NADİR SÜLEYMANOV

Fizika-riyaziyyat elmləri doktoru, professor

ÜMUMİLƏŞMİŞ FUNKSİYALAR VƏ KORREKT SƏRHƏD MƏSƏLƏLƏRİ

(Monoqrafiya, dərs vəsaiti)

Azərbaycan Respublikası
Təhsil Nazirliyi tərəfindən
təsdiq edilmişdir.
(əmr № 743, 25.06.2007.)

ÇAŞIOĞLU
2007

Kitabın çap olunmasında göstərdiyi effektiv təşəbbüskarlığına görə cənab Rövşən Rzayevə təşəkkür edirəm.

Müəllif.

Elmi redaktor: fizika – riyaziyyat elmləri doktoru,
professor, MEA müxbir üzvü **Bala İskəndərov,**

Rəy verənlər: professor **Əli Əhmədov,**
dosent **Arif Heydərov**

Süleymanov N.M. Ümumiləşmiş funksiyalar və korrekt sərhəd məsələləri (monoqrafiya, dərs vəsaiti). Bakı: Çaşıoğlu, 2007.–480s

Kitabda ümumiləşmiş funksiyalar nəzəriyyəsi və onun tətbiqləri verilir. Bu nəzəriyyə müasir riyaziyyatın bir çox sahələrində ciddi olaraq geniş tətbiq olunmaqdadır. Diferensial operatorların fundamental həllərinin tapılması, Koşi məsələsinin fundamental həllinin tapılması, Xüsusi törəməli diferensial tənliklər üçün Koşi məsələsinin həllərinin Varlıq siniflərinin müəyyən olunmasında, sonsuz düzbucaqlı oblastlarda mümkün korrekt sərhəd məsələlərinin qoyuluşu probleminin həllində ümumiləşmiş funksiyalar fundamental rol oynayırlar. Bununla yanaşı bu istiqamətdə azərbaycan dilində heç bir ədəbiyyat mövcud deyil.

İnanıram ki, kitab riyazi biliklər üzrə təhsil alan tələbələr, magistrlər, aspirantlar və elmi işçilər üçün yararlı olacaqdır.

$$S\frac{1602080000-440}{082-07}$$

MÜNDƏRİCAT

Mənim müəllimim – Moskva Dövlət Universitetinin professoru, görkəmli riyaziyyatçı alim Qeorgiy Yevgenyeviç Şilovun parlaq xatirəsinə həsr edirəm.

Nadir Süleymanov

ÖN SÖZ

Monoqrafiya müəllifin uzun illər Bakı Dövlət Universitetinin Mexanika – riyaziyyat fakültəsində bakalavr və magistr pillələrində oxuduğu illik ixtisas kurslarının genişləndirilmiş şərhindən ibarətdir.

Onu ümumiləşmiş funksiyalar nəzəriyyəsindən elementar dərslik hesab etmək olar. Kitabda Azərbaycan riyazi dərsliyi ədəbiyyatında ilk dəfə olaraq ümumiləşmiş funksiyalar nəzəriyyəsi, diferensial operatorların fundamental həlləri, Furye çevrilmələri nəzəriyyəsi, korrekt sərhəd məsələləri və s. kimi müasir riyazi problemlər şərh edilir.

Əsası keçən əsrin II yarısında fransız riyaziyyatçısı Loran Şvarsın «paylanmalar nəzəriyyəsi» adlı monoqrafiyasında qoyulan ümumiləşmiş funksiyalar nəzəriyyəsi çox tezliklə öz tədqiqat diapozonunu güclü şəkildə genişləndirdi. Sonra bu sahənin davamçıları olan İ.M.Qelfand, Q.Y.Şilov, L.Hornmander, L.Qordinq, V.S.Vladimirov və b. elmi tədqiqatları ona gətirib çıxardı ki, indi xüsusi törəməli diferensial tənliklərin ümumi nəzəriyyəsi, Koşi məsələsinin həllinin yeganəlik siniflərinin müəyyən edilməsi, fundamental hələrin varlığı və qurulması problemləri, korrekt sərhəd məsələlərinin müəyyən edilməsi kimi problemlərin həll edilməsi ümumiləşmiş funksiyalar olmadan mümkün deyil. Az-çox əhəmiyyət kəsb edən elə riyazi problem yoxdur ki, orada bu və ya digər dərəcədə ümumiləşmiş funksiya tətbiq edilməsin.

Azərbaycan dilində riyazi ədəbiyyat (dərslik və monoqrafiya) sahəsində güclü boşluq mövcuddur. Bu səbəbdən gənclər – tələbələr, magistrlər, aspirantlar çətinliklər ilə üzləşir.

Kitab orta riyazi səviyyəli (bakalavr) oxucular üçün nəzərdə tutulur. Kitabda çoxlu sayda məsələ və misallar toplanmışdır. Beləliklə, kitab ümumiləşmiş funksiyalar sahəsində həm də ilk praktiki məşğələ kitabıdır.

Çox xoşdur qeyd edim ki, müəllif bu sahənin yaradıcılarından olan və XX əsrin çox böyük riyaziyyatçısı olan Moskva Dövlət Universitetinin professoru Qeorqiy Evqenyeviç Şilovun aspirantı olmuşdur. O, həm də görkəmli musiqiçi idi. Onun MDU-da daimi keçirdiyi musiqi dərsləri, tələbə opera studiyasında qoyulan onun opera əsərləri, onun romanslarından ibarət musiqi gecələri, nəhayət, onun musiqi ilə riyaziyatın əlaqəsi haqqında yazdığı «простая Гамма» elmi-kütləvi kitabı o zamankı gənclərin mənəvi dünyagörüşünü, estetik zövqünü, ziyalılıq səviyyəsini formalaşdıran odlu – alovlu fəaliyyəti idi. Çox təəssüf ki, bizim gənclər üçün belə bir ustad müəllim olmayıb və hələ də yoxdur.

Kitabın 10 – cu fəsli müəllifin özünün elmi – tədqiqat nəticələrinə həsr olunur. Ümid edirəm ki, təqdim olunan monoqrafiya tələbə, magistrlər, aspirantlar və elmi işçilər üçün yararlı olacaqdır.

Fürsətdən istifadə edib kitabın ərsəyə gəlməsində hər hansı bir şəkildə əməyi olmuş şəxslərə öz minnətdarlığımı bildirirəm.

Xüsusən, magistratura illərində elmi rəhbəri olduğum Aygün Niftəliyevaya dərin minnətdarlığımı bildirmək istərdim. O, kitabın mətnini özünün kalliqrafik dəst xətti ilə yenidən yazmışdır. Kitabın 10-cu fəsli onunla birgə həmmüəlliflikdə alınan elmi nəticələrə həsr olunmuşdur.

Mən BDU «Riyazi - analiz» kafedrasının dosenti Arif Heydərova təşəkkür edirəm. O, kitabın bütün mətnini bir peşəkar mütəxəssis kimi diqqətlə oxumuş və çoxlu sayda düzəlişlər etmişdir ki, nəticədə kitabın məzmunu xeyli dəqiqləşmiş və daha korrekt olmuşdur.

Nadir Süleymanov

FƏSİL I

ÜMUMİLƏŞMİŞ FUNKSİYANIN TƏRİFİ VƏ XASSƏLƏRİ

§ 1. Adi funksiyalar sinfinin genişləndirilməsi

1.«Adi funksiya» anlayışı. Riyazi analizin əsas problemləri əsasən klassik funksiya nəzəriyyəsi çərçivəsində ifadə olunur. Baxılan hər bir məsələnin xarakterinə uyğun olaraq müxtəlif sinif funksiyalar cəlb edilir: analitik funksiyalar, diferensiallanan funksiyalar sinfi, kəsilməz funksiyalar sinfi, Lebeq mənada inteqrallanan funksiyalar, ölçülən funksiyalar sinfi və s. Funksiyalar nəzəriyyəsinin müxtəlif bölmələri sahəsində fundamental elmi nəticələr alınmışdır. Buna baxmayaraq klassik riyazi analiz aparatı bir çox məsələlərin həllində yetərli deyil və müəyyən genişlənmələr tələb olunur.

Funksiya anlayışının tərifini yada salaq:

Əgər x sərbəst dəyişəninin hər bir mümkün qiymətinə y kəmiyyətinin müəyyən bir konkret (sonlu) qiyməti uyğün qoyulursa, onda y kəmiyyəti x-in funksiyası adlanır və bu halda $y=f(x)$ yazılır. Deməli, hər x – ə qarşı müəyyən y ədədini uyğun qoyan qayda-qanun varsa, ona funksiya deyirik.

Tə'rif: Tutaq ki, $y=f(x)$ bütün ədəd oxunda verilib, həqiqi qiymətlər alır və hər bir sonlu $a \le x \le b$ parçasında Lebeq mənada mütləq inteqrallanan funksiyadır. Belə funksiya *lokal inteqrallanan funksiya* adlanır. Hər bir lokal inteqrallanan funksiya «adi funksiya» adlanır.

Məsələn, kəsilməz funksiya - adi funksiyadır; məhdud və ölçülən funksiya - adi funksiyadır. Lakin, məsələn, $y=\frac{1}{x}$ - adi funksiya deyil, çünki o lokal inteqrallanan deyil, onun $[-1;1]$ parçasında inteqralı sonlu deyil; $y=\frac{1}{\sqrt{|x|}}$ - adi funksiya olsa da, onun törəməsi adi funksiya deyil.

Bütün adi funksiyalar (lokal inteqrallanan) sinfini E ilə işarə edək. Görək E daxilində hansı əməliyyatlar mümkündür, hansılar isə mümkün deyil.

Aydındır ki, E -xətti fəzadır. Tutaq ki, $f_1(x), f_2(x)$ - adi funksiyalardır. Sanki hər yerdə üst-üstə düşən iki funksiya eyni funksiya hesab edilir. Beləliklə, E-nin hər bir elementi əslində bir sinfi xarakterizə edir.

Yalnız Lebeq ölçüsü sıfır olan çoxluqda fərqlənən iki funksiya eyni funksiya hesab olunur.

Məsələn, məlum L_1 fəzası ekvivalent siniflər fəzasıdır, sanki hər yerdə üst-üstə düşən bütün funksiyalar sinfi L_1-in bir elementidir. Ona görə $f \in L_1$ olduqda $f(x)$ yazılışı ciddi deyilişdə mənasızdır. $f \in L_1$ elementi tam bir sinfin nümayəndəsi kimi başa düşülür.

2.Ölçüsü sıfır çoxluq. Tutaq ki, A ədədi çoxluğu verilir.Tutaq ki, $\forall \varepsilon. > 0$ üçün A çoxluğunu summar uzunluqları ε – dan kiçik olan sonlu və ya hesabi sayda intervallar sistemi ilə örtmək olur. Bu halda A-ölçüsü sıfır çoxluq adlanır: $mes\, A = 0$. Ölçüsü sıfır çoxluğa misal olaraq sonlu və ya hesabi çoxluğu göstərmək olar. Məsələn, A hesabi çoxluqdursa, onun elementlərini nömrələmək olar, $A = \{x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots\}$. A çoxluğunu $\left(x_k - \frac{\varepsilon}{2^{k+1}}, x_k + \frac{\varepsilon}{2^{k+1}}\right), (k = 1,2,\ldots)$ intervalları sistemi örtür.Bu intervalların uzunluqları cəmi

$$< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{4} + \ldots + \frac{\varepsilon}{2^n} + \ldots = \varepsilon$$

olduğu üçün $mes\, A = 0$ olur.

Rasional ədədlər çoxluğu, cəbri ədədlər çoxluğu – ölçüsü sıfır çoxluqlardır. Əlbəttə, hesabi olmayan sıfır ölçülü çoxluqlar da vardır (Kantor çoxluğu). Ölçüsü sıfır çoxluqların hesabi sayda cəmi də sıfır ölçülü olur. (Ölçüsü sıfır çoxluğun hər bir alt çoxluğu da sıfır ölçülü çoxluqdur).

Qeyd. Toplanan çoxluqların sayı hesabi saydan çox olduqda bu təklif doğru deyil. Məsələn, $R = (-\infty, \infty)$ çoxluğu hər biri bir nöqtədən ibarət olan E_α çoxluqlarının cəminə bərabərdir,

$$R = \bigcup_\alpha E_\alpha \text{ , } mes\, E_\alpha = 0$$

olduğu halda $mes\, R = \infty$. Deməli R ədəd oxu hesabi çoxluq deyil.

Əgər f funksiyasını kəsilməz funksiyalar ardıcıllığının sanki hər yerdə limiti kimi göstərmək olursa, onda f *ölçülən funksiya* adlanır. Məlumdur ki, f funksiyasının cəmlənən (Lebeq mənada inteqrallanan) olması üçün onun ölçülən funksiya olması zəruridir. f yalnız və yalnız o zaman cəmlənən olur ki, $|f|$ cəmlənən olsun. Əgər $g(x) \geq 0$- cəmlənəndirsə və $|f| \le g$ isə onda f cəmlənəndir. Əgər $f \ge 0$-ölçüləndirsə, lakin cəmlənən deyilsə, onda $\int f = +\infty$ götürülür.

Funksiyanın Lebeq inteqralını hesabladıqda ölçüsü sıfır çoxluqda onun aldığı qiymətlər heç bir rol oynamır. Məsələn, $A \subset [a,b]$ və $mes\, A = 0$ olsun. Tutaq ki,

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in A, \\ 0, & x \notin A \end{cases}$$

onda

$$\int_a^b f(x)dx = \int_A f + \int_{[a,b]\setminus A} f = 0.$$

Çünki, əgər $m \le f(x) \le M$ isə, onda

$$m \cdot mes\, A \le \int_A f\, dx \le M \cdot mes\, A,$$

buradan çıxır ki, $mes\, A = 0$ olduqda A – da $f \ne 0$ olsa belə

$$\int_A f\, dx = 0.$$

Çoxluğun funksiyası kimi Lebeq inteqralı ölçüsü sıfır olan çoxluq dəqiqliyilə təyin olunur.

Hər hansı bir təklif yalnız sıfır ölçülü çoxluqda ödənilmirsə, onda deyirlər ki, həmin təklif sanki hər yerdə (s.h.y.) ödənilir. Məsələn, sanki hər yerdə $f_\nu(x) \to f(x)$, $\nu \to \infty$ olursa, bu o deməkdir ki,

$$mes\{x \in R : f_\nu(x) \not\to f(x)\} = 0.$$

E sinfində müxtəlif limitə keçmə əməliyyatları mümkündür. Məsələn, əgər $f_n \in E$ sanki hər yerdə $f(x)$-ə yığılırsa, onda Lebeq teoreminə əsasən, əgər elə lokal inteqrallanan $g(x)$ varsa ki,

$$|f_\nu(x)| \le g(x)$$

olur, onda $f(x)$-lokal inteqrallanan olur, yəni $f \in E$. Beləliklə, E sinfində limitə keçmə əməliyyatı da həmişə mümkün olmur. Analizdə çox vacib olan diferensiallama əməliyyatını heç də bütün adi funksiyalara tətbiq etmək mümkün olmur.

Elə adi funksiyalar var ki, (hətta elə kəsilməz funksiyalar var ki) onlar heç bir yerdə diferensiallanmır.İlk belə misalı Veyerştrass qurmuşdur.Onun qurduğu misal belədir:

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sin\left(3^n\cdot x\right)}{2^n}.$$

Hər toplanan kəsilməzdir və sıra müntəzəm yığılır, deməli, $f(x)$ hər yerdə kəsilməzdir. Lakin bu funksiya heç bir nöqtədə diferensiallanan deyil.

Tarixən Veyerştrassdan sonra daha sadə funksiyalar quruldu ki, onlar hər yerdə kəsilməzdir, lakin heç bir nöqtədə diferensiallanan deyillər. Məsələn, Van-der-Varden belə bir funksiya qurmuşdur:

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left\{10^n x\right\}}{10^n},$$

burada $\{x\}$ ilə x nöqtəsindən ona ən yaxın olan tam ədədə qədər məsafə işarə edilir. Beləliklə, $\forall x$ üçün $\{x\}\le 1$ Baxılan sıra müsbət hədli sıra olub hər yerdə müntəzəm yığılır, deməli $f(x)$ hər yerdə kəsilməzdir. Lakin $f(x)$ heç bir nöqtədə diferensiallanan deyil.

Beləliklə, E sinfi çərçivəsində diferensiallama əməliyyatı həmişə mümkün olmur.

Tutaq ki, $n\to\infty$ olduqda $f_n(x)$ müntəzəm olaraq $f(x)$ funksiyasına yığılır, $a\le x\le b, f_n(x)$ kəsilməz diferensiallanandır. Ola bilər ki, $f(x)$ diferensiallanan olmasın və $f_n'(x)$ ardıcıllığı $f'(x)$-ə yığılmasın.

Məsələn,

$$f_n(x)=\frac{e^{inx}}{\sqrt{n}}$$

-bütün ədəd oxunda müntəzəm olaraq sıfra yığılır, lakin törəmələr ardıcıllığı $\to\infty$ olur.

Əgər $f_\nu(x)\in E$ və s.h.y. $f_\nu(x)\to f(x)$ isə, hətta $f_\nu'(x)$ törəmələri varsa belə, ola bilər ki, $f_\nu'(x)\to f'(x)$ olmasın, yəni E daxilində diferensiallama kəsilməz operator olmur.

Elə hallar da olur ki, adi funksiyanın sanki hər yerdə törəməsi var, lakin törəmə vasitəsilə funksiyanın özünü bərpa etmək mümkün deyil. Törəmə məlum olduqda funksiyanı müəyyən etmək yalnız mütləq kəsilməz funksiyalar sinfində mümkün olur. Əgər f - mütləq kəsilməzdirsə, onda belə bir düstur doğrudur:

$$f(x)=f(a)+\int_a^x f'(\xi)\,d\xi.$$

Başqa sözlə, $\varphi(x)$ cəmlənən funksiya olduqda Lebeq mənada inteqral üçün

$$f(x)=\int_a^x \varphi(\xi)\,d\xi+f(a) \qquad (*)$$

və

$$f'(x)=\varphi(x) \text{ (s.h.y.)}$$

bərabərlikləri eynigüclü olurlar, yəni $f'(x)$ sanki hər yerdə məlumsa və $\varphi(x)$ s.h.y. təyin olunmuş cəmlənən funksiyadırsa, onda $f(x)$ funksiyası $(*)$ düsturu vasitəsilə birqiymətli tapılır.

Təqdim olunan bu kursun əsas məqsədi ondan ibarətdir ki, E-adi funksiyalar sinfini elə genişləndirək ki, alınan sinifdə diferensiallama prosesi həmişə kəsilməz proses olsun. Məsələn, analitik funksiyalar sinfində diferensiallama əməliyyatı həmişə doğrudur və istənilən tərtibdən diferensiallama həmin sinifdən çıxarmır. Lakin bu sinif olduqca dar sinifdir.

İlk baxışdan qoyulan məsələ ziddiyyətli görünür: E sinfini sıxmaq əvəzinə onu daha da genişləndirməklə diferensiallama əməlini sonsuz tərtibdən həyata keçirmək necə ola bilər? Məsələnin məğzi ondan ibarətdir ki, diferensiallama əməli necə daxil edilir.

3.Sinqulyar funksiya. İngilis fiziki Nobel mükafatı laureatı P.Dirak keçən əsrin 30-cu illərində kvant mexanikası sahəsində apardığı tədqiqatlarda indi riyazi elmi ədəbiyyatda onun adını daşıyan «Dirakın delta-funksiyası» və ya δ-funksiyanı geniş tətbiq etmiş və gözəl nəticələr almışdır. Dirakın daxil etdiyi δ - funksiya aşağıdakı kimi tərif olunur:

$$1)\,\delta(x)=\begin{cases}0, & x\neq 0,\\ \infty, & x=0,\end{cases}$$

$$2)\ \int_{-\infty}^{\infty}\delta(x)dx=1.$$

Bu cür funksiya sinqulyar funksiya adlanır.

Klassik funksiya mənada bu cür funksiya yoxdur. Çünki $x=0$ qiymətinə uyğun $\delta(x)$-in müəyyən qiyməti yoxdur, bundan başqa sanki hər yerdə $\delta(x)=0$ olduğu üçün

$$\int_{-\infty}^{\infty}\delta(x)dx=0$$

olmalıdır. Bu isə 2) şərtinə ziddir.

Bu səbəbdən uzun illər fiziklərlə riyaziyyatçılar arasında mübahisə olmuşdur. Birincilər həmin funksiyanı tətbiq edərək korrekt nəticələr alındığını qeyd edir, ikincilər isə bu cür funksiyanın mümkün olmadığını söyləyirdilər.

Nəhayət, 1950-51-ci illərdə fransız riyaziyyatçısı Loran Şvarsın «Paylanmalar nəzəriyyəsi» monoqrafyası çap olundu. Bu kitabda müasir ümumiləşmiş funksiyalar nəzəriyyəsinin riyazi əsasları verildi və ümumiləşmiş funksiyaların riyazi fizikada, diferensial tənliklərin fundamental həllərinin tapılmasına tətbiqləri verildi. Məlum oldu ki, məhz Dirakın daxil etdiyi delta-funksiya $\delta(x)$-ən sadə ümumiləşmiş funksiyadır və $\delta(x)$adi funksiya olmayıb müəyyən fəzada verilən xətti və kəsilməz funksionaldır.

Hal-hazırda ümumiləşmiş funksiya anlayışı riyaziyyatın, fizikanın, texnikanın, ehtimal nəzəriyyəsinin ən müxtəlif məsələlərində geniş tətbiq edilir və o sanki adi funksiya səviyyəsində işlədilməkdədir. İndi riyazi fizikada, kvant mexanikasında, texniki elmlərdə, ehtimal nəzəriyyəsində müasir riyaziyyatın nailiyyətləri geniş tətbiq olunur. Belə nailiyyətlərdən biri də ümumiləşmiş funksiyalar nəzəriyyəsidir ki, bu kursda biz onu təqdim edirik.

4. δ **- funksiya və nöqtədə sıxlıq.** Ümumiləşmiş funksiya klassik funksiya anlayışının ümumiləşməsidir. Bu ümumiləşmə bir tərəfdən bir çox idealizə olunmuş anlayışları (məsələn, maddi nöqtənin sıxlığı, nöqtəvi yükün yaratdığı sıxlıq, ani nöqtəvi mənbənin intensivliyi, nöqtəyə tətbiq olunmuş qüvvənin intensivliyi, nöqtədə sıxlıq və s.) riyazi analiz çərçivəsində ifadə etməyə imkan verir, digər tərəfdən isə ümumiləşmiş funksiya anlayışı özündə belə bir xüsusiyyəti əks etdirir ki, praktikada maddənin nöqtədə yaratdığı sıxlığı ölçmək mümkün deyil, ancaq həmin nöqtənin yaxın ətrafındakı orta sıxlığı ölçmək olur və tapılan orta sıxlığı həmin maddənin bu nöqtədəki sıxlığı kimi qəbul edirlər. Məhz ümumiləşmiş funksiya da özünün hər nöqtənin ətrafındakı orta qiymətləri vasitəsilə təyin olunur, deməli ümumiləşmiş funksiya anlayışı elə prosesləri təsvir edir ki, onlar hər nöqtədəki qiymətləri ilə təyin oluna bilmir, yalnız orta qiymətləri ilə təyin olunurlar.Bu cür prosesləri isə klassik funksiya anlayışı əhatə etmir.

Deyilənləri aydınlaşdırmaq üçün 1 kütləsi olan müəyyən bir maddənin nöqtədə yaratdığı sıxlıq məsələsinə bir qədər ətraflı baxaq.

Tutaq ki, 1 kütlə üç ölçülü fəzada $x=0$ nöqtəsində yerləşdirilib. Onun yaratdığı sıxlıq funksiyasını $\delta(x)$ ilə işarə edək. $\delta(x)$ sıxlığını müəyyən etmək üçün 1 kütləni ε radiuslu u_ε kürəsi daxilində eyni səviyyədə (müntəzəm) yaxaq. Onda bu maddənin orta sıxlığı belə olar:

$$\rho_\varepsilon(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\frac{4}{3}\pi\varepsilon^3}, & |x|<\varepsilon,\\ 0, & |x|\geq\varepsilon,\end{cases}$$

burada $x\in R^3, x=(x_1,x_2,x_3), |x|=\sqrt{x_1^2+x_2^2+x_3^2}$.

Əvvəlcə görək $x=0$ nöqtəsindəki $\delta(x)$ sıxlığını orta sıxlığın nöqtəvi limiti kimi təyin etmək olarmı ? Aşkardır ki, nöqtəvi limit belə olar:

$$\delta(x)=\lim_{\varepsilon\to 0}\rho_\varepsilon(x)=\begin{cases}+\infty, & x=0,\ x\in R^3\\ 0, & x\neq 0.\end{cases}$$

Lakin $\delta(x)$ sıxlıqdırsa, onda gərək

$$\iiint\limits_{u_\varepsilon}\delta(x)dx$$

inteqralı tam kütləni versin, yəni

$$\iiint\limits_{u_\varepsilon}\delta(x)dx=1$$

olmalıdır. Bu isə mümkün deyil, çünki sanki hər yerdə $\delta(x)=0$ olduğundan onun Lebeq inteqralı da sıfra bərabərdir. Beləliklə, maddənin nöqtədə sıxlığını orta sıxlığın nöqtəvi limiti kimi təyin etmək olmur.

İndi $\rho_\varepsilon(x)$ orta sıxlıqlar ardıcıllığının zəif limitini hesablayaq. Başqa sözlə, ixtiyari $\varphi(x)$ kəsilməz funksiyası üçün

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\iiint\rho_\varepsilon(x)\varphi(x)\,dx \tag{1}$$

limitini hesablayaq.

Lemma. Aşağıdakı limit münasibəti ödənilir:

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\iiint\rho_\varepsilon(x)\varphi(x)\,dx=\varphi(0)\ . \tag{2}$$

Doğurdan da, $\varphi(x)$ kəsiməz funksiya olduğu üçün $\forall \eta > 0$ ədədi üçün elə $\delta > 0$ var ki, $|x| < \delta$ olan bütün x-lər üçün $|\varphi(x) - \varphi(0)| < \eta$. Burada $\varepsilon \le \delta$ götürüb alırıq ki:

$$\left| \iiint \rho_\varepsilon(x)\varphi(x)dx - \varphi(0) \right| = \frac{3}{4\pi\varepsilon^3} \left| \iiint\limits_{|x|<\varepsilon} [\varphi(x) - \varphi(0)]dx \right| <$$

$$< \frac{3}{4\pi\varepsilon^3} \cdot \eta \cdot \iiint\limits_{|x|<\varepsilon} dx = \eta,$$

burada

$$\iiint\limits_{|x|\le\varepsilon} dx = \iiint\limits_{|x|\le\varepsilon} dx_1\, dx_2\, dx_3 = \frac{4}{3}\pi\varepsilon^3.$$

Lemma isbat olundu.

Beləliklə, $\rho_\varepsilon(x)$ orta sıxlığının $\varepsilon \to 0$ olduqda zəif limiti (1) həmişə var və bu zəif limit belə bir xassəyə malikdir: o, hər $\varphi(x)$-ə $\varphi(0)$-qiymətini uyğun qoyur. Başqa sözlə,

$$(\text{zəif}) \lim_{\varepsilon\to 0} \rho_\varepsilon(x) : \varphi(x) \to \varphi(0).$$

Əgər alınan bu zəif limiti $x = 0$ nöqtəsindəki $\delta(x)$ sıxlığı olaraq qəbul etsək, deməli,

$$\delta(x) = \lim_{\varepsilon\to 0} \rho_\varepsilon(x), \quad (\textit{zəif limit}),$$

yəni

$$\delta(x) : \varphi(x) \to \varphi(0)$$

olur. Beləliklə, $\delta(x)$ elə funksiyadır ki, o hər bir $\varphi(x)$ kəsilməz funksiyasını $\varphi(0)$ ədədinə keçirir. Bu cür inikası bəzən

$$\langle \delta, \varphi \rangle \text{ və ya } \int \delta(x)\varphi(x)dx$$

kimi yazırlar. Beləliklə, aldıq ki, $\delta(x)$ elə funksionaldır ki, $\forall \varphi \in C(R)$ üçün

$$\langle \delta, \varphi \rangle = \iiint\limits_{R^3} \delta(x)\varphi(x)dx = \varphi(0). \tag{3}$$

Bu cür funksiya Dirakın delta-funksiyası adlanır. Dirakın δ-funksiyası adi funksiya deyil, o elə bir inikasdır ki,, istənilən $\varphi(x)$-i $\varphi(0)$ ədədinə keçirir, yəni $\delta(x)$ funksionaldır. Az sonra görəcəyik ki, heç bir adi funksiya bu cür xassəyə malik deyil, yəni $\delta(x)$-adi funksiya deyil (o heç funksiya deyil!).

Xüsusi halda, $\varphi(x) \equiv 1$ olduqda

$$\iiint \delta(x) dx = 1$$

alınır ki, bu da tam kütləni verir.

5. $\delta(x)$ funksiyası və diskret paylanma sıxlığı. Yuxarıda biz gördük ki, $x = 0$ nöqtəsində yerləşən 1 kütlənin yaratdığı sıxlıq $\delta(x)$ olur.Onda $x = 0$ nöqtəsində m kütləsinin yaratdığı sıxlıq $m \cdot \delta(x)$ olar. Əgər 1 kütlə $x = a$ nöqtəsində yerləşibsə, onun yaratdığı sıxlıq $\delta(x-a)$ olar, burada $\delta(x-a)$ belə başa düşülür ki, $\forall \varphi \in C$ üçün

$$\langle \delta(x-a), \varphi \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x-a) \varphi(x) dx = \varphi(a). \qquad (4)$$

Xüsusi halda, $a = 0$ olduqda buradan (3) alınır. Əgər $x = a$ nöqtəsində m kütləsi yerləşibsə, onun yaratdığı sıxlıq $m\delta(x-a)$ olar.

İndi deyək ki, $m_1, m_2, ..., m_N$ kütlələri $\left(\sum m_i = m\right)$ uyğun olaraq $x_1, x_2, ..., x_N$ nöqtələrində qoyulub. Onda summar sıxlıq funksiyası belə olar:

$$\rho(x) = \sum_{k=1}^{N} m_k \delta(x - x_k). \qquad (5)$$

Tutaq ki, ξ-diskret təsadüfi kəmiyyətdir. Onun qiymətləri $x_1, x_2, ..., x_N$, uyğun ehtimalları $P_k = P(\xi = x_k)$, $\sum_{1}^{N} P_k = 1$ olsun. Onda bu kəmiyyətin paylanma sıxlığı belə olur (x_k nöqtəsində ehtimal kütləsi P_k-ya bərabərdir).

$$\rho_\xi(x) = \sum_{k=1}^{N} P_k \delta(x - x_k).$$

Xüsusi halda, ξ -binomal paylandıqda, onun qiymətləri $0, 1, ..., n$ və uyğun ehtimalları $P_k = c_n^k\, p^k\, q^{(n-k)}$ $(k = 0, 1, ..., n)$ olur, $p + q = 1$. Beləliklə, bu halda paylanma sıxlığı üçün belə düstur alınmış olur:

$$\rho(x)=\sum_{k=0}^{n} c_n^k p^k q^{n-k}\delta(x-k)=\sum_{k=0}^{n}\frac{n!}{k!(n-k)!}p^k q^{n-k}\delta(x-k).$$

Əgər $p(\xi=0)=1$ olarsa, yəni ξ təsadüfi kəmiyyəti yeganə $x=0$ qiymətini $p=1$ olmaqla alırsa, onda onun yaratdığı sıxlıq

$$\rho(x)=1\cdot\delta(x-0)=\delta(x)$$

olur.

Tutaq ki, $P(\xi=0)=\frac{1}{3}, P(\xi=1)=\frac{2}{3}$, yəni ξ-nin ancaq iki dənə qiyməti var: $x=0$ və $x=1$ və bu qiymətləri $\frac{1}{3}$ və $\frac{2}{3}$ ehtimalla alır. Onda onun yaratdığı sıxlıq funksiyası belə olar:

$$\rho(x)=\frac{1}{3}\delta(x)+\frac{2}{3}\delta(x-1).$$

Qeyd. Diskret paylanmanın sıxlıq funksiyası Dirakın $\delta(x)$ funksiyası vasitəsilə ifadə olunur ki, bu da adi funksiya deyil. Bu səbəbdən elementar ehtimal nəzəriyyəsində sadəcə deyilir ki, diskret paylanmanın paylanma sıxlığı yoxdur.

§2. Əsas funksiya, əsas fəza

1.Bəzi işarələmələr. G R^n-də oblast (açıq çoxluq), ∂G-onun sərhəddi, $V(a,r)$-mərkəzi $a\in R^n$ nöqtəsində olan r radiuslu açıq kürədir, $S(a,r)$-mərkəzi $a\in R^n$ nöqtəsində və radiusu r olan sferadır. Tərifə görə,

$$V(a;r)=\{x\in R^n;|x-a|<r\}\text{- açıq kürə,}$$

$$S(a;r)=\{x\in R^n;|x-a|=r\}\text{ -sfera.}$$

Xüsusi halda, $V(0;r)=U_r$- mərkəzi koordinat başlanğıcında olan r radiuslu açıq kürə, $S(0,r)=S_r$-mərkəzi koordinat başlanğıcında olan r radiuslu sferadır;

$$\overline{U(a;r)}=U(a;r)+S(a;r)=\{x\in R^n:|x-a|\le r\}$$

qapalı kürə olur.

Tutaq ki, $A, B \subset R^n$ -ixtiyari çoxluqlardır. A ilə B arasında məsafəni $d(A,B)$ ilə işarə edirik. Tərifə görə

$$d(A,B) = \inf_{x \in A, y \in B} |x - y|$$

Aşkardır ki, $A \cap B \neq \varnothing$ olduqda $d(A,B)=0$. Xüsusi halda, a nöqtəsindən A çoxluğuna qədər məsafə

$$d(a,A) = \inf_{x \in A} |a - x|.$$

Əgər $a \in A$ isə, onda $d(a,A) = 0$ (tərsi doğru deyil).

A-çoxluğunun ε – ətrafı dedikdə $A + V_\varepsilon$ cəmi başa düşülür. Bu ətrafı A_ε ilə işarə edək. Aydındır ki, $A \subset A_\varepsilon$. Xüsusi halda $(n = 1)$ $A = (a,b)$ olduqda

$A_\varepsilon = (a - \varepsilon, b + \varepsilon)$. Tutaq ki, $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n)$-multindeksdir, yəni $\alpha_i \geq 0$ -tam ədədlərdir, $|\alpha| = \alpha_1 + ... + \alpha_n$;

$$D = (D_1, ..., D_n),\ D_j = \frac{\partial}{\partial x_j},\ j = 1,2,...,n,$$

$$D^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} ... \partial x_n^{\alpha_n}} = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^{\alpha_1} ... \left(\frac{\partial}{\partial x_n}\right)^{\alpha_n}$$

$C^k(G)$ ilə G oblastında k tərtibə qədər törəmələrlə birlikdə kəsilməz olan $f(x)$ funksiyaları çoxluğunu işarə edirik:

$$C^k(G) = \{f(x) : D^\alpha f(x) \in C(G); |\alpha| \leq k\}.$$

$C^k(\overline{G})$ $C^k(G)$-nin elə elementləri çoxluğudur ki, onların bütün $D^\alpha f(x), |\alpha| \leq k$ törəmələri $\overline{G}$ oblastına kəsiməz davam olunurlar. $C^k(\overline{G})$-də norma:

$$\|f\|_{C^k(\overline{G})} = \sup_{\substack{x \in \overline{G} \\ |\alpha| \leq k}} |D^\alpha f(x)|.$$

Xüsusi halda, $C(G) = C^0(G)$; $C(\overline{G}) = C^0(\overline{G})$

Funksiyanın daşıyıcı çoxluğu. Tərif. Tutaq ki, $f(x)$ G-də kəsiməz funksiyadır. $f(x) \neq 0$ olan bütün x nöqtələri çoxluğunun qapanmasından ibarət çoxluğa f – in daşıyıcı çoxluğu (daşıyıcısı) deyilir və $\sup p\, f(x)$ kimi işarə edilir:

$$su\, ppf(x)=\overline{\{x\in R^n : f(x)\neq 0\}}.$$

Beləliklə, funksiyanın 0-dan fərqli olduğu ən kiçik qapalı çoxluq onun daşıyıcı çoxluğu adlanır. Əgər $su\, pp\, f$ məhdud çoxluqdursa, onda f -*finit funksiya* adlanır. $C_0^k(G)$ ilə $C^k(G)$-in elə elementləri çoxluğu işarə edilir ki, onlar finitdirlər. Əgər $f\in C^k(\overline{G})$ və

$$D^\alpha f(x)=0, x\in\partial G, |\alpha|\leq k,$$

bu cür f -lər çoxluğunu $C_0^k(\overline{G})$ kimi işarə edirik.

Tutaq ki, $f(x)$-ölçülən funksiyadır, $G\subset R^n$ açıq çoxluqdur. $L^p(G)$ ilə $(1\leq p\leq\infty)$ G-də verilən ölçülən və p – dərəcədən inteqrallanan $f(x)$ funksiyaları çoxluğunu işarə edirik:

$$L^p(G)=\left\{f(x): x\in G,\ \int_G |f(x)|^p\, dx<\infty,\ 1\leq p\leq\infty\right\}.$$

$p=\infty$ olduqda

$$L^p(G)=L^\infty=\left\{f(x): x\in G, vrai\sup_{x\in G}|f(x)|<\infty, p=\infty\right\}.$$

$L^p(G)$ -də norma

$$\|f\|_p=\|f\|_{L^p(G)}=\left(\int |f(x)^p\, dx|\right)^{1/p}.$$

Xüsusi halda, $L^p(R^n)\equiv L^p$; $\|f\|_{L^2(R^n)}=\|f\|$

2.Əsas funksiyalar. Əsas fəza. D **fəzası** $(n=1)$. Biz gördük ki, $\delta(x)$ funksiyası kəsilməz funksiyalar vasitəsilə tərif olunur, belə ki, $\delta(x)$ kəsiməz funksiyalar fəzasında təyin olunmuş xətti və kəsilməz funksional olur, yəni $\delta(x)$ özü vasitəsilə deyil, kəsilməz funksiyalar vasitəsilə təyin edilir, belə ki,

$$\int\delta(x)\varphi(x)dx=\varphi(0),\ \varphi\in C(R).$$

Deməli, kəsilməz funksiyalar δ- funksiya üçün baza funksiyaları olur. Daha ümumi ümçumiləşmiş funksiyalar üçün əsas funksiyalar fəzasını bir qədər də sıxmaq lazım gəlir. Məlumdur ki, əsas funksiyalar fəzası nə

qədər dar sinif olarsa, orada təyin olunan xətti və kəsilməz funksionallar sinfi daha geniş olar. Lakin əsas funksiyalar fəzasını çox da sıxmaq olmaz, onun kafi qədər zəngin olması vacibdir.
Ən ümumi halda əsas fəza olaraq sonsuz tərtibdən diferensiallanan və finit olan bütün funksiyalar sinfinin götürülməsi əlverişli olur.

Tərif. Tutaq ki, $G \subset R^n$ -ixtiyari açıq çoxluqdur. $D(G)$ ilə G-də sonsuz tərtibdən diferensiallanan və məhdud daşıyıcıya malik olan bütün (finit) funksiyalar çoxluğunu işarə edirik:

$$D(G)=\{\varphi(x)\in C^{\infty}(G: supp\,\varphi\subset G)\}.$$

Deməli, $D(G)$-daşıyıcısı G-də yerləşən $C^{\infty}(G)$-funksiyalar çoxluğu olur. Xüsusi halda, $D(R)\equiv D$ fəzası R-də verilən, hər yerdə sonsuz diferensiallanan finit funksiyalar çoxluğu olur.

Tərif. $\varphi_\nu(x)\in D(G)$ ardıcıllığı o zaman $\varphi\in D(G)$ funksiyasına yığılan adlanır ki:

1)elə məhdud $G_0\subset G$ çoxluğu olsun ki, ondan kənarda bütün $\varphi_\nu(x)\equiv 0$ $(supp\,\varphi_\nu(x)\subset G_0)$ olsun. $\nu=1,2,...$

2)$\forall\alpha$ üçün müntəzəm olaraq

$$D^\alpha\varphi_\nu(x)\underset{x\in G}{\rightrightarrows} D^\alpha\varphi(x),\ \nu\to\infty \text{ olsun.}$$

Belə olduqda sadəcə $\varphi_\nu \underset{\nu\to\infty}{\to} \varphi$, ($D$-də) və yaxud

$$\varphi_\nu \xrightarrow{D(G)} \varphi,\ \nu\to\infty$$

yazırıq. $D(G)$ fəzası (D fəzası) əsas fəza, $\varphi\in D$ əsas funksiya adlanır. Beləliklə, D fəzası kompakt daşıyıcısı olan sonsuz diferensiallanan (finit) funksiyalar fəzasıdır.

Tutaq ki, $G=R=(-\infty,\infty), n=1$. D ilə ədəd oxunda verilən sonsuz diferensiallanan bütün finit funksiyalar çoxluğunu işarə edirik. Əgər elə $[a,b]$ parçası varsa ki, ondan kənarda $\varphi(x)\equiv 0$, onda φ – finit funksiya adlanır. Bu halda deyirlər ki, φ – funksiyası $[a,b]$-də cəmləşib, $supp\,\varphi\subset[a,b]$. $\varphi\in D$-əsas funksiya, D-əsas fəza olur.

D – **də yığılma. Tərif.** Tutaq ki, $\varphi_\nu(x)\in D$. O zaman D-də $\varphi_\nu\to 0$, $\nu\to\infty$ hesab olunur ki, aşağıdakı iki şərt ödənilsin:

1) elə sonlu $[a,b]$ parçası olsun ki, ondan kənarda ardıcıllığın bütün elementləri $\varphi_\nu(x) \equiv 0$ olsun. $(supp\,\varphi_\nu(x) \subset [a,b],\ \nu = 1,2,...)$.

2) bütün fəzada $\forall k$ üçün $\varphi_\nu^{(k)} \rightrightarrows 0, \nu \to \infty, k = 0,1,2,...$ olsun, yəni $\varphi_\nu(x)$ özü və hər bir törəməsi müntəzəm olaraq sıfra yığılsın. Deməli, D - də $\varphi_\nu \to \varphi$ o zaman olur ki:

1) elə $[a,b] \subset R$ var ki,

$$\sup p[\varphi_\nu(x) - \varphi(x)] \subset [a,b],$$

2) bütün ədəd oxunda $\forall k$ üçün müntəzəm olaraq

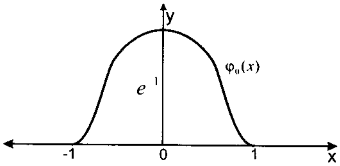
$$D^k \varphi_\nu(x) \underset{x}{\rightrightarrows} D^k \varphi(x),\ \nu \to \infty$$

olsun. Sonuncu münasibəti belə də yazmaq olar:

$$\sup_{x \in R} \left| \varphi_\nu^{(k)}(x) - \varphi^k(x) \right| \to 0, \nu \to \infty, k = 0,1,2,...$$

Misal 1. Belə funksiyaya baxaq:

$$\varphi_0(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{1-x^2}}, & |x| < 1, \\ 0, & |x| \geq 1. \end{cases}$$



Göstərək ki, $\varphi_0 \in D$. Doğrudan da, aydındır ki,

$$supp\,\varphi_0(x) = [-1,1],$$

yəni φ_0-finit funksiyadır. $\varphi_0(x)$ funksiyası $|x| < 1$ və $|x| > 1$ oblastlarında sonsuz diferensiallanan funksiyadır. Göstərək ki, $x = \pm 1$ nöqtələrində də $\varphi_0(x)$ sonsuz diferensipallanır, belə ki, $\forall k$ üçün $\varphi_0^{(k)}(\pm 1) = 0,\ \ k = 0,1,2,...$

Məsələn,

$$\varphi_0'(1) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\varphi_0(1 + \Delta x) - \varphi_0(1)}{\Delta x} = 0 \qquad (*)$$

olduğunu göstərək. İki hala baxaq: $\Delta x > 0$ və $\Delta x < 0$. 1-ci halda $1 + \Delta x > 0$ olduğundan, tərifə görə $\varphi_0(1 + \Delta x) = 0$ və $\varphi_0(1) = 0$, deməli $\varphi_0'(1) = 0$. İndi tutaq ki, $\Delta x < 0$. Bu halda $\Delta x = -t, t > 0$ və $1 + \Delta x < 0$, yəni bu halda

$$\varphi_0(1 - t) = e^{-\frac{1}{1-(1-t)^2}} = e^{-\frac{1}{t(2-t)}} \to 0,\ t \to 0.$$

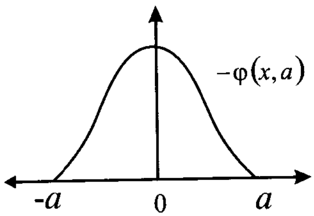
Lakin bu sıfra yaxınlaşma $t \to 0$ münasibətinə nisbətən daha yüksək sürətlə olur, ona görə də $(*)$ doğru olur. Beləliklə, $\forall k$ üçün $\varphi^{(k)}(1)=0$. Analoji qayda ilə $\varphi^{(k)}(-1)=0$, beləliklə $\varphi_0(x)\in D$.

Qeyd. $\varphi_0(x)$-analitik funksiya deyil. Əks halda o, eynilik kimi sıfra bərabər olardı, çünki, $|x|\geq 1$ oblastında $\varphi_0(x)=0$. Digər tərəfdən, əgər $\varphi_0(x)$-in uyğun Teylor sırasını $x=\pm 1$ nöqtələri ətrafında yazsaq həmin sıranın cəmi sıfra bərabərdir, çünki $\varphi^{(k)}(\pm 1)=0, \quad k=0,1,2,\ldots$ Amma $|x|<1$ olduqda $\varphi_0(x)\neq 0$ olur.

D fəzasının hər bir elementi deyilən xassəyə malikdir!

Misal 2. $a>0$ olduqda

$$\varphi(x,a)=\begin{cases} e^{-\frac{a^2}{a^2-x^2}}, & |x|<a, \\ 0, & |x|\geq a. \end{cases}$$



Bu funksiya sonsuz diferensiallanır və göründüyü kimi $supp\,\varphi(x,a)=[-a,a]$. Deməli $\varphi(x,a)\in D; \varphi(0,a)=\varphi_0(x)$.

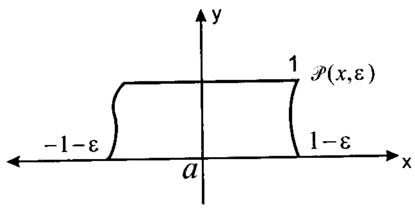
Misal 3. $\varphi(x,a)$ 2-ci misalda verilir. Belə bir funksiya tərtib edək:

$$\rho(x,\varepsilon)=k\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(x-t,a)dt, \qquad 0<\varepsilon<1.$$

Burada k ədədi elə seçilir ki, $supp\,\rho(x,\varepsilon)=[-1-\varepsilon,1+\varepsilon]$ (göstərin!) Bundan əlavə, $x\in=[-1+\varepsilon,1-\varepsilon]$ olduqda

$$\rho(x,\varepsilon)=1.\ \varphi(x,a)\in C^{\infty}$$

olduğundan $\rho(x,\varepsilon)\in D$ olur.



Misal 4.

$$\varphi_n(t)=\frac{t^n}{n!}\rho(t,\varepsilon)$$

Aşkardır ki, $\forall n$ üçün $\varphi_n(t)\in D$. Xususi halda, asan yoxlamaq olar ki,

$$1)\ \varphi_n^{(k)}=\begin{cases} 1, & n=k, \\ 0, & n\neq k, \end{cases}$$

$$2)\ \varphi_n(t)=\frac{t^n}{n!},\ \ t\in[-1+\varepsilon,1-\varepsilon].$$

Misal 5. Tutaq ki, $\varphi\in D$ -ixtiyari və f -kəsilməz finit funksiyadır. Onda

$$\phi(x)=\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\varphi(x-t)\,dt$$

əsas funksiya olur.

Aydındır ki, D-fəzası xətti fəzadır. D fəzası daxilində hər bir sonsuz tərtibdən diferensiallanan $h(x)$ funksiyasına vurmaq mümkündür. Həm də,

$supp\,h(x)\varphi(x)\subset supp\,\varphi(x)$. Bundan əlavə, əgər $\varphi_\nu\xrightarrow{D}\varphi$ isə, onda $h(x)\varphi_\nu(x)\xrightarrow{D}h(x)\varphi(x)$ olur.

İndi D fəzasında yığılan və yığılmayan ardıcıllığa misal göstərək.

Misal 1. Tutaq ki, $\varphi(x,a)$ 2-ci misalda verilən əsas funksiyadır. Belə bir ardıcıllığa baxaq:

$$\varphi_\nu(x)=\frac{1}{\nu}\varphi(x,a).$$

Aydındır ki: 1) $\sup p\ \varphi_\nu(x)=[-a,a],\nu=1,2,...$

$$2)\ \forall k \text{ üçün } \varphi_\nu^k(x)=\frac{1}{\nu}\varphi^{(k)}(x,a)\underset{x}{\Rightarrow}0\ ,\ \nu\to\infty.$$

Deməli, φ_ν ardıcıllığı D-də sıfra yığılır.

Misal 2. D-də belə ardıcıllığa baxaq:

$$\varphi_\nu(x)=\frac{1}{\nu}\varphi\left(\frac{x}{\nu},a\right),\ \ \nu=1,2,...$$

Bu ardıcıllıq bütün törəmələrilə birlikdə müntəzəm olaraq hər yerdə sıfra yığılır (φ- məhduddur). Lakin φ_ν D-də sıfra yığılmır, çünki elə bir sonlu parça yoxdur ki, ondan kənarda $\varphi_\nu(x)$ hamısı sıfra bərabər olsun, $|x|>a\cdot\nu$ olduqda $\varphi_\nu(x)=0$.

3. $n>1$. **Əsas fəza** $D\left(R^n\right)$. Bütün R^n-də sonsuz diferensiallanan və hər biri müəyyən məhdud çoxluqdan kənarda sıfra bərabər olan bütün $\varphi(x)$, $x\in R^n$-funksiyaları çoxluğu əsas fəza adlanır. D-də yığılma anlayışı G oblastı üçün olduğu kimidir.

Misal.

$$\varphi(x)=\begin{cases} e^{-\frac{a^2}{a^2-|x|^2}}, & |x|<a, \\ 0, & |x|\geq a. \end{cases}$$

burada $x=(x_1,...,x_n)\in R^n$, $|x|=\sqrt{x_1^2+...+x_n^2}$. Onda

$$\sup p\,\varphi(x)=\{x\in R^n:|x|\leq a\}$$

Deməli φ-nin daşıyıcısı R^n-də a radiuslu kürə olur, $\varphi\in D\left(R^n\right)$.

Aşkardır ki, $D\left(R^n\right)$ fəzasında diferensiallama operatoru kəsilməz operator olur. Doğrudan da, D-də yığılma tərifindən çıxır ki, $\varphi_\nu\to\varphi$ (D-də) olduqda $\forall\alpha$ üçün

$$D^\alpha\varphi_\nu \underset{x\in R^n}{\Rightarrow} D^\alpha\varphi,\ \nu\to\infty \qquad (D\text{-də) müntəzəm yığılma olur,}$$

Aşkardır ki, $\forall G\subset R^n$ üçün $D(G)\subset D\left(R^n\right)=D$.

4. D**-nin zəngin fəza olması.** D - fəzasının boş olmadığını yuxarıda gördük. Lakin bu azdır. D-nin kafi qədər zəngin olan məlum çoxluqlarda sıx olması lazımdır.

Tərif. M çoxluğu o zaman G çoxluğunda sıx çoxluq adlanır ki, $G\subseteq\overline{M}$ olsun, burada $\overline{M}$ ilə M-in qapanması işarə olunur. Xüsusi halda, $G=R^n$ olduqda M hər yerdə sıx çoxluq adlanır.

Əgər R^n-də hə bir kürə daxilində elə kürə varsa ki, o özündə M-dən heç bir nöqtə saxlamır, olda M heç yerdə sıx olmayan çoxluq adlanır.

Teorem. İstənilən kəsilməz və finit $f(x)$ funksiyası üçün və ixtiyari $\varepsilon>0$ ədədi üçün elə $\varphi(x)\in D$ əsas funksiyası var ki, bütün fəzada

$$\sup_{x\in R}|f(x)-\varphi(x)|<\varepsilon \tag{1}$$

olur.(Başqa sözlə D bu cür $f(x)$ funksiyaları fəzasında sıx çoxluq təşkil edir).

İsbatı. Qeyd olunmuş $d>0$ ədədini seçək. Tutaq ki, $\sup p\; f(x)=K$ və K-məhdud qapalı çoxluqdur. K çoxluğunun d-ətrafı K_d dedikdə elə $x\in R$ nöqtələri çoxluğu başa düşülür ki, onların K-dan olan məsafəsi d-dən kiçik bərabər olsun:

$$K_d=\left\{x\in R:\inf_{y\in K}|x-y|\le d\right\}.$$

Aşkardır ki, K_d-məhdud qapalı çoxluqdur və $K\subset K_d$.Xüsusi halda, $K=[a,b]$ olduqda $K_\varepsilon=[a-\varepsilon,\, b+\varepsilon]$.

$\varphi(x,a)\in D$-məlum əsas funksiya olduqda

$$\theta(x)=\frac{1}{k}\varphi(x,a),\qquad a>0, \tag{2}$$

işarə edək, burada k ədədi elə seçilir ki,

$$\int_{-\infty}^{\infty}\theta(\xi)d\xi=1 \tag{3}$$

olsun. Aydındır ki, $supp\;\theta(x)=[-a,a]$. İndi $\varphi(x)$ funksiyasını belə seçək:

$$\varphi(x)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x-\xi)\theta(\xi)d\xi=\int_{-\infty}^{\infty}f(\xi)\theta(x-\xi)d\xi. \tag{4}$$

Burada 1-ci inteqral $|\xi|\le a$ sonlu parçası üzrə, 2-ci isə K məhdud çoxluğu üzrədir. $\theta\in D$ olduğundan $\varphi(x)\in C^\infty(R)$ olur. Göstərək ki, φ-finitdir. $x\notin K_a$ olsun. Onda, $\xi\in K$ olduqda $|x-\xi|>a$ olur. Bu halda $\theta(x-\xi)\equiv 0$ və (4)-də 2-ci inteqral sıfra bərabər olur, yəni $|x-\xi|>a$ olduqda $\varphi(x)\equiv 0$. Lakin $\xi\in K$-məhdud olduğundan buradan çıxır ki, yalnız $|x-\xi|\le a$ olduqda $\varphi(x)\ne 0$, yəni

$$s\,upp\;\varphi(x)=[a-\xi\le x\le a+\xi]$$

məhdud çoxluqdur. Beləliklə, $\varphi\in D$.

İndi aşağısdakı fərqi qiymətləndirək:

$$f(x)-\varphi(x)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\theta(\xi)d\xi-\int_{-\infty}^{\infty} f(x-\xi)\theta(\xi)d\xi=$$
$$=\int_{-a}^{a}[f(x)-f(x-\xi)]\theta(\xi)d\xi \qquad (5)$$

Şərtə görə $f(x)$ kəsilməzdir. Onda $[-a,a]$-da o müntəzəm kəsilməzdir. Deməli, $\forall\,\varepsilon>0$ üçün elə $\delta>0$ var ki, $|\xi|<\delta$ olduqda

$$|f(x)-f(x-\xi)|<\varepsilon, \qquad x\in[-a,a].$$

Belə olduqda (5)-dən alırıq ki, ($a\le\delta$ seçirik)

$$|f(x)-\varphi(x)|<\varepsilon.$$

Buradan (1) alınır.

Lemma. İstənilən $G\subset(-\infty,\infty)$ oblastı üçün və $\forall\,\varepsilon>0$ ədədi üçün elə $\eta(x)\in D$ funksiyası var ki,

$$1.\ 0\le\eta(x)\le 1, \qquad x\in R,$$
$$2.\ \eta(x)\equiv 1, \qquad x\in G_{\varepsilon},$$
$$3.\ \eta(x)\equiv 0, \qquad x\notin G_{3\varepsilon}.$$

(Burada G_d ilə G-dən olan məsafələri d-dən kiçik olan bütün $x\in R$ nöqtələri çoxluğu işarə edilir, $G\subset G_d$).

Doğrudan da, tutaq ki, $\chi(x)$ $G_{3\varepsilon}$ oblastının xarakteristik funksiyasıdır, yəni

$$\chi(x)=1,\ x\in G_{2\varepsilon}$$
$$\chi(x)\equiv 0,\ x\notin G_{2\varepsilon}.$$

Onda

$$\eta(x)=\int_{-\infty}^{\infty}\chi(y)\omega_{\varepsilon}(x-y)dy$$

funksiyası 1-3 xassələrinə malikdir (yoxlayın!).

Tutaq ki, f G-də lokal inteqrallanır. Belə funksiya tərtib edək (ortalama funksiyası):

$$f_{\varepsilon}(x)=\int f(y)\omega_{\varepsilon}(x-y)dy=\int\omega_{\varepsilon}(y)f(x-y)dy, \qquad (6)$$

burada

$$\omega_\varepsilon(x)=\begin{cases} c_\varepsilon e^{-\frac{\varepsilon^2}{\varepsilon^2-x^2}}, & |x|<\varepsilon, \\ 0, & |x|\geq\varepsilon, \end{cases} \qquad \int_{-\infty}^{\infty}\omega_\varepsilon(x)dx=1.$$

Onda $\omega_\varepsilon(x)\in D,\quad \sup p\omega_\varepsilon(x)=[-\varepsilon,\varepsilon]$.

Teorem 1. Tutaq ki, $f\in L^p(G)$, $(1\leq p\leq\infty)$. Onda $f_\varepsilon(x)\in C^\infty$ və belə bir qiymətlənmə ödənilir:

$$\|f_\varepsilon\|_{L^p(G)}\leq\|f\|_{L^p(G)}. \tag{7}$$

İsbatı: $f_\varepsilon(x)\in C^\infty$ olduğu aşkardır. Onda (7) münasibəti Hölder bərabərsizliyindən alınır:

$$\|f_\varepsilon\|^p_{L^p(G)}=\int_G|\varphi_\varepsilon(x)|^p dx=\int_G\left|\int f(y)\omega_\varepsilon(x-y)dy\right|dx\leq$$

$$\leq\int_G\int_G|f(y)|^p\omega_\varepsilon(x-y)dy\left[\int\omega_\varepsilon(x-y)dy\right]^{p-1}dx=$$

$$=\int_G\int_G|f(y)|^p\omega_\varepsilon(x-y)dydx\leq\int_G|f(y)|^p dy=\|f\|^p_{L^p(G)}$$

Teorem 2. Tutaq ki, $f\in L_0^1(G)$ və f-finitdir. Onda $f_\varepsilon(x)\in D(G)$, belə ki, $\varepsilon\to 0$ olduqda:

1) $f\in C_0(G)$ olduqda $f_\varepsilon\xrightarrow{C(\overline{G})}f$, $C(\overline{G})$-də,

2) $f\in L_0^p(G)$ olduqda $f_\varepsilon\xrightarrow{L^p(\overline{G})}f$, $1\leq p<\infty$,

3) $f\in L_0^\infty(G)$ olduqda $f_\varepsilon\to f$ sanki hər yerdə.

İsbatı. $f_\varepsilon(x)$ G-də finitdir, $f_\varepsilon\in C^\infty(G)$ olduğundan $f_\varepsilon\in D$ olur. İndi tutaq ki, $f\in C_0(G)$. Onda $(x\in G)$:

$$|f_\varepsilon(x)-f(x)|=\left|\int[f(y)-f(x)]\omega_\varepsilon(x-y)dy\right|\le$$

$$\le\max_{|x-y|\le\varepsilon}|f(y)-f(x)|\int\omega_\varepsilon(x-y)dy=\max_{|x-y|\le\varepsilon}|f(y)-f(x)|.$$

Digər tərəfdən, f müntəzəm kəsilməz olduğu üçün sonuncu bərabərsizlikdən $\varepsilon\to 0$ olduqda $f_\varepsilon(x)\rightrightarrows f(x)$ (müntəzəm) yığılır.

İndi tutaq ki, $f\in L_0^p(G)$, $1\le p<\infty$. İxtiyari $\delta>0$ üçün elə $g\in C_0(G)$ var ki, ($C_0(G)$ $L_0^p(G)$-də sıxdır)

$$\|f-g\|_{L^p(G)}<\frac{\delta}{3}.$$

g üçün elə ortalama $g_\varepsilon(x)$ funksiyası qurmaq olar ki,

$$\|g-g_\varepsilon\|_{L^p(G)}<\frac{\delta}{3}.$$

Bu iki bərabərsizlikdən və (2)-dən alırıq:

$$\|f-f_\varepsilon\|_{L^p(G)}\le\|f-g\|_{L^p(G)}+$$
$$\|g-g_\varepsilon\|_{L^p(G)}+\|g_\varepsilon-f_\varepsilon\|_{L^p(G)}\le$$
$$\le 2\|f-g\|_{L^p(G)}+\|g-g_\varepsilon\|_{L^p(G)}<\delta,$$

yəni $\varepsilon\to 0$ olduqda $f_\varepsilon\to f$ ($L^p(G)-$də) olur.

Nəhayət, $f\in L_0^p(G)$ olduqda G-də sanki hər yerdə $f_\varepsilon\to f$ - ($\varepsilon\to 0$) olur.

Nəticə 1. $D(G)$ fəzası $L^p(G)$-də hər yerdə sıxdır ($1\le p\le\infty$).

Nəticə 2. $D(G)$ fəzası $C_0^k(\overline{G})$ fəzasında sıxdır (G məhdud olduqda).

5. D **-nin metrikləşən fəza olmaması.** D fəzasında elə metrika seçmək olmur ki, D-də yığılma həmin metrikaya görə yığılma ilə eynigüclü olsun. Doğrudan da əgər $\rho(\varphi,\phi)$ D-də metrikadırsa, onda $\forall\varphi,\phi\in D$:

1. $\rho(\varphi,\phi)\ge 0$ və $\rho(\varphi,\varphi)=0\Leftrightarrow\varphi=\phi$,

$$2.\ \rho(\varphi,\phi)=\rho(\phi,\varphi),\quad \varphi,\phi\in D,$$
$$3.\ \rho(\varphi,\phi)\le\rho(\varphi,\eta)+\rho(\eta,\phi),\ \forall\,\varphi,\phi,\eta\in D.$$

$\rho(\varphi,\phi)$ ədədi φ ilə ϕ arasında məsafə adlanır.

Hər bir metrik fəzanın belə bir xassəsi var:
Tutaq ki, metrik fəzada yığılan ardıcıllıqlar sistemi verilir:

$$\varphi_1^{(1)},\varphi_2^{(1)},\ldots,\varphi_\nu^{(1)},\ldots\overset{\rho}{\to}\varphi^{(1)},\quad \nu\to\infty,$$

$$\varphi_1^{(2)},\varphi_2^{(2)},\ldots,\varphi_\nu^{(2)},\ldots\overset{\rho}{\to}\varphi^{(2)},\quad \nu\to\infty,$$

$$\varphi_1^{(m)},\varphi_2^{(m)},\ldots,\varphi_\nu^{(m)},\ldots\overset{\rho}{\to}\varphi^{(m)},\quad \nu\to\infty,$$

---

belə ki, limit elementləri ardıcıllığı $\varphi^{(m)}$ özü də müəyyən φ elementinə metrikaya görə yığılır:

$$\varphi^{(1)},\varphi^{(2)},\ldots,\varphi^{(m)},\ldots\overset{\rho}{\to}\varphi,\quad m\to\infty.$$

Onda verilən sistemin hər bir sətrindən bir elementi elə seçmək olar ki, alınan $\varphi_{\nu_m}^{(m)}$ ardıcıllığı da φ limitinə yığılar:

$$\varphi_{\nu_1}^{(1)},\varphi_{\nu_2}^{(2)},\ldots,\varphi_{\nu_m}^{(m)},\ldots\overset{\rho}{\to}\varphi,\ m\to\infty.$$

(bu fakt üçbucaq aksiomundan çıxır).

Məhz bu xassə D fəzasında pozulur. Məsələn, belə ardıcıllığa baxaq:

$$\varphi_\nu^{(m)}=\varphi(x,m),\ (\nu=1,2,\ldots;m=1,2,\ldots),$$

burada

$$\varphi(x,m)=\begin{cases} e^{-\frac{m^2}{m^2-x^2}}, & |x|<m,. \\ 0, & |x|\ge m. \end{cases}$$

Məlumdur ki, $\forall\,m$ üçün $\varphi(x,m)\in D$, $\sup p\,\varphi(x,m)=[-m,m]$ və $\varphi(x,m)$-məhdud funksiyadır. Onda hər qeyd olunmuş m üçün

$\varphi_\nu^{(m)} \to 0$ (D-də), $\nu \to \infty$. Çünki, 1)hər m üçün məhdud $[-m,m]$ çoxluğundan kənarda bütün $\varphi_\nu^{(m)} = 0$; 2)hər yerdə $\forall\,\alpha$ üçün

$$D^\alpha \varphi_\nu^{(m)}(x) \underset{x\in R}{\rightrightarrows} 0,\ \nu \to \infty.$$

Lakin $\varphi_{\nu_m}^{(m)}$ ardıcıllığı D – də sıfra yığılmır, çünki elə bir ortaq sonlu parça yoxdur ki, ondan kənarda bu ardıcıllığın bütün hədləri $= 0$ olsun.

6. D fəzasının tamlığı haqqında. D fəzasının tam fəza olması belə daxil edilir:

Tutaq ki, $\varphi_\nu(x) \in D$ və $\sup p\varphi_\nu(x) = [a,b]$.

Tutaq ki, $\forall\, q$ üçün

$$D^q \varphi_\nu(x) \rightrightarrows \phi_q(x),\ \nu \to \infty.$$

Onda:

1) $\phi_0(x) = \lim\limits_{\nu\to\infty} \varphi_\nu(x)$ limit funksiyası əsas funksiyadır ($\phi_0 \in D$),

2) $\phi_q(x) = D^q \phi_0(x)$, 3) $\varphi_\nu(x) \underset{\nu\to\infty}{\overset{D}{\to}} \phi_0(x)$.

§3. Birdəyişənin ümumiləşmiş funksiyası. Ümumiləşmiş funksiyalar və bəzi sadə xassələri.

1.Requlyar və sinqulyar funksiyalar.

Tərif. D əsas fəzasında təyin olunmuş hər bir xətti və kəsilməz funksional ümumiləşmiş funksiya adlanır.

f funksionalının (ümumiləşmiş funksiyanın) $\varphi \in D$ elementindəki qiymətini $\langle f, \varphi\rangle$ kimi işarə edirik. f funksionalını bəzən $f(x)$ kimi də yazırlar, bu halda x arqumenti f-in təsir etdiyi əsas funksiyanın arqumentinə işarədir.

Beləliklə, f ümumiləşmiş funksiya olduqda aşağıdakı üç şərt ödənilir:

1) f D-də funksionaldır, yəni o, hər bir (ixtiyari) $\varphi \in D$ elementinə müəyyən (kompleks) $\langle f, \varphi\rangle$ ədədini uyğun qoyur;

2) f D-də xətti funksionaldır, yəni $\forall\,\varphi,\phi \in D$ və $\forall\,\alpha,\beta$ ədədləri üçün

$$\langle f, \alpha\varphi + \beta\phi \rangle = \alpha\langle f,\varphi\rangle + \beta\langle f,\phi\rangle;$$

3) f D-də kəsilməz funksionaldır, yəni D-də $\varphi_\nu \to 0,\ \nu \to \infty$ olduqda $\langle f,\varphi_\nu\rangle \to 0$, (ədədi ardığıllıq kimi) olur.

Bütün ümumiləşmiş funksiyalar fəzasını D' ilə işarə edirik. D'-qoşma fəza adlanır.

Tutaq ki, $f,g \in D'$. İxtiyari α,β ədədləri üçün $\alpha f + \beta g$ cəmini belə daxil edək:

$$\langle \alpha f + \beta g, \varphi\rangle = \alpha\langle f,\varphi\rangle + \beta\langle g,\varphi\rangle.\ \varphi \in D.$$

Bu halda D' xətti fəza olur, yəni

$$\alpha f + \beta g \in D'.$$

Məsələn, göstərək ki, $\alpha f + \beta g$ -kəsilməz funksionaldır.

Tutaq ki, $\varphi_\nu \to 0$ (D-də). Onda

$$\langle \alpha f + \beta g, \varphi_\nu\rangle = \alpha\langle f,\varphi_\nu\rangle + \beta\langle g,\varphi_\nu\rangle$$

olur. f və $g \in D'$ kəsilməz olduqları üçün $\langle f,\varphi_\nu\rangle \to 0$, $\langle g,\varphi_\nu\rangle \to 0$ olur, $\nu \to \infty$ onda

$$\langle \alpha f + \beta g, \varphi_\nu\rangle \to 0,\ \nu \to \infty.$$

Deməli, $\alpha f + \beta g$ cəmi D-də kəsilməz funksionaldır və $\alpha f + \beta g \in D'$.

Misal 1. $f(x)$-lokal inteqrallanan funksiya olduqda

$$\langle T_f,\varphi\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\varphi(x)dx \tag{1}$$

düsturu D fəzasında xətti və kəsilməz funksional təyin edir:

1^0. $\forall\,\varphi \in D$ üçün (1) inteqralı yığılır, yəni $\langle T_f,\varphi\rangle \in R$ -sonlu ədəd olur, çünki φ – finit funksiyadır. Tutaq ki, $\operatorname{sup} p\,\varphi \subset [a,b]$. Onda φ kəsilməz və məhduddur. $\max|\varphi(x)| \le M < \infty$. Onda, f – lokal inteqrallanan olduğundan,

$$\left|\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\varphi(x)dx\right| = \left|\int_a^b f(x)\varphi(x)dx\right| \le \int_a^b |f(x)\varphi(x)|dx \le M\int_a^b |f(x)|dx < \infty.$$

2^0.Xəttilik aşkardır, kəsilməzliyi göstərək. Tutaq ki, $\varphi_\nu \to \varphi$ (D-də). Onda $supp\,\varphi_\nu \subset [a,b], supp\,\varphi \subset [a,b]$ və $[a,b]$ daxilində $\max\limits_{x\in[a,b]} |\varphi_\nu(x) - \varphi(x)| \to 0$, $\nu \to \infty$. (müntəzəm yığılır). Onda alırıq:

$$\left|\langle T_f, \varphi_\nu\rangle - \langle T_f, \varphi\rangle\right| = \left|\int_{-\infty}^{\infty} f(x)[\varphi_\nu(x) - \varphi(x)]dx\right| \le$$

$$\le \sup_{x\in R} |\varphi_\nu(x) - \varphi(x)| \cdot \int_a^b |f(x)|dx \to 0, \nu \to \infty,$$

yəni

$$\langle T_f, \varphi_\nu\rangle \to \langle T_f, \varphi\rangle, \ \nu \to \infty, \ \varphi \in D.$$

Deməli T_f D-də kəsilməz funksionaldır. Beləliklə (1) düsturu ilə verilən T_f D-də xətti və kəsilməz funksional olur, $T_f \in D'$.

Tərif. Müəyyən lokal inteqrallanan $f(x)$ funksiyası vasitəsilə $\forall \varphi \in D$ üçün

$$\langle T, \varphi\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\varphi(x)dx \tag{1}$$

inteqralı şəklində göstərilə bilən hər bir $T \in D'$ funksionalı **requlyar funksional** (funksiya) adlanır.

Requlyar olmayan funksional **sinqulyar funksional** adlanır. Beləliklə, əgər $T \in D'$ funksionalını heç bir lokal inteqrallanan $f(x)$ funksiyası vasitəsilə (1) inteqralı şəklində yazmaq mümkün deyilsə, onda T - sinqulyar funksional adlanır.

Misal 2. $\delta(x)$ – sinqulyar funksiyadır.

Əksini fərz edək: Tutaq ki, elə $f_0(x)$ adi funksiyası var ki, onun vasitəsilə $\delta(x)$ funksionalını (1) inteqralı kimi yazmaq olur: $\forall \varphi \in D$ üçün

$$\langle \delta, \varphi\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f_0(x)\varphi(x)dx. \tag{2}$$

Onda bizə məlum olan $\varphi(x,a) \in D$ əsas funksiyası üçün də (2) yazılışı ödənilir:

$$\langle \delta(x), \varphi(x,a) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f_0(x) \varphi(x,a) dx. \tag{3}$$

Tərifə görə, $\langle \delta, \varphi \rangle = \varphi(0)$. Deməli

$$\langle \delta(x), \varphi(x,a) \rangle = \varphi(x,a) \Big/_{x=0} = e^{-1}.$$

Beləliklə, (3)-dən alınır ki,

$$\int_{-a}^{a} f_0(x) e^{-\frac{a^2}{a^2-x^2}} dx = e^{-1}.$$

Burada $a \to 0$ olduqda limitə keçdikdə $0 = e^{-1}$ ziddiyyəti alınır. Bu onu göstərir ki, $\delta(x) \in D'$ funksionalını heç bir adi funksiya vasitəsilə (1) inteqralı şəklində yazmaq olmaz.

Qeyd. Başqa üsul: Tutaq ki, elə $f_0(x)$ adi funksiyası var ki, $\forall \varphi \in D$ üçün

$$\langle \delta, \varphi \rangle = \int f_0(x) \varphi(x) dx = \varphi(0) \tag{4}$$

olur.Onda $\phi(x) = x\varphi(x) \in D$ elementi üçün də (4) doğrudur. Lakin

$$\langle \delta, \phi \rangle = \phi(0) = 0$$

olduğu üçün

$$\int_{-\infty}^{\infty} x f_0(x) \varphi(x) dx = 0, \quad \varphi \in D,$$

olur. Buradan çıxır ki, sanki hər yerdə $x \cdot f_0(x) = 0$ olar, deməli $f_0(x) = 0$ s.h.y. Belə olduqda (4)-dən çıxır ki, $\forall \varphi \in D$ üçün $\langle \delta, \varphi \rangle = 0$, bu isə düz deyil. Məsələn,

$$\langle \delta, \varphi(x,a) \rangle = \varphi(x,a) \Big/_{x=0} = \varphi(0,a) = e^{-1} \neq 0.$$

Tərif. Tutaq ki, $G \subset R$ - oblastı verilir. $D(G)$ ilə G-də cəmləşən bütün $\varphi \in D$ əsas funksiyaları fəzasını işarə edirik:

$$D(G)=\{\varphi \in D : \sup p\varphi \subset G\}.$$

$D(G)$-də təyin olunan hər bir $f : D(G) \to R$ xətti və kəsilməz funksionalı G-də verilən ümumiləşmiş funksiya adlanır, $f \in D'(G)$.

Əgər $f, g \in D'(G)$ isə və $\forall \varphi \in D(G)$ üçün $\langle f, g\rangle = \langle g, \varphi\rangle$ olursa, onda deyirik ki, G oblastında $f = g$ və bu halda $f = g$, $x \in G$ yazırıq. Xüsusi halda, $\forall \varphi \in D$ üçün $\langle f, g\rangle = \langle g, \varphi\rangle$ olduqda $f = g$ hesab edilir. $f(x)$ G-də verilən adi funksiya, $g \in D'(G)$ ümumiləşmiş funksiya olduqda $\forall \varphi \in D(G)$ üçün $\langle f, \varphi\rangle = \langle g, \varphi\rangle$ olursa, onda deyirlər ki, g funksionalı G oblastında $f(x)$ adi funksiyasına bərabərdir, yəni g ümumiləşmiş funksiyası G oblastında requlyar funksiyadır.

Əgər $\forall \varphi \in D(G)$ üçün $\langle f, \varphi\rangle = 0$ olursa, deyirik ki, $f = 0$ G-də və bu halda $f = 0$, $x \in G$ kimi yazılır.

Məlumdur ki, $x \neq 0$ olan hər yerdə $\delta(x) = 0$ olur. Deməli, $G = \{x \neq 0\}$ oblastında $\delta(x)$ requlyar funksiyadır (və,=0). Əgər $f(x)$ adi funksiyadırsa G oblastında $f(x) = 0$ olması ilə ümumiləşmiş funksiya kimi onun G oblastında 0-a bərabər olması eynigüclü anlayışlar olur. Doğrudan da, $\forall \varphi \in D(G)$ üçün

$$\langle f, \varphi\rangle = \int f(x)\varphi(x)dx = \int_G f(x)\varphi(x)dx + \int_{R\setminus G} f(x)\varphi(x)dx = 0$$

(1-ci toplanan f – in, 2-ci φ – nin hesabına), yəni adi mənada G – də $f(x) = 0$ olması ilə ümumiləşmiş funksiya mənada G – də $f = 0, x \in G$ olması eynigüclüdür.

Teorem. İki $f(x)$ və $g(x)$-adi funksiyaları yalnız və yalnız o zaman eyni $T_f = T_g$ (requlyar) ümumiləşmiş funksiyaları törədirlər ki, sanki hər yerdə $f(x) = g(x)$ olsun.

İsbatı. Tutaq ki, s.h.y. $f(x) = g(x)$. Onda

$$\langle T_f, \varphi\rangle = \int f(x)\varphi(x)dx, \quad \langle T_g, \varphi\rangle = \int g(x)\varphi(x)dx$$

düsturlarından çıxır ki, $T_f = T_g$.

Tərsinə, tutaq ki, $T_f = T_g$. Onda alırıq ki, $\forall \varphi$ üçün

$$\int [f(x) - g(x)]\varphi(x)dx = 0.$$

Əgər $f(x) - g(x) = h(x)$ işarə etsək, $h(x)$-adi funksiyadır və

$$\int h(x)\varphi(x)dx = 0, \ \forall \varphi \in D \qquad (*)$$

olar. Göstərək ki, s.h.y. $h(x) = 0$. Sadə hala baxaq. $D(a,b)$ fəzası $\sup p\, \varphi \subset [a,b]$ olan $\varphi \in D$ kimi əsas funksiyalar fəzasıdır.Deməli $(*)$ münasibəti $\forall \varphi \in D(a,b)$ üçün ödənilir:

$$\int_a^b h(x)\varphi(x)dx = 0 \qquad (**)$$

Belə bir $F(x)$ funksiyasına baxaq:

$$F(x) = \int_a^x h(\xi)d\xi.$$

$F(x)$- kəsilməz olub s.h.y. $F'(x) = h(x)$ olur. $(**)$ inteqralını hissə-hissə inteqralladıqda

$$\int_a^b F(x)\varphi'(x)dx = 0, \forall \varphi \in D(a,b)$$

alırıq. Analizdən məlum olan Dyu-Bua-Reymond lemmasına əsasən buradan çıxır ki, $F(x) = c = const$. Lakin $F(a) = 0$ olduğu üçün alınır ki, $c = 0$, yəni $F(x) \equiv 0$. Onda, s.h.y. $F'(x) = h(x)$ olduğundan alınır ki, s.h.y. $h(x) = 0$, yəni s.h.y. $f(x) = g(x)$.

Nəticə. Adi funksiyalar çoxluğu ilə requlyar ümumiləşmiş funksiyalar çoxluğu arasında qarşılıqlı birqiymətli uyğunluq var. Bu səbəbdən $f(x)$ adi funksiyası ilə onun doğurduğu T_f requlyar ümumiləşmiş funksiyasını eyniləşdirmək olar. Deməli, $f(x) \in E$ olduqda

$$\langle T_f, \varphi \rangle = \int f(x)\varphi(x)dx$$

rerulyar funksional olur, $T_f \in D'$. Əgər $T_f = f$ qəbul etsək, onda $E \subset D'$ olur. Deməli adi funksiyalar sinfi E ümumiləşmiş funksiyalar fəzasının hissəsi olur: hər adi funksiya-ümumiləşmiş funksiyadır, tərsi doğru deyil, çünki $\delta(x) \in D'$, lakin $\delta(x)$-adi funksiya deyil, $\delta(x) \notin E$. Beləliklə, ümumiləşmiş funksiya anlayışı klassik funksiya anlayışının bilavasitə genişlənməsindən ibarətdir. Xüsusi halda, $f(x)=c$ adi funksiyası

$$\langle T_f,\varphi\rangle=\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\varphi(x)dx=c\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(x)dx=\langle c,\varphi\rangle$$

kimi requlyar funksional olur. Bu halda $\langle T_f,\varphi\rangle=c\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(x)dx,\qquad \varphi\in D,$

xətti və kəsilməz funksionalı D-də sabit funksional adlanır və $T_f=c=const$ qəbul edilir. Daha xüsusi halda, ümumiləşmiş funksiya 1 belədir.

$$\langle 1,\varphi\rangle=\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(x)dx.$$

Aşkardır ki, $1\in D'$

2. Sinqulyar funksional $\mathscr{P}\dfrac{1}{x}$. Aşkardır ki, $f(x)=\dfrac{1}{x}$ funksiyası D-də requlyar funksional doğurmur və

$$\left\langle \frac{1}{x},\varphi\right\rangle=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\varphi(x)}{x}dx$$

inteqralı ümumiyyətlə dağılır. Lakin həmin inteqrala Koşinin baş qiyməti mənada baxdıqda o yığılan olur.

Belə bir funksional quraq: $\forall\varphi\in D$ üçün

$$\left\langle \mathscr{P}\frac{1}{x},\varphi\right\rangle=vp\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\varphi(x)}{x}dx\equiv\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{|x|\geq\varepsilon}\frac{\varphi(x)}{x}dx=$$

$$=\lim_{\varepsilon\to 0}\left[\int_{-\infty}^{\varepsilon}\frac{\varphi(x)}{x}dx+\int_{\varepsilon}^{\infty}\frac{\varphi(x)}{x}dx\right].$$

(burada vp simvolu fransızca Valeur principale – baş qiymət deməkdir). Burada 1-ci toplananda $x=-t$ əvəzləməsini etdikdə alırıq:

$$\left\langle \mathscr{P}\frac{1}{x},\varphi\right\rangle=\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\varepsilon}^{\infty}\frac{\varphi(x)-\varphi(-x)}{x}dx=\int_{0}^{\infty}\frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x}dx\ . \qquad (5)$$

Alınan inteqral mütləq yığılır. Doğrudan da, əslində bu inteqral sonlu parça üzrə hesablanır, çünki φ- finitdir. Məsələn, əgər $supp\varphi \subset [a,b]$ isə onda Laqranj düsturuna görə

$$\left|\frac{\varphi(x)-\varphi(-x)}{x}\right| \le 2\sup_{\xi\in[a,b]}|\varphi'(\xi)| < \infty .$$

Onda (5)-dən alarıq:

$$\left|\left\langle \mathscr{P}\frac{1}{x},\varphi\right\rangle\right| \le 2(b-a)\max_{\xi\in[a,b]}|\varphi'(\xi)| < \infty .$$

Deməli, (5) inteqralı sonludur.

Göstərək ki, $\mathscr{P}\frac{1}{x}$ həm də kəsilməzdir. Tutaq ki, $\varphi_\nu \to 0$ (D-də). Bu o deməkdir ki, elə sonlu (-A, A,) parçası var ki, bütün $\nu = 1,2,...,$ üçün

$$supp\varphi_\nu(x) \subset [-A, A]$$

Onda alırıq:

$$\left\langle \mathscr{P}\frac{1}{x},\varphi_\nu\right\rangle \equiv vp\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\varphi_\nu(x)}{x}dx = \varphi_\nu(0)VP\int_{-A}^{A}\frac{dx}{x} + VP\int_{-A}^{A}\frac{\varphi_\nu(x)-\varphi_\nu(0)}{x}dx$$

Burada 1-ci toplanan sıfıra bərabərdir (çünki $\frac{1}{x}$ tək funksiyadır), 2-ci toplanan qarşısındakı vp işarəsini atmaq olar, çünki inteqralaltı funksiya $x = 0$ nöqtəsi ətrafında cəmlənən funksiyadır. Sonlu artımlar (Laqranj) düsturuna görə

$$\left|\frac{\varphi_\nu(x)-\varphi_\nu(0)}{x}\right| \le \max_{\xi\in[-A,A]}|\varphi'_\nu(\xi)| < \infty ,$$

Deməli,

$$\left|Vp\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\varphi_\nu(x)}{x}dx\right| \le 2A\max_{\xi\in[-A,A]}|\varphi'_\nu(\xi)| \to 0, \quad \nu\to\infty$$

yəni

$$\left\langle \mathscr{P}\frac{1}{x},\varphi_\nu\right\rangle \to 0, \nu\to\infty$$

Beləliklə,

$$\left\langle \mathcal{P}\frac{1}{x},\varphi\right\rangle = vp\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\varphi(x)}{x}dx \equiv \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{|x|\ge\varepsilon}\frac{\varphi(x)}{x}dx$$

kimi təyin edilən $\mathcal{P}\frac{1}{x}$ D-də xətti və kəsilməz funksional olur, $\mathcal{P}\frac{1}{x} \in D'$.

Məsələ. İsbat edin ki, $\mathcal{P}\frac{1}{x}$ - sinqulyar funksiyadır: (heç bir adi $f(x)$ funksiyası vasitəsilə onu

$$\left\langle \mathcal{P}\frac{1}{x},\varphi\right\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\varphi(x)dx$$

şəklində yazmaq olmaz).

Misal 2. $f(x)$ - adi funksiya olduqda

$$\langle T,\varphi\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\varphi^{(q)}_{(x)}dx, \quad \varphi\in D, \tag{6}$$

kimi daxil edilən T funksionalı ümumiləşmiş funksiya olur. Çünki inteqral yığılandır və T xəttidir. Digər tərəfdən $\varphi_\nu \to 0$ (D-də) olduqda

$$supp\varphi_\nu(x)\subset[a,b], \quad \nu=1,2,...$$

və

$$\max_{x\in[a,b]}\left|D^q\varphi_\nu(x)\right| \to 0, \ \nu\to\infty$$

olduğu üçün

$$\left|\langle T,\varphi_\nu\rangle\right| = \left|\int_a^b f(x)D^q\varphi_\nu(x)dx\right| \le \max\left|D^q\varphi_\nu(x)\right|\cdot\int_a^b |f(x)| \to 0, \ \nu\to\infty,$$

olur, deməli T-kəsilməzdir, yəni $T\in D'$.

Misal 3. Belə funksionala baxaq: $\forall\varphi\in D$ üçün

$$\langle T,\varphi\rangle = \varphi'(a) \tag{7}$$

Onda $T\in D'$ (göstərin).

Qeyd.(6) və (7) funksionalları da sinqulyar funksiyalardır.

3. D' **fəzasında yığılma. Tərif.** Tutaq ki, $f_n\in D'$-funksionallar ardıcıllığı və $f\in D'$ funksionalı verilib. Əgər $\forall\varphi\in D$ üçün

$$\langle f_n,\varphi\rangle \to \langle f,\varphi\rangle,\quad n\to\infty$$

olursa, onda deyirlər ki, $\{f_n\}$ ardıcıllığı D'-də f-ə yığılır və bu halda $f_n \xrightarrow{D'} f$, $n\to\infty$ və yaxud $f_n \to f$ (D'-də) yazırıq. Bu cür yığılma zəif yığılma adlanır. Deməli, $\forall\varphi\in D$ üçün $\langle f_n,\varphi\rangle$ ədədi ardıcıllığı $\langle f,\varphi\rangle$ ədədinə yığılırsa, onda deyirik ki, $\{f_n\}$ funksionallar ardıcıllığı D'-də f-ə yığılır.

Əgər $f_\varepsilon \in D'$-müəyyən funksionallar ailəsidirsə (ε-parametrdir) və $\forall\varphi\in D$ üçün

$$\langle f_\varepsilon,\varphi\rangle \to \langle f,\varphi\rangle,\quad \varepsilon\to 0$$

olursa, deyirik ki, D' – də $f_\varepsilon \to f$, $\varepsilon \to 0$.

Xüsusi halda, $f_\varepsilon \xrightarrow{D'} \delta(x)$, $\varepsilon\to 0$ o deməkdir ki, $\forall\varphi\in D$ üçün

$$\langle f_\varepsilon,\varphi\rangle \to \langle \delta,\varphi\rangle = \varphi(0),\quad \varepsilon\to 0.$$

3. D' **fəzasının tamlığı.** Tutaq ki, $f_n \in D'$. Əgər $\forall\varphi\in D$ üçün

$$\lim_{n\to\infty}\langle f_n,\varphi\rangle = \langle f,\varphi\rangle$$

olursa, onda $f\in D'$. Belə olduqda deyirlər ki, D' fəzası tam fəzadır.

İsbat etmək olur ki, əgər $\{\langle f_n,\varphi\rangle\}$ ədədi ardıcıllığı $\forall\varphi\in D$ üçün müəyyən $a_\varphi \equiv \langle f,\varphi\rangle$ ədədinə yığılırsa,

$$\lim_{n\to\infty}\langle f_n,\varphi\rangle = \langle f,\varphi\rangle,$$

onda $f\in D'$. Doğrudan da, f – xətti olduğu aşkardır. Göstərmək lazımdır ki, f – kəsilməzdir (və ya f məhduddur). Tutaq ki, $\varphi_\nu \xrightarrow{D} 0$, $\nu\to\infty$. Onda gərək $\langle f,\varphi_\nu\rangle \to 0$ olsun. Əksini fərz edib alırıq ki, elə $a>0$ ədədi var ki, və elə $\varphi_n\in D$ var ki,

$$|\langle f,\varphi_n\rangle| \ge a$$

Şərtə görə $\varphi_n\in D$ olduqda

$$\langle f_\nu,\varphi_n\rangle = \lim_{\nu\to\infty}\langle f_\nu,\varphi_n\rangle.$$

Onda hər bir $n = 1,2,...$ üçün elə ν_n var ki,

$$\left|\left\langle f_{\nu_n}, \varphi_n \right\rangle\right| \geq a.$$

Belə olduqda elə $\phi \in D$ elementini qurmaq olar ki, (bax.[3],səh.22)

$$\left|\left\langle f_{\nu_n}, \phi \right\rangle\right| \geq \nu.$$

Onda $\left\langle f_{\nu_n}, \phi \right\rangle \to \infty$, $\nu \to \infty$. Bu isə $\forall \varphi \in D$ üçün $\left\langle f_\nu, \varphi \right\rangle$ ardıcıllığının yığılan olması şərtinə ziddir.

Təklif. δ-funksiyasını müəyyən əsas funksiyalar ardıcıllığının D'-də limiti kimi almaq olar.

Aşağıdakı əsas funksiyalar ailəsinə baxaq:

$$\omega_\varepsilon(x) = \begin{cases} c_\varepsilon \cdot e^{-\frac{\varepsilon^2}{\varepsilon^2 - x^2}}, & |x| < \varepsilon, \\ 0, & |x| \geq \varepsilon. \end{cases}$$

Aşkardır ki, $\omega_\varepsilon(x) \in D$. Burada c_ε elə seçilir ki,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \omega_\varepsilon(x) dx = 1$$

olsun. Göstərək ki,

$$\omega_\varepsilon(x) \xrightarrow{D'} \delta(x), \quad \varepsilon \to 0.$$

Doğrudan da, aşkardır ki, $\forall \varphi \in D$ üçün:

$$\left|\langle \omega_\varepsilon, \varphi \rangle - \varphi(0)\right| = \left| \int_{|x| \leq \varepsilon} \omega_\varepsilon(x) \varphi(x) dx - \varphi(0) \right| \leq \int_{|x| \leq \varepsilon} \omega_\varepsilon(x) \left|\varphi(x) - \varphi(0)\right| dx.$$

Burada $\varphi(x)$-kəsilməz olduğundan o, $|x| \leq \varepsilon$ oblastında müntəzəm kəsilməzdir. Onda $\forall \eta > 0$ üçün elə $\delta > 0$ var ki, $|x| < \delta$ olduqda $|\varphi(x) - \varphi(0)| < \eta$. Belə olduqda ($\varepsilon \leq \delta$ seçməklə) sonuncu bərabərsizlikdən alınır ki,

$$\left|\langle \omega_\varepsilon, \varphi \rangle - \varphi(0)\right| < \eta,$$

yəni

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\langle\omega_\varepsilon,\varphi\rangle=\varphi(0)=\langle\delta,\varphi\rangle.$$

Beləliklə,

$$\omega_\varepsilon(x)\xrightarrow{D'}\delta(x),\ \ \varepsilon\to 0.$$

Misal 1. İsbat edək ki,

$$f_\varepsilon(x)=\frac{1}{\sqrt{\varepsilon\pi}}e^{-\frac{x^2}{\varepsilon}}\xrightarrow{D'}\delta(x),\ \varepsilon\to 0.$$

Doğrudan da, $\forall\varphi\in D$, $\sup p\varphi\subset[-A,A]$ üçün

$$\langle f_\varepsilon,\varphi\rangle=\int_{-\infty}^{\infty}f_\varepsilon(x)\varphi(x)dx=\frac{1}{\sqrt{\varepsilon\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{x^2}{\varepsilon}}\varphi(x)dx=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{\varepsilon\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{x^2}{\varepsilon}}[\varphi(x)-\varphi(0)+\varphi(0)]=J_1+J_2,$$

burada

$$J_1=\frac{\varphi(0)}{\sqrt{\varepsilon\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{x^2}{\varepsilon}}dx=\varphi(0),$$

$$J_2=\frac{1}{\sqrt{\varepsilon\pi}}\int_{-A}^{A}e^{-\frac{x^2}{\varepsilon}}[\varphi(x)-\varphi(0)]dx.$$

Laqranj düstürünü tətbiq edərək alırıq:

$$|J_2|\le\frac{1}{\sqrt{\varepsilon\pi}}\max_{\xi\in[-A,A]}|\varphi'(\xi)|\cdot\int_{-A}^{A}|x|e^{-\frac{x^2}{\varepsilon}}dx=\frac{2}{\sqrt{\varepsilon\pi}}M\cdot\int_0^A xe^{-\frac{x^2}{\varepsilon}}dx=$$

$$=\frac{M}{\sqrt{\pi}}\sqrt{\varepsilon}\int_0^A e^{-\frac{x^2}{\varepsilon}}d\left(\frac{x^2}{\varepsilon}\right)=-\frac{M\sqrt{\varepsilon}}{\sqrt{\pi}}\left[-e^{-\frac{x^2}{\varepsilon}}\Big/_0^A\right]=$$

$$=\frac{M\sqrt{\varepsilon}}{\sqrt{\pi}}\left[1-e^{-\frac{A^2}{\varepsilon}}\right]\to 0,\ \varepsilon\to 0.$$

Beləliklə, $J_1+J_2\to\varphi(0)$, $\varepsilon\to 0$, yəni

$$\langle f_\varepsilon,\varphi\rangle\to\varphi(0)=\langle\delta,\varphi\rangle.$$

Buradan tələb olunan alınır.

Qeyd. $\delta(x)$ funksiyası müəyyən adi funksiyalar ardıcıllığının D' fəzasında limiti kimi alına bilər.Bu cür ardıcıllıqlar «δ-vari ardıcıllıqlar» adlanır.

Misal 2. $\mathscr{P}\frac{1}{x}$ -sinqulyardır. Belə bir $g_\varepsilon(x)$-adi funksiyalar ardıcıllığına baxaq:

$$g_\varepsilon(x)=\begin{cases}\frac{1}{x}, & |x|>\varepsilon,\\ 0, & |x|<\varepsilon.\end{cases}$$

$g_\varepsilon(x)$-requlyar funksional doğurur. Onda alırıq: $\forall\varphi\in D$,

$$\langle g_\varepsilon,\varphi\rangle=\int_{-\infty}^{\infty}g_\varepsilon(x)\varphi(x)dx=\int_{|x|>\varepsilon}\frac{\varphi(x)}{x}dx,$$

$$\lim_{\varepsilon\to0}\langle g_\varepsilon,\varphi\rangle=\lim_{\varepsilon\to0}\int_{|x|\geq\varepsilon}\frac{\varphi(x)}{x}dx=vp\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\varphi(x)}{x}dx=\left\langle\mathscr{P}\frac{1}{x},\varphi\right\rangle,$$

yəni

$$g_\varepsilon\xrightarrow{D'}\mathscr{P}\frac{1}{x},\ \varepsilon\to0.$$

Deməli sinqulyar $\mathscr{P}\frac{1}{x}$ funksionalı $g_\varepsilon(x)$ adi funksiyalar ardıcıllığının D' fəzasında limiti kimi alınır. Bu fakt ümumi halda da doğrudur: Hər bir ümumiləşmiş funksiyanı müəyyən adi (hətta əsas) funksiyalar ardıcıllığının D'-mənada limiti kimi almaq olur.

4.Soxotski düsturları. Soxotski düsturları D' fəzasında baxılan belə bir limit münasibətidir:

$$\lim_{\varepsilon\to0}\frac{1}{x\pm i\varepsilon}=\mp i\pi\delta(x)+\mathscr{P}\frac{1}{x}.$$

Soldakı limiti $\frac{1}{x\pm i0}$ ilə işarə edirlər. Bu düstur analitik funksiyanın sərhəd qiymətlərini müəyyən etdikdə və kvant mexanikasında geniş tətbiq edilir. D'-də limitin tərifinə əsasən, $\forall\varphi\in D$ üçün alırıq:

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\left\langle \frac{1}{x+i\varepsilon},\varphi\right\rangle = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\varphi(x)}{x+i\varepsilon}dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{-A}^{A}\frac{\varphi(x)}{x+i\varepsilon}dx =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{-A}^{A}\frac{(x-i\varepsilon)[\varphi(x)-\varphi(0)]}{x^2+\varepsilon^2}dx + \varphi(0)\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{-A}^{A}\frac{(x-i\varepsilon)}{x^2+\varepsilon^2}dx = J_1 + J_2,$$

burada

$$J_1 = \varphi(0)\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{-A}^{A}\frac{x}{x^2+\varepsilon^2}dx - \varphi(0)i\cdot\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{-A}^{A}\frac{\varepsilon}{x^2+\varepsilon^2}dx =$$

$$= \frac{\varphi(0)}{2}\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{-A}^{A}\frac{d(x^2+\varepsilon^2)}{x^2+\varepsilon^2} - i2\varphi(0)\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{0}^{A}\frac{d\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)}{1+\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^2} = \frac{\varphi(0)}{2}\lim_{\varepsilon\to 0}\left[\ln(A^2+\varepsilon^2)-\ln(A^2+\varepsilon^2)\right] -$$

$$-i2\varphi(0)\lim_{\varepsilon\to 0} arctg\frac{x}{\varepsilon}\Big/_0^A = i2\varphi(0)\frac{\pi}{2} = \langle -i\pi\delta,\varphi\rangle;\ J_1 = -i\pi\delta(x);$$

İndi J_2-ni çevirək.

$$J_2 =$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{-A}^{A}\frac{(x-i\varepsilon)[\varphi(x)-\varphi(0)]}{x^2+\varepsilon^2}dx = vp\int_{-A}^{A}\frac{x[\varphi(x)-\varphi(0)]}{x^2}dx = \int_{-A}^{A}\frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x}dx.$$

Digər tərəfdən,

$$\left\langle \mathscr{P}\frac{1}{x},\varphi\right\rangle = vp\int_{-A}^{A}\frac{\varphi(x)}{x}dx = vp\int_{-A}^{A}\frac{\varphi(x)-\varphi(0)+\varphi(0)}{x}dx =$$

$$= \varphi(0)vp\int_{-A}^{A}\frac{dx}{x} + vp\int_{-A}^{A}\frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x}dx = vp\int_{-A}^{A}\frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x}dx =$$

$$= \int_{-A}^{A}\frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x}dx.$$

Bunu nəzərə aldıqda

$$J_2 = \left\langle \mathscr{P}\frac{1}{x}, \varphi \right\rangle$$

olur. Beləliklə aldıq ki,

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\left\langle \frac{1}{x+i\varepsilon}, \varphi \right\rangle = \langle -i\pi\delta(x), \varphi\rangle + \left\langle \mathscr{P}\frac{1}{x}, \varphi \right\rangle = \left\langle -i\pi\delta + \mathscr{P}\frac{1}{x}, \varphi \right\rangle,$$

buradan

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{x+i\varepsilon} = -i\pi\delta(x) + \mathscr{P}\frac{1}{x}.$$

Analoji qayda ilə,

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{x-i\varepsilon} = i\pi\delta(x) + \mathscr{P}\frac{1}{x}.$$

Beləliklə, D' -də:

$$\frac{1}{x+i0} = \mp i\pi\delta(x) + \mathscr{P}\frac{1}{x}.$$

D' -xətti fəza olduğundan, buradan çıxır ki, $\dfrac{1}{x-i0} \in D'$.

Kvant mexanikasında δ^+ və δ^- kimi iki funksional geniş tətbiq olunur:

$$\left.\begin{aligned} \delta^+ &= \frac{\delta}{2} + \frac{1}{2i\pi}\mathscr{P}\frac{1}{x} \\ \delta^- &= \frac{\delta}{2} - \frac{1}{2i\pi}\mathscr{P}\frac{1}{x} \end{aligned}\right\}, \delta = \delta^+ + \delta^-.$$

(burada δ–Dirak funksiyasıdır)
Buradan alınır ki,

$$\frac{1}{2}\left[\frac{1}{x+i0} + \frac{1}{x-i0}\right] = \mathscr{P}\frac{1}{x},$$

$$\frac{1}{2i\pi}\left[\frac{1}{x-i0} + \frac{1}{x+i0}\right] = \delta(x).$$

Məsələn, δ^+ belə funksionaldır:

$$\langle \delta^+, \varphi\rangle = \frac{1}{2}\varphi(0) + \frac{1}{2\pi i}\int_0^\infty \frac{\varphi(x) - \varphi(-x)}{x}dx.$$

5. Dağılan inteqralların requlyarlaşdırılması. Tutaq ki, $f(x)$ müəyyən x_0 nöqtəsindən başqa hər yerdə lokal inteqrallanır (məsələn, $f(x)=\frac{1}{x}$ funksiyası $x=0$ nöqtəsindən başqa hər yerdə lokal inteqrallanır). Bu halda $\forall\varphi\in D$ üçün

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\varphi(x)dx \tag{1}$$

inteqralı ümumiyyətlə dağılandır. Lakin, əgər $x=x_0$ nöqtəsinin müəyyən $U(x_0)$ ətrafında $\varphi=0$ olarsa, onda (1) inteqralı yığılır. Elə $F\in D'$-funksionalı qurmaq istəyirik ki, $U(x_0)$ ətrafında sıfır olan bütün $\varphi\in D$ elementlərində (1) ilə üst-üstə düşsün.Bu halda F funksionalı (1)-in (və yaxud $f(x)$ funksiyasının) **requlyarizasiyası** adlanır. Beləliklə, əgər elə $F\in D'$ varsa ki, x_0-ın müəyyən ətrafında 0-a bərabər olan bütün $\varphi\in D$ funksiyaları üçün $\langle F,\varphi\rangle=\int f(x)\varphi(x)dx$ olur, onda F funksionalı $f(x)$-in **requlyarizasiyası** adlanır.

Misal. $f(x)=\frac{1}{x}$. Belə bir funksional quraq:

$\forall\varphi\in D$ üçün

$$\langle F,\varphi\rangle=\int_{-\infty}^{-a}\frac{\varphi(x)}{x}dx+\int_{-a}^{b}\frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x}dx+\int_{b}^{\infty}\frac{\varphi(x)}{x}dx,\ (a,b>0) \tag{2}$$

Asan yoxlamaq olar ki, $F\in D'$. Əgər $\varphi(0)=0$ isə, buradan

$$\langle F,\varphi\rangle=\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\varphi(x)dx$$

alınır, deməli F funksionalı $f(x)$ -in requlyarizatorudur. Beləliklə, $f(x)$ sinqulyar funksiya olduqda $F\in D'$ funksionalı x_0-dan kənarda $f(x)$ ilə üst-üstə düşürsə, onda F-ə $f(x)$-in requlyarizatoru deyirik.

Lemma. utaq ki, müəyyən $m>0$ ədədi üçün $|x|^m\ f(x)$-hasili lokal inteqrallanandır. Onda (1) inteqralı requlyarlaşandır.
Doğrudan da, məsələn, requlyarizasiyanı belə düstürla təyin etmək olar:

$$\langle F,\varphi\rangle=\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\left[\varphi(x)-\sum_{k=0}^{m}\frac{\varphi^{(k)}(0)}{k!}x^k\theta(1-|x|)\right]dx \qquad (3)$$

(burada $\varphi(x)$-dən onun Teylor düsturuna ayrılışında ilk $m+1$ həddi çıxılır. Onda qalıq həddin tərtibi $\geq |x|^m$ olar).

Göstərək ki, $F\in D'$. $\theta(1-|x|)$ -Hevisayd funksiyasıdır, $|x|>1$ - olduqda $\theta(1-|x|)$=0. Onda ($R_m(x)$ -qalıq həddidir).

$$\langle F,\varphi\rangle=\int_{|x|<1} f(x)R_m(x)dx+\int_{|x|>1} f(x)\varphi(x)dx=J_1+J_2, \qquad (4)$$

Burada teoremin şərtini və

$$|R_m(x)|\leq \max\left|\varphi^{(m+1)}(\xi)\right||x|^{m+1},$$

nəzərə aldıqda,

$$|J_1|=\left|\int_{|x|<1} f(x)R_m(x)dx\right|\leq \max\left|\varphi^{(m+1)}(\xi)\right|\cdot\int_{|x|<1}|f(x)||x|^m dx<\infty.$$

$$|J_2|=\left|\int_{|x|>1} f(x)\varphi(x)dx\right|\leq \int_{|x|>1}|f(x)||x|^m\frac{\varphi(x)}{|x|^m}dx\leq \max|\varphi(x)|\cdot\int_{|x|>1}|f(x)||x|^m dx<\infty.$$

alırıq. Beləliklə, $\forall\varphi\in D$ üçün $\langle F,\varphi\rangle$ sonlu ədəddir. $\varphi_\nu\to 0$ (D-də) olsun. Onda $supp\,\varphi_\nu\subset[-A,A]$ və $sup\left|\varphi_\nu^{(k)}(x)\right|\to 0,\ \nu\to\infty$ olur. Bu halda

$$|\langle F,\varphi_\nu\rangle|\leq \max_{|x|\leq A}\left|\varphi_\nu^{(m+1)}(\xi)\right|\cdot\int_{|x|<1}|f(x)||x|^{m+1}dx+\max_{|x|\leq A}|\varphi_\nu(x)|\cdot\int_{|x|>1}|f(x)||x|^m dx$$

münasibətindən çıxır ki, $\nu\to\infty$ olduqda $|\langle F,\varphi_\nu\rangle|\to 0$ olur, yəni F D-də kəsilməzdir.

Beləliklə, $F\in D'$.Əgər $\varphi(0)=0$ olursa, onda bu halda

$$\langle F,\varphi\rangle=\int f(x)\varphi(x)dx.$$

Deməli, F $f(x)$-in requlyarizasiyasını verir.

Qeyd. Əgər $\forall\, m=0,1,2,...$ üçün elə A_m ədədi varsa ki,

$$|f(x)| > \frac{A_m}{|x|^m}$$

olur, onda $|x| \to 0$ olduqda $f(x)$ funksiyası $\frac{1}{|x|}$-in istənilən dərəcəsindən daha yüksək sürətlə sonsuzluğa yaxınlaşır. Bu halda $f(x)$ sinqulyar funksiyasını requlyalaşdırmaq mümkün olmur.

Məsələn, $|f(x)| > e^{\frac{1}{|x|}}$, $x \to 0$ olduqda $f(x)$ funksiyası $\frac{1}{|x|}$-in istənilən dərəcəsindən daha tez sonsuzluğa yaxınlaşır.Ona görə də bu funksiyanın requlyarizasiyası mümkün deyil.

6.Ümumiləşmiş funksiyalar üzərində bəzi əməllər. Yerdəyişmə. 1^0. Tutaq ki, $f(t)$ -adi funksiyadır. Onda $f(t-a)$-adi funksiya olar, bu halda

$$\langle f(t-a),\varphi\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(t-a)\varphi(t)dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\varphi(t+a)dt = \langle f,\varphi(t+a)\rangle.$$

Bu bərabərliyi ixtiyari $T \in D'$ ümumiləşmiş funksiyası üçün tərif olaraq qəbul edirik:

$$\langle T(x-a),\varphi\rangle = \langle T,\varphi(x+a)\rangle.$$

Belə olduqda $T(x-a) \in D'$ olur və o, T-nin a qədər sola sürüşməsi (yerdəyişməsi) adlanır.Xüsusi halda,

$$\langle \delta(x-a),\varphi\rangle = \langle \delta,\varphi(x+a)\rangle = \varphi(a),$$

$$\langle \delta(x+a),\varphi\rangle = \varphi(-a).$$

2^0.Tutaq ki, $f(t)$ -adi funksiyadır. Onda $f(kt)$ -adi funksiya olur ($k = const$). Deməli

$$\langle f(kt),\varphi\rangle = \int f(kt)\varphi(t)dt = \frac{1}{|k|}\int f(\xi)\varphi\left(\frac{\xi}{k}\right)d\xi = \frac{1}{|k|}\left\langle f,\varphi\left(\frac{t}{k}\right)\right\rangle.$$

Bu bərabərliyi $\forall T \in D'$ üçün tərif kimi qəbul edirik: Əgər $T \in D'$, onda

$$\langle T(kt),\varphi\rangle = \frac{1}{|k|}\left\langle T,\varphi\left(\frac{t}{k}\right)\right\rangle.$$

Belə olduqda $T(kt) \in D'$ olur.

Misal 1. $T = \delta(t)$. Onda

$$\langle \delta(kt),\varphi\rangle = \frac{1}{|k|}\left\langle \delta(t),\varphi\left(\frac{t}{k}\right)\right\rangle = \frac{1}{|k|}\varphi(0) = \left\langle \frac{1}{|k|}\delta,\varphi\right\rangle,$$

buradan

$$\delta(kt) = \frac{1}{|k|}\delta(t).$$

Xüsusi halda $(k=-1)$,

$$\delta(t) = \delta(-t),$$

yəni $\delta(t)$-cüt «funksiyadır».

3^0. İndi tutaq ki, $a \in C^\infty(R)$ və $f(t)$-adi funksiyadır. Onda af - adi funksiyadır və o, requlyar funksional törədir: $\forall \varphi \in D$ üçün:

$$\langle af,\varphi\rangle = \int a(t)f(t)\varphi(t)dt = \int f(t)[a(t)\varphi(t)]dt = \langle f,a\varphi\rangle.$$

Buna uyğun olaraq $T \in D'$ ixtiyari olduqda aT belə təyin edilir:

$$\langle aT,\varphi\rangle = \langle T,a\varphi\rangle,\ a\varphi \in D.$$

Onda $aT \in D'$ olur.

Misal 2. Xüsusi halda, $\forall a \in C$ üçün

$$\langle a(t)\delta(t),\varphi\rangle = \langle \delta,a\varphi\rangle = a\varphi/_{t=0} = a(0)\varphi(0) = \langle a(0)\delta(t),\varphi\rangle,$$

yəni $\forall a \in C$ üçün

$$a(t)\delta(t) = a(0)\delta(t).$$

Deməli $\delta(x)$ funksionalı yalnız $x=0$ nöqtəsindəki qiymətlərə «reka-siya» verir.

Xüsusi halda:

$$x\cdot\delta(x)=0,\ x^m\delta(x)=0, m>0$$

$$\sin x\cdot\delta(x)=0,$$

$$\cos x\cdot\delta(x)=\delta(x),$$

$$e^x\delta(x)=\delta(x).$$

Misal 3. Göstərək ki, $x\cdot\mathscr{P}\frac{1}{x}=1$.

Doğrudan da, $\forall \varphi \in D$ üçün alırıq:

$$\left\langle x\cdot\mathscr{P}\frac{1}{x},\varphi\right\rangle = \left\langle \mathscr{P}\frac{1}{x},x\varphi\right\rangle = vp\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x\varphi}{x}dx = \langle 1,\varphi\rangle,$$

yəni

$$x \cdot \mathscr{P}\frac{1}{x} = 1.$$

7. Ümumiləşmiş funksiyaların vurulması. Biz gördük ki, $T \in D'$ olduqda $\forall\ a \in C^{\infty}(R)$ üçün $aT \in D'$ olur. Xüsusi halda, $a(x)\delta(x) = a(0)\delta(x)$ olur. Çox maraqlıdır ki, müəyyən qayda ilə D' daxilində elementlərin hasili təyin edilə bilərmi?

Qeyd edək ki, hətta adi funksiyalar fəzası (E) daxilində elementlərin hasili fəzadan kənara çıxa bilər.
Məsələn,

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{|x|}} \in E$$

olsa da $f^2(x) = \dfrac{1}{|x|} \notin E$ olur. Hər bir adi funksiya eyni zamanda həm də ümumiləşmiş funksiyadır. Deməli, D' fəzasında vurma əməli korrekt deyil. Ümumiləşmiş funksiyalar nəzəriyyəsinin banisi Loran Şvars göstərdi ki, D' fəzasında kommutativ və assosiativ olan vurma əməli daxil etmək mümkün deyil. Əgər belə olsaydı, onda belə bir ziddiyyətli zəncir çevirməsi doğru olardı:

$$0 = 0 \cdot \mathscr{P}\frac{1}{x} = (x \cdot \delta(x))\mathscr{P}\frac{1}{x} = \left(x\mathscr{P}\frac{1}{x}\right) \cdot \delta(x) = 1 \cdot \delta(x) = \delta(x).$$

İki $f, g \in D'$ ümumiləşmiş funksiyasının hasili $f \cdot g$ o zaman mənalı olur ki, birisi nə dərəcədən sinqulyar olduqda, digəri həmin dərəcədən də requlyar olsun. Məsələn, $\delta(x) \cdot \delta(x)$ hasili mənasızdır, lakin $\delta(x) \cdot \delta(x-1)$ hasili mənalıdır və sıfra bərabərdir, çünki $\delta(x)$ sinqulyar olan oblastda ($x = 0$ nöqtəsinin ətrafında) $\delta(x-1)$ requlyardır (və sıfra bərabərdir) və tərsinə.

D' daxilində belə bir tənliyə baxaq:

$$x \cdot T = 0.$$

Bu tənliyin məchul T həllini tapaq. Bilirik ki, $x \cdot \delta(x) = 0$, yəni $\delta(x)$ bu tənliyin həllidir.

Təklif. $T \in D'$ -ixtiyari ümumiləşmiş funksiya olduqda

$$x \cdot T = 0 \tag{1}$$

olması üçün zəruri və kafi şərt

$$T = c\delta(x) \tag{2}$$

olmasıdır, $c = const.$

Doğrudan da $T = c\delta(x)$ olduqda $x \cdot \delta(x) = 0$ olduğundan $cx\delta(x) = 0$ olur. İndi tutaq ki, $xT = 0$. Onda $\forall \varphi \in D$ üçün

$$\langle xT, \varphi \rangle = \langle T, x\varphi \rangle = 0.$$

Deməli, (1) olduqda T funksionalı $x\varphi$ hasili şəklində olan bütün $\phi = x\varphi \in D$ elementlərində sıfra bərabər olur.

Göstərmək olar ki, $\phi \in D$ elementi yalnız o zaman $\phi = x \cdot \varphi$, $\varphi \in D$ hasili kimi yazıla bilir ki, $\phi(0) = 0$ olsun.

Tutaq ki, $\theta \in D$-qeyd olunmuş elementdir, belə ki, $\theta(0) = 1$.

Belə elementə baxaq ki,

$$\chi = \varphi - \varphi(0)\theta(x) \in D.$$

Onda $\chi(0) = 0$, yəni $\chi = x\varphi$. Onda

$$\langle T, \chi \rangle = \langle T, \varphi - \varphi(0)\theta \rangle = \langle T, \varphi \rangle - \varphi(0)\langle T, \theta \rangle \tag{3}$$

Şərtə görə $\theta \in D$ - qeyd olunub, onda $\langle T, \theta \rangle$ qiyməti qeyd olunmuş ədəddir, onu c ilə işarə edək: $\langle T, \theta \rangle = c$. Beləliklə (3)-dən alınır ki,

$$0 = \langle T, x\varphi \rangle = \langle T, \varphi \rangle - c\varphi(0) = \langle T, \varphi \rangle - \langle c\delta(x), \varphi \rangle,$$

buradan

$$T = c\delta(x).$$

8.Ümumiləşmiş fünksiyanın lokal xassələri. Daşıyıcı çoxluq. Artıq biz bilirik ki, ümumiləşmiş funksiyanın ayrı-ayrı nöqtələrdə qiyməti yoxdur. Məsələn, belə demək düzgün olmaz ki, $f \in D'$ ümumiləşmiş funksiyası x_0 nöqtəsində sıfra bərabərdir. Lakin onun x_0 nöqtəsinin müəyyən ətrafında sıfra bərabər olmasını korrekt izah etmək mümkündür .

Tərif. Tutaq ki, $f \in D'$ və $G \subset R$ -müəyyən oblastdır. Əgər $\forall \varphi \in D(G)$ üçün $\langle T, \varphi \rangle = 0$ olursa, onda deyirik ki, G-də $f = 0$ və bunu

$$f = 0, \ x \in G$$

kimi yazırıq.

Tərifə görə $D(G)$-daşıyıcı çoxluqları G-də yerləşən bütün $\varphi \in D$ əsas funksiyaları çoxluğudur. Deməli, $\varphi \in D(G)$ olduqda $supp\,\varphi(x) \subset G$ olur, yəni $x \notin G$ olan nöqtələrdə hər yerdə $\varphi(x) \equiv 0$ olur, yalnız $x \in G$ olduqda $\varphi(x) \neq 0$ ola bilər.

Əgər $f(x)$-adi funksiyadırsa G-də sanki hər yerdə $f(x) = 0$ olduqda o, həm də ümumiləşmiş funksiya kimi də G-də sıfır olur. Doğrudan da, $\forall\, \varphi \in D(G)$ üçün

$$\langle f, \varphi \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\varphi(x)dx = \int_{G} f(x)\varphi(x)dx + \int_{R\setminus G} f(x)\varphi(x)dx = 0$$

(1-ci toplanan $f(x)$-in, 2-ci isə φ-in hesabına sıfır olur). Deməli adi funksiya hər iki mənada G-də sıfıra bərabər olur.Beləliklə, daxil edilən tərif adi tərifin davamı olur.

Tərif. Tutaq ki, $f \in D'$. Əgər x_0 nöqtəsinin heç bir ətrafında $f = 0$ olmursa (hər ətrafda $f \neq 0$ olursa), onda x_0 nöqtəsi f funksionalı üçün ***ciddi nöqtə*** adlanır.

Bütün ciddi nöqtələr çoxluğu f-in daşıyıcı çoxluğu (daşıyıcısı) adlanır və $\sup p\ f$ kimi işarə olunur. $x_0 \in supp\, f$ olması üçün zəruri və kafi şərt x_0-ın istənilən ətrafında $f \neq 0$ olmasıdır. Məsələn, $x = 0$ nöqtəsi $f(x) = x^2$ üçün ciddi nöqtədir (həmin nöqtədə $f(0) = 0$ olsa da).

Deməli, əgər x_0 nöqtəsinin elə ətrafı varsa ki, orada $f = 0$, onda x_0 ciddi nöqtə deyil. Aşkardır ki, daşıyıcı çoxluq qapalı çoxluqdur. O həm də elə minimal qapalı çoxluqdur ki, ondan kənarda $f = 0$ olur.

Daşıyıcı çoxluq məhdud olduqda f-finit funksional adlanır. Əgər $\sup p\ f$ daşıyıcı çoxluğu F çoxluğuna daxildirsə, deyirlər ki, f ümumiləşmiş funksiyası F çoxluğunda cəmlənib: $\sup p\ f \subset F$.

Misal. $supp\ \delta(x) = \{0\}$.

Bunu göstərmək üçün gərək göstərək ki, $x = 0$ nöqtəsinin ixtiyari ətrafında $\delta \neq 0$, bundan əlavə hər bir $x \neq 0$ nöqtəsinin elə ətrafı var ki, orada $\delta(x) = 0$ olur. G ilə $x = 0$ nöqtəsinin ixtiyari ətrafını işarə edək. Onda $D(G)$- yalnız G-də sıfırdan fərqli olan $\varphi \in D$ əsas funksiyaları çoxluğu üçün

$$\langle \delta(x), \varphi(x) \rangle = \varphi(0) \neq 0.$$

İndi tutaq ki, $x_0 \neq 0$ və $V(x_0)-$ x_0-ın elə ətrafıdır ki, o, G ilə kəsişmir: $V(x_0) \cap G = \varnothing$. Onda $\forall \varphi \in D(V(x_0))$ üçün alırıq:

$$\langle \delta, \varphi \rangle = \varphi(0) = 0,$$

çünki o $\notin V(x_0)$ və φ ancaq $V(x_0)$ -da sıfırdan fərqlidir. Deməli, $\delta = 0,\ x \in V(x_0)$.

Nəticə. $supp\,\delta(x-a) = \{a\}$.

İxtiyari $T \in D'$ funksionalına baxaq. Tutaq ki, G elə maksimal oblastdır ki, orada $T = 0$. Onda $F = R \setminus G$ elə minimal qapalı çoxluqdur ki, orada $T \neq 0$. Bu halda F çoxluğu T*-nin* ***daşıyıcı çoxluğu*** *adl*anır və $F = \sup p T$ kimi işarə edilir.

Məsələn, $\delta(x) = 0,\ x \neq 0$ olduqda. Deməli, $G = \{R \setminus 0\}$ oblastında $\delta(x) = 0$ və bu maksimal açıq çoxluqdur ki, orada $\delta = 0$. Onda $F = \{R \setminus G\} = \{0\}$ birelementli çoxluğu $\delta(x)$-in daşıyıcı çoxluğu olur.

Təklif. Tutaq ki, f-finit funksionaldır, əgər $\varphi \in D$ əsas funksiyası $\sup p f = F$ çoxluğunun müəyyən ətrafında sıfra bərabər olursa, onda $\langle f, \varphi \rangle = 0$. Xüsusi halda, φ ilə f-in daşıyıcı·çoxluqları kəsişmədikdə, yəni

$$supp\,\varphi \cap supp\,f = \varnothing \qquad (*)$$

olduqda $\langle f, \varphi \rangle = 0$ olur.

Doğrudan da, tutaq ki, $x_0 \notin supp\,f$. Bu o deməkdir ki, x_0 ciddi nöqtə deyil, onun elə $U(x_0)$ ətrafı var ki, orada $f = 0,\ x \in U(x_0)$. Hər $x_0 \notin \sup p f$ üçün belə bir ətraf var, onda bu kimi bütün ətrafların cəmini G ilə işarə etsək, $f = 0, x \in G$ olar. $(*)$ şərtinə görə $supp\,\varphi \subset G$. Deməli, G-də $\varphi \neq 0$, amma $f = 0$, yəni $\langle f, \varphi \rangle = 0$ olar. Məsələn, $\sup p\,\delta = \{0\}$. Əgər $supp\,\varphi \subset \{x \neq 0\}$ isə, onda $\langle \delta, \varphi \rangle = \varphi(0) = 0$, çünki $0 \notin supp\,\varphi$.

Beləliklə, f ümumiləşmiş funksiyası G oblastında yalnız və yalnız o zaman sıfır olur ki, hər bir $x \in G$ nöqtəsinin müəyyən ətrafında $f = 0$ olsun. Hər nöqtəsinin ətrafında sıfır olan funksional oblastda sıfır olur və tərsinə. Buradan çıxır ki, ümumiləşmiş funksiya özünün lokal qiymətləriylə tamamilə təyin olunur, hər nöqtənin ətrafında onun qiymətləri məlum olduqda bütün fəzada o, təyin olunmuş olur.

§ 4.Ümumiləşmiş funksiyaların diferensiallanması.

1.Tərif və misallar.Ümumiləşmiş funksiyalar aparatı klassik analiz nöqteyi-nəzərdən diferensiallanmayan funksiyaları da differensiallamağa imkan verir. Buna səbəb törəmə anlayışı tərifinin müxtəlif olmasıdır.

Fərz edək ki, $f(t)$-adi kəsilməz-diferensiallanan funksiyadır. Onda $f(t)$ və $f'(t)$ requlyar funksionallar törədir. Bu halda $\forall\, \varphi \in D$ üçün

$$\langle f',\varphi\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f'(t)\varphi(t)dt$$

inteqralı yığılır. Buradan hissə-hissə inteqrallamaqla alırıq:

$$\langle f',\varphi\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f'(t)\varphi(t)dt = f(t)\varphi(t)/_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\varphi'(t)dt =$$

$$= -\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\varphi'(t)dt = -\langle f,\varphi'\rangle$$

Beləliklə, $f'(t)$ törəməsi olan $f(t)$ adi funksiyaları üçün

$$\langle f',\varphi\rangle = -\langle f,\varphi'\rangle \tag{1}$$

bərabərliyi həmişə doğru olur. (1) bərabərliyini ixtiyari $f \in D'$ ümumiləşmiş funksiyasının törəməsi kimi qəbul edirik.

Tərif. $f \in D'$ olduqda

$$\langle g,\varphi\rangle = \langle f,-\varphi'\rangle, \quad \varphi \in D \tag{2}$$

düsturu ilə təyin edilən g funksionalı f-in törəməsi adlanır və f' kimi yazılır .

Aşkardır ki, $g: D \to R$ funksionaldır. Beləliklə, f' törəməsi D fəzasında təyin olunmuş funksionaldır və onun $\langle f',\varphi\rangle$ qiymətləri f funksionalının $-\varphi'$ nöqtələrindəki $\langle f,-\varphi'\rangle$ qiyməti vasitəsilə tapılır.

Bəzən adi funksiyadan fərqli olduğunu qeyd etmək üçün f funksionalının törəməsini f' və ya $\dfrac{Df}{dx}$ kimi işarə edirik. Bu halda (2) tərifi bu şəkli alır: $f \in D'$ üçün f' törəməsi

$$\left\langle \frac{Df}{dx}, \varphi \right\rangle \equiv \langle f, -\varphi' \rangle, \tag{3}$$

və yaxud da

$$\langle f', \varphi \rangle \equiv \langle f, -\varphi' \rangle \tag{4}$$

düsturları vasitəsilə təyin olunan f' funksionalına deyilir. (3) bərabərliy göstərir ki, adi mənada törəməsi olan funksiyanın ümumiləşmiş mənada da törəməsi var və onlar üst-üstə düşür.

Teorem. (2) bərabərliyi ilə təyin olunan g funksionalı D fəzasında xətti və kəsilməzdir, yəni $g \in D'$.

İsbatı: Xəttiliyi yoxlayaq: $\forall\, \varphi, \phi \in D$ və λ, μ ədədləri üçün

$$\langle g, \lambda\varphi + \mu\phi \rangle = -\left\langle f, (\lambda\varphi + \mu\phi)' \right\rangle = -\langle f, \lambda\varphi' + \mu\phi' \rangle = -\lambda\langle f, \varphi' \rangle - \mu\langle f, \phi' \rangle =$$

$$= \lambda\langle f', \varphi \rangle + \mu\langle f', \phi \rangle = \lambda\langle g, \varphi \rangle + \mu\langle g, \phi \rangle.$$

İndi tutaq ki, $\varphi_\nu \xrightarrow{D} 0$. Onda $\varphi'_\nu \xrightarrow{D} 0$ olur. $f \in D'$ funksionalı kəsilməz olduğundan,

$$\langle g, \varphi_\nu \rangle = -\langle f, \varphi'_\nu \rangle \to 0 \qquad \nu \to \infty$$

olur. Beləliklə, $g \in D'$. Bu onu göstərir ki, $\forall\, f \in D'$ üçün $f' \in D'$ olur, yəni hər bir ümumiləşmiş funksiyanın törəməsi də ümumiləşmiş funksiyadır.

Nəticə. $f \in D'$ olduqda $f' \in D'$ və $f'' = (f')'$ olduğu üçün $f'' \in D'$ olur. Bu qayda ilə $\forall\, k$ üçün $f^{(k)} \in D'$ alınır. Beləliklə, hər bir ümumiləşmiş funksiya sonsuz tərtibdən diferensiallanandır.

İnduksiya metodu ilə asan yoxlamaq olur ki, $\forall\, k$ üçün

$$\left\langle f^{(k)}, \varphi \right\rangle = (-1)^k \left\langle f, \varphi^{(k)} \right\rangle, \quad k = 1, 2, \ldots$$

Misal 1. δ – funksiyanın törəmələri:

$$\left\langle \delta^{(k)}, \varphi \right\rangle = (-1)^k \left\langle \delta, \varphi^{(k)} \right\rangle = (-1)^k \varphi^{(k)}(0),$$

yəni $\delta^{(k)}(x)$ belə funksionaldır:

$$\delta^{(k)} : \varphi \to (-1)^k \varphi^{(k)}(0).$$

Misal 2. Hevisayd funksiyasının törəməsi. Belə funksiya verilir.

$$\theta(x) = \begin{cases} 1, & x > 0. \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

Bu funksiya lokal inteqrallanandır, $x \neq 0$ olan hər yerdə adi törəməsi var və $\theta'(x)=0$. Yalnız $x=0$ nöqtəsində kəsilir və bu nöqtədə onun adi törəməsi yoxdur. $\theta(x)$-in bütün ədəd oxunda baxdıqda onun ümumiləşmiş funksiya mənada törəməsini hesablayaq. $\theta(x)$ adi funksiya kimi requlyar funksional törədir, onu θ ilə işarə edək və $\theta \in D'$-in törəməsini tapaq:

Tərifə əsasən $\forall \varphi \in D$ üçün alırıq:

$$\langle \theta', \varphi\rangle = -\langle \theta, \varphi'\rangle = -\int_{-\infty}^{\infty} \theta(x)\varphi'(x)dx = -\int_{0}^{\infty} \varphi'(x)dx = -\varphi(x)/_{0}^{\infty} = \varphi(0) = \langle \delta, \varphi\rangle,$$

buradan

$$\theta' = \delta(x).$$

Beləliklə, $\theta(x)$ adi funksiyasının $x=0$ nöqtəsində kəsilən funksiya olması onun törəməsi düsturunda $\delta(x)$ sinqulyar funksiyasının yaranmasına səbəb olur.

Misal 3. $|x|', \ |x|'', \ |x|''' = ?$

$|x|$-lokal inteqrallanır və hər yerdə kəsilməzdir, lakin $x=0$ nöqtəsində onun klassik mənada törəməsi yoxdur. Biz bütün fəzada bir funksional kimi onun törəməsini tapaq. D'-də törəmənin tərifinə görə $\forall \varphi \in D$ üçün alırıq:

$$\left\langle |x|', \varphi \right\rangle = -\langle |x|, \varphi'\rangle = -\int |x|\varphi'(x)dx = -\int_{-\infty}^{0} |x|\varphi' - \int_{0}^{\infty} |x|\varphi' =$$

$$= \int_{-\infty}^{0} x\varphi' - \int_{0}^{\infty} x\varphi' = x\varphi/_{-\infty}^{0} - \int_{-\infty}^{0} \varphi dx - x\varphi/_{0}^{\infty} + \int_{0}^{\infty} \varphi = -\int_{-\infty}^{0} \varphi + \int_{0}^{\infty} \varphi =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \theta(-x)\varphi + \int_{-\infty}^{\infty} \theta(x)\varphi(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} [\theta(x) - \theta(-x)]\varphi(x)dx =$$

$$= -\int_{-\infty}^{\infty} [sign\, x]\varphi(x)dx = \langle sign\, x, \varphi\rangle,$$

buradan

$$|x|' = sign\, x = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ -1, & x < 0. \end{cases}$$

Onun kimi də:

$$\left\langle |x|'', \varphi \right\rangle = \left\langle \left(|x|' \right)', \varphi \right\rangle = -\left\langle |x|', \varphi' \right\rangle = -\left\langle sign\ x, \varphi' \right\rangle =$$

$$= -\int sign\ x \cdot \varphi'(x)dx = -\int_{-\infty}^{0} sign\ x\varphi' - \int_{0}^{\infty} sign\ x\varphi' = \int_{-\infty}^{0} \varphi' - \int_{0}^{\infty} \varphi' =$$

$$= \varphi /_{-\infty}^{0} - \varphi /_{0}^{\infty} = \varphi(0) + \varphi(0) = 2\varphi(0) = \langle 2\delta, \varphi \rangle,$$

buradan

$$|x|'' = 2\delta(x).$$

Aşkardır ki,

$$|x|^{(III)} = 2\delta', \quad |x|^{(IY)} = 2\delta'', \ldots$$

Qeyd. $|x|$ -adi funksiyasının 2-ci tərtib törəməsi sinqulyar funksiya olur.

