AZƏRBAYCAN UNİVERSİTETİ

AKİF MUSAYEV
ASLAN QƏHRƏMANOV

EKONOMETRİKAYA GİRİŞ

DƏRS VƏSAİTİ

Bakı- 2011

Azərbaycan Universitetinin Elmi Şurasının 5 mart 2011-cu il tarixli iclasının (Protokol №5) qərarı ilə dərs vəsaiti kimi çapa tövsiyə edilmişdir.

Elmi redaktor:
MƏCİD BAĞIROV
iqtisad elmləri namizədi, dosent

Rəyçi:
YADULLA HƏSƏNLİ
iqtisad elmləri doktoru

AKİF MUSAYEV, ASLAN QƏHRƏMANOV
Ekonometrikaya giriş
Bakı, 2011, 176 səh.

"Ekonometrika" müasir ali təhsilin iqtisadiyyat üzrə əsas fənlərindən biridir. İqtisadi kəmiyyətlərin xarakteristikalarının hesablanması, müxtəlif dəyişənlər arasında statistik asılılıqların qurulması, hipotezlərin yoxlanması, iqtisadi proseslərin təhlili və proqnozlaşdırılması ekonometrik üsullardan istifadə etməklə aparılır.

Kitab ali məktəblərdə "Ekonometrika" fənninin tədrisi üçün dərs vəsaiti kimi nəzərdə tutulmuşdur.

ISBN: 978-9952-8143-4-7

Təsadüfilik və nizamlılıq elə bir vəhdət yaradır ki,
biz onda mahiyyəti dərk edirik.
Tom Stoppard

ÖN SÖZ

Ekonometrika "oykos" (ev, təsərrüfat), "nomos" (qanun, qayda) və "metrika" (ölçmə) yunan sözlərinin birləşməsindən düzəldilmişdir və müasir iqtisadi təhlilin əsas fənlərindən biri olub, iqtisadi proseslərdə qanunauyğunluqların müəyyənləşdirilməsinin empirik üsullarını öyrənir. İqtisadiyyatda parametrlərin qiymətləri təsadüfi amillərdən asılı olduğundan ekonometrikada ehtimal nəzəriyyəsi və riyazi statistika qaydalarından daha çox istifadə edilir. Ona görə də bəzən ekonometrikanı tətbiqi riyazi statistika ilə eyniləşdirmə cəhdlərinə rast gəlmək mümkündür. Lakin bu, kökündən səhv yanaşmadır.

İqtisadiyyat, Riyaziyyat və Statistika elmləri müxtəlif olsalar da, onların müəyyən ortaq hissələri var. Riyaziyyatla İqtisadiyyatın kəsişməsi Riyazi iqtisadiyyat, İqtisadiyyatla Statistikanın kəsişməsi İqtisadi statistika, Riyaziyyatla Statistikanın kəsişməsi isə Riyazi statistika adlanır. Hər biri iki elmin ortaq hissəsi olan bu üç yeni elmin kəsişməsi nəticəsində isə Ekonometrika alınmışdır.

Beləliklə, Ekonometrika İqtisadiyyat, Riyaziyyat və Statistika arasında yerləşən bir elmdir və özünəməxsus fərqli xüsusiyyətləri var. Məsələn, burada tədqiqat aparmaq üçün lazım olan ədədi qiymətlərin çatışmazlığı həmişə çətinliklər yaradır. Ekonometrika ilə məşğul olan mütəxəssis eksperiment apara bilmir, yalnız məlum təsadüfi kəmiyyətlər əsasında nəticə çıxarmalıdır. Eksperimental elmlər (fizika, kimya, tibb, biologiya və s.) üzrə mütəxəssislər məlumat toplayır, sistemləşdirir və bunun əsasında nəzəriyyə yaradırlar; onlar lazımsız qiymətləri atıb istədikləri qədər eksperiment aparmaqla yeni qiymətlər ala bilərlər. Ekonometrika ilə məşğul olanlar isə, əslində, əllərində olan statistik məlumatları mütləq saxlamalıdırlar, çünki onların əsaslanacağı başqa heç nə yoxdur.

İnformasiya qıtlığı qarşıya çıxan real iqtisadi problemin həllini çətinləşdirir. Ona görə də Tətbiqi Ekonometrika iqtisadi nəzəriyyə, parametrlərin məlum qiymətləri və ekonometrik nəzəriyyə arasında müəyyən müvazinətin saxlanmasını tələb edir. Buradan da görünür ki, Ekonometrikada nəzəriyyə və praktika arasında fərq var. Nəzəriyyədə zəruri olan parametrlər konkret məsələdə məlum olmaya bilər.

Molla Nəsrəddinin lətifələrindən biri belədir:

"Aylı bir gecədə molla darvazasının qabağında əyilib diqqətlə yerə baxırmış. Bunu görən qonşusu soruşur:

- Nə axtarırsan?
- Qapının açarını itirmişəm.
- Harada itirmisən?

Molla yaxındakı kolluğu göstərir:

- Orada.
- Bəs niyə burada axtarırsan?
- Axı ora qaranlıqdır".

Nəzəriyyəçilər elmi nəticələri zəruri məlumatın verildiyini fərz etməklə, yəni işıqda axtarırlar. Praktiki problemlərlə məşğul olanlar isə informasiya çatışmazlığı şəraitində də qarşıya qoyulan məsələləri həll etməlidirlər. Onların başqa yolu yoxdur.

Bazar iqtisadiyyatı təsərrüfat fəaliyyətinin nəticələrini xarakterizə edən statistik və iqtisadi informasiyadan istifadənin yaxşılaşdırılmasını tələb edir. Informasiya bazasının yaradılması isə maliyyə hesabatlarına təsir edən müxtəlif amilləri nəzərə almadan mümkün ola bilməz. Təsərrüfat sisteminin səmərəli işləməsi üçün qiymətlər, tariflər, vergilər, inflyasiya və s. statistik məlumat əsasında heç bir eksperiment aparmadan öyrənilməlidir. Ekonometrik üsullarsız bunları etmək mümkün deyil.

Hər hansı obyektin dayanıqlı iqtisadi inkişafı idarəetmə qərarlarının əsaslandırılmasından və etibarlılığından asılıdır. Bu qərarların qəbulu üçün isə bütün mümkün variantlar tətbiq edilməli, qeyri-müəyyənlik şəraitinin xüsusiyyətləri, hər bir öyrənilən parametrə digər amillərin təsiri araşdırılmalıdır. Ekonometrika bu cür məsələlərin həlli ilə də məşğul olur.

"Ekonometrika" sözünü elmi ədəbiyyatda ilk dəfə 1926-cı ildə Norveç iqtisadçısı Reynar Friş "Ekonometriks" şəklində istifadə etmişdir. Lakin o, bu elmin təkcə adını verməklə kifayətlənməmiş, onun məzmununu, məqsəd və vəzifələrini müəyyənləşdirmiş, bu sahədə mühüm tədqiqatlar aparmışdır.

R.Friş 1933-cü ildə təsis etdiyi "Ekonometrika" jurnalında yazırdı: "Ekonometrika – iqtisadi statistika deyil. Mühüm hissəsi kəmiyyət xarakteri daşıyan İqtisadi nəzəriyyə də deyil. Ekonometrika iqtisadiyyatda riyazi üsulların tətbiqi də hesab edilə bilməz. Təcrübə göstərir ki, Statistika, İqtisadi nəzəriyyə və Riyaziyyat elmlərinin hər biri çağdaş iqtisadi həyatda kəmiyyət münasibətlərinin öyrənilməsi üçün zəruri, lakin kafi olmayan şərtdir. Hər üç hissənin vəhdəti Ekonometrikanı yaradır".

Ekonometrika, xüsusilə, son dövrlərdə sürətlə inkişaf etməkdədir. Bu elmin dünya şöhrəti qazanmasının göstəricilərindən biri də odur ki, bu sahədə tədqiqat aparan alimlərdən R.Friş və Y.Tinberq 1969-cu ildə, L.Kleyn 1980-ci ildə, T.Xavaalmo 1989-cu ildə, C.Xekman və D.Makfadden 2000-ci ildə Nobel mükafatına layiq görülmüşlər.

Ekonometrika kursu iqtisadiyyat üzrə müasir ali təhsilin "Mikroiqtisadiyyat", "Makroiqtisadiyyat" və "Maliyyə analizi" kimi fənləri ilə birlikdə tədris proqramlarında əsas yer tutur. İqtisadçıların bacarıqlı mütəxəssis kimi yetişməsində bu fənnin mühüm əhəmiyyəti var. Ekonometrika üsullarını bilməyən şəxs iqtisadi parametrlər arasında empirik asılılıqların qurulmasında, iqtisadi prosesin etibarlı proqnozlaşdırılmasında çətinlik çəkir və ona görə də maliyyədə, biznesdə, bank işində uğur qazana bilmir.

Təqdim edilən kitab Azərbaycan dilində Ekonometrikaya aid dərsliklərə tələbatı, qismən də olsa, ödəmək məqsədilə yazılmışdır və həmin fənnin başlanğıc kursu kimi nəzərdə tutulmuşdur.

I FƏSİL

EKONOMETRİK MODELLƏŞDİRMƏ

1.1. MODEL VƏ MODELLƏŞDİRMƏ

İqtisadiyyatda riyazi üsulların istifadə edilməsi iqtisadi dəyişənlərin və obyektlərin ən mühüm əlaqələrini riyazi şəkildə təsvir etməyə, parametrlərin məlum qiymətləri əsasında öyrənilən proses barədə nəticələr çıxarmağa, obyektlərin əvvəllər məlum olmayan xüsusiyyətlərini müəyyənləşdirməyə imkan verir.

Model – elə maddi və ya təsviri obyektdir ki, tədqiqat prosesində orijinal obyekti əvəz edir və onun öyrənilməsi orijinal obyekt haqqında yeni məlumat alınmasına səbəb olur. Modelləşdirmə isə modellərin qurulması, öyrənilməsi və tətbiqi prosesidir.

Model və onun orijinalı arasında izomorf və homomorf oxşarlıqları bir-birindən fərqləndirirlər. Oxşarlıq izomorfdursa (izomorf yunan dilində eyni formalı deməkdir) model öz əslindən az fərqlənir, homomorfdursa (homomorf oxşar formalı deməkdir), modellə onun əsli arasında yalnız müəyyən xassə və ya bəzi xassələr uyğun olur.

Model öyrənilən obyektin sadələşdirilmiş variantıdır. Orijinalda gedən proses mürəkkəb olduqda onun müvafiq fiziki (maddi) və riyazi modeli qurulur.

Riyazi model tədqiqat obyektində gedən proseslərin riyazi təsviridir. Bu təsvir tənliklərdən, parametrlər arasında əlaqəni göstərən münasibətlərdən, başlanğıc, sərhəd və məhdudluq şərtlərindən, cədvəllərdən, qrafiklərdən və s. ibarət olur. Eyni riyazi model tamamilə müxtəlif məsələlərin həllində istifadə oluna bilər.

Hər bir riyazi modeldə dəyişənlər iki cür olur:

a) Ölçülə və idarə edilə bilən dəyişənlər.

b) Təsadüfi xarakter daşıyan dəyişənlər.

İqtisadi parametrlərin əsasən təsadüfi kəmiyyətlər olması qanunauyğunluqların stoxastik xarakterdə olmasını müyyənləşdirir. Ona görə bu cür məsələlərin həllində ehtimal nəzəriyyəsinin və riyazi statistikanın üsullarından daha çox istifadə edilir. Alınan riyazi model isə çox zaman ekonometrik model adlanır.

Öyrənilən obyekt və proses barədə informasiyanın artması nəticəsində model dəyişir və təkmilləşir. Əvvəlcə nəzərə alınmayan xüsusiyyətlər modelə daxil edilir, aşkara çıxarılan nöqsanlar aradan qaldırılır və az əhəmiyyətli parametrlər atılır.

1.2. EKONOMETRİK MODELLƏŞDİRMƏNİN ƏSAS MƏRHƏLƏLƏRİ

Ekonometrik modelləşdirmənin aşağıdakı əsas mərhələlərini bir-birindən ayırmaq lazımdır:

1. Məsələnin qoyuluşu mərhələsi.

Bu mərhələdə tədqiqatın məqsədi, modelə daxil ediləcək iqtisadi dəyişənlərin xüsusiyyətləri müəyyən edilir. Məqsəd olaraq, hər hansı iqtisadi obyektin və ya prosesin təhlili, iqtisadi göstəricilərin proqnoz qiymətlərinin hesablanması, obyektin inkişaf təmayülünün aşkara çıxarılması və onun idarə edilməsi seçilə bilər.

2. İlkin (aprior) mərhələ.

Bu mərhələdə oyrənilən obyektin mahiyyətinin, modelləşdirməyə qədər məlum olan ilkin informasiyanın təhlili aparılır.

3. Parametrləşdirmə mərhələsi.

Bu mərhələdə əslində bilavasitə modelləşdirmə aparılır, yəni modelin ümumi forması seçilir, ayri-ayri parametrlər arasında əlaqə aşkara çıxarılır. Bütün bunlar müvafiq asılılıqlar və tənliklər şəklində yazılır.

4. İnformasiya mərhələsi.

Bu mərhələdə iqtisadi dəyişənlərin müşahidə olunan qiymətlərindən ibarət zəruri statistik informasiya toplanır və modelin tələb etdiyi qaydada ayrı-ayrı sabit ədədlər, yaxud matris və ya vektor şəklində yazılır.

5. Modelin identifikasiyası mərhələsi.

Bu mərhələdə modelin statistik təhlili və parametrlərin qiymətləndirilməsi həyata keçirilir.

6. Modelin verifikasiyasi mərhələsi.

Bu mərhələdə modelin prosesə və ya obyektə adekvatlığı yoxlanılır. Alınan nəticələr uyğun gəlmədikdə və ya xəta çox böyük olduqda, qurulan modeldə müvafiq dəyişikliklər aparılmalıdır.

1.3. EKONOMETRİK MODELLƏR

İqtisadi parametrlərin çoxu təsadüfi kəmiyyət olduğundan, ekonometrik modellər əsasən bu cür kəmiyyətlər arasında asılılıq şəklində qurulur.

Ekonometrik model dedikdə, bir qayda olaraq,

$$Y = f(X_1, X_2, ... X_n) + \varepsilon$$

şəklində model başa düşülür, burada X və Y - iqtisadi mənası olan və müşahidə edilə bilən müxtəlif tip kəmiyyətlərdir, ε isə təsadüfi funksiyadır. Burada əsas problem göstərilən asılılığın müəyyən edilməsidir.

Məsələlərin çoxunda bu model reqressiya modelidir və ε kəmiyyətinin riyazi gözləməsi sıfıra bərabərdir.

Müşahidə olunan qiymətləri $(X_{1i}, X_{2i}, ... X_{ni})$ və $(Y_1, Y_2, ... Y_m)$ kimi işarə etsək, model aşağıdakı şəkildə yazılacaq:

$$Y_i = f(X_{1i}, X_{2i}, ... X_{ni}) + \varepsilon_i, \qquad (i = \overline{1,m}) .$$

Burada Y_i və ε_i təsadüfi kəmiyyətlərdir.

Tədqiq olunan iqtisadi obyektin iqtisadi-riyazi modeli o zaman ekonometrik model hesab edilir ki, obyekti xarakterizə edən empirik məlumat əsasında qurulmuşdur.

Müşahidə qiymətlərinin iki cür seçimini bir-birindən fərqləndirirlər: fəza seçimi və zamandan asılı sıra.

Fəza seçimində hesab edilir ki, Y_k *və* Y_l $(k \neq l)$ kəmiyyətləri müxtəlif müşahidələrin nəticələridir və bir-birindən asılı deyil. Zamandan asılı sıra isə müxtəlif zaman anlarında müşahidə olunmuş qiymətlər ardıcıllığıdır. Bu halda Y_k və Y_l kəmiyyətləri bir-birindən asılı ola bilər.

Təhlil və proqnoz üçün qurulan ekonometrik modelləri üç hissəyə bölmək olar:

1. Bir tənlikli reqressiya modelləri.
2. Eyni zaman anında verilmiş tənliklər sistemindən ibarət modellər.
3. Zamandan asılı sıraların modelləri.

Proqnozlaşdırmada ekonometrik modellərin xüsusi formalarından istifadə edilir.

Gələcəkdə hər hansı prosesin necə davam edəcəyi və parametrlərin necə dəyişəcəyi həmişə aktual olmuşdur və indi də aktual olaraq qalır.

1.4. BİR TƏNLİKLİ REQRESSİYA MODELLƏRİ

Bir tənlikli reqressiya modellərində Y aşağıdakı funksiya kimi qəbul edilir:

$$Y = f(X_1, X_2, ... X_k, \beta_0, \beta_1 ... \beta_p),$$

burada $X_1, X_2, ..., X_k$ - asılı olmayan dəyişənlər, $\beta_0, \beta_1, ..., \beta_p$ -parametrlərdir.

Funksiyanın seçilməsinə görə belə modellər xətti və qeyri-xətti ola bilər.

Ən çox istifadə olunan forma xətti formadır:

$$Y = \beta_0 + \beta_1 \cdot X_1 + \beta_2 \cdot X_2 + ... + \beta_k \cdot X_k + \varepsilon,$$

Müşahidə edilən qiymətlər əsasında asılılığı ən yaxşı xarakterizə edən əmsallar seçilir. Bunun üçün ən kiçik kvadratlar üsulundan istifadə olunur.

Sadəlik üçün fərz edək ki, $Y=f(X, \beta)$ funksiyalar ailəsindən eləsini tapmaq lazımdır ki, Y-in X-dən asılılığını daha yaxşı göstərə bilsin. Müşahidə edilən Y_t qiymətlərinin $f(X_t, \beta)$ qiymətlərindən fərq ölçüsü olaraq , aşağıdakıları seçmək mümkündür:

a) Fərqlərin kvadratları cəmini, yəni

$$F_1 = \sum_{t=1}^{n} \left[Y_t - f(X_t, \beta) \right]^2$$

funksionalını;

b) fərqlərin modullar cəmini, yəni

$$F_2 = \sum_{t=1}^{n} \left| Y_t - f(X_t, \beta) \right|$$

funksionalını;

c) ümumi

$$F_3 = \sum_{t=1}^{n} g\left[Y_t - f\left(X_t, \beta\right)\right]$$

funksionalını, burada g göstərilən fərqin F_3 funksionalına daxil olma ölçüsünü göstərir; bu ölçüyə misal olaraq, elə funksiya seçmək olar ki, kiçik fərqlərdə kvadratik, böyük fərqlərdə xətti olsun:

$$g(X) = \begin{cases} X^2, & |X| < c, \\ 2 \cdot c \cdot X - c^2, & X \geq c, \\ -2 \cdot c \cdot X - c^2, & X \leq -c. \end{cases}$$

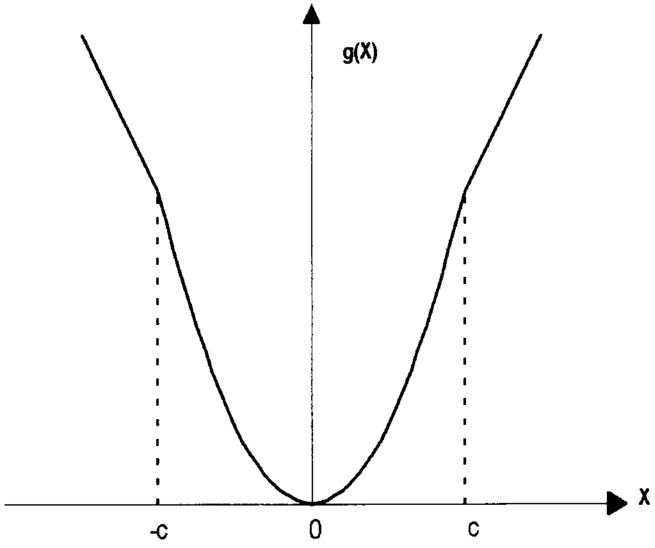
Bu funksiya *Huber* funksiyası adlanır.

Göstərilən seçim formalarından ən mühümü, əlbəttə, fərqlərin kvadratlar cəmidir. Çünki bu funksionalın hesablanması daha sadədir, ifadəsi isə riyazi araşdırmalar üçün əlverişlidir.

Ona görə də verilən məlumat əsasında qurulan funksiyanın nöqtələrə daha yaxın olması üçün bu funksionaldan istifadə edirlər.

Ən kiçik kvadratlar üsulu bu funksionala ən kiçik qiymət verən əmsalların təyin edilməsi üçün tətbiq olunan üsuldur. Lakin fərqlərin kvadratları cəmi müşahidə qiymətlərinin bəzilərinin çox böyük, yaxud çox kiçik olmasına daha həssasdır. Bu cür qiymətlərdə fərqlər böyük olur, fərqlərin kvadratları daha da artır və fərqlərin kvadratlarının cəminə həmin ədəd daha çox təsir edir.

Digər iki fərq ölçüsündə bu çatışmazlıq olmasa da riyazi çevirmələr üçün əlverişsizdir və ən kiçik qiymətin təyin edilməsi qaydası mürəkkəbdir.



Şəkil 1.1. Huber funksiyası

1.5. EYNİ ZAMAN ANINDA VERİLMIŞ TƏNLİKLƏR SİSTEMİNDƏN İBARƏT MODELLƏR

Qarşılıqlı iqtisadi əlaqələrin əhəmiyyətli hissəsi bir tənliklə xarakterizə edilir. Lakin iki və daha çox tənlikdən ibarət modellər də kifayət qədərdir. Məsələn, modeldə hər hansı iqtisadi parametr başqa parametrlərdən asılıdırsa, bu asılılığın da tənliyi yazılmalıdır. Bundan əlavə müəyyən iqtisadi proses öyrənildikdə bir-neçə dəyişənin ayrı-ayrılıqda xüsusiyyətləri araşdırıla bilər. Doğrudan da, istehsalın effektliliyinin qiymətləndirilməsində təkcə rentabellik modelindən istifadə etmək olmaz. Əmək məhsuldarlığı modeli və məhsul vahidinin maya dəyəri modeli də həmin modellə birlikdə nəzərə alınmalıdır. Beləliklə, ümumi model tənliklər sistemindən ibarət olur.

İki və daha çox tənlikdən ibarət modeldə dəyişənlər əsasən eyni zaman anında verilir. Bəzi hallarda isə zamanın əvvəlki qiymətlərində olan məlumatlar da modelə daxil edilir.

Misal olaraq, tələb və təklif modelinə baxaq.

Tələbi Y_t^D, təklifi Y_t^S, malın qiymətini X_{1t}, gəliri X_{2t} ilə işarə etsək, təklif

$$Y_t^S = \alpha_0 + \alpha_1 \cdot X_{1t} + \alpha_2 \cdot X_{1,t-1} + \varepsilon_{1t},$$

tələb

$$Y_t^D = \beta_0 + \beta_1 \cdot X_{1t} + \beta_2 \cdot X_{2t} + \varepsilon_{2t}$$

funksiyaları ilə xarakterizə edilə bilər, burada t zaman anını göstərir, ε_{1t} və ε_{2t} isə təsadüfi komponentlərdir.

Tələb və təklifin bərabərliyi şərtini də, yəni

$$Y_t^S = Y_t^D$$

bərabərliyini də yuxarıdakı tənliklərə qoşsaq, tənliklər sistemindən ibarət model alınacaq.

1.6. ZAMANDAN ASILI SIRALARIN MODELLƏRİ

Zamandan asılı sıralar dedikdə, iqtisadi obyektin və obyekt göstəricisinin vəziyyətini t zamanının diskret qiymətlərində təsvir edən ədədlər ardıcıllığı başa düşülür:

$$X_1, X_2, \ldots X_k, \ldots X_n.$$

Bu cür sıraların ən sadə modelləri üç cür ola bilər:

a) Trend modeli:

$$Y(t) = T(t) + \varepsilon_t,$$

burada $T(t)$ müəyyən formada qəbul edilmiş trend asılılığıdır, ε_t isə təsadüfi komponentdir.

b) Mövsümilik modeli:

$$Y(t) = S(t) + \varepsilon_t,$$

burada $S(t)$ mövsümiliyi nəzərə alan funksiyadır.

c) Həm trend funksiyasını, həm də mövsümiliyi nəzərə alan model. Bu model hər iki asılılığı additiv və ya multiplikativ şəkildə nəzərə ala bilər.

Additiv model

$$Y(t) = T(t) + S(t) + \varepsilon_t,$$

multiplikativ model isə

$$Y(t) = T(t) \cdot S(t) + \varepsilon_t$$

kimi yazılır.

Zamandan asılı sıralara aid daha mürəkkəb modellərdən, məsələn, adaptiv proqnozlaşdırma, avtoreqressiya, sürüşən orta qiymət və s. modellərdən də istifadə edilir.

1.7. ƏN KİÇİK KVADRATLAR ÜSULU

İqtisadi parametrlərin müşahidə olunan qiymətləri diskret ədədlər şəklində verildiyindən onu funksional asılılıq şəklində təyin etmək problemi qarşıya çıxır. X və Y dəyişənləri arasında asılılıq

$$X_1, X_2, \ldots X_k, \ldots X_n$$

$$Y_1, Y_2, \ldots Y_k, \ldots Y_n$$

diskret qiymətləri arasında qurulur. (X_i, Y_i) nöqtələrinin yerləşmə xarakterinə və ya başqa nəzəri, yaxud eksperimental mülahizələrə əsasən, axtarılan funksiyanın forması təxmini olaraq müəyyən edilir. Hər bir parametrə həm də təsadüfi amillər təsir etdiyindən alınan asılılıq cədvəl funksiyasını dəqiq xarakterizə etmir. Funksiyanın əmsalları elə seçilir ki, funksional asılılıq müşahidə olunan qiymətlərə ən yaxın olsun.

Bunun üçün ən kiçik kvadratlar üsulu deyilən üsuldan istifadə edirlər.

X və Y arasındakı asılılığı

$$Y = \varphi(X, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m)$$

şəklində qəbul etsək, $\alpha_1, \alpha_2 \ldots, \alpha_m$ əmsalları elə seçilməlidir ki,

$$F(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_m)=\sum_{i=1}^{n}[Y_i-\varphi(X,\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_m)]^2 \qquad (1.1)$$

funksionalı ən kiçik qiymət alsın. Bu isə o deməkdir ki, cədvəl funksiyası ilə forması müəyyən edilmiş analitik ifadə arasında fərqlərin kvadratlar cəmi ən kiçik olmalıdır.

Beləliklə, məsələ (1.1) çoxdəyişənli funksiyasının minimumunun tapılmasına gətirilir. Bu funksiyanın minimum qiymət aldığı nöqtələri

$$\frac{\partial F}{\partial \alpha_0}=0,\quad \frac{\partial F}{\partial \alpha_l}=0,...,\frac{\partial F}{\partial \alpha_m}=0$$

sistemini həll etməklə tapmaq olar. Alınan sistemin tənliklərinin sayı axtarılan əmsalların sayına bərabərdir.

Tapılmış nöqtədə (1.1) funksionalının minimum qiymət alıb almadığı ayrıca tədqiq olunmalıdır. Lakin əksər məsələlərin xüsusiyyətləri yeganə böhran nöqtəsinin minimum nöqtəsi olduğunu göstərir.

Çalışmalar

1.1. Aşağıdakı cədvəl funksiyalarını müstəvi üzərində qurun və təqribi funksional asılılığın formalalarını müəyyənləşdirin:

a)

X	3	5	7	9	11	13	15
Y	22,5	35,8	50,1	64,2	77,9	92,4	105,5

b)

X	5	6	7	8	9	10
Y	54	76	100	130	166	202

1.2. Cədvəl şəklində verilmiş

X	2	5	8	11	14	17	20
Y	8	16	25	35	44	53	62

asılılığını $Y=b_0+b_1 \cdot X$ şəklində axtarın və böhran nöqtəsini tapmaq üçün ən kiçik kvadratlar üsulu ilə tənliklər sistemini yazın.

II FƏSİL

TƏSADÜFİ KƏMİYYƏTLƏR VƏ ONLARIN ƏSAS XARAKTERİSTİKALARI

2.1. DİSKRET VƏ KƏSİLMƏZ TƏSADÜFİ KƏMİYYƏTLƏR

Təsadüfi kəmiyyət - qiyməti dəqiq müəyyən edilə bilməyən kəmiyyətdir. Bu cür kəmiyyətlər kəsilməz və ya diskret ola bilər. Mümkün qiymətlərin ayrı-ayrı ədədlərdən ibarət hissəsi verilən təsadüfi kəmiyyət diskret hesab edilir. Kəsilməz təsadüfi kəmiyyət isə müəyyən intervalda olan bütün qiymətləri alır. Məsələn, zəri atdıqda onun aldığı qiymətlər diskret, otağın temperaturu kəsilməz təsadüfi kəmiyyətdir.

Nərd oynayanlar növbə ilə iki zər atırlar və düşən xallara uyğun olaraq daşların yerini dəyişirlər. Bu zaman zərlərin yuxarı üzündə olan xalların cəmini təsadüfi kəmiyyət kimi öyrəniriksə, burada eksperimentin mümkün 36 variantında cəmisi 11 ədəd alınacaq: 2,3,4,5, 6,7,8,9,10,11,12. Bu ədədlər çoxluğu baş hissə adlanır. Təsadüfi dəyişən kəmiyyətin bütün mümkün qiymətlər toplusu baş hissədir.

Baxdığımız misalda təsadüfi kəmiyyətin aldığı qiymətlərin tezliyini və ehtimalını hesablamaq da heç bir çətinlik törətmir. Dəyişən təsadüfi kəmiyyətin qiymətlərini X_i, onun tezliyini n_i, ehtimalını P_i ilə işarə edək. Onda xalların cəmininin $X_1=2$ olması yalnız bir halda, hər iki zərin 1 düşməsi halında mümkündür, yəni $n_1=1$. Xalların cəmi $X_2=3$ o zaman olur ki, birinci zərdə 1, ikinci zərdə 2 xal, birinci zərdə 2, ikinci zərdə 1 xal alınsın. Deməli, $n_2=2$. Eyni qayda ilə $X_3=4$ halı aşağıdakı variantlardan ibarətdir: 1,3; 2,2; 3,1. Onda $n_3=3$ olur. Yaxud, $X_4=5$ halında 1,4; 2,3; 3,2; 4,1 dörd variant, $X_5=6$ halında 1,5; 2,4; 3,3; 4,2; 5,1 beş variant alınır. Bütün mümkün halların tezliklərini tapıb, klassik ehtimal düstürünə görə onları tezliklərin ümumi cəminə bölsək, təsadüfi kəmiyyətin ehtimallarını hesablaya bilərik:

X_i	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
n_i	1	2	3	4	5	6	5	4	3	2	1
P_i	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

Ehtimalların cəmi

$$\sum_{i=1}^{11} P_i = 1$$

alınır, çünki hadisələr tam qrup təşkil edir, yəni hər bir sınaqda bu hadisələrin biri mütləq baş verməlidir.

Aydındır ki, ehtimalların göstərilən qayda ilə hesablanmasını kəsilməz təsadüfi kəmiyyətlərə tətbiq etmək olmaz. Çünki müxtəlif qiymətlərin sayı sonsuzdur və sonsuz sayda ehtimalın cəmi 1 ola bilməz. Ona görə təsadüfi kəmiyyətin müəyyən intervalda olması ehtimalından danışmaq mümkündür.

2.2. TƏSADÜFİ KƏMİYYƏTİN PAYLANMASI

Fərz edək ki, bizə diskret ξ təsadüfi kəmiyyətinin sınaqlar nəticəsində alınmış $X_1, X_2,...X_n$ qiymətləri və onların $P_1, P_2,...P_n$ ehtimalları verilmişdir. Bu ehtimallar

$$P_1 + P_2 + ... + P_n = 1$$

şərtini ödəyirsə, onda təsadüfi kəmiyyətin mümkün qiymətləri ilə uyğun ehtimalları arasında asılılıq həmin kəmiyyətin paylanması və ya paylanma qanunu adlanır. Bu qanun aşağıdakı cədvəl şəklində yazıla bilər:

$$X_1 X_2 ... X_{n-1} X_n$$

$$P_1 P_2 ... P_{n-1} P_n$$

Kəsilməz təsadüfi kəmiyyətin qiymətlərinin sayı sonsuz olduğundan onun bu cür göstərilməsi mümkün deyil.

Düzbucaqlı koordinat sistemində absis oxu üzərində diskret təsadüfi kəmiyyətin mümkün qiymətlərini, ordinat oxu üzərində uyğun ehtimallarını qeyd etsək, (X_i,P_i) nöqtələri paylanmanın həndəsi təsviri olacaq. Bu nöqtələrdən keçən sınıq xətt paylanma çoxbucaqlısı adlanır.

Təsadüfi kəmiyyətin paylanma qanunu məlumdursa, paylanma funksiyası olan

$$F(X)=P\ (\xi<X)$$

asılılığı da qurula bilər. Burada sağ tərəf təsadüfi kəmiyyətin aldığı X qiymətindən kiçik olması ehtimalıdır və ona görə də X-dən asılı funksiyadır.

ξ diskret kəmiyyətdirsə və $X_1, X_2, \ldots X_n$ qiymətlərini alırsa, onda

$$F(X) = \sum_{X_i < X} P(\xi = X_i)$$

yaza bilərik. Aydındır ki, $\xi \leq X_1$ olduqda

$$F(X) = P(\xi < X_1) = 0,$$

$X_1 < \xi < X_2$ olduqda

$$F(X) = P(\xi < X_2) = P(\xi = X_1) = P_1,$$

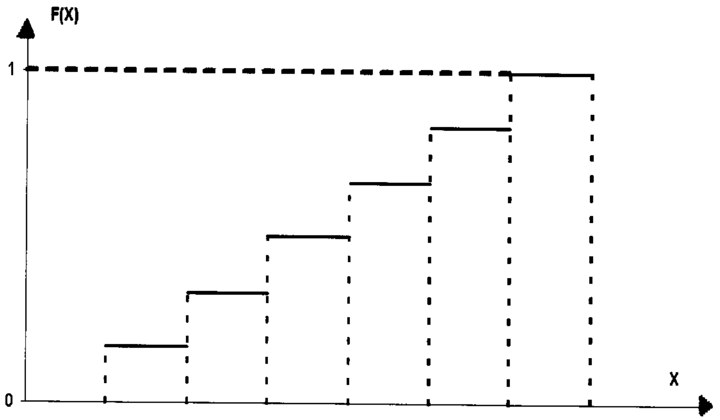
$X_2 < \xi < X_3$ olduqda

$$F(X) = P(\xi < X_3) = P(\xi = X_1) + P(\xi = X_2) = P_1 + P_2$$

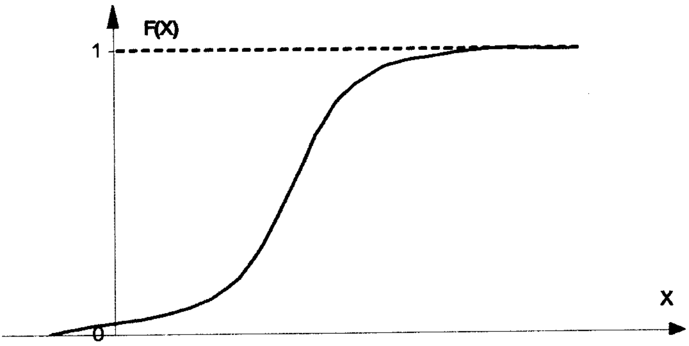
və s. alınar. Sonuncu X_n qiymətindən sonra gələn qiymətlər üçün isə

$$F(X) = P_1 + P_2 + \ldots + P_n = 1$$

bərabərliyi ödənməlidir. Beləliklə, paylanma funksiyasının qrafiki pilləvari kəsilən sınıq xətdir (şəkil 2.1).



Şəkil 2.1. Paylanma funksiyası



Şəkil 2.2 Kəsilməz paylanma

Kəsilməz təsadüfi kəmiyyətin paylanma funksiyasının qrafiki isə kəsilməz hamar əyridir (şəkil 2.2).

Asanlıqla göstərmək olar ki, $F(X)$ $[0,1]$ parçasında qiymətlər alan azalmayan, mənfi olmayan və $F(-\infty)=0, F(+\infty)=1$ şərtlərini ödəyən funksiyadır.

Aşağıdakı bərabərliyin doğruluğu aşkardır:

$$P(\xi < \beta) = P(\xi < \alpha) + P(\alpha < \xi < \beta).$$

Buradan

$$P(\alpha < \xi < \beta) = P(\xi < \beta) - P(\xi < \alpha),$$

$$P(\alpha < \xi < \beta) = F(\beta) - F(\alpha)$$

alınar. Deməli, təsadüfi kəmiyyətin müəyyən intervala düşməsi ehtimalı onun paylanma funksiyasının sağ və sol ucdakı qiymətləri fərqinə bərabərdir.

İntervalı sonsuz kiçiltsək, yəni $\beta \to \alpha$ olduqda limitə keçsək,

$$P(\xi = \alpha) = \lim_{\beta \to \alpha} P(\alpha < \xi < \beta) = \lim_{\beta \to \alpha} [F(\beta) - F(\alpha)].$$

Bu ehtimal $F(X)$ funksiyasının kəsilən olduğu halda onun α nöqtəsində sıçrayışına bərabərdir. Kəsilməz paylanma funksiyasına malik ξ kəmiyyətinin hər bir ayrıca nöqtədə ehtimalı sıfıra bərabərdir.

Aydındır ki, təsadüfi kəmiyyətin $(X, X+\Delta X)$ intervalına düşməsi ehtimalı

$$P(X < \xi < X + \Delta X) = F(X + \Delta X) - F(X)$$

olacaq. Bu bərabərliyin hər iki tərəfini ΔX artımına bölək:

$$\frac{P(X < \xi < X + \Delta X)}{\Delta X} = \frac{F(X + \Delta X) - F(X)}{\Delta X}.$$

$F(X)$ diferensiallanan funksiyadırsa, $\Delta X \to 0$ olduqda

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{P(X < \xi < X + \Delta X)}{\Delta X} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{F(X + \Delta X) - F(X)}{\Delta X} = F'(X).$$

Sonuncu bərabərliyə görə $f(X)=F'(X)$ olur və bu funksiya deferensial paylanma funksiyası, $F(X)$ isə inteqral paylanma funksiyası adlanır.

Diferensial paylanma funksiyasının həndəsi təsviri paylanma əyrisidir. Absis oxunda dX elementar hissəsi ayırsaq, təsadüfi kəmiyyətin bura düşməsi ehtimalı $f(x)\cdot dX$ olacaq. Bu isə hündürlüyü $f(X)$, oturacağı dX olan elementar düzbucaqlının sahəsidir.

Təsadüfi kəmiyyətin (α, β) intervalına düşməsi ehtimalı

$$P(\alpha < \xi < \beta) = F(\beta) - F(\alpha) = \int_{\alpha}^{\beta} f(X)dX$$

olur. Deməli, kəsilməz təsadüfi kəmiyyətin (α, β) intervalına düşməsi ehtimalı aşağıdan həmin interval, yuxarıdan $f(X)$ əyrisi, yan tərəflərdən isə $X=\alpha$, $X=\beta$ düz xətləri ilə məhdudlaşmış əyrixətli trapesiyanın sahəsidir.

$$F(X) = P(\beta < X) = P(-\infty < \beta < X)$$

olduğundan,

$$F(X) = \int_{-\infty}^{X} f(X)dX$$

alınır.

Diferensial paylanma funksiyasına bəzən ehtimalın paylanma sıxlığı funksiyası da deyilir. Bu funksiya $f(X) \geq 0$ bərabərsizliyini və

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(X)dX = 1$$

şərtini ödəyir.

Fərz edək ki, otağın temperaturu 15°C-dən 35°C-yə qədər dəyişir və bu dəyişmə eyni ehtimallıdır.

Qiymətlərin sayı sonsuz olduğundan, təsadüfi kəmiyyətin müəyyən intervala düşməsindən söhbət gedə bilər. Məsələn, X kəmiyyətinin 34°C-dən 35°C-yə qədər dəyişməsinin ehtimalı $p=0,05$ olmalıdır, çünki baxılan parça ümumi intervalın $\frac{1}{20}$-ni təşkil edir. Ona görə də ehtimalın sıxlıq funksiyası aşağıdakı kimi yazıla bilər:

$$F(X)=\begin{cases} 0,05; 15^\circ C \leq X \leq 35^\circ C, \\ 0; X < 15^\circ C, X > 35^\circ C. \end{cases}$$

Temperatur dəyişməsi müxtəlif ehtimallı olduqda da sıxlıq funksiyasını eyni qayda ilə təyin etmək olar.

2.3. DİSKRET TƏSADÜFİ KƏMİYYƏTİN RİYAZİ GÖZLƏMƏSİ

Fərz edək ki, təsadüfi dəyişən X kəmiyyətinin n sayda konkret $X_1, X_2, ..., X_n$ qiyməti ola bilər və qiymətlərin alınması ehtimalları məlumdur: $P_1, P_2, ..., P_n$. Onda

$$E(X) = X_1P_1 + X_2P_2 + ... + X_nP_n$$

qiyməti riyazi gözləmə adlanır.

İki zərin atılması nəticəsində alınmış paylanmaya uyğun riyazi gözləməni hesablayaq:

$$E(X)=2\cdot\frac{1}{36}+3\cdot\frac{2}{36}+4\cdot\frac{3}{36}+5\cdot\frac{4}{36}+6\cdot\frac{5}{36}+7\cdot\frac{6}{36}+8\cdot\frac{5}{36}+9\cdot\frac{4}{36}+$$
$$+10\cdot\frac{3}{36}+11\cdot\frac{2}{36}+12\cdot\frac{1}{36}=\frac{1}{36}\cdot(2+6+12+20+30+42+40+36+30+22+12)=$$
$$=\frac{1}{36}\cdot 252=7.$$

Təsadüfi kəmiyyətin riyazi gözləməsinə onun baş hissə üzrə orta qiyməti də deyirlər. Müəyyən seçmə hissə verildikdə isə riyazi gözləmə əvəzinə seçmə orta qiymət hesablanır.

Riyazi gözləmə üçün aşağıdakı düsturlar doğrudur:

$$E(X+Y)=E(X)+E(Y),$$
$$E(c\cdot X)=c\cdot E(X),$$
$$E(c)=c,$$

burada c sabit ədəddir.

