna bilməzdi. Buna görə də 1941-ci ildə Q.N.Brovkoviç və Q.N.Velikanov qısa müşahidə sıralarını əhəmiyyətli dərəcədə uzatmaq üçün il-məntəqə metodunu təklif etdilər. Bu metodun mahiyyəti ondan ibarətdir ki, variasiya əmsalları bir-birindən az fərqlənən bir neçə su sərfi sırası vahid sırada birləşdirilir və bu sıra üçün empirik təminat ayrısı qurulur. Sonra müvafiq analitik ayrı seçilir və hər iki ayrının uyğunluğu təhlil olunur. Müəlliflər belə nəticəyə gəlmişlər ki, maksimal su sərfələrinin təsadüfi tərəddüdlərinin qanunauyğunluqlarını təsvir etmək üçün $C_s = 2C_v$ olduqda Pirsonun III tip ayrısından istifadə edilə bilər.

Kritski və Menkel il-məntəqə metodu və statistik bircinslik meyarları ilə geniş tədqiqatlar apararaq göstərdilər ki, həm onların öz təminatlar ayrısı, həm də $C_s \geq 2C_v$ olduqda Pirsonun III tip ayrısı çay axımının çoxillik tərəddüdlərinin statistik qanunauyğunluqlarını təsvir etmək üçün yararlıdır.

İl-məntəqə metodu atmosfer yağıntıları haqqında məlumatların işlənməsində də tətbiq olunmuşdur.

Q.P.Kalinin (Калинин, 1968) illik və maksimal axımın misa-

linda hidrometeoroloji kəmiyyətlərin paylanması yeni sxemi-ümumiləşdirilmiş empirik təminat ayrıləri ordinatlarının cədvəlini tərtib etmişdir. Pirsonun III tip ayrisinin xüsusi halı kimi qiymətləndirilən bu cədvəllər bir daha həmin əyridən istifadənin mümkünlüyünü təsdiq etdi (Рождественский, Чеботарев, 1974).

Hazırda analitik və empirik təminat ayrılarının uyğunluğunu qiymətləndirmək üçün xüsusi statistik meyarlar işlənmişdir. Hidrometeorologiyada daha çox χ^2 (Pirson), $n\omega^2$ (Kramer-Mizes-Smirnov) və Kolmoqorov meyarlarından istifadə olunur.

Müşahidə sıralarının bircinsliyi və təsadüfiliyini yoxlamaq üçün də statistik meyarlar işlənmişdir. Bu çox vacib məsələdir, çünki hidrometeoroloji kəmiyyətlərin çoxillik tərəddüdlərini təsvir etmək üçün model (təsadüfi kəmiyyət modeli, sadə Markov zənciri modeli və s.) məhz sıranın statistik strukturundan asılı olaraq seçilir. Bu məqsədlə parametrik və qeyri-parametrik meyarlardan istifadə olunur.

Hidrometeorologiyada, xüsusilə hidrologiyada daha geniş istifadə olunan Pirsonun III tip ayrisi və Kritski-Mankel ayrıləri üç parametrlidir. Bu parametri qiymətləndirmək üçün bir sıra metodlar işlənmişdir. Ən qədim və daha çox istifadə olunan metod momentlər metodudur.

1941-ci ildən başlayaraq hidroloji sıraların parametrlərini hesablamaq üçün ən çox həqiqətəbənzər metoddan da istifadə olunur (Крицкий, Менкель, 1941). Bu metodun riyazi əsası ingiltərəli riyaziyyatçı R.Fişer tərəfindən işlənmişdir. Ən çox həqiqətəbənzər metodun hidroloji hesablamalarda tətbiqi imkanlarını Y.Q.Bloxinov (Блохинов, 1968) ətraflı tədqiq etmişdir.

1960-cı ildə G.A.Alekseyev daha bir metod (kvantillər və ya qraf-analitik metod) təklif etmişdir. Bu metod Pirsonun III tip ayrisi əsasında işlənmişdir və Qərb ölkələrində demək olar ki, istifadə edilir.

Son dövrdə paylanma parametrlərini qiymətləndirmək üçün daha bir metod-L-metod işlənmişdir (Hosking, 1990; Hosking and Wallis, 1997; Chin, 2007). Bu metodun imkanlarını Hosking

ətraflı araşdırmışdır. Hesab olunur ki, xüsusilə qısa sıralar üçün ($n=20$ il) L-metodun tətbiqi effektivdir. Kritski-Menkel əyrisinin parametrləri də bu metod ilə qiymətləndirilmiş və Hoskingin nəticələri təsdiqlənmişdir (Болгов, Осипова, 2000).

Tədqiqatlarda paylanma əyrilərinin seçmə parametrlərinin hesablanma dəqiqliyinin statistik qiymətləndirilməsinə də geniş yer verilir. Bu tipli ilk tədqiqatlarda yalnız normal paylanma parametrlərinin təsadüfi xətlərini qiymətləndirmək üçün asılılıqlar təklif olunurdu. 1946-cı ildə Kritski və Menkel $C_s = 2C_v$ olduqda binomial paylanma qanununun momentlər metodu ilə təyin olunmuş parametrlərinin təsadüfi xətlərini təyin etmək üçün riyazi ifadələr aldılar. 1968-ci ildə isə onlar Pirsonun III tip paylanmasının ordinatları və variasiya əmsalının təsadüfi (standart) xətlərini hesablamaq üçün düsturlar təklif etdilər.

Sonrakı illərdə bu istiqamət Monte-Karlo metodunun tətbiqi ilə inkişaf etdirilmişdir. Bu metodu amerikalı riyaziyyatçılar C.Neyman və S.Ulam təklif etmişlər. Mahiyyətə Monte-Karlo metoduna oxşar yanaşma Xəzər dənizində səviyyənin illik gedişinin modelləşdirilməsində tətbiq olunmuşdur (Крицкий, Менкель, 1946). Hazırda Monte-Karlo metodu statistik sınaqlar metodu da adlandırılır. Bu metodun hidrologiyada tətbiqinin metodik əsaslarını ilk dəfə Q.Q.Svanidze (Сванидзе, 1964) işləmişdir.

Paylanma funksiyalarının seçmə parametrlərinin təsadüfi xətlərini qiymətləndirmək üçün Y.Q.Bloxinov (Блохинов, 1966) və A.Ş.Reznikovski (Резниковский, 1967; 1969) də Monte-Karlo metodundan istifadə etmişlər. Bu icmalda təhlil olunan işlərin hamısında hidrometeoroloji xarakteristikalara sırf təsadüfi kəmiyyətlər kimi baxılmışdır. Başqa sözlə, tədqiqatlarda istifadə edilən müşahidə sıralarında və ya modelləşdirilmiş sıralarda qonşu hədlər arasında hər hansı bir əlaqə (korrelyasiya) nəzərə alınmamışdır.

Əslində belə yanaşma tam əsaslandırılmış hesab oluna bilməz. Hələ 1936-cı ildə P.A.Yefimoviç (Ефимович, 1936) göstərmişdir ki, illik su sərfələrinin statistik sıralarında qonşu hədlər arasında korrelyasiya var. Lakin bu heç də o demək deyil ki, belə sıralara

analitik təminat ayrıləri tətbiq oluna bilməz. Belə hallarda axım xarakteristikasının çoxillik tərəddüdlərini təsvir etmək üçün sadə Markov zənciri modeli istifadə edilir (Крицкий, Менкель, 1959, 1964; Блохинов, 1968; Раткович, 1970; Сванидзе, 1973 və s.). Bu model tətbiq olunduqda variasiya və asimmetriya əmsallarının momentlər metodu ilə hesablanmış qiymətlərinə sıradaxili korrelyasiya əmsalından asılı olaraq düzəliş edilir.

Y.M.Alyoxin (Алехин, 1963) axımın çoxillik tərəddüdlərinin tədqiqində mürəkkəb Markov zənciri modelindən istifadə etmişdir. Bu modelə görə sıradaxili korrelyasiya yalnız qonşu hədlər arasında deyil, həm də çoxillik sıranın qalan hədləri arasında ($\tau \leq 30$ il) statistik baxımdan əhəmiyyətliyədir. Bu tipli tədqiqatları hazırda V.A.Şelutko (Щелутко, 1984; 1991) davam etdirir.

Göründüyü kimi, bu qısa icmalda əsas diqqət təsadüfi kəmiyyətlərin paylanma funksiyalarına, onların parametrlərinin təyini metodlarına, bu parametrlərin təsadüfi xətlərinin qiymətləndirilmə üsullarına və s. yetirilmişdir. Lakin hidrometeorologiyada statistik metodların tətbiq sahələri daha genişdir. Hidrometeoroloji kəmiyyətlər arasında statistik (korrelyasion) əlaqələr, stasionar və qeyri-stasionar proseslər, sinxronluq və sinfazlıq, müşahidə sıralarının spektral və avtokorrelyasiya funksiyaları, çoxillik tərəddüdlərinin məkan-zaman qanunauyğunluqları, hipotezlərin (fərziyyələrin) statistik yoxlanması və s. də statistik metodlarla təhlil olunur.

Statistik metodların tətbiqinə həsr olunmuş fundamental monoqrafiya və dərsliklərin müəllifləri xüsusi qeyd olunmalıdır: meteorologiya üzrə (Пановский, Брайер, 1967; Брукс, Карузерс, 1963; Гандин, 1963; Поляк, 1975; 1979; Исаев, 1988); hidrologiya üzrə (Рождественский, Чеботарев, 1974; Алексеев, 1971; Сванидзе, 1977; Щелутко, 1984; 1991; Chow, 1988; Chin, 2007), hidrometeorologiya üzrə (Сикан, 2007; Казакевич, 1977; Алексеев, 1975).

2. EHTİMAL NƏZƏRİYYƏSİ VƏ RİYAZİ STATİSTİKA HAQQINDA ÜMUMİ MƏLUMAT

2.1. Ehtimal nəzəriyyəsi və riyazi statistikanın hidrologiyada tətbiqinin məqsəd və vəzifələri

Hidrometeoroloji tədqiqatlar zamanı bir çox məsələlərin həl-lində ehtimal nəzəriyyəsi və riyazi statistik metodlardan istifadə olunur, çünki bir çox hallarda bu baxılan hadisəni kəmiyyətcə qiymətləndirməyin yeganə yoludur. Bu, hidrometeoroloji proseslərə çoxsaylı amillərin təsiri ilə əlaqədardır. Məlumdur ki, əksər hidrometeoroloji proseslər çoxsaylı amillərin təsirinin nəticəsidir və baxılan hadisənin formalaşmasında hər bir amilin rolunu ayrılıqda nəzərə almaq qeyri-mümkündür. Belə hadisələrin riyazi təsviri yalnız statistik metodlarla mümkündür.

Məsələn, çayların minimal axımının əmələ gəlməsinə iqlim amilləri (atmosfer yağıntıları, havanın temperaturu, buxarlanma, havanın rütubət çatışmazlığı və s.), hövzənin geoloji quruluşu və hidrogeoloji xüsusiyyətləri, sutoplayıcının sahəsi və orta hündürlüyü, göllər, bataqlıqlar, buzlaqlar, anropogen amillər (su anbarları, kanallar, kollektorlar və s.) təsir göstərir.

Riyazi statistika, riyaziyyatın elmi və praktik nəticələr əldə etmək üçün, statistik məlumatların riyazi metodlarla sistemləşdirilməsi, işlənməsi və istifadəsinə həsr olunmuş bölməsidir.

Riyazi statistikanın fundamental anlayışları baş çoxluq və seçmədir.

Baş çoxluq təsadüfi kəmiyyətin bütün mümkün qiymətlər çoxluğudur. Baş çoxluqlar sonlu və sonsuz ola bilər. Əgər, baş çoxluğun qiymətləri məlumdursa, onda bu qiymətlərə görə təsadüfi kəmiyyətin ədədi xarakteristikaları (orta kəmiyyəti və s.) və paylanma qanunu müşahidə məlumatlarının dəqiqliyinə bərabər dəqiqliklə təyin oluna bilər.

Xəzər dənizi yaranandan bugünə kimi onun səviyyələri haqqında məlumatlar olsaydı, onlar baş çoxluq əmələ gətirərdi. Lakin hidrometeoroloji hadisələr üzərində müşahidə sıraları qısaadır.

Əgər, bu sıraların uzunluğunu (müşahidə illərinin sayını) n ilə işarə etsək, onda həmişə $n < \infty$. Hidrometeoroloji müşahidə sıraları (küləyin sürəti, daşqının maksimal su sərfi, leysanın şiddətliyi və s.) baş çoxluğun çox qısa bir fragmentidir. Belə qısa sıralara seçmə çoxluğu və ya seçmə deyilir.

Seçmənin elementlərinin (hədlərinin) sayı onun həcmi adlanır.

Statistik metodların əsas vəzifəsi məhdud həcmli seçməyə görə baş çoxluğun xüsusiyyətləri haqqında etibarlı nəticələr əldə edilməsinə nail olmaqdır. Bu isə seçmənin representativliyindən, yəni onun baş çoxluğu nə dərəcədə təmsil etməsindən asılıdır. Məsələn, representativ axım sırası çoxsulu, azsulu və ortasulu illəri əhatə etməlidir.

Müasir dövrdə hidrometeoroloji kəmiyyətlərin hesabi qiymətlərinin təyini və proqnozunda müşahidə sıralarının statistik qanunauyğunluqlarına əsaslanan metodlardan çox geniş istifadə olunur. Bu metodları korrekt tətbiq etmək üçün belə fərz edilir ki, baxılan kəmiyyətlərin zaman sıraları təsadüfi çoxluqlar kimi formalaşır. Başqa sözlə, hidrometeoroloji kəmiyyətlərə təsadüfi kəmiyyət kimi baxılır. Bu isə o deməkdir ki, təsadüfi kəmiyyətlərə xas olan təbəddüd qanunauyğunluqları hidrometeoroloji kəmiyyətlərə də aid edilir və hidrometeoroloji kəmiyyətin zamanla bağlılığı elə bir əhəmiyyət kəsb etmir və təsadüfi xarakter daşıyır. Məsələn, qar örtüyünün qalınlığının, küləyin maksimal sürətinin və ya çayda maksimal su sərfinin hansı ildə müşahidə olunması prinsipial sayılır.

Hidrometeoroloji müşahidə sıralarına təsadüfi hadisələr çoxluğu kimi baxılmasının nəzəri əsasını ehtimal nəzəriyyəsinin limit teoremləri təşkil edir. Bu teoremlərin fundamental müddəalarından biri böyük ədədlər qanunu ilə ifadə olunur. Bu qanuna görə təsadüfi hadisələrin sayı çox böyük olduqda onların orta kəmiyyəti artıq təsadüfi olmur və böyük ehtimalla qiymətləndirilə və ya proqnozlaşdırıla bilər. Təsadüfi hadisələrin bu xüsusiyyəti hidrometeoroloji sıralarda aydın təzahür edir. Belə ki, müşahidə illərinin sayı artdıqca, empirik təminat əyrisi daha dayanıqlı forma alır.

Daha bir müddəə mərkəzi limit teoremi ilə əlaqədardır. Bu teo-

remə görə çoxsaylı asılı olmayan (və ya zəif asılı olan) təsadüfi amillərin cəmi və ya hasilinin təsiri nəticəsində baş verən hadisələr müəyyən statistik qanunlara tabe olan təsadüfi çoxluq əmələ gətirir.

Ayındır ki, bir çox hidrometeoroloji hadisələr bu sxemə cavab verir.

Hidrometeoroloji tədqiqatlarda statistik metodların tətbiqinin özünəməxsus xüsusiyyətləri var.

Birinci xüsusiyyət ondan ibarətdir ki, adətən hidrometeoroloqun ixtiyarında olan informasiyanın həcmi az olur və onu əhəmiyyətli dərəcədə artırmaq mümkün olmur. Buna görə də mövcud qısa sıraların statistik parametrlərinin təyini və onların təsadüfi xətlərinin qiymətləndirilməsi, bu sıraların uzadılması, analitik paylanma funksiyasının seçilməsi xüsusi əhəmiyyət kəsb edir.

İkinci xüsusiyyət onunla əlaqədardır ki, bəzən müşahidə sıraları zamana görə və ərazi üzrə bircins olmur. Bu, baxılan hidrometeoroloji kəmiyyətin tərəddüdlərinin statistik təsvirini əhəmiyyətli dərəcədə çətinləşdirir. Belə ki, klassik statistik aparat bircins (stasionar) sıralar üçün işlənmişdir.

Sıraların bircinsliyinin pozulma səbəbləri obyektiv və subyektiv ola bilər. Subyektiv səbəblərə misal olaraq ölçmə işləri zamanı müşahidəçinin xətlərini göstərmək olar. Obyektiv səbəblərə isə iqlim tərəddüdlərinin regional təzahürləri, antropogen amillər (hidrotexniki qurğuların inşası, torpaqdan istifadə növünün dəyişdirilməsi, meşələrin qırılması və s.) aiddir. Bunları nəzərə alaraq, statistik hesablamalara başlamazdan əvvəl ilkin hidrometeoroloji informasiyanın bircinsliyi həm genetik (fiziki), həm də statistik nöqteyi-nəzərdən qiymətləndirilməlidir.

Üçüncü xüsusiyyət ondan ibarətdir ki, müşahidə sıralarının qonşu hədləri arasında statistik baxımdan əhəmiyyətli korrelyasiya əlaqə (avtokorrelyasiya) ola bilər. Məsələn, axarsız göllərin səviyyə sıraları, bəzi çayların illik və minimal su sərfəli sıraları buna misal ola bilər. Belə sıralara təsadüfi kəmiyyətlər çoxluğu kimi baxıla bilməz, çünki aytokorrelyasiyanın mövcudluğu ilkin müşahidə məlumatlarındakı asılı olmayan informasiyanın

həcmi azaldır. Nəzərə alsaq ki, hidrometeoroloji sıralar adətən qısa olur və asılı olmayan informasiyanın bir qədər də azalması seçmə parametrlərin dayanıqlığına mənfi təsir göstərir.

Beləliklə, hidrometeoroloji tədqiqatlarda riyazi statistikanın əsas vəzifələri aşağıdakılardır:

1. Müşahidə məlumatlarına görə əvvəlcədən məlum olmayan paylanma funksiyasının (analitik təminat əyrisinin) müəyyən olunması;

2. Paylanma funksiyasının parametrlərinin təyini;

3. Fərziyyələrin (bircinslik, təsadüfilik haqqında və s.) statistik yoxlanması.

2.2. Təsadüfi kəmiyyətlər

Qiyməti sınaqdan sınağa dəyişən kəmiyyət təsadüfi kəmiyyət adlanır. Tutaq ki, hər hansı bir meteoroloji müşahidə məntəqəsi-də 20 il ərzində atmosfer yağıntıları ölçülüb və hər bir il üçün il-lik yağıntı layı hesablanıb. Bu məlumatlar əsasında növbəti 21-ci müşahidə ilində nə qədər yağıntı düşəcəyini demək mümkün deyil.

Təsadüfi kəmiyyət adətən latin əlifbasının böyük hərfləri ilə işarə olunur: X, Y və s. Təsadüfi kəmiyyətin sınaq (eksperiment) nəticəsində ala biləcəyi mümkün qiymətləri isə indeksli kiçik hərflərlə göstərilir: $x_1, x_2, \dots, x_n$, burada $1, 2, \dots, i, \dots, n$ -sıra hədlərinin nömrələridir. Yağıntı layının (X) 20 il ərzində dəyişmə prosesi $x_1, x_2, \dots, x_{20}$ və ya $x_i (i = 1, 2, \dots, 20)$ şəklində göstərilə bilər.

Tutaq ki, müəyyən bir ərazidə yağıntıların paylanmasıni təsvir etmək tələb olunur: müşahidə məntəqələrinin sayı, (m) müşahidə dövrü isə (n) ildir. Onda birinci məntəqə üçün müşahidə sırası $x_{11}, x_{12}, \dots, x_{1n}$ və ya $x_{1i} (i = 1, 2, \dots, n)$, m -ci məntəqə üçün isə $x_{m1}, x_{m2}, \dots, x_{mn}$ və ya $x_{mi} (i = 1, 2, \dots, n)$ kimi yazıla bilər.

Ümumi halda baxılan ərazidə yağıntıların paylanması müşahidə matrisi şəklində verilə bilər:

X_{ij}

$$\begin{array}{c} 1-m \\ 2-m \\ x_{11} \ x_{12} \dots x_{1n} \\ x_{21} \ x_{22} \dots x_{2n} \end{array}$$

(2.1)

$$x_{m1} \ x_{m2} \dots x_{mn}$$

Matrisdəki məlumatlar daha qısa şəkildə yazıla bilər:

$$x_{ji} \ (j = 1, 2, \dots, m; \ i = 1, 2, \dots, n). \quad (2.2)$$

Təsadüfi kəmiyyətin iki tipi var: diskret və kəsilməz.

Diskret təsadüfi kəmiyyətlər yalnız sonlu sayda qiymətlər ala bilər. Buludluğun bal şkalası buna misal ola bilər. Məlumdur ki, buludluluq 10 ballıq şkala ilə qiymətləndirilir. Buna görə də buludluğun mümkün qiymətlər sırası yalnız 0, 1, 2, ..., 10 ədədlərindən ibarət olur.

Kəsilməz təsadüfi kəmiyyətlər müəyyən interval daxilində ixtiyar ədədi qiymət ala bilər. Belə təsadüfi kəmiyyətlərə misal olaraq havanın temperaturu və təzyiqi, çayın su sərfi, dəniz cərəyanlarının sürətini və s. göstərmək olar.

Hidrometeoroloji tədqiqatlarda ölçmələrin dəqiqliyi və yuvarlaqlaşdırma ilə əlaqədar, kəsilməz təsadüfi kəmiyyətlər diskret təsadüfi kəmiyyətlər ilə əvəz olunur. Hava temperaturunun diskretlik addımı 0,1 (15,1; 15,2; 15,3 və s.), su sərfi 100m³/s-dən çox olduqda 1 (101; 102; 103; və s.) qəbul edilmişdir.

2.3. Paylanma funksiyalarının ümumi səciyyəsi

Təsadüfi kəmiyyətin sınaq nəticəsində alacağı qiymət əvvəlcədən bilinmir, lakin onun paylanma qanunu verilir. Təsadüfi kəmiyyətin paylanma qanunu təsadüfi kəmiyyətin mümkün qiymətləri ilə onların müvafiq ehtimalları arasında asılılıqdır.

Hər hansı bir hadisənin baş vermə ehtimalı 0 və 1 arasında dəyişir:

$$0 \leq P(x) \leq 1 \quad (2.3)$$

$$0 \leq P(x) \leq 1$$

Paylanma qanunları cədvəl, qrafik və analitik şəkildə verilə bilər.

Hidrometeoroloji kəmiyyətlərin nəzəri ehtimalı əvvəlcədən məlum olmadığına görə, adətən, empirik ehtimaldan istifadə olunur. Müşahidə sırası nə qədər uzun olarsa, empirik təminat da bir o qədər nəzəri qiymətə yaxınlaşar. X hadisəsinin empirik ehtimalı, $P(X)$, aşağıdakı düstura görə təyin olunur:

$$P(X) = \frac{m}{n}, \quad (2.4)$$

burada m – X hadisəsinin baş verdiyi halların sayı, n – baxılan hadisələrin ümumi sayıdır.

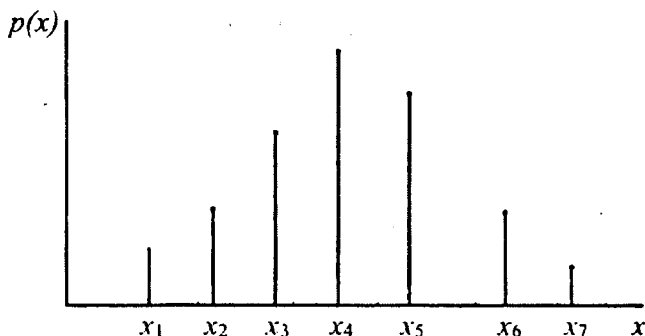
Təsadüfi kəmiyyətin paylanma sırası (cədvəl 2.1) və histoqram (şəkil 2.1) yalnız diskret təsadüfi kəmiyyət üçün tərtib olunur. Kəsilməz təsadüfi kəmiyyət üçün onlardan istifadə mümkün deyil, çünki belə təsadüfi kəmiyyət qiymətləri həddən artıq çoxdur və buna görə də onların hər birinin ehtimalı sıfıra çox yaxındır.

Cədvəl 2.1

X təsadüfi kəmiyyətinin paylanma sırası

$X \dots x_1 \ x_2 \ x_3 \dots x_n$

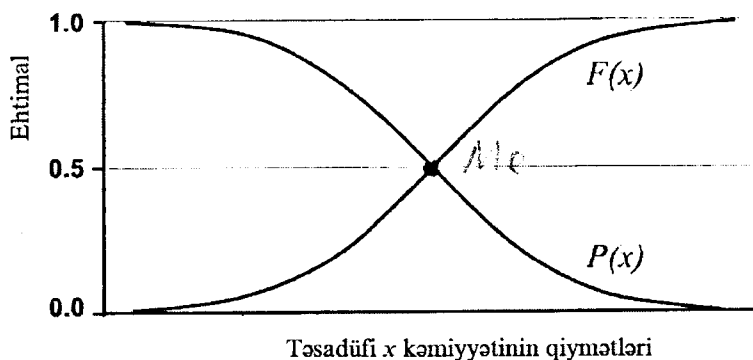
$P_x \dots p_1 \ p_2 \ p_3 \dots p_n$



Şəkil 2.1. Diskret təsadüfi kəmiyyətin ehtimallarının paylanma histoqramı

Kəsilməz təsadüfi kəmiyyətin paylanma qanununun analitik ifadəsi paylanma funksiyası adlanır. Paylanma funksiyalarının iki tipi var: integral (rusdilli ədəbiyyatda) və ya kumulyativ (ingilisdilli ədəbiyyatda) və diferensial paylanma funksiyası. Təsadüfi kəmiyyətin, X , integral paylanma funksiyası, $F(x)$, təsadüfi kəmiyyətin verilmiş x qiymətini ötməməsinin ehtimalını göstərir (şəkil 2.2), yəni:

$$F(x) = P\{X \leq x\}.$$



Şəkil 2.2. X təsadüfi kəmiyyətinin integral paylanma funksiyası $F(x)$ və təminatlar funksiyası $P(x)$

Təsadüfi kəmiyyətin, X , qiymətlərinin x_1 və x_2 arasında olma ehtimalı bu nöqtələrdə paylanma funksiyasının qiymətlərinin fərqinə bərabərdir:

$$P\{x_1 < X \leq x_2\} = F(x_2) - F(x_1). \quad (2.5)$$

Analoji olaraq:

$$P\{X > x\} = P\{+\infty > X > x\} = 1 - F(x). \quad (2.6)$$

Qərb ölkələrindən fərqli olaraq, keçmiş SSRİ-də və indi Azərbaycanı hidrometeoroloji tədqiqatlarda paylanma funksiyasının, $F(x)$, əvəzinə daha çox təminat funksiyasından, $P(x)$, istifadə olunur:

$$P(x) = 1 - F(x) = P\{X \geq x\}. \quad (2.7)$$

Beləliklə, X , təsadüfi kəmiyyətinin təminat funksiyası verilmiş x qiymətinin ötürmə (aşma) ehtimalını göstərir.

İntegral paylanma funksiyası və təminat funksiyası aşağıdakı xassələrə malikdir:

$$1. \lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0; \lim_{x \rightarrow -\infty} P(x) = 1.$$

$$2. \lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 1; \lim_{x \rightarrow +\infty} P(x) = 0.$$

$$3. F(x) \geq 0; P(x) \geq 0.$$

$$4. F(x_2) \geq F(x_1), \text{ əgər } x_2 > x_1; P(x_2) \leq P(x_1), \text{ əgər } x_2 > x_1.$$

Əgər, $F(x)$ funksiyası təsadüfi kəmiyyətin, X , bütün qiymətləri üçün diferensiallansa, onda ehtimalların paylanma qanunu həm də diferensial paylanma funksiyası şəklində ifadə oluna bilər:

$$f(x) = \frac{dF(x)}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{P\{x < X \leq x + \Delta x\}}{\Delta x}, \quad (2.8)$$

burada $\Delta x > 0$.

Bu $f(x)$ funksiyası paylanma funksiyasının, $F(x)$, törəməsidir və ehtimalın paylanma sıxlığının funksiyası (və ya qısa-ehtimalın sıxlıq funksiyası) adlanır.

Ehtimalın sıxlıq funksiyasının, $f(x)$, əsas xassələri aşağıdakılardır:

$$1. f(x) \geq 0.$$

$$2. \lim_{|x| \rightarrow \infty} f(x) = 0.$$

$$3. \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 1.$$

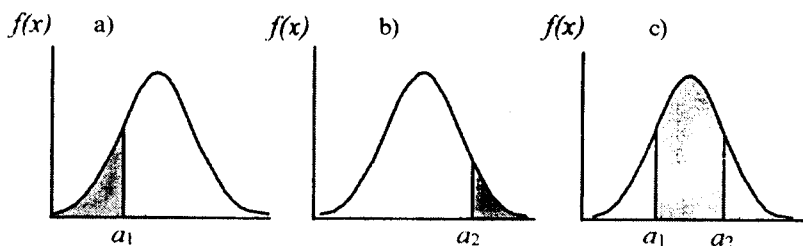
$$4. \int_{-\infty}^x f(x)dx = F(x).$$

Diferensial paylanma funksiyalarının köməyi ilə təsadüfi kəmiyyətin mümkün qiymətlər çoxluğunun verilmiş oblastına düşmə ehtimalını hesablamaq olar (şəkil 2.3):

$$a) P\{X \leq a_1\} = \int_{-\infty}^{a_1} f(x)dx ;$$

$$b) P\{X > a_2\} = \int_{a_2}^{\infty} f(x)dx ;$$

$$c) P\{a_1 < X \leq a_2\} = \int_{a_1}^{a_2} f(x)dx .$$



Şəkil 2.3. Ehtimalın sıxlıq funksiyasının qrafikləri: striklənmiş sahə X təsadüfi kəmiyyətinin verilmiş intervala düşmə ehtimalına uyğundur

Misal 2.1. Dnepr çayının (Lotsmanskaya Kamenka məntəqəsi) 1818-1962-ci illəri əhatə edən dövr üçün orta illik su sərfələrinə (cədvəl 2.2) görə histqram və empirik təminatlar funksiyasını tərtib edin.

Cədvəl 2.2

Dnepr çayının (Lotsmanskaya Kamenka məntəqəsində)
orta illik su sərfələri

İl	$Q, \text{m}^3/\text{s}$	İl	$Q, \text{m}^3/\text{s}$	İl	$Q, \text{m}^3/\text{s}$	İl	$Q, \text{m}^3/\text{s}$
1818	1480	1855	1900	1891	1470	1927	1730
1819	1600	1856	1500	1892	1120	1928	1840
1820	2400	1857	1300	1893	1820	1929	1910
1821	1740	1858	1400	1894	1460	1930	1180
1822	1370	1859	1000	1895	2420	1931	2480
1823	1200	1860	1800	1896	1990	1932	2620
1824	1150	1861	2400	1897	1590	1933	2630
1825	1800	1862	1400	1898	1190	1934	1860
1826	1200	1863	900	1899	1220	1935	1620
1827	1300	1864	1000	1900	1670	1936	1560
1828	2080	1865	1700	1901	1320	1937	1620
1829	2500	1866	1600	1902	1690	1938	1490
1830	2100	1867	2000	1903	1620	1939	1080
1831	2060	1868	2000	1904	1080	1940	1680
1832	1550	1869	1200	1905	1740	1941	2300
1833	1340	1870	1400	1906	2060	1942	2470
1834	1750	1871	2000	1907	2100	1943	1010
1835	1000	1872	1780	1908	2220	1944	1380
1836	1030	1873	1100	1909	1700	1945	1480
1837	1680	1874	1520	1910	1160	1946	1310
1838	1940	1875	900	1911	1310	1947	1530
1839	1540	1876	2100	1912	1890	1948	1660
1840	1930	1877	3040	1913	1800	1949	1290
1841	1930	1878	1960	1914	1610	1950	1060
1842	870	1879	2450	1915	1820	1951	1480
1843	1100	1880	1640	1916	2050	1952	1240

İl	$Q, \text{m}^3/\text{s}$	İl	$Q, \text{m}^3/\text{s}$	İl	$Q, \text{m}^3/\text{s}$	İl	$Q, \text{m}^3/\text{s}$
1844	2000	1881	1670	1917	2400	1953	1970
1845	3000	1882	1060	1918	1300	1954	874
1846	1000	1883	2070	1919	1910	1955	1520
1847	1400	1884	1340	1920	1480	1956	1740
1848	1200	1885	1160	1921	717	1957	1500
1849	2400	1886	1550	1922	1730	1958	2420
1850	1800	1887	1330	1923	1710	1959	1320
1851	1740	1888	2060	1924	1820	1960	1250
1852	1650	1889	1940	1925	874	1961	1330
1853	2100	1890	1250	1926	1890	1962	1510
1854	1800						

Həlli: 1. Cədvəl 2.2-nin məlumatlarına əsasən orta illik su sərfələrinin amplitudu, R , yəni ən böyük, Q_{mak} , ən kiçik, Q_{min} , qiymətlərinin fərqi tapılır:

$$R = Q_{\text{mak}} - Q_{\text{min}} = 3040 - 717 = 2323 \text{ m}^3/\text{s}.$$

2. Amplituda k sayda bərabər intervala bölünür. Intervalların sayı aşağıdakı düstura görə təyin olunur:

$$k \approx 5 \lg n,$$

burada n -müşahidə illərinin sayı və ya sıranın uzunluğudur.

Bu misalda $n = 145$ və $k = 5 \lg 145 = 11$. Beləliklə, təxmini olaraq $k = 11$ qəbul edilir.

3. Hesabi intervalın uzunluğu təyin olunur: $l = R/k = 2323/11 = 211$. Hasablamalar asan olsun deyə, l kəmiyyəti yuvarlaqlaşdırıla bilər (l -in qiyməti 10-15%-dən çox dəyişdirilməməlidir). Yekun qiymət kimi $l = 200$ qəbul edilə bilər.

4. Birinci intervalın sol sərhəddi kimi Q_{mak} və ya ondan böyük qiymət qəbul olunmalıdır. Nəzərə alsaq ki, l -in qiyməti yüz-lüklərə qədər yuvarlaqlaşdırılıb, onda belə sərhəd 3100 təyin olunur. Onda, birinci intervalın sağ sərhəddi $3100 - 200 = 2900$ olur. Növbəti intervalların sərhədləri $2900 - 2700$; $2700 - 2500$;

2500-2300 və s. olacaq.

İntervalların sərhədləri kəsişməsin deyə, bütün intervalların sol sərhədləri cüzi dəyişdirilir: 3099-2900; 2899-2700; 2699-2500 və s.

5. Növbəti hesablamaların nəticələri cədvəl 2.3-də verilir.

Cədvəl 2.3

Dnepr çayının (Lotsmanskaya Kamenka məntəqəsində) illik axımının qruplaşdırılmış məlumatları

Su sərfi intervalları, Q m^3/s	İntervallara düşmə sayı (təkrarlanma, m_i)	Nisbi tezlik, P^* %	İntervalın sağ sərhəddini aşmaların sayı	Empirik təminat, %
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)
3099-2900	2	1.38	2	1.38
2899-2700	0	0	2	1.38
2699-2500	3	2.07	5	3.45
2499-2300	10	6.90	15	10.4
2299-2100	5	3.45	20	13.8
2099-1900	20	13.80	40	27.6
1899-1700	23	15.86	63	43.5
1699-1500	25	17.24	88	60.7
1499-1300	24	16.56	112	77.3
1299-1100	17	11.73	129	89.0
1099-900	12	8.28	141	97.3
899-700	4	2.76	145	100
Cəmi	145	100		

Cədvəl 2.3-dən görünür ki, su sərfələrinin amplitudunu tam əhatə etmək üçün 11 yox, 12 intervaldan istifadə olunur. Qeyd etmək lazımdır ki, bu, prinsipial əhəmiyyət daşıyır.

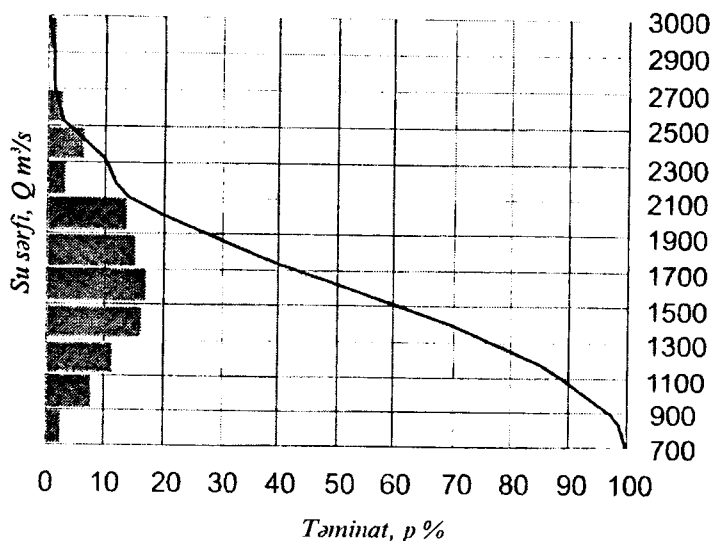
Cədvəlin 2-ci sütununda hər bir intervala düşən su sərfələrinin sayı verilir.

3-cü sütunda hər bir intervala düşən su sərfələrinin təkrarlanması göstərilir: $P = (m_i / n) \cdot 100\%$, burada m_i – i intervalına

düşən su sərfələrinin sayıdır. 4-cü sütundakı ədədləri almaq üçün 2-ci sütunda verilən ədədlər ardıcıl olaraq toplanır. 4-cü sütunun ilk ədədi (2) göstərir ki, 145 su sərfindən yalnız ikisinin qiyməti $2900 \text{ m}^3/\text{s}$ və ya ondan böyükdür. Bu sütundakı 88 ədədi isə onu göstərir ki, 145 su sərfindən 88-nin qiyməti $1500 \text{ m}^3/\text{s}$ və ya ondan böyükdür və s.

5-ci sütunda isə 4-cü sütunda verilmiş ədədlərin ümumi müşahidə illərinin ($n=145$ il) neçə faizini təşkil etdiyi göstərilir.

6. 3-cü sütunun məlumatlarına görə empirik tezliklərin (təkrarlanmaların) qrafiki və ya histqramı, 5-ci sütunun məlumatlarına görə isə empirik təminat funksiyası və ya empirik təminat əyrisi qurulur (şəkil 2.4).



Şəkil 2.4. Dnepr çayının Lotsmanskaya Kamenka məntəqəsində illik axımın empirik tezliklərinin histqramı və empirik təminatlar əyrisi

2.4. Təsadüfi kəmiyyətlərin ədədi xarakteristikaları və onların xassələri

Təsadüfi kəmiyyət haqqında tam təsəvvür əldə etmək üçün paylanma sırası və ya paylanma funksiyasını bilmək kifayətdir. Lakin müşahidə sıralarının (müqavimət) təhlilini yerinə yetirdikdə paylanma sırası və paylanma funksiyasından istifadə rahat deyil. Praktikada çox zaman təsadüfi kəmiyyətin (və ya müşahidə sırasının) müəyyən bir xüsusiyyətini kompakt şəkildə səciyyələndirən ədədi xarakteristikalardan istifadə olunur. Bu xarakteristikalar eyni zamanda ənəlik paylanma funksiyalarını (təminat əyrilərinin) parametrləridir.

Təsadüfi kəmiyyətlərin ədədi xarakteristikaları üç qrupa bölünür:

① Paylanma mərkəzinin (yerini) səciyyələndirən xarakteristikalar: ədədi orta, riyazi gözləmə, moda, mediana.

② Paylanma mərkəzinə nəzərən təsadüfi kəmiyyətin səpələnmə dərəcəsini səciyyələndirən xarakteristikalar: dispersiya, orta kvadratik meyletmə (standart), variasiya əmsali.

③ Paylanma mərkəzinə nəzərən təsadüfi kəmiyyətin səpələnməsinin simmetriklik dərəcəsini səciyyələndirən xarakteristikalar: asimmetriya və ya əyintilik əmsalları.

2.4.1. Ədədi orta, riyazi gözləmə, mediana və moda

Statistik sıranın, x , əsas parametrlərindən biri ədədi ortadır, $\bar{x}$:

$$\bar{x} = \frac{1}{n}(x_1 + x_2 + \dots + x_n) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \quad (2.9)$$

Ədədi ortanın iki əsas xassəsi var.

1. Sıranın bütün hədlərinin ədədi ortadan fərqlərinin cəmi sıfıra bərabərdir:

$$\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}) = 0. \quad (2.10)$$

2. Sıranın bütün hədlərinin ədədi ortadan fərqləri kvadratlarının cəmi, istənilən $a \neq \bar{x}$ ədədinə nəzərən hesablanmış müvafiq cəmdən kiçikdir:

$$S = \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 = \min. \quad (2.11)$$

Bir neçə bircins müşahidə sırası birləşdirildikdə yaranan vahid sıranın ədədi ortası əvəzinə orta çəki qiyməti, $\bar{x}$, hesablanır:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{k=1}^m n_k \bar{x}_k}{\sum_{k=1}^m n_k}, \quad (2.12)$$

burada m -birləşdirilən sıraların sayı; n_k -hər bir birləşdirilən sıranın uzunluğu (sıra hədlərinin sayı); $\bar{x}_k$ -bu sıraların ədədi ortalarıdır.

Təqvim aylarında günlərin sayı eyni olmadığına görə, havanın orta illik temperaturu, çayın orta illik su sərfi və s. orta aylıq qiymətlərə əsasən hesablandığında düstur (2.12-dən) istifadə etmək olar.

Dağ çaylarının sutoplayıcılarına düşən yağıntıların miqdarı da orta çəki düsturuna görə qiymətləndirilir.

Hidrometeorologiyada norma adlandırılan xüsusi tip orta kəmiyyətdən geniş istifadə olunur. Norma baxılan hidrometeoroloji kəmiyyətin ədədi ortasının çoxillik müşahidə dövrü üçün təyin olunmuş qiymətidir.

Sıranın orta qiyməti (seçmə ədədi orta) müşahidə illərinin sayı

artdıqca həqiqi orta qiymətə (baş çoxluğun ədədi ortasına) və ya riyazi gözləməyə (m_x, μ_x), yaxınlaşır.

Əslində, hidrometeoroloji tədqiqatlarda riyazi gözləmə anlayışı riyazi abstraksiyadır, çünki müşahidə sıraları qısadır. Buna görə də, hidrometeoroloji hesablamalarda riyazi gözləmə dedikdə bir neçə onillik və ya yüzillik üçün ədədi orta nəzərdə tutulur.

Rusdilli və ingilisdilli elmi ədəbiyyatda diskret təsadüfi kəmiyyətin riyazi gözləməsi müvafiq olaraq aşağıdakı düsturlara görə hesablanır:

$$m_x = \sum_{i=1}^N X_i P_i, \quad (2.13)$$

$$\mu_x = \sum_{i=1}^N x_i f(X_i). \quad (2.14)$$

Kəsilməz təsadüfi kəmiyyət üçün isə düstur belədir:

$$m_x = \mu_x = \int_{-\infty}^{+\infty} X' f(x') dx'. \quad (2.15)$$

Riyazi gözləmənin əsas xassələri:

1. Sabit kəmiyyətin riyazi gözləməsi elə həmin kəmiyyətin özünə bərabərdir:

$$M[c] = c, \quad M[c] = c \quad (2.16)$$

burada $c = \text{const.}$

2. Sabit vuruc riyazi gözləmə işarəsindən kənara çıxarıla bilər:

$$M[cX] = cM[X]. \quad (2.17)$$

3. Aşılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlərin cəminin riyazi gözləməsi onların riyazi gözləmələrinin cəminə bərabərdir:

$$M\left[\sum_{i=1}^N X_i\right] = \sum_{i=1}^N M[X_i], \quad (2.18)$$

məsələn, iki təsadüfi kəmiyyət üçün:

$$M[X + Y] = M[X] + M[Y]. \quad (2.19)$$

4. Təsadüfi kəmiyyətdən xətti funksiyanın riyazi gözləməsi aşağıdakı düsturla ifadə olunur:

$$M[aX + b] = aM[X] + b, \quad (2.20)$$

burada a və $b = \text{const}$.

5. Asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlərin hasilinin riyazi gözləməsi onların riyazi gözləmələrinin hasilinə bərabərdir:

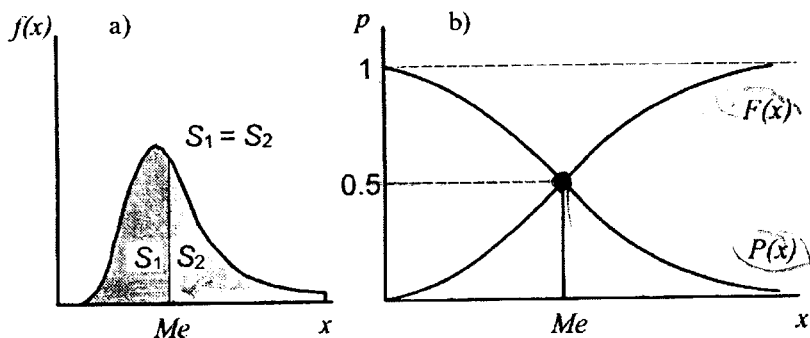
$$M\left[\prod_{i=1}^N X_i\right] = \prod_{i=1}^N M[X_i]. \quad (2.21)$$

X təsadüfi kəmiyyətinin medianası Me onun elə qiymətinə deyilir ki, bu qiymətdə:

$$P\{X < Me\} = P\{X > Me\} = 0,5, \quad (2.22)$$

şərti ödənilsin.

Mediana təsadüfi kəmiyyətin elə qiymətidir ki, bu qiymətdə təminat və paylanma funksiyalarının qiymətləri bərabərdir (şəkil 2.5):



Şəkil 2.5. Diferensial (a) və integral (b) paylanma funksiyaları qrafiklərində mediananın mövqeyi

$$\underline{P(Me) = F(Me) = 0.5} \quad (2.23)$$

Beləliklə, mediana azalma və ya artma qaydasında düzülmüş müşahidə sırasının ortasında yerləşən həddin qiymətidir. Əgər, müşahidə sırasının, X_i , hədlərinin sayı təkdirsə və $2m+1$ təşkil edirsə, onda azalma və ya artma qaydasında düzülmüş sıranın medianası:

$$\underline{Me = X_{m+1}} \quad (2.24)$$

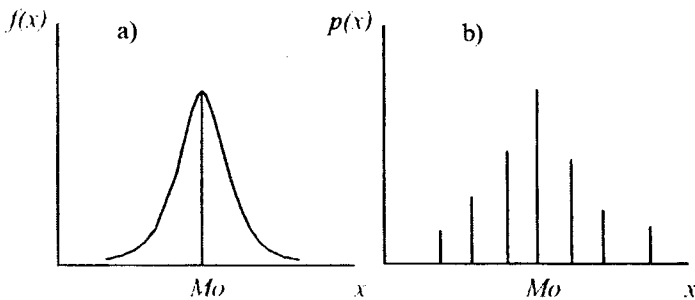
hədlərin sayı cüt, $2m$, olduqda isə:

$$Me = \frac{1}{2}(X_m + X_{m+1}) \quad (2.25)$$

ifadəsinə görə təyin olunur.

Hidrometeorologiyada medianadan praktiki olaraq istifadə edilmir.

X kəsilməz təsadüfi kəmiyyətinin modası, M_o , onun elə qiymətinə deyilir ki, bu qiymətdə ehtimal sıxlığı maksimum olur (şəkil 2.6).



Şəkil 2.6. Kəsilməz (a) və diskret (b) təsadüfi kəmiyyətlərin modası

Diskret paylanmada isə moda təsadüfi kəmiyyətin ehtimalı ən böyük olan qiymətidir (şəkil 2.6). Paylanma maksimumlarının sayı birdən çox olduqda, belə paylanma, çoxmodalı və ya poli-

modalı adlanır

Birmodalı və çox asimmetrik olmayan paylanmaların modasını təyin etmək üçün K.Pirson düstur təklif etmişdir:

$$M_0 = \bar{X} + 3(Me - \bar{X}). \quad (2.26)$$

Hidrometeorologiyada küləyin istiqaməti haqqında məlumatlar istisna olunmaqla, moda çox az hallarda istifadə olunur. Qafqaz çaylarında dekadalıq minimal su sərfələrinin müşahidə olunma vaxtı haqqında məlumatların ümumiləşdirilməsi empirik paylanmaların mediana və modalarına görə yerinə yetirilmişdir (Иманов, 2000).

Dnepr çayının Lotsmanskaya Kamenka məntəqəsinin (1818-1962-ci illər, $n = 145$ il) orta illik su sərfələri haqqında məlumatlarına görə: $\bar{X} = 1642 \text{ m}^3/\text{s}$; $Me = 1620 \text{ m}^3/\text{s}$; $M_0 = 1576 \text{ m}^3/\text{s}$ (düstur 2.26-ya görə).

2.4.2. Təsadüfi kəmiyyətin momentləri

Təsadüfi kəmiyyətlərin praktikada istifadə olunan əksər parametrləri bir-biri ilə əlaqəlidir və vahid sistem əmələ gətirir. Bu əlaqələr təsadüfi kəmiyyətin momentləri anlayışına əsaslanır. Təsadüfi kəmiyyətin başlanğıc və mərkəzi momentlərindən daha çox istifadə olunur.

X təsadüfi kəmiyyətinin S dərəcəli başlanğıc momenti aşağıdakı düstura görə hesablanır:

$$\alpha_s = M[X^s], \quad (2.27)$$

və ya:

$$\alpha_s = \int_{-\infty}^{+\infty} x^s f(x) dx. \quad (2.28)$$

X təsadüfi kəmiyyətinin S dərəcəli mərkəzi momenti aşağıdakı düstura görə təyin olunur:

$$\mu_s = M[(X - m_x)^s], \quad (2.29)$$

və ya:

$$\mu_s = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - m_x)^s f(x) dx. \quad (2.30)$$

Düstur (2.27)-dən alınır ki, riyazi gözləmə elə birinci başlanğıc momentə bərabərdir, yəni, $m_x = M[X^1] = \alpha_1$.

Başlanğıc və mərkəzi momentlər arasındakı əlaqələrin riyazi ifadələri aşağıdakı kimidir:

$$\left. \begin{aligned} \mu_1 &= 0; \\ \mu_2 &= \alpha_2 - \alpha_1^2; \\ \mu_3 &= \alpha_3 - 3\alpha_2\alpha_1 + 2\alpha_1^3; \\ \mu_4 &= \alpha_4 - 4\alpha_3\alpha_1 + 6\alpha_2\alpha_1^2 - 3\alpha_1^4. \end{aligned} \right\} \quad (2.31)$$

2.4.3. Dispersiya, orta kvadratik meylətmə və variasiya əmsali

Təsadüfi kəmiyyəti tam səciyyələndirmək üçün yalnız onun orta qiymətini bilmək kifayət deyil. Məsələn, Nyu-York və San-Fransisko şəhərlərində çoxillik dövr üçün havanın orta illik temperaturu demək olar ki, eynidir. Buna baxmayaraq, bu iki şəhərdə iqlim fərqlidir, çünki Nyu-Yorkda temperaturun dəyişkənliyi çox böyükdür.

Təsadüfi kəmiyyətin orta qiymətə (və ya paylanma mərkəzinə) nəzərən səpələnmə dərəcəsi dispersiya, orta kvadratik meylətmə və ya variasiya əmsalına görə qiymətləndirilir.

X təsadüfi kəmiyyətinin dispersiyası, D_x , ikinci mərkəzi momentə bərabərdir:

$$D_x = \mu_2 = M[(X - m_x)^2]. \quad (2.32)$$

Diskret və kəsilməz təsadüfi kəmiyyətlərin dispersiyaları müvafiq olaraq aşağıdakı düsturlara görə hesablanır:

$$D_x = \sum_{i=1}^N (x_i - \mu_x)^2 f(x_i), \quad (2.33)$$

$$D_x = \int_{-\infty}^{+\infty} (x' - \mu_x)^2 f(x') dx'. \quad (2.34)$$

Praktikada müşahidə sıralarının dispersiyasını qiymətləndirmək üçün aşağıdakı düsturdan istifadə olunur:

$$D_x = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n-1}. \quad (2.35)$$

Əslində, bu düsturda $n-1$ əvəzinə n yazılmalıdır. Nisbətən uzun müşahidə sıralarının ($n > 30$ il) seçmə dispersiyası hesablandıqda belə də edilir. Lakin tədqiqatlar nəticəsində müəyyən olunmuşdur ki, müşahidə sırası qısa olduqda ($n \leq 30$ il) və n əvəzinə $n-1$ götürüldükdə seçmə dispersiyasının qiyməti baş çoxluğun dispersiyasına daha çox yaxınlaşır.

Dispersiyanın əsas xassələri:

1. Sabit kəmiyyətin dispersiyası sıfıra bərabərdir:

$$D[C] = 0, \quad (2.36)$$

burada $c = \text{const}$.

2. Sabit kəmiyyəti kvadrata yüksəltməklə dispersiya işarəsindən kənara çıxarmaq olar:

$$D[cX] = c^2 D[X]. \quad (2.37)$$

3. Təsadüfi kəmiyyətlərin cəminin dispersiyası onların dispersiyalarının cəminə bərabərdir:

$$D\left[\sum_{i=1}^N X_i\right] = \sum_{i=1}^N D[X_i]. \quad (2.38)$$

4. Təsadüfi kəmiyyətin xətti funksiyasının dispersiyası aşağıdakı ifadəyə görə təyin olunur:

$$D[aX + b] = a^2 D[X]. \quad (2.39)$$

X təsadüfi kəmiyyətinin dispersiyasının kvadrat kökü orta kvadratik meyletmə, σ_x , adlanır:

$$\sigma_x = \sqrt{D_x}, \text{ və ya } \sigma_x^2 = D_x. \quad (2.40)$$

Bu parametmə həmçinin standart meyletmə və ya standart da deyilir. Orta kvadratik meyletmədən praktikada istifadə çox əlverişlidir, çünki onun ölçü vahidi təsadüfi kəmiyyətin ölçü vahidi ilə eynidir. Bu, səpələnməni (meyletməni) təsadüfi kəmiyyətin öz qiymətləri ilə müqayisə etməyə imkan verir.

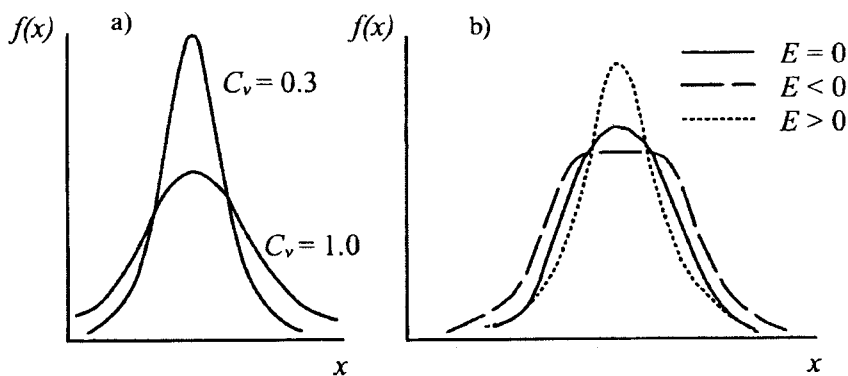
Müşahidə sırası hədlərinin $2/3$ hissəsi $\bar{x} + \sigma_x$ və $\bar{x} - \sigma_x$ intervalında yerləşir. Əgər, təsadüfi kəmiyyət normal paylanırsa, onda sıra hədlərinin düz 50% -i $\bar{x} + 0,674\sigma_x$ və $\bar{x} - 0,674\sigma_x$ arasında qiymətlər alır ($\Delta = 0,674\sigma_x$ -ehtimal olunan xəta və ya meyletmə adlanır).

Təsadüfi kəmiyyətin səpələnməsinin bir xarakteristikası da variasiya əmsalıdır, C_v . O, orta kvadratik meyletmənin riyazi gözləməyə (orta qiymətə) nisbətinə bərabərdir:

$$C_v = \frac{\sigma_x}{m_x} = \frac{\sqrt{D_x}}{m_x}. \quad (2.41)$$

Variasiya əmsalı ölçü vahidi olmayan parametrdir və onun praktik əhəmiyyəti elə bununla bağlıdır. Məsələn, Kür və Qoşqar çaylarının maksimal sərfləri sıralarının orta kvadratik meyletmələri kəskin fərqlənir, çünki bu çayların müvafiq su sərflərinin mütləq qiymətləri kəskin fərqlidir.

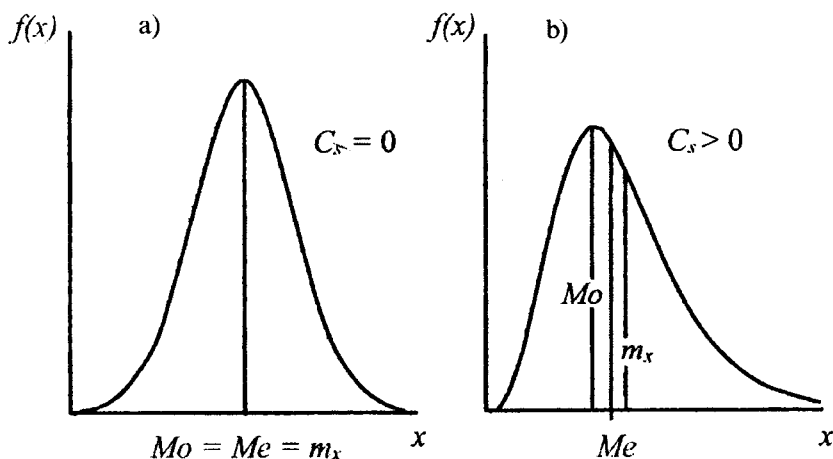
Variasiya əmsalı bəzən faizlə ifadə olunur. Hidroloji hesablamalarda bu əmsaldan geniş istifadə edilir. ~~Variasiya əmsalının~~ (eyni zamanda dispersiya və orta kvadratik meyletmənin) paylanma funksiyasına təsiri şəkil 2.7-də göstərilir.



Şəkil 2.7. Variasiya əmsalı (a) və ekssesin (b) ehtimalın sıxlıq funksiyasının formasına təsiri

2.4.4. Asimmetriya və eksses

İki müşahidə sırasının orta kəmiyyəti və dispersiyalarının eyni olmasına baxmayaraq onların sıra hədlərinin riyazi gözləməyə (paylanma mərkəzinə) nəzərən səpələnməsinin simmetriklik dərəcəsi fərqli ola bilər (şəkil 2.8).



Şəkil 2.8. Simmetrik (a) və asimmetrik (b) paylanmaların ehtimal sıxlığı funksiyalarının qrafikləri

Statistik sıranın simmetrikliliyini səciyyələndirmək üçün sıra hədləri ilə ədədi orta arasında fərqi kubunun orta qiymətindən istifadə olunur:

$$\mu_3 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^3. \quad (2.42)$$

Sıranın simmetrikliliyinin ölçüsüz göstəricisindən daha geniş istifadə edilir və o, asimetriya əmsalı, C_s , adlanır:

$$C_s = \frac{\mu_3}{\sigma_x^3} = \frac{M[(X - m_x)^3]}{\sigma_x^3}. \quad (2.43)$$

Diskret və kəsilməz təsadüfi kəmiyyətlər üçün asimetriya əmsalı müvafiq olaraq aşağıdakı düsturlara görə hesablanır:

$$C_s = \frac{1}{\sigma_x^3} \sum_{i=1}^N (x_i - \mu_x)^3 f(x_i), \quad (2.44)$$

$$C_s = \frac{1}{\sigma_x^3} \int_{-\infty}^{+\infty} (x' - \mu_x)^3 f(x') dx'. \quad (2.45)$$

Asimetriya əmsalının ümumi qəbul olunmuş işarəsi yoxdur. O, rusdilli ədəbiyyatda, C_s , ingilisdilli ədəbiyyatda isə çox zaman

g_x kimi işarə edilir.

Beləliklə, təsadüfi kəmiyyətlərin paylanması simmetrik və asimmetrik ola bilər. Simmetrik paylanma üçün asimetriya əmsalı sıfıra bərabərdir, çünki, bu halda sıranın orta qiymətdən böyük və kiçik hədlərinin sayı və müxtəlif işarəli fərqlərinin kublari bərabər olur.

Əgər, sıranın riyazi gözləməsi modadan böyükdürsə, ($m_x = \mu_x > M_0$), onda sıra müsbət asimetriyalı ($C_s = g_x > 0$), əks halda isə ($m_x = \mu_x < M_0$) mənfi asimetriyalı ($C_s = g_x < 0$) olur.

Müsbət asimetriyalı sırada kəmiyyəti ədədi ortadan böyük

olan hədlərin sayı az, lakin onların mütləq qiymətləri və müvafiq olaraq müsbət fərqlərinin kublari böyük olur. Kəmiyyəti ədədi ortadan kiçik olan hədlərin nisbətən çoxsaylı olmasına baxmayaraq, onların mənfi fərqləri o qədər də əhəmiyyətli olmur.

Çayların maksimal su sərfələri sıraları müsbət asimmetriyalı olur. Bunun səbəbi odur ki, maksimal su sərfələri sıfırdan böyükdür və ayrı-ayrı qiymətlər sıranın riyazi gözləməsindən bir neçə dəfə çox ola bilər. Məsələn, çayın (Dry-Gulch Creek) maksimal su sərfələri sırasının orta qiyməti $350,9 \text{ m}^3/\text{s}$ təşkil etdiyi halda, bəzi illərdə $2239 \text{ m}^3/\text{s}$ və $1259 \text{ m}^3/\text{s}$ su keçmişdir (bax misal 4.4-ə).

Küləyin sürətinin paylanması da müsbət asimmetriyalıdır, çünki kiçik sürətlər daha çoxsaylıdır və $\mu_x > M_0$. Nyu-York yaxınlığındakı poliqonda (Lya-Gadria) yerinə yetirilmiş müşahidələrə görə küləyin ora sürəti 16 mil/saat, moda isə 12,7 mil/saat olmuşdur.

Həm də nəzərə almaq lazımdır ki, küləyin sürəti mənfi ola bilməz və buna görə də onun paylanması müsbət asimmetriyalıdır. Atmosfer yağıntılarının miqdarı da mənfi ola bilməz, nəticədə sutkalıq yağıntı layının paylanması asimmetrikdir. Mülayim rütubətli iqlim şəraiti hakim olan ərazilərdə illik yağıntı layı simmetrik paylanır. Bu onunla izah olunur ki, yağıntıların qeydiyyat başlanğıcı (0 mm) illik yağıntı cəmlərinin müşahidə olunmuş qiymətləri intervalından çox kənardadır.

Mənfi asimmetriyalı paylanmaya misal olaraq subasarlı çayların maksimal səviyyə sıralarını göstərmək olar. Mənfi asimmetriyanın səbəbi subasara su çıxdıqda çayın canlı kəsiyinin eninin kəskin artmasıdır.

Belə hesab edilir ki, əgər, təsadüfi kəmiyyətin mümkün qiymətləri müəyyən fiziki sərhədlərlə məhdudlanırsa və müşahidə məlumatlarının diapozonu bu sərhədlərə yaxındırsa, onda paylanma funksiyası adətən asimmetrik olur.

Paylanma funksiyasının parametrlərindən biri də ekssesdir. Bu parametr aşağıdakı düstura görə hesablanır:

$$E_x = \frac{\mu_4}{\sigma_x^4} - 3 = \frac{M[(x - m_x)^4]}{\sigma_x^4} - 3 = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - m_x)^4}{\sum_{i=1}^n (x_i - m_x)^2} - 3. \quad (2.46)$$

Eksses ehtimal sıxlığı funksiyası zirvəsinin şişliyini qiymətləndirməyə imkan verir (şəkil 2.7). Bu qiymətləndirmə normal paylanma qanununa nəzərən yerinə yetirilir. Normal paylanma üçün $E_x = 0$. Əgər, təsadüfi kəmiyyətin qiymətlərinin az hissəsi paylanma mərkəzinə yaxındırsa, onda ekssesin qiyməti kiçik olur. Buludluğun paylanması çox kiçik ekssesə malikdir.

Hidrometeoroloji məlumatların statistik işlənməsində adətən eksses istifadə olunmur. Bu onunla izah olunur ki, mövcud sıralar qısadır və belə sıralara görə hesablanmış ekssesin seçmə qiymətinin xətası çox böyük olur.

2.4.5. Normallaşdırılmış təsadüfi kəmiyyətlər və paylanma kvantilləri

Bir çox hallarda X təsadüfi kəmiyyətinin əvəzinə ondan elementar çevirmələr yolu ilə alınmış başqa təsadüfi kəmiyyətdən istifadə daha münasib və əlverişli olur. Məsələn, müxtəlif asimmetriyalı paylanmaları müqayisə etmək üçün riyazi gözləmə, m_x , μ_x , və orta kvadratik meyletmənin, σ_x , təsirindən azad olmaq tələb olunur. Bunu təsadüfi kəmiyyətin qiymətlərini normallaşdırmaq (standartlaşdırmaq) yolu ilə etmək mümkündür. Hidrometeoroloji tədqiqatlarda daha tez-tez modul əmsallarından və standart normallaşdırılmış təsadüfi kəmiyyətdən istifadə olunur.

Modul əmsalı, k_i , təsadüfi kəmiyyətin qiymətinin, x_i , onun riyazi gözləməsinə, m_x , nisbətində deyilir:

$$k_i = \frac{x_i}{m_x}. \quad (2.47)$$

Modul əmsalları sırası üçün $m_x = 1$.

Standart normallaşdırılmış kəmiyyət, t_i , aşağıdakı düsturlara görə hesablanır:

$$t_i = \frac{x_i - m_x}{\sigma_x}, \quad (2.48)$$

$$t_i = \frac{k_i - 1}{C_v}. \quad (2.49)$$

Standart normallaşdırılmış kəmiyyət sırası üçün $m_x = 0$ və $\sigma_x = D_x = 1$.

Artıq göstərildiyi kimi (bax bölmə 2.3-ə), integral paylanma funksiyasına, $F(x)$, görə ixtiyari x üçün onun ötməmə ehtimalı təyin oluna bilər. Lakin bir çox hallarda tərsinə qoyuluşlu məsələni həll etmək tələb olunur: verilmiş ötürməmə ehtimalına, $F(x) = P'$, görə x'_p kəmiyyəti hesablanmalıdır. Riyazi statistikada x'_p kəmiyyəti kvantil adlandırılır.

Beləliklə, p -kvantil və ya p % kvantil (əgər, p %-lə ifadə olunursa) təsadüfi kəmiyyətin x'_p qiymətinə deyilir və bu qiymət verilmiş ötürməmə ehtimalına, $F(x) = p'$, müvafiqdir.

Hidrometeorologiyada, xüsusilə hidrologiyada (daha doğrusu, keçmiş SSRİ, Rusiya, Azərbaycanda) kvantil anlayışına oxşar olaraq təminat əyrisinin p -ordinatı terminindən istifadə olunur.

Təminat əyrisinin ordinatı hidrometeoroloji kəmiyyətin elə x_p qiymətidir ki, bu qiymət verilmiş ötürmə ehtimalına, $P(x) = p$, müvafiqdir, $P(x) = 1 - F(x)$ olduğuna görə, $p = 1 - p'$ və ya $p = 100 - p'$ (əgər, p %-lə verilsə).

Kvantilləri təminat əyrilərinin ordinatlarından fərqləndirmək üçün, onlar strixlə qeyd olunur.

Misal 2.2. Təsadüfi kəmiyyətin ehtimallarının paylanması aşağıdakı cədvəldə verilib.

x_i	$f(x_i)$
0	0.13
1	0.27
2	0.28
3	0.18
4	0.09
5	0.03
6	0.02
>6	0.00

Bu təsadüfi kəmiyyətin ədədi xarakteristikalarını (parametrlərini) hesablayın.

Həlli: Təsadüfi kəmiyyətin riyazi gözləməsi:

$$\begin{aligned}\mu_x &= \sum_{i=1}^N x_i f(x_i) = (0)(0.13) + (1)(0.27) + (2)(0.28) + \\ &+ (3)(0.18) + (4)(0.09) + (5)(0.03) + (6)(0.02) = 2.\end{aligned}$$

Dispersiyası:

$$\begin{aligned}\sigma_x^2 &= \sum_{i=1}^N (x_i - \mu_x)^2 f(x_i) = \\ &= (0 - 2)^2 (0.13) + (1 - 2)^2 (0.27) + (2 - 2)^2 (0.28) + (3 - 2)^2 (0.18) + \\ &+ (4 - 2)^2 (0.09) + (5 - 2)^2 (0.03) + (6 - 2)^2 (0.02) = 1.92.\end{aligned}$$

Asimmetriya əmsalı:

$$\begin{aligned}g_x &= \frac{1}{\sigma_x^3} \sum_{i=1}^N (x_i - \mu_x)^3 f(x_i) = \\ &= \frac{1}{(1.92)^{\frac{3}{2}}} \left[(0 - 2)^3 (0.13) + (1 - 2)^3 (0.27) + (2 - 2)^3 (0.28) + (3 - 2)^3 (0.18) + \right. \\ &\quad \left. + (4 - 2)^3 (0.09) + (5 - 2)^3 (0.03) + (6 - 2)^3 (0.02) \right] = 0.631\end{aligned}$$

Misal 2.3. Yay mövsümündə Mayamidə (Miami) qeydə alınmış leysanlararası müddət üçün ehtimalın paylanma sıxlığı $f(t)$ aşağıdakı ifadə ilə verilir:

$$f(t) = \begin{cases} 0.014e^{-0.014t}, & t > 0 \\ 0, & t \leq 0 \end{cases}$$

burada t -leysanlar arasındakı zaman intervalıdır, saat. Bu zaman intervalının, t , ədədi xarakteristikalarını (parametrlərini) qiymətləndirin.