Misal 4. $f(x) = \ln|x|$ -lokal inteqrallanan funksiyadır. Göstərək ki, D' fəzasında

$$\left(\ln|x|\right)' = \mathscr{P}\frac{1}{x}.$$

Doğrudan da,

$$\left\langle \left(\ln|x|\right)', \varphi \right\rangle = -\left\langle \ln|x|, \varphi' \right\rangle = -\int_{-\infty}^{\infty} \ln|x| \varphi'(x)dx =$$

$$= -\int_{-\infty}^{0} \ln|x|\varphi'(x)dx - \int_{0}^{\infty} \ln|x|\varphi'(x)dx = J_1 + J_2,$$

burada

$$J_1 = -\int_{-\infty}^{0} \ln|x|\varphi'(x)dx = -\int_{-\infty}^{0} \ln(-x)\varphi'(x)dx = -\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{-\infty}^{-\varepsilon} \ln(-x)\varphi'(x)dx =$$

$$= -\lim_{\varepsilon \to 0}\left[\ln(-x)\varphi(x)/_{-\infty}^{-\varepsilon} - \int_{-\infty}^{-\varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x} dx \right] = -\lim_{\varepsilon \to 0}\left[(\ln\varepsilon)\varphi(-\varepsilon) + \int_{-\infty}^{-\varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x} dx \right].$$

Analoji qayda ilə

$$J_2 = -\int_0^\infty \ln|x|\varphi'(x)dx = -\lim_{\varepsilon\to 0}\int_\varepsilon^\infty \ln x\varphi'(x)dx =$$

$$= -\lim_{\varepsilon\to 0}\left[\ln x\varphi(x)/_\varepsilon^\infty - \int_\varepsilon^\infty \frac{\varphi(x)}{x}dx\right] =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0}\left[-(\ln\varepsilon)\varphi(\varepsilon) - \int_\varepsilon^\infty \frac{\varphi(x)}{x}dx\right].$$

Beləliklə, aldıq ki,

$$\left\langle (\ln|x|)', \varphi \right\rangle = J_1 + J_2 = \lim_{\varepsilon\to 0}(\ln\varepsilon)[\varphi(\varepsilon) - \varphi(-\varepsilon)] + vp\int_{-\infty}^{-\infty}\frac{\varphi(x)}{x}dx =$$

$$= vp\int_{-\infty}^{-\infty}\frac{\varphi(x)}{x}dx = \left\langle \mathscr{P}\frac{1}{x}, \varphi \right\rangle.$$

Deməli, $(\ln|x|)' = \mathscr{P}\frac{1}{x}$.

Qeyd. Aşkardır ki, $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\ln\varepsilon \cdot [\varphi(\varepsilon) - \varphi(-\varepsilon)] = 0.$

Misal 5. Aşağıdakı ümumiləşmiş funksiya verilir:

$$y = x_+^\lambda = \begin{cases} x^\lambda, & x > 0, \\ 0, & x < 0, \end{cases} \quad -1 < \lambda < 0.$$

Bu- lokal inteqrallanan funksiyadır. Lakin onun adi törəməsi $\lambda x_+^{\lambda-1}$ lokal inteqrallanmır, yəni

$$\left\langle \lambda x_+^{\lambda-1} \right\rangle = \int_0^\infty \lambda x^{\lambda-1}\varphi(x)dx \qquad (*)$$

inteqralı dağılır. Lakin bu inteqrala müəyyən məna vermək mümkündür (onu requlyar etmək olur). Alırıq:

$$\langle y', \varphi \rangle = -\langle y, \varphi' \rangle = -\int_0^\infty x^\lambda \varphi'(x)dx = -\lim_{\varepsilon\to 0}\int_\varepsilon^\infty x^\lambda \varphi'(x)dx.$$

Burada $\varphi' dx = du, x^\lambda = v$, $u = \varphi(x) + C$ götürüb, və $C = -\varphi(0)$ götürüb və $\varepsilon^\lambda[\varphi(\varepsilon) - \varphi(0)] \to 0, \varepsilon \to 0$ olduğunu nəzərə alsaq,

$$\langle y',\varphi\rangle = \int_0^{\infty}[\varphi(x)-\varphi(0)]\lambda x^{\lambda-1}\,dx \qquad (**)$$

olar. Bu inteqral yığılır və dağılan $(*)$ inteqralı olaraq məhz $(**)$ inteqralı götürülür. $(**)$ bərabərliyi ilə təyin olunan $y' = \left(x_+^{\lambda}\right)'$ funksionalını təbii olaraq $\lambda x_+^{\lambda-1}$ kimi işarə edirik. Beləliklə:

$$y' = \left(x_+^{\lambda}\right)' = \lambda x_+^{\lambda-1}.$$

Bu funksional requlyar funksional deyil, lakin onu $(**)$ inteqralı şəklində başa düşdükdə alınır ki,

$$\left\langle \lambda x_+^{\lambda-1},\varphi\right\rangle = \int_0^{\infty}[\varphi(x)-\varphi(0)]\lambda x^{\lambda-1}\,dx.$$

Belə olduqda $y' = \lambda x_+^{\lambda-1} \in D'$ olur.

Lemma 1.

$$x^m\delta^{(n)} = \begin{cases} (-1)^m \dfrac{n!}{(n-m)!}\delta^{(n-m)}, & m \le n, \\ 0, & m > n, \end{cases}$$

Doğrudan da, məsələn,

$$\left\langle x^m\delta^{(m)},\varphi\right\rangle = \left\langle \delta^{(m)},x^m\varphi\right\rangle = (-1)^m\left\langle \delta,\left(x^m\cdot\varphi\right)^{(m)}\right\rangle = (-1)^m\left(x^m\cdot\varphi\right)^{(m)}/_{x=0} =$$

$$= (-1)^m\left[\left(x^m\right)^{(m)}\varphi(x) + m\left(x^m\right)^{(m-1)}\varphi'(x) + \ldots + x^m\varphi^{(m)}(x)\right]_{x=0} =$$

$$= (-1)^m\cdot m!\varphi(0) = \left\langle (-1)^m m!\delta,\varphi\right\rangle,$$

yəni

$$x^m\delta^{(m)} = (-1)^m\cdot m!\delta(x).$$

Xüsusi halda :

$$x\delta' = -\delta, \quad x\delta'' = -2\delta', \quad x^2\delta' = 0,$$

$$x\cdot\delta^{(m)} = -m\cdot\delta^{(m-1)}.$$

Beləliklə, $x^m\delta^{(n)}(x)$ əmsalında məxsusiyyət dərəcəsi $m>n$ olduqda $\delta^{(n)}$ -nin məxsusiyyətini yox edir, nəticədə 0-a bərabər alınır.

Lemma 2. $a\in C^{\infty}$ olduqda:

$$a(t)\delta^{(m)}(t)=a(0)\delta^{(m)}(t)-ma'(0)\delta^{(m-1)}(t)+$$
$$+\frac{m(m-1)}{2!}a''(0)\delta^{(m-2)}(t)+\ldots+(-1)^m a^{(m)}(0)\delta(t).$$

Xüsusi halda,

$$a\delta'=a(0)\delta'(t)-a'(0)\delta(t). \tag{5}$$

Doğrudan da,

$$\langle a\delta',\varphi\rangle=\langle\delta',a\varphi\rangle=-\left\langle\delta,(a\varphi)'\right\rangle=-(a\varphi)'\,/_{t=0}=$$
$$=-a(0)\varphi'(0)-a'(0)\varphi(0)=\langle a(0)\delta'-a'(0)\delta,\varphi\rangle,$$

buradan, (5) alınır. Bunun kimi də

$$a\delta'(t-t_0)=a(t_0)\delta'(t-t_0)-a'(t_0)\delta(t-t_0).$$

2.Törəmənin bəzi xassələri. Tutaq ki, $a\in C^{\infty}(R)$ -sonsuz diferensiallanan funksiyadır. Onda $\forall\varphi\in D$ üçün $a\varphi\in D$ olar və $f\in D'$ olduqda $\langle f,a\varphi\rangle$ qiymәti vardır.

Xassə 1. $\forall f\in D'$ üçün

$$(af)'=a'f+af'. \tag{6}$$

İsbatı: Tərifə görə $\forall\varphi\in D$ üçün alırıq:

$$\left\langle(af)',\varphi\right\rangle=-\langle af,\varphi'\rangle=-\langle f,a\varphi'\rangle=-\langle f,a\varphi'+a'\varphi-a'\varphi\rangle=$$
$$=-\left\langle f,(a\varphi)'\right\rangle+\langle f,a'\varphi\rangle=\langle f',a\varphi\rangle+\langle a'f,\varphi\rangle=\langle af'+a'f,\varphi\rangle,$$

buradan (6) alınır.

Xassə 2. Tutaq ki, $D=\dfrac{d}{dx}$. Belə polinoma baxaq:

$$P(D)=a_0D^n+a_1D^{n-1}+\ldots+a_n=\sum_{k=0}^{n}a_kD^{n-k}, \tag{7}$$

a_i-sabitlərdir. Onda $f \in D'$ üçün

$$P(D)f = a_0 D^n f + a_1 D^{n-1} f + \ldots + a_n f,$$
$$\langle P(D)f, \varphi\rangle = \left\langle f, (-1)^n a_0 \varphi^{(n)} + (-1)^{n-1} a_1 \varphi^{(n-1)} + \ldots + a_n \varphi\right\rangle =$$
$$= \langle f, P(-D)\varphi\rangle,$$

yəni

$$\langle P(D)f, \varphi\rangle = \langle f, P(-D)\varphi\rangle,$$

burada

$$P(-D) = a_0(-D)^n + a_1(-D)^{n-1} + \ldots + a_n.$$

$P(-D)$ operatoru $P(D)$ diferensial operatorunun qoşması adlanır və onu adətən $P^*(D)$ kimi işarə edirlər:

$$P^*(D) = (-1)^n a_0 D^n + (-1)^{n-1} a_1 D^{n-1} + \ldots + a_n.$$

Beləliklə,

$$\langle P(D)f, \varphi\rangle = \langle f, P^*(D)\varphi\rangle.$$

Qeyd. $f \in D'$ ümumiləşmiş funksiyasının ümumiləşmiş törəməsi f' adi funksiyadırsa, onda f' ilə $f'(x)$ adi törəməsi üst-üstə düşür.

Doğrudan da, $f' = g(x)$ adi funksiya olduqda

$$h(x) = \int_0^x g(t)dt$$

mütləq kəsilməzdir və s.h.y. $h'(x) = g(x)$ -adi funksiya olur. Buradan alırıq ki, $\forall f \in D'$ üçün

$$\langle h', \varphi\rangle = \langle g, \varphi\rangle \tag{8}$$

Digər tərəfdən, $f' = g(x)$ olduğundan

$$\langle f', \varphi\rangle = \langle g, \varphi\rangle \tag{9}$$

(8) və (9)-dan çıxır ki, $\langle h', \varphi\rangle = \langle f', \varphi\rangle$,
yəni $f'(x) = h' = g'(x)$,
buradan

$$f(x) = \int_0^x g(t)dt + C,$$

yəni f -adi funksiyadır və s.h.y. $f'(x) = g(x)$.

Əgər $f(x)$-in adi törəməsini $f'(x)$ işarə etsək, onda $g = f'(x)$ olar.

Xassə 3. Əgər $f = 0,\ x \in G$ isə, onda $D^{\alpha} f = 0,\ x \in G.$

Doğrudan da, göstərək ki, $\forall\, \varphi \in D(G)$ üçün

$$\langle D^{\alpha} f, \varphi \rangle = 0.$$

Şərtə görə $\forall\, \varphi \in D(G)$ üçün $\langle f, \varphi \rangle = 0$. Onda $D^{\alpha}\varphi \in D(G)$ olduğundan,

$$\langle D^{\alpha} f, \varphi \rangle = (-1)^{\alpha} \langle f, D^{\alpha}\varphi \rangle = 0.$$

Buradan çıxır ki,

Nəticə. $supp\ D^{\alpha} f \subset supp\ f.$

Xassə 4. Difrensiallama əməli kəsilməzdir, yəni əgər $f_n \xrightarrow{D'} f$ isə, onda $\forall\, \alpha\ D^{\alpha} f_n \xrightarrow{D'} D^{\alpha} f,\ n \to \infty.$

Doğrudan da, $n \to \infty$ olduqda $\forall\, \varphi \in D$

$$\langle D^{\alpha} f_n, \varphi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle f_n, D^{\alpha}\varphi \rangle \to (-1)^{\alpha} \langle f, D^{\alpha}\varphi \rangle = \langle D^{\alpha} f, \varphi \rangle,$$

yəni

$$D^{\alpha} f_n \to D^{\alpha} f, \qquad n \to \infty.$$

Nəticə. Yığılan ardıcıllığı istənilən qədər diferensiallamaq olar, nəticədə limit funksiyanın uyğun törəmələri alınar.

Klassik analizdə bu təklif doğru deyil.

Misal. $f_n(x) = \dfrac{1}{n}\sin nx.$ Bu adi funksiyalar ardıcıllığıdır və hər yerdə müntəzəm olaraq sıfra yığılır:

$$|f_n(x)| \le \frac{1}{n} \to 0, n \to \infty.$$

Lakin $f_n'(x) = \cos nx$ törəmələr ardıcıllığı heç bir limitə yığılmır, xüsusi halda, $f_n'(x) \to 0$ olmur.

Lakin $f_n'(x)$ ardıcıllığı D' fəzasında sıfra yığılır:

$$\langle f_n', \varphi \rangle = -\langle f_n, \varphi' \rangle = -\int_a^b f_n(x)\varphi'(x)dx,$$

buradan alırıq ki,

$$\left|\int_a^b f_n(x)\varphi'(x)dx\right| \le \max_{a\le x\le b}|\varphi'(x)|\cdot\int_a^b |f_n(x)|dx \le$$

$$\le \frac{1}{n}(b-a)\max_{a\le x\le b}|\varphi'(x)| \to 0,\ n\to\infty$$

yəni

$$\langle f_n',\varphi\rangle \to 0,\ \forall\varphi\in D.$$

Deməli

$$f_n' \to 0,\ \ D'\text{-də}.$$

Bunun kimi də f_n-in bütün törəmələr ardıcıllığı

$$f_n'',\ f_n''',\ \ldots,\ f_n^{(k)},\ldots$$

D'-də sıfra yığılır.
Doğrudan da, məsələn,

$$\langle f_n'',\varphi\rangle = \langle f_n,\varphi''\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f_n(x)\varphi''(x)dx = \int_a^b f_n(x)\varphi''(x)dx$$

Lakin

$$\left|\int_a^b f_n(x)\varphi''(x)dx\right| \le \max_x|\varphi''(x)|\int_a^b |f_n(x)|dx \le$$

$$\le \frac{1}{n}\max_x|\varphi''(x)|\cdot(b-a) \to 0,\ n\to\infty,$$

yəni

$$f_n'' \xrightarrow{D'} 0,\quad n\to\infty.$$

Nəticə. D' fəzasında $\forall k$ üçün

$$n^k\cos nx \to 0,\quad n\to\infty.$$

$$n^k\sin nx \to 0,\quad n\to\infty.$$

Qeyd. D'-də yığılma anlayışını funksional sıralara da tətbiq etmək olar. Tutaq ki, adi funksional sıra verilir:

$$\sum_{k=1}^{\infty} U_k(x) = S(x).$$

Burada $U_k(x)$-adi funksiyalardır.

Əgər bu sıra ədəd oxunda hər kompakt çoxluqda müntəzəm yığılırsa, onda $S(x)$ adi funksiyadır. Bu halda bu sıranı D' fəzasında istənilən qədər diferensiallamaq olar və alınan sıra D'-də yığılan sıra olar.

Doğrudan da, $\forall |x| \le R$ məhdud x üçün,

$$S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} U_k(x) \Rightarrow S(x), \quad n \to \infty.$$

Buradan çıxır ki, $S_n \xrightarrow{D'} S$, yəni $S_n(x)$ və $S(x)$ adi funksiyalarının yaratdığı requlyar funksionallar ardıcıllığı $S \in D'$ funksionalına yığılır. Onda, diferensiallama əməli D'-də kəsilməz olduğundan çıxır ki, $\forall\ \alpha$ üçün

$$D^{\alpha} S_n \xrightarrow{D'} D^{\alpha} S, \quad n \to \infty.$$

İndi tutaq ki, $U_k \in D'$. Belə sıraya baxaq:

$$\sum_{k=1}^{\infty} U_k. \qquad (*)$$

Xüsusi cəmlər:

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} U_k, n = 1,2,...$$

Əgər $\forall \varphi \in D$ üçün $\langle S_n, \varphi \rangle \to \langle S, \varphi \rangle$, $n \to \infty$ olursa, deyirlər ki, $(*)$ sırası D' fəzasında $S \in D'$ ümumiləşmiş funksiyasına yığılır və bu halda

$$\sum_{k=1}^{\infty} U_k = S \qquad (**)$$

yazılır. Törəmənin xassəsindən çıxır ki, $(*)$ sırası yığılandırsa, onda $\forall\ \alpha$ üçün

$$D^{\alpha} S_n \xrightarrow{D'} D^{\alpha} S, \quad n \to \infty.$$

Onda

$$D^{\alpha}S = \sum_{k=1}^{\infty} D^{\alpha}U_k .$$

Beləliklə, D' -də yığılan sıranı istənilən qədər hədbəhəd diferensiallamaq olar və nəticədə alınan sıralar yenə də D'-də yığılan olar. Klassik analizdə oxşar teoremlər doğru deyil.

Teorem. Tutaq ki, A, B -sabitlərdir və müəyyən m üçün

$$|a_k| \le A|k|^m + B. \tag{10}$$

Onda

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{ikx} \tag{11}$$

sırası D' fəzasında yığılan sıra olur.

İsbatı: Klassik analizə görə (11) sırasının yığılan olması üçün zəruri şərt $a_n \to 0, n \to \infty$ olmasıdır. (10) şərti isə a_k-rın polinom kimi artdığını göstərir, lakin yenə həmin sıra yığılan olur (D' -də).

Aşkardır ki, (10) şərti ödənildikdə

$$\frac{a_0 x^{m+2}}{(m+2)!} + \sum_{\substack{k=-\infty \\ k\neq 0}}^{\infty} \frac{a_k}{(ik)^{m+2}} e^{ikx} \tag{12}$$

sırası bütün ədəd oxunda müntəzəm yığılır. Onda bu sıra həm də D'-də yığılır. Bu halda isə onu $m+2$ dəfə diferensiallasaq alınan sıra yenə D'-də yığılan olar. Sonuncu sıranı $m+2$ dəfə diferensialladıqda isə (11) sırası alınır, yəni o D'-də yığılır.

Nəticə. (11) şəklində olan hər bir sırada a_k əmsalları qüvvət funksiyası kimi artan olduqda D' fəzasında həmişə yığılır.

Veyerştrass sırasında biz gördük ki,

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin 3^n x}{2^n}$$

sırası müntəzəm yığılır və $f(x)$ hər yerdə kəsilməzdir, amma onun heç bir nöqtədə törəməsi yoxdur, formal törəmələr sırası

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{2^n} \cos 3^n x$$

dağılır.

$U_n(x)=\dfrac{\sin 3^n x}{2^n}$ işarə etsək, onda $U_n(x)$- adi funksiyadır və Veyerştrass sırası müntəzəm yığılır. Onda D' fəzasında baxdıqda

$$S_n(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{\sin 3^k x}{2^k}{}_1$$

cəmi

$$S_n(x)\Rightarrow f(x),$$

yəni

$$S_n \xrightarrow{D'} f, \quad n\to\infty.$$

Buradan çıxır ki, $\forall\alpha$ üçün

$$D^\alpha S_n \xrightarrow{D'} D^\alpha f, \quad n\to\infty.$$

Məsələn, $\forall\varphi\in D$ üçün

$$\langle S'_\nu,\varphi\rangle=-\langle S_\nu,\varphi'\rangle=-\sum_{n=0}^{\nu}\frac{1}{2^n}\int_{-\infty}^{\infty}\sin 3^n x\cdot\varphi'(x)dx$$

$$\langle f',\varphi\rangle=-\langle f,\varphi'\rangle=-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^n}\int_{-\infty}^{\infty}\sin 3^n x\cdot\varphi'(x)dx.$$

Buradakı sıra $\forall\varphi$ üçün müntəzəm yığılır. $\nu\to\infty$ olduqda

$$\sum_{n=0}^{\nu}\frac{1}{2^n}\int_{-\infty}^{\infty}\sin 3^n x\cdot\varphi'(x)dx\to\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^n}\int_{-\infty}^{\infty}\sin 3^n x\cdot\varphi'(x)dx,$$

yəni

$$\langle S'_n,\varphi\rangle\to\langle f',\varphi\rangle$$

olur. Buradan

$$S'_\nu\to f' \quad (D'\text{-də}).$$

3. δ**-vari ardıcıllıqlar. Limiti $\delta(x)$ olan adi funksiyalar.** Dirakın δ- funksiyasını bəzi adi funksiyalar ardıcıllığının D' fəzasında limiti kimi təqdim etmək olur. Bu fakt daha ümumi bir faktın nəticəsidir. Belə ki, hər bir sinqulyar funksiyanı müəyyən requlyar funksionallar ardıcıllığının limiti kimi təyin etmək olur. Lakin $\delta(x)$ üçün bir neçə konkret ardıcıllıqları göstərmək praktiki əhəmiyyət daşıyır. Belə

ardıcıllıqların biri ilə biz artıq tanışıq: o, orta sıxlıq funksiyaları ardıcıllığıdır:

$$\rho_\varepsilon(x)=\begin{cases}\dfrac{3}{4\pi\varepsilon^3}, & |x|<\varepsilon,\\ 0, & |x|\geq\varepsilon.\end{cases}$$

Biz gördük ki, zəif limit mənada hesablandıqda (D-də)

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\rho_\varepsilon(x)=\delta(x).$$

Misal 1. Belə bir funksiyaya baxaq:

$$\delta_e(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{e}, & 0\leq x\leq e,\\ 0, & x\notin[0,e]\end{cases}$$

Bu funksiya sahəsi 1 olan düzbucaqlı impuls adlanır, e-impulsun müddəti adlanır.

Beləliklə, $\delta_e(x)$ funksiyası eni e, hündürlüyü isə $\dfrac{1}{e}$ olan düzbücaqlı olur. Onda $\delta_e(x)$ funksiyasını belə təyin etmək olar:

$$\lim_{e\to 0}\delta_e(x)=\delta(x).$$

Aydındır ki, $e\to 0$ olduqda

$$\delta(x)=\lim_{e\to 0}\delta_e(x)=\begin{cases}0, & x\neq 0,\\ \infty, & x=0,\end{cases}$$

həm də

$$\int_{-\infty}^{\infty}\delta_e(x)dx=\int_0^{\varepsilon}\delta_e(x)dx=1,$$

buradan

$$\int_0^{\varepsilon}\delta(x)dx=\lim_{e\to 0}\int_{-\infty}^{\infty}\delta_e(x)dx=1.$$

Misal 2. Belə bir ardıcıllığa baxaq:

$$\delta_k(x)=\begin{cases}0, & x<0,\\ ke^{-kx}, & x\geq 0\end{cases}$$

Görək $\delta(x)$-i $\delta_k(x)$ ardıcıllığının nöqtəvi limiti kimi almaq olarmı?

$$\delta(x)=\lim_{k\to\infty}\delta_k(x).$$

$x>0$ olduqda

$$\lim_{k\to\infty}\delta_k(x)=\lim_{k\to\infty}\frac{k}{e^{kx}}=0,$$

$x<0$ olduqda $\lim\limits_{k\to\infty}\delta_k(x)=0$,

$x=0$ olduqda $\lim\limits_{k\to\infty}\delta_k(x)=\lim\limits_{k\to\infty}k=\infty.$

Beləliklə, alırıq ki,

$$\delta(x)=\begin{cases}0, & x\neq 0,\\ \infty, & x=0.\end{cases}$$

$\forall\,\varepsilon>0$ üçün

$$\int_0^{\varepsilon}\delta_k(x)dx=1-e^{-k\varepsilon}$$

buradan

$$\int_0^{\varepsilon}\delta(x)dx=\lim_{k\to\infty}\int_0^{\varepsilon}\delta_k(x)dx=\lim_{k\to\infty}\left(1-e^{-k\varepsilon}\right)=1.$$

Deməli $\delta(x)=\lim\limits_{k\to\infty}\delta_k(x)$ nöqtəvi limiti $\delta(x)$ Dirak funksiyasının bütün xassələrinə malik olan funksiyadır.

Misal 3. İsbat edək ki,

$$f_\varepsilon(x)=\frac{1}{\pi}\cdot\frac{\varepsilon}{x^2+\varepsilon^2}\xrightarrow{D'}\delta(x),\ \varepsilon\to 0.$$

Tutaq ki, $supp\,\varphi\subset[-A,A]$. Onda $\forall\,\varphi\in D$ üçün alırıq:

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\langle f_\varepsilon,\varphi\rangle=\frac{1}{\pi}\lim_{\varepsilon\to 0}\varepsilon\int\frac{\varphi(x)}{x^2+\varepsilon^2}=\frac{1}{\pi}\lim_{\varepsilon\to 0}\varepsilon\int_{-A}^{A}\frac{\varphi(x)}{x^2+\varepsilon^2}=$$

$$=\frac{\varphi(0)}{\pi}\lim_{\varepsilon\to 0}\varepsilon\int_{-A}^{A}\frac{dx}{x^2+\varepsilon^2}+\frac{1}{\pi}\lim_{\varepsilon\to 0}\varepsilon\int_{-A}^{A}\frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x^2+\varepsilon^2}=J_1+J_2.$$

Toplanan inteqralları ayrılıqda hesablayaq.

$$J_1 = \frac{\varphi(0)}{\pi} \lim_{\varepsilon \to 0} \varepsilon \int_{-A}^{A} \frac{d\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)}{1+\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)^2} = \frac{2\varphi(0)}{\pi} \lim_{\varepsilon \to 0} arctg \frac{A}{\varepsilon} = \varphi(0).$$

İndi 2-ci toplananı qiymətləndirək, göstərək ki, həmin toplanan sıfra bərabərdir. Doğrudan da, Laqranj düsturuna əsasən,

$$|\varphi(x) - \varphi(0) \leq |x| \max |\varphi'(\xi)| = |x| \cdot M,$$

burada

$$M = \max |\varphi'(\xi)|.$$

Onda

$$J_2 = \left| \frac{1}{\pi} \varepsilon \int_{-A}^{A} \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x^2 + \varepsilon^2} dx \right| \leq \frac{\varepsilon}{\pi} \cdot M \cdot \int_{-A}^{A} |x| \frac{1}{x^2 + \varepsilon^2} dx =$$

$$= \frac{M}{\pi} \cdot \varepsilon \cdot 2 \int_{0}^{A} \frac{x dx}{x^2 + \varepsilon^2} = \frac{M\varepsilon \cdot}{\pi} \cdot \int_{0}^{A} \frac{d\left(x^2 + \varepsilon^2\right)}{x^2 + \varepsilon^2} = \frac{M\varepsilon \cdot}{\pi} \cdot \ln\left(1 + \frac{A^2}{\varepsilon^2}\right) \to 0, \ \varepsilon \to 0$$

Beləliklə, aldıq ki, $\forall \varphi \in D$

$$\left\langle \lim_{\varepsilon \to 0} f_\varepsilon, \varphi \right\rangle = \langle \delta, \varphi \rangle,$$

yəni

$$f_\varepsilon(x) \xrightarrow{D'} \delta(x), \ \varepsilon \to 0.$$

Teorem. Tutaq ki, mütləq inteqrallanan $f_n(x)$ funksiyalar ardıcıllığı aşağıdakı iki şərti ödəyir:

a) $\forall M > 0$ ədədi üçün, $|a| < M$, $|b| < M$ olduqda ($a \neq 0$, $b \neq 0$)

$$\left| \int_a^b f_n(x) dx \right| \leq k < \infty$$

(müntəzəm məhduddur).

b) ixtiyari qeyd olunmuş a və b ədədləri üçün

$$\lim_{n \to \infty} \int_a^b f_n(x) dx = \begin{cases} 1, & a < 0 < b \ \text{olduqda}, \\ 0, & \text{qalan hallarda}. \end{cases}$$

Onda

$$f_n \xrightarrow{D'} \delta(x), \quad n \to \infty.$$

İsbatı. Belə bir funksiyalara baxaq:

$$F_n(x) = \int_{-1}^{x} f_n(t)dt.$$

$F_n(x)$-mütləq kəsilməzdir və s.h.y. $F_n'(x) = f_n(x)$. Aydındır ki,

$$\lim_{n\to\infty} F_n(x) = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 0, & x < 0, \end{cases}$$

başqa sözlə, $F_n(x) \to \theta(x)$, $n \to \infty$, burada $\theta(x)$- Hevisayd funksiyasıdır. Onda buradan çıxır ki, bu yığılma həm də D' fəzasında doğrudur:

$$F_n \xrightarrow{D'} \theta, \; n \to \infty.$$

Buradan çıxır ki, həm də

$$F_n' \xrightarrow{D'} \theta' = \delta(x), \quad n \to \infty.$$

Deməli

$$f_n \xrightarrow{D'} \delta(x), \quad n \to \infty.$$

Misal 4.

$$f_t(x) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4t}}, \; t > 0.$$

Göstərək ki, D'-də

$$f_t(x) \xrightarrow{D'} \delta(x), \quad t \to 0.$$

Bu faktı bilavasitə nümayiş etdirək (başqa cür $f_t(x)$-nin δ-vari olduğunu göstərməklə lemmaya əsaslanmaq olardı). $\forall \varphi \in D$ üçün yazırıq:

$$\langle f_t(x),\varphi\rangle=\frac{1}{2\sqrt{\pi t}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-x^2/4t}\varphi(x)dx=\frac{\varphi(0)}{2\sqrt{\pi t}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-x^2/4t}dt+$$

$$+\frac{1}{2\sqrt{\pi t}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-x^2/4t}[\varphi(x)-\varphi(0)]dx=J_1+J_2,$$

burada

$$J_1=\frac{\varphi(0)}{2\sqrt{\pi t}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-x^2/4t}dt=\frac{\varphi(0)}{2\sqrt{\pi t}}\int_{-\infty}^{\infty}2\sqrt{t}\,e^{-\xi^2}d\xi=\frac{\varphi(0)}{\sqrt{\pi}}\sqrt{\pi}=\varphi(0).$$

İndi göstərək ki, $J_2\to 0,\ t\to 0$. Əslində J_2-də inteqralın sərhəddi $[-A,A]$ olur, çünki $\sup p\,\varphi\in[-A,A]$. Alırıq:

$$\left|\frac{1}{2\sqrt{\pi t}}\int_{-A}^{A}e^{-x^2/4t}[\varphi(x)-\varphi(0)]dx\right|\le\frac{1}{2\sqrt{\pi t}}\int_{-A}^{A}e^{-x^2/4t}|\varphi(x)-\varphi(0)|dx\le$$

$$\le\frac{1}{2\sqrt{\pi t}}\max|\varphi'(\xi)|\cdot\int_{-A}^{A}e^{-x^2/4t}|x|dx=\frac{1}{2\sqrt{\pi t}}\max|\varphi'(\xi)|\cdot 2\int_{0}^{A}xe^{-x^2/4t}dx\le$$

$$\le\frac{1}{\sqrt{\pi t}}\max|\varphi'(\xi)|\cdot\int_{0}^{\infty}xe^{-x^2/4t}dx=\frac{1}{\sqrt{\pi t}}\max|\varphi'(\xi)|\cdot\int_{0}^{\infty}2\sqrt{t}\cdot e^{-\xi^2}2\sqrt{t}\,d\xi=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\max|\varphi'(\xi)|\cdot 4\sqrt{t}\cdot\frac{\sqrt{\pi}}{2}=2\sqrt{t}\cdot\max|\varphi'(\xi)|\to 0,\quad t\to 0.$$

Deməli $J_2\to 0,\ t\to 0$. Onda $J_1+J_2=\langle\delta,\varphi\rangle$.
yəni

$$\frac{1}{2\sqrt{\pi t}}e^{-x^2/4t}\xrightarrow{D'}\delta(x),\ t\to 0.$$

Tapşırıq. $\frac{1}{\varepsilon}e^{-\frac{\pi x^2}{\varepsilon^2}}\xrightarrow{D'}\delta(x),\varepsilon\to 0.$

4.Ümumiləşmiş funksiyanın sinqulyarlıq tərtibi. Biz gördük ki, $\delta(x)$ sinqulyar funksiyanı adi $\theta(x)$ Hevisayd funksiyasının D'-də 1-ci tərtib törəməsi kimi yazmaq olar:

$$\theta'=\delta(x).$$

Sıfır tərtibli törəmə funksiyanın özü olur, δ özü isə sinqulyar funksiyadır. Deməli, $\delta(x)$ adi funksiyanın 1-ci tərtib törəməsi kimi göstərilir. Bu halda deyirlər ki, $\delta(x)$-in sinqulyarlıq tərtibi $=1$. $f \in D'$-nin sinqulyarlıq tərtibini $S(f)$ kimi işarə edirik. Deməli $S(\delta)=1$. Ümumiləşmiş funksiyanı adi funksiyanın törəməsi kimi yazmağın çox böyük əhəmiyyəti vardır. Biz sonralar ümumiləşmiş funksiyanın struktur quruluşları ilə ətraflı tanış olacağıq.

Tutaq ki, $f \in D'$. Əgər elə $g(x)$-adi funksiyası varsa ki, D' fəzasında $f = D^p g(x)$ olur, onda deyirlər ki, f-in sinqulyarlıq tərtibi $\le p$. Əgər heç bir $q < p$ üçün belə adi funksiya yoxsa, onda deyirlər ki, f-in sinqulyarlıq tərtibi p-yə bərabərdir. Daha ümumi tərif belədir:

Tərif. Tutaq ki, $f \in D'(G)$ -ixtiyari ümumiləşmiş funksiyadır. Əgər elə $f_0(x), f_1(x), \ldots, f_p(x)$ adi funksiyaları varsa ki, f - i onlar vasitəsilə bu şəkildə yazmaq olur:

$$f = \sum_{k=0}^{p} D^{\alpha} f_k(x).$$

Onda deyirlər ki, f - in sinqulyarlıq tərtibi $\le p$.

Əgər elə $g_0(x), g_1(x), \ldots, g_k(x)$ adi funksiyaları yoxsa ki, $q < p$ üçün

$$f = \sum_{k=0}^{q} D^{\alpha} g_k(x)$$

şəklində yazmaq mümkün olsun, onda G oblastında $S(f) = p$.

Xüsusi halda, əgər $f_0(x)$-adi funksiyadırsa və $f = D^p f_0(x)$ isə onda $S(f) \le p$. Əgər elə adi $g(x)$ yoxsa ki, $f = D^{p-1} g(x)$ olsun, onda $S(f) = p$.

Misal. $S\left(\mathscr{P}\frac{1}{x}\right) = 1$. Doğrudan da bilirik ki, $(\ln|x|)' = \mathscr{P}\frac{1}{x}$ və $\ln|x|$-adi funksiyadır. Deməli, $S\left(\mathscr{P}\frac{1}{x}\right) \le 1$. $\mathscr{P}\frac{1}{x}$ funksionalı sinqulyardır. Deməli, $S\left(\mathscr{P}\frac{1}{x}\right) = 1$.

Məhdud G oblastında hər bir ümumiləşmiş funksiyanın sonlu sinqulyarlıq tərtibi var, yəni o, adi funksiyanın sonlu tərtib törəməsi şəklində yazıla bilir. Eləcə də, hər bir finit ümumiləşmiş funksiya bütün fəzada sonlu sinqulyarlıq tərtibinə malik olur. Aşkardır ki, $S(f')\leq S(f)+1$.

Ümumi halda, əgər $P\left(\frac{d}{dx}\right)$ operatorunun tərtibi m – dirsə, onda

$$S\left(P\left(\frac{d}{dx}\right)f\right)\leq S(f)+m,$$

yəni diferensialladıqda sinqulyarlıq tərtibi artır. Həm də əgər $S(f)=p_1$, $S(g)=p_2$ - isə, onda

$$S(f+g)\leq \max\{p_1,p_2\}.$$

Sinqulyarlıq tərtibi sonsuz olan ümumiləşmiş funksiya var. Məsələn, $\forall\varphi\in D$ üçün

$$\langle f,\varphi\rangle=\varphi(0)+\varphi'(1)+\varphi''(2)+...+\varphi^{(k)}(k)+...=\sum_{k=0}^{\infty}\varphi^{(k)}(k)$$

olduqda

$$f:\varphi\to\sum_{k=0}^{\infty}\varphi^{(k)}(k)\in R$$

funksionalını heç bir adi funksiyanın sonlu törəməsi kimi göstərmək mümkün deyil. Bu halda $S(f)=\infty$ hesab edilir.

§ 5. Kəsilən adi funksiyanın D'-də diferensiallanması.

1.Adi törəmə ilə ümumiləşmiş törəmə arasında əlaqə düsturları.Bir nöqtədə kəsilən funksiyalar. Klassik analizdə nəikni kəsilən, hətta kəsilməz funksiyanın törəməsi olmaya bilər. Lakin D' fəzasında hər bir lokal inteqrallanan funksiyanın və hər bir ümumiləşmiş funksiyanın istənilən qədər törəməsi var.

Tutaq ki, $f(t)$ $t=t_0$ nöqtəsindən başqa hər yerdə sonsuz diferensiallanan funksiyadır, t_0 nöqtəsində isə kəsilməyə malikdir və

$$\Delta f(t_0)=f(t_0+0)-f(t_0-0).$$

Məsələn, fərz edək ki, $f(t)$ belə ifadə vasitəsilə verilir:

$$f(t)=\begin{cases} f_1(t), & -\infty < t < t_0 \\ f_2(t), & t_0 < t < \infty \end{cases} \quad (1)$$

Belə olduqda

$$\Delta f(t_0)=f_2(t_0)-f_1(t_0)$$

olur. $f(t)$ və $f'(t)$ -adi (lokal inteqrallanan) funksiyalardır. Onda $f(t)$ və $f'(t)$- requlyar funksionallar doğururlar. Həmin funksionalları f və $\{f'(x)\}$ kimi işarə edək. İndi f -in D' -də (ümumiləşmiş) törəməsini hesablayaq. Ümumiləşmiş törəməni f' və yaxud $\frac{Df}{dt}$ kimi, adi törəməni isə $\frac{df}{dt}$ və yaxud $f'(t)$ kimi işarə edirik. Onda alırıq:

$$\left\langle \frac{Df}{dt},\varphi \right\rangle \equiv \langle f',\varphi\rangle = -\langle f,\varphi'\rangle = -\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\varphi'(t)dt =$$
$$= -\int_{-\infty}^{t_0} f_1(t)\varphi'(t)dt - \int_{t_0}^{\infty} f_2(t)\varphi'(t)dt = J_1 + J_2, \quad (2)$$

burada

$$J_1 = -\int_{-\infty}^{t_0} f_1(t)\varphi'(t)dt = -f_1(t_0)\varphi(t_0) + \int_{-\infty}^{t_0} \frac{df_1}{dt}\varphi(t)dt.$$

Analoji qayda ilə,

$$J_2 = f_2(t_0)\varphi(t_0) + \int_{t_0}^{\infty} \frac{df_2}{dt}\varphi(t)dt,$$

$\frac{df(t)}{dt}$ adi törəməni belə başa düşürük ki,

$$\frac{df(t)}{dt} = \begin{cases} \frac{df_1(t)}{dt}, & -\infty < t < t_0 \\ \frac{df_2(t)}{dt}, & t_0 < t < \infty. \end{cases} \quad (3)$$

Onda alırıq ki,

$$J_1+J_2=[f_2(t_0)-f_1(t_0)]\varphi(t_0)+\int_{-\infty}^{\infty}\frac{df(t)}{dt}\varphi(t)dt=\Delta f(t_0)\varphi(t_0)+\int_{-\infty}^{\infty}f'(t)\varphi(t)dt.$$

Beləliklə (2) bu şəkli alır:

$$\langle f',\varphi\rangle=\langle\Delta f(t_0)\delta(t-t_0)+\{f'(t)\},\varphi\rangle,$$

buradan

$$f'=\{f'(t_0)\}+\Delta f(t_0)\delta(t-t_0). \qquad (4)$$

Adətən $f'(t)$ adi törəməsininin doğurduğu requlyar funksionalı $\{f'(t)\}$ sadəcə, $f'(t)$ ilə işarə etmək mənalı olur. Belə olduqda (4) yekun nəticədə bu şəkli alır:

$$f'=f'(t)+\Delta f(t_0)\delta(t-t_0). \qquad (5)$$

Beləliklə, $f(t)$ adi funksiyasının D' -də ümumiləşmiş törəməsi f' onun adi $f'(t)$ törəməsi ilə kəsilmə nöqtəsində $\Delta f(t_0)\delta(t-t_0)$ δ-funksiyası cəminə bərabərdir. Əgər $t_0=0$ olarsa, onda (5) belə olar:

$$f'=f'(t)+\Delta f(0)\cdot\delta(t). \qquad (6)$$

Əgər $\Delta f(0)=1$ isə, onda

$$f'=f'(t)+\delta(t). \qquad (7)$$

Misal 1.

$$f(t)=\theta(t)=\begin{cases}1, & t>0,\\ 0, & t<0.\end{cases}$$

Onda $f_1(t)=1,\ f_2(t)=0,\ \Delta f(0)=1,\ \ f'(t)=\theta'(t)=0$ s.h.y. Deməli $\{f'(t)\}=\{\theta'(t)\}=0$. Onda alırıq ki,

$$\theta'=\delta(t).$$

İndi fərz edək ki, $f(t), f'(t),\ldots, f^{(p)}(t)$-adi törəmələri də t_0 nöqtəsində kəsilən funksiyalardır. Bu halda

$$\Delta f^{(k)}(t_0)=f^{(k)}(t_0+0)-f^{(k)}(t_0-0),\ k=0,1,\ldots,p$$

$$\{f^{(k)}(t)\}=f^{(k)}(t)$$

olar. Məsələn, f'' ümumiləşmiş törəməsini hesablayaq.

$$\langle f'',\varphi\rangle=\langle f,\varphi''\rangle=\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\varphi''(t)dt=\int_{-\infty}^{t_0}+\int_{t_0}^{\infty}=$$

$$=f(t)\varphi'(t)/_{-\infty}^{t_0}-\int_{-\infty}^{t_0}f'(t)\varphi'(t)dt+f(t)\varphi'(t)/_{t_0}^{\infty}-$$

$$-\int_{t_0}^{\infty}f'(t)\varphi'(t)dt=f(t_0-0)\varphi'(t_0)-f'(t)\varphi(t)/_{-\infty}^{t_0}+$$

$$+\int_{-\infty}^{t_0}f''(t)\varphi(t)dt-f(t_0+0)\varphi'(t_0)-f'(t)\varphi(t)/_{t_0}^{\infty}+$$

$$+\int_{t_0}^{\infty}f''(t)\varphi(t)dt=f(t_0-0)\varphi'(t_0)-f(t_0-0)\varphi(t_0)-$$

$$-f(t_0+0)\varphi'(t_0)-f'(t_0+0)\varphi(t_0)+\int_{-\infty}^{\infty}f''(t)\varphi(t)dt=\Delta f(t_0)\varphi'(t_0)+$$

$$+\Delta f'(t_0)\varphi(t_0)+\int_{-\infty}^{\infty}f''(t)\varphi(t)dt=\langle f''(t)+\Delta f(t_0)\delta'(t-t_0)+\Delta f'(t_0)\delta(t-t_0),\varphi\rangle,$$

yəni

$$f''=f''(t)+\Delta f(t_0)\delta'(t-t_0)+\Delta f'(t_0)\delta(t-t_0). \qquad (8)$$

$t_0=0$ olduqda

$$f''=f''(t)+\Delta f(0)\delta'+\Delta f'(0)\delta. \qquad (9)$$

İnduksiya metodu vasitəsilə aşağıdakı düsturlar alınır:

$$f^{(m)}=f^{(m)}(t)+\Delta f(0)\delta^{(m-1)}+\Delta f'(0)\delta^{(m-2)}+\ldots+\Delta f^{(m-1)}(0)\delta.$$

Beləliklə, belə bir təklif isbat edilmiş olur:

Təklif 1.

$$f'=f'(t)+\Delta f(0)\cdot\delta,$$
$$f''=f''(t)+\Delta f(0)\delta'+\Delta f'(0)\cdot\delta,$$
$$f'''=f'''(t)+\Delta f(0)\delta''+\Delta f'(0)\cdot\delta'+\Delta f''(0)\delta,$$
$$-----------------------$$
$$f^{(m)}=f^{(m)}(t)+\Delta f(0)\delta^{(m-1)}+\Delta f'(0)\cdot\delta^{(m-2)}+\ldots.+\Delta f^{(m-1)}(0)\cdot\delta,$$

və yaxud

$$f^{(m)} = \{f^{(m)}(t)\} + \sum_{k=0}^{m-1} \Delta f^{(k)}(0)\delta^{(m-1-k)}(t), \tag{10}$$

burada $\{f^{(m)}(t)\}$ ilə $f^{(m)}(t)$ adi funksiyasının doğurduğu requlyar funksonal işarə olunur.

2. **Kəsilmə nöqtələri çox olan hal.** İndi fərz edək ki, həm $f(t)$, həm də onun bütün adi törəmələri $t_1, t_2, \ldots, t_N$ nöqtələrindən başqa hər yerdə sonsuz diferensiallanır və onlar yalnız $t_1, t_2, \ldots, t_N$ nöqtələrində kəsiləndir.

Təklif 2. Aşağıdakı düsturlar doğrudur:

$$f' = f'(t) + \sum_{i=1}^{N} \Delta f(t_i) \cdot \delta(t - t_i),$$

$$f'' = f''(t) + \sum_{i=1}^{N} \Delta f(t_i) \cdot \delta'(t - t_i) + \sum_{i=1}^{N} \Delta f'(t_i) \cdot \delta(t - t_i)$$

$$f^{(m)} = f^{(m)}(t) + \sum_{i=1}^{N} \Delta f(t_i)\delta^{(m-1)}(t - t_i) + \sum_{i=1}^{N} \Delta f'(t_i) \cdot \delta^{(m-2)}(t - t_i) + \ldots$$

$$\ldots + \sum_{i=1}^{N} \Delta f^{(m-1)}(t_i) \cdot \delta(t - t_i).$$

Beləliklə, $\forall\, m$ üçün

$$f^{(m)} = f^{(m)}(t) + \sum_{i=1}^{N} \sum_{k=0}^{m} \Delta f^{(k)}(t_i)\delta^{(m-1-k)}(t - t_i) . \tag{11}$$

Bu təklifi f – in iki dənə kəsilmə nöqtəsi olan halda isbat edirik. Tutaq ki, $N = 2$ və $f(t)$ və onun bütün törəmələri a və b nöqtələrində kəsilir. Onda

$$f' = f'(t) + \Delta f(a) \cdot \delta(t - a) + \Delta f(b) \cdot \delta(t - b),$$
$$f'' = f''(t) + \Delta f(a) \cdot \delta'(t - a) + \Delta f(b) \cdot \delta'(t - b) +$$
$$+ \Delta f'(a) \cdot \delta(t - a) + \Delta f'(b) \cdot \delta(t - b),$$

$$f^{(m)}(t) = f^{(m)}(t) + \Delta f(a) \cdot \delta^{(m-1)}(t - a) + \Delta f(b) \cdot \delta^{(m-1)}(t - b) +$$
$$+ \Delta f'(a) \cdot \delta^{(m-2)}(t - a) + \Delta f'(b) \cdot \delta^{(m-2)}(t - b) + \Delta f''(b) \cdot \delta^{(m-3)}(t - a) +$$
$$+ \Delta f''(b) \cdot \delta^{(m-3)}(t - b) + \ldots + \Delta f^{(m-1)}(a) \cdot \delta(t - a) + \Delta f^{(m-1)}(b)\delta(t - b).$$

Beləliklə,

$$f^{(m)}=f^{(m)}(t)+\sum_{k=0}^{m-1}\Delta f^{(k)}(a)\delta^{(m-1-k)}(t-a)+$$

$$+\sum_{k=0}^{m}\Delta f^{(k)}(b)\cdot\delta^{(m-1-k)}(t-b).$$

Vacib bir xüsusi hal. Tutaq ki, $f(x)$ funksiyası $x=0$ və $x=1$ sonsuz diferensiallanandır, $f(x)$ özü və bütün törəmələri $x=0$ və $x=1$ nöqtələrində kəsiləndirlər. h_m ilə m-ci törəmənin $x=0$ nöqtəsində sıçrayışını, σ_m ilə onun $x=1$ nöqtəsində sıçrayışını işarə edək:

$$h_m=f^{(m)}(+0)-f^{(m)}(-0),$$

$$\sigma_m=f^{(m)}(1+0)-f^{(m)}(1-0).$$

$f^{(m)}$ ilə $f(t)$ -nin ümumiləşmiş törəməsini, $\{f^{(m)}(t)\}$ ilə adi $f^{(m)}(t)$ törəməsinin yaratdığı requlyar funksionalı işarə edək. Onda aşağıdakı düsturlar doğrudur:

$$f^{(m)}=\{f^{(m)}(t)\}+\sum_{k=0}^{m-1}h_k\delta^{(m-1-k)}(t)+\sum_{k=0}^{m-1}\sigma_k\delta^{(m-1-k)}(t-1)$$

Bir xüsusi halı ayrıca qeyd edək. Tutaq ki, $f(t)$ a və b nöqtələrində kəsiləndir, qalan hər yerdə mütləq kəsilməzdir. Onda bilirik ki, $(*)$ düsturları doğrudur. Fərz edək ki, $f(t)$=0, $t\notin[a,b]$.Onda $f(b+0)=0, f(a-0)=0$. Bu halda $(*)$-dan alınır ki,

$$f'=f'(t)+f(a+0)\delta(t-a)-f(b-0)\delta(t-b).$$

Xüsusi halda $(a=0, b=1)$,

$$f'=\{f'(t)\}+f(+0)\delta-f(1-0)\delta(t-1).$$

$$f''=\{f''(t)\}+f(+0)\delta'-f(1-0)\delta'(t-1)+$$

$$+f'(1-0)\delta(t-1)+f'(0)\delta.$$

Misal 2. $f(t)$ belə verilir:

$$f(t)=\begin{cases}kt-b, & -\infty<t<0,\\ kt+b, & 0<t<\infty.\end{cases}$$

Bu halda

$$f_1(t)=kt-b,\ f_2(t)=kt+b,$$

$$\Delta f(0)=f_2(0)-f_1(0)=2b.$$

Adi törəməni yazsaq,

$$f'(t)=\frac{df(t)}{dt}=k=const; \qquad f''(t)=0,\ldots,f^{(m)}(t)=0.$$

İndi ümumiləşmiş törəmələri hesablayaq.

$$f'=f'(t)+\Delta f(0)\delta(t)=k+2b\delta(t),$$
$$f''=f''(t)+\Delta f(0)\delta'(t)+\Delta f'(0)\delta(t)=2b\delta'(t),$$
$$f'''=2b\delta'',\ldots,f^{(m)}=2b\cdot\delta^{(m-1)}.$$

Misal 3.

$$f(x)=\cos x\theta(x)=\begin{cases}\cos x, & x>0\\ 0, & x<0\end{cases}$$

Aydındır ki, $\Delta f(0)=1$. Onda

$$f'=\{f'(x)\}+\delta(x),$$

burada

$$\langle\{f'(x)\},\varphi\rangle=\int_{-\infty}^{\infty}f'(x)\varphi(x)dx=-\int_{0}^{\infty}\sin x\varphi(x)dx=$$

$$=-\int_{-\infty}^{\infty}\theta(x)\sin x\varphi(x)dx=\langle-\theta(x)\sin x,\varphi\rangle.$$

Beləliklə,

$$(\cos x\cdot\theta(x))'=-\theta(x)\sin x+\delta(x).$$

Analoji qayda ilə

$$(\sin x\theta(x))'=\cos x\cdot\theta(x).$$

Misal 4.

$$f(t)=\begin{cases}0, & t<0,\\ t, & 0<t<1,\\ 0 & t>1.\end{cases}$$

$$\Delta f(0)=0,\ \ \Delta f(1)=-1,$$
$$\Delta f'(0)=1,\ \ \Delta f'(1)=-1.$$
$$f'(x)=\begin{cases}0, & t\notin(0,1)\\ 1, & 0<t<1,\end{cases},\quad f''(x)=0.$$

Onda alırıq:

$$f'=f'(t)-\delta(t-1)$$

$$f''=-\delta'(t-1)+\Delta f'(0)\delta(t)+\Delta f'(1)\delta(t-1)=$$

$$=-\delta'(t-1)+\delta(t)-\delta(t-1).$$

Misal 5. Belə bir triqonometrik sıraya baxaq:

$$f(x)=\sin x+\frac{\sin 2x}{2}+\frac{\sin 3x}{3}+\ldots+\frac{\sin nx}{n}+\ldots \tag{4}$$

Məlumdur ki, $0\le x\le 2\pi$ parçasında bu sıranın cəmi $\dfrac{\pi-x}{2}$ funksiyasına bərabərdir. Deməli $f(x)=\dfrac{\pi-x}{2}$. Bu funksiyanı bütün ədəd oxuna 2π-periodlu funksiya olaraq davam etdirək. Onda, məsələn $2\pi\le x\le 4\pi$ parçasında bu funksiya $\dfrac{3\pi-x}{2}$ olar. Beləliklə, bu funksiya hər yerdə kəsilməzdir, yalnız $x=\pm 2k\pi$ nöqtələrində 1-ci növ kəsilməyə malikdir, belə ki, $\Delta f(\pm 2k\pi)=\pi$ olur. Onda D'-də f-in törəməsi belə olar:

$$f'=\{f'(t)\}+\sum_{k=-\infty}^{\infty}\Delta f(2k\pi)\delta(x-2k\pi)=$$

$$=-\frac{1}{2}+\pi\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(x-2k\pi).$$

Başqa sözlə, bütün ədəd oxunda baxdıqda 2π-periodlu $f(x)=\dfrac{\pi-x}{2}$ funksiyasının törəməsi belə düsturla təyin edilir:

$$f' = -\frac{1}{2} + \pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(x - 2k\pi).$$

Əgər (4) sırasını formal olaraq diferensiallasaq, onda

$$\cos x + \cos 2x + ... + \cos nx + ... = -\frac{1}{2} + \pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(x - 2k\pi) \qquad (*)$$

Analoji qaydada sonrakı törəmələr üçün alırıq ki,

$$\sin x + 2\sin 2x + 3\sin 3x + ... + n\sin nx + ... = -\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta'(x - 2k\pi),$$

$$\cos x + 4\cos 2x + ... + n^2 \cos nx + ... = -\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta''(x - 2k\pi),$$

------- --------- --------- ---------- ---------- ----------

Misal 6. $\sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{ikx} = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(x - 2k\pi).$

İsbatı. Tutaq ki,

$$f(x) = \frac{1}{2} - \frac{x}{2\pi}, \quad x \in [0, 2\pi), \qquad (1)$$

Bu funksiyanı 2π-periodlu davam etdirək. Onda onu Furye sırasına ayırmaq olar:

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ik\pi}. \qquad (2)$$

Furye əmsalları belə tapılır:

$$c_k = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) e^{-ikx} dx. \qquad (3)$$

Məsələn,

$$c_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) dx = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{2} - \frac{x}{2\pi} \right) dx = 0,$$

$$c_k = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(\frac{1}{2}-\frac{x}{2\pi}\right)e^{-ikx}dx = \frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi} e^{-ikx}dx - \frac{1}{4\pi^2}\int_0^{2\pi} x\cdot e^{-ikx}dx =$$

$$= -\frac{1}{4ik\pi}e^{-ikx}\Big/_0^{2\pi} - \frac{1}{4\pi^2}\left[-\frac{1}{ik}xe^{-ikx}\Big/_0^{2\pi} + \frac{1}{ik}\int_0^{2\pi} e^{-ikx}dx\right] =$$

$$= \frac{1}{2ik\pi} - \frac{i}{4k^2\pi^2}\left[e^{-2ik\pi}-1\right] = -\frac{i}{2k\pi}.$$

Beləliklə,

$$f(x) = \sum_{\substack{k=-\infty \\ k\neq 0}}^{\infty} -\frac{i}{2k\pi}e^{ikx} = -\frac{i}{2\pi}\sum_{\substack{k=-\infty \\ k\neq 0}}^{\infty}\frac{1}{k}e^{ikx}. \tag{4}$$

Deməli

$$-\frac{i}{2\pi}\sum_{\substack{k=-n \\ k\neq 0}}^{n}\frac{1}{k}e^{ikx} \to f(x), \qquad n\to\infty.$$

Onda bu ardıcıllıq D'-də yığılır və

$$-\frac{i}{2\pi}\sum_{\substack{k=-n \\ k\neq 0}}^{n}\frac{1}{k}e^{ikx} \xrightarrow{D'} f, \quad n\to\infty.$$

Onda bu ardıcıllığı D' - də diferensiallamaq olar:

$$\frac{1}{2\pi}\sum_{\substack{k=-n \\ k\neq 0}}^{n} e^{ikx} \to f', \qquad n\to\infty. \tag{5}$$

Lakin $f(x)$ $x = 2k\pi$ nöqtəsində kəsilir və

$$\Delta f(2k\pi) = 1,$$

$$f' = \{f'(x)\} + \sum_{k=-\infty}^{\infty}\Delta f(2k\pi)\delta(x-2k\pi).$$

Digər tərəfdən, $f'(x) = -\frac{1}{2\pi}$ olduğundan

$$f' = -\frac{1}{2\pi} + \sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(x-2k\pi)$$

Bunları (5)-də nəzərə aldıqda alırıq ki,

$$\frac{1}{2\pi}\sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{ikx} = \sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(x-2k\pi).$$

Qeyd. Klassik mənada $\sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{ikx}$ sırası dağılan sıradır.

Bu sıra D' – də yığılır və onun cəmi

$$2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(x-2k\pi)$$

olur.

Qeyd. $f, g \in D'$ olduqda $f \cdot g$ hasili korrekt deyil. Bir misalda göstərək ki, burada

$$(fg)' = f'g + fg' \qquad (6)$$

düsturu öz gücündə qalmır, ya sol tərəf mənasızdır, ya sağ tərəf, ya da hər ikisi.

Məsələn, tutaq ki, $f(t), g(t)$ və $f(t)\cdot g(t)$ hasili adi funksiyalardır, $f(t)$ və $g(t)$ $t=0$ nöqtəsində kəsilir. Onda kəsilən funksiyanın D' – də törəməsi düsturuna görə

$$f' = f'(t) + \Delta f(0)\delta(t),$$
$$g' = g'(t) + \Delta g(0)\delta(t),$$
$$(f\cdot g)' = (f(t)g(t))' + \Delta(f\cdot g)(0)\delta(t),$$

Burada

$$\Delta(fg)(0) = f(+0)g(+0) - f(-0)g(-0).$$

Məsələn, $a(t)\delta(t) = a(0)\delta(t)$ nəzərə alsaq,

$$f\cdot g' = f(t)\cdot[g'(t) + \Delta g(0)\delta(t)] = f(t)g'(t) + \Delta g(0)\cdot f(t)\delta(t) =$$
$$= f(t)g'(t) + \Delta g(0)\cdot f(0)\delta(t)$$

olmalıdır. Bu isə mümkün deyil, çünki $f(t)$ $t=0$ nöqtəsində kəsilən funksiyadır, $f(0)$ yoxdur.

Bunun kimi də

$$f'\cdot g = f'(t)g(t) + \Delta f(0)\cdot g(0)\delta(t)$$

mənasızdır. Deməli hətta $f\cdot g$ hasili mənalı olsa belə fg' və $f'g$ mənasız olur, deməli (6) düsturu D' – də ödənilmir.

Misal 7.

$$f(t) = \begin{cases} 0, & t<0. \\ 1, & 0<t<1, \\ t, & t>1. \end{cases} \qquad \Delta f(0) = 1.$$

Onda adi mənada törəmə $t=1$ nöqtəsində kəsiləndir:

$$f'(t)=\begin{cases}0, & -\infty<t<1,\\ 1, & t>1\end{cases}, \qquad \Delta f'(1)=1.$$

Beləliklə aldıq ki,

$$f'=f'(t)+\delta(t),$$

$$f''=\delta'+\delta(t-1),$$

$$f'''=\delta''+\delta'(t-1),\dots,f^{(m)}=\delta^{(m-1)}+\delta^{(m-2)}(t-1).$$

Tapşırıq: $t=0,1,2$ nöqtələrində kəsilən $f(t)$ verilir:

$$f(t)=\begin{cases}0, & t<0,\\ 1, & 0<t<1,\\ t, & 1<t<2,\\ t^2, & t>2.\end{cases}$$

D' fəzasında f', f'', f''' hesablayın.

Cavab: $f'(t)+\delta(t)+2\delta(t-2)$; $\quad f''(t)+\delta'+2\delta'(t-2)+\delta(t-1)+2\delta(t-2)$;
$\delta''+2\delta''(t-2)+\delta'(t-1)+2\delta'(t-2)$.

3. Çalışmalar.

1.İsbat edin:

$$\left(\mathcal{P}\frac{1}{x}\right)'=-\mathcal{P}\frac{1}{x^2}.$$

2. $$\left(\frac{1}{x\pm i\cdot 0}\right)'=\mp i\pi\delta'(x)-\mathcal{P}\frac{1}{x^2},$$

burada

$$\left\langle \mathcal{P}\frac{1}{x^2},\varphi\right\rangle = vp\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x^2}dx.$$

3. $u=c_1+c_2\theta(x)+c_3\delta(x)-\mathcal{P}\dfrac{1}{x}$ funksiyası $x^2u'=1$ tənliyinin həlli olduğunu yoxlayın.

4.İsbat edin:

$$1^0.\ \left(\frac{d}{dx}-\lambda\right)\theta(x)e^{\lambda x}=\delta(x),$$

$$2^0.\ \left(\frac{d^2}{dx^2}-\omega^2\right)\theta(x)\frac{\sin\omega x}{\omega}=\delta(x),$$

$$3^0.\ \frac{d^m}{dx^m}\theta(x)\frac{x^{m-1}}{(m-1)!}=\delta(x),\quad m\ge 1.$$

5.Limitləri tapın (D'-də):

$1^0. \lim\limits_{n\to\infty} \frac{ax}{x^2+a^2}, \quad a>0$

$2^0. \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\delta(x-h)+\delta(x+h)}{2h}$

$3^0. \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\delta(x-2h)+\delta(x+2h)-2\delta(x)}{4h^2}$

6.Göstərin ki, $\frac{n}{\sqrt{\pi}} e^{-n^2x^2} \xrightarrow{D'} \delta(x), \; n\to\infty$

7.Funksiyaların törəmələrini hesablayın.

$1^0. \; f(x)=\begin{cases} x^\lambda, & x>0 \\ 0, & x<0 \end{cases}, \qquad -1<\lambda<0$

$2^0. \; f(x)=\begin{cases} \ln x, & x>0 \\ 0, & x<0. \end{cases}$

8.Hesablayın:

$(|x|\sin x)', \; (|x|\cos x)'.$

9.Hesablayın:

$(e^x sign\, x)', \; (x sign\, x)', \; \left(\frac{d}{dx}+\lambda\right)\theta(x)e^{-\lambda x}.$

10.Göstərin ki, D' – də $\quad x^m f=0 \quad$ tənliyinin həllidir:

$$f=\sum_{k=0}^{m-1} c_k \delta^{(k)}(x), \quad c_k = const.$$

11.Hesablayın: $\left(x\cdot \mathcal{P}\frac{1}{x}\right)'$

12. $f(x)=\begin{cases} 0, & -\infty<t<0, \\ 1, & 0<t<1, \\ t, & 1<t<2, \\ t^2, & 2<t<3, \\ e^t, & t>3. \end{cases}$

f', f'', f''' -hesablayın.

F Ə S İ L - 2

ÜMUMİLƏŞMİŞ FUNKSİYALARDA ADİ DİFERENSİAL TƏNLİKLƏR

1.Bircins tənliklər. Tutaq ki, $a_i(x) \in C^{\infty}(R)$. Belə adi diferensial tənlik verilir:

$$a_0(x)y^{(p)} + a_1(x)y^{(p-1)} + \ldots + a_p(x)y = f(x), \qquad (*)$$

burada $f \in D'$ -verilən, $y \in D'$ məchul ümumiləşmiş funksiyadır.

$$P\left(\frac{d}{dx}\right) \equiv P(D) = \sum_{k=0}^{p} a_k \frac{d^{p-k}}{dx^{p-k}}$$

işarə etsək, $(*)$ tənliyini belə yazmaq olar:

$$P(D)y = f.$$

Bu fəsildə bu kimi adi diferensial tənliklərin D' fəzasında həll olunması məsələləri öyrənilir.

Ən sadə diferensial tənliyə baxaq:

$$y' = 0. \qquad (1)$$

Göstərək ki, bu tənliyin D' fəzasında həlli yalnız $y = c = const$ olur, başqa həlli yoxdur, yəni D' fəzasında onun həlli ancaq klassik həll olur. D' fəzasında (1) tənliyi aşağıdakı tənliyə ekvivalentdir: $\forall \varphi \in D$ üçün

$$\langle y', \varphi \rangle = -\langle y, \varphi' \rangle = 0, \qquad (2)$$

yəni $\langle y, \varphi' \rangle = 0$. Deməli $\langle y', \varphi \rangle = 0$ olduqda y funksionalı bütün $\varphi_0 = \varphi' \in D$ kimi elementlərdə verilmiş olur və φ' -də onun qiyməti =0 olur: $\langle y, \varphi' \rangle = 0$. $\varphi_0 \in D$. Φ_0 ilə D -nin elə $\varphi_0 \in D$ elementləri çoxluğunu işarə edək ki, müəyyən $\varphi \in D$ var ki, $\varphi_0 = \varphi'$ olur:

$$\Phi_0 = \{\varphi_0 \in D,\ \varphi_0 = \varphi', \varphi \in D\}.$$

Aydındır ki, $\Phi_0 \subset D$. Deməli (1) tənliyi verildikdə y həlli Φ_0 çoxluğunda verilmiş olur.

İndi həmin həlli bütün D fəzasına davam etdirmək lazımdır ki, $y \in D'$ olsun. Deməli, Φ_0 fəzasında $y = 0$ olur, çünki $\forall \varphi_0 \in \Phi_0$ üçün

$$\langle y, \varphi_0 \rangle = \langle y, \varphi' \rangle = -\langle y', \varphi \rangle = 0.$$

Lemma 1. $\varphi_0 \in D$ funksiyası müəyyən $\varphi \in D$ elementinin törəməsinə bərabər olması üçün zəruri və kafi şərt belədir:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi_0(x) dx = 0. \qquad (3)$$

Doğrudan da, $\varphi_0 = \varphi'$, $\varphi \in D$ olduqda

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi_0 = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi' = \varphi /_{-\infty}^{\infty} = 0,$$

tərsinə, əgər (3) varsa, onda belə bir funksiya daxil etsək

$$\phi(x) = \int_{-\infty}^{x} \varphi_0(t) dt,$$

onda $\phi \in D$ olar, çünki $\phi \in C^{\infty}(R)$ və ϕ – finitdir. Buradan çıxır ki, $\phi' = \varphi_0$, yəni $\varphi_0 \in \Phi_0$.

Lemma 2. İstənilən $\varphi \in D$ elementini belə yazmaq olar:

$$\varphi = \varphi_1(x) \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) dx + \varphi_0(x), \qquad (4)$$

burada $\varphi_1 \in D$ elə seçilir ki,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi_1(x) dx = 1.$$

Aydındır ki, (4) düsturunda $\varphi_0 \in \Phi_0$ olar, çünki:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi_0 = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi - \int_{-\infty}^{\infty} \varphi \cdot \int \varphi_1 = \int \varphi - \int \varphi = 0.$$

Onda 1-ci lemmaya əsasən, $\varphi \in \Phi_0$. Burada φ_0 elementini belə seçirik:

$$\varphi_0(x) = \varphi(x) \varphi_1(x) \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) dx.$$

(1) tənliyinin həlli olan $y \in D'$ funksional olduğu üçün onun qeyd olunmuş $\varphi_1 \in D$ elementində aldığı qiymət qeyd olunmuş bir ədəd olur, həmin qiyməti c ilə işarə edək: $\langle y, \varphi_1 \rangle = c = const.$ Bunu nəzərə aldıqda (4)-dən alırıq:

$$\langle y,\varphi\rangle=\langle y,\varphi_1\rangle\cdot\int_{-\infty}^{\infty}\varphi dx+\langle y,\varphi_0\rangle.$$

Φ_0-da $y=0$ olduğunu nəzərə aldıqda $(\varphi_0\in\Phi_0)$, buradan çıxır ki, $\forall\varphi\in D$ üçün

$$\langle y,\varphi\rangle=c\cdot\int\varphi dx=\langle c,\varphi\rangle\ ,$$

yəni $y=c$.

Beləliklə, (1) tənliyinin D' fəzasında yeganə həlli $y=c$ olur, yəni klassik həll ilə üst-üstə düşür. D' fəzasında (1) tənliyinin başqa həlli meydana çıxmır.

Nəticə. $f,g\in D'$ üçün $f'=g'$ olduqda $f-g=c$, yəni $f=g+c$ olur.

Tərif. $g'=f$ olduqda g ümumiləşmiş funksiyası f-in **ibtidaisi** adlanır. İki ibtidai funksiya biri digərindən sabitlə fərqlənir: $g_1'=f, g_2'=f$ olduqda

$$g_1'=g_2',$$

yəni $(g_1-g_2)'=0$, deməli $g_1-g_2=c=const.$

Qeyd. Tutaq ki, $f\in D'$ funksiyasının törəməsi adi funksiya olur: $f'=f'(x)$. Onda f özü də adi funksiya olur və onun D'-də törəməsi $f'(x)$ ilə üst-üstə düşür.

Doğrudan da, belə bir g funksiyası quraq:

$$g(x)=\int_0^x f'(\xi)d\xi\ .$$

Onda $g(x)$- mütləq kəsilməzdir və sanki hər yerdə $g'(x)=f'(x)$. Deməli $g\in D'$ və onun D'-də törəməsi var:

$$\langle g',\varphi\rangle=\int_{-\infty}^{\infty}g'(x)\varphi(x)dx=\int_{-\infty}^{\infty}f'(x)\varphi(x)dx,$$

deməli $g'=f'(x)$, buradan çıxır ki, $f=g(x)+c$, yəni f- adi funksiyadır.

2.Bircins tənliklər sistemi. Belə bir sistemə baxaq:

$$\begin{cases} y_0' = a_{00}(x)y_0 + a_{01}(x)y_1 + \ldots + a_{0p-1}y_{p-1}, \\ y_1' = a_{10}(x)y_0 + a_{11}(x)y_1 + \ldots + a_{1p-1}y_{p-1}, \\ ------------------------ \\ y_{p-1}' = a_{p-1,0}(x)y_0 + a_{p-1,1}(x)y_1 + \ldots + a_{p-1,p-1}y_{p-1} \end{cases} \tag{5}$$

burada $a_{00}(x),\ldots,a_{p-1,p-1}(x) \in C^{\infty}(R)$. Göstərək ki, bu sistemin D' fəzasında klassik həldən başqa yeni həlləri yoxdur.

Məlumdur ki, (5) sisteminin həlləri çoxluğu p-ölçülü xətti fəza əmələ gətirir və hər bir xətti asılı olmayan p sayda həllər sistemi həmin fəzanın bazisi olur. Xətti asılı olmayan p sayda həlləri ayrı-ayrı sütun şəklində yazdıqda klassik həllərin bazis sisteminin matrisini belə yazmaq olar:

$$V(x) = \begin{Vmatrix} u_{00}(x),\ldots,u_{0,p-1}(x) \\ ------------ \\ u_{p-1,0}(x),\ldots,u_{p-1,p-1}(x) \end{Vmatrix}$$

(burada hər sütun (5) sisteminin həllidir). $V(x)$ matrisinin determinantı (*vronskian*) sıfırdan fərqli olur. (5) sistemini matris şəklində yazaq:

$$y' = Ay, \tag{6}$$

burada

$$y = (y_0, y_1, \ldots, y_{p-1}) \in D'; \quad A = \|a_{jk}(x)\|, \quad 0 \le j,\ k \le p-1.$$

$V(x)$ matrisinin hər sütunu (5) sisteminin həlli olduğundan $V(x)$ matrisi özü də belə bir diferensial tənliyi ödəyir:

$$V' = AV$$

İndi $z \in D'$ olduqda $y = Vz$ əvəzləməsini daxil edək. Buradan

$$y' = V'z + Vz' = AVz + Vz'$$

Onda (6)-dən alırıq ki,

$$AVz + Vz' = AVz,$$

yəni

$$Vz' = 0,$$

buradan, $\det V \neq 0$ olduğundan,

$$z' = 0$$

alırıq.Bu tənliyin D' fəzasında yalnız $z = c = const$ həlli var. Belə olduqda $y = Vz = cV(x)$ həlli alınar. $V(x)$-in elementləri- adi funksiyalar olduğu üçün $y = cV$ həlli adi funksiya olur. Deməli, bircins sistemin D' fəzasında həlli ancaq klassik həldir, başqa həlli yoxdur.

3.Qeyri-bircins tənliklər. Ən sadə qeyri-bircins tənliyə baxaq:

$$g' = f, \tag{7}$$

burada $f \in D'$ -verilən, $g \in D'$ -məchul ümumiləşmiş funksiyadır.

Təklif. (7) tənliyinin $\forall f \in D'$ üçün D' fəzasında həlli var.

Həmin həll verilən $f \in D'$ ümumiləşmiş funksiyasının ibtidaisi (qeyri-müəyyən inteqralı) adlanır və bu həlli

$$g = \int f dx$$

kimi yazırıq. Verilən (7) tənliyini D' fəzasında ekvivalent şəkildə belə yazmaq olar: $\forall \varphi \in D'$ üçün

$$\langle g', \varphi \rangle = \langle g, -\varphi' \rangle = \langle f, \varphi \rangle. \tag{8}$$

Buradan çıxır ki, f məlum olduqda g funksionalı artıq φ' kimi elementlərdə verilmiş olur, yəni g həlli Φ_0 çoxluğunda verilmiş olur. İndi onu bütün D fəzasına davam etdirmək lazım gəlir. $\forall \varphi \in D$ elementini belə yazmaq olur:

$$\varphi = \varphi_1 \int \varphi + \varphi_0, \tag{*}$$

burada $\varphi_1 \in D$ -qeyd olunub, belə ki, $\int \varphi_1 = 1$.

Qeyd edək ki, $(*)$ düstürü Φ_0 çoxluğu ilə D fəzası arasında qarşılıqlı birqiymətli və kəsilməz uyğunluq yaradır. Məsələn, $\varphi_\nu \to 0$ (D-də) olduqda uyğun düstürda

$$\varphi_{0\nu}(x) = \varphi_\nu(x) - \varphi_1(x) \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_\nu(x) dx$$

olduğundan Φ_0-da $\varphi_{0\nu} \to 0$ olur və tərsinə

Belə bir g_0 funksionalını quraq: $\forall \varphi \in D$ üçün

$$\langle g_0, \varphi \rangle = \langle g, \varphi_0 \rangle. \tag{**}$$

Asan yoxlamaq olar ki, $g_0 \in D'$.

Məlumdur ki, (7) tənliyinin həlli onun bircins tənliyinin ümumi həlli ilə qeyri-bircins tənliyin bir xüsusi həllinin cəminə bərabər olur. Bircins tənliyin həlli $g = c = const$ olur. İndi göstərək ki, g_0 ümumiləşmiş funksiyası (7)-in xüsusi həllidir. Onda (7)-in ümumi həlli

$$g = g_0 + c$$

olur. g_0 funksionalı g-nin Φ_0-dan D-yə davamıdır, yəni g_0 Φ_0-da g ilə üst-üstə düşür, çünki $\varphi \in \Phi_0$ olduqda $\varphi = \varphi_0$ olur va bu halda $(**)$-dan çıxır ki,

$$\langle g_0, \varphi\rangle = \langle g, \varphi_0\rangle = \langle g, \varphi\rangle.$$

Bunu nəzərə aldıqda alırıq: $\forall \varphi \in D$ üçün ($\varphi' \in \Phi_0$)

$$\langle g_0', \varphi\rangle = -\langle g_0, \varphi'\rangle = -\langle g, \varphi'\rangle = \langle g', \varphi\rangle = \langle f, \varphi\rangle,$$

buradan

$$g_0' = f \;.$$

Beləliklə $(**)$ düsturu ilə təyin olunan $g_0 \in D'$ ümumiləşmiş funksiyası (7) tənliyinin xüsusi bir həllidir. Onda həmin tənliyin ümumi həlli

$$g = g_0 + c$$

olur.

Qeyd. Əgər $f = f(x)$-adi funksiyadırsa, onda onun ibtidaisi $F(x)$ (7) tənliyinin həlli olur və bu halda (7)-in ümumi həlli $y = F(x) + c$ olur və bu həll-adi funksiya olur. Başqa sözlə $f = f(x)$ - adi funksiya olduqda (1) tənliyinin D'-də həlli klassik həllidir.

Misal 1. $y' = \delta(x)$.

Klassik analizdə belə diferensial tənlik yoxdur. Bircins tənlik $y' = 0; y = c$ olur. Lakin $y = \theta(x)$ funksiyası verilən qeyri-bircins tənliyin xüsusi həlli olur. Deməli tənliyin D' fəzasında ümumi həlli $y = \theta(x) + c$ olur. Bu funksiya adi funksiya olub, kəsilən funksiyadır və $x = 0$ nöqtəsində adi törəməsi yoxdur. Lakin D' fəzasında y' var və $y' = \delta(x) \in D$.

Misal 2. $y' = \mathscr{P}\dfrac{1}{x}$ tənliyinin klassik həlli yoxdur. Ümumiləşmiş D' fəzasında onun həlli $y = c + \ln|x|$ olur. Bu funksiya adi funksiya olsa da, onun klassik törəməsi yoxdur.

4.Qeyri-bircins sistem. Belə bir qeyri-bircins tənliklər sisteminə baxaq:

$$\begin{cases} y_0' - a_{00}(x)y_0 - a_{01}(x)y_1 - \ldots - a_{0p-1}y_{p-1} = f_0, \\ y_1' - a_{10}(x)y_0 - a_{11}(x)y_1 - \ldots - a_{1p-1}y_{p-1} = f_1, \\ ------------------------ \\ y_{p-1}' - a_{p-1,0}(x)y_0 - a_{p-1,1}(x)y_1 - \ldots - a_{p-1,p-1}y_{p-1} = f_{p-1}, \end{cases} \tag{8}$$

burada $a_{ij}(x) \in C^{\infty}$,· $f_j \in D'$-verilən ümumiləşmiş funksiyalardır. Baxılan sistenm çevirmə vasitəsilə $y' = f$ kimi bir tənliyə gətirilir.

Əgər $V(x)$ (8) sisteminin bircins sisteminin fundamental həllərinin matrisidirsə, onda $y = Vz$ əvəzləməsini edib $(z \in D')$,

$$Vz' = f$$

tənliyi alınır. Buradan

$$z' = V^{-1} f$$

əgər $V^{-1} f = f_1$ işarə etsək,

$$z' = f_1$$

tənliyini alırıq. 1-ci hissədə gördük ki, onun D'-də həlli var və bu həll $z = c + g_0$ kimi tapılır. Bu ifadəni $y = Vz$ əvəzləməsində yazdıqda (8) sisteminin həllini alırıq:

$$y = V(c + g_0) = Vc + Vg_0$$

1-ci toplanan adi funksiya, 2-ci isə ümumiləşmiş funksiya olur və deməli $Vc + Vg_0 \in D'$ olur.

5. Yüksək tərtibli adi diferensial tənlik. p-tərtibli adi diferensial tənlik verilir:

$$y^{(p)} - a_{p-1}(x)y^{(p-1)} - \ldots - a_0(x)y = f, \tag{9}$$

burada $a_j(x) \in C^{\infty}$, $f \in D'$-verilir, $y \in D'$-məchuldur. Əvəzləmə vasitəsilə bu tənliyi (8) sistemi şəklində yazmaq olar.Doğrudan da, belə əvəzləmə edək:

$$y_0 = y,\ y_1 = y', \ldots, y_{p-1} = y^{(p-1)}.$$

Onda belə sistem alınır:

$$\begin{cases} y_0' - 0\cdot y_0 - y_1 - 0\cdot y_2 - \ldots - 0\cdot y_{p-1} = 0, \\ y_1' - 0\cdot y_0 - 0\cdot y_1 - y_2 - \ldots - 0\cdot y_{p-1} = 0, \qquad y' - Ay = f \\ ------------------------- \\ y_{p-1}' - a_{p-1}(x)y_{p-1} - \ldots - a_0 y_0 = f. \end{cases}$$

Bu sistem (8)-in xüsusi halı olur, onun həlli analoji qaydada tapılır.

Nəticə. Bütün hallarda qeyri-bircins tənliklərin sağ tərəfi adi funksiya olduqda tənliyin (sistemin) həlli klassik həll olur və D'-də yeni həll alınmır.

Misal. $Y^{(m)} = 0$. Aydındır ki, $k \le m-1$ tərtibli hər bir polinom D'-də bu tənliyin həlli olur (onun başqa həlləri yoxdur). Doğrudan da, tutaq ki,

$$P(x) = \sum_{k=0}^{m-1} a_k x^k,$$

onda alırıq:

$$\left\langle Y^{(m)}, \varphi \right\rangle = (-1)^m \left\langle y, \varphi^{(m)} \right\rangle = (-1)^m \left\langle \sum_{k=0}^{m-1} a_k x^k, \varphi^{(m)} \right\rangle =$$

$$= (-1)^m \sum_{k=0}^{m-1} a_k \left\langle x^k, \varphi^{(m)} \right\rangle = \left\langle \left(x^k\right)^{(m)}, \varphi \right\rangle = \langle 0, \varphi \rangle = 0.$$

Qeyd. Əmsallarında məxsusiyyət olan diferensial tənliklərin həlləri daha mürəkkəb xarakterli ola bilir. Belə hallarda tənliyin xətti asılı olmayan həlləri sayı onun tərtibindən çox və az ola bilər, məsələn,

$$xy' = 0$$

tənliyinin D'-də iki dənə xətti asılı olmayan həlli var: $y_1 = 1$, $y_2 = \theta(x)$, - bu həllər xətti asılı deyillər. Bunun kimi də

$$-\frac{1}{2}x^3 y' = y$$

tənliyinin D' fəzasında yalnız sıfır həlli var. Onun klassik həlli

$$y = ce^{\frac{1}{x^2}}$$

D' fəzasında həll olmur.

6. D' fəzasında həllin yeganəliyi problemi. Tərif.

$f \in D'$ ümumiləşmiş funksiyası o zaman $x < 0$ oblastında sıfra bərabər hesab olunur ki, $x \ge 0$ olduqda sıfra bərabər olan ($x < 0$ olduqda isə sıfırdan fərqli ola bilər) bütün $\varphi \in D$ əsas funksiyaları üçün $\langle f,\varphi\rangle = 0$ olsun.

Bu tərif adi funksiyanın $x<0$ oblastında sıfra bərabər olması anlayışının davamıdır. Çünki əgər $f(x)$-adi funksiyası $x<0$ olduqda sıfra bərabər olursa, onda $\forall\varphi \in D$ $(x<0)$ üçün alırıq:

$$\langle f,\varphi\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\varphi(x)dx = \int_{-\infty}^{0} + \int_{0}^{\infty} = 0.$$

(1-ci inteqral $f(x)$-in, 2-ci isə φ-nin hesabına sıfra bərabər olur). Deməli f ümumiləşmiş funksiya mənada da $x<0$ oblastında sıfra bərabər olur. Dirakın δ – funksiyası da bu xassəyə malikdir. Doğrudan da, $\forall\varphi \in D$ $(x<0)$ üçün

$$\langle \delta,\varphi\rangle = \varphi(0) = 0$$

olur (çünki $x \geq 0$ olduqda $\varphi = 0$).

Lemma. Əgər $f = 0, x<0$ isə onda f ümumiləşmiş funksiyasının $x<0$ olduqda sıfra bərabər olan yeganə $g \in D'$ ibtidaisi var.

İsbatı. Tutaq ki, $f \in D'$, $f = 0, x<0$. Yeganəlik aşkardır. Doğrudan da, əgər $g_1' = f, g_2' = f$ olursa, belə ki, $x<0$ olduqda $g_1 = 0$, $g_2 = 0$, onda

$$g_1' - g_2' = 0, \ (g_1 - g_2)' = 0, \quad g_1 - g_2 = c.$$

Lakin $x<0$ olduqda $g_1 - g_2 = 0$ olduğundan $c = 0$ olur, yəni $g_1 = g_2$.

İndi göstərək ki, f-in elə g_0 ibtidaisi var ki, $x<0$ olduqda $g_0 = 0$ olur. g_0 olaraq $g' = f$ tənliyini həll edən zaman qurduğumuz

$$\langle g_0,\varphi\rangle = \langle g,\varphi_0\rangle$$

g_0 funksionalını götürək, burada

$$\varphi_0(x) = \varphi(x) - \varphi_1(x)\cdot \int_{-\infty}^{\infty}\varphi(x)dx, \qquad \int_{-\infty}^{\infty}\varphi_1(x)dx = 1,$$

$\varphi_1(x)$ -qeyd olunmuş əsas funksiyadır, belə ki, $x<0$ olduqda $\varphi_1(x)=0$ olur. İndi elə $\varphi \in D$ funksiyalarına baxaq ki, $x>0$ olanda $\varphi(x) = 0$ olur. Belə olduqda $(*)$-dan çıxır ki, $x>0$ oblastında $\varphi_0(x) = 0$ olur.

Onda $\langle g_0,\varphi\rangle=\langle g,\varphi_0\rangle=\langle g,\phi'\rangle=-\langle g',\phi\rangle=-\langle f,\phi\rangle.$ $x>0$ olduqda $\phi=0$. Deməli $\langle f,\phi\rangle=0$, yəni $g_0=0,\ x<0$.

Məlumdur ki, ümumiləşmiş funksiyanın nöqtədə qiyməti yoxdur. Ona görə klassik Koşi məsələsi D' fəzasında aydın deyil.

D' fəzasında belə bir sistemə baxaq:

$$y'-Ay=f, \tag{$*$}$$

burada Deyək ki, $x<0$ oblastında $f=0$.

Təklif. $(*)$ sisteminin $x<0$ olduqda $y(x)=0$ olan həlli var və o həll yeganədir.

İsbatı. $y=Vz$ əvəzləməsi ilə $(*)$ sistemi

$$z'=V^{-1}f\equiv f_1 \tag{$**$}$$

şəklinə düşür, burada aydındır ki, $f_1=0,\quad x<0$.

Onda lemmaya görə $(**)$ sisteminin $x<0$ olduqda sıfra bərabər olan həlli var və o, yeganədir. Belə olduqda isə $y=Vz$ həlli də $x<0$ olanda sıfra bərabər olur və belə həll bir dənə ola bilər.

7. D'-də Koşi məsələsinin qoyuluşu. Əvvəlcə sağ tərəfləri adi funksiyalar olan sistemə baxaq: $(x>0)$,

$$\begin{cases} y_0'-a_{00}(x)y_0-a_{01}(x)y_1-\ldots-a_{0p-1}y_{p-1}=f_0(x), \\ y_1'-a_{10}(x)y_0-a_{11}(x)y_1-\ldots-a_{1,p-1}y_{p-1}=f_1(x), \\ \text{---------------------------} \\ y_{p-1}'-a_{p-1,0}(x)y_0-a_{p-1,1}(x)y_1-\ldots-a_{p-1,p-1}y_{p-1}=f_{p-1}(x), \end{cases} \tag{10}$$

burada $f_0(x),f_1(x),\ldots,f_{p-1}(x)$-adi funksiyalardır. Məlumdur ki, bu sistemin həlli $y(x)=(y_0(x),\ldots,y_{p-1}(x))$ -vektoru $x=0$ olan halda verilən

$$y(x)/_{x=0}\equiv y(0)=(y_0(0),y_1(0),\ldots,y_{p-1}(0)) \tag{11}$$

başlanğıc məlumları vasitəsilə birqiymətli olaraq müəyyən olunur.

Ümumiləşmiş funksiyanın nöqtədə qiyməti mənasız ola bilər. Buna baxmayaraq istəyirik ki, uyğun Koşi məsələsinin analoqunu D' fəzasında qoyaq.

Tutaq ki, $y(x)$-adi funksiyası (10)-(11) məsələsinin adi həllidir. $Y(x)$ ilə elə ümumiləşmiş vektor-funksiyanı işarə edirik ki, o,

$x<0$ olduqda $Y=0$ olur, $x>0$ olduqda isə (10)-(11) məsələsinin həlli olan $y(x)$ vektor-funksiyasına bərabər olur:

$$Y(x)=\begin{cases} 0, & x<0, \\ y(x), & x>0. \end{cases} \tag{12}$$

$Y_1(x)$ ilə elə ümumiləşmiş vektor-funksiyanı işarə edirik ki, o, $x<0$ oblastında sıfra bərabər, $x>0$ olduqda isə adi $y'(x)$ törəməsinə bərabər olsun:

$$Y_1(x)=\begin{cases} 0, & x<0, \\ y'(x), & x>0. \end{cases} \tag{13}$$

Belə olduqda D' fəzasında (1) tənliyi bu şəkli alar:

$$Y_1 - AY = F \tag{14}$$

burada

$$F=\begin{cases} 0, & x<0 \\ f(x), & x>0, \end{cases} \qquad A=\left\| a_{jk}(x) \right\|.$$

Qeyd edək ki, ümumiyyətlə, $Y_1 \neq Y'$. Kəsilən funksiyanın törəməsi düsturuna əsasən :

$$Y' = Y_1 + y(0)\delta(x), \tag{15}$$

buradan

$$Y_1 = Y' - y(0)\delta(x).$$

Bunu nəzərə aldıqda (14)-dən Y üçün belə bir diferensial tənliklər sistemi alınmış olur:

$$Y' - AY = F + y(0)\delta(x) \ . \tag{16}$$

Beləliklə, (16) tənliyi (10)-(11) Koşi məsələsinin D' fəzasında analoqu olur.

(16) tənliyinin ümumi həlli onun bircins tənliyinin ümumi həlli ilə (16)-nin bir xüsusi həlli cəminə bərabər olur. $Y' - AY = 0$ tənliyinin D'-də həlləri ancaq klassik haldən ibarət olur. (16) tənliyinin yeganə olan həlli $Y=0,\ x<0$ şərti daxilində alınır.

Deyilənləri aşağıdakı təklif kimi ifadə etmək olar.

Təklif. Tutaq ki, D'-də belə bir tənliklər sistemi verilib:

$$Y' - AY = F + y(0)\delta(x) = F_1,,$$

burada $y(0)$-verilən adi vektordur. Bu sistemin $x<0$ olduqda $Y=0$ olan yeganə $Y \in D'$ həlli var. Əgər $F_1(x)$ -adi funksiya olarsa, onda $Y \in D'$ həlli belə bir Koşi məsələsinin həllinə uyğun gəlir:

$$y'(x) - Ay(x) = F(x) \qquad (x \geq 0),$$
$$y(x)/_{x=0} = y(0).$$

8.Yüksək tərtibli bir tənlik. Yuxarıda baxılan Koşi məsələsini bir tənlik üçün şərh edək. Tutaq ki, p tərtibli bir tənlik verilir:

$$y^{(p)} - a_{p-1}(x)y^{(p-1)} - \ldots - a_0 y = f(x)\,, \tag{17}$$

$y, f \in D'$. Yeni məchul funksiyalar daxil edək:

$$y_0 = y,\ y_1 = y',\ y_2 = y'', \ldots, y_{p-1} = y^{(p-1)}.$$

Onda (17) tənliyi belə sistemə gəlir:

$$\begin{cases} y_0' - y_1 = 0, \\ y_1' - y_2 = 0, \\ ------------ \\ y_{p-1}' - a_0 y_0 - a_1 y_1 - \ldots - a_{p-1} y_{p-1} = f(x) \end{cases} \tag{18}$$

Sistemin matrisi:

$$A = \left\| \begin{matrix} 0 & -1 & 0 & 0 & . & . & . & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & . & . & . & 0 \\ - & - & - & - & - & - & - & - \\ 0 & 0 & . & . & . & . & . & -1 \\ -a_0 & -a_1 & . & . & . & . & . & -a_{p-1} \end{matrix} \right\|, \quad f_0(x) = \left\| \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ . \\ . \\ f(x) \end{matrix} \right\|, \quad y = \left\| \begin{matrix} y_0 \\ . \\ . \\ . \\ y_{p-1} \end{matrix} \right\|$$

Onda sistem belə olar:

$$y' - Ay = f_0(x)\ . \tag{19}$$

İndi (18) sistemini D'-də yazaq:
Məsələn, $y_0' - y_1 = 0$ tənliyi D'-də

$$Y_0' - Y_1 = y_0(0)\delta(x)$$

tənliyinə keçir, burada

$$Y_0 = \begin{cases} y_0(x), & x \geq 0 \\ 0, & x < 0, \end{cases} \qquad Y_1 = \begin{cases} y_0'(x), & x > 0 \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

Onda

$$\langle Y_0',\varphi\rangle=-\langle Y_0,\varphi'\rangle=-\int_0^{\infty}y_0(x)\varphi'(x)dx=-y_0(x)\varphi(x)/_0^{\infty}+$$

$$+\int_0^{\infty}y_0'(x)\varphi(x)dx=y_0(0)\varphi(0)+\langle Y_1,\varphi\rangle=\langle y_0(0)\delta(x)+Y_1,\varphi\rangle.$$

yəni

$$Y_0'=Y_1+y_0(0)\delta(x).$$

İndi 2-ci tənliyi D'-də yazaq. Analoji qayda ilə tapırıq ki, $y_1'-y_2=0$

$$Y_1'-Y_2=y_1(0)\delta(x)$$

Bu qayda ilə (18)-in sonuncu tənliyi belə olar:

$$Y_{P-1}'-a_0Y_0-a_1Y_1-\ldots-a_{p-1}Y_{p-1}=F(x)+y_{p-1}(0)\delta(x),$$

burada
$$F(x)=\begin{cases}0, & x<0,\\ f(x), & x>0.\end{cases}$$

Alınan sistemi yazaq:

$$\begin{cases}Y_0'-Y_1=y_0(0)\delta(x),\\ Y_1'-Y_2=y_1(0)\delta(x),\\ ------------\\ Y_{p-2}'-Y_{p-1}=y_{p-2}(0)\delta(x),\\ Y_{p-1}'-\sum\limits_{j=0}^{p-1}a_jY_j=F(x)+y_{p-1}(0)\delta(x).\end{cases}\tag{20}$$

İndi bu sistemdən $Y_1, Y_2,\ldots,Y_{P-1}$ məchullarını aradan çıxaraq.

Məsələn, 1-ci tənlikdən Y_1-i tapaq.

$$Y_1=Y_0'-y_0(0)\delta(x)\ .$$

Bu ifadəni 2-ci tənlikdə yerinə yazdıqda alırıq:

$$Y_2=Y_1'-y_1(0)\delta(x)=Y_0''-y_0(0)\delta'(x)-y_1(0)\delta(x)$$

Bu qayda ilə tapırıq ki,

$$Y_{p-1}=Y_{p-2}'-y_{p-2}(0)\delta(x)=Y_0^{(p-1)}-\sum_{j=0}^{p-2}y_j(0)\delta^{(p-2-j)}(x),$$

buradan

$$Y_{p-1}'=Y_0^{(p)}-\sum_{j=0}^{p-1}y_j(0)\delta^{(p-1-j)}(x)\ .\tag{21}$$

Digər tərəfdən, (20) sisteminin sonuncu tənliyində Y'_{P-1}- in ifadəsini (21)-də yerinə yazdıqda alırıq:

$$Y_0^{(p)}-\sum_{j=0}^{p-1} y_j(0)\delta^{(p-1-j)}(x)=\sum_{j=0}^{p-1} a_j Y_j + y_{p-1}(0)\delta(x)+F,$$

və yaxud $Y_1, Y_2, ..., Y_{P-1}$-lərin ifadələrini burada yerinə yazdıqda

$$Y_0^{(p)}-\sum_{j=0}^{p-1} y_j(0)\delta^{(p-1-j)}(x)-a_{p-1}\left[Y_0^{(p-1)}\sum_{j=0}^{p-2} y_j(0)\delta^{(p-2-j)}(x)\right]-...-a_0 Y_0=F,$$

Və nəticədə alırıq:

$$\sum_{k=0}^{p} a_k\left[Y_0^{(k)}-\sum_{j=0}^{k-1} y_j(0)\delta^{(k-1-j)}(x)\right]=F\ . \qquad (22)$$

Nəticədə belə bir teorem isbat olundu:

Teorem. D' fəzasında (22) tənliyinin $x<0$ oblastında sıfra çevrilən yeganə həlli var. Əgər $F(x)$-adi funksiya olarsa, onda həmin həll $Y\in D'$ (17) tənliyinin $x=0$ olduqda $y(0)=(y_0(0),...,y_{p-1}(0))$ başlanğıc şərtini ödəyən adi həllinə uyğun gəlir.

Məsələ. Adi diferensial tənlik verilir:

$$y''+p(x)y'+q(x)y=f(x),\quad a<x<b \qquad (23)$$

Klassik sərhəd məsələsinə baxaq:

$$y(a)=y_a,\quad y(b)=y_b$$

Bu məsələnin D' fəzasında analoqunu ifadə etmək tələb olunur. $x\in[a,b]$ olduqda $y(x)$-adi həlldir. Belə funksiya daxil edək.

$$Y(x)=\begin{cases} y(x), & x\in[a,b], \\ 0, & x\notin[a,b]. \end{cases}$$

Onda a və b nöqtələrində $Y(x)$ kəsilən funksiyadır. Lakin $Y\in D'$ olur. İndi Y' və Y'' hesablayaq. Məlum düstura əsasən,

$$\begin{aligned} &Y'=y'(x)+\Delta Y(a)\delta(x-a)+\Delta Y(b)\cdot\delta(x-b), \\ &Y''=y''(x)+\Delta Y(a)\delta'(x-a)+\Delta Y(b)\cdot\delta'(x-b)+ \\ &+\Delta Y'(a)\delta(x-a)+\Delta Y'(b)\cdot\delta(x-b)\ . \end{aligned} \qquad (24)$$

Aşkardır ki,

$$\Delta Y(a)=Y(a+0)-Y(a-0)=y(a)=y_a,$$
$$\Delta Y(b)=Y(b+0)-Y(b-0)=-y(b)=-y_b.$$

Bunun kimi də,

$$\Delta Y'(a)=Y'(a+0)-Y'(a-0)=y'(a),$$
$$\Delta Y'(b)=Y'(b+0)-Y'(b-0)=-y'(b).$$

Bunları nəzərə aldıqda (24)-dən tapırıq ki,

$$Y'=y'(x)+y_a\delta(x-a)-y_b\delta(x-b),$$
$$Y''=y'(x)+y_a\delta'(x-a)-y_b\delta'(x-b)+y'_a\delta(x-a)-y'_b\delta(x-b).$$

Sonuncu iki bərabərlikdən $y'(x)$ və $y''(x)$ üçün tapılan ifadələri verilən tənlikdə yerlərinə yazdıqda verilən sərhəd məsələsi D' fəzasında belə bir tənliyin həll olunmasına ekvivalent olur:

$$Y''-y_a\delta'(x-a)+y_b\delta'(x-b)-y'_a\delta(x-a)+y'_b\delta(x-b)+$$

$$+P(x)[Y'-y_a\delta(x-a)+y_b\delta(x-b)]+q(x)Y=F,$$

burada

$$F(x)=\begin{cases} f(x), & x\in[a,b], \\ 0, & x\notin[a,b]. \end{cases}$$

Qeyd. y'_a və y'_b sabitləri $x\notin[a,b]$ olduqda $Y(x)=0$ olması şərtindən təyin olunurlar.

9. Məsələlər.

İsbat edin:

1. $u=c_1+c_2\theta|x|+\ln|x|$ funksiyası $xu'=1$ tənliyinin həllidir.
2. $u=c_1+c_2\theta(x)-\mathscr{P}\frac{1}{x}$ funksiyası $xu'=\mathscr{P}\frac{1}{x}$ tənliyinin həllidir.
3. $u=c\delta(x)+\mathscr{P}\frac{1}{|x|}$ funksiyası $xu=sign\ x$ tənliyinin həllidir,

burada

$$\left\langle \mathscr{P}\frac{1}{|x|},\varphi\right\rangle=\int\limits_{|x|<1}\frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{|x|}dx+\int\limits_{|x|>1}\frac{\varphi(x)}{|x|}dx$$

4. İsbat edin:
   a) $u\in D'$ olduqda $xu=0$ yalnız və yalnız o zaman olur ki, $u=c\delta(x)$ olsun.
   b) $u=\sum_{k=0}^{m}c_k\delta^{(k)}(x)$ cəmi $x^m u=\delta(x)$ tənliyinin həlli olur.

F Ə S İ L 3.

ÇOXDƏYİŞƏNLİ ÜMUMİLƏŞMİŞ FUNKSİYALAR

§1. $D(R^n)$, $D'(R^n)$ və $D'(G)$ fəzaları

1.Requlyar və sinqulyar funksiyalar. $D \equiv D(R^n)$ ilə R^n-də təyin olunan sonsuz tərtibdən diferensiallanan bütün finit $\varphi(x)$ funksiyaları fəzasını işarə edirik. Əgər $G \subset R^n$-oblastdırsa, onda $D(G)$ ilə daşıyıcı çoxluqları G-də yerləşən bütün $\varphi \in D(R^n)$ funksiyaları çoxluğunu işarə edirik. $D(G) \subset D(R^n)$. Hər bir $\varphi \in D$-əsas funksiya, D isə əsas fəza adlanır. R^n fəzasında ən kiçik qapalı K çoxluğu, belə ki, K-dan kənarda $\varphi \equiv 0$ olur, φ-nin daşıyıcı çoxluğu adlanır və $supp\,\varphi(x)$ kimi işarə olunur. Deməli $\varphi(x) \neq 0$ olan nöqtələr çoxluğunun qapanması φ-nin daşıyıcısı adlanır.

Misal.

$$s\varphi(x,a) = \begin{cases} e^{-\frac{a^2}{a^2-|x|^2}} & |x| < a, \quad a > 0, \\ 0, & |x| \geq a, \end{cases}$$

burada $|x| = \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2}$; $supp\,\varphi(x,a) = \{|x| \leq a\}$ çoxluğu R^n fəzasında radiusu a olan küreni verir. $\varphi_\nu \in D(R^n)$ ardıcıllığının D-də sıfra yığılması o deməkdir ki:

1) elə məhdud çoxluq var ki, ondan kənarda $\varphi_\nu(x)$ ardıcıllığının bütün hədləri sıfra bərabərdir,
2) $\forall \alpha$ üçün $D^\alpha \varphi_\nu(x) \rightrightarrows 0$, (müntəzəm olaraq), $\nu \to \infty$, burada

$$\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n), D^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}}, \quad |\alpha| = \sum_{i=1}^n \alpha_i.$$

Tərif. $D(R^n)$ fəzasında təyin olunan hər bir xətti və kəsilməz f funksionalı **ümumiləşmiş funksiya** adlanır. Bütün ümumiləşmiş funksiyalar çoxluğunu D' və ya $D'(R^n)$ ilə işarə edirik. D' xətti fəzadır: $f, g \in D'$ olduqda

$$\langle \alpha f+\beta g,\varphi\rangle=\alpha\langle f,\varphi\rangle+f\langle g,\varphi\rangle.$$

Bu halda $\alpha f+\beta g\in D'$ olur.

Misal 1. $\delta(x_1,...,x_n)$-Dirak funksiyası. Tərifə görə, $\forall\varphi\in D(R^n)$ üçün

$$\langle\delta(x_1,...,x_n),\varphi(x_1,...,x_n)\rangle=\varphi(0).$$

Onda $\delta\in D(R^n)$.

Misal 2. Tutaq ki, $f(x)$, $x\in R^n$-adi funksiyadır. Onda $f(x)$ funksiyası aşağıdakı düstur vasitəsilə xətti və kəsilməz funksional doğurur:

$$\langle T_f,\varphi\rangle=\int\int_{R^n}...\int f(x)\varphi(x)dx\equiv\int_{R^n}f(x)\varphi(x)dx,\quad \varphi\in D(R^n) \tag{1}$$

Buradakı inteqral yığılır (φ-finitdir). T_f kəsilməzdir, çünki $\varphi_\nu\to0$ (D-də) olduqda $\langle T_f,\varphi_\nu\rangle\to0$, $\nu\to\infty$. Doğrudan da, $f(x)$-lokal inteqrallanan olduğundan və $supp\,\varphi_\nu\subset K$ məhdud çoxluq olduğundan çıxır ki,

$$\left|\langle T_f,\varphi_\nu\rangle\right|\le\max_x|\varphi_\nu(x)|\int\int_{R^n}...\int|f(x)|dx\to0,\quad \nu\to\infty.$$

$T_f\in D'$ funksionalı (1) şəklində yazıla bilirsə, onda T_f requlyar funksional adlanır. Əks halda T_f sinqulyar adlanır. Məsələn, $\delta(x)$-sinqulyar funksionaldır. Requlyar funksionallarla onları doğuran adi funksiyaları eyniləşdirmək olar. Xüsusi halda, $\forall\varphi\in D(R^n)$ üçün

$$\langle Tf,\varphi\rangle=\int\int_{R^n}...\int\varphi(x)dx \text{ olduqda } T_f=1 \text{ olur.}$$

Göstərmək olar ki, məsələn,

$$\langle T,\varphi\rangle=\int_{R^n}f(x)\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}dx$$

funksionalı sinqulyardır. Ümumi halda $P(D)$-diferensial operator olduqda $\forall\varphi\in D(R^n)$ üçün

$$\langle T,\varphi\rangle=\int_{R^n}f(x)P(D)\varphi(x)dx$$

funksionalı sinqulyardır və $T\in D'(R^n)$.

2.Sinqulyarlıq tərtibi. Tutaq ki, elə $f_1(x),...,f_p(x)$ adi funksiyaları var ki, $T \in D'$ funksionalını belə yazmaq olur:

$$\langle T,\varphi\rangle = \sum_{|\alpha|\le p} \int_{R^n} f_\alpha(x) D^\alpha \varphi(x) dx, \quad \varphi \in D(R^n) \tag{2}$$

Bu halda deyirlər ki, T – nin sinqulyarlıq tərtibi $\le p$. Əgər T – ni heç bir adi funksiyalar vasitəsilə p-dən kiçik q tərtib üçün (1) şəklində yazmaq olmursa, onda $S(T) = p$ hesab olunur. Formal olaraq hissə-hissə inteqrallamaqla (2)-ni belə yazmaq olar:

$$\langle T,\varphi\rangle = <\sum_{|\alpha|\le p} D^\alpha f_\alpha(x), \varphi>,$$

yəni

$$T = \sum_{|\alpha|\le p} D^\alpha f_\alpha(x). \tag{3}$$

Deməli adi funksiyaların p tərtibdən törəməsi kimi göstərilə bilən T funksionalının sinqulyarlıq tərtibi $\le p$ olur. Sonralar görəcəyik ki, hər bir ümumiləşmiş funksiyanı (3) şəklində yazmaq olur. Əgər $T \in D'$ ümumiləşmiş funksiyasını adi funksiyaların heç bir sonlu tərtib törəmələri şəklində göstərmək mümkün deyilsə, deyirik ki, T - nin sinqulyarlıq tərtibi $S(T) = \infty$.

Məsələn, $\forall \varphi \in D$ üçün

$$\langle T,\varphi\rangle = \sum_{k=0}^{\infty} \varphi^{(k)}(k)$$

funksionalı üçün $S(T) = \infty$ olur.

Ümumiləşmiş funksiya $T \in D'$ nöqtədə təyin olunmayıb. Ona görə ümumiyyətlə nöqtədə $T(x) = 0$ yazılışı korrekt deyil. Lakin onun oblastda (ətrafda) sıfra bərabər olmasını korrekt tərif etmək olar.

Tutaq ki, $G \subset R^n$ oblastı verilir. Əgər $\forall \varphi \in D(G)$ üçün $\langle T,\varphi\rangle = 0$ olursa, onda deyirlər ki, G – də $T = 0$. Əgər $\forall \varphi \in D(G)$ üçün $\langle T_1,\varphi\rangle = \langle T_2,\varphi\rangle$ olarsa, onda deyirik ki, G oblastında $T_1 = T_2$.

Xüsusi halda, əgər $f(x)$ G-də adi funksiyadırsa və G – də $T = f(x)$ olursa, onda T G – də requlyar funksional olur. Məsələn,

$\delta(x_1,...,x_n)$ -Dirak funksiyası R^n-də $x \neq 0$ olan hər yerdə requlyardır (və 0-ra bərabərdir).

Tutaq ki, $G \subset R^n$ oblastı elə ən geniş oblastdır ki, orada $T = 0$. Onda $R^n / G = F$ R^n-də ən kiçik qapalı çoxluqdur ki, orada $T \neq 0$. Belə olduqda F çoxluğu T-nin daşıyıcı çoxluğu adlanır və $\sup pT$ - kimi işarə edilir. Beləliklə, yalnız və yalnız o zaman $x_0 \in \sup pT$ olur ki, x_0-in heç bir ətrafında $T = 0$ olmasın.

Misal. $\sup p\delta(x_1,...,x_n) = \{0\}$.

Doğrudan da, $G = R^n / 0$ işarə etsək, $\forall \varphi \in D(G)$ üçün $\langle \delta, \varphi \rangle = \varphi(0) = 0$. Lakin $\varphi(0) \neq 0$ olduqda $\langle \delta, \varphi \rangle \neq 0$. Deməli $F = R^n / G = \{0\} = \sup p\delta$ olur.

Təklif. $a \in C^{\infty}(R^n)$ olduqda $\forall T \in D'(R^n)$ üçün $aT \in D'(R^n)$

Doğrudan da, $\forall \varphi \in D(R^n)$ üçün $a\varphi \in D(R^n)$ Onda

$$\langle aT, \varphi \rangle = \langle T, a\varphi \rangle$$

bərabərliyindən çıxır ki, aT $D(R^n)$-də xətti və kəsilməz funksional olur. Məsələn, $a(x)$-kəsilməz funksiya olduqda

$$a(x)\delta(x) = a(0)\delta(x).$$

Tutaq ki, $f(x_1,...,x_n)$ adi funksiyası R^n-də $x = 0$ nöqtəsindən başqa hər yerdə lokal inteqrallanandır. Tutaq ki, $x = 0$ nöqtəsi ətrafında müəyyən $m > 0$ üçün $f(x)$ funksiyası aşağıdakı bərabərsizliyi ödəyir:

$$|f(x)| \leq \frac{c}{r^m}, \quad r = |x| = \sqrt{x_1^2 + ... + x_n^2}.$$

Bu halda elə $F \in D'(R^n)$ ümumiləşmiş funksiyası var ki, o, $x = 0$ nöqtəsinin ətrafında 0-ra bərabər olan bütün $\varphi \in D(R^n)$ əsas funksiyalarına belə bir düstur şəklində təsir edir:

$$\langle F, \varphi \rangle = \int_{R^n} f(x)\varphi(x)dx. \tag{4}$$

Doğrudan da, F olaraq belə bir funksionalı götürək:

$$\langle F,\varphi\rangle=\int_{R^n} f(x)\left[\varphi(x)-\sum_{|k|\le m}\frac{D^k\varphi(0)}{k!}x_1^{k_1}\dots x_n^{k_n}\;h(x)\right]dx \qquad (5)$$

Burada

$$k=(k_1,\dots,k_n),\ k!=k_1!..k_n!,\ x_1^{k_1},\dots,x_n^{k_n};\ r=|x|=\sqrt{x_1^2+\dots+x_n^2},\ h(x)=1,\ |x|\le 1$$

olduqda, $h(x)=0$, $|x|>1$ olduqda.

Bu cür qurulan F funksionalı sinqulyar $f(x)$ funksiyasının (və yaxud dağılan (4) inteqralının) requlyarizasiyası adlanır. Aşkardır ki, (5) düsturu ilə verilən $F\in D'$ (yoxlayın).

Qeyd. Tutaq ki, $r=|x|=\sqrt{\sum x_i^2}$ və $F(r)$ funksiyası $r\to 0$ olduqda $\frac{1}{r}$-in istənilən dərəcəsindən daha tez sonsuzluğa yaxınlaşır. Əgər $x=0$ ətrafında

$$f(x)\ge F(r)$$

olursa, onda $f(x)$-in requlyarizasiyası yoxdur.

Misal üçün, $x\to 0$ olduqda

$$f(x)\ge e^{\frac{1}{r}}$$

olduqda $f(x)$-in requlyarizasiyası yoxdur.

§2. Çoxdəyişənli ümumiləşmiş funksiyaların xüsusi törəmələri.

1.Xüsusi törəmə və xassələri. $n=1$ olan halda əvvəllərdə deyilən bütün xassələr çoxdəyişənli halda da öz gücündə qalır. Ona görə bəzi xassələri sadəcə yada salırıq.

1^0.$D'(R^n)$-də ədədə vurma və toplama belə daxil edilir:

$$\langle \alpha_1 f_1+\alpha_2 f_2,\varphi\rangle=\alpha_1\langle f_1,\varphi\rangle+\alpha_2\langle f_2,\varphi\rangle.$$

2^0.$a(x)\in C^\infty(R^n)$ olduqda $\forall f\in D'(R^n)$ üçün $af\in D'(R^n)$.

Doğrudan da,

$$\langle a(x)f,\varphi\rangle=\langle f,a\varphi\rangle,\quad a\varphi\in D(R^n).$$

3^0. $T\in D'(R^n)$ olsun. İndi T-nin xüsusi törəmələrini təyin edək. Məsələn, $\dfrac{\partial T}{\partial x_1}$ törəməsini təyin edək. Bu törəmə elə olmalıdır ki, $T=f(x)$ adi funksiya olduqda klassik törəmə anlayışı alınmış olsun.

Tutaq ki, $f(x)$ R^n-də kəsilməz diferensiallanan funksiyadır. Onda $\dfrac{\partial f}{\partial x_1}$ törəməsi kəsilməzdir, yəni o, $D(R^n)$-də requlyar funksional doğurur:

$$\left\langle\frac{\partial f}{\partial x_1},\varphi\right\rangle=\iint\limits_{R^n}\!\!\dots\!\int\frac{\partial f(x)}{\partial x_1}\varphi(x)dx,\quad \varphi\in D(R^n)\,. \tag{1}$$

Əslində bu inteqral məhdud çoxluq üzrə aparılır, yəni sağ tərəfdəki inteqral yığılır. Bu inteqralı belə yazmaq olar:

$$\left\langle\frac{\partial f}{\partial x_1},\varphi\right\rangle=\iint\limits_{x_2,x_1,\dots x_n}\!\!\dots\!\int\frac{\partial f(x)}{\partial x_1}dx_2dx_n\left\{\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial f}{\partial x_1}\varphi(x)dx_1\right\},$$

burada daxili birqat inteqralda hissə-hissə inteqrallama düsturunu tətbiq etdikdə həmin inteqral belə alınır:

$$f\varphi\,/_{x_1=-\infty}^{\infty}-\int\limits_{-\infty}^{\infty}f(x)\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}dx_1$$

İnteqraldan xaricdəki hədd 0-ra bərabər olur (φ-finitdir). Onda alırıq:

$$\left\langle\frac{\partial f}{\partial x_1},\varphi\right\rangle=-\iint\limits_{R^n}\!\!\dots\!\int\frac{\partial f\varphi}{\partial x_1}dx_1,\dots,dx_n=-\left\langle f,\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}\right\rangle.$$

Nəticədə aldıq ki, hər bir adi $f(x)$ üçün belə bərabərlik həmişə ödənilir:

$$\left\langle \frac{\partial f}{\partial x_1}, \varphi \right\rangle = -\left\langle f, \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} \right\rangle .$$

Bu bərabərliyi ixtiyari $T \in D'(R^n)$ ümumiləşmiş funksiyasının $\frac{\partial T}{\partial x_1}$ xüsusi törəməsinin tərifi kimi qəbul edirik:

$$\left\langle \frac{\partial T}{\partial x_1}, \varphi \right\rangle \underset{df}{=} -\left\langle T, \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} \right\rangle . \tag{2}$$

Sağ tərəf məlumdur, çünki $\frac{\partial \varphi}{\partial x_1} \in D(R^n)$ və $T \in D'(R^n)$. Onda $\frac{\partial T}{\partial x_1} \in$-$\in D'(R^n)$ olar. Doğrudan da, $\forall \varphi$ üçün $\left\langle \frac{\partial T}{\partial x_1}, \varphi \right\rangle$ ədəddir, $\frac{\partial T}{\partial x_1}$-xətti-dir və $\varphi_\nu \to \varphi$ (D-də) olduqda,tərifə görə, $\frac{\partial \varphi_\nu}{\partial x_1} \Rightarrow \frac{\partial \varphi}{\partial x_1}$ (müntəzəm ol-araq). Onda, T-kəsilməz olduğundan,

$$\left\langle T, \frac{\partial \varphi_\nu}{\partial x_1} \right\rangle \to -\left\langle T, \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} \right\rangle, \quad \nu \to \infty.$$

Deməli, (2)-dən çıxır ki,

$$\left\langle \frac{\partial T}{\partial x_1}, \varphi_\nu \right\rangle \to -\left\langle T, \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} \right\rangle, \quad \nu \to \infty ,$$

yəni

$$\left\langle \frac{\partial T}{\partial x_1}, \varphi_\nu \right\rangle \to \left\langle \frac{\partial T}{\partial x_1}, \varphi \right\rangle, \quad \nu \to \infty .$$

Deməli, $\frac{\partial T}{\partial x_1}$-kəsilməz funksionaldır və beləliklə, $\forall T \in D'(R^n)$ üçün $\frac{\partial T}{\partial x_1}$ var və $\frac{\partial T}{\partial x_1} \in D'(R^n)$.

İndi 2-ci tərtib $\frac{\partial^2 T}{\partial x_i \partial x_j}$ törəməni hesablayaq:

$$\left\langle \frac{\partial^2 T}{\partial x_i \partial x_j}, \varphi \right\rangle = -\left\langle \frac{\partial T}{\partial x_j}, \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right\rangle = \left\langle T, \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_j \partial x_i} \right\rangle \tag{3}$$

Bunun kimi də,

$$\left\langle \frac{\partial^2 T}{\partial x_j \partial x_i}, \varphi \right\rangle = -\left\langle \frac{\partial T}{\partial x_i}, \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \right\rangle = \left\langle T, \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i \partial x_j} \right\rangle \tag{4}$$

φ – sonsuz diferensiallanan olduğu üçün

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_j \partial x_i}.$$

Bunu nəzərə aldıqda (3) və (4)-dən alınır ki,

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 T}{\partial x_j \partial x_i}.$$

İnduksiya metodu ilə göstərmək olar ki, belə bir ümumi düstur doğrudur:

$$\left\langle D^\alpha T, \varphi \right\rangle = (-1)^{|\alpha|} \left\langle T, D^\alpha \varphi \right\rangle, \qquad D^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}} \tag{5}$$

Hər bir $T \in D'(R^n)$-sonsuz tərtibdən diferensiallanandır. Törəmələrin növbəsini dəyişmək olar və aşağıdakı düsturlar doğrudur.

$$D^{\alpha+\beta} T = D^\alpha \left(D^\beta T \right) = D^\beta \left(D^\alpha T \right)$$

Xüsusi halda, hər bir kəsilməz $f(x) \in C(R^n)$ funksiyasının, lokal inteqrallanan funksiyanın D' fəzasında istənilən tərtibdən xüsusi törəmələri var. Lakin onların törəmələri adi funksiya olmaya bilər.

Tutaq ki, $P(D)$- sabit əmsallı diferensial operatordur,

$$P(D) = \sum_\alpha A_\alpha D^\alpha.$$

Onda $\forall T \in D'(R^n)$ üçün

$$P(D)T = \sum_\alpha A_\alpha D^\alpha T.$$

Belə olduqda, tərifə görə,

$$\left\langle P(D)T, \varphi \right\rangle = \left\langle \sum_\alpha A_\alpha D^\alpha T, \varphi \right\rangle = \sum_\alpha A_\alpha \left\langle D^\alpha T, \varphi \right\rangle =$$

$$= \sum_\alpha A_\alpha \left\langle T, (-1)^{|\alpha|} D^\alpha \varphi \right\rangle = \left\langle T, \sum_\alpha A_\alpha (-1)^{|\alpha|} D^\alpha \varphi \right\rangle,$$

burada

$$P^*(D)=\sum_{\alpha}(-1)^{|\alpha|}A_\alpha D^\alpha$$

işarə etsək,

$$\langle P(D)T,\varphi\rangle=\langle T,P^*(D)\varphi\rangle$$

alarıq. $P^*(D)$ operatoru $P(D)$-nin qoşma operatoru adlanır. Aşkardır ki, $P^*(D)=P(-D)$.

Xüsusi halda, Laplas operatoruna baxaq:

$$P(D)\equiv\Delta\equiv\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2}{\partial x_i^2}.$$

Onda $P^*(D)=\Delta$ olar və biz ΔT üçün alırıq:

$$\langle\Delta T,\varphi\rangle=\langle T,\Delta\varphi\rangle,\qquad \varphi\in D(R^n)$$

2.**Törəmənin bəzi xassələri.**

Təklif 1. $\forall a\in C^\infty(R^n)$ və $\forall T\in D'(R^n)$ üçün

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(aT)=\frac{\partial a}{\partial x_i}T+a\frac{\partial T}{\partial x_i}\tag{6}$$

Doğrudan da, tərifə əsasən,

$$\left\langle\frac{\partial}{\partial x_i}(aT),\varphi\right\rangle=-\left\langle aT,\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\right\rangle=-\left\langle T,a\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\right\rangle=$$

$$=\left\langle T,\frac{\partial}{\partial x_i}(a\varphi)-\frac{\partial a}{\partial x_i}\varphi\right\rangle=\left\langle T,\frac{\partial a}{\partial x_i}\varphi\right\rangle-\left\langle T,\frac{\partial}{\partial x_i}(a\varphi)\right\rangle=$$

$$=\left\langle\frac{\partial T}{\partial x_i},a\varphi\right\rangle+\left\langle\frac{\partial a}{\partial x_i}T,\varphi\right\rangle=\left\langle\frac{\partial a}{\partial x_i}T+a\frac{\partial T}{\partial x_i},\varphi\right\rangle,$$

yəni (6) düsturu doğrudur.

Təklif 2. G oblastı verilir. Əgər $T\in D'(R^n)$ və G-də $T=0$ olursa, onda G-də $\forall\alpha$ üçün $D^\alpha T=0$ olur.

Doğrudan da, $\varphi\in D(G)$ olduqda $D^\alpha\varphi\in D(G)$ olur. Ona görə

$$\langle D^\alpha T,\varphi\rangle=(-1)^{|\alpha|}\langle T,D^\alpha\varphi\rangle=0,\qquad \varphi\in D(G),$$

yəni

$$D^{\alpha}T = 0, \quad G\text{-də}.$$

Nəticə.

$$supp\ D^{\alpha}T \subset suppT.$$

Təklif 3. Diferensiallanma operatoru kəsilməzdir:

$$f_{\nu} \xrightarrow{D'} f \ \text{ olduqda } D^{\alpha}f_{\nu} \xrightarrow{D'} D^{\alpha}f, \quad \nu \to \infty.$$

Doğrudan da, $\forall \varphi \in D(R^n)$ üçün alırıq ki, ($\nu \to \infty$):

$$\left\langle D^{\alpha}f_{\nu},\varphi\right\rangle = (-1)^{|\alpha|}\left\langle f_{\nu}, D^{\alpha}\varphi_{\nu}\right\rangle \to (-1)^{|\alpha|}\left\langle f, D^{\alpha}\varphi\right\rangle = \left\langle D^{\alpha}f,\varphi\right\rangle,$$

yəni

$$D^{\alpha}f_{\nu} \xrightarrow{D'} D^{\alpha}f, \quad \nu \to \infty. \quad (D'\text{-də}).$$

Qeyd. Klassik analizdə belə xassə yoxdur. Əgər adi mənada kəsilməz diferensiallanan $f_{\nu}(x)$ funksiyaları $f(x)$ funksiyasına müntəzəm yığılırsa, ola bilər ki, $f(x)$ funksiyası diferensiallanan olmasın və yaxud f-diferensiallanan funksiyadır, lakin $f_{\nu}'(x)$ törəmələr ardıcıllığı $f'(x)$ törəməsinə yığılmasın. Lakin $D'(R^n)$-də f' törəməsi həmişə var və $f_{\nu} \to f$. (Burada f' yazılışı altında f-in hər hansı arqumentə görə 1-ci tərtib törəməsi nəzərdə tutulur).

Təklif 4. $a \in C^{\infty}(G)$ olsun, $G \subset R^n$-oblastdır. onda belə bir düstur D' – də doğrudur:

$$D^{\alpha}(a \cdot T) = \sum_{\beta \le \alpha} c_{\alpha\beta}\left(D^{\alpha-\beta}a\right)\left(D^{\beta}T\right) \tag{*}$$

Doğrudan da, əgər $a,b \in C^{\infty}(G)$ isə, onda Leybnis düsturuna əsasən

$$D^{\alpha}(a \cdot b) = \sum_{\beta \le \alpha} c_{\alpha\beta}D^{\alpha-\beta}aD^{\beta}b.$$

Bunu nəzərə aldıqda alırıq:

$$\left\langle D^{\alpha}(a \cdot T),\varphi\right\rangle = (-1)^{|\alpha|}\left\langle aT, D^{\alpha}\varphi\right\rangle = (-1)^{|\alpha|}\left\langle T, aD^{\alpha}\varphi\right\rangle =$$

$$= \sum_{\beta \le \alpha}(-1)^{|\beta|}c_{\alpha\beta}\left\langle T, D^{\beta}\left(\varphi \cdot D^{\alpha-\beta}a\right)\right\rangle = \sum c_{\alpha\beta}\left\langle D^{\beta}T, \varphi \cdot D^{\alpha-\beta}a\right\rangle =$$

$$= \left\langle \sum c_{\alpha\beta}\left(D^{\alpha-\beta}a\right) \cdot D^{\beta}T, \varphi\right\rangle,$$

Teorem. Tutaq ki, $f_n \xrightarrow{D'} f$, $n \to \infty$, $a_n, a \in C^{\infty}(G), C^{\infty}(G)$də $a_n \to a$. Onda

$$a_n f_n \xrightarrow{D'(G)} af, \quad n \to \infty.$$

İsbatı aşkardır.

Misal.

$$\theta(x_1,\dots,x_n) = \begin{cases} 1, & x_i > 0, \ i = 1,2,\dots,n \\ 0, & qalan \ hallarda \end{cases}$$

$\dfrac{\partial^n \theta}{\partial x_1,\dots,\partial x_n}$ törəməsini hesablayaq. Tərifə görə,

$$\left\langle \frac{\partial^n \theta}{\partial x_1,\dots,\partial x_n}, \varphi \right\rangle = (-1)^n \left\langle \theta, \frac{\partial^n \varphi}{\partial x_1,\dots,\partial x_n} \right\rangle = (-1)^n \int_0^{\infty} \!\!\dots\! \int \frac{\partial \varphi}{\partial x_1,\dots,\partial x_n} dx_1,\dots,dx_n =$$

$$= (-1)^n \int_0^{\infty} \underset{(n-1)}{\dots} \int_0^{\infty} \left[\int_0^{\infty} \frac{\partial}{\partial x_n} \underbrace{\left(\frac{\partial^{n-1} \varphi}{\partial x_1,\dots,\partial x_{n-1}} \right)}_{\phi} dx_n \right] dx_1,\dots,dx_{n-1} =$$

$$= (-1)^n \int_0^{\infty} \underset{x_1,\dots,x_{n-1}}{\dots} \int_0^{\infty} \left[\frac{\partial \phi}{\partial x_n} dx_n \right] dx_1,\dots,dx_{n-1} =$$

$$= (-1)^n \int_0^{\infty} \underset{x_1,\dots,x_{n-1}}{\dots} \int_0^{\infty} \left[\phi /_0^{\infty} \right] dx_1,\dots,dx_{n-1} =$$

$$= (-1)^n \int_0^{\infty} \dots \int_0^{\infty} \left[-\phi(x_1,\dots,x_{n-1},0) \right] dx_1,\dots,dx_{n-1} =$$

$$= (-1)^{n+1} \int_0^{\infty} \dots \int_0^{\infty} \frac{\partial^{n-1} \varphi(x_1,\dots,x_{n-1},0)}{\partial x_1,\dots,\partial x_{n-1}} dx_1,\dots,dx_{n-1} = \varphi(0,0,0,\dots,0) = \langle \delta, \varphi \rangle,$$

buradan

$$\frac{\partial^n \theta(x_1,\dots,x_n)}{\partial x_1,\dots,\partial x_n} = \delta(x_1,\dots,x_n).$$

2.Ümumiləşmiş funksiya və fizikada paylanmalar. $T \in D'$ ümumiləşmiş funksiyasını fizikadan məlum olan elektrik və ya maqnit yüklərinin, kütlənin və s. paylanmaları kimi izah etmək olar. Belə olduqda, məsələn, $\delta(x-a)$ Dirak funksiyasını $a \in R^n$ nöqtəsinə yerləşdirilmiş 1 kütlənin sıxlığı kimi xarakterizə etmək olar: $f(x)$-adi funksiya olduqda onun yaratdığı requlyar T_f funksionalını isə sıxlığı $f(x)$ olan elektrik yükünün paylanması kimi təsvir etmək olar. Bu zaman V həcminə düşən yükün kütləsi (miqdarı) məhz

$$m = \iint_V \ldots \int f(x)dx$$

olur. Hər bir funksionalın öz təyin oblastı ola bilər. Məsələn, $\delta(x)$ funksionalını təkcə $x=0$ nöqtəsində kəsilməz funksiyalar sinfində paylamaq olar, yəni D fəzası $\delta(x)$ üçün gərək deyil. $f(x)$ verildikdə T_f requlyar funksional olması üçün elə φ-lərə baxmaq kifayətdir ki, $f\varphi$ hasili cəmlənən olsun. Lakin D əsas fəzası eloədir ki, bütün funksionallar D-də təyin olunub. Məsələn, $\delta(x)$ D-də təyin olunub, lakin onu D-dən bütün kəsilməz funksiyalar fəzasına davam etdirmək olur. Bu səbəbdən də, fizikada, məsələn tam yükü hesabladıqda $\langle T,1\rangle$ qiymətini hesablayırlar, belə ki,

$$\langle T,1\rangle = \begin{cases} 1, \ T=\delta(x-a) \ \textit{olduqda}, \\ \iint_{R^n} \ldots \int f(x)dx, \ T=f(x) \quad \textit{olduqda}. \end{cases}$$

Misal 1. Mexanikada koordinat başlanğıcına nəzərən inersiya momentini hesablamaq üçün $\langle T,r^2\rangle$ qiymətini hesablayırlar, belə ki:

$$\langle T,r^2\rangle = \begin{cases} |a|^2, \ T=\delta(x-a) \ \textit{olduqda}, \\ \iint_{R^n} \ldots \int f(x)r^2(x)dx, \ T=f \quad \textit{olduqda}. \end{cases}$$

Misal 2. Məsələn, $b \in R^3$ nöqtəsində Nyuton potensialını hesablamaq üçün $\left\langle T, \dfrac{1}{|x-b|} \right\rangle$ ifadəsini hesablayırlar, belə ki,

$$\left\langle T,\frac{1}{|x-b|}\right\rangle=\begin{cases}\dfrac{1}{|a-b|},\ T=\delta(x-a)\ olduqda,\\ \iiint\limits_{R^3}\dfrac{f(x)dx}{|x-b|},\quad T=f(x)\ \ olduqda.\end{cases}$$

Misal 3. Səth sıxlığı $\rho(x)$ olan elektrik yükünün S səthində paylanması belə bir düsturla təsvir olunur:

$$\langle T,\varphi\rangle=\iint\limits_{S}\rho(x)\varphi(x)ds,\quad \sup p\varphi\subset S.$$

Bu növ paylanma sinqnulyar ümumiləşmiş funksiya təyin edir, onu $f(x)$ həcm sıxlığı ilə verilən (requlyar)

$$\iiint\limits_{R^3}f(x)\varphi(x)dx$$

funksionalı ilə qarışdırmaq lazım deyil!

§3. R^n-də kəsilən funksiyanın ümumiləşmiş xüsusi törəmələri.

1.Qrin düsturu. Tutaq ki, $G\subset R^n$ oblastı S səthi ilə hüdudlanır və $G_1=R^n/\overline{G}$. Tutaq ki, f özü və onun hər bir xüsusi törəməsi S səthində kəsilməyə məruz qalır. S səthini hər istiqamətdə keçdikdə f və onun törəməsinin sıçrayışlarını $[f]_S\equiv\sigma_0$ və $\left[\dfrac{\partial f}{\partial x_1}\right]_S\equiv\sigma_i$ ilə işarə edək. Deməli $[f]_S(\xi)$, $\left[\dfrac{\partial f}{\partial x_1}\right]_S(\xi)$ funksiyaları S sərhəddində təyin olunublar. Məsələn,

$$[f]_S(\xi)=\lim_{\substack{x'\in G_1\\ x'\to\xi\in S}}f(x')-\lim_{\substack{x'\in G\\ x'\to\xi\in S}}f(x'),\ \xi\in S$$

İndi fərz edək ki, f R^n fəzasında müəyyən S səthindən başqa hər yerdə sonsuz diferensiallanır, S səthini keçəndə f və onun törəmələri kəsilir. $D^p f$ ilə f-in ümumiləşmiş funksiya kimi törəməsini, $\{D^p f\}$ ilə isə $D^p f(x)$-adi törəməsinin yaratdığı requlyar funksionalı işarə edirik (Bu törəmələr $x \notin S$ olduqda var, $x \in S$ olduqda yoxdur. S səthi R^n-də ölçüsü sıfır çoxluq olur).
Birölçülü halda $f(x)$ $x=0$ nöqtəsində kəsilən funksiya olduqda

$$f' = \{f'(x)\} + \Delta f(0)\delta(x),$$
$$f'' = \{f''(x)\} + \Delta f(0)\delta' + \Delta f'(0)\delta$$

düsturları f- in adi törəməsi ilə ümumiləşmiş törəmələri arasında əlaqə düsturunu müəyyən edir.