2.4. DİSKRET TƏSADÜFİ KƏMİYYƏTİN NƏZƏRİ DİSPERSİYASI

Nəzəri dispersiya X kəmiyəti ilə onun μ riyazi gözləməsi arasındakı fərqin kvadratının riyazi gözləməsi kimi təyin edilir:

$$\sigma^2(X)=\sigma_X^2=E\left[(X-\mu)^2\right]=\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2\cdot P_i.$$

Bu hesablama düsturunu başqa cür də yazmaq olar:

$$\sigma_X^2=E\left(X^2-2\mu\cdot X+\mu^2\right)=E\left(X^2\right)+E(-2\mu\cdot X)+E\left(\mu^2\right)$$
$$=E\left(X^2\right)-2\mu\cdot E(X)+\mu^2=E\left(X^2\right)-2\mu^2+\mu^2=$$
$$=E\left(X^2\right)-\mu^2=\sum_{i=1}^{n}X_i^2P_i-\mu^2.$$

Dispersiyanın hesablanması üçün istifadə edilən düstürlar aşağıdakılardır:

1. $\sigma^2(X+Y)=\sigma^2(X)+\sigma^2(Y),$

burada X və Y asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlərdir.

2. $\sigma^2(c\cdot X)=c^2\cdot\sigma^2(X),$

burada c-sabit ədəddir.

3. $\sigma^2(c)=0,$

burada c- sabit ədəddir.

Nəzəri standart (orta kvadratik) meyl $\sigma(X)$ dispersiyasının kvadrat kökünə deyilir.

İki zərin atılmasına uyğun paylanma qanunu üçün nəzəri dispersiyanı hesablayaq:

$$\sigma^2(X) = (2-7)^2 \cdot \frac{1}{36} + (3-7)^2 \cdot \frac{2}{36} + (4-7)^2 \cdot \frac{3}{36} + (5-7)^2 \cdot \frac{4}{36} + (6-7)^2 \cdot \frac{5}{36} +$$
$$+ (7-7)^2 \cdot \frac{6}{36} + (8-7)^2 \cdot \frac{5}{36} + (9-7)^2 \cdot \frac{4}{36} + (10-7)^2 \cdot \frac{3}{36} + (11-7)^2 \cdot \frac{2}{36} +$$
$$+ (12-7)^2 \cdot \frac{1}{36} = \frac{1}{36} \cdot (25+32+27+16+5+0+5+16+27+32+25) =$$
$$= \frac{1}{36} \cdot 210 = 5{,}83.$$

Nəzəri orta kvadratik meyl

$$\sigma(X) = \sqrt{5{,}83} = 2{,}41$$

olar.

Müşahidə olunan qiymətlər $X_1, X_2, \ldots, X_n$ seçmə hissənin elementləridirsə, seçmə dispersiya hesablanır.

2.5. TƏSADÜFİ SEÇİM VƏ SEÇMƏ XARAKTERİSTİKALAR

Təsadüfi kəmiyyət və hadisələr üzərində aparılan müşahidə və ya təcrübələrin sayı nə qədər çox olarsa, onların paylanması haqqında əldə edilən məlumatlar bu paylanmanı bir o qədər düzgün xarakterizə edər. Lakin iqtisadiyyatda bunu etmək mümkün olmur və yalnız məlum qiymətlər əsasında təsadüfi kəmiyyət öyrənilir. Ona görə də əslində ekonometrikada təsadüfi kəmiyyətin seçmə hissəsi əsasında nəticə çıxarılır.

Bunun üçün əlaməti öyrənilən hər hansı X kəmiyyətinin müşahidə yolu ilə alınan təsadüfi qiymətlərinin çoxluğundan təsadüfi qaydada seçim aparılır, yəni yığım və ya baş hissənin elementlərindən müəyyən hissə ayrılır və seçmə hissə kimi tədqiq edilir. Seçmə hissənin $X_1, X_2, \ldots, X_n$ qiymətlərindən hər biri eyni şərtlər daxilində alınmalıdır,yəni onlardan biri digərinə nəzərən heç bir üstünlüyə malik olmamalıdır.

Aydındır ki, hər bir seçmə hissə baş hissə barədə real təsəvvür yaratmır. Bunun üçün təsadüfi götürülən hər bir seçim reprezentativ, yəni təmsil edən aparılmalıdır.

Müşahidə qiymətlərindən təsadüfən seçilmiş hissənin paylanmasını xarakterizə etmək üçün onun ədədi ortasını, seçmə dispersiyasını, seçmə orta kvadratik meylini təyin etmək olar. Aydındır ki, bu parametrlər təsadüfi X kəmiyyətinin paylanma qanununun parametrlərindən fərqlənir. Bundan əlavə iki müxtəlif seçmə hissənin də parametrləri müxtəlif olacaq. Əsas məsələ seçmə hissənin tədqiqi nəticəsində baş hissə barədə düzgün nəticə çıxarmanı bacarmaqdır. Seçmə hissənin parametrləri və ya seçmə statistikalar adlanan seçmə xarakteristikalar əsasən təsadüfi kəmiyyətin müşahidə olunan $X_1, X_2, \ldots, X_m$ qiymətləri və onların rast gəlmə tezlikləri əsasında hesablanır. Fərz edək ki, X_i qiymətinin tezliyi n_i-dir. Onda seçmənin ədədi ortası aşağıdakı ifadə ilə hesablanır:

$$\overline{X}=\frac{1}{n}\cdot\sum_{i=1}^{m} n_i X_i ,$$

burada

$$n=\frac{1}{n}\cdot\sum_{i=1}^{m} n_i ,$$

yəni bütün müşahidə edilən qiymətlərin sayıdır.

Seçmənin dispersiyasının ifadəsi aşağıdakı kimi yazılır:

$$var(X)=\frac{1}{n}\cdot\sum_{i=1}^{m} n_i\left(X_i-\overline{X}\right)^2 .$$

Seçmə hissənin həcmi kifayət qədər çox olmadıqda "düzəldilmiş" dispersiya adlanan xarakteristikadan da istifadə edilir:

$$S^2(X)=\frac{1}{n-1}\cdot\sum_{i=1}^{m} n_i\left(X_i-\overline{X}\right)^2 .$$

Düsturlarda bəzən $\sqrt{var(X)}$ və $S(X)$ ifadələrinə də rast gəlmək mümkündür. Bu ifadələrdə təyin olunmuş parametrlər də bəzən seçmə xarakteristikalara daxil edilir. Onlara seçmə hissənin orta kvadratik (standart) meyli və "düzəldilmiş" orta kvadratik meyli deyirlər.

Müşahidə olunan qiymətlər çoxluğu, bir qayda olaraq, çox böyük əksəriyyəti müxtəlif olan ədədlər çoxluğu kimi verilir və onların təkrar olunanlarını bir yerə yığmağın heç bir mənası yoxdur. Ona görə də seçmə xarakteristikalar əsasən aşağıdakı düsturlarla hesablanır:

$$\overline{X} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} X_i,$$

$$var(X) = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} \left(X_i - \overline{X}\right)^2,$$

$$S^2(X) = \frac{1}{n-1} \cdot \sum_{i=1}^{n} \left(X_i - \overline{X}\right)^2.$$

Bu xarakteristikalar da təsadüfi kəmiyyətlərdir, çünki təsadüfi kəmiyyətlər üzərində əməllər nəticəsində alınmışdır.

2.6. TƏSADÜFİ KƏMİYYƏTLƏRİN QİYMƏTLƏNDİRİLMƏSİ

Hər bir təsadüfi kəmiyyəti iki hissəyə ayırmaq olar:

$$X = \mu + u,$$

burada μ - onun riyazi gözləməsi, u - təsadüfi hissəsidir.

Aydındır ki, təsadüfi hissənin riyazi gözləməsi sıfıra bərabərdir, çünki u=X- μ olduğuna görə

$$E(u_i) = E(X_i - \mu) = E(X_i) - E(\mu) = \mu - \mu = 0$$

alınır.

X kəmiyyətinin dağınıqlığı yalnız u ilə xarakterizə olunduğuna görə

$$\sigma_X^2 = E\left[(X-\mu)^2\right] = E\left(u^2\right),$$

$$\sigma_u^2 = E\left\{[u - E(u)]^2\right\} = E\left(u^2\right)$$

yazmaq olar.

Praktiki məsələlərdə təsadüfi kəmiyyətin paylanması, onun riyazi gözləməsi və nəzəri dispersiyası məlum olmur. Müşahidə qiymətlərindən istifadə etməklə hər bir seçmə hissəyə uyğun qiymətləndirmə aparmaq lazım gəlir. Seçmə orta qiymət

$$\overline{X} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} X_i$$

riyazi gözləmənin və "düzəldilmiş" seçmə dispersiya

$$S^2(X)=\frac{1}{n-1}\cdot\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\overline{X}\right)^2$$

nəzəri dispersiyanın təqribi qiymətləndirilməsi hesab edilir.

X təsadüfi kəmiyyət olduğundan, seçmə hissəyə uyğun qiymətləndirmələr də təsadüfidir. Hər hansı müşahidə olunan qiyməti də sabit μ və u_i təsadüfi hissələrinə ayıra bilərik:

$$X_i=\mu+u_i.$$

Onda

$$\overline{X}=\frac{1}{n}\cdot(\mu+\mu+...+\mu)+\frac{1}{n}\cdot\left(u_1+u_2+...+u_n\right)=$$

$$=\frac{1}{n}\cdot n\cdot\mu+\overline{u}=\mu+\overline{u},$$

burada $\bar{u}$, u_i qiymətlərinin ədədi ortasıdır. Deməli, X seçmə orta qiyməti də X təsadüfi kəmiyyəti kimi qeyd olunmuş və təsadüfi olan iki hissədən ibarətdir.

Göstərək ki, nəzəri dispersiyanın qiymətləndirilməsi təsadüfi kəmiyyətdir. Doğrudan da,

$$X_i=\mu+u_i, \overline{X}=\mu+\overline{u}$$

olduğuna görə

$$X_i-\overline{X}=u_i-\overline{u}$$

yaza bilərik və buradan da

$$S^2=\frac{1}{n-1}\cdot\sum_{i=1}^{n}\left[\left(X_i-\overline{X}\right)^2\right]=\frac{1}{n-1}\cdot\sum_{i=1}^{n}\left[\left(u_i-\overline{u}\right)^2\right]$$

alınır.

2.7. QİYMƏTLƏNDİRMƏNİN YERİNİ DƏYİŞMƏSİ

Təsadüfi kəmiyyətlərin ixtiyari seçilmiş hissələri əsasında qiymətləndirmə də təsadüfi qaydada dəyişdiyindən, alınmış nəticələr yalnız xüsusi hallarda baş hissənin xarakteristikaları ilə üst-üstə düşə bilər.

Qiymətləndirmənin riyazi gözləməsi baş hissənin uyğun xarakteristikasına bərabərdirsə, onda qiymətləndirməyə yerini dəyişməyən, əks halda yerini dəyişən deyirlər.

Seçmə hissənin orta qiymətlərinin yerini dəyişməyən olub olmadığını yoxlayaq. Bu xarakteristika iki toplanandan ibarətdir: μ və $\bar{u}$. Onda

$$E(\bar{X}) = E(\mu + \bar{u}) = E(\mu) + E(\bar{u}) = \mu$$

alınır.

Aydındır ki, qiymətləndirmə yeganə olmayacaq. Məsələn, cəmisi iki müşahidə qiymətindən ibarət təsadüfi kəmiyyət verilmişdirsə, onların çəkiləri λ_1 və λ_2 -dirsə $(\lambda_1 + \lambda_2 = 1)$,

$$Z = \lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2$$

sonsuz sayda qiymət alacaq. Riyazi gözləməni hesablayaq:

$$\begin{aligned} E(Z) &= E(\lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2) = \\ &= E(\lambda_1 X_1) + E(\lambda_2 X_2) = \lambda_1 \cdot E(X_1) + \\ &+ \lambda_2 \cdot E(X_2) = \lambda_1 \cdot \mu + \lambda_2 \cdot \mu = \\ &= (\lambda_1 + \lambda_2) \cdot \mu = \mu. \end{aligned}$$

Deməli, Z yerini dəyişməyən qiymətləndirmədir.

Göstərək ki, seçmə "düzəldilmiş" dispersiyanın riyazi gözləməsi σ^2 ədədinə, yəni nəzəri dispersiyanın qiymətinə bərabərdir. Bunun üçün S^2-nın ifadəsində çevirmələr aparaq:

$$S^2 = \frac{1}{n-1} \cdot \sum_{i=1}^{n} (X_i - \bar{X})^2 =$$

$$= \frac{1}{n-1} \cdot \sum_{i=1}^{n} \left[(X_i - \mu) - (\bar{X} - \mu) \right]^2 =$$

$$= \frac{1}{n-1} \cdot \sum_{i=1}^{n} \left[(X_i - \mu)^2 - 2 \cdot (X_i - \mu)(\bar{X} - \mu) + (\bar{X} - \mu)^2 \right] =$$

$$= \frac{1}{n-1} \left[\sum_{i=1}^{n} (X_i - \mu)^2 - 2 \cdot (\bar{X} - \mu) \cdot \sum_{i=1}^{n} (X_i - \mu) + \sum_{i=1}^{n} (\bar{X} - \mu)^2 \right].$$

Aşağıdakı bərabərliklər doğrudur:

$$\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\mu\right)=\sum_{i=1}^{n}X_i-\sum_{i=1}^{n}\mu=n\cdot\overline{X}-n\cdot\mu=n\cdot\left(\overline{X}-\mu\right),$$

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\overline{X}-\mu\right)^2=n\cdot\left(\overline{X}-\mu\right)^2.$$

Onda

$$S^2=\frac{1}{n-1}\cdot\left[\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\mu\right)^2-2\cdot n\cdot\left(\overline{X}-\mu\right)^2+n\cdot\left(\overline{X}-\mu\right)^2\right]=$$

$$=\frac{1}{n-1}\cdot\left[\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\mu\right)^2-n\cdot\left(\overline{X}-\mu\right)^2\right]$$

alınar. Bu ifadənin riyazi gözləməsini hesablayaq:

$$E\left(S^2\right)=\frac{1}{n-1}\cdot E\left[\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\mu\right)^2\right]-$$

$$-\frac{n}{n-1}\cdot E\left(\overline{X}-\mu\right)^2=\frac{1}{n-1}\cdot\sum_{i=1}^{n}E\left(X_i-\mu\right)^2-$$

$$-\frac{n}{n-1}\cdot\sigma^2\left(\overline{X}\right)=\frac{n\cdot\sigma^2(X)}{n-1}-\frac{n}{n-1}\cdot\sigma^2\left(\overline{X}\right)=$$

$$=\frac{n}{n-1}\cdot\sigma^2-\frac{n}{n-1}\cdot\sigma^2\left(\frac{X_1+X_2+\ldots+X_n}{n}\right)=\frac{n}{n-1}\cdot\sigma^2-$$

$$-\frac{n}{n-1}\cdot\frac{1}{n^2}\cdot\sigma^2\left(X_1+X_2+\ldots+X_n\right)=\frac{1}{n-1}\times$$

$$\times\left(n\cdot\sigma^2-\frac{1}{n}\cdot n\cdot\sigma^2\right)=\frac{1}{n-1}\cdot(n-1)\cdot\sigma^2=\sigma^2.$$

Beləliklə, S^2 kəmiyyəti nəzəri dispersiyanın yerini dəyişməyən qiymətləndirməsidir.

Seçmə dispersiyanın yerini dəyişməyən qiymətləndirilməsində n əvəzinə n-1 yazılmasının sadə bir izahı var. Riyazi gözləmə əvəzinə istifadə edilən orta qiymət seçmə hissənin mərkəzində yerləşdiyindən, dispersiyanın qiyməti həqiqi qiymətdən kiçik olur. Müşahidə qiymətlərinin sayı artdıqca seçmə dispersiya ilə "düzəldilmiş" dispersiya arasında fərq azalır.

2.8. QİYMƏTLƏNDİRMƏNİN EFFEKTLİLİYİ VƏ TUTARLILIĞI

Qiymətləndirmənin yerini dəyişməməsi ilə yanaşı onun effektliliyinin, yəni etibarlı nəticə alınmasının də əhəmiyyəti var. Bu halda ehtimalın sıxlıq funksiyası həqiqi qiymətə yaxın ətrafda yerləşir və alınan qiymətin xətası daha az olur. Aydındır ki, hər bir qiymətləndirmə yerini dəyişməyəndirsə və kiçik dispersiyaya malikdirsə, bu daha arzu ediləndir.

İki müxtəlif qiymətləndirmədən biri yerini dəyişməyəndirsə, digərinin isə daha az dispersiyası varsa, onlardan hansının seçilməsi məsələnin qoyuluşundan və xüsusiyyətlərindən asılıdır.

Baş hissənin θ naməlum parametri qiymətləndirilirsə və bu qiymətləndirmə Z ilə işarə edilmişdirsə, $E(Z)=\mu_Z$ olduqda

$$E\left[(Z-\theta)^2\right]=E\left\{\left[(Z-\mu_Z)+(\mu_Z-\theta)\right]^2\right\}=$$
$$=E\left[(Z-\mu_Z)^2+2\cdot(Z-\mu_Z)\cdot(\mu_Z-\theta)+(\mu_Z-\theta)^2\right]=$$
$$=E\left[(Z-\mu_Z)^2\right]+2\cdot(\mu_Z-\theta)\cdot E(Z-\mu_Z)+E\left[(\mu_Z-\theta)^2\right]$$

yaza bilərik. Burada ikinci toplanan sıfıra bərabərdir, çünki

$$E(Z-\mu_Z)=E(Z)+E(-\mu_Z)=\mu_Z-\mu_Z=0.$$

Onda orta kvadratik xəta

$$E\left[(Z-\theta)^2\right]=E\left[(Z-\mu_Z)^2\right]+(\mu_Z-\theta)^2$$

olar.

Beləliklə, xəta nəzəri dispersiya ilə yerdəyişmənin kvadratının cəminə bərabər olur.

Çox zaman müşahidə qiymətlərinin sayı n artdıqca X təsadüfi kəmiyyətinin orta qiyməti $\overline{X}$ həqiqi qiymətindən daha az fərqlənir. Çünki $\overline{X}$ -nin dispersiyası $\sigma^2_{\overline{X}}=\frac{\sigma^2}{n}$ olduğundan, seçmə hissə elementlərinin sayı n nə qədər çox olsa, dispersiya bir o qədər az olur və deməli, $\overline{X}$ orta qiyməti üçün ehtimalın sıxlıq funksiyası daha kiçik parça daxilində yerləşir.

Məsələn, X təsadüfi kəmiyyəti normal paylanmışdırsa, onun orta qiyməti *60*, dispersiyası *500* olarsa və seçmə hissədə $n=5$ element varsa,

$$\sigma^2_{\overline{X}} = \frac{500}{5} = 100,$$

$$\sigma_{\overline{X}} = 10$$

olacaq.

Seçmə hissə elementlərinin sayı artdıqca, dispersiya və orta kvadratik meyl azalır:

$$N=20, \quad \sigma^2_{\overline{X}} = \frac{500}{20} = 25; \quad \sigma_{\overline{X}} = 5;$$

$$N=125, \quad \sigma^2_{\overline{X}} = \frac{500}{125} = 4; \quad \sigma_{\overline{X}} = 2;$$

$$N=500, \quad \sigma^2_{\overline{X}} = \frac{500}{500} = 1. \quad \sigma_{\overline{X}} = 1.$$

Misaldan da görünür ki, seçmə hissənin həcmi artdıqca, ehtimalın sıxlıq funksiyasının yerləşdiyi interval kiçilir. Bu həcm kifayət qədər kiçik olsa, sıxlıq funksiyası $\overline{X} = \mu$ qiymətinə uyğun şaquli düz xətdən, demək olar, fərqlənməyəcək. Onda

$$\lim_{n \to \infty} \overline{X} = \mu$$

alınar. Orta qiymətin riyazi gözləməyə bu yaxınlaşması ehtimala görə limitdir və

$$plim \overline{X} = \mu$$

kimi yazılır.

Qiymətləndirmənin ehtimala görə limiti baş hissənin xarakteristikasının həqiqi qiymətinə bərabərdirsə, qiymətləndirmə tutarlı hesab edilir. Lakin ola bilər ki, təsadüfi kəmiyyətin qiymətləndirilməsi tutarlı olmasın, yəni seçmə hissənin həcmi artdıqca, ehtimalın paylanması ya bir yerə yığılmasın, yaxud həqiqi qiymətdən fərqli nöqtəyə yığılsın.

Çalışmalar

2.1. İki zər atıldıqda sınaqların nəticələri aşağıdakı kimi olmuşdur:

X_i	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
n_i	3	4	8	11	15	16	14	12	9	5	3

Paylanma qanununu yazın; seçmə orta qiyməti, seçmə dispersiyanı və seçmə orta kvadratik meyli hesablayın.

2.2. İki zər atıldıqda düşən xallar X_1, X_2 işarə edilmişdir və $X_1 \leq X_2$ şərti ödənir.

a) $X = X_2 - X_1$ kəmiyyətinin ehtimal paylanmasını və riyazi gözləməsini tapın;

b) $X = X_1$ kəmiyyətinin ehtimal paylanmasını və X^2 kəmiyyətinin riyazi gözləməsini tapın.

2.3. X təsadüfi kəmiyyəti üç zər atıldıqda xalların cəmidirsə, $E(X)$ riyazi gözləməsini hesablayın.

2.4. Təsadüfi kəmiyyətin müşahidə olunan qiymətləri və onların tezlikləri verilmişdir:

X_i	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
n_i	3	6	11	13	18	20	12	9	5	3

"Düzəldilmiş" dispersiyanı hesablayın.

2.5. Təsadüfi kəmiyyətin paylanma qanunu

X_i	2	3	4	5	6
P_i	0,1	0,2	0,4	0,2	0,1

və üç müxtəlif seçmə

a)

X_i	2	3	4	5	6
n_i	3	4	6	5	2

b)

X_i	2	3	4	5	6
n_i	4	9	18	11	8

c)

X_i	2	3	4	5	6
n_i	12	20	38	17	13

verilmişdir. Həm nəzəri, həm də seçmə xarakteristikaları hesablayıb onları bir-birilə müqayisə edin.

2.6. X təsadüfi kəmiyyətinin paylanması verilmişdir:

X_i	1	2	3	4
P_i	0,135	0,364	0,376	0,125

Paylanma funksiyasının qrafikini qurun.

III FƏSİL

KOVARİASİYA

3.1. NƏZƏRİ VƏ SEÇMƏ KOVARİASİYALAR

Fərz edək ki, X və Y təsadüfi kəmiyyətlərinin uyğun riyazi gözləmələri μ_X və μ_Y işarə edilmişdir. Təsadüfi kəmiyyətlərin riyazi gözləmələrindən fərqlərinin hasilinin riyazi gözləməsinə nəzəri kovariasiya deyilir:

$$\sigma_{XY} = E[(X-\mu_X)\cdot(Y-\mu_Y)] \quad (3.1)$$

X və Y təsadüfi kəmiyyətləri asılı deyilsə, onların nəzəri kovariasiyası sıfıra bərabərdir:

$$E[(X-\mu_X)(Y-\mu_Y)] = E(X-\mu_X)\cdot E(Y-\mu_Y) =$$
$$= [E(X)-E(\mu_X)]\cdot[E(Y)-E(\mu_Y)] = 0.$$

Nəzəri kovariasiya məlum olmadıqda, onun qiymətləndirilməsi üçün seçmə kovariasiya hesablanır:

$$cov(X,Y) = \frac{1}{n}\cdot\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})\cdot(Y_i-\overline{Y}) \quad (3.2)$$

burada X_i və Y_i uyğun olaraq, X və Y təsadüfi kəmiyyətlərinin müşahidə edilən qiymətləridir.

3.2. SEÇMƏ KOVARİASİYANIN HESABLANMASI DÜSTURLARI

İki müxtəlif təsadüfi kəmiyyətin müşahidə edilən qiymətləri məlumdursa, (3.2) düsturu ilə seçmə kovariasiyanı hesablamaq olar. Həmin düstur üzərində çevirmələr aparmaqla onu sadələşdirib əlverişli ifadə almaq mümkündür:

$$cov(X,Y) = \frac{1}{n}\cdot\sum_{i=1}^{n}\left(X_i\cdot Y_i - \overline{X}\cdot Y_i - X_i\cdot\overline{Y} + \overline{X}\cdot\overline{Y}\right) =$$
$$= \frac{1}{n}\cdot\left(\sum_{i=1}^{n}X_iY_i - \overline{X}\cdot\sum_{i=1}^{n}Y_i - \overline{Y}\cdot\sum_{i=1}^{n}X_i + n\cdot\overline{X}\cdot\overline{Y}\right) =$$
$$= \frac{1}{n}\cdot\left(\sum_{i=1}^{n}X_iY_i - n\cdot\overline{X}\cdot\overline{Y} - n\cdot\overline{X}\cdot\overline{Y} + n\cdot\overline{X}\cdot\overline{Y}\right) =$$
$$= \frac{1}{n}\cdot\sum_{i=1}^{n}X_iY_i - \overline{X}\cdot\overline{Y} + \overline{X}\cdot\overline{Y} - \overline{X}\cdot\overline{Y} = \overline{X\cdot Y} - \overline{X}\cdot\overline{Y}.$$

Kovariasiyanın hesablanmasında istifadə olunan bəzi düsturların doğruluğunu isbat edək:

1. Y təsadüfi kəmiyyəti iki başqa təsadüfi kəmiyyətin cəmidirsə $(Y=V+W)$, onda

$$cov(X,Y)=cov(X,V)+cov(X,W)$$

bərabərliyi doğrudur.

Kovariasiyanın ifadəsində Y kəmiyyətinin yerinə $V+W$ yazaq və sadə çevirmələr aparaq:

$$cov(X,Y)=cov(X,V+W)=\frac{1}{n}\cdot\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\overline{X}\right)\times$$
$$\times\left[\left(V_i+W_i\right)-\left(\overline{V}+\overline{W}\right)\right]=\frac{1}{n}\cdot\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\overline{X}\right)\times$$
$$\times\left(V_i-\overline{V}\right)+\frac{1}{n}\cdot\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\overline{X}\right)\cdot\left(W_i-\overline{W}\right)=$$
$$=cov(X,V)+cov(X,W).$$

2. $Y=c\cdot Z$ olarsa,

$$cov(X,Y)=c\cdot cov(X,Z)$$

bərabərliyi ödənilir, burada c-sabit ədəddir.

Doğrudan da,

$$cov(X,Y)=\frac{1}{n}\cdot\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\overline{X}\right)\cdot\left(c\cdot Z_i-c\cdot\overline{Z}\right)=$$
$$=\frac{c}{n}\cdot\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\overline{X}\right)\cdot\left(Z_i-\overline{Z}\right)=c\cdot\mathrm{cov}(X,Z)$$

olduğu aşkardır.

3. Y təsadüfi kəmiyyəti sabit ədəddirsə $(Y=c)$, onda $cov(X,Y)$ sıfıra bərabərdir. Çünki

$$cov(X,Y)=\frac{1}{n}\cdot\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\overline{X}\right)\cdot\left(Y_i-\overline{Y}\right)=\frac{1}{n}\cdot\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\overline{X}\right)\cdot(c-c)=0$$

alınar.

Seçmə kovariasiyanın hesablanmasına aid bir misala baxaq. Fərz edək ki, təhsilə sərf olunan illərlə (X) gündəlik əmək haqqı (Y) arasında 20 nəfərin sənədləri əsasında əlaqə cədvəli verilmişdir. Kovariasiyanı hesablamaq tələb olunur.

Kovariasiya düsturunda təsadüfi kəmiyyətin müşahidə olunan qiymətlərilə orta qiymətlərin fərqi istifadə edildiyindən $\overline{X}$ və $\overline{Y}$, sonra isə $X_i-\overline{X}, Y_i-\overline{Y}$ və $(X_i-\overline{X})\cdot(Y_i-\overline{Y})$ ifadələri hesablanmalıdır. Verilən qiymətləri və nəticələri cədvəl şəklində yazmaq daha əlverişlidir (cədvəl 3.1).

Cədvəl 3.1

i	X_i	Y_i	$X_i-\overline{X}$	$Y_i-\overline{Y}$	$(X_i-\overline{X})\cdot(Y_i-\overline{Y})$
1	8	6,2	-5,35	-10,62	56,82
2	11	10,4	-2,35	-6,42	15,09
3	10	9,8	-3.35	-7,02	23,52
4	17	12,6	3,65	-4,22	-15,40
5	20	20,2	6,65	3,38	22,48
6	15	25,0	1,65	8.18	13,50
7	11	15,3	-2,35	-1,52	3,57
8	15	28,1	1,65	11,28	18,61
9	12	14,8	-1,35	-2,02	2,73
10	8	7,5	-5,35	-9,32	49,86
11	11	14,2	-2,35	-2,62	6,16
12	15	27,9	1,65	11,08	18,28
13	19	24,4	5,65	7,58	42,83
14	20	30,3	6,65	13,48	89,64
15	11	17,0	-2,35	0,18	-0,42
16	11	12,4	-2,35	-4,42	10,39
17	17	14,7	3,65	-2,12	-7,74
18	15	20,8	1,65	3,98	6,57
19	10	11,3	-3,35	-5,52	18,49
20	11	13,5	-2,35	-3,32	7,80
Cəmlər	267	336,4	0,00	0,00	382,78
Orta qiymətlər	13,35	16,82	0,00	0,00	19,14

Kovariasiyanın qiyməti $cov(X,Y)=19,14$ alınır. Müsbət qiymətin alınması göstərir ki, X və Y arasında müsbət əlaqə var, yəni X artdıqca Y də artır.

Göstərilən hesablama cədvəlini sadələşdirmək də olar. Çünki kovarvasiyanın ifadəsində çevirmələr aparmaqla alınmış daha sadə

$$cov(X,Y)=\overline{X\cdot Y}-\overline{X}\cdot\overline{Y}$$

düsturu da var. Beləliklə, cədvəldə son 3 sütun əvəzinə yalnız bir sütun, X_i və Y_i qiymətlərinin hasilindən ibarət sütun kifayətdir (cədvəl 3.2). Hesablamanın nəticələrinə görə $\bar{X} = 13,35$; $\bar{Y} = 16.82$; $\overline{X \cdot Y} = 243,68$ alınmışdır. Bu qiymətləri kovariasiyanın ifadəsində yerinə yazaq:

$$cov(X,Y) = 243,69 - 13,35 \cdot 16,82 = 243,69 - 224,55 = 19,14$$

Yenə də yuxarıda başqa düsturla hesablanmış qiymət alındı.

Cədvəl 3.2

i	X_i	Y_i	$X_i \cdot Y_i$
1	8	6,2	49,6
2	11	10,4	114,4
3	10	9,8	98,0
4	17	12,6	214,2
5	20	20,2	404,0
6	15	25,0	375,0
7	11	15,3	168,3
8	15	28,1	421,5
9	12	14,8	177,6
10	8	7,5	60,0
11	11	14,2	156,2
12	15	27,9	418,5
13	19	24,4	463,6
14	20	30,3	606,0
15	11	17,0	187,0
16	11	12,4	136,4
17	17	14,7	249,8
18	15	20,8	312,0
19	10	11,3	113,0
20	11	13,5	148,5
Cəmlər	267	336,4	4873,7
Orta qiymətlər	13,35	16,82	243,69

3.3. SEÇMƏ DİSPERSİYANIN HESABLANMASI QAYDALARI

Müşahidə olunan $X_1, X_2,..., X_n$ qiymətlərinin seçmə dispersiyası

$$var(X)=\frac{1}{n}\cdot\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\overline{X}\right)^2$$

nəzəri dispersiyanın yerini dəyişən qiymətləndirməsi olduğundan onun əvəzinə S^2 "düzəldilmiş" dispersiyası daha çox istifadə edilir. Bu iki dispersiya arasında

$$var(X)=\frac{n-1}{n}\cdot S^2$$

bərabərliyi ödəndiyinə görə, *var(x)* dispersiyasının gözlənilən qiyməti $\frac{n-1}{n}\cdot\sigma^2$ olacaq. Qeyd edək ki, seçmə hissənin qiyməti artdıqca $\frac{n-1}{n}$ nisbəti 1-ə yaxınlaşır və ona görə də *var (X)* xarakteristikasının riyazi gözləməsi σ^2 olur.

Seçmə dispersiyanın hesablanması üçün aşağıdakı düsturlardan istifadə edilir:

1. $X=V+W$ olarsa, $var(X)=var(V)+var(W)+2\cdot cov(V,W)$ bərabərliyi doğrudur.

Bunu isbat edək:

$$var(X)=\frac{1}{n}\cdot\sum_{i=1}^{n}(V_i+W_i-\overline{V}-\overline{W})^2=$$

$$=\frac{1}{n}\cdot\sum_{i=1}^{n}\left[(V_i-\overline{V})+(W_i-\overline{W})\right]^2=\frac{1}{n}\cdot\sum_{i=1}^{n}(V_i-\overline{V})^2+$$

$$+\frac{1}{n}\cdot\sum_{i=1}^{n}(W_i-\overline{W})^2+\frac{2}{n}\cdot\sum_{i=1}^{n}(V_i-\overline{V})\cdot(W_i-\overline{W})=$$

$$=var(V)+var(W)+2\cdot cov(V,W).$$

2. $X=c\cdot Z$ olarsa, burada c- sabit ədəddir, onda $var(X)=c^2\cdot var(Z)$ alınır.

Doğrudan da,

$$var(X)=\frac{1}{n}\cdot\sum_{i=1}^{n}\left(c\cdot Z_i-c\cdot\overline{Z}\right)^2=\frac{c^2}{n}\cdot\sum_{i=1}^{n}\left(Z_i-\overline{Z}\right)^2=c^2\,var(Z)$$

olduğu aşkardır.

3. $X=c$ olarsa, burada c- sabit ədəddir, onda $var(X)=0$ olur. Bu düsturun doğruluğu dərhal alınır:

$$var(X)=\frac{1}{n}\cdot\sum_{i=1}^{n}(c-c)^2=0.$$

Seçmə dispersiyanın hesablanması üçün $var(X)=\overline{X^2}-(\bar{X})^2$ düsturundan daha çox istifadə edirlər, bu ifadə $cov(X,Y)$-in ifadəsində $Y=X$ olduqda alınır.

3.4. KORRELYASİYA ƏMSALI

Kovariasiya iki təsadüfi kəmiyyətin bir-birilə əlaqəsini ifadə etsə də əlverişli deyil, çünki o təsadüfi kəmiyyətlərin ölçü vahidlərindən asılıdır. Eyni məsələ üçün müxtəlif kovariasiya qiymətləri alınacaq. Ona görə də təsadüfi X və Y kəmiyyətləri arasında əlaqəni öyrənmək məqsədilə korrelyasiya əmsalı hesablanır.

Nəzəri korrelyasiya əmsalının düsturu aşağıdakı kimidir:

$$\rho_{XY}=\frac{\sigma_{XY}}{\sqrt{\sigma_X^2\cdot\sigma_Y^2}}=\frac{\sigma_{XY}}{\sigma_X\cdot\sigma_Y},$$

burada σ_X^2 və σ_Y^2 uyğun olaraq, X və Y təsadüfi kəmiyyətlərinin nəzəri dispersiyaları, σ_{XY} isə onların nəzəri kovariasiyasıdır.

X və Y asılı olmayan kəmiyyətlərdirsə, nəzəri kovariasiya $\sigma_{XY}=0$ olacaq və ona görə də $\rho_{XY}=0$ alınacaq.

Seçmə korrelyasiya əmsalı nəzəri dispersiyaların və nəzəri kovariasiyanın onların yerini dəyişməyən qiymətləndirməsi ilə əvəz edilməsi nəticəsində alınır:

$$r_{XY}=\frac{\frac{n}{n-1}\cdot cov(X,Y)}{\sqrt{\frac{n}{n-1}\cdot var(X)\cdot\frac{n}{n-1}\cdot var(Y)}}=\frac{cov(X,Y)}{\sqrt{var(X)\cdot var(Y)}},$$

burada "düzəldilmiş" dispersiyaya analoji olaraq, "düzəldilmiş" seçmə kovariasiyadan istifadə edilmiş və r_{XY}-in ifadəsinin surətində həmin kovariasiya yazılmışdır:

$$S_{XY} = \frac{1}{n-1} \cdot \sum_{i=1}^{n} (X_i - \overline{X}) \cdot (Y_i - \overline{Y}) = \frac{n}{n-1} \cdot cov(X,Y).$$

Qeyd edək ki, həm seçmə kovariasiyanın, həm də korrelyasiya əmsalının hesablanması üçün əvvəlcə $X_i - \overline{X}, Y_i - \overline{Y}$, sonra isə $(X_i - \overline{X})^2, (Y_i - \overline{Y})^2, (X_i - \overline{X}) \cdot (Y_i - \overline{Y})$ hesablanır, axırıncı qiymətlər ayrı-ayrı cəmlənir və müşahidə qiymətlərinin sayına bölünür. Bununla da *var(X)*, *var(Y)* və *cov(X,Y)* qiymətləri tapılır.

Çalışmalar

3.1. İki bir-birindən asılı X və Y kəmiyyətlərinin müşahidə olunan qiymətləri verilmişdir:

X_i	4	3	8	5	4	7	6	8	3	5
Y_i	10	7	85	29	12	51	42	76	6	23

Seçmə kovariyasiyanı hesablayın.

3.2. Aşağıdakı cədvəl şəklində asılılıqdan istifadə edərək, korrelyasiya əmsalını hesablayın:

X_i	1,2	1,5	1,3	1,9	1,8	1,2	1,7	1,6	1,5	1,9
Y_i	19,8	16,4	20,0	11,7	6,3	20,1	9,9	10,3	14,8	6 ,2

IV FƏSİL

BİR SƏRBƏST DƏYİŞƏNLİ XƏTTİ REQRESSİYA

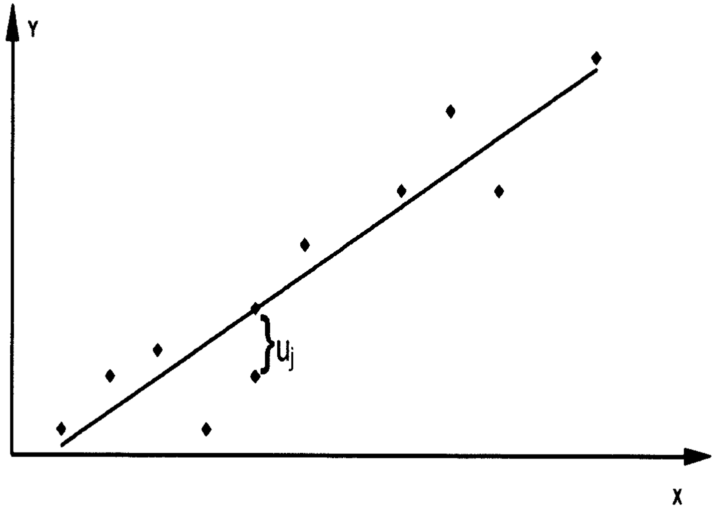
4.1. BİR SƏRBƏST DƏYİŞƏNLİ XƏTTİ REQRESSİYA MODELİNİN XÜSUSİYYƏTLƏRİ

Aşağıdakı modelə baxaq:

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 \cdot X_i + u_i.$$

Bir sərbəst dəyişənli xətti reqressiya modeli adlanan bu modeldə asılı dəyişənin i -ci müşahidə qiyməti olan Y_i iki hissədən ibarətdir. Onların birincisi təsadüfi olmayan $\beta_o + \beta_1 \cdot X_i$ hissəsidir, burada X asılı olmayan (izahedici) dəyişəndir, sabit β_o və β_1 ədədləri parametrlərdir. Qalan ikinci hissə isə təsadüfi kəmiyyətdir.

Fərz edək ki, X_1, $X_2,...X_{11}$ –asılı olmayan dəyişənin qiymətləridir. Əgər Y və X arasındakı asılılıq dəqiq xətti asılılıq olsaydı, Y-in qiymətləri həmin düz xəttin üzərində yerləşməliydi. Asılılıqda təsadüfi kəmiyyətin olması ona gətirib çıxarır ki, Y-in müşahidə olunan qiymətləri bir düz xətt üzərində olmur(şəkil 4.1).



Şəkil 4.1. Bir sərbəst dəyişənli xətti reqressiya

Həqiqi qiymətlə düz xətt arasında məsafələr təsadüfi kəmiyyətin qiymətləridir.

Təsadüfi kəmiyyətin modelə daxil edilməsinin səbəbləri aşağıdakılardır:

1. Y-in X-dən xətti asılılığı məsələnin həddindən artıq sadələşdirilməsidir. Y başqa dəyişənlərdən də asılı ola bilər. Çox zaman reqressiya tənliyinə əlavə dəyişən ona görə daxil edilmir ki, onların ölçülməsi mümkün olmur. Təsadüfi u_i kəmiyyəti bu çatışmazlığı aradan qaldırır.

2. Baxılan asılılıq bir-neçə makroiqtisadi münasibətin birləşdirilməsinin nəticəsi ola bilər. Bu münasibətlərin parametrləri müxtəlifdir və ona görə də asılılıq təqribi alınır. Asılılığa təsadüfi kəmiyyət dəqiqləşdirmə məqsədilə əlavə edilir.

3. Ola bilər ki, modelin yazılışı iqtisadi obyekti və prosesi düzgün təsvir edə bilməsin. Məsələn, parametrin zamandan asılı hər bir qiyməti X-dən əlavə həm də əvvəlki qiymətlərdən asılıdır. Bunu dəqiq riyazi ifadə etmək çətin olduğundan, asılılığa təsadüfi kəmiyyət daxil etməklə məsələ sadələşdirilir.

4. Y və X arasında asılılıq qeyri-xəttidirsə, onun xətti qəbul edilməsi alınan uyğunsuzluğun təsadüfi kəmiyyətlə əvəz edilməsinə səbəb olur.

5. Qarşılıqlı əlaqəsi olan dəyişənlərin ölçülməsində səhvlər də təsadüfi hissənin yaranmasına gətirib çıxarır.

İxtiyari ekonometrik modeldə u_i təsadüfi komponenti bütün bu göstərilən beş səbəbin ümumi nəticəsi hesab edilməlidir.