Həlli: Laysanlararası zaman intervalının riyazi gözləməsi aşağıdakı düstura görə hesablanır:

$$\mu_t = \int_0^{\infty} t' f(t') dt' = \int_0^{\infty} t' (0.014 e^{-0.014t'}) dt' = 0.014 \left(\int_0^{\infty} t' e^{-0.014t'} dt' \right).$$

$$\int_0^{\infty} x e^{-ax} dx = \frac{1}{a^2}$$

Bu integralları nəzərə alınmaqla:

$$\mu_t = 0.014 \left(\frac{1}{0.014^2} \right) = 71 \text{ saat.}$$

Dispersiya:

$$\sigma_t^2 = \int_0^{\infty} (t' - \mu_t)^2 f(t') dt' = \int_0^{\infty} (t' - 71)^2 0.014 e^{-0.014t'} dt' =$$

$$= 0.014 \int_0^{\infty} (t'^2 - 142t' + 5041) e^{-0.014t'} dt'$$

$$\int_0^{\infty} x^2 e^{-ax} dx = \frac{2}{a^3}; \quad \int_0^{\infty} x e^{-ax} dx = \frac{1}{a^2}; \quad \int_0^{\infty} e^{-ax} dx = \frac{1}{a}.$$

Bu integrallar nəzərə alınmaqla:

$$\sigma_t^2 = 0.014 \left[\frac{2}{0.014^3} - 142 \left(\frac{1}{0.014^2} \right) + 5041 \left(\frac{1}{0.014} \right) \right] = 5102 \text{ saat}^2$$

Standart meylətmə, $\sigma_t = \sqrt{5102} = 71$ saat.

Asimmetriya əmsalı:

$$g_t = \frac{1}{\sigma_t^3} \int_0^\infty (t' - \mu_t)^3 f(t') dt' = \frac{1}{(71)^3} \int_0^\infty (t' - 71)^3 0.014 e^{-0.014t'} dt' =$$

$$= \frac{0.014}{(71)^3} \int_0^\infty (t' - 213t'^2 + 15.213t' - 357.911) e^{-0.014t'} dt'$$

$$\int_0^\infty x^3 e^{-ax} dx = \frac{6}{a^4}.$$

Bu integral nəzərə alınmaqla:

$$g_t = 3.91 \times 10^{-8} \left(\frac{6}{0.014^4} - 213 \frac{2}{0.014^3} + \right.$$

$$\left. + 15,123 \frac{1}{0.014^2} - 357,911 \frac{1}{0.014} \right) = 2.1$$

və $g_t > 0$ olduğuna görə paylanma müsbət asimmetriyalıdır.

•

3. EMPIRİK TƏMİNAT ƏYRİLƏRİ VƏ ANALİTİK PAYLANMA FUNKSIYALARI

3.1. Empirik təminat əyriləri

Müxtəlif layihələrin hazırlanmasında bu və ya digər hidro-meteoroloji xarakteristikanın (dalğanın hündürlüyü, küləyin sürəti, su sərfi və s.) verilmiş təminatlı qiymətini hesablamaq tələb olunur. Bu məsələ, baxılan hidrometeoroloji xarakteristikanın paylanma qanunu məlum olduqda asanlıqla həll olunur. Lakin, praktikada çox zaman tədqiq edilən xarakteristikanın paylanma qanunu məlum olmur və onun haqqında müəyyən təsəvvür əldə etmək üçün empirik müşahidə məlumatlarından istifadə olunur. Bu məlumatlara görə qurulan təminat funksiyası empirik təminat əyrisi adlanır.

Faktiki olaraq, misal 3.1-də empirik təminat əyrisinin qurulma qaydası izah olunub, və belə əyri nümunəsi şəkil 2.4-də göstərilib. Bu qayda müşahidə sıraları kifayət qədər uzun olduqda tətbiq edilir.

Hidrometeoroloji müşahidə sıralarının uzunluqları, adətən bir neçə onillikdən çox olmur və buna görə də belə qısa sıralar üçün empirik təminat əyriləri başqa yolla qurulur. Bu metod istifadə olunduqda müşahidə sırası azalma və ya artma qaydasında düzülür. Hidrometeorologiyada sıranın azalma qaydasında düzülməsi qəbul olunub.

Tutaq ki, hər hansı bir hidrometeoroloji xarakteristikanın azalma qaydasında düzülmüş qiymətləri məlumdur: $x_1 > x_2 > x_3 > \dots > x_m > \dots > x_N$. Onda bu sıranın m -ci həddi, x_m , üçün ehtimalın ötülməsinin nəzəri qiyməti aşağıdakı düsturla ifadə oluna bilər:

$$P\{X \geq x_m\} = \lim_{N \rightarrow \infty} (m / N). \quad (3.1)$$

Lakin real şəraitdə seçmənin (sıranın) uzunluğu həmişə sonludur, $n < \infty$. Baxılan sıranın hər bir həddi üçün ötürmə ehtimalını təqribi qiymətləndirmək üçün düstur 3.1-də N -i n -lə əvəz etmək

lazımdır:

$$p_m = P\{X \geq x_m\} \approx (m/n) \cdot 100\%, \quad (3.2)$$

burada m – azalma qaydasında düzülmüş sıranın m -ci həddinin, x_m , sıra nömrəsi; p_m – azalma qaydasında düzülmüş sıranın m -ci həddinin təminatıdır, (%) -lə.

Düstur 3.2-yə uyğun olaraq azalma qaydasında düzülmüş sıranın birinci (ən böyük) həddinin empirik təminatı $P_1 = (1/n)100\%$, ikinci həddininki $P_2 = (2/n)100\%$ və s. olacaq. Beləliklə, bu düsturdan istifadə etdikdə azalma sırasının axırncı həddi, x_n , mütləq minimumdur və X təsadüfi kəmiyyəti heç vaxt x_n -dən kiçik qiymət almayacaq.

Hesablamalar düstur 3.2 ilə yerinə yetirildikdə ona görə belə alınır ki, N əvəzinə n istifadə olunur. Əslində, müşahidələr davam etdirildikdə gələcəkdə x_n -dən də kiçik qiymətlər qeydə alınə bilər. Doğrudan da, uzunluğu N il olan baş çoxluqdan uzunluğu n il olan sonsuz sayda qısa sıra (seçmə) almaq olar ki, hər belə sıranın da öz maksimumu və minimumu olacaq. Buna görə də azalma sırasının m – ci həddinin empirik təminatı özü də təsadüfi kəmiyyətdir. Bu səbəbdən, empirik təminatın hesabi qiyməti kimi onun riyazi gözləməsi (orta qiymət), modası və ya digər dayanıqlı xarakteristikasından istifadə olunur. Hazırda empirik təminatı hesablamaq üçün 10-a yaxın düstur məlumdur.

A. Hazenin düsturu:

$$P_m = \frac{m - 0,5}{n} 100\%. \quad (3.3)$$

V. Veybulun düsturu:

$$P_m = \frac{m}{n + 1} 100\%. \quad (3.4)$$

Bu düstur keçmiş SSRİ-də Kritski-Menkel düsturu adlandırılırdı.

N.N. Çeqodayevin düsturu:

$$P_m = \frac{m - 0,3}{n + 0,4} 100\% . \quad (3.5)$$

Düstur 3.4 empirik təminatın riyazi gözləməsinə, düstur 3.5 isə mediananın qiymətinə uyğundur.

I.I.Qrinqorten (Gringorten, 1963) universal düstur təklif etmişdir:

$$P_m = \frac{m - a}{n + 1 - 2a} 100\% . \quad (3.6)$$

Bu düsturdan $a = 0,5$ olduqda düstur 3.3, $a = 0$ olduqda düstur 3.4, $a = 0,3$ olduqda düstur 3.5 alınır.

Qrinqorten a parametrinin müşahidə sırasının uzunluğuna görə təyin olunmasını tövsiyə etmişdir: $n = 10$ il olduqda $a = 0,448$; $n = 30$ il, $a = 0,442$; $n = 50$ il, $a = 0,440$; $n = 100$ il, $a = 0,439$.

Hazırda Fransada düstur 3.3, ABŞ, Rusiya və Azərbaycanda düstur 3.4, İngiltərədə isə düstur 3.6-dan ($a = 0,44$) istifadə olunur.

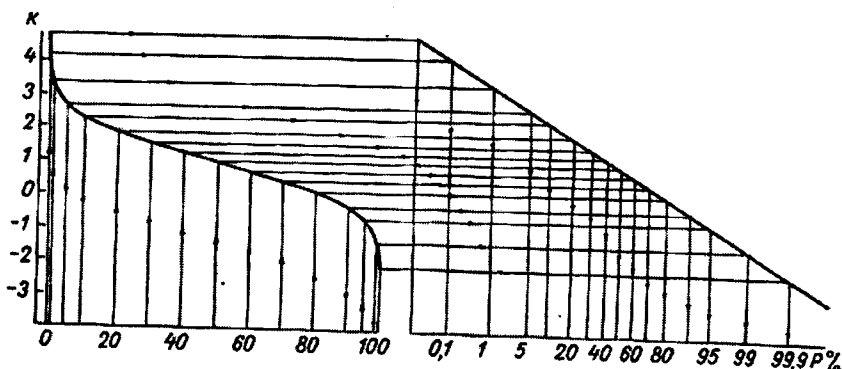
M.Ə.Məmmədov maksimal su sərfələri sıralarındakı ən böyük hədlərin empirik təminatını hesablamaq üçün düstur təklif etmişdir:

$$P_m = \frac{m}{n + k^z} 100\% , \quad (3.7)$$

burada k -modul əmsalı ($K_i = Q_i / \bar{Q}$); z -üst göstəricisidir. Lakin sonrakı tədqiqatlar göstərmişdir ki, bu düstur minimal su sərfələri sıralarının ən kiçik hədlərinin, maksimal leysan laylarının və digər ekstremal hidrometeoroloji xarakteristikaların empirik təminatlarını təyin etmək üçün də tətbiq oluna bilər.

Təminat əyrisi xüsusi ehtimallar damasında qurulur. Bu onunla izah olunur ki, hidrometeorologiyada geniş istifadə edilən ehti-

malların paylanması integral əyriləri (məsələn, su sərfələrinin davamiyyət əyriləri) dekart koordinat sisteminə mürəkkəb formalıdır. Bu əyrilərin həm yuxarı, həm də aşağı hissələrində cəm ehtimalın (təminatın) cüzi artımına hidrometeoroloji xarakteristikanın böyük artımı uyğun gəlir. Bu isə öz növbəsində integral əyrini hamarlaşdırmağı və onu müşahidə məlumatları ilə əhatə olunmayan yuxarı və aşağı hissələrə uzatmağı (ekstrapolyasiyanı) çətinləşdirir. Ehtimallar damasından istifadədə məqsəd bu texniki çətinliyi aradan götürmək və bununla da təminat əyrisinin hamarlaşdırılmasına, hətta düzləndirilməsinə nail olmaqdır (şəkil 3.1)



Şəkil 3.1. Normal paylanma qanunu üçün ehtimallar damasının tərtibi sxemi

Əgər ehtimallar daması təminat əyrisini düz xəttə transformasiya edərsə, onda hidrometeoroloji sıranın parametrləri ələ alınmış düz xəttə görə təyin oluna bilər. Hidroloji hesablamalarda istifadə olunan ehtimallar damasının (ED) aşağıdakı tipləri var:

- normal paylanma qanununun ED;
- variasiya və asimmetriya əmsallarının müxtəlif nisbətlərində üçparametrlı qamma paylanmanı düzləndirən ED (Brovko-viçin ED, Rojdestvenski və Çebotaryovun ED);
- loqarifmik-normal paylanma qanununun ED ($C_v > 0,5$ və

$C_s > 2C_v$ olduqda istifadə olunur);

- Qumbelin ED;
- Çeqodayevin ED;
- Qudriçin ED ($C_s > 3C_v$ olduqda istifadə olunur);

Praktikada daha çox ilk üç ED-dan istifadə edilir.

Müxtəlif ehtimallar damalarının tərtib qaydaları A.V.Rojdestvenski və A.İ.Çebotaryovun (Рождественский, Чеботарев, 1974) birgə monoqrafiyasında ətraflı izah olunur.

Empirik təminat əyrisi yalnız hidrometeoroloji xarakteristikanın müşahidə olunmuş qiymətlərinə görə deyil, həm də onların modul əmsallarına və normallaşdırılmış qiymətlərinə görə də qurula bilər.

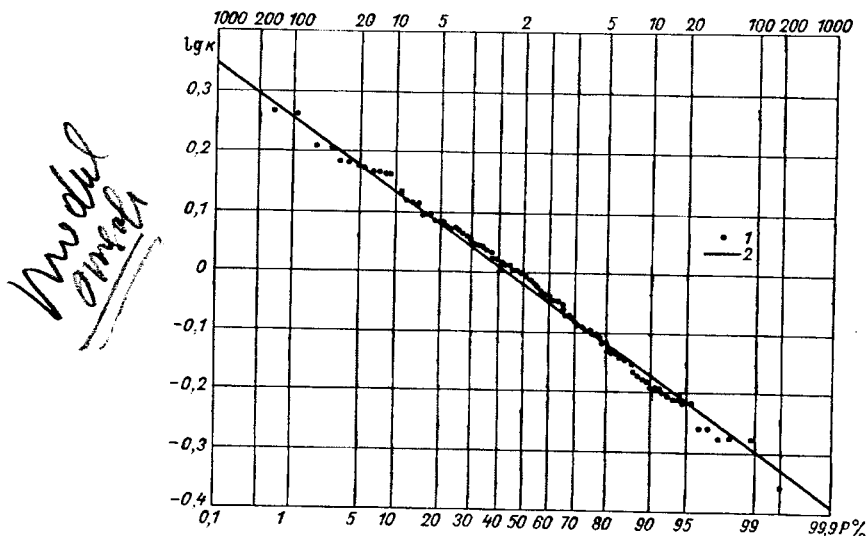
Qeyd etmək lazımdır ki, keçmiş SSRİ-də və indi Azərbaycanda hidrometeoroloji tədqiqatlarda baxılan xarakteristikanın təminatlı qiymətlərindən, Qərb ölkələrində isə verilmiş təkrarlanmalara müvafiq qiymətlərindən istifadə olunur. Məsələn, Azərbaycan şəraitində tapşırıq belə qoyula bilər: verilmiş məntəqə üçün maksimal leysan layının 2% təminatlı qiymətini hesablayın. Eyni tapşırıq Qərb ölkələrində belə verilir: verilmiş məntəqə üçün təkrarlanması 50 ildə 1 dəfə olan maksimal leysan layını hesablayın.

Təminat (P) və təkrarlanma (N və ya T) arasındakı asılılıqdan istifadə edərək, onlardan biri verildikdə o birini asanlıqla təyin etmək olar:

$$N = \frac{100}{P}, \quad P < 50\% \text{ olduqda}, \quad (3.8)$$

$$N = \frac{100}{100 - P}, \quad P > 50\% \text{ olduqda}. \quad (3.9)$$

Çox zaman ehtimallar damasının aşağı üfqi oxunda təminatlar, yuxarı üfqi oxunda isə təkrarlanmalar göstərilir (şəkil 3.2).



Şəkil 3.2. Dnepr çayının Lotsmanskaya Kamenka məntəqəsində illik axımın loqarifmik-normal paylanması

1 – empirik nöqtələr, 2 – loqarifmik-normal əyri

Misal 3.1. Cədvəl 3.1-də verilmiş maksimal su sərflərinin empirik təminat əyrisini qurun.

Cədvəl 3.1

Yağış daşqınlarının maksimal su sərfəri (m^3/s)

İl	Sərf	İl	Sərf
1954	71.4	1970	84.5
1955	22.1	1971	37.5
1956	32.7	1972	24.0
1957	145	1973	22.1
1958	46.0	1974	130
1959	29.9	1975	21.3
1960	28.4	1976	58.2
1961	73.8	1977	58.7
1962	121	1978	130
1963	25.0	1979	22.0
1964	31.4	1980	54.0
1965	17.3	1981	100

İl	Sərf	İl	Sərf
1966	54.8	1982	78.1
1967	29.9	1983	39.2
1968	104	1984	66.0
1969	27.5	1985	84.4

Həlli: 1. Verilmiş su sərfələri sırası azalan qaydada düzülür (cədvəl 3.2).

Cədvəl 3.2

Maksimal su sərfələri üçün empirik təminat
əyrisinin ordinatlarının hesablanması

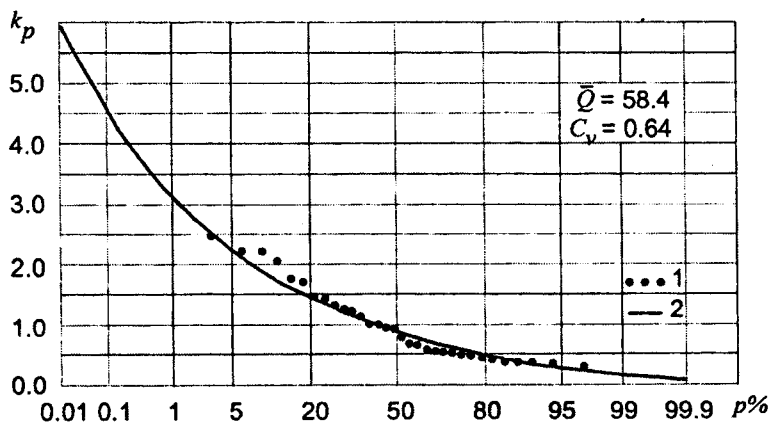
m_i	İllər	Su sərfələri, m^3/s	Azalma sıraları		Təminat, %
			su sərfələri, m^3/s	modul əmsalları	
1	1954	71.4	145	2.48	3.03
2	1955	22.1	130	2.22	6.06
3	1956	32.7	130	2.22	9.09
4	1957	145	121	2.07	12.1
5	1958	46.0	104	1.78	15.2
6	1959	29.9	100	1.71	18.2
7	1960	28.4	84.5	1.45	21.2
8	1961	73.8	84.4	1.44	24.2
9	1962	121	78.1	1.34	27.3
10	1963	25.0	73.8	1.26	30.3
11	1964	31.4	71.4	1.22	33.3
12	1965	17.3	66.0	1.13	36.4
13	1966	54.8	58.7	1.00	39.4
14	1967	29.9	58.2	1.00	42.4
15	1968	104	54.8	0.94	45.5
16	1969	27.5	54.0	0.92	48.5
17	1970	84.5	46.0	0.79	51.5
18	1971	37.5	39.2	0.67	54.6
19	1972	24.0	37.5	0.64	57.6
20	1973	22.1	32.7	0.56	60.6
21	1974	130	31.4	0.54	63.6
22	1975	21.3	29.9	0.51	66.7
23	1976	58.2	29.9	0.51	69.7

m _i	İllər	Su sərfələri, m ³ /s	Azalma sıraları		Təminat, %
			su sərfələri, m ³ /s	modul əmsalları	
24	1977	58.7	28.4	0.49	72.7
25	1978	130	27.5	0.47	75.8
26	1979	22.0	25.0	0.43	78.8
27	1980	54.0	24.0	0.41	81.8
28	1981	100	22.1	0.38	84.9
29	1982	78.1	22.1	0.38	87.9
30	1983	39.2	22.0	0.38	90.9
31	1984	66.0	21.3	0.36	93.9
32	1985	84.4	17.3	0.30	97.0

2. Azalma sırasının hər bir su sərfi üçün, $P = \frac{m}{n+1} \cdot 100\%$

düsturuna əsasən empirik təminat hesablanır. Sıranın uzunluğu $n=32$ -dir və sıranın birinci həddinin təminatı $p_1=(1/33)100\%=3,03\%$; ikinci həddininki isə $p_2=(2/33)100\%=6,06\%$ -ə bərabərdir və s.

3. Cədvəl 3.2-nin axırındakı iki sütununun məlumatlarına əsasən ehtimal damasında empirik təminat əyrisi qurulur (şəkil 3.1).



Şəkil 3.3. Empirik (1) və analitik (2) təminat əyriləri

Misal 3.2. Çay üzərində 150 il ərzində yerinə yetirilmiş müşahidə məlumatlarına əsasən maksimal su sərfələrinin integral paylanma funksiyasının koordinatları hesablanıb və aşağıdakı cədvəldə verilib. Təkrarlanma dövrü 10, 50 və 100 il olan maksimal su sərfələrini təyin edin.

n	Su sərfələri, x_n (m^3/s)	$P(X < x_n)$
1	0	0
2	25	0,19
3	50	0,35
4	75	0,52
5	100	0,62
6	125	0,69
7	150	0,88
8	175	0,92
9	200	0,95
10	225	0,98
11	250	1,00

Həlli: $P = \frac{1}{T}$ düsturuna görə, təkrarlanma dövrü, T , 10, 50, və 100 il olan su sərfələrinin ötürmə ehtimalı müvafiq olaraq $1/10=0.10$, $1/50=0.02$ və $1/100=0.01$ təşkil edir. Bu təminatlara müvafiq integral (cəm) ehtimallar $1-0.1=0.9$, $1-0.02=0.98$ və $1-0.01=0.99$ alınır. Verilmiş integral paylanma funksiyasından interpolyasiya yolu ilə aşağıdakı nəticələr alınır:

Təkrarlanma dövrü (illər)	Su sərfi m^3/s
10	163
50	225
100	238

Misal 3.3. Qvadalupe çayının Viktoriya yaxınlığında (Texas) maksimal su sərfələri 1965-1978-ci illər üçün aşağıdakı cədvəldə verilmişdir.

İl	Mak.su sərfi (fut ³ /s)	İl	Mak.su sərfi (fut ³ /s)
1965	15,000	1972	58,500
1966	9790	1973	33,100
1967	70,000	1974	25,200
1968	44,300	1975	30,200
1969	15,200	1976	14,100
1970	9190	1977	54,500
1971	9740	1978	12,700

Veybul və Qrinqorten düsturlarından istifadə edərək maksimal su sərfələrinin kumulyativ (cəm) paylanma funksiyalarını qurun. Alınan nəticələri müqayisə edin.

Həlli: Müşahidə sırası azalma qaydasında düzülür və aşağıdakı cədvəlin 2-ci sütununda yazılır.

Sıranın uzunluğu $N = 14$ ildir. Veybul düsturuna görə empirik təminatlar hesablanır:

$$P(Q > q_m) = \frac{m}{N+1} = \frac{m}{14+1} = \frac{m}{15}.$$

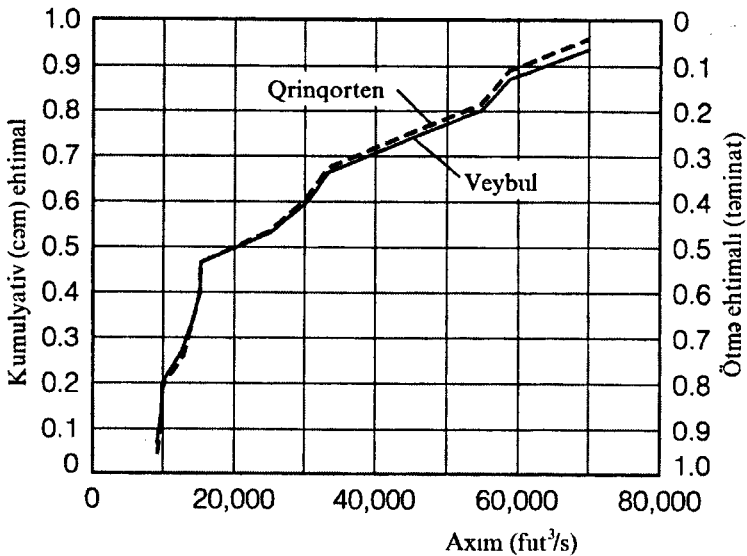
Bu empirik təminatlar cədvəlin 3-cü sütununda yazılır. Qrinqorten düsturuna görə empirik təminatlar hesablanır ($a = 0,40$ qəbul olunur):

$$P(Q > q_m) = \frac{m-a}{N+1-2a} = \frac{m-0.40}{14+1-2(0.40)} = \frac{m-0.40}{14.2}$$

və empirik təminatlar cədvəlin 4-cü sütununda yazılır.

Hər iki düstura görə hesablanmış empirik təminatlara əsasən ehtimalın kumulyativ paylanma funksiyası qurulmuşdur (şəkil 3.4). Bu əyrilər çox oxşardır. Su sərfələrinin böyük qiymətləri üçün Qrinqorten düsturu ilə hesablanmış empirik təminatlar daha kiçik qiymətlər alır və müvafiq olaraq daha böyük təkrarlanma dövrünə malikdir.

m	Mak.su sərfi (fut^3/s)	Veybul $P(Q > q_m)$	Qrinqorten $P(Q > q_m)$
(1)	(2)	(3)	(4)
1	70,000	0.067	0.042
2	58,500	0.133	0.113
3	54,500	0.200	0.183
4	44,300	0.267	0.253
5	33,100	0.333	0.324
6	30,200	0.400	0.394
7	25,200	0.467	0.465
8	15,200	0.533	0.535
9	15,000	0.600	0.606
10	14,100	0.667	0.676
11	12,700	0.733	0.746
12	9790	0.800	0.817
13	9740	0.867	0.887
14	9190	0.933	0.958



Şəkil 3.4. Qrinqorten və Veybul düsturlarına görə qurulmuş integral paylanma funksiyaları

3.2. Hidrometeorologiyada istifadə olunan analitik paylanma funksiyaları

Hidrometeoroloji müşahidə sıraları qısa olduğuna görə empirik təminatlar əyrisi (empirik nöqtələrin düzülüşü) hətta ehtimallar damasında mürəkkəb formalı-bəzi hissələri batıq, bəzi hissələri isə qabarıq olur. Digər tərəfdən, kiçik və böyük təminatlar zonalarında empirik nöqtələr olmur. Məsələn, cədvəl 3.2 və şəkil 3.3-dən görünür ki, maksimal su sərfələrinin empirik təminatları 3,03%-lə 97% arasında qiymətlər alır. Lakin I sinif hidrotexniki qurğular layihələndirildikdə 0,01% təminatlı su sərfi hesablanmalıdır. Belə məsələləri həll etmək üçün empirik təminatlar əyrisi böyük və kiçik qiymətlər zonasına ekstrapolyasiya olunmalıdır. Ekstrapolyasiya gözəyari yerinə yetirə bilməz, çünki alınan nəticələr subyektiv xarakter daşıyacaq.

Hidrometeorologiyada empirik təminat əyrilərini hamarlaşdırmaq və ekstrapolyasiya etmək üçün ehtimalların paylanma funksiyalarından istifadə olunur. Hidroloqlar bu funksiyaları analitik təminatlar əyriləri adlandırırlar. Bu bölmədə hidrometeorologiyada istifadə edilən analitik paylanma funksiyaları (analitik təminat əyriləri) təhlil olunur.

3.2.1. Normal paylanma

Təbiətdə çoxsaylı asılı olmayan və ya zəif asılı olan təsadüfi kəmiyyətlərin cəmi kimi baxıla bilən təsadüfi kəmiyyətlər geniş yayılmışdır. Belə təsadüfi kəmiyyətlərin toplananlarının dispersiyalar ümumi cəmin (dispersiyası) ilə müqayisədə azdır. Mərkəzi limit teoreminə görə belə təsadüfi kəmiyyətlərin paylanması normal paylanma ilə yaxşı aproksimasiya olunur. Buna görə də normal paylanma geniş tətbiq edilir. Normal paylanma həm də Qaus və ya Qaus-Laplas paylanması da adlandırılır.

Normal paylanma üçün ehtimalın sıxlıq funksiyası aşağıdakı ifadəyə görə təyin olunur:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma_x \sqrt{2\pi}} \exp \left[\frac{-(x - m_x)^2}{2\sigma_x^2} \right]$$

$$f(x) = \frac{1}{\sigma_x \sqrt{2\pi}} \exp \left[\frac{-(x - m_x)^2}{2\sigma_x^2} \right], \quad (3.10)$$

burada π - "pi" ədədidir.

Normal paylanma ikiparametrlidir, yəni iki parametrdən asılıdır: riyazi gözləmə, m_x , və orta kvadratik meyilmədən, σ_x .

Normal paylanmanın ehtimal sıxlığı funksiyasının qrafiki şəkil 2.8 a-da göstərilir. Bu şəkildən görüldüyü kimi normal paylanma simmetrikdir və onun üçün asimetriya əmsalı sıfıra bərabərdir ($C_s = 0$), moda, mediana və riyazi gözləmə isə eynidir. Normal paylanmaya təbə olan təsadüfi kəmiyyətin mümkün qiymətlər oblastı $(-\infty, +\infty)$ intervalıdır. $(-\infty, +\infty)$

Bu paylanmanın inteqral funksiyası aşağıdakı kimidir:

$$F(x) = \frac{1}{\sigma_x \sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x \exp \frac{-(z - m_x)^2}{2\sigma_x^2} dz, \quad (3.11)$$

burada z - inteqrallamanın dəyişənidir.

Bu düsturdakı inteqralı elementar funksiyalarla ifadə etmək olmaz və buna görə də normal paylanmanın ordinatları, adətən cədvəl şəklində verilir. Riyazi gözləmə, m_x , və orta kvadratik meyilmənin, σ_x , müxtəlif qiymətlər cütlükləri üçün çoxsaylı cədvəllər çap etməməkdən ötrü X təsadüfi kəmiyyəti əvəzinə normallaşdırılmış t (və ya z) təsadüfi kəmiyyətindən istifadə olunur (cədvəl 3.3), çünki X və t kəmiyyətlərini düstur (2.48) əlaqələndirir.

Normallaşdırılmış t təsadüfi kəmiyyəti üçün $m_t = 0$ və $\sigma_t = 1$ olduğuna görə, onun paylanma funksiyalarının ifadələri aşağıdakı kimidir:

$$f(x) = (1/\sqrt{2\pi}) \exp(-t^2/2), \quad (3.12)$$

$$F(X) = \left(1/\sqrt{2\pi}\right) \int_{-\infty}^x \exp(-z^2/2) dz. \quad (3.13)$$

Cədvəl 3.3

Normal paylanan t təsadüfi kəmiyyətinin normallaşdırılmış kvantilləri ($F(t)$ -nin qiymətləri %-lə verilmişdir)

$F(t)$	t	$F(t)$	t
0.01	-3.72	60	0.25
0.1	-3.09	70	0.52
0.5	-2.58	75	0.67
1	-2.33	80	0.84
2	-2.02	90	1.28
2.5	-1.96	95	1.64
3	-1.88	97	1.88
5	-1.64	97.5	1.96
10	-1.28	98	2.02
20	-0.84	99	2.33
25	-0.67	99.5	2.58
30	-0.52	99.9	3.09
40	-0.25	99.99	3.72
50	0.00		

Normallaşdırılmış təsadüfi kəmiyyətin qiymətlərindən ilkin qiymətlərə keçmək üçün aşağıdakı düsturdan istifadə olunur:

$$x_p = t_p \sigma_p + m_x \quad (3.14)$$

və ya modul əmsalları üçün

$$K_p = t_p C_v + 1 \quad (3.15)$$

Nəzəri cəhətdən, hidrometeoroloji kəmiyyətlərin əksəriyyəti normal paylana bilməz, çünki onların qiyməti mənfi olmur və o, $0 + \infty$ intervalında dəyişir. Məlum olduğu kimi, normal paylanan təsadüfi kəmiyyətlər $-\infty$ və $+\infty$ arasında qiymətlər alır. Lakin təsadüfi kəmiyyətin orta qiyməti orta kvadratik meyletmədən üç-dörd dəfə böyük olarsa, onda bir çox hallarda onun normal paylandığını qəbul etmək olar (Haan, 1977). Məsələn, illik yağıntılar,

havanın temperaturu və təzyiqi, marşrut boyu qar örtüyünün qalınlığı, axın sürətinin turbulent pulsasiyaları demək olar ki, normal paylanır. Lakin bunu sutkalıq yağıntı layı, küləyin sürəti, buludluq haqqında demək olmaz.

Misal 3.4. İllik yağış layı normal paylanır. Sıranın orta kəmiyyəti 127 sm və orta kvadratik meylectməsi 19 sm təşkil edir. 50 ildə 1 dəfə təkrarlanan yağış layını təyin edin.

Həlli: 50 ildə 1 dəfə təkrarlanan yağış layı, x_{50} , təkrarlanma əmsalından, K_{50} , istifadə etməklə aşağıdakı kimi yazıla bilər:

$$x_{50} = \mu_x + K_{50} \sigma_x,$$

Bu yağış layına uyğun empirik təminat tapılır:

$$p = \frac{1}{T} = \frac{1}{50} = 0.02 \text{ və ya } 2\%$$

Aralıq w kəmiyyəti hesablanır:

$$w = \left[\ln \left(\frac{1}{p^2} \right) \right]^{1/2} = \left[\ln \left(\frac{1}{0.02^2} \right) \right]^{1/2} = 2.797,$$

təkrarlanma əmsalı təyin olunur:

$$K_{50} = w - \frac{2.515517 + 0.802853w + 0.010328w^2}{1 + 1.432788w + 0.189269w^2 + 0.001308w^3} =$$

$$= 2.797 - \frac{2.515517 + 0.802853(2.797) + 0.010328(2.797)^2}{1 + 1.432788(2.797) + 0.189269(2.797)^2 + 0.001308(2.797)^3} = 2.054$$

50 ildə 1 dəfə təkrarlanan yağış layı qiymətləndirilir:

$$x_{50} = \mu_x + K_{50} \sigma_x = 127 + 2.054(19) = 166 \text{ sm}.$$

Misal 3.5. Məlumdur ki, X təsadüfi kəmiyyəti parametrləri $m_x = 10, \sigma_x = 5$ olan normal paylanma qanununa tabedir. x_p -nin 95%-i aşmayan ehtimalla müvafiq 5% təminatlı qiymətini tapın (yəni, $F(x) = 95\%$ olduqda).

Həlli: 1. Cədvəl 3.3-ə əsasən normallaşdırılmış t təsadüfi kə-

miyyətinin 95%-li kvantili təyin edilir: $t'_{95} = 1,64$.

2. Məlum düstura görə:

$$x'_{95} = t_{95}\sigma_{95} + m_x = 1,64 \cdot 5 + 10 = 18,2.$$

Misal 3.6. Əvvəlki misaldan X təsadüfi kəmiyyəti üçün x_p -nin 1% təminatı müvafiq qiymətini təyin edin ($P(x)=1\%$ olduqda).

Həlli: 1. Cədvəl 3.3-də integral paylanma funksiyasının ordnatları verildiyindən, əvvəlcə normallaşdırılmış t təsadüfi kəmiyyəti üçün $F(t)$ (%) -lə) təyin edilir:

$$F(t) = 100 - P(t) = 100 - 1 = 99\%.$$

2. Cədvəl 3.3-dən normallaşdırılmış t təsadüfi kəmiyyətinin 99%-li kvantili təyin edilir:

$$t'_{99} = 2,33.$$

3. Aşağıdakı düstura əsasən $x_{1\%}$ hesablanır:

$$x_{1\%} = x'_{99} = 2,33 \cdot 5 + 10 = 21,65.$$

Misal 3.7. Çay sutoplayıcısına düşən illik yağış layının orta qiyməti 130 sm, orta kvadratik meylectməsi isə 15,6 sm təşkil edir. Əgər, yağış layı normal paylanma qanununa tabedirsə, hər hansı bir ildə yağış layının 101,6 sm-dən az olma ehtimalını hesablayın.

Həlli: Şərtə görə: $\mu_x = 130.0$ sm, və $\sigma_x = 15.6$ sm. İllik yağış layı $x = 101.6$ sm olduqda, standart normallaşdırılmış kəmiyyət:

$$z = \frac{x - \mu_x}{\sigma_x} = \frac{101.6 - 130.0}{15.6} = -1.82$$

Standart normallaşdırılmış kəmiyyət, $z < 0$ ($z \leq -1.82$) olduğuna görə $F(-1.82) = B$.

$$\begin{aligned} B &= \frac{1}{2} \left[1 + 0.196854|z| + 0.115194|z|^2 + 0.000344|z|^3 + 0.019527|z|^4 \right]^4 = \\ &= \frac{1}{2} \left[1 + 0.196854|-1.82| + 0.115194|-1.82|^2 + 0.000344|-1.82|^3 + \right. \\ &\quad \left. + 0.019527|-1.82|^4 \right] = 0.034 \end{aligned}$$

və beləliklə:

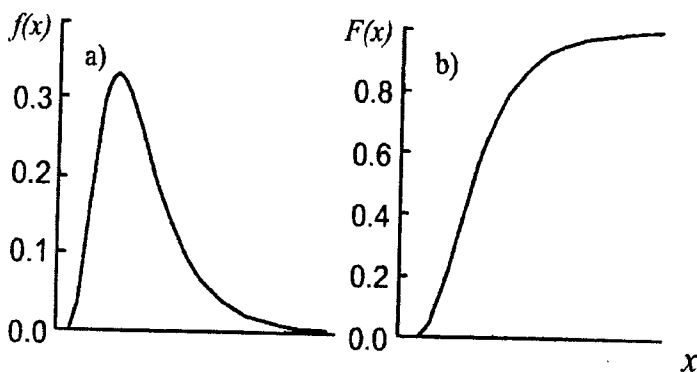
$$F(-1.82) = 0.034 = 3.4\%.$$

İllik yağış layının 101,6 sm-dən az olma ehtimalı 3,4 %-dir.

3.2.2. Loqarifmik-normal paylanma

Əvvəlki paraqrafda qeyd olunduğu kimi, hidrometeoroloji kəmiyyətlərin əksəriyyəti müsbət asimmetriyalıdır və buna görə onlar normal paylanmır. Lakin bir çox hallarda dəyişən kəmiyyəti onun loqarifmi ilə əvəzləməklə asimmetrik paylanmanı normal paylanmaya gətirmək olar.

Müsbət təsadüfi X kəmiyyətinin loqarifmi, $Z = \ln(X)$, normal paylanırsa, onda X kəmiyyəti loqarifmik-normal paylanır (şəkil 3.5).



Şəkil 3.5. Loqarifmik-normal qanunun ($m_z=1$ və $\sigma_z=0.5$) diferensial (a) və integral (b) paylanma funksiyaları

Loq-normal paylanmanın integral funksiyası aşağıdakı kimidir:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \text{ olduqda} \\ F(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^u \exp \frac{-s^2}{2} ds & x > 0 \text{ olduqda} \end{cases} \quad (3.16)$$

burada $u = (z - m_z) / \sigma_z$; $z = \ln(x)$; s -inteqrallamanın dəyişənidir.

Bu ifadə diferensiaslandıqda loq-normal paylanma üçün ehtimalın sıxlıq funksiyası alınır:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \text{ olduqda} \\ \frac{1}{\sigma_z x} f(u) = \frac{1}{\sigma_z x \sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{u^2}{2}\right) & x > 0 \text{ olduqda} \end{cases} \quad (3.17)$$

Beləliklə, bu paylanmanın iki parametri var: Z təsadüfi kəmiyyətinin riyazi gözləməsi, (m_z) və orta kvadratik meyletməsi, (σ_z^2) .

X və Z təsadüfi kəmiyyətlərinin riyazi gözləmə və orta kvadratik meyletmələri arasında asılılıq var:

$$m_z = \ln(m_x) - \frac{\sigma_z^2}{2} = \ln(m_x) - \frac{\ln(\sigma_x^2 / m_x^2 + 1)}{2}, \quad (3.18)$$

$$\sigma_z^2 = \ln\left(\frac{\sigma_x^2}{m_x^2} + 1\right). \quad (3.19)$$

Log-normal paylanmanın asimetriya əmsalı aşağıdakı düstura görə təyin olunur:

$$C_s = 3C_v + C_v^3, \quad C_v = \frac{\sigma_x}{m_x} \quad (3.20)$$

burada $C_v = \sigma_x / m_x$. Hidrometeoroloji xarakteristikaların əksəriyyəti üçün $C_v < 1$ olduğuna görə, $C_s / C_v = 3,0 - 3,5$ olduqda empirik və loq-normal analitik təminat ayrılırları bir-birinə daha uyğun olur.

Loq-normal paylanan X təsadüfi kəmiyyətinin moda və medianası aşağıdakı ifadələrə görə qiymətləndirilir:

$$M_0 = \exp(m_z - \sigma_z^2); \quad (3.21)$$

$$Me = \exp(m_z). \quad (3.22)$$

Loq-normal analitik təminat əyrisinin ordinatlarını təyin etmək üçün standart normal paylanmanın cədvəllərindən istifadə olunur. Lakin təsadüfi kəmiyyət kimi $Z = \ln(X)$ götürülür.

Loq-normal paylanma daşqınların maksimal su sərfələrinin (Çin, Yaponiya, Böyük Britaniya, Rusiya, Bolqarıstan) və sutkalıq yağış layının hesablanmasıda istifadə olunur.

Misal 3.8. İllik yağış layı loqarifmik-normal paylanır. Sıranın orta kəmiyyəti 127 sm və orta kvadratik meylectməsi 19 sm təşkil edir. Yağış layının 50 ildə 1 dəfə təkrarlanmaya uyğun qiymətini təyin edin.

Həlli: Yağış layının müşahidə olunmuş qiymətlərinin orta kəmiyyəti, μ_x , və orta kvadratik meylectməsi, σ_x , ilə $Y = \ln X$ ifadəsinə görə alınmış sıranın müvafiq parametrləri, μ_y və σ_y , arasında aşağıdakı əlaqələr var:

$$\mu_x = \exp\left(\mu_y + \frac{\sigma_y^2}{2}\right), \quad \sigma_x^2 = \mu_x^2 [\exp(\sigma_y^2) - 1].$$

Bu ifadələr aşağıdakı kimi də yazıla bilər:

$$\mu_y = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{\mu_x^4}{\mu_x^2 + \sigma_x^2}\right), \quad \sigma_y = \sqrt{\ln \frac{\sigma_x^2 + \mu_x^2}{\mu_x^2}}.$$

Beləliklə,

$$\mu_y = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{127^4}{127^2 + 19^2}\right) = 4.83.$$

və

$$\sigma_y = \sqrt{\ln \frac{19^2 + 127^2}{127^2}} = 0.149.$$

Yağış layının 50 ildə 1 dəfə təkrarlanan qiyməti y_{50} , aşağıdakı düstura görə hesablanır:

$$y_{50} = \mu_y + K_{50} \sigma_y.$$

$K_{50}=2.054$ olduğuna görə:

$$y_{50} = 4.83 + 2.054(0.149) = 5.14$$

və təkrarlanma dövrü 50 ildə 1 dəfə olan yağış layı aşağıdakı kimi hesablanır:

$$x_{50} = e^{y_{50}} = e^{5.14} = 171 \text{ sm.}$$

Misal 3.9. Loqarifmik-normal paylanma qanunundan istifadə etməklə cədvəl 3.1-in məlumatlarına görə çayın 1% təminatlı, Q_1 , maksimal su sərfini təyin edin.

Həll 1. İlkın sıranın hədləri $z_i = \ln Q_i$ düsturuna əsasən dəyişdirilir və yeni sıra tərtib olunur.

2. Z təsadüfi kəmiyyətlər sırasına əsasən təqribi olaraq m_z və σ_z təyin edilir:

$$m_z = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n z_i \approx 3,87, \sigma_z = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (z_i - m_z)^2} \approx 0,64.$$

3. Cədvəl 3.3-də inteqral paylanma funksiyasının ordinatları verildiyindən, o, təminat paylanma funksiyası ilə əvəz edilir: $F(t)=100- P(t)=100-1=99\%$.

4. Cədvəl 3.3-ə əsasən normal paylanmış normallaşdırılmış t təsadüfi kəmiyyətinin 99%-li kvantili təyin edilir: $t'_{99} = 2,33$.

5. z_1 hesablanır:

$$z_1 = z'_{99} = \sigma_z t'_{99} + m_z = 2,33 \times 0,64 + 3,87 = 5,36.$$

6. $z_1 = \ln Q_1$, olduğundan, $Q_1 = \exp(z_1) = \exp(5,36) = 213 \text{ m}^3/\text{s}$.

Həll 2.

1. Bilavasitə ilkin sıraya əsasən (cədvəl 3.1) təqribi olaraq m_Q və σ_Q təyin edilir:

$$m_Q \approx 58,44; \sigma_Q \approx 37,19.$$

2. m_z və σ_z hesablanır:

$$\begin{aligned} \sigma_z^2 &= \ln \left(\frac{\sigma_x^2}{m_x^2} + 1 \right) = \ln \left[\frac{(37,19)^2}{(58,44)^2} + 1 \right] = \\ &= 0,34; \sigma_z = 0,58; \end{aligned}$$

$$m_z = \ln(m_x) - \frac{\sigma_z^2}{2} = \ln(m_x) - \frac{\ln(\sigma_x^2/m_x^2 + 1)}{2} = \\ = \ln(58,44) - 0,34/2 = 3,90.$$

3. Sonrakı hesablamalar birinci variantda olduğu kimi yerinə yetirilir:

$$t'_{99} = 2,33; z_1 = z'_{99} = 2,33 \cdot 0,58 + 3,90 = 5,25; \\ Q_1 = \exp(5,25) = 191 \text{ m}^3/\text{s}.$$

Göründüyü kimi, m_z və σ_z parametrlərinin müxtəlif variantlarda hesablanmış qiymətləri bir qədər fərqlənir. 1% təminatlı su sərfələrinin, Q_1 qiymətlərinin ($213 \text{ m}^3/\text{s}$ və $191 \text{ m}^3/\text{s}$) fərqi 12% təşkil edir. Bu onu göstərir ki, baxılan sıra loq-normal əyri ilə aproksimasiya oluna bilər, lakin bu aproksimasiya ideal deyil.

Misal 3.10. Qvadalupe (Guadalupe) çayının Viktoriya yaxınlığında (Texas) maksimal su sərfinin orta çoxillik qiyməti $801 \text{ m}^3/\text{s}$, standart meyletməsi $851 \text{ m}^3/\text{s}$, məcranın suburaxma qabiliyyəti $900 \text{ m}^3/\text{s}$ təşkil edir. Su sərfələri log-normal qanuna müvafiq paylanırsa, maksimal su sərfinin məcranın suburaxma qabiliyyətini ötmə (aşma) ehtimalını təyin edin.

Həlli: Şərtə görə $\mu_x = 801 \text{ m}^3/\text{s}$ və $\sigma_x = 851 \text{ m}^3/\text{s}$.

$$\exp(\mu_y + \sigma_y^2 / 2) = 801 \quad (= \mu_x),$$

və

$$(801)^2 [\exp(\sigma_y^2) - 1] = (851)^2 (= \sigma_x^2),$$

buradan:

$$\mu_y = 6.31 \text{ və } \sigma_y = 0.870.$$

Əgər, $x = 900 \text{ m}^3/\text{s}$, olarsa onda loqarifmik dəyişdirilmiş y dəyişəni $y = \ln 900 = 6.80$ və normallaşdırılmış təsadüfi z kəmiyyəti:

$$z = \frac{y - \mu_y}{\sigma_y} = \frac{6.80 - 6.31}{0.870} = 0.563.$$

Standart normallaşdırılmış kəmiyyət $z > 0$ ($z \leq 0,563$) olduğuna görə $F(0,563) = 1 - B$

$$B = \frac{1}{2} \left[1 + 0.196854|z| + 0.115194|z|^2 + 0.000344|z|^3 + 0.019527|z|^4 \right]^{-4}$$

$$= \frac{1}{2} \left[1 + 0.196854|0.563| + 0.115194|0.563|^2 + 0.000344|0.563|^3 + 0.019527|0.563|^4 \right]^{-4} = 0.286$$

buradan:

$$F(0.563) = 1 - B = 1 - 0.286 = 0.714 = 71,4\%.$$

Çayın maksimal su sərfinin məcranın suburaxma qabiliyyətini ötmə ehtimalı $1 - 0.714 = 0.286 = 28,6\%$ təşkil edir. Bu kifayət qədər böyük ehtimaldır və faktik olaraq, baxılan hadisə hər il baş verə bilər.

3.2.3. Binomial paylanma

Binomial və ya Bernulli paylanması diskret paylanmadır. Bu paylanma, keyfiyyətə yalnız iki nəticə ilə səciyyələnən istənilən hadisəyə tətbiq oluna bilər. Məsələn, çay quruyur və ya çayda axın var, temperatur donma nöqtəsindən aşağı və ya yuxarıdır, maksimal su sərfi verilən qiymətdən böyük və ya kiçikdir və s.

Binomial paylanma belə yazılır:

$$f(n) = \frac{N!}{n!(N-n)!} P^n (1-P)^{N-n}, \quad (3.23)$$

burada N - ümumi sınaqların sayı; n - uğurlu sınaqların sayı; P - uğurlu sınaqların ehtimalıdır.

Bu paylanma aşağıdakı kimi də yazıla bilər:

$$f(n) = \binom{N}{n} P^n (1-P)^{N-n}, \quad (3.24)$$

burada

$$\binom{N}{n} = \frac{N!}{n!(N-n)!}, \quad (3.25)$$

bu axırıncı ifadə binomial əmsal adlanır.

Binomial paylanmanın parametrləri aşağıdakı düsturlara görə təyin olunur:

$$m_n = \mu_n = NP; \quad (3.26)$$

$$\sigma_n^2 = NP(1-P); \quad (3.27)$$

$$C_s = g = \frac{1-2p}{NP(1-P)}. \quad (3.28)$$

Binomial paylanma, $f(n)$, $p = 0,5$ olduqda simmetrik, $p < 0,5$ olduqda müsbət asimmetriyalı, $p > 0,5$ olduqda isə mənfi asimmetriyalı olur.

Misal 3.11. Yaşayış məntəqəsindən yağış sularını kənarlaşdıran sistem təkrarlanma dövrü 10 il olan leysana görə layihələndirilir. Bu sistemin 20 ildə 1 dəfə sıradan çıxma ehtimalını qiymətləndirin. Sistemin 20 ildə ən azı 1 dəfə sıradan çıxma ehtimalı nə qədərdir?

Həlli: Sistem suyu o halda kənarlaşdırma bilməz ki, leysan layı hesabi (layihədə nəzərdə tutulan) laydan böyük olsun. 10 ildə 1 dəfə təkrarlanan leysanın ehtimalı $P=1/10=0,1$ (və ya 10%) təşkil edir. Təkrarlanma dövrü 10 il olan leysanın 20 ildə 1 dəfə ötmə ehtimalı binomial paylanmaya görə qiymətləndirilə bilər:

$$f(n) = \frac{N!}{n!(N-n)!} p^n (1-p)^{N-n},$$

burada $n = 1$, $N = 20$ və $p = 0.1$. Bu qiymətləri yerinə yazsaq:

$$f(1) = \frac{20!}{1!(20-1)!} (0.1)^1 (1-0.1)^{20-1} = 0.27.$$

Beləliklə, baxılan sistemin 20 ildə 1 dəfə sıradan çıxma ehtimalı 27%-dir.

10 ildə 1 dəfə təkrarlanan leysanın 20 ildə ən azı 1 dəfə ötmə ehtimalı aşağıdakı kimi hesablanır:

$$P = \sum_{i=1}^{20} f(i) = 1 - f(0) = 1 - \frac{20!}{0!(20-0)!} (0.1)^0 (1-0.1)^{20-0} = 1 - 0.12 = 0.88.$$

Hesabi kəmiyyətin ən azı 1 dəfə ötmə ehtimalı sistemin riski, və ötməmə ehtimalı isə sistemin etibarlılığı adlanır. Bu misalda, 20 il ərzində sistemin öz funksiyasını yerinə yetirə bilməməsi riski 88%, həmin dövr ərzində etibarlılığı isə 12%-dir.

Misal 3.12. Çayın su rejimi üzərində 20 il müşahidələr yerinə yetirilmiş və 4 ildə quruma hadisəsi qeydə alınmışdır. Növbəti 20 il ərzində çayda 8 dəfə quruma müşahidə olunmasının ehtimalını təyin edin.

Həlli: Hesablamalar aşağıdakı ardıcılıqla yerinə yetirilir:

1. Müşahidə dövrü ərzində çayın quruma ehtimalı tapılır:

$$P = \frac{n}{N} = \frac{4}{20} = 0,2.$$

2. Binomial paylanmanın düsturuna görə çayın növbəti 20 ildə 8 dəfə quruma ehtimalı hesablanır:

$$P_{20}(8) = \frac{N!}{n!(N-n)!} P^n (1-P)^{N-n} = \frac{20!}{8!(20-8)!} 0,2^8 (1-0,2)^{20-8} = 0,0221$$

və ya 2,21%.

3.2.4. Puasson paylanması

Puasson paylanması $N \rightarrow \infty$, $p \rightarrow 0$ olduqda və $Np = \lambda$ sabit sonlu qiymətini saxladıqda diskret binomial paylanmadan onun limiti kimi alınır:

$$\lim_{N \rightarrow \infty, p \rightarrow 0} \frac{N!}{n!(N-n)!} P^n (1-P)^{N-n} = \frac{(NP)^n e^{-Np}}{n!}, \quad (3.29)$$

burada N, n və P -binomial paylanmadakı işarələrlə eynidir.

Əgər, $Np = \lambda$ qəbul etsək, onda Puasson paylanması aşağıdakı kimi yazılar:

$$f(n) = \frac{\lambda^n e^{-\lambda}}{n!}. \quad (3.30)$$

Bu düsturdan göründüyü kimi, Puasson paylanmasının yalnız bir parametri, λ , var.

Diskret Puasson paylanmasının orta qiyməti, dispersiyası və asimmetriya əmsalı aşağıdakı ifadələrə görə təyin olunur:

$$\mu_n = m_n = \lambda, \quad \sigma_n^2 = \lambda, \quad g_n = C_s = \lambda^{-\frac{1}{2}}. \quad (3.31)$$

Bu paylanma üçün orta qiymət və dispersiya bir-birinə bərabərdir. Variasiya və asimmetriya əmsalları da bərabərdir:

$$C_s = C_v = \lambda^{-\frac{1}{2}}.$$

Beləliklə, əgər, diskret təsadüfi kəmiyyət sırası üçün $m_n \approx \sigma_n^2 \approx \mu_3 \approx \lambda$ şərti ödənilirsə, onda hesab etmək olar ki, bu təsadüfi kəmiyyət Puasson qanununa görə paylanır (μ_3 – üçüncü mərkəzi momentdir).

Misal 3.13. 1903-1988 ci illərdə Florida ştatında müşahidə olunan tropik siklonların sayı aşağıdakı cədvəldə verilmişdir:

	00	01	02	03	04	05	06	07	08	09
1900				1	1	0	2	0	0	1
1910	1	1	0	0	0	1	2	1	0	1
1920	0	1	0	0	2	1	2	0	2	1
1930	0	0	1	2	0	2	1	0	0	1
1940	0	1	0	0	1	2	1	2	2	1
1950	2	0	0	1	0	0	1	0	0	0
1960	1	0	0	3	0	1	2	0	1	0
1970	0	0	1	0	0	1	0	0	0	1
1980	0	0	0	0	0	2	0	1	0	

İl ərzində müşahidə olunmuş tropik siklonların sayının Puasson paylanmasına uyğunluğunu nəzərə alaraq bu paylanmanın parametrlərini təyin edin. Floridada bir ildə 3 tropik siklonun müşahidə olunma ehtimalını qiymətləndirin.

Həlli: Puassonun paylanma funksiyası, $f(n)$, aşağıdakı kimidir:

$$f(n) = \frac{(\lambda t)^n e^{-\lambda t}}{n!},$$

burada n – bir ildə müşahidə olunmuş hadisələrin sayı, λt parametri isə orta qiymət, μ_n , və orta kvadratik meyletmə ilə funksional əlaqəlidir.

Müşahidə sırasının uzunluğu 86 il təşkil edir və bir ildə müşahidə olunmuş tropik siklonların orta sayı, μ_n , birinci dərəcəli moment kimi, $\bar{N}$, təyin olunur:

$$\mu_n \approx \bar{N} = \frac{1}{86} \sum n_i = \frac{1}{86} (56) = 0.65,$$

$\lambda t = 0.65$ olduğu üçün Puassonun paylanma funksiyası aşağıdakı kimi yazılır:

$$f(n) = \frac{0.65^n e^{-0.65}}{n!}.$$

Bir ildə 3 tropik siklonun ($n=3$) müşahidə olunma ehtimalı aşağıdakı kimi tapılır:

$$f(3) = \frac{0.65^3 e^{-0.65}}{3!} = 0.02 = 2\%.$$

Florida ştatında bir ildə ən azı bir tropik siklonun müşahidə olunma ehtimalı isə 48 % təşkil edir:

$$1 - f(0) = 1 - e^{-0.65} = 0.48 = 48\%.$$

Misal 3.14. Daşqına nəzarət sistemi təkarlanma dövrü 50 il olan maksimal su sərfinə görə layihələndirilir. Əgər, daşqının maksimal su sərfi Puasson paylanması ilə təsvir olunursa, onda sistemin istismar müddətinin ilk 10 ilində hesabi sərfin iki dəfə (iki hadisə) ötmə ehtimalını hesablayın. İlk 10 ildə hesabi sərfin

iki dəfədən çox (iki və daha çox sayda hadisə) ötmə ehtimalı nə qədərdir?

Həlli: Puasson paylanmasına görə baxılan hadisənin (maksimal su sərfinin) ötmə hallarının sayı aşağıdakı tənliklə hesablanı bilər:

$$f(n) = \frac{\lambda^n e^{-\lambda}}{n!}.$$

10 ildən artıq dövrdə ötmələrin gözlənilən sayı, λ , 50 ildə 1 dəfə təkrarlanan su sərfi üçün:

$$\lambda = Np = (10) \left(\frac{1}{50} \right) = 0.2$$

və hesabi sərfin iki dəfə ötmə ehtimalı:

$$f(2) = \frac{0.2^2 e^{-0.2}}{2!} = 0.016 = 1.6\%.$$

İlk 10 il ərzində hesabi sərfin iki dəfədən çox sayda ötmə ehtimalı belə hesablanır:

$$\begin{aligned} P &= 1 - [f(0) + f(1) + f(2)] = 1 - \left[\frac{0.2^0 e^{-0.2}}{0!} + \frac{0.2^1 e^{-0.2}}{1!} + \frac{0.2^2 e^{-0.2}}{2!} \right] = \\ &= 1 - [0.819 + 0.164 + 0.016] = 0.001. \end{aligned}$$

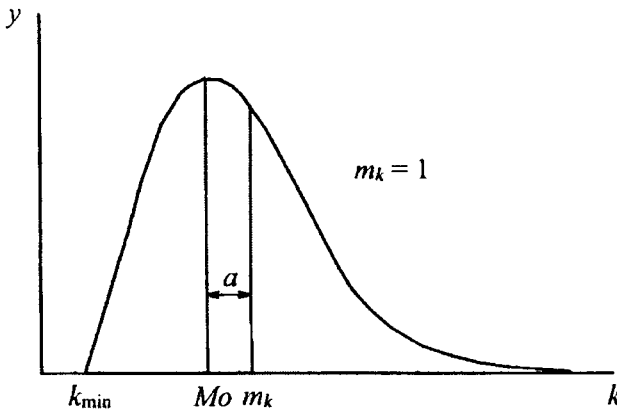
Beləliklə, təkrarlanma dövrü 50 il olan maksimal su sərfinin ilk 10 ildə iki dəfədən çox sayda ötmə ehtimalı cəmi 0,1%-dir.

3.2.5. Pirsonun III tip paylanması

Ehtimalın sıxlıq funksiyası birmodalı asimmetrik olan hidro-meteoroloji kəmiyyətlərin paylanma qanununu aproksimasiya etmək üçün A.Foster Pirsonun ümumi diferensial tənliyindən istifadə olunmasını təklif etmişdir:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y(z+a)}{b_0 + b_1 Z + b_2 Z^2}, \quad (3.32)$$

burada ~~Z -ilkin X təsadüfi kəmiyyəti ilə əlaqəli olan təsadüfi kəmiyyət~~ ($Z = X / m_x - 1 = k - 1$; k -modul əmsalı): y - Z təsadüfi kəmiyyəti ehtimalının sıxlıq funksiyasının ordinatı; a - paylanma mərkəzindən, m_k , modaya, M_0 , qədər olan məsafə; b_0 , b_1 , b_2 -parametrlərdir və onları dəyişdirməklə yeni tip paylanma ayrıləri almaq olar (şəkil 3.6).



Şəkil 3.6. Pirsonun III tip paylanması üçün ehtimalın sıxlıq funksiyasının tərtibi sxemi ($C_s/C_v > 2$ və $k_{min} > 0$ olduqda)

Hidroloji hesablamalar praktikasında Pirsonun III tip ayrılərlərdən (cəmi 13 tip Pirson ayrısı var) daha çox istifadə olunur. Bu ayri üçün $b_2 = 0$ və tənlik (3.32) sadələşir:

$$\frac{dy}{dz} = \frac{y(z+a)}{b_0 + b_1 z}. \quad (3.33)$$

Bu tənliyə bir qrup funksiya uyğun gəlir. Həqiqətən, $y(z)$ - in axtarılan sıxlıq funksiyası olması üçün bir neçə əlavə şərt qəbul olunmalıdır:

$$1. \int_{Z_{\min}}^{+\infty} y(z) dz = 1;$$

$$2. y(z) = 0 \quad Z = Z_{\min} \quad \text{olduqda};$$

$$3. y(z) = 0 \quad Z \rightarrow +\infty \quad \text{olduqda}.$$

Tənlik (3.33)-ü integralladıqdan sonra Z təsadüfi kəmiyyə-tindən modul əmsalına keçmək və bir sıra çevirmələr yerinə yetirməklə ehtimalın sıxlıq funksiyası üçün ifadə almaq olar:

$$y(k) = \begin{cases} 0 & k \leq k_{\min} \quad \text{olduqda} \\ \frac{\beta^\alpha (k - k_{\min})^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \exp[-\beta(k - k_{\min})] & k > k_{\min} \quad \text{olduqda}, \end{cases} \quad (3.34)$$

burada $\Gamma(\alpha)$ -qamma funksiya; α və β - X təsadüfi kəmiyyə-tinin variasiya və asimmetriya əmsalları ilə aşağıdakı ifadələrlə əlaqəli olan paylanma parametrləridir:

$$\alpha = (2/C_s)^2; \quad (3.35)$$

$$\beta = 2/(C_s \cdot C_v). \quad (3.36)$$

Qeyd etmək lazımdır ki, X təsadüfi kəmiyyəti modul əmsalları ilə əvəz olunduqda C_v və C_s dəyişmir.

Modul əmsalının minimal qiyməti, $k_{\min}$, aşağıdakı düstura görə təyin olunur:

$$k_{\min} = 1 - 2C_v / C_s. \quad (3.37)$$

Bu düsturdan belə alınır ki,

$$C_s = 2C_v \quad K_{\min} = 0 \quad \text{olduqda},$$

$$C_s > 2C_v \quad K_{\min} > 0 \quad \text{olduqda},$$

$$C_s < 2C_v \quad K_{\min} < 0 \quad \text{olduqda}.$$

✓ Bu isə o deməkdir ki, Pirsonun III tip paylanmasının diferen-

sial əyrisi $C_s = 2C_v$ olduqda sıfırdan, $C_s > 2C_v$ olduqda müəyyən bir müsbət ədəddən başlayır və $C_s < 2C_v$ olduqda isə mənfi ədədlər oblastına keçir.

C_v və C_s parametrlərinin qiymətləri məlum olduqda $K_{\min}$, α , β parametrlərini hesablayıb, modul əmsallarının təminatlarını təyin etmək üçün aşağıdakı ifadəni almaq olar:

$$P(k) = \int_k^{+\infty} y(s) ds = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \int_k^{+\infty} (s - k_{\min})^{\alpha-1} \exp[-\beta(s - k_{\min})] ds, \quad (3.38)$$

burada s -inteqrallamanın dəyişənidir.

$C_s = 2C_v$ olduqda $k_{\min} = 0$, $\alpha = 1/C_v^2$, $\beta = 1/C_v^2$ alınır və (3.34), (3.38) tənlikləri xeyli sadələşir:

$$y(k) = \frac{\alpha^\alpha}{\Gamma(\alpha)} k^{\alpha-1} \exp(-\alpha k); \quad (3.39)$$

$$P(k) = \frac{\alpha^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \int_k^{+\infty} s^{\alpha-1} \exp(-\alpha s) ds. \quad (3.40)$$

Tənlik (3.39) ikiparametrlı gamma paylanma və ya Γ -paylanma adlanır.

Pirsonun III tip təminatlar əyrisi (3.38) ümumi halda üçparametrlidir və birmənalı olaraq C_v və C_s parametrləri ilə təyin olunur: üçüncü parametri, (m) , modul əmsallarından X təsadüfi kəmiyyətinin qiymətlərinə keçmək üçün bilmək lazımdır.

Bu əyrinin aşağı limiti ($k_{\min}$), var, yuxarıdan isə o məhdudlanmır. C_s sıfıra yaxınlaşdıqca, Pirsonun III tip əyrisi normal paylanmaya yaxınlaşır.

Adətən, Pirsonun III tip əyrisinin ordinatları cədvəl şəklində verilir (Əlavə 1). Bu onunla əlaqədardır ki, (3.38) və (3.40) tənliklərinin ədədi həlli çox zəhmət tələb edir.

Qeyd olunan cədvəllərdə normallaşdırılmış təsadüfi kəmiyyətin qiymətləri verilir. Bu qiymətlər təminat və asimmetriya əmsalına görə təyin olunur. Normallaşdırılmış ordinatlardan

baxılan kəmiyyətin ilkin qiymətlərinə keçmək üçün (3.14) və (3.15) düsturlarından istifadə olunur.

✓ Pirsonun III tip əyrisi hidroloqlar üçün xüsusi əhəmiyyət kəsb edir, çünki o, hidroloji hesablamalar praktikasında tətbiq olunmuş ilk əyridir. Pirsonun III tip paylanması cədvəllərini ilk dəfə A.Foster 1924-cü ildə çap etdirmişdir.)

Keçmiş SSRİ-də bu əyridən ilk dəfə 1930-cu ildə D.L.Sokolovski istifadə etmişdir. A.Fosterin cədvəllərini 1938-ci ildə S.İ.Rıbkın dəqiqləşdirmiş və genişləndirmişdir.

Hazırda Pirsonun III tip əyrisi bütün dünya üzrə hidroloji hesablamalar praktikasında ən populyar əyridir.

Bəzi ölkələrdə Pirsonun III tip məlum əyrisi ilə yanaşı Pirsonun III tip loqarifmik əyrisindən də istifadə edilir. Məsələn, ABŞ-da maksimal su sərfələrini Pirsonun III tip loqarifmik əyrisinə görə hesablanması tövsiyə olunur. Bu halda ilkin təsadüfi kəmiyyət, X , yox, onun loqarifmi, $\ln(X)$, Pirson paylanmasına uyğun olur.

Belə yanaşmada məqsəd, $C_s < 2C_v$ olduqda əyrini mənfi oblas-
tdan çıxartmaqdır.

Pirsonun III tip paylanması rusdilli elmi ədəbiyyatda həm də kəsilməz binomial paylanma, ingilisdilli ədəbiyyatda isə üçparametrlı gamma paylanma adlandırılır.

Misal 3.15. Pirsonun III tip təminat əyrisindən istifadə etməklə çayın (cədvəl 3.1) maksimal su sərfinin 1% təminatlı qiymətini, $Q_{1\%}$, hesablayın.

Həlli: 1. Verilmiş su sərfələri sırası üçün

$$m_Q \approx \bar{Q} = 58,4; \sigma_Q \approx 37,2; C_v \approx 0,64$$

təyin edilir.

2. Empirik məlumatlara əsasən C_s - in qiyməti böyük xəta ilə təyin edildiyindən, bütün baxılan hidroloji rayon üçün C_s/C_v nisbətinin orta qiyməti qəbul edilir: $C_s/C_v = 2,5$. Beləliklə, C_v və C_s/C_v –nisbətini bilməklə asimmetriya əmsalı təyin edilir: $C_s = 2,5 \cdot 0,64 = 1,60$.

3. Əlavə 1-dən Pirsonun III tip təminat əyrisinin normallaş-

dırılmış ordinatı tapılır: $t_{1\%}=3,39$.

4. $t_{1\%}$ -dən $Q_{1\%}$ -ə keçilir:

$$Q_{1\%}=t_{1\%} \sigma_Q + \bar{Q}=3,39 \cdot 37,2 + 58,4=185 \text{ m}^3/\text{s}.$$

Hesabi su sərfi başqa yolla da təyin edilə bilər. Əvvəlcə modul əmsalı hesablanır: $k_{1\%}=t_{1\%} C_v + 1=3,39 \cdot 0,64 + 1=3,17$.