İndi həmin düsturların analoqlarını almaq istəyirik. Əvvəlcə $\frac{\partial f}{\partial x_1}$ funksionalını müəyyən edək.

$$\left\langle \frac{\partial f}{\partial x_1}, \varphi \right\rangle = -\left\langle f, \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} \right\rangle = -\int\int_{R^n}\ldots\int f(x)\frac{\partial \varphi}{\partial x_1}dx_1\ldots dx_n =$$
$$= -\int_{x_2,\ldots,x_n}\ldots\int\left[\int_{x_1=-\infty}^{\infty} f(x)\frac{\partial \varphi}{\partial x_1}dx_1\right]dx_2\ldots dx_n =$$
$$= -\int_{x_2,\ldots,x_n}\ldots\int dx_2\ldots dx_n\left[\sigma_0\varphi/_S + \int_{x_1=-\infty}^{\infty}\frac{\partial f}{\partial x_1}\varphi dx_1\right] = \qquad (1)$$
$$= \int\ldots\int_S \sigma_0\varphi dx_2\ldots dx_n + \int\int_{R^n}\ldots\int\frac{\partial f}{\partial x_1}\varphi dx.$$

Buradakı səth inteqralını belə bir inteqralla əvəz etmək olar:

$$\int_S\ldots\int \sigma_0\cos\theta_1\, ds, \qquad (2)$$

burada θ_1 bucağı x_1 oxu istiqaməti ilə S səthinə normal arasındakı bucaqdır. (2) inteqralını belə işarə edək:

$$\langle T_s,\varphi\rangle = \int\limits_S\!\dots\!\int \sigma_0 \cos\theta_1\, ds.$$

T_s-sinqulyar funksionaldır, o, səth üzrə paylanır və səth üzərində sıxlığı $\sigma_0 \cos\theta_1$ olan kütlənin paylanmasını təsvir edir. Bəzən həmin funksionalı $T_s \equiv \sigma_0 \cos\theta_1\, \delta_s$ kimi işarə etmək münasib olur. Belə olduqda ixtiyari $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}$ ümumiləşmiş törəməsi üçün (1)-dən belə düstur alınır:

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = \left\{\frac{\partial f(x)}{\partial x_i}\right\} + \left([f]_s \cos\theta_i\right)\delta_s. \qquad (3)$$

Bu düstur, aydındır ki, birölçülü halda

$$f' = \{f'(x)\} + \Delta f(0)\delta(x)$$

düsturunun ümumiləşməsindən ibarət olur. (3) düsturunu bir dəfə də diferensiallayaq:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2{}_i} = \left\{\frac{\partial f^2}{\partial x^2{}_i}\right\} + \frac{\partial}{\partial x_i}\left[[f]_s \cos\theta\, \delta_s\right] + \left(\left[\frac{\partial f(x)}{\partial x_i}\right]_s \cos\theta_i\right)\delta_s,$$

buradan cəmləməklə $(i = 1,2,\dots,n)$ alırıq:

$$\Delta f = \{\Delta f(x)\} + \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}\left[[f]_s \cos\theta\delta_s\right] + \sum_{i=1}^{n}\left[\frac{\partial f(x)}{\partial x_i}\right]_s \cos\theta_i\delta_s. \qquad (4)$$

Normala görə törəmə düsturuna əsasən,

$$\frac{\partial}{\partial n}\left([f]_s\delta_s\right) = \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}\left[[f]_s \cos\theta_i\delta_s\right],$$

$$\left[\frac{\partial f}{\partial n}\right]_s \delta_s = \sum_{i=1}^{n}\left[\frac{\partial f(x)}{\partial x_i}\right]_s \cos\theta_i\delta_s.$$

Məsələn, (*) düsturunu yoxlayaq. $\forall\varphi \in D$ üçün alırıq:

$$\left\langle \sum \frac{\partial}{\partial x_i}\left([f]_s \delta_s\right), \varphi \right\rangle = -\sum \left\langle [f]_s \cos\theta_i \,\delta_s, \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right\rangle =$$

$$= -\int_S \ldots \int [f]_s \sum \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \cos\theta_i \, ds = -- \int_S \ldots \int [f]_s \frac{\partial \varphi}{\partial n} ds = \left\langle \frac{\partial}{\partial n}\left([f]_n \delta_s\right), \varphi \right\rangle.$$

Bunları nəzərə aldıqda (4) düsturu bu şəkli alır:

$$\Delta f = \{\Delta f(x)\} + \left[\frac{\partial f}{\partial n}\right]_S \delta_S + \frac{\partial}{\partial n}\left([f]_s \delta_S\right). \tag{5}$$

Bu düstur ümumiləşmiş funksiyalar üçün Qrin düsturu adlanır.

2.Xüsusi hal. Klassik Qrin düsturu. Fərz edək ki, $V \subset R^n$-həcmdir, S-isə onun səthidir və $f = 0$, $x \notin V$ olduqda (5) Qrin düsturundan alınır ki,

$$\langle \Delta f, \varphi \rangle \equiv \langle f, \Delta\varphi \rangle = \iint_V \ldots \int f \Delta\varphi dx = \left(\{\Delta f(x)\}, \varphi\right) + \left\langle \frac{\partial f}{\partial n} \delta_S, \varphi \right\rangle +$$

$$+ \left\langle \frac{\partial}{\partial n}\left([f]_s \delta_S\right), \varphi \right\rangle = \iint_V \ldots \int \Delta f(x) \varphi(x) dx + \int_S \ldots \int \frac{\partial f}{\partial n} \varphi ds - \int_S \ldots \int f \frac{\partial \varphi}{\partial n} ds.$$

Buradan klassik Qrin düsturu alınır:

$$\iint_V \ldots \int (f \cdot \Delta\varphi - \varphi \cdot \Delta f) dx + \iint_S \ldots \int \left(f \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial n} - \varphi \cdot \frac{\partial f}{\partial n} \right) ds = 0,$$

burada n – daxili normaldır.

Əgər V R^n-də r-radiuslu kürə olarsa, onda Qrin düsturu belə yazılır:

$$\iint_{|x| \le r} \ldots \int (f \cdot \Delta\varphi - \varphi \cdot \Delta f) dx + \iint_{|x| = r} \ldots \int \left(f \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial r} - \varphi \cdot \frac{\partial f}{\partial r} \right) ds = 0. \quad \textbf{(Q)}$$

§4. Laplas operatorunun fundamental həlli.

Bu bölmədə məqsəd bütün R^n fəzasında

$$\Delta\frac{1}{r^{n-2}}$$

funksionalını təyin etməkdən ibarətdir. $x=0$ nöqtəsində $\frac{1}{r^{n-2}}$ funksiyası məxsusiyyətə malikdir, $x \neq 0$ olan hər yerdə $\frac{1}{r^{n-2}}$ harmonik funksiyadır, yəni

$$\Delta\frac{1}{r^{n-2}}=0.$$

Tutaq ki, $f=f(r)$ yalnız r – radius-vektorundan asılı olan sferik simmetrik funksiyadır; $r=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}x_i^2}$.

Təklif. $\Delta f(r)=f''+\frac{n-1}{r}f'$.

Doğrudan da,

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}=\frac{df}{dr}\cdot\frac{\partial r}{\partial x_j}=\frac{df}{dr}\cdot\frac{x_j}{r},$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2_j}=\frac{d^2 f}{dr^2}\cdot\left(\frac{x_j}{r}\right)^2+\frac{df}{dr}\cdot\left(\frac{1}{r}-\frac{x_j^2}{r^3}\right).$$

Buradan cəmləməklə alırıq:

$$\Delta f=\frac{d^2 f}{dr^2}+\frac{n-1}{r}\frac{df}{dr}\equiv f''(r)+\frac{n-1}{r}f'(r).$$

Beləliklə, $f=f(x)$ yalnız r-dən asılı funksiya olduqda Laplas tənliyi

$$\Delta f=f''(r)+\frac{n-1}{r}f'(r)=0 \tag{6}$$

kimi olur.Laplas tənliyinin həlli harmonik funksiya adlanır. Aşkardır ki, (6) tənliyinin həlli belə olar:

$$f(r)=\begin{cases} \dfrac{A}{r^{n-2}}+B, \ n\neq 2 \quad olduqda, \\ A\ln\dfrac{1}{r}+B, \ n=2 \quad olduqda, \\ \dfrac{A}{r}+B, \ n=3 \quad olduqda, \quad A=const, \ B=const. \end{cases}$$

Beləliklə, $x\neq 0$ olduqda $\dfrac{1}{r^{n-2}}$ ($n\neq 2$ üçün) və $\ln\dfrac{1}{r}$ ($n=2$ üçün) funksiyaları harmonik funksiyalardır. Bütün R^n fəzasında baxdıqda $\dfrac{1}{r^{n-2}}$ ($n\neq 2$) və $loq\dfrac{1}{r}$ ($n=2$) funksiyalarının məxsusiyyətləri var.

$f(r)=r^p$ götürək. Onda

$$\Delta r^p = p(p+n-2)r^{p-2}. \qquad (*)$$

Deməli Laplas operatoru r –in dərəcəsini 2 vahid endirir. Məlumdur ki, r^p funksiyası $p>-n$ olduqda lokal inteqrallanandır. Deməli, $(*)$-un sağ tərəfi $p-2>-n$ (yəni $p>2-n$) olduqda lokal inteqrallanır, yəni Δr^p D'-də funksional olur. Lakin $p=2-n$ olduqda $(*)$-un sağ tərəfi D'-də mənasız olur. Beləliklə, R^n-də baxdıqda $\Delta\dfrac{1}{r^{n-2}}$ funksionalı mənasız ola bilər.

Lakin bu funksiyalar koordinat başlanğıcı ətrafında lokal inteqrallanır ($n-2<n$), deməli onlar müəyyən requlyar funksional doğururlar. Biz indi həmin funksionalların Laplasianlarını təyin etmək istəyirik. Başqa sözlə,

$$\Delta\frac{1}{r^{n-2}} \ (n\neq 2) \text{ və } \Delta loq\frac{1}{r} \ (n=2)$$

Laplasianlarını hesablamaq istəyirik.

Teorem. Bütün R^n fəzasında baxdıqda:

$$\begin{cases} \Delta\dfrac{1}{r^{n-2}} = -(n-2)S_n\,\delta(x),\ n \neq 2 \ \textit{olduqda}, \\ \Delta\left(\ln\dfrac{1}{r}\right) = -2\pi\delta(x),\ n = 2 \ \textit{olduqda}, \\ \Delta\dfrac{1}{r} = -4\pi\delta(x),\ n = 3 \ \textit{olduqda}, \\ \Delta(|x|) = 2\delta(x),\ n = 1 \ \textit{olduqda}, \end{cases}$$

burada S_n ilə R^n fəzasında 1-radiuslu sferanın səth sahəsi işarə olunur.

Məlumdur ki, $S_n = 2\pi^{n/2} \big/ \Gamma(n/2)$, burada

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty t^{\alpha-1}e^{-t}dt$$

-qamma funksiyadır, məsələn

$\Gamma(n) = (n-1)!$, $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$ $\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \Gamma\left(1+\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ və s.

Bundan əlavə, r radiuslu sferanın səth sahəsi düsturu (R^n-də)

$$S_n(r) = S_n \cdot r^{n-1},$$

olur, r radiuslu kürənin həcmi isə

$$V_n(r) = S_n \cdot \frac{r^n}{n}$$

düsturları ilə tapılır. Xüsusi halda, $(r=1)$, $S_1 = 2,\ S_2 = 2\pi,\ S_3 = 4\pi.$ ümumiyyətlə,

$$S_n(r) = \frac{dV_n(r)}{dr} = \frac{S_n}{n}\left(r^n\right)' = S_n \cdot r^{n-1}.$$

İndi teoremi isbat edək.

1^0. Tutaq ki, $n \neq 2$. $\Delta\dfrac{1}{r^{n-2}} = ?$ Qrin düsturunda V həcmi olaraq ε radiuslu kürənin xaricini götürək:

$$V_\varepsilon = \{x \in R^n : |x| \geq \varepsilon\},\ S_\varepsilon = \{|x| = \varepsilon\}. \quad f(r) = \frac{1}{r^{n-2}},\ n \neq 2.$$

Onda $\forall\varphi\in D(R^n)$ üçün alırıq:

$$\langle\Delta f,\varphi\rangle\equiv\left\langle\Delta\frac{1}{r^{n-2}},\varphi\right\rangle=\left\langle\frac{1}{r^{n-2}},\Delta\varphi\right\rangle=\iint\limits_{R^n}\dots\int\frac{\Delta\varphi}{r^{n-2}}dx=$$
$$=\lim_{\varepsilon\to 0}\iint\limits_{V_\varepsilon}\dots\int\frac{\Delta\varphi}{r^{n-2}}dx=\lim_{\varepsilon\to 0}\iint\limits_{r\geq\varepsilon}\dots\int\frac{\Delta\varphi}{r^{n-2}}dx. \qquad (7)$$

Qrin düsturuna əsasən,

$$\iint\limits_{r\geq\varepsilon}\dots\int\left(\frac{1}{r^{n-2}}\Delta\varphi-\varphi\Delta\frac{1}{r^{n-2}}\right)dx+\iint\limits_{r=\varepsilon}\dots\int\left[\frac{1}{r^{n-2}}\frac{\partial\varphi}{\partial r}-\varphi\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r^{n-2}}\right)\right]ds=0$$

Sol tərəfdə inteqral altında $r\geq\varepsilon$ olduğundan və bu halda $\Delta\left(\frac{1}{r^{n-2}}\right)=0$ olduğu üçün alırıq:

$$\iint\limits_{r\geq\varepsilon}\dots\int\frac{1}{r^{n-2}}\Delta\varphi\,dx=-\int\limits_{r=\varepsilon}\dots\int\frac{1}{r^{n-2}}\frac{\partial\varphi}{\partial r}ds+\int\limits_{r=\varepsilon}\dots\int\left(-\frac{n-2}{r^{n-1}}\right)\varphi ds. \qquad (8)$$

Sağ tərəfdəki 1-ci toplananı qiymətləndirək və göstərək ki, həmin toplanan $\varepsilon\to 0$ olduqda $\to 0$ olur. Məlumdur ki,

$$\frac{\partial\varphi}{\partial r}=\sum_{j=1}^{n}\frac{x_j}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial x_j},$$

buradan,

$$\left|\frac{x_j}{r}\right|\leq 1 \text{ və } \max\left|\frac{\partial\varphi}{\partial x_j}\right|\leq M$$

olduğundan, $S_\varepsilon=\{r=\varepsilon\}$ sferası üzərində hər yerdə $\left|\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right|\leq nM$ olar. Onda $\varepsilon\to 0$ olduqda

$$\left|\int\limits_{r=\varepsilon}\dots\int\frac{1}{r^{n-2}}\frac{\partial\varphi}{\partial r}ds\right|\leq\frac{M\cdot n}{\varepsilon^{n-2}}\int\limits_{r=\varepsilon}\dots\int ds=\frac{M\cdot n}{\varepsilon^{n-2}}\cdot S_n\cdot\varepsilon^{n-1}=M\cdot n\cdot S_n\cdot\varepsilon\to 0.$$

İndi 2-ci toplananı hesablayaq:

$$\int_{r=\varepsilon}\cdots\int -\frac{(n-2)}{r^{n-2}}\varphi ds = -\frac{(n-2)}{\varepsilon^{n-2}}\int_{r=\varepsilon}\cdots\int \varphi ds =$$

$$= -(n-2)\cdot\varepsilon^{1-n}\cdot S_\varepsilon(\varphi)\cdot\int_{r=\varepsilon}\cdots\int ds =$$

$$= -(n-2)\cdot\varepsilon^{1-n}\cdot S_\varepsilon(\varphi)\cdot S_n\cdot\varepsilon^{n-1} = -(n-2)S_n\cdot S_\varepsilon(\varphi),$$

burada $S_\varepsilon(\varphi)$ ilə $\varphi(x)$ funksiyasının ε radiuslu sfera üzərində orta qiyməti işarə edilibdir. Aydındır ki, $\varepsilon\to 0$ olduqda $S_\varepsilon(\varphi)\to\varphi(0)$. Onda alırıq ki,

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{r=\varepsilon}\cdots\int -\frac{(n-2)}{r^{n-2}}\varphi ds = -(n-2)S_n\cdot\varphi(0).$$

Beləliklə, (8)-dən aldıq ki,

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\iint_{r\geq\varepsilon}\cdots\int\frac{1}{r^{n-2}}\Delta\varphi\, dx = -(n-2)S_n\cdot\varphi(0).$$

Belə olduqda (7)-dən alırıq:

$$\left\langle\Delta\frac{1}{r^{n-2}},\varphi\right\rangle = -(n-2)S_n\varphi(0) = \langle -(n-2)S_n\delta(x),\varphi\rangle,$$

yəni

$$\Delta\frac{1}{r^{n-2}} = -(n-2)S_n\delta(x).$$

2^0. Göstərək ki, $(n=2)$

$$\Delta\, loq\frac{1}{r} = -2\pi\delta(x),$$

$$f = loq\frac{1}{r},\ r = |x| = \sqrt{x^2+y^2}$$

olsun. R ədədini elə seçək ki, $|x|\geq R$ olduqda $\varphi\equiv 0$ olsun. Qrin düsturunda $G=\{\varepsilon<|x|<R\}$ oblastının sərhəddi iki dənə konsentrik çevrə olur: $S_\varepsilon=\{|x|=\varepsilon\}$, $S_R=\{|x|=R\}$. Qrin düsturunu yazaq: $\forall\varphi\in D$

$$\iint_{\varepsilon<|x|<R}\left(\Delta\ln\frac{1}{r}\cdot\varphi-\ln\frac{1}{r}\cdot\Delta\varphi\right)dx = \left(\int_{S_\varepsilon}+\int_{S_R}\right)\left(\ln\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial r}-\varphi\frac{\partial}{\partial r}\ln\frac{1}{r}\right)ds. \quad (9)$$

(Sol tərəfdə $\Delta \ln\frac{1}{r}\equiv 0$ olur). Buradan alırıq:

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\iint_{\varepsilon<|x|<R}(\Delta \ln\frac{1}{r}\cdot\varphi-\ln\frac{1}{r}\cdot\Delta\varphi)dx=\left(\int_{S_\varepsilon}+\int_{S_R}\right)\left(\ln\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial r}-\varphi\frac{\partial}{\partial r}\ln\frac{1}{r}\right)ds=$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\varepsilon}\int_{r=\varepsilon}\varphi\, ds+\lim_{\varepsilon\to 0}\ln\frac{1}{\varepsilon}\int_{r=\varepsilon}\frac{\partial\varphi}{\partial r}ds \tag{10}$$

Nəzərə alaq ki,

$$\frac{1}{\varepsilon}\int_{r=\varepsilon}\varphi\, ds=\frac{1}{\varepsilon}S_\varepsilon(\varphi)\cdot 2\pi\varepsilon=2\pi S_\varepsilon(\varphi),$$

burada $S_\varepsilon(\varphi)$ ilə φ-nin ε radiuslu çevrə üzərində orta qiyməti işarə olunur. $\varepsilon\to 0$ olduqda

$$S_\varepsilon(\varphi)\to\varphi(0).$$

Deməli,

$$\frac{1}{\varepsilon}\int_{r=\varepsilon}\varphi\, ds=2\pi\, S_\varepsilon(\varphi)\to 2\pi\,\varphi(0),\ \varepsilon\to 0. \tag{11}$$

Digər tərəfdən

$$\left|\ln\frac{1}{\varepsilon}\int_{r=\varepsilon}\frac{\partial\varphi}{\partial r}ds\right|\le\ln\frac{1}{\varepsilon}\cdot M\cdot 2\pi\varepsilon=2M\pi\cdot\left(\varepsilon\cdot\ln\frac{1}{\varepsilon}\right)\to 0,\ \varepsilon\to 0. \tag{12}$$

(11) və (12) münasibətlərini (10)-da nəzərə aldıqda

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\iint_{\varepsilon<|x|<R} log\frac{1}{r}\cdot\Delta\varphi\, dx=-2\pi\,\varphi(0)=\langle-2\pi\delta(x),\varphi\rangle.$$

Bunu nəzərə aldıqda (17)-dən çıxır ki,

$$\left\langle\Delta log\,\frac{1}{r},\varphi\right\rangle=\left\langle log\,\frac{1}{r},\Delta\varphi\right\rangle=\lim_{\varepsilon\to 0}\iint_{\varepsilon<|x|<R} log\frac{1}{r}\cdot\Delta\varphi\, dx=\langle-2\pi\delta,\varphi\rangle.$$

Deməli,

$$\Delta log\,\frac{1}{r}=-2\pi\delta(x).$$

3^0. İndi $\Delta\frac{1}{r}$ funksionalını bütün R^3 fəzasında hesablayaq. $\forall\varphi\in D(R^3)$ üçün alırıq:

$$\left\langle \Delta\frac{1}{r},\varphi\right\rangle=\left\langle \frac{1}{r},\Delta\varphi\right\rangle=\int\int\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\Delta\varphi}{r}dx=\lim_{\varepsilon\to 0}\iiint_{r\geq\varepsilon}\frac{\Delta\varphi}{r}dx\ . \qquad (13)$$

Alınan inteqralı hesablamaq üçün Qrin düsturunu tətbiq edək. G oblastı olaraq $\varepsilon\leq r\leq R$ oblastını seçək və R ədədini elə seçək ki, $r\geq R$ olduqda $\varphi(x)\equiv 0$ olsun. Beləliklə, Qrin düsturu:

$$\iiint_{r\geq\varepsilon}\left(\frac{1}{r}\cdot\Delta\varphi-\varphi\Delta\frac{1}{r}\right)dx+\iint_{r=\varepsilon}\left[\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial r}-\varphi\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\right)\right]ds=0.$$

Burada sol tərəfdə $r\geq\varepsilon$ oblastında $\frac{1}{r}$ funksiyası harmonik olduğundan $\Delta\frac{1}{r}=0$. Bundan başqa, ($r=\varepsilon$) sferası üzərində $\left|\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right|\leq M$ olduğundan,

$$\left|\iint_{r=\varepsilon}\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial r}ds\right|\leq\frac{M}{\varepsilon}\iint_{r=\varepsilon}ds=\frac{M}{\varepsilon}\cdot 4\pi\varepsilon^2=4\pi M\varepsilon\to 0,\ \varepsilon\to 0.$$

Bunun kimi də,

$$\iint_{r=\varepsilon}\varphi\frac{\partial}{\partial r}\frac{1}{r}ds=-\frac{1}{\varepsilon^2}\iint_{r=\varepsilon}\varphi ds=-\frac{4\pi\varepsilon^2}{\varepsilon^2}S_\varepsilon(\varphi)=-4\pi S_\varepsilon(\varphi)\ , \qquad (14)$$

burada $S_\varepsilon(\varphi)$ ilə φ-nin $(r=\varepsilon)$ sferası üzərində orta qiymətini işarə edirik. Onda $S_\varepsilon(\varphi)\to\varphi(0)$, $\varepsilon\to 0$. Beləliklə, (14)-dən alınır ki,

$$\iint_{r=\varepsilon}\varphi\frac{\partial}{\partial r}\frac{1}{r}ds\to -4\pi\varphi(0),\ \varepsilon\to 0.$$

Nəticədə (13)-dən alırıq ki,

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\iiint_{r\geq\varepsilon}\frac{1}{r}\Delta\varphi\, dx=-4\pi\varphi(0).$$

Beləliklə,

$$\left\langle \Delta\frac{1}{r},\varphi\right\rangle=\lim_{\varepsilon\to 0}\iiint_{r\geq\varepsilon}\frac{\Delta\varphi}{r}dx=-4\pi\varphi(0)=\langle -4\pi\delta,\varphi\rangle,$$

yəni

$$\Delta\frac{1}{|x|}=\Delta\frac{1}{r}=-4\pi\delta(x).$$

4^0. $n=1$ olduqda $r=|x|$ və $\Delta|x|=|x|''$ olduğu üçün alırıq:

$$\left\langle |x|'',\varphi\right\rangle=\left\langle |x|,\varphi''\right\rangle=\int_{-\infty}^{\infty}|x|\varphi''(x)dx=-\int_{-\infty}^{0}x\varphi''+\int_{0}^{\infty}x\varphi''=$$

$$=-x\varphi'/_{-\infty}^{0}+\int_{-\infty}^{0}\varphi'+x\varphi'/_{0}^{-\infty}-\int_{0}^{\infty}\varphi'=2\varphi(0)=\langle 2\delta,\varphi\rangle,$$

buradan

$$|x|''=2\delta(x).$$

4^0.Nəticə. Laplas operatorunun fundamental həlli.

Tərif. Əgər elə $E\in D'(R^n)$ ümumiləşmiş funksiyası varsa ki, D' fəzasında

$$\Delta E(x)=\delta(x)$$

olur, onda E funksionalı Δ operatorunun fundamental həlli (funksiyası) adlanır.

Aydındır ki, əgər $E(x)$ fundamental həll və $E_0(x)$- harmonik funksiyadırsa (yəni $\Delta\ E_0(x)$=0) onda $E+E_0$ cəmi də Δ-nin fundamental həlli olar.

Nəticə (Teorem). Δ operatorunun fundamental həlləri aşağıdakı düsturlarla verilir:

$$E(x)=\begin{cases}-\dfrac{1}{(n-2)S_n}\cdot\dfrac{1}{r^{n-2}}, & n\neq 2\ \textit{olduqda},\\ -\dfrac{1}{2\pi}\cdot\lg\dfrac{1}{r}, & n=2\ \textit{olduqda},\\ -\dfrac{1}{4\pi}\cdot\dfrac{1}{r}, & n=3\ \textit{olduqda},\\ \dfrac{|x|}{2}, & n=1\ \textit{olduqda}.\end{cases}$$

Qeyd. Fundamental həll məlum olduqda $\forall u,f\in D'$ üçün

$$\Delta u(x)=f(x) \qquad (*)$$

tənliyinin ixitiyari həllini Puasson düsturu vasitəsilə yazmaq olur. Məsələn, $E(x)$-finit funksional, f – ixtiyari olduqda həmin tənliyin həllini belə yazmaq olur:

$$u(x)=\int_{R^n} E(x-\xi)f(\xi)d\xi.$$

Xüsusi halda $(n=3)$ belə düstur doğrudur (Puasson):

$$u(x)=-\frac{1}{4\pi}\iiint_{R^3}\frac{f(\xi_1,\xi_2,\xi_3)d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3}{\sqrt{(x_1-\xi_1)^2+(x_2-\xi_2)^2+(x_3-\xi_3)^2}}.$$

Qeyd. $n\neq 2$ olduqda $(x\in R^n)$

$$\Delta\frac{1}{r^{n-2}}=-(n-2)S_n\delta(x),$$

buradan alırıq ki,

$$\delta(x_1,...,x_n)=\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_j}g_j(x_1,...,x_n),$$

burada

$$g_j=\frac{1}{(2-n)S_n}\cdot\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{1}{r^{n-2}}\right)$$

-adi funksiyalardır. Deməli $\delta(x_1,...,x_n)$ funksiyası n-ölçülü halda da adi funksiyaların 1-ci tərtib törəmələri cəmi kimi göstərilir, yəni $\delta(x_1,...,x_n)$ funksiyasının sinqulyarlıq tərtibi 1-ə bərabər olur.

§ 5. Bəzi xüsusi tipli ümumiləşmiş funksiyalar.

Bir çox tətbiqi məsələlərdə (fundamental həllər) x_+^λ, x_-^λ və r^λ kimi funksiyaları bilmək lazım gəlir.

1. x_+^λ funksionalı. Belə bir funksiyaya baxaq:

$$x_+^\lambda=\begin{cases}0, & x\leq 0,\\ x^\lambda, & x>0\end{cases}$$

Uyğun umumiləşmiş funksiyanı qurmaq və öyrənmək istəyirik. $\operatorname{Re}\lambda>-1$ olduqda bu funksiya requlyar funksional doğurur:

$$\langle x_+^\lambda,\varphi\rangle=\int_0^\infty x^\lambda\varphi(x)dx. \qquad (1)$$

Buradan λ -ya görə törəmə aldıqda

$$\int_0^\infty x^\lambda \ln x\, \varphi(x)dx$$

alınır, bu onu göstərir ki, x_+^λ funksiyası $\mathrm{Re}\lambda > -1$ oblastında analitikdir. Bu funksiyanı bütün müstəviyə analitik davam etdirmək olar. (1) inteqralını belə yazmaq olar:

$$\langle x_+^\lambda, \varphi\rangle = \int_0^1 x^\lambda [\varphi(x) - \varphi(0)]dx + \int_0^1 x^\lambda \varphi(x)dx + \frac{\varphi(0)}{\lambda+1}, \tag{2}$$

burada 1-ci toplanan $\mathrm{Re}\lambda > -2$ üçün,2-ci hər yerdə, 3-cü isə $\lambda \neq 1$ oblastında yığılır. Deməli (1) funksionalını $\mathrm{Re}\lambda > -2,\ \lambda \neq 1$ oblastına analitik davam etdirmək olar.

Analoji qayda ilə x_+^λ funksionalı

$$\mathrm{Re}\lambda > -n-1,\ \lambda \neq -1, -2, \ldots, -n$$

oblastına davam oluna bilir, çünki:

$$\int_0^1 x^\lambda \varphi(x)dx = \int_0^1 x^\lambda \left[\varphi(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\varphi^{(k)}(0)}{k!} x^k\right]dx + \int_0^1 x^\lambda \varphi(x)dx + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\varphi^{(k-1)}(0)}{(k-1)!(\lambda+k)} x^k. \tag{3}$$

Bu düsturla x_+^λ funksiyası bütün , $\lambda \neq -1, -2, \ldots, -n, \ldots$ qiymətlərində təyin olunmuş olur. Məsələn, $-n-1 < \mathrm{Re}\lambda < -n$ zolağında (3) düsturu belə sadə şəkli alır:

$$\langle x_+^\lambda, \varphi\rangle = \int_0^1 x^\lambda \left[\varphi(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\varphi^{(k)}(0)}{k!} x^k\right]dx,$$

çünki $1 \leq k \leq n$ olduqda

$$\int_0^1 x^{\lambda+k-1}dx = -\frac{1}{\lambda+k}.$$

(3) düsturu göstərir ki, $\langle x_+^\lambda, \varphi\rangle$ analitik funksiyasının

, $\lambda \neq -1, -2, \ldots, -n, \ldots$ nöqtələrində 1-ci tərtib polyusları var, belə ki, $\lambda = -n$ nöqtəsində onun çıxığı belə olur:

$$\underset{\lambda=-n}{res}\left\langle x_+^\lambda,\varphi\right\rangle=\frac{\varphi^{(n-1)}(0)}{(n-1)!}.$$

Lakin

$$\varphi^{(n-1)}(0)=(-1)^{n-1}\left\langle\delta^{(n-1)}(x),\varphi(x)\right\rangle$$

olduğundan x_+^λ funksionalının $\lambda=-n$ nöqtəsindəki çıxığı belə olur:

$$res\, x_+^\lambda/_{\lambda=-n}=\frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!}\delta^{(n-1)}(x),\quad n=-1,-2,-3...$$

2.Analoji qayda ilə x_-^λ funksiyası daxil edilir:

$$x_-^\lambda=\begin{cases}|x|^\lambda, & x<0\\ 0, & x>0\end{cases}$$

$\operatorname{Re}\lambda>-1$ olduqda x_-^λ funksiyası requlyar funksional doğurur:

$$\left\langle x_-^\lambda,\varphi\right\rangle=\int_{-\infty}^{0}|x|^\lambda\varphi(x)dx.$$

Bu funksionalı $\operatorname{Re}\lambda<-1$ oblastına analitik davam etmək olur. Alınan funksiya $\lambda\neq-1,-2,...,-n$ nöqtələrindən başqa hər yerdə analitik olur, $\lambda=-k$ nöqtəsində x_-^λ ümumiləşmiş funksiyasının sadə polyusları var və onun bu nöqtələrdəki çıxığı belə olur:

$$\underset{\lambda=-n}{res}\, x_-^\lambda=\frac{\delta^{(n-1)}(x)}{(n-1)!}.$$

Məsələn, $-n-1<\operatorname{Re}\lambda<-n$ zolağında $\left\langle x_-^\lambda,\varphi\right\rangle$ kəmiyyətini belə düsturla hesablamaq olar:

$$\left\langle x_-^\lambda,\varphi\right\rangle=\left\langle x_+^\lambda,\varphi(-x)\right\rangle=\int_0^\infty x^\lambda\left[\varphi(-x)-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(-1)^k x^k}{k!}\varphi^{(k)}(0)\right]dx.$$

3. $|x|^\lambda$ **funksionalı.** Belə bir funksionala baxaq:

$$|x|^\lambda=x_+^\lambda+x_-^\lambda.$$

Məlumdur ki, x_+^{λ} ümumiləşmiş funksiyasının $\lambda=-n$ olduqda polyusu var və onun bu nöqtədə çıxığı

$$\frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!}\delta^{(n-1)}(x)$$

olur. x_-^{λ} isə həmin nöqtədə belə çıxığa malikdir:

$$\frac{1}{(n-1)!}\delta^{(n-1)}(x).$$

Onda $|x|^{\lambda}$ ümumiləşmiş funksiyasının $\lambda=-1,-3,-5,\ldots,-2m-1,\ldots$ nöqtələrində polyusu var. $\lambda=-2m-1$ nöqtəsində onun sıxlığı

$$\frac{2}{(2m-1)!}\delta^{(2m-1)}(x)$$

olur. Digər tərəfdən

$$\left\langle |x|^{\lambda},\varphi\right\rangle=\left\langle x_+^{\lambda},\varphi\right\rangle+\left\langle x_-^{\lambda},\varphi\right\rangle=\int_0^{\infty}x^{\lambda}\varphi(x)dx+\int_0^{\infty}x^{\lambda}\varphi(-x)dx=$$

$$=\int_0^{\infty}x^{\lambda}\left[\varphi(x)-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{\varphi^{(k)}(0)}{k!}x^k\right]dx+$$

$$+\int_0^{\infty}x^{\lambda}\left[\varphi(-x)-\varphi(0)+x\varphi'(0)-\ldots-\frac{(-1)^{n-1}\varphi^{(n-1)}(0)}{(n-1)!}x^{n-1}\right]dx=$$

$$=\int_0^{\infty}x^{\lambda}\left\{\varphi(x)-\varphi(-x)-2\left[\varphi(0)+\frac{x^2}{2!}\varphi''(0)+\ldots+\frac{x^{2m-2}}{(2m-2)!}\varphi^{(2m-2)}(0)\right]\right\}dx.$$

Məsələn, $\lambda=-2m$ (cüt ədəd) olduqda

$$\left\langle |x|^{-2m},\varphi\right\rangle=\int_0^{\infty}x^{-2m}\left\{\varphi(x)-\varphi(-x)-2\left[\varphi(0)+\frac{\varphi''(0)}{2!}x^2+\ldots+\frac{x^{2m-2}}{(2m-2)!}\varphi^{(2m-2)}(0)\right]\right\}dx,$$

$$\left\langle |x|^{-2},\varphi\right\rangle=\int_0^{\infty}\frac{\varphi(x)+\varphi(-x)-2\varphi(0)}{x^2}dx.$$

$\lambda = -2m$ olduqda $|x|^{-2m} = x^{-2m}$ yazırlar, çünki

$$\left\langle x^{-2m},\varphi\right\rangle = \int_0^\infty x^{-2m}\left\{\varphi(x)-\varphi(-x)-2\left[\varphi(0)+\frac{x}{2!}\varphi''(0)+\ldots+\frac{x^{2m-2}}{(2m-2)!}\varphi^{(2m-2)}(0)\right]\right\}dx.$$

Bunun kimi $\lambda = -2m-1$ (tək ədəd olduqda)

$$\left\langle |x|^{-2m-1},\varphi\right\rangle = \int_0^\infty x^{-2m-1}\left\{\begin{array}{l}\varphi(x)-\varphi(-x)- \\ -2\left[x\varphi(0)+\frac{x^3}{2!}\varphi'''(0)+\ldots+\frac{x^{2m-1}}{(2m-1)!}\varphi^{(2m-1)}(0)\right]\end{array}\right\}dx$$

Xüsusi halda, $\lambda = -1$ olduqda

$$\left\langle |x|^{-1},\varphi\right\rangle = \int_0^\infty \frac{\varphi(x)-\varphi(-x)}{x}dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\left\{\int_{-\infty}^{-\varepsilon}\frac{\varphi(x)}{x}dx+\int_{\varepsilon}^{\infty}\frac{\varphi(x)}{x}dx\right\}.$$

4. r^λ **funksionalı.** $r=\sqrt{\sum_1^n x_j^2}$.

$$\left\langle r^\lambda,\varphi\right\rangle = \int_{R^n} r^\lambda \varphi(x)dx\ . \qquad (4)$$

Bu inteqral $\operatorname{Re}\lambda > -n$ oblastında analitik funksiya olur. $\operatorname{Re}\lambda \le -n$ olduqda r^λ lokal inteqrallanan deyil. Analitik davam metodu ilə r^λ funksionalını bütün fəzada təyin etmək istəyirik.

Sferik koordinatlara keçdikdə (4) bu şəklə gəlir:

$$\left\langle r^\lambda,\varphi\right\rangle = \int_0^\infty r^\lambda\left\{\int_{\Omega_n(r)}\varphi(x)d\omega(r)\right\}dr,$$

burada $d\omega(r)$ ilə R^n fəzasında r radiuslu sferanın səth sahə elementi işarə olunur. Daxili inteqralı bu şəkildə yazmaq olar:

$$\int_{\Omega_n(r)}\varphi(x)d\omega(r) = S_n\cdot r^{n-1}S_r(\varphi),$$

burada S_n R^n fəzasında 1 radiuslu sferanın səth sahəsidir, $S_n = 2\pi^{n/2} / \Gamma(n/2)$, $\Gamma(\alpha)$ -qamma funksiyadır, $S_r(\varphi)$ isə $\varphi(x)$ funksiyasının $\Omega_n(r)$ sferası üzərindəki orta qiymətidir. Beləliklə, biz belə bir düstur almış oluruq:

$$\langle r^{\lambda}, \varphi \rangle = S_n \cdot \int_0^{\infty} r^{\lambda+n-1} S_r(\varphi) dr. \tag{5}$$

Göstərmək olar ki, $S_r(\varphi)$ $r-$in funksiyası kimi sonsuz diferensiallanan və finit funksiyadır və onun bütün tək tərtibdən törəmələri $r = 0$ olduqda sıfra bərabərdir. r kafi böyük olduqda $\varphi(x) = 0$ olduğundan onun orta qiyməti də 0-ra bərabər olar, yəni $S_r(\varphi)$- finitdir. $\varphi(x)$ funksiyasını Teylor düsturuna ayırsaq, alarıq:

$$S_n \cdot r^{n-1} S_r(\varphi) = \int_{\Omega_n(r)} \left[\varphi(0) + \sum_j \frac{\partial \varphi(0)}{\partial x_j} x_j + \frac{1}{2!} \sum_{i,j} \frac{\partial^2 \varphi(0)}{\partial x_i \partial x_j} x_i x_j + \ldots + R_{n+1} \right] d\omega(r).$$

Buradan alırıq ki,

$$S_r(\varphi) = \varphi(0) + a_1 r^2 + a_2 r^4 + \ldots + a_m r^{2m} + O(r^{2m+1}).$$

Buradan görünür ki, (m-ixtiyaridir) $S_r(\varphi) \in C^{\infty}[0, \infty)$. Əgər $S_r(\varphi)$ funksiyasını $r < 0$ oblastına cüt funksiya kimi davam etdirsək, onda $S_r(\varphi)$ əsas funksiya olur, yəni $S_r(\varphi) \in D(R)$. Belə olduqda isə (5) inteqralına 1-ci bölmədəki $S_n \cdot x_+^{\mu}$ funksionalının ($\mu = \lambda + n - 1$) $S_x(\varphi)$ əsas funksiyasına tətbiqi kimi baxa bilərik. Məlumdur ki, x_+^{μ} funksiyası $\operatorname{Re}\mu > -1$ (yəni $\operatorname{Re}\lambda > -n$) olduqda bütün müstəviyə analitik davam edilir və yalnız $\mu = -1, -2, \ldots, -n, \ldots$ (yəni $\lambda = -n, -n-1, \ldots$) nöqtələrində x_+^{μ} funksiyasının 1-ci tərtib polyusları vardır. Həmin bu nöqtələrdə funksiyanın çıxıqları məlumdur, məsələn, $\mu = -m$ (yəni $\lambda = -n - m - 1$) olduqda x_+^{μ} funksiyasının çıxığı belə olur:

$$\frac{1}{(m-1)!}\left\langle(-1)^{m-1}\delta^{(m-1)}(\xi),S_\xi(\varphi)\right\rangle=\frac{1}{(m-1)!}\frac{d^{m-1}}{d\xi^{m-1}}S_\xi(\varphi)/_{\xi=0}.$$

Lakin $S_\xi(\varphi)$ funksiyasının $\xi=0$ nöqtəsində tək tərtibli törəmələri 0-ra bərabər olduğundan $m-1=2k$ tərtibli törəmələr 0-dan fərqli olur $(k=0,1,2,...)$, yəni $m=1,3,5,...$(deməli $\lambda=-n,-n-2,-n-4,...$) olduqda çıxıqlar var. Beləliklə, $r^\lambda S_r(\varphi)$ funksiyasının $\lambda=-n-2k$ $(k=0,1,2,...)$ nöqtəsində çıxığı belə olur:

$$\frac{S_n\left\langle\delta^{(2k)}(\xi),S_\xi(\varphi)\right\rangle}{(2k)!}=\frac{S_n}{(2k)!}\cdot\frac{d^{2k}}{d\xi^{2k}}S_\xi(\varphi)/_{\xi=0}. \tag{6}$$

Xüsusi halda, $\lambda=-n$ nöqtəsində $(k=0)$ $\left\langle r^\lambda,S_r(\varphi)\right\rangle$ funksiyasının 1-ci tərtib polyusu var və onun bu nöqtədəki çıxığı belə olar:

$$S_n\,S_r(\varphi)/_{r=0}=S_n\varphi(0)=\langle S_n\cdot\delta(x),\varphi\rangle,$$

yəni $\lambda=-n$ nöqtəsi r^λ ümumiləşmiş funksiyasının sadə polyusudur və onun bu nöqtədəki çıxığı

$$\underset{\lambda=-n}{ress}\,r^\lambda=S_n\cdot\delta(x) \tag{7}$$

olur.

İndi $\delta(x)$ funksiyasını sadə (müstəvi) dalğalara ayıraq. Bu nə deməkdir?

Tutaq ki, $\omega=(\omega_1,...,\omega_n)$ R^n fəzasında 1- radiuslu Ω sferasının nöqtəsidir, $\sum\omega_i^2=1$. $\omega_1x_1+...+\omega_nx_n=(\omega,x)$ işarə edək. Belə intenqrala baxaq:

$$\int_\Omega|(\omega,x)|^\lambda d\omega.$$

Bu inteqral $\mathrm{Re}\,\lambda>-1$ olduqda yığılandır və o sfera üzərində sferik simmetrik $F(r,\lambda)$ funksiyasını təyin edir, $r=\sqrt{x_1^2+...+x_n^2}$. Deməli alırıq ki, elə $C(n,\lambda)$ sabiti var ki,

$$\int_\Omega|\omega_1x_1+...+\omega_nx_{n1}|^\lambda d\omega=C(n,\lambda)r^\lambda. \tag{*}$$

Ω üzərində $x_1 = x_2 = \ldots = x_{n-1} = 0, \quad x_n = 1$ götürsək $(r = 1)$, onda buradan alınır ki, (bax.Şilov [1], səh.101)

$$C(n,\lambda) = \int_{\Omega} |\omega_n|^{\lambda} d\omega = 2\pi^{\frac{n-1}{2}} \frac{\Gamma\left(\frac{\lambda+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\lambda+n}{2}\right)}.$$

Beləliklə $(*)$-dan alırıq ki,

$$\int_{\Omega} \frac{|\xi|^{\lambda}}{\Gamma\left(\frac{\lambda+1}{2}\right)} d\omega = c_n \cdot \frac{r^{\lambda}}{\Gamma\left(\frac{\lambda+n}{2}\right)} \equiv \Phi(\lambda), \tag{8}$$

burada

$$c_n = 2\pi^{\frac{n-1}{2}}; \; \xi = \omega_1 x_1 + \ldots + \omega_n x_n.$$

Bu düstur $\Phi(\lambda)$ funksiyasının «müstəfi dalğalara» ayrılması düsturu adlanır. Bir çox fəza məsələlərini bu düstur vasitəsilə sadə müstəvi məsələlərinə gətirmək olur.

Lemma.

$$\frac{r^{\lambda}}{\Gamma\left(\frac{\lambda+n}{2}\right)} /_{\lambda=-n} = \frac{S_n}{2} \cdot \delta(x_1, \ldots, x_n) \tag{9}$$

(Burada sol tərəf $\lambda \to -n$ olduqda limit qiyməti mənada başa düşülür).

Məlumdur ki, r^{λ} funksionalı bütün müstəviyə analitik davam olunandır, belə ki, $\lambda = -n, -n-2, -n-4, \ldots$ nöqtələrində onun 1-ci tərtib polyusları var. $\lambda = -n$ nöqtəsində r^{λ} funksiyasının çıxığı $S_n \cdot \delta(x)$ olduğu məlumdur.

$\Gamma(z)$ funksiyasının da $z = 0, -1, -2, \ldots$ nöqtələrində polyusları var.Deməli $\Gamma\left(\frac{\lambda+n}{2}\right)$-nın polyusları $\lambda n, -n-2, -n-4, \ldots$ olur. Onda $\Phi(\lambda)$ funksiyasının surəti və məxrəci eyni nöqtələrdə polyuslara malikdir. Belə olduqda $\Phi(\lambda)/_{\lambda=-n}$ qiyməti onun surət və məxrəcinin $\lambda = -n$ nöqtəsindəki çıxıqları nisbətinə bərabər olar. Surətin çıxığı $\operatorname*{res}_{\lambda=-n} r^{\lambda} = S_n \cdot \delta(x)$.Məxrəcin çıxığını hesablayaq:

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$$

bərabərliyinə əsasən

$$\Gamma\left(\frac{\lambda+n}{2}\right)=\frac{2}{\lambda+n}\Gamma\left(\frac{\lambda+n+2}{2}\right),$$

Buradan çıxır ki, $\lambda \to -n$ olduqda

$$\Gamma\left(\frac{\lambda+n}{2}\right)\to\frac{2}{\lambda+n}\Gamma(1)+0(1),$$

yəni

$$res\Gamma\left(\frac{\lambda+n}{2}\right)=2\Gamma(1)=2.$$

Beləliklə alırıq ki,

$$\underset{\lambda=-n}{res}\,\Phi(\lambda)=\frac{S_n\cdot\delta(x)}{2},$$

yəni

$$\frac{2r^{\lambda}}{S_n\cdot\Gamma\left(\frac{\lambda+n}{2}\right)}\Big|_{\lambda=-n}=\delta(x_1,\dots,x_n)$$

Beləliklə, (8)-in sağ tərəfini bütün λ müstəvisinə davam etdirdik. İndi onun sol tərəfini bütün müstəviyə davam etdirək. Məlumdur ki, $|\xi|^{\lambda}$ funksionalının analitik davamının $\lambda=-1,-3,-5,\dots$ nöqtələrində sadə polyusları var. Həmin nöqtələrdə həm də $\Gamma\left(\frac{\lambda+1}{2}\right)$ funksiyası sadə polyuslara malikdir.İndi

$$\frac{|\xi|^{\lambda}}{\Gamma\left(\frac{\lambda+1}{2}\right)}\Big|_{\lambda=-2m-1}$$

qiymətini tapaq. Həmin qiymət surət və məxrəcin çıxıqları nisbətinə bərabərdir. Məlumdur ki,

$$\underset{\lambda=-2m-1}{res}|\xi|^{\lambda}=\frac{1}{(2m)!}\delta^{(2m)}(\xi).$$

$\Gamma\left(\frac{\lambda+1}{2}\right)$-nin həmin nöqtədəki çıxığı isə belə tapılır. Aşkardır ki,

$$\Gamma\left(\frac{\lambda+1}{2}\right)=\frac{2}{\lambda+1}\Gamma\left(\frac{\lambda+3}{2}\right)=\frac{2}{\lambda+1}\cdot\frac{2}{\lambda+3}\Gamma\left(\frac{\lambda+5}{2}\right)=\ldots=$$

$$=\frac{2^m\Gamma\left(\frac{\lambda+2m+3}{2}\right)}{(\lambda+1)(\lambda+3)\ldots(\lambda+2m+1)},$$

buradan

$$\left.\frac{|\xi|^{\lambda}}{\Gamma\left(\frac{\lambda+1}{2}\right)}\right|_{\lambda=-2m-1}=(-1)^m\frac{m!}{(2m)!}\delta^{(2m)}(\xi),$$

($\lambda=-2m$ nöqtəsində surət və məxrəc məxsusiyyətə malik deyil).

Beləliklə, n-nin tək və cüt olmasından asılı olaraq $\delta(x_1,\ldots,x_n)$-in aşağıdakı ayrılış düsturlarını almış oluruq:

$$\delta(x_1,\ldots,x_n)=\begin{cases}A_n\cdot\int\limits_{\Omega}\delta^{(n-1)}(\xi)d\omega, & n=2m+1 \ \ olduqda\\ B_n\cdot\int\limits_{\Omega}|\xi|^{-2m}d\omega, & n=2m \ \ olduqda\end{cases}, \tag{9}$$

burada $\xi=(\omega_1x_1+\ldots+\omega_nx_n)$, A_n, $B_n=const$ $|\xi|^{-2m}$ funksionalı 3-cü bənddə təyin olunmuşdur:

$$\left\langle|\xi|^{-2m},\varphi\right\rangle=\int\limits_0^{\infty}\xi^{-2m}\left\{\varphi(\xi)+\varphi(-\xi)-2\left[\varphi(0)+\frac{\xi^2}{2!}\varphi''(0)+\ldots+\frac{\xi^{2m-2}}{(2m-2)!}\varphi^{(2m-2)}(0)\right]\right\}ds\cdot$$

(9) düsturları $\delta(x_1,\ldots,x_n)$ Dirak funksiyasının «sadə (müstəvi) dalğalara» ayrılma düsturları adlanır.

Elliptik diferensial operatorların fundamental həllərinin tapılması məsələsində bu düsturlardan geniş istifadə olunur.

F Ə S İ L – 4

ÜMUMİLƏŞMİŞ FUNKSİYALARIN STRUKTURASI (QURULUŞ DÜSTURLARI)

§1.Bəzi funksional fəzalarda funksionalın göstərilişi.

Funksional fəzalarda xətti kəsilməz funksionalın ümumi şəklinin müəyyən edilməsi həm nəzəri, həm də tətbiqi cəhətdən olduqca vacibdir. Belə hallarda qoşma fəzanın həndəsəsi çox şəffaf olur və orada tədqiqat aparmaq, tətbiq etmək bir növ əyani xarakterli olur. Çox əlamətdar haldır ki, indi ümumiləşmiş funksiyalar fəzasında da ümumi göstəriliş nəticələri müəyyən edilmişdir, əsasən $D(G), D(R''), S$ fəzalarında təyin olunmuş xətti kəsilməz funksionalların ümumi düsturları, strukturları tapılmışdır. Ümumiləşmiş funksiyalar adi funksiyalar sinfini genişləndirir. İndi biz bir növ tərs məsələləri araşdırırıq, belə ki, ümumiləşmiş funksiyaları adi funksiyalar (kəsilməz funksiyalar) vasitəsilə necə ifadə etmək məsələsini öyrənirik. Bu fəsildə göstərilir ki, hər bir $T \in D'$ ümumiləşmiş funksiyasını müəyyən $f(x)$ kəsilməz funksiyasının müəyyən tərtib törəməsi kimi göstərmək olur, yəni $\forall\ T \in D'$ üçün elə $f(x) \in C(R^n)$ kəsilməz funksiyası və elə $|\alpha|$ ədədi var ki, $T = D^\alpha f$ və yaxud $T = \sum\limits_{|\alpha| \le p} D^\alpha f_\alpha(x), f_\alpha \in C(R^n)$. Beləliklə, bütün mümkün kəsilməz funksiyaların bütün mümkün törəmələrini hesablamaqla bütün ümumiləşmiş funksiyalar sinfini almış oluruq. Deməli, D' funksionallar fəzası kəsilməz funksiyalar fəzasının bilavasitə genişlənməsi kimi alınır.

Əvvəlcə bir neçə klassik nəticələri yada salaq.

Tərif. H-xətti fəzası o zaman Hilbert fəzası adlanır ki, H-da ixtiyari iki $x, y \in \mathrm{H}$ elementinə onların skalyar hasili adlanan (x, y) ədədi uyğun qoyulur, belə ki, aşağıdakı xassələr ödənilir:

$$\begin{aligned}
&1.(x,y)=(y,x),\\
&2.(x,y+z)=(x,y)+(x,z),\quad x,y,z\in \mathrm{H},\\
&3.(\lambda x,y)=\lambda(x,y),\\
&4.x\neq 0\ \textit{olduqda}\ (x,x)>0,\\
&\quad x=0\ \textit{olduqda}\,(x,x)=0.
\end{aligned}$$

Hilbert fəzasında Koşi-Bunyakovski bərabərsizliyi belədir:

$$|(x,y)| \le \|x\| \cdot \|y\|,$$

burada, məsələn $\|x\| = \sqrt{(x,x)}$.

Misallar.

1^0. R^n -Hilbert fəzasıdır; $x, y \in R^n$ olduqda skalyar hasil belə olur:

$$(x,y) = \sum_{i=1}^{n} \xi_i \eta_i, \quad x = (\xi_1, \dots, \xi_n) \in R^n, \quad y = (\eta_1, \dots, \eta_n) \in R^n.$$

Norma:

$$\|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \xi_i^2}.$$

2^0. l_2. Əgər $x \in l_2$, onda $x = (\xi_1, \dots, \xi_n, \dots)$, $\sum_{i=1}^{\infty} \xi_i^2 < \infty$.

Skalyar hasil: $x, y \in l_2$ üçün

$$(x,y) = \sum_{i=1}^{\infty} \xi_i \eta_i.$$

Koşi-Bunyokovski bərabərsizliyinə görə bu sıra yığılandır. l_2-də norma:

$$\|x\| = \left(\sum_{i=1}^{\infty} \xi_i^2 \right)^{1/2} < \infty$$

3^0.. $L_2(a,b)$-ölçülən və kvadratı ilə inteqrallanan funksiyalar fəzasıdır, $\varphi \in L_2(a,b)$ olduqda

$$\int_a^b |\varphi(x)|^2 dx < \infty.$$

L_2-də skalyar hasil:

$$(\varphi, \phi) = \int_a^b \varphi(x) \phi(x) dx;$$

$$\|\varphi\| = \left(\int_a^b |\varphi(x)|^2 dx \right)^{1/2}.$$

L_2-də Koşi-Bunyokovski bərabərsizliyi belə olur:

$$|(\varphi,\phi)| = \left|\int_a^b \varphi(x)\phi(x)dx\right| \le \sqrt{\int_a^b |\varphi|^2 dx} \cdot \sqrt{\int_a^b |\phi|^2 dx} = \|\varphi\| \cdot \|\phi\|.$$

Bəzi funksional fəzalarda xətti funksionalların ümumi şəkilləri haqqında klassik nəticələri qısaca yada salmaq məqsədəuyğun olardı.

1. R^n **evklid fəzası.** Tutaq ki, $(e_1, e_2, ..., e_n)$ vektorlar sistemi R^n-də bazisdir. Onda $\forall x \in R^n$ üçün

$$x = \sum_1^n \xi_i e_i ,$$

burada $\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n$ ədədləri x vektorunun koordinatları adlanır. Tutaq ki, f R^n-də xətti funksionaldır. Onda $\forall x \in R^n$

$$f(x) = f\left(\sum_1^n \xi_i e_i\right) = \sum_1^n \xi_i f|e_i| = \sum_1^n \xi_i f_i ,$$

burada $f_i = f(e_i)$-ədədlərdir. Beləliklə, R^n-də hər bir xətti f funksionalı bu şəkildə yazılır:

$$f(x) = \sum_1^n \xi_i f_i . \qquad (1)$$

Tərsinə, (1) şəklində olan hər bir funksional R^n-də xətti funksional olur. Deməli, (1) düsturu R^n-də xətti funksionalın ümumi şəkli olur. Beləliklə, əgər $f_1, ..., f_n$- ədədlərinə f funksionalının koordinatları kimi baxsaq, onda $f = (f_1, ..., f_n)$ özü də n-vektor olur. Belə olduqda (1) düsturunu skalyar hasil şəklində belə yazmaq olar:

$$f(x) = \sum_1^n \xi_i f_i = (x, f) .$$

Deməli, R^n-nin qoşma fəzası (xətti funksionallar çoxluğu) n- ölçülü evklid fəzası olur. (1)-dən alırıq (Koşi-Bunyakovski):

$$|f(x)| \le \sqrt{\sum_1^n \xi_i^2} \cdot \sqrt{\sum_1^n f_i^2} = \|x\| \cdot \sqrt{\sum_1^n f_i^2}$$

buradan çıxır ki,

$$\|f\| \le \sqrt{\sum_1^n f_i^2} \quad . \qquad (*)$$

Digər tərəfdən, $c_i = f(e_i) = f_i$ işarə etsək, $c = (c_1, \dots, c_n) \in R^n$ və (1)-dən

$$f(c) = (c, c) = \|c\|^2$$

olduğundan çıxır ki,

$$\frac{f(c)}{\|c\|} = \|c\|$$

Lakin

$$\|f\| = \sup \frac{|f(x)|}{\|x\|} \ge \frac{f(c)}{\|c\|} = \|c\|$$

olduğundan

$$\|f\| \ge \sqrt{\sum_1^n f_i^2} \qquad (**)$$

alınır. ($*$) və ($**$) münasibətlərindən çıxır ki,

$$\|f\| = \sqrt{\sum_1^n f_i^2} \, .$$

Deməli $(R^n)^*$ fəzası da evklid fəzasıdır. Beləliklə R^n ilə $(R^n)^*$ fəzaları izomorf fəzalar olur.

Qeyd. R^n-də metrika (norma) başqa cür təyin olunduqda $(R^n)^*$ qoşma fəzası tamamilə başqa metrikaya malik fəza ola bilər.

Məsələn, tutaq ki, R^n-də metrika belə təyin olunub: $\forall x \in R^n$ üçün, $x=(\xi_1,\xi_2,...,\xi_n)$ və

$$\|x\| = \max_i |\xi_i|. \tag{2}$$

Onda

$$|f(x)| = \left|\sum_{i=1}^{n} \xi_i f_i\right| \le \sum_{i=1}^{n} |\xi_i||f_i| \le \left(\sum_{1}^{n} |f_i|\right)\|x\|,$$

Buradan

$$\|f\| \le \sum_{i=1}^{n} |f_i|. \tag{3}$$

Digər tərəfdən, R^n-dən olan belə bir elementə baxaq:

$$x_0 = \sum_{i=1}^{n} sign\, f_i \cdot e_i.$$

Onda

$$\|x_0\| = \max\left|\sum_{i=1}^{n} sign\, f_i\right| = 1.$$

Belə olduqda alırıq ki,

$$f(x_0) = \sum_{i=1}^{n} (sign\, f_i) f(e_i) = \sum_{i=1}^{n} sign\, f_i \cdot f_i =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} |f_i| = \left(\sum_{i=1}^{n} |f_i|\right)\|x_0\|.$$

Buradan çıxır ki,

$$\|f\| \ge \sum_{i=1}^{n} |f_i|. \tag{4}$$

Alınan (3) və (4) münasibətindən çıxır ki,

$$\|f\| = \sum_{i=1}^{n} |f_i|. \tag{5}$$

Beləliklə, R^n-də metrika (norma) (2) şəklində olduqda $(R^n)^*$ qoşma fəzada metrika (5) şəklində olur, başqa sözlə bu fəzalar müxtəlif metrik fəzalar olur. Lakin R^n evklid fəzası olduqda $(R^n)^*$ evklid fəzası olur və bu fəzalar izomorf olurlar. $(R^n)^*$ fəzasının da elementləri $(f_1,...,f_n)$ kimi n-vektorlar olur. Bu fəzaları eyniləşdirmək olar.

Belə çıxır ki, $(R^n)^*$ fəzasından olan hər bir f vektoru R^n fəzasının müəyyən bir $c \in R^n$ elementi kimi qəbul edilə bilər. Onda hər bir $f \in (R^n)^*$ üçün elə $c \in R^n$ var ki, $\forall x \in R^n$ üçün f funksionalı bu şəkildə yazılır:

$$f(x) = (x, c) \tag{6}$$

və bu halda

$$\|f\| = \|c\| = \sqrt{\sum_{1}^{n} c_i^2}, \quad c = (c_1,...,c_n) \in R^n.$$

Deməli, (6) düsturu R^n-də xətti funksionalın ümumi şəkli olur (Riss teoremi).

Xüsusi halda, $n = 1$ olduqda, $R = (-\infty, \infty)$ ədəd oxunda verilən xətti funksionalın ümumi şəkli $f(x) = cx$ kimi olur.

2. l_p fəzasında xətti funksional. l_p $(p \geq 1)$-fəzası ədədi ardıcıllıqlar fəzasıdır, belə ki, $x = (\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n, ...) \in l_p$ olduqda $\sum_{1}^{\infty} |\xi_i|^p < \infty$ olur. l_p-xətti fəzadır, l_p-normalaşmış fəzadır, norma belə daxil edilir:

$$\|x\| = \left(\sum_{1}^{\infty} |\xi_i|^p \right)^{1/p} < \infty.$$

Tutaq ki, f l_p-də xətti funksionaldır. Əgər $\{e_1, e_2, ..., e_n, ...\}$ l_p-də bazisdirsə, onda (f-kəsilməz olduğundan)

$$x=\sum_1^\infty \xi_k e_k,$$

$$f(x)=\sum_1^\infty \xi_k f(e_k)=\sum_1^\infty c_k\xi_k, c_k=f(e_k).$$

c_i ədədləri f vasitəsilə birqiymətli tapılır, l_p-də f xətti funksionalı bu şəkildə olur:

$$f(x)=\sum_1^\infty c_k\xi_k \tag{1}$$

Tərsinə, (1) şəklində verilən f l_p-də xətti və kəsilməzdir. Asan görmək olur ki, c_k ədədləri üçün

$$\sum_1^\infty |c_k|^q<\infty, \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1.$$

Bundan əlavə, f xətti funksionalının norması belə olur:

$$\|f\|=\left(\sum_1^\infty |c_k|^q\right)^{1/q}=\|c\|,$$

$c=(c_1,c_2,...)\in l_q$, deməli $f\in l_q$, yəni

$$(l_p)^*=l_p, \quad \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1.$$

Xüsusi halda, $p=2$ üçün $l_2^*=l_2$ olur. Deməli l_2-də hər bir xətti funksional l_2-nin müəyyən bir elementi ilə eyniləşir. Bu halda (1) funksionalı skalyar hasil şəklində alınır: elə $c\in l_2$ var ki, $\forall x\in l_2$ üçün

$$f(x)=(c,x)=\sum_1^\infty c_k\xi_k,$$

$$\|f\|=\|c\|=\left(\sum_1^\infty c_k^2\right)^{1/2}.$$

3. $L_p(a,b)$ fəzasında xətti funksional. Tutaq ki, $f \in L_p(a,b)$. Onda $f(x)$ ölçülən funksiya olub,

$$\int_a^b |f(x)|^p dx < \infty$$

və

$$\|f\|_{L_p} = \left(\int_a^b |f(x)|^p dx \right)^{1/p} < \infty.$$

Teorem. $1 \le p < \infty$ olduqda $L_p^*(a,b) = L_q(a,b)$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Deməli, əgər F L_p-də xətti funksionaldırsa, onda elə $g \in L_q(a,b)$ elementi var ki, $\forall f \in L_p$ üçün

$$F(f) = \int_a^b f(x)\overline{g(x)}dx$$

olur, belə ki, g funksiyası F vasitəsilə birqiymətli müəyyən olunur və

$$\|F\|_{L_p^*} = \|g\|_{L_q} = \left(\int_a^b |g(x)|^q dx \right)^{1/q}.$$

Qeyd. $p = \infty$ olduqda $(q = 1)$ $L_\infty^* = L_1$ olmaya bilər. (L_1 fəzası heç bir banax fəzasının qoşma fəzası olmur).

Xüsusi halda $p = 2$ olduqda $L_2(a,b)$-Hilbert fəzası olur. Onda $L_2^* = L_2$, deməli L_2-də hər bir xətti kəsilməz funksional həmin fəzanın müəyyən g elementi ilə skalyar hasil kimi verilir: $\forall f \in L_2$

$$F(f) = \langle f, g \rangle = \int_a^b f(x)\overline{g(x)}dx,$$

və

$$\|F\| = \|g\| = \left(\int_a^b |g(x)|^2 dx \right)^{1/2}.$$

$L_2(a,b)$-də hər bir xətti funksional L_2-nin müəyyən bir elementi kimi alınır. Bu xassə ixtiyari Hilbert fəzası üçün xarakterik xassədir.

$L_2(0,1)$-də belə funksionala baxaq:

$$f(x)=\int_0^1 x(t)dt,\ x\in L_2(0,1).$$

Onda Şvars bərabərsizliyinə görə,

$$|f(x)|\le\int_0^1|x(t)|dt\le\left[\int_0^1|x(t)|dt\right]^{1/2}=\|x\|,$$

yəni

$$\|f\|\le 1.$$

Bu funksionalı skalyar hasil kimi belə yazmaq olar:

$$f(x)=(x,1),\ 1\in L_2(0,1).$$

Teorem (F.Riss, Freşe). Tutaq ki, H-Hilbert fəzası, f isə H-da verilən xətti, kəsilməz funksionaldır. Onda elə $u\in\mathrm{H}$ elementi var ki, $\forall x\in\mathrm{H}$ üçün f bu şəkildə yazıla bilir:

$$f(x)=(x,u)$$

və

$$\|f\|=\|u\|.$$

Beləliklə, H-da verilən hər bir xətti kəsilməz funksional müəyyən $u\in\mathrm{H}$ elementi ilə eyniləşir və $\mathrm{H}^*=\mathrm{H}$ olur.

Qeyd. L_1 fəzası $\int_a^b|\varphi(t)|dt<\infty$ olan ölçülən $\varphi(t)$ funksiyaları çoxluğudur. Bu fəzada funksionalın ümumi şəkli belə düsturla verilir:

$$f(x)=\int_a^b\varphi(t)\alpha(t)dt,$$

burada $\alpha(t)$ -sanki hər yerdə məhdud funksiyadır. Bu halda

$$\|f\|_\infty=Vrai\sup|\alpha(t)|.$$

Bu normanı (sağ tərəfi) daha aydın şəkildə belə yazmaq olar:

$$Vrai\sup|\alpha(t)|=\inf_{mesE=0}\left\{\sup_{[a,b]/E}|\alpha(t)|\right\}.$$

Başqa sözlə, $\alpha(t)$-nin məhdud olmadığı çoxluqları (E-çoxluqlarını) atdıqdan sonra qalan nöqtələrdə alınan $\sup|\alpha(t)|$ ədədlərinin infimum qiyməti məhz $\|f\|_{\infty}$ normasını verir.

4. $C[a,b]$ **-kəsilməz funksiyalar fəzası.Teorem. (Riss-Fişer).** $C[a,b]$ fəzasında hər bir xətti f funksionalının ümumi şəkli belə düsturla təyin olunur: $\forall x(t) \in C[a,b]$ üçün

$$f(x) = \int_a^b x(t)dg(t), \qquad (1)$$

burada $g(t)$-məhdud variyasiyalı funksiyadır. Bu halda

$$\|f\| = \operatorname{var} g(t), \ a \le t \le b.$$

olur və

$$\operatorname*{var}_{[a,b]} g(t) = \sup \sum_{i=0}^{n-1} |g(t_{i+1}) - g(t_i)|$$

ədədi $g(t)$-nin tam variyasiyası adlanır.

Buradakı sup qiyməti $[a,b]$ parçasını $a = t_0 < t_1 < ... < t_n = b$ kimi götürülən bütün bölgü qaydalarına nəzərən aparılır. $\operatorname{var} g(t) < \infty$ olduqda $g(t)$- tam variyasiyalı funksiya adlanır. Məsələn, monoton funksiya-tam variyasiyalı funksiyadır. Tam variyasiyalı $g(t)$ funksiyaları fəzasını $V(a,b)$ ilə işarə edək.Beləliklə, $C[a,b]$-də hər bir xətti funksional üçün elə $g(t) \in V(a,b)$ var ki, onun vasitəsilə f funksionalını (1) Stiltes inteqralı şəklində yazmaq olar və tərsinə, (1) düsturu şəklində verilən hər bir f funksionalı -də xətti və kəsilməz funksional olur. Deməli f $C[a,b]$-də xətti funksional olduqda g-ni elə seçmək olur ki, $\|f\| = \operatorname{var} g(t), \ a \le t \le b$. Beləliklə, $C^*[a,b] = V_{[a,b]}$.

5. l_1 fəzası elə $a = (a_1, a_2, ...,)$-ədədi ardıcıllıqlar çoxluğudur ki, $\sum_{i=1}^{\infty} |a_i| < \infty$. l-metrik fəzadır. Əgər $(e_1, e_2, ..., e_n, ...)$ sistemi l-də ortonormal bazisdirsə, onda $x \in l$ üçün

$$x = \sum_1^\infty \xi_i e_i .$$

f l-də xətti funksional olduqda

$$f(x) = \sum_1^\infty \xi_i f(e_i) = \sum_1^\infty \xi_i c_i, \qquad c_i = f(e_i)$$

Onda

$$|c_k| = |f(e_k)| \le \|f\| \cdot \|e_k\| = \|f\|.$$

Deməli, $\{c_k\}$-məhdud ardıcıllıqdır və

$$\sup|c_k| \le \|f\| . \tag{2}$$

Tərsinə, $\{c_k\}$-məhdud ardıcıllıq olduqda

$$f(x) = \sum_1^\infty \xi_i c_i \tag{3}$$

sırası üçün

$$|f(x)| \le \sum |c_k||\xi_k| \le \sup|c_k| \sum_1^\infty |\xi_k| = \sup|c_k| \|x\| . \tag{4}$$

(2) və (4) –dən alırıq ki,

$$\|f\| = \sup|c_k| .$$

Beləliklə, l-də xətti funksionalın ümumi şəkli (3) kimi olur.

6. m**- fəzası- məhdud ardıcıllıqlar fəzası.** $a \in m$ olduqda, $a = (a_1, a_2, ..., a_n, ...)$, $\sup|a_k| \le M < \infty$.

Məsafə belə verilir:

$$\rho(a,b) = \sup|a_i - b_i| .$$

$\forall x \in m$ üçün

$$f(x) = \sum_1^\infty c_k \xi_k$$

m-də xətti kəsilməz funksional olur və tərsinə; $\|f\| = \sum_1^\infty |c_k|$ m fəzası l-in qoşması olur: $l^* = m$.

7.**Xülasə. Ədədi ardıcıllıqlar fəzaları.** $a=(a_1,a_2,...,a_n,...)$ olsun. Belə fəzalara baxaq:

$$C_0=\{a \,/\, \lim_{n\to\infty} a_n=0\};$$
$$f=\{a \,/\, a_n=0 \text{ sonlu sayda } n-dn \text{ basqa}\};$$
$$S=\{a \,/\, \lim_{n\to\infty} n^p a_n=0, \ \forall p>0 \text{ tam олан ədədd } ir\};$$
$$l_p=\{a \,/\, \sum_1^\infty |a_n|^p<\infty\}$$
$$m=\left\{a/ \ \sup|a_n|<\infty\right\};$$

Aşkardır ki, $f\subset S\subset l_p\subset C_0\subset m$.

m, C_0 -banax fəzasıdır, S-Freşe fəzasıdır, f-fəzası l_p-də sıx çoxluqdur, f $_0\mathfrak{I}$ -da sıxdır; l_p və $_0\mathfrak{I}$ - separabel fəzadır, m-separabel fəza deyil; $p=1$ olduqda $L_1^*=L_\infty$, lakin $L_\infty^*\neq L_1$, yəni $L^{**}\neq L_1$.

Qeyd. L_1 fəzası heç bir banax fəzası üçün qoşma fəza əmələ gətirmir. Elə banax fəzası yoxdur ki, onun qoşma fəzası L_1 ilə izomorf olsun.

Müqayisə edin: $l_1^*=l_\infty, C_0^*=l_1, C_0^{**}\neq C_0, l_1^{**}\neq l_1$.

C_0 fəzasında hər bir kəsilməz f funksionalı bu düsturla verilir:

$$\langle f,a\rangle=\sum_1^\infty \lambda_k a_k,$$

burada $\{\lambda_k\}\in l_1$ və $\|f\|=\sum_1^\infty|\lambda_k|$.

§2. Ümumiləşmiş funksiyaların quruluşu.

Bu paraqrafda ümumiləşmiş funksiyanın quruluşu sahəsində alınan nəticələr verilir. Əsas nəticələri aşağıdakı 5 teorem şəklində ifadə etmək olar.

Teorem 1. Məhdud $G \subset R^n$ oblastında verilən hər bir $f \in D'(G)$ ümumiləşmiş funksiyası üçün elə $m = m(f)$ ədədi və elə $f_1(x),\dots,f_m(x)$-adi funksiyaları var ki,

$$f = \sum_{|\alpha| \le m} D^{\alpha} f_{\alpha}(x), \quad D^{\alpha} = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1},\dots,\partial x_n^{\alpha_n}}.$$

Nəticə. Məhdud oblastda hər bir ümumiləşmiş funksiyanın sinqulyarlıq tərtibi sonludur.

Teorem 2. İxtiyari $f \in D'$ funksionalını belə bir sonsuz cəm şəklində yazmaq olar:

$$f = \sum_{j=1}^{\infty} D^j g_j(x),$$

burada $g_j(x)$-adi funksiyalardır və hər məhdud oblastda yalnız sonlu sayda $g_j(x) \ne 0$.

Teorem 3. Hər bir finit $f \in D'$ funksionalı üçün elə m ədədi və elə $g_1(x),\dots,g_m(x)$-adi funksiyaları var ki,

$$f = \sum_{|j| \le m} D^j g_j(x),$$

burada $g_j(x)$ hamısı bir məhdud oblastda cəmləşmiş adi (finit) funksiyalardır.

Teorem 4. Bir nöqtədə (məsələn, $x = 0$) cəmləşən hər bir $f \in D'$ ümumiləşmiş funksiyası üçün elə m ədədi var ki,

$$f = \sum_{|j| \le m} c_{\alpha} D^{\alpha} \delta(x), \quad m = m(f).$$

Teorem 5. Yavaş artan hər bir $f \in S'$ ümümiləşmiş funksiyası üçün elə p ədədi və elə $f_1(x),\dots,f_p(x)$ kəsilməz funksiyaları var ki,

$$f = \sum_{|k| \le p} c_k D^k f_k(x),$$

belə ki, $f_k(x)$ funksiyaları $|x| \to \infty$ olduqda $|x|$-in müəyyən dərəcəsindən tez artırmır (yavaş artan funksiya).

(Qeyd edək ki, məhz bu səbəbdən S' fəzası «yavaş artan ümumiləşmiş funksiyalar fəzası» adlanır).

1.Məhdud oblastda ümumiləşmiş funksiyanın strukturası. Loran Şvars lemması.

Teorem. Tutaq ki, $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_k(x), \ldots$-adi funksiyalar ardıcıllığıdır, belə ki, hər bir məhdud G çoxluğunda onların yalnız sonlu saydası $\neq 0$ olur. Onda $P_k(D)$ ixtiyari diferensial operator olduqda

$$T \equiv \sum_{k=1}^{\infty} P_k(D) f_k(x) \tag{1}$$

sırası D' fəzasında yığılan sıra olur.

Doğrudan da $\forall \varphi \in D$ üçün .

$$\langle T, \varphi \rangle = \sum_{k=1}^{\infty} \langle P_k(D) f_k(x), \varphi \rangle = \sum_{k=1}^{\infty} \langle f_k(x), P_k(-D)\varphi \rangle =$$
$$= \sum_{k=1}^{\infty} \int_{-A}^{A} f_k(x), P_k(-D)\varphi(x) dx$$

ədədi sırasında yalnız sonlu sayda toplanan 0-dan fərqli olduğundan sonuncu cəmi sonludur. Onda (1) sırasının cəmi T D-də xətti-kəsilməz funksional olar. Məsələn, T-nin kəsilməzliyini göstərək. $\varphi_1 \xrightarrow{D} 0$ olduqda elə $[-A, A]$ parçası var ki, $\sup p\varphi_\nu(x) \subset [-A, A]$. Belə olduqda (1) cəmi sonlu cəm olur. Deməli,

$$\langle T, \varphi_\nu \rangle = \sum_{k=1}^{\infty} \int_{-A}^{A} f_k(x), P_k(-D)\varphi_\nu(x) dx \tag{2}$$

sonlu cəm olur. Lakin $\max_{x \in [-A,A]} |P_k(-D)\varphi_\nu(x)| \to 0,\ \nu \to \infty$ olduğundan (2) -dən çıxır ki, $\langle T, \varphi_\nu \rangle \to 0,\ \nu \to \infty.$

Deyilən bütün teoremlərin isbatında Loran Şvarsın aşağıda verilən bir lemması açar rolu oynayır:

Açar lemma (L.Şvars). İxtiyari $\forall f \in D'$ ümumiləşmiş funksiyası üçün və ixtiyari G məhdud oblastı üçün elə N ədədi var ki, $\forall \varphi \in D(G)$ üçün aşağıdakı qiymətləndirmə doğrudur:

$$\left|\langle f,\varphi\rangle\right| \le C \sum_{|k|\le N} \max_{x\in G}\left|D^k\varphi(x)\right|, \tag{3}$$

burada $C \equiv C(f,G) = const > 0$.

İsbatı. Əksini fərz edək. Onda elə $f \in D'$ ümumiləşmiş funksiyası və elə G məhdud oblastı var ki, $\forall N = 1,2,...$ üçün elə $\varphi = \varphi_N(x) \in D(G)$ var ki, aşağıdakı bərabərsizlik ödənilir:

$$\left|\langle f,\varphi_N\rangle\right| \ge N \sum_{|k|\le N} \max_{x\in G}\left|D^k\varphi_N(x)\right|. \tag{4}$$

Burada $\varphi_N(x)$ funksiyasını $\phi_N = C_N\varphi_N$ ilə əvəz etsək, (4) dəyişməz qalar, deməli, $\forall C_N$ üçün alırıq:

$$\left|\langle f,\phi_N\rangle\right| \ge N \sum_{|k|\le N} \max_{x\in G}\left|D^k\phi_N(x)\right|. \tag{5}$$

İndi C_N ədədlərini elə seçək ki, $\sum_{|k|\le N} \max_{x\in G}\left|D^k\phi_N(x)\right| = \frac{1}{N}$, $(N = 1,2,...)$ olsun. Onda $\phi_N(x) \xrightarrow{D} 0$, $N \to \infty$. Çünki ϕ_N -lərin hamısı məhdud G oblastında cəmləşib və o, özünün bütün törəmələrilə birlikdə müntəzəm olaraq 0-ra yaxınlaşır. Onda, f kəsilməz olduğu üçün, $\langle f,\phi_N\rangle \to 0$ olur. Lakin (5) münasibətindən çıxır ki, $\forall N$ üçün

$$\left|\langle f,\phi_N\rangle\right| \ge 1,\ N = 1,2,...$$

Bu ziddiyyət onu göstərir ki, (3) qiymətlənməsi doğrudur.

İndi (3) qiymətlənməsinin şəklini bir qədər dəyişək. Başqa sözlə, göstərək ki,

$$|\langle f,\varphi\rangle| \le C \sum_{|k|\le N} \max_{x\in G} \left|D^k\varphi(x)\right| \le C_1 \sqrt{\sum_{|k|\le N+n} \int_G \left|D^k\varphi(x)\right|^2 dx}\,. \tag{6}$$

Doğrudan da, $\forall x \in G$ üçün Koşi-Bunyakovski bərabərsizliyini tətbiq etməklə alırıq:

$$\left|D^k\varphi(x)\right| = \left|\int_{a_1}^{x_1}\int_{a_2}^{x_2}\dots\int_{a_n}^{x_n} \frac{\partial^n D^k\varphi(\xi)}{\partial\xi_1,\dots,\partial\xi_n} d\xi\right| \le C_1\sqrt{\int_G \left|\frac{\partial^n D^k\varphi(\xi)}{\partial\xi_1,\dots,\partial\xi_n}\right|^2 d\xi} \le C_1\sqrt{\sum_{|k|\le N+n}\int_G \left|D^k\varphi(x)\right|^2 dx}$$

(burada $(a_1,\dots,a_n)$ elə seçirik ki, $\varphi(a_1,\dots,a_n)=0$).

G-də cəmləşən əsas funksiyalardan ibarət müəyyən H_m-Hilbert fəzasına baxaq. H_m-də skalyar hasil belə daxil edilir: $\varphi,\phi \in \mathrm{H}_m$ olduqda ($\mathrm{H}_m \subset D(G)$)

$$(\varphi,\phi)_m = \sum_{|k|\le m} \int_G D^k\varphi(x)D^k\phi(x)dx.$$

Onda H_m-də norma belə olar:

$$\|\varphi\|_m^2 = \sum_{|k|\le m} \int_G \left|D^k\varphi(x)\right|^2 dx.$$

Onda (6) –dan çıxır ki, f funksionalı $\|\varphi\|_{N+n}$ normasına nəzərən məhduddur: $\forall\varphi \in D(G)$ üçün

$$|\langle f,\varphi\rangle| \le C_1\|\varphi\|_{N+n} \tag{7}$$

f funksionalı $D(G)$-də verilib, $\mathrm{H}_m \subset D(G)$. Onda f funksionalı H_m-də məhdud funksional olduğundan onu H_m-in tamamlanması o-

lan $\overline{\mathrm{H}_m}$ tam Hilbert fəzasına məhdud funksional kimi davam etdirmək olar. (H_m-də fundamental ardıcıllıqların limitlərini H_m -ə daxil edib $\overline{H}_m$ alırıq).

Tutaq ki, $\varphi_\nu \in H_m$-fundamentaldır, yəni $\nu,\mu \to \infty$ olduqda

$$\|\varphi_\nu - \varphi_\mu\|_m^2 = \sum_{|k|\le m} \int_G \left|D^k\varphi_\nu(x) - D^k\phi_\mu(x)\right|^2 dx \to 0.$$

Buradan çıxır ki,

$$\int_G \left|D^k \varphi_\nu(x) - D^k \phi_\mu(x)\right|^2 dx \to 0,$$

yəni $\left\{D^k \varphi_\nu(x)\right\}$ ardıcıllığı $L_2(G)$-də fundamentaldır. Onda onun $L_2(G)$-də limiti var:

$$D^k \varphi_\nu(x) \overset{L_2(G)}{\to} \varphi^{[k]}(x), \ \nu \to \infty \quad \text{və} \quad \varphi^{[k]}(x) \in L_2(G), \ |k| \le m.$$

(burada $\varphi^{[k]}(x)$-törəmə yox, sadəcə işarələmədir, ($|k| = 0,1,\dots,m$).

Beləliklə, $\overline{H}_m$-in hər bir elementinə müəyyən $\left\{\varphi^{[k]}(x)\right\}$, $|k| \le m$ sistemi uyğun gəlir, belə ki, $\varphi^{[k]}(x) \in L_2(G)$, $|k| \le m$. Deməli, $\left\{\varphi^{[k]}\right\}, \left\{\eta^{[k]}\right\} \in \overline{H}_m$ olduqda

$$\left(\varphi^{[k]}, \eta^{[k]}\right) = \sum_{|k| \le m} \int_G \phi_k(x) \eta_k(x) dx$$

olur. İndi tam Hilbert fəzasında xətti kəsilməz funksionalın ümumi şəkli haqqında (Riss-Freşe) teoremi tətbiq edək. Həmin teoremə əsasən, hər bir belə funksional həmin fəzanın qeyd olunmuş bir elementi ilə skalyar hasil şəklində olur. Onda baxdığımız f funksionalına $\overline{H}_m$ fəzasında kvadratı ilə inteqrallanan müəyyən $\left\{f^{[k]}(x)\right\}$, $|k| \le m$ funksiyaları sistemi uyğun gəlir, belə ki, hər bir $\left\{\varphi^{[k]}\right\} \in \overline{H}_m$ elementi üçün

$$\langle f, \varphi \rangle = \sum_{|k| \le m} \int_G f^{[k]}(x) \varphi^{[k]}(x) dx.$$

Xüsusi halda, $\varphi(x)$ əvvəldən baxılan sonsuz diferensiallanan funksiya olduqda, alırıq ki, ($f^{[k]}(x) = f_k(x)$ işarə edirik).

$$\langle f, \varphi \rangle = \sum_{|k| \le m} \int_G f_k(x) D^k \varphi(x) dx = \sum_{|k| \le m} \left\langle f_k(x) D^k \varphi(x) \right\rangle =$$

$$= \left\langle \sum_{|k| \le m} (-1)^{|k|} f_k(x), D^k \varphi \right\rangle,$$

buradan

$$f=\sum_{|k|\le m} D^k g_k(x), \tag{8}$$

burada

$$g_k(x)=(-1)^{(k)} f_k(x)\in L_2(G).$$

Beləliklə, aşağıdakı nəticələr isbat olundu:

Nəticə 1. Hər bir $f\in D'(G)$ümumiləşmiş funksiyası və hər bir məhdud G oblastı üçün elə m ədədi və elə $f_1(x),...,f_m(x)$ adi funksiyaları var ki, f funksionalını (8) cəmi kimi yazmaq olur. Deməli, (8) düsturu $D'(G)$ fəzasında ümumiləşmiş funksiyanın ümumi şəklini müəyyən edir.

Nəticə 2. Məhdud G oblastında verilən hər bir f ümumiləşmiş funksiyası G-də cəmləşmiş müəyyən $f_k(x), |k|\le m$ -adi funksiyalarının sonlu törəmələri cəminə bərabər olur.

Nəticə 3. Məhdud G oblastında verilən hər bir $f\in D'(G)$ ümumiləşmiş funksiyasının sinqulyarlıq tərtibi sonlu olur.

2. D'-də ümumiləşmiş funksiyanın göstərilişi. Biz gördük ki, G məhdud oblastında verilən f ümumiləşmiş funksiyasını (8) düsturu kimi yazmaq olur. İndi tutaq ki, $f\in D'$-ixtiyaridir. R^n fəzasını məhdud olan $G_1, G_2,..., G_p,...$oblastları ilə örtək, $R^n=\sum_1^{\infty} G_p$. Əsas teoremə görə G_p oblastı üçün elə $m=m(p)$ ədədi var ki, və elə $f_{p,1}(x),...,f_{p,m(p)}(x)$- adi funksiyaları var ki, $f_{m_1},...,f_{m,m(p)}\in L_2(G_p)$ və $\forall\varphi\in D(G_p)$ üçün

$$\langle f,\varphi\rangle=\sum_{|k|\le m(p)}\left\langle f_{p,k}, D^k\varphi\right\rangle=\left\langle \sum_{|k|\le m(p)} D^k f_{p,k},\varphi\right\rangle,$$

yəni

$$f = \sum_{|k| \le m(p)} D^k f_{p,k} \, . \tag{9}$$

Vahidin ayrılışı lemmasına görə elə $e_1(x), \ldots, e_p(x), \ldots; \; e_i \in C^\infty(R^n)$, var ki, $e_p(x) \equiv 0, \; x \notin G_p$ olduqda və

$$1 \equiv \sum_{p=1}^{\infty} e_p(x).$$

Onda $\forall \varphi \in D$ əsas funksiyasını belə yazmaq olar:

$$\varphi = e_1\varphi + e_2\varphi + \ldots + e_p\varphi + \ldots$$

Bunları və (9) göstərilişini nəzərə aldıqda alırıq:

$$\begin{aligned}
\langle f, \varphi \rangle &= \left\langle f, \sum_{p=1}^{\infty} e_p \varphi \right\rangle = \sum_{p=1}^{\infty} \langle f, e_p \varphi \rangle = \sum_p \left(\sum_{|k| \le m(p)} \langle f_{p,k}, D^k (e_p \varphi) \rangle \right) = \\
&= \sum_p \sum_{|k| \le m(p)} \left\langle f_{p,k}, \sum_{|j| \le m(p)} C_k^j \left(D^{k-j} e_p \right) \cdot D^j \varphi \right\rangle = \\
&= \sum_p \sum_{|k| \le m(p)} \left\{ \left\langle \sum_{|j| \le m(p)} C_k^j \left(D^{k-j} e_p \right) \cdot f_{p,k}, D^j \varphi \right\rangle \right\} = \\
&= \sum_p \sum_{|k| \le m(p)} \left\{ \left\langle \sum_{|j| \le m(p)} (-1)^j D^j C_k^j \left[\left(D^{k-j} e_p \right) \cdot f_{p,k} \right], \varphi \right\rangle \right\} = \\
&= \sum_p \sum_{|k| \le m(p)} \langle D^j g_{jp}, \varphi \rangle,
\end{aligned} \tag{10}$$

burada

$$g_{jp} = \sum_{|j| \le m(p)} (-1)^j C_k^j \left(D^{k-j} e_p \right) \cdot f_{p,k} \, .$$

Aydındır ki, $g_{jp}(x)$-adi funksiyalar olub, hamısı G_p oblastında cəmləşiblər, $\sup p \;\, g_{jp}(x) \subset G_p$. İndi

$$g_j(x) = \sum_{p=1}^{\infty} g_{jp}(x)$$

işarə edək. Hər sonlu (məhdud) oblastda yalnız sonlu sayda $g_{jp}(x) \neq 0$ olduğundan (10) cəimini belə çevirmək olar:

$$\langle f,\varphi\rangle = \left\langle \sum_{j=1}^{\infty} D^j g_j(x), \varphi \right\rangle,$$

yəni

$$f = \sum_{j=1}^{\infty} D^j g_j(x). \qquad (11)$$

Bu sıra-sonsuz sıradır, lakin hər sonlu G_j oblastında yalnız sonlu sayda $g_j(x) \neq 0$ olur. Bu halda sonuncu sıra D'-də xətti və kəsilməz funksional olur (lemma 1). Teorem 2 isbat olundu.

3. Kompakt daşıyıcılı ümumiləşmiş funksiyanın strukturası. Tutaq ki, $f \in D'$-finit funksionaldır, $k = supp\, f$ - çoxluğu məhdud qapalı (kompakt) çoxluqdur. Onda yuxarıda deyilən $G_1, G_2, ..., G_p, ...$ məhdud çoxluqlarını elə götürə bilərik ki, məsələn, G_1-dən başqa qalan hər yerdə $f = 0$ olar, $supp\, f \subset G_i$. Ona görə də $f_{p,k}(x)$ funksiyalarını $p \geq 2$ halı üçün $f_{p,k}(x) \equiv 0$ götürmək olar. Belə olduqda isə (10) cəmi bu şəkli alar:

$$\langle f,\varphi\rangle = \sum_{|j| \leq m(1)} \langle D^j g_{j,1}, \varphi \rangle.$$

Beləliklə, buradan alırıq ki, f finit olduqda onu belə yazmaq olur:

$$f = \sum_{|j| \leq m(1)} D^j g_j(x), \quad m = m(1). \qquad (12)$$

burada $g_j(x)$- adi funksiyalar olub, $supp\, g_j(x) \subset G_1$, yəni g_j-ların hamısı adi finit funksiyalardır.

Nəticə. Hər bir finit funksionalın ümumi şəkli (12) düsturu vasitəsilə verilir və tərsinə (12) şəklində olan hər bir f-finit funksional olur. Bundan əlavə, finit funksionalın sinqulyarlıq tərtibi sonlu olur.

4. Nöqtədə cəmləşən ümumiləşmiş funksiyanın quruluşu (strukturu).

Teorem. Tutaq ki, $\sup p\, f = \{0\}$. Onda onu yeganə şəkildə aşağıdakı düsturla yazmaq olur:

$$f = \sum_{|k|=0}^{m} C_k D^k \delta(x) \ . \qquad (13)$$

İsbatı. f funksionalı $x=0$ nöqtəsində cəmləşibsə, onda $x=0$ nöqtəsini özündə saxlayan istənilən G məhdud çoxluğu f-in daşıyıcısı olur: $supp\, f \subset G$. Onda (12) düsturuna əsasən f-i belə yazmaq olar:

$$\langle f,\varphi\rangle = \sum_{|k|\le m} \langle g_k(x), D^k\varphi\rangle, \qquad (14)$$

burada $g_k(x)$ G-də cəmləşmiş adi finit funksiyalardır.

Lemma. m tərtibə qədər törəmələrilə birlikdə $x=0$ nöqtəsində sıfır olan $\varphi(x)$ əsas funksiyaları üçün $\langle f,\varphi\rangle = 0$ (Bu cür φ-lər çoxluğunu Φ_0 ilə işarə edək). Əgər $\varphi \in \Phi_0$ isə, onda həmişə elə $\varphi_\nu(x) \in D$ ardıcıllığı qurmaq olar ki, (bax:Ş.səh.86) $x=0$ nöqtəsinin müəyyən ətrafında $\varphi_\nu(x) = \varphi$ və G-də $D^k\varphi_\nu(x) \underset{x\in G}{\Rightarrow}, \nu \to \infty, |k| \le m$ olar. Onda, f funksionalı $x=0$ nöqtəsində cəmləşdiyi üçün, hər bir ν üçün $\langle f,\varphi\rangle = \langle f,\varphi_\nu\rangle$ olur və əlavə (14) -dən alırıq ki,

$$\langle f,\varphi_\nu\rangle = \sum_{|k|\le m} \int_G g_k(x) D^k\varphi_\nu(x)dx \to 0, \quad \nu \to \infty,$$

Buradan çıxır ki, $\forall\ \varphi \in \Phi_0$ üçün $\langle f,\varphi\rangle = 0$.

İndi tutaq ki, $\varphi \in D$ ixtiyaridir. Onda $\varphi(x)$-i bu şəkildə yazmaq olar:

$$\varphi(x) = \sum_{|k|\le m} D^k\varphi(0)\frac{x^k}{k!} + h_{m+1}(x), \qquad (15)$$

burada $h_{m+1}(x)$ funksiyası m tərtibə qədər törəmələrilə birlikdə $x=0$ nöqtəsində 0-ra bərabər olur. Bu ayrılışda sağ tərəfdəki toplananlar finit funksiyalar deyil. Ona görə onun hər tərəfini belə bir $e(x) \in D$ əsas funksiyasına vuraq ki, $x=0$ nöqtəsinin ətrafında $e(x)=1$ olur. Onda alarıq:

$$e(x)\varphi(x)=\sum_{|k|\le m} D^k\varphi(0)\frac{x^k e(x)}{k!}+e(x)h_{m+1}(x)\ . \qquad (16)$$

Onda $e(x)\varphi(x)\in D$ və (16)-da sağ tərəfdəki hər bir toplanan əsas funksiya olur.İndi f funksionalı ilə (16) bərabərliyinə təsir edək (və nəzərə alaq ki, $x=0$ nöqtəsi ətrafında $\varphi(x)=e(x)\varphi(x)$ və f $x=0$ nöqtəsində cəmləşdiyindən bu ətrafda həm də $\langle f,\varphi\rangle=\langle f,\varphi e\rangle$ olur). Onda alırıq:

$$\langle f,\varphi\rangle=\langle f,\varphi e\rangle=\sum_{|k|\le m} D^k\varphi(0)\left\langle f,\frac{x^k e(x)}{k!}\right\rangle+\langle f,h_{m+1}(x)e(x)\rangle \qquad (17)$$

$e\in D$ qeyd olunub, onda

$a_k=(-1)^k\left\langle f,\dfrac{x^k e(x)}{k!}\right\rangle=const$ - konkret bir ədəd olur. Digər tərəfdən,

$$D^k\varphi(0)=\left\langle(-1)^k D^k\delta,\varphi\right\rangle.$$

Həm də nəzərə alaq ki, $e(x)h_{m+1}(x)\in\Phi_0$ - əsas funksiyası $x=0$ nöqtəsinin ətrafında 0-ra bərabər olur, onda, lemmaya əsasən $\langle f,h_{m+1}(x)e(x)\rangle=0$. Bütün deyilənləri nəzərə aldıqda (17)-dən alınır ki,

$$\langle f,\varphi\rangle=\sum_{|k|\le m}\left\langle a_k D^k\delta,\varphi\right\rangle$$

və deməli

$$f=\sum_{|k|\le m} D^k\delta(x) \qquad (18)$$

alırıq. Beləliklə, $x=0$ nöqtəsində cəmləşən hər bir f funksionalını (18) şəklində yazmaq olur.

Analoji qayda ilə göstərilir ki, x_0 nöqtəsində cəmləşmiş f ümumiləşmiş funksiyanı belə yazmaq olar:

$$f=\sum_{|k|\le m} a_k D^k\delta(x-x_0). \qquad (19)$$

§3. Yavaş artan ümumiləşmiş funksiyalar.

1.Yüksək sürətlə azalan əsas funksiyalar. S **fəzası** ($n=1$).Tətbiq məsələlərində adətən bütün ümumiləşmiş funksiyalar fəzası yox, onun bir hissəsi geniş istifadə olunur. Əsasən də Furye çevirmələri metodu tətbiq edilən riyazi fizika məsələlərinin tətbiq olunması sahəsində elə funksional fəzalar daha çox rol oynayır ki, onların Furye çevirmələri fəzaları özlərinə izomorf olur. Belə fəzalardan $L_2(-\infty,\infty)$-kvadratı ilə inteqrallanan ölçülən funksiyalar sinfini misal göstərmək olar. Planşerel teoreminə görə F-Furye çevirməsi operatoru olduqda $f\in L_2$ üçün $g=F[f]\in L_2$ olur:

$$\int|f(x)|^2dx=\int|g(\sigma)|^2d\sigma,$$

Deməli,

$$F[L_2]=L_2$$

Belə fəzalardan biri də S' - yavaş artan ümumiləşmiş funksiyalar fəzasıdır. Bu fəza üçün də $F[S']=S'$ olur.

Tərif. $(n=1)$. R ədəd oxunda təyin olanmuş, hər yerdə sonsuz diferensiallanan və $|x|\to\infty$ olduqda özü və hər bir törəməsi $\frac{1}{|x|}$-in istənilən dərəcəsindən daha tez azalan bütün $\varphi(x)$ funksiyaları çoxluğunu S ilə işarə edirik. S-əsas fəza, $\varphi\in S$-əsas funksiya adlanır.

Bilavasitə tərifdən çıxır ki, $\forall m$ və $\forall q$ tam ədədləri üçün belə bir limit münasibəti ödənilir:

$$\lim_{|x|\to\infty}x^m\varphi^{(q)}(x)=0. \tag{1}$$

Bu münasibəti ekvivalent şəkildə belə yazmaq olar:

$$\sup_{x\in R}\left|x^m\varphi^{(q)}(x)\right|\le c_{m,q}<\infty. \tag{2}$$

Məsələn, (2)-dən (1) alınır. Bunun üçün (2)-də m -i $m+i$ ilə əvəz edək. Onda alarıq:

$$\left|x^{m+1}\varphi^{(q)}(x)\right|\le c_{m+1,q}<\infty,$$

buradan

$$\left|x^m \varphi^{(q)}(x)\right| \le \frac{c_{m+1,q}}{|x|},$$

burada $|x| \to \infty$ olduqda (1) alınır.

Müxtəlif isbat proseslərində (1) və (2) şərtlərinə ekvivalent olan başqa şərtləri tətbiq etmək münasib olur. Onlardan bir necəsini yazaq:

$$\left|D^q \varphi(x)\right| \le \frac{c_{m,q}}{\left(1+|x|^2\right)^m},$$

$$\left|\left(x^m \varphi(x)\right)^{(q)}\right| \le c_{m,q} < \infty.$$

Aşkardır ki, $\varphi \in S$ olduqda: $x^m \varphi^{(q)}(x) \in L_1(R)$, $\left(x^m \varphi\right)^{(q)} \in L_1(R)$ və s.

$n > 1$ olduqda $S\left(R^n\right)$ analoji daxil edilir: yalnız və yalnız o zaman $\varphi \in S\left(R^n\right)$ olur ki, aşağıdakı iki şərt ödənilsin:

1). $\varphi \in C^\infty\left(R^n\right)$;

2) $\forall \alpha, \beta$ üçün

$$\sup_{x \in R^n} \left|x^\alpha D^\beta \varphi(x)\right| \le c_{\alpha,\beta} < \infty,$$

burada

$$D^\beta = \frac{\partial^{|\beta|}}{\partial x_1^{\beta_1}, \ldots, \partial x_n^{\beta_n}}, \quad |\beta| = \beta_1 + \ldots + \beta_n.$$

Buradan çıxır ki, φ özü və hər bir xüsusi törəməsi $|x| \to \infty$ olduqda $\frac{1}{|x|}$ nisbətinin istənilən dərəcəsindən daha yüksək sürətlə sıfra yaxınlaşır.

Misallar. $\varphi(x) = e^{-x^2} \in S(R)$, $\varphi(x) = e^{-|x|^2} \in S\left(R^n\right)$. Aşkardır ki, $D \subset S$ və $D \ne S$. Məsələn, $e^{-x^2} \notin D$, lakin $e^{-x^2} \in S$.

Qeyd. $a \in C^{\infty}(R)$, $\varphi \in S$ olduqda $a\varphi \in S$ olmaya bilər. Məsələn, $a = e^{x^2}$, $\varphi(x) = e^{-x^2}$, $a\varphi = 1 \notin S$.

Tərif. R^n -də sonsuz diferensiallanan və polinomial məhdud olan $a(x)$ funksiyaları sinfini O_M ilə işarə edirik. Beləliklə, $a \in O_M$ olduqda:

1). $a \in C^{\infty}(R^n)$,

2). $\forall \alpha$ üçün elə $c > 0$ sabiti və $N > 0$ tam ədədi var ki,

$$\left|D^{\alpha}a(x)\right| \le c\left(1 + |x|^2\right)^N.$$

Belə olduqda a-polinomial məhdud (yavaş artan) funksiya adlanır. Məsələn, $e^x \notin O_M$ -yavaş artan deyil, $P(x) \in O_M$.

Təklif. $\varphi \in S$, $a \in O_M$ olduqda $a\varphi \in S$.

Lakin $e^x\varphi(x) \in S$ olmaya bilər.

Təklif. $P(x)$-polinom olduqda $\forall \varphi \in S$ üçün aşağıdakı münasibətlər doğrudur:

$$\left(1 + |x|^2\right)^N P(x)\varphi(x) \in S \subset L_1$$

$$\sup\left(1 + |x|^2\right)^N \left|P(x)\varphi^{(q)}(x)\right| \le c_{N,q} < \infty,$$

$$P(x)D^{\alpha}\varphi(x) \in L_1.$$

(isbatı aşkardır).

Tərif. $\varphi_{\nu}, \varphi \in S$ olsun. Əgər bütün fəzada müntəzəm olaraq ödənilən aşağıdakı limit münasibəti doğrudursa, $\forall m, q$;

$$x^m \varphi_{\nu}^{(q)}(x) \underset{x}{\Rightarrow} x^m \varphi^{(q)}(x), \quad \nu \to \infty, \tag{3}$$

onda deyəcəyik ki, S fəzasında $\varphi_{\nu} \to \varphi$. Bu halda $\varphi_{\nu} \overset{S}{\to} \varphi$, $\nu \to \infty$ yazırıq. (3) limit münasibətini bəzən belə yazmaq münasib olur:

$$\forall m, q; \qquad \sup_{x \in R}\left|x^m\left(\varphi_{\nu}^{(q)}(x) - \varphi^{(q)}(x)\right)\right| \to 0, \ \nu \to \infty.$$

Beləliklə:

$$\varphi_\nu \xrightarrow{S} 0 \ (\nu \to \infty) \leftrightarrow \sup_{x \in R} \left| x^m \varphi_\nu^{(q)}(x) \right| \to 0, \ \nu \to \infty .$$

S fəzası tam fəzadır, yəni S-də yığılan ardıcıllığın limiti S-ə daxildir. Doğrudan da, $\varphi_\nu \xrightarrow{S} \varphi$ isə, onda

$$\left| x^m \varphi_\nu^{(q)}(x) \right| \le c_{m,q} < \infty,$$

burada $c_{m,q}$ sabitləri ν-dən asılı deyil. Burada $\nu \to \infty$ olduqda limitə keçsək

$$\left| x^m \varphi^{(q)}(x) \right| \le c_{m,q},$$

yəni $\varphi \in S$ olur.

Təklif. D fəzası S-də sıx çoxluqdur.

Doğrudan da, elə $\eta \in D$ var ki, $|x| < 1$ olduqda $\eta = 0$ olur. Belə bir ardıcıllığa baxaq: $\varphi \in S$ üçün

$$\varphi_\nu(x) = \phi(x)\eta(x/\nu), \quad \nu = 1,2,...$$

Onda $\varphi_\nu \in D$ və $\varphi_\nu \xrightarrow{S} \varphi$, $\nu \to \infty$ olur.

Qeyd. S fəzası hesabi normalı Freşe fəzası olur. Öz aralarında ekvivalent olan müxtəlif hesabi normalar sistemi daxil edilə bilir. Məsələn, $\varphi \in S$ olduqda

$$\|\varphi\|_p = \sup_{\substack{x \in R^n \\ |\alpha| \le p}} (1 + |x|)^p \left| D^\alpha \varphi(x) \right|, \quad p = 0,1,2,... \tag{4}$$

Başqa sistemlər:

$$\|\varphi\|'_{p,k} = \sum_{\substack{|\alpha| \le k \\ |\beta| \le p}} \sup_{x \in R^n} \left| x^\alpha D^\beta \varphi(x) \right|, \quad k, p = 0,1,2,..., \tag{5}$$

və yaxud

$$\|\varphi\|''_p = \sum_{\substack{|\alpha|\le p\\ |\beta|\le p}} \sup_{x\in R^n} \left|x^\alpha D^\beta \varphi(x)\right|, \qquad p = 0,1,2,... \tag{6}$$

Bu sistemlərin ekvivalentliyi az sonra göstərilir.
Məsələn, (4) və (5) sistemlərindən $(n=1)$ alırıq ki,

$$\|\varphi\|'_{0,1} = \sup_x |\varphi(x)| + \sup_x |\varphi'(x)|,$$

$$\|\varphi\|'_{1,0} = \sup_x |x\varphi| + \sup_x |x\varphi'|,$$

Onda

$$\|\varphi\|_1 = \|\varphi\|'_{0,1} + \|\varphi\|'_{1,0}.$$

Təklif. S fəzasında yalnız və yalnız o zaman $\varphi_\nu \to \varphi$ olur ki, müəyyən p üçün

$$\|\varphi_\nu \to \varphi\|_p \to 0, \quad \nu \to \infty$$

olsun.İsbatı aşkardır.

Asan görmək olar ki, $\varphi_\nu \xrightarrow{S} 0$ yalnız və yalnız o zaman olur ki, $\forall k,q$ üçün

$$\left\|x^k \varphi_\nu^{(q)}(x)\right\|_{L_2} \to 0, \; \nu \to \infty$$

olsun.
Məsələn,

$$|\varphi_\nu(x)| = \left|\int_{-\infty}^{x} \varphi'_\nu(t)dt\right| = \left|\int_{-\infty}^{x} \varphi'_\nu(t)\left(1+t^2\right)\frac{dt}{1+t^2}\right| \le$$

$$\le \left\|\varphi'_\nu(t)\left(1+t^2\right)\right\|_{L_2} \cdot \left\|\frac{1}{1+t^2}\right\|_{L_2} \to 0, \nu \to \infty.$$

Buradan çıxır ki, $\forall k$, $\forall q$ üçün

$$x^k \varphi_\nu^{(q)}(x) \rightrightarrows 0, \; \nu \to \infty, \text{ yəni } \varphi_\nu \xrightarrow{S} 0, \; \nu \to \infty.$$

Təklif. $\varphi_\nu \xrightarrow{D} 0$ olduqda elə $[-A, A]$ parçası var ki, $supp\varphi_\nu \subset [-A, A]$, $\nu = 1,2,\ldots$, və $\forall m, q$ üçün

$$\sup_x \left|x^m D^q \varphi_\nu(x)\right| \to 0, \quad \nu \to \infty.$$

Tutaq ki, $\|\varphi\|_1, \|\varphi\|_2$ kimi iki norma var. Əgər elə $c_1 > 0$ və c_2 sabitləri varsa ki,

$$c_1\|\varphi\|_1 \le \|\varphi\|_2 \le c_2\|\varphi\|_1,$$

onda bu normalar ekvivalent adlanır.

İndi $S(R^n)$-də belə polinormalar sistemini daxil edək.

$$\|\varphi\|_{\alpha,\beta} = \sup_{x\in R^n} \left|x^\alpha D^\beta \varphi(x)\right|, \tag{7}$$

$$\|\varphi\|'_{\alpha,\beta} = \int_{R^n} \left|x^\alpha D^\beta \varphi(x)\right| dx, \tag{8}$$

$$\|\varphi\|''_{\alpha,\beta} = \left(\int_{R^n} \left|x^\alpha D^\beta \varphi(x)\right|^2 dx\right)^{1/2}. \tag{9}$$

Bu sistemlər ekvivalentdir. Məsələn, $(n = 1)$

$$\left|x^k D^l \varphi(x)\right| \le \frac{1}{1+x^2} \sup_{x\in R}\left(1 + x^2\right)\left|x^k D^l \varphi(x)\right|$$

olmasından çıxır ki,

$$\begin{aligned} \|\varphi\|'_{k,l} &= \int_{R^n} \left|x^k D^l \varphi(x)\right| dx \le \sup\left(1 + x^2\right)\left|x^k D^l \varphi(x)\right| \cdot \\ &\cdot \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} \le \pi\left[\|\varphi\|_{k+2,l} + \|\varphi\|_{k,l}\right]. \end{aligned} \tag{10}$$

Analoji qayda ilə,

$$\|\varphi\|''_{k,l} = \left(\int_{-\infty}^{\infty} \left|x^k D^l \varphi(x)\right|^2 dx\right)^{1/2} \le \left\{\sup\left(1 + x^2\right)\left|x^k D^l \varphi(x)\right| \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2}\right\}^{1/2} \le \tag{11}$$

$$\le \sqrt{\pi\left[\|\varphi\|_{k+2,l}^2 + \|\varphi\|_{k,l}^2\right]}.$$

(10) və (11)-dən çıxır ki, (7) sistemi (8) və (9) sisteminin mojarantı olur.
Tərsinə, Koşi-Bunyakovski bərabərsizliyini

$$\left|x^k D^l \varphi(x)\right| \cdot \sqrt{\left(1+x^2\right)} \text{ və } \frac{1}{\sqrt{\left(1+x^2\right)}}$$

funksiyalarına tətbiq etməklə alırıq ki,

$$\left(\|\varphi\|'_{k,l}\right)^2 = \left(\int_{R^n} \left|x^k D^l \varphi(x)\right| dx\right)^2 \le \int_{-\infty}^{\infty} \left(\left|x^k D^l \varphi(x)\right|\right)^2 \left(1+x^2\right) \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} =$$

$$= \pi\left[\left(\|\varphi\|''_{k,l}\right)^2 + \left(\|\varphi\|''_{k+2,l}\right)^2\right].$$

Deməli (9) sistemi (8) sisteminin mojarantı olur. Bunun kimi də

$$x^k D^l \varphi(x) = \int_{-\infty}^{x} \left[t^k D^l \varphi(t)\right]' dt$$

bərabərsizliyindən çıxır ki,

$$\|\varphi\|_{k,l} \le \int_{-\infty}^{\infty} \left[t^k D^l \varphi(t)\right]' dt \le k\|\varphi\|'_{k-1,l} + \|\varphi\|_{k,l+1},$$

yəni (8) sistemi (7)-nin mojarantı olur. Beləliklə, S fəzasında verilən (7), (8), (9) normalar sistemi ekvivalentdirlər.

Teorem.

1. $D\left(R^n\right)$ fəzası $S\left(R^n\right)$-də, $C^\infty\left(R^n\right)$-də və $L_p\left(R^n\right)$-də sıx çoxluq olur.
2. $S\left(R^n\right)$ fəzası $C^\infty\left(R^n\right)$-də və $L_p\left(R^n\right)$ -də sıxdır.
3. $C^\infty\left(R^n\right)$ fəzası $L_p\left(R^n\right)$-də sıxdır.
4. $D\left(R^n\right) \subset S\left(R^n\right) \subset C^\infty\left(R^n\right)$,
   $D\left(R^n\right) \subset S\left(R^n\right) \subset L_p\left(R^n\right)$.

Teoremi $n=1$ halında isbat edək. Köməkçi lemmalar.

Lemma 1. $n=1$

$$\varphi(x) = \begin{cases} e^{1/x}, & x<0 \\ 0, & x \ge 0 \end{cases} \in C^\infty(R).$$

Doğrudan da, $x \neq 0$ olan hər yerdə $\varphi \in C^{\infty}$. Göstərək ki, $\forall k;\ \varphi^{(k)}(0)=0,\ k=1,2,\ldots$. Aydındır ki,

$$\frac{d^k}{dx^k} e^{\frac{1}{x}} = P_k(x) x^{-2k} e^{\frac{1}{x}},$$

burada $P_k(x)$- dərəcəsi $\leq k$ olan çoxhədlidir. Onda Lopital qaydasına əsasən alırıq ki,

$$\lim_{x \to 0} \frac{P(x)}{x^m} e^{\frac{1}{x}} = \lim_{t \to \infty} P\left(-\frac{1}{t}\right) t^m e^{-m} = 0,$$

burada $P(x)$- ixtiyari polinom, $m \geq 0$-tam ədəddir. Beləliklə, alırıq ki,

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \varphi^{(k)}(\varepsilon) = 0, \text{ yəni } \varphi \in C^{\infty}(R).$$

Lemma 2.

$$\phi(x) = \begin{cases} e^{2/x^2-1}, & |x| < 1, \\ 0, & |x| \geq 1. \end{cases}$$

Aydındır ki, $supp\,\phi = [-1,1]$, $\phi \in C^{\infty}(R)$. Deməli $\phi \in D(R)$.

Lemma 3. $\forall \delta > 0$ olsun. Belə bir funksiyaya baxaq:

$$\omega_\delta(x) = \frac{c}{\delta} \phi\left(\frac{x}{\delta}\right),\ c^{-1} = \int_{-\infty}^{\infty} \phi(x) dx.$$

Onda

1. $\omega_\delta(x) \geq 0$,
2. $\sup p\, \omega_\delta(x) = [-\delta, \delta]$.
3. $\int_{-\infty}^{\infty} \omega_\delta(x) dx = 1$.

Nəticə. $\omega_\delta(x) \in D(R)$ və $\int_{-\infty}^{\infty} \omega_\delta(x) dx = 1$.

İndi teoremi isbat edək. Göstərək ki, $D(R)$ L_p-də sıxdır. İxtiyari $f \in L_p(R)$ götürək. Onda elə N var ki,

$$\int_{-\infty}^{-N} |f|^p dx + \int_{N}^{\infty} |f|^p dx < \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^p.$$

Göstərək ki, f-in ixtiyari ε- ətrafında $D(R)$-dən element var. Belə $f_N(x)$ funksiyasına baxaq.

$$f_N(x)=\begin{cases} f(x), & |x|\le N, \\ 0, & |x|>N. \end{cases}$$

Aydındır ki, $f_N(x)$-in kompakt daşıyıcısı var və

$$\|f-f_N\|_p<\varepsilon/2 .$$

$f_N(x)$ L_p mənada kəsilməzdir, onda elə $\delta>0$ var ki, $|t|<\delta$ olduqda

$$\int|f_N(x)-f_N(x+t)|^p\,dx<\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^p .$$

İndi belə bir funksiya tərtib edək:

$$\varphi(x)=\int_{-\infty}^{\infty}f_N(x-t)\omega_\delta(t)dt ,$$

bu inteqral yığılır, çünki ω_δ məhduddur, finitdir və deməli $\omega_\delta(x)\in L_q(R)$. İndi $f_N-\varphi$ fərqini L_p-də qiymətləndirək.Bunun üçün belə bir düsturu nəzərə aılırıq:

$$\|f\|_p=\sup_{\|h\|_q\le 1}\left|\int_{-\infty}^{\infty}fh\,dx\right|,\ h\in L_q(R).$$

Onda alırıq:

$$\|f_N-\varphi\|_p=\sup_{\|h\|_q\le 1}\left|\int_{-\infty}^{\infty}(f_N-\varphi)h\,dx\right|=$$

$$=\sup_{\|h\|_q\le 1}\left|\int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{\infty}\omega_\delta(t)f_N(x-t)dt-f_N(x)\right]h(x)dx\right|=$$

$$=\sup_{\|h\|_q\le 1}\left|\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\omega_\delta(t)[f_N(x-t)-f_N(x)]h(x)dxdt\right| .$$

Lakin burada sonuncu inteqralda δ-nı seçməklə alırıq

$$=\left|\int_{-\delta}^{\delta}\omega_\delta(t)\left[\int_{-\infty}^{\infty}\{f_N(x-t)-f_N(x)\}h(x)dx\right]dt\right|\leq\int_{-\infty}^{\infty}\omega_\delta(t)\cdot\frac{\varepsilon}{2}dt=\frac{\varepsilon}{2}.$$

Beləliklə, aldıq ki,

$$\|f_N-\varphi\|_p<\frac{\varepsilon}{2}.$$

Deməli,

$$\|f-\varphi\|_p<\varepsilon.$$

İndi göstərək ki, $\varphi\in D(R)$. Şərtə görə f_N və ω_δ finitdirlər, deməli φ-finitdir, belə ki,

$$supp\,\varphi\subset supp\,f_N+supp\,\omega_\delta=[-N-\delta,N+\delta].$$

$\varphi\in C^\infty(R)$ olması isə aşağıdakı bərabərlikdən çıxır:

$$\frac{d^k}{dx^k}\varphi(x)=\frac{d^k}{dx^k}\int_{-\infty}^{\infty}f_N(x-t)\omega_\delta(t)dt=\int_{-\infty}^{\infty}f_N(x-t)\omega_\delta^{(k)}(t)dt.$$

$\omega_\delta(t)\in C^\infty(R)$ olduğundan bu inteqral $\forall k$ üçün sonludur. Beləliklə, $\varphi\in D(R)$ və $\|f-\varphi\|_{L_p}<\varepsilon.$

Analoji qayda ilə $D(R)$-nin $C^\infty(R)$-də sıx olduğu göstərilir. Teoremin qalan təklifləri bu deyilənlərin nəticəsi kimi alınır.

2.Yavaş artan ümumiləşmiş funksiyalar. S' fəzası. Şvars lemması.

Tərif. S fəzasında təyin olunan hər bir kəsilməz funksional yavaş artan ümumiləşmiş funksiya adlanır. Bütün yavaş artan ümumiləşmiş funksiyalar fəzasını S' ilə işarə edirik.

$D\subset S$ olduğundan $S'\subset D'$ olur. Deməli hər bir yavaş artan ümumiləşmiş funksiya həm də ümumiləşmiş funksiyadır. S' fəzası D'-in elə elementləri çoxluğudur ki,onları D-dən S-ə davam etdirmək olur. D fəzası S-də sıx çoxluq olduğu üçün bu cür davamlar yeganə olur. Aşkardır ki, S' xətti fəzadır.

Əgər $\forall\varphi\in S$ üçün $\langle f_\nu,\varphi\rangle\to\langle f,\varphi\rangle$, $\nu\to\infty$ olursa, onda deyirik ki, $f_\nu\underset{\nu\to\infty}{\to}f$ $\quad(S'$-də).

Heç də hər $f \in D'$ elementini S-ə davam etdirmək olmur. Məsələn, $e^x \in D'$, lakin $e^x \notin S'$.

Təklif. $\forall f \in S'$ və $\forall a \in O_M$ üçün $af \in S'$.

Doğrudan da, $\forall \varphi \in S$ üçün $a\varphi \in S$ olduğundan,

$$\langle af, \varphi \rangle = \langle f, a\varphi \rangle \in R \text{ və}$$

$\varphi_\nu \to 0$ olduqda $\langle af, \varphi_\nu \rangle = \langle f, a\varphi_\nu \rangle \to 0$, $\nu \to \infty$.

Deməli $af \in S'$.

$P(x)$-polinom olduqda $P(x) \in S'$ olur.

Əgər $f_\nu \xrightarrow{S'} f$ olursa, onda həm də $f_\nu \to f$ (D'-də).

Doğrudan da, $\forall \varphi \in S$ üçün $\langle f_\nu, \varphi \rangle \to \langle f, \varphi \rangle, \nu \to \infty$ olduqda.

Onda $\varphi \in D$ olduqda da $\langle f_\nu, \varphi \rangle \to \langle f, \varphi \rangle$, yəni $f_\nu \xrightarrow{D'} f$.

Məsələn, $\delta \in S'$ yavaş artan ümumiləşmiş funksiyadır. $T \in S'$ olduqda $\forall \alpha$ üçün $D^\alpha T \in S'$ olur.

$$\left\langle D^\alpha T, \varphi \right\rangle = (-1)^{|\alpha|} \left\langle T, D^\alpha \varphi \right\rangle, \quad D^\alpha \varphi \in S.$$

Buradan çıxır ki, $D^\alpha T \in S'$.

Diferensiallama operatoru S'-də kəsilməzdir: $f_\nu \xrightarrow{S'} f$ olduqda $\forall \alpha$ üçün $D^\alpha f_\nu \xrightarrow{S'} D^\alpha f$, $\nu \to \infty$ olur.

Buradan çıxır ki, əgər $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$, $u_n \in S'$ sırası S'-də yığılarsa, onu istənilən qədər hədbəhəd diferensiallamaq olar:

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} u_n \right)' = \sum_{n=1}^{\infty} u_n'.$$

Klassik analizdə belə bir təklif doğru deyil.

Tərif. $f \in S'$ olsun. Əgər elə $c > 0$ sabiti və elə $p \geq 0$ -tam ədədi varsa ki, $\forall \varphi \in S$ üçün

$$|\langle f,\varphi\rangle| \le c\|\varphi\|_p \qquad (*)$$

olur, onda deyirlər ki, f funksionalının tərtibi $\le p$.Bu şərti ödəyən ən kiçik p ədədi f-in tərtibi adlanır, burada

$$\|\varphi\|_p = \sup_{\substack{x\in R\\ |\alpha|\le p}} \left|x^p D^\alpha \varphi(x)\right|, \ p = 0,1,2,...$$

Məsələn, $\forall\varphi\in S$ üçün

$$|\langle\delta,\varphi\rangle| = |\varphi(0)| \le \sup_{x\in R}|\varphi(x)| = \|\varphi\|_0 ; p = 0.$$

Deməli $\delta(x)$-in tərtibi 0-a bərabərdir.

Lemma (Şvars). Tutaq ki, f S-də xətti funksionaldır. Onda f yalnız və yalnız o zaman kəsilməz olur ki, elə $c>0$ sabiti və elə $p\ge 0$ tam ədədi tapılsın ki, $\forall\varphi\in S$ üçün aşağıdakı qiymətlənmə doğru olsun.

$$|\langle f,\varphi\rangle| \le c\|\varphi\|_p . \qquad (*)$$

İsbatı. ***Kafilik.*** Tutaq ki, f xətti funksionaldır və $(*)$ münasibəti ödənilir. Göstərək ki, $f\in S'$. Tutaq ki, $\varphi_\nu \underset{\nu\to\infty}{\to} \varphi$ (S-də). Onda elə p ədədi var ki, $\|\varphi_\nu-\varphi\|_p \to 0$, $\nu\to\infty$. Belə olduqda alırıq ki,

$$|\langle f,\varphi_\nu\rangle - \langle f,\varphi\rangle| = |\langle f,\varphi_\nu-\varphi\rangle| \le c\|\varphi_\nu-\varphi\|_p \to 0, \ \ \nu\to\infty,$$

yəni $f_\nu \overset{S'}{\to} f$, $\nu\to\infty$. Deməli $f\in S'$.

Zərurilik. Tutaq ki, $f\in S'$. Göstərək ki, $(*)$ münasibəti doğrudur. Əksini fərz edək, yəni tutaq ki, tələb olunan c sabiti və p ədədi yoxdur. Onda elə $\varphi_N\in S$ $(k=1,2,...)$ funksiyaları var ki,

$$|\langle f,\varphi_N\rangle| \ge \|\varphi_N\|_N, \ \forall N=1,2,... \qquad (**)$$

Belə ardıcıllıq düzəldək:

$$\phi_N(x) = \frac{\varphi_N(x)}{\sqrt{N}\|\varphi_N\|_N}, \ N=1,2,...$$

Onda $\phi_N \to 0$ (S-də) $N\to\infty$. Doğrudan da, $\forall\alpha,\beta$ üçün

$$\left|x^\alpha D^\beta \phi_N(x)\right| = \frac{\left|x^\alpha D^\beta\varphi_N(x)\right|}{\sqrt{N}\|\varphi_N\|_N} \le \frac{1}{\sqrt{N}} \to 0, \ \ N\to\infty$$

f -kəsilməz olduğundan buradan çıxır ki,

$$\langle f,\phi_N\rangle \to 0,\quad N\to\infty.$$

Digər tərəfdən $(**)$ nəzərə alındıqda çıxır ki,

$$|\langle f,\phi_N\rangle| = \frac{1}{\sqrt{N}\|\varphi_N\|_N}|\langle f,\phi_N\rangle| \geq \sqrt{N}\to\infty,\quad N\to\infty.$$

Alınan ziddiyyət $(*)$ münasibətini isbat edir.

Nəticə. Hər bir yavaş artan ümumiləşmiş funksiya müəyyən $\|\varphi\|_p$ normasına nəzərən məhdud olur. Deməli hər bir yavaş artan ümumiləşmiş funksiya sonlu tərtibə malikdir. $f\in S'$ olması üçün $(*)$ qiymətləndirməsinin olması zəruri və kafidir.

Təklif 1. Tutaq ki, $f(x)\in L_1(R^n)$. Onda $f(x)$ S-də requlyar funksional doğurur, yəni $f\in S'$.

Doğrudan da, $\forall\varphi\in S(R^n)$ üçün alırıq:

$$\langle T_f,\varphi\rangle = \int_{R^n} f(x)\varphi(x)dx,$$

$$|\langle T_f,\varphi\rangle| \leq \sup_{x\in R^n}|\varphi(x)|\cdot\int_{R^n}|f(x)|dx < +\infty.$$

Həm də $\varphi_\nu\to 0$ (S-də) olduqda $\langle T_f,\varphi_\nu\rangle\to 0,\ \nu\to\infty$ olur, yəni $T_f\in S'$. Əgər T_f-requlyar funksionalını f ilə eyniləşdirsək, $f\in S'$ alarıq.

Təklif 2. Hər bir yavaş artan və kəsilməz $f(x)$ funksiyası S-də requlyar funksional doğurur.

Doğrudan da, $|f(x)|\leq c(1+|x|)^N$ olduqda ($m\geq N$ üçün)

$$|\langle T_f,\varphi\rangle| = \left|\int_{R^n} f(x)\varphi(x)dx\right| \leq \int_{R^n}\left|(1+|x|)^m\varphi(x)\frac{dx}{(1+|x|)^m}\right| \leq$$

$$\leq \sup_{x\in R^n}\{(1+|x|)^m|\varphi(x)|\}\cdot\int_{R^n}(1+|x|)^{-m}dx$$

alırıq. Buradan, $\varphi_\nu \overset{S}{\to} 0$ olduqda, həm də $\left|\langle T_f, \varphi_\nu\rangle\right| < \varepsilon$ alınır. Deməli, $T_f \in S'$, yəni $f \in S'$.

Qeyd. Heç də hər kəsilməz $f(x)$ funksiyası S'-ə daxil deyil. Məsələn, $e^x \notin S'$. Lakin ola bilər ki, $f(x)$ yavaş artan kəsilməz funksiya olmasın, amma S'-də requlyar funksional doğursun.

Məsələn, $f(x) = \left(\cos e^x\right)' = -e^x \sin e^x$ eksponensial artır ($|x| \to \infty$ olduqda). Buna baxmayaraq, o S'-dən olan requlyar funksional doğurur: $\forall \varphi \in S$

$$\langle f, \varphi\rangle = \left\langle \left(\cos e^x\right)', \varphi \right\rangle = -\langle \cos e^x, \varphi'\rangle = -\int_{-\infty}^{\infty} \cos e^x \cdot \varphi'(x)dx$$

Bu inteqral mütləq yığılır və $\varphi_\nu \to 0$, (S-də) olduqda

$$\left|\langle f, \varphi_\nu\rangle\right| \le \int_{-\infty}^{\infty} |\varphi_\nu'(x)|dx \to 0,\ \nu \to \infty.$$

Deməli, $f \in S'$.

Təklif 3. $L_p \subset S'$ $(p \ge 1)$, $L_q \subset S', \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Tutaq ki, $g \in L_q(R)$. Onda $\forall \varphi \in S$ üçün (Hölder bərabərsizliyi).

$$\left|\langle Tg, \varphi\rangle\right| = \left|\int_R g(x)\varphi(x)\right| \le \|g\|_q \cdot \|\varphi\|_p < \infty.$$

$\varphi_\nu \overset{S}{\to} 0$ olduqda isə buradan $\langle Tg, \varphi_\nu\rangle \to 0,\ \nu \to \infty$ olur. Deməli $T_g \in S'$. Onda $g(x) \in S'$, yəni $L_q(R) \subset S'$.

Təklif 4. Finit ümumiləşmiş funksiya- yavaş artan ümumiləşmiş funksiyadır. Əgər $f \in D'$-finit ümumiləşmiş funksiyadırsa, onda onu yeganə surətdə S fəzasına S'-in elementi kimi davam etdirmək olar. bu davam belə dusturla olur:

$$\langle f, \varphi\rangle = \langle f, \eta\varphi\rangle,\ \varphi \in S,$$

burada $\eta \in D$ elədir ki, $supp\, f = K$ məhdud çoxluğu ətrafında $\eta = 1$ olur. $\eta\varphi \in D$ olduğundan $\langle f, \eta\varphi \rangle$ funksionalı S-də kəsilməzdir: $\varphi_\nu \xrightarrow{S} \varphi$, $\nu \to \infty$ olur. Ona görə də

$$\langle f, \eta\varphi_\nu \rangle \to \langle f, \eta\varphi \rangle, \quad \nu \to \infty.$$

Deməli

$$\langle f, \varphi_\nu \rangle = \langle f, \eta\varphi_\nu \rangle \to \langle f, \eta\varphi \rangle = \langle f, \varphi \rangle,$$

yəni f S-də kəsilməzdir, deməli $f \in S'$.

Təklif 5. Tutaq ki, $T \in S'$, $P(x)$-polinomdur. Onda $PT \in S'$. Başqa sözlə, S' daxilində elementləri polinoma vurmaq olar. Xüsusi halda, $P(x) \in S'$.

Doğrudan da, $\forall \varphi \in S$ olduqda $a\varphi \in S$. Onda

$$\langle aT, \varphi \rangle \equiv \langle T, a\varphi \rangle$$

kimi təyin olunan aT S-də xətti və kəsilməzdir. $\varphi_\nu \xrightarrow{S} \varphi$, $\nu \to \infty$ olduqda $a\varphi_\nu \xrightarrow{S} a\varphi$, $\nu \to \infty$ olur. Onda alırıq ki,

$$\langle aT, \varphi_\nu \rangle \equiv \langle T, a\varphi_\nu \rangle \to \langle T, a\varphi \rangle = \langle aT, \varphi \rangle,$$

yəni aT S-də kəsilməz funksionaldır. Deməli $aT \in S'$.

Təklif 6. Aşağıdakı təkliflər aşkardır:

1). Tutaq ki,

$$\int_{R^n} \left(1 + |x|^2\right)^N |d\mu(x)| < \infty.$$

Onda $\mu \in S'$, başqa sözlə, $\forall \varphi \in S$ üçün

$$\langle f, \varphi \rangle = \int_{R^n} \varphi(x) d\mu(x)$$

kimi daxil edilən $f \in S'$ olur.

2). Tutaq ki,

$$\int_{R^n} \left(1 + |x|^2\right)^{-N} |g(x)|^p \, dx < \infty.$$

Onda $g \in S'$.

3).Tutaq ki, $P(x)$-polinomdur və $g(x)$-ölçülən funksiyadır və $|g(x)| \le P(x)$. Onda $g \in S'$.