4.2. BİR SƏRBƏST DƏYİŞƏNLİ XƏTTİ REQRESSİYA ƏMSALLARININ TƏYİN EDİLMƏSİ

Y təsadüfi kəmiyyəti X-dən asılıdırsa və n sayda (X_i, Y_i) nöqtələri verilmişdirsə, təqribi

$$\hat{Y}_i = b_0 + b_1 \cdot X$$

asılılığının b_0, b_1 əmsalları təyin edilməlidir. Xətanı

$$e_i = Y_i - \hat{Y}_i$$

işarə edək və e_i^2 üzərində çevirmələr aparaq:

$$e_i^2 = \left(Y_i - \hat{Y}_i\right)^2 = Y_i^2 - 2 \cdot Y_i \cdot \hat{Y}_i + \hat{Y}_i^2 =$$
$$= Y_i^2 - 2 \cdot Y_i\left(b_o + b_1 \cdot X_i\right) + \left(b_o + b_1 \cdot X_i\right)^2 =$$
$$= Y_i^2 - 2b_o \cdot Y_i - 2b_1 \cdot X_i \cdot Y_i + b_o^2 + 2b_o b_1 \cdot X_i + b_1^2 X_i^2.$$

Bütün xətaların kvadratları cəmi

$$\sum_{i=1}^{n} e_i^2 = \sum_{i=1}^{n} Y_i^2 - 2b_o \cdot \sum_{i=1}^{n} Y_i - 2b_1 \cdot \sum_{i=1}^{n} X_i \cdot Y_i +$$
$$+ b_o^2 \cdot n + 2b_o \cdot b_1 \cdot \sum_{i=1}^{n} X_i + b_i^2 \cdot \sum_{i=1}^{n} X_i^2$$

olacaq.

Xüsusi törəmələr alaq:

$$\frac{\partial \sum_{i=1}^{n} e^2}{\partial b_0} = -2 \cdot \sum_{i=1}^{n} Y_i + 2 \cdot b_0 \cdot n + 2b_1 \cdot \sum_{i=1}^{n} X_i,$$

$$\frac{\partial \sum_{i=1}^{n} e^2}{\partial b_1} = -2 \cdot \sum_{i=1}^{n} X_i Y_i + 2b_0 \cdot \sum_{i=1}^{n} X_i + 2b_1 \cdot \sum_{i=1}^{n} X_i^2.$$

Bu törəmələri sıfıra bərabər qəbul etsək və bərabərliklərin hər iki tərəfini n-ə bölsək,

$$\begin{cases} -2 \cdot \overline{Y} + 2 \cdot b_0 + 2 \cdot b_1 \cdot \overline{X} = 0, \\ -2 \cdot \dfrac{\sum_{i=1}^{n} X_i Y_i}{n} + 2 \cdot b_0 \cdot \overline{X} + 2b_1 \cdot \dfrac{\sum_{i=1}^{n} X_i^2}{n} = 0 \end{cases}$$

tənliklər sistemindən əmsalları təyin edə bilərik:

$$b_0 = \overline{Y} - b_1 \cdot \overline{X},$$

$$b_1 \cdot \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i^2}{n} + \left(\overline{Y} - b_1 \cdot \overline{X}\right) \cdot \overline{X} = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i Y_i}{n},$$

$$b_1 \cdot \left[\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i^2}{n} - \left(\overline{X}\right)^2 \right] = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i Y_i}{n} - \overline{X} \cdot \overline{Y} = cov(X, Y)$$

$$b_1 = \frac{cov(X, Y)}{\mathrm{var}(X)}, \quad b_0 = \overline{Y} - \frac{cov(X, Y)}{\mathrm{var}(X)} \cdot \overline{X}.$$

Göstərək ki, $\overline{e} = 0$, $\overline{\hat{Y}} = \overline{Y}$, $\mathrm{cov}\left(\hat{Y}, e\right) = 0$ bərabərlikləri doğrudur:

a) $e_i = Y_i - \hat{Y}_i = Y_i - b_0 - b_1 \cdot X_i$,

$$\sum_{i=1}^{n} e_i = \sum_{i=1}^{n} Y_i - b_0 \cdot n - b_1 \cdot \sum_{i=1}^{n} X_i,$$

$$\overline{e} = \overline{Y} - b_0 - b_1 \cdot \overline{X} = \overline{Y} - (\overline{Y} - b_1 \cdot \overline{X}) - b_1 \cdot \overline{X} = 0.$$

b) $e_i = Y_i - \hat{Y}_i$, $\quad \sum_{i=1}^{n} e_i = \sum_{i=1}^{n} Y_i - \sum_{i=1}^{n} \hat{Y}_i$,

$\overline{e} = \overline{Y} - \overline{\hat{Y}} = 0$, $\quad \overline{Y_i} = \overline{\hat{Y}_i}$.

c) $$cov\left(\hat{Y}, e\right) = cov\left[\left(b_0 + b_1 \cdot X\right), e\right] = cov\left(b_0, e\right) + cov\left(b_1 \cdot X, e\right) =$$
$$= b_1 \cdot cov\left(X, e\right) = b_1 \cdot cov\left(X, Y - b_0 - b_1 \cdot X\right) =$$
$$= b_1 \cdot \left[cov\left(X, Y\right) - cov\left(X, b_0\right) - b_1 \cdot cov\left(X, X\right)\right] =$$
$$= b_1 \cdot \left[cov\left(X, Y\right) - \frac{cov\left(X, Y\right)}{var\left(X\right)} \cdot var\left(X\right) \right] = 0.$$

Kiçik bir misala baxaq.

Müxtəlif dövrlərdə zavodda işçilərin ümumi aylıq əmək haqqının *(X_i)* və buraxılan məhsulun dəyərinin *(Y_i)* aylıq qiymətləri (min manatla) verilmişdir. X-in Y-dən xətti reqressiya asılılığını qurmaq tələb olunur.

Cədvəl 4.1

i	X_i	Y_i	X_i^2	$X_i \cdot Y_i$	$\hat{Y}_i$	$Y_i - \hat{Y}_i$
1	87,2	122,4	7603,84	10673,28	120,5	1,9
2	88,5	123,1	7832,25	10894,35	121,1	2,0
3	90,3	125,7	8154,09	11350,71	122,1	3,6
4	92,6	120,0	8574,76	11112,00	123,2	-3,2
5	98,3	121,5	9662,89	11943,45	126,2	-4,7
6	103,4	127,3	10691,56	13162,82	128,8	-1,5
7	103,9	126,2	10795,21	13112,18	129,0	-2,8
8	105,2	130,6	11067,04	13739,12	129,7	0,9
9	108,4	132,9	11750,56	14406,36	131,3	1,6
10	109,0	131,5	11881,00	14333,50	131,6	-0,1
11	120,7	138,1	14568,49	16668,67	137,6	0,5
12	122,5	140,3	15006,25	17186,75	138,5	1,8
Cəmlər	1230,0	1539,6	127587,94	158583,19	1539,6	0,0
Orta qiymətlər	102,5	128,3	10632,33	13215,27	128,3	0,0

Həm verilən qiymətlər, həm də əmsalların hesablanması üçün zəruri olan X_i^2 və X_iY_i qiymətləri cədvəl 4.1-də sütunlar şəklində göstərilmişdir. Bunlardan əlavə reqressiya asılılığından alınmış $\hat{Y}_i$ qiymətlərini və $Y_i - \hat{Y}_i$ qalıqlarını da cədvələ daxil edək.

Bütün lazım olan dəyişənlər, onların müvafiq cəmləri və orta qiymətləri reqressiya əmsallarını hesablamağa imkan verir:

$$b_1 = \frac{\operatorname{cov}(X,Y)}{\operatorname{var}(X)} = \frac{\overline{X \cdot Y} - \overline{X} \cdot \overline{Y}}{\overline{X^2} - (\overline{X})^2} = \frac{13215{,}27 - 102{,}5 \cdot 128{,}3}{10632{,}33 - (102{,}5)^2} =$$

$$= \frac{13215{,}27 - 13150{,}75}{10632{,}33 - 10506{,}25} = \frac{64{,}52}{126{,}08} = 0{,}512;$$

$$b_0 = \overline{Y} - b_1 \cdot \overline{X} = 128{,}3 - 0{,}512 \cdot 102{,}5 = 128{,}3 - 52{,}48 = 75{,}82;$$

$$\hat{Y} = 75{,}82 + 0{,}512 \cdot X.$$

Xətti asılılıqdan alınmış $\hat{Y}_i$ qiymətlərinin ədədi ortası gözlənildiyi kimi 128,3 olur və $\overline{Y} = \overline{\hat{Y}_i}$ şərti ödənir. Yuxarıda isbat olunmuş $\overline{e} = 0$ şərti də, yəni qalıqların orta qiymətinin sıfıra bərabər olmasını göstərən

$$\frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} \left(Y_i - \hat{Y}_i\right) = 0$$

bərabərliyi də doğrudur. Sonuncu iki şərt əsasən hesablanmanın düzgün aparıldığını yoxlamaq üçün istifadə edilir.

4.3. REQRESSİYA ƏMSALLARININ TƏSADÜFİLİYİ

Ən kiçik kvadratlar üsulu ilə hesablanan reqressiya əmsallarının təsadüfi hissəsini ayırmaq üçün çevirmələr aparaq.

Fərz edək ki, Y kəmiyyətinin X-dən asılılığı aşağıdakı kimidir:

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 \cdot X_i + u_i.$$

Müşahidə olunan qiymətlər əsasında alınmış

$$\hat{Y}_i = b_0 + b_1 \cdot X_i$$

xətti reqressiya funksiyasının b_0 və b_1 əmsalları uyğun β_0 və β_1 əmsallarını əvəz etsə də, təsadüfi u_i kəmiyyətindən də asılıdır. Bu asılılığın hansı şəkildə olduğunu müəyyən edək. Məlumdur ki,

$$b_1 = \frac{cov(X,Y)}{var(X)}.$$

Y təsadüfi kəmiyyətinin ifadəsini yerinə yazaq:

$$b_1 = \frac{cov(X,\beta_0 + \beta_1 \cdot X + u)}{var(X)} =$$

$$= \frac{cov(X,\beta_0) + cov(X,\beta_1 X) + cov(X,u)}{var(X)}.$$

Onda

$$cov(X,\beta_0)=0.$$
$$cov(X,\beta_1\cdot X)=\beta_1\cdot cov(X,X)=\beta_1\cdot var(X)$$
olduğundan,
$$b_1=\beta_1+\frac{cov(X,u)}{var(X)} \qquad (4.1)$$
alınar.

Beləliklə, b_1-in β_1-dən fərqi $\frac{cov(X,u)}{var(X)}$ təsadüfi kəmiyyətidir. Eyni qayda ilə b_0-ın β_0-dan fərqini də tapa bilərik.

Konkret məsələlərin həllində bu təsadüfi kəmiyyətləri təyin etmək mümkün olmur, çünki həm β_0 və β_1, həm də u_i məlum deyil.

4.4. REQRESSİYA ƏMSALLARININ DƏQİQLİYİ

Reqressiya asılılığının b_0 və b_1 əmsallarının dəqiqliyini yoxlamaq üçün qiymətləndirmənin $\sigma^2_{b_0}$ və $\sigma^2_{b_1}$ nəzəri dispersiyaları hesablanır. Nəzərə alsaq ki,
$$b_1=\beta_1+\frac{cov(X,u)}{var(X)}$$
bərabərliyi doğrudur, onda
$$(b_1-\beta_1)^2=\left[\frac{cov(X,u)}{var(X)}\right]^2$$
ifadəsinin riyazi gözləməsi b_1 əmsalının nəzəri dispersiyası olacaq, çünki $E(b_1)=\beta_1$ həmin əmsalın riyazi gözləməsidir:
$$\sigma^2_{b_1}=E\left\{\left[\frac{\mathrm{cov}(X,u)}{\mathrm{var}(X)}\right]^2\right\}=\frac{1}{[\mathrm{var}(X)]^2}\times$$
$$\times E\left\{\left[\frac{1}{n}\cdot\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})\cdot(u_i-\bar{u})\right]^2\right\}.$$

Bərabərliyin sağ tərəfindəki cəmin kvadratında toplananların hasillərinin riyazi gözləmələri sıfıra bərabər olduğuna görə, ifadə sadələşir:

$$\sigma_{b_1}^2 = \frac{1}{n^2 \cdot [\mathrm{var}(X)]^2} \cdot E\left[\sum_{i=1}^{n} (X_i - \overline{X})^2 \cdot (u_i - \overline{u})^2\right] =$$

$$= \frac{1}{n^2 \cdot [\mathrm{var}(X)]^2} \cdot \sum_{i=1}^{n} (X_i - \overline{X})^2 \cdot E(u_i - \overline{u})^2 =$$

$$= \frac{n \cdot \mathrm{var}(X)}{n^2 \cdot [\mathrm{var}(X)]^2} \cdot \sigma_u^2 = \frac{\sigma_u^2}{n \cdot \mathrm{var}(X)}.$$

Eyni qayda ilə b_0 əmsalının da nəzəri dispersiyası üçün düstur almaq olar. Aşağıdakı bərabərliklərdən istifadə edək:

$$b_0 = \overline{Y} - b_1 \cdot \overline{X},$$

$$\overline{Y} = \beta_0 + \beta_1 \cdot \overline{X} + \overline{u}.$$

Onda

$$b_0 = \beta_0 + \beta_1 \cdot \overline{X} + \overline{u} - b_1 \cdot \overline{X} = \beta_0 - (b_1 - \beta_1) \times$$

$$\times \overline{X} + \overline{u} = \beta_0 - \frac{cov(X,u)}{var(X)} \cdot \overline{X} + \overline{u}$$

olduğuna görə

$$(b_0 - \beta_0)^2 = \left[\frac{cov(X,u)}{var(X)} \cdot \overline{X} - \overline{u}\right]^2.$$

$$\sigma_{b_0}^2 = E\left\{\left[\frac{cov(X,u)}{var(X)} \cdot \overline{X} - \overline{u}\right]^2\right\} = E\left\{\left[\overline{X}\frac{cov(X,u)}{var(X)}\right]^2\right\} -$$

$$-2 \cdot E\left[\frac{cov(X,u)}{var(X)} \cdot \overline{X} \cdot \overline{u}\right] + E(\overline{u})^2 =$$

$$= \frac{(\overline{X})^2}{[var(X)]^2} \cdot E\left\{[cov(X,u)]^2\right\} + E(\overline{u})^2 =$$

$$= \frac{(\overline{X})^2}{[var(X)]^2} \cdot \frac{n \cdot var(X)}{n^2} \cdot \sigma_u^2 + E\left[\left(\frac{u_1 + u_2 + \ldots + u_n}{n}\right)^2\right] =$$

$$= \frac{(\overline{X})^2 \cdot \sigma_u^2}{n \cdot var(X)} + \frac{n \cdot E(u^2)}{n^2} = \frac{(\overline{X})^2 \cdot \sigma_u^2}{n \cdot var(X)} +$$

$$+ \frac{\sigma_u^2}{n} = \frac{\sigma_u^2}{n} \cdot \left[1 + \frac{(\overline{X})^2}{var(X)}\right]$$

alınar.

Göründüyü kimi, b_0 və b_1 əmsallarının dispersiyaları seçmə hissənin müşahidə qiymətlərinin sayı ilə tərs mütənasibdir. Bu isə o deməkdir ki, informasiya nə qədər çox olsa, qiymətləndirmə bir o qədər dəqiq olacaq. Bundan əlavə, həmin əmsalların dispersiyaları təsadüfi həddin dispersiyası ilə düz mütənasibdir, yəni asılılığın təsadüfi həddinin dispersiyası nə qədər çoxdursa, qiymətləndirmənin dəqiqliyi bir o qədər azalacaq.

X kəmiyyətinin dispersiyasının qiymətləndirməyə təsiri də alınan düsturlarla öyrənilə bilər. Əmsalların dispersiyaları sərbəst dəyişənin dispersiyası ilə tərs mütənasibdir. Reqressiya əmsalları X-in aldığı qiymətlər əsasında Y-in dəyişməsinə görə hesablandığından, onlar X-in dəyişmələrindən asılıdır, lakin həm də u-nun variasiyalarından da asılıdır. X-in dispersiyası nə qədər az olsa, Y-in sapmasının təyinində, çox güman ki, təsadüfilik amilinin nisbi təsiri daha çox olacaq. Bununla da reqressiya təhlili daha təqribi nəticə verə bilər.

Praktiki məsələlərdə b_0 və b_1 reqressiya əmsallarının dispersiyasını hesablamaq mümkün olmur, ona görə ki, σ_u^2 məlum deyil. Lakin σ_u^2 qiymətləndirməsini qalıqlardan istifadə etməklə ala bilərik. Reqressiya xətti müşahidə qiymətlərinə

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 \cdot X_i$$

asılılığına nisbətən daha yaxın olduğundan, qalıqların dispersiyası u təsadüfi həddinin dispersiyasından az olur. Məsələ həllində "düzəldilmiş" dispersiya

$$S_u^2 = \frac{n}{n-2} \cdot var(e)$$

ifadəsindən tapılır və əmsalların standart meylləri aşağıdakı düstürlarla hesablanır:

$$S_{b_0} = S_u \cdot \sqrt{\frac{1}{n} \cdot \left[1 + \frac{(\overline{X})^2}{var(X)} \right]},$$

$$S_{b_1} = \frac{S_u}{\sqrt{n \cdot var(X)}}.$$

Standart səhvlər adlanan bu qiymətlər reqressiya əmsalları ilə eyni zamanda təyin edilir və onların dəqiqlik dərəcəsinin müəyyənləşdirilməsinə imkan verir.

4.5. QAUSS- MARKOV ŞƏRTLƏRİ

Aydındır ki, reqressiya asılılığının əmsallarının xassələrinə təsadüfi həddin xüsusiyyətləri təsir etməlidir. Ən kiçik kvadratlar üsuluna əsaslanan reqressiya təhlilinin düzgün aparılması üçün *"Qauss-Markov şərtləri"* adlanan şərtlər ödənməlidir. Bu şərtlərdən hər hansı birinin ödənmədiyini tədqiqatçı mütləq bilməlidir və bunun nəticələrə necə təsir edəcəyini araşdırmalıdır.

Bu şərtlər aşağıdakılardır:

1. Bütün müşahidələr üçün təsadüfi həddin riyazi gözləməsi sıfıra bərabər olmalıdır.
2. Bütün müşahidələr üçün təsadüfi həddin nəzəri dispersiyası sabit olmalıdır.
3. Təsadüfi həddin istənilən iki müşahidə olunan qiyməti arasında asılılıq olmamalıdır.
4. Təsadüfi həddin paylanması sərbəst dəyişəndən asılı olmamalıdır.

Qauss-Markov şərtlərindən əlavə tədqiq edilən prosesin təsadüfi həddinin paylanmasının normallığı da əhəmiyyətə malikdir. Aydındır ki, təsadüfi hədd normal paylanmışdırsa, reqressiya əmsalları da normal paylanma qanununa tabe olacaq.

Təsadüfi kəmiyyətin normal paylanması mərkəzi limit teoreminə əsaslanır. İsbat edilmişdir ki, təsadüfi kəmiyyət çoxlu sayda başqa təsadüfi kəmiyyətlərin qarşılıqlı təsirinin ümumi nəticəsi kimi alınmışdırsa və onlardan heç biri digərlərindən üstünlüyə malik deyilsə, onda hətta ayrı-ayrı hissələr normallıq şərtini ödəməsələr də, paylanma təqribən normal olmalıdır. Ona görə də, hətta təsadüfi kəmiyyətlərin paylanması barədə heç bir informasiya verilmədikdə belə, onun normal paylandığını fərz edə bilərik.

4.6.REQRESSİYA ƏMSALLARININ YERİNİ DƏYİŞMƏMƏSİ

Göstərək ki, Qauss-Markovun birinci və dördüncü şərtləri ödənilirsə, reqressiya asılılığının b_1 əmsalı β_1-in yerini dəyişməyən qiymətləndirməsidir.

(4.1) bərabərliyindən istifadə etməklə, riyazi gözləməni hesablayaq:

$$E(b_1) = E\left[\beta_1 + \frac{cov(X,u)}{var(X)}\right] = \beta_1 + E\left[\frac{cov(X,u)}{var(X)}\right].$$

Fərz edək ki, X təsadüfi olmayan kəmiyyətdir və ona görə də təsadüfi u_i həddi ondan asılı deyil. Sadə çevirmələr aparaq:

$$E(b_1) = \beta_1 + \frac{1}{var(X)} \cdot E[cov(X,u)] = \beta_1 + \frac{1}{var(X)} \times$$

$$\times E\left[\frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} (X_i - \overline{X}) \cdot (u_i - \overline{u})\right] = \beta_1 + \frac{1}{var(X)} \times$$

$$\times \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} E[(X_i - \overline{X}) \cdot (u_i - \overline{u})] = \beta_1 + \frac{1}{n \cdot var(X)} \times$$

$$\times \sum_{i=1}^{n} (X_i - \overline{X}) \cdot E(u_i - \overline{u}) = \beta_1 + \frac{1}{n \cdot var(X)} \times$$

$$\times \sum_{i=1}^{n} (X_i - \overline{X}) \cdot [E(u_i) - E(\overline{u})] = \beta_1.$$

Beləliklə, b_1 reqressiya əmsalı yerini dəyişmir.

Qəbul etsək ki, X dəyişəninin təsadüfi xətaları u-dan asılı olmayan paylanmaya malikdir, yenə də b_1 yerini dəyişməyən paylanmaya malik olacaq.

Digər reqressiya əmsalı b_0-ın də eyni xüsisiyyəti var. Reqressiya əmsallarının bir-birindən asılılıq düsturuna görə

$$b_0 = \overline{Y} - b_1 \cdot \overline{X},$$

$$E(b_0) = E(\overline{Y}) - \overline{X} \cdot E(b_1)$$

olar. Y_i təsadüfi kəmiyyəti

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 \cdot X_i + u_i$$

ifadəsi ilə təyin edildiyindən

$$E(Y_i) = \beta_0 + \beta_1 \cdot X_i + E(u_i) = \beta_0 + \beta_1 \cdot X_i,$$

$$E(\overline{Y}) = \beta_0 + \beta_1 \cdot \overline{X}$$

alınar, burada da Qauss-Markovun birinci şərtinin ödənildiyi fərz edilmişdir. Onda

$$E(b_0) = (\beta_0 + \beta_1 \cdot \overline{X}) - \beta_1 \cdot \overline{X} = \beta_0$$

olduğuna görə b_0 əmsalı da β_0 əmsalının yerini dəyişməyən qiymətləndirməsidir.

4.7. QİYMƏTLƏNDİRMƏNİN DETERMİNASİYA ƏMSALI

Reqressiya təhlilinin məqsədi asılı Y təsadüfi dəyişəninin funksiya kimi özünü necə apardığını aşkara çıxarmaqdır. Seçmə hissədə verilən Y_i qiymətləri əvəzinə reqressiya asılılığında $\hat{Y}_i$ alınır və ona görə də $Y_i = \hat{Y}_i + e_i$ yaza bilərik.

Y təsadüfi dəyişəninin dispersiyası üzərində çevirmələr aparaq:

$$var(Y) = \frac{1}{n}\cdot\sum_{i=1}^{n}\left(Y_i - \overline{Y}\right)^2 = \frac{1}{n}\cdot\sum_{i=1}^{n}\left[\left(Y_i - \hat{Y}_i\right) + \left(\hat{Y} - \overline{Y}\right)\right]^2 =$$

$$= \frac{1}{n}\cdot\sum_{i=1}^{n}\left(Y_i - \hat{Y}_i\right)^2 + \frac{2}{n}\cdot\sum_{i=1}^{n}\left(Y_i - \hat{Y}_i\right)\cdot\left(\hat{Y}_i - \overline{Y}\right) +$$

$$+ \frac{1}{n}\cdot\sum_{i=1}^{n}\left(\hat{Y}_i - \overline{Y}\right)^2.$$

Əvvəlcə

$$\sum_{i=1}^{n}\left(Y_i - \hat{Y}_i\right)\cdot\left(\hat{Y}_i - \overline{Y}\right) = 0$$

olduğunu isbat edək.

Yuxarıda göstərilmişdi ki, e_i təsadüfi kəmiyyətinin orta qiyməti sıfıra bərabərdir: $\bar{e} = 0$.

Onda

$$\sum_{i=1}^{n}\left(Y_i - \hat{Y}_i\right)\cdot\left(\hat{Y}_i - \overline{Y}\right) = \sum_{i=1}^{n} e_i\cdot\left(\hat{Y}_i - \overline{Y}\right) = \sum_{i=1}^{n} e_i\cdot\left(b_0 + b_1\cdot X_i - \overline{Y}\right) =$$

$$= b_0\cdot n\cdot\bar{e} + b_1\cdot\sum_{i=1}^{n} X_i\cdot e_i - \overline{Y}\cdot n\cdot\bar{e} = b_1\sum_{i=1}^{n} X_i\cdot e_i =$$

$$= b_1\cdot\sum_{i=1}^{n} X_i\left(Y_i - \hat{Y}_i\right) = b_1\cdot\sum_{i=1}^{n}\left\{X_i Y_i - X_i\cdot\left[\overline{Y} + b_1\cdot\left(X_i - \overline{X}\right)\right]\right\} =$$

$$= b_1 \cdot \sum_{i=1}^{n} \left[X_i Y_i - X_i \bar{Y} - b_1 \cdot \left(X_i^2 - X_i \cdot \bar{X} \right) \right] =$$

$$= b_1 \cdot n \cdot \left\{ \overline{X \cdot Y} - \bar{X} \cdot \bar{Y} - b_1 \cdot \left[\overline{X^2} - \left(\bar{X} \right)^2 \right] \right\} =$$

$$= b_1 \cdot n \cdot \left\{ \overline{X \cdot Y} - \bar{X} \cdot \bar{Y} - \frac{\overline{X \cdot Y} - \bar{X} \cdot \bar{Y}}{\overline{X^2} - \left(\bar{X} \right)^2} \cdot \left[\overline{X^2} - \left(\bar{X} \right)^2 \right] \right\} = 0$$

alınır.

Beləliklə, *var(Y)* dispersiyasının ifadəsi sadələşir:

$$\frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} \left(Y_i - \bar{Y} \right)^2 = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} \left(Y_i - \hat{Y}_i \right)^2 + \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} \left(\hat{Y}_i - \bar{Y} \right)^2$$

yaxud

$$var(Y) = var(e) + var\,\hat{Y}$$

bərabərliyinin hər iki tərəfini

$$\frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} \left(Y_i - \bar{Y} \right)^2$$

ifadəsinə bölək:

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} \left(Y_i - \hat{Y}_i \right)^2}{\sum_{i=1}^{n} \left(Y_i - \bar{Y} \right)^2} + \frac{\sum_{i=1}^{n} \left(\hat{Y}_i - \bar{Y} \right)^2}{\sum_{i=1}^{n} \left(Y_i - \bar{Y} \right)^2} = 1.$$

Sonuncu bərabərliyin sol tərəfindəki birinci toplanan təsadüfi həddən asılıdır və onu “izah etmək” mümkün deyil. İkinci toplanan isə baxılan dispersiyanın reqressiya asılılığı ilə izah edilən hissəsinə uyğundur və determinasiya əmsalı adlanır:

$$R^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} \left(\hat{Y}_i - \bar{Y} \right)^2}{\sum_{i=1}^{n} \left(Y_i - \bar{Y} \right)^2}.$$

R^2 determinasiya əmsalının maksimal qiyməti 1-ə bərabərdir. Bu o zaman baş verir ki, reqressiya xətti bütün müşahidə qiymətlərindən keçir və $Y_i = \hat{Y}_i$ olur.

Seçmə korrelyasiya əmsalı ilə determinasiya əmsalı arasında münasibəti aşkara çıxarmaq üçün Y_i və $\hat{Y}_i$ kəmiyyətlərinin korrelyasiya əmsalının ifadəsi üzərində çevirmələr aparaq:

$$r_{Y\hat{Y}} = \frac{cov\left(Y,\hat{Y}\right)}{\sqrt{var(Y)\cdot var\left(\hat{Y}\right)}} = \frac{cov\left[\left(\hat{Y}+e\right),\hat{Y}\right]}{\sqrt{var(Y)\cdot var\left(\hat{Y}\right)}} = \frac{cov\left(\hat{Y},\hat{Y}\right)+cov\left(e,\hat{Y}\right)}{\sqrt{var(Y)\cdot var\left(\hat{Y}\right)}}.$$

Buradan

$$cov\left(e,\hat{Y}\right)=cov\left(\hat{Y},e\right)=0$$

olduğuna görə

$$r_{Y\hat{Y}} = \frac{var\left(\hat{Y}\right)}{\sqrt{var(Y)\cdot var\left(\hat{Y}\right)}} = \sqrt{\frac{var\left(\hat{Y}\right)}{var(Y)}} = \sqrt{R^2}$$

alınır.

4.8. QEYRİ-XƏTTİ ASILILIQLARIN XƏTTİ ASILILIĞA GƏTİRİLMƏSİ

Xətti reqressiya təhlili iqtisadi parametr sərbəst dəyişəndən xətti asılı olduqda aparılır. Lakin elə parametrlər var ki, onlar qeyri-xətti funksiya kimi göstərilir. Məsələn, hər hansı məhsula tələb ilə ümumi gəlir arasında asılılıq əsasən qeyri-xətti olur.

Bəzi qeyri-xətti funksiyaları asanlıqla xətti funksiyaya gətirə bilərik. Funksiya

$$Y=\beta_0+\beta_1\cdot X_1^2+\beta_2\cdot\sqrt{X_2}+\beta_3\cdot ln X_3$$

kimi verilmişdirsə,

$$X_1^*=X_1^2,\quad X_2^*=\sqrt{X_2},\quad X_3^*=ln X_3$$

işarə etsək,

$$Y=\beta_0+\beta_1\cdot X_1^*+\beta_2\cdot X_2^*+\beta_3\cdot X_3^*$$

xətti asılılığı alınır və müşahidə qiymətləri əsasında $\beta_0,\beta_1,\beta_2,\beta_3$ əmsallarını təyin etmək mümkündür.

Aşağıdakı qeyri-xətti funksiyalara baxaq:

$$Y=\beta_0+\beta_1\cdot\frac{1}{X},$$

$$Y = \beta_0 \cdot X^{\beta_1}. \tag{4.2}$$

Birinci funksiya $\frac{1}{X} = X^*$ əvəzləməsi ilə xətti funksiyaya gətirilsə də, ikinci funksiya üçün bunu etmək mümkün deyil, çünki $X^{\beta_1} = X^*$ qəbul etsək, β_1 əmsalının məlum olmaması X^* dəyişəninin qiymətlərini hesablamağa imkan vermir.

(4.2) ilə təyin edilmiş Y funksiyasının X-ə görə törəməsini hesablayaq:

$$\frac{dY}{dX} = \beta_0 \cdot \beta_1 X^{\beta_1 - 1}.$$

Y- in X-ə görə elastikliyi

$$\frac{dY}{dX} \cdot \frac{X}{Y} = \beta_0 \cdot \beta_1 X^{\beta_1 - 1} \cdot \frac{X}{\beta_0 \cdot X^{\beta_1 - 1}} = \beta_1$$

olur. Bu isə o deməkdir ki, məsələn, X gəlirinin 1faiz dəyişməsi Y tələbini β_1 faiz dəyişdirir. Buradan aydın olur ki, göstərilən formada asılılığın öyrənilməsi və əmsalların təyin edilməsi tamamilə təbiidir.

Həmin asılılığın hər iki tərəfini loqarifmləyək:

$$ln Y = ln \beta_0 + \beta_1 \cdot ln X \tag{4.3}$$

Onda $ln Y = Y^*$, $ln \beta_0 = \beta_0^*$, $ln X = X^*$ işarə etsək,

$$Y^* = \beta_0^* + \beta_1 \cdot X^*$$

xətti asılılığı alınar.

Göstərilən çevirmələrə təsadüfi u kəmiyyətinin təsirini araşdıraq. Aydındır ki, həmin kəmiyyət funksiyaya toplanan kimi daxil olmalı və Qauss-Markov şərtlərini ödəməlidir.

İlkin asılılıq

$$Y = \beta_0 + \beta_1 \cdot \frac{1}{X} + u$$

şəklindədirsə, $\frac{1}{X} = X^*$ qəbul etsək,

$$Y = \beta_0 + \beta_1 \cdot X^* + u$$

alınar. Lakin loqarifmləmə nəticəsində xətti formaya gətirilən bərabərliyə təsadüfi kəmiyyət daxil edilsə,

$$lnY = ln\beta_0 + \beta_1 \cdot lnX + u$$

$$Y = \beta_0 \cdot X^{\beta_1} \cdot e^u$$

olduğuna görə, reqressiya tənliyində additiv təsadüfi kəmiyyətin olması üçün ilkin münasibətdə $v=e^u$ multiplikativ təsadüfi kəmiyyəti istifadə edilməlidir.

Fərz edək ki, ilkin verilən qeyri-xətti ifadəyə təsadüfi kəmiyyət additiv daxildir, bu halda göstərilən qayda ilə xətti asılılıq almaq mümkün olmur.

Bir dəyişənli funksiyanın loqarifmləmə nəticəsində xətti funksiyaya gətirilməsi həm iqtisadi parametrlər arasında asılılığın öyrənilməsində, həm də proqnozlaşdırmada geniş istifadə edilir.

Fərz edək ki, X vergi bazasının məbləği (manatla), Y isə ümumi vergi məbləğidir. Onda yuxarıda göstərilən (4.3) asılılığı müxtəlif vergi növləri üçün tətbiq edilə bilər. Bu zaman β_1 əmsalı elastiklik olur və o, aşağıda göstərilən qayda ilə hesablanır:

İki müxtəlif zaman intervalında vergi məbləğləri $Y^{(1)}$ və $Y^{(2)}$, vergi bazasının qiymətləri isə $X^{(1)}$ və $X^{(2)}$ olarsa, verginin və onun bazasının nisbi artımları

$$D_v = \frac{Y^{(2)} - Y^{(1)}}{Y^{(1)}},$$

$$D_b = \frac{X^{(2)} - X^{(1)}}{X^{(1)}}$$

olacaq və elastiklik

$$\beta_1 = \frac{D_v}{D_b}$$

ifadəsi ilə hesablanacaq.

Məsələn, fiziki şəxslərin gəlir vergisinin miqdarı 2007-ci ildə 594,4 milyon manat, 2008-ci ildə 637,8 milyon manat, əmək haqqı fondu isə həmin illərdə uyğun olaraq 4 milyard 564,9 milyon manat və 5 milyard 327,2 milyon manat olmuşdur. Onda bu statistik məlumat əsasında elastikliyi hesablaya bilərik:

$$\beta_1 = \frac{(637,8-594,4):594,4}{(5327,2-4564,9):4564,9} = \frac{43,4:594,4}{762,3:4564,9} = \frac{0,073}{0,167} = 0,437.$$

Müxtəlif vergi növləri üçün 1997-2009-cu illərin statistik məlumatlarından istifadə etməklə xətti loqarifmik asılılıqlar qurulmuşdur və ekstrapolyasiya yolu ilə müvafiq proqnoz qiymətləri alınmışdır. Xətti-loqarifmik asılılıqlardan bəzilərini göstərək:

1. Fiziki şəxslərin gəlir vergisinin proqnozlaşdırılması üçün əmək haqqı və digər ödənişlərdən istifadə etdikdə,

$$ln Y_1 = -2,854 + 1,091 \cdot ln X_1$$

alınmışdır, burada Y_1 - fiziki şəxslərin gəlir vergisinin miqdarı, X_1 isə əmək haqqı və digər ödənişlərin cəmidir. Göstərilən asılılıq üçün determinasiya əmsalı R^2=0,995 olur və bu onu göstərir ki, asılılıq kifayət qədər dəqiqdir.

2. Əlavə dəyər vergisi müxtəlif asılı olmayan dəyişənlərdən istifadə etməklə xətti-loqarifmik funksiya ilə ifadə olunmuşdur. Sərbəst dəyişən kimi istehlak qəbul edilsə,

$$lnY_2 = -7,472 + 1,503 \cdot lnX_2,$$

idxal qəbul edilsə,

$$lnY_3 = -5,235 + 1,274 \cdot lnX_3,$$

qeyri-neft ümumi daxili məhsulu qəbul edilsə,

$$ln Y_4 = -5,808 + 1,332 \cdot ln X_4$$

asılılıqları alınar, burada X_2 - istehlaka sərf edilən vəsait, X_3 - idxala sərf edilən vəsait, X_4 - qeyri-neft sektorunda ümumdaxili məhsuldur. Bunlara uyğun əlavə dəyər vergisi isə Y_2, Y_3, Y_4 ilə işarə edilmişdir. Göstərilən hallar üçün determinasiya əmsalı uyğun olaraq, R^2=0,967; R^2=0,856; R^2=0,941 alınmışdır. Bu isə onu göstərir ki, reqressiya xətti verilən qiymətləri kifayət qədər düzgün xarakterizə edir.

3. Hüquqi şəxslərin mənfəət vergisi də müxtəlif asılı olmayan dəyişənlər qəbul etməklə, hesablana bilər. Məsələn, ümumi əməliyyat izafi dəyəri X_5 işarə edilsə, hüquqi şəxslərin mənfəət vergisi Y_5 aşağıdakı asılılıqla ifadə edilir:

$$ln Y_5 = -8,139 + 1,581 \cdot ln X_5$$

Bu xətti – loqarifmik funksiya verilmiş cədvəl qiymətlərinə kifayət qədər yaxındır, çünki R^2=0,962 alınır.

4. Sadələşdirilmiş vergi də müxtəlif sərbəst dəyişənlərdən asılı olaraq, reqressiya xətti ilə ifadə oluna bilər. Məsələn, yeyinti məhsulları üzrə pərakəndə satışın məbləği X_6 işarə edildikdə sadələşdirilmiş vergi Y_6 aşağıdakı loqarifmik funksiya ilə ifadə olunur:

$$lnY_6 = -13,006 + 1,974 \cdot lnX_6.$$

Bu funksiya üçün determinasiya əmsalı daha azdır: R^2=0,851. Eyni qayda ilə digər vergi növləri və dövlət sosial fonduna ödənişlər üçün də müvafiq xətti-loqarifmik asılılıqlar qurmaq olar.

Çalışmalar

4.1. Seçmə hissə dəyişdirildikdə reqressiya əmsallarının qiymətlərinin nə üçün dəyişdiyini izah edin.

4.2. İki X və Y dəyişənləri arasında asılılığın $Y_i=\beta_0+\beta_1 \cdot X_i + u_i$ şəklində olduğu məlumdur. Seçmə hissə əsasında tədqiqat aparıldıqda, β_1 parametrini $\frac{\bar{Y}}{\bar{X}}$ nisbəti ilə qiymətləndirmək olarmı? Digər β_0 əmsalının sıfıra bərabər olması nəyi dəyişir?

4.3. Ailənin həftəlik gəlirləri və xərcləri arasında asılılığın müşahidə olunan qiymətləri verilmişdir. Reqressiya əmsallarını hesablayıb xətti $\hat{Y}=b_1+b_2 \cdot X$ asılılığını qurun, alınan $\hat{Y}_i$ qiymətlərini müşahidə olunmuş Y_i qiymətləri ilə müqayisə edin.

X_i	80	120	160	200	240	280	320	360	400	440
Y_i	70	95	140	175	210	230	255	290	300	320

4.4. İki iqtisadi parametrin verilən seçmə hissəsi əsasında bir sərbəst dəyişənli xətti reqressiya asılılığını qurub, $\hat{Y}_i=b_0+b_1 \cdot X_i$ qiymətlərini, sonra isə $e_i=Y_i-\hat{Y}_i$ xətalarını hesablayın və $\bar{e}=0$ olduğunu göstərin:

X_i	6	8	10	12	14	16
Y_i	3,1	29,5	25,4	33,1	32,8	40,7

4.5. Aşağıda göstərilən cədvəl asılılığı əsasında
a) determinasiya əmsalını təyin edin;
b) Y və $\hat{Y}$ arasında korrelyasiya əmsalını hesablayın;
c) hər iki əmsalı müqayisə edin.

X_i	3	5	7	9	11	13	15
Y_i	7,23	3,25	3,11	2,07	1,34	0,68	0,19

4.6. $(X_i, Y_i)(i=\overline{1,20})$ müşahidə qiymətləri əsasında hesablama aparılmış və aşağıdakı cəmlər alınmışdır:

$$\sum_{i=1}^{20} X_i = 98, \sum_{i=1}^{20} Y_i = 62$$

$$\sum_{i=1}^{20} X_i^2 = 895, \sum_{i=1}^{20} Y_i^2 = 618, \sum_{i=1}^{20} X_1 Y_i = 486.$$

Xətti reqressiya asılılığını yazın.

4.7. $Y_i=\beta_1 \cdot X_i + \varepsilon_i$ olduqda reqressiya asılılığının təyin edilməsi üçün düstur çıxarın.

4.8. Reqressiya modeli $Y_i=\beta_0 + \varepsilon_i$ olduqda $(i=\overline{1,n})$ ən kiçik kvadratlar üsulu ilə sərbəst hədd üçün düstur çıxarın.

4.9. Müşahidə qiymətləri verilmişdir:

X_i	5	8	14	17	21	23	25	28	30	35
Y_i	70	65	54	60	40	30	50	27	25	32

Y-in X-dən xətti reqressiya asılılığında sərbəst hədd olduqda və olmadıqda determinasiya əmsalını hesablayın.

4.10. Aşağıdakı asılılıqlardan hansılar xətti asılılığa gətirilir:

a) $Y_i = a \cdot e^{b \cdot X_i} \cdot \varepsilon_i,$

b) $Y_i = a \cdot e^{-b \cdot X_i} + \varepsilon_i,$

c) $Y_i = e^{a + b \cdot X_i + \varepsilon_i},$

d) $Y_i = \dfrac{a}{b + X_i} + \varepsilon_i,$

e) $Y_i = a + e^{b \cdot X_i} \cdot \dfrac{1}{\varepsilon_i}.$

V FƏSİL

HİPOTEZLƏRİN YOXLANMASI

5.1. BƏZİ STATİSTİK PAYLANMALAR

Ekonometrikada müxtəlif statistik paylanmalardan istifadə edilir. Onların ən mühümləri aşağıdakılardır:

1. Müntəzəm paylanma.

Kəsilməz X təsadüfi kəmiyyətinin paylanma sıxlığı aşağıdakı kimi verilir:

$$P(X)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a}, X\in[a,b],\\ 0, X\notin[a,b].\end{cases}$$

Asanlıqla yoxlamaq olar ki,

$$E(X)=\frac{b+a}{2},\quad \sigma^2(X)=\frac{(b-a)^2}{12}$$

bərabərlikləri doğrudur.