Daha sonra su sərfi tapılır:

$$Q_{1\%}=k_{1\%} \bar{Q}=3,17 \cdot 58,4=185 \text{ m}^3/\text{s}.$$

Misal 3.16. Çayın maksimal su sərfələrinin orta kəmiyyəti $811 \text{ m}^3/\text{s}$, standart meyletməsi $851 \text{ m}^3/\text{s}$ və asimmetriya əmsalı $0,94$ -ə bərabərdir. Maksimal su sərfələri Pirsonun III tip ayrılmasına uyğun paylanır. Təkrarlanması 100 ildə 1 dəfə olan maksimal su sərfini qiymətləndirin. Əgər asimmetriya əmsalı $1,52$ olarsa, bu, hesabi maksimal su sərfinə necə təsir göstərir?

Həlli: Verilənlərə görə: $\mu_x = 811 \text{ m}^3/\text{s}$, $\sigma_x = 851 \text{ m}^3/\text{s}$, və $g_x = 0,94$. Təkrarlanma dövrü 100 il (empirik təminatı 1%) olan standart normal kəmiyyət, $x'_{100} = 2,33$ (cədvəl 3.3 və ya Əlavə 1). $k = g_x / 6 = 0,94 / 6 = 0,157$. Təkrarlanma faktoru, K_{100} , hesablanır:

$$\begin{aligned} K_{100} &= \frac{1}{3k} \left\{ \left[(x'_{100} - k)k + 1 \right]^3 - 1 \right\} = \\ &= \frac{1}{3(0,157)} \left\{ \left[(2,33 - 0,157)(0,157) + 1 \right]^3 - 1 \right\} = 3,00 \end{aligned}$$

Artıq standart normal kəmiyyətdən həqiqi su sərfinə, x_{100} , keçmək olar:

$$x_{100} = \mu_x + K_{100} \sigma_x = 811 + (3,00)(851) = 3364 \text{ m}^3/\text{s}.$$

Əgər, asimmetriya əmsalı $1,52$ olarsa, K_{100} Əlavə 1-dən tapılır. Bu misal üçün $K_{100} = 3,342$ və

$$x_{100} = \mu_x + K_{100} \sigma_x = 811 + (3,342)(851) = 3655 \text{ m}^3/\text{s}.$$

Beləliklə, asimmetriya əmsalının qiymətinin $0,94$ -dən $1,52$ -yə kimi artırılması (62%), 100 ildə 1 dəfə təkrarlanan maksimal su

sərfini 9% çoxaldır.

Misal 3.17. Maksimal su sərfələrinin natural loqarifmləri sırasının orta qiyməti 6,33, standart meyletməsi 0,862 və asimmetriya əmsalı -0,833-dür. Pirsonun III tip loqarifmik paylanmasıdan istifadə edərək 100 ildə 1 dəfə təkrarlanan maksimal su sərfini təyin edin.

Həlli: Verilənlərə görə $\mu_y = 6.33$, $\sigma_y = 0.862$, və $g_y = -0.833$. Onda, $k = g_y / 6 = -0.833 / 6 = -0.139$. Təkrarlanma dövrü 100 il olan $x'_{100} = 2.33$ (cədvəl 3.3).

Təkrarlanma faktoru, K_{100} , hesablanır:

$$K_{100} = \frac{1}{3k} \left\{ [(x'_{100} - k)k + 1]^3 - 1 \right\} =$$

$$= \frac{1}{3(-0.139)} \left\{ [(2.33 + 0.139)(-0.139) + 1]^3 - 1 \right\} = 1.72$$

Təkrarlanma dövrü 100 il olan su sərfinin loqarifmi, y_{100} ,

$$y_{100} = \mu_y + K_{100} \sigma_y = 6.33 + (1.72)(0.862) = 7.81$$

və maksimal su sərfinin həqiqi qiyməti, x_{100} , tapılır:

$$x_{100} = e^{y_{100}} = e^{7.81} = 2465 \text{ m}^3/\text{s}.$$

3.2.6. Kritski-Menkel paylanması

$$C_s < 2C_v$$

Artıq qeyd olunduğu kimi, hidroloji hesablamalar praktikasında çox geniş istifadə olunan Pirsonun III tip paylanması mü-
hüm çatışmazlığı var: $C_s < 2C_v$ olduqda, əyri mənfi qiymətlər
oblastına keçir.

Bu çatışmazlığı aradan qaldırmaq üçün çoxsaylı cəhdlər edilmişdir. Məsələnin uğurlu həllini 1946-cı ildə S.N.Kritski və M.F.Menkel təklif etmişlər. Onlar ilkin model kimi $C_s = 2C_v$ olduqda Pirsonun III tip əyrisini (ikiparametrlı qamma paylan-

manı) qəbul etmişlər:

$$G(z) = \frac{\alpha^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \int_0^z S^{\alpha-1} e^{-as} ds, \quad (3.41)$$

burada $G(z)$ -qamma paylanmanın (Γ -paylanmanın) integral funksiyası; S -inteqrallamanın dəyişəni; $\bar{z} = 1$; $C_s = 2C_v$; $\alpha = 1/C_{v,z}$.

Müəlliflər arqumenti, z , yeni dəyişənə transformasiya etmişlər:

$$k = az^b, \quad (3.42)$$

burada a və b -parametrlərdir.

Nəzərdə tutulurdu ki, bu yeni dəyişənin, k , riyazi gözləməsi vahidə bərabərdir, yəni:

$$M[K] = M[az^b] = 1. \quad (3.43)$$

Kritski və Menkel tənlik (3.41)-də $Z = (k/a)^{\frac{1}{b}}$ ifadəsindən istifadə edərək və $f(k) = dG(k)/d(k)$ olduğunu nəzərə alaraq yeni paylanma almışlar. Bu paylanma üçün ehtimalın sıxlıq funksiyası aşağıdakı kimidir:

$$f(k) = \frac{\alpha^\alpha}{a^{\alpha/b} \Gamma(\alpha) b} e^{-a(k/a)^{1/b}} k^{(\alpha/b)-1}. \quad (3.44)$$

Bu paylanmanın i dərəcəli başlanğıc momenti α , a və b parametrlərindən asılıdır:

$$\mu_i = \frac{\Gamma(\alpha + ib) a^i}{\Gamma(\alpha) \alpha^{ib}}. \quad (3.45)$$

Bu düsturdan $i = 1$ olduqda aşağıdakı ifadə alınır:

$$M[k] = \mu_1 = \frac{\Gamma(\alpha + b) a}{\Gamma(\alpha) \alpha^b}. \quad (3.46)$$

Şərtə görə $M[k]=1$ olduğundan, axırıncı düsturdan a parametri üçün ifadə alınır:

$$a = \frac{\Gamma(\alpha)\alpha^b}{\Gamma(\alpha+b)}. \quad (3.47)$$

Düstur (3.47)-ni düstur (3.44)-də nəzərə alsaq, onda Γ -funksiyanı nəzərə almaqla Kritski-Menkel əyrisi üçün ehtimalın sıxlıq funksiyasının ifadəsini almaq olar. Bu ifadə iki parametrlə (a və b) təyin olunur və onlar düstur (3.45)-i nəzərə almaqla ikinci, μ_2 , və üçüncü, μ_3 , başlanğıc momentlərə görə tapıla bilər. Bu momentlər isə öz növbəsində C_v və C_s ilə ifadə oluna bilər.

Beləliklə, bu paylanma ikiparametrlidir. Lakin, praktik hesablamalarda modul əmsallarından baxılan hidrometeoroloji kəmiyyətin ilkin qiymətlərinə keçmək üçün üçüncü parametri-riyazi gözləməni, m_x , bilmək tələb olunur. Buna görə də Kritski-Menkel paylanması həm də üçparametrlili qamma paylanma adlanır.

Kritski-Menkel analitik təminat əyrisinin ordinatları xüsusi cədvəllərə görə təyin olunur (Əlavə 2). Cədvəllərdə modul əmsallarının təminatlı qiymətləri verilir. Bu qiymətlər empirik təminat, $p\%$, variasiya əmsalı C_v və asimmetriya əmsalının variasiya əmsalına nisbətində C_s/C_v görə tapılır.

Hazırda Rusiyada qüvvədə olan normativ sənədlər hidroloji hesablamalarda istifadə üçün Kritski-Menkel əyrisini tövsiyə edir.

Beləliklə, baxılan əyrinin əsas xüsusiyyətləri bunlardır:

1. Ehtimalın sıxlıq əyrisi bimodalı və müsbət asimmetriyalıdır.
2. Əyrinin aşağı limiti həmişə sıfıra bərabərdir.
3. Əyri yuxarıdan məhdudlanmur.
4. $C_s = 2C_v$ olduqda əyri ikiparametrlili Γ -paylanmaya çevrilir, başqa sözlə Pirsonun III tip əyrisi ilə üst-üstə düşür.

Misal 3.18. Kritski-Menkelin təminatlar əyrisindən istifadə etməklə çayın (cədvəl 3.1) maksimal su sərfinin 1% təminatlı qiymətini, $Q_{1\%}$, hesablayın.

Həlli: 1. Empirik məlumatlara əsasən sıranın parametrləri təyin edilir: $m_Q \approx \bar{Q}=58,4$; $C_v \approx 0,64$; $C_s/C_v=2,5$.

2. Əlavə 2-dən 1% təminatlı modul əmsalı təyin olunur. Əgər, cədvəllər C_s/C_v -nin yalnız tam qiymətləri üçün tərtib olunubsa, onda interpolasiya etmək lazım gəlir:

$C_s/C_v=2$ üçün $C_v=0,64$ və $p=1\%$ olduqda $k_{1\%}=3,05$.

$C_s/C_v=3$ üçün $C_v=0,64$ və $p=1\%$ olduqda $k_{1\%}=3,24$.

Müvafiq olaraq, $C_s/C_v=2,5$ üçün $k_{1\%}=3,15$ alınır.

3. Modul əmsalını $\bar{Q}$ -ya vurmaqla, hesabi su sərfini alırıq: $Q_{1\%}=k_{1\%} \cdot \bar{Q}=3,15 \cdot 58,4=184 \text{ m}^3/\text{s}$.

3.2.7. Ekstremal-kəmiyyət paylanması

Ekstremal kəmiyyət dedikdə təsadüfi dəyişənin maksimal və ya minimal qiymətləri nəzərdə tutulur. Tutaq ki, $x_1, x_2, \dots, x_n$ sırasının ən böyük qiyməti Y -dir. Əgər, $Y > y$ şərtinin ehtimalı $F(y)$ və $X_i < x_i$ şərtinin ehtimalı $PX_i(x_i)$ olarsa, onda $Y < y$ -in ehtimalı bütün x_i qiymətlərinin y -dən kiçik olmasının ehtimalına bərabərdir, yəni

$$F(y)=PX_1(y)PX_2(y)\dots PX_n(y)=[P_x(y)]^n \quad (3.48)$$

Ekstremal kəmiyyətin, Y , inteqral (kumulyativ) paylanma funksiyası bu tənliklə ifadə olunur.

Təsadüfi kəmiyyətin, Y , ehtimalının sıxlıq funksiyası, $f(y)$, aşağıdakı kimidir:

$$f(y) = \frac{d}{dy} F(y) = n [Px(y)^{n-1} Px(y)]. \quad (3.49)$$

Bu paylanma həmçinin ana paylanma (parent distribution) adlanır.

Bu tənlik təsadüfi kəmiyyətin maksimal qiymətləri üçün alınmışdır və oxşar tənlik minimal qiymətlər üçün də alına bilər. Ekstremal kəmiyyət paylanmasının üç tipi var (Fisher and Tippett, 1928): I tip, II tip və III tip. II tip paylanma praktikada demək olar ki, istifadə olunmur. I tip paylanma daha çox Qumbel paylanması, III tip paylanma isə Veybul paylanması kimi tanınır.

Növbəti paraqraflarda bu paylanmalara baxılır.

3.2.8. Qumbel paylanması

Qumbelin paylanma qanunu faktik olaraq I tip ekstremal kəmiyyət paylanması ilə eynidir və rüsdilli elmi ədəbiyyatda seçmənin kənar hədlərinin paylanma qanunu adlandırılır. Bu paylanma maksimal və minimal su sərfələrinin, həmçinin maksimal sutkalıq yağış layının, küləyin sürətinin və hidrometeoroloji rejimin digər ekstremal xarakteristikalarının tədqiqində istifadə olunur. Qumbelin təminatlar funksiyası aşağıdakı ifadə ilə təyin olunur:

$$F(x) = 1 - \exp[-\exp(-y)]$$

$$P(x) = P\{X \geq x\} = 1 - \exp[-\exp(-y)], \quad (3.50)$$

burada y - ölçü vahidi olmayan kəmiyyətdir və X dəyişənindən asılıdır:

$$y = \alpha(x - q), \quad (3.51)$$

burada q - X təsadüfi kəmiyyətinin modasıdır. Bu parametr sıranın orta qiyməti və orta kvadratik meyletməsinə görə aşağıdakı düstur ilə hesablanır:

$$q = \bar{x} - 0,45\sigma_x, \quad (3.52)$$

α parametri aşağıdakı düstura görə təyin olunur:

$$\alpha = 1,28 / \sigma_x. \quad (3.53)$$

Praktik hesablamalarda düstur (3.51)-in əvəzinə onun x -ə nəzərən həllindən alınan düsturdan istifadə edilir:

$$x_p = q + (1/\alpha)y_p. \quad (3.54)$$

Düstur (3.50)-ni iki dəfə loqarifmləməklə y_p -nin qiymətlərini hesablamaq üçün yeni ifadə almaq olar:

$$y_p = -\ln\{-\ln[(100 - P)/100]\}, \quad (3.55)$$

burada p - hesabi (tələb olunan) təminatdır, %-lə.

Qumbelin təminat əyrisinin dayaq ordnatlarının qiymətləri, y_p , cədvəl 3.4-də verilir.

Cədvəl 3.4

Müxtəlif təminatlar üçün y_p -nin qiymətləri

$p \%$	y_p	$p \%$	y_p	$p \%$	y_p
0.01	9.09	10	2.25	80	-0.48
0.1	6.89	20	1.50	90	-0.83
0.5	5.29	30	1.03	95	-1.10
1	4.60	50	0.37	99.0	-1.53
5	2.97	70	-0.19	99.9	-1.93

Düstur (3.52) və (3.53) $n \rightarrow \infty$ olduqda q və α parametrlərini $\bar{x}$ və σ_x parametrləri ilə əlaqələndirir. Qumbel hədlərinin sayı n olan sıralar üçün aşağıdakı düsturları təklif etmişdir:

$$(1/\alpha) = \sigma_x / \sigma_y; \quad (3.56)$$

$$q = \bar{x} - \bar{y}(1/\alpha). \quad (3.57)$$

Bu düsturların $\bar{y}$ və σ_y parametrləri sıranın uzunluğundan asılı olaraq cədvəl 3.5-dən tapılır.

Cədvəl 3.5

Müxtəlif uzunluqlu sıralar üçün
 $\bar{y}$ və σ_y parametrlərinin orta qiymətləri (Qumbelə görə)

n	$\bar{y}$	σ_y	n	$\bar{y}$	σ_y
20	0.524	1.063	50	0.548	1.161
22	0.527	1.076	52	0.549	1.164
24	0.530	1.086	54	0.550	1.167
26	0.532	1.096	56	0.551	1.170
28	0.534	1.105	58	0.552	1.172
30	0.536	1.112	60	0.552	1.175
32	0.538	1.119	65	0.554	1.180
34	0.540	1.126	70	0.555	1.185
36	0.541	1.131	75	0.556	1.190
38	0.542	1.136	80	0.557	1.194
40	0.544	1.141	85	0.558	1.197
42	0.545	1.146	90	0.559	1.201
44	0.546	1.150	95	0.559	1.204
46	0.547	1.154	100	0.560	1.206
48	0.548	1.157	∞	0.577	1.282

Düstur (3.51) nəzərə alınmaqla, Qumbel paylanması üçün ehtimalın sıxlıq funksiyası aşağıdakı kimi yazılır:

$$f(x) = \alpha \exp\{-\alpha(x-q) - \exp[-\alpha(x-q)]\}. \quad (3.58)$$

Bu düsturdan göründüyü kimi, Qumbel paylanması üçün X təsadüfi dəyişənin mümkün qiymətlər oblası $(-\infty, +\infty)$ intervalıdır. Bu paylanma ikiparametrlidir (x və σ_x).

G.A.Alekseyev nəzəri tədqiqatlar nəticəsində müəyyən etmişdir ki, $n \rightarrow \infty$ olduqda, üçüncü mərkəzi moment $\mu_3 = 2,404$. Onda,

$$C_{s,y} = C_{s,x} = \mu_3 / \sigma_y^3 = 2,404 / (1,282)^3 = 1,44 . \quad (3.59)$$

Qumbel paylanmasının bu izahı rus dilində çap olunmuş müvafiq dərslik və monoqrafiyalar əsasında hazırlanmışdır. Lakin ingilisdilli ədəbiyyatda Qumbel paylanması üçün ehtimalın sıxlıq funksiyasının yazılışı və onun parametrlərinin işarələri fərqlidir. Praktiki hesablamalarda narahatçılıq yaranmasın deyərək, aşağıdakı verilən düstur və qeydlər faydalı ola bilər.

Düstur (3.58) belə yazılır:

$$f(x) = \frac{1}{a} \exp \left\{ \pm \frac{x-b}{a} - \exp \left[\pm \frac{x-b}{a} \right] \right\}, \quad -\infty < x < \infty \quad (3.60)$$

burada $-\infty < b < \infty$, $a > 0$.

Hesablamalar maksimal kəmiyyət üçün yerinə yetirildikdə düsturda “-” işarəsi, minimal kəmiyyət üçün isə “+” işarəsi istifadə olunur.

Maksimal kəmiyyət üçün paylanma parametri aşağıdakı düstura görə qiymətləndirilir:

$$\mu_x = b + 0,577a, \quad \sigma_x^2 = 1,645a^2, \quad g_x = 1,1396 \quad (3.61)$$

minimal kəmiyyət üçün isə:

$$\mu_x = b - 0,577a, \quad \sigma_x^2 = 1,645a^2, \quad g_x = -1,1396 . \quad (3.62)$$

Ölçü vahidi olmayan y kəmiyyəti, x dəyişəni, həmçinin a və b parametrləri ilə aşağıdakı düsturla əlaqəlidir:

$$y = \frac{x-b}{a} . \quad (3.63)$$

Beləliklə, Qumbel paylanması üçün asimmetriya əmsalının qiyməti sabitdir. Bu paylanmanın daha bir nöqsan cəhəti təminatın böyük qiymətlərində əyrinin mənfi qiymətlər oblastına keçməsidir. Buna görə də keçmiş SSRİ-də bu paylanma çox az

istifadə olunurdu. ABŞ, Fransa, Niderland və digər ölkələrdə yağış daşqınlarının maksimal su sərfələrinin, həmçinin müxtəlif davamiyyətli maksimal yağış layının hesablanmasında bu paylanma çox geniş tətbiq olunur.

Misal 3.19. Çayın orta çoxillik maksimal su sərfi $811 \text{ m}^3/\text{s}$, standart meyletməsi $851 \text{ m}^3/\text{s}$ təşkil edir. Maksimal su sərfələri Qumbel paylanmasına (I tip ekstremal kəmiyyət paylanması) uyğundur. Təkrarlanma dövrü 100 ildə 1 dəfə olan su sərfini qiymətləndirin.

Həlli: Şərtə görə $\mu_x = 811 \text{ m}^3/\text{s}$ və $\sigma_x = 851 \text{ m}^3/\text{s}$. Paylanmanın a və b parametrləri μ_x və σ_x -ə görə tapılır:

$$a = \frac{\sigma_x}{\sqrt{1.645}} = \frac{851}{\sqrt{1.645}} = 664 \text{ m}^3/\text{s},$$

$$b = \mu_x - 0.577a = 811 - 0.577(664) = 428 \text{ m}^3/\text{s}.$$

Bu parametrlərdən istifadə etməklə maksimal su sərfələri, X , normallaşdırılmış kəmiyyətə, Y , transformasiya olunur (çevrilir):

$$Y = \frac{X - b}{a} = \frac{X - 428}{664}.$$

100 ildə 1 dəfə təkrarlanan maksimal su sərfinin ötmə ehtimalı (təminatı) $1/100 = 0,01$ və integral (kumulyativ) ehtimalı isə $F(y) = 1 - 0,01 = 0,99$ təşkil edir. Qumbel paylanmasının tənliyinə görə:

$$0.99 = \exp[-\exp(-y_{100})],$$

burada y_{100} təkrarlanma dövrü 100 ildə 1 dəfə olan kəmiyyətdir.

Buradan:

$$y_{100} = -\ln(-\ln 0.99) = 4.60.$$

Təkrarlanma dövrü 100 ildə bir dəfə olan maksimal su sərfi,

X_{100} , aşağıdakı ifadəyə görə hesablanır:

$$y_{100} = \frac{x_{100} - 428}{664}$$

və

$$x_{100} = 428 + 664 y_{100} = 428 + 664 \cdot (4.60) = 3482 \text{ m}^3/\text{s}.$$

Misal 3.20. Qumbelin paylanma qanunundan istifadə etməklə çayın (cədvəl 3.1) maksimal su sərfinin 1% təminatlı qiymətini, $Q_{1\%}$, hesablayın.

Həlli: 1. Müşahidə sırasına görə təqribi olaraq m_Q və σ_Q təyin edilir:

$$m_Q \approx \bar{x} = 58,4; \sigma_Q \approx 37,2.$$

2. Aşağıdakı düstura görə $y_{1\%}$ hesablanır:

$$y_{1\%} = -\ln\{-\ln[(100 - 1)(100)]\} = 4,60.$$

$y_{1\%}$ cədvəl 3.4-ə görə də təyin oluna bilər.

3. Sıranın uzunluğundan n asılı olaraq cədvəl 3.5-ə əsasən $\bar{y}$ və σ_y təyin edilir. $n=32$ olduğundan, $\bar{y}=0,54$; $\sigma_y=1,12$.

4. $(1/\alpha)$ və q parametrləri hesablanır:

$$1/\alpha = \sigma_Q / \sigma_y = 37,2 / 1,12 = 33,2;$$

$$q = \bar{x} - \bar{y}(1/\alpha) = 58,4 - 0,54 \cdot 33,2 = 40,5.$$

5. Hesabi su sərfi aşağıdakı düstura görə tapılır:

$$\begin{aligned} Q_{1\%} &= q + (1/\alpha) y_{1\%} = 40,5 + 33,2 \cdot y_{1\%} = \\ &= 40,5 + 33,2 \cdot 4,60 = 193 \text{ m}^3/\text{s}. \end{aligned}$$

Misal 3.21. 30 illik müşahidə məlumatlarına görə çayın maksimal su sərfi sırasının orta kəmiyyəti $811 \text{ m}^3/\text{s}$ və standart meyletməsi $851 \text{ m}^3/\text{s}$ təşkil edir. Qumbel paylanmasından (I tip ekstremal kəmiyyət paylanması) istifadə edərək təkrarlanma dövrü 100 ildə 1 dəfə olan maksimal su sərfini təyin edin. Əgər, sıranın uzunluğu 60 il və ya sonsuz olarsa, hesabi su sərfi necə dəyişər?

Həlli: Şərtə görə $\mu_x = 811 \text{ m}^3/\text{s}$ və $\sigma_x = 851 \text{ m}^3/\text{s}$. 100 ildə 1 dəfə təkrarlanan su sərfi, x_{100} , aşağıdakı ifadəyə görə hesablanır:

$$x_{100} = \mu_x + K_{100} \sigma_x = 811 + K_{100} 851.$$

Sıranın uzunluğu 30 il olduqda 100 ildə 1 dəfə təkrarlanan su sərfi üçün təkrarlanma faktoru, $K_{100} = 3,653$ (cədvəl 3.6) alınır.

Onda:

$$x_{100} = 811 + (3.653)851 = 3920 \text{ m}^3/\text{s}.$$

Əgər, sıranın uzunluğu 60 il olarsa, onda $K_{100} = 3.446$ (cədvəl 3.6) və hesabi su sərfi:

$$x_{100} = 811 + (3.446)851 = 3740 \text{ m}^3/\text{s}.$$

Əgər, sıranın uzunluğu sonsuz olarsa,

$$K_{100} = -\frac{\sqrt{6}}{\pi} \left\{ 0.5772 + \ln \left[\ln \left(\frac{100}{100-1} \right) \right] \right\} = 3.137$$

(cədvəldən də eyni qiymət alınır)

Onda:

$$x_{100} = 811 + (3.137)851 = 3480 \text{ m}^3/\text{s}.$$

Cədvəl 3.6

Qumbel paylanması üçün təkrarlanma faktorunun (K) qiymətləri

Sıranın uzunluğu	Təkrarlanma dövrü								
	2.33	5	10	20	25	50	75	100	1000
15	0.065	0.967	1.703	2.410	2.632	3.321	3.721	4.005	6.265
20	0.052	0.919	1.625	2.302	2.517	3.179	3.563	3.386	6.006
25	0.044	0.888	1.575	2.235	2.444	3.088	3.463	3.729	5.842
30	0.038	0.866	1.541	1.188	2.393	3.026	3.393	3.653	5.727
40	0.031	0.838	1.495	2.126	2.326	2.943	3.301	3.554	5.476
50	0.026	0.820	1.466	2.086	2.283	2.889	3.241	3.491	5.478
60	0.023	0.807	1.446	2.059	2.253	2.852	3.200	4.446	5.410
70	0.020	0.797	1.430	2.038	2.230	2.824	3.169	3.413	5.359
75	0.019	0.794	1.423	2.029	2.220	2.812	3.155	3.400	5.338
100	0.015	0.779	1.401	1.998	2.187	2.770	3.109	3.340	5.261
∞	-0.067	0.720	1.305	1.866	2.044	2.592	2.911	3.137	4.900

Beləliklə, sıranın uzunluğu 30, 60 il və sonsuz olarsa, 100 ildə 1 dəfə təkrarlanan maksimal su sərfələri müvafiq olaraq $3920 \text{ m}^3/\text{s}$, $3740 \text{ m}^3/\text{s}$ və $3480 \text{ m}^3/\text{s}$ olar. Bu onu göstərir ki, müşahidə illərinin sayı artdıqca 100 ildə 1 dəfə təkrarlanan maksimal su sərfinin qiyməti azalır.

3.2.9. Veybul paylanması

Artıq qeyd olunduğu kimi, Veybul paylanması həm də III tip ekstremal kəmiyyət paylanması adlanır. Bu paylanma sol tərəfdən sıfır ilə məhdudlanır və $x \geq c$ olduqda təminat funksiyası, $P_X(x)$, aşağıdakı kimi yazılır:

$$P_X(x) = a(x - c)^a, \quad x \geq c, \quad (3.64)$$

burada c parametri x təsadüfi kəmiyyətinin ən kiçik (minimal) qiymətidir. Bu paylanma hidrologiyada minimal su sərfələrinin hesablanması üçün istifadə olunur. Veybul paylanması (Weibull, 1939) $c = 0$ olduqda, aşağıdakı kimidir:

$$f(x) = ax^{a-1}b^{-a} \exp\left[-\left(\frac{x}{b}\right)^a\right], \quad x \geq 0, \quad a, b > 0. \quad (3.65)$$

Bu paylanmanın orta qiyməti və dispersiyası aşağıdakı ifadələrə görə:

$$\mu_x = b\Gamma\left(1 + \frac{1}{a}\right), \quad \sigma_x^2 = b^2\left[\Gamma\left(1 + \frac{2}{a}\right) - \Gamma^2\left(1 + \frac{1}{a}\right)\right] \quad (3.66)$$

və asimmetriya əmsali isə:

$$g_x = \frac{\Gamma(1 + 3/a) - 3\Gamma(1 + 2/a)\Gamma(1 + 1/a) + 2\Gamma^3(1 + 1/a)}{\left[\Gamma(1 + 2/a) - \Gamma^2(1 + 1/a)\right]^{\frac{3}{2}}}, \quad (3.67)$$

düsturuna görə təyin olunur. Burada $\Gamma(n)$ qamma funksiyasıdır. Veybulun integral paylanması belədir:

$$F(x) = 1 - \exp\left[-\left(\frac{x}{b}\right)^a\right]. \quad (3.68)$$

Bu paylanma təsadüfi kəmiyyətlərin minimal qiymətlərinin təkrarlanma dövrünü (və ya təminatını) qiymətləndirmək üçün məqsəduyğundur. Əgər, baxılan təsadüfi kəmiyyətin ən kiçik qiyməti (aşağı limiti) $c \neq 0$, onda integral paylanma funksiyası belə yazılır:

$$F(x) = 1 - \exp\left[-\left(\frac{x-c}{b-c}\right)^a\right]. \quad (3.69)$$

Bu tənlik bəzən Veybulun üçparametrlı paylanması və ya məhdudlanan eksponensial paylanma adlandırılır. Bu paylanmanın asimmetriya əmsalı düstur (3.67)-yə görə, orta qiyməti və dispersiya isə:

$$\begin{aligned} \mu_x &= c - (b-c)\Gamma\left(1 + \frac{1}{a}\right), \\ \sigma_x^2 &= (b-c)^2 \left[\Gamma\left(1 + \frac{2}{a}\right) - \Gamma^2\left(1 + \frac{1}{a}\right) \right] \end{aligned} \quad (3.70)$$

ifadələrinə görə təyin olunur.

Misal 3.22. Yaşayış məntəqəsini içməli su ilə təchiz etmək üçün su götürülməsi nəzərdə tutulan çayın orta çoxillik minimal su sərfi $123 \text{ m}^3/\text{s}$, standart meyletməsi isə $37 \text{ m}^3/\text{s}$ təşkil edir. Minimal su sərfinin ən kiçik qiyməti $0 \text{ m}^3/\text{s}$ olarsa, Veybul paylanmasından (III tip ekstremal kəmiyyət paylanması) istifadə etməklə minimal su sərfinin $80 \text{ m}^3/\text{s}$ -dən az olma ehtimalını hesablayın.

Həlli: Şərtə görə $\mu_x = 123 \text{ m}^3/\text{s}$ və $\sigma_x = 37 \text{ m}^3/\text{s}$. Veybul paylanması a və b parametrlərini təyin etmək üçün aşağıdakı ifadələrdən istifadə olunur:

$$b\Gamma\left(1 + \frac{1}{a}\right) = 123 \quad (= \mu_x)$$

və

$$b^2 \left[\Gamma\left(1 + \frac{2}{a}\right) - \Gamma^2\left(1 + \frac{1}{a}\right) \right] = (37)^2 \quad (= \sigma_x^2)$$

Bu iki tənliyi birgə həll edərək b parametrini yox etmək olar:

$$\frac{123^2}{\Gamma^2\left(1 + \frac{1}{a}\right)} \left[\Gamma\left(1 + \frac{2}{a}\right) - \Gamma^2\left(1 + \frac{1}{a}\right) \right] = 37^2$$

və ya

$$\frac{\Gamma\left(1 + \frac{2}{a}\right) - \Gamma^2\left(1 + \frac{1}{a}\right)}{\Gamma^2\left(1 + \frac{1}{a}\right)} = 0.0905.$$

Bu tənliyi iterasiya yolu ilə həll edib $f(a)$ funksiyasına görə a parametrini təyin etmək olar:

$$f(a) = \frac{\Gamma\left(1 + \frac{2}{a}\right) - \Gamma^2\left(1 + \frac{1}{a}\right)}{\Gamma^2\left(1 + \frac{1}{a}\right)} = \frac{\Gamma\left(1 + \frac{2}{a}\right)}{\Gamma^2\left(1 + \frac{1}{a}\right)} - 1.$$

Qamma funksiyasının cədvəl qiymətlərindən istifadə etməklə a parametrini tapmaq olar: $f(a) = 0,0905$ qiymətinə uyğun $a = 3,65$ (Əlavə 14).

beləliklə, $a = 3,65$ və

$$b = \frac{123}{\Gamma\left(1 + \frac{1}{a}\right)} = \frac{123}{\Gamma\left(1 + \frac{1}{3.65}\right)} = \frac{123}{0.903} = 136.$$

Minimal su sərfələri üçün Veybulun kumulyativ (integral) paylanmasının tənliyinə görə:

$$F(x) = 1 - \exp\left[-\left(\frac{x}{b}\right)^a\right] = 1 - \exp\left[-\left(\frac{x}{136}\right)^{3.65}\right]$$

və $X \leq 80 \text{ m}^3/\text{s}$ hadisəsinin ehtimalı:

$$F(80) = 1 - \exp\left[-\left(\frac{80}{136}\right)^{3.65}\right] = 0.134 = 13.4\%.$$

3.2.10. GEV paylanma

Ümumiləşdirilmiş ekstremal kəmiyyət paylanması (GEV) I, II və III tip ekstremal kəmiyyət paylanmaları ilə əlaqəlidir. Bu paylanmanı ilk dəfə meteoroloji məlumatların ən böyük kəmiyyətlərinin tərəddüdlərini təsvir etmək üçün Cenkinson (Jenkinson, 1955) təklif etmişdir. GEV paylanma bu günə kimi daşqın, leysan, küləyin sürəti, dalğanın hündürlüyü və s. kimi müxtəlif təbii ekstremumların hesablanması üçün geniş istifadə olunur (Martins and Stedinger, 2000). Onun integral paylanma funksiyası aşağıdakı kimi verilir:

$$F(x) = \begin{cases} \exp\left\{-\left[1 - \frac{c(x-a)^{1/c}}{b}\right]\right\} & c \neq 0 \\ \exp\left\{-\exp\left[\frac{-(x-a)}{b}\right]\right\} & c = 0 \end{cases} \quad (3.71)$$

burada a , b və c -müvafiq olaraq vəziyyət, miqyas və forma parametrləridir.

GEV paylanma $c = 0$ olduqda, I tip ekstremal kəmiyyət paylanma ilə üst-üstə düşür; $c < 0$ olduqda o, aşağıdan $a + b/c$ ifadəsi ilə məhdudlanan II tip ekstremal kəmiyyət paylanması (maksimum üçün) və $c > 0$ olduqda isə yuxarıdan $a + b/c$ ifadəsi ilə məhdudlanan III tip ekstremal kəmiyyət paylanması ilə (maksimum üçün) oxşardır. GEV paylanmanın orta kəmiyyəti, dispersiyası və asimmetriya əmsalı aşağıdakı düsturlara görə təyin olunur (Kottegoda and Rosso, 1997):

$$\mu_x = a + \frac{b}{c} [1 - \Gamma(1+c)] \quad c > -1 \quad (3.72)$$

$$\sigma_x^2 = \left(\frac{b}{c}\right)^2 [\Gamma(1+2c) - \Gamma^2(1+c)] \quad c > -0.5 \quad (3.73)$$

$$g_x = \text{sign}(c) \frac{-\Gamma(1+3c) + 3\Gamma(1+c)\Gamma(1+2c) - 2\Gamma^3(1+c)}{[\Gamma(1+2c) - \Gamma^2(1+c)]^{3/2}} - 1, \quad c > -1/3 \quad (3.74)$$

Göründüyü kimi, bu düsturlarla momentlər yalnız c parametrinin müəyyən qiymətləri üçün hesablanı bilər. Böyük Britaniyada daşqınların illik maksimal su səflərinin hesablanmasında adətən GEV paylanma istifadə olunur (Singh and Strupczewski, 2002).

Misal 3.23. Subtropik qurşaqda 24 saatlıq illik maksimal yağış layı ümumiləşdirilmiş ekstremal kəmiyyət paylanmaya (GEV paylanma) uyğundur. Sıranın parametrləri belədir: $a=13.8$ sm, $b=2.14$ sm və $c=-0.129$. 20 ildə bir dəfə təkrarlanan 24 saatlıq illik maksimal yağış layını təyin edin.

Həlli: 20 ildə bir dəfə təkrarlanan 24 saatlıq illik maksimal yağış layının kəmiyyəti aşağıdakı kimi təyin olunur.

$$x_{20} = a + \frac{b}{c} \left[1 - \left(\ln \frac{T}{T-1} \right)^c \right] = 13.8 + \frac{2.17}{-0.129} \left[1 - \left(\ln \frac{20}{20-1} \right)^{-0.129} \right] = 21.7 \text{ sm.}$$

Misal 3.24. Subtropik qurşaqda 24 saatlıq (sutkalıq) maksimal yağış layı sırasının orta kəmiyyəti 15,4 sm, standart meyletməsi 3,42 sm və asimmetriya əmsalı 1,24 təşkil edir. GEV paylanmadan istifadə edərək 100 ildə 1 dəfə təkrarlanan 24 saatlıq maksimal yağış layını hesablayın.

Həlli: Misalın şərtinə görə $\mu_x = 15,4$ sm, $\sigma_x = 3,42$ sm və $g_x = 1,24$. GEV paylanmasının integral funksiyasını təyin etmək üçün əvvəlcə a , b və c parametrləri hesablanmalıdır. Əyrinin forma parametri, c , birbaşa asimmetriya əmsalına g_x , görə tapılır.

$$g_x = 1,24 = \text{sign}(c) \frac{-\Gamma(1+3c) + 3\Gamma(1+c)\Gamma(1+2c) - 2\Gamma^3(1+C)}{[\Gamma(1+2c) - \Gamma^2(1+c)^{3/2}]} - 1.$$

Bu ifadədən $c = -0,129$. Sonra b parametri:

$$b = \sqrt{\frac{c^2 \sigma_x^2}{\Gamma(1+2c) - \Gamma^2(1+c)}} = \sqrt{\frac{(-0,129)^2 (3,42)^2}{1,236 - 1,093^2}} = 2,17 \text{ sm}$$

və nəhayət, a parametri hesablanır:

$$a = \mu_x - \frac{b}{c} [1 - \Gamma(1+c)] = 15,4 - \frac{2,17}{-0,129} [1 - 0,093] = 13,8 \text{ sm}.$$

Tənlik (3.71)-ə görə:

$$F(x) = \exp \left\{ - \left[1 - \frac{c(x-a)}{b} \right]^{1/c} \right\} = \exp \left\{ - \left[1 - \frac{-0,129(x-13,8)}{2,17} \right]^{1/-0,129} \right\},$$

buradan:

$$F(x) = \exp\left\{-\left[1 + 0,0594(x - 13,8)\right]^{-7,75}\right\}.$$

Təkrarlanma dövrü 100 il olduqda $F(x_{100}) = 1 - 1/100 = 0,99$

və

$$F(x_{100}) = 0,99 = \exp\left\{-\left[1 + 0,0594(x_{100} - 13,8)\right]^{-7,75}\right\}$$

buradan:

$$x_{100} = 27,4 \text{ sm.}$$

Beləliklə, təkrarlanma dövrü 100 ildə 1 dəfə olan (və ya təminatı 1% olan) 24 saatlıq maksimal yağış layı 27,4 sm təşkil edir.

3.2.11. Conson paylanması

G.G.Svanidze və Q.L.Qriqoliya hidroloji kəmiyyətlərin empirik təminat ayrılmasını aproksimasiya etmək üçün Conson paylanmasından istifadə edilməsini təklif etmişlər. Bu paylanma hər iki tərəfdən, həm aşağıdan, həm də yuxarıdan məhdudlanır.

Bu yanaşma çərçivəsində belə hesab olunur ki, əgər, ilkin X təsadüfi kəmiyyətini aşağıdakı ifadə ilə əvəz etsək:

$$Z = \ln\left[\frac{x-a}{b-x}\right], \quad z = \ln\left[\frac{x-a}{b-x}\right] \quad (3.75)$$

onda yeni Z təsadüfi kəmiyyəti normal paylanma qanununa tabe olacaq. Burada a və b müvafiq olaraq X dəyişən kəmiyyətinin aşağı və yuxarı limitləridir.

Conson paylanmasının sıxlıq funksiyası belə yazılır:

$$f(x) = \frac{b-a}{\sigma_z \sqrt{2\pi}(x-a)(b-x)} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma_z^2} \left[\ln\left(\frac{x-a}{b-x}\right) - m_z \right]^2\right\}. \quad (3.76)$$

Bu düsturdan göründüyü kimi, baxılan paylanma dörd parametrlidir: a və b parametrlərindən başqa daha iki parametr var. Bunlardan biri Z dəyişəninin riyazi gözləməsi, m_z , digəri isə, onun orta kvadratik meyletməsidir, σ_z .

Consonun analitik təminat əyrisinin ordinatlarını təyin etmək üçün normallaşdırılmış t kəmiyyətinin qiymətlər cədvəlindən istifadə olunur (cədvəl 3.3). Hesablamalar loqarifmik normal paylanma üçün (bax misal 3.9, həll 1) olduğu kimi yerinə yetirilir. Fərq yalnız ondan ibarətdir ki, a və b məlumdursa, m_z və σ_z parametrlərini təyin etmək üçün ilkin müşahidə sırası düstur (3.75)-dən istifadə olunmaqla Z qiymətlərinin sırası ilə əvəz edilməlidir.

Əgər, Conson paylanmasının bütün dörd parametri məlumdursa, onda cədvəl 3.3-dən normallaşdırılmış ordinat, t_p , tapılır, sonra Z_p hesablanır və nəhayət düstur (3.77)-yə görə X_p qiymətləndirilir:

$$X_p = \frac{b \exp(Z_p) + a}{\exp(Z_p) + 1}. \quad (3.77)$$

Praktikada çox az halda hidrometeoroloji xarakteristikanın aşağı və yuxarı sərhədləri məlum olur. Məsələn, daşqının axım əmsalının təminat əyrisi üçün $a = 0$, $b = 1$.

Conson paylanmasından praktikada az istifadə olunur. Bunun əsas səbəbi odur ki, a və b parametrlərini çox nadir hallarda etibarlı qiymətləndirmək mümkün olur.

Misal 3.25. Consonun təminat əyrisindən istifadə etməklə çayın (cədvəl 3.1) maksimal su sərfinin 1% təminatlı qiymətini, $Q_{1\%}$, hesablayın. Nəzərə alın ki, a və b parametrləri məlumdur: $a=11$, $b=490$.

Həlli: 1. Verilmiş sıranın hədləri aşağıdakı düstura görə dəyişdirilir:

$$z_i = \ln \left(\frac{Q_i - a}{b - Q_i} \right) = [(Q_i - 11) / (490 - Q_i)].$$

2. Z təsadüfi kəmiyyətlər sırasına əsasən təqribi olaraq m_z və σ_z təyin edilir: $m_z = -2,54$; $\sigma_z = 0,95$.

3. Cədvəl 3.3-də integral paylanma funksiyasının ordinatları verildiyindən, əvvəlcə normallaşdırılmış t təsadüfi kəmiyyəti üçün $F(t) = 100 - P(t) = 100 - 1 = 99\%$ təyin edilir.

4. Cədvəl 3.3-dən t təsadüfi kəmiyyəti üçün 99%-li kvantil təyin edilir: $t'_{99} = 2,33$.

5. z_1 hesablanır: $z_1 = z'_{99} = \sigma_z t'_{99} + m_z = 0,95 \cdot 2,33 - 2,54 = -0,33$

6. $Q_{1\%}$ təyin edilir:

$$Q_{1\%} = \frac{b \cdot \exp(z_1) + a}{\exp(z_1) + 1} = (490e^{-0,33} + 11) / (e^{-0,33} + 1) = 363/1,72 = 211 \text{ m}^3/\text{s}.$$

4. PAYLANMA ƏYRİLƏRİNİN PARAMETRLƏRİNİN QIYMƏTLƏNDİRİLMƏ METODLARI

Hidrometeoroloji məlumatların paylanma parametrlərini qiymətləndirmək üçün bir neçə hesablama metodundan istifadə olunur. Bu metodlar üç qrupa bölünür: analitik, graf-analitik və rafiki.

Momentlər metodu, L -momentlər metodu və ən çox həqiqətəbənzər metod analitik metodlar qrupuna aiddir.

4.1. Momentlər metodu

Bu metod empirik paylanmanın parametrlərindən istifadəyə əsaslanır. Paylanmanın seçmə riyazi gözləməsi, m_x^* , (seçmə orta, $\bar{x}$) aşağıdakı düstura görə hesablanır:

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i. \quad (4.1)$$

Seçmə dispersiya D^* və ya S^2 simvolu ilə işarə olunur:

$$D^* = S^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2. \quad (4.2)$$

Seçmə dispersiyanın bu düstur ilə hesablanmış qiyməti baş coxluğun dispersiyası, D , ilə müqayisədə kiçik alınır. Buna görə də, xüsusilə $n < 40$ olduqda D^* -nın düstur 4.2-yə görə hesablanmış qiymətinə, $n (n-1)$ düzəlişi edilir:

$$D^* = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2. \quad (4.3)$$

Bu düzəliş orta kvadratik meyletmə, σ^* , və variasiya əmsalı, C_v^* , hesablandıqda da nəzərə alınır:

$$\sigma_x^* = S = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}, \quad (4.4)$$

$$C_{v_x}^* = \frac{S}{x} = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (k_i - 1)^2}. \quad (4.5)$$

Asimmetriya əmsalı aşağıdakı ifadəyə görə hesablanır:

$$C_S^* = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^3}{nS} = \frac{n \sum_{i=1}^n (k_i - 1)^3}{n(C_{v_x}^*)^3}. \quad (4.6)$$

Asimmetriya əmsalının daha dəqiq qiymətini hesablamaq üçün bu düstura $n^2 / [(n-1)(n-2)]$ düzəlişi edilir:

$$C_{S_x}^* = \frac{n \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^3}{(n-1)(n-2)S^3} = \frac{n \sum_{i=1}^n (k_i - 1)^3}{(n-1)(n-2)(C_{v_x}^*)^3}. \quad (4.7)$$

Bu düsturlarda n -müşahidə sırasının uzunluğu; x_i -hidrometeoroloji kəmiyyətin müşahidə olunmuş qiymətləri; $k_i = x_i / \bar{x}$ modul əmsalıdır.

Hidroloji sıraların uzunluğu üçüncü momenti (həmçinin, C_s -i) və daha yüksək dərəcəli momentləri tələb olunan dəqiqliklə hesablamağa imkan vermir. Buna görə də praktikada asimmetriya əmsalının əvəzinə C_s / C_v nisbətinin rayon qiymətindən istifadə olunur. Bu nisbət təyin edildikdən sonra variasiya əmsalının qiymətinə görə asimmetriya əmsalını hesablamaq olar.

C_s / C_v nisbətinin rayon qiymətini təyin etmək üçün bircins hidroloji rayon daxilində uzunsıralı müşahidə məntəqələri seçilir və hər bir belə sıra üçün C_v , C_s və C_s / C_v hesablanır. C_s / C_v nisbətinin orta qiyməti hidroloji rayonun bütün məntəqələrinə şamil olunur.

Əgər, hidroloji rayonda müşahidə sıraları qısadırsa, onda C_s / C_v nisbəti hər bir sıra üçün fərdi qaydada təyin olunur. Bu halda empirik təminat əyrisinə daha uyğun olan analitik əyrinin C_s / C_v nisbəti qəbul edilir.

Momentlər metodunun əsas üstünlüklərindən biri parametrlə-

rin hidroloji xarakteristikanın paylanma qanunundan asılı olma-masıdır. Həmçinin, hesablama düsturları kifayət qədər sadədir. Buna görə də hidroloji hesablamlar praktikasında bu metod daha geniş yayılmışdır.

Eyni zamanda qeyd etmək lazımdır ki, bu metoda görə hesablanmış variasiya və asimmetriya əmsallarının qiymətləri həqiqi qiymətlə müqayisədə bir qədər kiçik alınır. Adətən, bu metoddan $C_v < 0,5$ olduqda istifadə olunur. $C_v > 0,5$ olduqda, parametrlərin qiymətləndirilmə dəqiqliyi əhəmiyyətli dərəcədə azalır və bu səbəbdən ən çox həqiqətəbənzər metoddan istifadə etmək tövsiyə olunur.

Misal 4.1. Üç müşahidə məntəqəsi üçün illik cəm yağıntı sıralarının (cədvəl 4.1) parametrlərini təyin edin və bu sıraların paylanmalarının müqayisəli təhlilini yerinə yetirin.

Cədvəl 4.1

İllik cəm yağıntılar, düym

İl	Enniston, Alabama ştatı	Los-Anceles, Kaliforniya ştatı	Riçmond, Virciniya ştatı
1928	48	9	43
1927	49	19	44
1926	55	19	38
1925	98	9	31
1924	43	8	47
1923	53	6	49
1922	56	15	52
1921	47	20	31
1920	69	11	51
1919	57	9	40
1918	61	18	41
1917	64	8	43
1916	99	23	37
1915	54	17	36
1914	40	23	34
1913	47	17	38
1912	58	10	36
1911	44	18	37
1910	44	5	43

İl	Enniston, Alabama ştatı	Los-Anceles, Kaliforniya ştatı	Riçmond, Virciniya ştatı
1909	64	24	34
1908	44	19	53
1907	51	15	49
1906	71	21	47

Həlli: Hesablamalar aşağıdakı düsturlara görə yerinə yetirilir.
Orta kəmiyyət:

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$$

Standart meylətmə:

$$S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2$$

Variasiya əmsalı:

$$C_v = \frac{S}{\bar{x}}$$

Asimmetriya əmsalı:

$$C_s = \frac{n}{(n-1)(n-2) \cdot S^3} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^3$$

Alınmış nəticələr aşağıdakı cədvəldə verilir:

Cədvəl 4.2

Yağıntı sıralarının statistik parametrləri

Parametr	Enniston	Los-Anceles	Riçmond
Orta kəmiyyət, $\bar{x}$, düym	57.2	14.9	41.5
Standart meylətmə, S , düym	15.5	5.9	6.8
Variasiya əmsalı, C_v	0.27	0.40	0.16
Asimmetriya əmsalı, C_s	1.58	-0.15	0.16

Şərhlər:

1. Enniston şəhərindəki müşahidələr yağıntı norması və variasiyanın yüksək olmasına dəlalət edir. Paylanma kifayət qədər qısa müşahidə sırasında böyük qiymətli hədlərin olması ilə səciyyəlidir. Sıra aydın seçilən müsbət asimmetriyaya malikdir.

2. Los-Anceles şəhəri üçün məlumatlar çox kiçik orta qiymətlə xarakterizə olunur, lakin onların dəyişkənliyi böyükdür. Asimmetriya isə zəif mənfidir.

3. Riçmond şəhəri üçün yağıntıların paylanması daha bircinsdir: dəyişkənlik nisbətən kiçik, asimmetriya isə zəif müsbətdir.

Misal 4.2. 1954-1985-ci illəri əhatə edən dövrün maksimal su sərfələrinin müşahidə sırasına əsasən (cədvəl 3.1) paylanma parametrlərini momentlər üsulu ilə qiymətləndirin.

Həlli: Parametrləri bu üsulla qiymətləndirmək üçün aşağıdakı düsturlardan istifadə olunur. Cədvəl 4.3-də bu hesablamalar verilmişdir.

Cədvəl 4.3

Maksimal su sərfələrinin parametrlərinin hesablanması

$N_{\bar{Q}}$	$Q_i, \text{m}^3/\text{s}$	$k_i = Q_i/\bar{Q}$	$k_i - 1$	$(k_i - 1)^2$	$(k_i - 1)^3$
1	71.4	1.22	0.22	0.0484	0.01065
2	22.1	0.38	-0.62	0.3844	-0.23833
3	32.7	0.56	-0.44	0.1936	-0.08518
...	...	...	...	...	...
30	39.2	0.67	-0.33	0.1089	-0.03594
31	66.0	1.13	0.13	0.0169	0.00219
32	84.4	1.45	0.456	0.2025	0.09112
Cəm	1868	32	0.00	12.698	6.857
Orta	58.4	1	0		

Cədvəl 4.3-ün məlumatlarına və aşağıdakı düsturlara əsasən paylanma parametrlərinin qiymətləri hesablanır:

$$\bar{Q} = \frac{\sum_{i=1}^n Q_i}{n} = \frac{1868}{32} = 58,4 \text{ m}^3/\text{s}$$

$$C_v^* = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (k_i - 1)^2}{n - 1}} = \sqrt{\frac{12.698}{31}} = 0,64;$$

$$C_s^* = \frac{n \sum_{i=1}^n (k_i - 1)^3}{(n - 1)(n - 2)C_v^3} = \frac{32 \cdot 6,857}{31 \cdot 30 \cdot 0,64^3} = 0,90;$$

$$C_s/C_v = 1,41.$$

4.2. Ən çox həqiqətbənzər metod

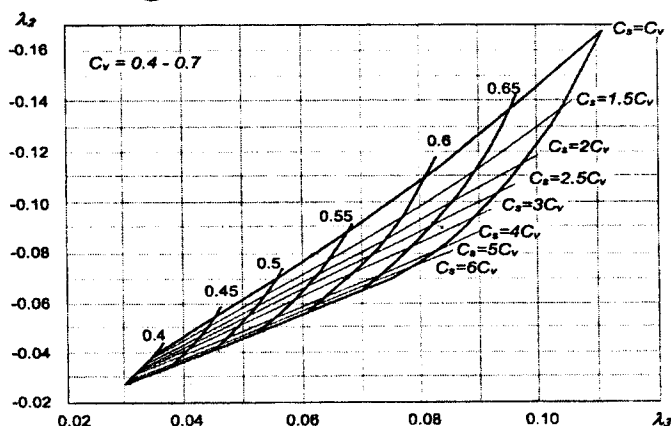
Praktikada bu metod əsasən üçparametrlı gamma paylanmanın parametrlərini hesablamaq üçün istifadə olunur. Əvvəlcə, müşahidə məlumatlarına görə köməkçi λ_2 və λ_3 statistikalar təyin edilir:

$$\lambda_2 = \frac{\sum_{i=1}^n \lg k_i}{n-1}, \quad (4.8)$$

$$\lambda_3 = \frac{\sum_{i=1}^n k_i \lg k_i}{n-1}, \quad (4.9)$$

burada $k_i = x_i / \bar{x}$ - modul əmsalları; $\bar{x}$ -sıranın orta qiymətidir.

Sonra λ_2 və λ_3 statistikalarına görə xüsusi nomogramdan (şəkil 4.1) C_v və C_s tapılır.



Şəkil 4.1. Üçparametrlı gamma paylanmanın parametrlərini ən çox həqiqətbənzər üsul ilə qiymətləndirmək üçün nomogramma

Parametrlər bu metodla hesablandıqda, sıranın ehtimalı böyük olan orta hədləri daha böyük çəki ilə nəzərə alınır. Momentlər metodunda isə sıranın kənar hədlərinin çəkisi daha böyük olur.

Ən çox həqiqətbənzər metodun əsas çatışmazlığı ondan ibarətdir ki, bu metodu tətbiq etmək üçün paylanma qanununu dəqiq bilmək tələb olunur. Hidroloji praktikada isə bu həmişə mümkün olmur.

Rusiyada bu metodun nomogrammaları Kritski-Menkel paylanması üçün işlənmişdir. Lakin praktikada bəzən λ_2 və λ_3 statistikalarının qiymətləri nomogrammalardan kənara çıxır, yəni variasiya və asimmetriya əmsallarını təyin etmək mümkün olmur. Belə hallarda ən çox həqiqətbənzər metodun qısaldılmış variantından istifadə edilir. Bu variantda λ_3 statistikası hesablanmır və onun əvəzinə C_s / C_v nisbətinin orta rayon qiymətindən istifadə olunur. Məlum λ_2 və C_s / C_v nisbətinə görə nomogrammadan variasiya əmsalı tapılır.

Qısaldılmış ən çox həqiqətbənzər metodu Pirsonun III tip əyriləri üçün də istifadə olunur. Bu paylanma üçün variasiya əmsalının λ_2 və C_s / C_v nisbətindən asılılığı cədvəl şəkilində tərtib edilmişdir (Əlavə 9).

Misal 4.3. 1954-1985-ci illəri əhatə edən dövrün maksimal su sərfələrinin müşahidə sırasına əsasən (cədvəl 3.1) paylanmanın parametrlərini ən çox həqiqətbənzər üsul ilə qiymətləndirin.

Həlli: 1. Sıranın orta qiyməti və λ_2 , λ_3 statistikalarını hesablamaq üçün köməkçi cədvəl (cədvəl 4.4) tərtib olunur.

Cədvəl 4.4

Paylanma parametrlərinin qiymətlərini ən çox həqiqətbənzər üsul ilə hesablamaq üçün köməkçi cədvəl

No	Q_{ix} , m ³ /s	k	lg(k)	k · lg(k)
1	71.4	1.22	0.086	0.1054
2	22.1	0.38	-0.4202	-0.1435
3	32.7	0.56	-0.2518	-0.1410
...	...	...	...	...
30	39.2	0.67	-0.1739	-0.1165
31	66.0	1.13	0.0531	0.0600
32	84.4	1.45	0.1614	0.2340
Cəm	1868		-2.697	2.573
Orta	58.4			

2. Aşağıdakı düsturlara görə λ_2 və λ_3 statistikaları hesablanır:

$$\lambda_2 = \frac{\sum_{i=1}^n \lg k_i}{n-1} = \frac{-2,697}{31} = -0,087,$$

$$\lambda_3 = \frac{\sum_{i=1}^n k_i \lg k_i}{n-1} = \frac{2,573}{31} = 0,083.$$

3. λ_2 və λ_3 -ün qiymətlərinə görə nomogrammadan istifadə etməklə (şəkil 4.1) paylanmanın parametrləri təyin edilir:

$$C_v = 0,67; C_s/C_v = 2,8.$$

4.3. *L – momentlər metodu*

Qeyd olunduğu kimi, hidrometeoroloji müşahidə sıraları qısa olduğuna görə, adətən onların üçüncü və daha yüksək momentləri qiymətləndirilmir. Bu səbəbdən, təsadüfi kəmiyyətlərin paylanma funksiyalarının parametrlərini hesablamaq üçün L-momentlər adlanan alternativ qiymətləndirmə sistemi təklif olunmuşdur. Paylanmanın r dərəcəli ehtimallı-çəki momenti, β_r , aşağıdakı düstura görə təyin olunur:

$$\beta_r = \int_{-\infty}^{+\infty} x [F_X(x)]^r f_X(x) dx, \quad (4.10)$$

burada F_X və f_X -müvafiq olaraq, X təsadüfi kəmiyyətinin integral paylanma funksiyası və ehtimalının sıxlıq funksiyasıdır. L-momentlər, λ_r , r dərəcəli ehtimallı-çəki momentlərinin, β_r , xətti kombinasiyalarıdır və ilk dörd L-moment aşağıdakı kimi hesablanır:

$$\lambda_1 = \beta_0, \quad (4.11)$$

$$\lambda_2 = 2\beta_1 - \beta_0, \quad (4.12)$$

$$\lambda_3 = 6\beta_2 - 6\beta_1 + \beta_0, \quad (4.13)$$

$$\lambda_4 = 20\beta_3 - 30\beta_2 + 12\beta_1 - \beta_0. \quad (4.14)$$

Ehtimallı-çəki momentlər F_X funksiyasının artan qiymətlərini nəzərə aldığına və $F_X \leq 1$ olduğuna görə, ehtimallı-çəki momentləri və L-momentlərin qiymətlərinin müşahidə sırasının ekstremal (ən böyük və ən kiçik) hədlərinə həssaslığı çox zəifdir. Hidrometeoroloji dəyişənlərin paylanma funksiyalarının parametrlərini qiymətləndirdikdə momentləri hesablamaq üçün L-momentlər

metodunun tətbiqi daha məqsəduyğun hesab olunur.

Tutaq ki, X təsadüfi kəmiyyəti üzərində N sayda müşahidə yerinə yetirilmiş və sıra tərtib olunmuşdur. Bu sıranın paylanma funksiyasının L-momentlərini qiymətləndirmək üçün əvvəlcə dəyişənlər artan sırada $x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq \dots \leq x_N$ düzülür və sonra ehtimallı-çəki momentləri hesablanır (Hosking and Wallis, 1997):

$$b_0 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i, \quad (4.15)$$

$$b_1 = \frac{1}{N(N-1)} \sum_{i=2}^N (i-1)x_i, \quad (4.16)$$

$$b_2 = \frac{1}{N(N-1)(N-2)} \sum_{i=3}^N (i-1)(i-2)x_i, \quad (4.17)$$

$$b_3 = \frac{1}{N(N-1)(N-2)(N-3)} \sum_{i=4}^N (i-1)(i-2)(i-3)x_i \quad (4.18)$$

Müşahidə sırası üçün ilk dörd L-moment qiymətləndirildikdə, əvvəlcə (4.15)-(4.18) düsturlarına görə b_0 , b_1 , b_2 , və b_3 (empirik ehtimallı-çəki momentləri) təyin olunur, sonra isə $\beta_0=b_0$, $\beta_1=b_1$, $\beta_2=b_2$ və $\beta_3=b_3$ əvəzləmələrini edərək (4.11)-(4.14) düsturlarına görə λ_1 - λ_4 momentləri hesablanır.

Misal 4.4. 1946-1970-ci illər üçün çayın maksimal su sərfələri aşağıdakı cədvəldə verilir:

<i>il</i>	Maksimal su sərfi, m ³ /s	<i>il</i>	Maksimal su sərfi, m ³ /s	<i>il</i>	Maksimal su sərfi, m ³ /s
1946	126	1955	3	1964	11
1947	178	1956	2	1965	1122
1948	251	1957	141	1966	2
1949	35	1958	282	1967	1259
1950	71	1959	112	1968	158
1951	501	1960	40	1969	126
1952	891	1961	63	1970	25
1953	18	1962	398		
1954	2239	1963	708		

Bu maksimal su sərfələri loq-normal paylanma qanununa tabedir. L-momentlər metodundan istifadə edərək sıranın orta qiyməti və standart meylətməsini hesablayın və alınmış qiymətləri momentlər metodu ilə hesablanmış müvafiq qiymətlərlə müqayisə edin.

Həlli: Aralıq hesablamaların nəticələri cədvəldə verilir:

i	Q_i (m ³ /s)	$(i-1)Q_i$	$\ln Q_i$	$(\ln Q_i - \mu_Y)^2$
1	2		0.693	15.314
2	2	2	0.693	15.314
3	3	6	1.099	12.305
4	11	33	2.398	4.878
5	18	72	2.890	2.945
6	35	175	3.555	1.105
7	35	210	3.555	1.105
8	40	280	3.689	0.842
9	63	504	4.143	0.215
10	71	639	4.263	0.118
11	112	1120	4.718	0.013
12	126	1386	4.836	0.053
13	126	1512	4.836	0.053
14	141	1833	4.949	0.117
15	158	2212	5.063	0.208
16	178	2670	5.182	0.331
17	251	4016	5.525	0.844
18	282	4794	5.642	1.072
19	398	7164	5.986	1.904
20	501	9519	6.217	2.592
21	708	14.160	6.562	3.826
22	891	18.711	6.792	4.778
23	1122	24.684	7.023	5.839
24	1259	28.957	7.138	6.409
25	2239	53.736	7.714	9.655
Cəm	8772	178.395	115.163	91.836

Birinci dərəcəli ehtimallı-çəki momenti, b_0 düstur (4.15)-ə görə təyin olunur: $b_0 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N Q_i = \frac{1}{25} \cdot (8772) = 350.9$.

Yuxarıdakı cədvəlin 3-cü sütununda göstərilmiş $(1-i)Q_i$ kəmiyyətinin yekun cəmi nəzərə alınmaqla düstur (4.16)-ya görə ikinci dərəcəli ehtimallı-çəki momenti, b_1 hesablanır:

$$b_1 = \frac{1}{N(N-1)} \sum_{i=2}^N (i-1) Q_i = \frac{1}{25(25-1)} \cdot (178,395) = 297.3$$

Birinci L-moment, λ_1 , düstur (4.11)-ə görə

$$\lambda_1 = b_0 = 350.9$$

və ikinci L-moment, λ_2 , isə düstur (4.12)-yə görə hesablanır:

$$\lambda_2 = 2b_1 - b_0 = 2(297.3) - 350.9 = 243.8.$$

Birinci və ikinci L-momentlər, λ_1 və λ_2 , ilə loq-normal paylanmanın parametrləri, μ_Y , σ_Y (burada $y = \ln Q$), arasında asılılıq aşağıdakı kimidir:

$$\lambda_1 = \exp\left(\mu_Y + \frac{\sigma_Y^2}{2}\right),$$

$$\lambda_2 = \exp\left(\mu_Y + \frac{\sigma_Y^2}{2}\right) \operatorname{erf}\left(\frac{\sigma_Y}{2}\right),$$

burada $\operatorname{erf}(\sigma_Y/2)$ xəta funksiyasıdır (cədvəl 4.5).

λ_1 -in qiymətindən istifadə etməklə λ_2 -nin ifadəsindən əvvəlcə $\operatorname{erf}(\sigma_Y/2)$, sonra isə cədvəl 4.5-ə görə σ_Y tapılır.

Sonra isə μ_Y təyin olunur: $\mu_Y = 4.81$.

Yuxarıdakı cədvəlin müvafiq olaraq 4-cü və 5-ci sütunlarında verilmiş $\ln Q_i$ və $(\ln Q_i - \mu_Y)^2$ kəmiyyətlərinin cəmlərini nəzərə almaqla momentlər metodu ilə loq-normal paylanmanın orta qiyməti (μ_Y) və standart meyletməsi (σ_Y) hesablanır:

$$\mu_Y = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \ln Q_i = \frac{1}{25} \cdot (115.163) = 4.61,$$

$$\sigma_Y = \sqrt{\frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (\ln Q_i - \mu_Y)^2} = \sqrt{\frac{1}{25-1} 91,836} = 1.96.$$

Beləliklə, verilmiş maksimal su sərfələri sırasının L-momentlər

metodu və momentlər metodu ilə hesablanmış parametrləri bir qədər fərqlənir. L-momentlər metodu ilə hesablanmış qiymətlər daha etibarlı olduğu üçün, üstünlük onlara verilməlidir.

Belə hesab olunur ki, L-momentlər metodu və ən çox həqiqətəbənzər metodun effektivlikləri çox yaxındır.

Cədvəl 4.5

Xəta funksiyası

z	$erf(z)$	z	$erf(z)$
0.0	0.00000	1.6	0.97635
0.1	0.11246	1.7	0.98379
0.2	0.22270	1.8	0.98909
0.3	0.32863	1.9	0.99279
0.4	0.42839	2.0	0.99532
0.5	0.52050	2.1	0.99702
0.6	0.60386	2.2	0.99814
0.7	0.67780	2.3	0.99886
0.8	0.74210	2.4	0.99931
0.9	0.79691	2.5	0.99959
1.0	0.84270	2.6	0.99976
1.1	0.88021	2.7	0.99987
1.2	0.91031	2.8	0.99992
1.3	0.93401	2.9	0.99996
1.4	0.95229	3.0	0.99998
1.5	0.96611	∞	1.00000

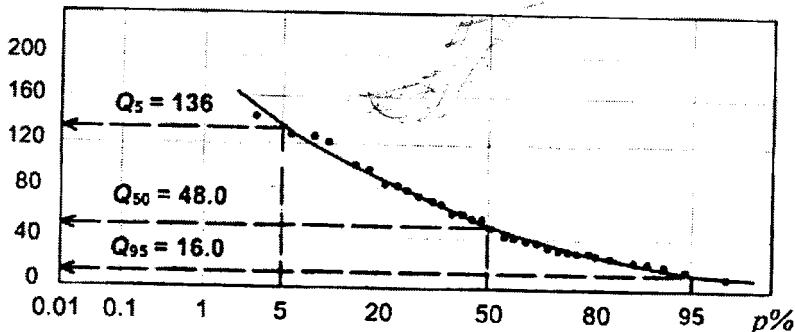
4.4. Kvantillər metodu

Paylanma parametrlərinin kvantillər metodu ilə hesablanmasında həm qrafik, həm də analitik analiz istifadə olunur. Bu metod həm də qraf-analitik metod adlanır. Kvantillər metodunu tətbiq etdikdə istifadə olunacaq analitik əyrinin tipi əvvəlcədən məlum olmalıdır.

Pirson III tip əyriləri üçün bu metodu G.A.Alekseyev (1960-cı il) işləmişdir.

Əvvəlcə, ehtimallar damasında empirik nöqtələr qeyd edilir (şəkil 4.2).

$Q, m^3/s$



Şəkil 4.2. Empirik təminat əyrisinə görə dayaq ordinatların təyini sxemi

Ordinat oxunda modul əmsalları deyil, hidroloji xarakteristikanın (məsələn, su sərfələrinin) öz qiymətləri göstərməlidir. Sonra empirik nöqtələr səlis əyri ilə ortalaşdırılır. Bu əyridən üç dayaq ordinat (5, 50 və 95%-li təminatlar üçün) təyin olunur: x_5 , x_{50} və x_{95}

Növbəti hesablamalarda paylanmanın parametrlərinin elə qiymətləri ($\bar{x}, C_x, C_s$) tapılır ki, bu qiymətlərdə analitik əyri x_5 , x_{50} və x_{95} nöqtələrindən keçsin. Bunun üçün aşağıdakı düsturlardan istifadə olunur:

$$x_5 = \sigma_x \cdot t_5 + \bar{x}, \quad (4.19)$$

$$x_{50} = \sigma_x \cdot t_{50} + \bar{x}, \quad (4.20)$$

$$x_{95} = \sigma_x \cdot t_{95} + \bar{x}, \quad (4.21)$$

burada t_5, t_{50}, t_{95} -Pirsonun III tip əyrisinin normallaşdırılmış ordinatları; σ_x - sıranın orta kvadratik meyletməsi; $\bar{x}$ -sıranın orta qiymətidir. Beləliklə, üç tənlik və qiymətləri məlum olmayan üç parametr var.