Misal 1. Göstərək ki, $\mathcal{P}\frac{1}{x} \in S'$. Doğrudan da, $\forall \varphi \in S$ üçün

$$\left\langle \mathcal{P}\frac{1}{x}, \varphi \right\rangle = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{|x| \ge 0} \frac{\varphi(x)}{x} dx =$$

$$= \int_0^\infty \frac{\varphi(x) - \varphi(-x)}{x} dx = \int_0^1 \frac{\varphi(x) - \varphi(-x)}{x} dx + \int_0^\infty \frac{\varphi(x) - \varphi(-x)}{x} dx = J_1 + J_2,$$

burada

$$J_1 = \int_0^1 \frac{\varphi(x) - \varphi(-x)}{x} dx$$

inteqralı yığılandır, çünki

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\varphi(x) - \varphi(-x)}{x} dx = \lim_{\varepsilon \to 0} [\varphi'(x) - \varphi'(-x)] = 2|\varphi'(0)| < \infty.$$

Onda

$$|J_1| = \int_0^1 \left| \frac{\varphi(x) - \varphi(-x)}{x} \right| dx \le 2 \sup_x |\varphi'(x)| = 2\|\varphi\|_{0,1} < \infty.$$

Bunun kimi də,

$$J_2 = \int_1^\infty \frac{\varphi(x)}{x} dx + \int_1^\infty \frac{\varphi(-x)}{x} dx,$$

burada

$$\left| \int_1^\infty \frac{\varphi(x)}{x} dx \right| \le \int_1^\infty |x\varphi(x)| \cdot \frac{dx}{x^2} \le \sup_x |x\varphi(x)| \cdot \int_1^\infty \frac{dx}{x^2} = \sup_{x \in R} |x\varphi(x)| = \|\varphi\|_{1,0}$$

Deməli,

$$|J_2| \le \|\varphi\|_{1,0}.$$

Beləliklə aldıq ki, $\forall \varphi \in S$ üçün

$$\left|\left\langle \mathcal{P}\frac{1}{x},\varphi\right\rangle\right| \le 2\left[\|\varphi\|_{0,1}+\|\varphi\|_{1,0}\right]=2\|\varphi\|_1 .$$

Buradan, L.Şvars lemmasına əsasən , çıxır ki, $\mathcal{P}\frac{1}{x}$ xətti funksionalı S' fəzasına daxildir (kəsilməzdir).

Nəticə 1. $\mathcal{P}\frac{1}{x}$ funksionalının tərtibi 1-ə bərabərdir; onun sinqulyarlıq tərtibi də 1-rə bərabərdir, çünki

$$(\ln|x|)' = \mathcal{P}\frac{1}{x};\ \ln|x| \text{-adi funksiyadır.}$$

Nəticə 2.

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{x+i\varepsilon}\in S'.$$

Doğrudan da məlumdur ki,

$$\frac{1}{x+i0}=-i\pi\delta(x)+\mathcal{P}\frac{1}{x}.$$

Sağ tərəf S'-ə daxildir, deməli $\frac{1}{x+i0}\in S'$.

Misal 2. $f(x)=|x|$ olsun. Məlumdur ki, $|x|''=2\delta(x)$. $f(x)$-kəsilməz funksiya olub $|x|$-dən tez artmır. Deməli, $\delta(x)\in S'$ funksionalı kəsilməz $|x|$ funksiyasının 2-ci tərtib törəməsi kimi alınır.

Bu fakt S' fəzasında ümumi xarakter daşıyır:

Teorem (L.Şvars). Hər bir $T\in S'$ (yavaş artan ümumiləşmiş funksiyası) üçün elə $m\ge 0$ ədədi və elə yavaş artan kəsilməz $f(x)$ funksiyası var ki,

$$T=D^m f(x)\ .$$

Teoremin isbatı § 4-də veriləcək.

Məsələlər (S').

1. $\rho_\varepsilon(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\varepsilon}, & |x|<\dfrac{\varepsilon}{2},\\ 0, & |x|\geq\dfrac{\varepsilon}{2},\end{cases}\quad \varepsilon>0.$

Göstərin ki,

a) $\rho_\varepsilon(x)\xrightarrow{S'}\delta(x),\ \varepsilon\to 0$.

b) $\rho'_\varepsilon(x)=\dfrac{\delta\left(x+\dfrac{\varepsilon}{2}\right)-\delta\left(x-\dfrac{\varepsilon}{2}\right)}{\varepsilon}$;

c) $\rho'_\varepsilon(x)\xrightarrow{S'}-\delta',\ \varepsilon\to 0.$

2. $g(x)$-kəsilməz funksiyası belə verilir:

$$g(x)=\begin{cases}x, & x\geq 0,\\ 0, & x\leq 0.\end{cases}$$

Göstərin ki, 1) $g\in S'$, 2) $\delta(x)=g''$.

§4. Yavaş artan ümumiləşmiş funksiyaların quruluşu

1. $K(a)$ **fəzası. Qoşma fəza.** $K(a)$ fəzası- sonsuz diferensiallanan və $|x| \le a$ parçasından kənarda 0-ra bərabər olan bütün $\varphi(x)$ funksiyaları çoxluğudur. Bu fəzada hesabi normalar sistemi daxil edilir:

$$\|\varphi\|_p = \max_{|x| \le a} \left\{ |\varphi(x)|, |\varphi'(x)|, \ldots, \left|\varphi^{(p)}(x)\right| \right\} \quad p = 0,1,2,\ldots$$

Aşkardır ki,

$$\|\varphi\|_1 \le \|\varphi\|_2 \le \ldots \le \|\varphi\|_p \le \ldots$$

Normalar sistemi-uzlaşandır, yəni hər iki normaya görə fundamental olan ardıcıllıq onlardan birinə görə yığılırsa, onda digərinə görə də yığılan olur. $K(a)$ fəzasında $\varphi_\nu \to 0$, $(\nu \to \infty)$ o zaman olur ki, $\forall p$ üçün $\|\varphi_\nu\|_p \to 0$ olsun. Deməli, $\forall k$ üçün

$$\varphi_\nu^{(k)}(x) \underset{x}{\Rightarrow} 0, \nu \to \infty$$

olduqda $K(a)$-da $\varphi_\nu \to 0$ olur.

$n > 1$ olduqda $K(a)$ fəzası analoji qurulur. Bu dəfə $K(a)$ çoxluğu R^n-də

$$G_a = \left\{ x \in R^n : |x_1| \le a_1, \ldots, |x_n| \le a \right\}$$

paralelepipedindən kənarda =0 olan bütün $\varphi \in C^\infty(R^n)$ funksiyaları çoxluğu olur. Tutaq ki, f $K(a)$-da xətti və kəsilməz funksionaldır. Onda f müəyyən $\|\varphi\|_p$ normasında məhdud olar: $\forall \varphi \in K(a)$ üçün elə c və $p \ge 0$ var ki,

$$|\langle f, \varphi \rangle| \le c\|\varphi\|_p. \qquad (1)$$

Tərsinə, f xətti funksionaldırsa və (1) münasibəti ödənilirsə, onda f kəsilməzdir. (1) münasibəti ödənildikdə deyirik ki, f funksionalının tərtibi $\le p$.

Misal. f belə funksionaldır:

$$\langle f, \varphi \rangle = \int_{-a}^{a} \varphi^{(m)}(x) d\mu(x), \ \varphi \in \mathrm{K}(a), \tag{2}$$

burada $\mu(x)$-məhdud variyasiyalı funksiyadır. Onda f $\mathrm{K}(a)$-da xətti və kəsilməzdir. Xəttilik aydındır. Məhdud olduğunu göstərək. $\forall \varphi \in$-$\in \mathrm{K}(a)$ üçün alırıq:

$$|\langle f, \varphi \rangle| \leq \max_{|x| \leq a} \left| \varphi^{(m)}(x) \right| \cdot \operatorname*{var}_{|x| \leq a} \mu(x) = c \|\varphi\|_m,$$

$c \equiv \operatorname*{var}_{|x| \leq a} \mu(x)$- tam variyasiyadır. Onda Şvars lemmasına görə $f \in S'$.

Sonra görəcəyik ki, (2) düsturu $\mathrm{K}(a)$ fəzasında xətti və kəsilməz funksionalın ən ümumi şəklini verir.

$\mathrm{K}_p(a)$ ilə $\mathrm{K}(a)$ fəzasının $\|\varphi\|_p$ normasına görə doldurulmasından alınan tam fəzanı işarə edək. Aydındır ki,

$$\mathrm{K}_1(a) \supset \mathrm{K}_2(a) \supset \ldots \supset \mathrm{K}_p(a) \supset \ldots$$

Onda $\mathrm{K}(a)$ yalnız və yalnız o zaman tam fəza olur ki,

$$\mathrm{K}(a) = \bigcap_{p=1}^{\infty} \mathrm{K}_p(a)$$

$\mathrm{K}(a)$ fəzasında bütün p-tərtibli xətti-kəsilməz funksionallar çoxluğunu $\mathrm{K}'_p(a)$ ilə işarə edirik. $\mathrm{K}'_p(a)$-tam fəzadır. f-in norması:

$$\|f\|_p = \sup_{\|\varphi\|_p \leq 1} |\langle f, \varphi \rangle|.$$

Aydındır ki,

$$\|f\|_1 \geq \ldots \geq \|f\|_p \geq \|f\|_{p+1} \geq \ldots$$

Deməli,

$$\mathrm{K}'(a) = \bigcup_{p=0}^{\infty} \mathrm{K}'_p(a), \ \mathrm{K}'_p(a) \subset \mathrm{K}'_{p+1}(a).$$

İndi $\mathrm{K}(a)$ fəzasında xətti funksionalın ümumi şəklini müəyyən edək. Tutaq ki, $f \in \mathrm{K}'(a)$. Onda $\mathrm{K}'_p(a)$ -normalaşmış Banax fəzası olduğundan f-in ümumi şəklini $\mathrm{K}_p(a)$ fəzasında müəyyən etmək kifayətdir. Sonuncu fəza isə p tərtibə qədər kəsilməz törəmələri olan və $|x| \leq a$ parçasından kənarda sıfra bərabər olan $\varphi(x)$ funksiyaları çoxluğudur. $\forall \varphi \in \mathrm{K}_p(a)$ elementinə uyğun $\phi = D^p \varphi(x)$ kəsilməz funksiyanı qoyaq. Onda biz $\mathrm{K}_p(a)$ fəzasını $C[-a,a]$fəzasının müəyyən bir $C_1[-a,a]$ alt fəzasına inikas etdirmiş oluruq. Belə olduqda

$$\|\varphi\|_p = \max\left\{|\varphi(x)|, |\varphi'(x)|, \ldots |\varphi^{(p)}(x)|\right\} \leq$$

$$\leq c \max\left|\varphi^{(p)}(x)\right| = c \max|\phi(x)| \leq c\|\phi\|_p$$

münasibəti göstərir ki, $\mathrm{K}_p(a) \leftrightarrow C_1[-a,a]$ inikası qarşılışlı birqiymətlidir. Ona görə $\mathrm{K}_p(a)$-da verilən xətti kəsilməz $\langle f, \varphi \rangle$ funksionalı həm də $C_1[-a,a]$ fəzasında xətti və kəsilməz olar. Xan-Banax teoreminə görə bu funksionalı bütün $C[-a,a]$-ya davam etdirmək olar. Davamı g ilə işarə etsək, $\langle g, \phi \rangle = \langle f, \varphi \rangle$ alarıq. Onda Riss teoreminə əsasən g funksionalını belə yazmaq olar:

$$\langle g, \phi \rangle = \int_{-a}^{a} \phi(x) d\mu(x), \qquad (3)$$

Beləliklə, $\mathrm{K}(a)$-da verilən hər bir f xətti və kəsilməz funksionalını (3) şəklində yazmaq olur.

Qeyd. Sonra görəcəyik ki, $\mathrm{K}(a)$ fəzasında funksionalın (3) şəklini daha da sadələşdirmək olur. Məsələn, onu belə yazmaq olur:

$$\langle f,\varphi\rangle = \int_{-a}^{a} F(x)\varphi^{(p)}(x)dx,$$

burada $F(x)\in C[-a,a]$. Hissə-hissə inteqrallamaqla buradan alınır ki,

$$\langle f,\varphi\rangle = \langle F^{(p)},\varphi\rangle.$$

Nəticə. $\mathrm{K}(a)$ fəzasında hər bir xətti kəsilməz f funksionalı müəyyən $F(x)$ kəsilməz funksiyasının müəyyən tərtib törəməsinə bərabər olur.

2. $\mathrm{K}(\mathrm{M}_p)$ **Fəzası. Qoşma fəza.** Tutaq ki,

$$1\le M_1(x)\le M_2(x)\le ....\le M_p(x)\le ...$$

kimi $\{M_p(x)\}$ funksiyalar ardıcıllığı verilir, hamısı hər yerdə kəsilməz funksiyalardır,belə ki, hamısı yalnız eyni zamanda $=\infty$ ala bilər.

$\mathrm{K}(\mathrm{M}_p)$ ilə elə $\varphi\in C^{\infty}(R^n)$ funksiyaları çoxluğunu işarə edirik ki, $M_p(x)D^q\varphi(x)$ $(|q|\le p)$ funksiyaları bütün fəzada məhdud və kəsilməz olsunlar. Bu fəzada hesabi normalar daxil edilir:

$$\|\varphi\|_p = \sup_{\substack{x\in R^n\\ |q|\le p}} M_p(x)\left|D^q\varphi(x)\right|, \qquad p=0,1,2,...,$$

Beləliklə, $\mathrm{K}(\mathrm{M}_p)$ tam Freşe fəzası olur. Aydındır ki, $|x|\to\infty$ olduqda $M_p(x)D^q\varphi(x)\to 0$ olur. Əgər $\Phi=\mathrm{K}(\mathrm{M}_p)$ Φ_p işarə etsək və $\|\varphi\|_p$ normasına nəzərin Φ-nin doldurulmasını işarə etsək, onda

$$\Phi = \bigcap_{p=0}^{\infty}\Phi_p .$$

Bu isə Φ-nin tam fəza olması üçün zəruri və kafidir. Qeyd edək ki, $\mathrm{K}(a)$ və S $\mathrm{K}(\mathrm{M}_p)$ fəzasının xüsusi halları kimi fəzaları alınır. Məsələn,

$1^0.\ M_p(x)=\begin{cases}1, & |x|\le a\\ \infty, & |x|>a\end{cases}$

olduqda $\mathrm{K}(\mathrm{M}_P)=\mathrm{K}(a)$ olur.

$2^0.\ M_p(x)=\prod_{j=1}^{n}\left(1+|x_j|\right)^p=(1+|x_1|)^p\ldots(1+|x_n|)^p$

olduqda

$$\mathrm{K}(\mathrm{M}_P)=S(R^n)$$

olur.

Teorem 1. $\mathrm{K}(\mathrm{M}_P)$ fəzasında hər bir xətti kəsilməz f funksionalı bu düsturla verilir:

$$\langle f,\varphi\rangle=\sum_{|q|\le p}\int M_p(x)D^q\varphi(x)f_q(x)dx, \tag{4}$$

burada $f_q(x)$ -ölçülən və məhdud funksiyadır.

Teoremin isbatı az sonra veriləcək. İndi isə onun bir neçə nəticələrini qeyd edirik.

Teorem 2. $\mathrm{K}(a)$ fəzasında $\forall f$ xətti kəsilməz funksiyalarını aşağıdakı düsturla yazmaq olur:

$$\langle f,\varphi\rangle=\sum_{|q|\le p}\int f_q(x)D^q\varphi(x)dx,\quad \varphi\in\mathrm{K}(a), \tag{5}$$

burada $f_q(x)$-ölçülən məhdud funksiyadır.

Sonuncu inteqralda hissə-hissə inteqrallamaqla hər bir x_j dəyişəninə görə törəmələrin tərtibini p tərtibə çatdırmaq olar. Onda alarıq:

$$\langle f,\varphi\rangle=\int_{|x|\le a}f(x)D^p\varphi(x)dx,\quad D^p=\frac{\partial^{np}}{\partial x_1^p,\ldots,\partial x_n^p},$$

burada $f(x)$-ölçülən məhdud funksiyadır. Bir dəfə də hissə-hissə inteqrallasaq (5) bu şəkli alar:

$$\langle f,\varphi\rangle=\int_{|x|\le a}F(x)D^{p+1}\varphi(x)dx,$$

burada artıq $F(x)$-kəsilməz funksiyadır. Sonuncu düsturu belə yazaq:

$$\langle f,\varphi\rangle=\langle D^{p+1}F(x),\varphi\rangle,$$

deməli

$$f=D^{p+1}F(x).$$

Beləliklə, $K(a)$ fəzasında hər bir xətti kəsilməz f funksionalı müəyyən $F(x)$ kəsilməz funksiyasının D'-də müəyyən tərtib törəməsinə bərabərdir.

3. S' fəzasında funksionalın ümumi şəkli.

Teorem 3. S fəzasında verilən hər bir xətti kəsilməz funksionalı yavaş artan müəyyən kəsilməz funksiyanın S'-də müəyyən tərtib törəməsi kimi göstərmək olar.

Doğrudan da, tutaq ki, $f\in S'$. Gördük ki, $K(M_p)$ fəzasında $M_p(x)=\prod_{j=1}^{n}(1+|x_j|)^p$ olduqda S fəzası alınır. Onda 1-ci teoremə görə f bu şəkildə olar:

$$\langle f,\varphi\rangle=\sum_{|q|\le p}\int f_q(x)\prod_{j=1}^{n}(1+|x_j|)^p D^q\varphi(x)dx,$$

(3) inteqralında hissə-hissə inteqrallamaqla onu hər bir x_j dəyişənlərinə görə p tərtibli törəmələrdən ibarət inteqrala gətirmək olar. Onda alarıq:

$$\langle f,\varphi\rangle=\int_{R^n} f(x)D^p\varphi(x)dx\,, \tag{6}$$

burada $f(x)$ funksiyası

$$f_q(x)\prod_{j=1}^{n}(1+|x_j|)^p$$

şəklində olan funksiyaların və onların ibtidai funksiyalarının sonlu xətti kombinasiyasından ibarət olur. Deməli, $f(x)$ ölçülən funksiyadır və $|x| \to \infty$ olduqda $|x|^{pn}$ qüvvət funksiyasından tez artmır. Daha bir dəfə də hissə-hissə inteqrallamaqla $\varphi(x)$-nin törəmə tərtibini 1 vahid artırmaq olar, lakin inteqralaltı $f(x)$ funksiyasını kəsilməz funksiya etmək olar. Onda (6) düsturunu belə yazmaq olar:

$$\langle f, \varphi \rangle = \int F(x) D^{p+1} \varphi(x) dx = \langle D^{p+1} F(x), \varphi \rangle .$$

Beləliklə,

$$f = D^{p+1} F(x),$$

burada $F(x)$ $|x| \to \infty$ olduqda yavaş artan kəsilməz funksiyadır.

İndi 1-ci teoremi isbat edək. Əvvəlcə qeyd edək ki, $\Phi = \mathrm{K}(\mathrm{M}_p)$ fəzasında hesabi normalar sistemini belə də daxil etmək olar:

$$\|\varphi\|'_p = \sup_{\|q\| \le p} \int_{R^n} M_p(x) \left| D^q \varphi(x) \right| dx$$

Bu normalar sistemi əvvəldən verilən

$$\|\varphi\|_p = \sup_{\substack{x \in R \\ \|q\| \le p}} M_p(x) \left| D^q \varphi(x) \right|$$

normalar sisteminə ekvivalent olur: elə c_p, c'_p sabitləri var ki,

$$c_p \|\varphi\|'_p \le \|\varphi\|_p \le c'_p \|\varphi\|'_p .$$

Φ fəzasının $\|\varphi\|'_p$ normasına görə doldurulmasını Φ_p ilə işarə edək. Φ_p -tam fəzadır. Φ-nin olması üçün zəruri və kafi şərt belədir:

$$\Phi = \bigcap_{p=0}^{\infty} \Phi_p .$$

Belə olduqda Φ-də verilən hər bir xətti kəsilməz funksional müəyyən Φ_p fəzasında məhdud olur. Ona görə də $\mathrm{K}(\mathrm{M}_p)$ fəzasında xətti funksionalın ümumi şəklini tapmaq üçün müəyyən Φ_p fəzasında onun ümumi şəklini tapmaq lazım gəlir. Φ_p fəzası $M_p(x)$çəkili inteqrallanan funksiyalar çoxluğudur, belə ki,

$$\sup_{\|q\|\le p} \int M_p(x)\left|D^q\varphi(x)\right| < \infty .$$

Bu fəzada təyin olunan xətti kəsilməz funksionalın ümumi şəkli

$$\sum_{\|q\|\le p} \int M_p(x) D^q \varphi(x) f_q(x) dx$$

kimidir, burada $f_q(x)$ $(|q| \le p)$ -ölçülən məhdud funksiyadır. Deməli, Φ_p fəzasında hər bir xətti və kəsilməz f funksionalını belə yazmaq olar:

$$\langle f,\varphi\rangle = \sum_{\|q\|\le p} \int M_p(x) D^q \varphi(x) f_q(x) dx ,$$

burada p və $f_q(x)$ -funksiyalarını dəyişməklə bütün $\mathrm{K}(\mathrm{M}_p)$ fəzasında funksionalın ümumi şəklini alırıq.

Teorem. Hesabi normalı $\mathrm{K}(\mathrm{M}_p)$ fəzasında hər bir xətti kəsilməz f funksionalı bu şəkildə yazılır:

$$\langle f,\varphi\rangle = \sum_{\|q\|\le p} \int M_p(x) D^q \varphi(x) f_q(x) dx ,$$

burada $f_q(x)$ -ölçülən məhdud funksiyalardır. Bu funksionalın norması belədir:

$$\|f\| = \sum_{\|q\|\le p} \sup_x \left|f_q(x)\right| .$$

F ƏSİL 5
ÜMUMİLƏŞMİŞ FUNKSİYALARIN BÜKÜLMƏ (KOMPOZİSİYA) DÜSTURLARI. DÜZ HASİL

§ 1. Adi funksiyaların bükülməsi (kompozisiyası)

Fərz edək ki, $f(x)$ və $g(x)$ ədəd oxunda təyin olunmuş lokal inteqrallanan adi funksiyalardır. Belə bir inteqrala baxaq:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)g(x-\xi)d\xi \ . \tag{1}$$

Bu inteqral x-dən asılı funksiya olub f ilə g-nin bükülməsi (kompozisiyası) adlanır və $f * g$ və ya $(f * g)(x)$ kimi işarə edilir:

$$f(x) * g(x) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)g(x-\xi)d\xi \equiv h(x) \ . \tag{2}$$

Əgər bu inteqral yığılırsa, onda həm də

$$f * g = \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)g(x-\xi)d\xi = \int f(x-\xi)g(\xi) = g * f$$

olur. (1) inteqralı heç də həmişə yığılmır.

Klassik analizdən məlumdur ki, məsələn, $f, g \in L_1(-\infty, \infty)$ olduqda (1) inteqralı sanki bütün x-lər üçün sonludur və həm də $f * g = h(x)$ mütləq inteqrallanan funksiya olur (Fubini teoremi). Başqa varlıq şərtləri də var. Məsələn, tutaq ki, $f \in L_1(R)$ və g-məhdud funksiyadır. Onda $f * g$ bükülməsi var. Doğrudan da, $|g(x)| \le M$ olduqda,

$$|h(x)| \le \int_{-\infty}^{\infty} |g(\xi)f(x-\xi)| d\xi \le M \cdot \int_{-\infty}^{\infty} |f(\xi)| d\xi < \infty .$$

Təklif. $f(x)$ və $g(x)$ -adi funksiyalarından hər hansı biri finit funksiya olduqda $f * g$ bükülməsi s.h.y. var və o, da adi funksiya olur. Doğrudan da, tutaq ki, f-finitdir, məsələn, $\operatorname{sup} p f \subset [a,b]$. İxtiyari sonlu $[c,d]$ parçasına baxaq və göstərək ki, $h(x) \equiv f * g$ funksiyası lokal inteqrallanan funksiyadır. Fubini teoreminə əsasən yazırıq:

$$\int_c^d |h(x)| dx = \int_c^d \left| \int_a^b f(\xi) g(x-\xi) d\xi \right| dx = \int_a^b |f(\xi)| \left\{ \int_c^d |g(x-\xi)| dx \right\} d\xi . \quad (*)$$

Daxili inteqralı çevirək:

$$\int_c^d |g(x-\xi)| dx = \int_{c-\xi}^{d-\xi} |g(x)| dx .$$

Əgər

$$G(\xi) = \int_0^{\xi} |g(x)| dx, \quad a \le \xi \le b$$

işarə etsək, $G(\xi)$ sonlu $[a,b]$ parçasında kəsilməzdir. Onda G bu parçada məhduddur. Beləliklə,

$$\int_c^d |g(x-\xi)| dx = \int_{c-\xi}^{d-\xi} |g(x)| dx = G(d-\xi) - G(c-\xi).$$

Onda $(*)$-dan alırıq:

$$\int_a^b |h(x)| dx = \left| \int_a^b |f(\xi)| [G(d-\xi) - G(c-\xi)] d\xi \right| \le$$

$$\le \max_{a \le \xi \le b} |G(d-\xi) - G(c-\xi)| \cdot \int_a^b |f(\xi)| d\xi < \infty$$

Beləliklə, (1) inteqralı s.h.y. yığılır və $h(x)$-adi funksiyadır.

Eyni qayda ilə alınır ki, g-finit olduqda $h(x) \equiv f * g$ funksiyası s.h.y. sonludur və (1) inteqralı yığılandır. Beləliklə, f, yaxud g-finit olduqda $f * g$ var, o adi funksiyadır və $f * g = g * f$ olur.

Asan görmək olar ki,

$$supp(f * g) \subset supp\, f + supp\, g .$$

Buradan çıxır ki, $f(x)$ və $g(x)$-finit olduqda həm də $f * g$ - finit funksiya olur.

Teorem. f və g - kəsilməz, məhdud və bütün fəzada mütləq inteqrallanan olduqda $f * g$ bükülməsi də həmin xassələrə malik funksiya olur.

Doğrudan da, kəsilməzlik (1) inteqralının müntəzəm yığılmasından çıxır, çünki

$$|f(\xi)g(x-\xi)| \leq M|f(\xi)| \quad \text{və} \quad f \in L_1(-\infty, \infty)$$

olduğu üçün $h(x) = f * g$ -kəsilməz funksiya olur. Digər tərəfdən,

$$|h(x)| = |f * g| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |f(\xi)g(x-\xi)| d\xi \leq M \int_{-\infty}^{\infty} |f(\xi)| d\xi < \infty,$$

yəni $f * g$ - məhduddur.

İndi göstərək ki, $h \in L_1$:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |h(x)| dx = \int_{-\infty}^{\infty} dx \left| \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)g(x-\xi) d\xi \right| \leq \int_{-\infty}^{\infty} dx \left| \int_{-\infty}^{\infty} |f(\xi)g(x-\xi)| d\xi \right| =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} |f(\xi)| \left(\int_{-\infty}^{\infty} |g(x-\xi)| dx \right) d\xi = \int_{-\infty}^{\infty} |f(\xi)| d\xi \cdot \int_{-\infty}^{\infty} |g(y)| dy < \infty$$

Baxılan funksiyalar sinfində bükülmə əməliyyatı kommutativ və assosiativ olur:

$$f * g = g * f,$$
$$(f * g) * h = f * (g * h) = (g * h) * f.$$

Əgər $f(t)$ və $g(t)$-mütləq inteqrallanan adi funksiyalardırsa və $t < a$ olduqda $f(t) = g(t) = 0$ olursa, onda $f * g$ var və

$$f * g \equiv \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)g(t-\tau) d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} f(t-\tau)g(\tau) d\tau =$$

$$= \int_{a}^{t-a} f(t-\tau)g(\tau) d\tau = \int_{a}^{t-a} f(\tau)g(t-\tau) d\tau,$$

buradan, $a = 0$ olduqda,

$$f * g = \int_0^t f(t-\tau)g(\tau)d\tau = \int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau.$$

alırıq.

Gördük ki, $f \in L_1(R)$ və g-məhdud funksiya olduqda

$$h(t) = f * g \in L_1(R)$$

olur. Əgər $h = f * g$ bükülməsi adi funksiyadırsa, onda o, D fəzasında requlyar funksional doğurur.Onda $\forall \varphi \in D$ üçün alırıq:

$$\langle h, \varphi \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} h(x)\varphi(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)\left\{ \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)g(x-\xi)d\xi \right\}dx =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)\left\{ \int_{-\infty}^{\infty} g(x-\xi)\varphi(x) \right\}d\xi = \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)\left\{ \int_{-\infty}^{\infty} g(\eta)\varphi(\xi+\eta)d\eta \right\}d\xi.$$

Buradakı daxili inteqralı $\phi(\xi)$ ilə işarə edək:

$$\phi(\xi) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} g(\eta)\varphi(\xi+\eta)d\eta.$$

Bu funksiyanı belə yazaq:

$$\phi(\xi) = \langle g(\eta), \varphi(\xi+\eta) \rangle.$$

Beləliklə, alırıq ki,

$$\langle h, \varphi \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)\phi(\xi)d\xi = \langle f(\xi), \phi(\xi) \rangle =$$

$$= \langle f(\xi), \langle g(\eta), \varphi(\xi+\eta) \rangle \rangle.$$

Başqa sözlə, f, g-adi funksiyalar olduqda $\forall \varphi \in D$ üçün

$$\langle f * g, \varphi \rangle = \langle f(\xi), \langle g(\eta), \varphi(\xi+\eta) \rangle \rangle$$

olur. Bu bərabərlik istənilən f, g-adi funksiyaları üçün ödənilir. Ona görə bu bərabərliyi ixtiyari $f, g \in D'$ ümümiləşmiş funksiyalarının bükülməsi tərifi olaraq qəbul edirik. Bu məsələ növbəti paaraqrafda şərh olunur.

§ 2. Ümumiləşmiş funksiyaların bükülmə (kompozisiyası) düsturları

1. Bükulmənin tərifi. Tərif 1. Tutaq ki, $f, g \in D'$. Onda $h = f * g$ bükülməsi belə başa düşülür: $\forall \varphi \in D$ üçün

$$\langle f * g, \varphi \rangle = \langle h, \varphi \rangle = \langle f(\xi), \langle g(\eta), \varphi(\xi + \eta) \rangle \rangle \qquad (1)$$

Bu bərabərlik hər $\varphi \in D$-yə müəyyən $\langle h, \varphi \rangle$ ədədini uyğun qoyur, yəni $f * g$ D-də funksionaldır. Bu funksional f ilə g-nin *bükülməsi* adlanır.

Aydındır ki, $f * g$ bükülməsi həmişə mənalı olmaz. Sonra bir neçə varlıq şərtlərini göstərəcəyik.

Tərif 2. $\forall g \in D'$ ümumiləşmiş funksiyası üçün ξ-nin funksiyası olan

$$\phi(\xi) \equiv \langle g(\eta), \varphi(\xi + \eta) \rangle \qquad (2)$$

funksiyası g ilə $\varphi \in D$ əsas funksiyasının bükülməsi adlanır və $g * \varphi$ kimi işarə edilir:

$$g * \varphi = \langle g(\eta), \varphi(\xi + \eta) \rangle.$$

Belə olduqda (1)-dən alınır ki, $\forall f, g \in D$ üçün $f * g$ bu düsturla təyin olunur:

$$\langle f * g, \varphi \rangle = \langle f, g * \varphi \rangle. \qquad (3)$$

Qeyd. f və g - adi funksiyalardırsa və onlardan biri finit funksiyadırsa, onda $f(x) * g(x)$ bükülməsi var və bu halda (3) ilə klassik bükülmə üst-üstə düşür.

Misal 1. Tutaq ki, $f \in D'$ və $g = \delta(x)$. Onda $f * g$ bükülməsi var. Doğrudan da, tərifə görə $\forall \varphi \in D$

$$g * \varphi = \langle g(\eta), \varphi(\xi + \eta) \rangle = \langle \delta(\eta), \varphi(\xi + \eta) \rangle = \varphi(\xi),$$

Deməli,

$$\langle f * g, \varphi \rangle = \langle f(\xi), g * \varphi \rangle = \langle f(\xi), \varphi(\xi) \rangle = \langle f, \varphi \rangle$$

yəni

$$f * \delta = f. \qquad (4)$$

Bunun kimi də,

$$\langle \delta * f, \varphi \rangle = \langle \delta, f * \varphi \rangle = \langle \delta, \phi \rangle = \phi(0),$$

lakin

$$\phi(\xi)=f*\varphi=\langle f(\eta),\varphi(\xi+\eta)\rangle$$

olduğu üçün $\phi(0)=\langle f(\eta),\varphi(\eta)\rangle=\langle f,\varphi\rangle$ alırıq: Deməli, $:\forall\varphi\in D$ üçün

$$\langle\delta*f,\varphi\rangle=\langle f,\varphi\rangle,\ \text{yəni}\ \ \delta*f=f\ . \tag{5}$$

(4) və (5)-dən çıxır ki, $\forall f\in D'$ üçün

$$\delta*f=f*\delta=f\ . \tag{6}$$

Nəticə 1. $\delta(x)$ funksiyası bükülmələr cəbrində vahid rolunu oynayır:

$$\delta\cdot f=\delta*f=f\quad\forall f\in D'.$$

Misal 2. $f\in D'$, $g=\delta'$. Hesablayaq:

$$f*\delta'\ \text{və}\ \delta'*f\ .$$

Tərifə əsasən, $\forall\varphi\in D$

$$g*\varphi=\langle g(\eta),\varphi(\xi+\eta)\rangle=\langle\delta'(\eta),\varphi(\xi+\eta)\rangle=-\langle\delta(\eta),\varphi'(\xi+\eta)\rangle=-\varphi'(\xi).$$

Onda

$$\langle f*g,\varphi\rangle=\langle f(\xi),g*\varphi\rangle=\langle f(\xi),-\varphi'(\xi)\rangle=\langle f',\varphi\rangle,$$

deməli,

$$f*\delta'=f'\ .$$

Analoji olaraq alınır ki, $\delta'*f=f'$.

Beləliklə, $\forall f\in D'$ üçün

$$f*\delta'=\delta'*f=f',\qquad f'=\delta'*f. \tag{7}$$

Nəticə 2. $\forall f\in D'$ üçün

$$(\delta*f)'=f'\ . \tag{8}$$

Ümumiyyətlə, $(n>1)$:

$$D^\alpha(\delta*f)=D^\alpha\delta*f=\delta*D^\alpha f=D^\alpha f$$

$$D^\alpha(f*g)=D^\alpha f*g=f*D^\alpha g,\quad f,g\in D'.$$

Nəticə 3. Bükülməni diferensiallamaq üçün onlardan hər hansı birini diferensiallamaq lazımdır.

Doğrudan da,

$$\left\langle D^{\alpha}(f*g),\varphi\right\rangle=(-1)^{|\alpha|}\left\langle f*g,D^{\alpha}\varphi\right\rangle=$$

$$=(-1)^{|\alpha|}\left\langle f(\xi),\left\langle g(\eta),D^{\alpha}\varphi(\xi+\eta)\right\rangle\right\rangle=$$

$$=(-1)^{|\alpha|}\left\langle f(\xi),g*D^{\alpha}\varphi\right\rangle.$$

Lakin

$$g*D^{\alpha}\varphi=\left\langle g(\eta),D^{\alpha}\varphi(\xi+\eta)\right\rangle=(-1)^{|\alpha|}\left\langle D^{\alpha}g,\varphi(\xi+\eta)\right\rangle=(-1)^{|\alpha|}D^{\alpha}g*\varphi.$$

Deməli,

$$\left\langle D^{\alpha}(f*g),\varphi\right\rangle=\left\langle f(\xi),D^{\alpha}g*\varphi\right\rangle=\left\langle f*D^{\alpha}g,\varphi\right\rangle,$$

yəni

$$D^{\alpha}(f*g)=f*D^{\alpha}g.$$

Analoji qayda ilə

$$D^{\alpha}(g*f)=D^{\alpha}f*g$$

olur. Buradan tələb olunan alınır.

Qeyd. Hələlik bu düsturlar formal olaraq alınır. Yazılan bükülmələrin varlığı şərtində bu hesablamalar doğru olur. Varlıq şərtləri az sonra müəyyən ediləcəkdir.

2. Ümumiləşmiş funksiya ilə əsas funksiyanın bükülməsi. Biz gördük ki, $g\in D'$, $\varphi\in D$ olduqda $g*\varphi$ bükülməsi belə tərif olunur:

$$\phi(\xi)\equiv g*\varphi=\left\langle g(\eta),\varphi(\xi+\eta)\right\rangle.$$

Məsələn, $g=\delta$ olduqda

$$\phi(\xi)\equiv\delta*\varphi=\left\langle\delta(\eta),\varphi(\xi+\eta)\right\rangle=\varphi(\xi)\in D$$

$\varphi(\xi+\eta)$ funksiyası hər η üçün əsas funksiya olduğundan $\forall g(\eta)\in D'$ olduqda

$$\left\langle g(\eta),\phi(\xi+\eta)\right\rangle\equiv\phi(\xi)$$

funksiyası $\forall\xi$ üçün təyin olunub. Asan görmək olar ki, $\phi(\xi)$ kəsilməz və sonsuz diferensiallanandır.

Təklif 1. $\forall g \in D'$ və $\forall \varphi \in D$ üçün

$$\phi(\xi) = g * \varphi = \langle g(\eta), \varphi(\xi + \eta) \rangle \in C^{\infty}(R),$$

İsbatı: Tutaq ki, $\xi_n \to \xi_0$. Onda müntəzəm olaraq $\varphi(\xi_n + \eta) \underset{(\eta)}{\Rightarrow} \varphi(\xi_0 + \eta)$, və həm də $\forall q$ üçün

$$D^q \varphi(\xi_n + \eta) \underset{(\eta)}{\Rightarrow} D^q \varphi(\xi_0 + \eta), \quad n \to \infty.$$

Deməli, D fəzası mənada $\varphi(\xi_\nu + \eta) \to \varphi(\xi_0 + \eta)$ olar. Onda, $g \in D'$-kəsilməz funksional olduğundan, $n \to \infty$ olduqda

$$\varphi(\xi_n) = \langle g(\eta), \varphi(\xi_n + \eta) \rangle \to \langle g(\eta), \varphi(\xi_n + \eta) \rangle = \phi(\xi_0)$$

Deməli, ϕ-kəsilməzdir.

Bunun kimi də, $\xi_n \to \xi_0$ olduqda $\forall q$ üçün

$$\phi^{(q)}(\xi_n) \to \phi^{(q)}(\xi_0)$$

olur.

Belə nisbətə baxaq:

$$\frac{\varphi(\xi + \xi_n) - \varphi(\xi + \xi_0)}{\xi_n - \xi_0}$$

Aydındır ki, $\xi_\eta \to \xi$ olduqda müntəzəm olaraq

$$\frac{\varphi(\xi + \xi_n) - \varphi(\xi + \xi_0)}{\xi_n - \xi_0} \to \varphi'(\xi + \xi_0)$$

olar.

Buradan alırıq $(n \to \infty)$:

$$\frac{\phi(\xi_n) - \phi(\xi_0)}{\xi_n - \xi_0} = \left\langle \frac{\varphi(\xi + \xi_n) - \varphi(\xi + \xi_0)}{\xi_n - \xi_0} \right\rangle \to \langle g, \varphi'(\xi + \xi_0) \rangle$$

Buradan çıxır ki, $\phi'(\xi)$ törəməsi var:

$$\phi'(\xi)=\langle g(\eta),\varphi'(\xi+\eta)\rangle = g*\varphi'$$

Digər tərəfdən,

$$\langle g(\eta),\varphi'(\xi+\eta)\rangle = -\langle g'(\eta),\varphi(\xi+\eta)\rangle = -g'*\varphi.$$

Beləliklə son iki münasibətdən alınır ki,

$$\phi'(\xi)\equiv (g*\varphi)' = g*\varphi' = -g'*\varphi.$$

Prosesi bu qayda ilə davam etdirsək, $\forall q$ üçün

$$\varphi^{(q)}(\xi)=(g*\varphi)^{(q)} = g*\varphi^{(q)} = (-1)^q g^{(q)}*\varphi.$$

Deməli,

$$\phi(\xi)=\langle g(\eta),\varphi(\xi+\eta)\rangle = \in C^{\infty}(R).$$

Qeyd. Ümumiyyətlə, $\phi(\xi)$ finit deyil, deməli ϕ-əsas funksiya da deyil, çünki $\varphi(\xi+\eta)$ finit deyil. Bir vacib halda $\varphi(\xi)$ finit olur:- $|\xi+\eta|\le a$ (ξ,η) müstəvisində sonsuz zolaq olur.

Təklif 2. Əgər $g\in D'$-finit ümumiləşmiş funksiyadırsa, onda $\phi(\xi)=g*\varphi\in D$ olur. Doğrudan da, yuxarıda $\phi\in C^{\infty}(R)$ olması göstərilib. Göstərək ki, ϕ -finitdir. Verilir ki, $supp\, g\subset \Delta_g$ -ədəd oxunda məhdud çoxluqdur. Tutaq ki, $\varphi(x)$ ədəd oxunda müəyyən Δ_φ parçasında cəmləşib. Onda $\varphi(x+\xi)$ funksiyası Δ_φ-ξ parçasında cəmləşər. $g*\varphi\ne 0$ o zaman olur ki, Δ_g ilə Δ_φ-ξ çoxluqları kəsişir. Tutaq ki, $\eta\in\Delta_g\cap(\Delta_\varphi-\xi)$. Onda $\eta\in\Delta_\varphi-\xi$, yəni

$$\xi+\eta\in\Delta_\varphi,\quad \xi\in\Delta_\varphi-\varphi.$$

Lakin $\eta\in\Delta_g$ olduğundan $\xi\in\Delta_\varphi-\Delta_g$ olar. Deməli, $supp\,\phi = supp(g*\varphi)\subset supp\,\varphi - supp\, g$. Lakin, $supp\,\varphi - supp\, g\equiv\Delta$ məhdud çoxluqdur, deməli $\phi(\xi)=g*\varphi$ funksiyası Δ -dan kənarda 0-ra bərabərdir. Beləliklə, $\phi(\xi)\in D$.

Məsələn, $g=\delta(x)$ oldqda $\forall\varphi\in D$ üçün

$$\phi(x)=g*\varphi=\langle\delta(\eta),\varphi(x+\eta)\rangle=\varphi(x)\in D.$$

Təklif 3. Əgər $g\in D'$ finit funksionaldırsa, onda

$$\phi(\xi)=g*\varphi \quad D\text{-də}$$

xətti kəsilməz funksional olur, yəni $g*\varphi\in D'$.

Doğrudan da, gördük ki, g-finit olduqda $\varphi(\xi)\in D$. Göstərək ki, $\varphi(\xi)$ D-də requlyar funksional əmələ gətirir.

$$\langle T_\phi,\varphi\rangle=\int_{-\infty}^{\infty}\phi(x)\varphi(x)dx=\int_{-a}^{a}\phi(x)\varphi(x)dx,$$

həm də $\varphi_\nu\xrightarrow{D}0$ olduqda

$$|\langle T_\phi,\varphi_\nu\rangle|=\left|\int_{-A}^{A}\phi(x)\varphi_\nu(x)dx\right|\le\max_x|\varphi_\nu(x)|\cdot\int_{-A}^{A}|\phi(x)|dx\to 0,\quad \nu\to\infty.$$

Beləliklə, $T_\phi\in D'$. Buradan çıxır ki, $\phi\in D'$.

Teorem 1. $f\in D'$-ixtiyari və $g\in D'$ isə finit funksional olduqda $f*g$ bükülməsi D-də xətti və kəsilməz funksional olur: $f*g\in D'$.

Doğrudan da, $\forall\varphi\in D$ üçün $g*\varphi=\phi(\xi)\in D$ olduğundan arılıq ki,

$$\langle f*g,\varphi\rangle=\langle f,g*\varphi\rangle=\langle f,\phi\rangle,$$

$\phi\in D$ olduğundan $\langle f,\phi\rangle$ sonlu ədəd olur, deməli $f*g$ D-də funksionaldır. $\varphi_\nu\xrightarrow{D}0$ olduqda yuxarıda gördük ki, $\phi_\nu\in D$ və

$$\phi_\nu\xrightarrow{D}0,\quad \nu\to\infty.$$

Onda $f\in D'$ olduğundan,

$$\langle f * g, \phi_\nu \rangle = \langle f, \phi_\nu \rangle \to 0, \ \nu \to \infty$$

olur.Deməli, əgər $f * g$ D-də kəsilməzdir, yəni $f * g \in D'$.

Təklif. Əgər f-finit, g-ixtiyari olarsa, onda yenə də $f * g \in D'$ olur.

Doğrudan da, belə olduqda $g * \varphi = \phi(\xi) \in C^\infty(R)$, lakin $\phi \in D$ olmaya bilər. Amma $\langle f, g * \varphi \rangle = \langle f, \phi \rangle$ funksionalı sonludur, çünki f-finitdir. $\langle f, \phi \rangle$ D-də xətti və kəsilməzdir, çünki $g * \varphi$ bükülməsi xəttidir. İndi tutaq ki, $\varphi_\nu \to 0$ (D-də). Onda ədəd oxunda hər bir sonlu parçada müntəzəm olaraq $g * \varphi_\nu \to 0, \nu \to \infty$ olar. f-finit funksional olduğundan buradan çıxır ki, f -in daşıyıcı çoxluğu ətrafında da $g * \varphi_\nu \to 0$ olur.Onda $\langle f, g * \varphi_\nu \rangle \to 0, \ \nu \to \infty$. Deməli $f * g \in D'$.

Nəticə 4. f və g funksionallarından hər hansı biri finit olduqda $f * g$ həmişə var və $f * g = g * f \in D'$.

Teorem 2. Bükülmə operatoru kəsilməzdir: $f_\nu \xrightarrow{D'} f, \ \nu \to \infty$ olduqda $\forall g \in D'$ üçün

$$f_\nu * g \to f * g, \ \nu \to \infty$$

Bu teorem aşağıdakı hallardan hər hansı biri olduqda doğrudur:

a) g -finitdir,

b) f_ν funksionalları finitdirlər və onların hamısı eyni bir $[a,b]$ parçasında cəmləşiblər:

v) $supp\, f_\nu \subset [a,b]$, $\nu = 1,2,...$

c) $supp\, f_\nu$, $\nu = 1,2,...$ və $supp\, g$ çoxluqları eyni tərəfdən məhdud çoxluqlardır.

İsbatı: a) g -finit olduqda $\phi = g * \varphi \in D$ olur. Onda

$$\langle f_\nu * g, \varphi \rangle = \langle f_\nu, g * \varphi \rangle = \langle f_\nu, \phi \rangle \to \langle f, \phi \rangle = \langle f, g * \varphi \rangle = \langle f * g, \varphi \rangle,$$

buradan

$$f_\nu * g \xrightarrow{D'} f * g, \ \nu \to \infty.$$

Teorem 3. (Bükülmənin törəməsi). Əgər f və g-dən hər hansı biri finitdirsə, onda

$$(f * g)' = f' * g = f * g'.$$

İsbatı: $f * g$ var və $f * g = g * f \in D'$. Onda aşağıdakı üç bərabərlik doğrudur $(n = 1)$:

$$\begin{cases} \left\langle (f * g)', \varphi \right\rangle = -\langle f * g, \varphi' \rangle = -\langle f, g * \varphi' \rangle \ , \\ \langle f' * g, \varphi \rangle = \langle f', g * \varphi \rangle = -\left\langle f, (g * \varphi)' \right\rangle, \\ \langle f * g', \varphi \rangle = \langle f, g' * \varphi \rangle. \end{cases}$$

Bu bərabərliklərdə məlum düsturu

$$(g * \varphi)' = g * \varphi' = g' * \varphi$$

nəzərə alsaq, alarıq:

$$(f * g)' = f' * g = f * g' \ .$$

Qeyd. f və ya g-dən heç biri finit olmadıqda bu düstur doğru olmaya bilər.

Məsələn, $\theta(x)$-Hevisayd funksiyası üçün (o finit deyil):

$$(1 * \theta)' = 1' * \theta = 0,$$

$$(1 * \theta)' = 1 * \theta' = 1 * \delta = 1.$$

Deməli, $1 * \theta' \neq 1' * \theta$.

Ümumi halda $(n > 1)$ analoji qayda ilə alınır ki, f və g-dən hər hansı biri finit olduqda

$$D^\alpha (f * g) = D^\alpha f * g = f * D^\alpha g.$$

Doğrudan da, $f * g = g * f$ nəzərə alındıqda, $\forall \varphi \in D(R^n)$ üçün

$$\left\langle D^{\alpha}(f*g),\varphi\right\rangle=(-1)^{|\alpha|}\left\langle f*g,D^{\alpha}\varphi\right\rangle=(-1)^{|\alpha|}\left\langle f,g*D^{\alpha}\varphi\right\rangle=$$

$$=(-1)^{|\alpha|}\left\langle f,(-1)^{|\alpha|}D^{\alpha}g*\varphi\right\rangle=\left\langle f*D^{\alpha}g,\varphi\right\rangle,$$

yəni

$$D^{\alpha}(f*g)=f*D^{\alpha}g.$$

$$D^{\alpha}(g*f)=g*D^{\alpha}f.$$

Sol tərəflər bərabər olduğundan çıxır ki,

$$f*D^{\alpha}g=g*D^{\alpha}f.$$

Deməli

$$D^{\alpha}(f*g)=D^{\alpha}f*g=f*D^{\alpha}g.$$

Qeyd. $n>1$ halında $R^n, D(R^n), D'(R^n)$ üçün analoji düsturları çıxarmaq olar.

Xüsusi halda, $g\in D'(R^n)$ -finit funksional olduqda:

$$\frac{\partial}{\partial x_j}(f*g)=\frac{\partial f}{\partial x_j}*g=f*\frac{\partial g}{\partial x_j},$$

$$D^{\alpha}(f*g)=D^{\alpha}f*g=f*D^{\alpha}g.$$

Teorem 4. Hər bir $f\in D'$ ümumiləşmiş funksiyası müəyyən əsas funksiyalar ardıcıllığının limiti kimi alına bilər.

İsbatı. Tutaq ki, $\omega_{\nu}(x)\in D$, belə ki, $\omega_{\nu}(x)=1$, $|x|<1$ və $\omega_{\nu}(x)\xrightarrow{D'}\delta(x)$, $\nu\to\infty$ (belə ardıcıllıq D-də var). $g_{\nu}=\omega_{\nu}*f$. Onda $g_{\nu}\xrightarrow{D'}\delta*f=f$, $\nu\to\infty$. Aydındır ki, $g_{\nu}=\omega_{\nu}*f\in C^{\infty}, \forall\nu=1,2,...$ üçün.

Tutaq ki, $e_\nu(x) \in D$, belə ki, $\operatorname{sup} p\, e_\nu \subset \{|x| \le \nu\}$. $f_\nu = e_\nu g_\nu$ işarə edək. Onda $f_\nu \in D$ olar. Aydındır ki, müəyyən ν_0-dən başlayaraq $(\nu \ge \nu_0)$ $\varphi = e_0 \varphi$ olar. Ona görə alırıq: $\left(g_\nu \xrightarrow{D'} f,\ \nu \to \infty \right)$:

$$\lim_{\nu \to \infty} \langle f_\nu, \varphi \rangle = \lim_{\nu \to \infty} \langle e_\nu g_\nu, \varphi \rangle = \lim_{\nu \to \infty} \langle g_\nu, e_\nu \varphi \rangle =$$
$$= \lim_{\nu \to \infty} \langle g_\nu, \varphi \rangle = \langle f, \varphi \rangle,$$

yəni

$$f_\nu \xrightarrow{D'} f,\ \nu \to \infty.$$

Beləliklə, $f_\nu(x) \in D$ və $f_\nu(x) \xrightarrow{D'} f$, $\nu \to \infty$.

Bükülmə əməlinin bəzi xüsusi xassələri. Xülasə.

1. $\delta' * f = f',\ f \in D'$.
2. $\delta^{(m)} * f = f^{(m)},\ \forall f \in D'$.
3. $(f * g)^{(m)} = f^{(m)} * g = f * g^{(m)}$.
4. $\delta' * (f * g) = (\delta' * f) * g = f' * g = f * g'$.
5. $\delta(t - t_0) * f(t) = f(t - t_0)$.
6. $\delta'(t - t_0) * f = f'(t - t_0)$.
7. $\delta(t - t_0) * \delta(t - t_1) = \delta(t - (t_0 + t_1))$.

Məsələn, sonuncunu isbat edək. $f(t) = \delta(t - t_1)$ olsun. Onda $\delta(t - t_0) * F(t) = F(t - t_0)$ xassəsinə görə

$$\delta(t - t_0) * f(t) = f(t - t_0) = \delta(t - t_0 - t_1).$$

Bunu belə də yazmaq olar:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(\xi - t_0) \delta(t - \xi - t_1) d\xi = \delta(t - t_0 - t_1).$$

Qeyd. $f * g$, $f * g * h$ varsa, (məsələn, əgər onlardan ən azı ikisi finit olarsa) onda bükülmə əməliyyatı kommutativ və assosiativlik xassələrinə malikdir. Əks halda həmin xassələr doğru olmaya bilər.

Məsələn,

$$1 * \delta' * \theta = (1 * \delta') * \theta = (1' * \delta) * \theta = 0 * \theta = 0,$$

lakin

$$1 * \delta' * \theta = 1 * (\delta' * \theta) = 1 * \theta' = 1 * \delta = 1,$$

yəni

$$(1 * \delta') * \theta \neq 1 * (\delta' * \theta).$$

Səbəbi ondadır ki, ikisi finit deyil.

Təklif 3. $f, g, h \in D'$ olduqda $f * g$ və $f * g * h$ bükülmələri aşağıdakı hallarda kommutativ və assosiativ olur:

a) f, g, h-dan ən azı ikisi finit olduqda,

b) hər üçünün daşayıcı çoxluqları ədəd oxunda eyni tərəfdən məhdud çoxluqlar olduqda.

Məsələn, əgər $\operatorname{supp} f \subset (a, \infty)$ olursa, onda deyirlər ki, f, g funksionallarının daşıyıcı çoxluqları soldan məhduddurlar. $\operatorname{supp} f \subset$ $\subset (-\infty, a)$ olduqda həmin çoxluq sağdan məhdud adlanır.

Məsələn, tutaq ki, f, g -finitdirlər və $h \in D'$ -ixtiyaridir. Onda:

1) $f * g$ var və finitdir. Onda $\forall h \in D'$ üçün

$$(f * g) * h = h * (f * g).$$

2) $g * h$ var (çünki g -finitdir). Onda $f * (g * h)$ var, çünki f - finitdir. Deməli,

$$f * (g * h) = (g * h) * f.$$

Beləliklə aldıq ki,

$$(f * g) * h = h * (f * g) = f * (g * h) = (g * h) * f.$$

3. Ümumiləşmiş funksiyaların bükülməsinin adi funksiyalarla bükülmə ilə əlaqəsi. Biz gördük ki, f ilə g-ümumiləşmiş funksiyalarından hər hansı biri finit olduqda $f * g$ bükülməsi korrekt təyin olunur. Bu halda

$$f * g = g * f \in D'.$$

Tutaq ki, f-finitdir, $g \in D'$-ixtiyaridir. Məlumdur ki, g-ni belə qurmaq olar:

$$g = \sum_{k=0}^{\infty} D^k g_k(x),$$

belə ki, $g_k(x)$- adi funksiya olub $k \to \infty$ olduqda $supp\ g_k(x)$ koordinat başlanğıcından sonsuz uzaqlaşır. Onda $\forall \varphi \in D, supp\,\varphi \subset [a,b]$:

$$\phi(\xi) = (g * \varphi)(\xi) = \langle g(x), \varphi(x+\xi) \rangle = \left\langle \sum_{k=0}^{\infty} D^k g_k(x), \varphi(x+\xi) \right\rangle =$$

$$= \sum \left\langle g_k(x), (-1)^k \varphi^{(k)}(x+\xi) \right\rangle = \sum (-1)^k \int_{a-\xi}^{b-\xi} g_k(x) \varphi^{(k)}(x+\xi) dx = \quad (1)$$

$$= \sum (-1)^k \int_a^b g_k(x-\xi) \varphi^{(k)}(x) dx,$$

Hər sonlu parçada yalnız sonlu sayda $g_k(x) \neq 0$ olduğu üçün sonuncu cəm də sonlu cəmdir. Digər tərəfdən, (1)-də $\phi(\xi) \in C^{\infty}(R)$ olduğundan $\forall m$ üçün alırıq:

$$\phi^{(m)}(\xi) \equiv (g * \varphi)^{(m)}(\xi) = \sum (-1)^k \int_a^b g_k(x) \varphi^{(k+m)}(x+\xi) dx =$$

$$(2)$$

$$= \sum (-1)^k \int_a^b g_k(x-\xi) \varphi^{(k+m)}(x) dx,$$

İndi tutaq ki, f -finit funksionaldır. Onun ümumi şəkli belədir:

$$f(\xi) = \sum_{m=0}^{p} D^m f_m(\xi)$$

belə ki, $f_m(\xi)$-adi finit funksiyalardır, $supp\, f_m(x) \subset [c,d]$. Onda alırıq:

$$\langle f*g,\varphi\rangle=\langle f,g*\varphi\rangle=\left\langle\sum_{m=0}^{p}D^m f_m(\xi),(g*\varphi)^{(m)}(\xi)\right\rangle=$$

$$=\sum(-1)^m\left\langle f_m(\xi),(g*\varphi)^{(m)}(\xi)\right\rangle=$$

$$=\sum(-1)^m\int_c^d f_m(\xi),(g*\varphi)^{(m)}(\xi)d\xi\ .$$

(3)

(2) düsturunu nəzərə aldıqda alırıq:

$$\langle f*g,\varphi\rangle=\sum(-1)^m\int_c^d f_m(\xi)\left\{(-1)^k\int_a^b g_k(x-\xi)\varphi^{(k+m)}(x)dx\right\}d\xi\,.$$

Buradan cəmlər sonlu sayda (məsələn, N-sayda) toplanandan ibarət olduğu üçün alırıq:

$$\langle f*g,\varphi\rangle=\sum_{m=0}^{p}\sum_{k=o}^{N}(-1)^{k+m}\int_c^d f_m(\xi)\left\{\int_a^b g_k(x-\xi)\varphi^{(k+m)}(x)dx\right\}d\xi=$$

$$=\sum_{m=0}^{p}\sum_{k=o}^{N}(-1)^{k+m}\int_a^b\left\{\int_c^d f_m(\xi)g_k(x-\xi)d\xi\right\}\varphi^{(k+m)}(x)dx=$$

$$=\sum_{m=0}^{p}\sum_{k=o}^{N}(-1)^{k+m}\left\langle f_m*g_k(x),\varphi^{(k+m)}(x)\right\rangle,$$

burada f_m*g_k-adi funksiyaların bükülməsidir. Bu düsturu aşağıdakı şəkildə yazmaq olar:

$$\langle f*g,\varphi\rangle=\sum_{m=0}^{p}\sum_{k=o}^{N}\left\langle f_m*g_k,\varphi^{(k+m)}(x)\right\rangle,$$

və yaxud,

$$\langle f*g,\varphi\rangle=\left\langle\sum_{m=0}^{p}\sum_{k=o}^{N}(f_m(x)*g_k(x))^{(k+m)},\varphi\right\rangle.$$

Beləliklə, $f * g$ bükülməsi ilə $f_m(x) * g_k(x)$ adi bükülməsi arasında əlaqə düsturu belə olur:

$$(f * g)(x) = \sum_{m=0}^{p} \sum_{k=o}^{N} (f_m * g_k)^{(k+m)}(x) . \tag{4}$$

Qeyd. Əgər $g \in D'$-finit funksional, $f \in D'$-ixtiyari olarsa, onda analoji qaydada alarıq:

$$(f * g)(x) = \sum_{k=0}^{N} \sum_{m=o}^{p} (g_k * f_m)^{(k+m)}(x) . \tag{5}$$

Adi funksiyalar üçün

$$f_m * g_k = g_k * f_m$$

olduğu üçün (4) və (5)-dən D' fəzasında bükülmənin kommutativliyi alınır:

$$f * g = g * f \tag{*}$$

Nəticə. $f, g \in D'$ hər hansı biri finit olduqda $(*)$ xassəsi həmişə ödənilir.

§ 3. Ümumiləşmiş funksiyaların düz hasili.

Tutaq ki, $f(x)$ R^n-də, $g(y)$ isə R^m-də təyin olunan lokal inteqrallanan funksiyalardır. Onda $f(x) \cdot g(y) \in D'(R^{n+m})$ (Fubini teoreminə görə):

$$\langle f(x)g(y), \varphi \rangle = \iint f(x)g(y)\varphi(x,y)dx\,dy = \int f(x)\left(\int g(y)\varphi(x,y)dy\right)dx =$$

$$\int f(x)\langle g(y), \varphi(x,y)\rangle dx = \langle f(x), \langle g(y), \varphi(x,y)\rangle\rangle . \tag{1}$$

Bunun kimi də

$$\begin{aligned}\langle g(y)f(x), \varphi \rangle &= \iint g(y)f(x)\varphi(x,y)dx\,dy = \int g(y)\left(\int f(x)\varphi(x,y)dx\right)dy = \\ &= \int g(y)\langle f(x), \varphi(x,y)\rangle dy = \langle g(y), \langle f(x), \varphi(x,y)\rangle\rangle.\end{aligned} \tag{2}$$

Bu bərabərliklər istənilən $f(x), g(y)$- adi funksiyaları üçün doğrudur.

İndi tutaq ki, $f(x) \in D'(R^n), g(y) \in D'(R^m)$. Onda f və g ümumiləşmiş funksiyalarının düz hasili $f(x) \times g(y)$ belə daxil edilir: $\forall \varphi(x,y) \in D(R^{n+m})$:

$$\langle f(x)\times g(y),\varphi\rangle=\langle f(x),\langle g(y),\varphi(x,y)\rangle\rangle. \tag{3}$$

Belə olduqda $f(x)\times g(y)$ düz hasili $D(R^{n+m})$ fəzasında xətti və kəsilməz funksional olur.

Lemma. $\forall g\in D'(R^m)$ və $\varphi\in D(R^{n+m})$ üçün

$$\phi(x)=\langle g(y),\varphi(x,y)\rangle\in D(R^n) \text{ olur.} \tag{4}$$

Bundan əlavə

$$D^\alpha\phi(x)=\langle g(y),D_x^\alpha\varphi(x,y)\rangle. \tag{5}$$

Əgər $\varphi_\nu\to\varphi,\ \nu\to\infty$ ($D(R^{n+m})$-də), onda $D(R^n)$-də.

$$\phi_\nu(x)=\langle g(y),\varphi_\nu(x,y)\rangle\to 0,\ \nu\to\infty,$$

(**İsbatı** bax: [1], səh.107). Beləliklə $\phi(x)\in D(R^n)$. Deməli, (3)-də sağ tərəf təyin olunub, çünki $f(x)$ $D(R^n)$-də xətti və kəsilməzdir. Beləliklə,

$$\langle f(x)\times g(y),\varphi(x,y)\rangle=\langle f(x),\phi(x)\rangle$$

bərabərliyi kimi tapılan $f(x)\times g(y)$ hasili $D(R^{n+m})$-də xətti və kəsilməz funksional olur: $f(x)\times g(y)\in D'(R^{n+m})$.

Xassə 1. $f(x)\times g(y)=g(y)\times f(x)$.

Xassə 2. $f_\nu\xrightarrow{D'(R^n)}f$ olduqda

$$f_\nu(x)\times g(y)\xrightarrow{D'(R^{n+m})}f(x)\times g(y),\ \nu\to\infty.$$

Xassə 3. $D_x^\alpha[f(x)\times g(y)]=D^\alpha f(x)\times g(y)$.

Doğrudan da

$$\left\langle D_x^\alpha (f(x)\times g(y)),\varphi\right\rangle = (-1)^{|\alpha|}\left\langle f(x)\times g(y), D_x^\alpha \varphi(x,y)\right\rangle =$$

$$=(-1)^{|\alpha|}\left\langle g(y),\left\langle f(x), D_x^\alpha \varphi\right\rangle\right\rangle = \left\langle g(y),\left\langle D^\alpha f(x),\varphi\right\rangle\right\rangle = \left\langle D^\alpha f(x)\times g(y),\varphi\right\rangle.$$

Xassə 4. $\forall a \in C^\infty\left(R^n\right)$ üçün

$$a(x)(f(x)\times g(y)) = a(x)f(x)\times g(y).$$

Qeyd. $f(x)\times 1(y)$ ümumiləşmiş funksiyası belə təsir edir:

$$\langle f(x)\times 1(y),\varphi\rangle = \left\langle f(x), \int \varphi(x,y)dy\right\rangle = \int\langle f(x),\varphi(x,y)\rangle dy.$$

Xüsusi halda, $\forall f \in D'\left(R^n\right)$ və $\varphi \in D\left(R^{n+m}\right)$ üçün

$$\left\langle f(x), \int \varphi(x,y)dy\right\rangle = \int\langle f(x),\varphi(x,y)\rangle dy.$$

Düz hasildən istifadə etməklə bükülmə əməliyyatını belə yazmaq olar:

$$\langle f * g,\varphi\rangle = \langle f(x)\times g(y),\varphi(x,y)\rangle = \langle f(x),\langle g(y),\varphi(x,y)\rangle\rangle.$$

Teorem. Tutaq ki, g – finit funksionaldır. Onda $f * g \in D'$ və aşağıdakı düstur doğrudur:

$$\langle f * g,\varphi\rangle = \langle f(x)\times g(y),\eta(y)\varphi(x,y)\rangle,\quad \varphi\in D, \qquad (*)$$

burada $\eta(y)\in D$, belə ki, $supp\, g = K$ çoxluğu ətrafında $\eta = 1$.

İsbatı. Tutaq ki,

$$supp\, g \subset V_R,\ supp\,\eta \subset V_R,\quad \varphi\in D,\ supp\,\varphi \subset V_a \quad \varphi(x+y)$$

funksiyası finit deyil. Deyək ki, $\{|x+y|\le a\} = G_a$ oblastından kənarda $\varphi(x,y)=0$ olur. G_a oblastı qeyri-məhdud oblastdır. Deməli $\varphi(x,y)$-finit deyil. Belə olduqda $(*)$ ifadəsində sağ tərəf D-də kəsilməz funksional olur.

Tutaq ki, $\varphi_\nu \xrightarrow{D(R^n)} 0$, $\nu \to \infty$ olur. Onda

$$\eta(y)\varphi(x,y) \in D(R^{2n}),$$

və

$$\eta(y)\varphi_\nu(x,y) \to \eta(y)\varphi_\nu(x,y),\ \nu \to \infty.$$

Belə olduqda $f * g$ kəsilməzdir:

$$\langle f * g, \varphi_\nu \rangle = \langle f(x) \times g(y), \eta(y)\varphi_\nu(x,y) \rangle \to$$
$$\to \langle f(x) \times g(y), \eta(y)\varphi_\nu(x,y) \rangle = \langle f * g, \varphi \rangle, \nu \to \infty.$$

Deməli, $f * g \in D'$.

Misal. $\delta(x) \times \delta(y) = \delta(x,y)$,
$\delta(x) \times g(y) = g(y)$;

Doğrudan da $\forall \varphi(x,y) \in D(R \times R)$

$$\langle \delta(x) \times \delta(y), \varphi \rangle = \langle \delta(x), \langle \delta(y), \eta(y)\varphi(x,y) \rangle \rangle =$$
$$= \langle \delta(x), \eta(0)\varphi(x,0) \rangle = \langle \delta(x), \varphi \rangle = \varphi(0) = \langle \delta(x,y), \varphi(x,y) \rangle,$$

yəni

$$\delta(x) \times \delta(y) = \delta(x,y).$$

Ona görə də

$$\langle \delta(x) \times g(y), \varphi \rangle = \langle g(y) \times \delta(x), \varphi \rangle = \langle g(y), \langle \delta(x), \eta(x)\varphi(x,y) \rangle \rangle =$$
$$= \langle g(y), \varphi(0,y) \rangle = \langle g, \varphi \rangle,$$

deməli,

$$\delta(x) \times g(y) = g(y).$$

§ 4. S' fəzasında bükülmə və düz hasil.

1.Düz hasil. Bir çox vacib tətbiq məsələlərində S' fəzası daha geniş tətbiq olunur. Buna səbəb də var: Furye çevirməsi operatoruna nəzərən S və S' fəzaları öz-özünə izomorf qalırlar: $F[S]=S$; $F[S']=S'$. Bu xassə çox halda işi asanlaşdırır. Deyilənləri nəzərə alaraq S' fəzasında bükülmə və düz hasil əməllərini ayrıca qeyd edirik. Hərcənd ki, $S'\subset D'$ və D' fəzasında olan ümumi təkliflər S' fəzasının elementləri üçün də öz gücündə qalır. Burada yeni korrekt nəticələr də alınır.

Tutaq ki, $f\in S'(R_x)$, $g\in S'(R_y)$. Onda $S'\subset D'$ olduğundan $f(x)\times g(y)$ ümumiləşmiş funksiyası $D'(R^2)$ fəzasından olur: $\forall\varphi(x,y)\in D(R^2)$ üçün

$$\langle f\times g,\varphi(x,y)\rangle=\langle f(x),\langle g(y),\varphi(x,y)\rangle\rangle\ . \qquad (*)$$

Əgər $\phi(x)=\langle g(y),\varphi(x,y)\rangle$ işarə etsək, $\phi\in D(R_x)$ olur və deməli $(*)$-da sağ tərəf $\langle f(x),\phi(x)\rangle\in D'(R_x)$. Onda $f*g\in D'(R^2)$. Göstərək ki, $f*g\in S'(R^2)$. Düz hasilin tərifinə əsasən,

$$\langle f(x)\times g(y),\varphi\rangle=\langle f(x),\langle g(y),\varphi(x,y)\rangle\rangle\ . \qquad (**)$$

İsbat edək ki, sağ tərəf $S(R^2)$ fəzasında xətti və kəsilməz funksionaldır.

Lemma. $\phi(x)=\langle g(y),\varphi(x,y)\rangle\in S(R)$.

Doğrudan da, D fəzası üçün uyğun lemmanı isbat etmişik, həmin prosesi təkrar etdikdə alırıq ki, $\phi(x)\in C^{\infty}(R)$. Məlumdur ki, (Şvars) $g\in S'(R_y)$ sonlu tərtibi var, yəni elə $m\geq 0$ ədədi var ki,

$$|\langle g,\phi\rangle|\leq c\|\phi\|_m,\quad \forall\phi\in S$$

$D^{\alpha}\phi(x)=\langle g(y),D_x^{\alpha}\varphi(x,y)\rangle$ olduğu üçün

$$|\langle g(y),\eta\rangle|<c\|\eta\|_m=c\sup_{\substack{y\\ |\beta|\leq m}}(1+y^2)^{m/2}|D_y^{\beta}\eta|=c\sup_{\substack{y\\ |\beta|\leq m}}(1+y^2)^{m/2}|D_x^{\alpha}D_y^{\beta}\varphi(x,y)|\ .$$

Onda

$$\|\phi\|_p = c\sup_{\substack{x\\|\alpha|\le p}}\left(1+x^2\right)^{p/2}\left|D^\alpha\phi(x)\right| =$$

$$= c\sup_{\substack{y\\|\alpha|\le p\\|\beta|\le m}}\left(1+x^2\right)^{p/2}\left(1+y^2\right)^{m/2}\left|D_x^\alpha D_y^\beta\varphi(x,y)\right| \le c\|\varphi\|_{p+m} < \infty .$$

Buradan çıxır ki, $\phi \in C^\infty(R)$ və $D^\alpha\phi(x)$ $\forall\alpha$ üçün $|x|\to\infty$ olduqda $\left(1+x^2\right)^{p/2}$-dən daha tez azalır. Deməli, $\phi(x)\in C^\infty(R_x)$. Belə olduqda $(**)$-dan çıxır ki, sağ tərəf $\langle f(x),\phi(x)\rangle$, S-də xətti və kəsilməz funksionaldır. Deməli, sol tərəfdəki $f*g\in S'(R^2)$

Nəticə. $\forall f,g\in S'$ üçün $f*g=g*f\in S'$.

Düz hasilin D'-də olan qalan bütün xassələri S'-də eyni qalır, çünki S' D'-də sıx çoxluq təşkil edir.

2. S'-də bükülmə. Tutaq ki, $f*g\in S'$. Görək nə vaxt $f,g\in S'$ və nə vaxt $f\to f*g$ əməliyyatı $S'\to S'$ kəsilməz olur. Başqa sözlə $f_\nu\to f$ (S'-də) olduqda $\forall g\in S'$ üçün nə zaman $f_\nu*g\to f*g$, $\nu\to\infty$ olar.

Teorem. Tutaq ki, g-finitdir. Onda $f\in S'$ üçün $f*g$ var, $f*g\in S'$, $f*g=g*f$ və bükülmə əməliyyatı kəsilməzdir.

Təklif. Tutaq ki, $f\in S'$ və $\varphi\in S$. Onda

$$f*\varphi\in S'$$

və

$$f*\varphi=\langle f(y),\varphi(x+y)\rangle.$$

Xüsusi halda,

$$\delta*\varphi=\langle\delta(y),\varphi(x,y)\rangle=\varphi(x).$$

3. Bükülmə düsturunun bəzi tətbiqləri. Məlumdur ki, R^3 fəzasında sıxlığı $f(x)$ adi funksiyası olan yükün potensialı $u(x)$ aşağıdakı düsturla verilir.(Puasson düsturu):

$$u(x)=\int_{R^3}\frac{f(y)}{|x-y|}dy,\ r=|x|=\sqrt{x_1^2+x_2^2+x_3^2},\ x\in R^3.$$

Bükülmə terminində bu düsturu belə yazmaq olar:

$$u(x)=f(x)*\frac{1}{|x|}.$$

Buna uyğun olaraq $\forall f\in D'(R^3)$ paylanmasının potensialı

$$u=f*\frac{1}{r} \tag{1}$$

funksionalına deyirlər. Aydındır ki, $u\in D'$. İndi Δu ifadəsini hesablayaq. (Δ -Laplas operatorudur).

$$\Delta u=\Delta\left(f*\frac{1}{r}\right)=f*\Delta\frac{1}{r}=f*(-4\pi\delta(x))=-4\pi(\delta*f)=-4\pi f.$$

Bu tənlik D' fəzasında Puasson tənliyidir, onun həlli (1) kompozisiya düsturu ilə verilir. Ən ümumi şəkildə (1) düsturu $u\in D'$ ümumiləşmiş funksiyasını verir. Əgər $f=f(x)$ adi funksiya olarsa, onda (1) ifadəsini inteqral şəklində yazmaq olar:

$$u(x)=-\frac{1}{4\pi}\iiint_{R^3}\frac{f(\xi_1,\xi_2,\xi_3)d\xi_1\,d\xi_2\,d\xi_3}{\sqrt{(x_1-\xi_1)^2+(x_2-\xi_2)^2+(x_3-\xi_3)^2}}$$

- klassik Puasson dusturudur və $\Delta u=-4\pi f(x)$ Puasson tənliyinin həllini verir.

Tutaq ki, $\rho\in D'$, $V_n=\dfrac{1}{|x|^{n-2}}$, $n\geq 3$.

Belə olduqda

$$u=\frac{1}{|x|^{n-2}}*\rho \tag{2}$$

funksiyası sıxlığı ρ olan Nyuton potensialı adlanır. Əgər ρ-finit funksional olarsa, onda (2) bükülməsi D'-də mənalıdır və u funksiyası Puasson tənliyinin D'-də həlli olur. Doğrudan da,

$$\Delta u = \Delta\left(\frac{1}{|x|^{n-2}} * \rho\right) = \Delta\frac{1}{|x|^{n-2}} * \rho = -(n-2)S_n\,\delta(x) * \rho =$$
$$= \delta(x) * \left((2-n)S_n\,\rho\right) = -(n-2)S_n\,\rho\ .$$

Bunun kimi də, $n = 2$ olduqda

$$u = \ln\frac{1}{|x|} * \rho \tag{3}$$

bükülməsi $\Delta u = -2\pi\rho$ Puasson tənliyini ödəyir. Əgər ρ-adi finit funksiyadırsa, belə ki, $\rho(x) \in L_1(R^n)$,onda (2) və (3) həllərini inteqral göstrlişi ilə belə yazmaq olar:

$$u(x) = \int_{R^n} \frac{\rho(y)}{|x-y|^{n-2}}dy, \quad n \neq 2, \qquad u(x) = \int_{R^2} \rho(y)\ln\frac{1}{|x-y|}dy, \quad n = 2\,.$$

§ 5. Bükülmələr cəbri. Bükülmə tənlikləri.

D' ümumiləşmiş funksiyalar fəzasının müəyyən $A' \subset D'$ alt çoxluğuna baxaq. Fərz edək ki, A' çoxluğu $*$ (bükülmə) əməliyyatına nəzərən cəbr əmələ gətirir, yəni aşağıdakı üç şərt ödənilir:

1) $f_1, \ldots, f_n \in A'$ olduqda $f_1 * f_2 * \ldots f_n \in A'$,

2) A' daxilində bükülmə əməliyyatı kommutativlik və assosiativlik xassələrinə malikdir.

3) $\delta(x) \in A'$.

Misallar.

1^0. Γ çevrəsi üzərində təyin olunmuş bütün ümumiləşmiş funksiyalar fəzası,

2^0. Məhdud daşıyıcılı bütün finit ümumiləşmiş funksiyalar fəzası,

3^0. Daşıyıcı çoxluqları $[0,\infty)$ parçasında yerləşən ümumiləşmiş funksiyalar çoxluğu- cəbr əmələ gətirir.

Məsələn, $D'_+ = \{f \in D', \sup p\, f \subset [0,\infty)\}$ olsun. Onda $\forall f, g \in D'_+$ üçün həmişə $f * g = g * f$ var və

$$\sup p(f * g) \subset \sup p\, f + \sup p\, g$$

olmasından çıxır ki, $\sup p(f * g) \subset [0,\infty)$, deməli $f * g \in D'_+$, həm də $\delta \in D'_+$, çünki $supp\,\delta = \{0\} \subset [0,\infty)$. Beləliklə, D'_+ bükülmə cəbri olur.

Qeyd. Bütun fəza D' -bükülmə cəbri deyil.

Bükülmə cəbri metodu ilə bəzi diferensial operatorların fundamental həllərini təyin etmək əlverişli olur.

Məlumdur ki, $\forall f \in A'$ üçün $\delta * f = f$, yəni $\delta(x)$ funksiyası A' cəbrinin vahidi olur.

Qeyd. Aşağıdakı şərtlərdən biri ödənildikdə ümumiləşmiş funksiyaların bükülməsi var və onun üçün kommutativlik və assosiativlik xassələri ödənilir.

1. bütün baxılan funksionallar (ola bilər ki, yalnız birindən başqa) finitdirlər.
2. Bütün baxılan funksionalların daşıyıcı çoxluqları eyni tərəfdən məhduddur.
3. $(n = 4)$ Bütün daşıyıcı çoxluqlar $t \geq 0$, $t^2 - |x|^2 \geq 0$ konusunda yerləşir.

İndi A' cəbrində belə bir tənliyə baxaq (bükümlü tənlik):

$$f * X = g. \tag{1}$$

Burada $f, g \in A'$-verilən, $X \in A'$- məchul funksionaldır.

Tərif 1. $f \in A'$ olsun. Əgər elə $g \in A'$ elementi varsa ki,

$$f * g = \delta(x)$$

olur, onda g f -in tərs elementi adlanır və onu f^{-1} kimi işarə edirik, deməli:

$$f * f^{-1} = \delta. \tag{2}$$

Beləliklə, f^{-1} varsa, onda

$$f * f^{-1} = f^{-1} * f = \delta. \tag{3}$$

Teorem. (1) tənliyinin ixtiyari $g \in A'$ üçün yalnız və yalnız o zaman A'-də heç olmazsa bir dənə həlli var ki, f ümumiləşmiş funksiyasının f^{-1} tərs elementi var. Belə olduqda f^{-1} tərs elementi yeganə olur və (1) tənliyinin yalnız bir dənə həlli olur.

Həmin həlli belə yazmaq olar:

$$X = f^{-1} * g \tag{4}$$

Doğrudan da, əgər (1) tənliyinin istənilən $g \in A'$ üçün heç olmazsa bir dənə həlli varsa, onda $g = \delta \in A'$ üçün də onun heç olmazsa bir dənə həlli var. Belə olduqda

$$f * X = \delta$$

münasibətindən çıxır ki, $X = f^{-1}$, yəni f-in tərs elementi var. Onda (1)-dən alırıq (A' cəbrində assosiativlik var):

$$f^{-1} * (f * X) = f^{-1} * g,$$

$$(f^{-1} * f) * X = f^{-1} * g,$$

$$\delta * X = f^{-1} * g,$$

$$X = f^{-1} * g.$$

Tərsinə, (4) ifadəsinin (1)-in həlli olduğunu yoxlamaq üçün onun hər tərəfinə f ilə təsir edək (yəni f ilə bükək).

Onda alarıq:

$$f * X = f * (f^{-1} * g) = (f * f^{-1}) * g = \delta * g = \delta .$$

Beləliklə, əgər f^{-1} tərs elementi varsa, onda (1) ilə (4) tənlikləri ekvivalent olur.

Tərif 2. f^{-1} elementi (1) tənliyinin fundamental həlli adlanır.

A' cəbrində belə bir operatora baxaq ($f \in A'$ - qeyd olunur):

$$D = f * \tag{5}$$

Deməli, $\forall z \in A'$ üçün $Dz \equiv f * z$. D operatoru xətti və kəsilməzdir, $f_n \xrightarrow{A'} f$, $n \to \infty$ olduqda $Df_n \xrightarrow{A'} Df$, $n \to \infty$ olur.

Tutaq ki, $P(D)$ D' fəzasında diferensial operatordur. Əgər elə $E(x) \in D'$ ümumiləşmiş funksiyası varsa ki,

$$P(D)\,E(x) = \delta(x)$$

olur, onda E $P(D)$-nin fundamental həlli adlanır. E məlum olduqda D' fəzasında

$$P(D)\,u = f$$

tənliyinin həlli

$$u = E * f$$

bükülmə düsturu vasitəsilə təyin olunur. Ona görə də fundamental həllin tapılması olduqca vacib məsələdir.

Lemma. $E \equiv f^{-1}$ elementi D operatorunun fundamental həlli olur:

$$D\;E \equiv Df^{-1} = f * f^{-1} = \delta(x).$$

Buradan görünür ki, A' cəbrində

$$f * X = g \tag{6}$$

tipli tənliklərin həll olunması müəyyən diferensial operatorun fundamental həllinin müəyyən edilməsi məsələsi kimidir. Məsələn, D vasitəsilə (1) tənliyini belə yazmaq olar:

$$D\;X = g \tag{7}$$

Əgər, məsələn, $D = P\left(\dfrac{\partial}{\partial x}\right)$ olarsa, $E(x)$-fundamental həll olduqda,

$$P\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)E(x) = \delta(x).$$

Bu halda (6)-nın həlli

$$X = E(x) * g \tag{8}$$

kimi olur. Doğrudan da,

$$D\;X = D(E * g) = DE * g = \delta * g = g$$

Deməli, tərifə görə,

$$DE = f * E = f * f^{-1} = \delta(x)$$

olduğundan çıxır ki, $E(x)$ funksiyası f-in təsir elementini verir, $E = f^{-1}$, çünki $Df^{-1} = f * f^{-1} = \delta$. Beləliklə, $X = E * g$ funksionalı

$$f * X = g$$

tənliyinin həlli olur, belə ki, $E = f^{-1}$ və $DE = \delta(x)$.

Tutaq ki, $D = \Delta$-Laplas operatorudur, $f = \Delta\delta$ və $f^{-1} = (\Delta\delta)^{-1} \equiv E(x)$. Şərtə görə $f * f^{-1} = \delta$, yəni

$$f * E = \delta(x)$$

Buradan

$$\delta(x) = f * E(x) = \Delta\delta(x) * E = \delta * \Delta E = \Delta E(x)$$

Yəni $f^{-1} = E(x)$-Laplas operatorunun fundamental həllidir. Məlumdur ki, məsələn, $n = 3$ olduqda Δ-nın fundamental həlli

$$E(x) = -\frac{1}{4\pi}\cdot\frac{1}{|x|}, \quad |x| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$$

olur. Onda (1) tənliyinin həllini belə yazmaq olar:

$$X = f^{-1} * g = E * g = -\frac{1}{4\pi}\cdot\frac{1}{|x|} * g \qquad (9)$$

Bu bükülmənin mənalı olması üçün g-məhdud dahıyıcılı funkstonal olmalıdır. (9) funksiyası

$$\Delta X = g$$

Puasson tənliyinin həllidir. Onun ümumi həlli belə olur:

$$X = -\frac{1}{4\pi}\cdot\frac{1}{|x|} * g + \text{harmonik funksiyalar.}$$

Deməli, (9) həlli yeganə deyil. Xüsusi halda, g-adi funksiya olduqda (9) həlli məlum Puasson düsturunu verir:

$$X = -\frac{1}{4\pi}\iiint_{-\infty}^{\infty} \frac{g(\xi)}{|x-\xi|}\,d\xi.$$

Qeyd. Əgər $f = a(x) \in C^{\infty}(R^n)$ olarsa, f^{-1} tərs elementi yoxdur $(f \in D')$, çünki bu halda

$$a * f^{-1} = \delta$$

bərabərliyi doğru deyil. Səbəbi ondadır ki, tərs element $f \in D'$ olmalıdır. Lakin bükülmənin xassələrindən məlumdur ki, $\forall g \in D'$ üçün $a * g \in C^{\infty}$ adi funksiya olur. Deməli $a * f^{-1}$ bükülməsi adi funksiya olmalıdır, ona görə $a * f^{-1} = \delta$ ola bilməz. (δ -adi funksiya deyil).

Teorem. Sabit əmsallı adi diferensial operator verilir:

$$D = \frac{d^m}{dx^m} + a_1 \frac{d^{m-1}}{dx^{m-1}} + \ldots + a_{m-1} \frac{d}{dx} + a_m. \tag{8}$$

Onda $f = D\delta(x) \in A'$ elementinin tərs elementi f^{-1} var və o, belədir:

$$E \equiv f^{-1} = \theta(x) \cdot z(x), \tag{9}$$

burada θ -hevisayd funksiyasıdır, z -isə

$$Dz = 0$$

bircins tənliyinin

$$z(0) = z'(0) = \ldots = z^{(m-2)}(0) = 0, \qquad z^{(m-1)}(0) = 1$$

başlanğıc şərtlərini ödəyən klassik həllidir.

İsbatı. $z(x)$- sonsuz diferensiallanan funksiyadır, $\theta(x)$ isə $x = 0$ nöqtəsində kəsilir. Kəsilən funksiyanın diferensiallanması düsturuna əsasən alırıq:

$$(\theta z)' = \theta z' + z(0)\delta(x),$$

$$(\theta z)'' = \theta z'' + z'(0)\delta + z(0)\delta',$$

$$(\theta z)^{(m-1)} = \theta z^{(m-1)} + \delta z^{(m-2)}(0) + \ldots + \delta^{(m-2)} z(0),$$

$$(\theta z)^{(m)} = \theta z^{(m)} + \delta z^{(m-1)}(0) + \ldots + \delta^{(m-1)} z(0).$$

Şərtə görə $z^{(k)}(0) = 0,\ k \le m - 1$ və $z^{(m-1)}(0) = 1$.

Onda

$$(\theta z)^{(k)} = \theta z^{(k)}, k \le m-1 \text{ olduqda,}$$

$$(\theta z)^{(m)} = \theta z^{(m)} + \delta(x).$$

Buradan alınır ki, $(Dz = 0)$

$$D(\theta z) = \theta Dz + \delta(x) = \delta(x),$$

yəni

$$DE \equiv D(\theta z) = \delta(x) \; . \tag{10}$$

Nəzərə alsaq ki, ($\delta \in A'$ -in vahididir)

$$\delta * D(\theta z) = D(\theta z),$$

onda (10)-dan çıxır ki,

$$D\delta * \theta z = \delta,$$

və yaxud,

$$f * \theta z = \delta.$$

Deməli

$$\theta z = f^{-1} \equiv E(x), \quad (f = D\delta(x)) \; .$$

Nəticə. $P(D)\delta = \sum_{j=0}^{m} a_j \delta^{(m-j)}(x)$.

olduqda tərs element belə olur:

$$E(x) = f^{-1} = (P(D)\delta)^{-1} = \theta(x)z(x).$$

Bəzi xüsusi hallar

$1^0 . D = \dfrac{d}{dx} - \lambda,$ olsun, λ – kompleks ədəddir. Onda $f \equiv D\delta = \delta' - \lambda\delta.$ İndi $f^{-1} * f = \delta$ olan $f^{-1} \equiv E$ tərs elementini tapaq

$\delta = f^{-1} * f = D\delta * f^{-1} = \delta * Df^{-1} = Df^{-1}$, yəni $f^{-1} = E$ D operatorunun fundamental həllidir. Lakin $Dz = 0,\ z(0) = 1$ olduqda $z' - \lambda z = 0, z = e^{\lambda x}$ olur. Belə olduqda $E = \theta z$ hasili D operatoru üçün fundamental həll olur, yəni $D(\theta z) = \delta(x)$, deməli

$$f^{-1} = \theta z = E(x).$$

Doğrudan da,

$$D(\theta z) = (\theta z)' - \lambda\theta z = (\theta e^{\lambda x})' - \lambda\theta e^{\lambda x} =$$
$$= e^{\lambda x}\theta' + \theta\lambda \cdot \cdot e^{\lambda x} - \lambda\theta e^{\lambda x} = e^{\lambda x}\delta(x) = \delta(x).$$

Beləliklə, $f * f^{-1} = \delta(x)$ olduqda $f^{-1} = E(x)$ D üçün fundamental həll olur, yəni $DE = \delta(x)$, və $E(x) \equiv f^{-1} = \theta(x) \cdot e^{\lambda x}$.

Xüsusi halda, δ' elementinin tərs elementi $\theta(x)$ olur, çünki $\delta' * \theta = \theta' = \delta$, yəni $\theta = (\delta')^{-1}$.

$2^0.D = \dfrac{d^2}{dx^2} + \omega^2,\ \omega \in R.$

Onda $f = D\delta = \delta'' + \omega^2\delta$ -in tərs elementi f^{-1} var, çünki $su\,ppf = 0$; $f * f^{-1} = \delta$ olduqda

$$D\delta * f^{-1} = \delta, \delta * Df^{-1} = \delta \Rightarrow Df^{-1} = \delta,$$

yəni $f^{-1} = E(x)$ funksiyası D operatorunun fundamental həlli olur.

İndi $Dz = 0, z(0) = 0, z'(0) = 1$ Koşi məsələsini həll edək. $z'' + \omega^2 z = 0, k^2 + \omega^2 = 0, k = \pm i\omega,$ onda ümumi həll belə olar: $z(x) = c_1 e^{i\omega x} + c_2 e^{-i\omega x}$,

Buradan

$$z(x) = \frac{\sin \omega x}{\omega}$$

tapırıq. Onda $E = \theta z$ hasili D-nin fundamental həlli olur, yəni $E \equiv f^{-1} = \theta z.$

Doğrudan da,

$$D(\theta z) = (\theta z)'' + \omega^2\theta z = (\theta' z + \theta z')' + \omega\theta z = (z(x)\delta(x) + \theta z')' + \omega\theta z =$$

$$= (\theta z')' + \omega\theta z + z'\theta' + \theta z'' + \omega\theta z = z'(0)\delta(x) + \theta z'' + \omega\theta z =$$

$$= \delta(x) - \omega\theta \sin \omega x + \omega\theta \sin x = \delta(x).$$

Deməli $f = D\delta$ olduqda $f^{-1} = (D\delta)^{-1} = \theta(x)\frac{\sin \omega x}{\omega} \equiv E(x)$. Onda

$$f * f^{-1} = D\delta + \theta\frac{\sin \omega x}{\omega} = \delta * D\left(\theta\frac{\sin \omega x}{\omega}\right) = D(\theta z) = \delta(x),$$

Beləliklə:

$$E(x) = f^{-1} = \theta(x)z(x) = \theta(x)\cdot\frac{\sin \omega x}{\omega}$$

funksiyası $D = \frac{d^2}{dx^2} + \omega^2$ operatorunun fundamental həlli olur. Həm də $\theta\frac{\sin \omega x}{\omega}$ funksiyası $D\delta = \delta'' + \omega^2\delta$ elementinin tərs elementi olur.

Belə polinoma baxaq:

$$P(z) = z^m + a_1 z^{m-1} + \ldots + a_m = (z - z_1)(z - z_2)\ldots(z - z_m)$$

Bu halda

$$D = P\left(\frac{d}{dx}\right) = \frac{d^m}{dx^m} + a_1\frac{d^{m-1}}{dx^{m-1}} + \ldots + a_m = \left(\frac{d}{dz} - z_1\right)\left(\frac{d}{dz} - z_2\right)\ldots\left(\frac{d}{dz} - z_m\right).$$

Onda

$$f \equiv D\delta = \delta^{(m)} + a_1\delta^{(m-1)} + \ldots + a_m\delta$$

funksionalını A'-də belə yazmaq olar:

$$f = (\delta' - z_1\delta) * (\delta' - z_2\delta) * \ldots * (\delta' - z_m\delta) .$$

Doğrudan da, məsələn $(n = 2)$,

$$\begin{aligned}(\delta' - z_1\delta) * (\delta' - z_2\delta) &= (\delta' * \delta') - z_2(\delta' * \delta) - z_1(\delta * \delta') + \\ &+ z_1 z_2(\delta * \delta) = \delta'' - z_2\delta' - z_1\delta' + z_1 z_2\delta = \\ &= \delta'' - (z_1 + z_2)\dot{\delta}' + z_1 z_2\delta = \delta'' + a_1\delta' + a_2\delta,\end{aligned}$$

yəni

$$\delta'' + a_1\delta' + a_2\delta = (\delta' - z_1\delta) * (\delta' - z_2\delta) .$$

Analoji qayda ilə

$$\delta^{(m)} + a_1\delta^{(m-1)} + \ldots + a_m\delta = (\delta' - z_1\delta) * (\delta' - z_2\delta) * \ldots * (\delta' - z_m\delta) .$$

Məlumdur ki, $\delta' - z_i\delta$ elementinin tərs elementi $\theta e^{z_i x}$ olur. Onda A'-də

$$D\delta = (\delta' - z_1\delta) * \ldots * (\delta' - z_m\delta)$$

elementinin tərs elementi

$$(D\delta)^{-1} = \theta e^{z_1 x} * \theta e^{z_2 x} * \ldots * \theta e^{z_m x}$$

olar. Xüsusi halda $(z_1 = z_2 = \ldots = z_m = \lambda)$,

$$D = \left(\frac{d}{dx} - \lambda\right)^m, \; D\delta = (\delta' - \lambda\delta)^m$$

üçün tərs element

$$(D\delta)^{-1} = (\delta' - \lambda\delta)^{-m} = \theta e^{\lambda x} * \theta e^{\lambda x} *$$

$$* \, \theta e^{\lambda x} * \ldots * \theta e^{\lambda x} = \theta(x) e^{\lambda x} \frac{x^{m-1}}{(m-1)!}$$

olur. Doğrudan da, göstərək ki,

$$Y = \theta e^{\lambda x} \frac{x^{m-1}}{(m-1)!}$$

üçün

$$(\delta' - \lambda\delta)^m * Y = \delta.$$

Riyazi induksiya metodunu tətbiq edək. $m = 1$ olduqda isbat aşkardır. m üçün onu doğru qəbul edib, $m + 1$ üçün doğruluğunu göstərək.

$$(\delta' - \lambda\delta)^{m+1} * \theta e^{\lambda x} \frac{x^m}{m!} = (\delta' - \lambda\delta)^m (\delta' - \lambda\delta) * \theta e^{\lambda x} \frac{x^m}{m!} =$$

$$= (\delta' - \lambda\delta)^m \left[\delta' * \theta e^{\lambda x} \frac{x^m}{m!} - \lambda\left(\delta * \theta e^{\lambda x} \frac{x^m}{m!}\right)\right] =$$

$$= (\delta' - \lambda\delta)^m \left[\left(\theta e^{\lambda x} \frac{x^m}{m!}\right)' - \lambda\theta e^{\lambda x} \frac{x^m}{m!}\right] =$$

$$=\left(\delta'-\lambda\delta\right)^m\left[e^{\lambda x}\frac{x^m}{m!}\delta+\lambda\theta e^{\lambda x}\frac{x^m}{m!}+\theta e^{\lambda x}\frac{x^{m-1}}{(m-1)!}-\lambda\theta e^{\lambda x}\frac{x^m}{m!}\right]=$$

$$=\left(\delta'-\lambda\delta\right)^m[Y]=\delta.$$

Teorem. Əgər $f_1, f_2 \in D'_+$ elementlərinin tərs elementləri varsa, onda $f_1 * f_2$-nin də tərs elementi var və həmin tərs element $f_1^{-1} * f_2^{-1}$ olur.

Doğrudan da,

$$(f_1 * f_2)*\left(f_1^{-1} * f_2^{-1}\right)=\left(f_1 * f_1^{-1}\right)*\left(f_2 * f_2^{-1}\right)=\delta * \delta=\delta$$

Nəticə. $\delta'-z_1\delta, \delta'-z_2\delta, ..., \delta'-z_m\delta$ elementlərinin tərs elementləri $\theta e^{z_i x}$ olduğu üçün

$$D\delta \equiv \delta^{(m)}+a_1\delta^{(m-1)}+...+a_m\delta=\left(\delta'-z_1\delta\right)*...*\left(\delta'-z_m\delta\right)$$

elementlərinin tərs elementi

$$\theta e^{z_1 x} * \theta e^{z_2 x} * ... * \theta e^{z_m x}$$

olur. Xüsusi halda, $D\delta=\delta^{(m)}$ üçün tərs element

$$\theta(x)e^{\lambda x}\frac{x^{m-1}}{(m-1)!}$$

olur. Misal üçün,

$$\theta e^{\lambda x} * \theta e^{\lambda x}=\int_{-\infty}^{\infty}\theta(x-t)e^{\lambda(x-t)}\theta(t)e^{\lambda t}dt=$$

$$=e^{\lambda x}\int_0^{\infty}\theta(x-t)dt=e^{\lambda x}\int_0^{t}dt=xe^{\lambda x}\theta(x). \quad (x>0).$$

Misal 1. 1-ci növ Volterra inteqral tənlik verilir.

$$\int_0^x K(x,t)f(t)dt=g(x),\ x>0.$$

Bu tənliyi belə yazaq

$$K * f = g.$$

Əgər K -nın tərsi varsa, onda buradan

$$f = K^{-1} * g$$

alarıq. Amma ola bilər ki, K^{-1} tərsi olmasın. Məsələn, əgər K sonsuz diferensiallanan funksiyadırsa, onu $t < 0$ oblastına sıfır olaraq davam etdirdikdə K^{-1} tərsi yoxdur, əks halda $K^{-1} * K = \delta$ ola bilməz, çünki $K \in C^{\infty}$ olduğu üçün $\forall K^{-1} \in D'_{+}$ üçün $K^{-1} * K$ -adi funksiya olur, ona görə də $K^{-1} * K = \delta$ ola bilməz. Beləliklə, f həllini g vasitəsilə inteqral düsturla ifadə etmək mümkün deyil. Məsələn, $K = \theta(x)\frac{x^{m-1}}{(m-1)!}$ götürsək, onda K funksiyası $\delta^{(m)}$ elementinin tərs elementi olur, yəni $\delta * K = \delta$. Doğrudan da,

$$\delta^{(m)} * \theta \frac{x^{m-1}}{(m-1)!} = \left(\theta \frac{x^{m-1}}{(m-1)!}\right)^{(m)} = \delta.$$

Beləliklə, $K^{-1} = \delta^{(m)}$. Ona görə

$$f = K^{-1} * g = \delta^{(m)} * g = g^{(m)} \in D'.$$

Misal 2. Belə funksiyalara baxaq:

$$Y_{\lambda}^{(\alpha)} = \theta \frac{x^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} e^{\lambda x}, \quad \alpha > 0,$$

$$Y_{\lambda}^{(\beta)} = \theta \frac{x^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)} e^{\lambda x}, \quad \beta > 0.$$

Onda:

$$Y_{\lambda}^{(\alpha)} * Y_{\lambda}^{(\beta)} = \theta \frac{x^{\alpha+\beta-1}}{\Gamma(\alpha+\beta)} e^{\lambda x} = Y_{\lambda}^{(\alpha+\beta)}.$$

Doğrudan da,

$$Y_\lambda^{(\alpha)} * Y_\lambda^{(\beta)} = \int_0^x Y_\lambda^{(\alpha)}(x-t) Y_\lambda^{(\beta)}(t)\,dt =$$

$$= \int_0^x \theta(x-t)\frac{(x-t)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\cdot\frac{x^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)}\cdot e^{\lambda(x-t)}\cdot e^{\lambda t}\,dt =$$

$$= \frac{x^{\alpha+\beta-1}}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} e^{\lambda x}\int_0^1 (1-u)^{\alpha-1}u^{\beta-1}du = \theta\cdot\frac{x^{\alpha+\beta-1}}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}e^{\lambda x}B(\alpha,\beta)\ ,$$

burada B - məlum betta funksiyadır:

$$B(\alpha,\beta) = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)},$$

Nəticə.

$$Y_\lambda^{(\alpha_1)} * Y_\lambda^{(\alpha_2)} * \ldots * Y_\lambda^{(\alpha_n)} = \theta\frac{x^{\sum\alpha_i - 1}}{\Gamma\left(\sum\alpha_i\right)}e^{\lambda x}.$$

Xüsusi halda,

$$Y_\lambda^{(1)} * Y_\lambda^{(1)} * \ldots * Y_\lambda^{(1)} = \theta(x)\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}e^{\lambda x}.$$

Başqa sözlə,

$$\theta e^{\lambda x} * \theta e^{\lambda x} * \ldots * \theta e^{\lambda x} = \theta\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}e^{\lambda x},$$

$$\theta * \theta * \ldots * \theta = \theta\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}, \theta * \theta = \theta\cdot x\,.$$

Misal 3. $\delta' + \theta(x)$ elementinin tərs elementini tapaq. Göstərək ki, $(D\delta)' = \theta\cos x$. Doğrudan da,

$$\theta\cos x * (\delta' + \theta) = (\theta\cos x * \delta') + (\theta\cos x * \theta) =$$
$$= (\theta\cos x)' + \theta(x)(\cos x * 1) = \theta'\cos x - \theta\sin x +$$
$$+ \theta(x)\cdot\int_0^x \cos t\,dt = \cos x\cdot\delta(x) = \delta(x)\ ,$$

yəni

$$\theta(x)\cos x * (\delta' + \theta) = \delta.$$

Deməli

$$(\delta' + \theta)^{-1} = \theta(x)\cos x\,.$$

Misal 4. Belə bir inteqral tənliyi həll edək:

$$\int_0^x \cos(x-t)f(t)dt = g(x),\ x \ge 0,$$

burada g-verilir, f-məchuldur, $su\,pp\,f \subset [0,\infty)$.

Bu tənliyi D'_+ cəbrində belə yazmaq olar:

$$\theta(x)\cos x * f = g\ .$$

Tənliyin həlli varsa, onu belə yazmaq olar:

$$f = (\theta(x)\cos x)^{-1} * g.$$

Yuxarıda gördük ki, $\theta(x)\cos x$ funksiyası $\delta' + \theta$ elementinin tərs elementidir. Deməli,baxılan tənliyin həlli belə olur: $(x \ge 0)$:

$$f = g * (\delta' + \theta) = (g * \delta') + (g * \theta) = g' + \theta(x)\int_0^x g(t)dt.$$

Buradan görünür ki, g' - adi funksiya olduqda $(*)$ tənliyinin həlli olan $f(x)$ adi funksiya olur.

M ə s ə l ə l ə r

1. D'_+ cəbrində tərs elementləri tapın:

$1^0. \delta'' - 5\delta' + 6\delta$.

$2^0. \theta + \delta''$.

$3^0. \theta e^x + \delta'$.

2. Bükülməni hesablayın:

$$F = \theta(x)\sin x * \theta(x)sh2x.$$

F -hansı operatorun fundamental həlli olar ?

3. Həll edin:

$$y^{(4)} - 3y'' - 4y = 0, \ y(0) = 1, \ \ y'(0) = y''(0) = y'''(0) = 0.$$

4. Hesablayın:

$$a) e^{-|x|} * e^{-|x|},$$

$$b) e^{-ax^2} * e^{-ax^2},$$

$$c) x e^{-ax^2} * x e^{-ax^2}, a > 0).$$

5. $f(x) = \begin{cases} 1, & -1 < x < 1, \\ 0 & |x| \geq 1, \end{cases}$

$f * f * \ldots * f = ?$

6. D'_+ -də tənliklər sistemini həll edin.

$$\begin{cases} \delta'' * x_1 + \delta' * x_2 = \delta , \\ \delta' * x_1 + \delta'' * x_2 = 0 . \end{cases}$$

7.

$$x''' + 2x'' + x' + 2x = -10\cos t ,$$
$$x(0) = 0,\ x'(0) = 2,\ x''(0) = -4$$

məsələsinin həlli $f(t)$ olduqda

$$F(t) = \theta(t) f(t)$$

funksiyası D' fəzasında hansı diferensial tənliyi ödəyər?

Cavab: $F''' + F'' + F' + 2F = -2 - 10\theta(t)\cos t$.

F Ə S İ L 6.

DİFERENSİAL OPERATORLARIN FUNDAMENTAL HƏLLƏRİ

§ 1. Adi diferensial operatorun fundamental həlli.

1.Fərz edək ki, sabit əmsallı m tərtibli adi diferensial operator verilir:

$$P\left(\frac{d}{dx}\right)=\frac{d^m}{dx^m}+a_1\frac{d^{m-2}}{dx^{m-1}}+\ldots+a_m. \tag{1}$$

Əgər elə $E\in D'$ ümumiləşmiş funksiyası varsa ki, $P(D)E=\delta(x)$ olur, onda E $P(D)$ operatorunun fundamental həlli adlanır. Əvvəlcə bircins tənliyə baxaq.

$$P(D)y=0. \tag{2}$$

Tutaq ki, $y_1,y_2,\ldots,y_m$ (2) tənliyinin xətti asılı olmayan həlləridir. Onda $y=\sum_1^m c_iy_i$ cəmi də (2)-nin həllidir. $E(x)$ funksiyasını belə təyin edək:

$$E(x)\equiv\begin{cases}A(x)\equiv\sum_1^m\alpha_iy_i, & x>0.\\ B(x)\equiv\sum_1^m\beta_iy_i, & x<0.\end{cases} \tag{3}$$

İndi α_i, β_i sabitlərini elə seçək ki, E funksiyası $P(D)$-nin fundamental həlli olsun. Bunun üçün $x=0$ olduqda aşağıdakı şərtlərin ödənildiyini tələb etmək kifayətdir:

$$\left.\begin{aligned}&A(0)=B(0),\ A'(0)=B'(0),\ldots,A^{(m-2)}(0)=B^{(m-2)}(0),\\ &A^{(m-1)}(0)-B^{(m-1)}(0)=1.\end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Bu şərtləri E-nin ifadəsində yazdıqda alırıq:

$$\sum(\alpha_i - \beta_i)y_i(0) = 0,$$
$$\sum(\alpha_i - \beta_i)y_i'(0) = 0,$$
$$- - - - - - - - - - - - - -$$
$$\sum(\alpha_i - \beta_i)y_i^{(m-1)}(0) = 1.$$

$\alpha_i - \beta_i = \gamma_i$ işarə edək. Onda γ_i ədədləri üçün belə bir sistem ödənilər:

$$\begin{cases} \gamma_1 y_1(0) + \ldots + \gamma_m y_m(0) = 0, \\ \gamma_1 y_1'(0) + \ldots + \gamma_m y_m'(0) = 0, \\ - - - - - - - - - - - - - - - - - - \\ \gamma_1 y_1^{(m-1)}(0) + \ldots + \gamma_m y_m^{(m-1)}(0) = 1. \end{cases} \tag{5}$$

Bu sistemin vronskianı heç yerdə sıfır olmur. Onda (5) sistemi həmişə həllolunandır, yəni γ_i-lər birqiymətli təyin olunurlar, α_i və β_i-lər isə birqiymətli tapılmır, onların təyin olunmasında seçmə sərbəstliyi qalır. Bu təbiidir, çünki fundamental həll birqiymətli təyin olunmur, ona bircins tənliyin həllini əlavə etdikdə alınan cəm də həmin operatorun fundamental həlli olur. Beləliklə aldıq ki, məsələn $\alpha_i = \beta_i + \gamma_i$ və γ_i-lər məlum ədədlərdir. Onda E bu şəkli alır:

$$E = \begin{cases} A(x) = \sum\limits_1^m \beta_i y_i + \sum\limits_1^m \gamma_i y_i, & x > 0, \\ B(x) = \sum\limits_1^m \beta_i y_i, & x < 0. \end{cases}$$

Hevisayd funksiyası $\theta(x)$ vasitəsilə E-nin ifadəsini bir düsturla belə yazmaq olar:

$$E = \sum \beta_i y_i + \theta \sum \gamma_i y_i, \; -\infty < x < \infty.$$

Burada $y = \sum \beta_i y_i, \quad z = \sum \gamma_i y_i$

işarə edək. Aşkardır ki, $P(D)y=0, \quad P(D)z=0.$
Onda alırıq:

$$E=y+\theta\cdot z \tag{6}$$

İndi göstərək ki,

$$P(D)E=\delta(x).$$

Doğrudan da,

$$\begin{aligned} &P(D)E=P(D)y+P(D)(\theta z)=P(D)(\theta z)= \\ &=(\theta z)^{(m)}+a_1(\theta z)^{(m-1)}+\ldots+a_m z \end{aligned} \tag{7}$$

Lakin D' fəzasında $\left(z\in C^{\infty}(R)\right)$

$$(\theta z)'=\theta' z+\theta z'=z(0)\delta(x)+\theta z',$$

burada

$$z(0)=\sum \gamma_i\, y_i(0)=0$$

olduğunu nəzərə aldıqda,

$$(\theta z)'=\theta z'$$

alırıq. Bunun kimi də,

$$(\theta z)''=(\theta z')'=\theta' z'+\theta z'=z'(0)\delta(x)+\theta z',$$

lakin

$$z'(0)=\sum \gamma_i\, y_i'(0)=0$$

nəzərə alındıqda

$$(\theta z)''=\theta z''$$

alınır. Nəhayət, $\forall m$ üçün alırıq ki,

$$(\theta z)^{(m)}=\left(\theta z^{(m-1)}\right)'=\theta' z^{(m-1)}+\theta z^{(m)}=z^{(m-1)}(0)\delta(x)+\theta z^{(m)}.$$

Digər tərəfdən, $z^{(m-1)}(0)=\sum \gamma_i\, y_i^{(m-1)}(0)=1$ olduğunu nəzərə alsaq, onda

$$(\theta z)^{(m)}=\delta(x)+\theta z^{(m)}$$

alarıq. Alınan ifadələri (7)-də nəzərə aldıqda

$$P(D)E=\delta(x)+\theta P(D)z=\delta(x)$$

alırıq. Beləliklə, aldıq ki, $P(D)$ diferensial operatorunun fundamental həlli $E=\theta z$ hasili olur, burada $z=\sum_{1}^{m} y_i\gamma_i$.

Nəticə. Tutaq ki, $z(x)$ belə bir Koşi məsələsinin həllidir:

$$P(D)z=0,$$

$$z(0)=z'(0)=\ldots=z^{(m-2)}(0)=0,\ z^{(m-1)}(0)=1.$$

Onda $E=\theta z$ hasili $P(D)$ operatorunun fundamental həlli olur.

2. İndi (1)-də verilən $P(D)$ operatoru üçün ümumi Koşi məsələsinə baxaq. Qeyri-bircins tənlik verilir:

$$P(D)z=f(x), \tag{8}$$

burada f-verilən (adi) funksiyadır. Bu tənliyə aşağıdakı kimi başlanğıc şərtləri verilir:

$$z^{(k)}(0)=z_k,\quad k=0,1,\ldots,m-1. \tag{9}$$

Belə bir hasilə baxaq:

$$Y=\theta(x)\cdot z(x). \tag{10}$$

Onda D' fəzasında Y üçün alırıq:

$$\begin{aligned} Y' &=\theta z'+z\theta'=\theta z'+z_0\delta,\\ Y'' &=\theta z''+z'\theta'+z_0\delta'=\theta z''+z_1\delta+z_0\delta,\\ &-----------------------\\ Y^{(m)} &=\theta z^{(m)}+z_{m-1}\delta+z_{m-2}\delta'+\ldots+z_0\delta^{(m-1)}. \end{aligned} \tag{11}$$

Deməli,

$$P(D)Y=P(D)(\theta z)=\theta P(D)z+\sum_{k=0}^{m-1}e_k\delta^{(k)}, \tag{12}$$

burada

$$e_k=z_{m-1-k}+a_1z_{m-2-k}+\ldots+a_{m-k-1}z_0, \tag{13}$$

məsələn,

$$e_0 = z_{m-1} + a_1 z_{m-2} + \ldots + a_{m-1} z_0$$

Lakin $P(D)Z = f$ olduğu nəzərə alındıqda (12)-dən

$$P(D)Y = \theta f(x) + \sum_{k=0}^{m-1} e_k \delta^{(k)}$$

alırıq. Sağ tərəfi F ilə işarə edək. Onda

$$P(D)Y = F \tag{14}$$

alarıq. Məlumdur ki, $P(D)$ operatorunun fundamental həlli $E(x) = \theta Z(x)$ olur, belə ki, Z belə bir Koşi məsələsinin həllidir:

$$P(D)Z(x) = 0, \tag{15}$$

$$Z(0) = Z'(0) = \ldots = Z^{(m-2)}(0) = 0, Z^{(m-1)}(0) = 1. \tag{16}$$

Onda (14) tənliyinin həllini bükülmə düsturu şəklində yazmaq olar:

$$Y = E * F = \theta Z * \left(\theta f + \sum_{k=1}^{m-1} e_k \, \delta^{(k)} \right),$$

yəni

$$\theta z = \theta Z * \left(\theta f + \sum_{k=1}^{m-1} e_k \cdot \delta^{(k)} \right).$$

Əgər $x \geq 0$ olarsa, onda buradan alırıq:

$$z(x) = Z(x) * \left(f + \sum_{k=1}^{m-1} e_k \, \delta^{(k)} \right) = (Z(x) * f) + \sum_{k=1}^{m-1} e_k \left(Z * \delta^{(k)} \right) =$$

$$= \int_0^t Z(x-t) f(t) dt + \sum_{k=1}^{m-1} e_k Z^{(k)}(x)$$

Nəticə. Əgər $Z(x)$ funksiyası (15)-(16) Koşi məsələsinin həllidirsə, onda

$$P(D)z = f$$

tənliyinin

$$z^{(k)}(0) = z_k, \quad k = 0,1,\ldots,m-1$$

ümumi başlanğıc şərtlərini ödəyən $z(x)$ həllərini (15)-(16) məsələsinin həlləri vasitəsilə aşağıdakı düsturla hesablamaq olar:

$$z(x)=\int_0^t Z(x-t)f(t)dt+\sum_{k=1}^{m-1} e_k Z^{(k)},$$

burada e_k (13) düsturundan tapılır.

Misal 1. $P\left(\frac{d}{dx}\right)\equiv\frac{d^2}{dx^2}$.

Elə $E(x)$ tapmaq lazımdır ki, $E''=\delta(x)$ olsun. Bunun üçün $y''=0$ tənliyinin xətti asılı olmayan iki həllini tapaq. Məsələn, $y_1=1,\ y_2=x$. Onda $E(x)$ belə qurlur:

$$E(x)=\begin{cases} A(x)\equiv\alpha_1+\alpha_2 x, & x>0, \\ B(x)\equiv\beta_1+\beta_2 x, & x<0 \end{cases}$$

Bundan əlavə, $A(0)=B(0)$, $A'(0)-B'(0)=1$ olmalıdır. Buradan alırıq ki, $\alpha_1=\beta_1$, $(\gamma_1=0)$ və $\alpha_2-\beta_2=1$, $(\gamma_2=1)$. Deməli,

$$E(x)=\begin{cases} A(x)\equiv\beta_1+\beta_2 x+x, & x>0, \\ B(x)\equiv\beta_1+\beta_2 x, & x<0. \end{cases}$$

Bir dənə düsturla $E(x)$-in ifadəsini belə yazmaq olar:

$$E(x)=B(x)+x\cdot\theta(x)\ ,$$

burada $\theta(x)$-Hevisayd funksiyasıdır.

$$B''=(\beta_1+\beta_2 x)''=0$$

olduğundan,

$$E''=(B(x)+x\theta(x))''=(x\theta)''=(x\theta'+\theta)'=(x\delta(x)+\theta)'=\theta'=\delta(x).$$

Beləliklə,

$$E(x)=x\theta(x)$$

hasili $P=\dfrac{d^2}{dx^2}$ operatorunun fundamental həlli olur.

Misal 2. $P\left(\dfrac{d}{dx}\right)\equiv\dfrac{d^2}{dx^2}+1$.

Onda

$$y''+y=0$$

diferensial tənliyinin xətti asılı olmayan iki həllini götürək:

$$y_1=e^{ix},\quad y_2=e^{-ix}$$

və yaxud,

$$y_1=\cos x,\quad y_2=\sin x.$$

Belə olduqda

$$E(x)=\begin{cases}A(x)\equiv\alpha_1 y_1+\alpha_2 y_2=\alpha_1\cos x+\alpha_2\sin x, & x>0,\\ B(x)\equiv\beta_1 y_1+\beta_2 y_2=\beta_1\cos x+\beta_2\sin x, & x<0\end{cases}$$

$$A(0)=B(0)\Rightarrow\alpha_1=\beta_1\;;\gamma_1=0,$$

$$A'(0)-B'(0)=1\Rightarrow\alpha_1-\beta_1=1\;;\gamma_2=1.$$

Beləliklə,

$$E(x)=\begin{cases}\beta_1\cos x+\beta_2\sin x, & x>0,\\ \beta_1\cos x+\beta_2\sin x, & x<0,\end{cases}$$

Deməli,

$$E(x)=\beta_1\cos x+\beta_2\sin x+\theta(x)\sin x.$$

Lakin $y=\beta_1\cos x+\beta_2\sin x$ cəmi $y''+y=0$ tənliyinin həlli olduğundan, $E(x)=\theta\sin x$ fundamental həll olur:

$$P\left(\frac{d}{dx}\right)E=E''+E=\left(\theta(x)\sin x\right)''+\theta\sin x=$$

$$=\left(\sin x\cdot\theta'+\theta(x)\cos x\right)'+\theta\sin x=\left(\sin x\cdot\delta(x)+\theta\cos x\right)'+\theta\sin x=$$

$$=\left(\theta\cos x\right)'+\theta\sin x=\cos x\cdot\theta'-\theta\sin x+\theta\sin x=\cos x\cdot\delta(x)=\delta(x).$$

Beləliklə, $P(D)y=y''+y$ operatorunun fundamental həlli

$$E(x) = \theta \cdot \sin x$$

olur.

Misal 3. $P(D) = \dfrac{d^2}{dx^2} + a\dfrac{d}{dx} + b$.

Tutaq ki, f və g funksiyaları $P(D)u = 0$ tənliyinin

$$f(0) = g(0),\ f'(0) - g'(0) = 1$$

şərtlərini ödəyən həlləridir. Belə bir funksiya təyin edək:

$$G(x) = \begin{cases} f(x), & x \le 0, \\ g(x), & x > 0. \end{cases}$$

$E \in D'$ funksionalı belə daxil edilir: $\forall \varphi \in D$ üçün

$$\langle E, \varphi \rangle = -\int_{-\infty}^{\infty} G(x)\varphi(x)dx.$$

Onda $E(x)$ funksiyası $P(D)$ diferensial operatorunun fundamental həlli olur. Doğrudan da,

$$\begin{aligned} \langle P(D)E, \varphi \rangle &= \langle E'' + aE' + bE,\ \varphi \rangle = \langle E, \varphi'' \rangle - a\langle E, \varphi' \rangle + b\langle E, \varphi \rangle = \\ &= -\int G(x)\varphi''(x)dx + a\int G(x)\varphi'(x)dx - b\int G\varphi. \end{aligned} \tag{17}$$

Burada: 1).

$$\int G(x)\varphi'' = \int_{-\infty}^{0} G\varphi'' + \int_{0}^{\infty} G\varphi'' = \int_{-\infty}^{0} f\varphi'' + \int_{0}^{\infty} g\varphi'' = f\varphi' /_{-\infty}^{0} - \int_{-\infty}^{0} f'\varphi' + g\varphi' /_{0}^{\infty} -$$

$$-\int_{0}^{\infty} g'\varphi' = f(0)\varphi'(0) - f'\varphi /_{-\infty}^{0} + \int_{-\infty}^{0} f''\varphi - g(0)\varphi'(0) - g'\varphi /_{0}^{\infty} + \int_{0}^{\infty} g''\varphi = f(0)\varphi'(0) -$$

$$-f'(0)\varphi(0) + \int_{-\infty}^{0} f''\varphi - g(0)\varphi'(0) + g'(0)\varphi(0) + \int_{0}^{\infty} g''\varphi = [f(0) - g(0)]\varphi'(0) -$$

$$-[f'(0) - g'(0)]\varphi(0) + \int_{-\infty}^{0} f''\varphi + \int_{0}^{\infty} g''\varphi = -\varphi(0) + \int_{-\infty}^{0} f''\varphi + \int_{0}^{\infty} g''\varphi,$$

2).
$$\int G\varphi' = \int_{-\infty}^{0} f\varphi' + \int_{0}^{\infty} g\varphi' = f\varphi /_{-\infty}^{0} - \int_{-\infty}^{0} f'\varphi + g\varphi /_{0}^{\infty} - \int_{0}^{\infty} g'\varphi = f(0)\varphi(0) - g(0)\varphi(0) -$$
$$- \int_{-\infty}^{0} f'\varphi + \int_{0}^{\infty} g'\varphi = [f(0) - g(0)]\varphi(0) - \int_{-\infty}^{0} f'\varphi - \int_{0}^{\infty} g'\varphi = - \int_{-\infty}^{0} f'\varphi - \int_{0}^{\infty} g'\varphi,$$

3). $\int G\varphi = \int_{-\infty}^{0} f\varphi + \int_{0}^{\infty} g\varphi.$

Alınan bu ifadələri (17)-də nəzərə aldıqda, alırıq ki,

$$\langle P(D)E,\varphi\rangle = \varphi(0) - \int_{-\infty}^{0} f''\varphi - \int_{0}^{\infty} g''\varphi - a\int_{-\infty}^{0} f'\varphi - a\int_{0}^{\infty} g'\varphi - b\int_{-\infty}^{0} f\varphi - b\int_{0}^{\infty} g\varphi =$$
$$= \varphi(0) - \int_{-\infty}^{0} [f'' + af' + bf]\varphi - \int_{0}^{\infty} [g'' + ag' + bg]\varphi = \varphi(0) = \langle \delta,\varphi\rangle = \langle \delta(x),\varphi\rangle,$$

yəni
$$P(D)E(x) = \delta(x)$$

Qeyd edək ki, sonuncu bərabərlikdə f və g funksiyalarının $P(D)f = 0,\ P(D)g = 0$ tənliklərinin həlləri olduğu nəzərə alınmışdır.

Məsələ.Göstərin ki, $(a = const)$ $\theta(t)$-Hevisayd funksiyası olduqda
$$E_1 = \theta(t)e^{-at} \text{ və } E_2 = \theta(t)\frac{\sin at}{a}$$
funksiyaları uyğun surətdə
$$\frac{d}{dt} + a \text{ və } \frac{d^2}{dt^2} + a^2$$
operatorlarının fundamental həlləri olur .

§ 2. Xüsusi törəməli diferensial operatorların fundamental həlləri.

1. Fundamental həllərin xassələri. Fundamental həllər müasir diferensial tənliklərin ümumi nəzəriyyəsində, riyazi fizikada, texnikada mühüm rol oynayır. Fundamental həll məlum olduqda qeyri-bircins diferensial tənliklərin həllərini büküm düsturu vasitəsilə dərhal yazmaq olur.

Tutaq ki, $P\left(\frac{\partial}{\partial t},\frac{\partial}{\partial x}\right)$-sabit əmsallı ixtiyari diferensial operatordur. Əgər elə $E(x,t)\in D'$ ümumiləşmiş funksiyası varsa ki, D' fəzası mənada

$$P\left(\frac{\partial}{\partial t},\frac{\partial}{\partial x}\right)E(x,t)=\delta(x,t)$$

bərabərliyi doğrudur, onda $E(x,t)$ funksiyası $P\left(\frac{\partial}{\partial t},\frac{\partial}{\partial x}\right)$ operatorunun fundamental (funksiyası) həll adlanır.Xüsusi misallarda (Laplas operatoru, adi diferensial operator, istilikkeçirmə operatoru) fundamental həllərlə artıq tanış olmuşuq. Bu fəsildə daha ümumi operatorların və Koşi məsələsinin fundamental həllərini öyrənəcəyik. Növbəti fəsildə isə fundamental həllərin varlığı teoremləri və tapılması üsulları şərh olunacaqdır. Əlbəttə, bir çox vacib məsələlər sinfi (məsələn, Koşi məsələsinin yeganəlik və korrektlik sinifləri problemləri) hələlik kənarda qalır.Artıq bizə R^n fəzasında Δ Laplas operatorunun fundamental həlləri məlumdur:

$$E(x)=\begin{cases}-\dfrac{1}{(m-2)s_n}\cdot\dfrac{1}{r^{n-2}}, & n\neq 2 \ olduqda,\\ -\dfrac{1}{4\pi}\cdot\dfrac{1}{r}, & n=3 \ olduqda,\\ -\dfrac{1}{2\pi}\cdot loq\dfrac{1}{r}, & n=2 \ olduqda.\end{cases}$$

$$r=|x|=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}x_i^2},\ \Delta E(x)=\delta(x).$$

İndi tutaq ki,

$$P\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)=P\left(\frac{\partial}{\partial x_1},\ldots,\frac{\partial}{\partial x_n}\right)\equiv P(D)$$

ümumi diferensial operatoru verilir.

Əgər elə $E(x)\in D'(R^n)$ ümumiləşmiş funksiyası varsa ki, D'-fəzası mənada

$$P(D)E(x)=\delta(x)$$

olur, onda $E(x)$ $P(D)$ operatorunun fundamental həlli (funksiyası) adlanır.

Fundamental həll birqiymətli təyin olunmur: $E_0(x)$ fundamental həll olduqda

$$P(D)\ E=0$$

bircins tənliyinin ixtiyari həllini E_0 funksionalına əlavə etdikdə $E+E_0$ cəmi də $P(D)$-nin fundamental həlli olur. Doğrudan da,

$$P(D)(E+E_0)=P(D)E+P(D)E_0=P(D)E_0=\delta(x).$$

Beləliklə, fundamental həll bircins tənliyin ixtiyari həllindən ibarət toplanan dəqiqliyilə tapılır. Məsələn, $E_0(x)$-harmonik funksiya olduqda

$$-\frac{1}{4\pi}\cdot\frac{1}{r}+E_0$$

cəmi Δ Laplas operatorunun fundamental həlli olur ($n=3$).

Fundamental həll məlum olduqda ixtiyari $\mu(x)$ funksiyası üçün

$$P\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)u(x)=\mu(x)$$

tənliyinin həllini bükülmə düsturu vasitəsilə belə tapmaq olur:

$$u(x)=E(x)*\mu. \qquad (*)$$

Doğrudan da, bükülmənin xassəsinə görə, buradan alırıq:

$$P\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)u(x)=P\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)E*\mu=\delta*\mu=\mu.$$

Xüsusi halda, E və μ-adi funksiyalar olduqda $(*)$ düsturunu adi inteqral şəklində yazmaq olur:

$$u(x)=\int_{R^n}E(x-\xi)\mu(\xi)d\xi.$$

Məsələn, $P\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)=\Delta \quad (n=3)$ üçün və $\mu(x)$-finit funksiya olduqda $(*)$-dan alırıq:

$$u(x)=-\frac{1}{4\pi}\iint\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mu(\xi)d\xi}{|x-\xi|}.$$

Bu isə Puasson düsturudur.

2.Laplas operatorunun iterasiyası Δ^m .Tutaq ki, elə $E_n^{2m}\in D'(R^n)$ ümumiləşmiş funksiyası var ki, D'-də

$$\Delta^m E_n^{2m}=\delta(x) \tag{1}$$

olur, yəni E_n^{2m} ilə Δ^m operatorunun fundamental həllini işarə edirik. Əgər $\Delta^{2(m-1)}$ operatorunun fundamental həlli $E_n^{2(m-1)}$ tapılıbsa, onda E_n^{2m} funksiyası belə bir tənliyin həlli olur:

$$\Delta E_n^{2m}=E_n^{2(m-1)}. \tag{2}$$

Doğrudan da,

$$\Delta^m E_n^{2m}=\Delta^{2(m-1)}\left(\Delta E_n^{2m}\right)=\Delta^{2(m-1)}E_n^{2(m-1)}=\delta(x).$$

Laplas operatoru sferik simmetrik olduğu üçün E_n^{2m} funksiyasını $r=|x|$-in müəyyən funksiyası $f(r)$ kimi axtarmaq mənalı olur. Məlumdur ki, $f(r)$ üçün Laplas operatoru belə olur:

$$\Delta f(r)=f''(r)+\frac{n-1}{r}f'(r).$$

(2) tənliyi göstərir ki, E_n^{2m} fundamental həllini hesablamaq üçün

$$f''(r)+\frac{n-1}{r}f'(r)=h(r) \tag{3}$$

tənliyini həll etmək lazımdır. Əgər $f'(r)=g(r)$ əvəzləməsini daxil etsək (3) tənliyi

$$g'(r)+\frac{n-1}{r}g(r)=h(r) \tag{4}$$

şəklində alınar. Bu tənliyin həlli belə düsturla tapılır:

$$g(r)=e^{(1-n)\ln r}\left[\int_0^r h(\rho)e^{(n-1)\ln\rho}d\rho\right]=r^{1-n}\int_0^r h(\rho)\rho^{n-1}d\rho;$$

buradan

$$f(r)=\int g(\rho)d\rho=\int r^{1-n}\left\{\int_0^r \rho^{n-1}h(\rho)d\rho\right\}dr.$$

Xüsusi hallara baxaq:

$1^0.h(r)=r^{\lambda}, \lambda\neq 2, \lambda\neq -n$ olsun. Onda

$$f(r)=\int r^{1-n}\left\{\int_0^r \rho^{n-1}\rho^{\lambda}d\rho\right\}dr=\int\frac{r^{\lambda+1}}{n+\lambda}dr=\frac{r^{\lambda+2}}{(\lambda+2)(\lambda+n)} \tag{5}$$

$2^0.h(r)=r^{-2}$. Onda

$$f(r)=\frac{1}{n-2}\ln r. \tag{6}$$

$3^0.h(r)=r^{\lambda}\ln r,\ \lambda\neq -2,\ \lambda\neq -n$ olsun. Onda

$$f(r)=\int r^{1-n}\left[\frac{r^{\lambda+n}}{\lambda+n}\ln r-\frac{r^{\lambda+n}}{(\lambda+n)^2}\right]dr=\frac{r^{\lambda+2}\ln r}{(\lambda+2)(\lambda+n)}-\frac{r^{\lambda+2}}{(\lambda+2)(\lambda+n)}. \tag{7}$$

Qeyd edək ki, (5)-(7) düsturları vasitəsilə E_n^{2m} fundamental həllərini tapmaq mümkün olur.

Bilirik ki, Δ operatorunun fundamental həlli

$$E_n^2\equiv c_n\frac{1}{r^{n-2}}=c_n r^{2-n},\ n\neq 2,\ c_n=\frac{1}{(2-n)s_n},\ s_n=\frac{2\pi^{n/2}}{\Gamma\left(n/2\right)}.$$

İndi Δ^2 üçün E_n^4 fundamental həllini tapaq. Bunun üçün

$$\Delta^2 E_n^4=E_n^2, \tag{*}$$

tənliyini həll etmək lazım gəlir. Belə olduqda

$$\Delta^2 E_n^4=\Delta E_n^2=\delta(x),$$

yəni E_n^4 funksiyası Δ^2 operatorunun fundamental həlli olur. Əgər $(*)$-da yenidən

$$E_n^4=f(r),\ E_n^2=h(r)$$

işarə etsək, $\Delta f(r)=h(r)$, yəni

$$f''(r)+\frac{n-1}{r}f'(r)=h(r)=c_n r^{2-n}$$

tənliyi alınar. Buradan, (5) düsturuna görə ,

$$E_n^4 \equiv f(r)=c_n \frac{r^{4-n}}{2(4-n)},\quad n\neq 2, n\neq 4 .$$

Bunun kimi də,

$$E_n^6 = c_n \frac{r^{6-n}}{2\cdot 4(4-n)(6-n)},\quad n\neq 2, n\neq 4, n\neq 6.$$

Hər belə növbəti halda r-in dərəcəsi 2 vahid artır, məxrəcdə isə uyğun vuruq əlavə olunur. n tək ədəd olduqda r-in dərəcəsi olan $2m-n$ heç zaman -2-yə bərabər olmaz, ona görə tək n-lər və istənilən m üçün aşağıdakı düstur doğrudur:

$$E_n^{2m} = c_n \frac{r^{2m-n}}{2\cdot 4\cdot 6\cdot (2m-2)(2m-n)\ldots(4-n)} \equiv c_{n,2m}\, r^{2m-n} . \tag{8}$$

Əgər n-cüt ədəddirsə, onda (7) düsturu $2m \leq n-2$ üçün doğru olur, $2m \geq n$ olduqda r-in dərəcələri $(2-n,\ 4-n,\ldots)$ müəyyən andan sonra -2 rəqəminə çatar və ondan sonrakı dərəcələrdə (6) və (7) düsturlarına görə fundamental həllərin ifadələrində $loq\, r$ vuruğu da meydana çıxır.