2. Normal paylanma.

Təsadüfi X kəmiyyəti kəsilməzdir və onun paylanma sıxlığı

$$P(X)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\frac{(X-\mu)^2}{2\sigma^2}},\quad X\in(-\infty,+\infty),\qquad \sigma>0$$

ifadəsi ilə verilir. Bu paylanmaya *Qauss paylanması* da deyilir. Parametrlər $E(X)=\mu$ və $\sigma^2(X)=\sigma^2$ hesab edilir. Bu parametrlər $\mu=0$, $\sigma^2=1$ qiymətlərini alırsa, təsadüfi kəmiyyət normal standart kəmiyyət, paylanma isə standart normal paylanma adlanır.

Əgər $Z=\frac{X-\mu}{\sigma}$ qəbul etsək, onda yeni Z təsadüfi kəmiyyətinin paylanması standart normal paylanma olacaq, çünki

$$E(Z)=E\left(\frac{X-\mu}{\sigma}\right)=\frac{1}{\sigma}\cdot[E(X)-\mu]=0,$$

$$\sigma^2(Z)=E[Z-E(Z)]^2=E(Z^2)=E\left[\frac{(X-\mu)^2}{\sigma^2}\right]=$$

$$=\frac{1}{\sigma^2}\cdot E(X-\mu)^2=1$$

alınır.

Normal paylanmaları öyrənmək üçün standart normal paylanmanın cədvəllərindən istifadə etmək əlverişlidir. Məsələn, standart normal paylanmanın ehtimalının sıxlıq funksiyasının inteqralının cədvəli digər normal paylanmış təsadüfi kəmiyyətlərin də iki ixtiyari qiyməti arasındakı zolağın sahəsini müəyyənləşdirmək üçün yararlıdır.

Tutaq ki, X təsadüfi kəmiyyətinin riyazi gözləməsi $\mu=5$, orta kvadratik meyli $\sigma=2$ verilmişdir. $X=6$ və $X=9$ qiymətləri arasında standart normal paylanma funksiyasının hissəsinə baxaq.Bunun üçün $z=\frac{X-5}{2}$ qəbul etsək, standart normal paylanma alarıq. Aydındır ki,

$$X=6 \text{ olsa, } Z=\frac{6-5}{2}=0{,}5$$

$$X=9 \text{ olsa, } Z=\frac{9-5}{2}=2{,}0$$

olur. Standart normal paylanma cədvəlində $Z=0$ qiymətindən $Z=0{,}5$ qiymətinə qədər sahənin 0,1915 olduğu göstərilmişdir. Eyni qayda ilə $Z=2{,}0$ qiymətində cədvəldən 0,4772 tapılır. Beləliklə, $X=6$ və $X=9$ arasında zolağın sahəsi 0,4772-0,1915=0,2857 olacaq.

Bu isə ümumi sahənin 28,57 faizidir.

Normal paylanmış təsadüfi kəmiyyətin ədəd oxu üzərində istənilən iki qiyməti arasındakı zolağın sahəsini göstərilən qayda ilə hesablaya bilərik. Yuxarıdakı misalda $\mu=5$ olduğuna görə $X=\mu+\sigma=5+2=7$ və $X=\mu-\sigma=5-2=3$ zolaqları arasındakı sahə $Z=\frac{7-5}{2}=1$ və $Z=\frac{3-5}{2}=-1$ zolaqları arasındakı sahə ilə eynidir. Lakin normal paylanma riyazi ğözləmədən sağ və sol tərəfə simmetrik olduğuna görə $Z=0$ və $Z=1$ arasındakı zolağın sahəsini 2 dəfə artırmaq kifayətdir. Beləliklə,

$$2\cdot(0{,}3413-0{,}0000)=2\cdot 0{,}3413=0{,}6826$$

alınır ki, bu da ümumi sahənin 68,3 faizidir.

3. Loqarifmik normal paylanma.

X təsadüfi kəmiyyəti μ və σ^2 parametrlərinə malikdirsə və normal paylanırsa, onda $Y=e^x$ kəmiyyəti loqarifmik normal paylanma qanununa tabe olur.

4. χ^2 ***-paylanma.***

Fərz edək ki, $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$ asılı olmayan standart kəmiyyətlərdir. Onda deyirlər ki,

$$\chi^2(n) = \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i^2$$

təsadüfi kəmiyyəti n sayda sərbəstlik dərəcəsi olan χ^2 paylanmaya malikdir.

Yoxlamaq olar ki,

$$E(\chi^2) = n, \quad \sigma^2(\chi^2) = 2n$$

bərabərlikləri doğrudur.

5. Styudent paylanması.

Fərz edək ki, $\varepsilon_0, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$ -asılı olmayan standart təsadüfi kəmiyyətlərdir. Onda

$$t(n) = \frac{\varepsilon_0}{\sqrt{\frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i^2}} = \frac{\varepsilon_0}{\sqrt{\frac{1}{n} \cdot \chi^2(n)}}$$

təsadüfi kəmiyyətinin paylanması n sərbəstlik dərəcəsi olan Styudent paylanması və ya t-paylanma adlanır. Xüsusi halda, $n=1$ olduqda alınan paylanmaya Koşi paylanması da deyirlər.

Göstərmək olar ki, $n>2$ olduqda

$$E[t(n)] = 0, \qquad \sigma^2[t(n)] = \frac{n}{n-2}$$

bərabərlikləri doğrudur.

6. Fişer paylanması.

Fərz edək ki, $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_m, \eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n$ - asılı olmayan standart normal təsadüfi kəmiyyətlərdir. Onda

$$F(m,n) = \frac{\frac{1}{m} \cdot \sum_{i=1}^{m} \varepsilon_i^2}{\frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} \eta_i^2} = \frac{\frac{1}{m} \cdot \chi^2(m)}{\frac{1}{n} \cdot \chi^2(n)}$$

təsadüfi kəmiyyəti sərbəstlik dərəcəsi (m,n) olan Fişer paylanması və ya F- paylanma adlanır.

Göstərmək olar ki, $n>4$ olduqda

$$E[F(m,n)] = \frac{n}{n-2}$$

$$\sigma^2[F(m,n)] = \frac{2n^2\cdot(m+n-2)}{m\cdot(n-4)\cdot(n-2)^2}$$

bərabərlikləri doğrudur.

Sonuncu paylanmalar qiymətləndirilən parametr üçün etibarlılıq intervallarının qurulmasında və statistik hipotezlərin yoxlanmasında istifadə edilir.

5.2. STATİSTİK HİPOTEZLƏRİN YOXLANMASI

Statistik hipotez dedikdə baş hissə barədə seçmə hissə əsasında hər hansı fərziyyə (mülahizə) başa düşülür.

Hipotezlər iki cür ola bilər:Paylanma qanununa və paylanma parametrlərinə aid hipotezlər.

Məsələn, təsadüfi kəmiyyətin parametrinə aid hipotezin yoxlanmasl aşağıdakı kimi qoyula bilər:

Fərz edək ki, hər hansı X təsadüfi kəmiyyəti yalnız bir θ parametrindən asılıdır. Parametrin $\theta=\theta_0$ olmasını yoxlamaq lazımdırsa, bu mülahizə əsas və ya sıfırıncı H_0 hipotezi qəbul edilir, $\theta=\theta_1$ olması isə alternativ və ya rəqib H_1 hipotezi adlanır. Seçmə hissə n sayda asılı olmayan müşahidə qiymətlərindən ibarətdirsə, bütün mümkün seçmələr coxluğu iki kəsişməyən hissəyə (A və B) bölünür. Yoxlanılan hipotez A çoxluğuna daxildirsə, hipotez qəbul edilir, B çoxluğuna daxildirsə, rədd olunur.

B alt çoxluğu böhran oblastı, A isə mümkün qiymətlər oblastı adlanır.

Hipotezlərin yoxlanmasında buraxılan səhvlər iki cür ola bilər. Əsas hipotez doğrudursa, lakin rədd edilirsə, yəni H_1 hipotezi qəbul edilirsə, onda səhv I növ səhv adlanır. Əsas hipotez yalandırsa, yəni alternativ hipotez doğrudursa və bu halda H_0 qəbul edilirsə, onda səhv II növ səhv hesab edilir.

Fərz edək ki, ümumi inflyasiya tempi əmək haqqının artırılması nəticəsində yaranan inflyasiya tempindən xətti asılıdır:

$$v = \beta_0 + \beta_1\cdot W + u,$$

burada β_0, β_1 parametrlər, u-təsadüfi həddir. Əsas hipotezi $\beta_1 = 1$ qəbul edək: $H_0 : \beta_1 = 1$. Onda $H_1 : \beta_1 \neq 1$ alternativ hipotez olacaq. Burada iki hal ola bilər:

1. Əsas hipotez qəbul edilir, alternativ hipotez rədd edilir;
2. Əsas hipotez rədd edilir, alternativ hipotez qəbul edilir.

5.3. İKİ TƏRƏFLİ VƏ BİR TƏRƏFLİ *t*-KRİTERİLƏR

Hipotezlərin yoxlanmasında adətən 5% və 1% əhəmiyyətlilik səviyyəsi istifadə edilir. Yalnız bir səviyyədən istifadə edilməməsinin səbəbi I və II növ səhvlər arasında balansın saxlanmasıdır. Əhəmiyyətlilik səviyyəsi 1% - dirsə, I növ səhv bütün mümkün halların 1%-ində baş verir. Bu yüksək səviyyə baxılan hal üçün daha etibarlıdır.

Eyni zamanda əsas hipotez səhvdirsə, əhəmiyyətlilik səviyyəsi nə qədər yuxarı olsa, hipotezin qəbul oblastı o qədər genişdir. Beləliklə, əhəmiyyətlilik səviyyəsi yüksək qəbul edilirsə, II növ səhv buraxılması riski daha böyükdür. Aşağı əhəmiyyətlilik səviyyəsinin qəbul edilməsi nəticəsində isə I növ səhvin buraxılması riski daha çox olur.

Aydındır ki, iki əhəmiyyətlilik səviyyəsi araşdırılsa da, onların hər ikisi barədə danışmağa ehtiyac yoxdur. Hipotez 1%- li səviyyədə rədd edilirsə, onda 5%- li səviyyədə də rədd edilir. 5%- li səviyyədə rədd edilən hipotez isə 1%- li səviyyədə rədd edilməyə bilər.

Hipotezin qəbul edilib edilməməsi məsələsi paylanmada böhran qiymətlərin cədvəlinə görə həll edilir. Məsələn, $H_0 : \beta_1 = \beta_1^0$ əsas hipotezi o zaman qəbul edilir ki,

$$-t_b \leq \frac{b_1 - \beta_1^0}{S.S.(b_1)} \leq t_b$$

şərti ödənilsin, burada t_b-əhəmiyyətlilik səviyyəsinə və sərbəstlik dərəcəsinə görə böhran qiyməti, b_1-reqressiya əmsalı, $S.S.(b_1)$ həmin əmsalın standart səhvidir. Sərbəstlik dərəcəsi dedikdə, müşahidə edilən qiymətlərin sayından qiymətləndirilən parametrlərin çıxılması nəticəsində alınan ədəd başa düşülür.

Çox zaman "əsas hipotez qəbul edilir" əvəzinə "əsas hipotez rədd edilmir" mülahizəsi işlədilir. Ona görə ki, məsələn, $H_0:\beta_1=0,9;$ $H_0:\beta_1=0,95;$ $H_0:\beta_1=1,00$ hipotezlərinin hər üçünü eyni vaxtda qəbul etmək olmaz, onları rədd etmək də mümkün deyil. Beləliklə,ayrı-ayrı baxılan hər bir hipotezi "qəbul etmək" əvəzinə "rədd etməmək" daha doğrudur.

Qeyd edək ki, b_1 reqressiya əmsalının standart meyli məlumdursa, $S.S(b_1)$ əvəzinə standart meyldən istifadə edilir. Əks halda standart səhv aşağıdakı ifadə ilə hesablanır:

$$S.S.(b_1)=\sqrt{\frac{S_u^2}{n\cdot \mathrm{var}(X)}},$$

burada $S_u^2=\frac{n}{n-2}\cdot \mathrm{var}(e)$, e qalıqlardır.

Alternativ hipotez əsas hipotezin inkarı ola bilər. Lakin digər alternativ hipotezlərdən də istifadə edilir. Məsələn, β_1^0 - dan əlavə yeganə rəqib qiymət β_1^1 mümkündürsə, onda $H_1:\beta_1=\beta_1^1$ qəbul edilir.

Fərz edək ki, $H_0:\beta_1=\beta_1^0$, $H_1:\beta_1=\beta_1^1$. Müəyyənlik üçün $\beta_1^1>\beta_1^0$ qəbul edilsə, t- paylanmanın əsas hipotezin doğruluğuna uyğun gəlməyən hissələrini (məsələn, 2,5% dərəcəsi ilə) tapa bilərik (şəkil 5.1 -də ştrixlənmişdir). Lakin b_1 A nöqtəsindən soldadırsa, əsas hipotezin rədd edilməsi düzgün olmaz, sağdadırsa, onda rəqib hipotezin doğruluğu daha realdır. Ona görə də bu cür birtərəfli kriterilərin yoxlanmasında yalnız bir tərəf təhlil edilir. Yəni, b_1 B-dən sağdadırsa, əsas hipotez rədd edilir, əks halda rədd edilmir.

Eyni qayda ilə digər birtərəfli kriterilər də yoxlanır. Hər bir halda oblastın yalnız bir tərəfi (sağ və ya sol) nəzərə alınır və yuxarıda göstərilən qayda ilə nəticə çıxarılır.

t-paylanmadan istifadə etməklə istənilən parametri və ya müşahidə edilən qiyməti də yoxlamaq olar. Məsələn, hər hansı təsadüfi kəmiyyətin müşahidə edilən qiymətləri verilmişdirsə və onlardan biri şübhə doğurursa, həmin ədədin müəyyən ehtimalla sıra elementlərindən fərqlənib fərqlənmədiyini yoxlayırlar. Bunun üçün $t=\frac{X-\overline{X}}{S}$ qiyməti hesablanır, burada $\overline{X}$ -təsadüfi kəmiyyətin orta qiymətidir (riyazi gözləmə məlumdursa, $\overline{X}$ əvəzinə μ qəbul edilir), S-"düzəldilmiş" orta kvadratik meyldir.

Sərbəstlik dərəcəsi və əhəmiyyətlilik səviyyəsi əsasında t paylanmanın cədvəlindən böhran qiyməti tapılır və müşahidə edilən təsadüfi kəmiyyət həmin qiymətdən kiçikdirsə, H_0 düzgün hesab edilir, əks halda rədd edilir.

Sadə bir misala baxaq.

Fərz edək ki, 20 müşahidə qiymətindən istifadə etməklə, ümumi inflyasiyanın əmək haqlarının artırılması nəticəsində yaranmış inflyasiyadan asılılığı

$$\hat{Y} = -1{,}25 + 0{,}82 \cdot X$$

kimi alınmışdır. Sərbəst dəyişənin əmsalının standart səhvi 0,12 olarsa, $H_0 : \beta_1 = 1$, $H_1 : \beta_1 \neq 1$ hipotezini 5%-lik əhəmiyyətlilik səviyyəsində yoxlamaq tələb olunur.

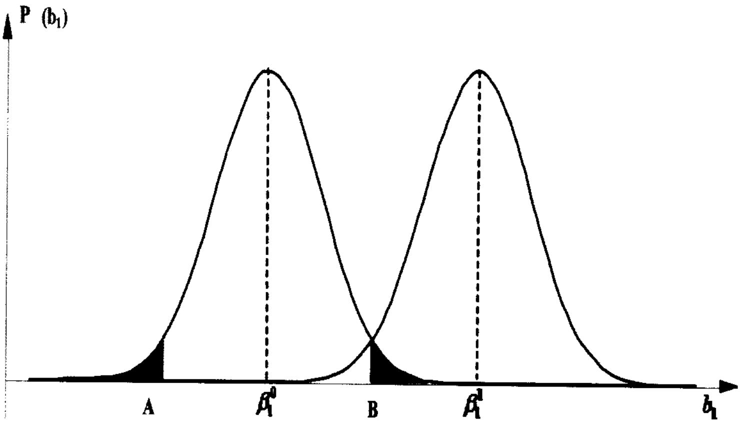
Onda

$$t = \frac{b_1 - \beta_1^0}{S \cdot S \cdot (b_1)}$$

olduğuna görə

$$t = \frac{0{,}82 - 1{,}00}{0{,}12} = -\frac{0{,}18}{0{,}12} = -1{,}5$$

alınır.



Şəkil 5.1. Hipotezlərin yoxlanması

t-paylanmanın böhran qiymətləri cədvəlindəki $t_b(18;5\%)=2{,}101$ qiyməti $|t|$ -dən böyükdür. Deməli, $|t|<2{,}101$ şərti ödənilir və H_0 rədd edilmir.

1%- lik əhəmiyyətlilik səviyyəsində böhran qiyməti daha böyükdür: $t_b(18;1\%)=2{,}878$. Ona görə də bu halda da H_0 rədd edilmir.

5.4. QİYMƏTLƏNDİRMƏNİN KEYFİYYƏTİNİN YOXLANMASI ÜÇÜN F-KRİTERİ

Y təsadüfi kəmiyyəti X kəmiyyətindən asılı olmadıqda da, müşahidə olunan qiymətlər əsasında hesablanan kovariasiya çox zaman sıfıra bərabər olmur. Ona görə də yalnız təsadüfi hallarda korrelyasiya əmsalı və R^2 sıfıra bərabər alına bilər. Beləliklə, reqressiya asılılığının müşahidə olunan qiymətlərə uyğunluq göstəricisi R^2 o zaman əhəmiyyətli hesab edilə bilər ki, Y həqiqətən X-dən asılı olsun.

Fərz edək ki,reqressiya

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 \cdot X_i + u_i$$

xətti bərabərliyi ilə təyin edilmişdir. Əsas hipotez olaraq, $H_0{:}\beta_1=0$ qəbul edək, yəni dəyişənlər arasında əlaqə yoxdur. Alternativ hipotez $H_1{:}\beta_1\neq 0$ olmalıdır, yəni Y dəyişəni X-dən asılıdır.

Determinasiya əmsalı olan R^2 kəmiyyətinin böhran qiymətləri cədvəli olmadığa görə, hipotezin yoxlanılması üçün F-statis-tikadan istifadə olunur. Məlumdur ki,

$$var(Y) = var(\hat{Y}) + var(e),$$

burada $e_i = Y_i - \hat{Y}_i$.

Bərabərliyin hər iki tərəfini seçmə hissə elementlərinin sayına vursaq,

$$\sum_{i=1}^{n}\left(Y_i - \overline{Y}\right)^2 = \sum_{i=1}^{n}\left(\hat{Y}_i - \overline{Y}\right)^2 + \sum_{i=1}^{n}\left(Y_i - \hat{Y}_i\right)^2$$

alarıq. F-paylanmadan istifadə etmək üçün $\sum_{i=1}^{n}\left(\hat{Y}_i - \overline{Y}_i\right)^2$ və $\sum_{i=1}^{n}\left(Y_i - \hat{Y}_i\right)^2$ cəmlərini seçək. Hər iki cəm χ - kvadrat paylanmasına aiddir və qiymətləndirilən parametrlərin sayını k ilə işarə etsək, birinci cəm üçün sərbəstlik dərəcəsi k-1, ikinci cəm üçün n-k olacaq. Onda

$$F = \frac{\dfrac{\sum_{i=1}^{n}\left(\hat{Y}_i - \overline{Y}\right)^2}{k-1}}{\dfrac{\sum_{i=1}^{n}\left(Y_i - \hat{Y}_i\right)^2}{n-k}}$$

yaza bilərik. Bərabərliyin sağ tərəfinin surət və məxrəcini $\sum_{i=1}^{n}\left(Y_i - \overline{Y}\right)^2$ cəminə bölsək, ifadə sadələşər:

$$F = \frac{\dfrac{R^2}{k-1}}{\dfrac{1-R^2}{n-k}}.$$

Baxdığımız xətti hal üçün asılılıqda iki əmsaldan istifadə edilir və ona görə sərbəstlik dərəcəsi k=2 olacaq və F-paylanmanın müşahidə olunan qiyməti

$$F = \frac{R^2}{\dfrac{1-R^2}{n-2}}$$

düsturu ilə hesablanacaq. F- statistikanın böhran qiymətləri cədvəlindən F_b qiymətini alınan F qiyməti ilə müqayisə etmək lazımdır. $F > F_b$ bərabərsizliyi ödənilirsə, sıfırıncı hipotez rədd edilir, yəni alınan qiymətlər Y-in X-dən asılı olduğu fərziyyəsini qəbul etməyə imkan verir. Əks halda əsas hipotez qəbul edilir.

Fərz edək ki, müəyyən iqtisadi göstəricinin 18 müşahidə olunan qiyməti əsasında determinasiya əmsalı hesablanmışdır: R^2=0,14 bu halda

$$F=\frac{0{,}14}{\frac{0{,}86}{16}}=2{,}60$$

alınır. Xətti hal üçün 5%-li əhəmiyyətlilik səviyyəsində

$F_b(1,16)=4{,}49$

olduğundan $F < F_b$ şərti ödənir. Deməli, əsas hipotez qəbul edilir, yəni $\beta_1=0$ hesab etmək olar.

Qeyd edək ki, baxdığımız misalda müşahidələrin sayı, məsələn, 32 olsaydı, onda

$$F=\frac{0{,}14}{\frac{0{,}86}{30}}=4{,}88$$

və F_b =4,17 alınardı və əsas hipotez rədd edilərdi.

Çalışmalar

5.1. Mebel fabriki bir ay ərzində hər gün təqribən 42000 manatlıq məhsul istehsal etmişdir. Bu kəmiyyətin paylanma qanununu tapın.

5.2. İqtisadi parametrin qiymətləri sınaqların nəticələrinə uyğun olaraq, aşağıdakı kimi olmuşdur:

X_i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
n_i	4	9	17	22	27	41	43	29	24	20	8	6

Təqribi paylanma qanunu müəyyən edin və qrafiki olaraq göstərin. Seçmə orta qiyməti və dispersiyasını hesablayıb qrafikdə göstərin.

5.3. X təsadüfi kəmiyyətinin müşahidə olunan qiymətləri aşağıdakılardır:

X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	X_7	X_8
25,6	24,1	23,9	23,7	23,6	23,5	23,4	23,2

P=0,95 ehtimalı ilə X_1=25,6 ədədinin sıra elementlərindən fərqlənib fərqlənmədiyini yoxlayın.

VI FƏSİL

ÇOXDƏYİŞƏNLİ REQRESSİYA

6.1. ÜMUMİ ÇOXDƏYİŞƏNLİ REQRESSİYA MODELİ

Çoxdəyişənli reqressiya təhlili iqtisadi parametrin iki və daha çox sərbəst dəyişəndən asılı olduğu halda aparılır.

Asılı dəyişəni Y, asılı olmayan (izahedici) dəyişənləri $X_1, X_2, \dots X_k$ ilə işarə etsək, i-ci müşahidə olunan qiymətlər Y_i, asılı olmayan dəyişənlər $X_{1i}, X_{2i}, \dots X_{ki}$ olacaq və xətti çoxdəyişənli reqressiya modeli

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 \cdot X_{1i} + \beta_2 \cdot X_{2i} + \dots + \beta_k \cdot X_{ki} + u_i, \quad \left(i = \overline{1,n}\right)$$

kimi yazıla bilər, burada u_i təsadüfi komponentin qiymətləridir.

Müşahidə nəticələri əsasında k sayda sərbəst dəyişəndən asılı xətti funksiyanı

$$\hat{Y}_i = b_0 + b_1 \cdot X_{1i} + b_2 \cdot X_{2i} + \dots + b_k \cdot X_{ki}$$

kimi qəbul edirlər və əmsalların təyin olunması üçün ən kiçik kvadratlar usulu tətbiq edilir.

Xətti funksiyanın qiymətlərinin müşahidə olunan qiymətlərdən fərqini e_i ilə işarə etsək,

$$e_i = \hat{Y}_i - Y_i = b_0 + b_1 \cdot X_{1i} + b_2 \cdot X_{2i} + \dots + b_k \cdot X_{ki} - Y_i$$

yaza bilərik. Əmsalları elə seçək ki,

$$Z = \sum_{i=1}^{n} e_i^2$$

minimum qiymət alsın. Onda

$$\frac{\partial z}{\partial b_o} = 0, \frac{\partial z}{\partial b_1} = 0, \dots, \frac{\partial z}{\partial b_k} = 0$$

şərtlərindən $k+1$ sayda naməlum $b_0, b_1, b_2, \dots b_k$ əmsalları təyin ediləcək.

Göründüyü kimi çoxdəyişənli reqressiya modeli bir sərbəst dəyişənli modelin ümumiləşməsidir. Lakin burada iki yeni problem qarşıya çıxır. Birincisi, verilən hər hansı izahedici dəyişənin asılı dəyişənə təsiri qiymətləndirildikdə, onun və digər izahedici dəyişənlərin təsirlərinin hüdudları müəyyən edilməlidir. İkincisi, çoxsaylı asılı olmayan dəyişənlərdən modeldə yalnız asılı dəyişənə əhəmiyyətli dərəcədə təsir edən dəyişənlər saxlanmalıdır.

6.2. İKİ ASILI OLMAYAN DƏYİŞƏNLİ REQRESSİYA MODELİ

Çoxdəyişənli reqressiyanın ən sadə halı iki asılı olmayan dəyişənli reqressiyadır.

Fərz edək ki, Y iqtisadi parametri iki asılı olmayan X_1 və X_2 dəyişənilə ifadə edilir:

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 \cdot X_{1i} + \beta_2 \cdot X_{2i} + u_i \ .$$

Onda reqressiya xətti funksiya olacaq:

$$\hat{Y}_i = b_0 + b_1 \cdot X_{1i} + b_2 \cdot X_{2i}.$$

Ümumi halda olduğu kimi $e_i = \hat{Y}_i - Y_i$ qəbul edək və

$$Z = \sum_{i=1}^{n} e_i^2 = \sum_{i=1}^{n} \left(b_0 + b_1 \cdot X_{1i} + b_2 \cdot X_{2i} - Y_i\right)^2$$

funksiyasının minimumunu axtaraq. Bunun üçün Z funksiyasından b_0, b_1 və b_2 -yə görə xüsusi törəmələr alaq:

$$\frac{\partial Z}{\partial b_0} = 2 \cdot \sum_{i=1}^{n} \left(b_0 + b_1 \cdot X_{1i} + b_2 \cdot X_{2i} - Y_i\right),$$

$$\frac{\partial Z}{\partial b_1} = 2 \cdot \sum_{i=1}^{n} \left(b_0 + b_1 \cdot X_{1i} + b_2 \cdot X_{2i} - Y_i\right) \cdot X_{1i},$$

$$\frac{\partial Z}{\partial b_2} = 2 \cdot \sum_{i=1}^{n} \left(b_0 + b_1 \cdot X_{1i} + b_2 \cdot X_{2i} - Y_i\right) \cdot X_{2i}.$$

Törəmələrin ifadələrini sıfıra bərabər qəbul edib sadələşdirsək, əmsalları təyin etmək üçün xətti cəbri tənliklər sistemi aşağıdakı kimi olacaq:

$$\begin{cases} b_0 \cdot n + b_1 \cdot \sum_{i=1}^{n} X_{1i} + b_2 \cdot \sum_{i=1}^{n} X_{2i} = \sum_{i=1}^{n} Y_i, \\ b_0 \cdot \sum_{i=1}^{n} X_{1i} + b_1 \cdot \sum_{i=1}^{n} X_{1i}^2 + b_2 \cdot \sum_{i=1}^{n} X_{1i} \cdot X_{2i} = \sum_{i=1}^{n} X_{1i} \cdot Y_i, \\ b_0 \cdot \sum_{i=1}^{n} X_{2i} + b_1 \cdot \sum_{i=1}^{n} X_{1i} \cdot X_{2i} + b_2 \cdot \sum_{i=1}^{n} X_{2i}^2 = \sum_{i=1}^{n} X_{2i} \cdot Y_i. \end{cases}$$

Naməlum əmsalların ifadələrini müəyyənləşdirmək məqsədilə əvvəlcə sistemi sadələşdirək. Bunun üçün tənliklərin bütün hədlərini n- ə bölək:

$$b_0 + b_1 \cdot \overline{X}_1 + b_2 \cdot \overline{X}_2 = \overline{Y},$$
$$b_0 \cdot \overline{X}_1 + b_1 \cdot \overline{X}_1^2 + b_2 \cdot \overline{X_1 \cdot X_2} = \overline{X_1 \cdot Y},$$
$$b_0 \cdot \overline{X}_2 + b_1 \cdot \overline{X_1 \cdot X_2} + b_2 \cdot \overline{X}_2^2 = \overline{X_2 \cdot Y}.$$

Birinci tənlikdən görünür ki, b_0 əmsalının qalan əmsallardan asılılığı çox sadə ifadə ilə göstərilir:

$$b_0 = \overline{Y} - b_1 \cdot \overline{X}_1 - b_2 \cdot \overline{X}_2.$$

Bu qiyməti ikinci və üçüncü tənliklərdə yerinə yazaq:

$$\begin{cases} \left(\overline{Y} - b_1 \cdot \overline{X}_1 - b_2 \cdot \overline{X}_2\right) \cdot \overline{X}_1 + b_1 \cdot \overline{X}_1^2 + b_2 \cdot \overline{X_1 \cdot X_2} = \overline{X_1 \cdot Y}, \\ \left(\overline{Y} - b_1 \cdot \overline{X}_1 - b_2 \cdot \overline{X}_2\right) \cdot \overline{X}_2 + b_1 \cdot \overline{X_1 X_2} + b_2 \cdot \overline{X}_2^2 = \overline{X_2 \cdot Y}. \end{cases}$$

Alınan tənliklər sistemində sadə çevirmələr aparaq:

$$\begin{cases} b_1 \cdot \left(\overline{X}_1^2 - \overline{X}_1 \cdot \overline{X}_1\right) + b_2 \cdot \left(\overline{X_1 \cdot X_2} - \overline{X}_1 \cdot \overline{X}_2\right) = \overline{X_1 \cdot Y} - \overline{X}_1 \cdot \overline{Y}, \\ b_1 \cdot \left(\overline{X_1 \cdot X_2} - \overline{X}_1 \cdot \overline{X}_2\right) + b_2 \cdot \left(\overline{X}_2^2 - \overline{X}_2 \cdot \overline{X}_2\right) = \overline{X_2 \cdot Y} - \overline{X}_2 \cdot \overline{Y}. \end{cases}$$

$$\begin{cases} b_1 \cdot var(X_1) + b_2 cov(X_1, X_2) = cov(X_1, Y), \\ b_1 \cdot cov(X_1, X_2) + b_2 var(X_2) = cov(X_2, Y). \end{cases}$$

Birinci tənliyi $var(X_2)$-ə, ikinci tənliyi $cov(X_1,X_2)$-ə vurub tərəf-tərəfə çıxaq. Onda b_1 əmsalı aşağıdakı düsturla təyin ediləcək:

$$b_1 = \frac{var(X_2)\cdot cov(X_1,Y) - cov(X_1,X_2)\cdot cov(X_2,Y)}{var(X_1)\cdot var(X_2) - [cov(X_1,X_2)]^2}.$$

Eyni qayda ilə birinci tənliyi $cov(X_1,X_2)$-ə, ikinci tənliyi $var(X_1)$-ə vuraq və ikinci tənlikdən birincini tərəf-tərəfə çıxaq. Bununla da b_2 əmsalının hesablanması üçün aşağıdakı düsturu alarıq:

$$b_2 = \frac{var(X_1)\cdot cov(X_2,Y) - cov(X_1,X_2)\cdot cov(X_1,Y)}{var(X_1)\cdot var(X_2) - [cov(X_1,X_2)]^2}.$$

Əmsalların hər iki ifadəsi tamamilə simmetrikdir və onlardan birində X_1 əvəzinə X_2, X_2 əvəzinə X_1 yazsaq, həmin ifadə o birinə çevriləcək.

6.3. ÇOXDƏYİŞƏNLİ REQRESSİYADA ƏMSALLARIN YERİNİ DƏYİŞMƏMƏSİ

Çoxölçülü reqressiya asılılığının b_1 və b_2 əmsallarının yerini dəyişməyən qiymətləndirmə olduğunu göstərək.

Asılı dəyişən

$$Y = \beta_0 + \beta_1 \cdot X_1 + \beta_2 \cdot X_2 + u$$

olduğuna görə əmsalların ifadələrindəki Y əvəzinə bu ifadəni yaza bilərik.

Əvvəlcə b_1 əmsalının ifadəsindəki kovariasiyalar üzərində çevirmə aparaq:

$$cov(X_1,Y) = cov[X_1,(\beta_0 + \beta_1 \cdot X_1 + \beta_2 \cdot X_2 + u)] =$$
$$= cov(X_1,\beta_0) + cov(X_1,\beta_1 X_1) + cov(X_1,\beta_2 X_2) +$$
$$+ cov(X_1,u),$$
$$cov(X_2,Y) = cov[X_2,(\beta_0 + \beta_1 \cdot X_1 + \beta_2 \cdot X_2 + u)] =$$
$$= cov(X_2,\beta_0) + cov(X_2,\beta_1 X_1) + cov(X_2,\beta_2 X_2) +$$
$$+ cov(X_2,u).$$

Kovariasiyanın xassələrindən istifadə edək:

$$cov(X_1,Y)=\beta_1\cdot cov(X_1,X_1)+\beta_2\cdot cov(X_1,X_2)+cov(X_1,u)=$$
$$=\beta_1\cdot var(X_1)+\beta_2\cdot cov(X_2,X_1)+cov(X_1,u),$$
$$cov(X_2,Y)=\beta_1\cdot cov(X_2,X_1)+\beta_2\cdot cov(X_2,X_2)+cov(X_2,u)=$$
$$=\beta_1\cdot cov(X_1,X_2)+\beta_2\cdot var(X_2)+cov(X_2,u).$$

Hər iki əmsalın ifadələrinin məxrəcində Y iştirak etmir, ona görə də b_1 əmsalının surətini dəyişdirək:

$$var(X_2)\cdot cov(X_1,Y)-cov(X_1,X_2)\cdot cov(X_2,Y)=$$
$$=var(X_2)\cdot[\beta_1\cdot var(X_1)+\beta_2\cdot cov(X_1,X_2)+cov(X_1,u)]-$$
$$-cov(X_1,X_2)\cdot[\beta_1\cdot cov(X_1,X_2)+\beta_2\cdot var(X_2)+cov(X_2,u)]=$$
$$=\beta_1\cdot var(X_1)\cdot var(X_2)+\beta_2\cdot var(X_2)\cdot cov(X_1,X_2)+var(X_2)\times$$
$$\times cov(X_1,u)-\beta_1\cdot[cov(X_1,X_2)]^2-\beta_2\cdot var(X_2)\cdot cov(X_1,X_2)-$$
$$-cov(X_1,X_2)\cdot cov(X_2,u)=\beta_1\cdot\{var(X_1)\cdot var(X_2)-[cov(X_1,X_2)]^2\}+$$
$$+var(X_2)\cdot cov(X_1,u)-cov(X_1,X_2)\cdot cov(X_2,u).$$

Beləliklə, b_1 əmsalının ifadəsi aşağıdakı şəkildə olacaq:

$$b_1=\beta_1+\frac{var(X_2)\cdot cov(X_1,u)-cov(X_1,X_2)\cdot cov(X_2,u)}{var(X_1)\cdot var(X_2)-[cov(X_1,X_2)]^2}.$$

Buradan, b_1-in riyazi gözləməsinin

$$E(b_1)=\beta_1$$

olduğu alınır, çünki bir sərbəst dəyişənli reqressiya halında olduğu kimi

$$E[cov(X_1,u)]=0,$$
$$E[cov(X_2,u)]=0$$

bərabərlikləri doğrudur. Deməli, b_1 və anoloji olaraq, göstərmək olar ki, həm də b_2 əmsalları yerini dəyişməyəndir. Qalan b_0 əmsalının yerini dəyişməyən olmasının isbatı isə bir sərbəst dəyişənli reqressiya asılılığında olduğu kimidir.

6.4. ÇOXDƏYİŞƏNLİ REQRESSİYA MODELİNƏ AİD BİR MİSAL

Məhsul buraxılışına sərf edilən iş vaxtı (X_1) və vəsait (X_2) sərbəst dəyişənlərdirsə, müəssisənin buraxdığı məhsulun qiymətinin həmin dəyişənlərdən asılılığını verilən statistik məlumat əsasında qiymətləndirmək tələb olunur.

Araşdırma Eviews proqramı ilə aparılmışdır

Müşahidə	*Y*	X_1	X_2
1	858.0000	126	401
2	893.0000	138	408
3	920.0000	145	435
4	941.0000	148	463
5	954.0000	166	482
6	976.0000	173	514
7	1005.000	179	517
8	1012.000	183	523
9	1024.000	190	526
10	1037.000	198	540
11	1059.000	220	459
12	1080.000	231	565
13	1091.000	240	582
14	1146.000	242	594
15	1228.000	245	600

Estimation Command:

LS Y C X_1 X_2

Estimation Equation:

$Y = C(1) + C(2)*X_1 + C(3)*X_2$

Substituted Coefficients:

$Y=484.8573673+ 1.808390074*X_1 + 0.3738002261*X_2$

Dependent Variable: Y

Method: Least Squares

Date: 01/21/10 ***Time***: 15:02

Sample: 1 15

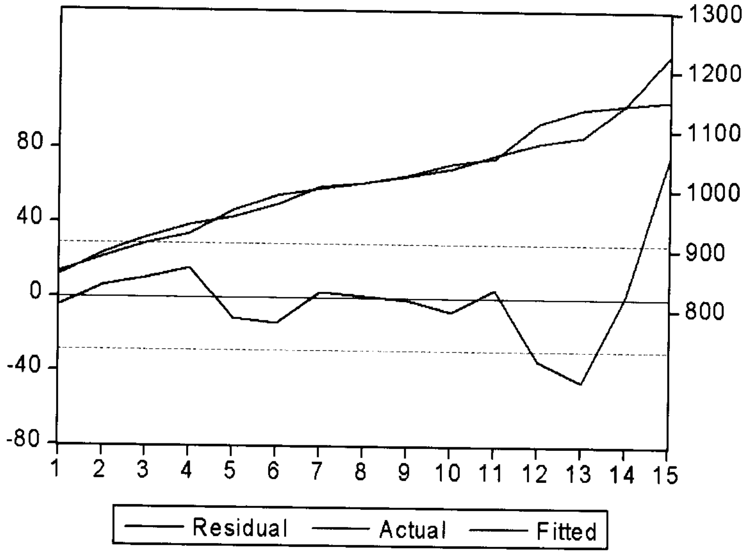
Included observations: 15

Variable	***Coefficient***	***Std. Error***	***t-Statistic***	***Prob.***
C	484.8574	70.54342	6.873177	0.0000
X_1	1.808390	0.404411	4.471663	0.0008
X_2	0.373800	0.251302	1.487453	0.1627

R-squared	0.927324	***Mean dependent var***	1014.933
Adjusted R-squared	0.915211	***S.D. dependent var***	97.98576
S.E. of regression	28.53197	***Akaike info criterion***	9.716784
Sum squared resid	9768.877	***Schwarz criterion***	9.858394
Log likelihood	-69.87588	***F-statistic***	76.55827
Durbin-Watson stat	1.097268	***Prob(F-statistic)***	0.000000

Göründüyü kimi, xətti asılılığın determinasiya əmsalı 1-ə yaxındır: R^2=0,927.

Bu isə reqressiya xəttinin müşahidə qiymətlərindən çox fərqlənmədiyini göstərir. Əmsalların qiymətləndirilməsinin standart səhvləri əmsallara görə çox kiçikdir. t-statistikanın alınan qiymətləri asılı olmayan dəyişənlərin buraxılan məhsulun həcminə əhəmiyyətli dərəcədə təsir etdiyini göstərir. Həmin qiymətlərdə əmsalların sıfıra bərabər olmasının ehtimalları kifayət qədər kiçik alınmışdır və bu, trend asılılığının mövcudluğu deməkdir.



Estimation Command

LS LOG(Y) C LOG(X1) LOG(X2)

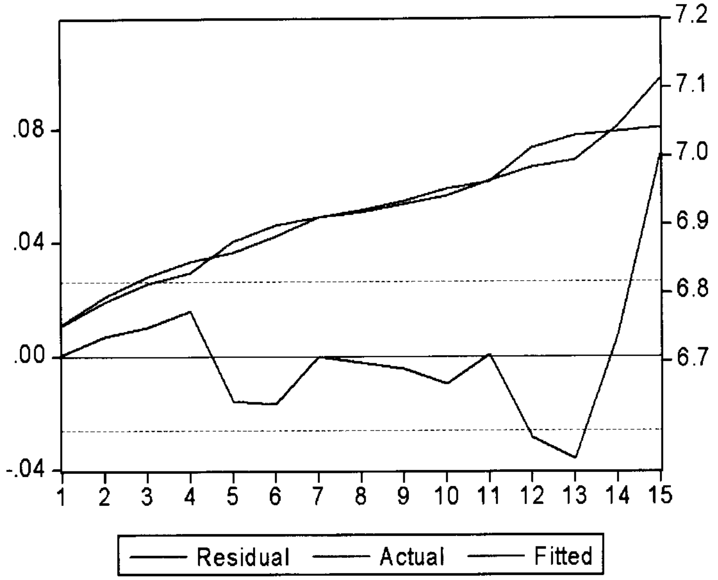
Estimation Equation:

LOG(Y) = C(1) + C(2)*LOG(X1) + C(3)*LOG(X2)

Substituted Coefficients:
LOG(Y) = 4.180789265 + 0.3399902621*LOG(X1) + 0.1549644997*LOG(X2)
Dependent Variable: LOG(Y)
Method: Least Squares
Date: 01/21/10 ***Time:*** 15:11
Sample: 1 15
Included observations: 15

Variable	*Coefficient*	*Std. Error*	*t-Statistic*	*Prob.*
C	4.180789	0.438326	9.538076	0.0000
LOG(X_1)	0.339990	0.070128	4.848163	0.0004
LOG(X_2)	0.154964	0.117397	1.320005	0.2115

R-squared	0.935849	***Mean dependent var***	6.918296
Adjusted R-squared	0.925157	***S.D. dependent var***	0.095489
S.E. of regression	0.026123	***Akaike info criterion***	-4.275115
Sum squared resid	0.008189	***Schwarz criterion***	-4.133505
Log likelihood	35.06336	***F-statistic***	87.52866
Durbin-Watson stat	1.012962	***Prob(F-statistic)***	0.000000



Xətti-loqarifmik asılılıqda nəticələr daha əlverişlidir. Əmsalların qiymətləndirilməsinin standart səhvləri əvvəlkinə nisbətən azdır və t-statistikaya aid olan nəticələri isə trend asılılığının olduğunun təsdiqi kimi qəbul etmək olar. Determinasiya əmsalı əvvəlki qiymətdən daha böyükdür və 1-ə daha yaxındır: R^2=0,936 .