Asimmetriya əmsalını qiymətləndirmək üçün əvvəlcə, S əmsalı hesablanır:

$$S = \frac{x_p + x_{100-p} - 2x_{50}}{x_5 - x_{95}}. \quad (4.22)$$

Birinci dayaq ordinatın təminatı $P=5\%$ olduğu üçün:

$$S = \frac{x_5 + x_{95} - 2x_{50}}{x_5 - x_{95}}. \quad (4.23)$$

(4.19)-(4.21) ifadələrini axırıncı düsturda yerinə yazırıq:

$$S = \frac{t_5 + t_{95} - 2t_{50}}{t_5 - t_{95}}. \quad (4.24)$$

Pirsonun III tip normallaşdırılmış paylanması üçün S əmsalının asimmetriya əmsalından birmənalı asılılığı mövcuddur. Beləliklə, S əmsalını hesablayıb, sonra asimmetriya əmsalını təyin etmək olar.

Sıranın orta kvadratik meyletməsi, orta qiyməti və variasiya əmsalı, müvafiq olaraq aşağıdakı düsturlara görə hesablanır:

$$\sigma_x = \frac{x_5 - x_{95}}{t_5 - t_{95}}, \quad (4.25)$$

$$\bar{x} = x_{50} - \sigma_x t_{50}, \quad (4.26)$$

$$C_v = \frac{\sigma_x}{\bar{x}}. \quad (4.27)$$

Loqarifmik-normal paylanmanın üçüncü parametri a təminat ayrısının formasına təsir göstərmir. Bu paylanma üçün də Pirsonun III tip ayrılərinə tətbiq edilən yanaşmanı tətbiq etmək olar. Metodika yalnız onunla fərqlənir ki, əlavə olaraq a parametri hesablanmalıdır.

G.A.Alekseyev göstərmişdir ki, a parametri ilə təminat ayrısının dayaq ordinatları arasındakı əlaqə aşağıdakı düsturla ifadə olunur:

$$a = \frac{x_5 x_{95} - x_{50}^2}{x_5 + x_{95} - 2x_{50}}. \quad (4.28)$$

Qalan hesablamalar standart sxem üzrə yerinə yetirilir:

- düstur (4.23)-ə görə S əmsalı qiymətləndirilir;

- S əmsalına görə loqarifmik-normal paylanma cədvəlindən (cədvəl 4.6) üç normallaşdırılmış dayaq ordnatları və asimmetriya əmsalı təyin olunur;

- (4.25)-(4.27) düsturlarına görə $\sigma_x, \bar{x}, C_v$ hesablanır.

Kritski-Menkel ayrılışı əsasında qraf-analitik metodun tətbiq metodikası 1996-cı ildə Rusiya Dövlət Hidrometeorologiya Universitetinin “Qurunun hidrologiyası” kafedrasında işlənmişdir.

Bu metodikaya görə, standart yanaşmadan fərqli olaraq adi S əmsalı ilə yanaşı, S_2 əmsalı da hesablanır:

$$S_2 = \frac{2x_{50}}{x_5 - x_{95}} = \frac{2K_{50}}{K_5 - K_{95}}. \quad (4.29)$$

C_s/C_v nisbətinin konkret qiymətləri üçün S_2 və S arasında birmənalı əlaqə mövcuddur. Bu əlaqə əsasında xüsusi nomogramma hazırlanmışdır.

Beləliklə, S və S_2 əmsallarını hesablayıb, nomogrammadan C_s/C_v nisbətini təyin etmək olar. C_s/C_v nisbətinin qiymətini 0,5-ə kimi yuvarlaqlaşdırmaq lazımdır.

S əmsalının böyük qiymətləri ($S > 0,6$) $C_v > 1$ olduğunu göstərir. Bu halda C_s/C_v nisbətinin seçmə qiyməti çox dayanıqsız olduğu üçün, onu qraf-analitik metodla təyin etmək məqsədəuyğun deyil və bu nisbət orta rayon qiymətindən istifadə etmək tövsiyə olunur.

C_s/C_v nisbətinin konkret qiyməti üçün variasiya əmsalı ilə S əmsalı arasında birmənalı əlaqə mövcud olduğuna görə, C_s/C_v məlum olduqda, xüsusi cədvəldən variasiya əmsalı təyin edilə bilər.

Sıranın orta qiymətini hesablamaq üçün Kritski-Menkel ayrılışının 50% təminatlı modul əmsalı, K_{50} , tapılır. Onda:

$$\bar{x} = \frac{x_{50}}{K_{50}}. \quad (4.30)$$

Ümumiyyətlə, qraf-analitik metod kifayət qədər sadə və əyaniyədir. Lakin bu metodu ehtiyatla tətbiq etmək lazımdır, çünki

empirik əyrinin səlisləşdirilməsi subyektiv xarakter daşıyır və müəyyən təcrübə tələb edir.

Misal 4.5. Maksimal su sərfələrinin müşahidə sırasına əsasən (cədvəl 3.1) paylanmanın parametrlərini qraf-analitik üsul ilə qiymətləndirin. Analitik təminat əyrisi kimi Pirsonun III tip əyrisindən istifadə edin.

Həlli: 1. Sıra azalma qaydasında düzülür və düstur (3.4)-ə görə empirik təminat əyrisinin ordinatları hesablanır (cədvəl 3.2).

2. Mülayim asimmetriyalı ehtimal damasında empirik təminat əyrisi qurulur (şəkil 4.2).

3. Hamarlaşdırılmış empirik təminat əyrisinin dayaq ordinatları təyin edilir: $Q_5^* = 136$; $Q_{50}^* = 48$; $Q_{95}^* = 16$.

4. S^* əmsalı hesablanır:

$$S^* = \frac{Q_5 + Q_{95} - 2Q_{50}}{Q_5 - Q_{95}} = \\ = (136 + 16 - 2 \cdot 48) / (136 - 16) = 0,47$$

5. S^* əmsalına görə Pirsonun III tip əyrisinin üç normallaşdırılmış ordinatı və asimmetriya əmsalı təyin edilir (Əlavə 1):

$$t_5 = 1,98; t_{50} = -0,26; t_{95} = -1,07; C_s^* = 1,67.$$

6. Aşağıdakı düstura görə orta kvadratik meylectmə hesablanır:

$$\sigma_Q = \frac{Q_5 - Q_{95}}{t_5 - t_{95}} = \\ = (136 - 16) / (1,98 + 1,07) = 39,3.$$

7. Riyazi gözləmənin qiyməti təyin olunur:

$$\bar{Q} = Q_{50} - \sigma_Q^* \cdot t_{50} = 48 - 39,3(-0,26) = 58,2.$$

8. Variasiya əmsalının qiyməti hesablanır:

$$C_v^* = \sigma_Q^* / \bar{Q} = 39,3 / 58,2 = 0,68.$$

9. Beləliklə, verilmiş sıranın əsas parametrləri aşağıdakılardır:

$$\bar{Q} = 58,2; C_v^* = 0,68; C_s^* = 1,67; C_s^* / C_v^* = 2,46.$$

Misal 4.6. Maksimal su sərfələrinin müşahidə sırasına əsasən (cədvəl 3.1) paylanmanın parametrlərini qraf-analitik üsulla qiymətləndirin. Analitik təminat əyrisi kimi üçparametrlı loqarifmik-normal əyridən istifadə edin.

Həlli: 1-4 bəndlər misal 4.5-in bəndləri ilə eynidir.

5. S əmsalına görə cədvəl 4.6-dan loqarifmik-normal paylanmanın üç normallaşdırılmış dayaq ordinatı və asimmetriya əmsalı təyin edilir: $t_5=1,88$; $t_{50}=-0,26$; $t_{95}=1,03$; $C_s^* = 2,35$.

6. Orta kvadratik meyletmənin qiyməti hesablanır:

$$\sigma_Q^* = \frac{Q_5 - Q_{95}}{t_5 - t_{95}} =$$

$$= (136 - 16)/(1,88 + 1,03) = 41,2.$$

7. Riyazi gözləmənin qiyməti təyin olunur:

$$\bar{Q} = Q_{50} - \sigma_Q^* \cdot t_{50} = 48 - 41,2(-0,26) = 58,7.$$

8. Variasiya əmsalının qiyməti hesablanır:

$$C_v^* = \sigma_Q^*/\bar{Q} = 41,2/58,7 = 0,70.$$

Cədvəl 4.6

S və C_s əmsallarının qiymətləri (loqarifmik-normal paylanma üçün)

C_s	S	Normallaşdırılmış ordinatlar, t_p			C_s	S	Normallaşdırılmış ordinatlar, t_p		
		5%	50%	95%			5%	50%	95%
0	0	1.64	0	-1.64	1.9	0.41	1.89	-0.23	-1.12
0.1	0.03	1.67	-0.02	-1.62	2.0	0.42	1.89	-0.24	-1.10
0.2	0.06	1.70	-0.04	-1.59	2.1	0.44	1.89	-0.24	-1.08
0.3	0.09	1.72	-0.06	-1.56	2.2	0.45	1.89	-0.25	-1.06
0.4	0.11	1.75	-0.07	-1.53	2.3	0.46	1.88	-0.25	-1.04
0.5	0.14	1.77	-0.09	-1.49	2.4	0.48	1.88	-0.26	-1.02
0.6	0.16	1.79	-0.10	-1.46	2.5	0.49	1.88	-0.26	-1.00
0.7	0.19	1.81	-0.11	-1.43	2.6	0.50	1.87	-0.26	-0.99
0.8	0.21	1.82	-0.13	-1.40	2.7	0.51	1.87	-0.27	-0.97
0.9	0.23	1.84	-0.14	-1.37	2.8	0.51	1.86	-0.27	-0.96
1.0	0.25	1.85	-0.15	-1.34	2.9	0.52	1.86	-0.27	-0.95
1.1	0.27	1.86	-0.16	-1.31	3.0	0.53	1.85	-0.28	-0.93
1.2	0.29	1.87	-0.17	-1.29	3.2	0.55	1.84	-0.28	-0.90
1.3	0.31	1.88	-0.18	-1.26	3.4	0.56	1.83	-0.29	-0.88
1.4	0.33	1.88	-0.19	-1.23	3.6	0.57	1.81	-0.29	-0.86
1.5	0.35	1.89	-0.20	-1.21	3.8	0.58	1.80	-0.29	-0.84
1.6	0.37	1.89	-0.21	-1.18	4.0	0.59	1.78	-0.29	-0.82
1.7	0.38	1.89	-0.22	-1.16	4.5	0.62	1.75	-0.30	-0.78
1.8	0.39	1.89	-0.22	-1.14	5.0	0.64	1.71	-0.30	-0.74

9. Beləliklə, verilmiş sıranın əsas parametrləri aşağıdakılardır:

$$\bar{Q} = 58,7; C_v^* = 0,70; C_s^* = 2,35; C_s^*/C_v^* = 3,36.$$

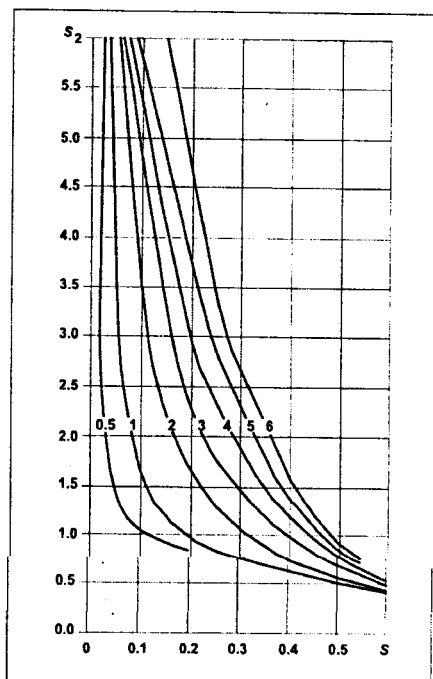
Misal 4.7. Maksimal su sərfələrinin müşahidə sırasına əsasən (cədvəl 3.1) paylanma parametrlərini qraf-analitik üsulla qiymətləndirin. Analitik təminat əyrisi kimi Kritski-Menkelin təminatlar əyrisindən istifadə edin.

Həlli: 1-4-cü bəndlər misal 4.5-in bəndləri ilə eynidir.

5. S_2 əmsalı təyin edilir:

$$S_2 = 2Q_{50}/(Q_5 - Q_{95}) = 2k_{50}/(k_5 - k_{95}) = (2 \cdot 48)/(136 - 16) = 0,80.$$

6. $S = 0,47$ və $S_2 = 0,80$ qiymətləri üçün nomoqrammaya (şəkil 4.3) əsasən C_s/C_v nisbəti təyin edilir. Bu halda (tama qədər yuvarlaqlaşdırmaqla) $C_s/C_v = 3$.



Şəkil 4.3. Kritski-Menkelin təminatlar əyrisi üçün C_s/C_v nisbətinin S əmsalı və S_2 parametrinə görə təyini üçün istifadə olunan nomoqramma

7. Cədvəl 4.7-dən $S=0,47$ və $C_s/C_v=3$ üçün variasiya əmsalı təyin edilir. Bu halda $C_v=0,72$.

Cədvəl 4.7

S əmsalının qiymətlərinin C_v və C_s/C_v nisbətindən asılılığı (Kritski-Menkelin təminatlar əyrisi üçün)

C_v	C_s/C_v nisbəti						
	0.5	1	2	3	4	5	6
0.1	0.027	0.036	0.055	0.061	0.068	0.091	0.152
0.2	0.030	0.056	0.113	0.163	0.198	0.238	0.270
0.3	0.041	0.084	0.169	0.229	0.286	0.326	0.356
0.4	0.050	0.113	0.226	0.298	0.348	0.378	0.402
0.5	0.074	0.156	0.279	0.357	0.403	0.427	0.443
0.6	0.114	0.206	0.335	0.409	0.450	0.464	0.481
0.7	0.197	0.270	0.390	0.461	0.488	0.489	0.508
0.8		0.358	0.445	0.504	0.527	0.538	0.539
0.9		0.456	0.506	0.546	0.561	0.563	0.571
1.0		0.562	0.565	0.586	0.595		
1.1		0.663	0.618	0.623	0.625		
1.2		0.754	0.667	0.658	0.652		
1.3		0.823	0.715	0.689	0.679		
1.4		0.871	0.760	0.719	0.704		
1.5		0.904	0.796	0.746	0.726		
1.6		0.930	0.823	0.772	0.748		
1.7		0.952	0.856	0.795	0.768		
1.8		0.969	0.882	0.817	0.786		
1.9		0.983	0.902	0.837	0.803		
2.0		0.996	0.920	0.855	0.819		

8. Kritski-Menkelin təminatlar əyrisi cədvəllərinə əsasən $C_s/C_v=3$ və $C_v=0,72$ olduqda K_{50} təyin edilir: $K_{50}=0,815$ (Əlavə 2).

9. Orta qiymət $\bar{Q}$ təyin edilir:

$$\bar{Q} = Q_{50} / K_{50} = 48,0 / 0,815 = 58,9 \text{ m}^3/\text{s}.$$

4.5. Qrafik metod

Paylanma parametrləri qrafik metodla qiymətləndirildikdə, istifadə olunacaq analitik əyrinin tipi əvvəlcədən məlum olmalıdır. Bu üsul həm iki, həm də üçparametrlı paylanma əyriləri üçün istifadə oluna bilər.

Üçparametrlı əyri üçün C_s və C_v əmsallarının müxtəlif nisbətlərində analitik əyrini düzləndirən ehtimallar damasından istifadə olunur. Ehtimallar damasında modul əmsallarına görə empirik təminat əyrisi qurulur. Yekun hesablamalar üçün düz xətt şəklini alan empirik təminat əyrisinə uyğun C_s/C_v nisbəti qəbul edilir. Alınmış düz xəttin üfüqi xəttlə əmələ gətirdiyi bucaq variasiya əmsalından asılıdır. Bunu nəzərə alaraq ehtimallar damasının yuxarı sol və aşağı sağ künclərində C_v şkalası qurulur (şəkil 4.4).

Beləliklə, qrafik metod paylanmanın variasiya əmsalı və C_s/C_v nisbətini təyin etməyə imkan verir. Sıranın orta qiyməti momentlər üsulunun məlum düsturuna görə hesablanır.

Misal 4.8. Maksimal su sərfələrinin müşahidə sırasına əsasən (cədvəl 3.1) paylanmanın parametrlərini qrafik üsulla qiymətləndirin. Analitik təminat əyrisi kimi Kritski-Menkel əyrisindən istifadə edin.

Həlli: 1. Riyazi gözləmənin qiyməti hesablanır: $\bar{Q} = \frac{\sum_{i=1}^n Q_i}{n} = \frac{1868}{32} = 58,4$.

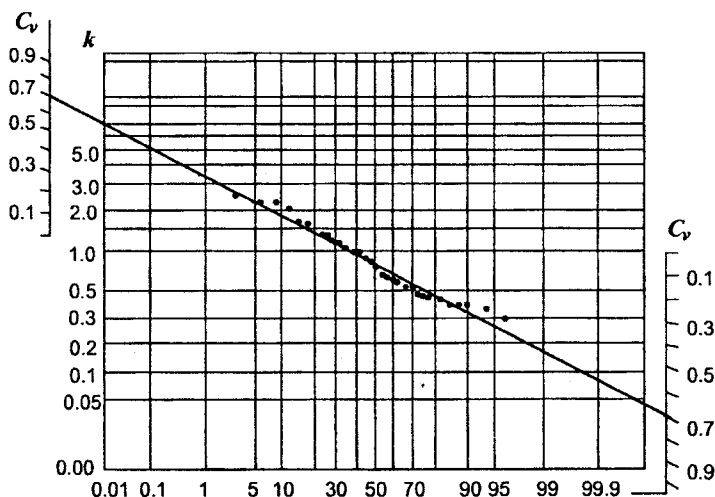
2. $k_i = Q_i/\bar{Q}$ düsturuna əsasən modul əmsalları təyin olunur.

3. Modul əmsalları sırası azalan qaydada düzülür və $P = \frac{m}{n+1} \cdot 100\%$ düsturuna əsasən empirik təminat əyrisinin ordinatları hesablanır (cədvəl 3.2).

4. Kritski-Menkel əyrisini düzləndirən xüsusi ehtimal damalarında beş dəfə empirik təminat əyriləri qurulur ($C_s/C_v=1; 1.5; 2.0; 3.0; 4.0$ üçün).

5. Hesablamalar üçün $C_s/C_v=3$ qiymətini qəbul edirik, belə ki,

bu nisbətə ehtimallar damasında empirik nöqtələr düz xətt boyunca qruplaşır (şəkil 4.4).



Şəkil 4.4. Kritski-Menkelin təminat əyrisi ($C_s/C_v=3$)

6. Nöqtələri ortalaşdıran düz xətt keçirilir və ehtimallar damasının künclərindəki şkalalara əsasən variasiya əmsali təyin edilir $C_v^* = 0,70$

Beləliklə, verilmiş sıranın əsas parametrləri aşağıdakılardır:

$$\bar{Q} = 58,4; C_v^* = 0,70; (C_s/C_v)^* = 3$$

və müvafiq olaraq $C_s^* = 2,1$.

4.6. Paylanmanın seçmə parametrlərinin xətlərinin qiymətləndirilməsi

Paylanma funksiyasının parametrlərinin qiymətləri müəyyən səpələnmə ilə səciyyələnən təsadüfi kəmiyyətlərdir. Başqa sözlə, eyni bir baş çoxluğun müxtəlif seçmələri üçün hesablanmış parametrlərin qiymətləri fərqlənir. Buna görə də hidroloji sıraların parametrlərinin xətləri qiymətləndirilir. Bu qiymətləndirmədə isti-

fadə olunan düsturlar, parametrlin hesablanma metodundan asılıdır.

Momentlər metodu. Sıranın orta kəmiyyətinin mütləq xətası (və ya standart xətası) aşağıdakı düstura görə hesablanır:

$$\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \quad (4.31)$$

burada σ -sıranın orta kvadratik meylətməsi; n -sıranın uzunluğudur.

Orta kəmiyyətin nisbi xətası:

$$E_{\bar{x}} = \frac{\sigma_{\bar{x}}}{\bar{x}} \cdot 100 = \frac{\sigma}{x\sqrt{n}} \cdot 100\% = \frac{C_v}{\sqrt{n}} \cdot 100\%, \quad (4.32)$$

burada C_v -variasiya əmsalıdır.

Variasiya əmsalının mütləq və nisbi xətalari aşağıdakı düsturlara görə hesablanır:

$$\sigma_{C_v} = \frac{C_v \sqrt{1 + aC_v^2}}{\sqrt{2n}}, \quad (4.33)$$

$$E_{C_v} = \frac{\sqrt{1 + aC_v^2}}{\sqrt{2n}} \cdot 100\%, \quad (4.34)$$

burada $a = 2$ (normal paylanma üçün) və $a = 1$ (iki parametrlı qamma paylanma üçün).

Məlumdur ki, iki parametrlı qamma paylanma üçün $C_s/C_v = 2$, normal paylanma üçün isə $C_s = 0$. Hidroloji sıralar adətən mülayim müsbət asimmetriya ilə səciyyələndiklərinə görə, yuxarıdakı düsturlarda $a = 1$ qəbul olunması məqsədəuyğun hesab edilir.

Düstur (4.33)-dən başqa, Y.Q.Bloxinovun düsturundan da istifadə olunur:

$$\sigma_{C_v} = \frac{C_v}{n + 4C_v^2} \sqrt{\frac{n(1 + C_v^2)}{2}}. \quad (4.35)$$

Bu düstur da iki parametrlı qamma paylanma üçün alınmışdır.

Asimmetriya əmsalının xətalərini qiymətləndirmək üçün aşağıdakı düsturlar təklif olunmuşdur:

S.N.Kritski və M.F.Menkelin düsturları:

$$\sigma_{C_s} = \sqrt{\frac{6}{n}(1 + 6C_v^2 + 5C_v^4)}, \quad (4.36)$$

$$E_{C_s} = \frac{1}{C_s} \sqrt{\frac{6}{n}(1 + 6C_v^2 + 5C_v^4)} \cdot 100\%. \quad (4.37)$$

A.Ş.Reznikovskinin düsturları:

$$\sigma_{C_s} = \sqrt{\frac{6}{n}(1 + C_v^2)}, \quad (4.38)$$

$$E_{C_s} = \frac{1}{C_s} \sqrt{\frac{6}{n}(1 + C_v^2)} \cdot 100\%. \quad (4.39)$$

Ən çox həqiqətbənzər metod. Sıranın orta kəmiyyəti və asimmetriya əmsalının mütləq və nisbi xətalari elə momentlər metodunda istifadə olunan (4.31)-(4.32) və (4.36)-(4.37) düsturlarına görə qiymətləndirilir.

Variasiya əmsalının xətarını təqribi hesablamaq üçün aşağıdakı düsturlar tətbiq edilir:

$$\sigma_{C_r} = \frac{C_v}{\sqrt{2n}} \sqrt{\frac{3}{3 + C_v^2}}, \quad (4.40)$$

$$E_{C_r} = \sqrt{\frac{3}{2n(3 + C_v^2)}} \cdot 100\% . \quad (4.41)$$

Hidroloji hesablamalar praktikasında belə qəbul olunmuşdur ki, əgər, sıranın orta kəmiyyətinin nisbi xətası 10%-dən, variasiya əmsalının isə 15%-dən azdırsa, onda sıranın parametrləri etibarlı hesablanmışlar.

Hidroloji sıralar, adətən qısa olduqları üçün asimmetriya əmsalının xətası böyük olur və buna görə də bu əmsalın qiyməti təyin olunduqda C_s/C_v nisbətinin orta rayon qiymətindən və ya fərdi yolla seçilmiş qiymətindən istifadə olunur.

Kvantillər metodu. Paylanmanın parametrləri bu metodla hesablandıqda mütləq və nisbi xətarlar qiymətləndirilmir. Bu halda analitik əyri üçün aşağıdakı bərabərsizliyin ödənilməsi şərti istifadə oluna bilər:

$$|\bar{x} - \bar{x}_e| < 131$$

$$|\bar{x} - \bar{x}_q| < 0,02 \bar{x}, \quad (4.42)$$

burada $\bar{x}$ – faktiki sıraya görə hesablanmış orta qiymət;
 $\bar{x}_q$ – qraf-analitik metodla təyin olunmuş orta qiymətdir.

Misal 4.9. Roki (Rocky) çayı üzərində 1960-1980-ci illərdə yerinə yetirilmiş müşahidələrin məlumatlarına görə maksimal su sərfələrinin orta çoxillik qiyməti $52 \text{ m}^3/\text{s}$, standart meyletməsi $21 \text{ m}^3/\text{s}$ və asimmetriya əmsalı $0,8$ -dir. Bu parametrlərin standart (mütləq) və nisbi xətlərini hesablayın.

Həlli: Şərtə görə $N = 21$ (1960-1980), $\hat{\mu} = 52 \text{ m}^3/\text{s}$, $\hat{\sigma} = 21 \text{ m}^3/\text{s}$ və $\hat{g} = 0.8$. Əvvəlcə, orta kəmiyyət, μ , və standart meyletmənin, σ , mütləq xətləri (S_μ və S_σ) hesablanır:

$$\hat{S}_\mu = \frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{N}} = \frac{21}{\sqrt{21}} = 4.6 \text{ m}^3/\text{s},$$

$$S_\sigma = \hat{\sigma} \sqrt{\frac{1 + 0.75\hat{g}}{2N}} = 21 \sqrt{\frac{1 + 0.75(0.8)}{2(21)}} = 4.1 \text{ m}^3/\text{s}$$

Asimmetriya əmsalının, $\hat{g}$, mütləq xətası, $S_{\hat{g}}$ aşağıdakı düstura görə təyin olunur:

$$S_{\hat{g}} = [10^{A - B \log_{10}(21/10)}]^{0.5}$$

$$|g_x| \leq 0,9 \text{ olduğuna görə}$$

$$A = -0.33 + 0.08|g_x| = -0.33 + 0.08|0.8| = -0.27$$

və $|g_x| \leq 1,50$ olduğuna görə

$$B = 0,94 - 0,26|g_x| = 0.94 - 0.26|0.8| = 0.73$$

və beləliklə

$$S_{\hat{g}} = [10^{-27 - 0.73 \log_{10}(21/10)}]^{-0.5} = 0.56$$

Orta kəmiyyət, standart meyletmə və asimmetriyanın mütləq xətləri müvafiq olaraq $4.6 \text{ m}^3/\text{s}$, $4.1 \text{ m}^3/\text{s}$, və 0.56 təşkil edir.

Nisbi xətlər aşağıdakı ifadələrə görə hesablanır:
 orta kəmiyyətin nisbi xətası

$$(S_{\hat{\sigma}}/\hat{\mu}) \cdot 100 = (4.6/52) \cdot 100 = 8.8\%,$$

standart meyletmənin nisbi xətası

$$(S_{\hat{\sigma}}/\hat{\sigma}) \cdot 100 = (4.1/21) \cdot 100 = 20\%,$$

asimetriyanın nisbi xətası

$$(S_{\hat{\sigma}}/\hat{g}) \cdot 100 = 0.56/0.8 \cdot 100 = 70\%.$$

Parametrlərin təyininin nisbi xətalının təhlili göstərir ki, momentlərin dərəcələri artdıqca, xətalər da artır.

Yuxarıda baxılan paylanma parametrlərinin xətalının qiymətləndirilmə metodları əsasən keçmiş SSRİ-də istifadə olunurdu və indi Rusiya Federasiyasının müvafiq normativ sənədlərində tövsiyə olunur.

Qərb ölkələrində də orta kəmiyyətin standart xətası düstur (4.31)-ə görə hesablanır. Lakin variasiya əmsalının xətası əvəzinə orta kvadratik meyletmənin xətası qiymətləndirilir (Chin, 2007):

$$S_{\sigma_x} = \sigma_x \sqrt{\frac{1 + 0,75 g_x}{2N}}, \quad (4.43)$$

burada g_x -seçmənin (sıranın) asimetriya əmsalı; N -sıranın uzunluğudur.

Asimetriya əmsalının, g_x xətası, S_{g_x} , tamamilə fərqli strukturlu düstura görə təyin olunur:

$$S_{g_x} = \left[10^{A-B \log_{10}(N/10)} \right]^{0,5}, \quad (4.44)$$

burada

$$A = \begin{cases} -0,33 + 0,08 |g_x| & \text{əgər, } |g_x| \leq 0,90 \\ -0,52 + 0,30 |g_x| & \text{əgər, } |g_x| > 0,90 \end{cases} \quad (4.45)$$

və

$$B = \begin{cases} -0,94 - 0,26 |g_x| & \text{əgər, } |g_x| \leq 1,50 \\ 0,55 & \text{əgər, } |g_x| > 1,50. \end{cases} \quad (4.46)$$

Yuxarıdakı düsturlardan görünür ki, keçmiş SSRİ-də və hazırda həm Rusiyada, həm də Azərbaycanda variasiya və asimetriya əmsallarının standart xətalı variasiya əmsalı və sıranın uzunluğuna görə qiymətləndirilir. Qərb ölkələrində istifadə olunan müvafiq düsturların əsas parametri isə variasiya əmsalı yox, asimetriya əmsalıdır.

5. PARAMETRLƏRİN İNTERVALLAR ÜZRƏ QIYMƏTLƏNDİRİLMƏSİ VƏ STATİSTİK HİPOTEZLƏRİN YOXLANMASI

5.1. Paylanma parametrlərinin intervallar üzrə qiymətləndirilməsi

Hidrometeoroloji kəmiyyətlərin paylanma funksiyalarının (təminat əyrilərinin) parametrləri müşahidə sıralarına görə hesablanır. Mövcud metodlar (momentlər metodu, ən çox həqiqətə-bənzər metod və s.) bu parametrləri kifayət qədər dəqiqliklə qiymətləndirməyə imkan verir. Lakin aydındır ki, adətən qısa olan müşahidə sıralarına görə hesablanmış parametrlərin, məsələn, orta kəmiyyət, $\bar{x}$, və dispersiyanın, D^* , qiymətləri baş çoxluğun müvafiq (həqiqi) qiymətlərindən (m_x və D) fərqlənir. Parametrlərin seçmə qiymətlərinin, G^* , riyazi gözləməsi G -ya bərabərdir, lakin baş çoxluğun ayrı-ayrı seçmələrinə (fragmentlərinə) görə hesablanmış G^* , əhəmiyyətli dərəcədə G -dan fərqlənə bilər.

Paylanmanın məlum olmayan parametrlərinin daha informativ qiymətləndirilmə metodu, konkret sıra üçün hesablanmış parametrin verilən ehtimalla ala biləcəyi qiymətlər intervalının müəyyən olunmasıdır. Başqa sözlə, G parametri interval üzrə qiymətləndirilir.

G parametrinin interval qiyməti elə intervala deyilir ki, onun sərhədləri (ℓ_1^* və ℓ_2^*) $x_1, x_2, \dots, x_n$ seçmə qiymətlərinin funksiyasıdır və o, verilən ehtimalla, P , qiymətləndirilən parametrin mümkün qiymətlər oblastını, G_x , əhatə edir:

$$P\{\ell_1^* < G \leq \ell_2^*\} = p. \quad (5.1)$$

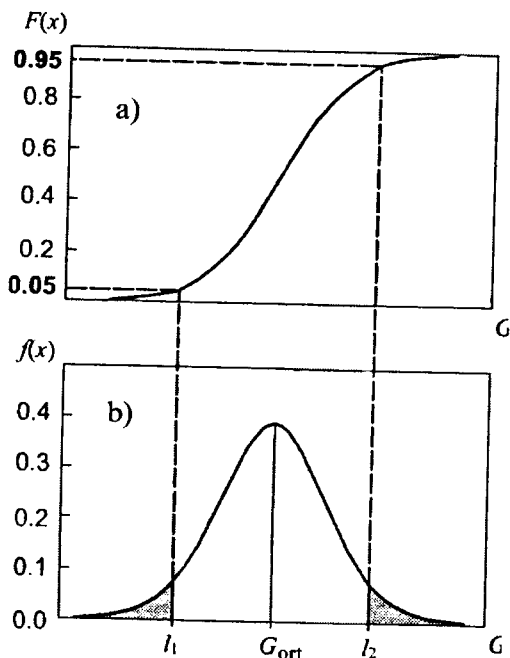
Bu interval (ℓ_1^*, ℓ_2^*) etibarlılıq intervalı, P isə etibarlılıq ehtimalı adlanır. Adətən P 0,90; 0,95 və 0,99-a bərabər qəbul olunur.

G parametrisinin seçmə qiymətlərinin paylanma funksiyasından istifadə edərək, ℓ_1 və ℓ_2 üçün ötməmə ehtimallarını yazmaq olar:

$$P\{G^* \leq \ell_1\} = F(\ell_1) = (1 - p)/2; \quad (5.2)$$

$$P\{G^* \leq \ell_2\} = F(\ell_2) = p + (1 - p)/2 = (1 + p)/2. \quad (5.3)$$

Məsələn, əgər, 90%-li etibarlılıq intervalına ($P = 0,9$) baxılırsa, onda $F(\ell_1) = 0,05$, $F(\ell_2) = 0,95$ və ya müvafiq olaraq, 5% və 95% (şəkil 5.1 a).



Şəkil 5.1. İntegral paylanma funksiyası (a) və ehtimalın sıxlıq funksiyasına (b) nəzərən G parametri üçün 90%-li etibarlılıq intervalı(ℓ_1, ℓ_2)

Bu etibarlılıq intervalı ehtimalın sıxlıq funksiyasının qrafikində də göstərilə bilər (şəkil 5.1 b). Bu şəkildə ştrixlənməmiş hissə qrafikin altındakı ümumi sahənin 90%-ni təşkil edir.

5.1.1. Riyazi gözləmənin interval qiyməti

Riyazi gözləmənin interval qiymətini hesablamaq üçün Styudent (U.Qosset) paylanmasıdan istifadə olunur. Bu paylanma simmetrikdir və o, həmçinin, t -paylanma adlanır (Əlavə 5).

Müəyyən olunmuşdur ki, $(\bar{x} - m_x) / (S_x / \sqrt{n})$ kəmiyyəti sərbəstlik dərəcələri ədədi $\nu = n - 1$ olan Styudent paylanmasına müvafiq paylanır. Beləliklə, yazmaq olar ki, bu kəmiyyət p ehtimalla aşağıdakı intervala düşür:

$$t'_{(1-p)/2} \leq \left[(\bar{x} - m_x) / (S_x / \sqrt{n}) \right] < t'_{(1+p)/2}, \quad (5.4)$$

burada $t'_{(1-p)/2}$ və $t'_{(1+p)/2}$ -Styudent paylanmasının ötməmə ehtimallarının müvafiq olaraq $(1-p)/2$ və $(1+p)/2$ olan kvantilləridir. Lakin nəzərə alsaq ki, Styudent paylanması sıfıra nəzərən simmetrikdir yəni, $t_{(1-p)/2} = -t_{(1+p)/2}$, onda,

$$-t_{(1+p)/2} \leq \left[(\bar{x} - m_x) / (S_x / \sqrt{n}) \right] < t_{(1+p)/2}. \quad (5.5)$$

Çevirmədən sonra aşağıdakı ifadə alınır:

$$\bar{x} - \frac{t_{(1+p)/2} S_x}{\sqrt{n}} \leq m_x < \bar{x} + \frac{t_{(1+p)/2} S_x}{\sqrt{n}}. \quad (5.6)$$

Misal 5.1. Uzunluğu $n=37$ il olan sıranın orta kəmiyyəti və orta kvadratik meyletməsi hesablanmışdır: $\bar{x} = 12,0$; $S_x=6,00$. Riyazi gözləmə (m_x) üçün 90%-li etibarlılıq intervalının sərhədlərini təyin edin.

Həlli: 1. 90%-li etibarlılıq intervalı üçün $p=0.9$. Beləliklə, $t'_{(1+p)/2} = t'_{95}$.

Styudent t paylanmasının cədvəlinə əsasən $v=36$ olduqda, $t'_{95} = 1,69$ (Əlavə 5).

2. Bu qiymət aşağıdakı düsturda yerinə qoyulur:

$$\bar{x} - \frac{t_{(1+p)/2} S_x}{\sqrt{n}} \leq m_x < \bar{x} + \frac{t_{(1+p)/2} S_x}{\sqrt{n}}.$$

$$12 - (1,69 \cdot 6,00)/\sqrt{36} \leq m_x < 12 + (1,69 \cdot 6,00)/\sqrt{36}.$$

3. Nəticədə, m_x üçün 90%-li etibarlılıq intervalı $10,31 \leq m_x < 13,69$ olacaq. Bu o deməkdir ki, 90% ehtimalla m_x -in qiyməti 10,31 – 13,69 intervalındadır.

5.1.2. Dispersiyanın interval qiyməti

Dispersiyanın interval qiymətini hesablamaq üçün χ^2 (xi-kvadrat) paylanmasından istifadə olunur. Bu paylanmanın yalnız bir parametri var və o, sərbəstlik dərəcələri ədədi, v , adlanır.

Müəyyən olunmuşdur ki, $[(n-1)S_x^2] \sigma_x^2$ kəmiyyəti sərbəstlik dərəcələri ədədi $v = n - 1$ olan χ^2 paylanmasına müvafiq paylanır. Buna görə də:

$$\chi_{(1-p)/2}^2 \leq \frac{(n-1)S_x^2}{\sigma_x^2} < \chi_{(1+p)/2}^2, \quad (5.7)$$

burada $S_x^2 = D^*$ -seçmə dispersiya; $\sigma_x^2 = D$ -həqiqi dispersiya; n -seçmənin (sıranın) uzunluğudur.

Müəyyən çevirmələrdən sonra, düstur (5.7)-dən aşağıdakı ifadə alınır:

$$\frac{(n-1)S_x^2}{\chi_{(1+p)/2}^2} < D \leq \frac{(n-1)S_x^2}{\chi_{(1-p)/2}^2}. \quad (5.8)$$

Bu ifadədən həmçinin orta kvadratik meyilmənin interval qiymətini almaq olar:

$$S_x \sqrt{(n-1)/\chi^2_{(1+p)/2}} < \sigma \leq S_x \sqrt{(n-1)/\chi^2_{(1-p)/2}}. \quad (5.9)$$

Misal 5.2. Uzunluğu $n=26$ il olan sıraya əsasən müəyyən olunub ki, dispersiya $D^*=147$. Dispersiya, D , üçün 95%-li etibarlılıq intervalının sərhədlərini təyin edin.

Həlli: 1. 95%-li etibarlılıq intervalı üçün $p=0.95$. Beləliklə, $\chi^2_{(1+p)/2} = \chi^2_{97,5}$; $\chi^2_{(1-p)/2} = \chi^2_{2,5}$.

χ^2 paylanmasının cədvəlinə əsasən $\nu=n-1=25$ olduqda, $\chi^2_{97,5} = 40,65$ və $\chi^2_{2,5} = 13,12$ alınır (Əlavə 4).

2. Bu qiymətlər aşağıdakı düsturda yerinə qoyulur:

$$\frac{(n-1)S_x^2}{\chi^2_{(1+p)/2}} < D \leq \frac{(n-1)S_x^2}{\chi^2_{(1-p)/2}}.$$

$$(25 \cdot 147)/40,65 < D \leq (25 \cdot 147)/13,2.$$

Son nəticədə: $90.4 < D \leq 280$.

Bu o deməkdir ki, 95% ehtimalla dispersiyanın qiyməti 90,4-280 intervalındadır.

Misal 5.3. Dispersiya, D , üçün 90%-li etibarlılıq intervalının sərhədlərini təyin edin: $n=54$; $D^*=312$.

Həlli: 1. $p=0.90$ olduqda, $\chi^2_{(1+p)/2} = \chi^2_{95}$ və $\chi^2_{(1-p)/2} = \chi^2_5$. Baxılan sıra üçün sərbəstlik dərəcələri ədədi $\nu=n-1=53$ alınır. Bu ədəd 30-dan böyük olduğu üçün aşağıdakı düsturdan istifadə olunur:

$$\chi^2_p(\nu) \approx \nu \left[1 - 2/(9\nu) + t'_p \sqrt{2/(9\nu)} \right]^3.$$

$$\chi^2_p \approx 53 \left[1 - 2/(9 \cdot 53) + t'_p \sqrt{2/(9 \cdot 53)} \right]^3.$$

2. Normal paylanmanın kvantillərinin qiymətləri cədvəl 3.3-ə əsasən təyin edilir: $t'_{95} = 1,64$; $t'_5 = -1,64$. Bunları yuxarıdakı düsturda yerinə qoymaqla $\chi^2_{95} = 70.9$ və $\chi^2_5 = 37.3$ alınır.

3. Bu qiymətlər aşağıdakı düsturda yerinə qoyulur:

$$\frac{(n-1)S_x^2}{\chi_{(1+p)/2}^2} < D \leq \frac{(n-1)S_x^2}{\chi_{(1-p)/2}^2}.$$

$$(53 \cdot 312)/70,9 < D \leq (53 \cdot 312)/37,3; 233 < D \leq 443.$$

Misal 5.4. Mauri çayının Leksinqton məntəqəsində 26 illik müşahidə dövrü üçün maksimal su sərfələri aşağıdakı kimidir:

Hidroloji il	Sərf, kub fut/s	Hidroloji il	Sərf, kub fut/s	Hidroloji il	Sərf, kub fut/s
1926	6 730	1935	13 800	1944	6 680
1927	9 150	1936	40 000	1945	6 540
1928	6 310	1937	10 200	1946	5 560
1929	10 000	1938	13 400	1947	7 700
1930	15 000	1939	8 950	1948	8 630
1931	2 950	1940	11 900	1949	14 500
1932	8 650	1941	5 840	1950	23 700
1933	11 100	1942	20 700	1951	15 100
1934	6 360	1943	12 300		

5, 10, 50 və 100 ildə bir dəfə təkrarlana bilən maksimal su sərfələrini təyin edin və cədvəl 5.1-dən istifadə edərək onların aşağı və yuxarı etibarlılıq sərhədlərini göstərin.

Cədvəl 5.1

Daşqınların təkrarlanma əyriləri üçün xətlərin sərhədləri

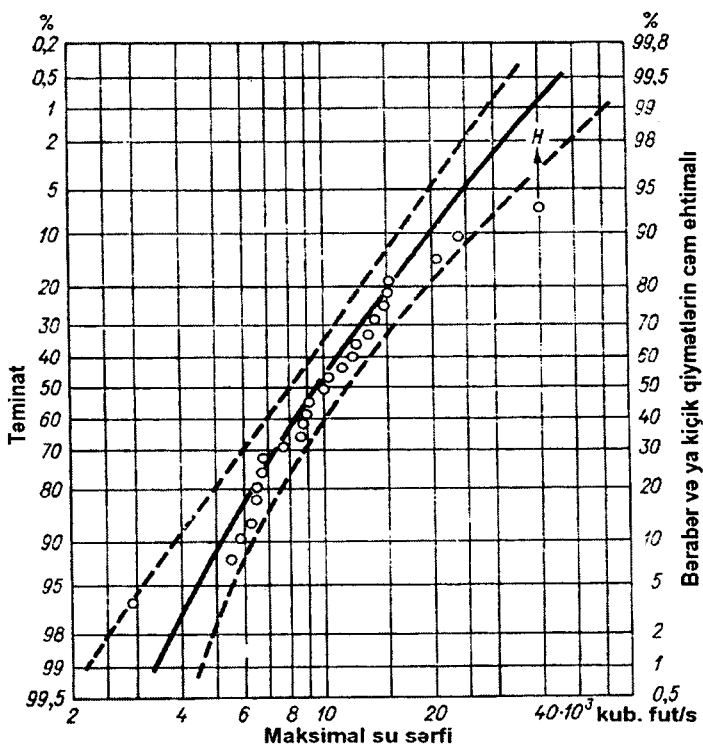
Müşahidə dövrü, il	Etibarlılıq intervalı (%), 5%-li əhəmiyyətlik səviyyəsi						
	99,9	99	90	50	10	1	0,1
5	1.22	1.00	0.76	0.95	2.12	3.41	4.41
10	0.94	0.76	0.57	0.58	1.07	1.65	2.11
15	0.80	0.65	0.48	0.46	0.79	1.19	1.52
20	0.71	0.58	0.42	0.39	0.64	0.97	1.23
30	0.60	0.49	0.35	0.31	0.50	0.74	0.93
40	0.53	0.43	0.31	0.27	0.42	0.61	0.77
50	0.49	0.39	0.28	0.24	0.36	0.54	0.67
70	0.42	0.34	0.24	0.20	0.30	0.44	0.55
100	0.37	0.29	0.21	0.17	0.25	0.36	0.45
	0,1	1	10	50	90	99	99,9

Etibarlılıq intervalı (%), 95%-li əhəmiyyətlik səviyyəsi

Həlli: 1. Əsas statistik parametrlərin hesablanmış qiymətləri aşağıdakı cədvəldə verilmişdir:

Sıranın parametrləri	Mütləq	Loqarifmik
Sıranın uzunluğu	26	26
Orta kəmiyyət	11 606	4,001
Dispersiya, s^2	$53,87 \cdot 10^6$	0,0516
Asimmetriya əmsali, C_s	2,4	0,38

2. Məlumatları artan sıra ilə düzdükdən sonra onlar ehtimallar damasına köçürülmüşdür (şəkil 5.2).



Şəkil 5.2. Mauri çayının maksimal su sərfələrinin təkrarlanma (təminat) ayrısı və etibarlılıq sərhədləri (Leksinqton məntəqəsi, Virciniya ştatı)

3. Şəkil 5.2-də Pirsonun III tip loqarifmik paylanma əyrisi keçirilmişdir. Əyrinin koordinatları məlumat kitablarında verilən cədvəllər əsasında müəyyən edilmişdir. Hesablamaların nəticələri aşağıdakı cədvəldə verilmişdir:

Təminat, %	$C_s=0.38 K$	$\bar{y}=4.001,$ $s=0.227,$ $\bar{y}+K_s=\log Q$	$Q, m^3/s$
99	-2.050	3.535	3 424
95	-1.532	3.653	4 496
90	-1.241	3.719	5 235
80	-0.855	3.760	5 752
50	-0.062	3.987	9 700
20	0.818	4.187	15 370
10	1.315	4.300	19 930
4	1.872	4.426	26 670
2	2.248	4.511	32 470
1	2.597	4.590	38 950
0.5	2.924	4.665	46 290

Cədvəl 5.1-in məlumatlarına əsasən təyin olunmuş etibarlılıq sərhədləri şəkil 5.2-də göstərilmişdir. Bir nöqtənin etibarlılıq intervalı sərhədlərindən kənara çıxması diqqəti cəlb edir. Meyl edən H nöqtəsinin qrafikdə yeri Hazen metoduna görə dəqiqləşdirilmişdir.

5.2. Statistik hipotez və meyarlar

Statistik hipotez seçmənin (sıranın) aid olduğu baş çoxluğun xüsusiyyətləri haqqında fərziyyədir. Hidrometeoroloji tədqiqatlarda müxtəlif hipotezlər yoxlanılır:

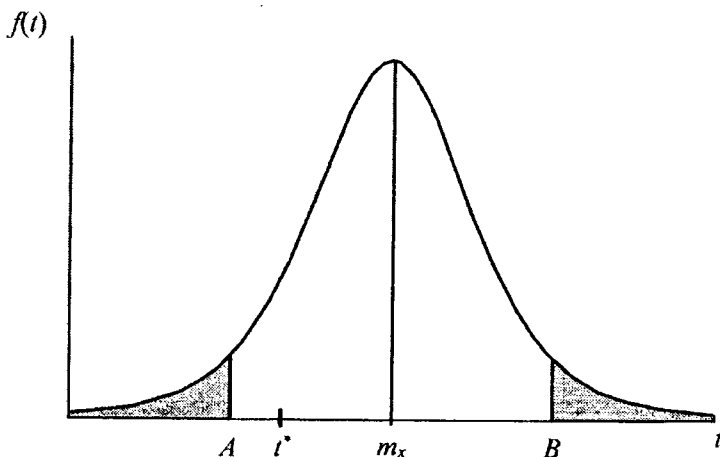
- Paylanma funksiyasının tip haqqında;
- Kəmiyyətin (yağıntılar, temperatur və s.) ərazi üzrə paylanmasının bircinsliyi haqqında;
- Kəmiyyətin zamana görə bircinsliyi haqqında ;
- Hadisənin təsadüfiliyi haqqında və s.

Məsələn, fərz edə bilərik ki, baş çoxluğun riyazi gözləməsi, m_x , 12-yə bərabərdir. Əgər, seçmənin hədlərinin sayı, n , kifayət qədər çoxdursa, onda seçmənin orta qiyməti 12-dən az fərqlənməlidir. Belə halda deyirlər ki, sıfırıncı hipotez, $H_0 : m_x = 12$. qəbul olundu. Baxılan misalda üç alternativ hipotez, (H_1) ola bilər: $H_1 : m_x \neq 12$ və ya $H_1 : m_x > 12$ və ya $H_1 : m_x < 12$.

Praktikada müəyyən bir hipotez (və ya fərziyyə) irəli sürülür və sonra o yoxlanılır. Nəticədə o qəbul və ya təkzib olunur. Hipotezləri yoxlamaq üçün meyar adlandırılan xüsusi testlərdən istifadə olunur. Bu meyarlar müxtəlif statistikaların paylanma qanunlarına əsaslanır. Çox zaman meyar və statistikanın adı eyni olur. Fısker meyarı və Fısker statistikasi.

Bir daha yuxarıdakı misala qayıdaq. Fərz edək ki, $m_x = 12$. Eyni zamanda, bizim parametrləri $\bar{x}$ və S_x olan müşahidə sıramız var. Əgər, bizim fərziyyə doğrudursa, onda $(\bar{x} - m_x)$ fərqi kifayət qədər kiçik olmalıdır. Bu fərqi təhlil olunan statistika kimi baxmaq olar. Lakin praktikada başqa statistikadan istifadə edilir: $t = (\bar{x} - m_x) / (S_x / \sqrt{n})$. Bu t statistikasından istifadə daha əlverişlidir, çünki, məlumdur ki, o, Styudent paylanmasına tabedir. Styudent meyarı məhz t -statistikadan istifadəyə əsaslanır. Bu meyar bizim sıfırıncı hipotezi $H_0 : m_x = 12$, yoxlamaq üçün tətbiq edilə bilər. Bu məqsədlə verilən müşahidə sırası üçün Styudent statistikasının empirik qiyməti, t^* , hesablanır. Misal üçün əgər, $n = 36$, $\bar{x} = 11,0$ və $S_x = 5,00$ olarsa, onda $t^* = (\bar{x} - m_x) / (S_x / \sqrt{n}) = (11 - 12) / (5 / \sqrt{36}) = 1,2$.

Baxılan t kəmiyyəti təsadüfi kəmiyyətdir və eyni uzunluqlu müxtəlif seçmələr üçün onun qiyməti, t^* , fərqli olacaq. Baxılan t -statistikanın mümkün qiymətlər çoxluğu bütün ədəd oxudur. Hipotezi yoxlamaq üçün t -nin mümkün qiymətlər çoxluğu iki hissəyə bölünür: hipotezin qəbul olunduğu oblast və böhran oblastı (şəkil 5.3).



Şəkil 5.3. Student statistikası üçün hipotezin qəbul olunma oblası $[A, B]$ və böhran oblası $(-\infty, A) + (B, +\infty)$

Əgər, t^* -nin müşahidə sırasına görə hesablanmış qiyməti hipotezin qəbul olunduğu oblasta düşürsə, onda H_0 təkzib olunmur, əksinə, böhran oblasta düşürsə, H_0 təkzib olunur.

Hipotezin qəbul olunduğu qiymətlər oblası etibarlılıq oblası və ya etibarlılıq intervalı adlanır.

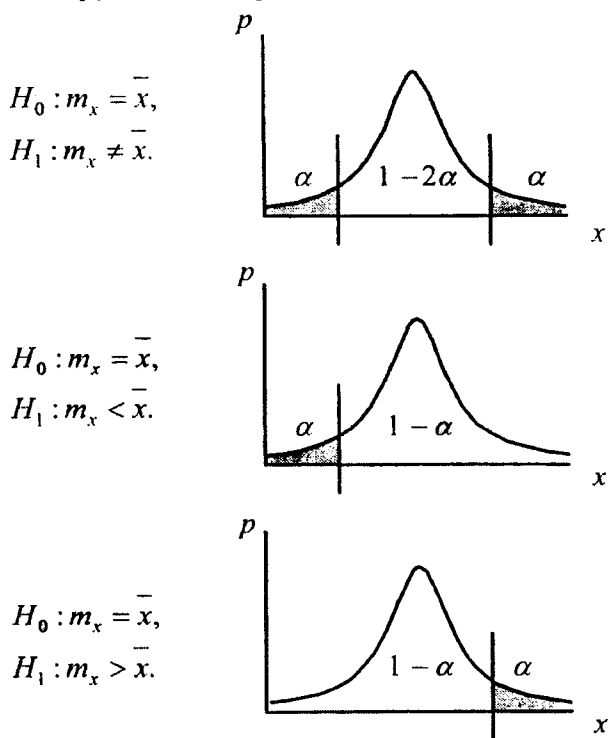
İxtiyari seçmə üçün hesablanmış t^* qiymətinin etibarlılıq oblastına düşmə ehtimalı həndəsi baxımdan şəkil 5.3-dəki ştrixlən-məmiş sahəyə bərabərdir. Bu ehtimal etibarlılıq ehtimalı, p_e , adlanır.

Müşahidə sırasına görə hesablanmış t^* qiymətinin böhran oblastına düşmə ehtimalı $\alpha = 1 - p_e$ təşkil edir. Bu ehtimal, α , əhəmiyyətlik səviyyəsi adlanır. Beləliklə, əhəmiyyətlik səviyyəsi, ehtimalın elə kiçik bir qiymətidir ki, o praktik olaraq qeyri-mümkün hadisəni səciyyələndirir. Başqa sözlə, o əhəmiyyətli olmayan fərqlərin ehtimalının sərhəddidir.

Tutaq ki, əhəmiyyətlik səviyyəsi, α , 5% təşkil edir ($\alpha = 5\%$) və t -statistikasından istifadə olunur. Onda, sıfırıncı hipotez qəbul

olunursa, müşahidə sırasına görə hesablanmış, t^* qiyməti, 100 sınaqdan maksimum 5-də bu statistikanın $\alpha=5\%$ -ə müvafiq böhran (nəzəri) qiymətindən, t_{α} , böyük ola bilər. Bir sınaqda bunun baş verməsi, artıq qeyd olunduğu kimi, praktik olaraq qeyri-mümkündür.

Əgər, böhran oblast iki hissədən ibarətdirsə, onda $2\alpha = 1 - p$ yazılır və burada 2α onu göstərir ki, əhəmiyyətlik səviyyəsi ikitərəflidir. Qeyd olunduğu kimi, əhəmiyyətlik səviyyəsi həndəsi baxımdan şəkil 5.3-də göstərilən ştrixlənmiş sahəyə bərabərdir. Birtərəfli və ikitərəfli əhəmiyyətlik səviyyələri arasındakı fərq şəkil 5.4-də göstərilir.



Şəkil 5.4. Müxtəlif alternativ hipotezlər üçün əhəmiyyətlik səviyyəsi və etibarlılıq ehtimalı

Statistik hipotezləri yoxladıqda iki növ xəyata yol verilə bilər. Birinci növ xəta ondan ibarətdir ki, əslində doğru olmasına baxmayaraq, sıfırıncı hipotez təkzib olunur. Əhəmiyyətlik səviyyəsi nə qədər kiçik olarsa, birinci növ xəyata yol verilməsinin ehtimalı bir o qədər az olar.

İkinci növ xəta isə ondan ibarətdir ki, əslində doğru olmayan sıfırıncı hipotez qəbul olunur.

Bu xətlər qaçılmazdır və bunlarla bağlı risk həmişə var. Hidrometeoroloji tədqiqatlarda daha çox 5% və 10%-li əhəmiyyətlik səviyyəsi istifadə olunur.

Yuxarıda baxdığımız misal üçün $2\alpha = 10\%$ qəbul etsək, Student paylanmasının cədvəlinə (Əlavə 5) görə $v = n - 1 = 36 - 1 = 35$ olduqda t -statistikanın nəzəri qiyməti $t = 1,69$ alınır. Onda, t -statistikanın etibarlılıq oblastı belədir: $[-1,69, +1,69]$.

Misalda baxılan seçmə üçün $t^* = -1,20$ və bu qiymət təyin olunmuş etibarlılıq oblastına düşür. Bu isə o deməkdir ki, sıfırıncı hipotez təkzib olunmur və böyük ehtimalla müşahidə sırasının riyazi gözləməsinin 12-yə bərabər olduğunu iddia etmək olar. Seçmənin orta qiyməti ($\bar{x} = 11,0$) ilə riyazi gözləmə ($m_x = 12$) arasındakı fərq seçmə ortanın təsadüfi təərəddüdləri ilə izah oluna bilər və bu fərq statistik baxımdan əhəmiyyətli deyildir.

Qeyd etmək lazımdır ki, statistik hipotezlər yoxlandıqda, "hipotez doğrudur" və ya "hipotez doğru deyil" kimi mütləq ifadələrdən istifadə təvsiyə olunmur. Əgər, təhlil olunan statistikanın qiyməti böhran oblasta düşmüşsə, onda deyirlər ki, sıfırıncı hipotez baxılan əhəmiyyətlik səviyyəsində təkzib olunmur. Əksinə, empirik qiymət böhran oblasta düşmüşsə, onda deyirlər ki, H_0 α əhəmiyyətlik səviyyəsində təkzib olunur.

5.3. Hidrometeoroloji sıraların bircinsliyinin qiymətləndirilməsi

Hidrometeoroloji sıraların statistik strukturunu təsvir etmək üçün təsədüfi kəmiyyət modeli istifadə edildikdə hesab olunur ki, baxılan sıranın statistik xarakteristikaları (orta kəmiyyət, dispersiya və s.) zamana görə dəyişmir. Başqa sözlə, sıranın (seçmənin) bütün hədləri eyni baş çoxluğa aiddir. Bu isə o deməkdir ki, baxılan xarakteristikanın əmələgəlmə şəraiti dəyişmir. Əgər, təbii kataklizmlər və antropogen təsirlər nəticəsində, məsələn, çay axımının formalaşma şəraiti dəyişərsə, onda sıranın statistik xarakteristikaları da dəyişər.

Əgər, sıranın ayrı-ayrı hissələrinin statistik xarakteristikaları fərqlənirlərsə, onda belə sıra qeyri-bircins (qeyri-stasionar) hesab olunur. Nəzərə almaq lazımdır ki, axımın formalaşma şəraitinin dəyişməsi axımın bəzi xarakteristikalarına təsir göstərsə də, bəzilərinə təsir etməyə də bilər. Məsələn, çoxillik tənzimlənən su anbarının inşası maksimal axımın xarakteristikalarını dəyişdirir, lakin orta illik su sərfələrinə isə praktik olaraq bu təsir çox zəif ola bilər.

Hidrometeoroloji məlumatların təhlilinin əvvəlki fəsilərdə baxılan statistik metodları yalnız bircins sıralara tətbiq oluna bilər. Buna görə istənilən statistik hesablamalar yerinə yetirilməzdən əvvəl ilkin müşahidə sıralarının bircinsliyi yoxlanmalıdır. Bu məqsədlə iki tip statistik meyarlardan istifadə olunur: parametrik və qeyri-parametrik meyarlar.

Parametrik meyarların statistikaları hesablandıqda paylanma parametrlərinin seçmə qiymətlərindən istifadə edilir və hesab olunur ki, müşahidə sırasının paylanma qanunu məlumdur (adətən, normal paylanma qanunu qəbul olunur).

Qeyri-parametrik meyarların statistikaları da qeyri-parametrikdir. Belə statistikaların paylanması müşahidə sırasının paylanma qanunundan asılı deyil. Bu səbəbdən, "qeyri-parametrik" termini ilə yanaşı "paylanmadan azad" termini də işlənir.

Parametrik meyarlar (standart) meyarlar da adlandırılır. Onlar

qeyri-parametrik meyarlarla müqayisədə daha effektiv hesab olunur. Lakin qeyri-parametrik meyarların tətbiqi daha sadədir.

Parametrik meyarlardan daha çox istifadə olunanları Styudent və Fişer, qeyri-parametriklərdən isə Uilkokson-Mann Uitti, Van Der Varden, Zigel-Tüki meyarlarıdır.

5.3.1. *Styudent meyarı*

Tutaq ki, $x_1, x_2, x_3, \dots, x_m$ və $y_1, y_2, y_3, \dots, y_n$, hədlərinin sayı müvafiq olaraq (m) və (n) həmçinin normal paylanma qanununa tabe olan seçmələrdir (sıralardır). Onların m_x, σ_x və m_y, σ_y parametrləri məlum deyil, lakin $\sigma_x = \sigma_y$, yəni hər iki sıranın orta kvadratik meyletməsi, σ , eynidir.

Əgər, hər iki seçmə eyni bir baş çoxluğa aiddirsə, onda onların orta qiymətlərinin fərqi, $\bar{x} - \bar{y}$, sıfıra yaxın, yəni statistik baxımdan əhəmiyyətsiz olmalıdır. Bu fərq əsasında t -statistikası hesablanı bilər:

$$t = \frac{\bar{x} - \bar{y}}{\sigma_{\bar{x}-\bar{y}}}, \quad (5.10)$$

burada $\sigma_{\bar{x}-\bar{y}} = (\bar{x} - \bar{y})$ fərqinin orta kvadratik meyletməsidir.

Baxılan t -statistika Styudent paylanmasına tabe olur ($v = m + n - 2$ olduqda).

Riyazi statistikada sübut olunmuşdur ki,

$$\sigma_{\bar{x}-\bar{y}} = S \sqrt{(m+n)/mn}, \quad (5.11)$$

burada $S = \sigma_{\bar{x}-\bar{y}}$ -in empirik qiymətidir.

S parametri S_x və S_y seçmə qiymətlərindən asılıdır:

$$S = \sqrt{\frac{(m-1)S_x^2 + (n-1)S_y^2}{m+n-2}}. \quad (5.12)$$

Baxılan t -statistikanın yekun ifadəsi aşağıdakı kimidir:

$$t = \frac{\bar{x} - \bar{y}}{S} \sqrt{\frac{mn}{m+n}}. \quad (5.13)$$

Hidrometeoroloji tədqiqatlarda bu statistikadan müşahidə sıralarının bircinsliyinin yoxlanmasında istifadə olunur. Sıra iki hissəyə bölünür və hər bir hissə üçün hesablanmış orta qiymətlər müqayisə edilir. Əgər, müşahidə sırasına görə hesablanmış t^* -nin qiyməti onun nəzəri qiymətindən (Əlavə 5) kiçik alınarsa, onda sıranın orta qiymətə görə bircinsliyi haqqında fərziyyə qəbul olunur. Adətən, əhəmiyyətlik səviyyəsi $2\alpha = 5\%$ və ya $2\alpha = 10\%$ qəbul olunur.

Styudent meyarı standart (parametrik) meyardır və onun tətbiqi zamanı aşağıdakılar nəzərə alınmalıdır:

1. Bu meyar normal paylanan təsadüfi kəmiyyətlər üçün işlənmişdir, lakin hidrometeoroloji kəmiyyətlərin əksəriyyəti müsbət asimmetriyalıdır. Bu, bircinslik qiymətləndirildikdə xəta riskini artırır.

2. Hesab olunur ki, təhlil olunan sıraların dispersiyaları eynidir. Buna görə də Styudent meyarı istifadə olunmazdan əvvəl sıranın dispersiyaya görə bircinsliyi yoxlanılmalıdır.

3. Ola bilər ki, sıranın bircinsliyi haqqında hipotezin (fərziyyənin) təkrar olunma səbəbi sıranın qısalığıdır. Məsələn, sıranın bir hissəsi azsulu illəri, digəri isə çoxsulu illəri əhatə edə bilər.

Misal 5.5. Uzunluğu 43 il olan müşahidə sırasının orta qiymətə görə bircinsliyini əhəmiyyətlik səviyyəsi $2\alpha = 10\%$ olduqda yoxlayın.

Həlli: 1. Sıra təxmini olaraq iki bərabər hissəyə bölünür: $m = 22, n = 21$.

2. Sıranın birinci yarısı üçün seçmə orta və orta kvadratik meylətmə təyin edilir:

$$\bar{x} = 20,4; S_x = 9,50.$$

3. Sıranın ikinci yarısı üçün seçmə orta və orta kvadratik meyletmə təyin edilir:

$$\bar{y} = 32,7; S_y = 11,4.$$

4. Aşağıdakı düstura əsasən ümumi dispersiya və orta kvadratik meyletmə hesablanır:

$$S = \sqrt{\frac{(m-1)S_x^2 + (n-1)S_y^2}{m+n-2}}.$$

$$S^2 = \frac{[(22-1)(9,50)^2 + (21-1)(11,4)^2]}{22+21-2} =$$

$$= 109,6; S = \sqrt{109,6} = 10,5.$$

5. Onda, t statistikanın seçmə qiyməti aşağıdakı kimi hesablanır:

$$t = \frac{\bar{x} - \bar{y}}{S} \sqrt{\frac{mn}{m+n}}.$$

$$t^* = [(20,4 - 32,7)/10,5] \sqrt{(22 \cdot 21)/(22 + 21)} = -3,84.$$

6. Əlavə 5-dən əhəmiyyətlik səviyyəsi $2\alpha = 10\%$ və sərbəstlik dərəcəsi $\nu = 43 - 2 = 41$ olduqda t -nin nəzəri qiyməti tapılır: $t_{1-\alpha} = 1,68$

Beləliklə, t^* üçün etibarlılıq intervalı $[-1,68; +1,68]$ arasındadır. Deməli, t^* -nin qiyməti etibarlılıq intervalının həddlərindən kənara çıxır, yəni, böhran oblasta düşür. Bu səbəbdən $2\alpha = 10\%$ əhəmiyyətlik səviyyəsində sıranın orta qiymətə görə bircinsliyi haqda fərziyyə təkzib olunur.

5.3.2. Fişer meyarı

Tutaq ki, $x_1, x_2, x_3, \dots, x_m$ və $y_1, y_2, y_3, \dots, y_n$, hədlərinin sayı müvafiq olaraq m və n , parametrləri m_x, σ_x və m_y, σ_y , həmçinin normal paylanma qanununa tabe olan sıralardır. Əgər, $\sigma_x = \sigma_y = \sigma$ olarsa, onda bu sıraların seçmə dispersiyalarının

nisbəti, (S_x^2 / S_y^2) Fişer paylanmasına tabedir ($v_1=m-1$ və $v_2=n-1$ olduqda). Əgər, fərz etsək ki, sıraların seçmə dispersiyaları bərabərdir ($H_0 : S_x^2 = S_y^2$), onda (2α) əhəmiyyətlik səviyyəsində S_x^2 / S_y^2 nisbəti üçün etibarlılıq oblastı aşağıdakı kimi yazıla bilər:

$$F_{\alpha}(v_1, v_2) \leq (S_x^2 / S_y^2) < F_{1-\alpha}(v_1, v_2) \quad (5.14)$$

və ya

$$1 / F_{1-\alpha} \leq (S_x^2 / S_y^2) < F_{1-\alpha}. \quad (5.15)$$

Fişer paylanması qeyri-simmetrikdir. Bunu nəzərə alaraq, yəni, F -statistikanın qiymətlər cədvəlləri çox böyük olmasın deyə, onlar yalnız $F > 1$ qiymətləri üçün tərtib olunur. S_x^2 və S_y^2 seçmə dispersiyaları müqayisə olunduqda, həmişə surətdə dispersiyanın böyük qiyməti götürülür. Əhəmiyyətlik səviyyəsi 2α olduqda S_x^2 / S_y^2 nisbəti üçün etibarlılıq oblastı aşağıdakı ifadəyə görə təyin olunur:

$$1 \leq (S_x^2 / S_y^2) < F_{1-\alpha}. \quad (5.16)$$

Fişer meyarı sıraların dispersiyaya görə bircinsliyi yoxlanıldıqda istifadə olunur. Styudent meyarında olduğu kimi, sıra iki hissəyə bölünür, sonra hər bir hissə üçün dispersiya təyin olunur və nəhayət, F -statistikanın empirik qiyməti hesablanır:

$F^* = S_1^2 / S_2^2$, burada $S_1^2 > S_2^2$. Bu F^* qiyməti F -statistikanın cədvəl (nəzəri) qiyməti, $F_{1-\alpha}$, (Əlavə 6) ilə müqayisə olunur. Əgər, $F^* < F_{1-\alpha}$ olarsa, onda dispersiyaların fərqi statistik baxımdan əhəmiyyətsizdir və sıranın dispersiyaya görə bircinsliyi haqqında hipotez təkzib olunmur.

Misal 5.6. Uzunluğu 43 il olan müşahidə sırasının dispersiyaya görə bircinsliyini $2\alpha=10\%$ əhəmiyyətlik səviyyəsində yoxlayın.

Həlli: 1. Sıra təxmini olaraq iki bərabər hissəyə bölünür:
 $m = 22, n = 21$.