Məsələn,

$$E_n^{n-2} = c_{n,n-2}\, r^{-2},$$

$$E_n^{n} = \frac{c_{n,n-2}}{n-2}\ln r,$$

$$-----------\tag{9}$$

$$E_n^{2m} = \frac{c_{n,n-2}}{n-2}\cdot \frac{r^{2m-n}\ln r}{2\cdot 4\cdot \ldots \cdot (2m-n)n(n+2)\ldots(2m-2)} \equiv$$

$$= b_{n,2m}\cdot r^{2m-n}\ln r .$$

(Qeyd edək ki, bu düsturda $r^2, r^4, \ldots, r^{2m-2}$ iştirak edən toplananlar atılıbdır, çünki onlara Δ^m operatoru ilə təsir etdikdə sıfır alınır).

Nəticə. (Teorem) Δ^m operatorunun fundamental həlləri belə olur:

$$E_n^{2m} = \begin{cases} c_{n,rm} r^{2m-n}, n - \textit{tək ədəd olduqda, yaxud } n \textit{ - cütdür və } n > 2m, \\ b_{n,rm} r^{2m-n} \ln r, n - \textit{cütədəddir, belə ki, } n \le 2m \end{cases}$$

Misal $(n=1)$. Δ^m üçün E_1^{2m} fundamental həllini hesablayaq.

$\Delta = \dfrac{d^2}{dx^2}$, üçün məlumdur ki, $E_1^2 = \dfrac{|x|}{2}$ olur, yəni

$$\left(\frac{|x|}{2}\right)'' = \delta(x).$$

İndi E_1^4 tapaq. Bunun üçün

$$\Delta E_1^4 = E_1^2$$

tənliyini həll etmək lazımdır. Burada $E_1^4 = f(r)$ işarə etsək, $(n=1)$

$$\Delta f(r) = f''(r) + \frac{n-1}{r} f'(r) = f''(r) = \frac{|x|}{2} = \frac{r}{2}$$

alarıq. Bu tənliyin həlli

$$E_1^4 \equiv f(r) = \frac{r^3}{12} = \frac{|x|^3}{12}$$

olur. Göstərək ki, $\Delta^2 E_1^4 = \delta(x)$. Hissə-hissə inteqrallamaqla alırıq:

$$\left\langle \Delta^2 \left(\frac{|x|^3}{12}\right), \varphi \right\rangle = \left\langle \frac{d^4}{dx^4}\left(\frac{|x|^3}{12}\right), \varphi \right\rangle = \left\langle \frac{|x|^3}{12}, \varphi^{(IV)} \right\rangle =$$

$$= \frac{1}{12} \int_{-\infty}^{\infty} |x|^3 \varphi^{(IV)}(x) dx = \frac{1}{12}\left[- \int_{-\infty}^{0} x^3 \varphi^{(IV)}(x) dx \right] = \varphi(0) = \langle \delta, \varphi \rangle$$

Deməli,

$$\Delta^2 \left(\frac{|x|^3}{12}\right) = \delta(x), \text{ yəni } E_1^4 = \frac{|x|^3}{12}.$$

İndi Δ^3 üçün fundamental həlli hesablayaq. Bunun üçün

$$\Delta E_1^6 = E_1^4$$

tənliyini həll etmək lazımdır. $E_1^6 = f(r)$ işarə edib

$$\Delta E_1^6 = \Delta f(r) = f''(r) = E_1^4 = \frac{r^3}{12}$$

alırıq, yəni

$$f''(r) = \frac{r^3}{12},$$

buradan

$$f(r) = \frac{r^5}{240}.$$

Bu qayda ilə $\forall m$ üçün tapılır ki,

$$E_1^{2m} = c_m \cdot r^{2m-1},\ m = 1,2,...$$

Qeyd. $n = 2$ olduqda Δ operatoru üçün fundamental həll

$$E_r^2 = \frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{r} = c_1 \ln r$$

olur.

Δ^2 üçün E_2^4 fundamental həllini tapmaq üçün

$$\Delta E_2^4 = E_2^2$$

tənliyini həll etmək lazım gəlir. $E_2^4 = f(r)$ işarə edib

$$\Delta f(r) = f''(r) + \frac{1}{r} f'(r) = c_1 \ln r$$

tənliyindən tapırıq: $E_2^4 = c_2 r^2 \ln r$. Bu qayda ilə $\forall m$ üçün alırıq ki,

$$E_2^{2m} = c_m r^{2(m-1)} \ln r;\ m = 1,2,...$$

3.Helmhols operatoru: $\Delta + k^2$. R^3 fəzasında belə bir operatora baxaq:

$$L \equiv \Delta + k^2,\ \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2}, \tag{1}$$

burada $k = const$. Bu operator Helmhols operatoru adlanır. Onun fundamental həlli elə $E(x) \in D'(R^3)$ ümumiləşmiş funksiyasına deyilir ki, - D' fəzasında

$$L\,E(x) = \delta(x) \tag{2}$$

tənliyi ödənilsin. Aydındır ki, $\Delta E(x)$ ifadəsini hesablamaq kifayətdir.

Təklif.

$$E(x) = -\frac{1}{4\pi|x|}e^{\pm ik|x|}, \quad |x| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} \tag{3}$$

ümumiləşmiş funksiyası (2) tənliyinin həllidir.

İsbatı. Asan yoxlamaq olar ki,

$$\frac{\partial}{\partial x_j}\frac{1}{|x|} = -\frac{x_j}{|x|^3},$$

$$\frac{\partial}{\partial x_j}e^{ik|x|} = \frac{ikx_j}{|x|}\cdot e^{ik|x|}, \tag{4}$$

$$\Delta e^{ik|x|} = \left(\frac{2ik}{|x|} - k^2\right)e^{ik|x|}.$$

Bu ifadələri və məlum $\Delta\left(\frac{1}{|x|}\right) = -4\pi\delta(x)$ düsturunu nəzərə almaqla alırıq ki:

$$\Delta\left(\frac{1}{|x|}\cdot e^{ik|x|}\right) = \frac{1}{|x|}e^{ik|x|}\cdot\Delta e^{ik|x|} + e^{ik|x|}\Delta\left(\frac{1}{|x|}\right) + 2\sum_{j=2}^{3}\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{1}{|x|}\right)\cdot\frac{\partial}{\partial x_j}e^{ik|x|} =$$

$$= \frac{1}{|x|}\left(\frac{2ik}{|x|} - k^2\right)e^{ik|x|} - 4\pi e^{ik|x|}\delta(x) + 2\sum_{j=1}^{3}\left(-\frac{x_j}{|x|^3}\right)\cdot\frac{ikx_j}{|x|}e^{ik|x|} =$$

$$= \frac{1}{|x|}\left(\frac{2ik}{|x|} - k^2\right)e^{ik|x|} - 4\pi\delta(x) - 2ik\sum_{j=1}^{3}\frac{x_j^2}{|x|^4}e^{ik|x|} = -\frac{k^2}{|x|}e^{ik|x|} - 4\pi\delta(x).$$

Buradan alınır ki,

$$\left(\Delta + k^2\right) = \Delta E + k^2 E = -\frac{1}{4\pi}\Delta\left(\frac{1}{|x|}\cdot e^{ik|x|}\right) - \frac{k^2}{4\pi|x|}e^{ik|x|} =$$

$$= -\frac{1}{4\pi}\left(\frac{k^2}{|x|}e^{ik|x|} - 4\pi\delta(x)\right) - \frac{k^2}{4\pi|x|}e^{ik|x|} = \delta(x)\ .$$

Təklif isbat olundu.

4.Dalamber operatorunun fundamental həlli. Birölçülü halda $(n=1)$ belə bir operatora baxaq:

$$L \equiv \frac{\partial^2}{\partial t^2} - a^2\Delta\ . \tag{1}$$

Göstərək ki,

$$E(x,t) = \frac{1}{2a}\theta(at - |x|) \tag{2}$$

funksiyası (1) operatorunun fundamental həllidir:

$$\frac{\partial^2 E}{\partial t^2} - a^2\frac{\partial^2 E}{\partial x^2} = \delta(x,t)\ . \tag{3}$$

Açıq yazılışda $E(x,t)$

$$E(x,t) = \begin{cases} \dfrac{1}{2a}, & |x| < at, \\ 0, & |x| > at. \end{cases}$$

Aydındır ki, $E(x,t)$ R^2 fəzasında lokal inteqrallanan funksiyadır və $|x| \le at$ oblastından kənarda $E = 0$. Onda $\forall\varphi \in D$ üçün alırıq:

$$\langle LE,\varphi\rangle=\langle E,L\varphi\rangle=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{|x|}^{\infty}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}dt\,dx-\frac{1}{2}\int_{0}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}dx\,dt=$$

$$=-\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial\varphi(x,|x|)}{\partial t}dx-\frac{1}{2}\int_{0}^{\infty}\left[\frac{\partial\varphi(t,t)}{\partial x}-\frac{\partial\varphi(-t,t)}{\partial x}\right]dt=$$

$$=-\frac{1}{2}\int_{0}^{\infty}\frac{d\varphi(t,t)}{\partial t}dt-\frac{1}{2}\int_{0}^{\infty}\frac{d\varphi(-t,t)}{\partial t}dt=\frac{1}{2}\varphi(0,0)+\frac{1}{2}\varphi(0,0)=\varphi(0)=\langle\delta,\varphi\rangle,$$

yəni

$$\frac{\partial^2 E(x,t)}{\partial t^2}-\Delta E(x,t)=\delta(x,t).$$

§ 3. Koşi məsələsinin fundamental həlli.

1.İstilikkeçirmə operatoru. $n=1$. Məlumdur ki, klassik Puasson düsturu

$$u(x,t)=\frac{1}{2\sqrt{\pi t}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4t}}\mu(\xi)d\xi, \tag{1}$$

(burada $\mu(\xi)$-inteqrallanan finit funksiyadır) istilikkeçirmə tənliyi üçün Koşi məsələsinin həllini verir, yəni $u(x,t)$ üçün

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \tag{2}$$

$$u(x,0)=\mu(x) \tag{3}$$

olur. $u(x,t)$ funksiyası- sonsuz çubuğun x nöqtəsində t zamanındakı istiliyi, $\mu(x)$ isə $t=0$ başlanğıc anında x nöqtəsindəki məlum istiliyin miqdarını xarakterizə edir.

(1) düsturunu bükülmə vasitəsilə belə yazmaq olar:

$$u(x,t)=\mu(x)*\frac{1}{2\sqrt{\pi t}}e^{-\frac{x^2}{4t}}. \tag{4}$$

Belə yazılışda $\mu(x)$ olaraq ixtiyari finit funksionalı götürmək olar, onda $u(x,t) \in D'$ ümumiləşmiş funksiya olur.

$$E(x,t) = \frac{\theta(t)}{2\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4t}}$$

işarə edək. Bilavasitə yoxlamaq olur ki, bu funksiya $(t > 0)$

$$\frac{\partial E}{\partial t} = \frac{\partial^2 E}{\partial x^2}$$

istilikkeçirmə tənliyinin həllidir. Həm də δ-vari ardıcıllıqları öyrəndikdə biz gördük ki,

$$E(x,t) \xrightarrow{D'} \delta(x), \ t \to 0.$$

Deməli, $E(x,t) \in D'$ funksiyası (2)-(3) Koşi məsələsinin fundamental həllidir. Onda (2)-(3) məsələsinin həllini bükülmə şəklində belə yazmaq olar:

$$u(x,t) = E(x,t) * \mu(x).$$

Doğrudan da,

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x^2}\right) u = \left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x^2}\right) E * \mu(x) = 0 * \mu(x) = 0,$$

$$\lim_{t \to 0} u(x,t) = \lim_{t \to 0} E * \mu(x) = \delta(x) * \mu(x) = \mu(x).$$

Nəticə.

$$E(x,t) = \frac{\theta(t)}{2\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4t}}.$$

Ümumiləşmiş funksiyası (2)-(3) Koşi məsələsinin D' fəzasında fundamental həlli olur.

Uyğun nəticə R^n fəzasında da doğrudur ($n > 1$).

2. İndi R^n fəzasında istilikkeçirmə operatoruna baxaq :

$$P\left(\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial t} - a^2 \Delta, \ \Delta = \sum_1^n \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} \quad . \tag{5}$$

Təklif.

$$E(x,t)=\frac{\theta(t)}{\left(2\sqrt{\pi t}\right)^n}e^{-\frac{|x|^2}{4a^2t}},\ |x|^2=\sum_1^n x_j^2=r^2.$$

funksiyası (1) operatorunun fundamental həllidir:

$$\frac{\partial E}{\partial t}-a^2\Delta E=\delta(x,t).$$

İsbatı. Əvvəlcə E funksiyasının bir neçə xassəsini qeyd edək.

1^0. E R^{n+1}-də lokal inteqrallanır və $t<0$ olduqda 0-a bərabərdir, $t\geq 0$ olduqda $E\geq 0$ və $t>0$ olduqda $E\in C^\infty\left(R^n\right)$ Bundan əlavə $t>0$ olduqda

$$\iint\ldots\int_{R^n} E(x,t)dx=1.$$

Doğrudan da, $(t>0)$

$$\int_{R'} E(x,t)dx=\frac{1}{\left(2\sqrt{\pi t}\right)^n}\int_{R^n} e^{-\frac{|x|^2}{4a^2t}}dx=\frac{1}{\left(2\sqrt{\pi t}\right)^n}\int_{R^n}\ldots\int e^{-\frac{\sum_1^n x_j^2}{4a^2t}}dx_1,\ldots,dx_n=$$

$$=\frac{1}{\left(2\sqrt{\pi t}\right)^n}\prod_{i=1}^n\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\xi_i^2}d\xi_i=1\ .$$

2^0. $t>0$ olduqda $E\in C^\infty\left(R^n\right)$ olduğu üçün E -adi funksiyadır, bu halda aşkardır ki:

$$\frac{\partial E}{\partial t}=\left(\frac{|x|^2}{4a^2t^2}-\frac{n}{2t}\right)E,$$

$$\frac{\partial E}{\partial x_j}=-\frac{x_j}{2a^2t}E;\ \frac{\partial^2 E}{\partial x_j^2}=\left(\frac{x_j^2}{4a^2t^2}-\frac{1}{2a^2t}\right)E,$$

buradan çıxır ki,

$$\frac{\partial E}{\partial t}-a^2\,\Delta E=\left(\frac{|x|^2}{4a^2t^2}-\frac{n}{2t}\right)E-\left(\frac{|x|^2}{4a^2t^2}-\frac{1}{2t}\right)E=0.$$

Deməli, $t>0$ olduqda $E(x,t)$ funksiyası istilikkeçirmə tənliyinin həlli olur:

$$\frac{\partial E}{\partial t}-a^2\,\Delta E=0\ . \tag{6}$$

İndi $P\left(\frac{\partial}{\partial t},\frac{\partial}{\partial x}\right)E$ ifadəsini bütün D' fəzasında hesablayaq: $\forall\varphi\in D\left(R^{n+1}\right)$ üçün ($t>0$ olduqda (6) nəzərə alınmaqla) alırıq:

$$\left\langle\frac{\partial E}{\partial t}-a^2\,\Delta E,\varphi\right\rangle=-\left\langle\frac{\partial E}{\partial t},\frac{\partial\varphi}{\partial t}+a^2\,\Delta\varphi\right\rangle=$$

$$=-\int_0^\infty\int_{R^n}E(x,t)\left[\frac{\partial\varphi}{\partial t}+a^2\,\Delta\varphi\right]dx\,dt=-\lim_{\varepsilon\to0}\int_\varepsilon^\infty dt\left[\int_{R^n}E\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}+a^2\,\Delta\varphi\right)dx\right]=$$

$$=-\lim_{\varepsilon\to0}\int_\varepsilon^\infty\left[\int_{R^n}\frac{\partial\varphi}{\partial t}\,E(x,t)dx+a^2\int_\varepsilon^\infty\int_{R^n}E(x,t)\Delta\varphi\,dx\right]dt=-\lim_{\varepsilon\to0}E\int_{R^n}\left(\int_\varepsilon^\infty\frac{\partial\varphi}{\partial t}\,E(x,t)dt\right)dx-$$

$$-a^2\int_\varepsilon^\infty\int_{R^n}E(x,t)\Delta\varphi\,dx\,dt=-\lim_{\varepsilon\to0}\left\{\int_{R^n}\left[\varphi E/_{t=\varepsilon}^{\infty}-\int_\varepsilon^\infty\varphi\frac{\partial E}{\partial t}dt\right]dx+a^2\int_\varepsilon^\infty\int_{R^n}\varphi\Delta E\,dx\,dt\right\}=$$

$$=\lim_{\varepsilon\to0}\int_{R^n}E(x,\varepsilon)\varphi(x,\varepsilon)dx+\lim_{\varepsilon\to0}\int_\varepsilon^\infty\int_{R^n}\left(\frac{\partial E}{\partial t}-a^2\,\Delta E\right)\varphi\,dx\,dt=\lim_{\varepsilon\to0}\int_{R^n}E(x,\varepsilon)\varphi(x,\varepsilon)dx=$$

$$=\lim_{\varepsilon\to0}\int_{R^n}E(x,\varepsilon)\varphi(x,0)dx+\lim_{\varepsilon\to0}\int_{R^n}E(x,t)\left[\varphi(x,\varepsilon)-\varphi(x,\varepsilon0)\right]dx\ . \tag{7}$$

İndi göstərək ki, buradakı 2-ci toplanan 0-a bərabərdir. Doğrudan da,

$$|\varphi(x,\varepsilon)-\varphi(x,0)|\le\varepsilon\sqrt{n}\max_i\left|\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\right|\to0,\quad\varepsilon\to0$$

olduğundan

$$\left|\int_{R^n} E(x,t)[\varphi(x,\varepsilon)-\varphi(x,0)]dx\right| \le \varepsilon\sqrt{n}\max_i\left|\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\right|\int_{R^n} E(x,t)\,dx =$$

$$= \varepsilon\sqrt{n}\max_i\left|\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\right| \to 0,\ \varepsilon\to 0\ .$$

Onda (7)-dən $\forall\varphi\in D\left(R^{n+1}\right)$ üçün alırıq:

$$\left\langle L\left(\frac{\partial}{\partial t},\frac{\partial}{\partial x}\right)E,\varphi\right\rangle = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{R^n} E(x,\varepsilon)\varphi(x,0)dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\langle E(x,\varepsilon),\varphi(x)\rangle\ . \quad (8)$$

İndi göstərək ki, $D'\left(R^n\right)$ fəzasında

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\langle E(x,\varepsilon),\varphi(x)\rangle = \langle\delta,\varphi\rangle,$$

yəni

$$\lim_{\varepsilon\to 0} E(x,t) = \delta(x)\ .$$

Doğrudan da,

$$\begin{aligned}\langle E(x,t),\varphi\rangle &= \int_{R^n} E(x,t)\varphi(x)dx = \varphi(0)\int_{R^n} E(x,t)\,dx + \\ &+ \int_{R^n} E(x,t)[\varphi(x)-\varphi(0)]\,dx = \\ &= \varphi(0) + \int_{R^n} E(x,t)[\varphi(x)-\varphi(0)]\,dx = \varphi(0)+J,\end{aligned} \quad (9)$$

burada

$$|\varphi(x)-\varphi(0)| \le |x|\sqrt{n}\max_j\left|\frac{\partial\varphi}{\partial x_j}\right| = M\cdot|x|,$$

nəzərə aldıqda alırıq ki,

$$|J| \le \int_{R^n} E(x,t)|\varphi(x)-\varphi(0)|dx \le M\cdot\int_{R^n}|x|E(x,t)dx =$$

$$= \frac{M}{\left(2a\sqrt{\pi t}\right)^n}\int_{R^n} e^{-\frac{|x|^2}{4a^2t}}|x|\,dx = \frac{M_1}{\left(2a\sqrt{\pi t}\right)^n}\int_0^\infty e^{-\frac{r^2}{4a^2t}}dr =$$

$$= M_1\, a\sqrt{t}\int_0^\infty e^{-y^2}\,dy = c\cdot\sqrt{t},$$

yəni $t \to 0$ olduqda $J \to 0$, onda (9)-dan (8) alınır. Nəticədə (7)-dən alınır ki,

$$\frac{\partial E}{\partial t} - a^2\,\Delta E = \delta(x,t)\ .$$

Nəticə. $E(x,t) \equiv \frac{\theta(t)}{\left(2a\sqrt{\pi t}\right)^n}e^{-\frac{|x|^2}{4a^2t}} \xrightarrow{D'} \delta(x), t \to 0.$

Beləliklə $E(x,t)$ funksiyası belə bir Koşi məsələsinin fundamental həllini verir:

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} - a^2\Delta u(x,t) = 0,\ u/_{t=0} = u_0(x)$$

Belə olduqda bu Koşi məsələsinin həlli

$$u(x,t) = E(x,t) * u_0(x)$$

düsturu vasitəsilə təyin olunur. Doğrudan da:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - a^2\Delta\right)u(x,t) = \left(\frac{\partial}{\partial t} - a^2\Delta\right)E(x,t) * u_0(x) = 0 * u_0(x) = u_0(x)$$

Həm də,

$$\lim_{t\to 0} u(x,t) = \lim_{t\to 0} E(x,t) * u_0(x) = \delta * u_0 = u_0(x)\ .$$

§4. Ümumi diferensial operatorlar üçün Koşi məsələsinin fundamental həlləri.

1. D' fəzasında sabit əmsallı $P\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)$ operatoru üçün Koşi məsələsinə baxaq:

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} - P\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)u(x,t) = 0, \tag{1}$$

$$u/_{t=0} = u_0(x)\,. \tag{2}$$

Burada $u_0(x) \in D'$ və $u(x,t) \in D'$ (t – parametrdir).

(1) tənliyinin

$$E/_{t=0} = \delta(x) \tag{3}$$

şərtini ödəyən $E \in D'$ həlli (1)-(2) Koşi məsələsinin fundamental həlli adlanır. $E(x,t)$ məlum olduqda (1)-(2) məsələsinin həllini

$$u(x,t) = E(x,t) * u_0(x) \tag{4}$$

bükülmə düsturu şəklində yazmaq olur.

Doğrudan da, göstərək ki, (4) kimi təyin edilən $u(x,t)$ (1) tənliyini və (2)başlanğıc şərtini ödəyir:

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} - P\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\right]u(x,t) = \frac{\partial}{\partial t}(E * u_0) - P\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)(E * u_0) =$$

$$= \frac{\partial E}{\partial t} * u_0 = \left(P\left(\frac{\partial}{\partial x}, E * u\right)\right) = \left[\frac{\partial E}{\partial t} - P\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)E\right] * u_0(x) =$$

$$= 0 * u_0(x) = 0.$$

Digər tərəfdən,

$$\lim_{t\to 0} u(x,t) = \lim_{t\to 0} E(x,t) * u_0(x) = \delta * u_0 = u_0(x).$$

2.İndi daha ümumi diferensial operatora baxaq:

$$P\left(\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x}\right).$$

Tutaq ki, t-yə nəzərən tərtib m-dir.Ümumi Koşi məsələsinə baxırıq:

$$P\left(\frac{\partial}{\partial t},\frac{\partial}{\partial x}\right)u = 0, \tag{5}$$

$$u(x,0)=u_0(x),\ \frac{\partial}{\partial t}(x,0)=u_1(x),\ldots,\frac{\partial^{m-1}u}{\partial t^{m-1}}(x,0)=u_{m-1}(x). \tag{6}$$

Tərif. Tutaq ki, elə $E(x,t)\in D'$ ümumiləşmiş funksiyası var ki, o, aşağıdakı xüsusi Koşi məsələsinin həllidir:

$$P\left(\frac{\partial}{\partial t},\frac{\partial}{\partial x}\right)E(x,t)=0,\ t>0, \tag{7}$$

$$E(x,0)=0,\ \frac{\partial E}{\partial t}(x,0)=0,\ldots,\frac{\partial^{m-2}E(x,0)}{\partial t^{m-2}}=0,\ \frac{\partial^{m-1}E(x,0)}{\partial t^{m-1}}=\delta(x). \tag{8}$$

Onda $E(x,t)$ (5)-(6) Koşi məsələsinin fundamental həlli adlanır.

Əvvəlcə belə bir xüsusi Koşi məsələsinə baxaq:

$$P\left(\frac{\partial}{\partial t},\frac{\partial}{\partial x}\right)u(x,t)=0, \tag{9}$$

$$u(x,0)=0,\ \frac{\partial u}{\partial t}(x,0)=\ldots=\frac{\partial^{m-2}u(x,0)}{\partial t^{m-2}}=0,\ \frac{\partial^{m-1}u(x,0)}{\partial t^{m-1}}=u_{m-1}(x). \tag{10}$$

Bu Koşi məsələsinin həlli belə olur:

$$u(x,t)=E(x,t)*u_{m-1}(x). \tag{11}$$

Doğrudan da, əgər $u_{m-1}(x)$ -finit funksiyadırsa, onda (11) bükülməsi həmişə var. Göstərək ki, (11) kimi qurulan $u(x,t)$ funksiyası (9)-(10) məsələsinin həllidir. E-fundamental həll olduğundan, alırıq ki,

$$P\left(\frac{\partial}{\partial t},\frac{\partial}{\partial x}\right)u(x,t)=P\left(\frac{\partial}{\partial t},\frac{\partial}{\partial x}\right)(E*u_{m-1}(x))=$$

$$=P\left(\frac{\partial}{\partial t},\frac{\partial}{\partial x}\right)E*u_{m-1}=0*u_{m-1}=0,$$

yəni $u(x,t)$ (9) tənliyinin həllidir. $t\to 0$ olduqda isə:

$$u(x,t)\to E(x,0)*u_{m-1}(x)=0*u_{m-1}(x)=0,$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}\to\frac{\partial E(x,0)}{\partial t}*u_{m-1}=0,$$

$$\frac{\partial^{m-1}u}{\partial t^{m-1}}\to\frac{\partial^{m-1}E(x,0)}{\partial t^{m-1}}*u_{m-1}(x)=\delta*u_{m-1}=u_{m-1}(x).$$

İndi isə (5)-(6) ümumi Koşi məsələsini həll etmək metodunu şərh edək.

Tutaq ki, $u_0(x),u_1(x),\ldots,u_{m-1}(x)$- finit funksionallardır.($E(x,t)$ fundamental həlli finit funksional olduqda $u_0(x),u_1(x),\ldots,u_{m-1}(x)$ üzərinə heç bir şərt qoyulmur).

Ümumi metod belədir. (5) tənliyinin elə $u_k(x,t)$ həlləri tapılır ki, $(k=0,1,2,\ldots,m-1)$ onun üçün yalnız

$$\frac{\partial^k u_k(x,t)}{\partial t^k}/_{t=0}=u_k(x)\neq 0$$

olur, qalan başlanğıc şərtləri isə 0-ra bərabər olur. Belə olduqda

$$u(x,t)=\sum_{k=0}^{m-1}u_k(x,t)$$

cəmi (5)-(6) Koşi məsələsinin həlli olur.

İndi bu cür $u_k(x,t)$ həllərini necə qurmaq məsələsinə baxaq.

Tutaq ki, $u(x,t)$ funksiyası (9)-(10) Koşi məsələsinin həllidir. Onda bilirik ki, həmin həll (11) düsturu şəklində tapılır:

$$u(x,t)=E(x,t)*u_{m-1}(x).$$

Belə olduqda

$$u_1(x,t)=\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}$$

funksiyası da (5) tənliyinin həlli olur və $u_1(x,t)$ üçün (10) başlanğıc şərtlərindən yalnız ikisi 0-dan fərqli olur:

$$\frac{\partial^{m-1}u_1}{\partial t^{m-2}}/_{t=0}=\frac{\partial^{m-1}u}{\partial t^{m-1}}/_{t=0}=u_{m-1}(x)\neq 0,$$

və

$$\frac{\partial^{m-1}u_1(x,0)}{\partial t^{m-1}}=\frac{\partial^m u(x,t)}{\partial t^m}/_{t=0}=\frac{\partial^m u(x,0)}{\partial t^m}\neq 0,$$

qalan başlanğıc şərtlər 0-ra bərabər olur. Məsələn,

$$\frac{\partial u_1(x,0)}{\partial t}=\ldots=\frac{\partial^{m-3}u(x,0)}{\partial t^{m-3}}=0.$$

İndi (9) tənliyinin elə $u_2(x,t)$ həllinə baxaq ki, onun üçün başlanğıc şərtlər belədir:

$$\frac{\partial^k u_2(x,0)}{\partial t^k}=0,\quad k=0,1,\ldots,m-2,$$

$$\frac{\partial^{m-1}u_2(x,0)}{\partial t^{m-1}}=\frac{\partial^{m-1}u_1(x,0)}{\partial t^{m-1}}\neq 0.$$

Belə olduqda

$$u_3(x,t)=u_1(x,t)-u_2(x,t)$$

funksiyası (5) tənliyinin həlli olur və $u_3(x,t)$ üçün yalnız bir dənə başlanğıc şərt 0-dan fərqli olur:

$$\frac{\partial^{m-2}u_3(x,0)}{\partial t^{m-2}}=u_{m-1}(x)\neq 0\,.$$

Qalan başlanğıc şərtlər 0-a bərabər olur. Məsələn,

$$\frac{\partial^{m-1}u_3(x,0)}{\partial t^{m-1}}=\frac{\partial^{m-1}u_1(x,0)}{\partial t^{m-1}}-\frac{\partial^{m-1}u_2(x,0)}{\partial t^{m-1}}=0.$$

Bu prosesi davam etdirməklə (5) tənliyinin $u_k(x,t)$ $(k=0,1,...,m-1)$ həllərini qurmaq olur, belə ki, hər $u_k(x,t)$ üçün yalnız

$$\frac{\partial^k u_k}{\partial t^k}=u_k(x)\neq 0$$

olur.

3. Deyilən ümumi sxemi simin rəqs tənliyi üçün araşdıraq $(m=2)$. Belə operatora baxaq:

$$P\left(\frac{\partial}{\partial t},\frac{\partial}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2}{\partial t^2}-\frac{\partial^2}{\partial x^2}.$$

Deməli, belə Koşi məsələsinə baxılır:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},\qquad (-\infty<x<\infty) \tag{12}$$

$$u/_{t=0}=u_0(x),\quad \frac{\partial u}{\partial t}/_{t=0}=u_1(x)\ . \tag{13}$$

Burada $u,u_0,u_1\in D'$. Bu Koşi məsələsinin fundamental həlli elə $E(x,t)\in D'$ funksiyasına deyilir, ki,

$$\frac{\partial^2 E}{\partial t^2}=\frac{\partial^2 E}{\partial x^2},\qquad (t>0) \tag{14}$$

$$E/_{t=0}=0,\quad \frac{\partial E}{\partial t}/_{t=0}=\delta(x) \tag{15}$$

olsun.

Lemma. (2)-(3) Koşi məsələsinin fundamental həlli (yəni (14)-(15) Koşi məsələsinin həlli) belə bir $E(x,t)$ funksiyasıdır:

$$E(x,t)=\frac{1}{2}\theta(t-|x|)=\begin{cases}\frac{1}{2}, & |x|<t\ ,\\ 0, & |x|>t\ .\end{cases}$$

İsbatı. Qeyd olunmuş t üçün alırıq ki:

$$\left\langle\frac{\partial E(x,t)}{\partial x},\varphi\right\rangle=-\langle E(x,t),\varphi'\rangle=-\frac{1}{2}\int_{-t}^{t}\varphi'(x)dx=$$

$$=-\frac{1}{2}[\varphi(t)-\varphi(-t)]=\left\langle-\frac{1}{2}[\delta(x-t)-\delta(x+t)],\varphi\right\rangle,$$

yəni

$$\frac{\partial E}{\partial x}=\frac{\delta(x+t)-\delta(x-t)}{2}.$$

Buradan

$$\frac{\partial^2 E}{\partial x^2}=\frac{\delta'(x+t)-\delta'(x-t)}{2}. \tag{17}$$

İndi x qeyd olunduqda $E(x,t)$-ni t parametrinə nəzərən diferensiallayaq:

$$\left\langle\frac{\partial E(x,t)}{\partial t},\varphi\right\rangle=\frac{\partial}{\partial t}\langle E,\varphi\rangle=\frac{\partial}{\partial t}\int_{-\infty}^{\infty}E(x,t)\varphi(x)dx=$$

$$=\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\int_{-t}^{t}\varphi(x)dx=\frac{\varphi(t)+\varphi(-t)}{2}=\left\langle\frac{1}{2}[\delta(x-t)+\delta(x+t)],\varphi\right\rangle\ ,$$

yəni

$$\frac{\partial E}{\partial t}=\frac{\delta(x+t)+\delta(x-t)}{2}. \tag{18}$$

Buradan

$$\frac{\partial^2 E}{\partial t^2}=\frac{\delta'(x+t)-\delta'(x-t)}{2}. \tag{19}$$

Alınan (6) və (8) münasibətlərindən çıxır ki,

$$\frac{\partial^2 E}{\partial t^2}=\frac{\partial^2 E}{\partial x^2}.$$

İndi başlanğıc şərtlərini yoxlayaq. Aşkardır ki, $\lim\limits_{t\to 0} E(x,t)=0.$ Lakin (18) nəzərə alındıqda alırıq:

$$\left\langle \lim_{t\to 0}\frac{\partial E(x,t)}{\partial t},\varphi\right\rangle=\lim_{t\to 0}\left\langle\frac{\delta(x+t)+\delta(x-t)}{2},\varphi\right\rangle=$$

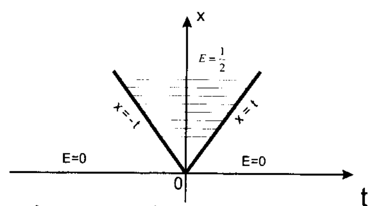
$$=\lim_{t\to 0}\left[\frac{\varphi(-t)+\varphi(-t)}{2}\right]=\frac{\varphi(0)+\varphi(0)}{2}=\varphi(0)=\langle\delta,\varphi\rangle,$$

yəni

$$\lim_{t\to 0}\frac{\partial E(x,t)}{\partial t}=\delta(x).$$

Beləliklə,

$$E(x,t)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}, & |x|<t,\\ 0, & |x|>t,\end{cases}$$



adi funksiyası simin rəqs tənliyi üçün Koşi məsələsinin fundamental həlli olur. İndi ümumi sxemə uyğun olaraq belə bir xüsusi Koşi məsələsinə baxaq:

$$\frac{\partial^2 v_1(x,t)}{\partial t^2}=\frac{\partial^2 v_1(x,t)}{\partial x^2},\quad v_1(x,t)/_{t=0}=0,\quad \frac{\partial v_1(x,0)}{\partial t}/_{t=0}=u_0(x)$$

Bu məsələnin həllini $E(x,t)$ vasitəsilə bu şəkildə yazmaq olur (u_0-lokal inteqrallanan olduqda)

$$v_1(x,t)=E(x,t)*u_0=\int_{-\infty}^{\infty}E(\xi,t)u_0(x-\xi)d\xi=$$

$$=\frac{1}{2}\int_{-t}^{t}u_0(x-\xi)d\xi=\frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t}u_0(\xi)d\xi,$$

buradan

$$\frac{\partial v_1(x,t)}{\partial t}=\frac{u_0(x-t)+u_0(x+t)}{2}.$$

Burada

$$u_2(x,t)=\frac{\partial v_1(x,t)}{\partial t}=\frac{u_0(x-t)+u_0(x+t)}{2}$$

işarə edək. Onda $u_2(x,t)$ funksiyası da (1) tənliyinin aşağıdakı başlanğıc şərtlərini ödəyən həlli olur:

$$u_2(x,t)/_{t=0}=\frac{\partial v_1(x,t)}{\partial t}/_{t=0}=u_0(x).$$

$$\frac{\partial u_2(x,t)}{\partial t}/_{t=0}=\frac{\partial^2 v_1(x,t)}{\partial t^2}/_{t=0}=\frac{u_0'(x+t)-u_0'(x-t)}{2}/_{t=0}=0$$

İndi (12) tənliyi üçün başqa bir xüsusi Koşi məsələsinə baxaq:

$$\frac{\partial^2 u_3(x,t)}{\partial t^2}=\frac{\partial^2 u_3(x,t)}{\partial x^2},\ u_3/_{t=0}=0,\ \frac{\partial u_3}{\partial t}/_{t=0}=u_1(x).$$

Bu məsələnin həllini belə yazmaq olar:

$$u_3(x,t)=E(x,t)*u_1(x)=\frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t}u_1(\xi)d\xi.$$

Aşkardır ki, $u(x,t)=u_2(x,t)+u_3(x,t)$ cəmi (12)-(13) Koşi məsələsinin həlli olur. Beləliklə, aldıq ki,

$$u(x,t)=\frac{u_0(x+t)+u_0(x-t)}{2}+\frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t}u_1(\xi)d\xi.$$

Bu isə klassik Dalamber düsturudur.

Qeyd. Ən ümumi halda (u_0 və u_1-adi funksiya olmayan halda) $u(x,t)$ həllinin ümumi düsturu belə qalır:

$$u(x,t)=\frac{\partial}{\partial t}E(x,t)*u_0(x)+E(x,t)*u_1(x).$$

Bu halda $u(x,t)$ ümumiləşmiş funksiyası (2)-(3) Koşi məsələsinin həlli olur. Yoxlayın!

§ 5. Ümumiləşmiş Koşi məsələsi.

Bu paraqrafda ümumiləşmiş funksiyalar sinfində dalğa tənliyi misalındda Koşi məsələsinin fundamental həllinin, ümumiləşmiş həllinin və klassik həllərinin müqayisəli şərhi verilir və məsələnin bəzi fiziki xüsusiyyətləri qeyd olunur. Bu qeydlər məsələnin fiziki mənasını, onun keyfiyyət xarakteristikasını aydınlaşdırmağa xidmət edir.

1. Əvvəlcə D' fəzasında sadə (adi) diferensial tənlik üçün Koşi məsələsinə baxaq:

$$u'' + a^2 u = f(t),\ u/_{t=0} = u_0,\ u'/_{t=0} = u_1, \tag{1}$$

burada $f \in C(t \geq 0)$. Məsələnin həlli olan $u(t)$ funksiyasını $t < 0$ oblastına sıfır kimi davam etdirək və $f(t) = 0, t < 0$ hesab edək. Davam olunan funksiyaları $\widetilde{u}$ və $\widetilde{f}$ ilə işarə edək. Onda $\widetilde{u}$ kəsilən funksiya olduğu üçün, alınır ki:

$$\widetilde{u}' = \{\widetilde{u}'(t)\} + u_0\delta(t),$$
$$\widetilde{u}'' = \{\widetilde{u}''(t)\} + u_0\delta'(t) + u_1\delta(t).$$

Beləliklə, $\widetilde{u}$ funksiyası belə bir tənliyi ödəyir:

$$\widetilde{u}'' + a^2\widetilde{u} = \widetilde{f}(t) + u_0\delta'(t) + u_1\delta(t) \equiv F(t)\,. \tag{2}$$

İndi (2) tənliyini həll edək. Məlumdur ki, $\dfrac{d^2}{dt^2} + a^2$ operatorunun fundamental həlli belədir:

$$E(t) = \theta(t)\frac{\sin at}{a}.$$

Deməli $E(t) = 0,\ t < 0$ olduqda şərtə görə $\widetilde{f}(t) = 0,\ t < 0$ və $F(t) = 0, t < 0$ olur. Belə olduqda ümumiləşmiş funksiyalarda adi diferensial tənliklər nəriyyəsinə əsasən, (2) adi diferensial tənliyinin $D'(R')$ fəzasında $t < 0$ olanda sıfra bərabər olan həlli var və o yeganədir. Həmin həll isə bu düsturla təyin olunur:

$$u = E * F = E * \left(\widetilde{f} + u_0\delta' + u_1\delta\right) = E * \widetilde{f} + u_0 E' + u_1 E\,. \tag{3}$$

Bu həll (1) məsələsinin $D'(R)$-də həlli olur.

Digər tərəfdən (1) Koşi məsələsinin $t<0$ olanda =0 olan həlli (2) tənliyini ödədiyi üçün və bu cür həll yeganə olduğu üçün (3) düsturu $t>0$ olduqda (1) Koşi məsələsinin həllini verir, yəni aldıq ki,

$$u(t)=\frac{1}{a}\int_0^t f(\tau)\sin a(t-\tau)d\tau+u_0\cos at+u_1\frac{\sin at}{a}\ . \tag{4}$$

Analoji qayda ilə belə Koşi məsələsi həll edilir:

$$u'+au=f,\quad u/_{t=0}=u_0 \tag{1'}$$

$t<0$ oblastına davam olunandan sonra

$$\widetilde{u}'+a\widetilde{u}=\widetilde{f}(t)+u_0\delta(t) \tag{2'}$$

alınır. $\dfrac{d}{dt}+a$ operatorunun fundamental həlli

$$E(t)=\theta(t)e^{-at}$$

olduğundan $(2')$-in həlli

$$\widetilde{u}=E*F(t)$$

kimi tapılır, burada $F(t)=\widetilde{f}(t)+u_0\delta(t)$. Beləliklə, bu cür həll var və yeganədir, çünki $E(t)=0,\ t<0,\ F(t)=0,\ t<0.$ Onda $\widetilde{u}=E*F(t)=0, t<0$ və

$$\widetilde{u}=E*\left(\widetilde{f}+u_0\delta\right)=E*\widetilde{f}+u_0\,E \tag{3'}$$

Beləliklə, $(1')$ Koşi məsələsinin (klassik) həlli bu şəkildə alınır

$$u(t)=\int_0^t f(\tau)e^{-a(t-\tau)}d\tau+u_0e^{-at}\qquad (t>0) \tag{4'}$$

2. Dalğa tənliyi üçün ümumiləşmiş Koşi məsələsi. Dalğa tənliyi üçün Koşi məsələsi verilir:

$$L_a(u)=f(x,t),\ t>0,\ x\in R^n, \tag{6}$$

$$u\big|_{t=0}=u_0(x), \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0}=u_1(x). \tag{7}$$

Fərz edək ki, $f \in C(t \geq 0), u_0 \in C'(R^n), u_0 \in C'(R^n)$-adi funksiyalardır. Tutaq ki, (6)-(7) Koşi məsələsinin klassik həlli var.

u və f funksiyalarını $t < 0$ oblastına sıfır kimi davam etdirək:

$$\widetilde{u} = \begin{cases} u, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}, \quad \widetilde{f} = \begin{cases} f, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$

Onda $\widetilde{u} \equiv \widetilde{u}(x,t)$ funksiyası $D'(R^{n+1})$ fəzasında belə bir dalğa tənliyinin həlli olur:

$$L_a \widetilde{u} = \widetilde{f} + u_0(x)\delta'(t) + u_1(x)\delta(t) \ . \tag{8}$$

Doğrudan da, $\forall \varphi \in D(R^{n+1})$ üçün alırıq ki,

$$\langle L_a \widetilde{u}, \varphi \rangle = \langle \widetilde{u}, L_a \varphi \rangle = \int_0^\infty \int_{R^n} u \, L_a \varphi dx dt = \lim_{\varepsilon \to \infty} \int_0^\infty \int_{R^n} u \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - a^2 \Delta \varphi \right) dx dt =$$

$$= \lim_{\varepsilon \to \infty} \left[\int_0^\infty \int_{R^n} u \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \Delta \right) \varphi dx dt - \int_0^\infty \int_{R^n} f \varphi dx dt - \int_{R^n} \varphi(x,0) \frac{\partial u(x,0)}{\partial t} dx \right] =$$

$$= \int_{R^{n+1}} \widetilde{f} \varphi dx dt - \int_{R^n} u_0(x) \frac{\partial \varphi(x,0)}{\partial t} dx + \int_{R^n} u_1(x) \varphi(x,0) dx =$$

$$= \left\langle \widetilde{f} + u_0(x) \cdot \delta'(t) + u_1(x) \cdot \delta(t), \varphi \right\rangle ,$$

buradan (8) çıxır.

Nəticələr. $\widetilde{u}(x,t)$ funksiyası üçün u_0 və u_1 bahlanğıc şərtləri $t = 0$ anında təsir edən $u_0(x) \cdot \delta(x) + u_1(x) \cdot \delta(x)$ kimi mənbə rolunu oynayır. Bununla yanaşı (6)-(7) Koşi məsələsinin klassik həlli (8) tənliyinin belə həlləri içərisində yerləşir ki, onlar $t < 0$ olduqda 0-ra bərabər olurlar. Bu vəziyyət təbii olaraq əsas yaradır ki, (8) tənliyinin $t < 0$ olduqda 0-ra bərabər olan həllərinin tapılmasından ibarət məsələni dalğa tənliyi üçün ümumiləşmiş Koşi məsələsi adlandıraq. Belə olduqda (8)-dəki u_0, u_1 və $\widetilde{f}$ kimi kəmiyyətləri ümumiləşmiş funksiya hesab etmək olar.

Tərif. Dalğa tənliyi üçün ümumiləşmiş Koşi məsələsi dedikdə $f \in D'(R^{n+1}), u_0 \in D'(R^n), u_1 \in D'(R^n)$ verilmiş ümumiləşmiş funksiyaları üçün

$$L_a u = f(x,t) + u_0(x)\delta'(t) + u_1(x)\delta(t) \tag{9}$$

tənliyinin $t<0$ olduqda $u=0$ olan həllinin tapılması məsələsi başa düşülür.

(9) tənliyi D' fəzasında belə tənliyə ekvivalentdir:

$$\langle u, L_a\varphi\rangle = \langle f,\varphi\rangle - \left\langle u_0, \frac{\partial\varphi(x,0)}{\partial t}\right\rangle + \langle u_1, \varphi(x,0)\rangle. \tag{10}$$

(9) tənliyindən görünür ki, ümumiləşmiş Koşi məsələsinin həll olunması üçün zəruri şərt $t<0$ olduqda $f=0$ olmasıdır. Bu şərt həm də kafidir.

Teorem. Tutaq ki, $f\in D'(R^{n+1})$, $u_0\in D'(R^n)$, $u_1\in D'(R^n)$ və $f=0$, $t<0$ olduqda. Onda ümumiləşmiş Koşi məsələsinin həlli var, yeganədir və həll $\widetilde{f}$, u_0, u_1 məlumlarından D' fəzası mənada kəsilməz asılıdır. Həmin həllin ümumi göstərlişi belə olur:

$$u = E_n * f + E_n(x,t) * u_1(x) + \frac{\partial E_n(x,t)}{\partial t} * u_0(x),$$

burada E_n L_a operatorunun fundamental həllidir.

Doğrudan da, şərtə görə $f=0$, $t<0$. Onda həm də

$$f(x,t) + u_0(x)\delta'(t) + u_1(x)\delta(t) = 0,\ t<0 \text{ olduqda.}$$

Belə olduqda $D'(R^{n+1})$-də $E_n * f$ bükümü var və 0-ra bərabərdir, $t<0$ olduqda. Onda əvvəlki teoremə əsasən (9) tənliyinin həlli var və $E_n * f$ bükümünün varlığını təmin edən f-lər sinfində həmin həll yeganədir və həmi həll bu düsturla təyin edilir:

$$u = E_n * [f + u_0(x)\delta'(t) + u_1(x)\delta(t)] = (E_n * f) + (E_n * u_0(x)\delta'(t)) +$$

$$+ E_n * u_1(x)\delta(t) = (E_n * f) + (E_n(x,t) * u_1(x)) + \left(\frac{\partial E_n(x,t)}{\partial t} * u_0(x)\right).$$

Nəticə 2. $f=0$ olduqda ümumiəlşmiş Koşi məsələsinin $u(x,t)$ həlli t-yə nəzərən adi mənada sonsuz diferensiallanan funksiya olmaqla (7) başlanğıc şərtlərini D' mənada ödəyir, yəni $\forall\varphi\in D(R^n)$ üçün

$$\lim_{t\to 0}\langle u(x,t),\varphi(x)\rangle = \langle u_0,\varphi\rangle \quad ,$$

$$\lim_{t\to 0}\left\langle \frac{\partial u(x,t)}{\partial t},\varphi\right\rangle = \langle u_1,\varphi\rangle \quad .$$

Nəticə 3. Tutaq ki, $n = 2,3$ olduqda

$f \in C^2(t \geq 0)$, $u_0 \in C^3(R^n)$, $u_1 \in C^2(R^n)$ və $n = 1$ olduqda $f \in C^1(t \geq 0)$, $u_0 \in C^2(R^1)$, $u_1 \in C^1(R^1)$ Onda (6)-(7) klassik Koşi məsələsinin həlli var, yeganədir, həll $\tilde{f}$, u_0, u_1 verilənlərindən kəsilməz asılıdır (başqa sözlə, məsələ korrektdir). Bundan əlavə həll belə düsturla təyin olunur:

$n = 3$ olduqda Kirxhof düsturu vasitəsilə:

$$u(x,t) = \frac{1}{4\pi a^2}\int_{V(x;at)} \frac{f\left(\xi, t - \left|\frac{x-\xi}{a}\right|\right)}{|x-\xi|}d\xi + \\ + \frac{1}{4\pi a^2 t}\int_{S(x;at)} u_1(\xi)d\xi + \frac{1}{4\pi a^2}\frac{\partial}{\partial t}\frac{1}{t}\int_{S(x;at)} u_0(\xi)d\xi, \tag{10}$$

Burada $V(x;at)$- at radiuslu şar, $S(x;at)$-onun səthidir.

$n = 2$ olduqda Puasson düsturu vasitəsilə

$$u(x,t) = \frac{1}{2\pi a}\int_0^t\int_{V(x;at)} \frac{f(\xi,\tau)d\xi\, d\tau}{\sqrt{a^2(t-\tau)^2 - |x-\xi|^2}} + \frac{1}{2\pi a}\int_{V(x;at)} \frac{u_1(\xi)d\xi}{\sqrt{a^2t^2 - |x-\xi|^2}} + \\ + \frac{1}{2\pi a}\frac{\partial}{\partial t}\int_{V(x;at)} \frac{u_0(\xi)d\xi}{\sqrt{a^2t^2 - |x-\xi|^2}}. \tag{11}$$

$n = 1$ olduqda Dalamber düsturu vasitəsilə:

$$u(x,t)=\frac{1}{4\pi}\frac{u_0(x+at)+u_0(x-at)}{2}+\frac{1}{2a}\int_0^t\int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)}f(\xi,\tau)d\xi\, d\tau+ \\ +\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}u_1(\xi)d\xi. \qquad (12)$$

Xüsusi halda $(f\equiv 0)$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},\quad u/_{t=0}=u_0,\quad \frac{\partial u}{\partial t}/_{t=0}=u_1$$

klassik Koşi məsələsinin həlli üçün belə düstur alınır:

$$u(x,t)=\frac{u_0(x+at)+u_0(x-at)}{2}+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}u_1(\xi)d\xi. \qquad (13)$$

Nəticə 4. Dalğa tənliyi üçün Koşi məsələsi korrektdir. Klassik Koşi məsələsi $C^2(t>0)\cap C^1(t\geq 0)$ sinfində, ümumiləşmiş Koşi məsələsi isə $D'(R^{n+1})$ sinfində korrektdir.

FƏSİL 7

ÜMUMİLƏŞMİŞ FUNKSİYALARIN FURYE ÇEVİRMƏLƏRİ

§ 1. Bəzi klassik nəticələr.

1.$L_1(-\infty,\infty)$ **fəzasında Furye çevirməsi.** Tutaq ki, $f(x)$ 2π-perildlu adi funksiyadır. Onu Furye sırasına ayıraq:

$$f(x)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{inx}, \qquad (1)$$

burada

$$a_n=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-imx}\,dx, \quad m=0,\pm1,\pm2,... \qquad (2)$$

Əgər $f(x)$ $2l$ - perildlu olarsa, onda Furye sırası belə olar:

$$f(x)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{in\frac{x}{l}}, \qquad (3)$$

$$a_n=\frac{1}{2\pi l}\int_{-\pi l}^{\pi l} f(x)e^{-in\frac{x}{l}}\,dx. \qquad (4)$$

(Qeyd edək ki, (2) düsturu (1)-in hər tərəfini e^{-imx}-ə vurub $[-\pi,\pi]$ parçası üzrə inteqrallamaqla alınır). Əgər (1) və (2) düsturlarını periodik olmayan funksiyalar üçün yazmaq istəsək, (4)-ü (3)-də yazıb $l\to\infty$ şərtində limitə keçmək lazımdır. Onda alarıq:

$$f(x)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{2\pi l}\int_{-\pi l}^{\pi l} f(\xi)e^{-\frac{in}{l}(x-\xi)}\,d\xi, \qquad (5)$$

buradan, $l\to\infty$ olduqda,

$$f(x)=\int_{-\infty}^{\infty} d\sigma\left\{\frac{1}{2\pi l}\int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)e^{-i\sigma(x-\xi)}\,d\xi\right\}, \qquad (6)$$

burada kəsilməz dəyişən σ kəmiyyəti $\frac{n}{l}$ nisbətinin limiti kimi alınır. Əgər (6)-da

$$g(\sigma)=\int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)e^{-i\sigma\xi}d\xi \tag{7}$$

işarə etsək, onda

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} g(\sigma)e^{i\sigma x}d\sigma \tag{8}$$

alarıq.

Tərif. (7) düsturu ilə təyin olunan $g(\sigma)$ funksiyası $f(x)$-in (düz) Furye çevirməsi adlanır və onu adətən $\tilde{f}$ yaxud, $F[f(x)]$, yaxud Ff kimi işarə edirlər. (8) düsturu tərs Furye çevirməsi adlanır. Onu $F^{-1}[f(x)]$ və yaxud F^{-1} kimi işarə edirik. Beləliklə,

$$F^{-1}[f]=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(\sigma)e^{i\sigma x}\,d\sigma,$$

$$F[f]=\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\sigma x}\,dx.$$

Aşkardır ki, F və F^{-1} operatorları xətti çevirmədirlər, məsələn,

$$F[\alpha f_1+\beta f_2]=\alpha F[f_1]+\beta F[f_2]$$

$g(\sigma)$ (7) düsturu ilə verildikdə $f(x)$ (8) şəklində alınır. Bunu belə göstərmək olar. Sonlu $[-N,N]$ parçasına baxaq. Belə $f_N(x)$ funksiyasına baxaq:

$$f_N(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-N}^{N} g(\sigma)e^{i\sigma x}\,d\sigma=\frac{1}{2\pi}\int_{-N}^{N}\left\{\int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)e^{i\sigma(x-t)}dt\right\}d\sigma.$$

Daxili inteqral σ – ya nəzərən müntəzəm yığılır, onda inteqrallama növbəsini dəyişməklə alırıq:

$$f_N(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\left\{\int_{-N}^{N} e^{i\sigma(x-t)}d\sigma\right\}dt=$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\frac{e^{iN(x-t)-iN(x-t)}}{i(x-t)}dt= \tag{$*$}$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cdot\frac{\sin N(x-t)}{x-t}dt=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x+t)\cdot\frac{\sin Nt}{t}dt.$$

Lemma. Tutaq ki, $f(x)$ Dini şərtini ödəyir, yəni elə $\delta>0$ var ki, $|t|<\delta$ olduqda

$$\int_{-\delta}^{\delta}\frac{|f(x+t)-f(x)|}{|t|}dt<\infty.$$

Onda

$$\lim_{N\to\infty} f_N(x)=f(x).$$

İsbatı. Məlumdur ki,

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin Nt}{t}dt=1.$$

Bunu nəzərə aldıqda $f_N(x)-f(x)$ fərqini bu şəkildə yazmaq olar:

$$f_N(x)-f(x)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}[f(x+t)-f(x)]\frac{\sin Nt}{t}\,dt.$$

Bu inteqralı iki toplanana ayıraq:

$$\int_{-\infty}^{\infty}=\int_{|t|\le A}+\int_{|t|>A}\equiv J_1+J_2, \tag{$**$}$$

burada $A>0$ kafi böyük ədəddir. 2-ci toplananı belə yazaq:

$$J_2 = \int\limits_{|t|>A} f(x+t)\frac{\sin Nt}{t}\,dt - f(x)\int\limits_{|t|>A}\frac{\sin Nt}{t}\,dt .$$

Hər iki toplanan inteqral yığılan olduğu üçün belə çıxır ki, (A -kafi böyük olduğu üçün) baxılan inteqralın hər biri ($\forall x$ üçün) ε-dan kiçik olur. $(**)$-da 1-ci toplananı belə yazaq:

$$J_1 = \int\limits_{-A}^{A}\frac{f(x+t)-f(t)}{t}\sin N t\,dt .$$

Dini şərtinə görə $\dfrac{f(x+t)-f(t)}{t}$ funksiyası $[-A,A]$ parçasında cəmlənən funksiyadır. Onda Lebeq teoreminə əsasən, $N\to\infty$ olduqda $J_1\to 0$ olur.

Beləliklə, nəticədə alınır ki,

$$\lim_{N\to\infty} f_N(x) = f(x).$$

Nəticə. $f\in L_1$ və f Dini şərtini ödədikdə o, özünün $g(\sigma)$ Furye çevirməsi vasitəsilə (8) düsturu ilə bərpa olunur.

2.Əsas düsturlar və qiymətlənmələr. **Lemma 1.** F Furye çevirməsi xətti, kəsilməz və məhduddur. $\forall f\in L_1$ üçün

$$F^{-1}[F[f]] = F\left[F^{-1}[f]\right] = f.$$

Məsələn, $f(x)$-in Furye inteqralı şəklindən çıxır ki,

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int d\sigma\left(\int f(t)e^{i\sigma(x-t)}dt\right) = \frac{1}{2\pi}\int e^{i\sigma x}\left(\int f(x)e^{-i\sigma t}\,dt\right)d\sigma$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int g(\sigma)e^{i\sigma x}d\sigma = \frac{1}{2\pi}e^{i\sigma x}F[f(x)]d\sigma = F^{-1}[F[f]],$$

yəni

$$F^{-1}[F[f]] = f.$$

Lemma 2. Tutaq ki, $f_n\in L_1$, $f\in L_1$ və

$$\lim_{n\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty}|f_n(x)-f(x)|dx=0.$$

Onda bütün ədəd oxunda müntəzəm olaraq

$$g_n(\sigma)\Rightarrow g(\sigma),\ n\to\infty$$

olur. Burada $g_n(\sigma)=F[f_n(x)]; g(\sigma)=F[f(x)]$.

Doğrudan da, $n\to\infty$ olduqda alırıq:

$$|g_n(\sigma)-g(\sigma)|=|F[f_n(x)-f(x)]|\le\int_{-\infty}^{\infty}|f_n(x)-f(x)|dx\to 0.$$

Teorem 1. $f(x)\in L_1(-\infty,\infty)$ olduqda $F[f]$ Furye çevirməsi var və:

1) $g(\sigma)$-məhduddur,

2) $g(\sigma)$-kəsilməzdir,

3) $|\sigma|\to\infty$ olduqda, $g(\sigma)\to 0$.

Doğrudan da,

$$|g(\sigma)|\le\int_{-\infty}^{\infty}|f(x)|dx=\|f\|_{L_1}<\infty.$$

Buradan çıxır ki, $f_n\to 0$, (L_1-də) olduqda σ-ya nəzərən müntəzəm olaraq $g_n(\sigma)\to 0$ olur. Digər tərəfdən (7)-də inteqralaltı funksiya $e^{-i\sigma x}f(x)$ hər x üçün σ-ya nəzərən kəsilməzdir və

$$|e^{-i\sigma x}f(x)|\le|f(x)|,\ f\in L_1$$

olduğundan Lebeq teoreminə əsasən çıxır ki, $g(\sigma)$ funksiyası kəsilməzdir və $g(\sigma)\to 0$, $|\sigma|\to\infty$.

Qeyd. $f(x)\in L_1$ olduqda $F[f(x)]\in L_1$ olmaya bilər. Məsələn, θ-Hevisayd funksiyası olduqda

$$f(x)=\theta(x)e^{-x}\in L_1(-\infty,\infty).$$

Lakin

$$F[f(x)]=\int_0^{\infty}e^{-x+ix\sigma}dx=\frac{1}{1-i\sigma}=\frac{i}{\sigma+i}\notin L_1.$$

Deməli, $f(x) \in L_1$ olduqda (8) inteqralı mütləq yığılan olmaya bilər.

Teorem 2. Tutaq ki, $f(x)$ m dəfə kəsilməz diferensiallanır və əlavə $f^{(m)}(x) \in L_1$. Onda:

I. a) $F\left[f^{(m)}(x)\right] = (i\sigma)^m F[f(x)] = (i\sigma)^m g(\sigma)$,

b) $|\sigma|^m |g(\sigma)| \le \left\| f^{(m)}(x) \right\|_{L_1} < \infty$.

c) istənilən $P(x)$ polinomu üçün

$$F\left[P\left(\frac{d}{dx}\right)f(x)\right] = P(i\sigma) \cdot F[f(x)] = P(i\sigma) g(\sigma).$$

II. Əgər $x^m f(x) \in L_1$ isə, onda $g(\sigma)$ düz m dəfə kəsilməz diferensiallanır və aşağıdakı düsturlar doğrudur:

$$a) F\left[(-ix)^m f(x)\right] = g^{(m)}(\sigma),$$

$$b) P\left(\frac{d}{d\sigma}\right) g(\sigma) = F[P(-ix) f(x)],$$

$$c) \left| g^{(m)}(\sigma) \right| \le \left\| x^m f(x) \right\|_{L_1} < \infty.$$

İsbatı xüsusi hal üçün veririk.

Tutaq ki, f -kəsilməz diferensiallanandır, $f \in L_1$ və $f'(x) \in L_1$. Onda, hissə-hissə inteqrallamaqla alırıq $(A > 0)$:

$$\int_{-A}^{A} e^{-i\sigma x} f(x) dx = \frac{e^{-i\sigma x}}{-i\sigma} f(x) \Big/_{x=-A}^{A} - \int_{-A}^{A} \frac{e^{-i\sigma x}}{-i\sigma} f'(x) dx, \qquad (9)$$

burada $A \to \infty$ olduqda inteqraldan kənardakı hədd $\to 0$ olur. $f' \in L_1$ olduğu üçün $x \to \pm\infty$ olduqda $\lim f(x)$ sonlu ədəd olar, çünki

$$f(x) = f(0) + \int_0^x f'(t) dt$$

olmasından çıxır ki,

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = f(\pm\infty) = f(0) + \int_0^{\pm\infty} f'(t) dt .$$

Bu limit 0-dan fərqli ola bilməz, əks halda f cəmlənən funksiya olmazdı. Nəticədə (9)-dan alırıq ki,

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\sigma x} f(x)dx = \frac{1}{i\sigma}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\sigma x} f'(x)dx, \quad (\sigma \neq 0) .$$

Buradan

$$F[f'(x)] = i\sigma F[f(x)] = i\sigma\ g(\sigma).$$

Beləliklə, belə bir qiymətlənmə alınmış olur:

$$|\sigma g(\sigma)| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |f'(x)|dx = \|f'\|_{L_1} < \infty.$$

İndi tutaq ki, $f, f', ..., f^{(m)} \in L_1$. Onda analoji qayda ilə göstərilir ki,

$$F\left[f^{(m)}(x)\right] = (-i\sigma)^m g(\sigma) ,$$

$$|\sigma^m g(\sigma)| \leq \left\|f^{(m)}\right\|_{L_1} < \infty .$$

Nəticə 1. İxtiyari $P(\sigma)$ polinomu üçün, $P\left(\frac{d}{dx}\right)f(x) \in L_1$ olduqda Furye çevirməsi üçün alırıq:

$$1) F\left[P\left(\frac{d}{dx}\right)f(x)\right] = P(i\sigma)g(\sigma),$$

$$2) |P(\sigma)g(\sigma)| \leq \left\|P\left(\frac{d}{dx}\right)f(x)\right\|_{L_1} .$$

Uyğun düsturları eyni qayda ilə F^{-1} tərs Furye çevirməsi üçün də almaq olur, bünün üçün təkcə alınan düsturlarda $(-ix)^m$ əvəzinə $(ix)^m$ yazmaq lazım gəlir.

İndi görək nə zaman f-in Furye çevirməsi $g(\sigma)$ diferensiallanan funksiya olur. Formal diferensialladıqda

$$g'(\sigma) = \int_{-\infty}^{\infty} (-ix)e^{-i\sigma x} f(x)dx = F[-ix\, f(x)].$$

Deməli, $xf \in L_1(-\infty,\infty)$ olduqda $g'(\sigma)$ törəməsi var. Əgər $x^m f \in L_1$ olursa, onda $g^{(m)}(\sigma)$ törəməsi var və aşağıdakı düstur doğrudur:

$$g^{(m)}(\sigma) = F\left[(-ix)^m f(x)\right],$$

buradan

$$\left|g^{(m)}(\sigma)\right| \le \left\|x^m f(x)\right\|_{L_2} < \infty .$$

Alınan nəticələri birləşdirsək, belə bir təklif isbat edilmiş olur:

Nəticə 1. 1). Hər bir $f(x) \in L_1(-\infty,\infty)$ üçün $F[f(x)]$ Furye çevirməsi var:

$$F[f(x)] \equiv g(\sigma) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\sigma x} f(x)dx .$$

2). $g(\sigma)$ Furye çevirməsi kəsilməzdir, məhduddur və $|\sigma| \to \infty$ olduqda $g(\sigma) \to 0$.

3). $|g(\sigma)| \le \|f\|_{L_1} < \infty.$

4). Əgər f m dəfə kəsilməz diferensiallanırsa, belə ki, onun bütün $\le m$ tərtibdən törəmələri cəmlənəndir, $f^{(k)}(x) \in L_1(-\infty,\infty)$, $k \le m$, onda:

$$1^0. F\left[f^{(m)}(x)\right] = (i\sigma)^m g(\sigma);$$

$$2^0. |\sigma|^m |g(\sigma)| \le \left\|f^{(m)}\right\|_{L_1} < \infty;$$

$$3^0. F\left[P\left(\frac{d}{dx}\right)f\right] = P(i\sigma)g(\sigma);$$

$$4^0. |P(\sigma)g(\sigma)| \le \left\|P\left(\frac{d}{dx}\right)f(x)\right\|_{L_1} .$$

5). Əgər $x^m f(x) \in L_1(-\infty,\infty)$ olarsa, onda $g(\sigma)$ Furye çevirməsi m dəfə kəsilməz diferensiallanır və:

$$1^0.\, g^{(m)}(\sigma) = F\left[(-ix)^m f(x)\right],$$

$$2^0.\, \left|g^{(m)}(\sigma)\right| \le \left\|x^m f(x)\right\|_{L_1} < \infty.$$

$$3^0.\, P\left(\frac{d}{d\sigma}\right) g(\sigma) = F\left[P(-ix) f(x)\right],$$

burada P-ixtiyari polinomdur.

Nəticə 2. Təklifin düsturundan görünür ki:

1) $f(x)$ nə dərəcədə hamar funksiya olduqca onun Furye çevirməsi $g(\sigma)$ $|\sigma| \to \infty$ olduqda uyğun olaraq həmin sürətlə azalır.

2) $|x| \to \infty$ olduqda $f(x)$ nə dərəcədə yüksək sürətlə azalırsa, $g(\sigma)$ Furye çevirməsi uyğun yüksək tərtibdən diferensiallanan funksiya olur.

Təklif. $k \neq 0$ ədədi üçün

$$F[f(kx)] = \frac{1}{|k|} g\left(\frac{\sigma}{k}\right).$$

Doğrudan da,

$$F[f(kx)] = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\sigma x} f(kx)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{i\sigma y}{k}} f(y) \frac{dy}{|k|} = \frac{1}{|k|} g\left(\frac{\sigma}{k}\right).$$

Xüsusi halda $(k = -1)$ $g(-\sigma) = F[f(-x)]$. Deməli, cüt funksiyanın Furye çevirməsi də cüt funksiya olur, təkinki isə tək funksiya olur.

3. L_1 fəzasında bükülmənin Furye çevirməsi. Tutaq ki, $f(x)$ və $g(x)$ adi funksiyalardır. Belə inteqrala baxaq $(n = 1)$:

$$h(x) \equiv f * g \equiv \int_{-\infty}^{\infty} f(t) g(x-t)\,dt.$$

Bu ifadə f və g funksiyalarının bükülməsi (kompazisiya) adlanır. Bu inteqral heç də həmişə yığılmaz. Lakin əgər $f, g \in L_1(-\infty, \infty)$ olarsa, onda (1) inteqralı sanki hər yerdə yığılır və $h(x) \in L_1(-\infty, \infty)$ olur. Əgər f və g-kəsilməz, məhdud və mütləq inteqrallanandırsa, onda $f * g = h(x)$ funksiyası da həmin xassələr malik olur. Deməli, həmin şərtlər daxilində həmişə $h(x)$ adi funksiya olub, $h \in L_1(-\infty,\infty)$ olur. Doğrudan da, g-məhdud olduğundan,

$$|f(t)g(x-t)| \le M|f(t)|.$$

Buradan çıxır ki, $|h(x)| \le M < \infty$ və $h(x) \in L_1(-\infty,\infty)$.

Teorem. Tutaq ki, $f, g \in L_1$. Onda

$$F[f(x) * g(x)] = F[f(x)] \cdot F[g(x)].$$

İsbatı. $h \equiv f * g \in L_1$ olduğundan $F[h]$ var və

$$F[f(x) * g(x)] = F[h] = \int_{-\infty}^{\infty} h(x) e^{-ix\xi}\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ix\xi} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} f(t) g(x-t)\, dt \right\} dx =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) dt \int g(x-t)\, e^{-ix\xi} dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) dt \left[\int g(y)\, e^{-i(t+y)\xi} dy \right] =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot e^{-itx}\, dt \cdot \int_{-\infty}^{\infty} g(y) \cdot e^{-iyx}\, dy = F[f(x)] \cdot F[g(x)] .$$

Beləliklə göstərdik ki, $f, g \in L_1$ funksiyalarının kompozisiyasının Furye çevirməsi onların Furye çevirmələrinin hasilinə bərabərdirö

Qeyd edək ki, adi funksiyalar üçün bu xassə $L_1(-\infty,\infty)$ və $L_2(-\infty,\infty)$ fəzalarında doğrudur.

4. L_2 fəzasında Furye çevirməsi. Planşerel teoremi. Tutaq ki, f funksiyası iki dəfə kəsilməz diferensiallanır və finit funksiyadır. Onda onun adi Furye çevirməsi var və

$$g(\sigma) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\sigma x}\, dx,$$

$$F[f''(x)] = (i\sigma)^2 F[f(x)],$$

$$|\sigma^2| |g(\sigma)| \le \|f''(x)\|_{L_1} = C < \infty.$$

Buradan çıxır ki, $g(\sigma)$- cəmlənən funksiyadır, $g \in L_1$. Onda alırıq:

$$\int_{-\infty}^{\infty}|f(x)|^2 e^{-i\sigma x}dx=\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\cdot\overline{f(x)}e^{-i\sigma x}dx=\int_{-\infty}^{\infty}f(x)dx\int_{-\infty}^{\infty}\overline{g(\sigma)}e^{i\sigma x}d\sigma=$$
$$=\int\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\overline{g(\sigma)}e^{-i\sigma x}dx\,d\sigma, \tag{1}$$

burada f (x-ə nəzərən) g (σ-ya nəzərən) L_1-ə daxil olduğundan $f\cdot g\in L_1$ olur. Onda Fubini teoreminə əsasən (1)-dən alırıq ki,

$$\int_{-\infty}^{\infty}|f(x)|^2 dx=\int\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\overline{g(\sigma)}e^{-i\sigma x}dx\,d\sigma=\int_{-\infty}^{\infty}\overline{g(\sigma)}d\sigma\left(\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\,e^{-i\sigma x}dx\right)=$$
$$=\int_{-\infty}^{\infty}\overline{g(\sigma)}g(\sigma)\,d\sigma=\int_{-\infty}^{\infty}|g(\sigma)|^2\,d\sigma\quad,$$

yəni

$$\int_{-\infty}^{\infty}|f(x)|^2 dx=\int_{-\infty}^{\infty}|g(\sigma)|^2 d\sigma, \tag{2}$$

və yaxud

$$\|f\|_{L_2}=\|g\|_{L_2},\quad g=F[f].$$

İndi fərz edək ki, $f\in L_2(-\infty,\infty)$-ixtiyari funksiyadır. Aydındır ki, $f\in L_1$ olmaya bilər (məsələn $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$). Ona görə $F[f]$ Furye çevirməsi olmaya bilər. L_2 fəzasında Furye çevirməsi müxtəlif qaydalarla daxil edilə bilər. Məsələn, (Loran-Şvars) $f\in L_2$ funksiyasını $f_n\in C^2(R)$ və finit olan funksiyalar ardıcıllığını L_2 mənada approksimasiya edək (belə ardıcıllıqlar çoxluğu L_2-də hər yerdə sıx çoxluqdur):

$$\lim_{n\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty}|f_n(x)-f(x)|^2 dx=0.$$

Biz gördük ki, $f \in L_1$ olduqda onun Furye çevirməsi sonludur, hər yerdə məhduddur, müntəzəm kəsilməz funksiyadır və $g(\sigma) \to 0$, $|\sigma| \to \infty$. İndi tutaq ki, $f \in L_2$. Bu halda $f \in L_1$ olmaya bilər və onun adi Furye çevirməsi yoxdur. Lakin aşağıdakı klassik nəticə doğrudur:

Teorem (Planşerel). $f \in L_2(-\infty,\infty)$ olduqda

$$g(\sigma) = \lim_{A\to\infty} \int_{-A}^{A} f(x)e^{-ix\sigma}dx \tag{3}$$

limiti (orta kvadratik mənada) var və $g(\sigma) \in L_2(-\infty,\infty)$, belə ki:

$$1. \int_{-\infty}^{\infty} |g(\sigma)|^2 d\sigma = \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx \ ,$$

$$2. f(x) = \underset{A\to\infty}{l.i.m} \frac{1}{2\pi} \int_{-A}^{A} g(y)e^{iyx}dy \ . \tag{4}$$

Belə olduqda $g(\sigma)$ funksiyası f –in Furye çevirməsi adlanır (4) –tərs Furye çevirməsi adlanır (isbatı bax. N.Viner, [1], səh.93).

Qeyd edək ki, (3) və (4) münasibətlərində $l.i.m$ işarəsi L_2 fəzasında yığılma (orta kvadratik) başa düşülür, yəni: Əgər $f_n \in L_2$ isə, onda

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |f_n(x) - f(x)|^2 dx = 0$$

olduqda deyirik ki, $\{f_n\}$ f -ə orta kvadratik yığılır və onu

$$\underset{n\to\infty}{l.i.m} \ f_n(x) = f(x)$$

kimi yazırıq. Məlumdur ki, orta kvadratik yığılmaqdan nöqtəvi yığılma çıxmır və tərsinə. Ola bilər ki, orta kvadratik yığılan ardıcıllıq heç bir nöqtədə yığılmasın. Məsələn, $f_n(x) = n^{3/2} x e^{-n^2x^2} \in L_2(-1,1)$ və hər bir x nöqtəsində $f_n(x) \to 0$ $(n \to \infty)$ olsa da

$$\int_{-1}^{1}|f_n(x)|^2 dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2},$$

yəni $f_n(x)$ orta kvadratik mənada sıfra yığılmır. Deməli, sanki hər yerdə yığılmaqdan orta kvadratik yığılma çıxmır. Lakin ardıcıllıq həm orta kvadratik mənada, həm də sanki hər yerdə yığılırsa, onda limit funksiyalar üst-üstə düşür.

Beləliklə, $f \in L_2(-\infty,\infty)$ olduqda düz və tərs Furye çevirməsi orta kvadratik yığılma mənada vardır.

Nəticə. Teorem (Parseval). Əgər $f_1, f_2 \in L_2$ və

$$g_1(\sigma) = F[f_1(x)],$$

$$g_2(\sigma) = F[f_2(x)]$$

isə , onda

$$\int_{-\infty}^{\infty} g_1(\sigma)\overline{g_2(\sigma)}\, d\sigma = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(x)\overline{f_2(x)}\, dx \ . \qquad (5)$$

Buradan xüsusi halda alınır ki:

$$\int_{-\infty}^{\infty}|g(\sigma)|^2 d\sigma = \int_{-\infty}^{\infty}|f(x)|^2 dx.$$

(5) Parseval bərabərliyindən belə nəticələr çıxır:

$$1. \int_{-\infty}^{\infty} g_1(\sigma)g_2(\sigma)d\sigma = \int f_1(x)f_2(-x)dx,$$

$$2. \int g_1(t)g_2(\sigma - t)dt = \int f_1(x)f_2(x)\, e^{-i\sigma x}dx \ ,$$

yəni

$$F[f_1 \cdot f_2] = g_1 * g_2,$$

$$3. \int g_1(x)g_2(x)\, e^{-i\sigma x}dx = .\int f_1(x)f_2(\sigma - x)dx,$$

yəni

$$F^{-1}[g_1 \cdot g_2] = f_1 * f_2.$$

Buradan $\forall f_1, f_2 \in L_2$ üçün alınır ki,

$$F[f_1 * f_2] = F[f_1] \cdot F[f_2].$$

Misal 1. Tutaq ki,

$$f(x) = \begin{cases} 1, & |x| \le A \\ 0, & |x| > A \end{cases}, A > 0.$$

Onda $f \in L_1$ və

$$g(\sigma) = F[f(x)] = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\sigma x} f(x) dx = \int_{-A}^{A} e^{-i\sigma x} dx =$$

$$\frac{1}{-i\sigma}\left[e^{-i\sigma A} - e^{i\sigma A}\right] = -\frac{1}{i\sigma}[\cos\sigma A - i\sin\sigma A - \cos\sigma A - i\sin\sigma A] =$$

$$= \frac{2\sin\sigma A}{\sigma},$$

buradan

$$|\sigma g(\sigma)| \le 2,$$

deməli, $f(x)$-kəsilməz diferensiallanan deyil, amma yenə də $|\sigma g(\sigma)|$ məhduddur. Lakin aşkardır ki, $|\sigma^2 g(\sigma)|$-məhdud deyil.

$f(x)$-finit funksiyadır, $\sup p f(x) = [-A, A]$. Onda $\forall x$ üçün $x^m f(x) \in L_1(-\infty, \infty)$. Onda $g(\sigma)$- sonsuz diferensiallanan funksiya olur, çünki $\forall m$

$$g^{(m)}(\sigma) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)(-ix)^m e^{-i\sigma x} dx,$$

və

$$\left|g^{(m)}(\sigma)\right| \le \left\|x^m f(x)\right\|_{L_1} < \infty.$$

Aydındır ki, $\|f\|_{L_1} = 2A$ və $|g(\sigma)| \le 2A.$

Misal 2. Tutaq ki,

$$f(x) = e^{-ax^2}, \quad a > 0.$$

Aydındır ki, $f \in L_1(-\infty, \infty)$. Onda $F[f(x)]$ var, göstərək ki:

$$g(\sigma) = F[f(x)] = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2} \cdot e^{-i\sigma x}\, dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}}.e^{-\frac{\sigma^2}{4a}}.$$

Aydındır ki, $g'(\sigma)$ törəməsi var, çünki

$$g'(\sigma) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2 - i\sigma x}(-ix)dx$$

inteqralı müntəzəm yığılır. Onda alırıq:

$$g'(\sigma) = \frac{i}{2a}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\sigma x}\, d\left(e^{-ax^2}\right) =$$

$$= \frac{i}{2a} e^{-ax^2} \cdot e^{-i\sigma x} \Big/_{-\infty}^{\infty} - \frac{i}{2a}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2}(-i\sigma) e^{-i\sigma x}\, dx =$$

$$= -\frac{\sigma}{2a}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2} e^{-i\sigma x}\, dx = -\frac{\sigma}{2a} \cdot g(\sigma),$$

buradan

$$\frac{g'}{g} = -\frac{\sigma}{2a},$$

$$g(\sigma) = c \cdot e^{-\frac{\sigma^2}{4a}}.$$

Lakin $\sigma = 0$ olduqda

$$c = g(0) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2}\, dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}}.$$

Deməli,

$$F\left[e^{-ax^2}\right] \equiv g(\sigma) = \sqrt{\frac{\pi}{a}}\; e^{-\frac{\sigma^2}{4a}}.$$

Xüsusi halda, ($a=\dfrac{1}{4t}$, $t>0$ olduqda)

$$g(\sigma)=2\sqrt{\pi t}\,e^{-t\sigma^2},$$

Buradan

$$F_x\left[\frac{1}{2\sqrt{\pi t}}e^{-\frac{x^2}{4t}}\right]=e^{-t\sigma^2},$$

və

$$F_\sigma^{-1}\left[e^{-t\sigma^2}\right]=\frac{1}{2\sqrt{\pi t}}e^{-\frac{x^2}{4t}}.$$

Qeyd 1. Məlumdur ki, (bax: fəsil 6)

$$E(x,t)=\frac{\theta(t)}{2\sqrt{\pi t}}e^{-\frac{x^2}{4t}}$$

funksiyası istilikkeçirmə tənliyi üçün Koşi məsələsinin fundamental həllidir, başqa sözlə, E funksiyası

$$\frac{\partial E}{\partial t}=\frac{\partial^2 E}{\partial x^2},\ E/_{t=0}=\delta(x) \tag{5}$$

xüsusi Koşi məsələsinin həllidir. Belə olduqda (5) tənliyi üçün ümumi Koşi məsələsinin həlli belə düsturla verilir($u(x,0)=u_0(x)$):

$$u(x,t)=E(x,t)*u_0(x)=\int_{-\infty}^{\infty}E(\xi,t)u_0(x-\xi)d\xi.$$

Qeyd 2. Adətən

$$g(\sigma)=\int_{-\infty}^{\infty}e^{-ax^2-i\sigma x}dx$$

inteqralını analitik funksiya üçün Koşi teoremini tətbiq etməklə hesablayırlar. Bunun üçün həmin inteqralı belə çevirək:

$$g(\sigma)=\int_{-\infty}^{\infty} e^{-a\left[x^2+\frac{i\sigma x}{a}\right]}dx=\int_{-\infty}^{\infty} e^{-a\left[\left(x+\frac{i\sigma}{2a}\right)^2+\frac{\sigma^2}{4a^2}\right]}dx=$$

$$=e^{-\frac{\sigma^2}{4a}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-a\left(x+\frac{i\sigma}{2a}\right)^2}dx=e^{-\frac{\sigma^2}{4a}}\int_{i\lambda-\infty}^{i\lambda+\infty} e^{-az^2}\,dz=$$

$$=e^{-\frac{\sigma^2}{4a}}\lim_{A\to\infty}\int_{i\lambda-A}^{i\lambda+A} e^{-az^2}\,dz, \qquad (*)$$

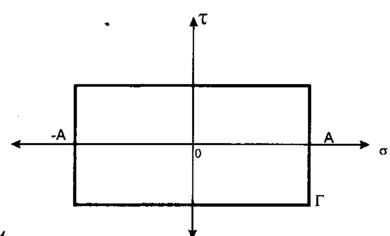
(burada $z=x+i\lambda$, $\lambda=\dfrac{\sigma}{2a}$ işarə olunur).

e^{-az^2} -tam analitik funksiyadır, onun qapalı kontur üzrə inteqralı 0-a bərabər olur. Belə bir Γ qapalı konturuna baxaq:

$$\Gamma=[i\lambda-A,-A]+[-A,A]+[A,i\lambda+A]+[i\lambda+A,i\lambda-A]$$

Onda

$$\int_{\Gamma} e^{-az^2}\,dz=0.$$



Buradan alırıq ki,

$$\int_{i\lambda+A}^{i\lambda-A} e^{-az^2}\,dz+\int_{i\lambda-A}^{-A}+\int_{-A}^{A}+\int_{A}^{i\lambda+A} e^{-az^2}\,dz=0.$$

Onda

$$\int_{i\lambda-A}^{i\lambda+A} e^{-az^2}\,dz=\int_{i\lambda-A}^{-A}+\int_{-A}^{A}+\int_{A}^{i\lambda+A}.$$

Deməli

$$\int_{i\lambda-\infty}^{i\lambda+\infty} e^{-az^2}\,dz=\lim_{A\to\infty}\left[\int_{i\lambda-A}^{-A}+\int_{-A}^{A}+\int_{A}^{i\lambda+A}\right]. \qquad (**)$$

Buradakı toplanan inteqrallardan 1-ci və 3-cü inteqrallar $A \to \infty$ olduqda $\to 0$ olur. Doğrudan da, məsələn, 3-cü toplanana baxaq. $[A, i\lambda + A]$ düz xətt parçası üzərində $z = A + iy$, $dz = idy$ olduğundan alınır ki,

$$\left|\int_A^{i\lambda+A} e^{-az^2} dz\right| = \left|\int_0^{\lambda} e^{-a\left(A^2-y^2+2iAy\right)} dy\right| \le e^{-a\left(A^2-y^2\right)}|\lambda|$$

$A \to \infty$ olduqda sağ tərəf $\to 0$ olur. Beləliklə, $(**)$ - dan alırıq ki,

$$\int_{i\lambda-\infty}^{i\lambda+\infty} e^{-az^2} dz = \lim_{A\to\infty}\int_{-A}^{A} e^{-ax^2} dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}}.$$

Onda $(*)$-dan çıxır ki,

$$g(\sigma) = \sqrt{\frac{\pi}{a}}\, e^{-\frac{\sigma^2}{4a}}.$$

Beləliklə,

$$F\left[e^{-ax^2}\right] = \sqrt{\frac{\pi}{a}}\, e^{-\frac{\sigma^2}{4a}},$$

§ 2. Əsas fəzaların Furye çevirmələri.

1. **D fəzasında Furye çevirməsi.** Tutaq ki, $\varphi \in D$. Fərz edək ki, $\sup p\varphi = [-a, a]$. Onda

$$F[\varphi] \equiv \phi(\sigma) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) e^{-ix\sigma} dx \qquad (1)$$

inteqralı $\varphi(x)$-in Furye çevirməsi adlanır.

Əslində (1) inteqralı sonlu $[-a, a]$ parçası üzrə götürülür. Ona görə də $\phi(\sigma)$ funksiyası kompleks oblasta davam etdirilə bilər. Məsələn, $s = \sigma + i\sigma$ üçün

$$\phi(s) = \phi(\sigma + i\sigma) = \int_{-a}^{a} \varphi(x) e^{-isx} dx = \int_{-a}^{a} \varphi(x) e^{\tau x} e^{-i\sigma x} dx \quad . \qquad (2)$$

Bu inteqral sonludur. Əgər (2)-ni diferensiallasaq (m dəfə)

$$\phi^m(s)=\int_{-a}^{a}(-ix)^m\varphi(x)e^{-isx}dx=F\left[(-ix)^m\varphi\right] \tag{3}$$

alınan inteqral $\forall m$ üçün üığılır. Deməli $\phi(s)$- tam analitik funksiya olur.

Əgər $P(x)$-ixtiyari polinomdursa, onda sonuncu (3) xassəsini daha ümumi halda belə yazmaq olar:

$$P\left(\frac{d}{ds}\right)F[\varphi(x)]=F[P(-ix)\varphi(x)] \ . \tag{4}$$

Tərsinə, törəmənin Furye çevirməsini hesablayaq.

$$F[\varphi'(x)]=\int_{-a}^{a}\varphi'(x)e^{-isx}dx=\varphi(x)e^{-isx}/_{-a}^{a}+$$

$$+\int_{-a}^{a}is\varphi(x)e^{-isx}dx=is\phi(s)=(is)F[\varphi(x)] \ .$$

Bu prosesi davam etdirdikdə alırıq ki, $\forall m$ üçün

$$F\left[\varphi^{(m)}(x)\right]=(is)^m F[\varphi(x)]=(is)^m\phi(s) \ . \tag{5}$$

Əgər $P\left(\frac{d}{dx}\right)$ -sabit əmsallı ixtiyari polinomdursa, onda

$$F\left[P\left(\frac{d}{dx}\right)\varphi(x)\right]=P(is)F[\varphi(x)]=P(is)g(s). \tag{6}$$

Aydındır ki,

$$F\left[P\left(i\frac{d}{dx}\right)\varphi(x)\right]=P(-s)F[\varphi] \ .$$

(5) ifadəsindən belə bir qiymətlənmə alınır:

$\forall m$ üçün

$$|s|^m|\phi(s)|=\left|\int_{-a}^{a}\varphi^{(m)}(x)e^{-isx}dx\right|=\left|\int_{-a}^{a}\varphi^{(m)}(x)e^{-isx}e^{\tau x}dx\right|\le$$

$$\le\int_{-a}^{a}\left|\varphi^{(m)}(x)\right|e^{|\tau|a}dx\le c_m e^{a|\tau|},$$

burada

$$c_m = \int_{-a}^{a} \left|\varphi^{(m)}(x)\right| dx = \left\|\varphi^{(m)}(x)\right\|_{L_1} < \infty.$$

Teorem. $\forall \varphi \in D$-nin Furye çevirməsi $\phi(s)$ tam analitik funksiya olub belə bir qiymətlənmə münasibətini ödəyir:

$$\left|s^m \phi(s)\right| \le c_m e^{a|\tau|}. \tag{7}$$

Tərsinə, $(*)$ münasibətini ödəyən hər bir $\phi(s)$ tam analitik funksiyası müəyyən $\varphi \in D$ elementinin Furye çevirməsi olur.

Doğrudan da, tərs Furye çevirməsi belə daxil edilir:

$$\varphi(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \phi(\sigma) e^{i\sigma x} d\sigma . \tag{8}$$

Şərtə görə $\phi(s)$ tam analitik funksiyası (7) münasibətini ödəyir, onda $\tau = 0$ qəbul etdikdə (7)-dən alınır ki,

$$\left|\sigma^m \phi(\sigma)\right| \le c_0 . \tag{9}$$

Deməli, $|\sigma| \to \infty$ olduqda $\phi(\sigma)$ funksiyası $\frac{1}{|\sigma|}$-nin istənilən dərəcəsindən tez sıfra yaxınlaşır, onda (8) inteqralı x-ə nəzərən müntəzəm və mütləq yığılır. Ona görə də (8)-dən tapılan $\varphi(x) \in C^{\infty}(R)$ olur. Məsələn, $\forall q$ üçün

$$\left|\varphi^{(q)}(x)\right| = \frac{1}{2\pi} \left| \int_{-\infty}^{\infty} (i\sigma)^q \phi(\sigma) e^{i\sigma x} d\sigma \right| < \infty .$$

Buradakı inteqral mütləq və müntəzəm yığılır. İndi göstərək ki, (8)-dən təyin olunan $\varphi(x)$ finit funksiyadır. Şərtə görə $\phi(s)$-analitik funksiya olduğundan ədəd oxu üzrə olan (8) inteqralını ona paralel olan istənilən düz xətt üzrə inteqralla əvəz etmək olar. Onda (8) inteqralını belə yazmaq olar:

$$\varphi(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\phi(\sigma)e^{i\sigma x}d\sigma=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\phi(\sigma+i\tau)e^{i(\sigma+i\tau)x}d\sigma=$$

$$=\frac{1}{2\pi}e^{\tau x}\int_{-\infty}^{\infty}\phi(\sigma+i\tau)e^{i\sigma x}d\sigma\ . \qquad \textbf{(10)}$$

$|x|>a$ olsun. $t>0$ ədədini elə seçək ki, $x\tau=t|x|$ olsun, $(t=|\tau|)$. İndi (7) qiymətlənməsini $q=0$ və $q=2$ üçün yazaq:

$$|\phi(s)|\le c_0\,e^{a|\tau|}, \qquad (11)$$

$$|\phi(s)|\le\frac{c_2\,e^{a|\tau|}}{|s|^2}, \qquad (12)$$

buradan alırıq ki,

$$|\phi(s)|\le e^{a|\tau|}\min\left\{c_0,\frac{c_2}{|s|^2}\right\}\le c\frac{e^{a|\tau|}}{1+|s|^2}\le c\frac{e^{a|\tau|}}{1+\sigma^2}\ .$$

Bunu nəzərə alqıqda (10)-dan alınır ki,

$$|\varphi(x)|=\frac{1}{2\pi}e^{-\tau x}\int_{-\infty}^{\infty}c\frac{e^{a|\tau|}}{1+|\sigma|^2}d\sigma=c_1e^{-t|x|+at}=c_1\,e^{t(a-|x|)}$$

c_1 sabiti t-dən asılı deyil. Onda burada $t\to\infty$ olduqda limitə keçsək, $\varphi(x)=0$ alarıq.

Furye çevirməsinin bir maraqlı xassəsini də qeyd edək. (İkiqat Furye çevirməsi):

$$FF[\varphi(x)]=2\pi\varphi(-x).$$

Doğrudan da, $F[\varphi(x)]=\phi(\sigma)$ olduqda

$$\varphi(x)=F^{-1}[\phi(\sigma)]=\frac{1}{2\pi}\int\phi(\sigma)e^{i\sigma x}\,d\sigma.$$

Onda

$$\varphi(-x)=\frac{1}{2\pi}\int\phi(\sigma)e^{-i\sigma x}\,d\sigma=\frac{1}{2\pi}F[\phi(\sigma)].$$

Deməli,

$$F[\phi(\sigma)] = 2\pi\,\phi(-x),$$

yəni

$$FF[\varphi(x)] = 2\pi\,\varphi(-x).$$

2. Z fəzası.

D fəzasının bütün elementlərinin Furye çevirmələrindən ibarət çoxluğu Z ilə işarə edək. Beləliklə, Z elə $\phi(s)$ tam analitik funksiyaları çoxluğudur ki, onlar üçün aşağıdakı qiymətlənmə ödənilir: $\forall q \geq 0$ üçün

$$|s|^q |\phi(s)| \leq c_q e^{a|\tau|}, \quad q = 0,1,2,\ldots \qquad (*)$$

(burada a və c_q yalnız ϕ-dən asılı ola bilər). F Furye çevirməsi D ilə Z arasında qarşılıqlı birqiymətli və kəsilməz uyğunluq yaradır. Z-xətti fəzadır, D-də hər bir xətti əməliyyata Z-də uyğun xətti əməliyyat vardır. Məsələn, D-də diferensiallama F vasitəsilə Z-də is-arqumentinə vurmaya keçir və tərsinə, D-də $-ix$ arqumentinə vurma əməliyyatı F vasitəsilə Z-də diferensiallamaya keçir.

Bu cür xassələri yuxarıda verilən (3)-(6) düsturları isbat edir. Z fəzasında istənilən $P(s)$ polinomuna vurma əməliyyatı Z-dən kənara çıxmır. $\varphi_\nu \to 0$ (D-də) olduqda $F[\varphi_\nu] \to 0$ (Z-də) olur və tərsinə. D fəzasında $\varphi(x+h)$ yerdəyişmə əməliyyatı F vasitfsilə Z-də e^{ish} funksiyasına vurmaya keçir.

Misal. $\varphi \in D$ olduqda

$$F[\varphi(x+h)] = \int \varphi(x+h) e^{-ixs}\,dx = \int \varphi(t) e^{-is(t-h)}\,dt =$$

$$= e^{ish} \int \varphi(x) e^{-isx}\,dx = e^{ish} F[\varphi(x)] = e^{ish}\phi(s).$$

Xüsusi halda,

$$F[\varphi(x+1)] = e^{is}\phi(s)\ .$$

Bunun kimi də, D-də e^{-ixh} funksiyasına vurma operatoru F vasitfsilə Z-də yerdəyişmə operatoruna keçir:

$$\phi(\sigma+h)=\int\varphi(x)e^{-i(\sigma+h)x}\,dx=\int e^{-ihx}\cdot\varphi(x)e^{-i\sigma x}\,dx=F\left[e^{-ihx}\varphi(x)\right].$$

Qeyd. $k\neq 0$ olduqda

$$F[\varphi(kx)]=\int\varphi(kx)e^{-i\sigma x}\,dx=\frac{1}{|k|}\int\varphi(x)e^{-i\sigma\frac{x}{k}}=\frac{1}{|k|}F[\varphi(\tfrac{x}{k})]=\frac{1}{|k|}\phi\left(\frac{\sigma}{k}\right).$$

Xüsusi halda $(k=-1)$

$$F[\varphi(-x)]=\phi(-\sigma).$$

Deməli, tək funksiyanın Furye çevirməsi də tək funksiyadır. Göstərmək olar ki, $\forall h$ ədədi üçün Z fəzasında aşağıdakı Teylor sırası yığılır $(\phi\in Z)$:

$$\phi(s+h)=\sum_{q=0}^{\infty}\frac{h^q}{q!}\phi^{(q)}(s).$$

Doğrudan da,

$$e^{-ixh}=\sum_{q=0}^{\infty}\frac{h^q}{q!}(-ix)^q$$

olduğundan $\forall\varphi\in D$ üçün

$$\varphi(x)e^{-ixh}=\sum_{q=0}^{\infty}\frac{h^q}{q!}(-ix)^q\varphi(x)$$

sırası D-də yığılır. Onda F kəsilməz olduğundan,

$$F\left[\varphi(x)e^{-ixh}\right]=\sum_{q=0}^{\infty}\frac{h^q}{q!}F\left[(-ix)^q\varphi(x)\right],$$

yəni

$$\phi(s+h)=\sum_{q=0}^{\infty}\frac{h^q}{q!}\phi^{(q)}(s).$$

3. Z **fəzasında xətti funksional.** Z' **fəzası.** Z fəzasında təyin olunmuş xətti kəsilməz funksional ümumiləşmiş (analitik) funksiya adlanır. Z fəzası- tam analitik $\phi(s)$ funksiyalarından ibarət çoxluqdur, belə ki, $\forall q$ üçün

$$\left|s^q \phi(s)\right| \le c_q e^{a|\tau|} \quad (*)$$

Ədəd oxunda $(s=\sigma)$ Z fəzası S-fəzasınının hissəsi olur. Tutaq ki, $g(\sigma)$-adi funksiyadır. Onda $\forall \varphi(\sigma) \in Z$ üçün

$$\langle g(\sigma), \phi(\sigma)\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} g(\sigma)\phi(\sigma)d\sigma \quad (1)$$

Z -də requlyar funksional olur. Əgər L-müəyyən əyridirsə, onda

$$\langle g, \phi\rangle = \int_L g(s)\phi(s)ds$$

Funksionalı analitik funksional adlanır. Məsələn,

$$\langle \delta(s-s_0), \phi(s)\rangle = \phi(s_0),\ s_0$$

-kompleks ədəddir, $\phi(s)$ analitik funksiya olduğundan, Koşi düsturuna əsasən alınır ki,

$$\phi(s_0) = \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\phi(s)ds}{s-s_0},$$

burada L əyrisi z_0 nöqtəsini daxilində saxlayan ixtiyari qapalı konturdur. Deməli $\delta(s-s_0)$ funksiyası $\frac{1}{2\pi i}\frac{1}{s-s_0}$ funksiyasına uyğun gələn analitik funksionaldır.

Z fəzasında verilən bütün ümumiləşmiş funksiyalar çoxluğunu Z' ilə işarə edirik. Z' xətti fəzadır.

Əgər $h(s)$-tam analitik funksiyadırsa, belə ki,

$$|h(s)| \le c e^{b|\tau|}(1+|s|)^q,$$

onda $\forall \phi \in Z$ üçün $h\phi \in Z$ olur. Onda $g \in Z'$ ümumiləşmiş funksiyasını $h(s)$-ə vurmaq olar:

$$\langle h(s)g(s), \phi(s)\rangle = \langle g(s), h(s)\phi(s)\rangle.$$

Z' fəzasında diferensiallama operatoru anoloji qaydada daxil edilir: $g \in Z'$ olduqda

$$\langle g', \phi\rangle = -\langle g, \phi'\rangle.$$

Beləliklə $\forall g \in Z'$ üçün $\forall k$ üçün $g^{(k)}(s)$ törəməsi var. Daha artıq demək olar: hər bir $g^{(k)}(s)$ törəməsi özü də analitik funksional olur. Nə deməkdir bu?

$\forall g \in Z'$ üçün və $\forall h$ ədədi üçün

$$g(s+a)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{a^K}{k!}g^{(k)}(s) \tag{2}$$

buradakı sıra Z' fəzasında yığılma mənada yığılır, $g(s+a)$ isə $g(s)$ funksiyasının a qədər yerdəyişməsidir,

$$\langle g(s+a),\phi\rangle=\langle g(s),\phi(s-a)\rangle.$$

Göstərək ki, (2) sırası Z'-də yığılır. Doğrudan da, $\forall\phi\in Z$ üçün

$$\left\langle g^{(k)}(s)\frac{a^k}{k!},\phi\right\rangle=\left\langle g(s),\frac{(-1)^k a^k}{k!}\phi^{(k)}(s)\right\rangle$$

və $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k a^k}{k!}\phi^{(k)}(s)$ sırası Z-də $\phi(s-a)$ qiymətinə yığıldığı üçün

$$\left\langle\sum_{k=0}^{\infty}g^{(k)}(s)\frac{a^k}{k!}\phi^{(k)}(s)\right\rangle=\langle g(s),\phi(s-a)\rangle=\langle g(s+a),\phi(s)\rangle$$

olur, yəni

$$\langle g(s+a),\phi\rangle=\left\langle\sum_{k=0}^{\infty}g^{(k)}(s)\frac{a^k}{k!},\phi\right\rangle,$$

yəni (2) doğrudur.

Misal. $\forall a$ kompleks ədədi üçün

$$\delta(s+a)=\sum_{k=0}^{\infty}\delta^{(k)}(s)\frac{a^k}{k!},$$

burada

$$\langle \delta(s+a), \phi(s)\rangle = \langle \delta(s), \phi(s-a)\rangle = \phi(-a).$$

Beləliklə, Z' fəzasının elementləri $\forall g \in Z'$ nəinki sonsuz diferensiallanandır, həm də analitik funksionaldır, yəni onları Z' mənada yığılan Teylor sırasına ayırmaq mümkündür.

$g(s) = \frac{1}{s}$ funksiyasına uyğün Z'-də müxtəlif analitik funksional qurmaq olar. Məsələn,

$$\langle g_1, \phi\rangle = \int_{-\infty+ai}^{\infty-ai} \frac{\phi(s)}{s} ds, \qquad (a>0)$$

$$\langle g_2, \phi\rangle = \int_{-\infty+ai}^{\infty-ai} \frac{\phi(s)}{s} ds, \qquad (a<0)$$

1-ci inteqralda inteqrallama ox oxuna paralel və yuxarı yarımmüstəvi üzərində aparılır, 2-ci də ədəd oxuna paralel, lakin aşağı yarımmüstəvidə inteqrallama aparılır. Həm g_1, həm də g_2 funksionalları

$$s\, g(s) = 1$$

tənliyinin həlləri olur.

Beləliklə, əgər $g \in Z'$ funksionalını $\forall \phi \in Z$ üçün

$$\langle g, \phi\rangle = \int_{\Gamma} g(s)\phi(s) ds$$

şəklində yazmaq olursa, onda g-analitik funksional adlanır, burada $g(s)$-analitik funksiya, Γ-kompleks müstəvidə müəyyən konturdur.

4. S **fəzasında Furye çevirməsi.** S fəzası - $|x| \to \infty$ olduqda özü və törəmələri $\frac{1}{|x|}$-in istənilən dərəcəsindən daha tez azalan $\varphi(x)$ əsas funksiyaları fəzasıdır. Qısa desək, $\varphi \in S$ olduqda:

1) $S \subset C^{\infty}(R)$,

2) $\forall l$ və $m \geq 0$ tam ədədləri üçün

$\left|x^l \varphi^{(m)}(x)\right| \leq c_{m,l} < \infty$,

3) $x^l\varphi^{(m)}(x)\in L_1(-\infty,\infty)$,

4) $\left(x^l\varphi^{(m)}(x)\right)^{(m)}\in L_1(-\infty,\infty)$.

5). $\left|\left(x^l\varphi^{(m)}(x)\right)^{(m)}\right|\le c_{m,l}<\infty$.

6). $\left|x^k\varphi(x)\right|\le\dfrac{c_k}{1+x^2}$, $k\ge 0$. və s.

Bu münasibətlərdən dərhal çıxır ki, $S\subset L_1(-\infty,\infty)$ yəni, S-də düz və tərs klassik Furye çevirməsi var :

$$F[\varphi(x)]=\phi(\sigma)\equiv\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(x)e^{-i\sigma x}\,dx,\varphi\in S\ , \tag{1}$$

$$F^{-1}[\varphi(x)]=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(\sigma)e^{-i\sigma x}\,d\sigma,\ \ \varphi\in S\ . \tag{2}$$

Bundan əlavə $\phi(\sigma)$-nı istənilən qədər diferensiallamaq mümkündür.
F-in bir neçə xassələrini qeyd edək:

$$1. F\left[\varphi^{(m)}(x)\right]=(i\sigma)^m\phi(\sigma),$$

$$2. \phi^{(m)}(\sigma)=F\left[(-ix)^m\varphi(x)\right],$$

$$3. \left|\sigma^m\phi^{(q)}(\sigma)\right|\le\left\|\left(x^q\,\varphi(x)\right)^{(m)}\right\|_{L_1}<\infty.$$

Məsələn, hissə-hissə inteqrallamaqla və $|x|\to\infty$ olduqda $\varphi(x)\to 0$ nəzərə alınmaqla

$$F\left[\varphi^{(m)}(x)\right]=\int\varphi^{(m)}(x)e^{-i\sigma x}\,dx=(i\sigma)^m F[\varphi(x)]\ .$$

Göstərək ki, $\varphi(x)\in S$ olduqda $F[\varphi]\in S$ olur. Doğrudan da,

$$\phi(\sigma)=F[\varphi]=\int\varphi(x)e^{-i\sigma x}\,dx$$

düsturundan $\forall m$ üçün alırıq:

$$\phi^{(m)}(\sigma)=F\left[(-ix)^m\varphi(x)\right]=F[\varphi_1(x)],$$

burada

$$\varphi_1(x)\equiv(-ix)^m\varphi.$$

Aşkardır ki, $\varphi_1(x)\in S$. Həm də $\forall q$ üçün

$$F\left[\varphi_1^{(q)}(x)\right]=(i\sigma)^q F[\varphi_1]$$

olduğundan alırıq ki,

$$\sigma^q\phi^{(m)}(\sigma)=\sigma^q F[\varphi_1(x)]=\frac{1}{i^q}(i\sigma)^q F[\varphi_1]=i^{-q}F\left[\varphi_1^{(q)}(x)\right],$$

buradan

$$(i\sigma)^q\cdot\phi^{(m)}(\sigma)=F\left[\varphi_1^{(q)}(x)\right]=\int_{-\infty}^{\infty}\varphi_1^{(q)}(x)e^{-i\sigma x}\,dx,$$

$$\left|\sigma^q\phi^{(m)}(\sigma)\right|\le\int_{-\infty}^{\infty}\left|\varphi_1^{(q)}(x)\right|dx<\infty.$$

Deməli, $\phi(\sigma)\in C^{\infty}(R)$ və $|\sigma|\to\infty$ olduqda $\phi^{(m)}(\sigma)$ törəmələri $\frac{1}{|\sigma|}$-nin istənilən dərəcəsindən daha tez sıfra yaxınlaşır, deməli $\phi\in S$. Beləliklə, F Furye çevirməsi S fəzasını özünü özünə inikas etdirir.

İndi tərsini isbat edək. Tutaq ki, $\phi(\sigma)\in S_\sigma$. Göstərək ki, elə $\varphi(x)\in S_x$ var ki, $\phi(\sigma)=F[\varphi(x)]$ olur. Tərs Furye operatoru belədir:

$$\varphi(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\phi(\sigma)e^{i\sigma x}\,d\sigma, \tag{3}$$

buradan

$$2\pi\varphi(-x)=\int_{-\infty}^{\infty}\phi(\sigma)e^{-i\sigma x}\,d\sigma=F[\phi(\sigma)]. \tag{4}$$

Şərtə görə $\phi(\sigma)\in S_\sigma$. Onda, teoremin 1-ci hissəsinə əsasən, $F[\phi(\sigma)]\in S_x$. Beləliklə, (4)-dən aldıq ki, $\varphi(-x)\in S_x$. Onda həm də

$\varphi(x) \in S_x$ olar.Bunu nəzərə aldıqda (4)-dən (tərs Furye çevirməsinin tərifinə görə) alınır ki,

$$\phi(\sigma) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} 2\pi\, \varphi(-x) e^{i\sigma x}\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) e^{-i\sigma x}\, dx = F[\varphi(x)].$$

Beləliklə, F^{-1} tərs Furye çevirməsi də S-i S-ə keçirir. İndi göstərək ki, $F[S] = S$.

Tutaq ki, $\phi \in S$. Onda $\varphi = F^{-1}[\phi]$ götürək.Belə olduqda

$$F[\varphi] = F\left[F^{-1}[\phi]\right] = \phi.$$

Deməli, $F[S] = S$.

Bunun kimi də, $F^{-1}[S] = S$ olur.

İndi göstərək ki, F-kəsilməz operatordur. $\varphi_\nu \xrightarrow{S} 0$ olsun. Onda

$$\phi_\nu(\sigma) \equiv F[\varphi_\nu(x)] = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_\nu(x) e^{-i\sigma x}\, dx$$

buradan alırıq:

$$(i\sigma)^m D^q \phi_\nu(\sigma) = \left(F\left[(-ix)^q \varphi_\nu(x)\right]\right)^{m},$$

yəni

$$|\sigma|^m \left|D^q \phi_\nu(\sigma)\right| \le \int \left|\left((-ix)^q \varphi_\nu(x)\right)_x^{(m)} e^{-i\sigma x}\right| dx \le \int \left|\left(x^q \varphi_\nu(x)\right)^{(m)}\right| dx < \infty. \quad (5)$$

Lakin Leybnis qaydasına əsasən,

$$\left(x^q \varphi_\nu(x)\right)^{(m)} = \sum_{j=0}^{m} c_m^j \left(x^q\right)^{(j)} \varphi_\nu^{(m-j)}(x), \quad (6)$$

S-də $\varphi_\nu \to 0$ olduğundan (6)-da hər toplanan müntəzəm olaraq sıfra yığılır. Deməli,

$$\left(x^q \varphi_\nu(x)\right)^{(m)} \rightrightarrows 0, \ \nu \to \infty.$$

Onda (5)-dən çıxır ki, $\forall m$ və $\forall q$ üçün

$$|\sigma|^m \phi_\nu^{(q)}(\sigma) \underset{\sigma}{\rightrightarrows} 0, \ \nu \to \infty.$$

Deməli, $\phi_\nu(\sigma)\to 0$ (S-də). Beləliklə :

Teorem. F Furye operatoru S fəzasını özü-özünə qarşılıqlı birqiymətli, xətti və kəsilməz olaraq inikas etdirir. Deməli,

$$F[S]=S,\quad F^{-1}[S]=S.$$

5. Furye çevirməsinin bəzi tətbiqi (D-də və S-də). İstilikkeçirmə tənliyi üçün klassik Koşi məsələsi. Furye metodu.

Ensiz sonsuz çubuqda istiliyin yayılması prosesi belə bir bircins diferensial tənliklə xarakterizə olunur.

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}=\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}. \tag{1}$$

$t=0$ olduqda başlanğıc temperatur verilir:

$$u/_{t=0}=u_0(x). \tag{2}$$

Furye çevirməsinin varlığı şərtləri daxilində (məsələn, $u,u_x,u_{xx}\in L_1(-\infty,\infty)$ $\forall t$ üçün) (1) və (2) bərabərliklərinə Furye çevirməsini tətbiq edək. Bunun üçün (1) bərabərliyinin hər tərəfini $e^{-i\sigma x}$-ə vurub x-ə nəzərən inteqrallayaq:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}e^{-i\sigma x}\,dx=\frac{\partial}{\partial t}\int_{-\infty}^{\infty}u(x,t)\,e^{-i\sigma x}\,dx=\frac{\partial V(\sigma,t)}{\partial t}, \tag{3}$$

burada

$$V(\sigma,t)=F_x[u(x,t)]=\int_{-\infty}^{\infty}u(x,t)\,e^{-i\sigma x}\,dx.$$

Furye çevirməsinin xassəsinə əsasən,

$$F\left[\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}\right]=-\sigma^2 F[u(x,t)]=-\sigma^2 V(\sigma,t). \tag{4}$$

Onda (3)-dən istifadə etdikdə buradan alınır ki,

$$\frac{\partial V(\sigma,t)}{\partial t}=-\sigma^2 V(\sigma,t), \tag{5}$$

burada

$$V_0(\sigma) = F[u_0(x)] = \int_{-\infty}^{\infty} u_0(x)\, e^{-i\sigma x}\, dx\,. \tag{6}$$

Qeyd olunmuş σ üçün baxıldığı üçün (5) tənliyi t-yə nəzərən adi diferensial tənlikdir, onda (5)-(6) Koşi məsələsinin həlli

$$V(\sigma, t) = e^{-\sigma^2 t}\, V_0(\sigma) \tag{7}$$

şəklində olar. Məlumdur ki,

$$e^{-\sigma^2 t} = F\left[\frac{1}{2\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4t}}\right].$$

Onda (7)-ni belə yazmaq olar:

$$V(\sigma,t) = F\left[\frac{1}{2\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4t}}\right] \cdot F[u_0(x)] = F\left[\frac{1}{2\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4t}} * u_0(x)\right] = F[u(x,t)],$$

yəni

$$u(x,t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4t}} * u_0(x) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{\xi^2}{4t}} u_0(x-\xi)\, d\xi\,. \tag{8}$$

Bu (1)-(2) Koşi məsələsinin həlli olur, (8) düsturu Puasson düsturu adlanır.

Bilavasitə diferensiallamaqla yoxlamaq olar ki, (8) düsturu ilə tapılan $u(x,t)$ funksiyası (1)-(2) Koşi məsələsinin həllini verir

Qeyd. $n>1$ olduqda R^n fəzasında göstərilir ki,

$$F\left[\frac{1}{\left(2a\sqrt{\pi t}\right)^n} e^{-\frac{|x|^2}{4a^2 t}}\right] = e^{-ta^2|\sigma|^2}.$$

Burada $x \in R^n$, $\sigma \in R^n$, $|x| = \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2}$.

Qeyd.6-cı fəsildə (§3) göstərilib ki, $n>1$ olduqda

$$E(x,t) = \frac{\theta(t)}{\left(2a\sqrt{\pi t}\right)^n} e^{-\frac{|x|^2}{4a^2 t}}$$

funksiyası

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u(x,t)}{\partial t} = a^2 \Delta u(x,t), \\ u/_{t=0} = u_0(x) \end{cases} \qquad (*)$$

Koşi məsələsinin fundamental həllidir, yəni

$$\frac{\partial E}{\partial t} = a^2 \Delta E,$$

$$E/_{t=0} = \delta(x)$$

olur. Onda E vasitəsilə $(*)$ məsələsinin həllini belə yazmaq olar:

$$u(x,t) = E(x,t) * u_0(x).$$

Xüsusi halda, əgər $u_0(x)$-lokal inteqrallanan funksiyadırsa, onda sonuncu bükülmə düsturunu inteqral şəklində yazmaq olar:

$$u(x,t) = \frac{1}{\left(2\sqrt{\pi t}\right)^n} \int_{R^n} e^{-\frac{|\xi|^2}{4t}} u_0(x-\xi)\, d\xi.$$

Bu da $n > 1$ halında klassik Puasson dusturudur.

§3. Ümumiləşmiş funksiyaların Furye çevirmələri.

1. D' fəzasında Furye çevirmələri. Tutaq ki, $f(x) \in L_1(-\infty,\infty)$-adi funksiya, $g(\sigma) = F[f(x)]$-onun Furye çevirməsidir. $\forall \varphi \in D$, $F[\varphi] = \phi(\sigma)$ olsun. Onda:

$$\langle f, \varphi \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \overline{f(x)}\, \varphi(x) dx = \frac{1}{2\pi} \int \overline{f(x)} \{\phi(\sigma) e^{i\sigma x} d\sigma\} dx =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int \phi(\sigma) \left\{ \int \overline{f(x) e^{i\sigma x}} dx \right\} d\sigma = \frac{1}{2\pi} \int \phi(\sigma) \left\{ \int f(x) e^{-i\sigma x} dx \right\} d\sigma =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int \overline{g(\sigma)} \phi(\sigma) d\sigma = \frac{1}{2\pi} \langle g, \varphi \rangle = \frac{1}{2\pi} \langle F[f], F[\varphi] \rangle,$$

buradan (Parseval bərabərliyi) alırıq:

$$\langle g, \phi \rangle = 2\pi \langle f, \varphi \rangle. \qquad (1)$$

Bu bərabərlik hər bir $f \in L_1$ və onun Furye çevirməsi g üçün həmişə ödənilir. Bu səbəbdən (1) bərabərliyini ixtiyari $f \in D'$ ümumiləşmiş funksiyasının $F[f]$ Furye çevirməsinin tərifi kimi qəbul edirik:

Tərif: $f \in D'$ funksionalının f-in Furye çevirməsi $F[f]$ (1) bərabərliyindən təyin edilən g funksionalına deyilir:

$$\langle g, F[\varphi]\rangle = 2\pi\langle f, \varphi\rangle, \quad \varphi \in D,\ g = F[f]\ . \tag{2}$$

Buradan görünür ki, $g = F[f]$ funksionalı D' fəzasında təyin olunub, onu Z' fəzasına inikas etdirir.

Aşkardır ki, g Z-də xətti və kəsilməz funksional olur. Yəni $g \in Z'$.

Furye çevirməsinin bəzi xassələri($f \in D'$):

$$1^0.\ P\left(\frac{d}{d\sigma}\right)F[f] = F[P(-ix)f(x)],$$

$$2^0.\ F\left[P\left(\frac{d}{dx}\right)f(x)\right] = P(is)F[f].$$

Bu düsturlar göstərir ki, D'-də diferensiallama operatoru Furye çevirməsi zamanı obrazın $(i\sigma)$-ya vurulmasına keçir və tərsinə, D'-də $(-ix)$-ə vurma prosesi Z'-də diferensiallama əməlinə keçir.

İsbat üçün sadə hala baxaq: $P\left(\frac{d}{dx}\right) = \frac{d}{dx}$ olsun. Bu halda 1-ci düstur üçün alırıq:

$$\langle F[P(-ix)f(x)], F[\varphi]\rangle = 2\pi\langle(-ix)f(x), \varphi\rangle = 2\pi\langle f, ix\varphi\rangle =$$

$$= \langle F[f], F[-ix\varphi]\rangle = \left\langle F[f], \frac{d}{d\sigma}F[\varphi]\right\rangle = \left\langle \frac{d}{d\sigma}F[f], F[\varphi]\right\rangle,$$

buradan

$$\frac{d}{d\sigma}F[f] = F[-ixf].$$

3^0. Eyni qayda ilə alınır ki,

$$P\left(i\frac{d}{d\sigma}\right)F[f] = F[P(x)f(x)].$$

Tərs Furye çevirməsi (2) düsturunu sağdan sola oxumaqla alınır:

$$\left\langle F^{-1}[g],\varphi\right\rangle=\frac{1}{2\pi}\langle g,F[\varphi]\rangle\ . \tag{3}$$

Beləliklə aldıq ki,

$$F[f]=g\in Z',\quad F^{-1}[g]=f\in D';$$
$$F\left[F^{-1}[g]\right]=g, F^{-1}[F[f]]=f.$$

Deməli:

$$F[D']=Z'.$$

Əsas funksiyalar üçün ikiqat Furye çevirməsi üçün

$$FF[\varphi(x)]=2\pi\varphi(-x)$$

alınır. Çünki,

$$\varphi(x)=\frac{1}{2\pi}\int\phi(\sigma)e^{i\sigma x}\,d\sigma,$$

onda

$$\varphi(-x)=\frac{1}{2\pi}\int\phi(\sigma)e^{-i\sigma x}\,d\sigma=\frac{1}{2\pi}F[F[\varphi(x)]].$$

Bunun kimi də, D' fəzasında $\forall f\in D'$ üçün

$$F[F[\varphi(x)]]=2\pi f(-x)$$

düsturu ödənilir. Əgər $g(\sigma)=F[f(x)]$ olsa, onda $F[f(-x)]=g(-\sigma)$ olur. Bunun kimi də,

$$F^{-1}F^{-1}[g(\sigma)]=\frac{1}{2\pi}g(-\sigma).$$

2. Misallar (D'-də).

$1^0. F[\delta(x)]=?$

Tərifə görə,

$$\langle F[\delta], F[\varphi]\rangle = 2\pi\langle\delta,\varphi\rangle = 2\pi\,\varphi(0) = 2\pi\left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\phi(\sigma)e^{i\sigma\cdot 0}\,d\sigma\right] =$$

$$= \int\phi(\sigma)\,d\sigma = \langle 1,\phi\rangle = \langle 1, F[\varphi]\rangle.$$

buradan $F[\delta]=1,\ F^{-1}[1]=\delta(x)$.

2^0. $F[1]=?$ (Klassik mənada $F[1]$ yoxdur, $1\notin L_1(-\infty,\infty)$).
$\forall\varphi\in D$ üçün alırıq:

$$\langle F[1], F[\varphi]\rangle = 2\pi\langle 1,\varphi\rangle = 2\pi\int\varphi(x)dx = 2\pi\int\varphi(x)e^{-i0\cdot x}dx =$$

$$= 2\pi\phi(0) = \langle 2\pi\delta,\phi\rangle = \langle 2\pi\delta, F[\varphi]\rangle,$$

buradan

$$F[1]=2\pi\delta;$$

$$F^{-1}[\delta]=\frac{1}{2\pi}.$$

3^0.Çoxhədlinin Furye çevirməsi. Tutaq ki, $P(x)$-ixtiyari polinomdur (onun adi mənada Furye çevirməsi yoxdur!).

Məlum xassəyə əsasən,

$$P\left(\frac{d}{ds}\right)F[f] = F[P(-ix)f].$$

Buradan çıxır ki,

$$P\left(i\frac{d}{ds}\right)F[f] = F[P(x)f(x)].$$

Əgər $f(x)\equiv 1$ götürsək, onda $F[1]=2\pi\delta(s)$ olduğunu nəzərə aldıqda, alınır ki,

$$2\pi P\left(i\frac{d}{ds}\right)\delta(s) = F[P(x)].$$

Deməli, $P(x)$ polinomunun Furye çevirməsi

$$F[P(x)] = 2\pi P\left(i\frac{d}{ds}\right)\delta(s)$$

olur. Xüsusi halda $\left(P(x) = x^m\right)$,

$$F\left[x^m\right] = 2\pi\left(i\frac{d}{ds}\right)^m \delta(s) = 2\pi\, i^m \delta^{(m)}(s),$$

$$F[P(x)] = F[P(x)\cdot 1] = 2\pi \cdot P\left(-\frac{d}{ds}\right)F[1] = 2\pi P\left(-\frac{d}{ds}\right)\delta(s).$$

Bunun kimi də,

$$4^0.\ F\left[P\left(\frac{d}{dx}\right)\delta(x)\right] = P(-is)F[\delta] = P(-is).$$

Xüsusi halda:

$$a)\, F\left[\delta^{(2m)}(x)\right] = (-1)^m s^{2m},$$

$$b)\, F\left[\delta^{(2m+1)}(x)\right] = (-1)^m \cdot is^{2m+1}.$$

$5^0.\ F\left[\dfrac{1}{x^m}\right] = ?$ Bunun üçün $F\left[\dfrac{1}{x}\right] = g(\sigma)$ işarə edək.

$$x \cdot \frac{1}{x} = 1$$

olduğundan nəzərə alaraq,

$$F[1] = F\left[x \cdot \frac{1}{x}\right] = -i\frac{d}{d\sigma}F\left[\frac{1}{x}\right] = -i\frac{d}{d\sigma}g(\sigma).$$

Buradan, $F[1] = 2\pi\delta$ olduğu üçün,

$$g(\sigma) = F\left[\frac{1}{x}\right] = 2\pi i[\theta(\sigma) + c].$$

alırıq. $g(\sigma)$ -tək funksiya olduğundan, $c = -\dfrac{1}{2}$ alırıq. Deməli

$$F\left[\frac{1}{x}\right] \equiv g(\sigma) = \pi\, i\, sign\, \sigma.$$

Bunun kimi də

$$\frac{1}{x^m} = \frac{(-1)^{m-1}}{(m-1)!}\frac{d^{m-1}}{dx^{m-1}}\left(\frac{1}{x}\right)$$

olduğundan

$$F\left[\frac{1}{x^m}\right] = \frac{(-1)^{m-1}}{(m-1)!}(-i\sigma)^{m-1} F\left[\frac{1}{x}\right] = \frac{i^{m-1}}{(m-1)!}\sigma^{m-1}\, sign\, \sigma\ .$$

6^0. $F\left[e^{bx}\right] = ?$

Aşkardır ki,

$$e^{bx} = \sum_{m=0}^{\infty}\frac{b^m x^m}{m!}, b \in R.$$

sırası D' fəzasında yığılır.Onda (F kəsilməz operator olduğundan) alırıq ki,

$$F\left[e^{bx}\right] = \sum_{m=0}^{\infty} F\left[\frac{b^m x^m}{m!}\right] = \sum_{m=0}^{\infty}\frac{b^m}{m!}F\left[x^m\right] =$$

$$= 2\pi\sum_{m=0}^{\infty}\frac{b^m}{m!}\left(-i\frac{d}{ds}\right)^m \delta(s) =$$

$$= 2\pi\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-ib)^m}{m!}\delta^{(m)}(s) = 2\pi\,(s-ib).$$

Beləliklə,

$$F\left[e^{bx}\right] = 2\pi\,(s-ib).$$

7^0. Buradan aşağıdakı yeni düsturlar alınır:

$$F[\sin bx] = F\left[\frac{e^{ibx} - e^{-ibx}}{2i}\right] = -i\pi\left[\delta(s+b) - \delta(s-b)\right],$$

$$F[\cos bx]=F\left[\frac{e^{ibx}+e^{-ibx}}{2}\right]=\pi\left[\delta(s+b)+\delta(s-b)\right],$$

$$F[sh\,bx]=F\left[\frac{e^{bx}-e^{-bx}}{2}\right]=\pi\left[\delta(s-ib)-\delta(s+ib)\right],$$

$$F[ch\,bx]=F\left[\frac{e^{bx}+e^{-bx}}{2}\right]=\pi\left[\delta(s-ib)+\delta(s+ib)\right].$$

$8^0.F[\delta(x-h)]=e^{-i\sigma h}$.

Doğrudan da,

$$\langle F[\delta(x-h)],F[\varphi]\rangle=2\pi\langle\delta(x-h),\varphi(x)\rangle=2\pi\varphi(h)=\int\phi(\sigma)e^{-i\sigma h}\,d\sigma$$

$$=\left\langle e^{-i\sigma h},\phi\right\rangle=\left\langle e^{-i\sigma h},F[\varphi]\right\rangle,$$

buradan

$$F[\delta(x-h)]=e^{-i\sigma h},\quad F[\delta(x+h)]=e^{i\sigma h}.$$

3. S' fəzasında Furye çevirmələri. Gördük ki, F Furye çevirməsi S fəzasını izomorf olaraq özünü özünə inikas edir:

$$F[S]=S,\ F^{-1}[S]=S.$$

Tutaq ki, $f(x)$ kəsilməzdir və $f\in L_1$.Onda $g(\sigma)=F[f(x)]$ var və g-kəsilməz funksiyadır, $g(\sigma)\to 0,\ |\sigma|\to\infty$. Onda g S-də requlyar funksional doğurur:

$$\langle g,\varphi\rangle=\int_{-\infty}^{\infty}g(\sigma)\varphi(\sigma)d\sigma=\int\varphi(\sigma)\left\{\int f(x)e^{-ix\sigma}dx\right\}d\sigma=$$

$$=\int f(x)\left\{\int\varphi(\sigma)e^{-ix\sigma}d\sigma\right\}dx=\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\phi(x)dx=\langle f,F[\varphi]\rangle.$$

Deməli,

$$\langle F[f],\varphi\rangle=\langle f,F[\varphi]\rangle\ .$$

Bu -Parseval bərabərliyidir. Bu bərabərliyi $\forall f\in S'$ funksionalının Furye çevirməsi tərifi kimi qəbul edirik.

Tərif. Tutaq ki, $f \in S'$. Onda

$$\langle g, \varphi \rangle = \langle f, F[\varphi] \rangle \qquad (1)$$

bərabərliyindən təyin olunan g funksionalı f-in Furye çevirməsi adlanır: $g = F[f]$.

Aşkardır ki, g S-də xətti və kəsilməzdir, yəni $g \in S'$. Göründüyü kimi g-nin φ-dəki qiyməti olaraq f-in $F[\varphi] \in S$ elementindəki qiyməti götürülür. $F: S' \to S'$ çevirməsi qarşılıqlı birqiymətli və qarşılıqlı kəsilməz olur, başqa sözlə, $F[S'] = S$, $F^{-1}[S'] = S'$.

Qeyd.(1) düsturu $f \in D'$ olduqda doğru olmaya bilər, çünki $\varphi \in D$ olduqda $F[\varphi] \in Z$ olur. Yəni sağ tərəf mənasız ola bilər. Lakin $f \in S'$ olduqda hər iki tərəf mənalıdır. $F[f] \in S'$.

Məsələn, $\varphi, \phi \in S$ olduqda

$$\langle F[f], \lambda\varphi + \mu\phi \rangle = \langle f, F[\alpha\varphi + \beta\phi] \rangle = \langle f, \alpha F[\varphi] + \beta F[\varphi] \rangle =$$
$$= \lambda \langle f, F[\varphi] \rangle + \mu \langle f, F[\phi] \rangle = \langle \lambda F[f] + \mu F[f], \varphi \rangle .$$

Deməli, $F[f]$ -xətti funksionaldır. Tutaq ki, $f \in S'$.Onda tərs Furye çevirməsi belə daxil edilir:

$$\left\langle F^{-1}[f], \varphi \right\rangle = \left\langle f, F^{-1}[\varphi] \right\rangle, \ \forall \varphi \in S.$$

Buradan çıxır ki, $f \in S'$ olduqda $F^{-1}[f] \in S'$ olur.

Beləliklə, $\forall f \in S'$ üçün alırıq:

$$F^{-1}[F[f]] = F\left[F^{-1}[f]\right] = f .$$

Məsələn, $\forall \varphi \in S$ üçün

$$\left\langle F^{-1}[F[f]], \varphi \right\rangle = \left\langle F[f], F^{-1}[\varphi] \right\rangle =$$
$$= \left\langle f, F\left[F^{-1}[\varphi]\right] \right\rangle = \langle f, \varphi \rangle .$$

İndi göstərək ki,

$$F[S'] = S'.$$

Tutaq ki, $g \in S'$. Əgər $f = F^{-1}[g]$ isə, onda $F[f] = F\left[F^{-1}[g]\right] = g$, deməli $\forall g \in S$ üçün elə $f \in S$ var ki, $F[f] = g$. Bu uyğunluq qarşılıqlı birqiymətlidir, çünki əgər həm $F[f_1] = g$, həm də $F[f_2] = g$ olsaydı, onda $F[f_1] = F[f_2]$, yəni $f_1 = f_2$. Asan yoxlamaq olur ki,

$$F^{-1}[f] = \frac{1}{2\pi} F[f(-x)].$$

Belə olduqda $\forall f \in S'$ üçün

$$F^{-1}[F[f]] = F\left[F^{-1}[f]\right] = f.$$

Deməli F və F^{-1} operatorları qarşılıqlı birqiymətli və kəsilməz olaraq S' fəzasını özü-özünə (izomorfizm) inikas etdirir. Deməli,

$$F[S'] = S' \text{ və } F^{-1}[S'] = S'.$$

Qeyd. Biz gördük ki, hər bir $f \in D'$ və hər bir $f \in S'$ ümumiləşmiş funksiyasının Furye çevirməsi $F[f]$ vardır, belə ki, $f \in D'$ olduqda $F[f] \in Z', f \in S'$ olduqda $F[f] \in S'$ olan yeni bir ümumiləşmiş funksiya olur. Adi funksiyalar D' fəzasının bir hissəsi kimi, kəsilməz və yavaş artan $f(x)$ funksiyaları S'-in bir hissəsi kimi onların da Furye çevirmələri var. Beləliklə, Furye çevirməsi operatorunu klassik fəzalara nisbətən (L_1, L_2 və s.) daha geniş funksiyalar sinfinə yaymış oluruq. Məsələn,

$$1 \notin L_1(-\infty, \infty), x^m \notin L_1(-\infty, \infty), e^x \notin L_1$$

olduğu üçün klassik analizdə $F[1]$, $F\left[x^m\right]$, $F\left[e^x\right]$ Furye çevirmələri yoxdur. Lakin S' və D'-də bu cür Furye çevirmələri vardır, onlar müəyyən ümumiləşmiş funksiyalardır, belə ki,

$$F[1] \in S, \quad F\left[x^m\right] \in S', F\left[e^x\right] \in Z'.$$

Bununla da Furye çevirməsini tətbiq etməklə həll olunan riyazi fizika məsələlərini daha geniş funksiyalar sinfində həll etmək imkanı yaranır.

Tarixən istilikkeçirmə tənliyi üçün Koşi məsələsinin yeganəlik sinfinin $|f(x)| \le e^{|x|^2}$ sinfindən ibarət olduğunu A.N.Tixonov müəyyən etmişdir. Sonralar bu cür siniflər daha geniş tənliklər üçün müəyyən edilmişdir (İ.M.Qelfand və Q.E.Şilov). Məhz bu cəhət «ümumiləşmiş funksiya» anlayışının elmə daxil edilməsinin çox vacib bir təşəbbüs olduğunu göstərən cəhətlərdən biri kimi qiymətləndirilir.

4. F -in bəzi xassələri (S' -də).

1.$F\left[f^{(m)}\right] = (i\sigma)^m F[f] = (i\sigma)^m g(\sigma), \quad g(\sigma) = F[f(x)]$.

2.$\dfrac{d^m}{d\sigma^m} F[f] = F\left[(-ix)^m f(x)\right]$.

3.$F\left[P\left(\dfrac{d}{dx}\right)f\right] = P(i\sigma)g(\sigma)$.

4.$P\left(\dfrac{d}{d\sigma}\right)g(\sigma) = F[\,P(-ix)f\,]$.