6.5. REQRESSİYA DƏYİŞƏNLƏRİNİN TƏSİRİNİN ARAŞDIRILMASI

Hər bir iqtisadi model qurulduqda dəyişənlər düzgün seçilməlidir. Funksiyanın hansı sərbəst dəyişənlərdən asılı olduğu dəqiq məlumdursa, onda naməlum əmsallar qiymətləndirilir, bu qiymətləndirmənin etibarlılıq intervalları tapılır və s.

Praktiki məsələlərin həllində çox zaman reqressiya dəyişənlərinin səciyyəvi xüsusiyyətləri məlum olmadığına görə tənliyə lazımsız dəyişən daxil edilə, yaxud orada olmalı dəyişən daxil edilməyə bilər.

Tutaq ki, həqiqi model

$$Y = \beta_0 + \beta_1 \cdot X_1 + u$$

şəklindədir. Onda qiymətləndirilən model

$$\widehat{Y} = b_0 + b_1 \cdot X_1$$

kimi yazılmalıdır. Əgər göstərilən model

$$\widehat{Y} = b_0 + b_1 \cdot X_1 + b_2 \cdot X_2$$

şəklində qəbul edilirsə, asılılıqda əlavə sərbəst X_2 dəyişəni olduğuna görə qiymətləndirmə hesab edilə bilməz.

Yaxud, həqiqi model

$$Y = \beta_0 + \beta_1 \cdot X_1 + \beta_2 \cdot X_2 + u$$

şəklindədirsə, düzgün qiymətləndirmə

$$\widehat{Y} = b_0 + b_1 \cdot X_1 + b_2 \cdot X_2$$

funksiyası ilə aparılacaq,

$$\hat{Y} = b_0 + b_1 \cdot X_1$$

funksiyası qəbul edildikdə isə, qiymətləndirmə düzgün olmayacaq, çünki sərbəst dəyişənlərin biri asılılıqda nəzərə alınmamışdır.

Fərz edək ki, Y dəyişəni X_1 və X_2 dəyişənlərindən asılıdır və həqiqi model

$$Y = \beta_0 + \beta_1 \cdot X_1 + \beta_2 \cdot X_2 + u$$

kimi yazıla bilər, lakin X_2 dəyişəninin mühüm olduğu şübhə doğurduğuna görə, araşdırmanı mürəkkəbləşdirməmək məqsədilə reqressiya xətti

$$\hat{Y} = b_0 + b_1 \cdot X_1$$

şəklində öyrənilir. Bu halda əslində düzgün olan

$$b_1 = \frac{cov(X_1,Y)\cdot var(X_2) - cov(X_2,Y)\cdot cov(X_1,X_2)}{var(X_1)\cdot var(X_2) - [cov(X_1,X_2)]^2}$$

ifadəsi əvəzinə daha sadə

$$b_1 = \frac{cov(X_1,Y)}{var(X_1)}$$

ifadəsi hesablanır.

Məlumdur ki, b_1 o zaman β_1 əmsalının yerini dəyişməyən qiymətləndirməsidir ki, $E(b_1)=\beta_1$ olsun. Bunu yoxlamaq üçün b_1-in ifadəsi üzərində çevirmələr aparaq:

$$b_1 = \frac{cov(X_1,Y)}{var(X_1)} =$$

$$= \frac{cov(X_1, \beta_0 + \beta_1 \cdot X_1 + \beta_2 \cdot X_2 + u)}{var(X_1)} =$$

$$= \frac{1}{var(X_1)} \cdot [cov(X_1, \beta_0) +$$

$$+ cov(X_1, \beta_1 \cdot X_1) + cov(X_1, \beta_2 \cdot X_2) +$$

$$+cov(X_1,u)] = \frac{1}{var(X_1)} \cdot [\beta_1 \cdot cov(X_1,X_1) +$$
$$+ \beta_2 cov(X_1,X_2) + cov(X_1,u)] =$$
$$= \beta_1 + \beta_2 \cdot \frac{cov(X_1,X_2)}{var(X_1)} + \frac{cov(X_1,u)}{var(X_1)}.$$

X_1 və X_2 təsadüfi kəmiyyətlər olmadıqda b_1 kəmiyyətinin riyazi gözləməsi

$$E(b_1) = \beta_1 + \beta_2 \cdot \frac{cov(X_1,X_2)}{var(X_1)}$$

bərabərliyi ilə təyin ediləcək. Deməli, b_1 kəmiyyəti yerini $\beta_2 \cdot \frac{cov(X_1,X_2)}{var(X_1)}$ qədər dəyişəcək.

Həqiqi model

$$Y = \beta_0 + \beta_1 \cdot X_1 + u$$

olduğu halda, onu

$$Y = \beta_0 + \beta_1 \cdot X_1 + \beta_2 \cdot X_2 + u$$

şəklində qəbul etmək də əlverişli deyil. Bu halda yerdəyişmə problemi olmasa da, dispersiyanın artması müşahidə edilir və əslində b_2 əmsalı sıfırın yerini dəyişməyən qiymətləndirməsi olacaq.

6.6. MULTİKOLLİNEARLIQ VƏ ONUN PROSESƏ TƏSİRİ

İki və daha çox dəyişəndən asılı reqressiya asılılığında parametrlər arasında korrelyasiya nə qədər çoxdursa, əmsalların paylanmasının nəzəri dispersiyası bir o qədər böyükdür. Bu zaman reqressiya funksiyasının dəqiq olmaması riski artır və bəzən hətta model yararsız olur. Müşahidə qiymətlərinin sayı kifayət qədər çox olduqda və təsadüfi həddin dispersiyası kiçikdirsə müəyyən hallarda tutarlı qiymətləndirmə mümkündür.

Ümumiyyətlə, sərbəst dəyişənlərin bir-birindən asılılığı həmişə təhlükəlidir və multikollinearlıq adlanan problem yaradır.

Fərz edək ki, istehlak üçün sərf olunan vəsait aşağıdakı ifadə ilə təyin edilir:

$$C = \beta_0 + \beta_1 \cdot M + \beta_2 \cdot N + \beta_3 \cdot S + u,$$

burada M-maaş, N-əlavə gəlir, S-ümumi gəlirdir.

Aydındır ki, $S=M+N$ olduğuna görə əslində istehlaka sərf olunan vəsait cəmisi iki sərbəst dəyişəndən asılıdır. Ona görə

$$C = b_0 + b_1 \cdot M + b_2 \cdot N + b_3 \cdot S$$

reqressiya asılılığını qurmaq istəsək, əmsalların təyin edilməsi üçün alınan xətti cəbri tənliklər sisteminin əsas determinantı sıfıra bərabər olacaq və əmsalları təyin etmək mümkün olmayacaq. Bu hal tam kollinearlıq adlanır və praktikada az rast gəlinir. Sistemin əsas determinantı kifayət qədər kiçik olduqda isə multikollinearlıq alınır.

Tam kollinearlığın prosesə necə təsir etdiyini misal üzərində araşdıraq. Fərz edək ki, Y iqtisadi parametri

$$Y = 3 + 4 \cdot X_2 + X_3 + u$$

şəklində göstərilir və X_2 ilə X_3 arasında

$$X_2 = 2 \cdot X_3 + 1$$

asılılığı mövcuddur. Asanlıqla görmək olar ki, X_2 dəyişəni hər müşahidədə 1 vahid dəyişirsə, X_3 dəyişəni 0,5 vahid, Y parametri isə 4,5 vahid dəyişir. Onda məsələn, aşağıdakı ardıcıl qiymətlər alınır:

X_2	X_3	Y
5	2,0	$25{,}0+u_1$
6	2,5	$29{,}5+u_2$

7	3,0	$34{,}0+u_3$
8	3,5	$38{,}5+u_4$
9	4,0	$43{,}0+u_5$
10	4,5	$47{,}5+u_6$

Bunun belə olduğunu görmək üçün X_2 və X_3- ün ifadələrini Y-in ifadəsində yerinə yazmaq olar:

$$Y = 2{,}5 + 4{,}5 \cdot X_2 + u,$$
$$Y = 7{,}0 + 9{,}0 \cdot X_3 + u.$$

Hər iki asılılıq əslində eyni asılılıqlardır. Deməli baxılan funksiya bir dəyişənlidir, ikidəyişənli reqressiya funksiyasını qurmaq mümkün deyil: b_2 əmsalının ifadəsində həm surət, həm də məxrəc sıfıra bərabər olacaq.

Tam kollinearlığın ekonometrikada az rast gəlinməsi təsadüfi amillərin təsiri ilə əlaqədardır və sistemin əsas determinantının sıfırdan fərqli olması hələ reqressiya əmsallarının düzgün təyin edilməsini göstərmir.

Multikollinearlığın aradan qaldırılması üçün müxtəlif üsullardan istifadə olunur:

1. Müşahidə qiymətlərinin artırılması

Bu üsuldan o vaxt istifadə olunur ki, əslində sərbəst dəyişənlər arasında xətti asılılıq yoxdur, lakin müşahidə qiymətlərinin az olması guya belə asılılığın mövcudluğunu göstərir, Dinamik sıralar verilirsə, seçmə hissəni artırmaq daha asandır. Məsələn, illik müşahidə qiymətləri əvəzinə aylıq, öngünlük, həftəlik və s. qiymətlərə keçmək olar. Modeldə ərazi bölgüsü nəzərdə tutulduqda isə daha kiçik bölgü aparmaqla informasiya artırılır.

2. Artıq sərbəst dəyişənlərin aradan çıxarılması

Əvvəlcədən iki sərbəst dəyişənin asılı ola biləcəyi ehtimalı varsa, onlar bir dəyişənlə əvəz edilir. İki dəyişən arasında seçmə korrelyasiya əmsalı böyük olduqda da, dəyişənlərdən biri asılılıqdan çıxarılır. Lakin bu aradan çıxarma əməliyyatında ehtiyatlı olmaq lazımdır, çünki dəyişənin səhvən aradan çıxarılması u kəmiyyətinə ciddi təsir göstərə bilər.

3. Yeni dəyişənlərə keçilməsi

Bu üsulun tətbiqi o deməkdir ki, əvvəlcə qəbul edilmiş sərbəst dəyişənlər yeniləri ilə əvəz edilir. Lakin bu əvəzləmə elə aparılmalıdır ki, u təsadüfi kəmiyyətinin dispersiyası əvvəlkindən az olsun. Bu təsadüfi kəmiyyət əslində bütün digər asılı olmayan dəyişənlərin təsirini əks etdirdiyindən, modelə daxil edilməmiş yeni sərbəst dəyişən aşkara çıxarılsa və modeldə nəzərə alınsa, σ_u^2 azalacaq.

Çalışmalar

6.1. X_1 və X_2 asılı olmayan dəyişənlərinin yarım il ərzində aylıq qiymətlərinə uyğun Y qiymətləri məlumdur:

X_{1i}	2,1	3,4	5,0	6,8	8,3	9,7
X_{2i}	23,2	21,6	18,5	15,9	11,0	6,4
Y_i	20,4	25,7	31,3	37,1	40,5	50,3

Xətti reqressiya asılılığını qurun.

6.2. Riyazi model

$$Y = \beta_1 \cdot X_1 + \beta_2 \cdot X_2 + u$$

şəklindədirsə,

$$Y = b_1 \cdot X_1 + b_2 \cdot X_2$$

reqressiya asılılığının b_1 və b_2 əmsallarını təyin etmək üçün düsturlar çıxarın.

6.3. Y təsadüfi kəmiyyətinin X_1 və X_2 dəyişənlərindən asılılığı verilmişdir:

X_{1i}	3,1	4,3	5,0	6,4	7,7
X_{2i}	12,9	17,7	20,5	26,1	31,3
Y_i	35,0	40,2	43,8	46,4	49,2

Multikollinearlığın olub olmadığını yoxlayın. Asılılığı xətti reqressiya şəklində göstərin.

VII FƏSİL

HETEROSKEDASTİKLİK

7.1. HETEROSKEDASTİKLİK VƏ ONUN NƏTİCƏLƏRİ

Qauss-Markovun ikinci şərti təsadüfi kəmiyyətin dispersiyasının hər bir müşahidə olunan qiymətdə sabit qalmasıdır. İlk baxışda bu şərt qəribə görünə bilər. Təsadüfi kəmiyyət hər bir müşahidə nəticəsində cəmisi bir qiymət alır və onun dispersiyasının nə olduğu anlaşılmır. Lakin burada seçim edilməmişdən qabaq təsadüfi kəmiyyətin mümkün vəziyyəti nəzərdə tutulur. Biz

$$Y = \beta_0 + \beta_1 \cdot X + u$$

modelinə baxırıqsa, Qauss - Markovun birinci və ikinci şərtləri göstərir ki, $u_1, u_2, \ldots, u_n$ təsadüfi kəmiyyətləri müşahidələrdə riyazi gözləməsi sıfıra bərabər və eyni dispersiyası olan ehtimal paylanması nəticəsində alınmışdır. Seçmə hissədə təsadüfi kəmiyyətlərin faktiki qiymətləri bəzən müsbət, bəzən sıfıra yaxın ola bilər, amma u kəmiyyətinin hər hansı qiymət almasının ehtimalı bütün müşahidə qiymətləri üçün eyni olmalıdır, yəni istənilən istiqamətdə böyük sapmalar gözlənilmir. Bu şərt homoskedastiklik (*homoscedasticity* - eyni dağınıqlıq) adlanır.

Təsadüfi kəmiyyətin müxtəlif seçmələrdə potensial paylanması müxtəlif də ola bilər. Bu hələ o demək deyil ki, məsələn X artdıqca u təsadüfi kəmiyyəti də artacaq. Bu kəmiyyət bəzən kiçik qiymətlər də ola bilər, lakin daha çox fərqlənən qiymətlərin alınması ehtimalı nisbətən böyük olmalıdır. Belə hal heteroskedastiklik (heteroscedasticity-müxtəlif dağınıqlıq) hesab edilir.

Heteroskedastikliyə aid bir misal şəkildə göstərilmişdir: X artdıqca reqressiya düz xəttindən sapmalar getdikcə böyüyür (şəkil 7.1).

Qauss-Markov şərtlərində dispersiyanın dəyişməməsinin nə üçün verildiyi ilk baxışdan aydın olmur. Reqressiya əmsalları təyin edildikdə ən kiçik kvadratlar üsulunun tətbiqi dispersiya üzərinə heç bir şərt qoymur. Əmsalların yerini dəyişməyən qiymətləndirmə olmasının da buna heç bir dəxli yoxdur. Lakin reqressiya xəttinin asılılığı düzgün xarakterizə etməsi üçün dispersiya kifayət qədər kiçik olmalıdır və heteroskedastiklik halında dispersiya böyüyür. Bundan əlavə, dispersiya dəyişdikdə, reqressiya əmsallarının standart səhvləri də düzgün olmayacaq; t-kriteri və F-kriterinin tətbiqi də düzgün olmayan nəticələrə gətirib çıxaracaq.

Bütün bunların çox sadə bir izahı var: Təsadüfi kəmiyyətin nəzəri paylanması kiçik orta kvadratik meylə malikdirsə, müşahidələr $Y=\beta_0+\beta_1 \cdot X$ düz xəttinə yaxın olacaq, nəzəri paylanmanın orta kvadratik meyli böyük olan müşahidələr düz xəttin təyinində o qədər də əhəmiyyət daşımayacaq; aydındır ki, yüksək keyfiyyətli müşahidələrə böyük, aşağı keyfiyyətli müşahidələrə kiçik çəki qiyməti verilsə, daha dəqiq qiymətləndirmə almaq olar; bu halda β_0 və β_1 daha əlverişli qaydada təyin edilir.

Heteroskedastiklik reqressiya tənliyinə daxil olan dəyişənlərin qiymətləri müxtəlif müşahidə qiymətlərində bir-birindən çox fərqləndikdə, müəyyən çətinlik yaradır.

Asılı və asılı olmayan dəyişənlər arasındakı asılılıq

$$Y=\beta_0+\beta_1 \cdot X+u$$

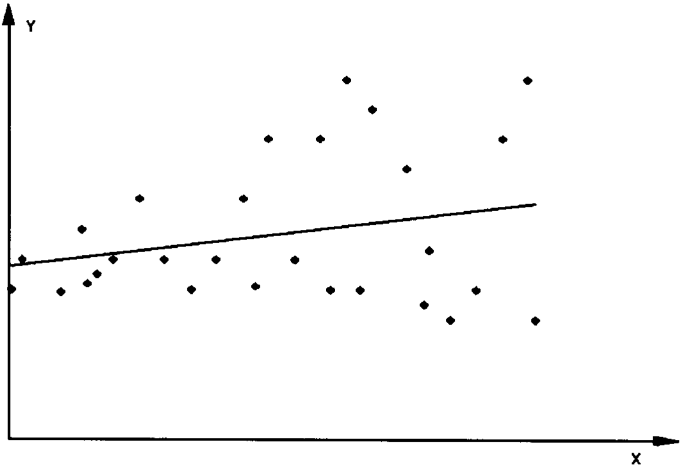
bərabərliyi ilə təyin edilirsə və bu zaman X və Y-in miqyası eyni zamanda dəyişirsə, təsadüfi həddin qiyməti həmin dəyişənlər kiçik olduqda kiçik, böyük olduqda böyük olur.

Heteroskedastiklik riyazi modelin düzgün qurulmaması nəticəsində də alına bilər. Məsələn, fərz edək ki, model qeyri-xəttidir və

$$Y=\beta_0 \cdot X^{\beta_1} \cdot v$$

düsturu ilə verilmişdir, burada β_0 və β_1 yalnız müsbət qiymətlər alır, v multiplikativ təsadüfi həddir, bütün müşahidələr üçün v- nün ehtimal paylanması eynidir, yəni X-in böyük və ya kiçik qiymət almasından asılı olmayaraq, Y-in məsələn, 5 faiz artması ehtimalı dəyişməz qalır. Buna baxmayaraq, X-in artması ilə həqiqi asılılıq ətrafında müşahidə qiymətlərinin dağınıqlığı müşahidə ediləcək və xətti reqressiya heteroskedastikliklə xarakterizə olunacaq.

Aydındır ki, bu halda loqarifmik reqressiyaya keçid modelin homoskedastik olmasına imkan yaradır, çünki lnv təsadüfi həddi asılı dəyişən lnY-ə additiv təsir edir.



Şəkil 7.1. Heteroskedastiklik

7.2. HETEROSKEDASTİKLİYİN ARADAN QALDIRILMASI

Fərz edək ki, Y dəyişəninin X dəyişənindən asılılığı

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 \cdot X_i + u_i$$

şəklindədir. Heteroskedastiklik olduğu halda, yəni təsadüfi həddin dispersiyası sabit qalmadıqda, reqressiya modeli prosesi düzgün xarakterizə etmir. Ona görə də heteroskedastikliyi aradan qaldırmaq lazım gəlir. Bunun üçün elə model qurulmalıdır ki, təsadüfi həddin dispersiyası dəyişməsin.

Təsadüfi həddin müşahidə olunan qiymətlərini (u_i) onların orta kvadratik meylinə (σ_{u_i}) bölək. Alınan qiymətlərin nəzəri dispersiyasını hesablayaq:

$$E\left[\left(\frac{u_i}{\sigma_{u_i}} - 0\right)^2\right] = \frac{1}{\sigma_{u_i}} \cdot E\left(u_i^2\right) = \frac{1}{\sigma_{u_i}^{\;2}} \cdot \sigma_{u_i}^{\;2} = 1.$$

Deməli, bütün müşahidə qiymətləri üçün $\frac{u_i}{\sigma_{u_i}}$ təsadüfi kəmiyyətinin dispersiyası sabit olub bütün qiymətlər üçün 1-ə bərabərdir və ona görə də modeli

$$Y_i^* = \beta_0 \cdot H_i + \beta_1 \cdot X_i^* + u_i^*$$

kimi qəbul etsək, burada

$$Y_i^* = \frac{Y_i}{\sigma_{u_i}}, \quad X_i^* = \frac{X_i}{\sigma_{u_i}}, \quad H_i = \frac{1}{\sigma_{u_i}}, \quad u_i^* = \frac{u_i}{\sigma_{u_i}},$$

həmin model homoskedastik olacaq.

Yeni Y^* dəyişəni iki dəyişəndən (H və X_i^* -dan) asılıdır. Müvafiq reqressiya asılılığını qursaq, β_0 və β_1 əmsalları üçün yerini dəyişməyən standart səhvlərlə qiymətləndirmə alarıq.

İlkin modelin dəyişdirilməsinin çox sadə izahı var. Aydındır ki, Y-in X-dən həqiqi asılılığını müəyyən etmək üçün orta kvadratik meyli az olan müşahidələr daha əhəmiyyətlidir, çünki onda təsadüfi həddin qiyməti kiçik olur. Bunu nəzərə alaraq, çəki qiymətləri elə verilməlidir ki, mühüm əhəmiyyət daşıyan müşahidələrin dəyəri daha artıq olsun.

Göstərilən qaydanı dispersiya, bir qayda olaraq, məlum olmadığına görə praktiki məsələlərə birbaşa tətbiq etmək mümkün deyil. Lakin elə çəki qiymətləri seçmək olar ki, hər bir müşahidə qiymətinin reqressiya asılılığına təsirini nəzərə alsın.

Fərz edək ki, σ_{u_i} müəyyən Z kəmiyyətinin Z_i qiymətləri ilə düz mütənasibdir:

$$\sigma_{u_i} = \lambda \cdot Z_i$$

burada λ -sabit ədəddir. Reqressiya tənliyinin bütün hədlərini Z-ə bölək:

$$\frac{Y_i}{Z_i} = \beta_1 \cdot \frac{1}{Z_i} + \beta_2 \cdot \frac{X_i}{Z_i} + \frac{u_i}{Z_i}.$$

Alınan modelin homoskedastik olub olmadığını yoxlayaq:

$$E\left[\left(\frac{u_i}{Z_i}\right)^2\right] = \frac{1}{Z_i^2} \cdot E\left(u_i^2\right) = \frac{1}{Z_i^2} \cdot \sigma_{u_i}^2 = \frac{\lambda^2 \cdot Z_i^2}{Z_i^2} = \lambda^2.$$

Təsadüfi həddin dispersiyası sabitdir və λ^2 ədədinə bərabərdir. Beləliklə, yeni model heteroskedastik deyil.

Çalışmalar

7.1. Təsadüfi kəmiyyətin müşahidə edilən
6,12; 13,39; 20,93; 28,46; 34,91; 44,20; 55,38; 63,15; 70,76 qiymətləri əsasında xətti reqressiya asılılığını təyin edin; həm reqressiya xəttini, həm də təsadüfi kəmiyyətlərin məlum qiymətlərini müstəvi üzərində göstərməklə homoskedastikliyi yoxlayın; heteroskedastiklik halında dispersiyanı sabitləşdirmək üçün nə etmək lazım olduğunu göstərin.

7.2. İki təsadüfi kəmiyyət arasında asılılıq cədvəl şəklində verilmişdir:

X_i	3.1	5.2	7.9	10.1	14.8	15.7	20.3	21.2	22.9	24.8
Y_i	26.93	37,12	57.40	67.65	101.17	103.21	135.64	130.75	155.93	160.16

Asılılığın homoskedastik və ya heteroskedastik olduğu barədə nə demək olar? Müvafiq araşdırma aparın.

VIII FƏSİL

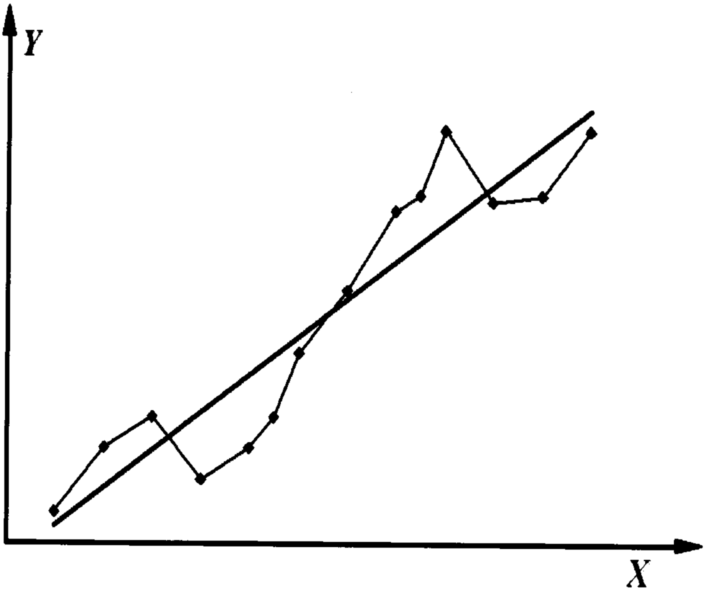
AVTOKORRELYASİYA

8.1. AVTOKORRELYASİYANIN YARANMASI SƏBƏBLƏRİ

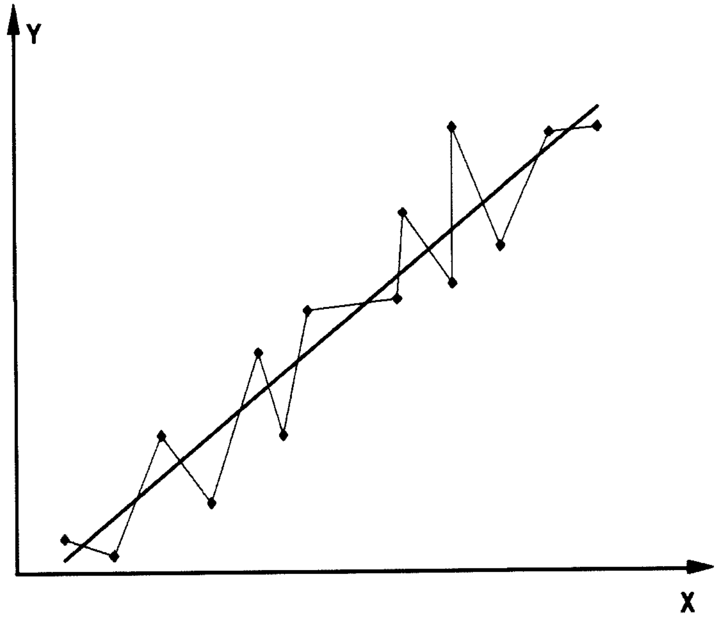
Müşahidə qiymətlərinə daxil olan təsadüfi u_i və u_j $(i \neq j)$ kəmiyyətləri arasında nəzəri kovariasiyalar sıfırdan fərqlidirsə, yəni üçüncü Qauss-Markov şərti ödənmirsə, onda deyirlər ki, təsadüfi kəmiyyət avtokorrelyasiyaya məruz qalır.

Avtokorrelyasiya zamandan asılı sıraların reqressiya təhlilində aşkara çıxır. Bu halda təsadüfi kəmiyyətə reqressiya tənliyinə daxil edilməmiş dəyişənlər təsir edir.

Reqressiya asılılığında nəzərə alınmamış dəyişənlərin təsiri daha çox müsbət avtokorrelyasiyada hiss olunur. Məsələn, Y parametri sərbəst X dəyişənindən və eyni zamanda tənliyə daxil edilməmiş və prosesə az təsir edən dəyişənlərdən asılıdırsa, onda modelin təsadüfi həddi müsbət məcmu effektə malik olduqda bu effekt balans dəyişənə qədər saxlanılır, sonra isə mənfiyə keçir. Eyni qayda ilə mənfi effekt də bir-neçə müşahidə qiymətində xətti reqressiyanın aşağı hissəsində qalır (şəkil 8.1.)



Şəkil 8.1. Müsbət avtokorrelyasiya



Şəkil 8.2. Mənfi avtokorrelyasiya

Avtokorrelyasiya müşahidə qiymətləri arasında interval kiçik olduqda daha çox əhəmiyyət daşıyır.

İqtisadiyyatda mənfi avtokorrelyasiya nadir hallarda müşahidə edilir. Bu halda bir müşahidədə müsbət qiymət alınmışdırsa, o birində, çox güman ki, mənfi qiymət alınacaq və əksinə, mənfi qiymətdən də müsbət qiymətə keçid olacaq (şəkil 8.2).

8.2. DARBİN-UOTSON KRİTERİSİ

Dinamik sıranın qonşu elementləri arasında avtokorrelyasiyanın mövcudluğu Darbin-Uotson kriterisi ilə təyin edilir.

Reqressiya səhvlərinin korrelyasiyası sıfıra bərabər deyilsə, onda həmin korrelyasiya ən kiçik kvadratlar üsulu ilə təyin olunmuş e_t qalıqlarında olmalıdır. Bu zaman aşağıdakı statistikadan istifadə edilir:

$$d = \frac{\sum_{t=2}^{n}(e_t - e_{t-1})^2}{\sum_{t=1}^{n} e_t^2}.$$

Darbin-Uotson statistikası seçmə korrelyasiya əmsalı ilə də ifadə oluna bilər. Sadə çevirmələr aparsaq,

$$d = \frac{\sum_{t=2}^{n} e_t^2 - 2\cdot\sum_{t=2}^{n} e_{t-1}\cdot e_t + \sum_{t=2}^{n} e_{t-1}^2}{\sum_{t=1}^{n} e_t^2} =$$

$$= \frac{\sum_{t=1}^{n} e_t^2 - e_1^2 - 2\cdot\sum_{t=2}^{n} e_{t-1}\cdot e_t + \sum_{t=1}^{n} e_t^2 - e_n^2}{\sum_{t=1}^{n} e_t^2} =$$

$$= 2 - 2\cdot\frac{\sum_{t=2}^{n} e_{t-1}\cdot e_t}{\sum_{t=1}^{n} e_t^2} - \frac{e_1^2 + e_n^2}{\sum_{t=1}^{n} e_t^2}$$

alarıq. Buradan, $\sum_{t=1}^{n} e_t = 0$ olduğuna görə $r = \frac{\sum_{t=2}^{n} e_{t-1}\cdot e_t}{\sum_{t=1}^{n} e_t^2}$ seçmə korrelyasiya əmsalıdır. $\frac{e_1^2 + e_n^2}{\sum_{t=1}^{n} e_t^2}$ nisbətini isə atmaq olar, çünki surət müşahidə qiymətlərinin sayı kifayət qədər çox olduqda məxrəcdən dəfələrlə kiçikdir. Beləliklə,

$$d \approx 2\cdot(1-r)$$

olur. Göründüyü kimi, avtokorrelyasiya yoxdursa, seçmə korrelyasiya əmsalı r sıfıra yaxın qiymət alacaq və $d\approx 2$ olacaq. Statistikanın müşahidə olunan qiyməti sıfıra yaxın olduqda, avtokorrelyasiya müsbət, dördə yaxın olduqda mənfi qiymət alacaq.

Müxtəlif əhəmiyyətlilik səviyyələrində d-statistikanın yuxarı (d_y) və aşağı (d_a) sərhədləri hesablanmışdır. Bu sərhədlərdən istifadə etməklə, müşahidə qiymətlərinin sayına görə avtokorrelyasiya barədə hipotezləri yoxlamaq olar:

a) $d_y < d < 4\text{-}d_y$ olduqda avtokorrelyasiyanın mövcudluğu barədə hipotez rədd edilir;

b) $d_a < d < d_y$ yaxud $4\text{-}d_y < d < 4\text{-}d_a$ hallarında qərar qəbul etmək olmur;

c) $0 < d < d_a$ olduqda müsbət avtokorrelyasiya barədə hipotez qəbul edilir;

d) $4\text{-}d_a < d < 4$ olduqda mənfi avtokorrelyasiya barədə hipotez qəbul edilir;

8.3. BİRİNCİ TƏRTİB AVTOKORRELYASİYANIN ARADAN QALDIRILMASI

Birinci tərtib avtokorrelyasiya daha çox müşahidə edilir. Onun aradan qaldırılması üçün modeldə sadə çevirmələr aparılır.

Fərz edək ki, model

$$Y_t = \beta_0 + \beta_1 \cdot X_t + u_t \qquad (8.1)$$

şəklindədir və burada təsadüfi həddin hər bir müşahidə olunan qiyməti əvvəlki qiymətdən aşağıdakı kimi asılıdır:

$$u_t = p \cdot u_{t-1} + \varepsilon_t.$$

Y_t -nin t-1 anındakı qiymətinin ifadəsini yazaq və bərabərliyin hər iki tərəfini p ədədinə vuraq:

$$p \cdot Y_{t-1} = \beta_0 \cdot p + \beta_1 \cdot p \cdot X_{t-1} + p \cdot u_{t-1}. \qquad (8.2)$$

(8.1) bərabərliyi ilə (8.2) bərabərliyini tərəf-tərəfə çıxaq:

$$Y_t - p \cdot Y_{t-1} = \beta_0 \cdot (1-p) + \beta_1 \cdot X_t - \beta_1 \cdot p \cdot X_{t-1} + u_t - p \cdot u_{t-1}$$

Onda Y_t –nin ifadəsi aşağıdakı kimi olacaq:

$$Y_t = \beta_0 \cdot (1-p) + p \cdot Y_{t-1} + \beta_1 \cdot X_t - \beta_1 \cdot p \cdot X_{t-1} + \varepsilon_t .$$

Alınan modeldə, göründüyü kimi, avtokorrelyasiya yoxdur.

Çoxdəyişənli reqressiyanın ümumi modeli verildikdə də eyni qaydadan istifadə edilir:

$$Y_t = \beta_0 + \beta_1 \cdot X_{1t} + \beta_2 \cdot X_{2t} + \ldots + \beta_k \cdot X_{kt} + u_t ,$$
$$p \cdot Y_{t-1} = \beta_0 \cdot p + \beta_1 \cdot p \cdot X_{1,t-1} + \beta_2 \cdot p \cdot X_{2,t-1} +$$
$$+ \ldots + \beta_k \cdot p \cdot X_{k,t-1} + p \cdot u_t ,$$
$$Y_t = \beta_0 \cdot (1-p) + p \cdot Y_{t-1} + \beta_1 \cdot X_{1t} - \beta_1 \cdot p \cdot X_{1,t-1} +$$
$$+ \ldots + \beta_k \cdot X_{kt} - \beta_k \cdot p \cdot X_{k,t-1} + \varepsilon_t .$$

Qeyd edək ki, alınan model qeyri-xəttidir və ona görə də adi ən kiçik kvadratlar üsulundan istifadə etmək olmaz. Qeyri-xətti qiymətləndirmə üçün başqa üsullar mövcuddur (qeyri-xətti ən kiçik kvadratlar üsulu, maksimum həqiqətəoxşarlıq üsulu).

Qeyri-xətti ən kiçik kvadratlar üsulu o zaman tətbiq edilir ki, reqressiya asılılığının ifadəsi çevirmələr vasitəsilə xətti asılılığa gətirilmir. Buna baxmayaraq, yenə də fərqlərin kvadratlar cəminin minimumlaşdırılması prinsipi istifadə edilir. Lakin hesablama qaydası kifayət qədər mürəkkəbdir. Bu üsulun tətbiqi ilə reqressiya əmsallarının təyin edilməsi alqoritmi aşağıdakı mərhələlərdən ibarət ola bilər:

a) müəyyən mülahizələrə əsasən əmsalların ilkin başlanğıc qiymətləri seçilir;

b)əmsalların bu qiymətlərində hər bir X_i -ə uyğun Y_i hesablanır;

c) bütün müşahidə olunan qiymətlərin hesablanmış Y_i ilə fərqləri (qalıqlar) hesablanır, kvadrata yüksəldilir və kvadratların cəmi tapılır;

ç) əmsallara kiçik dəyişikliklər edilir;

d) Y_i-lərin yeni qiymətləri və qalıqların kvadratları hesablanır;

e)qalıqların kvadratlar cəmi əvvəlki qiymətlə müqayisə edilir, ondan kiçikdirsə, əmsalların qiymətləri yeni başlanğıc qiyməti kimi qəbul edilir, böyükdürsə, əvvəlki qiymətlər saxlanır;

ə) proses o vaxta qədər davam etdirilir ki, qalıqların kvadratlar cəmini azaltmaq daha mümkün olmur.

Qeyri-xətti qiymətləndirmə üçün tətbiq olunan və R.Fişer tərəfindən təklif olunmuş ən böyük həqiqətəoxşarlıq üsulunun mahiyyətini də qısaca izah edək.

Hər hansı diskret X kəmiyyətinin dəyişmə qanunu məlumdursa, lakin onun θ parametrinin qiyməti məlum deyilsə, həqiqətə oxşarlıq funksiyası olaraq,

$$L(X_1, X_2, ..., X_n, \theta) = p(X_1, \theta) \cdot p(X_2, \theta) ... p(X_n, \theta)$$

qəbul edilir, burada $X_1, X_2, ..., X_n$ qeyd olunmuş ədədlər, $P(X_i, \theta)$ onların mümkünlüyü ehtimallarıdır.

θ parametrinin elə qiyməti axtarılır ki, həqiqətə oxşarlıq funksiyası ən böyük qiymət alsın.

L və lnL funksiyaları θ-nın eyni qiymətində maksimum olduqlarına görə, bir qayda olaraq, lnL funksiyasının maksimumu axtarılır. Bunun üçün əvvəlcə $\frac{dlnL}{d\theta}$ törəməsi hesablanıb sıfıra bərabər qəbul edilir, böhran nöqtəsi tapılır, sonra isə $\frac{d^2lnL}{d\theta^2}$ törəməsinin mənfi olub olmadığı yoxlanır, mənfidirsə, θ-nin alınan qiyməti maksimum nöqtəsidir.

Çalışmalar

8.1. İqtisadi dəyişənin müşahidə olunan

X_i	1	2	3	4	5	6	7
Y_i	6.18	8.73	11.24	13.56	16.17	18.69	21.20

qiymətləri əsasında

a) ən kiçik kvadratlar üsulu ilə xətti reqressiya asılılığını təyin edin;

b) Darbin-Uotson statistikasını hesablayın.

8.2. Manatın dollara görə məzənnəsinin dəyişməsinin

X_i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Y_i	0.75	0.82	0.83	0.82	0.81	0.79	0.78	0.79	0.80	0.81

qiymətlərindən istifadə edərək, 5 faizli əhəmiyyətlilik səviyyəsində avtokorrelyasiyanın olub olmadığını müəyyənləşdirin.

IX FƏSİL

DİNAMİK SIRALAR

9.1. DİNAMİK SIRALARIN TƏHLİLİN ƏSAS MƏRHƏLƏLƏRİ

İqtisadi dəyişən müəyyən zaman intervalında müxtəlif qiymətlər alır və onun dəyişməsi kəsilməz, yaxud diskret funksiya ilə göstərilə bilər. Hər hansı obyektin və ya obyekt göstəricisinin vəziyyətinin t zamanının kəsilməz funksiyası trayektoriya adlanır. Diskret qiymətlərdə verilən trayektoriyaya zamandan asılı sıra və ya dinamik sıra deyirlər. Deməli, dinamik sıra müəyyən dəyişənin zamandan asılılığının diskret qiymətlər çoxluğudur.

Bir dinamik sıranın $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ elementləri başqa bir dinamik sıranın $X_1, X_2, \ldots, X_n$ elementlərindən xətti asılıdırsa, onda

$$Y_t = \beta_0 + \beta_1 \cdot X_t + \varepsilon_t$$

yaza bilərik, lakin həm burada, həm də çoxölçülü halda dinamik sıra elementləri Qauss-Markovun 3-cü şərtini ödəmədiyinə görə avtokorrelyasiya nəzərə alınmalıdır.

Hər bir Y_t elementini aşağıdakı cəm şəklində göstərə bilərik:

$$Y_t = U_t + V_t + W_t + \varepsilon_t, \quad \left(t = \overline{1,T}\right)$$

burada U_t - uzunmüddətli amillərin təsiri nəticəsində aşkara çıxan hamar dəyişən komponent (trend) , V_t -qısa müddət ərzində iqtisadi prosesin təkrarlanmasını əks etdirən mövsumi komponent, W_t -uzun müddət ərzində iqtisadi prosesin təkrarlanmasını əks etdirən dövrilik komponenti, ε_t -ölçülməsi mümkün olmayan təsadüfi amillərin təsirini əks etdirən komponentdir.

Qeyd edək ki, ε_t -dən başqa o biri komponentlər təsadüfi deyil, mümkün qaydaya uyğun dəyişir.

İqtisadi dinamik sıraların araşdırılmasında ən mühüm klassik məsələ öyrənilən prosesin inkişafının əsas təmayülünü aşkara çıxarmaq və statistik qiymətləndirməkdir.

Zamandan asılı sıraların təhlilinin əsas mərhələləri aşağıdakılardır:

a) dinamik sıranın qrafik təsviri və xüsusiyyətlərinin aşkara çıxarılması;

b) təsadüfi olmayan toplananların (trendin, mövsümi və dövri hissələrin) ayrılması və kənarlaşdırılması;

c) sıranın təsadüfi komponentinin araşdırılması, təsvirinin riyazi modelinin qurulması və adekvatlığın yoxlanması;

ç) prosesin inkişaf təmayülünün proqnozlaşdırılması;

d) müxtəlif dinamik sıralar arasında qarşılıqlı əlaqənin tədqiqi.

Dinamik sıranın elementlər ardıcıllığına təsadüfi kəmiyyətin realizasiyalarından biri kimi baxırlar. Bu elementlər əsasən statistik asılı olur və onların paylanma qanunları da fərqlənir.

Fərz edək ki, çoxdəyişənli reqressiya asılılığında bütün dəyişənlər zamandan asılıdır. İzahedici $X_{1t}, X_{2t}, \ldots, X_{kt}$ dəyişənlərinə uyğun olan $Y_t\ (t=1,2,\ldots,T)$ qiymətləri əsasında ən kiçik kvadratlar üsulu ilə $\hat{Y}_t$ qiymətləri hesablana bilər. Onda alınan reqressiya asılılığı əslində bütün prosesin tənliyidir və zamanın sonrakı müəyyən dövründə də doğru olmalıdır. Bu mülahizəyə əsaslansaq və prosesi gələcəyə ekstrapolyasiya etsək, iqtisadi dəyişmənin davam etmə perspektivi aşkara çıxacaq.