2. Sıranın birinci hissəsi üçün seçmə dispersiya tapılır:
 $S_m^2 = 370$.

3. Sıranın ikinci hissəsi üçün seçmə dispersiya tapılır:
 $S_n^2 = 442$.

4. $F^* = S_n^2/S_m^2$ düsturuna əsasən F statistikanın empirik qiyməti hesablanır:

$S_n > S_m$ olduğundan, $F^* = 442/370 = 1,19$.

5. Əlavə 6-dan $2\alpha = 10\%$ üçün $\nu_1 = n - 1 = 20$ və $\nu_2 = m - 1 = 21$ olduqda Fişer meyarının nəzəri qiyməti təyin edilir: $F_{1-\alpha} = F_{95} = 2,09$.

$F^* < F_{1-\alpha}$ olduğundan, sıranın dispersiyaya görə bircinsliyi haqda fərziyyə təkzib olunmur.

5.3.3. Uilkokson-Mann-Uitni meyarı

Uilkoksonun 1955-ci ildə təklif etdiyi bu meyarı sonradan Mann və Uitni təkmilləşdirmişlər. Bu meyar iki məqsəd üçün istifadə oluna bilər:

1. İki asılı olmayan seçmənin eyni paylanma funksiyasına malik çoxluqlara aid olub-olmadığını yoxlamaq üçün;

2. Müşahidə sırasının bircinsliyini qiymətləndirmək üçün.

Uilkokson-Mann-Uitni meyarı qeyri-parametrik meyarlar qrupuna aiddir və bu, o deməkdir ki, onu istifadə etdikdə paylanma funksiyasının parametrlərinin hesablanması tələb olunmur. Bu meyarın daha bir üstünlüyü ondan ibarətdir ki, təhlil olunan sıraların normal paylanmaya tabe olması şərti qoyulmur.

Tutaq ki, iki müşahidə sırası verilib və ya bir sıra iki hissəyə bölünüb. Bu sıraların uzunluqları müvafiq olaraq m və n ildir ($m \leq n$). Müəyyən olunmuşdur ki, əgər $m \geq 8$ və $n \geq 8$ olarsa, U -statistika standart normal paylanma ilə aproksimasiya oluna bilər. Onda 2α əhəmiyyətlik səviyyəsində U -statistikanın etibarlılıq oblası (intervalı) aşağıdakı kimi olar:

$$m_u - t_{1-\alpha} \sigma_u \leq U \leq m_u + t_{1-\alpha} \sigma_u, \quad (5.17)$$

burada $t_{1-\alpha}$ -standart normal paylanmanın kvantili (cədvəl 3.3); m_u və σ_u - U -statistikanın müvafiq olaraq riyazi gözləməsi və orta kvadratik meylətməsidir:

$$m_u = (mn) / 2, \quad (5.18)$$

$$\sigma_u = \sqrt{mn(m+n+1)/12}. \quad (5.19)$$

Qeyd etmək lazımdır ki, Uilkokson-Mann Uitni meyarının həssaslığı baxılan sıraların dispersiyaları arasındakı fərqə az, orta qiymətlərin fərqinə isə kifayət qədər yüksəkdir. Buna görə də, bəzən bu meyar sıranın orta qiymətə görə bircinsliyini yoxlamaq üçün də istifadə olunur. Belə halda, sıra iki hissəyə bölünür.

Misal 5.7. Uzunluğu $N=17$ il olan maksimal su sərfələri sırasının (cədvəl 5.2, sütun 3) Uilkokson-Mann-Uitni meyarından istifadə etməklə $2\alpha=10\%$ əhəmiyyətlik səviyyəsində orta kəmiyyətə görə bircinsliyini yoxlayın.

Cədvəl 5.2

Maksimal su sərfələri sırası üçün ranq cəmlərinin hesablanması
(Uilkokson-Mann-Uitni meyarına görə)

Artan qaydada düzülən sıra	Ranq	İlkin sıra	Ranq	Artan qaydada düzülən sıra	Ranq	İlkin sıra	Ranq
1	2	3	4	1	2	3	4
11.5	1	53.4	6	67.4	9	38.4	4
27.0	2	99.2	14	69.0	10	67.4	9
30.5	3	27.0	2	78.0	11	162	17
38.4	4	11.5	1	91.6	12	64.0	8
49.6	5	95.6	13	95.6	13	30.5	3
53.4	6	49.6	5	99.2	14	122	15
60.0	7	69.0	10	122	15	137	16
64.0	8	78.0	11	137	16	91.6	12
				162	17	60.0	7
		Cəm	62			Cəm	91

Həlli: 1. Sıra artan qaydada düzülür və yeni sıranın hər bir həddinin qarşısında müvafiq sıra nömrəsi-ranq yazılır (cədvəl 5.2, sütunlar 1,2).

2. İlkin sıranın hər bir həddinin qarşısında, onun artan sıradakı ranqı yazılır (cədvəl 5.2, sütun 4).

3. İlkin sıra iki hissəyə bölünür $m=8$ və $n=9$ və hər bir hissə üçün ranq cəmi ω_1 və ω_2 tapılır: $\omega_1=62$; $\omega_2=91$. Bunların cəmi $\omega_1 + \omega_2 = 62 + 91 = 153$ edir.

4. Hesablamaların düzgünlüyü aşağıdakı düstura görə yoxlanılır:

$$\omega_1 + \omega_2 = N(N+1) / 2 = 17(17+1) / 2 = 153.$$

5. Müvafiq düsturlara görə U_m və U_n hesablanır:

$$U_m = m \cdot n + m(m+1)/2 - 1 = 8 \cdot 9 + 8 \cdot (8+1)/2 - 62 = 46;$$

$$U_n = m \cdot n + n(n+1)/2 - 2 = 8 \cdot 9 + 9 \cdot (9+1)/2 - 91 = 26.$$

6. Hesablamaların düzgünlüyü aşağıdakı düstura görə yoxlanılır: $U_m + U_n = mn$; $U_m + U_n = 46 + 26 = 72$; $mn = 72$.

7. $U_n < U_m$ olduğundan, U^* kimi $U^* = U_n = 26$ qəbul edilir.

8. Müvafiq düsturlara görə riyazi gözləmə (m_U) və orta kvadratik meylectmə (σ_U) hesablanır: $m_u = mn/2 = 72/2 = 36$;
 $\sigma_u = \sqrt{mn(m+n+1)/12} = \sqrt{8 \cdot 9(8+9+1)/12} = 10,4$.

9. $m \geq 8$ və $n \geq 8$ şərti ödənildiyindən, cədvəl 3.3-dən $2\alpha = 10\%$ əhəmiyyətlik səviyyəsində standart normal paylanmanın ordinatı təyin edilir: $t_{1-\alpha} = t_{95} = 1,64$.

10. Aşağıdakı düsturu nəzərə almaqla U statistikası üçün etibarlılıq intervalı təyin edilir:

$$m_u - t_{1-\alpha} \cdot \sigma_u \leq U < m_u + t_{1-\alpha} \cdot \sigma_u$$

$(36 - 1,64 \cdot 10,4) \leq U < (36 + 1,64 \cdot 10,4)$; tama qədər yuvarlaqlaşdırmaqla $19 \leq U < 53$ alınır.

11. $U^* = 26$ olduğundan, yəni, U statistikanın empirik qiyməti etibarlılıq intervalına düşdüyündən, sıranın orta kəmiyyətə görə bircinsliyi haqqında fərziyyə $2\alpha = 10\%$ əhəmiyyətlik səviyyəsində təkzib olunmur.

5.3.4. Zigel-Tüki meyarı

Əvvəlki paraqrafda qeyd olunduğu kimi, Uilkokson-Mann-Uitni meyarı sıraların dispersiyalarının (həmçinin, digər səpələnmə xarakteristikalarının-orta kvadratik meyletmə, variasiya əmsalı) fərfinə bir o qədər də həssas deyil. Bunu nəzərə alaraq Zigel və Tüki başqa ranq meyarı təklif etmişlər. Bu meyar da, iki asılı olmayan sıranın eyni bir baş çoxluğa aid olub-olmadığını yoxlamağa imkan verir. Lakin o, məhz sıraların dispersiyalarının fərfinə daha həssasdır.

Zigel-Tüki meyarı qeyri-parametrikdir, yəni onun statistikasi, Z , ilkin müşahidə sırasının paylanma funksiyasının tipindən asılı deyil.

Tutaq ki, iki müşahidə sırası verilib və onların uzunluqları müvafiq olaraq m və n ildir. Verilmiş iki sıra bir sırada, $N = m + n$, birləşdirilir və alınmış sıranın hədləri artan qaydada düzülür. Sonra sıranın hədlərinə ranq verilir. Ranqların verilməsi Uilkokson-Mann-Uitni meyarındakı prosedurdan fərqlidir: 1-ci ranq-sıranın ən kiçik həddinə, 2-ci və 3-cü ranqlar-sıranın ən böyük və ona ən yaxın həddə; 4-cü və 5-ci ranqlar-növbəti ən kiçik iki həddə; 6-cı və 7-ci ranqlar-növbəti ən böyük iki həddə verilir və s.

Əgər, birləşdirilmiş ümumi sıra hədlərinin sayı cütdürsə, onda orta mövqeli hədd ən yüksək ranq alır. Əgər, hədlərin sayı təkdirsə, onda orta mövqeli həddə heç bir ranq verilmir və müvafiq sıranın uzunluğundan bir çıxılır.

Əgər, təhlil edilən sıralar $m > 9$ və $n > 9$ və ya $m > 2$ və $n > 20$ şərtlərini ödəyirlərsə, onda test-statistika kimi aşağıdakı kəmiyyət istifadə oluna bilər:

$$Z^* = \frac{2R_1 - m(m+n+1) + 1}{\sqrt{m(m+n+1)(n/3)}}, \quad (5.20)$$

burada R_1 -qısa sıra üçün ranqlar cəmi; m və n -müvafiq olaraq, qısa və uzun sıra hədlərinin sayıdır.

Əgər, $2R_1 > m(m+n+1)$ olarsa, onda düstur (5.20)-nın sürətində $+1$ əvəzinə -1 yazılır. Yuxarıda göstərilən şərtlər ödəndikdə, Z -statistika standart normal paylanma ilə aproksimasiya oluna bilər.

Zigel-Tüki meyarı sıranın bircinsliyini səpələnmə xarakteristikalarına görə yoxlamaq üçün də tətbiq oluna bilər. Bu halda ilkin hidrometeoroloji müşahidə sırası m və n uzunluqlu iki hissəyə bölünür.

İlkin müşahidə sırasının paylanması normal paylanmadan əhəmiyyətli dərəcədə fərqlənərsə, onda Fişer meyarının əvəzinə bu meyardan istifadə tövsiyə olunur.

Misal 5.8. Uzunluğu $N=17$ il olan su sərfələri sırasının (cədvəl 5.3, sütun 3) Zigel-Tüki meyarının istifadəsi ilə ($2\alpha=10\%$ əhəmiyyətlik səviyyəsində) dispersiyaya görə bircinsliyini yoxlayın.

Həlli: 1.Sıra artan qaydada düzülür və yeni sıranın hər bir həddinin qarşısında Zigel-Tüki meyarına uyğun rəqə yazılır (cədvəl 5.3, sütun1,2).

2. İlkin sıranın hər bir həddinin qarşısında onun artan sıradakı rəqə yazılır (cədvəl 5.3, sütun 4).

Cədvəl 5.3

Maksimal su sərfələri sırası üçün rəqə cəmlərin hesablanması
(Zigel-Tüki meyarına görə)

Artan qaydada düzülən sıra	Rəqə	İlkin sıra	Rəqə	Artan qaydada düzülən sıra	Rəqə	İlkin sıra	Rəqə
1	2	3	4	1	2	3	4
11.5	1	53.4	12	67.4	-	38.4	8
27.0	4	99.2	7	69.0	15	67.4	-
30.5	5	27.0	4	78.0	14	162	2
38.4	8	11.5	1	91.6	11	64.0	16
49.6	9	95.6	10	95.6	10	30.5	5
53.4	12	49.6	9	99.2	7	122	6
60.0	13	69.0	15	122	6	137	3
64.0	16	78.0	14	137	3	91.6	11
				162	2	60.0	13
Cəm			72	Cəm			64

3. İlk sıra iki hissəyə bölünür. Birinci hissənin uzunluğu $m=8$ -dir. İkinci hissənin uzunluğu da $n=9-1=8$ -dir, çünki, ümumi sıranın hədlərinin sayı təkdir ($N=17$). Bu səbəbdən 67,4 qiyməti (sıranın orta, 9-cu həddi) ümumi sıradan çıxarılır və rəqə alınır.

Qeyd: biz burada $m > 9$ və $n > 9$ şərtindən bir az yayındıq.

4. Sıranın hər bir hissəsi üçün rəqərlərin cəmi tapılır: $R_1=72$ və $R_2=64$.

5. Aşağıdakı düstura görə rəqərlərin hesablanmasının düzgünlüyü yoxlanılır:

$$R_1 + R_2 = (m+n)(m+n+1)/2$$

$$R_1 + R_2 = 72 + 64 = 136; (m+n)(m+n+1)/2 = (8+8)(8+8+1)/2 = 136.$$

6. Aşağıdakı düstura görə Z^* statistikası hesablanır:

$$Z^* = \frac{2R_1 - m(m+n+1) + 1}{\sqrt{m(m+n+1)(n/3)}} = \frac{2 \cdot 72 - 8(8+8+1) + 1}{\sqrt{8(8+8+1)(8/3)}} = \frac{9,0}{19,0} = 0,47.$$

7. Cədvəl 3.3-ə əsasən $2\alpha = 10\%$ əhəmiyyətlik səviyyəsində standart normal paylanmanın ordinatı tapılır: $t_{1-\alpha} = t_{95} = 1,64$ və sonra Z üçün etibarlılıq intervalı təyin edilir: $-1.64 \leq Z < +1.64$.

8. $Z^*=0,47$ olduğundan, yəni, Z statistikanın empirik qiyməti etibarlılıq intervalına düşdüyündən, sıranın dispersiyaya görə bircinsliyi haqqında fərziyyə $2\alpha = 10\%$ əhəmiyyətlik səviyyəsində təkzib olunmur.

5.4. Sıraların təsadüfiliyinin qiymətləndirilməsi

Hidrometeoroloji məlumatların işlənməsində istifadə olunan statistik metodlar təsadüfi kəmiyyətlər üçün işlənmişdir. Hidrometeoroloji xarakteristikaların çoxillik tərəddüdlərini də təsvir etmək üçün başlıca olaraq təsadüfi kəmiyyət modeli tətbiq olunur. Buna görə müşahidə sıralarının təsadüfiliyinin yoxlanması məlumatların təhlilinin ən vacib mərhələlərindən biridir.

Sıraların təsadüfiliyini yoxlamaq üçün müxtəlif statistik meyarlar işlənmişdir. Bu meyarlar tətbiq edildikdə empirik müşahidə sırası üçün konkret statistika hesablanır və alınan qiymət bu statistikanın təsadüfi kəmiyyətlər üçün hesablanmış nəzəri qiymətlə müqayisə olunur. Bu müqayisə nəticəsində sıranın təsadüfiliyi haqqında sıfırıncı hipotez ya qəbul edilir, ya da ki, təkzib olunur.

5.4.1. Seriyalar meyarları

Praktikada daha tez-tez seriyalar meyarlarından istifadə edilir. Seriya dedikdə sıranın orta qiymətindən (və ya medianadan) böyük və ya kiçik qiymətlərin ardıcılığı başa düşülür. Tutaq ki, illik yağıntı sırasında 4 il ardıcıl olaraq yağıntıların qiyməti sıranın orta qiymətindən böyük olmuşdur. Bu, 4 illik seriyadır. Ola bilər ki, 6 il ardıcıl olaraq yağıntılar orta qiymətdən kiçik olmuşdur. Bu isə 6-illik seriyadır. Beləliklə, baxılan sıra müxtəlif uzunluqlu rütubətli və quraq seriyaların ardıcılığıdır.

Seriyalar meyarlarının sayı ikidir: seriyaların ümumi sayı meyarı və seriyaların maksimal uzunluğu meyarı.

Seriyaların ümumi sayı meyarı. Bu meyarda R statistikadan istifadə olunur:

$$R = r_a + r_b, \quad (5.21)$$

burada r_a və r_b -müvafiq olaraq, a və b elementlərindən ibarət seriyaların sayıdır. Başqa sözlə, r_a orta qiymətdən böyük hədlərin, r_b isə orta qiymətdən kiçik hədlərin əmələ gətirdikləri seriyaların sayıdır.

Əgər, sıranın hər hansı bir həddinin qiyməti orta qiymətə bərabər olarsa, onda o, şərti olaraq a və ya b elementi kimi qəbul edilir.

Təsadüfi kəmiyyətlər çoxluğu üçün R statistika normal paylanır və onun parametrləri aşağıdakı kimi hesablanır:

$$m_R = \frac{n+1}{2}; \quad \sigma_R = \frac{\sqrt{n-1}}{2}, \quad (5.22)$$

burada n -müşahidə sırasının uzunluğudur.

R statistikanın etibarlılıq intervalı aşağıdakı kimi yazılır:

$$m_R - t_{1-\alpha} \sigma_R < R \leq m_R + t_{1-\alpha} \sigma_R, \quad (5.23)$$

burada $t_{1-\alpha}$ -standart normal paylanmanın kvantilidir.

Əgər, müşahidə sırasına görə hesablanmış statistikanın qiyməti, R^* , bu intervala düşürsə, onda sıranın təsadüfiliyi haqqında hipotez təkzib olunmur.

Misal 5.9. 1946-1984-cü illəri əhatə edən dövr üçün ($n=39$ il) maksimal su sərtləri sırasının təsadüfiliyi haqda fərziyyəni *seriyaların ümumi sayı meyarının* köməyi ilə yoxlayın ($2\alpha = 5\%$ əhəmiyyətlik səviyyəsində).

Həlli: 1. Sıranın orta qiyməti hesablanır: $\bar{Q}_{\max} = 57,3 \text{ m}^3/\text{s}$. Qiyməti $57,3 \text{ m}^3/\text{s}$ -dən böyük olan su sərtlərinə a , kiçik olanlara isə b indeksi verilir (cədvəl 5.4).

Cədvəl 5.4

1946-1984-cü illəri əhatə edən dövrün maksimal su sərtləri sırası üçün seriyaların ümumi sayının hesablanması

İl	$Q, \text{m}^3/\text{s}$	İndeks	İllərin sayı, i	İl	$Q, \text{m}^3/\text{s}$	İndeks	İllərin sayı, i
1946	66.0	a	1	1966	79.0	a	1
1947	46.1	b	1	1967	36.4	b	1
1948	61.1	a	1	1968	64.0	a	2
1949	40.1	b	2	1969	54.1	a	
1950	26.5	b		1970	33.0	b	1
1951	72.7	a	1	1971	50.4	a	1
1952	35.5	b	3	1972	29.4	b	4
1953	34.1	b		1973	19.4	b	
1954	18.0	b		1974	26.6	b	
1955	79.6	a	3	1975	23.6	b	1
1956	68.3	a		1976	72.7	a	
1957	68.7	a	1	1977	39.9	b	5
1958	45.1	b		1978	32.5	b	
1959	77.4	a	2	1979	29.4	b	
1960	81.5	a		1980	32.5	b	
1961	29.6	b	1	1981	35.7	b	3
1962	70.2	a	1	1982	58.2	a	
1963	40.8	b	1	1983	67.5	a	
1964	84.6	a	1	1984	67.4	a	
1965	49.4	b	1				

2. Cədvəl 5.4-ün məlumatlarına əsasən a və b elementlərindən ibarət seriyaların sayı hesablanır (onların uzunluqlarından (i) asılı olmayaraq). Bu halda $r_a=12$, $r_b=11$. Beləliklə, verilmiş sırada seriyaların ümumi sayı 23-ə bərabərdir ($R=23$).

3. Müvafiq düsturlara görə: $m_R = \frac{n+1}{2} = \frac{39+1}{2} = 20$ və $\sigma_R = \frac{\sqrt{n-1}}{2} = \frac{\sqrt{39-1}}{2} = 3,08$. Cədvəl 3.3-dən $2\alpha=5\%$ əhəmiyyətlik səviyyəsinə uyğun olan standart normal paylanmanın kvantili təyin edilir: $t'_{1-\alpha} = t'_{97,5} = 1,96$.

4. Kvantilin bu qiyməti $m_R - t_{1-\alpha} \cdot \sigma_R \leq R < m_R + t_{1-\alpha} \cdot \sigma_R$ bərabərsizliyində yerinə yazılır və R üçün etibarlılıq intervalı hesablanır: $14 \leq R < 26$.

5. Müşahidə sırası üçün alınmış seriyaların ümumi sayı ($R^*=23$) etibarlılıq intervalına düşdüyündən, bu nəticəyə gəlmək olar ki, sıranın təsadüfiliyi haqda fərziyyə təkzib olunmur.

Seriyaların maksimal uzunluğu meyarı. Bu meyarda statistika kimi a və ya b (fərqi yoxdur) elementlərindən ibarət olan seriyaların maksimal uzunluğundan istifadə olunur. Nəzəri olaraq sübut edilmişdir ki, təsadüfi kəmiyyətlər çoxluğu üçün K statistikanın qiyməti aşağıdakı düsturla hesablanı bilər:

$$K_\alpha = \frac{\lg \left[-\frac{n}{\lg n(1-\alpha)} \right]}{\lg 2} - 1 \quad (5.24)$$

Əgər, $K^* < K_\alpha$ şərti ödənilirsə, onda baxılan sıranın təsadüfiliyi haqqında hipotez təkzib olunmur.

Misal 5.10. Misal 5.9-un məlumatlarına əsasən *seriyaların maksimal uzunluğu meyarına* görə hidroloji sıranın ehtimal strukturunun təsadüfi kəmiyyət modelinə uyğunluğu haqda fərziyyəni yoxlayın ($2\alpha=5\%$ əhəmiyyətlik səviyyəsində).

Həlli: 1. Cədvəl 5.4-dən göründüyü kimi, b elementlərindən ibarət və 1977-1981-ci illəri əhatə edən seriya maksimal uzunluğa

malikdir, yəni $K=5$.

2. K_α hesablanır:

$$K_\alpha = \frac{\lg \left[-\frac{n}{\ln(1-\alpha)} \right]}{\lg 2} - 1 = 8,6.$$

3. $K^* < K_\alpha$ olduğundan, verilmiş əhəmiyyətlik səviyyəsində sıranın təsadüfiliyi haqqda fərziyyə təkzib olunmur.

5.4.2. Artma və azalmaların sayı meyarı

Tutaq ki, $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ müşahidə sırası verilmişdir və bu sıranın hədləri təsadüfi kəmiyyətlərdir. Əgər, $x_{i-1} < x_i$ olarsa, onda x_{i-1} -dən x_i -yə keçidi artma adlandırmaq və onun qiymətini “+” işarəsi ilə qeyd edək. Əgər, $x_{i-1} > x_i$ olarsa, onda x_{i-1} -dən x_i -yə keçidi azalma adlandırmaq və onun qiymətini “-” işarəsi ilə qeyd edək.

Təsadüfi kəmiyyətlər çoxluğu üçün artma (və ya azalmaların) sayı asimptotik normal paylanır və parametrləri aşağıdakı düsturlara görə təyin olunur:

$$m_+ = m_- = n/2; \quad D_+ = D_- = (n+1)/12. \quad (5.25)$$

Bu düsturlardan görünür ki, artma, k_+ , və azalmaların sayının, k_- , riyazi gözləmə, m , və dispersiyaları, D , bərabərdir. Buna görə də, artma və azalmaların sayı, k , üçün etibarlılıq intervalı belə yazılır:

$$m - t_{1-\alpha} \sqrt{D} \leq k < m + t_{1-\alpha} \sqrt{D}, \quad (5.26)$$

burada $t_{1-\alpha}$ -standart normal paylanmanın kvantilidir.

Əgər, k_+ və k_- -statistikaların müşahidə sırasına görə hesablanmış qiymətləri etibarlılıq intervalına düşürsə, onda sıranın təsadüfiliyi haqqında hipotez təkzib olunmur.

Misal 5.11. 1946-1984-cü illəri əhatə edən dövr üçün ($n=39$ il) maksimal su sərfələri sırasının artma və azalma seriyalarının sayı

meyarına görə təsadüfiliyi haqda fərziyyəni yoxlayın ($2\alpha=5\%$ əhəmiyyətlik səviyyəsində).

Həlli: 1. Cədvəl 5.5-də müşahidə sırası verilmişdir və sütun 3-də “+” və “-” indeksləri müvafiq olaraq artma və azalma ilə işarə olunmuşdur.

Cədvəl 5.5

Maksimal su sərtləri sırasında artma “+”, azalma“-” və ekstremumların “e” sayının hesablanması (1946-1984-cü illər)

İl	$Q, m^3/s$	+/-	e	İl	$Q, m^3/s$	+/-	e
(1)	(2)	(3)	(4)	(1)	(2)	(3)	(4)
1946	66.0			1966	79.0	+	e
1947	46.1	-	e	1967	36.4	-	e
1948	61.1	+	e	1968	64.0	+	e
1949	40.1	-		1969	54.1	-	
1950	26.5	-	e	1970	33.0	-	e
1951	72.7	+	e	1971	50.4	+	e
1952	35.5	-		1972	29.4	-	
1953	34.1	-		1973	19.4	-	e
1954	18.0	-	e	1974	26.6	+	e
1955	79.6	+	e	1975	23.6	-	e
1956	68.3	-	e	1976	72.7	+	e
1957	68.7	+	e	1977	39.9	-	
1958	45.1	-	e	1978	32.5	-	
1959	77.4	+		1979	29.4	-	e
1960	81.5	+	e	1980	32.5	+	
1961	29.6	-	e	1981	35.7	+	
1962	70.2	+	e	1982	58.2	+	
1963	40.8	-	e	1983	67.5	+	e
1964	84.6	+	e	1984	67.4	-	
1965	49.4	-	e				

2. Cədvəl 5.5-dən görünür ki, verilmiş sırada artma seriyalarının sayı $k_+^*=17$, azalmaların sayı isə $k_-^*=21$ -dir.

3. Artma və azalma seriyalarının sayının riyazi gözləməsi və dispersiyası hesablanır: $m_+=m_-=n/2=39/2=19,5$;

$$D_+ = D_- = (n+1)/12 = (39+1)/12 = 3,33 \text{ və } \sigma_+ = \sigma_- = \sqrt{D} = \sqrt{3,33} = 1,82.$$

4. Cədvəl 3.3-dən $2\alpha = 5\%$ əhəmiyyətlik səviyyəsinə uyğun olan normal paylanmanın kvantili təyin edilir:

$$t'_{1-\alpha} = t'_{97,5} = 1,96.$$

5. Alınmış bu qiymət aşağıdakı düsturda yerinə qoyulur və k üçün etibarlılıq intervalı hesablanır:

$$m - t_{1-\alpha} \sqrt{D} \leq k < m + t_{1-\alpha} \sqrt{D} \text{ və } 16 \leq k < 23.$$

6. Sıraya əsasən hesablanmış k_+^* və k_-^* etibarlılıq intervalına düşdüyündən, yoxlanılan fərziyyə təkzib olunmur.

5.4.3. Ekstremumların sayı meyarı

Ekstremum, $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ müşahidə sırasının elə elementidir ki, onun üçün aşağıdakı bərabərsizliklərdən biri ödənilir:

$$x_{i-1} < x_i > x_{i+1} \text{ -maksimum;}$$

$$x_{i-1} > x_i < x_{i+1} \text{ -minimum.}$$

Təsadüfi kəmiyyətlər çoxluğu üçün ekstremumların sayı asimptotik normal paylanır. Bu paylanmanın parametrləri aşağıdakı düsturlara görə təyin olunur:

$$m_e = \frac{2n}{3}; \quad D_e = \frac{16n-29}{90}. \quad (5.27)$$

Sıranın təsadüfiliyi haqqında hipotezin yoxlanması artma və azalmaların sayı meyarının tətbiqindəki kimidir.

Misal 5.12. Misal 5.11-in məlumatlarına əsasən *ekstremumların sayı meyarına* görə sıranın təsadüfiliyi haqda fərziyyəni yoxlayın ($2\alpha = 5\%$ əhəmiyyətlik səviyyəsində).

Həlli: 1. Cədvəl 5.5-dən göründüyü kimi, verilmiş sıra üçün ekstremumların sayı 26-ya bərabərdir ($k_e^* = 26$).

2. Riyazi gözləmə, m_e , və dispersiyanın, D_e , qiymətləri hesablanır: $m_e = \frac{2n}{3} = \frac{39 \cdot 2}{3} = 26$; $D_e = \frac{16n-29}{90} = 6,6$ və

$$\sigma_e = \sqrt{D_e} = \sqrt{6,6} = 2,57.$$

3. Cədvəl 3.3-dən $2\alpha=5\%$ əhəmiyyətlik səviyyəsinə uyğun olan normal paylanmanın kvantili təyin edilir: $t_{1-\alpha} = t_{97,5} = 1,96$.

4. Ekstremumların sayı üçün etibarlılıq intervalı hesablanır:

$$m_c - \sigma_c t_{1-\alpha} \leq k_c < m_c + \sigma_c t_{1-\alpha} \text{ və } 21 \leq k_c < 31.$$

5. $k_c^*=26$ olduğundan və bu qiymət etibarlılıq intervalına düşməyindən, sıfırıncı fərziyyə (sıranın təsadüfiliyi) təkzib olunmur.

5.5. Empirik və analitik təminat ayrılarının uyğunluğunun yoxlanması

aproximasiya

Hidrometeoroloji kəmiyyətlərin hesablanması üçün mühüm mərhələlərindən biri empirik təminat ayrılarını aproximasiya etmək üçün analitik ifadənin (ayrının) seçilməsidir. Seçim o zaman əsaslandırılmış hesab olunur ki, empirik və analitik ayrılar arasında yaxşı uyğunluq olsun. Praktikada belə müqayisə adətən gözüyağı (vizual) yerinə yetirilir. Bu iş subyektiv xarakter daşıyır. Baxılan məsələ statistik uyğunluq meyarlarının istifadəsi ilə daha obyektiv həll oluna bilər. Yəni də sıfırıncı fərziyyə (empirik və analitik ayrılar bir-birinə uyğundur) irəli sürülür, əhəmiyyətlik səviyyəsi təyin olunur, test-statistikanın empirik qiyməti hesablanır və nəhayət, qərar qəbul olunur.

Hidrometeoroloji tədqiqatlarda daha çox χ^2 (Pirson) meyarı, Kolmoqorov meyarı və $n\omega^2$ (Kramer-Mizes-Smirnov) meyarı istifadə olunur.

Bu meyarların hər birinin öz test-statistikası var.

5.5.1. χ^2 (Pirson) meyarı

χ^2 meyarını XX əsrin əvvəllərində K.Pirson təklif etmişdir. Hazırda bu, ən geniş tətbiq olunan uyğunluq meyarıdır. Bu meyar istifadə edildikdə baxılan kəmiyyətin mümkün qiymətlər oblası k sayda intervala bölünür. Intervalların sayı təxmini olaraq müşahidə sırasının uzunluğundan asılı olaraq təyin oluna bilər ($k \approx 5 \lg n$).

İntervalların sayı aşağıdakı sxemə görə də hesablanı bilər.

1. Empirik təminat əyrisini hamarlaşdırmaq və ekstrapolyasiya etmək üçün analitik əyrinin tipi seçilir.

2. Müşahidə sırasının parametrləri (orta qiymət, variasiya və asimmetriya əmsalları) qiymətləndirilir.

3. Ehtimallar damasında empirik və analitik təminat əyriləri qurulur.

4. Təminatlar oxu k sayda bərabər intervallara bölünür.

5. Analitik əyridən istifadə etməklə və təminatlar oxunda intervalların sərhədlərini nəzərə almaqla baxılan kəmiyyətin qiymətləri üçün intervalların sərhədləri təyin olunur. Məsələn, əgər, $k = 5$ (cəmi 5 interval) olarsa, onda təminatlar oxunda intervalların sərhədləri 0, 20, 40, 60, 80, 100%-ə uyğun olacaq. Baxılan kəmiyyətin qiymətləri qeyd olunan ordinat oxunda isə intervalların sərhədləri belə olacaq: $x_{20} \leq x$; $x_{40} \leq x < x_{20}$; $x_{60} \leq x < x_{40}$; $x_{80} \leq x < x_{60}$; $x < 80$.

Müşahidə məlumatlarının (empirik əyrinin) analitik əyri ilə uyğun olub-olmamasını qiymətləndirmək üçün aşağıdakı test-statistika istifadə olunur:

$$\chi^2 = n \sum_{i=1}^k \frac{(P_i^* - P_i)^2}{P_i}, \quad (5.28)$$

burada P_i^* və P_i -müvafiq olaraq, baxılan təsadüfi kəmiyyətin qiymətinin i intervalına düşməsinin empirik və nəzəri ehtimalı; n – sıranın uzunluğu; k – intervalların sayıdır.

K. Pirson göstərmişdir ki, bu test-statistikanın paylanma qanunu müşahidə sırasının paylanma tipindən asılı deyil və n -nin kifayət qədər böyük qiymətlərində sərbəstlik dərəcəsi ədədi $\nu = k - r - 1$ (burada r -ilkin sıranın müşahidə məlumatlarına görə təyin olunan parametrlərinin sayıdır) olan χ^2 paylanması ilə yaxşı aproksimasiya olunur.

χ^2 statistikanın qiyməti aşağıdakı düstura görə də hesablanı bilər:

$$\chi^2 = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^k (m_i^*)^2 - n \quad (5.29)$$

burada m^* və m - müvafiq olaraq, baxılan təsadüfi kəmiyyətin qiymətinin i intervalına düşməsinin empirik və nəzəri sayıdır.

Düstur 5.28-dən görünür ki, χ^2 statistikanın qiyməti nə qədər böyük olarsa, empirik və analitik əyrlər arasında uyğunsuzluq da bir o qədər böyük olar. Buna görə də χ^2 meyarı istifadə olunduqda birtərəfli əhəmiyyətlik səviyyəsi təyin edilir (adətən $\alpha = 5\%$ və ya $\alpha = 10\%$).

Əgər, baxılan test-statistikanın düstur 5.28 və ya 5.29-a görə hesablanmış empirik qiyməti $(\chi^2)^*$ təyin olunmuş əhəmiyyətlik səviyyəsində, α , nəzəri qiyməti, χ^2 , ötmürsə, yəni, $(\chi^2)^* \leq \chi^2_{1-\alpha}$, onda empirik və analitik əyrlərinin uyğunluğu haqqında hipotez təkzib olunmur.

χ^2 meyarının köməyi ilə empirik təminat əyrisini bir neçə analitik əyri tipi ilə müqayisə edib ən yaxşı variantı seçmək olar. Belə varianta χ^2 statistikanın daha kiçik qiyməti uyğundur.

Hesab olunur ki, χ^2 meyarı $n > 50$ olduqda istifadə edilə bilər və yaxşı olar ki, intervalların sayı 8-12, hər intervalda elementlərin sayı isə ən azı 5 olsun.

Misal 5.13. İllik yağış layının 47 illik müşahidə məlumatlarının təkrarlanması aşağıdakı cədvəldəki kimidir:

Interval (mm)	İnterval düşmələrin empirik sayı	Interval (mm)	İnterval düşmələrin empirik sayı
<1000	2	1250-1300	7
1000-1050	3	1300-1350	5
1050-1100	4	1350-1400	3
1100-1150	5	1400-1450	2
1150-1200	6	1450-1500	2
1200-1250	7	>1500	1

Müşahidə sırasının orta kəmiyyəti 1225 mm və orta kvadratik meylətməsi 151 mm təşkil edir. İllik yağış layı sırasının 5%-li əhəmiyyətlik səviyyəsində normal paylanmaya uyğunluğunu qiymətləndirin.

Həlli: 1. Əvvəlcə yağış layının verilmiş qiymətlərinə görə onların normallaşdırılmış qiymətləri, t , hesablanır:

$$t = \frac{x - \mu_x}{\sigma_x} = \frac{x - 1225}{151},$$

burada x illik yağış layıdır.

Yağış layı, mm	t	$P(T < t)$
1000	-1.49	0.07
1050	-1.16	0.12
1100	-0.83	0.20
1150	-0.50	0.31
1200	-0.17	0.43
1250	0.17	0.57
1300	0.50	0.69
1350	0.83	0.80
1400	1.16	0.88
1450	1.49	0.93
1500	1.82	0.97

2. Cədvəl 3.3-dən normallaşdırılmış (standart) yağış layının qiymətlərinə görə, t , kumulyativ (integral) paylanma funksiyasının ordinatları (nəzəri cəm ehtimallar) təyin olunur və vahidin hissələri ilə (100-ə bölməklə) ifadə edilir. Bu qiymətlər yuxarıdakı cədvəlin 3-cü sütununda yazılır. Göründüyü kimi, nəzəri cəm ehtimallarının qiymətləri artma qaydasında düzülmüşlər.

3. Nəzəri cəm ehtimalların qonşu qiymətlərinin fərqləri, intervallara düşmələrin nəzəri ehtimalına bərabərdir. Bu nəzəri ehtimallar aşağıdakı cədvəlin 2-ci sütununa yazılır.

İnterval (mm)	Nəzəri ehtimal, p_m	İntervalda düşmələrin nəzəri qiymətləri, Np_m
<1000	0.07	3.29
1000-1050	0.05	2.35
1050-1100	0.08	3.76
1100-1150	0.11	5.17
1150-1200	0.12	5.64
1200-1250	0.14	6.58
1250-1300	0.12	5.64
1300-1350	0.11	5.17
1350-1400	0.08	3.76
1400-1450	0.05	2.35
1400-1500	0.04	1.88
>1500	0.03	1.41

4. Nəzəri ehtimallar müşahidə sırasının uzunluğuna vurulur və intervala düşmələrin nəzəri sayı tapılır.

5. Müşahidə olunmuş (empirik) və nəzəri təkrarlanmaların paylanmalarını nəzərə almaqla χ^2 statistikasını hesablanır:

$$\chi^2 = \sum_{m=1}^M \frac{(X_m - Np_m)^2}{Np_m} = \frac{(2-3.29)^2}{3.29} + \frac{(3-2.35)^2}{2.35} + \frac{(4-3.76)^2}{3.76} + \frac{(5-5.17)^2}{5.17} + \frac{(6-5.64)^2}{5.64} + \frac{(7-6.58)^2}{6.58} + \frac{(7-5.64)^2}{5.64} + \frac{(5-5.17)^2}{5.17} + \frac{(3-3.76)^2}{3.76} + \frac{(2-2.35)^2}{2.35} + \frac{(2-1.88)^2}{1.88} + \frac{(1-1.41)^2}{1.41} = 1.42$$

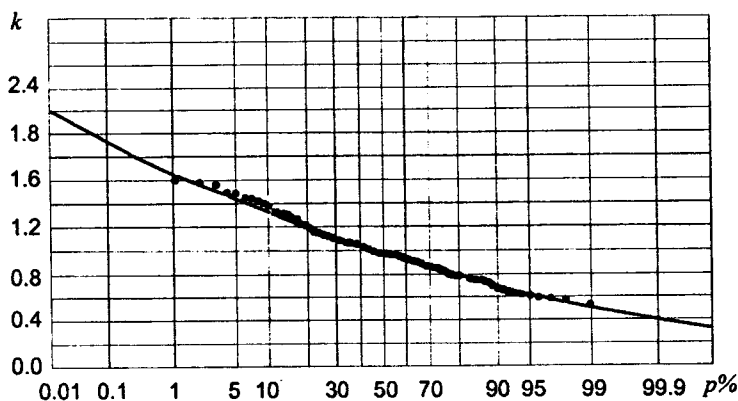
Sıranın həm orta kəmiyyəti, həm də orta kvadratik meylectməsi müşahidə sırasına görə təyin olunduğundan χ^2 statistikanın sərbəstlik dərəcəsi ədədi $M-1-n$ ifadəsi ilə təyin olunur: $M=12$ (intervalların sayı) və $n=2$ (müşahidə sırasına görə təyin olunmuş parametrlərin sayı). Beləliklə, sərbəstlik dərəcəsi ədədi $12-1-2=9$ alınır. 5%-li əhəmiyyətlik səviyyəsində müşahidə sırasının normal paylanmaya uyğunluğu haqda hipotez aşağıdakı bərabərsizlik ödənildikdə qəbul oluna bilər.

$$0 \leq 1.42 \leq \chi_{0.05}^2$$

Əlavə 4-ə görə, sərbəstlik dərəcəsi ədədi 9-a bərabər olduqda

$\chi_{0.05}^2 = 16.919$. Beləliklə, $0 \leq 1.42 \leq 16.919$ və yağış layı sırasının 5%-li əhəmiyyətlik səviyyəsində normal paylanmaya uyğunluğu qəbul oluna bilər.

Misal 5.14. Şəkil 5.5-də orta illik su sərfələrinin empirik təminat əyrisi ($n=98$ il) və Kritski-Menkelin parametrləri $\bar{Q}=19,5$ m³/s, $C_v=0,25$, $C_s/C_v=2$ olan üçparametrlı qamma paylanmasının analitik əyrisi göstərilmişdir. χ^2 (Pirson) meyarına görə $2\alpha=5\%$ əhəmiyyətlik səviyyəsində empirik və analitik əyrilərin uyğunluq dərəcəsini qiymətləndirin.



Şəkil 5.5. Orta illik su sərfələri üçün empirik və analitik təminat əyriləri

Həlli: 1. Bu tapşırığın həlli üçün qrafikin təminat oxu 10 bərabər intervala bölünür: $k \approx 5 \lg(n) \approx 10$.

2. İntervalların sərhədlərində analitik təminat əyrisinin ordinatlarının qiymətləri tapılır. Paylanma funksiyası yuxarıdan məhdudlanmadığından, birinci interval üçün (0–10%) yuxarı sərhəd sonsuzluğa bərabər olacaq. İkinci interval üçün (10–20%) yuxarı sərhəd birinci intervalın aşağı sərhəddinə bərabərdir və s.; axırncı interval üçün aşağı sərhəd sıfıra bərabərdir, belə ki, paylanma funksiyasının aşağı sərhəddi sıfırdır (cədvəl 5.6).

χ^2 meyarının hesablanması üçün ilkin məlumatlar

Cədvəl 5.6

İnterval k	Təminat, %	İntervalların sərhədləri	Su sərfələrinin intervala düşmə hallarının sayı m_i^*	$(m_i^*)^2$
1	0 – 10	∞ -1,33	11	121
2	10 – 20	1,33 – 1,20	8	64
3	20 – 30	1,20 – 1,11	10	100
4	30 – 40	1,11 – 1,05	8	64
5	40 – 50	1,05 – 0,98	13	169
6	50 – 60	0,98 – 0,92	11	121
7	60 – 70	0,92 – 0,85	10	100
8	70 – 80	0,85 – 0,79	6	36
9	80 – 90	0,79 – 0,70	11	121
10	90 – 100	0,70 – 0,00	10	100
Cəm				996

3. Hər bir interval üçün su sərfələrinin müvafiq intervala düşmə hallarının sayı (m_i^*) hesablanır (cədvəl 5.6). Əgər su sərfəsinin qiyməti intervalın sərhəddinə düşürsə, onu yuxarı intervala aid etmək lazımdır. m_i^* -nin qiymətləri cədvəl 5.6-nın 4-cü sütununa yazılır.

4. Su sərfələrinin hər bir intervala düşmə hallarının nəzəri sayı $m=n/k$ ifadəsinə görə təyin edilir və $m=98/10=9,8$. Cədvəl 5.6-nın 4-cü sütununda verilmiş empirik məlumatlar nəzəri qiymətdən (9,8) fərqlənir. Bu fərqlər ya seçmə təkrarlanmaların təsadüfi tərəddüdü, ya da empirik və analitik təminat ayrılarının uyğunsuzluğu ilə əlaqədardır.

5. Aşağıdakı düsturdan istifadə etməklə χ^2 -nin empirik qiyməti hesablanır:

$$(\chi^2)^* = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{10} (m_i^*)^2 - n = \frac{1}{9,8} 996 - 98 = 3,63.$$

6. Əlavə 4-dən sərbəstlik dərəcəsi ədədi $\nu=k-r-1=10-3-1=6$ və əhəmiyyətlik səviyyəsi $2\alpha=5\%$ olduqda χ^2 -nin nəzəri

qiyməti tapılır: $\chi_{95}^2 = 12,6$.

7. $(\chi^2)^* < \chi_{95}^2$ olduğuna görə belə nəticəyə gəlmək olar ki, empirik və analitik təminat ayrılarının uyğunluğu haqda fərziyyə $2\alpha = 5\%$ əhəmiyyətlik səviyyəsində təkzib olunmur.

5.5.2. Kolmoqorov meyarı

A.M.Kolmoqorov empirik məlumatların analitik paylanmaya uyğunluğunu qiymətləndirmək üçün kəmiyyət göstəricisi kimi empirik, $P^*(x)$, və analitik, $P(x)$, təminat funksiyalarının qiymətləri arasında ən böyük fərqi (mütləq qiymətcə) qəbul etmişdir:

$$\Delta = \max |P^*(x) - P(x)|. \quad (5.30)$$

Hesablamalar Kolmoqorov meyarına görə yerinə yetirildikdə, əvvəlcə müşahidə sırasının hər bir həddi üçün ayrılıqda $P^*(x)$, $P(x)$ və onların fərqi hesablanır. Sonra mütləq qiyməti ən böyük olan fərq, Δ , seçilir, və statistika hesablanır:

$$\lambda^* = \Delta \sqrt{n}, \quad (5.31)$$

burada n -sıranın uzunluğudur.

Kolmoqorov göstərmişdir ki, n kifayət qədər böyük olduqda ($n > 40$) λ statistikanın təminat funksiyası aşağıdakı ifadə ilə aproksimasiya oluna bilər:

$$P\{\lambda^* > \lambda\} \approx P(\lambda) = 2 \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \exp(-2k^2 \lambda^2). \quad (5.32)$$

Bu funksiyanın koordinatları Əlavə 7-də verilir.

Əgər, $P(\lambda)$ funksiyanının qiyməti qəbul olunmuş əhəmiyyətlik səviyyəsindən böyükdürsə, onda empirik və analitik təminat ayrılarının uyğunluğu haqqında hipotez təkzib olunmur.

Kolmoqorov meyarı ilə hesablamalar kifayət qədər sadədir. Bu meyarın əsas çatışmazlığı ondan ibarətdir ki, yalnız empirik və analitik təminatların ən böyük qiymətlər fərqlərini nəzərə alır. Başqa

sözlə, müşahidə sırasında olan informasiya qismən istifadə olunur. Təminatların ən böyük fərqi, Δ , adətən, təminat əyrisinin orta hissəsində qeydə alınır.

Hidrometeoroloji xarakteristikalar, xüsusilə ekstremal xarakteristikalar hesablandığında təminat əyrisinin yuxarı və aşağı hissələri daha böyük maraq doğurur.

Bu nöqsanlar Kolmoqorov meyarının praktikada tətbiqini istisna etmir. Bu meyar da, χ^2 meyarı kimi, empirik əyrinin bir neçə analitik əyri tipi ilə uyğunluğunu qiymətləndirmək və daha uyğun əyrini seçmək üçün istifadə oluna bilər.

Misal 5.15. İlk məlumatlar misal 5.14-də olduğu kimidir. Kolmoqorov meyarına görə $\alpha=5\%$ əhəmiyyətlik səviyyəsində empirik əyri və Kritski-Menkelin analitik əyrisinin (şəkil 5.5) uyğunluq dərəcəsini qiymətləndirin.

Həlli: 1. Verilmiş sıranın 98 su sərfinin hər biri üçün empirik və nəzəri təminatlar arasındakı fərqi mütəlak qiyməti hesablanır. Belə hesablamaların fraqmenti cədvəl 5.7-də verilmişdir.

Cədvəl 5.7

Empirik və nəzəri təminatlar arasındakı fərqi hesablanması

N_0	k_i	$P^* \%$	$P \%$	$ P^* - P $
...	...	...	...	...
40	1.03	40.40	42.14	1.74
41	1.02	41.41	43.72	2.31
42	1.01	42.42	45.22	2.80
43	1.00	43.43	46.70	3.27
44	0.99	44.44	48.19	3.75
45	0.99	45.45	48.19	2.74
46	0.98	46.46	49.68	3.22
47	0.98	47.47	49.68	2.21
48	0.98	48.48	49.68	1.20
49	0.98	49.49	49.68	0.19
...	...	...	...	...

2. Cədvəldən göründüyü kimi, P^* və P arasında ən böyük fərq 3,75%-dir və ya vahidin hissəsi kimi ifadə edildikdə $\Delta=0,0375$ olur.

3. Kolmoqorov statistikasının empirik qiyməti hesablanır:

$$\lambda^* = \Delta\sqrt{n} = 0,0375\sqrt{98} = 0,367.$$

4. Əlavə 7-dən Kolmoqorovun təminat funksiyasının ordinatı təyin edilir:

$$P(\lambda^*)=0,999.$$

5. Beləliklə, $P(\lambda^*)$ qəbul olunmuş əhəmiyyətlik səviyyəsindən ($\alpha=5\%$ və ya 0,05) olduqca böyükdür: $0,999 \gg 0,05$. Buna görə də empirik nöqtələrin Kritski-Menkelin analitik əyrisinə uyğunluğu haqda fərziyyə təkzib olunmur.

Misal 5.16. Misal 5.13-də verilmiş müşahidə məlumatlarının 10% əhəmiyyətlik səviyyəsində normal paylanmaya uyğunluğunu Kolmoqorov-Smirnov meyarına görə qiymətləndirin.

Həlli: Verilmiş məlumatlara əsasən yağış layının empirik və nəzəri ehtimallarının hesablanmış qiymətləri aşağıdakı cədvəldə göstərilir:

Yağış layı, x (mm)	Normallaşdırılmış yağış layı, $(x - \mu_x)/\sigma_x$	$S_N(x)$	$P_X(x)$	$[P_X(x) - S_N(x)]$
1000	-1.490	2/47=0.043	0.068	0.025
1050	-1.159	5/47=0.106	0.123	0.017
1100	-0.828	9/47=0.191	0.204	0.013
1150	-0.497	14/47=0.298	0.310	0.012
1200	-0.166	20/47=0.426	0.434	0.008
1250	0.166	27/47=0.574	0.566	0.008
1300	0.497	34/47=0.723	0.690	0.033
1350	0.828	39/47=0.830	0.796	0.034
1400	1.159	42/47=0.894	0.877	0.017
1450	1.490	44/47=0.936	0.932	0.004
1500	1.821	46/47=0.979	0.966	0.013

Yağış layının normallaşdırılmış qiymətləri cədvəlin 2-ci sütununda verilir. Bu qiymətlər yağış layının 1-ci sütununda verilmiş

qiymətlərinə görə hesablanmışdır. Müşahidə sırasının orta qiyməti $\mu_x=1225$ mm və orta kvadratik meyletməsi $\sigma_x=151$ mm təşkil edir. Empirik cəm paylanma funksiyasının 3-cü sütunda verilmiş qiymətləri aşağıdakı düstura görə hesablanmışdır:

$$S_N(x) = \frac{k}{N},$$

burada k verilmiş yağış layının qiymətinə bərabər və ya ondan kiçik qiymətlərin sayı, $N=47$ isə müşahidə sırasının uzunluğudur. Nəzəri cəm paylanma funksiyasının qiymətləri $P_x(x)$ cədvəlin 4-cü sütununda verilmişdir və normallaşdırılmış yağış layı qiymətlərinə (2-ci sütun), həmçinin cədvəl 3.3-dəki standart normal paylanma funksiyasına görə (100-ə bölməklə) hesablanmışdır. Nəzəri və empirik paylanma funksiyalarının mütləq qiymətlərinin fərqi 5-ci sütunda verilir. Maksimal fərq, $D=0.034$ və bu 1350 mm-ə bərabər yağış layına uyğundur. Cədvəldə verilmiş yağış laylarının sayı 11 olduğu üçün 10%-li əhəmiyyətlik səviyyəsində Kolmoqorov-Smirnov statistikasının böhran qiyməti 0.352 təşkil edir (Əlavə 13).

$0.034 < 0.352$ olduğu üçün 10%-li əhəmiyyətlik səviyyəsində müşahidə məlumatlarının normal paylanmaya uyğunluğu haqqında hipotez qəbul oluna bilər.

5.5.3. $n\omega^2$ (Kramer-Mizes-Smirnov) meyarı

Bu meyarın test-statistikası müşahidə sırasının bütün hədlərinin analitik, $P(x)$, və empirik $P^*(x)$ təminat funksiyaları arasında fərqi orta kvadratıdır:

$$n\omega^2 = \sum_{i=1}^n [P(x) - P^*(x)]^2 + \frac{1}{12n}, \quad (5.33)$$

burada $P(x)$ düstur 3.3-ə görə hesablanır.

$P(x)$ düstur 3.4-ə görə də qiymətləndirilə bilər. Onda test-statistikanın ifadəsi aşağıdakı kimi yazılır:

$$(n+1)\omega^2 = \sum_{i=1}^n \left[P(x) - \frac{m}{n+1} \right]^2 + \frac{n}{12(n+1)^2}. \quad (5.34)$$

Müəyyən olunmuşdur ki, $n > 40$ olduqda, $n\omega^2$ [və ya $(n+1)\omega^2$] statistikanın paylanması müşahidə sırasının paylanma qanunundan asılı deyil və müəyyən bir limit paylanmaya yaxındır (cədvəl 5.8).

Cədvəl 5.8

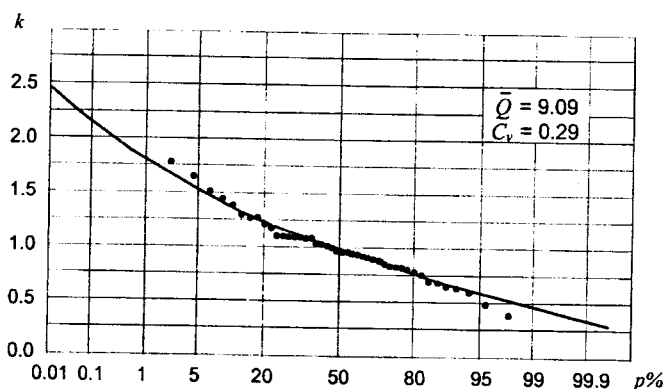
Müxtəlif əhəmiyyətlik səviyyələrində (α , %) $n\omega^2$ statistikanın yuxarı etibarlılıq sərhədlərinin qiymətləri

Əhəmiyyətlik səviyyəsi α , %	50	40	30	20	10
$n\omega^2$	0.1184	0.1467	0.1843	0.2412	0.3473
Əhəmiyyətlik səviyyəsi α , %	5	3	2	1	0.1
$n\omega^2$	0.4614	0.5489	0.6189	0.7435	1.1679

Əgər, qəbul olunmuş əhəmiyyətlik səviyyəsində test-statistikanın düstur 5.34 ilə hesablanmış qiyməti onun nəzəri (cədvəldə verilmiş) qiymətindən böyük olarsa, onda empirik və analitik təminat ayrılmasının uyğunluğu haqqında hipotez təkzib olunur.

Kolmoqorov meyarı ilə müqayisədə, $n\omega^2$ meyarı daha çox hesablama tələb edir. Lakin bu meyar müşahidə sırasındakı informasiyanı daha dolğun istifadə etməyə imkan verir.

Misal 5.17. 1945-1988-ci illər ($n=44$) üçün orta illik su sərfələrinin müşahidə sırasının parametrləri momentlər üsulu ilə qiymətləndirilmişdir: $\bar{Q}=9,09$; $C_v^*=0,29$; $C_s/C_v=2$. $n\omega^2$ meyarının istifadəsi ilə ($2\alpha = 5\%$ əhəmiyyətlik səviyyəsində) empirik məlumatların Kritski-Menkel üçparametrlı qamma-paylanmasına (şəkil 5.6) uyğunluq dərəcəsini qiymətləndirin.



Şəkil 5.6. Orta illik su sərfələri üçün empirik və analitik təminat ayrılırları

Həlli: 1. Cədvəl 5.9-da sıranın bütün hədləri üçün empirik p^* və nəzəri p təminatlar arasındakı fərqlərin Δp kvadratlarının hesablanması nəticələri verilmişdir.

Cədvəl 5.9

Empirik p^* və nəzəri p təminatlar arasındakı fərqlərin Δp kvadratlarının hesablanması; $(\Delta p)^2$ -nin qiymətləri vahidin hissələri kimi verilmişdir, $(\Delta p)^2 = [(p^* - p)/100]^2$

No	k_i	$p^* \%$	$p \%$	$(\Delta p)^2$
1	1.78	2.22	1.73	0.00002
2	1.65	4.44	2.91	0.00023
3	1.51	6.67	6.07	0.00004
...	...	...	...	...
20	1.02	44.44	43.75	0.00005
21	1.00	46.67	46.25	0.00002
22	0.97	48.89	50.00	0.00012
...	...	...	...	...
42	0.60	93.33	92.48	0.00007
43	0.49	95.56	97.75	0.00048
44	0.38	97.78	99.60	0.00033
Cəm				0.04287

2. $[(n+1)\omega^2]^*$ statistikanın empirik qiyməti düstur 5.34-ə görə hesablanır və onun qiyməti 0,04468-ə bərabərdir. Alınan bu qiymət $\alpha=5\%$ üçün nəzəri qiymət $(n\omega^2)_{5\%}=0,461$ (cədvəl 5.8) ilə müqayisə olunur.

3. $[(n+1)\omega^2]^* \ll (n\omega^2)_{5\%}$ olduğundan, empirik məlumatların Kritski-Menkelin analitik təminat əyrisi ilə uyğunluğu haqda fərziyyə təkzib olunmur.

6. HİDROMETEOROLOGİYADA STATİSTİK ASILILIQLAR VƏ XƏTTİ KORRELYASIYA

6.1. Funksional və stoxastik əlaqələr

Hidrometeoroloji hadisə və proseslər çoxsaylı amillərin təsiri altında formalaşır. Bu hadisə və prosesləri öyrəndikdə onlarla müxtəlif amillər arasındakı əlaqələr təhlil olunur. Məsələn, çay axımının hər hansı bir xarakteristikasını hesabladıqda və ya onun proqnozunu verdikdə baxılan axım xarakteristikaları ilə yağış layı, qar örtüyünün su ehtiyatı, havanın temperaturu, sutoplayıcı səthdən buxarlanma və s. arasında əlaqələri analiz etmək tələb olunur. Belə tədqiqatlar iki tip məsələni həll etməyə imkan verir:

1. Birinci tip məsələ, hidrometeoroloji hadisə və ona təsir edən amillərin ərazi üzrə və zamana görə dəyişmə səbəblərinin müəyyən edilməsi ilə əlaqədardır;

2. İkinci tip məsələ isə, baxılan hadisə və ya prosesin inkisaf tendensiyası və ya onların konkret kəmiyyət göstəricisinin təyini ilə bağlıdır.

Bu məsələlərin heç biri sırf riyazi məsələ deyil, onların həlli hadisə və proseslərin fiziki analizi ilə müşayiət olunmalıdır.

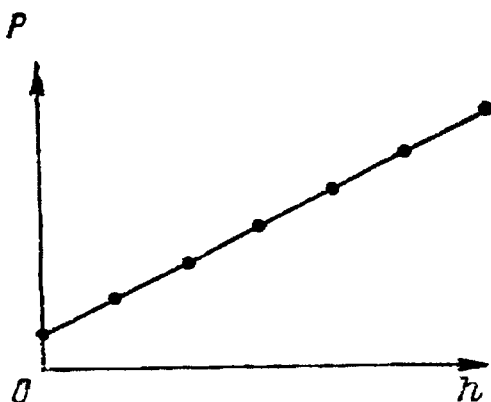
Praktikada çox tez-tez müəyyən bir Y təsadüfi kəmiyyətinə (məsələn, buxarlanmaya) digər $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ təsadüfi kəmiyyətlərin (havanın temperaturu, küləyin sürəti və s.) təsirini qiymətləndirmək tələb olunur. Başqa sözlə, müşahidə məlumatlarına görə $y = f(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$ asılılığının analitik ifadəsini tapmaq lazım gəlir.

Y kəmiyyəti asılı dəyişən və ya prediktant $X_1, X_2, X_3, \dots, X_n$ isə asılı olmayan dəyişənlər, prediktorlar və ya faktorlar adlandırılır.

Tutaq ki, Y yalnız bir prediktordan asılıdır, yəni $y = f(x)$. Bu halda müşahidə məlumatları arasındakı əlaqə düz xətti və ya əyri xətti, zəif və ya sıx ola bilər. Düz xətti əlaqələrin təhlili daha yaxşı öyrənilmişdir.

Y və X təsadüfi kəmiyyətləri arasındakı əlaqələr onların sıxlığından asılı olaraq iki qrupa bölünür: funksional və stoxastik əlaqələr.

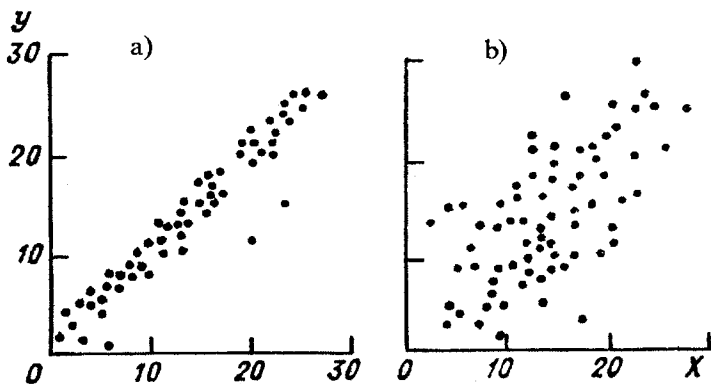
Funksional asılılıqlarda (şəkil 6.1) prediktorun, X , hər bir qiymətinə, prediktantın, y , yalnız bir qiyməti uyğun olur, yəni bütün müşahidə nöqtələri əlaqə xətti üzərində yerləşir. Məsələn, hidrostatik təzyiqlə maye sütununun hündürlüyü arasında funksional əlaqə var. Əgər, ayrı-ayrı nöqtələr funksional əlaqə qrafikindən meyl edirsə, bu yalnız ölçmələrin xətalrı ilə bağlıdır.



Şəkil 6.1. Funksional əlaqə qrafiki

Lakin hidrometeoroloji praktikada $y = f(x)$ əlaqəsinin xarakteri adətən fərqli olur. Bu hadisələrə təsir göstərən çoxsaylı amillərin hamısını nəzərə almaq qeyri- mümkündür və buna heç ehtiyac da yoxdur. Belə ki, çox zaman yalnız bir-iki amilin təsiri həlledici olur və onlar da prediktor kimi istifadə edilir. Belə hallarda ölçmələrin dəqiqliyindən asılı olmayaraq müşahidə nöqtələri əlaqə xətti ətrafında səpələnir və bunlara stoxastik (ehtimalı) asılılıqlar deyilir (şəkil 6.2).

$$\tilde{y}(x)$$



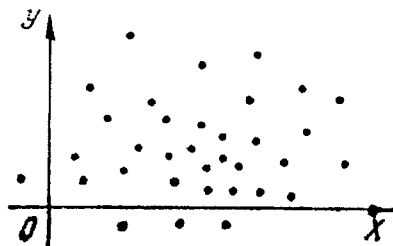
Şəkil 6.2. Stoxastik asılı kəmiyyətlərin əlaqə qrafikləri
a – sıx əlaqə, b – zəif əlaqə

Şəkil 6.2-dən göründüyü kimi X -in hər bir qiymətinə Y -in çoxsaylı qiymətləri uyğundur. Bu halda $y=f(x)$ funksional asılılığı əvəzinə, ortalaşdırılmış $\tilde{y}(x)$ əlaqə xətti keçirilir. Bu zaman çalışmaq lazımdır ki, əlaqə xətti ətrafında müşahidə nöqtələrin səpələnməsi minimal olsun. Əgər, bu tələb ödənilirsə, onda əlaqə xətti regressiya xətti və ona müvafiq analitik ifadə isə regressiya tənliyi adlandırılır.

Ola bilər ki, $\tilde{y}(x)$ asılılığının tipi müəyyən bir fiziki və ya hər hansı bir başqa səbəblə əlaqədar əvvəlcədən məlumdur. Onda tədqiqatçının vəzifəsi empirik məlumatlara görə analitik ifadə parametrlərinin qiymətləndirilməsidir.

Məsələn, əgər, baxılan əlaqə düz xətlidirsə, yəni, $\tilde{y}(x) = ax + b$, a və b parametrlərinin elə qiymətləri tapılmalıdır ki, əlaqə xətti ətrafında nöqtələrin səpələnməsi minimal olsun. Əgər, $\tilde{y}(x)$ asılılığının tipi məlum deyilsə, onda onun tipi haqqında fərziyyə irəli sürülməlidir.

Bəzən ola bilər ki, Y və X kəmiyyətləri arasında əlaqə olmasın (şəkil 6.3).



Şəkil 6.3. Asılı olmayan kəmiyyətlərin əlaqə qrafiki

6.2. Ən kiçik kvadratlar metodu

Tutaq ki, $\tilde{y}(x)$ asılılığı düzxətlidir. Hidrometeorologiyada düzxətli asılılıqlardan geniş istifadə olunur, çünki onlar üçün riyazi aparat çox yaxşı işlənmişdir. Belə asılılıqların başqa üstünlükləri də var:

1. Əgər, $\tilde{y}(x)$ asılılığının tipi məlum deyilsə, onda ilkin variantda o düzxətli qəbul oluna bilər;

2. Əgər, baxılan asılılıq zəif ayrışdırırsə, onda X dəyişəninə mümkün qiymətlər oblastını bir neçə intervala bölmək olar ki, onların daxilində əlaqə düzxətli qəbul edilə bilər;

3. Demək olar ki, həmişə X və Y dəyişənlərini elə çevirmək mümkündür ki, yeni dəyişənlər arasında əlaqə düzxətli olsun.

Düzxətli asılılığın reqressiya tənliyi aşağıdakı kimidir;

$$\tilde{y}_i = ax_i + b. \quad (6.1)$$

Bu tənliyin a və b parametrlərinin qiymətləri elə təyin olunmalıdır ki, bu qiymətlərdə y_i -nin müşahidə olunmuş qiymətlərinin düstur (6.1)-ə görə hesablanmış qiymətlərindən fərqi (meylətməsinin) kvadratları cəmi minimal olsun. Bu tələb ən kiçik kvadratlar metodunun məğzini təşkil edir.

Qeyd olunan fərqi kvadratları cəmi aşağıdakı ifadələrə görə təyin olunur:

$$\sum_{i=1}^n (y_i - \tilde{y}_i)^2 = \sum_{i=1}^n [y_i - (ax_i + b)]^2. \quad (6.2)$$

Baxılan cəmin minimal olması üçün, bu ifadənin a və b parametrləri üzrə xüsusi törəmələri sıfıra bərabər olmalıdır:

$$\frac{\partial}{\partial a} \left[\sum_{i=1}^n (y_i - ax_i - b)^2 \right] = 0; \quad (6.3)$$

$$\frac{\partial}{\partial b} \left[\sum_{i=1}^n (y_i - ax_i - b)^2 \right] = 0. \quad (6.4)$$

Axırıncı iki ifadəni, (6.3) və (6.4), diferensialladıqda aşağıdakı tənlikləri almaq olar:

$$b \sum_{i=1}^n x_i + a \sum_{i=1}^n x_i^2 = \sum_{i=1}^n x_i y_i; \quad (6.5)$$

$$bn + a \sum_{i=1}^n x_i = \sum_{i=1}^n y_i. \quad (6.6)$$

Bu iki tənliyi a və b parametrlərinə nəzərən həll etsək, onda onları təyin etmək üçün aşağıdakı ifadələr alınar:

$$a = \frac{\sum_{i=1}^n [(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})]}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}; \quad (6.7)$$

$$b = \bar{y} - a\bar{x}, \quad (6.8)$$

burada $\bar{x}$ və $\bar{y}$ - X və Y sıralarının orta qiymətidir.

6.3. İki dəyişən kəmiyyət üçün xətti reqressiya tənliyi

Xətti reqressiya tənliyinin a parametri X və Y dəyişənləri arasında əlaqə xəttinin meyl bucağının tangensini səciyyələndirir və $\tilde{y}(x)$ asılılığının reqressiya əmsalı adlanır. Düstur (6.7)-dən alınır ki, reqressiya əmsalı aşağıdakı kimi də yazıla bilər:

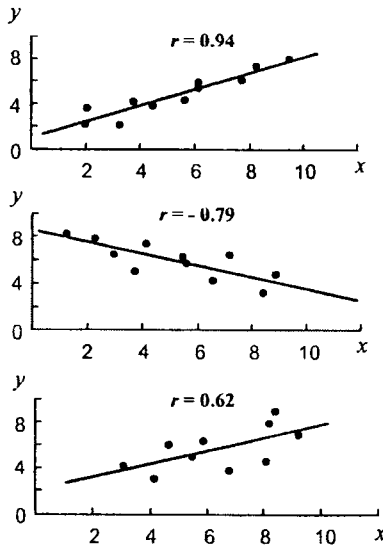
$$a_{y/x} = r \frac{\sigma_y}{\sigma_x}, \quad (6.9)$$

burada σ_y və σ_x , müvafiq olaraq Y və X sıralarının orta kvadratik meylətləri; r - cüt korrelyasiya əmsalıdır:

$$r = \frac{\sum_{i=1}^n [(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})]}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2}}. \quad (6.10)$$

Korrelyasiya əmsalı r , Y və X arasında xətti asılılığın sıxlığının empirik göstəricisidir. O, -1 -dən $+1$ -ə kimi qiymətlər ala bilər. Əgər, $r = +1$, onda baxılan asılılıq funksionaldır.