5.$\eta \in \theta_M$ olduqda $\forall \varphi \in S$ üçün $\eta\varphi \in S$ olur. Onda $\forall f \in S'$ üçün $\eta f \in S'$.

Məsələn, 1-ci xassəni isbat edək.

$$\left\langle F\left[f^{(m)}\right], \varphi\right\rangle = \left\langle f^{(m)}, F[\varphi]\right\rangle = \left\langle f^{(m)}, \phi\right\rangle = (-1)^m\left\langle f, F^{(m)}[\varphi]\right\rangle =$$
$$= (-1)^m\left\langle f, F\left[(-i\sigma)^m \varphi\right]\right\rangle =$$
$$= (-1)^m\left\langle F[f], \left[(-i\sigma)^m \varphi\right]\right\rangle = \left\langle (i\sigma)^m F[f], \varphi\right\rangle,$$

yəni

$$F\left[f^{(m)}(x)\right] = (i\sigma)^m \quad F[f] = (i\sigma)^m g(\sigma) .$$

5. Misallar (S' -də).

1. $F[\delta(x)] = ?$ $\delta(x) \in S'$ olduğundan $F[\delta]$ var. Onda $\forall \varphi \in D$ üçün alırıq:

$$\langle F[\delta], \varphi\rangle = \langle \delta, F[\varphi]\rangle = \langle \delta, \phi\rangle = \phi(0).$$

Lakin

$$\phi(\sigma) \equiv F[\varphi] = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) e^{-i\sigma x} dx$$

olduğundan

$$\phi(0) = \int \varphi(x) dx = \langle 1, \varphi \rangle .$$

Deməli

$$\langle F[\delta], \varphi \rangle = \langle 1, \varphi \rangle \Rightarrow F[\delta(x)] = 1 .$$

Nəticə. $F^{-1}[1] = \delta(x)$.

2. $F[1]=?$ Aydındır ki, $1 \in S'$. Onda $\forall \varphi \in S$ üçün

$$\langle F[1], \varphi \rangle = \langle 1, F[\varphi] \rangle = \langle 1, \phi \rangle =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \phi(\sigma) d\sigma = 2\pi \cdot \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \phi(\sigma) e^{i\sigma \cdot 0} d\sigma =$$

$$= 2\pi \, \varphi(0) = \langle 2\pi \, \delta, \varphi \rangle ,$$

Deməli,

$$F[1] = 2\pi \, \delta(\sigma).$$

Nəticə. $F^{-1}[\delta] = \dfrac{1}{2\pi}$.

3^0. Çoxhədlinin Furye çevirməsi.

Tutaq ki, $P(x)$-polinomdur. Onda $P(x) \in S'$. Deməli, $F[P(x)]$ var. Məlumdur ki, S' fəzasında belə xassə var:

$$P\left(\frac{d}{d\sigma}\right) F[f] = F[P(-ix) f].$$

Buradan çıxır ki,

$$F[P(x) f(x)] = P\left(i \frac{d}{d\sigma}\right) F[f].$$

Burada $f \equiv 1$ götürsək,

$$F[P(x)]=P\left(i\frac{d}{d\sigma}\right)F[1]=P\left(i\frac{d}{d\sigma}\right)(2\pi\delta(\sigma)) .$$

Xüsusi halda, $P(x)=x^m$ olduqda

$$F\left[x^m\right]=2\pi\left(i\frac{d}{d\sigma}\right)^m\delta=2\pi i^m\delta^{(m)},$$

$$F[x]=2\pi i\delta',$$

$$F[1]=2\pi\delta.$$

$4^0.F\left[P\left(\frac{d}{dx}\right)f\right]=P(i\sigma)F[f]$ xassəsindən alınır ki, $(f=\delta)$

$$F\left[P\left(\frac{d}{dx}\right)\delta(x)\right]=P(i\sigma)$$

Xüsusi halda,

$$F\left[\delta^{(m)}(x)\right]=(i\sigma)^m,$$

$$F\left[\delta^{(2m)}(x)\right]=(-1)^m\sigma^{2m},$$

$$F\left[\delta^{(2m+1)}(x)\right]=(-1)^m i\sigma^{2m+1}.$$

5. $F\left[e^{ibx}\right]=?$ b-həqiqidir.

Aşkardır ki, $e^{ibx}\in S'$, çünki $\left|e^{ibx}\right|\le 1$. (Lakin $e^{bx}\notin S'$. Onda S'-də $F\left[e^{bx}\right]$ yoxdur).

Lakin

$$e^{ibx}=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(ib)^m}{m!}x^m,\quad b\in R,$$

sırası S'-də yığılan sıradır. F-kəsilməz olduğundan

$$F\left[e^{ibx}\right]=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(ib)^m}{m!}F\left[x^m\right]=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(ib)^m}{m!}2\pi i^m\delta^{(m)}(\sigma)=$$

$$=2\pi\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-b)^m}{m!}\delta^{(m)}(\sigma)=2\pi\,\delta(\sigma+h).$$

Beləliklə,

$$F\left[e^{ibx}\right] = 2\pi\,\delta(\sigma - b),$$
$$F\left[e^{-ibx}\right] = 2\pi\,\delta(\sigma + b).$$

6^0. Xüsusi hallar:

$$a)\,F[\cos bx] = F\left[\frac{e^{ibx} + e^{-ibx}}{2}\right] = \frac{1}{2}F\left[e^{ibx}\right] + \frac{1}{2}F\left[e^{-ibx}\right] =$$
$$= \pi[\delta(\sigma - b) + \delta(\sigma + b)].$$

$b)\,\delta(x - h) \in S'$.

Onda

$$\langle F[\delta(x - h)], \varphi(\sigma)\rangle = \langle \delta(x - h), F[\varphi]\rangle = \langle \delta(x - h), \phi(x)\rangle =$$

$$= \langle \delta(x), \phi(x + h)\rangle = \phi(h) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)e^{-ixh}\,dx = \left\langle e^{-ixh}, \varphi\right\rangle,$$

buradan

$$F[\delta(x - h)] = e^{-ixh}.$$

7^0. $\theta(x)$-Hevisayd funksiyası olduqda

$$F[\theta(x)] = ?$$

Əvvəlcə $F\left[\theta(x)e^{-tx}\right]$ hesablayaq ($t > 0$).

$$F\left[\theta(x)e^{-tx} = \int_0^{\infty} e^{-x(t+iy)}dx = -\frac{i}{y - it}\right].$$

Lakin

$$\theta(x)e^{-tx} \xrightarrow{S'} \theta(x), \quad t \to 0.$$

F - kəsilməz olduğundan,

$$F\left[\theta(x)e^{-tx}\right] \to F[\theta(x)], \quad t \to 0,$$

deməli

$$\lim_{t \to 0} -\frac{i}{y - it} = F[\theta(x)]$$

Digər tərəfdən, Soxotski düsturuna əsasən,

$$-\lim_{t\to 0}\frac{i}{y-it}=-\frac{i}{y-i\cdot 0}=-i\left[-i\pi\delta(x)+\mathscr{P}\frac{1}{x}\right]=$$

$$=\pi\delta(x)-i\mathscr{P}\frac{1}{x}.$$

Beləliklə,

$$F[\theta(x)]=\pi\delta(x)-i\mathscr{P}\frac{1}{x}.$$

S' xətti fəzadır. Onda $\delta\in S'$, $\mathscr{P}\frac{1}{x}\in S'$ olduğundan

$$F[\theta(x)]\in S'.$$

6. Məhdud (kompakt) daşıyıcılı funksionalın Furye çevirməsi.

$\mathscr{E}$ ilə $\varphi\in C^{\infty}$ funksiyaları çoxluğunu işarə edək ki, onların daşıyıcı çoxluqları ixtiyaridir. Tutaq ki, $T\in D'$ və $k=\operatorname{sup}pT$ - məhdud çoxluqdur. Tutaq ki, $\eta\in D$ elə əsas funksiyadır ki, k çoxluğunun müəyyən ətrafında $\eta=1$ olur. Onda $\eta\varphi\in D, \forall\varphi\in D$ olduqda $\langle T,\eta\varphi\rangle$ sonlu ədəd olur. Aydındır ki,

$$\langle T,(1-\eta)\varphi\rangle=0,\ \text{çünki}\ \operatorname{sup}pT\cap\operatorname{sup}p(1-\eta)\varphi=\varnothing\ .$$

Buradan alınır ki,

$$\langle T,\varphi\rangle=\langle T,\eta\varphi\rangle,\ \forall\varphi\in\mathscr{E}$$

və yaxud

$$T=\eta T.$$

Tutaq ki, $\varphi_\nu\in\mathscr{E}$. Əgər hər bir kompakt (məhdud) çoxluqda $\forall\alpha$ üçün $D^{\alpha}\varphi_\nu\rightrightarrows 0,\ \nu\to\infty$ olursa, onda hesab olunur ki, $\varphi_\nu\to 0$ ($\mathscr{E}$-də).

Təklif. Hər bir məhdud daşıyıcılı $T\in D$ ümumiləşmiş funksiyası $\mathscr{E}$ fəzasında xətti və kəsilməzdir və tərsinə, $\mathscr{E}$-də xətti və kəsilməz olan funksional müəyyən məhdud daşıyıcılı ümumiləşmiş funksiya əmələ gətirir.

Məsələn, tutaq ki, $L(\varphi)$- $\mathscr{E}$-də xətti və kəsilməz funksionaldır. $\varphi\in D$ olduqda $\varphi\in\ \mathscr{E}$ olur və $\varphi_\nu\to\varphi$ (D-də) olursa, onda

$\varphi_v \to 0$ ($\mathscr{E}$-də) olur. Onda L funksionalı D-də kəsilməzdir. Onda elə $T \in D'$ var ki,

$$L(\varphi) = \langle T, \varphi \rangle, \ \forall \varphi \in D .$$

Nəticə. Məhdud daşıyıcılı ümumiləşmiş funksiyalar çoxluğu $\mathscr{E}'$ vektor-fəza əmələ gətirir, $\mathscr{E}'$ elə $T \in D'$ ümumiləşmiş funksiyalar çoxluğudur ki, onlar $\mathscr{E}$-də kəsilməzdirlər.

Biz gördük ki, hər məhdud daşıyıcılı $T \in D'$ ümumiləşmiş funksiya eyni zamanda həm də yavaş artan ümumiləşmiş funksiyadır. Beləliklə, $\mathscr{E}' \subset S'$ olur. Onda S'-də Furye çevirməsi həm də $\mathscr{E}'$-də Furye çevirməsidir.Lakin $\mathscr{E}'$-də Furye çevirməsi daha sadə alınır. Belə ki, $\forall f \in \mathscr{E}'$ üçün $F[f] = V(\xi)$ tam –analitik (adi) funksiya olur.

Teorem. (L.Şvars). Tutaq ki, $f \in \mathscr{E}'$ –məhdud daşıyıcılı (finit) ümumiləşmiş funksiyadır. Onda onun Furye obrazı $V(\xi)$-müəyyən funksiya olur, belə ki, onu kompleks müstəviyə tam analitik funksiya kimi davam etdirmək olur. Həmin funksiya aşağıdakı düsturla verilir:

$$V(\xi) = \left\langle f(x), e^{-i\xi x} \right\rangle .$$

Doğrudan da, aşkardır ki, $V(\xi) \in C^{\infty}$. Bundan əlavə, $e^{-i\xi x}$ funksiyası (qeyd olunmuş ξ üçün) x-ə nəzərən $\mathscr{E}$ fəzasına daxildir, deməli $V(\xi)$ funksiyası kompleks ξ üçün də təyin olunubdur (var). Göstərək ki,

$$V(\xi) = F[f(x)], \ f \in \mathscr{E}'.$$

$\forall \varphi(\xi) \in S$ üçün alırıq:

$$\langle F[f], \varphi \rangle = \langle f, F[\varphi] \rangle = \left\langle f(x), \int e^{-ix\xi} \varphi(\xi) d\xi \right\rangle =$$

(Fubini teoremi)

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \left\langle f(x) \cdot \varphi(\xi), e^{-ix\xi} \right\rangle d\xi = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\xi) \left\langle f(x), e^{-ix\xi} \right\rangle d\xi =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\xi) V(\xi) d\xi = \langle V, \varphi \rangle,$$

buradan

$$F[f]=V(\xi).$$

7. Nöqtədə cəmləşən funksionalın Furye çevirməsi. Tutaq ki, $f\in D'$ və $\operatorname{sup} p\, f=\{0\}$. Onda belə funksionalın ümumi şəkli belədir: elə m var ki:

$$f=\sum_{|\alpha|\le m} c_\alpha \delta^{(\alpha)}(x).$$

Buradan

$$F[f]=\sum_{|\alpha|\le m} c_\alpha F\left[\delta^{(\alpha)}(x)\right]=\sum_{|\alpha|\le m} c_\alpha(-i\xi)^\alpha,\ \xi\in R^n.$$

Digər tərəfdən, f -finit funksionaldır. Onda Şvars düsturuna əsasən onun Furye çevirməsini belə hesablaya bilərik:

$$F[f]\equiv V(\xi)=\left\langle f(x), e^{-ix\xi}\right\rangle=\left\langle \sum_{|\alpha|\le m} c_\alpha\, \delta^\alpha, e^{-ix\xi}\right\rangle=$$

$$=\sum_{|\alpha|\le m} c_\alpha(-1)^\alpha\left\langle \delta(x),\left(e^{-ix\xi}\right)_x^\alpha\right\rangle=\sum_{|\alpha|\le m} c_\alpha(-1)^{|\alpha|}(-i\xi)^\alpha=\sum_{|\alpha|\le m} c_\alpha(i\xi)^\alpha.$$

Xüsusi halda:

$1^0.\ F[\delta]=\left\langle \delta(x), e^{-ix\xi}\right\rangle=e^{-ix\xi}/_{x=0}=1$.

$2^0.\ F[\delta']=\left\langle \delta'(x), e^{-ix\xi}\right\rangle=-\left\langle \delta(x), -ie^{-ix\xi}\right\rangle=i\xi.\backslash$

$3^0.\ F\left[\delta^{(m)}\right]=\left\langle \delta^{(m)}(x), e^{-ix\xi}\right\rangle=(-1)^m\left\langle \delta,(-i\xi)^m e^{-ix\xi}\right\rangle=(i\xi)^m.$

$4^0.\ F[\delta(x-h)]=\left\langle \delta(x-h), e^{-ix\xi}\right\rangle=e^{-ih\xi}.$

$5^0.\ F[\delta(x+h)]=e^{ih\xi}.$

6^0. (səhv nədədir?) Şvars düsturuna görə:

$$F[1]=\left\langle 1, e^{-ix\xi}\right\rangle=\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ix\xi}dx=V(\xi).$$

$7^0 . F[\delta(x-a)] = e^{-ixa}, \; F[\delta(x)] = 1,$

buradan $(n>1)$

$$\delta = F^{-1}[1] = \frac{1}{(2\pi)^n} F[1],$$

deməli

$$F[1] = (2\pi)^n \delta(\xi) .$$

Xüsusi halda:

$$F[D^\alpha \delta(x)] = (i\xi)^\alpha ,$$

$$F[x^\alpha] = (-1)^{|\alpha|} D^\alpha F[1] = (2\pi)^n (-1)^{|\alpha|} D^\alpha \delta(\xi).$$

8. S' **fəzasında bükülmənin Furye çevirməsi.** Tutaq ki, $f \in S'$ və g-finit funksionaldır (onda $g \in S'$). Bu halda $f * g$ var və $f * g \in S'$ olur. Bu halda

$$F[f * g] = F[f] \cdot F[g] \quad . \tag{1}$$

Doğrudan da,

$$\langle F[f * g], \varphi \rangle = \langle f * g, F[\varphi] \rangle. \tag{2}$$

Əgər $\phi(\xi) = F[\varphi](\xi)$ işarə etsək, bükümün tərifinə görə,

$$\langle f * g, \phi \rangle = \langle f(x), \langle g(y), \phi(x+y) \rangle \rangle . \tag{3}$$

Digər tərəfdən

$$\phi(x+y) = \int \varphi(\xi) e^{-i\xi(x+y)} d\xi .$$

Onda

$$\langle g(y), \phi(x+y) \rangle = \left\langle g(y), \int \varphi(\xi) e^{-i\xi(x+y)} d\xi \right\rangle =$$

$$= \int \langle g(y), e^{-i\xi y} \rangle e^{-i\xi x} \varphi(\xi) d\xi .$$

g-finit olduğu üçün Şvars düsturuna əsasən alınır ki,

$$\left\langle g(y), e^{-i\xi y}\right\rangle = F[g](\xi) = V(\xi). \tag{4}$$

Onda sonuncu bərabərlikdən çıxır ki,

$$\langle g(y), \phi(x+y)\rangle = \int V(y)\varphi(y)e^{-iyx}\,dy = F[V(y)\varphi(y)](x). \tag{5}$$

Beləliklə, (3)-dən alınır ki,

$$\langle f * g, \phi\rangle = \langle f(x), \langle g(y), \phi(x+y)\rangle\rangle = \langle f(x), F[V(\xi)\varphi(\xi)](x)\rangle =$$

$$= \langle F[f(x)], V(\xi)\varphi(\xi)\rangle = \langle F[f(x)]\cdot V(\xi), \varphi\rangle,$$

buradan və (2)-dən çıxır ki,

$$\langle F[f * g], \varphi\rangle = \langle F[f]\cdot V(\xi), \varphi\rangle,$$

buradan, $V(\xi) = F[g]$ nəzərə alınmaqla,

$$F[f * g] = F[f]\cdot F[g]$$

alırıq, burada $F[g] = V(\xi)$- adi funksiyadır, $V(\xi) \in C^{\infty}$.

Qeyd. Finit olmayan g üçün Şvars düsturu

$$F[g] = \left\langle g(y), e^{-iy\xi}\right\rangle$$

doğru olmaya bilər.

9. D'**-də bükülmənin Furye çevirməsi.** Tutaq ki, $f_0(x)$ və $f_1(x)$- adi finit funksiyalardır. Onda

$$F[f_0 * f_1] = F[f_0]\cdot F[f_1].$$

İndi fərz edək ki, f, g -finit funksionallardır. Onda elə $f_{0k}(x)$ və $f_{1k}(x)$-adi finit funksiyaları var ki,

$$f = \sum_{|j|\le m} D^j f_{0k}(x), \quad g = \sum_{|j|\le p} D^j f_{1k}(x),$$

Əgər $g_{0k}(s) = F[f_{0k}(x)]$, $g_{1k}(s) = F[f_{1k}(x)]$ işarə etsək, onda aşkardır ki,

$$F[f] = \sum_{j=0}^{m} (-is)^j g_{0j}(s), \quad F[g] = \sum_{j=0}^{p} (-is)^k g_{1j}(s).$$

Onda:

$$F[f*g]=F\left[\sum_j\sum_k D^{j+k}\left(f_{0j}(x)*f_{1k}(x)\right)\right]=$$

$$=\sum_j\sum_k(-is)^{j+k}g_{0j}(s)g_{1j}(s)=F[f]\cdot F[g].$$

İndi fərz edək ki, f-finitdir, $g\in D'$-ixtiyaridir. Məlumdur ki, hər bir $g\in D'$ funksionalı müəyyən finit funksionallar ardıcıllığının D'-də limiti kimi alınır: $g_\nu\to g$ (D'-də və g_ν-finitdirlər.Onda büküm kəsilməz operator olduğundan

$$f*g=\lim_{\nu\to\infty}(f*g_\nu).$$

Furye operatoru F kəsilməz olduğundan

$$F[f*g]=\lim_{\nu\to\infty}(f*g_\nu)=\lim_{\nu\to\infty}F[f]\cdot F[g_\nu]=$$
$$=F[f]\cdot\lim_{\nu\to\infty}F[g_\nu]=F[f]\cdot F[g].$$

Nəticə. f -finit olduqda $F[f]=V(\xi)$- adi funksiya olur. Deməli

$$F[f*g]=V(\xi)\cdot F[g]$$

sağda adi hasil alınır.

Beləliklə, $f*g$ bükümü mənalı olan fəzada həmişə aşağıdakı düsturlar doğrudur:

$$F[f*g]=F(f)\cdot F[g],$$
$$F^{-1}[f*g]=F^{-1}(f)\cdot F^{-1}[g],$$
$$F[f\cdot g]=F(f)*F[g].$$

Lakin $f\cdot g$ hasili heç də həmişə korrekt olmur. Sonuncu nəticələr Furye çevirməsinin ən güclü və qiymətli xassələridir. Məhz ona görə Furye çevirməsi xüsusi törəməli diferensial tənliklər sahəsində, inteqral tənliklər sahəsində, ehtimal nəzəriyyəsində olduqca geniş tətbiqlərə malikdir.

§4.Çoxdəyişənli ümumiləşmiş funksiyanın Furye çevirmələri.

Tutaq ki, $f \in L_1(R^n)$, $x, \xi \in R^n$. Onda onun Furye çevirməsi belə olur:

$$g(\xi) \equiv F[f(x)] = \int_{R^n} f(x) e^{-ix\xi} dx = \iint_{R^n} \dots \int f(x) e^{-ix\xi} dx, \qquad (1)$$

burada $x \cdot \xi = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot \xi_i$. Furye çevirməsinin xassələri $n = 1$ olan halda olduğuna analoji qalır. Tutaq ki, $\varphi \in D(R^n)$. Onda

$$\phi(s) = \int_{R^n} \varphi(x) e^{-isx} dx$$

tam analitik funksiya olub

$$\left| s_1^{q_1} \dots s_n^{q_n} \phi(s_1, \dots, s_n) \right| \le c_q e^{\sum_1^n a_i |\tau_i|}, \; a_i > 0 \qquad (*)$$

münasibəti ödənilir. Beləliklə,

$$F[D(R^n)] = Z'_n, \; F^{-1}[Z'_n] = D'(R^n) \; .$$

Tərs Furye çevirməsi belə daxil edilir:

$$\varphi(x) = \frac{1}{(2n)^n} \int_{R^n} \dots \int e^{ix\sigma} \phi(\sigma) d\sigma = F^{-1}[\phi(\sigma)].$$

Xassələr $(n > 1)$.

$$1^0. P\left(\frac{\partial}{\partial s_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial s_n} \right) \phi(s) = F[P(-ix_1, \dots, -ix_n) \varphi(x)],$$

$$2^0. F\left[P\left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n} \right) \varphi \right] = P(-is_1, \dots, -is_n) \phi(s).$$

Xüsusi halda,

$$3^0. F\left[\frac{\partial^m}{\partial x_1^m} \frac{\partial^k}{\partial x_2^k} \varphi \right] = (i\sigma_1)^m (i\sigma_2)^k F[\varphi].$$

İndi tutaq ki, $f \in D'(R^n)$. Onda $F[f]$ Furye çevirməsi belə təyin edilir: $\forall \varphi \in D$ üçün

$$\langle F[f], F(\varphi)\rangle = (2\pi)^n \langle f, \varphi\rangle.$$

Tərs Furye çevirməsi belədir: $\langle F^{-1}[g], \varphi\rangle = \dfrac{1}{2\pi}\langle g, F(\varphi)\rangle$.

Eyni xassələr $S(R^n)$ və $S'(R^n)$ üçün doğru qalır. Burada fərq ondadır ki,

$$F : D(R^n) \mapsto Z_n \ ; \quad F : D'(R^n) \mapsto Z'_n$$

$f \in S'(R^n)$ olduqda $F[f]$ belə təyin edilir:

$$\langle g, \varphi\rangle = \langle f, F[\varphi]\rangle.$$

$$F : S(R^n) \to S(R^n)$$

$$F : S'(R^n) \to S'(R^n).$$

olur. Başqa sözlə: $F[D(R^n)] \to Z_n$, $F[D'(R^n)] \to Z'_n$,

$$F[S(R^n)] \to S(R^n),$$

$$F[S'(R^n)] \to S'(R^n).$$

Xüsusi halda, tutaq ki, f-finit funksionaldır. Onda $f \in S'(R^n)$ olur. Onda f -i müəyyən m üçün belə yazmaq olar:

$$f = \sum_{|\alpha| \le m} D^\alpha f_k(x),$$

burada $f_k(x)$-adi finit funksiyalardır. Bu halda adi mənada $F[f_k(x)] = g_k(s)$ var:

$$g_k(s) = \int f_k(x) e^{-ix\xi}\, dx$$

($g_k(s)$-tam analitik funksiyalardır). Beləliklə,

$$g(s) \equiv F[f] \sum_{|\alpha| \le m} [D^\alpha f_k(x)] = \sum (-is)^\alpha g_k(s),$$

Buradan görünür ki, $g(s)$-tam analitik funksiyadır.

$$|g_k(s)| \le c\, e^{a|\sigma|}$$

olduğundan çıxır ki,

$$|g(s)| = |F[f]| \le c(1+|s|)^m e^{a|\sigma|},$$
$$|g(\sigma)| \le c(1+|\sigma|)^m$$

olur, yəni $g \in S'$.

Bəzən arqumentlərin müəyyən hissəsinə nəzərən Furye çevirməsi tətbiq etmək lazım gəlir. Məsələn, tutaq ki, $f(x,y) \in S'(R^2)$ x-ə nəzərən Furye çevirməsini $F_x[f(x,y)]$ ilə işarə edək. Onda tərifə görə,

$$\langle F_x[f], \varphi\rangle = \langle f, F_\xi[\varphi]\rangle, \ \varphi(x,y) \in S(R^2),$$

burada

$$\phi(x,y) \equiv F_\xi[\varphi] = \int \varphi(\xi,y) e^{-i\xi x} d\xi.$$

Belə olduqda $F_x[f] \in S'(R^2)$ olur.

Misallar həlli $(n>1)$.

$1^0. F[\delta(x_1,\dots,x_n)] = 1$.

Doğrudan da,

$$\langle F[\delta], F[\varphi]\rangle = (2\pi)^n \langle \delta, \varphi\rangle = (2\pi)^n \varphi(0) =$$

$$= (2\pi)^n \left[\frac{1}{(2\pi)^n} \int_{R^n} \phi(\sigma) e^{-i\sigma 0} d\sigma\right] = \langle 1, \phi\rangle = \langle 1, F[\varphi]\rangle,$$

buradan

$$F[\delta(x_1,\dots,x_n)] = 1; \ F^{-1}[1] = \delta(x).$$

$2^0. F[1] = (2\pi)^n \delta(\sigma_1,\dots,\sigma_n)$.

$$3^0. F[P(x_1,\dots,x_n)] = F[P(x_1,\dots,x_n)\cdot 1] = (2\pi)^n P\left(i\frac{\partial}{\partial\sigma_1},\dots,i\frac{\partial}{\partial\sigma_n}\right)\delta(\sigma_1,\dots,\sigma_n).$$

Xüsusi halda,

$$1^0. F\left[x_1^{\alpha_1}\dots x_n^{\alpha_n}\right] = (2\pi)^n \left(i\frac{\partial}{\partial\sigma_1}\right)^{\alpha_1}\left(i\frac{\partial}{\partial\sigma_2}\right)^{\alpha_2}\dots\left(i\frac{\partial}{\partial\sigma_n}\right)^{\alpha_n}\delta(\sigma_1,\dots,\sigma_n).$$

$2^0.F\left[\frac{\partial}{\partial x_k}\delta\right]=i\sigma_k.$

$3^0.F[-ix_k]=\frac{\partial}{\partial x_k}\delta$.

Məsələ 1. Tutaq ki,

$$P\left(\frac{d}{dx}\right)=\frac{d^2}{dx^2}-a^2$$

operatorunun fundamental həllini tapmaq lazımdır. Əgər elə $E(x)\in S'$ varsa ki,

$$P\left(\frac{d}{dx}\right)E(x)=\delta(x) \tag{1}$$

olur, onda $E(x)$ P üçün fundamental həll adlanır. (1) tənliyi bu şəkildə alınır:

$$E''-a^2E=\delta(x) . \tag{2}$$

Bu tənliyə Furye çevirməsini tətbiq etsək,

$$F[E'']=-\sigma^2F[E]$$

olduğunu nəzərə aldıqda, $V(\sigma)=F[E(x)]$ işarə edib, (2)-dən

$$\left(-\sigma^2-a^2\right)V(\sigma)=1$$

alırıq, buradan isə

$$V(\sigma)=-\frac{1}{a^2+\sigma^2} \tag{3}$$

alırıq. Tərs Furye çevirməsi vasitəsilə buradan alırıq:

$$E(x)=F^{-1}\left[-\frac{1}{a^2+\sigma^2}\right] . \tag{4}$$

Məlumdur ki,

$$F\left[e^{-a|x|}\right]=\frac{2a}{a^2+\sigma^2}, \tag{5}$$

buradan

$$-2aF^{-1}\left[-\frac{1}{a^2+\sigma^2}\right]=e^{-a|x|} .$$

Beləliklə,

$$E(x)=-\frac{1}{2a}e^{-a|x|}.$$

Bilavasitə (S' fəzasında) alırıq:

$$E'=\frac{1}{2a}e^{-a|x|}\cdot a|x|'=\frac{1}{2}e^{-a|x|}\cdot|x|'.$$

Lakin $|x|'=sign\,x.$ Onda

$$E'=\frac{1}{2}e^{-a|x|}\cdot sign\,x.$$

Buradan alırıq:

$$E''=-\frac{a}{2}e^{-a|x|}\cdot|x|'\cdot sign\,x+\frac{1}{2}e^{-a|x|}\cdot(sign\,x)'.$$

Lakin $(sign\,x)'=2\delta(x).$ Onda

$$E''=-\frac{a}{2}e^{-a|x|}+\frac{1}{2}e^{-a|x|}\cdot\delta(x)=-\frac{a}{2}e^{-a|x|}+\delta(x).$$

Bu ifadəni yerinə yazdıqda alırıq ki,

$$E''-a^2E=\delta(x).$$

Qeyd. İndi (5) düsturunu yoxlayaq $\left(e^{-a|x|}\in S\right)$.

$$F\left[e^{-a|x|}\right]=\int_{-\infty}^{\infty}e^{-a|x|-i\sigma x}dx=\int_{-\infty}^{0}e^{-a|x|-i\sigma x}dx+\int_{0}^{\infty}e^{-a|x|-i\sigma x}dx=$$

$$=\int_{0}^{\infty}e^{-at}\left[e^{i\sigma t}+e^{-i\sigma t}\right]dt=2\int_{0}^{\infty}\cos\sigma t\cdot e^{-at}\,dt\equiv 2\cdot J,$$

$$J=\int_{0}^{\infty}\cos\sigma t\cdot e^{-at}\,dt=\frac{1}{\sigma}e^{-at}\sin\sigma t\,/_0^{\infty}+\frac{a}{\sigma}\int_{0}^{\infty}\sin\sigma t\cdot e^{-at}\,dt=$$

$$=-\frac{a}{\sigma^2}\left[e^{-at}\cos\sigma t\,/_0^{\infty}+a\int_{0}^{\infty}e^{-at}\cos\sigma t\,dt\right]=-\frac{a}{\sigma^2}[aJ-1],$$

buradan

$$J\cdot\left(1+\frac{a^2}{\sigma^2}\right)=\frac{a}{\sigma^2},\quad J=\frac{a}{a^2+\sigma^2}.$$

Beləliklə,

$$F\left[e^{-a|x|}\right]=\frac{2a}{a^2+\sigma^2}.$$

Məsələ 2.(bax:pr.5, məsələ 7^0,səh.301)

$$F[\theta(x)]=\pi\delta(\xi)+i\mathscr{P}\frac{1}{\xi},$$

$$F[\theta(-x)]=\pi\delta(\xi)-i\mathscr{P}\frac{1}{\xi}.$$

Məsələ 3.

$$F\left[e^{ix^2}\right]=\sqrt{\pi}\,e^{-\frac{i}{4}\left(\xi^2-\pi\right)}. \tag{*}$$

Məlumdur ki,

$$\int_{-\infty}^{\infty}e^{iy^2}dy=\sqrt{\pi}\,e^{\frac{i\pi}{4}}.$$

Onda

$$F\left[e^{ix^2}\right]=\int_{-\infty}^{\infty}e^{ix^2+ix\xi}dx=\lim_{\substack{N\to\infty\\ M\to\infty}}\int_{-M}^{N}e^{ix^2+ix\xi}\,dx=$$

$$=\lim_{\substack{N\to\infty\\ M\to\infty}}\int_{-M}^{N}e^{i\left(x+\frac{\xi}{2}\right)^2-\frac{i}{4}\xi^2}\,dx=$$

$$=e^{-\frac{i}{4}\xi^2}\lim_{\substack{N\to\infty\\ M\to\infty}}\int_{-M+\frac{\xi}{2}}^{N+\frac{\xi}{2}}e^{iy^2}\,dy=e^{-\frac{i}{4}\xi^2}\int_{-\infty}^{\infty}e^{iy^2}\,dy=\sqrt{\pi}\,e^{-\frac{i}{4}\left(\xi^2-\pi\right)}.$$

$\forall \varphi \in D, \sup p\varphi \subset (-R, R)$.

$$\left\langle F\left[e^{ix^2}\right], \varphi\right\rangle = \left\langle e^{ix^2}, F[\varphi]\right\rangle = \int e^{ix^2} F[\varphi]\, dx =$$

$$= \lim_{\substack{N\to\infty \\ M\to\infty}} \int_{-M}^{N} e^{ix^2} \int_{-R}^{R} \varphi(\xi) e^{ix\xi}\, d\xi\, dx =$$

$$= \lim_{\substack{N\to\infty \\ M\to\infty}} \int_{-R}^{R} \varphi(\xi) \int_{-M}^{N} e^{ix^2 + ix\xi}\, d\xi\, dx = \int_{-R}^{R} \varphi(\xi) \lim_{\substack{N\to\infty \\ M\to\infty}} \int_{-M}^{N} e^{ix^2 + ix\xi}\, d\xi\, dx =$$

$$= \sqrt{\pi}\, e^{-\frac{i\pi}{4}} \int \varphi(\xi)\, e^{-\frac{i\xi^2}{4}}\, d\xi = \left\langle \sqrt{\pi}\, e^{\frac{i\pi}{4} - \frac{i\xi^2}{4}}, \varphi \right\rangle,$$

Deməli, $(*)$ doğrudur. D S-də sıx olduğu üçün $(*)$ həm də S-də doğru olur.

Məsələ 4. $n > 1$ olduqda $\delta(r-a)$ funksionalı belə təsir edir:

$$\langle \delta(r-a), \varphi(x) \rangle = \int_{|x| \le a} \varphi(x) dx.$$

Deməli $\delta(r-a)$ funksionalı hər $\varphi(x)$-ə uyğun onun a radiuslu sfera üzərindəki inteqralını qoyur. $\delta(r-a)$-finit funksionaldır. Onda onun Furye çevirməsi belə olur:

$$F[\delta(r-a)] = \left\langle \delta(r-a), e^{ix\xi} \right\rangle = \int_{|x| \le a} e^{ix\xi}\, dx$$

Sferik koordinatlara keçək: $r = |x| = a, \quad \rho = |\xi|$.

Onda

$$F[\delta(r-a)] = \int_{\Omega n} e^{ia|x|\cos\theta} a^{n-1} \sin^{n-2}\theta\, d\theta\, d\omega_{n-1} =$$

$$= a^{n-1}\, \Omega_n \int_0^{\pi} e^{ia|x|\cos\theta} \sin^{n-2}\theta\, d\theta$$

(Ω_n – R^n-də 1 radiuslu sferanın səth sahəsidir).

Buradan, xüsusi halda alırıq:

$$F[\delta(r-a)] = 4\pi \frac{\sin a|\xi|}{|\xi|}.$$

Deməli

$$F^{-1}\left[\frac{\sin a|\xi|}{|\xi|}\right] = \frac{1}{4\pi}\delta(r-a),\ n=3.$$

Məsələlər.

İsbat edin:

$$1. \left(\mathscr{P}\frac{1}{x}\right)' = -\mathscr{P}\frac{1}{x^2}.$$

$$2.\ F[sign\,x] = 2i\mathscr{P}\frac{1}{\xi}.$$

$$3. F\left[\mathscr{P}\frac{1}{x}\right] = i\pi\, sign\,\xi.$$

$$4. F\left[\mathscr{P}\frac{1}{x^2}\right] = -\pi|\xi|.$$

$$5. F[|x|] = -2\mathscr{P}\frac{1}{\xi^2}.$$

$$6. F[\theta(x)\cdot x] = -i\pi\,\delta'(\xi) - i\mathscr{P}\frac{1}{\xi^2}.$$

$$7. F[\theta(R-|x|)] = 2\frac{\sin R|\xi|}{|\xi|}.$$

$$8. F\left[\frac{\theta(R-|x|)}{\sqrt{R^2-|x|^2}}\right] = 2\pi\cdot\frac{\sin R|\xi|}{|\xi|}.$$

9.Hesablayın:
$F[\sin ax]$, $F[\cos ax]$.

10. $f, g \in L_1$. Göstərin ki, $f * g \in L_1$ və

$$\|f*g\|_{L_1} \le \|f\|_{L_1} \cdot \|g\|_{L_1}$$

11. $xT = 1,\ T = ?\ T \in D'$.

12. $f(x) = \begin{cases} |x|, & |x| < 1 \\ 0, & |x| \ge 1 \end{cases} \quad F[f] = ?$

Gösətərin ki, $F[f] \in C^{\infty}(R)$.

13. Hesablayın: $\delta'' * |x|$.

14. İsbat edin: $F[|x|] = A\mathcal{P}\dfrac{1}{\xi^2} + c\delta$.

15. $F\left[\mathcal{P}\dfrac{1}{x}\right] = ?$

16. $f_A(x) = \begin{cases} 1, & |x| \le A, \\ 0, & |x| > A. \end{cases}$

Göstərin ki,

a) $F[f_A] = ?$, b) $f_A \xrightarrow{S''} 1,\ A \to \infty$, c) $F[f_A] \xrightarrow{S'} \delta,\ A \to \infty$

17.Göstərin: $F\left[e^{-\pi x^2}\right] = e^{-\pi\xi^2}$.

18. $E(x,t) = \begin{cases} \dfrac{1}{2}, & |x| \le at, \\ 0, & |x| > at. \end{cases}$

1). Hesablayın: $F_x[E(x,t)]$,

2). $\dfrac{\partial^2}{\partial t^2} - a^2\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}$ x-ə nəzərən Furye çevirməsini tətbiq etməklə operatorun S'-də fundamental həllini tapın.

§ 5.Klassik diferensial operatorların fundamental həlləri. Furye çevirmələri metodu.

1. Laplas operatoru.

$$\Delta E(x) = \delta(x)$$

tənliyini həll edək. Furye çevirməsini hər tərəfə tətbiq etməklə alırıq:

$$-|\xi|^2 \cdot \widetilde{E}(\xi)=1 \qquad (*)$$

Tutaq ki, $n=2$. Göstərək ki, bu halda

$$\widetilde{E}(\xi)=-\mathcal{P}\frac{1}{|\xi|^2}$$

sinqulyar funksionalı $(*)$ tənliyinin həllidir. Doğrudan da, $\forall \varphi \in S$ üçün alırıq:

$$\left\langle |\xi|^2 \mathcal{P}\frac{1}{|\xi|^2}, \varphi \right\rangle = \left\langle \mathcal{P}\frac{1}{|\xi|^2}, |\xi|^2 \varphi \right\rangle =$$

$$= \int_{|\xi|<1} \frac{|\xi|^2 \varphi(\xi) - |\xi|^2 \varphi(\xi)/_{\xi=0}}{|\xi|^2} d\xi + \int_{|\xi|>1} \frac{|\xi|^2 \varphi(\xi)}{|\xi|^2} d\xi = \int_{R^n} \varphi(\xi) d\xi = \langle 1, \varphi \rangle.$$

Deməli

$$|\xi|^2 \mathcal{P}\frac{1}{|\xi|^2} = 1.$$

Yəni

$$\widetilde{E}(\xi) = F[E(x)] = -\mathcal{P}\frac{1}{|\xi|^2}$$

funksiyası $(*)$ tənliyini ödəyir. Onda $E(x) = -F^{-1}\left[\mathcal{P}\frac{1}{|\xi|^2}\right]$ funksiyası Δ-nın fundamental həlli olur.

Asan göstərmək olar ki, (bax: [6] səh.142,146):

$$1^0. F\left[\mathcal{P}\frac{1}{|x|^2}\right] = -2\pi \ln|\xi| + C, \ (n=2)$$

və

$$2^0. F\left[\mathcal{P}\frac{1}{|x|}\right] = -2\ln|\xi| + C \qquad (n=1)$$

Digər tərəfdən, məlumdur ki, $\forall f \in S'$ üçün tərs Furye çevirməsi belədir:

$$F^{-1}[f(x)]=\frac{1}{(2\pi)^n}F[f(-x)].$$

$n=2$ olduqda alırıq ki,

$$F^{-1}\left[\mathcal{P}\frac{1}{|\xi|^2}\right]=\frac{1}{(2\pi)^2}F\left[\mathcal{P}\frac{1}{|-\xi|^2}\right]=\frac{1}{4\pi^2}F\left[\mathcal{P}\frac{1}{|\xi|^2}\right]=-\frac{1}{2\pi}\ln|x|+c$$

Yuxarıda biz gördük ki,

$$\widetilde{E}(\xi)=-\mathcal{P}\frac{1}{|\xi|^2}$$

funksionalı

$$-|\xi|^2\widetilde{E}(\xi)=1$$

tənliyini ödəyir. Onda

$$E(x)=F^{-1}\left[\widetilde{E}(\xi)\right]=F^{-1}\left[\mathcal{P}\frac{1}{|\xi|^2}\right]=-\frac{1}{2\pi}\ln|x|+c$$

funksiyası $P(D)E=\delta$ tənliyini ödəyir, yəni

$$E(x)=-\frac{1}{2\pi}\ln|x|$$

Δ operatorunun $(n=2)$ fundamental həllidir.

Qeyd. $n=3$ olduqda $F[E(x)]=-\frac{1}{|\xi|^2}$, yəni

$$E(x)=-F^{-1}\left[\frac{1}{|\xi|^2}\right]=-\frac{1}{4\pi|x|}$$

olur.

2. İstilikkeçirmə operatorunun fundamental həlli. S' fəzasında $L\equiv\frac{\partial}{\partial t}-a^2\Delta_x$ operatoru verilir. Furye çevirməsini tətbiq etməklə S' fəzasında L operatorunun fundamental həllini hesablayaq. Başqa sözlə, elə $E(x,t)\in S'$ ümumiləşmiş funksiyası tapaq ki,

$$LE(x,t)=\frac{\partial E}{\partial t}-a^2\Delta E=\delta(x,t) \tag{1}$$

olsun. Bunun üçün (1)-in hər tərəfinə x-ə nəzərən F Furye operatorunu tətbiq edək: Onda alarıq:

$$F_x\left[\frac{\partial E}{\partial t}\right]=\frac{\partial}{\partial t}F_x[E]=\frac{\partial}{\partial t}V(\xi,t),$$

burada

$$F_x[E(x,t)]=V(\xi,t)$$

işarə olunur.

$$F_x[\delta(x,t)]=F_x[\delta(x)\cdot\delta(t)]=1(\xi)\cdot\delta(t),$$

$$F_x[\Delta E]=-|\xi|^2V(\xi,t).$$

Nəticədə (1) tənliyi S' fəzasında belə bir adi diferensial tənliyə keçir:

$$\frac{dV}{dt}+a^2|\xi|^2V=1(\xi)\delta(t) \ . \tag{2}$$

S' fəzasında bu tənliyin həlli (yəni $\frac{d}{dt}+a^2|\xi|^2$ operatorunun fundamental həlli)

$$V(\xi,t)=\theta(t)e^{-a^2\cdot t|\xi|^2} \tag{3}$$

olur. Doğrudan da

$$\frac{\partial V}{\partial t}=\theta'(t)e^{-a^2\cdot t|\xi|^2}-a^2|\xi|^2\theta(t)e^{-a^2\cdot t|\xi|^2}=$$

$$=e^{-a^2\cdot t|\xi|^2}\delta(t)-a^2|\xi|^2\theta(t)e^{-a^2\cdot t|\xi|^2}=$$

$$=\delta(t)-a^2|\xi|^2\theta(t)e^{-a^2\cdot t|\xi|^2}.$$

Bu ifadəni (2)-də yazdıqda tələb olunan çıxır. İndi (3) ifadəsinə F_ξ^{-1} tərs Furye çevirməsini tətbiq edək. Onda alırıq

$$E(x,t)\equiv F_\xi^{-1}[V(\xi,t)]=F_\xi^{-1}\left[\theta(t)e^{-a^2\cdot t|\xi|^2}\right]=\theta(t)F_\xi^{-1}\left[e^{-a^2\cdot t|\xi|^2}\right].$$

Lakin məlumdur ki,

$$F_x\left[\frac{1}{\left(2a\sqrt{\pi t}\right)^n}e^{-\frac{|x|^2}{4a^2\cdot t}}\right]=e^{-a^2t|\xi|^2}.$$

Deməli,

$$E(x,t)=\frac{\theta(t)}{\left(2a\sqrt{\pi t}\right)^n}e^{-\frac{|x|^2}{4a^2\cdot t}}.$$

Məhz bu funksiya $L=\frac{\partial}{\partial t}-a^2\Delta$ operatorunun S' fəzasından olan fundamental həllini verir.

3.Dalğa operatoru. Dalğa operatoru verilir:

$$L_a u\equiv\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-a^2\Delta u. \tag{1}$$

Onun fundamental həlli elə $E(x,t)\in D'$ funksiyasına deyilir ki,

$$L_a E(x,t)=\delta(x,t) \tag{2}$$

olsun. (2) tənliyinə F_x Furüye çevirməsini tətbiq edək. Əgər

$$F_x[E]=\widetilde{E}(\xi,t)$$

işarə etsək, onda

$$\frac{d^2\widetilde{E}}{dt^2}+a^2|\xi|^2\widetilde{E}=1(\xi)\cdot\delta(t) \tag{3}$$

alarıq. Məlumdur ki, $L=\frac{d^2}{dt^2}+a^2$ operatorunun fundamental həlli

$$E(t)=\theta(t)\frac{\sin at}{a}$$

olur. Burada a-nı $a|\xi|$ ilə əvəz etdikdə (3)-ün fundamental həlli alınır:

$$\widetilde{E}=\theta(t)\frac{\sin a|\xi|t}{a|\xi|}.$$

Deməli

$$E(x,t)=F_\xi^{-1}\left[\widetilde{E}\right]=\theta(t)F_\xi^{-1}\left[\frac{\sin a|\xi|t}{a|\xi|}\right].$$

Məsələn, $n=1$ olan halda bilirik ki,

$$E(x,t)=\frac{1}{2a}\theta(at-|x|).$$

Deməli

$$E(x,t)\equiv\theta(t)F_\xi^{-1}\left[\frac{\sin a|\xi|t}{a|\xi|}\right]=\frac{1}{2a}\theta(at-|x|)=\begin{cases}\frac{1}{2a}, & |x|<at\ ,\\ 0, & |x|>at\ .\end{cases}$$

Analoji qaydada bilavasitə hesablanır ki, $n=2$ olduqda (müstəvidə)

$$E(x,t)\equiv\theta(t)F_\xi^{-1}\left[\frac{\sin a|\xi|t}{a|\xi|}\right]=\frac{\theta(at-|x|)}{2\pi\sqrt{a^2t^2-|x|^2}}.$$

4.Şredinger operatoru. Bir operatora baxaq:

$$L\equiv i\frac{\partial}{\partial t}+\frac{1}{2m}\Delta_x$$

L-Şredinger operatoru adlanır. Onun fundamental həlli $E(x,t)$:

$$i\frac{\partial E}{\partial t}+\frac{1}{2m}\Delta_x E=\delta(x,t)\ . \tag{1}$$

Bu tənliyə F_x Furye çevirməsini tətbiq etdikdə $F_x[E(x,t)]=V(\xi,t)$ üçün alırıq:

$$i\frac{dV}{dt}-\frac{1}{2m}|\xi|^2V=1(\xi)\cdot\delta(x). \tag{2}$$

Bilirik ki, $P=\frac{d}{dt}+a$ operatorunun fundamental həlli belədir:

$$E(t)=\theta(t)e^{-at}.$$

Onda (2)-də

$$i\frac{d}{dt}-\frac{1}{2m}|\xi|^2\ .$$

operatorunun fundamental həlli

$$V(\xi,t)=-i\theta(t)e^{-\frac{i}{2m}|\xi|^2 t}$$

olar. Lakin

$$-i\theta(t)e^{-\frac{i}{2m}|\xi|^2 t}=-i\lim_{\varepsilon\to 0}\theta(t)\left(\frac{m}{m+i\varepsilon}\right)^{n/2}e^{-\frac{i}{2(m+i\varepsilon)}|\xi|^2 t}$$

olduğundan və F_ξ^{-1} Furye operatoru S'-də kəsilməz olduğundan həmçinin məlum

$$F_\xi^{-1}\left[e^{-a^2 t|\xi|^2}\right]=\frac{1}{\left(2a\sqrt{\pi t}\right)^n}e^{-\frac{|x|^2}{4a^2\cdot t}}$$

düsturundan istifadə etməklə alırıq:

$$F_\xi^{-1}[V(\xi,t)]=F_\xi^{-1}\left[-i\theta(t)e^{-\frac{i}{2m}|\xi|^2 t}\right]=$$

$$=-i\theta(t)F_\xi^{-1}\left[\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\frac{m}{m+i\varepsilon}\right)^{n/2}e^{-\frac{i}{2(m+i\varepsilon)}|\xi|^2 t}\right]$$

$$\left(a^2=\frac{1}{2(m+i\varepsilon)}\ \text{işarə edirik}\right)$$

$$=-i\theta(t)\left(\frac{m}{2\pi t}\right)^{n/2}e^{i\left[\frac{|x|^2}{2t}(m+i0)-\frac{\pi}{4}n\right]}.$$

Beləliklə

$$E(x,t)=-i\theta(t)\left(\frac{m}{2\pi t}\right)^{n/2}e^{\left[i\frac{|x|^2}{2t}(m+i0)-i\frac{\pi}{4}n\right]}.$$

Xüsusi halda $(n=1)$ alırıq:

$$E(x,t)=-\frac{1+i}{\sqrt{2}}\theta(t)\sqrt{\frac{m}{2\pi t}}\,e^{i\frac{m}{2t}x^2}.$$

§6.İstilikkeçirmə tənliyi üçün Koşi məsələsinin S' fəzasında həlli. Furye çevirməsi metodu.

Biz (adi funksiyalar sinfində) Furye metodu ilə bircins tənlik halında

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}=\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}, u/_{t=0}=u_0(x)$$

Koşi məsələsinin həllini necə tapmağı gördük. İndi belə bir Koşi məsələsinə baxırıq:

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}-\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}=f(x,t), (t>0), \tag{1}$$

$$u/_{t=0}=u_0(x) . \tag{2}$$

Burada u və f-ümumiləşmiş funksiyalardır (sadəlik üçün $u, f \in S'$), u-istilik miqdarını, f-isə xarici istilik mənbəyini xarakterizə edir, $u_0(x)$ isə $t=0$ anında cismə verilən istilik prosesini xarakterizə edir.

İki vacib hala baxaq:

1) $f(x,t)=\delta(x)$. Fiziki olaraq bu o deməkdir ki, istilik mənbəyi nöqtəvi olub, $x=0$ nöqtəsində yerləşdirilib və impuls xarakterli təsir edir.

2) $f(x,t)=\delta(x)\cdot\delta(t)$-bu o deməkdir ki, istilik mənbəyi nöqtəvi olub, $x=0$ nöqtəsində yerləşib və yalnız $t=0$ anında cismə 1 istilik miqdarı verir.

(1) tənliyi üçün adi Koşi məsələsi $(t>0, -\infty<x<\infty)$ oblastında baxılır. $t=0$ olduqda isə $u(x,t)=u_0(x)$. Ümumiləşmiş funksiyalar sinfində baxdıqda isə u və f funksiyalarını $t<0$ oblastıına sıfır olaraq davam etdirmək lazım gəlir.

$$V=\begin{cases} u(x,t), & t>0 \\ 0, & t<0 \end{cases}$$

olsun. Onun kimi də $f=0, t<0$ qəbul edirik. Onda kəsilən funksiyanın törəməsi qaydasına əsasən tapırıq ki,

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}=\left\{\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}\right\}, \frac{\partial V}{\partial t}=\left\{\frac{\partial V}{\partial t}\right\}+u_0(x)\delta(t) .$$

Belə olduqda V funksionalı üçün belə bir tənlik alınır:

$$\frac{\partial V}{\partial t}-\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}=f+u_0(x)\delta(t)\ . \qquad (3)$$

Fərz edək ki, $V,f\in S'$. Onda $\tilde{V}=F[V],\ g=F[f]\in S'$. Deməli,məsələn

$$g(\sigma,t)=F[f]=\int_{-\infty}^{\infty}f(x,t)e^{-i\sigma x}\,dx \qquad (4)$$

və $g(\sigma,t)=0,\ t<0$ olduqda.

Fərz edirik ki, həm də $u_0(x)\in S'$,onda onun Furye çevirməsi var:

$$\tilde{V}\big|_{t=0}=\tilde{V}_0(\sigma)=\int u_0(x)e^{-i\sigma x}\,dx. \qquad (5)$$

İstəyirik öyrənək ki, bu Koşi məsələsinin $\forall t$ üçün S' sinfində həlli varmı. Əgər belə həll varsa, onda $\forall t$ üçün həllin Furye çevirməsi $\tilde{V}(\sigma,t)$ $(=0,t<0)$ var:

$$\tilde{V}(\sigma,t)=\int V(x,t)e^{-i\sigma x}\,dx\ . \qquad (6)$$

Furye çevirməsi $x\in R$ dəyişəninə nəzərən aparılır (hər qeyd olunmuş t üçün). Onda

$$\frac{\partial\tilde{V}(\sigma,t)}{\partial t}=\int\frac{\partial V}{\partial t}e^{-ix\sigma}\,dx,$$

$$F\left[\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}\right]=(i\sigma)^2\tilde{V}(\sigma,t),$$

olduğundan, $\tilde{V}(\sigma,t)$ üçün belə bir tənlik alınır:

$$\frac{\partial\tilde{V}}{\partial t}+\sigma^2\tilde{V}=g(\sigma,t)+\tilde{V}_0(\sigma)\delta(t),\quad \tilde{V}_0(\sigma)=F[V_0(\sigma)] \qquad (7)$$

Bu tənliyə (σ qeyd olunduqda) t-yə nəzərən adi diferensial tənlik kimi baxırıq. Bu tənliyi A' bükülmə cəbrində belə bükülmə kimi yazmaq olar.

$$\left(\delta'(t)+\sigma^2\delta(t)\right)*\tilde{V}(\sigma,t)=g(\sigma,t)+\tilde{V}_0(\sigma)\delta(t).$$

Sağ tərəfi $F(\sigma,t)$ ilə işarə edək. Onda A'-də bu tənliyi belə yazmaq olar (bükülmə t-yə görə aparılır):

$$\left(\delta'(t)+\sigma^2\delta(t)\right)*\tilde{V}(\sigma,t)=F(\sigma,t). \qquad (8)$$

Məlumdur ki, A'-də

$$f=\delta'(t)+\sigma^2\delta(t)$$

üçün tərs element belədir:

$$E(\sigma,t)\equiv f^{-1}=\theta(t)e^{-\sigma^2 t}.$$

Deməli $E(\sigma,t)$ funksiyası $\dfrac{d}{dt}+\sigma^2$ operatorunun fundamental həllidir. Belə olduqda (8) tənliyini belə yazmaq olur:

$$f*X=\tilde{g}, \qquad (9)$$

burada

$$f=\delta'(t)+\sigma^2\delta(t), \quad \tilde{g}\equiv g(\sigma,t)+\tilde{V}_0(\sigma)\delta(t)\equiv F(\sigma,t).$$

Onda (9) tənliyinin həlli belə olur:

$$\begin{aligned}X&=f^{-1}*\tilde{g}=\left(\theta(t)e^{-\sigma^2 t}{}_{(t)}*g(\sigma,t)\right)+\\&+\left(\theta(t)e^{-\sigma^2 t}{}_{(t)}*\tilde{V}_0(\sigma)\delta(t)\right)=\\&=\left(g(\sigma,t)*\theta(t)e^{-\sigma^2 t}\right)+\tilde{V}_0(\sigma)\left(\delta(t)*\theta(t)e^{-\sigma^2 t}\right)=\\&=g*\theta(t)e^{-\sigma^2 t}+\tilde{V}_0(\sigma)e^{-\sigma^2 t}\theta(t).\end{aligned}$$

Beləliklə (7) tənliyinin həlli bu düsturla tapılır:

$$\tilde{V}(\sigma,t)=g(\sigma,t)*\theta(t)e^{-\sigma^2 t}+\tilde{V}_0(\sigma)e^{-\sigma^2 t} \qquad (10)$$

Əgər $g(\sigma,t)$-adi funksiya olarsa, onda

$$\begin{aligned}g(\sigma,t)_{(t)}*\theta(t)e^{-\sigma^2 t}&=\int_0^t g(\sigma,\tau)e^{-\sigma^2(t-\tau)}d\tau=\\&=e^{-\sigma^2 t}\int_0^t g(\sigma,\tau)e^{\sigma^2\tau}d\tau\end{aligned}$$

və deməli , (10) həlli belə olur:

$$V(\sigma,t)=e^{-\sigma^2 t}\int_0^t g(\sigma,\tau)e^{\sigma^2\tau}d\tau+V_0(\sigma)e^{-\sigma^2 t}\ . \tag{11}$$

Lakin, ümumi halda həll düsturunu (10) düsturu şəklində yazmaq daha mənalıdır.

Nəticədə (3)-(5) məsələsinin $V(x,t)$ həllini tapmaq üçün (10) funksiyasına tərs Furye çevirməsini tətbiq etmək lazım gəlir. (Nəzərə almaq lazımdır ki, $t<0$ olduqda $V(x,t)=0$ olur). Beləliklə alırıq ki,

$$V(x,t)=F^{-1}\left[\widetilde{V}(\sigma,t)\right]=F^{-1}\left[g(\sigma,t)*\theta(t)e^{-\sigma^2 t}\right]+$$
$$+F^{-1}\left[\widetilde{V}_0(\sigma)\cdot e^{-\sigma^2 t}\right].$$

Qeyd. $t<0$ olduqda çubuğun istiliyi 0-ra bərabər olub və $t=0$ anında ona $x=0$ nöqtəsində yerləşən mənbə 1 istilik miqdarı verir. Deməli $u_0(x)=0,\ f(x,t)=\delta(x)\delta(t)$. Onda $\widetilde{V}(\sigma)=0$ və $g(\sigma,t)=\delta(t)$. Bu halda (10) düsturundan alınır ki,

$$\widetilde{V}(\sigma,t)=\theta(t)e^{-\sigma^2 t}.$$

Buradan

$$V(x,t)=F^{-1}\left[\theta(t)e^{-\sigma^2 t}\right]=\theta(t)F^{-1}\left[e^{-\sigma^2 t}\right]=\theta(t)\cdot\frac{1}{2\sqrt{\pi t}}e^{-\frac{x^2}{4t}}.$$

Məlumdur ki, məhz bu funksiya D' fəzasında $\frac{\partial}{\partial t}-\frac{\partial^2}{\partial x^2}$ istilikkeçirmə operatorunun fundamental həllini verir.

Bəzi nəticələr. $1^0.\ \forall t>0$ üçün baxılan cismin istənilən nöqtəsində temperatur 0-dan böyük olur, yəni guya istiliyin yayılma sürəti sonsuzdur. Lakin $|x|\to\infty$ olduqda temperatur çox kiçik olur.

$2^0.\ \forall t$ üçün $u(x,t)$ həllinin qrafiki Qauss əyrisini təmsil edir, onun maksimum qiyməti $x=0$ nöqtəsində alınır:

$$u(x,t)=\theta(t)\cdot\frac{1}{2\sqrt{\pi t}}\ .$$

Əgər $x=0$ nöqtəsində nöqtəvi mənbə (δ-funksiya) yerləşibsə, onda bu nöqtədə temperatur $=+\infty$ olur, sonra isə $t>0$ olduqda soyuyaraq $\frac{1}{\sqrt{t}}$ kimi azalır. $(t \to \infty)$.

3^0. $t \to 0$ olduqda $\forall x \neq 0$ nöqtəsində temperatur $\to 0$ olur və t-nə qədər az olduqca qrafikin maksimumu $x=0$ nöqtəsində o qədər də sərt yuxarı qalxır.

§7.Diferensial operatorun fundamental həlli ilə Koşi məsələsinin fundamental həlli arasında əlaqə.

Məlumdur ki, D' fəzasında

$$\frac{\partial u}{\partial t} - P\left(i\frac{\partial}{\partial x}\right)u = f \tag{1}$$

tənliyinin fundamental həlli $E(x,t)$ belə funksiyadır:

$$\frac{\partial E(x,t)}{\partial t} - P\left(i\frac{\partial}{\partial x}\right)E(x,t) = \delta(x,t). \tag{2}$$

Digər tərəfdən

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} - P\left(i\frac{\partial}{\partial x}\right)u(x,t) = 0, \tag{3}$$

tənliyi üçün Koşi məsələsinin fundamental həlli (3)-ün $t \geq 0$ olduqda, elə $u(x,t)$ həllinə deyilir ki,

$$u/_{t=0} = \delta(x). \tag{4}$$

(3)-(4) Koşi məsələsinin həlli məlum olduqda $E(x,t)$ funksiyasını qurmaq olur.

Teorem. Tutaq ki, $u(x,t)$ (3)-(4) Koşi məsələsinin həllidir. Onda

$$E(x,t) = \begin{cases} 0, & t<0, \\ u(x,t), & t>0 \end{cases} \tag{5}$$

funksiyası (1) tənliyinin fundamental həlli olur. Burada bəzi anlayışları izah etmək lazım gəlir. $u(x,t)$ funksiyası x-ə nəzərən ümumiləşmiş funksiyadır, t-parametrdir. $E(x,t)$ isə həm x, həm də t-yə nəzərən ümumiləşmiş funksiyadır. Deməli gərək $u(x,t)$ funksiyası da $\varphi(x,t)$ əsas funksiyaları üzərində təyin edilsin. Ona görə

$$\langle u(x,t),\varphi(x,t)\rangle = \int_0^{\infty}\langle u(x,t),\varphi(x,t)\rangle dt.$$

İnteqral altında $u(x,t)$ qeyd olunmuş t üçün $\varphi(x,t)$ funksiyasına x-ə nəzərən təsir edir. Nəticədə t-dən asılı funksiya alınır, məsələn, $\langle u(x,t),\varphi(x,t)\rangle = \phi(t)$. Sonra isə t-yə nəzərən inteqrallanır, beləliklə,

$$\langle u(x,t),\varphi(x,t)\rangle = \int_0^{\infty}\phi(t)dt.$$

Göstərək ki, bu qayda ilə daxil edilən $E(x,t)$ ümumiləşmiş funksiyası (2) tənliyinin həlli olur. Bunun üçün (2) tənliyində x və t-yə nəzərən Furye çevirməsini tətbiq etməklə alınan tənlik doğrudur, yəni

$$[1 - i\sigma_0 - P(\sigma)]V(\sigma,\sigma_0) = 1, \tag{6}$$

burada σ_0 ilə t-yə nəzərən Furye çevirməsi zamanı alınan dəyişən, σ ilə isə x-lərə nəzərən Furye çevirməsi zamanı alınan dəyişənlər işarə olunur,

$$V(\sigma,\sigma_0) = \underset{\substack{x\to\sigma \\ t\to\sigma_0}}{F}[u(x,t)].$$

İndi Furye çevirməsini (5) kimi təyin olunan $E(x,t)$ funksiyasına tətbiq edək. Əvvəlcə qeyd olunmuş t üçün (x-ə nəzərən) Furye çevirməsini tətbiq edək. Belə çevirmənin nəticəsində $F_x[E(x,t)] = V(\sigma,t)$ alınırsa, deməli alırıq ki:

$$\begin{cases} V(\sigma,t) = 0, & t < 0, \\ V(\sigma,0) = 1, & t = 0, \end{cases}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}V(\sigma,t) - P(\sigma)V(\sigma,t) = 0, t > 0.$$

Bu tənliyi həll edərək alırıq:

$$V(\sigma,t) = \begin{cases} 0, & t < 0, \\ e^{tP(\sigma)}, & t \ge 0. \end{cases}$$

İndi burada t-yə nəzərən Furye çevirməsini tətbiq edək:

$$V(\sigma,\sigma_0)=\int_0^\infty e^{tP(\sigma)}e^{it\sigma_0}\,dt\quad. \tag{7}$$

Əgər $\operatorname{Re} P(\sigma)<0$ olarsa, onda bu inteqral adi mənada yığılan olur. Onu hesabladıqda

$$V(\sigma,\sigma_0)=\frac{1}{-i\sigma_0-P(\sigma)}$$

alırıq. Buradan (6) bərabərliyi alınır. Əgər $\lambda=P(\sigma)$ işarə etsək (7)-dən çıxır ki, $\operatorname{Re}\lambda<0$ olduqda $V(\sigma,t_0)$ analitik funksiya olur:

$$V(\sigma,\sigma_0)=\int_0^\infty e^{t\lambda}e^{it\sigma_0}\,dt\,.$$

Deməli, əgər bu inteqral $\operatorname{Re}\lambda<0$ üçün yığılırsa, onda bütün $P(\sigma)$ qiymətləri üçün (6) bərabərliyi ödənilir. Beləliklə, (2)-nin Furye çevirməsi üçün (6) bərabərliyi doğrudur, deməli (2) bərabərliyi də doğrudur.

Deməli, $E(x,t)$ funksiyası $P\left(i\dfrac{\partial}{\partial x}\right)$ operatorunun fundamental həllidir.

F Ə S İ L 8

DİFERENSİAL POLİNOMUN FUNDAMENTAL HƏLLİNİN VARLIĞI TEOREMİ VƏ QURULMASI METODLARI

§ 1. Sabit əmsallı diferensial operatorun fundamental həlli

Fundamental həll anlayışı xüsusi törəməli diferensial operatorların ümumi nəzəriyyəsində mühüm yer tutur. Bu cür həllərin varlığı verilən diferensial tənliklərin həllolunması üçün açar rolunu oynayır, digər tərəfdən bu cür həllərin tətqiq olunması özü-özlüyündə də elmi-riyazi maraq kəsb edir.

Xüsusi törəməli xətti diferensial operatorların ümumi nəzəriyyəsi əsasən keçən əsrin sonunda tam nəzəriyyə kimi yekunlaşmış oldu. Ümumi nəzəriyyədə tipə ayırmadan və tərtibi məhdudlaşdırmadan diferensial tənliklərin həllərinin varlığı, xassələri, yeganəlik sinifləri, Koşi məsələsinin həllinin varlığı, yeganəliyi, sərhəd məsələsinin tədqiqi və s. məsələlər baxılır. Ümumi nəzəriyyədə klassik analizdən fərqli olaraq elə zəruri və ya kafi şərtlər axtarılır ki, bu şərtlər ödənildikdə baxılan operatorlar üçün yuxarıda sadalanan xassələr doğru olur. Klassik nəzəriyyə tipik operatorlar sinfini öyrənir (məsələn, 2-ci tərtib elliptik operatorlar).

Bu fəsildə sabit əmsallı diferensial operatorların fundamental həllərinin varlığı, qurulması, xassələri, tətbiqləri sahəsində son 50 ildə alınan bəzi elmi nəticələr şərh olunur. Bütün bu problemlərin həll olunmasında fransız riyaziyyatçısı L.Şvarsın 1950-1951-ci ildə çapdan çıxan «Paylanmalar nəzəriyyəsi» adlı iki kitabı fundamental rol oynadı. Məhz onun yaratdığı ümumiləşmiş funksiyalar nəzəriyyəsi metodları əsasında V.Malqranj, L.Erenprays, L.Hörmander, F.Trev, Q.Y.Şilov, V.S.Vladimirov və digər görkəmli alimlər xüsusi törəməli diferensial tənliklərin keyfiyyət nəzəriyyəsində böyük nailiyyətlər əldə etmiş oldular. Bu nailiyyətlərdən ən vaciblərindən olan fundamental həllin varlığı, onun tapılması metodları, tətbiqləri sahəsində görkəmli nəticələr alınmışdır.

Bu fəsildə əsasən fundamental həllin varlığı, onun qurulması metodları,xassələri və s. şərh olunur.

1. $L(P)$ -həllər fəzası və bəzi xassələri.Tutaq ki, sabit əmsallı diferepnsial tənlik verilir:

$$P\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)u \equiv \sum_{|k|\le p} a_k D^k u \equiv \sum_{|k|\le p} a_{k_1,\dots,k_n} \frac{\partial^{|k|} u(x)}{\partial x_1^{k_1}\dots\partial x_n^{k_n}} = 0 \; . \qquad (1)$$

$$\left(|k| = k_1 + \dots + k_n, x \in R^n, u \in D'\right)$$

Məlumdur ki, $n=1$ olduqda (1) tənliyinin D' fəzasında həlləri yalnız klassik (adi) həllərdir, ciddi ümumiləşmiş funksiya olan həll yoxdur. $n>1$ olduqda vəziyyət dəyişir, həllər içərisində ciddi (adi funksiya olmayan) ümumiləşmiş funksiya olan həllər də meydana çıxır.

Məsələn, $n=2$ olduqda D' fəzasında $\dfrac{\partial u(x_1,x_2)}{\partial x_1}=0$ tənliyinin həlləri arasında $\delta(x_2)$ Dirak funksiyası da var, burada $\delta(x_2)$ belə təyin edilir: $\forall\varphi(x_1,x_2)\in D(R^2)$ üçün

$$\langle\delta(x_2),\varphi(x_1,x_2)\rangle = \int\varphi(x_1,0)dx_1 .$$

Onda alırıq:

$$\left\langle\frac{\partial\delta(x_2)}{\partial x_1},\varphi\right\rangle = -\left\langle\delta(x_2),\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}\right\rangle = -\int\frac{\partial\varphi(x_1,0)}{\partial x_1}dx_1 = -\varphi/_{-\infty}^{\infty} = 0,$$

yəni D' fəzasında

$$\frac{\partial}{\partial x_1}\delta(x_2)=0$$

olur, lakin $\delta(x_2)$ isə adi funksiya deyil.

(1) tənliyinin D' fəzasında bütün həlləri çoxluğunu $L(P)$ ilə işarə edək. P-xətti operator olduğundan $L(P)$ çoxluğu D' fəzasının alt fəzası olur. $L(P)$-xətti fəzadır. Bundan əlavə onun aşağıdakı xassələrini qeyd edək:

1^0. $L(P)$ qapalı çoxluqdur, yəni əgər $Pu_\nu = 0$ və $u_\nu \xrightarrow{D'} u$, $\nu\to\infty$ isə onda $P(u) = \lim\limits_{\nu\to\infty} Pu_\nu = 0$.

2^0. $u \in \mathscr{L}(P)$ və $f \in D'$-finit funksionaldırsa, onda $f * u \in L(P)$ olur, çünki $Pu = 0$ olduqda;
$P(f * u) = f * Pu = f * 0 = 0$.

3^0. $u \in L(P)$ olduqda $\dfrac{\partial u}{\partial x_i} \in L(P)$.

Doğrudan da $\dfrac{\partial u}{\partial x_i} = \dfrac{\partial \delta(x)}{\partial x_i} * u \in L(P)$,

çünki $\dfrac{\partial \delta(x)}{\partial x_i}$-finitdir.

4^0. Hər bir $u \in L(P)$ həlli bu tənliyin sonsuz diferensiallanan həllərindən ibarət müəyyən ardıcıllığın D'-də limitinə bərabərdir. Doğrudan da, tutaq ki, $f_\nu(x)$-sonsuz diferensiallanan δ-vari ardıcıllıqdır, yəni

$$f_\nu \xrightarrow{D'} \delta(x),\ \nu \to \infty, f_\nu(x) \in C^\infty(R^n).$$

Onda $f_\nu(x) * u \xrightarrow{D'} u$, $\nu \to \infty$, çünki $f_\nu \xrightarrow{D'} \delta$ olduğundan

$$f_\nu * \varphi \to \delta * \varphi = \varphi$$

olur. Deməli $\nu \to \infty$ olduqda

$$\langle f_\nu * u, \varphi\rangle = \langle u, f_\nu * \varphi\rangle \to \langle u, \varphi\rangle,$$

yəni D'-də

$$f_\nu(x) * u \to u.$$

Həm də

$$P\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)(f_\nu * u) = f_\nu * P\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)u = f_\nu * 0 = 0,$$

yəni $f_\nu * u$ bükülməsi (1) tənliyinin həllidir və $f_\nu * u \xrightarrow{D'} u$, $\nu \to \infty$

5^0. Sonlu sinqulyarlıq tərtibinə malik olan hər bir $u \in L(P)$ həlli həmin tənliyin adi həllərinin törəmələrinin sonlu cəmi kimi alınır. Doğrudan da, məlumdur ki, $\delta(x)$ belə yazıla bilir:

$$\delta(x) = \sum_{|k| \le p} D^k \omega_k(x),$$

burada $\omega_k(x)$-sonlu tərtibdən q törəməsi olan və $|x| > \varepsilon$ olduqda 0-a bərabər olan adi funksiyalardır. Onda ixtiyari $u \in L(P)$ həllini belə yazmaq olar:

$$u = u * \delta = \sum_{|k| \le p} D^k (u * \omega_k(x)),$$

əgər $s(u) = m$ olursa,onda $u * \omega_k(x)$ ifadəsinin sinqulyarlıq tərtibi $\le m - q$ olar. q-kafi qədər böyük olduqda $m - q$ ədədi qabaqcadan verilən ədəddən kiçik olar.

6^0. $L(P)$- həllər çoxluğunda sinqulyarlıq tərtibi $s(u) = \infty$ olan u həlli də var. Məsələn, sinqulyarlıq tərtibi sosuz olan

$$u(x_1, x_2) = \sum_{q=0}^{\infty} \frac{\partial^q \delta(x_2 - q)}{\partial x_2^q}$$

üçün $\dfrac{\partial u}{\partial x_1} = 0$ tənliyi doğrudur. Deməli $s(u) = \infty$.

2.Puasson düsturunun ümumiləşməsi. Tutaq ki, sabit əmsallı $P\left(\dfrac{\partial}{\partial x}\right)$ polinomu verilir. Əgər elə $E(x) \in D'$ ümumiləşmiş funksiyası varsa ki, D' fəzasında

$$E(x) = \delta(x) \tag{1}$$

olur, onda $E(x)$ $P(D)$ diferensial operatorunun fundamental həlli (funksiyası) adlanır. Məsələn, R^n fəzasında Δ Laplas operatorunun fundamental həlləri belədir:

$$E(x) = -\frac{1}{(n-2)} \cdot \frac{1}{|x|^{n-2}}, \quad n \ne 2, \quad x \in R^n, \quad r = |x| = \sqrt{\sum_1^n x_i^2}, \tag{2}$$

$$E(x) = -\frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{|x|}, \; n = 2.$$

Sonra isbat edəcəyik ki, hər bir $P\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)$ diferensial operatorunun fundamental həlli var və onun konstruktiv qurulması üsulları vardır (Hörmander pilləkəni).

Məlumdur ki, Δ operatorunun (2) fundamental həlləri vasitəsilə Laplas tənliyinin müəyyən G oblastı daxilində verilən həllərini həmin həllərin G-nin sərhədindəki qiymətləri vasitəsilə inteqral göstərilişi şəklində yazmaq olur (Puasson düsturu).

Analoji düsturu ixtiyari

$$P\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)u = 0 \tag{3}$$

tənliyinin həlləri üçün də yazmaq mümkündür. Bunun üçün $P\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)$ operatorunun fundamental həllərini bilmək lazımdır.

Tərif. $G \subset R^n$ oblastında $u(x) \in D'(G)$ ümumiləşmiş funksiyası verilir.

$\forall \varphi \in D(G)$ üçün aşağıdakı bərabərlik ödənildikdə

$$\left\langle P\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)u, \varphi \right\rangle = \left\langle u, P\left(-\frac{\partial}{\partial x}\right)\varphi \right\rangle = 0$$

u funksiyası $P\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) = 0$ tənliyinin G-də həlli adlanır.

Tutaq ki, $E(x)$ funksiyası $P\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)$ operatorunun fundamental həllidir. Fərz edək ki, $L(x) \in C^{\infty}(R^n)$, belə ki, $x = 0$ nöqtəsinin müəyyən V ətrafından kənarda $L(x) \equiv 0$ və sıfırdan başqa elə $V \in G$ kiçik ətrafı var ki, orada $L(x) \equiv 1$.

Lemma 1. G oblastında (3) tənliyinin həllinin ümumi göstəriliş düsturu belə olur:

$$u(x) = P\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)[(1-\alpha)E] * u(x). \tag{4}$$

İsbatı. Tutaq ki, $\varphi \in D(G)$. Onda alırıq:

$$\left\langle P\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)(\alpha E) * u, \varphi\right\rangle = \left\langle \alpha E * P\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)u, \varphi\right\rangle =$$

$$= \left\langle P\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)u, \alpha E * \varphi\right\rangle = \left\langle P\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)u, \phi\right\rangle,$$

burada $\phi = \alpha E * \varphi \in D(G)$. Şərtə görə $u(x)$ (1) tənliyinin G oblastında həllidir, onda $\forall \phi \in D(G)$ üçün

$$\left\langle P\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)u, \phi\right\rangle = 0.$$

Bunu nəzərə aldıqda sonuncu bərabərlikdən alırıq ki, $\forall \varphi \in D(W)$ üçün

$$\left\langle P\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)[(1-\alpha)E] * u, \varphi\right\rangle = \left\langle P\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)E * u, \varphi\right\rangle -$$

$$-\left\langle P\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)(\alpha E) * u, \varphi\right\rangle = \langle \delta * u, \varphi\rangle = \langle u, \varphi\rangle,$$

yəni (4) düsturu doğrudur. Bu düstur Δ operatoru üçün Puassonun məlum inteqral göstərilişi düsturunun ümumi $P\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)$ diferensial operatoru halında analoqudur.

(4) düsturundan çıxan bəzi nəticələri qeyd edək.

1^0. Əgər $P\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)u = 0$ tənliyinin adi u_1, u_2 həlləri G oblastının sərhəddinin yaxınlığında üst-üstə düşürsə, onda bütün oblastda $u_1 = u_2$.

2^0. Əgər $P\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)u = 0$ tənliyinin həlli $u(x)$ G oblastının sərhəddinin yaxın ətrafında sıfra çevrilirsə, onda G-də hər yerdə $u(x) \equiv 0$.

3^0. Əgər $P\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)$ operatorunun fundamental həlli $E(x)$ $x=0$ nöqtəsindən kənarda sonsuz diferensiallanandırsa, onda $P\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)u=0$ tənliyinin hər bir həlli də istənilən G oblastında sonsuz diferensiallanan adi funksiya olur.

Qeyd. $P\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)u=0$ tənliyinin bütün həlləri sonsuz diferensiallanan adi funksiyalar olduqda $P\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)$ operatoru **hipoelliptik operator** adlanır.

Hipoelliptik operatorun hər bir fundamental həlli koordinat başlanğıcından kənarda sonsuz diferensiallanan funksiya olur. Məsələn, Laplas operatoru və onun iterasiyaları hipoelliptik operatordur.

3.Diferensial tənliyin ümumiləşmiş həlli. Tutaq ki, m tərtibli diferensial polinom verilir:

$$L(x,D)=\sum_{|\alpha|\le m}a_\alpha(x)D^\alpha,\quad a_\alpha\in C^\infty(R^n).$$

Xətti diferensial tənliyə baxaq:

$$L(x,D)u=\sum_{|\alpha|\le m}a_\alpha(x)D^\alpha u(x)=f(x),\ f\in D'. \tag{1}$$

Tutaq ki, $u\in D'$ ümumiləşmiş funksiyası G oblastında (1) tənliyinin həllidir, yəni $\forall\varphi\in D(G)$ üçün

$$\langle L(x,D)u,\varphi\rangle=\langle f,\varphi\rangle. \tag{2}$$

(2) bərabərliyini ödəyən $u\in D'$ ümumiləşmiş funksiyası (1) tənliyinin ümumiləşmiş həlli adlanır. (2) bərabərliyi belə bir bərabərliyə ekvivalentdir:

$$\left\langle u,L^*(x,D)\varphi\right\rangle=\langle f,\varphi\rangle,\quad \varphi\in D(G),$$

burada

$$L^*(x,D)\varphi=\sum_{|\alpha|=0}^{m}(-1)^{|\alpha|}(x)D^\alpha(a_\alpha\varphi)\ . \tag{3}$$

Doğrudan da,

$$\langle L(x,D)u,\varphi\rangle = \left\langle \sum a_\alpha D^\alpha u,\varphi \right\rangle = \sum \langle a_\alpha D^\alpha u,\varphi\rangle = \sum \langle D^\alpha u, a_\alpha \varphi\rangle =$$

$$= \sum (-1)^{|\alpha|} \langle u, D^\alpha (a_\alpha \varphi)\rangle = \left\langle u, \sum (-1)^{|\alpha|} D^\alpha (a_\alpha \varphi) \right\rangle = \langle u, L^*(x,D)\varphi\rangle \ .$$

Göründüyü kimi hər bir klassik həll həm də ümumiləşmiş həlldir. Tərsi doğru deyil. Bəs nə zaman ümumiləşmiş həll həm də klassik həll olar?

Lemma 2. Tutaq ki, $u \in D'$ (1) tənliyinin ümumiləşmiş həllidir və $u \in C^m(G)$. Əgər $f \in C(G)$ olarsa, onda u həlli (1)-in G oblastında həm də klassik həlli olur.

Doğrudan da, $u \in C^m(G)$ olduğu üçün u funksiyasının m tərtibə qədər bütün törəmələri (həm ümumiləşmiş, həm də klassik mənada) üst-üstə düşür. $u \in C^m(G)$ və G oblastında u (1) tənliyinin həlli olduğu üçün $[L(x,D)u(x) - f(x)]$ fərqi G-də kəsilməz funksiya olur. Onda

$$\langle L(x,D)u - f,\varphi\rangle = 0$$

olmasından çıxır ki, G oblastında adi mənada $L(x,D)u - f(x) = 0$ olur, yəni u funksiyası klassik mənada (1) tənliyini ödəyir.

4. Sabit əmsallı diferensial operatorun fundamental həlləri. Sabit əmsallı diferensial operator verilir:

$$P(D) = \sum_{|\alpha|=0}^{m} a_\alpha D^\alpha, \quad P^*(D) = P(-D) \ . \tag{1}$$

Tutaq ki, E fundamental həlldir:

$$P(D)E = \delta(x). \tag{2}$$

E yeganə olmur, əgər $P(D)E_0 = 0$ isə, onda $E + E_0$ cəmi də fundamental həll olur:

$$P(D)(E + E_0) = P(D)E + P(D)E_0 = P(D)E = \delta(x) \, .$$

Lemma 3. $E \in S'$ ümumiləşmiş funksiyasının $P(D)$ operatorunun fundamental həlli olması üçün zəruri və kafi şərt onun Furye çevirməsi- $F[E(x)] = \widetilde{E}(\xi) \in S'$ ümumiləşmiş funksiyasının

$$P(-i\xi)\widetilde{E}(\xi) = 1 \tag{3}$$

cəbri tənliyini ödəməsi şərti olur.

İsbatı. Tutaq ki, $E \in S'$ $P(D)$ operatorunun fundamental həllidir. Furye çevirməsini (2) bərabərliyinə tətbiq etdikdə alırıq:

$$F[P(D)E] = F[\delta] = 1. \tag{4}$$

Lakin

$$1 = F[P(D)E] = F\left[\sum a_\alpha D^\alpha E\right] = \sum a_\alpha F[D^\alpha E] =$$
$$= \sum a_\alpha (-i\xi)^\alpha F[E] = P(-i\xi)\cdot \widetilde{E}(\xi) \ . \tag{5}$$

Tərsinə, $\widetilde{E}(\xi)$ (3) tənliyini ödəyirsə, onda tərs Furye çevirməsini (4)-ə tətbiq edib, (5)-i nəzərə alsaq, onda (2) alınar.

Nəticə. $P(D)$ diferensial polinomunun S' fəzasından olan $E(x) \in S'$ fundamental həllinin qurulması həmin S' fəzasında belə bir cəbri tənliyin həll olunmasına gətirilir:

$$P(\xi)X = 1 \ . \tag{6}$$

Əgər

$$N_p = \{\xi : P(\xi) = 0\}$$

işarə etsək, (6)-dan görünür ki, N_p çoxluğundan kənarda (9) tənliyinin həlli

$$X = \frac{1}{P(\xi)}$$

olur. Deməli, $P(\xi) \neq 0$ olduqda $\widetilde{E}(\xi) = \dfrac{1}{P(\xi)} \in S'$ və

$$F^{-1}\left[\frac{1}{P(\xi)}\right]=E(x)$$

olur. Əgər $N_p \neq \varnothing$ olarsa, yəni $P(\xi)=0$ ola bilərsə, onda (9) tənliyinin həlli yeganə olmur.

Məsələn, $\xi X=1$ tənliyində $\xi=0$ ola bilir. Bu tənliyin S' fəzasında üç dənə həllini yazmaq olar:

$$X_1=\frac{1}{\xi+i0}, X_2=\frac{1}{\xi-i0}, X_3=\mathscr{P}\frac{1}{\xi}.$$

Bu həllərin fərqi $\delta(x)$ funksiyasını verir.

Beləliklə, əgər $\frac{1}{P(\xi)}$-lokal inteqrallanan funksiyadırsa, onda onun yaratdığı funksional S fəzasında funksional olur və həm də (3) tənliyinin həlli olur. Əgər $\frac{1}{P(\xi)}$ - R^n-də lokal inteqrallanan deyilsə, onda S fəzasında (6) tənliyinin həllinin qurulması problemi çətinləşir.

Hörmander isbat etdi ki, ixtiyari $P(\xi)$ polinomu üçün (6) tənliyinin S' fəzasından olan həlli var. Məşhur «Hörmander pilləkəni» metodu həmin həllin qurulması yolunu göstərir.

5.Sağ tərəfli tənlik. $P(D)$ operatorunun $E(x)$ fundamental həlli məlum olduqda

$$P(D)u=f(x) \tag{1}$$

tənliyinin həllini qurmaq olur.Tutaq ki, E -fundamental həldir.

Teorem. Tutaq ki, $f\in D'$ elədir ki, $E*f\in D'$ olur. Onda (1) tənliyinin D' fəzasında həmişə həlli var və həmin həll aşağıdakı düsturla verilir:

$$u=E*f. \tag{2}$$

İsbatı. Bükülmə düsturunun diferensiallama qaydasına əsasən alırıq:

$$P(D)(E*f)=\sum_{|\alpha|\le m}a_\alpha D^\alpha E*f=P(D)E*f=\delta*f=f$$

Nəticə. $u\in D'$ və $u*E\in D'$ olursa, onda u həllini belə yazmaq olar:

$$u=P(D)u*E.$$

§ 2. Xan-Banax teoremi əsasında fundamental həllin tapılması

1.Fundamental həllin qurulması böyük çətinliklərlə bağlıdır. Onları hiss etmək üçün formal olaraq (riyazi dəqiqliyə varmadan) xüsusi misallara baxaq. Deyək ki, $P\left(i\dfrac{\partial}{\partial x}\right)$-müəyyən polinomdur.

$$P\left(i\frac{\partial}{\partial x}\right)E=\delta(x) \tag{1}$$

tənliyini həll etmək istəyirik. Furye çevirməsini tətbiq etdikdə

$$P(\xi)\widetilde{E}(\xi)=1, \quad \widetilde{E}(\xi)=\frac{1}{P(\xi)}$$

tənliyini alırıq. Deməli

$$E(x)=F^{-1}\left[\widetilde{E}(\xi)\right]=F^{-1}\left[\frac{1}{P(\xi)}\right].$$

Əgər $P(\xi)$ -in həqiqi kökləri yoxdursa, (hər yerdə $P(\xi)\neq 0$ isə) onda $\dfrac{1}{P(\xi)}$ -lokal inteqrallanan olur, yəni bu halda $\dfrac{1}{P(\xi)}\in S'$ olur. Belə olduqda isə həm də $E(x)\in S'$ olur. Deməli (1) tənliyinin S' fəzasında $E(x)$ həlli var, yəni $P\left(i\dfrac{\partial}{\partial x}\right)$ operatorunun S'-də fundamental həlli var. Lakin $P(\xi)$ polinomu $(\xi_1,\xi_2,...\xi_n)$ dəyişənlərindən asılıdır və onun çox mürəkkəb təbiətli sıfırlar çoxobrazlısı ola bilər. Belə haldarda $\dfrac{1}{P(\xi)}$ lokal inteqrallanan olmaz və bu halda o S fəzasında funksional doğurmaya bilər. Elə ola bilər ki, $P\left(i\dfrac{\partial}{\partial x}\right)$ diferensial operatorunun eyni fəzada bir neçə fundamental həlli olsun.

Malqranj-Erenprays teoreminə görə R^n-də hər bir sabit əmsallı $P(D)$ diferensial polinomu üçün elə $E\in D'$ ümumiləşmiş funksiyası var ki,

$$P(D)E=\delta$$

olur. Teoremin isbatı çox çətin prosesdir. Furye çevirməsini tətbiq etməklə bu teoremin Hörmander isbatını az sonra verəcəyik.

İndi isə Xan-Banax teoreminə əsaslanaraq fundamental həlli tapmağın bir metodu ilə tanış olaq. Fikrimizi konkret bir misal üzərində nümayiş etdirək. $P\left(i\frac{\partial}{\partial x}\right)=1-\Delta$ operatorunun fundamental həllini hesablayaq. Furye çevirməsini tətbiq etməklə

$$P(\xi)=1+|\xi|^2$$

alırıq. $P(\xi)\neq 0$ olduğundan $\frac{1}{P(\xi)}=\left(1+|\xi|^2\right)^{-1}$ lokal inteqrallanan olur. Deməli, o, S'-də requlyar funksional doğurur. Bu halda, əgər $\widetilde{E}(\xi)=\left(1+|\xi|^2\right)^{-1}$ işarə etsək, onda $E(x)=F^{-1}\left[\widetilde{E}(\xi)\right]\in S'$ olar və həm də $P\left(i\frac{\partial}{\partial x}\right)E=(1-\Delta)E=\delta(x)$, olar, çünki:

$$F[(1-\Delta)E]=\left(1+|\xi|^2\right)F[E]=\left(1+|\xi|^2\right)\widetilde{E}(\xi)=\left(1+|\xi|^2\right)\left(1+|\xi|^2\right)^{-1}=1=F[\delta(x)].$$

Lakin $P(\xi)$ polinomunun sıfrı varsa, bu halda məsələ çətinləşir və deyilən üsulla $E(x)$ tapılması mürəkkəbləşir.

İndi $(1-\Delta)$ operatoru üçün fundamental həllin tapılmasına Xan-Banax teoremini tətbiq edək. Bunun üçün müəyyən çevirmələr etmək lazım gəlir.

Tutaq ki, $\varphi\in D(R^n)$. Onda

$$|\langle\delta,\varphi\rangle|=|\varphi(0)|\leq\max_{x\in R^n}|\varphi(x)|=\|\varphi\|_\infty . \qquad (*)$$

Lakin

$$\varphi(x)=\frac{1}{(2\pi)^n}\int_{R^n}\phi(\xi)e^{ix\xi}d\xi$$

olduğundan, buradan alırıq ki,

$$\|\varphi\|_\infty\leq\frac{1}{(2\pi)^n}\|\phi\|_{L_1}\leq\|\phi\|_{L_1}=\|F[\varphi]\|_{L_1}.$$

Onda $(*)$ -dan alırıq:

$$|\varphi(0)| \le \|\phi\|_1 = \left\|\left(1+|\xi|^2\right)^m \phi(\xi)\left(1+|\xi|^2\right)^{-m}\right\|_1 \le$$

$$\le \int\limits_{R^n}\left[\left(1+|\xi|^2\right)^m |\phi(\xi)|\right]^2 d\xi \cdot \int\limits_{R^n}\left(1+|\xi|^2\right)^{-m} d\xi \cdot \le$$

(m elə seçilir ki, $\left(1+|\xi|^2\right)^{-m} \in L_2\left(R^n\right)$)

$$\le c\left\|\left(1+|\xi|^2\right)^m |\phi(\xi)|\right\|_{L_2}. \qquad (**)$$

Digər tərəfdən

$$F\left[(1-\Delta)^m \varphi(x)\right] = \left(1+|\xi|^2\right)^m \phi(\xi)$$

olduğundan, Planşerel teoreminə görə:

$$\left\|\left(1+|\xi|^2\right)^m \phi(\xi)\right\|_{L_2} = \left\|(1-\Delta)^m \varphi(x)\right\|_{L_2}.$$

Onda $(**)$-dan alınır ki,

$$|\varphi(0)| = \left\|(1-\Delta)^m \varphi(x)\right\|_{L_2}.$$

Belə $\widetilde{T}$ operatoruna baxaq: $\forall \varphi \in D$ üçün

$$\widetilde{T} : (1-\Delta)^m \varphi \to \varphi(0)$$

yəni $\widetilde{T}$ funksionaldır, o D fəzasının $\left\{(1-\Delta)^m \varphi,\ \varphi \in D\right\} = D_0 \subset D$ kimi alt fəzasında təyin olunub. $\widetilde{T}$ L_2 norması mənada məhdud funksionaldır. Çünki, $\forall \eta \in D_0$ üçün $\left((1-\Delta)^m \varphi,\ \varphi \in D\right)$ alırıq: $\langle T, \varphi\rangle = \varphi(0)$. Onda:

$$\left|\langle \widetilde{T}, \eta\rangle\right| = |\varphi(0)| \le c\left\|(1-\Delta)^m |\varphi|\right\|_{L_2} = c\|\eta\|_{L_2}.$$

Xan-Banax teoreminə görə $\widetilde{T}$-nı bütün L_2 fəzasına xətti-məhdud funksionala qədər davam etdirmək olar. Alınan funksionalı T ilə işarə edək. Deməli, T L_2-də xətti-kəsilməz funksionaldır. Onda Riss teoreminə görə, elə $f(x) \in L_2$ var ki, $\|T\|_{L_2} = \|f\|_{L_2}$ və həm də $\forall \eta \in D_0$ üçün

$$\left\langle T, (1-\Delta)^m \varphi \right\rangle = \varphi(0)$$

olduğu üçün alırıq ki,

$$\varphi(0) \equiv \langle T, \eta \rangle = \int_{R^n} f(x)\eta(x)dx = \int_{R^n} f(x)(1-\Delta)^m \varphi(x)dx =$$
$$= \int_{R^n} (1-\Delta)^{m-1} f(x) \cdot (1-\Delta)\varphi(x)dx = \left\langle (1-\Delta)^{m-1} T, (1-\Delta)\varphi \right\rangle. \qquad (***)$$

Əgər

$$(1-\Delta)^{m-1} T = E$$

işarə etsək, onda $E \in S'$ olar və deməli $(***)$-dan

$$\left\langle E, (1-\Delta)\varphi \right\rangle = \varphi(0) = \langle \delta, \varphi \rangle,$$

yəni

$$(1-\Delta)E = \delta(x).$$

Beləliklə, $E = (1-\Delta)^m T$ funksionalı $(1-\Delta)$ üçün fundamental həll olur.

Nəticə. Əgər $(***)$-da $(1-\Delta)^m f(x) = E$ götürsək, onda $(f \in L_2)$

$$\langle E, \varphi \rangle = \varphi(0) = \langle \delta, \varphi \rangle,$$

yəni

$$(1-\Delta)^m f(x) = \delta(x)$$

alarıq. Deməli,

$$(1-\Delta)^m f(x) = \delta(x),$$

yəni $f(x) \in L_2$ funksionalı $(1-\Delta)^m$ operatorunun $L_2(R^n)$-fəzasından olan fundamental həlli olur.

§3. Hörmander pilləkəni metodu.

Bu paraqrafda göstərilir ki,

$$P\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)E(x)=\delta(x) \tag{1}$$

tənliyinin D' fəzasında ixtiyari P polinomu üçün həmişə həlli var, yəni ixtiyari $P(s)\neq 0$ polinomu üçün (1) tənliyini ödəyən $E\in D'$ ümumiləşmiş funksiyası var. Münasiblik xatirinə (1) tənliyini bu şəkildə yazaq:

$$\overline{P}\left(i\frac{\partial}{\partial x}\right)E(x)=\delta(x). \tag{2}$$

Formal olaraq Furye çevirməsini tətbiq etməklə Z' fəzasında belə tənlik alınır:

$$\overline{P}(s)\overline{E}(s)=1\,. \tag{3}$$

Əgər isbat edilsə ki, bu tənliyin Z' fəzasında həlli var, onda (1) tənliyinin D' fəzasında həllinin varlığını göstərmiş olarıq. (3) tənliyi Z' fəzasında belə başa düşülür: $\forall\phi(s)\in Z$ üçün

$$\left\langle\overline{P}(s)\widetilde{E}(s),\phi(s)\right\rangle=\left\langle 1,\phi(s)\right\rangle=\int_{-\infty}^{\infty}\phi(\sigma)d\sigma.$$

Əgər $s=\sigma$ olduqda $P(\sigma)\neq 0$ olsa və bütün müstəvidə hər yerdə $|P(s)|\geq c_0>0$ olursa, onda $\widetilde{E}(s)$ olaraq belə funksionalı götürə bilərik:

$$\left\langle\widetilde{E}(s),\phi(s)\right\rangle=\int_{R^n}\frac{\phi(\sigma)}{P(\sigma)}d\sigma\,. \tag{4}$$

Doğrudan da, $\widetilde{E}(s)$ bu qayda ilə təyin edildikdə o, Z-də xətti və kəsilməz funksional olur və həm də alırıq ki,

$$\left\langle\overline{P}(s)\widetilde{E}(s),\phi(s)\right\rangle=\left\langle\widetilde{E}(s),P(s)\phi(s)\right\rangle=\int_{R^n}\frac{P(\sigma)\phi(\sigma)}{P(\sigma)}d\sigma=$$

$$=\int_{R^n}\phi(\sigma)d\sigma=\langle 1,\phi\rangle,$$

yəni

$$\overline{P}(s)E(s)=1.$$

Lakin ümumi halda $P(\sigma)=0$ ola bilər və (4)inteqralı dağılan ola bilər.

İndi biz görəcəyik ki, $P(\sigma_1,\sigma_2,...,\sigma_n)$ polinomunda arqumentlərdən birinə (məsələn σ_1) nəzərən kompleks müstəviyə keçməklə həmişə elə H çoxobrazlısını qurmaq olar ki, H üzərində hər yerdə $|P(s)|\geq c_0>0$ olar və bu halda $\widetilde{E}(s)$ funksionalı (3) tənliyinin həlli olar.

Əvvəlcə birölçülü hala baxaq. Bu halda kompleks müstəviyə keçməklə $s=\sigma+i\sigma$ və $\sigma=c=const$ xəttini elə seçmək olar ki, o xətt $P(s)$ polinomunun həlli olan nöqtədən keçməsin, yəni $\sigma=c$ xətti üzərində $P(\sigma+i\sigma)\neq 0$. Onda $\widetilde{E}(s)$ funksionalını belə təyin etmək olar: $\forall\phi(s)\in Z$ üçün

$$\left\langle \widetilde{E}(s),\phi(s)\right\rangle=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\phi(\sigma+i\tau)}{P(\sigma+i\tau)}d\sigma. \qquad (*)$$

Aşkardır ki, $\widetilde{E}(s)\in Z'$ və biz alırıq:

$$\left\langle\overline{P}(s)\widetilde{E}(s),\phi(s)\right\rangle=\left\langle\widetilde{E}(s),P(s)\phi(s)\right\rangle=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{P(\sigma+i\tau)\phi(\sigma+i\tau)}{P(\sigma+i\tau)}d\sigma=$$

$$=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\phi(\sigma+i\tau)d\sigma=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\phi(\sigma)d\sigma=\langle 1,\phi\rangle.$$

(Sonuncu keçid Koşi teoreminə əsasən olur, çünki $\phi\in Z$-analitik funksiya olur, $|\sigma|\to\infty$ olduqda $\frac{1}{|\sigma|}$-nın istənilən dərəcəsindən daha tez sıfra yaxınlaşır).

Ümumi halda $(n>1)$ belə edilir: $P(\sigma_1,...,\sigma_n)$ polinomunda σ_1-ə nəzərən kompleks müstəviyə keçməklə elə H çoxobrazlısını («Hörmander pilləkəni») qurmaq olur ki, onun üzərində hər yerdə $|P(s)|\geq c_0>0$ olur və H vasitəsilə qurulan $\widetilde{E}(s)\in Z'$ funksionalı (3) tənliyinin həlli olur.

Qeyd edək ki, m tərtibli hər bir $P\left(i\frac{\partial}{\partial x}\right)$ polinomunu həmişə bu şəkildə yazmaq olur:

$$P\left(i\frac{\partial}{\partial x}\right)=a\left(i\frac{\partial}{\partial x}\right)^m+\sum_{k=0}^{m-1}P_k\left(i\frac{\partial}{\partial x_2},\dots,i\frac{\partial}{\partial x_n}\right)\left(i\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^k,\qquad a\neq 0$$

Deməli polinom belə olur $\left(S_k=\sigma_k+i\tau_k,\quad k=1,2,\dots,n\right)$

$$P(s)=a_1\,s_1^m+\sum_{k=0}^{m-1}P_k\left(s_2,\dots,s_n\right)s_1^k$$

$$P(\sigma)=P(\sigma_1,\dots,\sigma_n)=a\,\sigma_1^m+\sum_{k=0}^{m-1}P_k\left(\sigma_2,\dots,\sigma_n\right)\sigma_1^k\,.$$

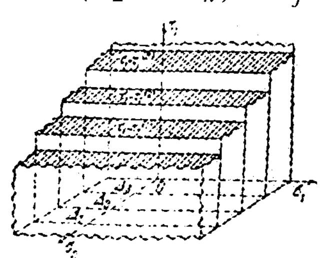
H pilləkəni belə qurulur.

$R^{n+1}=\{(\sigma_1,\sigma_2,\dots,\sigma_n,\tau_1)\}-(n+1)$-ölçülü həqiqi evklid fəzası olsun. Bu fəzada H Hörmander pilləkəni qururuq. Bunun üçün $(n-1)$ ölçülü $R^{n-1}=\{\sigma_2,\dots,\sigma_n\}$ həqiqi fəzasını koordinat müstəvilərinə paralel olan müstəvilər vasitəsilə $\Delta_1,\Delta_2,\dots,\Delta_r,\dots$ hissələrinə parçalayırıq, belə ki, hər kürə daxilində sonlu sayda Δ_j yerləşir və hər Δ_j hissəsinə $\tau_1=\tau_1^{(j)}$ sonlu qiyməti uyğun qoyulur . Məsələn, $(\sigma_1,\Delta_1,\ \tau_1^1)$-üçlüyü, «eni» Δ_1, hündürlüyü τ_1^1 və uzunluğu $-\infty<\tau_1<\infty$ (sonsuz) olan parallelepiped olur. Belə olduqda H pilləkəni belə bir çoxobrazlıya deyilir ki,

$$\mathrm{H}=\{(\sigma_1,\sigma_2,\dots,\sigma_n,\tau_1):\ 1)-\infty<\sigma_1<\infty;\ \ 2)(\sigma_2,\dots,\sigma_n)\in\Delta_j$$

olduqda

$$\tau_1=\tau_1^{(j)}\quad j=1,2,\dots\ \}$$



Sadə halda $R^3=(\sigma_1,\sigma_2,\tau_1)$ fəzasında H pilləkəni şəkildə göstərilir.

Biz göstərəcəyik ki, hər bir $P(s)$ polinomu üçün elə $\mathrm{H}(P)$ pilləkəni qurmaq olur ki, H üzərində hər yerdə $|P(s)|\geq|a|>0$ olur və bütün $\tau_1^{(j)}$ qiymətləri eyni bir c_0 sabiti ilə məhdud olur: $\left|\tau_1^{(j)}\right|\leq c_0$.

Hələlik fərz edək ki, deyilən xassələrə malik olan H pilləkəni qurulub. Onda $\widetilde{E}(s)$ funksionalını Z fəzasında belə qururuq:

$\forall\phi(s)\in Z$ üçün (polinomda 1-ci arqumentə görə kompleks müstəviyə çıxırıq).

$$\left\langle\widetilde{E}(s),\phi(s)\right\rangle\equiv\int_{\mathrm{H}}\frac{\phi(\sigma_1+i\tau_1,\sigma_2,...,\sigma_n)}{P(\sigma_1+i\tau_1,\sigma_2,...,\sigma_n)}d\sigma_1,...,d\sigma_n\ .\ (**)$$

Bu inteqral yığılır, çünki H üzərində $|P(s)|\geq a>0$ və $\phi(\sigma_1+i\tau_1,\sigma_2,...,\sigma_n)$ -analitik funksiya olub, ($|\tau|\leq c_0$ üçün) $|\sigma|\to\infty$ olduqda τ-ya nəzərən müntəzəm olaraq $\frac{1}{|\sigma|}$-nın istənilən dərəcəsindən tez sıfra yaxınlaşır. Aşkardır ki, $\widetilde{E}(s)\in Z'$.

Göstərək ki, $(**)$ düsturu ilə təyin olunan $\widetilde{E}(s)$ (3) tənliyinin həllidir. Doğrudan da, $\forall\phi(s)\in Z$ üçün alırıq:

$$\left\langle\overline{P}(s)\widetilde{E}(s),\phi(s)\right\rangle=$$

$$=\left\langle\widetilde{E}(s),P(s)\phi(s)\right\rangle=$$

$$=\int_{\mathrm{H}}\frac{P(\sigma_1+i\tau_1,\sigma_2,...,\sigma_n)}{P(\sigma_1+i\tau_1,\sigma_2,...,\sigma_n)}\phi(\sigma_1+i\tau_1,\sigma_2,...,\sigma_n)d\sigma_1,...,d\sigma_n=$$

$$=\int_{\mathrm{H}}\phi(\sigma_1+i\tau_1,\sigma_2,...,\sigma_n)d\sigma_1,...,d\sigma_n=$$

$$=\sum_j\int_{(\sigma_2,...,\sigma_n)\in\Delta_j}\cdots\int\left[\int_{-\infty}^{\infty}\phi(\sigma_1+i\tau_1^{(j)},\sigma_2,...,\sigma_n)d\sigma_1\right]d\sigma_2,...,d\sigma_n=$$

(Daxili inteqral $s_1=\sigma_1+i\tau_1$ müstəvisində $\tau_1=\tau_1^{(j)}$ düz xətti üzrə aparılır, Koşi düsturuna əsasən onun qiymətini dəyişmədən onu həqiqi ədəd oxu üzrə inteqralla əvəz etmək olar. Onda alarıq)

$$=\sum_j \int\underset{(\sigma_2,\dots,\sigma_n)\in\Delta_j}{\dots}\int\left[\int_{-\infty}^{\infty}\phi(\sigma_1,\sigma_2\dots\sigma_n)d\sigma_1\right]d\sigma_2\dots d\sigma_n=$$

$$=\int\underset{R^{n-1}}{\dots}\int\left[\int_{-\infty}^{\infty}\phi(\sigma)d\sigma_1\right]d\sigma_2\dots d\sigma_n=$$

$$=\int\underset{R^n}{\dots}\int\phi(\sigma_1,\sigma_2,\dots,\sigma_n)d\sigma_1\dots d\sigma_n=\langle 1,\phi\rangle,$$

buradan alınır ki,

$$\overline{P}(s)\widetilde{E}(s)=1.$$

İndi göstərək ki, ixtiyari $P(s)$ polinomu üçün həmişə elə H pilləkəni qurmaq olar ki, onun üzərində $|P(s)|\geq c>0$ olar. Şərtə görə

$$P(s)=a s_1^m+\sum_{k=0}^{m-1}P_k(s_2)s_1^k,\quad a\neq 0.$$

s_1 müstəvisində bu tənliyin m dənə kökü var: $s_1^1, s_2^1, \dots, s_m^1$. Onda

$$P(s)=a\left(s-s_1^1\right)\left(s-s_2^1\right)\dots\left(s-s_m^1\right). \qquad (***)$$

Tutaq ki, $|\tau_1|\leq m+1$. Bu zolağın eni $2m$ qədərdir. Bu zolaqda $\tau_1=c$ düz xəttini elə seçmək olar ki, o hər bir s_k^1 kökündən ≥ 1 məsafədə yerləşər. Onda $(***)$ münasibətindən alınır ki,

$$|P(s)|\geq|a|.$$

Polinomun kökləri onun əmsallarından kəsilməz asılıdır. Onda sonuncu münasibət bütün H üzərində doğru olur.

Nəticə. $\forall P(s)$ üçün elə $\widetilde{E}(s)\in Z'$ var ki,

$$\overline{P}(s)\,\widetilde{E}(s)=1.$$

Deməli

$$P\left(i\frac{\partial}{\partial x}\right)E(x)=\delta(x).$$

Bu nəticəni ilk dəfə Malqranj və ondan asılı olmadan Erenprays isbat etmişlər.

Təklif. Tutaq ki, $P\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)-m$ tərtibli diferensial operator, $E(x)$-onun fundamental həllidir. Onda $E(x)$ funksionalının sinqulyarlıq tərtibi $\geq 1-m$ olar.

Doğrudan da, $P\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)E(x)=\delta$ olduqda

$$S\left[P\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)E(x)\right]=s(\delta)=1.$$

Digər tərəfdən $\forall f\in D'$ üçün həmişə

$$S\left[P\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)f\right]=s(f)+m$$

olur, çünki əgər

$$f=\sum_{|k|\leq p}D^k f_k(x),$$

isə, belə ki, $f_k(x)$-adi (kəsilməz) funksiyalardır. Onda $s(f)\leq p$ olur. Aydındır ki,

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}=\sum_{|k|\leq p}\frac{\partial}{\partial x_j}D^k f_k(x)$$

olduqda

$$S\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\right)\leq p+1.$$

Bu qayda ilə,

$$S\left(P\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)f\right)\leq p+m=s(f)+m$$

alırıq. Beləliklə,

$$1=S\left(P\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)E\right)\leq s(E)+m,$$

buradan

$$S(E)\geq 1-m.$$

§ 4. Qeyri-bircins tənliklər.

Bu paraqrafda göstərilir ki,

$$\overline{P}\left(i\frac{\partial}{\partial x}\right)u(x)=f \qquad (1)$$

tənliyinin $\forall f \in D'$ üçün D' fəzasında həlli var. $E(x)$ finit funksional olduqda həmin həlli belə yazmaq olur:

$$u = E(x) * f\,, \qquad (2)$$

burada $E(x)$ $P\left(i\frac{\partial}{\partial x}\right)$ operatorunun fundamental həllidir. Ən ümumi halda, əgər f və E heç biri finit deyilsə, həlli (2) şəklində yazmaq olmur. (2) düsturu bu halda mənasız ola bilir. Furye çevirməsini (1) –ə tətbiq edərək Z' fəzasında

$$\overline{P}(s)V(s)=g(s), \quad V(s)=g/\overline{P}(s) \qquad (3)$$

tənliyini alırıq, burada $g=F[f]\in Z'$.Fərz edək ki, f-finit funksionaldır. Onda $F[f]=g(s)$ tam analitik funksiya olub həqiqi ədəd oxunda qüvvət funksiyası kimi artan funksiya olur. Belə olduqda (3) tənliyinin (2) düsturuna uyğun olan $V(s)$ həlli belə alınar:

$$V(s)=\widetilde{E}(s)g(s)\,, \qquad (4)$$

burada $\widetilde{E}(s)$ belə təyin olunur:

$$\left\langle \widetilde{E},\phi \right\rangle = \int\limits_{H}\frac{\phi(s)d\sigma}{P(s)}\,. \qquad (5)$$

Belə olduqda alırıq ki,

$$\langle V,\phi\rangle=\left\langle \widetilde{E}(s)g(s),\phi\right\rangle=\left\langle \widetilde{E},g\phi\right\rangle=\int\limits_{H}\frac{g(\bar{s})\phi(s)ds}{P(s)}\,.$$

Bu inteqral yığılır və $\widetilde{E}\in Z'$. Deməli $F^{-1}\left[\widetilde{E}(s)\right]=E(x)\in D'$ və

Beləliklə f-finit olduqda (1) tənliyinin həlli var və həll (2) bükülmə düsturu ilə ifadə olunur ($f\in D'$-ixtiyari olduqda, isbat bax: [1], Ş.səh.176).

§ 5. Diferensial operatorun fundamental həlli. Konstruktiv metod. (Trev.)

Tərif. Tutaq ki, sabit əmsallı diferensial operator verilir:

$$P(D) \equiv \sum_{|\alpha| \le p} a_\alpha D^\alpha \equiv \sum_{|\alpha| = \alpha_1 + \ldots + \alpha_n \le p} a_{\alpha_1, \ldots, \alpha_n} \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}}. \qquad (1)$$

Əgər elə $E \in D'$ ümumiləşmiş funksiyası varsa ki,

$$P\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) E(x) = \delta(x) \qquad (2)$$

olur, onda E P operatorunun fundamental həlli adlanır. Fundamental həllin əhəmiyyəti ondadır ki, E -məlum olduqda, məsələn, $\forall f \in C_0^\infty(R^n)$ sonsuz diferensiallanan finit funksiyası üçün

$$P\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) u(x) = f(x) \qquad (3)$$

tənliyinin həlli həmişə var və həmin həll

$$u(x) = E(x) * f(x) \qquad (4)$$

bükülmə düsturu ilə tapılır. Əgər $E(x)$-özü finit funksional olarsa, onda $f \in D'$ -ixtiyari ümumiləşmiş funksiya kimi götürülə bilər və bu halda yenə də (3) tənliyinin D' fəzasında həlli var və həmin həll (4) düsturu vasitəsilə verilir. (4) düsturu (3) tənliyinin həllinin ümumi şəkli və ya həllin ümumi göstəriliş düsturu adlanır. Bükülmə əməliyyatı fəslində (4) düsturunun müxtəlif varlıq şərtləri araşdırılmışdır. Ən çox praktiki şərt ondan ibarətdir ki, E və f -dən hər hansı biri finit olduqda və yaxud onların daşıyıcısı çoxluqları eyni tərəfdən məhdud olduğu halda həmişə $E * f$ bükülmə düsturu var və o, D' fəzasına daxildir.

Biz yuxarıda gördük ki, $P\left(i\frac{\partial}{\partial x}\right) = \Delta$ operatoru üçün

$$E(x) = -\frac{1}{4\pi} \cdot \frac{1}{r}$$

funksiyası fundamental həlldir $(n = 3)$.

Belə olduqda $\Delta u = f$ tənliyinin həlli

$$u = -\frac{1}{4\pi r} * f \qquad (*)$$

şəklində yazılır. f-finit funksiya oldaqda $(*)$ həllini adi Puasson inteqralı kimi yazmaq olur:

$$u(x) = -\frac{1}{4\pi} \iiint_{-\infty}^{\infty} \frac{f(\xi)d\xi}{|x-\xi|}.$$

Fundamental həllərin qurulması çox çətinliklərlə bağlıdır. Bu çətinlikləri hiss etmək üçün başqa bir misala baxaq. Hələlik formal hərəkət edək. Beləliklə biz

$$P\left(i\frac{\partial}{\partial x}\right) E(x) = \delta$$

dıferensial tənliyini həll etmək istəyirik. Hər iki tərəfə Furye çevirməsini tətbiq edək. Onda alarıq: (σ əvəzində yenə x yazırıq):

$$P(ix)\widetilde{E} = 1, \quad \widetilde{E} = \frac{1}{P(ix)}$$

Deməli

$$E(x) = F^{-1}\left[\widetilde{E}(\xi)\right] = F^{-1}\left[\frac{1}{P(ix)}\right].$$

Əgər $P(ix)$ polinomunun həqiqi kökü yoxdursa, onda Furye çevirməsini $S'(R^n)$ fəzasında tətbiq etməklə $E(x)$ funksiyasını tapmaq olar. Lakin $P(ix)$ -$(x_1, x_2, ..., x_n)$ dəyişənlərindən asılı polinom kimi müxtəlif sıfırlara malik ola bilər. Bu halda $\frac{1}{P(ix)}$ funksiyası lokal inteqrallanan deyil, ona görə də $\int \frac{1}{P(ix)} \varphi(x)dx$ -dağılan inteqral olur və D' -də funksional əmələ gətirmir. (məsələn, $n=1$ olduqda, $P(ix) = \frac{1}{x}$).

Teorem. (Malqranj-Erenprays-Hörmander). Sabit əmsallı xüsusi törəməli hər bir $P(D)$ diferensial operatoru üçün elə $E(x) \in D'(R^n)$ ümumiləşmiş funksiyası var ki,

$$P\left(i\frac{\partial}{\partial x}\right) E(x) = \delta(x).$$

Bu teoremi ilk dəfə 1953-cü ildə V.Malqranj isbat etmişdir. Onunla bərabər, asılı olmadan, bu teoremi 1954-cü ildə L.Erenprays isbat etmişdir. Bu teoremi həm də Hörmander (1955) Hörmander pilləkəni metodu ilə isbat etmişdir.

Fundamental həllin ümumi tapılma metodu ilə yanaşı bəzi konstruktiv yollar da vardır ki, onlar xüsusi diferensial polinomlar sinfi üçün daha əlverişli olur. Bu metodlardan bəziləri ilə tanış olmaq maraqlı olur.

Tutaq ki, D – R^n-də müəyyən diferensial polinomdur (məsələn, $D \equiv \sum_{|\alpha| \le p} a_\alpha D^\alpha$), $Q(z)$ isə z-dən asılı başqa polinomdur. Onda $Q(D)$ R^n-də polinom olar. Onda

$$Q(z)^{-1} = \sum_{(k,\lambda)} c_{\lambda,k} (z-\lambda)^{-k} \tag{1}$$

(burada $k \ge 0$ -tam ədədlər, $\lambda \in C$-kompleks ədəddir).Aşkardır ki, $c_{\lambda,k}$ əmsallarının yalnız sonlu saydası 0-dan fərqli olur. $c_{\lambda,k} \ne 0$ olduqda $Q(z)$ polinomu $(z-\lambda)^k$ ifadəsinə bölünür, belə ki,

$$Q(z) = Q_{\lambda,k}(z)(z-\lambda)^k,$$

buradan

$$Q(D) = Q_{\lambda,k}(D)(D-\lambda)^k \tag{*}$$

olur. Onda (1) tənliyinin hər tərəfini $Q(z)$-ə vursaq

$$1 = \sum c_{\lambda,k} Q_{\lambda,k}(z),$$

və yaxud

$$1 = \sum c_{\lambda,k} Q_{\lambda,k}(D), \tag{2}$$

alarıq.

Tutaq ki, $E \in D'$ -ixtiyari ümumiləşmiş funksiyadır.

$$E_{\lambda,k} = Q_{\lambda,k}(D)E$$

işarə edək. Onda (2)-dən alırıq:

$$E = \sum c_{\lambda,k} E_{\lambda,k} \,. \tag{3}$$

Lemma. $E \in D'$ ümumilşmimş funksiyası $Q(D)$ polinomunun fundamental həlli yalnız və yalnız o zaman olur ki, $E_{\lambda,k} \in D'$ funksiyası $(D-\lambda)^k$ operatorunun fundamental həlli olsun.

Doğrudan da, $(*)$ nəzərə alındıqda,

$$(D-\lambda)^k E_{\lambda,k}(D-\lambda)^k Q_{\lambda,k}(D)E = Q_{\lambda,k}(D)(D-\lambda)^k E = Q(D)E$$

Buradan lemmanın isbatı alınır.

Nəticə. Daha mürəkkəb $Q(D)$ polinomu üçün fundamental həllin tapılması nisbətən elementar olan $(D-\lambda)^k$ operatorunun fundamental həllinin tapılmasına gətirilir.

Belə bir funksiya daxil edək:

$$E(x,t) = \exp\left[\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} t_i^2 x_i^2\right], \qquad t_i, x_i \in R$$

$H_+(t)$ ilə R^n-də ölçülən elə $f(x)$ funksiyaları çoxluğunu işarə edək ki, $E(x,t)f(x) \in L_2$ olsun. $H_+(t)$ xətti fəza olur. $H_+(t)$ fəzasında skalyar hasil daxil edilir:

$$(f,g)_{+,t} = \int E^2(t,x) f(x)\overline{g(x)}dx \,.$$

$H_+(t)$- də norma:

$$\|f\|_{+,t}^2 = \int E^2(t,x)|f(x)|^2 dx.$$

Onda $H_+(t)$-Hilbert fəzası olur. Qeyd edək ki, $D \subset H_+(t)$ və D bu fəzada sıx çoxluqdur. Analoji qaydada $H_-(t)$ fəzası daxil edilir: Tərifə görə, $H_-(t)$ fəzası ölçülən elə $f(x)$ funksiyaları çoxluğudur ki, $E^{-1}(t,x)f(x) \in L_2$ olur.

Bu fəzada skalyar hasil:

$$(f,g)_{-,t} = \int E^{-2}(t,x) f(x) \overline{g(x)} dx$$

Norma:

$$\|f\|_{-,t}^2 = \int E^{-2}(t,x) |f(x)|^2 dx.$$

Qeyd edək ki,

$$E^{-1}(x,t) = \exp\left[-\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} x_i^2 t_i^2 \right].$$

Lemma 1. (bax.J.Trev.,səh.20). Tutaq ki, $t_1, ..., t_n$ həqiqi ədədləri 0-dan fərqlidirlər. Onda ixtiyari $g(x) \in \mathrm{H}_-(t)$ üçün elə $f \in \mathrm{H}_-(t)$ var ki, D' fəzası mənada

$$P(D)f = g$$

olur. (Deməli bu tənliyin $\mathrm{H}_-(t)$-də həlli var).

Lemma 2. ν ədədi $4\nu \geq n+1$ münasibətini ödəyən ən kiçik tam ədəd olsun. Onda elə $F(x) \in L_2(R^n)$ var ki, D' fəzasında

$$(1-\Delta)^{\nu} F = \delta(x). \tag{4}$$

(Deməli $(1-\Delta)^{\nu}$ operatorunun $L_2(R^n)$ fəzasından olan fundamental həlli var).

İsbatı. $F(x)$ olaraq elə $F(x) \in L_2(R^n)$ seçək ki, onun Furye çevirməsi $\left(1+|\xi|^2\right)^{-\nu}$ olsun:

$$F[F(x)] = \left(1+|\xi|^2\right)^{-\nu} \tag{5}$$

$\nu \geq 1$ olduğundan $\left(1+|\xi|^2\right)^{-\nu} \in L_2(R^n)$. Onda həm də $F(x) \in L_2(R^n)$ olar (Planşerel teoremi). Burada Furye çevirməsi adi mənada baxılır:

$$\phi(\xi) \equiv F[\varphi(x)] = \int\limits_{R^n} \varphi(x) e^{-ix\xi} dx.$$

Onda (2) əsasında alırıq ki,

$$F\left[(1-\Delta)^{\nu} F\right] = \left(1+|\xi|^2\right)^{-\nu} F[F(x)] = \left(1+|\xi|^2\right)^{\nu} \cdot \left(1+|\xi|^2\right)^{-\nu} = 1$$

Buradan, tərs Furye çevirməsini tətbiq etsək,

$$(1-\Delta)^{\nu} F = \delta(x)$$

alarıq.

Teorem. Hər bir diferensial polinomun ən azı bir dənə fundamental həlli var.

İsbatı. Tutaq ki, $F(x) \in L_2(R^n)$-lemma 2-də seçilən $F(x)$ funksiyasıdır, yəni

$$F[F(x)] = \left(1+|\xi|^2\right)^{-\nu}.$$

Aydındır ki, $L_2(R^n) \subset H_-(t)$ sıx çoxluq əmələ gətirir. Lemma 1-ə əsasən elə $F_1 \subset H_-(t)$ var ki, $P(D)F_1 = F$ olur. Burada indi $E = (1-\Delta)^{\nu} F_1$ götürək. Onda lemma 2-yə görə,

$$P(D)E = (1-\Delta)^{\nu} P(D) F_1 = (1-\Delta)^{\nu} F = \delta(x).$$

Deməli $E = (1-\Delta)^{\nu} F_1$, $F_1 \subset H_-(t)$ $P(D)$ üçün fundamental həll olur.

Qeyd. Bu fundamental həllin bir neçə xassəsi qurma prinsipindən dərhal aydın olur. Məsələn,

$|x| \to \infty$ olduqda E çox da yüksək sürətlə artmır. Çünki $F_1 \subset H_-(t)$ olduqda $F_1(x)$ funksiyası $e^{|x|^2}$-dan tez artmır.Deməli, E F_1-in müəyyən tərtib törəmələri cəmi kimi alınır.

§ 6. Elliptik tənliklərin fundamental həlləri.

Tutaq ki, $2m$ tərtibli sabit əmsallı L diferensial operatoru verilir. Onun baş hissəsini (ancaq $2m$ tərtibli törəmələrdən ibarət olun hissə) L_0 ilə işarə edək. L_0-ın ifadəsində $\frac{\partial}{\partial x_j}$ törəmələrini ω_j

ədədlərilə əvəz etdikdə alınan $L_0(\omega_1,...,\omega_n)$ çoxhədlisi $\omega \neq 0$ olduqda $L_0(\omega) \neq 0$ olursa, onda L elliptik operator adlanır. Bu paraqrafda

$$L(D)E(x) = \delta(x) \tag{1}$$

tənliyini ödəyən $E(x)$ axtarılır. Bunun üçün belə edirik:

1) Əvvəlcə (1)-də sağ tərəfi

$$\Phi(\lambda) = \frac{2r^{\lambda}}{\Omega_n \Gamma\left(\frac{\lambda+n}{2}\right)}$$

funksiyası ilə əvəz edirik:

$$L(D)u(x) = \Phi(\lambda) \tag{2}$$

2) $\Phi(\lambda)$ funksiyasını sadə dalğalara ayırırlar:

$$\hat{O}(\lambda) = \frac{1}{\Omega_n \pi^{\frac{n-1}{2}} \tilde{A}\left(\frac{\lambda+1}{2}\right)} \int_{\Omega} |\omega_1 x_1 + ... + \omega_n x_n|^{\lambda} d\omega \tag{3}$$

3) Sağ tərəfi $|\omega_1 x_1 + ... + \omega_n x_n|^{\lambda}$ olan tənliyi həll edirlər. Deyilən sxem üzrə, əgər

$$L\left(\frac{\partial}{\partial x_1},...,\frac{\partial}{\partial x_n}\right)V = \frac{|\omega_1 x_1 + ... + \omega_n x_n|^{\lambda}}{\Omega_n \pi^{\frac{n-1}{2}} \Gamma\left(\frac{\lambda+1}{2}\right)}$$

(4)

tənliyinin V həllini tapsaq, bu həll ancaq $\xi = \omega_1 x_1 + ... + \omega_n x_n$ cəmindən asılı funksiya olar və belə olduqda (3) tənliyinin həllini belə yazmaq olar:

$$u(x_1,...,x_n) = \int_{\Omega} (\omega_1 x_1 + ... + \omega_n x_n) d\omega .$$

Bu yolla (4) tənliyinin həll edilməsi işi adi diferensial tənliyin həll olunmasına gətirilmiş olur, çünki $\mathrm{v}(\xi) = v(\omega_1 x_1 + ... + \omega_n x_n)$

funksiyasında $\dfrac{\partial}{\partial x_k} = \omega_k \dfrac{d}{d\xi}$ olur, onda $V(\xi)$-ni (4)-də yerinə yazdıqda $2m$ tərtibli adi diferensial tənlik alınır:

$$L\left(\omega_1 \frac{\partial}{\partial \xi}, \dots, \omega_n \frac{\partial}{\partial \xi}\right) V(\xi) = \frac{|\xi|^{\lambda}}{\Omega_n \pi^{\frac{n-1}{2}} \Gamma\left(\frac{\lambda+1}{2}\right)} \tag{5}$$

Bu tənliyin sağ tərəfi ξ və λ-dan asılı funksiyadır, sol tərəf isə $\omega_1, \dots, \omega_n$ ədədlərindən asılıdır. Deməli, $V(\xi)$ həll əslində ω, ξ, λ dəyişənlərindən asılı olur. Ona görə $V(\xi)$ həllini $V_\omega(\xi, \lambda)$ ilə işarə edirik.

Fərz edək ki, $G(\xi, \lambda)$ (5) tənliyinin fundamental həllidir, yəni

$$L\left(\omega_1 \frac{\partial}{\partial \xi}, \dots, \omega_n \frac{\partial}{\partial \xi}\right) G(\xi, \lambda) = \delta(\xi).$$

Onda (5)-in həlli belə olar:

$$V_\omega(\xi, \lambda) = \frac{1}{\Omega_n \pi^{\frac{n-1}{2}} \Gamma\left(\frac{\lambda+1}{2}\right)} \int_{-\infty}^{\infty} G(\xi - x) |x|^{\lambda} dx . \tag{6}$$

Onda

$$u(x_1, \dots, x_n) = \int_{\Omega} V_\omega(\omega_1 x_1 + \dots + \omega_n x_n) d\omega . \tag{7}$$

Buradan fundamental həlli almaq üçün (6) və (7)-də $\lambda = -n$ götürmək lazımdır. Deməli,

$$E \equiv u(x_1, \dots, x_n) = \int_{\Omega} V_\omega(\omega_1 x_1 + \dots + \omega_n x_n - n) d\omega \tag{8}$$

axtarılan fundamental həll olur.

Məsələn, tutaq ki, n-tək ədəddir. Bu halda

$$\frac{|x|^{\lambda}}{\Gamma\left(\frac{\lambda+1}{2}\right)} /_{\lambda=-n} = c\delta^{(n-1)}(x)$$

olur. Onda (6)-dan alırıq:

$$V_{\omega}(\xi,-n)=c\frac{\partial^{n-1}G(\xi,\omega)}{\partial\xi^{n-1}} \tag{9}$$

Beləliklə, n-tək olduqda (1) tənliyinin fundamental həlli bu şəkildə verilir:

$$u(x_1,\dots,x_n)=c\int_{\Omega}\frac{\partial^{n-1}}{\partial\xi^{n-1}}G(\xi,\omega)d\omega \tag{10}$$

burada $\omega_1x_1+\dots+\omega_nx_n$, $G(\xi,\omega)$ isə $P\left(\omega_1\frac{d}{d\xi},\dots,\omega_n\frac{d}{d\xi}\right)$ adi diferensial operatorunun fundamental həllidir.

Xüsusi halda tutaq ki, verilən operator $L=L_0$ -ancaq baş hissədən ibarətdir. Bu halda (5) tənliyi belə alınır:

$$L(\omega_1,\dots,\omega_n)V^{(2m)}(\xi)=\frac{|\xi|^2}{\Omega_n\pi^{\frac{n-1}{2}}\Gamma\left(\frac{\lambda+1}{2}\right)}$$

deməli,

$$V^{(2m)}(\xi)=\frac{|\xi|^2}{\Omega_n\pi^{\frac{n-1}{2}}\Gamma\left(\frac{\lambda+1}{2}\right)L(\omega_1,\dots,\omega_n)}$$

$2m$ tərtibli adi diferensial tənlik alınır. Buradan $V(\xi)$ tapmaq üçün sağ tərəfi $2m$ dəfə inteqrallamaq lazım gəlir. Onda alırıq:

$$V(\xi)=\frac{1}{\Omega_n\pi^{\frac{n-1}{2}}\Gamma\left(\frac{\lambda+1}{2}\right)L(\omega_1,\dots,\omega_n)}\left\{\frac{|\xi|^{\lambda+2m}}{(\lambda+1)\dots(\lambda+2m)}+Q_\lambda(\xi)\right\},$$

burada

$$Q_\lambda(\xi)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{|\xi|^{2m-2k}}{(2k-1)!(2m-2k)!(\lambda+2k)}.$$

Beləliklə, bircins elliptik tənliyin

$$L\left(\frac{\partial}{\partial x_1},\dots,\frac{\partial}{\partial x_n}\right)u=\frac{2r^{\lambda}}{\Omega_n\Gamma\left(\frac{\lambda+n}{2}\right)}$$

həlli belə düsturla tapılır:

$$u(x_1,\dots,x_n)=$$

$$=\frac{1}{\Omega_n\pi^{\frac{n-1}{2}}\Gamma\left(\frac{\lambda+1}{2}\right)}\int_{\Omega}\left[\frac{|\omega_1x_1+\dots+\omega_nx_n|^{\lambda+2m}}{(\lambda+1)\dots(\lambda+2m)}+Q_\lambda\left(\sum\omega_kx_k\right)\right]\times$$

$$\times\frac{d\omega}{L(\omega_1,\dots,\omega_n)}$$

Burada $\lambda=-n$ olduqda $2m$ tərtibli bircins elliptik tənliyin fundamental həlli alınır.