Burada iki müxtəlif hal ilə qarşılaşırıq:

a) Zamanın T-dən sonrakı qiymətlərində $Y_{T+i}\left(i=\overline{1,m}\right)$ məlumdur.

Bu halda məlum Y_{T+i} qiymətləri və hesablanmış $\hat{Y}_{T+i}$ qiymətləri bir-birilə müqayisə edilir, qurulmuş modelin prosesə adekvatlığı araşdırılır.

b) Zamanın T-dən sonrakı qiymətlərində $Y_{T+i}\left(i=\overline{1,m}\right)$ məlum deyil.

Bu halda, əlbəttə, yoxlamadan söhbət belə gedə bilməz. Prosesin və modelin adekvatlığı apriori qəbul edilir və $X_{1,T+i}, X_{2,T+i}, \ldots, X_{k,T+i}$ qiymətində reqressiya asılılığı ilə hesablanmış $\hat{Y}_{T+i}\left(i=\overline{1,m}\right)$ proqnoz qiymətləri adlanır.

Adətən iqtisadi prosesin necə davam etdiyini öyrənmək üçün seçmə hissənin son bir-neçə qiyməti yoxlama məqsədilə saxlanır, müvafiq model qurulduqdan sonra həmin qiymətlərlə $\hat{Y}_{T+i}\left(i=\overline{1,m}\right)$ qiymətlərinin nə dərəcədə uyğun olduğu araşdırılır.

İqtisadi parametrin izahedici dəyişənləri verilmədikdə də, yəni yalnız $Y_T\left(i=\overline{1,T}\right)$ qiymətləri məlum olduqda da proqnoz qiymətləri hesablana bilər. Bu məsələyə müxtəlif üsulların tətbiqi zamanı da yuxarıdakı qaydadan istifadə olunur, yəni son birneçə qiymət sınaq aparmaq üçün saxlanır və statistik materiala daxil edilmir.

9.2. STASİONAR DİNAMİK SIRALAR

Dinamik sıraların təhlilində stasionar sıralar mühüm əhəmiyyətə malikdir. Belə sıraların ehtimal xüsusiyyətləri zamandan asılı olaraq dəyişmir.

Müşahidə olunan $Y_1, Y_2, ..., Y_n$ qiymətlərinin ehtimallarının paylanması istənilən n, t və τ üçün $Y_{1+\tau}, Y_{2+\tau}, ..., Y_{n+\tau}$ qiymətlərindəki kimidirsə, $Y_t\left(i = \overline{1,n}\right)$ sırasına ciddi stasionar sıra deyirlər. Başqa sözlə, bu cür sıraların xüsusiyyətləri t-nin qiymətindən asılı deyil, yəni paylanma qanunu və ədədi xarakteristikalar zamandan asılı olaraq dəyişmir.

Göstərilən şərtlər daxilində riyazi gözləmə və dispersiya $Y_t\left(t = \overline{1,n}\right)$ qiymətlərilə xarakterizə edilə bilər:

$$\overline{Y} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{t=1}^{n} Y_t$$

$$var(Y) = \frac{1}{n} \cdot \sum_{t=1}^{n} \left(Y_t - \overline{Y}_t\right)^2$$

Stasionar sıralar üçün

$$E(Y_t) = E(Y_{t+\tau}) = a,$$

$$\sigma_Y(t) = \sigma_Y(t+\tau) = \sigma,$$

$$\rho(\tau) = \frac{1}{\sigma^2} \cdot E[(Y_t - a) \cdot (Y_{t+\tau} - a)]$$

alınır. $r(\tau)$ əmsalı eyni sıranın müxtəlif elementləri arasında korrelyasiyanı ifadə etdiyindən, avtokorrelyasiya əmsalı adlanır. Bu əmsalın qiymətləndirilməsi üçün seçmə korrelyasiya əmsalı $r(\tau)$-dan istifadə olunur və buna seçmə avtokorrelyasiya funksiyası deyilir. Onun qrafiki isə korreloqram adlanır.

Stasionar dinamik sıraların riyazi gözləməsi sıfıra bərabər olan və ε_t səhvləri korrelyasiyaya uğramayan halından daha çox istifadə olunur.

9.3. DİNAMİK SIRALARIN ZƏİF STASIONARLIĞI

X_t *(t=0, 1, 2,...)* elementlərindən ibarət dinamik sıraya o halda zəif stasionar deyirlər ki, onun riyazi gözləməsi və nəzəri dispersiyası zamandan asılı deyil, X_t və X_{t+s} qiymətləri arasında nəzəri kovariasiyası isə yalnız s-dən asılıdır.

Birinci tərtib avtokorrelyasiya prosesi bu cür stasionarlığa misal ola bilər:

$$X_t = \beta_1 \cdot X_{t-1} + \varepsilon_t,$$

burada β_1 əmsalı $-1 < \beta_1 < 1$ bərabərsizliyini ödəyir, ε_t riyazi gözləməsi sıfıra bərabər, dispersiyası sabit olan təsadüfi kəmiyyətlərdir.

Yuxarıdakı bərabərliyin t-1 üçün

$$X_{t-1} = \beta_1 \cdot X_{t-2} + \varepsilon_{t-1}$$

ifadəsini X_t-də yerinə yazsaq,

$$X_t = \beta_1^2 \cdot X_{t-2} + \beta_1 \cdot \varepsilon_{t-1} + \varepsilon_t$$

və bu prosesi davam etdirsək,

$$X_t = \beta_1^t \cdot X_0 + \beta_1^{t-1} \cdot \varepsilon_1 + \ldots + \beta_1 \cdot \varepsilon_{t-1} + \varepsilon_t$$

alarıq. Riyazi gözləməni hesablayaq:

$$E(X_t) = \beta_1^t \cdot X_0 + \beta_1^{t-1} \cdot E(\varepsilon_1) + \ldots + \beta_1 \cdot E(\varepsilon_{t-1}) + E(\varepsilon_t).$$

Əgər t kifayət qədər böyükdürsə, $\beta_1^t \cdot X_0$ sıfıra yaxınlaşır, sağ tərəfdəki riyazi gözləmələrin hamısı sıfıra bərabərdir. Deməli $E(X_t)=0$ olur.

X_t nin nəzəri dispersiyası

$$\beta_1^{t-1} \cdot \varepsilon_1 + \beta_1^{t-2} \cdot \varepsilon_2 + \ldots + \beta_1 \cdot \varepsilon_{t-1} + \varepsilon_t$$

cəminin dispersiyasıdır, çünki $\beta_1^t \cdot X_0$ sabit ədəddir. Onda

$$\sigma_{X_t}^2 = \beta_1^{2(t-1)} \cdot \sigma_\varepsilon^2 + \beta_1^{2(t-2)} \cdot \sigma_\varepsilon^2 + \ldots + \beta_1^2 \cdot \sigma_\varepsilon^2 + \sigma_\varepsilon^2 = \frac{1-\beta_1^{2t}}{1-\beta_1^2} \cdot \sigma_\varepsilon^2$$

alınır. Buradan isə t artdıqca β_1^{2t} sıfıra yaxınlaşdığına görə stasionarlıq asimptotik olaraq ödənilir, çünki nəzəri dispersiya zamandan asılı olmur.

Sıranın iki müxtəlif X_t və X_s qiymətləri arasında $t>s$ olduqda nəzəri kovariasiya

$$\sigma_{X_t X_s} = \beta_1^{t+s-2} \cdot \sigma_\varepsilon^2 + \beta_1^{t+s-4} \cdot \sigma_\varepsilon^2 + \ldots + \beta_1^{t-s} \cdot \sigma_\varepsilon^2 =$$

$$= \beta_1^{t-s} \cdot \left(\beta_1^{2s-2} + \beta_1^{2s-4} + \ldots + \beta_1^2 + 1\right) \cdot \sigma_\varepsilon^2 = \beta_1^{t-s} \cdot \frac{1-\beta_1^s}{1-\beta_1^2} \cdot \sigma_\varepsilon^2$$

t-s fərqindən asılı olsa da , t-dən birbaşa asılı deyil.

Şəkil 9.1 - də stasionar prosesə aid bir nümunə verilmişdir.

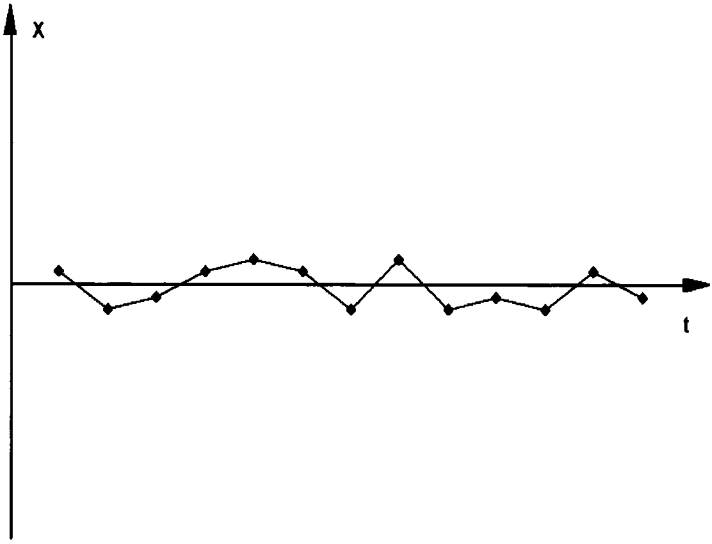
X_t və X_{t-1} arasındakı asılılıqda $\beta_1=1$ qəbul edək:

$$X_t = X_{t-1} + \varepsilon_t.$$

Bu hal qeyri-stasionar prosesə aiddir. X_0 qiymətindən başlayan proses üçün

$$X_t = X_0 + \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \ldots + \varepsilon_t$$

alınar.



Şəkil 9.1. Stasionar proses

9.4. QEYRİ-STASİONAR DİNAMİK SIRALAR

Yenə də

$$X_t = \beta_1 \cdot X_{t-1} + \varepsilon_t$$

bərabərliyi ilə təyin edilən dinamik sıraya baxaq, lakin -
$1 < \beta_1 < 1$ şərtinin əvəzinə $\beta_1 = 1$ qəbul edək:

$$X_t = X_{t-1} + \varepsilon_t$$

Bu asılılıqla təyin olunan proses "təsadüfi dolaşma" adlanır və qeyri-stasionar prosesə aid ən sadə misaldır.

Dinamik sıranın ilk elementi X_0 -dırsa, onda ixtiyari t anındakı element

$$X_t = X_0 + \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \ldots + \varepsilon_t$$

cəminə bərabər olacaq.

Göründüyü kimi, hər bir əvvəlki təsadüfi təsirin qiyməti zamandan asılı sıranın bütün sonrakı qiymətlərində qalır.

"Təsadüfi dolaşma" halında X_t- nin riyazi gözləməsinin və nəzəri dispersiyanın konkret qiymətləri olmur. Riyazi gözləmənin ixtiyari t anında gözlənilən qiyməti t-dən asılı deyil, dispersiyası isə zamanla düz mütənasib olmaqla, getdikcə artır:

$$\sigma^2_{X_t} = \sigma^2_\varepsilon + \sigma^2_\varepsilon + \ldots + \sigma^2_\varepsilon = t \cdot \sigma^2_\varepsilon$$

Şəkil 9.2 də "təsadüfi dolaşma"ya aid bir misalın qrafiki göstərilmişdir.

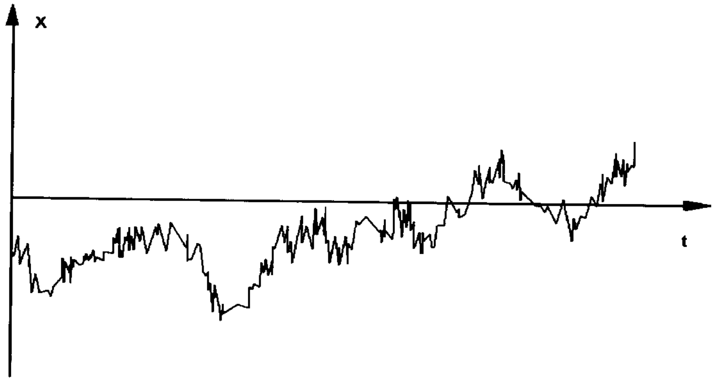
Asılılıqda β_0 sərbəst dəyişəni də iştirak edirsə, qeyri-stasionar dinamik sıranın elementləri

$$X_t = \beta_0 + X_{t-1} + \varepsilon_t$$

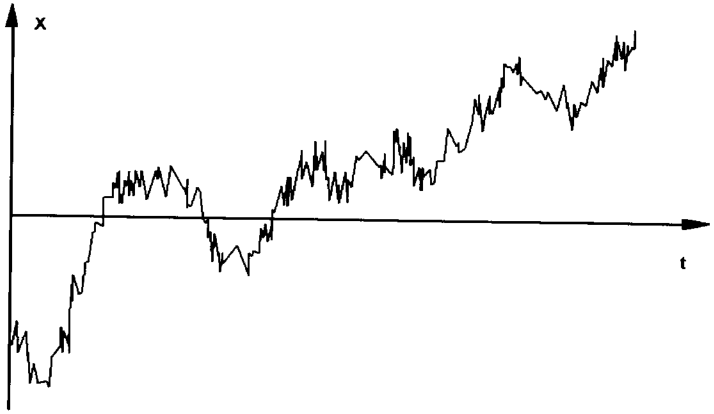
bərabərliyi ilə təyin olunacaq. Burada ilk element X_0 -dırsa, ixtiyari t anında

$$X_t = X_0 + \beta_0 \cdot t + \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \ldots + \varepsilon_t$$

olacaq.



Şəkil 9.2. Təsadüfi dolaşma



Şəkil 9.3. Riyazi gözləməsi t-dən asılı qeyri-stasionar sıra

Baxılan qeyri-stasionar dinamik sıranın X_t elementlərinin riyazi gözləməsi t - dən asılıdır.

Şəkil 9.3-də bu cür prosesə aid bir misalın qrafiki təsvir olunmuşdur.

Eyni qayda ilə digər qeyri-stasionar sıralara da baxa bilərik. Məsələn,

$$X_t = \beta_0 + \beta_1 \cdot t + \varepsilon_t$$

zamandan asılı trendin daxil olduğu dinamik sıranın riyazi gözləməsi $\beta_0+\beta_1 \cdot t$ olur, dispersiyası isə təyin edilməmişdir.

9.5. QEYRİ-STASİONAR PROSESLƏRİN STASİONAR PROSESƏ GƏTİRİLMƏSİ

Qeyri-stasionar prosesi xarakterizə edən dinamik sıranın elementlərinin sonlu fərqlərini ardıcıl olaraq yazmaqla stasionar sıra almaq olar. "Təsadüfi dolaşma" belə qeyri-stasionar sıralara misal ola bilər. Məsələn,

$$X_t = \beta_0 + X_{t-1} + \varepsilon_t$$

modelinə baxılırsa, sonlu fərqlər

$$\Delta X_t = X_t - X_{t-1} = \beta_0 + \varepsilon_t$$

yeni stasionar proses yaradır. Bu prosesin riyazi gözləməsi β_0 və dispersiyası σ_ε^2 -dır. Hər iki parametr zamandan asılı deyil.

Ola bilər ki, birinci tərtib sonlu fərqlərin dinamik sırası stasionar olmasın. Onda ikinci tərtib sonlu fərqlər hesablanır və s. Bu proses o vaxta kimi davam etdirilir ki, sıra stasionar prosesin şərtlərini ödəyir.

Bəzi qeyri-stasionar sıralar trend funksiyası kənarlaşdırıldıqdan sonra stasionar olur. Məsələn,

$$X_t = \beta_0 + \beta_1 \cdot t + \varepsilon_t$$

asılılığı ilə xarakterizə edilən proses

$$\hat{X}_t = b_0 + b_1 \cdot t$$

trend funksiyasından istifadə etməklə, stasionarlaşdırılır:

$$\tilde{X}_t = X_t - \hat{X}_t = X_t - b_0 - b_1 \cdot t.$$

Trend asılılığı daxil olmayan yeni dəyişənin qiymətləri reqressiya xəttindən kənara çıxmaları göstərir.

9.6. ZAMANDAN ASILI SIRALARIN TƏHLİLİNƏ AİD MİSALLAR

Fərz edək ki, 2001-ci ilin yanvar ayından 2009-cu ilin iyul ayına qədər respublikamızın büdcəsinə mənfəət vergisinin aylıq daxilolmalarının vergi dərəcəsindən və ümumi daxili məhsuldan asılılığı öyrənilir (cədvəl 9.1).

Cədvəl 9.1

2001-2009	TAX	PER	GDP
1	4558.20	27.00	381480.00
2	4558.20	27.00	346580.00
3	14050.00	27.00	340060.00
4	7284.04	27.00	340300.00
5	10216.54	27.00	298460.00
6	14780.80	27.00	410000.00
7	6785.20	27.00	445160.00
8	5305.12	27.00	512980.00
9	23560.48	27.00	597900.00
10	8536.40	27.00	479340.00
11	10625.84	27.00	477140.00
12	7635.24	27.00	694560.00
1	10489.86	27.00	411920.00
2	10489.86	27.00	354740.00
3	11707.92	27.00	400800.00
4	9650.56	27.00	408360.00
5	6083.88	27.00	390580.00
6	11716.84	27.00	483440.00
7	15056.92	27.00	498300.00
8	10164.92	27.00	467120.00
9	12935.12	27.00	610720.00

9	12935.12	27.00	610720.00
10	15185.16	27.00	528380.00
11	13031.18	27.00	510300.00
12	21486.24	27.00	855740.00
1	4506.32	25.00	471980.00
2	11386.74	25.00	470020.00
3	16236.74	25.00	535460.00
4	14824.90	25.00	447140.00
5	6475.94	25.00	566840.00
6	8160.88	25.00	590280.00
7	10969.36	25.00	760560.00
8	5706.92	25.00	680220.00
9	7262.86	25.00	539720.00
10	14754.84	25.00	656520.00
11	10267.94	25.00	560460.00
12	13966.10	25.00	731480.00
1	20613.90	24.00	52994.00
2	20613.90	24.00	1006206.00
3	11598.90	24.00	550560.00
4	12502.30	24.00	603700.00
5	3635.70	24.00	742000.00
6	3361.60	24.00	748740.00
7	13888.60	24.00	757400.00
8	3581.90	24.00	784440.00
9	2436.90	24.00	691780.00
10	14106.90	24.00	801140.00
11	8070.00	24.00	800760.00
12	11237.40	24.00	834780.00
1	23344.48	24.00	656060.00

2	9364.78	24.00	750300.00
3	28168.76	24.00	725120.00
4	19337.90	24.00	957480.00
5	7424.10	24.00	878860.00
6	5192.70	24.00	933200.00
7	19315.96	24.00	969440.00
8	5101.66	24.00	1272380.00
9	20900.12	24.00	1037740.00
10	23015.74	24.00	1098260.00
11	23226.42	24.00	1187100.00
12	33080.40	24.00	1409660.00
1	24715.60	22.00	1012800.00
2	33662.90	22.00	1216100.00
3	57886.70	22.00	994100.00
4	232652.20	22.00	1254900.00
5	5796.80	22.00	1376000.00
6	7489.00	22.00	1292500.00
7	304259.30	22.00	1657100.00
8	7831.00	22.00	1493200.00
9	45113.40	22.00	2433500.00
10	502569.40	22.00	2031600.00
11	7438.20	22.00	1567600.00
12	5692.70	22.00	1406400.00
1	281802.40	22.00	1647000.00
2	30063.80	22.00	1626100.00
3	65223.60	22.00	1872300.00
4	551435.70	22.00	1738800.00
5	52028.00	22.00	1879000.00
6	59504.50	22.00	1909200.00
7	646118.00	22.00	2067300.00
8	37653.80	22.00	2076700.00
9	42130.10	22.00	1791600.00

10	596834.80	22.00	2131600.00
11	24877.40	22.00	2078400.00
12	75521.90	22.00	4410100.00
1	579460.60	22.00	2286000.00
2	22531.50	22.00	2481000.00
3	84593.10	22.00	3442000.00
4	814643.50	22.00	2963000.00
5	38135.60	22.00	3136000.00
6	52489.60	22.00	4197700.00
7	587902.10	22.00	4511400.00
8	34231.20	22.00	2874800.00
9	57448.60	22.00	4478500.00
10	434597.80	22.00	2172000.00
11	22414.60	22.00	2118200.00
12	135481.40	22.00	3345100.00
1	137974.60	22.00	1860000.00
2	30758.30	22.00	1999300.00
3	137113.70	22.00	2882500.00
4	96162.90	22.00	2254200.00
5	50148.20	22.00	2370100.00
6	83005.60	22.00	2312150.00
7	183552.70	22.00	5970400.00

Mənfəət vergisinin daxilolmalarını *(TAX)* Y ilə, ümumi daxili məhsulu (GDP) X_1 ilə, vergi dərəcəsini (PER) X_2 ilə işarə edək. Asılılıq

$$lnY = c_1 \cdot lnX_1 + c_2 \cdot lnX_2 + c_3$$

şəklində axtarılırsa, reqressiya əmsallarını ən kiçik kvadratlar üsulu ilə hesablamak olar. Eviews proqramı ilə alınan nəticələr aşağıdakı kimidir:

Dependent Variable: LOG(TAX)

Method: Least Squares

Date: 04/15/10

Time: 01:21

Sample: 2001M01 2009M07

Included observations: 103

LOG(TAX)=C(1)*LOG
GDP)+C(2)*PER+C(3)

	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C(1)	0.843101	0.225945	3.731438	0.0003
C(2)	-0.149919	0.089562	-1.673922	0.0973
C(3)	2.009574	5.030218	0.399500	0.6904
R-squared	0.444021	Mean dependent var		10.06852
Adjusted R-squared	0.432902	S.D.dependent var		1.380375
S.E. of regression	1.039504	Akaike info criterion		2.944058
Sum squared resid	108.0568	Schwarz criterion		3.020798
Log likelihood	-148.6190	Durbin-Watson stat		2.207711

Nəticələrdən görünür ki, determinasiya əmsalı az olsa da *(R^2=0,44)*, Darbin – Uotson statistikasına görə avtokorrelyasiya demək olar ki, müşahidə edilmir *(d=2,2)*.

Verilən qiymətləri rüblər üzrə cəmləsək, yeni dinamik sıra alınacaq (cədvəl 9.2).

Cədvəl 9.2

	TAX	PER	GDP
2001	23166.4	27	1068120
2001	32281.38	27	1048760
2001	35650.8	27	1556040
2001	26797.48	27	1651040
2002	32687.64	27	1167460
2002	27451.28	27	1282380
2002	38156.96	27	1576140
2002	49702.58	27	1894420
2003	32129.8	25	1477460
2003	29461.72	25	1604260
2003	23939.14	25	1980500
2003	38988.88	25	1948460
2004	52826.7	24	1609760
2004	19499.6	24	2094440
2004	19907.4	24	2233620
2004	33414.3	24	2436680
2005	60878.02	24	2131480
2005	31954.7	24	2769540
2005	45317.74	24	3279560
2005	79322.56	24	3695020
2006	116265.2	22	3223000
2006	245938	22	3923400
2006	357203.7	22	5583800
2006	515700.3	22	5005600
2007	377089.8	22	5145400
2007	662968.2	22	5527000
2007	725901.9	22	5935600
2007	697234.1	22	8620100

2008	686585.2	22	8209000
2008	905268.7	22	10296700
2008	679581.9	22	11864700
2008	592493.8	22	7635300
2009	305846.6	22	6741800
2009	229316.7	22	6936450

Bu sıranın təhlili isə tamamilə fərqli nəticələr verir:

Dependent Variable: LOG(TAX)				
Method: Least Squares				
Date: 04/15/10 **Time:** 01:24				
Sample: 2001Q1 2009Q2				
Included observations: 34				
LOG(TAX)=C(1)*LOG (GDP)+C(2)*PER+C(3)				
	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C(1)	1.697157	0.299384	5.668822	0.0000
C(2)	-0.017056	0.107084	-0.159276	0.8745
C(3)	-13.43091	6.857923	-1.958451	0.0592
R-squared	0.839265	Mean dependent var	11.49801	
Adjusted R-squared	0.828895	S.D. dependent var	1.358476	
S.E. of regression	0.561931	Akaike info criterion	1.769221	
Sum squared resid	9.788751	Schwarz criterion	1.903900	
Log likelihood	-27.07676	Durbin-Watson stat	0.940833	

Göründüyü kimi, burada determinasiya əmsalı əvvəlkinə nisbətən böyükdür: *(R^2 =0,84)*.

Bəzən dinamik sıraları reqressiya asılılığı ilə əvəz etdikdə funksiyaya ayrıca trend də daxil edirlər, bu da hər hansı iqtisadi parametrin yalnız digər parametrdən deyil, həm də zamandan asılılığını öyrənmək üçün əhəmiyyətlidir. Bu halda da asılılıq iki dəyişənli olur, lakin bu dəyişənlərdən biri t-dir.

Misal olaraq, respublikamızın rayonlarında vergi ödəyicilərinin vergi öhdəliyinin pərakəndə əmtəə dövriyyəsindən *(S)* və zamandan *(t)* asılılığına baxaq:

$$V = S^{\alpha} \cdot e^{\beta t}$$

burada α vergi öhdəliyi məbləğinin pərakəndə əmtəə dövriyyəsinə görə elastikliyidir, β isə zamanla əlaqədar dəyişikliklərin vergi öhdəliyinə təsirini xarakterizə edir.

Yuxarıdakı bərabərliyin hər iki tərəfini loqarifmləsək,

$$lnV = \alpha \cdot lnS + \beta \cdot t$$

alarıq.

Cədvəl 9.3

İllər	**Vergi daxilolmaları (milyon manat)**	**Vergi borcları (milyon manat)**	**Əlavə yaranmış dəyər (milyon manat)**	**Pərakəndə əmtəə dövriyyəsi (milyon manat)**
2000	46,3			228,9
2001	39,5	193,5		242,7
2002	39,1	154,1	1528,4	273,7
2003	46,2	173,5	2101,0	311,3
2004	54,8	202,4	2580,6	376,1
2005	77,4	278,9	4138,5	481,7
2006	112,4	271,3	5117,7	586,8

Cədvəl 9,3-də 2000-2006-ci illərdə respublikamızın regionları üzrə bəzi göstəricilər verilmişdir. Bu göstəricilərdən istifadə etsək, *EWiews* tətbiqi proqram paketi vasitəsilə aşağıdakı nəticələr alınar:

Variable	Coef-ficient	Std.Error	t-Statis-tik	Prob.
LOG(S)	0.601594	0.036361	16.54524	0.0005
T	0.000414	0.000144	2.866095	0.0643
R-squared	0.989473	Mean dependent	var	5.606295
Adjusted R-squared	0.985963	S.D. dependent	var	0.298749
S.E. of regression	0.035395	Akaike info	criterion	-3.555341
Sum squared resid	0.003758	Schwarz	criterion	-3.711566
Log likelihood	10.88835	Durbin-Watson	stat	2.598100

Beləliklə, xətti-loqarifmik asılılığın əmsalları təyin olunduğuna görə

$$lnV = 0{,}601594 \cdot lnS + 0{,}000414 \cdot t$$

yaza bilərik. Əmsalların standart səhvləri (0,036 və 0,0001) kifayət qədər kiçikdir, determinasiya əmsalı (R^2=0,989) 1-dən az fərqlənir, Darbin-Uotson statistikasının qiyməti də avtokorrelyasiya olmayan ən yaxşı hala yaxındır. Beləliklə, göstərilən ekonometrik model prosesə adekvat hesab edilə bilər.

Çalışmalar

9.1. Aşağıdakı dinamik sıraları qrafik təsvir edib xüsusiyyətlərini aşkara çıxarın:

a) 1,96; 7,03; 11,64; 16,81; 21,92; 27,12; 32,09; 37,08; 41,98; 47,134 52,20; 56,87; 61,89.

b) 2,12; 11,88; 28,03; 49,75; 77,84; 112,11; 153,08; 197,82; 249,90; 308,01.

9.2. Dinamik sıraların orta qiymətlərini hesablayıb, müşahidə olunan qiymətlərlə müqayisə edin; sıraların stasionar olub olmadığı barədə nə demək olar?

a) 3,84; 42,6; 4,15; 4,12; 3,94; 5,08; 3,86; 4,22.

b) 8,13; 7,22; 5,36; 2,22; 1,70; 5,45; 6,84; 10,26; 13,71; 29,58; 78,36; 99,08; 120,45.

X FƏSİL

DİNAMİK SIRALARIN TƏHLİLİ VƏ PROQNOZLAŞDIRMA

10.1. PROQNOZLAŞDIRMA VƏ ONUN XÜSUSİYYƏTLƏRİ

Proqnozlaşdırma problemləri ilə məşğul olmağın əsas səbəbi budur ki, hazırki zaman anında qəbul edəcəyimiz qərarlar gələcəkdə hadisələrin necə cərəyan edəcəyini bilməyimizdən çox asılıdır. Məsələn, axşam üstü yağışın yağıb yağmayacağı barədə heç nə bilməsək də, səhər tezdən bizi maraqlandırır, çünki işdən qayıdanda yağış yağacağını bilsək, çətir götürərik, əks halda bunu yük etməyə dəyməz.

Bu cür situasiyalarla hər addımda qarşılaşırıq. Müəssisə rəhbərini gələn ay müştərilərə göndəriləcək məhsulun həcmi maraqlandırır, çünki bu, məhsul buraxılışının cari tempi üçün lazımdır. Yaxud növbəti aylarda işçilərin sayını bilmək onların azaldılması və ya artırılması üçün tədbirlər planını əvvəlcədən hazırlamaq imkanı verır.

Bütün hallarda proqnozlaşdırma qeyri-müəyyənliklə əlaqədardır. Məsələn, tutaq ki, hər hansı iqtisadi parametrin indiyə qədər aldığı bütün qiymətlər məlumdur. Onun gələcəkdə nə cür dəyişəcəyini tapmaq tələb olunur. Bu dəyişmə funksional asılılıq şəklindədirsə, həmin asılılığı dəqiq müəyyən edə bilərik. Dəyişmə təsadüfi xarakter daşıyırsa, riyazi statistika üsullarından istifadə edilməlidir. Lakin, bir qayda olaraq, proqnozlaşdırılan parametrin dəyişmə xüsusiyyətləri məlum olmur. Ona görə də dəyişmə xarakteri funksional, təsadüfi, yaxud eyni zamanda həm təsadüfi, həm də funksional ola bilər.

Yuxarıda göstərilən misalda—havanın proqnozlaşdırılması misalında fərz edək ki, səhər yağış yağır. Onda üç hal mümkündür: Ya hava olduğu kimi qalar, yəni yağış axşama kimi yağmaqda davam edər, ya hava yaxşılaşar, yəni yağış kəsər, yaxud daha da pisləşər, yəni yağış şiddətlənər. Digər misallar üçün də təxminən bu cür vəziyyətlər araşdırılmalıdır. Proqnozlaşdırılmanın asanlaşması üçün qəbul edilir ki, prosesə kənardan naməlum təsir olmayacaq, yəni proses indiyə qədər necə davam etmişdirsə, elə o cür də davam edəcək. Bundan əlavə zamandan asılı dəyişmə (trend) və təsadüfi amillərin təsiri bir-birindən fərqli surətdə araşdırılır.

Ekonometrikada xüsusi əhəmiyyəti olan normal paylanma qanununun ümumiləşməsi - fraktal paylanma qanununu tətbiq etdikdə, həm trend asılılığı və dövrilik, həm də tam qeyri-müəyyənlik halları alına bilər. Bunlardan birincisinə "İosif effekti", ikincisinə "Nuh effekti" deyirlər. Birinci effekt "Quran"da və "İncil"də təsvir edilmiş bir əhvalatla bağlıdır. Yusif (İosif) peyğəmbər Misir hökmdarının yuxusunu yozarkən yeddi il bol məhsul olacağını və sonra yeddi il aclıq olacağını əvvəlcədən xəbər vermişdi. "Nuh" effekti isə dunyanı su basması hadisəsi ilə əlaqədardır. Bu zaman sonsuz dispersiya alınır. Belə xüsusiyyətə malik sistem qəfildən gözlənilməz dəyişikliklərə uğraya bilər.

İqtisadiyyat üzrə Nobel mükafatı laureatı Duqlas Nort demişdir: "Bizə miras qalan iqtisadi nəzəriyyə müəyyən zaman müddətindəki formasiya iqtisadiyyatını nəzərdən keçirir və bundan çıxarılan siyasi nəticələr statik, "birdəfəlik" nəticələrdir. Biz bu nəticələri bir dəfə tətbiq etdikdən sonra elə təsəvvür yaranır ki, onlar həmişə doğru olmalıdır, amma biz dinamik, daim dəyişən dünyada yaşayırıq və burada həm cari şəraiti, həm də bəşəriyyətin yenilikləri, hər bir ölkənin tarixini və ənənələrini hansı yolla və hansı dərəcədə qavramasını hökmən nəzərə almalıyıq, çünki məhz tarixi keçmiş indini və gələcəyi əvvəlcədən müəyyənləşdirir ".

Tarixi keçmiş indini və gələcəyi əvvəlcədən müəyyənləşdirirsə, proqnozlaşdırma arzusu tamamilə təbiidir.

Ekonometrik modellər bu arzunun müəyyən mənada reallığa çevrilməsinə imkan yaradır.

Proqnozlar xüsusiyyətlərinə görə müxtəlif cür ola bilər. Aşağıdakı hallara baxaq:

1. Proqnoz adətən məlum olmayan parametrlərin qiymətləri üçün axtarılır; lakin bəzən bu parametrlərdən biri və ya bir-neçəsi əvvəlcədən məlum olur. Məsələn, sahibkar investisiya vəsaitini növbəti il üçün 20 faiz artırmaq istəyirsə, artıq bu vəsaitin miqdarı məlum hesab edilə bilər. Bu proqnoz qiyməti əslində plandır, lakin plan digər məlum olmayan parametrlərdən asılıdır. Həmin parametrlərin proqnozlaşdırılması üçün nəzərdə tutulmuş plan qiymətindən istifadə edilir və onlar müəyyən mənada uzlaşdırılır.

2. Proqnozlaşdırılan obyekt bir ədədlə xarakterizə olunmalıdırsa, bu ədəd ya bir həqiqi ədəd, yaxud interval şəklində axtarıla bilər. Birinci halda nöqtəvi proqnoz, ikinci halda interval proqnoz alınır. Lakin nöqtəvi proqnozu da bəzi hallarda interval proqnoz hesab etmək olar. Məsələn, nöqtəvi proqnozun qiyməti 452,5 milyon manatdırsa, onu 452,45 milyon və 452,55 milyon manat arasında hesab edə bilərik.

3. Proqnoz müəyyən hadisənin baş verib verməməsindən də asılı ola bilər. Məsələn, hər hansı istehsal sahəsi üzrə vergi güzəştləri ləvğ olunsa, bir proqnoz, ləvğ olunmasa başqa proqnoz alınacaq.

4. Proqnoz obyekti bir kəmiyyət və ya bir neçə kəmiyyət ola bilər. Birinci halda ayrıca proqnoz, ikinci halda çoxsaylı proqnoz qiymətləri tapılır.

Müəyyənlik üçün fərz edək ki,model

$$Y(t) = \beta_0 + \beta_1 \cdot X(t) + \varepsilon_t$$

şəklindədir. Müşahidə olunan qiymətlər əsasında

$$\hat{Y}(t) = b_0 + b_1 \cdot X(t)$$

xətti asılılığı qurulmuşdursa, hər hansı $t=T$ anında

$$\hat{Y}(T) = b_0 + b_1 \cdot X(T)$$

qiyməti hesablana bilər. Bəzən asılı dəyişənin $Y\ (T)$ qiyməti əvvəlcədən məlum olur və $\hat{Y}\ (T)$ modelin prosesə nə qədər adekvat olduğunu yoxlamaq üçün təyin edilir. Bu halda $\hat{Y}\ (T)$ qiyməti öncəgörmə adlanır. Həm real qiymət, həm də modelin köməyilə alınmış qiymət məlum olduqda, öncəgörmənin xətası

$$\Delta(T) = Y(T) - \hat{Y}(T)$$

ifadəsindən tapılır.

$\hat{Y}(T)$ qiymətinə o zaman proqnoz deyilir ki,$Y(T)$-nin faktiki qiyməti məlum olmur.

10.2. DİNAMİK SIRALARIN TƏHLİLİ

Dinamik sıralar üçün onun təsviri və quruluşunun modelləşdirilməsi mühüm əhəmiyyətə malikdir. Bu cür təsvir başqa müşahidə edilən dəyişənlərdən istifadə edilmədən verilmişdirsə, belə sıra birölçülü hesab olunur. Birölçülü dinamik sıraların modeli əsasən ekstrapolyasiya və ya zamandan asılılığın proqnozlaşdırılması üçün istifadə edilir.

İqtisadi prosesdə əvvəlki dövrün əsas təmayülləri sonrakı dövrdə də saxlanırsa və ya prosesə təsir edən amillərin dəyişmə qanunauyğunluğu məlumdursa, proqnozlaşdırma zamandan asılı müxtəlif dərəcəli polinomların qurulması yolu ilə aparılır. Bir çox iqtisadi, xüsusilə də makroiqtisadi xarakteristikaların dəyişməsinin ətalətli olması proqnozlaşdırmanı asanlaşdırır. Lakin elə proseslər də vardır ki, ümumi funksional qanunauyğunluq yoxdur və ona görə zamandan asılılığın formasını aşkara çıxarmağa cəhd etmək mənasızdır. İstehsal prosesində yeni texnologiyaların tətbiqi, sosial və ekoloji dəyişikliklər, yerli xüsusiyyətlərdən asılı müxtəlif amillər iqtisadi xarakteristikaların sonrakı qiymətlərinin hesablanmasını çətinləşdirir, çünki bu zaman prosesin keçmiş dövrdəki qiymətlərinin çox hissəsi əslində yararsız, bəzi hallarda isə ziyanlı olur.

İqtisadi sistemin modeli əsasında verilən idarəedici təsirin köməyilə inkişafın proqnoz qiymətlərini almaq mümkün olsa da, bəzi hallarda, xüsusilə də real sistemin müəyyən zaman intervalında vəziyyətini xarakterizə edən dinamik sıra məlumdursa, proqnoz qiymətləri hesablanır. Bu üsul problemi sadələşdirir, lakin riyazi modelləşdirmənin imkanlarına malik deyil və ona görə alınan proqnoz o qədər də dəqiq hesab edilmir. Ekstrapolyasiyaya əsaslanan bu üsul dəyişən kəmiyyətin analitik asılılığının qurulması və onun sonrakı dövr üçün eyni qayda ilə davam etdirilməsi ilə fərqlənir.

Öz mahiyyətinə görə ekstrapolyasiya iqtisadi parametrin yalnız zamandan asılılığının tapılması deməkdir və bir amilli reqressiyanın xüsusi halı hesab oluna bilər.

Proqnoz qiymətlərinin təyin edilməsi üsulları aşağıdakı zəruri şərtlərin ödənməsinə əsaslanır:

a) Keçmiş dövr üçün informasiyanın məlum olması,

b) bu informasiyanın müəyyən zaman intervalında ədədi qiymətlərinin verilməsi;

c) sistemin keçmiş dövrə aid əsas xassələrinin dəyişməməsi.

Fərz edək ki, hər hansı iqtisadi parametrin qiymətləri zamandan asılı olaraq dəyişir və $X(t_1), X(t_2), \dots, X(t_i), \dots, X(t_N)$ qiymətlərini alır. Lakin bu ədədlər əslində təsadüfi olmayan və təsadüfi kəmiyyətlərin cəmi kimi qəbul edilməlidir:

$$X(t_i) = \xi(t_i) + \varepsilon(t_i),$$

burada $\xi(t_i)$ təsadüfi olmayan trend təmayülünü xarakterizə edir, $\varepsilon(t_i)$ isə prosesə təsadüfi amillərin təsirinin nəticəsində alınmışdır.

Hər hansı dinamik sıranın elementlərini müstəvi üzərində nöqtələrlə göstərsək, həmin nöqtələri xətlərlə birləşdirsək, dəyişmə təmayülü diaqram şəklində alınacaq. Proqnozlaşdırmanın ən sadə üsulu bu asılılığı ekstrapolyasiya etməklə, yəni əvvəlki qaydada davam etdirməklə alınan qiymətlərdir. Lakin həm müşahidə olunan qiymətlər, həm də proqnoz nəticələri funksional dəyişmir. Hər bir qiymətdə həm də təsadüfi amillərin təsiri nəzərə alınmalıdır. Asılılığın əvvəlki qaydaya uyğun davam etdirilməsi əslində alınan əyrinin hamarlanması, yəni trend funksiyasının müəyyən edilməsi deməkdir. Ən çox istifadə olunan funksiyalar aşağı tərtibli, yəni xətti, kvadratik və nadir hallarda üçüncü dərəcəli polinom şəklində qəbul edilən asılılıqlardır. Bu asılılıqların əmsalları ən kiçik kvadratlar üsulu ilə təyin edilir. Proqnozun dəqiqliyi müvafiq riyazi modelin baxılan prosesə adekvatlığından asılıdır. Təsadüfi amillərin təsiri güclü olduqda göstəricilərin gələcək dövr üçün davam etdirilməsi onların orta qiyməti və ya riyazi gözləməsi ilə əlaqədardır. Əgər qiymətlər sırasında heç bir qanunauyğunluq müşahidə edilmirsə, onda proqnoz olaraq, orta qiymət, artma və ya azalma müşahidə edilirsə, xətti ekstrapolyasiya aparmaqla bundan çox və ya az qiymət qəbul edilə bilər.

Dinamik sıra elementlərinin düzülüşündə heç bir qanunauyğunluğun olmamasının, yəni kəmiyyətlərin təsadüfi xarakter daşımasının və ya dəyişmə prosesində müəyyən funksional qanunauyğunluğun mövcudluğunun aşkara çıxarılması verilən sıranın təhlili ilə mümkündür. Bu təhlil nəticəsində Herst göstəricisi deyilən ədəd təyin edilir və bununla da prosesə təsadüfi amillərin təsir dərəcəsi müəyyənləşdirilir.