Əgər, $r > 0$ olarsa, əlaqə düz, $r < 0$ olarsa, tərsinədir. Korrelyasiya əmsalının mütləq qiyməti sıfıra yaxınlaşdıqca, Y və X arasında xətti əlaqə də zəifləyir (şəkil 6.4).



Şəkil 6.4. Korrelyasiya əmsalının müxtəlif qiymətlərində $\tilde{y}_i = ax_i + b$ asılılığı qrafiklərində nöqtələrin meylətməsi

Korrelyasiya əmsalını hesablamaq üçün düstur başqa cür də yazıla bilər:

$$r = \frac{\text{cov}(x, y)}{\sigma_x \sigma_y}, \quad (6.11)$$

burada $\text{cov}(x, y)$ -kovariasiya adlanır və aşağıdakı ifadəyə görə hesablanır:

$$\text{cov}(x, y) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}). \quad (6.12)$$

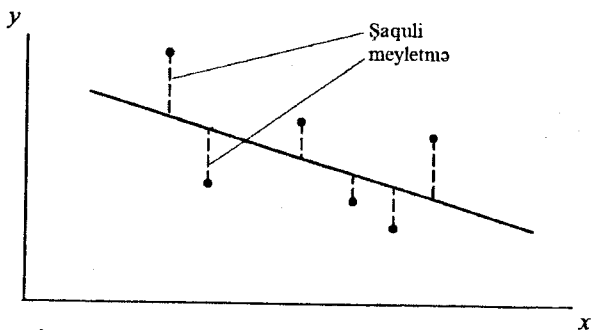
Düstur (6.8) və (6.9)-u nəzərə almaqla xətti reqressiya tənliyinin aşağıdakı ifadəsi alınır:

$$(y_i - \bar{y}) = r \frac{\sigma_y}{\sigma_x} (x_i - \bar{x}). \quad (6.13)$$

Bu bərabərlik y -in x üzrə xətti reqressiya tənliyi adlanır. Ox-şar yolla x -in y üzrə xətti reqressiya tənliyini tərtib etmək olar:

$$(x_i - \bar{x}) = r \frac{\sigma_x}{\sigma_y} (y_i - \bar{y}). \quad (6.14)$$

Axırıncı iki ifadə, (6.13) və (6.14) ekvivalent deyillər və biri o birindən alınmır. Əgər, absis oxunda X -in, ordinat oxunda isə Y -in qiymətlərini qeyd etsək, onda düstur (6.13)-ə reqressiya xəttindən nöqtələrin şaquli istiqamətdə (şəkil 6.5) düstur (6.14)-ə isə üfüqi istiqamətdə meyletmələri uyğun olar.

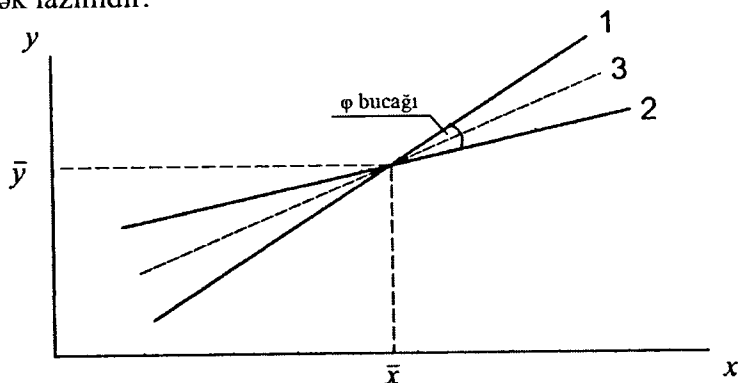


Şəkil 6.5. y -in x -ə görə xətti reqressiyası və şaquli meyletmələr

Düstur (6.13) və (6.14)-ə müvafiq düz xətlər koordinatları $(\bar{x}, \bar{y})$ olan nöqtədə kəsişir (şəkil 6.6). Bu xətlər arasındakı bucaq, φ , korrelyasiya əmsalının qiymətindən asılıdır. Asılılıq zəif olduqda φ böyük, güclü olduqda isə kiçik olur.

Əgər, $r = 0$ olarsa, onda $\varphi = 90^\circ$ və $|r| = 1$ olarsa, $\varphi = 0^\circ$ olur. Axıncı halda hər iki xətt üst-üstə düşür.

Hidrometeoroloji praktikada çox zaman düstur (6.13) və (6.14)-ün əvəzinə orta xəttin tənliyindən istifadə olunur. Bu xətt φ bucağının tən bölünəsinə uyğundur (şəkil 6.6). Orta xəttin tənliyini almaq üçün düstur (6.13) və ya (6.14)-də $r = 1$ qəbul etmək lazımdır.

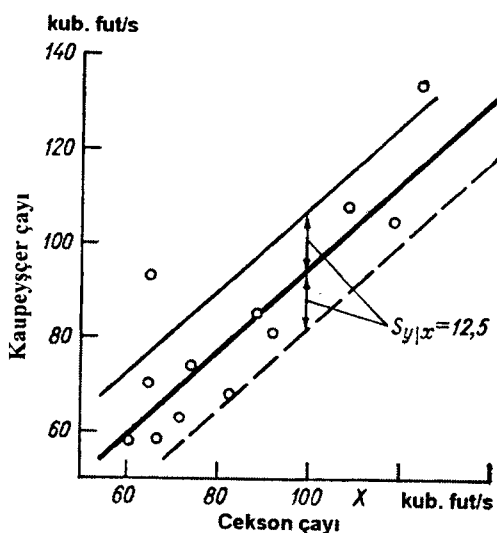


Şəkil 6.6. Xətti reqressiya əlaqələri: 1- $y=f(x)$; 2- $x=f(y)$; 3 – orta xətt

Misal 6.1. Cekson x və Kaupeysçer y çaylarının orta sutkalıq minimal su sərfələri arasında korrelyasiya əmsalını hesablayın və reqressiya tənliyini tərtib edin. Sıraların uzunluğu 12 ilə bərabərdir. Müşahidə məlumatları aşağıdakı cədvəldə verilir:

İl	Cekson çayı	Kaupeysçer çayı
1941	61	58
1942	92	81
1943	65	70
1944	72	63
1945	82	68

1946	67	58
1947	74	74
1948	118	105
1949	124	134
1950	108	108
1951	65	93
1952	88	85
Orta	84,7	83,1
Orta kvadratik meyiletmə	20,8	22,3



Şəkil 6.7. Kaupeyşçer və Cekson çaylarının orta sutkalıq minimal su sərfələri arasında əlaqə qrafiki

Həlli: 1. Əvvəlcə cəm ifadələr hesablanır: $\sum x = 1016$, $\sum y = 997$, $\sum x^2 = 91\,216$, $\sum xy = 89\,299$.

2. Reqressiya tənliyinin α və β parametrləri tapılır:

$$\beta = \frac{\sum x_i y_i - \frac{\sum x_i \sum y_i}{n}}{\sum x_i^2 - \frac{(\sum x_i)^2}{n}} = \frac{89\,299 - \frac{1016 \cdot 997}{12}}{91\,216 - \frac{(1016)^2}{12}} = 0.941,$$

$$\alpha = \frac{\sum y_i}{n} - \frac{\beta \sum x_i}{n} = \frac{997}{12} - 0.941 \frac{1016}{12} = 3.44.$$

Regressiya tənliyi belə alınır: $y = 3.44 + 0.941 x$.

3. Korrelyasiya əmsalı hesablanır: $r = \beta \frac{\sigma_y}{\sigma_x} = \frac{0.941 \cdot 20.8}{22.3} = 0.86$.

4. Əlaqənin orta kvadratik xətası hesablanır:

$S_{y/x} = \frac{n}{n-2} S_y^2 (1 - r^2)$. Xəta $\pm 12,5$ təşkil edir. Bu xətanın qiymətini nəzərə almaqla şəkil 6.7-də əlaqələrin dayanıqlıq dərəcəsini göstərən iki düz xətt keçirilmişdir. Onlar regressiya xəttinə paraleldir.

Misal 6.2. Minimal 30-sutkalıq (y) və sutkalıq (x) su sərfələri haqda məlumatlara (cədvəl 6.1) əsasən xətti regressiya tənliyinin parametrlərini hesablayın.

Həlli: 1. Hesablamalar köməkçi cədvəl 6.1-dən istifadə etməklə yerinə yetirilir.

Cədvəl 6.1

İkidəyişənli xətti regressiya tənliyinin parametrlərini
hesablamaq üçün köməkçi cədvəl

No	x_i	y_i	$\Delta x = (x_i - \bar{x})$	$\Delta y = (y_i - \bar{y})$	$(\Delta x)^2$	$(\Delta y)^2$	$\Delta x \Delta y$	$\Delta x + \Delta y$	$(\Delta x + \Delta y)^2$
1	8.53	9.53	-7.43	-7.36	55.20	54.17	54.68	-14.79	218.74
2	10.5	11.0	-5.46	-5.85	29.81	34.22	31.94	-11.31	127.92
3	17.0	17.6	1.04	0.71	1.08	0.50	0.74	1.75	3.06
4	16.1	17.9	0.14	1.01	0.02	1.02	0.14	1.15	1.32
5	26.0	27.9	10.04	11.01	100.8	121.2	110.5	21.05	443.10
6	13.4	14.4	-2.56	-2.45	6.55	6.00	6.27	-5.01	25.10
7	15.3	16.0	-0.66	-0.89	0.44	0.79	0.59	-1.55	2.44
8	13.0	14.0	-2.96	-2.89	8.76	8.35	8.55	-5.85	34.22
9	14.6	15.4	-1.36	-1.49	1.85	2.22	2.03	-2.85	8.12
10	12.9	13.3	-3.06	-3.59	9.36	12.89	10.99	-6.65	44.22
11	11.4	12.3	-4.56	-4.59	20.79	21.07	20.93	-9.15	83.72

12	29.7	30.3	13.74	13.41	188.8	179.8	184.2	27.15	737.12
13	19.0	19.0	3.04	3.01	9.24	9.06	9.15	6.05	36.60
Cəm	207.5	219.5	0.0	0.0	423.7	451.3	440.8	0.0	1765.6
Orta	15.96	16.89							

Nəzarət məqsədli hesablamalar: $\sum(\Delta x)^2 + \sum(\Delta y)^2 + 2\sum \Delta x \Delta y = \sum(\Delta x + \Delta y)^2 \rightarrow 432,7 + 451,3 + 2 \cdot 440,8 = 1765,6 \rightarrow 1765,6 = 1765,6$.

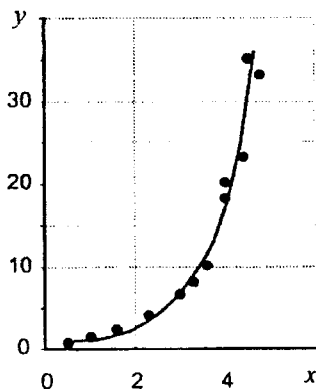
2. Cədvəl 6.1-dən istifadə etməklə xətti reqressiya tənliyinin parametrləri hesablanır:

$$\begin{aligned}\bar{x} &= \sum_{i=1}^n x_i / n = 15,96, \bar{y} = \sum_{i=1}^n y_i / n = 16,89; \\ \sigma_x^* &= \sqrt{\frac{\sum(\Delta x)^2}{n-1}} = \sqrt{\frac{427,7}{12}} = 6,00; \\ \sigma_y^* &= \sqrt{\frac{\sum(\Delta y)^2}{n-1}} = \sqrt{\frac{451,3}{12}} = 6,13; \\ r &= \frac{\sum \Delta x \Delta y}{\sqrt{\sum(\Delta x)^2 \sum(\Delta y)^2}} = \frac{440,8}{\sqrt{432,7 \cdot 451,3}} = 0,997; \\ a_{y/x} &= r \frac{\sigma_y^*}{\sigma_x^*} = 0,997 \frac{6,13}{6,00} = 1,02; \\ b_{y/x} &= \bar{y} - a\bar{x} = 16,89 - 1,02 \cdot 15,96 = 0,61; \\ y(x) &= 1,02 x + 0,61.\end{aligned}$$

6.4. Qeyri-xətti asılılıqların düzləndirilməsi

Əgər, iki dəyişən kəmiyyət arasında əlaqənin cüt korrelyasiya əmsali sıfıra yaxındırsa, bu onu göstərir ki, onların arasında xətti əlaqə yoxdur. Lakin istisna olunmur ki, Y və X dəyişənləri arasında asılılıq var və o qeyri-xəttidir. Bunu yoxlamaq üçün müşahidə məlumatlarına görə $y = f(x)$ qrafiki qurulur. Əgər, qrafikdə nöqtələr müəyyən bir əyri xətt ətrafında yerləşirsə, onda qeyri-

xətti model (asılılıq) qəbul olunur. Məsələn, əgər, nöqtələr şəkil 6.8-də göstəriləyi kimi yerləşirsə, onda $y = f(x)$ asılılığını ap-
roksimasiya etmək üçün eksponensial tənlikdən istifadə etmək
olar:



Şəkil 6.8. $y = ce^{ax}$ asılılığının düzləndirilməmiş qrafiki

$$y = ce^{ax}, \quad (6.15)$$

burada a və c -müşahidə məlumatlarına görə təyin olunan parametrlərdir.

Qeyri-xətti asılılıqların riyazi ifadələrinin parametrləri ən kiçik kvadratlar metoduna görə təyin oluna bilər. Lakin bu hesablamaları sadələşdirmək üçün ilkin riyazi ifadənin xətti tənlik şəklində yazılması məqsədəuyğundur. Məsələn, yuxarıda göstərilən eksponensial tənliyin (6.15) hər iki tərəfini loqarifmləsək, onda aşağıdakı xətti tənlik alınar:

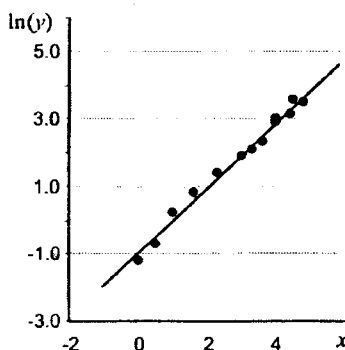
$$\ln(y) = \ln(c) + ax. \quad (6.16)$$

İlkin y və x dəyişənlərini yeniləri ilə əvəz edək: $y^1 = \ln(y)$ və $x^1 = x$. Axırkı ifadəni aşağıdakı kimi yazaq:

$$y^1 = ax^1 + b \quad (6.17)$$

burada $b = \ln(c)$.

Düstur (6.17)-dən göründüyü kimi, yeni dəyişənlər arasında xətti asılılıq var (şəkil 6.9). Bu asılılığın a və b parametrləri ən kiçik kvadratlar metodu ilə hesablanı bilər (bax paraqraf 6.2-yə). Xətti tənliyin hər iki parametri təyin edildikdən sonra tərsinə çevirmə yerinə yetirilir və ilkin ifadənin (6.15) parametrləri tapılır: $c = e^b$, üst göstəricisi a isə elə düstur (6.17)-dəki regressiya əmsalına bərabərdir.



Şəkil 6.9. $y = ce^{ax}$ asılılığının düzləndirilmiş qrafiki

Cədvəl 6.2-də qeyri-xətti asılılıqları düzləndirmək üçün istifadə olunan çevirmələrə misallar verilir.

Cədvəl 6.2

Qeyri-xətti asılılıqları düzləndirmək üçün istifadə olunan çevirmələr

İlkin asılılıq	Çevirmə		Xətti tənlik
	Absis	Ordinat	
$y=ce$	x	$\ln(y)$	$\ln(y)=ax+\ln(c)$
$y=cx^a$	$\ln(x)$	$\ln(y)$	$\ln(y)=a\ln(x)+\ln(c)$
$y=(a/x)+b$	$1/x$	y	$y=a(1/x)+b$
$y=x/(ax+b)$	x	x/y	$(x/y)=ax+b$
$y=c/(kx+m)$	x	$1/y$	$(1/y)=(k/c)x+(m/c)$

6.5. İki dəyişən kəmiyyət üçün xətti regressiya tənliyinin dəqiqliyinin qiymətləndirilməsi

Müşahidə məlumatlarına görə tərtib edilmiş xətti regressiya tənliyi yalnız etibarlı olduqda, yəni hesablamaları tələb olunan dəqiqliklə yerinə yetirmək üçün yararlı olduqda istifadə edilə bilər.

Artıq qeyd olunduğu kimi, iki dəyişən kəmiyyət arasındakı asılılığın sıxlıq dərəcəsini kəmiyyətə səciyyələndirmək üçün cüt korrelyasiya əmsalından istifadə olunur. Hidrometeoroloji praktikada cüt korrelyasiya əmsalı mütləq qiymətə 0,7-yə bərabər və ondan böyük olan ($|r| \geq 0,7$) asılılıqlar tətbiq edilir.

Cüt korrelyasiya əmsalının kvadratı, r^2 , determinasiya əmsalı adlanır. Bu əmsal müşahidə məlumatlarının (nöqtələrin) orta kəmiyyət, $\bar{y}$, ətrafında ümumi səpələnməsinin regressiya ilə izah oluna bilən payını səciyyələndirir. Əgər, asılılıq funksionaldırsa, onda nöqtələr regressiya xəttinə nəzərən səpələnir və onların hamısı bu xətt üzərində yerləşir. Bu o deməkdir ki, orta kəmiyyətə, $\bar{y}$, nəzərən bütün səpələnmə regressiya ilə izah olunur, yəni $r^2 = 1$. Əgər, $r = 0,7$ olarsa, onda determinasiya əmsalı $r^2 = 0,49 \approx 0,50$. Beləliklə, hidrometeorologiyada o asılılıqlardan istifadə olunur ki, regressiya $\bar{y}$ -ə nəzərən səpələnmənin 50% və daha çox hissəsini izah edir.

Regressiya tənliyinin etibarlılığını qiymətləndirmək üçün ən geniş istifadə olunan mühüm göstərici cüt korrelyasiya əmsalıdır. Lakin bu yeganə göstərici deyil və bir sıra əlavə göstəricilər də var.

Xətti regressiya tənliyinin standart xətası, $\sigma_{y(x)}$. Faktiki olaraq, bu kəmiyyət nöqtələrin regressiya xəttindən orta kvadratik meyletməsini səciyyələndirir:

$$\sigma_{y(x)} = \sqrt{\sum_{i=1}^n (y_i - \tilde{y}_i)^2 / (n-2)}, \quad (6.18)$$

burada y_i -müşahidə olunmuş qiymət; $\tilde{y}_i$ -reqressiya tənliyinə görə hesablanmış qiymətdir.

Bu düsturdakı $(n-2)$ parametri sərbəstlik dərəcələri ədədi adlanır.

Sərbəstlik dərəcələri ədədi müşahidələrin sayı, n , ilə müşahidə məlumatlarına görə təyin olunmuş parametrlərin sayının fərqinə bərabərdir. Xətti reqressiya tənliyində iki belə parametr var: reqressiya əmsalı a və sərbəst hədd b .

Korrelyasiya əmsalından istifadə etməklə düstur (6.18) aşağıdakı kimi yazıla bilər:

$$\sigma_{y(x)} = \sigma_y^* \sqrt{\frac{(1-r^2)(n-1)}{(n-2)}}, \quad (6.19)$$

burada $\sigma_y^* - Y$ müşahidə sırasının orta kvadratik meylətməsidir.

Bəzən, hesablamalarda $\sqrt{(n-1)/(n-2)}$ ifadəsi nəzərə alınmır və daha sadə düstur istifadə olunur:

$$\sigma_{y(x)} = \sigma_y^* \sqrt{1-r^2}. \quad (6.20)$$

Cüt korrelyasiya əmsalının standart xətası, σ_r :

$$\sigma_r = (1-r^2) / \sqrt{n-1}. \quad (6.21)$$

Sıra qısa olduqda ($n < 25$) V.N.Romanovski bu düstura düzəliş olunmasını tövsiyə edir:

$$\sigma_r = \frac{1-r^2}{\sqrt{n-1}} \sqrt{1 + \frac{11r^2}{2n} + \frac{75r^2-13}{2n^2}}. \quad (6.22)$$

Reqressiya əmsalının standart xətası, σ_a :

$$\sigma_a = \frac{\sigma_{y(x)}}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}}. \quad (6.23)$$

Bu ifadə düstur (6.19)-u nəzərə almaqla aşağıdakı kimi yazıla bilər:

$$\sigma_a = \frac{\sigma_y^*}{\sigma_x^*} \sqrt{\frac{1-r^2}{n-2}}, \quad (6.24)$$

burada σ_x^* və σ_y^* -müvafiq olaraq X və Y müşahidə sıralarının orta kvadratik meyletmələridir.

Sərbəst həddin standart xətası, σ_b :

$$\sigma_b = \sigma_{y(x)} \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i)^2 / n \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}, \quad (6.25)$$

və ya düstur (6.19)-u nəzərə almaqla

$$\sigma_b = \sigma_y^* \sqrt{\frac{1-r^2}{n-2}} \sqrt{1 + \left(\frac{\bar{x}}{\sigma_x^*}\right)^2}. \quad (6.26)$$

Hidrometeoroloji tədqiqatlarda istifadə olunan xətti reqressiya tənlikləri aşağıdakı şərtləri ödəməlidir:

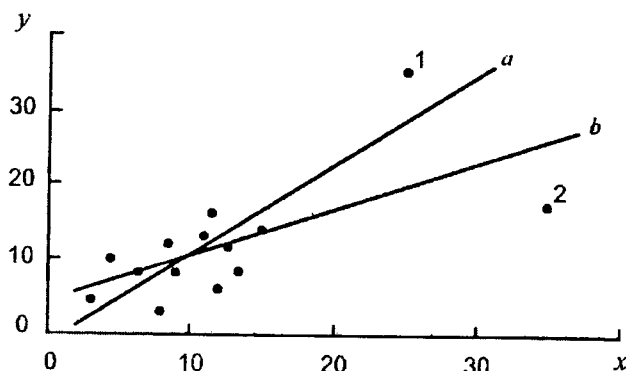
$$n \geq 10; |r| \geq 0,7; |r|/\sigma_r \geq 2; |a|/\sigma_a \geq 2; |b|/\sigma_b \geq 2. \quad (6.27)$$

Axırıncı şərtin ödənilməsi arzuolunan, lakin məcburi deyildir. Bu şərt b parametrinin kiçik qiymətlərində demək olar ki, heç vaxt ödənilmir.

Xətti reqressiya tənliyini analiz etdikdə nəzərə almaq lazımdır ki, y_i -nin x_i -yə müvafiq həqiqi qiyməti reqressiya tənliyinə görə hesablanmış $\tilde{y}_i$ qiymətindən müəyyən bir ε_i kəmiyyəti qədər fərqlənəcək. Hesab olunur ki, ε_i orta qiyməti sıfır və orta kvadratik meyletməsi $\sigma_{y(x)}$ olan təsadüfi kəmiyyətdir və o normal paylanma qanununa tabedir.

Xətti reqressiya tənliklərinin etibarlılığının bu paragrafda baxılan qiymətləndirilmə sistemi kifayət qədər yaxşı işlənmişdir və əksər hallarda alınmış reqressiya tənliklərinin praktik hesab-

lamalar üçün yararlı olub-olmaması haqqında qərar qəbul etməyə imkan verir. Lakin bəzən əlavə təhlilə ehtiyac yaranır. Məsələn, şəkil 6.10-dan görünür ki, empirik nöqtələr qeyri-bərabər paylanırlar. X dəyişəni əsasən 3-dən 15-ə kimi qiymətlər alır və bu qiymətlər əsas qrup əmələ gətirir. İki nöqtə isə X -in böyük qiymətlərinə uyğundur. Birinci nöqtənin koordinatları $x = 25$, $y = 35$, ikincinki isə $x = 35$, $y = 17$ -dir.



Şəkil 6.10. $\tilde{y}(x)$ xətti regressiya əlaqələri
a–2-ci nöqtə nəzərə alınmadan ($r=0.83$);
b–bütün nöqtələr nəzərə alınmaqla ($r=0.66$)

Əsas qrup nöqtələr üçün hesablanmış korrelyasiya əmsalı 0,7-dən xeyli kiçikdir ($r = 0,45$). Lakin əsas qrup nöqtələrinə nöqtə 1-i əlavə etdikdə korrelyasiya əmsalı kəskin artır ($r=0.83$). Nöqtə 2 də daxil olmaqla bütün nöqtələrə görə hesablanmış korrelyasiya əmsalı yenə də kəskin dəyişir ($r = 0,66$). Bu zaman regressiya xəttinin yeri də əhəmiyyətli dərəcədə dəyişir.

Beləliklə, bir və ya iki nöqtənin əlavə olunması xətti regressiya tənliyinin parametrlərinə kəskin təsir göstərə bilər. Buna görə də yalnız (6.27) şərtlərinin ödənilməsi tələbi səhv qərar qəbul olunması ilə nəticələnə bilər.

Doğrudan da cədvəl 6.3-dən göründüyü kimi, ikinci variantda (nöqtə 2 nəzərə alınmır) (6.27) şərti ödənilir.

Şəkil 6.10-da göstərilən asılılıq üçün xətti reqressiya tənliyinin parametrləri

Parametr	I variant (əsas qrup, nöqtə 1 və 2 nəzərə alınmır)	II variant (əsas qrup üstəgəl nöqtə 1)	III variant (bütün nöqtələr)
n	12	13	14
r	0,45	0,83	0,66
a	0,48	1,18	0,61
b	4,86	-1,34	4,10
$\sigma_{y(x)}$	3,63	4,82	6,13
σ_r	0,24	0,096	0,17
σ_a	0,3	0,25	0,20
σ_b	3,06	3,19	3,05
r/σ_2	1,88	8,54	3,88
a/σ_a	1,60	4,72	3,05
b/σ_b	1,59	0,42	1,34
6.27 şərtinin ödənilməsi	Ödənilmir	Ödənilir	Ödənilmir

Bu cür çətinliklərin yaranmasının əsas səbəbi nöqtələrin qeyri-bərabər paylanmasıdır. Bu isə öz növbəsində bir çox hidrometeoroloji kəmiyyətlərin asimetriyasının böyük olması (xüsusilə qısa sıralar üçün) və müşahidə sırasının reprezentativ olmaması ilə əlaqədardır.

Bu hallarda xətti reqressiya tənliyinin iki variantda hesablanması tövsiyə olunur:

- yalnız əsas qrup müşahidə məlumatlarına görə;
- bütün müşahidə məlumatlarına görə .

Əgər, alınmış tənliklərin parametrləri kəskin fərqlənərsə, praktik hesablamalarda onların heç birindən istifadə etmək olmaz. Yalnız əlavə müşahidə məlumatları toplandıqdan sonra baxılan əlaqənin praktik yararlığı haqqında qərar qəbul etmək mümkündür.

6.6. Xətti regressiya tənliyi parametrlərinin etibarlılıq intervalı və əhəmiyyətlik səviyyəsinin qiymətləndirilməsi

6.6.1. Cüt korrelyasiya əmsalının etibarlılıq intervalı

Korrelyasiya əmsalının müşahidə sırasına görə təyin olunmuş qiyməti təsadüfi kəmiyyətdir. Əgər, korrelyasiya əmsalının qiyməti çox da böyük deyilsə, ($r \leq 0,4$) və sıranın uzunluğu 40 ildən azdırsa ($n < 40$), onda korrelyasiya əmsalının seçmə qiymətləri normal qanunla yaxşı aproksimasiya olunur. Bu əmsalın orta kvadratik xətası, σ_r , düstur (6.21)-ə görə hesablanır. Korrelyasiya əmsalının həqiqi qiyməti, r , üçün etibarlılıq intervalı aşağıdakı kimi yazılır:

$$r^* - t'_{1-\alpha} \sigma_r^* \leq r < r^* + t'_{1-\alpha} \sigma_r^*, \quad (6.28)$$

burada r^* -korrelyasiya əmsalının seçmə qiyməti;
 $t'_{1-\alpha}$ - standart normal paylanmanın ikitərəfli əhəmiyyətlik səviyyəsinə, 2α , uyğun kvantilidir (cədvəl 3.3).

Misal 6.3. İki dəyişən kəmiyyət arasında xətti regressiyanın korrelyasiya əmsalı ($r^*=0,82$), korrelyasiya əmsalının orta kvadratik meyletməsi ($\sigma_r^*=0,096$), sıraların uzunluğu ($n=13$ il) olarsa, korrelyasiya əmsalının 90%-li etibarlılıq intervalını tapın.

Həlli: 1. İkitərəfli əhəmiyyətlik səviyyəsindən hansının qəbul edilmiş etibarlılıq intervalına uyğun olduğu təyin edilir: $2\alpha=1-0,90=0,10$ (və ya 10%).

2. Əhəmiyyətlik səviyyəsi (α) tapılır: $\alpha=0,10/2=0,05$ (və ya 5%)

3. Cədvəl 3.3-ə əsasən $t'_{1-\alpha}$ kvantili tapılır: $t'_{1-\alpha} = t'_{95} = 1,64$.

4. r üçün etibarlılıq intervalı hesablanır:

$$r^* - t'_{1-\alpha} \sigma_r^* \leq r < r^* + t'_{1-\alpha} \sigma_r^*$$

$$0,82 - 1,64 \cdot 0,096 \leq r < 0,82 + 1,64 \cdot 0,096 \text{ və } 0,66 \leq r < 0,98.$$

Korrelyasiya əmsalı böyük və sıranın uzunluğu qısa olduqda ($r > 0,4$; $n < 40$), bu əmsalın seçmə qiymətləri normal paylanmadan uzaqlaşır və mənfi asimmetriya ilə səciyyələnir.

Belə hallarda korrelyasiya əmsalının etibarlılıq intervalını təyin etmək üçün Fişerin Z -çevirməsi tətbiq olunur. Z -statistika ilə korrelyasiya əmsalı arasında funksional asılılıq var:

$$Z = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1+r}{1-r} \right). \quad (6.29)$$

Korrelyasiya əmsalından fərqli olaraq, Z -statistika həтта sıralar qısa olduqda belə normal paylanır. Z -statistikanın orta kvadratik meyletməsi aşağıdakı düstura görə hesablanır:

$$\sigma_z = 1/\sqrt{n-3}. \quad (6.30)$$

Fişer çevirməsindən istifadə etməklə korrelyasiya əmsalının etibarlılıq intervalı aşağıdakı ardıcılıqla təyin olunur:

1. Əvvəlcə korrelyasiya əmsalının seçmə qiyməti, r^* , hesablanır.

2. Düstur (6.29)-a görə Z -statistikanın empirik qiyməti, Z^* , hesablanır.

3. Düstur (6.30)-a görə σ_z tapılır.

4. Z -statistika üçün etibarlılıq intervalı tərtib edilir:

$$Z^* - t_{1-\alpha} \sigma_z^* \leq Z \leq Z^* + t_{1-\alpha} \sigma_z^*. \quad (6.31)$$

5. Korrelyasiya əmsalı üçün etibarlılıq intervalı tərtib edilir. Bunun üçün düstur (6.29)-dan istifadə etməklə Z -dən r -ə keçilir:

$$r = (e^{2z} - 1)/(e^{2z} + 1). \quad (6.32)$$

Misal 6.4. İki dəyişən kəmiyyət arasında xətti reqressiyanın korrelyasiya əmsalı ($r^*=0,82$), korrelyasiya əmsalının orta kvadratik meyletməsi ($\sigma_r^*=0,096$), sıraların uzunluğu ($n=13$ il) olarsa, korrelyasiya əmsalının 90%-li etibarlılıq intervalını tapın (Fişerin Z -çevirməsini tətbiq edin).

Həlli: 1. Z və r arasında funksional əlaqə olduğunu nəzərə alaraq, Z^* -in empirik qiyməti hesablanır:

$$Z^* = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1+r}{1-r} \right) = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1+0,82}{1-0,82} \right) = 1,157.$$

$$2. \sigma_z^* = 1/\sqrt{n-3} = 1/\sqrt{13-3} = 0,316.$$

3. Z üçün etibarlılıq intervalı hesablanır:

$$Z^* - t_{1-\alpha}\sigma^* \leq Z < Z^* + t_{1-\alpha}\sigma^* \\ (1,57 - 1,64 \cdot 0,316) \leq Z < (1,57 + 1,64 \cdot 0,316) \text{ və } 0,639 \leq Z < 1,675.$$

4. Korrelyasiya əmsalı üçün etibarlılıq intervalı hesablanır. Bunun üçün Z -dən r -ə keçmək lazımdır:

$$r = (e^{2Z} - 1)/(e^{2Z} + 1) \\ \frac{\exp(2 \cdot 0,639) - 1}{\exp(2 \cdot 0,639) + 1} \leq r < \frac{\exp(2 \cdot 1,675) - 1}{\exp(2 \cdot 1,675) + 1} \text{ və } 0,56 \leq r < 0,93.$$

Korrelyasiya əmsalının seçmə qiymətinə görə X və Y dəyişən kəmiyyətləri arasında xətti asılılığın statistik əhəmiyyətliyi də qiymətləndirilə bilər. Əgər,

$$\frac{|r^*|}{\sigma_r^*} > t'_{1-\alpha} \quad (6.33)$$

şerti ödənilirsə, onda baxılan asılılıq statistik baxımdan əhəmiyyətli hesab olunur. Bu şərtin ödənilməməsi isə o deməkdir ki, X və Y arasında xətti asılılıq yoxdur.

6.6.2. Spirmenin ranq korrelyasiya əmsalı

Əgər, normal paylanmadan kəskin fərqlənən $y_1, y_2, \dots, y_n$ və $x_1, x_2, \dots, x_n$ sıraları arasında asılılığın sıxlıq dərəcəsini qiymətləndirmək tələb olunursa, onda Spirmenin ranq korrelyasiya əmsalından, r_s , istifadə edilə bilər:

$$r_s = 1 - \frac{6 \sum_{i=1}^{i=n} \Delta_i^2}{n(n^2 - 1)}, \quad (6.34)$$

burada n - sıraların uzunluğu; Δ_i -artma qaydasında düzülmüş sıralar üçün y_i və x_i cütünün ranqlar fərqi.

Cüt korrelyasiya əmsalı kimi, ranq korrelyasiya əmsalı üçün də aşağıdakı şərt ödənilir:

$$-1 \leq r_s \leq +1. \quad (6.35)$$

Əgər,

$$|r_s^*| > (r_s)_\alpha \quad (6.36)$$

şərti ödənilirsə, onda belə hesab olunur ki, X və Y dəyişənləri arasında əlaqə var. Burada $(r_s)_\alpha$ birtərəfli əhəmiyyətlik səviyyəsində, α , ranq korrelyasiya əmsalının böhran qiymətidir. Bu qiymətlər ($n \leq 30$ olduqda) cədvəl 6.4-də verilir.

Cədvəl 6.4

Spirmenin ranq korrelyasiya əmsalının böhran qiymətləri, r_s ($n \leq 30$ olduqda)

n	Əhəmiyyətlik səviyyəsi, α %				
	0.5	1	2.5	5	10
5		0.9000	0.9000	0.8000	0.7000
6	0.9429	0.8857	0.8286	0.7714	0.6000
7	0.8929	0.8571	0.7450	0.6786	0.5357
8	0.8571	0.8095	0.6905	0.5952	0.4762
9	0.8167	0.7667	0.6833	0.5833	0.4667
10	0.7818	0.7333	0.6364	0.5515	0.4424
11	0.7545	0.7000	0.6091	0.5273	0.4182
12	0.7273	0.6713	0.5804	0.4965	0.3986
13	0.6978	0.6429	0.5549	0.4780	0.3791
14	0.6747	0.6220	0.5341	0.4593	0.3626
15	0.6536	0.6000	0.5179	0.4429	0.3500
16	0.6324	0.5824	0.5000	0.4265	0.3382
17	0.6152	0.5637	0.4853	0.4118	0.3260
18	0.5975	0.5480	0.4716	0.3994	0.3148
19	0.5825	0.5333	0.4579	0.3895	0.3070
20	0.5684	0.5203	0.4451	0.3789	0.2977
21	0.5545	0.5078	0.4351	0.3688	0.2909
22	0.5426	0.4963	0.4241	0.3597	0.2829
23	0.5306	0.4852	0.4150	0.3518	0.2767
24	0.5200	0.4748	0.4061	0.3435	0.2704
25	0.5100	0.4654	0.3977	0.3362	0.2646
26	0.5002	0.4564	0.3894	0.3299	0.2588
27	0.4915	0.4481	0.3822	0.3236	0.2540
28	0.4828	0.4401	0.3749	0.3175	0.2490
29	0.4744	0.4320	0.3685	0.3113	0.2443
30	0.4665	0.4251	0.3620	0.3059	0.2400

Əgər, $n \geq 30$ olarsa, onda $(r_s \sqrt{n-1})$ kəmiyyəti standart normal paylanma qanunu ilə yaxşı aproksimasiya olunur. Əgər,

$$|r_s^*| > \frac{t'_{1-\alpha}}{\sqrt{n-1}}, \quad (6.37)$$

şerti ödənilirsə, bu o deməkdir ki, X və Y dəyişənləri arasında statistik əhəmiyyətli xətti əlaqə var. Burada $t'_{1-\alpha}$ -birtərəfli əhəmiyyətlik səviyyəsində, α , standart normal paylanmanın kvantilidir.

Misal 6.5. İki müxtəlif çayın orta illik su sərfələri (y_i və x_i) cədvəl 6.5-də verilmişdir. Paralel müşahidələr dövrü 1959-1988-ci illəri əhatə edir və sıraların uzunluğu 30 ildir. Spirmenin ranq korrelyasiya əmsalını hesablayın və $\alpha=5\%$ olduqda onun əhəmiyyətliliyini qiymətləndirin.

Həlli: 1. y_i və x_i sıraları artan qaydada düzülür. Nəticələr cədvəl 6.5-in 4 və 5-ci sütunlarına yazılır.

2. Artan sırada hər bir y_i və x_i qiymətinə sıra nömrəsi (ranq) verilir: ən kiçik sərfə birinci ranq, kəmiyyətinə görə növbəti sərfə ikinci ranq və s.

3. İlk sıraların hər bir su sərfəsinin qarşısında uyğun ranqlar 6-cı və 7-ci sütunlara yazılır.

4. y_i və x_i ranqlarının fərqi hesablanır- Δ (8-ci sütun).

5. Ranqlar fərqinin kvadratları hesablanır- Δ^2 (9-cu sütun).

6. Ranqlar fərqinin kvadratları cəmi təyin edilir: $\sum_{i=1}^{i=n} \Delta_i^2 = 470$.

7. Ranq korrelyasiya əmsalı hesablanır:

$$r_s = 1 - \frac{6 \sum_{i=1}^{i=n} \Delta_i^2}{n(n^2 - 1)} = 1 - \frac{6 \cdot 470}{30(30^2 - 1)} = 0,895.$$

8. Cədvəl 6.4-dən ranq korrelyasiya əmsalının böhran qiyməti təyin edilir: $n=30$ və $\alpha=5\%$ olduqda $(r_s)_{5\%}=0,306$ alınır.

9. Beləliklə: $(|r_s^*| = 0,895) > ((r_s)_{5\%} = 0,306)$ bərabərsizliyi alınır və deməli y_i və x_i arasındakı asılılıq statistik baxımdan əhəmiyyətlidir. Bu əlaqə kifayət qədər sıxdır, belə ki, $r_s^* > 0,7$.

Adətən, $n \leq 30$ olduqda hesablamalar yuxarıdakı kimi yerinə yetirilir. Lakin, baxılan misalda $n=30$ olduğundan, korrelyasiya əmsalının əhəmiyyətliliyi başqa yolla da qiymətləndirilə bilər. Bunun üçün cədvəl 3.3-dən $\alpha=5\%$ olduqda normal paylanmanın

kvantili təyin edilir: $t'_{1-\alpha} = t'_{95\%} = 1,64$. Sonra, $|r_S^*| > \frac{t'_{1-\alpha}}{\sqrt{n-1}}$
 bərabərsizliyindən $\frac{t'_{95\%}}{\sqrt{n-1}} = \frac{1,64}{\sqrt{30-1}} = 0,305$ alınır.

Yekunda, praktik olaraq eyni nəticəyə gəlinir:

$$(|r_S^*| = 0,895) > ((r_S)_{5\%} = 0,305).$$

Cədvəl 6.5

Ranq korrelyasiya əmsalının hesablanması

№	İlkin sıralar		Artan sıralar		Ranq		Δ	Δ^2
	y_i	x_i	y_i	x_i	y_i	x_i		
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)
1	15.2	79.0	8.32	40.4	16	18	-2	4
2	11.6	59.5	9.29	46.6	9	8	1	1
3	17.3	84.3	10.4	47.6	22	22	0	0
4	20.7	95.5	10.5	48.2	29	26	3	9
5	10.4	46.6	10.9	53.2	3	2	1	1
6	11.3	48.2	11.3	54.0	6	4	2	4
7	16.3	69.0	11.4	54.6	19	11	8	64
8	22.3	105	11.5	59.5	30	30	0	0
9	16.1	75.0	11.6	61.6	18	15	3	9
10	14.9	78.8	12.8	66.1	15	17	-2	4
11	15.6	72.3	13.0	69.0	17	13	4	16
12	10.5	53.2	13.8	69.9	4	5	-1	1
13	13.0	54.0	14.3	72.3	11	6	5	25
14	8.32	40.4	14.3	72.5	1	1	0	0
15	9.29	47.6	14.9	75.0	2	3	-1	1
16	12.8	66.1	15.2	77.6	10	10	0	0
17	11.4	54.6	15.6	78.8	7	7	0	0
18	14.3	69.9	16.1	79.0	13	12	1	1
19	18.7	99.8	16.3	79.1	24	28	-4	16
20	19.8	94.9	16.6	79.2	27	25	2	4
21	10.9	61.6	17.0	80.1	5	9	-4	16
22	11.5	72.5	17.3	84.3	8	14	-6	36
23	18.7	87.6	17.9	87.6	25	23	2	4
24	16.6	77.6	18.7	93.7	20	16	4	16
25	18.7	79.2	18.7	94.9	26	20	6	36
26	20.2	93.7	18.7	95.5	28	24	4	16
27	14.3	79.1	19.8	98.4	14	19	-5	25
28	17.9	98.4	20.2	99.8	23	27	-4	16
29	17.0	101	20.7	101	21	29	-8	64
30	13.8	80.1	22.3	105	12	21	-9	81
Cəm							0	470

6.6.3. Regressiya əmsalının etibarlılıq intervalı

Əgər, fərz etsək ki, müşahidə məlumatlarının regressiya xəttinə nəzərən səpələnməsi normal paylanıma qanununa uyğundur, onda regressiya əmsalı üçün etibarlılıq intervalı aşağıdakı kimi yazıla bilər:

$$a^* - t_{1-\alpha} \sigma_a \leq a < a^* + t_{1-\alpha} \sigma_a, \quad (6.38)$$

burada a^* -regressiya əmsalının düstur (6.7) və ya (6.9)-a görə hesablanmış empirik qiyməti; σ_a - regressiya əmsalının düstur (6.23) və ya (6.24)-ə görə təyin olunmuş standart xətası; $t'_{1-\alpha}$ - Styudent paylanmasının (Əlavə 5) kvantilidir ($\nu = n - 2$ və əhəmiyyətlik səviyyəsi 2α olduqda).

Misal 6.6. İki dəyişən kəmiyyət arasında xətti regressiya tənliyinin regressiya əmsalı $a=1.18$, regressiya əmsalının standart xətası $\sigma_a=0.25$ və sıranın uzunluğu $n=13$ il olarsa, regressiya əmsalının 90%-li etibarlılıq intervalını təyin edin.

Həlli: 1. İkitərəfli əhəmiyyətlik səviyyəsindən hansının qəbul edilmiş etibarlılıq intervalına uyğun olduğu təyin edilir: $2\alpha=1 - 0,90=0,10$ (və ya 10%).

2. α təyin edilir: $\alpha=0,10/2=0,05$ (və ya 5%).

3. Əlavə 5-dən $\nu = 13 - 2 = 11$ olduqda $t'_{1-\alpha}$ kvantili tapılır: $t'_{1-\alpha} = t'_{0,95} = 1,80$.

4. a üçün etibarlılıq intervalı hesablanır:

$$a^* - t_{1-\alpha} \sigma_a \leq a < a^* + t_{1-\alpha} \sigma_a$$

$$1,18 - 1,80 \cdot 0,25 \leq a < 1,18 + 1,80 \cdot 0,25 \text{ və } 0,75 \leq a < 1,63.$$

Regressiya əmsalının statistik əhəmiyyətliliyi də qiymətləndirilə bilər. Əgər, aşağıdakı şərt ödənilirsə, onda hesab olunur ki, regressiya əmsalı statistik əhəmiyyətlidir:

$$|t_a^*| > t_{1-\alpha}, \quad (6.39)$$

burada t_a^* -Styudent statistikasının empirik qiymətidir və

aşağıdakı düstura görə təyin olunur:

$$t_a^* = a^* / \sigma_a \quad (6.40)$$

6.6.4. Sərbəst həddin interval üzrə qiymətləndirilməsi

Fərz etsək ki, müşahidə məlumatları reqressiya xəttinə nəzərən normal qanuna müvafiq səpələnir, onda reqressiya tənliyinin sərbəst həddi üçün etibarlılıq intervalı aşağıdakı kimi yazıla bilər:

$$b^* - t_{1-\alpha} \sigma_b \leq b < b^* + t_{1-\alpha} \sigma_b, \quad (6.41)$$

burada b^* -sərbəst həddin düstur (6.8)-ə görə təyin olunmuş empirik qiyməti; σ_b - sərbəst həddin düstur (6.25) və ya (6.26)-ya görə hesablanmış standart xətası; $t_{1-\alpha}$ -Styudent paylanmasının (Əlavə 5) kvantilidir ($\nu = n - 2$ və əhəmiyyətlik səviyyəsi 2α olduqda).

Sərbəst həddin statistik əhəmiyyətliliyi aşağıdakı bərabərsizliyə görə qiymətləndirilir:

$$|t_b^*| > t_{1-\alpha}' , \quad (6.42)$$

burada t_b^* - Styudent statistikasının empirik qiymətidir və aşağıdakı düstura görə təyin olunur:

$$t_b^* = b^* / \sigma_b . \quad (6.43)$$

Əgər, (6.42) bərabərsizliyi ödənilmirsə, onda reqressiya tənliyinin sərbəst həddi statistik əhəmiyyətli deyil. Bu halda X və Y kəmiyyətləri arasında asılılıq $\tilde{y}_i = ax_i + b$ ifadəsi ilə yox, $\tilde{y}_i = ax_i$ ifadəsi ilə aproksimasiya olunmalıdır.

Misal 6.7. İki dəyişən kəmiyyət arasında xətti reqressiya tənliyinin sərbəst həddi $b = -1.34$, sərbəst həddin standart xətası $\sigma_b=3,19$ və sıranın uzunluğu $n=13$ il olarsa, sərbəst həddin statistik əhəmiyyətliliyini qiymətləndirin (əhəmiyyətlik səviyyəsi $2\alpha = 10\%$ qəbul olunub).

Həlli: 1. Student statistikasının empirik qiyməti hesablanır:

$$t_b^* = b^*/\sigma_b = |-1,34/3,19| = 0,42.$$

2. Əlavə 5-dən $v = 13 - 2 = 11$ olduqda $t_{1-\alpha}$ kvantili tapılır:

$$t_{1-\alpha} = t_{0,5} = 1,80.$$

3. $0,42 < 1,80$, yəni $t_b^* < t_{1-\alpha}$. Başqa sözlə, b əmsalı statistik baxımdan əhəmiyyətsizdir, yəni X və Y arasında asılılığın aproksimasiyası üçün $\tilde{y}_i = ax_i$ bərabərliyi tövsiyə oluna bilər ($b=0$).

6.7. Xətti reqressiya tənliyinin etibarlılıq intervalı və əhəmiyyətliliyinin qiymətləndirilməsi

Xətti reqressiya tənliyi istifadə edildikdə ixtiyari x_k qiymətinə $\tilde{y}_k = ax_k + b$ qiyməti uyğun gəlir. İlkin müşahidə məlumatları seçmə olduğuna görə reqressiya xəttinin vəziyyəti müəyyən xəta ilə təyin olunur. Y dəyişəninin həqiqi qiyməti, $y_{k,0}$, təsadüfi kəmiyyətdir. Onun riyazi gözləməsi $\tilde{y}_i$ -yə bərabərdir və standart meylətməsi isə aşağıdakı düstura görə hesablanır:

$$\sigma_{reqr} = \sigma_{y(x)} \sqrt{\frac{1}{n} + \frac{(x_k - \bar{x})^2}{\sum (x_i - \bar{x})^2}} = \sigma_{y(x)} \sqrt{\frac{1}{n} + \frac{(x_k - \bar{x})^2}{S_x^2(n-1)}}, \quad (6.44)$$

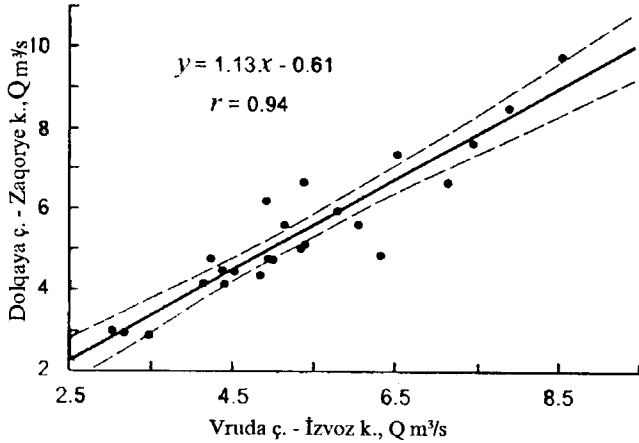
burada $\sigma_{y(x)}$ -xətti reqressiya tənliyinin düstur (6.19) və ya (6.20)-yə görə təyin edilmiş standart xətası; S_x - X sırasının orta kvadratik meylətməsi; $\bar{x}$ - X sırasının orta qiyməti; n -sıraların uzunluğudur.

Düstur 6.44-dən göründüyü kimi, $x_k = \bar{x}$ olduqda σ_{reqr} kəmiyyəti minimal qiymət alır, və x_k hər iki istiqamətdə (çoxalma və azalma) $\bar{x}$ -dan uzaqlaşdıqca, əksinə, σ_{reqr} artır. Başqa sözlə, $(x_k - \bar{x})$ fərqi artdıqca, verilən x_k qiymətinə görə $\tilde{y}_{k,0}$ qiymətinin hesablanma xətası da artır.

Düstur 6.44-dən istifadə etməklə reqressiya tənliyi üçün etibarlılıq intervalı təyin oluna bilər (şəkil 6.11):

$$\tilde{y}_{k,0} = \tilde{y}_k \pm t'_{1-\alpha} \sigma_{reqr} \quad (6.45)$$

burada $\tilde{y}_k = ax_k + b$; $t'_{1-\alpha}$ -Styudent paylanmasının kvantilidir ($\nu = n - 2$ və əhəmiyyətlik səviyyəsi 2α olduqda).



Şəkil 6.11. Çayların orta illik su sərfələri arasında əlaqə qrafiki (qırıq xətlər reqressiya tənliyi üçün 95%-li etibarlılıq intervallarına uyğundur).

Xətti reqressiyanın statistik əhəmiyyətliliyini yoxlamaq üçün F -statistikadan da istifadə olunur:

$$F_{y(x)}^* = \frac{\sum_{i=1}^n (\tilde{y}_i - \bar{y})^2}{\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y}_i)^2 / (n-2)} = \frac{(n-1)S_y^2 r^2}{\sigma_{y(x)}^2}, \quad (6.46)$$

burada $\sigma_{y(x)}$ -xətti reqressiya tənliyinin düstur (6.23) və ya (6.24)-ə görə təyin olunmuş standart xətası; S_y - Y sırasının orta kvadratik meylectməsi; r - korrelyasiya əmsalı; n - sıraların uzunluğudur.

Aşağıdakı bərabərsizlik ödənildikdə baxılan əlaqə statistik

əhəmiyyətli sayılır:

$$F_{y(x)}^* > F_{1-\alpha}, \quad (6.47)$$

burada $F_{1-\alpha}$ - α əhəmiyyətlilik səviyyəsində Fişer statistikasının nəzəri qiymətidir (Əlavə 6).

F -statistikanın empirik qiyməti, $F_{y(x)}^*$, nəzəri qiymətdən, $F_{1-\alpha}$, 4-5 dəfə böyük olduqda xətti reqressiya tənliyindən praktik hesablamalarda istifadə etmək olar ($\alpha = 5 - 10\%$).

6.8. Çoxhədli xətti korrelyasiya

Hidrometeoroloji hadisə və proseslər çoxsaylı amillərin təsiri nəticəsində formalaşır. Bu amillərin bəziləri baxılan hadisə və prosesə daha güclü, bəziləri isə nisbətən zəif təsir göstərir. Hidrometeoroloji kəmiyyətlərin hesablanması və proqnozunda çox zaman yalnız bir effektiv amil nəzərə alınır. Belə yanaşma bir tərəfdən bir çox kəmiyyət göstəriciləri haqqında məlumatların olmaması ilə, digər tərəfdən isə texniki problemlərlə əlaqədardır.

Aydındır ki, yalnız bir göstərici (prediktor) çoxamilli hadisəni tam şəkildə səciyyələndirə bilməz. Məsələn, dağlıq rayonlar üçün atmosfer yağıntıları, buxarlanma, havanın temperaturu, illik axım və s. ilə ərazinin və ya sutoplayıcının orta hündürlüyü arasında asılılıqdan geniş istifadə olunur. Bu kəmiyyətlərin təyini dəqiqliyini artırmaq üçün hesablama düsturlarına əlavə göstəricilər daxil edilməlidir. Bu məqsədlə çoxhədli xətti korrelyasiya aparatından istifadə olunur. Bu aparat iki dəyişən kəmiyyət arasında xətti korrelyasiya metodunun əsas müddəalarını üç və daha çox dəyişənə tətbiq etməyə imkan verir.

Tutaq ki, Y dəyişən kəmiyyəti ilə onun qiymətlərinə təsir göstərən $X_1, X_2, \dots, X_m$ kəmiyyətləri arasında çoxhədli xətti reqressiya tənliyini tərtib etmək tələb olunur. Bu tənliyin parametrləri ən kiçik kvadratlar metoduna görə təyin olunur və tənlik aşağıdakı kimi yazılır:

$$(y - \bar{y}) = a_1(x_1 - \bar{x}_1) + a_2(x_2 - \bar{x}_2) + \dots + a_m(x_m - \bar{x}_m), \quad (6.48)$$

burada $a_1, a_2, \dots, a_m$ -regressiya əmsalları; $\bar{y}, \bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_m$ -müvafiq olaraq asılı olmayan dəyişən və prediktorların (asılı dəyişənlərin) orta kəmiyyəti; m - prediktorların sayıdır.

Qarşıya qoyulan məsələni həll etmək üçün normal tənliklər sistemi $a_1, a_2, \dots, a_m$ əmsallarına nəzərən həll olunmalıdır. Adətən bu məsələ kompüterdə xətti cəbrin ədədi metodlarının istifadəsi ilə həll edilir. Prediktorların sayı iki olduqda baxılan məsələnin analitik həlli Kramer metodu ilə də alınə bilər. Bu metoda görə a_j əmsallarını təyin etmək üçün sistemin baş determinantı, D , hesablanmalıdır:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & r_{0,1} & r_{0,2} & r_{0,3} \dots r_{0,j} \dots r_{0,m} \\ r_{1,0} & 1 & r_{1,2} & r_{1,3} \dots r_{1,j} \dots r_{1,m} \\ r_{2,0} & r_{2,1} & 1 & r_{2,3} \dots r_{2,j} \dots r_{2,m} \\ r_{3,0} & r_{3,1} & r_{3,2} & 1 \dots r_{3,j} \dots r_{3,m} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ r_{i,0} & r_{i,1} & r_{i,2} & r_{i,3} \dots r_{i,j} \dots r_{i,m} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ r_{m,0} & r_{m,1} & r_{m,2} & r_{m,3} \dots r_{m,j} \dots 1 \end{vmatrix} \quad (6.49)$$

burada $r_{i,j}$ -dəyişənlər arasında cüt korrelyasiya əmsallarıdır. Məsələn, $r_{0,3}$ -asılı dəyişən və üçüncü prediktor arasında, $r_{2,1}$, isə

ikinci və birinci prediktorlar arasında, korrelyasiya əmsalındır. Qeyd etmək lazımdır ki, $r_{0,3} = r_{3,0}$ və $r_{2,1} = r_{1,2}$. Bu determinantın əsas diaqonalında korrelyasiya əmsalları vahidə bərabərdir, çünki $r_{0,0} = r_{1,1} = r_{2,2} = \dots = r_{m,m} = 1$.

Regressiya əmsalları aşağıdakı ifadəyə görə təyin olunur:

$$a_j = -(-1)^j \frac{\sigma_y}{\sigma_{x,j}} \frac{D_{0,j}}{D_{0,0}}, \quad (6.50)$$

burada σ_y -asılı olmayan dəyişənin orta kvadratik meylectməsi; $\sigma_{x,j}$ - j sayılı prediktorun orta kvadratik meylectməsi; $D_{0,0}$ -sistemin baş determinantı, D , sıfırıncı sətir və sıfırıncı sütunu silməklə alınan minor, $D_{0,j}$ - baş determinantdan sıfırıncı sətir və j sayılı sütunu silməklə alınan minordur.

Dəyişən kəmiyyətlərin sayı üç olduqda (asılı olmayan kəmiyyət və iki prediktor) hesablamalar aşağıdakı ardıcılıqla yerinə yetirilir:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & r_{0,1} & r_{0,2} \\ r_{1,0} & 1 & r_{1,2} \\ r_{2,0} & r_{2,1} & 1 \end{vmatrix}; \quad (6.51)$$

$$D_{0,0} = \begin{vmatrix} 1 & r_{1,2} \\ r_{2,1} & 1 \end{vmatrix} = 1 - r_{2,1}r_{1,2} = 1 - r_{1,2}^2; \quad (6.52)$$

$$D_{0,1} = \begin{vmatrix} r_{1,0} & r_{1,2} \\ r_{2,0} & 1 \end{vmatrix} = r_{1,0} - r_{2,0}r_{1,2}; \quad (6.53)$$

$$D_{0,2} = \begin{vmatrix} r_{1,0} & 1 \\ r_{2,0} & r_{2,1} \end{vmatrix} = r_{1,0}r_{2,1} - r_{2,0}. \quad (6.54)$$

Regressiya əmsallarını hesablamaq üçün düstur (6.50)-də (6.52) və (6.54) ifadələri nəzərə alınır:

$$a_1 = + \frac{\sigma_y}{\sigma_{x,1}} \frac{(r_{1,0} - r_{2,0}r_{1,2})}{1 - r_{1,2}^2}; \quad a_2 = - \frac{\sigma_y}{\sigma_{x,2}} \frac{(r_{1,0}r_{2,1} - r_{2,0})}{1 - r_{1,2}^2}.$$

Hazırda çoxhədli reqressiya tənliklərinin parametrlərini çox tez və dəqiq hesablamağa imkan verən kompyuter proqramları işlənmişdir. Microsoft Excel elektron cədvəllərinin analiz paketinə belə proqram daxil edilmişdir.

Çoxhədli xətti korrelyasiyada əlaqənin sıxlığı cüt xətti korrelyasiyada olduğu kimi korrelyasiya əmsalına görə qiymətləndirilir. Bu əmsal ümumi korrelyasiya əmsalı adlanır:

$$R = \sqrt{1 - \frac{D}{D_{0,0}}}. \quad (6.55)$$

Ümumi korrelyasiya əmsalı cüt korrelyasiya əmsalından fərqli olaraq yalnız “0” və “+1” arasında qiymətlər alır. Bu əmsalın standart xətası aşağıdakı düstura görə hesablanır:

$$\sigma_R = \frac{1 - R^2}{\sqrt{n - m - 1}}, \quad (6.56)$$

burada n -təhlil olunan sıraların uzunluğu; m -prediktorların sayıdır.

Çoxhədli xətti reqressiya tənliyinin standart xətası aşağıdakı düstura görə qiymətləndirilə bilər:

$$\sigma_{y(x)} \approx \sigma_y^* \sqrt{1 - R^2}. \quad (6.57)$$

Reqressiya əmsalının (j saylı) standart xətası isə aşağıdakı ifadəyə görə təyin olunur:

$$\sigma_{aj} = \frac{\sigma_y^*}{\sigma_{xj}^*} \sqrt{\frac{(1 - R^2) \Delta_{j,j}}{(n - m - 1) D_{0,0}}}, \quad (6.58)$$

burada $\Delta_{j,j} - D_{0,0}$ determinantının minorudur.

Praktikada istifadəyə yararlı çoxhədli xətti reqressiya tənliyi

aşağıdakı şərtləri ödəməlidir:

$$R \geq 0,7; (R/\sigma_R) \geq 2; (a_j/\sigma_{a,j}) \geq 2; n \geq 10. \quad (6.59)$$

Üçüncü şərt reqressiya əmsallarının hər biri üçün ayrılıqda ödənməlidir. Dördüncü şərt əslində daha sərt olmalıdır. Təcrübə göstərir ki, bir prediktor istifadə edildikdə sıraların uzunluğu ən azı 10, iki prediktor üçün 25-30, dörd prediktor üçün 50-60, beş prediktor üçün 100-120 və s. olmalıdır. Yalnız bu halda reqressiya tənliyinin parametrlərini etibarlı qiymətləndirmək mümkündür. Hidrometeoroloji sıraların uzunluğu adətən qısa olduğuna görə çox nadir hallarda reqressiya tənliyində (modelində) prediktorların sayı dördədən artıq olur.

Çoxhədli xətti reqressiya tənliyi tərtib edildikdə yalnız effektiv prediktorlardan istifadə olunmalıdır. Əgər, prediktorun tənliyə daxil edilməsi nəticəsində ümumi səpələnmə, R^2 , heç olmasa 5% artırsa, belə prediktor effektiv hesab edilə bilər. Qeyri-effektiv prediktorlar isə tənliyə daxil edilmir, çünki onlar hesablamaların xətasını azaltmaq əvəzinə, əksinə, onları artırma bilər.

Adətən çoxhədli xətti reqressiya tənliyinə asılı kəmiyyətlə xüsusi (fərdi) korrelyasiya əmsalı yüksək olan prediktorlar daxil edilir. Xüsusi korrelyasiya əmsalı cüt korrelyasiya əmsalından fərqlidir. Belə ki, iki dəyişən kəmiyyət arasında asılılıq təhlil olunduqda, bu əlaqənin sıxlığı cüt korrelyasiya əmsalı ilə qiymətləndirilə bilər. Lakin üç və daha çox sayda kəmiyyətin qarşılıqlı əlaqələri öyrənildikdə cüt korrelyasiya əmsalı o qədər uğurlu göstərici hesab olunmur. Bu, çoxhədli xətti reqressiya aparatının xüsusiyyətləri ilə əlaqədardır. Tutaq ki, $y = f(x_1, x_2, x_3)$ asılılığı təhlil olunur. Bu halda, ola bilər ki, məsələn, Y və X_1 dəyişənləri arasında əlaqənin korrelyasiya əmsalına X_2 və ya X_3 dəyişəni, və ya onların hər ikisi eyni zamanda təsir göstərir. Buna görə də Y və X_1 arasındakı əlaqənin sıxlığını qiymətləndirmək üçün X_2 və X_3 dəyişənlərinin təsirindən azad olmaq lazımdır. Başqa sözlə, $y = f(X_1)$ əlaqəsinə X_2 və X_3 kəmiyyətlərinin hər birinin

dəyişməz (sabit) qiymətlərində baxılmalıdır. Məhz bu halda Y və X dəyişənləri arasındakı əlaqənin həqiqi korrelyasiya əmsalı qiymətləndirilə bilər. Bu korrelyasiya əmsalı xüsusi korrelyasiya əmsalı adlanır.

Tutaq ki, çay hövzəsində formalaşan illik axım, R , ilə sutoplayıcıya düşən atmosfer yağıntıları, P , və sutoplayıcı səthdən buxarlanma, E arasında əlaqəyə baxılır $R=f(P,E) \cdot R$ və P dəyişənləri arasında asılılığın xüsusi korrelyasiya əmsalını qiymətləndirmək üçün $R=f(P)$ əlaqəsi E dəyişəninin eyni qiymətində təhlil olunmalıdır. Aydındır ki, bu məhdudiyyətə uyğun kifayət qədər müşahidə məlumatı toplamaq çox çətindir. Prediktorların sayı artdıqca, bu çətinliklər də çoxalır. Xüsusi korrelyasiya əmsalını hesablamaq üçün düsturlar alınmışdır. Yalnız iki prediktordan istifadə olunduqda bu düsturlar aşağıdakı kimidir:

$$r_{01.2} = \frac{r_{01} - r_{02} \cdot r_{12}}{\sqrt{(1 - r_{02}^2)(1 - r_{12}^2)}}; \quad (6.60)$$

$$r_{02.1} = \frac{r_{02} - r_{01} \cdot r_{12}}{\sqrt{(1 - r_{01}^2)(1 - r_{12}^2)}}, \quad (6.61)$$

burada $r_{01.2}$ və $r_{02.1}$ - asılı dəyişənin müvafiq olaraq birinci və ikinci prediktorla əlaqəsinin xüsusi korrelyasiya əmsalları; r_{01} , r_{02} , r_{12} - cüt korrelyasiya əmsallarıdır.

Göründüyü kimi, xüsusi korrelyasiya əmsalının indeksi iki hissədən ibarətdir. Birinci iki rəqəm aralarındakı əlaqə təhlil olunan kəmiyyətlərin nömrələrini, nöqtədən sonrakı rəqəm (və ya rəqəmlər) isə təsiri nəzərə alınmayan prediktor (və ya prediktorların) nömrələridir.

Beləliklə, xüsusi korrelyasiya əmsalı ümumi reqressiyada prediktorun fərdi payını səciyyələndirir.

Reqressiya tənliyinə daxil edilmiş hər hansı bir prediktorla başqa bir prediktor arasında sıx əlaqə olduqda və bu yeni prediktoru tənliyə əlavə etdikdə, onun asılı dəyişənlə xüsusi korre-

yasiya əmsalı kiçik alınır.

Əgər, X_1 və X_2 dəyişənləri arasında əlaqənin cüt korrelyasiya əmsalı r_{12} , X_1 və X_3 arasında isə r_{13} təşkil edirsə, onda X_2 və X_3 arasında korrelyasiya əmsalı $r_{12}r_{13}$ -ə bərabər olur və avtomatik korrelyasiya alınır. $X_3 = f(X_1, X_2)$ tənliyinə X_2 prediktoru yalnız o halda əlavə edilə bilər ki, X_2 və X_3 dəyişənlərinin müşahidə məlumatlarına görə hesablanmış cüt korrelyasiya əmsalı, r_{23} , avtomatik korrelyasiya əmsalından əhəmiyyətli dərəcədə böyük olsun.

Çoxhədli xətti regressiya tənliyi tərtib edildikdə prediktor kimi yalnız, $X_1, X_2, \dots, X_m$ dəyişənlərindən deyil, həmçinin onların müxtəlif kombinasiyalarından da, məsələn, $(X_1 X_2)$; (X_1 / X_2) ; $(1/X_1)$ və s. istifadə olunur. Əksər halda belə yanaşma özünü doğruldur və tənliyin ümumi korrelyasiya əmsalı böyüyür. Lakin prediktor kimi asılı dəyişənin, Y , asılı olmayan dəyişənlərdən (prediktorlardan), X_j , biri ilə kombinasiyası istifadə olunduqda yanlış korrelyasiya effekti yarana bilər. Başqa sözlə, əslində Y və X_j dəyişənləri arasında əlaqə olmamasına baxmayaraq, regressiya tənliyinin ümumi korrelyasiya əmsalı kifayət qədər böyük alınır.

Əgər, Y dəyişəninin dispersiyası X dəyişəninin dispersiyası ilə müqayisədə bir neçə dəfə böyükdürsə, onda $Y = f(YX)$, $Y = (Y/X)$, $Y = f(Y+X)$ asılılıqlarını qurduqda, faktik olaraq asılı kəmiyyətin onun özü ilə korrelyasiyasına baxılır. Bu halda X kəmiyyəti zəif səs rolunu oynayır.

Əgər, Y dəyişəninin variasiya əmsalı X dəyişəninin variasiya əmsalından böyükdürsə, onda bu iki dəyişən arasında hətta heç bir əlaqə olmadıqda belə $Y = f(YX)$ asılılığının korrelyasiya əmsalı 0,7-dən kiçik olmur.

Regressiya tənlikləri tərtib edildikdə yanlış korrelyasiya effektinin nəzərə alınmaması ciddi səhvlərlə nəticələnə bilər.