Xüsusi halda, n-tək ədəd olduqda

$$\frac{|\xi|^{\lambda+2m}}{\Gamma\left(\frac{\lambda+1}{2}\right)}/_{\lambda=-n}=c\delta^{(n-2m-1)}(x).$$

Qeyd. Göstərmək olar ki, (bax.Q.-Ş. 1, səh.290) $x\neq 0$ olduqda alınan fundamental həllər analitik funksiyalardır və $x=0$ nöqtəsi ətrafında isə aşağıdakı kimi asimrtotik bərabərsizliklərlə xarakterizə olunurlar:

$$u(x_1,\dots,x_n)=\begin{cases}0(r^{2m-n}),\ n-\text{təкdir və yaxud n - cütdür və } 2m<n\\ 0(r^{2m-n}\ln r),\ \text{n - cütdür və} 2m\geq n\end{cases}$$

Məsələn, $L\left(\frac{\partial}{\partial x_1},\dots,\frac{\partial}{\partial x_n}\right)=\left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}+\dots+\frac{\partial^2}{\partial x_n^2}\right)^m=\Delta^m$ olduqda

$L_0(\omega_1,\ldots,\omega_n)=\left(\sum\omega_i^2\right)^m=1$ (Ω üzərində) olduqda fundamental həllər bunlardır:

$$E(x)=\begin{cases} cr^{2m-n}, & 2m<n, \\ c_1 r^{2m-n}\ln r, \quad 2m\ge n, & n-\boldsymbol{c\ddot{u}td\ddot{u}r} \end{cases}$$

F Ə S İ L - 9

YARIMFƏZADA DİFERENSİAL TƏNLİKLƏR ÜÇÜN KORREKT MƏSƏLƏLƏR

§1. Yarımfəzada korrekt sərhəd məsələləri.

Məsələnin qoyuluşu

Ümumiləşmiş funksiyalar nəzəriyyəsinin yaranması ilə xüsusi törəməli diferensial tənliklərin ümumi nəzəriyyəsi özünün inkişaf zirvəsinə çatmış oldu. Bu nəzəriyyədə tənliyin tipinə məhdudiyyət qoymAdan həllin xassələri, asimptotik vəziyyəti, varlıq və yeganəlik sinifləri, fundamental həllin varlığı teoremi, onun qurulma metodları, sonsuz oblastda korrekt sərhəd məsələlərin qoyulması və başqa problemlər öyrənilir.

Bu fəsildə xüsusi törəməli diferensial tənliklər üçün yarımfəzada, $\frac{1}{4}$-fəzada, sonsuz yarımzolaqda və s. kimi sonsuz oblastlarda mümkün korrekt məsələlər öyrənilir. Bu sahədə alınan nəticələr Q.Y.Şilova və onun tələbələrinə məxsusdur.

Bəzi nəticələr (fəsil 10) bu kitabın müəllifinə məxsusdur və burada ilk dəfədir ki, çap olunur. Buradaca qeyd etmək müəllifə xoşdur ki, Moskva Dövlət Universitetinin professoru, dünya şöhrətli riyaziyyatçı alim Qeorqiy Yevqenyeviç Şilov bu sətrlərin müəllifinin Moskva Dövlət Universitetində aspiranturada elmi rəhbəri olmuşdur.

1.Məsələnin qoyuluşu. $G = (x \in R^n, t \geq 0)$ -oblastında t-yə nəzərən yüksək törəməyə görə həll edilmiş xüsusi törəməli sabit əmsallı bir diferensial tənliyə baxaq:

$$\frac{\partial^m u(x,t)}{\partial t^m} = \sum_{k=0}^{m-1} P_k\left(i\frac{\partial}{\partial x}\right)\frac{\partial^k u(x,t)}{\partial t^k} . \tag{1}$$

Burada $P_k(s)$-maksimal dərəcələri p olan sabit əmsallı polinomlardır. Adətən verilən tənliyə $t = 0$ olduqda başlanğıc şərtləri qoşulur:

$$u(x,0) = u_0(x), \ \frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = u_1(x), \ldots, \frac{\partial^{m-1} u(x,0)}{\partial t^{m-1}} = u_{m-1}(x) \tag{2}$$

və $t \to \infty$ olduqda həllin artma sürəti üzərinə müəyyən məhdudiyyətlər qoyulur. Bütün bu kimi şərtlər birlikdə (1) tənliyi üçün sərhəd məsələsi əmələ gətirir. Elə də olur ki, həllin müəyyən (ümumiləşmiş) funksiyalar sinfindən olması tələbi qoyulur.

Tərifə görə, qoyulan sərhəd məsələsi müəyyən $\mathcal{H}$ sinfində o zaman korrekt məsələ adlanır ki, həll var, yeganədir, başlanğıc məlumlarından kəsilməz asılıdır və $t \to \infty$ olduqda həll t-nin müəyyən dərəcəsindən tez artmır. Bir daha qeyd edək ki, məsələnin qoyuluşu ondan ibarətdir ki, tənlik verildikdə onun üçün hansı korrekt məsələlərin qoyulması mümkündür- sualı araşdırılır.

(1) tənliklər sinfi bir çox məlum riyazi fizika tənliklərini özündə saxlayır. Məsələn,

$m=1, p=2,\ P_0\left(i\dfrac{\partial}{\partial x}\right)=\Delta,\ \left(P_1=P_2=\ldots=P_{m-1}\equiv 0\right)$ olduqda

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\Delta u$$

-istilikkeçirmə tənliyi alınır; $m=1, p=2,\ P_0\left(i\dfrac{\partial}{\partial x}\right)=-\Delta$ olduqda

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+\Delta u=0$$

-Laplas tənliyi alınır; $m=1, p=2,\ P_0\left(i\dfrac{\partial}{\partial x}\right)=\Delta$ olduqda isə

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\Delta u$$

-dalğa tənliyi alınır (Δ – Laplas operatorudur).

Əvvəlcə klassik korrekt məsələyə bir neçə misal.

1^0. İstilikkeçirmə tənliyi üçün Koşi məsələsi:

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},\quad u/_{t=0}=u_0(x).$$

Bu məsələ

$$|u_0(x)|\le c\,e^{a|x|^2} \qquad (*)$$

sinfində korrektdir.A.N.Tixonov (1935) göstərmişdir ki, $(*)$ şərtində 2 ədədini $2+\varepsilon$ ilə əvəz etmək olmaz, əks halda yeganəlik pozular. Xüsusi halda, məhdud funksiyalar sinfi –korrektlik sinfinə daxildir.

2^0.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

dalğa tənliyi üçün korrekt məsələ Koşi məsələsidir, belə ki,

$$u(x,0)=u_0(x), \quad \frac{\partial u(x,0)}{\partial t}=u_1(x)$$

başlanğıc funksiyaları ixtiyari ümumiləşmiş funksiyalar olduqda baxılan Koşi məsələsi korrekt məsələ olur.

3^0.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0$$

-Laplas tənliyi üçün korrekt məsələ-sərhəd məsələsidir, belə ki, $u(x,0)=u_0(x)$ verilir və $t\to\infty$ olduqda həll üçün $u(x,t)=O\left(t^h\right)$ şərti qoyulur. Belə olduqda $\mathcal{H}$ sinfində məsələ korrekt olur. $\mathcal{H}$ sinfi olaraq $L_2(-\infty,\infty)$ fəzası və onun elementlərinin törəmələrindən ibarət olan funksiyalar çoxluğunu götürmək olar.

Qeyd. Ümumiyyətlə, evolyusion tipli

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}=P\left(i\frac{\partial}{\partial x}\right)u(x,t) \tag{3}$$

ümumi tənliklər sistemi üçün Koşi məsələsinin korrektlik siniflərini İ.Q.Petrovski (1938) tapmışdır. Onun tapdığı məşhur «A şərti» məhdud funksiyalar sinfinin korrektlik sinfi olması üçün zəruri və kafi şərt olur. $P(s)$ matrisinin xarakteristik köklərini $\lambda_0(s),\ldots,\lambda_{m-1}(s)$ ilə işarə edək. Belə funksiya daxil edək:

$$\Lambda(s)=\max_j \operatorname{Re}\lambda_j(s), \quad s=\sigma+i\tau.$$

Əgər s-in həqiqi qiymətlərində $\Lambda(\sigma)$ funksiyası məhdud olarsa, yəni

$$\Lambda(\sigma) \leq c = const, \tag{4}$$

onda (3) sistemi Petrovski mənada korrekt sistem adlanır. Əgər elə $c > 0, h > 0$ ədədləri varsa ki,

$$\Lambda(\sigma) \leq -c|\sigma|^h + c_1, \quad c > 0, \tag{5}$$

olur, onda (3) sistemi Şilov mənada parabolik sistem adlanır. Əgər elə $\omega > 0$ ədədi varsa ki, həqiqi $s = \sigma$ üçün

$$\Lambda(\sigma) \leq -\omega$$

olur, onda sistem Petrovski mənada parabolik sistem adlanır.

Aşkardır ki, Şilov mənada parabolik sistem həm də Petrovski mənada parabolikdir. Tərsi doğru deyil.

Misal 1. İstilikkeçirmə tənliyi üçün

$$\lambda(s) = -s^2, \quad \Lambda(\sigma) = -\sigma^2, \ h = 2.$$

Misal 2.

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + i\left(i\frac{\partial}{\partial x}\right)^p u, \quad p > 2,$$

burada

$$\lambda(s) = -s^2 + is^p, \ \Lambda(\sigma) = \operatorname{Re}\lambda(\sigma) = -\sigma^2, h = 2$$

Hər ikisi parabolik tənlikdir.

Misal 3.

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a\frac{\partial u}{\partial x},$$

$\lambda = -ias$, $\Lambda(s) = \sigma \cdot \operatorname{Im} a$. Əgər $a = a_1 + ia_2$ olsa, onda $\Lambda(s) = \sigma \cdot a_2$. Deməli a-həqiqi ədəd olduqda (yalnız bu halda) $\Lambda(\sigma) \leq 0$ olur, yəni tənlik korrekt tənlik olur.

Əgər $a = -\omega$, $\omega > 0$ isə onda tənlik parabolik tənlik olur.

Misal 4. Elə sistemə baxaq ki, onun xarakteristik kökləri

$$\lambda_1(s) = is^6 - s^4, \ \lambda_2(s) = is^4 - s^2$$

olsun. Bu halda $\operatorname{Re}\lambda_1(\sigma) = -\sigma^4$, $\operatorname{Re}\lambda_2(\sigma) = -\sigma^2$.

Deməli, baxılan sistem parabolik sistem olur.

Misal 5.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=2\frac{\partial^3 u}{\partial t\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

Xarakteristik tənlik : $\lambda^2=-2\lambda s^2-s^2$, onun kökləri

$$\lambda_{0,1}(s)=-s^2\pm\sqrt{s^4-s^2}.$$

$s=\sigma$ olduqda $\lambda_{0,1}(s)=-\sigma^2\pm\sqrt{\sigma^4-\sigma^2}$ yuxarıdan məhdud olur, yəni baxılan tənlik Petrovski mənada korrekt tənlikdir, amma bu tənlik parabolik deyil (çünki köklərdən biri kafi böyük σ üçün >0 olur).

Əgər: 1) $\Lambda(s)\le a|s|+b,$

2) $\Lambda(\sigma)\le c$

şərtləri ödənilirsə, onda sistem hiperbolik sistem adlanır.

Misallar

$1^0.\ \frac{\partial u}{\partial t}=a\frac{\partial u}{\partial x}$, a -həqiqi ədəd olduqda,

$2^0.\ \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, a -həqiqi olduqda.

Qeyd edək ki, Petrovskidən daha əvvəl, ancaq xüsusi halda, istilikkeçirmə tənliyi üçün Koşi məsələsinin həllinin varlıq və yeganəlik sinfini A.N.Tixonov tapmışdır. O, göstərmişdir ki, (1935) eksponensial olaraq artan funksiyalar sinfi

$$|u(x)|\le c\,e^{|x|^2}$$

istilikkeçirmə tənliyi üçün Koşi məsələsinin yeganəlik sinfidir və buradakı 2 rəqəmini $2+\varepsilon$ ilə əvəz etmək olmaz, əks halda həmin sinifdə yeganəlik pozular.

Bu istiqamətdə aparılan tədqiqatlar çoxdur. Məsələn, Ş.Teklind (1937)

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial^{2p} u}{\partial x^{2p}}$$

tənliyi üçün, O.A.Ladıjenskaya (1950)- ümumi parabolik tənliklər üçün, S.D.Eydelman (1953)-parabolik sistem üçün Koşi məsələsinin korrektlik siniflərini göstərmişlər.V.E.Lyanse (1949)-qüvvət funksiyası kimi artan funksiyalar sinfində (3) tənliyi üçün Koşi məsələsinin korrekt olduğunu göstərmişdir. Ümumiləşmiş funksiyalar nəzəriyyəsinin yaradıcısı L.Şvars 1950-51-ci illərdə çap etdirdiyi «Paydlanmalar nəzəriyyəsi» kitabında Koşi məsələsinin yavaş artan ümumiləşmiş funksiyalar sinfində (S' fəzası) korrekt olduğunu göstərmişdir. Nəhayət, ixtiyari tip evolyusion tənliklər sistiemi üçün Koşi məsələsinin korrektlik siniflərinin qurulmasını Q.Y.Şilov həyata keçirmişdir (1955). Bu siniflər xüsusi tip ümumiləşmiş funksiyalardan ibarət olur.

Bu paraqrafda belə bir sual araşdırılır: (1) tənliyinə hansı başlanğıc və ya sərhəd şərtlərini əlavə etmək lazımdır ki, nəticədə alınan məsələ müəyyən funksiyalar sinfində $(\mathscr{H})$ korrekt qoyulmuş məsələ olsun? Adətən (1) tənliyinə başlanğıc şərtləri əlavə olunur $(t=0)$:

$$u_0(x)=u(x,0),\quad u_1(x)=\frac{\partial u(x,0)}{\partial t},\ldots,u_{m-1}(x)=\frac{\partial^{m-1}u(x,0)}{\partial t^{m-1}}.$$

Bundan əlavə həlldən $t\to\infty$ olduqda $O(t^h)$ kimi artması şərti də tələb edilir. Bütün bu kimi şərtlər birlikdə (1) tənliyi üçün sərhəd məsələsi əmələ gətirir. Həm də tələb olunur ki, hər qeyd olunmuş t üçün $u(x,t)$ həlli müəyyən $\mathscr{H}$ sinfinin elementi olmalıdır. Adətən $\mathscr{H}$ sinfi ümumiləşmiş funksiyalar fəzası olur. Bu sinif sonra müəyyən olunacaqdır.

Tərif. (1) tənliyi üçün qoyulan sərhəd məsələsi o zaman $\mathscr{H}$ sinfində korrekt məsələ adlanır ki, onun həlli var, yeganədir, həll başlanğıc şərtlərindən kəsilməz asılıdır və $t\to\infty$ olduqda baxılan fəza metrikası mənada t-nin müəyyən dərəcəsindən tez artmır: $u(x,t)=O(t^h)$. Burada bizim məqsədimiz Koşi məsələsinin varlıq və yeganəlik siniflərini müəyyən etmək deyil, ümumi evorlysuon tənliklər üçün yarımfəzada hansı mümkün korrekt məsələlərin qoyula bilməsi problemini aydınlaşdırmaqdan ibarətdir. Başqa sözlə, belə sual araşdırılır: tənlik verildikdə ona hansı sərhəd və ya başlanğıc şərtləri qoşulmalıdır ki, nəticədə alınan məsələ müəyyən $\mathscr{H}$ sinfində korrekt məsələ olsun?

2. $\mathscr{H}$ fəzası. $f(x)\in L_2(R^n)$ funksiyaları və bu kimi funksiyaların müəyyən tərtib törəmələri kimi alınan bütün $u(x)$ funksiyaları çoxluğunu $\mathscr{H}$ ilə işarə edək. Beləliklə $u(x)\in\mathscr{H}$ olması üçün zəruri və kafi şərt onun müəyyən q üçün

$$u(x)=\sum_{|k|\le q} a_k D^k f_k(x),\quad f_k(x)\in L_2(R^n)$$ şəklində göstərilə bilməsidir.

Sadə halda: $u(x)=D^q f(x),\ f(x)\in L_2(R^n)$.Burada törəmə D' fəzası mənada başa düşülür.

$\mathscr{H}$ fəzasının Furye çevirməsini H ilə işarə edək. H fəzası elə $V(\sigma)$ funksiyaları çoxluğudur ki, hər bir $V(\sigma)$ üçün elə $P(\sigma)$ polinomu və elə $g(\sigma)\in L_2(R^n)$ var ki,

$$V(\sigma)=P(\sigma)g(\sigma)$$

olur. Başqa sözlə, hər $V\in H$ üçün elə $P(\sigma)$ çoxhədlisi var ki,

$$\frac{V(\sigma)}{P(\sigma)}\in L_2(R^n).$$

Aşkardır ki, $|\sigma|\to\infty$ olduqda $|\sigma|^q$ kimi artan funksiyalar H fəzasına daxil olur, çünki hər bir belə funksiyanı müəyyən polinoma bölməklə alınan funksiya kvadratı ilə inteqrallanan funksiya olar:

$$\frac{V(\sigma)}{P(\sigma)}=g(\sigma)\in L_2(R^n).$$

Deməli,

$$V(\sigma)=P(\sigma)g(\sigma)\in H.$$

Beləliklə H fəzasında lokal inteqrallanan və $O(|\sigma|^h)$ kimi artan funksiyaya vurmaq mümkündür: Əgər $V(\sigma)\in H$ isə və $|g(\sigma)|\le c|\sigma|^h$

isə, onda $g(\sigma)V(\sigma)\in H$, çünki elə $P(\sigma)$ çoxhədlisi tapmaq olar ki, $g(\sigma)V(\sigma):P(\sigma)\in L_2\left(R^n\right)$ olar.

Aydındır ki, H fəzasını belə cəm şəklində yazmaq olar:

$$H=\bigcup_{q=0}^{\infty} H^{(q)},$$

burada $H^{(q)}$-Hilbert fəzasıdır, $H^{(q)}$ -də skalyar hasil belə daxil edilir: $g_1, g_2 \in \mathrm{H}$ olduqda

$$\left(g_1, g_2\right)_q=\int_{R^n} \frac{\overline{g_1(\sigma)}\, g_2(\sigma)}{\left(1+|\sigma|^2\right)^q} d\sigma .$$

$H^{(q)}$-də norma:

$$\|g\|_q^2=(g, g)_q=\int_{R^n} \frac{|g(\sigma)|^2}{\left(1+|\sigma|^2\right)^q} d\sigma<\infty .$$

Tutaq ki, $g_\nu(\sigma)\in \mathrm{H}$. Əgər $\left\|g_\nu\right\|_q \rightarrow \infty,\ \nu \rightarrow \infty$ olursa, deyirik ki, $g_\nu \rightarrow 0$ (H-da). Bunu $g_\nu \overset{\mathrm{H}}{\rightarrow} 0$ kimi yazırıq. Uyğun surətdə $u_\nu \in \mathcal{H}$ ardıcıllığı o zaman sıfra yığılır ki, elə q var ki,

$$u_\nu=(1-\Delta)^q f_\nu(x),\ f_\nu(x)\in L_2\left(R^n\right) \text{ və } f_\nu(x)\rightarrow 0 \ (L_2\text{-də})$$

olsun.

Tutaq ki, $A:\mathrm{H}\rightarrow \mathrm{H}$ xətti operatordur. Əgər $g_\nu \overset{\mathrm{H}}{\rightarrow} 0$ olduqda $A g_\nu \overset{\mathrm{H}}{\rightarrow} 0$ olursa, deyirlər ki, A operatoru H-da kəsilməzdir. Məsələn, tutaq ki, $G(\sigma)$ belə funksiyadır:

$$|G(\sigma)|\leq c\left(1+|\sigma|^2\right)^m .$$

Onda $\forall V(\sigma)\in \mathrm{H}$ üçün $Au\in H$ olur, yəni A H-da kəsilməzdir. Doğrudan da,tutaq ki, müəyyən $q\geq q_0$ üçün

$$\|g_\nu(\sigma)\|_q^2=\int_{R^n}\frac{|g_\nu(\sigma)|^2 d\sigma}{\left(1+|\sigma|^2\right)^q}\to 0,\ \nu\to\infty.$$

Onda $q\geq q_0+m$ üçün alırıq:

$$\|G(\sigma)g_\nu(\sigma)\|_q^2\leq c\int_{R^n}\frac{\left(1+|\sigma|^2\right)^m|g_\nu(\sigma)|^2}{\left(1+|\sigma|^2\right)^q}d\sigma=$$

$$=c\int_{R^n}\frac{|g_\nu(\sigma)|^2 d\sigma}{\left(1+|\sigma|^2\right)^{q-m}}\to 0$$

$g_\nu(\sigma)\in \mathrm{H}$ ardıcıllığı o zaman məhdud adlanır ki, elə q olsun ki, $g_\nu(\sigma)\in \mathrm{H}^{(q)}$ və $\|g_\nu(\sigma)\|_q\leq M<\infty$. Əgər hər t üçün $g_t(\sigma)\in \mathrm{H}$ isə və elə $h(t)$-adi funksiyası varsa ki, $g_t(\sigma):h(t)$ nisbəti H-da məhduddur, onda deyirik ki, $g_t(\sigma)$ t-yə görə $h(t)$-dən tez artmır. Başqa sözlə,

$$\|g_t(\sigma)\|_q\leq h(t),\ t\to\infty.$$

Tərs Furye çevirməsi vasitəsilə analoji təriflər $\mathcal{H}$ fəzasında da daxil edilir, məsələn, $u(x,t)\in\mathcal{H}$ üçün onun Furye çevirməsi $V(\sigma,t)=F[u(x,t)]\in \mathrm{H}$, və $t\to\infty$ olduqda $|V(\sigma,t)|\leq ct^h$ olursa, onda deyirik ki, $u(x,t)$ funksiyası t^h-dan tez artmır.

3.Əsas teorem. İndi $\mathcal{H}$ fəzasında verilən (1) tənliyinə baxaq. $u(x,t)$ həlli hər $t\geq 0$ üçün $\mathcal{H}$ fəzasına daxildir. Fərz edirik ki, həm də bütün törəmələr

$$\frac{\partial u}{\partial t},\dots,\frac{\partial^m u}{\partial t^m}\in\mathcal{H}$$

(hər qeyd olunmuş t üçün). (1) tənliyinin xarakteristik tənliyini yazaq. Bunun üçün (1)-də $\frac{\partial}{\partial t}$ törəməsini λ ilə, $i\frac{\partial}{\partial x}$ törəməsini isə σ ilə əvəz edək. Onda alırıq:

$$\lambda^m = \sum_{k=0}^{m-1} P_k(\sigma)\lambda^k .$$

Bu tənliyin m dənə kökü var. Onları $\lambda_0(\sigma), \lambda_1(\sigma), \ldots, \lambda_{m-1}(\sigma)$ ilə işarə edək. Hər qeyd olunmuş σ üçün bu kökləri onların real hissələrinin artma nizamına görə düzək:

$$\operatorname{Re}\lambda_0(\sigma) \le \operatorname{Re}\lambda_1(\sigma) \le \ldots \le \operatorname{Re}\lambda_{m-1}(\sigma).$$

Belə çoxluqlara baxaq:

$$A_j = \{\sigma \in R^n : \operatorname{Re}\lambda_0(\sigma) \le \operatorname{Re}\lambda_1(\sigma) \le \ldots \le \operatorname{Re}\lambda_j(\sigma) \le 0\},$$
$$j = 0,1,\ldots,m-1.$$

Aşkardlır ki, $A_0 \supset A_1 \supset \ldots \supset A_{m-1}$. Bütün bu çoxluqlar ölçüsü sıfır çoxluq dəqiqliyilə götürülür.

Əsas teorem. Tutaq ki, A_j çoxluğunda $V_j(\sigma)$ funksiyası verilir, belə ki, $V_j(\sigma)$-nı bütün R^n fəzasına elə davam etdirmək olur ki, nəticədə alınan funksiya H fəzasına daxil olur. (Bu halda $V_j(\sigma) \in \mathrm{H}(A_j)$ yazırıq). Onda (1) tənliyinin elə $u(x,t) \in \mathcal{H}$ həlli var ki, onun üçün

$$\frac{\partial^j u(0,x)}{\partial t^j} = u_j(x) \quad (j = 0,1,\ldots,m-1), \; V_j(\sigma) = \int_{A_j} u_j(x) e^{i\sigma x} dx.$$

başlanğıc funksiyalarının Furye çevirmələri A_j çoxluğunda $V_j(\sigma)$ ilə üst-üstə düşür. $u(x,t)$ həlli hər $t \ge 0$ üçün $\mathcal{H}$ fəzasına daxildir və $t \to \infty$ olduqda bütün $k \le m-1$ tərtibli törəmələrilə birlikdə t-nin müəyyən dərəcəsindən tez artmır, bu cür həll yeganədir və başlanğıc şərtlərdən kəsilməz asılıdır.

Teoremin isbatı sonra verilir. İndi isə onun məğzini aydınlaşdıran bir neçə konkret misallarla tanış olar.

4. Realizasiyalar.

1^0. İstilikkeçirmə tənliyi

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

Görək hansı məsələ bu tənlik üçün korrekt olur. Bunun üçün xarakteristik tənliyi yazaq: $\lambda_0=-\sigma^2$. Deməli $A_0=\{\operatorname{Re}\lambda_0(\sigma)\le 0\}=(-\infty,\infty)$ olur. A_0 çoxluğunda $V_0(\sigma)$ başlanğıc funksiyasını verməк ona ekvivalentdir ki, (Furye çevirməsinin yeganəlik teoreminə görə) bütün fəzada $u_0(x)$ funksiyasını verməк lazımdır. Beləliklə, verilən tənlik üçün korrekt məsələ Koşi məsələsidir:

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},\quad u/_{t=0}=u_0(x). \qquad (*)$$

Doğrudan da, Furye çevirməsini bu Koşi məsələsinə tətbiq etdikdə

$$\frac{d\,v(\sigma,t)}{dt}=-\sigma^2 v(\sigma,t),\ F\left[\frac{\partial u(0,x)}{\partial t}\right]=v_0(\sigma)$$

alırıq. Buradan həll belə alınır:

$$v(\sigma,t)=e^{-t\sigma^2}v_0(\sigma).$$

Buradan və $v_0(\sigma)\in \mathrm{H}$ olduğundan, $|v(\sigma,t)|\le|v_0(\sigma)|$ və $v(\sigma,t)\in \mathrm{H}$ olur. Bu həll yeganədir və başlanğıc şərtindən kəsilməz asılıdır, $t\to\infty$ olduqda t-nin dərəcəsindən tez artmır. Beləliklə $(*)$ Koşi məsələsi $\mathcal{H}$-da korrekt məsələdir.

2^0. Dalğa tənliyi

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

Burada $\lambda_0=-\sigma^2, \lambda_{0,1}=\pm i|\sigma|$.

Deməli $\operatorname{Re}\lambda_0(\sigma)=\operatorname{Re}\lambda_1(\sigma)=0$. Onda

$$A_0 = \{\sigma : \operatorname{Re}\lambda_0(\sigma) \le 0\} = (-\infty, \infty) = R,$$
$$A_1 = \{\sigma : \operatorname{Re}\lambda_1(\sigma) \le 0\} = (-\infty, \infty) = R.$$

Korrekt məsələ üçün gərək $v_0(\sigma) = F[u(x,0)]$ A_0-da , $v_1(\sigma) = F\left[\dfrac{\partial u(x,0)}{\partial t}\right]$ isə A_1-də verilsin. Lakin $v_0(\sigma)$ və $v_1(\sigma)$ funksiyalarının A_0 və A_1 çoxluqlarında verilməsi onların bütün fəzada verilməsi deməkdir. Bu isə o deməkdir ki, $u_0(x)$ və $u_1(x)$ funksiyaları bütün fəzada verilir. Beləliklə, bu tənlik üçün korrekt məsələ-Koşi məsələsi olur:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad u/_{t=0} = u_0(x), \ \frac{\partial u}{\partial t}/_{t=0} = u_1(x),$$

3^0. **Laplas tənliyi-**

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0.$$

Burada: $\lambda_0 = -\sigma^2, \lambda_{0,1}(\sigma) = \pm|\sigma|$, $\operatorname{Re}\lambda_0(\sigma) = -|\sigma|$, $\operatorname{Re}\lambda_0(\sigma) = |\sigma|$.

Onda:

$$A_0 = \{\sigma : -|\sigma| \le 0\} = R = (-\infty, \infty)$$
$$A_1 = \{\sigma : |\sigma| \le 0\} = \varnothing,$$

yəni A_1- boş çoxluqdur.Deməli $v_0(\sigma)$ funksiyası A_0-da (yəni bütün fəzada) verilməlidir (bu isə o deməkdir ki, $u_0(x)$ verilməlidir, $V_1(\sigma)$ isə heç yerdə verilməlidir), yəni $u_1(x)$ verilmir. Nəticədə belə korrekt məsələ alınır:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \quad u/_{t=0} = u_0(x).$$

Bu isə klassik Dirixle məsələsi olur.

İndi bir neçə qeyri-klassik tənliyə baxaq.

4^0. **Tərs istilikkeçirmə tənliyi**

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

Burada $\lambda_0 = -\sigma^2$, $A_0 = \{0\} \sim \varnothing$. Deməli heç bir başlanğıc şərti vermək lazım deyil. $\mathcal{H}$ sinfində bu tənliyin $t \to \infty$ olduqda $O(t^h)$ kimi artan həlli ancaq eynilik kimi $u(x,t) \equiv 0$ olan həllidir.

Doğrudan da, Furye çevirməsini tətbiq etməklə alırıq:

$$\frac{dv}{dt} = \sigma^2 \cdot v(\sigma,t); \; v(\sigma,t) = ce^{\sigma^2 t}.$$

Buradan görünür ki, $c \neq 0$ olan kimi bu həll $t \to \infty$ olduqda eksponensial artır, yəni $v(\sigma,t) \notin \mathrm{H}$. Ancaq $c = 0$ olduqda bu həll H sinfinə daxildir, yəni $v(\sigma,t) \equiv 0$, deməli $\mathcal{H}$ sinfində yeganə həll $u(x,t) \equiv 0$ olur.

5^0. **Ultrahiperbolik tənlik-**

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x_3^2}, \quad x \in R^3, t \geq 0.$$

Bu tənlik üçün alırıq ki,

$$\lambda^2 = -\sigma_1^2 - \sigma_2^2 + \sigma_3^2, \; \lambda_{0,1} = \pm\sqrt{\sigma_3^2 - \left(\sigma_1^2 + \sigma_2^2\right)}.$$

Buradan görünür ki, hər yerdə

$\operatorname{Re}\lambda_0(\sigma) = -\sqrt{\sigma_3^2 - \left(\sigma_1^2 + \sigma_2^2\right)} \leq 0$ olur, yəni $A_0 = R^3$. Lakin

$$A_1 = \{\sigma : \operatorname{Re}\lambda_1(\sigma) \leq 0\} = \{\sigma \in R^3 : \sigma_1^2 + \sigma_2^2 \geq \sigma_3^2\}.$$

Korrekt məsələ alınması üçün verilən tənliyə $u_0(x)$ başlanğıc şərti qoşulur. Lakin $u_1(x) = \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0}$ funksiyası ixtiyari verilə bilməz. Gərək onun Furye çevirməsi $v_1(\sigma)$ A_1 çoxluğunda verilsin. Beləliklə, $u_0 \in \mathcal{H}$-ixtiyari verilir, $u_1(x)$ isə elə funksiyadır ki, $F[u_1(x)] = v_1(\sigma)$ ancaq A_1-də verilir, yəni

$$F\left[\frac{\partial u(x,0)}{\partial t}\right] = \iiint_{R^3} \frac{\partial u(0,x)}{\partial t} e^{i(x,\sigma)} dx_1 dx_2 dx_3 = v_1(\sigma), \quad \sigma \in A_1$$

verilməlidir. Qeyd edək ki, $v_1(\sigma)$ Furye çevirməsi müəyyən A_1 çoxluğunda verildikdə onun tərs (və ya düz) Furye çevirməsi $u_1(x)$ funksiyasını tam xarakterizə etmək heç də həmişə mümkün deyil.

Məsələlər.

Aşağıdakı tənliklər üçün korrekt sərhəd məsələlərini göstərin.

$$a)\ \frac{\partial^4 u}{\partial t^4}=\frac{\partial^4 u}{\partial x^4};\quad b)\ \frac{\partial^4 u}{\partial t^4}=-\frac{\partial^4 u}{\partial x^4};\quad c)\ \frac{\partial u}{\partial t}=-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-k^2u,\ \ k>0.$$

Cavab: a) verilməlidir: $u(x,0)$, $\dfrac{\partial u(x,0)}{\partial t}$, $\dfrac{\partial^2 u(x,0)}{\partial t^2}$;

v) verilir: $u(x,0)$, $\dfrac{\partial u(x,0)}{\partial t}$;

c) $u_0(x)$ elə verilir ki, $v_0(\sigma)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}u_0(x)e^{ix\sigma}dx$ funksiyası ancaq $A_0=\{\sigma:\sigma\le k\}$ çoxluğunda verilməlidir.

§ 2. Bəzi köməkçi qiymətlənmələr. Şilov qiymətlənməsi.

Tutaq ki, $f(\lambda)$-müəyyən G oblastında analitik funksiyadır və $\lambda_0,\lambda_1,\dots,\lambda_{m-1}\in G$-qeyd olunmuş müxtəlif nöqtələrdir. Onda elə $R(\lambda)$ çoxhədlisi (polinom) qurmaq olur ki,

$$R(\lambda_j)=f(\lambda_j),\qquad j=0,1,\dots,m-1 \tag{1}$$

olur. Bu cür çoxhədlini Nyuton düsturuna əsasən qurmaq olur. O düstur belədir:

$$\begin{gathered}R(\lambda)=b_0+b_1(\lambda-\lambda_0)+b_2(\lambda-\lambda_0)(\lambda-\lambda_1)+\dots\\ \dots+b_{m-1}(\lambda-\lambda_0)(\lambda-\lambda_1)\dots(\lambda-\lambda_{m-2}),\end{gathered} \tag{2}$$

burada b_j əmsalları (1) şərtindən təyin edilir.

$$Q_k=\{\lambda_0,\lambda_1,\dots,\lambda_k\}$$

işarə edək və

$$M_k = \max_{\lambda \in Q_k} \left| f^{(k)}(\lambda) \right|$$

işarə edək. Onda (2)-dəki b_k əmsalları üçün aşağıdakı qiymətlənmə ödənilir: (bax [1], səh.222):

$$|b_k| \leq \frac{M_k}{k!} \ . \tag{3}$$

e^{tP} **operatorunun qiymətlənməsi.**

Tutaq ki, $P = \left\| P_{ij} \right\|_0^{m-1}$ - $m \times m$- matrisi verilir. $t \geq 0$ olduqda e^{tP} - matrisinin normasını qiymətləndirmək istəyirik.

Lemma (Şilov). Aşağıdakı qiymətlənmə doğrudur:

$$\left\| e^{tP} \right\| \leq e^{t\Lambda_{m-1}} \left(1 + 2t\|P\| + \ldots + \frac{(2t)^{m-1}}{(m-1)!} \|P\|^{m-1} \right), \tag{Ş}$$

burada

$\Lambda_{m-1} = \max\limits_{0 \leq k \leq m-1} \operatorname{Re} \lambda_k$, və $\lambda_k - P$-nin xarakteristik köküdür.

İsbatı. P -matirisinin xarakteristik köklərini $\lambda_0, \ldots, \lambda_{m-1}$ ilə işarə edək, yəni bu ədədlər

$$\det(P - \lambda E) = 0$$

m dərəcəli cəbri tənliyin kökləridir. Hələlik fərz edirik ki, bu ədədlər müxtəlifdirlər. Onda elə $R(\lambda)$ çoxhədlisi var ki, $e^{t\lambda}$ funksiyasının $\lambda_0, \ldots, \lambda_{m-1}$ nöqtələrindəki qiymətləri

$$R(\lambda_0) = e^{t\lambda_0}, \ldots, R(\lambda_{m-1}) = e^{t\lambda_{m-1}}$$

olur. $R(\lambda)$ çoxhədlisi (2) Nyuton düsturu vasitəsilə qurulur, belə ki,

$$\begin{aligned} |b_k| &\leq \frac{1}{k!} \max_{\lambda \in Q_k} \left| \frac{d^k e^{t\lambda}}{d\lambda^k} \right| = \\ &= \max_{\lambda \in Q_k} \frac{t^k}{k!} e^{t \operatorname{Re} \lambda} \leq \frac{t^k}{k!} e^{t\Lambda_k} \leq \frac{t^k}{k!} e^{t\Lambda_{m-1}} \end{aligned} \tag{4}$$

Lakin

$$e^{tP} = R(P) = b_0 E + b_1(P - \lambda_0 E) + b_2(P - \lambda_0 E)(P - \lambda_1 E) + \ldots$$
$$\ldots + b_{m-1}(P - \lambda_0 E)(P - \lambda_1 E)\ldots(P - \lambda_{m-2} E)$$

olduğundan buradan alırıq ki,

$$\left\|e^{tP}\right\| \le e^{t\Lambda_{m-1}} \begin{pmatrix} 1 + t\left\|P - \lambda_0 E\right\| + \ldots + \\ + \dfrac{t^{m-1}}{(m-1)!}\left\|P - \lambda_0 E\right\| \cdot \left\|P - \lambda_1 E\right\| \ldots \left\|P - \lambda_{m-2} E\right\| \end{pmatrix}. \quad (5)$$

Nəzərə alsaq ki, λ_j ədədi (R^m fəzasında) P operatorunun məxsusi qiymətidir və uyğun məxsusi vektoru e_j ilə işarə etsək,

$$Pe_j = \lambda_j e_j,$$

buradan alırıq:

$$\left|\lambda_j\right| = \left\|Pe_j\right\| \le \sup_{\|e\|=1}\left\|Pe\right\| = \left\|P\right\|.$$

Deməli

$$\left\|P - \lambda_j E\right\| \le 2\left\|P\right\|.$$

Bunları nəzərə aldıqda (5)-dən (Ş) bərabərsizliyi alınır.

Qeyd. Məlumdur ki, m-ölçülü fəzada ortoqonal bazisdə $P = \left\|P_{jk}\right\|$ matrisinin normasının kvadratı onun elementlərinin kvadratları cəmini aşmır (bax [2], səh.149):

$$\left\|P\right\|^2 \le \sum_i \sum_k \left|P_{jk}\right|^2.$$

Əgər P matrisi σ parametrindən asılıdırsa, $P = P(\sigma)$ və onun elementləri $P_{jk}(\sigma)$ çoxhədlilərdirsə, onda

$$\left|P_{jk}(\sigma)\right| \le c\left|\sigma\right|^p$$

olar və deməli,

$$\left\|P(\sigma)\right\| \le c\left|\sigma\right|^p.$$

Bunları nəzərə aldıqda (5)-dən alınır ki,

$$\left\| e^{tP(\sigma)} \right\| \le e^{t\lambda_{m-1}(\sigma)} \left(1 + 2t\|P(\sigma)\| + \ldots + \frac{(2t)^{m-1}}{(m-1)!} \|P(\sigma)\|^{m-1} \right) \qquad (\text{Ş})$$

Buradan görünür ki, $\Lambda_{m-1}(\sigma) = \max\limits_{0 \le k \le m-1} \operatorname{Re} \lambda_k(\sigma) \le 0$ olduqda $\left\| e^{tP(\sigma)} \right\|$ funksiyası $t \to \infty$ olduqda t^h qüvvət funksiyası kimi artır və

$$\left\| e^{tP(\sigma)} V_0(\sigma) \right\| \le |Q(\sigma)| |V_0(\sigma)| \cdot t^{m-1}$$

qiymətlənməsi ödənilir, burada $V_0(\sigma) \in \mathrm{H}$ və $Q(\sigma)$ funksiyası

$$|Q(\sigma)| \le c|\sigma|^{(m-1)p}$$

kimi qiymətlənməyə malikdir.

Buradan çıxır ki, $V_0(\sigma) \in \mathrm{H}$ olduqda və $\Lambda_{m-1}(\sigma) \le 0$ olduqda

$$V(\sigma,t) = e^{tP(\sigma)} V_0(\sigma)$$

funksiyası H fəzasına daxil olur. Bu funksiya

$$V'(\sigma,t) = P(\sigma)V(\sigma,t), \quad V|_{t=0} = V_0(\sigma)$$

Koşi məsələsinin həllini verir.

§ 3. Adi diferensial tənliklər.

1. Tənliklər sistemi. Əvvəlcə belə sistemə baxaq:

$$\begin{cases} \dfrac{dV_0(t)}{dt} = P_{00}V_0(t) + P_{01}V_1(t) + \ldots + P_{0,m-1}V_{m-1}(t), \\ ------------------------ \\ \dfrac{dV_{m-1}(t)}{dt} = P_{m-1,0}V_0(t) + P_{m-1,1}V_1(t) + \ldots + P_{m-1,m-1}V_{m-1}(t), \end{cases} \qquad (1)$$

burada $P_{00}, \ldots, P_{m-1,m-1}$ - müəyyən sabitlərdir. Əgər

$$V(t)=(V_0(t),\dots,V_{m-1}(t))$$

işarə etsək, onda (1) sistemini bir tənlikdə

$$V'=PV$$

kimi yazmaq olar, $P=\left\|P_{ij}\right\|_0^{m-1}$. Əgər bu tənliyə

$$V\big|_{t=0}=V(0)=(V_0(0),\dots,V_{m-1}(0))$$

başlanğıc şərtini qoşsaq, onda $V(t)$ həlli $V(0)$ vasitəsilə birqiymətli təyin olunar. Əgər $t\to\infty$ olduqda $V(t)$ həlli t^h dərəcəsindən tez artmırsa, yəni

$$|V(t)|=\sqrt{\sum_{j=0}^{m-1}V_j^2(t)}=O\left(t^h\right) \tag{3}$$

olursa, onda $V(0)$ başlanğıc vektoru *korrekt vektor* adlanır. $V(0)$ korrekt vektor olduqda (2) sisteminin yeganə $V(t)$ həlli var və bu həll (3) şərtini ödəyir.

Belə məsələ qoyulur: $V(0)$ vektorunun korrekt vektor olması üçün hansı şərtlər olmalıdır? Həmin şərtləri tapmaq tələb olunur.

Tutaq ki, P xətti operatoru m-ölçülü Q fəzasında təsir edir. $\xi=(\xi_0,\dots,\xi_{m-1})\in Q$ olduqda $P\xi\in Q$ olduğundan,

$$P\xi=\eta=(\eta_0,\dots,\eta_{m-1})\in Q.$$

Açıq yazsaq:

$$\begin{cases}P_{0,0}\xi_0+P_{0,1}\xi_1+\dots+P_{0,m-1}\xi_{m-1}=\eta_0,\\ P_{1,0}\xi_0+P_{1,1}\xi_1+\dots+P_{1,m-1}\xi_{m-1}=\eta_1,\\ \text{-----------------------------}\\ P_{m-1,0}\xi_0+P_{m-1,1}\xi_1+\dots+P_{m-1,m-1}\xi_{m-1}=\eta_{m-1}.\end{cases}$$

Fərz edək ki, $\lambda_0,...,\lambda_{m-1}$ P operatorunun məxsusi qiymətləridir və $\{e_0,e_1,...,e_{m-1}\}$ sistemi P-nin məxsusi vektorlarından ibarət bazisdir. $\lambda_0,...,\lambda_{m-1}$ ədədlərini onların real hissələrinin artması üzrə düzək:

$$\operatorname{Re}\lambda_0 \le \operatorname{Re}\lambda_1 \le ... \le \operatorname{Re}\lambda_{m-1}.$$

İndi r ədədini belə təyin edək:

$$\operatorname{Re}\lambda_{r-1} \le 0 < \operatorname{Re}\lambda_r.$$

Başqa sözlə, r ədədi $\lambda_0,...,\lambda_{m-1}$ kökləri içərisində $\operatorname{Re}\lambda \le 0$ olan köklərin sayıdır. Bununla da r təyin olunur. Əgər $\forall j$ üçün $\operatorname{Re}\lambda_j \le 0$ olursa, deməli $r = m$, əgər $\forall j$ üçün $\operatorname{Re}\lambda_j > 0$ olursa, onda $r = 0$.

Aşkardır ki, Q fəzasını P operatoruna nəzərən invariant olan iki Q^- və Q^+ alt fəzalarının (düz) cəmi kimi yazmaq olar: $Q = Q^- + Q^+$, yəni $\forall x \in Q$ üçün $x = x_1 + x_2$, burada $x_1 \in Q^-$, $x_2 \in Q^+$. Belə ki, $Q^- \subset Q$ alt fəzasını $e_0,e_1,...,e_{r-1}$ məxsusi vektorları doğurur. Deməli, məsələn, $Q^- = L(e_0,e_1,...,e_{r-1})$.

Deməli hər bir $\xi \in Q$ vektorunu belə ayırmaq olar:

$$\xi = \xi^- + \xi^+, \xi^- \in Q^-, \xi^+ \in Q^+.$$

Xüsusi halda, $V(0) \in Q$ olduqda

$$V' = PV, \quad V|_{t=0} = V(0)$$

Koşi məsələsinin həlli $V(t) = V^-(t) + V^+(t)$ cəminə ayrılır, belə ki, $V^- \in Q^-, V^+ \in Q^+$ (hər $t \ge 0$ üçün).

Teorem 1. $V(0)$ vektoru (1) sistemi üçün yalnız və yalnız o zaman korrekt vektor olur ki, $V(0) \in Q^-$ olsun.

İsbatı. (1) sisteminin $V(0)$ başlanğıc şərti daxilində həlli

$$V(t) = e^{tP} V(0)$$

kimi yazılır. Tutaq ki, $V(0)\in Q^{-}$. Şərtə görə Q^{-} fəzası P-nin invariant alt fəzasıdır.(Başqa sözlə, $e\in Q^{-}$ olduqda $Pe\in Q^{-}$). Onda Q^{-} fəzası e^{tP} operatoru üçün də invariant alt fəza olar, deməli, $V(0)=Q^{-}$ olduqda həm də $e^{tP}\,V(0)\in Q^{-}$ olar, yəni

$$V(t)\in Q^{-},\ t\geq 0.$$

P operatorunun matrisini Q^{-} alt fəzasında Jordan formasına gətirmək olar, belə ki, həmin formada matrisin diaqonal blokları bu şəkildə olur:

$$\begin{Vmatrix} \lambda_j & 1 & 0 & . & . & . & 0 \\ 0 & \lambda_j & 1 & . & . & . & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_j & . & . & . & 0 \\ - & - & - & - & - & - & - \\ 0 & 0 & 0 & . & . & . & \lambda_j \end{Vmatrix} \qquad (*)$$

P matrisinin Jordan formasını bildikdə həmin bazisdə istənilən hamar $f(\lambda)$ üçün $f(P)$ operator-funksiyanın da matrisini yazmaq olar (bax. [1], səh. 86), belə ki, onun uyğun Jordan formasında uyğun bloklarda $(*)$ əvəzində belə bloklar durar:

$$\begin{Vmatrix} f(\lambda_j) & f'(\lambda_j) & \frac{1}{2!}f''(\lambda_j) & . & . & . \\ 0 & f(\lambda_j) & f'(\lambda_j) & . & . & . \\ 0 & 0 & f(\lambda_j) & . & . & . \\ - & - & - & - & - & - \\ 0 & 0 & 0 & . & . & f(\lambda_j) \end{Vmatrix}$$

Xüsusi halda, $f(\lambda)=e^{t\lambda}$ funksiyası üçün uyğun Jordan bloku belə olur:

$$\begin{Vmatrix} e^{t\lambda_j} & te^{t\lambda_j} & \frac{t^2}{2}e^{t\lambda_j} & . & . & . \\ 0 & e^{t\lambda_j} & te^{t\lambda_j} & . & . & . \\ 0 & 0 & e^{t\lambda_j} & . & . & . \\ - & - & - & - & - & - \\ 0 & 0 & 0 & . & . & e^{t\lambda_j} \end{Vmatrix}.$$

Qeyd edək ki, Q^- fəzasında $\operatorname{Re}\lambda_j \le 0$ olduğundan $\left|e^{t\lambda_j}\right| \le 1$. Beləliklə, deyilənlərdən görünür ki, Q^- fəzasının hər bir $e_0, e_1, ..., e_{r-1}$ bazis vektoru e^{tP} operatorunun təsiri nəticəsində aşağıdakı kimi vektorlara keçir:

$$e^{tP} e_k = \sum_{j=0}^{k} c_{jk} t^j e^{t\lambda_k} e_j,$$

burada c_{jk}-sabitlərdir, $c_{kk} \ne 0$. Buradan istənilən

$$V(0) = \sum_{k=0}^{m-1} \xi_k e_k \in Q^-$$

vektoru üçün alırıq:

$$V(t) = e^{tP} V(0) = \sum_k \xi_k e^{tP} e_k = \sum_k \sum_j c_j t^j e^{t\lambda_k} e_j,$$

buradan

$$\|V(t)\| \le c(1+t)^{m-1}.$$

Beləliklə aldıq ki, $V(0) \in Q^-$ olduqda məsələ korrektdir. İndi tutaq ki, $V(0)$ başlanğıc vektoru elədir ki, onun Q^+ alt fəzasında 0-dan fərqli olan komponenti var. Onda məsələ korrekt deyil (həll varsa da o, $t \to \infty$ olduqda eksponensial artır).

Tutaq ki, $V(0)=V^-(0)+V^+(0)$, $V^+(0)\in Q^+$, $V^+(0)\neq 0$.

$V(0)=\sum_{k=0}^{m-1}\xi_k e_k \in Q$ və $\xi_r, \xi_{r+1}, \ldots \xi_{m-1}$ içərisində 0-dan fərqli olan var. Məsələn, tutaq ki, $\xi_p \neq 0$, $p \geq r$. Şərtə görə e_p vektoru e^{tP} operatoru vasitəsilə belə vektora keçir:

$$V(0)=\sum_{j=0}^{p}\xi_{jp}\, t^j e^{t\lambda_p} e_j, \quad c_{pp}\neq 0,$$

belə ki, $\operatorname{Re}\lambda_p > 0$. Deməli $e^{tP}\ V(0)$ vektorunun p-ci toplananı

$$t^p e^{t\lambda_p} e_p$$

olur, bu toplanan $t \to \infty$ olduqda eksponensial artır. Onda çıxır ki, $t \to \infty$ olduqda $\left\|e^{tP}\ V(0)\right\| = \left\|V(t)\right\|$ eksponensial olaraq artır, yəni məsələ korrekt deyil.

2. m tərtibli adi diferensial tənliyə baxaq:

$$\frac{d^m V(t)}{dt^m}=\sum_{k=0}^{m-1} P_k \frac{d^k V(t)}{dt^k}. \qquad (1)$$

Burada

$$\frac{d^k V}{dt^k}\Big|_{t=0} = V_k(0),\ k=0,1,\ldots,m-1 \qquad (2)$$

-başlanğıc şərtləri verildikdə $V(t)$ həlli birqiymətli tapılır. (1) tənliyini sistem kimi yazaq (Bunun üçün

$$V_0(t)=V(t), V_1(t)=V', \ldots, V_{m-1}(t)=V^{(m-1)}(t)$$

əvəzləməsini edirik). Alırıq:

$$
\begin{cases}
\dfrac{d^k V_0(t)}{dt} = V_1, \\
\dfrac{d^k V_1(t)}{dt} = V_2, \\
------- \\
\dfrac{d^k V_{m-2}(t)}{dt} = V_{m-1}, \\
\dfrac{d^k V_{m-1}(t)}{dt} = P_0 V_0 + P_1 V_1 + \dots + P_{m-1} V_{m-1}.
\end{cases}
\tag{3}
$$

Sistemin matrisi:

$$
P = \begin{Vmatrix}
0 & 1 & 0 & 0 & . & . & . & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & . & . & . & 0 \\
. & . & . & . & . & . & . & . \\
0 & 0 & 0 & 0 & . & . & . & 1 \\
P_0 & P_1 & P_2 & P_3 & . & . & . & P_{m-1}
\end{Vmatrix}. \tag{4}
$$

İndi P operatorunun m- ölçülü Q fəzasında məxsusi qiymətlərini və məxsusi vektorlarını tapaq. $\xi \in Q$ olduqda $\xi = (\xi_0, \xi_1, \dots \xi_{m-1})$ və $P\,\xi \in Q$ olduğu üçün

$P\xi = \eta = (\eta_0, \dots, \eta_{m-1})$ olduqda aılırıq:

$$
\eta_0 = \xi_1,\ \eta_1 = \xi_2, \dots, \eta_{m-2} = \xi_{m-1},
$$
$$
\eta_{m-1} = P_0\xi_0 + P_1\xi_1 + \dots + P_{m-1}\xi_{m-1}.
$$

Əgər ξ -vektoru P-nin λ ədədinə uyğun gələn məxsusi vektorudursa, onda $P\xi = \lambda\xi$, deməli,

$$\xi_1 = \lambda\xi_0,\ \xi_2 = \lambda\xi_1, \dots, \xi_{m-1} = \lambda\xi_{m-2},$$
$$P_0\xi_0 + P_1\xi_1 + \dots + P_{m-1}\xi_{m-1} = \lambda\xi_{m-1}.$$

Burada $\xi_0 = 1$ götürək. Onda alırıq:

$$\xi_0 = 1,\ \xi_1 = \lambda,\ \xi_2 = \lambda^2, \dots, \xi_{m-1} = \lambda^{m-1} \text{ və}$$

$$\lambda^m = \sum_{k=0}^{m-1} P_k\lambda^k.$$

Onda λ – ya uyğun məxsusi ξ vektoru bu şəkildə olar:

$$\xi = (\xi_0, \xi_1, \dots \xi_{m-1}) = (1, \lambda, \lambda^2, \dots, \lambda^{m-1}).$$

Xüsusi halda, $Pe_j = \lambda_j e_j$ olduqda alırıq ki, e_j bazis məxsusi vektorları bu şəkildə olur:

$$e_j = (1, \lambda_j, \lambda_j^2, \dots, \lambda_j^{m-1}),\quad j = 0,1,\dots,m-1..$$

İndi fərz edək ki, r ədədi P operatorunun $\operatorname{Re}\lambda_k \le 0$ şərtini ödəyən məxsusi qiymətlərinin sayıdır, yəni

$$\operatorname{Re}\lambda_0 \le \operatorname{Re}\lambda_1 \le \dots \le \operatorname{Re}\lambda_{r-1} \le 0 < \operatorname{Re}\lambda_r < \dots \le \operatorname{Re}\lambda_{m-1}.$$

Teorem 2. (1) tənliyi üçün

$$\frac{d^k V(t)}{dt^k}\Big|_{t=0} = V_k(\sigma),\qquad k = 0,1,\dots,r-1,$$

başlanğıc şərtlərini istənilən qayda ilə verdikdə alınan məsələ korrekt məsələ olur.

Teoremin isbatı tənliyi sistem kimi yazıb 1-ci teoremi tətbiq etməklə alınır.

Burada belə bir faktdan ciddi istifadə olunur:

Lemma. Əgər P operatoru belə bir matrisə malikdirsə:

$$P=\begin{Vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & . & . & . & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & . & . & . & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & 0 & . & . & . & 1 \\ P_0 & P_1 & P_2 & P_3 & . & . & . & P_{m-1} \end{Vmatrix},$$

Onda istənilən $\xi=(\xi_0,\xi_1,...\xi_{r-1})\in Q^-$ vektoru verildikdə həmişə birqiymətli olaraq elə $(\xi_r,...,\xi_{m-1})$ ədədləri tapılır ki, alınan $\xi=(\xi_0,...,\xi_{r-1},\xi_r,...,\xi_{m-1})$ vektoru yenə də Q^- alt fəzasında yerləşər.

Buradan çıxır ki, $\xi_0,...,\xi_{r-1}$ məlum olduqda $\xi_r,...,\xi_{m-1}$ ədədlərini $\xi_0,\xi_1,...\xi_{r-1}$ vasitəsilə birqiymətli tapmaq mümkündür.

Doğrudan da, Q^- (r ölçülü) fəzasında bazis matrisini yazaq:

$$E=\begin{Vmatrix} 1 & 1 & . & . & . & 1 \\ \lambda_0 & \lambda_1 & . & . & . & \lambda_{r-1} \\ \lambda_0^2 & \lambda_1^2 & . & . & . & \lambda_{r-1}^2 \\ - & - & - & - & - & - \\ \lambda_0^{m-1} & \lambda_1^{m-1} & . & . & . & \lambda_{r-1}^{m-1} \end{Vmatrix}, \quad rang\, E=r.$$

Tutaq ki, $c_0,c_1,...,c_{r-1}$ elə ədədlərdir ki, $c=(c_0,c_1,...,c_{r-1})$, və

$$EC=\xi=(\xi_0,...,\xi_{m-1})\,. \qquad (*)$$

Buradan $c_0,c_1,...,c_{r-1}$ sabitlərini hesablayaq.

$$\text{I.}\ \begin{cases} c_0+c_1+...+c_{r-1}=\xi_0 \\ c_0\lambda_0+c_1\lambda_1+...+c_{r-1}\lambda_{r-1}=\xi_1 \\ ------------------ \\ c_0\lambda_0^{r-1}+c_1\lambda_1^{r-1}...+c_{r-1}\lambda_{r-1}^{r-1}=\xi_{r-1} \end{cases}$$

$$
\text{II.}\left.\begin{cases} c_0\lambda_0^r + c_1\lambda_1^r \ldots + c_{r-1}\lambda_{r-1}^r = \xi_r \\ ------------------- \\ c_0\lambda_0^{m-1} + c_1\lambda_1^{m-1} \ldots + c_{r-1}\lambda_{r-1}^{m-1} = \xi_{m-1} \end{cases}\right\} \qquad (**)
$$

Bu sistemin ilk r sayda tənliyindən ibarət sistemin determinantı 0-dan fərqli olduğundan $c_0, c_1, \ldots, c_{r-1}$ ədədləri məlum olan $\xi_0, \ldots, \xi_{r-1}$ ədədləri vasitəsilə birqiymətli tapılır. $(**)$ sisteminin axırıncı $m-r$ sayda tənliklərindən isə (burada artıq $c_0, c_1, \ldots, c_{r-1}$-məlumdur) $\xi_r, \ldots, \xi_{m-1}$
kəmiyyətləri birqiymətli tapılır. Onda $\xi_r, \ldots, \xi_{m-1}$ ədədlərinin $\xi_0, \ldots, \xi_{r-1}$ vasitəsilə ifadəsi bu şəkildə olar:

$$
\xi_s = \sum \xi_j R_{js} \left(\lambda_0, \ldots, \lambda_{r-1}\right), \quad s = r, r+1, \ldots, m-1
$$

burada R_{js} çoxhədliləri $\lambda_0, \ldots, \lambda_{r-1}$ ədədlərindən asılı $s-j$ dərəcəli

bircins funksiyalardır. Deməli, $\xi_r, \ldots, \xi_{m-1}$

koordinatları $\xi_0, \ldots, \xi_{r-1}$ koordinatlarının xətti

funksiyalarıdır. Onda $\left(\xi_0, \ldots, \xi_{m-1}\right) \in Q^-$.

§ 4. Xüsusi törəməli bircins diferensial tənliklər.

1. Belə bir sistemə baxaq:

$$
\frac{\partial u_j(x,t)}{\partial t} = \sum_{k=0}^{m-1} P_{jk}\left(i\frac{\partial}{\partial x}\right) u_k(x,t) \quad \left(j = 0,1,\ldots,m-1\right), \tag{1}
$$

burada P_{jk} operatorları diferensial polinomlardır və x-ə nəzərən törəmənin maksimal tərtibi p-yə bərabərdir. (1) sistemini vektor şəklində yazaq:

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = P\left(i\frac{\partial}{\partial x}\right)u(x,t), \tag{2}$$

burada $u(x,t) = \{u_0(x,t), u_1(x,t), \ldots, u_{m-1}(x,t)\}$,

$$P\left(i\frac{\partial}{\partial x}\right) = \left\| P_{jk}\left(i\frac{\partial}{\partial x}\right) \right\|_0^{m-1} \quad - m \times m \text{ ölçülü matrisdir.}$$

Hər $t \geq 0$ üçün

$$u(x,t) \in \mathscr{H}$$

(yəni , $u_0(x,t) \in \mathscr{H}, u_1(x,t) \in \mathscr{H}, \ldots, u_{m-1}(x,t) \in \mathscr{H}$). Törəmələr isə D' fəzası mənada başa düşülür. (1) sisteminə müəyyən

$$u\big|_{t=0} = u_0(x) \tag{3}$$

başlanğıc şərti və $t \to \infty$ olduqda həllin artması üzərinə $u(x,t) = O\left(t^h\right)$ olması şərti də əlavə edilir. Soruşulur: Başlanğıc vektor hansı şərtləri ödədikdə alınan məsələ $\mathscr{H}$ sinfində korrekt olar?

Bu məsələni həll etmək üçün (1)- (2)-(3) sistemində Furye çevirməsinə keçmək lazımdır. Belə olduqda alırıq:

$$\frac{dV_j(\sigma,t)}{dt} = \sum_{k=0}^{m-1} P_{jk}(\sigma)V_k(\sigma,t) \quad (j = 0,1,\ldots,m-1), \tag{4}$$

(2) sistemi isə bu şəkli alar:

$$\frac{dV(\sigma,t)}{dt} = P(\sigma)V(\sigma,t), \tag{5}$$

$$V(\sigma,0) = V\big|_{t=0} = V_0(\sigma). \tag{6}$$

(4) və (5) tənlikləri hər qeyd olunmuş σ üçün adi diferensial tənliklər sistemidir (σ-parametr rolunu oynayır). Bu sistemlər üçün $\mathcal{H}$ fəzasında korrekt məsələlərin qoyuluşu problemi şərh olunur. Məsələn, (4) adi diferensial tənliklər sistemi üçün hər qeyd olunmuş σ üçün $m-$ölçülü Q fəzasına baxaq. $P=P(\sigma)$ operatoru Q fəzasında təsir edir və onu özünə keçirir. Deməli $\forall\xi\in Q$ üçün $\xi=(\xi_0,...,\xi_{m-1})$ və $P\xi\in Q$, yəni $P\xi=\eta\in Q$. Onda $\eta=(\eta_0,...,\eta_{m-1})$ və $P(\sigma)\xi=\eta$ bərabərliyi belə alınır:

$$\sum_{j=0}^{m-1} P_{kj}(\sigma)\xi_j=\eta_k \qquad (k=0,1,...,m-1).$$

Deməli $P(\sigma)$ operatoru Q fəzasında belə təsir edir:

$$\begin{cases} P_{00}(\sigma)\xi_0+P_{01}(\sigma)\xi_1+...+P_{0,m-1}(\sigma)\xi_{m-1}=\eta_0, \\ ------------------------------ \\ P_{m-1,0}(\sigma)\xi_0+P_{m-1,1}(\sigma)\xi_1+...+P_{m-1,m-1}(\sigma)\xi_{m-1}=\eta_{m-1}. \end{cases}$$

Q fəzasını $P(\sigma)$ operatorunun invariant alt fəzaları olan $Q^-(\sigma)$ və $Q^+(\sigma)$ çoxluqlarının düz cəmi kimi yazmaq olar:

$$Q=Q^-(\sigma)+Q^+(\sigma).$$

Deməli σ qeyd olunduqda $\xi(\sigma)=(\xi_0(\sigma),...,\xi_{m-1}(\sigma))\in Q$ vektorunu

$$\xi(\sigma)=\xi^-(\sigma)+\xi^+(\sigma)$$

cəmi kimi yazmaq olar, belə ki, $\xi^-(\sigma)\in Q^-(\sigma)$, və $\xi^+(\sigma)\in Q^+(\sigma)$. Lakin $Q^-(\sigma)$ alt fəzasını $P(\sigma)$ operatorunun $\operatorname{Re}\lambda(\sigma)\le 0$ olan $\lambda(\sigma)$ məxsusi qiymətlərinə uyğun olan məxsusi vektorları doğurur, $Q^+(\sigma)$

alt fəzası isə $\mathrm{Re}\,\lambda(\sigma)>0$ olan $\lambda(\sigma)$ məxsusi qiymətlərə uyğun olan məxsusi vektorların doğurduğu xətti çoxobrazlıdır. Hər σ qeyd olunduqda $r=r(\sigma)$ sayda $\mathrm{Re}\,\lambda_0(\sigma)\leq\ldots\leq\mathrm{Re}\,\lambda_{r-1}(\sigma)\leq 0$, $m-r$ sayda $\lambda_j(\sigma)$ isə $\mathrm{Re}\,\lambda_j(\sigma)>0$ olur. Deməli $Q^-(\sigma)$ alt fəzasını $e_0,e_1,\ldots,e_{r-1}$ məxsusi vektorları doğurur.

Hər qeyd olunmuş σ üçün $V_0(\sigma)\in Q^-(\sigma)$ olması şərti (2)-(3) məsələsinin korrekt məsələ olması üçün zəruri və kafi şərt olur. Biz görəcəyik ki, sanki hər yerdə $V_0(\sigma)\in Q^-(\sigma)$ olduqda (2)-(3) məsələsi $\mathcal{H}$ sinfində korrekt məsələ olur. Daha dəqiq deyilişdə:

Teorem 1. Əgər $u_0(x)\in\mathcal{H}$ vektor-funksiyasının Furye çevirməsi $V_0(\sigma)$ sanki hər yerdə uyğun $Q^-(\sigma)$ alt fəzasına daxildirsə, onda (2)-(3) Koşi məsələsinin hər $t\geq 0$ üçün $u(x,t)\in\mathcal{H}$ olan yeganə həlli var və bu həll $t\to\infty$ olduqda $u(x,t)=O(t^h)$ sürətilə artır. Əgər müsbət ölçülü çoxluqda $V_0(\sigma)$-nın $Q^+(\sigma)$ alt fəzasında sıfırdan fərqli toplananı varsa, onda (2)-(3) Koşi məsələsinin $\mathcal{H}$ sinfində ya həlli yoxdur, ya da həlli varsa da, həmin həll $t\to\infty$ olduqda eksponensial artır.

İsbatı. (5)-(6) məsələsinin həlli bu şəkildə olur:

$$V(\sigma,t)=e^{tP(\sigma)}V_0(\sigma)\ . \tag{7}$$

Tutaq ki, sanki hər bir σ üçün $V_0(\sigma)\in Q^-(\sigma)$. Onda əvvəlki nəticələrə görə (σ-qeyd olunduqda) hər σ üçün həll $O(t^h)$ kimi artır. İndi göstərək ki, $V(\sigma,t)\in\mathrm{H}$. Bunun üçün $e^{tP(\sigma)}$ operatoru üçün məlum Şilov qiymətlənməsindən istifadə edək:

$$\left\|e^{tP(\sigma)}\right\| \le e^{t\Lambda(\sigma)}\left[1+2t\|P(\sigma)\|+\ldots+\frac{(2t)^{m-1}}{(m-1)!}\|P(\sigma)\|^{m-1}\right], \qquad (Ş)$$

burada $\Lambda(\sigma)=\max_j \operatorname{Re}\lambda_j(\sigma)$, belə ki, $V_0(0)\in Q^-$ olduğundan $\lambda_j(\sigma)$ kökləri bu alt fəzada baxılır, yəni $\operatorname{Re}\lambda_j(\sigma)\le 0$ və deməli $\Lambda(\sigma)\le 0$, $e^{t\Lambda(\sigma)}\le 1$. Digər tərəfdən,

$$\|P(\sigma)\|^2 \le \sum_j \sum_k \left|P_{jk}(\sigma)\right|^2 \le c^2\left(1+\sigma^2\right)^p$$

münasibətindən çıxır ki,

$$\|P(\sigma)\| \le c(1+|\sigma|)^p .$$

Deməli alınır ki:

$$\left\|e^{tP(\sigma)}\right\| \le 1+2tc(1+|\sigma|)^p+\ldots+\frac{(2tc)^{m-1}}{(m-1)!}c(1+|\sigma|)^{p(m-1)} . \qquad (8)$$

t kafi böyük olduqda buradan çıxır ki,

$$\left\|e^{tP(\sigma)}\right\| \le c\,t^{m-1}(1+|\sigma|)^{p(m-1)}. \qquad (9)$$

Bu qiymətlənmələr $P(\sigma)$ matrisinin və $e^{tP(\sigma)}$ matrisinin hər bir elementi üçün də ödənilir. Şərtə görə $V_0(\sigma)$ vektorunun hər bir komponenti H fəzasına daxildir.

$$V(\sigma,t)=e^{tP(\sigma)}V_0(\sigma)$$

vektorunun hər bir komponenti $e^{tP(\sigma)}$ matrisinin elementləri ilə $V_0(\sigma)$ vektorunun elementləri hasilləri cəmindən ibarət olur. Ona görə də alırıq ki,

$$\|V(\sigma,t)\| \le c\,t^{m-1}(1+|\sigma|)^{p(m-1)}\|V_0(\sigma)\| . \qquad (10)$$

Lakin H fəzasında polinom kimi artan funksiyaya vurmaq mümkündür. Deməli hər t üçün $V(\sigma,t)\in$ H olur. Digər tərəfdən, (10)-dan görünür ki, $\|V(\sigma,t)\|:t^{m-1}$ nisbəti H fəzasında məhduddur. Deməli H fəzasında

$$V(\sigma,t)=O\left(t^{m-1}\right), \qquad t\to\infty.$$

Bu o deməkdir ki, $t\to\infty$ olduqda

$$u(x,t)=O\left(t^{m-1}\right) .$$

Alınan (10) münasibətindən həllin başlanğıc şərtlərindən kəsilməz asılı olduğu alınır. Həllin H -da yeganəliyi hər σ üçün yeganəlik olmasından çıxır.

Beləliklə, isbat etdik ki, sanki hər yerdə $V_0(\sigma)\in Q^-(\sigma)$ olduqda (1)-(2) Koşi məsələsi $\mathcal{H}$ sinfində korrekt olur.

İndi zəruri şərti müəyyən edək. Tutaq ki, ölçüsü >0 olan $G(\sigma)$ çoxluğunda $V_0(\sigma)$ başlanğıc vektorunun $Q^+(\sigma)$ alt fəzasında $0-$dan fərqli olan $V_0^+(\sigma)$ toplananı var:

$$V_0(\sigma)=V_0^-(\sigma)+V_0^+(\sigma),\ V_0^+(\sigma)\neq 0, \quad \sigma\in G(\sigma)\subset R.$$

Məsələn, tutaq ki, $G(\sigma)$ çoxluğunda müəyyən k üçün

$$\operatorname{Re}\lambda_k(\sigma)>c>0.$$

Hər qeyd olunmuş σ üçün

$$V(\sigma,t)=e^{tP(\sigma)}V_0(\sigma)$$

vektorunun

$$t^p\cdot e^{t\lambda_p}\cdot e_p$$

şəkildə komponenti var və deməli $t \to \infty$ olduqda ($\mathrm{Re}\,\lambda_p > 0$) bu komponent

$$t^p \cdot e^{ct}$$

kimi artır. Onda $t \to \infty$ olduqda hər qeyd olunmuş σ üçün

$$\left\| V(\sigma,t) \right\|_\sigma \geq c_1 t^p \cdot e^{ct} \tag{11}$$

alınır, yəni $V(\sigma,t)$ eksponensial olaraq artır. Bütün bu deyilənlər yalnız σ qeyd olunanda doğrudur. İndi göstərək ki, sanki bütün σ-lar üçün baxdıqda H fəzasında deyilən münasibətlər doğru qalır. (11) münasibətindən çıxır ki, (qeyd olunmuş σ üçün)

$$\lim_{t \to \infty} e^{-ct} \left\| V(\sigma,t) \right\| = \infty. \tag{12}$$

Yeqorov teoreminə əsasən (12) münasibəti müsbət ölçülü G çoxluğunda müntəzəm olaraq ödənilir. Belə olduqda isə $\forall q$ üçün H^q fəzasında $q > \frac{n}{2}$ götürməklə kafi böyük t üçün alınır ki,

$$\left\| V(\sigma,t) \right\|_q^2 = \int_{R^n} \frac{\left\| V(\sigma,t) \right\|_\sigma^2 d\sigma}{\left(1 + |\sigma|^2\right)^q} d\sigma \geq \int_{G(\sigma)} \frac{e^{2ct} d\sigma}{\left(1 + |\sigma|^2\right)^q} = c_q e^{2ct}.$$

Deməli uyğun $u(x,t) \in \mathcal{H}$ həlli də $t \to \infty$ olduqda eksponensial sürətlə artır, yəni qoyulan məsələ $\mathcal{H}$ sinfində korrekt deyil.

Teorem isbat olundu.

2.Yüksək tərtibli xüsusi törəməli bir tənlik. Belə bir tənliyə baxaq:

$$\frac{\partial^m u(x,t)}{\partial t^m} = \sum_{k=0}^{m-1} P_k\left(i\frac{\partial}{\partial x}\right)\frac{\partial^k u(x,t)}{\partial t^k}, \quad x \in R^n, \qquad t \geq 0 \ . \tag{1}$$

Fərz edirik ki, $u(x,t), \frac{\partial u}{\partial t},\ldots,\frac{\partial^m u}{\partial t^m} \in \mathcal{H}$. Furye çevirməsini tətbiq edərək adi diferensial tənlik alırıq:

$$\frac{d^m V(\sigma,t)}{dt^m} = \sum_{k=0}^{m-1} P_k(\sigma)\frac{d^k V(\sigma,t)}{dt^k} \quad . \tag{2}$$

(σ-parametrdir). Xarakteristik tənlik:

$$\lambda^m(\sigma) = \sum_{k=0}^{m-1} P_k(\sigma)\,\lambda^k(\sigma). \tag{3}$$

Hər σ nöqtəsində $r = r(\sigma)$ ilə bu tənliyin $\operatorname{Re}\lambda(\sigma) \le 0$ olan kökləri sayını işarə edək. Hər σ üçün korrekt məsələ belə olar:

$$V(\sigma,0), \frac{dV(\sigma,0)}{dt},\ldots,\frac{d^{r-1}V(\sigma,0)}{dt^{r-1}} \tag{4}$$

funksiyaları ixtiyari olaraq verildikdə (2) və (4) məsələsi korrekt məsələ olur: Bütün σ-lar üçün baxdıqda da H fəzasında (2)-(4) məsələsi korrekt məsələ olur. Bu faktı aşağıdakı teorem şəklində ifadə etmək olar:

Teorem 2. Fərz edək ki, $G_r(\sigma) = \{\sigma \in R^n\}$ elə çoxluqdur ki, burada $\lambda_0(\sigma),\ldots,\lambda_{m-1}(\sigma)$ köklərindən r dənəsinin real hissəsi ≤ 0 olur.

Tutaq ki, hər bir $G_r(\sigma)$ çoxluğunda $V_0(\sigma), V_1(\sigma),\ldots,V_{r-1}(\sigma)$ funksiyaları təyin olunub, belə ki, onları R^n fəzasına elə davam etdirmək olur ki, nəticədə alınan funksiyalar H fəzasına daxil olur: $V_j(\sigma) \in \mathrm{H}(G_r)$. Onda (1) tənliyinin elə $u(x,t)$ həlli var ki, hər G_r çoxluğunda

$$F\left[\frac{\partial^k u(x,0)}{\partial t^k}\right] = V_k(\sigma), \quad k = 0,1,\ldots,r-1$$

olur. Bu həll $t \ge 0$ olduqda $u(x,t) \in \mathcal{H}$ və $t \to \infty$ olduqda $u(x,t) = O(t^h)$ olur; $V_k(\sigma)$-lar H-da kəsilməz dəyişdikdə $V_k(\sigma)$ həlli də H-da kəsilməz dəyişir.

İsbatı. Teoremi qısaca belə söyləmək olar: $G_r(\sigma)$ çoxluğunda $V_k(\sigma)$ $k=0,1,...,r-1$ verildikdə alınan sərhəd məsələsi H sinfində korrekt olur. (2) tənliyini sistem kimi yazaq:

$$\begin{cases} \dfrac{dV_0(\sigma,t)}{dt}=V_1(\sigma,t), \\ \dfrac{dV_1(\sigma,t)}{dt}=V_2(\sigma,t), \\ -\,-\,-\,-\,-\,-\,-\,-\,- \\ \dfrac{dV_{m-2}(\sigma,t)}{dt}=V_{m-1}(\sigma,t), \\ \dfrac{dV_{m-1}(\sigma,t)}{dt}=P_0(\sigma)V_0(\sigma,t)+P_1(\sigma)V_1(\sigma,t)+...+P_{m-1}(\sigma)V_{m-1}(\sigma,t) \end{cases}$$

$(V(\sigma,t)=V_0(\sigma,t),...,V_{m-1}(\sigma,t))$.

Teorem 1 əsasında deyə bilərik ki,

$$V(\sigma,0)=(V_0(\sigma),...,V_{m-1}(\sigma))$$

başlanğıc vektoru (3) sistemi üçün yalnız və yalnız o zaman korrekt məsələ müəyyən edir ki, sanki hər yerdə $V_0(\sigma)\in Q^-(\sigma)$ olsun.

Tutaq ki, $V_j(\sigma)$ G_j $(j=0,1,...,m-1)$ çoxluğunda verilib və H fəzasına daxil olana qədər davam edilir. Məlum lemmaya görə hər $\sigma\in G_r$ nöqtəsində $V_0(\sigma),...,V_{r-1}(\sigma)$ kəmiyyətlərini $(\{V_0(\sigma),...,V_{r-1}(\sigma)\}\in Q^-(\sigma))$ $V_r(\sigma),...,V_{m-1}(\sigma)$ komponentləri ilə elə tamamlamaq olar ki, nəticədə alınan $V(\sigma,0)=\{V_0(\sigma),...,V_{m-1}(\sigma)\}$ vektoru yenə də $Q^-(\sigma)$ daxilində qalar. Onda göstərmək olar ki, həm də $V(\sigma,0)\in$ H olar. Doğrudan da, $V_q(\sigma)$ komponenti $(q\geq r)$ $V_0(\sigma),...,V_{r-1}(\sigma)$ komponentləri vasitəsilə birqiymətli olaraq tapılır, belə ki,

$$V_q(\sigma)=\sum_{j=0}^{r-1}V_j(\sigma)R_{js}(\lambda_0(\sigma),...,\lambda_{r-1}(\sigma)),$$

burada R_{js}-müəyyən çoxhədlidir. Bütün $\lambda_0(\sigma),...,\lambda_{m-1}(\sigma)$ üçün belə bir qiymətlənmə ödənilir:

$$\left|\lambda_j(\sigma)\right| \le \left\|P(\sigma)\right\| \le c\left(1+|\sigma|\right)^p .$$

Ona görə də alınır ki,

$$\left|R_{js}\left(\lambda_0(\sigma),\ldots,\lambda_{r-1}(\sigma)\right)\right| \le c\left(1+|\sigma|\right)^{p(m-1)}.$$

H fəzasında polinom kimi artan funksiyaya vurmaq mümkündür. Onda alınır ki, $V_q(\sigma) \in \mathrm{H}$. Lakin qurmaya görə

$$V(\sigma,0) = \left(V_0(\sigma),\ldots,V_{r-1}(\sigma), V_r(\sigma),\ldots,V_{m-1}(\sigma)\right) \in Q^-(\sigma)$$

olduğundan çıxır ki, $V(\sigma,t)$ həlli də H fəzasına daxildir və $V(\sigma,t) = O\left(t^{m-1}\right)$ qiymətlənməsini ödəyir. Həllin yeganəliyi $V_0(\sigma),\ldots,V_{r-1}(\sigma)$ verildikdə $V_r(\sigma),\ldots,V_{m-1}(\sigma)$ komponentlərinin yeganə surətdə (birqiymətli) seçilməsinə əsasən $V(\sigma,0)$ başlanğıc vektoru yeganə $V(\sigma,t) \in \mathrm{H}$ həllini təyin etməsindən çıxır. Beləliklə r sayda başlanğıc şərti

$$F\left[\frac{\partial^k u(x,0)}{\partial t^k}\right] = V_k(\sigma), \quad k = 0,1,\ldots,r-1$$

(belə ki, $\sigma \in G_r$) (1) tənliyi üçün $\mathcal{H}$ sinfində korrekt məsələ müəyyən edir.

§ 5. Qeyri-bircins diferensial tənliklər.

1. Sərbəst hədli xüsusi törəməli diferensial tənlik verilir:

$$\frac{\partial^m u(x,t)}{\partial t^m} - \sum_{k=0}^{m-1} P_k\left(i\frac{\partial}{\partial x}\right)\frac{\partial^k u(x,t)}{\partial t^k} = f(x,t) \quad . \tag{1}$$

Bu paraqrafda (1) tənliyi üçün hansı korrekt məsələlərin qoyulması mümkündür?- sualı araşdırılır, yəni hansı başlanğıc şərtləri verildikdə alınanməsələ $\mathcal{H}$ sinfində korrekt məsələ olar. (Həll var; $t \geq 0$ olduqda $u(x,t) \in \mathcal{H}$; $u(x,t) = 0\left(t^h\right)$ $t \to \infty$ və həll başlanğıc şərtlərindən kəsilməz asılıdır). Fərz edirik ki, hər $t \geq 0$ üçün $f(x,t) \in \mathcal{H}$; $f(x,t) = 0\left(t^h\right)$ $t \to \infty$. (1) tənliyində Furye çevirməsinə keçdikdə alırıq:

$$\frac{d^m V\ (\sigma,t)}{dt^m} - \sum_{k=0}^{m-1} P_k(\sigma)\frac{d^k V(\sigma,t)}{dt^k} = g(\sigma,t) \quad . \tag{2}$$

Nəzərdə tutulur ki, $t \geq 0$ olduqda $g(\sigma,t) \in \mathrm{H}$ və $t \to \infty$ olduqda $g(\sigma,t) = O\left(t^h\right)$.

Məsələni əvvəlcə sadə model üzərində öyrənək. Bunun üçün hələlik σ parametrini nəzərə almayaq və (2) tənliyi əvəzində belə bir birtərtibli adi diferensial tənliyə baxaq ($a = const$):

$$\frac{dV(t)}{dt} - aV(t) = g(t), \ |g(t)| \leq c(1+t)^h \quad . \tag{3}$$

Əgər $V(0) = V_0$ başlanğıc şərti verilsə, onda (3) tənliyinin həlli bu şəkildə olar:

$$V(t) = e^{at}V_0 + \int_0^t e^{a(t-\theta)}g(\theta)d\theta = e^{at}\left[V_0 + \int_0^t e^{-a\theta}g(\theta)d\theta\right]. \tag{4}$$

Tutaq ki, $a \leq 0$ .Onda alırıq ki,

$$|V(t)| \leq |V_0| + \int_0^t |g(\theta)|d\theta \leq |V_0| + c(1+t)^h.$$

Beləliklə, $a \leq 0$ olduqda (3)-(4) Koşi məsələsinin həlli $t \to \infty$ olduqda t -nin müəyyən dərəcəsindən tez artmır.

İndi fərz edək ki, $a > 0$. Belə inteqrala baxaq:

$$J(g) = \int_0^\infty e^{-a\theta} g(\theta) d\theta .$$

Bu inteqral yığılandır. Onun vasitəsilə (3)-(4) məsələsinin həllini belə yazmaq olar:

$$V(t) = e^{at}\left[V_0 + J(g)\right] - \int_t^\infty e^{a(t-\theta)} g(\theta) d\theta. \tag{5}$$

Burada 2-ci toplanan inteqralı belə yazaq:

$$\int_t^\infty e^{a(t-\theta)} g(\theta) d\theta = \int_0^\infty e^{-a\theta} g(\theta + t) d\theta . \tag{6}$$

Buradan, $|g(t)| \leq c(1+t)^h$ olduğundan, alırıq ki,

$$\left|\int_t^\infty e^{a(t-\theta)} g(\theta) d\theta\right| \leq c \int_0^\infty e^{-a\theta} (1+\theta+t)^h d\theta = O\left(t^h\right).$$

Beləliklə, (5)-də 2-ci toplanan hədd $t \to \infty$ olduqda $O\left(t^h\right)$ kimi artır, 1-ci toplanan hədd isə ($a > 0$ olduğundan) $V_0 + J(g) \neq 0$ olan kimi eksponensial artır. Deməli $|V(t)| \leq O\left(t^h\right)$ olması üçün

$$V_0 + \int_0^\infty e^{-a\theta} g(\theta) d\theta = 0 \tag{7}$$

olması zəruri və kafidir.

Nəticə. (3)-(4) məsələsinin $O\left(t^h\right)$ kimi artan həllinin varlığı üçün zəruri və kafi şərt (7) şərtidir.

Deməli $a > 0$ olduqda V_0 başlanğıc funksiyası $J(g)$ inteqralı vasitəsilə birqiymətli müəyyən olunur, onun üzərinə heç bir əlavə şərtlər qoymaq olmaz, V_0 məhz (7) şərtindən tapılmalıdır.

2. İndi belə bir xüsusi törəməli tənliyə baxaq:

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} - P\left(i\frac{\partial}{\partial x}\right)u(x,t) = f(x,t) \quad . \tag{8}$$

Deməli 1-ci benddə baxılan tənlikdə olan a rolunu burada $P(\sigma)$ polinomu oynayır. (8)-də Furye çevirməsi tətbiq etdikdə

$$\frac{dV(\sigma,t)}{dt} - P(\sigma)V(\sigma,t) = g(\sigma,t) \tag{9}$$

adi diferensial tənliyi alınır.

$$V(\sigma,0) = V_0(\sigma) \tag{10}$$

olsun. Onda alınır ki, $P(\sigma) \le 0$ olan σ nöqtəsində $V_0(\sigma)$ ixtiyari verilə bilər, nəticədə (9)-(10) Koşi məsələsinin həlli var, yeganədir və $t \to \infty$ olduqda $V(\sigma,t) = O(t^h)$ olur. Lakin $P(\sigma) > 0$ olan $\sigma \in R^n$ nöqtələrində $V_0(\sigma)$ ixtiyari verilə bilməz, çünki bu halda $V_0(\sigma)$ birqiymətli olaraq (7) şərtindən, yəni

$$V_0(\sigma) + \int_0^\infty e^{-P(\sigma)\theta} g(\sigma,\theta)d\theta = 0 \tag{11}$$

şərtindən təyin olunmalıdır, yalnız belə olduqda məsələnin $O(t^h)$ kimi artan həlli var. Beləliklə, (9)-(10) məsələsinin qeyd olunmuş hər σ üçün həlli üçün belə düsturlar alınmış olur:

$$V(\sigma,t) = \begin{cases} e^{-tP(\sigma)}V_0(\sigma) + \int_0^t e^{(t-\theta)P(\sigma)} g(\sigma,\theta)d\theta, & P(\sigma) \le 0 \ \textit{olduqda}, \\ -\int_0^\infty e^{-\theta P(\sigma)} g(t+\theta)^h d\theta, & P(\sigma) > 0 \ \textit{olduqda}. \end{cases}$$

$P(\sigma) \le 0$ olan halda $V(\sigma,t) \in \mathrm{H}$ olur və H fəzası mənada $V(\sigma,t) = O(t^h)$, $t \to \infty$ olur. Doğrudan da, $g(\sigma,t) \in \mathrm{H}$ isə bu o deməkdir ki,

$$g(\sigma,t) \le c(1+t)^h(1+\sigma^2)^q \phi(\sigma), \quad \phi(\sigma) \in L_2,$$

şərti ödənir, onda ($P(\sigma) \le 0$ olduqda)

$$|V(\sigma,t)| \le |V_0(\sigma)| + c\int_0^t |g(\sigma,\theta)| d\theta \le |V_0(\sigma)| + c(1+t)^h\left(1+\sigma^2\right)^q |\phi(\sigma)|$$

Sağ tərəf H fəzasına daxildir, onda $V(\sigma,t) \in \mathrm{H}$.

Əgər $P(\sigma) > 0$ olarsa, onda gərək $g(\sigma,t)$ üzərinə əlavə şərtlər qoyulsun ki, nəticədə $V(\sigma,t) \in \mathrm{H}$ olsun. Məsələn, əgər

$$|g(\sigma,t)| \le c(1+t)^h\left(1+\sigma^2\right)^q \phi(\sigma), \quad h<1,$$

olarsa, onda ($P(\sigma) > 0$ halında) alırıq ki:

$$|V(\sigma,t)| \le c\left(1+\sigma^2\right)^q |\phi(\sigma)| \int_0^\infty (1+t+\theta)^h d\theta = c_1\left(1+\sigma^2\right)^q |\phi(\sigma)|(1+t)^{h+1},$$

yəni $V(\sigma,t) \in \mathrm{H}$ və H fəzasında $V(\sigma,t) = O\left(t^{h+1}\right)$ olur. Adətən belə şərt qoyulur. ($P(\sigma) > 0$ olarsa):

$$G(\sigma,t) \equiv \int_0^\infty e^{-\theta P(\sigma)} g(\sigma,t+\theta) d\theta \in \mathrm{H}.$$

$t \to \infty$ olduqda bu funksiya H fəzasında $O\left(t^h\right)$ kimi artır.

3.İndi ümumi (1) tənliyinə baxaq:

$$\frac{\partial^m u(x,t)}{\partial t^m} - \sum_{k=0}^{m-1} P_k\left(i\frac{\partial}{\partial x}\right)\frac{\partial^k u(x,t)}{\partial t^k} = f(x,t) \quad . \qquad (1^0)$$

Teorem: (1) tənliyinin xarakteristik tənliyinin

$$\lambda^m - \sum_{k=0}^{m-1} P_k(\sigma)\lambda^k(\sigma) = 0$$

köklərini $\lambda_0(\sigma), \lambda_1(\sigma), \ldots, \lambda_{m-1}(\sigma)$ işarə edək. $G_r(\sigma)$ ilə elə $\sigma \in R^n$ nöqtələr çoxluğunu işarə edək ki, həmin nöqtələrdə düz r sayda $\lambda_j(\sigma)$ kökləri üçün $\operatorname{Re}\lambda_j(\sigma) \le 0$ olur, $(j = 0,1,\ldots,r-1)$. Fərz edək ki, $f(x,t) \in \mathcal{H}$ və o, $\mathcal{H}$ fəzasında $O\left(t^h\right)$ kimi artır. Fərz edək ki, G_r çoxluğunda aşağıdakı inteqralların hər biri

$$\int_0^{\infty} e^{-\theta\lambda_q(\sigma)}\theta^k g(\sigma,t+\theta)d\theta \quad (k=0,1,\dots,m-2),$$
$$q=r,r+1,\dots m-1 \qquad (*)$$

H fəzasına daxildir və $t\to\infty$ olduqda H-da $O(t^h)$ kimi artır.

Onda (1^0) tənliyi üçün korrekt məsələ belədir:

$$F\left[\frac{\partial^{k-1}u(x,0)}{\partial t^{k-1}}\right]=V_{k-1}(\sigma) \qquad (2^0)$$

funksiyaları G_r çoxluğunda verilməlidir, belə ki,

$$V_{k-1}(\sigma)\in H(G_{k-1}) \qquad (k=1,2,\dots,r;\ r=0,1,\dots,m-1)$$

İsbat üçün hələlik σ parametrini nəzərə almayaq, yəni əvvəlcə belə bir adi diferensial tənliklər sisteminə baxaq (m sayda tənlik, m sayda məchul, P isə $m\times m$-matrisdir):

$$\frac{dV(t)}{dt}-PV(t)=g(t),\quad |g(t)|\le c(1+t)^h, \qquad (1)$$

$$V|_{t=0}=V_0. \qquad (2)$$

Bu məsələnin həlli belə düsturla tapılır:

$$V(t)=e^{Pt}V_0+\int_0^t e^{(t-\theta)P}g(\theta)d\theta = e^{tP}\left\{V_0+\int_0^t e^{-\theta P}g(\theta)d\theta\right\} \qquad (3)$$

Tutaq ki, P xətti operatorunun xarakteristik köklərindən r saydası $\operatorname{Re}\lambda\le 0$, $m-r$ saydası tsə $\operatorname{Re}\lambda>0$ olur. P operatoru (matrisi) m-ölçülü Q fəzasında təsir edir. Onda Q fəzası Q^- və Q^+ invariant alt fəzalara ayrılır: $Q=Q^-+Q^+$, burada Q^- alt fəzası $\lambda_0,\lambda_1,\dots,\lambda_{r-1}$ məxsusi ədədlərinə uyğun olan $e_0,\dots,e_{r-1}$ məxsusi vektorlarının doğurduğu invariant alt fəzadır, Q^+ isə $\lambda_r,\dots,\lambda_{m-1}$ məxsusi ədədlərinə uyğun olan $e_r,\dots,e_{m-1}$ məxsusi vektorlarının doğurduğu invariant alt fəzadır.

$$I=\{\lambda_0,\lambda_1,...,\lambda_{r-1}\},\ II=\{\lambda_r,...,\lambda_{m-1}\}$$

işarə edək. I qrupa $\operatorname{Re}\lambda_k \le 0$ olan köklər, II qrupa isə $\operatorname{Re}\lambda_q > 0\ (q \ge r)$ olan köklər daxil edilir. Q fəzasının ayrılışına uyğun olaraq $V(t), V_0$ və $g(t)$ funksiyaları da ayrılırlar:

$$V(t)=V^-(t)+V^+(t),\ V_0=V_0^-+V_0^+,\ g(t)=g^-(t)+g^+(t),$$

belə ki, məsələn, $V_0^- \in Q^-$, $V_0^+ \in Q^+$.

Aşkardır ki, P və e^{tP} operatorları da Q^- və Q^+ fəzalarında invariantdırlar, onda alırıq ki,

$$V^-(t)=e^{Pt}V_0^- + \int_0^t e^{(t-\theta)P}g^-(\theta)d\theta\ , \tag{4}$$

$$V^+(t)=e^{Pt}V_0^+ + \int_0^t e^{(t-\theta)P}g^+(\theta)d\theta\ . \tag{5}$$

Göstərək ki, $V^-(t)$ vektor-funksiyası Q^- fəzasında t^h-dan tez artmır. Bunun üçün aşağıdakı məlum qiymətləñməni tətbiq edirik:

$$\left\|e^{tp}\right\| \le e^{t\Lambda}\left(1+2t\|P\|+...+\frac{(2t)^{m-1}}{(m-1)!}\|P\|^{m-1}\right), \tag{6}$$

burada $\Lambda = \max\limits_{0\le k\le m-1} \operatorname{Re}\lambda_k$. Şərtə görə Q^- fəzasında $\operatorname{Re}\lambda_0 \le ... \le \operatorname{Re}\lambda_{r-1} \le 0$. Onda Q^- fəzasında baxdıqda $e^{t\Lambda} \le 1$. Onda alırıq ki,

$$\left\|e^{tP}\right\| \le c(1+t)^{m-1}.$$

Deməli:

$$\left|V^-(t)\right| \le \left\|e^{Pt}\right\|\left\|V_0^-\right\| + \int_0^t \left\|e^{(t-\theta)P}\right\|\left\|g(\theta)\right\|d\theta \le$$

$$\le c_2(1+t)^{m-1} + c_3\int_0^t (1+t-\theta)^{m-1}(1+\theta)^h d\theta = O\left(t^{m+1+h}\right)$$

İndi $V(t)$ vektorunun $V^+(t)$ komponenti üçün (5) ifadəsini belə yazaq:

$$V^+(t) = e^{Pt}\left\{V_0^+ + \int_0^t e^{-\theta P} g^+(\theta) d\theta\right\}. \tag{7}$$

Göstərək ki,

$$J = \int_0^\infty e^{-\theta P} g^+(\theta) d\theta \tag{8}$$

inteqralı yığılır. P operatorunun Q^+ fəzasında məxsusi qiymətləri $\lambda_r, \lambda_{r+1}, ..., \lambda_{m-1}$ ədədləridir və $\operatorname{Re}\lambda_j > 0$, $j = r, r+1, ..., m-1$. Onda $(-P)$ operatorunun Q^+ fəzasında məxsusi qiymətləri $-\lambda_r, -\lambda_{r+1}, ..., -\lambda_{m-1}$ olar, deməli,

$$\operatorname{Re}(-\lambda_{m-1}) \le ... \le \operatorname{Re}(-\lambda_r) < 0.$$

Bunları və (6) qiymətlənməsini və $\|g(t)\| \le c(1+t)^h$ olduğunu nəzərə aldıqda alırıq:

$$\left\|\int_0^\infty e^{-\theta P} g^+(\theta) d\theta\right\| \le \int_0^\infty \left\|e^{-\theta P}\right\| \left\|g^+(\theta)\right\| d\theta \le$$

$$\le c\int_0^\infty (1+\theta)^{m-1}(1+\theta)^h e^{-\theta \operatorname{Re}\lambda_r} d\theta < \infty$$

Aşkardır ki, $J \in Q^+$ (çünki $g^+ \in Q^+$). Onda $V^+(t)$ həllinin (5) ifadəsini bu şəkildə yaza bilərik:

$$V^+(t) = e^{tP}[V_0 + J] - \int_t^\infty e^{(t-\theta)P} g^+(\theta) d\theta. \tag{9}$$

Buradakı 2-ci toplananı qiymətləndirək:

$$\left\|\int_t^\infty e^{(t-\theta)P} g^+(\theta) d\theta\right\| = \left\|\int_0^\infty e^{-\theta P} g^+(\theta+t) d\theta\right\| \le$$

$$\le c\int_0^\infty e^{-\theta \operatorname{Re}\lambda_r}(1+\theta)^{m-1}(1+\theta+t)^h d\theta = O(t^h)$$

Deməli (9) düsturundakı inteqral toplananı Q fəzasında t-nin dərəcəsindən tez artmır. Lakin (9) –da $V_0 + J \neq 0$ olduqda

$$e^{tp}\left[V_0 + J\right]$$

ifadəsi eksponensial olaraq artır. Çünki e^{tP} operatoru P operatorunun hər bir e_s bazis vektoruna Q^+ fəzasında $e^{t\lambda_s}$ kimi təsir edir. Bu fəzada $\operatorname{Re}\lambda_s > 0$ olduğundan çıxır ki, $\left\|e^{tP}e_s\right\| \sim e^{ct}$, $t \to \infty$, $(c > 0)$. Beləliklə aldıq ki, (1) sisteminin $O\left(t^h\right)$ kimi artan həllinin varlığı üçün zəruri şərt belədir:

$$V_0 + J \equiv V_0^+ + \int_0^\infty e^{-\theta P} g^+(\theta)d\theta = 0. \qquad (10)$$

Digər tərəfdən (10) şərti ödənildikdə (1) sisteminin həlli bu şəkildə alınır:

$$V(t) = V^-(t) + V^+(t) = e^{tP}\left\{V_0^- + \int_0^t e^{-\theta P} g^-(\theta)d\theta - \int_t^\infty e^{-\theta P} g^+(\theta)d\theta\right\} \quad (11)$$

və bu həll $t \to \infty$ olduqda Q fəzasında $O\left(t^h\right)$ kimi artır. Beləliklə, (10) şərti nəinki zəruridir, həm də kafidir ki, sistemin $O\left(t^h\right)$ kimi artan yeganə həlli olsun.

5. m tərtibli bir tənliyə baxaq:

$$\frac{d^m V(t)}{dt^m} - \sum_{k=0}^{m-1} P_k \frac{d^k V(t)}{dt^k} = g(t).$$

Burada $V(t) = V_0(t)$, $V' = V_1(t), \ldots, V^{(m-1)}(t) = V_{m-1}(t)$ əvəzləməsini daxil etsək (1) sistemi belə alınar:

$$\frac{dV(t)}{dt} - PV(t) = g(t).$$

(1)

Onda alınır ki, $V_0^- \in Q^-$ ixtiyari cür verilməsilə bu tənliyin $V(t)$ həlli birqiymətli təyin olunur, V_0^+ toplananı isə (10) şərtindən $g(\theta)$ Vasitəsilə tapılmalıdır.

6.Qeyd. İndi tutaq ki, (1) sistemi

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} - P\left(i\frac{\partial}{\partial x}\right)u(x,t) = f(x,t) \tag{12}$$

sistemindən Furye çevirməsini tətbiq etməklə alınıbdır. Onda (1) sistemi bu şəkildə olar:

$$\frac{dV(\sigma,t)}{\partial t} - P(\sigma)V(\sigma,t) = g(\sigma,t). \tag{13}$$

Bu halda (10) şərti bu şəkli alar:

$$V_0^+(\sigma) + J(\sigma) \equiv V_0^+ + \int_0^{\infty} e^{-tP(\sigma)} g^+(\sigma,\theta)d\theta = 0. \tag{14}$$

Hər qeyd olunmuş σ üçün bu şərt, əvvəlki kimi (1) sistemi üçün Koşi məsələsinin korrektliyi üçün zəruri və kafidir. Bütün σ-lar üçün baxıldıqda (14) şərti (13) sistemi üçün məsələnin korrektliyi üçün yenə də zəruri şərt olur. Lakin bu halda alınan $V(\sigma,t)$ həllinin H fəzasına daxil olub-olmaması *a* priori aydın deyil.

7. Lakin (12) sisteminin bir xüsusi halında, məsələn, yüksək tərtibli bir tənliyə baxdıqda:

$$\frac{\partial^m u(x,t)}{\partial t^m} - \sum_{k=0}^{m-1} P\left(i\frac{\partial}{\partial x}\right)\frac{\partial^k u(x,t)}{\partial t^k} = f(x,t) \tag{15}$$

tənliyini (12) sistemi şəklində yazsaq, onda alınan sistem üçün (daha doğrusu Furye çevirməsini tətbiq etdikdə (12)-dən alınan (13) sistemi üçün) əgər (14) şərti sanki bütün σ-lar üçün ödənilirsə, onda (14) bərabərliyinin ödənilməsi şərti H fəzasında $V_0(\sigma)$ başlanğıc vektorunun korrekt vektor olması üçün zəruri və kafi şərt olur.

Doğrudan da, bu faktı isbat etmək üçün yüksək tərtibli (m) bir tənliyə uyğun (1) sistemini götürək. Deyək ki, m tərtibli adi diferensial tənliyə baxılır:

$$\frac{d^mV(t)}{dt^m}-\sum_{k=0}^{m-1}P_k\frac{d^kV(t)}{dt^k}=g(t) \tag{16}$$

Bu tənliyə uyğun sistemi yazaq:

$$\begin{cases} \dfrac{dV_0(t)}{dt}-V_1=0, \\ \dfrac{dV_1(t)}{dt}-V_2=0, \\ ------------ \\ \dfrac{dV_{m-1}(t)}{dt}-P_0V_0-P_1V_1-\ldots-P_{m-1}V_{m-1}=g(t)\ . \end{cases} \tag{17}$$

Sistemin matrisi:

$$P=\begin{Vmatrix} 0 & 1 & 0 & . & . & . & 0 \\ 0 & 0 & 1 & . & . & . & 0 \\ - & - & - & - & - & - & - \\ 0 & 0 & 0 & . & . & . & 1 \\ P_0 & P_1 & P_2 & . & . & . & P_{m-1} \end{Vmatrix}.$$

Biz gördük ki, P-nin məxsusi vektorları belədir.

$$e_j=\left(1,\lambda,\lambda^2,\ldots,\lambda_j^{m-1}\right) \qquad (j=0,1,\ldots,m-1),$$

burada $\lambda_0,\lambda_1,\ldots,\lambda_{m-1}$ ədədləri

$$\lambda^m-\sum_{k=0}^{m-1}P_k\lambda^k=0$$

tənliyinin həlləridir. Yuxarıda gördük ki, (2) sisteminin həlli $V(t)$ funksiyası verilən $V_0=V(0),V_1=\frac{dV}{dt}\big|_{t=0},\ldots,=V_{r-1}=\frac{d^{r-1}V(t)}{dt^{r-1}}\big|_{t=0}$ ədədləri vasitəsilə birqiymətli tapılır. İndi $V(t)$ həllinin $V_0,V_1,\ldots,V_{r-1}$ vasitəsilə ifadəsini tapaq. Sadəlik üçün hesab edirik ki, $\lambda_0,\lambda_1,\ldots,\lambda_{m-1}$ hamısı müxtəlifdirlər.

İxtiyari $\xi = (\xi_0, \ldots, \xi_{m-1}) \in Q$ vektorunu Q fəzasının bazis vektorları $e_0, e_1, \ldots, e_{m-1}$ üzrə ayırmaq olar:

$$\xi = \alpha^0 e_0 + \alpha^1 e_1 + \ldots + \alpha^{m-1} e_{m-1} \ . \tag{18}$$

Bazis vektorları (məxsusi vektorlar)

$$e_j = \left(1, \lambda_j, \lambda_j^2, \ldots, \lambda_j^{m-1}\right), \quad (j = 0,1,\ldots,m-1)$$

olduğundan (18)-dən çıxır ki,

$$\xi = \alpha^0\left(1, \lambda_0, \lambda_0^2, \ldots, \lambda_0^{m-1}\right) + \alpha^1\left(1, \lambda_1, \lambda_1^2, \ldots, \lambda_1^{m-1}\right) + \ldots +$$
$$+ \alpha^{m-1}\left(1, \lambda_{m-1}, \lambda_{m-1}^2, \ldots, \lambda_{m-1}^{m-1}\right) =$$
$$= \left(\sum_{i=0}^{m-1} \alpha^i, \sum_{i=0}^{m-1} \alpha^i \lambda_i, \ldots, \sum_{i=0}^{m-1} \alpha^i \lambda_i^{m-1}\right),$$

buradan çıxır ki,

$$\begin{cases} \xi_0 = \sum\limits_{i=0}^{m-1} \alpha,^i \\ \xi_1 = \sum\limits_{i=0}^{m-1} \alpha^i \lambda_i, \\ - - - - - - - \\ \xi_{m-1} = \sum\limits_{i=0}^{m-1} \alpha^i \lambda_i^{m-1}. \end{cases}$$

Bu cəbri sistemdən naməlum olan $\alpha^0, \alpha^1, \ldots, \alpha^{m-1}$ əmsalları tapılır:

$$\alpha^j = \frac{1}{W} \begin{vmatrix} 1 & . & . & . & \xi_0 & . & . & . & 1 \\ \lambda_0 & . & . & . & \xi_1 & . & . & . & \lambda_{m-1} \\ - & - & - & - & - & - & - & - & - \\ \lambda_0^{m-1} & . & . & . & \xi_{m-1} & . & . & . & \lambda_{m-1}^{m-1} \end{vmatrix} = \tag{19}$$

$$= \frac{(-1)^j}{W}\left[W_{j0}\xi_0 - W_{j1}\xi_1 + \ldots + (-1)^{m-1} W_{j,m-1}\xi_{m-1}\right],$$

burada W $\lambda_0,\dots,\lambda_{m-1}$ ədədlərinə nəzərən Van-der-Mond determinantıdır və W_{jk} isə onun minorudur (j-cu sütünündə k-cı sətrin pozulması ilə alınan determinant) $(j,k=0,1,\dots,m-1)$. Xüsusi halda, $V(0)=(V_0,V_1,\dots,V_{m-1})$ başlanğıc vektorunu belə ayırmaq olar:

$$V(0)=\sum_{j=0}^{m-1} V^j e_j.$$

Onda analoji qayda ilə alarıq ki,

$$V^j=\frac{(-1)^j}{W}\left[W_{j0}\xi_0-W_{j,1}\xi_1+\dots+(-1)^{m-1}W_{j,m-1}\xi_{m-1}\right]. \qquad (20)$$

Bunun kimi də $G(t)=(0,0,\dots,g(t))$ vektorunu ayırsaq

$$G(t)=\sum_{j=0}^{m-1} g^j(t)e_j,$$

buradan alarıq:

$$g^j(t)=\frac{(-1)^{j+m-1}}{W}\cdot W_{j,m-1}\,g(t). \qquad (21)$$

İndi nəzərə alsaq ki, e^{tP} operatoru e_j məxsusi vektorunu $e^{t\lambda_j}e_j$ vektoruna keçirir, onda (10) şərtini onunla eynigüclü olan şəkildə belə yaza bilərik:

$$V^j+\int_0^t e^{-\theta\lambda_j}g^j(\theta)d\theta=0, \quad j=r,r+1,\dots,m-1\ . \qquad (22)$$

(20) və (21) ifadələrini burada yazdıqda alırıq:

$$\frac{W_{j0}}{W_{j,m-1}}V_0-\frac{W_{j,1}}{W_{j,m-1}}V_1+\dots+(-1)^{m-1}\frac{W_{j,m-1}}{W_{j,m-1}}V_{m-1}+$$
$$+(-1)^{m-1}\int_0^\infty e^{-\theta\lambda_j}g^j(\theta)d\theta=0\ . \qquad (23)$$

Bu şərt baxılan məsələnin korrekt həll olunan olması üçün zəruri və kafi şərt olan (10) şərtinin başqa formasını müəyyən edir.

8. Xüsusi törəməli bir tənliyə baxaq:

$$\frac{\partial^m u(x,t)}{\partial t^m}-\sum_{k=0}^{m-1} P\left(i\frac{\partial}{\partial x}\right)\frac{\partial^k u(x,t)}{\partial t^k}=f(x,t). \tag{24}$$

Furye çevirməsini tətbiq etdikdə

$$\frac{d^m V(\sigma,t)}{dt^m}-\sum_{k=0}^{m-1} P_k(\sigma)\frac{d^k V(\sigma,t)}{dt^k}=g(\sigma,t) \tag{25}$$

alırıq. Əvvəlcə tənliyin

$$V(\sigma,0)=\frac{dV(\sigma,0)}{dt}=\ldots=\frac{d^{r-1}V(\sigma,0)}{dt^{r-1}}=0 \tag{26}$$

şərtini ödəyən həlli üçün belə qiymətlənmə alınır:

$$\begin{aligned}|V(\sigma,t)| &\le ct^{m-1}\int_0^t |g(\sigma,\theta)|d\theta+\\ &+\int_0^\infty (\theta+t)^{m-1}e^{-\theta\operatorname{Re}\lambda_r(\sigma)}|g(\sigma,\theta+t)|d\theta.\end{aligned} \tag{27}$$

Şərtə görə, məsələn,

$$|g(\sigma,t)|\le c(1+t)^h\left(1+\sigma^2\right)^q\phi(\sigma),\quad \phi(\sigma)\in L_2$$

Bunu nəzərə aldıqda (27)-dən çıxır ki,

$$\begin{aligned}|V(\sigma,t)| &\le ct^{m-1}\left(1+\sigma^2\right)^q\phi(\sigma)(1+t)^{h+1}+\\ &+\sum_{k=0}^{m-1}c_k t^k\int_0^\infty \theta^k e^{-\theta\operatorname{Re}\lambda_r(\sigma)}|g(\sigma,\theta+t)|d\theta\ .\end{aligned}$$

Teoremin $(*)$ şərtinə görə çıxır ki, buradakı sağ tərəf hər $t\ge 0$ üçün H fəzasına daxildir, deməli $V(\sigma,t)\in \mathrm{H}$ və $t\to\infty$ olduqda $V(\sigma,t)=O\left(t^h\right)$ olur.

9. İndi tutaq ki, başlanğıc funksiyalar $V_0(\sigma),\ldots,V_{r-1}(\sigma)\in \mathrm{H}$ olan ixtiyari funksiyalardır. Bu halda da məsələnin korrekt olduğunu göstərək.

Biz yuxarıda gördük ki,

$$\frac{d^m W(\sigma,t)}{dt^m} - \sum_{k=0}^{m-1} P(\sigma) \frac{d^k W(\sigma,t)}{dt^k} = 0 \qquad (28)$$

bircins tənliyinin H sinfində

$$\left.\frac{d^k W(\sigma,t)}{dt^k}\right|_{t=0} = V_k(\sigma) \in \mathrm{H}, \quad k = 0,1,\ldots,r-1,$$

başlanğıc şərtini ödəyən həlli var və bu həll $t \to \infty$ olduqda $W(\sigma,t) = O(t^h)$ olur. Tutaq ki, $V(\sigma,t)$ (25) tənliyinin

$$V(\sigma,0) = \ldots = V_{r-1}(\sigma,0) = 0$$

şərtini ödəyən həllidir (Bu cür həll p.4-də qurulmuşdur). Onda

$$V(\sigma,t) = V(\sigma,t) + W(\sigma,t)$$

funksiyası (25) tənliyinin H sinfində həlli olur və onun üçün başlanğıc şərt belə olur:

$$V(\sigma,0) = V_0(\sigma), \ldots, \frac{d^{r-1} V(\sigma,0)}{dt^{r-1}} = V_{r-1}(\sigma).$$

Deməli ixtiyari $V_0(\sigma), \ldots, V_{r-1}(\sigma) \in \mathrm{H}$ başlanğıc şərtləri üçün (25)-(26) Koşi məsələsinin H sinfində həlli var və bu həll H fəzasında $V(\sigma,t) = O(t^h)$, $t \to \infty$ olur.

Teorem isbat olundu.

§ 6. $\frac{1}{4}$-fəzada korrekt sərhəd məsələləri.

1. $t \geq 0$, $x \geq 0$ oblastında ($\frac{1}{4}$-fəza) belə bir tənliyə baxaq:

$$\frac{\partial^m u(x,t)}{\partial t^m} - \sum_{k=0}^{m-1} P\left(i\frac{\partial}{\partial x}\right) \frac{\partial^k u(x,t)}{\partial t^k} \ . \qquad (1)$$

Belə klassik məsələyə baxılır: (1) tənliyinin verilən sərhəd şərtlərini:

$$u(0,t)=W_0(t),\ \frac{\partial u(0,t)}{\partial x}=W_1(t),\dots,\frac{\partial^{p-1}u(0,t)}{dx^{p-1}}=W_{p-1}(t) \tag{2}$$

və verilən başlanğıc şərtlərini:

$$u(x,0)=u_0(x),\quad \frac{\partial u(x,0)}{\partial t}=u_1(x),\dots,\frac{\partial^{r-1}u(x,0)}{\partial t^{r-1}}=u_{r-1}(x) \tag{3}$$

(burada p ilə P_k diferensial polinomların maksimal tərtibi işarə olunur, r ədədi sonra təyin olunur). Ödəyən həllərini tapmalı

Bu paraqrafda məqsəd (1)-(3) məsələsini $\mathcal{H}$ fəzasında tədqiq etməkdir. Başqa sözlə, D' fəzasında (1)-(3) məsələsinin korrekt olması şərtlərini tapmaq məqsədi qoyulur:(1) tənliyinə hansı başlanğıc şərtləri (necə şərt) və sərhəd şərtləri qoşmaq lazımdır ki, nəticədə alınan məsələ $\mathcal{H}$ sinfində korrekt olsun: həll var, yeganədir, kəsilməz asılıdır və $t\to\infty$ olduqda $u(x,t)=O(t^h)$ olur ?

Məlumdur ki, ümumiləşmiş funksiyanın nöqtədə qiyməti yoxdur. Ona görə də (2) şərtlərini necə başa düşmək lazım gəlir? (3) şərtində r necə tapılır və s. kimi sualları aydınlaşdırmaq lazımdır.

Əvvəlcə adi diferensial tənliklər üçün belə bir məsələyə baxaq:

$$\sum_{j=0}^{p}a_j y^{(j)}(x)=f(x)\quad (x\ge 0) \tag{4}$$

tənliyinin

$$y(0)=y_0,\ y'(0)=y_1,\dots,y^{(p-1)}(0)=y_{p-1} \tag{5}$$

şərtini ödəyən həll olunması məsələsi ümumiləşmiş funksiyalarda belə bir tənliyin həll olunmasına ekvivalent olur:

$$\sum a_j\left[Y^{(j)}(x)-\sum_{k=0}^{j-1}y_k\delta^{(j-1-k)}(x)\right]=F[x], \tag{6}$$

burada $F(x)=f(x),\ x>0$ olduqda və $F(x)=0,\ x<0$ olduqda (6) tənliyinin D' fəzasında $x<0$ olduqda $Y(x)=0$ olan həlli yeganə olur və bu həll (4)-(5) məsələsinin həllinə uyğun olur: (5)- (6) məsələsinin $x<0$ olduqda $y(x)=0$ olan (klassik) həlli həm də (6) tənliyinin həlli olur və tərsinə, (6) tənliyinin $x<0$ olduqda $Y(x)=0$ olan həlli adi funksiyadır və o, $x>0$ olan oblastda (4)-(5) məsələsinin həlli olur.

Məlumdur ki, əgər $f(x)$ $x<0$ və $x>0$ oblastlarında adi kəsilməz törəmələri varsa və $x=0$ nöqtəsində özü və törəmələri kəsiləndirsə, onda $f(x)$ və onun adi törəmələri requlyar funksional doğurur. Əgər $f(x)$-in D' fəzasında törəməsini f', onun adi törəməsinin doğurduğu requlyar funksionalı $\{f'(x)\}$ (və ya sadəcə $f'(x)$ ilə) işarə etsək, onda belə düsturlar doğrudur:

$$f' = f'(x) + \Delta f(0)\delta(x),$$
$$f'' = f''(x) + \Delta f(0)\delta'(x) + \Delta f'(0)\delta(x),$$

və nəhayət, $\forall p$ üçün

$$f^{(p)} = f^{(p)}(x) + \sum_{k=0}^{p-1} \Delta f^{(k)}(0)\delta^{(p-1-k)}(x), \qquad (*)$$

burada

$$\Delta f^{(k)}(0) = f^{(k)}(+0) - f^{(k)}(-0).$$

İndi verilən (1) tənliyini belə yazaq:

$$\frac{\partial^m u(x,t)}{\partial t^m} = \sum_{k=0}^{m-1} P\left(i\frac{\partial}{\partial x}\right)\frac{\partial^k u(x,t)}{\partial t^k} = \sum_{j=0}^{p} Q_j\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)\frac{\partial^j u(x,t)}{\partial x^j}, \quad (x,t \ge 0) . \qquad (7)$$

Bu tənlik adi funksiyalarda verilir. $(*)$ düsturlarını nəzərə aldıqda sonuncu tənliyi belə yazmaq olar:

$$\frac{\partial^m u(x,t)}{\partial t^m} = \sum_{j=0}^{p} Q_j\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)\left[\frac{\partial^j u(x,t)}{\partial x^j} - \sum_{k=0}^{j-1} W_k(t)\delta^{(j-1-k)}(x)\right] . \qquad (8)$$

Bu tənlik artıq D' fəzasında yazılıb, $u(x,t)$-ümumiləşmiş funksiyadır. Bu tənliyin $x<0$ oblastında sıfra bərabər olan həlli- $u(x,t)$ funksiyası (1)-(2) sərhəd məsələsinin həlli adlanır. Adi diferensial tənlik üçün biz qeyd etdik ki, (6) tənliyinin $x<0$ oblastında $Y(x)=0$ olan hər bir həlli adi funksiya olur. (8) tənliyi isə xüsusi törəməli diferensial tənlikdir.

onun həlləri adi funksiya olmaya da bilər. Buna baxmayaraq (1)-(2) məsələsindən (8) tənliyinə keçid analoji olur. Belə ki, əgər $u(x,t)$ (8) tənliyinin həllidirsə, belə ki, $x<0$ oblastında $u(x,t)=0$ olur və $u(x,t)$-adi funksiyadır və $x \geq 0$ oblastında kafi qədər hamardır, onda $u(x,t)$ həm də (1)-(2) məsələsinin adi mənada həlli olur və tərsinə, (1)-(2) məsələsinin hər bir $y(x)$ həlli, ona ümumiləşmiş funksiya kimi baxdıqda, belə ki, $x<0$ olduqda $y(x)=0$ olsun, onda $y(x)$ həm də (6) tənliyinin həlli olur.

2. Əvvəlcə (1) tənliyi əvəzində x-ə nəzərən 1-ci tərtib belə sistemə baxaq:

$$A\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)u(x,t)=B\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)\frac{\partial u(x,t)}{\partial x},\ x \geq 0. \tag{9}$$

Onda (8) tənliyi əvəzində belə bir tənlik alınar:

$$A\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)u(x,t)=B\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)\left[\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}-u(t,0)\delta(x)\right], \tag{10}$$

burada A,B-matrislər, $u(x,t)$-vektor-funksiyadır.(10) tənliyində $u(x,t)$ olaraq belə bir vektor-funksiya götürürük:

$$u(x,t)=\begin{cases} 0, & x<0 \\ u(x,t), & x>0, \end{cases}$$

burada $u(x,t)$ funksiyası $x>0$ olduqda (9) tənliyinin həllidir (adi funksiyadır). Belə bir ümumiləşmiş funksiya daxil edək:

$$u_1(x,t)=\begin{cases} 0, & x<0, \\ \dfrac{\partial u(x,t)}{\partial x}, & x>0, \end{cases}.$$

Onda (9) tənliyini belə yazmaq olar:

$$A\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)u(x,t)=B\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)u_1(x,t). \tag{11}$$

Qeyd edək ki, $u_1(x,t)$ funksiyası heç də $\dfrac{\partial u(x,t)}{\partial x}$ ilə üst-üstə düşmür, onlar arasında belə bir münasibət var:

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = u_1(x,t) + u(0,t)\delta(x), \tag{12}$$

burada u_1-in ifadəsini (11)-də yerinə yazdıqda (10) tənliyini alırıq. Deməli, (10) tənliyi artıq D' fəzasında baxılan tənlik olur, oradakı $u(0,t)$ qiyməti isə adi $u(x,t)$ funksiyasının $x=0$ nöqtəsində aldığı qiymətdir.

3. $\mathcal{H}_+^{\beta}$ FƏZASI.

Məsələnin qoyuluşu.

İndi həllin axtarıldığı $\mathcal{H}$ fəzasını dəqiqləşdirmək lazımdır. β verilir.

$\mathcal{H}_+^{\beta,0}$ ilə elə (kompleks) $f(x)$ funksiyaları çoxluğunu işarə edirik ki, $f(x)e^{-\beta x} \in L_2(0,\infty)$ olsun, yəni:

$$\int_0^{\infty} |f(x)|^2 e^{-2\beta x} dx < \infty . \tag{1}$$

Onda hər bir $f \in \mathcal{H}_+^{\beta,0}$ üçün

$$g(s) = \int_0^{\infty} f(x) e^{ixs} dx \tag{2}$$

Furye çevirməsi var. Buradakı inteqralın varlığı orta kvadratik yığılma mənada başa düşülür. $s = \sigma + i\tau, \tau \geq \beta$. Bu halda Planşerel teoreminə əsasən alırıq ki,

$$\int_{-\infty}^{\infty} |g(\sigma + i\tau)|^2 d\sigma = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 e^{-2\beta x} dx \tag{3}$$

$g(s)$ Furye çevirməsinin bir xassəsini qeyd edək: $\tau \geq \beta$ olduqda $g(s)$ analitik funksiya olub

$$\int_{-\infty}^{\infty} |g(\sigma + i\tau)|^2 d\sigma$$

inteqralı hər qeyd olunmuş τ üçün var və bütün $\beta \leq \tau < \infty$ oblastında bu inteqral məhduddur:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |g(\sigma + i\tau)|^2 d\sigma \le M < \infty, \ \tau \ge \beta.$$

Doğrudan da, (3) bərabərliyindən və (1) şərtindən çıxır ki,

$$\int_0^{\infty} |f(x)|^2 e^{-2\tau x} dx \le \int_0^{\infty} |f(x)|^2 e^{-2\beta x} dx < \infty.$$

Belə inteqrala baxaq: (tərs Furye çevirməsi)

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int g(\sigma + i\tau) e^{i(\sigma + i\tau)x} d\sigma =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int g(\sigma + i\tau) \cdot e^{-\tau x} \cdot e^{i\sigma x} d\sigma$$

Deməli $f(x)$ funksiyası $g(\sigma + i\tau) \cdot e^{ix}$ funksiyasının tərs Furye çevirməsidir.Sonuncu bərabərlikdən alırıq:

$$f(x) e^{\tau x} = \frac{1}{2\pi} \int g(\sigma + i\tau) \cdot e^{i\sigma x} d\sigma .$$

Planşerel teoreminə əsasən buradan alırıq ki.

$$\int_0^{\infty} |f(x)|^2 e^{-2\tau x} dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |g(\sigma + i\tau)|^2 d\sigma . \tag{4}$$

Göstərmək olar ki. $x < 0$ olduqda $f(x) = 0$. Çünki. əks halda, əgər müsbət ölçülü $E \subset (-\infty, 0)$ çoxluğunda $f(x) \ne 0$ olarsa. onda $\tau \to \infty$ olduqda

$$\int_{-\infty}^{0} |f(x)|^2 e^{-2\tau x} dx \to \infty$$

olardı. bu isə (4)-də sağ tərəfdəki inteqralın bütün $\tau \ge \beta$ müstəvisində məhdud olması şərtinə ziddir. Beləliklə. $f(x) = 0, x < 0$ və belə bir bərabərlik doğrudur ($\tau \ge \beta$):

$$\int_0^{\infty} |f(x)|^2 e^{-2\tau x} dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |g(\sigma + i\tau)|^2 d\sigma \le c < \infty.$$

Burada $\tau \to \beta$ olduqda alırıq ki,

$$\int_0^\infty |f(x)|^2 e^{-2\beta x} dx \le c.$$

Buradan çıxır ki, $f(x) \in \mathcal{H}_+^{\beta,0}$. Furye çevirməsinin yeganəlik teoreminə əsasən alınır ki, (2) inteqralı şəklində daxil edilən $g(s)$ funksiyası $f(x)$ funksiyasının Furye çevirməsi olur. $\mathcal{H}_+^{\beta,0}$ fəzasının bütün elementlərindən və onların $\le q$

tərtibli ümumiləşmiş törəmələrindən ibarət çoxluğu $\mathcal{H}_+^{\beta,q}$ ilə işarə edirik: Deməli,

$$\mathcal{H}_+^{\beta,q} = \left\{ u(x) : u(x) = \sum_{|k|\le q} D^k f_k(x),\ f_k(x) \in \mathcal{H}_+^{\beta,0} \right\}$$

$\mathcal{H}_+^{\beta,q}$ fəzasının Furye çevirməsini $H_+^{\beta,q}$ ilə işarə edirik. Aydındır ki,

$$H_+^{\beta,q} = \left\{ V(s) : V(s) = P(s) g(s),\ g(s) \in H_+^{\beta,0} \right\}.$$

Deməli hər bir $V(s) \in H_+^{\beta,q}$ elementi müəyyən $g \in H_+^{\beta,0}$ elementini dərəcəsi $\le q$ olan $P(s)$ polinomuna vurmaqla alınır. Belə cəmə baxaq:

$$H_+^{\beta} = \sum_{q=0} H_+^{\beta,q} \quad .$$

Aşkardır ki, $V(s) \in H_+^{\beta}$ yalnız və yalnız o zaman olur ki, $V(s)$ funksiyası $\operatorname{Im} s > \beta$ müstəvisində analitik funksiya olsun və $|s| \to \infty$ olduqda $|V(s)| \le c|s|^q$ olsun. Doğrudan da, $V(s) \in H_+^{\beta}$ olduqda elə $P(s)$ polinomu tapmaq olar ki, $V(s) : P(s) \in H_+^{\beta,0}$ olsun.

H_+^{β} fəzasının vacib bir xassəsi (monotonluq):

Əgər $V_0(\sigma) \in H_+^{\beta}$ isə və $V_1(s)$-analitik funksiyadırsa, belə ki, $|V_1(s)| \le |V_0(s)|$, onda $V_1(s) \in H_+^{\beta}$.

Buradan çıxır ki, H_+^β fəzasında istənilən $P(s)$ polinomuna vurmaq mümkündür, yəni $V(s)\in H_+^\beta$ olduqda $P(s)\,V(s)\in H_+^\beta$ olur. Beləliklə, baxılan məsələnin korrektliyini qurulan $\mathcal{H}_+^\beta$ ümumiləşmiş funksiyalar fəzasında və H_+^β fəzasında tədqiq edəcəyik.

Deyək ki, (1) tənliyi $\mathcal{H}_+^\beta$ fəzasında verilir. Hər $t\geq 0$ üçün $u(x,t)\in \mathcal{H}_+^\beta$ hesab edirik. β ədədi (1) tənliyilə müəyyən olunur. β-nın necə seçilməsi az sonra məlum olacaq. $\mathcal{H}_+^\beta$ elə (ümumiləşmiş) $u(x)$ funksiyaları çoxluğudur ki, hər bir $u(x)\in H_+^\beta$ üçün elə $f_k(x)$ var ki, $f_k(x)e^{-\beta x}\in L_2(0,\infty)$ olur və elə q ədədi var ki,

$$u(x)=\sum_{k=0}^{q} D^k f_k(x),\ f_k(x)\in \mathcal{H}_+^{\beta,0}.$$

Burada $D^k f(x)$ törəməsi D' fəzasında törəmədir. Onda H_+^β fəzası elə adi $V(s)$ analitik funksiyadır və hər $V(s)\in H_+^\beta$ üçün elə $P(s)$ polinomu var ki, $\dfrac{V(s)}{P(s)}\equiv g(s)$ nisbəti ixtiyari $\operatorname{Im}s=\tau$ düz xətti üzərində kvadratı ilə inteqrallanır, yəni

$$\int_{-\infty}^{\infty}|g(\sigma+i\tau)|^2 d\sigma<\infty\ ,$$

$$\|V(s)\|_q^2=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{|V(s)|^2 d\sigma}{|s|^{2q}}d\sigma$$

inteqralları σ-ya nəzərən müntəzəm məhdud olur (hər $V(s)$ üçün) H_+^β fəzasında polinoma vurmaq mümkündür və $V_0(s)\in H_+^\beta$, $V(s)$-analitik funksiyadırsa və $|V(s)|\leq|V_0(s)|$, onda $V(s)\in H_+^\beta$.

$t=0$ olan halda

$$u|_{t=0} = u_0(x),\ldots,\frac{\partial^k u(x,t)}{\partial t}|_{t=0} = u_k(x),\ k=0,1,\ldots,r-1$$

Tələb edirik ki, $t \to \infty$ olduqda $u(x,t)$ həlli $\mathcal{H}_+^\beta$ fəzasında $O(t^h)$ kimi artır, yəni elə q və h var ki,

$$\|V(\sigma,t)\|_{q,\beta}^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|V(\sigma,t)|^2}{|s|^{2q}} d\sigma \le ct^h. \tag{13}$$

β və r ədədləri aşağıdakı qayda ilə təyin edilir.(1) tənliyinin xarakteristik tənliyini yazaq:

$$\lambda^k = \sum_{k=0}^{m-1} P_k(s)\lambda^k . \tag{14}$$

Bu tənliyin köklərini $\lambda_0(s),\lambda_1(s),\ldots,\lambda_{m-1}(s)$ ilə işarə edək. Bu köklər s-in analitik funksiyalarıdır (sonlu sayda məxsusi nöqtələri ola bilər). Bu köklərə biz $\operatorname{Im} s > \beta$ yarımmüstəvisində baxırıq, belə ki, β elə seçilir ki, $\operatorname{Im} s > \beta$ müstəvisində $\lambda_0(s),\lambda_1(s),\ldots,\lambda_{m-1}(s)$ kökləri hamısı müxtəlif olsunlar. Belə olduqda bu köklərin
$\operatorname{Im} s > \beta$ müstəvisində məxsusi nöqtələri yoxdur və onlar birqiymətli analitik funksiyalardır. $\lambda_0(s),\lambda_1(s),\ldots,\lambda_{m-1}(s)$ köklərini iki qrupa bölək: 1-ci qrupa o λ_k-ları daxil edirik ki, $\operatorname{Im} s \ge \beta$ müstəvisində hər yerdə $\operatorname{Re}\lambda_k(s) \le 0$ olur. Tutaq ki,

$$I = \{\lambda_0(s),\lambda_1(s),\ldots,\lambda_{r-1}(s)\}$$

2-ci qrupa o λ_q-ları daxil edirik ki, $\operatorname{Im} s \ge \beta$ müstəvisində heç olmasa bir nöqtədə
$\operatorname{Re}\lambda q(s) > 0$ olur. Tutaq ki,

$$II = \{\lambda_r(s),\lambda_{r+1}(s),\ldots,\lambda_{m-1}(s)\}.$$

Onda r ədədi I qrupuna daxil olan xarakteristik köklərin sayını göstərir. Şərtə görə

$$\operatorname{Re}\lambda_0(s) \le \operatorname{Re}\lambda_1(s) \le \ldots \le \operatorname{Re}\lambda_{m-1}(s)$$

qəbul edilir. Deməli:

$$\operatorname{Re}\lambda_0(s) \le \ldots \le \operatorname{Re}\lambda_{r-1}(s) \le 0 < \operatorname{Re}\lambda_r(s) \le \ldots \le \operatorname{Re}\lambda_{m-1}(s).$$

İndi

$$W_k(t)=\frac{\partial^k u(x,t)}{\partial x^k}\Big|_{x=0} \qquad (k=0,1,\dots,p-1)$$

funksiyaları üzərinə qoyulan şərtləri araşdıraq. Fərz edək ki, bu funksiyalar $m-1$ tərtibə qədər törəmələrilə birlikdə kəsilməz diferensiallanır və hər biri $t\to\infty$ olduqda ct^h dərəcəsindən tez artmır. (8) tənliyinə Furye çevirməsini tətbiq etsək

$$\frac{d^m V(\sigma,t)}{dt^m}=\sum_{j=0}^{p} Q_j\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)\left[(-is)^j V(s,t)\right]+g(\sigma,t)$$

tənliyini alarıq, burada

$$g(\sigma,t)=\sum_{j=0}^{p} Q_j\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)\left[W_{j-1}(t)-isW_{j-2}(t)+\dots+(-is)^{j-1}W_0(t)\right]. \quad (15)$$

$W_k(t)$ funksiyaları üzərinə qoyulan şərtlərdən çıxır ki, $\mathrm{Im}\, s\geq\beta$ olduqda

$$\Phi_{k,q}(s,t)=\int_0^\infty e^{-\theta\lambda_q(s)}q\theta^k\left|g(\theta+t)\right|d\theta, \quad (k\geq m-r) \qquad (16)$$

inteqralları yığılır ($\mathrm{Re}\,\lambda_q(s)>0$ olduqda). Əlavə tələb edirik ki, $\mathrm{Im}\, s\geq\beta$ olduqda

$$\left|V(s,t)\right|\leq\Phi_{k,q}(s,t) \qquad (17)$$

şərtini ödəyən hər bir $V(s,t)$ analitik funksiyaları H_+^β sinfinə daxildir və H_+^β fəzasında t^h kimi artır. Bütün bu deyilən şərtlər son nəticədə $W_0(t),\dots,W_{p-1}(t)$ funksiyaları üzərinə əlavə şərtlər qoyulmasını tələb edir. Əgər, məsələn, aşağıdakı şərtlər ödənilərsə, onda yuxarıda tələb olunan bütün şərtlər ödənilmiş olar:

$$\int_0^\infty \theta^k\left|\frac{d^j W_j(t)}{dt^j}\right|d\theta\leq M<\infty, \qquad (18)$$

burada $k\leq m-2$, $j\leq m-1$.