Herst göstərmişdir ki, təbii hadisələrin əksəriyyətinin parametrlərini, məsələn, havanın temperaturunu, yağışın miqdarını, çayın suyunun səviyyəsini, günəşdə ləkələrin sayını və s. dinamik sıranın amplitudasının zamandan asılılığı ilə qiymətləndirmək mümkündür.

İlk dəfə Herst bu ideyanı su anbarında ehtiyat suyun səviyyəsinin dəyişməsinə tətbiq etmişdir.

Qayda aşağıdakı kimidir:

Müəyyən sayda dövrlər ərzində suyun miqdarı ilə orta qiymət arasında fərqlərin cəmi hesablanır və R amplitudası ən böyük qiymətlə ən kiçik qiymət arasında fərq kimi qəbul edilir. Herst göstəricisi adlanan və H ilə işarə edilən ədəd amplitudanın, orta kvadratik meylin dəyişməsindən və müşahidə qiymətlərinin N sayından asılı olaraq tapılır.

Herst göstəricisi aşağıdakı bərabərliyi ödəyir:

$$\frac{R}{S} = (a \cdot N)^H,$$

burada H - Herst göstəricisi, N - müşahidələrin sayı, R - amplituda, S - kəmiyyətlərin "düzəldilmiş" orta kvadratik meylidir, a isə sabit ədəddir və qiyməti $0,5$ - ə yaxındır.

R amplitudasının hesablanma düsturu

$$R = max\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \overline{X}\right) - min\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \overline{X}\right)$$

şəklində yazılır, burada $\overline{X}$ müşahidə olunan X_i qiymətlərinin ədədi ortasıdır.

Prosesdə heç bir trend təmayülü yoxdursa, yəni dəyişmə yalnız təsadüfi xarakter daşıyırsa, onda $X(t_i)=\varepsilon(t_i)$ olur və $H=0,5$ alınır. Əks halda hər bir müşahidə əvvəlki müşahidələrdən asılıdır, yəni avtokorrelyasiya mövcuddur.

Dinamik sıralarda trend asılılığı güclü olduqda hər bir müşahidə olunan qiymət prosesin əvvəlki xarakteri barədə müəyyən yaddaşa malıkdir. Bu Markov zəncirindəki kimi yalnız əvvəlki qiymətin yadda saxlanmasını nəzərdə tutmur, bütün prosesin gedişini yadda saxlayan uzunmüddətli yaddaşdır. Lakin, bir qayda olaraq, son hadisələr əvvəlkinə nisbətən daha çox əhəmiyyət kəsb edir. Zaman amili bu prosesdə mühüm rol oynadığından, bu gün baş verən hadisə gələcəyə daha çox təsir edir və zamanın əvvəlki qiymətlərində cari vəziyyətdən uzaqlaşdıqca təsir tədricən zəifləyir.

Herst göstəricisi (0,1) intervalında təyin olunmuş ədəddir və onun təsnifatı aşağıdakı kimi aparılır:

1. Herst göstəricisi ya 0,5-ə bərabərdir və ya bu qiymətə kifayət qədər yaxındır; onda dinamik sıra tamamilə təsadüfi xarakter daşıyır və hər bir müşahidə olunan qiymət sonrakı qiymətə təsir etmir.

2. Herst göstəricisi 0,5-dən azdır;bu cür göstəriciyə malik sistemlər antipersistent və ya davamsız sistemlər hesab olunur, erqodik və ya "orta qiymətə qayıdan" sistemlərdir; əgər əvvəlki dövrdə dinamik sırada artma müşahidə edilmişsə, çox güman ki, sonrakı dövrdə azalma olacaq və əksinə, əvvəlki dövrdə azalma sonrakı dövrdə artma ilə əvəz olunacaq.

3. Herst göstəricisi 0,5-dən böyükdür;bu halda dinamik sıra persistent adlanır və dayanıqlı trendə malikdir; əgər sıranın elementlərinin qiymətləri azalırsa və ya artırsa, bu azalma və ya artma çox güman ki,müəyyən dövr ərzində də davam edəcək,göstərici nə qədər böyük olsa, trend asılılığı özünü daha kəskin büruzə verəcək, əks halda isə asılılıq getdikcə zəifləyəcək.

Dinamik sıraların elementləri müstəvi üzərində nöqtələr kimi göstərilsə və Herst göstəricisi hesablansa, prosesin sonrakı gedişini əyanı sürətdə təsəvvür etmək mümkündür.

10.3. SADƏ EKSPONENSİAL HAMARLAMA ÜSULU

Dinamik sıradan istifadə etməklə müəyyən funksional asılılıq qurmaq və onu ekstrapolyasiya vasitəsilə sonrakı dövrə davam etdirmək proqnozlaşdırmanın ən çox istifadə olunan üsullarındandır.

Klassik ən kiçik kvadratlar üsulunda sıranın bütün elementləri eynigüclü hesab edilir, lakin əslində sonrakı qiymətlər əvvəlkilərə nisbətən prosesin gələcəkdə davamına daha çox təsir göstərməlidir.

Bu çatışmazlığı aradan qaldırmaq məqsədilə elə çəki funksiyası seçilir ki, dinamik sıranı əvəz edən çoxhədli sonrakı qiymətlərdə əvvəlkinə nisbətən prosesi daha dəqiq xarakterizə etsin. Belə olduqda aydındır ki, zamandan asılı çoxhədli verilmiş cədvəl funksiyasından daha çox fərqlənəcək, lakin cari vəziyyətə yaxınlaşdıqca bu fərq getdikcə azalacaq və proqnoz qiymətlərinə sonuncu qiymətlər daha çox təsir edəcək.

Fərz edək ki, prosesin tədqiq edilən dəyişəni ardıcıl olaraq, aşağıdakı qiymətləri almışdır:

$$X_{-N}, X_{-N+1}, \ldots, X_{-2,} X_{-1}, X_0$$

Bu cədvəl funksiyası P_i çoxhədlisi şəklində axtarılırsa, klassik üsulla

$$F = \sum_{i=1}^{N} \left(P_{-i} - X_{-1}\right)^2,$$

çəki qiymətləri verilməklə

$$F = \sum_{i=1}^{N} \left(P_{-i} - X_{-1}\right)^2 \cdot \beta^i$$

funksiyasına minumum qiymət verən çoxhədlinin əmsalları təyin edilməlidir, burada β ədədi $0 < \beta < 1$ bərabərsizliyini ödəyir və hamarlama parametri adlanır.

Əvvəlcə eksponensial orta qiymət anlayışını verək.

Dinamik sıranın birinci tərtib eksponensial orta qiyməti aşağıdakı ifadə ilə təyin olunan ədədə deyilir:

$$S_0^{(1)} = (1-\beta) \cdot \sum_{i=1}^{\infty} \beta^i \cdot X_{-i}.$$

Göründüyü kimi, dinamik sıra elementlərinin sayı sonsuz qəbul edilmişdir. X_{-N} - dən soldakı qiymətlər yoxdursa və ya məlum deyilsə, onların əvəzinə başlanğıc qiymət qəbul edilir; bu qiyməti sıfıra bərabər götürmək o deməkdir ki, cəm sonlu sayda həddən ibarətdir, bu isə prinsip etibarilə düzgün deyil. Ona görə başlanğıc qiymət $(S^{(o)})$ əvəzinə ilk bir-neçə elementin ədədi ortası qəbul edilir. X_{-N} - dən soldakı qiymətlər məlum olduqda isə, onların orta qiyməti $(S^{(o)})$ hesab edilə bilər.

Birinci tərtib eksponensial orta qiymətdə sıranın bütün elementləri iştirak edir. Hər hansı X_{-k} elementi də daxil olmaqla, ondan solda yerləşən bütün elementlərin eksponensial orta qiymətini $S_{-k}^{(1)}$ işarə etsək,

$$S_{-k}^{(1)} = (1-\beta)\cdot\sum_{i=1}^{\infty}\beta^{i-k}\cdot X_{-i}$$

alınar. Birinci tərtib eksponsial orta qiymətlər yeni

$$\ldots, S_{-N}^{(1)}, S_{-N+1}^{(1)}, \ldots, S_{-2}^{(1)}, S_{-1}^{(1)}, S_{0}^{(1)}$$

dinamik sırası əmələ gətirir. Eyni qayda ilə bu elementlərin də birinci tərtib eksponensial orta qiymətini hesablaya bilərik:

$$S_{0}^{(2)} = (1-\beta)\cdot\sum_{i=0}^{\infty}\beta^{i}\cdot S_{-i}^{(1)}.$$

Bu qiymətə ikinci tərtib eksponensial orta qiymət deyilir. Eyni qayda ilə bütün ikinci tərtib eksponensial opta qiymətlərin

$$\ldots, S_{-N}^{(2)}, S_{-N+1}^{(2)}, \ldots, S_{-2}^{(2)}, S_{-1}^{(2)}, S_{0}^{(2)}$$

dinamik sirasını almaq olar, burada

$$S_{-k}^{(2)} = (1-\beta)\cdot\sum_{i=1}^{\infty}\beta^{i-k}\cdot S_{-i}^{(-1)}$$

(-k+1) saylı elementdən soldakı bütün ədədlərin eksponensial orta qiymətləridir.

İkinci tərtib eksponensial orta qiymətlərin dinamik sırasının birinci tərtib eksponensial orta qiyməti üçüncü tərtib eksponensial orta qiymət adlanır:

$$S_{0}^{(3)} = (1-\beta)\cdot\sum_{i=1}^{\infty}\beta^{i}\cdot S_{-i}^{(2)}.$$

Analoji olaraq, ixtiyari *m* tərtibli eksponensial orta qiyməti təyin edə bilərik:

$$S_{0}^{(m)} = (1-\beta)\cdot\sum_{i=1}^{\infty}\beta^{i}\cdot S_{-i}^{(m-1)}.$$

Birinci tərtib eksponensial orta qiymətin ifadəsində çevirmələr aparaq:

$$S_0^{(1)} = (1-\beta)\cdot\sum_{i=1}^{\infty}\beta^i\cdot X_{-i} = (1-\beta)\times$$
$$\times\left(X_0 + \beta\cdot X_{-1} + \beta^2\cdot X_{-2} + \ldots + \beta^N\cdot X_{-N} + \ldots\right) =$$
$$= (1-\beta)\cdot X_0 + (1-\beta)\cdot\beta\cdot\left(X_{-1} + \beta\cdot X_{-2} + \ldots +\right.$$
$$\left. + \beta^{N-1}\cdot X_{-N} + \ldots\right) = (1-\beta)\cdot X_0 + \beta\cdot(1-\beta)\times$$
$$\times\sum_{i=0}^{\infty}\beta^i\cdot X_{-i-1} = (1-\beta)\cdot X_0 + \beta\cdot S_{-1}^{(1)}.$$

Eyni qayda ilə asanlıqla

$$S_{-1}^{(1)} = (1-\beta)\cdot X_{-1} + \beta\cdot S_{-2}^{(1)},$$
$$S_{-2}^{(1)} = (1-\beta)\cdot X_{-2} + \beta\cdot S_{-3}^{(1)},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$S_{-N}^{(1)} = (1-\beta)\cdot X_{-N} + \beta\cdot S^{(0)}$$

almaq olar. Beləliklə, soldakı ilk qiymətdən başlayaraq, sağ tərəfə doğru hərəkət etsək, sonuncu $S_0^{(1)}$ qiyməti bütün sıranın birinci tərtib eksponensial orta qiyməti olacaq.

Sıra elementləri

$$\ldots, X_{t-N}, X_{t-N+1}, \ldots, X_{t-2}, X_{t-1,} X_t$$

kimi işarə edilsə, birinci tərtib eksponensial orta qiymətin hesablanması üçün

$$S_t^{(1)} = (1-\beta)\cdot X_t + \beta\cdot S_{t-1}^{(1)}$$

düsturunu alarıq.

Fərz edək ki, X_t təsadüfi kəmiyyəti

$$X_t = \mu + \varepsilon_t$$

şəklindədir, burada $\mu = const,$ ε_t isə riyazi gözləməsi sıfır, dispersiyası sabit σ^2 olan təsadüfi kəmiyyətdir.

Eksponensial orta qiymətin ifadəsindən istifadə edək:

$$S_t^{(1)} = (1-\beta)\cdot\sum_{i=0}^{\infty}\beta^i\cdot X_{t-i} = (1-\beta)\cdot\sum_{i=0}^{\infty}\beta^i\cdot\left(\mu + \varepsilon_{t-i}\right) =$$

$$= \mu \cdot (1-\beta) \cdot \frac{1}{1-\beta} + (1-\beta) \cdot \sum_{i=0}^{\infty} \beta^i \cdot \varepsilon_{t-1} =$$

$$= \mu + (1-\beta) \cdot \sum_{i=0}^{\infty} \beta^i \cdot \varepsilon_{t-1}.$$

Riyazi gözləməni və dispersiyanı hesablayaq:

$$E\left(S_t^{(1)}\right) = \mu,$$

$$\sigma^2\left(S_t^{(1)}\right) = E\left[\left(S_t^{(1)} - \mu\right)^2\right] =$$

$$= E\left\{\left[(1-\beta) \cdot \sum_{i=0}^{\infty} \beta^i \cdot \varepsilon_{t-1}\right]^2\right\} = (1-\beta)^2 \cdot \sum_{i=0}^{\infty} \beta^{2i} \cdot \sigma^2 =$$

$$= (1-\beta)^2 \cdot \sigma^2 \cdot \left(1 + \beta^2 + \beta^4 + \ldots\right) =$$

$$= (1-\beta)^2 \cdot \sigma^2 \cdot \frac{1}{1-\beta^2} = \sigma^2 \cdot \frac{1-\beta}{1+\beta}.$$

Buradan $\beta \in (0,1)$ olduğunu nəzərə alsaq,

$$\sigma^2\left(S_t^{(1)}\right) < \sigma^2\left(X_t\right) = \sigma^2$$

bərabərsizliyi ödənir. Deməli, dinamik sıranın elementlərinin birinci tərtib eksponensial orta qiymətləri daha az dispersiyaya malikdir, β nə qədər böyük olsa, həmin qiymətlər daha ensiz zolaqda yerləşəcək. Elə buna görə də bu proses dinamik sıranın hamarlanması hesab edilir.

Beləliklə, eksponensial hamarlamanı bir süzgəc kimi təsəvvür etmək olar, onun girişinə ardıcıl olaraq, verilən dinamik sıranın elementləri daxil olur, çıxışda isə onlara uyğun birinci tərtib eksponensial orta qiymətlər alınır. Hamarlama parametri nə qədər böyükdürsə, sıranın elementlərinin rəqsləri də bir o qədər zəifləyir.

Eksponensial orta qiymət $S_t^{(1)}$ qısa müddətli proqnoz üçün istifadə edilir.

10.4. SADƏ EKSPONENSİAL HAMARLAMA ÜSULUNDA BAŞLANĞIC ŞƏRTİN VƏ HAMARLAMA PARAMETRİNİN SEÇİLMƏSİ

Sadə eksponensial hamarlama modeli özü öyrənən modellərin ən sadə variantlarından biridir. Ona görə də bu modeli adaptiv tipli modellərə aid edirlər. Hamarlama parametri β həm də adaptasiya parametridir.

Birinci tərtib eksponensial orta qiymətin hər biri eksponensial ortanın əvvəlki qiymətinə əsaslanır. Proses təzəcə başlayanda elə bir $S^{(0)}$ olmalıdır ki, $S^{(1)}_{-N}$ hesablandıqda həmin qiymətdən istifadə edilsin. Yuxarıda göstərildiyi kimi, başlanğıc şərt hesab olunan $S^{(0)}$ ədədi müəyyən sayda dinamik sıra elementinin orta qiyməti qəbul edilə bilər.

Başlanğıc şərtin doğru seçilib seçilmədiyini bilmək, demək olar ki, mümkün deyil. Lakin X_{-N}-dən əvvəlki qiymətlərin heç olmazsa, müəyyən hissəsi məlumdursa, deməli həmin informasiya əsasında $S^{(0)}$ -ın seçilməsi daha qanunauyğundur. Həmin dövrə aid heç bir informasiya yoxdursa, onda seçilmiş başlanğıc şərtə aid araşdırmalar aparmaq olar. Məlumdur ki, k sayda addımdan sonra başlanğıc qiymətə verilən çəki β^k olacaq. Əgər $S^{(0)}$-ın düzgünlüyünə inam varsa, onda β ədədi böyük qəbul edilməlidir ki, onun qiyməti eksponensial orta qiymətə təsir edə bilsin. Aydındır ki, belə bir inam yoxdursa, onda β ədədi də kiçik götürülməlidir. Lakin β -nın kiçik qiyməti dispersiyanın artmasına səbəb olur. Ona görə də dinamik sıranın ilk qiymətlərində β kiçik qəbul edilsə də, sağa doğru hərəkət etdikdə β -nı artırmaq məqsədə uyğundur.

Ümumiyyətlə isə, β parametrinin seçilməsi tədqiq edilən prosesdən, onun xüsusiyyətlərindən asılıdır. Dinamik sıra elementləri kifayət qədər yaddaşlı olarsa, onda β parametri daha böyük seçilməlidir. Herst əmsalı da yaddaşlılıq göstəricisi olduğundan $\beta=H$ qəbul etmək olar.

Bəzən β parametrini (0,1) intervalında dəyişdirməklə müxtəlif variantlar alır, sonra isə hamarlama nəticələrinin təhlili nəticəsində əlverişli qiymət seçirlər.

Aydındır ki, hamarlama parametrinin seçilməsi proqnozlaşdırma dövründən də asılı olmalıdır. Bunu nəzərə almaq üçün verilən qiymətlərin orta müddəti anlayışı daxil edilir.

Cari müşahidə müddəti sıfır, əvvəlki müddəti 1 və s. olsa, eksponensial hamarlamada k müddətli çəki $(1-\beta)\cdot\beta^k$ olacaq və informasiyanın orta müddəti aşağıdakı düsturdan tapılacaq:

$$K = 0\cdot(1-\beta)+1\cdot(1-\beta)\cdot\beta+\ldots$$

$$=(1-\beta)\cdot\sum_{i=0}^{\infty} i\cdot\beta^i = (1-\beta)\cdot\frac{\beta}{(1-\beta)^2}=\frac{\beta}{1-\beta}.$$

Bununla da β parametri K orta müddətindən asılıdır.

10.5. XƏTTİ ARTIM MODELİ

İqtisadi dəyişənin dinamik sıraları çox zaman artma və ya azalma təmayülünə malik olur. Məsələn, göstəricilərdə xətti artım müşahidə edilirsə,

$$X_t = a_1 + a_2\cdot t$$

qəbul etsək, eksponensial orta qiymətin getdikcə dinamik sıra elementlərindən geri qaldığını görmək olar. Doğrudan da

$$S_t = (1-\beta)\cdot\sum_{i=0}^{t}\beta^i\cdot[a_1 + a_2\cdot(t-i)] =$$

$$=(1-\beta)\cdot a_1\cdot\sum_{i=0}^{t}\beta^i + (1-\beta)\cdot a_2 \times$$

$$\times\sum_{i=0}^{t}(t-i)\cdot\beta^i = (1-\beta)\cdot a_1\cdot\frac{1-\beta^{t+1}}{1-\beta}+$$

$$+a_2\cdot(1-\beta)\cdot\left(t\cdot\sum_{i=0}^{t}\beta^i - \sum_{i=0}^{t} i\cdot\beta^i\right)=$$

$$=a_1\cdot\left(1-\beta^{t+1}\right)+a_2\cdot(1-\beta)\times$$

$$\times\left[\frac{t\cdot\left(1-\beta^{t+1}\right)}{1-\beta}-\frac{\beta-\beta^{t+1}\cdot(1+t-\beta\cdot t)}{(1-\beta)^2}\right]=$$

$$=a_1\cdot\left(1-\beta^{t+1}\right)+a_2\cdot\left[t\cdot\left(1-\beta^{t+1}\right)-\frac{\beta-\beta^{t+1}-t\cdot\beta^{t+1}\cdot(1-\beta)}{1-\beta}\right]=$$

$$=a_1\cdot\left(1-\beta^{t+1}\right)+a_2\cdot\left[t\cdot\left(1-\beta^{t+1}\right)-\frac{\beta\cdot\left(1-\beta^{t}\right)}{1-\beta}+t\cdot\beta^{t+1}\right]=$$

$$=a_1\cdot\left(1-\beta^{t+1}\right)+a_2\cdot\left[t-\frac{\beta\cdot\left(1-\beta^{t}\right)}{1-\beta}\right]$$

olduğundan, β nə qədər kiçikdirsə, geriləmənin bir o qədər az olduğu aşkara çıxır.

Parabolik asılılıqla xarakterizə edilən prosesdə isə geriyə qalma daha çox olur. Ona görə də sadə eksponensial hamarlama üsulunun müxtəlif variantları təklif edilmişdir.

Fərz edək ki, proqnoz

$$\hat{X}_\tau(t)=\hat{a}_{1t}+\tau\cdot\hat{a}_{2t}$$

ifadəsi ilə hesablanır, burada $\hat{a}_{1t}$ və $\hat{a}_{2t}$ birinci tərtib adaptiv polinomun əmsallarının qiymətləndirilməsidir.

Əmsallar aşağıdakı bərabərliklər vasitəsilə təyin olunur:

$$\hat{a}_{1t}=\left(1-\beta_1\right)\cdot X_t+\beta_1\cdot\left(\hat{a}_{1,t-1}+\hat{a}_{2,t-1}\right),$$

$$\hat{a}_{2t}=\left(1-\beta_2\right)\cdot\left(\hat{a}_{1t}-\hat{a}_{1,t-1}\right)+\beta_2\cdot\hat{a}_{2,t-1},$$

burada β_1 və β_2 eksponensial hamarlama parametrləridir. Ç. Xolt modeli adlanan bu model iki parametrlidir. Səhvlər fərqini də nəzərə alsaq, C.Boks və Q.Cenkinsin üçparametrli proqnozlaşdırma modeli alınar:

$$\overline{X}_\tau(t)=\hat{a}_{1t}+\tau\cdot\hat{a}_{2t},$$

$$\hat{a}_{1t}=\left(1-\beta_1\right)\cdot X_t+\beta_1\cdot\left(\hat{a}_{1,t-1}+\hat{a}_{2,t-1}\right)+$$

$$+\left(1-\beta_3\right)\cdot\left(e_t-e_{t-1}\right),$$

$$\hat{a}_{2t}=\left(1-\beta_2\right)\cdot\left(\hat{a}_{1t}-\hat{a}_{1,t-1}\right)+\beta_2\cdot\hat{a}_{2,t-1},$$

burada $\beta_i\in(0,1)$, $(i=1,2,3)$ hamarlama parametrləri, e_t proqnoz xətasıdır.

10.6. TEYL VƏ VEYCİN STOXASTİK PROSESİ

Teyl və Veyc Xoltun ikiparametrli eksponensial hamarlama üsulunu stoxastik trendlə xarakterizə edilən təsadüfi prosesə tətbiq etmişlər.

Teyl-Veyc prosesi analitik olaraq, aşağıdakı kimi yazılır:

$$X_t = a_{1t} + \varepsilon_t,$$

$$a_{1t} = a_{1,t-1} + a_{2t},$$

$$a_{2t} = a_{2,t-1} + V_t,$$

burada a_{1t}-t anında X_t qiymətlərinin səviyyəsi,

a_{2t}- səviyyə artımı,

ε_t, V_t -sıfıra bərabər riyazi gözləməsi, sabit dispersiyası olan və kovariasiyası olmayan zamandan asılı ardıcıllıqlardır.

Proqnoz qiymətlərinin hesablanması sxemi aşağıdakı tənliklərdən ibarətdir:

$$\hat{a}_{1t} = (1-\beta_1)\cdot X_t + \beta_1 \cdot (\hat{a}_{1,t-1} + \hat{a}_{2,t-1}),$$

$$\hat{a}_{2t} = (1-\beta_2)\cdot(\hat{a}_{1t} - \hat{a}_{1,t-1}) + \beta_2 \cdot \hat{a}_{2,t-1},$$

$$\hat{X}_\tau(t) = \hat{a}_{1t} + \tau\hat{a}_{2t},$$

$$\beta_1 \in (0,1),$$

$$\beta_2 \in (0,1).$$

Formal olaraq, bütün dinamik sıralar üçün istənilən adaptiv proqnozlaşdırma modelini tətbiq etmək olar. Lakin proqnozun düzgün olub olmaması baxılan prosesin dinamikasından asılıdır. Ona görə də dinamik sıranın dəyişmə qanunauyğunluqları müəyyən edildikdən sonra elə üsul seçilməlidir ki, etibarlılıq səviyyəsi çox böyük intervalda dəyişməsin. Teyl və Veycin stoxastik proseslərə tətbiq etdikləri üsul da onlardan biridir.

Teyl və Veycin proqnozlaşdirma modeli əsasən qısa müddətli dövr üçün tətbiq edilir və sonrakı zaman intervallarında yeni müşahidə edilən qiymətləri nəzərə almaqla mütəmadi olaraq dəqiqləşdirmə aparılır. Real proses dəyişən şəraitdə davam etdiyinə görə riyazi model də daim təkmilləşir, hər dəfə yeni müşahidə qiymətləri alınır və köhnə qiymətlərin təsiri getdikcə azalır. Zaman keçdikcə fərqli xüsusiyyətlər qazanan və cari vəziyyətə uyğunlaşdırılan proqnoz modeli –prediktor müəyyən dövrdən sonra tamamilə dəyişə bilər.

Bu mülahizələr məsələn, valyuta məzənnələrinin dinamik sıralarının təhlilində və proqnozlaşdırılmasında da nəzərə alınmalıdır.

Bütün hallarda valyuta məzənnələrinin dəyişməsi prosesi mürəkkəb prosesdir. Bir qayda olaraq, xaotik artmaları azalmalar, yaxud xaotik azalmaları artmalar əvəz edir. Lakin bu mürəkkəb prosesin də özünə məxsus qanunauyğunluqları var. Tədqiqat aparılması isə informasiyanın kifayət qədər olması və ardıcıl daxil edilməsi nəticəsində asanlaşır.

Fərz edək ki, müəyyən dövr üçün valyuta məzənnələrinin dinamik sırası verilmişdir və proqnoz qiymətlərinin hesablanması tələb olunur.

Cədvəl 10.1

NN	Faktiki qiymətlər	Sadə eksponensial orta qiymətlər	Teyl-Veyc modeli ilə proqnoz
1	0,9844	0,9849	0,9849
2	0,9850	0,9849	0,9849
3	0,9852	0,9850	0,9849
4	0,9856	0,9852	0,9852
5	0,9858	0,9853	0,9855
6	0,9864	0,9857	0,9862
7	0,9868	0,9861	0,9865

Cədvəl 10.1-də ABŞ dollarının manata görə məzənnələrinin faktiki, sadə eksponensial orta və Teyl-Veyc proqnoz qiymətlərinin (manatla) bir hissəsi verilmişdir. Göründüyü kimi, hər iki üsulla alınan proqnozlar faktiki qiymətlərə çox yaxındır, lakin Teyl və Veyc üsulu ilə nəticələrin xətası daha azdır.

10.7. MÖVSÜMİ MODELLƏR

İqtisadiyyatda bir çox hadisələr, o cümlədən də büdcəyə vergi daxil olmaları dövri olaraq, təkrar edilən mövsümiliklə xarakterizə edilir. Onda müvafiq dinamik sıraların da dövri mövsümi dəyişmələrə məruz qalacağı aşkardır. Bu halda iki cür modeldən-multiplikativ və additiv mövsümilik əmsallı modellərdən istifadə edilir. Hər iki modeli ayrılıqda nəzərdən keçirək.

1. Multiplikativ model.

Bu modeli aşağıdakı kimi yazmaq olar:

$$X_t = \xi_t + \varepsilon_t,$$

$$\xi_t = a_{1t} \cdot f_t,$$

burada a_{1t} prosesin inkişaf təmayülünü xarakterizə edir; $f_t, f_{t-1}, f_{t-2}, \ldots, f_{t-l+1}$ mövsümilik əmsallarıdır; l - tam mövsümilik dövründə fazaların sayıdır; ε_t -riyazi gözləməsi sıfıra bərabər, dispersiyası sabit olan təsadüfi kəmiyyətdir.

Göstərilən model P.R.Uinters tərəfindən təklif edilmişdir.

Əvvəlcə ən sadə hala baxaq:

$$\hat{a}_{1t} = (1-\beta_1)\cdot\frac{X_t}{\hat{f}_{t-l}} = \beta_1 \cdot \varepsilon_{1,t-1},$$

$$\hat{f}_t = (1-\beta_2)\cdot\frac{X_t}{\hat{a}_{1t}} + \beta_2 \cdot \hat{f}_{t-1},$$

burada β_1 və β_2 hamarlama parametrləridir.

Göründüyü kimi $\hat{a}_{1t}$ verilmiş dinamik sıra elementlərinin (X_t) mövsümi dəyişmələrdən kənarlaşdırılmış cari $\frac{X_t}{\hat{f}_{t-l}}$ və əvvəlki $\hat{a}_{1,t-1}$ qiymətləndirmələrinin çəkilərə hasillərinin cəmidir.

Növbəti proqnoz

$$\hat{X}_1(t) = \hat{a}_{1t} \cdot \hat{f}_{t-l+1}$$

düsturu ilə hesablanır.

Xətti artım nəzərə alınırsa, yeni β_3 parametri daxil etməklə, aşağıdakı düsturlar alınır:

$$\hat{a}_{1t} = (1-\beta_1)\cdot\frac{X_t}{\hat{f}_{t-l}} + \beta_1\cdot(\hat{a}_{1,t-1} + \hat{a}_{2,t-1}),$$

$$\hat{f}_t = (1-\beta_2)\cdot\frac{X_t}{\hat{a}_{1t}} + \beta_2\cdot\hat{f}_{t-l},$$

$$\hat{a}_{2t} = (1-\beta_3)\cdot(\hat{a}_{1t} + \hat{a}_{1,t-1}) + \beta_3\cdot\hat{a}_{2,t-1},$$

$$\hat{X}_\tau(t) = (\hat{a}_{1t} + \tau\cdot\hat{a}_{2t})\cdot\hat{f}_{t-l+\tau}.$$

Burada $\hat{a}_{1t}$ -nin ifadəsində yeganə dəyişiklik artımın additiv amilinin son qiymətləndirilməsinin $(\hat{a}_{2,t-1})$ əlavə edilməsidir. Eksponensial hamarlama proseduru eyni qayda ilə a_{2t} qiymətləndirilməsinə də tətbiq olunur.

2. Additiv model

Bu modeli aşağıdakı kimi yazmaq olar:

$$X_t = \xi_t + \varepsilon_t,$$

$$\xi_t = a_{lt} + g_t$$

burada $\hat{a}_{1t}$ prosesin inkişaf təmayülünü xarakterizə edir; $g_t, g_{t-1}, g_{t-2}, \dots, g_{t-l+1}$ additiv mövsümilik əmsalları, l tam mövsümilik dövründə fazaların sayıdır; ε_t - riyazi gözləməsi sıfıra bərabər, dispersiyası sabit olan təsadüfi kəmiyyətdir.

Dinamik sıranı

$$X_t = a_{1t} + g_t + \varepsilon_t,$$

$$a_{1t} = a_{1,t-1} + a_{2t}$$

kimi göstərmək olar, burada a_{1t} -mövsümi dəyişmələrin kənarlaşdırılmasından sonra prosesin səviyyəsi, a_{2t} -artımın additiv əmsalı, g_t -additiv mövsümilik əmsalı, ε_t -ağ küydür.

Əvvəlcə $\hat{a}_{1t}$ qiymətinin yeniləşməsinin adaptiv proseduruna baxaq. Zamanın t anında

$$X_t = a_{1t} + g_t + \varepsilon_t$$

olduğu məlumdur,lakin burada g_t və ε_t toplananları barədə informasiya yoxdur. Sırf təsadüfi kəmiyyət olan ε_t -nin əvəzinə sıfır qəbul edib, g_t -nin əvəzinə isə mövsümi amilin g_{t-l} qiymətini yazaq, burada l- mövsümilik dövrünün fazalarının sayıdır.

Yeni a_{1t} əvəzinə X_t - $\hat{g}_{t-l}$ yazmaqla adaptasiya prosedurunu

$$\hat{a}_{1t} = (1 - \beta_1) \cdot (X_t - \hat{g}_{t-l}) + \beta_1 \cdot (\hat{a}_{1,t-1} + \hat{a}_{1,t-1})$$

bərabərliyindən istifadə etməklə apara bilərik, burada β_1 hamarlama parametridir. Eyni proseduru $\hat{a}_{2t}$ və $\hat{g}_t$ üçün də tətbiq etsək,

$$\hat{a}_{2t} = (1 - \beta_2) \cdot (\hat{a}_{1,t} - \hat{a}_{1,t-1}) + \beta_2 \cdot \hat{a}_{2,t-1},$$

$$\hat{g}_t = (1 - \beta_3) \cdot (X_t - \hat{a}_{1t}) + \beta_3 \cdot \hat{g}_{t-1}$$

yaza bilərik, burada β_2, β_3 də hamarlama parametrləridir.

Proqnoz qiyməti

$$\hat{X}_\tau(t) = \hat{a}_{1t} + \tau \cdot \hat{a}_{2t} + \hat{g}_{t-l+\tau}$$

ifadəsindən tapılır, burada τ $0 < \tau \leq l$ bərabərsizliyini ödəyir.

10.8. XƏTTİ EKSPONENSİAL HAMARLAMA

Eksponensial orta qiymətlərdən istifadə etməklə xətti reqressiya asılılığının əmsallarını təyin etmək olar. Bunun üçün elə $\hat{X}_{-i} = a_0 - i \cdot a_1$ asılılığı qurulmalıdır ki, $X_{-i}, (i = 0,1,2,...)$ nöqtələrinə maksimum yaxın olsun. Onda

$$F(a_0, a_1) = \sum_{i=0}^{\infty} (a_0 - a_1 \cdot i - X_{-i})^2 \cdot \beta^i$$

funksionalının ən kiçik qiyməti hesablanmalıdır. a_0 və a_1- ə görə xüsusi törəmələr alıb, sıfıra bərabər qəbul edək:

$$\frac{\partial F}{\partial a_0} = 2 \cdot \sum_{i=0}^{\infty} (a_0 - i \cdot a_1 - X_{-i}) \cdot \beta^i = 0,$$

$$\frac{\partial F}{\partial a_1} = 2 \cdot \sum_{i=0}^{\infty} (a_0 - i \cdot a_1 - X_{-i}) \cdot (-i) \cdot \beta^i = 0.$$

Buradan aşağıdakı xətti cəbri tənliklər sistemi alınır:

$$\begin{cases} a_0 \cdot \sum\limits_{i=0}^{\infty} \beta^i - a_1 \cdot \sum\limits_{i=0}^{\infty} i \cdot \beta^i = \sum\limits_{i=0}^{\infty} \beta^i \cdot X_{-1}, \\ a_0 \cdot \sum\limits_{i=0}^{\infty} i\beta^i - a_1 \cdot \sum\limits_{i=0}^{\infty} i^2 \cdot \beta^i = \sum\limits_{i=0}^{\infty} i \cdot \beta^i \cdot X_{-i}, \end{cases}$$

Sistemin sol tərəfinə daxil olan sonsuz cəmlərin ifadələrini hesablayaq. Bunun üçün

$$\sum_{i=0}^{\infty} \beta^i = \frac{1}{1-\beta}$$

bərabərliyinin hər iki tərəfindən β -ya görə törəmə alıb β ədədinə vuraq:

$$\sum_{i=0}^{\infty} i \cdot \beta^{i-1} = \frac{1}{(1-\beta)^2},$$

$$\sum_{i=0}^{\infty} i \cdot \beta^i = \frac{\beta}{(1-\beta)^2}$$

Sonuncu bərabərlikdən yenə də törəmə alaq və bərabərliyin hər iki tərəfini β- ya vuraq:

$$\sum_{i=0}^{\infty} i^2 \cdot \beta^{i-1} = \frac{(1-\beta)^2 + 2\beta \cdot (1-\beta)}{(1-\beta)^4} =$$

$$= \frac{(1-\beta) \cdot (1-\beta+2\beta)}{(1-\beta)^4} = \frac{1+\beta}{(1-\beta)^3},$$

$$\sum_{i=0}^{\infty} i^2 \cdot \beta^i = \frac{\beta \cdot (1+\beta)}{(1-\beta)^3}.$$

Cəmlərin ifadələrini yerinə yazaq:

$$\begin{cases} a_0 \cdot \dfrac{1}{1-\beta} - a_1 \cdot \dfrac{\beta}{(1-\beta)^2} = \sum\limits_{i=0}^{\infty} \beta^i \cdot X_{-1}, \\ a_0 \cdot \dfrac{\beta}{(1-\beta)^2} - a_1 \cdot \dfrac{\beta \cdot (1+\beta)}{(1-\beta)^3} = \sum\limits_{i=0}^{\infty} i \cdot \beta^i \cdot X_{-1} \ . \end{cases}$$

Birinci tənliyin hər iki tərəfini *(1-β)* - ya vursaq, bərabərliyin sağ tərəfində I tərtib eksponensial orta qiymət alınar:

$$a_0 - a_1 \cdot \frac{\beta}{1-\beta} = (1-\beta) \cdot \sum_{i=0}^{\infty} \beta^i \cdot X_{-i} = S^{(1)}(X_0) = S_0^{(1)}.$$

Tənliklər sistemində hər iki tənliyi $(1-\beta)^2$-na vurub tərəf-tərəfə toplayaq:

$$a_0 \cdot (1-\beta+\beta) - a_1 \cdot \left[\beta + \frac{\beta \cdot (1+\beta)}{1-\beta}\right] =$$

$$= (1-\beta)^2 \cdot \sum_{i=0}^{\infty} \beta^i \cdot X_{-i} + (1-\beta)^2 = \sum_{i=0}^{\infty} i \cdot \beta^i \cdot X_{-i},$$

$$a_0 - a_1 \cdot \frac{\beta \cdot (1-\beta) + \beta \cdot (1+\beta)}{1-\beta} = (1-\beta)^2 \cdot \sum_{i=0}^{\infty} (i+1) \cdot \beta^i \cdot X_{-i},$$

$$a_0 - a_1 \cdot \frac{2\beta}{1-\beta} = S^{(2)}(X_0) = S_0^{(2)}.$$

Göstərilən çevirmələr tənliklər sisteminin xeyli sadələşməsinə imkan yaratdı:

$$a_0 - a_1 \cdot \frac{\beta}{1-\beta} = S_0^{(1)},$$

$$a_0 - a_1 \cdot \frac{2\beta}{1-\beta} = S_0^{(2)}.$$

Birinci tənliyi 2-yə vurub ikinci tənliyi bundan tərəf-tərəfə çıxsaq,

$$a_0 = 2 \cdot S_0^{(1)} - S_0^{(2)},$$

hər iki tənliyi tərəf-tərəfə çıxsaq,

$$a_1 \cdot \frac{2\beta}{1-\beta} - a_1 \cdot \frac{\beta}{1-\beta} = S_0^{(1)} - S_0^{(2)},$$

$$a_1 \cdot \frac{\beta}{1-\beta} = S_0^{(1)} - S_0^{(2)},$$

$$a_1 = \frac{1-\beta}{\beta} \cdot \left(S_0^{(1)} - S_0^{(2)}\right)$$

alarıq. Deməli, reqressiya düz xətlərinin əmsalları birinci və ikinci tərtib eksponensial orta qiymətlərlə ifadə edildi. Proqnoz qiymətləri

$$\hat{X}_{-i} = a_0 - i \cdot a_1$$
$$(i = -1, -2, \ldots)$$

funksiyasından tapılır.