Misal 6.8. Svir çayının (Myatusova məntəqəsi) illik axım kəmiyyətini, Y , analoq çayların məlumatlarından istifadə etməklə çoxillik dövrə (1859-1958-ci illər) gətirin. Analoq kimi Vuoksa (Su elektrik stansiyası), X_1 , və Neva (Petrokrepost məntəqəsi), X_2 , çaylarını seçin. Svir çayı üzərində müşahidələr 20 il (1928-1940 və 1945-1951-ci illər) yerinə yetirilmişdir. Çoxhədli xətti regresiya tənliyinin parametrlərini Kramer metoduna görə təyin edin.

Həlli: 1. 20 illik paralel müşahidə məlumatlarına görə cüt korrelyasiya əmsalları hesablanır: $r_{yx_1} = 0,74$; $r_{yx_2} = 0,88$; $r_{x_1x_2} = 0,55$

2. Determinant və onun minorları təyin olunur:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 0,74 & 0,88 \\ 0,74 & 1 & 0,55 \\ 0,88 & 0,55 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 0,55 - 0,77 - 0,30 + 2 \cdot 0,74 \cdot 0,88 \cdot 0,55 = 0,1,$$

$$D_{yx_1} = - \begin{vmatrix} 0,74 & 0,55 \\ 0,88 & 1 \end{vmatrix} = -(0,74 - 0,88 \cdot 0,55) = -0,26,$$

$$D_{yx_2} = \begin{vmatrix} 0,74 & 1 \\ 0,88 & 0,55 \end{vmatrix} = 0,74 \cdot 0,55 - 0,88 = -0,47,$$

$$D_{yy} = \begin{vmatrix} 1 & 0,55 \\ 0,55 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 0,5^2 = 0,70$$

3. Ümumi (cəm) korrelyasiya əmsalı qiymətləndirilir:

$$R = \sqrt{1 - \frac{D}{D_{yy}}} = \sqrt{1 - \frac{0,10}{0,70}} = 0,93.$$

4. Müşahidə sıralarının orta qiymətləri və orta kvadratik meyletmələri hesablanır:

$$\bar{y} = 8,76, \quad \bar{x}_1 = 9,79, \quad \bar{x}_2 = 8,57,$$

$$\sigma_y = 1,71, \quad \sigma_{x_1} = 1,96, \quad \sigma_{x_2} = 1,58.$$

5. Regressiya əmsalları təyin olunur:

$$a_1 = \frac{1,71 \cdot 0,26}{1,96 \cdot 0,70} = 0,32,$$

$$a_2 = \frac{1,71 \cdot 0,47}{1,58 \cdot 0,70} = 0,73.$$

6. Çoxhədli xətti regressiya tənliyi tərtib olunur:

$$y - \bar{y} = a_1(x_1 - \bar{x}_1) + a_2(x_2 - \bar{x}_2)$$

və ya

$$y - 8,76 = 0,32(x_1 - 9,79) + 0,73(x_2 - 8,57),$$

və ya

$$y = 0,32x_1 + 0,73x_2 - 0,63.$$

7. Regressiya tənliyinin dəqiqliyi qiymətləndirilir:

$$\sigma_{\bar{y}} = \sigma_y \sqrt{1 - R^2} = 1,71 \sqrt{1 - 0,93^2} = 0,63.$$

8. Regressiya əmsallarının standart xətaləri hesablanır:

$$\sigma_{a_1} = \frac{0,63}{1,96 \sqrt{(20 - 2)(1 - 0,55^2)}} = 0,99,$$

$$\sigma_{a_2} = \frac{0,63}{1,58 \sqrt{(20 - 2)(1 - 0,55)^2}} = 0,11.$$

Regressiya əmsallarının standart xətaləri, onların öz qiymətləri ilə müqayisədə bir neçə dəfə kiçikdir və bu əmsalların etibarlılığını göstərir.

Svir çayının orta illik su sərfələri sırası çoxhədli xətti regressiya tənliyinə görə bərpa edildikdən sonra çoxillik sıranın orta qiyməti $9,16 \text{ l/s} \cdot \text{km}^2$, variasiya əmsalı isə 0,18 alınır.

7. HİDROMETEOROLOJİ SİRALARIN RİYAZİ MODELLƏŞDİRİLMƏSİ

Son üç yüzillikdə hidrometeorologiyada, digər təbiət elmlərində olduğu kimi, eksperimental tədqiqatların yalnız iki metodu tətbiq olunurdu passiv və aktiv eksperiment metodları.

Passiv eksperiment metodu təbii şəraitdə hidrometeoroloji hadisələr üzərində müşahidələr aparılmasını nəzərdə tutur. Bu müşahidə məlumatları hidrometeoroloji tədqiqatların başlıca informasiya bazasıdır. Lakin bu məlumatlar adətən qısa müşahidə dövrlərini əhatə edir və əksər halda müşahidə sıralarının uzunluğu 50-60 ildən az olur.

Stasionar müşahidə məntəqələrinin çoxu keçən əsrin ortalarından fəaliyyət göstərdiyinə görə, mövcud məlumatlar baxılan hadisənin yalnız son dövrdəki tərəddüdlərini səciyyələndirir. Çox zaman mövcud müşahidə sıraları təkrarlanma dövrü böyük olan (məsələn, 100 ildə 1 dəfə) kəmiyyətləri əhatə etmir. Digər tərəfdən, müşahidə məntəqələri və müvafiq müşahidə məlumatları ərazi üzrə qeyri-bərabər paylanır. Məntəqələrin çoxu əhali sıx məskunlaşan ərazilərdə fəaliyyət göstərir. Çay axımının əsas hissəsinin formalaşdığı yüksək və orta dağlıq ərazilərdə həm meteoroloji, həm də hidroloji müşahidə məntəqələrinin sayı az olduğuna görə bu ərazilər inkişaf etdirildikdə hidrometeoroloji informasiya çatışmazlığı problemi aktuallaşır.

Aktiv eksperiment metodunda tədqiqatlar çöl və ya laboratoriya şəraitində yerinə yetirilir. Hidrometeoroloji proseslər mürəkkəb və çoxamilli olduğuna görə, belə eksperimentlərin nəticələrinin praktikada tətbiqi bir çox çətinliklərlə müşayiət olunur.

Müasir dövrdə kompyuterlərin imkanlarından istifadə və tədqiqatların ümumi səviyyəsinin artması ilə əlaqədar, hidrometeoroloji xarakteristikaların hesablanması və proqnozunda yeni-üçüncü metod-ədədi eksperimentlər metodu geniş tətbiq olunur. Bu metod baxılan prosesin riyazi modelləşdirilməsi əsasında realizə edilir.

Ədədi eksperiment müəyyən proses üçün işlənmiş riyazi model tənliliklərinin ədədi həllinə deyilir.

Belə eksperimentlərin tətbiq sahələri kifayət qədər genişdir.

1. Su təsərrüfatı kompleksləri layihələndirildikdə mühüm vəzifələrdən biri azsulu dövrlərin mümkün davamiyyətinin təyinidir. Mövcud su sərfələri sıraları qısa olduqlarına görə, onlar bu məsələnin həllində birbaşa istifadə edilmirlər. Lakin ədədi eksperiment metodu (məsələn, Monte-Karlo metodu) mövcud müşahidə sırasına görə kifayət qədər uzun süni hidroloji sıra modelləşdirməyə imkan verir və belə sıraya görə artıq azsulu dövrlərin demək olar ki, bütün mümkün davamiyyətlərini hesablamaq mümkündür.

Bu yolla istənilən hidrometeoroloji xarakteristikanın periodik tərəddüdlərini öyrənmək olar.

2. Hidrometeoroloji hadisələrin sadə, lakin fiziki-nöqteyi nəzərdən əsaslandırılmış və kifayət qədər dəqiq modelini tərtib etmək olar.

Doğrudan da, ədədi eksperimentlər imkan verir ki, model tərtib olunduqda hesablamalar prosesə təsir göstərən amillərin müxtəlif qiymətlərində yerinə yetirilsin.

Ədədi eksperimentlərin müxtəlif istiqamətləri məlumdur. Hidrometeorologiyada Monte-Karlo metodu həm praktik hesablamalarda, həm də elmi tədqiqatlarda istifadə olunur.

Bu bölmədə Monte-Karlo metodunun yalnız hidrometeoroloji sıraların modelləşdirilməsində tətbiqinə baxılır.

Monte-Karlo metodunu amerikalı riyaziyyatçılar C.Neymar və S.Ulam təklif etmişlər. Metodun adı Monako knyazlığında yerləşən və kazinoları ilə məşhur olan şəhərin adı ilə bağlıdır. Belə ki, Monte-Karlo metodunun əsas elementlərindən biri təsadüfi kəmiyyətlər sırasıdır və belə sıranı tərtib etmək üçün istifadəyə yararlı ən sadə mexaniki alətlərdən biri ruletkadır.

Hidrologiya və su təsərrüfatı hesablamalarında mahiyyətə Monte-Karlo metoduna oxşar yanaşmanı 1927-ci ildə S.Sadler tətbiq etmişdir. 1946-cı ildə isə S.N.Kritski və M.F.Menkel ana-

loji yolla Xəzər dənizi səviyyəsinin illik gedişini modelləşdirmişlər. Lakin Monte-Karlo metodu 1949-cu ildə təklif olunmuşdur.

Hidroloji sıraların modelləşdirilməsi ilə L.S.Kuçment, D.Y.Ratkoviç, A.Ş.Reznikovski, N.A.Kartvelişvili, E.Q.Bloxinov, İ.O.Sarmanov, A.V.Rojdestvenski və b. məşğul olmuşlar. Lakin hidrologiyada Monte-Karlo metodunun tətbiqinin metodik əsaslarını kifayət qədər tam həcmdə ilk dəfə olaraq Q.Q.Svanidze işləmişdir (Сванидзе, 1977).

Hidrometeoroloji sıranın Monte-Karlo metodu ilə modelləşdirilməsi müşahidə sırasının məlum ədədi xarakteristikalarına görə onun mümkün qiymətlər ardıcılığının təyini prosesinə deyilir. Statistik sınaqların sayı artdıqca, modelləşdirmə nəticəsində alınan sıranın xarakteristikaları (parametrləri) müşahidə sırasının xarakteristikalarına yaxınlaşır. Müşahidə sırasının paylanma qanunu birölçülü (təsadüfi kəmiyyət modeli), ikiölçülü (sadə Markov zənciri), n -ölçülü (mürəkkəb Markov zənciri) ola bilər. Hər üç halda modelləşdirmənin prinsipial sxemi eyni olsa da, onun praktik yerinə yetirilmə yolları fərqlidir.

Sıraların modelləşdirilməsi məlum müddəyə əsaslanır: əgər, X təsadüfi kəmiyyətinin paylanma sıxlığı $f(x)$ -dirsə, onda bu kəmiyyət paylanma qanunundan asılı olmayaraq $[0-1]$ intervalında bərabər paylanır.

7.1. Sıraların təsadüfi kəmiyyət sxemi üzrə modelləşdirilməsi

Sıranın təsadüfi kəmiyyət sxemi üzrə modelləşdirilməsi çox sadədir. Bunun üçün aşağıdakılar tələb olunur:

1. $[0-1]$ intervalında bərabər paylanan təsadüfi ədədlər,
2. Analitik təminat ayrısı.

Təsadüfi ədədlər üç yolla əldə edilə bilər: təsadüfi ədədlər cədvəlindən, təsadüfi ədədlər generatorundan və psevdotəsadüfi ədədlər metodu ilə.

Təsadüfi ədədlərin ən sadə generatoru ruletkadır. Onun kö-

məyi ilə istənilən uzunluqlu təsadüfi sıra tərtib etmək mümkündür. Bu yolla alınmış sıra cədvəl formasında da təqdim oluna bilər. Çap olunmuş təsadüfi ədədlər cədvəlinin ən böyüyündə bir milyon ədəd var. Lakin kompyuterdə işlədikdə psevdotəsadüfi ədədlərdən istifadə daha əlverişlidir. Belə ədədləri əldə etmək üçün ilk algoritmi C.Neyman təklif etmişdi. Hazırda daha mükəmməl alqoritmlər məlumdur.

Fərdi kompyuterdə $[0-k]$ intervalında (k -müsbət tam ədəddir) bərabər paylanan təsadüfi ədədləri generasiya etmək mümkündür.

Məsələn, A.V.Sikan (Сикан, 2007) $[1-50]$ intervalında bərabər paylanan 20 təsadüfi ədəd almaq üçün Pascal dilində proqram tərtib etmişdir:

```
var i: integer;  
begin  
Randomize;  
For i=1 to 20 do  
Begin  
Writeln (Random(50))  
end  
end.
```

Modelləşdirmənin növbəti mərhələsində $[0-1]$ intervalında bərabər paylanan təsadüfi ədədlərin hər biri (α_i) təminatla P_i əvəz olunur. Məsələn, $\alpha = 65877$ və $P = 65,877\%$. Artıq analitik təminat ayrısından empirik təminatlara müvafiq ordinatları təyin etmək olar (şəkil 7.1)

Qeyd etmək lazımdır ki, hesablamalar kompyuterdə də yerinə yetirilə bilər. "Microsoft Excel"-in "Analiz paket"-i yeddi paylanma qanununa görə sıraları modelləşdirməyə imkan verir. Xüsusi statistika paketlərinin imkanları daha genişdir.

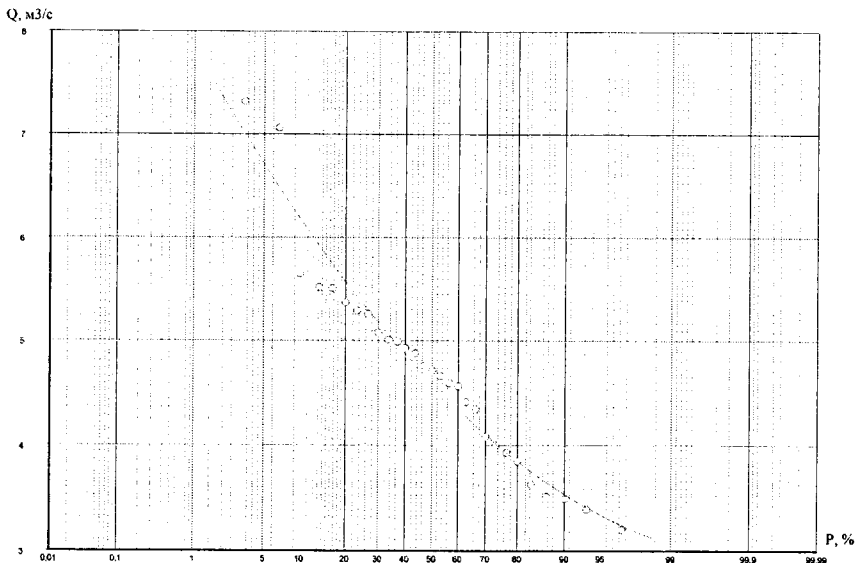
Misal 7.1. Qusarçayın (Kuzun məntəqəsi) uzunluğu 29 il olan orta illik su sərfələri sırasını (1947-1975 illər) təsadüfi kəmiyyət modeli üzrə uzadaraq 100 illik sıra tərtib edin və onun parametrlərini müşahidə sırasının müvafiq parametrləri ilə müqayisə edin.

Qusarçayın (Kuzun məntəqəsi) orta illik su sərfələri

İl	Su sərfi	İl	Su sərfi
1947	3,49	1962	5,29
1948	4,93	1963	7,06
1949	4	1964	4,76
1950	3,39	1965	5,01
1951	4,08	1966	5,08
1952	4,71	1967	7,32
1953	3,2	1968	5,52
1954	4,59	1969	4,88
1955	5,37	1970	4,34
1956	5,65	1971	3,63
1957	5,51	1972	5,26
1958	4,41	1973	4,99
1959	4,56	1974	4,66
1960	3,85	1975	3,93
1961	3,51		

Həlli: 1. Qusarçayın (Kuzun məntəqəsi) orta illik su sərfələri sırasının parametrləri momentlər metoduna görə hesablanır: $r(1)=0,305$, $\bar{Q}=4,723$, $C_v=0,206$, $C_s=0,827$.

2. Müşahidə məlumatlarına görə empirik və nəzəri təminat əyriləri qurulur (şəkil 7.1).



Şəkil 7.1. Müşahidə olunmuş orta illik su sərfələrinin empirik və analitik təminat ayrılırları

3. Təsadüfi ədədlər cədvəlindən ixtiyari 100 ardıcıl ədəd seçilir. Bu beşrəqəmli ədədlərin hər biri 1000-ə bölünür və təminat kimi qəbul olunur. Sonra müşahidə məlumatlarına görə qurulmuş nəzəri təminat əyrisindən bu təminatların (cəmi 100 təminat) hər birinə müvafiq su sərfələri təyin olunur və aşağıdakı cədvələ yazılır.

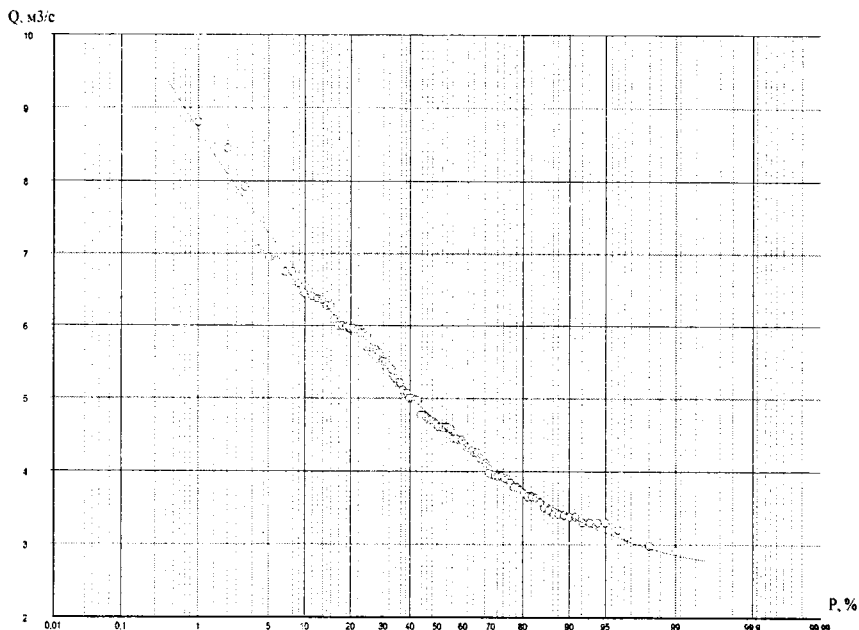
4. Modelləşdirilmiş sıranın ($n=100$ il) momentlər metodu ilə statistik parametrləri hesablanır: $r(1)=0,038$, $\bar{Q}=4,864$, $C_v=0,25$, $C_s=0,75$.

5. Modelləşdirilmiş sıra üçün empirik və nəzəri təminat əyriləri qurulur (şəkil 7.2).

Тәсәдүфи кәмиyyət модели üzrə modelaşdırılmış sıra

№	Тәсәдүфи кәмиyyət	Su sərfi	№	Тәсәдүфи кәмиyyət	Su sərfi	№	Тәсәдүфи кәмиyyət	Su sərfi
1	96,268	3,3	36	76,73	3,95	71	18,093	5,67
2	3,55	6,95	37	26,439	5,28	72	8,454	6,38
3	22,188	5,45	38	32,927	5,07	73	60,448	4,33
4	63,759	4,28	39	51,484	4,58	74	37,21	5,96
5	55,006	4,45	40	45,142	4,77	75	79,27	3,94
6	81,972	3,75	41	11,86	6	76	86,591	3,66
7	6,344	6,59	42	59,144	4,43	77	2,903	7,06
8	92,363	3,47	43	81,205	3,85	78	83,426	3,79
9	96,083	3,3	44	61,429	4,38	79	5,286	6,75
10	92,993	3,41	45	17,765	5,68	80	96,804	3,2
11	95,083	3,3	46	45,644	4,65	81	83,699	3,71
12	77,308	3,96	47	50,136	4,61	82	59,468	4,43
13	11,913	6	48	99,784	2,92	83	99,699	2,98
14	70,648	4,11	49	16,943	5,7	84	14,043	5,9
15	92,771	3,41	50	10,747	6,09	85	15,013	5,86
16	78,816	3,94	51	70,292	4,16	86	12,6	5,98
17	79,934	3,9	52	60,721	4,32	87	33,122	5,07
18	64,698	4,25	53	49,624	4,6	88	94,169	3,38

Nö	Təsədüfi kəmiyyət	Su sərfi	Nö	Təsədüfi kəmiyyət	Su sərfi	Nö	Təsədüfi kəmiyyət	Su sərfi
19	44,212	4,75	54	47,484	4,72	89	89,916	3,5
20	89,292	3,64	55	99,203	3,04	90	8,985	6,28
21	8,692	6,28	56	20,975	5,5	91	50,394	4,61
22	67,927	4,18	57	35,392	5	92	96,057	3,3
23	62,167	4,26	58	83,376	3,79	93	28,519	5,21
24	45,828	4,68	59	12,995	5,95	94	5,095	6,75
25	1,164	7,92	60	0,204	8,81	95	37,786	4,98
26	29,283	5,21	61	87,237	3,66	96	13,043	5,96
27	19,868	5,63	62	76,855	3,98	97	56,097	4,45
28	14,292	5,9	63	94,213	3,38	98	87,527	3,58
29	77,41	3,91	64	45,441	4,77	99	3,581	6,91
30	36,58	4,97	65	35,307	5	100	0,579	8,45
31	7,78	6,36	66	31,581	5,11			
32	7,528	6,41	67	49,978	4,6			
33	22,023	5,4	68	93,587	3,4			
34	20,827	5,51	69	52,135	4,6			
35	47,802	4,7	70	6,921	6,45			



Şəkil 7.2. Modelləşdirilmiş sıranın empirik və analitik təminat ayrılırları

Göründüyü kimi, müşahidə sırası və modelləşdirilmiş sıranın əsas statistik parametrlərinin ($\bar{Q}$, C_v , C_s) qiymətləri kifayət qədər yaxındır, yalnız sıradaxili korrelyasiya əmsalının, $r(1)$, qiymətləri fərqlidir. Bu sıradaxili korrelyasiya əmsalının qiymətləndirilməsi üçün hətta 100 illik sıranın da kifayət etməməsi ilə izah olunur.

7.2. Sıraların sadə Markov zənciri sxemi üzrə modelləşdirilməsi

Sıraların sadə Markov zənciri sxemi üzrə modelləşdirilməsi təsadüfi kəmiyyət sxemi üzrə modelləşdirmə ilə müqayisədə bir qədər çətindir. Belə ki, artıq müşahidə sırasının qonşu hədləri arasında korrelyasiya (avtokorrelyasiya) nəzərə alınmalıdır. Bu sxem üzrə modelləşdirmənin ən azı 30 üsulu məlumdur. Onların icmalını Q.Q.Svanidze (Сванидзе, 1977) vermişdir.

Demək olar ki, bütün üsullarda x sırası iki toplanana (deterministik və təsadüfi) ayrılır:

$$x_{i+1} = \bar{x}_{i+1}(x_i) + \beta_{i+1}, \quad (7.1)$$

burada $\bar{x}_{i+1}(x_i) - x_i$ -nin verilmiş qiymətində x_{i+1} -in mümkün qiymətlərinin ədədi ortasıdır və o, $x_{i+1} = f(x_i)$ əlaqəsinin xətti reqressiya tənliyinə görə hesablanır: β_{i+1} -təsadüfi toplanandır və müşahidə sırasının əvvəlki qiymətlərindən asılı deyil.

X sırası modul əmsallarından ibarət olduqda düstur (7.1) aşağıdakı kimi yazılır:

$$k_{i+1} = \bar{k}_{i+1}(k_i) + k_{\beta_{i+1}} \quad (7.2)$$

Sıralar sadə Markov zənciri sxemi ilə modelləşdirildikdə sıradaxili korrelyasiya nəzərə alındığına görə hesablamalarda artıq ehtimalın ötməsinin iki qiymətindən istifadə olunur. Bunlardan biri baxılan ildə, o biri isə əvvəlki ildə müşahidə olunmuş hidrometeoroloji kəmiyyəti səciyyələndirir.

Modelləşdirmə aşağıdakı düsturlara görə yerinə yetirilir:

$$X_{i+1} = \bar{X} + r(X_i - \bar{X}) + t_{i+1}\sigma\sqrt{1-r^2} \quad (7.3)$$

burada $\bar{X}$ -müşahidə sırasının orta qiyməti; X_i -hidrometeoroloji kəmiyyətin əvvəlki ilə uyğun qiyməti; σ -sıranın orta kvadratik meylectməsi; r -sıranın qonşu hədləri arasında korrelyasiya əmsalı; t_{i+1} -verilmiş analitik təminat əyrisinin normallaşdırılmış ordinatlarıdır (təsadüfi ədədlərdən çevirmə yolu ilə alınmış empirik təminatlara görə təyin olunur).

Modelləşdirmə zamanı paylanmanın (analitik təminat əyrisinin) tipi (Kritski-Menkel, Pirson III tip və s.) göstərilməlidir.

Modelləşdirmə modul əmsallarına görə yerinə yetirildikdə düstur (7.3) aşağıdakı kimi yazılır:

$$k_{i+1} = 1 + r(k_i - 1) + t_{i+1}C_v\sqrt{1-r^2}. \quad (7.4)$$

Sıra modelləşdirildikdə başlanğıc qiymət kimi adətən sıranın

ədədi ortası qəbul olunur.

Əgər, sıradaxili korrelyasiya əmsalı $r < 0,2$ olarsa, onda avto-korrelyasiya nəzərə alınmaya bilər.

Korrelyasiya əmsalının böhran qiymətləri Əlavə 15-də verilir.

Misal 7.2. Cədvəldə verilmiş məlumatlara əsasən təsadüfi ədədlər cədvəlinin köməyi ilə iki il üçün çayın kvartallıq su sərfələri (mil.qallon/sutka) sırasını tərtib edin.

Orta kvartallıq su sərfələri sırasını modelləşdirmək üçün istifadə olunan tənliyin parametrləri

j	b_j	σ_j	r_j	$(1 - r_j^2)^{1/2}$	$\bar{Q}_j$
1	0.66	73	0.57	0.82	68
2	0.43	85	0.41	0.91	137
3	0.14	90	0.43	0.90	183
4	0.91	29	0.36	0.93	107

Həlli: Hesablamalar aşağıdakı tənliyə görə yerinə yetirilir:

$$Q_{i+1,j+1} = \bar{Q}_{j+1} + b_j(Q_{ij} - \bar{Q}_j) + t_i\sigma_{j+1}(1 - r_j^2)^{1/2}.$$

Modelləşdirmənin ardıcılığı və alınmış nəticələr aşağıdakı cədvəldə verilmişdir.

Kvartallıq su sərfələrinin ardıcıl qiymətlərinin modelləşdirilməsi

i	j	$\bar{Q}_j$	Q_{i-1}	$Q_{i-1,j-1}$	k	t_j	$b_j(Q_{i-1,j-1} - \bar{Q}_{j-1})$	$t_i\sigma_i(1 - r^2)^{1/2}$	$Q_{i,j}$
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)	(10)
1	1	68	107	107	0.5374	0.094	0.0	5.6	73.6
2	2	137	68	73.6	0.6338	0.342	2.4	26.5	165.9
3	3	183	137	165.9	0.3530	-0.377	4.0	-30.6	156.4
4	4	107	183	153.4	0.5343	0.343	-24.2	9.3	92.1
5	1	68	107	92.1	0.0263	-1.94	-9.8	-116.4	0.0
6	2	137	68	0.0	0.6455	0.373	-29.2	28.9	136.7
7	3	183	137	136.7	0.8507	1.04	-0.04	84.5	267.5
8	4	107	183	267.5	0.3485	0.39	76.8	10.6	194.5

Qeyd:

Qrafa 1. i indeksi iki illik dövr üçün ümumi sırada kvartalın mövqeyini göstərir.

Qrafa 2. Bir ildəki kvartalların indeksləri ($j=1, \dots, 4$).

Qrafa 3. İlin j-ci kvartalı üçün su sərfinin orta çoxillik kəmiyyəti.

Qrafa 4. İlin j-1-ci kvartalı üçün su sərfinin orta çoxillik kəmiyyəti.

Qrafa 5. Su sərfi modelləşdirilən kvartaldan əvvəlki kvartalın su sərfi. Kvartallıq su sərfələrinin modelləşdirilmə prosesinin lap əvvəlində başlanğıc su sərfi kimi qrafa 4-də verilən birinci su sərfi götürülür.

Qrafa 6. Bu qrafanın elementlərinin qiyməti, 0–1 arasında bərabər paylanan, təsadüfi ədədlər cədvəlindən götürülmüşdür.

Qrafa 7. Təsadüfi meyletmə $f(z)$, xüsusi cədvəldən (Buccmen u öp., 1979, Əlavə B 1) götürülmüşdür. Əgər, qrafa 6-dakı təsadüfi k kəmiyyəti 0,5-dən kiçikdirsə, onda cədvəldən $f(z)=(0,5-k)$ parametri üçün z -in qiyməti tapılır, zaman t isə z -ə bərabər qəbul edilir. Əgər, $k>0,5$ olarsa, onda z -in qiyməti $f(z)=(k-0,5)$ kəmiyyətinə əsasən axtarılır, zaman t isə z -ə bərabər götürülür.

Qrafa 8. Yuxarıdakı tənliyin komponenti (reqressiya əmsalı ilə).

Qrafa 9. Tənliyin təsadüfi toplananı.

Qrafa 10. Modelləşdirilən kvartallıq su sərfi (3,8 və 9-cu sütunlarda verilmiş rəqəmlərin cəmi).

Ədəbiyyat

1. Babayev Ş.Ə. Riyazi geologiya. Bakı, 2006.-314s.
2. Bağirov B.Ə., Calalov Q.İ., Nəzərova S.Ə. Riyazi geologiyanın əsasları. Bakı, REALCOM BM nəşr. 2001.-64s.
3. İmanov F.Ə. Tətbiqi hidrologiya. Bakı, 2010.-232 s.
4. İmanov F.Ə. Hidroloji hesablamalar. Bakı, 2011.-263 s.
5. Məmmədov M.Ə., Mahmudov R.N., İmanov F.Ə. Çay axımı və hidroloji hesablamalar (metodik göstəriş). Bakı, 1995.-94s.
6. Алексеев Г.А. Объективные методы выравнивания и нормализации корреляционных связей.-Л.:Гидрометеиздат, 1971.-363с.
7. Алексеев Г.А. Методы оценки случайных погрешностей гидрометеорологической информации.- Л.:Гидрометеиздат, 1975.-76с.
8. Бендат Дж., Пирсол А. Применение корреляционного и спектрального анализа. – М.: Мир, 1983.–312 с.
9. Бокс Дж., Дженкинс Г. Анализ временных рядов. – М.: Мир, 1974.–406 с.
10. Боровиков В.П., Боровиков И.П. STATISTICA. Статический анализ и обработка данных в среде Windows. – М.: Информационно-издательский дом «Филинь», 1998.–608 с.
11. Боровиков В.П., Ивченко В.П. Прогнозирования в системе STATISTICA в среде Windows. Основы теории и интенсивная практика на компьютере: Учебное пособие–М.: Финансы и статистика, 1999.–384 с.
12. Вентцель Е.С., Овчаров Л.А. Теория вероятностей и ее инженерные приложения. – М.: Наука, 1988.–480 с.
13. Вентцель Е.С., Овчаров Л.А. Теория случайных процессов и ее инженерные приложения.–М.: Наука, 1991.–384 с.
14. Виссмен мл У., Харбаф Т.И, Кнепп Д.У. Введение в гидрологию. Гидрометеиздат, 1979.-470с.
15. Владимиров А.М., Дружинин В.С. Сборник задач и упражнений по гидрологическим расчётам. Гидрометеиздат, 1992.-208с.
16. Гандин Л.С. Объективный анализ метеорологических

- колебаний.- Л.:Гидрометеиздат, 1963.-280с.
- 17.Закс Л. Статистическое оценивание. М.: «Статистика», 1976.-600 с.
- 18.Исаев А.А. Статистика в метеорологии и климатологии.- М.:Изд-во МГУ, 1988.-248с.
- 19.Кайсл Ч. Анализ временных рядов гидрологических данных. Л.: Гидрометеиздат, 1972.-138 с.
- 20.Клибашев К.П., Горошков И.Ф. Гидрологические расчёты. Л.:Гидрометеиздат, 1970.-460с.
- 21.Международное руководство по методам расчета основных гидрологических характеристик. – Л.: Гидрометеиздат, 1984.-247 с.
- 22.Митропольский А.К. Техника статистических вычислений.- М.: Наука, 1971. –576 с.
- 23.Музылев С.В., Привальский В.Е., Раткович Д.Д. Статические модели в инженерной гидрологии.- Л.:Наука, 1982.-184с.
- 24.Определения основных расчетных гидрологических характеристик. СП 33-101-2003.-М.: Стройиздат, 2004.-72 с.
- 25.Поляк И.И. Методы анализа случайных процессов и полей в климатологии.- Л.:Гидрометеиздат, 1979.-256.
- 26.Поляк И.И. Численные методы анализа наблюдений.- Л.:Гидрометеиздат, 1975.-211с.
- 27.Пособие по определению расчетных гидрологических характеристик.-Л.: Гидрометеиздат, 1984.-447 с.
- 28.Рождественский А.В., Ежов А.В., Сахарюк А.В. Оценка точности гидрологических расчетов.-Л.: Гидрометеиздат, 1990.-273 с.
- 29.Рождественский А.В. Оценка точности кривых распределения гидрологических характеристик.-Л.: Гидрометеиздат, 1977.-268 с.
- 30.Рождественский А.В., Чеботарев А.И. Статистические методы в гидрологии.-Л.: Гидрометеиздат, 1974.-424 с.
- 31.Сванидзе Г.Г. Математическое моделирования гидрологических рядов. – Л.: Гидрометеиздат, 1977.-296 с.

32. Сикан А.В. Методы статистической обработки гидрометеорологической информации. СПб.: изд. РГГМУ, 2007.- 279с.
33. Справочник по прикладной статистике. Т. 1, 2 / Под ред. Э. Ллойда, У. Линдермана.– М.: Финансы и статистика, 1990.
34. Химмельблау Д. Анализ процессов статистическими методами.–М.: Наука, 1973.–958 с.
35. Щелутко В.А. Численные методы в гидрологии. – Л.: Гидрометеоиздат, 1991.–238 с.
36. David A. Chin. Water-resources Engineering (Second edition). Pearson Education International, USA, New Jersey, 2006.-962pp.
37. V.T.Chow, D.R.Maidment and L.W. Mays. Applied Hydrology. Mc Graw-Hill, Inc., New York, 1988.-572 pp.

Ə L A V Ə L Ə R

Prisonun III tip analitik təminat əyrisinin normallaşdırılmış ordinatları

$$t_p = f(C_s, p_k) \quad t_p = (x_p - \bar{x}) / \sigma = (k_p - 1) / C_v$$

C_s	Təminat, p%																S	
	0.01	0.1	1.0	5.0	10	20	25	30	50	70	75	80	90	95	97	99		99.9
-1.8	1.11	1.11	1.09	1.02	0.94	0.80	0.72	0.64	0.28	-0.24	-0.42	-0.64	-1.32	-1.99	-2.46	-3.50	-5.64	-0.51
-1.6	1.26	1.24	1.20	1.10	0.99	0.81	0.73	0.64	0.25	-0.28	-0.46	-0.68	-1.33	-1.97	-2.42	-3.39	-5.37	-0.45
-1.4	1.41	1.39	1.32	1.17	1.04	0.83	0.73	0.64	0.22	-0.31	-0.49	-0.71	-1.34	-1.95	-2.37	-3.27	-5.09	-0.39
-1.2	1.68	1.58	1.45	1.24	1.08	0.84	0.74	0.63	0.19	-0.35	-0.52	-0.73	-1.34	-1.92	-2.31	-3.15	-4.81	-0.34
-1.0	1.92	1.79	1.59	1.32	1.13	0.85	0.73	0.62	0.16	-0.41	-0.55	-0.76	-1.34	-1.88	-2.25	-3.02	-4.53	-0.27
-0.8	2.23	2.02	1.74	1.38	1.17	0.86	0.73	0.60	0.13	-0.44	-0.58	-0.79	-1.34	-1.84	-2.18	-2.89	-4.24	-0.22
-0.6	2.57	2.27	1.88	1.45	1.20	0.85	0.72	0.59	0.10	-0.47	-0.61	-0.80	-1.33	-1.80	-2.12	-2.75	-3.96	-0.17
-0.4	2.98	2.54	2.03	1.52	1.23	0.85	0.71	0.57	0.07	-0.50	-0.63	-0.82	-1.32	-1.75	-2.04	-2.61	-3.66	-0.11
-0.2	3.37	2.81	2.18	1.58	1.26	0.85	0.69	0.55	0.03	-0.55	-0.65	-0.83	-1.30	-1.70	-1.96	-2.47	-3.38	-0.05
0.0	32.72	3.09	2.33	1.64	1.28	0.84	0.67	0.52	0.00	-0.52	-0.67	-0.84	-1.28	-1.64	-1.88	-2.33	-3.09	0.00
0.2	4.16	3.38	2.47	1.70	1.30	0.83	0.65	0.50	-0.03	-0.50	-0.69	-0.85	-1.26	-1.58	-1.79	-2.81	-2.81	0.06
0.4	4.61	3.66	2.61	1.75	1.32	0.82	0.63	0.47	-0.07	-0.52	-0.71	-0.85	-1.23	-1.52	-1.70	-2.03	-2.54	0.11

C_s	Terminat, p%																	S
	0.01	0.1	1.0	5.0	10	20	25	30	50	70	75	80	90	95	97	99	99.9	
0.6	5.05	3.96	2.75	1.80	1.33	0.80	0.61	0.44	-0.10	-0.55	-0.72	-0.85	-1.20	-1.45	-1.61	-1.88	-2.27	0.17
0.8	5.50	4.24	2.89	1.84	1.34	0.78	0.58	0.41	-0.13	-0.59	-0.73	-0.86	-1.17	-1.38	-1.52	-1.74	-2.02	0.22
1.0	5.96	4.53	3.02	1.88	1.34	0.76	0.55	0.38	-0.16	-0.60	-0.73	-0.85	-1.13	-1.32	-1.42	-1.59	-1.79	0.28
1.2	5.41	4.81	3.15	1.92	1.34	0.73	0.52	0.35	-0.19	-0.62	-0.74	-0.84	-1.08	-1.24	-1.33	-1.45	-1.58	0.34
1.4	6.87	5.09	3.27	1.95	1.34	0.71	0.49	0.31	-0.22	-0.63	-0.73	-0.83	-1.04	-1.17	-1.23	-1.32	-1.39	0.39
1.6	7.31	5.37	3.39	1.97	1.33	0.68	0.46	0.28	-0.25	-0.64	-0.73	-0.81	-0.99	-1.10	-1.14	-1.20	-1.24	0.45
1.8	7.76	5.64	3.50	1.99	1.32	0.64	0.42	0.24	-0.28	-0.64	-0.72	-0.80	-0.94	-1.02	-1.06	-1.09	-1.11	0.51
2.0	8.21	5.91	3.60	2.00	1.30	0.61	0.39	0.20	-0.31	-0.64	-0.71	-0.78	-0.90	-0.95	-0.97	-0.99	-1.00	0.57
2.2	8.63	6.14	3.68	2.02	1.27	0.57	0.35	0.16	-0.33	-0.64	-0.69	-0.75	-0.84	-0.88	-0.90	-0.90	-0.91	0.52
2.4	9.00	6.37	3.78	2.00	1.25	0.52	0.29	0.12	-0.35	-0.62	-0.67	-0.72	-0.79	-0.82	-0.83	-0.83	-0.83	0.67
2.6	9.39	6.51	3.86	2.00	1.21	0.48	0.25	0.085	-0.37	-0.61	-0.66	-0.70	-0.75	-0.76	-0.77	-0.77	-0.77	0.72
2.8	9.77	6.86	3.96	2.00	1.18	0.44	0.22	0.057	-0.39	-0.60	-0.64	-0.67	-0.70	-0.71	-0.71	-0.72	-0.72	0.76
3.0	10.16	7.10	4.05	1.97	1.13	0.39	0.19	0.027	-0.40	-0.59	-0.62	-0.64	-0.66	-0.66	-0.67	-0.67	-0.67	0.80

Kritski-Menkelin təminatlar əyrisinin modul əmsalları ilə ifadə olunmuş ordinatları (üçparametrlı qamma paylanma), $C_s/C_v=0.5$

p%	Variasiya əmsalı, C_v							
	0,0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7
0,01	1,00	1,38	1,76	2,13	2,47	2,74	2,91	2,89
0,1	1,00	1,31	1,63	1,95	2,25	2,50	2,69	2,74
0,3	1,00	1,28	1,56	1,85	2,12	2,36	2,55	2,64
0,5	1,00	1,26	1,53	1,79	2,05	2,28	2,48	2,59
1,0	1,00	1,24	1,48	1,72	1,95	2,17	2,37	2,50
3	1,00	1,19	1,38	1,58	1,78	1,97	2,16	2,33
5	1,00	1,17	1,33	1,51	1,68	1,86	2,03	2,22
10	1,00	1,13	1,26	1,39	1,53	1,67	1,83	2,01
20	1,00	1,08	1,17	1,25	1,35	1,44	1,56	1,70
25	1,00	1,07	1,13	1,20	1,27	1,35	1,45	1,56
30	1,00	1,05	1,10	1,16	1,21	1,27	1,35	1,42
40	1,00	1,02	1,05	1,07	1,1	1,12	1,15	1,16
50	1,00	0,999	0,997	0,993	0,998	0,980	0,962	0,920
60	1,00	0,974	0,946	0,915	0,881	0,839	0,780	0,690
70	1,00	0,947	0,882	0,834	0,769	0,693	0,569	0,476
75	1,00	0,932	0,862	0,789	0,709	0,615	0,503	0,376
80	1,00	0,915	0,829	0,740	0,643	0,533	0,409	0,282
90	1,00	0,872	0,744	0,615	0,48	0,343	0,215	0,115
95	1,00	0,837	0,676	0,517	0,362	0,221	0,113	0,047
97	1,00	0,814	0,633	0,458	0,295	0,160	0,070	0,024
99	1,00	0,772	0,554	0,354	0,189	0,080	0,025	0,006
99,5	1,00	0,748	0,511	0,302	0,144	0,051	0,013	0,002
99,7	1,00	0,732	0,482	0,269	0,117	0,037	0,008	0,001
99,9	1,00	0,700	0,428	0,210	0,076	0,019	0,003	0,000

Kritski-Menkelin təminatlar əyrisinin modul əmsalları ilə ifadə olunmuş ordinatları (üçparametrlı gamma paylanma), $C_s/C_v=1.0$

p %	Variasiya əmsalı, C_v									
	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
0,01	1,38	1,81	2,26	2,70	3,15	3,57	3,95	4,31	4,64	4,92
0,1	1,32	1,67	2,03	2,40	2,77	3,13	3,48	3,82	4,13	4,42
0,3	1,28	1,59	1,91	2,23	2,56	2,89	3,21	3,53	3,84	4,14
0,5	1,27	1,55	1,84	2,15	2,46	2,77	3,08	3,38	3,69	3,99
1,0	1,24	1,49	1,76	2,03	2,30	2,59	2,88	3,16	3,46	3,75
3	1,19	1,39	1,60	1,82	2,04	2,27	2,50	2,75	3,01	3,29
5	1,17	1,34	1,52	1,70	1,90	2,10	2,30	2,53	2,76	3,02
10	1,13	1,26	1,40	1,54	1,68	1,83	1,99	2,16	2,35	2,55
20	1,08	1,17	1,25	1,34	1,42	1,51	1,60	1,70	1,80	1,90
25	1,07	1,13	1,20	1,26	1,33	1,39	1,46	1,52	1,59	1,64
30	1,05	1,10	1,15	1,20	1,24	1,29	1,33	1,37	1,39	1,40
40	1,02	1,04	1,06	1,08	1,09	1,10	1,10	1,08	1,05	0,995
50	0,998	0,993	0,985	0,972	0,954	0,928	0,891	0,836	0,76	0,665
60	0,973	0,943	0,909	0,870	0,824	0,768	0,698	0,613	0,512	0,406
70	0,946	0,890	0,830	0,764	0,692	0,609	0,515	0,413	0,309	0,215
75	0,932	0,861	0,787	0,708	0,622	0,528	0,426	0,321	0,224	0,144
80	0,915	0,829	0,740	0,648	0,549	0,445	0,338	0,237	0,151	0,088
90	0,873	0,748	0,623	0,500	0,378	0,264	0,165	0,092	0,045	0,019
95	0,838	0,683	0,533	0,392	0,263	0,157	0,081	0,036	0,013	0,004
97	0,816	0,642	0,478	0,329	0,202	0,107	0,048	0,018	0,005	0,001
99	0,775	0,568	0,383	0,229	0,115	0,047	0,015	0,004	0,001	0,000
99,5	0,752	0,528	0,335	0,182	0,081	0,028	0,008	0,002	0,000	0,000
99,7	0,737	0,502	0,303	0,154	0,062	0,019	0,004	0,001	0,000	0,000
99,9	0,707	0,451	0,247	0,108	0,036	0,008	0,001	0,000	0,000	0,000

Kritski-Menkelin təminatlar əyrisinin modul əmsalları ilə ifadə olunmuş ordinatları (üçparametrlı qamma paylanma), $C_s/C_v=1.0$

p %	Variasiya əmsalı, C_v									
	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
0,01	5,16	5,32	5,46	5,58	5,68	5,76	5,82	5,88	5,92	5,96
0,1	4,69	4,92	5,06	5,18	5,29	5,37	5,44	5,49	5,54	5,58
0,3	4,44	4,74	4,92	5,06	5,16	5,24	5,31	5,36	5,42	5,46
0,5	4,29	4,58	4,75	4,91	5,02	5,11	5,18	5,24	5,28	5,32
1,0	4,06	4,36	4,55	4,72	4,84	4,94	5,00	5,07	5,12	5,16
3	3,59	3,92	4,14	4,33	4,46	4,58	4,68	4,76	4,84	4,92
5	3,31	3,63	3,84	4,02	4,16	4,28	4,40	4,50	4,60	4,69
10	2,78	3,03	3,26	3,46	3,64	3,81	3,94	4,05	4,15	4,25
20	2,00	2,10	2,20	2,32	2,44	2,56	2,67	2,80	2,92	3,03
25	1,68	1,69	1,70	1,70	1,68	1,66	1,61	1,56	1,51	1,46
30	1,39	1,34	1,26	1,17	1,07	0,96	0,84	0,72	0,60	0,45
40	0,916	0,808	0,72	0,60	0,50	0,38	0,28	0,20	0,11	0,04
50	0,559	0,446	0,34	0,26	0,20	0,15	0,105	0,07	0,04	0,01
60	0,306	0,216	0,19	0,13	0,10	0,075	0,055	0,035	0,015	0,00
70	0,141	0,085	0,06	0,045	0,035	0,025	0,015	0,010	0,000	0,00
75	0,086	0,046	0,025	0,020	0,010	0,005	0,000	0,000	0,000	0,00
80	0,047	0,023	0,015	0,005	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,00
90	0,007	0,002	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,00
95	0,001	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,00
97	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,00
99	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,00
99,5	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,00
99,7	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,00
99,9	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,00

Kritski-Menkelin təminatlar əyrisinin modul əmsalları ilə ifadə olunmuş ordinatları (üçparametrlı qamma paylanma), $C_s/C_v=2.0$

p%	Variasiya əmsalı, C_v									
	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
0,01	1,42	1,92	2,52	3,20	3,98	4,85	5,81	6,85	7,98	9,21
0,1	1,34	1,73	2,19	2,70	3,27	3,87	4,56	5,30	6,08	6,91
0,3	1,30	1,64	2,02	2,45	2,91	3,42	3,96	4,55	5,16	5,81
0,5	1,28	1,59	1,94	2,32	2,74	3,20	3,68	4,19	4,74	5,30
1,0	1,25	1,52	1,82	2,16	2,51	2,89	3,29	3,71	4,15	4,60
3	1,20	1,41	1,64	1,87	2,13	2,39	2,66	2,94	3,21	3,51
5	1,17	1,35	1,54	1,74	1,94	2,15	2,36	2,57	2,78	3,00
10	1,13	1,26	1,40	1,54	1,67	1,80	1,94	2,06	2,19	2,30
20	1,08	1,16	1,24	1,31	1,38	1,44	1,50	1,54	1,58	1,61
25	1,06	1,13	1,18	1,23	1,28	1,31	1,34	1,37	1,38	1,39
30	1,05	1,09	1,13	1,16	1,19	1,21	1,22	1,22	1,22	1,20
40	1,02	1,04	1,05	1,05	1,04	1,03	1,01	0,984	0,955	0,916
50	0,997	0,986	0,970	0,948	0,918	0,886	0,846	0,800	0,748	0,693
60	0,972	0,938	0,898	0,852	0,803	0,748	0,692	0,632	0,568	0,511
70	0,945	0,886	0,823	0,760	0,691	0,622	0,552	0,488	0,424	0,357
75	0,931	0,858	0,784	0,708	0,634	0,556	0,489	0,416	0,352	0,288
80	0,915	0,830	0,745	0,656	0,574	0,496	0,419	0,352	0,280	0,223
90	0,873	0,754	0,640	0,532	0,436	0,352	0,272	0,208	0,154	0,105
95	0,842	0,696	0,565	0,448	0,342	0,256	0,181	0,120	0,082	0,051
97	0,821	0,660	0,517	0,392	0,288	0,202	0,139	0,088	0,046	0,030
99	0,782	0,594	0,436	0,304	0,206	0,130	0,076	0,040	0,019	0,010
99,5	0,761	0,560	0,394	0,269	0,166	0,099	0,054	0,027	0,012	0,005
99,7	0,748	0,537	0,374	0,240	0,144	0,082	0,042	0,019	0,008	0,003
99,9	0,719	0,492	0,319	0,192	0,107	0,052	0,027	0,008	0,004	0,001

Kritski-Menkelin təminatlar əyrisinin modul əmsalları ilə ifadə olunmuş ordinatları (üçparametrlı qamma paylanma), $C_s/C_v=2.0$

p%	Variasiya əmsalı, C_v									
	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6	1,7	1,8	1,9	2,0
0,01	10,5	11,8	13,2	14,7	16,4	5,76	18,2	22,2	24,4	26,6
0,1	7,75	8,65	9,60	10,6	11,6	5,37	13,5	14,6	15,8	17,0
0,3	6,47	7,10	7,98	8,70	9,50	5,24	11,0	11,9	12,7	13,6
0,5	5,90	6,50	7,13	7,80	8,42	5,11	9,5	10,1	10,8	11,4
1,0	5,05	5,53	6,02	6,55	7,08	4,94	8,0	8,6	9,2	9,8
3	3,80	4,12	4,42	4,71	4,98	4,58	5,5	5,8	6,2	6,5
5	3,22	3,40	3,60	3,80	3,96	4,28	4,3	4,5	4,7	5,0
10	2,40	2,50	2,57	2,64	2,70	3,81	2,6	2,6	2,6	2,6
20	1,62	1,63	1,62	1,61	1,59	2,56	1,6	1,56	1,5	1,5
25	1,39	1,35	1,33	1,31	1,28	1,66	1,24	1,22	1,2	1,18
30	1,18	1,14	1,11	1,08	1,04	0,96	0,98	0,95	0,92	0,89
40	0,870	0,830	0,770	0,725	0,670	0,38	0,58	0,53	0,48	0,44
50	0,640	0,580	0,520	0,460	0,405	0,15	0,310	0,265	0,23	0,20
60	0,450	0,390	0,334	0,283	0,234	0,075	0,160	0,130	0,105	0,085
70	0,300	0,250	0,203	0,155	0,120	0,025	0,070	0,060	0,05	0,045
75	0,241	0,193	0,146	0,106	0,077	0,005	0,050	0,040	0,03	0,025
80	0,175	0,130	0,094	0,065	0,046	0,000	0,027	0,020	0,015	0,010
90	0,074	0,049	0,030	0,016	0,009	0,000	0,004	0,003	0,002	0,001
95	0,030	0,016	0,009	0,004	0,002	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
97	0,016	0,008	0,004	0,002	0,001	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
99	0,005	0,002	0,001	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
99,5	0,002	0,001	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
99,7	0,001	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
99,9	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000

Kritski-Menkelin təminatlar əyrisinin modul əmsalları ilə ifadə olunmuş ordinatları (üçparametrlı qamma paylanma), $C_s/C_v=3.0$

p%	Variasiya əmsalı, C_v									
	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
0,01	1,46	2,05	2,83	3,80	4,94	6,26	7,70	9,30	11,0	12,8
0,1	1,36	1,81	2,35	3,01	3,74	4,56	5,44	6,38	7,37	8,41
0,3	1,31	1,69	2,12	2,65	3,21	3,82	4,48	5,17	5,88	6,61
0,5	1,28	1,63	2,03	2,48	2,97	3,50	4,06	4,64	5,24	5,84
1,0	1,25	1,55	1,90	2,26	2,66	3,07	3,50	3,96	4,41	4,87
3	1,20	1,42	1,66	1,91	2,17	2,43	2,69	2,95	3,21	3,47
5	1,17	1,36	1,55	1,75	1,95	2,14	2,34	2,52	2,70	2,88
10	1,13	1,26	1,40	1,52	1,65	1,76	1,87	1,97	2,06	2,15
20	1,08	1,16	1,23	1,29	1,34	1,38	1,42	1,45	1,47	1,49
25	1,07	1,12	1,17	1,21	1,24	1,26	1,28	1,28	1,29	1,29
30	1,05	1,09	1,12	1,14	1,15	1,16	1,16	1,15	1,14	1,13
40	1,02	1,03	1,03	1,03	1,01	0,995	0,972	0,946	0,915	0,883
50	0,997	0,981	0,959	0,930	0,898	0,862	0,823	0,783	0,741	0,699
60	0,972	0,933	0,890	0,843	0,794	0,745	0,695	0,646	0,597	0,549
70	0,945	0,884	0,822	0,758	0,696	0,636	0,578	0,523	0,471	0,422
75	0,931	0,858	0,786	0,715	0,647	0,583	0,522	0,465	0,412	0,363
80	0,915	0,830	0,748	0,669	0,596	0,528	0,465	0,407	0,354	0,306
90	0,876	0,761	0,656	0,563	0,479	0,406	0,341	0,284	0,235	0,193
95	0,844	0,708	0,588	0,487	0,400	0,326	0,263	0,210	0,166	0,129
97	0,825	0,675	0,548	0,443	0,355	0,282	0,221	0,171	0,131	0,099
99	0,786	0,618	0,484	0,369	0,283	0,213	0,158	0,116	0,083	0,058
99,5	0,769	0,588	0,446	0,334	0,249	0,182	0,131	0,092	0,064	0,043
99,7	0,756	0,568	0,422	0,312	0,228	0,163	0,114	0,079	0,053	0,034
99,9	0,732	0,531	0,381	0,273	0,192	0,131	0,088	0,057	0,036	0,022

Kritski-Menkelin təminatlar əyrisinin modul əmsalları ilə ifadə olunmuş ordinatları (üçparametrlı qamma paylanma), $C_s/C_v=3.0$

p%	Variasiya əmsalı, C_v									
	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
0,01	14,8	16,8	19,0	21,2	23,5	25,9	28,4	31,0	33,7	36,5
0,1	9,49	10,6	11,8	13,0	14,2	15,4	16,7	18,0	19,4	20,8
0,3	7,37	8,15	8,94	9,75	10,6	11,4	12,3	13,1	14,0	14,8
0,5	6,47	7,10	7,75	8,41	9,07	9,74	10,4	11,1	11,8	12,4
1,0	5,33	5,79	6,26	6,74	7,21	7,68	8,14	8,61	9,07	9,53
3	3,73	3,98	4,20	4,44	4,67	4,89	5,10	5,31	5,51	5,70
5	3,05	3,22	3,37	3,52	3,66	3,80	3,92	4,04	4,15	4,26
10	2,23	2,30	2,36	2,42	2,47	2,51	2,55	2,58	2,60	2,62
20	1,50	1,50	1,50	1,49	1,48	1,46	1,45	1,42	1,40	1,37
25	1,28	1,27	1,25	1,23	1,20	1,18	1,15	1,12	1,08	1,05
30	1,11	1,08	1,06	1,03	0,997	0,964	0,929	0,892	0,855	0,818
40	0,848	0,812	0,775	0,736	0,697	0,659	0,620	0,581	0,544	0,507
50	0,656	0,614	0,572	0,531	0,491	0,452	0,415	0,379	0,345	0,313
60	0,503	0,459	0,417	0,377	0,339	0,304	0,271	0,240	0,212	0,186
70	0,375	0,333	0,293	0,257	0,224	0,194	0,166	0,142	0,121	0,102
75	0,318	0,277	0,239	0,206	0,176	0,149	0,125	0,105	0,087	0,071
80	0,263	0,224	0,190	0,160	0,133	0,110	0,090	0,073	0,059	0,047
90	0,156	0,126	0,100	0,078	0,061	0,047	0,035	0,026	0,019	0,014
95	0,100	0,076	0,057	0,042	0,030	0,022	0,015	0,010	0,007	0,004
97	0,073	0,054	0,038	0,027	0,018	0,012	0,008	0,005	0,003	0,002
99	0,040	0,027	0,017	0,011	0,007	0,004	0,002	0,001	0,001	0,000
99,5	0,028	0,018	0,011	0,006	0,004	0,002	0,001	0,000	0,000	0,000
99,7	0,022	0,014	0,008	0,004	0,002	0,001	0,000	0,000	0,000	0,000
99,9	0,013	0,007	0,004	0,002	0,001	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000

Kritski-Menkelin təminatlar əyrisinin modul əmsalları ilə ifadə olunmuş ordinatları (üçparametrlı qamma paylanma), $C_s/C_v=4.0$

p%	Variasiya əmsalı, C_v									
	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
0,01	1,50	2,18	3,17	4,43	5,91	7,58	9,41	11,4	13,4	15,5
0,1	1,38	1,88	2,53	3,29	4,15	5,07	6,05	7,08	8,15	9,26
0,3	1,32	1,74	2,24	2,82	3,44	4,09	4,79	5,50	6,22	6,96
0,5	1,29	1,67	2,12	2,61	3,13	3,68	4,26	4,85	5,43	6,03
1,0	1,25	1,58	1,94	2,31	2,75	3,17	3,59	4,03	4,47	4,91
3	1,20	1,44	1,68	1,93	2,18	2,43	2,68	2,92	3,16	3,39
5	1,17	1,36	1,56	1,75	1,94	2,12	2,29	2,46	2,62	2,78
10	1,13	1,26	1,39	1,51	1,62	1,72	1,81	1,90	1,98	2,05
20	1,08	1,15	1,22	1,27	1,31	1,34	1,37	1,40	1,41	1,42
25	1,07	1,12	1,16	1,19	1,21	1,23	1,24	1,24	1,24	1,24
30	1,05	1,08	1,11	1,12	1,13	1,13	1,13	1,12	1,11	1,10
40	1,02	1,02	1,02	1,01	0,996	0,976	0,954	0,929	0,902	0,873
50	0,997	0,976	0,950	0,920	0,888	0,853	0,818	0,781	0,744	0,707
60	0,972	0,929	0,885	0,839	0,793	0,747	0,702	0,658	0,614	0,572
70	0,945	0,883	0,821	0,761	0,704	0,649	0,597	0,548	0,501	0,457
75	0,931	0,858	0,788	0,722	0,660	0,601	0,546	0,495	0,448	0,403
80	0,915	0,832	0,754	0,681	0,614	0,553	0,496	0,443	0,395	0,351
90	0,877	0,767	0,671	0,586	0,511	0,444	0,384	0,331	0,284	0,243
95	0,846	0,719	0,611	0,519	0,440	0,372	0,312	0,261	0,217	0,180
97	0,829	0,690	0,576	0,481	0,400	0,332	0,274	0,224	0,182	0,147
99	0,790	0,638	0,516	0,417	0,336	0,269	0,214	0,168	0,132	0,102
99,5	0,776	0,612	0,485	0,386	0,305	0,239	0,186	0,144	0,110	0,083
99,7	0,762	0,594	0,466	0,366	0,286	0,221	0,170	0,129	0,097	0,072
99,9	0,742	0,561	0,430	0,331	0,252	0,189	0,141	0,104	0,075	0,054

Kritski-Menkelin təminatlar əyrisinin modul əmsalları ilə ifadə olunmuş ordinatları (üçparametrlı qamma paylanma), $C_s/C_v=4.0$

p%	Variasiya əmsalı, C_v									
	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6	1,7	1,8	1,9	2,0
0,01	17,9	20,3	22,8	25,4	28,0	30,8	33,6	36,5	39,4	42,4
0,1	10,4	11,6	12,8	14,0	15,3	16,6	17,9	19,2	20,6	21,9
0,3	7,73	8,53	9,31	10,1	10,9	11,7	12,5	13,3	14,2	15,0
0,5	6,65	7,29	7,91	8,53	9,16	9,79	10,4	11,0	11,7	12,3
1,0	5,34	5,79	6,22	6,66	7,09	7,52	7,95	8,73	8,78	9,19
3	3,62	3,83	4,04	4,25	4,45	4,64	4,83	5,01	5,18	5,34
5	2,93	3,07	3,21	3,34	3,46	3,57	3,68	3,78	3,87	3,96
10	2,12	2,18	2,24	2,28	2,32	2,36	2,39	2,42	2,44	2,45
20	1,43	1,44	1,43	1,43	1,42	1,41	1,39	1,38	1,36	1,33
25	1,23	1,22	1,21	1,19	1,17	1,15	1,13	1,10	1,08	1,05
30	1,08	1,06	1,04	1,01	0,985	0,958	0,929	0,90	0,871	0,841
40	0,843	0,812	0,781	0,748	0,716	0,684	0,652	0,62	0,588	0,558
50	0,670	0,634	0,598	0,562	0,529	0,495	0,464	0,433	0,403	0,375
60	0,532	0,494	0,457	0,421	0,388	0,356	0,327	0,299	0,273	0,249
70	0,416	0,377	0,341	0,308	0,227	0,248	0,223	0,199	0,177	0,157
75	0,362	0,325	0,290	0,258	0,230	0,203	0,179	0,158	0,139	0,121
80	0,311	0,274	0,242	0,212	0,185	0,162	0,140	0,122	0,105	0,090
90	0,207	0,176	0,148	0,125	0,104	0,087	0,072	0,060	0,049	0,040
95	0,148	0,121	0,098	0,080	0,064	0,051	0,041	0,032	0,025	0,019
97	0,119	0,095	0,075	0,059	0,046	0,036	0,028	0,021	0,016	0,012
99	0,078	0,060	0,045	0,034	0,025	0,018	0,013	0,009	0,006	0,004
99,5	0,062	0,046	0,034	0,024	0,017	0,012	0,008	0,006	0,004	0,003
99,7	0,053	0,038	0,027	0,019	0,013	0,009	0,006	0,004	0,003	0,002
99,9	0,038	0,026	0,018	0,012	0,008	0,005	0,003	0,002	0,001	0,001

Kritski-Menkelin təminatlar əyrisinin modul əmsalları ilə ifadə olunmuş ordinatları (üçparametrlı qamma paylanma), $C_s/C_v=5.0$

p%	Variasiya əmsalı, C_v								
	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
0,01	1,54	2,34	3,43	4,91	6,65	8,70	10,70	12,71	15,05
0,1	1,40	1,95	2,66	3,51	4,44	5,40	6,43	7,54	8,64
0,3	1,34	1,78	2,31	2,92	3,52	4,22	4,91	5,69	6,41
0,5	1,31	1,70	2,16	2,69	3,21	3,77	4,34	4,94	5,52
1,0	1,27	1,61	1,98	2,38	2,79	3,21	3,65	4,06	4,50
3	1,20	1,44	1,67	1,93	2,17	2,42	2,62	2,88	3,10
5	1,17	1,36	1,55	1,74	1,90	2,08	2,22	2,41	2,54
10	1,13	1,26	1,37	1,49	1,60	1,70	1,79	1,86	1,94
20	1,08	1,15	1,21	1,25	1,30	1,32	1,34	1,36	1,36
25	1,06	1,11	1,15	1,17	1,20	1,20	1,20	1,22	1,22
30	1,05	1,08	1,09	1,10	1,10	1,11	1,10	1,10	1,09
40	1,02	1,02	1,01	1,00	0,98	0,97	0,94	0,92	0,90
50	0,99	0,97	0,94	0,92	0,88	0,85	0,82	0,78	0,75
60	0,97	0,93	0,88	0,84	0,79	0,75	0,71	0,67	0,63
70	0,94	0,88	0,82	0,77	0,71	0,66	0,61	0,56	0,52
75	0,93	0,86	0,79	0,73	0,67	0,62	0,56	0,51	0,47
80	0,91	0,83	0,75	0,69	0,63	0,57	0,52	0,47	0,42
90	0,88	0,77	0,68	0,61	0,53	0,47	0,41	0,36	0,32
95	0,84	0,73	0,63	0,55	0,47	0,40	0,34	0,29	0,25
97	0,82	0,70	0,60	0,51	0,43	0,36	0,31	0,26	0,22
99	0,78	0,66	0,55	0,45	0,37	0,31	0,25	0,20	0,16
99,5	0,76	0,63	0,52	0,42	0,34	0,28	0,23	0,18	0,14
99,7	0,75	0,62	0,51	0,41	0,32	0,26	0,21	0,16	0,12
99,9	0,73	0,59	0,47	0,37	0,29	0,23	0,18	0,14	0,10

Kritski-Menkelin təminatlar əyrisinin modul əmsalları ilə ifadə olunmuş ordinatları (üçparametrlı qamma paylanma), $C_s/C_v=6.0$

p%	Variasiya əmsalı, C_v								
	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
0,01	1,60	2,48	3,75	5,48	7,30	9,39	11,55	13,80	16,40
0,1	1,41	2,02	2,80	3,68	4,58	5,54	6,57	7,63	8,79
0,3	1,35	1,83	2,38	2,98	3,64	4,31	5,00	5,66	6,38
0,5	1,32	1,74	2,22	2,73	3,26	3,82	4,38	4,93	5,51
1,0	1,29	1,63	2,01	2,40	2,81	3,22	3,63	4,03	4,44
3	1,21	1,45	1,68	1,92	2,14	2,38	2,60	2,82	3,04
5	1,18	1,37	1,55	1,73	1,89	2,05	2,20	2,36	2,51
10	1,14	1,26	1,37	1,47	1,56	1,66	1,73	1,82	1,90
20	1,08	1,14	1,19	1,23	1,27	1,30	1,32	1,34	1,36
25	1,07	1,10	1,13	1,16	1,18	1,19	1,20	1,21	1,20
30	1,04	1,07	1,08	1,10	1,10	1,10	1,10	1,09	1,08
40	1,02	1,02	1,01	0,99	0,98	0,96	0,94	0,92	0,89
50	0,99	0,97	0,94	0,91	0,88	0,85	0,82	0,79	0,75
60	0,96	0,92	0,88	0,84	0,80	0,76	0,72	0,68	0,64
70	0,94	0,88	0,83	0,77	0,72	0,67	0,63	0,58	0,54
75	0,93	0,86	0,80	0,74	0,68	0,63	0,58	0,53	0,49
80	0,91	0,84	0,77	0,70	0,64	0,58	0,53	0,48	0,44
90	0,88	0,78	0,70	0,62	0,55	0,49	0,43	0,38	0,33
95	0,85	0,74	0,65	0,56	0,49	0,43	0,37	0,32	0,27
97	0,83	0,72	0,62	0,53	0,46	0,39	0,33	0,28	0,24
99	0,80	0,67	0,57	0,48	0,40	0,33	0,28	0,23	0,19
99,5	0,78	0,65	0,55	0,45	0,37	0,31	0,25	0,20	0,17
99,7	0,76	0,64	0,53	0,43	0,36	0,29	0,24	0,19	0,15
99,9	0,75	0,61	0,50	0,40	0,33	0,26	0,21	0,16	0,12

H – paylanmanın (A.V.Yejovun) təminatlar əyrisinin
modul əmsalları ilə ifadə olunmuş ordinatları

$C_s/C_v=0,3$ $C_s/C_v=0,5$

p%	Variasiya əmsalı, C_v				p%	Variasiya əmsalı, C_v				
	0,1	0,2	0,3	0,4		0,1	0,2	0,3	0,4	0,5
0,01	1,38	1,76	2,15	2,52	0,01	1,38	1,78	2,17	2,57	2,76
0,05	1,34	1,67	2,01	2,35	0,05	1,34	1,68	2,04	2,38	2,55
0,1	1,31	1,63	1,95	2,26	0,1	1,32	1,64	1,97	2,30	2,46
0,5	1,26	1,52	1,79	2,05	0,5	1,26	1,53	1,80	2,08	2,21
1	1,24	1,47	1,71	1,95	1	1,24	1,48	1,72	1,97	2,09
3	1,19	1,38	1,57	1,77	3	1,19	1,38	1,58	1,78	1,88
5	1,17	1,33	1,50	1,67	5	1,17	1,34	1,51	1,68	1,77
10	1,13	1,26	1,39	1,52	10	1,13	1,26	1,39	1,52	1,59
20	1,08	1,17	1,25	1,34	20	1,08	1,17	1,25	1,34	1,38
30	1,05	1,10	1,16	1,21	30	1,05	1,10	1,15	1,21	1,23
40	1,02	1,05	1,07	1,10	40	1,02	1,05	1,07	1,09	1,10
50	1,00	1,00	1,00	0,99	50	1,00	1,00	0,99	0,99	0,99
60	0,97	0,95	0,92	0,89	60	0,97	0,95	0,92	0,88	0,87
70	0,95	0,89	0,84	0,78	70	0,95	0,89	0,84	0,78	0,74
80	0,92	0,83	0,74	0,65	80	0,92	0,83	0,74	0,65	0,60
90	0,87	0,74	0,62	0,48	90	0,87	0,74	0,62	0,48	0,42
95	0,84	0,67	0,51	0,34	95	0,84	0,68	0,52	0,36	0,28
97	0,81	0,63	0,45	0,26	97	0,81	0,63	0,46	0,28	0,20
99	0,77	0,54	0,33	0,13	99	0,77	0,55	0,34	0,16	0,09
99,5	0,74	0,50	0,26	0,08	99,5	0,75	0,51	0,29	0,11	0,05
99,9	0,70	0,41	0,16	0,02	99,9	0,70	0,42	0,18	0,04	0,01