Əsas teorem. Fərz edək ki, (1) tənliyi və (2)-(3) şərtləri verilir; β və r ədədləri yuxarıda deyilən qayda ilə təyin olunub;

$W_0(t),...,W_{p-1}(t)$ funksiyaları (18) şərtini ödəyirlər. Onda (1)-(2)-(3) məsələsinin $\mathcal{H}_+^\beta$ sinfində korrekt olması üçün zəruri və kafi şərt

$$G_q(s)=\int_0^\infty e^{-\theta\lambda_q(s)}g(s,\theta)d\theta \qquad (q=r,r+1,...,m-1) \qquad (19)$$

funksiyalarının onların a priori təyin olunduqları $\operatorname{Re}\lambda_q(s)>0$, $\operatorname{Im}s\geq\beta$ oblastından bütün $\operatorname{Im}s\geq\beta$ yarımmüstəvisinə analitik davam edilən funksiyalar olmalıdır, belə ki, davam nəticəsində alınan funksiyalar H_+^β fəzasına daxil olmalıdır.

Qeyd. Əgər $\operatorname{Im}s\geq\beta$ olduqda hər yerdə $\operatorname{Re}\lambda_q(s)>0$ olursa $(q=r,r+1,...,m-1)$, onda $G_q(s)$ funksiyası $\operatorname{Im}s>\beta$ müstəvisində hər yerdə analitik funksiyadır və heç bir davama ehtiyac yoxdur. Bu halda korrekt məsələ belə olur; Verilməlidir: $u_0(x),...,u_{r-1}(x),W_0(t),...,W_{p-1}(t)$.

Teoremi isbat etmədən əvvəl bir neçə tipik misallar üzərində teoremin nəticələrinin nədən ibarət olduğunu araşdıraq.

Misal 1. Tutaq ki, $\lambda_0(s),...,\lambda_{m-1}(s)$ xarakteristik köklərinin hamısının real hissələri $\operatorname{Im}s>\beta$ olduqda ≤ 0 olur, yəni $\lambda_0(s),...,\lambda_{m-1}(s)\in I$. Onda $r=m$. Deməli korrekt məsələ alınması üçün verilməlidir:

$$u_0(x),...,u_{m-1}(x),W_0(t),...,W_{p-1}(t)$$

Məsələn, belə tənliyə baxaq:

$$\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial u}{\partial x}=0 \quad (x,t\geq 0) \quad . \qquad (1)$$

Burada $\lambda_0=is$, $\operatorname{Re}\lambda_0(s)=-\tau$. Onda $\operatorname{Im}s=\tau>0$ olduqda hər yerdə $\operatorname{Re}\lambda_0=-\tau\leq 0$ olur, yəni $\lambda_0\in I$. (1) üçün korrekt məsələ: verilməlidir: $u|_{t=0}=u_0(x)$, $W_0(t)=u(0,t)$.

Misal 2. Belə tənliyə baxaq:

$$\sum_{k=0}^m a_k\frac{\partial^m u(x,t)}{\partial t^k\partial x^{m-k}}=0, \qquad (2)$$

Xarakteristik tənlik

$$\sum_{k=0}^{m} a_k \lambda^k (-is)^{m-k} = 0$$

olur. Tutaq ki, onun bütün kökləri həqiqi müsbət ədədlərdir.Bu halda $r=0$. Korrekt məsələ alınması üçün yalnız $W_0(t),\dots,W_{p-1}(t)$ funksiyaları verilir, vəssalam. Sırf sərhəd məsələsi alınır.

Misal 3. Belə bir tənliyə baxaq:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial x},$$

Burada $\lambda_0 = -is = -i(\sigma + i\tau) = -i\sigma + \tau, \mathrm{Re}\,\lambda_0 = \tau$. Onda $\mathrm{Im}\,s = \tau > 0$ müstəvisində hər yerdə $\mathrm{Re}\,\lambda_0 > 0$ olur, deməli $\lambda_0 \in II$, yəni $r=0$. Korrekt məsələ: heç bir başlanğıc şərti verilmir, yalnız $W_0(t)$ verilir.

Misal 4. Dalğa tənliyi verilir:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

Burada $\lambda^2 = -s^2, \lambda_{0,1} = \pm is$. $\mathrm{Im}\,s > 0$ müstəvisində $\mathrm{Re}\,\lambda_0 \le 0$, $\mathrm{Re}\,\lambda_1 > 0$ olur.Deməli $r=1$.Korrekt məsələ: verilməlidir: $u/_{t=0} = u_0(x)$ (ixtiyari funksiyadır) və $W_0(t), W_1(t)$ verilir. Əlavə heç bir şərt lazım gəlmir. Əsas teoremdə deyilən

$$G(s) = \int_0^{\infty} e^{-\theta\lambda_1(s)} g(s,\theta)d\theta$$

funksiyasının $\mathrm{Im}\,s > \beta$ oblastına davamına ehtiyac yoxdur, çünki $\mathrm{Im}\,s > 0$ oblastında hər yerdə $\mathrm{Re}\,\lambda_1 > 0$ olur. Beləliklə, korrekt məsələ-klassik qarışıq məsələ olur:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ u/_{t=0} = u_0(x), \ \ u/_{x=0} = W_0(t). \end{cases}$$

Misal 5. Nisbətən mürəkkəb situasiya o zaman alınır ki, $\lambda_r(s),\dots,\lambda_{m-1}(s)$ xarakteristik köklləri̇nin həqiqi hissələri $\mathrm{Im}\,s \ge \beta$ yarımmüstəvisində öz işarəsini dəyişir ($\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_{r-1}$ kökləri isə həmin yarımmüstəvidə $\operatorname{Re}\lambda(s)\leq 0$ olur). Belə hallarda (19)-dakı $G_q(s)$ funksiyalarının davam olunması zərurəti aydın olur. .

Məsələn, belə bir tənliyə baxaq:

$$\frac{\partial u}{\partial t}=i\frac{\partial u}{\partial x}=\left(i\frac{\partial}{\partial x}\right)u,$$

burada $\lambda=s$ və $\operatorname{Im}s=\tau>0$ oblastında $\operatorname{Re}\lambda=\sigma$ həm mənfi ola bilir, həm də müsbət. Deməli $\lambda\in\mathrm{II}, r=0$ (başlanğıc şərt yoxdur!). Yalnız $u/_{x=0}=W_0(t)$ sərhəd şərti verilir və bu da ixtiyari ola bilməz: O, elə funksiya olmalıdır ki,

$$G(s)=\int_0^\infty e^{-ts}W_0(t)dt$$

funksiyası onun əvvəlcədən təyin olunduğu $\operatorname{Re}s>0$ oblastdın bütün $\operatorname{Im}s>0$ oblastına analitik davam edilə bilən olmalıdır, belə ki, davamdan alınan funksiya H_+^β fəzasına daxil olsun.

Misal 6. Belə tənliyə baxaq:

$$\frac{\partial u}{\partial t}=-i\frac{\partial u}{\partial x}=-\left(i\frac{\partial}{\partial x}\right)u$$

burada $\lambda=-s$. Deməli $\lambda\in\mathrm{II}, r=0$. Deməli başlanğıc şərti yoxdur. $\operatorname{Im}s=\tau$, onda

$$G(s)=\int_0^\infty e^{-\theta\lambda_q(s)}W_0(\theta)d\theta=\int_0^\infty e^{-\theta s}W_0(\theta)d\theta$$

funksiyası $\operatorname{Re}s>0$ oblastında yığılandır. $W_0(t)$ elə olmalıdır ki, $G(s)$ funksiyasını bütün $\operatorname{Im}s>\beta$ oblastına analitik davam etmək mümkün olsun, belə ki, nəticədə alınan funksiya H_+^β sinfinə daxil olsun.

Misal 7. Laplas tənliyi.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0,$$

burada $\lambda^2=s^2, \lambda=\pm s$, yəni $\lambda_0,\lambda_1\in\mathrm{II}, r=0$. Korrekt məsələ belədir: Ancaq $u/_{x=0}=W_0(t)$ və $\frac{\partial u}{\partial x}/_{x=0}=W_1(t)$ sərhəd şərtləri verilir, həm də bu funksiyalar elə olmalıdır ki,

$$G_0(s)=\int_0^\infty e^{-ts}[W_1(t)-isW_0(t)]dt,$$

$$G_1(s)=\int_0^\infty e^{ts}[W_1(t)-isW_0(t)]dt$$

funksiyaları özlərinin a priori təyin olunduqları oblastlardan ($G_0(s)$ $\mathrm{Re}\, s>0$ oblastından, $G_1(s)$ isə $\mathrm{Re}\, s<0$ oblastından) bütün $\mathrm{Im}\, s>0$ müstəvisinə H_+^β fəzasına daxil olan funksiyaya qədər analitik davam olunan olsunlar.

Misal 8. Belə bir bircins tənliyə baxaq:

$$\sum_{k=0}^{m} a_k \frac{\partial^m u}{\partial t^{m-k}\partial x^k}=0.$$

Açıq yazdıqda $(a_0=1)$

$$\frac{\partial^m u}{\partial t^m}+a_1\frac{\partial^m u}{\partial t^{m-1}\partial x}+\ldots+a_m\frac{\partial^m u}{\partial x^m}=0.$$

Xarakteristik tənlik:

$$\lambda^m+a_1\lambda^{m-1}(-is)+\ldots+a_{m-1}\lambda(-is)^{m-1}+a_m\lambda(-is)^m=0$$

Bu tənliyin kökləri $\lambda_q=-\mu_q\cdot s$ olsun. Onda

$$\mu_j^m+a_1\mu_j^{m-1}+\ldots+a_m=0.$$

Bu halda $g(s,t)$ belə olur:

$$g(s,t)=\sum_{j=1}^{m} a_j\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^{m-j}\left[W_{j-1}(t)-isW_{j-2}(t)+\ldots-(-is)^{j-1}W_0(t)\right]$$

Korrekt məsələ: $W_0(t),\ldots,W_{p-1}(t)$ elə verilməlidir ki,

$$G_q(s)=\int_0^\infty e^{\mu_q s\theta}g(s,\theta)d\theta$$

funksiyaları $\mathrm{Re}\,\mu_q\cdot s<0$ oblastından $\mathrm{Im}\, s>0$ oblastına elə analitik davam olunsun ki, alınan funksiya H_+^β fəzasına daxil olsun.

4. **Əsas teoremin isbatı.**

Əvvəlcə 1-ci tərtib belə sistemə baxaq:

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = P\left(i\frac{\partial}{\partial x}\right)u(x,t), \quad (x,t \ge 0). \tag{1}$$

Burada $u(x,t)$ – m-komponentli vektor-funksiya, $P\left(i\frac{\partial}{\partial x}\right)$-kvadrat $m \times m$ matrisdir, onun elementləri $P_{jk}\left(i\frac{\partial}{\partial x}\right)$-maksimal tərtibi p olan polinomlardır.(1) tənliyinin

$$u(x,0) = u_0(x) \tag{2}$$

başlanğıc şərtini və

$$u(0,t) = W_0(t),\ldots,\frac{\partial^{p-1}u(0,t)}{\partial x^{p-1}} = W_{p-1}(t) \tag{3}$$

sərhəd şərtlərini ödəyən hədləri axtarılır.

İndi (1) sistemini belə yazaq:

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = \sum_{k=0}^{p} a_k\left(i\frac{\partial}{\partial x}\right)^k u(x,t), \tag{4}$$

burada $a_k = const$ olan matrislərdir. (1) tənliyi (3) şərti ilə birlikdə $\mathcal{H}_+^\beta$ sinfində belə bir tənliyə ekvivalentdir:

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} =$$

$$= \sum_{k=0}^{p} a_k\left(i\frac{\partial}{\partial x}\right)^k \left[u(x,t) - W_{k-1}(t)\delta(x) - W_{k-1}(t)\delta'(x) - \ldots - W_0(t)\delta^{(k-1)}(x)\right].$$

Furye çevirməsini burada tətbiq etməklə belə adi sistemi alırıq:

$$\frac{dV(s,t)}{dt} = P(s)V(s,t) + g(s,t), \tag{5}$$

burada

$$g(s,t) = \sum_{k=0}^{p} a_k\left[W_{k-1}(t) - isW_{k-2}(t) + \ldots + (-is)^{k-1}W_0(t)\right]. \tag{6}$$

(Nəzərdə saxlamaq lazımdır ki, burada $g, W_s(t)$ - vektor funksiyalardır). Başlanğıc şərt isə

$$V(s,o) = V_0(s) \tag{7}$$

şərtinə keçir.

(5)-(7) Koşi məsələsinin həlli düsturu belədir:

$$V(s,t) = e^{tP(s)} V_0(s) + \int_0^t e^{(t-\theta)P(s)} g(s,\theta) d\theta . \tag{8}$$

Lakin $V(s,t), V_0(s), g(s,t)$ funksiyaları hər qeyd olunmuş t üçün m-ölçülü $R^m = R_s$ fəzasında təyin olunublar. Əgər $\xi = (\xi_1, ..., \xi_m) \in R_s$ olursa, deməli $\xi = \xi(s), \xi_j = \xi_j(s)$. Bu halda qeyd olunmuş s üçün

$$|\xi|_s^2 = \sum_{j=1}^{m} \left|\xi_j^2\right|$$

s qeyd olunduqda $P(s)$ xətti operatoru R_s-də $P(s) = \left\|P_{jk}(s)\right\|$ matrisi ilə verilir. Bu operatorun deyək ki, $r = r(s)$ sayda xarakteristik kökünün $\operatorname{Re}\lambda(s) \le 0$ olur, yəni (hər s üçün) $\operatorname{Re}\lambda_0(s) \le ... \le \operatorname{Re}\lambda_r(s) \le 0$. Qalan $m - r$ sayda $\lambda_r(s), ..., \lambda_m(s)$-kökləri üçün isə

$$0 < \operatorname{Re}\lambda_r(s) \le ... \le \operatorname{Re}\lambda_m(s).$$

Buna uyğun olaraq R_s fəzası da $P(s)$ operatoruna nəzərən invariant alt fəza olan R_s^- və R_s^+ fəzalarının düz cəminə ayrılır:

$$R_s = R_s^- + R_s^+$$

Onda $V(s,t), V_0(s), g(s,t)$ vektorlarının da hər biri iki komponentə ayrılır:

$$V(s,t) = V^-(s,t) + V^+(s,t),$$

$$V_0(s) = V_0^-(s) + V_0^+(s); \quad V_0^- \in R_s^-, V_0^+ \in R_s^+,$$

$$g(s,t) = g^-(s,t) + g^+(s,t),$$

$P(s)$ və $e^{tP(s)}$ operatorları R_s^- və R_s^+ alt fəzalarında invariant olduğu üçün alırıq ki,

$$V^-(s,t)=e^{tP(s)}V_0^-(s)+\int_0^t e^{(t-\theta)P(s)}g^-(s,\theta)d\theta,$$
$$V^+(s,t)=e^{tP(s)}V_0^+(s)+\int_0^t e^{(t-\theta)P(s)}g^+(s,\theta)d\theta. \qquad (*)$$

Asanlıqla yoxlamaq olar ki, $t\to\infty$ olduqda $V^-(s,t)$ həlli R_s^- fəzasında $O(t^h)$ kimi artır (çünki bu fəzada $\operatorname{Re}\lambda_k(s)\le 0, k=0,1,...,r-1$).

İndi $V^+(s,t)$ komponentini belə yazaq:

$$V^+(s,t)=e^{tP(s)}\left[V_0^+(s)+\int_0^t e^{-\theta P(s)}g^+(s,\theta)d\theta\right]. \qquad (9)$$

Asan yoxlamaq olur ki,

$$J(s)=\int_0^\infty e^{-\theta P(s)}g^+(s,\theta)d\theta \qquad (10)$$

inteqralı sonludur və $J(s)\in R_s^+$. Onda (10) ifadəsini (9)-da nəzərə aldıqda $V^+(s,t)$ bu şəklə düşər:

$$V^+(s,t)=e^{tP(s)}\left[V_0^+(s)+J(s)\right]-\int_t^\infty e^{(t-\theta)P(s)}g^+(s,\theta)d\theta. \qquad (11)$$

Buradakı sonuncu inteqral sonludur və $t\to\infty$ olduqda

$$\left|\int_t^\infty e^{(t-\theta)P(s)}g^+(s,\theta)d\theta\right|=O(t^h)$$

olur. R_s^+-də $\operatorname{Re}\lambda_q(s)>0$ olduğu üçün $(q=r,r+1,...,m-1)$ (11)-də $e^{tP}\left[V_0^+(s)+J(s)\right]$ funksiyası $t\to\infty$ olduqda eksponensial artır (əgər $V_0^+(s)+J(s)\neq 0$-dırsa).Deməli, (11)-də $V_0^+(s)+J(s)\neq 0$ olan kimi

$V(s,t)$ həllinin $V^+(s,t)$ toplananı eksponensial olaraq artır və deməli $V(s,t)$ eksponensial artır, yəni məsələ korrekt deyil.

Nəticə. Hər qeyd olunmuş s üçün (5)-(7) məsələsinin $O(t^h)$ -dan tez artmayan həllinin varlığı üçün

$$V_0^+(s)+\int_0^\infty e^{-\theta P(s)} g^+(s,\theta)d\theta=0 \qquad (12)$$

olması zəruri şərtdir.

Qeyd. Hələlik bütün deyilənlər s parametri qeyd olunduqda ödənilir. Görəcəyik ki, bütün s-lər üçün bu şərtin ödənilməsi $\mathcal{H}_+^\beta$ sinfində korrektlik üçün zəruri şərt olur.

5. İndi görək sistem üçün korrektliyin zəruri şərti olan

$$V_0^+(s)+\int_0^\infty e^{-\theta P(s)} g^+(s,\theta)d\theta=0 \qquad (*)$$

şərti yüksək tərtibli bir tənlik halında hansı formada olur. Verilir:

$$\frac{\partial^m u}{\partial t^m}=\sum_{k=0}^{m-1} P_k\left(i\frac{\partial}{\partial x}\right)\frac{\partial^k u}{\partial t^k}; \quad (x,t>0)\ . \qquad (1)$$

Bu tənliyi sistem şəklində yazaq:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u_0}{\partial t}=u_1, \\ \dfrac{\partial u_1}{\partial t}=u_2, \\ ------------ \\ \dfrac{\partial u_{m-1}}{\partial t}=P_0\left(i\dfrac{\partial}{\partial x}\right)u_0+P_1\left(i\dfrac{\partial}{\partial x}\right)u_1+\ldots+P_{m-1}\left(i\dfrac{\partial}{\partial x}\right)u_{m-1}, \end{cases} \qquad (2)$$

Yəni

$$\frac{\partial u}{\partial t} = P\left(i\frac{\partial}{\partial x}\right)u, \tag{3}$$

$$P\left(i\frac{\partial}{\partial x}\right) = \begin{Vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & . & . & . & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & . & . & . & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . & . \\ P_0 & P_1 & . & . & . & . & . & P_{m-1} \end{Vmatrix} \tag{4}$$

Məlumdur ki, öz növbəsində (2) sistemini belə yazmaq olar:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \sum_{k=0}^{p} a_k \left(i\frac{\partial}{\partial x}\right)^k u = a_0 u + a_1\left(i\frac{\partial}{\partial x}\right)u + \ldots + a_p\left(i\frac{\partial}{\partial x}\right)^p u\,, \tag{5}$$

burada a_k-ədədi matrislərdir, (1), (2), (3) tənlikləri $x \geq 0$, $t \geq 0$ oblastında baxılır. Bütün fəzaya (yarım fəzaya $-\infty < x < \infty, t \geq 0$) davam olunduqda (4) sistemi və (1) tənliyi üçün

$$\frac{\partial^k u(0,t)}{\partial x^k} = W_k(t),\ k = 0,1,\ldots,p-1$$

sərhəd şərtləri vektor-funksiyalar olur. Onda (5) tənliyi belə alınır:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \sum_{k=0}^{p} a_k \left[\left(i\frac{\partial}{\partial x}\right)^k u - \sum_{j=0}^{k-1} W_j(t)\delta^{(k-1-j)}(x)\right].$$

Buradan, Furye çevirməsi vasitəsilə alınır ki,

$$\frac{dV(s,t)}{dt} = P(s)V(s,t) + g(s,t), \tag{6}$$

burada

$$g(s,t) = \sum_{k=0}^{p} a_k \left[W_{k-1}(t) - isW_{k-2}(t) + \ldots + (-is)^{k-1}W_0(t)\right]\,. \tag{7}$$

(5)-dəki $P(s)$ operatorunun məxsusi vektorları (yuxarıda gördüyümüz kimi) belə olur:

$$e_j = \left(1, \lambda_j, \lambda_j^2, \ldots, \lambda_j^{m-1}\right),\ j = 0,1,\ldots,m-1,$$

burada $\lambda_0(s), \lambda_1(s), \ldots, \lambda_{m-1}(s)$ ədədləri

$$\lambda^m - \sum_{k=0}^{m-1} P_k(s)\lambda^k = 0$$

xarakteristik tənliyinin kökləridir.

Məlumdur ki, ixtiyari $\xi \in R^m$, $\xi = (\xi_0,...,\xi_{m-1}) \in R^n$-vektorunu $e_0, e_1,...,e_{m-1}$ bazisi üzrə ayırmaq olar. Tutaq ki,

$$\xi = \sum_{j=0}^{m-1} \xi^j e_j .$$

Koordinatlara görə yazdıqda

$$\xi = \xi^0 e_0 + \xi^1 e_1 + ... + \xi^{m-1} e_{m-1} = \left(\xi^0, \xi^0\lambda_0, \xi^0\lambda_0^2,...,\xi^0\lambda_0^{m-1}\right) +$$
$$+ \left(\xi^1, \xi^1\lambda_1, \xi^1\lambda_1^2,...,\xi^1\lambda_1^{m-1}\right) + ... +$$
$$+ \left(\xi^{m-1}, \xi^{m-1}\lambda_{m-1}, \xi^{m-1}\lambda_{m-1}^2,...,\xi^{m-1}\lambda_{m-1}^{m-1}\right)$$

Buradan alınır ki, $\xi = (\xi_0, \xi_1,...,\xi_{m-1})$, və:

$$\begin{cases} \xi_0 = \xi^0 + \xi^1 + ... + \xi^{m-1}, \\ \xi_1 = \xi^0\lambda_0 + \xi^1\lambda_1 + ... + \xi^{m-1}\lambda_{m-1}, \\ - \\ \xi_{m-1} = \xi^0\lambda_0^{m-1} + \xi^1\lambda_1^{m-1} + ... + \xi^{m-1}\lambda_{m-1}^{m-1}. \end{cases}$$

Bu sistemdən məchul ξ^j ədədlərini təyin edirik:

$$\xi^j = \frac{1}{W(\lambda)} \begin{vmatrix} 1 & . & . & . & 1 & \xi_0 & 1 & . & . & . & 1 \\ \lambda_0 & . & . & . & \lambda_{j-1} & \xi_1 & \lambda_{j+1} & . & . & . & \lambda_{m-1} \\ - & - & - & - & - & - & - & - & - & - & - \\ \lambda_0^{m-1} & . & . & . & \lambda_{j-1}^{m-1} & \xi_{m-1} & \lambda_{j+1}^{m-1} & . & . & . & \lambda_{m-1}^{m-1} \end{vmatrix} = \qquad (9)$$

$$= \frac{(-1)^j}{W(\lambda)} \left[\xi_0 W_{j0} - \xi_1 W_{j1} + ... + (-1)^{m-1} \xi_{m-1} W_{j,m-1}\right],$$

burada $W(\lambda)$ ilə $\lambda_0(s),...,\lambda_{m-1}(s)$ kəmiyyətlərinin Vandermond determenantı, W_{jk} isə onun minorudur ($j,k = 0,1,...,m-1$). Xüsusi halda, $V(s,0)=(V_0(s),V_1(s),...,V_{m-1}(s))$ vektoru hər s üçün R^m fəzasının elementi kimi belə ayrılar:

$$V(s,0)=\sum_{j=0}^{m-1} V^j e_j,$$

V^j əmsalları s-dən asılı funksiyalardır, $V^j=V^j(s)$. Onda (9)-a əsasən $V^j(s)$ üçün alırıq ki,

$$V^j(s)=$$

$$\frac{(-1)^j}{W(\lambda)}\left[V_0(s)W_{j_0}-V_1(s)W_{j_1}+...+(-1)^{m-1}V_{m-1}(s)W_{j,m-1}\right] \quad (10)$$

Analoji qayda ilə verilən

$$\bar{g}(s,t)=(0,0,...,g(s,t))$$

vektorunu belə ayırmaq olar.

$$\bar{g}(s,t)=\sum_{j=0}^{m-1} g^j(s,t)e_j$$

buradan tapırıq ki,

$$g^j(s,t)=\frac{(-1)^j}{W(\lambda)}W_{j,m-1}\,g(s,t). \quad (11)$$

Nəzərə alsaq ki, $e^{tP(s)}$ operatorunun e_j bazis vektoruna təsiri $e^{t\lambda_j(s)}e_j$ şəklində olur, sistem üçün aldığımız zəruri şərti:

$$V_0^+(s)+\int_0^\infty e^{-\theta P(s)}g^+(s,\theta)d\theta=0 \quad (12)$$

teoremə uyğun şəklə salaq. Bunun üçün (12)-də $V_0^+(s)$ və $g^+(s,\theta)$ vektorlarını $e_r,e_{r+1},...,e_{m-1}$ üzrə ayrılışını yazaq (çünki hər s üçün $V_0^+(s)\in R_s^+$, $g^+(s,\theta)\in R_s^+$ və R_s^+ fəzasında $e_r,e_{r+1},...,e_{m-1}$ bazisdir)

$$V_0^+(s)=\sum_{q=r}^{m-1} V^q(s)e_q, \quad \bar{g}^+(s,t)=\sum_{q=r}^{m-1} g^q(s,t)e_q .$$

Bunları (12)-də yerinə yazdıqda alırıq:

$$\sum_{q=r}^{m-1} V^q(s)e_q + \int_0^{\infty} e^{-\theta\lambda_q(s)} g^q(s,\theta)d\theta e_q = 0,$$

buradan çıxır ki,

$$V^q(s)+\int_0^{\infty} e^{-\theta\lambda_q(s)} g^q(s,\theta)d\theta_q = 0 \quad (q=r,r+1,...,m-1). \qquad (13)$$

İndi $V^q(s)$ və $g^q(s,\theta)$ üçün yuxarıda tapılan (10) v ə (11) ifadələrini (13)-də yerinə yazaq. Onda alarıq:

$$\frac{(-1)^q}{W(\lambda)}\left[V_0(s)W_{q,0} - V_1(s)W_{q,1} + ... + (-1)^{m-1}V_{m-1}(s)W_{q,m-1}\right]+$$

$$+\int_0^{\infty} e^{-\theta\lambda_q(s)} \frac{(-1)^q}{W(\lambda)} W_{q,m-1}\, g(s,\theta)d\theta = 0,$$

buradan alınır ki,

$$\frac{W_{q,0}}{W_{q,m-1}}V_0(s) - \frac{W_{q,1}}{W_{q,m-1}}V_1(s) + ... + (-1)^{m-1}\frac{W_{q,m-1}}{W_{q,m-1}}V_{m-1}(s) =$$
$$= (-1)^m \int_0^{\infty} e^{-\theta\lambda_q(s)} g(s,\theta)d\theta \qquad (q=r,r+1,...,m-1). \qquad (14)$$

Bu bərabərliyin sol tərəfi H_+^β fəzasına daxildir, yəni $\mathrm{Im}\, s > \beta$ olduqda analitik funksiya olub $|s| \to \infty$ olduqda $|s|^p$ kimi artan analitik funksiyadır, çünki, şərtə görə $V_0(s), V_1(s), ..., V_{m-1}(s)$-başlanğıc vektorun komponentləri H_+^β fəzasına daxildir. Digər tərəfdən

$$\frac{W_{q,j}}{W_{q,m-1}} \quad (j=0,1,...,m-1)$$

nisbəti $\lambda_0(s),...,\lambda_{m-1}(s)$-ədədlərindən asılı kəmiyyətlərdir, $\lambda_0(s),...,\lambda_{m-1}(s)$ kökləri isə s-ə nəzərən $|s|^{m-1}$-dən tez artmır. Deməli (14)-də sol tərəfdəki cəmin hər bir toplananı H_+^β fəzasına daxildir. İndi (14)-ün sağ tərəfinə baxaq.

$$G_q(s)=\int_0^\infty e^{-\theta\lambda_q(s)}g(s,\theta)d\theta, \qquad (q=r,r+1,...,m-1)$$

funksiyası (inteqralı) $\operatorname{Im}s>\beta$ müstəvisində $\operatorname{Re}\lambda_q(s)>0$ olduqda yığılır və analitik funksiyalardır. (14) bərabərliyi onu göstərir ki, sol tərəf bütün $\operatorname{Im}s>\beta$ yarımmüstəvisində analitik funksiya olduğundan gərək $G_q(s)$ də belə bir xassəyə malik funksiya olsun. Başqa sözlə $\operatorname{Re}\lambda_q(s)>0$ $\operatorname{Im}s>\beta$ müstəvisinin $\operatorname{Re}\lambda_q(s)>0$ oblastında analitik olan $G_q(s)$ gərək $\operatorname{Im}s>\beta$ müstəvisinin $\operatorname{Re}\lambda_q(s)\le 0$ olan hissəsinə elə davam olsun ki, nəticədə alınan funksiya analitik olsun və həm də H_+^β fəzasına daxil olsun.

Beləliklə, (1)-(2)-(3) məsələsinin $\mathcal{H}_+^\beta$ fəzasında korrekt olması üçün zəruri və kafi şərt *a* priori $\operatorname{Im}s>\beta$, $\operatorname{Re}\lambda_q(s)>0$ oblastında yığılan $G_q(s)$ inteqralı bütün $\operatorname{Im}s>\beta$ yarımmüstəvisinə elə analitik davam olunan olmasıdır ki, nəticədə alınan funksiya H_+^β fəzasından olsun.

6. İndi kafi şərtin isbatını verək.Fərz edək ki,

$$\frac{\partial^m u(x,t)}{\partial t^m}=\sum_{k=0}^{m-1}P_k\left(i\frac{\partial}{\partial x}\right)\frac{\partial^k u(x,t)}{\partial t^k} \qquad (15)$$

tənliyi,

$$W_0(t)=u(t,0),\ W_1(t)=\frac{\partial u(0,t)}{\partial t},...,W_{p-1}(t)=\frac{\partial^{p-1}u(0,t)}{\partial x^{p-1}} \qquad (16)$$

-sərhəd şərtləri və

$$u_0(t)=u(x,0),\ u_1(x)=\frac{\partial u(x,0)}{\partial t},...,u_{r-1}(x)=\frac{\partial^{r-1}u(x,0)}{\partial t^{r-1}} \qquad (17)$$

-başlanğıc şərtləri verilir. Tutaq ki, $g(s,t)$ belə təyin olunur:

$$g(s,t)=\sum_{k=0}^{m-1} Q_j\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)\left[W_{j-1}(t)-isW_{j-2}(t)+\ldots+(-is)^{j-1}W_0(t)\right]. \quad (18)$$

Fərz edək ki,

$$G_j(s)=(-1)^m\int_0^{\infty} e^{-\theta\lambda_j(q)}g(s,\theta)d\theta, \qquad (j=r,r+1,\ldots,m-1) \quad 19)$$

funksiyaları $\operatorname{Im} s>\beta$ müstəvisində analitik olub H_+^{β} fəzasının elementləridir. Göstərək ki, onda (1)-(2)-(3) məsələsi $\mathcal{H}_+^{\beta}$ fəzasında korrektdir.

1^0. Əvvəlcə göstərək ki, (14) düsturunun köməyi ilə hər bir s nöqtəsində $V(s,0)$ başlanğıc vektorunun $V_r(s),\ldots,V_{m-1}(s)$ komponentlərini onun qalan $V_0(s),\ldots,V_{r-1}(s)$ komponentləri və $G_j(s)$ funksiyaları vasitəsilə birqiymətli tapmaq olur. Doğrudan da, (14) münasibətini bu şəkildə yazaq:

$$\begin{aligned}&Q_{j0}V_0-Q_{j1}V_1+\ldots+(-1)^{m-1}Q_{j,m-1}V_{m-1}=\\&=G_j(s),\ (j=r,r+1,\ldots,m-1)\end{aligned}, \quad (20)$$

burada

$$Q_{j,k}=\frac{W_{j,k}}{W_{j,m-1}}.$$

Bundan əlavə yuxarıda (p.5) həm də gördük ki,

$$\begin{aligned}&V(s,0)=(V_0(s),\ldots,V_{r-1}(s))=\sum_{j=0}^{m-1}V^je_j,\ e_j=\\&=\left(1,\lambda_j,\lambda_j^2,\ldots,\lambda_j^{m-1}\right),\end{aligned} \quad (21)$$

ayrılışında V^j əmsalları üçün belə ifadə alınır:

$$V^j(s)=-\int_0^{\infty} e^{-\theta\lambda_j(s)}g^j(s,\theta)d\theta=\frac{(-1)^{m+j}}{W(\lambda)}W_{j,m-1}G_j(s)\ . \quad (22)$$

Şərtə görə $G_j(s)\in H_+^\beta$ və $Q_{j,m-1}\in H_+^\beta$. Deməli buradan çıxır ki, $V^j(s)\in H_+^\beta$, $(j=r,r+1,...,m-1)$.

İndi $V^0,V^1,...,V^{r-1}$ əmsallarını tapaq. Bunun üçün (21) ayrılışını koordinatlara görə yazaq:

$$\begin{cases} V_0=V^0+V^1+...+V^{m-1}, \\ V_1=V^0\lambda_0+V^1\lambda_1+...+V^{m-1}\lambda_{m-1}, \\ ------------------------ \\ V_{r-1}=V^0\lambda_0^{r-1}+V^1\lambda_1^{r-1}+...+V^{m-1}\lambda_{m-1}^{r-1}, \\ ------------------------ \\ V_{m-1}=V^0\lambda_0^{m-1}+V^1\lambda_1^{m-1}+...+V^{m-1}\lambda_{m-1}^{r-1} \end{cases} \tag{23}$$

Əvvəlcə bu sistemin ilk r tənliyinə baxaq:

$$\begin{cases} V_0=V^0+V^1+...+V^{m-1}, \\ V_1=V^0\lambda_0+V^1\lambda_1+...+V^{m-1}\lambda_{m-1}, \\ ------------------------ \\ V_{r-1}=V^0\lambda_0^{r-1}+V^1\lambda_1^{r-1}+...+V^{m-1}\lambda_{m-1}^{r-1}, \end{cases} \tag{24}$$

$\operatorname{Im} s>\beta$ müstəvisində bu sistemin determinantı 0-dan fərqli olduğundan alırıq ki, $\operatorname{Im} s>\beta$ müstəvisində $V^0,V^1,...,V^{r-1}$ kəmiyyətlərini $V_0,V_1,..,V_{r-1}$ və $V^r,V^{r+1},...,V^{m-1}$ vasitəsilə birqiymətli olaraq ifadə etmək olar (sonuncular isə (22) bərabərliyi vasitəsilə $V_0,V_1,..,V_{r-1}$ və $G_r(s),...,G_{m-1}(s)$ vasitəsilə ifadə olunurlar). Deməli nəticədə $V^0,V^1,...,V^{r-1}$ kəmiyyətləri $V_0,V_1,..,V_{r-1}$ və $G_r(s),...G_{m-1}(s)$ vasitəsilə birqiymətli təyin olunmuş olur.

Buradan aydın olur ki, $V_0,V_1,..,V_{r-1}\in H_+^\beta$ olduqda həm də $V^0,V^1,...,V^{r-1}\in H_+^\beta$ olar.

İndi (8) sisteminin sonuncu $m-r$ sayda tənliklərini götürüb analoji çevirmələri aparsaq axtarılan $V_r,..,V_{m-1}$ funksiyalarını $V_0,...,V_{m-1}$ və $G_r(s),...,G_{m-1}(s)$ funksiyaları vasitəsilə birqiymətli təyin etmək olur və nəticədə alınır ki, $V_r(s),..,V_{m-1}(s)\in H_+^\beta$.

Nəticə. $V_0(s),..,V_{r-1}(s)$ məlum olduqda və $G_r(s),...,G_{m-1}(s)$ funksiyaları $\operatorname{Im} s>\beta$ müstəvisində H_+^β fəzasına daxil olan məlum funksiyalar olduqda onlar vasitəsilə $V(\sigma,0)$ başlanğıc vektorunun $V_r(s),..,V_{m-1}(s)$ komponentlərini birqiymətli olaraq təyin etmək mümkündür.

Hər qeyd olunmuş s üçün bilirik ki, məsələnin həlli $V_0(s),..,V_{r-1}(s)$ funksiyaları və $g(s,t)$ vasitəsilə belə düstur şəklində yazılır:

$$V(s,t)=e^{tP(s)}\{V(\sigma,0)+\int_0^t e^{-\theta P(\sigma)}g(s,\theta)d\theta\ \}\ . \tag{25}$$

Şərtə görə

$$V(\sigma,0)=V_0^+(\sigma)+V_0^-(\sigma)$$

və

$$V_0^+(s)+J(\sigma)=V_0^+ +\int_0^\infty e^{-\theta P(\sigma)}g^+(s,\theta)d\theta=0. \tag{26}$$

Bunu nəzərə alsaq (25) bu şəkli alar:

$$V(s,t)=e^{tP(s)}\left\{V_0^+(s)+\int_0^\infty e^{-\theta P(\sigma)}g^+(s,\theta)d\theta\right\}-$$
$$-\int_t^\infty e^{(t-\theta)P(\sigma)}g^+(s,\theta)d\theta. \tag{27}$$

(11) düsturundan görünür ki, $V(s,t)$ funksiyası (hər bir t üçün) $\operatorname{Im} s>\beta$ müstəvisində analitik funksiyadır. İndi göstərək ki, bu funksiya s-in funksiyası kimi H_+^β fəzasına daxildir və t-yə nəzərən $O\left(t^h\right)$ kimi artır.

Biz yuxarıda (§5) gördük ki,

$$\frac{d^m V(\sigma,t)}{dt^m} - \sum_{k=0}^{m-1} P_k(\sigma)\frac{d^k V(\sigma,t)}{dt^k} = g(\sigma,t) \tag{28}$$

tənliyi verildikdə, əgər

$$G_r(\sigma) = \{\sigma \in R^n ; \mathrm{Re}\,\lambda_{r-1}(\sigma) \le 0 < \mathrm{Re}\,\lambda_r(\sigma)\}$$

oblastında

$$V_0(\sigma),\ldots,V_{m-1}(\sigma) \in H$$

başlanğıc funksiyaları verilibsə, belə ki, $F[u_j(x)] = V_j(\sigma) \in H(G_j)$, və aşağıdakı münasibətlər ödənilirsə,

$$Q_{j0}V_0 - Q_{j1}V_1 + \ldots + (-1)^{m-1} Q_{j,m-1} V_{m-1} = (-1)^m \int_0^\infty e^{-\theta\lambda_j(\sigma)} g(\sigma,\theta)d\theta,$$

onda həmin tənliyin (hər s üçün!) həlli var və onun üçün aşağıdakı bərabərsizlik ödənilir:

$$\begin{aligned} |V(s,t)| \le {} & ct^{m-2}\int_0^t |g(s,\theta)|d\theta + \\ & + c\int_t^\infty |\theta + t|^{m-1} e^{-\theta \mathrm{Re}\,\lambda_r(s)} |g(s,\theta + t)|d\theta + \\ & + c(1+t)^m (1+|s|)^{m(p-1)} \sum_{k=0}^{r-1} |V_k(s)|. \end{aligned} \tag{29}$$

Aşkardır ki, $\mathrm{Im}\,s > \beta$ yarımmüstəvisini sonlu sayda G_k oblastlarının cəmi şəklində yazmaq olar, belə ki, hər bir G_k oblastında xarakteristik tənliyin $\lambda_0(s),\ldots,\lambda_{m-1}(s)$ kökləri ($\mathrm{Im}\,s > \beta$) öz işarələrini saxlayır. Deməli (29) qiymətlənməsi hər bir G_k oblastında ödənildiyi üçün, o, bütün $\mathrm{Im}\,s > \beta$ müstəvisində ödənilir. Sağ tərəf də $\mathrm{Im}\,s > \beta$ olduqda hər bir toplanan $|s|$-in dərəcəsindən tez artmır və analitikdir, həm də $O(t^h)$ kimi artan funksiyadır. Deməli $V(s,t) \in H_+^\beta$. Teorem isbat olundu.

§ 7. Yarımfəzada requlyar sərhəd məsələsinin fundamental həlli.

Belə bir tənliyə baxaq:

$$\frac{\partial^m u(x,t)}{\partial t^m} = \sum_{k=0}^{m-1} P_k\left(i\frac{\partial}{\partial x}\right)\frac{\partial^k u(x,t)}{\partial t^k}, \quad -\infty < x < \infty, \; t \geq 0, \qquad (1)$$

$$\frac{\partial^k u(x,0)}{dt^k} = u_k(x), \; k = 0,1,\dots,r-1. \qquad (2)$$

Furye çevirməsini tətbiq etdikdə alırıq:

$$\frac{d^m V(\sigma,t)}{dt^m} = \sum_{k=0}^{m-1} P_k(\sigma)\frac{d^k V(\sigma,t)}{dt^k}, \quad \frac{d^k V}{dt^k}/_{t=0} = . \qquad (3)$$

$$= V_k(\sigma), \; k = 0,\dots,r-1$$

Xarakteristik tənlik:

$$\lambda^m = \sum_{k=0}^{m-1} P_k(\sigma)\lambda^k .$$

Tərif. (1) tənliyi o zaman requlyar tənlik adlanır ki, xarakteristik tənliyin kökləri $\lambda_0(\sigma),\dots,\lambda_{r-1}(\sigma)$ bütün σ-lar üçün $\operatorname{Re}\lambda_j(\sigma) \leq 0$ və (ya $\leq const$) olur, $r = 0,1,\dots,m-1$. Başqa sözlə, bu köklər öz işarələrini dəyişmirlər ($\sigma \in R$). Requlyar (1) tənlikləri üçün yarımfəzada korrekt məsələlərin alınması üçün $u_0(x),\dots,u_{r-1}(x)$ başlanğıc şərtləri verilməlidir. Məlum klassik tənliklər-istilikkeçirmə tənliyi, dalğa tənliyi, Laplas tənliyi-requlyar tənliklərə misal ola bilər. Bundan əlavə, məsələn,

$$1^0. \frac{\partial^4 u}{\partial t^4} = \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} \; (m = 4, r = 3)$$

$$2^0. \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \; (m = 4, r = 2)$$

tənlikləri də requlyar tənliklərdir. Məsələn, 1^0 tənliyini yoxlayaq. Burada xarakteristik tənlik belə olur, $\lambda^4 = \sigma^4$.

$$\left(\lambda^2 - \sigma^2\right)\left(\lambda^2 + \sigma^2\right) = 0, \; \lambda_{0,1} = \pm|\sigma|, \lambda_{2,3} = \pm i|\sigma|.$$

Deməli hər yerdə $\operatorname{Re}\lambda_0 = -|\sigma| \le 0$, $\operatorname{Re}\lambda_{2,3} = 0$; $\operatorname{Re}\lambda_1(\sigma) > 0$. Əgər $r = m$ olarsa, (1) tənliyi Petrovski mənada korrekt tənlik adlanır. Bu cür tənliklər üçün korrekt məsələ Koşi məsələsidir. Deməli (1) tənliyi üçün

$$u/_{t=0} = u_0(x),\ \frac{\partial u}{\partial t}/_{t=0} = u_1(x),\ldots,\frac{\partial^{m-1} u}{\partial t^{m-1}}/_{t=0} = u_{m-1}(x)$$

başlanğıc şərtləri ixtiyari qayda ilə verildikdə alınan Koşi məsələsi müəyyən $\mathcal{H}$ sinfində korrekt məsələ olur, r ədədi requlyarlıq göstəricisi adlanır.

Əgər elə $E(x,t)$ varsa ki, o, (1) tənliyini və aşağıdakı başlanğıc şərtlərini ödəyir:

$$\begin{cases} E(x,0) = 0, \\ \dfrac{\partial E(x,0)}{\partial t} = 0, \\ ---------- \\ \dfrac{\partial^{r-2} E(x,0)}{\partial t^{r-2}} = 0, \\ \dfrac{\partial^{r-1} E(x,0)}{\partial t^{r-1}} = \delta(x), \end{cases} \tag{4}$$

onda $E(x,t)$ funksiyası (1)-(2) Koşi məsələsinin fundamental həlli (Qrin funksiyası) adlanır. Onda $E(x,t) \in \mathcal{H}$ olur və $\forall f \in \mathcal{H}$ üçün $E * f \in \mathcal{H}$ olur. Furye çevirməsini (1) və (2) məsələsinə tətbiq etməklə alırıq:

$$\frac{d^m V(\sigma,t)}{dt^m} = \sum_{k=0}^{m-1} P_k(\sigma)\frac{d^k V(\sigma,t)}{dt^k}, \tag{5}$$

$$V(\sigma,0) = 0,\ \frac{dV(\sigma,0)}{dt} = 0,\ldots,\frac{d^{r-2}V(\sigma,0)}{dt^{r-2}} = 0,\ \frac{d^{r-1}V(\sigma,0)}{dt^{r-1}} = 1\ . \tag{6}$$

Əgər (1)-(2) məsələsindən alınan (3) Koşi məsələsi korrektdirsə, onda məlumdur ki, həmişə başlanğıc vektorun $V_r(\sigma),...,V_{m-1}(\sigma)$ komponentlərini $V_0(\sigma),...,V_{r-1}(\sigma)$ vasitəsilə birqiymətli olaraq tapmaq olur, belə ki,

$$V_s(\sigma)=\sum_{k=0}^{r-1} V_k(\sigma)R_{ks}(\lambda_0(\sigma),...,\lambda_{r-1}(\sigma)),\ (s=r,r+1,...,m-1),$$

burada R_{ks} funksiyaları $|\sigma| \to \infty$ olduqda $|\sigma|^h$ kimi artır. Buna uyğun olaraq (6)-da olan başlanğıc vektorun $V_r(\sigma),...,V_{m-1}(\sigma)$ komponentlərini $V_0(\sigma),...,V_{r-1}(\sigma)$ vasitəsilə tapmaq olur:

$$\frac{d^j V(\sigma,0)}{dt^j}=R_{r-1,j}\ (\lambda_0(\sigma),...,\lambda_{r-1}(\sigma)),\ j=r,r+1,...,m-1.$$

Deməli nəticədə (3) tənliyinin

$$\frac{d^k V(\sigma,0)}{dt^k}=V_k(\sigma),\quad k=0,1,...,m-1 \tag{4'}$$

başlanğıc şərtini ödəyən həlli var və bu həll birqiymətli tapılır.

Əgər $(4')$-də başlanğıc vektoru

$$W_0(\sigma)=\{V_0(\sigma),V_1(\sigma),...,V_{m-1}(\sigma)\}$$

işarə etsək, onda (3)- $(4')$-in həlli

$$W(\sigma,t)=e^{tP(s)}W_0(\sigma)$$

olur. Əgər

$$\left\|e^{tP(\sigma)}\right\| \le e^{tP(\sigma)}\left[1+2t(1+|\sigma|)^p+...+\frac{(2t)^{m-1}}{(m-1)!}(1+|\sigma|)^{p(m-1)}\right]=$$

$$=Q(\sigma,t)$$

olduğunu nəzərə alsaq

$$\|W(\sigma,t)\| \le \left\|e^{tP(\sigma)}\right\| \|W_0(\sigma)\| \le Q(\sigma,t)\cdot\|W_0(\sigma)\|.$$

Sağ tərəf $|\sigma| \to \infty$ olduqda $\leq |\sigma|^p$ olur (hər t üçün).Deməli $W(\sigma,t) \in H$. Onda $u(x,t) \in \mathcal{H}$.

Təklif. $G(x,t)$ fundamental həll olduqda

$$\frac{\partial^m u}{\partial t^m} = \sum_{k=0}^{m-1} P_k\left(i\frac{\partial}{\partial x}\right)\frac{\partial^k u}{\partial t^k},$$

$$u(x,0) = u_0(x), \dots, \frac{\partial^{r-1} u(x,0)}{\partial t^{r-1}} = u_{r-1}(x).$$

Ümumi Koşi məsələsinin həlli aşağıdakı düsturla verilir:

$$u(x,t) = G(x,t) * f_0(x) + \frac{\partial G}{\partial t} * f_1(x) + \dots + \frac{\partial^{r-1} G}{\partial t^{r-1}} * f_{r-1}(x), \quad (*)$$

burada $f_0(x), \dots, f_{r-1}(x) \in \mathcal{H}$ olan naməlum müəyyən funksiyalardır (az sonra bu funksiyalar təyin ediləcəkdir).

Əvvəlcə göstərək ki, $(*)$ düsturu ilə təyin edilən $u(x,t)$ (1) tənliyinin həllidir. Məsələn, toplananlardan birini yoxlayaq. Bükülmənin xassəsinə əsasən alırıq ($F = \frac{\partial^j G}{\partial t^j} * f_j$ işarə edək, $j = 0,1,..,r-1$):

$$\frac{\partial^m}{\partial t^m} F = \frac{\partial^m}{\partial t^m}\left[\frac{\partial^j G}{\partial t^j} * f_j\right] = \frac{\partial^j}{\partial t^j}\left[\frac{\partial^m G}{\partial t^m}\right] * f_j =$$

$$= \frac{\partial^j}{\partial t^j}\left[\sum_{k=0}^{m-1} P_k\left(i\frac{\partial}{\partial x}\right)\frac{\partial^k G}{\partial t^k}\right] * f_j =$$

$$= \sum_{k=0}^{m-1} P_k\left(i\frac{\partial}{\partial x}\right)\frac{\partial^k}{\partial t^k}\left(\frac{\partial^j G}{\partial t^j} * f_j\right) = \sum_{k=0}^{m-1} P_k\left(i\frac{\partial}{\partial x}\right)\frac{\partial^k}{\partial t^k} F,$$

yəni F toplananı (1) tənliyinin həllidir. Onda cəm də (1)-in həlli olar.

İndi $(*)$ tfadəsini diferensiallayaq və hər dəfə də $t = 0$ götürək. Onda, $G(x,t)$ fundamental həlli üçün

$$\frac{d^k G(x,0)}{dt^k}=0,\quad 0\le k\le r-2,\quad \frac{d^{r-1}G(x,0)}{dt^{r-1}}=\delta(x),$$

olduğunu nəzərə aldıqda, alırıq:

$$u(x,0)=f_{r-1}(x)$$

$$\frac{\partial u(x,0)}{\partial t}=f_{r-2}(x)+\frac{\partial^2 G(x,0)}{\partial t^2}*f_{r-1}(x)$$

$$\frac{\partial^{r-2}u(x,0)}{\partial t^{r-2}}=f_1(x)+\frac{\partial^r G(x,0)}{\partial t^2}*f_2(x)+\ldots+\frac{\partial^{2r-3}G(x,0)}{\partial t^{2r-2}}*f_{r-1}(x)$$

$$\frac{\partial^{r-1}u(x,0)}{\partial t^{r-1}}=f_0(x)+\frac{\partial^r G(x,0)}{\partial t^r}*f_1(x)+\ldots+\frac{\partial^{2r-3}G(x,0)}{\partial t^{2r-2}}*f_{r-1}$$

Bu sistemdən ardıcıl olaraq $f_{r-1}(x), f_{r-2}(x),\ldots, f_0(x)$ tapılır.

Məsələn,

$$f_{r-1}(x)=u_0(x),$$

$$f_{r-2}(x)=u_1(x)-\frac{\partial^2 G(x,0)}{\partial t^r}*u_0(x),$$

$$f_0(x)=u_{r-1}(x)-\frac{\partial^r G(x,0)}{\partial t^r}*u_{r-2}+\ldots+\frac{\partial^{2r-2}G(x,0)}{\partial t^{2r-2}}*u_0.$$

Misal 1. İstilikkeçirmə tənliyinə baxaq:

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \tag{1}$$

burada $\lambda=-\sigma^2\le 0$, deməli $r=1$. Onda $u/_{t=0}=u_0(x)$ verilir. Furye çevirməsini tətbiq edib

$$\frac{dV(\sigma,t)}{dt} = -\sigma^2 V(\sigma,t),\ V|_{t=0} = V_0(\sigma) \tag{2}$$

alırıq. Fundamental həll $E(x,t)$ belə olur:

$$\frac{\partial E}{\partial t} = \frac{\partial^2 E}{\partial x^2}, \qquad E/_{t=0} = \delta(x).$$

Furye çevirməsi vasitəsilə alırıq:

$$\frac{d\widetilde{E}(\sigma,t)}{dt} = -\sigma^2 \widetilde{E}(\sigma,t), \widetilde{E}(\sigma,0) = 1,$$

buradan

$$\widetilde{E}(\sigma,t) = e^{-t\sigma^2}$$

tapırıq. Deməli fundamental həll belə olur:

$$E(x,t) = F^{-1}\left[e^{-t\sigma^2}\right] = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4t}}.$$

Onda (1) Koşi məsələsinin həlli belə olur:

$$u(x,t) = E(x,t) * u_0(x) \ . \tag{3}$$

Əgər $u_0(x)$ adi funksiya olarsa, onda bu düstur bu şəkli alar:

$$u(x,t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4t}} u_0(\xi) d\xi. \tag{4}$$

Bu - klassik Puasson düsturudur.

Qeyd. (2) məsələsinin həlli belədir:

$$V(\sigma,t) = e^{-t\sigma^2} V_0(\sigma).$$

Buradan tərs Furye çevirməsi vasitəsilə də (3) həlli alınır.

Misal 2. Dalğa tənliyi.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} . \quad (1)$$

Burada $\lambda^2 = -\sigma^2, \lambda_{0,1} = \pm i|\sigma|$, $\operatorname{Re}\lambda_{0,1} = 0; r = 2$.

Onda verilməlidir:

$$u/_{t=0} = u_0(x), \frac{\partial u}{\partial t}/_{t=0} = u_1(x); \ u(x,t), u_0, u_1 \in \mathcal{H} \quad (2)$$

(1)-(2) Koşi məsələsinin fundamental həlli $E(x,t)$:

$$\frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 E}{\partial x^2}, \ E/_{t=0} = 0, \frac{\partial E}{\partial t}/_{t=0} = \delta(x). \quad (3)$$

Buradan Furye çevirməsi vasitəsilə alınır ki, $\left(\widetilde{E}(\sigma,t) = F[E]\right)$.

$$\widetilde{E}'' + \sigma^2 \widetilde{E} = 0, \ \widetilde{E}/_{t=0} = 0, \frac{d\widetilde{E}}{dt}/_{t=0} = 1. \quad (4)$$

Xarakteristik tənlik:

$$\lambda^2 + \sigma^2 = 0, \lambda = \pm i|\sigma|$$

olduğundan $\widetilde{E}'' + \sigma^2 \widetilde{E} = 0$ tənliyinin ümumi həlli

$$\widetilde{E}(\sigma,t) = c_1 e^{it|\sigma|} + c_2 e^{-it|\sigma|} \quad (5)$$

olar. Lakin başlanğıc şərtləri nəzərə alındıqda

$$c_1 = -c_2 = \frac{1}{2i|\sigma|}.$$

$$\widetilde{E}(\sigma,t) = \frac{1}{2i|\sigma|}\left[e^{it|\sigma|} + e^{-it|\sigma|}\right] = \frac{\sin|\sigma|t}{|\sigma|} = \frac{\sin t\sigma}{\sigma} .$$

Buradan alırıq:

$$\sigma\widetilde{E}(\sigma,t) = \sin t\sigma,$$

yəni

$$\sigma F[E(x,t)] = \sin t\sigma . \tag{6}$$

Furye çevirməsinin xassəsinə görə

$$F\left[-i\frac{\partial}{\partial x}E(x,t)\right] = \sigma F[E(x,t)].$$

Onda (6) belə olur:

$$F\left[-i\frac{\partial}{\partial x}E(x,t)\right] = \sin t\sigma . \tag{7}$$

Asan görmək olur ki,

$$F\left[\frac{\delta(x-t)-\delta(x+t)}{2i}\right] = \sin t\sigma .$$

Doğrudan da, məlumdur ki,

$$F[\delta(x-t)] = e^{it\sigma}, F[\delta(x+t)] = e^{-it\sigma},$$

(çünki, tərifə görə, $\forall \varphi \in D$ üçün,

$$\langle F[\delta(x-t)], F[\varphi]\rangle = 2\pi\langle \delta(x-t), \varphi\rangle = 2\pi\varphi(t) =$$

$$= 2\pi\left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\phi(\sigma)e^{-it\sigma}\,d\sigma\right] = \left\langle e^{it\sigma}, F[\varphi]\right\rangle,$$

buradan $F[\delta(x-t)] = e^{it\sigma}$).

Beləliklə (7) bu şəkli alır:

$$F\left[-i\frac{\partial}{\partial x}E(x,t)\right] = F\left[\frac{\delta(x-t)-\delta(x+t)}{2i}\right].$$

buradan

$$\frac{\partial}{\partial x}E(x,t) = \frac{1}{2}[\delta(x+t)-\delta(x-t)]. \tag{8}$$

Lakin

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\theta(x+t)-\theta(x-t)}{2}\right]=\frac{1}{2}[\delta(x+t)-\delta(x-t)]$$

olduğu nəzərə alındıqda və

$$\frac{1}{2}[\theta(x+t)-\theta(x-t)]=\begin{cases}\frac{1}{2}, & -t<x<t,\\ 0, & x\notin(-t,t).\end{cases}$$

olduğunu nəzərə aldıqda (8)-dən alırıq ki,

$$E(x,t)=\frac{1}{2}[\theta(x+t)-\theta(x-t)]=\begin{cases}\frac{1}{2}, & |x|<t,\\ 0, & |x|\geq t.\end{cases} \tag{9}$$

Belə olduqda ümumi qaydaya uyğun olaraq elə f_0 və f_1 funksiyaları var ki, (1)-(2) Koşi məsələsinin həlli belə yazılır:

$$u(x,t)=E(x,t)*f_0(x)+\frac{\partial E(x,t)}{\partial t}*f_1(x), \tag{10}$$

(9) ifadəsindən alırıq ki,

$$\frac{\partial E}{\partial t}=\frac{1}{2}[\delta(x+t)+\delta(x-t)],$$

$$\frac{\partial^2 E}{\partial t^2}=\frac{1}{2}[\delta'(x+t)-\delta'(x-t)].$$

Buradan

$$\frac{\partial^2 E}{\partial t^2}/_{t=0}=0, \quad \frac{\partial E}{\partial t}/_{t=0}=\delta(x).$$

Bunlar nəzərə alındıqda (10) ifadəsindəki $f_0(x)$ və $f_1(x)$ belə tapılır:

$$u_0(x) = f_1(x)\ ,$$

$$u_1(x) = f_0(x) + \frac{\partial^2 E(x,0)}{\partial t^2} * u_0(x) = f_0(x).$$

Beləliklə (1)-(2) məsələsinin həlli bu şəkildə alınır:

$$u(x,t) = E(x,t) * u_1(x) + \frac{\partial E(x,t)}{\partial t} * u_0(x), \tag{11}$$

burada

$$E(x,t) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & |x| < t, \\ 0, & |x| \geq t. \end{cases}$$

$$\frac{\partial E}{\partial t} = \frac{1}{2}[\delta(x+t) + \delta(x-t)].$$

Əgər $u_0(x)$ və $u_1(x)$-adi funksiyalar olarsa, onda (11) düsturu bu şəkildə yazılar:

$$u(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} E(\xi,t)u_1(x-\xi)d\xi + \frac{\partial E(\xi,t)}{\partial t}u_0(x-\xi)d\xi =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} u_1(x-\xi)d\xi + \frac{1}{2}[\delta(x+t) * u_0 + \delta(x-t) * u_0] =$$

$$= \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} u_1(\xi)d\xi + \frac{1}{2}[u_0(x-t) + u_0(x+t)],$$

yəni

$$u(x,t) = \frac{u_0(x-t) + u_0(x+t)}{2} + \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} u_1(\xi)d\xi.$$

Bu –klassik Dalamber düsturudur.

Misal 3. Laplas tənliyi.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0. \tag{1}$$

Burada $\lambda^2=\sigma^2$, $\lambda=\pm|\sigma|$, $r=1$. Deməli yalnız

$$u/_{t=0}=u_0(x) \tag{2}$$

başlanğıc şərti verilməlidir (Dirixle məsələsi).

(1)-(2) Koşi məsələsinin fundamental həlli

$$\frac{\partial^2 E}{\partial t^2}+\frac{\partial^2 E}{\partial x^2}=0, \quad E/_{t=0}=\delta(x)$$

şərtini ödəyən $E(x,t)$ funksiyasına deyilir.Buradan tapırıq:

$$\frac{\partial^2 \widetilde{E}(\sigma,t)}{\partial t^2}=\sigma^2\widetilde{E}(\sigma,t), \quad \widetilde{E}(\sigma,t)/_{t=0}=1.$$

Bu tənliyin ümumi həlli

$$\widetilde{E}(\sigma,t)=c_1e^{-t|\sigma|}+c_2e^{t|\sigma|}.$$

Lakin $\widetilde{E}(\sigma,t)\in H$ olması üçün gərək $c_2=0$ götürülsün. Onda alırıq:

$$\widetilde{E}(\sigma,t)=e^{-t|\sigma|}.$$

Tərs Furye çevirməsini tətbiq etməklə (1)-(2) Koşi məsələsinin fundamental həllini tapırıq:

$$E(x,t)=F^{-1}\left[e^{-t|\sigma|}\right]=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-t|\sigma|}e^{-i|\sigma|x}d\sigma=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\left\{\int_{-\infty}^{0}e^{t\sigma-i\sigma x}dx+\int_{0}^{\infty}e^{-t\sigma-i\sigma x}dx\right\}=\frac{1}{2\pi}\left\{\frac{1}{t-ix}+\frac{1}{t+ix}\right\}=\frac{1}{\pi}\cdot\frac{t}{t^2+x^2}.$$

(Məlumdur ki, $t\to 0$ olduqda $E(x,t)\xrightarrow{D'}\delta(x)$). Onda (1)-(2)-nin $u(x,t)\in\mathscr{H}$ həlli bu şəkildə olar:

$$u(x,t)=E(x,t)*u_0(x)=\frac{1}{\pi}\cdot\frac{t}{t^2+x^2}*u_0(x).$$

Əgər $u_0(x)$-adi funksiyadırsa bu düsturu inteqral şəklində yazmaq olur:

$$u(x,t)=\frac{t}{\pi}\cdot\int_{-\infty}^{\infty}\frac{u_0(\xi)d\xi}{t^2+(x-\xi)^2}=\frac{t}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{u_0(x-\xi)}{t^2+\xi^2}d\xi .$$

Bu-klassik Puasson düsturudur.

§ 8. Requlyar tənliklərin fundamental həlləri üçün bəzi düsturlar.

Tutaq ki, bütün arqumentlərə nəzərən bircins olan requlyar diferensial operator verilir. Belə tənliyə baxaq ($n=1$):

$$\frac{\partial^m u(x,t)}{\partial t^m}=\sum_{k=0}^{m-1}a_k\left(i\frac{\partial}{\partial x}\right)^{m-k}\frac{\partial^k u(x,t)}{\partial t^k}. \tag{1}$$

Furye çevirməsini tətbiq etdikdə alırıq:

$$\frac{d^m V(x,t)}{dt^m}=\sum_{k=0}^{m-1}a_k\sigma^{m-k}\frac{d^k V(x,t)}{dt^k}. \tag{2}$$

Xarakteristik tənliyi yazaq:

$$\lambda^m(\sigma)=\sum_{k=0}^{m-1}a_k\sigma^{m-k}\lambda^k(\sigma). \tag{3}$$

Burada $\lambda(\sigma)=\sigma\cdot\mu(\sigma)$ əvəzləməsini etsək

$$\mu^m(\sigma)=\sum_{k=0}^{m-1}a_k\mu^k(\sigma) \tag{4}$$

alarıq, yəni əslində $\mu(\sigma)$ kökü σ-dan asılı deyil. Tutaq ki, $\mu_0, \mu_1, ..., \mu_{m-1}$ kökləri müxtəlifdirlər. Aydındır ki, (2) tənliyinin ümumi həlli belə olar:

$$V(\sigma,t) = \sum_{j=0}^{m-1} c_j(\sigma) e^{t\sigma\mu_j} \quad . \tag{5}$$

Tutaq ki,

$\operatorname{Re}\mu_0 \leq \operatorname{Re}\mu_p = ... \leq \operatorname{Re}\mu_{r-1} = 0 < \operatorname{Re}\mu_r \leq ... \leq \operatorname{Re}\mu_{m-1}$. (5) həll düsturundan sonra görünür ki, $V \in H$ olması üçün $\sigma > 0$ olduqda gərək $c_r = ... = c_{m-1} = 0$ olsun.Əgər $\sigma < 0$ isə onda gərək $c_0 = ... = c_{r-1} = 0$ olsun. $\sigma > 0$ olduqda $Q(\sigma)$ fəzası r ölçülü alt fəza olur, $\sigma < 0$ olduqda isə bu fəza $p-1$ ölçülü olur. Deməli (1) tənliyinin requlyar olması şərtini belə düsturla yazmaq olar: $m - p = r$.

(1)-(2) məsələsinin fundamental həlli $E(x,t)$

$$\frac{\partial^m E}{\partial t^m} = \sum_{k=0}^{m-1} a_k \left(i\frac{\partial}{\partial x} \right)^{m-k} \frac{\partial^k E}{\partial t^k} \quad , \tag{6}$$

$$\begin{aligned} E/_{t=0} &= 0, \frac{\partial E}{\partial t}/_{t=0} = 0, ..., \frac{\partial^{m-2} E}{\partial t^{m-2}}/_{t=0} = \\ &= 0, \frac{\partial^{m-1} E}{\partial t^{m-1}}/_{t=0} = \delta(x) \end{aligned} \tag{7}$$

şərtlərini ödəyir. Buradan Furye çevirməsi vasitəsilə alırıq:

$$\frac{d^m \widetilde{E}(\sigma,t)}{dt^m} = \sum_{k=0}^{m-1} a_k \sigma^{m-k} \frac{d^k \widetilde{E}}{dt^k}, \tag{8}$$

$$\widetilde{E}(\sigma,0) = 0, \frac{\partial \widetilde{E}}{\partial t}/_{t=0} = 0, ..., \frac{\partial^{m-2} \widetilde{E}}{\partial t^{m-2}}/_{t=0} = 0, \frac{\partial^{m-1} \widetilde{E}}{\partial t^{m-1}}/_{t=0} = 1. \tag{9}$$

Bu məsələnin həlli belə olur:

$$\widetilde{E}(\sigma,t)=\begin{cases}\sum\limits_{j=0}^{r-1} c_j(\sigma)e^{t\sigma\mu_j}, \sigma>0,\\ \sum\limits_{s=p}^{m-1} c_s(\sigma)e^{t\sigma\mu_s}, \sigma<0\end{cases}$$

$c_j(\sigma)$ və $c_s(\sigma)$ sabitlərini aşağıdakı sistemlərdən tapırıq:

$\sigma>0$ olduqda:

$$\begin{cases} c_0(\sigma)+c_1(\sigma)+\ldots+c_{r-1}(\sigma)=0,\\ \sigma\mu_0 c_0(\sigma)+\sigma\mu_1 c_1(\sigma)+\ldots+\sigma\mu_{r-1}c_{r-1}(\sigma)=0,\\ ------------------------\\ (\mu_0\sigma)^{r-1}c_0(\sigma)+\ldots+(\mu_{r-1}\sigma)^{r-1}c_{r-1}(\sigma)=1. \end{cases} \tag{10}$$

$\sigma<0$ olduqda:

$$\begin{cases} c_p(\sigma)+\ldots+c_{m-1}(\sigma)=0,\\ \sigma\mu_p c_p(\sigma)+\ldots+\sigma\mu_{m-1}c_{m-1}(\sigma)=0,\\ ------------------------\\ (\mu_p\sigma)^{r-1}c_p(\sigma)+\ldots+(\mu_{m-1}\sigma)^{r-1}c_{m-1}(\sigma)=1. \end{cases} \tag{11}$$

Bu sistemlərdə $\sigma^{r-1}c_j(\sigma)=B_j(\sigma)$ $(\sigma>0)$ və $\sigma^{r-1}c_s(\sigma)=A_s(\sigma)$ $(\sigma<0)$ işarə edək. Onda yuxarıdakı sistemlər belə olar:

$$\begin{cases} B_0+\ldots+B_{r-1}=0,\\ \mu_0 B_0+\ldots+\mu_{r-1}B_{r-1}(\sigma)=0,\\ --------------------\quad (\sigma>0)\\ \mu_0{}^{r-1}B_0(\sigma)+\ldots+\mu_{r-1}^{r-1}B_{r-1}=1, \end{cases} \tag{12}$$

və

$$
\begin{cases}
A_p + \ldots + A_{m-1} = 0, \\
\mu_p A_p + \ldots + \mu_{m-1} A_{m-1}(\sigma) = 0, \\
- \qquad (\sigma < 0) \\
\mu_p{}^{r-1} A_p(\sigma) + \ldots + \mu_{m-1}^{r-1} A_{m-1} = 1.
\end{cases}
\tag{13}
$$

(əslində B_j və A_s-lər σ-dan asılı deyillər). Bu sistemləri həll edib A_s, B_j tapırıq: Nticədə fundamental həll üçün belə düsturlar alınır:

$$
\widetilde{E}(\sigma,t) = \begin{cases}
\dfrac{1}{\sigma^{r-1}} \sum\limits_{j=0}^{r-1} B_j e^{t\sigma\mu_j}, \quad (\sigma > 0), & (14) \\
\dfrac{1}{\sigma^{r-1}} \sum\limits_{s=p}^{m-1} A_s e^{t\sigma\mu_s}, \quad (\sigma < 0). & (15)
\end{cases}
$$

Buradan tərs Furye çevirməsini tətbiq etməklə $E(x,t)$ tapılır. Əgər $\operatorname{Re}\mu_0 = \ldots = \operatorname{Re}\mu_{m-1} = 0$ olarsa (2) tənliyi hiperbolik tənlik adlanır. Məsələn, simin rəqs tənliyi üçün (4) tənliyi $\mu^2 = -1$, yəni $\mu_{0,1} = \pm i$, $\operatorname{Re}\mu_0 = \operatorname{Re}\mu = 0$ olur. Belə tənliklər üçün (14)-(15) düsturları bir düsturla əvəz olunur:

$$
\widetilde{E}(\sigma,t) = \frac{1}{\sigma^{m-1}} \sum_{j=0}^{m-1} B_j e^{t\sigma\mu_j}.
$$

Əgər $\mu_j = \sigma_j + i\tau_j$ olsa, onda $\sigma_j = 0$ və biz alarıq:

$$
\widetilde{E}(\sigma,t) = \frac{1}{\sigma^{m-1}} \sum_{j=0}^{m-1} B_j e^{t\sigma\tau_j}.
$$

Bu halda $\widetilde{E}(\sigma,t)$ funksiyası bütün müstəviyə analitik davam oluna bilər:

$$
\widetilde{E}(s,t) = \frac{1}{s^{m-1}} \sum_{j=0}^{m-1} B_j e^{ts\mu_j}.
$$

$|s|$ kafi böyük olduqda buradan

$$\left|\widetilde{E}(s,t)\right| \leq ce^{ta|s|}, \ a = \max\left|\mu_j\right|$$

alarıq. Deməli $\widetilde{E}(s,t)$ -analitik funksiya olub $|s|$-ə nəzərən 1-ci tərtib artma tərtibinə malikdir. Onda Paley-Viner teoreminə əsasən $\widetilde{E}(\sigma,t)$-nin tərs Furye çevirməsi $E(x,t)$ kvadratı ilə inteqrallanan finit funksiya olub $[-ta,ta]$ parçasında cəmləşir. Onda $\forall u_0(x)$ başlanğıc funksiyası üçün

$$u(x,t) = E(x,t) * u_0(x)$$

bükülməsi var və bu ümumiləşmiş funksiya verilən Koşi məsələsinin həlli olur.

Daha sadə hala baxaq $(m=1)$. Məsələn,

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial x}, \ u/_{t=0} = u_0(x).$$

Burada $\lambda = -i\sigma$, $\operatorname{Re}\lambda = 0, r = 1$. Onda fundamental həll:

$$\frac{\partial E}{\partial t} = \frac{\partial E}{\partial x}, \ E/_{t=0} = \delta(x),$$

Buradan

$$\frac{d\widetilde{E}}{dt} = -i\sigma\widetilde{E}, \ \widetilde{E}/_{t=0} = 1.$$

Deməli,

$$\widetilde{E}(\sigma,t) = e^{-i\sigma t}.$$

Onda

$$E(x,t) = F^{-1}\left[\widetilde{E}(\sigma,t)\right] = F^{-1}\left[e^{-i\sigma t}\right] = \delta(x+t).$$

Deməli fundamental həll finit funksiyadır. Onda $u_0(x)$ -ixtiyari ümumiləşmiş funksiya olduqda verilən Koşi məsələsinin həlli var və o belə düsturla tapılır:

$$u(x,t) = E(x,t) * u_0(x) = \delta(x+t) * u_0(x) = u_0(x+t).$$

Qeyd. $n > 1$ olan halda analoji nəticələri almaq olur. (bax. [1], §29, s.   ).

F Ə S İ L - 10

SONSUZ YARIMZOLAQDA KORREKT MƏSƏLƏLƏR

1.Məsələnin qoyuluşu. Əsas teorem.

Bu fəsildə $\{0 \le x \le 1,\ 0 \le t < \infty\}$ oblastında aşağıdakı şəkildə verələn sabit əmsallı diferensial tənliklər sinfinə baxılır:

$$\frac{\partial^m u(x,t)}{\partial t^m} = \sum_{k=0}^{m-1} P_k\left(i\frac{\partial}{\partial x}\right)\frac{\partial^k u(x,t)}{\partial t^k} \quad (0 \le x \le 1,\ t \ge 0), \tag{I}$$

burada $P_k\left(i\dfrac{\partial}{\partial x}\right)$-maksimal dərəcəsi p olan sabit əmsallı polinomdur $(k = 0,1,\dots,m-1)$. Bu tənlik üçün aşağıdakı klassik sərhəd məsələsi qoyulur: (I) tənliyinin

$$\frac{\partial^k u(0,t)}{\partial x^k} = W_k^0(t), \quad \frac{\partial^k u(1,t)}{\partial x^k} = W_k^1(t) \quad (k = 0,1,\dots,p-1) \tag{II}$$

sərhəd şərtlərini və

$$\frac{\partial^k u(x,0)}{\partial t^k} = u_k(x) \quad (k = 0,1,\dots,r-1) \tag{III}$$

başlanğıc şərtlərini ödəyən həllini tapmalı.

Burada əsas məqsəd (I)- (III) klassik məsələsinin ümumiləşmiş funksiyalar sinfində analoqunu müəyyən etməkdən ibarətdir. Belə sual araşdırılır ki, tənliyə hansı sərhəd şərtləri və neçə dənə başlanğıc şərtləri qoşulmalıdır ki, qoyulan məsələ müəyyən ümumiləşmiş funksiyalar fəzasında korrekt qoyulmuş məsələ olsun. Məsələ o zaman korrekt adlanır ki, baxılan sinifdə həll var, yeganədir və $t \to \infty$ olduqda t-nin müəyyən dərəcəsindən tez artmır.

Bu məsələ müəyyən $\mathcal{H}_+^\beta$ ümumiləşmiş funksiyalar fəzasında baxılır. Sadə deyilişdə $\mathcal{H}_+^\beta$ fəzası müəyyən β ədədi üçün

$$f(x)\cdot e^{-\beta x} \in L_2(0,\infty)$$

şərtini ödəyən bütün $f(x)$ funksiyalarından və onların bütün törəmələrindən (D' mənada) ibarət çoxluqdur. r və β ədədləri verilən tənliklə təyin olunur.

Verilən tənliyi aşağıdakı şəkildə yazmaq münasibdir:

$$\frac{\partial^m u(x,t)}{\partial t^m}=\sum_{k=0}^{m-1}P_k\left(i\frac{\partial}{\partial x}\right)\frac{\partial^k u(x,t)}{\partial t^k}=\sum_{j=0}^{p}Q_j\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)\frac{\partial^j u(x,t)}{\partial x^j}, \qquad (4)$$

burada $Q_j\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)$-dərəcəsi $\leq m-1$ olan çoxhədlidir $(j=0,1,\dots,p-1)$.

Məlum qayda ilə (I)- (III) məsələsini bütün $t\geq 0,\ -\infty<x<\infty$ oblastına davam etdirək. Nəticədə (I)- (II) sərhəd məsələsi $\mathcal{H}_+^{\beta}$ sinfində aşağıdakı şəkildə bir tənliyə ekvivalent olur:

$$\frac{\partial^m u}{\partial t^m}=$$

$$=\sum_{\rho=0}^{p}Q_j\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)\left[\frac{\partial^j u}{\partial x^j}-\sum_{k=0}^{j-1}W_k^0(t)\delta^{(j-1-k)}(x)+\sum_{k=0}^{j-1}W_k^1(t)\delta^{(j-1-k)}(x-1)\right]. \qquad (5)$$

Bu tənliyin $x<0$ oblastında ümumiləşmiş funksiya kimi sıfra bərabər olan $u(x,t)$ həlli adi hamar funksiya olarsa, onda $u(x,t)$ (I)- (II) məsələsinin adi mənada həlli olur və tərsinə.

1^0. β ədədi verilir. $\mathcal{H}_+^{\beta,0}$ ilə elə $f(x)$ funksiyaları çoxluğunu işarə edək ki,

$$f(x)\cdot e^{-\beta x}\in L_2(0,\infty)$$

olsun. $\mathcal{H}_+^{\beta,0}$ sinfinin bütün elementlərindən və onların bütün törəmələrindən (D' mənada) ibarət olan funksiyalar sinfini $\mathcal{H}_+^{\beta}$ işarə edək.

Tutaq ki, $f\in\mathcal{H}_+^{\beta,0}$. Onun Furye çevirməsi

$$g(s)=\int_0^\infty f(x)e^{-isx}dx,\quad s=\sigma+i\tau, \qquad (6)$$

$\operatorname{Im}s>\beta$ olduqda orta kvadratik yığılır və analitik funksiyadır. Planşerel teoreminə əsasən alırıq ki,

$$\int_{-\infty}^{\infty}|g(\sigma+i\tau)|^2d\sigma=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}|f(x)|^2e^{-2\tau x}dx. \qquad (7)$$

Qeyd edək ki, $g(s)$ funksiyasını bilavasitə də xarakterizə etmək mümkündür.

Təklif. 1) $\operatorname{Im}s\geq\beta$ oblastında $g(s)$ analitikdir;

2) $\int\limits_{-\infty}^{\infty}|g(\sigma+i\tau)|^2 d\sigma$ inteqralı hər τ üçün yığılır;

3) bütün $\beta \le \tau < \infty$ oblastında sonuncu inteqral müntəzəm məhduddur;

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}|g(\sigma+i\tau)|^2 d\sigma \le M < \infty . \tag{8}$$

Tərsinə, bu üç xassəyə malik olan hər bir $g(s)$ funksiyası müəyyən $f \in \mathcal{H}_+^\beta$ üçün Furye çevirməsidir.

Doğrudan da, (7)-dən çıxır ki,

$$\int\limits_0^{\infty}|f(x)|^2 e^{-2\tau x}dx \le \int\limits_0^{\infty}|f(x)|^2 e^{-2\beta x}dx < \infty$$

Tutaq ki, $g(s)$ deyilən üç xassəyə malik funksiyadır. Belə inteqrala baxaq:

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}g(\sigma+i\tau)e^{-i(\sigma+i\tau)x}d\sigma=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}g(\sigma+i\tau)e^{-\tau x}\cdot e^{-i\sigma x}d\sigma$$

Buradan çıxır ki, $f(x)$ funksiyası $g(\sigma+i\tau)e^{-\tau x}$ üçün tərs Furye çevirməsidir. Onda alırıq:

$$f(x)e^{-\tau x}=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}g(\sigma+i\tau)e^{-i\sigma x}d\sigma$$

Buradan, Planşerel teoreminə əsasən, (8) nəzərə alındıqda, alınır ki,

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}|f(x)|^2 e^{-2\tau x}dx=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}|g(\sigma+i\tau)|^2 d\sigma \le M \tag{9}$$

Buradan çıxır ki, $x<0$ oblastında sanki hər yerdə $f(x)=0$ olar.

Doğrudan da, əğər $x<0$ oblastında müsbət ölçülü G çoxluğunda $f(x)\neq 0$ olarsa, $\tau \to \infty$ olduqda

$$\int\limits_{-\infty}^{0}|f(x)|^2 e^{-r\tau x}dx \to \infty$$

olar, bu isə (9) ilə ziddiyyət təşkil edir.

Beləliklə, alırıq ki, bütün $\tau \ge \beta$ müstəvisində

$$\int_0^\infty |f(x)|^2 e^{-2\tau x} dx = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty |g(\sigma + i\tau)|^2 d\sigma \le M < \infty.$$

Buradan ($\tau \to \beta$) alırıq ki,

$$\int_0^\infty |f(x)|^2 e^{-2\beta x} dx \le M,$$

yəni $f \in \mathcal{H}_+^{\beta,0}$. Furye çevirməsinin yeganəlik teoreminə əsasən alınır ki, $g(s)$ funksiyası $f(x)$-in Furye çevirməsidir.

Əgər

$$\mathcal{H}_+^{\beta,q} = \left\{ u(x) : u(x) = \sum_{k \le q} a_k D^k f_k(x), f_k \in \mathcal{H}_+^{\beta,0} \right\}$$

işarə etsək, onda onun Furye çevirməsi $H_+^{\beta,q}$ belə olar:

$$H_+^{\beta,q} = \left\{ V(s) : V(x) = P(s) g(s), \quad g \in H_+^{\beta,0} \right\},$$

burada $P(s)$- polinomdur. Deməli $\forall V(s) \in H_+^{\beta,q}$ funksiyası $\operatorname{Im} s > \beta$ müstəvisində analitikdir və onu müəyyən polinoma böldükdə $H_+^{\beta,0}$ fəzasının elementi alınar. Aşkardır ki,

$$H_+^{\beta} = \bigcup_{q=0}^{\infty} H_+^{\beta,q}$$

İstənilən $V \in H_+^{\beta,q}$ üçün belə norma daxil edilir:

$$\|V(s)\|_q^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|V(s)|^2 d\sigma}{|s|^{2q}}, \quad s = \sigma + i\tau,$$

H_+^{β} fəzası müəyyən monotonluq xassəsinə malikdir: Əgər $V(s) \in H_+^{\beta,q}$ və $V_2(s)$ funksiyası $\operatorname{Im} s > \beta$ müstəvisində analitikdirsə və əlavə

$$|V_1(s)| \le c|V(s)|$$

bərabərsizliyi ödənilirsə, onda $V_1(s) \in H_+^{\beta}$. Bu fəzada həllin $O(t^h)$ kimi artması belə başa düşülür: $t \to \infty$ olduqda

$$\|V(s,t)\|_q^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|V(s,t)|^2 d\sigma}{|s^q|^2} = O(t^h) .$$

2^0. β və r ədədlərinin təyini. (I) tənliyinin xarakteristik tənliyini yazaq:

$$\lambda^m = \sum_{k=0}^{m-1} P_k(s)\lambda^k, \quad s = \sigma + i\tau .$$

Hər qeyd olunmuş s üçün bu tənliyin m sayda kökü var. Onları $\lambda_0(s),...,\lambda_{m-1}(s)$ işarə edək. Bu köklər s-in analitik funksiyalarıdır (yalnız sonlu sayda məxsusi nöqtələri ola bilər). β ədədini elə seçirik ki, bu köklərin bütün məxsusi nöqtələri $\operatorname{Im} s < \beta$ yarımmüstəvisində qalsın. Deməli, $\operatorname{Im} s > \beta$ müstəvisində $\lambda_j(s)$ kökləri tam analitik funksiyalardır. Aşkardır ki, $|s| \to \infty$ olduqda $\lambda_j(s) = O(|s|^p)$ Bütün kökləri iki qrupa bölək: 1-ci qrupa o köklər daxil edilir ki, $\operatorname{Im} s \geq \beta$ müstəvisində hər yerdə $\operatorname{Re}\lambda_j(s) \leq 0$ olur. Tutaq ki, belə köklərin sayı r-dir:

$$\operatorname{Re}\lambda_0(s) \leq \operatorname{Re}\lambda_1(s) \leq ... \leq \operatorname{Re}\lambda_{r-1}(s) \leq 0$$

2-ci qrupa o kökləri daxil edirik ki, $\operatorname{Im} s > \beta$ müstəvisində heç olmasa bir nöqtədə $\operatorname{Re}\lambda(s) > 0$ olur. Onların sayı $m - r$ olar. Beləliklə:

$$I = \{\lambda_0,...,\lambda_{r-1}\}, II = \{\lambda_r,...,\lambda_{m-1}\}.$$

Bununla da r ədədi tam müəyyən olunur.

3^0. Sərhəd funksiyaları üzərinə lazım olduğu qədər məhdudiyyətlər qoyula bilər.

Məsələn, tələb edirik ki, $W_k^0(t)$, $W_k^1(t)$ funksiyaları elədirlər ki, aşağıdakı şərt ödənilir:

$$\int_0^{\infty} t^k \left|\frac{d^q W_k(t)}{dt^q}\right| dt < \infty, \quad (|q| \leq m-1; \; k \leq p-1) \tag{10}$$

(6) tənliyinə Furye çevirməsini tətbiq etməklə alırıq:

$$\frac{d^m V(s,t)}{dt^m} - \sum_{j=0}^{p} (-is)^j Q_j\left(\frac{\partial}{\partial t}\right) V(s,t) = g(s,t), \tag{11}$$

burada

$$g(s,t) = \sum_{j=0}^{p} Q_j\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)\left\{e^{is} \sum_{k=0}^{j-1}\left[W_k^1(t)(-is)^{j-1-k} - W_k^0(t)(-is)^{j-1-k}\right]\right\}. \tag{12}$$

(11) tənliyi əvəzində bir sistemə baxaq:

$$\frac{dV(s,t)}{dt} = P(s)V(s,t) + g(s,t), \tag{13}$$

2.**Əsas teorem.** Fərz edək ki, (I)-(II) məsələsi verilir, β və r təyin olunublar və (10) şərtləri ödənilir və $g(s,t)$ funksiyası (12) şəklində verilir.

Onda məsələnin $\mathscr{H}_+^\beta$ sinfində korrekt olması üçün zəruri və kafi şərt *a* priori $\operatorname{Im} s \geq \beta$, $\operatorname{Re} \lambda_q(s) > 0$ oblastında təyin olunmuş

$$G_q(s) = \int_0^\infty e^{-\theta\lambda_q(s)} g(s,\theta)\, d\theta \qquad (q = r, r+1, \ldots, m-1)$$

funksiyalarının bütün $\operatorname{Im} s > \beta$ yarımmüstəvisinə analitik davam olunan funksiyalar olmasıdır, belə ki, davamdan alınan funksiyalar H_+^β fəzasına daxil olsunlar.

4^0. Teoremin isbatını verməzdən əvvəl onun bir neçə realizasiyaları ilə tanış olmaq maraqlı olar. Əvvəlcə belə hala baxaq ki, xarakteristik tənliyin bütün kökləri $\operatorname{Im} s > \beta$ müstəvisində $\operatorname{Re} \lambda_j(s) \leq 0$ olur ($j = 0,1,\ldots,m-1$). Bu halda $r = m$. Onda korrekt məsələ: Verilməlidir (ixtiyari olaraq):

$$u_0(x), \ldots, u_{m-1}(x), \text{ və}$$

$$W_k^0(t), W_k^1(t) \quad (k = 0,1,\ldots,p-1).$$

Misal 1. Belə tənliyə baxaq:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \qquad (0 \leq x \leq 1, \quad t \geq 0).$$

Burada $\lambda = is = i\sigma - \tau$. Deməli $\operatorname{Re}\lambda = -\tau$ və $\operatorname{Im} s = \tau > 0$ müstəvisində $(\beta = 0)$ hər yerdə $\operatorname{Re}\lambda \le 0$, yəni $\lambda \in I$, $r = 1$.Teoremə görə korrekt məsələ belədir: Verilməlidir: $u_0(x), W_0^0(t), W_0^1(t)$.

Doğrudan da, verilən tənlik $\mathcal{H}_+^\beta$ fəzasında belə bir tənliyə keçir:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} = W_0^0(x)\delta(x-1) + W_0^1(x)\delta(x), \ (x \in R,\ t \ge 0)$$

Furye çevirməsini tətbiq etməklə alırıq ki,

$$\frac{dV(s,t)}{dt} - isV(s,t) = g(s,t),$$

$$V(s,0) = V_0(s),$$

burada

$$g(s,t) = W_0^0(t)e^{is}(-is) - W_0^0(t).$$

Alınan Koşi məsələsinin həlli düsturunu yazaq:

$$V(s,t) = e^{ist}\left[V_0(s) + \int_0^t e^{-is\theta} g(s,\theta)d\theta\right] =$$

$$= e^{ist}V_0(s) + \int_0^t e^{(t-\theta)is} g(s,\theta)d\theta = V_1 + V_2,$$

burada

$$V_1 = e^{ist}V_0(s), \ V_2 = \int_0^t e^{(t-\theta)is} g(s,\theta)d\theta.$$

Aydındır ki, $\operatorname{Re}\lambda(s) \le 0$ olduqda

$$|V_1(s,t)| \le |V_0(s)|e^{-t\tau}$$

Lakin $\tau \ge \beta \ (= 0)$ müstəvisində $e^{-t\tau} \le 1$. Deməli

$$|V_1(s,t)| \le |V_0(s)|$$

İndi $V_2(s,t)$ toplananını qiymətləndirək. $\operatorname{Im} s > \beta$ müstəvisində $\tau > 0$ və $t - \theta \ge 0$ olduğundan

$$|V_2(s,t)| \le \int_0^t \left|e^{(t-\theta)is}\right| |g(s,\theta)|\, d\theta \le \int_0^t e^{(t-\theta)is} |g(s,\theta)| d\theta \le \int_0^t |g(s,\theta)|\, d\theta.$$

Lakin $W_0^0(t)$ və $W_0^1(t)$ üzərinə qoyulan şərtlərdən çıxır ki, $|g(s,\theta)| \leq \leq c(1+\theta)^h$. Onda

$$\int_0^t |g(s,\theta)|\, d\theta = O(t^h)\ .$$

Beləliklə aldıq ki, $V(s,t) \in H_+^\beta$ və $t \to \infty$ olduqda $V(s,t) = O(t^h)$, yəni qoyulan məsələ $\mathcal{H}_+^\beta$ fəzasında korrektdir.

Misal 2. Belə tənlik verilir:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = i\frac{\partial u}{\partial x} \quad (0 \leq x \leq 1,\ t \geq 0)\ ,$$

burada $\lambda = s = \sigma + i\tau$, $\mathrm{Re}\lambda = \sigma$. Deməli $\lambda \in II$, $r = 0$.

Korrekt məsələ: heç bir başlanğıc şərti verilmir, sərhəd şərtləri isə elə olmalıdır ki, *a* priori $\mathrm{Im}s > 0$, $\mathrm{Re}\lambda > 0$ oblastında təyin olunmuş

$$G_0(s) = \int_0^\infty e^{-\theta\lambda(s)} g(s,\theta)d\theta = \int_0^\infty e^{-\theta s} g(s,\theta)d\theta$$

funksiyası bütün $\mathrm{Im}s > 0$ oblastına analitik davam olsun, belə ki, davamdan alınan funksiya H_+^β fəzasına daxil olsun.

Doğrudan da, tənliyin ümumi həlli düsturu belə olur:

$$u(x,t) = f(t - ix).$$

Bu funksiya $z = t - ix$ kompleks dəytşəninin analitik funksiyası olmalıdır. Deməli $u(0,t)$ və $u(1,t)$ qiymətləri ixtiyari verilə bilməz, onlar elə funksiyalar olmalıdır ki, bütün $t \geq 0$ oblastına analitik davam olunsunlar. Əsas teoremə görə isə alınır ki, başlanğıc şərti verilmir, sərhəd şərtləri isə elə olmalıdır ki,

$$G(s) = \int_0^\infty e^{-ts} g(s,t)dt$$

inteqralı onun yığıldığı $\mathrm{Re}\lambda > 0$ oblastından bütün $\mathrm{Im}s > 0$ müstəvisinə analitik davam olunan funksiya olmalıdır və nəticədə alınan funksiya $G(s) \in H_+^\beta$ olmalıdır. Verilən tənlik $\mathcal{H}_+^\beta$-fəzasında bu şəkli alır:

$$\frac{\partial u}{\partial t}=i\frac{\partial u}{\partial x}+W_0^0(t)\delta(x)-W_0^1(t)\delta(x-1)\ .$$

Furye çevirməsindən sonra

$$\frac{dV(s,t)}{dt}=sV+g(s,t)\ .$$

tənliyi alınır ki, burada

$$g(s,t)=W_0^0(t)-isW_0^1(t)e^{is}$$

Analoji nəticə

$$\frac{\partial u}{\partial t}=-i\frac{\partial u}{\partial x}\quad (0\le x\le 1,\ t\ge 0)$$

tənliyi üçün alınır. Bu halda

$$G(s)=\int_0^{\infty} e^{ts}g(s,t)dt$$

funksiyası $\operatorname{Re} s<0$ oblastından bütün $\operatorname{Im} s>0$ oblastına davam olunmalıdır ki, nəticədə H_+^{β} fəzasının elementi alınmış olsun.

Misal 3.

$$\frac{\partial u}{\partial t}-\frac{\partial u}{\partial x}=0\quad (0\le x\le 1,\ t\ge 0).$$

Burada $\lambda=-is$, $\operatorname{Re}\lambda=\tau=\operatorname{Im} s>0$ olduqda $\lambda\in II$, $r=0$. Korrekt məsələ: başlanğıc şərti yoxdur. Təkcə sərhəd şərtləri verilir:

$$u(0,t)=W_0^0(t)\ \text{və}\ u(1,t)=W_0^1(t).$$

$\operatorname{Im} s>0$ müstəvisində hər yerdə $\operatorname{Re}\lambda>0$ olduğundan

$$G_0(s)=\int_0^{\infty} e^{is\theta}g(s,\theta)d\theta$$

inteqralı bu müstəvidə analitikdir (deməli onu davam etdirməyə ehtiyac yoxdur).

Misal 4. Dalğa tənliyi

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0\quad (0\le x\le 1,\ t\ge 0).$$

Burada $\lambda^2=-s^2$, $\lambda_{0,1}=\pm is$. $\operatorname{Im} s>\beta$ müstəvisində

$$(\beta=0)\,\mathrm{Re}\lambda_0 \le 0,\ \mathrm{Re}\lambda_1 > 0$$

olur: $\lambda_0 \in I$, $\lambda_1 \in II$; $r=1$. Korrekt məsələ: verilməlidir:

Sərhəd şərtləri:

$$u/_{x=0} = W_0^0(t),\ u/_{x=1} = W_0^1(t),$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}/_{x=0} = W_1^0(t),\ \frac{\partial u}{\partial x}/_{x=1} = W_1^1(t)$$

Başlanğıc şərti:

$$u/_{t=0} = u_0(x).$$

Doğrudan da, $\mathrm{Im}\, s>0$ olduqda $\mathrm{Re}\lambda_1 > 0$ olur. Onda

$$G_1(s) = \int_0^\infty e^{-\theta\lambda_1(s)} g(s,\theta)d\theta$$

inteqralı bütün $\mathrm{Im}\, s>0$ müstəvisində analitik funksiya olur və aşkardır ki, $G_1(s) \in H_+^\beta$. Onda sərhəd funksiyaları üzərinə qoyulan

$$\int_0^\infty \theta^k \left|W_j^0(\theta)\right| d\theta < \infty,\ \int_0^\infty \theta^k \left|W_j^1(\theta)\right| d\theta < \infty,$$

şərtlərindən çıxır ki,

$$\left|G_1(s)\right| = \left|\int_0^\infty e^{its} g(s,t)dt\right| \le \left|\int_0^\infty e^{-t\tau} g(s,t)dt\right| < \infty.$$

Şərtə görə $g(s,t) \in H_+^\beta$. Onda $G_1 \in H_+^\beta$.

Beləliklə korrekt məsələ belədir: verilməlidir:

$$u/_{x=0},\ \frac{\partial u}{\partial x}/_{x=0},\ u/_{x=1},\ \frac{\partial u}{\partial x}/_{x=1},\ u/_{t=0} = u_0(x).$$

Qeyd. Əgər $\mathrm{Im}\, s>\beta$ müstəvisində $\lambda_0,\dots,\lambda_{m-1}$ köklərindən bəziləri öz işarəsini saxlamırsa, onda məsələ bir qədər mürəkkəbləşir. Məsələn,

$$\frac{\partial u}{\partial t} = i\frac{\partial u}{\partial x}$$

tənliyi üçün $\lambda = s = \sigma + i\tau$, $\mathrm{Im} s = \tau > 0$ müstəvisində $\mathrm{Re}\lambda = \sigma$. Deməli λ öz işarəsini dəyişir, $\lambda \in II$, $r=0$. Bu halda başlanğıc şərti verilmir, amma $g(s,t)$ elə olmalıdır ki,

$$G(s)=\int_0^\infty e^{-\theta\lambda(s)}g(s,\theta)d\theta=\int_0^\infty e^{-\theta s}g(s,\theta)d\theta$$

funksiyası onun yığıldığı $\operatorname{Re}s>0$ oblastından bütün $\operatorname{Im}s>0$ müstəvisinə analitik davam olunsun.

Analoji vəziyyət

$$\frac{\partial u}{\partial t}=-i\frac{\partial u}{\partial x}$$

tənliyi üçün yaranır.

Misal 5. Laplas tənliyi

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0,$$

burada $\lambda=s^2$, $\lambda_{0,1}=\pm s$, $\lambda_0=\sigma+i\tau$, $\lambda_1=\sigma-i\tau$.

$\operatorname{Im}s=\tau>0$ olsun. Deməli , $\lambda_0,\lambda_1\in II, r=0$. Onda heç bir başlanğıc şərti verilmir. Amma sərhəd funksiyaları elə olmalıdırlar ki,

$$G_0(s)=\int_0^\infty e^{-ts}g(s,t)dt,$$

$$G_1(s)=\int_0^\infty e^{ts}g(s,t)dt$$

funksiyaları onların a priori təyin olunduqları ($\operatorname{Re}s>0-1$-ci, $\operatorname{Re}s<0$-2 –ci üçün) oblastdan bütün $\operatorname{Im}s>0$ müstəvisinə analitik davam olunsunlar. Qeyd edək ki, bu misalda

$$g(s,t)=W_0^1(t)(-is)e^{is}+W_1^1(t)e^{is}-W_0^0(t)(-is)-W_1^0(t),$$

çünki Laplas tənliyini $\mathcal{H}_+^\beta$ fəzasında yazdıqda alırıq:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\sum_{k=0}^{1}\left[W_k^1(t)\delta^{(1-k)}(x-1)+W_k^0(t)\delta^{(1-k)}(x)\right].$$

3. **Teoremin isbatı.** Əvvəlcə (I) tənliyi əvəzində belə bir sistemə baxaq:

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}=P\left(i\frac{\partial}{\partial x}\right)u(x,t),\ (0\le x\le 1, t\ge 0),\qquad(1)$$

burada $u(x,t)-m$-vektor, $P\left(i\frac{\partial}{\partial x}\right)-$ $m\times m$ matrisdir,

$P(s)=\left\|P_{kj}(s)\right\|$, $(k,j=0,1,...,m-1)$, $P_{kj}(s)$ -maksimal dərəcələri p olan sabit əmsallı polinomlardır.

Bu sistemə (vektor şəklində yazılmış) başlanğıc şərti

$$u(x,0)=u_0(x) \tag{2}$$

və vektor-sərhəd şərtləri qoşulur:

$$\frac{\partial^k u(0,t)}{\partial x^k}=W_k^0(t),\ \frac{\partial^k u(1,t)}{\partial x^k}=W_k^1(t)\quad (k=0,1,...,p-1)\ . \tag{3}$$

Bu məsələni $\mathcal{H}_+^\beta$ fəzasında yazaq. Bunun üçün (1) tənliyini aşağıdakı şəklə salaq:

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}=\sum_{k=0}^{p}a_k\left(i\frac{\partial}{\partial x}\right)^k u(x,t),\quad (0\le x\le 1, t\ge 0)\ , \tag{4}$$

burada a_k-ədədi matrislərdir. Onda (4) tənliyi $\mathcal{H}_+^\beta$ sinfində aşağıda' şəkli alar:

$$\frac{\partial u}{\partial t}=$$

$$=\sum_{k=0}^{p}a_k\begin{bmatrix}\left(i\frac{\partial}{\partial x}\right)^k u-W_{k-1}^0(t)\delta(x)-W_{k-2}^0(t)\delta'(x)+...+W_0^0(t)\delta^{(k-1)}(x)+\\ +W_{k-1}^1(t)\delta(x-1)+W_{k-2}^1(t)\delta'(x-1)+...+W_0^1(t)\delta^{(k-1)}(x-1)\end{bmatrix} \tag{5}$$

Buradan Furye çevirməsindən sonra alınır ki,

$$\frac{dV(s,t)}{dt}=P(s)V(s,t)+g(s,t)\ . \tag{6}$$

Burada $g(s,t)$-vektor-funksiyası belə ifadəyə malik olur:

$$g(s,t)=\sum_{k=0}^{p} a_k \left\{ \begin{array}{l} W_{k-1}^{0}(t)-isW_{k-2}^{0}(t)+\ldots+(-is)^{k-1}W_0^{0}(t)- \\ -\left[W_{k-1}^{1}(t)+(-is)W_{k-2}^{1}(t)+\ldots+(-is)^{k-1}W_0^{1}(t)\right]e^{is} \end{array} \right\} \quad (7)$$

və $V(s,t)$-nın komponentləri H_{+}^{β} fəzasına daxildir, (2) başlanğıc şərti Furye çevirməsindən sonra

$$V(\sigma,0)=V_0(\sigma) \quad (8)$$

şərtinə keçir.

Hər qeyd olunmuş s üçün (6)-(8) Koşi məsələsinin həlli belə düsturla tapılır:

$$V(s,t)=e^{tP(s)}V_0(s)+\int_0^t e^{(t-\theta)P(s)}g(s,\theta)d\theta . \quad (9)$$

Qeyd olunmuş s üçün $P(s)$ matrisi ilə verilən P operatoru m-ölçülü Q_s-evklid fəzasında təyin olunub, onun (hər s üçün) r sayda kökü $\operatorname{Re}\lambda \le 0$ (r s-dən asılı olur), $m-r$ sayda kökü isə $\operatorname{Re}\lambda_j(s)>0$ olur $(j=r,r+1,\ldots,m-2)$. Buna uyğun olaraq Q_s fəzası $P(s)$ operatoruna nəzərən invariant olan Q_s^- və Q_s^+ alt fəzalarının düz cəminə ayrılır: hər s üçün $Q_s=Q_s^- + Q_s^+$.

Buna uyğun olaraq $V(s,t)$, $V_0(s)$ və $g(s,t)$ vektorları da belə ayrılırlar:

$$V(s,t)=V^-(s,t)+V^+(s,t); \quad V_0(s)=V_0^-(s)+V_0^+(s)$$

$$g(s,t)=g^-(s,t)+g^+(s,t).$$

Məlumdur ki, $P(s)$ və $e^{tP(s)}$ operatorları Q_s^- və Q_s^+ alt fəzalarında invariantdırlar, ona görə də (9) düsturundan çıxır ki, $V^-(s,t)$ və $V^+(s,t)$ komponentləri üçün aşağıdakı ifadələr alınır:

$$\begin{aligned} V^-(s,t)&=e^{tP(s)}V_0^-(s)+\int_0^t e^{(t-\theta)P(s)}g^-(s,\theta)d\theta, \\ V^+(s,t)&=e^{tP(s)}V_0^+(s)+\int_0^t e^{(t-\theta)P(s)}g^+(s,\theta)d\theta, \end{aligned} \quad (10)$$

Lemma 1. $t \to \infty$ olduqda $V^-(s,t)$ toplananı Q_s^- fəzasında $O(t^h)$ kimi artır və $V^-(s,t) \in H_+^\beta$.

Doğrudan da operator-funksiyanın qiymətlənmə düsturuna görə (Şilov qiymətlənməsi)

$$\left\|e^{tP(s)}\right\| \le e^{t\Lambda}\left(1 + 2t\|P(s)\| + \ldots + \frac{(2t)^{m-1}}{(m-1)!}\|P(s)\|^{m-1}\right), \qquad (\text{Ş})$$

burada $\Lambda = \max\limits_k \operatorname{Re}\lambda_k(s)$; $k = 0,1,\ldots,m-1$. Lakin Q_s^- fəzasında $P(s)$ operatorunun məxsusi ədədləri

$$\operatorname{Re}\lambda_0(s) \le \ldots \le \operatorname{Re}\lambda_{r-1}(s) \le 0$$

olduğunu nəzərə alsaq (Ş)-dən alınır ki,

$$\left\|e^{tP(s)}\right\| \le c(1+t)^h(1+|s|)^{p(m-1)}. \qquad (*$$

Buradan alınır ki, hər s üçün

$$\left\|V^-(s,t)\right\|_s \le \left\|e^{tP(s)}\right\|_s \cdot \left\|V_0^-(s)\right\| + \int_0^t \left\|e^{(t-\theta)P(s)}\right\| \left|g^-(s,\theta)\right| d\theta \le$$

$$\le c(1+t)^{m-1}\left\|V_0(s)\right\| + c_1\int_0^t (1+t-\theta)^{m-1}(1+\theta)^h(1+|s|)^{p(m-1)}d\theta = O(t^h)$$

Bu bərabərsizlikdən həm də çıxır ki, $V^-(s,t) \in H_+^\beta$.

Lemma 2.

$$J(s) = \int_0^\infty e^{-\theta P(s)} g^+(s,\theta)d\theta$$

inteqralı yığılandır və $J(s) \in H_+^\beta$.

Doğrudan da, Q_s^+ fəzasında $\operatorname{Re}\lambda_r(s) > 0$ olduğundan və $(-P)$ operatorunun məxsusi ədədləri

$$-\lambda_r,-\lambda_{r+1},\ldots,-\lambda_{m-1}$$

olduğundan alırıq ki,

$$\mathrm{Re}(-\lambda_{m-1})\le\ldots\le\mathrm{Re}(-\lambda_r)\le 0.$$

Onda (Ş) qiymətlənməsi əsasında alırıq:

$$|J(s)|\le\int_0^\infty\left\|e^{-\theta P(s)}\right\|\left\|g^+(s,\theta)\right\|d\theta\le c(1+|s|)^{p(m-1)}\int_0^\infty(1+\theta)^{m-1}e^{-\theta\,\mathrm{Re}\,\lambda_r}(1+\theta)^h d\theta<\infty.$$

Buradan çıxır ki, $J(s)\in H_+^\beta$.

$J(s)$ inteqralı vasitəsilə $V^+(s,t)$ həllini aşağıdakı düstur kimi yazmaq olar:

$$V^+(s,t)=e^{tP(s)}\left[V_0^+(s)+J(s)\right]-\int_t^\infty e^{(t-\theta)P(s)}g^+(s,\theta)d\theta\ . \quad (11)$$

Analoji qayda ilə göstərilir ki,

$$J_t(s)\equiv\int_t^\infty e^{(t-\theta)P(s)}g^+(s,\theta)d\theta=\int_t^\infty e^{-\theta P(s)}g^+(s,\theta)d\theta$$

inteqralı yığılandır və həm də $J_t(s)\in H_+^\beta$.

$t\to\infty$ olduqda alırıq:

$$\left\|J_t(s)\right\|\le\int_0^\infty e^{-\theta\,\mathrm{Re}\,\lambda_r(s)}\left\|g(s,\theta+t)\right\|d\theta\le$$

$$\le c\int_0^\infty e^{-\theta\,\mathrm{Re}\,\lambda_r(s)}(1+\theta)^{m-1}(1+\theta+t)^h d\theta=O\left(t^h\right).$$

Deməli $J_t(s)\in H_+^\beta\quad\forall t>0$.

Nəticə 1. $V_0^+(s)+J(s)\ne 0$ olan kimi $t\to\infty$ olduqda

$$e^{tP(s)}\left[V_0^+(s)+J(s)\right]$$

ifadəsi eksponensial olaraq artır, çünki $V_0^+(s)+J(s)\in Q_s^+$ və bu fəzada $e^{tP(s)}$ operatoru hər bir e_j bazis vektoruna $e^{t\lambda_j(s)}$ vuruğu kimi təsir edir, burada isə $\operatorname{Re}\lambda_j(s)>0$. Buradan belə nəticə çıxır: $V(s,t)$ həllinin $O\left(t^h\right)$ kimi artması üçün

$$V_0^+(s)+J(s)=V_0^+(s)+\int_0^{\infty}e^{-\theta P(s)}g^+(s,\theta)d\theta=0 \tag{12}$$

şərtinin ödənilməsi zəruri şərtdir. Digər tərəfdən, bu münasibət ödənildikdə məsələnin həlli $V(s,t)$ bu şəkli alır:

$$\begin{aligned}V(s,t)=e^{tP(s)}\left[V_0^+(s)+\int_0^{\infty}e^{-\theta P(s)}g^-(s,\theta)d\theta\right]-\\-\int_t^{\infty}e^{(t-\theta)P(s)}g^+(s,\theta)d\theta\end{aligned} \tag{13}$$

və bu həll Q_s fəzasında (hər s üçün) ct^h kimi artır.

Lakin $V_0^+(s)+J(s)\neq 0$ olan kimi $V(s,t)$ həlli t-yə nəzərən eksponensial olaraq artır.

Nəticə 2. (12) şərti (6)-(8) məsələsinin (hər qeyd olunmuş s üçün!) t^h kimi artan həllinin varlığı üçün zəruri şərtdir.

Qeyd. Bütün s-lər üçün baxıldıqda (12) şərtinin ödənilməsi korrektlik üçün zəruri şərt olsa da kafi deyil, çünki bu şərt daxilində tapılan $V(s,t)$ həlli H_+^β fəzasının elementi olmaya bilər. Lakin sistem əvəzində bir dənə tənliyə baxsaq (12) şərtinin bütün s-lər üçün ödənilməsi məsələsinin $\mathcal{H}_+^\beta$ fəzasında korrektliyi üçün həm zəruri, həm də kafidir.

3.Bir tənlik üçün korrektlik şərti.

Təklif. (12) şərti (I) - (II) məsələsinin $\mathcal{H}_+^\beta$ fəzasında korrektliyi üçün zəruri və kafidir.

İsbat üçün (12) şərtinin (I) tənliyi üçün hansı şəkildə olduğunu müəyyən edək. Bunun üçün (I) tənliyini sistem şəklində yazaq:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u_0}{\partial t} = u_1, \dfrac{\partial u_1}{\partial t} = u_2, \ldots, \dfrac{\partial u_{m-2}}{\partial t} = u_{m-1}, \\ \dfrac{\partial u_{m-1}}{\partial t} = P_0\left(i\dfrac{\partial}{\partial x}\right)u_0 + P_1\left(i\dfrac{\partial}{\partial x}\right)u_1 + \ldots + P_{m-1}\left(i\dfrac{\partial}{\partial x}\right)u_{m-1}. \end{cases} \tag{14}$$

Buradan Furye çevirməsindən sonra alırıq:

$$\begin{cases} \dfrac{dV_0}{dt} = V_1, \dfrac{dV_1}{dt} = V_2, \ldots, \dfrac{dV_{m-2}}{dt} = V_{m-1}, \\ \dfrac{dV_{m-1}}{dt} = P_0(s)V_0 + P_1(s)V_1 + \ldots + P_{m-1}(s)V_{m-1} + g(s,t) \end{cases} \tag{15}$$

və yaxud, vektor şəklində,

$$\begin{cases} \dfrac{dV(s,t)}{dt} - P(s)V(s,t) = g(s,t), \\ V(s,0) = V_0(s). \end{cases} \tag{16}$$

Buradakı $P(s)$ operatoruna uyğun matris belə olar:

$$P(s) = \begin{Vmatrix} 0 & 1 & 0 & . & . & . & 0 \\ 0 & 0 & 1 & . & . & . & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . \\ P_0 & P_1 & P_2 & . & . & . & P_{m-1} \end{Vmatrix}$$

Məlumdur ki, bu matrisin məxsusi vektorları

$$e_j = \left(1, \lambda_j, \lambda_j^2, \ldots, \lambda_j^{m-1}\right) \quad (j = 0,1,\ldots,m-1)$$

olur, burada $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_{m-1}$ kəmiyyətləri

$$\lambda^m - \sum_{k=0}^{m-1} P_k(s)\lambda^k = 0$$

tənliyinin kökləridir.

Məlumdur ki, ixtiyari $\xi = (\xi_0, ..., \xi_{m-1})$ vektorunu $\{e_j\}$ bazisi üzrə ayırmaq olar:

$$\xi = \sum_{j=0}^{m-1} \xi^j e_j,$$

burada ξ^j -əmsallardır. Bu bərabərliyi açıq yazsaq alarıq:

$$\begin{cases} \xi_0 = \xi^0 + \xi^1 + ... + \xi^{m-1}, \\ \xi_1 = \xi^0 \lambda_0 + \xi^1 \lambda_1 + ... + \xi^{m-1} \lambda_{m-1} \\ ------------------------ \\ \xi_{m-1} = \xi^0 \lambda_1^{m-1} + ... + \xi^{m-1} \lambda_{m-1}^{m-1}. \end{cases}, \qquad (17)$$

Bu sistemi ξ^j əmsallarına nəzərən həll etdikdə alırıq ki,

$$\xi^j = \frac{1}{W(\lambda)} \begin{vmatrix} 1 & . & . & . & 1 & \xi_0 & 1 & . & . & . & 1 \\ \lambda_0 & . & . & . & \lambda_{j-1} & \xi_1 & \lambda_{j+1} & . & . & . & \lambda_{m-1} \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ \lambda_0^{m-1} & . & . & . & \lambda_{j-1}^{m-1} & \xi_{m-1} & \lambda_{j+1}^{m-1} & . & . & . & \lambda_{m-1}^{m-1} \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{(-1)^j}{W(\lambda)} \left[\xi_0 W_{j,0} - \xi_1 W_{j,1} + ... + (-1)^{m-1} \xi_{m-1} W_{j,m-1} \right]$$

Burada $W(\lambda)$ ilə $\lambda_0, \lambda_1, ..., \lambda_{m-1}$ köklərindən asılı olan Vandermond determinantıdır, W_{j_k} -isə onun k-cı sətir və sütun elementlərini pozmaqla alınan minorlardır.

Xüsusi halda,

$$V_0(s) = (v_0(s), v_1(s), ..., v_{m-1}(s))$$

başlanğıc vektoru üçün uyğun ayrılışı yazsaq,

$$V_0(s)=\sum_{j=0}^{m-1} v^j e_j, \tag{18}$$

buradan

$$v^j=\frac{(-1)^j}{W(\lambda)}\left[v_0(s)W_{j,0}-v_1(s)W_{j,1}+\ldots+(-1)^{m-1}v_{m-1}W_{j,m-1}\right] \tag{19}$$

alarıq. Analoji qayda ilə $g(s,t)$ vektoru üçün

$$g(s,t)=(0,0,\ldots,g(s,t))$$

olduğundan

$$g(s,t)=\sum_{j=0}^{m-1} g^j(s,t)e_j$$

ayrılışı üçün

$$g^j(s,t)=\frac{(-1)^{j+m-1}}{W(\lambda)}W_{j,m-1}\,g(s,t) \tag{20}$$

olur.

İndi (12) şərtinə baxaq:

$$V_0^+(s)+\int_0^\infty e^{-\theta P(s)}g^+(s,\theta)d\theta=0$$

Digər tərəfdən

$$V_0^+(s)\in R_s^+,\ g^+(s,t)\in R_s^+$$

olduğu üçün

$$V_0^+(s)=\sum_{j=r}^{m-1} v^j e_j,\ \ g^+(s,t)=\sum_{j=r}^{m-1} g^j e_j$$

olduğunu (12)-də nəzərə aldıqda alırıq ki,

$$v^j(s)+\int_0^\infty e^{-\theta\lambda_j(s)}g^j(s,\theta)d\theta=0,\ \ (j=r,r+1,\ldots,m-1) \tag{21}$$

Bu düsturda v^j və g^j kəmiyyətlərinin (19) və (20) ifadələrini yerlərinə yazdıqda alırıq:

$$\frac{W_{j,0}}{W_{j,m-1}}v_0(s)-\frac{W_{j,1}}{W_{j,m-1}}v_1(s)+\ldots+(-1)^{m-1}\frac{W_{j,m-1}}{W_{j,m-1}}v_{m-1}(s)=$$
$$=(-1)^m\int_0^\infty e^{-\theta\lambda_j(s)}g(s,\theta)d\theta \quad (j=r,r+1,\ldots,m-1). \tag{22}$$

Alınan bu şərt bir tənlik halı üçün (12) şərtinin ekvivalenti olur.

Qeyd. (22) düsturunda $v_k(s)$-in əmsalları olan $\frac{W_{j,k}}{W_{j,m-1}}$ ifadələri $\lambda_0,\lambda_1,\ldots,\lambda_{m-1}$-lərdən asılı olan və dərəcələri $\le m-1$ olan çoxhədlidir. $\lambda_j(s)$ kökləri $\mathrm{Im}\,s>\beta$ müstəvisində analitik funksiyalardır və bu funksiyalar $|s|\to\infty$ olduqda $|s|^p$-dən tez artmırlar. Şərtə görə $v_0(s),\ldots,v_{m-1}(s)$ başlanğıc məlumları H_+^β fəzasına daxildirlər. Ona görə (21)-in sol tərəfindəki ifadə $\mathrm{Im}\,s>\beta$ müstəvisində analitikdir və H_+^β fəzasına daxildir. (22)-nin sağ tərəfini

$$G_j(s)\equiv(-1)^m\int_0^\infty e^{-\theta\lambda_j(s)}g(s,\theta)d\theta \quad (j=r,r+1,\ldots,m-1) \tag{23}$$

işarə edək. Bu funksiyalar s-in funksiyası kimi a priori $\mathrm{Re}\,\lambda_j(s)>0$, $\mathrm{Im}\,s>\beta$ oblastında təyin olunub və analitik funksiyalardır. Beləliklə, (22)-də sol tərəf bütün $\mathrm{Im}\,s>\beta$ oblastında analitik olub H_+^β fəzasına daxildir, sağ tərəf isə hələlik ki, $\mathrm{Im}\,s>\beta$, $\mathrm{Re}\,\lambda_j(s)>0$ oblastında təyin olunubdur. Deməli (22) bərabərliyi tələb edir ki, gərək $G_j(s)$ funksiyaları da bütün $\mathrm{Im}\,s>\beta$ oblastında annalitik olsun və $G_j(s)\in H_+^\beta$ olsun.

Beləliklə, (I)-(III) məsələsinin $\mathcal{H}_+^{\beta}$ fəzasında korrekt olması üçün zəruri şərt (21) düsturu ilə təyin olunan $G_j(s)$ funksiyalarının onların əvvəlcədən təyin oblastı olan $\operatorname{Re}\lambda_j > 0$, $\operatorname{Im} s > \beta$ oblastından bütün $\operatorname{Im} s > \beta$ yarımmüstəvisinə analitik davam olunmaları şərtidir, bu şərtlə ki, davam nəticəsində alınan $G_j(s)\ (j = r, r+1, \ldots, m-1)$ funksiyaları H_+^{β} fəzasının elementi olsun.

Kafilik. Tutaq ki, (I)-(III) məsələsi verilir və $g(s,t)$ belə bir düsturla təyin olunur:

$$g(s,t) = \sum_{j=0}^{p} Q_j\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)\left\{\sum_{k=0}^{j-1}\left[(-is)^k W_k^0(t) - W_k^1(t)e^{is}\right]\right\}.$$

Fərz edək ki, (22) düsturu ilə verilən $G_j(s)$ funksiyaları bütün $\operatorname{Im} s > \beta$ müstəvisinə H_+^{β} fəzasının elementlərinə qədər analitik davam olunur. Göstərək ki, (I)-(III) məsələsi $\mathcal{H}_+^{\beta}$ fəzasında korrektdir.

Əvvəlcə qeyd edək ki, (21) tənliklərini aşağıdakı şəkildə yazmaq olar:

$$Q_{j,0}v_0 - Q_{j,1}v_1 + \ldots + (-1)^{m-1} Q_{j,m-1}v_{m-1} = G_j(s)$$
$$(j = r, r+1, \ldots, m-1) \qquad (23)$$

burada

$$Q_{j,k}^{(s)} = W_{j,k}(s)/W_{j,m-1}(s) \quad (k = 0,1,\ldots,m-1)$$

-cəbri funksiyalardır. Biz hökm edirik ki, kafi şərt ödənildikdə (23) münasibətindən çıxır ki, $V(s,0) = (v_0, \ldots, v_{m-1})$ başlanğıc vektorunun komponentləri $v_0(s), \ldots, v_{r-1}(s)$, $G_r(s), \ldots, G_{m-1}(s)$ məlumları vasitəsilə birqiymətli tapılır, yəni əgər $v_0(s), \ldots, v_{r-1}(s)$ verilibsə və $G_r(s), \ldots, G_{m-1}(s) \in H_+^{\beta}$ olursa, onda daha $v_r(s), \ldots, v_{m-1}(s)$ başlanğıc şərtlərini sərbəst vermək lazım deyil, onlar avtomatik olaraq $v_0(s), \ldots, v_{r-1}(s)$, $G_r(s), \ldots, G_{m-1}(s)$ məlum funksiyaları vasitəsilə birqiymətli tapılır.

Bunu qısaca izah edək. $V_0(s)$ vektorunun Q_s fəzasında $\{e_j\}$ üzrə ayrılışını

$$V_0(s)=\sum_{j=0}^{m-1} v^j e_j$$

koordinatlarla yazsaq:

$$\begin{cases} v_0 = v^0 + v^1 + \ldots + v^{m-1}, \\ v_1 = v^0\lambda_0 + v^1\lambda_1 + \ldots + v^{m-1}\lambda_{m-1}, \\ ---------------------- \\ v_{m-1} = v^0\lambda_0^{m-1} + v^1\lambda_1^{m-1} + \ldots + v^{m-1}\lambda_{m-1}^{m-1} \end{cases} \tag{24}$$

Bu sistemin ilk r tənliyini götürək:

$$\begin{cases} v_0 = v^0 + v^1 + \ldots + v^{m-1}, \\ v_1 = v^0\lambda_0 + v^1\lambda_1 + \ldots + v^{m-1}\lambda_{m-1}, \\ ---------------------- \\ v_{m-1} = v^0\lambda_0^{r-1} + v^1\lambda_1^{r-1} + \ldots + v^{r-1}\lambda_{m-1}^{r-1} \end{cases}$$

Bu sistemin determinantı $\operatorname{Im} s > \beta$ olduqda $\neq 0$ olur, onda buradan $v^0, v^1, \ldots, v^{r-1}$ əmsalları $v_0, \ldots, v_{r-1}$ və $v^r, \ldots, v^{m-1}$ vasitəsilə ifadə olunur. Lakin (21) münasibətindən $v^r, v^{r+1}, \ldots, v^{m-1}$ kəmiyyətləri $G_r(s), \ldots, G_{m-1}(s)$ vasitəsilə birqiymətli müəyyən olunurlar. Şərtə görə $v_0(s), \ldots, v_{r-1}(s) \in H_+^\beta$, ona görə həm də $v^0(s), \ldots, v^{r-1}(s) \in H_+^\beta$ olur. Axtarılan $v_r(s), \ldots, v_{m-1}(s)$ funksiyaları (24) sisteminin son $m-r$-tənliklərindən $v_0(s), \ldots, v_{r-1}(s), \ldots, G_r(s), \ldots, G_{m-1}(s)$ vasitəsilə birqiymətli olaraq tapılır və alınan ifadələr hamısı H_+^β fəzasına daxil olur.

Biz gördük ki, məsələnin həlli olan $V(s,t)$ funksiyası hər s üçün $v_0(s), \ldots, v_{m-1}(s)$ başlanğıc funksiyaları və $g(s,t)$ vasitəsilə birqiymətli olaraq belə düsturla təyin olunur:

$$V(s,t)=e^{tP(s)}\left[V(s,0)+\int_0^t e^{-\theta P(s)}g(s,\theta)d\theta\right]$$

və yaxud, bu şəkildə:

$$V(s,t)=e^{tP(s)}\left[V^-(s,0)+\int_0^t e^{-\theta P(s)}g^-(s,\theta)d\theta\right]-$$
$$-\int_t^\infty e^{(t-\theta)P(s)}g^+(s,\theta)d\theta \qquad (25)$$

Bu düsturlardan görünür ki, hər t və hər s üçün $\operatorname{Im} s>\beta$ müstəvisində $V(s,t)$ həlli analitik funksiyadır. Göstərmək lazımdır ki, $V(s,t)\in H_+^\beta$ və o, ct^h-dan tez artmır. Bunun üçün (25) düsturundan və §6-da verilmiş əsas nəticədən istifadə edirik.

§6-da belə bir nəticə alınıbdır: Tutaq ki, belə tənliyə baxılır:

$$\frac{d^mV}{dt^m}-\sum_{k=0}^{m-1}P_k(s)\frac{d^kV}{dt^k}=g(\sigma,t),$$

belə ki,

$$V_0(\sigma)=V(\sigma,0), V_1(\sigma)=\frac{dV(\sigma,0)}{dt},\dots,V_{m-1}(\sigma)=\frac{d^{m-1}V(\sigma,0)}{dt^{m-1}}$$

başlanğıc funksiyaları

$$G_r(0)=\{\sigma\in R:\ \operatorname{Re}\lambda_k(\sigma)\le 0,\ k\le r-1;\ \operatorname{Re}\lambda_q(\sigma)>0,\ \ q\ge r\}$$

Çoxluqlarında verilir ($G_r(\sigma)$ elə çoxluqdur ki, orada

$$\operatorname{Re}\lambda_j(\sigma),\qquad j=0,1,\dots,m-1$$

öz işarələrini saxlayır). Bundan əlavə, tutaq ki, $V_0,\dots,V_{m-1}$ aşağıdakı tənliyi ödəyir:

$$Q_{j,0}V_0-Q_{j,1}V_1+\dots+(-1)^mQ_{j,m-1}V_{m-1}=$$
$$=(-1)^m\int_0^\infty e^{-\theta\lambda_q(\sigma)}g(\sigma,\theta)d\theta.$$

Onda verilən məsələnin həlli var və onun üçün belə bir qiymətlənmə doğrudur:

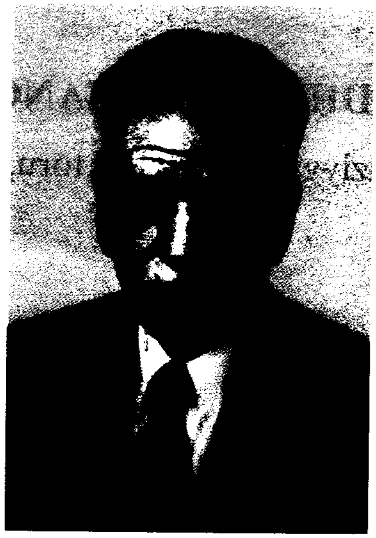
$$|V(s,t)| \le c t^{m-2} \int_0^t |g(s,\theta)| d\theta + c \int_t^\infty (1+t)^{m-1} e^{-\theta \operatorname{Re} \lambda_r(\sigma)} |g(s,\theta+t)| d\theta +$$
$$+ c(1+t)^m (1+|s|)^{m(p-1)} \sum_{k=0}^{r-1} |v_k(s)|, \tag{26}$$

burada λ_r -ən kiçik müsbət real hissəsi olan xarakteristik kökdür.

Beləliklə (26) qiymətlənməsi $\lambda_j(s)$ köklərinin real hissələrinin öz işarələrini saxladığı bütün nöqtələrdə doğrudur. Lakin bütün $\operatorname{Im} s > \beta$ müstəvisini sonlu sayda $G_k(s)$oblastlarının cəmi kimi göstərmək olar, belə ki, $G_k(s)$oblastlarında $\operatorname{Re} \lambda_j(\sigma)$ öz işarələrini dəyişmirlər. Deməli (26) qiymətlənməsi bütün $\operatorname{Im} s \ge \beta$ müstəvisində ödənilir. Onda buradan çıxır ki, $Vv(s,t) \in H_+^\beta$. Həm də (26)-dan çıxır ki, $V(s,t) = O(t^h)$ yəni (II)-(III) məsələsi $\mathcal{H}_+^\beta$ fəzasında korrektdir. Teorem isbat olundu.

ƏDƏBİYYAT

1. Г.Е.Шилов – Математический анализ, II спец курс, Москва, 1965.
2. Г.Е.Шилов – Математический анализ, (Анализ III), М.1961.
3. И.М.Гельфауд и Г.Е.Шилов – Обобщения функции, вып. 1-3, Москва, 1958
4. Л.Шварц – Математические методы для физическая наук, Москва, 1965.
5. L. Schwartz – Theorie des distributious, I, II, Paris, 1950 – 1951.
6. В.С. Владимиров – Уравнения математической физики, Москва, 1968.
7. В.С. Владимиров, Обобщенные функции в математической физике, Москва, 1986.
8. А.Н.Колмогоров и С.В. Фомин – Элементы теории функций и функционального анализа, Москва, 1960.
9. Л-Заде, Теория линейных систем, Москва, 1970
10. П.Хёрмандер – Линейные дифференциальные операторы, МИР, 1965.
11. Ф.Трев – Лекции по теории уравнений в частных производных, МИР, 1965.
12. Н.Винер, Теория интеграла Фурье, М.,
13. Л.Д.Кудрявцев – Курс математического анализа. Т.2, Москва, 1984
14. М.Рид и Б.Саймон, Методы современной математической физики, функционалный анализ, М.1977
15. Н.М. Сулейманов – Корректные краевые задачи в полупространстве для дифференциального операторного уравнения. Автореферат кандидатской диссертации, Москва, 1965.
16. Н.М.Сулейманов – Оценки типа Вимана – Валирона и вопросы - качественный теории уравнений в частных производных, Автореферат докторской диссертации, Москва, МГУ, 1982.



Kitabın müəllifi – Bakı Dövlət Universitetinin professoru, fizika-riyaziyyat elmləri doktoru Süleymanov Nadir Məhəmməd oğlu – Diferensial tənliklər, Ehtimal nəzəriyyəsi və funksional analiz sahələrində tanınmış alimdir. 1951-ci ildə Ucar şəhər 1№ li orta məktəbi bitirib, 1956-cı ildə Azərbaycan Dövlət Universitetinin fizika-riyaziyyat fakültəsini fərqlənmə diplomu ilə bitirib. Buraxılış diplom işində aldığı elmi nəticəyə görə ona SSRİ Ali Təhsil nazirliyinin 1-ci mükafatı verilmişdir. Moskva Dövlət Universitetində görkəmli riyaziyyatçı Q.Y.Şilovun aspirantı olmuşdur (1959-1962). 1965 –ci ildə namizədlik dissertasiyası müdafiə etmiş, Moskva Dövlət Universitetinin doktorantı olmuş (1975-1977 illər) və 1982-ci ildə Moskva Dövlət Universitetində doktorluq dissertasiyası müdafiə etmişdir.

1990-2000-ci illərdə «Ehtimal nəzəriyyəsi» kafedrasının müdiri olmuş, 50-dən artıq sayda elmi məqalə, monoqrafiya və dərs vəsaitinin müəllifidir. Çoxlu sayda elmi əsərləri keçmiş SSRİ-nin və ABŞ-nın yüksək reytinqli elmi məcmuələrində böyük həcmlə çap olunmuşdur. Diferensial tənliklərin keyfiyyət nəzəriyyəsi sahəsində aldığı Viman-Valiron tipli teoremlər riyaziyatda yeni elmi istiqamət açmışdır. Çoxlu sayda elmi kadrlar hazırlamışdır.

NADİR SÜLEYMANOV

Fizika-riyaziyyat elmləri doktoru, professor

ÜMUMİLƏŞMİŞ FUNKSİYALAR VƏ KORREKT SƏRHƏD MƏSƏLƏLƏRİ

(Monoqrafiya, dərs vəsaiti)

Nəşriyyatın direktoru	E.A.Əliyev
Mətbəənin direktoru	S.O.Mustafayev
Kompüter dizaynı	A.Ə.Piriyeva

Yığılmağa verilib: 12.05.2007. Çapa imzalanıb: 16.08.2007.
Formatı: 70x100 $^1/_{16}$. F.ç.v. 30. Ş.ç.v.38,7. Sifariş №232. Sayı 500.
Qiymәti müqavilә ilә.

"Çaşıoğlu" mətbəəsi.
Bakı ş., M.Müşfiq küç., 2a.
Tel.: 447-49-71