10.9. PARABOLİK EKSPONENSİAL HAMARLAMA

Parobolik reqressiya xəttinin əmsallarını təyin etmək üçün analoji çevirmələr aparılmalıdır. Əvvəlcə dinamik sıra elementlərinə maksimum yaxın olan

$$\hat{X}_{-i} = a_0 - a_1 \cdot i + a_2 \cdot i^2$$

funksiyasının ödəyəcəyi şərtləri müəyyənləşdirək. Bunun üçün

$$F(a_0, a_1, a_2) = \sum_{i=0}^{\infty} \left(a_0 - a_1 \cdot i + a_2 \cdot i^2 - X_{-i}\right)^2 \cdot \beta^i$$

funksionalından a_0, a_1 və a_2-yə görə xüsusi törəmələr alıb sıfıra bərabər qəbul edək. Onda aşağıdakı tənliklər sistemi alınacaq:

$$\begin{cases} a_0 \cdot \sum\limits_{i=0}^{\infty} \beta^i - a_1 \cdot \sum\limits_{i=0}^{\infty} i \cdot \beta^i + a_2 \cdot \sum\limits_{i=0}^{\infty} i^2 \cdot \beta^i = \sum\limits_{i=0}^{\infty} \beta^i \cdot X_{-i}, \\ a_0 \cdot \sum\limits_{i=0}^{\infty} i \cdot \beta^i - a_1 \cdot \sum\limits_{i=0}^{\infty} i^2 \cdot \beta^i + a_2 \cdot \sum\limits_{i=0}^{\infty} i^3 \cdot \beta^i = \sum\limits_{i=0}^{\infty} i \cdot \beta^i \cdot X_{-i}, \\ a_0 \cdot \sum\limits_{i=0}^{\infty} i^2 \cdot \beta^i - a_1 \cdot \sum\limits_{i=0}^{\infty} i^3 \cdot \beta^i + a_2 \cdot \sum\limits_{i=0}^{\infty} i^4 \cdot \beta^i = \sum\limits_{i=0}^{\infty} i^2 \cdot \beta^i \cdot X_{-i}. \end{cases}$$

Sonsuz cəmlərin üçünün qiyməti artıq bizə məlumdur. Qalan cəmləri hesablamaq lazımdır. Oxşar çevirmələr aparmaqla,

$$\sum_{i=1}^{\infty} i^2 \cdot \beta^i = \frac{\beta \cdot (1+\beta)}{(1-\beta)^3}$$

bərabərliyindən həmin iki cəm də asanlıqla tapılır:

$$\sum_{i=0}^{\infty} i^3 \cdot \beta^{i-1} = \frac{(1+2\beta)\cdot(1-\beta)^3 + 3\beta\cdot(1+\beta)\cdot(1-\beta)^2}{(1-\beta)^6} =$$

$$= \frac{(1+2\beta)\cdot(1-\beta) + 3\beta + 3\beta^2}{(1-\beta)^4} =$$

$$= \frac{1 + 2\beta - \beta - 2\beta^2 + 3\beta + 3\beta^2}{(1-\beta)^4} = \frac{1 + 4\beta + \beta^2}{(1-\beta)^4},$$

$$\sum_{i=0}^{\infty} i^3 \cdot \beta^i = \frac{\beta \cdot \left(1 + 4\beta + \beta^2\right)}{(1-\beta)^4},$$

$$\sum_{i=0}^{\infty} i^4 \cdot \beta^{i-1} = \frac{\left(1+8\beta+3\beta^2\right)\cdot(1-\beta)^4 + 4\beta\cdot\left(1+4\beta+\beta^2\right)\cdot(1-\beta)^3}{(1-\beta)^8} =$$

$$= \frac{\left(1+8\beta+3\beta^2\right)\cdot(1-\beta)+4\beta\cdot\left(1+4\beta+\beta^2\right)}{(1-\beta)^5} =$$

$$= \frac{1+8\beta+3\beta^2-\beta-8\beta^2-3\beta^3+4\beta+16\beta^2+4\beta^3}{(1-\beta)^5} =$$

$$= \frac{1+11\beta+11\beta^2+\beta^3}{(1-\beta)^5} = \frac{(1+\beta)\cdot\left(1+10\beta+\beta^2\right)}{(1-\beta)^5},$$

$$\sum_{i=0}^{\infty} i^4 \cdot \beta^i = \frac{\beta(1+\beta)\cdot\left(1+10\beta+\beta^2\right)}{(1-\beta)^5}.$$

Beləliklə, tənliklər sistemi aşağıdakı şəkildə olur:

$$\begin{cases} a_0 \cdot \dfrac{1}{1-\beta} - a_1 \cdot \dfrac{\beta}{(1-\beta)^2} + a_2 \cdot \dfrac{\beta\cdot(1+\beta)}{(1-\beta)^3} = \sum\limits_{i=0}^{\infty} \beta^i \cdot X_{-i}, \\ a_0 \cdot \dfrac{\beta}{(1-\beta)^2} - a_1 \cdot \dfrac{\beta\cdot(1+\beta)}{(1-\beta)^3} + a_2 \cdot \dfrac{\beta\cdot\left(1+4\beta+\beta^2\right)}{(1-\beta)^4} = \sum\limits_{i=0}^{\infty} i\cdot\beta^i \cdot X_{-i}, \\ a_0 \cdot \dfrac{\beta\cdot(1+\beta)}{(1-\beta)^3} - a_1 \cdot \dfrac{\beta\cdot\left(1+4\beta+\beta^2\right)}{(1-\beta)^4} + a_2 \cdot \dfrac{\beta\cdot(1+\beta)\cdot\left(1+10\beta+\beta^2\right)}{(1-\beta)^5} = \\ = \sum\limits_{i=0}^{\infty} i^2 \cdot \beta^i \cdot X_{-i} \end{cases}$$

Birinci tənliyin hər iki tərəfini *(1-β)*- ya vuraq:

$$a_0 - a_1 \cdot \frac{\beta}{1-\beta} + a_2 \cdot \frac{\beta\cdot(1+\beta)}{(1-\beta)^2} = (1-\beta)\cdot\sum_{i=0}^{\infty}\beta^i \cdot X_{-i} = S_0^{(1)}.$$

Birinci və ikinci tənlikləri *(1-β)²*-na vurub tərəf-tərəfə toplayaq:

$$a_0 \cdot [(1-\beta)+\beta] - a_1 \cdot \left[\beta + \frac{\beta\cdot(1+\beta)}{1-\beta}\right] + a_2 \times$$

$$\times \left[\frac{\beta\cdot(1+\beta)}{1-\beta} + \frac{\beta\cdot\left(1+4\beta+\beta^2\right)}{(1-\beta)^2}\right] =$$

$$= (1-\beta)^2 \cdot \sum_{i=0}^{\infty}\beta^i \cdot X_{-i} + (1-\beta)^2 \cdot \sum_{i=0}^{\infty} i\cdot\beta^i \cdot X_{-i},$$

$$a_0 - a_1 \cdot \frac{\beta \cdot (1-\beta+1+\beta)}{(1-\beta)} + a_2 \cdot \frac{\beta \cdot \left(1-\beta^2+1+4\beta+\beta^2\right)}{(1-\beta)^2} = S_0^{(2)},$$

$$a_0 - a_1 \cdot \frac{2\beta}{1-\beta} + a_2 \cdot \frac{2\beta \cdot (1+2\beta)}{(1-\beta)^2} = S_0^{(2)}.$$

Birinci tənliyi $(1-\beta)^3$-na, ikinci tənliyi $\frac{3}{2}\cdot(1-\beta)^3$ - na və üçüncü tənliyi $\frac{1}{2}\cdot(1-\beta)^3$ - na vurub hər üç tənliyi tərəf-tərəfə toplayaq:

$$a_0 \cdot \left[(1-\beta)^2 + \frac{3}{2}\cdot\beta\cdot(1-\beta) + \frac{1}{2}\cdot\beta\cdot(1+\beta)\right] - a_1 \cdot \left[\beta\cdot(1-\beta) + \right.$$

$$\left. + \frac{3}{2}\cdot\beta\cdot(1+\beta) + \frac{\beta\cdot\left(1+4\beta+\beta^2\right)}{2\cdot(1-\beta)}\right] + a_2 \cdot \left[\beta\cdot(1+\beta) + \right.$$

$$\left. + \frac{3\beta\cdot\left(1+4\beta+\beta^2\right)}{2\cdot(1-\beta)} + \frac{\beta\cdot(1+\beta)\cdot\left(1+10\beta+\beta^2\right)}{2\cdot(1-\beta)^2}\right] =$$

$$= (1-\beta)^3 \cdot \sum_{i=0}^{\infty} \beta^i \cdot X_{-i} + \frac{3}{2}\cdot(1-\beta)^3 \cdot \sum_{i=0}^{\infty} i\cdot\beta^i\cdot X_{-i} +$$

$$+ \frac{1}{2}\cdot(1-\beta)^3 \cdot \sum_{i=0}^{\infty} i^2\cdot\beta^i\cdot X_{-i},$$

$$a_0 \cdot \left(1 - 2\beta + \beta^2 + \frac{3}{2}\cdot\beta - \frac{3}{2}\cdot\beta^2 + \frac{\beta}{2} + \frac{\beta^2}{2}\right) - a_1 \cdot \beta \times$$

$$\times \left[(1-\beta) + \frac{3}{2}\cdot(1+\beta) + \frac{1+4\beta+\beta^2}{2(1-\beta)}\right] + a_2 \cdot \beta \cdot \left[(1+\beta) + \right.$$

$$\left. + \frac{3\cdot\left(1+4\beta+\beta^2\right)}{2(1-\beta)} + \frac{(1+\beta)\left(1+10\beta+\beta^2\right)}{2(1-\beta)^2}\right] =$$

$$= (1-\beta)^3 \cdot \sum_{i=0}^{\infty}\left(1 + \frac{3}{2}\cdot i + \frac{i^2}{2}\right)\cdot\beta^i\cdot X_{-i},$$

$$a_0 - a_1 \cdot \beta \cdot \left[\frac{5+\beta}{2} + \frac{1+4\beta+\beta^2}{2(1-\beta)}\right] + a_2 \cdot \beta \times$$

$$\times \frac{2\cdot\left(1-\beta-\beta^2+\beta^3\right)+3\cdot\left(1+4\beta+\beta^2-\beta-4\beta^2-\beta^3\right)+1+11\beta+11\beta^2+\beta^3}{2(1-\beta)^2} =$$

$$= \frac{(1-\beta)^3}{2} \cdot \sum_{i=0}^{\infty}\left(2+3i+i^2\right)\cdot \beta^i \cdot X_{-i},$$

$$a_0 - a_1 \cdot \beta \cdot \frac{5+\beta-5\beta-\beta^2+1+4\beta+\beta^2}{2(1-\beta)} + a_2 \cdot \beta \times$$

$$\times \frac{6+18\beta}{2(1-\beta)^2} = \frac{(1-\beta)^3}{2} \cdot \sum_{i=0}^{\infty}(i+1)(i+2)\cdot \beta^i \cdot X_{-i},$$

$$a_0 - a_1 \cdot \frac{3\beta}{1-\beta} + a_2 \cdot \frac{3\beta(1+3\beta)}{(1-\beta)^2} = S_0^{(3)}.$$

Tənliklər sistemi həm xeyli sadələşdirildi, həm də bərabərliklərin sağ tərəflərində yalnız eksponensial orta qiymətlər iştirak edir:

$$a_0 - a_1 \cdot \frac{\beta}{1-\beta} + a_2 \cdot \frac{\beta(1+\beta)}{(1-\beta)^2} = S_0^{(1)},$$

$$a_0 - a_1 \cdot \frac{2\beta}{1-\beta} + a_2 \cdot \frac{2\beta(1+2\beta)}{(1-\beta)^2} = S_0^{(2)},$$

$$a_0 - a_1 \cdot \frac{3\beta}{1-\beta} + a_2 \cdot \frac{3\beta(1+3\beta)}{(1-\beta)^2} = S_0^{(3)}.$$

Birinci tənliyi 3-ə, ikinci tənliyi (-3)-ə vuraq və hər üç tənliyi tərəf-tərəfə toplayaq:

$$3a_0 - 3a_0 + a_0 - a_1 \cdot \left(\frac{3\beta}{1-\beta} - \frac{6\beta}{1-\beta} + \frac{3\beta}{1-\beta}\right) +$$

$$+ a_2 \cdot \left[\frac{3\beta(1+\beta)}{(1-\beta)^2} - \frac{6\beta(1+2\beta)}{(1-\beta)^2} + \frac{3\beta(1+3\beta)}{(1-\beta)^2}\right] =$$

$$= 3\cdot S_0^{(1)} - 3\cdot S_0^{(2)} + S_0^{(3)},$$

$$a_0 = 3\cdot S_0^{(1)} - 3\cdot S_0^{(2)} + S_0^{(3)}.$$

İkinci tənliyi (-2)- ə vuraq və yenə də hər üç tənliyi tərəf-tərəfə toplayaq:

$$a_0\cdot(1-2+1)-a_1\cdot\left(\frac{\beta}{1-\beta}-\frac{4\beta}{1-\beta}+\frac{3\beta}{1-\beta}\right)+$$

$$+a_2\cdot\left[\frac{\beta(1+\beta)}{(1-\beta)^2}-\frac{4\beta(1+2\beta)}{(1-\beta)^2}+\frac{3\beta(1+3\beta)}{(1-\beta)^2}\right]=$$

$$=S_0^{(1)}-2\cdot S_0^{(2)}+S_0^{(3)},$$

$$a_2\cdot\frac{2\beta^2}{(1-\beta)^2}=S_0^{(1)}-2S_0^{(2)}+S_0^{(3)},$$

$$a_2=\frac{(1-\beta)^2}{2\beta^2}\cdot(S_0^{(1)}-2S_0^{(2)}+S_0^{(3)}).$$

Əmsalların alınan ifadələrini istənilən tənlikdə yerinə yazıb, a_1 əmsalını təyin edə bilərik. Məsələn, birinci tənlik üzərində çevirmələr aparaq:

$$3S_0^{(1)}-3S_0^{(2)}+S_0^{(3)}-a_1\cdot\frac{\beta}{1-\beta}+\frac{(1-\beta)^2}{2\beta^2}\times$$

$$\times\frac{\beta(1+\beta)}{(1-\beta)^2}\cdot\left(S_0^{(1)}-2S_0^{(2)}+S_0^{(3)}\right)=S_0^{(1)},$$

$$a_1\cdot\frac{\beta}{1-\beta}=3S_0^{(1)}-S_0^{(1)}+\frac{1+\beta}{2\beta}\cdot S_0^{(1)}-3S_0^{(2)}-\frac{2(1+\beta)}{2\beta}\times$$

$$\times S_0^{(2)}+S_0^{(3)}+\frac{1+\beta}{2\beta}\cdot S_0^{(3)}=S_0^{(1)}\cdot\left(2+\frac{1+\beta}{2\beta}\right)-$$

$$-S_0^{(2)}\left(3+\frac{1+\beta}{\beta}\right)+S_0^{(3)}\cdot\left(1+\frac{1+\beta}{2\beta}\right)=\frac{1}{2\beta}\times$$

$$\times\left[(1+5\beta)\cdot S_0^{(1)}-2(1+4\beta)\cdot S_0^{(2)}+(1+3\beta)\cdot S_0^{(3)}\right],$$

$$a_0=\frac{1-\beta}{2\beta^2}\cdot\left[(1+5\beta)\cdot S_0^{(1)}-2(1+4\beta)\cdot S_0^{(2)}+(1+3\beta)\cdot S_0^{(3)}\right]$$

Beləliklə, hər üç əmsalın ifadəsi tapıldı. Alınan qiymətləri

$$\hat{X}_{-i} = a_0 - i \cdot a_1 + i^2 \cdot a_2 \quad (i = -1, -2, ...)$$

ifadəsində yerinə yazsaq, proqnoz qiymətlərini hesablaya bilərik.

10.10. PROQNOZLAŞDIRMADA CARİ VƏZİYYƏTİN NƏZƏRƏ ALINMASI

Fərz edək ki, hər hansı iqtisadi parametr zamandan asılı olaraq, aşağıdakı qiymətləri almışdır:

$$X_{-N}, X_{-N+1}, ..., X_{-2}, X_{-1}, X_0.$$

Növbəti $X_1, X_2, ...$ proqnoz qiymətlərini almaq üçün elə xətti və ya kvadratik funksiya qurulur ki, dinamik sıra elementlərinə maksimum yaxın olsun. Eksponensial hamarlama üsulunda da həmin qaydadan istifadə edilir, lakin elementlərin yaxınlığına sağdan sola eksponensial azalan çəki qiymətləri verilir.

Burada mühüm bir cəhəti nəzərə almaq lazımdır. Proqnoza sonuncu X_0 qiyməti daha çox təsir etməlidir, çünki cari vəziyyətdən sonrakı dövrə bu nöqtədən hərəkət etmək lazımdır. Trend asılılığı qurulduqda isə t_0 anında X_0 qiymətindən tamamilə fərqli qiymət alınır və fərq bəzən hətta parametrin həqiqi qiymətindən də böyük ola bilər. Müəyyən edilmiş dəyişmə asılılığı məsələn, havanın bu gün müşahidə edilən temperaturunu müsbət 14 dərəcə əvəzinə mənfi 8 dərəcə göstərirsə, sabaha proqnozlaşdırılan temperatur çox guman ki, səhv olacaq.

Bu mülahizəni sadə bir misal üzərində yoxlayaq.

Tutaq ki, dinamik sıranın sonuncu elementləri məlumdur:

$$X_{-5} = 1, \quad X_{-4} = 5, \quad X_{-3} = 6, \quad X_{-2} = 8, \quad X_{-1} = 10, \quad X_0 = 20.$$

Ən kiçik kvdratlar üsulunu tətbiq etsək, xətti trend asılılığını aşağıdakı kimi alarıq:

$$Z_{-i} = 16{,}33 - 3{,}20 \cdot i.$$

Dinamik sıra elementlərinın zamandan asılılığının bu funksiya ilə əvəz edilməsi nəticəsində cari X_0 =20 qiyməti tamamilə fərqli Z_0 =16,33 qiymətinə çevrilir. Prosesi nəinki bütün dövr ərzində, hətta cari vəziyyətdə də düzgün qiymətləndirməyən asılılığın sonrakı zaman intervalına ekstrapolyasiyanın həqiqətə yaxın olacağı böyük şübhə doğurur.

Yaxud, eksponensial hamarlama üsulu ilə başlanğıc qiymət X_0 =1, hamarlama parametri β =0,9 qəbul edilsə, onda real vəziyyətin daha fərqli asılılığını alarıq:

$$Z_{-i} = 8{,}07 - 0{,}35 \cdot i.$$

Lakin dinamik sıranın sonuncu qiyməti mühüm əhəmiyyət daşıyırsa, hamarlama parametri kiçik götürülməlidir. Belə olduqda isə Z_0 qiyməti X_0 qiymətinə yaxın olsa da, əvvəlki qiymətlərin, demək olar ki, mənası itir. Məsələn, β =0,1 olduqda xətti asılılıq

$$Z_{-i} = 19{,}9 - 8{,}2 \cdot i.$$

şəklinə düşür.

Cari vəziyyəti olduğu kimi saxlamaq üçün fərz edək ki, dinamik sıra

$$Z_{-i} = X_0 - a \cdot i.$$

xətti funksiyası ilə əvəz edilmişdir. Naməlum a əmsalını elə seçmək lazımdır ki,

$$F(a) = \sum_{i=1}^{N} \left(X_0 - a \cdot i - X_{-i}\right)^2$$

funksionalının qiyməti minimum olsun. Buradan

$$\frac{dF}{da} = 2 \cdot \sum_{i=1}^{N} \left(X_0 - a \cdot i - X_{-i}\right) \cdot (-i) = 0,$$

$$X_0 \cdot \sum_{i=0}^{N} i - a \cdot \sum_{i=0}^{N} i^2 - \sum_{i=0}^{N} i \cdot X_{-i} = 0,$$

$$X_0 \cdot \frac{N \cdot (N+1)}{2} - a \cdot \frac{N \cdot (N+1) \cdot (2N+1)}{6} = \sum_{i=0}^{N} i \cdot X_{-i},$$

$$a = \frac{3}{2N+1} \cdot X_0 - \frac{6}{N \cdot (N+1) \cdot (2N+1)} \cdot \sum_{i=0}^{N} i \cdot X_{-i}$$

alınar.

Eksponensial hamarlama qaydasını tətbiq edək. Onda funksional

$$F(a) = \sum_{i=1}^{\infty} (X_0 - a \cdot i - X_{-i})^2 \cdot \beta^{i-1}, \qquad (0 < \beta < 1)$$

şəklinə düşəcək. Buradan isə a əmsalı

$$X_0 \cdot \sum_{i=0}^{\infty} i \cdot \beta^{i-1} - a \cdot \sum_{i=0}^{\infty} i^2 \cdot \beta^{i-1} = \sum_{i=0}^{\infty} i \cdot \beta^{i-1} \cdot X_{-i}$$

şərtini ödəməlidir. Deməli, a əmsalı

$$a = \frac{1-\beta}{1+\beta} \cdot \Big[X_0 - X_b \cdot \beta^N \cdot (1 + N - N\beta) -$$
$$- (1-\beta)^2 \cdot \sum_{i=0}^{N} i \cdot \beta^{i-1} \cdot X_{-i} \Big]$$

ifadəsi ilə hesablanacaq, burada X_b başlanğıc qiymətidir.

Eyni qayda ilə son nöqtədən keçən kvadratik asılılıqları da qura bilərik.

Çalışmalar

10.1. Ərazi vergilər idarəsində səkkiz ayda daxil olmalar 18,1; 19,3; 22,5; 23,9; 25,2; 27,4; 30,1; 35,6 (milyard manat) olmuşdur. I və II tərtib eksponensial orta qiymətdən istifadə etməklə xətti model qurun və proqnoz qiymətlərini hesablayın.

10.2. İBM firmasının qiymətli kağızlar məzənnəsinin dinamik sırası verilmişdir: 510; 497; 505; 509; 508; 503; 500; 495; 494; 494; 502. $\beta=0,6$ olduqda eksponensial orta qiymətləri hesablayın.

10.3. ABŞ dollarının məzənnələri aşağıdakı kimi olmuşdur;

1	2	3	4	5	6	7	8
0,80	0,79	0,80	0,81	0,81	0,82	0,81	0,80

Teyl-Veyc üsulu ilə proqnozlaşdırma aparın.

10.4. Müəyyən elektrik sistemində 5 sutka arzində gündə 6 dəfə müşahidə aparılmışdır (saat 2, 6, 10, 14, 18, 22-də).Tələbat gücünün qiymətləri cədvəldə verilmişdir (min meqavattla):

	saat 2-00	saat 6-00	saat 10	saat 14	saat 18	saat 22
1-ci sutka	4	6	12	10	11	15
2-ci sutka	5	7	11	11	12	13
3-cü sutka	3	7	10	11	12	14
4-cü sutka	5	8	13	12	11	13
5-ci sutka	4	6	11	11	11	15

Dinamik sıranı təhlil edib, mövsimiliyi nəzərə almaqla həm multiplikativ, həm də additiv model əsasında proqnozlaşdırma qiymətlərini hesablayın.

10.5. Dinamik sıra verilmişdir:

6,2 38,1 46,5 150,3 182,7 235,9 463,0

Xətti və parabolik modellər əsasında proqnoz qiymətini hesablayıb onları müqayisə edin; cari vəziyyətin nəzərə alınmasının proqnoza təsirini qiymətləndirin.

Statistik cədvəllər

Cədvəl 1. *Standart normal paylanma funksiyasının böhran qiymətləri*

$$A(Z)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^Z e^{-\frac{t^2}{2}}dt$$

Z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.0000	0.0040	0.0080	0.0120	0.016	0.0199	0.0239	0.0279	0.0319	0.0359
0.1	0.0398	0.0438	0.0478	0.0517	0.0557	0.0596	0.0636	0.0675	0.0714	0.0753
0.2	0.0793	0.0832	0.0871	0.091	0.0948	0.0987	0.1026	0.1064	0.1103	0.1141
0.3	0.1179	0,1217	0.1255	0.1293	0.1331	0.1368	0.1406	0.1443	0.1480	0.1517
0.4	0.1554	0.1591	0.1628	0.1664	0.1700	0.1736	0.1772	0.1808	0.1844	0.1879
0.5	0.1915	0.1950	0.1985	0.2019	0.2054	0.2088	0.2123	0.2157	0.2190	0.2224
0.6	0.2257	0.2291	0.2324	0.2357	0.2389	0.2422	0.2454	0.2486	0.2517	0.2549
0.7	0.2580	0.2611	0.2642	0.2673	0.2704	0.2734	0.2764	0.2794	0.2823	0.2852
0.8	0.2881	0.2910	0.2939	0.2967	0.2995	0.3023	0.3051	0.3078	0.3106	0.3133
0.9	0.3159	0.3186	0.3212	0.3238	0.3264	0.3289	0.3315	0.334	0.3365	0.3389
1.0	0.3413	0.3438	0.3461	0.3485	0.3508	0.3531	0.3554	0.3577	0.3599	0.3621
1.1	0.3643	0.3665	0.3686	0.3708	0.3729	0.3749	0.3770	0.3790	0.3810	0.3830
1.2	0.3849	0.3869	0.3888	0.3907	0.3925	0.3944	0.3962	0.398	0.3997	0.4015
1.3	0.4032	0.4049	0.4066	0.4082	0.4099	0.4115	0.4131	0.4147	0.4162	0.4177
1.4	0.4192	0.4207	0.4222	0.4236	0.4251	0.4265	0.4279	0.4292	0.4306	0.4319
1.5	0.4332	0.4345	0.4357	0.4370	0.4382	0.4394	0.4406	0.4418	0.4429	0.4441
1.6	0.4452	0.4463	0.4474	0.4484	0.4495	0.4505	0.4515	0.4525	0.4535	0.4545
1.7	0.4454	0.4564	0.4573	0.4582	0.4591	0.4599	0.4608	0.4616	0.4625	0.4633
1.8	0.4641	0.4649	0.4656	0.4664	0.4671	0.4678	0.4686	0.4693	0.4699	0.4706
1.9	0.4713	0.4719	0.4726	0.4732	0.4738	0.4744	0.4750	0.4756	0.4761	0.4767
2.0	0.4772	0.4778	0.4783	0.4788	0.4793	0.4798	0.4803	0.4808	0.4812	0.4817
2.1	0.4821	0.4826	0.483	0.4834	0.4838	0.4842	0.4846	0.485	0.4854	0.4857
2.2	0.4861	0.4864	0.4868	0.4871	0.4875	0.4878	0.4881	0.4884	0.4887	0.4890
2.3	0.4893	0.4896	0.4898	0.4901	0.4904	0.4906	0.4909	0.4911	0.4913	0.4916
2.4	0.4918	0.4920	0.4922	0.4925	0.4927	0.4929	0.4931	0.4932	0.4934	0.4936
2.5	0.4938	0.4940	0.4941	0.4943	0.4945	0.4946	0.4948	0.4949	0.4951	0.4952
2.6	0.4953	0.4955	0.4956	0.4957	0.4959	0.496	0.4961	0.4962	0.4963	0.4964
2.7	0.4965	0.4966	0.4967	0.4968	0.4969	0.497	0.4971	0.4972	0.4973	0.4974
2.8	0.4974	0.4975	0.4976	0.4977	0.4977	0.4978	0.4979	0.4979	0.4980	0.4981
2.9	0.4981	0.4982	0.4982	0.4983	0.4984	0.4984	0.4985	0.4985	0.4986	0.4986
3.0	0.4987	0.4987	0.4987	0.4988	0.4988	0.4989	0.4989	0.4989	0.499	0.4990

Mənbə: Gujarati. Damodar N.: Basic Econometrics, 4th ed., McGraw-Hill, New York, 2003.

***Cədvəl 2.** t – paylanma : $t_a(n)$-nin böhran qiymətləri*

Sərbəstlik dərəcə-lərinin sayı (n)	Əhəmiyyətlilik səviyyəsi					
Birtərəfli test	5%	2,5%	1%	0,5%	0,1%	0,05%
İkitərəfli test	10%	5%	2%	1%	0,2%	0,1%
1	6,314	12,706	31,821	63,657	318,31	636,62
2	2,920	4,303	6,965	9,925	22,327	31,598
3	2,353	3,182	4,541	5,841	10,214	12,924
4	2,132	2,776	3,747	4,604	7,173	8,160
5	2,015	2,571	3,365	4,032	5,893	6,869
6	1,943	2,447	3,143	3,707	5,208	5,959
7	1,895	2,365	2,998	3,499	4,785	5,408
8	1,860	2,306	2,896	3,355	4,501	5,041
9	1,833	2,262	2,821	3,250	4,297	4,781
10	1,812	2,228	2,764	3,169	4,144	4,587
11	1,796	2,201	2,718	3,106	4,025	4,437
12	1,782	2,179	2,681	3,055	3,930	4,318
13	1,771	2,160	2,650	3,012	3,852	4,221
14	1,761	2,145	2,624	2,977	3,787	4,140
15	1,753	2,131	2,602	2,947	3,733	4,073
16	1,746	2,120	2,583	2,921	3,686	4,015
17	1,740	2,110	2,567	2,898	3,646	3,965
18	1,734	2,101	2,552	2,878	3,610	3,922
19	1,729	2,093	2,539	2,861	3,579	3,883
20	1,725	2,086	2,528	2,845	3,552	3,850
21	1,721	2,080	2,518	2,831	3,527	3,819
22	1,717	2,074	2,508	2,819	3,505	3,792
23	1,714	2,069	2,500	2,807	3,485	3,767

23	1,714	2,069	2,500	2,807	3,485	3,767
24	1,711	2,064	2,492	2,797	3,467	3,745
25	1,708	2,060	2,485	2,787	3,450	3,725
26	1,706	2,056	2,479	2,779	3,435	3,707
27	1,703	2,052	2,473	2,771	3,421	3,690
28	1,701	2,048	2,467	2,763	3,408	3,674
29	1,699	2,045	2,462	2,756	3,396	3,659
30	1,697	2,042	2,457	2,750	3,385	3,646
40	1,684	2,021	2,423	2,704	3,307	3,551
60	1,671	2,000	2,390	2,660	3,232	3,460
120	1,658	1,980	2,358	2,617	3,160	3,373
∞	1,645	1,960	2,326	2,576	3,090	3,291

Mənbə: *Pearson E.S., Harley H.O. (editors), Biometrika Tables for Statisticians, Cambridge, Cambridge University Press, 1970.*

Cədvəl 3. *F- paylanma: v_1 və v_2 sərbəstlik dərəcələri ilə böhran qiymətləri*

Əhəmiyyətlilik səviyyəsi 5%																			
v_1 / v_2	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**12**	**15**	**20**	**24**	**30**	**40**	**60**	**120**	∞
1	161,4	199,5	215,7	224,6	230,2	234,0	236,8	238,9	240,5	241,9	243,9	245,9	248,0	249,1	250,1	251,1	252,2	253,3	254,3
2	18,51	19,00	19,16	19,25	19,30	19,33	19,35	19,37	19,38	19,40	19,41	19,43	19,45	19,45	19,46	19,47	19,48	19,49	19,50
3	10,13	9,55	9,28	9,12	9,01	8,94	8,89	8,85	8,81	8,79	8,74	8,70	8,66	8,64	8,62	8,59	8,57	8,55	8,53
4	7,71	6,94	6,59	6,39	6,26	6,16	6,09	6,04	6,00	5,96	5,91	5,86	5,80	5,77	5,75	5,72	5,69	5,66	5,63
5	6,61	5,79	5,41	5,19	5,05	4,95	4,88	4,82	4,77	4,74	4,68	4,62	4,56	4,53	4,50	4,46	4,43	4,40	4,36
6	5,99	5,14	4,76	4,53	4.39	4,28	4,21	4,15	4,10	4,06	4,00	3,94	3,87	3,84	3,81	3,77	3,74	3,70	3.67
7	5,59	4,74	4,35	4,12	3,97	3,87	3,79	3,73	3,68	3,64	3,57	3,51	3,44	3,41	3,38	3,34	3,30	3,27	3,23
8	5,32	4,46	4,07	3,84	3.69	3,58	3,50	3,44	3,39	3,35	3,28	3,22	3,15	3,12	3,08	3,04	3,01	2,97	2.93
9	5,12	4,26	3,86	3,63	3,48	3,37	3,29	3,23	3,18	3,14	3,07	3,01	2,94	2,90	2,86	2,83	2,79	2,75	2,71
10	4,96	4,10	3.71	3,48	3,33	3,22	3,14	3,07	3,02	2,98	2,91	2,85	2,77	2,74	2,70	2,66	2,62	2,58	2,54
11	4,84	3,98	3,59	3,36	3.20	3,09	3,01	2,95	2,90	2.85	2,79	2,72	2,65	2,61	2,57	2,53	2,49	2,45	2.40
12	4,75	3,89	3,49	3,26	3.11	3,00	2,91	2,85	2.80	2,75	2,69	2,62	2,54	2,51	2,47	2,43	2,38	2,34	2,30
13	4,67	3.81	3.41	3.18	3,03	2,92	2,83	2,77	2,71	2,67	2,60	2,53	2,46	2,42	2.38	2,34	2,30	2,25	2,21

v_1 / v_2	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	15	20	24	30	40	60	120	∞
14	4,60	3,74	3,34	3,11	2,96	2,85	2,76	2,70	2,65	2,60	2,53	2,46	2,39	2,35	2,31	2,27	2,22	2,18	2,13
15	4,54	3,68	3,29	3,06	2,90	2,79	2,71	2,64	2,59	2,54	2,48	2,40	2,33	2,29	2,25	2,20	2,16	2,11	2,07
16	4,49	3,63	3,24	3,01	2,85	2,74	2,66	2,59	2,54	2,49	2,42	2,35	2,28	2,24	2,19	2,15	2,11	2,06	2,01
17	4,45	3,59	3,20	2,96	2,81	2,70	2,61	2,55	2,49	2,49	2,38	2,31	2,23	2,19	2,15	2,10	2,06	2,01	1,96
18	4,41	3,55	3,16	2,93	2,77	2,66	2,58	2,51	2,46	2,41	2,34	2,27	2,19	2,15	2,11	2,06	2,02	1,97	1,92
19	4,38	3,52	3,13	2,90	2,74	2,63	2,54	2,48	2,42	2,38	2,31	2,23	2,16	2,11	2,07	2,03	1,98	1,93	1,88
20	4,35	3,49	3,10	2,87	2,71	2,60	2,51	2,45	2,39	2,35	2,28	2,20	2,12	2,08	2,04	1,99	1,95	1,90	1,84
21	4,32	3,47	3,07	2,84	2,68	2,57	2,49	2,42	2,37	2,32	2,25	2,18	2,10	2,05	2,01	1,96	1,92	1,87	1,81
22	4,30	3,44	3,05	2,82	2,66	2,55	2,46	2,40	2,34	2,30	2,23	2,15	2,07	2,03	1,98	1,94	1,89	1,84	1,78
23	4,28	3,42	3,03	2,80	2,64	2,53	2,44	2,37	2,32	2,27	2,20	2,13	2,05	2,01	1,96	1,91	1,86	1,81	1,76
24	4,26	3,40	3,01	2,78	2,62	2,51	2,42	2,36	2,30	2,25	2,18	2,11	2,03	1,98	1,94	1,89	1,84	1,79	1,73
25	4,24	3,39	2,99	2,76	2,60	2,49	2,40	2,34	2,28	2,24	2,16	2,09	2,01	1,96	1,92	1,87	1,82	1,77	1,71
26	4,23	3,37	2,98	2,74	2,59	2,47	2,39	2,32	2,27	2,22	2,15	2,07	1,99	1,95	1,90	1,85	1,80	1,75	1,69
27	4,21	3,35	2,96	2,73	2,57	2,46	2,37	2,31	2,25	2,20	2,13	2,06	1,97	1,93	1,88	1,84	1,79	1,73	1,67
28	4,20	3,34	2,95	2,71	2,56	2,45	2,36	2,29	2,24	2,19	2,12	2,04	1,96	1,91	1,87	1,82	1,77	1,71	1,65
29	4,18	3,33	2,93	2,70	2,55	2,43	2,35	2,28	2,22	2,18	2,10	2,03	1,94	1,90	1,85	1,81	1,75	1,70	1,64
30	4,17	3,32	2,92	2,69	2,53	2,42	2,33	2,27	2,21	2,16	2,09	2,01	1,93	1,89	1,84	1,79	1,74	1,68	1,62
40	4,08	3,23	2,84	2,61	2,45	2,3	2,25	2,18	2,12	2,08	2,00	1,92	1,84	1,79	1,74	1,69	1,64	1,58	1,51
60	4,00	3,15	2,76	2,53	2,37	2,25	2,17	2,10	2,04	1,99	1,92	1,84	1,75	1,70	1,65	1,59	1,53	1,47	1,39
120	3,92	3,07	2,68	2,45	2,29	2,17	2,09	2,02	1,96	1,91	1,83	1,75	1,66	1,61	1,55	1,50	1,43	1,35	1,25
∞	3,84	3,00	2,60	2,37	2,21	2,10	2,01	1,94	1,88	1,83	1,75	1,67	1,57	1,52	1,46	1,39	1,32	1,22	1,00

Cədvəl 4. *Darbin-Uotson statistikası: d_a və d_y 5%-li əhəmiyyətlilik səviyyəsində*

n	k=1		k=2		k=3		k=4		k=5	
	d_a	d_y	d_a	d_y	d_a	d_y	d_a	d_y	d_a	d_y
6	0.61	1.40	-	-	-	-	-	-	-	-
7	0.70	1.36	0.47	1.90	-	-	-	-	-	-
8	0.76	1.33	0.56	1.78	0.37	2.29	-	-	-	-
9	0.82	1.32	0.62	1.70	0.46	2.13	0.30	2.59	-	-
10	0.88	1.32	0.70	1.64	0.53	2.02	0.38	2.81	0.24	2.82
11	0.93	1.32	0.76	1.60	0.60	1.93	0.44	2.28	0.31	2.65
12	0.97	1.33	0.81	1.58	0.66	1.86	0.51	2.18	0.38	2.51
13	1.01	1.34	0.86	1.56	0.72	1.82	0.57	2.09	0.45	2.39
14	1.05	1.35	0.91	1.55	0.77	1.78	0.63	2.03	0.51	2.30
15	1.08	1.36	0.95	1.54	0.82	1.75	0.69	1.97	0.56	2.21
16	1.10	1.37	0.98	1.54	0.86	1.73	0.74	1.93	0.62	2.15
17	1.13	1.38	1.02	1.54	0.90	1.71	0.78	1.90	0.67	2.10
18	1.16	1.39	1.05	1.53	0.93	1.69	0.82	1.87	0.71	2.06
19	1.18	1.40	1.08	1.53	0.97	1.68	0.86	1.858	0.75	2.02
20	1.20	1.41	1.10	1.54	1.00	1.68	0.90	1.83	0.79	1.99

21	1.22	1.42	1.13	1.54	1.03	1.67	0.93	1.81	0.83	1.96
22	1.24	1.43	1.15	1.54	1.05	1.66	0.96	1.80	0.86	1.94
23	1.26	1.44	1.17	1.54	1.08	1.66	0.99	1.79	0.90	1.92
24	1.27	1.45	1.19	1.55	1.10	1.66	1.01	1.78	0.93	1.90
25	1.29	1.45	1.21	1.55	1.12	1.66	1.04	1.77	0.95	1.89
26	1.30	1.46	1.22	1.55	1.14	1.65	1.06	1.76	0.98	1.88
27	1.32	1.47	1.24	1.56	1.16	1.65	1.08	1.76	1.01	1.86
28	1.33	1.48	1.26	1.56	1.18	1.65	1.10	1.75	1.03	1.85
29	1.34	1.48	1.27	1.56	1.20	1.65	1.12	1.74	1.05	1.84
30	1.35	1.49	1.28	1.57	1.21	1.65	1.14	1.74	1.07	1.83
31	1.36	1.50	1.30	1.57	1.23	1.65	1.16	1.74	1.09	1.83
32	1.37	1.50	1.30	1.57	1.23	1.65	1.18	1.73	1.11	1.82
33	1.38	1.51	1.31	1.57	1.24	1.65	1.19	1.73	1.13	1.81
34	1.39	1.51	1.33	1.58	1.27	1.65	1.21	1.73	1.15	1.81
35	1.40	1.52	1.34	1.58	1.28	1.65	1.22	1.73	1.16	1.80
36	1.41	1.52	1.35	1.59	1.29	1.65	1.24	1.73	1.18	1.80
37	1.42	1.53	1.36	1.59	1.31	1.66	1.25	1.72	1.19	1.80
38	1.43	1.54	1.37	1.59	1.32	1.66	1.26	1.72	1.21	1.79
39	1.43	1.54	1.38	1.60	1.33	1.66	1.27	1.72	1.22	1.79

40	1.44	1.54	1.39	1.60	1.34	1.66	1.29	1.72	1.23	1.79
45	1.48	1.57	1.43	1.62	1.38	1.67	1.34	1.72	1.29	1.78
50	1.50	1.59	1.46	1.63	1.42	1.67	1.38	1.72	1.34	1.77
55	1.53	1.60	1.49	1.64	1.45	1.68	1.41	1.72	1.38	1.77
60	1.55	1.62	1.51	1.65	1.48	1.69	1.44	1.73	1.41	1.77
65	1.57	1.63	1.54	1.66	1.50	1.70	1.47	1.73	1.44	1.77
70	1.58	1.64	1.55	1.67	1.52	1.70	1.49	1.74	1.46	1.77
75	1.60	1.65	1.57	1.68	1.54	1.71	1.51	1.74	1.49	1.77
80	1.61	1.66	1.59	1.69	1.56	1.72	1.53	1.74	1.51	1.77
85	1.62	1.67	1.60	1.70	1.57	1.72	1.55	1.75	1.52	1.77
90	1.63	1.68	1.61	1.70	1.59	1.73	1.57	1.75	1.54	1.78
95	1.64	1.69	1.62	1.71	1.60	1.73	1.58	1.75	1.56	1.78
100	1.65	1.69	1.63	1.72	1.61	1.74	1.59	1.76	1.57	1.78

Qeyd: *n*- müşahidələrin sayı; *k* - izahedici dəyişənlərin sayı (sərbəst hədd nəzərə alınmadan).

Mənbə: Durbin, Watson (1951).

ƏDƏBİYYAT

1. Гмурман В.Е.Теория вероятностей и математическая статистика, *«Высшая школа», Москва, 2005, 479 с.*

2. Джонстон Дж. Эконометрические методы, *«Статистика», Москва, 1980, 444 с.*

3. Доугерти К. Введение в эконометрику, *«ИНФРА-М», Москва ,2004, 432 с.*

4. Кремер Н.Ш., Путко Б.А. Эконометрика, *«ЮНИТИ-ДАНА», Москва, 2007, 312 с.*

5. Шаттелес Е. Современные эконометрические методы, *«Статистика», Москва,1975, 240 с.*

6. Колемаев В.А.Эконометрика, *«ИНФРА-М», Москва, 2004, 160 с.*

7. Магнус Я.Р., Катышев П.К., Пересецкий А.А. Эконометрика. Начальный курс. *«Дело», Москва,2004, 576 с.*

8. Gujarati Damodar N. Temel Ekonometri, Literatur Yayıncılıq, *İstanbul, 2006, 850 s.*

9. Орлов А.И. Эконометрика, *«Экзамен», Москва, 2002, 576 с.*

10. Кремер Н.Ш, , Путко Б.А., Тришин И. М. Математика для экономистов: от Арифметики до Эконометрики, *«Высшее образование», Москва ,2007, 646 с.*

11. Гладилин А.В., Герасимов А.Н., Громов Е.И. Эконометрика, *«Кнорус», Москва ,2009, 232 с.*

12. Эконометрика (под ред. В.Б.Уткина), *«Дашков и К° », Москва , 2009, 564 с.*

13. Лукашин Ю.П. Адаптивные методы краткосрочного прогнозирования, *«Статистика», Москва, 1979, 245 с.*

14. Катышев П.К., Магнус Я.Р., Пересецкий А.А. Сборник задач к начальному курсу эконометрики, *«Дело», Москва, 2003, 208 с.*

15. Тейл Г. Прикладное экономическое прогнозирование, *Прогресс, Москва, 1970, 510 с.*

16. Чернышев С.Л.Моделирование экономических систем и прогнозирование их развития, *Изд. МГТУ, Москва, 2003, 232 с.*

MÜNDƏRİCAT

AKİF MUSAYEV
ASLAN QƏHRƏMANOV

EKONOMETRİKAYA GİRİŞ

DƏRS VƏSAİTİ

Texniki redaktor:
ELŞƏN ƏLİYEV

Kompyuter tərtibatçısı:
AYSEL ƏLİYEVA

Korrektor:
AFƏT MANAFOVA

ÇAŞIOĞLU MƏTBƏƏSİNDƏ ÇAP OLUNMUŞDUR