H – paylanmanın (A.V.Yejovun) təminatlar əyrisinin modul əmsalları ilə ifadə olunmuş ordinatları, $C_s/C_v=1.0$

p%	Variasiya əmsalı, C_v					
	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6
0,01	1,39	1,81	2,26	2,72	3,18	3,65
0,05	1,34	1,71	2,10	2,50	2,91	3,32
0,1	1,32	1,67	2,03	2,40	2,79	3,17
0,5	1,27	1,55	1,84	2,15	2,46	2,78
1	1,24	1,49	1,76	2,03	2,31	2,60
3	1,19	1,39	1,60	1,82	2,04	2,26
5	1,17	1,34	1,52	1,70	1,89	2,09
10	1,13	1,26	1,40	1,53	1,68	1,82
20	1,08	1,17	1,25	1,33	1,42	1,51
30	1,05	1,10	1,15	1,19	1,24	1,28
50	1,00	0,99	0,98	0,97	0,96	0,93
70	0,95	0,89	0,83	0,76	0,69	0,62
80	0,92	0,83	0,74	0,65	0,55	0,45
90	0,87	0,75	0,62	0,50	0,38	0,26
95	0,84	0,68	0,53	0,39	0,26	0,15
97	0,82	0,64	0,48	0,33	0,20	0,10
99	0,77	0,57	0,38	0,22	0,11	0,04
99,5	0,75	0,53	0,33	0,18	0,07	0,02
99,9	0,70	0,45	0,24	0,10	0,03	0,0004

H – paylanmanın (A.V.Yejovun) təminatlar ayrısının
modul əmsalları ilə ifadə olunmuş ordinatları, $C_s/C_v=1.5$

p%	Variasiya əmsalı, C_v							
	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8
0,01	1,40	1,86	2,37	2,92	3,51	4,14	4,80	5,50
0,05	1,35	1,75	2,18	2,66	3,16	3,37	4,27	4,86
0,1	1,33	1,70	2,10	2,54	3,00	3,50	4,02	4,57
0,5	1,27	1,57	1,89	2,23	2,6	2,99	3,40	3,83
1	1,24	1,51	1,79	2,09	2,41	2,75	3,11	3,48
3	1,20	1,40	1,62	1,85	2,09	2,34	2,61	2,88
5	1,17	1,35	1,53	1,72	1,92	2,13	2,35	2,57
10	1,13	1,26	1,40	1,54	1,68	1,82	1,97	2,12
20	1,08	1,17	1,25	1,32	1,40	1,48	1,55	1,61
30	1,05	1,10	1,14	1,18	1,21	1,24	1,26	1,28
50	1,00	0,99	0,98	0,96	0,93	0,90	0,86	0,81
70	0,95	0,89	0,83	0,76	0,69	0,61	0,54	0,46
80	0,92	0,83	0,74	0,65	0,56	0,47	0,38	0,30
90	0,87	0,75	0,63	0,52	0,41	0,31	0,22	0,15
95	0,84	0,69	0,54	0,42	0,31	0,21	0,13	0,08
97	0,82	0,65	0,50	0,36	0,25	0,16	0,09	0,05
99	0,78	0,58	0,41	0,27	0,16	0,09	0,045	0,019
99,5	0,76	0,54	0,37	0,23	0,13	0,06	0,028	0,011
99,9	0,71	0,47	0,29	0,15	0,07	0,03	0,006	0,002

χ^2 paylanması

Kvantillərin qiymətləri sərbəstlik dərəcələri ədədi, v , və əhəmiyyətlik səviyyəsindən, $\alpha\%$, asılı olaraq verilmişdir

F(x)		0,5	2,5	5	10	90	95	97,5	99,5
α		99,5	97,5	95	90	10	5	2,5	0,5
sərbəstlik dərəcələri ədədi, v	3	0,071	0,216	0,352	0,584	6,251	7,815	9,348	12,838
	4	0,207	0,484	0,711	1,064	7,779	9,488	11,143	14,830
	5	0,412	0,831	1,145	1,610	9,236	11,070	12,282	16,750
	6	0,676	1,237	1,635	2,204	10,645	12,592	14,449	18,475
	7	0,989	1,690	2,167	2,833	12,017	14,067	16,013	21,278
	8	1,314	2,180	2,733	3,490	13,362	15,507	17,535	21,955
	9	1,735	2,700	3,325	4,168	14,684	16,919	19,023	23,589
	10	2,156	3,247	3,940	4,865	15,987	18,307	20,484	25,188
	11	2,603	3,816	4,575	5,578	17,275	19,675	21,920	26,757
	12	3,074	4,404	5,226	6,304	18,549	21,026	23,336	28,300
	13	3,565	5,009	5,892	7,042	19,812	22,362	24,736	29,819
	14	4,075	5,629	6,571	7,790	21,064	23,685	26,119	31,319
	15	4,601	6,262	7,261	8,547	22,307	24,996	27,488	32,804
	16	5,142	6,908	7,962	9,312	23,542	26,296	28,845	34,267
	17	5,697	7,564	8,672	10,085	24,769	27,587	30,191	35,713
	18	6,265	8,231	9,390	10,865	25,989	28,869	31,526	37,156
	19	6,844	8,907	10,117	11,651	27,204	30,144	32,852	38,582
	20	7,434	9,591	10,851	12,443	28,412	31,140	34,170	39,897
	21	8,034	10,283	11,591	13,240	29,615	32,671	35,479	41,401
	22	8,643	10,982	12,338	14,041	30,813	33,924	36,781	42,796
	23	9,260	11,688	13,091	14,848	32,007	35,172	38,076	44,181
	24	9,886	12,401	13,848	15,659	33,196	36,415	39,364	45,558
	25	10,520	13,120	14,671	16,473	34,382	37,652	40,646	46,928
	26	11,760	13,844	15,379	17,292	35,563	38,885	41,923	48,290
	27	11,808	14,573	16,151	18,114	36,741	40,113	42,194	49,645
	28	12,461	15,308	16,928	18,939	37,916	41,337	44,461	50,993
	29	13,121	16,047	17,708	19,768	39,087	42,557	45,722	52,336
	30	13,787	16,791	18,498	20,599	40,256	43,773	46,979	53,672

Styudent paylanması

Kvantillərin mütləq qiymətləri sərbəstlik dərəcələri ədədindən, v asılı olaraq birtərəfli ($\alpha\%$) və ikitərəfli ($2\alpha\%$) əhəmiyyətlik səviyyələri üçün verilmişdir

F(t)		90	95	97,5	99,0	99,5
2α		20	10	5	2	1
α		10	5	2,5	1	0,5
sərbəstlik dərəcələri ədədi, v	1	3,077	6,313	12,71	31,82	63,66
	2	1,885	2,920	4,302	6,964	9,924
	3	1,638	2,353	3,182	4,54	5,840
	4	1,533	2,132	2,776	3,746	4,604
	5	1,476	2,015	2,571	3,365	4,032
	6	1,439	1,943	2,446	3,142	3,707
	7	1,415	1,895	2,365	2,998	3,500
	8	1,397	1,859	2,306	2,897	3,355
	9	1,383	1,833	2,262	2,821	3,250
	10	1,372	1,813	2,228	2,764	3,169
	11	1,363	1,796	2,201	2,718	3,105
	12	1,356	1,782	2,179	2,681	3,055
	13	1,350	1,771	2,160	2,650	3,012
	14	1,345	1,761	2,145	2,625	2,976
	15	1,341	1,753	2,131	2,603	2,947
	16	1,336	1,746	2,119	2,583	2,920
	17	1,333	1,740	2,110	2,567	2,898
	18	1,330	1,734	2,101	2,551	2,878
	19	1,328	1,729	2,093	2,540	2,861
	20	1,325	1,725	2,086	2,528	2,845
	21	1,323	1,721	2,079	2,517	2,831
	22	1,321	1,717	2,074	2,508	2,819
	24	1,318	1,711	2,064	2,492	2,797
	26	1,315	1,706	2,055	2,478	2,778
	28	1,313	1,701	2,048	2,467	2,763
	30	1,310	1,697	2,042	2,457	2,750
	32	1,308	1,693	2,036	2,448	2,738

F(t)		90	95	97,5	99,0	99,5
2 α		20	10	5	2	1
α		10	5	2,5	1	0,5
	34	1,307	1,691	2,032	2,441	2,728
	36	1,305	1,688	2,028	2,435	2,712
	38	1,304	1,686	2,024	2,429	2,720
	40	1,303	1,684	2,021	2,423	2,705
	50	1,299	1,676	2,009	2,403	2,678
	60	1,296	1,671	2,000	2,390	2,660
	80	1,292	1,664	1,990	2,373	2,638
	100	1,290	1,660	1,984	2,364	2,626
	200	1,286	1,653	1,972	2,345	2,601
	300	1,284	1,650	1,968	2,339	2,592
	500	1,283	1,647	1,964	2,333	2,585

F – paylanma (Fişer paylanması)

Kvantillərin qiymətləri sərbəstlik dərəcələri ədədindən, v_1 (böyük dispersiya üçün) və v_2 (kiçik dispersiya üçün) asılı olaraq $2\alpha=10\%$ əhəmiyyətlik səviyyəsində verilmişdir

v_2	sərbəstlik dərəcələri ədədi, v_1											∞
	1	4	6	8	10	15	20	30	60	120		
1	161	225	234	239	242	246	248	250	252	253	254	
2	181,5	19,2	19,3	19,4	19,4	19,4	19,4	19,5	19,5	19,5	19,5	
3	10,1	9,12	8,94	8,84	8,78	8,70	8,66	8,62	8,57	8,56	8,53	
4	7,71	6,39	6,16	6,04	5,69	5,86	5,80	5,74	5,68	5,66	5,63	
5	6,61	5,19	4,95	4,82	4,47	4,62	4,56	4,50	4,42	4,40	4,63	
6	5,99	4,53	4,28	4,15	4,06	3,94	3,87	3,81	3,72	3,71	3,67	
7	5,59	4,12	3,87	3,73	4,63	3,51	3,44	3,38	3,28	3,28	3,23	
8	5,32	3,84	3,58	3,44	4,34	3,22	3,15	3,08	3,00	2,98	3,93	
9	5,12	3,63	3,37	3,23	3,13	3,01	2,93	2,86	2,77	2,76	2,71	
10	4,96	3,48	3,22	3,07	2,97	2,85	2,77	2,70	2,61	2,59	2,54	
11	4,84	3,36	3,09	2,95	2,86	2,72	2,65	2,57	2,47	2,45	2,40	
12	4,75	3,26	3,00	2,85	2,76	2,62	2,54	2,46	2,36	2,35	2,30	
13	4,67	3,18	2,92	2,77	2,67	2,53	2,46	2,38	2,28	2,26	2,21	
14	4,60	3,11	2,85	2,70	2,60	2,46	2,39	2,31	2,21	2,19	2,13	
15	4,54	3,06	2,79	2,64	2,55	2,40	2,33	2,25	2,15	2,12	2,07	

v_2	sərbəstlik dərəcələri ədədi, v_1										∞
	1	4	6	8	10	15	20	30	60	120	
16	4,49	3,01	2,74	2,59	2,49	2,35	2,28	2,20	2,09	2,07	2,01
17	4,45	2,96	2,70	2,55	2,45	2,31	2,23	2,15	2,04	2,02	1,96
18	4,41	2,93	2,66	2,51	2,41	2,27	2,19	2,11	2,00	1,98	1,92
19	4,38	2,90	2,63	2,48	2,38	2,23	2,15	2,07	1,96	1,94	1,88
20	4,35	2,87	2,60	2,45	2,35	2,20	2,12	2,04	1,92	1,90	1,84
21	4,32	2,84	2,57	2,42	2,32	2,18	2,09	2,00	1,89	1,87	1,81
22	4,30	2,82	2,55	2,40	2,30	2,15	2,07	1,98	1,87	1,84	1,78
23	4,28	2,80	2,53	2,38	2,28	2,13	2,04	1,96	1,84	1,82	1,76
24	4,26	2,78	2,51	2,36	2,26	2,11	2,02	1,94	1,82	1,80	1,73
25	4,24	2,76	2,49	2,34	2,24	2,09	2,00	1,92	1,80	1,77	1,71
26	4,23	2,74	2,47	2,32	2,22	2,07	1,99	1,90	1,78	1,76	1,69
27	4,21	2,73	2,46	2,30	2,20	2,06	1,97	1,88	1,76	1,74	1,67
28	4,20	2,71	2,44	2,29	2,19	2,04	1,96	1,87	1,75	1,72	1,65
29	4,18	2,70	2,43	2,28	2,18	2,03	1,94	1,85	1,73	1,71	1,64
30	4,17	2,69	2,42	2,27	2,16	2,01	1,93	1,84	1,72	1,69	1,62
40	4,08	2,61	2,34	2,18	2,07	1,92	1,84	1,74	1,61	1,59	1,51
60	4,00	2,52	2,25	2,10	1,99	1,84	1,75	1,65	1,50	1,48	1,39
120	3,92	2,44	2,17	2,01	1,90	1,75	1,65	1,65	1,49	1,36	1,25
∞	3,84	2,37	2,09	1,94	1,83	1,67	1,57	1,46	1,28	1,24	1,00

F – paylanma (Fişer paylanması).

Kvantillərin qiymətləri sərbəstlik dərəcələri ədədindən, v_1 (böyük dispersiya üçün) və v_2 (kiçik dispersiya üçün) asılı olaraq $2\alpha=5\%$ əhəmiyyətlik səviyyəsində verilmişdir

v_2	sərbəstlik dərəcələri ədədi, v_1										
	1	4	6	8	10	15	20	30	60	120	∞
1	648	899	937	957	969	985	993	1001	1010	1014	1018
2	38,5	39,2	39,3	39,4	39,4	39,4	39,4	39,5	39,5	39,5	39,5
3	17,4	15,1	14,7	14,6	14,4	14,3	14,2	14,1	14,0	13,9	13,9
4	12,2	9,60	9,20	8,98	8,84	8,66	8,56	8,46	8,36	8,31	8,26
5	10,0	7,39	6,98	6,76	6,62	6,42	6,33	6,23	6,12	6,07	6,02
6	8,81	6,23	5,82	5,60	5,46	5,27	5,17	5,07	4,96	4,90	4,85
7	8,07	5,52	5,12	4,90	4,76	4,57	4,47	4,36	4,25	4,20	4,14
8	7,57	5,05	4,65	4,43	4,30	4,10	4,00	3,89	3,78	3,73	3,67
9	7,21	4,72	4,32	4,10	3,96	3,77	3,67	3,56	3,45	3,39	3,33
10	6,94	4,47	4,07	3,85	3,72	3,52	3,42	3,31	3,20	3,14	3,08
11	6,72	4,28	3,88	3,66	3,53	3,33	3,23	3,12	3,00	2,94	2,88
12	6,55	4,12	3,73	3,51	3,37	3,18	3,07	2,96	2,85	2,79	2,72
13	6,41	4,00	3,61	3,39	3,25	3,05	2,95	2,84	2,72	2,66	2,60
14	6,30	3,89	3,50	3,29	3,15	2,95	2,84	2,73	2,61	2,55	2,49
15	6,20	3,80	3,41	3,20	3,05	2,86	2,76	2,64	2,52	2,46	2,40

v_2	sərbəstlik dərəcələri ədədi, v_1										
	1	4	6	8	10	15	20	30	60	120	∞
16	6,16	3,73	3,34	3,12	2,99	2,79	2,68	2,57	2,45	2,38	2,32
17	6,04	3,66	3,28	3,06	2,92	2,72	2,62	2,50	2,39	2,32	2,25
18	5,98	3,61	3,22	3,01	2,87	2,67	2,56	2,44	2,32	2,26	2,19
19	5,92	3,56	3,17	2,96	2,82	2,62	2,51	2,38	2,27	2,20	2,13
20	5,87	3,55	3,13	2,91	2,77	2,57	2,46	2,35	2,22	2,16	2,09
21	5,83	3,47	3,09	2,87	2,73	2,53	2,42	2,31	2,18	2,11	2,04
22	5,79	3,44	3,05	2,84	2,70	2,50	2,39	2,27	2,14	2,08	2,03
23	5,75	3,41	3,02	2,81	2,67	2,47	2,36	2,24	2,11	2,04	1,97
24	5,72	3,38	2,99	2,78	2,64	2,44	2,33	2,21	2,08	2,01	1,94
25	5,69	3,35	2,97	2,75	2,61	2,41	2,30	2,18	2,05	1,98	1,91
26	5,66	3,33	2,94	2,72	2,59	2,39	2,28	2,16	2,03	1,95	1,88
27	5,63	3,31	2,92	2,71	2,57	2,34	2,25	2,13	2,00	1,93	1,85
28	5,61	3,29	2,9	2,69	2,55	2,34	2,23	2,11	1,98	1,91	1,83
29	5,59	3,27	2,88	2,67	2,53	2,32	2,21	2,09	1,96	1,89	1,81
30	5,57	3,25	2,87	2,65	2,51	2,31	2,20	2,07	1,94	1,87	1,77
40	5,42	3,13	2,74	2,53	2,39	2,18	2,07	1,94	1,80	1,72	1,74
60	5,28	3,01	2,63	2,41	2,27	2,06	1,94	1,82	1,67	1,58	1,48
120	5,15	3,89	2,52	2,30	2,16	1,95	1,82	1,69	1,53	1,43	1,31
∞	5,02	2,79	2,41	2,19	2,05	1,83	1,71	1,57	1,39	1,27	1,00

F – paylanma (Fisher paylanması)

Kvantillərin qiymətləri sərbəstlik dərəcələri ədədindən, v_1 (böyük dispersiya üçün) və v_2 (kiçik dispersiya üçün) asılı olaraq $2\alpha=1\%$ əhəmiyyətlik səviyyəsində verilmişdir

v_2	sərbəstlik dərəcələri ədədi, v_1										
	1	4	6	8	10	15	20	30	60	120	∞
2	198	199	199	199	199	199	199	199	199	199	199
3	55,6	46,2	44,8	44,1	43,7	43,1	42,8	42,25	42,1	42,0	41,8
4	31,3	23,2	22,0	21,4	21,10	20,4	20,2	19,9	19,6	19,5	19,3
5	22,8	15,6	14,5	14,0	13,6	13,1	12,9	12,7	12,4	12,3	12,1
6	18,6	12,1	11,1	10,6	10,3	9,81	9,59	9,36	9,12	9,00	8,88
7	16,2	10,1	9,16	8,68	8,38	7,97	7,75	7,53	7,31	7,19	7,08
8	14,7	8,81	7,95	7,57	7,21	6,81	6,61	6,40	6,18	6,06	5,95
9	13,6	7,96	7,13	6,69	6,42	6,03	5,83	5,52	5,41	5,30	5,19
10	12,8	7,34	6,51	6,12	5,85	5,47	5,27	5,07	4,86	4,75	4,64
11	12,2	6,88	6,10	5,68	5,42	5,05	4,68	4,65	4,45	4,34	4,23
12	11,7	6,52	5,76	5,35	5,09	4,72	4,53	4,33	4,12	4,01	3,90
13	11,4	6,23	5,48	5,08	4,82	4,46	4,27	3,97	3,76	3,76	3,44
14	11,1	6,00	5,26	4,86	4,60	4,25	4,06	3,86	3,66	3,55	3,26
15	10,8	5,80	5,08	4,67	4,42	4,07	3,88	3,69	3,48	3,37	3,26
16	10,6	5,54	4,91	4,52	4,24	3,96	3,73	3,41	3,33	3,22	3,11

v_2	sərbəstlik dərəcələri ədədi, v_1										
	1	4	6	8	10	15	20	30	60	120	∞
17	10,4	5,50	4,78	4,39	4,14	3,79	3,61	3,30	3,21	3,10	2,98
18	10,2	5,37	4,66	4,28	4,03	3,40	3,50	3,21	3,10	2,99	2,87
19	10,1	5,27	4,56	4,18	3,93	3,59	3,40	3,12	3,00	2,89	2,78
20	9,94	5,17	4,47	4,09	3,85	3,50	3,32	3,05	2,92	2,81	2,69
21	9,83	5,09	4,39	4,01	3,77	3,43	3,24	3,05	2,84	2,73	2,61
22	9,73	5,02	4,32	3,94	3,70	3,36	3,18	2,98	2,77	2,66	2,55
23	9,63	4,95	4,26	3,88	3,64	3,30	3,12	2,92	2,71	2,60	2,48
24	9,55	4,89	4,20	3,83	3,59	3,25	3,06	2,87	2,66	2,55	2,43
25	9,48	4,84	4,15	3,76	3,54	3,20	3,01	2,82	2,61	2,50	2,38
26	9,41	4,79	4,10	3,73	3,49	3,15	2,97	2,77	2,56	2,45	2,33
27	9,34	4,74	4,06	3,69	3,44	3,11	2,93	2,73	2,52	2,41	2,29
28	9,28	4,70	4,02	3,65	3,41	3,07	2,89	2,69	2,48	2,37	2,25
29	9,23	4,66	3,98	3,61	3,38	3,04	2,86	2,66	2,45	2,33	2,21
30	9,18	4,62	3,95	3,58	3,34	3,01	2,82	2,63	2,42	2,30	2,18
40	8,83	4,37	3,71	3,35	3,12	2,78	2,59	2,40	2,18	2,06	1,93
60	8,48	4,14	3,49	3,13	2,90	2,57	2,39	2,19	1,96	1,83	1,69
120	8,18	3,92	3,25	2,93	2,71	2,37	2,19	1,98	1,73	1,61	1,43
∞	7,88	3,72	3,09	2,74	2,52	2,19	2,00	1,79	1,53	1,36	1,00

Kolmoqorov paylanması
Ötmə (aşma) ehtimalları vahidin hissələri ilə verilmişdir

$$P(\lambda) = 2 \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} e^{-2k^2 \lambda^2}$$

α	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,3				0,9999	0,9998	0,9997	0,9995	0,9992	0,9987	0,9981
0,4	0,9972	0,9960	0,9945	0,9926	0,9983	0,9874	0,9840	0,9800	0,9753	0,9700
0,5	0,9639	0,9572	0,9497	0,9415	0,9325	0,9228	0,9124	0,9013	0,8796	0,8772
0,6	0,8643	0,8508	0,8368	0,8222	0,8073	0,7920	0,7746	0,7604	0,7442	0,7278
0,7	0,7112	0,6645	0,6777	0,6609	0,6440	0,6972	0,6104	0,5906	0,5770	0,5605
0,8	0,5441	0,5280	0,5120	0,4962	0,4806	0,4653	0,4503	0,4355	0,4209	0,4067
0,9	0,3927	0,3791	0,3657	0,3527	0,3999	0,3275	0,3154	0,3036	0,2921	0,2809
1	0,2700	0,2594	0,2492	0,2392	0,2296	0,2202	0,2111	0,2024	0,1939	0,1857
1,1	0,1777	0,1700	0,1626	0,1555	0,1486	0,1420	0,1356	0,1294	0,1235	0,1177
1,2	0,1122	0,1070	0,1019	0,0970	0,0924	0,0879	0,0836	0,0794	0,0755	0,0717
1,3	0,0681	0,0646	0,0613	0,0582	0,0551	0,0522	0,0495	0,0469	0,4444	0,0420
1,4	0,0397	0,0375	0,0354	0,0335	0,0316	0,0298	0,0282	0,0266	0,0250	0,0236
1,5	0,0222	0,0209	0,0197	0,0185	0,0174	0,0164	0,0154	0,0145	0,0136	0,0127
1,6	0,0120	0,0112	0,0105	0,0098	0,0092	0,0086	0,0081	0,0076	0,0071	0,0066
1,7	0,0062	0,0058	0,0054	0,0050	0,0047	0,0044	0,0041	0,0038	0,0035	0,0033
1,8	0,0032	0,0029	0,0027	0,0025	0,0023	0,0021	0,0020	0,0019	0,0017	0,0016
1,9	0,0015	0,0024	0,0013	0,0012	0,0011	0,0010	0,0009	0,0009	0,0008	0,0007
2	0,0007	0,0006	0,0006	0,0005	0,0005	0,0004	0,0004	0,0004	0,0003	0,0003
2,1	0,0003	0,0003	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0001	0,0001
2,2	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001
2,3	0,0001	0,0000								

$y=f(z)$ asılılığı üçün yanlış korrelyasiya effekti (Bensona görə)

Dəyişən kəmiyyətlər		Şərtlər	$r_{y,z}$ (aproksimasiya)	Variasiya əmsali, C	$r_{y,z}$ (qiymətlər)
y	z				
x_1/x_2	x_2	$r_{1,2} = 0$	$\frac{C_2}{(C_1^2 + C_2^2)^{1/2}}$	$C_1 = C_2$ $C_1 > C_2$	0,71 >0,71
x_1/x_2	x_3/x_2	$r_{1,2} = 0$ $r_{1,3} = 0$ $r_{2,3} = 0$	$\frac{C_2^2}{(C_1^2 + C_2^2)^{1/2} (C_2^2 + C_3^2)^{1/2}}$	$C_2 > C_1 C_3$ $C_2 = 2C_1 = 2C_3$ $C_2 = 2C_1 = 3C_3$ $C_2 = 3C_1 = 3C_3$	>0,50 0,80 0,85 0,90
x_1/x_2	x_2	$r_{1,2} = 0$	$\frac{-C_2}{(C_1^2 + C_2^2)^{1/2}}$	$C_2 > C_1$ $C_2 = 2C_1$ $C_2 = 3C_1$	<-0,70 -0,89 -0,95
x_1/x_2	x_3/x_2	$r_{1,2} = 0$ $r_{1,3} = 0$ $r_{2,3} = 0$	$\frac{C_2^2}{(C_1^2 + C_2^2)^{1/2} (C_2^2 + C_3^2)^{1/2}}$	$C_1 > C_2 C_3$ $C_2 = 2C_1 = 2C_3$ $C_2 = 3C_1 = 3C_3$	>0,50 0,80 0,90

Ən çox həqiqətbənzər metodu ilə λ_2 statistikasından asılı olaraq
variasiya əmsalını, C_v , təyin etmək üçün cədvəl
(Pirsonun III tip təminatlar ayrılırları üçün, $C_s/C_v=1$)

C_v	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,1	0,0022	0,0026	0,0032	0,0038	0,0044	0,0050	0,0058	0,0066	0,0074	0,0082
0,2	0,0090	0,0100	0,0111	0,0122	0,0132	0,0143	0,0157	0,01771	0,0184	0,0199
0,3	0,0212	0,0229	0,0246	0,0263	0,0280	0,0297	0,0318	0,0339	0,0360	0,0381
0,4	0,0402	0,0428	0,0454	0,0479	0,0505	0,0530	0,0562	0,0593	0,0624	0,0655
0,5	0,0686	0,0723	0,0760	0,0797	0,0835	0,0872	0,0916	0,0961	0,101	0,105
0,6	0,109	0,115	0,120	0,125	0,130	0,136	0,142	0,148	0,154	0,160
0,7	0,166	0,173	0,181	0,188	0,195	0,202	0,210	0,218	0,227	0,235
0,8	0,243	0,252	0,262	0,271	0,281	0,290	0,300	0,315	0,321	0,332
0,9	0,342	0,354	0,366	0,377	0,389	0,401	0,414	0,427	0,440	0,435
1	0,466	0,480	0,495	0,509	0,523	0,538	0,553	0,569	0,585	0,600
1,1	0,616	0,633	0,650	0,668	0,684	0,701	0,719	0,737	0,755	0,774
1,2	0,792									

Ən çox həqiqətbənzər metodu ilə λ_2 statistikasından asılı olaraq variasiya əmsalını,
 C_v , təyin etmək üçün cədvəl
 (Pirsonun III tip təminatlar ayrılırları üçün, $C_p/C_v=2$)

ζ	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,1	0,0022	0,0026	0,0031	0,0037	0,0043	0,0049	0,0056	0,0063	0,0071	0,0079
0,2	0,0087	0,0096	0,0106	0,0116	0,0126	0,0137	0,0148	0,0160	0,0172	0,0185
0,3	0,0198	0,0212	0,0296	0,0241	0,0256	0,0271	0,0287	0,0304	0,0321	0,0339
0,4	0,0357	0,0375	0,0394	0,0414	0,0434	0,0271	0,0476	0,0497	0,0519	0,0542
0,5	0,0565	0,0589	0,0613	0,0638	0,0664	0,0454	0,0716	0,0743	0,0771	0,0799
0,6	0,0828	0,0858	0,0887	0,0918	0,0949	0,0690	0,101	0,105	0,108	0,111
0,7	0,115	0,118	0,122	0,126	0,129	0,0981	0,137	0,141	0,145	0,149
0,8	0,153	0,157	0,162	0,166	0,170	0,133	0,180	0,184	0,189	0,194
0,9	0,198	0,203	0,208	0,213	0,218	0,175	0,229	0,234	0,240	0,245
1	0,251	0,256	0,262	0,258	0,274	0,280	0,286	0,292	0,298	0,304
1,1	0,311	0,317	0,323	0,330	0,337	0,343	0,350	0,357	0,364	0,371
1,2	0,378	0,386	0,393	0,400	0,408	0,415	0,423	0,431	0,438	0,446
1,3	0,454	0,462	0,471	0,479	0,487	0,496	0,504	0,513	0,521	0,530
1,4	0,539	0,548	0,557	0,566	0,575	0,584	0,594	0,603	0,613	0,623
1,5	0,632	0,642	0,652	0,662	0,672	0,682	0,692	0,703	0,713	0,724
1,6	0,734	0,745	0,756	0,767	0,772	0,789	0,800	0,811	0,823	0,824
1,7	0,846	0,857	0,860	0,881	0,893	0,905	0,917	0,929	0,911	0,953
1,8	0,966	0,978	0,991	1,004	1,016	1,029	1,042	1,055	1,069	1,082
1,9	1,095	1,109	1,122	1,136	1,150	1,063	1,177	1,191	1,205	1,220

Ən çox həqiqətləbənzər metodu ilə λ_2 statistikəsindən asılı olaraq
variasiya əmsalını, C_v , təyin etmək üçün cədvəl
(Pirsonun III tip təminatlar ayrılması üçün, $C_v/C_v=3$)

C_v	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,1	0,0022	0,0026	0,0031	0,0037	0,0043	0,0048	0,0055	0,0062	0,0070	0,0078
0,2	0,0085	0,0094	0,0104	0,0113	0,0122	0,0132	0,0143	0,0154	0,0165	0,0176
0,3	0,0188	0,0101	0,0214	0,0227	0,0240	0,0253	0,0267	0,0282	0,0297	0,0311
0,4	0,0326	0,0342	0,0359	0,0375	0,0391	0,0408	0,0425	0,0443	0,0461	0,0476
0,5	0,0497	0,0526	0,0535	0,0555	0,0574	0,0594	0,0614	0,0635	0,0656	0,0677
0,6	0,0698	0,0720	0,0742	0,0764	0,0786	0,0808	0,0832	0,0856	0,0879	0,0903
0,7	0,0926	0,0951	0,0976	0,100	0,103	0,105	0,108	0,110	0,113	0,116
0,8	0,118	0,121	0,124	0,127	0,129	0,132	0,135	0,138	0,141	0,144
0,9	0,147	0,150	0,153	0,156	0,159	0,162	0,165	0,168	0,171	0,174
1	0,177	0,181	0,184	0,187	0,191	0,194	0,197	0,201	0,204	0,208
1,1	0,211	0,215	0,218	0,222	0,225	0,229	0,232	0,236	0,240	0,243
1,2	0,247	0,251	0,255	0,258	0,262	0,266	0,270	0,274	0,277	0,281
1,3	0,286	0,289	0,294	0,298	0,302	0,306	0,311	0,315	0,319	0,323
1,4	0,327	0,332	0,336	0,340	0,345	0,349	0,354	0,358	0,363	0,367
1,5	0,372	0,376	0,381	0,386	0,390	0,395	0,400	0,404	0,409	0,414
1,6	0,419	0,424	0,428	0,433	0,438	0,443	0,448	0,453	0,458	0,463
1,7	0,468	0,474	0,479	0,484	0,489	0,495	0,500	0,505	0,511	0,516
1,8	0,521	0,527	0,532	0,538	0,543	0,549	0,555	0,560	0,566	0,572
1,9	0,578	0,584	0,589	0,595	0,600	0,606	0,612	0,618	0,624	0,630

Ən çox həqiqətəbənzər metodu ilə λ_2 statistikasından asılı olaraq
variasiya əmsalını, C_v , təyin etmək üçün cədvəl
(Pirsonun III tip təminatlar ayrılırları üçün, $C_g/C_v=4$)

C_g	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,1	0,0022	0,0026	0,0031	0,0037	0,0043	0,0048	0,0055	0,0062	0,0069	0,0076
0,2	0,0083	0,0092	0,0101	0,0110	0,0119	0,0128	0,0138	0,0148	0,0159	0,0169
0,3	0,0180	0,0192	0,0203	0,0215	0,0227	0,0239	0,0252	0,0265	0,0279	0,0292
0,4	0,0305	0,0319	0,0334	0,0348	0,0363	0,0377	0,0392	0,0408	0,0423	0,0439
0,5	0,0454	0,0471	0,0488	0,0505	0,0522	0,0538	0,0556	0,0574	0,0592	0,0609
0,6	0,0627	0,0646	0,0665	0,0683	0,0701	0,0721	0,0741	0,0760	0,0780	0,0800
0,7	0,0820	0,0840	0,0861	0,0882	0,0903	0,0923	0,0946	0,0966	0,0989	0,101
0,8	0,103	0,105	0,108	0,110	0,112	0,114	0,117	0,119	0,121	0,124
0,9	0,126	0,128	0,131	0,133	0,136	0,138	0,141	0,143	0,146	0,148
1	0,151	0,153	0,156	0,158	0,161	0,163	0,166	0,169	0,171	0,174
1,1	0,177	0,179	0,182	0,185	0,188	0,190	0,193	0,196	0,199	0,201
1,2	0,204	0,207	0,210	0,213	0,216	0,219	0,222	0,224	0,227	0,230
1,3	0,233	0,236	0,239	0,242	0,245	0,248	0,251	0,254	0,258	0,261
1,4	0,264	0,267	0,270	0,273	0,276	0,279	0,283	0,286	0,289	0,292
1,5	0,296	0,299	0,302	0,305	0,309	0,312	0,315	0,319	0,322	0,325
1,6	0,329	0,332	0,336	0,339	0,342	0,346	0,349	0,353	0,356	0,360
1,7	0,363	0,367	0,370	0,374	0,377	0,381	0,384	0,388	0,392	0,395
1,8	0,399	0,403	0,406	0,410	0,414	0,417	0,421	0,425	0,429	0,432
1,9	0,436	0,440	0,444	0,447	0,451	0,455	0,459	0,463	0,467	0,471

Dikson statistikasının, D_{mak} , böhran qiymətləri
(əhəmiyyətlik səviyyəsi, α %, sıradaxili korrelyasiya əmsalı, r ,
sıranın uzunluğu, n , və asimetriya əmsalından, C_s , asılı olaraq
sıranın maksimal həddi üçün)

α , %	Avtokorrelyasiya siya əmsalı, r	Sıranın uzunluğu, n						
		6	10	20	30	50	70	100
$C_s=0$								
1	0	0,70	0,53	0,39	0,34	0,31	0,28	0,25
	0,5	0,70	0,52	0,38	0,32	0,28	0,26	0,23
	0,9	0,66	0,47	0,32	0,27	0,22	0,20	0,17
5	0	0,56	0,41	0,30	0,26	0,22	0,20	0,18
	0,5	0,56	0,40	0,29	0,25	0,21	0,19	0,17
	0,9	0,54	0,38	0,24	0,20	0,16	0,14	0,12
10	0	0,48	0,35	0,25	0,22	0,19	0,17	0,15
	0,5	0,48	0,34	0,24	0,21	0,18	0,16	0,14
	0,9	0,46	0,32	0,19	0,16	0,13	0,12	0,10
$C_s=0,5$								
1	0	0,74	0,58	0,48	0,43	0,39	0,37	0,33
	0,5	0,74	0,57	0,44	0,39	0,36	0,34	0,31
	0,9	0,68	0,54	0,36	0,30	0,26	0,24	0,21
5	0	0,63	0,48	0,38	0,33	0,29	0,26	0,25
	0,5	0,62	0,47	0,36	0,31	0,27	0,26	0,23
	0,9	0,56	0,41	0,28	0,24	0,19	0,18	0,26
10	0	0,55	0,42	0,32	0,28	0,24	0,23	0,21
	0,5	0,54	0,39	0,30	0,26	0,22	0,21	0,19
	0,9	0,48	0,35	0,22	0,19	0,16	0,15	0,13

Dikson statistikasının, D_{mak} , böhran qiymətləri
(əhəmiyyətlik səviyyəsi, α %, sıradaxili korrelyasiya əmsalı, r ,
sıranın uzunluğu, n , və asimmetriya əmsalından, C_s , asılı olaraq
sıranın maksimal həddi üçün)

α %	Avtokorrelyasiya siya əmsalı, r	Sıranın uzunluğu, n						
		6	10	20	30	50	70	100
$C_s=1,0$								
1	0	0,79	0,65	0,55	0,50	0,47	0,45	0,41
	0,5	0,78	0,63	0,52	0,47	0,43	0,41	0,38
	0,9	0,73	0,58	0,42	0,36	0,32	0,30	0,27
5	0	0,68	0,55	0,45	0,40	0,36	0,34	0,31
	0,5	0,67	0,53	0,43	0,38	0,33	0,31	0,38
	0,9	0,59	0,45	0,31	0,37	0,23	0,22	0,19
10	0	0,60	0,48	0,39	0,34	0,30	0,28	0,26
	0,5	0,59	0,45	0,36	0,31	0,27	0,26	0,24
	0,9	0,51	0,38	0,26	0,23	0,19	0,18	0,16
$C_s=1,5$								
1	0	0,84	0,71	0,62	0,57	0,54	0,51	0,47
	0,5	0,82	0,69	0,58	0,53	0,50	0,48	0,45
	0,9	0,75	0,62	0,46	0,41	0,37	0,35	0,31
5	0	0,73	0,60	0,51	0,46	0,42	0,40	0,37
	0,5	0,72	0,58	0,49	0,44	0,39	0,38	0,34
	0,9	0,62	0,49	0,37	0,32	0,28	0,26	0,24
10	0	0,67	0,54	0,45	0,40	0,36	0,34	0,31
	0,5	0,64	0,51	0,42	0,38	0,33	0,32	0,29
	0,9	0,53	0,48	0,31	0,27	0,23	0,22	0,18

Dikson statistikasının, D_{mak} , böhran qiymətləri
(əhəmiyyətlik səviyyəsi, α %, sıradaxili korrelyasiya əmsalı, r ,
sıranın uzunluğu, n , və asimmetriya əmsalından, C_s , asılı olaraq
sıranın maksimal həddi üçün)

α %	Avtokorrelyasiya siya əmsalı, r	Sıranın uzunluğu, n						
		6	10	20	30	50	70	100
$C_s=2,0$								
1	0	0,88	0,77	0,68	0,64	0,61	0,58	0,53
	0,5	0,88	0,76	0,65	0,61	0,57	0,54	0,50
	0,9	0,79	0,61	0,52	0,46	0,41	0,39	0,36
5	0	0,79	0,67	0,58	0,52	0,48	0,45	0,42
	0,5	0,77	0,65	0,55	0,49	0,44	0,42	0,39
	0,9	0,67	0,56	0,41	0,36	0,32	0,30	0,27
10	0	0,72	0,60	0,51	0,46	0,41	0,39	0,36
	0,5	0,69	0,57	0,49	0,44	0,38	0,36	0,33
	0,9	0,57	0,46	0,34	0,30	0,26	0,25	0,23
$C_s=3,0$								
1	0	0,96	0,87	0,78	0,74	0,70	0,67	0,62
	0,5	0,96	0,86	0,76	0,71	0,67	0,63	0,58
	0,9	0,91	0,83	0,69	0,61	0,55	0,53	0,49
5	0	0,88	0,79	0,69	0,63	0,58	0,55	0,50
	0,5	0,88	0,78	0,67	0,61	0,55	0,52	0,47
	0,9	0,79	0,69	0,54	0,48	0,42	0,39	0,36
10	0	0,83	0,72	0,62	0,56	0,50	0,47	0,44
	0,5	0,81	0,70	0,60	0,54	0,48	0,45	0,42
	0,9	0,69	0,59	0,46	0,40	0,35	0,33	0,30

Dikson statistikasının, $D_{\min}$, böhran qiymətləri
(əhəmiyyətlik səviyyəsi, α %, sıradaxili korrelyasiya əmsalı, r ,
sıranın uzunluğu, n , və asimmetriya əmsalından, C_s , asılı olaraq
sıranın minimal həddi üçün)

α , %	Avtokorrelyasiya siya əmsalı, r	Sıranın uzunluğu, n						
		6	10	20	30	50	70	100
$C_s=0$								
1	0	0,70	0,53	0,39	0,34	0,28	0,24	0,21
	0,5	0,69	0,51	0,38	0,29	0,26	0,22	0,19
	0,9	0,69	0,49	0,35	0,25	0,20	0,19	0,17
5	0	0,56	0,41	0,30	0,26	0,21	0,19	0,16
	0,5	0,56	0,40	0,29	0,25	0,20	0,17	0,15
	0,9	0,56	0,36	0,24	0,19	0,15	0,13	0,12
10	0	0,48	0,35	0,25	0,21	0,17	0,15	0,13
	0,5	0,48	0,34	0,24	0,18	0,16	0,14	0,12
	0,9	0,47	0,30	0,20	0,15	0,12	0,11	0,09
$C_s=0,5$								
1	0	0,65	0,45	0,31	0,25	0,19	0,16	0,14
	0,5	0,65	0,45	0,31	0,25	0,19	0,16	0,14
	0,9	0,65	0,45	0,29	0,22	0,16	0,15	0,13
5	0	0,51	0,34	0,22	0,18	0,14	0,12	0,10
	0,5	0,51	0,34	0,22	0,18	0,14	0,12	0,10
	0,9	0,51	0,33	0,21	0,16	0,12	0,10	0,09
10	0	0,44	0,29	0,18	0,14	0,11	0,10	0,09
	0,5	0,44	0,29	0,18	0,14	0,11	0,10	0,09
	0,9	0,44	0,28	0,17	0,12	0,10	0,08	0,07

Dikson statistikasının, $D_{\min}$, böhran qiymətləri
(əhəmiyyətlik səviyyəsi, α %, sıradaxili korrelyasiya əmsalı, r ,
sıranın uzunluğu, n , və asimmetriya əmsalından, C_s , asılı olaraq
sıranın minimal həddi üçün)

α , %	Avtokorrelyasiya siya əmsalı, r	Sıranın uzunluğu, n						
		6	10	20	30	50	70	100
$C_s=1,0$								
1	0	0,58	0,38	0,22	0,17	0,12	0,09	0,08
	0,5	0,62	0,38	0,22	0,17	0,12	0,09	0,08
	0,9	0,66	0,43	0,26	0,18	0,12	0,09	0,08
5	0	0,44	0,27	0,16	0,12	0,08	0,07	0,06
	0,5	0,46	0,27	0,16	0,12	0,08	0,07	0,06
	0,9	0,52	0,30	0,17	0,13	0,09	0,07	0,6
10	0	0,37	0,23	0,12	0,09	0,07	0,06	0,05
	0,5	0,39	0,24	0,13	0,09	0,07	0,06	0,05
	0,9	0,42	0,25	0,14	0,10	0,07	0,06	0,05
$C_s=1,5$								
1	0	0,51	0,30	0,14	0,10	0,06	0,04	0,03
	0,5	0,57	0,32	0,17	0,11	0,07	0,05	0,04
	0,9	0,63	0,39	0,22	0,14	0,09	0,06	0,05
5	0	0,38	0,20	0,10	0,07	0,04	0,03	0,02
	0,5	0,41	0,22	0,11	0,07	0,04	0,03	0,02
	0,9	0,48	0,27	0,14	0,10	0,06	0,04	0,03
10	0	0,31	0,17	0,08	0,05	0,03	0,25	0,02
	0,5	0,34	0,18	0,09	0,06	0,04	0,25	0,02
	0,9	0,39	0,22	0,11	0,07	0,045	0,03	0,02

Dikson statistikasının, $D_{\min}$, böhran qiymətləri
(əhəmiyyətlik səviyyəsi, α %, sıradaxili korrelyasiya əmsalı, r ,
sıranın uzunluğu, n , və asimmetriya əmsalından, C_s , asılı olaraq
sıranın minimal həddi üçün)

α , %	Avtokorrelyasiya siya əmsalı, r	Sıranın uzunluğu, n						
		6	10	20	30	50	70	100
$C_s=2,0$								
1	0	0,42	0,22	0,09	0,05	0,025	0,015	0,01
	0,5	0,52	0,25	0,11	0,06	0,03	0,02	0,01
	0,9	0,60	0,35	0,18	0,11	0,6	0,04	0,03
5	0	0,31	0,14	0,06	0,03	0,015	0,01	0,007
	0,5	0,36	0,17	0,08	0,04	0,02	0,01	0,007
	0,9	0,45	0,24	0,11	0,07	0,04	0,02	0,15
10	0	0,24	0,11	0,04	0,02	0,01	0,008	0,005
	0,5	0,29	0,13	0,05	0,03	0,01	0,008	0,005
	0,9	0,36	0,19	0,09	0,05	0,03	0,02	0,01
$C_s=3,0$								
1	0	0,32	0,11	0,02	0,008	0,002	0,001	0,000
	0,5	0,43	0,15	0,04	0,01	0,004	0,002	0,001
	0,9	0,56	0,29	0,12	0,07	0,03	0,015	0,007
5	0	0,30	0,06	0,009	0,003	0,001	0,000	0,0000
	0,5	0,27	0,09	0,02	0,006	0,002	0,001	0,0000
	0,9	0,39	0,18	0,07	0,03	0,01	0,005	0,002
10	0	0,14	0,04	0,006	0,002	0,001	0,000	0,000
	0,5	0,18	0,06	0,01	0,003	0,001	0,000	0,000
	0,9	0,30	0,13	0,05	0,02	0,006	0,003	0,001

Smirnov-Qrabbs statistikasının, G_{mak} , böhran qiymətləri (əhəmiyyətlik səviyyəsi, α %, sıradaxili korrelyasiya əmsalı, r , sıranın uzunluğu, n , və asimetriya əmsalından, C_s , asılı olaraq sıranın maksimal həddi üçün)

α , %	Avtokorrelyasiya əmsalı, r	Sıranın uzunluğu, n						
		6	10	20	30	50	70	100
$C_s=0$								
1	0	1,95	2,43	2,94	3,17	3,38	3,52	3,54
	0,5	1,94	2,39	2,84	3,11	3,35	3,50	3,51
	0,9	1,92	2,30	2,67	2,86	3,18	3,10	3,18
5	0	1,84	2,17	2,60	2,79	3,00	3,10	3,21
	0,5	1,83	2,15	2,52	2,74	2,93	3,02	3,15
	0,9	1,80	2,10	2,37	2,51	2,67	2,79	2,90
10	0	1,75	2,04	2,44	2,60	2,85	2,91	3,02
	0,5	1,73	2,03	2,36	2,54	2,78	2,88	2,96
	0,9	1,70	1,99	2,22	2,34	2,52	2,62	2,72
$C_s=0,5$								
1	0	1,98	2,54	3,26	3,60	3,97	4,26	4,33
	0,5	1,98	2,50	3,17	3,52	3,90	4,21	4,30
	0,9	1,93	2,47	2,88	3,12	3,44	3,67	3,71
5	0	1,89	2,32	2,89	3,18	3,52	3,69	3,85
	0,5	1,88	2,29	2,80	3,10	3,43	3,61	3,74
	0,9	1,82	2,22	2,53	2,71	2,97	3,12	3,32
10	0	1,81	2,19	2,70	2,99	3,28	3,46	3,62
	0,5	1,79	2,16	2,64	2,88	3,20	3,39	3,52
	0,9	1,73	2,06	2,35	2,54	2,78	2,94	3,09

Smirnov-Qrabb's statistikasının, G_{mak} , böhran qiymətləri
(əhəmiyyətlik səviyyəsi, α %, sıradaxili korrelyasiya əmsalı, r ,
sıranın uzunluğu, n , və asimetriya əmsalından, C_s , asılı olaraq
sıranın maksimal həddi üçün)

α , %	Avtokorrelyasiya siya əmsalı, r	Sıranın uzunluğu, n						
		6	10	20	30	50	70	100
$C_s=1,0$								
1	0	2,00	2,64	3,53	3,96	4,59	4,96	5,16
	0,5	2,00	2,59	3,42	3,87	4,42	4,83	5,04
	0,9	1,96	2,52	3,06	3,36	3,72	4,10	4,18
5	0	1,93	2,46	3,18	3,54	4,00	4,24	4,47
	0,5	1,92	2,43	3,05	3,45	3,93	4,19	4,36
	0,9	1,85	2,29	2,68	3,92	3,25	3,50	4,74
10	0	1,87	2,34	2,98	3,34	3,74	3,98	4,22
	0,5	1,85	2,29	2,88	3,20	3,61	3,84	4,08
	0,9	1,77	2,13	2,49	2,74	3,05	3,26	3,47
$C_s=1,5$								
1	0	2,02	2,71	3,73	4,29	5,06	5,54	5,86
	0,5	2,02	2,68	3,58	4,19	4,90	5,40	5,76
	0,9	1,98	2,57	3,25	3,70	4,18	4,54	4,70
5	0	1,97	2,57	3,42	3,87	4,43	4,81	5,06
	0,5	1,96	2,53	3,30	3,74	4,28	4,70	4,94
	0,9	1,89	2,38	2,86	3,15	3,57	3,92	4,17
10	0	1,92	2,47	3,23	3,66	4,14	4,46	4,77
	0,5	1,90	2,40	3,11	3,52	4,00	4,32	4,60
	0,9	1,80	2,22	2,66	2,96	3,35	3,59	3,87

Smirnov-Qrabbs statistikasının, G_{mak} , böhran qiymətləri (əhəmiyyətlik səviyyəsi, α %, sıradaxili korrelyasiya əmsalı, r , sıranın uzunluğu, n , və asimmetriya əmsalından, C_s , asılı olaraq sıranın maksimal həddi üçün)

α , %	Avtokorrelyasiya siya əmsalı, r	Sıranın uzunluğu, n						
		6	10	20	30	50	70	100
$C_s=2,0$								
1	0	2,03	2,76	3,91	4,57	5,49	6,08	6,51
	0,5	2,03	2,75	3,85	4,48	5,31	5,97	6,39
	0,9	1,99	2,65	3,44	4,04	4,62	5,01	5,24
5	0	2,00	2,65	3,62	4,14	4,86	5,30	5,62
	0,5	1,99	2,62	3,55	4,04	4,67	5,14	5,50
	0,9	1,92	2,48	3,06	3,42	3,92	4,30	4,58
10	0	1,96	2,57	3,44	3,92	4,49	4,91	5,28
	0,5	1,95	2,52	3,33	3,79	4,35	4,79	5,08
	0,9	1,85	2,33	2,85	3,17	3,66	3,94	4,26
$C_s=3,0$								
1	0	2,04	2,82	4,10	4,93	6,06	6,88	7,63
	0,5	2,04	2,82	4,04	4,87	5,94	6,68	7,42
	0,9	2,03	2,80	3,94	4,51	5,23	5,95	6,37
5	0	2,03	2,77	3,91	4,59	5,51	6,11	6,63
	0,5	2,03	2,75	3,84	4,51	5,34	6,00	6,41
	0,9	2,00	2,67	3,56	4,00	4,61	5,10	5,50
10	0	2,01	2,72	3,76	4,38	5,15	5,67	6,23
	0,5	2,01	2,68	3,68	4,28	5,02	5,56	5,95
	0,9	1,94	2,54	3,30	3,69	4,25	4,70	5,12

Smirnov-Qrabb's statistikasının, $G_{\min}$, böhran qiymətləri
(əhəmiyyətlik səviyyəsi, α %, sıradaxili korrelyasiya əmsalı, r ,
sıranın uzunluğu, n , və asimmetriya əmsalından, C_s , asılı olaraq
sıranın minimal həddi üçün)

α , %	Avtokorrelyasiya siya əmsalı, r	Sıranın uzunluğu, n						
		6	10	20	30	50	70	100
$C_s=0$								
1	0	1,95	2,43	2,94	3,17	3,38	3,52	3,54
	0,5	1,94	2,39	2,84	3,11	3,35	3,50	3,51
	0,9	1,92	2,30	2,67	2,86	3,08	3,10	3,18
5	0	1,84	2,17	2,60	2,79	3,00	3,10	3,21
	0,5	1,83	2,15	2,52	2,74	2,93	3,02	3,15
	0,9	1,80	2,10	2,37	2,51	2,67	2,79	2,90
10	0	1,75	2,04	2,44	2,60	2,851	2,91	3,02
	0,5	1,73	2,03	2,36	2,54	2,78	2,88	2,97
	0,9	1,70	2,99	2,22	2,34	2,52	2,62	2,72
$C_s=0,5$								
1	0	1,88	2,27	2,50	2,51	2,53	2,55	2,57
	0,5	1,90	2,28	2,53	2,60	2,63	2,65	2,65
	0,9	1,93	2,29	2,56	2,64	2,72	2,74	2,86
5	0	1,74	2,00	2,22	2,28	2,36	2,39	2,42
	0,5	1,76	2,02	2,24	2,30	2,38	2,41	2,44
	0,9	1,78	2,04	2,26	2,32	2,40	2,44	2,48
10	0	1,66	1,88	2,09	2,17	2,27	2,29	2,32
	0,5	1,65	1,87	2,07	2,16	2,26	2,28	2,31
	0,9	1,64	1,86	2,06	2,15	2,28	2,27	2,30

Smirnov-Qrabbs statistikasının, $G_{\min}$, böhran qiymətləri
(əhəmiyyətlik səviyyəsi, α %, sıradaxili korrelyasiya əmsalı, r ,
sıranın uzunluğu, n , və asimmetriya əmsalından, C_s , asılı olaraq
sıranın minimal həddi üçün)

α , %	Avtokorrelyasiya siya əmsalı, r	Sıranın uzunluğu, n						
		6	10	20	30	50	70	100
$C_s=1,0$								
1	0	1,83	2,09	2,12	2,12	2,05	2,03	2,01
	0,5	1,87	2,10	2,17	2,13	2,11	2,11	2,04
	0,9	1,92	2,22	2,40	2,40	2,40	2,40	2,40
5	0	1,66	1,80	1,91	1,91	1,91	1,91	1,91
	0,5	1,70	1,86	1,93	1,93	1,93	1,93	1,93
	0,9	1,74	1,94	2,09	2,09	2,10	2,10	2,13
10	0	1,56	1,70	1,78	1,80	1,83	1,83	1,83
	0,5	1,60	1,72	1,82	1,83	1,85	1,85	1,85
	0,9	1,65	1,81	1,95	1,95	1,96	1,98	1,99
$C_s=1,5$								
1	0	1,78	1,91	1,82	1,73	1,66	1,60	1,56
	0,5	1,83	1,93	1,87	1,81	1,70	1,66	1,61
	0,9	1,89	2,11	2,26	2,22	2,10	2,01	2,00
5	0	1,56	1,61	1,60	1,57	1,53	1,50	1,48
	0,5	1,62	1,69	1,68	1,62	1,58	1,54	1,51
	0,9	1,71	1,86	1,94	1,87	1,84	1,81	1,79
10	0	1,45	1,51	1,50	1,48	1,46	1,44	1,44
	0,5	1,52	1,57	1,56	1,53	1,51	1,48	1,47
	0,9	1,60	1,72	1,79	1,75	1,71	1,70	1,69

Smirnov-Qrabbs statistikasının, $G_{\min}$, böhran qiymətləri (əhəmiyyətlik səviyyəsi, α %, sıradaxili korrelyasiya əmsalı, r , sıranın uzunluğu, n , və asimmetriya əmsalından, C_s , asılı olaraq sıranın minimal həddi üçün)

α , %	Avtokor- relyasiya əmsalı, r	Sıranın uzunluğu, n						
		6	10	20	30	50	70	100
$C_s=2,0$								
1	0	1,70	1,71	1,53	1,44	1,35	1,28	1,04
	0,5	1,78	1,77	1,62	1,53	1,43	1,35	1,31
	0,9	1,88	2,04	1,10	1,97	1,84	1,73	1,71
5	0	1,46	1,46	1,35	1,30	1,25	1,20	1,17
	0,5	1,54	1,54	1,44	1,36	1,29	1,25	1,22
	0,9	1,66	1,79	1,78	1,69	1,61	1,56	1,52
10	0	1,34	1,34	1,27	1,23	1,18	1,15	1,15
	0,5	1,43	1,43	1,35	1,29	1,23	1,20	1,17
	0,9	1,55	1,63	1,63	1,59	1,50	1,46	1,43
$C_s=3,0$								
1	0	1,53	1,38	1,12	1,04	0,97	0,92	0,87
	0,5	1,65	1,52	1,28	1,15	1,04	0,96	0,92
	0,9	1,83	1,87	1,84	1,64	1,46	1,35	1,31
5	0	1,26	1,17	1,02	0,94	0,89	0,85	0,82
	0,5	1,38	1,28	1,10	1,03	0,94	0,89	0,85
	0,9	1,76	1,63	1,52	1,41	1,28	1,21	1,12
10	0	1,15	1,08	0,95	0,89	0,84	0,81	0,80
	0,5	1,25	1,18	1,02	0,95	0,88	0,85	0,82
	0,9	1,50	1,46	1,38	1,30	1,17	1,10	1,04

Standart normal əyri altındakı sahələr

z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
-4,0	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
-3,9	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
-3,8	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001
-3,7	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001
-3,6	0,0002	0,0002	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001
-3,5	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002
-3,4	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003	0,0002
-3,3	0,0005	0,0005	0,0005	0,0004	0,0004	0,0004	0,0004	0,0004	0,0004	0,0003
-3,2	0,0007	0,0007	0,0006	0,0006	0,0006	0,0006	0,0006	0,0005	0,0005	0,0005
-3,1	0,0010	0,0009	0,0009	0,0009	0,0008	0,0008	0,0008	0,0008	0,0007	0,0007
-3,0	0,0013	0,0013	0,0013	0,0012	0,0012	0,0011	0,0011	0,0011	0,0010	0,0010
-2,9	0,0019	0,0018	0,0018	0,0017	0,0016	0,0016	0,0015	0,0015	0,0014	0,0014
-2,8	0,0026	0,0025	0,0024	0,0023	0,0023	0,0022	0,0021	0,0021	0,0020	0,0019
-2,7	0,0035	0,0034	0,0033	0,0032	0,0031	0,0030	0,0029	0,0028	0,0027	0,0026
-2,6	0,0047	0,0045	0,0044	0,0043	0,0041	0,0040	0,0039	0,0038	0,0037	0,0036
-2,5	0,0062	0,0060	0,0059	0,0057	0,0055	0,0054	0,0052	0,0051	0,0049	0,0048
-2,4	0,0082	0,0080	0,0078	0,0075	0,0073	0,0071	0,0069	0,0068	0,0066	0,0064
-2,3	0,0107	0,0104	0,0102	0,0099	0,0096	0,0094	0,0091	0,0089	0,0087	0,0084
-2,2	0,0139	0,0136	0,0132	0,0129	0,0125	0,0122	0,0119	0,0116	0,0113	0,0110

z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
-2,1	0,0179	0,0174	0,0170	0,0166	0,0162	0,0158	0,0154	0,0150	0,0146	0,0143
-2,0	0,0228	0,0222	0,0217	0,0212	0,0207	0,0202	0,0197	0,0192	0,0188	0,0183
-1,9	0,0287	0,0281	0,0274	0,0268	0,0262	0,0256	0,0250	0,0244	0,0239	0,0233
-1,8	0,0359	0,0351	0,0344	0,0336	0,0329	0,0322	0,0314	0,0307	0,0301	0,0294
-1,7	0,0446	0,0436	0,0427	0,0418	0,0409	0,0401	0,0392	0,0384	0,0375	0,0367
-1,6	0,0548	0,0537	0,0526	0,0516	0,0505	0,0495	0,0485	0,0475	0,0465	0,0455
-1,5	0,0668	0,0655	0,0643	0,0630	0,0618	0,0606	0,0594	0,0582	0,0571	0,0559
-1,4	0,0808	0,0793	0,0778	0,0764	0,0749	0,0735	0,0721	0,0708	0,0694	0,0681
-1,3	0,0968	0,0951	0,0934	0,0918	0,0901	0,0885	0,0869	0,0853	0,0838	0,0823
-1,2	0,1151	0,1131	0,1112	0,1093	0,1075	0,1056	0,1038	0,1020	0,1003	0,0985
-1,1	0,1357	0,1335	0,1314	0,1292	0,1271	0,1251	0,1230	0,1210	0,1190	0,1170
-1,0	0,1587	0,1562	0,1539	0,1515	0,1492	0,1469	0,1446	0,1423	0,1401	0,1379
-0,9	0,1841	0,1814	0,1788	0,1762	0,1736	0,1711	0,1685	0,1660	0,1635	0,1611
-0,8	0,2119	0,2090	0,2061	0,2033	0,2005	0,1977	0,1949	0,1922	0,1894	0,1867
-0,7	0,2420	0,2389	0,2358	0,2327	0,2297	0,2266	0,2236	0,2206	0,2177	0,2148
-0,6	0,2743	0,2709	0,2676	0,2643	0,2611	0,2578	0,2546	0,2514	0,2483	0,2451
-0,5	0,3085	0,3050	0,3015	0,2981	0,2946	0,2912	0,2877	0,2843	0,2810	0,2776
-0,4	0,3446	0,3409	0,3372	0,3336	0,3300	0,3264	0,3228	0,3192	0,3156	0,3121
-0,3	0,3821	0,3783	0,3745	0,3707	0,3669	0,3632	0,3594	0,3557	0,3520	0,3483
-0,2	0,4207	0,4168	0,4129	0,4090	0,4052	0,4013	0,3974	0,3936	0,3897	0,3859
-0,1	0,4602	0,4562	0,4522	0,4483	0,4430	0,4404	0,4364	0,4325	0,4286	0,4247

z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9875	0,9756	0,9761	0,9767
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817

z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
2.1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2.2	0,9861	0,9896	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2.3	0,9893	0,9920	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9917
2.4	0,9918	0,9940	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2.5	0,9938	0,9955	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2.6	0,9953	0,9966	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2.7	0,9965	0,9975	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2.8	0,9974	0,9982	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
2.9	0,9981	0,9987	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9986	0,9986	0,9986
3.0	0,9987	0,9991	0,9987	0,9988	0,9988	0,9989	0,9989	0,9989	0,9990	0,9990
3.1	0,9990	0,9993	0,9991	0,9991	0,9992	0,9992	0,9992	0,9992	0,9993	0,9993
3.2	0,9993	0,9995	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9995	0,9995	0,9995
3.3	0,9995	0,9997	0,9995	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9997
3.4	0,9997	0,9998	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9998
3.5	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998
3.6	0,9998	0,9998	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999
3.7	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999
3.8	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999
3.9	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
4.0	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000

Kolmoqorov – Smirnov statistikasının böhran qiymətləri

Sıranın uzunluğu	Əhəmiyyətlik səviyyəsi				
	0,20	0,15	0,10	0,05	0,01
1	0,900	0,925	0,950	0,975	0,995
2	0,684	0,726	0,776	0,842	0,929
3	0,585	0,597	0,642	0,708	0,829
4	0,494	0,525	0,564	0,624	0,734
5	0,446	0,474	0,510	0,563	0,669
6	0,410	0,436	0,470	0,521	0,618
7	0,381	0,405	0,438	0,486	0,577
8	0,358	0,381	0,411	0,457	0,543
9	0,339	0,360	0,388	0,432	0,514
10	0,322	0,342	0,368	0,409	0,486
11	0,307	0,326	0,352	0,391	0,468
12	0,295	0,313	0,338	0,375	0,450
13	0,284	0,302	0,325	0,361	0,433
14	0,274	0,292	0,314	0,349	0,418
15	0,266	0,283	0,304	0,338	0,404
16	0,258	0,274	0,295	0,328	0,391
17	0,250	0,266	0,286	0,318	0,380
18	0,244	0,259	0,278	0,309	0,370
19	0,237	0,252	0,272	0,301	0,361
20	0,231	0,246	0,264	0,294	0,352
25	0,210	0,220	0,240	0,264	0,320
30	0,190	0,200	0,220	0,242	0,290
35	0,180	0,190	0,210	0,230	0,270
40				0,210	0,250
50				0,190	0,230
60				0,170	0,210
70				0,160	0,190
80				0,150	0,180
90				0,140	
100				0,140	
Asimptotik düsturlar	$\frac{1.07}{\sqrt{n}}$	$\frac{1.14}{\sqrt{n}}$	$\frac{1.22}{\sqrt{n}}$	$\frac{1.36}{\sqrt{n}}$	$\frac{1.63}{\sqrt{n}}$

Qamma funksiyası

z	$\Gamma(z)$	z	$\Gamma(z)$	z	$\Gamma(z)$
1.00	1.00000	1.34	0.89222	1.68	0.90500
1.01	0.99433	1.35	0.89115	1.69	0.90678
1.02	0.98884	1.36	0.89018	1.70	0.90864
1.03	0.98355	1.37	0.88931	1.71	0.91057
1.04	0.97844	1.38	0.88854	1.72	0.91258
1.05	0.97350	1.39	0.88785	1.73	0.91467
1.06	0.96874	1.40	0.88726	1.74	0.91683
1.07	0.96415	1.41	0.88676	1.75	0.91906
1.08	0.95973	1.42	0.88636	1.76	0.92137
1.09	0.95546	1.43	0.88604	1.77	0.92376
1.10	0.95135	1.44	0.88581	1.78	0.92623
1.11	0.94740	1.45	0.88566	1.79	0.92877
1.12	0.94359	1.46	0.88560	1.80	0.93138
1.13	0.93993	1.47	0.88563	1.81	0.93408
1.14	0.93642	1.48	0.88575	1.82	0.93685
1.15	0.93304	1.49	0.88595	1.83	0.93969
1.16	0.92980	1.50	0.88623	1.84	0.94261
1.17	0.92670	1.51	0.88659	1.85	0.94561
1.18	0.92373	1.52	0.88704	1.86	0.94869
1.19	0.92089	1.53	0.88757	1.87	0.95184
1.20	0.91817	1.54	0.88818	1.88	0.95507
1.21	0.91558	1.55	0.88887	1.89	0.95838
1.22	0.91311	1.56	0.88964	1.90	0.96177
1.23	0.91075	1.57	0.89049	1.91	0.96523
1.24	0.90852	1.58	0.89142	1.92	0.96877
1.25	0.90640	1.59	0.89243	1.93	0.97240
1.26	0.90440	1.60	0.89352	1.94	0.97610
1.27	0.90250	1.61	0.89468	1.95	0.97988
1.28	0.90072	1.62	0.89592	1.96	0.98768
1.29	0.89904	1.63	0.89724	1.97	0.99171
1.30	0.89747	1.64	0.89864	1.98	0.99581
1.31	0.89600	1.65	0.90012	1.99	1.00000
1.32	0.89464	1.66	0.90167	2.00	
1.33	0.89338	1.67	0.90330		

Korrelyasiya əmsalının böhran qiymətləri

Sıranın uzunluğu	Müxtəlif etibarlılıq səviyyələrində, %, korrelyasiya əmsalının böhran qiymətləri			
	10	5	2	1
20	0.36	0.42	0.49	0.54
25	0.32	0.38	0.45	0.49
30	0.30	0.35	0.41	0.45
40	0.26	0.30	0.36	0.39
50	0.23	0.27	0.32	0.35
60	0.21	0.25	0.29	0.32
70	0.20	0.23	0.27	0.30
80	0.18	0.22	0.26	0.28
90	0.17	0.21	0.24	0.27
100	0.16	0.16	0.23	0.25

QEYDLƏR ÜÇÜN

QEYDLƏR ÜÇÜN

F.Ə.İmanov

HİDROMETEOROLOGİYADA STATİSTİK METODLAR

Yığılmağa verilmişdir: 12.04.2011

Çapa imzalanmışdır: 01.06.2011

Tiraj 300; ş.ç.v. 17

«MBM» MMC mətbəəsində
çap olunmuşdur